



**HAL**  
open science

# Sur l'implosion parabolique, la taille des disques de Siegel et une conjecture de Marmi, Moussa et Yoccoz

Arnaud Chéritat

► **To cite this version:**

Arnaud Chéritat. Sur l'implosion parabolique, la taille des disques de Siegel et une conjecture de Marmi, Moussa et Yoccoz. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2008. tel-00291673

**HAL Id: tel-00291673**

**<https://theses.hal.science/tel-00291673>**

Submitted on 27 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE  
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER  
TOULOUSE 3

**DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER DES  
RECHERCHES**

Sur l'implosion parabolique, la taille des disques de Siegel  
&  
une conjecture de Marmi, Moussa et Yoccoz

ARNAUD CHÉRITAT  
Chargé de Recherche

Le 23 mai 2008

Adam Epstein (Professeur, Warwick)	examineur
John Hamal Hubbard (Professeur, Marseille)	examineur
Tan Lei (Maître de Conférences, Cergy)	examineur
Stefano Marmi (Professeur, Pise)	examineur
John Milnor (Professeur, Stony Brook)	rapporteur
Carsten Petersen (Professeur, Roskilde)	rapporteur
Jean-Pierre Ramis (Professeur, Toulouse)	examineur
Jean-Christophe Yoccoz (Professeur, Collège de France)	directeur
Michel Zinsmeister (Professeur, Orléans)	rapporteur



## RÉSUMÉ

Tout le contenu de ce mémoire est un travail en commun de l'auteur et de Xavier Buff.

Pour  $\theta$  nombre de Brjuno, soit  $r(\theta)$  le rayon conforme du disque de Siegel de  $P_\theta$  et  $\Phi(\theta)$  la variante due à Yoccoz de la somme de Brjuno. Soit  $Y(\theta) = \log r(\theta) + \Phi(\theta)$ . Nous avons démontré dans [BC2] que  $Y$  possède un prolongement continu à  $\mathbb{R}$ , et donné une formule explicite pour la valeur aux rationnels.

La conjecture de Marmi–Moussa–Yoccoz, toujours ouverte, est que la fonction  $Y$  est  $1/2$ -Höldérienne.

Nous démontrons ici que *l'exposant ne peut être amélioré* : quel que soit l'intervalle  $I$  non vide,  $Y$  n'est  $\delta$ -Höldérienne sur  $I$  pour aucun  $\delta > 1/2$ . Sa variation sur  $I$  est également non bornée. La preuve est basée sur un *développement asymptotique* en tout  $p/q$  de  $Y(x_n)$  pour certaines suites de rationnels  $x_n$  tendant vers  $p/q$ . L'étude d'un point parabolique et de ses perturbations se fait parfois par l'introduction d'un champ de vecteurs auquel la dynamique est comparée. Nous introduisons un *champ de vecteurs particulier* qui permet d'une part de donner des estimations suffisamment fines pour effectuer le développement asymptotique de  $Y(x_n)$ ; d'autre part de proposer une *normalisation* intéressante des coordonnées de Fatou d'un point parabolique, dont nous donnons quelques propriétés de base. J'ai apporté un soin particulier à la rédaction de *l'implosion parabolique*, qu'il a fallu raffiner légèrement et adapter à notre champs de vecteurs.

## Remerciements

Je remercie Xavier Buff, qui a su concrétiser les idées vagues que je lui ai soumises, et sans lequel ce mémoire n'existerait pas. C'est un collaborateur idéal : optimiste, audacieux, curieux et infatigable. Il noue plein de contacts et n'hésite pas à les solliciter.

Je tiens à remercier, malheureusement à titre posthume, mon directeur de thèse Adrien, qui m'a enseigné de première main la théorie de l'implosion parabolique, et m'a introduit à ce magnifique champ de recherche qu'est la dynamique holomorphe. C'est évidemment à lui que je dédie ce travail.

Je voudrais remercier Yoccoz de m'avoir enseigné personnellement certaines de ses techniques, m'avoir présenté des problèmes ouverts, et m'avoir soutenu dans mon parcours. Sans ses puissants théorèmes, ce mémoire n'existerait pas non plus.

Merci à Marmi, Moussa et Yoccoz pour leur intéressante conjecture.

Merci à ceux qui ont créé et ceux qui ont développé la théorie de l'implosion parabolique.

Merci aux membres de mon jury pour l'honneur qu'ils me font d'avoir accepté d'en faire partie.

Merci à tous mes collègues en dynamique holomorphe, qui ont participé à mon éducation dans ce sujet, m'ont écouté parler, et par leur sympathie ont contribué à faire de cette communauté un groupe agréable à fréquenter. Merci en particulier à Artur Avila, Bodil Branner, Shaun Bullett, Serge Cantat, Robert Devaney, Adrien Douady, Romain Dujardin, Julien Duval, Adam Epstein, Nuria Fagella, Marguerite Flexor, Lukas Geyer, Sébastien Godillon, Vincent Guedj, Peter Haïssinsky, Christian Henriksen, Jacques Henry, Suzanne Lunch Hruska, John Hamal Hubbard, Sarah Koch, Tan Lei, Michael Lyubich, Curtis T. McMullen, Jack Milnor, Ricardo Perez-Marco, Carsten Lunde Petersen, Lasse Rempe, Roland Roeder, Pascale Roesch, Dierk Schleicher, Pierrette Sentenac, Mitsuhiro Shishikura, Sebastian Van Strien, Dominique Vieugué, Michael Yampolsky, Jean-Christophe Yoccoz, Michel Zinsmeister.<sup>1</sup>

Merci à mon institution, à ses secrétaires, ses ingénieurs, et à tous les membres du laboratoire Émile Picard. J'ai été accueilli dans un environnement de travail très agréable, aux collaborateurs pleins d'humour.

L'outil informatique a grandement contribué à ce travail, à de multiples niveaux. Un remerciement se diluerait de par la quantité des millions d'acteurs impliqués.

Plus largement, je reconnais le bénéfice d'un environnement social extrêmement stable. Merci aux professeurs qui, au fil de ma scolarité, m'ont encouragé dans la voie des sciences. Merci à mes proches parents, qui m'ont élevé dans l'admiration de la connaissance.

Merci à ma femme pour avoir supporté le récent délaissement que la rédaction de ce mémoire a impliqué. Merci aussi à mes enfants.

---

1. ordre alphabétique

## Table des matières

Introduction	9
Chapitre 1. Perturbation des points paraboliques et champs de vecteurs	11
1. Un champ de vecteurs adapté à une perturbation générale	11
2. Premiers termes du développement en série entière des champ, forme et flot précédents en présence de points fixes multiples	12
3. À propos de l'invariant formel des points paraboliques	16
4. Une normalisation des coordonnées de Fatou d'un point parabolique	17
4.1. Rappel et définitions concernant les points paraboliques	17
4.2. Comparaison asymptotique des coordonnées de Fatou de deux applications proches	18
4.3. La normalisation	19
4.4. Changement de variable et normalisation	20
4.5. Effet sur les formes et champs de vecteurs	23
Chapitre 2. Applications quasiconformes dans les cylindres et recollements	25
5. Majoration de la distance à l'identité d'une application quasiconforme sur le cylindre	25
5.1. Énoncé	25
5.2. Preuve	26
6. Convergence dominée	27
6.1. Énoncé	27
6.2. Preuve	28
7. Application aux recollements	29
7.1. Preuve	30
Chapitre 3. Implosion parabolique	33
8. Points fixes, axes, secteurs	33
9. Surface de redressement du champ de vecteurs et pétales perturbés	35
10. Taux de distorsion	40
11. Coordonnées de Fatou perturbées	40
12. Développement et convergence uniforme des coordonnées de Fatou perturbées, vues dans la surface de redressement	44
13. Normalisation et développements des coordonnées de Fatou perturbées dans les coordonnées de départ	48
13.1. Normalisations	48
13.2. Convergence	51
13.3. Premiers termes du développement	53
13.4. Traversée du désert	54
13.5. Comportement asymptotique de la constante apparaissant dans le développement	56
13.5.1. Un premier développement, dans le cas général	56
13.5.2. Cas où les multiplicateurs sont égaux	58
13.5.3. Cas où les multiplicateurs sont égaux et $\lambda$ réel	58

14.	Applications de cornes perturbées	58
14.1.	Une remarque sur les conjugaisons partielles	59
14.2.	Extension modérée des coordonnées de Fatou perturbée	60
14.3.	Applications de cornes non perturbées	65
14.4.	Convergence	66
15.	Correspondance des normalisations entre pétales perturbés dans le cas d'un itéré	67
16.	Preuves ajournées : comparaison à un champ de vecteurs plus simple	71
16.1.	Le champ de vecteurs	71
16.2.	Construction des bandes et des raccords pour $\omega_n$	73
16.3.	Preuve du lemme 34 ; de la longueur des verticales. . .	77
16.4.	Preuve des lemmes 41 et 44 : calcul des constantes $b_n^\pm$	80
17.	À propos de la constante $\Gamma$	82
17.1.	Définition et existence	82
17.2.	Cas où les multiplicateurs sont égaux	83
17.3.	Exemple	84
Chapitre 4. La taille des disques de Siegel des polynômes quadratiques		87
18.	Esquisse de la preuve	88
19.	Renormalisée parabolique	90
20.	Valeur et développement de $Y$ aux rationnels	94
21.	Preuve du théorème principal à partir du développement asymptotique de $Y$	98
22.	Comparaison de $Y$ en 0 et $1/2$	99
23.	Preuve du développement asymptotique de $Y$	101
23.1.	Arithmétique et développement aux rationnels de la fonction de Brjuno	102
23.1.1.	Le formalisme matriciel	102
23.1.2.	Développement en fraction continue d'un nombre rationnel	104
23.1.3.	Sur la fraction irréductible des perturbations rationnelles	106
23.2.	Partie géométrique	107
23.2.1.	Résumé des résultats de l'implosion parabolique qui seront utilisés	107
23.2.2.	Utilisation de l'implosion parabolique	111
24.	Compléments	117
24.1.	Variantes	117
24.1.1.	La norme $1/2$ -Höldérienne	117
24.1.2.	Extension à $s \in \mathcal{B}$	117
24.1.3.	Pointes montantes ?	118
24.1.4.	Fonction de Brjuno symétrique	119
24.1.5.	Équation fonctionnelle	120
24.2.	Exemples, calculs et applications numériques pour quelques rationnels	121
24.3.	Symétries	125

Conclusion	127
Bibliographie	129





## Introduction

Après que Brjuno eut amélioré le théorème de linéarisation de Siegel<sup>2</sup>, la question se posait de savoir si la condition arithmétique de Brjuno sur le nombre de rotation était optimale. C'est J.C. Yoccoz qui a démontré, non seulement que c'était le cas, mais a aussi que la somme de Brjuno minorait, de façon optimale en un certain sens, le rayon conforme du disque de Siegel<sup>3</sup>. Il s'est également intéressé aux germes quadratiques  $P_\theta(z) = e^{2i\pi\theta}z + z^2$ , qu'on peut peut-être considérer comme la forme la plus simple d'exemple non-linéaire. Yoccoz a transféré les résultats de non-linéarisation aux germes quadratiques, et a presque transféré (voir [BC3]) sa majoration du rayon conforme.

Pour  $\theta$  nombre de Brjuno, soit  $r(\theta)$  le rayon conforme du disque de Siegel de  $P_\theta$  et  $\Phi(\theta)$  la variante due à Yoccoz de la somme de Brjuno. Soit  $Y(\theta) = \log r(\theta) + \Phi(\theta)$ . Yoccoz a d'abord conjecturé que la fonction  $Y$  était bornée. Puis Marmi a conjecturé que  $Y$  était continue, ce qui est plus fort. La conjecture de Marmi-Moussa-Yoccoz est encore plus précise :  $Y$  serait 1/2-Höldérienne. Xavier Buff et moi-même avons démontré le caractère borné dans [BC1] et d'une autre façon dans [BC3], et la continuité dans [BC2]. Le caractère Höldérien reste ouvert. (On pourra consulter le début du chapitre 4, page 87, pour une introduction plus détaillée à la conjecture de Marmi-Moussa-Yoccoz.)

Pour démontrer que la fonction ne peut pas être Höldérienne d'exposant  $> 1/2$ , nous effectuons un développement asymptotique de  $Y$  près des rationnels  $p/q$ . Pour être plus exact, nous développons son prolongement continu aux rationnels, et nous ne prouvons ce développement que pour certaines sous-suites de rationnels tendant vers  $p/q$ . C'est suffisant pour obtenir de nombreuses oscillations de  $Y$ , empêchant une trop grande régularité près de  $p/q$ .

Comme nous perturbons des rationnels, il n'est pas étonnant que nous ayons à utiliser l'implosion parabolique. Alors que pour donner la valeur limite de  $Y$  en  $p/q$ , il avait suffi dans [BC2] d'un petit sous-ensemble de cette théorie<sup>4</sup>, le développement asymptotique effectué dans le présent mémoire fait intervenir une analyse plus fine : les coordonnées de Fatou, les renormalisées paraboliques, étroitement reliées aux applications de cornes, les versions perturbées de ces objets, et leur convergence.

---

2. concernant les points fixes indifférents des applications holomorphes en dimension complexe 1

3. domaine maximal de linéarisation

4. le fait que le point fixe multiple de  $P_{p/q}^q$  explose en un cycle de  $P_\theta$  situé approximativement sur un polygone

Dans le chapitre 1, nous présentons notre champ de vecteurs amélioré  $\chi$ , associé à une application  $f$  dont on souhaite étudier l'itération. Nous motivons cette introduction : en bref le temps-1 de son flot, noté  $g$ , fixe les mêmes points que  $f$ , avec les mêmes multiplicateurs. Nous donnons ensuite un certain nombre de termes du développement en série entière de ce champ et de  $g$ , en un point parabolique de  $f$ , ainsi que de la forme différentielle  $1/\chi$ . Le résidu de cette dernière se trouve être égal au résidu itératif<sup>5</sup> d'Écalle. À partir de cette forme, nous définissons une normalisation des coordonnées de Fatou. Elle n'est pas invariante par conjugaison<sup>6</sup>; nous donnons quelques propriétés de base du comportement par conjugaison et quelques exemples.

Dans le chapitre 2, nous majorons la distance à l'identité de l'uniformisation vers  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  d'un cylindre défini par recollement. C'est fait via la majoration de la distance à l'identité d'une application quasiconforme dont le taux de distorsion tend suffisamment vite vers 1 aux bouts. Cette majoration servira dans le chapitre 3 à transférer les estimées sur le redressement de  $\chi$  vers les coordonnées de Fatou de  $f$ .

Dans le chapitre 3, nous étudions l'implosion parabolique, plus précisément nous étudions le cas<sup>7</sup> d'une famille analytique  $f_\lambda(z) = e^{2i\pi\lambda}z + \dots$ . Nous définissons<sup>8</sup> des versions perturbées des pétales, coordonnées de Fatou et applications de cornes, ainsi qu'une normalisation pour les coordonnées de Fatou perturbées. Nous démontrons des propriétés de convergence vers les objets non perturbés. Enfin, nous effectuons un développement asymptotique quand la perturbation tend vers 0 sous certaines conditions, de certaines constantes apparaissant dans le comportement des coordonnées de Fatou perturbées normalisées près du point fixe 0. Ces constantes interviennent dans le développement de  $Y$  en un rationnel.

Dans le chapitre 4, nous appliquons les développements asymptotiques du chapitre 3 à l'étude de la fonction  $Y$  près des rationnels. Nous donnons ensuite quelques compléments et formulons des questions ouvertes. La plus grande partie de ce chapitre peut être lue indépendamment des autres.

---

5. notre champ de vecteurs n'est pas formel mais analytique

6. une normalisation des coordonnées de Fatou ne peut pas l'être

7. c'est en quelque sorte le cas le plus simple, à nombre de pétales donné

8. L'ordre des sections de ce chapitre ne correspond pas à l'ordre présenté dans ce paragraphe.

## CHAPITRE 1

## Perturbation des points paraboliques et champs de vecteurs

Soit  $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  une application analytique, parabolique en 0 et à  $Q$  pétales attractifs, c.à.d.

$$f(z) = z + Cz^{Q+1} + \mathcal{O}(z^{Q+2})$$

avec  $C \neq 0$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant 0.

Pour comprendre la dynamique d'applications  $f_n$  proches de  $f$ , on compare généralement  $f_n$  au temps-1 du flot du champ de vecteurs  $(f_n(z) - z)/dz$ .

Dans ce chapitre, nous introduisons un champ de vecteurs amélioré, qui permettra une meilleure approximation des coordonnées de Fatou perturbées au chapitre 3. À l'aide de ce champ de vecteurs, nous définirons une normalisation des coordonnées de Fatou pour l'application non perturbée  $f$ . Puis nous en donnerons quelques propriétés de base.

### 1. Un champ de vecteurs adapté à une perturbation générale

**Rappel :** quand on perturbe  $f$ , en la remplaçant par une application  $f_n$  proche, la nouvelle application possède  $Q + 1$  points fixes proches de 0, en général distincts.

**Motivation :** Près d'un point fixe parabolique, le déplacement  $f(z) - z$  est négligeable devant la distance au point fixe. Aussi le champ de vecteurs  $(f(z) - z)/dz$  n'a pas le temps de varier sensiblement entre le temps  $t = 0$  et  $t = 1$  d'une de ses courbes intégrales. C'est pourquoi le temps-1 de son flot,  $g$ , est une bonne approximation de la dynamique :  $(g(z) - z)/(f(z) - z) \rightarrow 1$  quand  $z \rightarrow 0$ . Après une perturbation,  $(g_n(z) - z)/(f_n(z) - z)$  reste proche de 1. Dans les coordonnées qui redressent le champ de vecteurs, l'application  $g$  devient la translation de  $z \mapsto z + 1$  et  $f$  devient une application proche de cette translation. L'heuristique est la suivante : *le redressement du champ de vecteurs fournit une coordonnée où il est plus facile d'étudier  $f$* . Par exemple, il facilite la définition de cylindres fondamentaux.

Pour l'utilisation que nous voulons en faire au chapitre 3, le défaut du champ de vecteurs  $(f_n(z) - z)/dz$  est que le temps-1 de son flot,  $g_n$ , a des multiplicateurs certes proches mais pas identiques à ceux de  $f_n$  aux points fixes (ou de façon équivalente,  $(g_n(z) - z)/(f_n(z) - z) \not\rightarrow 1$  quand  $z \rightarrow$  un des points fixes). En effet, en un point fixe  $z$  de  $f_n$ , la valeur propre du champ est égale à  $f'_n(z) - 1$ . Donc le multiplicateur de  $g_n$  en  $z$  est  $g'_n(z) = e^{f'_n(z) - 1}$ , alors que celui de  $f_n$  est  $f'_n(z)$ . Pour corriger cela, il

faut que la valeur propre prenne une des valeurs de  $\log f'_n(z)$ . Cela suggère l'astuce suivante : corriger  $(f_n(z) - z)/dz$  en le multipliant par  $\frac{\log f'_n(z)}{f'_n(z)-1}$ .

Le caractère multivalué du log ne pose pas de problème car notre étude est *locale* : on se place dans un voisinage  $V$  de 0 sur lequel  $\sup|f' - 1| < 1$  puis on suppose  $f_n$  suffisamment proche de  $f$  pour que  $\sup|f'_n - 1| < 1$ , ce qui permet de prendre la *branche principale du logarithme*. D'autre part, l'expression  $\frac{\log f'_n(z)}{f'_n(z)-1}$  se prolonge analytiquement aux points où  $f'_n(z) = 1$ , y prenant la valeur 1.

**Présentation du champ de vecteurs amélioré** : Il sera plus pratique d'utiliser des formes différentielles méromorphes  $\omega = \omega(z)dz$  au lieu de champs de vecteurs holomorphes  $v = v(z)/dz$ . Rappelons qu'en dimension complexe 1, on passe de l'un à l'autre par une simple inversion. Soient  $\omega$  et  $\omega_n$  les formes différentielles méromorphes définies par

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{f'(z) - 1}{(f(z) - z) \log f'(z)} dz + r(z) dz \\ \omega_n &= \frac{f'_n(z) - 1}{(f_n(z) - z) \log f'_n(z)} dz + r_n(z) dz\end{aligned}$$

où  $r_n(z)$  n'a aucun pôle dans  $V$  et converge uniformément vers  $r(z)$  sur  $V$ . Soit  $g_n$  le temps-1 du flot de  $1/\omega_n$ , et  $g$  celui de  $1/\omega$ . Sous les conditions ci-dessus,  $1/\omega$  et  $1/\omega_n$  n'ont pas de zéro, et il existe un voisinage de l'origine  $V' \subset V$  où toutes les fonctions  $g_n$  et  $g$  sont définies (à valeurs dans  $V$ ).

**Utilité** : comme nous le verrons au chapitre 3, le fait que  $f_n$  et  $g_n$  soient proches et aient le même multiplicateur aux points fixes impliquera que leurs coordonnées de Fatou seront proches.

## 2. Premiers termes du développement en série entière des champ, forme et flot précédents en présence de points fixes multiples

**Remarque.** Dans tout ce chapitre, on rencontre des fonctions ayant des points fixes paraboliques à  $Q$  pétales attractifs, des champs de vecteurs et des formes différentielles et des coordonnées de Fatou. Nous allons étudier leurs développements jusqu'à l'ordre  $3Q$  inclus pour les fonctions,  $3Q$  inclus pour les champs de vecteurs,  $Q - 2$  inclus pour les formes différentielles et  $Q - 1$  inclus pour les coordonnées de Fatou. Ces développements se correspondront les uns aux autres par des formules que nous donnerons. Dans les autres chapitres, nous n'aurons besoin que des développements à l'ordre  $2Q + 1$  inclus pour les fonctions,  $2Q + 1$  inclus pour les champs

de vecteurs,  $-1$  inclus pour les formes (c'est-à-dire la partie polaire) et  $0$  inclus pour les coordonnées de Fatou.

**Lemme 1.** Les parties polaires en  $z_0$  de  $1/(f(z) - z)$  et  $\frac{f'(z)-1}{(f(z)-z)\log f'(z)}$  ne diffèrent que par leur terme en  $1/z$  :

$$\frac{f'(z)-1}{(f(z)-z)\log f'(z)} = \frac{1}{f(z)-z} + \frac{Q+1}{2z} + \mathcal{O}(1).$$

**Rappel :** Soit un champ de vecteurs holomorphe qui s'annule en  $z_0$  et  $g$  le temps-1 de son flot. Alors,  $g$  fixe  $z_0$  et le coefficient de  $z^n$  de sa série entière en  $z_0$  dépend uniquement des coefficients en  $z, \dots, z^n$  dans le développement en série entière en  $z_0$  du champ de vecteurs.

**Lemme 2.** Soit  $\chi(z)/dz$  un champ de vecteurs ayant en  $0$  un zéro d'ordre  $Q+1 \geq 2$ , et  $g$  le temps-1 de son flot. Alors

$$(1) \quad g(z) = z + \chi(z) + \frac{\chi(z)\chi'(z)}{2} + \mathcal{O}(z^{3Q+1})$$

**Preuve.** Notons  $F(z, t)$  son flot, vérifiant  $\frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = \chi(F(z, t))$  et  $F(z, 0) = z$ . Notons  $F(z, t) = z + d(z, t)$  avec  $d(z, 0) = 0$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} d(z, t) = \chi(z + d(z, t)).$$

La fonction  $d$  est analytique en  $(z, t)$ . Or  $\chi(0) = 0$  donc  $d(0, t) = 0$  donc  $d(z, t)$  est multiple de  $z$ . Or  $\chi$  a un zéro d'ordre  $Q+1$  en l'origine, donc  $\frac{\partial}{\partial t} d(z, t)$  est multiple de  $z^{Q+1}$ , et donc  $d(z, t)$  également. Écrivons maintenant la formule de Taylor :

$$\frac{\partial}{\partial t} d(z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\chi^{(n)}(z)d(z, t)^n}{n!}$$

dont les premiers termes donnent<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} d(z, t) = \chi(z) + \chi'(z)d(z, t) + \mathcal{O}(z^{3Q+1}).$$

On en déduit que

$$d(z, t) = \chi(z)t + \frac{\chi(z)\chi'(z)t^2}{2} + \mathcal{O}(z^{3Q+1})$$

d'où la formule (1), puisque  $g(z) = F(z, 1) = z + d(z, 1)$ .<sup>2 3</sup> □

1.  $\mathcal{O}(z^k)$  signifiant  $z^k$  multiplié par une fonction analytique de  $(z, t)$

2. On peut couper plus loin ; par exemple

$\frac{\partial}{\partial t} d = \chi + \chi'd + \frac{1}{2}\chi''d^2 + \mathcal{O}(z^{4Q+1})$ , d'où

$d = \chi t + \chi\chi'\frac{t^2}{2} + (\chi'^2\chi + \chi''\chi^2)\frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(z^{4Q+1})$ , d'où

$g(z) = z + \chi(z) + \frac{1}{2}\chi(z)\chi'(z) + \frac{1}{6}(\chi(z)^2\chi'(z) + \chi(z)''\chi(z)^2) + \mathcal{O}(z^{4Q+1})$ .

3. En notant  $d(z) = g(z) - z$ , la formule précédente, exprimant le développement de  $g$  en fonction de celui de  $\chi$ , s'inverse ainsi :  $\chi(z) = d - \frac{1}{2}dd' + \frac{1}{3}dd'^2 + \frac{1}{12}d^2d'' + \mathcal{O}(z^{4Q+1})$ .

**Lemme 3.** Soit  $Q \geq 1$  et soient deux fonctions holomorphes  $\chi$  et  $g$  telles que  $\chi(z)$  et  $g(z) - z$  ont en 0 un zéro d'ordre  $Q+1$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(2) \quad g(z) = z + \chi(z) + \frac{\chi(z)\chi'(z)}{2} + \mathcal{O}(z^{3Q+1})$$

$$(3) \quad \chi(z) = (g(z) - z) \left(1 - \frac{g'(z) - 1}{2}\right) + \mathcal{O}(z^{3Q+1})$$

$$(4) \quad \frac{1}{\chi(z)} = \frac{1}{g(z) - z} \left(1 + \frac{g'(z) - 1}{2}\right) + \mathcal{O}(z^{Q-1})$$

$$(5) \quad \chi(z) = (g(z) - z) \frac{\log g'(z)}{g'(z) - 1} + \mathcal{O}(z^{3Q+1})$$

$$(6) \quad \frac{1}{\chi(z)} = \frac{g'(z) - 1}{(g(z) - z) \log g'(z)} + \mathcal{O}(z^{Q-1})$$

$$(7) \quad \frac{1}{g(z) - z} = \frac{1}{\chi(z)} - \frac{\chi'(z)}{2\chi(z)} + \mathcal{O}(z^{Q-1})$$

elles impliquent

$$(8) \quad \frac{1}{\chi(z)} = \frac{1}{g(z) - z} + \frac{Q+1}{2z} + \mathcal{O}(1)$$

**Preuve.** Nous montrerons (2)  $\implies$  (3), les autres cas étant similaires.  $\chi(z) = (g(z) - z)/(1 + \chi'(z)/2) + \mathcal{O}(z^{3Q+1})$ , donc

$$(9) \quad \chi(z) = (g(z) - z)(1 - \chi'(z)/2) + \mathcal{O}(z^{3Q+1})$$

car  $\chi'(z)^2(g(z) - z) = \mathcal{O}(z^{3Q+1})$ . De là,  $\chi(z) = (g(z) - z) + \mathcal{O}(z^{2Q+1})$  d'où  $\chi'(z) = g'(z) - 1 + \mathcal{O}(z^{2Q})$  d'où la formule (3) en réinjectant dans (9).  $\square$

**Corollaire 4.** Soit  $Q+1$  la multiplicité<sup>4</sup> d'un point fixe  $z_0$  d'une application holomorphe  $f$ . Soit  $\chi(z)/dz$  un champ de vecteurs et  $g$  le temps-1 de son flot. Si  $Q \geq 1$  (<sup>5</sup>) alors

- (1) Pour le champ de vecteurs  $(f(z) - z)/dz$ , les fonctions  $g$  et  $f$  coïncident jusqu'à l'ordre  $2Q$  inclus.
- (2) Pour le champ de vecteurs  $\frac{(f(z) - z) \log f'(z)}{f'(z) - 1} / dz$ , les fonctions  $g$  et  $f$  coïncident jusqu'à l'ordre  $3Q$  inclus.

4. Si  $f'(z_0) \neq 1$  alors  $Q = 0$ , sinon  $Q$  est le nombre de pétales attractifs, égal au nombre de pétales répulsifs

5. Si  $Q = 0$ , et si  $f'(0)$  est suffisamment proche de 1, pour le premier champ de vecteurs l'ordre du dernier terme coïncidant est 0, c'est-à-dire effectivement  $2Q$ ; par contre pour le deuxième, il vaut généralement 1, et non pas  $3Q$ . En effet quand  $a \neq 0$ , le champ de vecteurs  $(az + bz^2 + \dots)/dz$  a pour flot  $F(z, t) = e^{at}z + \frac{b}{a}(e^{2at} - e^{at})z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ . En notant  $f(z) = az + \beta z^2 + \dots$ , on obtient dans le premier cas l'expression  $g(z) = e^{\alpha-1}z + \mathcal{O}(z^2)$  et  $g(z) = az + \left(\frac{2(\alpha-1)}{\log \alpha} - \alpha\right)\beta z^2$  dans le deuxième.

**Preuve.** Pour le point (2), cela suit immédiatement des lemmes 2 page 13 et 3 page ci-contre. Pour le point (1), la version simplifiée suivante de l'équation (1) du lemme 2 donne le résultat :  $g(z) = z + \chi(z) + \mathcal{O}(z^{2Q+1})$ .  $\square$

**Remarque.** Dans ce raisonnement, le champ de vecteurs du point (2) du corollaire précédent peut être remplacé par  $(f(z) - z)(1 - \frac{1}{2}(f'(z) - z))/dz$ , ou par  $(f(z) - z)/(1 + \frac{1}{2}(f'(z) - 1))dz$ , ou tout ce qui a le même développement jusqu'à l'ordre  $z^{3Q}$  inclus.

**Parties polaires des formes associées.** Notons que les deux champs de vecteurs  $\chi(z)/dz$  proposés dans le corollaire précédent ont un ordre d'annulation égal à  $Q+1$  en  $z_0$ . Donc la partie polaire des formes associées  $dz/\chi(z)$  s'expriment par des formules rationnelles en fonction des coefficients du développement de  $\chi$  jusqu'à l'ordre  $2Q+1$  inclus. Par conséquent :

**Lemme 5.** Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe,  $\omega(z)dz$  une forme différentielle définie sur  $U$  et  $g$  le temps-1 de son flot. Soit  $z_0$  un point fixe de  $f$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\omega(z)$  et  $\frac{f'(z)-1}{(f(z)-z)\log f'(z)}$  ont tous les deux un pôle d'ordre  $Q+1$  en  $z_0$ , et leurs parties polaires sont égales,
- (2)  $g$  et  $f$  fixent tous deux  $z_0$  avec multiplicité  $Q+1$  et  $y$  ont le même développement jusqu'à l'ordre  $2Q+1$  inclus.

**Remarque.** D'après le lemme 1 page 13, le point (1) du lemme 5 est équivalent à " $\omega(z)$  et  $\frac{1}{f(z)-z} + \frac{Q+1}{2z}$  ont tous les deux un pôle d'ordre  $Q+1$  en  $z_0$ , et leurs parties polaires sont égales".

**Résumons :** étant donné une forme différentielle  $\omega$ , jusqu'à quel ordre (au moins) les développements en  $z_0$  du temps-1 de son flot et de  $f$  coïncident-ils quand  $Q \geq 1$  ?

- Pour la forme  $\frac{dz}{f(z)-z}$ , jusqu'à l'ordre  $2Q$  inclus.
- Pour la forme  $\left(\frac{1}{f(z)-z} + \frac{Q+1}{2z}\right)dz$ , jusqu'à l'ordre  $2Q+1$  inclus.
- Pour la forme  $\frac{f'(z)-1}{(f(z)-z)\log f'(z)}dz$ , ainsi que la forme  $\frac{1 + \frac{f'(z)-1}{2}}{f(z)-z}dz$  et la forme  $\frac{1}{(f(z)-z)\left(1 - \frac{f'(z)-1}{2}\right)}dz$ , jusqu'à l'ordre  $3Q$  inclus.

Mais seule la forme  $\frac{f'_n(z)-1}{(f_n(z)-z)\log f'_n(z)}dz$  est garantie de posséder les bons multiplicateurs aux points fixes pour  $f_n$  proche de  $f$ .



### 3. À propos de l'invariant formel des points paraboliques

On trouvera dans [M] une agréable introduction à l'indice holomorphe. Soit  $z_0$  point fixe multiple d'une application holomorphe  $f$  et  $Q + 1$  sa multiplicité. L'invariant formel  $I$  de  $f$  en  $z_0$  peut-être défini comme étant son indice holomorphe, c'est-à-dire le résidu de  $\frac{1}{z-f(z)}$  en  $z_0$ . Il se trouve que c'est un invariant de conjugaison (voir [M], §12).<sup>6</sup> Il se calcule par une formule rationnelle à partir du développement en série entière de  $f$  jusqu'à l'ordre  $2Q + 1$ . Le résidu itératif de  $f$  noté résit peut être défini par la formule

$$\text{résit} = \frac{Q+1}{2} - I.$$

il a été introduit par Écalle (voir [BE]). On définit également le nombre complexe

$$(10) \quad \gamma = \frac{\text{résit}}{Q} = \frac{\frac{Q+1}{2} - I}{Q}.$$

**Lemme 6.** Soit un champ de vecteurs  $\chi(z)/dz$  ayant en  $z_0$  un zéro multiple. Soit  $g$  le temps-1 de son flot. Alors le résidu itératif de  $g$  en  $z_0$  est égal au résidu en  $z_0$  de  $1/\chi$ .

**Preuve.** C'est une conséquence immédiate de l'équation (6), lemme 3 page 14.  $\square$

**Lemme 7.** En un point fixe multiple de  $f$ , le résidu de  $\frac{f'(z)-1}{(f(z)-z)\log f'(z)}$  est égal au résidu itératif de  $f$ .

**Preuve.** Corollaire du lemme 1 page 13.  $\square$

**Remarque.** Par conséquent,  $f$  et le temps-1 du flot du champ de vecteurs  $\chi(z)/dz$  avec  $\chi(z) = \frac{f'(z)-1}{(f(z)-z)\log f'(z)}$  possèdent le même invariant formel. Notons que ce n'est pas le cas du temps-1 du flot de  $(f(z)-z)/dz$ , puisque son résidu en 0 est différent.

Pour démontrer le lemme 7, on peut aussi procéder par perturbation. Choisissons une suite  $f_n$  qui tend vers  $f$  dans un voisinage de 0 et dont les points fixes ont multiplicité 1 (par exemple  $f_n = f + \frac{1}{n}$  convient, voir [M] §12). Alors,  $f_n$  a  $Q + 1$  points fixes  $z_0, \dots, z_Q$  de multiplicateurs  $m_0, \dots, m_Q$  (qui tendent vers 1 quand

6. Il s'appelle l'invariant formel car c'est également l'unique invariant de conjugaison dans le royaume des séries formelles : en supposant  $z_0 = 0$  (on s'y ramène par conjugaison),  $\exists I \in \mathbb{C}$ , tel que  $f$  est formellement conjuguée à  $z + z^{Q+1} + Iz^{2Q+1}$ , où  $Q + 1$  est la multiplicité du point fixe 0 de  $f$ , (voir [M], 10-d).

$n \rightarrow +\infty$ ) et le résidu de  $\frac{1}{z-f(z)}$  en  $z_j$  est égal à  $\frac{1}{1-m_j}$ . D'où<sup>7</sup>

$$\sum_{j=0}^Q \frac{1}{1-m_j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I.$$

De même, les seuls pôles de  $\frac{f'_n(z)-1}{(f'_n(z)-z)\log f_n(z)}$  sont les  $z_j$  et le résidu associé est égal à  $\frac{1}{\log m_j}$ . D'où

$$\sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \rightarrow \text{résidu} \left( \frac{f'(z)-1}{(f(z)-z)\log f(z)} \right).$$

Or

$$\frac{1}{\log m_j} = \frac{1}{m_j-1} + \frac{1}{2} + o(1)$$

d'où

$$\sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \rightarrow -I + \frac{Q+1}{2} = \text{résit.}$$

En passant, nous venons de voir que

**Lemme 8.** Si  $f_n \rightarrow f$  dans un voisinage de 0 et si les  $Q+1$  points fixes de  $f_n$  proches de 0 ont multiplicateur  $m_j \neq 1$ , alors

$$\sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{résit} \quad (= Q\gamma).$$

#### 4. Une normalisation des coordonnées de Fatou d'un point parabolique

**4.1. Rappel et définitions concernant les points paraboliques.** Les propositions de la présente section 4.1 sont classiques, nous ne mentionnerons pas leur preuve.

La terminologie qui suit n'est probablement pas standard.

**Définition 9** ( $\alpha$ -pétales). Pour  $\alpha < \pi$ , nous appellerons  $\alpha$ -pétale attractif d'un point parabolique de  $f$  tout pétale  $\mathcal{P}$  inclus dans le bassin associé à un axe attractif de  $f$  sur lequel il existe une coordonnée de Fatou envoyant  $\mathcal{P}$  sur un secteur de la forme  $z_0 + ]0, +\infty[ \cdot \exp(i) - \alpha, \alpha]$ , c'est-à-dire dont la bissectrice est d'argument = 0 et l'angle d'ouverture =  $2\alpha$ .

Nous appellerons  $\alpha$ -pétale répulsif tout  $\alpha$ -pétale attractif pour une branche de  $f^{-1}$ .<sup>8</sup>

7. en intégrant  $dz/2i\pi(z-f_n(z))$  sur un petit cercle fixe centré en 0, ce qui donne le membre de gauche par la formule des résidus, et tend vers le membre de droite.

8. Les coordonnées de Fatou de  $f^{-1}$  sont les  $-\phi$  où  $\phi$  parcourt l'ensemble des coordonnées de Fatou de  $f$ . Donc ces dernières envoient un  $\alpha$ -pétale répulsif sur un secteur de la forme  $z_0 - ]0, +\infty[ \cdot \exp(i) - \alpha, \alpha]$ , dont la bissectrice est d'argument  $\pi$ .

**Proposition 10.** *Pour tout  $\alpha < \pi$ , pour tout  $f$  possédant un point parabolique, pour tout axe attractif ou répulsif de  $f$ , il existe un  $\alpha$ -pétale pour cet axe.<sup>9</sup>*

**Proposition 11.** *Soit  $\mathcal{P}$  un  $\alpha$ -pétale de  $f(z) = z + Cz^{Q+1} + \mathcal{O}(z^{Q+1})$  et  $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  une coordonnée de Fatou. Alors*

$$(11) \quad \Phi(z) \sim \frac{-1}{QCz^Q}$$

quand  $z \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{P}$ , et

$$(12) \quad \Phi'(z) \sim \frac{1}{Cz^{Q+1}}.$$

**4.2. Comparaison asymptotique des coordonnées de Fatou de deux applications proches.** Soit

$$f(z) = z + Cz^{Q+1} + \mathcal{O}(z^{Q+2})$$

avec  $Q \geq 1$ . Soit  $g$  une autre application analytique définie près de 0. Supposons que

$$f(z) - g(z) = \mathcal{O}(z^n)$$

pour un certain  $n > Q + 1$ . Alors  $f$  et  $g$  possèdent les mêmes axes attractifs et répulsifs, et

**Lemme 12.** *Pour tout  $\alpha < \pi$ , pour  $\alpha$ -pétale  $\mathcal{P}_f$  de  $f$  dont nous noterons  $\Phi_f$  une coordonnée de Fatou, il existe  $\varepsilon > 0$  et une coordonnée de Fatou  $\Phi_g$  pour  $g$ , définie sur  $\mathcal{P} \cap B(0, \varepsilon)$ , et satisfaisant*

$$\Phi_g(z) - \Phi_f(z) = \mathcal{O}(z^{n-(2Q+1)})$$

si  $n \neq 2Q + 1$  et

$$\Phi_g(z) - \Phi_f(z) = \mathcal{O}(\log z)$$

si  $n = 2Q + 1$ .

**Preuve.** Nous faisons la preuve dans le cas attractif, le cas répulsif étant analogue. Par définition,  $\Phi_f \circ f \circ \Phi_f^{-1}(z) = T_1(z) = z + 1$  sur l'ensemble  $\Phi_f(\mathcal{P}_f)$ , qui est un secteur. Pour tout  $z$  dans ce secteur, la boule  $B(z + 1, \sin \alpha)$  est incluse dans le même secteur. D'après la proposition 11 on en déduit qu' $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\forall z \in \mathcal{P}_f$ ,  $B(f(z), \varepsilon|z|^{Q+1}) \subset \mathcal{P}_f$ . En particulier, puisque  $n > Q + 1$ , le segment  $[f(z), g(z)]$  est contenu dans  $\mathcal{P}_f$ . Soit  $G = \Phi_f \circ g \circ \Phi_f^{-1}$ . De  $\Phi_f'(z) \sim 1/Cz^{Q+1}$  et  $n > Q + 1$  on déduit  $\Phi_f \circ g - \Phi_f \circ f = \mathcal{O}(z^{n-(Q+1)})$  en intégrant  $\Phi_f'$  sur le segment  $[f(z), g(z)]$ . De  $\Phi_f(z) \sim -1/QCz^Q$  on déduit

$$G(w) - T_1(w) = (\Phi_f \circ g - \Phi_f \circ f) \circ \Phi_f^{-1}(w) = \mathcal{O}(w^{\frac{Q+1-n}{Q}}).$$

<sup>9</sup>. En fait on peut faire mieux : il existe des pétales  $\mathcal{P}$  dont l'image en coordonnées de Fatou est la réunion d'un demi-plan supérieur, d'un demi-plan inférieur et d'un demi-plan droit ou gauche.

Maintenant, il est standard (voir par exemple [CG], section II.5) d'en conclure, avec  $\alpha < \pi$ , que  $G$  possède une coordonnée de Fatou  $\Phi_G$  sur un voisinage de  $\infty$  dans le secteur  $\Phi_f(\mathcal{P}_f)$  satisfaisant  $\Phi_G(w) - w = \mathcal{O}(w^{1+\frac{Q+1-n}{Q}})$  si  $n \neq 2Q+1$  ou  $\mathcal{O}(\log w)$  si  $n = 2Q+1$ . En posant  $\Phi_g = \Phi_G \circ \Phi_f$ , on obtient une coordonnée de Fatou pour  $g$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathcal{P}_f$ , satisfaisant  $\Phi_g(z) - \Phi_f(z) = \mathcal{O}(z^{n-(2Q+1)})$  ou  $\mathcal{O}(\log z)$ .  $\square$

**Remarque.** Ce développement limité implique qu'étant donné  $\alpha' < \alpha$ , tout  $\alpha$ -pétale de  $f$  contient un  $\alpha'$ -pétale de  $g$ .

**4.3. La normalisation.** Soit  $f$  analytique ayant en 0 un point fixe multiple :

$$f(z) = z + Cz^{Q+1} + \mathcal{O}(z^{Q+2})$$

avec  $C \in \mathbb{C}^*$  et  $Q \geq 1$  le nombre de pétales attractifs.

Considérons maintenant la 1-forme

$$\omega = \frac{f'(z) - 1}{(f(z) - z) \log f'(z)} dz$$

et soit  $g$  le temps-1 du flot du champ de vecteurs  $1/\omega$ . D'après la section 2,

$$g(z) - f(z) = \mathcal{O}(z^{3Q+1}).$$

Donc, d'après le lemme 12 page précédente :

**Proposition 13.** *Sur tout  $\alpha$ -pétale avec  $\alpha < \pi$ , il existe près de 0 une primitive  $\Phi_g$  de  $\omega$  telle que*

$$\Phi_f(z) - \Phi_g(z) = \mathcal{O}(z^Q).$$

**Rappel :** Les axes répulsifs de  $f$  sont les demi-droites solution de  $QCz^Q \in \mathbb{R}_+$ , les axes attractifs sont les demi-droites solution de  $QCz^Q \in \mathbb{R}_-$ . Toute orbite  $z_{n+1} = f(z_n)$  qui tend vers 0 sans jamais valoir 0 le fait tangentiellement à l'un des axes attractifs et l'on a  $\frac{-1}{QCz_n^Q} \sim n$ .

Les coordonnées de Fatou  $\Phi_f$  associées à un pétale donné sont uniques à une constante additive près. Nous en isolons maintenant une : notons

$$(13) \quad \omega(z) = \frac{a_{-(Q+1)}}{z^{Q+1}} + \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

Comme  $\Phi_g$  est une primitive de  $\omega$ , cela implique

$$\Phi_g(z) = \frac{-a_{-(Q+1)}}{Qz^Q} + \dots + \frac{-a_{-2}}{z} + a_{-1} \log z + \text{cst} + a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \dots$$

pour une certaine branche de  $\log z$  sur  $\mathcal{P}$  et donc

$$\Phi_f(z) = \frac{-a_{-(Q+1)}}{Qz^Q} + \dots + \frac{-a_{-2}}{z} + a_{-1} \log z + \text{cst} + a_0 z + \dots + a_{Q-2} \frac{z^{Q-1}}{Q-1} + \mathcal{O}(z^Q).$$

Ce que nous reformulons en modifiant le terme logarithmique :

**Proposition 14.** *Pour tout  $\alpha$ -pétale  $\mathcal{P}$  avec  $\alpha < \pi$  et toute coordonnée de Fatou  $\Phi_f$  sur  $\mathcal{P}$ , on a*

$$(14) \quad \begin{aligned} \Phi_f(z) = & \frac{-a_{-(Q+1)}}{Qz^Q} + \dots + \frac{-a_{-3}}{2z^2} + \frac{-a_{-2}}{z} \\ & + \frac{a_{-1}}{Q} \log \pm QCz^Q \\ & + b \\ & + a_0z + a_1 \frac{z^2}{2} + \dots + a_{Q-2} \frac{z^{Q-1}}{Q-1} + \mathcal{O}(z^Q) \end{aligned}$$

pour l'unique branche de  $\log(\pm QCz^Q)$  définie sur  $\mathcal{P}$  et réelle quand  $z$  est sur l'axe de  $\mathcal{P}$ , avec  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  les coefficients du développement en série de Laurent de  $\omega(z) = \frac{f'(z)-1}{(f(z)-z) \log f'(z)}$ . La constante  $b$  est une constante additive libre.

