



HAL
open science

Étude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d'états intriqués non-gaussiens de la lumière

Alexei Ourjountsev

► **To cite this version:**

Alexei Ourjountsev. Étude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d'états intriqués non-gaussiens de la lumière. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT: . tel-00200715v2

HAL Id: tel-00200715

<https://pastel.hal.science/tel-00200715v2>

Submitted on 30 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 8843



LABORATOIRE CHARLES FABRY
INSTITUT D'OPTIQUE
CNRS UMR 8501



UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

Spécialité :
PHYSIQUE QUANTIQUE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR EN SCIENCES
de l'Université Paris-Sud XI

par
ALEXEI OURJOUNTSEV

Sujet:

**ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE
DE SUPERPOSITIONS QUANTIQUES COHÉRENTES
ET D'ÉTATS INTRIKUÉS NON-GAUSSIENS
DE LA LUMIÈRE**

Soutenue le 19 novembre 2007
devant la commission d'examen :

M.	Alain	ASPECT	Président
M.	Michel	BRUNE	Rapporteur
M.	Nicolas	CERF	Rapporteur
M.	Jean	DALIBARD	Examineur
Mme.	Rosa	TUALLE-BROURI	Examinatrice
M.	Philippe	GRANGIER	Directeur de thèse

Remerciements

Il y a quinze ans, mon père m'a fait comprendre que le plus difficile dans un travail de scientifique, ce n'est pas de faire vingt ans d'études, mais de vivre presque en permanence en situation d'échec : au cours d'une année, les succès notables se comptent sur les doigts d'une main, et les jours où l'on n'arrive à rien remplissent le calendrier. J'aimerais donc le remercier lui et tous ceux qui, au cours des vingt-six années de mon existence, m'ont appris à avoir confiance en moi et m'ont donné la force et l'envie de réussir.

C'était le cas de Philippe Grangier, mon directeur de thèse. Je pense que, au-delà de son aide précieuse et de ses conseils d'une justesse parfois désarmante, je lui dois simplement le fait d'aimer ce métier. Je le remercie pour sa confiance, son honnêteté et son ouverture d'esprit, qui m'ont permis de m'épanouir dans tous les aspects de mon travail pour pouvoir aujourd'hui me considérer comme un scientifique.

C'était également le cas de Rosa Tualle-Brouiri, qui a été un soutien exemplaire du début à la fin de cette thèse, notamment dans les moments les plus difficiles. C'est pour beaucoup grâce à elle que j'ai eu la force de me battre jusqu'au bout avec une expérience qui, pendant une année entière, a refusé de fonctionner.

Je ne saurais oublier la pédagogie de Jérôme Wenger, qui a posé les bases des expériences présentées dans ce manuscrit. J'espère que j'aurai réussi aussi bien que lui à transmettre mes connaissances à mon successeur, Franck Ferreyrol, à qui je souhaite bonne chance. J'ai également eu le plaisir de travailler avec Julien Laurat et Aurélien Dantan, dont les efforts conjoints devraient offrir une seconde jeunesse à notre dispositif expérimental.

Les résultats scientifiques de cette thèse sont indissociables de l'environnement humain, et je me souviendrai toujours des moments exceptionnels passés avec les autres membres du groupe d'optique quantique. Je tiens particulièrement à remercier Jérôme Beugnon, pour sa capacité à se détacher de ses propres problèmes et éprouver une joie sincère devant mes succès, et une compassion sincère devant mes échecs. Je remercie Antoine Browaëys, Gaëtan Messin et Matt Jones qui, à travers leurs discussions, m'ont souvent amené à m'interroger sur le fond de mon travail et à m'ouvrir à des domaines connexes. Et je les remercie tous, ainsi que Benoît Darqué, Jos Dingjan, Harold Marion, Jérôme Lodewyck, Andrew Lance, Yvan Sortais, Yevhen Miroshnychenko, Simon Fossier, Alpha Gaëtan, Charles Tuchendler, Eleni Diamanti et Francesca Arcara, d'avoir créé dans ce groupe une ambiance inoubliable.

Un grand merci également à tous les membres de l'Institut d'Optique que j'ai si souvent sollicités au cours de ma thèse. En particulier, je remercie André Villing pour l'électronique, Jacky Robin, Eric Vigne et Jean-Luc Cadoré pour le soutien technique, Gérard Roger et Pierre Fournet pour leurs conseils, Abdelaaziz Aboulhayane, Christine Avignon-Vérité, Jocelyne Armand, Nathalie Baudry et les autres membres des services administratifs pour leur efficacité. Merci également au directeur du laboratoire, Pierre Chavel, pour sa disponibilité et son intégrité.

Enfin, merci à ma famille et mes amis pour le soutien qu'ils m'accordent depuis de longues années. Si j'en suis là aujourd'hui, c'est surtout grâce à eux.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Les lois de la physique quantique	9
1.1.1	Dualité onde-corpuscule	9
1.1.2	Incertitudes, mesures et états quantiques	10
1.1.3	Les superpositions d'états	11
1.1.4	L'intrication	12
1.2	L'information quantique	12
1.3	Objectif de ce travail de thèse	14
1.4	Plan du manuscrit	14
I	Outils théoriques et expérimentaux	16
2	Outils théoriques	17
2.1	Quantification du champ électromagnétique	18
2.2	Descriptions discrète et continue du champ quantifié	20
2.2.1	Variables discrètes	20
2.2.2	Variables continues	22
2.3	Matrice densité et fonction de Wigner	24
2.3.1	La matrice densité	24
2.3.2	La fonction de Wigner	25
2.3.3	Choix du mode de description en fonction des transformations mises en jeu	30
2.4	États gaussiens, "grands classiques" des variables continues	31
2.4.1	État fondamental : vide quantique	31
2.4.2	États cohérents	32
2.4.3	États comprimés monomodes	33
2.4.4	États comprimés bimodes (états EPR)	34
2.4.5	États thermiques	35
2.5	États non-gaussiens et fonctions de Wigner négatives	35
2.5.1	Premier exemple : l'état à un photon	35
2.5.2	Théorème de Hudson-Piquet	38
2.5.3	Quelques applications d'états non-gaussiens	38
2.6	Tomographie quantique homodyne	39
2.6.1	Principe d'une détection homodyne	39
2.6.2	Algorithmes de reconstruction	40

2.7	Conclusion	43
3	Outils expérimentaux	45
3.1	Introduction	45
3.2	Création des impulsions ultrabrèves	47
3.2.1	Laser Titane-Saphir impulsif	47
3.2.2	Amplificateur d'impulsions femtoseconde à double passage	52
3.2.3	Outils de diagnostic	54
3.3	Transformations unitaires : optique linéaire et non-linéaire	56
3.3.1	Optique linéaire	56
3.3.2	Optique non-linéaire en régime impulsif	58
3.4	Détection et transformations projectives	66
3.4.1	DéTECTEURS de photons uniques	67
3.4.2	Détection homodyne	69
3.5	Conclusion	74
II	Tomographie d'états de Fock à un et deux photons	77
4	Tomographie d'états de Fock à un et deux photons.	79
4.1	Introduction	79
4.2	États intriqués produits par l'OPA	80
4.3	Dispositif expérimental	84
4.4	Résultats expérimentaux	86
4.5	Modélisation de l'expérience	89
4.5.1	Expressions analytiques décrivant les états générés	89
4.5.2	Cas d'une efficacité APD finie	94
4.5.3	Analyse des résultats du modèle : critère de négativité	97
4.6	Applications du modèle analytique	98
4.6.1	Reconstruction directe des fonctions de Wigner	98
4.6.2	Accès aux paramètres expérimentaux	99
4.6.3	Correction des pertes homodynes	100
4.6.4	Incertitudes statistiques sur les points caractéristiques	101
4.6.5	Matrices densités	102
4.6.6	Optimisation expérimentale	104
4.7	Conclusion	105
III	Les "chats de Schrödinger" optiques, nouvelle ressource pour l'information quantique	107
5	Génération de "chatons de Schrödinger" optiques.	109
5.1	Introduction : du chat de Schrödinger à l'ordinateur quantique	109
5.2	Chats de Schrödinger optiques	111
5.2.1	Définition et caractéristiques	111
5.2.2	Applications	114
5.3	Méthode de préparation de "chatons de Schrödinger"	116

5.4	Dispositif expérimental	119
5.5	Modélisation expérimentale	120
5.6	Résultats expérimentaux	122
5.7	Amplification de chats	125
5.8	Contexte historique de l'expérience	126
5.9	Conclusion	127
6	Génération de “chats de Schrödinger” de taille arbitraire à partir d'états de Fock.	129
6.1	Introduction	129
6.2	Protocole de préparation de chats comprimés	131
6.2.1	Description du protocole	131
6.2.2	États produits dans le cas idéal	132
6.2.3	Fidélité avec un chat comprimé	134
6.2.4	Influence d'un seuil de conditionnement fini	134
6.3	Démonstration expérimentale pour $n = 2$ photons	135
6.3.1	Étude théorique du cas $n = 2$	135
6.3.2	Dispositif expérimental	137
6.3.3	Résultats	139
6.4	Discussion	141
6.4.1	Structure des états préparés	141
6.4.2	Améliorations expérimentales	142
6.4.3	Décompression des chats	143
6.4.4	Performance du protocole	144
6.5	Conclusion	145
IV	Manipulations non-gaussiennes de l'intrication : vers les communications quantiques à longue distance	147
7	Augmenter l'intrication par soustraction cohérente de photons.	149
7.1	Introduction	149
7.1.1	L'intrication en information quantique	149
7.1.2	États intriqués non-gaussiens	152
7.1.3	Mesures de l'intrication	153
7.2	Soustraction cohérente de photons	154
7.3	Modélisation	158
7.4	Dispositif expérimental	160
7.5	Structure des états préparés et mode d'analyse tomographique	162
7.6	Résultats expérimentaux	164
7.7	Discussion	166
7.8	Conclusion	168
8	États “Hamlet” : intrication finie avec des pertes arbitraires.	171
8.1	Introduction	171
8.2	États “Hamlet”	172
8.3	Protocole et dispositif de préparation	174

8.4	Modélisation	176
8.4.1	Cas du dispositif utilisé	176
8.4.2	Intrication de sites distants	180
8.4.3	Symétries de l'état préparé	181
8.5	Résultats expérimentaux	181
8.6	Tomographie d'un état de Bell non comprimé	185
8.7	Discussion	187
8.8	Conclusion	191
9	Bilan et perspectives.	193
9.1	Bilan	193
9.2	Perspectives	194
9.2.1	Production d'états plus complexes	194
9.2.2	Utilisation des états non-classiques produits	195
9.2.3	Distillation d'intrication	195
9.2.4	Tests des inégalités de Bell	196
9.2.5	Mémoires quantiques	196
V	Annexes	198
A	Formulaire	199
A.1	Intégrales gaussiennes	199
A.2	Soustraction d'un photon	200
A.3	Lien entre fonction de Wigner et matrice densité en base de Fock	201
B	Théorème de Hudson-Piquet	203
C	Absorption biphotonique dans le KNbO₃	205
C.1	Puissance absorbée	206
C.2	Temps caractéristique de diffusion	207
C.3	Variations de température dans le faisceau	207
D	Fidélité d'un état préparé par conditionnement homodyne sur un état de Fock avec un chat de Schrödinger.	209
E	Efficacité des protocoles de préparation de "chats de Schrödinger" accessibles à l'expérience.	211
F	Distillation d'intrication par soustraction locale de photons : cas pratique.	213
G	Transfert d'intrication par mesure APD.	217

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Les lois de la physique quantique	9
1.1.1 Dualité onde-corpuscule	9
1.1.2 Incertitudes, mesures et états quantiques	10
1.1.3 Les superpositions d'états	11
1.1.4 L'intrication	12
1.2 L'information quantique	12
1.3 Objectif de ce travail de thèse	14
1.4 Plan du manuscrit	14

1.1 Les lois de la physique quantique

Il existe en physique quantique une expérience très instructive : observer l'effet que produisent ces deux mots sur un public non averti. Les réactions se situent la plupart du temps à deux extrêmes : la fascination par un domaine qui, cent ans après sa naissance, a encore gardé une part de science-fiction, et la répulsion pour une science réputée incompréhensible et formelle. On retient le plus souvent que la physique quantique est fondée sur des lois "contre-intuitives", qui ne peuvent être expliquées par des analogies appartenant à notre monde macroscopique. On oublie en revanche que ces lois ont conduit au développement du laser, du transistor, et par conséquent à la révolution technologique qui a transformé notre quotidien depuis les années 1950. On ignore également qu'il est aujourd'hui possible de manipuler la matière et la lumière à l'échelle de l'atome et du photon, et d'observer directement leurs comportements non-classiques. C'est dans ce cadre que se situe ce travail de thèse : bien qu'orienté vers des applications pratiques, visant à contrôler et à exploiter les propriétés quantiques de la lumière, il reste basé sur l'étude de ces lois fondamentales.

1.1.1 Dualité onde-corpuscule

La physique quantique est, en grande partie, née d'une réflexion sur la nature de la lumière. Newton l'avait décrite comme un ensemble de particules, obéissant aux lois de la

mécanique classique. Cette approche ne pouvait expliquer les phénomènes de diffraction et d'interférence, et fut progressivement remplacée par une théorie ondulatoire énoncée par Huygens, développée par Young et Fresnel, et formalisée à la fin du XIX^e siècle par Maxwell, identifiant la lumière à des ondes électromagnétiques. La physique semblait alors pratiquement complète, hormis quelques problèmes “mineurs” comme celui du rayonnement produit par un corps noir (ne diffusant aucune lumière venant de l'extérieur) sous l'effet de son agitation thermique. Pour expliquer son spectre, dont les mesures étaient en désaccord avec la thermodynamique classique, Planck a introduit en 1901 une quantification “ad hoc” pour l'énergie lumineuse [1], en supposant que l'énergie d'une onde de fréquence ν variait de manière discrète, par “paliers” espacés de $E = h\nu$. La constante de proportionnalité h , appelée constante de Planck, est très petite ($6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s), et cette quantification n'est visible qu'à l'échelle microscopique. En 1905, Einstein a interprété ce comportement “granulaire” de l'énergie par l'existence de photons [2], particules de lumière avec des énergies $h\nu$. De Broglie a ensuite montré que, si les ondes lumineuses ont un caractère corpusculaire, les particules qui forment la matière peuvent à l'inverse avoir un comportement ondulatoire [3]. Cette dualité a pu être vérifiée expérimentalement par l'observation d'interférences entre ondes de matière, depuis les électrons [4] jusqu'à des molécules massives de fullerènes C_{60} [5].

1.1.2 Incertitudes, mesures et états quantiques

D'après notre intuition classique, l'état d'un système physique est forcément déterminé : un chat est soit mort, soit vivant. Lorsqu'on fait appel à la physique statistique pour décrire un système complexe, on ne remet pas en cause cette hypothèse à l'échelle microscopique : classiquement, dans un gaz, les atomes ont des positions et des vitesses bien définies, ils sont simplement trop nombreux pour être décrits un par un. On imagine toutefois que si on pouvait les voir, on pourrait sélectionner ceux qui ont une certaine position x et une certaine impulsion p avec une précision arbitraire.

Cette intuition est contredite par les lois de la mécanique quantique : d'après le principe d'incertitude de Heisenberg, il existe des grandeurs qui ne peuvent pas être déterminées simultanément avec une précision infinie, et leur mesure modifie l'état du système. C'est le cas de la position et de l'impulsion d'une particule : plus on augmente la précision sur la mesure de position, plus on perturbe la vitesse, et réciproquement. Plus précisément, si on définit les incertitudes sur ces mesures par les écart-types Δx et Δp , ils devront satisfaire l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (1.1)$$

Pour comprendre l'origine de cette perturbation, Heisenberg avait noté que, lorsqu'on éclaire un atome pour observer sa position, les “chocs” avec les photons vont modifier sa vitesse. On peut également la percevoir sous l'aspect ondulatoire : la position et l'impulsion d'une onde sont liées par la transformation de Fourier, et plus la position est précise, plus la transformée de Fourier sera large. Nous verrons plus loin que l'interprétation la plus fructueuse se fait en termes d'intrication : l'atome et le photon diffusé forment un système formellement inséparable, et l'état de l'un détermine celui de l'autre. Le point essentiel est que cette incertitude n'est aucunement liée à une “maladresse” expérimentale. C'est une limite fondamentale, nécessaire, entre autres, pour

expliquer pourquoi les atomes qui nous constituent restent stables et ne s'effondrent pas sur eux-mêmes.

Certaines grandeurs observables ne commutent donc pas entre elles : faire les mesures dans un ordre différent conduit à un résultat différent. Les objets mathématiques qui représentent ces observables ne sont donc plus des nombres (qui vérifient toujours $xp = px$) mais des opérateurs linéaires, dont les règles de commutation déterminent les incertitudes sur les mesures. Par exemple, les opérateurs position \hat{x} et impulsion \hat{p} vérifient

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (\Rightarrow \Delta x \Delta p \geq \hbar/2). \quad (1.2)$$

Si les grandeurs observables correspondent à des opérateurs linéaires, les états du système étudié correspondent aux vecteurs sur lesquels ces opérateurs agissent. Ces vecteurs d'état forment un espace linéaire, appelé espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire qui permet de les normaliser et de déterminer leur "ressemblance" : deux états $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ sont parfaitement discernables si $\langle\phi|\psi\rangle = 0$, parfaitement identiques si $|\langle\phi|\psi\rangle| = 1$. Pour que la notion de mesure garde un minimum de sens, on suppose que lorsqu'on mesure une grandeur, on "projette" le système dans un état où elle est connue avec certitude : si on la mesure plusieurs fois de suite, on doit logiquement obtenir le même résultat. L'opérateur position \hat{x} a ainsi des états propres $|x\rangle$, invariants par son action, qui correspondent à des particules parfaitement localisés au point x . Si un atome est dans un état $|\psi\rangle$, une mesure de sa position le projettera dans un état $|x\rangle$ avec une probabilité $|\langle x|\psi\rangle|^2$.

1.1.3 Les superpositions d'états

Cette description conduit à un autre effet contre-intuitif : un système quantique peut se trouver dans plusieurs états en même temps. Supposons que les états $|x_1\rangle$ et $|x_2\rangle$ correspondent à deux positions distinctes d'un atome. Le vecteur $|x_1\rangle + |x_2\rangle$ est alors également un état possible. Un même atome peut être ainsi se trouver simultanément à deux endroits x_1 et x_2 séparés par une distance macroscopique, jusqu'à ce qu'on fasse une mesure pour déterminer sa position.

L'existence de ces superpositions conduit à des résultats particulièrement dérangeants lorsqu'on les transpose à l'échelle classique : un chat pourrait, par exemple, être mort et vivant en même temps [6]. On est ainsi amené à douter de leur réalité : après tout, comment peut-on faire la différence entre un atome en x_1 et en x_2 , dans une superposition quantique, et un atome en x_1 ou en x_2 , décrit par une distribution statistique classique?

Une manière de distinguer ces deux cas est de revenir à la description ondulatoire : si on laisse tomber un atome préparé dans une superposition quantique, les ondes atomiques issues des deux points x_1 et x_2 auront une phase relative bien définie et pourront présenter des franges d'interférence, qui n'apparaîtront pas pour un mélange statistique. Mais en réalité les deux situations sont aussi fondamentalement différentes du point de vue *classique*. Dans le cas de la superposition, l'atome, bien que non localisé, reste dans un état parfaitement déterminé, d'entropie nulle. On peut alors, sans échanger d'énergie ni d'information avec lui, le ramener dans l'une ou l'autre des positions x_1 ou x_2 (on dit alors qu'on effectue des opérations unitaires). En revanche, pour un mélange statistique (d'entropie non nulle), cette action serait comparable à celle d'un démon de Maxwell "aveugle et sourd", qui rangerait les particules dans une boîte non seulement sans leur fournir d'énergie mais sans même les observer, violant ainsi le deuxième principe de la thermodynamique.

1.1.4 L'intrication

On sait que tout état de polarisation d'une onde lumineuse peut être perçu comme une combinaison linéaire de polarisations circulaires droite (+) et gauche (-). Deux photons A et B ayant la même polarisation peuvent alors se trouver dans l'état $|+A\rangle|+B\rangle$ ou $|-A\rangle|-B\rangle$ mais également dans

$$|\psi\rangle = \frac{|+A\rangle|+B\rangle + |-A\rangle|-B\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.3)$$

Or il est assez facile de voir qu'on ne peut pas écrire cet état sous la forme $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle|\phi_B\rangle$: les photons ne peuvent pas être considérés ici comme des objets séparés, ayant chacun un état quantique défini, et pourtant ils peuvent être très éloignés l'un de l'autre. Dans ce cas, l'état de chaque photon est indéterminé : lorsqu'on les mesure individuellement, ils sont parfaitement dépolarisés. Mais le plus surprenant, c'est qu'une mesure du photon A détermine immédiatement l'état du photon B , qui peut alors se trouver à des dizaines de kilomètres de distance.

Malgré les apparences, ce comportement n'est pas en conflit avec la relativité, qui interdit toute communication allant plus vite que la lumière : la mesure du photon A ne transmet aucune information au photon B , dont les mesures restent parfaitement aléatoires, et il faut établir une communication classique pour révéler leurs corrélations. En revanche, Einstein, Podolsky et Rosen ont montré en 1935 [7] que ce résultat de la mécanique quantique est en contradiction avec le principe de *réalisme local*, postulant que les propriétés définissant la "réalité physique" de chaque objet (ici la polarisation de chacun des photons) sont "inscrites dessus" localement. Réticents à abandonner ce principe, ils en avaient alors conclu que la mécanique quantique était incomplète, et qu'il devait exister une "variable cachée" inaccessible à l'observateur qui détermine d'avance les polarisations et corrèle classiquement les résultats des mesures.

En 1964, John Bell a montré cependant que les prédictions des théories à variables cachées ne correspondaient pas exactement à celles de la mécanique quantique [8]. Si l'on fait des mesures judicieuses sur les polarisations des deux photons, les résultats respectent certaines inégalités dans le cas d'une théorie classique à variables cachées, et les violent dans le cas quantique. Une violation des inégalités de Bell a été pour la première fois observée en 1972 par Freedman et Clauser [9], puis confirmée en 1981 par l'équipe d'Alain Aspect [10, 11, 12]. Si les faibles efficacités de détection n'ont pas permis d'éliminer toute explication classique des résultats, ce succès expérimental a contribué à la naissance d'un domaine actuellement en pleine explosion, celui de l'information quantique.

1.2 L'information quantique

Les "paradoxes" quantiques que nous venons de décrire ont tous un point commun : ils sont intimement liés à la notion d'information.

L'information a été définie de manière rigoureuse par Shannon à la fin des années 1940 [13]. C'est une grandeur physique quantifiable, en rapport direct avec l'entropie et, surtout, sans aucun lien avec l'existence d'un observateur capable d'en extraire un sens. C'est une confusion sur ce dernier point qui avait conduit à un grand nombre d'interprétations erronées de la physique quantique, mélangeant information et esprit.

Pendant des décennies, l'impossibilité fondamentale de faire des mesures de précision arbitraire sans introduire de perturbations était perçue comme un handicap. Mais vers 1969, Wiesner a remarqué que cette propriété peut être utile dans les cas où on *ne veut pas* que quelque chose soit mesuré. Il a ainsi imaginé des billets de banque contenant un ensemble de particules de spin $1/2$ dans un état quantique arbitraire, connu seulement de la banque émettrice. L'impossibilité de dupliquer cet état à l'identique rendrait ces billets infalsifiables. Cette idée, difficilement réalisable et peut-être prématurée, ne fut publiée qu'en 1983 [14]. Elle a cependant conduit au développement de l'une des deux principales branches de l'information quantique : la cryptographie quantique.

La cryptographie étudie la transmission de message secrets : nous y faisons appel lors de nos achats en ligne, pour transmettre notre numéro de carte bancaire au commerçant sans qu'il puisse être utilisé par une tierce personne. Ces messages sont chiffrés à l'aide d'une clé secrète, connue uniquement des deux interlocuteurs (appelés traditionnellement Alice et Bob), qui vise à les rendre incompréhensibles pour tout espion (Eve) qui tenterait de les lire. Or, d'après un résultat classique de Shannon, la communication ne sera parfaitement indéchiffrable que si la clé de codage aléatoire est aussi longue que le message transmis [15]. Alice et Bob doivent donc pouvoir échanger une clé secrète en étant sûrs que personne d'autre ne l'a lue. C'est à ce niveau qu'intervient la physique quantique, plus précisément le principe d'incertitude. Si un espion tente de lire une clé codée sur des objets quantiques, par exemple une série de photons envoyés dans une fibre optique, ses mesures modifieront leurs états et induiront des erreurs. En comparant un petit échantillon de la clé, Alice et Bob pourront par la présence de ces erreurs déceler la tentative d'espionnage. Depuis le premier protocole proposé par Charles Bennett et Gilles Brassard en 1984 [16], cette branche de l'information quantique a connu des développements considérables. Elle est la seule aujourd'hui à avoir atteint un stade commercial [17].

Si le principe d'incertitude a débouché sur la cryptographie, le principe de superposition a conduit à l'idée de l'ordinateur quantique. Il existe en mathématiques une classe de problèmes dits difficiles qui ne peuvent pas être résolus "intelligemment" : on ne peut pas faire beaucoup mieux qu'essayer toutes les solutions une par une et choisir celle qui marche le mieux. Il va de soi que ces problèmes sont très longs à résoudre sur un ordinateur classique, qui traite un cas après l'autre. Un ordinateur quantique peut en revanche être préparé dans une superposition d'états et traiter tous les cas en parallèle. Bien entendu, une superposition de toutes les entrées possibles produira une superposition de tous les résultats, mais il est possible dans certains cas de faire rapidement émerger la "bonne" solution de l'ensemble. Parmi les premiers et les plus importants des algorithmes quantiques se trouve celui de Shor [18] qui permet de décomposer un nombre en facteurs premiers, avec un gain de temps exponentiel par rapport au cas classique. Or c'est justement la difficulté de résoudre ce problème classiquement qui assure aujourd'hui la sécurité des communications sur Internet : la cryptographie quantique est donc une parade nécessaire à l'ordinateur quantique. Il faut admettre que la "solution" est actuellement bien plus avancée que "le problème" : le calcul quantique le plus complexe réalisé jusqu'à maintenant a été la factorisation du nombre 15... En effet, si la cryptographie quantique (à courte distance en tous cas) permet de manipuler les objets quantiques un par un, l'ordinateur quantique nécessite de les faire interagir entre eux tout en supprimant le couplage avec l'environnement, ce qui constitue une tâche bien plus complexe.

1.3 Objectif de ce travail de thèse

Dans le domaine de l'information quantique, les progrès théoriques ont pris une large avance sur les expériences, qui nécessitent de contrôler avec grande précision des systèmes extrêmement sensibles et demandent un investissement technologique considérable.

La lumière joue dans ce cadre un rôle central, car elle est relativement facile à créer, à manipuler, à transmettre et à détecter. Des clés quantiques ont ainsi pu être transmises à travers des fibres optiques à des distances dépassant les 100 km [19, 20], et des dispositifs de cryptographie quantique existent maintenant en version commerciale [17]. Elle est également un élément essentiel dans le calcul quantique, permettant par exemple d'implémenter un algorithme arbitraire [21].

Pour profiter pleinement de ce potentiel en information quantique, il faut pouvoir préparer la lumière dans des états spécifiquement non-classiques. Ces états peuvent être décrits en termes de photons, mais également en tant qu'ondes, par leur amplitude et leur phase. Ces deux approches de l'optique quantique, à variables discrètes et continues, se sont développées en parallèle et sont pendant longtemps restées disjointes.

L'objectif de cette thèse est de montrer que les outils propres aux variables discrètes et continues peuvent être combinés pour préparer efficacement des impulsions lumineuses dans des états spécifiquement quantiques, où le champ électromagnétique ne peut plus être décrit par une distribution classique. Ces états ont de nombreuses applications pour le traitement de l'information quantique. Leur étude permet également d'aborder sous un angle nouveau un certain nombre de problèmes fondamentaux.

Cette thèse s'est construite autour de deux thèmes principaux. Le premier concerne la préparation de superpositions quantiques d'états classiquement discernables, ou "chats de Schrödinger" optiques. Leur génération en espace libre, réalisée pour la première fois dans nos expériences, a ouvert la voie vers de nombreuses applications en information quantique. Le second thème, celui de l'intrication, y joue un rôle non moins important. Nous avons démontré expérimentalement que nos méthodes permettaient d'augmenter l'intrication d'états gaussiens, et de préparer efficacement des états intriqués spécifiques présentant les propriétés requises pour les communications quantiques à grande distance.

Bien que ce travail soit principalement à caractère expérimental, les développements théoriques y jouent un rôle essentiel. D'une part, chaque expérience décrite dans ce manuscrit s'appuie sur une modélisation analytique détaillée qui permet d'optimiser son fonctionnement, d'analyser ses résultats, de comprendre ses perspectives et d'accéder aux phénomènes physiques sous-jacents. D'autre part, certaines de ces expériences reposent sur des protocoles spécifiquement développés dans le cadre de cette thèse, comme par exemple la génération de "chats de Schrödinger" optiques de taille arbitraire décrite dans le chapitre 6, ou la soustraction cohérente de photons utilisée pour manipuler des états intriqués (Chap. 7 et 8). L'articulation entre la théorie et l'expérience a ainsi permis de former un ensemble cohérent, et de s'attaquer à plusieurs problèmes centraux en information quantique.

1.4 Plan du manuscrit

Ce manuscrit est divisé en quatre parties.

La première sera consacrée à la présentation des outils théoriques et expérimentaux

utilisés dans le cadre de cette thèse. Dans le premier chapitre, nous poserons le cadre formel permettant de décrire la lumière par des variables discrètes ou continues. Nous montrerons notamment que la quasi-distribution du champ électromagnétique associé à une onde lumineuse, appelée fonction de Wigner, peut prendre des valeurs négatives pour des états quantiques particuliers. Le deuxième chapitre présentera les outils expérimentaux qui permettent de préparer des impulsions lumineuses dans de tels états.

La deuxième partie (chapitre 3) décrira la préparation et l'analyse expérimentale d'impulsions contenant exactement un ou deux photons. Nous montrerons que l'amplitude et la phase de l'onde lumineuse suivent une quasi-distribution qui présente bien des régions négatives, signature du caractère non-classique de ces états. Nous pourrions ainsi étudier les performances et les limites de notre système expérimental, et en développer un modèle théorique détaillé qui nous sera d'une aide précieuse dans toute la suite.

La troisième partie abordera la génération de "chats de Schrödinger" optiques, définis comme des superpositions quantiques d'états quasi-classiques en propagation libre. Ces "chats", aux nombreuses applications en information quantique, sont un outil privilégié pour étudier la transition du quantique au classique. Le chapitre 4 présentera la préparation expérimentale de petits "chatons de Schrödinger". Dans le chapitre 5 nous développerons, démontrerons et réaliserons un protocole permettant de préparer des "chats de Schrödinger" optiques de taille arbitraire.

Dans la quatrième partie, nous étudierons la préparation d'états intriqués à fonctions de Wigner négatives, propriété essentielle pour les communications quantiques à longue distance. Dans le chapitre 6 nous verrons que l'intrication entre états gaussiens peut être augmentée par la soustraction cohérente de photons. Dans le chapitre 7 nous utiliserons cette technique pour préparer, à partir de deux états comprimés indépendants, des "états Hamlet" intriqués où, lorsqu'un faisceau est dans un état de vide comprimé, l'autre est un "chaton de Schrödinger".

En conclusion, nous présenterons le bilan de ce travail et les perspectives de cette voie de recherche, aussi bien en termes d'applications en information quantique que sur un plan plus fondamental.

Partie I

Outils théoriques et expérimentaux

Chapitre 2

Outils théoriques

Sommaire

2.1	Quantification du champ électromagnétique	18
2.2	Descriptions discrète et continue du champ quantifié	20
2.2.1	Variables discrètes	20
2.2.2	Variables continues	22
2.3	Matrice densité et fonction de Wigner	24
2.3.1	La matrice densité	24
2.3.2	La fonction de Wigner	25
2.3.3	Choix du mode de description en fonction des transformations mises en jeu	30
2.4	États gaussiens, “grands classiques” des variables continues	31
2.4.1	État fondamental : vide quantique	31
2.4.2	États cohérents	32
2.4.3	États comprimés monomodes	33
2.4.4	États comprimés bimodes (états EPR)	34
2.4.5	États thermiques	35
2.5	États non-gaussiens et fonctions de Wigner négatives	35
2.5.1	Premier exemple : l’état à un photon	35
2.5.2	Théorème de Hudson-Piquet	38
2.5.3	Quelques applications d’états non-gaussiens	38
2.6	Tomographie quantique homodyne	39
2.6.1	Principe d’une détection homodyne	39
2.6.2	Algorithmes de reconstruction	40
2.7	Conclusion	43

Les outils théoriques introduits dans ce chapitre permettront de décrire les états quantiques étudiés dans nos expériences, et les moyens de les reconstruire à partir de données expérimentales.

Sauf indications contraires, ici comme dans le reste du manuscrit, les intégrales seront prises sur tout le domaine réel.

2.1 Quantification du champ électromagnétique

Nous n'allons pas refaire ici l'ensemble de la procédure de quantification du champ électromagnétique, détaillée dans de nombreux ouvrages d'optique quantique, comme par exemple [22, 23]. Nous allons simplement esquisser les lignes du raisonnement qui y conduisent, permettant de poser les notations utilisées dans la suite.

L'ensemble de ce travail de thèse traite uniquement des champs libres dans le vide, en absence de charges : on peut directement quantifier les champs, sans passer par le potentiel vecteur et se préoccuper d'un choix de jauge. Les équations de Maxwell deviennent donc

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\partial_t \vec{\mathcal{B}} \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\mathcal{E}} \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (2.1d)$$

En prenant le rotationnel de Eq. 2.1a et en utilisant Eq. 2.1c et 2.1b on trouve l'équation de Helmholtz pour \vec{E} :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (2.2)$$

On sait que classiquement le champ peut se décomposer sur une base d'ondes planes :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=1}^2 \iiint E_{l,\vec{k}}(t) \vec{\epsilon}_{l,\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k. \quad (2.3)$$

où les vecteurs polarisation $\vec{\epsilon}_{1,\vec{k}}$ et $\vec{\epsilon}_{2,\vec{k}}$ sont orthogonaux entre eux. L'équation 2.1b donne $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{l,\vec{k}} = 0$: le champ électrique est transverse, sa polarisation est orthogonale à \vec{k} . En substituant l'équation 2.3 dans l'équation de Helmholtz on obtient pour tout \vec{k}

$$\ddot{E}_{l,\vec{k}}(t) + k^2 c^2 E_{l,\vec{k}}(t) = 0. \quad (2.4)$$

Cette équation d'évolution est similaire à celle qui décrit le mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = kc$. Classiquement, cet oscillateur peut être représenté dans l'espace des phases par un vecteur $a = \frac{x+ip}{\sqrt{2}}$ qui évolue comme $a(t) = ae^{-i\omega t}$, en tournant autour de l'origine. La position $x(t)$ et l'impulsion $p(t)$ s'obtiennent alors par $x(t) = \frac{a(t)+a^*(t)}{\sqrt{2}}$ et $p(t) = \frac{a(t)-a^*(t)}{\sqrt{2}i}$

Pour quantifier le champ, par analogie, nous pouvons remplacer l'amplitude complexe a par un opérateur $\hat{a}_{l,\vec{k}}$ et définir un opérateur champ non hermitien

$$\hat{E}_{l,\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0}} \hat{a}_{l,\vec{k}}, \quad (2.5)$$

En poursuivant ce raisonnement, on peut définir les opérateurs hermitiens position $\hat{x}_{l,\vec{k}}$ et impulsion $\hat{p}_{l,\vec{k}}$, appelés **opérateurs de quadrature** du champ :

$$\hat{x}_{l,\vec{k}} = \frac{\hat{a}_{l,\vec{k}} + \hat{a}_{l,\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \hat{p}_{l,\vec{k}}^\dagger = \frac{\hat{a}_{l,\vec{k}} - \hat{a}_{l,\vec{k}}^\dagger}{i\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

Dans cette convention, leur commutateur s'écrit

$$[\hat{x}_{l,\vec{k}}, \hat{p}_{l',\vec{k}'}] = i\delta(\vec{k} - \vec{k}')\delta_{l,l'}, \quad (2.7)$$

identique à celui des opérateurs position et impulsion d'un oscillateur harmonique au facteur $\delta(\vec{k} - \vec{k}')\delta_{l,l'}/\hbar$ près. En réécrivant les opérateurs $\hat{a}_{l,\vec{k}}$ et $\hat{a}_{l,\vec{k}}^\dagger$ à partir des opérateurs de quadrature, on les identifie facilement avec les opérateurs création et annihilation de l'oscillateur harmonique :

$$\hat{a}_{l,\vec{k}} = \frac{\hat{x}_{l,\vec{k}} + i\hat{p}_{l,\vec{k}}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_{l,\vec{k}}^\dagger = \frac{\hat{x}_{l,\vec{k}} - i\hat{p}_{l,\vec{k}}}{\sqrt{2}}, \quad [\hat{a}_{l,\vec{k}}, \hat{a}_{l',\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')\delta_{l,l'}. \quad (2.8)$$

La fonction δ de Dirac apparaît ici car nous avons décomposé notre état sur la base des ondes planes, qui correspondent à des états non physiques et non normalisables. Dans la réalité, les objets que nous considérerons seront des paquets d'onde limités par transformée de Fourier. On définira un mode par son enveloppe $\phi_l(\vec{k})$, normalisée par $\sum_{l=1}^2 \int |\phi_l(\vec{k})|^2 d^3k = 1$. L'opérateur de création dans ce mode sera

$$\hat{a}^\dagger = \sum_{l=1}^2 \iiint \phi(\vec{k}) \hat{a}_{l,\vec{k}}^\dagger d^3k. \quad (2.9)$$

On trouve alors

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \sum_{l=1}^2 \sum_{l'=1}^2 \int \dots \int d^3k d^3k' \phi^*(\vec{k})\phi(\vec{l}) [\hat{a}_{l,\vec{k}}, \hat{a}_{l',\vec{k}'}^\dagger] = \sum_{l=1}^2 \int |\phi(\vec{k})|^2 d^3k = 1. \quad (2.10)$$

Avec ce qui précède, on déduit assez facilement que l'Hamiltonien classique

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \iiint \left[\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}}^2(\vec{r}, t) \right] d^3r \quad (2.11)$$

devient quantiquement

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{l=1}^2 \iiint \hbar\omega_{\vec{k}} \left[\hat{a}_{l,\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{l,\vec{k}} + \frac{1}{2} \right] d^3k, \quad (2.12)$$

somme d'Hamiltoniens indépendants pour chaque onde plane. Pour le mode ϕ on obtient alors

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.13)$$

On se ramène alors au cas d'un oscillateur harmonique à une dimension. L'opérateur $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ correspond au nombre de photons contenus dans ce mode. Dans la base de ses

états propres, en utilisant $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, on montre facilement que les opérateurs \hat{a}^\dagger et \hat{a} permettent d’y créer ou d’y annihiler un photon :

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.14)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.15)$$

On définit également les opérateurs de quadrature dans ce mode, qui correspondent à la position et l’impulsion d’un oscillateur harmonique unidimensionnel quantifié, et qui joueront un rôle central dans cette thèse :

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i \quad (2.16)$$

Les propriétés quantiques du champ électromagnétique libre se déduisent donc de celles de l’oscillateur harmonique, et cette analogie nous sera utile dans toute la suite de ce chapitre.

2.2 Descriptions discrète et continue du champ quantifié

La description quantique d’un système est intimement liée à la manière dont on l’observe. Ses états sont décrits dans l’espace de Hilbert par leur décomposition sur la base des états propres de l’observable choisie. Dans le cas de la lumière, il existe deux observables “naturelles” qui nous sont depuis longtemps familières : l’énergie et le champ électrique.

2.2.1 Variables discrètes

Lorsqu’on évoque le caractère quantique de la lumière, la première image qui vient à l’esprit est souvent liée au photon, quantum d’énergie du rayonnement. On décrit alors l’état quantique par les nombres et les cohérences des photons qu’il contient, en utilisant la base des états propres de l’opérateur nombre de photons $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ appelée base de Fock. Les valeurs propres de cet opérateur sont évidemment les entiers naturels. Elles sont non-dégénérées : si on compte les photons dans un mode donné, deux résultats identiques préparent deux états quantiques parfaitement indiscernables. On sait que classiquement la mesure de l’intensité gomme toute information sur la phase : comme on pourrait s’y attendre, les phases de ces états de Fock $|n\rangle$ ne sont pas déterminées, et leurs mesures donnent des résultats parfaitement aléatoires.

Variables discrètes	
Observable	nombre de photons $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$
Spectre	entiers naturels \mathbb{N}
États propres	états de Fock $ n\rangle$
Énergies des états propres	$\hbar\omega (n + \frac{1}{2})$

En terme d’information quantique, le codage sur cette base discrète présente les mêmes avantages que le codage numérique pour les ordinateurs classiques, et permet de transposer

de nombreux concepts. Par analogie avec le bit classique qui prend deux valeurs, 0 ou 1, on peut définir un bit quantique ou qubit, décrit sur la base de deux états orthogonaux $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ correspondant soit à la présence ou l'absence d'un photon dans un mode (états nombres $|0\rangle$ et $|1\rangle$), soit à un photon pouvant être dans deux modes orthogonaux (en polarisation, en temps, en fréquence, dans l'espace...).

À la différence du bit classique, le qubit peut exister dans une superposition arbitraire $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. C'est cette possibilité qui est à l'origine du parallélisme quantique. En effet, certains problèmes ne peuvent être résolus classiquement qu'en essayant une à une toutes les entrées possibles. Le temps de calcul pour ces problèmes dits "difficiles" (NP) croît exponentiellement avec le nombre de bits d'entrée. Les ordinateurs quantiques peuvent, eux, être dans une superposition d'états : si l'état d'entrée est la superposition de tous les états possibles, la sortie sera la superposition de toutes les solutions possibles. Toute la subtilité de l'algorithme quantique consiste alors à faire émerger la "bonne" solution de cet ensemble...

En ce qui concerne les communications quantiques, de nombreux protocoles à variables discrètes ont été développés. Le protocole "fondateur" BB84 a été proposé en 1984 par Bennett et Brassard [16]. Dans ce protocole, la sécurité est garantie par le codage aléatoire sur deux bases non orthogonales, $(|0\rangle, |1\rangle)$ et $(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}})$. Si un espion essaie d'intercepter le code et se trompe de base, il modifiera l'état du qubit et induira des erreurs dans la transmission. En comparant un sous-échantillon de la clé, les interlocuteurs pourront alors détecter sa présence.

Cependant, si leur manipulation est extrêmement aisée sur le plan conceptuel, les variables discrètes présentent de sérieux inconvénients pratiques.

Tout d'abord, les sources de photons uniques sont difficiles à mettre en oeuvre. Les sources déterministes, comme les atomes uniques dans des pièges optiques [24, 25, 26], les défauts N-V du diamant [27, 28], les nanocristaux ou les boîtes quantiques en microcavités [29] souffrent de faibles efficacités de collection, qui dépassent rarement quelques pourcents : lorsqu'on "appuie sur le bouton" pour émettre le photon, on n'a qu'une faible chance de le récupérer. Ce "bouton" n'existe pas pour les sources aléatoires, comme la fluorescence paramétrique : l'instant d'émission n'est pas contrôlé. En revanche, l'opérateur est averti de cette émission, et peut être assuré de la présence du photon de manière relativement certaine. Mais lorsque le nombre de photons requis augmente, il devient exponentiellement peu probable que ces sources aléatoires se déclenchent toutes en même temps, ce qui constitue leur défaut essentiel.

S'il est difficile de créer des photons uniques, il est encore plus difficile de les faire interagir. Tout comme l'information classique, l'information quantique nécessite des portes logiques. Les portes à un qubit, comme la porte NOT (qui permute $|0\rangle$ et $|1\rangle$) ou la porte Phase (qui transforme $|1\rangle$ en $-|1\rangle$) sont faciles à implémenter, par exemple avec des lames d'onde pour un codage en polarisation. La réalisation de portes à deux qubits, comme la porte CNOT ou la porte C-Phase (porte NOT ou Phase réalisée sur le deuxième qubit à condition que le premier soit dans $|1\rangle$) reste, en revanche, difficile. En effet, les photons n'interagissent entre eux que par l'intermédiaire de la matière. La solution la plus évidente pour réaliser cette interaction, qui consiste à utiliser des cristaux non-linéaires, est à exclure : leurs non-linéarités, de l'ordre de 10^{-11} m/V pour les plus fortes, sont bien trop faibles pour que le déphasage induit par un photon sur l'autre soit significatif. Il

est possible de réaliser de très fortes non-linéarités optiques en couplant la lumière à des atomes uniques dans des cavités optiques résonantes [30], mais les photons restent alors piégés et ne peuvent être utilisés pour des transmissions quantiques. Une des approches possibles consiste à utiliser les photons comme “qubits volants” qui ne font que transporter l’information, et recopier leur état sur des “qubits stationnaires” atomiques ou ioniques pour les faire interagir [31, 32]. Actuellement, s’il est possible de stocker des photons uniques dans des vapeurs atomiques [33, 34, 35, 36, 37], la réalisation de portes logiques est encore hors de portée. Une autre approche pour réaliser des portes photoniques à deux qubits consiste à utiliser non pas l’interaction entre photons à proprement parler, mais leurs interférences, dues aux propriétés de symétrie liées à leur caractère bosonique [38, 39]. Cette approche est certes probabiliste, mais une utilisation astucieuse de la téléportation quantique permet de contrer la perte d’efficacité à grande échelle [21].

Enfin, la détection de photons uniques pose également problème. Nous verrons au chapitre suivant que s’il existe des détecteurs commerciaux suffisamment sensibles, ils ne peuvent pas faire la différence entre un et plusieurs photons, et présentent des efficacités quantiques limitées. Quant aux détecteurs efficaces et résolvant le nombre de photons, ils sont difficiles à mettre en oeuvre car ils fonctionnent en régime cryogénique.

2.2.2 Variables continues

Les premiers développements de l’information quantique, née du croisement de la physique quantique et de l’informatique, se sont donc assez naturellement faits en variables discrètes, où la correspondance entre photons uniques et bits discrets était évidente. Mais il ne faut pas oublier qu’un faisceau lumineux, même lorsqu’il contient un seul photon, reste une onde. Et comme toutes les ondes, ses oscillations sont caractérisées par deux grandeurs fondamentales : l’amplitude et la phase. Cette description, avec laquelle nous sommes tous familiers depuis que l’on sait faire de la balançoire, est le fondement de l’électromagnétisme classique. Dans le domaine de l’information quantique en revanche, il est assez curieux de constater à quel point elle semble peu courante par rapport à l’approche corpusculaire devenue désormais “classique”.

Pour décrire la lumière, on peut donc s’intéresser à l’amplitude et à la phase du champ électromagnétique, plutôt qu’à ses niveaux d’énergie. Mais quantiquement, les mesures d’amplitude et de phase sont difficiles à traduire en termes d’opérateurs. On préfère passer de ces coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, qui correspondent aux opérateurs de quadrature dans le mode étudié :

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i \quad (2.17)$$

On sait que la phase n’est pas une grandeur absolue mais relative à une autre onde : on voit déjà que pour définir les axes de cet espace des phases on devra introduire un oscillateur de référence, un état classique préparé dans le même mode qui nous servira d’horloge. Sa propre phase peut être choisie librement : en la modifiant on pourra tourner dans l’espace des phases, et transformer les quadratures \hat{x} et \hat{p} en quadratures arbitraires :

$$\hat{x}_\theta = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta \quad (2.18a)$$

$$\hat{p}_\theta = -\hat{x} \sin \theta + \hat{p} \cos \theta \quad (2.18b)$$

Pour l'oscillateur harmonique, les états propres des opérateurs position et impulsion sont non physiques : ils correspondent respectivement aux particules parfaitement localisées et aux ondes planes. Il en est de même pour les opérateurs de quadrature \hat{x} et \hat{p} , appelés respectivement position et impulsion par analogie : leurs états propres sont infiniment comprimés en x (resp. p) et infiniment étalés en p (resp. x). Les spectres de ces opérateurs sont continus, et les énergies associées à ces états non physiques sont infinies.

Variables continues	
Observable	quadratures $\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}$ et $\hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}$
Spectre	nombres réels \mathbb{R}
États propres	états infiniment comprimés $ x\rangle$ et $ p\rangle$
Énergies des états propres	infinies

Le caractère quantique apparaît encore une fois dans la non-commutation de ces observables, conduisant à l'inégalité de Heisenberg sur leurs écart-types :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}. \quad (2.19)$$

Ces quadratures, de même que l'amplitude et la phase, ne peuvent donc pas être définies en même temps. Leurs fluctuations conduisent à un bruit quantique dans l'espace des phases. Dans le cas d'un faisceau cohérent, produit par un laser très au-dessus du seuil, il peut être facilement réinterprété comme le "bruit de grenaille" correspondant aux temps d'arrivée aléatoires des photons, analogue au bruit blanc des gouttes de pluie sur un toit. Mais ce bruit persiste même en absence de photons, dans le cas du vide quantique. En effet, bien que le champ y soit nul en moyenne, les fluctuations de ses quadratures valent $\Delta x = \Delta p = 1/\sqrt{2}$, ce qui correspond à l'énergie du vide $\hbar\omega/2$ de l'Eq. 2.13. Pour faire le lien avec les variables discrètes, on peut réexprimer l'opérateur nombre \hat{n} à partir des quadratures :

$$\hat{n} = \frac{1}{2} [\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - 1]. \quad (2.20)$$

Le grand avantage des variables continues se situe au niveau pratique. En effet, le bruit quantique d'un simple faisceau laser suffit à garantir une sécurité absolue pour la transmission de clés quantiques sur des distances arbitraires [40]. Ces variables peuvent être codées sur des impulsions lumineuses intenses, qui ont moins de chances de "se perdre" que des photons uniques. Leurs détecteurs, de simples photodiodes, sont plus faciles d'emploi et offrent de meilleures efficacités quantiques que les détecteurs de photons uniques. Nous verrons au chapitre suivant que l'optique non-linéaire permet de manière relativement aisée de créer des états comprimés, où les fluctuations d'une quadrature sont inférieures à celles du vide, au dépens de l'augmentation du bruit sur l'autre pour satisfaire $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}$. Elle permet également de préparer des états intriqués en quadrature, où les corrélations

entre deux quadratures de deux modes sont comprimées en-dessous du bruit quantique, ce qui permet de mettre en oeuvre des protocoles de téléportation [41] nécessaires pour assurer un débit suffisant dans les communications quantiques à grande distance. On peut également utiliser ces variables pour le calcul quantique [42]. Les qubits sont alors codés sur des états cohérents $|\alpha\rangle$ et $-|\alpha\rangle$ suffisamment séparés dans l'espace des phases et donc pratiquement orthogonaux. Préparer des superpositions quantiques de tels états dans le domaine optique a été l'un des objectifs majeurs atteints lors de ce travail de thèse.

L'inconvénient essentiel des variables continues est inhérent au traitement analogique de l'information. De manière assez surprenante, l'efficacité actuelle des protocoles de cryptographie à variables continues n'est pas limitée par des problèmes matériels liés à leur manipulation, mais par l'efficacité des protocoles de traitement de l'information classique utilisés pour extraire une clé secrète à partir des données brutes.

2.3 Matrice densité et fonction de Wigner

Une fois choisi le mode de description du champ quantifié, il nous faut introduire un objet mathématique qui représentera les différents états quantiques. Les états manipulés dans une expérience ne sont jamais purs, et ne peuvent pas être décrits par une fonction d'onde. Nous allons introduire ici deux outils équivalents, permettant de caractériser parfaitement un état quantique arbitraire, avec un sens physique clair adapté aux observables choisies : la matrice densité pour les variables discrètes, la fonction de Wigner pour les variables continues.

2.3.1 La matrice densité

En variables discrètes, l'outil le plus immédiat et le plus pratique pour décrire un état quelconque est la matrice densité $\hat{\rho}$. Si l'état est un mélange statistique d'états purs $|\psi_1\rangle\dots|\psi_k\rangle$ avec des probabilités classiques $p_1\dots p_k$, on a

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{j=1}^k p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|}{\text{Tr} \left\{ \sum_{j=1}^k p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \right\}}. \quad (2.21)$$

Si l'on écrit cette matrice en base de Fock, les termes diagonaux $\hat{\rho}_{n,n}$ sont les populations associés à chaque niveau d'énergie, en d'autres termes les probabilités de trouver n photons dans l'état. Ces termes sont directement accessibles à la mesure par comptage de photons.

La présence de termes non-diagonaux $\hat{\rho}_{k,l \neq k}$ non nuls révèle que la distribution de ces états nombres présente une certaine cohérence quantique : c'est une superposition quantique d'états de Fock et non un mélange statistique. Pour accéder à ces cohérences, on doit "faire tourner" l'état dans l'espace des phases décrit par les états de Fock, pour transcrire ces cohérences en termes de populations. Par exemple, la matrice densité d'un état $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ s'écrit

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Pour accéder aux cohérences, le plus simple est d'utiliser une transformation de Hadamard :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\rho}' = H\hat{\rho}H^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Les populations de $\hat{\rho}'$ traduisent les cohérences de $\hat{\rho}$: ici seul l'état $|0\rangle$ est peuplé, alors que si l'état de départ était un mélange statistique $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$, invariant par cette transformation, les populations de $\hat{\rho}'$ seraient équiréparties entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Cette reconstruction par rotation de l'état dans l'espace des phases s'appelle *tomographie quantique*. Pour les variables discrètes, dans le cas d'un codage en polarisation par exemple, les mesures sont faites par comptage de photons et les rotations dans l'espace des phases à l'aide de lames d'onde (la transformation de Hadamard ci-dessus sera alors réalisée avec une lame demi-onde tournée à 22.5°).

En variables discrètes, le codage se fait généralement sur une base finie, avec des nombres de photons peu élevés. La matrice densité offre alors une représentation visuelle très pratique, permettant de reconnaître la plupart des états "à vue d'oeil". Les états les plus simples sont alors les états de Fock $|n\rangle$ eux-mêmes, pour lesquels tous les termes sont nuls, sauf $\hat{\rho}_{n,n} = 1$. Il est par exemple facile de voir que la matrice densité représentée sur la figure 2.1 correspond bien à l'état $|\psi\rangle$ décrit ci-dessus.

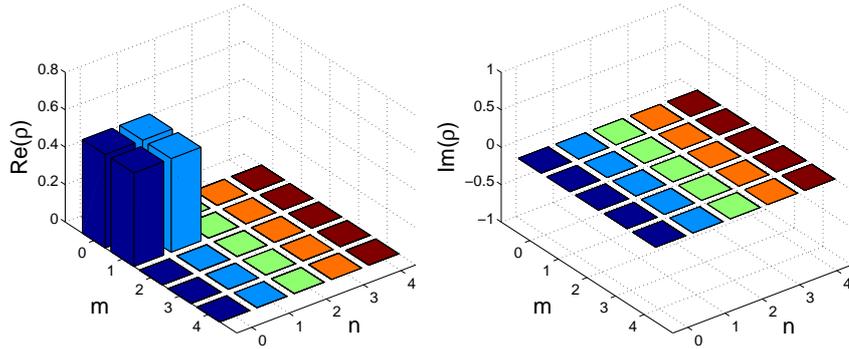


Figure 2.1: Matrice densité d'un état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

La matrice densité donne accès à n'importe quel opérateur dans cet état : $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} \{ \rho \hat{A} \}$. Elle peut également être diagonalisée à l'aide de packages numériques standards, ce qui donne accès à de nombreuses caractéristiques de l'état. La fidélité avec un état de référence $|\phi\rangle$ s'obtient simplement par $\mathcal{F} = \langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle$, la pureté de l'état par $\mathcal{P} = \text{Tr} \{ \hat{\rho}^2 \}$. Dans notre cas, la matrice densité sera un outil essentiel pour calculer l'intrication des états décrits dans la quatrième partie de cette thèse.

2.3.2 La fonction de Wigner

Pour les variables continues, la matrice densité décrite sur la base des quadratures perd à peu près tous ses avantages pratiques et conceptuels. Tout d'abord, les états de base, infiniment comprimés suivant x et étirés suivant p , contiennent une énergie infinie et ne sont pas physiques. Ensuite, la base étant continue de dimension infinie, cette matrice ne peut pas être facilement diagonalisée comme dans le cas discret pour trouver les états

propres. Enfin, la représentation et l'interprétation graphiques, qui permettaient immédiatement de reconnaître différents états "simples" en base de Fock, deviennent ici bien plus complexes.

On pourrait songer à utiliser la matrice densité en base de Fock tout en travaillant sur les quadratures. Nous y serons contraints quelquefois, car certains outils théoriques n'ont pour l'instant été développés que dans ce cadre. Mais les changements de base, par l'intermédiaire des polynômes de Hermite, ne sont pas immédiats. De plus, même pour les états les plus simples en termes de quadratures, la "lisibilité" graphique d'une matrice densité est très réduite. La figure 2.2 montre à quoi ressemble la matrice densité d'un "simple" état cohérent $|\alpha\rangle$ avec une amplitude 1 et une phase $\pi/2$: reconnaître l'état à partir de cette matrice est assez non-trivial.

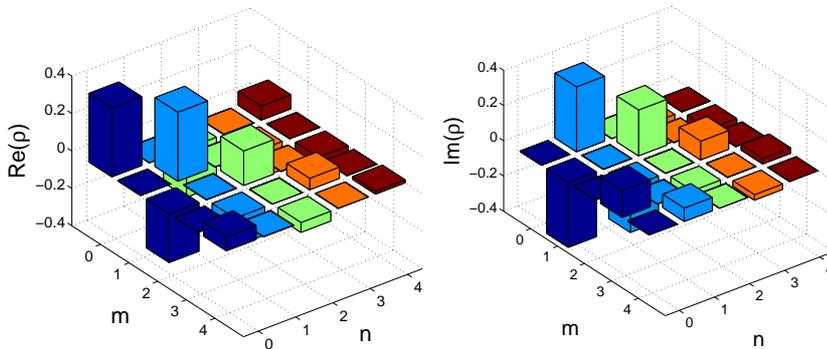


Figure 2.2: Matrice densité d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ avec $\alpha = i$.

On finit donc par se convaincre que la matrice densité n'est pas une représentation commode lorsqu'on travaille avec des variables continues. Peut-on alors trouver un objet mathématique qui décrive complètement l'état, qui soit "lisible" graphiquement et qui ait un sens physique clair?

Revenons un instant à la physique classique. Pour décrire le mouvement d'une particule ponctuelle, on trace sa trajectoire dans l'espace des phases : en suivant les coordonnées curvilignes on a alors accès à sa position et sa vitesse à chaque instant. On peut faire de même pour un grand ensemble de particules, en décrivant leur distribution statistique dans l'espace des phases plutôt que les suivre une à une. On aimerait alors franchir le pas entre les fluctuations statistiques d'un gaz et les fluctuations quantiques d'un faisceau lumineux, et définir une distribution du champ électrique dans l'espace des phases : on aurait alors accès à la probabilité $\Pi(x, p)dx dp$ de trouver le champ dans un volume infinitésimal $dx dp$ autour du point (x, p) .

Mais pour qu'une telle probabilité ait un sens, il faudrait que les quadratures \hat{x} et \hat{p} puissent être définies simultanément, ce qui est interdit par la mécanique quantique. On ne peut pas localiser le champ dans un volume $dx dp < 1/2$, cela n'a tout simplement pas de sens physique. Rien ne nous empêche en revanche de mesurer individuellement \hat{x} , \hat{p} , ou n'importe quelle combinaison $\hat{x}_\theta = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta$. A défaut d'avoir accès à cette "distribution" Π , on a accès à ses projections, à ses "ombres chinoises". Nous allons nous comporter, en quelques sortes, en "prisonniers éclairés" de la caverne de Platon [43] : contraints par les lois de la physique, on ne peut voir que des ombres, mais à partir de ces

ombres nous pouvons imaginer et reconstruire l'objet qui les a projetées. Les "ombres" mesurables sont les distributions de quadratures arbitraires $P_\theta(\hat{x}_\theta)$, l'objet qui les projette sera appelé **fonction de Wigner** [44].

Fonction de Wigner
Quasi-distribution jointe $W(x, p)$ dont les projections correspondent aux distributions marginales $P_\theta(x_\theta)$ pour toute quadrature \hat{x}_θ

Comme une distribution de probabilités "classique", la fonction de Wigner sera normalisée : $\iint W(x, p) dx dp = 1$. On peut la considérer comme une sorte de nuage dont les projections $P_\theta(x_\theta)$ traduisent la densité optique observée en x_θ , en regardant dans la direction orthogonale p_θ . Cette description est illustrée par la figure 2.3, qui présente trois projections d'une fonction de Wigner gaussienne générique (celle d'un état cohérent comprimé, voir section 2.4.3).

Pour rendre la fonction de Wigner utilisable en pratique, nous devons passer de cette définition "physique" à une définition plus formelle, et répondre à deux questions essentielles :

- Y a-t-il une relation bijective entre la fonction de Wigner W et l'ensemble des distributions marginales $\{P_\theta\}$ (peut-on retrouver l'un à partir de l'autre de manière univoque) ?
- Y a-t-il une relation bijective entre la fonction de Wigner W et la matrice densité (la fonction de Wigner contient-elle toute l'information sur l'état, comme c'est le cas de la matrice densité) ?

D'après la définition, toute distribution P_θ s'obtient en projetant la fonction de Wigner sur l'axe défini par \hat{x}_θ , c'est à dire en l'intégrant suivant la direction orthogonale. En revenant vers le repère d'origine par

$$\hat{x} = \hat{x}_\theta \cos \theta - \hat{p}_\theta \sin \theta, \quad \hat{p} = \hat{x}_\theta \sin \theta + \hat{p}_\theta \cos \theta, \quad (2.24)$$

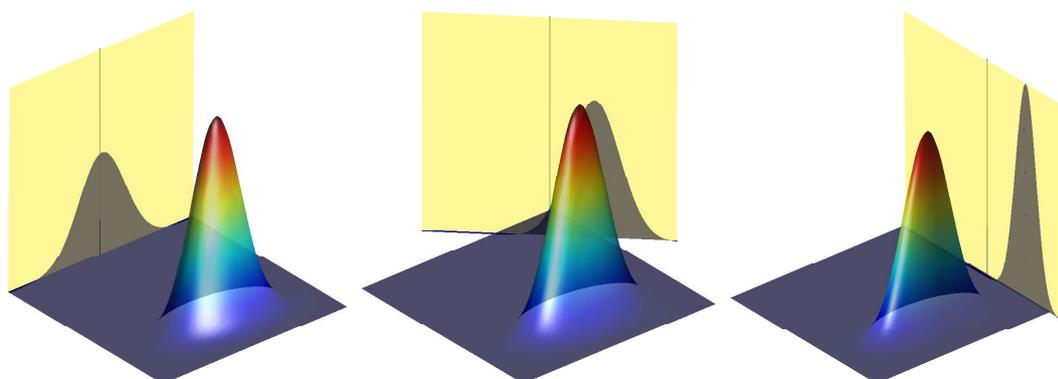


Figure 2.3: Projections à 0° , 45° et 90° de la fonction de Wigner d'un état cohérent comprimé (voir section 2.4.3)

on obtient

$$P_\theta(x_\theta) = \int W(x_\theta \cos \theta - p_\theta \sin \theta, x_\theta \sin \theta + p_\theta \cos \theta) dp_\theta. \quad (2.25)$$

Pour déterminer la relation inverse, le plus simple est de passer par l'espace de Fourier :

$$\widetilde{W}[\mu, \nu] = \frac{1}{2\pi} \int W(x, p) e^{-i(\mu x + \nu p)} dx dp, \quad (2.26a)$$

$$\widetilde{P}_\theta[k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P_\theta(x_\theta) e^{-ikx_\theta} dx_\theta \quad (2.26b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint W(x_\theta \cos \theta - p_\theta \sin \theta, x_\theta \sin \theta + p_\theta \cos \theta) e^{-ikx_\theta} dx_\theta dp_\theta \quad (2.26c)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint W(x, p) e^{-ik(x \cos \theta + p \sin \theta)} dx dp \quad (2.26d)$$

$$\boxed{\Rightarrow \widetilde{P}_\theta[k] = \sqrt{2\pi} \widetilde{W}[k \cos \theta, k \sin \theta]} \quad (2.27)$$

On voit donc que l'on peut en principe reconstruire la fonction de Wigner à partir des distributions marginales : leurs transformées de Fourier $\{\widetilde{P}_\theta[k]\} = \widetilde{P}[\theta, k]$ correspondent à la transformée de Fourier de la fonction de Wigner en coordonnées polaires, $\widetilde{W}[k \cos(\theta), k \sin(\theta)]$ [45]. La relation qui lie la fonction de Wigner aux distributions marginales s'appelle *transformation de Radon*, et le processus de reconstruction de cet objet "volumineux" à partir de ses projections s'appelle, comme dans le cas discret, la *tomographie quantique*. Elle est conceptuellement analogue à la tomographie médicale qui permet de reconstruire de manière non-invasive la structure tridimensionnelle d'un organe.

C'est encore en passant par les distributions marginales que l'on détermine le lien entre la fonction de Wigner et la matrice densité. En injectant $P_\theta(x_\theta) = \langle x_\theta | \hat{\rho} | x_\theta \rangle$ dans la relation ci-dessus on obtient :

$$\widetilde{W}[k \cos \theta, k \sin \theta] = \frac{1}{2\pi} \int \langle x_\theta | \hat{\rho} | x_\theta \rangle e^{-ikx_\theta} dx_\theta \quad (2.28a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \langle x_\theta | \hat{\rho} e^{-ik\hat{x}_\theta} | x_\theta \rangle dx_\theta \quad (2.28b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{-ik \cos \theta \hat{x} - ik \sin \theta \hat{p}}), \quad (2.28c)$$

$$\Rightarrow \widetilde{W}[\mu, \nu] = \frac{1}{2\pi} \text{Tr}(\hat{\rho} e^{-i\mu \hat{x} - i\nu \hat{p}}). \quad (2.28d)$$

A l'aide de la formule de Baker-Hausdorff on transforme $e^{-i\mu \hat{x} - i\nu \hat{p}} = e^{-i\mu\nu/2} e^{-i\nu \hat{p}} e^{-i\mu \hat{x}}$ pour obtenir

$$\widetilde{W}[\mu, \nu] = \frac{e^{-i\mu\nu/2}}{2\pi} \int \langle x | \hat{\rho} e^{-i\nu\hat{p}} e^{-i\mu\hat{x}} | x \rangle dx \quad (2.28e)$$

$$= \frac{e^{-i\mu\nu/2}}{2\pi} \int e^{-i\mu x} \langle x | \hat{\rho} | x + \nu \rangle dx \quad (2.28f)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\mu x} \langle x - \nu/2 | \hat{\rho} | x + \nu/2 \rangle dx. \quad (2.28g)$$

En revenant dans l'espace direct, on trouve alors

$$W(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint e^{-i\mu x' + i\mu x + i\nu p} \langle x' - \nu/2 | \hat{\rho} | x' + \nu/2 \rangle dx' d\mu d\nu \quad (2.29)$$

$$\boxed{W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\nu p} \langle x - \nu/2 | \hat{\rho} | x + \nu/2 \rangle d\nu}. \quad (2.30)$$

Cette relation entre la fonction de Wigner et la matrice densité est bijective, la réciproque étant :

$$\langle x | \hat{\rho} | y \rangle = \int e^{i(x-y)p} W\left(\frac{x+y}{2}, p\right) dp \quad (2.31)$$

Ainsi, la matrice densité et la fonction de Wigner se déduisent l'un de l'autre : ces outils sont en principe équivalents, mais plus ou moins adaptés suivant que l'on s'intéresse au caractère corpusculaire ou ondulatoire de la lumière.

La définition de la fonction de Wigner à partir de la matrice densité se généralise facilement à des états multimodes :

$$W(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int d\nu_1 \dots d\nu_n e^{i\nu_1 p_1 + \dots + i\nu_n p_n} \quad (2.32)$$

$$\times \left\langle x_1 - \frac{\nu_1}{2}, \dots, x_n - \frac{\nu_n}{2} \middle| \hat{\rho} \middle| x_1 + \frac{\nu_1}{2}, \dots, x_n + \frac{\nu_n}{2} \right\rangle \quad (2.33)$$

Les fonctions de Wigner réduites de chaque mode s'obtiennent en intégrant cette fonction sur les quadratures des autres modes, tout comme les matrices densités réduites sont obtenues en prenant la trace partielle.

D'ailleurs, la plupart des grandeurs caractéristiques de notre état peuvent être obtenues directement à partir de la fonction de Wigner, en remplaçant la trace sur la matrice densité par l'intégrale sur la fonction de Wigner. Ainsi, la fidélité avec un état pur $|\psi\rangle$ de référence vaut

$$\mathcal{F} = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle\psi| \hat{\rho}) = 2\pi \iint W_\rho W_{|\psi\rangle \langle\psi|} dx dp \quad (2.34)$$

On aimerait étendre cette définition à la fidélité avec des états mélanges, pour pouvoir décomposer les états que l'on prépare sur des mélanges d'états physiquement pertinents. Mais si on définissait la fidélité entre deux états mélanges $\hat{\rho}_1$ et $\hat{\rho}_2$ par $\mathcal{F} = \text{Tr}\{\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2\}$, en utilisant l'inégalité de Schwartz on trouverait que la fidélité de l'état $\hat{\rho}_1$ avec lui-même est

inférieure à un. Cette formule définit en réalité la pureté d'un mélange, la fidélité avec un autre mélange $\hat{\rho}_2$ étant donnée par $\mathcal{F} = \left[\text{Tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_2} \hat{\rho}_1 \sqrt{\hat{\rho}_2}} \right\} \right]^2$ [46]. La fonction racine n'étant pas analytique, son calcul nécessite de diagonaliser la matrice densité. Dans ce cas, comme dans tous les cas où cette diagonalisation sera nécessaire, nous devons revenir de la fonction de Wigner à la matrice densité en base de Fock.

Pour relier ces deux objets, il faut se souvenir que la fonction d'onde $\phi_n(x)$ associée au n -ième état propre de l'oscillateur harmonique [47] s'écrit, dans la convention $\hbar = 1$,

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad (2.35)$$

où le n -ième polynôme de Hermite peut être exprimé par

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-t^2+2xt} \right]_{t=0}. \quad (2.36)$$

On trouve alors, après quelques lignes de calcul sans grande difficulté (voir Annexe A),

$$\langle m | \hat{\rho} | n \rangle = \iint \langle x | \hat{\rho} | y \rangle \phi_m^*(x) \phi_n(y) dx dy \quad (2.37a)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial z^n} \iint W(x, p) e^{-x^2 - p^2 + 2x(t+z) - 2ip(t-z) - 2tz} dx dp \right]_{t=z=0} \quad (2.37b)$$

Cette expression, assez obscure à priori, est très pratique lorsque la fonction de Wigner de l'état étudié est gaussienne, ou un produit polynôme-gaussienne comme ce sera le cas pour nous. Cette intégrale est alors simple à calculer.

2.3.3 Choix du mode de description en fonction des transformations mises en jeu

Les expériences présentées dans cette thèse utilisent à la fois le comptage de photons et l'analyse ondulatoire de la lumière. Quel type de description devons-nous choisir?

La fonction de Wigner est particulièrement adaptée pour décrire les transformations unitaires réalisées par l'optique linéaire et l'amplification paramétrique (voir section 3.3). Ces transformations sont linéaires par rapport aux champs des différents modes mis en jeu, et peuvent donc être traduites par des matrices de transfert unitaires M sur l'ensemble des opérateurs quadrature de ces n modes. En formant les vecteurs d'entrée et sortie \hat{A}_i et $\hat{A}_o = M \hat{A}_i$ constitués par les $2n$ opérateurs $\hat{x}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{p}_n$, on obtient pour les fonctions de Wigner :

$$W_o(\vec{A}_o) = W_i(M^{-1} \vec{A}_o) \quad (2.38)$$

Les opérations associés aux mesures projectives en base de Fock sont évidemment plus simples à décrire avec des états nombres. Mais nous verrons que la fonction de Wigner permet, dans notre cas, de s'en sortir à peu de frais. Inversement, l'utilisation de la matrice densité conduirait rapidement à des calculs inextricables pour représenter les transformations et les pertes linéaires. Nous choisirons donc, autant que possible, de décrire nos états par leurs fonctions de Wigner.

2.4 États gaussiens, “grands classiques” des variables continues

Tout comme les états nombres sont les plus simples à décrire par une matrice densité en base de Fock, il existe en variables continues quelques états “simples” à décrire par leur fonction de Wigner. Ce sont les *états gaussiens*, dont les fonctions de Wigner sont gaussiennes.

Dans le cas pur monomode, les états gaussiens sont les états minimaux : ils sont les seuls à saturer l’inégalité de Heisenberg. Pour le montrer, supposons que l’état $|\psi\rangle$ vérifie $\Delta x \Delta p = 1/2$. Dans la suite, nous utiliserons un *facteur de compression* s tel que $\Delta x^2 = s/2$ et $\Delta p^2 = 1/(2s)$. Introduisons alors un vecteur

$$|\phi\rangle = \left(\hat{p} - \langle p \rangle - \frac{i}{s}(\hat{x} - \langle x \rangle) \right) |\psi\rangle. \quad (2.39)$$

En utilisant $[\hat{x}, \hat{p}] = i$, on remarque que sa norme vaut $N = \langle \phi | \phi \rangle = \Delta x^2 / s^2 + \Delta p^2 - 1/s = 0$: le vecteur $|\phi\rangle$ est donc nul. En se souvenant que, sous forme différentielle, $\hat{p} = -i\partial_x$, on aboutit à l’équation

$$-i \frac{d\psi}{dx} - i \frac{1}{s} x \psi(x) - \left(\langle p \rangle - i \frac{1}{s} \langle x \rangle \right) \psi(x) = 0 \quad (2.40)$$

qui se réécrit comme

$$\frac{d\psi}{\psi} = -\frac{1}{s} x dx + \left(\frac{\langle x \rangle}{s} + i \langle p \rangle \right) dx \quad (2.41)$$

et, en renormalisant $\langle \psi | \psi \rangle$ à 1, s’intègre en

$$\psi(x) = \frac{1}{(\pi s)^{1/4}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2s} + i \langle p \rangle x} \quad (2.42)$$

La fonction de Wigner de cet état est une gaussienne de variance $s/2$ suivant x et $1/(2s)$ suivant p , centrée en $(\langle x \rangle, \langle p \rangle)$:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{s} - \frac{(p-\langle p \rangle)^2}{1/s}} \quad (2.43)$$

Plus généralement, on appellera état gaussien tout état dont la fonction de Wigner est gaussienne, sans que ce soit nécessairement un état pur. Cette section présente les états gaussiens les plus usuels, qui ont été, du moins jusqu’à maintenant, à la base de 99% des expériences d’optique quantique à variables continues.

2.4.1 État fondamental : vide quantique

L’état fondamental du champ correspond à l’absence de photons : c’est l’état $|0\rangle$ en base de Fock. En réécrivant l’équation $\hat{n}|0\rangle = 0$ sous forme différentielle, il est facile de montrer que dans ce cas $s = 1$ et $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$:

$$W_0(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2} \quad (2.44)$$

La variance du bruit sur les deux quadratures vaut $\Delta x^2 = \Delta p^2 = 1/2$: c’est le bruit de grenaille du vide, appelée encore “shot noise limit” ou SNL.

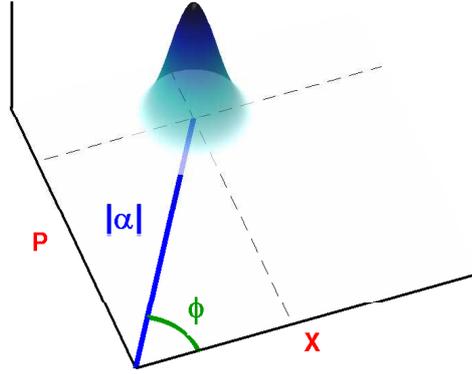


Figure 2.4: Fonction de Wigner d'un état cohérent d'amplitude $|\alpha|$ et de phase ϕ

2.4.2 États cohérents

Les états cohérents sont les analogues les plus proches des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM), si chères à l'optique géométrique et à l'électromagnétisme classique. En ce sens, ces états sont les plus “classiques” que l'on puisse trouver dans le domaine de l'optique quantique. Ces états sont produits par un laser très au-dessus du seuil. Une OPPM classique est représentée dans l'espace des phases par un point, correspondant à une amplitude $|\alpha|$ et une phase ϕ bien déterminées. Pour un état cohérent, l'amplitude $|\alpha|$ et la phase ϕ sont des valeurs moyennes, à laquelle s'ajoutent des fluctuations quantiques “minimales” égales au SNL.

Plus rigoureusement, les états cohérents sont définis comme les vecteurs propres de l'opérateur de création \hat{a} :

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.45)$$

Il est également possible de définir $|\alpha\rangle$ comme l'état fondamental de l'opérateur hermitien $\hat{M} = (\hat{a} - \alpha)^\dagger (\hat{a} - \alpha)$. Sous forme différentielle, l'équation 2.45 se traduit par $[(x + \partial_x)/\sqrt{2} - \alpha]\psi(x) = 0$: on retrouve l'équation 2.40 avec $s = 1$. La fonction de Wigner de cet état s'écrit donc

$$W_\alpha(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(x - \sqrt{2}\text{Re}(\alpha))^2 - (p - \sqrt{2}\text{Im}(\alpha))^2}. \quad (2.46)$$

C'est simplement la fonction de Wigner du vide déplacée de $\alpha\sqrt{2}$ dans l'espace des phases. Mathématiquement, ce déplacement est réalisé par l'opérateur translation

$$\hat{T}_\alpha = e^{i\sqrt{2}(\text{Re}(\alpha)\hat{p} - \text{Im}(\alpha)\hat{x})} \quad (2.47)$$

Techniquement, ce déplacement (pour n'importe quel état quantique) peut être implémenté à l'aide d'une lame séparatrice de faible réflectivité, et d'un état cohérent intense auxiliaire (voir section 3.3).

Pour retrouver la décomposition des états cohérents $|\alpha\rangle = \sum c_n |n\rangle$ sur la base de Fock, on utilise encore la définition 2.45, qui conduit à une relation de récurrence $c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$ et donne facilement

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.48)$$

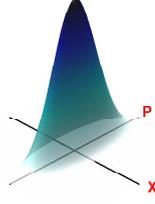


Figure 2.5: Fonction de Wigner d'un état de vide comprimé

On retrouve alors la statistique poissonnienne “classique” pour la distribution de photons :

$$P_\alpha(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (2.49)$$

2.4.3 États comprimés monomodes

Leur fonction de Wigner, donnée par

$$W_s(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{s} - \frac{(p-\langle p \rangle)^2}{1/s}} \quad (2.50)$$

est celle d'un état cohérent comprimée d'un facteur \sqrt{s} en largeur suivant x , et étirée de $1/\sqrt{s}$ suivant p . Si on suppose $s < 1$, le bruit quantique sur la quadrature x devient inférieur au SNL. En règle générale, la diminution du bruit traduit l'apparition de corrélations dans le signal. Dans notre cas, elles seront introduites par le processus d'amplification paramétrique présenté au chapitre suivant (section 3.3.2). Dans ce contexte, on fait souvent intervenir un *paramètre de compression* r directement lié à l'efficacité du processus d'amplification, tel que $s = e^{-2r}$.

Parmi ces états, le plus couramment utilisé est le *vide comprimé*, produit par amplification paramétrique du vide. Dans ce cas les valeurs moyennes des champs restent nulles. Par contre, cet état n'est plus vide de photons. Pour décrire cet état en base de Fock, le plus simple est de partir de sa fonction d'onde $\psi_s(x) = (\pi s)^{-1/4} e^{-x^2/(2s)}$ et utiliser la relation 2.36 pour les polynômes de Hermite intervenant dans les fonctions d'onde ϕ_n des états de Fock définies en 2.35 :

$$\langle n | \psi_s \rangle = \int \phi_n^*(x) \psi(x) dx \quad (2.51a)$$

$$= \frac{1}{s^{1/4} \sqrt{\pi 2^n n!}} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int e^{-t^2 + 2tx - x^2/2} e^{-x^2/(2s)} dx \right]_{t=0} \quad (2.51b)$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{s}}{2^n n! (1+s)}} \frac{d^n}{dt^n} \left[e^{-t^2 \frac{1-s}{1+s}} \right]_{t=0} \quad (2.51c)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \cosh(r)}} \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tanh(r))^k}{k!} t^{2k} \right]_{t=0} \quad (2.51d)$$

$$\Rightarrow |\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\binom{2n}{n}} \left(-\frac{\tanh(r)}{2} \right)^n |2n\rangle \quad (2.51e)$$

Comme on peut le voir, cet état contient uniquement des nombres pairs de photons.

2.4.4 États comprimés bimodes (états EPR)

Ce sont les états “les plus simples” à être intriqués en quadratures. On peut les préparer en combinant sur une lame semi-réfléchissante 50/50 (“50/50 beam splitter”, BS) deux états de vide monomode comprimés suivant des directions orthogonales. Cette lame transforme les quadratures des deux modes x_1 et x_2 suivant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{50/50BS} \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

La fonction d’onde de cet état s’obtient donc par

$$\psi_s(x_1)\psi_{1/s}(x_2) \xrightarrow{50/50BS} \psi_{EPR}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{4s} - \frac{(x_1+x_2)^2}{4/s}}. \quad (2.53)$$

Les modes 1 et 2 sont maintenant intriqués : la variance des corrélations $\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}$ entre les quadratures x_1 et x_2 est inférieure au bruit quantique, et leurs anticorrélations $\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}$ sont amplifiées. En passant à la fonction de Wigner à l’aide de l’équation 2.38, on voit que l’inverse se produit pour les quadratures p :

$$W_{EPR}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2s} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2/s} - \frac{(x_1+x_2)^2}{2/s} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2s}}. \quad (2.54)$$

Le nom “état EPR” est lié au fait que pour une compression infinie cet état devient $\delta(x_1 - x_2)\delta(p_1 + p_2)$. Cet état a été pris en exemple par Einstein, Podolsky et Rosen dans leur article de 1935 [7] qui concluait au caractère “incomplet” de la mécanique quantique.

Pour décomposer cet état en base de Fock, on répète la démarche précédente sur deux modes :

$$\begin{aligned} \langle m, n | \psi_{EPR} \rangle &= \frac{1}{\pi \sqrt{2^{m+n} m! n!}} \frac{d^{m+n}}{dt^m dz^n} \left[\iint e^{-t^2 + 2tx - \frac{x^2}{2} - z^2 + 2zy - \frac{y^2}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\frac{(x-y)^2}{2s} - \frac{(x+y)^2}{2/s}} dx dy \right]_{t=z=0} \end{aligned} \quad (2.55a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{m+n} m! n!}} \sqrt{\frac{4s}{(1+s)^2}} \frac{d^{m+n}}{dt^m dz^n} \left[\int e^{-t^2 \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^2 - z^2 - y^2 + 2y \left(z + \frac{1-s}{1+s} t\right)} dy \right]_{t=z=0} \quad (2.55b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} \frac{1}{\cosh(r)} \frac{d^{m+n}}{dt^m dz^n} \left[e^{2tz \tanh(r)} \right]_{t=z=0} \quad (2.55c)$$

$$\Rightarrow |\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(r) |n, n\rangle \quad (2.55d)$$

Les nombres de photons dans les deux modes sont maintenant parfaitement corrélés. Vu sous cet angle, on s’aperçoit qu’une source de tels états intriqués peut être transformée en

source non déterministe d'états de Fock : si l'on compte n photons dans un mode, l'autre mode est projeté dans l'état de Fock $|n\rangle$.

En pratique, nous préparerons ces états intriqués non pas en mélangeant deux états comprimés monomodes, mais directement à l'aide d'un amplificateur paramétrique non dégénéré (voir chapitre suivant). Cela permet de s'affranchir d'un deuxième amplificateur paramétrique, et de contourner les problèmes d'asservissement de phase.

2.4.5 États thermiques

Ces états sont des mélanges statistiques d'états de Fock, qui peuvent être obtenus en ne gardant qu'un seul des deux modes d'un état comprimé bimode, l'autre étant "perdu dans l'environnement". Leurs matrices densités ne présentent pas de cohérences :

$$\hat{\rho}_{th} = \text{Tr}_2 \{ \hat{\rho}_{EPR} \} = \frac{1}{\cosh^2(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n}(r) |n\rangle \langle n| \quad (2.56)$$

La fonction de Wigner d'un tel état s'écrit

$$W_{th}(x, p) = \frac{1}{\pi \cosh(2r)} e^{-\frac{x^2+p^2}{\cosh(2r)}} \quad (2.57)$$

Cet état est invariant de phase. Sa fonction de Wigner est une gaussienne plus large que celle du vide d'un facteur $\sqrt{\cosh(2r)}$ en écart-type.

2.5 États non-gaussiens et fonctions de Wigner négatives

Nous venons de passer en revue un certain nombre d'états qui permettent de réaliser de nombreux protocoles de traitement de l'information quantique (cryptographie, téléportation,...). Leurs fonctions de Wigner sont en tous points semblables à des distributions "classiques", et nous en sommes au point où on pourrait se demander : y a-t-il vraiment un problème? Pourquoi ne pourrait-on pas assimiler les fluctuations quantiques à un bruit statistique, et considérer la fonction de Wigner comme une vraie distribution de probabilités?

Comme nous allons voir, le caractère profondément quantique de la fonction de Wigner apparaît lorsque l'on sort du domaine des états gaussiens. L'exemple le plus simple qui illustre ce cas est l'état de Fock à un photon. Le résultat essentiel pourrait être directement déduit des calculs précédents, mais il me semble que l'approche "naïve" et imagée développée ci-dessous permet de mieux en saisir le sens physique.

2.5.1 Premier exemple : l'état à un photon

En utilisant l'expression de la fonction d'onde de l'état de Fock $|n=1\rangle$ donnée par l'équation 2.35, on trouve la distribution de la quadrature \hat{x} pour cet état :

$$P_1(x) = |\phi_1(x)|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} \quad (2.58)$$

L'état étant invariant de phase, cette distribution marginale est la même pour toutes les quadratures. Or, elle est nulle à l'origine.

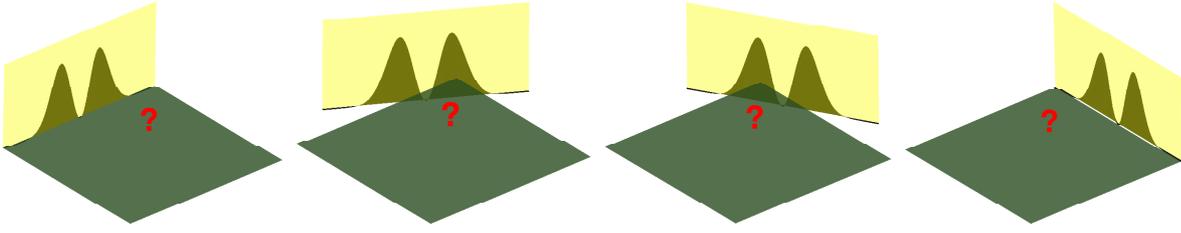


Figure 2.6: Projections de la fonction de Wigner d'un état de Fock $n = 1$ (0° , 30° , 60° et 90°)

Essayons maintenant d'imaginer une distribution de probabilités $\Pi(x, y)$ "classique" dont les projections correspondent à P_1 . Une contrainte essentielle qui doit être respectée par une "vraie" distribution de probabilités est la *positivité* : une probabilité est positive ou nulle, mais jamais négative.

On se rend rapidement compte qu'il est impossible de trouver une telle distribution Π qui se projette en P_1 pour *toutes* les quadratures. En effet, en faisant tourner "l'écran de projection" autour de Π , une région strictement positive viendra tôt ou tard se projeter sur l'origine et "boucher le creux" en 0 de la quadrature correspondante. Il faut donc remplacer cette distribution Π classique par une fonction de Wigner W quantique, et admettre qu'il existe des régions où elle présente des valeurs négatives.

Une analogie classique à cette situation est illustrée sur la figure 2.7. L'ombre d'un verre plein de lait sera plus dense au centre, car l'épaisseur de milieu diffusif à traverser sera plus importante. Celle d'un verre vide y sera moins dense que sur les bords : l'épaisseur de verre traversé, supposé diffusif, y est moins grande. Cependant, elle ne pourra jamais y être totalement nulle, sinon les bords ne feraient pas d'ombre non plus. Il faut donc imaginer un milieu avec une "absorption négative", c'est à dire du gain (par exemple un colorant laser comme la rhodamine) pour expliquer l'absence totale d'ombre au centre et sa présence sur les bords : le gain compense alors les pertes sur les parois du verre. L'absorption du milieu contenu dans le verre est l'image de la fonction de Wigner à l'origine : une fonction de Wigner maximale à l'origine correspond au verre rempli d'un milieu diffusif, $W(0, 0) = 0$ correspond au verre vide, et une fonction de Wigner négative est représentée par un milieu à gain.

Dans le cas d'un état de Fock $n = 1$, la fonction de Wigner vaut

$$W_1(x, p) = \frac{1}{\pi} [2(x^2 + p^2) - 1] e^{-x^2 - p^2} \quad (2.59)$$

Elle est négative autour de l'origine, avec un minimum $W_1(0, 0) = -1/\pi$. Ce minimum est le même pour tous les états de Fock impairs. Les états pairs, eux, présentent un maximum en 0 : $W_{2n}(0, 0) = 1/\pi$. Ainsi, la fonction de Wigner correspondant à l'image du "verre vide", avec $W(0, 0) = 0$, est celle d'un mélange statistique équiprobable de 0 et 1 photons, tel que $\hat{\rho} = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)/2$. En effet les fonctions de Wigner sont linéaires par rapport aux matrices densités : tout comme ces dernières, elles s'ajoutent dans le cas d'un mélange statistique. La fonction de Wigner de ce mélange est donc simplement

$$W_{mix}(x, p) = \frac{W_1(x, p) + W_0(x, p)}{2} = \frac{(x^2 + p^2)}{\pi} e^{-x^2 - p^2} \quad (2.60)$$

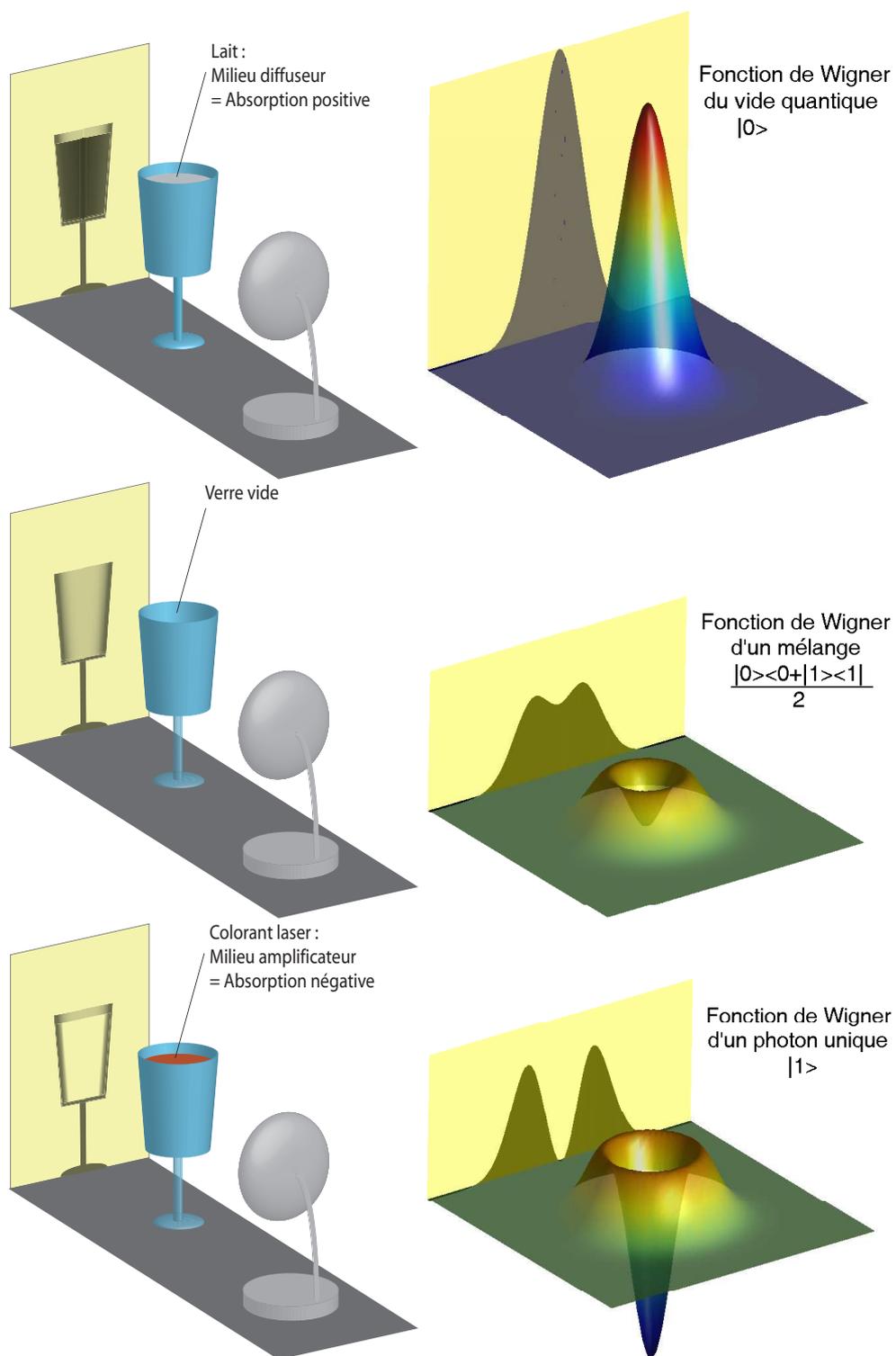


Figure 2.7: Analogie entre absorption (positive, nulle, négative) et projection d'une fonction de Wigner positive, nulle et négative à l'origine.

La généralisation du résultat précédent est lourde de conséquences lorsque l'on essaie de reconstruire expérimentalement une fonction de Wigner négative. En effet, on peut montrer que lorsque l'ensemble des pertes expérimentales dépasse 50%, la négativité de la fonction de Wigner est perdue. Cette limite de 50% semble assez large, mais lorsque l'on fait le bilan de *toutes* les imperfections intervenant dans une expérience, on s'aperçoit que chacune d'entre elles doit être très limitée.

2.5.2 Théorème de Hudson-Piquet

Nous venons d'illustrer par un premier exemple simple l'existence de fonctions de Wigner négatives. Il est évident qu'une fonction de Wigner normalisée à 1 qui présente des régions négatives ne peut pas être gaussienne. Mais de manière un peu surprenante, pour les états purs la réciproque est également vraie : si la fonction de Wigner est partout positive, alors l'état est nécessairement gaussien, c'est à dire, dans le cas le plus général, un état cohérent comprimé. En orientant les axes x et p suivant les axes propres de l'ellipse de compression, on retrouve la forme donnée par l'équation 2.50 et on sature alors les inégalités de Heisenberg. La démonstration présentée en Annexe B est basée sur

Pour les états purs :			
État gaussien	\Leftrightarrow	Fonction de Wigner positive	$\Leftrightarrow \Delta x \Delta p = 1/2$
État non gaussien	\Leftrightarrow	Fonction de Wigner négative	$\Leftrightarrow \Delta x \Delta p > 1/2$

celle de Hudson [48], avec quelques développements supplémentaires. Ces précisions ont été ajoutées pour la rendre accessible à ceux qui, comme l'auteur de ce manuscrit, ont un bagage mathématique limité aux cours de "mathématiques pour physiciens" de licence.

2.5.3 Quelques applications d'états non-gaussiens

Les états gaussiens permettent de réaliser de nombreux protocoles de traitement de l'information quantique à variables continues. Cependant, les états à fonctions de Wigner négatives se révèlent indispensables pour un certain nombre d'applications cruciales. Nous les présentons brièvement ici, laissant les discussions aux chapitres traitant des expériences qui s'y rapportent.

- Calcul quantique : Si les états et les opérations utilisées lors d'un calcul quantique restent dans le domaine gaussien, ce calcul pourra être simulé classiquement de manière efficace, car les fonctions de Wigner pourront dans ce cas être assimilées à de vraies distributions de probabilités. Le calcul quantique ne pourra donc pas offrir de gain de temps significatif. Un autre argument, très qualitatif et moins général, consiste à remarquer que si l'on code l'information sur des variables continues, alors pour bénéficier de la robustesse des variables discrètes vis-à-vis des erreurs la fonction de Wigner doit prendre des valeurs significatives dans au moins deux régions séparées de l'espace des phases, correspondant aux bits 0 et 1. Elle ne peut donc pas être gaussienne.
- Communications quantiques à longue distance : Comme dans le cas classique, les états quantiques transmis dans les protocoles de communication subissent des pertes

en ligne. Classiquement, pour les réseaux de fibres intercontinentaux par exemple, des répéteurs mesurent, corrigent et réamplifient le signal transmis. Mais dans le cas quantique, cela détruirait bien sûr toute la sécurité de la transmission. Il est possible de contourner le problème en échangeant entre deux sites un grand nombre d'états intriqués. Ceux-ci s'abîment en route, mais une opération de *distillation d'intrication* permet d'extraire de cet ensemble un plus petit nombre d'états fortement intriqués, et utiliser ceux-ci pour téléporter l'information d'un site à l'autre. Si la téléportation peut se faire avec des états gaussiens, la distillation nécessite en revanche des états et/ou des opérations non gaussiennes.

- Tests inconditionnels d'inégalités de Bell : Les inégalités proposées par Bell [8] permettent en principe de démontrer expérimentalement l'existence d'états intriqués, contestée par Einstein [7] car apparemment contradictoire avec la relativité restreinte. Les tests expérimentaux de ces égalités ont jusqu'à maintenant souffert de deux failles. Soit les efficacités des détecteurs étaient trop faibles, le fait de n'observer qu'un échantillon restreint permettant alors d'introduire des modèles classiques justifiant le résultat [10, 11, 12, 49]. Soit les cônes de lumière dans lesquels se produisaient les détections n'étaient pas séparés, ce qui permettait d'expliquer les corrélations en terme de communications classiques [50]. Des tests sans échappatoires ont été proposés en variables continues [51, 52]. Ces tests nécessitent des états à fonction de Wigner négatives : dans le cas contraire, la fonction de Wigner offrirait elle-même un modèle classique à variables cachées pour décrire les distributions mesurées.

2.6 Tomographie quantique homodyne

2.6.1 Principe d'une détection homodyne

Dans toutes les discussions précédentes, nous avons supposé que nous pouvions effectivement mesurer les quadratures du champ électromagnétique. Or dans le domaine optique ce champ oscille à des fréquences de l'ordre de 500 THz, et sa mesure directe est impossible : la réponse des photodétecteurs est en fait proportionnelle à $|E|^2$, et les fréquences raisonnablement accessibles aux photodiodes et à l'électronique rapide sont plutôt de l'ordre du GHz...

On cherche donc à "démoduler" le signal pour étudier les fluctuations quantiques autour de la fréquence centrale. Et puisque l'on s'intéresse à l'aspect ondulatoire de la lumière, on songe naturellement à des mesures d'interférences. Il suffit en pratique de faire interférer l'onde "quantique" étudiée avec un faisceau "classique" de même fréquence, qui sert d'*oscillateur local*. Ce faisceau est préparé dans un état cohérent suffisamment intense pour que les fluctuations quantiques de son amplitude et de sa phase soient négligeables. La différence des intensités de sortie correspondra alors à un terme d'interférence proportionnel au produit du champ de l'oscillateur local (connu) par celui que l'on veut mesurer. Ce type de détection s'appelle **détection homodyne**.

Supposons donc que l'on veuille tomographier un état quantique préparé dans un mode appelé *signal* s . En représentation de Heisenberg, ce mode sera décrit par l'opérateur annihilation \hat{a}_s . Dans le mode de l'oscillateur local, décrit par \hat{a}_{ol} , on prépare un état cohérent $|\alpha\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ pour simplifier.

Pour choisir la quadrature mesurée, on applique d'abord un déphasage θ sur l'oscillateur local, transformant \hat{a}_{ol} en $\hat{a}_{ol}e^{i\theta}$. Ensuite, on mélange les deux modes sur une lame séparatrice 50/50. Les transformations des opérateurs d'annihilation sont les mêmes que celles des quadratures données par l'équation 2.52 :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_s \\ \hat{a}_{ol}e^{i\theta} \end{pmatrix} \xrightarrow{50/50BS} \begin{pmatrix} \hat{a}_- \\ \hat{a}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{a}_s - \hat{a}_{ol}e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\hat{a}_s + \hat{a}_{ol}e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

On mesure ensuite les intensités \hat{I}_- et \hat{I}_+ dans les deux voies de sortie de la séparatrice :

$$\hat{I}_- = \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- = \frac{1}{2} \left[\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \hat{a}_{ol}^\dagger \hat{a}_{ol} - \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_{ol}e^{i\theta} - \hat{a}_{ol}^\dagger \hat{a}_s e^{-i\theta} \right] \quad (2.62)$$

$$\hat{I}_+ = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ = \frac{1}{2} \left[\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \hat{a}_{ol}^\dagger \hat{a}_{ol} + \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_{ol}e^{i\theta} + \hat{a}_{ol}^\dagger \hat{a}_s e^{-i\theta} \right] \quad (2.63)$$

Si, après mesure, on soustrait les deux photocourants, on récupère uniquement le terme d'interférence :

$$\delta\hat{I} = \hat{I}_+ - \hat{I}_- = \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_{ol}e^{i\theta} + \hat{a}_{ol}^\dagger \hat{a}_s e^{-i\theta} \quad (2.64)$$

L'état de l'oscillateur local est un état "classique" : ses fluctuations quantiques sont négligeables, et on peut remplacer l'opérateur \hat{a}_{OL} par sa valeur moyenne dans l'état $|\alpha\rangle$. L'action de cet opérateur $\delta\hat{I}$ dans le mode signal est donc déterminée par

$$\delta\hat{I}_s = \langle \alpha | \delta\hat{I} | \alpha \rangle = \alpha(\hat{a}_s^\dagger e^{i\theta} + \hat{a}_s e^{-i\theta}) \quad (2.65)$$

Or α est simplement la racine de l'intensité moyenne de l'oscillateur local I_{ol} , et l'opérateur $\hat{a}_s^\dagger e^{i\theta} + \hat{a}_s e^{-i\theta}$ n'est rien d'autre que $\sqrt{2}\hat{x}_\theta$, l'opérateur de quadrature que nous voulions mesurer :

$$\boxed{\delta\hat{I}_s = \sqrt{2I_{ol}}\hat{x}_\theta} \quad (2.66)$$

La différence des photocourants sera donc proportionnelle à la quadrature \hat{x}_θ que nous voulions mesurer. Le facteur de proportionnalité $\sqrt{I_{ol}}$ permet d'amplifier les fluctuations quantiques de cette quadrature pour les transcrire sur des fluctuations macroscopiques mesurables électroniquement.

Le fonctionnement d'une détection homodyne, illustré par la figure 2.8, semble donc relativement simple. Elle ne nécessite pas de détecteurs de photons uniques mais de simples photodiodes, et les manipulations optiques se réduisent à une interférence sur une lame 50/50. Les difficultés qui apparaissent en pratique seront discutées lorsque nous aborderons la mise en oeuvre expérimentale d'une détection homodyne impulsionnelle au chapitre suivant.

2.6.2 Algorithmes de reconstruction

Une fois que nous avons mesuré un nombre suffisant de distributions marginales P_θ , nous devons reconstruire la fonction de Wigner [53]. Trois méthodes seront utilisées dans ce travail de thèse.

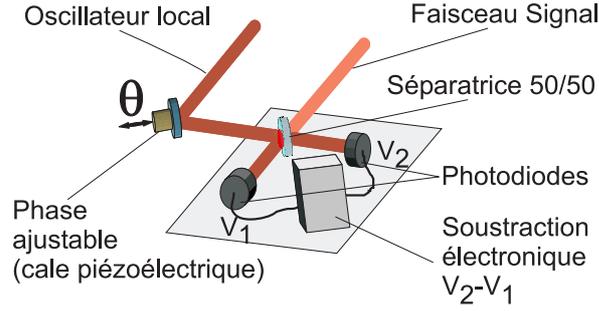


Figure 2.8: Principe de fonctionnement d'une détection homodyne.

Transformée de Radon

La première consiste à implémenter numériquement la transformée de Radon présentée plus haut (Eq. 2.27). Il est alors nécessaire d'introduire une fonction de lissage dans la transformée de Fourier, pour supprimer tous les bruits liés à l'expérience et à l'échantillonnage.

Maximum de vraisemblance (MaxLik)

La deuxième utilise l'algorithme du maximum de vraisemblance ("Maximal Likelihood", MaxLik) [54, 55, 56]. Comme son nom l'indique, c'est un algorithme itératif qui cherche à trouver la matrice densité ρ produisant les distributions de quadratures les plus proches de celles mesurées. Les données que nous mesurons sont triées par quadrature, et pour chaque quadrature divisées en histogrammes. Appelons \hat{A}_j les opérateurs correspondant à chacun des bins de chacun des histogrammes : la probabilité pour un point expérimental de tomber dans le bin j vaut $p_j = \text{Tr} \{ \hat{A}_j \hat{\rho} \}$. Comme on ne mesure bien sûr pas la totalité de l'espace de Hilbert (infini), on a $\sum_j \hat{A}_j = \hat{G} \neq \hat{I}$. Pour chaque état $\hat{\rho}$ les probabilités normalisées valent donc $p_j / \sum_{j'} p_{j'}$.

Supposons qu'à la fin de l'acquisition on ait N_j points par bin j : la probabilité d'un tel événement vaut

$$\mathcal{L} = \prod_j \left(\frac{p_j}{\sum_{j'} p_{j'}} \right)^{N_j}. \quad (2.67)$$

Pour trouver la matrice densité la plus probable, on doit donc maximiser cette vraisemblance par rapport à $\hat{\rho}$, c'est à dire aux p_j . Pour imposer la positivité de la matrice densité on peut poser $\hat{\rho} = \sigma^\dagger \sigma$. Le maximum de \mathcal{L} est alors donné par $d \log(\mathcal{L}) / d\sigma = 0$. En utilisant $d \log(p_j) / d\sigma = \hat{A}_j \sigma^\dagger / p_j$, on trouve alors

$$\frac{d \log(\mathcal{L})}{d\sigma} = 0 = \sum_j \frac{N_j}{p_j} \hat{A}_j \sigma^\dagger - \frac{\sum_j N_j}{\sum_j p_j} \hat{G} \sigma^\dagger. \quad (2.68)$$

En multipliant cette équation à droite par σ on obtient alors

$$\hat{R} \hat{\rho} = \hat{G} \hat{\rho}, \quad \hat{R} = \sum_j \frac{N_j / \sum_{j'} N_{j'}}{p_j / \sum_{j'} p_{j'}} \hat{A}_j \quad (2.69)$$

Ce résultat est somme toute assez logique : pour l'état optimal, les N_j sont proportionnels aux p_j . En combinant l'équation 2.69 avec son hermitien conjugué on trouve $\hat{R}\hat{\rho}\hat{R} = \hat{G}\hat{\rho}\hat{G}$, ou encore $\hat{R}_G\hat{\rho}_G\hat{R}_G = \hat{\rho}_G$, avec $\hat{R}_G = \hat{G}^{-1/2}\hat{R}\hat{G}^{-1/2}$ et $\hat{\rho}_G = \hat{G}^{1/2}\hat{\rho}\hat{G}^{1/2}$. On peut alors trouver l'optimum par itérations, en partant de $\rho^{(0)} = \hat{\mathbb{I}}$ et en définissant à la $(n+1)$ -ième étape

$$\hat{\rho}_G^{(n+1)} = \frac{\hat{R}_G^{(n)}\hat{\rho}_G^{(n)}\hat{R}_G^{(n)}}{\text{Tr} \left\{ \hat{R}_G^{(n)}\hat{\rho}_G^{(n)}\hat{R}_G^{(n)} \right\}}, \quad \hat{R}_G^{(n)} = \hat{G}^{-1/2}\hat{R}(\hat{\rho}^{(n)})\hat{G}^{-1/2} \quad (2.70)$$

La vraisemblance \mathcal{L} va croître jusqu'à atteindre le maximum, correspondant au point fixe de ces itérations. La matrice densité de l'état recherché est alors donnée par

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{G}^{-1/2}\hat{\rho}_G\hat{G}^{-1/2}}{\text{Tr} \{G^{-1}\}} \quad (2.71)$$

Cette division par \hat{G} ne peut se faire que si les états préparés dans nos expériences ne sortent pas du sous-espace engendré par les vecteurs propres de \hat{G} associés à des valeurs propres non nulles. En clair, on mesure des quadratures dans une certaine fenêtre centrée sur l'origine de l'espace des phases : si cette fenêtre était trop étroite, une partie des résultats se trouverait en dehors de notre champ de vision. Ces mesures correspondraient alors à des états $|\psi\rangle$ tels que, pour tout j , $A_j|\psi\rangle = 0$, donc $G|\psi\rangle = 0$: dans le sous-espace engendré par ces états, \hat{G} ne serait pas inversible. Par ailleurs, le binning des histogrammes devra être suffisamment fin pour résoudre les détails dans les structures des états que l'on génère : s'il est trop grossier l'algorithme pourra converger vers un état sensiblement différent. Le choix de la largeur et de la résolution des histogrammes suppose donc une certaine information *à priori* sur les états préparés dans l'expérience : considérer qu'ils sortent d'une "boîte noire" n'est pas raisonnable, ni d'ailleurs nécessaire. En pratique, les contraintes imposées sont très lâches par rapport à la réalité expérimentale : les états créés sont décrits avec 99.9% de fidélité en utilisant moins de 5 photons, alors qu'on étend l'espace de Hilbert à 20 photons pour la reconstruction. Dans ce cas l'ensemble des mesures est complet, et on peut simplement supposer $\hat{G} = \hat{\mathbb{I}}$.

L'avantage de cette méthode est de pouvoir incorporer les pertes homodynes : si elles sont connues, on peut inclure leur effet dans le calcul des p_j , et reconstruire ainsi la matrice densité corrigée, correspondant à l'état réellement préparé dans l'expérience.

Analyse sous contrainte par modélisation analytique

Cette méthode, développée dans le cadre de cette thèse, nécessite une connaissance *à priori* de la "forme" générale de l'état, mais permet une analyse physique bien plus riche que les méthodes numériques ci-dessus. Elle est basée sur une modélisation détaillée de notre expérience. En incluant toutes les pertes techniques, on peut montrer que nos fonctions de Wigner, ainsi que les distributions des quadratures, sont de la forme $P \times e^Q$, où P et Q sont des polynômes avec $\text{deg}(Q) = 2$ et $\text{deg}(P) \leq 4$. Si l'on admet que nos états ont cette forme, on peut facilement extraire les coefficients de ces polynômes à partir de quelques moments des distributions de quadratures mesurées. Ces coefficients permettent de reconstruire la fonction de Wigner, de corriger des pertes homodynes et d'accéder à certains paramètres

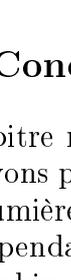
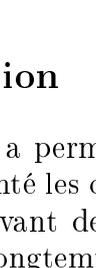
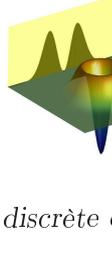
La lumière est :	Discrète  Photons	Continue  Onde
Pour la décrire, on s'intéresse à :	Leur nombre & leurs cohérences	Son amplitude & sa phase <i>OU</i> Ses quadratures x et p
On représente son état par :	La matrice densité 	La fonction de Wigner 
On reconstruit son état par :	Comptage : Tomographie discrète 	Démodulation : Tomographie homodyne 
Etats "simples à décrire" :	Les états de Fock	Les états gaussiens
En combinant les deux approches :	<ul style="list-style-type: none"> - Opérations non-gaussiennes sur des états gaussiens, - Mesures homodynes d'états non-gaussiens :  <p><u>Fonctions de Wigner négatives</u></p>	

Figure 2.9: Résumé : description discrète et continue des propriétés quantiques de la lumière.

expérimentaux difficiles à mesurer indépendamment. Nous développerons ce modèle sur un exemple simple, celui de la tomographie d'états de Fock $n = 1$ et $n = 2$ présentée dans la partie II.

2.7 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de dégager un schéma d'ensemble, présenté sur la figure 2.9. Nous avons présenté les outils conceptuels permettant de traiter les propriétés quantiques de la lumière suivant deux approches, discrète ou continue. Ces deux approches sont restées pendant longtemps disjointes. Un des objectifs de cette thèse est de montrer que leur combinaison permet de préparer des états quantiques très particuliers, intéressants aussi bien sur le plan fondamental que pour leurs applications.

Chapitre 3

Outils expérimentaux

Sommaire

3.1	Introduction	45
3.2	Création des impulsions ultrabrèves	47
3.2.1	Laser Titane-Saphir impulsionnel	47
3.2.2	Amplificateur d'impulsions femtoseconde à double passage	52
3.2.3	Outils de diagnostic	54
3.3	Transformations unitaires : optique linéaire et non-linéaire	56
3.3.1	Optique linéaire	56
3.3.2	Optique non-linéaire en régime impulsionnel	58
3.4	Détection et transformations projectives	66
3.4.1	Détecteurs de photons uniques	67
3.4.2	Détection homodyne	69
3.5	Conclusion	74

3.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que les états non-gaussiens de la lumière sont essentiels pour profiter pleinement du potentiel offert par l'information quantique. Dans ce chapitre, nous allons présenter les outils qui permettent de créer, transformer et mesurer de tels états. L'ensemble du dispositif expérimental devra répondre à deux exigences fondamentales :

- L'efficacité : Le taux de génération de ces états doit être suffisant pour une utilisation ultérieure, et pour que la reconstruction statistique de leurs fonctions de Wigner puisse se faire en un temps raisonnable,
- La qualité : ces états doivent être suffisamment purs pour conserver leur caractère non-classique, traduit par la négativité de leurs fonctions de Wigner.

Pour satisfaire ces deux contraintes, dans une large mesure contradictoires, le dispositif expérimental devra être construit de manière extrêmement cohérente. Certains de ses paramètres pourront sembler modestes par rapport aux références de la littérature. Il ne faudra pas conclure que les éléments concernés peuvent facilement être remplacés par de plus performants sans s'assurer de leur compatibilité avec le reste du dispositif : le plus souvent, améliorer un paramètre conduit à en dégrader d'autres. L'approche adoptée ici n'est certainement pas la seule possible, mais il faut garder à l'esprit qu'en modifier une partie peut conduire à revoir complètement l'ensemble.

Avant de commencer, nous pouvons nous demander quels sont les moyens dont on dispose pour créer des états non-gaussiens de la lumière, en gardant à l'esprit les conditions énoncées ci-dessus.

Le premier, et le plus évident, est d'utiliser "directement" une source de photons uniques déterministe : atome unique avec ou sans cavité [24, 25, 26], centre coloré du diamant [27, 28], boîte quantique [29], etc. Le principe de toutes ces sources est de reproduire plus ou moins fidèlement un système à deux niveaux, qui émet un photon en se désexcitant. Ces systèmes connaissent des développements spectaculaires, mais souffrent pour l'instant tous de faibles efficacités de collection. Ce défaut est rédhibitoire lors d'une tomographie homodyne : si l'on n'a qu'une faible certitude quant à la présence du photon, la fonction de Wigner reconstruite correspondra essentiellement à celle du vide.

Le deuxième consiste à utiliser des effets non-linéaires du troisième ordre, type effet Kerr. Cette méthode aurait le grand avantage d'être déterministe, et permettrait de préparer, par exemple, des superpositions quantiques d'états cohérents [57] autrement appelées "chats de Schrödinger optiques" (voir Partie III). Malheureusement, les coefficients $\chi^{(3)}$ des matériaux actuels sont bien trop faibles pour obtenir les effets désirés.

On peut se souvenir alors que les fortes non-linéarités requises pour le calcul quantique peuvent être remplacées par des mesures projectives dans des modes auxiliaires [21]. Nous adopterons donc une troisième approche, où le caractère non-gaussien est induit par des mesures dans la base de Fock, c'est à dire par comptage de photons. Ces mesures passeront nécessairement par une étape destructive, où le faisceau mesuré sera absorbé dans un détecteur. Nous devons donc les effectuer dans des modes auxiliaires, intriqués avec le ou les modes principaux où l'on cherche à créer notre état quantique.

La préparation de faisceaux suffisamment purs et intriqués sera une question centrale dans le choix du dispositif. À l'heure actuelle, la technique la plus performante et la plus simple à mettre en oeuvre est l'utilisation de cristaux non-linéaires $\chi^{(2)}$. Leurs non-linéarités sont faibles : pour observer des effets significatifs, il faut soit atteindre de fortes intensités crêtes en utilisant des impulsions ultrabrèves, soit placer ces cristaux dans des cavités résonantes pour multiplier le nombre de passages. Ces deux approches ont toutes les deux leurs avantages et leurs inconvénients. L'approche impulsienne que nous avons choisie s'est montrée jusqu'à maintenant très fructueuse, mais des résultats récents obtenus dans le domaine continu [58] en font une alternative avantageuse sur certains aspects. Nous y reviendrons dans la conclusion de ce chapitre.

3.2 Création des impulsions ultrabrèves

3.2.1 Laser Titane-Saphir impulsionnel

Les impulsions utilisées dans nos expériences doivent répondre à plusieurs critères.

- Longueur d'onde. Elle doit être choisie dans une gamme où les photodétecteurs existants présentent de fortes efficacités quantiques. Le régime idéal se situe dans le très proche infrarouge (800 – 900 nm). Les efficacités quantiques des photodiodes à silicium peuvent y atteindre 99,6% [58]. De plus, les faisceaux à fréquence double (400 – 450 nm) utilisés pour l'amplification paramétrique restent alors dans le domaine du visible et peuvent être manipulés avec des composants optiques standard.
- Durée. Il est aujourd'hui difficile de réaliser des impulsions plus longues que la picoseconde avec à la fois un bon taux de répétition et des puissances crêtes suffisantes pour obtenir de fortes efficacités de conversion dans les cristaux nonlinéaires. On utilisera donc des impulsions ultrabrèves (sub-ps). Cependant, lorsqu'elles sont trop courtes le désaccord de vitesse de groupe (GVM) dans les cristaux induit un décalage temporel entre les impulsions de fréquences différentes (voir plus loin). L'efficacité de conversion devient alors limitée par le produit puissance \times durée = énergie : réduire la durée de manière excessive n'améliore pas la conversion non-linéaire, et produit des impulsions trop sensibles à la dispersion et à l'étalement temporel dû au GVM. Compte tenu de ces considérations, une durée de 100 fs est un minimum raisonnable.
- Largeur spectrale. Le produit de la largeur spectrale par la durée des impulsions doit être le plus proche possible de la limite de Fourier. L'écart à cette limite peut traduire un glissement de fréquence ("chirp") qui devra être compensé pour maximiser la puissance crête. Il peut aussi correspondre à des impulsions multimodes dans le domaine temporel, ce qui se traduira sur la pureté des états quantiques préparés. Pour des impulsions de l'ordre de 100 fs, la largeur spectrale est de l'ordre de 10 nm. La bande de gain du milieu amplificateur doit être donc assez large.
- Énergie. L'énergie doit être suffisante pour obtenir de forts effets nonlinéaires dans les cristaux. Si l'on utilise des impulsions courtes, la longueur de ces cristaux doit être faible pour limiter les effets dispersifs. L'énergie des impulsions doit être par conséquence relativement élevée, de quelques dizaines de nanojoules au moins.
- Cadence de répétition. Elle doit être suffisamment élevée pour accumuler rapidement les données statistiques. Toutefois, elle ne doit pas dépasser les capacités d'analyse de l'électronique associée, limitées au mieux à la centaine de MHz.
- Mode spatial. Pour espérer produire des états monomodes dans le domaine spatial, le faisceau doit être le plus proche possible d'un mode gaussien fondamental TEM₀₀.

Certains de ces critères sont clairement contradictoires. Ainsi, il faudra faire un compromis entre le taux de répétition du laser et les énergies des impulsions produites. Or la plupart des sources impulsionnelles se trouvent plutôt dans un des deux extrêmes. Les oscillateurs standard, avec une cadence typique de 80 MHz, produisent des impulsions

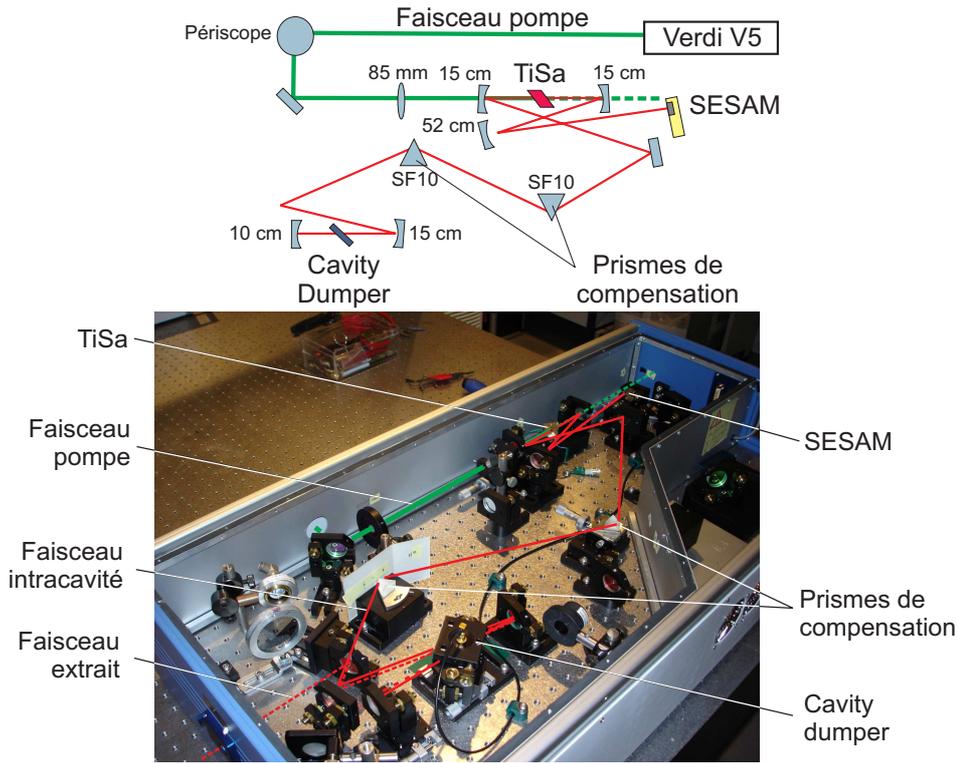


Figure 3.1: Laser impulsif Tiger CD.

trop peu intenses. Bien qu'ils aient permis de tomographier des états de Fock à un photon [59, 60], et un certain nombre d'états "dérivés" [61, 62], les taux de comptage sont trop faibles pour préparer des états plus complexes (pour une tomographie d'états de Fock à deux photons, le taux de comptage dans une expérience à 80 MHz était 3000 fois inférieur à celui obtenu dans notre cas [63]). À l'inverse, les amplificateurs régénératifs commerciaux sont souvent limités à une cadence trop lente (10 à 200 kHz).

Compte tenu de ces contraintes, la solution adoptée est un laser titane-saphir commercial *Tiger-CD* produit par *Time-Bandwidth Products*. Ce laser fonctionne en cavité fermée. Les impulsions, extraites de la cavité par une cellule de Bragg (cavity dumper) à une cadence de 780 kHz, ont des durées de 150 – 220 fs avec des énergies typiques de 50 nJ, ce qui correspond à une puissance moyenne de 40 mW et une puissance crête de 300 kW. Le produit temps-fréquence est $\Delta\tau_{FWHM} \cdot \Delta\nu_{FWHM} \approx 0,35$, relativement proche de la limite de Fourier 0,315 pour une un profil temporel en sécante hyperbolique. La longueur d'onde moyenne varie entre 845 et 852 nm. Nous présentons ici le fonctionnement et les paramètres de contrôle de ce laser.

Processus d'amplification

Le milieu amplificateur utilisé est un cristal de saphir dopé au titane, $\text{Ti}:\text{Al}_2\text{O}_3$. Ces cristaux ont une large bande de gain dans la domaine qui nous intéresse, entre 0,7 et plus de 1 μm . De plus, une forte densité de stockage d'énergie et une excellente conductivité thermique en font un matériau de choix dans les lasers impulsifs.

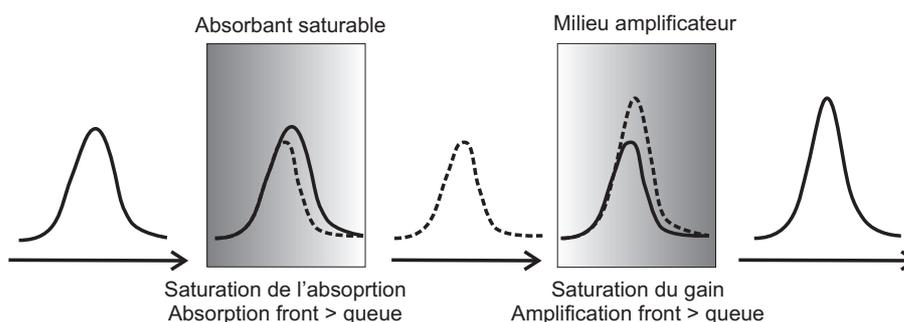


Figure 3.2: Amplification et rétrécissement temporel d'une impulsion dans un laser verrouillé par un absorbant saturable.

Ce cristal est pompé par un laser Nd:YAG doublé *Coherent Verdi V5*, produisant un faisceau continu à 532 nm. Ce laser a remplacé le laser de pompe *Melles-Griot 58 GLS 309* d'origine, dont le faisceau avait un profil spatial trop médiocre ($M^2 \approx 4$, contre 1,1 pour le Verdi). La puissance du laser de pompe nominale est de 5 W. En pratique elle est généralement limitée à 3 – 3,5 W : au-delà, des impulsions multiples apparaissent dans la cavité du laser femtoseconde. De même, la focalisation du laser de pompe dans le cristal de titane-saphir ne doit pas être trop importante pour limiter ce risque.

Verrouillage des modes par absorbant saturable semiconducteur

Pour des impulsions de 150 – 220 fs limitées par Fourier, la largeur spectrale typique est de 2 THz. Or pour une cavité de $L \approx 1$ m les modes sont séparés par un intervalle spectral libre $c/2L = 78$ MHz. Environ 30 000 modes doivent donc y coexister. Pour obtenir un fonctionnement impulsionnel, les phases de ces modes doivent être verrouillées. Dans ce cas, l'intensité de sortie correspondra à $I(t) = |\sum_k E_k e^{i\omega_k t}|^2$, plutôt que $I_{cw} = \sum_k E_k^2$ dans le cas continu. Le laser produira alors un train d'impulsions intenses correspondant aux moments où tous les modes sont en phase.

Il est donc nécessaire d'introduire un élément dans la cavité pour privilégier un fonctionnement impulsionnel. Dans notre cas, on utilise un absorbant saturable semiconducteur placé sur un des miroirs de fin de cavité (*SEmiconductor Saturable Absorber Mirror*, SESAM). Dans un tel milieu le faisceau laser incident excite une transition entre deux bandes énergétiques. L'absorption est proportionnelle à la différence de population entre les bandes, qui diminue lorsque l'intensité augmente : les pertes de la cavité sont plus fortes en régime continu qu'en régime impulsionnel, où les fortes intensités crêtes saturent le milieu absorbant. Le front montant d'une impulsion est ainsi absorbé avant que le milieu ne devienne transparent, et l'impulsion sera raccourcie. Dans le milieu amplificateur, où les populations sont inversées, un phénomène de saturation inverse se produit : le gain décroît avec l'intensité. Le front descendant de l'impulsion n'est donc pas amplifié car le milieu a été saturé par le passage de l'impulsion. Ces deux phénomènes amplifient les instabilités oscillantes de la cavité et raccourcissent les impulsions jusqu'à atteindre un régime stationnaire.

Lorsque les saturations de ces deux milieux sont convenablement choisies, une seule impulsion circule dans la cavité. Dans le cas contraire, il peut apparaître soit un "piédestal"

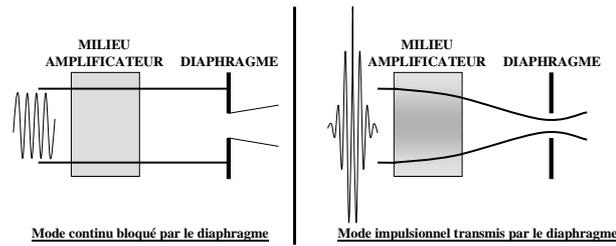


Figure 3.3: Verrouillage de modes par effet Kerr.

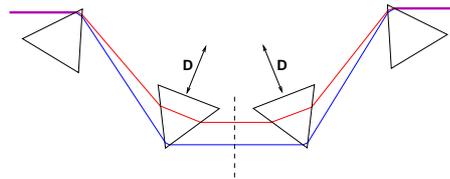


Figure 3.4: Compensation de la dispersion de vitesse de groupe à l'aide d'un train de prismes.

d'intensité réduite autour de l'impulsion principale, soit des impulsions multiples. En pratique, ces conditions sont réglées en ajustant la puissance et la focalisation du faisceau de pompe, ainsi que la position du SESAM.

Ce système de verrouillage de phase favorise "naturellement" la formation d'un soliton dans la cavité. Un autre moyen d'obtenir un fonctionnement impulsionnel est le blocage de modes par effet Kerr (*Kerr-lens mode locking*) illustré sur la figure 3.3. Cet effet non-linéaire du troisième ordre résulte en une augmentation de l'indice optique en fonction de l'intensité : $n = n_0 + n_2 I$. L'intensité étant plus importante au centre du faisceau que sur les bords, le milieu amplificateur agit comme une lentille qui focalise le faisceau. Cette focalisation est plus importante en régime impulsionnel, lorsque les intensités crête sont élevées, ce qui permet de privilégier ce régime à l'aide d'un diaphragme judicieusement placé. L'inconvénient principal de cette méthode de verrouillage est de nécessiter un processus de démarrage pour obtenir l'instabilité initiale.

Compensation de la dispersion de vitesse de groupe

Lorsque les impulsions se propagent dans un milieu dispersif, la diminution de l'indice optique avec la longueur d'onde provoque leur étirement : les composantes spectrales décalées vers le rouge sortent en avance sur celles décalées vers le bleu. On peut compenser cette dispersion avec un train de prismes, où le chemin optique augmente avec la longueur d'onde (Fig. 3.4). Dans notre cavité linéaire, en plaçant le miroir de fin de cavité au milieu du train de prismes, on peut réduire leur nombre de 4 à 2.

Extraction des impulsions par modulateur acousto-optique (*Cavity dumper*)

Comme nous l'avons mentionné plus haut, la cadence de répétition fondamentale de notre cavité est trop élevée pour obtenir des impulsions suffisamment intenses. La solution consiste à travailler en cavité fermée, pour permettre à l'impulsion de faire plusieurs passages

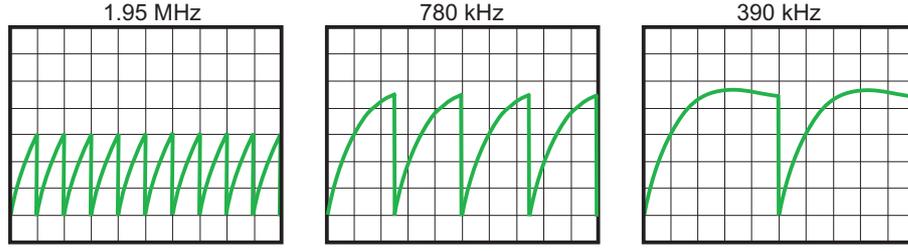


Figure 3.5: Intensité intracavité en fonction du temps, pour différentes fréquences d'extraction.

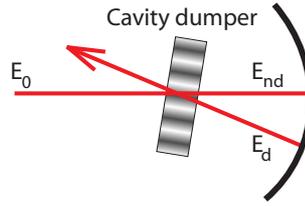


Figure 3.6: Extraction d'impulsions par cavity dumper à double passage.

dans le milieu amplificateur sans subir de pertes liées à l'extraction. Après un nombre de passages suffisant pour atteindre l'intensité de saturation, une cellule de Bragg (*Cavity dumper*) la défléchit vers l'extérieur de la cavité. Cette cellule (*Neos N13389*) est pilotée par un boîtier électronique (*Neos N64389-SYN*) qui permet de modifier la fréquence d'extraction des impulsions ainsi que la puissance, la phase et le moment d'émission de l'onde RF.

Si on place une photodiode sur une fuite de miroir de cavité, on peut observer le comportement de l'intensité en fonction de la fréquence d'extraction. A 1.95 MHz, les impulsions n'ont pas le temps d'atteindre l'énergie maximale. A l'inverse, à 390 kHz, on est dans un régime sur-critique : l'énergie dépasse légèrement la valeur de saturation, puis y redescend. Une fréquence de 780 kHz, où le niveau de saturation est atteint, correspond au meilleur compromis entre l'énergie des impulsions et le taux de répétition. Ainsi l'impulsion fera 100 tours dans la cavité, après quoi une photodiode rapide placée sur une fuite de miroir déclenchera le cavity dumper.

En principe, les modulateurs électro-optiques (cellules de Pockels) ont des efficacités plus élevées que les cellules de Bragg, mais ils sont trop épais et donc trop dispersifs, et leurs temps de réponse sont trop lents pour ce type d'applications. En réalité, une efficacité d'extraction suffisante peut être obtenue en plaçant le cavity dumper acousto-optique dans une configuration en double passage.

Le cavity dumper est situé au niveau d'un waist du faisceau, au centre de courbure du miroir de fin de cavité, en incidence de Brewster pour minimiser les pertes du faisceau. Il est orienté suivant l'angle de Bragg pour maximiser l'extraction dans l'ordre 1. La déflexion se fait dans le sens vertical. Après un premier passage, le champ incident $E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ est partiellement diffracté par une onde RF, caractérisée par sa fréquence Ω , son vecteur d'onde \vec{K} et sa phase ϕ . Le champ devient $E_0 \sqrt{\eta} e^{i((\omega + \Omega)t - (\vec{k} + \vec{K}) \cdot \vec{r})} + E_0 \sqrt{1 - \eta} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. Il est composé d'une première partie E_d , déviée avec une efficacité η , et d'une seconde

partie E_{nd} non déviée. Après réflexion sur le miroir sphérique de fin de cavité, ces deux faisceaux sont refocalisés dans la cellule acousto-optique. Une deuxième diffraction va alors se produire (avec nos conventions, dans l'ordre -1 cette fois). Le champ qui sera finalement extrait proviendra de l'interférence de deux termes : diffracté à l'aller mais pas au retour (provenant de E_d) + diffracté au retour mais pas à l'aller (provenant de E_{nd}) :

$$E_{out} = \sqrt{1-\eta}\sqrt{\eta}E_0e^{i(\omega+\Omega)t+i\phi} + \sqrt{\eta}\sqrt{1-\eta}E_0e^{i(\omega-\Omega)t-i\phi} \quad (3.1)$$

L'intensité extraite sera alors proportionnelle à

$$I_{out} \propto \eta(1-\eta) |E_0|^2 \cos^2(\Omega t + \phi) \quad (3.2)$$

Dans cette configuration, en ajustant la phase ϕ de l'onde RF, l'efficacité d'extraction est maximale pour $\eta = 50\%$. En pratique, on devra veiller à limiter la puissance de l'onde RF pour laisser dans la cavité une "graine" (*seed*) servant à la reformation d'une autre impulsion. Dans le cas contraire, après extraction d'une impulsion la suivante se reforme à un instant aléatoire, et le fonctionnement du laser devient chaotique.

La configuration en double passage permet également de supprimer la déviation indésirable d'impulsions précédant et suivant le signal RF. En effet l'enveloppe de l'onde RF n'est pas suffisamment étroite pour sélectionner une seule impulsion : la réponse de la cellule (temps de montée et de descente ≈ 7 ns) est trop lente par rapport au temps d'aller-retour dans la cavité (12 ns). Mais si ce temps correspond à un quart de la période de l'onde RF (ou plus généralement à $(2n+1)/4$ de cette période, avec n entier), le terme $\cos^2(\Omega t + \phi)$ dans l'équation 3.2 devient $\sin^2(\Omega t + \phi)$ pour les impulsions précédente et suivante. L'interférence est alors destructive au lieu d'être constructive, et ces impulsions ne sont pas déviées. Dans notre cas $n = 4$, ce qui correspond à une fréquence RF de 371 MHz.

3.2.2 Amplificateur d'impulsions femtoseconde à double passage

Les expériences présentées dans cette thèse ont été réalisées avec le laser seul. Mais les futurs développements de ce projet nécessitent d'augmenter le squeezing et l'intrication de nos états, et donc l'intensité des impulsions. Or les amplificateurs régénératifs, les plus couramment utilisés, ne peuvent fonctionner à des cadences aussi élevées, ce qui nous a conduit à développer un amplificateur femtoseconde spécifique [64]. Le travail de conception a été réalisé principalement par Julien Laurat, la mise en oeuvre et l'optimisation par Aurélien Dantan. Cet amplificateur à double passage fonctionne pour des cadences entre 0,2 et 4 MHz. Le gain brut atteint 17 à 780 kHz et dépasse 13 à 3,9 MHz. Compte tenu des pertes optiques ajoutées, on a ainsi pu obtenir des impulsions de 320 nJ à 780 kHz, ce qui correspond à un gain net de ≈ 10 .

Le schéma de notre amplificateur est présenté sur la figure 3.7. Le montage 1 a été utilisé pour les tests décrits ici. Le montage 2, plus compact, devrait être utilisé lorsque l'amplificateur sera finalement intégré au dispositif expérimental.

L'impulsion, légèrement étirée par un passage dans un isolateur de Faraday, est superposée sur un miroir dichroïque M1 avec un faisceau de pompe continu à 532 nm, produit par un laser *Coherent Verdi V18* qui peut délivrer jusqu'à 18,5 W de puissance. Ces faisceaux sont ensuite fortement focalisés (waist $\approx 20\mu\text{m}$) dans un cristal de titane-saphir

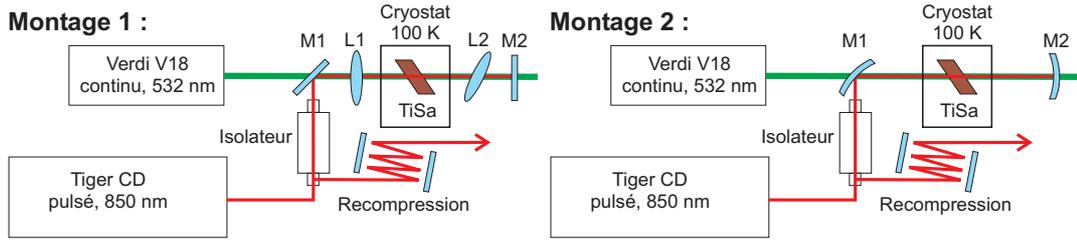


Figure 3.7: Schémas de l'amplificateur cryogénique double passage (Montage 1 utilisé pour les tests, Montage 2 pour l'implémentation finale).

(Ti:Sa) coupé à Brewster. Le faisceau infrarouge transmis est rétro-réfléchi par un miroir dichroïque M2 et refocalisé dans le cristal pour y être amplifié une seconde fois. Dans le montage 1, les focalisations se font à l'aide de lentilles L1 et L2 de focales $f = 75$ mm. Dans le montage 2, les miroirs dichroïques M1 et M2 sont concaves (rayons de courbure respectifs 150 mm et 75 mm) et permettent de focaliser directement le faisceau. L'incidence à l'angle de Brewster ajoute de l'astigmatisme sur le faisceau. Dans le premier montage il est compensé en ajustant l'angle de la lentille L2, dans le deuxième - celui du miroir concave M1. Après les deux passages d'amplification, l'impulsion IR est réfléchi par l'isolateur et recomprimée par 12 réflexions sur des miroirs à dispersion négative (*Lay-ertec*, $GVD \sim -1300 \text{ fs}^2$) jusqu'à la limite de Fourier. Ce dispositif de recompression est très compact par rapport à un train de prismes [65].

Le cristal de titane-saphir, produit par *Crystal Systems*, est fortement dopé ($\alpha_{532} = 7 \text{ cm}^{-1}$), et absorbe 88% du faisceau de pompe. Ainsi, 16 W de puissance de pompe sont absorbés dans un volume d'environ $0,05 \text{ mm}^3$, et le cristal doit être efficacement refroidi. Le refroidissement est réalisé dans notre cas par un cryostat à azote *Oxford Instruments CFV* sous un vide de 10^{-4} Pa , à une température d'environ 100 K. Le réglage grossier de la température se fait en contrôlant le débit d'azote, la stabilisation - à l'aide d'un contrôleur électronique. Bien que plus contraignante, l'utilisation d'un cryostat permet d'atteindre des températures plus basses qu'une cascade d'éléments Peltier [65], ce qui permet de travailler à des puissances plus élevées sans déformer le faisceau ni endommager le cristal. La nécessité de travailler à des températures cryogéniques s'explique par le fait que la conductivité thermique du titane-saphir à 100 K est 30 fois plus importante qu'à la température ambiante. Si la température de contrôle du support passait de 100 à 300 K, les variations thermiques dans le cristal passeraient de 10 K à plusieurs centaines de degrés, ce qui conduirait à son éclatement.

Le gain optimal s'obtient lorsque les deux faisceaux sont focalisés sur la face d'entrée du cristal. Ce réglage peut être fait en déplaçant le cristal pour l'amener au point de focalisation de la pompe, puis en translatant la deuxième lentille du télescope de mise en forme du faisceau IR incident pour superposer les deux points de focalisation.

La figure 3.8 (a) montre la dépendance du gain en fonction de la température, pour plusieurs puissances de pompe. Pour chacun des points de la courbe, l'adaptation des modes a été optimisée. On constate que pour chaque puissance de pompe il existe une température optimale, d'autant plus basse que la puissance est élevée. Ce comportement non-trivial peut être expliqué par la compétition de deux effets. D'une part, le

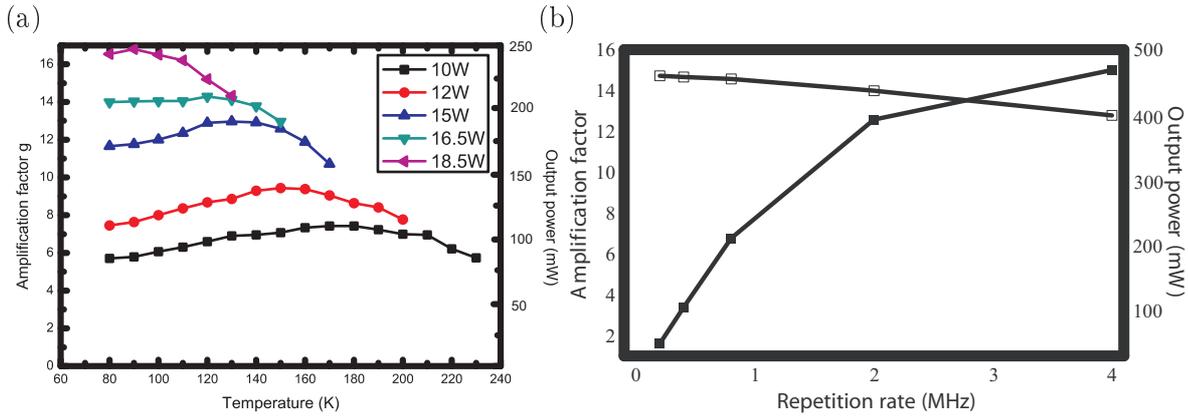


Figure 3.8: (a) Gain et puissance moyenne de sortie en fonction de la température du support du cristal, pour différentes puissances de pompe, avec un taux de répétition de 780 kHz. (b) Gain (□) et puissance moyenne de sortie (■) en fonction du taux de répétition, à une température de 110 K pour 15 W de puissance de pompe.

refroidissement diminue les effets thermiques. Ces effets détériorent l'adaptation modale des faisceaux, très critique compte tenu des fortes focalisations. De ce point de vue, la baisse de la température améliore le gain. Mais nos impulsions à 850 nm se situent du côté rouge du spectre d'émission du titane-saphir, qui présente un maximum vers 750 nm [66]. Or, en baissant la température de 300 K à 77 K, ce spectre se décale vers le bleu [67], ce qui conduit à une baisse du gain à 850 nm. Le gain optimal correspond donc à la température où ces deux effets s'équilibrent [64].

La figure 3.8 (b) illustre le comportement typique du gain et de la puissance de sortie en fonction du taux de répétition, pour une température de 110 K et une puissance de pompe de 15 W. Dans ce cas, le gain varie relativement peu, baissant de 14,7 pour 195 – 780 kHz à 13 pour 3,9 MHz. La saturation de la puissance de sortie s'explique essentiellement par la baisse de l'énergie des impulsions délivrées par le laser. À une puissance de pompe de 18.5 W, on atteint des gains de 17 pour 780 kHz. Compte tenu des pertes optiques ajoutées par l'amplificateur (principalement par l'isolateur de Faraday), le gain net à la sortie est ≈ 10 , ce qui correspond à des énergies de 320 nJ.

3.2.3 Outils de diagnostic

Puissance moyenne

On utilise une photodiode suffisamment rapide pour distinguer les impulsions les unes des autres, à 1,2 μs d'intervalle. Son signal est le principal critère d'optimisation du laser. Il permet de maximiser la puissance, mais aussi la stabilité du signal extrait. Normalement très régulier, il devient lentement fluctuant lorsque la phase de l'onde RF n'est pas correctement réglée, et bruité lorsque le déclenchement se fait de manière chaotique (mauvais réglage du moment de l'extraction, oscillation entre plusieurs modes de cavité, faisceau parasite heurtant la photodiode de synchronisation,...).

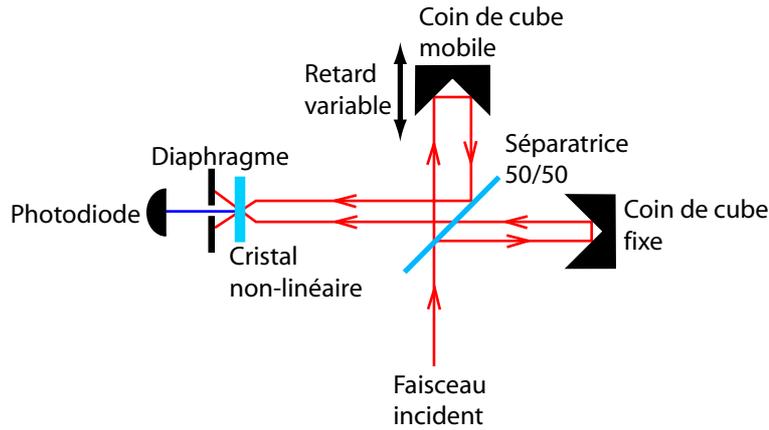


Figure 3.9: Principe de fonctionnement de l'autocorrélateur APE PulseCheck.

Profil spatial

Il est principalement surveillé à l'oeil, et de manière indirecte en vérifiant l'adaptation modale entre les différents faisceaux utilisés dans le montage. Sa dégradation provient généralement d'un mauvais réglage du cavity dumper, très rarement d'un mauvais alignement de la cavité.

Profil temporel

A défaut de pouvoir suivre directement l'évolution temporelle de l'impulsion à l'échelle de la femtoseconde, on utilise un dispositif classique d'autocorrélation (autocorrélateur commercial *PulseCheck 15* de la société *APE GmbH*, voir Fig. 3.9). Le faisceau incident est séparé entre deux bras terminés par des coins de cube. On peut alors régler le décalage spatial δ et temporel τ des faisceaux réfléchis. Leur superposition non-colinéaire dans un cristal $\chi^{(2)}$ produit alors un faisceau doublé avec une intensité $I_{2\omega}(\tau) = \int I_{\omega}(t)I_{\omega}(t + \tau)dt$, mesurée par un photomultiplicateur. Une translation linéaire balaye τ sur une durée allant de 150 fs à 15 ps, ce qui permet de reconstruire le signal $I_{2\omega}(\tau)$ et, en faisant une hypothèse sur le profil temporel de I_{ω} , remonter à sa largeur à mi-hauteur (*Full-Width Half Maximum, FWHM*). Pour un profil en sécante hyperbolique $\text{sech}^2 = \cosh^{-2}$, les largeurs à mi-hauteur sont liées par $\Delta t_{FWHM} = \Delta t_{FWHM, autocorr.}/1.543$. Deux jeux de cristaux et de photomultiplicateurs permettent de mesurer d'une part l'autocorrélation du faisceau infrarouge, d'autre part la corrélation croisée entre le faisceau IR à 850 nm et le faisceau bleu à 425 nm obtenu par doublage de fréquence et utilisé comme pompe dans l'amplificateur paramétrique (voir plus loin dans ce chapitre). La mesure peut se faire sur une large plage de longueurs d'onde, en ajustant électroniquement l'angle d'accord de phase. Il est également possible de travailler en configuration interférométrique ($\delta = 0$). Dans ce cas le profil du signal d'autocorrélation permet de détecter un étalement spectral éventuel de l'impulsion.

Outre les mesures de durée, cet appareil permet de détecter la présence d'impulsions multiples dans le faisceau. Le délai entre les deux bras de l'autocorrélateur peut être balayé manuellement sur une plage correspondant à $\approx 100ps$, ce qui est suffisant dans

la plupart des cas. Pour repérer des impulsions multiples à des délais plus importants, on utilise une photodiode rapide reliée à un oscilloscope DPO à 3,4 GHz : bien qu'il ne permette pas de résoudre des impulsions décalées de 100 ps, sa réponse présente alors un élargissement caractéristique.

Spectre

On utilise un analyseur de spectre optique *Anritsu MS900 1B1* avec une résolution de 0.1 nm. En mesurant la largeur spectrale à mi-hauteur $\Delta\nu_{FWHM}$ on accède au produit $\Delta\nu_{FWHM} \cdot \Delta t_{FWHM} \approx 0,35$, relativement proche de la limite de Fourier pour une impulsion en sécante hyperbolique (0,315). La mesure de la longueur d'onde moyenne est quant à elle nécessaire pour ajuster la température d'accord de phase des cristaux non-linéaires. L'approche inverse (régler la longueur d'onde du laser) est possible, mais assez délicate.

3.3 Transformations unitaires : optique linéaire et non-linéaire

Une fois que nous avons créé ces impulsions, nous devons les transformer pour préparer les états quantiques désirés. L'évolution d'un système quantique isolé est réversible et correspond à des opérations unitaires dans l'espace des états. En revanche, lorsque ce système interagit avec un appareil de mesure (ou avec son environnement) l'évolution est irréversible et se traduit par des projections dans l'espace de Hilbert.

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux transformations réversibles, qui peuvent être traduites en termes de matrices unitaires sur les quadratures. Elles sont effectuées à l'aide d'éléments d'optique linéaire passive (lames partiellement réfléchissantes, lames d'onde et cubes séparateurs de polarisation) et d'optique non-linéaire (cristaux $\chi^{(2)}$).

3.3.1 Optique linéaire

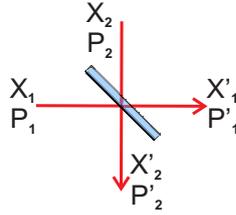
Déphasage

C'est certainement la transformation la plus simple que l'on puisse faire. Elle correspond simplement à la propagation du faisceau sur un chemin optique $\Delta L = \phi \frac{\lambda}{2\pi}$. La matrice correspondante s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Dans notre dispositif, les déphasages peuvent être activement contrôlés à l'aide de cales piézoélectriques (les modulateurs électro-optiques, bien que nettement plus rapides, introduiraient trop de dispersion).

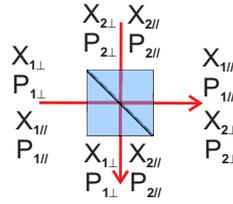
Lames partiellement réfléchissantes



$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ p'_1 \\ x'_2 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 & r & 0 \\ 0 & t & 0 & r \\ -r & 0 & t & 0 \\ 0 & -r & 0 & t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Ce sont des lames de verre dont le traitement diélectrique permet de réfléchir une fraction $R = r^2 = 1 - t^2$ de la lumière incidente. Elles ont généralement peu de pertes ($< 0,25\%$). Ces lames, comme les miroirs utilisés dans notre dispositif, sont traitées spécialement pour minimiser la dispersion d'impulsions ultrabrèves dans les couches diélectriques.

Cubes séparateurs de polarisation (PBS)



Ce sont deux prismes accolés, séparés par plusieurs couches de traitement diélectrique. Un faisceau polarisé horizontalement arrive sur ces couches en incidence de Brewster : il est transmis à travers le cube. La polarisation verticale est en revanche réfléchi. Il est pratiquement impossible d'obtenir à la fois un bon taux de réjection pour une polarisation (ce qui nécessite d'empiler des couches) et une bonne transmission pour l'autre (qui y est alors absorbée). Typiquement, ces composants ont des taux de réjection de 1/100 à 1/1000 pour des transmissions de 95 – 98%. Compte tenu de la sensibilité de nos expériences aux pertes, ils ne sont utilisés que lorsqu'ils sont indispensables.

Lames demi-onde ($\lambda/2$) et quart d'onde ($\lambda/4$)

Ce sont des lames biréfringentes, qui, en fonction de l'angle θ entre leur axe lent et la verticale, permettent respectivement de réaliser les transformations :

$$\begin{pmatrix} x'_1 + ip'_1 \\ x'_2 + ip'_2 \end{pmatrix}_{\lambda/2} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + ip_1 \\ x_2 + ip_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 + ip'_1 \\ x'_2 + ip'_2 \end{pmatrix}_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 - i \cos 2\theta & -i \sin 2\theta \\ -i \sin 2\theta & 1 + i \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + ip_1 \\ x_2 + ip_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Elles jouent un rôle similaire aux lames partiellement réfléchissantes, mais les modes mélangés sont cette fois-ci dégénérés spatialement et séparés en polarisation. Le grand avantage est de pouvoir contrôler non seulement leurs amplitudes, mais aussi les phases relatives. Ces déphasages restent alors fixes, car les deux modes subissent les mêmes fluctuations de chemin optique. Cette technique nous sera très utile par la suite, et permettra de nous affranchir de nombreux asservissements qui auraient été particulièrement délicats à mettre en oeuvre.

3.3.2 Optique non-linéaire en régime impulsif

Les transformations autorisées par l'optique linéaire correspondent toujours à des rotations dans l'espace des phases engendré par les quadratures impliquées, et préservent le caractère quasi-classique des états produits par le laser. Des propriétés spécifiquement quantiques peuvent être introduites par des non-linéarités optiques du second ordre.

La réponse non-linéaire d'un cristal $\chi^{(2)}$ correspond à un échange d'énergie entre deux modes de fréquences ω_s et ω_i appelés signal et complémentaire (*idler*), et un mode de fréquence $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ appelé pompe. Un photon à la fréquence ω_p peut être converti en deux photons à ω_s et ω_i (*parametric downconversion*) ou inversement (*parametric upconversion*). Un tel processus est décrit par un hamiltonien

$$\hat{H} = i\hbar\chi^{(2)}(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_i - \hat{a}_p\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger). \quad (3.6)$$

Pour que la conversion soit efficace, les ondes produites dans chaque volume élémentaire du cristal doivent interférer constructivement. En plus de la conservation d'énergie ($\omega_p = \omega_s + \omega_i$) on devra donc satisfaire la condition d'accord de phase, $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$. Pour obtenir cette égalité d'indice optique, on utilise des cristaux birefringents, dans lesquels l'indice est constant dans un plan (indice ordinaire n_o) et différent suivant l'axe orthogonal appelé axe optique (indice extraordinaire n_e). Pour une onde se propageant avec un angle θ avec l'axe optique, une des polarisations verra l'indice ordinaire, alors que la polarisation orthogonale correspondra à l'indice n tel que $\frac{1}{n^2} = \frac{\cos(\theta_{pm})^2}{n_o^2} + \frac{\sin(\theta_{pm})^2}{n_e^2}$. L'accord de phase s'obtient en ajustant l'angle du cristal et/ou sa température.

Dans notre cas les modes signal et idler seront dégénérés en fréquence, ce qui nous permettra d'utiliser leurs interférences dans un certain nombre de protocoles expérimentaux.

Pour que nos états quantiques puissent être préparés dans un mode bien déterminé, nos cristaux devront par ailleurs satisfaire les conditions suivantes :

- Fort coefficient non-linéaire, pour pouvoir limiter l'épaisseur du cristal tout en obtenant des effets significatifs.
- Faible dispersion de vitesse de groupe (GVD, *Group Velocity Dispersion*) pour minimiser la dispersion intrinsèque des impulsions dans le cristal.
- Faible désaccord de vitesse de groupe (GVM, *Group Velocity Mismatch*) pour que les impulsions pompe, signal et idler se propagent à la même vitesse. Dans le cas contraire, les "impulsions élémentaires" créées dans différentes tranches du cristal seraient certes en phase, mais décalées dans le temps, ce qui produirait finalement une impulsion "étalée" multimode.
- Faible décalage entre les directions de propagation des faisceaux (*walk-off*), qui aboutirait à un étalement spatial de l'impulsion.

Nous utilisons des cristaux de niobate de potassium KNbO_3 coupés perpendiculairement à l'axe cristallin a , traités antireflet à 850 et 425 nm (société *FEE GmbH*). Leur coefficient non-linéaire, $d_{eff} = \chi^{(2)}/2 \approx 12$ pm/V, est l'un des plus élevés connus à ce jour. Un autre avantage est l'absence totale de *walk-off*, grâce à un accord de phase non-critique ($\theta_{pm} = 90^\circ$). Cet accord de phase est de type I (*ooe*) : les modes signal et

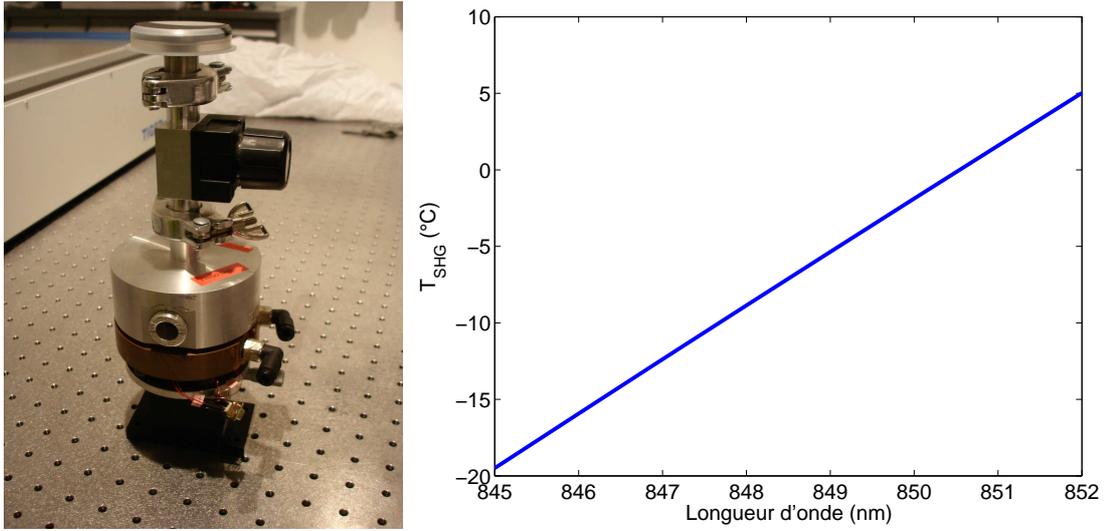


Figure 3.10: Enceintes à vide contenant les cristaux de KNbO_3 , et température d'accord de phase en fonction de la longueur d'onde (données de [68]).

idler sont tous deux polarisés suivant l'axe ordinaire b , le faisceau pompe - suivant l'axe extraordinaire c . Il est contrôlable en température, ce qui nous permet de privilégier l'un ou l'autre des processus d'amplification paramétrique utilisés (amplification dépendante ou indépendante de la phase). À température ambiante, l'accord de phase se fait pour $\lambda = 860$ nm. Or, en fonction des réglages du laser, nos impulsions sont centrées sur 845 – 852 nm. Conformément aux données de [68], l'accord de phase correspond alors à des températures allant de -15° à $+5^\circ$ C (voir Fig. 3.10). Les cristaux sont refroidis à l'aide d'éléments Peltier et placés dans des enceintes maintenues sous vide primaire pour éviter la condensation de l'humidité ambiante. L'inconvénient principal du KNbO_3 est le fort désaccord de vitesse de groupe : $\mathcal{D} = v_{g,2\omega}^{-1} - v_{g,\omega}^{-1} \approx 1.2 \text{ ps/mm}$. Pour limiter son effet sur l'élargissement d'impulsions d'environ 150 fs, nous devons utiliser des cristaux très fins, de 100 μm d'épaisseur.

Génération de Second Harmonique (GSH)

Pour préparer des impulsions à 850 nm dans des états comprimés ou intriqués, nous devons d'abord créer un faisceau pompe à la fréquence double. Pour cela nous utilisons un premier cristal de KNbO_3 maintenu à la température d'accord de phase dégénéré. Un faisceau infrarouge intense, correspondant à 96% de la puissance totale du laser impulsif, est focalisé dans ce cristal pour produire un faisceau pompe à une fréquence double par conversion de deux photons infrarouges à 850 nm en un photon bleu à 425 nm. L'efficacité de conversion maximale est obtenue pour un waist de 16 μm , ce qui correspond à un paramètre confocal (longueur de Rayleigh) $z_R \approx 1$ mm, très supérieur aux 0,1 mm d'épaisseur du cristal : on peut considérer que les fronts d'onde sont plans et la taille du faisceau reste constante lors de la conversion. Idéalement, cette efficacité devrait atteindre 90% [69] en un seul passage, mais en pratique elle ne dépasse pas 32%, et doit, le plus souvent, être baissée à 10 – 15% en diminuant la focalisation pour obtenir

des faisceaux suffisamment monomodes.

La déformation du mode spatial est en grande partie due aux effets photoréfractifs, importants dans le KNbO_3 [70]. Les forts champs électriques des impulsions conduisent à des déplacements permanents de charges dans le cristal. Les champs induits modifient localement l'indice de réfraction. Dans ces zones la condition d'accord de phase n'est pas respectée, et la diffraction détériore le front d'onde. Ces effets apparaissent après un certain seuil et s'établissent lentement. Pour un waist de $16 \mu\text{m}$ et des impulsions de 50 nJ , on observe une distorsion visible du faisceau doublé après $\sim 1 \text{ h}$ d'opération sur la même zone du cristal. Pour y remédier, on doit d'une part défocaliser le faisceau à des waists d'environ $40 \mu\text{m}$, d'autre part monter l'enceinte à vide sur une platine de translation pour pouvoir changer le point de fonctionnement dans le cristal.

Mais l'effet qui limite fondamentalement l'efficacité de conversion à 32% est selon toute vraisemblance l'absorption à deux photons. On constate en effet que lorsque l'on diminue la tâche de focalisation en-deçà de $16 \mu\text{m}$, l'efficacité de conversion diminue au lieu d'augmenter, alors que la longueur de Rayleigh reste toujours grande devant l'épaisseur du cristal. Le KNbO_3 présente une multitude d'effets non-linéaires qui pourraient conduire à un tel comportement, et nous avons réalisé plusieurs tests pour déterminer son origine :

- Lorsqu'on focalise fortement le faisceau (waist $w_0 = 8 \mu\text{m}$), le maximum de doublage s'obtient non plus lorsque le waist est au centre du cristal, mais décalé (voir figure 3.11). Lorsque le waist passe par le centre du cristal, la puissance du faisceau doublé diminue et son mode spatial se dégrade. Ce comportement persiste lorsque l'on tourne la polarisation du faisceau incident, en s'éloignant de l'accord de phase et en baissant ainsi la puissance du faisceau bleu à puissance IR constante. Il dépend donc de la puissance du faisceau IR et non du faisceau doublé, comme ce serait le cas pour le BLIIRA (*Blue Induced InfraRed Absorption* [71]), phénomène bien connu dans ce type de cristaux.
- Pour déterminer le temps caractéristique de l'apparition de cet effet, nous avons découpé le faisceau incident avec un hacheur mécanique. À forte focalisation, on constate alors que la puissance augmente après l'ouverture du hacheur, puis diminue en quelques dizaines de μs (voir figure 3.12). Cet effet disparaît lorsque l'on défocalise le faisceau. Il est peu probable que ce phénomène soit lié aux effets photoréfractifs : son temps d'évolution est trop rapide, et il est manifestement réversible (alors que dans le cas d'effets photoréfractifs les charges déplacées restent piégées).

L'hypothèse la plus plausible est l'apparition de gradients de température liés à l'absorption à deux photons. L'intensité est alors décrite par $\partial_z I = -\beta I^2$ où z est la direction de propagation et $\beta = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ m.W}^{-1}$ est le coefficient d'absorption à deux photons. En intégrant cette équation pour un faisceau gaussien avec un waist de $10 \mu\text{m}$, on trouve qu'environ 50% de l'intensité IR est absorbée. Cela suffit à expliquer la baisse de l'efficacité de conversion de 90% à 30% environ. Si, par ailleurs, on calcule le temps de diffusion caractéristique nécessaire pour dissiper l'énergie absorbée, on trouve environ $20 - 30 \mu\text{s}$, ce qui correspond bien aux résultats des mesures. Enfin, le gradient thermique à travers le faisceau (entre le centre et le waist) est alors d'environ 5° C , légèrement supérieur à l'acceptance thermique (la largeur spectrale de nos impulsions est de $4 - 5 \text{ nm}$, et la température d'accord de phase varie de 3° C/nm , voir Fig. 3.10) : ce gradient d'indice

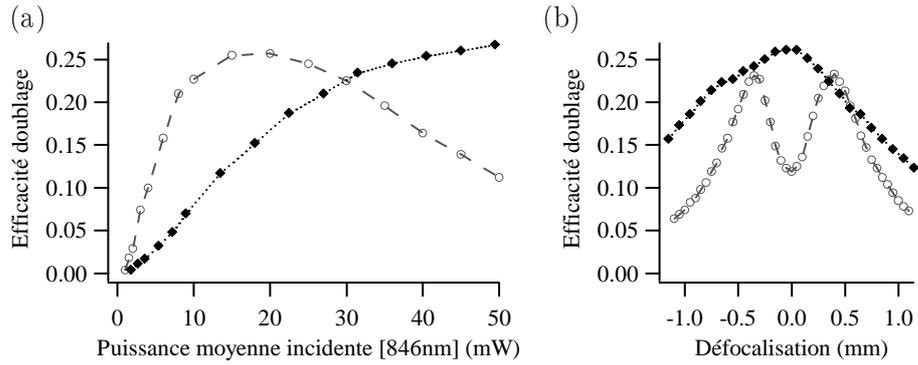


Figure 3.11: Efficacité de doublage (\circ : waist de $8\mu\text{m}$, \blacklozenge : waist de $16\mu\text{m}$) : (a) fonction de la puissance incidente, waist au centre du cristal; (b) fonction de la défocalisation, à puissance constante.

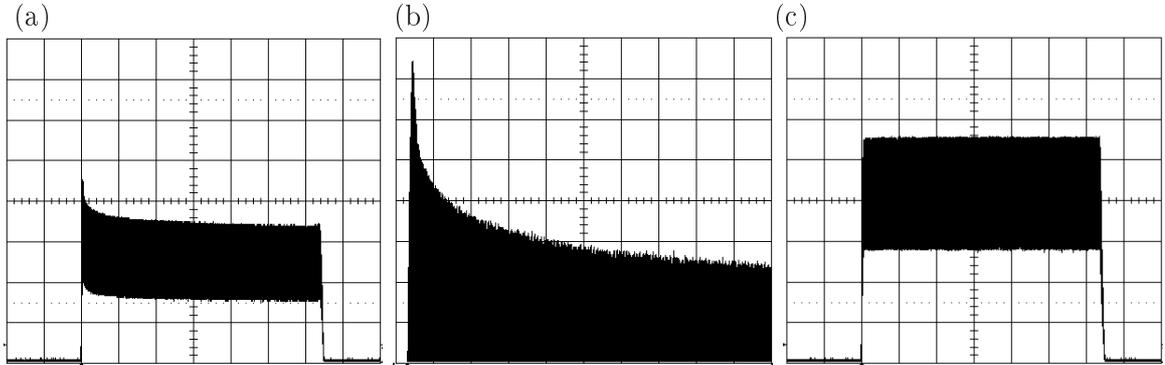


Figure 3.12: Variations temporelles de l'intensité du faisceau à 425 nm, obtenu par doublage d'un faisceau IR découpé par un hacheur mécanique (150 Hz), focalisé à un waist de $10\mu\text{m}$. (a) Waist au centre du cristal (échelle H : 0,5 ms/div, V : 1 V/div). (b) Agrandissement de (a) (H : 0,1 ms/div, V : 200 mV/div). (c) Faisceau défocalisé (H : 0,5 ms/div, V : 1 V/div)

contribue à la baisse du gain et à la distorsion du mode spatial. Les détails des calculs sont donnés dans l'Annexe C.

À la sortie du cristal, le faisceau est recollimaté. Une série de filtres permet d'éliminer la lumière IR résiduelle. Leur transmission globale est de 80% à 425 nm, et environ 10^{-16} à 850 nm. En effet, pour préparer des états ne contenant que quelques photons la probabilité de présence d'un photon résiduel à 850 nm doit être très inférieure à un, alors qu'après doublage il en reste typiquement 10^{11} . Après filtrage, la puissance moyenne à 425 nm peut atteindre 9 mW, mais elle est généralement limitée à ~ 4 mW pour limiter la distorsion. Ce faisceau bleu peut alors être utilisé pour pomper l'amplificateur paramétrique et préparer des états comprimés ou intriqués en quadratures.