Comme  $a_{-1} = \text{résit} = Q\gamma$  et  $a_{-Q-1} = 1/C$ , on pourra préférer la présentation suivante, qui fait apparaître un lien entre le terme dominant et notre choix de terme logarithmique :

**Complément.** *Pour la même constante  $b$ ,*

$$\begin{aligned} \Phi_f(z) = & -\frac{1}{QCz^Q} - \frac{-a_Q}{(Q-1)z^{Q-1}} - \dots - \frac{a_{-3}}{2z^2} - \frac{a_{-2}}{z} - \gamma \log \frac{\pm 1}{QCz^Q} \\ & + b \\ & + a_0z + a_1 \frac{z^2}{2} + \dots + a_{Q-2} \frac{z^{Q-1}}{Q-1} + \mathcal{O}(z^Q) \end{aligned}$$

Rappelons que  $\Phi_f$  n'a en général pas de prolongement analytique en 0 : il est connu qu'elle a un développement à tout ordre (sur un  $\alpha$ -pétale) mais que la série entière correspondante diverge en général.

**Définition 15.** *Notre normalisation consiste à poser*

$$b = 0.$$

On notera  $\Phi_f^{\text{nor}}$  la coordonnée de Fatou ainsi normalisée.

Cette normalisation ne dépend pas du choix de la forme du pétale, seulement de son axe.

**4.4. Changement de variable et normalisation.** Dans cette section, la dynamique  $f$  est une fonction holomorphe ayant en 0 un point fixe multiple et le changement de variable  $\phi$  une fonction holomorphe envoyant 0 sur 0 avec  $\phi'(0) \neq 0$ .

**Rappel :** Les coordonnées de Fatou sont uniques à post-composition près par une translation : si  $\mathcal{P}$  est un pétale et  $\Phi_1, \Phi_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  sont deux coordonnées de Fatou, alors  $\Phi_2 = T_\sigma \circ \Phi_1$  pour un certain  $\sigma \in \mathbb{C}$ . Cela implique une forme d'invariance : si  $\{\sigma + \Phi\}_{\sigma \in \mathbb{C}}$  est l'ensemble des coordonnées de Fatou d'un pétale  $\mathcal{P}$  de  $f$ , alors sur le pétale  $\phi(\mathcal{P})$  de  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$  c'est  $\{\sigma + \Phi \circ \phi^{-1}\}_{\sigma \in \mathbb{C}}$ .

L'invariance des coordonnées de Fatou mentionnée ci-dessus implique :

$$(15) \quad \Phi_{\phi \circ f \circ \phi^{-1}}^{\text{nor}} = \tau + \Phi_f^{\text{nor}} \circ \phi^{-1}$$

sur le pétale  $\phi(\mathcal{P})$  de  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ , pour une constante  $\tau$ . Cette constante dépend de  $\phi$  mais pas de  $\mathcal{P}$  ni de son axe. En effet,  $\tau$  peut être explicitement calculée en fonction de  $a_{-(Q+1)}, \dots, a_{-2}$  dans

$$\omega(z) = \frac{a_{-(Q+1)}}{z^{Q+1}} + \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

et de  $b_1, \dots, b_{Q+1}$  dans

$$\phi(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

en utilisant le développement (14) page ci-contre. La recette est la suivante : prendre la partie polaire de la primitive de  $\omega$  en excluant le terme logarithmique. Y substituer  $\phi^{-1}(z)$  à  $z$ . Développer en série de Laurent. Alors  $\tau$  est l'opposé du terme constant.

Par exemple :

$$\begin{aligned} Q = 1, \quad \tau &= a_{-2} \frac{b_2}{b_1} \\ Q = 2, \quad \tau &= a_{-2} \frac{b_2}{b_1} - \frac{1}{2} a_{-3} \frac{b_2^2}{b_1^2} + a_{-3} \frac{b_3}{b_1} \\ Q = 3, \quad \tau &= a_{-2} \frac{b_2}{b_1} - \frac{1}{2} a_{-3} \frac{b_2^2}{b_1^2} + a_{-3} \frac{b_3}{b_1} + \frac{1}{3} a_{-4} \frac{b_2^3}{b_1^3} - a_{-4} \frac{b_2 b_3}{b_1^2} + a_{-4} \frac{b_4}{b_1} \\ Q = 4, \quad \tau &= a_{-2} \frac{b_2}{b_1} - \frac{1}{2} a_{-3} \frac{b_2^2}{b_1^2} + a_{-3} \frac{b_3}{b_1} + \frac{1}{3} a_{-4} \frac{b_2^3}{b_1^3} - a_{-4} \frac{b_2 b_3}{b_1^2} + a_{-4} \frac{b_4}{b_1} \\ &\quad - \frac{1}{4} a_{-5} \frac{b_2^4}{b_1^4} + a_{-5} \frac{b_2^2 b_3}{b_1^3} - a_{-5} \frac{b_2 b_4}{b_1^2} - a_{-5} \frac{1}{2} \frac{b_3^2}{b_1^2} + a_{-5} \frac{b_5}{b_1} \end{aligned}$$

Les coefficients de  $\omega$  se déduisant de ceux de  $f$ , on a des formules analogues impliquant les coefficients de  $f$  en  $z^{Q+1}, \dots, z^{2Q}$  à la place de ceux de  $\omega$ .

**À noter :**

- Un changement de variable modifie la normalisation par une quantité identique pour tous les pétales.
- Si  $\phi$  est linéaire, alors  $\tau = 0$ . Autrement dit la normalisation est "invariante" par changement de variables linéaires.

- Si  $\phi = f$ , alors  $\tau = 1$ . C'est la traduction de la propriété  $\Phi_f^{\text{nor}} = 1 + \Phi_f^{\text{nor}} \circ f^{-1}$  des coordonnées de Fatou.

**Aspect différentiel :** Supposons maintenant que  $\phi$  est proche de l'identité Id. Plus précisément, on s'intéresse à la différentielle en Id de l'application

$$\begin{cases} \mathcal{H}^* & \rightarrow \mathbb{C} \\ \phi & \mapsto \tau = \tau(f, \phi) \end{cases}$$

à  $f$  fixé, où  $\mathcal{H}^*$  est l'ensemble des applications holomorphes définies sur  $B(0, r)$ , fixant 0, de dérivée non nulle en 0, et  $r > 0$  n'importe quelle constante. Soit  $\nu$  un élément de l'espace tangent en Id à  $\mathcal{H}^*$  :  $\nu = \nu(z)/dz$  est un champ de vecteurs holomorphe,  $\nu(0) = 0$ ,  $\phi(z) = z + \varepsilon \nu(z) + o(\varepsilon)$ . Alors  $\tau(f, \phi) = 0 + \varepsilon T + o(\varepsilon)$  où  $T$  est le terme en  $z^0$  du développement en série de Laurent à l'origine du produit  $\nu \tilde{\omega}$ , où  $\tilde{\omega}$  est égal à  $\omega$  privé de son terme en  $1/z$ .

### Application de cornes normalisée

Soient  $\mathcal{P}_+$  répulsif et  $\mathcal{P}_-$  attractif deux  $\alpha$ -pétales adjacents avec  $\alpha > \pi/2$ . Alors (d'après l'équivalent (11) proposition 11 page 18) ces pétales ont une intersection non vide qui adhère à 0. En utilisant le développement des coordonnées de Fatou et notre normalisation, on obtient : si  $\mathcal{P}_-$  suit immédiatement  $\mathcal{P}_+$  dans l'ordre trigonométrique alors <sup>10</sup>

$$\Phi_{\mathcal{P}_+}^{\text{nor}}(z) = \Phi_{\mathcal{P}_-}^{\text{nor}}(z) + i\pi\gamma + o(1)$$

quand  $z \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{P}_+ \cap \mathcal{P}_-$ , et si c'est  $\mathcal{P}_+$  qui suit  $\mathcal{P}_-$  alors

$$\Phi_{\mathcal{P}_+}^{\text{nor}}(z) = \Phi_{\mathcal{P}_-}^{\text{nor}}(z) - i\pi\gamma + o(1).$$

On définit couramment l'application de cornes comme  $h = \Phi_{\mathcal{P}_-} \circ \Phi_{\mathcal{P}_+}^{-1}$ , défini a priori sur un secteur mais prolongé grâce à l'équation fonctionnelle  $h \circ T_1 = T_1 \circ h$  (où  $T_1(z) = z + 1$ ) à un demi-plan de la forme "Im  $z > \text{cst}$ " si  $\mathcal{P}_-$  suit immédiatement  $\mathcal{P}_+$  dans l'ordre trigonométrique ou "Im  $z < \text{cst}$ " si c'est l'inverse. L'application de cornes normalisée est définie par les mêmes formules en partant des coordonnées de Fatou normalisées  $\Phi_{\mathcal{P}_+}^{\text{nor}}(z)$  et  $\Phi_{\mathcal{P}_-}^{\text{nor}}(z)$ .

**Corollaire 16.** *Avec nos conventions, l'application de corne normalisée a pour développement*

$$h^{\text{nor}}(z) \underset{\text{Im}(z) \rightarrow +\infty}{=} z - i\pi\gamma + o(1)$$

10. Il est connu que ce  $o(1)$  est en fait un  $o(z^k)$  pour tout  $k > 0$ ; rappelons que les développements limités en puissances de  $z$  de ces deux fonctions coïncident à tous ordres, même si la différence de ces deux fonctions n'est pas constante.

si  $\mathcal{P}_-$  suit immédiatement  $\mathcal{P}_+$  dans l'ordre trigonométrique, ou

$$h^{\text{nor}}(z) \underset{\text{Im}(z) \rightarrow -\infty}{=} z + i\pi\gamma + o(1)$$

si c'est l'inverse. <sup>11</sup>

### Le cas d'un itéré

Supposons que  $f = g^m$  avec

$$g(z) = \rho z + \dots$$

Alors,  $\rho^m = 1$ . Soit  $\mathcal{P}$  un  $\alpha$ -pétale pour  $f$  avec  $\alpha < \pi$ . Si  $\mathcal{P}$  est contenu dans un voisinage suffisamment petit de 0, alors  $g(\mathcal{P})$  est également un  $\alpha$ -pétale de  $f$  (qui peut ne pas avoir le même axe que  $\mathcal{P}$ ). Soit  $\Phi_{f,\mathcal{P}}^{\text{nor}}$  une coordonnée de Fatou normalisée pour  $f$  sur  $\mathcal{P}$  et  $\Phi_{f,g(\mathcal{P})}^{\text{nor}}$  sur  $g(\mathcal{P})$ .

#### Proposition 17.

$$\Phi_{f,g(\mathcal{P})}^{\text{nor}} \circ g = \frac{1}{m} + \Phi_{f,\mathcal{P}}^{\text{nor}}.$$

**Preuve.** La fonction  $\Phi_{f,g(\mathcal{P})}^{\text{nor}} \circ g$  est une coordonnée de Fatou pour  $f$  sur  $\mathcal{P}$ . Elle satisfait donc le développement (14) page 20 pour un certain  $b' \in \mathbb{C}$ . Donc  $\Phi_{f,g(\mathcal{P})}^{\text{nor}} \circ g = \Phi_{f,\mathcal{P}}^{\text{nor}} + b'$ . Cette constante  $b'$  est indépendante de l'axe et du pétale  $\mathcal{P}$  (voir plus haut). Donc  $\Phi_{f,g^k(\mathcal{P})}^{\text{nor}} \circ g^k = \Phi_{f,\mathcal{P}}^{\text{nor}} + kb$ . Or  $g^m = f$  donc  $\Phi_f \circ g^m = 1 + \Phi_f$  donc  $bm = 1$ . ■

**Identification de cylindres.** Si  $\rho \neq 1$  et si de plus  $\rho$  est une racine de l'unité d'ordre exactement  $m$ , alors la fonction  $g$  permet une identification naturelle entre les cylindres répulsifs (ou attractifs) de  $f$ , en décrétant que  $g$  agit comme l'identité au niveau des cylindres. Au niveau des coordonnées de Fatou, c'est-à-dire du revêtement universel des cylindres, cette identification se brise car  $g^m$  doit valoir la translation de 1. C'est pourquoi on préfère parfois effectuer l'identification décrétant que  $g$  agit comme la translation de  $1/m$ . On voit avec la proposition 17 que notre normalisation a justement cette propriété.

**4.5. Effet sur les formes et champs de vecteurs.** L'invariance des coordonnées de Fatou se retrouve au niveau du champ de vecteurs et de la forme associés :

<sup>11</sup>. Notez que  $h$  n'est pas un système dynamique, et le quotient de  $h$  sur les cylindres non plus, puisqu'il va d'un cylindre répulsif vers un cylindre attractif adjacent. De plus, si  $Q > 1$ , les deux bouts du cylindre répulsif vont vers deux cylindres attractifs différents.



notons

$$\begin{aligned} f_a &= \phi^{-1} \circ f \circ \phi & f_b &= f \\ \omega_a &= \frac{f'_a(z)-1}{(f_a(z)-z) \log f'_a(z)} dz & \omega_b &= \frac{f'_b(z)-1}{(f_b(z)-z) \log f'_b(z)} dz \\ \chi_a &= 1/\omega_a & \chi_b &= 1/\omega_b \end{aligned}$$

**Lemme 18.**

$$\begin{aligned} \omega_a &= \phi^* \omega_b + \mathcal{O}(z^{Q-1}) dz. \\ \chi_a &= \phi^* \chi_b + \mathcal{O}(z^{3Q+1}) / dz. \end{aligned}$$

**Preuve.** La première ligne est une conséquence de l'invariance des coordonnées de Fatou et de la proposition 13 page 19. La deuxième ligne est équivalente à la première, car  $\chi_a$  et  $\chi_b$  ont un zéro d'ordre  $Q+1$  en 0.  $\square$

On peut le retrouver en travaillant directement sur les formules. L'énoncé est équivalent à  $\chi_a / \phi^* \chi_b = 1 + \mathcal{O}(z^{2Q})$ . Rappelons que  $\chi_a(z) / (f_a(z) - z) = \left(1 - \frac{f'_a(z)-1}{2}\right) + \mathcal{O}(z^{2Q})$  et de même pour  $\chi_b$ . D'où  $\phi^* \chi_b(z) / (f_b \circ \phi - \phi) = \frac{1}{\phi'(z)} \left(1 - \frac{f'_b(\phi(z))-1}{2}\right) + \mathcal{O}(z^{2Q})$  :

$$\frac{\chi_a}{\phi^* \chi_b} = \frac{(f_a - z)\phi'}{f_b \circ \phi - \phi} \times \left(1 + \frac{f'_b \circ \phi - f'_a}{2}\right) + \mathcal{O}(z^{2Q})$$

Maintenant,  $f_b \circ \phi - \phi = \phi \circ f_a - \phi = \phi' \times (f_a - z) + \frac{\phi''}{2}(f_a - z)^2 + \mathcal{O}((f_a - z)^3)$  d'où

$$\frac{(f_a - z)\phi'}{f_b \circ \phi - \phi} = 1 - \frac{\phi''}{2\phi'}(f_a - z) + \mathcal{O}(z^{2Q+2}).$$

D'autre part,  $f'_b \circ \phi - f'_a = \frac{\phi' \circ f_a - \phi'}{\phi'} f'_a = \left(\frac{\phi''}{\phi'}(f_a - z) + \mathcal{O}((f_a - z)^2)\right) f'_a$  puis en utilisant  $f'_a = 1 + \mathcal{O}(z^Q)$  :  $f'_b \circ \phi - f'_a = \frac{\phi''}{\phi'}(f_a - z) + \mathcal{O}(z^{2Q+1})$  d'où

$$1 + \frac{f'_b \circ \phi - f'_a}{2} = 1 + \frac{\phi''}{2\phi'}(f_a - z) + \mathcal{O}(z^{2Q+1}).$$

**Remarque.** D'après le calcul précédent on voit que, de façon surprenante, l'invariance est valide à un ordre de plus :

$$\chi_a = \phi^* \chi_b + \mathcal{O}(z^{3Q+2}) / dz,$$

et donc

$$\omega_a = \phi^* \omega_b + \mathcal{O}(z^Q) dz.$$

Cela fait écho à la propriété analogue de la forme différentielle  $dz / (f(z) - z)$ , l'invariance ayant lieu à l'ordre  $\mathcal{O}(1)$  au lieu de  $\mathcal{O}(z^{-1})$  ; en effet son résidu est égal à l'invariant formel. Cela mériterait probablement que l'on regarde de plus près, mais rappelons que dans les autres chapitres, on ne se servira que de la partie polaire de  $\omega$  (ce qui correspond au développement de  $f$  ou de  $\chi$  jusqu'à l'ordre  $2Q+1$  inclus), aussi nous nous en tiendrons là.

## CHAPITRE 2

## Applications quasiconformes dans les cylindres et recollements

Quand on perturbe un germe parabolique en un germe non parabolique, une des techniques standard pour définir et étudier les coordonnées de Fatou perturbées sur les pétales perturbés consiste à définir une surface de Riemann abstraite, quotient d'un grand domaine du plan par une presque translation, que l'on redresse en un cylindre droit  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  par un isomorphisme analytique (voir le chapitre 3). Le passage par un modèle quasiconforme, comme dans [S1], permet d'étudier la proximité de la coordonnée de Fatou à l'identité. Nous donnons ici des estimées<sup>1</sup> sur les applications quasiconformes dans les cylindres et les recollements, dont nous aurons besoin dans le chapitre 3 pour y effectuer un développement asymptotique à  $o(1)$  près des coordonnées de Fatou perturbées.

### 5. Majoration de la distance à l'identité d'une application quasiconforme sur le cylindre

**5.1. Énoncé.** Nous voulons borner la distance à l'identité, pour la métrique euclidienne sur le cylindre, d'une application quasiconforme. Dans cette section, un *sous-cylindre* de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  désigne un sous-ensemble délimité par deux droites horizontales.

**Lemme 19.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on a l'énoncé suivant. Soit  $\phi : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  une application quasiconforme fixant  $-i\infty$ ,  $i\infty$  et 0. Soit  $\mu$  le pull-back par  $\phi$  de la forme de Beltrami nulle. Supposons que<sup>2</sup>*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}} \text{ess} |\mu(z)| \leq 1/2.$$

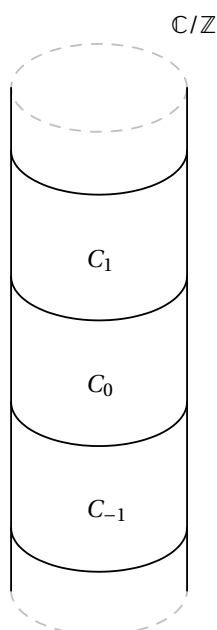
Alors, en notant  $C_n = \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \mid \text{Im}(z) \in [n, n+1]\}$ ,

$$\sup_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} |\phi - \text{Id}| \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{z \in C_n} \text{ess} |\mu(z)|.$$

Si cette somme est finie, alors  $\phi(z) - z$  possède une limite  $a^\wedge$  quand  $\text{Im } z \rightarrow +\infty$  et une limite  $a^\vee$  quand  $\text{Im } z \rightarrow -\infty$ .

1. On pourra trouver ces estimées intéressantes en soi. Il se peut que d'autres auteurs aient déjà publié des estimées analogues, mais nous n'en avons pas connaissance.

2.  $\text{sup ess}$  désigne le sup essentiel



### 5.2. Preuve.

**Lemme 20** (un sous-cylindre). *Pour tout  $M > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que : en faisant les mêmes hypothèses que dans le lemme 19 page précédente et en supposant de plus que  $\phi$  est analytique (i.e.  $\mu = 0$ ) en dehors d'un sous-cylindre  $D$  de hauteur  $M$ , alors*

$$\sup_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} |\phi - \text{Id}| \leq C \sup_{\text{ess}} \mu.$$

**Preuve.** N'oublions pas que l'une des hypothèses est que  $\phi$  fixe 0. On se ramène au cas particulier  $D = [-M/2, M/2]$ , qui impliquera le cas général quitte à doubler la constante  $C$ . En effet, étant donné  $D$  quelconque de hauteur  $M$ , il suffira d'appliquer le cas particulier à la fonction  $\psi(z) = \phi(z + w) - \phi(w)$  où  $w$  est n'importe quel point de l'équateur de  $D$  :  $\psi$  fixe bien 0. On aura alors  $|\psi(z) - z| \leq C \sup_{\text{ess}} |\mu|$ . Puis en substituant  $z - w$  à  $z$  :  $|(\phi(z) - z) - (\phi(w) - w)| \leq C \sup_{\text{ess}} |\mu|$ . En particulier, en prenant  $z = 0$  et en utilisant  $\phi(0) = 0$  :  $|\phi(w) - w| \leq C \sup_{\text{ess}} |\mu|$ . Finalement  $|\phi(z) - z| \leq 2C \sup_{\text{ess}} |\mu|$ .

Donc supposons maintenant que  $D = [-M/2, M/2]$ . Puisque  $\phi$  est analytique en dehors de  $C_0$ , fixe les deux bouts du cylindre et est injective, elle a pour développement  $\phi(z) = z + g_{\pm}(e^{\pm 2i\pi z})$  quand  $z \rightarrow \pm\infty$ , avec  $g$  holomorphe définie dans un voisinage de 0. Le principe du maximum implique alors

$$\sup_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} |\phi - \text{Id}| \leq \sup_D |\phi - \text{Id}|.$$

Or,  $\phi$  fait partie d'un mouvement holomorphe  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{D}} : \phi = \phi_s$  où  $s = \sup_{\text{ess}} |\mu|$ . Donc  $|\phi(z) - z| = |\phi_s(z) - \phi_0(z)| \leq Cs$  sur  $D$ , pour une certaine constante  $C$  dépendant de  $M$ .<sup>3</sup>  $\square$

Ordonnons les sous-cylindres  $C_n$  de la façon suivante :

$$C_0, C_{-1}, C_1, C_{-2}, C_2, \dots$$

Soit  $(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, \dots) = (0, -1, 1, -2, 2, \dots)$ . Soit  $\mu_n$  égale à  $\mu$  sur la réunion des  $n$  premiers cylindres de la liste précédente,  $C_{m_0} \cup \dots \cup C_{m_{n-1}}$ , et égale à 0 ailleurs ( $\mu_0 = 0$ ). Soit  $F_n$  l'unique redressement de  $\mu_n$  fixant 0 et les deux bouts du cylindre ( $F_0 = \text{Id}$ ). Puisque  $\mu_n \rightarrow \mu$  point par point et  $\|\mu_n\|_{\infty} \leq 1/2 < 1$ , on a  $F_n \rightarrow \phi$  point

3. En effet, de  $z$  à  $\phi_s(z)$ , le déplacement d'un point mesuré dans la métrique hyperbolique de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  est inférieur à la distance hyperbolique de 0 à  $s$  dans  $\mathbb{D}$ , elle-même  $\leq C's$  puisque  $s \leq 1/2$ . Donc, premièrement la condition  $s \leq 1/2$  implique que déplacement hyperbolique est borné, et donc pour tout  $t \in [0, s]$ , et pour tout  $z \in D$ , le point  $\phi_t(z)$  reste dans un sous-cylindre de la forme " $-M' \leq \text{Im}(z) \leq M'$ " où  $M'$  ne dépend que de  $M$ . Sur ce dernier ensemble, le rapport  $de/dh$  est majoré où  $dh$  désigne la métrique hyperbolique sur  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et  $de$  la métrique euclidienne sur  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Ainsi, et deuxièmement, le déplacement euclidien des points de  $D$  est nécessairement  $\leq C''s$ .

par point. Soit  $f_n = F_{n+1} \circ F_n^{-1}$ . Alors  $f_n$  redresse la forme de Beltrami  $\nu_n$ , où  $\nu_n$  est le push-forward par  $F_n$  de  $\mu_{n+1} - \mu_n$ . La forme de Beltrami  $\mu_{n+1} - \mu_n$  est à support dans  $C_{m_n}$ . Puisque  $F_n$  est analytique sur  $C_{m_n}$ , on a  $\sup \text{ess} |\nu_n| = \sup \text{ess}_{C_{m_n}} |\mu|$ . De plus,  $F_n$  étant 3-quasiconforme, le support de  $\nu$  est contenu dans un sous-cylindre de hauteur universellement bornée. Donc, on peut appliquer le lemme 20 page ci-contre d'où  $\|f_n - \text{Id}\|_\infty \leq C \sup \text{ess}_{C_{m_n}} |\mu|$  pour une constante universelle  $C$ . Puis, en pré-composant par  $F_n$  :

$$(16) \quad \|F_{n+1} - F_n\|_\infty \leq C \sup \text{ess}_{C_{m_n}} |\mu|$$

Ainsi, par récurrence :

$$\|F_n - \text{Id}\|_\infty \leq C \sum_{k=0, n-1} \sup \text{ess}_{C_{m_k}} |\mu|.$$

Maintenant,  $F_n$  converge simplement<sup>4</sup> vers  $\phi$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui termine la preuve de la première affirmation du lemme 19 en cours de démonstration.

Pour la deuxième affirmation, puisque  $\mu_n = 0$  au dessus d'une certaine hauteur, il existe  $a_n^\wedge$  tel que

$$F_n(z) - z \xrightarrow{\text{Im } z \rightarrow +\infty} a_n^\wedge.$$

D'après l'équation (16), on a  $\|a_{n+1}^\wedge - a_n^\wedge\|_\infty \leq C \sup \text{ess}_{C_{m_n}} |\mu|$ . Donc,  $a_n^\wedge$  est une suite de Cauchy. Soit  $a^\wedge$  sa limite. En utilisant l'équation (16) à nouveau et en effectuant la somme de  $n$  à  $+\infty$ , on obtient  $\|\phi - F_n\|_\infty \leq C \sum_{k=n}^{+\infty} \sup \text{ess}_{C_{m_k}} |\mu|$ . Il est maintenant facile de conclure. L'autre bout du cylindre est traité de façon analogue.

## 6. Convergence dominée

**6.1. Énoncé.** Étant donnée une fonction mesurable  $\mu$ , soit la norme suivante :

$$N(\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup \text{ess}_{C_n} |\mu| \in [0, +\infty].$$

Supposons que  $\mu_n$  est une suite de formes de Beltrami avec

$$\mu_n \longrightarrow \mu$$

presque partout (pour la mesure de Lebesgue) quand  $n \rightarrow +\infty$ , et supposons que la convergence est dominée par une fonction  $\nu$  de  $N$ -norme bornée :

$$\forall n, \forall z, |\mu_n(z)| \leq |\nu(z)|$$

$$N(\nu) < +\infty$$

---

4. ponctuellement

Supposons que

$$\|\mu_n\|_\infty \leq 1/2 \text{ et (donc) } \|\mu\|_\infty \leq 1/2.$$

Soient  $\phi_n$  et  $\phi$  les redressements de  $\mu_n$  et  $\mu$  (normalisés en requérant que chaque bout, ainsi que 0, soient fixés). D'après le lemme 19 page 25, il existe des constantes  $a_n^\wedge, a_n^\vee, a^\wedge, a^\vee \in \mathbb{C}$ , telles que  $\phi_n(z) = z + a_n^{\wedge/\vee} + o(1)$  quand  $\text{Im } z \rightarrow \pm\infty$ , et de même sans les  $n$ .

**Lemme 21.** *Sous les hypothèses ci-dessus,  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformément sur  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . En corollaire,  $a_n^\wedge \rightarrow a^\wedge$  et  $a_n^\vee \rightarrow a^\vee$ .*

**6.2. Preuve.** La preuve est dans le même esprit qu'à la section 5.2.

Fixons un entier  $M$  (que nous ferons ensuite tendre vers l'infini). Soit  $D = \{-M \leq \text{Im}(z) \leq M\}$ . Soit  $\tilde{\mu}_n(z)$  égal à  $\mu_n(z)$  quand  $z \in D$  et à 0 ailleurs. Définissons de même  $\tilde{\mu}$ . Soit  $\tilde{\phi}_n$  le redressement de  $\tilde{\mu}_n$  et  $\tilde{\phi}$  celui de  $\tilde{\mu}$ , normalisés en exigeant qu'ils fixent 0 et les deux bouts du cylindre. Alors, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\|\tilde{\phi}_n - \tilde{\phi}\|_\infty \rightarrow 0.$$

Preuve :  $\tilde{\mu}_n \rightarrow \tilde{\mu}$  presque partout, et ils ont un supess  $\leq 1/2$ . Donc en tant qu'homéomorphismes de la sphère,  $\tilde{\phi}_n$  tend uniformément vers  $\tilde{\phi}$  (c'est également le cas pour  $\phi_n$  et  $\phi$ ). Donc pour la distance euclidienne sur le cylindre, il y a convergence uniforme sur tout compact. En particulier sur  $D$ . Or  $\tilde{\phi}_n$  et  $\tilde{\phi}$  sont analytiques en dehors de  $D$  (contrairement à  $\phi_n$  et  $\phi$ ). D'après le principe du maximum, il y a convergence uniforme, pour la distance euclidienne, de  $\tilde{\phi}_n$  vers  $\tilde{\phi}$  sur le cylindre tout entier (ils fixent tous deux chaque bout avec degré local 1).

On a  $D = C_{m_0} \cup C_{m_1} \cup \dots \cup C_{m_{2M-1}}$ . Donc,  $\tilde{\phi} = F_{2M}$  en utilisant les notations de la section 5.2. Nous y avons prouvé que

$$\|F_{k+1} - F_k\|_\infty \leq C \sup_{C_{m_k}} \text{ess } |\mu|.$$

Donc puisque  $F_k \rightarrow \phi$  simplement :

$$\|\phi - \tilde{\phi}\|_\infty \leq C \sum_{k=2M}^{+\infty} \sup_{C_{m_k}} \text{ess } |\mu|.$$

De même

$$\|\phi_n - \tilde{\phi}_n\|_\infty \leq C \sum_{k=2M}^{+\infty} \sup_{C_{m_k}} \text{ess } |\mu_n|.$$

Donc, en utilisant  $|\mu_n| \leq |\nu|$  :

$$\|\phi_n - \phi\|_\infty \leq \|\tilde{\phi}_n - \tilde{\phi}\|_\infty + 2C \sum_{k=2M}^{+\infty} \sup_{C_{m_k}} \text{ess } |\nu|.$$

Puis en faisant  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n - \phi\|_\infty \leq 2C \sum_{k=2M}^{+\infty} \sup_{C_{m_k}} \text{ess } |v|.$$

Comme cela est vrai pour tout  $M \in \mathbb{N}$ , et comme le membre de droite est le reste d'une somme convergente, on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n - \phi\|_\infty \leq 0,$$

ce qui démontre la première assertion du lemme 21. Le corollaire est immédiat.

## 7. Application aux recollements

Soient  $F_n$  et  $F$  analytiques définies chacune dans un voisinage (éventuellement différent) de la droite imaginaire  $L = i\mathbb{R}$ . Soit  $T_1(z) = z + 1$ . Supposons que

$$\forall z \in L, |F_n - T_1|(z) < 1/4,$$

$$|F'_n - T'_1|(z) < 1/4.$$

Alors  $F_n$  est injective sur  $L$ . Considérons l'ouvert  $U_n$  bordé par  $L$  et  $F_n(L)$ . Considérons le recollement via  $F_n$  d'un voisinage de son adhérence : on obtient une surface de Riemann, dont il est bien connu qu'elle est isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  (nous le redémontrons ci-dessous). Soit  $\Phi_{F_n} : \bar{U}_n \rightarrow \mathbb{C}$  (un) relevé d'un tel isomorphisme, normalisé de façon à envoyer 0 sur 0, et le bout supérieur sur le bout supérieur.

**Lemme 22** (Recollements). *Supposons qu'il existe une fonction  $M(y) > 0$ , telle que*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_{y \in [n, n+1[} M(y) < +\infty,$$

$$\forall n, \forall y \in \mathbb{R}, |(F_n - T_1)(iy)| \leq M(y) \text{ et}$$

$$|(F_n - T_1)'(iy)| \leq M(y).$$

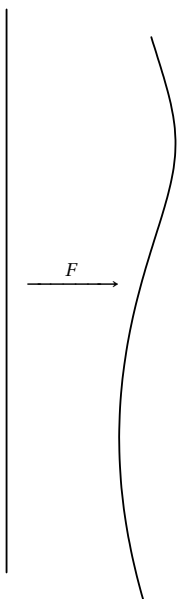
Alors il existe des constantes  $C_n^\wedge$  et  $C_n^\vee$  telles que

$$\Phi_{F_n}(z) = z + C_n^{\wedge/\vee} + o(1) \quad \text{quand } \text{Im}(z) \rightarrow \pm\infty$$

(un énoncé analogue a lieu pour  $F$ ). Supposons également que  $F_n - F$  et  $F'_n - F'$  tendent vers 0 presque partout sur  $L$ . Alors,  $\Phi_{F_n} \rightarrow \Phi_F$  au sens suivant : il existe un homéomorphisme  $h_n : \text{def}(\Phi_F) \rightarrow \text{def}(\Phi_{F_n})$  tel que, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$h_n \rightarrow \text{Id} \quad \text{uniformément}$$

$$\Phi_{F_n} \circ h_n \rightarrow \Phi_F \quad \text{uniformément}$$



tous les deux sur  $\text{def}(\Phi_F)$ . Par conséquent,

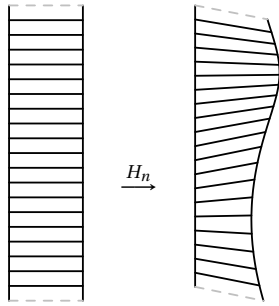
$$\begin{aligned} C_n^{\wedge/\vee} &\longrightarrow C^{\wedge/\vee} \quad \text{et} \\ \Phi_{F_n} &\longrightarrow \Phi_F \quad \text{uniformément} \end{aligned}$$

au sens où  $\sup_{U_n \cap U} |\Phi_{F_n} - \Phi_F| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Remarque.** Avec ces hypothèses, il est facile de voir que  $F_n - F$  tend vers 0 uniformément.

**Remarque.** Nos hypothèses sont trop fortes. Par exemple, nous avons supposé que  $F$  est analytique sur  $L$ , alors que  $\Phi_F$  existe dès que  $F$  est quasi-symétrique sur  $L$  (et  $|F - T_1| < 1/4$ )...

**7.1. Preuve.** Nous utiliserons la construction suivante, que nous avons prise dans [S1].



Soit

$$H_n : \begin{cases} [0, 1] \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy & \mapsto (1-x)iy + xF_n(iy) \end{cases}$$

En notant  $z = x + iy$ , on calcule  $H_n(z) - z = x(F_n - T_1)(iy)$ . Donc, d'après l'hypothèse de domination,

$$H_n(z) \underset{\text{Im } z \rightarrow \pm\infty}{=} z + o(1)$$

et

$$H_n \longrightarrow H \text{ uniformément sur } [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

L'application  $H_n$  n'est pas analytique, son Jacobien est

$$J = \begin{bmatrix} \text{Re}(F_n(iy)) & -x\text{Im}(F_n'(iy)) \\ \text{Im}(F_n(iy)) - y & x\text{Re}(F_n'(iy)) + 1 - x \end{bmatrix}$$

En munissant  $\mathbb{R}^2$  de la norme euclidienne standard, la norme d'opérateur d'une matrice est  $\leq$  la somme des normes euclidiennes de ses colonnes. Pour la matrice  $J - I_2$ , cette somme est égale à  $|(F_n - T_1)(iy)| + x|(F_n - T_1)'(iy)|$ , donc

$$\|J - I_2\| \leq |(F_n - T_1)(iy)| + |(F_n - T_1)'(iy)|.$$

Les hypothèses impliquent donc que  $H_n - \text{Id}$  est 1/2-Lipschitzienne. Première conséquence, puisque le domaine de définition est convexe (c'est une bande), l'application  $H_n$  est un homéomorphisme sur son image. Deuxième conséquence,  $H_n$  est

3-quasiconforme.<sup>5</sup> L'application  $\phi_n = \Phi_{F_n} \circ H_n : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  commute avec  $T_1$ , et redresse la forme de Beltrami  $\mu_n = H_n^*(0)$ . On peut donc passer au quotient  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , où  $\phi_n$  devient un homéomorphisme quasiconforme de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  vers lui-même (la couture étant une droite, elle est effaçable). Notons que  $\mu_n \rightarrow \mu = H^*(0)$  presque partout sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . Si  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  est de déterminant  $> 0$  et  $k$  le module du pull-back par  $M$  de la forme de Beltrami nulle, alors il est connu que  $k \leq \|M - I_2\|$ .<sup>6</sup> Donc

$$(17) \quad |\mu_n|(x + iy) \leq |F_n - T_1|(iy) + |F'_n - T'_1|(iy) \quad \text{et donc}$$

$$(18) \quad \|\mu_n\|_\infty \leq 1/2.$$

Les deux inégalités ci-dessus et les hypothèses du lemme 22 en cours de démonstration permettent d'appliquer les lemmes 19 page 25 et 21 page 28 et d'en déduire, d'une part qu'il existe des constantes telles que

$$\begin{aligned} \phi_n(z) &\underset{\text{Im } z \rightarrow \pm\infty}{=} z + C_n^{\wedge/\vee} + o(1) \quad \text{et} \\ \phi(z) &\underset{\text{Im } z \rightarrow \pm\infty}{=} z + C^{\wedge/\vee} + o(1) \end{aligned}$$

et d'autre part que  $\phi_n(z) \rightarrow \phi$  uniformément. Rappelons que  $H_n(z) = z + o(1)$  quand  $\text{Im } z \rightarrow \pm\infty$  et de même pour  $H$ . Donc on a  $\Phi_{F_n}(z) \underset{\text{Im } z \rightarrow \pm\infty}{=} z + C_n^{\wedge/\vee} + o(1)$  et de même  $\Phi_F(z) \underset{\text{Im } z \rightarrow \pm\infty}{=} z + C^{\wedge/\vee} + o(1)$ . Soit  $h_n = H_n \circ H^{-1}$ . Alors  $\Phi_{F_n} \circ h_n - \Phi_F = (\phi_n - \phi) \circ H^{-1}$  tend uniformément vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  et de même pour  $h_n - \text{Id} = (H_n - H) \circ H^{-1}$  et donc aussi  $\|h_n^{-1} - \text{Id}\|_\infty \rightarrow 0$ . Comme  $C_n^{\wedge/\vee} - C^{\wedge/\vee} = \lim (\Phi_{F_n} \circ h_n - \Phi_F)(z)$  quand  $\text{Im } z \rightarrow \pm\infty$ , on en déduit que  $|C_n^{\wedge/\vee} - C^{\wedge/\vee}| \leq \|\Phi_{F_n} \circ h_n - \Phi_F\|_\infty$  d'où  $C_n^{\wedge/\vee} \rightarrow C^{\wedge/\vee}$ . Notons également que  $\Phi_F$  est uniformément continue : en effet  $\Phi_F = \phi \circ H^{-1}$  et d'une part  $H^{-1}$  est 2-Lipschitzienne (puisque  $H - \text{Id}$  est 1/2-Lipschitzienne) et d'autre part  $\phi$  est uniformément continue (en tant qu'homéo 3-quasiconforme de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ). Soit  $m$  un module de continuité uniforme pour  $\Phi_F$ . Alors pour  $z \in U \cap U_n$ , en écrivant  $\Phi_{F_n}(z) - \Phi_F(z) = (\Phi_{F_n} \circ h_n - \Phi_F)(h_n^{-1}(z)) + (\Phi_F(h_n^{-1}(z)) - \Phi_F(z))$ , on obtient  $\forall z \in U \cap U_n$ ,  $|\Phi_{F_n}(z) - \Phi_F(z)| \leq \|\Phi_{F_n} \circ h_n - \Phi_F\|_\infty + m(\|h_n^{-1} - \text{Id}\|_\infty)$ . Or le membre de droite tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui termine la preuve du lemme 22.

5. L'application  $H_n$  induit donc un homéomorphisme quasiconforme entre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  et la surface de Riemann construite par recollement. Cela montre que la surface de Riemann est analytiquement isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . La fonction  $\Phi_{F_n}$  existe donc.

6. En effet  $k(M) = \frac{K(M)-1}{K(M)+1}$  où  $K(M) \geq 1$  est le rapport de dilatation de  $M$ . On voit facilement que  $K(M) \leq \frac{1+\|I_2-M\|}{1-\|I_2-M\|}$ .





## CHAPITRE 3

**Implosion parabolique**

Nous nous focalisons sur le *cas particulier* suivant (générique en un certain sens) de perturbation d'un point parabolique : soit  $f_\lambda$  une famille analytique de fonctions analytiques telle que

$$(19) \quad f_0(z) = z + Cz^{Q+1} + \mathcal{O}(z^{Q+2})$$

et

$$f_\lambda(z) = e^{2i\pi\lambda} z + \mathcal{O}(z^2).$$

C'est-à-dire  $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$  est définie et analytique sur un voisinage de  $(0,0)$ , que nous supposons de la forme  $B(0, r_{\text{param}}) \times B(0, r_{\text{dyn}})$ .

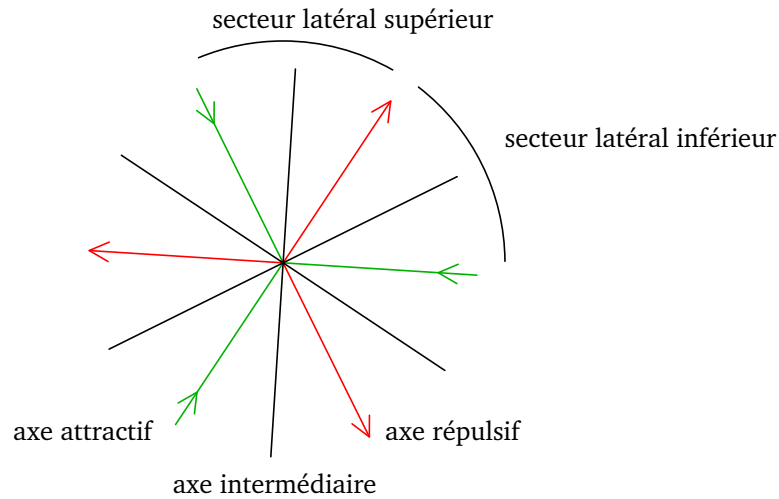


FIGURE 1: Terminologie, illustrée pour  $Q = 3$ .

**8. Points fixes, axes, secteurs**

Quand  $\lambda \rightarrow 0$ , les points fixes proches de 0 de ce cas particulier ont la géométrie suivante : il y a 0, et  $Q$  points fixes non nuls,  $z_1, \dots, z_Q$ , asymptotiquement situés sur les sommets du  $Q$ -gone régulier d'équation " $Cz^Q = -2i\pi\lambda$ ". De plus, nous avons le développement suivant pour le multiplicateur des points fixes :

$$m_j = f'_\lambda(z_j) \underset{\lambda \rightarrow 0}{=} 1 - 2i\pi Q\lambda + o(|\lambda|)$$

indépendamment de  $j$ . En particulier, pour  $\lambda \neq 0$  suffisamment petit ce ne sont pas des points fixes multiples.

La réunion des axes attractifs et répulsifs découpe le plan en  $2Q$  secteurs, chacun délimité par un axe attractif et un axe répulsif. Nous les appelons *secteurs latéraux*. Leurs axes centraux sont appelés *axes intermédiaires*. Un secteur latéral est dit *supérieur* si l'axe attractif suit l'axe répulsif dans l'ordre trigonométrique<sup>1</sup>. Il est dit *inférieur* dans l'autre cas. Voir la figure 1 page précédente.

Soient  $f = f_0$  et  $f_n = f_{\lambda_n}$  où  $\lambda_n$  tend vers 0 dans un secteur  $S$  de la forme

$$S = \diamond = \{re^{i\theta} \mid r > 0 \text{ et } |\theta| < \pi/2 - \alpha\}$$

$$\text{ou } S = \diamond = \{-re^{i\theta} \mid r > 0 \text{ et } |\theta| < \pi/2 - \alpha\}$$

avec  $\alpha < \pi/2$ .

Les points  $z_j$  ne peuvent pas être étiquetés de façon continue par rapport à  $\lambda$ . Cependant, puisque nous avons restreint  $\lambda$  à un secteur, qui plus est petit, c'est maintenant possible : en effet, les  $z_j$  habitent alors  $Q$  secteurs disjoints, que nous numérotions  $S_1, \dots, S_j$  (définis par  $\text{Arg}(-Cz^Q/2i\pi) \in S'$  où  $S'$  est un secteur d'angle et de rayon légèrement plus grands que ceux de  $S$ ), et qui lèguent leur indice aux points fixes qu'ils contiennent. La figure 2 illustre cela. Ces secteurs sont inclus dans les secteurs latéraux inférieurs si  $S = \diamond$  et supérieurs si  $S = \diamond$ .

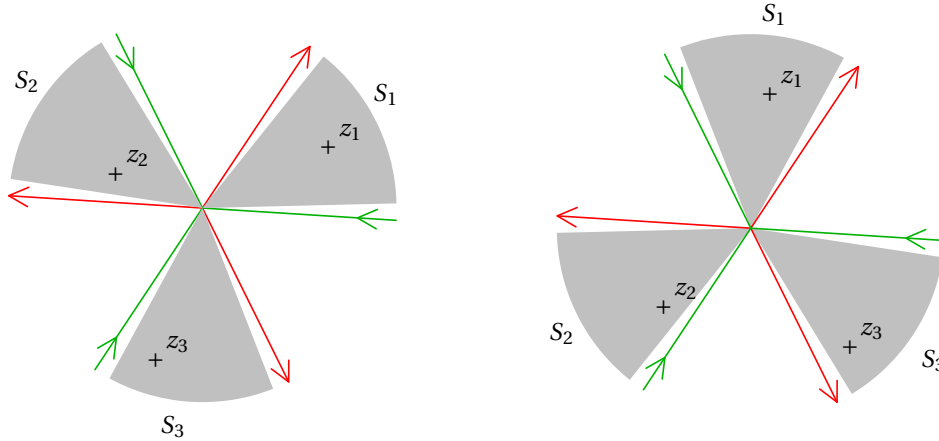


FIGURE 2: Exemple de secteurs numérotés et de points fixes pour un certain point parabolique avec  $Q = 3$ . À gauche : le cas  $S = \diamond$ . À droite : le cas  $S = \diamond$ . Nous avons indiqué en rouge les axes répulsifs et en vert les axes attractifs.

1. Cette dénomination vient de ce que son image par l'approximation  $z \mapsto -1/QCz^Q$  des coordonnées de Fatou est un demi-plan supérieur.

## 9. Surface de redressement du champ de vecteurs et pétales perturbés

Dans le chapitre 1 section 1 nous avons associé à  $f_n$  et  $f$  des formes différentielles  $\omega_n, \omega$ , les champs de vecteurs  $1/\omega_n, 1/\omega$  et des fonctions  $g_n, g$ , temps-1 du flot de ces champs de vecteurs.

Un redressement d'un champ de vecteurs  $\chi = \chi(z)/dz$  est un changement de variable le transformant en le champ spatialement constant d'expression  $1/dz$ . En dimension complexe 1, c'est la même chose qu'une primitive de la forme différentielle  $\omega = 1/\chi$ . Les différents redressements de  $\chi$  sur différents ouverts évitant ses zéros forment un système de cartes ; les changements de cartes sont des translations. Par *surface de redressement* de  $\chi$ , j'entends la surface de translation<sup>2</sup> ainsi définie.

Le lemme suivant donne une description de la surface de redressement de  $\omega_n$  et de celle de  $\omega$  et donne quelques propriétés de convergence de la première vers la seconde. Nous le démontrerons dans la section 16.2.

**Lemme 23.** *Fixons  $r < r_{\text{dyn}}$ . Il existe  $r' < r$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $n \geq N$  et tout secteur donné  $S_j$  un domaine de Jordan  $\mathfrak{B}_n$ , appelé bande, et pour tout axe intermédiaire un domaine de Jordan  $\mathfrak{S}_n$ , appelé raccord, tel que*

- (1)  $\mathfrak{B}_n$  et  $\mathfrak{S}_n$  sont contenus dans  $B(0, r)$
- (2) Pour tout  $n$ , la réunion des  $Q$  bandes et des  $2Q$  raccords contient  $B(0, r')$ .
- (3) Toute primitive  $\Phi_{g_n} = \int \omega_n$  sur  $\mathfrak{B}_n$  est une bijection de  $\mathfrak{B}_n$  vers une bande verticale  $]a_n, b_n[$ .
- (4) Si  $S = \diamond$  alors pour tout  $n$ ,

$$\text{Im} \Phi_{g_n}(z) \longrightarrow +\infty \iff z \longrightarrow 0 \text{ et}$$

$$\text{Im} \Phi_{g_n}(z) \longrightarrow -\infty \iff z \longrightarrow z_j.$$

De même si  $S = \diamond$  en échangeant  $+\infty$  et  $-\infty$ .

- (5) Toute primitive  $\tilde{\Phi}_{g_n} = \int \omega_n$  sur  $\mathfrak{S}_n$  est une bijection de  $\mathfrak{S}_n$  soit vers une demi-bande verticale  $]s_n, t_n[\times]h_n, +\infty[$ , on parle alors de raccord supérieur, soit vers une demi-bande inférieure  $]s_n, t_n[\times]-\infty, h_n[$ , on parle alors de raccord inférieur, selon respectivement que l'axe intermédiaire est l'axe d'un secteur latéral supérieur ou inférieur.
- (6) Le point (4) est également vrai pour  $\tilde{\Phi}_{g_n}$ .

2. Dans la terminologie de [Th], chapitre 3.1, c'est une  $\mathcal{G}$ -manifold avec  $\mathcal{G}$  le groupe des translations.

- (7) Les bandes sont 2 à 2 disjointes, ainsi que les raccords. L'intersection d'un raccord  $\mathfrak{S}_n$  avec la réunion des bandes consiste en deux composantes connexes. Leur image par  $\tilde{\Phi}_{g_n}$  consiste en un morceau d'équation  $\operatorname{Re}(z) < x_0$  à gauche de la demi-bande verticale  $\tilde{\Phi}_{g_n}(\mathfrak{S}_n)$  et un morceau d'équation  $\operatorname{Re}(z) > x_1 > x_0$  à droite ; les nombres  $x_0$  et  $x_1$  dépendant de  $n$  et de l'axe intermédiaire  $A$  associé au raccord. Le morceau de gauche du raccord est inclus dans la bande associée au secteur  $S_j$  d'axe central  $A'$  adjacent à l'axe répulsif adjacent à  $A$ . De même pour le morceau de droite avec l'axe attractif au lieu de répulsif. (Ces deux bandes sont identiques si et seulement si  $Q = 1$  ou  $A' = A$ ).

et des domaines de Jordan  $\mathfrak{B}^+$  associés aux axes répulsifs,  $\mathfrak{B}^-$  aux axes attractifs, et  $\mathfrak{S}$  aux axes intermédiaires, tels que

- (8)  $\mathfrak{B}^-$  et  $\mathfrak{B}^+$  sont des  $\pi/2$ -pétales de  $g$  pour leurs axes respectifs, et donc
- (9) toute primitive  $\Phi_g^- = \int \omega$  sur  $\mathfrak{B}^-$  est une bijection vers un demi-plan  $]a, +\infty[$ , toute primitive  $\Phi_g^+ = \int \omega$  sur  $\mathfrak{B}^+$  est une bijection vers un demi-plan  $] -\infty, b[$ .
- (10) La réunion des  $Q$  pétales  $\mathfrak{B}^+$ , des  $Q$  pétales  $\mathfrak{B}^-$  et des  $2Q$  raccords  $\mathfrak{S}$  contient  $B(0, r')$ .
- (11)  $\mathfrak{S}$  intersecte les deux pétales  $\mathfrak{B}^+$  et  $\mathfrak{B}^-$  dont les axes sont adjacents à ceux de  $\mathfrak{S}$ .
- (12) Toute primitive  $\tilde{\Phi}_g = \int \omega_n$  sur  $\mathfrak{S}$  est une bijection de  $\mathfrak{S}$  vers une demi-bande verticale de la forme  $]s, t[\times]h, +\infty[$  ou  $]s, t[\times] -\infty, h[$ , selon les mêmes règles qu'au point (5).
- (13) Les pétales sont 2 à 2 disjoints, ainsi que les raccords. L'intersection d'un raccord  $\mathfrak{S}$  d'axe  $A$  avec la réunion des pétales consiste en deux composantes connexes. Comme au point (7), leur image par  $\tilde{\Phi}_g$  consiste en un morceau à gauche et à droite. Le morceau de gauche du raccord est inclus dans le pétale répulsif d'axe adjacent à  $A$ . Le morceau de droite du raccord est inclus dans le pétale attractif d'axe adjacent à  $A$ .

et tels que l'on a les propriétés de convergence suivantes :

- (14)  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s, \quad t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t, \quad h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h$
- (15)  $\tilde{\Phi}_{g_n}^{-1}$  tend vers  $\tilde{\Phi}_g^{-1}$  pour la convergence uniforme sur les compacts du domaine de définition de la limite.
- (16)  $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- (17) Tout compact de  $\mathfrak{B}^+ \cup \mathfrak{B}^-$  finit par être contenu dans  $\mathfrak{B}_n$ , où  $\mathfrak{B}^+$  et  $\mathfrak{B}^-$  sont les pétales associés aux deux axes adjacents au secteur  $S_j$  associé à  $\mathfrak{B}_n$ .

(18) Avec les mêmes notations qu'au point (17), étant donné un point  $w \in \mathfrak{B}^-$ , soit  $\xi_n = \Phi_{g_n}(w)$  et  $\xi = \Phi_g^-(w)$  : alors

$$a_n - \operatorname{Re} \xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a - \operatorname{Re} \xi$$

et l'application

$$\Phi_{g_n}^{-1}(z + \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\Phi_g^-)^{-1}(z + \xi)$$

uniformément sur tout compact de  $]a - \operatorname{Re} \xi, +\infty[$ .

Étant donné un point  $w \in \mathfrak{B}^+$ , soit  $\xi_n = \Phi_{g_n}(w)$  et  $\xi = \Phi_g^+(w)$ ,

$$b_n - \operatorname{Re} \xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - \operatorname{Re} \xi$$

et l'application

$$\Phi_{g_n}^{-1}(z + \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\Phi_g^+)^{-1}(z + \xi)$$

uniformément sur tout compact de  $] -\infty, b - \operatorname{Re} \xi[$ .

**Remarque.** Nous n'avons pas indexé les objets en fonction du secteur ou de l'axe auxquels ils correspondent, car cela aurait surchargé les notations. En particulier, les réels  $s_n, t_n, h_n, a_n, b_n$  sont dépendants de l'axe ou du secteur.

Nous noterons  $\mathcal{R}_n$  la réunion des  $Q$  bandes et des  $2Q$  raccords mentionnés au lemme précédent, considérée en tant que surface de translation.

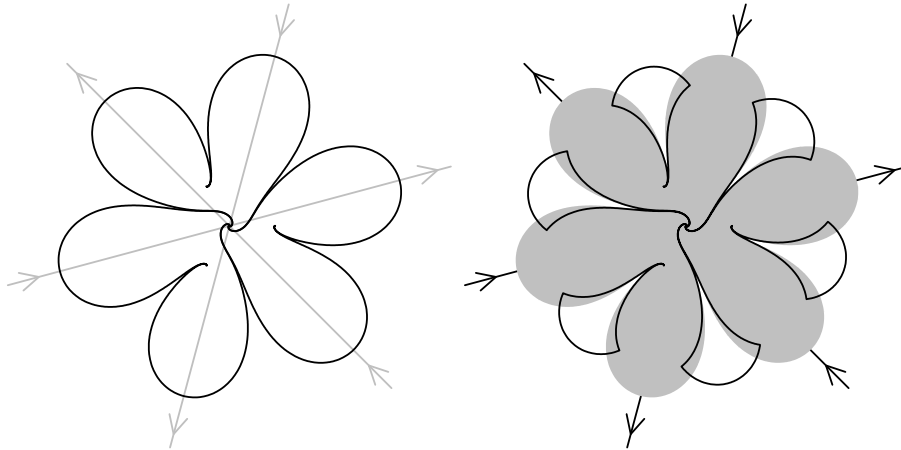


FIGURE 3: Illustration idéalisée du lemme 23 page 35. Ici  $Q = 3$ ,  $S = \diamond$ , et  $\lambda \in S$  avec un argument proche de  $\pi/4$ . À gauche sont représentés les axes attractifs, répulsifs ainsi que le bord des bandes  $\mathfrak{B}_n$  pour une certaine fonction  $g_n$  avec  $n$  grand. À droite, on a rajouté les raccords  $\mathfrak{C}_n$ .

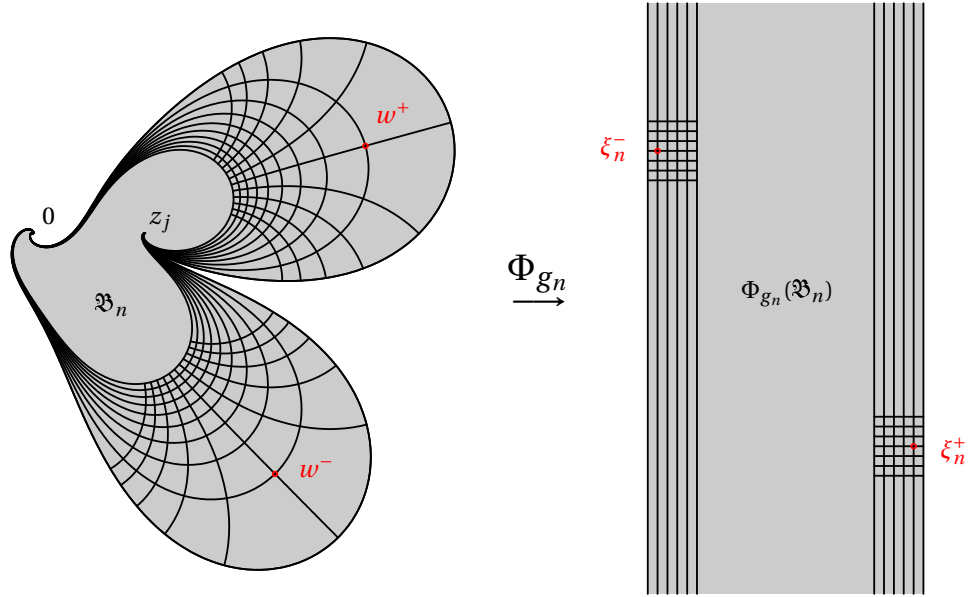


FIGURE 4: Une bande  $\mathfrak{B}_n$ , vue de plus près. Les quadrillages partiels ont une largeur de maille égale à 1. Les échelles ne sont pas respectées sur la bande verticale : en particulier sa largeur est bien plus importante.

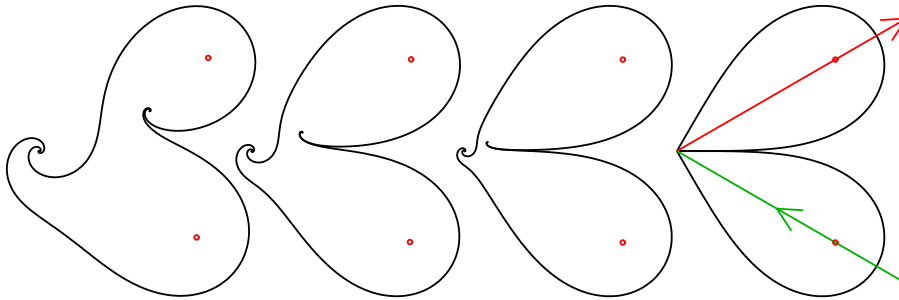


FIGURE 5: La suite  $\mathfrak{B}_n$  et sa limite  $\mathfrak{B}^- \cup \mathfrak{B}^+$ , dans le cas  $S = \diamond$ .

**Multiplicateurs et monodromie.** Quand on décrit un petit cercle dans le sens trigonométrique autour d'un des points fixes  $z_j$  de  $g_n$ , l'intégrale  $I$  de  $\omega_n$ , que nous appellerons *monodromie* vaut exactement  $2i\pi \times$  son résidu :  $I = \frac{2i\pi}{\log g_n'(z_j)} = \frac{2i\pi}{\log f_n'(z_j)}$ . Quand on décrit un petit cercle dans le sens trigonométrique autour du point fixe  $z = 0$  de  $g$ , l'intégrale de  $\omega$  vaut exactement de  $2i\pi \text{résit}(f)$  (rappelons que  $g$  et  $f$  ont le même résidu itératif en 0). Dans les deux cas, le point parcourant le cercle a traversé différentes cartes. Chaque changement de carte est une translation. La somme des vecteurs de translation associés aux changements de cartes successifs est égale à l'opposé de  $I$ . Chaque point fixe de multiplicateur différent de 1 a un voisinage sur lequel la surface de redressement est isomorphe au demi-plan supérieur modulo  $\mathbb{Z}$ , avec pour carte  $z \mapsto z/I$  ; ou de façon équivalente un certain demi-plan modulo  $z \mapsto z/I$ , avec pour carte  $z \mapsto z$ . Appelons cela un *demi-cylindre oblique*.<sup>3</sup>

3. Terminologie non standard.

Toutes ces propriétés, plus le rappel ci-dessus, permettent de donner une idée assez précise de la surface de redressement (on n'a pas la position exacte de son bord mais elle importe peu). Voir la figure 6.

Les  $\mathfrak{B}_n$  vont servir de *pétales perturbés* pour  $f_n$ . Sur  $\mathfrak{B}_n$ ,  $\Phi_{g_n}$  conjugue  $g_n$  à la translation  $T_1$ . Comme  $g_n$  est proche de  $f_n$ , nous montrerons qu'il existe des coordonnées de Fatou perturbées  $\Phi_{f_n}$  sur  $\mathfrak{B}_n$  (dont l'image n'est plus une bande verticale délimitée par des droites mais par des courbes presque rectilignes).

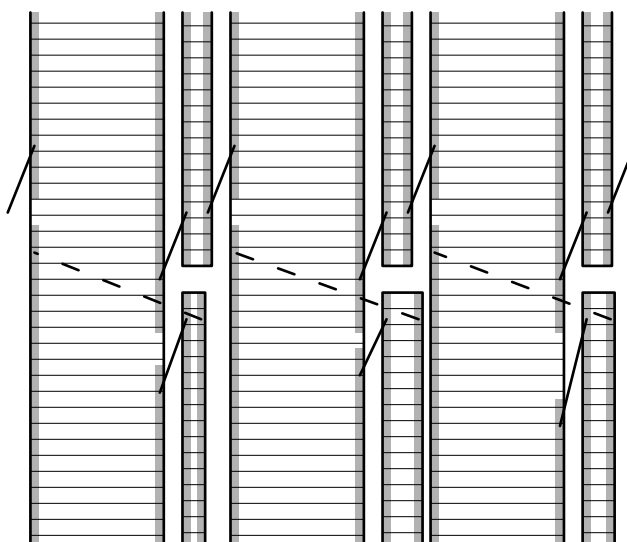


FIGURE 6: Illustration schématique de la surface de redressement  $\mathcal{R}_n$  associée à la figure 3 page 37. Les recollements se font entre les zones grises reliées par des lignes obliques. Ce sont des translations, les lignes obliques reliant deux points identifiés. Les largeurs des bandes tendent vers l'infini quand  $n \rightarrow +\infty$ . Celles des demi-bandes tendent vers 6 constantes. La partie supérieure se recolle en un morceau contenant un demi-cylindre oblique. La partie inférieure se recolle en trois morceaux qui contiennent chacun un demi-cylindre oblique. La monodromie de chacun est  $2i\pi/\log f'_n(z)$  où  $z$  est le point fixe associé. Donc génériquement chaque cylindre a une monodromie différente, sauf situation spéciale (par exemple quand  $f_n$  est l'itérée troisième d'une perturbation d'un germe de nombre de rotation  $1/3$  ou  $2/3$ ).

En tant que primitives, les fonctions  $\Phi_{g_n}, \tilde{\Phi}_{g_n}, \Phi_g^-, \Phi_g^+, \tilde{\Phi}_g$  sont définies à l'addition près d'une constante. Nous fixerons une normalisation de  $\Phi_g^-$  et  $\Phi_g^+$ , donnerons deux normalisations pour  $\Phi_{g_n}$ , et ne normaliserons pas  $\tilde{\Phi}_g$  ni  $\tilde{\Phi}_{g_n}$ . C'est-à-dire, nous normaliserons sur les pétales et les pétales perturbés mais pas sur les raccords. Puis nous transférerons ces normalisations aux coordonnées de Fatou perturbées  $\Phi_{f_n}$ .



## 10. Taux de distorsion

Étant donnée une application  $f$ , nous appellerons *taux de distorsion* la quantité  $f''/f'$ . Ce nom est motivé par le fait que la *distorsion*  $\log(f'(x)/f'(y))$  de  $f$  entre  $x$  et  $y$  est égale à  $\int_x^y f''(z)/f'(z)dz$ . Plus le taux est faible, plus il faut parcourir une grande distance pour atteindre une distorsion élevée.

Soit  $\chi(z)/dz$  un champ de vecteurs,  $\Phi$  un redressement, et  $\Psi = \Phi^{-1}$ , vérifiant  $\Psi' = \chi \circ \Psi$ . Alors le taux de distorsion  $\Psi''/\Psi'$  de  $\Psi$  est simplement égal à  $\chi' \circ \Psi$ . De plus, on notera que ce nombre ne change pas quand on effectue un changement de variable *linéaire* sur le champ de vecteurs (cela revient à multiplier  $\Psi$  par une constante).

**Lemme 24** (Distorsion). *Quitte à se restreindre à un voisinage suffisamment petit de 0 et à prendre  $n$  suffisamment grand, le taux de distorsion des inverses des redressements peut être pris arbitrairement petit.*<sup>4</sup>

**Preuve.** D'après le paragraphe précédent, ce nombre est égal à  $(1/\omega_n)' \circ \Psi$ . Or  $1/\omega_n$  tend vers  $1/\omega$  uniformément dans un certain voisinage de 0 et donc il en est de même de leur dérivée. Puisque  $(1/\omega)'$  s'annule à l'origine, l'affirmation en découle.  $\square$

**Corollaire 25.** *Étant donnés  $R > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , alors  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\exists r_0$  et  $\exists r_1$  avec  $0 < r_1 < r_0$ , tels que  $\forall n \geq N$ , et  $\forall z \in B(0, r_1)$ , il existe une branche injective de l'inverse de  $\int \omega_n$  définie sur  $B(0, R)$ , envoyant 0 sur  $z$ , à valeurs dans  $B(0, r_0)$ , et de distorsion  $\leq \varepsilon$ .*

## 11. Coordonnées de Fatou perturbées

Les cartes sur une surface de translation la munissent d'une métrique riemannienne plate (euclidienne). D'après le corollaire 25, quitte à diminuer  $r$ ,  $\mathcal{R}_n$  est incluse pour tout  $n$  assez grand dans une surface de translation  $\mathcal{R}'_n$  dont le bord est situé à distance  $> 2$  de  $\mathcal{R}_n$ . Sur la surface de Riemann  $\mathcal{R}'_n$ , l'application  $g_n$  correspond à une translation de 1. C'est pourquoi nous noterons  $\mathcal{F}_1$  la restriction de  $g_n$  à  $\mathcal{R}'_n$ , restriction faite au départ et à l'arrivée. Elle est définie sur une partie de  $\mathcal{R}'_n$  et à valeurs dans une partie de  $\mathcal{R}'_n$ . La restriction de  $f_n$  sera notée  $\mathcal{F}_n$ . Elle aussi est définie sur une partie de  $\mathcal{R}'_n$  et à valeurs dans une partie de  $\mathcal{R}'_n$ .

**Lemme 26.**  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists r_0$  tel que  $\forall r < r_0$ , pour tout  $n$  assez grand le domaine de définition de  $\mathcal{F}_n$  contient  $\mathcal{R}_n$ , et sur  $\mathcal{R}_n$  on a  $|\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_1| < \varepsilon$  et  $|\mathcal{F}'_n - 1| < \varepsilon$  dans des cartes de redressement.

<sup>4</sup> Plus formellement :  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists r_0$  et  $\exists N \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall r < r_0$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $|\Psi''/\Psi'| < \varepsilon$  pour toute branche inverse  $\Psi$  de  $\int \omega_n$  (ou de  $\int \omega$ ) à valeurs dans  $B(0, r)$ .

**Preuve.** Pour  $r$  suffisamment petit, pour  $n$  assez grand,  $(f_n(z) - g_n(z))/(g_n(z) - z)$  est holomorphe sur  $B(0, r)$  et tend uniformément vers  $(f(z) - g(z))/(g(z) - z)$ . D'après la section 2 chapitre 1, ce dernier est un  $o(1)$  (et même mieux, voir le corollaire 4 page 14). On peut donc rendre  $(f_n(z) - g_n(z))/(g_n(z) - z)$  aussi petit que l'on veut, quitte à prendre  $r$  suffisamment petit et  $n$  assez grand. Par le corollaire 25 page précédente on en déduit que  $\mathcal{F}_n$  est définie et que  $(\mathcal{F}_n(z) - (z+1))/((z+1) - z)$  est proche de 0 dans des cartes. Pour en déduire que  $\mathcal{F}'_n$  est proche de 1, il suffit d'appliquer le lemme de Schwarz ou l'inégalité de Cauchy, après avoir remarqué que l'analyse ci-dessus est valide sur un sous-ensemble de  $\mathcal{R}'_n$  légèrement plus grand que  $\mathcal{R}_n$ .<sup>(5)</sup>  $\square$

Soient

$$\begin{aligned} F_n &= \Phi_{g_n} \circ f_n \circ \Phi_{g_n}^{-1}, \\ F^+ &= \Phi_g^+ \circ f \circ \Phi_g^{+^{-1}}, \\ F^- &= \Phi_g^- \circ f \circ \Phi_g^{-^{-1}}, \\ \tilde{F}_n &= \tilde{\Phi}_{g_n} \circ f_n \circ \tilde{\Phi}_{g_n}^{-1}. \end{aligned}$$

Le lemme 26 page précédente implique en particulier que (pour  $r$  assez petit et  $n$  assez grand),

$$(20) \quad |F_n - T_1| < 1/4 \text{ et}$$

$$(21) \quad |F'_n - 1| < 1/4.$$

Il est classique d'en déduire, mais nous le justifions quand même ci-dessous, que :

**Lemme 27.** *Le quotient<sup>6</sup> de  $]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$  par  $F_n$  est isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , avec un isomorphisme qui se relève à l'arrivée en une application injective*

$$\Phi_{F_n} : ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

conjuguant  $F_n$  à la translation  $T_1$  sur le domaine de définition de  $F_n$ , c'est-à-dire telle que  $\Phi_{F_n} \circ F_n = T_1 \circ \Phi_{F_n}^{-1}$  là où les deux membres sont définis.

5. Autrement, on peut effectuer le calcul suivant : soit  $\Phi$  une branche de  $f \omega_n$  ; alors  $\mathcal{F}'_n(\Phi(z)) = f'_n(z) \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(f_n(z))}$  ;  $f'_n(z)$  est proche de  $f'(z)$  qui est proche de 1 ;  $\log \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(f_n(z))}$  est l'intégrale du taux de distorsion de  $\Phi^{-1}$  entre  $\Phi(z)$  et  $\Phi(f_n(z)) = \mathcal{F}_n(\Phi(z))$ . Par le corollaire 25 page ci-contre on peut intégrer sur un segment, et nous avons déjà montré que la distance de  $\Phi(z)$  à  $\mathcal{F}_n(\Phi(z))$  est bornée. Par le même corollaire le taux de distorsion est faible. Donc  $\mathcal{F}'_n(\Phi(z))$  est proche de 1.

6. Ce quotient est par définition l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence engendrée par les relations  $z \sim F_n(z)$  pour tout  $z$  tel que  $z$  et  $F_n(z)$  sont tous deux dans la bande. D'après l'équation (20) un petit disque centré en  $z$  est injectivement projeté dans le quotient, et donc fournit une carte de surface de Riemann.

**Preuve.** En effet soit  $L$  une verticale quelconque incluse dans la bande  $B = ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$  telle que son image par  $F_n$  est aussi incluse dans  $B$ . Si  $b_n - a_n > 5/4$ , alors il existe un tel  $L$  d'après l'équation (20) page précédente. Par l'équation (21),  $F_n(L)$  est une courbe dont les tangentes dévient de la verticale de moins de  $\arcsin \frac{1}{4}$ . On peut donc définir quand un point du plan se trouve à gauche ou à droite de la courbe : il suffit de comparer sa partie réelle avec celle de l'unique point de la courbe situé sur la même horizontale. Par l'équation (21) et comme  $\arcsin \frac{1}{4} < \pi/4$ , les points à droite de  $L$  sont envoyés par  $F_n$  à droite de  $F_n(L)$ , et les points à gauche de  $L$  sont envoyés à gauche de  $F_n(L)$ . Avec le théorème de Rouché, on voit également que l'image par  $F_n$  de l'ensemble des points de  $B$  à droite de  $L$  contient l'ensemble des points de  $B$  à droite de  $F_n(L)$ . Soit  $U$  l'ouvert entre  $L$  et  $F_n(L)$ , c'est-à-dire l'ensemble des points à droite de  $L$  et à gauche de  $F_n(L)$ . Alors  $U \subset B$ . Soit  $D = L \cup U \subset B$ . Les remarques ci-dessus et l'équation (20) impliquent d'une part que l'orbite en avant ou en arrière de tout point  $z \in B$  finit par entrer dans  $D$  : il suffit de prendre  $F_n^k(z)$  avec  $k = \min \{k \in \mathbb{Z} \mid F_n^k(z) \text{ n'est pas à gauche de } L\}$  ; d'autre part qu'un seul point de l'orbite peut s'y trouver. Donc  $D$  est un domaine fondamental pour le quotient. Notons  $p_1 : B \rightarrow B/F_n$  le passage au quotient. Le quotient est isomorphe au quotient de  $D \cup F_n(L)$  par  $F_n$ , et ce dernier est isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  (voir la section 7 du présent mémoire qui reprend une preuve de [S1]). Notons  $\phi : B/F_n \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  un isomorphisme envoyant le haut de  $D$  sur le bout supérieur du cylindre. Comme la bande  $B = ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$  est simplement connexe, on peut relever la composée  $\phi \circ p_1$  par le revêtement  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  en une certaine application  $\Phi_{F_n}$  vérifiant donc  $\pi \circ \Phi_{F_n} = \phi \circ p_1$ . Pour tout  $z \in L$ , le segment  $[z, F(z)]$  se projette par  $p_1$  en un lacet dont le nombre d'enroulement autour du bout supérieur est égal à 1. Donc  $\forall z \in L$ ,  $\Phi_{F_n}(F(z)) = \Phi_{F_n}(z) + 1$ . Cette égalité a donc lieu sur  $B \cap F_n^{-1}(B)$  car ce dernier est connexe : en effet il est égal à l'ensemble des points de  $B$  situés à gauche de la préimage par  $F_n$  du bord de droite de  $B$ . De cette équation fonctionnelle et de l'injectivité de  $\phi \circ p_1$ , on déduit celle de  $\Phi_{F_n}$ .  $\square$

La coordonnée de Fatou perturbée sur  $\mathfrak{B}_n$  est par définition l'application

$$\Phi_{f_n} = \Phi_{F_n} \circ \Phi_{g_n} : \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$$

qui conjugue  $f_n$  à  $T_1$  sur  $\mathfrak{B}_n \cap f_n^{-1}(\mathfrak{B}_n)$ .

Par définition du quotient, par injectivité de  $\Phi_{f_n}$ , et d'après la conjugaison :

**Lemme 28.** *Pour toute paire de points  $z, z'$  dans  $\mathfrak{B}_n$  telle que  $\Phi_{f_n}(z') = \Phi_{f_n}(z) + k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $k > 0$ , alors*

- (1)  $z' = f_n^k(z)$ ,
- (2)  $\forall k' \in \mathbb{N}$  entre 0 et  $k$ ,  $f_n^{k'}(z) \in \mathfrak{B}_n$ .

**Lemme 29.** *Soit  $w$  un point de la surface de translation et  $z$  le point du plan dynamique de  $f_n$  lui correspondant. Alors quand  $z$  tend vers l'un des points fixes de  $f_n$ ,  $\mathcal{F}'_n(z) - (z+1) \rightarrow 0$  et  $\mathcal{F}'_n(z) \rightarrow 1$ . En particulier,  $F_n(z) - (z+1) \rightarrow 0$  et  $F'_n \rightarrow 1$  aux deux extrémités de sa bande de définition  $]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$ .*

**Preuve.** Pour  $\mathcal{F}'_n$ , on procède comme dans la preuve du lemme 26 page 40, en remarquant que  $(f_n(z) - g_n(z))/(g_n(z) - z) \rightarrow 0$  aux points fixes de  $f_n$  (par le corollaire 4 page 14 au chapitre 1) et qu'on peut appliquer le lemme de Schwarz ou les inégalités de Cauchy à un disque  $B(u, r)$  dont le rayon tend vers l'infini quand  $z$  tend vers l'un des points fixes de  $f_n$ . L'énoncé concernant  $F_n$  en découle puisque d'après le point (4) du lemme 23 page 35, les extrémités de la bande tendent vers des points fixes de  $f_n$ .  $\square$

De même, il existe des fonctions

$$\begin{aligned} \Phi_{F^-} &: ]a, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \Phi_{F^+} &: ]-\infty, b[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \Phi_f^- = \Phi_{F^-} \circ \Phi_g^- &: \mathfrak{B}^- \rightarrow \mathbb{C} \\ \Phi_f^+ = \Phi_{F^+} \circ \Phi_g^+ &: \mathfrak{B}^+ \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

conjuguant les applications respectives à  $T_1$ . Les deux dernières ne sont autres que les coordonnées de Fatou usuelles de  $f$  sur les pétales  $\mathfrak{B}^+$  et  $\mathfrak{B}^-$ .

À ce point, je pense qu'il est utile de faire un petit rappel des notations introduites :  $f$  est un germe parabolique à  $Q$  pétales attractifs,  $f_n$  une suite de perturbations tendant vers  $f$ ,  $z_i$  les  $Q+1$  points fixes de  $f_n$  proches de 0. À cela nous avons associé des formes différentielles  $\omega_n$ ,  $\omega$  et les temps-1 des flots des champs de vecteurs  $1/\omega_n$ ,  $1/\omega$ , notés  $g_n$ ,  $g$ . Nous avons introduit :

- $\mathfrak{B}_n$  des bandes pour  $g_n$  ; servent également de pétales perturbés pour  $f_n$
- $\mathfrak{C}_n$  des raccords pour  $g_n$
- $\mathfrak{B}^+$  des  $\pi/2$ -pétales répulsifs de  $g$  ; servent également de pétales pour  $f$
- $\mathfrak{B}^-$  des  $\pi/2$ -pétales attractifs de  $g$  ; servent également de pétales pour  $f$
- $\mathfrak{C}$  des raccords de  $g$
- $\Phi_{g_n}$  redressement de  $1/\omega_n$  sur la bande  $\mathfrak{B}_n$
- $\tilde{\Phi}_{g_n}$  redressement de  $1/\omega_n$  sur le raccord  $\mathfrak{C}_n$
- $\Phi_g^+$  redressement de  $1/\omega$  sur  $\mathfrak{B}^+$
- $\Phi_g^-$  redressement de  $1/\omega$  sur  $\mathfrak{B}^-$
- $\tilde{\Phi}_g$  redressement de  $1/\omega$  sur  $\mathfrak{C}$
- $F_n$  conjuguée de  $f_n$  sur une bande  $\mathfrak{B}_n$  par  $\Phi_{g_n}$
- $\tilde{F}_n$  conjuguée de  $f_n$  sur un raccord  $\mathfrak{C}_n$  par  $\tilde{\Phi}_{g_n}$

- $F^+$  conjuguée de  $f$  sur le pétale  $\mathfrak{B}^-$  par  $\Phi_g^+$
- $F^-$  conjuguée de  $f$  sur le pétale  $\mathfrak{B}^-$  par  $\Phi_g^-$
- $\Phi_{F_n}$  coordonnée de Fatou pour  $F_n$  sur la bande verticale
- $\Phi_{F^+}$  coordonnée de Fatou pour  $F_n^+$  sur le demi-plan gauche
- $\Phi_{F^-}$  coordonnée de Fatou pour  $F_n^-$  sur le demi-plan droit
- $\Phi_{f_n}$  coordonnée de Fatou pour  $f_n$  sur le pétale perturbé  $\mathfrak{B}_n$
- $\Phi_f^+$  coordonnée de Fatou pour  $f$  sur le pétale  $\mathfrak{B}^+$
- $\Phi_f^-$  coordonnée de Fatou pour  $f$  sur le pétale  $\mathfrak{B}^-$

Nous n'avons pas défini de coordonnées de Fatou pour  $f$  ou  $f_n$  sur les raccords, car elles seraient beaucoup moins canoniques<sup>7</sup>.

## 12. Développement et convergence uniforme des coordonnées de Fatou perturbées, vues dans la surface de redressement

Voici la proposition principale de cette section (notez que nous ne normaliserons les fonctions  $\Phi_{F_n}$ ,  $\phi_{F^+}$ ,  $\Phi_{F^-}$ ,  $\Phi_{g_n}$ ,  $\Phi_g$  qu'à la section 13). Rappelons que le domaine de définition de  $F^-$  est un demi-plan à gauche et celui de  $F^+$  est un demi-plan à droite.

### Proposition 30.

(1) Il existe des constantes dépendant de  $n$  telles que :

$$\begin{aligned} \Phi_{F_n}(z) &= z + \text{cst} + o(1) \quad \text{quand} \quad \text{Im } z \longrightarrow +\infty \text{ dans } ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}, \\ \Phi_{F_n}(z) &= z + \text{cst}' + o(1) \quad \text{quand} \quad \text{Im } z \longrightarrow -\infty \text{ dans } ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} z_n^- \in \mathfrak{B}_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z^- \in \mathfrak{B}^- \\ z_n^+ \in \mathfrak{B}_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z^+ \in \mathfrak{B}^+ \end{aligned}$$

deux suites quelconques de points-bases. Soient

$$\begin{aligned} u_n^- &= \Phi_{g_n}(z_n^-), & u^- &= \Phi_g^-(z^-), \\ u_n^+ &= \Phi_{g_n}(z_n^+), & u^+ &= \Phi_g^+(z^+). \end{aligned}$$

(2) Sur chaque bande verticale  $S = ]x, x'[ \times \mathbb{R}$  contenue dans le demi-plan ouvert de définition de la fonction limite, on a pour la convergence uniforme sur  $S$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{F_n}(u_n^- + z) - \Phi_{F_n}(u_n^-) &\longrightarrow \Phi_{F^-}(u^- + z) - \Phi_{F^-}(u^-), \text{ resp.} \\ \Phi_{F_n}(u_n^+ + z) - \Phi_{F_n}(u_n^+) &\longrightarrow \Phi_{F^+}(u^+ + z) - \Phi_{F^+}(u^+) \end{aligned}$$

quand  $n \longrightarrow +\infty$ .

<sup>7</sup>. on perd l'unicité à une constante près

**Remarque.** Insistons sur le fait que la convergence n'est pas seulement locale, mais *uniforme* (au sens ci-dessus) sur les bandes verticales, qui sont des ensembles non bornés. Nous pensons que l'uniformité est un résultat nouveau, même si ce n'est qu'un raffinement de théorèmes connus. Nous avons besoin de ce point pour nos applications.

**Corollaire 31.** *Il existe  $M > 0$  et  $\kappa_n \in \mathbb{C}$  tels que  $\forall n$ ,*

$$\|\Phi_{F_n} - T_{\kappa_n}\|_\infty < M.$$

**Preuve.** Rappelons que  $\|\Phi_{F_n} - \text{id}\|_\infty < +\infty$ . Appliquons le point (2) de la proposition 30 page précédente à  $S = ]0, 1[ \times \mathbb{R}$  pour  $u^+$ . On en déduit que la suite

$$m_n = \sup_{S+u_n^+} |\Phi_{F_n} - T_{\kappa_n}|$$

est bornée pour  $\kappa_n = \Phi_{F_n}(u_n^+) - u_n^+$ . De même la suite

$$m'_n = \sup_{S'+u_n^-} |\Phi_{F_n} - T_{\kappa'_n}|$$

est bornée avec  $S' = ]-1, 0[ \times \mathbb{R}$  et  $\kappa'_n = \Phi_{F_n}(u_n^-) - u_n^-$ . Or d'après le point (1) de la proposition 30,  $\Phi_{F_n}$  est asymptote à une translation à chacun des deux bouts de la bande de définition  $]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$  de  $F_n$ . Il s'en suit que  $|\kappa_n - \kappa'_n| < m_n + m'_n$ . D'après le principe du maximum, on en déduit que sur  $B_n = ]\text{Re}(u_n^+), \text{Re}(u_n^-)[ \times \mathbb{R}$ , la suite

$$\sup_{B_n} |\Phi_{F_n} - T_{\kappa_n}|$$

est bornée. Pour passer à l'intégralité de la bande de définition  $]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$  de  $\Phi_n$ , il suffit de remarquer qu'on peut envoyer dans  $B_n$  tous les points de la bande de définition en appliquant un nombre borné de fois l'application  $F_n$  ou  $F_n^{-1}$ , puisque  $|F_n - T_1| < 1/4$  et  $\text{Re}(a_n) - \text{Re}(u_n^+)$  converge ainsi que  $\text{Re}(b_n) - \text{Re}(u_n^+)$  (point 18 du lemme 23 page 35).  $\square$

Un autre corollaire :

**Corollaire 32.** *Pour  $n$  assez grand,*

$$(\Phi_{F_n}^-)'(z) \longrightarrow 1 \quad \text{pour } z \in \mathfrak{B}_n \text{ quand } \text{Im } z \longrightarrow \pm\infty.$$

**Preuve.** Sur la sous-bande  $]a_n + 1, b_n - 1[ \times \mathbb{R}$ , cela découle du point (1) de la proposition 30 page précédente en appliquant le lemme de Schwarz ou les inégalités de Cauchy sur le disque  $B(z, 1)$ . On récupère l'intégralité de la bande en appliquant au plus deux fois  $F_n$  ou  $F_n^{-1}$  puisque  $|F_n - T_1| < 1/4$ . On conclut en utilisant  $F_n'(z) \longrightarrow 1$  en haut et en bas de la bande (lemme 29 page 43).  $\square$

Le reste de cette section est consacré à la preuve de la proposition 30.

**Lemme 33.**  $\exists M' > 0, \forall n$  suffisamment grand,  $\forall u \in ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$ ,

$$|F_n(u) - (u + 1)| \leq M' |Q_n(z)|$$

où  $z = \Phi_{g_n}^{-1}(u)$  et  $Q_n(z) = \prod (z - z_j)$ , produit pris sur les  $Q+1$  points fixes  $z_j$  de  $f_n$  proches de 0.

**Preuve.** Notons  $\Phi = \Phi_{g_n} : |F_n(u) - (u + 1)| = \left| \frac{F_n(u) - (u+1)}{(u+1) - u} \right| = \left| \frac{\Phi(f_n(z)) - \Phi(g_n(z))}{\Phi(g_n(z)) - \Phi(z)} \right|$ . Par des considérations de distorsion bornée, il suffit de majorer  $(f_n(z) - g_n(z))/(g_n(z) - z)$ . En effet, d'après lemme 25 page 40 avec  $R = 2$ ,  $\Phi^{-1}$  est définie sur  $B(u, 2)$  et y a distorsion bornée; ce disque contient les trois points  $u$ ,  $u + 1$  et  $F_n(u)$  puisque  $|F_n - T_1| < 1/4$ . On conclut en remarquant qu'on peut écrire  $(f_n - z)/(g_n - z) = 1 + Q_n w_n$  pour une certaine suite de fonctions holomorphes  $w_n$  définies, disons, sur  $\mathcal{R}'_n$ . En effet,  $f_n$  et  $g_n$  ont les mêmes multiplicateurs<sup>8</sup> aux  $z_j$ . Par principe du maximum,  $w_n$  converge.  $\square$

**Lemme 34.** Pour tout  $A > 0$ , il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n$  suffisamment grand

$$\begin{aligned} \forall u \in [-A, A] \times \mathbb{R}, \quad Q_n(\Phi_{g_n}^{-1}(u_n^- + u)) &\leq \frac{M}{1 + |\operatorname{Im} u|^{1 + \frac{1}{Q}}} \\ \forall u \in [-A, A] \times \mathbb{R}, \quad Q_n(\Phi_{g_n}^{-1}(u_n^+ + u)) &\leq \frac{M}{1 + |\operatorname{Im} u|^{1 + \frac{1}{Q}}} \end{aligned}$$

quand le membre de gauche est défini (c'est-à-dire quand  $\Phi_{g_n}(u_n^\pm + u) \in \Phi_{g_n}(\mathfrak{B}_n)$ ).

Nous remettons sa preuve à la section 16.3.

**Remarque.** Bien sûr,

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{1 + |t|^{1 + \frac{1}{Q}}} dt < +\infty.$$

Ceci a une conséquence intéressante :

**Corollaire 35.** Les préimages des verticales par  $\Phi_{g_n}$  (qui sont des trajectoires de  $i\omega_n$ ) sont de longueur bornée (indépendamment de  $n$ ).

**Preuve.** En effet,  $(\Phi_{g_n}^{-1})'(u) = 1/\omega_n(\Phi_{g_n}(u))$ . Or  $1/\omega_n(z) = w_n(z)Q_n(z)$  pour une certaine suite de fonctions holomorphes  $w_n$  qui converge.  $\square$

<sup>8</sup> Rappelons que l'on s'est restreint dans ce chapitre à un cas où, en particulier, les  $z_j$  sont des points fixes simples. Cependant, cette factorisation  $1 + Q_n w_n$  reste possible dans le cas général, voir le point (1) du corollaire 4 page 14 au chapitre 1.

Effectuons maintenant la construction de la section 7 chapitre 2 : considérons le domaine  $W_n^-$  entre la ligne  $L_n = u_n^- + i\mathbb{R}$  et son image  $F_n(L_n)$ . Recollons un voisinage de  $L_n$  sur un voisinage de  $F_n(L_n)$  via  $F_n$ . Nous obtenons une surface de Riemann  $\overline{W}_n^-/F_n$ . L'application  $\Phi_{F_n}$  induit un isomorphisme de  $\overline{W}_n^-/F_n$  vers  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Effectuons la même construction pour  $F^-$ , avec des notations analogues.

**Lemme 36.** *Il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n$  suffisamment grand,  $\forall z \in u_n^- + i\mathbb{R}$ ,*

$$|F_n(z) - (z + 1)| \leq \frac{M}{1 + |\operatorname{Im} z|^{1 + \frac{1}{Q}}} \quad \text{et}$$

$$|F_n'(z) - 1| \leq \frac{M}{1 + |\operatorname{Im} z|^{1 + \frac{1}{Q}}}.$$

De plus,

$$F_n(u_n^- + z) \longrightarrow F(u^- + z) \quad \text{et}$$

$$F_n'(u_n^- + z) \longrightarrow F'(u^- + z)$$

uniformément sur  $i\mathbb{R}$ .

**Preuve.** La première inégalité est une conséquence immédiate des lemmes 33 et 34 page précédente. Elle a d'ailleurs lieu sur un  $\varepsilon$ -voisinage de  $L_n$  (voisinage sur lequel  $F_n$  est définie) pour un certain  $\varepsilon > 0$  indépendant de  $n$ ; ce qui donne la deuxième inégalité pour une autre constante  $M$  par les inégalités de Cauchy ou le lemme de Schwarz.

Puis,  $F_n(u_n^- + z) \longrightarrow F(u^- + z)$  uniformément sur tout compact de  $i\mathbb{R}$  : en effet, premièrement  $f_n \longrightarrow f$  uniformément sur  $B(0, r)$ , deuxièmement  $\omega_n \longrightarrow \omega$  uniformément sur les compacts de  $B(0, r) \setminus \{0\}$ , troisièmement  $z_n^- \longrightarrow z^-$ . Par la première inégalité, la convergence est alors globale sur  $i\mathbb{R}$ . On procède pour la convergence de la dérivée de la même façon que pour la deuxième inégalité.  $\square$

**Preuve de la proposition 30 (page 44).**

Point (1). On applique le lemme 22 page 29 sur les recollements aux fonctions  $F_n(u_n^- + z)$  tendant vers  $\longrightarrow F(u^- + z)$ . Les hypothèses du lemme sont satisfaites d'après les équations (20), (21) page 41, un analogue de l'équation (22) page ci-contre et d'après le lemme 36. Ainsi, nous savons que  $F_n(z) = z + \text{cst} + o(1)$  quand  $\operatorname{Im}(z) \longrightarrow +\infty$  dans  $\overline{W}_n^-$  (resp.  $-\infty$  dans  $\overline{W}_n^-$ ). Pour obtenir ce DL sur toute la large bande  $]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$ , il suffit d'utiliser l'équation  $\Phi_{F_n} \circ F_n = T_1 \circ \Phi_{F_n}$  et le fait, qui découle de l'équation (20), que tout point de  $]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$  peut être envoyé dans  $W_n$  en itérant soit  $F_n$  soit  $F_n^{-1}$  un nombre borné de fois (la borne dépend de la largeur  $b_n - a_n$  de la bande, donc de  $n$ ).