Amplification Paramétrique Optique (OPA)

Le faisceau doublé est focalisé dans un deuxième cristal de KNbO_3 , utilisé comme amplificateur paramétrique optique. Nous pourrions considérer que la déplétion de la pompe est faible : elle se trouve dans un état cohérent $|\beta\rangle$ intense d'amplitude constante sur toute l'épaisseur du cristal. On peut fixer l'origine des phases de sorte que β soit réel. L'action des opérateurs \hat{a}_p et \hat{a}_p^\dagger dans l'hamiltonien 3.6 peut alors être approchée par $\hat{a}_p|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \approx \hat{a}_p^\dagger|\beta\rangle$, ce qui conduit, dans le cas où les modes signal et idler sont distincts, à un hamiltonien effectif

$$\hat{H}_{nd} = i\hbar\chi(\hat{a}_s\hat{a}_i - \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger). \quad (3.7)$$

Lorsqu'ils sont dégénérés, cet hamiltonien devient

$$\hat{H}_d = i\frac{\hbar\chi}{2}(\hat{a}_s^2 - \hat{a}_s^\dagger). \quad (3.8)$$

Nos cristaux minces permettent un passage facile d'une configuration à l'autre. En effet, si le cristal de l'OPA se trouve à la même température que le cristal de doublage, l'accord de phase correspond au régime dégénéré. Mais en baissant sa température de 5-6 °C, on favorise un régime où les vecteurs d'onde \vec{k}_s et \vec{k}_i des modes signal et idler s'écartent de l'axe optique d'environ 5°. L'amplification se fait alors dans deux modes dégénérés en fréquence mais séparés spatialement à la sortie du cristal.

Pour déterminer les effets de ces transformations sur les quadratures, le plus simple est de se placer en représentation de Heisenberg et de s'intéresser à l'évolution des opérateurs création/annihilation entre l'entrée et la sortie du cristal.

Dans le cas dégénéré, on obtient

$$\frac{d\hat{a}_s}{dt}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_s(t), H_d] = -\chi\hat{a}_s^\dagger(t) \Rightarrow \hat{a}_s(t) = \cosh(\chi t)\hat{a}_s(0) - \sinh(\chi t)\hat{a}_s(0)^\dagger, \quad (3.9)$$

ce qui conduit aux relations d'entrée-sortie pour l'OPA dégénéré :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_s \\ \hat{p}'_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2r} & 0 \\ 0 & e^{2r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_s \\ \hat{p}_s \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

où $r = \chi\tau$, τ étant le temps d'interaction (typiquement nl/c dans un cristal d'épaisseur l). On voit donc que la quadrature x est comprimée d'un facteur $s = \exp(-2r)$, et la quadrature p amplifiée de $1/s$. Si l'état d'entrée est le vide quantique, en appliquant $W_o(\vec{A}_o) = W_i(M^{-1}\vec{A}_o)$, on obtient un état de vide monomode comprimé suivant x d'un facteur s en variance (Éq. 2.50). Si on injecte un état cohérent intense, les mêmes facteurs interviendront dans la dépendance en phase de l'intensité moyenne de sortie.

Dans le cas non-dégénéré, les mêmes calculs conduisent à

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_s \\ \hat{p}'_s \\ \hat{x}'_i \\ \hat{p}'_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(r) & 0 & -\sinh(r) & 0 \\ 0 & \cosh(r) & 0 & \sinh(r) \\ -\sinh(r) & 0 & \cosh(r) & 0 \\ 0 & \sinh(r) & 0 & \cosh(r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_s \\ \hat{p}_s \\ \hat{x}_i \\ \hat{p}_i \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

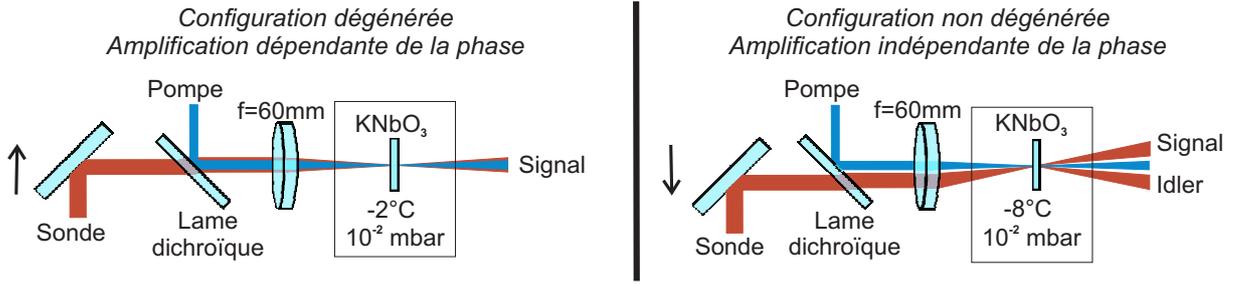


Figure 3.13: Alignement de l'OPA en configuration dégénérée et non dégénérée

Pour deux modes d'entrée vides, on obtient à la sortie un état de vide comprimé bimode, décrit au chapitre précédent (Éq. 2.54). Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_s - \hat{x}'_i \\ \hat{p}'_s - \hat{p}'_i \\ \hat{x}'_s + \hat{x}'_i \\ \hat{p}'_s + \hat{p}'_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_s - \hat{x}_i \\ \hat{p}_s - \hat{p}_i \\ \hat{x}_s + \hat{x}_i \\ \hat{p}_s + \hat{p}_i \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

On obtient bien le même état qu'en mélangeant deux vides comprimés sur une lame 50/50, mais cette approche a le grand avantage de ne nécessiter qu'un seul OPA et de s'affranchir de l'asservissement en phase entre les deux modes. Si l'on injecte un état cohérent d'intensité I_0 dans le mode de sonde, il sera amplifié avec un gain $G = \cosh^2(r)$ indépendant de la phase, et sera accompagné de l'apparition d'un faisceau idler d'intensité $I_0 \sinh^2(r)$.

L'analyse homodyne des états quantiques préparés sera décrite dans la section suivante. Mais la caractérisation de l'amplification paramétrique peut se faire en grande partie classiquement, en injectant un faisceau sonde.

En configuration dégénérée, le faisceau sonde est superposé à la pompe sur une lame dichroïque (Fig. 3.13). Il permet d'aligner l'ensemble du dispositif, et sélectionner le mode dans lequel on préparera nos états. Pour que les équations ci-dessus soient valables, il faut que le paramètre χ , c'est à dire l'intensité de la pompe, varie peu dans ce mode. La longueur d'interaction dans le cristal étant plus courte que la longueur de Rayleigh, on peut supposer les fronts d'onde plans : cette condition sur χ est alors satisfaite lorsque le waist de la pompe w_p est sensiblement plus grand que celui de la sonde w_s , pour pouvoir considérer la pompe comme une onde plane. Dans le cas contraire, le centre de la sonde sera plus amplifié que le bord, ce qui déforme le profil spatial et diminue l'efficacité d'amplification (GID, *Gain Induced Diffraction* [72]). On devra encore une fois trouver un compromis entre le gain, qui devient trop faible lorsque l'on augmente trop w_s , et la qualité du mode amplifié qui se dégrade lorsque w_s est trop petit.

Le gain dépendant de la phase est mesuré en balayant la phase de la sonde avec une cale piézoélectrique (signal triangulaire, fréquence ≈ 80 Hz, excursion $\approx 2 \mu\text{m}$), et en visualisant sur un oscilloscope la puissance moyenne mesurée avec une photodiode. Le gain oscille alors entre deux valeurs extrêmes, g_{min} et g_{max} , mesurées en valeur relative au signal en absence de pompe. La meilleure déamplification $g_{min} = 0,33$ a été obtenue avec

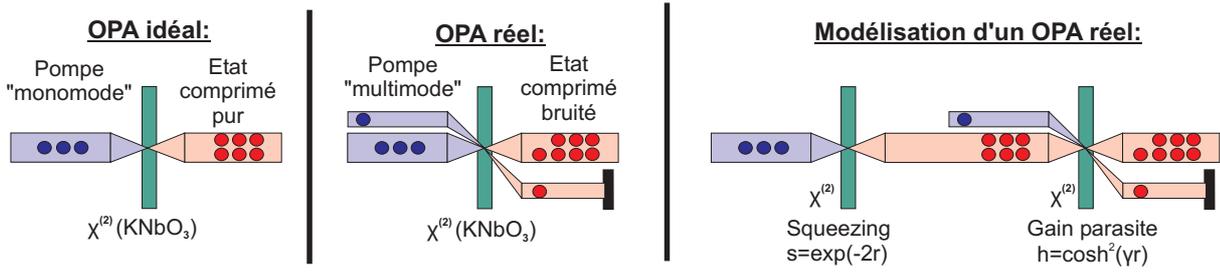


Figure 3.14: OPA idéal (photons IR appariés), OPA réel (photons "solitaires" produits par un mauvais recouvrement avec la pompe), et modélisation par un OPA dégénéré idéal (facteur de squeezing s) suivi d'un OPA non-dégénéré (gain h).

$w_s \approx 1, 2w_p$ [73], pour 8,2 mW de puissance de pompe. L'amplification correspondante vaut $g_{max} = 4.0$, ce qui donne $g_{min} * g_{max} = 1.3$, sensiblement différent du cas idéal où $g_{min} * g_{max} = e^{-2r} * e^{2r} = 1$.

Cette dissymétrie est très courante dans les expériences d'amplification paramétrique, mais dans notre cas elle est particulièrement problématique. En effet, elle traduit une diminution de la pureté des états comprimés préparés dans ce mode. Même un faible écart de $g_{min} * g_{max} = 1$, peu perceptible sur les mesures classiques de la sonde ou les mesures homodynes du vide comprimé, peut avoir des conséquences désastreuses sur la préparation d'états non-gaussiens. Il est donc nécessaire de limiter cet effet, de comprendre son origine, et de pouvoir en tenir compte dans nos calculs.

Pour l'essentiel, il provient d'un mauvais recouvrement entre la pompe et la sonde, lié à la fois au rapport entre leurs waists et à la qualité de leurs modes. Le rôle de ce recouvrement est illustré sur la figure 3.14. Supposons qu'on ait défini le mode étudié avec la sonde, et qu'on veuille y préparer un état de vide comprimé. Une pompe "monomode" produira des paires de photons indiscernables et préparera un état pur. Par contre, si son mode spatial est mauvais ou si son recouvrement avec la sonde est limité, pour certaines paires paramétriques un seul des deux photons sera présent, et l'autre sera perdu. Ces "photons solitaires" se traduiront par un excès de bruit dans ce mode.

Pour représenter ce phénomène, on peut décomposer le processus d'amplification en deux étapes, en considérant l'OPA réel comme un amplificateur dégénéré idéal produisant un état comprimé d'un facteur $s = e^{-2r}$, suivi d'un OPA non-dégénéré avec un gain $h = \cosh(\gamma r)$, où le facteur γ définit le rapport entre les efficacités des deux processus d'amplification. Avec cette hypothèse, les coefficients g_{min} et g_{max} évoluent comme

$$g_{min} = e^{-2r} \cosh^2(\gamma r) \quad \text{et} \quad g_{max} = e^{2r} \cosh^2(\gamma r). \quad (3.13)$$

En mesurant g_{min} et g_{max} on peut alors extraire r et γ par

$$r = \frac{\ln(g_{max}/g_{min})}{4} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\text{arccosh}((g_{min} * g_{max})^{1/4})}{r}. \quad (3.14)$$

Pour vérifier la pertinence de ce modèle, nous avons mesuré les variations du gain en fonction de la puissance de pompe dans le cas où celle-ci était fortement focalisée aussi bien dans le cristal de GSH (8,2 mW de puissance moyenne disponible) que dans l'OPA ($w_s \approx 1, 2w_p$). En utilisant les équations 3.14, on constate que γ reste constant,

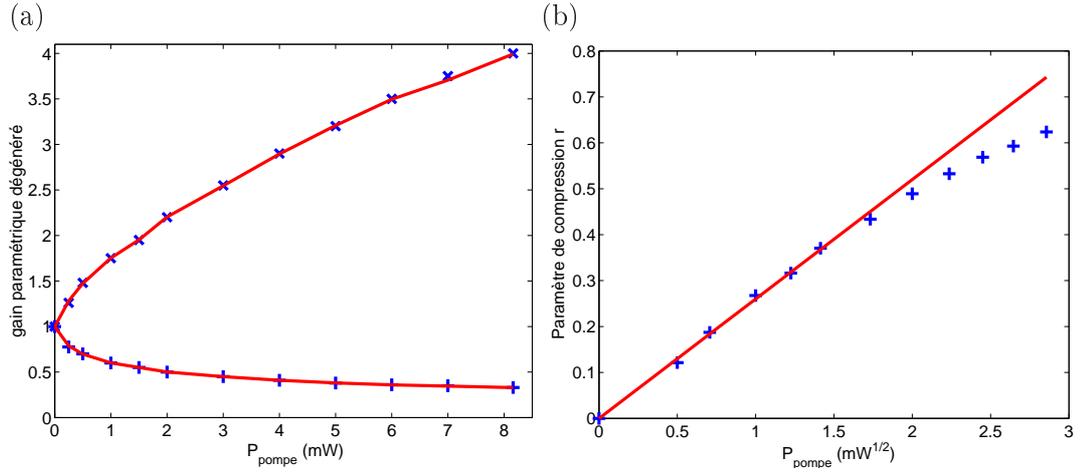


Figure 3.15: (a) Variations de l'amplification g_{max} , de la déamplification g_{min} et du carré du paramètre de squeezing r en fonction de la puissance de pompe. Les lignes continues correspondent à l'interpolation par les équations 3.13 avec $\gamma = 0,6$. (b) Variations du paramètre de compression r en fonction de la racine de la puissance de pompe. La pente de la droite initiale, $0,26 \text{ mW}^{-1/2}$, est obtenue à partir des six premiers points expérimentaux.

égal à $0,6 \pm 0,02$. La figure 3.15 présente les résultats expérimentaux, interpolés par les courbes déterminées à partir des équations 3.13 avec $\gamma = 0.6$. Le fait que γ ne varie pas montre que la distorsion éventuelle du mode spatial due à la GID reste limitée : le recouvrement entre la pompe et la sonde est le même à fort et à faible gain. En revanche, on constate que le carré du paramètre d'amplification r n'évolue pas linéairement avec la puissance de pompe. Théoriquement, $r^2 \propto \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle \propto P_{pompe}$ mais en pratique le coefficient de proportionnalité diminue lorsque P_{pompe} augmente, ce qui semble correspondre à une absorption multiphotonique.

Dans cette configuration l'efficacité relative de l'amplification parasite est importante ($\gamma = 0,6$). Pour préparer des états suffisamment purs nous devons diminuer la focalisation à la fois dans le cristal de doublage et dans l'OPA. On atteint alors des γ de $0,2 - 0,4$ suivant les expériences et les réglages, pour des puissances de pompe disponibles d'environ 4 mW.

Pour le passage en configuration non-dégénérée, une platine de translation permet de décaler latéralement le faisceau sonde. Le doublet de focalisation ($f=60 \text{ mm}$) convertit ce décalage en un angle d'environ 5° entre la pompe et la sonde (voir Fig. 3.13). En pratique, on décale le faisceau en réajustant le retard entre les impulsions jusqu'à ce que toute dépendance en phase disparaisse du faisceau amplifié. Le cristal de l'OPA peut être déplacé latéralement pour optimiser le point de fonctionnement et éviter l'accumulation de charges due aux effets photoréfractifs. Dans la configuration permettant d'obtenir le gain colinéaire maximal, le gain hors d'axe vaut $G = 1,43$ pour $P_{pompe} = 8,5 \text{ mW}$. En pratique, dans nos expériences il varie typiquement entre 1,05 et 1,20. La figure 3.16 illustre le comportement de G en fonction de la puissance de pompe, lorsque la focalisation dans les cristaux non-linéaires est relativement faible. On constate que G se comporte bien comme $G = \cosh^2(r) \cosh^2(\gamma r) \approx 1 + r^2(1 + \gamma^2) = 1 + \alpha^2 P_{pompe}$, où $\alpha = 0.21 \text{ mW}^{-1/2}$.

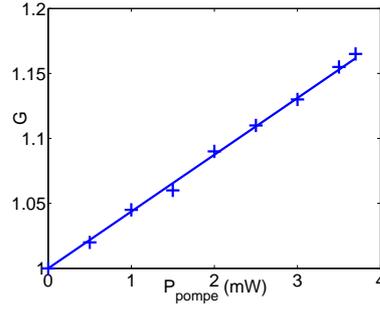


Figure 3.16: Variations du gain hors d'axe G en fonction de la puissance de pompe, lorsque les focalisations dans les cristaux non-linéaires sont réduites. Le gain se comporte comme $G = \cosh^2(r) \cosh^2(\gamma r) \approx 1 + r^2(1 + \gamma^2) = 1 + \alpha^2 P_{pompe}$, où $\alpha = 0.21$.

Par ailleurs on vérifie la puissance relative de l'idler varie bien en $G - 1$.

Dans cette configuration, le gain ne dépend pas de la phase et le recouvrement entre la pompe et la sonde est difficile à quantifier. En revanche, deux tests permettent de mettre en évidence l'absorption de la sonde infrarouge induite par la pompe bleue, le BLIIRA :

- On se place dans une configuration avec un gain non-collinéaire $G = 1,22$ ($P_{pompe} = 6,1$ mW). A l'aide d'une lame demi-onde on tourne la polarisation de la pompe de 90° pour détruire l'accord de phase. On observe alors qu'au lieu d'être amplifiée, la sonde est absorbée à 4,8%. Si on baisse la puissance de pompe pour obtenir $G = 1,11$, cette absorption n'est que de 2,5%.
- On revient à la configuration d'origine (amplification de $G = 1,22$), et on décale temporellement les impulsions. Lorsque la sonde arrive avec un retard d'environ 1 ps sur la pompe, elle est absorbée de 1,4%. Ce phénomène a donc une certaine persistance, mais il décroît rapidement : il n'apparaît pas lorsque la sonde est en avance sur la pompe, c'est à dire $\approx 1,2\mu s$ en retard sur l'impulsion de pompe précédente. En cela il diffère de l'échauffement par absorption à deux photons, qui apparaît lors du doublage de fréquence après quelques dizaines de μs .

Cette absorption est donc une raison de plus de limiter la focalisation de la pompe : pour nos états quantiques, 5% de pertes est un handicap considérable. En revanche, ce chiffre confirme que le BLIIRA n'est pas le principal responsable de la baisse d'efficacité du doublage, car l'intensité bleue est sensiblement la même dans le cristal de GSH et dans l'OPA.

À la sortie du cristal, un autre doublet de $f = 60$ mm permet de recollimater les faisceaux. On sépare le signal et l'idler et, à l'aide de caches, on élimine la pompe résiduelle. Ces deux faisceaux sont alors utilisés pour aligner le reste du dispositif, constitué de filtres et de systèmes de détection auxquels nous allons maintenant nous intéresser.

3.4 Détection et transformations projectives

Nous utiliserons deux types de détecteurs. Les détecteurs de photons (photodiodes à avalanche) réaliseront des mesures projectives induisant le caractère non-gaussien de nos

états. Les détections homodynes seront essentiellement utilisées pour reconstruire les fonctions de Wigner des états préparés, mais aussi pour transformer les états non-gaussiens initiaux en des états plus "exotiques".

3.4.1 Détecteurs de photons uniques

Les photodétecteurs sensibles au photon unique peuvent être rangés dans deux catégories :

- Les *détecteurs*, qui ne décèlent que la présence ou l'absence de photons,
- Les *compteurs*, capables dans une certaine mesure de distinguer le nombre de photons dans l'impulsion.

Jusqu'à maintenant, nos expériences ont pu être réalisées avec de simples détecteurs (photodiodes à avalanche), mais les développements futurs conduiront probablement à l'utilisation de compteurs : nous passerons rapidement en revue les principales technologies existantes, sans rentrer dans les détails techniques.

Photodiodes à avalanche (*Avalanche Photodiode, APD*)

Nos expériences utilisent des APDs commerciales, *Perkin-Elmer SPCM-AQR-13*.

Dans une photodiode à avalanche, une forte tension de polarisation inverse accélère les paires électron-trou créés par l'absorption d'un photon. Si les porteurs de charge acquièrent une énergie cinétique suffisante, ils peuvent entraîner la création d'une autre paire et déclencher ainsi un phénomène d'avalanche produisant un courant macroscopique converti en une impulsion TTL (pour éviter que l'avalanche ne s'amplifie au point de détériorer la diode, une électronique rapide permet de couper la tension de polarisation après déclenchement). Dans ce type de détecteurs il est impossible de distinguer les avalanches produites par un ou plusieurs photons. Ce ne sont donc pas des compteurs, ils permettent seulement de distinguer la présence ou l'absence de photons. Idéalement, une telle photodiode permet de réaliser la mesure projective suivante :

$$\begin{aligned}\text{Signal logique à } 0 &: \Pi_0 = |0\rangle\langle 0|, \\ \text{Signal logique à } 1 &: \Pi_1 = \hat{\mathbb{I}} - |0\rangle\langle 0|.\end{aligned}$$

En pratique, on doit tenir compte de plusieurs défauts :

- Efficacité quantique $\approx 45\%$, ce qui correspond aux valeurs typiques dans le proche infrarouge. L'efficacité globale sera encore abaissée par les systèmes de filtrage : dans notre cas, un signal logique à 0 ne pourra pas être considéré comme une mesure concluante.
- Coups d'obscurité (*Dark Counts*) $\approx 200/s$. En pratique, dans notre dispositif impulsif, les instants de détection seront synchronisés avec l'émission d'une impulsion par le laser. Comme une détection APD se traduit par un pulse TTL de 30 ns et les impulsions laser arrivent toutes les 1, 2 μs , on gagne un facteur ≈ 40 dans le taux de coups d'obscurité effectif : en pratique il est de 5–7 coups par seconde. De plus, des photons de l'oscillateur local réfléchis sur des dioptrés parviennent jusqu'aux APDs et font passer ce taux à 10–15 s^{-1} . Le taux de succès dans la préparation des

états conditionnés sur une mesure APD positive devra être très supérieur à ce taux effectif.

- Temps mort 50 ns, ce qui ne pose pas de problème pour nous.
- Emission de lumière après détection. Provoqués par le processus d'avalanche, ces flashes lumineux ne sont gênants que lorsque plusieurs APDs sont utilisées. Dans ce cas, la détection d'une APD pourrait automatiquement déclencher l'autre. En pratique, séparer suffisamment les APDs les unes des autres suffit à y remédier.

Pour pouvoir détecter plusieurs photons dans une même impulsion, on utilise un multiplexage spatial, en divisant le faisceau entre plusieurs APDs. Les photons se répartissant aléatoirement entre les détecteurs, cette méthode est bien entendu moins efficace qu'un "compteur" réel, mais dans notre cas on perd au plus un facteur 2 en efficacité.

Ainsi, les APDs peuvent être utilisées pour préparer des états conditionnés sur la détection de un ou plusieurs photons. Cependant, il faut garder à l'esprit que lorsqu'un certain nombre n de ces photodiodes réagissent simultanément, elles indiquent la détection de n photons *au minimum*. On devra absolument veiller à ce que la probabilité d'envoyer un photon de trop ($n + 1$ au lieu de n) vers les APDs soit faible, car la présence de ce photon excédentaire ne pourra pas être décelée.

Visible Light Photon Counters, VLPC

Ces compteurs utilisent un principe similaire aux APDs, mais les cascades électroniques sont mieux contrôlées : l'impulsion électronique produite par l'absorption de deux photons sera deux fois plus importante que pour un, etc. En pratique, ces détecteurs savent "compter" jusqu'à 5 environ. Leurs efficacités quantiques sont également élevées, avoisinant les 90%. En revanche, leur mise en œuvre nécessite un environnement cryogénique à 4 K. Pour plus de détails sur ce type de détecteurs, voir la référence [74].

Thermal Edge Sensors, TES

Dans ces compteurs calorimétriques, une électrode en tungstène est maintenue juste en-dessous de la température critique de la transition supraconductrice. Une élévation de température, proportionnelle au nombre de photons absorbés, conduit à une variation mesurable de la résistance électrique. Ils présentent une bonne résolution jusqu'à 4 photons, sans coups d'obscurité et avec des efficacités quantiques intrinsèques avoisinant les 90%. Mais ces détecteurs sont lents et fonctionnent à 100 mK [75].

Superconducting Single Photon Detectors, SSPD

Ils utilisent également une transition supraconducteur - conducteur résistif, cette fois-ci dans un fil mince disposé en méandres, parcouru par un courant constant. On détecte alors les pics de tension associés à l'apparition de zones résistives. Ces compteurs sont plus rapides mais moins efficaces que les TES [76, 77].

3.4.2 Détection homodyne

Supposons que, avec les outils que nous avons présentés, nous avons réussi à préparer des états non-gaussiens. Comment doit-on concevoir la détection homodyne pour reconstruire la fonction de Wigner?

L'analyse homodyne, depuis son avènement en optique quantique [78], est effectuée la plupart du temps dans le domaine fréquentiel, y compris avec des sources impulsives [79]. Elle consiste à isoler le signal dans une bande latérale étroite, généralement à quelques MHz de la porteuse, en s'affranchissant ainsi de nombreux bruits techniques à basse fréquence. De plus, dans un faisceau continu la porteuse peut être utilisée pour l'asservissement de phase.

Maintenant, revenons à notre expérience. On crée une impulsion ultrabrève, on prépare un état comprimé ou intriqué, et *lorsque* la photodiode à avalanche a émis un signal nous avons préparé l'état voulu. Ce "lorsque" est un signal temporel aléatoire, qui exclut la possibilité d'analyse fréquentielle. Il en serait de même si l'on essayait de transmettre un code ou un message inconnu variant au cours du temps. Nous devons donc travailler dans le domaine temporel, et concevoir un détecteur large bande qui puisse mesurer le champ de chaque impulsion. On souhaite qu'il ait un temps de montée rapide, et un temps de descente lent pour permettre la lecture du signal par une carte d'acquisition, sans pour autant "empiéter" sur l'impulsion suivante. On devra par ailleurs s'interroger sur le contrôle des phases lors des mesures, particulièrement lorsque plusieurs détections seront utilisées. Enfin, on veillera bien évidemment à maximiser le rapport signal sur bruit et à minimiser les pertes.

Influence des pertes

En optique quantique, les pertes ne peuvent être entendues comme une simple atténuation, et s'accompagnent toujours d'un ajout de bruit. En effet, lorsqu'un signal quantique s subit des pertes linéaires (ce qui sera notre cas), une atténuation d'un facteur η en intensité se traduit, en termes d'opérateurs, par

$$\hat{a}'_s = \sqrt{\eta}\hat{a}_s + \sqrt{1-\eta}\hat{a}_0 \quad (3.15)$$

L'atténuation de l'amplitude du signal par $\sqrt{\eta}$ s'accompagne de l'introduction d'un mode vide \hat{a}_0 décorrélié du signal, nécessaire pour préserver le commutateur $[\hat{a}'_s, \hat{a}'_s^\dagger] = 1$. En se souvenant de l'équation 3.4, on constate que l'équation 3.15 correspond simplement à la transmission du signal à travers une lame partiellement réfléchissante avec $t = \sqrt{\eta}$ et $r = \sqrt{1-\eta}$. Une partie du signal est alors réfléchi, perdue dans l'environnement, alors qu'un mode de vide quantique est injecté par le deuxième port d'entrée de la lame. Les trois principales sources de pertes homodynes pourront être modélisées de cette manière.

- Pertes optiques. Elles résultent principalement des imperfections des traitements antireflet, et résultent en une transmission en intensité η_{opt} .
- Mauvaise adaptation des modes signal et oscillateur local (*mode-matching*). Schématiquement, on peut décomposer le mode signal en un mode interférant parfaitement avec l'oscillateur local, et un mode orthogonal : $\hat{a}_s = \eta_{mod}\hat{a}_{ol} + (1-\eta_{mod})\hat{a}_\perp$, ce qui correspond à une transmission η_{mod}^2 . L'efficacité d'adaptation η_{mod} ainsi définie

correspond à la visibilité des franges d'interférence lorsque les deux modes sont préparés dans des états cohérents de même intensité. Elle est donc facile à mesurer expérimentalement à l'aide de la sonde. Un traitement plus complet est donné dans [80].

- Efficacité quantique des photodiodes. L'efficacité quantique η_{quant} est définie par le nombre moyen de porteurs de charge créés par un photon incident. En cela elle se traduit également comme un rapport d'intensités, et peut être modélisée par une lame de transmission η_{quant} .

L'efficacité globale de la détection homodyne vaut alors $\eta = \eta_{mod}^2 \eta_{opt} \eta_{quant}$ [80].

Influence du bruit de l'oscillateur local

L'intensité de l'oscillateur local est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle du faisceau à mesurer, qui ne contient que quelques photons. On peut donc craindre qu'un excès de bruit classique noie complètement le signal. Mais il ne faut pas oublier que la mesure homodyne multiplie l'amplitude des fluctuations quantiques par $\sqrt{I_{ol}}$: $\delta I_s = \sqrt{2I_{ol}} \hat{x}_\theta$. Lorsque la détection est bien équilibrée, les calculs du chapitre précédent qui ont conduit à cette équation restent valables, et une fluctuation δI_{ol} de l'intensité de l'oscillateur local affecte le signal mesuré comme $\delta I_s = \sqrt{2(I_{ol} + \delta I_{ol})} \hat{x}_\theta$. Si ces fluctuations restent faibles devant la valeur moyenne I_{ol} , elles peuvent donc être négligées.

Influence d'un déséquilibre

Dans le signal homodyne, le terme d'interférence correspondant à la mesure de \hat{x}_θ n'est dominant que lorsque les intensités des deux voies sont bien équilibrées. Supposons qu'un léger déséquilibre apparaisse, et que la séparatrice 50/50 ait en réalité une transmission $T = t^2 = \frac{1}{2} + \epsilon = 1 - r^2$. Il est alors facile de modifier les équations 2.62 à 2.64 pour obtenir la différence des intensités déséquilibrées au premier ordre en ϵ :

$$\delta \hat{I}(\epsilon) = \delta \hat{I}(0) + 2\epsilon(\hat{a}_{ol}^\dagger \hat{a}_{ol} - \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s) \quad (3.16)$$

où $\delta \hat{I}(0)$ correspond au cas équilibré donné par l'équation 2.64. Comme l'oscillateur local est préparé dans un état cohérent intense alors que le signal ne contient au mieux que quelques photons, l'action de cet opérateur dans le mode signal est, en très bonne approximation,

$$\delta \hat{I}_s(\epsilon) = \sqrt{2I_{ol}} \hat{x}_\theta + 2\epsilon I_{ol} \quad (3.17)$$

Comme $\Delta x_\theta \gtrsim 1/\sqrt{2}$, l'effet du déséquilibre est négligeable lorsque $\epsilon \ll \frac{1}{2\sqrt{I_{ol}}}$. De ce point de vue, plus l'oscillateur local est intense et plus l'équilibrage devient difficile. Son intensité devra cependant être assez importante pour que le bruit quantique soit très supérieur au bruit électronique du détecteur. Dans notre cas, les puissances moyennes nécessaires sont de l'ordre de $20\mu W \equiv 10^8$ photons par impulsion, ce qui impose un équilibrage meilleur que 10^{-4} . Cette contrainte est la plus exigeante pour la conception pratique de notre système.

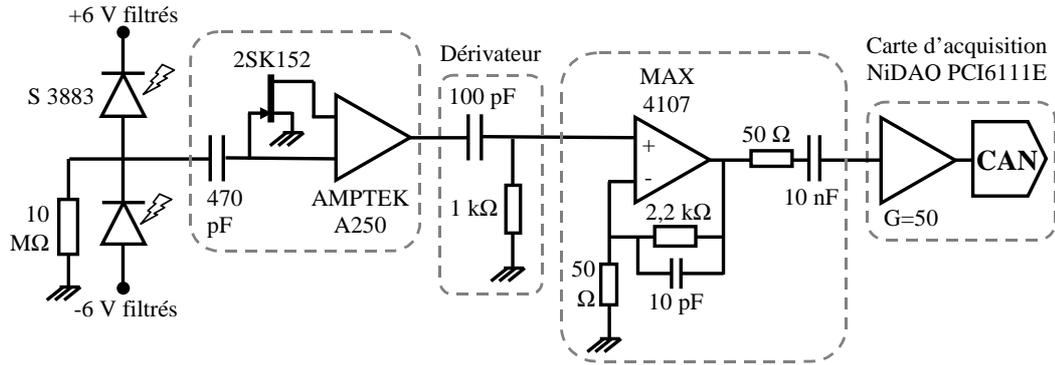


Figure 3.17: Schéma électronique de la détection homodyne à amplification de charge

Montage électronique : Détection à amplification de charge

Compte tenu des considérations précédentes, notre détecteur doit avoir une efficacité quantique la plus proche de 1, un fort gain, une bande passante allant du DC à quelques MHz pour résoudre les impulsions individuelles à 800 kHz, et présenter un bruit équivalent très inférieur aux fluctuations quantiques que l'on s'attend à mesurer, de l'ordre de $\sqrt{I_{ol}} = 10^4$ photons par impulsion.

Le schéma électronique du détecteur homodyne est présenté sur la figure 3.17. La détection du faisceau lumineux se fait à l'aide de photodiodes silicium Hamamatsu S3883, choisies pour leur rendement quantique élevé (94.5%), leur courant d'obscurité faible (28 pA) et leur rapidité. Elles sont polarisées en inverse à $\pm 6V$. Les tensions de polarisation sont réglables pour égaliser les capacités parasites. Le bruit équivalent est de $6.7 * 10^{-15} W / \sqrt{Hz}$. Les photocourants issus des photodiodes sont directement soustraits par la loi des noeuds avant d'être amplifiés : dans le cas contraire, les gains importants conduiraient à des déséquilibres entre les voies et des saturations.

Cette différence de courants est convertie en tension par un amplificateur de charge *Amptek A250*, spécialement conçu pour la détection de très faibles courants. La différence des photocourants conduit à l'accumulation d'une charge sur une capacité de 470 pF (très supérieure aux capacités parasites des photodiodes, 6 pF pour une polarisation de 6 V), mise à la terre à travers une résistance de 10 MΩ pour éviter une saturation en cas de mauvais équilibrage. Cette charge est ensuite convertie en tension avec un gain de 0,16 $\mu V/e$ par l'amplificateur *Amptek* associé à un transistor FET 2SK152. Pour revenir à la mesure des intensités (donc des photocourants) la tension à la sortie de ce premier étage passe par un dérivateur. Un second étage basé sur un amplificateur opérationnel *Maxim MAX4107* multiplie ce signal par un facteur 44. La réponse typique à un signal déséquilibré, présentée sur la figure 3.18, a un temps de montée rapide (6 ns) et un temps de descente lent (100 ns), ce qui correspond à une bande passante d'environ 10 MHz.

Ce système présente un niveau de bruit typique de 2,5 mV en écart-type, soit 960 électrons de bruit équivalent à l'entrée, pour un gain de 2,60 $\mu V/e$. Le bruit des photodiodes ainsi que celui du deuxième étage est négligeable : les sources principales sont l'amplificateur *Amptek* (200 électrons RMS), la résistance de mise à la terre de 10MΩ (200 électrons RMS) et les rayonnements parasites.

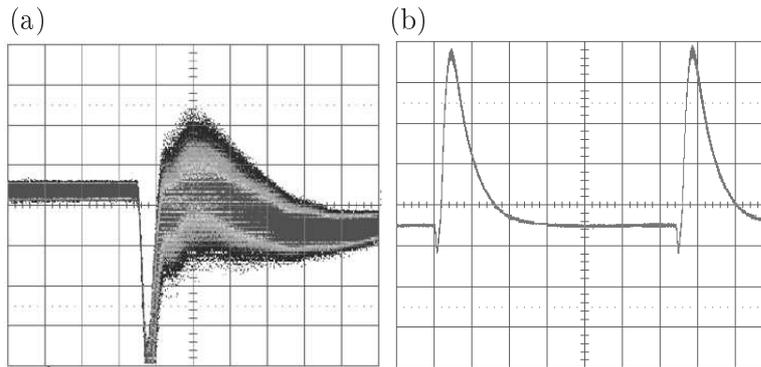


Figure 3.18: Réponse homodyne typique : (a) Lorsque les voies sont équilibrées (échelle H : 50 ns/div, V : 50 mV/div); (b) Lorsque les voies sont déséquilibrées (H : 200 ns/div, V : 500 mV/div).

Acquisition

Une carte *National Instruments PCI-6110* permet d'acquérir jusqu'à 5 millions de points par seconde sur quatre voies analogiques, avec un bruit négligeable (écart-type de 0,1 mV, contre 2,5 mV pour la détection homodyne). On utilise habituellement un gain de 50, ce qui permet d'échantillonner sur 12 bits la plage $V_{out} = \pm 200$ mV. L'acquisition est déclenchée par une impulsion TTL provenant du laser, synchronisé avec l'arrivée de l'impulsion optique grâce à une ligne à retard, au moment où le signal se stabilise après une ou deux oscillations initiales dues à une légère différence dans les temps de réponse des deux voies (voir figure 3.18). L'acquisition est contrôlée par des programmes dédiés à chaque expérience, basés sur le code développé par Jérôme Lodewyck [81]. Ces programmes, écrits en *C*, stockent les données dans deux buffers : l'un est transféré et analysé pendant que l'autre se remplit. On peut ainsi traiter les données en temps réel.

Montages optiques monomode et bimode

Le montage optique doit permettre un équilibrage fin des voies, tout en introduisant le moins de pertes possible. Cette dernière considération incite à adopter deux configurations légèrement différentes pour les tomographies monomodes et bimodes, présentées sur la figure 3.19. Il faut garder à l'esprit que quelques pourcents de pertes sur les états quantiques ont des effets très visibles : les détails techniques présentés ici ont pour but d'illustrer le degré de sensibilité de ce type d'expériences.

Dans le cas monomode, le signal et l'oscillateur local, tous deux polarisés verticalement, interfèrent sur une lame 50/50 non polarisante, qui présente dix fois moins de pertes qu'un PBS (0,25% contre 2–3%). Lors du montage, l'angle d'incidence est réglé pour ajuster la transmission à $50 \pm 0,5\%$. Les faisceaux sont focalisés sur les photodiodes, attaquées à 45° , par des lentilles de focales $f = 100$ mm montées sur translations. Pour l'équilibrage fin des deux voies, qui nécessite une modulation d'intensité inférieure au pourcent, il suffit de faire varier la polarisation incidente, ce qui permet de modifier d'environ 3% le coefficient de réflexion sur les surfaces des photodiodes. Pour minimiser les pertes, on reste dans la

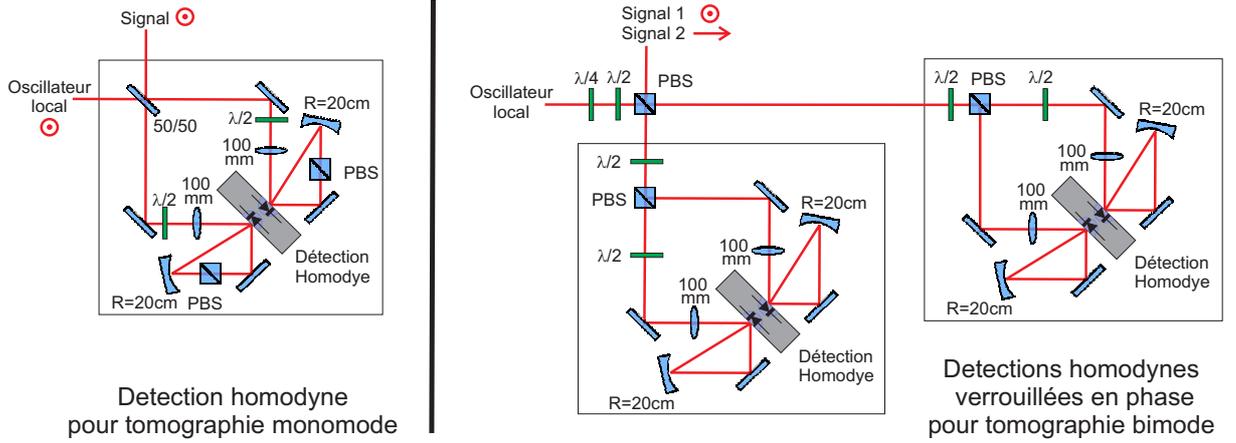


Figure 3.19: Montage optique d'une détection homodyne optimisée pour une tomographie monomode, et deux détections homodynes passivement verrouillées en phase pour une tomographie bimode.

mesure du possible en polarisation p (horizontale) : l'incidence à 45° nous rapproche ainsi de l'angle de Brewster. Les lames $\lambda/2$ doivent alors être placées après les miroirs, qui ont 1% de pertes en polarisation p (sans pertes en polarisation s). Pour augmenter davantage l'efficacité, les faibles réflexions sur les photodiodes (de 1 à 3% suivant la polarisation) sont renvoyées dessus par des miroirs concaves (rayon de courbure $R = 20$ cm) après avoir traversé des PBS : dans ce cas, ce sont eux qui assurent la modulation d'intensité nécessaire à l'équilibrage, mais leurs pertes n'affectent plus que 1 – 3% du faisceau. On doit faire attention à l'angle d'incidence des réflexions renvoyées sur les photodiodes : si l'on est proches de 45 ou 90° , un peu de lumière rétro-réfléchi remonte le chemin optique et vient déclencher les APDs. Lorsque la détection est bien réglée, on observe que les réponses des deux voies sont environ 2,5% plus importantes dans cette configuration que lorsque les photodiodes sont attaquées en incidence normale. Leur efficacité quantique effective passe donc de 94,5% à $\eta_{quant} = 97\%$. Par ailleurs, la transmission optique de ce système est de 97%, et l'adaptation de modes typique est de 92 – 93%, ce qui donne une efficacité globale $\eta \approx 80\%$.

Dans le cas bimode, le montage est conçu pour permettre un verrouillage passif des phases relatives entre les deux détections, difficile à faire activement en absence de porteuse.

Les deux modes à analyser sont dans ce cas dégénérés spatialement et séparés en polarisation (mode s_1 vertical, mode s_2 horizontal). Ils sont mélangés sur un PBS avec un oscillateur local commun préparé dans une polarisation elliptique. Un jeu de lames $\lambda/4$ et $\lambda/2$ permet d'obtenir, à partir d'un faisceau polarisé verticalement, deux oscillateurs locaux avec la même intensité et un déphasage θ entre les deux polarisations. Pour cela, les axes des lames sont tournées respectivement de $\theta_1 = \theta/2$ et $\theta_2 = \pi/8 + \theta/2$ par rapport à la verticale :

$$U_2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4} \right) U_4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

où les transformations unitaires U_2 et U_4 sont définies par Eq. 3.5. Les modes s_1 et s_2

sont maintenant séparés spatialement, et la phase relative des quadratures mesurées est fixée. Nous verrons plus loin que les autres fluctuations de phase, lorsqu'elles jouent un rôle, peuvent être contrôlés facilement.

Pour chacun de ces modes, un ensemble $\lambda/2 + \text{PBS}$ permet de réaliser une séparation 50/50 équilibrée. La polarisation du mode transmis à travers le PBS est remise à la verticale pour éviter les pertes sur le miroir, et les réflexions des photodiodes sont intégralement récupérées. L'efficacité quantique effective reste donc à $\eta_{\text{quant}} = 97\%$ et la transmission optique baisse à $\eta_{\text{opt}} = 93\%$. Les qualités des surfaces des PBS étant légèrement inférieures à la 50/50 non polarisante, le mode-matching descend habituellement à 89 – 91%, ce qui conduit à une efficacité homodyne globale de 70 – 72%.

Equilibrage

Avant de pouvoir utiliser la détection homodyne, nous devons nous assurer que le bruit mesuré correspond bien au shot noise et non au bruit technique du laser, et qu'il reste très au-dessus du bruit électronique.

Pour équilibrer la détection, nous devons égaliser les intensités des deux bras à l'aide des lames d'onde, et ramener à zéro la valeur moyenne du signal homodyne observé à l'oscilloscope (voir figure 3.18). Cependant, cela ne suffit généralement pas à éliminer le bruit technique du laser, qui apparaît dans le spectre électronique du signal sous forme de raies étroites à des fréquences de quelques centaines de kHz. Ce spectre peut être obtenu par transformée de Fourier rapide du signal mesuré à la carte d'acquisition, ou à l'aide d'un analyseur de spectre électronique. Le bruit technique peut alors être supprimé à la source, en réglant le cavity dumper (position et puissance extraite), ou par un rééquilibrage fin de la détection homodyne obtenu en ajustant les positions et les tailles des spots lumineux sur les photodiodes.

On peut s'assurer que la détection est équilibrée en mesurant le bruit en fonction de la puissance de l'oscillateur local P_{ol} . D'après l'équation 3.17, on voit que la variance du bruit est linéaire en P_{ol} lorsque la détection est bien équilibrée, et devient quadratique en cas de déséquilibre. La figure 3.20 présente une courbe de calibration typique. Si on tolère un écart inférieur à 3% de la droite initiale, on constate que la détection reste équilibrée jusqu'à $P_{ol} = 30 \mu\text{W}$, ce qui correspond à un rapport signal sur bruit de 22 dB, suffisant pour nos expériences. À l'aide de la pente de la courbe de calibration, $30,0 \text{ mV}^2/\mu\text{W}$, et en tenant compte d'une efficacité homodyne globale $\eta = 90\%$ (ici le signal est vide et le mode-matching n'intervient pas), on peut déterminer le gain intrinsèque du détecteur, $2,60 \mu\text{V}/e$. On peut également calculer le taux de réjection \mathcal{R} en variance, défini par le rapport de la variance du bruit de photons (qui correspond au nombre de photons \mathcal{N} dans l'impulsion d'oscillateur local) sur le carré du signal incident (qui correspond à \mathcal{N}^2) [82, 83] : $\mathcal{R} = -10 \log_{10}(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2) = 10 \log_{10} \mathcal{N}$. Pour une puissance moyenne de $30 \mu\text{W}$, $\mathcal{N} = 1.6 * 10^8$, ce qui donne un taux de réjection de 82 dB.

3.5 Conclusion

Nous disposons maintenant d'un ensemble d'outils expérimentaux pour préparer et analyser des états non-gaussiens en régime impulsionnel. Les impulsions initiales sont créées dans la cavité fermée d'un laser titane-saphir, extraites par un cavity dumper, et éventuelle-

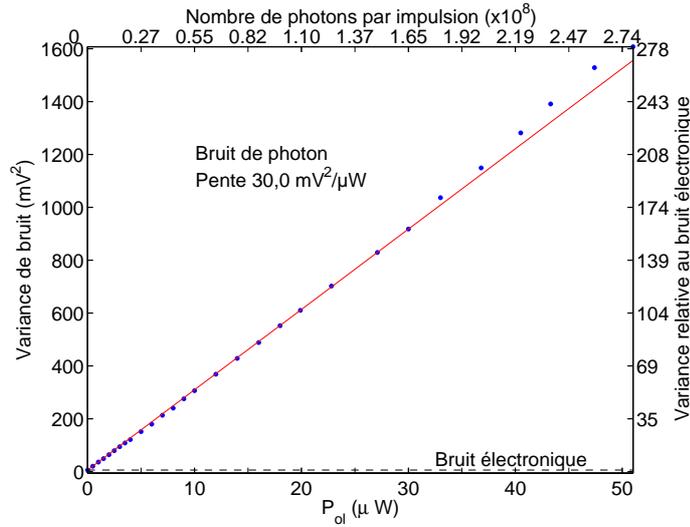


Figure 3.20: Variance du bruit de la détection en fonction de la puissance de l'oscillateur local

ment amplifiées par un amplificateur cryogénique à double passage [64]. Elles sont doublées en fréquence par un passage dans un cristal mince de niobate de potassium, et viennent pomper un deuxième cristal utilisé comme amplificateur paramétrique optique, dégénéré ou non suivant la température de contrôle d'accord de phase. Les états comprimés (monomodes ou bimodes) ainsi préparés sont transformés en états non-gaussiens par des mesures projectives réalisées par des photodiodes à avalanche. Les fonctions de Wigner de ces états peuvent être reconstruites à l'aide de détections homodynes impulsionnelles.

Avant d'aborder nos expériences, on peut se poser la question sur les alternatives possibles à notre approche, notamment sur la préparation de tels états en régime continu, où l'amplificateur paramétrique optique est placé dans une cavité. Ce régime permet d'obtenir des faisceaux de bien meilleure qualité et atteindre des efficacités homodynes extrêmement élevées [58], ainsi que de très forts squeezings [84]. Cependant, la détection de photons se fait alors à des instants totalement aléatoires, ce qui rend difficile la préparation d'états conditionnés sur plusieurs événements simultanés. De plus, les états préparés sont alors "cachés" dans un faisceau continu : pour les mettre en évidence, il faut traiter les données homodynes enregistrées en appliquant une fonction de filtrage temporel [85, 58]. Enfin, ces expériences nécessitent de verrouiller simultanément un grand nombre de cavités (GSH, OPA et nombreuses cavités de filtrage). Les dispositifs expérimentaux sont donc bien plus complexes et difficiles à contrôler que le notre. Pour l'heure, ces deux approches, plus ou moins appropriées suivant les objectifs, restent valides.

Partie II

Tomographie d'états de Fock à un et deux photons

Chapitre 4

Tomographie d'états de Fock à un et deux photons.

Sommaire

4.1	Introduction	79
4.2	États intriqués produits par l'OPA	80
4.3	Dispositif expérimental	84
4.4	Résultats expérimentaux	86
4.5	Modélisation de l'expérience	89
4.5.1	Expressions analytiques décrivant les états générés	89
4.5.2	Cas d'une efficacité APD finie	94
4.5.3	Analyse des résultats du modèle : critère de négativité	97
4.6	Applications du modèle analytique	98
4.6.1	Reconstruction directe des fonctions de Wigner	98
4.6.2	Accès aux paramètres expérimentaux	99
4.6.3	Correction des pertes homodynes	100
4.6.4	Incertitudes statistiques sur les points caractéristiques	101
4.6.5	Matrices densités	102
4.6.6	Optimisation expérimentale	104
4.7	Conclusion	105

4.1 Introduction

Nous allons commencer l'étude expérimentale des états non-gaussiens de la lumière par une question simple : À quoi ressemble le champ électromagnétique d'un ou de deux photons ?

Les états de Fock $n = 1$ et $n = 2$ sont les états les plus simples à présenter des fonctions de Wigner négatives : les premières ont été observées en 1996 par l'équipe de D. J. Wineland sur des états $n = 1$ correspondant non pas à un photon optique mais à un quantum de vibration d'un ion piégé [86]. L'équipe de S. Haroche a également pu

reconstruire la fonction de Wigner d'un photon micro-onde piégé dans une cavité [87]. La tomographie homodyne d'un photon optique en propagation libre a été réalisée pour la première fois par Lvovsky et al. [59], puis par le groupe de M. Bellini [60], avec des méthodes très similaires aux nôtres. Cependant, les faibles gains paramétriques utilisés lors de ces expériences ne permettaient pas de les étendre à des états $n = 2$, ce qui a pu être réalisé dans notre cas grâce à l'utilisation de cristaux paramétriques efficaces et d'impulsions suffisamment intenses. Outre son intérêt fondamental, l'étude de ces états nous permettra de valider nos techniques, de tester leurs limites, et de développer un modèle expérimental détaillé qui nous sera d'une aide précieuse dans toute la suite, pour l'optimisation de l'expérience comme pour l'analyse de ses résultats.

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, la manière la plus simple de préparer des états de Fock $|n\rangle$ à l'aide de notre dispositif est de générer des états comprimés bimodes $|\psi_s\rangle$ (appelés encore états EPR) en injectant deux modes vides dans l'OPA en configuration non-dégénérée, et de compter n photons dans le mode idler. D'après l'équation 2.55d, on obtient alors dans le mode signal :

$$\langle n | \psi_s \rangle = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \langle n | k, k \rangle = \sqrt{1 - \lambda^2} \lambda^n |n\rangle, \quad \lambda = \tanh(r). \quad (4.1)$$

Cette méthode de préparation est probabiliste, et son efficacité décroît exponentiellement avec n . De plus, si l'on utilise des APDs, incapables de distinguer n et $n+1$ photons, on devra maintenir le paramètre λ relativement bas, pour que la probabilité de présence de ce photon excédentaire soit faible. En revanche, si l'état initial est suffisamment pur et si les photons détectés par les APDs appartiennent bien au mode voulu, la présence de n photons dans le mode signal est (relativement) certaine, ce qui est pour l'instant difficile à obtenir avec des sources déterministes. Ce "degré de certitude", que l'on pourra relier à plusieurs paramètres expérimentaux, sera pour nous un élément essentiel.

4.2 États intriqués produits par l'OPA

Nous devons tout d'abord nous assurer que les états produits par l'OPA en configuration non-dégénérée présentent bien les propriétés requises. Leur intrication, comparée à celle d'états non-gaussiens, sera étudiée de manière quantitative dans la partie IV. On ne fait ici que mettre en évidence leurs principales caractéristiques.

Mesure directe

La manière la plus directe de révéler l'intrication en quadratures entre les modes signal et idler est de les mesurer à l'aide de deux détections homodynes indépendantes. On se souvient (Éq. 2.54) que la fonction de Wigner d'un état EPR s'écrit

$$W_{EPR}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2s} - \frac{(p_1 - p_2)^2}{2/s} - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2/s} - \frac{(p_1 + p_2)^2}{2s}}. \quad (4.2)$$

Une particularité de cet état, que nous utiliserons souvent par la suite, est d'être invariant vis-à-vis d'un déphasage relatif $\delta\theta$ entre les deux modes. En effet, si on avance

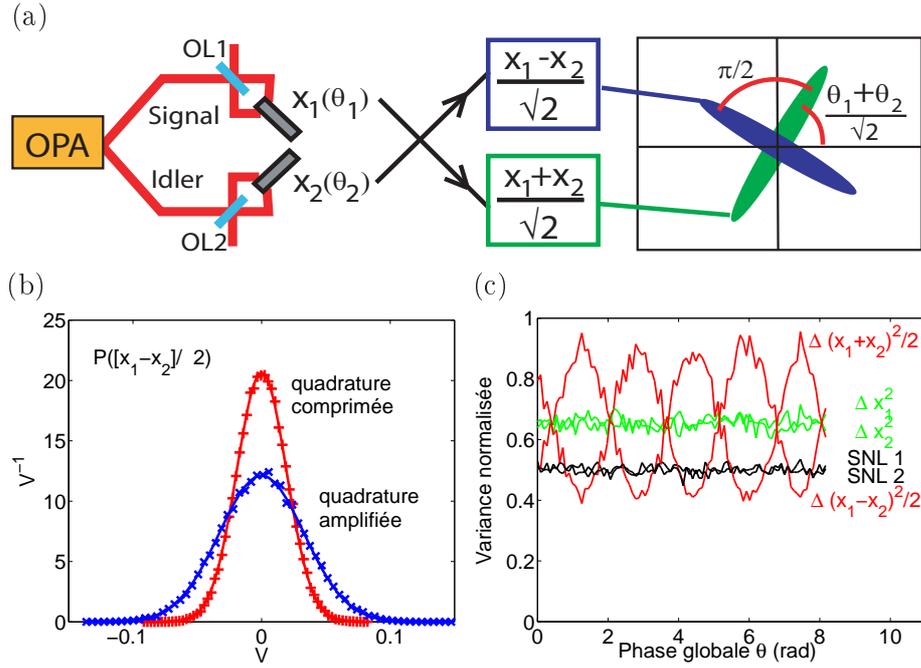


Figure 4.1: Mise en évidence de l'intrication des états EPR produits par l'OPA en configuration non-dégénérée, à l'aide de deux détecteurs homodynes indépendantes : les corrélations $x_- = (x_1 - x_2)/2$ et les anticorrélations $x_+ = (x_1 + x_2)/2$ correspondent à deux états orthogonalement comprimés d'un facteur s . (a) Principe de l'expérience. (b) Distributions expérimentales des quadratures comprimée $x_-(0)$ et anticomprimée $x_-(\pi/2)$, interpolées par des gaussiennes. (c) Mesure des variances Δx_1^2 , Δx_2^2 , Δx_-^2 et Δx_+^2 en fonction de la phase $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. La variance du shot noise (SNL) est normalisée à $1/2$.

le mode signal de $\delta\theta/2$ et retardant l'idler de $-\delta\theta/2$, on vérifie facilement que la fonction de Wigner reste inchangée :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ p'_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta\theta}{2} & -\sin \frac{\delta\theta}{2} \\ \sin \frac{\delta\theta}{2} & \cos \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'_2 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta\theta}{2} & \sin \frac{\delta\theta}{2} \\ -\sin \frac{\delta\theta}{2} & \cos \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (4.3a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (p'_1 + p'_2)^2 \\ (x_1 + x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2 = (x'_1 + x'_2)^2 + (p'_1 - p'_2)^2 \end{cases} \Rightarrow W' = W. \quad (4.3b)$$

Nous observerons bien entendu la même invariance si, au lieu de déphaser le signal et l'idler, on retarde l'oscillateur local OL1 et avance l'oscillateur local OL2 utilisés pour mesurer ces deux modes. On ne s'intéressera donc pas à la différence des phases $\theta_2 - \theta_1$ entre les quadratures mesurées mais à leur moyenne $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. On peut contrôler cette phase globale θ en déphasant soit le faisceau servant à préparer les deux oscillateurs locaux, soit la pompe, ou encore l'idler sans toucher au signal. Les variations de θ correspondent à des rotations globales dans l'espace des phases.

L'état mesuré individuellement par chacune des détecteurs homodynes est un état thermique, indépendant de la phase : en prenant la trace sur un mode dans la fonction

de Wigner de l'état EPR, on trouve pour l'autre mode

$$W_{th}(x, p) = \frac{1}{\pi \cosh(2r)} e^{-\frac{x^2+p^2}{\cosh(2r)}} \Rightarrow \Delta x^2 = \Delta p^2 = \frac{\cosh(2r)}{2} = \frac{s+1/s}{4}. \quad (4.4)$$

L'intrication est révélée par les variances des corrélations et des anticorrélations, qui correspondent à des états comprimés d'un facteur s dans des directions orthogonales. Leurs variances oscillent alors avec θ en opposition de phase :

$$\Delta x_-^2(\theta) = \Delta \left(\frac{x_1(\theta) - x_2(\theta)}{\sqrt{2}} \right)^2 = \cos^2 \theta \frac{s}{2} + \sin^2 \theta \frac{1}{2s} \quad (4.5)$$

$$\Delta x_+^2(\theta) = \Delta \left(\frac{x_1(\theta) + x_2(\theta)}{\sqrt{2}} \right)^2 = \sin^2 \theta \frac{s}{2} + \cos^2 \theta \frac{1}{2s}. \quad (4.6)$$

C'est bien ce que l'on constate expérimentalement lorsque l'on fait varier la phase commune des oscillateurs locaux, en mesurant les variances locales des modes 1, 2, de leurs corrélations et de leurs anticorrélations. Pour cela on balaye à l'aide de la cale piézoélectrique une distance correspondant approximativement à un déphasage de $3\pi/2$ en 0,3 secondes, et on détermine la variance locale calculée sur 2500 points. Sur la figure 4.1, on s'aperçoit que $\Delta x_-^2(\theta)$ et $\Delta x_+^2(\theta)$ oscillent en opposition de phase entre deux valeurs $v_{min} < 1/2$ et $v_{max} > 1/2$, alors que $\Delta x_1^2 \approx \Delta x_2^2 \approx \frac{v_{min}+v_{max}}{2}$. On vérifie que les oscillations se font en opposition de phase quelle que soit la phase relative entre les deux détecteurs homodynes, en réalisant ce test pour plusieurs déphasages. Les distributions des corrélations et anticorrélations sont par ailleurs bien gaussiennes. Sans corriger des pertes homodynes, le critère de Duan-Simon [88, 89] valable pour les états gaussiens confirme l'intrication de ces états :

$$S = \Delta(x_1 - x_2)^2 + \Delta(p_1 + p_2)^2 = 4v_{min} \approx 1,6 < 2. \quad (4.7)$$

Transformation en deux états comprimés monomodes

L'autre manière, plus indirecte mais plus simple, de mettre en évidence l'intrication en quadratures est de remarquer que cet état EPR peut être obtenu en mélangeant deux vides orthogonalement comprimés sur une lame 50/50. Cette opération étant réversible, la recombinaison des modes signal et idler sur une telle lame produit deux états de vide comprimé monomode, dont les directions de compression sont orthogonales (Fig. 4.2). Il suffit alors de déterminer le squeezing d'un seul de ces deux états pour remonter à l'intrication de l'état initial [90]. Une seule détection homodyne suffit pour l'analyse : au lieu de mesurer les corrélations des modes intriqués *après* détection, on fait apparaître ces corrélations *avant* la mesure, en recombinant non plus les signaux électroniques mais directement les faisceaux lumineux.

Sur la figure 4.2, on constate que cette recombinaison produit effectivement un état comprimé dans le mode 1, dont la variance oscille avec la phase entre $v_{min} < 1/2$ et $v_{max} > 1/2$, alors qu'en bloquant un des deux modes avant la lame on retrouve un signal indépendant de la phase, correspondant au bruit thermique de l'autre mode atténué par 50% de pertes (variance $\approx \frac{v_{min}+v_{max}+2}{4}$).

Cette configuration se révèle également très utile lorsque l'on utilise deux détecteurs homodynes, car elle permet de régler facilement la phase relative $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ entre les

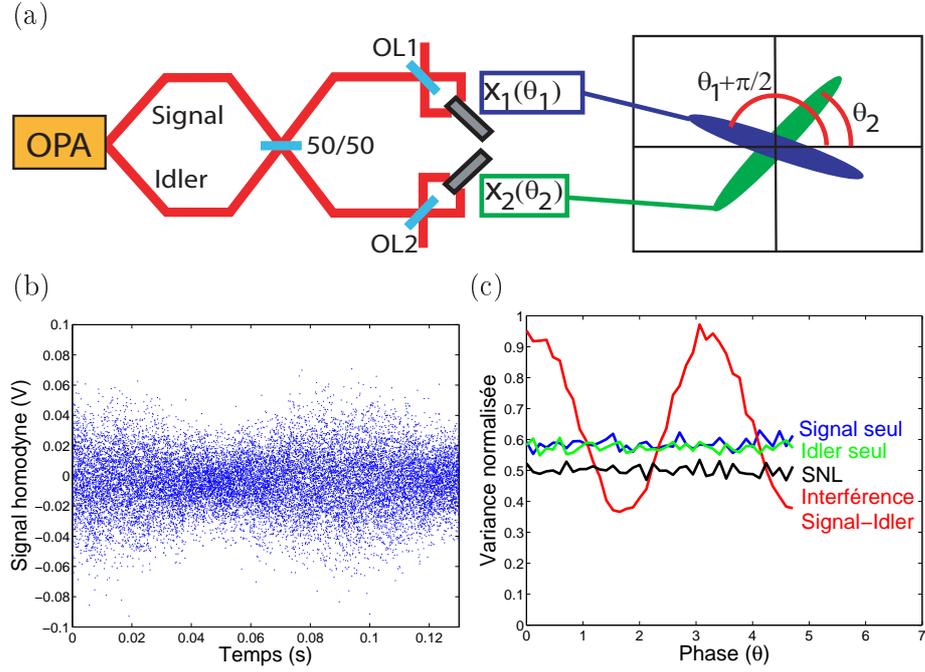


Figure 4.2: Mise en évidence de l'intrication des états EPR produits par l'OPA en configuration non-dégénérée, à l'aide d'une détection homodyne unique, en préparant deux états comprimés monomodes par recombinaison sur une lame 50/50 et en balayant la phase de la détection à l'aide d'une cale piézoélectrique. (a) Principe de l'expérience, (b) Mesures homodynes du signal en fonction du temps, (c) Variance locale normalisée Δx_1^2 . Le comportement de Δx_2^2 est identique au déphasage $\theta_2 - \theta_1 - \pi/2$ près. La mesure de Δx_1^2 suffit à caractériser l'état, la mesure de Δx_2^2 donne accès à la phase relative entre les quadratures mesurées. La variance du shot noise est normalisée à 1/2.

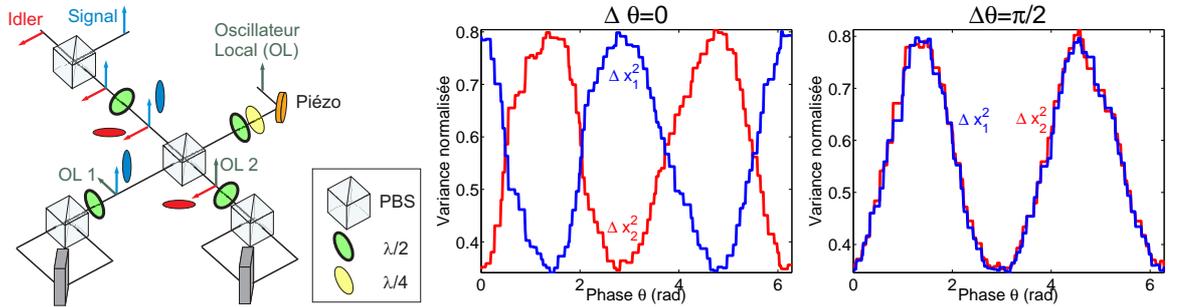


Figure 4.3: Mesure du déphasage relatif $\Delta\theta$ entre les quadratures mesurées par les deux détections homodynes. L'interférence entre deux modes intriqués gaussiens produit deux états orthogonalement comprimés. Le déphasage relatif ϕ entre les variances Δx_1^2 et Δx_2^2 donne $\Delta\theta = \frac{\pi - \phi}{2}$. La variance du shot noise est normalisée à 1/2.

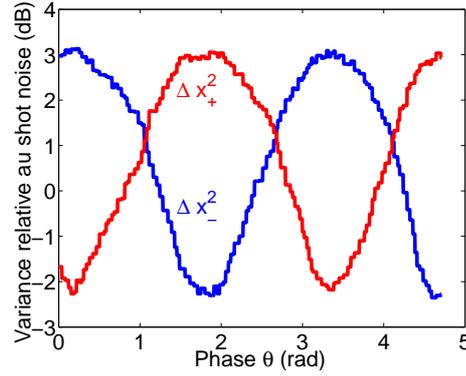


Figure 4.4: Variance des corrélations Δx_-^2 et des anticorrélations Δx_+^2 en fonction de la phase globale de l'oscillateur local, mesurée pour un gain paramétrique hors d'axe $G = 1.21$, maximum utilisé dans nos expériences. Sans correction des pertes homodynes, les taux de compression et d'amplification par rapport au shot noise valent respectivement 2,2 et 3,1 dB. Après correction de l'efficacité homodyne $\eta = 70\%$, ces taux deviennent respectivement 3.8 et 3.9 dB.

quadratures $x_1(\theta_1)$ et $x_2(\theta_2)$ mesurées. Dans ce cas, on superpose tout d'abord le signal et l'idler sur un PBS : ils sont alors dégénérés spatialement et séparés en polarisation (voir Fig. 4.3). La lame 50/50 est alors réalisée par simple rotation des polarisations de 45° à l'aide d'une lame demi-onde. Les deux états comprimés sont ensuite séparés sur un deuxième PBS, où ils sont superposés avec les oscillateurs locaux préparés à partir d'un même faisceau. La différence de phase entre les quadratures mesurées est alors déterminée par les lames $\lambda/2$ et $\lambda/4$ préparant les oscillateurs locaux. Pour la déterminer, on balaye la phase globale de l'oscillateur local, on mesure les oscillations de Δx_1^2 et Δx_2^2 entre le maximum et le minimum de compression, et on détermine leur phase relative ϕ à l'aide d'un fit numérique. On a alors accès à $\Delta\theta$ par $\Delta\theta = \frac{\pi - \phi}{2}$. Par exemple, lorsque $\Delta\theta = 0$ les oscillations sont en opposition de phase (les deux détecteurs mesurent la même quadrature), lorsque $\Delta\theta = \pi/2$ elles se font en phase (quand la première détection mesure la quadrature comprimée \hat{x}_1 , la deuxième mesure \hat{p}_2 , elle aussi comprimée).

Les deux méthodes d'analyse sont parfaitement équivalentes, et les degrés de squeezing mesurés sont habituellement identiques à 1% près. Travailler avec un squeezing maximal n'est pas nécessairement pertinent, car la pureté des états préparés se dégrade. Dans l'ensemble de nos expériences, on limite volontairement le gain paramétrique non-dégénéré à $G = 1.21$ pour préserver la négativité des fonctions de Wigner des états conditionnés (voir partie IV). Sans correction des pertes homodynes, le squeezing des corrélations des deux modes vaut alors 2,2 dB, pour une amplification de 3,1 dB (voir Fig. 4.4). En corrigeant de l'efficacité homodyne $\eta = 70\%$, on trouve un taux de compression de 3,8 dB et une amplification de 3,9 dB.

4.3 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 4.5. Une faible partie (4%) du faisceau initial est prélevée pour préparer un oscillateur local (puissance moyenne $P_{OL} =$

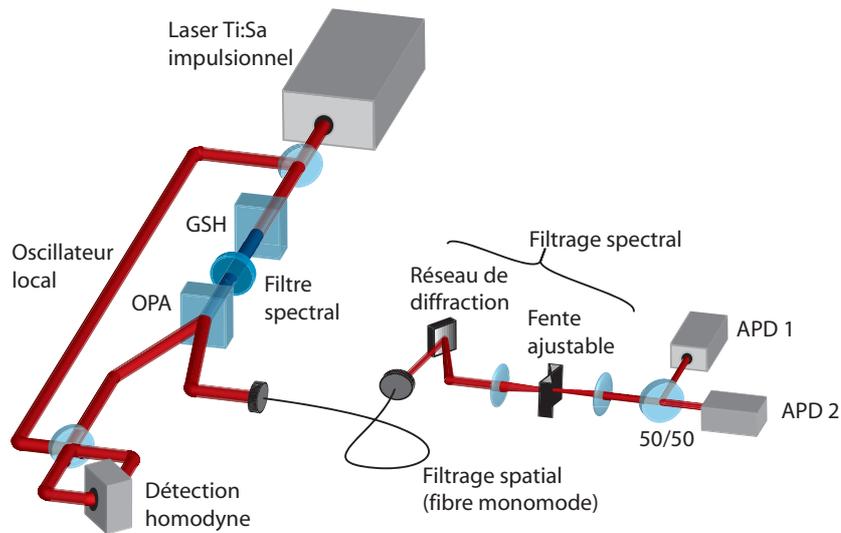


Figure 4.5: Dispositif expérimental permettant la préparation et la tomographie homodyne d'états de Fock à un et deux photons.

20 μW soit $1,1 \cdot 10^8$ photons par impulsion), un faisceau sonde (puissance moyenne $\approx 100 \mu\text{W}$), et pour caractériser le spectre et le profil temporel des impulsions. Le faisceau transmis, doublé en fréquence (GSH), pompe l'OPA réglé en configuration non-dégénérée, préparant un état comprimé bimode. Le gain paramétrique est limité à $G = 1,07$ pour maximiser la pureté des états préparés et minimiser la probabilité de présence de photons excédentaires lors du comptage APD, tout en préservant un taux de succès suffisant.

Le mode signal est utilisé pour le conditionnement. L'utilisation de cristaux minces et d'impulsions de pompe courtes conduit à une fluorescence paramétrique très large spectralement et spatialement. Le système de filtrage, qui permet de sélectionner parmi les photons dirigés vers les APDs uniquement ceux dont les "jumeaux" se trouvent dans le mode signal défini par la sonde, est l'un des éléments les plus critiques du dispositif. Le filtrage spatial est réalisé à l'aide d'une fibre optique monomode de longueur $l = 2$ m, qui permet de sélectionner un mode transverse gaussien TEM_{00} . L'efficacité de couplage dans la fibre, mesurée à l'aide de la sonde, varie entre 70 et 80% en fonction du mode laser, avec une moyenne typique de 75%. Le spectre de nos impulsions femtoseconde étant très large ($\Delta\lambda \approx 4,5$ nm), le filtrage spectral peut ensuite être réalisé simplement à l'aide d'un réseau de diffraction blasé (1200 traits/mm) avec une efficacité de diffraction de 67%. Une fente de largeur variable, placée au foyer d'une lentille de focale $f = 100$ mm et centrée sur le faisceau à l'aide de translations micrométriques, permet de sélectionner une bande spectrale étroite autour de la longueur d'onde centrale définie par la sonde. En plaçant un spectromètre optique derrière la fente on peut déterminer la résolution de ce système de filtrage, 7 nm de décalage spectral par mm de décalage latéral de la fente. A l'aide d'un puissancemètre, on centre la fente sur le maximum du spectre de la sonde et on règle sa largeur pour transmettre 25% du faisceau incident, soit ≈ 1 nm de largeur spectrale. La sonde étant peu intense, son spectre n'est pas affecté par d'éventuels effets non-linéaires dans la fibre, et on peut considérer qu'il reproduit en très bonne approximation celui de l'oscillateur local.

Le faisceau recollimaté est ensuite divisé entre deux photodiodes à avalanche (*Perkin-Elmer SPCM AQR-13*) par une lame 50/50. D'après les données du constructeur, leur efficacité quantique à 850 nm est de 45%, ce qui conduit à une efficacité globale $\mu = 0,75 * 0,67 * 0,25 * 0,45 \approx 6\%$ pour le conditionnement. Les signaux TTL des deux APDs sont synchronisés avec le signal de déclenchement provenant du laser à l'aide de lignes à retard. Ils sont sommés à l'aide d'un circuit adapté en impédance, atténués de 29 dB et envoyés sur une entrée analogique de la carte d'acquisition. Ce signal peut prendre trois valeurs (typiquement 0, 60 et 120 mV) correspondant à la détection de 0, 1 et 2 photons. En réglant le seuil de conditionnement à 100 mV on sélectionne uniquement les événements à 2 photons, tandis que pour un seuil à 50 mV on sélectionne les états $n = 1$ (dans ce cas la proportion de doubles détections APD est de 1 pour 300 : les événements à deux photons sont très rares et il n'est pas nécessaire d'introduire un seuil de conditionnement maximal, ce qui est par ailleurs très simple à faire). La synchronisation avec le laser permet par ailleurs de réduire les coups d'obscurité de 200 à ~ 10 par seconde par photodiode.

Le faisceau idler interfère avec l'oscillateur local pour être mesuré par la détection homodyne. Les états préparés dans ce mode par le conditionnement APD sont totalement indépendants de la phase. Cette invariance, admise dans les expériences antérieures [59, 60], peut être vérifiée dans notre cas pour les états thermiques non conditionnés et pour les états conditionnés sur 1 photon, qui sont produits à une cadence élevée (780 000/s pour les états thermiques, jusqu'à 20 000/s pour les états à un photon) ce qui permet d'obtenir une statistique suffisante en une seconde, plus rapidement que les temps typiques de dérive de la phase. On peut donc raisonnablement supposer que cette invariance s'étend pour les états conditionnés sur deux photons, car aucune étape du processus de conditionnement n'introduit de dépendance en phase. Il n'est donc pas nécessaire de stabiliser la phase de la mesure homodyne. On peut la balayer lentement à l'aide d'une cale piézoélectrique pour assurer un moyennage en phase de toutes les quadratures.

Les fluctuations acoustiques et thermiques font lentement varier l'équilibrage de la détection homodyne. Pour éviter de brouiller les mesures, on soustrait à chaque point conditionné la valeur moyenne locale des quadratures mesurées, calculée sur 15 000 points non conditionnés précédant et suivant le déclenchement APD, ce qui permet de filtrer le bruit en dessous de 50 Hz. Les fluctuations de la valeur moyenne du signal ne dépassent alors pas 0,5 mV, plus faibles que l'écart-type du bruit électronique (2,5 mV) et négligeables devant celui du shot noise (21,8 mV).

Les données conditionnées sont ensuite réparties en histogrammes pour reconstruire les distributions de quadratures.

4.4 Résultats expérimentaux

En une acquisition de deux heures, divisée en quatre tranches d'une demie-heure entre lesquelles le dispositif était testé et réaligné, nous avons acquis 105 000 points expérimentaux conditionnés sur la détection de 2 photons, avec un taux de préparation moyen de 15 états de Fock $n = 2$ par seconde. Pour les états à un photon, ce taux est de 4500/s, ce qui a permis d'acquérir 180 000 points expérimentaux en seulement 40 s. Ces points ont été répartis en histogrammes sur 64 bins, pour obtenir les distributions de quadratures présentées sur la figure 4.6, comparées aux distributions du vide quantique et à celles attendues pour des états $n = 1$ et $n = 2$ idéaux. On constate que dans les deux

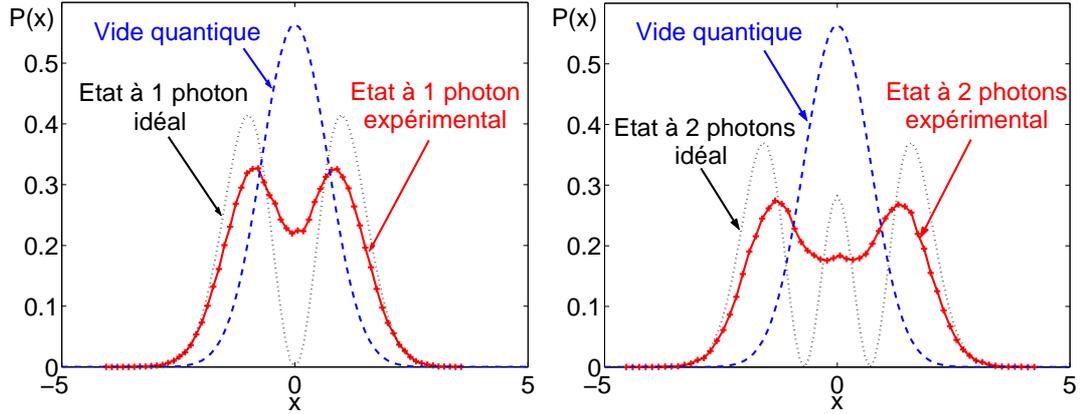


Figure 4.6: Distributions de quadratures mesurées pour les états de Fock $n = 1$ et $n = 2$, comparées à celles attendues dans le cas idéal et à celle du vide quantique.

cas les distributions expérimentales sont fortement non-gaussiennes. Elles présentent un creux caractéristique autour de l'origine avec, pour l'état $n = 2$, une légère remontée correspondant au pic central.

Par transformée de Radon inverse numérique, on reconstruit les fonctions de Wigner "brutes", correspondant aux états tels qu'ils sont mesurés, sans correction des pertes homodynes. Ces fonctions de Wigner, présentées sur la figure 4.7, sont visiblement négatives. Celle à un photon est négative à l'origine, tandis que celle à deux photons présente un pic central positif entouré par un anneau négatif.

Pour déterminer les fonctions de Wigner des états réellement générés dans l'expérience, nous devons corriger des pertes et du bruit introduit lors de la mesure homodyne. Une mesure classique à l'aide du faisceau sonde permet d'estimer $\eta = \eta_{mod}^2 \eta_{opt} \eta_{quant} = 0,92^2 * 0,97 * 0,975 = 80\%$. Quant au bruit électronique, sa variance normalisée vaut 5.10^{-3} , soit 1% du shot noise. Les fonctions de Wigner reconstruites par un algorithme de maximum de vraisemblance (MaxLike), qui permet de réaliser cette correction, sont présentées sur la figure 4.8. On constate que leur caractère non-classique s'accroît : les deux fonctions sont fortement négatives, et le pic central de l'état $n = 2$ devient très prononcé.

Il est intéressant de comparer ces fonctions à celles attendues pour des états purs, représentées sur la figure 4.9 :

$$W_{id1} = \frac{e^{-R^2}}{\pi} [2R^2 - 1] \quad (4.8)$$

$$W_{id2} = \frac{e^{-R^2}}{\pi} [2R^4 - 4R^2 + 1] \quad (4.9)$$

où $R = x^2 + p^2$. À l'aide de l'équation 2.34, on peut calculer numériquement les fidélités \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 entre les états $n = 1$ et $n = 2$ générés, corrigés des pertes homodynes, et le cas idéal :

$$\mathcal{F}_1 = 2\pi \iint W_1(x, p) W_{id1}(x, p) dx dp = 67\%, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{F}_2 = 2\pi \iint W_2(x, p) W_{id2}(x, p) dx dp = 53\%. \quad (4.11)$$

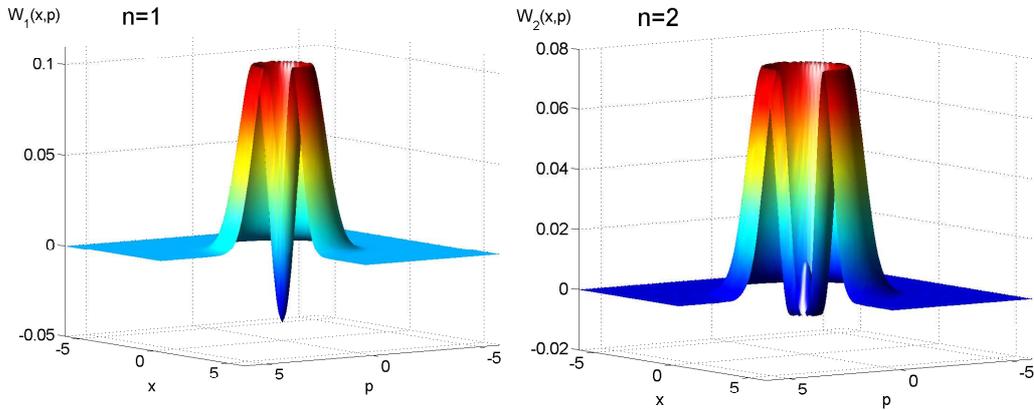


Figure 4.7: Fonctions de Wigner d'états à un et deux photons mesurés expérimentalement, reconstruites par transformée de Radon inverse, sans aucune correction.

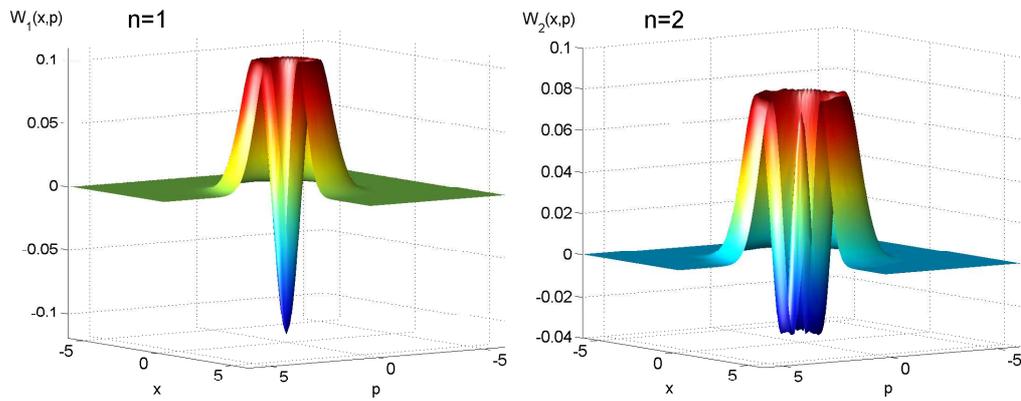


Figure 4.8: Fonctions de Wigner d'états à un et deux photons générés expérimentalement, reconstruites par maximum de vraisemblance, corrigées des pertes homodynes.

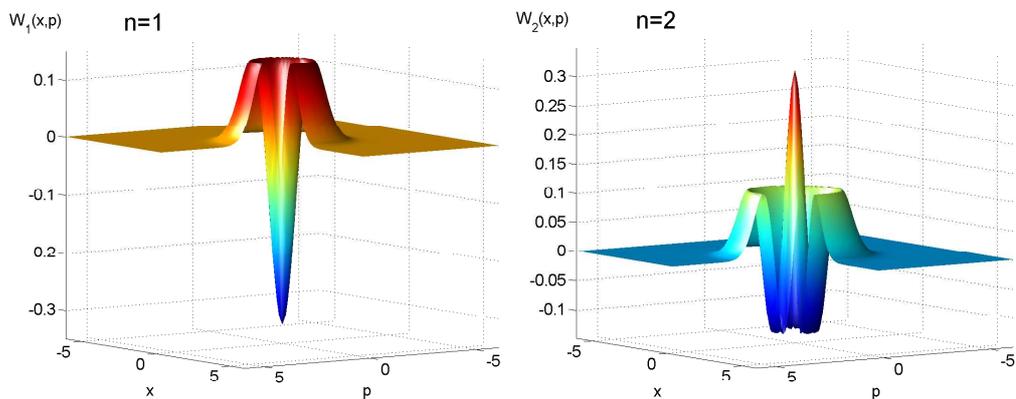


Figure 4.9: Fonctions de Wigner idéales d'états de Fock à un et deux photons.

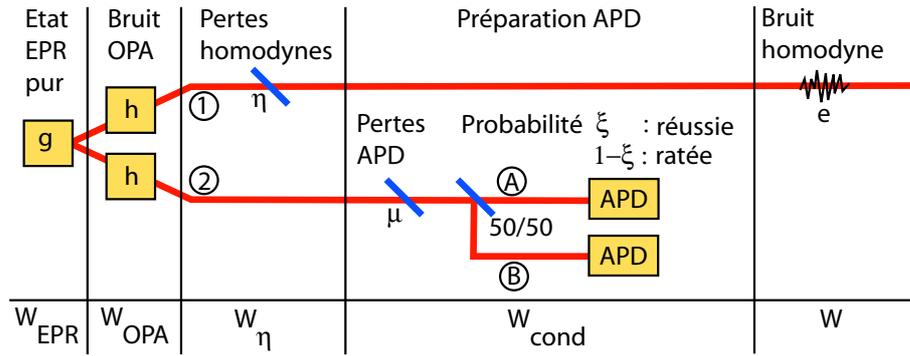


Figure 4.10: Modélisation analytique de l'expérience de tomographie homodyne d'états de Fock $n = 1$ et $n = 2$.