Point (2). Dans le cas de  $F_n(u_n^- + z)$  et  $F(u^- + z)$  cela suit aisément du lemme 22, de  $|F_n - T_1| < 1/4$  et de l'équation  $\Phi_{F_n} \circ F_n = T_1 \circ \Phi_{F_n}$  appliquée un nombre borné de fois, avec une borne cette fois indépendante de  $n$  : elle dépend uniquement de  $|x' - x|$ . Dans le cas de  $F_n(u_n^+ + z)$  et  $F(u^+ + z)$ , il suffit de refaire la construction avec  $L_n = u_n^+ - 2 + i\mathbb{R}$  et d'adapter le lemme 36.  $\square$

### 13. Normalisation et développements des coordonnées de Fatou perturbées dans les coordonnées de départ

Pour effectuer cette normalisation, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire : que le rayon du disque  $B(0, r)$  dans lequel on applique le lemme 23 page 35 ait été choisi suffisamment petit pour que  $f = \lim f_n$  n'ait que l'origine pour point fixe dans un disque légèrement plus grand. De cette façon,  $\omega(z)$  ne tend vers  $\infty$  que si  $z \rightarrow 0$ , et la convergence de  $\omega_n$  vers  $\omega$  est uniforme sur  $B(0, r) \setminus B(0, \varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon$ .

**13.1. Normalisations.** À partir de cette section, nous normalisons  $\Phi_g^-, \Phi_g^+, \Phi_f^-, \Phi_f^+$ , selon les conventions de la section 4.3 chapitre 1.<sup>(9)</sup> En particulier

$$\Phi_f^-(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} \Phi_g^-(z) + o(1)$$

et de même avec des  $+$ . Comme  $\Phi_{F^-} = \Phi_f^- \circ (\Phi_g^-)^{-1}$  et  $\Phi_{F^+} = \Phi_f^+ \circ (\Phi_g^+)^{-1}$ , les normalisations précédentes impliquent les suivantes :

$$(23) \quad \Phi_{F^-}(z) \underset{|z| \rightarrow +\infty}{=} z + 0 + o(1),$$

$$(24) \quad \Phi_{F^+}(z) \underset{|z| \rightarrow +\infty}{=} z + 0 + o(1).$$

Au début de ce chapitre, nous avons dû décider d'un côté duquel  $\lambda_n \rightarrow 0$ , c'est-à-dire que nous avons restreint le choix de  $\lambda_n$  à un secteur  $S = \diamond$  ou  $S = \diamond$ . Ce choix a déterminé des secteurs  $S_j$  contenant les points fixes  $z_j$  de  $f_n$  proches de 0. Nous introduisons ici la notation  $\nu$ , avec

$$\nu = 1 \text{ si } S = \diamond \text{ et } \nu = -1 \text{ si } S = \diamond.$$

On notera par abus de langage  $\nu\infty = +\infty$  si  $\nu = 1$  et  $\nu\infty = -\infty$  si  $\nu = -1$ .

9. Rappelons que cette normalisation consiste à écrire dans l' $\alpha$ -pétale le développement asymptotique en 0 de ces fonctions, le terme logarithmique étant choisi de façon particulière, et à fixer à 0 le terme constant de ce développement.

Rappelons que nous n'avons pas encore normalisé  $\Phi_{F_n}$ . Nous le faisons maintenant en imposant :

$$(25) \quad \Phi_{F_n} \underset{\text{Im}(z) \rightarrow v\infty}{=} z + 0 + o(1)$$

quand  $\text{Im}(z) \rightarrow v\infty$ . Notez que la normalisation est faite, soit en haut, soit en bas, mais pas des deux côtés puisque le développement de  $F_n$  possède vraisemblablement deux constantes différentes aux deux bouts. Le corollaire 31 page 45 implique

$$(26) \quad \|\Phi_{F_n} - \text{id}\|_\infty < M$$

pour une autre constante  $M > 0$  indépendante de  $n$ .

Nous allons donner, non pas une mais deux normalisations pour  $\Phi_{g_n}$ . Rappelons qu'il s'agit d'une primitive de  $\omega_n$  sur le domaine simplement connexe  $\mathfrak{B}_n$ . Au lieu de donner deux noms différents aux deux primitives ainsi choisies, nous laisserons  $\Phi_{g_n}$  être n'importe quelle primitive de  $\omega_n$  sur  $\mathfrak{B}_n$  et noterons les deux normalisations  $\Phi_{g_n} + c_n^-$  et  $\Phi_{g_n} + c_n^+$ .

**Remarque.** Nous avons défini section 11 la fonction  $\Phi_{f_n}$  par  $\Phi_{f_n} = \Phi_{F_n} \circ \Phi_{g_n}$ . Nous n'avons alors pas normalisé  $\Phi_{g_n}$  ni  $\Phi_{F_n}$ . Nous venons de normaliser  $\Phi_{F_n}$ , c'est à dire de lui ajouter une constante de sorte qu'elle vérifie la normalisation, et dorénavant  $\Phi_{F_n}$  réfère à cette normalisée. Nous ne toucherons pas à  $\Phi_{g_n}$ , qui reste quelconque. Ainsi  $\Phi_{f_n}$  reste également non normalisée. Maintenant, ajouter une constante  $c$  à  $\Phi_{g_n}$  remplace  $\Phi_{F_n}$  par  $\text{cst} + \Phi_{F_n} \circ T_c^{-1}$ , et même par  $T_c \circ \Phi_{F_n} \circ T_c^{-1}$  si on veut continuer de respecter la normalisation. Cela a donc pour effet d'ajouter  $c$  à  $\Phi_{f_n}$ . C'est pourquoi nous définirons les deux normalisations suivantes de  $\Phi_{f_n}$  :  $\Phi_{f_n} + c_n^-$  et  $\Phi_{f_n} + c_n^+$ , qui pourraient surprendre a priori.

Soient  $\mathfrak{B}^+$  et  $\mathfrak{B}^-$  les deux pétales associés à  $\mathfrak{B}_n$  (voir le lemme 23 page 35, en particulier le point (17)). Choisissons un point  $a^-$  sur l'axe attractif associé à  $\mathfrak{B}^-$  et  $a^+$  sur l'axe répulsif associé à  $\mathfrak{B}^+$ , tels que  $]0, a^+ ] \subset \mathfrak{B}^+$  et  $]0, a^- ] \subset \mathfrak{B}^-$ .<sup>(10)</sup> Soit  $m_0$  le multiplicateur de  $f_n$  en 0 et  $m_j$  celui de  $z_j$ . Tous ces multiplicateurs sont proches de 1 quand  $n$  est suffisamment grand. Notons  $\log m_0$  et  $\log m_j$  la branche principale du logarithme appliquée à ces nombres. Considérons le développement en série de Laurent de  $\omega_n$  dans un anneau de la forme  $D(0, r) \setminus D(0, d_n)$  où  $d_n$  est la distance de

10. Tout  $\alpha$ -pétale  $V$  contient un tel segment de son axe : en effet  $V$  est envoyé sur un secteur par l'isomorphisme  $\Phi$  qui vérifie  $\Phi(z) \sim -1/QCz^Q$  quand  $z \rightarrow 0$ ; on utilise alors le théorème de Rouché.

0 à celui des  $z_j$  le plus éloigné de 0 :

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{1}{z \log m_0} + \sum_{j=1}^Q \frac{1}{(z - z_j) \log m_j} + \text{reste}_n \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^Q \frac{z_j^k}{\log m_j} \right) \frac{1}{z^{k+1}} + \left( \sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \right) \frac{1}{z} + \text{reste}_n\end{aligned}$$

où  $\text{reste}_n$  est une fonction holomorphe qui converge uniformément sur  $B(0, r)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  pour  $r$  suffisamment petit : en effet,  $\text{reste}_n$  coïncide avec la partie non polaire du développement en série de Laurent de  $\omega_n$ , et  $\omega_n(z) \rightarrow \omega(z)$  uniformément sur tout compact de  $B(0, r) \setminus \{0\}$  pour un certain  $r$ . Une intégration au voisinage d'un point  $z$  quelconque appartenant à la fois à  $\mathfrak{B}_n$  et à l'anneau où on a fait le développement en série de Laurent donne alors :

$$\Phi_{g_n} = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^Q \frac{z_j^k}{\log m_j} \right) \frac{-1}{kz^k}}_{\text{polaire}_n(z)} + \left( \sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \right) \log z + \text{cst} + \text{Reste}_n(z)$$

où  $\text{Reste}_n$  désigne la primitive de  $\text{reste}_n$  qui s'annule à l'origine, et  $\log z$  est pour l'instant n'importe quelle branche du logarithme définie au voisinage du point  $z$ . Par le lemme 23 page 35 point (17),  $a^-$  finit par être contenu dans  $\mathfrak{B}_n$ . Comme  $a^-$  est sur un axe attractif,  $-QC(a^-)^Q$  est un réel positif. La constante  $c_n^-$  est alors choisie de façon que l'égalité

$$(27) \quad \Phi_{g_n} + c_n^- = \text{polaire}_n(z) + \left( \sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \right) \frac{\log -QCz^Q}{Q} + 0 + \text{Reste}_n(z),$$

soit vérifiée au point  $a^-$ , et donc à son voisinage, pour la branche principale du logarithme, c.à.d. pour la valeur réelle de  $\log -QC(a^-)^Q$ . De même,

$$(28) \quad \Phi_{g_n} + c_n^+ = \text{polaire}_n(z) + \left( \sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \right) \frac{\log QCz^Q}{Q} + 0 + \text{Reste}_n(z),$$

au voisinage de  $a^+$ , avec la branche de  $z \mapsto \log QCz^Q$  réelle en  $z = a^+$ .

**Remarque.** La partie polaire est explicitement donnée par :

$$\forall z \text{ tel que } |z| > d_n = \max_{j=1 \dots Q} |z_j|, \quad \text{polaire}_n(z) = \sum_{j=1}^Q \frac{\log_p \left(1 - \frac{z_j}{z}\right)}{\log m_j}$$

où  $\log_p$  désigne la branche principale du logarithme.

**Remarque.** Pour l'application qui en est faite dans ce mémoire, il aurait suffi d'un choix de n'importe quelle suite  $c_n^\pm$  telle que  $\Phi_{g_n} + c_n^\pm$  tend vers  $\Phi_g^\pm$  uniformément sur les compacts de  $\mathfrak{B}^\pm$ . Mais nous avons trouvé cette normalisation intéressante.

**Remarque.** Le fait que  $]0, a^+] \subset \mathfrak{B}^+$  garantit que si on avait choisi une autre valeur  $a'^+$  de  $a^+$  (satisfaisant la même condition), la normalisation serait la même pour  $n$  assez grand. En effet le segment  $[a'^+, a^+]$  finit par être inclus dans  $\mathfrak{B}_n$ . De même avec des  $-$  à la place des  $+$ .

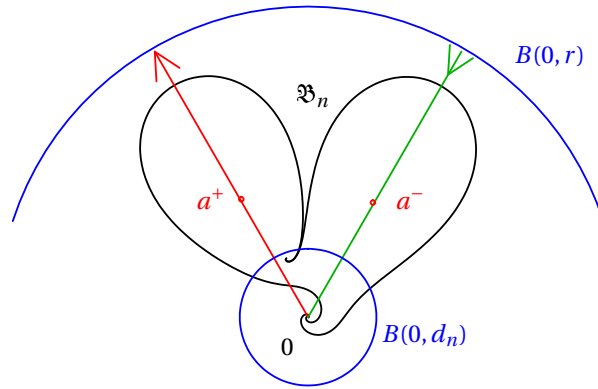


FIGURE 7: L'anneau rond sur lequel est fait le développement en série de Laurent utilisé pour la normalisation.

### 13.2. Convergence.

**Lemme 37.** Avec les conventions de la section 13.1, on a

$$\Phi_{g_n} + c_n^+ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_g^+$$

uniformément sur les compacts de  $\mathfrak{B}^+$  et

$$\Phi_{g_n} + c_n^- \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_g^-$$

uniformément sur les compacts de  $\mathfrak{B}^-$ .

**Preuve.** Rappelons que  $\Phi'_{g_n}(z) = \omega_n(z)$  et  $(\Phi_g^\pm)'(z) = \omega(z)$  et que  $\omega_n \rightarrow \omega$  uniformément sur tout compact de  $B(0, r)$ . L'ensemble  $\mathfrak{B}^\pm$  est un ouvert connexe et, par le point (17) du lemme 23 page 35, tout compact de  $\mathfrak{B}^\pm$  finit par être contenu dans  $\mathfrak{B}_n$ . Donc il suffit de vérifier la convergence au point  $a^\pm$ . Rappelons que la fonction  $\Phi_g$  a été normalisée (section 4.3 chapitre 1) de façon que l'on ait le DL suivant dans  $\mathfrak{B}^\pm$  :

$$\Phi_g(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} \text{polaire}(z) + \gamma \log(\pm Q C z^Q) + 0 + o(1)$$

pour la branche de  $z \mapsto \log(\pm Q C z^Q)$  qui est réelle sur l'axe de  $\mathfrak{B}^\pm$ . Comme 0 appartient à l'adhérence de  $\mathfrak{B}^\pm$ , ceci implique que  $\forall z \in \mathfrak{B}^\pm$ ,

$$\Phi_g(z) = \text{polaire}(z) + \gamma \log(\pm Q C z^Q) + 0 + \text{Reste}(z)$$

où Reste est la primitive s'annulant en 0 de la partie non polaire du développement en série de Laurent de  $\omega$ . Or quand  $n \rightarrow +\infty$ , la suite polaire  $_n(z)$  tend vers polaire(z) uniformément sur tout compact de  $B(0, r) \setminus \{0\}$ ,  $\text{Reste}_n(z)$  tend vers Reste(z) uniformément sur  $B(0, r)$  et enfin  $\sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \rightarrow Q\gamma$  (lemme 8 page 17 au chapitre 1).  $\square$

Par le point (18) du lemme 23 page 35 appliqué à n'importe quel  $w$  de  $\mathfrak{B}^+$ , resp.  $\mathfrak{B}^-$ , on a  $a_n - \text{Re} \Phi_{g_n}(w) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a - \text{Re} \Phi_g^-(w)$ , resp.  $b_n - \text{Re} \Phi_{g_n}(w) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - \text{Re} \Phi_g^-(w)$ , donc le lemme 37 page précédente implique

$$(29) \quad a_n + \text{Re}(c_n^+) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a,$$

$$(30) \quad b_n + \text{Re}(c_n^-) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b.$$

D'où

**Lemme 38.** *Il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n$  suffisamment grand,*

$$\Phi_{f_n}(\mathfrak{B}_n) \text{ contient } ] - \text{Re}(c_n^+) + M, - \text{Re}(c_n^-) - M[ \times \mathbb{R}.$$

**Preuve.** Écrire  $\Phi_{f_n}(\mathfrak{B}_n) = \Phi_{F_n}(\Phi_{g_n}(\mathfrak{B}_n)) = \Phi_{F_n}(]a_n, b_n[ \times \mathbb{R})$  puis appliquer les équations (26) page 49, (29) et (30).  $\square$

**Définition 39.** *Nous appellerons coordonnées de Fatou perturbées normalisées les fonctions  $\Phi_{f_n} + c_n^-$  et  $\Phi_{f_n} + c_n^+$ .*

**Lemme 40.**

$$\Phi_{f_n} + c_n^+ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_f^+$$

uniformément sur les compacts de  $\mathfrak{B}^+$  et

$$\Phi_{f_n} + c_n^- \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_f^-$$

uniformément sur les compacts de  $\mathfrak{B}^-$ .

**Preuve.** Nous effectuons la preuve dans le cas des exposants  $-$ , l'autre cas étant analogue. La convergence uniforme pour tout compact est équivalente à la convergence au sens suivant : pour tout  $z^- \in \mathfrak{B}^-$ , pour toute suite  $z_n^- \rightarrow z^-$  avec  $z_n^- \in \mathfrak{B}_n$ ,  $\Phi_{f_n}(z_n^-) + c_n^- \rightarrow \Phi_f^-(z^-)$ . Rappelons que  $\Phi_{f_n} = \Phi_{F_n} \circ \Phi_{g_n}$  et  $\Phi_f^- = \Phi_{F^-} \circ \Phi_g^-$ . Appliquons le deuxième point de la proposition 30 page 44 à la suite  $z_n^-$  ci-dessus (sur n'importe quelle bande  $S$  non vide) :

$$\sup_{z \in S} \left| (\Phi_{F_n}(u_n^- + z) - \Phi_{F_n}(u_n^-)) - (\Phi_{F^-}(u^- + z) - \Phi_{F^-}(u^-)) \right| < \varepsilon_n$$

avec  $u_n^- = \Phi_{g_n}(z_n^-)$ ,  $u^- = \Phi_g^-(z^-)$  et  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Avec les normalisations des équations (23) page 48 et (25) page 49, on en déduit en faisant tendre  $\text{Im } z$  vers  $v\infty$

que

$$\left| (u_n^- - \Phi_{F_n}(u_n^-)) - (u^- - \Phi_{F^-}(u^-)) \right| < \varepsilon_n.$$

autrement dit que

$$(\Phi_{g_n}(z_n^-) - \Phi_{f_n}(z_n^-)) - (\Phi_{g^-}(z^-) - \Phi_{f^-}(z^-)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut alors avec le lemme 37 page 51.  $\square$

### 13.3. Premiers termes du développement.

L'objet de notre attention est une constante apparaissant dans un développement en 0 des coordonnées de Fatou perturbées normalisées  $\Phi_{f_n} + c_n^\pm$ . Ici, nous démontrons l'existence de cette constante. Par le point (4) du lemme 23 page 35, il existe un voisinage simplement connexe de 0 dans  $\mathfrak{B}_n$  qui évite les pôles de  $\omega_n$ . Ceci implique

$$\Phi_{g_n}(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} \frac{\log z}{2i\pi\lambda_n} + \text{cst} + o(1)$$

quand  $z \rightarrow 0$  dans  $\mathfrak{B}_n$ , pour une certaine branche de  $\log z$  sur  $\mathfrak{B}_n$ . Réécrivons-le de la façon suivante :

$$\Phi_{g_n}(z) + c_n^- \underset{z \rightarrow 0}{=} \frac{\log -QCz^Q}{2i\pi Q\lambda_n} + b_n^- + o(1)$$

et

$$\Phi_{g_n}(z) + c_n^+ \underset{z \rightarrow 0}{=} \frac{\log QCz^Q}{2i\pi Q\lambda_n} + b_n^+ + o(1)$$

pour une paire de constantes  $b_n^+$  et  $b_n^-$ , en utilisant les mêmes branches de  $z \mapsto \log -QCz^Q$  et  $z \mapsto \log QCz^Q$  que dans les équations (27) et (28) page 50, c'est-à-dire définies sur l'ensemble simplement connexe  $\mathfrak{B}_n$  et prenant une valeur réelle en respectivement  $-QC(a^-)^Q$  et  $QC(a^+)^Q$ .

**Remarque.** Cette précision sur les branches est importante car d'une part changer de branche change la valeur des constantes  $b_n^\pm$ , d'autre part les domaines  $\mathfrak{B}_n$  spiralent (sauf quand  $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ) près de 0 : en effet leurs bords sont des verticales du champ de vecteurs  $1/\omega_n$ , dont la valeur propre en 0 vaut  $2i\pi\lambda_n$ . On ne peut donc pas utiliser la branche principale du logarithme.

Introduisons les deux nombres complexes  $d^-$  et  $d^+$  tels que :<sup>11</sup>

$$(d^\pm)^Q = \frac{\pm 1}{QC},$$

$$\arg d^\pm = \text{la direction de l'axe associé à } \mathfrak{B}^\pm.$$

11. Rappelons que  $\mathfrak{B}^+$  et  $\mathfrak{B}^-$  est la paire de pétales adjacents de  $f$  associée à la suite  $\mathfrak{B}_n$  ; leurs axes sont les deux axes adjacents à l'axe du secteur  $S_j$  associé au point fixe  $z_j$  contenu dans le bord de  $\mathfrak{B}_n$ , voir les sections 8 et 9 de ce chapitre.

On peut donc écrire,

$$\Phi_{g_n}(z) + c_n^\pm = \frac{\log \frac{z}{d^\pm}}{2i\pi\lambda_n} + b_n^\pm + o(1)$$

pour la branche de  $\log(z/d^\pm)$  définie sur  $\mathfrak{B}_n$  et réelle en  $z = a^\pm$ . Le lemme suivant sera prouvé dans la section 16.4

**Lemme 41.**

$$b_n^\pm = \sum_{j=1}^Q \frac{\log_p \frac{-z_j}{d^\pm}}{\log m_j}$$

pour la branche principale  $\log_p$  du logarithme.

Comme  $\Phi_{f_n}(z) = \Phi_{g_n}(z) + o(1)$  quand  $z \rightarrow 0$  :

**Proposition 42.** Quand  $z \rightarrow 0$  dans  $\mathfrak{B}_n$ ,

$$\Phi_{f_n} + c_n^- = \frac{\log \frac{z}{d^-}}{2i\pi\lambda_n} + b_n^- + o(1),$$

$$\Phi_{f_n} + c_n^+ = \frac{\log \frac{z}{d^+}}{2i\pi\lambda_n} + b_n^+ + o(1).$$

(... pour la branche de  $\log(z/d^\pm)$  définie sur  $\mathfrak{B}_n$  et réelle en  $z = a^\pm$ .)

**Proposition 43.**

$$\Phi'_{f_n}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2i\pi\lambda_n z}$$

**Preuve.** Nous utilisons  $\Phi_{f_n} = \Phi_{F_n} \circ \Phi_{g_n}$ . D'une part  $\Phi'_{g_n}(z) = 1/\omega_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2i\pi\lambda_n z}$ . Rappelons que par le point (4) du lemme 23 page 35,  $\Phi_{g_n}(z)$  tend vers le haut ou le bas de la bande de définition de  $\Phi_{F_n}$ . D'autre part,  $\Phi'_{F_n} \rightarrow 1$  aux extrémités de cette bande (corollaire 32 page 45).  $\square$

**13.4. Traversée du désert.** Fixons un index  $j_0 \neq 0$  et considérons la suite d'objets  $\mathfrak{B}_n, \Phi_{f_n}$  associés. Le pétale perturbé  $\mathfrak{B}_n$  est "accroché" aux points fixes 0 et  $z_{j_0}$  de  $f_n$ . Rappelons que nous avons noté  $\nu = 1$  si  $S = \diamond$  et  $\nu = -1$  si  $S = \diamond$ . La différence, que nous noterons  $\Delta_n$ , entre les deux normalisations faites pour  $\Phi_{f_n}$ , ainsi que celles de  $\Phi_{g_n}$ , vérifie :

$$\Delta_n = (\Phi_{g_n} + c_n^-) - (\Phi_{g_n} + c_n^+) = (\Phi_{f_n} + c_n^-) - (\Phi_{f_n} + c_n^+) = c_n^- - c_n^+.$$

Le lemme suivant sera prouvé section 16.4

**Lemme 44.**

$$\Delta_n = b_n^- - b_n^+ + \frac{\nu}{2Q\lambda_n}.$$

**Lemme 45.**

$$(31) \quad \Delta_n = -v \frac{2i\pi}{\log m_{j_0}} + v \left( \sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \right) \frac{i\pi}{Q}$$

**Preuve.** D'après le lemme 44 page ci-contre,  $\Delta_n = b_n^- - b_n^+ + \frac{vi\pi}{Q \log m_0}$ . Il suffit alors d'utiliser la valeur de  $b_n^\pm$  donnée au lemme 41 page précédente.<sup>(12)</sup>  $\square$

Par conséquent, d'après le lemme 8 page 17 :

$$\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v \left( \frac{-2i\pi}{\log m_{j_0}} + i\pi\gamma \right) + o(1)$$

où  $\gamma$  est la constante définie au chapitre 1 par l'équation (10) page 16 section 3.

**Remarque.** Notons que  $\frac{2i\pi}{\log m_{j_0}} = \frac{-1}{Q\lambda_n} + o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$  et que le reste n'est en général pas d'ordre plus petit que  $1/\lambda_n^{1-\frac{1}{Q}}$ , car  $m_j$  dépend analytiquement de  $\lambda^{1/Q}$  et non de  $\lambda$  (au voisinage de 0). En particulier,  $\Delta_n \neq v\left(\frac{1}{Q\lambda_n} + \text{cst}\right) + o(1)$ .

**Remarque.** Cependant, quand la famille analytique  $f_\lambda$  vérifie “ $\forall \lambda$  tous les  $m_j$  sont égaux” alors  $c_n^- - c_n^+$  est indépendante de  $j_0$ . De plus,  $m_{j_0}$  est maintenant analytique en  $\lambda$ , et  $\frac{2i\pi}{\log m_{j_0}} = \frac{-1}{Q\lambda_n} + 2i\pi\gamma + \mathcal{O}(\lambda_n)$ . En effet, l'égalité des  $m_j$  implique d'après le lemme 8 page 17 que  $1/\log m_0 + Q/\log m_{j_0} = Q\gamma + o(1)$  avec  $m_0 = f_n'(0) = \exp(2i\pi\lambda_n)$ , et par analyticité le  $o(1)$  devient un  $\mathcal{O}(\lambda_n)$ . Donc

$$(32) \quad \Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v \left( \frac{1}{Q\lambda_n} - i\pi\gamma \right) + \mathcal{O}(\lambda_n).$$

Qu'est-ce qui motive le titre de cette section ? Nous voyons le pétale perturbé comme un désert à traverser. Le nombre d'itérations nécessaire à cette traversée est approximativement  $\text{Re} \Delta_n$  (il en diffère d'au plus une constante<sup>13</sup>). Aux portes du désert, on utilise les cartes  $\Phi_{f_n} + c_n^-$  (au début du voyage) et  $\Phi_{f_n} + c_n^+$  (à la fin), La valeur de  $\Delta_n \bmod 1$  permet donc de savoir où le point termine sa traversée<sup>14</sup>.

12. On pouvait le prouver sans passer par  $b_n^\pm$ , en considérant l'intégrale de  $\omega_n$  le long d'un lacet allant de  $a^+$  vers  $a^-$  dans  $\mathfrak{B}_n$ , puis retournant vers  $a^+$  le long d'un segment. On obtient  $2i\pi$  fois le résidu de  $\omega_n$  en  $z_{j_0}$ , qui vaut  $1/\log m_{j_0}$ , fois le nombre d'enroulement, dont il faut justifier qu'il est égal à  $v$ , par exemple avec les méthodes de la section 16.4. Or l'intégrale sur la première partie vaut  $\Phi_{g_n}(a^-) - \Phi_{g_n}(a^+)$ . Quand à l'intégrale sur la seconde partie, elle vaut en utilisant les notations de la section 13.1 :  $\text{polaire}_n(a^+) - \text{polaire}_n(a^-) + \left(\sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j}\right) \log_p(a^+/a^-) + \text{Reste}_n(a^+) - \text{Reste}_n(a^-)$ , c'est-à-dire par définition de  $c_n^\pm$  (équations (27) et (28) page 50)  $(\Phi_{g_n}(a^+) + c_n^+) - (\Phi_{g_n}(a^-) + c_n^-) + \left(\sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j}\right) vi\pi/Q$ .

13. voir les équations (26) page 49, (29) et (30) page 52 et se rappeler que le domaine de définition de  $\Phi_n$  est  $]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$

14. en fonction de sa coordonnée dans la carte de départ, et connaissant l'image du bord droit de la bande dans la carte d'arrivée



**13.5. Comportement asymptotique de la constante apparaissant dans le développement.** Considérons les constantes  $b_n^-$  et  $b_n^+$  de la section précédente (voir la proposition 42 page 54).

13.5.1. *Un premier développement, dans le cas général.* Rappelons encore la définition de  $m_0$  qui est le multiplicateur de  $f_n = f_{\lambda_n}$  en 0 et de  $m_j$  qui est celui en le point fixe  $z_j$ . Continuons à noter  $\log m_0$  et  $\log m_j$  les valeurs en ces nombres de la branche principale du logarithme, et

$$v = 1 \text{ si } S = \diamond \text{ ou } v = -1 \text{ si } S = \diamond.$$

Rappelons que  $d^-$  et  $d^+$ , définis section 13.3, sont les uniques solutions de

$$(d^-)^Q = \frac{-1}{QC} \quad \text{et} \quad (d^+)^Q = \frac{1}{QC}$$

tels que l'axe attractif de  $\mathfrak{B}^-$  est  $d^- \cdot \mathbb{R}_+^*$ , et l'axe répulsif de  $\mathfrak{B}^+$  est  $d^+ \cdot \mathbb{R}_+^*$ . On a introduit section 8 du présent chapitre des secteurs  $S_j$  contenant  $z_j$ . Choisissons maintenant des nombres complexes  $d_j$ , de module quelconque, tels que  $d_j \cdot \mathbb{R}_+^*$  soit l'axe central de  $S_j$ . En particulier  $d^-$ ,  $d^+$  et les  $d_j$  vérifient

$$d^- \in \frac{-1}{C} \cdot \mathbb{R}_+^*, \quad d^+ \in \frac{1}{C} \cdot \mathbb{R}_+^*, \quad d_j^Q \in \frac{vi}{C} \cdot \mathbb{R}_+^*.$$

**Proposition 46.** *Il existe une constante  $\Gamma \in \mathbb{C}$  telle que*

$$b_n^\pm \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( -\frac{1}{2i\pi Q \lambda_n} + \gamma \right) \log_p(v 2\pi Q \lambda_n) + \frac{i\pi}{2Q} \sum_{j=1}^Q \frac{k_j^\pm(v)}{\log m_j} + \Gamma + \mathcal{O}(\lambda_n \log \lambda_n)$$

où  $k_j^\pm(v) \in \mathbb{Z}$  est défini comme suit :

$$\arg \frac{-d_j}{d^-} = \frac{\pi}{2Q} k_j^-(v) \in ]-\pi, \pi[,$$

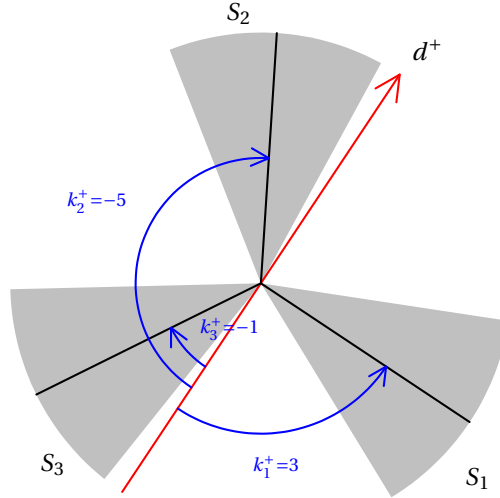
$$\arg \frac{-d_j}{d^+} = \frac{\pi}{2Q} k_j^+(v) \in ]-\pi, \pi[.$$

De plus en notant  $w'_j = \frac{-Cz_j^Q}{2i\pi\lambda_n}$ , qui tend vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\Gamma$  vérifie :

$$\Gamma = \frac{1}{Q} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j \frac{\log_p w'_j}{\log m_j}.$$

**Preuve.** On cherche un développement asymptotique quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$b_n^\pm = \sum_{j=1}^Q \frac{\log_p \frac{-z_j}{d^\pm}}{\log m_j}.$$

FIGURE 8: Illustration de la définition de  $k_j^+$  pour  $Q = 3$  et  $S = \emptyset$ .

On a  $\nu \operatorname{Re}(\lambda_n) > 0$ . Soit  $\mu$  la racine  $Q$ -ième principale de  $2\pi Q\nu\lambda_n$ . Quand  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$\left(\frac{-z_j}{d^\pm}\right)^Q \sim si2\pi Q\nu\lambda,$$

où

$$s = \pm(-1)^{Q+1}\nu \in \{-1, 1\}.$$

Donc

$$\frac{-z_j}{d^\pm} = \mu e^{i\theta_j} w_j(\mu)$$

où  $w_j$  est une fonction analytique de  $\mu$ , définie au voisinage de 0, et prenant la valeur 1 en 0, et où  $\theta_j \in ]-\pi, \pi[$  est une constante qui vérifie en particulier

$$Q\theta_j \equiv s\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Quand  $n$  est assez grand,  $|\arg \mu| + |\theta_j| + |\arg w_j| < \pi$ . D'où

$$b_n^\pm = (\log_p \mu) \sum_j \frac{1}{\log m_j} + i \sum_j \frac{\theta_j}{\log m_j} + \sum_j \frac{\log_p w_j(\mu)}{\log m_j}.$$

À la section 17, nous justifions l'existence de la limite

$$\Gamma = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_j \frac{\log_p w_j(\mu)}{\log m_j}.$$

Alors

$$b_n^\pm = \frac{\log_p \nu 2\pi Q \lambda_n}{Q} \sum_j \frac{1}{\log m_j} + i \sum_j \frac{\theta_j}{\log m_j} + \Gamma + \mathcal{O}(\lambda_n).$$

D'après le lemme 8 page 17,  $\frac{1}{\log m_0} + \sum \frac{1}{\log m_j} \rightarrow Q\gamma$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Or dans le cas des  $f_\lambda$ , c'est une expression symétrique en les  $m_j$ , donc elle dépend analytiquement de  $\lambda$  :

$$(33) \quad \frac{1}{\log m_0} + \sum_{j \neq 0} \frac{1}{\log m_j} = Q\gamma + \mathcal{O}(\lambda_n)$$

D'où

$$(34) \quad b_n^\pm = \left( \frac{-1}{2i\pi Q\lambda_n} + \gamma + \mathcal{O}(\lambda_n) \right) \log_p(v2\pi Q\lambda_n) + i \sum_j \frac{\theta_j}{\log m_j} + \Gamma + \mathcal{O}(\lambda_n).$$

□

13.5.2. *Cas où les multiplicateurs sont égaux.* Continuons à noter

$$v = 1 \text{ si } S = \diamond \text{ ou } v = -1 \text{ si } S = \heartsuit.$$

**Corollaire 47.** *Si on suppose que  $\forall \lambda$  suffisamment petit, les multiplicateurs des  $Q$  points fixes non nuls de  $f_\lambda$  proches de 0 sont égaux, alors le développement prend la forme suivante :*

$$b_n^\pm \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( -\frac{1}{2i\pi Q\lambda_n} + \gamma \right) \left( \log_p(v2\pi Q\lambda_n) \pm v \frac{i\pi}{2} \right) + \Gamma + \mathcal{O}(\lambda_n \log \lambda_n).$$

Ce que l'on peut noter de façon plus compacte :

$$b_n^\pm \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( -\frac{1}{2i\pi Q\lambda_n} + \gamma \right) \log_p(\pm 2i\pi Q\lambda_n) + \Gamma + \mathcal{O}(\lambda_n \log \lambda_n).$$

**Preuve.** On part de la proposition 46 page 56. Comme les  $m_j$  sont égaux pour  $j \neq 0$ , l'équation (33) page précédente donne

$$\frac{1}{\log m_j} = -\frac{1}{2i\pi Q\lambda_n} + \gamma + \mathcal{O}(\lambda_n).$$

On met  $\frac{1}{\log m_j}$  en facteur dans l'expression  $\sum_{j=1}^Q \frac{k_j^\pm(v)}{\log m_j}$ . Puis on calcule explicitement

$$\sum_{j=1}^Q k_j^\pm(v) = \pm v Q.$$

Le reste suit facilement. □

13.5.3. *Cas où les multiplicateurs sont égaux et  $\lambda$  réel.* C'est la version que nous utiliserons dans notre étude des rayons conformes des disques de Siegel dans la famille quadratique.

**Corollaire 48.** *Si nous faisons les mêmes hypothèses qu'au corollaire 47 et si de plus  $\lambda_n$  est réel, alors*

$$\operatorname{Im} b_n^\pm \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\log|2\pi Q\lambda_n|}{2\pi Q\lambda_n} + \operatorname{Im}(\gamma) \log|2\pi Q\lambda_n| + \operatorname{Im}\left(\Gamma \pm \frac{\gamma v i\pi}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda_n \log \lambda_n).$$

## 14. Applications de cornes perturbées

Nous ne connaissons pas de façon canonique de définir les applications de cornes perturbées. Nous faisons ici un choix adapté à nos objectifs.

**14.1. Une remarque sur les conjugaisons partielles.** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles. Soit  $f$  un système dynamique sur  $X$ , c'est-à-dire  $f : \text{def}(f) \rightarrow \text{img}(f)$  avec  $\text{def}(f) \subset X$  et  $\text{img}(f) \subset X$ . Soit  $g$  un système dynamique sur  $Y$ ;  $g : \text{def}(g) \rightarrow \text{img}(g)$ ,  $\text{def}(g) \subset Y$ ,  $\text{img}(g) \subset Y$ .

Une conjugaison de  $f$  à  $g$  est la donnée d'une bijection  $\phi : X \rightarrow Y$  telle que

$$\phi \circ f = g \circ \phi$$

au sens où

- ces deux composées ont le même domaine de définition,
- l'égalité a lieu sur cet ensemble.

En particulier,

$$(1) \quad \phi(\text{def}(f)) = \text{def}(g) \text{ et}$$

$$(2) \quad \phi(\text{img}(f)) = \text{img}(g).$$

En fait (1) équivaut à ce que  $\phi \circ f$  et  $g \circ \phi$  aient le même domaine de définition, en l'occurrence  $\text{def}(f)$ .

L'inverse d'une conjugaison est une conjugaison. La composée d'une conjugaison de  $f$  à  $g$  et d'une conjugaison de  $g$  à  $h$  est une conjugaison de  $f$  à  $h$ .

Soit  $\phi : U \rightarrow V$  une bijection avec  $U \subset X$  et  $V \subset Y$ . Soit  $f_U$  la restriction de  $f$  à  $\{z \in \text{def}(f) \mid z \in U, f(z) \in U\} = U \cap f^{-1}(U)$ . Soit, de même,  $g_V$  la restriction de  $g$  à  $\{z \in \text{def}(g) \mid z \in V, f(z) \in V\} = V \cap g^{-1}(V)$ . Nous dirons que  $\phi$  est une *conjugaison partielle* de  $f$  à  $g$  si  $\phi$  conjugue  $f_U$  à  $g_V$ .

À nouveau, l'inverse d'une conjugaison partielle est une conjugaison partielle. La composée  $\psi \circ \phi$  de deux conjugaisons partielles sont des conjugaisons partielles, et ce même si  $\text{img}(\phi) \neq \text{def}(\psi)$ . En effet, si on considère le graphe de  $f$  comme un sous-ensemble  $\mathcal{R}_f$  de  $X \times X$ , dire que la bijection  $\phi : U \rightarrow V$  est une conjugaison partielle équivaut à dire que l'image par  $\phi \times \phi$  de  $(U \times U) \cap \mathcal{R}_f$  est égale à  $(V \times V) \cap \mathcal{R}_g$ .

*Attention*, ce n'est pas équivalent à  $\phi \circ f = g \circ \phi$  car le domaine de définition du membre de gauche peut très bien sortir de  $U$ . Ce n'est pas non plus équivalent à " $\phi \circ f = g \circ \phi$  là où les deux membres sont définis". Voir l'exemple illustré figure 9 page suivante, où  $f = T_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g = T_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , et où la bijection  $\phi : U \rightarrow V$  préserve l'ordonnée et a une restriction aux horizontales de dérivée 1 sur chaque morceau de  $U$ . On a  $\phi \circ f = g \circ \phi$  là où les deux membres sont définis mais  $\phi$  n'est pas une conjugaison partielle de  $f$  à  $g$ . Remarquez que l'assertion " $\phi \circ f = g \circ \phi$  là où les deux membres sont définis" sur la bijection  $\phi$ , n'est ni stable par inversion, ni stable par composition.

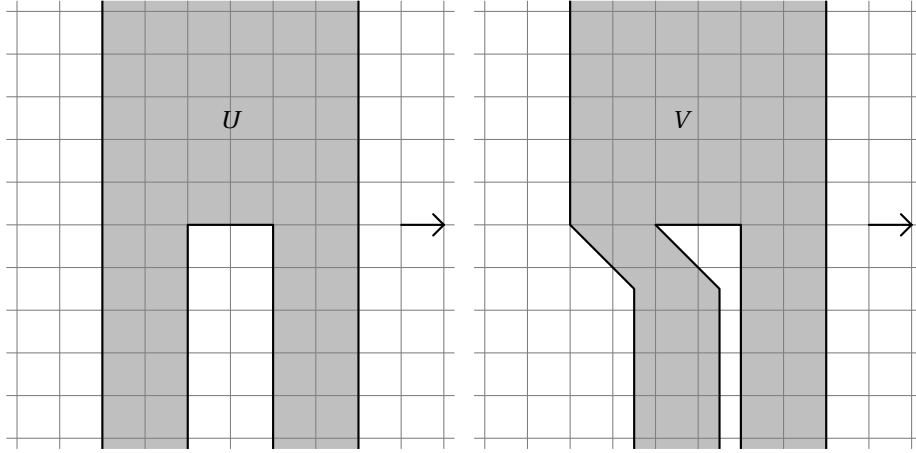


FIGURE 9: Un contre-exemple. La maille de la grille est de taille 1.

**14.2. Extension modérée des coordonnées de Fatou perturbée.** Considérons un secteur latéral<sup>15</sup>, son axe central, qui est un axe intermédiaire et le raccord  $\mathfrak{S}_n$  associé. Considérons la bande ou les deux bandes qui le touchent : notons  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n$  celle dont l'image dans la surface de redressement  $\mathcal{R}_n$  est à gauche du raccord, et  $\overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$  celle dont l'image est à droite. Il peut arriver que  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n = \overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$ , précisément dans deux cas : si  $q = 1$  ou si on a choisi un raccord qui n'adhère pas à l'origine (c.à.d. un raccord inférieur si  $S = \diamond$  et supérieur si  $S = \diamond$ ). Nous définissons une nouvelle surface de Riemann  $\mathcal{H}_n$ , union disjointe de ces trois ensembles recollés par l'identité selon  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n \cap \mathfrak{S}_n$  et  $\mathfrak{S}_n \cap \overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$ .<sup>16</sup> Donc la projection de  $\mathcal{H}_n$  dans  $\mathcal{R}_n$  peut être injective ou ne pas l'être, selon que  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n \neq \overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$  ou  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n = \overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$ .

Posons  $\mathfrak{s} = 1$  pour un raccord/axe/secteur latéral supérieur et  $\mathfrak{s} = -1$  pour un secteur latéral inférieur.

Sur  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n$  nous avons une coordonnée de Fatou perturbée  $\overleftarrow{\Phi}_{f_n}$ . Notons  $\overrightarrow{\Phi}_{f_n}$  celle définie sur  $\overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$ . Sur  $\mathcal{H}_n$ ,  $f \omega_n$  fournit une bijection vers la réunion de deux bandes verticales de largeur tendant vers l'infini et d'une demi-bande verticale de largeur bornée, quand  $n \rightarrow +\infty$ , comme sur le dessin 10 page ci-contre.

Rappelons que la surface de redressement  $\mathcal{R}_n$  est incluse dans une surface  $\mathcal{R}'_n$  avec une marge :  $\mathcal{R}_n$  reste à distance  $\geq 2$  du bord de  $\mathcal{R}'_n$  pour la métrique euclidienne sur les surfaces de translation (voir section 11). Donc  $\mathcal{H}_n$  est lui-même inclus dans le  $\mathcal{H}'_n$  associé à  $\mathcal{R}'_n$ .

Rappelons que  $f_n$  est conjuguée sur  $\mathcal{R}'_n$  à une application  $\mathcal{F}_n$  dont le domaine et l'image contiennent  $\mathcal{R}_n$  et vérifiant  $|\mathcal{F}_n - \mathcal{T}_1| < 1/4$  dans des cartes de redressement (données par  $f \omega_n$ ), où  $\mathcal{T}_1$  est la translation de 1 dans ces mêmes cartes. On peut donc relever  $f_n$  à  $\mathcal{H}_n$ , et en déduire une fonction  $\tilde{f}_n$  définie sur une partie de

15. c.à.d. entre un axe attractif et un axe répulsif adjacent, voir section 8

16. Autrement dit,  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n$ ,  $\mathfrak{S}_n$  et  $\overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$  sont trois cartes, et les changements de carte sont l'identité sur les intersections mentionnées.

$\mathcal{H}'_n$  contenant  $\mathcal{H}_n$ , ayant pour image une partie de  $\mathcal{H}'_n$  contenant  $\mathcal{H}_n$ . Notons que  $\tilde{f}_n$  est injective.

Notez que les orbites par  $\tilde{f}_n$  et  $\tilde{f}_n^{-1}$  sont finies et que :

**Lemme 49.**

- (1) une orbite pour  $\tilde{f}_n$  qui sort de  $\vec{\mathfrak{B}}_n$  n'y retourne pas,
- (2) une orbite pour  $\tilde{f}_n^{-1}$  qui sort de  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n$  n'y retourne pas,

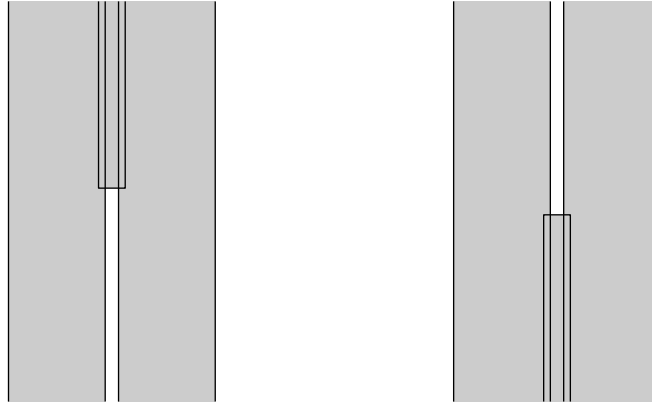


FIGURE 10: L'image de  $\mathcal{H}_n$  par  $f \omega_n$ . À gauche pour un raccord supérieur, à droite pour un raccord inférieur. Des coordonnées de Fatou perturbées sont définies sur la bande verticale de gauche, correspondant à  $\vec{\mathfrak{B}}_n$  et celle de droite, correspondant à  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n$ , mais pas sur la demi-bande centrale, correspondant au raccord  $\mathfrak{S}_n$ .

#### Prolongement des coordonnées de Fatou :

Rappelons que

$$(35) \quad \vec{\Phi}_{f_n} \circ f_n = T_1 \circ \vec{\Phi}_{f_n}$$

là où les deux membres sont définis, c'est-à-dire sur  $\vec{\mathfrak{B}}_n \cap f_n^{-1}(\vec{\mathfrak{B}}_n)$ . On peut étendre  $\vec{\Phi}_{f_n}$  à l'ensemble des points de  $\mathcal{H}_n$  dont l'orbite par  $\tilde{f}_n$  finit par entrer dans la bande de droite sans être sortie de  $\mathcal{H}_n$ , en une fonction analytique  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$  vérifiant encore  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}} \circ f_n = T_1 \circ \vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$ . En effet il suffit pour tout  $z \in \mathcal{H}_n$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $\tilde{f}_n^k(z) \in \vec{\mathfrak{B}}_n$  de poser<sup>17</sup>  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}(z) = \vec{\Phi}_{f_n}(\tilde{f}_n^k(z)) - k$ . D'après le point (1) du lemme 49 et l'équation fonctionnelle (35),  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$  est bien définie, et elle satisfait elle aussi l'équation fonctionnelle

$$(36) \quad \vec{\Phi}_n^{\text{ext}} \circ \tilde{f}_n = T_1 \circ \vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$$

17. La condition de ne pas être sorti de  $\mathcal{H}_n$  est pour l'instant superflue, elle intervient plus tard.

là où les deux membres sont définis. Par injectivité de  $\tilde{f}_n$  sur  $\mathcal{H}_n$  et par le lemme 28 page 42,  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$  est injective. De plus,

**Lemme 50.**  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$  est une conjugaison partielle de  $\tilde{f}_n$  à  $T_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , au sens décrit à la section 14.1.

**Preuve.** Il reste à voir que l'image par  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$  de  $U \cap \tilde{f}_n^{-1}(U)$  est égale à  $V \cap T_1^{-1}(V)$  où  $U$  est le domaine de définition de  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$  et  $V$  est son image. L'inclusion  $\subset$  suit immédiatement de l'équation fonctionnelle (36) page précédente. Pour l'inclusion réciproque, soit  $w \in V \cap T_1^{-1}(V)$ . Soit  $z = (\vec{\Phi}_n^{\text{ext}})^{-1}(w)$  et  $z' = (\vec{\Phi}_n^{\text{ext}})^{-1}(w+1)$ . Si  $z \notin \vec{\mathfrak{B}}_n$ , alors d'après la définition de  $\vec{\Phi}_n^{\text{ext}}$ ,  $\tilde{f}_n(z)$  existe et appartient à  $U$ . Si  $z \in \vec{\mathfrak{B}}_n$ , d'après le lemme 28 page 42,  $z' = \tilde{f}_n(z)$  et donc  $f_n(z)$  existe et appartient à  $U$ . Donc dans les deux cas,  $w = \vec{\Phi}_n^{\text{ext}}(z) \in \vec{\Phi}_n^{\text{ext}}(U \cap \tilde{f}_n^{-1}(U))$ .  $\square$

On peut faire de même pour  $\overleftarrow{\Phi}_{f_n}$ , en utilisant  $\tilde{f}_n^{-1}$ , et obtenir ainsi une extension  $\overleftarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$ , définie sur l'ensemble des points de  $\mathcal{H}_n$  dont l'orbite sous  $\tilde{f}_n^{-1}$  entre dans la bande de gauche sans être sortis de  $\mathcal{H}_n$ , qui soit conjugaison partielle de  $\tilde{f}_n^{-1}$  à  $T_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , et donc de  $\tilde{f}_n$  à  $T_1$ .

Soient  $\overleftarrow{c}_n^-, \overleftarrow{c}_n^+, \overrightarrow{c}_n^-$  et  $\overrightarrow{c}_n^+$  les constantes normalisantes correspondant à  $\overleftarrow{\Phi}_{f_n}$  sur  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n$  et  $\overrightarrow{\Phi}_{f_n}$  sur  $\overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$  (voir la section 13.1).

**Définition 51.** L'application de cornes perturbée normalisée brute, associée à l'axe intermédiaire choisi au début, est la fonction

$$H_n = (\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}} + \overrightarrow{c}_n^-) \circ (\overleftarrow{\Phi}_n^{\text{ext}} + \overleftarrow{c}_n^+)^{-1}.$$

En tant que composée de conjugaisons partielles,  $H_n$  est une conjugaison partielle de  $T_1$  vers  $T_1$ . En particulier, l'égalité  $H_n \circ T_1 = T_1 \circ H_n$  a lieu là où les deux membres sont définis.

**Définition 52.** Un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{C}$  est dit  $\mathbb{Z}$ -convexe si  $\forall z \in E$ , si  $z+k \in E$  avec  $k \in \mathbb{N}$  alors  $\forall k' \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $z+k' \in E$ .<sup>18 19</sup>

**Lemme 53.** Les images de  $\overrightarrow{\Phi}_{f_n}$ , de  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$ , de  $\overleftarrow{\Phi}_{f_n}$ , de  $\overleftarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$ , le domaine de définition de  $H_n$ , et l'image de  $H_n$ , sont tous  $\mathbb{Z}$ -convexes.

**Preuve.** Pour  $\overrightarrow{\Phi}_{f_n}$  et  $\overleftarrow{\Phi}_{f_n}$ , c'est donné par le lemme 28 page 42. Pour  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$ , soient  $w, w' = w+k$  dans son image avec  $k > 0$ . Soient  $z$  et  $z'$  les préimages respectives. Par définition de  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$ , l'orbite de  $z$  par  $\tilde{f}_n$  finit par entrer dans  $\vec{\mathfrak{B}}_n$ , et de même

18. Pour tout  $a, b \in \mathbb{Z}$ , on note  $\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ .

19. De façon équivalente,  $E$  est  $\mathbb{Z}$ -convexe si et seulement si la relation d'équivalence sur  $E$  engendrée par " $(z \in E, z+1 \in E) \implies z \sim (z+1)$ " est égale à la relation " $z \sim z' \iff z \equiv z' \pmod{\mathbb{Z}}$ ".

pour celle de  $z' : \tilde{f}_n^m(z) \in \tilde{\mathfrak{B}}_n$  et  $\tilde{f}_n^{m'}(z') \in \tilde{\mathfrak{B}}_n$ . Alors les images de ces deux points par  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$  diffèrent d'un entier donc d'après le lemme 28, ce deux points sont dans la même orbite pour  $\tilde{f}_n$ . Il en est donc de même pour  $z$  et  $z'$ . Comme  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}} \circ \tilde{f}_n = T_1 \circ \overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$  là où les deux membres sont définis, on en déduit que  $z' = \tilde{f}_n^k(z)$ , ainsi que l'appartenance de  $w + k'$  à l'image de  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$  pour tout  $k' \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . La preuve pour  $\overleftarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$  est analogue. Maintenant si  $w$  et  $w + k$  appartiennent domaine de définition de  $H_n$ , alors ils appartiennent à l'image de  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$  dont on vient de prouver la  $\mathbb{Z}$ -convexité, donc les  $w + k'$  appartiennent à cette même image. Comme on a une conjugaison partielle, leurs préimages forment une portion d'orbite pour  $\tilde{f}_n$ , portion dont le dernier élément est dans le domaine de définition de  $\overrightarrow{\Phi}_n^{\text{ext}}$ , ainsi donc que les éléments précédents. Donc  $w + k'$  appartient au domaine de définition de  $H_n$ . L'image de  $H_n$  se traite de façon complètement symétrique.  $\square$

Comme  $H_n \circ T_1 = T_1 \circ H_n$  là où les deux membres sont définis et comme le domaine de définition de  $H_n$  est  $\mathbb{Z}$ -convexe, on en déduit que  $H_n$  passe au quotient :  $\exists \tilde{H}_n(z)$  tel que  $\tilde{H}_n \circ \pi = \pi \circ H_n$  où  $\pi$  désigne la projection de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Rappelons que  $\mathfrak{s} = 1$  si le secteur latéral/raccord/axe intermédiaire auquel nous venons d'associer  $H_n$  est supérieur et  $\mathfrak{s} = -1$  s'il est inférieur.

**Lemme 54.** *Il existe  $M > 0$  et  $y > 0$  tels que  $\forall n$  assez grand, le domaine de définition de  $H_n$  contient la large demi-bande*

$$\left] -\text{Re}(\overleftarrow{\Delta}_n) + M, \text{Re}(\overrightarrow{\Delta}_n) - M \right[ \times \begin{cases} ]y, +\infty[ & \text{si } \mathfrak{s} = 1 \\ ]-\infty, -y[ & \text{si } \mathfrak{s} = -1 \end{cases}$$

où  $\overleftarrow{\Delta}_n = \overleftarrow{c}_n^- - \overleftarrow{c}_n^+$  et  $\overrightarrow{\Delta}_n = \overrightarrow{c}_n^- - \overrightarrow{c}_n^+$ .

**Preuve.** Dans cette preuve, \* signifiera "indépend-ent/ente/amment de  $n$ ".

Supposons  $\mathfrak{s} = 1$ . Dans les coordonnées de redressement sur la surface  $\mathcal{H}_n$ ,  $\hat{f}_n(z)$  diffère de la translation de 1 de moins de  $1/4$  dans ces coordonnées de redressement, et le raccord a une largeur bornée\* (point (14) du lemme 23 page 35). Donc le nombre d'itérations de  $\hat{f}_n$  nécessaire à sa traversée (= passage de  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  à  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ ) est également borné\*, et la traversée ne change l'ordonnée que d'une quantité bornée\*. Tout point quittant  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  avec une ordonnée en coordonnées de redressement plus grande qu'une constante\* plus l'ordonnée du bas du raccord rejoindra donc  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  sans quitter  $\mathcal{H}_n$ .

D'autre part d'après l'équation (26) page 49,  $\overleftarrow{\Phi}_{f_n}$  et  $\overleftarrow{\Phi}_{g_n}$  (qui est une coordonnée de redressement) diffèrent d'au plus une constante, ce dont on avait déduit que l'image de  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  par  $\overleftarrow{\Phi}_{f_n} + \overleftarrow{c}_n^+$  contient la bande  $\left] -\text{Re}(\Delta_n) + M, -M \right[ \times \mathbb{R}$ ; de même pour  $\overrightarrow{\Phi}_{f_n}$  et  $\overrightarrow{\Phi}_{g_n}$ . D'après le lemme 37 page 51,  $\overleftarrow{\Phi}_{g_n} + \overleftarrow{c}_n^+ \longrightarrow \overleftarrow{\Phi}_g^+$  uniformément sur



tout compact de  $\tilde{\mathfrak{B}}^+$  et de même  $\vec{\Phi}_{g_n} + \vec{c}_n^- \longrightarrow \vec{\Phi}_g^-$  uniformément sur tout compact de  $\tilde{\mathfrak{B}}^-$ . De plus, pour certaines coordonnées de redressement  $\tilde{\Phi}_{g_n}$  sur le raccord  $\mathfrak{S}_n$  et  $\tilde{\Phi}_g$  sur le raccord limite  $\mathfrak{S}$ , on a d'après les points (14) et (15) du lemme 23 page 35 convergence uniforme de  $\tilde{\Phi}_{g_n}^{-1}$  vers  $\tilde{\Phi}_g$  sur tout compact, avec convergence des domaines de définition (qui sont des demi-bandes). Ces propriétés suffisent à assurer que tout point de  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  d'image par  $\vec{\Phi}_{f_n} + \vec{c}_n^+$  d'ordonnée suffisamment grande\* va pouvoir rejoindre  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  sans sortir de  $\mathcal{H}_n$ . Donc le domaine de définition de  $H_n$  contient  $(\overline{\text{Re}} \vec{c}_n^+ ] - \text{Re}(\vec{\Delta}_n) + M, -M[ \times ]y, +\infty[$  pour des constantes\*  $M > 0$  et  $y$ .

Toujours comme  $\tilde{f}_n$  est proche de la translation de 1, on a pour une certaine constante\*  $N$  que  $\tilde{f}_n^N \circ (\vec{\Phi}_{f_n} + \vec{c}_n^+)^{-1}$  est défini sur  $[-M-1, -M[ \times ]y, +\infty[$  et a pour image un sous-ensemble  $D$  de  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ . Comme  $\vec{\Phi}_{f_n}$  diffère de  $\vec{\Phi}_{g_n}$  de moins d'une constante\* sur  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ ,  $y$  conjugue  $\tilde{f}_n$  à  $T_1$ , et comme  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  a une largeur de  $\text{Re} \vec{\Delta}_n$  à un  $\mathcal{O}(1)$  près, on en déduit que  $D$  peut encore être itéré  $\text{Re} \vec{\Delta}_n - \mathcal{O}(1)$  fois sans quitter  $\tilde{\mathfrak{B}}_n$  et donc que le domaine de  $H_n$  contient  $(\overline{\text{Re}} \vec{c}_n^+ ] - \text{Re}(\vec{\Delta}_n) + M, \text{Re}(\vec{\Delta}_n) - M[ \times ]y, +\infty[$  quitte à augmenter  $M$ .

Le cas  $s = -1$  se traite de la même façon. □

Nous définissons maintenant une fonction  $h_n : \mathbb{R} \times ]y, +\infty[$  ou  $\mathbb{R} \times ]-\infty, -y[ \rightarrow \mathbb{C}$  en partant de la restriction de  $H_n$  à la large demi-bande mentionnée dans le lemme précédent, puis en périodisant à l'aide de la commutation à  $T_1$ . On obtient alors une application analytique  $h_n$  définie sur un demi-plan supérieur ou inférieur et qui commute avec  $T_1$ .

**Définition 55.** *L'application de cornes perturbée normalisée, associée à l'axe intermédiaire choisi au début, est cette fonction  $h_n$ .*

Notons  $\tilde{h}_n$ , l'application obtenue par passage au quotient :  $\pi \circ h_n = \tilde{h}_n \circ \pi$ .

**Remarque.** Les applications  $h_n$  et  $\tilde{h}_n$  ne sont pas des systèmes dynamiques car elles relient deux espaces différents : un cylindre répulsif et un cylindre attractif.

Par le point (1) de la proposition 30 page 44, et comme la largeur du raccord est majorée indépendamment de  $n$ , on a :

$$(37) \quad \text{Im}(h_n(z)) \xrightarrow{\text{Im } z \rightarrow s\infty} s\infty$$

Donc  $\tilde{h}_n$  a un prolongement analytique fixant le bout du cylindre  $s i\infty$ . De  $h_n \circ T_1 = T_1 \circ h_n$  on déduit que la dérivée de  $\tilde{h}_n$  au bout du cylindre est non nulle. On peut en fait la calculer explicitement :

**Lemme 56.**

$$h_n(z) \underset{\mathfrak{s} \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty}{=} z + \left( \vec{b}_n^- - \vec{b}_n^+ - \frac{5}{2Q\lambda_n} \right) + o(1)$$

Comme on ne se servira pas explicitement de ce lemme, nous laissons sa démonstration en exercice au lecteur.

Pour alléger, voici une proposition ne faisant pas intervenir la surface de Riemann  $\mathcal{H}_n$  ni les prolongements des coordonnées de Fatou perturbées :

**Proposition 57.**  $\exists M > 0$  et  $y > 0$  tels que pour  $n$  assez grand,  $\forall z \in \vec{\mathfrak{B}}_n$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ , si en notant  $w = \vec{\Phi}_{f_n}(z) + \vec{c}_n^+$  on a

- $\operatorname{Im}(w) > y$ ,
- $M < \operatorname{Re}(w) + k < \operatorname{Re}(\vec{\Delta}_n) - M$ ,

alors

- $f_n^k(z) \in \vec{\mathfrak{B}}_n$ ,
- $\vec{\Phi}_{f_n}(f_n^k(z)) + \vec{c}_n^- = h_n(z) + k$ .

**14.3. Applications de cornes non perturbées.** La définition des applications de cornes non perturbées est beaucoup plus simple que pour les perturbées. Premièrement il n'y a pas besoin de prendre une surface de Riemann au dessus d'une union de pétales et raccords. Deuxièmement, les pétales étant stables par  $f$  ou  $f^{-1}$ , les coordonnées de Fatou étendues et leurs propriétés sont bien plus faciles à obtenir.

Considérons un des  $2Q$  secteurs latéraux de  $f$ , posons  $\mathfrak{s} = 1$  s'il est supérieur et  $\mathfrak{s} = -1$  s'il est inférieur. Considérons la paire de pétales dont les axes bordent le secteur. Plus précisément, nous prenons les  $\pi/2$ -pétales  $\mathfrak{B}^+$ ,  $\mathfrak{B}^-$  et les coordonnées de Fatou  $\Phi_f^+$ ,  $\Phi_f^-$  donnés dans le lemme 23 page 35. La fonction  $f$  est injective sur  $B(0, r)$  et ce disque contient les pétales. Comme  $f(\mathfrak{B}^-) \subset \mathfrak{B}^-$ , l'équation  $\Phi_f^- \circ f = T_1 \circ \Phi_f^-$  permet de prolonger  $\Phi_f^-$  à l'ensemble des points de  $B(0, r)$  dont l'orbite par  $f$  tombe dans  $\mathfrak{B}^-$  sans jamais sortir de  $B(0, r)$ . On appelle  $\Phi_{\text{ext}}^-$  ce prolongement. Il est analytique et est une conjugaison partielle de  $f$  à  $T_1$ , au sens de la section 14.1. De même on étend  $\Phi_f^+$  à l'ensemble des points de  $B(0, r)$  dont l'orbite par  $f^{-1}$  tombe dans  $\mathfrak{B}^+$  sans sortir de  $B(0, r)$ , et on appelle  $\Phi_{\text{ext}}^+$  ce prolongement. On pose alors

$$h(z) = \Phi_{\text{ext}}^- \circ (\Phi_{\text{ext}}^+)^{-1}.$$

C'est une application analytique dont le domaine de définition est invariant par  $T_1$  et qui commute avec  $T_1$ . Ce domaine contient un demi-plan supérieur ou inférieur, selon le signe de  $\mathfrak{s}$ .<sup>(20)</sup> De la même façon que pour  $\tilde{h}_n$ , l'application  $\tilde{h}$  fixe le bout

20. Il contient les deux si  $Q = 1$ .

du cylindre avec dérivée non nulle. Si on a pris soin de normaliser  $\Phi_f^+$  et  $\Phi_f^-$  selon les conventions de la section 4.3 <sup>(21)</sup>, alors on obtient la *coordonnée de Fatou non perturbée normalisée* que l'on note  $h^{\text{nor}}$ .

**Remarque.** Cette définition coïncide avec celle faite page 22, à ceci près que l'ensemble de définition peut être différent. Ces deux versions de  $h^{\text{nor}}$  sont égales sur l'intersection de leurs domaines de définition, qui contient au moins un demi-plan supérieur/inférieur selon le signe de  $\varepsilon$ .

**14.4. Convergence.** Soit un secteur latéral, et considérons la fonction  $h^{\text{nor}}$  et la suite  $h_n$  que nous lui avons associées aux sections précédentes.

**Proposition 58.** *Il existe  $y > 0$  tel que, en notant  $D = \mathbb{R} \times ]y, +\infty[$  si  $\varepsilon = 1$ , et  $D = \mathbb{R} \times ]-\infty, y[$  si  $\varepsilon = -1$ , on a*

$$\sup_D |h_n - h| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier,

$$\|h_n - \text{id}\|_\infty < M$$

pour un certain  $M > 0$  indépendant de  $n$ .

**Preuve.** Supposons  $\varepsilon = 1$ . Du lemme 40 page 52, du point (17) du lemme 23 page 35, et du caractère borné du nombre d'itérations nécessaires au passage de  $\vec{\mathfrak{B}}_n$  à  $\vec{\mathfrak{B}}_n$  (sans sortir de  $\mathcal{H}_n$ ), on déduit que  $H_n \rightarrow h^{\text{nor}}$  localement uniformément sur  $\Phi_f^+(\mathfrak{B}^+) \cap \text{“Im } z > y\text{”}$  et donc  $h_n \rightarrow h^{\text{nor}}$  sur tout le demi-plan “Im  $z > y$ ” par périodicité. Donc les applications quotient  $\tilde{h}_n$  tendent vers  $\tilde{h}^{\text{nor}}$  uniformément sur les compacts du demi-cylindre “Im  $z > y$ ”. Or leurs extensions analytiques au bout du cylindre fixent ce bout, et donc  $h_n$  et  $h$  prennent la forme  $z + f_n(e^{2i\pi z})$  avec  $f_n$  holomorphe. La convergence uniforme suit alors du principe du maximum. Le cas  $\varepsilon = -1$  est analogue.  $\square$

**Remarque.** Il se trouve que les applications de cornes d'une fraction rationnelle, d'un cylindre attractif vers un cylindre répulsif, possèdent une extension analytique maximale naturelle (voir [D]). Si l'on veut définir des applications de cornes perturbées qui soient analytiques et tendent vers ces extensions sur tout le domaine de définition de ces dernières, il faut poser les définitions avec (encore plus de) soin. Voir [C2].

21. conventions qui ont été adoptées dans le présent chapitre à partir de la section 13.1

### 15. Correspondance des normalisations entre pétales perturbés dans le cas d'un itéré

Supposons maintenant que la famille  $f_\lambda$  est de la forme

$$f_\lambda = \left( f_{\frac{\lambda+p'}{q'}} \right)^{q'}$$

où  $p' \wedge q' = 1$  et  $f_\mu$  est une famille analytique d'applications telles que

$$f_\mu(z) = e^{2i\pi\mu} z + \mathcal{O}(z^2),$$

définie pour  $\mu$  proche de  $p'/q'$ . En particulier,

$$f_0 = (f_{p'/q'})^{q'}.$$

Puisque  $f_0$  et  $f_{p'/q'}$  commutent, l'ensemble des  $Q$  directions attractives de  $f_0$  est préservé par la rotation  $R_{p'/q'}$  d'angle  $p'/q'$  tours. Donc  $q'|Q$ .

Continuons à considérer une suite  $\lambda_n \rightarrow 0$  à l'intérieur du secteur  $S = \diamond$  ou  $\diamond$ . Notons  $f_n = f_{\lambda_n}$  et introduisons  $f_n = f_{\frac{\lambda_n+p'}{q'}}$  de sorte que  $f_n = f_n^{q'}$ . Rappelons que nous avons introduit  $q$  secteurs, étiquetés par un index  $j$  et contenant les  $Q$  points fixes  $z_j$  de  $f_n$  proches de 0. Ces secteurs sont centrés sur  $Q$  axes intermédiaires auxquels nous associons les mêmes index. Considérons les objets que les sections précédentes ont associés à la suite  $f_n$  et à l'index  $j$  : pétales perturbés  $\mathfrak{A}_n$ , coordonnées de Fatou perturbées  $\Phi_{f_n}$ , et approximations d'icelles  $\Phi_{g_n}$  telles que  $\Phi_{g_n}(\mathfrak{A}_n) = ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$ .

**Lemme 59.** *Soit  $j_0$  l'index de l'axe d'un secteur et  $j_1$  l'index de son image par la rotation  $R_{p'/q'}$ . Soient respectivement  $\mathfrak{A}_n, \Phi_{f_n}$  et  $\hat{\mathfrak{A}}_n, \hat{\Phi}_{f_n}$  les suites de pétales perturbés et de coordonnées de Fatou associées respectivement aux index  $j_0$  et  $j_1$ . Soient  $b_n^+$  et  $b_n^-$  les constantes associées au développement asymptotique de  $\Phi_{f_n}$  donné à la proposition 42 page 54, et  $\hat{b}_n^+$  et  $\hat{b}_n^-$  ceux correspondant à  $\hat{\Phi}_{f_n}$ . Alors*

$$\begin{aligned} \hat{b}_n^+ &= b_n^+ \quad \text{et} \\ \hat{b}_n^- &= b_n^-. \end{aligned}$$

**Preuve.** La valeur exacte de ces constantes est donnée par le lemme 41 page 54. On obtient

$$\hat{b}_n^+ - b_n^+ = \sum_{j=1}^Q \frac{\log_p \frac{-z_j}{d^+} - \log_p \frac{-z_j}{d^+}}{\log m_j}.$$

Le numérateur  $\text{num}_j$  est l'une des valeurs de  $\log \frac{d^+}{d^+} \equiv -2i\pi \frac{p'}{q'} \pmod{2i\pi}$ . Notons  $\frac{d^+}{d^+} = \exp(2i\pi t)$ , avec  $t \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  unique, non nul, et  $t = p''/q'$  avec  $p'' \equiv p' \pmod{q'}$ . Notons  $]0, t[$  l'intervalle réel ouvert compris entre 0 et  $t$ . Soit  $\mathcal{S}$  le secteur d'équation  $\text{Arg}(z) \in ]0, t[ + \text{Arg } d^+ \pmod{2\pi}$  (si  $t \neq 1/2$ , c'est le secteur d'ouverture  $< \pi$  délimité

par  $\widehat{d}^+ \cdot \mathbb{R}_+$  et  $d^+ \cdot \mathbb{R}_+$ ). Alors  $\text{num}_j = 2i\pi(t-s)$  où  $s \in \{-1, 1\}$  est le signe de  $t$  si  $z_j \in \mathcal{S}$ , et  $\text{num}_j = 2i\pi t$  si  $z_j \notin \mathcal{S}$ .

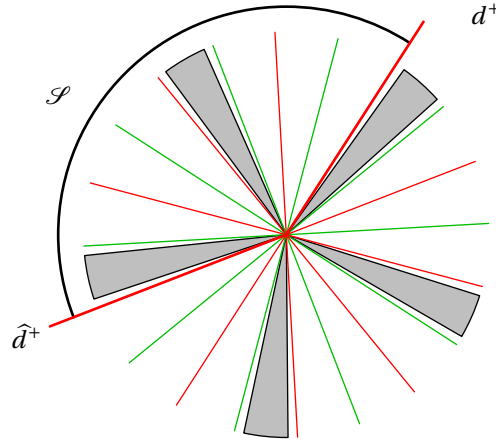


FIGURE 11: Exemple avec  $Q = 10$  et  $p'/q' = 2/5$ . En rouge, les axes répulsifs, en vert attractifs, en gris un cycle de secteurs  $S_j$ .

L'application  $f_n$  permute les  $z_j$  et envoie un tel point fixe de  $f_n$  sur un point fixe de même multiplicateur. On peut donc regrouper la somme selon les orbites, puis dans ces paquets factoriser  $\frac{1}{\log m_j}$ . Il suffit pour démontrer le lemme de voir que la somme des  $\text{num}_j$  sur une orbite est nulle. Cette somme vaut  $2i\pi(q't - sN) = 2i\pi(|p''| - N)s$ , où  $N$  est le nombre de points du cycle appartenant à  $\mathcal{S}$ . Or les  $z_j$  sont contenus dans des secteurs  $S_j$  centrés sur la moitié des axes intermédiaires et d'ouverture  $< \pi/Q$ . Il y a donc exactement  $|p''|$  tels secteurs dans une orbite. Voir la figure 11.  $\square$

**Lemme 60.** *Sous les mêmes conditions, il existe  $M > 0$  tel que pour  $n$  assez grand,  $\Phi_{f_n}(f_n^{-1}(\mathfrak{B}_n) \cap \mathfrak{B}_n)$  contient la bande  $B_n = ]a_n + M, b_n - M[ \times \mathbb{R}$  et tel que sur  $\Phi_{f_n}^{-1}(B_n)$ , on a*

$$\begin{aligned} (\widehat{\Phi}_{f_n} + \widehat{c}_n^+) \circ f_n &= (\Phi_{f_n} + c_n^+) + \frac{1}{q'}, \\ (\widehat{\Phi}_{f_n} + \widehat{c}_n^-) \circ f_n &= (\Phi_{f_n} + c_n^-) + \frac{1}{q'}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Ici, \* signifiera "indépendamment de  $n$ ". L'application  $f_n$  fixe  $z_0 = 0$  et agit sur les autres  $z_j$  par un décalage de l'index dans  $\{1, \dots, Q\}$ . De plus, elle envoie un point fixe de  $f_n$  vers un point fixe de même multiplicateur. Par conséquent la surface de redressement  $\mathcal{R}_n$  possède un sous-ensemble  $\mathcal{R}'_n$  obtenu en décalant d'une quantité bornée\* les lignes formant le bord de  $\mathcal{R}_n$ , tel que  $\mathcal{R}'_n$  est invariant par

un isomorphisme  $\mathcal{T}_n$  de surface de translation,  $\mathcal{T}_n$  étant une “translation” d’ordre fini  $q'$ . Elle se projette en une application  $t_n$  définie sur un sous-ensemble  $U$  de  $B(0, r)$ , qui contient un disque centré en 0 de rayon minoré\*. Les applications  $t_n$  et  $g_n$  commutent, et  $t_n$  et  $f_n$  sont égales aux points  $z_j$  (par contre  $t'_n(0) \neq f'_n(0)$ ). Donc  $\omega_n(z) \times t_n(z) - f_n(z)$  est une suite de fonctions holomorphes sans pôles qui converge sur tout compact de  $U \setminus \{0\}$ . Elle est donc bornée sur tout compact de  $U$  :  $t_n(z) - f_n(z) \leq K/\omega_n(z)$ . Rappelons que  $\Phi'_{g_n}(z) = 1/\omega_n(z)$ . Donc par distorsion bornée (lemme 24 page 40 et son corollaire 25), quitte à rétrécir  $\mathcal{R}'_n$  un petit peu, l’application  $f_n$  est conjuguée sur  $\mathcal{R}'_n$  à une application  $\mathcal{S}_n$  qui diffère de  $\mathcal{T}_n$  d’une quantité bornée\*. Donc  $\Phi_{g_n}(g_n^{-1}(\mathfrak{B}_n) \cap \mathfrak{B}_n)$  contient la bande  $]a_n + M, b_n - M[ \times \mathbb{R}$  pour un certain  $M > 0$ . Avec l’équation (26) page 49, ceci implique que  $\Phi_{f_n}(f_n^{-1}(\mathfrak{B}_n) \cap \mathfrak{B}_n)$  contient la bande  $B_n = ]a_n + M, b_n - M[ \times \mathbb{R}$  pour un autre  $M > 0$ . L’application  $\widehat{\Phi}_{f_n} \circ f_n \circ \Phi_{f_n}^{-1}$  est définie sur la large bande  $B_n$ , injective et commute avec  $T_1$ . Nécessairement, c’est une translation sur  $B_n$ . Donc

$$(\widehat{\Phi}_{f_n} + \widehat{c}_n^+) \circ f_n = (\Phi_{f_n} + c_n^+) + \text{cst}_n$$

sur  $\Phi_{f_n}^{-1}(B_n)$ . Pour calculer cette constante, qui dépend des normalisations, regardons les développements asymptotiques quand  $z \rightarrow 0$  dans  $f_n^{-1}(\mathfrak{B}_n) \cap \mathfrak{B}_n$ . Premièrement,

$$f_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} e^{2i\pi \frac{\lambda_n + p'}{q'}} z$$

et  $\widehat{d}^+ = e^{2i\pi \frac{p'}{q'}} d^+$  donc

$$\frac{f_n(z)}{\widehat{d}^+} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z}{d^+} e^{2i\pi \frac{\lambda_n}{q'}}.$$

Avec la proposition 42 page 54, ceci implique que pour  $n$  assez grand,  $\exists k_n \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{cst}_n = \frac{1}{q'} + \widehat{b}_n^+ - b_n^+ + \frac{k_n}{\lambda_n}$ . Par le lemme 59 page 67,  $\widehat{b}_n^+ = b_n^+$ . Donc

$$\text{cst}_n = \frac{1}{q'} + \frac{k_n}{\lambda_n}.$$

L’équation (29) page 52 garantit que tout compact de  $A = (\Phi_f^+)^{-1}(]a + M, +\infty[ \times \mathbb{R})$  finit par être contenu dans  $\Phi_{f_n}^{-1}(B_n)$ . De plus,  $A \cap f^{-1}(\widehat{A}) \neq \emptyset$ . Prenons n’importe quel point de cette intersection. En ce point,  $\Phi_{f_n} + c_n^+$  et  $(\widehat{\Phi}_{f_n} + \widehat{c}_n^+) \circ f_n$  finissent par être définis et convergent d’après le lemme 40 page 52. Il s’en suit que la suite  $\text{cst}_n$  est bornée. Cela implique que  $k_n$  est nul à partir d’un certain rang.  $\square$

**Remarque.** On s’est affranchi d’une indétermination du logarithme par une astuce. Aurait-on pu adopter une approche plus élégante ? Aurait-on pu démontrer les lemmes 59 et 60 dans l’ordre inverse ?

**Remarque.** Nous avons ces  $Q$  pétales perturbés et leurs coordonnées de Fatou (perturbées) associées. Cependant, l'image par  $f_n$  de  $\mathfrak{B}_n$  n'est pas égale à  $\widehat{\mathfrak{B}}_n$ . C'est un défaut incurable, car il ne pourrait y avoir égalité pour les  $Q$  pétales à la fois,  $f_n = f_n'$  agissant comme une translation de 1 au niveau des coordonnées de Fatou. Donc  $f_n(\mathfrak{B}_n)$  et  $\widehat{\mathfrak{B}}_n$  sont deux pétales perturbés différents que l'on peut associer au même axe. Nous les appelons pétales perturbés mais n'avons pas défini une notion de pétale perturbé. Nous posons donc la question suivante : est-il possible de donner une définition censée de "pétale perturbé", ou à défaut, de "suite de pétales perturbés". On l'aimerait facilitant la vérification que l'image par  $f_n$  d'un tel ensemble satisfait également la définition. Et plus généralement, qu'elle soit facilement vue comme invariante par changement de coordonnées. Un candidat serait de demander que leurs images en coordonnées de Fatou soient des bandes verticales (ce n'est pas le cas de nos  $\mathfrak{B}_n$ , dont l'image par la coordonnée de Fatou approchée  $\Phi_{g_n}$  est certes une bande verticale, mais pas l'image par la vraie coordonnée de Fatou  $\Phi_{f_n}$ ). L'étape naturelle suivante serait d'étudier dans quelle mesure les pétales perturbés, (ou les suites d'iceux) sont *essentiellement uniques*. Ce serait plus satisfaisant, et donnerait lieu à une autre approche des résultats de la présente section.

## 16. Preuves ajournées : comparaison à un champ de vecteurs plus simple

Nous avons regroupé dans cette section les preuves où nous avons besoin d'un changement de variable supplémentaire, qui sert d'intermédiaire entre la coordonnée de départ et la coordonnée de Fatou approchée (qui elle-même précède la coordonnée de Fatou). Il a l'avantage d'avoir une formule explicite et simple à manipuler. Il est lui aussi obtenu en redressant un champ de vecteurs approchant  $f_n$ , mais moins bien.

**16.1. Le champ de vecteurs.** Les  $Q$  points fixes de  $f_n$  proches de 0 sont asymptotiquement situés sur les sommets d'un  $Q$ -gone régulier de rayon externe

$$r_n = \sqrt[Q]{\frac{2\pi|\lambda_n|}{|C|}}.$$

Soit  $\rho_n$  une racine  $Q$ -ième quelconque de  $-2i\pi\lambda_n/C$  :

$$\rho_n \in \sqrt[Q]{\frac{-2i\pi\lambda_n}{C}}.$$

Notons  $\chi_n$  le champ de vecteurs associé à la forme  $\omega_n$  :

$$\chi_n = \frac{1}{\omega_n}.$$

Un calcul élémentaire donne

$$\rho_n^{-1} f_n(\rho_n z) - z = 2i\pi\lambda_n(z - z^{Q+1} + o(1))$$

quand " $n \rightarrow +\infty$  et  $z$  reste borné". De façon similaire, uniformément sur les compacts de  $\mathbb{C}$ ,

$$\lambda_n \times \rho_n^* \chi_n \rightarrow \frac{2i\pi z(1 - z^Q)}{dz}$$

où  $\rho_n^*$  désigne le pull-back par la multiplication par  $\rho_n$ . Donc après agrandissement d'un facteur  $1/\rho_n$ ,  $\omega_n$  ressemble à  $\frac{dz}{2i\pi\lambda_n z(1 - z^Q)}$ . Autrement dit,  $\omega_n$  ressemble à  $\frac{dz}{2i\pi\lambda_n z + Cz^{Q+1}}$  à l'échelle  $r_n$ . Cela motive l'introduction du redressement du champ de vecteurs suivant :

$$\frac{2i\pi z(1 - z^Q)}{Qdz}$$

où l'on notera qu'on a ajouté un facteur  $1/Q$ . Ce redressement a une expression particulièrement simple :

$$\zeta = \frac{1}{2i\pi} \log \frac{z^Q}{1 - z^Q}$$

voir la figure 12 page suivante.



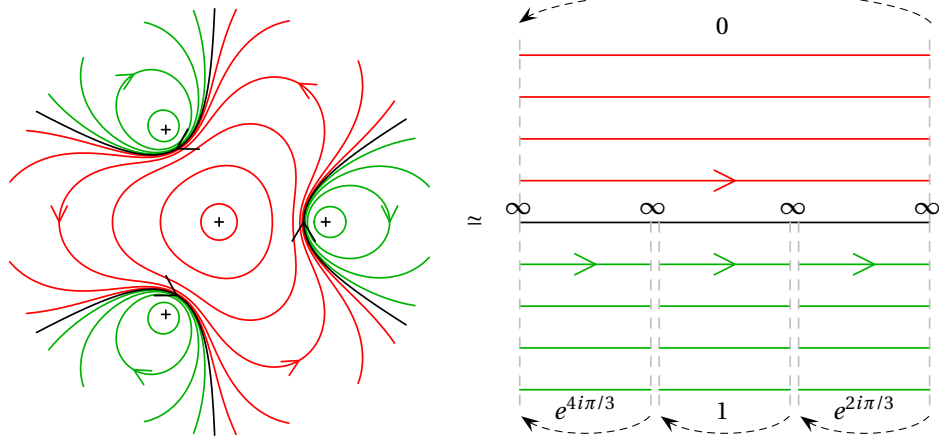


FIGURE 12: Le champ de vecteurs et son redressement. Ce dernier est représenté comme une surface de Riemann. Les lignes grises pointillées sont recollées par des translations horizontales, indiquées par les flèches pointillées. La largeur du cylindre supérieur est de 3 et celle de chaque cylindre inférieur est de 1. La surface de redressement est invariante par translation de 1.

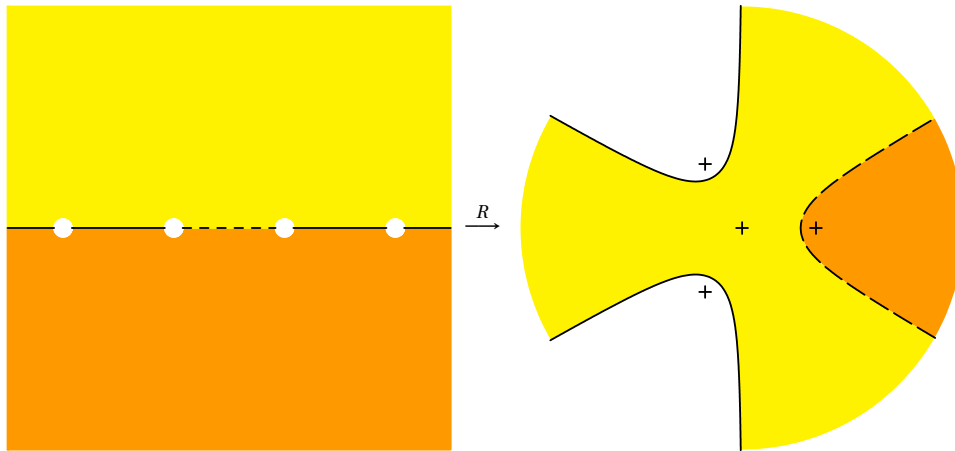


FIGURE 13: L'application  $R$  et son image.

La réciproque de cette fonction s'écrit

$$z = \sqrt[Q]{\frac{1}{1 + e^{-2i\pi\zeta}}}.$$

Cette expression possède des branches bien définies sur les ouverts simplement connexes évitant  $\mathbb{Z} + 1/2$ . Notons  $R$  la branche définie sur  $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty[)$  et vérifiant :

$$R(\zeta) = e^{\frac{2i\pi\zeta}{Q}} \operatorname{sq}\left(\frac{1}{e^{2i\pi\zeta} + 1}\right) \text{ quand } \operatorname{Im}\zeta > 0$$

$$R(\zeta) = \operatorname{sq}\left(\frac{1}{1 + e^{-2i\pi\zeta}}\right) \text{ quand } \operatorname{Im}\zeta < 0$$

où  $\text{sq} : \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  est la branche principale de  $\sqrt{\cdot}$ .

**16.2. Construction des bandes et des raccords pour  $\omega_n$ .** Pour alléger les notations, nous allons supposer que l'index  $j = 1$  : on va travailler avec celui des points fixes de  $f_n$  proches de 0 qui appartient au secteur  $S_1$ , c'est-à-dire  $z_1$  (rappelons qu'il dépend de  $n$ ).

On aimerait comparer  $\omega_n$  à la forme  $\frac{dz}{2i\pi\lambda_n z + Cz^{Q+1}}$  mentionnée à la section précédente 16.1. Cette dernière a ses pôles situés sur les sommets d'un polygone régulier. Mais comme les  $z_j$  ne sont qu'approximativement sur les sommets de ce polygone, le quotient de ces deux formes ne sera pas borné. Nous allons ajuster la forme par un changement de variable linéaire, de façon que  $z_1$  soit sur un sommet, les autres  $z_j$  n'étant alors que proches des autres sommets. La forme obtenue a pour expression :

$$\theta_n = (z_1)_* \left( \frac{dz}{2i\pi\lambda_n z(1-z^Q)} \right) = \frac{dz}{2i\pi\lambda_n z(1-z^Q/z_1^Q)}$$

où  $(z_1)_*$  désigne le push-forward par la multiplication par  $z_1$ . On a

$$R_n^* \theta_n = \frac{dz}{Q\lambda_n}$$

où l'on a posé

$$R_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} z_1 R(z).$$

Définissons sur  $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty[)$  la forme

$$\tilde{\omega}_n = R_n^* \omega_n.$$

Notons que sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$\theta_n \longrightarrow \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dz}{Cz^{Q+1}},$$

forme qui est également le terme dominant de la forme  $\omega = \lim \omega_n$ . Fixons  $r > 0$  et  $\eta > 0$  et considérons le domaine

$$W_n = B(0, r) \setminus \bigcup_{j \neq 1} B(z_j, \eta r_n).$$

**Lemme 61.**

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0) (\exists r > 0, \exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) \left| \frac{\omega_n}{\theta_n} - 1 \right| < \varepsilon \text{ sur } W_n$$

**Preuve.** Appliquons le principe du maximum à  $\omega_n/\theta_n - 1$  sur  $W_n$ . D'une part cette expression a tous ses pôles en dehors de  $W_n$ .<sup>(22)</sup> D'autre part pour tout choix de

22. les  $z_j$ ,  $j \neq 1$  sont au centre des disques retirés, et les zéros de  $1/\theta_n$ , qui n'a pas de pôle, éliminent les pôles en 0 et en  $z_1$

$r$  et  $\eta$ , alors pour  $n$  assez grand  $\partial W_n = \partial B(0, r) \cup \partial(B(z_2, \eta r_n) \cup \dots \cup B(z_Q, \eta r_n))$ . Sur  $\partial B(0, r)$ , on peut rendre cette fonction petite en choisissant d'abord  $r$  de sorte que  $\omega$  soit proche de son terme dominant  $dz/Cz^{Q+1}$ , puis  $N$  de sorte que  $\omega_n$  soit proche de  $\omega$  et  $\theta_n$  proche de  $\lim \theta_n = dz/Cz^{Q+1}$ . Regardons maintenant à l'échelle  $z_1$ . Notons  $\lambda_n z_1^* \theta_n = \frac{dz}{2i\pi z(1-z^Q)}$  et rappelons que  $\lambda_n z_1^* \omega_n \rightarrow \frac{dz}{2i\pi z(1-z^Q)}$ . Donc  $\omega_n/\theta_n$  tend vers 1 sur tout compact de  $\mathbb{C}$  évitant les racines de  $z(1-z^Q)$ . D'autre part, après homothétie de rapport  $1/z_1$ , les disques  $B(z_2, \eta r_n), \dots, B(z_Q, \eta r_n)$  tendent quand  $n \rightarrow +\infty$  vers les disques de rayon  $\eta$  centrés en les racines  $Q$ -ièmes de 1 différentes de 1. Donc le bord de leur réunion est pour  $n$  assez grand à distance  $> \eta/2$  de ces racines. Donc  $\omega_n/\theta_n$  finit par être arbitrairement proche de 1 sur ce bord.  $\square$

Ainsi,

$$\left| \frac{Q\lambda_n \tilde{\omega}_n}{d\zeta} - 1 \right| = \left| \frac{R_n^* \omega_n}{R_n^* \theta_n} - 1 \right| < \varepsilon \text{ sur } R_n^{-1}(W_n).$$

Maintenant, si  $\eta$  a été choisi suffisamment petit (et il se trouve que  $\eta < 1 - 1/2^{1/Q}$  suffit), alors pour tout  $n$  suffisamment grand, et tout  $j \neq 1$ ,  $B(z_j, \eta r_n)$  n'intersecte pas l'image de  $R_n$ . En particulier  $R_n^{-1}(W_n) = R_n^{-1}(B(0, r))$  (voir la figure 14).

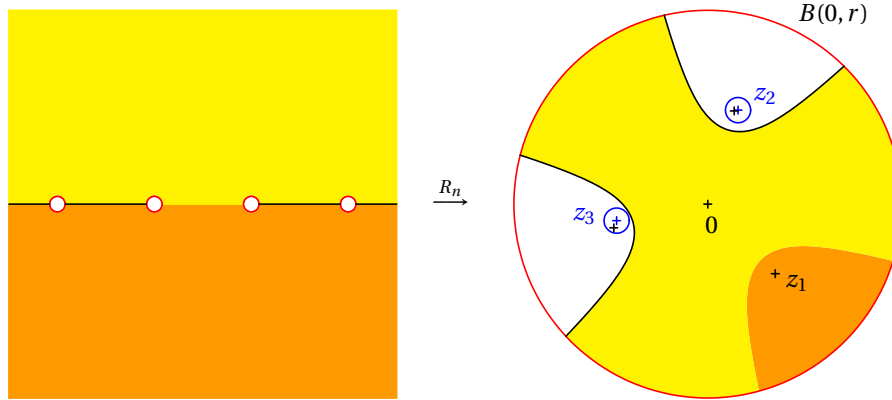


FIGURE 14:  $R_n^{-1}(W_n) = R_n^{-1}(B(0, r))$

Résumons :

**Lemme 62.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists r > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n > N$ ,

$$(38) \quad \left| \frac{Q\lambda_n \tilde{\omega}_n}{d\zeta} - 1 \right| < \varepsilon \text{ sur } R_n^{-1}(B(0, r)).$$

Autrement dit, la forme  $\omega_n$  devient en coordonnées  $\zeta$  une forme  $\tilde{\omega}_n$  proche d'être constante sur  $R_n^{-1}(B(0, r))$ .