La formule $\mathcal{P} = 2\pi \iint W^2(x,p) dx dp$ donne quant à elle accès à la pureté de ces états, $\mathcal{P}_1 = 50\%$ et $\mathcal{P}_2 = 38\%$.

On voit donc que les distributions de quadratures et les fonctions de Wigner, bien qu'ayant la forme voulue, sont différentes de celles attendues dans le cas idéal. Pour comprendre l'origine de ces différences, il est essentiel de déterminer de manière quantitative l'effet de l'ensemble des imperfections du dispositif.

4.5 Modélisation de l'expérience

Les fonctions de Wigner négatives sont extrêmement sensibles aux pertes et au bruit. Nos outils expérimentaux présentent des défauts qui, même s'ils restent faibles, peuvent en s'ajoutant détruire cette négativité. Nous allons voir que l'ensemble de ces défauts peut être pris en compte pour aboutir à des expressions analytiques très simples pour les fonctions de Wigner attendues. Ce modèle nous sera très utile à tous les stades de l'expérience, aussi bien lors de son optimisation que lors de l'analyse des données.

4.5.1 Expressions analytiques décrivant les états générés

Nous allons, de manière séquentielle, décrire les transformations subies par notre état, suivant le schéma représenté sur la figure 4.10. Le point de départ sera l'état produit par l'OPA réel (état EPR avec excès de bruit), sur lequel viendront s'ajouter les pertes homodynes pour un des modes et les pertes APD pour l'autre. On décrira ensuite la mesure projective réalisée par les APDs, avec ses défauts éventuels, et on tiendra compte du bruit technique de la détection homodyne. Tous les défauts de l'expérience pourront ainsi être groupés dans un petit nombre de paramètres accessibles à la mesure.

État produit par l'OPA (gain g , bruit h)

Nous avons vu au chapitre précédent que les états produits par l'OPA ne sont pas purs, et que leur excès de bruit peut être représenté par un phénomène d'amplification excédentaire indépendante de la phase. On peut donc représenter l'OPA réel par un OPA non-dégénéré idéal avec un gain $g = \cosh^2(r)$, préparant un état EPR pur avec un facteur de corrélation

$s = e^{-2r}$, suivi de deux amplificateurs non-dégénérés (un sur chaque faisceau) qui ajoutent du bruit avec un gain $h = \cosh^2(\gamma r)$ (voir Fig. 4.11). Ici γ correspond à l'efficacité relative du processus d'amplification indésirable. La fonction de Wigner d'un état EPR idéal s'écrit

$$W_{EPR}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2s} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2/s} - \frac{(x_1+x_2)^2}{2/s} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2s}}, \quad (4.12)$$

où le squeezing bimode s peut être relié au gain paramétrique hors d'axe g par

$$g = \frac{s + 1/s + 2}{4}. \quad (4.13)$$

Le mode 1 traverse un OPA non-dégénéré avec un gain h , où il est mélangé avec un mode vide 3 suivant les équations 3.11 :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \\ \hat{p}'_1 \\ \hat{x}'_3 \\ \hat{p}'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{h} & 0 & -\sqrt{h-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{h} & 0 & \sqrt{h-1} \\ -\sqrt{h-1} & 0 & \sqrt{h} & 0 \\ 0 & \sqrt{h-1} & 0 & \sqrt{h} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{p}_3 \end{pmatrix} = M_{13} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{p}_3 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Il en est de même pour le mode 2, mélangé à un mode vide 4 par une matrice M_{24} identique. La fonction de Wigner à quatre modes est donc transformée suivant l'équation 2.38, où la fonction de Wigner d'entrée est le produit de W_{EPR} par les fonctions de Wigner des modes vides 3 et 4 :

$$W(\vec{A}) = W_i(M_{13}^{-1}M_{24}^{-1}\vec{A}), \quad W_i = W_{EPR}(x_1, p_1, x_2, p_2) \times \frac{1}{\pi} e^{-x_3^2 - p_3^2} \times \frac{1}{\pi} e^{-x_4^2 - p_4^2}. \quad (4.15)$$

À la sortie de l'OPA, les modes 3 et 4 sont perdus dans l'environnement. En prenant la trace sur ces modes à l'aide de l'équation A.1, on trouve la fonction de Wigner de l'état bruité produit par l'OPA :

$$W_{OPA}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2(hs+h-1)} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2(h/s+h-1)} - \frac{(x_1+x_2)^2}{2(h/s+h-1)} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2(hs+h-1)}}}{\pi^2 (hs + h - 1)(h/s + h - 1)} \quad (4.16)$$

Ce résultat peut en fait être obtenu de manière beaucoup plus simple. Il suffit de se souvenir que l'état EPR peut être préparé par interférence entre deux vides comprimés monomodes, le mode 1 comprimé de s et le mode 2 de $1/s$. Le bruit des deux modes étant par définition décorréolé, on peut le faire apparaître avant ou après cette interférence : un état EPR bruité correspond à un mélange de deux vides comprimés ayant le même bruit. (voir Fig. 4.11). Les transformations des quadratures étant linéaires, les états comprimés purs $W_{s1}(x_1, p_1) = e^{-x_1^2/s - p_1^2 s} / \pi$ et $W_{s2}(x_2, p_2) = e^{-x_2^2 s - p_2^2 / s} / \pi$ restent gaussiens après le processus d'amplification responsable du bruit ajouté. Comme tout état gaussien, ces états sont entièrement caractérisés par les deux premiers moments de leurs distributions de quadratures, c'est à dire par les valeurs moyennes (ici nulles) et les variances, qui valent $\Delta x_1^2 = \Delta p_2^2 = s/2$ et $\Delta p_1^2 = \Delta x_2^2 = 1/(2s)$ avant amplification. Après transformation par la matrice $M = M_{13}M_{24}$, les valeurs moyennes restent nulles et, les modes entrants étant

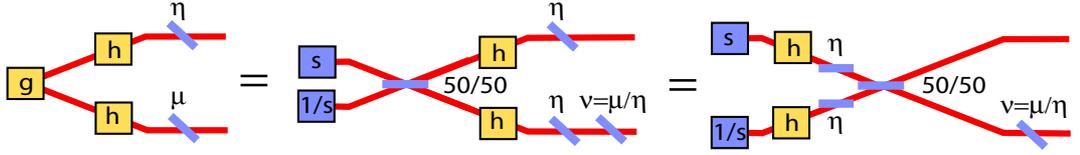


Figure 4.11: Modélisation du bruit OPA et des pertes en ligne. Pour simplifier les calculs, on suppose que l'état intriqué initial est créé non pas avec un OPA non-dégénéré avec un gain g mais par interférence de deux vides comprimés monomodes produits par deux OPAs dégénérés avec des facteurs de compression s et $1/s$. On peut alors faire “remonter” avant cette séparatrice le bruit OPA, ajouté par deux amplificateurs non-dégénérés avec des gains h . Il en est de même pour les pertes homodynes (lame de transmission η), en divisant en deux parties les pertes APD $\mu = \eta\nu$.

décorrélés, les variances deviennent

$$\Delta x_1'^2 = h\Delta x_1^2 + (h-1)\Delta x_3^2 = \frac{1}{2}(hs + h - 1) = \Delta p_2'^2, \quad (4.17a)$$

$$\Delta p_1'^2 = h\Delta p_1^2 + (h-1)\Delta p_3^2 = \frac{1}{2}(hs + h - 1) = \Delta x_2'^2. \quad (4.17b)$$

Il suffit donc de remplacer s par $hs + h - 1$ et $1/s$ par $h/s + h - 1$ dans W_{s1} et W_{s2} . Après renormalisation, les fonctions de Wigner des états monomodes bruités deviennent

$$W'_{s1}(x_1, p_1) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{hs+h-1} - \frac{p_1^2}{\frac{h}{s}+h-1}}}{\pi\sqrt{(hs+h-1)(\frac{h}{s}+h-1)}}, \quad W'_{s2}(x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{x_2^2}{\frac{h}{s}+h-1} - \frac{p_2^2}{hs+h-1}}}{\pi\sqrt{(hs+h-1)(\frac{h}{s}+h-1)}}. \quad (4.17c)$$

Le mélange de ces états sur une lame 50/50 (Eq. 3.4) produit bien l'état donné par Eq. 4.16.

Pertes homodynes (efficacité homodyne η)

Le mode 1 subit ensuite les pertes homodynes, représentées par une lame de transmission $\eta = 80\%$ relativement élevée. Il en est de même pour les pertes APD sur le mode 2, avec une transmission globale μ faible (5 – 6%). Pour le calcul, il est plus simple d'introduire les pertes APD en deux étapes : le mode 2 traverse d'abord une lame de transmission η (la même que pour le mode 1) puis une deuxième lame de transmission $\nu = \mu/\eta$. On peut alors, comme précédemment, faire “remonter” les deux lames de transmission η sur chaque mode avant la séparatrice 50/50 fictive préparant l'état EPR (Fig. 4.11). Les quadratures des deux états comprimés bruités sont transformées par $x' = \sqrt{\eta}x + \sqrt{1-\eta}x_0$, où x_0 correspond à un mode vide, et leurs variances se transforment comme

$$hs + h - 1 \xrightarrow{BS(\eta)} \eta(hs + h - 1) + 1 - \eta = a, \quad (4.18)$$

$$h/s + h - 1 \xrightarrow{BS(\eta)} \eta(h/s + h - 1) + 1 - \eta = b. \quad (4.19)$$

Il suffit donc de remplacer les variances correspondantes dans l'expression 4.16 pour obtenir

$$W_\eta(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2 ab} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2a} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2b} - \frac{(x_1+x_2)^2}{2a} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2a}} \quad (4.20)$$

Détection APD (efficacité μ , pureté modale ξ)

Dans notre expérience, l'efficacité APD globale μ est faible. Pour simplifier les calculs, nous allons dans un premier temps se placer dans la limite "pessimiste" $\mu \rightarrow 0$, ce qui est équivalent à $\nu = \mu/\eta \rightarrow 0$ (nous verrons plus loin que les fonctions obtenues sont, dans notre gamme de paramètres, indiscernables du cas "exact"). Dans ce cas, la quasi-totalité du faisceau est réfléchi sur la lame virtuelle de transmission ν devant l'APD (voir Fig. 4.12). Lorsque l'APD détecte un photon, la probabilité pour qu'un deuxième photon ait été transmis à travers cette lame virtuelle est asymptotiquement faible. Une détection APD avec une efficacité $\mu \rightarrow 0$ revient donc à *soustraire un seul photon du mode utilisé pour le conditionnement* (ici le mode 2). Mathématiquement, cette soustraction se fait en y appliquant un opérateur annihilation \hat{a} . Par comparaison, on se souvient que dans le cas d'une détection APD idéale, l'opérateur de projection s'écrit $\Pi = \hat{\mathbb{I}} - |0\rangle\langle 0|$.

Mesure projective par détection APD	
Efficacité APD $\mu \rightarrow 1$:	$\hat{\rho} \xrightarrow{APD} \Pi \hat{\rho} \Pi^\dagger, \Pi = \hat{\mathbb{I}} - 0\rangle\langle 0 $
Efficacité APD $\mu \rightarrow 0$:	$\hat{\rho} \xrightarrow{APD} \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger$

Ce mode étant finalement perdu dans l'environnement, la matrice densité $\hat{\rho}$ de l'état initial est transformée en $\hat{\rho}' = \text{Tr}_2 \{ \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \} / \text{Tr}_{1,2} \{ \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \}$. Il en est de même si l'on répète cette opération deux fois, en divisant le faisceau entre deux APDs : lorsque chacune des APDs détecte un photon, la probabilité de présence d'un troisième photon est négligeable, et la matrice densité devient $\hat{\rho}'' = \text{Tr}_2 \{ \hat{a}^2 \hat{\rho} \hat{a}^{\dagger 2} \} / \text{Tr}_{1,2} \{ \hat{a}^2 \hat{\rho} \hat{a}^{\dagger 2} \}$. En termes de fonction de Wigner, la soustraction d'un photon du mode 2 peut être traduite par un opérateur différentiel dont l'expression est dérivée dans l'Annexe A :

$$\tilde{\rho} = \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \Rightarrow \tilde{W} = DW, \quad D = \frac{1}{2} \left[1 + x_2^2 + p_2^2 + x_2 \partial_{x_2} + p_2 \partial_{p_2} + \frac{\partial_{x_2}^2 + \partial_{p_2}^2}{4} \right]. \quad (4.21)$$

Si tous les déclenchements APD étaient dus à des photons provenant effectivement du mode 2, la fonction de Wigner conditionnée sur une double détection deviendrait $W = \frac{\text{Tr}_2 \{ D^2 W_\eta \}}{\text{Tr}_{1,2} \{ D^2 W_\eta \}}$. Malheureusement, le système de filtrage est imparfait, et les photodiodes à avalanche ont un certain taux de coups d'obscurité. Le déclenchement d'une APD traduit la présence d'un photon dans le mode désiré avec une probabilité $\xi < 1$. On considère que dans les autres cas, avec une probabilité $1 - \xi$, le déclenchement est dû à un photon provenant d'un autre mode (coup d'obscurité ou lumière parasite) : un tel événement est non concluant et n'induit pas de transformation sur l'état. La probabilité ξ correspond donc à une sorte de "pureté modale" du faisceau utilisé pour le conditionnement. Lorsque deux APDs sont utilisées, le conditionnement est réussi avec une probabilité ξ^2 ; avec une probabilité $2\xi(1 - \xi)$ la double détection ne correspond en fait qu'à la présence d'un seul

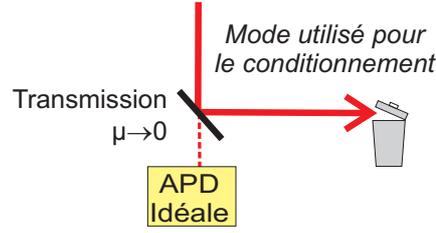


Figure 4.12: Détection APD avec une efficacité $\mu \rightarrow 0$: lorsque l'APD détecte un photon, la probabilité pour qu'un deuxième photon ait été transmis à travers la lame représentant les pertes est asymptotiquement faible. Cette détection est donc équivalente à la soustraction d'un photon unique du mode utilisé pour le conditionnement.

photon dans le mode 2, et la probabilité pour que les déclenchements des deux APDs soient non concluants vaut $(1 - \xi)^2$. Un conditionnement sur une double détection APD prépare donc en réalité un mélange statistique d'états conditionnés sur 2, 1 et 0 photons :

$$W_{cond2}(x, p) = \xi^2 \frac{\text{Tr}_2 \{D^2 W_\eta\}}{\text{Tr}_{1,2} \{D^2 W_\eta\}} + 2\xi(1 - \xi) \frac{\text{Tr}_2 \{DW_\eta\}}{\text{Tr}_{1,2} \{DW_\eta\}} + (1 - \xi)^2 \frac{\text{Tr}_2 \{W_\eta\}}{\text{Tr}_{1,2} \{W_\eta\}} \quad (4.22a)$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2+p^2}{c}}}{\pi c} \left[(1 - d)^2 + 2(1 - d) \frac{d(x^2 + p^2)}{c} + \frac{d^2(x^2 + p^2)^2}{2c^2} \right], \quad (4.22b)$$

où $c = \frac{a+b}{2}$ et $d = \frac{\xi(a-b)^2}{(a+b)(a+b-2)}$. Pour obtenir cette expression, les intégrales de type polynôme-gaussienne peuvent être calculées à l'aide de Eq. A.3. Le même calcul appliqué au conditionnement sur une détection APD conduit à

$$W_{cond1}(x, p) = \xi \frac{\text{Tr}_2 \{DW_\eta\}}{\text{Tr}_{1,2} \{DW_\eta\}} + (1 - \xi) \frac{\text{Tr}_2 \{W_\eta\}}{\text{Tr}_{1,2} \{W_\eta\}} = \frac{e^{-\frac{x^2+p^2}{c}}}{\pi c} \left[(1 - d) + \frac{d(x^2 + p^2)}{c} \right]. \quad (4.22c)$$

Bruit homodyne e

Enfin, on peut inclure dans le modèle l'effet du bruit électronique homodyne, lui aussi gaussien, de variance $e/2$ où e est le bruit relatif au shot noise. Il suffit pour cela de convoluer les fonctions W_{cond1} et W_{cond2} avec une gaussienne de bruit $\frac{1}{\sqrt{\pi e}} e^{-(x^2+p^2)/e}$, ce qui donne, toujours à l'aide de Eq. A.1, les fonctions de Wigner W_1 et W_2 des états conditionnés respectivement sur une et sur deux détections APD, telles qu'on s'attend à les mesurer avec notre détection homodyne imparfaite, en fonction des paramètres définissant le fonctionnement de chaque élément du dispositif :

$$W_1(x, p) = \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}}}{\pi \sigma^2} \left[1 - \delta + \frac{\delta R^2}{\sigma^2} \right] \quad (4.23)$$

$$W_2(x, p) = \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}}}{\pi \sigma^2} \left[(1 - \delta)^2 + 2(1 - \delta) \frac{\delta R^2}{\sigma^2} + \frac{\delta^2 R^4}{2\sigma^4} \right] \quad (4.24)$$

$$\text{où } \boxed{R^2 = x^2 + p^2} \quad \boxed{\sigma^2 = 2\eta(hg - 1) + 1 + e} \quad \boxed{\delta = \frac{2\xi\eta h^2 g(g-1)}{\sigma^2(hg-1)}} \quad (4.25)$$

En intégrant ces fonctions de Wigner sur p , on accède aux distributions de quadratures prédites par ce modèle :

$$P_1(x) = \frac{e^{-x^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \left[1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta x^2}{\sigma^2} \right], \quad (4.26)$$

$$P_2(x) = \frac{e^{-x^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \left[1 - \delta + \frac{3\delta^2}{8} + \frac{4 - 3\delta}{2} \frac{\delta x^2}{\sigma^2} + \frac{\delta^2 x^4}{2\sigma^4} \right]. \quad (4.27)$$

Nous pouvons rapidement vérifier la validité de ces expressions dans le cas limite idéal ($g \rightarrow 1$, $h = 1$, $\xi = 1$, $\eta = 1$, $e = 0$), où l'on retrouve bien les expressions 4.8 et 4.9.

4.5.2 Cas d'une efficacité APD finie

On peut raisonnablement s'interroger sur la pertinence d'une analyse dans le cas $\mu \rightarrow 0$, et essayer de comparer les expressions obtenues ci-dessus avec le cas "exact" avec une efficacité μ finie. On doit alors convoluer l'expression 4.20 par une gaussienne de vide quantique $W_0(x_3, p_3) = \frac{1}{\pi} e^{-x_3^2 - p_3^2}$ mélangé au mode 2 utilisé pour le conditionnement à travers une lame de transmission $\nu = \mu/\eta$:

$$W_\nu(x_1, p_1, x_2, p_2) = \iint [W_\eta(x_1, p_1, \sqrt{\nu}x_2 + \sqrt{1-\nu}x_3, \sqrt{\nu}p_2 + \sqrt{1-\nu}p_3) \\ W_0(\sqrt{\nu}x_3 - \sqrt{1-\nu}x_2, \sqrt{\nu}p_3 - \sqrt{1-\nu}p_2)] dx_3 dp_3 \quad (4.28a)$$

$$W_\nu(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{(x_1^2 + p_1^2)[\nu(a+b) + 2(1-\nu)] - (x_2^2 + p_2^2)[a+b] + 2(x_1 x_2 - p_1 p_2)\sqrt{\nu}[b-a]}{2\nu ab + (1-\nu)(a+b)}}}{\pi^2 [\nu ab + (1-\nu)(a+b)/2]}. \quad (4.28b)$$

Une fois cette efficacité prise en compte, on divise le mode 2 en deux parts égales (modes A et B) sur une lame 50/50 :

$$W_{AB} = W_\nu \left(x_1, p_1, \frac{x_A - x_B}{\sqrt{2}}, \frac{p_A - p_B}{\sqrt{2}} \right) W_0 \left(\frac{x_A + x_B}{\sqrt{2}}, \frac{p_A + p_B}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.29)$$

On y réalise ensuite une mesure projective "idéale", associée à l'opérateur $\Pi_Z = \hat{\mathbb{I}} - |0_Z\rangle\langle 0_Z|$, puis on prend la trace sur ces modes perdus dans l'environnement. La lumière étant équirépartie entre les modes A et B , la détection d'un photon dans l'un ou l'autre des ces modes a un effet identique sur la matrice densité de l'état préparé : $\text{Tr} \{ \Pi_A \hat{\rho}_\nu \Pi_A \} = \text{Tr} \{ \Pi_B \hat{\rho}_\nu \Pi_B \}$. Les matrices densité des états conditionnés sur 0, 1 et 2 photons deviennent

respectivement :

$$\hat{\rho}_{\Pi 0} = \text{Tr}_{A,B} \{ \hat{\rho}_{AB} \} = \text{Tr}_2 \{ \hat{\rho}_{AB} \}, \quad (4.30a)$$

$$\hat{\rho}_{\Pi 1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Tr}_{A,B} \{ \Pi_A \hat{\rho}_{AB} \Pi_A \}}{\text{Tr}_{1,A,B} \{ \Pi_A \hat{\rho}_{AB} \Pi_A \}} + \frac{\text{Tr}_{A,B} \{ \Pi_B \hat{\rho}_{AB} \Pi_B \}}{\text{Tr}_{1,A,B} \{ \Pi_B \hat{\rho}_{AB} \Pi_B \}} \right] \quad (4.30b)$$

$$= \frac{\text{Tr}_{A,B} \{ \hat{\rho}_{AB} \} - \text{Tr}_B \{ \langle 0_A | \hat{\rho}_{AB} | 0_A \rangle \}}{\text{Tr}_{1,A,B} \{ \hat{\rho}_{AB} \} - \text{Tr}_{1,B} \{ \langle 0_A | \hat{\rho}_{AB} | 0_A \rangle \}}, \quad (4.30c)$$

$$\hat{\rho}_{\Pi 2} = \frac{\text{Tr}_{A,B} \{ \Pi_A \Pi_B \hat{\rho}_{AB} \Pi_B \Pi_A \}}{\text{Tr}_{1,A,B} \{ \Pi_A \Pi_B \hat{\rho}_{AB} \Pi_B \Pi_A \}} \quad (4.30d)$$

$$= \frac{\text{Tr}_{A,B} \{ \hat{\rho}_{AB} \} - 2\text{Tr}_B \{ \langle 0_A | \hat{\rho}_{AB} | 0_A \rangle \} + \langle 0_A, 0_B | \hat{\rho}_{AB} | 0_A, 0_B \rangle}{\text{Tr}_{1,A,B} \{ \hat{\rho}_{AB} \} - 2\text{Tr}_{1,B} \{ \langle 0_A | \hat{\rho}_{AB} | 0_A \rangle \} + \text{Tr}_1 \{ \langle 0_A, 0_B | \hat{\rho}_{AB} | 0_A, 0_B \rangle \}} \quad (4.30e)$$

En termes de fonctions de Wigner, les termes impliqués dans les équations ci-dessus se traduisent par de simples intégrales gaussiennes :

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_{A,B} \{ \hat{\rho}_{AB} \} \\ & \rightarrow \int \cdots \int dx_A dp_A dx_B dp_B W_{AB}(x_1, p_1, x_A, p_A, x_B, p_B), \end{aligned} \quad (4.31a)$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_B \{ \langle 0_A | \hat{\rho}_{AB} | 0_A \rangle \} \\ & \rightarrow 2\pi \int \cdots \int dx_A dp_A dx_B dp_B W_{AB}(x_1, p_1, x_A, p_A, x_B, p_B) W_0(x_A, p_A), \end{aligned} \quad (4.31b)$$

$$\begin{aligned} & \langle 0_A, 0_B | \hat{\rho}_{AB} | 0_A, 0_B \rangle \\ & \rightarrow 4\pi^2 \int \cdots \int dx_A dp_A dx_B dp_B W_{AB}(x_1, p_1, x_A, p_A, x_B, p_B) W_0(x_A, p_A) W_0(x_B, p_B). \end{aligned} \quad (4.31c)$$

Leur calcul, ainsi que celui des termes de normalisation, effectué à l'aide de Eq. A.1, conduit à des fonctions de Wigner dépendant de $R^2 = x_1^2 + p_1^2$:

$$W_{\Pi 0} = \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_0'^2}}}{\pi \sigma_0'^2} \quad (4.32a)$$

$$W_{\Pi 1} = \frac{2+\mu(hg-1)}{\mu(hg-1)} \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_0'^2}}}{\pi \sigma_0'^2} - \frac{2}{\mu(hg-1)} \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_1'^2}}}{\pi \sigma_1'^2} \quad (4.32b)$$

$$W_{\Pi 2} = \frac{[2+\mu(hg-1)][1+\mu(hg-1)]}{\mu^2(hg-1)^2} \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_0'^2}}}{\pi \sigma_0'^2} - 4 \frac{1+\mu(hg-1)}{\mu^2(hg-1)^2} \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_1'^2}}}{\pi \sigma_1'^2} + \frac{2+\mu(hg-1)}{\mu^2(hg-1)^2} \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_2'^2}}}{\pi \sigma_2'^2} \quad (4.32c)$$

$$\sigma_0'^2 = 2\eta(hg-1) + 1 \quad \sigma_1'^2 = \sigma_0'^2 - \frac{2\mu\eta h^2 g(g-1)}{2+\mu(hg-1)} \quad \sigma_2'^2 = \sigma_0'^2 - \frac{2\mu\eta h^2 g(g-1)}{1+\mu(hg-1)} \quad (4.32d)$$

L'ajout de bruit homodyne peut être simplement effectué en remplaçant $\sigma_i'^2$ par $\sigma_i'^2 + e$. Le mélange statistique associé aux erreurs lors de la projection APD, que l'on traduit comme précédemment par la pureté modale ξ , donne finalement les fonctions de

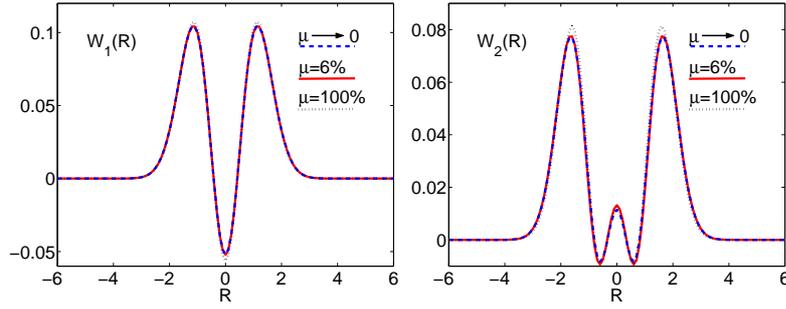


Figure 4.13: Coupes radiales des fonctions de Wigner à un et deux photons attendues avec nos paramètres expérimentaux dans le cas $\mu = 6\%$, comparées aux cas limites $\mu \rightarrow 0$ et $\mu = 1$.

Wigner W_1' et W_2' des états conditionnés sur une et deux détections APD tenant compte de toutes les pertes avec une efficacité APD μ finie :

$$\boxed{W_1'(R) = [1 + A] \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_0^2}}}{\pi\sigma_0^2} - A \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_1^2}}}{\pi\sigma_1^2}} \quad \boxed{W_2'(R) = [1 + B - C] \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_0^2}}}{\pi\sigma_0^2} - B \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_1^2}}}{\pi\sigma_1^2} + C \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma_2^2}}}{\pi\sigma_2^2}} \quad (4.33a)$$

$$\sigma_0^2 = 2\eta(hg - 1) + 1 + e \quad A = \frac{2\xi}{\mu(hg - 1)} \quad (4.33b)$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_0^2 - \frac{2\mu\eta h^2 g(g-1)}{2 + \mu(hg - 1)} \quad B = \frac{4\xi^2}{\mu^2(hg - 1)^2} + \frac{4\xi}{\mu(hg - 1)} \quad (4.33c)$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_0^2 - \frac{2\mu\eta h^2 g(g-1)}{1 + \mu(hg - 1)} \quad C = \frac{2\xi^2}{\mu^2(hg - 1)^2} + \frac{\xi^2}{\mu(hg - 1)} \quad (4.33d)$$

Les expressions obtenues, sommes et différences de gaussiennes, sont assez simples. Cependant, elles ont un comportement “pathologique” dans deux cas limites importants : lorsque $\mu \rightarrow 0$ ou lorsque $r \rightarrow 0$ (c’est à dire $g \rightarrow 1$ et $h \rightarrow 1$), les variances σ_1^2 et σ_2^2 tendent toutes deux vers σ_0^2 , et les constantes A , B et C divergent. Or, la réalité expérimentale correspond à la fois à un gain OPA faible et à une efficacité APD faible. Sous cette forme, ces fonctions font donc intervenir des petites différences de grands nombres, ce qui conduit à d’importantes erreurs numériques lorsqu’elles sont utilisées pour l’analyse de données expérimentales sous contrainte, développée dans la section suivante.

Par ailleurs on constate sur la figure 4.13 que, avec nos paramètres expérimentaux, les coupes radiales des fonctions de Wigner obtenues dans le cas $\mu = 6\%$ avec les équations 4.33 sont pratiquement indiscernables de celles déterminées dans la limite $\mu \rightarrow 0$ avec les équations 4.23 et 4.24. On vérifie que l’on retrouve bien cette deuxième paire d’équations en prenant cette limite dans les expressions “exactes”.

On observe de plus que, dans notre gamme de paramètres, l’efficacité APD joue en réalité peu de rôle : les courbes obtenues pour $\mu = 1$ sont assez proches de celles à $\mu \rightarrow 0$. Pour comprendre “physiquement” ce comportement, on peut se demander quelle information sur l’état nous est révélée par une détection APD : si on a détecté un photon, combien y en avait-il en réalité? Si les pertes APD sont importantes, on est enclin à penser que la détection d’un photon correspond à la présence de nombreux photons au départ,

dont la plupart se sont perdus en route. Mais dans notre cas le gain est faible : la baisse de μ ne fait que diminuer le taux de comptage, la probabilité de présence de plusieurs photons restant faible. En quelques sortes, pour déclencher l'APD il vaut mieux faire plusieurs essais successifs avec un photon plutôt que d'attendre la création de plusieurs photons simultanés. Dans un modèle simplifié, supposons que l'on prépare un état EPR pur $|\psi_{EPR}\rangle = \sqrt{1-\lambda^2} \sum \lambda^2 |n, n\rangle$ où $\lambda = \tanh(r) \ll 1$. La probabilité de créer n photons dans un mode et d'en faire parvenir au moins un jusqu'au photodétecteur vaut alors $p(n) = (1-\lambda^2)\lambda^{2n}[1 - (1-\mu)^n] \approx n\lambda^{2n}\mu$. Si $\lambda^2 < 1/2$ cette probabilité est donc décroissante avec n . Dans notre cas $\lambda^2 \sim 0,1$, et les événements à un photon sont largement dominants devant ceux correspondant à la présence de photons multiples. Ce comportement est également mis en évidence par les équations 4.33, où l'efficacité APD μ apparaît systématiquement en facteur du nombre de photons moyen présents initialement dans le mode de conditionnement ($g-1$ pour l'état EPR pur, $hg-1$ pour l'état OPA bruité). Les paramètres $\mu(g-1)$ ou $\mu(hg-1)$ restent donc petits peu importe la valeur de μ . Ceci explique, entre autres, pourquoi les équations 4.23 et 4.24 permettent de retrouver le cas idéal bien qu'elles contiennent un défaut "intrinsèque", ayant été obtenues dans la limite $\mu \rightarrow 0$.

L'efficacité APD peut donc être négligée dans ce modèle. Dans la pratique, on doit évidemment se souvenir que la séparation entre les pertes APD μ et le bruit d'obscurité, qui apparaît dans la pureté modale ξ , est artificielle : si on diminue la transmission du système de filtrage, on peut arriver dans un régime où les coups d'obscurité deviennent importants. Si, dans notre modèle, on prend la limite $\mu = 0$ par commodité, il ne faut pas en conclure que l'expérience peut marcher avec des pertes APD arbitraires. En revanche, elle y est effectivement beaucoup moins sensible qu'aux pertes homodynes, qui détériorent les états quantiques préparés. Les pertes APD ne font que diminuer le taux de comptage, ce qui, nous l'avons vu ici, a peu d'effet tant qu'il reste très supérieur à celui des coups d'obscurité.

4.5.3 Analyse des résultats du modèle : critère de négativité

On revient donc aux expressions dérivées dans la limite $\mu \rightarrow 0$:

$$W_1(x, p) = \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}}}{\pi\sigma^2} \left[1 - \delta + \frac{\delta R^2}{\sigma^2} \right] \quad W_2(x, p) = \frac{e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}}}{\pi\sigma^2} \left[(1-\delta)^2 + 2(1-\delta)\frac{\delta R^2}{\sigma^2} + \frac{\delta^2 R^4}{2\sigma^4} \right] \quad (4.34)$$

$$P_1(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \left[1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta x^2}{\sigma^2} \right] \quad P_2(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \left[1 - \delta + \frac{3\delta^2}{8} + \frac{4-3\delta}{2} \frac{\delta x^2}{\sigma^2} + \frac{\delta^2 x^4}{2\sigma^4} \right] \quad (4.35)$$

$$\sigma^2 = 2\eta(hg-1) + 1 + e \quad \delta = \frac{2\xi\eta h^2 g(g-1)}{\sigma^2(hg-1)} \quad (4.36)$$

Ces équations sont décrites par les deux *mêmes* grandeurs σ^2 et δ , regroupant l'ensemble des paramètres expérimentaux.

Dans ces expressions, σ^2 est simplement la variance de l'état thermique obtenu sans conditionnement. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que l'absence de conditionnement équivaut à un conditionnement totalement non-concluant (c'est par exemple

le cas lorsque les APDs sont uniquement déclenchées par des coups d'obscurité). Il suffit de prendre n'importe quelle des expressions ci-dessus avec $\xi = 0$ pour obtenir $W_{th}(x, p) = \frac{1}{\pi\sigma^2}e^{-R^2/\sigma^2}$ et $P_{th}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^2}e^{-x^2/\sigma^2}$.

Le paramètre δ détermine quant à lui le caractère non-classique de l'état. Il varie entre 0 pour un état thermique et 2 dans la limite du cas idéal où l'on retrouve les expressions 4.8 et 4.9. C'est ce paramètre qui détermine la forme des fonctions de Wigner observées. Pour W_1 , le creux central apparaît pour $\delta > 1/2$ et atteint des valeurs négatives pour $\delta > 1$. Pour W_2 ce creux apparaît pour $\delta > 1/3$. Lorsque $\delta > 1$, W_2 devient négative entre $R = \sigma\sqrt{(1 - 1/\delta)(2 - \sqrt{2})}$ et $R = \sigma\sqrt{(1 - 1/\delta)(2 + \sqrt{2})}$ en même temps qu'apparaît un pic central positif.

Le critère $\delta > 1$ est donc très pratique pour identifier la gamme de paramètres à atteindre pour obtenir des fonctions de Wigner négatives. Dans la limite d'un gain faible ce critère équivaut à $\lim_{r \rightarrow 0} \delta = \frac{2\xi\eta}{(1+\gamma^2)(1+e)} > 1$. Le fait que ce critère soit le même pour les états à un et deux photons nous sera extrêmement utile.

Condition de négativité des fonctions de Wigner :	
$W_1 \not\geq 0 \Leftrightarrow W_2 \not\geq 0 \Leftrightarrow$	$\boxed{\delta > 1} \Leftrightarrow \frac{2\xi\eta}{(1+\gamma^2)(1+e)} > 1$ pour $r \ll 1$

4.6 Applications du modèle analytique

4.6.1 Reconstruction directe des fonctions de Wigner

On pourrait bien sûr essayer d'interpoler les résultats expérimentaux à l'aide de ce modèle en y entrant "à la main" les valeurs des paramètres expérimentaux. Mais parmi eux, certains sont difficiles à mesurer précisément. C'est le cas de la pureté modale, qui ne peut qu'être estimée en comparant le taux de comptage mesuré à celui attendu compte tenu des mesures du gain paramétrique et de l'efficacité APD à la sonde. Cette estimation est assez grossière, notamment à cause de l'incertitude sur l'efficacité quantique des APDs à 850 nm et à celle sur l'excès de gain h mesuré à la sonde, et conduit à une pureté modale de l'ordre de 80% à 10 – 15% près.

On peut alors prendre le problème à l'envers, et utiliser ce modèle pour l'analyse sous contrainte des données expérimentales. Elle se base sur une hypothèse forte sur la forme des états produits dans l'expérience, mais permet d'accéder à une physique bien plus riche que les méthodes numériques (Radon ou MaxLike).

Supposons donc que les états préparés sont de la forme polynôme-gaussienne décrite par les équations 4.23 et 4.24. Les distributions de quadratures sont décrites par les équations 4.27 et 4.27. Alors les paramètres σ^2 et δ peuvent être immédiatement extraits des moments d'ordre 2 et 4 de ces distributions, qui sont immédiats à mesurer dans l'expérience. Avec la convention $\Delta x_{SNL}^2 = 1/2$, on trouve :

Notre modèle prédit que les valeurs de ces paramètres doivent être les mêmes pour les deux états. C'est bien ce que l'on observe expérimentalement : on trouve respectivement $\sigma^2 = 1,14$ et $\delta = 1,19$ pour l'état $n = 1$ et $\sigma^2 = 1,14$ et $\delta = 1,21$ pour l'état $n = 2$. La légère variation de δ peut s'expliquer par des dérives expérimentales.

	$\Delta x^2 = V_2$	$\Delta x^4 = V_4$	σ^2	δ
1 photon	$\sigma^2 \frac{1+\delta}{2}$	$3\sigma^4 \frac{1+2\delta}{4}$	$2V_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{V_4}{3V_2^2}} \right]$	$\frac{\sqrt{1 - \frac{V_4}{3V_2^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{V_4}{3V_2^2}}}$
2 photons	$\sigma^2 \frac{1+2\delta}{2}$	$3\sigma^4 \frac{1+4\delta+4\delta^2}{4}$	$2V_2 \left[1 - \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4V_4}{9V_2^2}} \right]$	$\frac{\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4V_4}{9V_2^2}}}{1 - \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4V_4}{9V_2^2}}}$

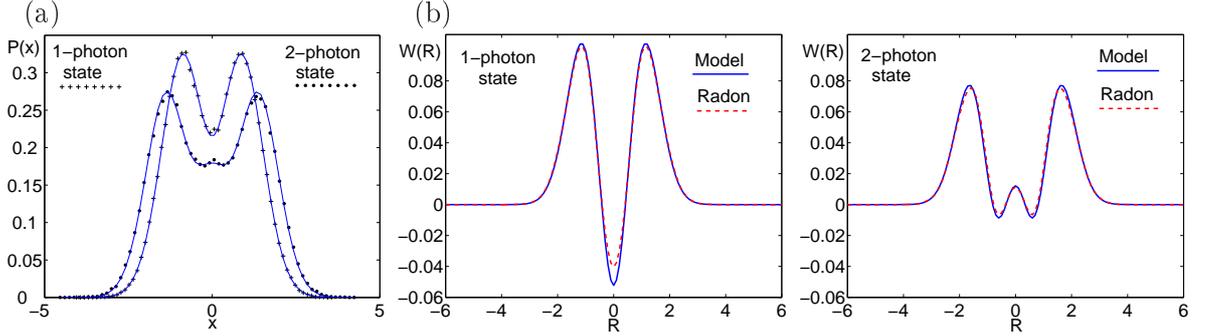


Figure 4.14: (a) Distributions de quadratures reconstruites à l'aide de notre modèle analytique (trait plein), comparées à celles obtenues directement à partir des histogrammes expérimentaux. (b) Coupes radiales des fonctions de Wigner expérimentales à un et deux photons reconstruites à l'aide de notre modèle sans aucune correction, comparées à celles obtenues par transformée de Radon inverse numérique.

On injecte ensuite ces valeurs de σ^2 et de δ dans les équations 4.23, 4.24, 4.26 et 4.27 pour reconstruire les distributions de quadratures et les fonctions de Wigner “brutes” telles qu’on s’attend à les observer. Comme on le voit sur la figure 4.14 la correspondance quasi-parfaite avec les histogrammes expérimentaux et les fonctions de Wigner déterminées numériquement confirme la validité de ce modèle et de cette méthode d’analyse. L’écart quadratique entre les histogrammes et les quadratures obtenues avec notre modèle est inférieur à 1%. La fidélité entre les états reconstruits numériquement et analytiquement, calculée par l’intermédiaire des matrices densités, vaut 99,8% pour $n = 1$ et 99,9% pour $n = 2$.

4.6.2 Accès aux paramètres expérimentaux

Les paramètres σ^2 et δ nous servent de pivot entre les données, les fonctions de Wigner, mais aussi les paramètres expérimentaux. En effet, en inversant les équations 4.25, on peut accéder à γ et ξ , difficiles à mesurer indépendamment. À partir des données expérimentales, on obtient $\gamma = 0.4$ et $\xi = 0.9$ pour les états $n = 1$, $\gamma = 0.38$ et $\xi = 0.91$ pour les états $n = 2$. Cette méthode d’analyse permet donc non seulement de savoir quelle est la fonction de Wigner de l’état, mais aussi *pourquoi* elle a cette forme. Les méthodes d’analyse numérique nécessitent beaucoup moins d’hypothèses pour déterminer la structure des états mesurés, mais ne donnent pas accès à la physique sous-jacente.

Le tableau ci-dessous regroupe l’ensemble des paramètres expérimentaux obtenus par

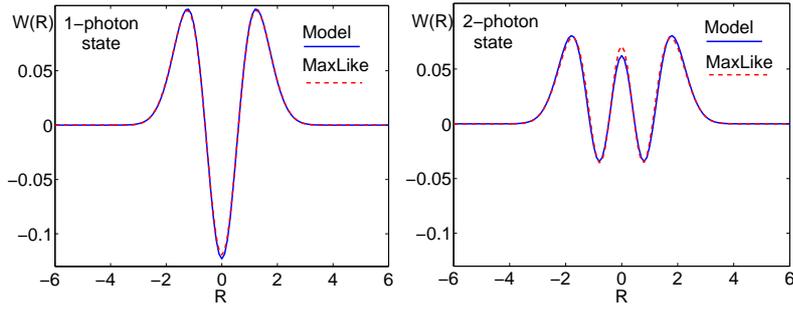


Figure 4.15: Coupes radiales des fonctions de Wigner expérimentales à un et deux photons corrigées des pertes homodynes, reconstruites à l’aide de notre modèle, comparées à celles obtenues par maximum de vraisemblance.

mesure directe (g , η et e) ou à partir des données expérimentales à l’aide de ce modèle (σ^2 , δ , γ , et ξ).

	g	γ	ξ	η	e	σ^2	δ
1 photon	1.07	0.40	90%	80%	0.7%	1.14	1.19
2 photons	1.07	0.38	91%	80%	0.7%	1.14	1.21

4.6.3 Correction des pertes homodynes

Les fonctions de Wigner “brutes” obtenues à l’aide de ce modèle reproduisent donc parfaitement celles obtenues par transformée de Radon. Peut-on de même reproduire celles obtenues par maximum de vraisemblance, pour déterminer les états corrigés des pertes homodynes?

Les fonctions de Wigner des états générés, corrigées des pertes homodynes, sont celles que l’on observerait avec une détection homodyne parfaite : efficacité $\eta = 1$ et bruit $e = 0$. Les autres paramètres expérimentaux (g , γ et ξ) correspondent au processus de préparation de l’état, ils doivent donc être les mêmes pour les fonctions de Wigner corrigées et non corrigées. Il suffit donc de prendre pour ces paramètres les valeurs déterminées à partir de l’expérience et de poser $\eta = 1$ et $e = 0$ pour déterminer la fonction de Wigner que l’on aurait observé avec une détection homodyne parfaite. La figure 4.15 montre que l’on reproduit ainsi presque parfaitement les résultats obtenus numériquement par maximum de vraisemblance. La fidélité entre les états obtenus par les deux méthodes vaut 99% pour $n = 1$ et 98% pour $n=2$.

Pour reconstruire, à l’aide de notre modèle, les fonctions de Wigner des états réellement générés dans notre expérience, on commence donc par mesurer les paramètres σ^2 et δ , et on reconstruit les distributions de quadratures pour vérifier leur accord avec les histogrammes expérimentaux. On détermine ensuite tous les paramètres expérimentaux manquants. Les fonctions de Wigner “brutes”, définies par g , h , ξ , η et e correspondent à celles des états mesurés, et reproduisent les résultats de la transformation de Radon inverse. Les fonctions de Wigner “corrigées” sont donc définies par g , h , ξ , $\eta = 1$ et $e = 0$, et correspondent bien à celles obtenues par maximum de vraisemblance.

4.6.4 Incertitudes statistiques sur les points caractéristiques

En déterminant les fonctions de Wigner, on s'intéresse à ses valeurs en certains points particuliers, par exemple à l'origine. Lorsque l'on utilise des algorithmes numériques complexes, l'incertitude statistique sur ces valeurs est très difficile à calculer exactement. On peut au mieux répéter plusieurs fois l'expérience, ou diviser les données en plusieurs lots pour déterminer les fluctuations de ces valeurs sur l'ensemble des échantillons.

En revanche, pour les fonctions déterminées à l'aide de notre modèle, qui reproduisent presque parfaitement les résultats numériques, le calcul de ces incertitudes est relativement simple. Supposons par exemple que l'on ait fait l'acquisition de N points expérimentaux conditionnés sur un photon, que l'on ait reconstruit la fonction de Wigner de l'état $n = 1$ et que l'on veuille calculer l'incertitude statistique sur sa valeur à l'origine. Cette valeur peut s'exprimer en fonction des moments de distribution V_2 et V_4 par

$$W_1(0) = \frac{1 - \delta}{\pi\sigma^2} = \frac{V_2 - 2\sqrt{V_2^2 - V_4/3}}{2\pi[V_2 - \sqrt{V_2^2 - V_4/3}]^2} \quad (4.37)$$

Or les moments V_2 et V_4 sont déterminés directement à partir d'un échantillon de N points expérimentaux $x_1 \dots x_N$. Les différents points expérimentaux étant décorrélés, il est facile de voir que les erreurs sur l'estimation de ces quantités peuvent s'exprimer en fonction des moments d'ordre 2, 4, 6 et 8, le moment d'ordre k étant donné par $V_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k$ (on a au préalable ramené la moyenne de x à 0). Par exemple pour $\langle \delta V_2^2 \rangle = \langle V_2^2 \rangle - \langle V_2 \rangle^2$:

$$\langle \delta V_2^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 \right\rangle - \langle V_2 \rangle^2 = \left\langle \frac{1}{N^2} \sum_i x_i^4 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j^2 \right\rangle - \langle V_2 \rangle^2 \quad (4.38a)$$

$$= \frac{\langle V_4 \rangle}{N} + \frac{N(N-1) \langle V_2 \rangle^2}{N^2} - \langle V_2 \rangle^2 = \frac{\langle V_4 \rangle - \langle V_2 \rangle^2}{N}. \quad (4.38b)$$

En appliquant la même méthode pour $\langle \delta V_4^2 \rangle = \langle V_4^2 \rangle - \langle V_4 \rangle^2$ et $\langle \delta V_2 \delta V_4 \rangle = \langle V_2 V_4 \rangle - \langle V_2 \rangle \langle V_4 \rangle$ on trouve

$$\langle \delta V_2^2 \rangle = \frac{\langle V_4 \rangle - \langle V_2 \rangle^2}{N}, \quad \langle \delta V_4^2 \rangle = \frac{\langle V_8 \rangle - \langle V_4 \rangle^2}{N}, \quad \langle \delta V_2 \delta V_4 \rangle = \frac{\langle V_6 \rangle - \langle V_2 \rangle \langle V_4 \rangle}{N}. \quad (4.39)$$

Dans les membres de droite de ces expressions, on peut oublier les valeurs moyennes et utiliser les valeurs des moments V_2 , V_4 , V_6 , et V_8 obtenues à partir des données expérimentales. Des fluctuations δV_2 et δV_4 se traduisent sur $W_1(0)$ par $\delta W_1(0) = \frac{\partial W_1(0)}{\partial V_2} \delta V_2 + \frac{\partial W_1(0)}{\partial V_4} \delta V_4$. L'erreur moyenne sur $W_1(0)$ se traduit donc en termes d'écart-type par

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle \delta W_1^2(0) \rangle} &= \sqrt{\left\langle \left[\frac{\partial W_1(0)}{\partial V_2} \delta V_2 + \frac{\partial W_1(0)}{\partial V_4} \delta V_4 \right]^2 \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left[\frac{\partial W_1(0)}{\partial V_2} \right]^2 \langle \delta V_2^2 \rangle + \left[\frac{\partial W_1(0)}{\partial V_4} \right]^2 \langle \delta V_4^2 \rangle + 2 \frac{\partial W_1(0)}{\partial V_2} \frac{\partial W_1(0)}{\partial V_4} \langle \delta V_2 \delta V_4 \rangle} \quad (4.40) \end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$\frac{\partial W_1(0)}{\partial V_2} = -\frac{3}{2\pi \left[V_2 - \sqrt{V_2^2 - V_4/3} \right]^2} \quad \frac{\partial W_1(0)}{\partial V_4} = \frac{1}{6\pi \left[V_2 - \sqrt{V_2^2 - V_4/3} \right]^3} \quad (4.41)$$

et on injecte les valeurs des moments $V_2, V_4, V_6,$ et V_8 pour calculer l'erreur $\sqrt{\langle \delta W_1^2(0) \rangle}$.

L'équation 4.40 est valable pour n'importe quelle grandeur F que l'on sait exprimer analytiquement à partir des moments V_2 et V_4 . Il suffit de remplacer les dérivées partielles de $W_1(0)$ par celles de F . Le tableau ci-dessous résume les valeurs des points d'intérêt pour les fonctions de Wigner W_1 et W_2 des états de Fock mesurés expérimentalement, avec les erreurs statistiques correspondantes.

	1 photon	2 photons	
	$\min(W_1) = W_1(0)$	$\min(W_2)$	$W_2(0)$
État mesuré (sans correction)	-0.052 ± 0.002	-0.009 ± 0.002	0.012 ± 0.002
État généré (corrigé)	-0.123 ± 0.002	-0.034 ± 0.002	0.062 ± 0.002
État idéal	-0.32	-0.13	0.32

4.6.5 Matrices densités

Les matrices densités peuvent être obtenues numériquement à partir des fonctions de Wigner (elles servent d'ailleurs d'intermédiaire dans la reconstruction par maximum de vraisemblance). Mais on peut également les déterminer de manière analytique avec notre modèle. On utilise pour cela l'équation A.14c, démontrée dans l'Annexe A :

$$\langle m | \hat{\rho} | n \rangle = \frac{2}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial z^n} \iint W(x, p) e^{-x^2 - p^2 + 2x(t+z) - 2ip(t-z) - 2tz} dx dp \right]_{t=z=0}. \quad (4.42)$$

Or les fonctions de Wigner sont dans ce cas de la forme $\frac{1}{\pi\sigma^2} P(x, p) e^{-(x^2+p^2)/\sigma^2}$ où P est un polynôme pair de degré 4 au plus. En utilisant cette expression dans l'équation ci-dessus, un changement de variables conduit à

$$\langle m | \hat{\rho} | n \rangle = \frac{2}{\pi(1+\sigma^2)\sqrt{2^{m+n} m! n!}} \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial z^n} \iint e^{-x^2 - p^2 + 2tz \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1}} \times P \left(x \sqrt{\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}} + \frac{\sigma^2(t+z)}{1+\sigma^2}, p \sqrt{\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}} - i \frac{\sigma^2(t-z)}{1+\sigma^2} \right) dx dp \right]_{t=z=0}. \quad (4.43)$$

Pour l'état thermique non conditionné $\hat{\rho}_0$, $P = 1$, ce qui donne

$$\langle m | \hat{\rho}_0 | n \rangle = \frac{2}{(1+\sigma^2)\sqrt{2^{m+n} m! n!}} \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial z^n} e^{2tz \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1}} \right]_{t=z=0} \quad (4.44a)$$

$$= \frac{2}{(1+\sigma^2)} \sqrt{\frac{2^{n-m}}{m! n!}} \left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right)^n \left[\frac{\partial^m}{\partial t^m} t^n \right]_{t=0} \quad (4.44b)$$

$$= \frac{2}{(1+\sigma^2)} \left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right)^n \delta_{m,n} \quad (4.44c)$$

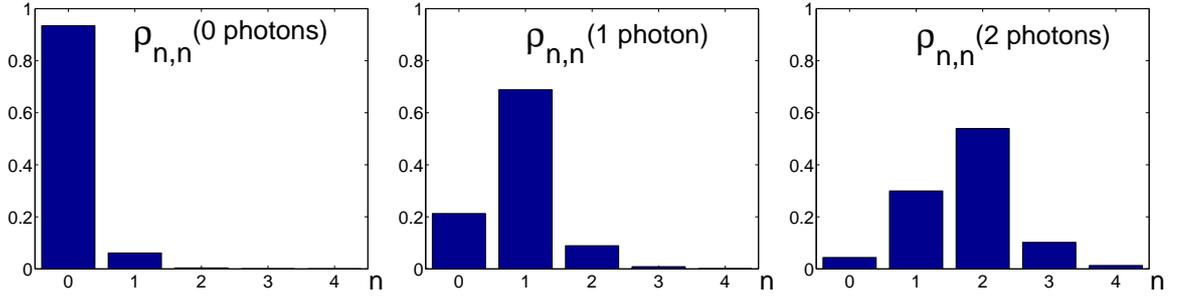


Figure 4.16: Les coefficients diagonaux des matrices densité des états conditionnés sur 0, 1, et 2 photons générés expérimentalement, corrigés des pertes homodynes.

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker. La même approche peut être appliquée aux matrices densités des états à 1 et 2 photons, avec respectivement $P_1(x, p) = \left[1 - \delta + \frac{\delta(x^2+p^2)}{\sigma^2}\right]$ et $P_2(x, p) = \left[(1 - \delta)^2 + 2(1 - \delta)\frac{\delta(x^2+p^2)}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2(x^2+p^2)^2}{\sigma^4}\right]$, en utilisant la formule A.3 pour les intégrales. On trouve alors

$$\langle n|\hat{\rho}_0|n\rangle = 2\frac{(\sigma^2 - 1)^n}{(\sigma^2 + 1)^{n+1}}\delta_{m,n} \quad (4.45)$$

$$\langle n|\hat{\rho}_1|n\rangle = 2\frac{(\sigma^2 - 1)^{n-1}}{(\sigma^2 + 1)^{n+2}} \left[\sigma^4(1 - \delta) + \sigma^2\delta(1 + 2n) - 1\right] \delta_{m,n} \quad (4.46)$$

$$\langle n|\hat{\rho}_2|n\rangle = 2\frac{(\sigma^2 - 1)^{n-2}}{(\sigma^2 + 1)^{n+3}} \left[\left[\sigma^4(1 - \delta) + \sigma^2\delta(1 + 2n) - 1\right]^2 - 2n(n + 1)\delta^2\sigma^4\right] \delta_{m,n} \quad (4.47)$$

On le voit, ces matrices densités sont diagonales en base de Fock. Comme pour les fonctions de Wigner mesurées et corrigées, on peut utiliser soit les paramètres σ^2 et δ des états mesurés “bruts”, soit ceux des états corrigés des pertes homodynes ($\sigma^2 = 1.17$ pour tous les cas, $\delta = 1.44$ pour $\hat{\rho}_1$ et 1.48 pour $\hat{\rho}_2$). Les termes diagonaux des états expérimentaux conditionnés sur 0, 1 et 2 photons, corrigés des pertes homodynes, sont représentés sur la figure 4.16. Les coefficients $\langle 1|\hat{\rho}_1|1\rangle = 68\%$ et $\langle 2|\hat{\rho}_2|2\rangle = 54\%$ correspondent bien aux fidélités avec les états $n = 1$ et $n = 2$ purs déterminées précédemment à partir des fonctions de Wigner reconstruites par maximum de vraisemblance (respectivement 67% et 53%).

Le fait que les états soient diagonaux en base de Fock n’est pas étonnant : c’est le cas pour tout état dont la fonction de Wigner ne dépend pas de la phase. Un mélange statistique d’états de Fock est évidemment invariant de phase, sa fonction de Wigner étant la somme pondérée des fonctions de Wigner des états de Fock qui présentent toutes cette invariance. La réciproque est facile à montrer en passant en coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $p = r \sin(\theta)$ dans l’équation 4.42. Si la fonction de Wigner ne dépend que

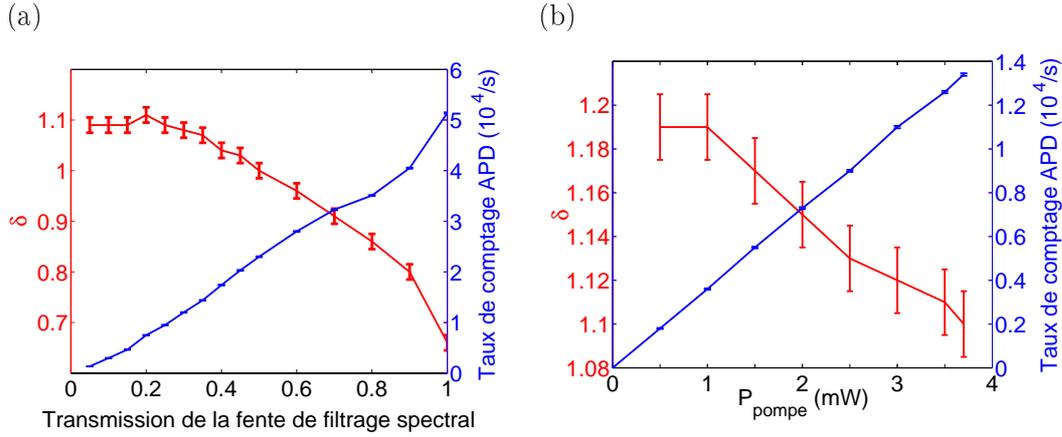


Figure 4.17: (a) Variations du paramètre δ et du taux de comptage en fonction de la transmission de la fente de filtrage, pour $P_{pompe} = 3,7$ mW. (b) Variations du paramètre δ et du taux de comptage en fonction de la puissance de pompe, pour $T_{fente} = 30\%$.

de la coordonnée radiale r on a alors

$$\langle m | \hat{\rho} | n \rangle \propto \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial z^n} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta W(r) e^{-r^2 + 2rte^{-i\theta} + 2rze^{i\theta} - 2tz} \right]_{t=z=0} \quad (4.48a)$$

$$\propto \left[\frac{\partial^n}{\partial z^n} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta W(r) (2re^{-i\theta} - 2z)^m e^{-r^2 + 2rze^{i\theta}} \right]_{z=0} \quad (4.48b)$$

$$\propto \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta W(r) \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{n}{k} \frac{m!}{k!} (-2)^k (2r)^{m+n-2k} e^{i\theta(n-m)} \quad (4.48c)$$

Lorsque $m \neq n$, l'intégrale sur θ donne $\langle m | \hat{\rho} | n \rangle = 0$.

4.6.6 Optimisation expérimentale

Une dernière application de ce modèle, mais peut-être la plus utile, est l'optimisation expérimentale. Nous l'avons vu, les états à un et deux photons sont décrits par le même paramètre δ . Or il est 300 fois plus rapide à mesurer dans le cas $n = 1$ que dans le cas $n = 2$. Les moments d'ordre 2 et 4 sont suffisants, une tomographie complète n'est pas nécessaire, et δ peut être estimé en quelques secondes à 1 – 2% près à partir de mesures conditionnées sur un photon. On peut donc optimiser l'expérience en temps réel en mesurant ce paramètre, jusqu'à atteindre le régime $\delta > 1$. Nous avons utilisé cette technique dans toutes les expériences fonctionnant en régime non dégénéré. Elle a permis d'économiser de nombreux mois de travail expérimental sur les trois années de cette thèse, rendant possibles des expériences qui ne l'auraient pas été sans elle.

Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, le succès de ces expériences dépend de nombreux paramètres expérimentaux souvent contradictoires. On peut aisément déterminer leur influence en étudiant les variations de δ , pour choisir le meilleur compromis. La figure 4.17 montre par exemple les variations expérimentales de δ et du taux de comptage en fonction de la transmission de la fente de filtrage spectral. On remarque que la qualité

des états reste stable jusqu'à $T = 30\%$, et diminue ensuite. Dans toutes nos expériences on travaille donc à $T = 25 - 35\%$, ce qui permet d'avoir un bon taux de génération avec une qualité quasi-optimale. La même figure montre les variations de ces grandeurs en fonction de la puissance de pompe : les variations de δ sont relativement faibles et, lorsqu'on a besoin d'augmenter le taux de comptage, on aura intérêt à augmenter le gain plutôt que d'élargir le filtrage spectral.

Les mesures rapides du paramètre δ sont donc un outil précieux dans toutes ces expériences, aussi bien pour leur optimisation initiale que lors des acquisitions de données, où elles permettent de contrôler la stabilité du dispositif et signalent les éventuelles dérives.

4.7 Conclusion

Nous avons réalisé la première tomographie homodyne d'états de Fock à deux photons [91]. La fonction de Wigner reconstruite expérimentalement présente une structure complexe avec une zone négative, sans aucune hypothèse et sans correction pour les pertes induites par la détection homodyne. Il en est de même pour les états de Fock à un photon, préparés avec le même dispositif.

Nous avons élaboré un modèle analytique complet pour notre expérience. Ce modèle conduit à des expressions très simples qui reproduisent les résultats expérimentaux avec une excellente fidélité. Il peut être utilisé pour l'analyse de données sous contrainte, qui permet d'accéder à une physique bien plus riche que les méthodes numériques. Cette méthode permet de reconstruire facilement les fonctions de Wigner mesurées et corrigées des pertes, de calculer les incertitudes sur leurs valeurs en des points particuliers, d'accéder à certains paramètres expérimentaux difficiles à mesurer indépendamment, ou encore de déterminer les matrices densité des états. Elle offre également des économies substantielles sur le temps nécessaire à l'optimisation d'une telle expérience.

Dans le cadre général de cette thèse, ce travail a permis de développer et de valider, sur un cas relativement simple, un ensemble cohérent d'outils théoriques et expérimentaux. On a montré que ces outils permettaient de préparer et d'analyser des états quantiques de la lumière présentant des structures complexes et des fonctions de Wigner négatives. On peut donc les mettre en oeuvre sur des états plus complexes, dont l'étude est présentée dans la suite de ce manuscrit.

Partie III

Les “chats de Schrödinger” optiques, nouvelle ressource pour l’information quantique

Chapitre 5

Génération de “chatons de Schrödinger” optiques.

Sommaire

5.1	Introduction : du chat de Schrödinger à l’ordinateur quantique . .	109
5.2	Chats de Schrödinger optiques	111
5.2.1	Définition et caractéristiques	111
5.2.2	Applications	114
5.3	Méthode de préparation de “chatons de Schrödinger”	116
5.4	Dispositif expérimental	119
5.5	Modélisation expérimentale	120
5.6	Résultats expérimentaux	122
5.7	Amplification de chatons	125
5.8	Contexte historique de l’expérience	126
5.9	Conclusion	127

5.1 Introduction : du chat de Schrödinger à l’ordinateur quantique

L’année 1935 a vu la publication de deux expériences de pensée qui allaient profondément marquer la physique quantique et qui, plus de 70 ans plus tard, sont plus que jamais d’actualité. Le premier de ces *Gedankenexperimenten* est le “paradoxe EPR” [7] soulevé par Einstein, Podolsky et Rosen, qui montrait une incompatibilité entre l’existence de l’intrication et l’idée de réalisme local, selon laquelle chaque particule “porte” toute l’information qui la décrit. Le deuxième, celle qui nous intéresse dans cette partie, est l’expérience du chat proposée par Erwin Schrödinger [6].

Dans son expérience de pensée, Schrödinger enferme un chat dans une boîte qui contient une fiole de poison. Le système d’ouverture de la fiole est déclenché par un compteur Geiger, qui détecte la désintégration d’un atome radioactif. D’après l’argument de Schrödinger, puisque la mécanique quantique autorise l’existence de superpositions d’états

pour l'atome, il doit en être de même pour le chat : si l'atome est à la fois intact et désintégré, le chat doit être à la fois mort et vivant, tant que l'on n'ouvre pas la boîte pour l'observer. On aboutit ainsi à une sorte de "paradoxe" entre les prédictions de la physique quantique et le "bon sens" classique.

Tout d'abord, cette expérience a été un instrument de popularisation formidable de la mécanique quantique. Il est vrai que la "mise en scène" était particulièrement bien choisie : la drosophile de Schrödinger aurait eu un succès bien moindre. Toujours est-il que lorsqu'on parle de physique quantique, l'histoire du chat de Schrödinger est l'une des rares à faire écho auprès du grand public. Et, toutes les histoires à succès ayant des effets pervers, elle a parfois contribué à cataloguer ce domaine comme de la pure théorie voire de la science-fiction.

Il existe cependant une différence essentielle entre le chat de Schrödinger et d'autres expériences de pensée couramment utilisées dans la vulgarisation scientifique. Dans une classe d'école primaire, l'histoire du chat mort et vivant ne surprendra pas plus que celle de la plume qui, dans le vide, tombe à la vitesse d'une boule de pétanque, ou de l'astronaute qui vieillit moins vite que son jumeau resté sur Terre. Mais à la différence de la plume et de l'astronaute, les questions soulevées par le chat de Schrödinger restent encore en partie ouvertes. Aujourd'hui, on explique la difficulté à observer des superpositions d'états au niveau des objets macroscopiques par le phénomène de décohérence. Un "gros" objet est difficile à contrôler et à isoler de l'environnement. Les interactions incontrôlées brouillent les phases dans les superpositions quantiques, et les transforment en simples superpositions statistiques. En quelque sorte, plus l'objet est gros, plus il est facile à une petite quantité d'information, suffisante pour détruire la cohérence quantique, de s'échapper dans l'environnement, qui vient "lire" son état. Cela ne suffit pas cependant à expliquer comment une évolution quantique, unitaire et réversible, se transforme en un comportement irréversible régi par les lois de la thermodynamique.

Le regain d'intérêt actuel pour le chat de Schrödinger est en grande partie lié à l'essor de l'information quantique. L'un des objectifs est de réaliser un "gros" ordinateur quantique, capable de réaliser des algorithmes complexes. Cet ordinateur, comme le chat de Schrödinger, est un système macroscopique pour lequel on doit préparer, manipuler et mesurer des superpositions quantiques d'états. Ainsi, le "chat" devient un système modèle dans l'étude de la résistance des systèmes quantiques aux perturbations extérieures.

Il est évidemment nécessaire dans ce contexte d'étendre la définition du "chat" à d'autres systèmes physiques. De manière très générale, on appelle "chat de Schrödinger" un *système physique préparé dans une superposition quantique d'états classiquement discernables*. On mentionne parfois la nécessité de coupler cet objet à un système microscopique, l'atome radioactif de l'article de Schrödinger. D'un point de vue pratique, un tel couplage ne constitue pas la difficulté principale de l'expérience : on arrive aujourd'hui à lire l'état d'un photon, d'un atome ou d'un ion unique, donc à coupler efficacement un système microscopique à un instrument de mesure macroscopique. C'est maintenir cet instrument dans une superposition d'états qui pose problème.

On est donc ramené à définir un état "classique" pour un système physique donné. La "classicité" ou "non-classicité" étant une notion elle-même sujet à discorde, disons que c'est un état dont la description ne nécessite aucune notion de la physique quantique, qui nous est, en quelques sortes, "familier depuis l'enfance". Dans le cas de la lumière, on s'accorde pour appeler "classiques" ou du moins "quasi-classiques" les *états cohérents*. En effet, ils

correspondent aux ondes planes progressives monochromatiques, qui décrivent la lumière en électromagnétisme classique ou en optique géométrique. Leur description statistique peut être réalisée sans aucun appel à la physique quantique. On pourrait également considérer comme classiques les états thermiques, produits par le Soleil ou par les lampes à incandescence. Ce sont certainement les états de la lumière les plus courants dans notre vie quotidienne, mais pas les plus simples à décrire. En outre, ils sont généralement moins intéressants que les états cohérents en termes d’applications en information quantique : ce sont des mélanges statistiques, or le traitement de l’information est bien plus aisé avec des états purs.

Les premières superpositions quantiques d’états cohérents ont été réalisées (une fois n’est pas coutume...) dans les systèmes d’ions piégés. Le groupe de David Wineland a préparé, en 1996, un ion de beryllium ${}^9\text{Be}^+$ dans une superposition d’états cohérents vibrationnels, séparés de 80 nm, plus de 10 fois la taille du paquet d’onde cohérent [92]. Un “chat de Schrödinger” micro-onde a ensuite été préparé par le groupe de Serge Haroche dans une cavité supraconductrice de haute finesse [93].

D’autres systèmes physiques ont d’autres états considérés comme “classiques”. C’est le cas notamment pour les ensembles de particules ayant des spins $\frac{1}{2}$ ou, plus généralement, deux états discrets $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. On considère que l’état “chat de Schrödinger” d’un système de N particules de ce type s’écrit $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1 \dots \uparrow_N\rangle + e^{i\theta} |\downarrow_1 \dots \downarrow_N\rangle)$. Jusqu’à six ions beryllium ${}^9\text{Be}^+$ ont pu être préparés dans une telle superposition, les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ correspondant à des niveaux hyperfins du fondamental [94]. A l’aide de techniques de résonance magnétique nucléaire, un tel état a pu être obtenu pour $N = 12$ dans une molécule de benzène C_6H_6 avec six atomes ${}^{13}\text{C}$, en utilisant les 12 spins nucléaires de cette molécule [95].

Cependant, toutes ces réalisations avaient été effectuées dans des systèmes piégés, difficiles à utiliser pour les communications quantiques. De plus, ces systèmes ne permettaient pas une analyse complète de l’état préparé, en reconstruisant sa matrice densité ou sa fonction de Wigner. Ils ne donnaient accès qu’à une signature spécifique de la superposition, qui se traduisait par une interférence quantique entre les états “mort” et “vivant” du chat. L’objectif des expériences présentées dans cette partie a été de préparer des “chats de Schrödinger” optiques en propagation libre, utilisables pour le traitement de l’information quantique, et de faire une reconstruction complète de leurs fonctions de Wigner par tomographie homodyne.

5.2 Chats de Schrödinger optiques

5.2.1 Définition et caractéristiques

Nous définirons donc un chat de Schrödinger optique comme une superposition quantique d’états cohérents suffisamment discernables :

$$|\psi_{cat}\rangle = \frac{|\alpha_1\rangle + e^{i\theta} |\alpha_2\rangle}{\sqrt{2(1 + \cos(\theta)e^{-|\alpha_1 - \alpha_2|^2/2})}}. \quad (5.1)$$

Cette dernière précision est nécessaire car *stricto sensu* deux états cohérents $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$ ne peuvent jamais être parfaitement distingués l’un de l’autre, leur fidélité valant $\mathcal{F}_{\alpha_1, \alpha_2} = |\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle|^2 = e^{-|\alpha_1 - \alpha_2|^2}$. Cependant, cette fonction décroît très rapidement. Si l’on se fixe

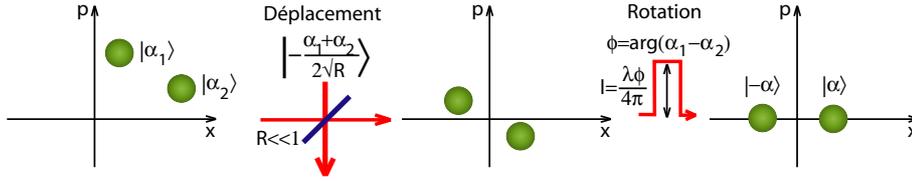


Figure 5.1: Transformation d'un “chat de Schrödinger” quelconque en une superposition d'états cohérents de même amplitude et de phases opposées, par déplacement et rotation dans l'espace des phases.

comme recouvrement maximal acceptable $|\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle| \leq 1\%$, c'est à dire $\mathcal{F}_{\alpha_1, \alpha_2} \leq 10^{-4}$, il suffit d'avoir $|\alpha_1 - \alpha_2| > 3$. Nous adopterons cette limite comme condition nécessaire pour qualifier un état de chat de Schrödinger.

En réalité, on peut toujours ramener une superposition d'états cohérents quelconques $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$ à un cas particulier, celui d'une superposition de deux états cohérents de même amplitude et de phases opposées $|\alpha\rangle$ et $|\alpha\rangle$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On réalise pour cela un déplacement dans l'espace des phases pour ramener le champ moyen à l'origine, suivi d'un déphasage pour ramener les phases à 0 et π , comme indiqué sur la figure 5.1.

$$\frac{|\alpha_1\rangle + e^{i\theta} |\alpha_2\rangle}{\sqrt{2(1 + \cos(\theta)e^{-|\alpha_1 - \alpha_2|^2/2})}} \xrightarrow[\text{Déphasage}]{\text{Déplacement}} \frac{|\alpha\rangle + e^{i\theta} |-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 + \cos(\theta)e^{-2|\alpha|^2})}}. \quad (5.2)$$

En pratique, le déplacement \mathcal{D} est effectué en faisant traverser à l'état initial une lame avec un coefficient de réflexion R très faible ($\lesssim 1\%$), en injectant par l'autre port un état cohérent intense $|\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\sqrt{R}}\rangle$. L'état transmis est alors déplacé sans être affecté par les fluctuations de cet état cohérent, (seule une fraction R du shot noise vient s'ajouter aux fluctuations quantiques de l'état initial). Ce type d'opérations est couramment utilisé dans les expériences d'optique quantique, et leur implémentation ne présente pas de difficultés majeures. Nous pourrions sans perte de généralité nous restreindre au cas particulier ci-dessus.

Dans ce cas, il est assez naturel de définir la “taille” du chat par la distance $2|\alpha|$ qui sépare les deux états cohérents, ou par le nombre moyen de photons $n = |\alpha|^2 \frac{1 - \cos(\theta)e^{-2|\alpha|^2}}{1 + \cos(\theta)e^{-2|\alpha|^2}}$ composant le “chat”. Pour $|\alpha|^2$ suffisamment grand $n \approx |\alpha|^2$, qui correspond au nombre de photons “contenu” dans chacun des états cohérents. Par souci de simplicité nous conviendrons de définir la taille du chat par $|\alpha|^2$.

Les fonctions d'onde de ces états, pour la quadrature \hat{x} , se présentent comme on s'y attend sous forme de deux pics gaussiens correspondant aux deux états cohérents, centrés sur $x = \pm\sqrt{2}\alpha$:

$$\psi_{cat}(x) = \frac{\langle x | \alpha \rangle + e^{i\theta} \langle x | -\alpha \rangle}{\sqrt{2(1 + \cos(\theta)e^{-2|\alpha|^2})}} = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \alpha\right)^2} + e^{i\theta - \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \alpha\right)^2}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}[1 + \cos(\theta)e^{-2|\alpha|^2}]}}. \quad (5.3)$$

La fonction de Wigner déterminée à partir de cette fonction d'onde s'écrit

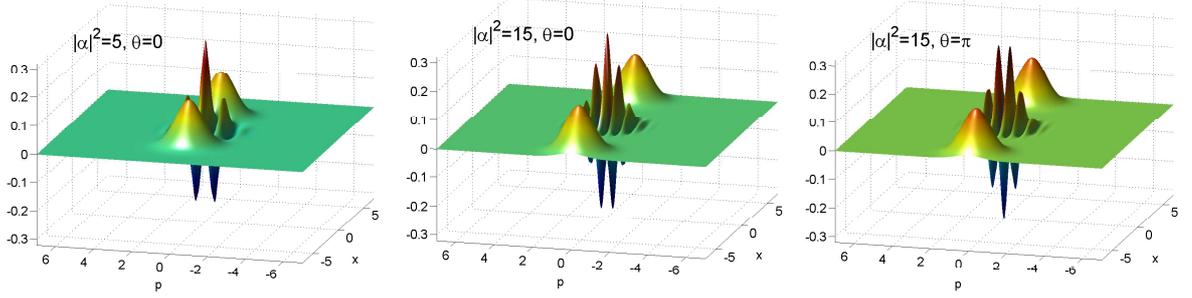


Figure 5.2: Fonctions de Wigner de chats de Schrödinger tracées pour différentes tailles $|\alpha|^2$ et phases θ . La taille $|\alpha|^2$ détermine la distance entre les deux pics cohérents correspondant aux états “mort” et “vivant” du chat, ainsi que le nombre de franges d’interférences quantiques. La phase θ correspond à la phase de ces franges.

$$W_{cat}(x, p) = \frac{e^{-x^2-p^2}}{\pi[1 + \cos(\theta)e^{-2|\alpha|^2}]} \left[e^{-2|\alpha|^2} \cosh(2\sqrt{2}\alpha x) + \cos(2\sqrt{2}\alpha p - \theta) \right]. \quad (5.4)$$

Ces fonctions de Wigner, tracées pour plusieurs tailles $|\alpha|^2$ et phases θ sur la figure 5.2, se présentent sous la forme de deux pics correspondant aux deux états cohérents (“mort” et “vivant”), et de franges d’interférence quantiques dans l’espace des phases, où la fonction de Wigner prend des valeurs négatives. Ces franges et ces zones négatives constituent la signature spécifique de la superposition quantique. Dans le cas d’un mélange statistique, la fonction de Wigner ne présenterait que les deux pics cohérents, elle resterait partout positive et les franges disparaîtraient. La présence de ces franges et de ces valeurs négatives servira donc de critère expérimental permettant d’affirmer que l’état préparé est bien un “chat” et non un mélange statistique. Sur la figure 5.2, on voit que le nombre de franges augmente avec la distance entre les deux états cohérents, c’est à dire avec α . Leur phase est quant à elle déterminée par θ .

Nous nous intéresserons plus spécifiquement aux cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, connus respectivement sous les noms de “chats pairs” et “chats impairs”. En effet, lorsqu’on écrit leurs fonctions d’onde en base de Fock, on s’aperçoit qu’ils ne contiennent respectivement que des nombres de photons pairs et impairs :

$$|\psi_{cat+}\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})}} = \frac{\sqrt{2}e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{1 + e^{-2|\alpha|^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{\sqrt{(2k)!}} |2k\rangle, \quad (5.5)$$

$$|\psi_{cat-}\rangle = \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 - e^{-2|\alpha|^2})}} = \frac{\sqrt{2}e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{1 - e^{-2|\alpha|^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)!}} |2k+1\rangle. \quad (5.6)$$

Ces deux cas particuliers sont suffisants pour l’ensemble des applications décrites dans la section suivante.

Nous avons donc la définition des états “chat de Schrödinger” optiques tels que l’on cherchera à les préparer dans nos expériences. Physiquement, ces états correspondent à

des ondes lumineuses classiques ayant simultanément deux phases opposées. Le tableau suivant rassemble leurs caractéristiques.

Chat de Schrödinger optique	
Définition	Superposition quantique d'états cohérents suffisamment intenses, de même amplitude et de phases opposées
Chats pairs/impairs	$\frac{ \alpha\rangle \pm -\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2 \alpha ^2})}}$
Taille minimale	$2 \alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha ^2 > 2,3$ pour satisfaire $ \langle \alpha -\alpha \rangle \leq 1\%$
Fonction de Wigner	$W_{cat}(x, p) = \frac{e^{-x^2-p^2}}{\pi[1 \pm e^{-2 \alpha ^2}]} \left[e^{-2 \alpha ^2} \cosh(2\sqrt{2}\alpha x) \pm \cos(2\sqrt{2}\alpha p) \right]$.
Structure de W_{cat}	Franges d'interférences quantiques avec zones négatives entre deux pics cohérents

5.2.2 Applications

Ces états ont de très nombreuses applications en information quantique, passées en revue dans les références [96, 97]. Ces applications restent pour l'instant au stade de propositions théoriques. Nous les décrirons brièvement, et renverrons le lecteur aux références bibliographiques pour plus de détails.

Téléportation quantique

Comme nous l'avons remarqué plus haut, les états $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ sont pratiquement orthogonaux lorsque α est suffisamment grand. On peut donc les utiliser comme base pour coder des qubits $\mu|\alpha\rangle + \nu|-\alpha\rangle = \mu|\uparrow\rangle + \nu|\downarrow\rangle$.

Si l'on dispose alors de chats de Schrödinger pairs et impairs on peut, en les divisant simplement sur une lame 50/50 avec un deuxième port vide, préparer des états similaires à des états de Bell :

$$\frac{|\sqrt{2}\alpha\rangle \pm |-\sqrt{2}\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})}} \xrightarrow{50/50} \frac{|\alpha\rangle|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle|-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})}} \approx \frac{|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = |\phi_{\pm}\rangle \quad (5.7)$$

La deuxième paire d'états de Bell peut être préparée en déphasant de π le deuxième mode :

$$\frac{|\alpha\rangle|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle|-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})}} \xrightarrow{\Delta\theta_2=\pi} \frac{|\alpha\rangle|-\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle|\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})}} \approx \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle \pm |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = |\psi_{\pm}\rangle \quad (5.8)$$

A l'inverse, on peut effectuer des mesures de Bell en recombinaison deux faisceaux sur une lame 50/50 et en comptant les photons dans les deux modes de sortie, plus précisément en mesurant leur parité. Les résultats $\{0, pair\}$, $\{0, impair\}$, $\{pair, 0\}$, $\{impair, 0\}$ correspondent aux projections sur les quatre états de Bell ci-dessus. La probabilité d'échec de cette mesure, qui correspond au résultat $\{0, 0\}$, décroît exponentiellement en $e^{-|\alpha|^2}$. À la différence d'un codage sur des photons uniques, on peut donc réaliser une mesure

permettant de distinguer les quatre états de Bell avec une probabilité d'échec négligeable [98].

Une fois que l'on dispose de ces états et de ces mesures de Bell, on peut implémenter un protocole de téléportation quantique entre deux partenaires distants, appelés communément Alice et Bob. Alice cherche à téléporter un qubit $\mu|\alpha\rangle + \nu|-\alpha\rangle$ à Bob, avec lequel elle partage un état de Bell $|\psi_-\rangle$. Elle réalise une mesure de Bell, en combinant le qubit à téléporter et sa moitié de l'état de Bell sur la lame 50/50 et en mesurant les parités dans les deux modes. En utilisant les équations ci-dessus, on montre facilement que la moitié de l'état de Bell qui se trouve chez Bob est alors projetée dans l'un des états $\mu|\alpha\rangle + \nu|-\alpha\rangle$, $\nu|\alpha\rangle + \mu|-\alpha\rangle$, $\mu|\alpha\rangle - \nu|-\alpha\rangle$ ou $\nu|\alpha\rangle - \mu|-\alpha\rangle$ en fonction du résultat de la mesure. Dans le premier cas, la téléportation a directement réussi. Dans le deuxième, il suffit d'appliquer un déphasage de π pour corriger l'erreur de bit-flip et retrouver l'état initial. Le phase-flip du troisième cas est plus difficile à corriger : le plus simple est de répéter localement la téléportation jusqu'à obtenir le cas 1 ou 2. Le quatrième cas est corrigé en appliquant successivement une correction de phase-flip et de bit-flip. Ce protocole de téléportation est décrit notamment dans [99].

Calcul quantique universel

Un algorithme quantique arbitraire peut être implémenté en utilisant un jeu complet de portes logiques à un et deux qubits. Avec notre système de codage, la porte X , qui permute les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, peut être simplement réalisée en déphasant le mode correspondant de π . Les autres portes nécessaires pour former un jeu universel ne sont pas unitaires, à cause du recouvrement fini entre les états $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$. Elles utilisent des mesures projectives, et ne sont pas déterministes, mais peuvent être implémentées avec de bonnes efficacités en utilisant les états et les mesures de Bell présentés ci-dessus [100].

Métrieologie quantique

La métrologie quantique s'intéresse à la détection de petites forces ou de petits déplacements à l'aide de faisceaux lumineux. On suppose que leur intensité doit être limitée, par exemple si l'on travaille sur des matériaux très fragiles. On cherche donc, à intensité constante, l'état quantique du faisceau lumineux offrant la meilleure sensibilité.

Classiquement, lorsque l'on utilise un état cohérent contenant en moyenne n photons, la gaussienne de bruit quantique de l'état final doit être suffisamment séparée de l'état initial pour que l'effet soit détectable. Si par exemple on mesure un déplacement ϵ dans l'espace des phases suivant l'axe p , l'état cohérent $|\alpha\rangle$ est transformé en $e^{i\epsilon\alpha}|\alpha + i\epsilon\rangle$, et le déplacement minimal détectable, correspondant à un rapport signal sur bruit de un, vaut $\epsilon = 1/2$. Lorsqu'on mesure un déphasage, c'est à dire une rotation d'un angle θ dans l'espace des phases, l'état final devient $|e^{i\theta}\alpha\rangle \approx |\alpha + i\theta\alpha\rangle$, et le déphasage minimal détectable vaut $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Ces deux valeurs limites pour ϵ et θ correspondent à la *limite quantique standard*, qui définit la meilleure sensibilité pour toute mesure classique.