**Lemme 63** (Limites de  $R_n$ ). *Pour tout angle  $\beta < \pi$  :*

$$R_n\left(-\frac{1}{2} + \lambda_n z\right) \longrightarrow \sqrt[2]{\frac{-1}{Cz}}$$

*uniformément sur tout compact de  $S^- = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |\operatorname{Arg} z| < \beta\}$  ;*

$$R_n\left(\frac{1}{2} + \lambda_n z\right) \longrightarrow \sqrt[2]{\frac{-1}{Cz}}$$

*uniformément sur tout compact de  $S^+ = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |\pi - \operatorname{Arg} z| < \beta\}$ .*

Cela se vérifie aisément par un calcul.

On voit maintenant que

$$R_n^{-1}(B(0, r)) = \mathbb{C} \setminus \left( ]-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty[ \cup (1/2 + \mathbb{Z} + D_n) \right),$$

pour un certain ensemble

$$D_n \subset B(0, K|\lambda_n|)$$

où  $K$  est une certaine constante, tel que  $1/2 + \mathbb{Z} + D_n$  correspond aux points s'envoyant en dehors de  $B(0, r)$ .

De l'équation (38) page ci-contre on déduit le lemme 23 page 35 de la section 9 qui décrit la surface de redressement de  $\omega_n$  : existence de bandes et raccords et propriétés de convergences. Il n'y a pas de difficulté technique aussi nous indiquerons juste la procédure.

- Prendre une constante  $M > K$ . Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit dans l'équation (38) on a (voir la figure 15 page suivante) :
  - Cas  $S = \diamond$ . Pour tout  $n$  suffisamment grand, la ligne de champ de  $i/\tilde{\omega}_n$  (champ orthogonal à  $1/\tilde{\omega}_n$ ) passant par  $-\frac{1}{2} + M\lambda_n$  et celle passant par  $\frac{1}{2} - M\lambda_n$  sont définies pour tous les temps dans  $]-\infty, +\infty[$ , et délimitent un ouvert  $B_n$  de  $R_n^{-1}(B(0, r))$  sur lequel  $\tilde{\Phi}_n \stackrel{\text{def}}{=} \int \tilde{\omega}_n$  est une bijection vers une bande verticale, dont la largeur tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
  - Cas  $S = \diamond$ . La seule différence est que les deux points de départ sont maintenant  $-\frac{1}{2} - M\lambda_n$  et  $\frac{1}{2} + M\lambda_n$ .
- Poser alors  $\mathfrak{B}_n = R_n(B_n)$ .

L'équation (38) implique immédiatement que  $\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_n^{-1}(z) \rightarrow +\infty$  ssi  $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$ , et  $\operatorname{Im} \tilde{\Phi}_n^{-1}(z) \rightarrow -\infty$  ssi  $\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty$ .

**Lemme 64.**  $R_n$  est injective sur  $B_n$ .

**Preuve.** Preuve n°1 : Sinon,  $R_n$  envoyant  $\tilde{\omega}_n$  sur  $\omega_n$ , et  $B_n$  étant une bande verticale pour  $\tilde{\omega}_n$ , on pourrait recoller  $B_n$  en un cylindre isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  et par composition avec  $R_n$  obtenir ainsi une application non constante du cylindre dans  $B(0, r)$ ,

contredisant le théorème de Liouville.

Preuve n°2 : L'ouvert  $B_n$  est une union de lignes de champ. Puisque  $i/\tilde{\omega}_n = R_n^*(i/\omega_n)$  et puisque les lignes de champ de  $i/\omega_n$  contenues dans  $\mathfrak{B}_n$  ne bouclent pas (elles tendent vers 0 pour des temps tendant vers  $+\infty$ , par exemple<sup>23</sup>), l'application  $R_n$  est injective sur chaque ligne de champ de  $i/\tilde{\omega}_n$  contenue dans  $B_n$ . Or d'après l'équation (38) page 74, ces lignes doivent toutes croiser  $] -1/2, 1/2[$  une et une seule fois. Comme  $R_n^{-1}(R_n(] -1/2, 1/2[)) \subset ] -1/2, 1/2[$ , les lignes de champ de  $i/\omega_n$  contenues dans  $\mathfrak{B}_n$  croisent  $R_n(] -1/2, 1/2[)$  une et une seule fois également. Or l'application  $R_n$  est injective sur  $] -1/2, 1/2[$ . Donc deux lignes de champ différentes de  $i/\tilde{\omega}_n$  dans  $B_n$  sont envoyées sur deux lignes de champ différentes de  $i/\omega_n$ .  $\square$

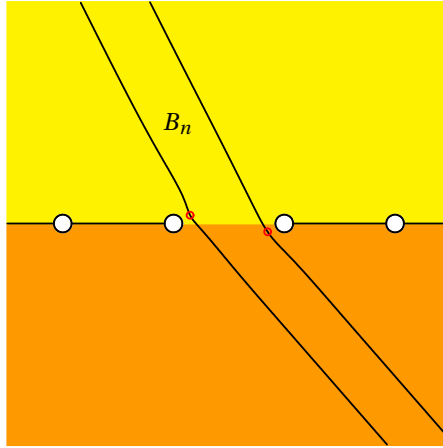


FIGURE 15: Exemple de bande  $B_n$  pour  $\tilde{\omega}_n$ . Les points  $-1/2 + vM\lambda_n$  et  $1/2 - vM\lambda_n$  sont indiqués par des cercles rouges.

Pour définir un raccord entre  $B_n$  et la bande suivante  $\hat{B}_n$ , la procédure est analogue, avec éventuellement une autre branche de  $\zeta \mapsto z$  pour l'application  $R_n$  : partir du point  $1/2 + i\nu\lambda_n M$ , suivre la ligne de champ de  $i/\omega_n$  des deux côtés jusqu'à atteindre le bord de  $B_n$  d'un côté et de  $\hat{B}_n$  de l'autre, continuer légèrement cette ligne de façon à empiéter sur  $B_n$  et  $\hat{B}_n$ . Puis suivre  $i/\tilde{\omega}_n$  pour atteindre  $\pm i\infty$ . Alors  $R_n$  est injective sur le raccord et on définit  $\mathfrak{C}_n$  comme son image par  $R_n$ .

Le lemme 63 page précédente implique alors que la réunion des  $Q$  bandes et des  $2Q$  raccords contient un voisinage  $B(0, r')$  de 0 dans  $B(0, r)$ , indépendant de  $n$ .

23. on peut aussi utiliser la formule des résidus

Définissons  $\omega'^+$  et  $\omega'^-$  les pull-backs de  $\omega = \lim \omega_n$  par respectivement les deux fonctions limites du lemme 63. L'inégalité (38) page 74 prend ici la forme :

$$(39) \quad \left| \frac{\omega'^{\pm}}{Qdz} - 1 \right| < \varepsilon$$

sur la préimage de  $B(0, r)$  par les fonctions limites, qui sont respectivement de la forme  $S'^+ \setminus B(0, r')$  et  $S'^- \setminus B(0, r')$ , où  $r' = 1/|C|r^Q$ . Nécessairement,  $K > r'$  (c.f. la définition de  $K$  en termes de  $R_n^{-1}(B(0, r))$ ), et procédons maintenant comme dans le cas de  $\tilde{\omega}_n$  pour définir l'analogie des bandes, qui sont maintenant des demi-plans, et des raccords.

Toutes les affirmations du lemme 23 page 35 suivent maintenant facilement.

### 16.3. Preuve du lemme 34 ; de la longueur des verticales. . .

(La seconde partie du titre réfère au corollaire 35 page 46.)

Il se réduit maintenant à un simple calcul. Par simplicité, supposons toujours que  $j = 1$ . Nous traiterons le cas de  $u_n^- + u$ , le cas de  $u_n^+ + u$  étant similaire. Nous travaillons dans 3 coordonnées :  $z, \zeta, u$ , telles que  $z = R_n(\zeta) = z_1 R(\zeta)$ , et  $u = \int \omega_n(z) = \int \tilde{\omega}_n(\zeta)$ . On a  $z \in \mathfrak{B}_n \iff \zeta \in B_n \iff u \in ]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}$ . Soit  $\zeta_n^-$  le point correspondant aux points  $u_n^-$  en coordonnée  $u$  et donc à  $z_n^-$  en coordonnées  $z$ . Par le lemme 63 page 75,  $\zeta_n^- - (-1/2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_n \mu$  pour une certaine constante  $\mu$ . Par l'équation (38) page 74 :

$$(40) \quad \left| \frac{Q\lambda_n du}{d\zeta} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Rappelons que le nombre complexe  $\lambda_n$  tend vers 0 dans  $\diamond = \{\lambda \mid |\text{Arg } \lambda| < \pi/2 - \alpha\}$  ou  $\heartsuit = \{\lambda \mid |\pi - \text{Arg } \lambda| < \pi/2 - \alpha\}$ . Toute les constantes de cette section vont dépendre d' $\alpha$ . De plus, le même symbole "cst" sera utilisé pour différentes constantes positive.

À partir de maintenant, nous supposerons que  $u$  appartient à l'ensemble

$$(u_n^- + [-A, A] \times \mathbb{R}) \cap (]a_n, b_n[ \times \mathbb{R}).$$

**Assertion.** (Pour tout  $n$  assez grand on a :) Pour tout  $u$  dans cet ensemble, les  $z$  correspondants restent bien séparés des  $z_j$ ,  $j \neq 1$ , au sens où  $z \notin B(z_j, \eta r_n)$ ,  $i \neq 1$  pour un certain  $\eta$  indépendant de  $n$ .

**Preuve.** En effet,  $B_n$  est inclus dans l'image de  $R_n$ , et il a déjà été noté à la section 16.2 que cette dernière évite de tels disques.  $\square$

**Assertion.** (Pour tout  $n$  assez grand on a :) Pour tout  $u$  dans cet ensemble, et  $z$  correspondant à  $u$ , alors  $Q_n(z) \approx z(z^Q - z_1^Q)$  (le quotient est arbitrairement proche de 1 sur  $B_n$  quand  $n$  est assez grand).

**Preuve.**  $Q_n(z) = z \prod_{j=1}^Q (z - z_j)$  et les  $z_j$  sont asymptotiquement situés sur un polygone régulier de centre 0 et de rayon circonscrit  $r_n$ , et  $z$  est bien séparé des  $z_j$  pour  $j \neq 1$ .  $\square$

Ainsi, pour  $z$  et  $\zeta$  correspondant à un point  $u \in (u_n^- + [-A, A] \times \mathbb{R}) \cap (]a_n, b_n[ \times \mathbb{R})$  :

$$Q_n(z) \approx z(z^Q - z_1^Q) = z_1^{Q+1} \frac{z}{z_1} \left( \left( \frac{z}{z_1} \right)^Q - 1 \right) = z_1^{Q+1} R(\zeta) (R(\zeta)^Q - 1) = \frac{-z_1^{Q+1} R_n(\zeta)}{e^{2i\pi\zeta} + 1}.$$

Donc quand  $\text{Im}\zeta > 0$  :

$$(41) \quad Q_n(z) \approx \frac{-z_1^{Q+1} e^{2i\pi\zeta/Q}}{(e^{2i\pi\zeta} + 1)^{1+\frac{1}{Q}}},$$

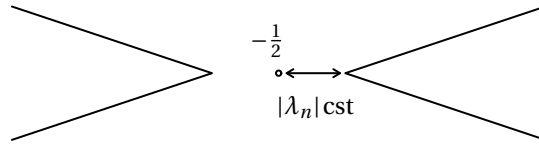
Et quand  $\text{Im}\zeta < 0$  :

$$(42) \quad Q_n(z) \approx \frac{-z_1^{Q+1} e^{-2i\pi\zeta}}{(1 + e^{-2i\pi\zeta})^{1+\frac{1}{Q}}}.$$

Maintenant pour  $n$  suffisamment grand, puisque  $\zeta_n^- + 1/2 \sim \lambda_n \mu$ , l'équation (40) page précédente et la contrainte  $\lambda \in \diamond$  ou  $\diamond$  impliquent, *pourvu* qu'on ait choisi  $\varepsilon$  suffisamment petit, et toujours sous l'hypothèse  $u \in (u_n^- + [-A, A] \times \mathbb{R}) \cap (]a_n, b_n[ \times \mathbb{R})$ , que

$$(43) \quad |\text{Re}(\zeta + 1/2)| < \text{cst} |\text{Im}(\zeta)| + |\lambda_n| \text{cst}.$$

Cette équation délimite un ensemble en forme de sablier, comme sur le dessin ci-dessous.



En particulier, la distance de  $\zeta$  à tous les zéros de  $e^{2i\pi\zeta} + 1$  mis à part  $1/2$  est minorée, indépendamment de  $n$ .

Dans la même veine : soit  $t = \text{Im}(u - u_n^-)$ , alors

$$(44) \quad \frac{|\text{Im}(\zeta)|}{|\lambda_n|} > \text{cst}|t| - \text{cst},$$

$$(45) \quad \frac{|\text{Im}(\zeta)|}{|\lambda_n|} < \text{cst}|t| + \text{cst},$$

avec des constantes *différentes*.

Mentionnons également

$$(46) \quad |\zeta + 1/2| > \text{cst}|\lambda_n|(1 + |t|).$$

Nous découpons maintenant le domaine en 3 parties.

Première partie :  $|\zeta + 1/2| > 1/2$  et  $\text{Im}(\zeta) > 0$ . Alors  $|e^{2i\pi\zeta} + 1| > \text{cst}$ . Donc (se rappeler de  $|z_1| \sim \text{cst}|\lambda_n|^{1/Q}$ )

$$|Q_n(z)| < \text{cst}|\lambda_n|^{1+\frac{1}{Q}} e^{-2\pi\text{Im}\zeta/Q}.$$

De plus par l'équation (43), pour  $n$  assez grand :

$$\text{Im}(\zeta) > \text{cst}.$$

Deuxième partie :  $|\zeta + 1/2| < 1/2$ . Alors  $|e^{2i\pi\zeta} + 1| \approx |\zeta + 1/2|$  (au sens où le quotient est universellement borné). Donc

$$|Q_n(z)| < \text{cst} \left| \frac{\lambda_n}{\zeta + 1/2} \right|^{1+\frac{1}{Q}}.$$

Troisième partie :  $|\zeta + 1/2| > 1/2$  et  $\text{Im}(\zeta) < 0$ . Alors  $|1 + e^{-2i\pi\zeta}| > \text{cst}$ . Donc

$$|Q_n(z)| < \text{cst}|\lambda_n|^{1+\frac{1}{Q}} e^{2\pi\text{Im}\zeta}.$$

De plus par l'équation (43) :

$$\text{Im}(\zeta) < -\text{cst}.$$

Dans le premier cas, en utilisant que  $x^{1+\frac{1}{Q}} e^{-2\pi x}$  est borné pour  $x > 0$ , on obtient

$$|Q_n(z)| < \text{cst} \left| \frac{\lambda_n}{\text{Im}(\zeta)} \right|^{1+\frac{1}{Q}}$$

(notons qu'on aurait pu mettre ici n'importe quelle puissance de  $\text{Im}(\zeta)$ ). D'après l'équation (45), comme  $\text{Im}(\zeta) > \text{cst}$ , on a pour  $n$  assez grand  $|t| > \frac{\text{cst}}{|\lambda_n|}$ , donc par l'équation (44)

$$\frac{|\text{Im}(\zeta)|}{|\lambda_n|} > (1 + |t|) \frac{\text{cst}}{2}.$$



Ainsi,<sup>(24)</sup>

$$|Q_n(z)| < \frac{\text{cst}}{(1+|t|)^{1+\frac{1}{Q}}}.$$

Le traitement du troisième cas est similaire. Pour le deuxième cas, on conclut directement par l'équation (46) :

$$|Q_n(z)| < \frac{\text{cst}}{(1+|t|)^{1+\frac{1}{Q}}}.$$

**16.4. Preuve des lemmes 41 et 44 : calcul des constantes  $b_n^\pm$ .** Ces lemmes se trouvent à partir de la page 54.

Rappelons que  $a^+$  et  $a^-$  sont des points choisis sur l'axe répulsif du pétale  $\mathfrak{B}^+$  et sur l'axe attractif de  $\mathfrak{B}^-$ , tels que  $]0, a^+[\subset \mathfrak{B}^+$  et  $]0, a^-[\subset \mathfrak{B}^-$ , et que par le point (17) du lemme 23 page 35,  $a^+$  et  $a^-$  sont contenus dans  $\mathfrak{B}_n$  pour  $n$  assez grand.

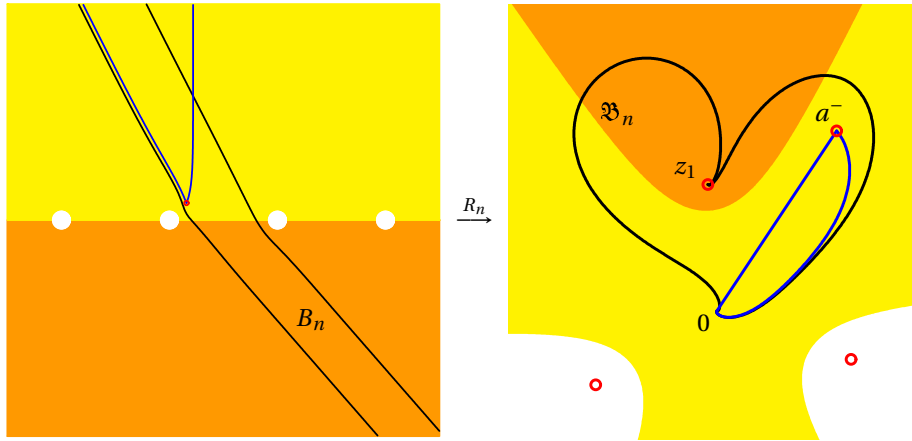


FIGURE 16: Illustration de la preuve du lemme 65. Le point  $z_n$  est indiqué par un cercle rouge. Les relevés du chemin de  $a^-$  vers 0 et du segment de  $a^-$  vers 0 sont dessinés en bleu.

**Lemme 65.** *Pour tout  $n$  assez grand, tout chemin de  $a^-$  (resp.  $a^+$ ) vers 0 contenu dans  $\mathfrak{B}_n$  est homotope dans  $B(0, r)$  privé des  $z_j$  au segment rectiligne de mêmes extrémités.*

**Preuve.** Nous traiterons le cas de  $a^-$ , quand  $S = \diamond$  (les autres cas étant similaires). Soit  $\zeta_n = R_n^{-1}(a^-)$ . Relevons un tel chemin par  $R_n$  : on obtient un chemin dans  $B_n$  de  $\zeta_n$  vers  $+i\infty$ . Le segment  $]0, a^-]$  est contenu dans l'image de  $R_n$  pour  $n$  assez grand ( $]0, a^+]$  aussi). Il se relève en un chemin, dans  $R_n^{-1}(B(0, r))$  de  $z_n$  vers  $+i\infty$ , avec

24. On aurait pu mettre ici n'importe quelle puissance de  $t$ .

une asymptote verticale. Voir la figure 16 page ci-contre. Donc, il existe une homotopie dans  $R_n^{-1}(B(0, r))$  (qui est simplement connexe) entre ces deux relevés (avec une partie imaginaire qui tend vers  $+\infty$  uniformément durant toute l'homotopie). L'image par  $R_n$  de cette homotopie démontre le lemme.  $\square$

Rappelons maintenant la définition de  $c_n^-$  : en utilisant les notations des sections 13.1 et 13.3, et en notant  $\log^- \frac{z}{d^-}$  la branche de  $\log \frac{z}{d^-}$  définie sur  $\mathfrak{B}_n$  et réelle en  $z = a^-$ , alors  $c_n^-$  est la constante telle que

$$\Phi_{g_n}(z) + c_n^- = \left( \sum_{j=1}^Q \frac{\log_p \left(1 - \frac{z_j}{z}\right)}{\log m_j} \right) + \left( \sum_{j=0}^Q \frac{1}{\log m_j} \right) \log^- \frac{z}{d^-} + 0 + \text{Reste}_n(z)$$

ait lieu dans un voisinage de  $a^-$ , où  $\text{Reste}_n$  désigne la primitive de  $\text{reste}_n$  qui s'annule à l'origine. Réordonnons les termes :

$$\Phi_{g_n}(z) + c_n^- - \frac{\log^- \frac{z}{d^-}}{\log m_0} = \sum_{j=1}^Q \frac{\log^- \frac{z}{d^-} + \log_p \left(1 - \frac{z_j}{z}\right)}{\log m_j} + \text{Reste}_n(z).$$

Notons  $l = \log^- \frac{a^-}{d^-} = \log_p \left| \frac{a^-}{d^-} \right| \in \mathbb{R}$  et  $\log_j \left( \frac{z-z_j}{a^-} \right)$  la branche de  $z \mapsto \log \left( \frac{z-z_j}{a^-} \right)$  définie sur  $\mathfrak{B}_n$  et prenant la valeur  $\log_p \left(1 - \frac{z_j}{a^-}\right)$  en  $z = a^-$ . On a

$$\Phi_{g_n}(z) + c_n^- - \frac{\log^- \frac{z}{d^-}}{\log m_0} = \sum_{j=1}^Q \frac{l + \log_j \frac{z-z_j}{a^-}}{\log m_j} + \text{Reste}_n(z)$$

au voisinage de  $a^-$  et donc partout sur  $\mathfrak{B}_n$  par prolongement analytique. En particulier, la limite du membre de gauche le long d'un chemin tendant vers 0 est égale à la limite du membre de droite le long de ce même chemin. D'après la proposition 42 page 54, le membre de gauche tend vers  $b_n^-$ . Quand au membre de droite, d'une part  $\text{Reste}_n(z)$  est une fonction holomorphe valant en 0 par définition. D'autre part pour déterminer vers quelle valeur de  $\log^- \frac{z}{d^-}$  tend l'expression  $\log_j \frac{z-z_j}{a^-}$ , on utilise le lemme 65 page ci-contre :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \text{le long du chemin}}} \log_j \frac{z-z_j}{a^-} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \log_p \frac{t a^- - z_j}{a^-} = \log_p \frac{-z_j}{d^-}.$$

Ce qui démontre le lemme 41 (le cas de  $c_n^+$  étant similaire).

**Lemme 66.** *Pour tout  $n$  assez grand, tout chemin de  $a^-$  vers  $a^+$  contenu dans  $\mathfrak{B}_n$  parcourt un angle total de  $\nu\pi/Q$  radians autour de 0.*

**Preuve.** Cet angle doit être un représentant de  $\arg(a^+/a^-)$  modulo  $2\pi\mathbb{Z}$  c'est-à-dire de  $\nu\pi/Q \pmod{\mathbb{Z}}$ . La préimage de ce chemin par  $R_n : B_n \rightarrow \mathfrak{B}_n$  est homotope dans  $R_n^{-1}(B(0, r))$  au chemin rectiligne de mêmes extrémités, dont le projeté par  $R_n$

est confiné à l'image de  $] -1/2, 1/2[ \times \mathbb{R}$  par  $R_n$ , incluse dans un secteur d'ouverture  $2\pi/Q$ . Donc le représentant en question doit être de valeur absolue  $< 2\pi/Q$ .  $\square$

Démontrons maintenant le lemme 44 : par définition,  $\Delta_n = (\Phi_{g_n} + c_n^-) - (\Phi_{g_n} + c_n^+) = b_n^- - b_n^+ + \frac{\log \frac{z^-}{d^-}}{2i\pi\lambda_n} - \frac{\log \frac{z^+}{d^+}}{2i\pi\lambda_n} + o(1)$  quand  $z \rightarrow 0$  dans  $\mathfrak{B}_n$ , pour les branches de  $\log(z/d^\pm)$  définie sur  $\mathfrak{B}_n$  et réelles en  $z = a^\pm$ . Relions dans  $\mathfrak{B}_n$  par un certain chemin le point  $a^-$  à  $z$  puis à  $a^+$ . Alors par le lemme 65 page 80,  $\frac{\log \frac{z^-}{d^-}}{2i\pi\lambda_n} - \frac{\log \frac{z^+}{d^+}}{2i\pi\lambda_n} = \frac{v}{2Q\lambda_n}$ .

## 17. À propos de la constante $\Gamma$

**17.1. Définition et existence.** Rappelons le cadre et les notations : nous considérons une famille analytique d'applications analytiques  $f_\lambda$  telles que

$$f_\lambda(z) = e^{2i\pi\lambda} z + \mathcal{O}(z^2)$$

et

$$f_0(z) = z + Cz^{Q+1} + \mathcal{O}(z^{Q+2}).$$

Les points  $z_j$  sont les  $Q$  points fixes non nuls de  $f_\lambda$  qui sont proches de 0. Ils dépendent analytiquement de la racine  $Q$ -ième de  $\lambda$ . Quand  $\lambda$  fait un tour autour 0, les  $z_j$  sont permutés par un décalage circulaire et transitif de leur index.

Quand  $\lambda \rightarrow 0$ , on a

$$\frac{C}{-2i\pi\lambda} z_j^Q \rightarrow 1.$$

Notons  $w_j$  la racine  $Q$ -ième de cette expression la plus proche<sup>25</sup> de 1. Les  $w_j$  sont des fonctions analytiques de la racine  $Q$ -ième de  $\lambda$ , et  $w_j = 1$  quand  $\lambda = 0$ .

**Lemme 67.** La limite suivante<sup>26</sup> existe :

$$\Gamma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^Q \frac{\log_p w_j}{\log_p m_j}.$$

**Preuve.** Notons que  $\log_p w_j = \mathcal{O}(\lambda^{1/Q})$  et que  $\log_p m_j \sim -2i\pi Q\lambda$ . L'expression est symétrique par rapport aux points fixes  $z_j$ , et donc n'a pas de monodromie par rapport à  $\lambda$ . Elle est donc analytique en  $\lambda$  dans un voisinage épointé de  $\lambda = 0$ . Mais puisque c'est un  $\mathcal{O}(\lambda^{1/Q}/\lambda)$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ , elle possède en  $\lambda = 0$  une singularité effaçable.  $\square$

25. c'est la branche principale de la fonction racine  $Q$ -ième

26.  $\log_p$  désigne la branche principale du logarithme

**17.2. Cas où les multiplicateurs sont égaux.** Dans ce cas on peut donner une expression simplifiée de  $\Gamma$ .

Premièrement notons que le produit des  $z_j$  dépend holomorphiquement de  $\lambda$  au voisinage de  $\lambda = 0$ . Posons

$$\sigma(\lambda) = \prod_j z_j = a\lambda + b\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Comme l'ensemble des  $z_j$  est asymptotiquement situé sur l'ensemble des  $Q$  racines  $Q$ -ièmes de  $\frac{-2i\pi}{C}\lambda$ , on en déduit que

$$a = (-1)^Q \frac{2i\pi}{C} \neq 0.$$

**Lemme 68.** Si pour tout  $\lambda$  suffisamment proche de 0 les  $m_j$  sont égaux, alors :

$$(47) \quad \Gamma = \frac{-b}{2i\pi Q a}.$$

**Preuve.** Pour  $\lambda$  suffisamment petit,  $\sum \log_p w_j / \log_p m_j = \log_p \prod w_j / \log_p m$ . Or  $\prod w_j = \frac{\prod z_j}{a\lambda}$ , d'où  $\log \prod w_j \sim \frac{b}{a}\lambda$ , et  $\log m \sim -2i\pi Q\lambda$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Le résultat suit.  $\square$

Deuxièmement, soit  $\ell_\lambda(z)$  la dérivée logarithmique de  $f_\lambda(z) - z$  par rapport à  $\lambda$  :

$$\ell_\lambda(z) = \frac{\frac{\partial f_\lambda(z)}{\partial \lambda}}{f_\lambda(z) - z}.$$

Soit la série de Laurent de  $\ell_0(z)$  en  $z = 0$  :

$$\ell_0(z) = \sum_{k=-Q}^{+\infty} c_k z^k.$$

Alors

**Lemme 69.**

$$(48) \quad \Gamma = \frac{-1}{2Q} + \frac{c_0}{2i\pi Q}.$$

**Preuve.** Par le théorème de préparation de Weierstraß,  $f_\lambda(z) - z = zQ_\lambda(z)r_\lambda(z)$  où  $Q_\lambda(z) = z^Q + \sum_{k=0}^{Q-1} a_k(\lambda)z^k$ , les  $a_k$  étant analytiques,  $Q_0(z) = z^Q$ , et  $r_\lambda(z)$  est analytique en  $(\lambda, z)$ . Le produit des  $z_j$  est égal à  $(-1)^Q a_0(\lambda)$ . Notons

$$Q_\lambda(z) = z^Q + \lambda U_1(z) + \lambda^2 U_2(z) + \dots,$$

où  $U_1$  et  $U_2$  sont des polynômes de degré  $< Q$ . On a

$$a = (-1)^Q U_1(0) \quad \text{et} \quad b = (-1)^Q U_2(0).$$

Notons

$$r_\lambda(z) = V_0(z) + \lambda V_1(z) + \lambda^2 V_2(z) + \dots$$

Alors

$$f_\lambda(z) - z = z^{Q+1}V_0 + z(U_1V_0 + z^Q V_1)\lambda + z(U_2V_0 + U_1V_1 + z^Q V_2)\lambda^2 + \dots,$$

où pour augmenter la lisibilité nous avons abrégé  $U_k(z)$  en  $U_k$  et  $V_k(z)$  en  $V_k$ . En regardant cette équation au niveau de son développement en série entière par rapport à  $z$ , l'égalité des coefficients en  $z^1$  donne :

$$e^{2i\pi\lambda} - 1 = U_1(0)V_0(0)\lambda + (U_2(0)V_0(0) + U_1(0)V_1(0))\lambda^2 + \dots$$

d'où par identification  $U_1(0)V_0(0) = 2i\pi$  (donc les deux facteurs du produit sont non nuls) et  $U_2(0)V_0(0) + U_1(0)V_1(0) = (2i\pi)^2/2$ . Donc,  $b/a = U_2(0)/U_1(0) = 2i\pi/2 - V_1(0)/V_0(0)$ . Maintenant,  $\ell_0(z) = \frac{U_1(z)}{z^Q} + \frac{V_1(z)}{V_0(z)}$ . Le premier terme de cette somme est la partie polaire. Cela donne  $c_0 = V_1(0)/V_0(0)$ .  $\square$

On peut donc calculer  $\Gamma$  à partir du développement en série de  $f_\lambda(z)$ . Puisque le premier terme non nul de  $f_0(z) - z$  est d'ordre  $z^{Q+1}$  et le premier coefficient non nul de  $\frac{\partial}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}f_\lambda(z)$  est d'ordre  $z$ , il suffit de calculer le développement en série entière de  $f_0$  jusqu'à l'ordre  $z^{2Q+1}$  inclus, et le développement en série entière de  $\frac{\partial}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}f_\lambda(z)$  jusqu'à l'ordre  $z^{Q+1}$  inclus.

**17.3. Exemple.** Effectuons ce calcul sur un exemple. Soit

$$f_\lambda(z) = P_{\frac{1+\lambda}{3}}^3(z)$$

où  $P_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z + z^2$ . C'est bien un cas où les multiplicateurs des  $z_j$  sont égaux pour  $\lambda$  petit. On obtient

$$\begin{aligned} f_\lambda(z) &= z + (5+j)z^4 - (2+6j)z^5 - (6+4j)z^6 + 4jz^7 + \dots \\ &+ 2i\pi\lambda \times (3z + (1+2j)z^2 + (2+4j)z^3 + (16+3j)z^4 + \dots) \\ &+ \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned}$$

On cherche le coefficient  $c_0$  de  $z^0$  dans le développement en série de Laurent de

$$2i\pi \frac{3z + (1+2j)z^2 + (2+4j)z^3 + (16+3j)z^4}{(5+j)z^4 - (2+6j)z^5 - (6+4j)z^6 + 4jz^7},$$

qui est le même que celui de  $z^3$  dans le développement en série entière de

$$2i\pi \frac{3 + (1+2j)z + (2+4j)z^2 + (16+3j)z^3}{(5+j) - (2+6j)z - (6+4j)z^2 + 4jz^3}.$$

On trouve

$$c_0 = 2i\pi \frac{232 + 185j}{(5+j)^4}$$

D'où

$$\Gamma = \frac{5+46j}{2 \cdot 3^3 \cdot 7^2} = -\frac{1}{147} + \frac{23\sqrt{3}}{2646}i.$$



## CHAPITRE 4

## La taille des disques de Siegel des polynômes quadratiques

Étant donné un irrationnel  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , notons  $[\alpha] \in \mathbb{Z}$  le plus grand entier  $n \leq \alpha$ ,  $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$  la partie fractionnaire de  $\alpha$ , et définissons  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  récursivement en posant  $\alpha_0 = \{\alpha\}$  et  $\alpha_{n+1} = \{1/\alpha_n\}$ . C'est l'algorithme de Gauss. Yoccoz a défini

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n} \in ]0, +\infty]$$

et l'a appelée *fonction de Brjuno*. Par convention, pour tout nombre rationnel  $p/q$ , on pose  $\Phi(p/q) = +\infty$ . L'ensemble des *nombre de Brjuno*  $\mathcal{B}$  est défini comme l'ensemble des réels  $\alpha$  tels que  $\Phi(\alpha) < +\infty$ .

Les travaux de Brjuno [Br] et Yoccoz [Y] ont démontré que le polynôme quadratique

$$P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha} z + z^2$$

est linéarisable si et seulement si  $\alpha$  est un nombre de Brjuno. Dans ce cas, nous posons  $r(\alpha) =$  le *rayon conforme* en 0 du disque de Siegel du polynôme quadratique  $P_\alpha$ .

L'ensemble des nombres de Brjuno ainsi que les fonctions  $\Phi(\alpha)$  et  $r(\alpha)$  sont périodiques de période 1.

Stefano Marmi a tracé sur ordinateur<sup>1</sup> le graphe de la fonction  $\Phi(\alpha) + \log r(\alpha)$  définie sur  $\mathcal{B}$ , et conjecturé que c'était la restriction d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . La conjecture suivante, émise plus tard, reste ouverte :

**Conjecture 70** (Marmi-Moussa-Yoccoz). *La fonction qui à un nombre de Brjuno  $\alpha$  associe le nombre réel  $\Phi(\alpha) + \log r(\alpha)$  est 1/2-Höldérienne.*

Dans [BC2], nous avons démontré la conjecture de Marmi (la continuité), et de plus calculé la valeur limite aux rationnels (voir la proposition 72 page 95). Nous noterons  $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (upsilon majuscule) le prolongement par continuité.

**Remarque.** L'ensemble des nombres de Brjuno étant dense dans  $\mathbb{R}$ , le prolongement est unique, et a exactement le même module de continuité que la fonction  $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(\alpha)$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans ce mémoire, nous démontrons le théorème suivant :

---

1. On trouvera dans [Ma] figure 6 un tracé de  $\exp(\text{cst} - \hat{\Phi} - \log r)$  pour une fonction  $\hat{\Phi} \neq \Phi$ , mais différant de  $\Phi$  par une fonction  $\hat{\Phi} - \Phi$  continue et même 1/2-Höldérienne d'après [MMY].



**Théorème Principal.** *Pour tout réel  $\delta > 1/2$ , pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  d'intérieur non vide,  $Y$  n'est pas  $\delta$ -Höldérienne sur  $I$ , et sa variation n'est pas bornée sur  $I$ .*

Nous donnons quelques compléments dans la section 24.

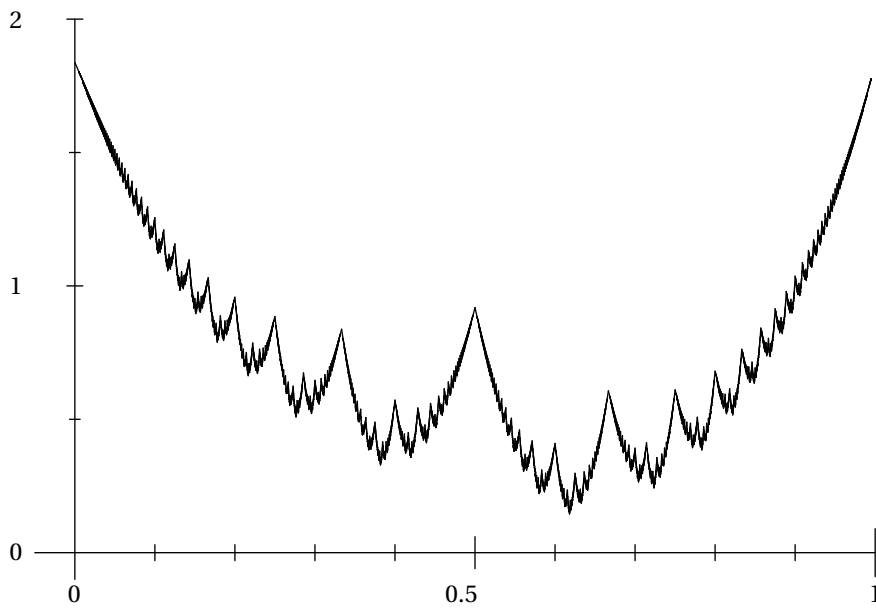


FIGURE 17: La fonction  $Y$  sur une période.

La preuve est basée sur un développement asymptotique de  $Y$  en chaque rationnel  $p/q$ , que nous démontrons pour certaines suites de rationnels  $x_n \rightarrow p/q$ . Ce développement est basé sur les techniques développées dans les chapitres précédents.

## 18. Esquisse de la preuve

Étant donné  $p/q$ , soit

$$p/q = a_0 + 1/(a_1 + 1/(\dots + 1/a_m)) = [a_0, a_1, \dots, a_m]$$

l'un de ses deux développements finis en fraction continue.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> par exemple, les deux développements de  $13/32$  sont  $[0, 2, 2, 6]$  et  $[0, 2, 2, 5, 1]$ ; voir la section 23.1.2 pour de plus amples explications

Soient les deux suites de nombres rationnels  $x_n$  et  $x'_n$  définies comme suit :

$$x_n = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\dots \frac{1}{a_m + \frac{1}{n}}}} \quad \text{et} \quad x'_n = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\dots \frac{1}{a_m + \frac{1}{n + \frac{1}{2}}}}}$$

Elle tendent toutes deux vers  $p/q$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , ceci d'un même côté de  $p/q$  (elles tendraient de l'autre côté si l'on avait choisi l'autre développement de  $p/q$ ). Nous démontrerons plus loin que

$$\begin{aligned} \Upsilon(x_n) &= c + a \frac{\log n}{n} + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \Upsilon(x'_n) &= c + a \frac{\log n}{n} + \frac{b'}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

et que

$$b \neq b'.$$

Donc d'une part,  $x_n - x'_n$  est d'ordre  $1/n^2$ , d'autre part,  $\Upsilon(x_n) - \Upsilon(x'_n)$  est d'ordre  $1/n$ . Cela empêche  $\Upsilon$  d'être mieux qu' $1/2$ -Höldérienne, ainsi que d'avoir variation bornée, au voisinage de  $p/q$ .

Dans la figure 18, nous avons schématisé le cas le plus simple, c'est-à-dire quand  $p/q = 0/1$  et on a choisi  $[a_0, \dots, a_m] = [0]$ , ce qui donne  $x_n = 1/n$  et  $x'_n = 1/(n + 1/2)$ . Dans ce cas particulier, le coefficient  $a$  devant  $\log n/n$  est nul. Donc sur le graphe de  $\Upsilon$ , les valeurs correspondant à  $x_n$  et  $x'_n$  sont asymptotiquement situées sur deux lignes de pentes différentes.

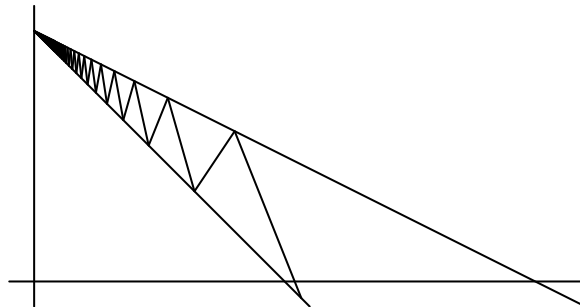


FIGURE 18: Le cas  $p/q = 0$ , en arrivant par la droite.

Pour calculer ces développements nous utiliserons la théorie, maintenant classique, de l'implosion parabolique. Nous utiliserons aussi les raffinements des estimées que nous avons introduits dans les chapitres précédents. La théorie classique associe à  $p/q$  essentiellement deux familles analytiques  $\mathcal{E}$  d'applications appelées *renormalisées paraboliques* (étroitement reliées aux applications de cornes du point parabolique), fixant 0 avec un multiplicateur variable. Celle des deux familles que l'on utilise dépend du côté de  $p/q$  d'où se fait la perturbation. De même qu'à la famille de polynômes de degré 2,  $P_\alpha$ , nous avons associé la fonction  $Y$ , nous associerons à la famille  $\mathcal{E}$  une fonction  $Y_{\mathcal{E}}$ , cette fois définie uniquement sur les rationnels. On reliera alors  $b$  à  $Y_{\mathcal{E}}(0)$  et  $b'$  à  $Y_{\mathcal{E}}(1/2)$ .

### 19. Renormalisée parabolique

Nous définissons ici les renormalisées paraboliques, après quelques rappels extrêmement sommaires sur les points paraboliques (le lecteur est supposé déjà familier avec le sujet), dont le but est de fixer des conventions. On pourra en première lecture se contenter de lire le résumé en fin de section.

Soit  $f$  holomorphe définie sur un ouvert  $U$  d'une surface de Riemann. Soit  $w$  un point fixe multiple de  $f$  et  $Q+1$  sa multiplicité. À ces données sont associés  $Q$  axes répulsifs et  $Q$  axes attractifs, disposés en alternance et identiquement espacés, des pétales (non uniques) pour chacun, et des coordonnées de Fatou  $\Phi$  sur ces pétales. Les coordonnées de Fatou sont uniques en un certain sens à post-composition près par une translation. Le choix d'une coordonnée de Fatou pour un axe sera appelé une *normalisation*. Dans le chapitre 1 nous avons introduit une normalisation préférée. Cependant dans la présente section, la normalisation peut être prise *arbitraire*.

Les pétales vivent sur  $U$  alors que les axes vivent dans le plan tangent à  $U$  en  $w$ . La réunion des axes attractifs et répulsifs découpe ce plan en  $2Q$  secteurs de même ouverture, chacun étant délimité par un axe attractif et un axe répulsif. Nous les appellerons *secteurs latéraux*. Leurs axes centraux sont appelés *axes intermédiaires*.

Un tel secteur sera dit *supérieur* si l'axe attractif suit l'axe répulsif dans l'ordre trigonométrique<sup>3</sup>. Il sera dit *inférieur* dans l'autre cas. À chacun d'eux est associée une application de corne  $h$ , aussi appelée *invariant de Martinet-Ramis* [MaR].<sup>4</sup>

Soit  $\Pi(z) = z \bmod \mathbb{Z} \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Le quotient d'un pétale par l'identification  $z \sim f(z)$  est isomorphe via  $\Pi \circ \Phi$  au cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . On appelle ce quotient le *cylindre d'Écalle*. Il y a donc  $2Q$  cylindres d'Écalle, un pour chaque axe répulsif ou attractif. Ils sont essentiellement uniques. Si la coordonnée de Fatou  $\Phi$  est normalisée, on dit que le cylindre est *normalisé*. On peut parler sans ambiguïté des bouts supérieurs et inférieurs des cylindres d'Écalle, car un changement de normalisation revient à effectuer une translation sur le cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , ce qui préserve ses bouts.

Soit un cylindre et  $A$  l'axe associé. Il y a exactement deux secteurs latéraux dont le bord contient  $A$ . Le bout supérieur du cylindre est naturellement associé à celui des deux secteurs qui est supérieur. Le bout inférieur à celui qui est inférieur. Ainsi, chaque secteur est associé à un bout de deux cylindres. Rappelons que :

- l'application de cornes  $h$  associée à un secteur latéral représente le changement de carte  $\Phi_{\text{att}} \circ \Phi_{\text{rep}}^{-1}$  associé à l'intersection du pétale répulsif et du pétale attractif adjacents, pétales étendus si nécessaire<sup>5</sup> ;
- elle est définie sur un ensemble de la forme  $\Pi^{-1}(V)$  où  $V$  est un voisinage d'un des bouts du cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  (plus précisément le bout supérieur si le secteur latéral est supérieur, et le bout inférieur si le secteur latéral est inférieur) ;
- $h$  commute avec  $T_1(z) = z + 1$  et donc passe au quotient :  $\Pi \circ h = \tilde{h} \circ \Pi$  ;
- $\tilde{h}$  est injective et fixe le bout du cylindre<sup>6</sup> ;
- $\tilde{h}$  peut être vue comme une application d'un voisinage d'un bout d'un cylindre répulsif à valeurs dans un voisinage d'un bout d'un cylindre attractif.

Notons

$$\text{Wr} : \begin{pmatrix} \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \exp(2i\pi s z) \end{pmatrix}$$

avec  $s = 1$  si l'on veut "envoyer" le bout supérieur sur  $0$ , et  $s = -1$  si c'est le bout inférieur que l'on veut envoyer sur  $0$ . Soit  $\mathcal{H}$  la conjuguée de  $\tilde{h}$  par  $\text{Wr}$ . Alors d'après les remarques précédentes,  $\mathcal{H}$  est définie sur un voisinage de  $0$  privé de  $0$ ,

3. Cette dénomination vient de ce qu'une courbe qui tend vers  $0$  tangentiellement à une direction contenue dans un secteur supérieur aura une image en coordonnée de Fatou qui tend vers  $\infty$  tangentiellement à une direction contenue dans le demi-plan supérieur.

4. En l'absence de normalisation des coordonnées de Fatou,  $h$  n'est définie qu'à post-composition près par une translation et pré-composition près par une translation ; de plus, la forme exacte de son domaine de définition dépend du choix des pétales, ainsi que de l'auteur de la définition. . . Il n'est pas certain qu'une définition canonique et raisonnable puisse être donnée.

5. voir la page 22 de la section 4.4 ou la section 14.3

6. Dans la classification analytique des points fixes multiples via  $\tilde{h}$ , seul le germe de  $\tilde{h}$  au bout du cylindre est à considérer.

est injective, et possède en 0 un prolongement analytique, fixant 0 avec dérivée *non nulle*.

Quand maintenant  $f$  est le  $q$ -ième itéré de  $P_{p/q}$  que l'on regarde en son point fixe parabolique  $w = 0$ , alors  $Q = q$  (voir [DH], chapitre IX, proposition 6). L'application linéaire tangente en 0 à  $P_{p/q}$  agit sur les axes par permutation circulaire. L'application  $P_{p/q}$  induit une application d'un cylindre associé à tel axe au cylindre associé à l'axe image, qui est un isomorphisme préservant les bouts, c'est-à-dire une translation. De plus, ces isomorphismes sont compatibles avec les applications de cornes correspondantes<sup>7</sup>. L'itéré  $q$ -ième de  $P_{p/q}$ , qui ramène tout cylindre dans lui-même, correspond à l'identité.

**Remarque.** Il serait donc tentant de vouloir identifier les  $q$  cylindres attractifs (et de même les  $q$  cylindres répulsifs) via ces isomorphismes. Cependant nous ne le ferons pas, pour plusieurs raisons. L'une est que pour la normalisation des coordonnées de Fatou que nous avons introduite dans le chapitre 1 et que nous pensons naturelle,  $P_{p/q}$  agit comme la translation de  $1/q$ . Voir la section 4.4, en particulier le paragraphe *identification de cylindres* page 23.

**Motivation.** Lors d'une perturbation de  $P_{p/q}$  en  $P_\alpha$  avec  $\alpha$  proche de  $p/q$  et  $\arg(\alpha - p/q)$  pas trop proche de  $\pi/2$  et  $-\pi/2$ , des passages s'ouvrent entre chaque pétale attractif et le pétale répulsif adjacent qui le suit dans l'ordre trigonométrique si  $\operatorname{Re}(\alpha) > p/q$ , qui le précède si  $\operatorname{Re}(\alpha) < p/q$ . On note  $v = 1$  dans le premier cas et  $v = -1$  dans le second. Le passage du pétale attractif au pétale répulsif demande un nombre d'itération tendant vers  $+\infty$  quand  $\alpha \rightarrow p/q$ , mais correspond au niveau des cylindres à une application très simple : une translation. Quel que soit  $a \in \mathbb{C}$ , pour des suites  $\alpha_n \rightarrow 0$ , bien choisies, on peut extraire des limites à ces applications de passage, correspondant encore à une translation  $T_a$  au niveau des cylindres. On y référera en tant qu'*application de transition*. Dans les pétales perturbés, seuls les bouts  $v i \infty$  des domaines fondamentaux des cylindres perturbés tendent vers le point fixe 0 de  $P_\alpha$ , les autres bouts tendent vers les autres points fixes. On s'intéressera donc aux bouts supérieurs des cylindres si  $\operatorname{Re} \alpha > p/q$  et aux bouts inférieurs si  $\operatorname{Re} \alpha < p/q$ . Ce que l'on peut résumer en disant que l'on pose

$$s = v.$$

7. c'est-à-dire que  $h_{\text{avant}} \circ T_{\text{att}} = T_{\text{rep}} \circ h_{\text{après}}$  où  $T_{\text{att}}$  est le relevé de l'isomorphisme entre les cylindres attractifs,  $T_{\text{rep}}$  celui correspondant aux cylindres répulsifs,  $h_{\text{avant}}$  l'application de cornes entre le cylindre attractif de départ et le cylindre répulsif de départ,  $h_{\text{après}}$  entre ceux d'arrivée

Nous définissons maintenant la *renormalisée parabolique* (indépendamment de toute suite  $\alpha_n$ ). Fixons d'une part le choix du cylindre de  $P_{p/q}$  dans lequel on veut travailler, d'autre part le choix de  $v$ .

Supposons que le cylindre choisi est attractif. L'application de transition mentionnée précédemment l'envoie dans un cylindre répulsif adjacent, selon une translation  $T_a$ . On compose cela avec l'application de cornes associée au bout  $vi_\infty$  de ce cylindre répulsif. On se retrouve dans le second cylindre attractif adjacent au cylindre répulsif. Rappelons que  $P_{p/q}$  permute circulairement les cylindres, où il correspond à des translations. On retourne alors dans le cylindre de départ en itérant  $r$  fois  $P_{p/q}$  où  $r \in \{0, \dots, q-1\}$  est la solution de

$$v + rp \equiv 0 \pmod{q}.$$

Cela correspond à une translation  $T_b$ . On a donc introduit une application

$$T_b \circ \tilde{h} \circ T_a$$

au voisinage du bout  $vi_\infty$  du cylindre attractif vers un voisinage de ce même bout, où  $a \in \mathbb{C}$  est un paramètre libre, et  $b$  est déterminé par les normalisations des coordonnées de Fatou. Après conjugaison par  $W_r$ , cela donne une famille d'applications  $\mathcal{E}$  dépendant de  $a$  que l'on appelle *renormalisées paraboliques*. Mais nous ne l'indiquerons pas en fonction de  $a$ . En fait, nous préférons noter  $\mathcal{E}_s$  l'unique application de cette famille vérifiant

$$\mathcal{E}'_s(0) = e^{2i\pi s}.$$

En effet,  $\mathcal{E}(z) = e^{2i\pi vb} \mathcal{H}(e^{2i\pi va} z)$ . Or  $\mathcal{H}'(0) \neq 0$ . Par conséquent  $\forall s \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \exists! a \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  tel que  $\mathcal{E}'(0) = e^{2i\pi s}$ .

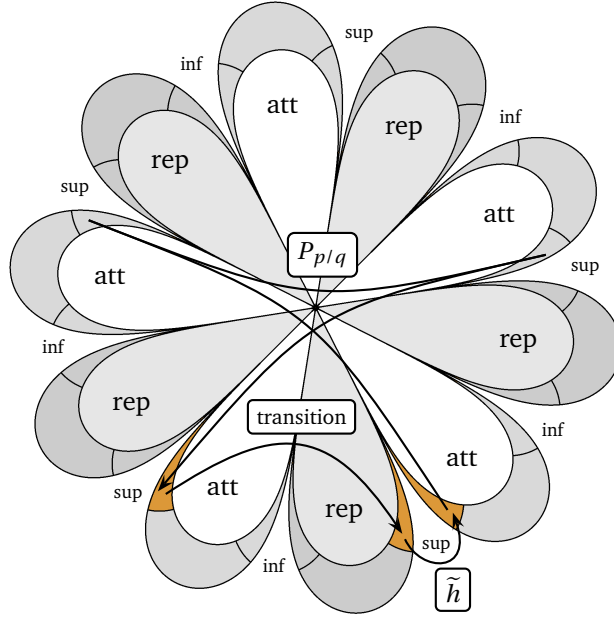


FIGURE 19: Définition de la renormalisée parabolique. Ce dessin est purement schématique. Les pétales sont indiqués avec “att” pour attractif et “rep” pour répulsif. Les cylindres sont représentés par des domaines fondamentaux. Les bouts inférieurs et supérieurs des cylindres sont indiqués par les sigles inf et sup.

Si l’on choisit de partir d’un cylindre répulsif, alors la procédure est la suivante. On applique d’abord l’application de corne associée au bout  $v i\infty$ . Puis la translation correspondant à  $P_{p/q}^r$ . Puis la translation correspondant à l’application de transition. On a donc

$$T_a \circ T_b \circ \tilde{h}$$

définie au voisinage de  $v i\infty$  dans le cylindre répulsif. On la conjugue par  $Wr$ , toujours avec  $s = v$ , pour obtenir  $\mathcal{E}(z) = e^{2i\pi v(a+b)} \mathcal{H}(z)$ . On notera  $\mathcal{E}_s$  celle pour laquelle  $a \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est choisi tel que

$$\mathcal{E}_s^l(0) = e^{2i\pi s}.$$

**Remarque.** Étant donné un cylindre attractif ou répulsif, l’ordre dans lequel nous avons effectué les trois opérations ( $h$ , transition,  $P_{p/q}$ ) était dans une certaine mesure arbitraire. En effet, d’une part l’action de  $P_{p/q}$  sur les cylindres transporte l’application de corne associée à une paire de cylindres adjacents en l’application de corne associée à la paire image. D’autre part cette même action transforme l’application de transition  $T_b$  en une application de transition  $T_{b+cst}$ . On obtient ainsi 3 définitions équivalentes de  $\mathcal{E}_s$  (en ayant fixé  $v$  ainsi que le cylindre dont on part).

**Résumons.** À un choix d’un cylindre normalisé de  $P_{p/q}$  et de  $v \in \{-1, 1\}$ , correspondant aux choix d’un bout supérieur du cylindre si  $v = 1$ , inférieur si  $v = -1$ , nous avons associé une famille  $\mathcal{E}_s$  d’applications définies au voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$  et vérifiant :

- $\mathcal{E}_0(0) = 0$ ,

- $\mathcal{E}'_0(0) = 1$ ,
- $\mathcal{E}_s(z) = \mathcal{E}_0(e^{2i\pi s} z)$  si on travaille dans un cylindre attractif,
- $\mathcal{E}_s(z) = e^{2i\pi s} \mathcal{E}_0(z)$  si on travaille dans un cylindre répulsif,
- $\mathcal{E}'_s(0) = e^{2i\pi s}$ .

À conjugaison près par des applications linéaires,  $\mathcal{E}_s$  ne dépend pas du choix du cylindre ni de la normalisation du cylindre, mais uniquement de  $\nu$ .

## 20. Valeur et développement de $\Upsilon$ aux rationnels

Par convention,  $\Phi$  vaut  $+\infty$  aux rationnels. Étant donné un rationnel  $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$  soit  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_m]$  l'un de ses deux développements en fraction continue et posons  $\alpha_k = [0, a_{k+1}, \dots, a_m]$  pour  $k \leq m$ , d'où  $\alpha_0 = \{p/q\}$ ,  $\alpha_m = 0$  et  $\alpha_{k+1} = \{1/\alpha_k\}$  excepté quand à la fois  $k = m-2$  et  $a_m = 1$  auquel cas  $\alpha_{k+1} = 1$ . On définit alors

$$\Phi_{\text{trunc}}(p/q) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_0 \cdots \alpha_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k}$$

qui se trouve être indépendant du choix du développement de  $p/q$  que nous avons fait (on utilise la convention  $\sum_{k=0}^{k=-1} \dots = 0$ , qui concerne le cas  $\alpha = [a_0] \in \mathbb{Z}$  et donne  $\Phi_{\text{trunc}}(p) = 0 \forall p \in \mathbb{Z}$ ). Par exemple,

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{trunc}}(13/32) &= \log \frac{32}{13} + \frac{13}{32} \log \frac{13}{6} + \frac{13}{32} \cdot \frac{6}{13} \log \frac{6}{1} \\ &= \log \frac{32}{13} + \frac{13}{32} \log \frac{13}{6} + \frac{13}{32} \cdot \frac{6}{13} \log \frac{6}{1} + \frac{13}{32} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{6} \log 1. \end{aligned}$$

Si  $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  est un germe holomorphe possédant un point fixe multiple à l'origine dont le développement est

$$(49) \quad f(z) = z + Cz^{k+1} + \mathcal{O}(z^{k+2}), \quad \text{avec } C \in \mathbb{C}^*$$

alors on définit la *taille asymptotique* de  $f$  en 0 par

$$L_a(f) = \left| \frac{1}{kC} \right|^{1/k}.$$

Le nombre  $k$  est le nombre de pétales attractifs, égal au nombre de pétales répulsifs. La dénomination de taille asymptotique est motivée par la proposition classique suivante :

**Proposition 71.** *Pour tout point  $z$  attiré<sup>8</sup> par 0, on a*

$$|f^n(z)| \sim \frac{L_a(f)}{n^{1/k}}.$$

8. Quand nous disons attiré, nous excluons les points dont l'orbite tombe sur le point fixe. Il est bien connu que dans tout voisinage d'un point fixe parabolique, le bassin d'attraction est non vide.



Pour tout nombre rationnel  $p/q$ , le  $q$ -ième itéré de  $P_{p/q}$  a un point fixe multiple à l'origine, et nous posons<sup>9</sup>

$$L(p/q) = L_a(P_{p/q}^q).$$

Notez que le  $q$ -ième itéré de  $P_{p/q}$  se trouve avoir exactement  $q$  pétales attractifs, c'est-à-dire  $k = q$  dans sa série entière (49).

Rappelons que  $\Upsilon$  désigne le prolongement continu à  $\mathbb{R}$  de la fonction  $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log r(\alpha)$  définie sur  $\mathcal{B}$ . Voici la valeur de  $\Upsilon(p/q)$  que nous avons calculée dans [BC2].

**Proposition 72** (cf. [BC2]). *Pour tout nombre rationnel  $p/q$ , on a*

$$\Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right) + \log L\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{\log 2\pi}{q}.$$

Pour écrire le développement asymptotique de  $\Upsilon(x_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , il nous faut quelques notations supplémentaires.

Étant donné  $p/q$  (irréductible), il existe un unique nombre complexe  $I$ , appelé *l'invariant formel*, tel que le  $q$ -ième itéré de  $P_{p/q}$  est *formellement conjugué* à

$$z + z^{q+1} + Iz^{2q+1}.$$

Une définition équivalente de  $I$  est le résidu de  $1/(z - P_{p/q}^q(z))$  en  $z = 0$ . On définit ensuite

$$\gamma\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\frac{q+1}{2} - I}{q},$$

qui est relié à ce qu'Écalle appelle le *résidu itératif* : voir [BE] ainsi que la section 3 du chapitre 1.

Rappelons qu'à chaque axe attractif ou répulsif de  $P_{p/q}$  est associée une surface de Riemann appelée *cylindre d'Écalle, attractif ou répulsif*. Elle est isomorphe<sup>10</sup> à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , l'un des bouts étant naturellement identifié au bout supérieur de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Le choix d'un isomorphisme respectant les bouts sera appelé *normalisation* du cylindre<sup>11</sup>.

Au point parabolique de  $P_{p/q}$ , au choix d'un nombre  $v \in \{-1, 1\}$  correspondant au côté duquel nous allons tendre vers  $p/q$ , au choix d'un cylindre (c'est-à-dire d'un

9. Nous pouvons nous baser sur la proposition 71 pour étendre la définition de  $L_a$  aux points fixes paraboliques dont le multiplicateur n'est pas égal à 1. Dans ce cas,  $L_a(f^m) = L_a(f)/m^{1/k}$ , et il est alors important de noter que comme valeur de  $L(p/q)$ , nous avons choisi  $L_a(P_{p/q}^q)$  et non pas  $L_a(P_{p/q})$ .

10. via post-composition des coordonnées de Fatou par la projection  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$

11. cela revient à normaliser, modulo  $\mathbb{Z}$ , les coordonnées de Fatou

axe attractif ou répulsif), et au choix d'une normalisation de ce cylindre, est associée une famille analytique à un paramètre complexe  $s$  de fonctions holomorphes, les *renormalisées paraboliques*  $\mathcal{E}_s$  vérifiant  $\mathcal{E}_s(0) = 0$  et  $\mathcal{E}'_s(0) = e^{2i\pi s}$ . Voir la section 19 pour plus de détails.

**Remarque.** On a ainsi  $4q$  familles différentes  $\mathcal{E}$  associées à  $p/q$ , dépendant en plus des normalisations, mais changer de normalisation ou changer de cylindre ne fait que conjuguer  $\mathcal{E}_s$  par une application linéaire (et si le cylindre est de même nature, la conjugaison est de plus indépendante de  $s$ ). On a donc essentiellement deux familles, une pour chaque valeur de  $v$ .

On définit ensuite  $\Upsilon_{\mathcal{E}}(p/q)$  par la même formule que dans la proposition 72 page précédente, c'est-à-dire

$$\Upsilon_{\mathcal{E}}\left(\frac{p}{q}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right) + \log L_{\alpha}\left(\mathcal{E}_{\frac{p}{q}}^q\right) + \frac{\log 2\pi}{q}.$$

**Remarque.** Il est important de noter que, cette fois-ci, il s'agit d'une définition et non d'une proposition. En effet, nous n'affirmons pas que ce nombre  $\Upsilon_{\mathcal{E}}(p/q)$  est la limite quand  $\alpha \in \mathcal{B}$  tend vers  $p/q$  de l'analogue de  $\Phi(\alpha) + \log r(\alpha)$  pour  $\mathcal{E}_{\alpha}$ . Mais il y a de grandes chances que ce soit effectivement le cas.

Notons que pour les renormalisées paraboliques des polynômes quadratiques, le nombre de pétales attractifs en 0 de  $\mathcal{E}_{p/q}$  est égal à  $q$  (voir la discussion faite en fin de section 22). C'est-à-dire que  $k = q$  dans la série entière (49) page 95 en 0 de  $\mathcal{E}_{p/q}^q(z)$ .

Nous utilisons la notation  $[a_0, a_1, \dots, a_m, r]$  pour désigner

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_m + \frac{1}{r}}}}$$

et nous autorisons des arguments non entiers.

**Théorème 73.** *Pour tout rationnel  $p/q \in \mathbb{Q}$ , il existe  $c = c(p/q) \in \mathbb{R}$  (qui dépend de la normalisation) tel que l'on ait l'énoncé suivant. Pour tout rationnel  $s = p'/q' \in [0, 1[$ , si*

$$x_n = [a_0, \dots, a_m, n + s]$$

où  $[a_0, \dots, a_m]$  est l'un des deux développements de  $p/q$ , alors

$$\Upsilon(x_n) = \Upsilon(p/q) + A \frac{\log n}{n} + B \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où  $A$  et  $B$  sont définis comme suit : soit  $v = (-1)^m$  et  $q_k$  le dénominateur de  $[a_0, \dots, a_k]$

$$A = -\frac{q_{m-1}}{q^2} - v \frac{2\pi \operatorname{Im} \gamma\left(\frac{p}{q}\right)}{q}$$

$$B = B(s) = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-vs)}{q} \pm \frac{\pi^2}{q} \operatorname{Re} \gamma\left(\frac{p}{q}\right) + v c\left(\frac{p}{q}\right)$$

où  $\pm = +$  ou  $-$  selon que l'on a choisi de regarder la renormalisée parabolique  $\mathcal{E}$  dans un cylindre attractif ou répulsif.

Pour expliciter la constante  $c(p/q)$ , nous aurons besoin de définir encore un nombre complexe  $\Gamma = \Gamma(p/q)$ . Quand  $\theta \rightarrow p/q$ , l'application  $P_\theta^q$  a  $q$  points fixes non nuls près de 0. Leur produit  $\sigma$  dépend holomorphiquement de  $\theta$  sur un voisinage de  $p/q$  et on pose

$$\Gamma = \frac{-1}{4i\pi q^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma / \partial \theta^2}{\partial \sigma / \partial \theta} \Big|_{\theta=p/q}.$$

On pourra consulter la section 17 du chapitre 3 pour une définition alternative<sup>12</sup>, plus générale, de  $\Gamma$  et un exemple de calcul.

Dans la proposition suivante,  $\alpha_k$  désigne toujours l'une des deux suites associées à  $p/q$  comme en début de section, c'est-à-dire  $\alpha_k = [0, a_{1+k}, a_{2+k}, \dots, a_m]$ , et  $q_k$  le dénominateur de  $[a_0, \dots, a_k]$ . Posons

$$\beta_k = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k.$$

**Complément.** Nous définissons dans la section 4 du chapitre 1 une normalisation des cylindres<sup>13</sup>. Pour cette normalisation, la constante  $c(p/q)$  prend la valeur suivante :

$$c(p/q) = c_{\text{arith}} + c_{\text{geom}}$$

où

$$c_{\text{arith}} = -\frac{1}{q^2} \left( \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left( q_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right) + (-1)^m q_{m-1} \right)$$

et

$$c_{\text{geom}} = \frac{2\pi}{q} \operatorname{Im} (\Gamma + \gamma \log 2\pi).$$

Ces deux nombres sont indépendants du choix du développement en fraction continue de  $p/q$  (c'est-à-dire indépendants du signe de  $v$ ), ainsi que du choix du cylindre.

12. Celle que l'on vient de donner correspond à la formule (47) page 83 avec un facteur  $1/q$  qui vient de ce que  $\lambda = q(\theta - \frac{p}{q})$  et  $f_\lambda = P_\theta^q$ , d'où  $d\lambda = q d\theta$ .

13. et même en fait une normalisation des coordonnées de Fatou

## 21. Preuve du théorème principal à partir du développement asymptotique de $\Upsilon$

Soit  $p/q \in \mathbb{Q}$  et  $[a_0, \dots, a_m]$  l'un de ses deux développements en fraction continue. Nous allons considérer les deux suites

$$\begin{aligned} x_n &= [a_0, \dots, a_m, n], \\ x'_n &= [a_0, \dots, a_m, n + 1/2]. \end{aligned}$$

Alors, d'une part

$$|x_n - x'_n| \sim \frac{1}{2q^2 n^2}.$$

D'autre part, d'après le développement asymptotique du théorème 73 page précédente, et le fait que  $A$  est indépendant de  $s$  :

$$(50) \quad \Upsilon(x_n) - \Upsilon(x'_n) = \frac{B'}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où  $B' = B(0) - B(1/2)$ .

Ainsi, *pourvu que*  $B' \neq 0$ , la fonction  $\Upsilon$  n'a une variation bornée et ne peut être mieux que 1/2-Hölderienne sur aucun voisinage de  $p/q$ .

Il reste donc à démontrer que  $B' \neq 0$ . De la formule exprimant  $B$  dans le théorème 73, il vient que

$$B' = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(0) - \Upsilon_{\mathcal{E}}(1/2)}{q}$$

et donc il suffit de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 74.** *Pour tout  $p/q$ , et tout  $v \in \{-1, 1\}$ ,  $\Upsilon_{\mathcal{E}}(0) \neq \Upsilon_{\mathcal{E}}(1/2)$ .*

Nous la démontrons à la section suivante, (section 22).

**Remarque.** Le choix de comparer  $\Upsilon$  en 0 et 1/2 a été fait par simplicité, mais il aurait suffi de démontrer que la fonction  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$  est non constante.

## 22. Comparaison de $\Upsilon$ en 0 et 1/2

Nous considérerons un cadre plus général. Supposons que  $f_0$  est une fonction analytique fixant 0 avec dérivée 1 :

$$f_0(z) = z + \mathcal{O}(z^2),$$

et considérons l'une des deux familles

$$f_{\alpha}(z) = \exp(i2\pi\alpha) \times f_0(z),$$

ou

$$f_\alpha(z) = f_0(\exp(i2\pi\alpha) \times z).$$

Ces deux familles sont conjuguées par  $z \mapsto e^{2i\pi\alpha} z$ .

**Remarque.** C'est une situation spécifique, mais suffisante pour nos applications. Notez que la famille des renormalisées paraboliques associée à un point parabolique est de cette forme (la première forme dans un cylindre répulsif, la deuxième dans un cylindre attractif, voir la section 19). La famille quadratique est également de cette forme, si l'on prend soin de conjuguer  $\rho z + z^2$  à  $\rho(z + z^2)$  par  $z \mapsto z/\rho$  ou à  $\rho z + (\rho z)^2$  par  $z \mapsto z/\rho^2$ .

**Définition 75.** Étant donné un rationnel  $p/q$ , si  $f_{p/q}^q$  n'est pas l'identité au voisinage de 0, on définit

$$\Upsilon_f\left(\frac{p}{q}\right) = \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right) + \log L_a(f_{p/q}^q) + \frac{\log 2\pi}{q}.$$

**Remarque.** Notez (comme pour  $\Upsilon_\varepsilon$  à la section 22) que nous n'avons pas défini  $\Upsilon_f(p/q)$  par la limite, si elle existe, de  $\Phi(\alpha) + \log r_f(\alpha)$  quand  $\alpha$  est un nombre de Brjuno et tend vers  $p/q$  (où  $r_f(\alpha)$  serait un analogue pour  $f$  de ce que  $r(\alpha)$  est pour  $P_\alpha$ ). Au lieu de cela, nous avons adapté le membre de droite de la formule de la proposition 72 page 95.

Considérons maintenant le développement

$$f_0(z) = z + az^2 + bz^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

Un calcul élémentaire donne

$$f_{1/2}^2 = z + 2(b - a^2)z^3 + \mathcal{O}(z^4),$$

pour l'une des deux familles comme pour l'autre. Faisons l'hypothèse suivante :

$$a \neq 0 \text{ et } b \neq a^2.$$

Cela équivaut à supposer que  $f_0$  a un seul pétale attractif et que  $f_{1/2}$  en a exactement deux. Posons

$$\gamma(f_0) = 1 - \frac{b}{a^2}$$

(c'est le même  $\gamma$  que celui de la section 3 du chapitre 1).

**Proposition 76.** Sous les hypothèses précédentes,

$$\frac{L_a(f_0)}{L_a(f_{1/2}^2)} = 2\sqrt{|\gamma(f_0)|}.$$

**Preuve.** Par définition comme  $f_0$  a un seul pétale attractif,  $L_a(f_0) = 1/|a|$  et comme  $f_{1/2}$  a deux pétales attractifs,  $L_a(f_{1/2}^2) = |4(b - a^2)|^{-1/2}$ . ■

**Corollaire 77.** *Sous les mêmes hypothèses,*

$$\Upsilon_f(0) - \Upsilon_f(1/2) = \frac{1}{2} \log |2\pi \gamma(f_0)|.$$

La famille  $\mathcal{E}$  (de renormalisées paraboliques, associée au point fixe parabolique d'un polynôme quadratique) satisfait justement les hypothèses. En effet,  $\mathcal{E}_{p/q}$  ne peut avoir qu'un seul cycle de pétales attractifs, d'après la proposition suivante et son corollaire. Ces résultats sont difficiles à attribuer, mais on peut citer Shishikura ([S1] ou [S3]), A. Epstein (*Finite type maps*, non publié) et Lavaurs [L].

**Proposition.**  $\mathcal{E}_s$  possède une extension maximale à un ouvert simplement connexe  $U$  de  $\mathbb{C}$ , envoyant  $U \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{C}^*$ , et possédant au dessus de  $\mathbb{S}$  deux valeurs asymptotiques, 0 et  $\infty$ , et une seule valeur critique, non nulle.<sup>14</sup>

**Corollaire.** *Tout cycle de bassins paraboliques immédiats*

- a. *contient la valeur critique ;*
- b. *(plus précisément) contient exactement un point critique.*

De (a) on déduit que l'application  $\mathcal{E}_s$  a au plus 1 cycle parabolique et s'il y en a un, il n'a qu'un seul cycle de pétales. On peut donc appliquer à la famille  $(\mathcal{E}_s)$  l'analyse précédente, en particulier le corollaire 77 page précédente. La proposition 74 page 99 est donc équivalente à

$$|\gamma(\mathcal{E}_0)| \neq \frac{1}{2\pi}.$$

De (b) on déduit l'inégalité suivante (voir [BE] ou le théorème 1 de [Ber])

$$(51) \quad \operatorname{Re}(\gamma(\mathcal{E}_0)) \geq \frac{1}{4}.$$

A fortiori,  $|\gamma(\mathcal{E}_0)| > 1/2\pi$  et donc

$$\Upsilon_{\mathcal{E}}(0) > \Upsilon_{\mathcal{E}}(1/2).$$

14. Par contre il y a une infinité de points critiques, tous donc envoyés sur le même point.

### 23. Preuve du développement asymptotique de $\Upsilon$

Dans notre preuve du théorème 73 page 97, nous allons naturellement décomposer les constantes  $A$  et  $B$  de la façon suivante (rappelons que  $q'$  est le dénominateur de  $s$ ) :

$$\begin{aligned} A &= A_\Phi + A_L \\ B &= B_\Phi + B_L + \frac{\log 2\pi}{qq'} \end{aligned}$$

et nous allons démontrer les développements suivants, où l'on note den  $x_n$  le dénominateur du nombre rationnel  $x_n$  :

$$(52) \quad \Phi_{\text{trunc}}(x_n) = \frac{\log n}{q} + \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right) + A_\Phi \frac{\log n}{n} + B_\Phi \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$$

$$(53) \quad \log L(x_n) = -\frac{\log n}{q} - \frac{\log q}{q} + \log L\left(\frac{p}{q}\right) + A_L \frac{\log n}{n} + B_L \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(54) \quad \frac{\log 2\pi}{\text{den } x_n} = \frac{\log 2\pi}{qq'n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

avec

$$A_\Phi = -\frac{q_{m-1}}{q^2}$$

$$A_L = -(-1)^m \frac{2\pi \text{Im } \gamma}{q}$$

$$B_\Phi = \frac{\Phi_{\text{trunc}}(s)}{q} + \frac{s}{q} - \frac{1}{q^2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+m} \left( q_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right)$$

$$B_L = \frac{(-1)^m 2\pi \text{Im } K^\pm}{q} - A_L \log 2\pi + \frac{\log L'(-vs)}{q} - \frac{s}{q} - \frac{q_{m-1}}{q^2}$$

où  $v = (-1)^m$ , où

$$K^\pm = \Gamma \pm (-1)^m \frac{i\pi}{2} \gamma$$

et où  $L'(-vs)$  est la taille asymptotique en 0 de la  $q'$ -ème itérée de la renormalisée parabolique<sup>15</sup>  $\mathcal{E}_{-vs}$ , qui a multiplicateur  $e^{-2i\pi vs}$  en 0, le cylindre associé étant *normalisé* selon les conventions de la section 4 du chapitre 1. Le développement (52) sera démontré à la section 23.1.2, le développement (54) à la section 23.1.3 et (53) à la section 23.2.

#### 23.1. Arithmétique et développement aux rationnels de la fonction de Brjuno.

15. Il s'agit de la famille  $\mathcal{E}$  associée au choix de  $v$  et du cylindre.

23.1.1. *Le formalisme matriciel.* Nous présentons ici l'interprétation matricielle de l'algorithme des fractions continues. Elle est analogue à celle faite dans [M], appendice C, mais les conventions sont différentes. Soient  $(x, y)$  les coordonnées d'un point dans  $\mathbb{R}^2$ . Le groupe linéaire  $GL(\mathbb{R}^2)$  agit sur l'espace projectif  $\mathbb{R}P^1 = P(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$  au moyens de transformations de Möbius, qui exprimées dans la coordonnée  $t = x/y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  donnent

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot t = \frac{at+b}{ct+d}.$$

Deux matrices  $M, M'$  donnent la même transformation si et seulement si elles sont multiples l'une de l'autre :  $M' = \lambda M$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Ainsi, l'action de groupe passe au groupe quotient  $PGL(\mathbb{R}^2) = GL(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^*$ .

Posons maintenant

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

qui correspond à  $t \mapsto \frac{1}{a+t}$ , et

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui correspond à  $t \mapsto a+t$ .

Dans l'algorithme des fractions continues, on a  $1/\alpha_n = a_{n+1} + \alpha_{n+1}$  et donc  $\alpha_n = M_{a_{n+1}} \cdot \alpha_{n+1}$ , et  $\alpha = a_0 + \alpha_0$  d'où  $\alpha = T_{a_0} \cdot \alpha_0$ . Ainsi :

$$(55) \quad \alpha_0 = T_{a_0} M_{a_1} M_{a_2} \cdots M_{a_n} \cdot \alpha_n.$$

Notons

$$(56) \quad T_{a_0} M_{a_1} M_{a_2} \cdots M_{a_n} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}$$

ce qui est possible car la multiplication d'une matrice par  $M_a$  à droite a pour effet de décaler sa seconde colonne vers la gauche. Pour  $n=0$ , le membre de gauche de l'équation (56) est la matrice de translation  $T_{a_0}$ , ce qui donne  $p_{-1} = 1$ ,  $q_{-1} = 0$ ,  $p_0 = a_0$ ,  $q_0 = 1$ .

**Remarque.** Un formalisme plus élégant, dans lequel il n'y a pas besoin de matrice de translation, peut être obtenu en considérant les transformations  $z \mapsto a + \frac{1}{z}$ , qui agissent sur les inverses des nombres  $\alpha_n$  ( $n \geq 1$ ), au lieu de  $z \mapsto \frac{1}{a+z}$ . Cependant, nous préférons travailler avec les nombres  $\alpha_n$ .



L'inversion dans  $\text{PGL}(\mathbb{R}^2)$  est plus facile que dans  $\text{GL}(\mathbb{R}^2)$  puisqu'il n'y a pas à inverser de déterminant :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \equiv_{\text{mod } \mathbb{R}^*} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

En inversant l'équation (55), on obtient :

$$(57) \quad \alpha_n = \begin{bmatrix} q_n & -p_n \\ -q_{n-1} & p_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \alpha = -\frac{q_n \alpha - p_n}{q_{n-1} \alpha - p_{n-1}}$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \beta_n / \beta_{n-1} \quad \text{où} \\ \beta_n &= (-1)^n (q_n \alpha - p_n). \end{aligned}$$

De  $\alpha_n > 0$  et  $\beta_{-1} = -(q_{-1} \alpha - p_{-1}) = -(0 \alpha - 1) = 1$ , on déduit

$$\beta_n = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n > 0.$$

Le déterminant de  $M_a$  est égal à  $-1$ . Donc  $\det M_{a_1} \cdots M_{a_n} = (-1)^n$ . Donc

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n,$$

d'où il suit que  $p_n$  et  $q_n$  sont premiers entre eux.

Notez la forme particulière de la propriété de décalage :

$$M_{a_1} \cdot [0, a_2, a_3, \dots] = [0, a_1, a_2, \dots].$$

23.1.2. *Développement en fraction continue d'un nombre rationnel.* Quand  $\alpha$  est rationnel, l'algorithme de Gauss usuel se termine quand  $\alpha_n = 0$ , et on a

$$\alpha = [a_0, \dots, a_n].$$

De  $\alpha_n = 0$ , on déduit si  $n = 0$  que  $\alpha \in \mathbb{Z}$  et si  $n > 0$  que  $a_n = 1/\alpha_{n-1} > 1$ . Donc, dans les deux cas

$$\alpha = [a_0, \dots, a_n - 1, 1]$$

est un développement en fraction continue valide de  $\alpha$ , si l'on définit comme valide une écriture  $[a_0, a_1, \dots]$  finie ou infinie dont la première entrée est dans  $\mathbb{Z}$  et les autres dans  $\mathbb{N}^*$ . On a donc  $\alpha = [a'_0, \dots, a'_{n+1}]$  avec  $a'_k = a_k$  si  $k < n$ ,  $a'_n = a_n - 1$  et  $a'_{n+1} = 1$ . On vérifie aisément qu'un nombre rationnel a exactement deux développements valides en ce sens. Si l'on veut que la relation  $\frac{1}{a'_k} = a_{k+1} + \alpha_{k+1}$  ait lieu pour ces nouvelles valeurs  $a'_k$ , il faut changer la valeur de  $\alpha_n$  pour la nouvelle valeur  $\alpha'_n = 1$ , et définir  $\alpha'_{n+1} = 0$ . De même, les suites  $p_k$  et  $q_k$  sont à modifier pour  $k = n$  et  $k = n + 1$  :  $p'_n = p_n - p_{n-1}$ ,  $q'_n = q_n - q_{n-1}$ ,  $p'_{n+1} = p_n$  et  $q'_{n+1} = q_n$ .

Nous avons donc deux développements en fraction continue d'un rationnel  $\alpha$ . Celui possédant un nombre impair d'entrées est appelé *développement à droite* et celui avec un nombre pair d'entrées le *développement à gauche*.

Ces deux développements trouvent leur utilité quand on perturbe le nombre  $\alpha$ . En effet, si  $\alpha' \rightarrow \alpha$  respectivement par la droite ou la gauche, alors ses entrées  $a_k$  tendent vers celle de son développement à droite ou à gauche, pour tout  $k \leq$  l'index maximal de celui-ci. Et il en est de même pour  $p_k$ ,  $q_k$  et  $\alpha_k$ .

Fixons maintenant l'un des deux développements d'un rationnel  $p/q$  et notons-le

$$p/q = [a_0, \dots, a_m].$$

Nous supposons que  $p/q$  est écrit sous forme irréductible. Notons que, puisque  $\alpha_m = 0$ , on a

$$\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$$

et puisque  $p_m$  et  $q_m$  sont premiers entre eux :

$$p_m = p \text{ et } q_m = q.$$

Soit  $s$  un nombre réel quelconque et considérons la suite

$$x_n = [a_0, \dots, a_m, n + s]$$

pour  $n \in \mathbb{N}$  (la dernière entrée n'est plus entière, mais la formule définit quand même un réel  $x_n$ ). Alors

$$(58) \quad x_n = \frac{p}{q} + \frac{(-1)^m}{q^2 n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Preuve.** Premièrement,  $x_n \rightarrow [a_0, \dots, a_m] = p/q$ . Deuxièmement, on a  $x_n = \mu\left(\frac{1}{n+s}\right)$

où  $\mu$  est l'application de Möbius  $t \mapsto M \cdot t$  avec  $M = \begin{bmatrix} p_{m-1} & p_m \\ q_{m-1} & q_m \end{bmatrix}$ . Sa dérivée en 0

est  $\frac{\det M}{q_m^2}$ . D'où le résultat. ■

Nous mentionnons ici l'équation fonctionnelle satisfaite par  $\Phi$  et  $\Phi_{\text{trunc}}$  :

$$\forall \alpha \in ]0, 1[, \quad \Phi_c(\alpha) = \log \frac{1}{\alpha} + \alpha \Phi_c(1/\alpha)$$

où  $\Phi_c(\alpha)$  désigne  $\Phi(\alpha)$  quand  $\alpha$  est irrationnel et  $\Phi_{\text{trunc}}(\alpha)$  quand  $\alpha$  est rationnel.

Nous sommes prêts à calculer un développement de  $\Phi_c(x_n)$ . Notons  $\alpha_k(n)$  (resp.  $\beta_k(n)$ ) la suite associée à  $x_n$  par l'algorithme de Gauss, et  $\alpha_k$  (resp.  $\beta_k$ ) celle des deux suites associées à  $p/q$  correspondant au côté duquel  $x_n$  tend vers  $p/q$ . Nous

supposons que  $s$  est soit rationnel soit de Brjuno. Nous ne considérerons la suite  $x_n$  que pour les rangs  $n$  tels que  $n + s > 0$ . Alors, les suites  $p_k$  et  $q_k$  pour  $k \leq m$  sont les mêmes pour  $x_n$  et pour  $p/q$  : en effet  $x_n$  et  $p/q$  ont les mêmes entrées  $a_k$  pour  $k \leq m$  dans leur fraction continue. D'autre part,  $\alpha_m(n) = 1/(n + s)$  et  $\alpha_{m+1}(n) = \{s\}$ . Écrivons maintenant

$$\Phi_c(x_n) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{k-1}(n) \log \frac{1}{\alpha_k(n)} + \beta_{m-1}(n) \log \frac{1}{\alpha_m(n)} + \beta_m(n) \Phi_c(s).$$

Pour tout  $k \leq m-2$ , puisque  $\beta_k(n) = (-1)^k (q_k x_n - p_k)$ , l'équation (58) implique :

$$\beta_k(n) = \beta_k + (-1)^{k+m} \frac{q_k}{q^2 n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme  $\alpha_k(n) = \beta_k(n)/\beta_{k-1}(n)$ , le développement asymptotique ci-dessus implique après simplifications :

$$\log \alpha_k(n) = \log \alpha_k + \frac{(-1)^{k+m}}{q^2 \beta_k \beta_{k-1}} \cdot \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc

$$\beta_{k-1}(n) \log \frac{1}{\alpha_k(n)} = \beta_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} - \frac{(-1)^{k+m} \left( q_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right)}{q^2 n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme  $\beta_{m-1} = (-1)^{m-1} (q_{m-1} \frac{p}{q} - p_{m-1}) = (-1)^m (p_{m-1} q_m - q_{m-1} p_m)/q_m$  et comme  $p_{m-1} q_m - q_{m-1} p_m = (-1)^m$  :

$$\beta_{m-1} = \frac{1}{q}.$$

Maintenant  $\beta_m(n) = \alpha_m(n) \beta_{m-1}(n) = \beta_{m-1}(n)/(n + s)$  et donc

$$\beta_m(n) = \frac{1}{qn} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \beta_{m-1}(n) \log \frac{1}{\alpha_m(n)} &= \left( \beta_{m-1} - \frac{q_{m-1}}{q^2 n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \log(n + s) \\ &= \left( \frac{1}{q} - \frac{q_{m-1}}{q^2 n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( \log n + \log\left(1 + \frac{s}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{q} \log n - \frac{q_{m-1}}{q^2} \cdot \frac{\log n}{n} + \frac{s}{q} \cdot \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré :

**Proposition 78.** Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi_c(x_n) = \frac{\log n}{q} + \Phi_c\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{q_{m-1}}{q^2} \frac{\log n}{n} + B_\Phi \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n^2}\right),$$

où

$$B_{\Phi} = \frac{\Phi_c(s) + s}{q} - \frac{1}{q^2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+m} \left( q_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right).$$

Cela implique en particulier le développement (52) page 101.

23.1.3. *Sur la fraction irréductible des perturbations rationnelles.* Supposons maintenant que  $s$  est rationnel et écrivons

$$s = \frac{p'}{q'}.$$

Alors

$$x_n = [a_0, \dots, a_m, n + s] = \begin{bmatrix} p_{m-1} & p_m \\ q_{m-1} & q_m \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{n + \frac{p'}{q'}}$$

Fixons momentanément  $n$  et écrivons

$$\frac{1}{n + \frac{p'}{q'}} = \frac{q'}{q'n + p'} = \begin{bmatrix} * & q' \\ * & nq' + p' \end{bmatrix} \cdot 0$$

avec une matrice de déterminant 1. Alors

$$x_n = \begin{bmatrix} p_{m-1} & p_m \\ q_{m-1} & q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & q' \\ * & nq' + p' \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} * & q'p_{m-1} + (nq' + p')p_m \\ * & q'q_{m-1} + (nq' + p')q_m \end{bmatrix} \cdot 0$$

et cette dernière matrice a un déterminant égal à  $\pm 1 \times 1$ , donc

$$x_n = \frac{q'p_{m-1} + (nq' + p')p_m}{q'q_{m-1} + (nq' + p')q_m}$$

est écrit sous forme irréductible, et donc

$$\text{den}(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} q'qn + \mathcal{O}(1)$$

(se rappeler que  $p = p_m$  et  $q = q_m$ ). Cela donne le développement (54) page 101.

Également,

$$\begin{aligned} x_n - \frac{p}{q} &= \frac{q(q'p_{m-1} + (nq' + p')p) - p(q'q_{m-1} + (nq' + p')q)}{q(q'q_{m-1} + (nq' + p')q)} \\ &= \frac{q'(qp_{m-1} - pq_{m-1})}{q(q'q_{m-1} + (nq' + p')q_m)} \end{aligned}$$

donc

$$x_n - \frac{p}{q} = (-1)^m \frac{q'}{q \text{den}(x_n)}.$$

Remarquez que mieux qu'un équivalent, c'est une égalité. Par contre la fraction  $\frac{q'}{q \text{den}(x_n)}$  n'est pas toujours irréductible.

## 23.2. Partie géométrique.

23.2.1. *Résumé des résultats de l'implosion parabolique qui seront utilisés.* Nous rassemblons ici les résultats du chapitre 3 qui seront utilisés dans la partie géométrique de la preuve du développement de  $\Upsilon$  aux rationnels. On consultera la section 19 du présent chapitre pour ce qui concerne la terminologie employée.

Rappelons que  $x_n = [a_0, \dots, a_m, n + s]$ . Soit

$$\nu = (-1)^m.$$

Le polynôme  $P_{x_n}$  a un cycle de longueur  $q$  et proche de 0. Quand  $n \rightarrow +\infty$ , ces  $q$  points tendent vers 0 tangentiellement aux axes centraux des  $q$  secteurs latéraux inférieurs si  $\nu = 1$ , supérieurs si  $\nu = -1$ , du point parabolique 0 de  $P_{p/q}$ . Choisissons l'un de ces secteurs et notons  $A_0$  son axe central. Notons  $A^+$  et  $A^-$  les axes répulsif et attractif adjacents à  $A_0$ .

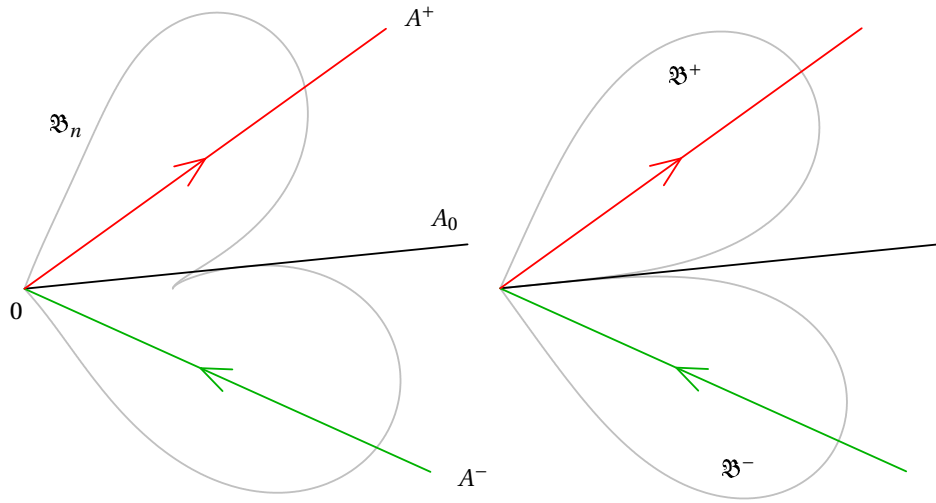


FIGURE 20: Les divers objets. Les proportions sont exagérées.

Notons

$$f_n = P_{x_n}^q.$$

Les assertions de la proposition suivante ont été démontrées au chapitre 3 (où nous avons étudié une situation plus générale), plus particulièrement dans les sections 9, 11 et 13.