Cependant, si le faisceau est préparé dans un état “chat de Schrödinger”, on peut atteindre la limite fondamentale de Heisenberg, où ϵ et θ varient respectivement en $1/\sqrt{n}$ et $1/n$. Cette sensibilité est la meilleure autorisée par la mécanique quantique pour un état monomode. Si les fluctuations mesurées agissent dans un domaine spatial suffisamment grand pour utiliser N modes optiques, on a intérêt à diviser le chat équitablement entre ces

modes à l'aide d'un système de lames séparatrices, préparant un état fortement intriqué $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{\alpha}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \right\rangle \pm \left| -\frac{\alpha}{\sqrt{N}}, \dots, -\frac{\alpha}{\sqrt{N}} \right\rangle \right)$, similaire à un état GHZ. On gagne alors un facteur $1/\sqrt{N}$ sur la sensibilité. Pour plus de détails on pourra se reporter à [101, 102].

Tests des inégalités de Bell

Les tests des inégalités de Bell [8] utilisant des états codés sur des photons uniques [10, 11, 12, 49] se sont jusqu'à maintenant heurtés à la faille de détection : les efficacités des compteurs de photons étaient trop faibles, et le fait de ne mesurer qu'un sous-échantillon des états préparés permettait d'expliquer le résultat par des modèles classiques. En utilisant les états de Bell codés sur des "chats", nous pouvons éviter cette faille en utilisant des détections homodynes, dont les efficacités peuvent avoisiner les 100% et qui permettent de distinguer efficacement des états cohérents suffisamment séparés.

Un possible test des inégalités de Bell utilisant des "chats" est décrit dans [103]. Il fonctionne à la manière d'un test CHSH en variables discrètes, où Alice et Bob mesurent des photons intriqués en polarisation, en orientant leurs polariseurs aléatoirement suivant deux angles bien définis (θ_1 et θ_2 pour Alice, ϕ_1 et ϕ_2 pour Bob). Ici ils mesurent tous les deux la quadrature x de leur mode, les angles $\theta_{1,2}$ et $\phi_{1,2}$ correspondant à des rotations dans l'espace de Hilbert $\{|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle\}$. La "taille" des chats nécessaires pour observer de fortes violations est seulement de l'ordre de $|\alpha|^2 \approx 1$ ce qui, comme nous le verrons, peut être réalisé expérimentalement. C'est la réalisation de ces rotations qui pose actuellement problème, car elle nécessite des effets Kerr élevés.

5.3 Méthode de préparation de "chatons de Schrödinger"

Les chats de Schrödinger présentent des structures très complexes dans l'espace des phases, qui se simplifient grandement lorsqu'on diminue leur taille, en rapprochant les états $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ l'un de l'autre. Alors, comme nous l'avons remarqué sur la figure 5.2, le nombre de franges d'interférence diminue. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la situation où $|\alpha|^2 \approx 1$, c'est à dire où les deux états cohérents sont "tout juste en contact". Dans ce cas leur recouvrement vaut $\mathcal{F}_{1,-1} \approx 14\%$, trop important pour considérer que les états "mort" et "vivant" sont véritablement discernables. Pour les chats pairs, un tel état se rapproche du vide quantique et perd son caractère non-classique. En revanche, dans le cas impair la fonction de Wigner reste négative à l'origine, et peut toujours être perçue comme deux pics correspondant aux états cohérents, liés par deux franges d'interférence quantiques (voir Fig. 5.3). Cet état coïncide avec l'état de Fock $n = 1$ pour $|\alpha|^2 = 0$. Lorsque $|\alpha|^2 \approx 1$ un tel état, bien que gardant ses propriétés quantiques, n'est plus suffisamment "grand" pour être qualifié de chat. On s'accorde alors pour l'appeler "*chaton de Schrödinger*".

Chaton de Schrödinger optique	
Chat de Schrödinger impair	$\frac{ \alpha\rangle - -\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 - e^{-2 \alpha ^2})}}$ avec $ \alpha ^2 \approx 1$

Le protocole de préparation utilisé ici a été pour la première fois décrit dans [104]. Il se base sur la ressemblance, qui peut sembler un peu fortuite, entre un "chaton de Schrödinger" et un état réalisable expérimentalement. Sur la figure 5.3, on constate en

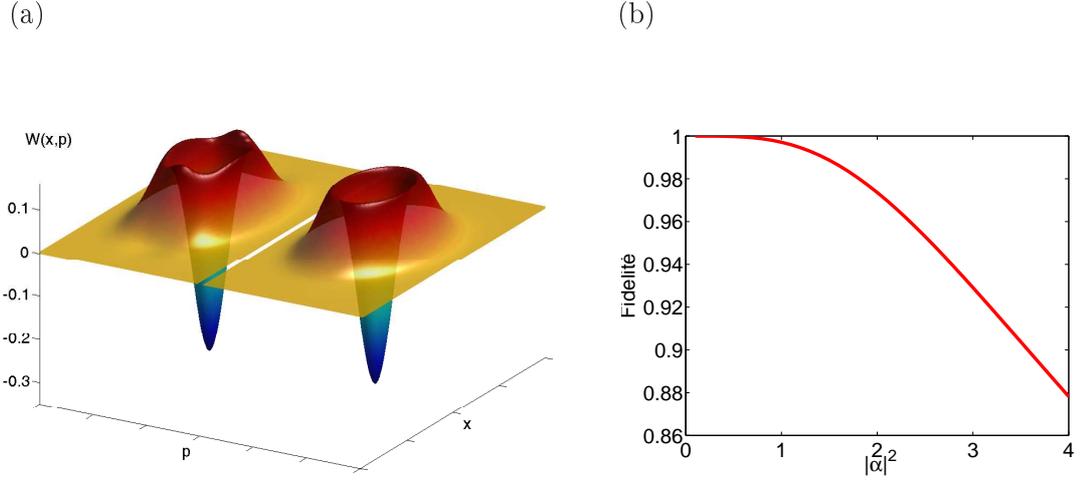


Figure 5.3: (a) Fonction de Wigner d’un chaton de Schrödinger avec $|\alpha|^2 = 1$ (gauche), comparée à celle d’un état obtenu par soustraction d’un photon d’un vide comprimé de 2,7 dB (droite). (b) Fidélité entre un chaton de taille $|\alpha|^2$ et l’état le plus similaire obtenu par soustraction de photon.

effet que la fonction de Wigner d’un chaton semble très proche de celle d’un photon unique, comprimé suivant la quadrature \hat{p} et anticomprimé suivant \hat{x} :

$$W_{S|1\rangle}(x, p) = \frac{e^{-x^2 s - p^2/s}}{\pi} \left[2s x^2 + 2 \frac{p^2}{s} - 1 \right]. \quad (5.9)$$

On peut facilement déterminer la fidélité entre un chaton de Schrödinger et un photon comprimé d’un facteur s :

$$\mathcal{F}(\alpha, s) = \frac{16\alpha^2 s^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2\alpha^2 s}{1+s}}}{(1 - e^{-2\alpha^2})(1 + s)^3} \quad (5.10)$$

En différenciant cette expression par rapport à s , on trouve le squeezing optimal pour reproduire un chaton de taille α^2 : $s_{opt} = \sqrt{1 + (2\alpha^2/3)^2} - 2\alpha^2/3$. La figure 5.3 montre que la fidélité $\mathcal{F}(\alpha, s_{opt})$ entre un chaton de taille α^2 et un photon comprimé de s_{opt} reste effectivement au-dessus de 99% pour $|\alpha|^2 \lesssim 1$.

On dispose en principe de tous les outils nécessaires à la réalisation d’une telle expérience. Cependant, elle nécessite deux amplificateurs paramétriques, l’un pour produire les photons, l’autre pour les comprimer.

En réalité, on peut préparer exactement le même état non pas en comprimant un photon unique mais *en soustrayant un photon unique d’un faisceau de vide comprimé monomode*. Pour le voir, appelons \hat{S} l’opérateur unitaire associé à un OPA dégénéré, qui réalise la compression. L’état obtenu en enlevant un photon d’un mode de vide comprimé vaut, sans normaliser, $|\psi\rangle = \hat{a}\hat{S}|0\rangle = \hat{S}\hat{S}^{-1}\hat{a}\hat{S}|0\rangle = \hat{S}\hat{a}_H|0\rangle$, où \hat{a}_H est l’opérateur annihilation en représentation de Heisenberg. D’après l’équation 3.10, $\hat{a}_H = \cosh(r)\hat{a} + \sinh(r)\hat{a}^\dagger$, ce qui donne $|\psi\rangle = \sinh(r)\hat{S}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \sinh(r)\hat{S}|1\rangle$. En renormalisant cet état, on voit qu’il correspond bien à un photon unique comprimé $\hat{S}|1\rangle$.

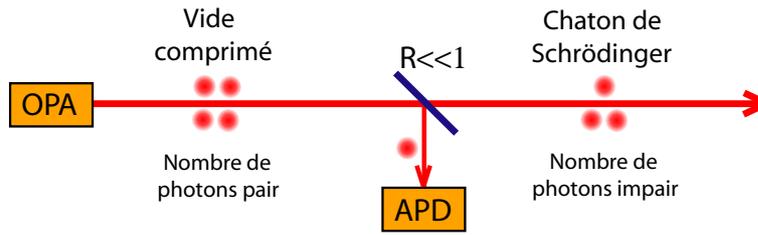


Figure 5.4: Soustraction d'un photon unique à partir d'une impulsion de vide comprimé monomode. Une faible partie du faisceau est réfléchi vers une APD. La réflectivité R de la lame est suffisamment faible pour que la probabilité de réfléchir plusieurs photons soit négligeable. Une détection APD prépare alors de manière conditionnelle un "chaton de Schrödinger".

La ressemblance avec un chaton apparaît également au niveau de la décomposition en base de Fock. Celle du chaton de Schrödinger ne contient que des nombres de photons impairs (Eq. 5.6). Quant à l'état de vide comprimé, il ne contient que des paires de photons (Eq. 2.51e). La soustraction d'un photon unique ne laisse donc que des termes impairs, dont les fonctions d'onde sont nulles à l'origine, ce qui conduit à une fonction de Wigner négative en 0. Lorsque le squeezing est asymptotiquement faible, la détection d'un photon soustrait indique la présence d'un et un seul photon transmis, provenant de la même paire paramétrique. On retrouve donc l'état $n = 1$ comme pour un chaton de taille nulle.

Nous l'avons vu au chapitre précédent, la soustraction d'un photon unique peut se faire en prélevant une petite partie du faisceau à l'aide d'une lame partiellement réfléchissante, et en envoyant la partie prélevée sur une photodiode à avalanche. Lorsque l'APD détecte un photon, si la réflectivité R de la séparatrice est suffisamment faible, la probabilité pour que deux photons aient été réfléchis au lieu d'un seul est négligeable. Cette procédure est illustrée sur la figure 5.4.

On pourrait se demander si, dans la réalité, la soustraction et la compression d'un photon sont vraiment équivalentes. En effet, la compression d'un photon unique peut en principe se faire sans pertes, alors que la soustraction d'un photon devra se faire avec une lame de réflectivité finie pour avoir un taux de succès non nul, ce qui dégrade l'état transmis. Cependant, il faut se souvenir que pour générer des photons avec un taux fini il faut un gain fini pour le premier OPA : au lieu des pertes, on est alors fondamentalement limité par la présence de photons excédentaires. On sait aussi que nos états à un photon décrits dans le chapitre précédent ont une fidélité de $\approx 70\%$ avec des états $n = 1$ purs. Leur compression, compte tenu du bruit du second OPA et des pertes lors de l'injection, produirait des états dont la fidélité avec des chatons serait nécessairement moindre. Dans la pratique, la soustraction d'un photon est une méthode non moins performante et nettement plus simple à mettre en oeuvre. La référence [105], qui étudie cette question de manière plus détaillée, confirme ce résultat. C'est donc cette dernière approche que nous avons choisie.

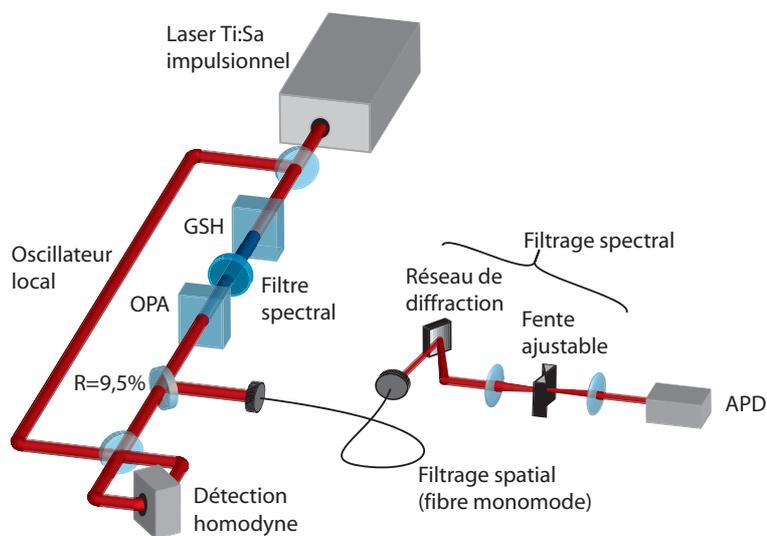


Figure 5.5: Dispositif expérimental permettant la préparation et la tomographie homodyne de chatons de Schrödinger, obtenus par soustraction conditionnelle d'un photon unique d'une impulsion de vide comprimé.

5.4 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 5.5. Il est assez proche de celui utilisé pour la génération d'états de Fock. Nous décrirons ici les principales modifications.

L'OPA est maintenant placé en configuration dégénérée, préparant un état de vide comprimé monomode. L'analyse de cet état est plus simple que pour les états intriqués : l'état comprimé est directement envoyé sur une détection homodyne. Pour une puissance de pompe maximale et une forte focalisation dans l'OPA, on mesure des taux de compression et d'amplification bruts de 2,0 et 4,6 dB respectivement (Fig. 5.6). Après correction de l'efficacité homodyne $\eta = 80\%$ et de la réflectivité de la lame utilisée pour prélever les photons ($R = 9,5\%$), ces taux deviennent 3,3 et 5,7 dB. Dans ce cas, le paramètre γ qui caractérise l'excès de bruit OPA vaut 0,58, très proche de celui obtenu pour le gain maximal non-dégénéré. Les performances de l'OPA dégénéré sont ainsi très semblables au cas non-dégénéré décrit au chapitre précédent. Leur étude détaillée est par ailleurs présentée dans la thèse de Jérôme Wenger [69]. Dans l'expérience on limite volontairement le squeezing net à $s = 0,56$ (2,5 dB) pour obtenir des états suffisamment purs. On atteint alors $\gamma = 0,17$.

Une lame séparatrice réfléchit 9,5% de l'intensité incidente vers une photodiode à avalanche, précédée du même système de filtrage que pour la préparation d'états de Fock.

L'état préparé est analysé à l'aide d'une détection homodyne montée en configuration monomode, avec une efficacité globale de 80%. L'état est maintenant dépendant de la phase, qui doit pouvoir être sinon contrôlée du moins déterminée. On utilise pour cela les mesures du vide comprimé non conditionné. Celles-ci s'accroissent à 390 kHz, cadence de répétition du laser choisie dans le cadre de cette expérience, et 38 ms suffisent pour mesurer une variance de squeezing sur 15 000 points. Cette variance donne alors accès à la phase de la quadrature mesurée. Dans cette expérience, nous avons choisi de contrôler

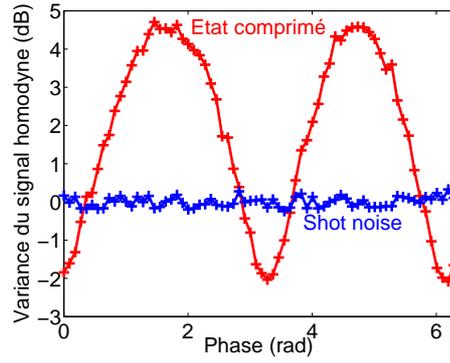


Figure 5.6: Variance de bruit quantique en fonction de la phase pour l'état comprimé monomode, généré pour une puissance de pompe maximale et une forte focalisation dans l'OPA. Le taux de compression vaut 2,0 dB et l'amplification 4,6 dB. En corrigeant de la réflectivité $R = 9,5\%$ de la lame de prélèvement de photons et de l'efficacité homodyne $\eta = 80\%$, on trouve un taux de compression de 3,3 dB et une amplification de 5,7 dB, ce qui correspond à un paramètre d'excès de bruit OPA $\gamma = 0,58$. En pratique on limite le squeezing à 2,5 dB pour obtenir $\gamma = 0,17$.

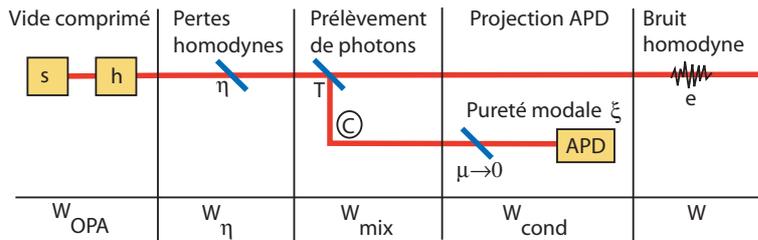


Figure 5.7: Modélisation du dispositif expérimental permettant la génération et la tomographie homodyne de "chatons de Schrödinger".

cette phase activement à l'aide d'une cale piézoélectrique, en utilisant une technique de "lock and hold". En mesurant la variance de squeezing, on balaye la phase de l'oscillateur local pour se placer sur la quadrature anticomprimée x . Connaissant la calibration de la cale piézo, on peut ensuite se placer sur la quadrature que l'on veut mesurer, en vérifiant que la variance locale correspond bien à celle attendue. On acquiert ensuite des données expérimentales pendant une seconde, durée suffisamment courte pour éliminer la plupart des dérives mécaniques. Après l'acquisition on mesure encore une fois la variance locale pour vérifier que la phase n'a pas bougé, puis on recommence la séquence. Cette technique permet d'assurer une stabilité de la phase de mesure à quelques degrés près, ce qui est amplement suffisant compte tenu du squeezing relativement modeste utilisé dans notre expérience.

5.5 Modélisation expérimentale

Nous pouvons modéliser cette expérience de la même manière que la précédente. L'OPA dégénéré produit maintenant un état comprimé monomode, avec une compression $s =$

$\exp(-2r)$ suivant p et un bruit $h = \cosh^2(\gamma r)$,

$$W_{OPA}(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h/s+h-1} - \frac{p^2}{hs+h-1}}}{\pi\sqrt{(h/s+h-1)(hs+h-1)}}, \quad (5.11)$$

où on peut directement introduire l'efficacité homodyne η pour obtenir

$$W_\eta(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2}{\alpha} - \frac{p^2}{\beta}}}{\pi\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \begin{cases} \alpha = \eta(h/s+h-1) + 1 - \eta \\ \beta = \eta(hs+h-1) + 1 - \eta \end{cases}. \quad (5.12)$$

Le mélange de cet état à un mode vide sur la séparatrice de transmission $T = t^2 = 1 - r^2$ donne

$$W_{mix}(x, p, x_C, p_C) = \frac{e^{-\frac{(tx+rx_C)^2}{\alpha} - \frac{(tp+rp_C)^2}{\beta} - (tx_C-rx)^2 - (tp_C-rp)^2}}{\pi^2\sqrt{\alpha\beta}}. \quad (5.13)$$

On réalise ensuite une mesure APD dans le mode C , en se plaçant dans la limite d'une efficacité très faible. L'équation A.12 donne la fonction de Wigner obtenue lors d'un conditionnement réussi avec une probabilité ξ . Avec une probabilité $1-\xi$ le déclenchement APD est non concluant et donne une fonction de Wigner qui s'obtient en intégrant W_{mix} sur x_C et p_C . Leur mélange statistique conduit à

$$W_{cond}(x, p) = \left[1 - \frac{a'}{T\alpha + 1 - T} - \frac{b'}{T\beta + 1 - T} + \frac{2x^2 a'}{(T\alpha + 1 - T)^2} + \frac{2p^2 b'}{(T\beta + 1 - T)^2} \right] \times \frac{e^{-\frac{x^2}{T\alpha+1-T} - \frac{p^2}{T\beta+1-T}}}{\pi\sqrt{(T\alpha + 1 - T)(T\beta + 1 - T)}} \quad (5.14)$$

avec $a'(s) = \frac{\eta\xi T(h/s+h-2)^2}{h(s+1/s)+2h-4} = b'(1/s)$. L'ajout du bruit homodyne e , par convolution avec une gaussienne $e^{-(x^2+p^2)/e}/(\pi e)$ donne finalement la fonction de Wigner que l'on s'attend à mesurer :

$$W(x, p) = \left[1 - \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} + 2x^2 \frac{a'}{a^2} + 2p^2 \frac{b'}{b^2} \right] \frac{e^{-\frac{x^2}{a} - \frac{p^2}{b}}}{\pi\sqrt{ab}} \quad (5.15)$$

$$a = 1 + e + \eta T(h/s + h - 2) \quad b = 1 + e + \eta T(hs + h - 2) \quad (5.16)$$

$$a' = \frac{\eta\xi T(h/s + h - 2)^2}{h(s + 1/s) + 2h - 4} \quad b' = \frac{\eta\xi T(hs + h - 2)^2}{h(s + 1/s) + 2h - 4} \quad (5.17)$$

En intégrant cette fonction de Wigner suivant la quadrature $p_\theta = -\sin(\theta)x + \cos(\theta)p$ on trouve l'équation décrivant la distribution de la quadrature $x_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)p$:

$$P_\theta(x_\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \left(1 - \frac{c'}{c} + 2x_\theta^2 \frac{c'}{c^2} \right) e^{-\frac{x_\theta^2}{c}} \quad \begin{cases} c = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta \\ c' = a' \cos^2 \theta + b' \sin^2 \theta \end{cases} \quad (5.18)$$

On peut donc utiliser la même approche que pour les états de Fock pour déterminer à partir des données expérimentales les paramètres qui décrivent ces fonctions. En effet,

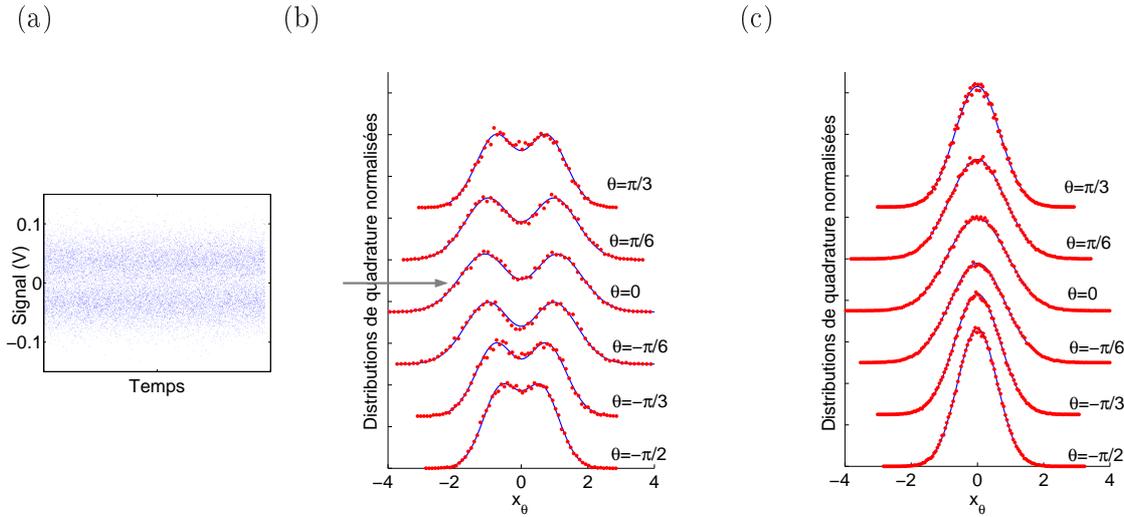


Figure 5.8: (a) Signal homodyne correspondant à environ 20 000 mesures de la quadrature x ($\theta = 0$) conditionnées sur la soustraction d'un photon du vide comprimé. Une baisse de densité autour de $V = 0$ est clairement visible. (b) Distributions de quadratures mesurées pour le “chaton de Schrödinger” préparé dans l'expérience, interpolées à l'aide du modèle analytique décrit dans le texte. (c) Distributions de quadratures mesurées pour l'état comprimé non conditionné, interpolées à l'aide du modèle avec les mêmes paramètres a et b , en posant $a' = b' = 0$ pour traduire l'absence de conditionnement APD.

la mesure des moments $V_2 = \langle x^2 \rangle$ et $V_4 = \langle x^4 \rangle$ donne $c = 2(V_2 - \sqrt{V_2^2 - V_4/3})$ et $c' = \sqrt{V_2^2 - V_4/3}$, qui conduisent à a , b , a' et b' par régression linéaire, en posant $c = ay + b(1 - y)$ avec $y = \cos^2(\theta)$, idem pour a' , b' et c' .

On remarque facilement que dans ce cas les paramètres a et b correspondent, à un facteur $1/2$ près, aux variances maximale et minimale des états comprimés non conditionnés, tels qu'ils sont mesurés par la détection homodyne. Ce sont maintenant a' et b' qui déterminent le caractère non-gaussien de l'état. Ils s'annulent pour un état non conditionné ($\xi = 0$), et valent respectivement $1/s$ et s dans un cas pur (alors c'est aussi le cas pour a et b , et on retrouve le cas idéal de l'équation 5.9).

5.6 Résultats expérimentaux

Nous avons réalisé la tomographie homodyne d'un chaton de Schrödinger préparé avec 2,5 dB de squeezing ($s = 0,56$), en mesurant six distributions de quadratures P_θ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/3$. Pour chaque quadrature nous avons acquis environ 20 000 points répartis en histogrammes de 64 bins, avec un taux de comptage typique de 140/s, très supérieur au taux de coups d'obscurité ($\approx 2/s$). Ces histogrammes, comparés à ceux de l'état comprimé non conditionné, sont présentés sur la figure 5.8. Alors que les distributions non conditionnées restent bien gaussiennes, celles du “chaton” présentent toutes un creux à l'origine. Pour la quadrature anticomprimée $\theta = 0$ les deux pics correspondent aux deux états cohérents, alors que pour la quadrature orthogonale $\theta = -\pi/2$ ils peuvent être

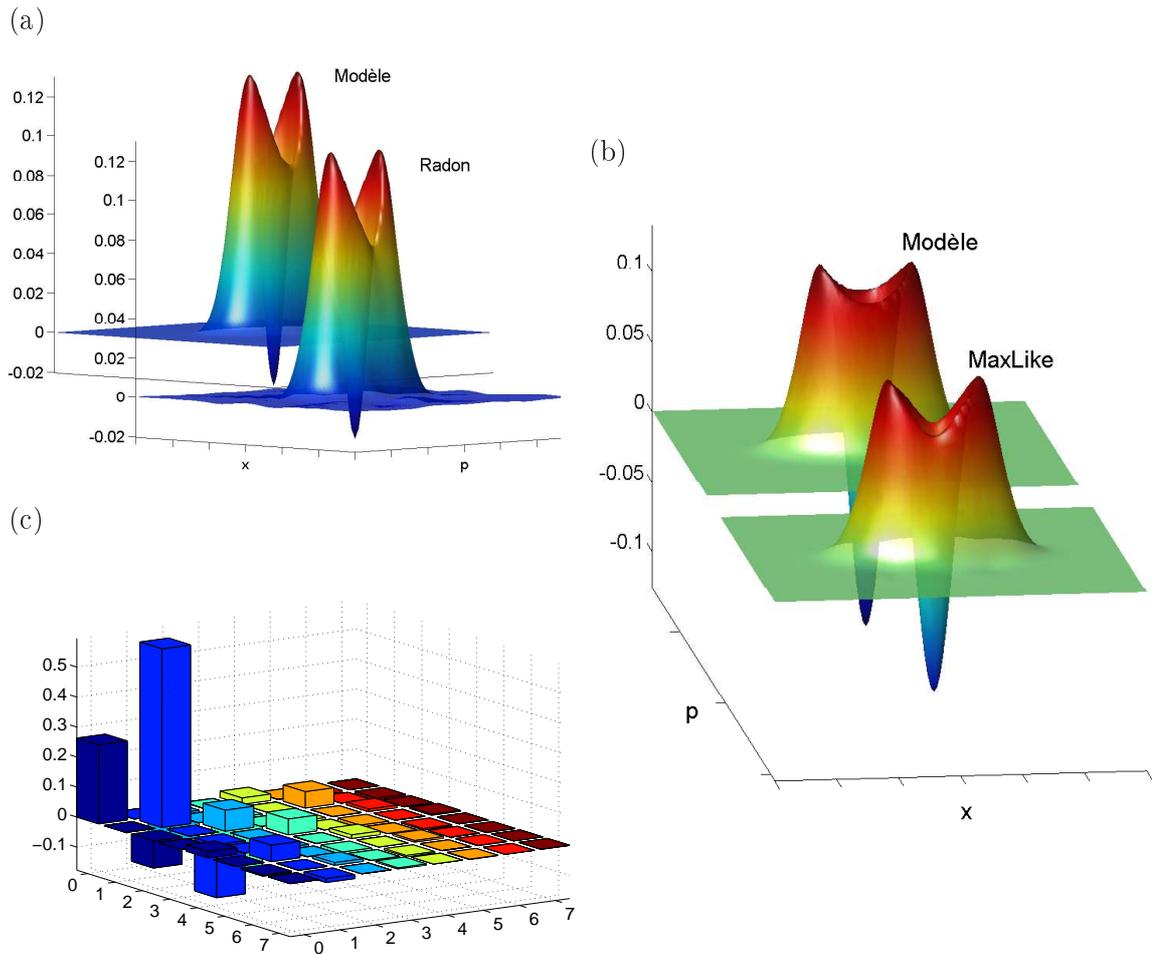


Figure 5.9: (a) Fonction de Wigner de l’état mesuré reconstruite par transformée de Radon inverse, comparée à celle obtenue à partir du modèle. (b) Fonction de Wigner de l’état généré dans l’expérience, corrigée des pertes homodynes, reconstruite par maximum de vraisemblance et comparée au résultat du modèle. (c) Matrice densité en base de Fock de l’état généré dans l’expérience, corrigé des pertes homodynes, reconstruite par maximum de vraisemblance.

interprétés comme des franges d’interférence quantiques. Les données homodynes brutes correspondant à la quadrature $\theta = 0$, sur la même figure, présentent effectivement une baisse visible de la densité de points mesurés autour de $V = 0$.

À partir des données brutes, nous avons utilisé notre modèle analytique pour extraire les paramètres $a = 1.61$, $a' = 1.04$, $b = 0.72$ et $b' = 0.32$ décrivant cet état. Les distributions déduites à l’aide de ces paramètres sont en excellent accord avec les histogrammes expérimentaux (Fig. 5.8). Pour interpoler les données non conditionnées, nous avons utilisé les valeurs de a et b extraites des données du “chaton”, et posé $a' = b' = 0$, ce qui correspond à l’absence de conditionnement ($\xi = 0$). Le fait que les mêmes paramètres permettent une très bonne description des deux états confirme la consistance de ce modèle et de cette méthode d’analyse.

Nous avons ensuite reconstruit les fonctions de Wigner de cet état par transformée de Radon numérique sans corriger des pertes. En parallèle on utilise notre modèle pour

obtenir la même fonction par l'intermédiaire des paramètres a , a' , b et b' . La figure 5.9 présente les fonctions de Wigner obtenues par les deux méthodes, très similaires et clairement négatives.

La dépendance en phase confère à cet état une structure plus riche que les états de Fock, et sa fonction de Wigner donne accès à plus d'informations sur l'expérience. Ainsi, on dispose maintenant non plus de deux mais de quatre équations qui relient les grandeurs a , a' , b et b' aux paramètres expérimentaux. Ces équations permettent de déterminer les quatre paramètres $\gamma = 1,17$, $\xi = 0,82$, $\eta = 0,8$ et $e = 0,03$ (on connaît par ailleurs le squeezing $s = 0,56$ et la réflectivité de la lame $R = 9,5\%$).

Nous sommes principalement intéressés par la fonction de Wigner de l'état *généré* dans l'expérience, car c'est lui qui sera éventuellement utilisé pour de futures applications. On corrige donc des pertes homodynes, soit numériquement en utilisant l'algorithme de maximum de vraisemblance, soit, comme pour les états de Fock, en posant $\eta = 1$ et $e = 0$ dans les équation de notre modèle et gardant les autres paramètres égaux à ceux déterminés à partir des données. Les fonctions de Wigner obtenues par les deux approches (Fig. 5.9) sont encore une fois très similaires.

L'état préparé a une fidélité $\mathcal{F} = 70\%$ avec un chaton de Schrödinger idéal de taille $|\alpha|^2 = 0,79$, ce qui est très proche de la fidélité entre les états à un photon expérimentaux décrits au chapitre précédent et les états $n = 1$ purs. On confirme ainsi l'hypothèse selon laquelle la compression de ces photons uniques n'aurait pas conduit en pratique à de meilleurs résultats.

Cet état reste donc un mélange statistique malgré la correction des pertes homodynes, à cause du bruit OPA, des pertes de la lame de prélèvement de photons et d'une pureté modale $\xi < 1$. Il est intéressant de le décomposer sur une base orthogonale d'états physiquement pertinents. Les deux états purs qui interviennent naturellement dans notre protocole sont le vide comprimé et les chatons de Schrödinger. Ces états sont bien orthogonaux, ne contenant respectivement que des nombres de photons pairs et impairs. Le calcul des fidélités montre que l'état généré dans l'expérience est un mélange statistique contenant 70% d'un chaton avec une taille $|\alpha|^2 = 0,79$, 29% d'un état de vide comprimé pur avec $s = 0,56$, et de 1% de résidus orthogonaux à ces deux états.

Le "chaton" généré contient en moyenne 1,2 photons, et on pourrait croire qu'il diffère peu d'un photon unique. Cependant, comme le montre la matrice densité obtenue numériquement par maximum de vraisemblance (Fig. 5.9), pour décrire correctement sa structure il est nécessaire de pousser le développement dans la base de Fock jusqu'à $n = 5$. Les cohérences non nulles traduisent clairement la dépendance en phase de cet état.

On peut également transposer les calculs du chapitre précédent pour déterminer, dans le cadre de notre modèle, l'incertitude statistique sur la valeur à l'origine $W(0) = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} (1 - \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b})$ de la fonction de Wigner. Il suffit pour cela de déterminer l'expression analytique de $W(0)$ en fonction des moments d'ordre 2 et 4 des distributions de quadratures mesurées. On mesure maintenant $M = 6$ quadratures \hat{x}_{θ_i} , on détermine les moments $V_{2,i}$ et $V_{4,i}$ de leurs distributions, et on calcule les paramètres c_i , c'_i définis plus haut. Pour relier ces paramètres à a , a' , b , b' , qui donnent $W(0)$, on les range par ordre croissant et on utilise une régression linéaire, qui peut elle aussi s'exprimer analytiquement. En effet, pour interpoler la courbe $c_i(y_i = \cos^2(\theta_i))$ par une droite $Ay_i + B$, où $A = a - b$ et $B = b$,

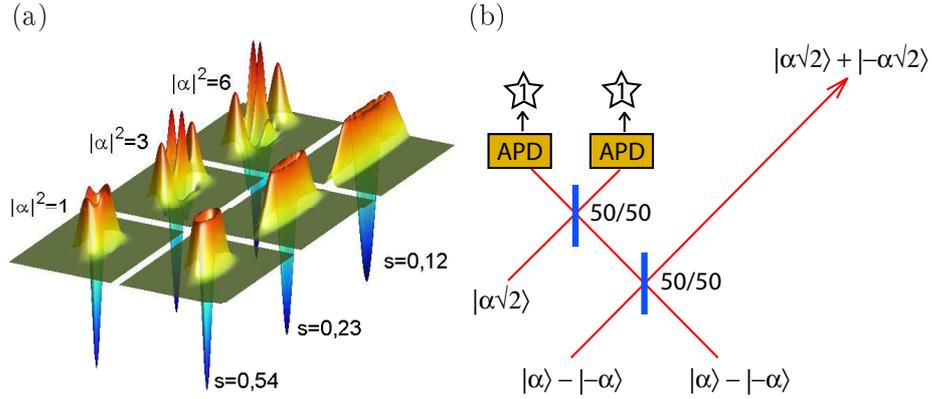


Figure 5.10: (a) Fonctions de Wigner de chats de taille croissante (gauche) comparées aux états les plus similaires obtenus par soustraction d'un photon du vide comprimé (droite) : les structures, proches pour des chats de petite taille, deviennent très différentes pour $|\alpha|^2$ grand. (b) Protocole proposé par Lund et al.[106] permettant de préparer des chats de taille arbitraire à partir de chats de Schrödinger.

on minimise l'écart $D = \sum_i (c_i - Ay_i - B)^2$ en posant $\partial_A D = \partial_B D = 0$. On trouve alors

$$a = \frac{\sum_{i=1}^M \left[c_i \sum_{j=1}^M (y_j - 1)(y_j - y_i) \right]}{M \left[\sum_{i=1}^M y_i^2 \right] - \left[\sum_{i=1}^M y_i \right]^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^M \left[c_i \sum_{j=1}^M y_j (y_j - y_i) \right]}{M \left[\sum_{i=1}^M y_i^2 \right] - \left[\sum_{i=1}^M y_i \right]^2}, \quad (5.19)$$

de même pour a' et b' . En utilisant les expressions des paramètres c et c' , on obtient une relation analytique (assez complexe) entre $W(0)$ et les moments mesurés. On injecte ses dérivées partielles dans Eq. 4.40 pour obtenir l'erreur statistique sur $W(0)$. On obtient ainsi $W(0) = -0,02 \pm 0,01$ pour la fonction de Wigner mesurée, et $W(0) = -0,13 \pm 0,01$ pour l'état généré corrigé des pertes.

5.7 Amplification de chats

La soustraction ou la compression de photons permet de préparer des chats de taille $|\alpha|^2 \lesssim 1$. Au-delà la fidélité maximale diminue, car pour $|\alpha|^2 > 1$ des franges d'interférence supplémentaires commencent à apparaître sur la fonction de Wigner du chat, alors que celle d'un photon comprimé garde la même structure (voir Fig. 5.10).

Une procédure itérative permettant de “faire grandir” ces chats, illustrée sur la figure 5.10, a été proposée par Lund *et al.*[106]. Deux chats de taille $|\alpha|^2$ sont mélangés sur une lame 50/50, préparant un état intriqué :

$$U_{50/50} \left(\begin{array}{c} |\alpha\rangle - |-\alpha\rangle \\ |\alpha\rangle - |-\alpha\rangle \end{array} \right) \propto \left| \sqrt{2}\alpha, 0 \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, 0 \right\rangle - \left| 0, \sqrt{2}\alpha \right\rangle - \left| 0, -\sqrt{2}\alpha \right\rangle \quad (5.20)$$

(on oublie ici les facteurs de normalisation). Le deuxième mode de cet état est ensuite mélangé avec un état cohérent auxiliaire $|\sqrt{2}\alpha\rangle$ sur une autre lame 50/50 pour produire

$$\left| \sqrt{2}\alpha, \alpha, \alpha \right\rangle + \left| -\sqrt{2}\alpha, \alpha, \alpha \right\rangle - \left| 0, 2\alpha, 0 \right\rangle - \left| 0, 0, 2\alpha \right\rangle \quad (5.21)$$

Une détection simultanée de photons dans les modes 2 et 3 prépare alors un chat pair $|\sqrt{2}\alpha\rangle + |-\sqrt{2}\alpha\rangle$, deux fois plus grand que les chatons initiaux. L'utilisation de chatons de parités différentes aurait conduit à un chat impair. On peut ensuite réitérer ce processus pour obtenir un chat de taille arbitraire.

Cette méthode a l'avantage de fonctionner avec des compteurs "réels", c'est à dire avec des APDs de faibles efficacités. Si l'on disposait de détecteurs de photons de forte efficacité, on aurait directement pu conditionner la préparation sur l'absence de photons dans le deuxième mode de l'état décrit par Eq. 5.20.

Cependant, la mise en oeuvre expérimentale de ce processus n'est pour l'heure pas envisageable. En effet, il nécessite la présence simultanée de N chatons pour créer un chat N fois plus grand. Or ces chatons sont créés aléatoirement, avec une faible probabilité de succès p : pour éviter que la probabilité de succès ne chute exponentiellement en p^N , ce processus nécessite des mémoires quantiques permettant de stocker les chatons préparés en préservant leur caractère quantique, puis de les utiliser simultanément. La difficulté à réaliser ce type de mémoires est aujourd'hui l'une des principales limites pour le traitement de l'information quantique. De plus, il a été démontré que ce protocole, implémenté avec des outils réalistes, amplifie aussi les défauts initiaux des chatons et conduit à terme à des états classiques [107].

5.8 Contexte historique de l'expérience

Cette expérience a suscité un certain intérêt [108, 109], ce qui incite à la replacer dans son contexte historique, en la comparant aux résultats antérieurs, et à ceux obtenus ultérieurement par d'autres équipes.

Une première implémentation de ce protocole, réalisée en 2003 par Jérôme Wenger, avait permis d'observer des états présentant clairement une statistique non gaussienne [110, 69]. Cependant, leurs fonctions de Wigner restaient positives, même après correction des pertes homodynes, et ne pouvaient pas être considérées comme des superpositions quantiques. Obtenir des fonctions de Wigner négatives, d'abord avec puis sans correction, a constitué l'objectif principal de la première année de cette thèse. Pour cela le dispositif expérimental a d'abord été intégralement démonté et reconstruit sur une table optique plus stable. Il a été ensuite longuement optimisé, avec une attention particulière prêtée à la stabilité du laser femtoseconde, à qualité spatiale et temporelle des impulsions avant et après doublage de fréquence, à l'adaptation des modes optiques, aux pertes optiques et au système de filtrage APD. L'optimisation du schéma optique de la détection homodyne a permis de faire passer son efficacité de 75% à 80%. En modifiant le système de filtrage spatial (paire de trous dans des plans conjugués remplacés par une fibre optique monomode), sa transmission est passée de 17% à 80%, tout en offrant une meilleure sélection du mode TEM_{00} . L'optimisation du filtrage spectral a permis, sans baisser l'efficacité d'ensemble, de réduire la transmission de la fente de 53% à 25%, préparant des états de bien meilleure qualité (voir Fig. 4.17). On a donc pu à la fois améliorer le filtrage et augmenter l'efficacité APD globale de 1,4% à 6%. En retour, cette augmentation a permis de diminuer la focalisation des faisceaux dans les cristaux non-linéaires, produisant des états comprimés plus purs tout en gardant un taux de comptage APD suffisant. Ce n'est donc pas un élément particulier mais l'optimisation de l'ensemble du dispositif qui a permis d'obtenir le résultat voulu.

L’importance de ces états en information quantique a motivé les efforts de nombreux groupes expérimentaux, et donné lieu à une compétition assez soutenue. Cinq mois après la publication des résultats de notre expérience [108], J. Neergaard-Nielsen et ses collaborateurs du groupe d’Eugene Polzik au sein du réseau danois QUANTOP ont pu générer des “chatons” en appliquant ce protocole sur un faisceau continu produit par un OPA en cavité [85]. La négativité de la fonction de Wigner n’apparaissait alors qu’après correction des pertes homodynes. Les meilleurs résultats à ce jour ont été obtenus, toujours dans le domaine continu, par K. Wakui *et al.*, dans une collaboration entre les groupes d’Akira Furusawa à l’Université de Tokyo et celui de Masahide Sasaki au NICT [58]. L’utilisation de faisceaux optiques d’excellente qualité modale et de détecteurs homodynes quasi-parfaits a permis d’observer des fonctions de Wigner extrêmement négatives sans aucune correction, au prix d’un dispositif expérimental bien plus imposant que le notre, nécessitant un effort de simplification pour évoluer vers la préparation d’états plus complexes. Ces “chatons” sont avant tout un outil pour le traitement de l’information quantique, ce qui continue à motiver des efforts expérimentaux en ce sens.

5.9 Conclusion

Nous avons généré des “chatons de Schrödinger” optiques en propagation libre, correspondant à des superpositions quantiques d’états cohérents “classiques” de faible amplitude [108]. Ils sont préparés de manière conditionnelle, en prélevant un photon à partir d’un faisceau de vide comprimé monomode. L’état mesuré par tomographie homodyne présente une fonction de Wigner négative, sans aucune correction. L’état généré a une fidélité de 70% avec une “chaton” idéal de taille $|\alpha|^2 = 0.79$. Cette expérience a été la première démonstration de ce type d’états dans le domaine de l’optique libre, ouvrant une voie vers de nombreuses applications en information quantique.

La plupart de ces applications nécessitent de transformer ces “chatons” en chats de plus grande taille. Leur “amplification” directe reste pour l’heure difficile, et nous avons proposé, développé et mis en oeuvre une nouvelle méthode permettant de préparer des “chats de Schrödinger” arbitrairement grands. L’étude de ce protocole fait l’objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Génération de “chats de Schrödinger” de taille arbitraire à partir d’états de Fock.

Sommaire

6.1	Introduction	129
6.2	Protocole de préparation de chats comprimés	131
6.2.1	Description du protocole	131
6.2.2	États produits dans le cas idéal	132
6.2.3	Fidélité avec un chat comprimé	134
6.2.4	Influence d’un seuil de conditionnement fini	134
6.3	Démonstration expérimentale pour $n = 2$ photons	135
6.3.1	Étude théorique du cas $n = 2$	135
6.3.2	Dispositif expérimental	137
6.3.3	Résultats	139
6.4	Discussion	141
6.4.1	Structure des états préparés	141
6.4.2	Améliorations expérimentales	142
6.4.3	Décompression des chats	143
6.4.4	Performance du protocole	144
6.5	Conclusion	145

6.1 Introduction

Nous avons, dans le chapitre précédent, défini les “chats de Schrödinger” optiques comme des superpositions quantiques d’états cohérents suffisamment discernables. Leur caractère spécifiquement quantique se traduit par des franges d’interférence dans l’espace des phases, où la fonction de Wigner prend des valeurs négatives. Si cette structure a bien été observée pour les “chatons” que nous avons générés, leur taille restait trop petite et

les états cohérents insuffisamment séparés. Or, cette condition est essentielle dans de nombreuses applications décrites précédemment. Si la réalisation de ces chats a été un premier pas prometteur, ils restent donc trop petits pour être utilisables. Leur amplification [106] ne sera pas envisageable dans un avenir proche, faute de mémoires quantiques efficaces. En principe, on pourrait bien sûr dupliquer le montage précédent pour fabriquer des chats en parallèle et attendre les coïncidences, mais avec les performances de nos outils expérimentaux on aboutirait à un taux de succès de l'ordre de un par heure. Par ailleurs, on se heurterait aux problèmes de décohérence induite par ce processus [107]. Il paraît donc intéressant d'étudier d'autres approches pour produire des "chats adultes".

La première méthode proposée pour générer des chats de Schrödinger en optique libre, publiée en 1986 par B. Yurke et D. Stoler [57], était basée sur l'utilisation de l'effet Kerr. Avec nos conventions, cet effet peut être représenté par un hamiltonien effectif $H = \Omega(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2$ où Ω définit l'intensité du couplage. Un état cohérent $|\alpha\rangle$ qui traverse un milieu à effet Kerr pendant un temps t se transforme alors en

$$|\psi\rangle = e^{-i\Omega(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 t} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} e^{-i\phi_k} |k\rangle \quad (6.1)$$

où $\phi_k = \Omega t k^2$. Lorsque $t = \frac{\pi}{2\Omega}$, on remarque que $e^{-i\phi_k} = 1$ pour k pair et $e^{-i\phi_k} = -i$ pour k impair, ce qui produit un chat de Schrödinger $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle)$. Ce protocole, simple, élégant et déterministe, n'est malheureusement pas réalisable expérimentalement à l'heure actuelle, car la rotation de $\Omega t = \pi/2$ par effet Kerr est largement supérieure à ce qu'il est possible de faire sans se heurter à des problèmes de décohérence (il faudrait ainsi plus de 1000 km de fibre optique [111], ce qui conduirait à des pertes dépassant 200 dB). Des effets Kerr "géants" peuvent en principe être obtenus par transparence électromagnétiquement induite (EIT) [112], mais les pertes associées à ce processus sont pour l'instant trop élevées pour que les protocoles basés sur cette technique [113] puissent fonctionner. Il existe également d'autres propositions, déterministes ou non, qui ne requièrent que de faibles rotations ϕ par effet Kerr [114, 115, 97]. Ces méthodes nécessitent toutefois de travailler avec des états cohérents intenses et les effets de décohérence risquent d'être trop importants pour observer des fonctions de Wigner négatives.

Nous savons maintenant qu'il est possible dans une large mesure de contourner le problème des fortes interactions $\chi^{(3)}$ en utilisant la fluorescence paramétrique et les mesures projectives. La première méthode proposée pour générer des chats de Schrödinger avec ces techniques, relativement ancienne, [116, 117] est basée sur un schéma de mesure quantique non-destructive [118]. Elle permettrait de produire un chat de taille $|\alpha|^2 = m$ en détectant m photons dans un mode auxiliaire. Malheureusement, ce protocole nécessite intrinsèquement de travailler à gain paramétrique élevé, ce qui rend obligatoire l'utilisation de compteurs de forte efficacité pouvant résoudre le nombre de photons. En effet, dans ce cas la probabilité P_{err} d'envoyer vers les détecteurs $m + 1$ photons au lieu de m n'est pas négligeable, or ce photon supplémentaire ne peut être décelé par des APDs.

Parmi les propositions existant dans la littérature au moment où ce travail avait commencé, la plus accessible expérimentalement était la soustraction de photons multiples à partir du vide comprimé [119, 104]. Pour la mettre en oeuvre, il nous aurait suffi de reprendre le montage précédent et de diviser le faisceau soustrait entre plusieurs APDs. Cependant, nous verrons à la fin de ce chapitre que la "taille" des chats préparés par cette méthode augmente trop lentement avec le nombre de photons soustraits.

Dans ce chapitre, nous ferons une étude théorique et expérimentale d’un protocole permettant de créer des chats de Schrödinger de taille arbitraire, à l’aide d’un simple conditionnement homodyne sur des états de Fock.

La méthode que nous décrirons nous a été initialement proposée par Hyunseok Jeong [120]. Il avait observé qu’elle permettait, à partir d’états de Fock à deux photons, de préparer avec une très bonne fidélité un chat de Schrödinger pair, de taille $|\alpha|^2 = 2,6$, comprimé de 3,5 dB. Il avait noté un comportement similaire pour 3 ou 4 photons utilisés.

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons démontré de manière rigoureuse que ce protocole est universel : il est non seulement valable pour préparer des chats de taille arbitrairement élevée, mais il devient alors plus performant en termes de fidélité. Nous avons déterminé les lois d’échelle, très simples, qui décrivent les propriétés de ces chats en fonction du nombre de photons initial, ainsi que les performances de ce protocole en termes de taux de succès et de fidélité.

Nous présenterons une implémentation expérimentale de ce protocole utilisant des états à deux photons. Cette expérience a permis de préparer un chat de taille suffisante pour être utilisable en information quantique, dont la fonction de Wigner présente bien la structure d’interférence caractéristique entre les états “mort” et “vivant” du chat, avec des zones négatives. Ces chats sont comprimés d’environ 3 dB suivant la quadrature x : ils sont ainsi plus résistants au bruit et, si besoin, cette compression peut être facilement corrigée à l’aide de nos outils expérimentaux.

Enfin, nous comparerons ce protocole aux propositions théoriques antérieures et montrerons qu’il est exponentiellement plus efficace que les alternatives réalisables avec la technologie actuelle.

6.2 Protocole de préparation de chats comprimés

6.2.1 Description du protocole

La méthode utilisée pour fabriquer des chats de taille arbitraire, illustrée sur la figure 6.1, est extrêmement simple. Un état de Fock contenant n photons est divisé sur une lame 50/50 (le deuxième port d’entrée est vide). Dans le mode réfléchi, on mesure la quadrature \hat{p} . On sélectionne les cas où le résultat de la mesure p_0 est suffisamment proche de 0, en définissant un seuil de filtrage $\epsilon \ll 1$. Lorsque $|p_0| \leq \epsilon$, le mode transmis est projeté dans un état $|\phi\rangle$. Nous démontrerons que, dans le cas idéal, cet état reproduit avec une fidélité supérieure à 99% un chat de Schrödinger de taille $|\alpha|^2 = n$, comprimé de 3 dB suivant la quadrature x , ayant la même parité que n :

$$|\phi\rangle \approx |\psi\rangle = S \left(\frac{1}{2} \right) \frac{|\alpha\rangle + (-1)^n |-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 + (-1)^n e^{-2|\alpha|^2})}}, \quad \alpha = \sqrt{n} \quad (6.2)$$

où l’opérateur S comprime l’état de $s = 1/2$. Ce résultat est vrai pour tout $n \geq 3$. Lorsque $n = 1$ on retrouve l’état de Fock à un photon, et pour $n = 2$ on prépare avec une fidélité de 99% un chat pair de taille $|\alpha|^2 = 2,6$ comprimé de 3,5 dB. Ainsi, deux photons suffisent pour préparer un chat “adulte”, car dans ce cas $|\langle \alpha | -\alpha \rangle| = 0,5\%$ et la fidélité entre les états “mort” et “vivant” du chat vaut à peine $3 \cdot 10^{-5}$. De manière assez remarquable, alors qu’on aurait pu s’attendre à ce que cette ressemblance soit purement

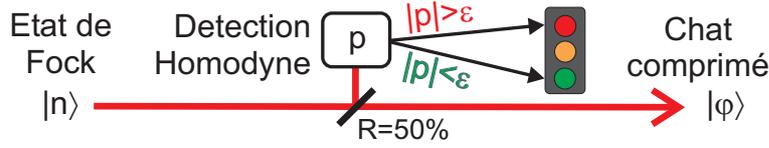


Figure 6.1: Protocole utilisé pour la préparation de “chats comprimés”. Un état de Fock $|n\rangle$ est divisé sur une lame 50/50. Dans le mode réfléchi, on mesure la quadrature \hat{p} . Si le résultat p de la mesure est assez proche de 0, avec un certain seuil de tolérance ($|p| \leq \epsilon \ll 1$), le mode transmis est préparé dans un état qui reproduit avec une fidélité supérieure à 99% un chat de taille $|\alpha|^2 = n$, de même parité que n , comprimé de 3 dB suivant x . Dans le cas contraire, on considère que la préparation a échoué, et on recommence la procédure.

fortuite et disparaissent pour n élevé comme c’était le cas pour les chats, la fidélité de ces états avec des chats comprimés tend au contraire vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$.

6.2.2 États produits dans le cas idéal

Pour comprendre le fonctionnement de ce protocole, nous allons d’abord étudier le cas idéal, où le seuil de conditionnement ϵ est nul. Les états préparés sont alors purs, et on peut les décrire simplement par leurs fonctions d’onde. Nous verrons plus loin qu’ils sont peu affectés par un ϵ fini.

La fonction d’onde f_n de l’état de Fock $|n\rangle$, définie par Eq. 2.35, est invariante de phase. En omettant pour commencer les constantes de normalisation, elle peut s’écrire comme $f_n(p) = H_n(p)e^{-p^2/2}$ en fonction de l’impulsion p , où H_n est le n -ième polynôme de Hermite. Le deuxième mode est vide : l’état incident s’écrit donc $f_n(p)f_0(p_0) = f_n(p)e^{-p_0^2/2}$. La séparatrice le transforme en

$$\tilde{\phi}_n(p, p_0) = f_n\left(\frac{p-p_0}{\sqrt{2}}\right) f_0\left(\frac{p+p_0}{\sqrt{2}}\right) = H_n\left(\frac{p-p_0}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{p^2+p_0^2}{2}}. \quad (6.3)$$

La mesure homodyne dans le mode réfléchi réalise ensuite la projection sur $|p_0 = 0\rangle$. L’état transmis à travers la lame s’écrit donc $\tilde{\phi}_n(p, 0) = \tilde{\phi}_n(p) = H_n(p/\sqrt{2})e^{-p^2/2}$. Pour retrouver son expression en fonction de la quadrature x , on prend la transformée de Fourier de cette fonction, en se souvenant que $H_n(x) = [\partial_t^n e^{-t^2+2tx}]_{t=0}$ (Eq. 2.36) :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\phi}(p) e^{ipx} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \int e^{-\frac{p^2}{2} + \sqrt{2}tp + ipx - t^2} dp \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{\frac{(\sqrt{2}t+ix)^2}{2} - t^2} \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-\frac{x^2}{2} + i\sqrt{2}tx} \right]_{t=0} = (i\sqrt{2}x)^n e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

L’état préparé, après normalisation, a donc une structure extrêmement simple :

$$\boxed{\phi(x) = \mathcal{N}_n x^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{2^{2n}n!}{(2n)!\sqrt{\pi}}}. \quad (6.5)}$$

Lorsqu’on trace cette fonction pour $n \geq 3$ (Fig. 6.2), on observe qu’elle se présente sous la forme de deux pics. On vérifie facilement que ces pics sont centrés en $x = \pm\sqrt{n}$

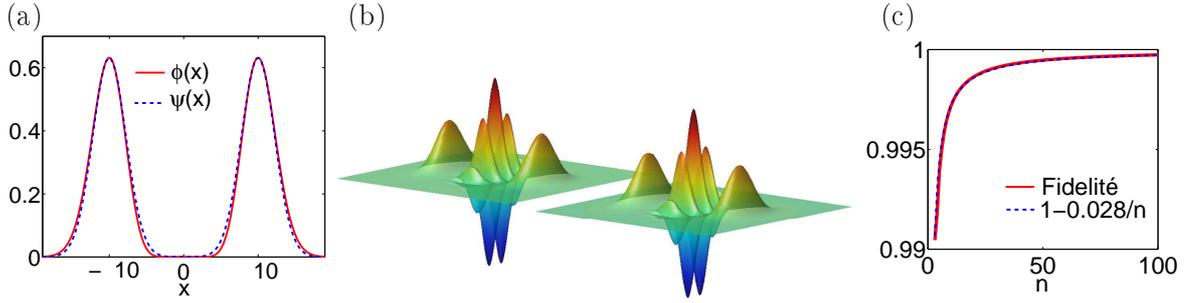


Figure 6.2: (a) Fonction d’onde ϕ obtenue par conditionnement homodyne sur un état de Fock $n = 10$, comparée à la fonction d’onde ψ d’un chat de Schrödinger pair de taille $|\alpha|^2 = 10$ comprimé de 3 dB. (b) Fonction de Wigner de l’état préparé à partir de 10 photons (gauche), comparée à celle d’un chat comprimé avec $\alpha = \sqrt{10}$ (droite). (c) Fidélité entre l’état préparé à partir de n photons et un chat de taille $|\alpha|^2 = n$ comprimé de 3 dB, se comportant en bonne approximation comme $1 - 0.028/n$.

et que leur largeur, en termes d’écart-type, vaut $1/2$. Or un état cohérent $|\alpha\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est centré sur $x = \sqrt{2}\alpha$, et son écart-type vaut $\Delta x = 1/\sqrt{2}$. Si on comprime un chat de taille $|\alpha|^2$ de $s = 1/2$ en variance, c’est à dire de $1/\sqrt{2}$ en amplitude, on obtiendra là aussi deux pics d’écart-type $1/2$, centrés en $x = \pm\alpha$.

Par ailleurs, ϕ est paire ou impaire suivant n . Or la parité des fonctions d’onde des états de Fock traduit leur parité en termes de nombre de photons : si n est pair, ϕ n’aura pas de recouvrement avec les états de Fock impairs, et ne contiendra que des nombres pairs de photons. Il en est de même pour n impair.

“Morphologiquement”, l’état que nous avons préparé ressemble donc bien à une superposition $|\psi\rangle$ de deux états cohérents $|\alpha = \pm\sqrt{n}\rangle$ comprimés de 3 dB suivant x , de même parité que n :

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2^{2n}n!}{(2n)!\sqrt{\pi}}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \approx \psi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-(x-\sqrt{n})^2} + (-1)^n e^{-(x+\sqrt{n})^2}}{\sqrt{2(1 + (-1)^n e^{-2n})}}. \quad (6.6)$$

Les fonctions d’onde de ces états, tracées sur la figure 6.2 pour $n = 10$, sont pratiquement indiscernables. Cette ressemblance apparaît également au niveau des fonctions de Wigner, représentées sur la même figure. Celle du chat comprimé $|\psi\rangle$ s’obtient directement à partir de l’équation 5.4, tandis que celle de l’état préparé $|\phi\rangle$ se calcule à partir de la fonction d’onde associée :

$$W_\psi(x, p) = \frac{e^{-2x^2-p^2/2}}{\pi[1 + \cos(\theta)e^{-2|\alpha|^2}]} \left[e^{-2|\alpha|^2} \cosh(4\alpha x) + (-1)^n \cos(2\alpha p) \right] \quad (6.7)$$

$$W_\phi(x, p) = \frac{e^{-x^2-p^2}}{\pi} (-1)^n \frac{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k!)^2(n-k)!2^k} |H_k(x + ip)|^2}{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k!)^2(n-k)!2^k} H_k(0)^2}. \quad (6.8)$$

6.2.3 Fidélité avec un chat comprimé

Les équations 6.5 et 6.6 donnent également la fidélité entre ces deux états :

$$\mathcal{F} = \left| \int \phi(x)\psi^*(x)dx \right|^2 = \frac{2^{n+5/2}e^{-2n/3}n!|H_n(i\sqrt{2n/3})|^2}{3^{n+1}(2n)!|1 + (-1)^ne^{-2n}|}. \quad (6.9)$$

On peut vérifier numériquement (Fig. 6.2) que cette fidélité augmente avec n , plus précisément qu'elle évolue en bonne approximation comme $\mathcal{F} \approx 1 - \frac{0.028}{n}$ pour $n \geq 3$. Ainsi, pour les états représentés sur la figure 6.2 avec $n = 10$ la fidélité vaut 99,7%

L'étude analytique de cette expression est assez difficile. En revanche, on peut assez facilement minorer \mathcal{F} par une grandeur qui tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. Cette démonstration est présentée dans l'Annexe D, pour ne pas alourdir le manuscrit avec des calculs élémentaires et sans intérêt particulier. Son résultat est en revanche essentiel : nous avons maintenant la preuve que notre protocole est universel, et permet de préparer des chats de taille $|\alpha|^2 = n$ arbitrairement grande à partir d'états de Fock à n photons.

6.2.4 Influence d'un seuil de conditionnement fini

En pratique, le seuil de conditionnement homodyne ϵ devra nécessairement être fini pour avoir un taux de succès non nul. L'état préparé sera donc un mélange statistique. Étant donné que ce défaut constitue en principe une limite fondamentale à ce protocole, nous devons répondre impérativement aux questions suivantes : Quelle va être l'influence de cette largeur finie sur la "qualité" des états préparés, définie comme la fidélité avec le cas idéal? Peut-on trouver un compromis acceptable entre la qualité de ces états et le taux de succès? À qualité constante, comment ce taux va-t-il évoluer avec la taille n ?

Supposons que le résultat de la mesure homodyne qui réalise la projection ne vaut plus 0, mais une certaine valeur p_0 avec $|p_0| < \epsilon$. D'après l'équation 6.3, la fonction d'onde normalisée de l'état devient

$$\tilde{\phi}(p, p_0) = C_n C_0 H_n \left[\frac{p - p_0}{\sqrt{2}} \right] e^{-(p^2 + p_0^2)/2}, \quad C_n^{-2} = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (6.10)$$

C'est maintenant une fonction d'onde monomode où p_0 intervient comme paramètre, and $|\langle \tilde{\phi} | \tilde{\phi} \rangle|^2$ donne la densité de probabilité $P(p_0)$ d'obtenir p_0 comme résultat de la mesure. Par transformée de Fourier, en préservant la norme de l'état, on trouve :

$$\phi(x, p_0) = C_n 2^{n/2} [x - ip_0]^n e^{-(x^2 + p_0^2)/2}. \quad (6.11)$$

On normalise ensuite cette expression, et on la développe au second ordre en p_0 pour obtenir

$$\phi(x, p_0) = \sqrt{\frac{2^{2n}n!}{(2n)!}} \left(1 - p_0^2 \frac{n}{2n-1} \right) \left[x^n - in p_0 x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} p_0^2 x^{n-2} \right] e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La fidélité avec le cas idéal est alors simplement donnée par

$$\mathcal{F} = \left| \int \phi^*(x, p_0)\phi(x, 0)dx \right|^2 = \left[1 - p_0^2 \frac{n^2}{2n-1} \right]^2 \approx 1 - p_0^2 n \quad (6.12)$$

pour $|p_0| < \epsilon$ petit et n suffisamment grand. Ainsi, le seuil de conditionnement ϵ apparaît seulement au second ordre dans la décroissance de la fidélité : $1 - \mathcal{F} \approx \epsilon^2 n$. Pour garder \mathcal{F} constante lorsque le nombre de photons n augmente, la largeur ϵ doit décroître comme ϵ_1/\sqrt{n} où ϵ_1 est le seuil choisi pour obtenir la fidélité désirée dans le cas $n = 1$. D’après les équations ci-dessus, il suffit de satisfaire $|p_0| < 0,1/\sqrt{n}$ pour maintenir la fidélité à 99%.

On voit également qu’à l’ordre le plus bas en p_0 , la densité de probabilité

$$P(p_0) \approx P(0) = \frac{(2n)!}{[2^{2n}(n!)^2]} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (6.13)$$

est finie. Donc, pour $\epsilon > 0$, on obtient un taux de succès fini $2\epsilon P(0)$, linéaire en ϵ . Si on garde une fidélité \mathcal{F} constante, ce taux évolue comme

$$G(n) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \frac{\epsilon_1}{\sqrt{n}} \approx \frac{\epsilon_1}{n}. \quad (6.14)$$

Ce protocole est donc assez efficace, car le taux de génération G varie comme ϵ , alors que l’écart par rapport à l’état idéal augmente seulement en ϵ^2 . Lorsque n augmente, cet écart peut être maintenu constant à un coût relativement modeste pour le taux de succès, qui décroît en $1/n$. D’après les équations 6.12 et 6.14 on voit que $G(n) \approx 1/(10n)$ est suffisant pour obtenir $\mathcal{F} \gtrsim 99\%$.

Nous n’avons délibérément pas inclus dans cette étude la préparation des états de Fock. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre, lorsque nous comparerons ce protocole à ses alternatives. Nous montrerons que dans le cas idéal comme dans le cas réel cette approche garde un avantage exponentiel.

6.3 Démonstration expérimentale pour $n = 2$ photons

6.3.1 Étude théorique du cas $n = 2$

Avec notre dispositif expérimental, on peut produire des états à deux photons, à des cadences pouvant atteindre 100/s sans perdre la négativité de la fonction de Wigner. D’après les calculs ci-dessus, on peut voir qu’un seuil de conditionnement $\epsilon = 0,1$ permet de préparer des chats très proches du cas idéal ($\epsilon = 0$) avec un taux de succès suffisant pour le conditionnement homodyne, d’environ 8%. On peut donc essayer de générer expérimentalement des chats comprimés à partir d’états de Fock $n = 2$, à des cadences acceptables pour une tomographie homodyne complète. Idéalement, on préparerait ainsi avec une fidélité de 98–99% un chat pair de taille $|\alpha|^2 = 2,6$ comprimé de 3,5 dB. Ce chat a une taille suffisante pour être utilisable en traitement de l’information quantique, car la fidélité entre les états cohérents “mort” et “vivant” vaut seulement $3 \cdot 10^{-5}$. Cette fidélité reste bien entendu la même lorsque ces états sont comprimés, car cette compression ne correspond qu’à une déformation linéaire de l’espace des phases.

On sait cependant que ces états sont très fragiles, et que la négativité de la fonction de Wigner disparaît d’autant plus vite qu’ils sont complexes. Intuitivement, que pouvons-nous attendre dans ce cas? On se souvient que les fonctions de Wigner des états de Fock $n = 2$ étaient légèrement négatives sans correction. Maintenant, en plus de la mesure finale, les pertes homodynes interviennent lors de la préparation du “chat”. On

s'attend donc à ce que la fonction de Wigner non corrigée perde sa négativité. Les pertes homodynes de la première détection font partie intégrante de la préparation de l'état, et ne peuvent être compensées. En revanche, en corrigeant des pertes de la deuxième détection, qui effectue l'analyse de l'état préparé, on peut espérer voir une fonction de Wigner négative. L'état sera alors dégradé par les imperfections liées à la préparation des états $n = 2$ et à la mesure homodyne qui réalise la projection sur l'état "chat". On peut s'attendre alors à obtenir des valeurs négatives similaires à celles des états $n = 2$ sans correction.

Pour modéliser cette expérience, on peut reprendre l'expression 4.24 décrivant les états de Fock préparés par conditionnement APD, sans inclure la détection homodyne :

$$W_2(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2+p^2}{\sigma^2}}}{\pi\sigma^2} \left[(1 - \delta_0)^2 + 2(1 - \delta_0) \frac{\delta_0(x^2 + p^2)}{\sigma^2} + \frac{\delta_0^2(x^2 + p^2)^2}{2\sigma^4} \right] \quad (6.15)$$

où $\sigma^2 = 2hg - 1$ et $\delta_0 = \frac{2\xi h^2 g(g-1)}{\sigma^2(hg-1)}$. Cet état est mélangé sur une lame 50/50 avec un mode vide $W_0(x_0, p_0) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2}$. Les deux modes sortants sont ensuite analysés par deux détections homodynes. Bien que leurs pertes et leurs bruits soient en réalité identiques, on doit les introduire par des variables séparées : efficacité η et bruit e pour la détection servant au conditionnement, efficacité μ et bruit f pour l'analyse. En effet, pour déterminer la fonction de Wigner de l'état généré nous aurons besoin de corriger des pertes de la deuxième détection uniquement (les pertes de la première détection interviennent dans la préparation de l'état et non dans son analyse). L'ajout de ces pertes dans le modèle se fait comme dans les chapitres précédents par convolution avec des gaussiennes de vide. On aboutit alors à une fonction de Wigner bimode

$$W_{mix}(x, p, x_0, p_0) = \quad (6.16a)$$

$$\frac{1}{\pi d} e^{-\frac{(x_0^2+p_0^2)\frac{\mu(hg-1)+1+f}{d} + 2(x_0x+p_0p)\frac{\sqrt{\mu\eta}(hg-1)}{d} - (x^2+p^2)\frac{\eta(hg-1)+1+e}{d}}}{\pi d} \quad (6.16b)$$

$$\times \left\{ \frac{[(ax_0 + bx)^2 + (ap_0 + bp)^2]^2}{8} + c [(ax_0 + bx)^2 + (ap_0 + bp)^2] + c^2 \right\} \quad (6.16c)$$

$$d = (hg - 1)[\mu(1 + e) + \eta(1 + f)] + (1 + e)(1 + f) \quad a = \sqrt{\eta\delta_0\sigma^2} \frac{1 + f}{d} \quad (6.16d)$$

$$c = 1 - \frac{\delta_0\sigma^2}{2d} [\mu(1 + e) + \eta(1 + f)] \quad b = \sqrt{\mu\delta_0\sigma^2} \frac{1 + e}{d} \quad (6.16e)$$

Pour déterminer la fonction de Wigner obtenue par conditionnement homodyne avec un seuil ϵ , on doit en principe intégrer cette fonction sur $(x_0, p_0) \in \mathbb{R} \times [-\epsilon, \epsilon]$: la variable x_0 n'est pas mesurée, et on accepte toutes les résultats p_0 entre $-\epsilon$ et ϵ . Les expressions obtenues, faisant intervenir des fonctions erreur, sont alors extrêmement lourdes. Pour y remédier et garder la même forme polynôme-gaussienne pour la fonction de Wigner, on peut alors supposer que le conditionnement n'est plus déterministe mais probabiliste : au lieu d'accepter tous les résultats p_0 dans $[-\epsilon, \epsilon]$ et rejeter tous les autres, on les accepte avec une probabilité gaussienne $e^{-p_0^2/\epsilon^2}/\sqrt{\pi\epsilon^2}$. En quelque sorte, au lieu de filtrer les valeurs de p_0 avec une fente rectangulaire de largeur 2ϵ , on filtre avec une fente gaussienne de même

largeur. Si ϵ est faible, nous avons vu que l'état préparé reste proche du cas $\epsilon = 0$, et il est peu affecté par le profil de ce filtrage. Numériquement, on n'observe pas de différence entre les fonctions obtenues avec les deux approches. La fonction de Wigner de l'état préparé s'obtient donc par

$$W(x, p) = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_{mix}(x, p, x_0, p_0) e^{-p_0^2/\epsilon^2} \frac{dx_0 dp_0}{\sqrt{\pi\epsilon^2}} \quad (6.17a)$$

$$= \frac{\exp(-x^2/\alpha - p^2/\beta)}{\pi\sqrt{\alpha\beta} \left[\left(1 - \frac{\delta\alpha(1-\nu)^2}{2(\alpha-\beta)}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\alpha(1-\nu)^2}{2(\alpha-\beta)}\right)^2 \right]} \left\{ \frac{\delta^2}{2} \left[\frac{x^2}{\alpha} + \frac{p^2\alpha\nu^2}{\beta^2} \right]^2 \right. \quad (6.17b)$$

$$+ 2\delta \left[\frac{x^2}{\alpha} + \frac{p^2\alpha\nu^2}{\beta^2} \right] \left[1 - \delta \left(1 + \frac{(\alpha\nu - \beta)^2}{2\beta(\alpha - \beta)} \right) \right] + \frac{\delta^2}{2} \left[\frac{x^2}{\alpha} - \frac{p^2\alpha\nu^2}{\beta^2} \right] \frac{(\alpha\nu - \beta)^2}{2\beta(\alpha - \beta)}$$

$$\left. + \left[1 - \delta \left(1 + \frac{(\alpha\nu - \beta)^2}{2\beta(\alpha - \beta)} \right) \right]^2 + \frac{\delta^2}{8} \left[\frac{(\alpha\nu - \beta)^2}{2\beta(\alpha - \beta)} \right]^2 \right\}$$

$$\text{où } \alpha = \mu(hg - 1) + 1 + f \quad \delta = \frac{\xi\mu h^2 g(g-1)}{\alpha(hg-1)} \quad (6.17c)$$

$$\beta = \alpha - \frac{\mu\eta(hg-1)^2}{\epsilon^2 + \eta(hg-1) + 1 + e} \quad \nu = \frac{\epsilon^2 + 1 + e}{\epsilon^2 + \eta(hg-1) + 1 + e}. \quad (6.17d)$$

Ici α et β correspondent aux variances maximale et minimale de l'état préparé par conditionnement homodyne sur la fluorescence paramétrique seule, sans conditionnement APD. Dans ν , $1 + e$ est le bruit du vide et $\eta(hg - 1) + 1 + e$ le bruit thermique mesuré par la première détection. En ce qui concerne le paramètre δ , il définit la qualité de l'état mesuré sans conditionnement homodyne. Le paramètre δ_0 décrivant l'état de Fock avant la lame 50/50 varie entre 0 et 2, et sa fonction de Wigner devient négative si $\delta_0 > 1$. Après la lame, δ varie entre 0 and 1 et la fonction de Wigner de l'état obtenu sans sélection homodyne est toujours positive, à cause des 3 dB de pertes introduites par la séparatrice [121].

Cette expression est un peu trop complexe pour l'inverser et retrouver ces paramètres à partir des données. Mais nous verrons dans la section suivante qu'ils peuvent être obtenus facilement en passant à une autre configuration expérimentale.

6.3.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé pour la préparation de “chats comprimés à partir d'états de Fock à deux photons est présenté sur la figure 6.3. Les états de Fock $n = 2$ sont préparés suivant le schéma du chapitre 4. Pour obtenir un taux de succès suffisant, le gain paramétrique dans cette expérience est légèrement plus élevé, $g = 1,17$. On produit alors en moyenne 70 états à deux photons par seconde.

En tournant leur polarisation à 45° à l'aide d'une lame $\lambda/2$, on divise ces états en deux modes de polarisation orthogonale et de phase relative fixe. On utilise alors deux détections homodynes passivement verrouillées en phase, avec un montage décrit en détails dans le chapitre 3 : les états $n = 2$ sont séparés en deux modes spatiaux sur un PBS,

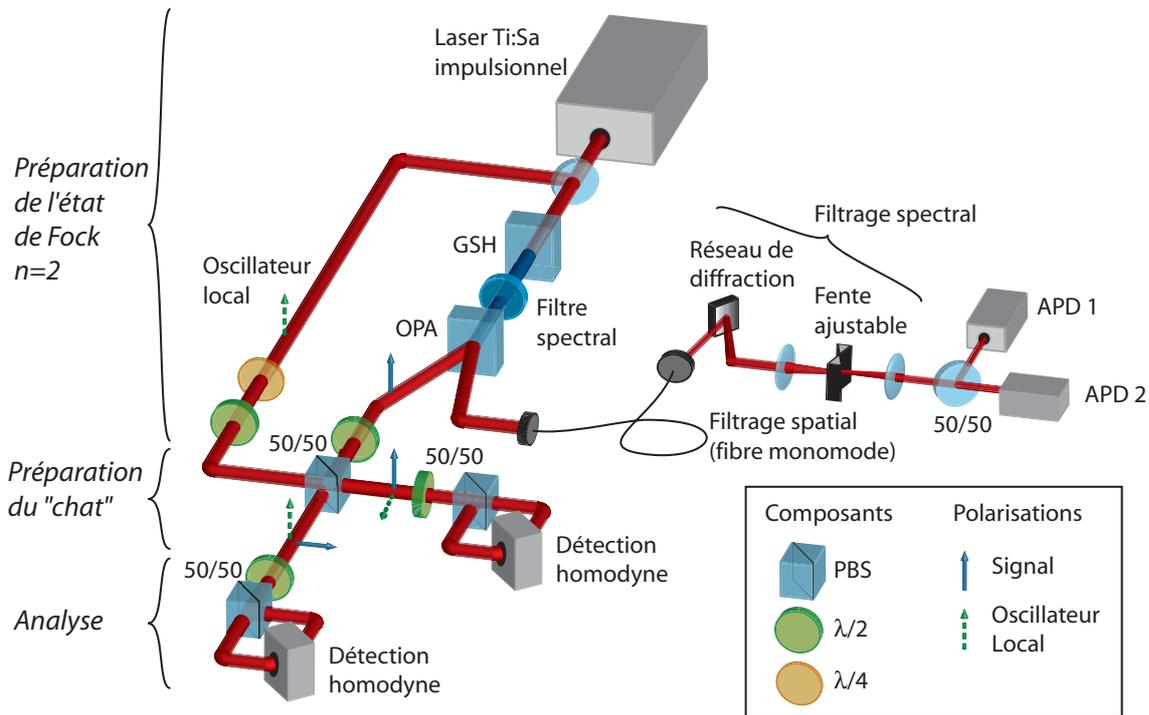


Figure 6.3: Montage expérimental utilisé pour la préparation de "chats de Schrödinger" comprimés, par conditionnement homodyne sur des états de Fock $n = 2$. Des états $n = 2$ sont produits par conditionnement APD sur des impulsions femtoseconde préparées dans un état de vide comprimé bimode (voir Chap. 4). Ces états sont divisés entre deux détections homodynes. La première réalise la mesure projective qui prépare le "chat", la seconde effectue son analyse

où ils sont superposés à deux oscillateurs locaux préparés à partir d’un même faisceau. Dans ce cas, on connaît également la différence entre les phases de ces oscillateurs, définie à l’aide d’un jeu de lames $\lambda/2 + \lambda/4$. Leurs fluctuations globales ne jouent quant à elles aucun rôle car l’état de Fock incident est invariant de phase.

La première détection homodyne sert à la préparation conditionnelle du chat. C’est elle qui induit sa dépendance en phase, en mesurant une quadrature définie dès lors comme la quadrature impulsion \hat{p} . On accepte le résultat p_0 de la mesure s’il vérifie $|p_0| < 0,1$, ce qui conduit à un taux de succès de 8% pour l’étape de conditionnement homodyne, soit un taux de génération global d’environ 6/s, ce qui correspond bien aux prédictions théoriques.

Lorsque le conditionnement réussit, l’autre mode se trouve projeté dans un état “chat comprimé”. Cet état est analysé à l’aide de la deuxième détection homodyne, qui mesure une quadrature bien définie grâce au verrouillage des phases relatives. Le montage choisi permet ainsi de tomographier un état dépendant de la phase sans aucun asservissement actif. De plus, simplement en ajustant la première lame $\lambda/2$, on peut passer à une configuration où les états de Fock sont envoyés sur une seule détection homodyne. On peut alors optimiser le dispositif en temps réel à l’aide des états $n = 1$, et extraire les paramètres expérimentaux, en vérifiant les valeurs obtenues par des mesures indépendantes à l’aide de la sonde. On trouve ainsi un paramètre d’excès de bruit OPA $\gamma = 0,2$ soit $h = 1,007$, une pureté modale $\xi = 0,9$, une efficacité homodyne $\eta = \mu = 70\%$ et un bruit électronique de 2,5 mV sur les deux détections soit $e = f = 0,01$.

6.3.3 Résultats

Nous avons réalisé la tomographie homodyne de l’état préparé avec ce dispositif, en mesurant six distributions de quadratures P_θ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/3$, la phase θ étant ajustée à l’aide des lames d’onde sur l’oscillateur local. Pour reconstruire chacune de ces distributions, nous avons acquis 200 000 paires de mesures homodynes conditionnées sur les détections en coïncidence des deux APDs. Nous avons considéré que la préparation était réussie lorsque le résultat de la mesure homodyne projective, réalisée par la première détection, satisfaisait $|p_0| < 0,1$. Nous avons ainsi sélectionné environ 15 000 points par quadrature mesurée par la deuxième détection, soit environ 8% des 200 000 points conditionnés sur deux photons. Ces points ont été répartis en histogrammes de 64 points correspondant aux distributions P_θ .

Comme on s’y attendait, la fonction de Wigner obtenue par transformée de Radon, présentée sur la figure 6.4, reste positive. En revanche, lorsqu’on corrige des pertes de la deuxième détection homodyne, qui analyse l’état préparé, on obtient une fonction de Wigner négative, qui présente clairement plusieurs franges d’interférence entre les états cohérents comprimés correspondant aux états “mort” et “vivant” du chat. Avec ou sans correction, les fonctions obtenues à l’aide de notre modèle sont en excellent accord avec les résultats numériques. Elles ont été tracées en injectant dans l’équation 6.17c les valeurs des paramètres expérimentaux ci-dessus, en posant $\mu = 1$ et $f = 0$ pour traduire la correction des pertes de la deuxième détection homodyne.

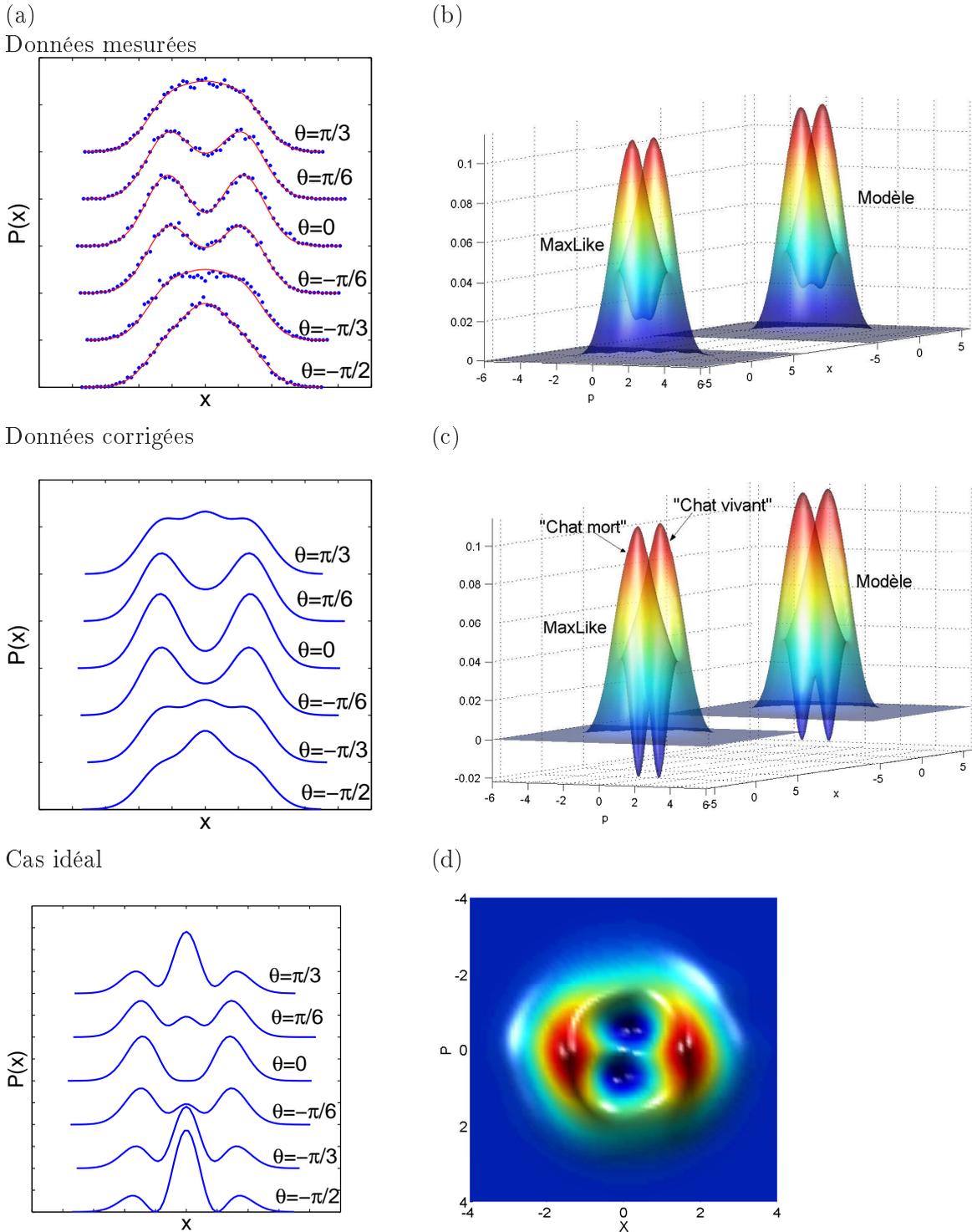


Figure 6.4: (a) Distributions de quadratures mesurées pour le “chat comprimé” préparé expérimentalement à partir de deux photons, interpolées par le modèle et comparées à celles de l’état généré (corrigées des pertes de la deuxième détection homodyne), et à celles de l’état idéal. (b) Fonction de Wigner de l’état mesuré sans aucune correction, reconstruite par maximum de vraisemblance et comparée au résultat prédit par le modèle. (c) Fonction de Wigner de l’état généré, corrigée des pertes de la deuxième détection homodyne, reconstruite par maximum de vraisemblance et comparée au résultat du modèle. (d) La même fonction vue de haut.

Génération de “chats de Schrödinger” de taille arbitraire à partir d’états de Fock.

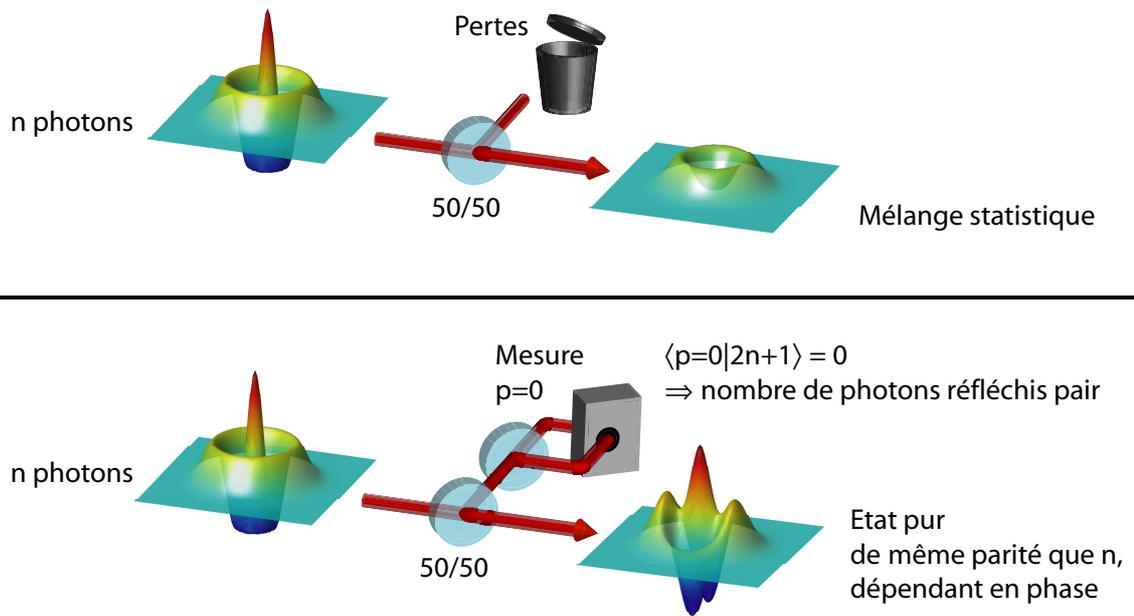


Figure 6.5: Effet du conditionnement homodyne sur l’état préparé à partir de n photons, illustré dans le cas $n = 2$. Sans conditionnement, on obtient après la lame un mélange statistique invariant de phase. Si on conditionne la préparation sur une mesure homodyne proche de 0, on induit une dépendance en phase et prépare une superposition quantique d’états nombres de même parité que n .

6.4 Discussion

6.4.1 Structure des états préparés

Il est en réalité possible, dans une certaine mesure, de comprendre le fonctionnement de ce protocole de manière qualitative.

Lorsqu’on envoie n photons sur une lame 50/50, ils se répartissent aléatoirement dans les deux modes de sortie suivant une distribution binômiale. Si l’on “perd” les photons réfléchis, on produit simplement un état de Fock qui a subi 50% de pertes (Fig. 6.5). Sa fonction de Wigner est alors partout positive, s’annulant en 0 [121]. En revanche, si une mesure homodyne dans le mode réfléchi donne le résultat $p_0 = 0$, ce mode est projeté sur l’état propre $|p_0 = 0\rangle$ de l’opérateur \hat{p} . On peut alors remarquer que cette mesure nous donne la parité du nombre de photons. En effet, les fonctions d’onde des états nombres impairs sont toutes nulles à l’origine, et n’ont pas de recouvrement avec l’état $|p_0 = 0\rangle$: $\langle p_0 = 0|2k + 1\rangle = 0$. On sait donc que le nombre de photons dans le mode réfléchi était pair, et le nombre de photons transmis a la même parité que n . Ce processus étant cohérent, on crée ainsi une superposition quantique d’états de Fock de même parité, comme c’est le cas pour les chats de Schrödinger. La mesure d’une quadrature particulière induit une dépendance en phase sur l’état préparé, alors que l’état de Fock initial n’en présentait pas. Enfin, on peut “décompresser” l’état de 3 dB, c’est à dire d’un facteur 2. On compense alors la perte de la moitié des photons sur la lame 50/50, et le nombre moyen de photons dans l’état transmis passe de $n/2$ à n . Cette décompression ne change

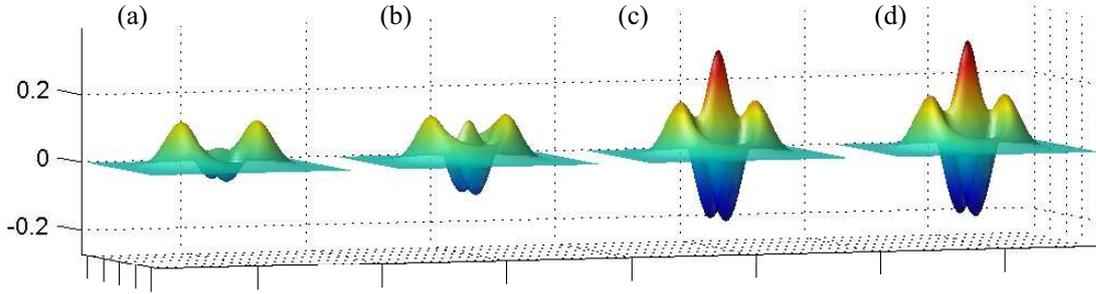


Figure 6.6: Effet des imperfections expérimentales sur la fonction de Wigner de l'état préparé à partir de deux photons. (a) État de Fock impur. (b) Préparation homodyne avec pertes. (c) Seuil de conditionnement homodyne fini. (d) Cas idéal.

en rien la parité de l'état : elle ajoute les photons par paires, qui proviennent des photons de pompe à fréquence double. Ce raisonnement très sommaire permet de comprendre pourquoi on obtient un état contenant en moyenne n photons, ayant la parité de n et présentant une dépendance en phase.

De manière tout aussi qualitative, on peut noter que, à la différence des “vrais” chats comprimés, la décomposition de cet état en base de Fock est tronquée. Il ne peut en effet contenir plus de n photons. Par exemple, l'état préparé idéalement à partir de deux photons s'écrit $|\phi\rangle = \sqrt{2/3} |2\rangle - \sqrt{1/3} |0\rangle$.

6.4.2 Améliorations expérimentales

Bien que la signature de la superposition quantique soit clairement observée, la fidélité de l'état préparé avec le cas idéal vaut 41% et ne dépasse pas la limite classique de 50% obtenue pour un mélange statistique d'états cohérents comprimés. On pouvait s'y attendre, car la fidélité des états de Fock initiaux avec des états $n = 2$ purs dépassait à peine 50%, et la préparation du “chat” s'est accompagnée de pertes. Les prédictions de notre modèle étant en bon accord avec l'expérience, on peut l'utiliser pour déterminer ce qui limite nos performances : la pureté des états de Fock, les pertes homodynes ou la largeur de conditionnement ϵ finie?

La figure 6.6 présente les fonctions de Wigner que l'on obtiendrait avec chacune de ces trois imperfections séparément, en utilisant les paramètres de notre expérience. Lorsque le seul défaut est l'impureté de l'état de Fock, la fidélité avec le cas idéal vaut 55%. Les défauts de la détection homodyne, sur une expérience par ailleurs idéale, conduiraient à une fidélité de 64%. Enfin, on peut vérifier qu'un seuil de conditionnement fini n'a pratiquement aucune influence (fidélité de 99%). Les limites de notre expérience ne sont donc pas fondamentales (seuil $\epsilon > 0$) mais techniques, et peuvent être surmontées. Par exemple, le problème de l'efficacité homodyne ne se pose pas dans le cas des expériences en régime continu, où elle peut atteindre 98% [58]. En ce qui concerne les états de Fock, Waks *et al.* ont démontré dans [122] la possibilité de créer des états $n = 2$ ayant une fidélité de 94% avec le cas idéal, à une cadence de 1100 kHz, en conditionnant leur préparation à l'aide d'un compteur de photons VLPC. Le même dispositif permet de préparer des états

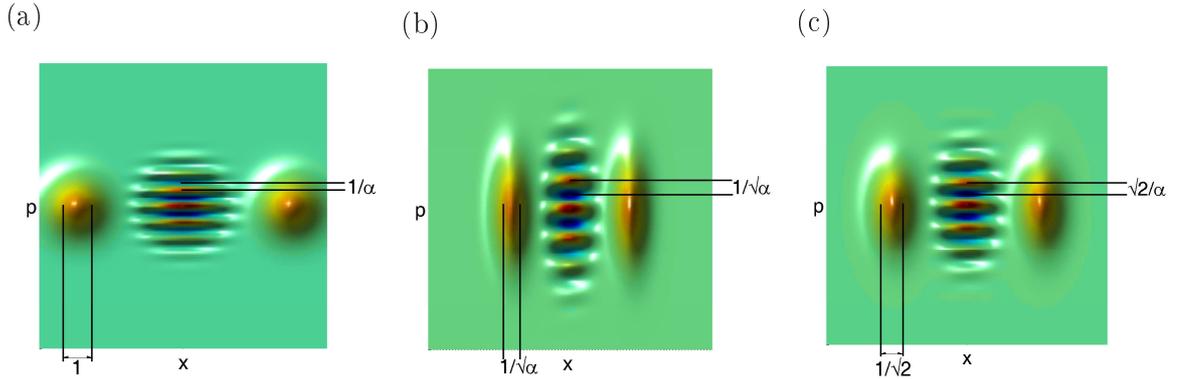


Figure 6.7: (a) Fonction de Wigner d’un chat non comprimé de taille $|\alpha|^2 = 10$: la plus petite échelle de variation vaut $1/\alpha$, ce qui fixe un maximum pour les fluctuations de bruit qu’il peut subir. (b) Fonction de Wigner du même chat comprimé de $s = 1/\alpha$: la plus petite échelle de variation vaut maintenant $1/\sqrt{\alpha}$, on gagne ainsi un facteur $\sqrt{\alpha}$ en robustesse. (c) Le même état comprimé de 3 dB : lorsque $|\alpha|^2 \geq 2$, cette compression augmente la résistance au bruit.

$n = 3$ et $n = 4$ avec 95% et 60% de fidélité respectivement, à des cadences comparables à notre expérience (il faudrait cependant s’assurer de la pureté modale de ces états, qui n’avait pas été vérifiée dans ces expériences). Il semble donc envisageable d’implémenter expérimentalement ce protocole en utilisant des états de Fock plus élevés et de meilleure qualité.

6.4.3 Décompression des chats

Il est assez intéressant de remarquer que les chats comprimés deviennent plus robustes au bruit. Ce résultat, démontré dans [123] et [124], est assez simple à comprendre. Supposons qu’un chat non comprimé de taille $|\alpha|^2$ subisse un bruit indépendant de la phase. Lorsqu’on projette sa fonction de Wigner sur la quadrature x , la taille typique de ses variations correspond à la largeur des deux états cohérents, c’est à dire à une unité de shot noise (voir Fig. 6.7). Il faut donc que les fluctuations soient supérieures au shot noise pour qu’elles l’altèrent notablement suivant x . En revanche, la projection sur la quadrature p se présente sous forme de franges d’interférence quantiques qui varient typiquement sur l’échelle de $1/\alpha$ (voir Eq. 5.4). Les franges seront donc brouillées très rapidement si α est grand, et les fluctuations doivent rester inférieures à $1/\alpha$ pour préserver le caractère quantique du chat. Pour augmenter sa robustesse, il suffit de le comprimer d’environ $1/\sqrt{\alpha}$ en amplitude suivant x et l’étirer de $\sqrt{\alpha}$ suivant p (en variance, cela correspond à $s = 1/\alpha$). Ses variations caractéristiques se feront alors sur l’échelle de $1/\sqrt{\alpha}$ sur les deux quadratures, ce qui permet de gagner un facteur $\sqrt{\alpha}$ en robustesse. Le temps de décohérence caractéristique du chat décroît alors en $1/\alpha$ au lieu de $1/\alpha^2$ [123]. Dans notre cas, l’état est comprimé non pas de $s = 1/\alpha$ mais de $s = 1/2$: lorsque $|\alpha|^2 \geq 2$, la compression augmente la résistance au bruit, jusqu’à deux fois pour des chats de grande taille.

Plusieurs méthodes permettent de décompresser les chats préparés par cette méthode. La première, et la plus évidente, est de leur faire traverser un amplificateur paramétrique

dégénéré ave 3 dB de squeezing, ce qui est tout à fait envisageable dans notre cas. Une méthode encore plus simple est d'injecter du vide comprimé par le deuxième port de la lame 50/50 utilisée pour diviser les états de Fock : pour $n \leq 4$, il a été montré qu'on prépare ainsi des chats non comprimés [125], et on peut conjecturer que cette méthode reste valable pour tout n . Il a été en effet démontré qu'on pouvait comprimer un état arbitraire en le mélangeant avec du vide comprimé, en réalisant une mesure homodyne dans un mode et en déplaçant l'autre dans l'espace des phases [126, 127].

Enfin, on peut se demander ce qui arrive si on relâche la contrainte sur la compression s du chat, en tolérant un léger écart par rapport à $1/2$. La fonction d'onde ψ d'un chat comprimé de s présentera alors deux pics centrés en $x = \pm\sqrt{2s|\alpha|^2}$. Si on garde les pics de ψ superposés avec ceux de notre état, c'est à dire $2s|\alpha|^2 = n$, on peut faire varier la taille $|\alpha|^2$ du chat en compensant avec la compression s . Pour fabriquer un chat de taille et de parité arbitraire, nous aurons besoin de faire varier $|\alpha|^2$ entre $n - 1$ et $n + 1$ (au delà on utilisera un autre nombre de photons) : pour n assez grand les variations correspondantes de s sont relativement faibles, et la fidélité reste excellente. Par exemple, un chat impair de taille $|\alpha|^2 = 9.5$ peut être préparé avec 99.7% de fidélité en utilisant 9 photons et en décompressant de $s = 9/19$. Pour un chat pair on utiliserait 10 photons avec $s = 10/19$. Ainsi, ce protocole permet de préparer des chats de toutes tailles et parités, sans être restreint à des valeurs discrètes.

6.4.4 Performance du protocole

Pour terminer, il est intéressant d'étudier les performances de cette méthode en termes de taux de succès : n'aurait-on pas mieux fait d'utiliser un protocole préexistant, comme la soustraction répétée de photons du vide comprimé? En effet, si la procédure de conditionnement homodyne est assez efficace, l'application de ce protocole reste dans notre cas limitée par la préparation de états de Fock par conditionnement APD, dont l'efficacité décroît exponentiellement avec le nombre de photons.

Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, à l'heure actuelle, les méthodes les plus proches de la réalité expérimentale se basent sur des mesures conditionnelles par comptage de photons, soit dans un dispositif type "mesure quantique non-destructive" [117], soit par soustraction de photons multiples [104]. Ces protocoles nécessitent intrinsèquement d'utiliser des états de vide comprimé monomode ou bimode, qui ne peuvent être remplacés par une autre ressource. Or, dans ces états, la distribution des photons décroît exponentiellement, et il en sera de même pour le taux de succès. Cette perte d'efficacité exponentielle est donc, pour ces protocoles, une limite *fondamentale*. Dans notre cas, en revanche, les états de Fock peuvent être créés par un processus quelconque, qui ne présente pas nécessairement cette décroissance. Nous les produisons à partir d'états EPR pour de simples raisons de disponibilité de matériel expérimental, mais rien n'empêche en principe d'utiliser un processus plus efficace. Pour nous, cette limite n'est pas fondamentale mais *pratique* et, compte tenu des efforts de recherche sur les sources de photons, on peut espérer la surmonter.

Revenons cependant aux possibilités actuelles : les seules sources d'états non-classiques suffisamment fiables sont les cristaux paramétriques, et les seuls détecteurs de photons couramment accessibles sont les photodiodes à avalanche. Dans ce cas, la seule alternative à notre méthode, qui puisse elle aussi fonctionner avec des APDs inefficaces, est

la soustraction de photons multiples à partir d’un mode de vide comprimé, décrite dans [104]. Dans ces deux protocoles il est possible d’augmenter le taux de succès au dépens de la fidélité. Pour les comparer entre eux, on postule donc qu’on veut préparer des chats d’une taille $|\alpha|^2 = n$ ayant une certaine fidélité \mathcal{F} avec le cas idéal. Les deux approches nécessitent d’envoyer un certain nombre m de photons vers les APDs, et les états préparés seront affectés de la même manière par la probabilité d’erreur P_{err} d’en envoyer un de trop. Cette erreur changerait la parité du chat et conduirait à un brouillage des franges de sa fonction de Wigner. Notre méthode sera de plus affectée par le seuil fini de conditionnement homodyne. Dans l’Annexe E, qui détaille les calculs menant aux résultats ci-dessous, on montre que la probabilité G_1 de soustraire m photons varie en P_{err}^m/\sqrt{m} , alors que le taux de succès G_2 de notre protocole se comporte en P_{err}^m/m . Mais pour préparer un chat de taille n il nous suffit de n photons, alors que la soustraction en nécessite $m = n/\beta > n$ où $\beta \in]0, 1[$. Le rapport $\rho = G_1/G_2$ de leurs efficacités décroît alors exponentiellement en $\sqrt{n}P_{err}^{m-n} = \sqrt{n}P_{err}^{n(1/\beta-1)}$. En prenant par exemple un gain paramétrique de 3 dB, typique dans nos expériences, on trouve $\rho \approx \sqrt{n} 10^{-3n}$: le facteur \sqrt{n} est rapidement dominé par la décroissance exponentielle. Si l’on incluait l’efficacité APD μ , cette décroissance serait encore plus rapide, car ce rapport serait multiplié par $\mu^{n(1/\beta-1)}$. Avec notre efficacité APD globale de 5%, ρ chuterait alors en 10^{-7n} .

Ainsi, dans le cas idéal comme dans le cas réel, notre protocole garde un avantage exponentiel par rapport aux alternatives envisageables à l’heure actuelle.

6.5 Conclusion

Nous avons développé une méthode simple et efficace permettant de préparer des “chats de Schrödinger” optiques de taille arbitraire par conditionnement homodyne, en utilisant des états de Fock comme ressource [128]. Ces chats sont en propagation libre, comme le requièrent la plupart des applications en information quantique. Ils sont comprimés d’environ 3 dB suivant la quadrature x , ce qui les rend plus robustes au bruit. Cette compression peut être facilement compensée avec nos moyens expérimentaux.

Nous avons implémenté expérimentalement ce protocole en utilisant des états à deux photons, préparant ainsi un chat de taille suffisante pour devenir utilisable en information quantique. Sa fonction de Wigner présente clairement des franges d’interférence entre les états “mort” et “vivant” du chat, avec des zones négatives.

Nous avons montré que la qualité des états préparés est très peu affectée par les limites fondamentales de ce protocole, et que les imperfections expérimentales sont liées uniquement à des problèmes techniques surmontables. Nous avons enfin démontré que les performances de ce protocole étaient supérieures à celles des méthodes alternatives, réalisables avec les outils actuels.

Partie IV

Manipulations non-gaussiennes de l'intrication : vers les communications quantiques à longue distance

Chapitre 7

Augmenter l'intrication par soustraction cohérente de photons.

Sommaire

7.1	Introduction	149
7.1.1	L'intrication en information quantique	149
7.1.2	États intriqués non-gaussiens	152
7.1.3	Mesures de l'intrication	153
7.2	Soustraction cohérente de photons	154
7.3	Modélisation	158
7.4	Dispositif expérimental	160
7.5	Structure des états préparés et mode d'analyse tomographique	162
7.6	Résultats expérimentaux	164
7.7	Discussion	166
7.8	Conclusion	168

7.1 Introduction

Cette partie aborde un sujet central en information quantique, celui de l'intrication.

7.1.1 L'intrication en information quantique

En commençant ce manuscrit, nous avons dressé une liste des principales particularités de la mécanique quantique : la dualité onde-corpuscule, le principe d'incertitude, l'existence des superpositions d'états et celle d'états intriqués. Nous avons alors noté que les principes de d'incertitude et de superposition ont mené respectivement à l'idée de la cryptographie et de l'ordinateur quantique. Quel est alors le rôle de l'intrication dans le domaine de l'information quantique?

Calcul quantique

La puissance d'un ordinateur quantique vient en partie du fait qu'un petit ensemble d'objets quantiques peut prendre un très grand nombre d'états. Si on prend n objets ayant chacun un espace de Hilbert de dimension k , l'espace de Hilbert de l'ensemble sera de dimension k^n (il faudra ainsi une base de $2^{100} \approx 10^{30}$ états pour décrire un ensemble de 100 particules de spin 1/2). Il faudra $k^n - 1$ nombres complexes pour décrire l'ensemble des états de cet espace, mais seulement $n(k - 1)$ pour décrire tous les états séparables.

L'intrication peut également être utilisée de manière plus directe. Nous avons déjà mentionné dans le chapitre 2 la difficulté de réaliser des portes quantiques à deux qubits. Pour y remédier, une solution consiste à préparer un grand état intriqué (état cluster) entre tous les objets utilisés pour le calcul, et de réaliser des mesures projectives adaptées à l'algorithme que l'on souhaite implémenter. Cette approche, appelée "one-way quantum computing" (les opérations logiques correspondent à des projections irréversibles et non à des transformations unitaires) semble actuellement très prometteuse [129].

Communications quantiques à longue distance

En ce qui concerne les communications quantiques, elles peuvent *en principe* se passer d'intrication : on arrive ainsi à transmettre des clés sur des dizaines de kilomètres avec de simples impulsions laser. Cependant, sur de longues distances, les pertes deviennent trop importantes pour maintenir un débit suffisant et pour garantir la sécurité de la transmission. Dans le cas classique, ce problème est résolu en plaçant sur le trajet des relais qui corrigent et réamplifient le signal. Il est bien entendu interdit de procéder de la sorte dans le cas quantique, car cette amplification, si elle était possible, permettrait à un espion de copier et lire le code. On peut facilement montrer qu'il est en réalité impossible de concevoir un dispositif pouvant dupliquer un état quantique arbitraire sans ajouter de bruit (théorème de non-clonage).

Il intervient ici une idée essentielle en communications quantiques : le qubit qui transporte le code secret est précieux et on veut à tout prix éviter de le perdre ou l'abîmer. En revanche, on peut beaucoup plus facilement manipuler des états auxiliaires, qui ne contiennent aucune information en eux-mêmes et que l'on peut produire en grandes quantités. L'intrication apparaît alors comme une ressource nécessaire pour réaliser des *répéteurs quantiques*, à l'aide d'un protocole de distillation et de transfert d'intrication.

Plus précisément, l'intrication est utilisée ici dans le cadre de la téléportation quantique [130], qui partage avec la téléportation de la science-fiction l'idée de détruire un objet à un endroit pour le recréer à l'identique ailleurs. Son principe de fonctionnement pour des variables discrètes est illustré sur la figure 7.1. L'idée essentielle est de préparer, en plus du qubit à téléporter, deux qubits auxiliaires intriqués, l'un au départ et l'autre à l'arrivée, et d'utiliser leurs corrélations quantiques. Supposons qu'Alice dispose d'un qubit photonique $|\chi_A\rangle = a|+_A\rangle + b|-_A\rangle$ préparé dans le mode optique A , et qu'elle veut le téléporter chez Bob, dans un mode B . Pour y parvenir, les deux partenaires utilisent comme ressource un des quatre états de Bell intriqués, partagés entre le mode B de Bob et un mode auxiliaire A' chez Alice :

$$|\phi_{\pm, A'B}\rangle = \frac{|+_A'\rangle|+_B\rangle \pm |-_A'\rangle|-_B\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_{\pm, A'B}\rangle = \frac{|+_A'\rangle|-_B\rangle \pm |-_A'\rangle|+_B\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (7.1)$$

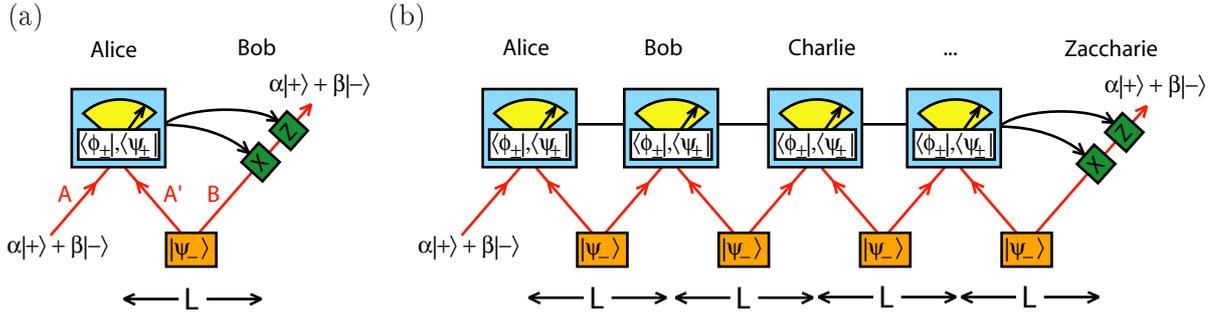


Figure 7.1: (a) Téléportation d'un qubit entre Alice et Bob (b) Transfert d'intrication permettant la téléportation à travers un canal quantique de longueur arbitraire (voir texte).

par exemple $|\psi_{-}\rangle$. Alice effectue une mesure jointe sur les deux qubits dont elle dispose, le qubit à téléporter dans le mode A et sa moitié de l'état intriqué dans le mode A' , en les projetant sur un de ces quatre états de Bell pour AA' :

$$\langle\phi_{\pm,AA'}|\chi_A\rangle|\psi_{-,A'B}\rangle = \frac{a|_{-B}\rangle \mp b|_{+B}\rangle}{2}, \quad \langle\psi_{\pm,AA'}|\chi_A\rangle|\psi_{-,A'B}\rangle = \frac{-a|_{+B}\rangle \pm b|_{-B}\rangle}{2}. \quad (7.2)$$

Dans cette opération, Alice n'apprend rien sur l'état du qubit de départ, qu'elle détruit dans le processus (on respecte donc le théorème de non-clonage). Elle sait seulement lequel des quatre états de Bell elle a obtenu. Elle établit ensuite une communication classique avec Bob et lui communique le résultat de cette mesure. Si elle a obtenu $|\psi_{-}\rangle$, la téléportation a directement réussi et Bob n'a rien d'autre à faire : son qubit est projeté dans l'état $|\chi\rangle$ de départ (à une phase globale près). Si Alice obtient $|\psi_{+}\rangle$, Bob doit réaliser une inversion de phase ($Z|0\rangle = |0\rangle$, $Z|1\rangle = |1\rangle$) pour retrouver $|\chi\rangle$. Pour $|\phi_{-}\rangle$, Bob doit effectuer un bit-flip ($Z|0\rangle = |1\rangle$, $Z|1\rangle = |0\rangle$), et pour $|\phi_{+}\rangle$ il applique successivement X et Z .

Lorsque Alice a téléporté le qubit chez Bob, Bob peut le téléporter chez Charlie, et ainsi de suite. Mais en réalité on inverse l'ordre des opérations : Bob effectue d'abord sa mesure de Bell, qui intrique les photons d'Alice et Charlie, initialement indépendants (transfert d'intrication ou *entanglement swapping*, [131, 132]). En répétant ce processus, on peut alors créer un canal de transmission quantique de longueur nL arbitraire, comprenant un certain nombre n de relais séparés par une distance L . Au lieu de transférer l'information, on transfère donc l'intrication de proche en proche, pour intriquer le point de départ avec celui d'arrivée et y téléporter notre qubit.

Le grand avantage de cette approche est de pouvoir effectuer ces opérations de transfert en parallèle. Bien sûr, les paires de Bell vont elles aussi subir les pertes en ligne, et la probabilité d'intriquer tous les relais simultanément décroît avec la distance de manière exponentielle. Mais si l'on est capable de stocker les paires dont la transmission a réussi, on ne sera pas obligé de tout recommencer à chaque essai.

En plus des pertes, on devra lutter contre les erreurs induites lors de la transmission, par exemple contre la dépolarisation des photons intriqués. Or, si deux sites voisins partagent un grand nombre N d'états de Bell partiellement dépolarisés, il est possible d'en extraire un petit nombre d'états ayant une plus grande intrication, en utilisant

uniquement des opérations locales et des communications classiques [133]. La quantité d'intrication globale n'augmente pas dans le processus, mais elle se trouve concentrée sur un petit nombre d'états au dépens des autres : cette procédure a ainsi été baptisée *distillation d'intrication*. Alors, lorsque les relais sont correctement espacés, le temps global nécessaire pour la transmission n'augmente plus de façon exponentielle mais seulement polynômiale, même lorsque les opérations locales sont elles aussi imparfaites [134, 135].

Les communications quantiques à longue distance nécessitent donc des états intriqués, et des relais quantiques capables de les stocker [34, 36, 35, 37], de les distiller [136, 137, 138], et d'effectuer des mesures de Bell nécessaires à la téléportation [139, 140]. Toutes ces opérations ont été réalisées expérimentalement pour les variables discrètes, mais à ce jour elles n'ont pas pu être implémentées au sein d'un même dispositif. Cet objectif concentre aujourd'hui l'essentiel des efforts expérimentaux en communications quantiques.

7.1.2 États intriqués non-gaussiens

Dans le cas des variables continues, les communications quantiques à longue distance utilisent le même principe, en remplaçant les états de Bell par les états EPR [141, 41, 142]. Nous savons que ces états peuvent être facilement produits par un OPA non-dégénéré, ou en mélangeant deux états de vide comprimé. De plus, contrairement aux variables discrètes [98], la mesure projective jointe utilisée lors de la téléportation réussit toujours. Il suffit à Alice de mélanger les deux modes A et A' sur une lame 50/50, puis mesurer la quadrature \hat{x} dans un mode de sortie et la quadrature \hat{p} dans l'autre : si on obtient les résultats x et p , on projette sur un état EPR parfaitement comprimé $\delta\left(x - \frac{x_A - x_{A'}}{\sqrt{2}}\right) \delta\left(p - \frac{p_A + p_{A'}}{\sqrt{2}}\right)$. Comme par ailleurs l'état EPR partagé entre Alice et Bob se rapproche à fort squeezing de $\delta(x_{A'} - x_B)\delta(p_{A'} + p_B)$, on voit facilement qu'il suffit à Bob de déplacer le mode B de $-\sqrt{2}(x + ip)$ pour retrouver l'état téléporté. Dans ce cas la fidélité de la téléportation augmente avec le squeezing de la paire EPR.

Une difficulté apparaît cependant lors de l'étape de distillation de l'intrication, nécessaire pour réaliser un répéteur quantique. On peut en effet démontrer qu'il est impossible d'augmenter l'intrication entre états gaussiens par des opérations qui préservent leur caractère gaussien [143, 144, 145]. Or c'est justement le cas pour les outils conventionnels des variables continues (optique linéaire, amplification paramétrique et détection homodyne) : si l'on distribue l'intrication à l'aide d'états EPR gaussiens, ces outils ne permettront pas de la distiller. En revanche, il est théoriquement possible de le faire par l'intermédiaire d'opérations non-gaussiennes [146, 147]. Les états intriqués non-gaussiens sont donc une ressource indispensable pour les communications quantiques à longue distance.

Ces états ont également un intérêt fondamental. Les détections homodynes peuvent atteindre des efficacités suffisantes pour tester les inégalités de Bell en éliminant à la fois l'échappatoire de localité et d'efficacité [51, 52]. Les fonctions de Wigner des états intriqués utilisés pour ces tests doivent être négatives, pour éliminer la possibilité de décrire les résultats par une distribution statistique classique.

Cette dernière partie est donc consacrée à l'étude théorique et expérimentale des états intriqués non-gaussiens, et de la possibilité d'augmenter l'intrication d'états gaussiens par des opérations non-gaussiennes. Cette intrication devra auparavant être définie et quantifiée de manière précise.

7.1.3 Mesures de l'intrication

On considère que deux systèmes sont intriqués (corrélés quantiquement) lorsque leurs corrélations ne peuvent pas être obtenues par des opérations locales sur chacun des systèmes, et des communications classiques (*Local Operations and Classical Communications, LOCC*). L'intrication de trois objets ou plus est difficile à définir, et nous allons nous restreindre aux systèmes bipartites. Une revue sur la nature, les propriétés et les mesures de l'intrication pourra par ailleurs être trouvée dans la référence [148].

D'après cette définition, les états séparables ne sont évidemment pas intriqués, de même que leurs mélanges statistiques : par exemple l'état mixte $\frac{1}{2}(|\uparrow_A \uparrow_B\rangle \langle \uparrow_A \uparrow_B| + |\downarrow_A \downarrow_B\rangle \langle \downarrow_A \downarrow_B|)$ de deux qubits A et B est corrélé classiquement mais n'a aucune intrication. Plus généralement, un état bipartite quelconque ne sera pas intriqué si sa matrice densité peut s'écrire comme une somme convexe d'états produits :

$$\hat{\rho}_{NonIntr} = \sum_k a_k |\psi_k, \psi'_k\rangle \langle \psi_k, \psi'_k|, \quad \forall k \ a_k \in [0, 1], \quad \sum_k a_k = 1. \quad (7.3)$$

À l'inverse, il existe pour des systèmes bipartites des états maximalelement intriqués, qui permettent d'obtenir n'importe quel autre par des opérations LOCC. Dans le cas de deux systèmes à deux niveaux, ce sont les états de Bell.

On aimerait donc pouvoir quantifier l'intrication pour comparer les états quantiques entre eux. Malheureusement, il n'existe de relation d'ordre univoque que pour les états bipartites purs. L'intrication entre deux objets A et B, dont l'état est décrit par une matrice densité $\hat{\rho}_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|$, peut alors être quantifiée par l'entropie de Von Neumann de l'état réduit à un des deux modes :

$$E = -\text{Tr} \{ \hat{\rho}_A \log_2(\hat{\rho}_A) \} = -\text{Tr} \{ \hat{\rho}_B \log_2(\hat{\rho}_B) \}, \quad \hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \{ \hat{\rho}_{AB} \}, \quad \hat{\rho}_B = \text{Tr}_A \{ \hat{\rho}_{AB} \} \quad (7.4)$$

Cette entropie quantifie le "degré de désordre" des objets A et B observés individuellement. Elle ne peut donc plus être utilisée pour mesurer l'intrication d'un état mixte, car ce désordre peut alors venir de fluctuations classiques. Par exemple, lorsque deux photons polarisés sont préparés dans un état de Bell, leurs matrices densités réduites sont identiques à celles de deux photons dépolarisés indépendants :

$$\hat{\rho}_A = \hat{\rho}_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Dans le cas général, quantifier l'intrication d'un état bipartite s'avère difficile. Par exemple, d'un point de vue pragmatique, on pourrait concevoir l'intrication comme une ressource qui permet de réaliser un certain nombre d'opérations classiquement impossibles, comme la téléportation ou le codage dense. On pourrait imaginer alors qu'un état sera plus intriqué qu'un autre s'il permet de réaliser ces opérations plus efficacement (par exemple, téléporter avec une plus grande fidélité). Mais pour certaines applications un état $|\phi\rangle$ sera plus intriqué qu'un autre état $|\psi\rangle$, alors que pour d'autres ce sera le contraire.

Il existe un très grand nombre de mesures de l'intrication d'états bipartites mixtes, avec des sens physiques plus ou moins clairs. Malheureusement, la plupart d'entre elles ont recours à des procédures d'optimisation sur des ensembles d'états complexes, et sont

quasiment impossibles à utiliser en pratique. Parmi les rares à pouvoir être calculées, nous utiliserons la *négativité* [149], donnée par

$$\mathcal{N} = \frac{\|\hat{\rho}^{TA}\|_1 - 1}{2} \quad (7.6)$$

où la matrice densité $\hat{\rho}^{TA}$ s'obtient par transposition partielle de la matrice densité bipartite $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{AB}$

$$\langle \phi_A, \phi_B | \hat{\rho}^{TA} | \psi_A, \psi_B \rangle = \langle \psi_A, \phi_B | \hat{\rho} | \phi_A, \psi_B \rangle \quad (7.7)$$

et la norme $\|\sigma\|_1$ est définie par

$$\|\sigma\|_1 = \text{Tr} \left\{ \sqrt{\sigma^\dagger \sigma} \right\}. \quad (7.8)$$

La fonction racine n'étant pas analytique, nous devons passer par le calcul et la diagonalisation de la matrice densité pour obtenir la négativité. On peut se convaincre facilement qu'elle est donnée par la somme des valeurs propres négatives de $\hat{\rho}^{TA}$:

$$\hat{\rho}^{TA} = \sum_{k=1}^N \lambda_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N} = - \sum_{k|\lambda_k < 0} \lambda_k \quad (7.9)$$

Dans le cas d'un état non intriqué, défini par Eq. 7.3, la transposition partielle laisse la matrice densité $\hat{\rho}$ invariante, les valeurs propres de $\hat{\rho}^{TA}$ restent positives et la négativité est nulle. On peut par ailleurs montrer [149] que si l'on connaît la décomposition de Schmidt d'un état pur, c'est à dire son écriture sous la forme $|\psi\rangle = \sum_n c_n |e_n, e'_n\rangle$ où les états e_n et e'_n forment des bases orthonormées, alors on peut déterminer sa négativité par

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_n c_n \right)^2 - 1 \right]. \quad (7.10)$$

7.2 Soustraction cohérente de photons

Notre dispositif permet de préparer des états intriqués gaussiens. Une première étape vers la distillation d'intrication est de pouvoir les transformer en états non-gaussiens plus intriqués.

Parmi les stratégies possibles, la plus étudiée a été la soustraction d'un photon de chacun des modes intriqués (Fig. 7.2). On a ainsi montré que les états ainsi préparés étaient, dans le cas idéal, toujours plus intriqués que les états de départ en termes d'entropie de Von Neumann, et qu'ils permettaient par exemple d'améliorer la fidélité de téléportation [150, 151, 152]. On peut facilement vérifier que leur négativité est effectivement plus élevée que celle des états gaussiens de départ. L'état non-gaussien $|\psi_2\rangle$ s'obtient en effet en annihilant un photon dans chaque mode d'un état EPR $|\psi_0\rangle$ (Eq. 2.55d) :

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n, n\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{(1 - \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 + \lambda^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \lambda^{n+1} |n, n\rangle \quad (7.11)$$

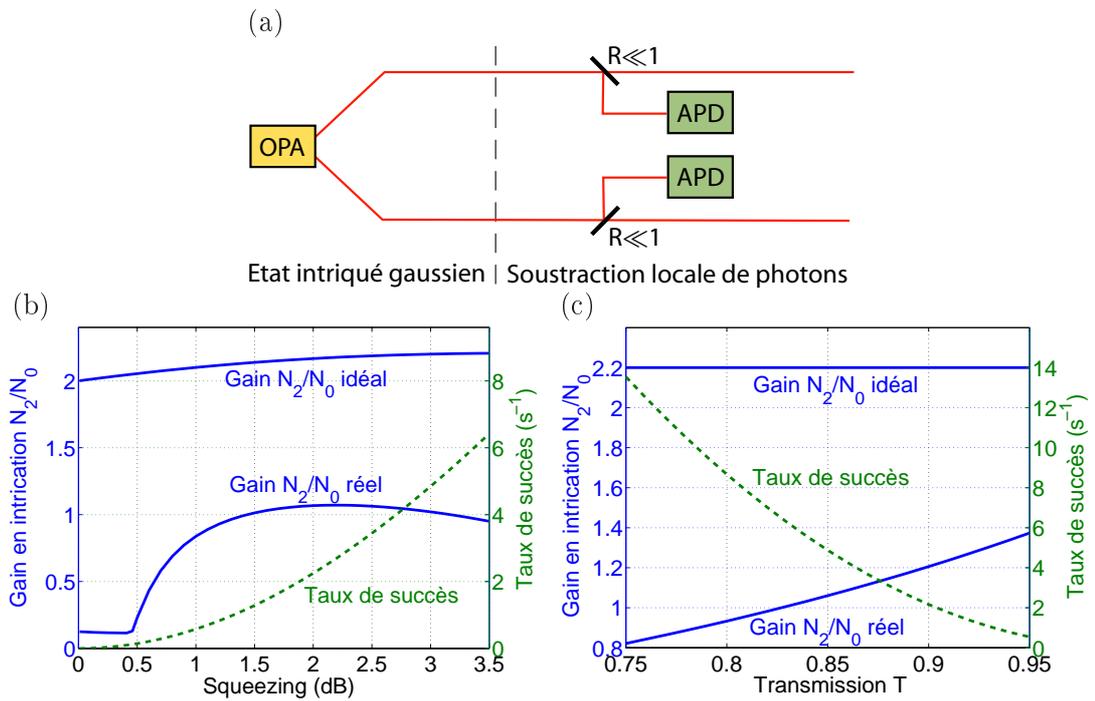


Figure 7.2: (a) Soustraction d'un photon de chaque mode d'un état intriqué gaussien. (b) Rapport des négativités $\mathcal{N}_2/\mathcal{N}_0$ en fonction du squeezing, pour un paramètre d'excès de bruit OPA $\gamma = 0,2$, une pureté modale $\xi = 0,9$, une efficacité APD globale $\mu = 5\%$ et une transmission des lames de prélèvement $T = 0,85$, comparé au cas idéal. (c) Rapport des négativités $\mathcal{N}_2/\mathcal{N}_0$ en fonction de la transmission T des lames de prélèvement de photons, pour $\gamma = 0,2$, $\xi = 0,9$, $\mu = 5\%$ et 3 dB de squeezing, comparé au cas idéal.

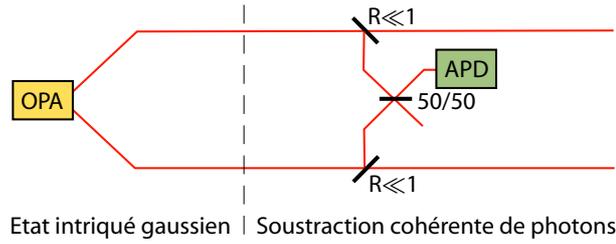


Figure 7.3: Soustraction cohérente d'un photon d'un état intriqué gaussien : schéma de principe.

où $\lambda = \tanh(r)$. En utilisant l'équation 7.10 on obtient alors les négativités \mathcal{N}_0 et \mathcal{N}_2 correspondantes :

$$\mathcal{N}_0 = \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad \mathcal{N}_2 = \frac{\lambda(\lambda^2 + \lambda + 2)}{(1 - \lambda)(1 + \lambda^2)}. \quad (7.12)$$

Leur rapport $\mathcal{N}_2/\mathcal{N}_0 = 1 + \frac{1+\lambda}{1+\lambda^2}$ est donc, dans le cas idéal, toujours supérieur à 2, atteignant un maximum de $\frac{3+\sqrt{2}}{2} \approx 2,20$ en $\lambda = \sqrt{2} - 1$ (3,8 dB de squeezing).

Dans le cas réel, les pertes et le bruit dégradent considérablement la situation. Kitagawa *et al.* ont montré qu'en tenant compte d'une transmission de 90% pour les lames qui servent à prélever les photons, au-delà de 7 dB de squeezing cette procédure ne fait plus augmenter mais au contraire diminue l'intrication [153]. En effet, plus les états sont non-classiques plus ils sont fragiles, et lorsque le squeezing est trop fort le gain obtenu par la soustraction de photons ne compense plus les pertes introduites.

On pourrait croire que 7 dB est dans notre cas une limite très large, et qu'avec 3 dB de squeezing cette procédure marche confortablement. Ce serait oublier toutes les autres pertes qui interviennent en pratique. Pour étudier la faisabilité de cette expérience, nous avons transposé sur ce cas notre modèle analytique (voir Annexe F). Les résultats, présentés sur la figure 7.2, ne sont guère encourageants. Même avec des valeurs plutôt optimistes de nos défauts expérimentaux, il n'y a aucune gamme de paramètres libres (squeezing et transmission des lame de prélèvement) offrant à la fois un taux de comptage suffisant et un gain net en intrication (calculé comme le rapport des négativités $\mathcal{N}_2/\mathcal{N}_0$). En effet, on tomographie maintenant non plus un état monomode mais deux modes intriqués, ce qui nécessite une quantité de données bien plus grande. On peut estimer que même avec 100 coïncidences par seconde il faudrait plusieurs jours pour acquérir une statistique suffisante. Or on observe sur la figure 7.2 que l'intrication n'augmente que pour un taux de succès limité à quelques coïncidences par seconde, ce qui rend cette expérience difficilement envisageable.

Nous avons donc décidé d'adopter une autre approche, présentée sur la figure 7.3. Au lieu d'envoyer chacun des faisceaux prélevés vers une photodiode à avalanche, on les fait interférer sur une lame 50/50 et on détecte des photons dans un seul des deux modes de sortie. On soustrait ainsi un photon "délocalisé" : lorsqu'on le détecte, on ne sait pas de quel côté il vient, et si la phase de l'interféromètre est bien stabilisée cette incertitude est d'origine quantique. Formellement, si la soustraction depuis un mode consiste à appliquer l'opérateur d'annihilation \hat{a} , la soustraction cohérente d'un photon depuis deux modes

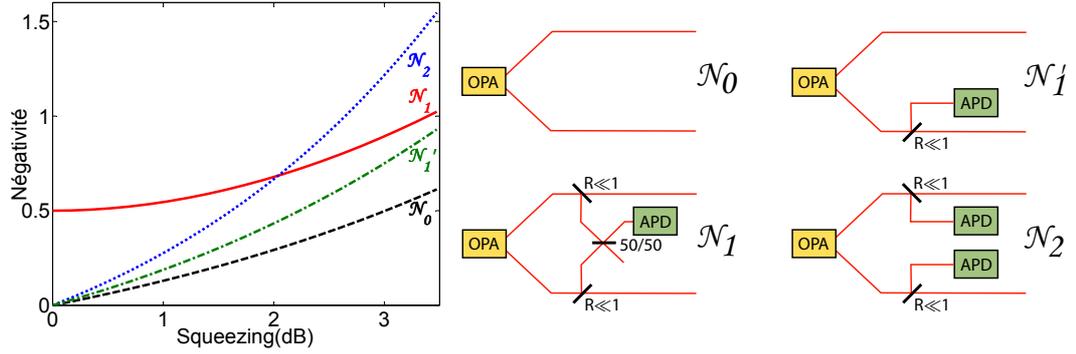


Figure 7.4: Évolution de l'intrication en fonction du squeezing dans le cas idéal, pour l'état préparé par soustraction cohérente d'un photon (\mathcal{N}_1), comparée à l'état de départ (\mathcal{N}_0), à l'état obtenu par soustraction locale d'un photon dans chaque mode (\mathcal{N}_2), et celui obtenu en prélevant localement un photon dans l'un des deux modes (\mathcal{N}'_1).

1 et 2 se traduit par l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 - e^{i\phi}\hat{a}_2)$, où la phase ϕ est déterminée lors de l'interférence sur la lame 50/50. Dès lors que cette phase est contrôlée, elle ne joue pas de rôle sur l'intrication de l'état préparé, et nous la supposons nulle dans la suite.

Tout d'abord, cette méthode nécessite de soustraire un seul photon au lieu de deux, et autorise ainsi des taux de succès bien plus confortables, typiquement 100 fois supérieurs au cas précédent. Ensuite, si on ne soustrait qu'un seul photon, on n'a qu'une chance et non deux de se tromper : la qualité de l'état préparé va varier comme la pureté modale ξ et non comme ξ^2 .

Mais surtout, cette approche offre un gain en intrication très élevé à faible squeezing. En effet, dans ce cas l'état gaussien initial s'écrit $|\psi_0\rangle \approx |0,0\rangle + \lambda|1,1\rangle$: comme $\lambda \ll 1$ est très proche du vide. En revanche, lorsqu'on enlève un photon délocalisé on prépare, à l'ordre le plus bas en λ , un état de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |0,1\rangle)$ contenant un bit d'intrication (*entanglement bit* ou *ebit*). On passe ainsi d'une intrication quasi-nulle à une intrication finie. Pour déterminer si le gain en intrication subsiste à plus fort squeezing, dans le cas idéal du moins, on détermine la décomposition de cet état en base de Fock en appliquant l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 - \hat{a}_2)$ à un état EPR $\sqrt{1-\lambda^2} \sum \lambda^n |n,n\rangle$. Après renormalisation, on trouve

$$|\psi\rangle = (1-\lambda^2) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n \sqrt{n+1} \frac{|n,n+1\rangle - |n+1,n\rangle}{\sqrt{2}} \quad (7.13)$$

En diagonalisant la matrice densité $\hat{\rho}^{T_1} = |\psi\rangle\langle\psi|^{T_1}$, on trouve (voir Fig. 7.4) que dans notre gamme de paramètres de squeezing la négativité \mathcal{N}_1 de l'état préparé reste toujours nettement supérieure à celle de l'état de départ. Leur rapport diverge comme prévu à l'origine, lorsque $\mathcal{N}_0 \rightarrow 0$ et $\mathcal{N}_1 \rightarrow 1/2$. La soustraction locale d'un photon par mode donne en principe de meilleurs résultats à fort squeezing (la négativité \mathcal{N}_2 dépasse \mathcal{N}_1 au-dessus de 2 dB), mais nous avons vu que le conditionnement à deux photons est bien plus exigeant en termes de pertes et de taux de succès, et cette expérience n'est pas réalisable dans l'état actuel de notre dispositif.

On peut également déterminer la négativité de l'état obtenu en prélevant un photon localement, sur un seul des deux modes intriqués. Au lieu de détecter des coïncidences

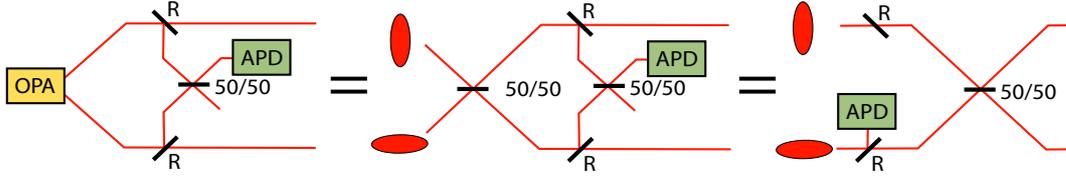


Figure 7.5: Soustraction cohérente de photons d'un état intriqué gaussien : l'état préparé avec notre dispositif peut être obtenu de manière équivalente en mélangeant un “chaton de Schrödinger” avec un mode de vide comprimé orthogonalement.

on conditionnerait la préparation sur la détection d'un photon unique, provenant par exemple du mode 1, et on résoudre ainsi le problème du taux de comptage. D'après ce qui précède, cet état s'écrit directement sous la forme de Schmidt :

$$|\psi'\rangle = (1 - \lambda^2) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sqrt{k+1} |k, k+1\rangle \Rightarrow \mathcal{N}'_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sqrt{n+1} \right)^2 - 1 \right] \quad (7.14)$$

La négativité \mathcal{N}'_1 est également représentée sur la figure 7.4. Au lieu de gagner un facteur ≈ 2 en soustrayant deux photons, on gagne maintenant un facteur $\approx 1,5$ et, dans notre gamme de paramètres, la soustraction locale d'un photon est toujours moins efficace que la soustraction cohérente, pour un taux de succès identique. Il est par ailleurs raisonnable de supposer que les deux approches auront des sensibilités similaires aux défauts expérimentaux. La soustraction cohérente s'impose donc comme la solution la plus intéressante.

7.3 Modélisation

La modélisation détaillée de cette expérience peut se faire sans aucun calcul supplémentaire par rapport aux chapitres précédents. Il suffit pour cela de remarquer que ces états peuvent être produits par un dispositif “virtuel” simplifié, présenté sur la figure 7.5. Si l'on suppose, comme dans le chapitre 4, que l'état intriqué initial n'est pas produit par un OPA dégénéré mais par mélange de deux modes de vide comprimé, on remarque que l'arrangement optique utilisé pour la soustraction de photons forme un interféromètre de Mach-Zender. En supposant que la différence de chemin optique entre les deux bras est nulle, on peut alors supprimer cet interféromètre en introduisant les lames de soustraction avant l'interférence des deux vides comprimés. Ainsi, les photons prélevés ne traversent plus “inutilement” deux lames 50/50, dont l'effet global est nul. Pour tenir compte de la perte de la moitié des photons prélevés, il faut également introduire une lame de réflectivité R sur le mode non conditionné.

Il est facile de retrouver formellement ce résultat dans le cas idéal. Si on appelle \hat{S}_1 et \hat{S}_2 les opérateurs de squeezing dans les modes 1 et 2, et \hat{U}_{BS} l'opérateur associé à la lame 50/50, l'état préparé peut être écrit comme

$$|\psi\rangle = \frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}} \hat{U}_{BS} \hat{S}_1 \hat{S}_2^\dagger |0, 0\rangle = \hat{U}_{BS} \hat{U}_{BS}^\dagger \frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}} \hat{U}_{BS} \hat{S}_1 \hat{S}_2^\dagger |0, 0\rangle = \hat{U}_{BS} \hat{a}_2 \hat{S}_1 \hat{S}_2^\dagger |0, 0\rangle \quad (7.15)$$

La première et la dernière expression traduisent respectivement l'action du dispositif utilisé et celle du dispositif équivalent simplifié, où un photon est soustrait du mode 2 avant le mélange. Or la soustraction d'un photon à partir du vide comprimé monomode a été étudiée au chapitre 5 : l'état obtenu est alors similaire à un "chaton de Schrödinger".

Ainsi, dans le cas idéal comme dans le cas réel, l'état préparé correspond au mélange, sur une lame 50/50, d'un "chaton" avec du vide comprimé dans la direction orthogonale. On peut alors directement reprendre les résultats du chapitre 5 pour obtenir la fonction de Wigner de l'état que l'on s'attend à mesurer :

$$W(x_1, p_1, x_2, p_2) = W_c \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}} \right) W_s \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}} \right) \quad (7.16)$$

$$= \left[1 - \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} + (x_1 - x_2)^2 \frac{a'}{a^2} + (p_1 - p_2)^2 \frac{b'}{b^2} \right] \frac{e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2a} - \frac{(p_1 - p_2)^2}{2b}}}{\pi \sqrt{ab}}$$

$$\times \frac{e^{-\frac{(x_1 + x_2)^2}{2b} - \frac{(p_1 + p_2)^2}{2a}}}{\pi \sqrt{ab}} \quad (7.17)$$

$$a = 1 + e + \eta T(h/s + h - 2) \quad b = 1 + e + \eta T(hs + h - 2) \quad (7.18)$$

$$a' = \frac{\eta \xi T(h/s + h - 2)^2}{h(s + 1/s) + 2h - 4} \quad b' = \frac{\eta \xi T(hs + h - 2)^2}{h(s + 1/s) + 2h - 4} \quad (7.19)$$

où W_c est la fonction de Wigner du chaton de Schrödinger donnée par l'équation 5.15, et W_s est celle du vide comprimé non conditionné, qui peut s'obtenir à partir de la même équation en posant $\xi = 0$ ($\Rightarrow a' = b' = 0$) et en permutant a et b . Le chaton est ici "délocalisé" entre les deux modes, et il faut mesurer leurs corrélations pour révéler sa présence.

Si l'on conditionnait la préparation non sur des détections uniques mais sur des coïncidences, en utilisant le deuxième port de la lame 50/50, il faudrait remplacer l'état comprimé par un deuxième chaton. Le taux de production serait cependant très bas, plus bas encore que pour la soustraction locale d'un photon par mode décrite plus haut. En effet, si un photon était réfléchi de chaque faisceau, l'effet Hong-Ou-Mandel les conduirait à sortir du même côté de la lame 50/50. L'événement le plus probable conduisant à une coïncidence serait donc le prélèvement de deux photons d'un même faisceau.

A partir de l'expression de la fonction de Wigner, on peut déterminer celle de la matrice densité, en suivant la démarche du chapitre 4. Mis à part la complexité des expressions manipulées, les calculs sont identiques. On trouve :

$$\begin{aligned}
 \langle n_1, n_2 | \hat{\rho}^{T_1} | m_1, m_2 \rangle &= \frac{4\sqrt{n_1!m_1!n_2!m_2!}}{[1+a][1+b]} \left\{ \delta_{n_1+n_2-m_1-m_2} \left[\left(1 - \frac{a'}{1+a} - \frac{b'}{1+b}\right) A_{m_1+m_2, m_1, n_1} \right. \right. \\
 &+ \left(\frac{b'}{(1+b)^2} + \frac{a'}{(1+a)^2} \right) (A_{m_1+m_2-1, m_1-1, n_1-1} + A_{m_1+m_2-1, m_1, n_1}) \\
 &+ \left. \left. \left(\frac{b'}{(1+b)^2} - \frac{a'}{(1+a)^2} \right) (A_{m_1+m_2-1, m_1-1, n_1} + A_{m_1+m_2-1, m_1, n_1-1}) \right] \right. \\
 &- \frac{1}{2} \delta_{n_1+n_2-m_1-m_2-2} \left[2 \left(\frac{b'}{(1+b)^2} + \frac{a'}{(1+a)^2} \right) (A_{m_1+m_2, m_1, n_1-1} \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{b'}{(1+b)^2} - \frac{a'}{(1+a)^2} \right) (A_{m_1+m_2, m_1, n_1-2} + A_{m_1+m_2, m_1, n_1}) \right] \\
 &- \frac{1}{2} \delta_{n_1+n_2-m_1-m_2+2} \left[2 \left(\frac{b'}{(1+b)^2} + \frac{a'}{(1+a)^2} \right) (A_{m_1+m_2-2, m_1-1, n_1} \right. \\
 &+ \left. \left. \left(\frac{b'}{(1+b)^2} - \frac{a'}{(1+a)^2} \right) (A_{m_1+m_2-2, m_1-2, n_1} + A_{m_1+m_2-2, m_1, n_1}) \right] \right\} \quad (7.20) \\
 A_{k, m, n} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{k-m} \frac{\delta_{m-n-i+j}}{i!j!(m-i)!(k-m-j)!} \left[\frac{b-a}{(1+a)(1+b)} \right]^{i+j} \left[\frac{ab-1}{(1+a)(1+b)} \right]^{k-i-j}. \quad (7.21)
 \end{aligned}$$

Cette expression se simplifie largement dans la limite d'un gain paramétrique nul. Dans ce cas on vérifie que $a = b = 1$ et $a' = b' = c = \frac{\xi T}{1+\gamma^2}$, ce qui conduit à $A_{k, m, n} = \delta_{k, m, n}$ et permet de calculer explicitement l'intrication \mathcal{N}_1 :

$$\hat{\rho}_1^{T_1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1-c & 0 & 0 & -c/2 \\ 0 & c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c/2 & 0 \\ -c/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{c^2 + (1-c)^2} - (1-c)}{2}. \quad (7.22)$$

L'état préparé a donc toujours une intrication finie, alors que celle de départ est asymptotiquement nulle.

7.4 Dispositif expérimental

La contrainte principale à satisfaire ici est de pouvoir verrouiller la phase entre les deux canaux de soustraction des photons. Ce serait assez difficile à faire activement : on pourrait songer à mesurer le signal dans le port non utilisé lors de la soustraction, mais celui-ci est pratiquement vide. Pour résoudre ce problème nous avons utilisé, comme dans le chapitre précédent, le verrouillage de phases passif, en combinant les faisceaux en polarisation.

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 7.6. Les faisceaux signal et idler sont superposés sur un PBS. Des lames $\lambda/2$ permettent d'envoyer une petite fraction ajustable R de chacun de ces faisceaux dans la voie de conditionnement APD. Dans cette voie, une lame $\lambda/2$ tournée à $22,5^\circ$ suivie d'un deuxième PBS permettent de reproduire une lame 50/50 sur laquelle viennent interférer les photons soustraits. Un des faisceaux de sortie est ensuite envoyé sur l'APD à travers le même système de filtrage que précédemment (fibre monomode et réseau de diffraction, schématisés ici de manière simplifiée).

L'essentiel de l'intensité signal et idler sort par l'autre port du premier cube. Ces faisceaux sont envoyés vers deux détections homodynes verrouillées en phase, montées en

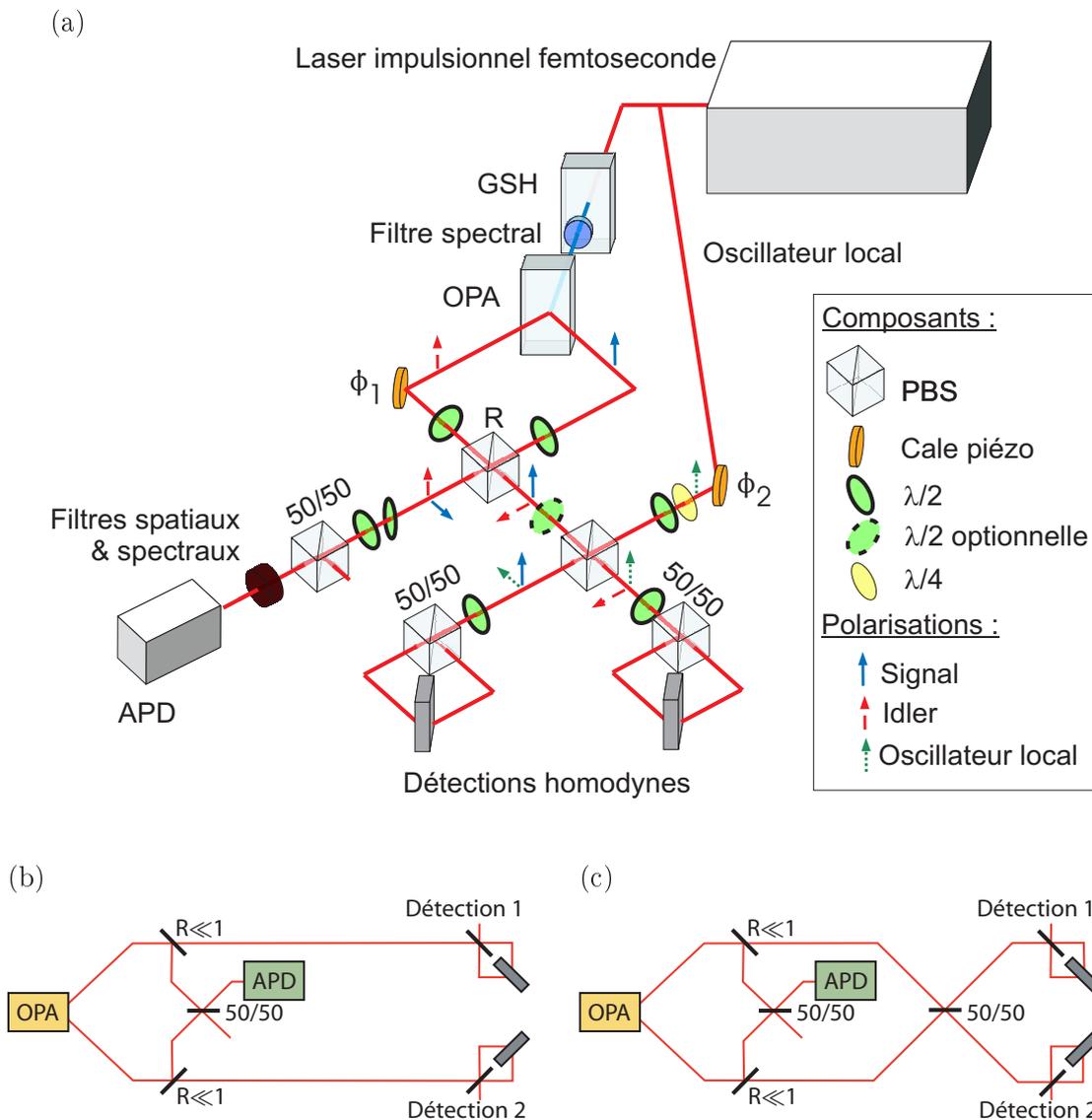


Figure 7.6: Dispositif expérimental permettant de réaliser la soustraction cohérente de photons depuis un état intriqué gaussien. En ajustant les lames d'onde, on peut réaliser un grand nombre de configurations de faisceaux. (b) Configuration expérimentale, utilisée pour l'acquisition de données ($\lambda/2$ optionnelle à 0°). (c) Configuration test, utilisée pour les réglages ($\lambda/2$ optionnelle à $22,5^\circ$).

configuration bimode (Chap. 3). Ils restent toujours séparés (signal polarisé horizontalement, idler verticalement), mais une lame $\lambda/2$ optionnelle permet de les recombiner si besoin. On l'utilise notamment pour régler la différence de phase entre les deux oscillateurs locaux, en transformant ces modes intriqués en deux états comprimés (voir Chap. 4). L'efficacité homodyne moyenne est de 70%, typique d'une configuration bimode, variant de 1 – 2% avec le mode-matching suivant les acquisitions.

En observant le schéma expérimental figure 7.6, on voit qu'il ne reste ainsi plus que deux phases "flottantes", ϕ_1 et ϕ_2 . Or nous avons montré qu'un déphasage relatif entre signal et idler laissait l'état initial invariant (Chap. 4). Il reste donc une seule phase à contrôler, celle du faisceau produisant les deux oscillateurs locaux. L'état non conditionné est maintenant un état EPR : tout comme nous avons utilisé la variance du squeezing monomode pour asservir la phase dans l'expérience du "chaton", nous pourrions utiliser ici la variance du squeezing bimode, c'est à dire des corrélations et des anticorrélations entre les détections homodynes.

Les cubes séparateurs de polarisation sont légèrement biréfringents : sans un réglage supplémentaire, la soustraction correspondrait à un opérateur $\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 - e^{i\phi} \hat{a}_2)$ où ϕ serait fixe mais non nulle. Pour y remédier, on introduit dans le canal de conditionnement une lame $\lambda/2$ supplémentaire, dont l'inclinaison permet d'ajuster de manière stable et précise le retard d'une polarisation par rapport à l'autre. Le réglage de cet angle d'inclinaison se fait de la manière suivante : on injecte une sonde, on bloque l'oscillateur local, et on mélange signal et idler avant les détections homodynes en tournant la $\lambda/2$ optionnelle de 22,5°. Ainsi, signal et idler vont interférer à la fois devant l'APD et devant les détections ("configuration test" de la figure 7.6). En mesurant ces deux signaux à l'aide de photodiodes rapides et en balayant la phase de la pompe, on détermine la phase relative des franges d'interférence et on la règle à zéro.

Ce montage est en réalité "universel" : en ajoutant une APD dans le port non utilisé, on peut reproduire toutes les expériences décrites dans ce manuscrit (états de Fock, chatons, chats comprimés...) en ajustant les lames d'onde pour répartir convenablement les faisceaux. En outre, on peut se placer facilement dans la configuration permettant de produire et analyser des états de Fock à 1 photon. On peut alors optimiser le dispositif en mesurant en temps réel leur caractère non-classique à l'aide du paramètre δ (voir Chap. 4).

7.5 Structure des états préparés et mode d'analyse tomographique

Dans le cas général, la tomographie d'un état bimode est bien plus laborieuse que pour un mode unique. Il faut en effet balayer deux phases indépendamment pour mesurer des distributions P_{θ_1, θ_2} non plus uni- mais bidimensionnelles qui, chacune, nécessitent un plus grand nombre de points pour être reconstruites. Pour obtenir le même bruit statistique dans les histogrammes, il faut acquérir non plus N mais N^2 points expérimentaux.

Dans ce cas particulier, cependant, l'expression de la fonction de Wigner attendue est très particulière. Si les modes 1 et 2 (signal et idler) sont bien intriqués, on s'attend en revanche à ce que leurs corrélations et leurs anticorrélations soient séparables :

$$W(x_1, p_1, x_2, p_2) = W_c(x_-, p_-) W_s(x_+, p_+), \quad x_{\pm} = \frac{x_1 \pm x_2}{\sqrt{2}}, \quad p_{\pm} = \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}}. \quad (7.23)$$

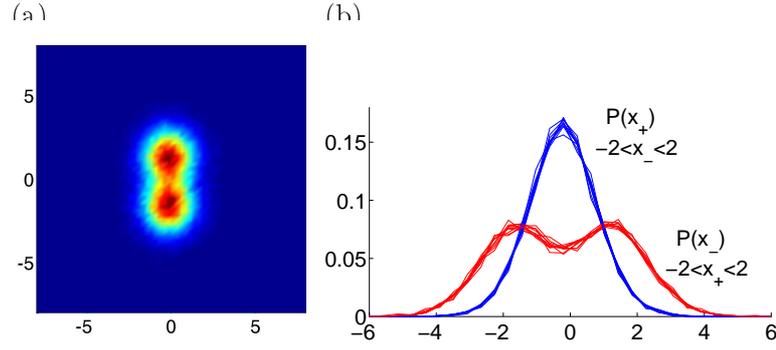


Figure 7.7: Vérification de la séparabilité des corrélations/anticorrélations de l'état préparé par soustraction cohérente de photons. On recombine les deux modes intriqués sur une lame 50/50, une détection homodyne mesure alors les corrélations $x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(\theta_-) - x_2(\theta_-))$, l'autre les anticorrélations $x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(\theta_+) + x_2(\theta_+))$. (a) Distribution jointe $P_{+,-}$ mesurée pour $\theta_+ = 20^\circ$ et $\theta_- = 50^\circ$. (b) Distributions de x_+ extraites de $P_{+,-}$ pour $-2 < x_- < 2$, et celles de x_- pour $-2 < x_+ < 2$: P_+ ne dépend pas de x_- , et vice-versa.

Pour le vérifier, nous avons recombéné les modes 1 et 2 sur une lame 50/50, en tournant leur polarisation à l'aide de la lame $\lambda/2$ optionnelle ("configuration test" de la figure 7.6). Cette opération correspond exactement à la transformation des quadratures ci-dessus. Nous avons ensuite mesuré plusieurs distributions bidimensionnelles conditionnées par la soustraction cohérente d'un photon. Les phases θ_- et θ_+ de ces quadratures étaient choisies de manière aléatoire. Nous avons constaté que toutes les distributions ainsi obtenues sont séparables :

$$P_{+,-}(x_{\theta_-}, x_{\theta_+}) = P_+(x_{\theta_+})P_-(x_{\theta_-}). \quad (7.24)$$

Sur la figure 7.7, qui montre l'une d'entre elles, on observe en effet que la distribution de x_{θ_-} ne dépend pas de la valeur de x_{θ_+} , et vice-versa. Il en est de même pour les fonctions de Wigner, ce qui confirme notre hypothèse. Dans ce cas, on peut fixer la différence des phases $\theta_+ - \theta_-$ à zéro, et les balayer simultanément pour reconstruire P_+ , P_- , puis $P_{+,-}$.

Ce résultat permet de simplifier grandement l'analyse tomographique de l'état. Pour conserver son caractère intriqué, nous gardons les modes 1 et 2 séparés : le signal est mesuré par une détection, l'idler par l'autre. On règle les lames d'onde sur l'oscillateur local pour que les deux mesures se fassent avec la *même phase* θ , que l'on balaye avec une cale piézoélectrique. Nous avons remarqué qu'au lieu d'asservir activement cette phase, en recherchant une valeur de consigne comme pour l'expérience des "chatons", il était plus rapide de la balayer lentement avec la cale piézo, puis trier les mesures conditionnées en fonction des variances locales des corrélations homodynes. Nous avons par ailleurs vérifié que les distributions mesurées étaient invariantes par la transformation $\theta \rightarrow \pi - \theta$, ce qui permet de se restreindre à $\theta \in [0, \pi/2]$.

Une fois les données $x_1(\theta)$ et $\hat{x}_2(\theta)$ mesurées, on calcule *numériquement* leurs corrélations $\hat{x}_-(\theta)$ et leurs anticorrélations $\hat{x}_+(\theta)$, pour reconstruire les distributions $P_-(\theta)$ et $P_+(\theta)$, puis les fonctions de Wigner W_- et W_+ . D'après le test précédent, on sait que la fonction de Wigner globale est de la forme $W(x_1, p_1, x_2, p_2) = W_-(x_-, p_-)W_+(x_+, p_+)$:

on la détermine ainsi en balayant une seule phase au lieu de deux. Dans ce cas particulier, la tomographie bimode peut être décomposée en deux tomographies monomodes parallèles, ce qui offre un gain de temps très considérable. En pratique, on mesure six à douze distributions P_+ et P_- , déterminée chacune à partir de 10 000 à 20 000 points expérimentaux. Le temps d’acquisition varie ainsi de 3 à 30 minutes suivant les réglages.

Cette approche permet par ailleurs d’utiliser notre modèle pour l’analyse de données sous contrainte, en transposant directement la démarche utilisée pour les “chatons”. Si on suppose que W_+ et W_- correspondent bien à W_s et W_c , on peut extraire les paramètres a , a' , b et b' qui décrivent ces fonctions à partir des moments d’ordre 2 et 4 des distributions mesurées. La reconstruction de W_c a été décrite dans le chapitre 5, celle de W_s se fait exactement de la même manière.

7.6 Résultats expérimentaux

La figure 7.8 présente la tomographie d’un état produit avec 1,8 dB de squeezing et une réflectivité $R = 5\%$ pour la soustraction de photons. Les distributions des corrélations $x_-(\theta)$ correspondent bien à celles d’un chaton, alors que les distributions des anticorrélations x_+ restent gaussiennes. Les courbes obtenues par analyse sous contrainte à l’aide de notre modèle sont en très bon accord avec les histogrammes expérimentaux. En reconstruisant, à partir de ces données, les fonctions de Wigner corrigées des pertes homodynes, on vérifie que W_+ correspond bien à la fonction de Wigner d’un chaton W_c , tandis que W_- correspond à un état comprimé W_s . Les résultats du modèle sont encore une fois en excellent accord avec ceux obtenus numériquement par maximum de vraisemblance. L’analyse sous contrainte conduit à des valeurs identiques à quelques pourcents près pour les paramètres a et b décrivant le chaton et l’état comprimé (Eq. 7.17), ce qui confirme sa cohérence. Comme précédemment, on peut en extraire les valeurs des paramètres expérimentaux. On trouve, pour cette expérience, un paramètre de bruit OPA $\gamma = 0.21$, une pureté modale $\xi = 78\%$, une efficacité homodyne $\eta = 69\%$ et un bruit électronique 20 dB en dessous du shot noise. Ces valeurs sont cohérentes avec les expériences précédentes. La légère baisse de ξ peut s’expliquer par un mode-matching imparfait lors de l’interférence des photons soustraits.

La fonction de Wigner corrigée des pertes est clairement négative : $W_c(0) = -0,13 \pm 0,01$ ($0,01 \pm 0,01$ avant correction, la perte de négativité par rapport à l’expérience du chaton venant principalement d’une efficacité homodyne bimode moins élevée). L’intrication de cet état, calculée numériquement à partir de la matrice densité obtenue par maximum de vraisemblance, vaut $\mathcal{N}_1 = 0.34$, tandis que pour l’état initial (à la sortie de l’OPA) $\mathcal{N}_0 = 0.24$. Si on utilise notre modèle pour calculer la négativité à l’aide de l’équation 7.20, on trouve $\mathcal{N}_1 = 0.34$ et $\mathcal{N}_0 = 0.26$, en bon accord avec les résultats numériques.

La fonction de Wigner bimode, objet à cinq dimensions, est difficilement représentable en entier. La figure 7.9 présente quelques “coupes” de deux fonctions de Wigner obtenues avec $R = 10\%$, l’une à faible et l’autre à fort squeezing (1,3 et 3,2 dB). Comme on pouvait s’y attendre, la dépendance en phase s’accroît avec la compression, et la fonction de Wigner devient légèrement moins négative : en grossissant, le “chaton” devient plus sensible aux pertes.

Pour déterminer l’évolution de l’intrication en fonction du squeezing et de la fraction $R = 1 - T$ de lumière soustraite, nous avons effectué 24 tomographies complètes d’états

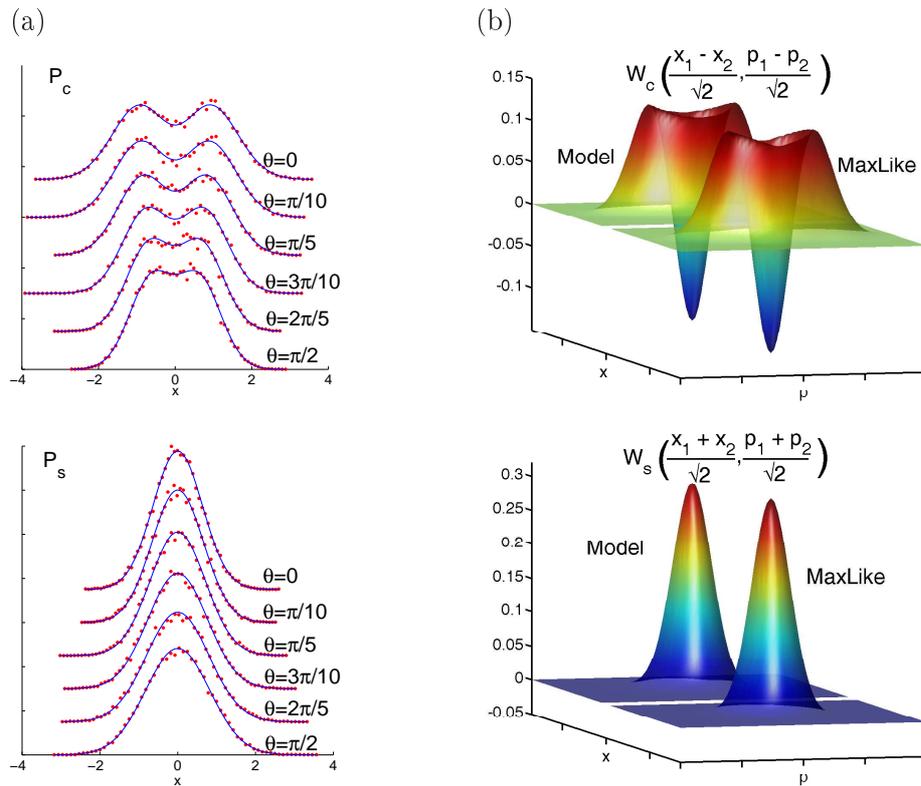
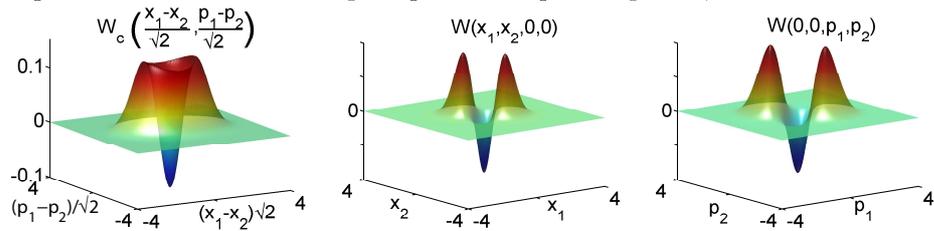


Figure 7.8: Tomographie d'un état produit avec 1, 8 dB de squeezing et une réflectivité $R = 5\%$: (a) Distributions de quadratures mesurées, interpolées à l'aide de notre modèle. (b) Fonctions de Wigner des corrélations ($W_- = W_c$) et des anticorrélations ($W_+ = W_s$), corrigées des pertes homodynes, obtenues par maximum de vraisemblance et comparées au résultat du modèle.

Coupes de la fonction de Wigner pour un squeezing de 1,3 dB :



Coupes de la fonction de Wigner pour un squeezing de 3,2 dB :

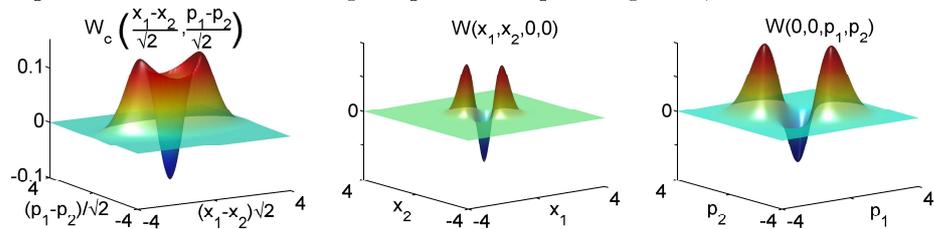


Figure 7.9: Tomographie de deux états produits avec 1, 3 dB et 3.2 dB de squeezing et $R = 10\%$: trois coupes des fonctions de Wigner bimodes, corrigées des pertes homodynes.

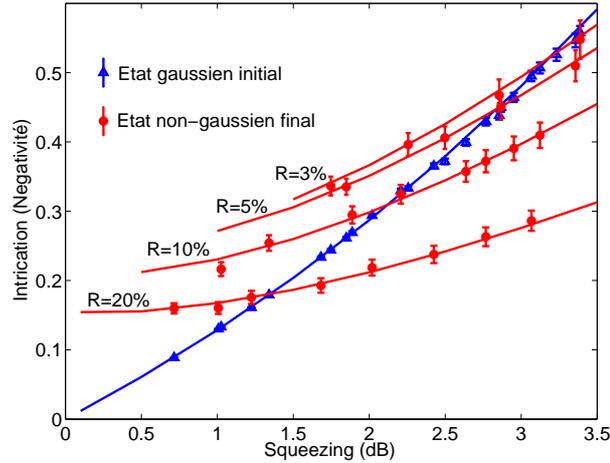


Figure 7.10: Influence du squeezing initial et de la réflectivité R sur l'intrication des états générés par soustraction cohérente d'un photon, comparée aux états gaussiens initiaux. Les points expérimentaux correspondent chacun à une tomographie complète. Les résultats sont corrigés des pertes homodynes.

conditionnés par soustraction cohérente, en les comparant aux états gaussiens produits par l'OPA (sans lames de prélèvement), en corrigeant des pertes homodynes. Les résultats sont présentés sur la figure 7.10. Les interpolations sont obtenues avec notre modèle en utilisant les valeurs moyennes des paramètres expérimentaux extraits des données, $\gamma = 0,22$ et $\xi = 0,78$.

Comme nous l'avons prévu, ce protocole est très efficace à bas squeezing, ou les états initiaux sont peu sensibles aux pertes introduites. Mais pour chaque coefficient de réflexion R il existe un gain au-dessus duquel ces états deviennent trop comprimés, donc trop non-classiques et trop fragiles pour supporter les pertes introduites par la soustraction de photons.

On observe cependant que, pour $R = 3\%$, ce protocole est efficace jusqu'à 3 dB de squeezing. Ce régime correspond à un gain relativement fort, dans le sens où de faibles améliorations expérimentales permettraient de repousser rapidement cette limite vers des taux de compression plus élevés. Par exemple, on peut estimer qu'améliorer la pureté modale ξ d'à peine 4% repousserait cette limite de 3 vers 4 dB. On vérifie également que l'efficacité de ce protocole, en termes de gain en intrication, est d'autant meilleure que les pertes R introduites par les lames de prélèvement sont faibles.

7.7 Discussion

Il faut d'abord noter que, strictement parlant, ce protocole ne peut pas être qualifié de distillation d'intrication, car celle-ci augmente grâce à une opération non locale. Il permet cependant de créer des états non-gaussiens qui, eux, peuvent être distillés.

En réalité, cette contrainte de localité est en partie liée à l'idée que les opérations locales se font avec moins de pertes que les transmissions à travers un canal quantique. On peut alors remarquer que dans ce cas particulier les états préparés ne sont pas affectés

Augmenter l'intrication par soustraction cohérente de photons.

par la transmission du canal utilisé pour la soustraction : les fortes pertes, qui avoisinent dans notre cas les 95%, ne font que diminuer le taux de succès, mais ne modifient pas notablement les fonctions de Wigner des états préparés (voir discussion Chap. 4). En revanche, ces états sont sensibles aux fluctuations de phase.

Mais s'il est une leçon à tirer des résultats de cette expérience, c'est que l'intrication et la mixité font très mauvais ménage. En soi, ce n'est guère surprenant. Prenons par exemple les quatre états de Bell, qui contiennent chacun un ebit d'intrication ($\mathcal{N} = 1/2$). Il est facile de voir que si on en fait un mélange statistique en proportions égales, on obtiendra deux photons indépendants totalement dépolarisés et sans aucune intrication. Pour un mélange statistique, l'intrication sera toujours inférieure à la moyenne pondérée de l'intrication de ses constituants : $E(\sum p_i \hat{\rho}_i) \leq \sum p_i E(\hat{\rho}_i)$. Ce comportement découle en réalité de notre définition : l'intrication ne peut pas augmenter par des opérations locales et des communications classiques. Or si on dispose des constituants d'un mélange sous forme pure, on peut préparer ce mélange classiquement.

Sur le plan expérimental, ce résultat est lourd de conséquences. D'une part, la pureté des états préparés diminuera avec les pertes optiques sur les lames utilisées pour soustraire des photons. Mais surtout, leur intrication sera très fortement affectée par les erreurs lors de la préparation, c'est à dire par les déclenchements APD ne correspondant pas à la projection voulue. Prenons par exemple un état EPR $|\psi_0\rangle$ préparé avec 3,5 dB de squeezing, dont l'intrication vaut $\mathcal{N}_0 = 0,62$. Idéalement, la soustraction cohérente d'un photon prépare un état $|\psi_1\rangle$ avec une intrication $\mathcal{N}_1 = 1,03$. Mais, si on ajoute séquentiellement les défauts réels de notre montage, on observe l'évolution suivante :

	État pur $s = 3,5$ dB	→ Bruit OPA $\gamma = 0,22$	→ Réflexion $R = 20\%$	→ Projection $\xi = 0,78$
\mathcal{N}_0	0,62	0,59	0,38	
\mathcal{N}_1	1,03	0,90	0,45	0,32

Ce comportement est assez contre-intuitif par rapport à l'idée qu'on peut se faire de la décohérence. On explique souvent la perte du caractère quantique d'un état par une fuite d'information perdue dans l'environnement. C'est ce processus qui est responsable de la transformation d'un "chat de Schrödinger" en un mélange d'états classique. Or on voit ici que l'intrication finale de l'état conditionné ($\mathcal{N}_1 = 0,32$) est inférieure à celle obtenue lorsque l'on réfléchit une partie des faisceaux *sans* faire de mesure APD ($\mathcal{N}_0 = 0,38$). Cette mesure fait donc *baisser* l'intrication. Pourtant, elle permettrait à priori de récupérer une certaine information sur l'état, qui sans cela serait perdue.

Pour comprendre ce résultat, on peut développer un raisonnement simplifié présenté sur la figure 7.11. Supposons que l'on commence par préparer un état intriqué gaussien pur (état A). Si on réfléchit une petite partie R des faisceaux intriqués, de temps en temps un photon en sera prélevé (on suppose R suffisamment petit pour que la soustraction de plusieurs photons soit négligeable). Trois cas se présentent alors :

- Si on utilise un compteur de photons parfait, capable de détecter la présence d'un photon unique avec certitude, on réalise une soustraction cohérente idéale et on produit un état pur B , dont l'intrication est plus élevée que celle de départ.

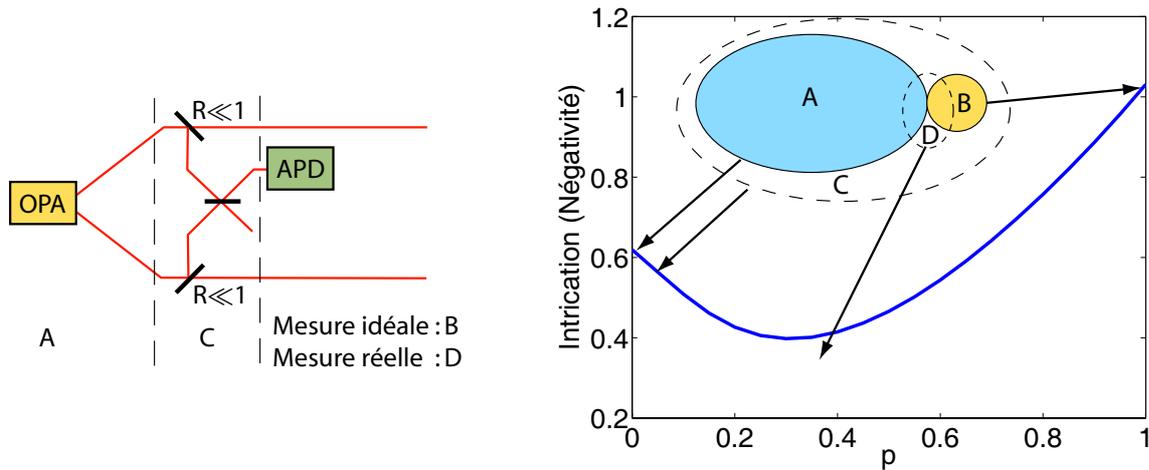


Figure 7.11: Intrication d'un mélange statistique $pA+(1-p)B$, où A est une état intriqué gaussien pur, et B est l'état obtenu par soustraction cohérente d'un photon dans le cas idéal. L'état C est produit lorsque les photons réfléchis sont perdus dans l'environnement, et l'état D s'obtient lorsque la mesure projective utilisée pour le conditionnement est peu fiable (voir texte pour détails).

- Si au contraire on ne fait aucune mesure, on ne sait pas quand un photon a été réfléchi. On prépare alors un état mélange contenant essentiellement des états A , avec une petite partie d'états B : $C \approx RB + (1 - R)A$. L'intrication est alors légèrement inférieure à celle de l'état A .
- Enfin, si on fait une mesure APD peu fiable, c'est à dire où un résultat positif correspond à la présence d'un photon avec une probabilité $p < 1$, on réalise un mélange $D = pB + (1 - p)A$. Lorsque cette mesure est trop incertaine, le gain en intrication sera masqué par la baisse de la pureté de l'état. L'intrication pourra alors être plus faible que pour l'état C : celui-ci contient certes une plus grande fraction d'état A , moins intriqué que l'état B , mais il est plus pur.

En d'autres termes, si nous ne disposons pas d'un outils *suffisamment fiables* pour récupérer l'information qui fuit dans l'environnement, il vaut mieux la laisser fuir. Dans le cas contraire, en essayant de la récupérer on introduira encore plus de mixité statistique dans notre état, et on diminuera par conséquent son caractère quantique.

7.8 Conclusion

Nous avons démontré expérimentalement la possibilité d'augmenter l'intrication d'états gaussiens par des opérations non-gaussiennes [154]. Notre approche est basée sur la soustraction cohérente d'un photon délocalisé dans les deux faisceaux intriqués. Elle permet de préparer, à partir d'un état intriqué gaussien, un état non-gaussien où les corrélations entre les modes font apparaître un "chaton de Schrödinger" délocalisé. L'intrication de cet état, mesurée par la négativité, est plus élevée que celle de départ pour un squeezing allant jusqu'à 3 dB. Cette limite pourrait être rapidement repoussée par de faibles améliorations

des paramètres expérimentaux. Cette démonstration de principe ouvre la voie vers des protocoles de distillation d'intrication à variables continues.

Dans le chapitre suivant, nous verrons que cette méthode de soustraction cohérente permet non seulement d'augmenter l'intrication, mais aussi d'intriquer deux états initialement indépendants. Nous développerons alors un protocole qui, dans certains cas, pourra se substituer avantageusement à la distillation.

Chapitre 8

États “Hamlet” : intrication finie avec des pertes arbitraires.

Sommaire

8.1	Introduction	171
8.2	États “Hamlet”	172
8.3	Protocole et dispositif de préparation	174
8.4	Modélisation	176
8.4.1	Cas du dispositif utilisé	176
8.4.2	Intrication de sites distants	180
8.4.3	Symétries de l’état préparé	181
8.5	Résultats expérimentaux	181
8.6	Tomographie d’un état de Bell non comprimé	185
8.7	Discussion	187
8.8	Conclusion	191

8.1 Introduction

La dernière expérience présentée dans ce manuscrit est en relation étroite avec la précédente, consacrée également aux états intriqués non-gaussiens. Le chapitre précédent étudiait la transformation d’états intriqués, celui-ci s’intéresse à leur création.

L’intrication ne peut être créée par des opérations locales et des communications classiques (LOCC), elle suppose toujours une interaction cohérente entre deux objets. Par contre, une fois qu’elle existe elle peut être transférée d’un objet à l’autre par des opérations LOCC. En information quantique, son statut de ressource est donc lié à la fois à un aspect pratique (elle peut permettre d’accomplir certaines tâches autrement impossibles) et fondamental (elle peut être transférée ou distillée).

La quantité d’intrication créée lorsque deux objets interagissent est en quelques sortes liée à la “force” de leur interaction, qui leur permet de se “voir” l’un l’autre. Par exemple, l’interaction entre deux faisceaux optiques traversant un OPA non-dégénéré dépendra de

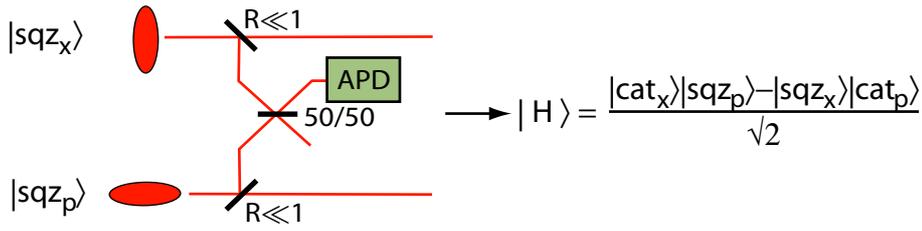


Figure 8.1: Préparations d'états "Hamlet" par soustraction cohérente d'un photon depuis deux impulsions indépendantes de vide comprimé.

la puissance de la pompe, celle entre deux ions de leur distance. Un OPA non-dégénéré faiblement pompé permettra de produire des impulsions dans un état EPR légèrement intriqué en quadratures, tandis qu'une faible interaction coulombienne entre deux ions induira un léger déphasage relatif de leurs fonctions d'onde [155].

Une interaction faible entre deux objets indépendants peut donc produire de manière déterministe des états peu intriqués. Dans ce chapitre, nous allons voir qu'elle peut à l'inverse conduire de manière probabiliste à des états fortement intriqués. La quantité globale d'intrication produite par unité de temps reste faible, mais elle est concentrée sur un petit nombre d'objets bien identifiés au lieu d'être répartie sur un grand ensemble. On peut alors réaliser certaines opérations, comme la téléportation quantique, avec un moindre débit mais une meilleure fidélité.

En communications quantiques, la faiblesse de l'intrication est souvent due aux pertes du canal quantique utilisé pour la transmission. Nous allons montrer que si ce problème peut être résolu par la distillation d'intrication, il peut aussi, dans une certaine mesure, être simplement contourné. Au lieu de distribuer des états intriqués, nous allons produire localement des états non-classiques, et les intriquer à l'aide d'une opération utilisant un canal quantique à fortes pertes. Cette préparation sera probabiliste, et les pertes n'affecteront que le taux de succès, sans diminuer l'intrication des états préparés. Nous verrons qu'elle s'apparente dans une large mesure à un protocole particulier de transfert d'intrication.

8.2 États "Hamlet"

La méthode utilisée ici sera basée sur la soustraction cohérente d'un photon, décrite dans le chapitre précédent. Idéalement, elle revient à annihiler un photon unique délocalisé dans deux modes 1 et 2, et se traduit formellement par l'opérateur $\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}}$. Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'elle pouvait augmenter l'intrication d'un état EPR gaussien. En réalité, elle permet d'intriquer deux impulsions totalement indépendantes, à une seule condition : leurs états doivent être non-classiques. Par exemple, la soustraction d'un photon délocalisé dans deux impulsions contenant chacune n photons produira l'état $\frac{|n-1, n\rangle - |n, n-1\rangle}{\sqrt{2}}$, ayant un ebit d'intrication. En revanche, elle ne permettra pas d'intriquer deux états cohérents ou thermiques.

Dans notre cas, les états non-classiques les plus simples à produire sont les états de vide comprimé monomode $|sqz\rangle$. Pour des raisons purement pratiques que nous préciserons, les deux modes seront dans notre cas comprimés dans des directions orthogonales (l'un

suivant x , l’autre suivant p). Nous savons qu’en prélevant un photon unique depuis un état de vide comprimé on produit un chaton de Schrödinger $|cat\rangle$ (Chap. 5). La soustraction cohérente à partir de deux états comprimés indépendants (voir Fig. 8.1) conduit donc à

$$|sqz_x\rangle |sqz_p\rangle \xrightarrow{\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}}} |H\rangle = \frac{|cat_x\rangle |sqz_p\rangle - |sqz_x\rangle |cat_p\rangle}{\sqrt{2}} \quad (8.1)$$

Dans cet état, un chaton de Schrödinger apparaît dans un mode lorsque l’autre se trouve dans un état comprimé, et inversement. Un mode peut donc être ou ne pas être un chat : cette “indécision” quantique a conduit au surnom d’état Hamlet.

On peut remarquer que cet état n’est rien d’autre qu’un état de Bell comprimé. En effet l’état vide $|0\rangle$ devient $|sqz\rangle$, et l’état à un photon $|1\rangle$ devient $|cat\rangle$ après compression :

$$\begin{cases} \hat{S}|0\rangle &= |sqz\rangle \\ \hat{S}|1\rangle &= |cat\rangle \end{cases} \Rightarrow \hat{S}_1 \hat{S}_2^\dagger |\psi_-\rangle = \hat{S}_1 \hat{S}_2^\dagger \frac{|1\rangle |0\rangle - |0\rangle |1\rangle}{\sqrt{2}} = |H\rangle \quad (8.2)$$

La compression correspondant à une opération locale réversible, il est clair que l’intrication d’un état Hamlet est la même que celle d’un état de Bell : le cas idéal, elle est égale à un ebit, ce qui équivaut à $\mathcal{N} = 1/2$ en termes de négativité.

L’intérêt de cette expérience apparaît lorsque l’on remarque que les fortes pertes du canal de conditionnement n’ont affecté dans nos expériences que le taux de succès, mais pas la qualité des états préparés. Il en sera de même ici, du moment que l’on maintient $R \ll 1$ (voir discussion au chapitre 4). Ainsi, pour produire des états fortement intriqués entre deux sites A et B on pourra produire localement des états comprimés, et utiliser un canal quantique de faible transmission pour les intriquer. Ses pertes n’affecteront que le taux de succès, et l’intrication des états préparés sera toujours proche d’un ebit.

Cette méthode est bien entendu sensible aux fluctuations de phase entre les faisceaux soustraits. Cependant, ce problème n’est pas d’ordre dissipatif mais dispersif. Contrairement aux pertes, qui ne peuvent être compensées par une amplification, la phase peut être contrôlée. L’expérience réalisée ici vise avant tout à présenter une démonstration de principe, et son asservissement se fera de manière passive. En situation réelle il pourra se faire à l’aide d’un faisceau auxiliaire, par exemple avec le reste des faisceaux de pompe utilisés pour produire les états comprimés, dont ils déterminent directement leurs angles de compression. Vu la très grande différence des longueurs d’ondes, ces faisceaux auxiliaires pourront être séparés des photons paramétriques avec des pertes minimales.

Par ailleurs, le taux de coups d’obscurité de l’APD devra rester faible devant le taux de succès de l’intrication. Mais cette contrainte est également valable pour tout protocole de distillation, et ne constitue pas un handicap spécifique à cette approche.

Ce protocole se présente en réalité comme un cas particulier de transfert d’intrication. En effet, en envoyant un état comprimé sur une lame séparatrice on produit deux modes intriqués, 1 et 3. Si on produit de la même manière deux modes intriqués 2 et 4 et si on effectue une mesure jointe sur les modes 3 et 4, on intrique les modes 1 et 2. Pour préparer les états intriqués initiaux, plutôt que d’envoyer des états comprimés sur une lame faiblement réfléchissante, on pourrait utiliser directement des OPAs non-dégénérés, pour créer deux états EPR (voir Fig. 8.2). Pour un squeezing très faible, la même mesure jointe conduirait au même état de Bell $|\psi_-\rangle$. Nous verrons que les deux approches ont des performances similaires en termes d’intrication, avec des limites différentes : dans

Protocoles équivalents pour un gain paramétrique très faible :

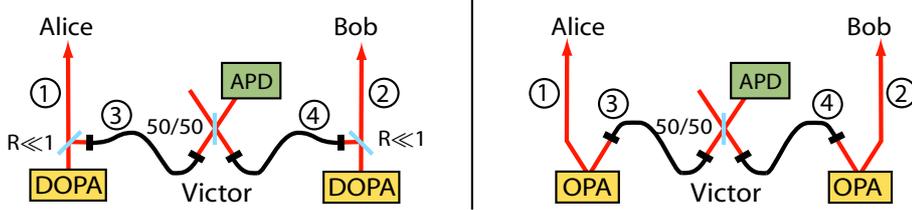


Figure 8.2: Création d'un état de Bell $|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ fortement intriqué, entre deux sites distants reliés par un canal quantique de faible transmission : deux approches équivalentes à faible gain paramétrique. Celle de gauche est utilisée pour la préparation des états Hamlet, celle de droite correspond à une implémentation plus habituelle du transfert d'intrication. L'intrication de l'état préparé est limitée dans le premier cas par une réflectivité $R > 0$ des lames de prélèvement, dans le deuxième par un gain paramétrique $g > 1$, nécessaires pour avoir un taux de succès fini.

notre cas on introduit des pertes par une réflectivité $R > 0$, pour deux états EPR on introduirait du bruit par un gain $g > 1$.

8.3 Protocole et dispositif de préparation

La préparation des états Hamlet peut se faire suivant un schéma permettant de s'affranchir d'un asservissement de phase actif. On se souvient que deux vides comprimés suivant des directions orthogonales peuvent être simplement obtenus en mélangeant les modes signal et idler d'un état EPR (Fig. 4.2). Nous n'avons donc pas besoin de deux OPAs dégénérés mais d'un seul OPA non-dégénéré. De plus, les états comprimés ont alors une phase relative bien définie, leur compression étant nécessairement orthogonale. On remarque alors sur la figure 8.3 que le dispositif de soustraction forme de nouveau un interféromètre de Mach-Zender "inutile", comme décrit dans le chapitre précédent. On peut donc faire passer la soustraction avant l'interférence 50/50, et prélever un photon dans un seul des deux modes. L'équivalence des deux méthodes suppose d'introduire également une lame de prélèvement dans l'autre mode. Elle ne fait qu'ajouter des pertes, et on la supprime en pratique. On montrera plus loin que, dans notre gamme de paramètres, cette lame aurait un effet assez faible, et le dispositif simplifié donne des résultats très proches du cas où les vides comprimés seraient produits par deux OPAs dégénérés indépendants.

L'implémentation pratique de ce schéma, directement dérivée de l'expérience précédente, est présentée sur la figure 8.4. L'amplificateur paramétrique fonctionne en régime non-dégénéré avec un gain $g = \cosh^2(r) = 1,18$, ce qui correspond à un squeezing $s = e^{-2r}$ de 3,6 dB. On peut remarquer que dans le cas idéal le squeezing n'influence nullement l'intrication de l'état final, qui reste égale à un ebit. On choisit en pratique une valeur assez élevée pour pouvoir effectuer la tomographie en un temps raisonnable. En effet, contrairement au cas précédent cet état ne peut plus être transformé en un état séparable par une combinaison des quadratures mesurées, et une tomographie bimode complète sera nécessaire pour le reconstruire.

Les modes signal et idler sont recombinaés spatialement sur un PBS. Une lame $\lambda/2$ permet d'envoyer 5% du faisceau signal vers l'APD, à travers le même système de filtrage

États “Hamlet” : intrication finie avec des pertes arbitraires.

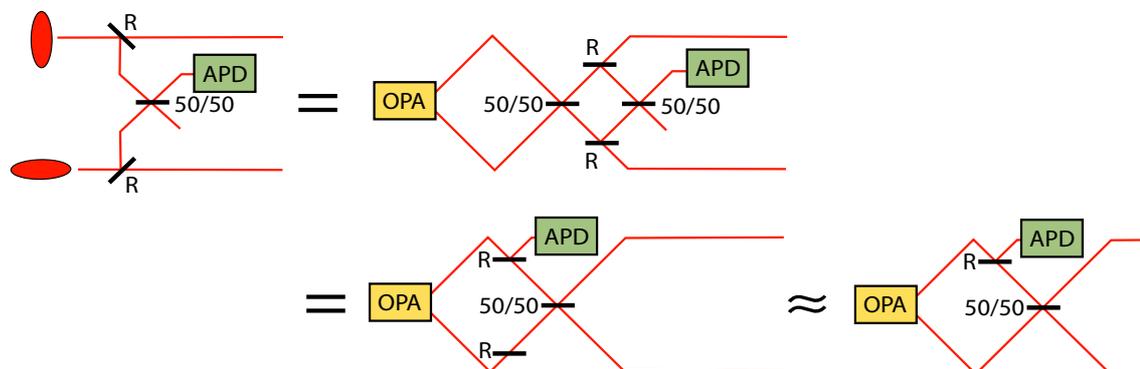


Figure 8.3: Préparation d'un état “Hamlet”. En notant que les deux états comprimés initiaux peuvent être produits par interférence de deux faisceaux intriqués dans un état EPR, on remarque que la soustraction cohérente peut être remplacée par une soustraction locale d'un photon depuis un de ces deux faisceaux.

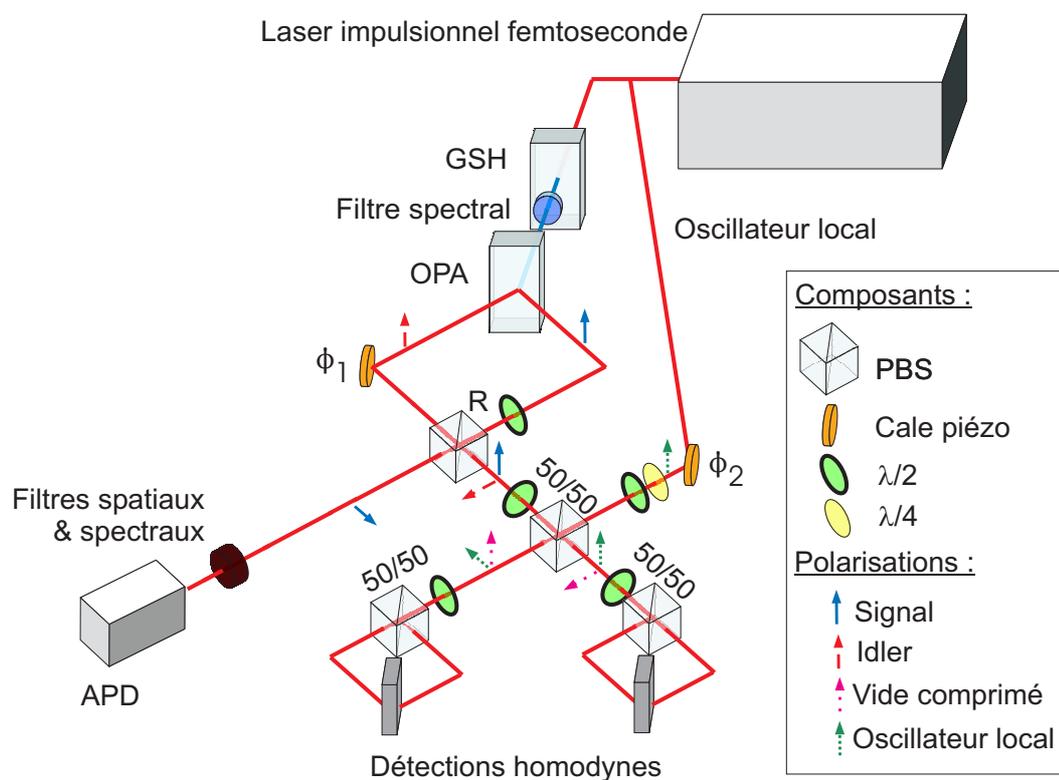


Figure 8.4: Montage expérimental permettant la préparation et l'analyse d'états “Hamlet”.

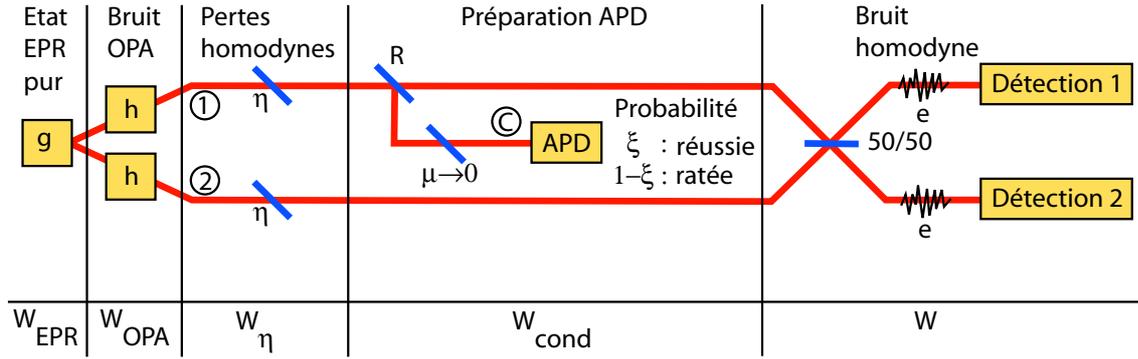


Figure 8.5: Modélisation du dispositif permettant la préparation et l'analyse d'états "Hamlet".

que précédemment. L'efficacité APD globale vaut 7% ce qui, avec un taux de répétition de 780 kHz, conduit à un taux de succès de 500/s pour la préparation, largement supérieur à celui des coups d'obscurité (10/s)

L'intégralité de l'idler et 95% du signal, utilisés pour préparer les deux états comprimés, sont transmis vers les détections homodynes. Leur polarisation est tournée de 45° à l'aide d'une lame $\lambda/2$. On réalise alors une lame 50/50 à l'aide d'un deuxième PBS, où les états comprimés sont produits et superposés avec les oscillateurs locaux. Les détections sont montées en configuration bimode (Chap. 3). Elles ont une efficacité globale $\eta = 70\%$ et un bruit électronique de 2,5 mV soit $e = 1.1\%$ du bruit quantique, en ajustant la puissance moyenne des oscillateurs locaux à 20 mW soit 10^8 photons par impulsion. La phase relative des oscillateurs est verrouillée grâce à des lames d'onde $\lambda/4$ et $\lambda/2$. Nous avons déjà noté que la phase relative ϕ_1 entre le signal et l'idler ne joue pas de rôle. Il reste donc à contrôler leur phase globale ϕ_2 par rapport au faisceau préparant les oscillateurs locaux, ce qui peut être réalisé en mesurant la variance du squeezing sur l'une ou l'autre des détections. Comme dans l'expérience précédente, au lieu de stabiliser ϕ_2 nous la balayons à l'aide d'une cale piézoélectrique et nous trions les données en fonction de la variance du squeezing.

8.4 Modélisation

8.4.1 Cas du dispositif utilisé

La transposition de notre modèle à cette expérience suit le schéma présenté sur la figure 8.5. On se placera d'emblée dans l'hypothèse d'une efficacité APD μ asymptotiquement faible : nous avons montré précédemment que cette approximation "pessimiste" produit des résultats indiscernables du cas exact. Comme dans le chapitre 4, nous pouvons directement partir d'un état EPR bruité en intégrant les pertes homodynes :

$$W_\eta(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2 a_0 b_0} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2a_0} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2b_0} - \frac{(x_1+x_2)^2}{2b_0} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2a_0}}, \quad (8.3)$$

$$a_0 = \eta(hs + h - 1) + 1 - \eta, \quad (8.4)$$

$$b_0 = \eta(h/s + h - 1) + 1 - \eta, \quad (8.5)$$

où $s = e^{-2r}$ est le squeezing bimode, $h = \cosh^2(\gamma r)$ est l'excès de gain qui génère le bruit OPA, et η est l'efficacité homodyne. On réfléchit ensuite une fraction $R = r^2 = 1 - t^2$ du mode 1 vers le mode C utilisé pour le conditionnement, mélangeant cet état avec du vide $W_v(x, p) = e^{-x^2 - p^2} / \pi$:

$$W_{mix}(x_1, p_1, x_2, p_2, x_C, p_C) = W_\eta(tx_1 + rx_C, tp_1 + rp_C, x_2, p_2)W_v(tx_C - rx_1, tp_C - rp_1). \quad (8.6)$$

Dans l'approximation d'une efficacité APD $\mu \rightarrow 0$, une détection APD dans le mode C se traduit par l'annihilation d'un photon dans ce mode, ce qui transforme W_{mix} en

$$W_C = D_C W_{mix} / \text{Tr} \{ D_C W_{mix} \}, \quad (8.7)$$

$$D_C = \frac{1}{2} \left[1 + x_C^2 + p_C^2 + x_C \partial_{x_C} + p_C \partial_{p_C} + \frac{\partial_{x_C}^2 + \partial_{p_C}^2}{4} \right]. \quad (8.8)$$

On trace ensuite sur le mode C , perdu après la mesure APD. Si on tient compte d'une pureté modale ξ , correspondant à fiabilité de la projection APD, on trouve

$$W_{cond}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \xi \frac{\text{Tr}_C \{ D_C W_{mix} \}}{\text{Tr}_{1,2,C} \{ D_C W_{mix} \}} + (1 - \xi) \frac{\text{Tr}_C \{ W_{mix} \}}{\text{Tr}_{1,2,C} \{ W_{mix} \}}. \quad (8.9)$$

On ajoute enfin le bruit homodyne e en calculant la convolution de chacun des modes avec une gaussienne $e^{-(x^2 + p^2)/e} / (\pi e)$. La fonction de Wigner finale s'écrit

$$W(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2(ab - c^2)} \exp \left\{ -\frac{(x_1^2 + p_2^2)b + (p_1^2 + x_2^2)a + 2(x_1x_2 + p_1p_2)c}{ab - c^2} \right\} \\ \times \left[(\beta x_1 + \alpha x_2)^2 + (\alpha p_1 + \beta p_2)^2 + 1 - \beta^2 a - \alpha^2 b + 2\alpha\beta c \right] \quad (8.10a)$$

$$a = \frac{1}{4} \left[(1+t)^2 a_0 + (1-t)^2 b_0 + 2(1-t^2) \right] + e \quad (8.10b)$$

$$b = \frac{1}{4} \left[(1-t)^2 a_0 + (1+t)^2 b_0 + 2(1-t^2) \right] + e \quad (8.10c)$$

$$c = \frac{1}{4} (1-T)(a_0 + b_0 - 2) \quad (8.10d)$$

$$\alpha = \sqrt{\xi} \frac{[2a_0 b_0 - a_0 - b_0 + e(a_0 + b_0 - 2)]t + (b_0 - a_0)(1+e)}{2(ab - c^2)\sqrt{a_0 + b_0 - 2}} \quad (8.10e)$$

$$\beta = \sqrt{\xi} \frac{[2a_0 b_0 - a_0 - b_0 + e(a_0 + b_0 - 2)]t - (b_0 - a_0)(1+e)}{2(ab - c^2)\sqrt{a_0 + b_0 - 2}} \quad (8.10f)$$

Cet état ne peut plus être facilement mis sous forme séparable, et une tomographie bimode complète sera nécessaire. Nous devons maintenant mesurer les distributions jointes $P_{\theta, \phi}$ des quadratures $\hat{x}_1(\theta)$ et $\hat{x}_2(\phi)$. En intégrant la fonction de Wigner suivant les quadratures orthogonales $\hat{p}_1(\theta)$ et $\hat{p}_2(\phi)$, en posant

$$a(\theta) = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta, \quad c(\theta, \phi) = c \cos(\phi - \theta), \quad (8.11a)$$

$$b(\phi) = b \cos^2 \phi + a \sin^2 \phi, \quad d(\theta, \phi) = a(\theta)b(\phi) - c^2(\theta, \phi), \quad (8.11b)$$

et en notant $x_1(\theta) = x_1$ et $x_2(\phi) = x_2$ pour alléger les notations, on trouve

$$\begin{aligned}
 P_{\theta,\phi}(x_1, x_2) &= \tag{8.12} \\
 &= \frac{1}{\pi\sqrt{d(\theta, \phi)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 b(\phi) + x_2^2 a(\theta) + 2x_1 x_2 c(\theta, \phi)}{d(\theta, \phi)} \right\} \left\{ 1 - \beta^2 a - \alpha^2 b + 2\alpha\beta c \right. \\
 &+ \frac{d(0, 0)}{2d(\theta, \phi)} \left[b(\phi)(\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta) + a(\theta)(\beta^2 \cos^2 \phi + \alpha^2 \sin^2 \phi) - 2c(\theta, \phi)\alpha\beta \cos(\phi - \theta) \right] \\
 &+ \frac{1}{d^2(\theta, \phi)} \left[x_1 \left(\beta[b(\phi)a \cos \theta - c(\theta, \phi)c \cos \phi] - \alpha c \sin \phi [a \cos \theta \sin \phi - b \sin \theta \cos \phi] \right) \right. \\
 &\quad \left. + x_2 \left(\alpha[a(\theta)b \cos \phi - c(\theta, \phi)c \cos \theta] + \beta c \sin \theta [a \cos \theta \sin \phi - b \sin \theta \cos \phi] \right) \right]^2 \\
 &+ \frac{1}{d^2(\theta, \phi)} \left[x_1 \left(-\alpha[b(\phi)b \sin \theta - c(\theta, \phi)c \sin \phi] - \beta c \cos \phi [a \cos \theta \sin \phi - b \sin \theta \cos \phi] \right) \right. \\
 &\quad \left. + x_2 \left(-\beta[a(\theta)a \sin \phi - c(\theta, \phi)c \sin \theta] + \alpha c \cos \theta [a \cos \theta \sin \phi - b \sin \theta \cos \phi] \right) \right]^2 \left. \right\}
 \end{aligned}$$

En intégrant ensuite sur l'une des deux variables, on accède aux distributions mesurées par chaque détection individuellement :

$$P_{\theta}(x_1) = \frac{e^{-x_1^2/a(\theta)}}{\sqrt{\pi a(\theta)}} \left\{ 1 + \left[\frac{x_1^2}{a(\theta)} - \frac{1}{2} \right] \frac{\cos^2 \theta (a\beta - c\alpha)^2 + \sin^2 \theta (b\alpha - c\beta)^2}{a(\theta)} \right\} \tag{8.13}$$

$$P_{\phi}(x_2) = \frac{e^{-x_2^2/b(\phi)}}{\sqrt{\pi b(\phi)}} \left\{ 1 + \left[\frac{x_2^2}{b(\phi)} - \frac{1}{2} \right] \frac{\cos^2 \phi (b\alpha - c\beta)^2 + \sin^2 \phi (a\beta - c\alpha)^2}{b(\phi)} \right\} \tag{8.14}$$

On pourra, comme dans les expériences précédentes, extraire les valeurs des paramètres décrivant ces équations à partir des moments d'ordre 2 et 4 de ces distributions.

En posant $\xi = 0$ on obtient directement la fonction de Wigner et les distributions de quadratures de l'état non conditionné :

$$W^{(nc)}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2(ab - c^2)} \exp \left\{ -\frac{(x_1^2 + p_2^2)b + (p_1^2 + x_2^2)a + 2(x_1 x_2 + p_1 p_2)c}{ab - c} \right\} \tag{8.15}$$

$$P_{\theta,\phi}^{(nc)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{d(\theta, \phi)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 b(\phi) + x_2^2 a(\theta) + 2x_1 x_2 c(\theta, \phi)}{d(\theta, \phi)} \right\} \tag{8.16}$$

$$P_{\theta}^{(nc)}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi a(\theta)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{a(\theta)} \right\} \tag{8.17}$$

$$P_{\phi}^{(nc)}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi b(\phi)}} \exp \left\{ -\frac{x_2^2}{b(\phi)} \right\} \tag{8.18}$$

Dans ces expressions, a et b correspondent donc respectivement à la variance minimale et maximale du squeezing mesuré par chaque détection. Bien que la constante c ne soit pas nulle, l'état non conditionné est bien séparable. Pour s'en convaincre, le plus simple est d'utiliser le critère de Duan-Simon [88, 89]. D'après ce critère, tout état bipartite est

séparable si pour tout $q \in \mathbb{R}^*$ les variances de opérateurs $\hat{u} = \hat{x}_1|q| + \hat{x}_2/q$ et $\hat{v} = \hat{p}_1|q| - \hat{p}_2/q$ vérifient

$$S = \Delta(x_1|q| + x_2/q)^2 + \Delta(p_1|q| - p_2/q)^2 \geq q^2 + 1/q^2 \quad (8.19)$$

ce qui est bien le cas puisqu'on obtient, à partir de $P_{\theta,\phi}^{(nc)}$,

$$S = \frac{a+b}{2}(q^2 + 1/q^2) = [1 + e + \eta(1 + T)(hg - 1)](q^2 + 1/q^2) \geq q^2 + 1/q^2. \quad (8.20)$$

Enfin, on peut comme dans les chapitres précédents calculer la matrice densité à partir des fonctions de Wigner, par la formule 2.37b. On obtient, en prenant directement la transposée partielle par rapport au premier mode,

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2 | \hat{\rho}^{T_1} | m_1, m_2 \rangle = & \sqrt{\frac{n_1!m_1!n_2!m_2!}{2^{n_1+m_1+n_2+m_2}}} \left[D_0 I_{0,0,0,0}^{n_1,m_1,n_2,m_2} + \right. \\ & + D_1 (I_{2,0,0,0}^{n_1,m_1,n_2,m_2} + I_{0,2,0,0}^{n_1,m_1,n_2,m_2} - I_{0,0,2,0}^{n_1,m_1,n_2,m_2} - I_{0,0,0,2}^{n_1,m_1,n_2,m_2}) \\ & \left. + D_2 (I_{1,1,0,0}^{n_1,m_1,n_2,m_2} + I_{0,0,1,1}^{n_1,m_1,n_2,m_2}) + D_3 (I_{1,0,1,0}^{n_1,m_1,n_2,m_2} + I_{0,1,0,1}^{n_1,m_1,n_2,m_2}) \right] \end{aligned} \quad (8.21)$$

où les coefficients D_i sont donnés par

$$D_0 = \frac{4}{(a+1)(b+1) - c^2} \left[1 + \frac{(ab - c^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (\beta^2 a + \alpha^2 b - 2\alpha\beta c)(ab + a + b - c^2)}{(a+1)(b+1) - c^2} \right] \quad (8.22a)$$

$$D_1 = \frac{4}{[(a+1)(b+1) - c^2]^3} [(\beta(ab + a - c^2) - \alpha c)^2 - (\alpha(ab + b - c^2) - \beta c)^2] \quad (8.22b)$$

$$D_2 = \frac{8}{[(a+1)(b+1) - c^2]^3} [(\beta(ab + a - c^2) - \alpha c)^2 + (\alpha(ab + b - c^2) - \beta c)^2] \quad (8.22c)$$

$$D_3 = \frac{16}{[(a+1)(b+1) - c^2]^3} [(\beta(ab + a - c^2) - \alpha c)^2 \times (\alpha(ab + b - c^2) - \beta c)^2] \quad (8.22d)$$

et le tenseur I s'obtient à l'aide de deux tenseurs auxiliaires

$$M_{i_1, j_1, i_2, j_2} = \frac{(-1)^{i_1+j_1}}{i_1!j_1!i_2!j_2!} \left[\frac{b-a}{(a+1)(b+1) - c^2} \right]^{i_1+j_1+i_2+j_2}, \quad (8.22e)$$

$$N_{i,j,k} = \sum_{l=\max(0, j-k)}^{\min(i,j)} \frac{[2(ab - c^2 - 1)]^{2l-j+k} (-4c)^{i+j-2l}}{l!(i-l)!(j-l)!(l-j+k)![(a+1)(b+1) - c^2]^{i+k}}, \quad (8.22f)$$

$$\begin{aligned} I_{k_1, l_1, k_2, l_2}^{n_1, m_1, n_2, m_2} = & \sum_{i_1=0}^{E(\frac{n_1-k_1}{2})} \sum_{j_1=0}^{E(\frac{m_1-l_1}{2})} \sum_{i_2=0}^{E(\frac{n_2-k_2}{2})} \sum_{i_2=0}^{E(\frac{m_2-l_2}{2})} \left[M_{i_1, j_1, i_2, j_2} N_{n_1-k_1-2i_1, m_1-l_1-2j_1, m_2-l_2-2j_2} \right. \\ & \left. \times \delta_{(n_1-k_1-2i_1)-(m_1-l_1-2j_1)-(n_2-k_2-2i_2)+(m_2-l_2-2j_2)} \right], \end{aligned} \quad (8.22g)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

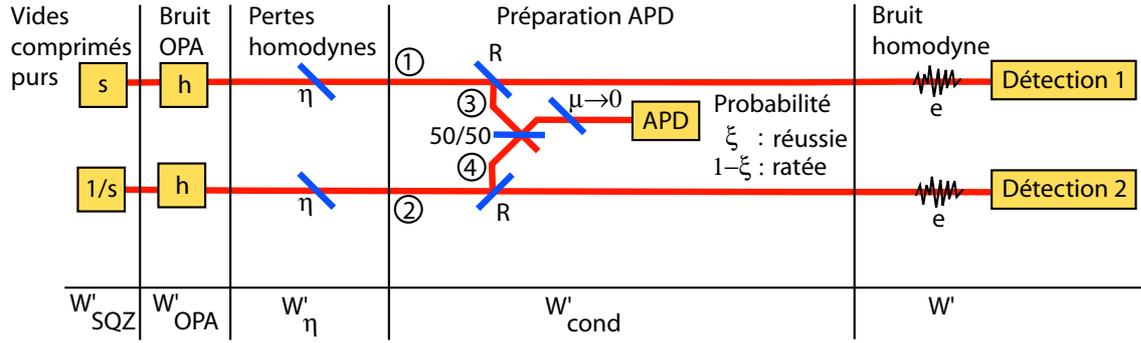


Figure 8.6: Modélisation du dispositif permettant la préparation et l'analyse d'états "Hamlet" à partir de deux vides comprimés préparés à distance.

8.4.2 Intrication de sites distants

Dans le cas où l'on voudrait utiliser ce protocole pour intriquer des sites distants, les deux états comprimés seraient préparés par deux OPAs dégénérés indépendants. La description de l'expérience suivrait alors le schéma présenté sur la figure 8.6. Il n'est équivalent au schéma simplifié décrit plus haut que dans la limite $R \ll 1$. En effet, en comparant sur la figure 8.3 le montage réellement utilisé avec le schéma "exact" de la soustraction cohérente, on constate que pour $R = 1$ on obtient dans notre cas un état de Bell (photon unique divisé sur une lame 50/50), alors que le schéma "exact" conduit évidemment à deux états vides. La différence vient du fait que, dans notre démarche de simplification, nous avons supprimé la lame qui réfléchissait "inutilement" 5% des photons dans le faisceau idler. Son rôle est négligeable tant que R reste faible, mais on peut facilement en tenir compte et vérifier que les états préparés, sont proches de ceux obtenus "en conditions de terrain".

On part donc de deux états de vide comprimé indépendants, en ajoutant directement le bruit OPA et les pertes homodynes :

$$W'_\eta(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{a_0} - \frac{p_1^2}{b_0}} e^{-\frac{x_2^2}{b_0} - \frac{p_2^2}{a_0}}}{\pi \sqrt{a_0 b_0} \pi \sqrt{a_0 b_0}}, \quad \begin{cases} a_0 = \eta(hs + h - 1) + 1 - \eta \\ b_0 = \eta(h/s + h - 1) + 1 - \eta \end{cases} \quad (8.23)$$

On mélange les modes 1 et 2 avec des modes vides 3 et 4 sur les lames de prélèvement :

$$W'_R(x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3, x_4, p_4) = W'_\eta(tx_1 + rx_3, tp_1 + rp_3, tx_2 + rx_4, tp_2 + rp_4) \quad (8.24)$$

$$\times \frac{1}{\pi^2} e^{-(tx_3 - rx_1)^2 - (tp_3 - rp_1)^2 - (tx_4 - rx_2)^2 - (tp_4 - rp_2)^2} \quad (8.25)$$

On mélange les modes 3 et 4 sur la 50/50, transformant la fonction de Wigner en

$$W'_{mix} = W'_R \left(x_1, p_1, x_2, p_2, \frac{x_3 - x_4}{\sqrt{2}}, \frac{p_3 - p_4}{\sqrt{2}}, \frac{x_3 + x_4}{\sqrt{2}}, \frac{p_3 + p_4}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.26)$$

puis on annihile un photon dans le mode 3 et on trace sur les modes 3 et 4 perdus dans

l’environnement, en tenant compte d’une pureté modale ξ :

$$W'_{cond}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \xi \frac{\text{Tr}_{3,4} \{D_3 W'_{mix}\}}{\text{Tr}_{1,2,3,4} \{D_3 W'_{mix}\}} + (1 - \xi) \frac{\text{Tr}_{3,4} \{W'_{mix}\}}{\text{Tr}_{1,2,3,4} \{W'_{mix}\}} \quad (8.27)$$

$$D_3 = \frac{1}{2} \left[1 + x_3^2 + p_3^2 + x_3 \partial_{x_3} + p_3 \partial_{p_3} + \frac{\partial_{x_3}^2 + \partial_{p_3}^2}{4} \right]. \quad (8.28)$$

On ajoute enfin le bruit homodyne e en calculant la convolution de chacun des modes avec une gaussienne $e^{-(x^2+p^2)/e}/(\pi e)$. La fonction de Wigner finale s’écrit sous une forme très proche du cas précédent :

$$W'(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2+p_1^2}{a'} - \frac{p_1^2+x_2^2}{b'}}}{\pi^2(a'b')} \left[(\beta' x_1 + \alpha' x_2)^2 + (\alpha' p_1 + \beta' p_2)^2 + 1 - \beta'^2 a - \alpha'^2 b \right] \quad (8.29a)$$

$$a' = \eta T(hs + h - 2) + 1 + e \quad b' = \eta T(h/s + h - 2) + 1 + e \quad (8.29b)$$

$$\alpha' = \frac{h/s + h - 2}{b'} \sqrt{\frac{\eta \xi T}{h(s + 1/s) + 2h - 4}} \quad \beta' = \frac{hs + h - 2}{a'} \sqrt{\frac{\eta \xi T}{h(s + 1/s) + 2h - 4}} \quad (8.29c)$$

On pourra donc, pour calculer la matrice densité et la négativité de cet état, remplacer les paramètres a, b, α, β de la section précédente par a', b', α', β' , en posant $c = 0$. On peut également remarquer que dans cette expression on voit apparaître le “chaton de Schrödinger” : avec les paramètres a', b', α', β' , la fonction de Wigner d’un chaton monomode (Eq. 5.15) s’écrirait

$$W_{kitten}(x, p) = [1 - \beta'^2 a - \alpha'^2 b + 2\beta'^2 x^2 + 2\alpha'^2 p^2] \frac{e^{-\frac{x^2}{a'} - \frac{p^2}{b'}}}{\pi \sqrt{ab}} \quad (8.30)$$

8.4.3 Symétries de l’état préparé

Une tomographie bimode nécessite une très grande quantité de données, et nous avons intérêt à exploiter au maximum les symétries de l’état que l’on prépare. Le tableau suivant résume les principales symétries des distributions jointes $P_{\theta, \phi}(x_1, x_2)$, déduites de l’équation 8.15 :

On pourra donc mesurer un nombre réduit de distributions de quadratures, et déduire les autres par symétrie.

8.5 Résultats expérimentaux

Nous avons réalisé une tomographie bimode complète de l’état préparé, mesurant 36 distributions jointes $P_{\theta, \phi}$ pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta, \phi \leq \frac{\pi}{3}$. Pour chacune de ces distributions nous avons effectué $\approx 160\,000$ mesures homodynes des deux faisceaux, conditionnées sur la détection d’un photon par l’APD. Les points expérimentaux correspondant à chaque distribution ont été répartis en histogrammes de 40×40 bins, présentés sur la figure 8.7. On peut vérifier qu’elles présentent bien les symétries attendues, et qu’elles sont comprimées le long

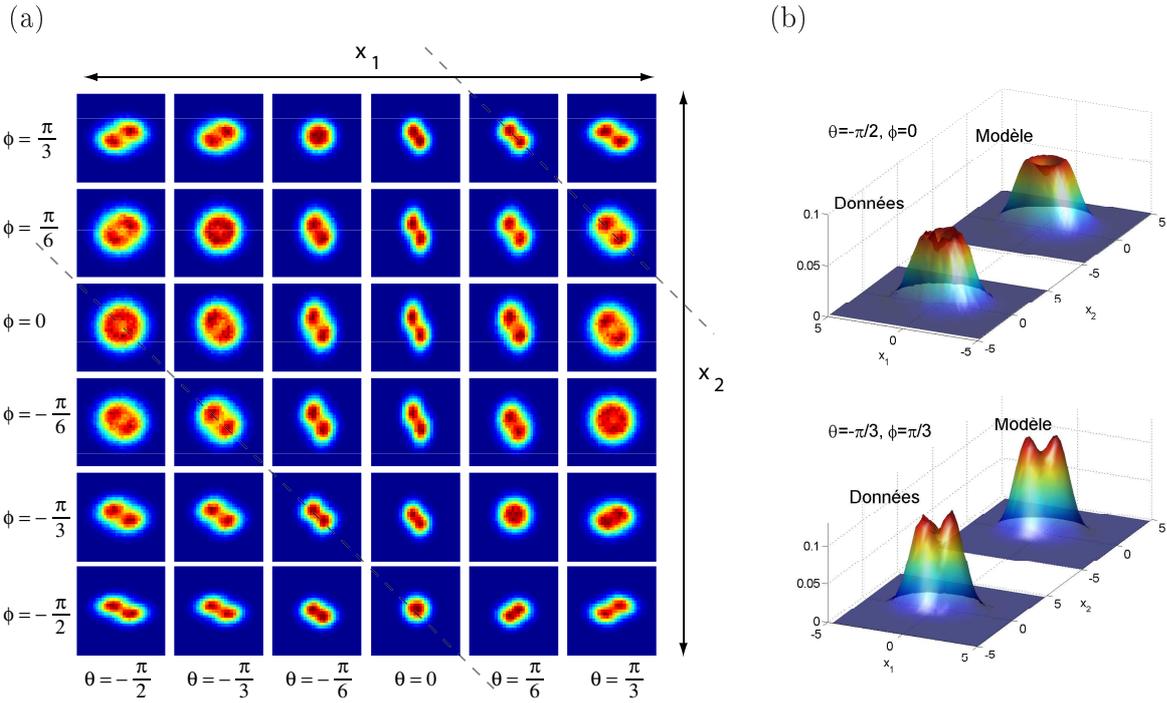


Figure 8.7: (a) Distributions de quadratures jointes $P_{\theta, \phi}(x_1, x_2)$ de l'état Hamlet mesurées expérimentalement, tracées pour $-4 \leq x_1, x_2 \leq 4$. Les lignes en pointillés font apparaître les axes de la symétrie $P_{\theta, \phi}(x_1, x_2) = P_{\pi/2 - \phi, \pi/2 - \theta}(x_2, x_1)$. (b) Comparaison entre les distributions obtenues directement à partir des données, et celles reconstruites à l'aide du modèle analytique, pour deux couples (θ, ϕ) choisis au hasard.

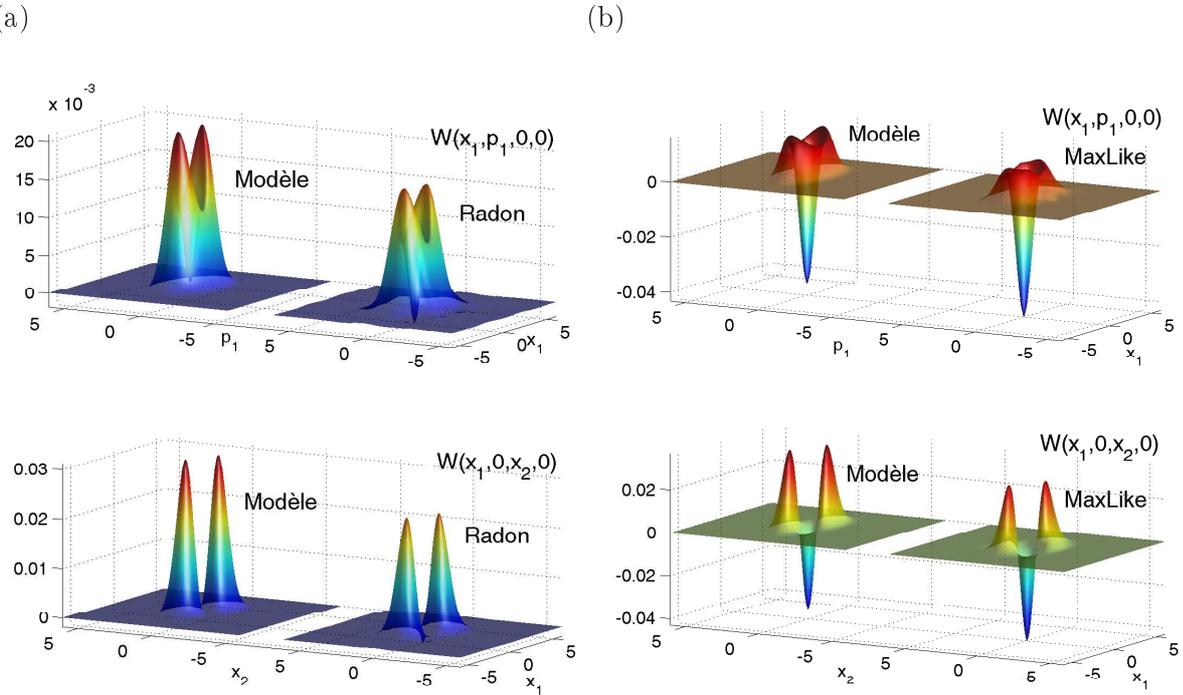


Figure 8.8: Deux coupes de la fonction de Wigner de l'état Hamlet reconstruite expérimentalement (a) sans correction, (b) avec correction des pertes homodynes.

Phase 1	Phase 2	Distribution
θ	ϕ	$P_{\theta,\phi}(x_1, x_2)$
$-\theta$	ϕ	$P_{\theta,\phi}(-x_1, x_2)$
θ	$-\phi$	$P_{\theta,\phi}(x_1, -x_2)$
$-\theta$	$-\phi$	$P_{\theta,\phi}(x_1, x_2)$
$\pi + \theta$	ϕ	$P_{\theta,\phi}(-x_1, x_2)$
θ	$\pi + \phi$	$P_{\theta,\phi}(x_1, -x_2)$
$\pi + \theta$	$\pi + \phi$	$P_{\theta,\phi}(x_1, x_2)$
$\pi - \theta$	$\pi - \phi$	$P_{\theta,\phi}(x_1, x_2)$
$\frac{\pi}{2} - \phi$	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$P_{\theta,\phi}(x_2, x_1)$

de x_1 pour $\theta = 0$, le long de x_2 pour $\phi = -\pi/2$, et anticorrimées dans le cas inverse ($\theta = -\pi/2$ ou $\phi = 0$). En analysant les données à l’aide de notre modèle, on obtient des distributions très similaires, avec un écart normalisé de $\iint |P_{\theta,\phi}^{(exp)} - P_{\theta,\phi}^{(mod)}| = 6,3 \pm 0,5\%$ par rapport aux histogrammes expérimentaux. Ces distributions ne sont effectivement plus factorisables, ni en fonction des quadratures $x_1(\theta)$, $x_2(\phi)$, ni en fonction de leurs corrélations ou anticorrélations. Elles se présentent sous la forme de deux lobes qui, lorsque deux détections mesures des quadratures orthogonales, fusionnent en un cercle (on peut vérifier sur les équations 8.10a et 8.15 que les distributions attendues dans ce cas n’ont effectivement pas de dépendance angulaire). À partir des moments des distributions mesurées, on extrait les paramètres expérimentaux manquants, coefficient d’excès de gain OPA $\gamma = 0,34$ et pureté modale $\xi = 0,88$.

On reconstruit ensuite la fonction de Wigner mesurée brute, puis celle corrigée des pertes homodynes. Les coupes $W(x_1, p_1, 0, 0)$ et $W(x_1, 0, x_2, 0)$ sont présentées sur la figure 8.8 (les coupes $W(0, 0, x_2, p_2)$ et $W(0, p_1, 0, p_2)$ s’obtiennent par simple rotation de $\pi/2$). Tout comme les distributions de quadratures, les fonctions de Wigner obtenues par analyse sous contrainte analytique sont en bon accord avec les résultats des algorithmes numériques (Radon pour les données brutes, maximum de vraisemblance pour les données corrigées des pertes homodynes). Pour l’état mesuré, la valeur de W à l’origine est très proche de 0 : compte tenu des fluctuations expérimentales, on ne peut pas se prononcer sur son éventuelle négativité. En revanche, après correction des pertes homodynes, elle devient fortement négative : $W(0) = -0,04 \pm 0,01$ (dans le cas idéal cette valeur descend à $\pi^{-2} \approx 0,10$). Cet état a une fidélité de $70 \pm 5\%$ avec un état Hamlet idéal, et $23 \pm 3\%$ avec deux états indépendants de vide comprimé pur, avec le même degré de compression de 3,6 dB. On retrouve donc des résultats proches de l’expérience du “chaton de Schrödinger” monomode, que l’on obtiendrait si l’on projetait l’un des deux modes sur un état de vide comprimé.

La matrice densité de l’état corrigé des pertes homodynes permet enfin de calculer l’intrication de l’état préparé. Elle vaut $\mathcal{N} = 0,25 \pm 0,04$, soit environ la moitié de celle que l’on aurait obtenue dans le cas idéal. A l’aide de notre modèle, on peut estimer que si nous avons réalisé la soustraction à partir de deux vides comprimés préparés indépendamment, nous aurions obtenu $\mathcal{N} = 0,22 \pm 0,03$. Cette expérience reproduit donc assez bien les conditions réelles de la soustraction cohérente à partir de deux états indépendants.

La baisse de l’intrication par rapport au cas idéal est presque entièrement due aux

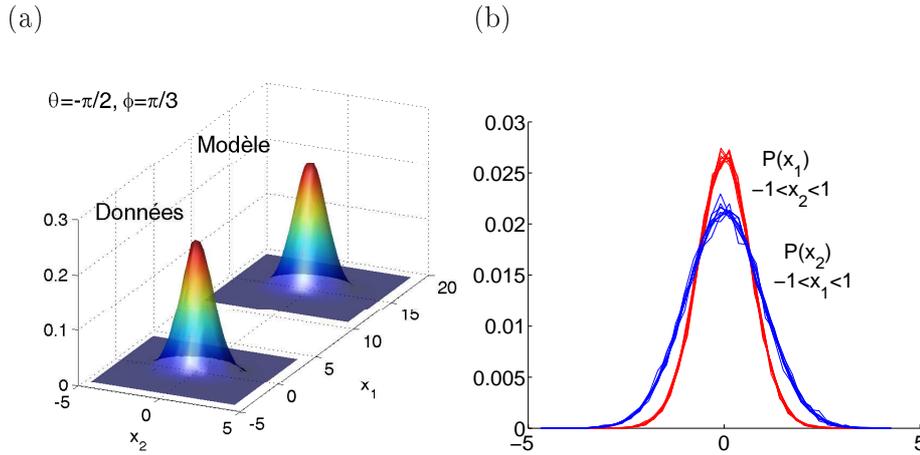


Figure 8.9: (a) Distribution de quadratures jointe de l'état non conditionné mesurée expérimentalement, comparée au résultat du modèle, pour $\theta = -\pi/2$ et $\phi = \pi/3$. (b) Distributions de x_1 pour $-1 \leq x_2 \leq 1$, et celles de x_2 pour $-1 \leq x_1 \leq 1$, avec $\theta = -\pi/2$ et $\phi = \pi/3$: les distributions jointes sont séparables. Le même comportement est observé pour tout θ, ϕ : en absence de conditionnement APD, l'état reste séparable.

impuretés de l'état EPR initial, et à la largeur de la fluorescence paramétrique produite par notre OPA, c'est à dire à des défaut qui ne sont pas intrinsèquement associés à la soustraction de photons. Si l'on utilisait un état EPR pur, produit par exemple par un OPA en cavité en régime continu, en tenant compte d'une réflectivité $R = 5\%$, d'une efficacité APD considérée comme très faible et d'un rapport entre les coups d'obscurité et le taux de succès de $10/500 = 0,02$ ($\rightarrow \xi = 98\%$), l'intrication de l'état serait de $\mathcal{N} = 0,47$, atteignant presque la valeur optimale de $1/2$. La fidélité avec l'état Hamlet pur serait alors de 96% . Dans le cas de la soustraction à partir de deux vides comprimés indépendants purs, la négativité vaudrait $\mathcal{N} = 0,41$.

En parallèle avec l'acquisition des données conditionnées, on tomographie l'état obtenu sans conditionnement APD. Les distributions mesurées (Fig. 8.9) restent gaussiennes et séparables. Les paramètres expérimentaux extraits des données sont les mêmes que pour l'état conditionné, avec dans ce cas $\xi < 0,001 \approx 0$. L'interpolation des histogrammes expérimentaux par le modèle est meilleure que dans le cas précédent, avec un écart normalisé de 4% . Le calcul numérique de la négativité donne une valeur inférieure à 10^{-4} et, compte tenu des fluctuations expérimentales, on peut considérer que l'état non conditionné n'est effectivement pas intriqué.

La soustraction cohérente de photons permet donc de créer une forte intrication (environ la moitié de celle d'un état de Bell pur) à travers un canal quantique ayant une transmission de seulement 7% : si l'on soustrayait des photons à $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ à partir de deux vides comprimés distants, cette transmission correspondrait à 60 km de fibre optique télécom avec des pertes $0,2 \text{ dB/km}$, soit une distance de $2 \times 60 = 120 \text{ km}$ entre les deux sites.

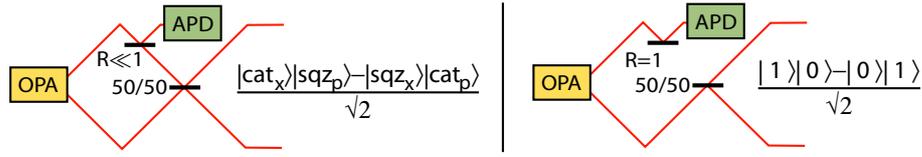


Figure 8.10: Passage d'un état de Bell comprimé (état Hamlet) à un état de Bell usuel : dans notre dispositif, il suffit de tourner une lame $\lambda/2$ pour faire passer la réflectivité de la lame de $R = 5\%$ à $R = 100\%$.

8.6 Tomographie d'un état de Bell non comprimé

Nous avons noté plus haut que que notre montage “simplifié” permet de passer quasi-instantanément de la tomographie d'un état de Bell comprimé (état Hamlet) à celle d'un état de Bell “normal”. Il suffit pour cela de tourner la lame $\lambda/2$ qui détermine la fraction du faisceau signal envoyée vers l'APD : si on la règle à 100%, le signal servira à préparer conditionnellement un photon dans l'idler. Envoyé sur la lame 50/50, ce photon conduira à un état de Bell $|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 1\rangle)$ (voit Fig. 8.10). Dans ce cas l'état ne sera évidemment plus affecté par la lame de prélèvement de photons. En revanche, il sera plus sensible à un gain fini de l'OPA : plus ce gain est élevé, plus la probabilité de préparer plusieurs photons au lieu d'un seul est importante. Bien que la tomographie de cet état ait déjà été réalisée par Babichev *et al.* [156], il est intéressant de le reconstruire pour le comparer au cas précédent, notamment en termes d'intrication.

La reconstruction de cet état est beaucoup plus rapide, puisque l'on envoie sur l'APD 100% du signal au lieu de 5% : ces états sont produits à une cadence d'environ 10 kHz. De plus, les distributions jointes ne dépendent plus que de la différence de phase $\phi - \theta$ entre les deux détections (la dépendance par rapport à la phase globale disparaît, car l'état de Fock $n = 1$ incident sur la lame 50/50 n'en présente pas). Notons par ailleurs que l'on pourrait ici, comme dans le chapitre précédent, se ramener à une tomographie simplifiée, décomposée en deux tomographies monomodes parallèles, en mesurant les quadratures avec la même phase : les corrélations seraient alors dans un état à un photon, les anticorrélations dans un état vide.

Nous avons effectué une tomographie bimode de cet état de Bell, avec le même gain OPA $g = 1,18$ (3,6 dB de squeezing bimode) et la même efficacité homodyne $\eta = 70\%$ que pour l'état Hamlet. Nous avons mesuré six distributions de quadratures pour des différences de phases $\phi - \theta$ comprises entre 0 et $\frac{5\pi}{6}$ radians. Chacune de ces distributions a été reconstruite en mesurant 960 000 points conditionnés sur une détection APD, répartis en histogrammes de 40×40 bins. Les distributions de quadratures mesurées, présentées sur la figure 8.11, sont encore une fois en très bon accord avec celles reconstruites à l'aide de notre modèle (écart normalisé de 4%). L'excès de gain OPA reste le même ($\gamma = 0,34$). La pureté modale $\xi = 0,94$ augmente par rapport à l'état Hamlet qui, contrairement à l'état de Bell, était affecté par une interférence imparfaite entre le signal et l'idler sur la lame 50/50 (l'influence de leur mode-matching est comparable à celle observée dans le chapitre précédent).

La fonction de Wigner de cet état (Fig. 8.12) est similaire à celle de l'état Hamlet, sans présenter de compression. Pour l'état mesuré “brut”, elle est légèrement en-dessous

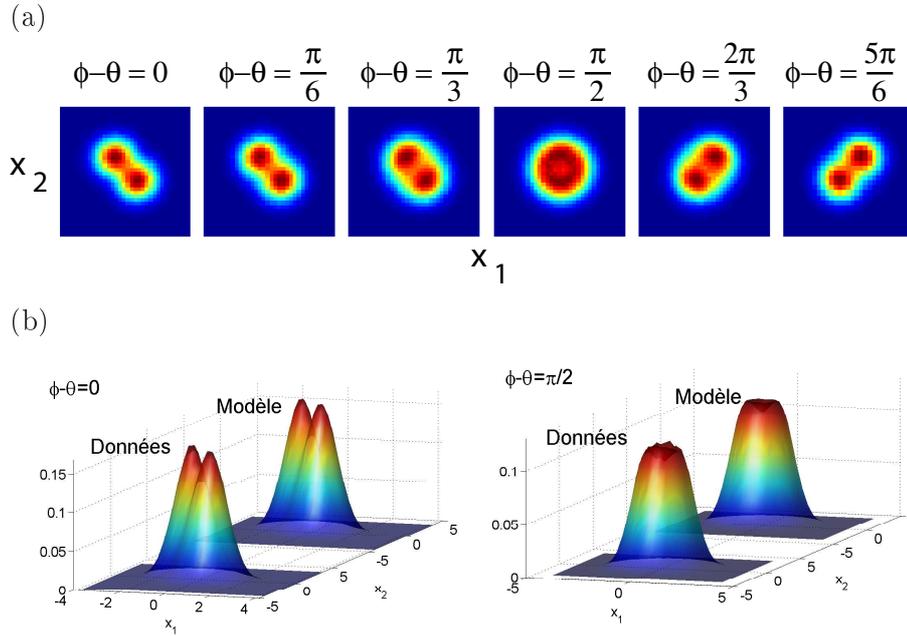


Figure 8.11: (a) Distributions de quadratures jointes $P_{\theta, \phi}(x_1, x_2)$ de l'état de Bell mesurées expérimentalement, tracées pour $-3, 5 \leq x_1, x_2 \leq 3, 5$. (b) Comparaison entre les distributions obtenues directement à partir des données, et celles reconstruites à l'aide du modèle analytique.

(a)

(b)

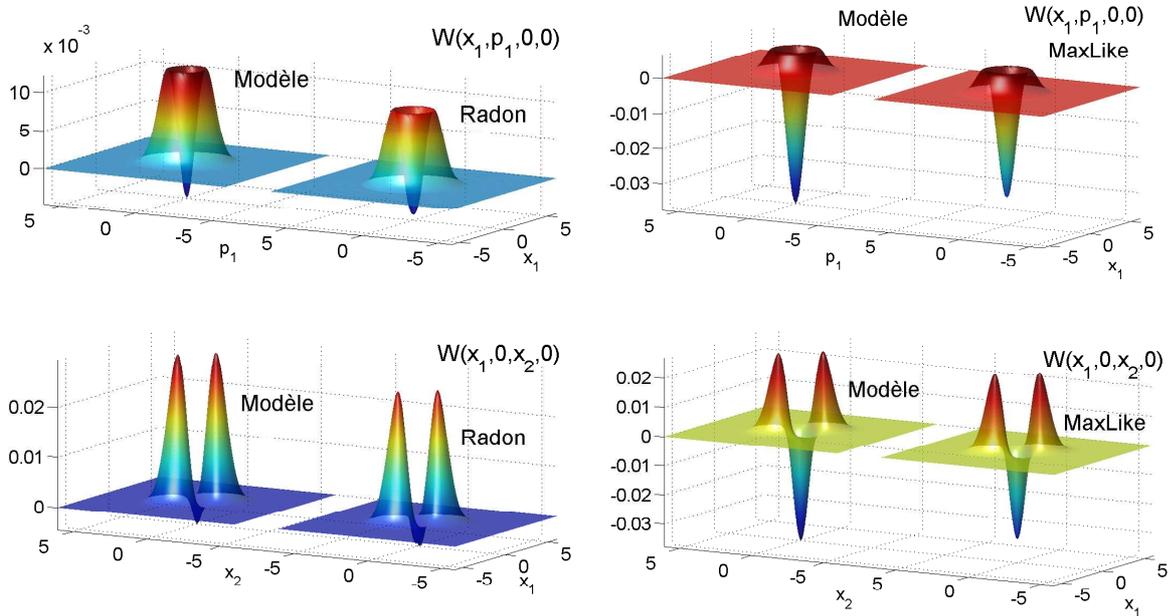


Figure 8.12: Deux coupes de la fonction de Wigner de l'état de Bell reconstruite expérimentalement (a) sans correction, (b) avec correction des pertes homodynes.

de 0 à l’origine ($W(0) = -0,003$), et elle devient fortement négative après correction ($W(0) = -0,032$, contre $-0,10$ pour le cas idéal).

À partir de la matrice densité de l’état généré (corrigé des pertes homodynes), on peut calculer son intrication $\mathcal{N} = 0,19 \pm 0,02$. Ainsi, bien que l’état Hamlet (état de Bell comprimé) soit affecté par la réflectivité $R > 0$ des lames de prélèvement et par des problèmes de mode-matching, son intrication est supérieure. En effet le gain fini de l’OPA ne fait que modifier sa compression sans diminuer directement sa pureté (indirectement, elle est affectée par l’excès de gain h , qui augmente avec g). En revanche, pour l’état de Bell un gain $g = 1,18$ correspond à une probabilité de production de paires multiples d’environ 15% : les termes $n > 1$ dans la décomposition en base de Fock ne sont plus négligeables, et dégradent l’intrication. Si l’on baissait le gain OPA pour retrouver le taux de production de l’état Hamlet (500/s), cette intrication monterait à 0,34.

8.7 Discussion

Nous avons manipulé dans ces expériences trois états intriqués :

- L’état EPR initial produit par l’OPA, avec une intrication $\mathcal{N}_0 = 0,57$, préparé avec une cadence de 780 kHz. Dans notre expérience, il n’est affecté que par l’excès de gain OPA : avec $\gamma = 0$ ($h = 1$) son intrication vaudrait $\mathcal{N}_0 = 0,64$.
- L’état Hamlet, avec une intrication $\mathcal{N}_H = 0,25$, généré avec une cadence moyenne de 500 Hz. S’il était préparé à partir de deux vides comprimés produits séparément, les mêmes paramètres expérimentaux conduiraient à $\mathcal{N}_H = 0,22$, mais on pourrait alors doubler la cadence de production à 1 kHz en détectant les photons dans le deuxième port de la lame 50/50 utilisée pour la soustraction cohérente (on produirait alors aléatoirement des états de Bell comprimés $\hat{S}_1 \hat{S}_2^\dagger |\psi_+\rangle$ et $\hat{S}_1 \hat{S}_2^\dagger |\psi_-\rangle$, avec la même intrication). Nous avons par ailleurs noté que les défauts de cet état viennent essentiellement de la largeur de la fluorescence paramétrique de l’OPA, qui affecte le bruit ($\gamma = 0,34$), mais aussi la pureté modale ξ . On peut par exemple décomposer ξ comme $\xi = \xi_F \xi_{APD}$, où ξ_F est associé aux photons parasites qui ne parviennent pas à être filtrés, et ξ_{APD} est lié aux coups d’obscurité intrinsèques de l’APD. Dans notre cas leur taux vaut $10/s$, d’où $\xi_{APD} = \frac{500-10}{500} = 0,98$ et $\xi_F = 0,90$. Ce dernier paramètre ne dépend que de l’OPA et de nos capacités de filtrage, tandis que ξ_{APD} ne fait intervenir que le rapport des coups d’obscurité APD sur le taux de préparation de l’état conditionné.
- L’état de Bell $|\psi_-\rangle$, avec une intrication $\mathcal{N}_B = 0,19$, préparé avec une cadence moyenne de 10 kHz. Ses défauts viennent d’un gain fini et, comme pour l’état Hamlet, du bruit OPA ($\gamma = 0,34$) et de la pureté modale $\xi = 0,94$, où on peut définir comme précédemment $\xi_{APD} = \frac{10^4-10}{10^4} \approx 1$ et $\xi_F \approx 0,94$.

Si l’intrication doit être utilisée localement, par exemple pour le calcul ou la métrologie quantiques, on a intérêt à utiliser directement l’état EPR, de loin le plus simple à produire, le plus intriqué et ayant le plus fort taux de génération.

En revanche, imaginons qu’Alice et Bob veulent produire de l’intrication entre deux sites A et B distants de 100 km, reliés par fibre optique avec 0,2 dB de pertes par

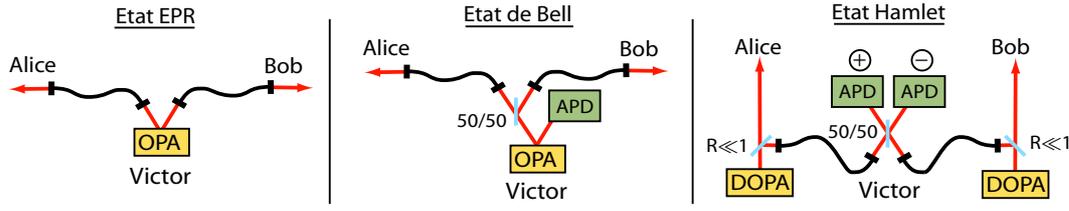


Figure 8.13: Trois manières de préparer un état intriqué entre deux partenaires distants Alice et Bob, reliés par fibres optiques. L’assistant (Victor) peut soit leur envoyer un état EPR ou un état de Bell, soit réaliser la mesure jointe permettant la préparation d’un état Hamlet à partir de deux vides comprimés préparés localement. La détection d’un photon par l’une ou l’autre APD prépare alors l’état Hamlet $\hat{S}_1\hat{S}_2^\dagger|\psi_+\rangle$ ou $\hat{S}_1\hat{S}_2^\dagger|\psi_-\rangle$, avec la même intrication.

kilomètre. Il sont assistés par Victor, situé à mi-distance : la transmission des deux fibres qui relient Victor à Alice et Bob vaut alors 10%. Dans une approche “usuelle”, Victor préparerait un état intriqué (état EPR ou état de Bell) qu’il enverrait à Alice et Bob (voir Fig. 8.13). Comment l’intrication obtenue dans ces deux cas se compare-t-elle à la soustraction cohérente, où Alice et Bob prépareraient deux vides comprimés et en enverraient une faible fraction à Victor qui réaliserait la mesure jointe créant l’intrication?

Pour le voir, le plus simple est d’introduire séquentiellement les pertes expérimentales, en calculant la négativité \mathcal{N} et le taux de production τ de l’état correspondant. On suppose que les OPAs fonctionnent à 780 kHz avec un gain $g = 1,18$ (squeezing 3,6 dB), et que la soustraction de photons se fait avec des lames de réflectivité $R = 5\%$. Dans le cas de la soustraction, on collectera les photons sortant par les deux ports de la lame 50/50, produisant des états de Bell comprimés $\hat{S}_1\hat{S}_2^\dagger|\psi_-\rangle$ et $\hat{S}_1\hat{S}_2^\dagger|\psi_+\rangle$. Pour calculer l’intrication de l’état EPR on utilisera l’équation F.17, celle de l’état de Bell sera donnée par Eq. 8.4.1 avec $R = 1$, et celle de l’état Hamlet sera calculée à partir d’une matrice densité de la même forme, en utilisant les paramètres associés à l’équation 8.29a obtenue pour la soustraction cohérente à partir de deux états comprimés produits à distance. Les paramètres expérimentaux caractérisant les défauts techniques correspondent à ceux de notre expérience.

Défauts	État EPR		État de Bell		État Hamlet	
	\mathcal{N}_0	τ_0	\mathcal{N}_B	τ_B	\mathcal{N}_H	τ_H
Aucun ($g = 1,18, R = 5\%$)	0,64	780 kHz	0,31	120 kHz	0,43	13 kHz
2×50 km de fibre, $\alpha = 0,2$ dB/km	0,03	780 kHz	0,003	120 kHz	0,43	1,4 kHz
Coups d’obscurité = $10/s/APD$	0,03	780 kHz	0,003	120 kHz	0,41	1,4 kHz
Efficacité APD = 45%	0,03	780 kHz	0,003	58 kHz	0,40	650 Hz
Transmission filtres APD = 15%	0,03	780 kHz	0,003	9.4 kHz	0,28	110 Hz
Bruit OPA ($\gamma = 0,34$)	0,03	780 kHz	0,002	11 kHz	0,19	130 Hz
Modes impurs ($\xi_F = 0,94(B)/0,9(H)$)	0,03	780 kHz	0,002	12 kHz	0,15	140 Hz

On voit que les deux premiers protocoles, où l’état intriqué est transmis à travers la fibre, sont très fortement affectés par ses pertes : lorsque ce défaut est le seul en

jeu, la soustraction cohérente (état Hamlet) est largement plus performante en termes d'intrication. Elle est surtout affectée par les défauts associés à la pureté modale des la fluorescence paramétrique. Cependant, même en prenant en compte tous les défauts elle permet d'obtenir une intrication environ quatre fois plus élevée que le protocole à états EPR (les états de Bell sont encore beaucoup plus fragiles et subissent les défauts des deux autres protocoles la fois). Les pertes de la fibre joue un rôle indirect : elles n'affectent pas en elles-mêmes l'intrication, mais diminuent le taux de succès et accroissent l'importance relative des coups d'obscurité APD. Si une transmission de 0,2 dB/km correspond aujourd'hui à une valeur optimale, on sait en revanche qu'il est possible de produire des états comprimés avec une bien meilleure pureté, y compris à des longueurs d'ondes adaptées à la transmission par fibres optiques. Il est donc possible, en travaillant avec un dispositif plus adapté, de largement améliorer les performances de ce protocole.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la procédure de distillation d'intrication gaussienne, consistant à soustraire localement un photon depuis chaque mode d'un faisceau EPR, était dans notre cas trop sensible au bruit de l'OPA et à la pureté modale de l'état initial. Mais on pourrait se dire que si l'on parvenait à supprimer l'ensemble des défauts techniques de l'expérience, il serait plus intéressant de transmettre des états EPR à 780 kHz et de les distiller plutôt qu'utiliser le protocole développé dans ce chapitre. Supposons donc que l'on ait préparé un état EPR parfaitement pur avec 3,6 dB de squeezing à $1,55 \mu\text{m}$, à une cadence de 780 kHz. On le transmet dans $2 \times 50 \text{ km}$ de fibre, et on essaie ensuite de le distiller en prélevant localement un photon dans chaque mode, suivant le protocole décrit dans l'Annexe F. En prenant par exemple des lames de $R = 5\%$ pour la soustraction, sans aucun défaut technique (APDs avec 100% d'efficacité, sans coups d'obscurité), l'intrication \mathcal{N} passerait alors de 0,030 à 0,038, avec un taux de succès de 5/s. Notre procédure quant à elle mènerait, même avec tous les défauts techniques, à $\mathcal{N} = 0.16$ pour 140 coups par seconde. Dans les mêmes conditions idéales, on obtiendrait $\mathcal{N} = 0.43$ à 1,4 kHz, soit une intrication 11 fois meilleure pour un taux de génération 300 fois plus important.

Contrairement à la distillation d'intrication, cette approche ne permet pas d'obtenir itérativement un état intriqué asymptotiquement pur, et elle ne peut s'y substituer pour des communications à très grande distance. En revanche, on voit qu'elle pouvait constituer une alternative intéressante pour préparer des états fortement intriqués à des distances moyennes, de quelques dizaines à 100 km. Dans une transmission de clé à grande distance, elle pourrait permettre de diminuer le nombre de relais nécessaires et d'augmenter le débit.

On peut enfin revenir au transfert d'intrication et comparer les deux approches présentées sur la figure 8.2. La première correspond à notre expérience, la deuxième à un protocole plus usuel, où l'on prépare deux états EPR et on effectue une mesure APD jointe entre deux modes (un de chaque état) pour intriquer les deux autres. Le dispositif expérimental est dans ce cas assez facile à décrire analytiquement, et on peut transposer une grande partie des résultats de ce chapitre. Les calculs correspondants, donnés dans l'Annexe G, montrent que l'état obtenu correspond à un photon unique mélangé à un état

thermique sur une lame 50/50 :

$$W_{\text{swap}}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2 + p_1^2 + x_2^2 + p_2^2}{\sigma^2}}}{\pi^2 \sigma^4} \left\{ \frac{\delta}{\sigma^2} \left[\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 1 - \delta \right\}$$

$$\sigma^2 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 2\eta(hg - 1) + 1 + e. \quad (8.31)$$

$$\delta = \frac{2\xi\eta h^2 g(g-1)}{\sigma^2(hg-1)} \quad (8.32)$$

À faible gain, on retrouve encore un état de Bell $|\psi_-\rangle$, mais cette fois-ci les pertes en transmission ne font que diminuer le taux de succès de la préparation, sans affecter directement la qualité de l'état préparé (si ce n'est par l'intermédiaire des coups d'obscurité). Comme pour l'état Hamlet, la mesure d'un côté ou de l'autre de la lame 50/50 prépare l'état $|\psi_-\rangle$ ou $|\psi_+\rangle$, ce qui permet de doubler facilement la cadence de production. Le tableau suivant présente les performances attendues en termes d'intrication, en comparant la soustraction cohérente de photons (préparation d'un état Hamlet) et le transfert d'intrication entre deux états EPR. Les paramètres expérimentaux sont les mêmes que dans le cas précédent.

Défauts	Transfert d'intrication EPR		État Hamlet	
	\mathcal{N}_T	τ_T	\mathcal{N}_H	τ_H
Aucun ($g = 1, 18, R = 5\%$)	0, 26	220 kHz	0, 43	13 kHz
2×50 km de fibre, $\alpha = 0, 2$ dB/km	0, 26	27 kHz	0, 43	1, 4 kHz
Coups d'obscurité = $10/s/APD$	0, 26	27 kHz	0, 41	1, 4 kHz
Efficacité APD = 45%	0, 26	12 kHz	0, 40	650 Hz
Transmission filtres APD = 15%	0, 25	1, 9 kHz	0, 28	110 Hz
Bruit OPA ($\gamma = 0, 34$)	0, 18	2, 1 kHz	0, 19	130 Hz
Modes impurs ($\xi_F = 0, 9$)	0, 12	2.4 kHz	0, 15	140 Hz

Sans pertes techniques, on retrouve le fait que l'état de Bell préparé par transfert d'intrication est affecté par le gain fini des OPAs, et son intrication est plus faible que celle de l'état Hamlet. Le taux de production est cependant beaucoup plus élevé, ce qui le rend plus résistant aux effets des coups d'obscurité. Avec toutes les pertes expérimentales, l'intrication transférée entre deux états EPR préparés à 100 km l'un de l'autre est proche de celle pour l'état Hamlet ($\mathcal{N}_T = 0, 12, \mathcal{N}_H = 0, 16$), mais le taux de succès est 20 fois supérieur.

L'ensemble des protocoles que nous venons d'étudier se répartissent en deux catégories, suivant les actions réalisées Alice, Bob et Victor :

- Victor crée des états intriqués et les distribue entre Alice et Bob (protocoles EPR ou Bell), qui peuvent éventuellement les distiller.
- Alice et Bob créent localement des états intriqués, chacun envoie un des deux modes à Victor qui réalise une mesure jointe pour transférer l'intrication (protocoles de transfert d'intrication EPR ou Hamlet).

La deuxième approche, où l’effet des pertes est reporté sur les modes auxiliaires servant au transfert d’intrication, apparaît clairement comme la plus intéressante pour créer des états fortement intriqués entre sites distants.

8.8 Conclusion

Nous avons démontré que la soustraction cohérente d’un photon permettait de créer une intrication finie entre deux états comprimés initialement indépendants. L’état préparé fait apparaître un chaton de Schrödinger dans un mode lorsque l’autre se trouve dans un état de vide comprimé. Cette opération peut se faire à travers un canal quantique présentant de fortes pertes, et servir ainsi pour préparer des états fortement intriqués entre des sites distants. En travaillant avec des paramètres expérimentaux plus adaptés, accessibles à la technologie actuelle, il est possible d’accroître considérablement les performances de ce protocole.

Chapitre 9

Bilan et perspectives.

Sommaire

9.1	Bilan	193
9.2	Perspectives	194
9.2.1	Production d'états plus complexes	194
9.2.2	Utilisation des états non-classiques produits	195
9.2.3	Distillation d'intrication	195
9.2.4	Tests des inégalités de Bell	196
9.2.5	Mémoires quantiques	196

9.1 Bilan

Avec le développement de l'information quantique au cours des vingt dernières années, l'optique quantique a connu un essor spectaculaire. Deux approches, corpusculaire et ondulatoire, se sont construites en parallèle, avec leurs outils théoriques et expérimentaux propres. Dans le premier cas, une impulsion lumineuse est décrite comme un ensemble de photons discrets, qui peuvent être comptés par des détecteurs sensibles au photon unique. Dans le deuxième, elle est considérée comme une onde électromagnétique continue, dont la statistique peut être reconstruite par détection homodyne.

Dans ce travail de thèse, nous avons montré que les outils des variables discrètes et continues pouvaient être combinés pour créer et manipuler un grand nombre d'états non-classiques de la lumière. Leurs fonctions de Wigner, qui décrivent les propriétés statistiques du champ électromagnétique, présentent des valeurs négatives, ce qui atteste d'un comportement spécifiquement quantique. De tels états jouent un grand rôle en information quantique, mais également sur un plan plus fondamental.

Nous avons reconstruit les fonctions de Wigner d'impulsion lumineuses préparées dans des états de Fock $n = 1$ et $n = 2$, contenant respectivement 1 et 2 photons. Ces fonctions présentent des structures complexes et des zones négatives [91]. Nous avons ainsi développé et validé un ensemble d'outils permettant de concevoir, réaliser et analyser ce type d'expériences.

Nous avons, pour la première fois, préparé des “chats de Schrödinger” optiques en espace libre. Ces états sont définis comme des superpositions quantiques d’états cohérents “classiques” de phases opposées. Ils jouent un rôle central dans de nombreux protocoles en information quantique, et permettent d’étudier la transition d’un système quantique vers un régime classique. Des “chatons de Schrödinger” de petite taille ont été préparés par soustraction d’un photon unique depuis un état de vide comprimé [108]. Nous avons ensuite développé une méthode permettant de générer efficacement des chats de Schrödinger optiques de taille arbitraire, par conditionnement homodyne sur des états de Fock [128].

Ces techniques se sont également révélées intéressantes pour manipuler l’intrication, autre ressource essentielle en information quantique. Ainsi, la soustraction cohérente d’un photon à partir de deux impulsions intriquées dans un état gaussien a permis d’augmenter leur intrication [154]. Elle a également permis de transformer deux impulsions indépendantes en un état fortement intriqué en utilisant un canal quantique avec de fortes pertes, ouvrant ainsi une voie vers les communications quantiques à grande distance.

Cette nouvelle approche de l’optique quantique est actuellement en pleine expansion. Les perspectives offertes attirent un nombre croissant de groupes de recherche théoriques et expérimentaux, ce qui laisse espérer des progrès rapides en termes de performances et d’applications.

9.2 Perspectives

Outre leur intérêt fondamental, les expériences présentées dans ce manuscrit sont des démonstrations de principe ouvrant la voie vers de nombreuses applications. En conclusion, nous essayerons d’en dégager les principaux axes et d’identifier les principales contraintes à surmonter.

9.2.1 Production d’états plus complexes

Si les états quantiques que nous avons préparés offrent des possibilités d’utilisation très intéressantes, certains protocoles d’information quantique nécessitent des objets plus complexes, par exemple des chats de Schrödinger de plus grande taille. La production de tels états requiert un plus grand nombre de mesures projectives, et donc un gain paramétrique plus élevé afin de garder un taux de succès suffisant. L’amplificateur d’impulsions ultra-brèves, développé au cours de cette thèse sans avoir été utilisé dans les expériences, permet de gagner un ordre de grandeur sur la puissance laser disponible, et augmenter considérablement l’efficacité de conversion dans les cristaux paramétriques.

Par ailleurs, des états plus complexes peuvent être générés en utilisant des détecteurs cryogéniques pouvant discriminer le nombre de photons dans une impulsion. Ces compteurs sont généralement lents, mais dans notre cas les états non-classiques sont produits avec des taux ne dépassant pas les 10 – 20 kHz, et cette contrainte ne constitue pas un handicap majeur. Les fortes efficacités de ces compteurs donnent par ailleurs accès à un ensemble de protocoles où le succès de l’opération est conditionné sur *l’absence* de photons, ce qui était jusqu’à maintenant impossible avec des APDs inefficaces.

Les outils nécessaires pour nous orienter vers ce type d’expériences sont donc en principe déjà disponibles.

9.2.2 Utilisation des états non-classiques produits

La deuxième orientation la plus immédiate est d'utiliser les états générés pour implémenter des protocoles de traitement de l'information quantique.

Dans nos expériences, on a ainsi préparé des “chats de Schrödinger” comprimés de taille suffisante pour que les états cohérents “mort” et “vivant” puissent être considérés comme deux états de base d'un qubit. Ces chats sont comprimés de 3 dB, mais cette compression, qui accroît leur robustesse, n'affecte ni leur parité ni la discernabilité des deux états cohérents. Les mesures de Bell nécessaires pour utiliser ces états dans le cadre du calcul ou de la métrologie quantique sont réalisables avec des compteurs de photons discriminants. Elles se basent sur des mesures de parité, et ne nécessitent donc pas de décompresser les chats préparés. En revanche, si les “chatons” préparés par soustraction d'un photon sont assez purs, la qualité des chats obtenus par conditionnement homodyne devra être améliorée.

La pureté de ces états non-classiques constitue en réalité la principale contrainte à satisfaire avant de pouvoir les utiliser efficacement. Nous avons montré que cette pureté était affectée essentiellement par des imperfections techniques et non par les limites fondamentales des protocoles utilisés. Notre dispositif est très polyvalent, mais ses performances pourraient être largement meilleures si l'on se restreignait à une application spécifique. Par exemple, nous avons noté que les protocoles ne nécessitant qu'une seule mesure projective étaient très efficaces à faible gain. Nous pouvons dans ce cas utiliser des impulsions plus longues à des cadences plus élevées, voire des faisceaux continus produits par des OPAs en cavité, avec des modes optiques bien plus purs. Des faisceaux de meilleure qualité permettraient également d'améliorer notre efficacité homodyne, limitée principalement par des problèmes de mode-matching. On pourrait alors utiliser nos états intriqués non-gaussiens pour améliorer la fidélité dans des protocoles de téléportation [150, 151, 152].

Dans l'immédiat, une autre manière d'améliorer la qualité des états produits serait d'utiliser la puissance offerte par l'amplificateur d'impulsions, non pour augmenter le gain paramétrique mais pour diminuer la distorsion des faisceaux due aux fortes focalisations dans les cristaux non-linéaires.

9.2.3 Distillation d'intrication

La distillation d'intrication, et plus généralement la purification d'états quantiques, est une étape nécessaire pour le traitement de l'information quantique à grande échelle. Comme nous l'avons vu dans le chapitre IV, si notre dispositif permet en principe de distiller l'intrication d'états gaussiens en prélevant un photon unique dans chacun des deux modes intriqués, il se heurte en pratique aux impuretés des états produits par l'OPA. Bien entendu, tout l'intérêt de la distillation d'intrication est justement de lutter contre les impuretés des états transmis à grande distance, et on pourrait croire que ce protocole ne peut fonctionner en pratique. Mais le point essentiel est que ses performances ne sont pas limitées par les pertes, seulement par le bruit. Par exemple, si l'on utilisait un état EPR pur avec 3 dB de squeezing à $\lambda = 1,55$ nm, et si les pertes lors de sa transmission dans une fibre optique étaient le seul défaut présent, ce protocole fonctionnerait pour une longueur de transmission arbitraire. Une fois de plus, la clé du succès réside donc principalement dans la qualité des états produits par l'OPA. Leur amélioration est tout à fait envisageable avec notre dispositif polyvalent actuel, mais, comme nous l'avons souligné

plus haut, il peut être plus intéressant de développer un système plus spécifique à ce type d'applications.

9.2.4 Tests des inégalités de Bell

Les états intriqués non-gaussiens obtenus par la procédure de distillation décrite ci-dessus, combinés aux fortes efficacités potentiellement accessibles à des détections homodynes, permettent en principe de réaliser un test des inégalités de Bell sans échappatoire. En pratique, si le squeezing requis (au moins 6 dB) pourrait être accessible en utilisant notre amplificateur d'impulsions, nous devons nettement améliorer la qualité des modes optiques pour atteindre des efficacités homodynes supérieures à 95% et préparer des états suffisamment purs. L'ensemble des paramètres requis semble aujourd'hui plus près d'être réuni sur une expérience avec des faisceaux continus plutôt que des impulsions courtes [58, 84].

9.2.5 Mémoires quantiques

Le traitement de l'information quantique n'a d'intérêt que lorsqu'il permet de s'attaquer à des problèmes suffisamment complexes. L'algorithme de Shor, permettant de décomposer des nombres en facteurs premiers plus rapidement qu'un ordinateur classique, n'a d'intérêt que pour des nombres très grands. Un système de distribution de clé quantique perdra de son intérêt s'il est plus rapide et moins cher pour l'utilisateur de l'envoyer par valise diplomatique.

Les états quantiques que nous produisons doivent donc pouvoir être utilisés massivement en parallèle. Or, ils sont produits de manière aléatoire : en préparer un grand nombre simultanément est très improbable. À terme, il est donc absolument indispensable de disposer de mémoires capables de les stocker en préservant leurs propriétés quantiques. Or, si la lumière se propage efficacement sur d'assez grandes *distances*, elle s'abîme très rapidement avec le *temps* : 75 μs dans une fibre optique suffisent pour en perdre la moitié. Il faut donc transférer l'état quantique de la lumière vers un système matériel dont les propriétés de cohérence peuvent être préservées pendant un temps suffisant pour accomplir un certain nombre d'opérations logiques.

À l'heure actuelle, on peut dégager deux approches technologiques prometteuses, dont nous ne ferons ici qu'expliquer schématiquement le principe, sans s'attarder sur leurs performances ou leurs limites. La première consiste à utiliser la transparence électromagnétiquement induite [112], en injectant le faisceau dans une vapeur atomique chaude rendue transparente par un faisceau classique auxiliaire. En baissant la puissance de ce faisceau pendant que l'impulsion traverse la vapeur on augmente son opacité. La lumière se trouve alors piégée, et son état transféré aux atomes. En rallumant le faisceau auxiliaire on rend la vapeur transparente de nouveau, et restaure ainsi l'impulsion initiale [34, 36, 35]. La deuxième approche utilise des ions de terres rares piégés dans une matrice semiconductrice, avec une technique apparentée à l'écho de photons (ou l'écho de spin en RMN). Une raie d'absorption étroite est d'abord isolée par blanchiment spectral. En appliquant un champ électrique statique on provoque un élargissement inhomogène contrôlé de la raie. Les ions qui contribuent à l'absorption du faisceau vont donc acquérir des déphasages différents avec le temps. En inversant ce champ on inverse leur évolution

temporelle, et lorsqu'ils reviennent en phase ils restituent l'impulsion lumineuse qui a créé leur excitation [157].

Notre dispositif actuel ne permet d'utiliser aucune de ces deux techniques, car la largeur spectrale de impulsions, de l'ordre de 2 THz, est trop grande. Pour y parvenir, nous devrions travailler avec des impulsions bien plus longues, de l'ordre de la nanoseconde. Il faudrait alors revoir l'ensemble des paramètres expérimentaux, car la gamme de contraintes techniques serait totalement différente.

Ainsi, nos expériences ont avant tout permis de fournir des preuves de faisabilité et d'identifier les contraintes techniques à satisfaire. À long terme, certaines applications nécessitent de les transposer dans un autre régime, que ce soit en termes de durées d'impulsions (pour stocker les états préparés) ou en termes de longueur d'onde, pour permettre des transmissions par fibres optiques. Nous devons alors de nouveau chercher une gamme de paramètres optimaux, qui dépendra de l'évolution technologique des sources laser, des cristaux non-linéaires et des photodétecteurs.

Partie V
Annexes

Appendice A

Formulaire

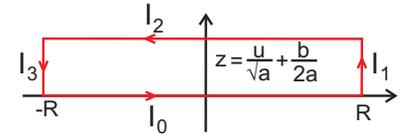
A.1 Intégrales gaussiennes

Dans la modélisation analytique de notre dispositif, les calculs se réduisent presque exclusivement aux intégrales gaussiennes, et c'est la simplicité de ces intégrales qui permet d'élaborer une description mathématique aussi détaillée et néanmoins compacte de nos expériences. La formule la plus utilisée au cours de cette thèse est certainement :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{C}, \quad I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \quad (\text{A.1})$$

Dans le cas $a = 1, b = 0$ elle se démontre simplement par $I^2(1, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} 2\pi r e^{-r^2} dr = \pi$.

Le cas général s'obtient en intégrant cette fonction dans le plan complexe sur le contour fermé ci-contre : I_0 est l'intégrale recherchée, I_1 et I_3 se font sur les segments \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 tels que $\Re(z) = \pm R$, I_2 se fait sur un segment de la droite $z = \frac{u}{\sqrt{a}} + \frac{b}{2a}$ avec $u \in \mathbb{R}$. Cette fonction étant entière, la somme de ces quatre intégrales est nulle.



Sur les segments \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 , $\mathcal{I}(z)$ étant bornée, le terme dominant dans l'exponentielle sera $-\mathcal{R}(a)R^2$ et les intégrales I_1 et I_3 tendront vers 0 pour $R \rightarrow +\infty$. Quant à I_2 , en écrivant $z = \frac{u}{\sqrt{a}} + \frac{b}{2a}$ avec $u \in \mathbb{R}$ on obtient directement le résultat désiré :

$$I_2 \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-u^2 + \frac{b^2}{4a}} \frac{du}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} = -I_0. \quad (\text{A.2})$$

Par simple intégration par parties, on trouve alors une autre formule extrêmement utile pour des états non-gaussiens de la forme polynôme \times gaussienne : pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/\sigma^2} = \sigma^{2n} \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\pi \sigma^2} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/\sigma^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

A.2 Soustraction d'un photon

Comme on le montre dans la section II, dans la limite des faibles efficacités de détection APD on peut considérer que le caractère non-gaussien de nos états est toujours induit par la soustraction d'un photon d'un état multimode intriqué. On cherche ici à déterminer son effet sur la fonction de Wigner.

La soustraction d'un photon correspond à l'application d'un opérateur d'annihilation \hat{a} dans le mode concerné. Seules les quadratures x et p de ce mode seront directement affectées. Pour simplifier les notations, la présence des autres modes sera implicite dans l'écriture de la matrice densité ρ et de la fonction de Wigner W . On notera ainsi $W(x, p, x_1, p_1, \dots, x_n, p_n) = W(x, p)$.

En revenant à l'oscillateur harmonique, on se souvient que \hat{a} peut être défini comme un opérateur différentiel dans la base des positions. Dans la convention $\hbar = 1$, son effet sur une fonction d'onde est :

$$\hat{a}\psi(x) = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}\psi(x) = \frac{x + \partial_x}{\sqrt{2}}\psi(x). \quad (\text{A.4})$$

La matrice densité en base des quadratures devient alors, sans renormaliser,

$$\hat{\rho}(x_1, x_2) \rightarrow \rho' = \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2}(x_1 + \partial_{x_1})(x_2 + \partial_{x_2})\hat{\rho}(x_1, x_2). \quad (\text{A.5})$$

Par ailleurs, l'équation 2.30 donne l'expression de la fonction de Wigner en fonction $\hat{\rho}$:

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{iyp} \left\langle x - \frac{y}{2} \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{y}{2} \right\rangle dy = \frac{1}{2\pi} \int e^{iyp} \hat{\rho} \left(x - \frac{y}{2}, x + \frac{y}{2} \right) dy. \quad (\text{A.6})$$

Le changement de variables $\begin{cases} x_1 = x - y/2 \\ x_2 = x + y/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y = x_2 - x_1 \end{cases}$ conduit à

$$\partial_{x_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial x_1} \partial_y = \frac{1}{2} \partial_x - \partial_y, \quad \partial_{x_2} = \frac{1}{2} \partial_x + \partial_y, \quad (\text{A.7})$$

ce qui donne

$$W'(x, p) = \frac{1}{4\pi} \int dy e^{iyp} (x_1 + \partial_{x_1})(x_2 + \partial_{x_2}) \hat{\rho} \left(x - \frac{y}{2}, x + \frac{y}{2} \right) \quad (\text{A.8a})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int dy e^{iyp} \left[x - \partial_y + \frac{\partial_x - y}{2} \right] \left[x + \partial_y + \frac{\partial_x + y}{2} \right] \hat{\rho} \left(x - \frac{y}{2}, x + \frac{y}{2} \right). \quad (\text{A.8b})$$

Par ailleurs, on voit par intégration par parties que pour une fonction f de y

$$\int e^{iyp} y f(y) = -i \partial_p \int e^{iyp} f(y), \quad \int e^{iyp} \partial_y f(y) = -ip \int e^{iyp} f(y), \quad (\text{A.9})$$

ce qui conduit finalement à

$$W' = \frac{1}{4\pi} \left[x + ip + \frac{\partial_x + i\partial_p}{2} \right] \left[x - ip + \frac{\partial_x - i\partial_p}{2} \right] \int dy e^{iyx} \hat{\rho} \left(x - \frac{y}{2}, x + \frac{y}{2} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\boxed{W' = \frac{1}{2} \left[1 + x^2 + p^2 + x\partial_x + p\partial_p + \frac{\partial_x^2 + \partial_p^2}{4} \right] W.} \quad (\text{A.11})$$

Le mode concerné par la soustraction est ensuite perdu dans l'environnement. La fonction de Wigner normalisée de l'état préparé est finalement

$$\boxed{W'(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n) = \frac{\iint dx dp \left[1 + x^2 + p^2 + x\partial_x + p\partial_p + \frac{\partial_x^2 + \partial_p^2}{4} \right] W}{\int \dots \int dx_1 \dots dp_n dx dp \left[1 + x^2 + p^2 + x\partial_x + p\partial_p + \frac{\partial_x^2 + \partial_p^2}{4} \right] W}.} \quad (\text{A.12})$$

A.3 Lien entre fonction de Wigner et matrice densité en base de Fock

Le passage de la fonction de Wigner W à la matrice densité $\hat{\rho}$ en base de Fock est nécessaire pour déterminer la pureté des états de Fock préparés, et pour quantifier, par le calcul de la négativité, l'intrication des états non-gaussiens générés dans nos expériences.

La fonction d'onde $\phi_n(x)$ d'un état de Fock à n photons s'écrit, dans la convention $\hbar = 1$,

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-t^2 + 2xt} \right]_{t=0}. \quad (\text{A.13})$$

En utilisant l'équation 2.31 qui donne l'expression de $\hat{\rho}$ dans la base des quadratures, on a alors

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{\rho} | n \rangle &= \iint \phi_m^*(x') \phi_n(y') \langle x' | \hat{\rho} | y' \rangle dx' dy' \\ &= \left[\frac{\partial_t^m \partial_z^n}{\sqrt{\pi 2^{m+n} m! n!}} \iiint dx' dy' dp e^{-\frac{x'^2}{2} + 2tx' - t^2 - \frac{y'^2}{2} + 2zy' - z^2} e^{ip(x'-y')} W \left(\frac{x' + y'}{2}, p \right) \right]_{t=z=0} \end{aligned} \quad (\text{A.14a})$$

Le changement de variables $x = \frac{x'+y'}{2}$, $y = y' - x'$ donne

$$\langle m | \hat{\rho} | n \rangle = \left[\frac{\partial_t^m \partial_z^n}{\sqrt{\pi 2^{m+n} m! n!}} \iiint dx dy dp e^{-t^2 - z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} + 2x(t+z) - y(t-z+ip)} W(x, p) \right]_{t=z=0} \quad (\text{A.14b})$$

En utilisant l'équation A.1 pour l'intégrale sur y , on aboutit à

$$\langle m | \hat{\rho} | n \rangle = \frac{2}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial z^n} \iint W(x, p) e^{-x^2 - p^2 + 2x(t+z) - 2ip(t-z) - 2tz} dx dp \right]_{t=z=0} \quad (\text{A.14c})$$

Appendice B

Théorème de Hudson-Piquet

Théorème:

La fonction de Wigner d'un état pur est partout positive si et seulement si elle est gaussienne.

Démonstration:

Le sens direct (une fonction de Wigner gaussienne est partout positive) est évident. Intéressons-nous à la réciproque.

Prenons un état pur ψ dont la fonction de Wigner W est partout positive. Sa fidélité avec un état (non normalisé) $\phi_z(x) = e^{-x^2/2-zx}$ vaut, pour tout z complexe,

$$\mathcal{F} = |\langle \psi | \phi_z \rangle|^2 = 2\pi \iint W(x, p) W_z(x, p) dx dp \quad (\text{B.1})$$

La fonction d'onde $\phi_z(x)$ étant gaussienne, la fonction de Wigner W_z est elle aussi gaussienne, et donc partout strictement positive. Comme W est non négative et non uniformément nulle, cela conduit à $\mathcal{F} > 0$ pour tout z . On en déduit que la fonction analytique entière

$$f(z) = \langle \psi | \phi_z \rangle = \int \psi^*(x) e^{-x^2/2-zx} dx \quad (\text{B.2})$$

n'a pas de zéros. Alors la fonction f'/f est elle aussi entière et a une primitive g . En choisissant correctement la constante d'intégration, on a alors $f(z) = e^{g(z)}$. De plus, par l'inégalité de Schwartz, on trouve

$$|f(z)| = e^{\text{Re}(g(z))} \leq \|\psi\| \|\phi_z\| = \|\psi\| \pi^{1/4} e^{\text{Re}^2(z)/2} \quad (\text{B.3})$$

On peut alors montrer que $|g(z) - g(0)| \leq 2|z|^2$. Pour cela, formons la fonction entière $h = g - g(0)$. D'après l'inégalité ci-dessus, $\text{Re}(h(z)) \leq |z|^2$ pour tout $|z| \geq r$ suffisamment grand. Si m est le maximum de $\text{Re}(h(z))$ à l'intérieur du disque de rayon r centré sur l'origine, on peut choisir un disque \mathcal{D} plus grand, de rayon $R \geq \max(r, \sqrt{m})$ tel que $\text{Re}(h(z)) \leq R^2$ pour tout $z \in \mathcal{D}$. Prenons alors

$$k(z) = \frac{R h(z)}{z(2R^2 - h(z))}. \quad (\text{B.4})$$

Cette fonction k est analytique dans \mathcal{D} (en effet la singularité en 0 n'est qu'apparente car $\frac{g(z)-g(0)}{z}$ est analytique). D'autre part, sur le bord de \mathcal{D} ,

$$|k(z)| = \left| \frac{h(z)}{(2R^2 - h(z))} \right| = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}^2(h(z)) + \operatorname{Im}^2(h(z))}{(2R^2 - \operatorname{Re}(h(z)))^2 + \operatorname{Im}^2(h(z))}} \leq 1 \quad (\text{B.5})$$

Ceci est donc vrai pour tout point de \mathcal{D} . En effet, si $|k|$ avait un maximum m' en z_0 à l'intérieur de \mathcal{D} , il serait isolé (sinon k serait constante), et en appliquant $m' = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{k(z)}{z-z_0}$ sur un petit cercle c centré sur z_0 on trouverait une contradiction : $m' \leq \sup_c |k| < m'$. Alors, pour tout $|z| \leq R/2$, on a :

$$|k(z)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{h(z)}{(2R^2 - h(z))} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |h(z)| \leq 2R^2 \quad (\text{B.6})$$

On a alors pour $|z|$ suffisamment grand $|h(z)| \leq 2|z|^2$: c'est bien ce que l'on voulait montrer.

Alors, on montre facilement que h et donc g sont des polynômes du second degré. En effet, la fonction h étant entière, on peut écrire

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_c \frac{h(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi. \quad (\text{B.7})$$

En prenant comme contour d'intégration γ un cercle de rayon R centré sur l'origine, on obtient alors

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} |h(R)| \frac{2\pi R}{R^{n+1}} \leq K R^{2-n} \quad (\text{B.8})$$

La limite en $R \rightarrow \infty$ montre que $a_n = 0$ pour tout $n > 2$. Les fonctions h et g sont donc bien des polynômes du second degré :

$$f(z) = e^{\alpha z^2 + \beta z + \gamma} \quad (\text{B.9})$$

En prenant $z = iy$ avec $y \in \mathcal{R}$, on remarque alors que

$$f(iy) = e^{-\alpha y^2 + i\beta y + \gamma} = \int \psi^*(x) e^{-x^2/2 - iyx} dx, \quad (\text{B.10})$$

est la transformée de Fourier de $\psi^*(x) e^{-x^2/2}$. La transformée de Fourier inverse de cette fonction gaussienne est elle-même gaussienne, ce qui conduit à

$$\psi(x) = e^{-(\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma')} \quad (\text{B.11})$$

La fonction d'onde ψ et la fonction de Wigner associée sont donc bien gaussiennes.

Appendice C

Absorption biphotonique dans le KNbO_3

Compte tenu de leur géométrie, on peut considérer les cristaux comme bidimensionnels. L'évacuation de la chaleur se fait uniquement par les côtés en contact avec le support. On supposera que nos impulsions ont un profil gaussien et on négligera les effets de divergence. Pour une impulsion arrivant sur le cristal, l'intensité s'écrit ainsi

$$I(x, y, z = 0, t) = I_c e^{-\frac{r^2}{w^2} - \frac{t^2}{\Delta t^2}}. \quad (\text{C.1})$$

Les notations ont été ici simplifiées :

- I_c est l'intensité crête,
- w est relié au waist w_0 par $w = w_0/\sqrt{2}$,
- Δt est relié à la largeur à mi-hauteur de l'impulsion Δt_0 par $\Delta t = \Delta t_0/\sqrt{4 \ln(2)}$.

On se placera dans un cas où les effets de saturation deviennent visibles expérimentalement, en prenant un waist $w_0 = 11 \mu\text{m}$ ($w = 8 \mu\text{m}$). Les valeurs des différents paramètres du problème sont donnés ci-dessous :

- Largeur du faisceau : $w = 8 \mu\text{m}$,
- Durée de l'impulsion : $\Delta t = 90 \text{fs}$,
- Cadence des impulsions : $\tau = 1.25 \mu\text{s}$,
- Puissance moyenne :

$$\bar{P} = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty 2\pi r dr \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt I(r, t) \quad (\text{C.2})$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^\infty 2\pi r dr \int_{-\infty}^\infty dt I(r, t) \quad (\text{car } \tau \gg \Delta t) \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{I_c \pi^{3/2} w^2 \Delta t}{\tau} \quad (\text{C.4})$$

$$= 40 \text{mW}, \quad (\text{C.5})$$

- Intensité crête : $I_c = 1.5 * 10^{15} W.m^{-2}$,
- Épaisseur du cristal : $l = 100\mu m$
- Rayon du cristal (\equiv ouverture du support) : $R = 1mm$,
- Coefficient d'absorption à deux photons : $\beta = 3.2 * 10^{-11} m.W^{-1}$ [158],
- Conductivité thermique : $\lambda = 3.5 W.K^{-1}.m^{-1}$ [159],
- Diffusivité thermique : $D \approx (1.2 \pm 0.4) * 10^{-6} m^2.s^{-1}$ [160].

Le but de ce calcul est de voir si l'absorption à deux photons suffit à expliquer nos observations, et ne vise qu'à estimer ses effets. Ainsi, à défaut de valeurs spécifiques au $KNbO_3$ on utilise des grandeurs caractéristiques pour les roches cristallines [160]. Par ailleurs on néglige le déphasage du au temps de propagation de l'impulsion à travers le cristal : on s'intéresse à des grandeurs moyennées sur la durée de l'impulsion, très brève devant tous les autres temps caractéristiques.

C.1 Puissance absorbée

Les variations de l'intensité dues à l'absorption à deux photons s'écrivent $\frac{\partial I}{\partial z} = -\beta I^2$, ce qui, intégré entre $z = 0$ et $z = l$, donne

$$\frac{1}{I(x, y, l, t)} - \frac{1}{I(x, y, 0, t)} = \beta l \quad (C.6)$$

$$\Rightarrow \Delta I = I(r, z = 0, t) - I(r, z = l, t) = \frac{\beta l I_c^2 e^{-2r^2/w^2} e^{-2t^2/\Delta t^2}}{1 + \beta l I_c e^{-r^2/w^2} e^{-t^2/\Delta t^2}}. \quad (C.7)$$

La puissance moyenne absorbée est déterminée par :

$$\overline{\Delta P} = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty 2\pi r dr \int_{-\infty}^\infty dt \Delta I(r, t). \quad (C.8)$$

L'intégrale spatiale s'obtient par le changement de variable $r \rightarrow u = \beta l I_c e^{-\frac{t^2}{\Delta t^2}} e^{-\frac{r^2}{w^2}}$:

$$\Delta P(t) = \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{\beta l I_c^2 e^{-2r^2/w^2} e^{-2t^2/\Delta t^2}}{1 + \beta l I_c e^{-r^2/w^2} e^{-t^2/\Delta t^2}} \quad (C.9)$$

$$= \frac{\pi w^2}{\beta l} \int_0^{\beta l I_c e^{-\frac{t^2}{\Delta t^2}}} \frac{u du}{1 + u} \quad (C.10)$$

$$= \frac{\pi w^2}{\beta l} \left[\beta l I_c e^{-t^2/\Delta t^2} - \ln \left(1 + \beta l I_c e^{-t^2/\Delta t^2} \right) \right], \quad (C.11)$$

d'où

$$\overline{\Delta P} = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Delta P(t) \quad (\text{C.12})$$

$$= \frac{1}{\tau} \left[\pi^{3/2} w^2 I_c \Delta t - \frac{\pi w^2 \Delta t}{\beta l} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ln \left(1 + \beta l I_c e^{-x^2} \right) \right]. \quad (\text{C.13})$$

Comme par ailleurs $\overline{P} = \overline{P_{in}} = \frac{I_c \pi^{3/2} w^2 \Delta t}{\tau}$, la fraction de puissance moyenne absorbée vaut

$$\xi = \frac{\overline{\Delta P}}{\overline{P}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\beta l I_c} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ln \left(1 + \beta l I_c e^{-x^2} \right) = 54\%, \quad (\text{C.14})$$

ce qui suffit pour justifier une diminution de l'efficacité de doublage.

C.2 Temps caractéristique de diffusion

Après le passage de l'impulsion, la température est régie par l'équation de diffusion $\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$. Le temps typique de diffusion sur une distance x est donc $t \sim x^2/D$. On peut supposer que l'empreinte thermique laissée par le passage d'une impulsion a une largeur caractéristique w , ce qui donne un temps caractéristique de dissipation : $\tau_{diss} = \frac{w^2}{D} \approx 40 - 80 \mu\text{s}$. Ce temps est de l'ordre de celui observé à l'aide de l'obturateur. Il est par ailleurs nettement plus grand que le temps séparant deux impulsions consécutives. On pourra donc se placer en régime continu et raisonner sur des grandeurs moyennées sur la durée d'une impulsion.

C.3 Variations de température dans le faisceau

L'équation C.6 permet de déduire l'intensité dans le cristal :

$$I(r, z, t) = \frac{I(r, 0, t)}{1 + \beta z I(r, 0, t)} = \frac{I_c e^{-r^2/w^2} e^{-t^2/\Delta t^2}}{1 + \beta z I_c e^{-r^2/w^2} e^{-t^2/\Delta t^2}}. \quad (\text{C.15})$$

L'intensité absorbée donne le flux de chaleur volumique instantané apporté par l'impulsion :

$$\Phi(r, z, t) = -\frac{\partial I}{\partial z} = \beta I^2 = \frac{\beta I_c^2 e^{-2r^2/w^2} e^{-2t^2/\Delta t^2}}{(1 + \beta z I_c e^{-r^2/w^2} e^{-t^2/\Delta t^2})^2}. \quad (\text{C.16})$$

Comme $\Delta t \ll \tau_{diss}$, la traversée de l'impulsion est quasi-instantanée : $e^{-2t^2/\Delta t^2} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Delta t \delta(t)$. Le flux de chaleur volumique extérieur moyenné sur le temps s'écrit alors

$$\Phi(r, z) = \frac{1}{\tau} \int \Phi(r, z, t) dt \quad (\text{C.17})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \beta I_c^2 e^{-2r^2/w^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{(1 + z \beta I_c e^{-r^2/w^2} e^{-t^2/\Delta t^2})^2} dt \quad (\text{C.18})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\beta I_c^2 e^{-2r^2/w^2}}{(1 + z \beta I_c e^{-r^2/w^2})^2}. \quad (\text{C.19})$$

Compte tenu de la géométrie du cristal on peut supposer que l'essentiel du flux de chaleur est radial et moyenner sur z pour obtenir

$$\Phi(r) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} I_c e^{-r^2/w^2} \int_0^l \frac{\beta I_c e^{-r^2/w^2} dz}{(1 + \beta I_c e^{-r^2/w^2} z)^2} \quad (\text{C.20})$$

$$= \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} I_c e^{-r^2/w^2} \left[-\frac{1}{1 + \beta I_c e^{-r^2/w^2} z} \right]_0^l \quad (\text{C.21})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\beta I_c^2 e^{-2r^2/w^2}}{1 + \beta I_c e^{-r^2/w^2}}. \quad (\text{C.22})$$

En régime stationnaire, l'équation de diffusion de la chaleur en deux dimensions s'écrit

$$\lambda \Delta T(r) = \lambda \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\Phi(r) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\beta I_c^2 e^{-2r^2/w^2}}{1 + \beta I_c e^{-r^2/w^2}}. \quad (\text{C.23})$$

Elle s'intègre une première fois à l'aide d'un changement de variable $u = \beta I_c e^{-r^2/w^2}$:

$$r \frac{dT}{dr} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{1}{\lambda \beta l^2} \frac{w^2}{2} \int_0^r \frac{(\beta I_c e^{-r'^2/w^2})^2}{1 + \beta I_c e^{-r'^2/w^2}} \frac{2r' dr'}{w^2} \quad (\text{C.24})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{w^2}{2\lambda \beta l^2} \int_{\beta I_c}^{\beta I_c e^{-r^2/w^2}} \frac{u du}{1 + u} \quad (\text{C.25})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{w^2}{2\lambda \beta l^2} \left[\beta I_c (e^{-r^2/w^2} - 1) - \ln \left(\frac{1 + \beta I_c e^{-r^2/w^2}}{1 + \beta I_c} \right) \right]. \quad (\text{C.26})$$

Les variations caractéristiques de température dans le faisceau sont données par la différence $\delta T = T(0) - T(w)$:

$$\delta T = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{w^2}{2\lambda \beta l^2} \int_0^w \beta I_c (e^{-r^2/w^2} - 1) - \ln \left(\frac{1 + \beta I_c e^{-r^2/w^2}}{1 + \beta I_c} \right) \frac{dr}{r} \quad (\text{C.27})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta t}{\tau} \frac{w^2 I_c}{2\lambda l} \int_0^1 \left[\frac{1 - e^{-u^2}}{u} + \frac{1}{\beta I_c u} \ln \left(\frac{1 + \beta I_c e^{-u^2}}{1 + \beta I_c} \right) \right] du \quad (\text{C.28})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{\bar{P}}{\lambda l} \int_0^1 \left[\frac{1 - e^{-u^2}}{u} + \frac{1}{\beta I_c u} \ln \left(\frac{1 + \beta I_c e^{-u^2}}{1 + \beta I_c} \right) \right] du. \quad (\text{C.29})$$

L'intégrale sur u est une constante multiplicative qui peut être évaluée numériquement : avec $\beta I_c = 4.8$ elle vaut 0.32, ce qui conduit à une variation $\delta T = 6^\circ\text{C}$ entre le centre et le bord du faisceau, suffisante pour expliquer la déformation du mode spatial.

Appendice D

Fidélité d'un état préparé par conditionnement homodyne sur un état de Fock avec un chat de Schrödinger.

On compare ici un état préparé par conditionnement homodyne sur un état de Fock à n photons, dont la fonction d'onde s'écrit

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2^{2n}n!}{(2n)!\sqrt{\pi}}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{D.1})$$

et un chat de Schrödinger de taille $|\alpha|^2 = n$, de même parité que n , comprimé de 3 dB suivant x , décrit par

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-(x-\sqrt{n})^2} + (-1)^n e^{-(x+\sqrt{n})^2}}{\sqrt{2(1 + (-1)^n e^{-2n})}}. \quad (\text{D.2})$$

On cherche à démontrer que leur fidélité tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{F} = \left| \int \phi(x)\psi^*(x)dx \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{?} 1. \quad (\text{D.3})$$

Démonstration

Les fonctions ϕ et ψ sont réelles et de même signe, donc pour tout $a < b$

$$\sqrt{\mathcal{F}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\psi(x)dx \geq \int_a^b \phi(x)\psi(x)dx. \quad (\text{D.4})$$

Donc, pour tout $a > 0$,

$$\sqrt{\mathcal{F}} \geq \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}}{\sqrt{2(1 + (-1)^n e^{-2n})}} \left[\int_{-a}^a \phi(\sqrt{n} + x)e^{-x^2} dx + \int_{-a}^a \phi(\sqrt{n} - x)e^{-x^2} dx \right] = I_1 + I_2. \quad (\text{D.5})$$

La formule de Stirling permet de simplifier le coefficient de normalisation \mathcal{N}_n de ϕ (Eq. 6.5) :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad (\text{D.6})$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2^{2n}n!}{(2n)!}} = \frac{1}{2^{1/4}} \left(\frac{e}{n}\right)^{n/2} \left[1 + \frac{1}{48n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \quad (\text{D.7})$$

Dans la suite on suppose $0 < a < \sqrt{n}$ et $x \in [-a, a]$ ce qui donne, dans $\phi(\sqrt{n} + x)$:

$$(\sqrt{n} + x)^n e^{-\frac{(\sqrt{n}+x)^2}{2}} = \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^2}{2} - x\sqrt{n} + n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \quad (\text{D.8a})$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2 - n \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{-x}{\sqrt{n}}\right)^k} \quad (\text{D.8b})$$

$$\geq \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2 - \frac{a^3}{3\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^k} \quad (\text{D.8c})$$

$$\geq \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2 - \frac{a^3}{3(\sqrt{n}-a)}}. \quad (\text{D.8d})$$

Donc, pour n suffisamment grand,

$$\phi(\sqrt{n} + x) \geq \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} e^{-x^2 - \frac{a^3}{3(\sqrt{n}-a)}} \quad (\text{D.9a})$$

$$\Rightarrow I_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2(1 + (-1)^n e^{-2n}})} \int_{-a}^a \phi(\sqrt{n} + x) e^{-x^2} dx \quad (\text{D.9b})$$

$$\geq \frac{e^{-\frac{a^3}{3(\sqrt{n}-a)}}}{\sqrt{2\pi(1 + e^{-2n}})} \int_{-a}^a e^{-2x^2} dx \quad (\text{D.9c})$$

$$\geq \frac{e^{-\frac{a^3}{3(\sqrt{n}-a)}}}{\sqrt{(1 + e^{-2n})}} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-2x^2 - 4ax - 2a^2} \right] \quad (\text{D.9d})$$

$$\geq \frac{e^{-\frac{a^3}{3(\sqrt{n}-a)}}}{2\sqrt{(1 + e^{-2n})}} \left[1 - e^{-2a^2} \right]. \quad (\text{D.9e})$$

Il en est de même pour I_2 . On obtient une limite inférieure pour la fidélité :

$$\mathcal{F} \geq (I_1 + I_2)^2 \geq \frac{e^{-\frac{2a^3}{3(\sqrt{n}-a)}}}{1 + e^{-2n}} \left[1 - e^{-2a^2} \right]^2. \quad (\text{D.10})$$

Si on choisit $a = n^{1/12}$ la condition $a < \sqrt{n}$ est satisfaite pour tout $n > 1$, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{2}{3(n^{1/4} - n^{-1/6})}}}{1 + e^{-2n}} \left[1 - e^{-2n^{1/6}} \right]^2 = 1. \quad (\text{D.11})$$

Nous avons donc minoré \mathcal{F} par une quantité qui tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui achève la démonstration.

Appendice E

Efficacité des protocoles de préparation de “chats de Schrödinger” accessibles à l’expérience.

On compare ici, en termes d’efficacité, deux protocoles permettant de générer des chats de Schrödinger avec les outils expérimentaux actuels (les seules sources d’états non-classiques suffisamment fiables sont les cristaux paramétriques, et les seuls détecteurs de photons couramment accessibles sont les photodiodes à avalanche). Le premier est la soustraction de photons multiples depuis un faisceau de vide comprimé, proposée par Dakna *et al.* [104] et étudié dans le cas de un photon dans le chapitre 5. Le second protocole, développé dans le cadre de cette thèse, est la génération de chats comprimés par conditionnement homodyne, dont l’étude théorique et expérimentale est présentée dans le chapitre 6.

On suppose que l’on cherche à préparer un chat de taille n ayant une certaine fidélité \mathcal{F} avec le cas idéal. Cette fidélité sera principalement affectée par la probabilité d’erreur $P_{err} = P(m+1)/P(m)$ d’envoyer $m+1$ photons au lieu de m vers les APDs. Dans les deux cas, cette erreur changerait la parité du chat et conduirait à un brouillage des franges de sa fonction de Wigner. Notre méthode sera de plus affectée par le seuil fini de conditionnement homodyne.

La soustraction de photons consiste à renvoyer vers les APDs une fraction $R = 1 - T$ d’un faisceau de vide comprimé de $s = e^{-2r}$. D’après Eq. 42 dans [104], pour préparer un chat de taille n on doit soustraire $m = n/(T\lambda)$ photons, où $\lambda = \tanh(r)$. La probabilité de succès est donnée par Eq. 17 dans le même article :

$$P(m) = \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \beta^2}} \left(\frac{\beta^2(1 - T)}{T(1 - \beta^2)} \right)^m \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{(m - 2k)!(k!)^2(2\beta)^{2k}}. \quad (\text{E.1})$$

où $\beta = T\lambda$ and $[x]$ est la partie entière de x . Pour m suffisamment grand, en utilisant la

formule de Stirling et le fait que $\beta < 1$, on peut évaluer la somme comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{m!}{(m-2k)!(k!)^2 (2\beta)^{2k}} &= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{1}{\beta^{2k}} \\ &\approx \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{1}{\beta^{2k}} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{1}{\beta^k} \approx \frac{\nu}{\sqrt{2\pi m}} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^m \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

où ν est de l'ordre de 1 (vérifié numériquement pour $10 \leq m \leq 100$ et $0.01 \leq \beta \leq 1$). Alors

$$P(m) \approx \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\beta^2}} \frac{\nu}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{\beta(1-T)}{T(1-\beta)}\right)^m \quad (\text{E.3})$$

$$P_{err} = \frac{P(m+1)}{P(m)} \approx \frac{\beta(1-T)}{T(1-\beta)} = \frac{\lambda R}{1-T\lambda}. \quad (\text{E.4})$$

Pour que P_{err} soit faible, R et/ou λ doivent être petits. Dans les deux cas, le taux de succès $G_1(n)$ de ce protocole devient

$$G_1(n) = P(n/\beta) \approx \frac{\nu}{\sqrt{2\pi n/\beta}} P_{err}^{n/\beta}. \quad (\text{E.5})$$

Dans le cas de notre protocole, le conditionnement homodyne permet de créer un chat de la même taille n à partir de $m = n$ photons seulement. On commence alors par préparer un état EPR $\sqrt{1-\lambda^2} \sum \lambda^n |n, n\rangle$. Pour créer n photons dans le mode signal, on a besoin de n photons dans l'idler, ce qui arrive avec une probabilité $(1-\lambda^2)\lambda^{2n}$. Ici la probabilité d'avoir $n+1$ photons au lieu de n est $P_{err} = \lambda^2$. Cette probabilité doit être faible, le taux de génération des états de Fock vaut donc simplement P_{err}^n . De plus, on doit effectuer une mesure homodyne, dont le seuil ϵ doit se comporter en ϵ_1/\sqrt{n} pour garder une fidélité \mathcal{F} constante définie par ϵ_1 . La préparation homodyne réussit alors avec une probabilité $2\epsilon_1/(n\sqrt{\pi})$ (Eq. 6.14), et nous avons vu que $\epsilon_1 = \sqrt{2}/10$ suffit pour avoir $\mathcal{F} \approx 99\%$. En incluant la préparation conditionnelle des états de Fock, on trouve alors le taux de succès total G_2 de notre protocole, et le rapport des efficacités $\rho = G_1/G_2$:

$$G_2(n) \approx \frac{2\epsilon_1}{n\sqrt{\pi}} P_{err}^n \quad \rho = \frac{G_1(n)}{G_2(n)} \approx \frac{\nu\sqrt{\beta}}{2\sqrt{2}\epsilon_1} \sqrt{n} P_{err}^{n(1/\beta-1)}. \quad (\text{E.6})$$

Comme $\beta < 1$, ce rapport décroît exponentiellement avec n . En prenant par exemple un gain paramétrique de 3 dB ($\lambda = 1/3$), typique dans nos expériences, la probabilité d'erreur de notre protocole vaut $P_{err} = \lambda^2 = 1/9$: pour qu'elle soit la même dans le cas de la soustraction il faut prendre $R = 1/4$, ce qui donne $\rho \approx \sqrt{n} 10^{-3n}$: le facteur \sqrt{n} est rapidement dominé par la décroissance exponentielle. Si l'on incluait l'efficacité APD μ , cette décroissance serait encore plus rapide, car ce rapport serait multiplié par $\mu^{n(1/\beta-1)}$. Avec notre efficacité APD globale de 5%, ρ chuterait alors en 10^{-7n} .

La préparation homodyne est donc exponentiellement plus efficace que la soustraction de photons multiples.

Appendice F

Distillation d'intrication par soustraction locale de photons : cas pratique.

On s'intéresse ici à la faisabilité pratique d'un protocole de distillation d'intrication gaussienne, basée sur la soustraction locale d'un photon à partir de chaque mode d'un état intriqué gaussien (Fig. F.1).

Nous allons transposer sur ce cas notre modèle analytique, suivant le schéma de la figure F.1. On se placera comme toujours dans l'approximation d'une efficacité APD très faible. Nous avons montré dans le chapitre 4 que cette approximation donne des résultats indiscernables du cas réel. On peut alors reprendre l'équation 4.20, qui donne la fonction de Wigner d'un état bimode comprimé de $s = e^{-2r}$ (gain $g = \cosh^2(r)$), tenant compte du bruit OPA $h = \cosh^2(\gamma r)$ et de l'efficacité homodyne η :

$$W_\eta(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2 a_0 b_0} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2a_0} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2b_0} - \frac{(x_1+x_2)^2}{2b_0} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2a_0}}, \quad (\text{F.1})$$

$$a_0 = \eta(hs + h - 1) + 1 - \eta, \quad (\text{F.2})$$

$$b_0 = \eta(h/s + h - 1) + 1 - \eta. \quad (\text{F.3})$$

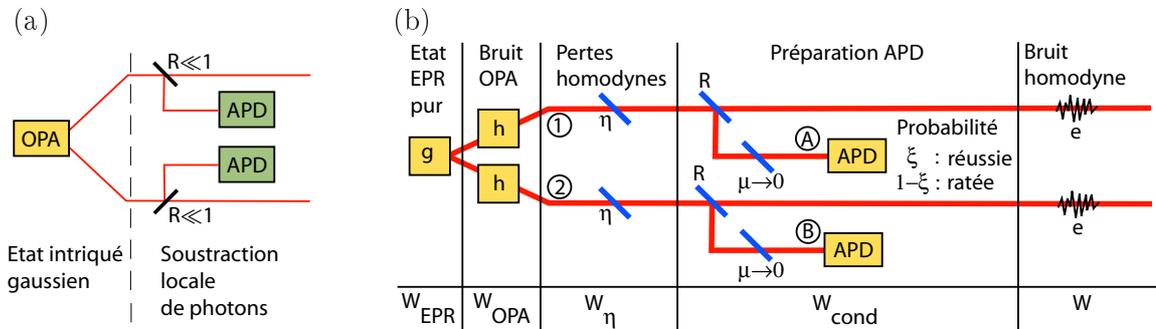


Figure F.1: Soustraction locale d'un photon depuis chaque mode d'un état intriqué gaussien. (a) Principe (b) Modélisation tenant compte des pertes expérimentales.

On réfléchit ensuite une fraction $R = r^2 = 1 - t^2$ de chacun des faisceaux vers des modes A et B utilisés pour le conditionnement, mélangeant cet état avec du vide $W_v(x, p) = e^{-x^2 - p^2} / \pi$:

$$W_{mix}(x_1, p_1, x_2, p_2, x_A, p_A, x_B, p_B) = W_\eta(tx_1 + rx_A, tp_1 + rp_A, tx_2 + rx_B, tp_2 + rp_B) \quad (\text{F.4})$$

$$\times W_v(tx_A - rx_1, tp_A - rp_1) W_v(tx_B - rx_2, tp_B - rp_2).$$

Dans l'approximation d'une efficacité APD $\mu \rightarrow 0$, une détection APD dans le mode A se traduit par l'annihilation d'un photon dans ce mode, ce qui transforme W_{mix} en

$$W_A = D_A W_{mix} / \text{Tr} \{D_A W_{mix}\}, \quad (\text{F.5})$$

$$D_A = \frac{1}{2} \left[1 + x_A^2 + p_A^2 + x_A \partial_{x_A} + p_A \partial_{p_A} + \frac{\partial_{x_A}^2 + \partial_{p_A}^2}{4} \right]. \quad (\text{F.6})$$

Il en est de même pour une détection dans le mode B ou pour deux détections simultanées, en remplaçant D_A par D_B et $D_A D_B$ respectivement. On doit ensuite tracer sur les modes A et B , perdus après la mesure projective. Si on tient compte d'une pureté modale ξ , qui traduit la probabilité pour qu'une détection APD corresponde effectivement à la présence d'un photon dans le mode voulu, on obtient

$$W_{cond}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \xi^2 \frac{\text{Tr}_{A,B} \{D_A D_B W_{mix}\}}{\text{Tr}_{1,2,A,B} \{D_A D_B W_{mix}\}}$$

$$+ \xi(1 - \xi) \left[\frac{\text{Tr}_{A,B} \{D_A W_{mix}\}}{\text{Tr}_{1,2,A,B} \{D_A W_{mix}\}} + \frac{\text{Tr}_{A,B} \{D_B W_{mix}\}}{\text{Tr}_{1,2,A,B} \{D_B W_{mix}\}} \right]$$

$$+ (1 - \xi)^2 \frac{\text{Tr}_{A,B} \{W_{mix}\}}{\text{Tr}_{1,2,A,B} \{W_{mix}\}}. \quad (\text{F.7})$$

On ajoute enfin le bruit homodyne e en calculant la convolution de chacun des modes avec une gaussienne $e^{-(x^2 + p^2)/e} / (\pi e)$. La fonction de Wigner finale $W = W(x_1, p_1, x_2, p_2)$ s'écrit

$$W = \xi^2 W_2 + 2\xi(1 - \xi) W_1 + W_0, \quad (\text{F.8})$$

$$W_0 = \frac{1}{\pi^2 ab} e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2}{2a} - \frac{(x_1 + x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}{2b}}, \quad (\text{F.9})$$

$$W_1 = \frac{W_0}{a + b - 2c} \left\{ \left(2 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \right) c + \left(1 - \frac{c}{a} \right)^2 \frac{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2}{2} \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{c}{b} \right)^2 \frac{(x_1 + x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}{2} \right\}, \quad (\text{F.10})$$

$$W_2 = \frac{W_0}{(a - c)^2 + (b - c)^2} \left\{ \left[\left(1 - \frac{c}{a} \right)^2 + \left(1 - \frac{c}{b} \right)^2 \right] c^2 \right.$$

$$+ 2c \left[\left(1 - \frac{c}{a} \right)^3 \frac{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2}{2} + \left(1 - \frac{c}{b} \right)^3 \frac{(x_1 + x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}{2} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{c}{a} \right)^2 \frac{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2}{2} + \left(1 - \frac{c}{b} \right)^2 \frac{(x_1 + x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}{2} \right]^2$$

$$\left. - 2 \left(1 - \frac{c}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{c}{b} \right)^2 \left[\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{2} + \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{2} \right] \right\}. \quad (\text{F.11})$$

Dans ces expressions, a et b sont les variances minimale et maximale du squeezing bimode mesuré à la détection homodyne, et c est le shot noise tel qu'il est mesuré par la détection homodyne :

$$a = \eta T(hs + h - 2) + 1 + e, \quad b = \eta T(h/s + h - 2) + 1 + e, \quad c = 1 + e. \quad (\text{F.12})$$

A partir des expressions de W_0 , W_1 et W_2 ci-dessus, en transposant la relation de passage entre fonction de Wigner et matrice densité (Eq. 2.37b) au cas bimode

$$\begin{aligned} & \langle n_1 n_2 | \hat{\rho} | m_1 m_2 \rangle \\ &= \frac{4}{\sqrt{2^{m_1+n_1+m_2+n_2} m_1! n_1! m_2! n_2!}} \left[\frac{\partial^{m_1+n_1+m_2+n_2}}{\partial t_1^{m_1} \partial z_1^{m_1} \partial t_2^{n_2} \partial z_2^{n_2}} \iint dx_1 dp_1 dx_2 dp_2 W(x_1, p_1, x_2, p_2) \right. \\ & \times \left. e^{-x_1^2 - p_1^2 - x_2^2 - p_2^2 + 2x_1(t_1+z_1) + 2x_2(t_2+z_2) - 2ip_1(t_1-z_1) - 2ip_2(t_2-z_2) - 2t_1 z_1 - 2t_2 z_2} \right]_{t_1=z_1=t_2=z_2=0}, \quad (\text{F.13}) \end{aligned}$$

on trouve les matrices densités correspondantes $\hat{\rho}_0$, $\hat{\rho}_1$ et $\hat{\rho}_2$, qui donnent celle de l'état global : $\hat{\rho} = \xi^2 \hat{\rho}_2 + 2\xi(1 - \xi) \hat{\rho}_1^{T_1} + \hat{\rho}_0$. Leurs transposées partielles sont diagonales par blocs :

$$\hat{\rho}_i^{T_1} = \left(\begin{array}{c} \boxed{*} \\ \boxed{\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array}} \\ \dots \end{array} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\rho}_{i,k}^{T_1} \quad (\text{F.14})$$

où $\hat{\rho}_{i,k}^{T_1}$ est une matrice carrée $k \times k$. Les seuls éléments non nuls de ces matrices sont donc de la forme $\langle n, k - n | \hat{\rho}_i^{T_1} | m, k - m \rangle = \hat{\rho}_{i,k,m,n}$, où $m \leq k$ et $n \leq k$. En posant $\alpha = \frac{a-c}{a+1}$ et

$\beta = \frac{b-c}{b+1}$, on peut les exprimer à l'aide de deux tenseurs G et A :

$$G_{k,l,m} = \frac{4\sqrt{n_1!m_1!n_2!m_2!}}{[1+a][1+b]}, \quad (\text{F.15})$$

$$A_{k,m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{k-m} \frac{\delta_{m-n-i+j}}{i!j!(m-i)!(k-m-j)!} \left[\frac{b-a}{(1+a)(1+b)} \right]^{i+j} \left[\frac{ab-1}{(1+a)(1+b)} \right]^{k-i-j}, \quad (\text{F.16})$$

$$\hat{\rho}_{0,k,m,n}^{T_1} = G_{k,m,n} A_{k,m,n}, \quad (\text{F.17})$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{1,k,m,n}^{T_1} = & \frac{G_{k,m,n}}{a+b-2c} \{ (\beta + \alpha)(1+c)A_{k,m,n} \\ & + (\beta^2 + \alpha^2)(A_{k-1,m-1,n-1} + A_{k-1,m,n}) \\ & + (\beta^2 - \alpha^2)(A_{k-1,m-1,n} + A_{k-1,m,n-1}) \}, \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{2,k,m,n}^{T_1} = & \frac{G_{k,m,n}}{(a-c)^2 + (b-c)^2} \{ (\beta^2 + \alpha^2)(1+c)^2 A_{k,m,n} \\ & + 2(\beta^3 + \alpha^3)(1+c)(A_{k-1,m-1,n-1} + A_{k-1,m,n}) \\ & + 2(\beta^2 - \alpha^2)(1+c)(A_{k-1,m-1,n} + A_{k-1,m,n-1}) \\ & + \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)^2 (A_{k-2,m-2,n} + A_{k-2,m-2,n-2} + A_{k-2,m,n} + A_{k-2,m,n-2}) \\ & + (\beta^4 - \alpha^4)^2 (A_{k-2,m-2,n-1} + A_{k-2,m,n-1} + A_{k-2,m-1,n} + A_{k-2,m-1,n-2}) \\ & + 2(\beta^2 + \alpha^2)^2 A_{k-2,m-1,n-1} \}. \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

La diagonalisation numérique de $\hat{\rho}^{T_1}$, nécessaire pour calculer la négativité $\mathcal{N} = \frac{1}{2}[\|\hat{\rho}^{T_1}\|_1 - 1]$ quantifiant l'intrication de l'état, ne prend alors que quelques secondes.

Appendice G

Transfert d'intrication par mesure APD.

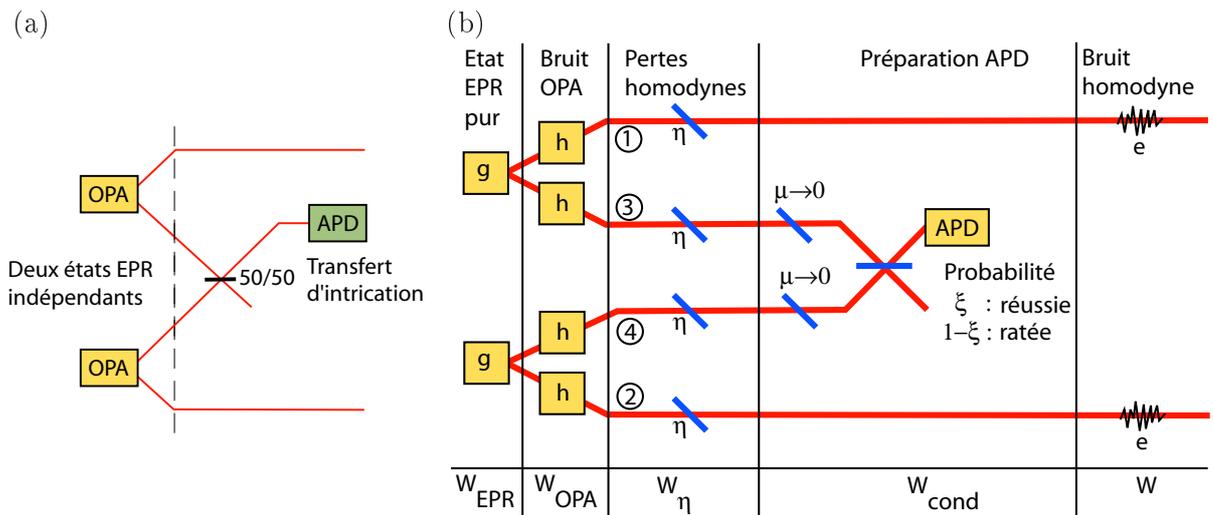


Figure G.1: Transfert d'intrication entre deux états EPR par projection APD. (a) Principe, (b) Modélisation tenant compte des pertes expérimentales.

On cherche ici à modéliser une expérience de transfert d'intrication par mesure APD projective, pour comparer les performances attendues à celles du protocole préparant les "états Hamlet" décrits au chapitre 8. Cette expérience, ainsi que sa modélisation, sont illustrés sur la figure G.1. On suppose que l'on prépare d'abord deux états EPR à l'aide de deux amplificateurs paramétriques non-dégénérés. Ainsi, le mode 1 est intriqué avec 2, et le mode 3 avec 4, mais ces deux paires de modes sont initialement indépendantes. On fait interférer les modes 2 et 3 sur une lame 50/50, et l'on effectue une mesure APD sur l'un des modes de sortie de la lame. Les modes 2 et 3 sont ensuite perdus. On cherche à déterminer la fonction de Wigner et la matrice densité des modes 1 et 4, pour calculer leur intrication éventuelle.

On se placera comme toujours dans l'approximation d'une efficacité APD très faible.

Nous avons montré dans le chapitre 4 que cette approximation donne des résultats indiscernables du cas réel. Comme point de départ du modèle, on peut alors directement reprendre la fonction de Wigner d'un produit de deux états EPR déterminée à partir de l'équation 4.20, avec un squeezing $s = e^{-2r}$ (gain $g = \cosh^2(r)$), un bruit OPA $h = \cosh^2(\gamma r)$, en introduisant directement l'efficacité homodyne η :

$$W_\eta(x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3, x_4, p_4) = \frac{1}{\pi^4(a_0 b_0)^2} e^{-\frac{(x_1-x_3)^2+(p_1+p_3)^2+(x_2-x_4)^2+(p_2+p_4)^2}{2a_0}} \quad (\text{G.1})$$

$$\times e^{-\frac{(x_1+x_3)^2+(p_1-p_3)^2+(x_2+x_4)^2+(p_2-p_4)^2}{2b_0}}, \quad (\text{G.2})$$

$$a_0 = \eta(hs + h - 1) + 1 - \eta, \quad (\text{G.3})$$

$$b_0 = \eta(h/s + h - 1) + 1 - \eta. \quad (\text{G.4})$$

On mélange ensuite les modes 3 et 4 sur une lame 50/50, ce qui transforme W_η en

$$W_{mix}(x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3, x_4, p_4) = W_\eta\left(x_1, p_1, x_2, p_2, \frac{x_3-x_4}{\sqrt{2}}, \frac{p_3-p_4}{\sqrt{2}}, \frac{x_3+x_4}{\sqrt{2}}, \frac{p_3+p_4}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{G.5})$$

Dans l'approximation d'une efficacité APD $\mu \rightarrow 0$, une détection APD dans le mode 3 se traduit par l'annihilation d'un photon dans ce mode, ce qui transforme W_{mix} en

$$W_3 = D_3 W_{mix} / \text{Tr} \{D_3 W_{mix}\}, \quad D_3 = \frac{1}{2} \left[1 + x_3^2 + p_3^2 + x_3 \partial_{x_3} + p_3 \partial_{p_3} + \frac{\partial_{x_3}^2 + \partial_{p_3}^2}{4} \right]. \quad (\text{G.6})$$

En intégrant ensuite sur les modes 2 et 3 perdus dans l'environnement, on trouve

$$W_{cond}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2+p_1^2+x_2^2+p_2^2}{\sigma_0^2}}}{\pi^2 \sigma^4} \left\{ \frac{\delta_0}{\sigma_0^2} \left[\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 1 - \delta_0 \right\}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 2\eta(hg - 1) + 1. \quad (\text{G.7})$$

$$\delta_0 = \frac{2\eta h^2 g(g-1)}{\sigma_0^2(hg-1)} \quad (\text{G.8})$$

Une pureté modale $\xi < 1$ conduira à un mélange statistique de cet état avec un produit de deux états thermiques non conditionnés $e^{-(x_1^2+p_1^2+x_2^2+p_2^2)/\sigma_0^2}/(\pi^2 \sigma^4)$. On ajoute enfin le bruit homodyne e en calculant la convolution de chacun des modes avec une gaussienne $e^{-(x^2+p^2)/e}/(\pi e)$. La fonction de Wigner finale s'écrit

$$W(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2+p_1^2+x_2^2+p_2^2}{\sigma^2}}}{\pi^2 \sigma^4} \left\{ \frac{\delta}{\sigma^2} \left[\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 1 - \delta \right\}$$

$$\sigma^2 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 2\eta(hg - 1) + 1 + e. \quad (\text{G.9})$$

$$\delta = \frac{2\xi \eta h^2 g(g-1)}{\sigma^2(hg-1)} \quad (\text{G.10})$$

C'est simplement un état de Fock $n = 1$ (Eq. 4.23) mélangé avec un état thermique de variance $\sigma^2/2$ sur une lame 50/50.

En remarquant que cette fonction de Wigner est de la même forme que celle de l'état Hamlet (Eq. 8.10a), on peut reprendre les expressions de la matrice densité transposée partielle correspondante (Eq. 8.4.1) en posant $a = b = \sigma^2$, $c = 0$, et $\alpha = -\beta = \sqrt{\frac{\delta}{2\sigma^2}}$. Dans ce cas, les expressions se trouvent largement simplifiées. Dans les équations 8.22, les coefficients D et les tenseurs M , N , et I deviennent

$$D_0 = \frac{4}{(\sigma^2 + 1)^2} \left[1 - \frac{\delta\sigma^2}{\sigma^2 + 1} \right], \quad (\text{G.11a})$$

$$D_1 = 0, \quad (\text{G.11b})$$

$$D_2 = D_3 = \frac{8\delta\sigma^2}{(\sigma^2 + 1)^4}, \quad (\text{G.11c})$$

$$M_{i_1, j_1, i_2, j_2} = \delta_{i_1} \delta_{j_1} \delta_{i_2} \delta_{j_2}, \quad (\text{G.11d})$$

$$N_{i, j, k} = \delta_{i-j} \left(\frac{2(\sigma^2 - 1)}{\sigma^2 + 1} \right)^{i+k}, \quad (\text{G.11e})$$

$$I_{k_1, l_1, k_2, l_2}^{n_1, m_1, n_2, m_2} = \frac{\delta_{n_1 - m_1 - k_1 + l_1} \delta_{n_2 - m_2 - k_2 + l_2}}{(n_1 - k_1)! (m_2 - l_2)!} \left(\frac{2(\sigma^2 - 1)}{\sigma^2 + 1} \right)^{n_1 + m_2 - k_1 - l_2}. \quad (\text{G.11f})$$

On s'aperçoit que les seuls termes non nuls de la matrice densité sont de la forme :

$$\langle m_1, m_2 | \hat{\rho}^{T_1} | m_1, m_2 \rangle = D_0 \left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right)^{m_1 + m_2} + D_2 \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right)^{m_1 + m_2 - 1}, \quad (\text{G.12a})$$

$$\langle m_1 + 1, m_2 + 1 | \hat{\rho}^{T_1} | m_1, m_2 \rangle = D_2 \frac{\sqrt{(m_1 + 1)(m_2 + 1)}}{2} \left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right)^{m_1 + m_2}, \quad (\text{G.12b})$$

$$\langle m_1, m_2 | \hat{\rho}^{T_1} | m_1 + 1, m_2 + 1 \rangle = D_2 \frac{\sqrt{(m_1 + 1)(m_2 + 1)}}{2} \left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right)^{m_1 + m_2}. \quad (\text{G.12c})$$

La diagonalisation numérique de $\hat{\rho}^{T_1}$ et le calcul de la négativité $\mathcal{N} = \frac{1}{2} [\|\hat{\rho}^{T_1}\|_1 - 1]$ sont alors immédiats.

Bibliographie

- [1] M. Planck, *Annalen der Physik* **4**, 553 (1901).
- [2] A. Einstein, *Annalen der Physik* **17**, 132 (1905).
- [3] L. de Broglie, *Nature* **112**, 540 (1923).
- [4] C. Davisson and L. H. Germer, *Nature* **119**, 680 (1927).
- [5] M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw, and A. Zeilinger, *Nature* **401**, 680 (1999).
- [6] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [8] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [9] S. J. Freedman and J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938 (1972).
- [10] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
- [11] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [12] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [13] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 623 (1948).
- [14] S. Wiesner, *Sigact News* **15**, 78 (1983).
- [15] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **28**, 656 (1949).
- [16] C. H. Bennett and G. Brassard, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India* (IEEE, New York, 1984), p. 175.
- [17] <http://www.idquantique.com>, <http://www.magiqtech.com>.
- [18] P. Shor, in *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1994), pp. 116–123.
- [19] C. Gobby, Z. L. Yuan, and A. J. Shields, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 3762 (2004).
- [20] E. Diamanti, H. Takesue, C. Langrock, M. M. Fejer, and Y. Yamamoto, *Opt. Express* **14**, 13073 (2006).

BIBLIOGRAPHIE

- [21] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature* **409**, 46 (2001).
- [22] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterEditions, Paris, 1988).
- [23] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre, *Introduction aux lasers et à l'optique non-linéaire* (Ellipses, Paris, 1997).
- [24] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, and H. J. Kimble, *Science* **303**, 1992 (2004).
- [25] B. Darquié, M. P. A. Jones, J. Dingjan, J. Beugnon, S. Bergamini, Y. Sortais, G. Messin, A. Browaeys, and P. Grangier, *Science* **309**, 454 (2005).
- [26] M. Hijlkema, B. Weber, H. P. Specht, S. C. Webster, A. Kuhn, and G. Rempe, *Nat. Phys.* **3**, 253 (2007).
- [27] R. Brouri, A. Beveratos, J.-P. Poizat, and P. Grangier, *Opt. Lett.* **25**, 1294 (2000).
- [28] C. Kurtsiefer, S. Mayer, P. Zarda, and H. Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 290 (2000).
- [29] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, L. Zhang, E. Hu, and A. Imamoglu, *Science* **290**, 2282 (2000).
- [30] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. A* **64**, 050301 (2001).
- [31] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner, and R. Blatt, *Nature* **422**, 408 (2003).
- [32] D. Leibfried, B. DeMarco, V. Meyer, D. Lucas, M. Barrett, J. Britton, W. M. Itano, B. Jelenković, C. Langer, T. Rosenband, and D. J. Wineland, *Nature* **422**, 412 (2003).
- [33] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 783 (2001).
- [34] M. D. Eisaman, A. André, F. Massou, M. Fleischhauer, A. S. Zibrov, and M. D. Lukin, *Nature* **438**, 837 (2005).
- [35] T. Chanelière, D. N. Matsukevich, S. D. Jenkins, S.-Y. Lan, T. A. B. Kennedy, and A. Kuzmich, *Nature* **438**, 833 (2005).
- [36] C. W. Chou, H. de Riedmatten, D. Felinto, S. V. Polyakov, S. J. van Enk, and H. J. Kimble, *Nature* **438**, 828 (2005).
- [37] C.-W. Chou, J. Laurat, H. Deng, K. S. Choi, H. de Riedmatten, D. Felinto, and H. J. Kimble, *Science* **316**, 1316 (2007).
- [38] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph, and D. Branning, *Nature* **426**, 264 (2003).

BIBLIOGRAPHIE

- [39] S. Gasparoni, J.-W. Pan, P. Walther, T. Rudolph, and A. Zeilinger, Phys. Rev Lett. **93**, 020504 (2004).
- [40] F. Grosshans, G. Van Asshe, J. Wenger, R. Brouri, N. J. Cerf, and P. Grangier, Nature **421**, 238 (2004).
- [41] A. Furusawa, J. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik, Science **282**, 706 (1998).
- [42] T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro, and S. Glancy, Phys. Rev. A **68**, 042319 (2003).
- [43] Platon, La République, Livre VII .
- [44] E. Wigner, Rhys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [45] K. Vogel and H. Risken, Phys. Rev. A **40**, R2847 (1989).
- [46] R. Jozsa, J. Mod. Opt. **41**, 2315 (1994).
- [47] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique quantique* (Hermann, Paris, 1977).
- [48] R. L. Hudson, Rep. Math. Phys. **6**, 249 (1974).
- [49] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998).
- [50] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Nature **409**, 791 (2001).
- [51] R. García-Patrón, J. Fiurášek, N. J. Cerf, J. Wenger, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, Phys. Rev. Lett. **93**, 130409 (2004).
- [52] H. Nha and H. J. Carmichael, Phys. Rev. Lett. **93**, 020401 (2004).
- [53] A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, ArXiv:quant-ph 0511044 (2005).
- [54] J. Fiurášek and Z. Hradil, Phys. Rev. A **63**, 020101(R) (2001).
- [55] J. Řeháček, Z. Hradil, and M. Ježek, Phys. Rev. A **63**, 040303(R) (2001).
- [56] A. I. Lvovsky, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt **6**, S556Ů (2004).
- [57] B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986).
- [58] K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa, and M. Sasaki, Opt. Express **15**, 3568 (2007).
- [59] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, and S. Schiller, Phys. Rev. Lett. **87**, 050402 (2001).
- [60] A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, Phys. Rev. A **70**, 053821 (2004).
- [61] A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, Science **306**, 660 (2004).

BIBLIOGRAPHIE

- [62] A. Zavatta, V. Parigi, and M. Bellini, *Phys. Rev. A* **75**, 052106 (2007).
- [63] M. Bellini, Communication personnelle.
- [64] A. Dantan, J. Laurat, A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Opt. Express* **15**, 8864 (2007).
- [65] R. Huber, F. Adler, A. Leitenstorfer, M. Beutler, P. Baum, and E. Riedle, *Opt. Lett.* **28**, 2118 (2003).
- [66] P. F. Moulton, *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 125 (1986).
- [67] M. Delaigue, Ph.D. thesis, Université de Bordeaux, 2006.
- [68] B. Zysset, I. Biaggio, and P. Günter, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 380 (1992).
- [69] J. Wenger, Ph.D. thesis, Université Paris XI, 2004.
- [70] R. G. Reeves, M. G. Jani, B. Jassemnejad, R. C. Powell, G. J. Mizell, and W. Fay, *Phys. Rev. B* **43**, 71 (1991).
- [71] H. Mabuchi, E. S. Polzik, and H. J. Kimble, *J. Opt. Soc. Am. B* **11**, 2023 (1994).
- [72] A. LaPorta and R. E. Slusher, *Phys. Rev. A* **44**, 2013 (1991).
- [73] J. Wenger, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Opt. Lett.* **29**, 1267 (2004).
- [74] E. Waks, K. Inoue, W. D. Oliver, E. Diamanti, and Y. Yamamoto, *IEEE JSTQE* **9**, 1502 (2003).
- [75] D. Rosenberg, A. E. Lita, A. J. Miller, and S. W. Nam, *Phys. Rev. A* **71**, 061803(R) (2005).
- [76] R. H. Hadfield, M. J. Stevens, S. S. Gruber, A. J. Miller, R. E. Schwall, R. P. Mirin, and S. W. Nam, *Opt. Express* **13**, 10847 (2005).
- [77] A. Verevkin, A. Pearlman, W. Slysz, J. Zhang, M. Currier, A. Korneev, G. Chulkova, O. Okunev, P. Kouminov, K. Smirnov, B. Voronov, G. N. Gol'tsman, and R. Sobolewski, *J. Mod. Opt.* **51**, 1447 (2004).
- [78] H. P. Yuen and V. W. S. Chan, *Opt. Lett.* **8**, 177 (1983).
- [79] R. E. Slusher, P. Grangier, A. LaPorta, and M. J. Potasek, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2566 (1987).
- [80] F. Grosshans and P. Grangier, *Eur. Phys. J. D.* **14**, 119 (2001).
- [81] J. Lodewyck, Ph.D. thesis, Université Paris XI, 2006.
- [82] H. Hansen, Ph.D. thesis, Universität Konstanz, Allemagne, 2000.
- [83] H. Hansen, T. Aichele, C. Hettich, P. Lodahl, A. I. Lvovsky, J. Mlyneck, and S. Schiller, *Opt. Lett.* **26**, 1430 (2001).

BIBLIOGRAPHIE

- [84] Y. Takeno, M. Yukawa, H. Yonezawa, and A. Furusawa, *Optics Express* **15**, 4321 (2007).
- [85] J. S. Neergaard-Nielsen, B. M. Nielsen, C. Hettich, K. Mølmer, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083604 (2006).
- [86] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996).
- [87] P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200402 (2002).
- [88] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).
- [89] R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).
- [90] J. Wenger, A. Ourjoumteev, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Eur. Phys. J. D* **32**, 391 (2005).
- [91] A. Ourjoumteev, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 213601 (2006).
- [92] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland, *Science* **272**, 1131 (1996).
- [93] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [94] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, and D. J. Wineland, *Nature* **438**, 639 (2005).
- [95] J.-S. Lee and A. K. Khitrin, *Appl. Phys. Lett.* **87**, 204109 (2005).
- [96] A. Gilchrist, K. Nemoto, W. J. Munro, T. C. Ralph, S. Glancy, S. L. Braunstein, and G. J. Milburn, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6**, S828 (2004).
- [97] H. Jeong and T. C. Ralph, in *"Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light"* (Imperial College Press, London, 2007), Chap. Schrödinger Cat States for Quantum Information Processing.
- [98] N. Lütkenhaus, J. Calsamiglia, and K. A. Suominen, *Phys. Rev. A* **59**, 3295 (1999).
- [99] H. Jeong, M. S. Kim, and J. Lee, *Phys. Rev. A* **64**, 052308 (2001).
- [100] T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro, and S. Glancy, *Phys. Rev. A* **68**, 042319 (2003).
- [101] W. J. Munro, K. Nemoto, G. J. Milburn, and S. L. Braunstein, *Phys. Rev. A* **66**, 023819 (2002).
- [102] F. Toscano, D. A. R. Dalvit, L. Davidovich, and W. H. Zurek, *Phys. Rev. A* **73**, 023803 (2006).

BIBLIOGRAPHIE

- [103] M. Stobińska, H. Jeong, and T. C. Ralph, Phys. Rev. A **75**, 052105 (2007).
- [104] M. Dakna, T. Anhut, T. Opatrny, L. Knöll, and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **55**, 3184 (1997).
- [105] S. Suzuki, K. Tsujino, F. Kannari, and M. Sasaki, Opt.Comm. **259**, 758 (2005).
- [106] A. P. Lund, H. Jeong, T. C. Ralph, and M. S. Kim, Phys. Rev. A **70**, 020101(R) (2004).
- [107] S. Suzuki, M. Takeoka, M. Sasaki, U. Andersen, and F. Kannari, Phys. Rev. A **73**, 042304 (2006).
- [108] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat, and P. Grangier, Science **312**, 83 (2006), Science Express 9 March 2006 (10.1126/science.1122858).
- [109] N. Gisin, Science **312**, 63 (2006).
- [110] J. Wenger, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, Phys. Rev. Lett. **92**, 153601 (2004).
- [111] B. Sanders and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **45**, 1919 (1992).
- [112] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, Nature **397**, 594 (1999).
- [113] M. Paternostro, M. S. Kim, and B. S. Ham, Phys. Rev. A **67**, 023811 (2003).
- [114] H. Jeong, M. S. Kim, T. C. Ralph, and B. S. Ham, Phys. Rev. A **70**, 061801(R) (2004).
- [115] M. S. Kim and M. Paternostro, ArXiv:quant-ph 0510057 (2005).
- [116] S. Song, C. Caves, and B. Yurke, Phys. Rev. A **41**, 5261 (1990).
- [117] B. Yurke, W. Schleich, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **42**, 1703 (1990).
- [118] A. La Porta, R. E. Slusher, and B. Yurke, Phys. Rev. Lett. **62**, 28 (1989).
- [119] J. Fiurášek, R. García-Patrón, and N. J. Cerf, Phys.Rev. A **72**, 033822 (2005).
- [120] H. Jeong, Note personnelle.
- [121] F. Grosshans, Ph.D. thesis, Université Paris XI, 2002.
- [122] E. Waks, E. Diamanti, and Y. Yamamoto, New Journal of Physics **8**, 4 (2006).
- [123] S. L. Braunstein, Phys. Rev. A **45**, 6803 (1992).
- [124] A. Serafini, S. D. Siena, F. Illuminati, and M. G. A. Paris, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, S591 (2004).
- [125] H. Jeong, A. M. Lance, N. B. Grosse, T. Symul, P. K. Lam, , and T. C. Ralph, Phys. Rev. A **74**, 033813 (2006).
- [126] R. Filip, P. Marek, and U. L. Andersen, Phys. Rev. A **731**, 042308 (2005).

BIBLIOGRAPHIE

- [127] J. Yoshikawa, T. Hayashi, T. Akiyama, N. Takei, A. Huck, U. L. Andersen, and A. Furusawa, ArXiv:quant-ph 0702049 (2007).
- [128] A. Ourjoumtsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, *Nature* **448**, 784 (2007).
- [129] R. Raussendorf and H. J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5188 (2001).
- [130] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Josza, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1984).
- [131] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4287 (1993).
- [132] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3891 (1998).
- [133] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722 (1996).
- [134] H.-J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5932 (1998).
- [135] L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Nature* **414**, 413 (2001).
- [136] P. G. Kwiat, S. Barraza-Lopez, A. Stefanov, and N. Gisin, *Nature* **409**, 1014 (2001).
- [137] J.-W. Pan, S. Gasparoni, R. Ursin, G. Weihs, and A. Zeilinger, *Nature* **423**, 417 (2003).
- [138] P. Walther, K. J. Resch, Č. Brukner, A. M. Steinberg, J.-W. Pan, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 040504 (2005).
- [139] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997).
- [140] D. Boschi, S. Branca, F. D. Martini, L. Hardy, and S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1997).
- [141] L. Vaidman, *Phys. Rev. A* **49**, 1473 (1994).
- [142] N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220502 (2005).
- [143] J. Eisert, S. Scheel, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 137903 (2002).
- [144] J. Fiurášek, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 137904 (2002).
- [145] G. Giedke and J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **66**, 032316 (2002).
- [146] J. Eisert, D. E. Browne, S. Scheel, and M. B. Plenio, *Annals of Physics* **311**, 431 (2004).
- [147] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4002 (2000).

BIBLIOGRAPHIE

- [148] M. B. Plenio and S. Virmani, *Quant. Inf. Comp.* **7**, 1 (2007).
- [149] G. Vidal and R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [150] T. Opatrný, G. Kurizki, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **61**, 032302 (2000).
- [151] P. T. Cochrane, T. C. Ralph, and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **65**, 062306 (2002).
- [152] S. Olivares, M. G. A. Paris, and R. Bonifacio, *Phys. Rev. A* **67**, 032314 (2003).
- [153] A. Kitagawa, M. Takeoka, M. Sasaki, and A. Chefles, *Phys. Rev. A* **73**, 042310 (2006).
- [154] A. Ourjoumtsev, A. Dantan, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030502 (2007).
- [155] J. I. Cirac and P. Zoller, *Nature* **404**, 579 (2000).
- [156] S. A. Babichev, J. Appel, and A. I. Lvovsky, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 193601 (2004).
- [157] T. Mossberg, *Opt. Lett.* **7**, 77 (1983).
- [158] A. D. Ludlow, H. M. Nelson, and S. D. Rosen, *J. Opt. Soc. Am. B* **18**, 1813 (2001).
- [159] R. S. Sutherland, *Handbook of nonlinear optics* (Marcel Dekker, Inc., New York, 1995).
- [160] H.-D. Vosteen and R. Schnellschmidt, *Phys. and Chem. of the Earth* **28**, 499 (2003).

Résumé

Cette thèse porte sur la manipulation d'états non-classiques de la lumière, et leurs applications à l'information quantique. Nous montrons que les outils propres à une description discrète, où la lumière est considérée comme un ensemble de photons, peuvent être efficacement combinés avec une approche continue, où l'on s'intéresse aux quadratures de l'onde électromagnétique, pour créer, transformer et analyser des états quantiques complexes. Nous avons ainsi préparé des impulsions lumineuses ultrabrèves dans des états "chat de Schrödinger" (superpositions quantiques d'états cohérents). Le champ électromagnétique de l'onde lumineuse n'est alors plus décrit par une distribution statistique classique, mais par une fonction de Wigner prenant des valeurs négatives. Grâce à une reconstruction par tomographie homodyne, nous avons réalisé la première observation expérimentale de cette négativité pour de petits " chatons de Schrödinger " en propagation libre. Nous avons ensuite développé et démontré expérimentalement un protocole permettant de préparer des " chats de Schrödinger " optiques de taille arbitraire et d'ouvrir la voie vers de multiples applications en information quantique. Nous avons également montré que la soustraction conditionnelle de photons permettait d'augmenter l'intrication d'états gaussiens. Avec cette approche, nous avons intriqué deux impulsions séparées et indépendantes, en utilisant un canal quantique de fortes pertes. On peut ainsi préparer, entre deux sites éloignés, des états fortement intriqués à fonction de Wigner négative, élément essentiel pour la distillation d'intrication et les communications quantiques à grande distance.

Summary

In this thesis, we develop new methods to generate and analyze non-classical states of the light for quantum information processing. We show that the tools of discrete variables, where light is described in terms of photons, can be combined with a continuous approach, where one considers the quadratures of the electromagnetic field, to efficiently create, transform and analyze complex quantum states. Using ultrashort light pulses, we prepared optical "Schrödinger cats", defined as quantum superpositions of coherent states. In this case the Wigner function, describing the quantum statistics of the electromagnetic field, differs from a classical probability distribution and takes negative values. Time-resolved homodyne tomography allowed us to realize the first experimental observation of this negativity for small free-propagating "Schrödinger kittens". Furthermore, we developed and experimentally demonstrated a protocol to prepare arbitrarily large "Schrödinger cat" states, opening a way towards numerous quantum information processing protocols. We have shown experimentally that conditional photon subtraction allows one to increase the entanglement of gaussian states. We used this method to entangle two initially independent distant light pulses, using a low-transmission quantum channel. This approach allows one to prepare strongly entangled states with negative Wigner functions between distant sites, as required for entanglement distillation and long-distance quantum communications.