**Proposition 79** (Coordonnées de Fatou perturbées). *Il existe un  $\pi/2$ -pétale  $\mathfrak{B}^+$  associé à  $A^+$  et un autre  $\mathfrak{B}^-$  associé à  $A^-$ , des coordonnées de Fatou  $\Phi_f^+$  et  $\Phi_f^-$  sur ces pétales, normalisées selon les conventions de la section 13, une constante  $M$  indépendante de  $n$ , et pour  $n$  assez grand des nombres complexes  $c_n^+$  et  $c_n^-$ , des domaines de*

Jordan  $\mathfrak{B}_n$  et des isomorphismes analytiques  $\Phi_{f_n}$  de  $\mathfrak{B}_n$  vers des ouverts de  $\mathbb{C}$  contenant (voir le lemme 38 page 52) la bande verticale

$$] - \operatorname{Re}(c_n^-) + M, -\operatorname{Re}(c_n^+) - M[ \times \mathbb{R},$$

qui conjuguent<sup>16</sup>  $f_n$  à la translation  $T_1$  et tels que tout compact de  $\mathfrak{B}^- \cup \mathfrak{B}^+$  finit par être contenu dans  $\mathfrak{B}_n$  et

$$\Phi_{f_n}(z) + c_n^\pm \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_f^\pm(z)$$

uniformément sur les compacts de  $\mathfrak{B}^\pm$ . On a les développements asymptotiques suivants (proposition 42 page 54) :

$$(59) \quad \Phi_{f_n}(z) + c_n^\pm \underset{z \rightarrow 0}{=} \frac{\log(z/d^\pm)}{2i\pi\lambda_n} + b_n^\pm + o(1)$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_n &= q\left(x_n - \frac{p}{q}\right), \\ (d^\pm)^q &= \frac{\pm 1}{qC}, \\ \arg d^\pm &= \text{la direction de l'axe } A^\pm. \end{aligned}$$

et (corollaire 48 page 58)

$$\operatorname{Im} b_n^\pm \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\log|2\pi q\lambda_n|}{2\pi q\lambda_n} + \operatorname{Im}(\gamma) \log|2\pi q\lambda_n| + \operatorname{Im} K^\pm + o(1),$$

où

$$K^\pm = \Gamma \pm v \frac{i\pi}{2} \gamma$$

( $C$ ,  $\gamma$  et  $\Gamma$  sont définis section 20 du présent chapitre). La différence entre les deux normalisations est

$$(60) \quad \Delta_n = c_n^- - c_n^+ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( \frac{1}{q\lambda_n} - i\pi\gamma \right) v + \mathcal{O}(\lambda_n)$$

et ce nombre est indépendant du secteur latéral choisi (voir l'équation (32) page 55 et la remarque qui la contient). Enfin,

$$(61) \quad \Phi'_{f_n}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2i\pi\lambda_n z}$$

(proposition 43 page 54).

À partir de maintenant, nous travaillerons dans un cylindre répulsif. L'adaptation à un cylindre attractif est directe. Les coordonnées de Fatou sont supposées normalisées selon les conventions de la section 13.

16.  $\Phi_{f_n} \circ f_n = T_1 \circ \Phi_{f_n}$  là où les deux membres sont définis

Si  $v = 1$ , soient  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n, \overleftarrow{\Phi}_n, \dots$  les objets associés par la proposition précédente à un certain secteur latéral inférieur et  $\overrightarrow{\mathfrak{B}}_n, \overrightarrow{\Phi}_n, \dots$  les objets associés au secteur latéral inférieur qui le suit dans l'ordre trigonométrique<sup>17</sup>.

Si  $v = -1$ , soient  $\overleftarrow{\mathfrak{B}}_n, \overleftarrow{\Phi}_n, \dots$  les objets associés par la proposition précédente à un certain secteur latéral supérieur et  $\overrightarrow{\mathfrak{B}}_n, \overrightarrow{\Phi}_n, \dots$  les objets associés au secteur latéral supérieur qui le précède dans l'ordre trigonométrique.

Soit  $h^{\text{nor}}$  l'application de cornes normalisée (voir la section 4.4 ou la section 19 ou la section 14) associée au secteur latéral situé juste entre les deux secteurs latéraux précédents. Voir la figure 21 page suivante.

Le fait que  $f_n$  est le  $q$ -ième itéré de  $P_{x_n}$  a pour conséquence que  $\Delta_n = c_n^- - c_n^+$  est indépendant du choix du secteur (lemme 59 page 67). Donc  $\overleftarrow{\Delta}_n = \overrightarrow{\Delta}_n$ . Nous noterons donc simplement  $\Delta_n$  ce nombre.

La proposition suivante est démontrée section 14, chapitre 3, dans un cadre plus général.

**Proposition 80** (Applications de cornes perturbées). *Il existe  $M > 0$ ,  $y > 0$ , et pour tout  $n$  assez grand une application  $h_n$  définie sur le demi-plan " $v\text{Im}(z) > y$ " avec  $y$  indépendant de  $n$ , telle que  $h_n \circ T_1 = T_1 \circ h_n$  sur ce demi-plan, et vérifiant la propriété suivante (voir la proposition 57 page 65) :  $\forall z \in \overleftarrow{\mathfrak{B}}_n$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ , si en notant  $w = \overleftarrow{\Phi}_{f_n}(z) + \overleftarrow{c}_n^+$  on a*

- $v\text{Im}(w) > y$ ,
- $M < \text{Re}(w) + k < \text{Re}(\Delta_n) - M$ ,

alors

- $f_n^k(z) \in \overrightarrow{\mathfrak{B}}_n$ ,
- $\overrightarrow{\Phi}_{f_n}(f_n^k(z)) + \overrightarrow{c}_n^- = h_n(z) + k$ .

De plus,

$$\text{Im}(h_n(z)) \xrightarrow{\text{Im } z \rightarrow v\infty} v\infty$$

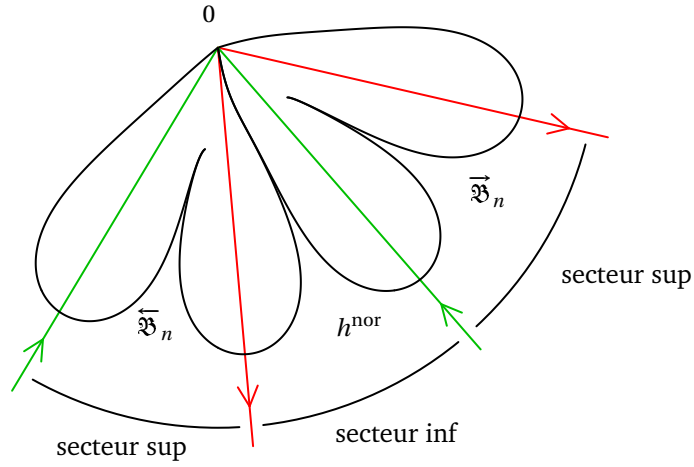
et

$$h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h^{\text{nor}}$$

uniformément sur " $v\text{Im}(z) > y$ ". Enfin,

$$(62) \quad \|h_n - \text{id}\|_{\infty} \text{ est bornée indépendamment de } n.$$

17. Si  $q = 1$ , c'est le même secteur.

FIGURE 21: Exemple, cas  $v = 1$ .

La proposition suivante est une concaténation du lemme 60 page 68 et des équation (29) et (30) page 52.

**Proposition 81** (Correspondance sous  $P_{x_n}$ ). Soit  $\mathfrak{B}_n, \Phi_{f_n}$  la suite de pétales perturbés et de coordonnées de Fatou associés à un certain secteur latéral, et  $\widehat{\mathfrak{B}}_n, \widehat{\Phi}_{f_n}$  la suite associée au secteur image par la rotation  $R_{p/q}$ . Alors il existe  $M' > 0$  tel que pour tout  $n$  assez grand,  $\Phi_{f_n}(P_{x_n}^{-1}(\widehat{\mathfrak{B}}_n) \cap \mathfrak{B}_n)$  contient la bande  $] -\text{Re}(c_n^-) + M', -\text{Re}(c_n^+) - M'[\times \mathbb{R}$  et tel que sur  $P_{x_n}^{-1}(\widehat{\mathfrak{B}}_n) \cap \mathfrak{B}_n$ ,

$$\begin{aligned} (\widehat{\Phi}_{f_n} + \widehat{c}_n^+) \circ P_{x_n} &= (\Phi_{f_n} + c_n^+) + \frac{1}{q}, \\ (\widehat{\Phi}_{f_n} + \widehat{c}_n^-) \circ P_{x_n} &= (\Phi_{f_n} + c_n^-) + \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

23.2.2. *Utilisation de l'implosion parabolique.* Pour  $k \leq m$ , la  $k$ -ième réduite  $p_k/q_k$  de  $x_n$  est égale à  $[a_0, \dots, a_k]$  et donc indépendante de  $n$ . Par exemple  $q_m = q$ . La suivante est égale à  $[a_0, \dots, n + \lfloor s \rfloor]$ , dont le dénominateur est  $q_{m-1} + (n + \lfloor s \rfloor)q_m$ . Soient

$$\begin{aligned} I_{m-1} &= P_{x_n}^{q_{m-1}} \\ I_m &= P_{x_n}^{q_m} = f_n \\ I_{m+1} &= P_{x_n}^{q_{m-1} + nq_m} \\ I_{\max} &= P_{x_n}^{\text{den}(x_n)} \end{aligned}$$

(la dépendance en  $n$  des applications  $I_{(\dots)}$  est sous-entendue).

Rappelons que si l'on note

$$s = \frac{p'}{q'} \text{ et } x_n = \frac{\text{num}(x_n)}{\text{den}(x_n)}$$



sous formes irréductibles, alors d'après la section 23.1.3 :

$$\begin{cases} \text{num}(x_n) &= p_{m-1}q' + p_m(nq' + p') \\ \text{den}(x_n) &= q_{m-1}q' + q_m(nq' + p') \end{cases}$$

d'où nous avons déduit que

$$\text{den}(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} q'qn + \mathcal{O}(1)$$

et pour  $\lambda_n = c_n - p_n/q_n$ ,

$$\lambda_n = \frac{(-1)^m q'}{\text{den}(x_n)}.$$

On en déduit que

$$(63) \quad \frac{v}{q\lambda_n} = n + \frac{q_{m-1}}{q} + \frac{p'}{q'}.$$

Ainsi, l'équation (60) page 109 se traduit par

$$(64) \quad \Delta_n = c_n^- - c_n^+ = n + \frac{p'}{q'} + \frac{q_{m-1}}{q} - vi\pi\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en particulier

$$(65) \quad \text{Re}(\Delta_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \mathcal{O}(1).$$

Donc la largeur de la bande  $] -\text{Re}(c_n^-) + M, -\text{Re}(c_n^+) - M[ \times \mathbb{R}$  que  $\Phi_{f_n}(\mathfrak{B}_n)$  contient est égale à  $n + \mathcal{O}(1)$ .

Les définitions de  $I_{(\dots)}$  et l'expression de  $\text{den}(x_n)$  mentionnée plus haut impliquent :

$$(66) \quad I_{\max} = I_m^{p'} \circ I_{m+1}^{q'}$$

$$(67) \quad I_{m+1} = I_{m-1} \circ I_m^n.$$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer la proposition suivante :

**Proposition 82.** *Il existe  $M' > 0$  tel que la conjuguée de  $I_{m+1}$  par  $\Phi_{f_n} + c_n^+$ , c'est-à-dire  $(\Phi_{f_n} + c_n^+) \circ I_{m+1} \circ (\Phi_{f_n} + c_n^+)^{-1}$ , est définie sur un ensemble contenant la demi-bande*

$$]-\text{Re}(\Delta_n) + M', -M'[ \times \begin{cases} ]y, +\infty[ & \text{si } v = 1 \\ ]-\infty, -y[ & \text{si } v = -1 \end{cases}$$

pour un certain  $y \in \mathbb{R}$ , et est égale sur cette dernière à

$$T_{-\Delta_n + n + \frac{q_{m-1}}{q}} \circ h_n.$$

**Preuve.** Rappelons que  $I_{m+1} = P_{x_n}^{q_{m-1}+q_n} = P_{x_n}^{q_{m-1}} \circ P_{x_n}^{q_n}$ . Notons que les  $q$  bandes associées à  $f_n$  ont une largeur de la forme  $\text{Re}(\Delta_n) + \mathcal{O}(1)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc  $= n + \mathcal{O}(1)$  d'après l'équation (65).

Donc d'une part la proposition 80 page 109 appliquée à  $\tilde{\mathfrak{B}}_n = \mathfrak{B}_n$  implique que  $(\vec{\Phi}_{f_n} + \vec{c}_n^+) \circ P_{x_n}^{q_n} \circ (\vec{\Phi}_{f_n} + \vec{c}_n^+)^{-1}$  est définie sur au moins  $] -\text{Re}(\Delta_n) + M_1, -M_1[ \times ]y, +\infty[$  ou  $] -\infty, -y[$  pour un certain  $M_1$ , et égale sur cet ensemble à  $T_{\vec{c}_n^- - \vec{c}_n^+ + n} \circ h_n = T_{-\Delta_n + n} \circ h_n$ .

D'autre part, en appliquant ensuite  $q_{m-1}$  fois la proposition 81 page 110, on obtient que  $(\vec{\Phi}_{f_n} + \vec{c}_n^-) \circ P_{x_n}^{q_{m-1}} \circ (\vec{\Phi}_{f_n} + \vec{c}_n^-)^{-1}$  est définie sur au moins  $] -\text{Re}(\Delta_n) + M_2, -M_2[ \times ]y, +\infty[$  ou  $] -\infty, -y[$  et égale à  $T_{\frac{q_{m-1}}{q}}$  sur cet ensemble, pour un certain  $M_2$ .

Comme la distance de  $h_n$  à l'identité est bornée indépendamment de  $n$  et comme  $\Delta_n = n + \mathcal{O}(1)$ , la fonction  $T_{-\Delta_n + n} \circ h_n$  a elle-même une distance à l'identité bornée indépendamment de  $n$ . On peut donc quitte à augmenter  $M_1$  enchaîner les deux étapes précédentes, démontrant ainsi la proposition.  $\square$

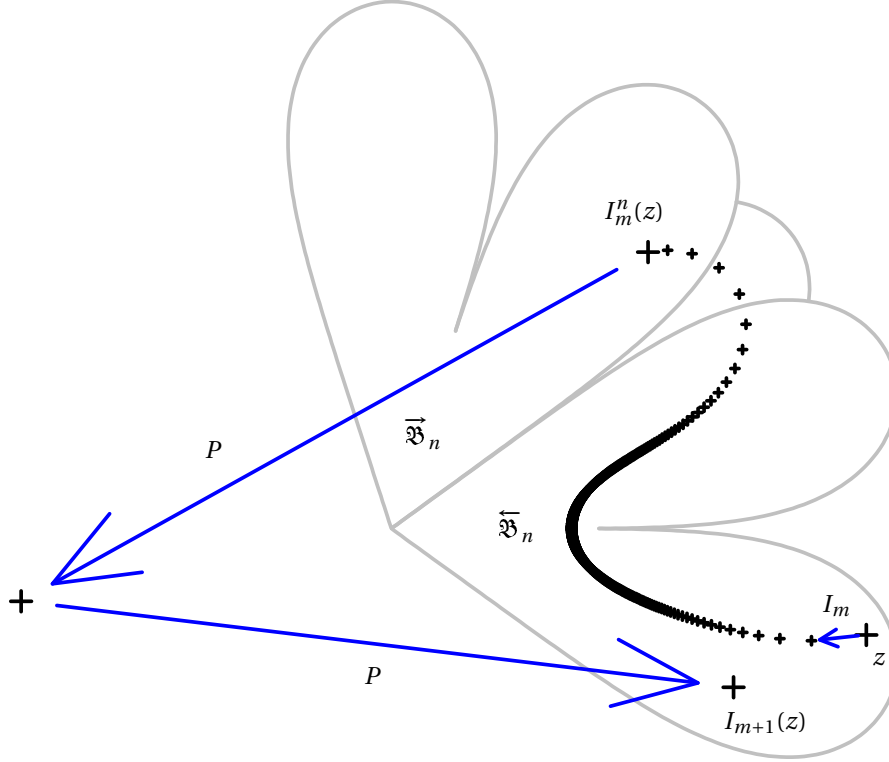


FIGURE 22: Illustration schématique de la décomposition  $I_{m+1} = I_{m-1} \circ I_m^n$  utilisée dans la preuve de la proposition 82, dans le cas d'un cylindre répulsif pour  $p/q = 2/5$  et  $x_n = [0, 2, 2, n + s]$ . Ici,  $q_{m-1} = 2$ .

Notons  $\mathcal{I}_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} T_{-\Delta_n + n + \frac{q_{m-1}}{q}} \circ h_n$  restreinte à la demi-bande de la proposition précédente. Cette application commute avec  $T_1$  et induit une application d'un demi-cylindre dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Soit  $\mathcal{R}_n$  la conjuguée de cette application par  $Wr : z \mapsto e^{\nu 2i\pi z}$ . Nous appellerons  $\mathcal{R}_n$  la *renormalisée*. Cette application analytique est définie au voisinage  $B(0, e^{-2\pi y})$  de 0 et fixe 0. Par les équations (60) page 109 et (62) page 110,  $\|\mathcal{I}_{m+1} - \text{id}\|_\infty$  est bornée indépendamment de  $n$ .

**Lemme 83.**

$$\mathcal{R}'_n(0) = e^{-2i\pi \nu s}$$

**Preuve.** D'après la proposition 82 page ci-contre,  $\mathcal{I}_{m+1}$  est la conjuguée de  $I_{m+1}(z)$  par l'application  $\Phi_{f_n} + c_n^+$ . Or  $I_{m+1}(z) = P_{x_n}^{q_{m-1} + nq}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z(e^{2i\pi x_n})^{q_{m-1} + nq}$ . Un calcul algébrique donne

$$(q_{m-1} + nq)x_n = p_{m-1} + np - \frac{p'}{q'}\lambda_n$$

qui est donc égal modulo  $\mathbb{Z}$  à  $-\frac{p'}{q'}\lambda_n$  :  $I_{m+1}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z e^{-2i\pi \frac{p'}{q'}\lambda_n}$ . Comme d'une part le nombre  $-\frac{p'}{q'}\lambda_n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  et d'autre part l'ensemble  $\mathfrak{B}_n$  contient par la proposition 79 page 108 un secteur d'angle tendant vers  $2\pi/q$  quand  $n \rightarrow +\infty$  donc minoré (mais de rayon tendant vers 0), on en déduit que pour  $n$  assez

grand le développement limité de l'équation (59) de la proposition 79 implique  $\mathcal{I}_{m+1}(z) \underset{\nu \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty}{=} z - \frac{p'}{q'} + o(1)$ . Donc  $\mathcal{R}'_n(0) = e^{-2i\pi\nu\frac{p'}{q'}}$ . (18)  $\square$

Nous avons défini à la section 19 la famille de renormalisées paraboliques  $(\mathcal{E}_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  associée à  $p/q$ , au choix d'un cylindre, et au choix de  $\nu$ . Rappelons que nous sommes en train d'effectuer la preuve du développement asymptotique de  $L(x_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  en fonction de  $L_\mathcal{E}(-\nu s)$  dans le cas où nous avons choisi de travailler dans un cylindre *répulsif*.

**Lemme 84.**

$$\mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{E}_{-\nu s}$$

uniformément sur  $B(0, e^{-2\pi y})$

**Preuve.** Puisque  $h_n \rightarrow h^{\text{nor}}$  uniformément sur " $\nu \operatorname{Im} z > y$ ", la définition de  $\mathcal{R}_n$  et celle de  $\mathcal{E}_\sigma$  impliquent que

$$\mathcal{R}_n / \mathcal{R}'_n(0) \longrightarrow \mathcal{E}_{\nu, 0}$$

uniformément sur  $B(0, e^{-2\pi y})$ . Or  $\mathcal{R}'_n(0)$  vient d'être calculé au lemme 83.  $\square$

**Preuve.** (alternative) Par l'équation (64) page 111

$$c_n^+ - c_n^- + n + \frac{q_{m-1}}{q_m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu i\pi\gamma - \frac{p'}{q'}$$

d'où

$$T_{c_n^+ - c_n^- + n + \frac{q_{m-1}}{q_m}} \circ h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_{\nu i\pi\gamma - \frac{p'}{q'}} \circ h^{\text{nor}}$$

uniformément sur " $\nu \operatorname{Im} z > y$ ".  $\square$

Soit

$$\mathcal{I}_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} T_{p'} \circ \mathcal{I}_{m+1}^{q'}.$$

Le domaine de définition de cette application contient une demi-bande de la forme  $] -\operatorname{Re}(\Delta_n) + M'', -M''[ \times ]y'', +\infty[$  ou  $] -\infty, -y''[$  avec  $M''$  et  $y''$  indépendants de  $n$ , sur laquelle  $\mathcal{I}_{\max}$  est la conjuguée de  $I_{\max} = P_{x_n}^{\text{den}(x_n)}$  par  $(\Phi_{f_n} + c_n^+)^{-1}$ , c'est-à-dire sur laquelle  $\mathcal{I}_{\max} = (\Phi_{f_n} + c_n^+) \circ I_{\max} \circ (\Phi_{f_n} + c_n^+)^{-1}$ . Notons que  $\|\mathcal{I}_{\max} - \text{id}\|_\infty$  est bornée indépendamment de  $n$ . Notons également que  $\operatorname{Wr} \circ \mathcal{I}_{\max} = \mathcal{R}'_n \circ \operatorname{Wr}$  sur cette même demi-bande, où  $\operatorname{Wr}(z) = e^{\nu 2i\pi z}$ .

18. On aurait pu autrement utiliser directement le calcul du développement de  $h_n$  en  $\nu i\infty$  donné au lemme 56 page 65 (ainsi que les lemmes 44 page 54 et 59 page 67) : ici on obtient  $h_n(z) \underset{\nu \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty}{=} z + (\Delta_n - \frac{\nu}{q\lambda_n}) + o(1)$ .

**Remarque.** Les lemmes 83 et 84 restent vrais si on travaille dans un cylindre attractif au lieu d'un cylindre répulsif : on a juste à remplacer la définition de l'application  $\mathcal{S}_{m+1}$  par sa conjuguée par  $T_{\Delta_n}$ , ce qui modifie également l'application  $\mathcal{R}_n$ .

Rappelons que  $s = p'/q'$ . Le point parabolique en 0 de la renormalisée parabolique  $\mathcal{E}_{-vs}$  a pour nombre de rotation  $-s$  et, en tant que renormalisée parabolique d'un *polynôme quadratique*, possède un *seul cycle de pétales attractifs* comme, entre autres, Epstein, Lavaurs et Shishikura l'ont démontré (voir la section 22). Il a donc  $q'$  pétales attractifs. Soit  $L'$  la taille asymptotique en 0 de  $\mathcal{E}_{-vs}^{q'}$ .

La renormalisée  $\mathcal{R}_n$  a en 0 un point parabolique de même nombre de rotation. A priori son nombre de pétales attractifs est un multiple quelconque de  $q'$ , mais comme il converge uniformément vers  $\mathcal{E}_{-vs}$ , le coefficient en  $z^{q'+1}$  du DSE en 0 de  $\mathcal{R}_n^{q'}(z)$  tend vers celui de  $\mathcal{E}_{-vs}^{q'}(z)$  qui est non nul et donc :

- pour  $n$  assez grand,<sup>19</sup>  $\mathcal{R}_n$  a  $q'$  pétales attractifs en 0,
- soit  $L'_n$  la taille asymptotique de  $\mathcal{R}_n^{q'}$  :

$$(68) \quad L'_n \longrightarrow L'.$$

Pour  $x$  rationnel, nous avons noté  $L(x)$  la taille asymptotique de  $P_x^{\text{den}(x)}$ .

**Lemme 85.**

$$\log L(x_n) = \lambda_n \left( 2\pi \text{Im } b_n^\pm + (-1)^m \log L'_n \right) + \log \frac{1}{|qC|}$$

**Preuve.** Notons  $q_n'' = \text{den}(x_n)$ . Rappelons que  $I_{\max}$  désigne  $P_{x_n}^{q_n''}$ , qui est tangent en 0 à l'identité et y possède  $q_n''$  pétales attractifs. Donc  $L(x_n) = 1/(q_n''V)^{1/q_n''}$  où la constante  $V > 0$ , qui dépend de  $n$ , peut être caractérisée par la propriété

$$|\Delta z| = |I_{\max}(z) - z| \underset{z \rightarrow 0}{\sim} V|z|^{1+q_n''}.$$

Par commodité, nous travaillerons dans la coordonnée  $Z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  où  $z = e^{2i\pi Z}$  :

$$|\Delta Z| \underset{Z \rightarrow +i\infty}{\sim} \frac{V}{2\pi} e^{-2\pi q_n'' \text{Im } Z}$$

quand  $\text{Im } Z \rightarrow +\infty$ . De même,  $L'_n = 1/(q'V)^{1/q'}$  où

$$|\Delta W| = |\mathcal{S}_{\max}(W) - W| \underset{W \rightarrow vi\infty}{\sim} \frac{V'}{2\pi} e^{-vq'2\pi \text{Im } W}$$

et où “ $W \rightarrow vi\infty$ ” signifie “ $v \text{Im } W \rightarrow +\infty$ ”.

Nous supposons maintenant que  $W = (\Phi_{f_n} + c_n^+)(z)$ , que  $z = e^{2i\pi Z}$  et que  $W$  est dans la demi-bande où  $\mathcal{S}_{\max}$  a été définie (sur laquelle elle est conjuguée de  $I_{\max}$  via

19. vraisemblablement pour tout  $n$

$\Phi_{f_n} + c_n^+$ ). Alors d'après la proposition 79 page 108, en choisissant un représentant quelconque de  $\log d^\pm$  :

$$W \underset{W \rightarrow v i \infty}{=} \frac{Z}{\lambda_n} + b_n^\pm - \frac{\log d^\pm}{2i\pi\lambda_n} + o(1)$$

pour un certain représentant de  $Z$  modulo  $Z$ , dépendant entre autres du choix de  $\log d^\pm$ . Comme  $\lambda_n$  est réel dans la présente application, le passage aux parties imaginaires dans l'estimée ci-dessus fait disparaître ces ambiguïtés. Toujours d'après la proposition 79,

$$\frac{dZ}{dW} \underset{W \rightarrow v i \infty}{=} \lambda_n + o(1).$$

Comme  $\|\mathcal{S}_{\max} - \text{id}\|_\infty$  est bornée indépendamment de  $n$ , on peut prendre une marge bornée telle que si  $W$  est dans la demi-bande et à distance de son bord  $>$  à cette marge, on soit assuré que le segment de  $W$  à  $\mathcal{S}_{\max}(W)$  est contenu dans la bande. En intégrant l'estimée de  $dZ/dW$  sur ce segment, on obtient :

$$\Delta Z \underset{W \rightarrow v i \infty}{=} \lambda_n \Delta W + o(\Delta W).$$

D'où (toujours avec  $W \rightarrow v i \infty$ )

$$|\Delta Z| \sim |\lambda_n| \frac{V'}{2\pi} e^{-\nu q' 2\pi \text{Im} \left( \frac{Z}{\lambda_n} + b_n^\pm \right)}.$$

Puis en utilisant  $\lambda_n = \nu q' / q_n''$  :

$$\frac{V}{2\pi} e^{-2\pi q_n'' \text{Im} Z} \sim |\Delta Z| \sim |\lambda_n| \frac{V'}{2\pi} e^{-\nu q' 2\pi \text{Im} b_n^\pm} e^{-2\pi q_n'' \text{Im} Z} e^{-q_n'' \text{Re}(\log d^\pm)}.$$

Donc

$$V = |\lambda_n| V' e^{-\nu q' 2\pi \text{Im} b_n^\pm} e^{-q_n'' \log |d^\pm|}.$$

En passant aux logs

$$-q_n'' \log L(x_n) - \log q_n'' = \log |\lambda_n| - q' \log L'_n - \log q' - \nu q' 2\pi \text{Im} b_n^\pm - q_n'' \log |d^\pm|,$$

puis en utilisant  $\lambda_n = \nu q' / q_n''$  à nouveau, et  $|d^\pm| = \frac{1}{|qC|}$ , on démontre le présent lemme.  $\square$

Il reste quelques lignes de calcul pour obtenir le développement de  $\log L(x_n)$  par rapport à  $n$  :

$$\begin{aligned}
& \log L(x_n) \\
&= \frac{\log |2\pi q \lambda_n|}{q} + \frac{\log \frac{1}{|qC|}}{q} + 2\pi \operatorname{Im}(\gamma) \lambda_n \log |2\pi q \lambda_n| + 2\pi \lambda_n \operatorname{Im} K + \nu \lambda_n \log L'_n + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
&= -\frac{\log(n/2\pi)}{q} - \frac{s + \frac{q^{m-1}}{q}}{qn} + \frac{\log \frac{1}{|qC|}}{q} - \nu 2\pi \operatorname{Im}(\gamma) \frac{\log(n/2\pi)}{qn} + \frac{2\pi \nu \operatorname{Im} K}{qn} + \frac{\log L'}{qn} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
&= -\frac{\log(n/2\pi)}{q} + \frac{\log \frac{1}{|qC|}}{q} - 2\pi \operatorname{Im}(\gamma) \frac{\nu \log(n/2\pi)}{qn} + \frac{2\pi \nu \operatorname{Im} K + \log L' - s - \frac{q^{m-1}}{q}}{qn} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Cela implique le développement (53) page 101.

## 24. Compléments

### 24.1. Variantes.

24.1.1. *La norme 1/2-Hölderienne.* Étant donné un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  soit

$$N_I(f) = \sup_{(x,y) \in I^2, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{1/2}} \in [0, +\infty]$$

Notre preuve n'implique pas que  $N_{[0,1]}(Y) = +\infty$ , et nous ignorons si c'est le cas (la conjecture de Marmi-Moussa-Yoccoz s'énonce  $N_{[0,1]}(Y) < +\infty$ ). Cependant on a, d'après l'équation (51) page 101 :

**Proposition 86.**  $\forall I \subset \mathbb{R}, N_I(f) \geq \frac{\log \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}} = 0.319\dots$  (approximation par défaut)

24.1.2. *Extension à  $s \in \mathcal{B}$ .* Nous pensons qu'il est facile d'étendre les développements du théorème 73 page 97 au cas où  $s$  est un nombre de Brjuno. La taille des disques de Siegel à utiliser dans la définition de  $Y_{\mathcal{E}}(s)$  serait donnée par le rayon de convergence de la série linéarisante, ou de façon équivalente par le rayon conforme du disque de Siegel de l'extension analytique maximale de  $\mathcal{E}_s$  (les applications de cornes, auxquelles les renormalisées paraboliques  $\mathcal{E}$  sont étroitement reliées, d'une fraction rationnelle possèdent une extension analytique maximale, naturellement définie). La preuve utiliserait la densité des points périodiques sur le bord du disque de Siegel (A. Epstein et Lavaurs), une définition suffisamment étendue et correcte des applications de cornes perturbées (voir [C2]), leur convergence vers les applications de cornes étendues non perturbées, et enfin la semi-continuité des disques de Siegel (voir [C] et [Ri]).

**Remarque.** Nous pensons qu'en fait, la fonction

$$x \in [0, 1] \mapsto n \left( \Upsilon([a_0, \dots, a_m, n+x]) - \Upsilon(p/q) \right) - A \log n$$

tend uniformément sur  $[0, 1]$  vers

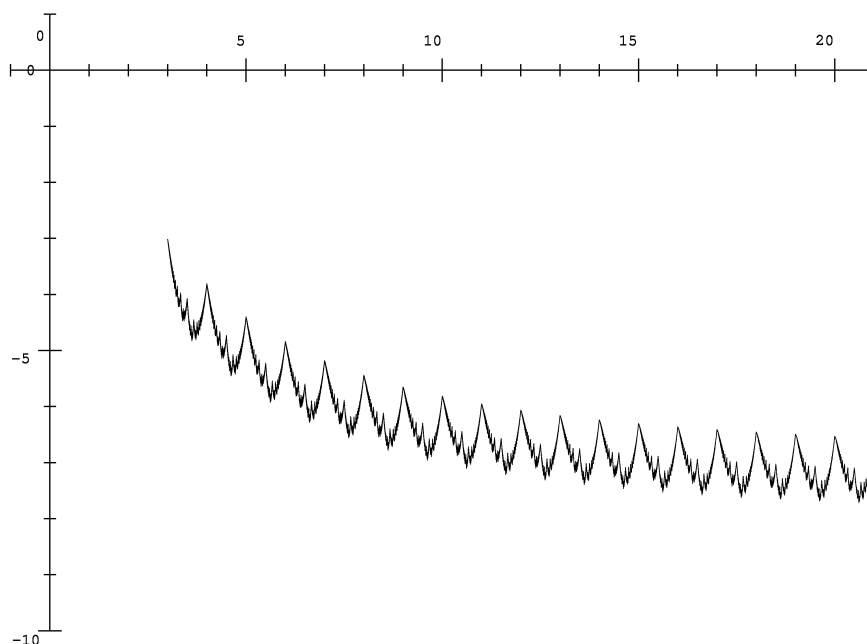
$$\frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu x)}{q} \pm \frac{\pi^2}{q} \operatorname{Re} \gamma + \nu c(p/q).$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  où  $\nu = (-1)^m$  et les constantes  $A$  et  $c(p/q)$  sont celles du théorème 73 page 97. Mais cette assertion semble bien plus difficile à démontrer.

Cela impliquerait que

$$\frac{\Upsilon\left(\frac{p}{q} + \varepsilon\right) - \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right)}{\varepsilon} + \nu A q^2 \log \varepsilon$$

converge uniformément sur  $[0, 1]$  quand on y substitue  $\varepsilon = \frac{1}{n+x}$ . Voici le graphe de cette fonction pour  $p/q = 0/1$  et  $\nu = 1$ , quand on y substitue  $\varepsilon = 1/x$ .



Sur ce graphe, les plus grandes “pointes” montantes correspondent aux valeurs prises aux  $x$  entiers. Elles semblent converger vers une valeur proche de  $-7$ . La valeur prise en  $x = 1000$  est  $-7.044\dots$ , en approximation par défaut de la valeur absolue.

24.1.3. *Pointes montantes?* Fixons une valeur de  $p/q$ , choisissons un côté de ce nombre rationnel, et supposons que  $A \neq 0$  où  $A$  est le terme en  $(\log n)/n$  apparaissant dans le développement de  $\Upsilon(x_n)$  au théorème 73 page 97. Bien que notre développement, restreint à des suites  $x_n$  particulières, ne permette pas de donner le signe de  $\Upsilon(p/q) - \Upsilon(x)$  pour  $x$  proche de  $p/q$ , il le donne pour  $\Upsilon(p/q) - \Upsilon(x_n)$  quand  $n$  est assez grand.



Sur les dessins il semble que la fonction  $Y$  ait une “pointe montante” en tout rationnel, donc un maximum local. Cela nécessiterait que  $A \leq 0$  pour tout rationnel et de chaque côté. Le théorème 73 donne la valeur suivante :

$$A = -\frac{q_{m-1}}{q^2} - v \frac{2\pi \operatorname{Im} \gamma\left(\frac{p}{q}\right)}{q}.$$

Donc  $A \leq 0 \iff \frac{q_{m-1}}{q} + v2\pi \operatorname{Im} \gamma\left(\frac{p}{q}\right) \geq 0$ . Cependant, ce n’est pas toujours le cas : par exemple à gauche du nombre  $p/q = [0, q] = 1/q$ , on obtient  $A = \frac{1}{q}(2\pi \operatorname{Im} \gamma(1/q) - \frac{1}{q})$ . Quand  $q \rightarrow +\infty$ ,  $1/q$  tend vers 0 et on peut démontrer que  $\gamma(1/q)$  tend vers  $\gamma_{\mathcal{E}}(0)$  pour la renormalisée parabolique  $\mathcal{E}_0$  associée au bout supérieur d’un cylindre<sup>20</sup> de  $P_0$ , dont la valeur expérimentale est  $\gamma_{\mathcal{E}}(0) \simeq 0.47618 + 0.05230$ . Ainsi,  $2\pi \operatorname{Im} \gamma(1/q) - \frac{1}{q}$  tend expérimentalement vers un nombre positif, ce qui contredit la présence supposée d’une “pointe montante” en  $1/q$ . Pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , la formule donnant  $A$  est explicitement calculable, et pour  $q = 6$ , on obtient  $A = \frac{2\pi \frac{364523\sqrt{3}}{19233072} - 1/6}{6} \simeq 0.0065\dots$  (approximation par défaut). Cela *démontre* qu’il ne peut pas y avoir de pointe montante en  $1/6$ , par la gauche.

**Remarque.** Cela semble cependant très difficile à voir sur les images. Donnons une explication informelle : pour que le terme  $A \log n/n$  puisse battre le terme  $B/n$ , l’entier  $n$  doit être d’ordre  $\exp|B/A|$ . Pour  $p/q = 1/6$ , sur la gauche, on peut estimer  $B = Y(s)/6 + 0.844\dots = -0.299\dots$  quand  $s = 0$ , ce qui donne une valeur énorme à  $\exp|B/A|$ , de l’ordre de  $10^{20}$ . En  $p/q = 1/7$ , sur la gauche, on trouve quelque chose de l’ordre de  $2.10^8$ , et d’ordre  $10^4$  pour  $1/10$ . Il semblerait qu’il y ait une limite de valeur située entre  $10^2$  et  $10^3$ .

24.1.4. *Fonction de Brjuno symétrique.* De façon analogue nous affirmons, mais cela reste à vérifier dans le détail, que si on remplace  $\Phi$  par la fonction de Brjuno symétrique  $\tilde{\Phi}$  (voir [MMY], où cette dernière est notée  $\Phi_{1/2}$ ), alors pourvu que  $\tilde{Y}_{\mathcal{E}}$  soit non-constante, la nouvelle fonction  $\tilde{Y}$  que l’on obtient ne sera  $\delta$ -Hölderienne pour  $\delta > 1/2$  sur aucun voisinage de  $p/q$ . Or  $\tilde{\Phi}_{\text{trunc}}(0) = 0 = \Phi_{\text{trunc}}(0)$  et  $\tilde{\Phi}_{\text{trunc}}(1/2) = \log 2 = \Phi_{\text{trunc}}(1/2)$ . Donc  $\tilde{Y}_{\mathcal{E}}$  et  $Y_{\mathcal{E}}$  coïncident en 0 et en  $1/2$  et puisque qu’il a été démontré à la section 22 que  $Y_{\mathcal{E}}$  prend des valeurs différentes en ces deux points, il en est de même pour  $\tilde{Y}_{\mathcal{E}}$ . Nous avons donc :

**Théorème 87** (conditionnel). *Sous réserve de vérification de l’affirmation ci-dessus, alors pour tout  $\delta > 1/2$ , pour tout intervalle  $I$  d’intérieur non vide,  $\tilde{Y}$  n’est pas  $\delta$ -Hölderienne sur  $I$ , et n’y a pas une variation bornée.*

20.  $\gamma$  est invariant par conjugaison donc  $\gamma_{\mathcal{E}}(s)$  est indépendant de la normalisation du cylindre

24.1.5. *Équation fonctionnelle.* La fonction  $\Phi$  a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &\Phi \text{ est 1-périodique} \\ &\forall \alpha \in ]0, 1[ \cap \mathcal{B}, \quad \Phi(\alpha) - \alpha \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \log \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Il semble donc naturel de s'intéresser à la fonction

$$\log r(\alpha) - \alpha \log r\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

sur l'ensemble des nombres de Brjuno dans  $]0, 1[$ . Alternativement, on peut regarder la fonction

$$H(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \Upsilon(\alpha) - \alpha \Upsilon\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

sur  $]0, 1[$ .

**Remarque.** Pour  $\alpha$  nombre de Brjuno, cela revient à ajouter  $(-\log \frac{1}{\alpha})$  à la fonction précédente.

**Remarque.** La même formule définit en fait une fonction sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Notez que ce n'est plus une fonction 1-périodique. On peut même regarder ces fonctions sur  $\mathbb{R}^*$  à condition de remplacer  $\alpha f(\frac{1}{\alpha})$  par  $|\alpha| f(\frac{1}{\alpha})$  pour  $f = \Phi, \log r, \Upsilon$ .

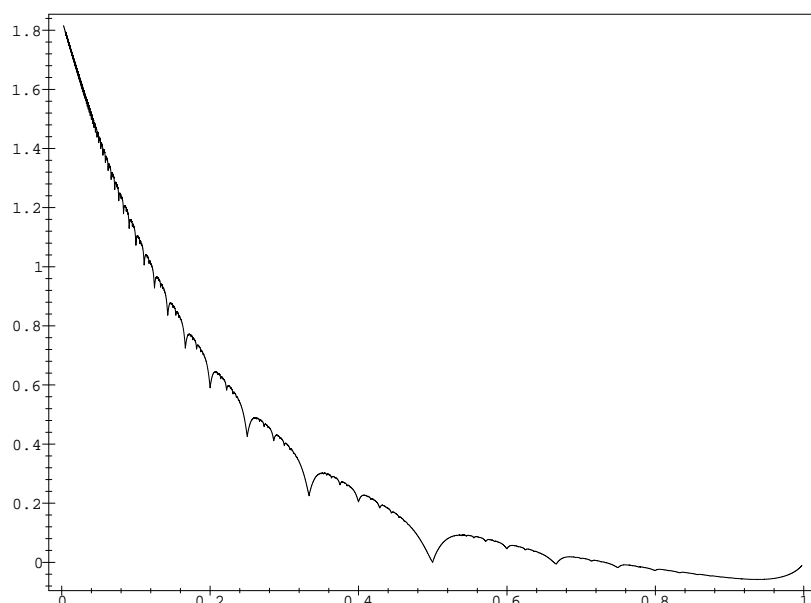


FIGURE 23: La fonction  $H$ .

Puisque  $Y$  est bornée (ainsi que nous l'avons démontré dans [BC2]),  $H$  a un prolongement continu en 0, de valeur

$$H(0) \stackrel{\text{def}}{=} Y(0).$$

Nous ne démontrons pas dans ce mémoire l'analogie pour  $H$  de nos énoncés de non-régularité. Cependant, voici des conditions suffisantes :

**Théorème 88.** *Pour  $v \in \{-1, 1\}$ , notons  $\mathcal{E}[p/q, v]$  la famille de renormalisées paraboliques associée au polynôme quadratique  $P_{p/q}$  et à  $v$ , pour un choix quelconque de cylindre.*

- Si la différence des fonctions  $Y$  et  $Y_{\mathcal{E}[p/q=0, v=1]}$  n'est pas constante sur  $\mathbb{Q}$ , alors  $\forall \delta > 1/2, \forall \varepsilon > 0, H$  n'est pas  $\delta$ -Höldérienne sur  $[0, \varepsilon]$  et  $y$  a une variation non bornée.
- Si la différence des fonctions  $Y_{\mathcal{E}[p/q, v]}$  et  $Y_{\mathcal{E}[q/p, v]}$  n'est pas constante sur  $\mathbb{Q}$ , alors  $\forall \delta > 1/2, \forall \varepsilon > 0, H$  n'est pas  $\delta$ -Höldérienne sur  $[p/q, p/q + v\varepsilon]$  et  $y$  a une variation non bornée.

Il est très probable que les hypothèses de ce théorème soient toujours satisfaites.

**24.2. Exemples, calculs et applications numériques pour quelques rationnels.** Dans cette section, les valeurs approchées sont toutes données par défaut de leur valeur absolue. Nous n'avons pas effectué de contrôle de l'erreur lors du calcul de ces approximations, même s'il est probable que toutes les décimales données soient correctes.

$p/q$	$L_a$	$Y$	$Y \simeq$	$\gamma$	$\gamma \simeq$
0/1	1	$\log 2\pi$	1.837...	1	1
1/2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\log 2\pi}{2}$	0.918...	$\frac{11}{16}$	0.6875
1/3	$\frac{1}{3^{\frac{1}{2}} 7^{\frac{1}{6}}}$	$\frac{\log 3}{2} - \frac{\log 7}{6} + \frac{\log 2\pi}{3}$	0.837...	$\frac{2(391+i4\sqrt{3})}{3^3 7^2}$	$0.591\dots + i0.010\dots$
2/3	$\frac{1}{3^{\frac{1}{2}} 7^{\frac{1}{6}}}$	$\frac{\log 3}{2} - \frac{\log 7}{6} + \frac{\log \pi}{3}$	0.606...	$\frac{2(391-i4\sqrt{3})}{3^3 7^2}$	$0.591\dots - i0.010\dots$
1/4	$\frac{1}{2^{\frac{7}{8}} 17^{\frac{1}{8}}}$	$\frac{\log 2^9/17}{8} + \frac{\log 2\pi}{4}$	0.885...	$\frac{10113+365i}{2^6 17^2}$	$0.546\dots + i0.019\dots$
3/4	$\frac{1}{2^{\frac{7}{8}} 17^{\frac{1}{8}}}$	$\frac{\log 2^9/17}{8} - \frac{\log 3}{4} + \frac{\log 2\pi}{4}$	0.610...	$\frac{10113-365i}{2^6 17^2}$	$0.546\dots + i0.019\dots$

TABLE 1. La taille asymptotique, la fonction  $Y$ , et la valeur de  $\gamma$ .

Rappelons le développement asymptotique du théorème 73 page 97 :  
pour  $p/q = [a_0, \dots, a_m]$ ,  $s = p'/q' \in \mathbb{Q}$ ,  $x_n = [a_0, \dots, a_m, n + s]$

$$\Upsilon(x_n) = \Upsilon(p/q) + A \frac{\log n}{n} + B \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où

$$\begin{aligned} A &= -\frac{q_{m-1}}{q^2} - v \frac{2\pi \operatorname{Im} \gamma\left(\frac{p}{q}\right)}{q} \\ B &= \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}, v(-vs)}}{q} \pm \frac{\pi^2}{q} \operatorname{Re} \gamma\left(\frac{p}{q}\right) + v c\left(\frac{p}{q}\right) \\ c\left(\frac{p}{q}\right) &= c_{\text{arith}}\left(\frac{p}{q}\right) + c_{\text{geom}}\left(\frac{p}{q}\right) \end{aligned}$$

où  $v = (-1)^m$ , et où  $q_{m-1}$  est le dénominateur de  $[a_0, \dots, a_{m-1}]$ .

$p/q$	dével.	côté	A	$A \approx$
0/1	$[-1, 1]$	-	-1	-1
0/1	$[0]$	+	0	0
1/2	$[0, 2]$	-	-1/4	-0.25
1/2	$[0, 1, 1]$	+	-1/4	-0.25
1/3	$[0, 3]$	-	$-\frac{1}{9} + \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{3^4 7^2}$	-0.089...
1/3	$[0, 2, 1]$	+	$-\frac{2}{9} - \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{3^4 7^2}$	-0.244...
2/3	$[0, 1, 1, 1]$	-	$-\frac{2}{9} - \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{3^4 7^2}$	-0.244...
2/3	$[0, 1, 2]$	+	$-\frac{1}{9} + \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{3^4 7^2}$	-0.089...
1/4	$[0, 4]$	-	$-\frac{1}{16} + \frac{365\pi}{2^7 17^2}$	-0.031...
1/4	$[0, 3, 1]$	+	$-\frac{3}{16} - \frac{365\pi}{2^7 17^2}$	-0.218...
3/4	$[0, 1, 3]$	+	$-\frac{1}{16} + \frac{365\pi}{2^7 17^2}$	-0.031...
3/4	$[0, 1, 2, 1]$	-	$-\frac{3}{16} - \frac{365\pi}{2^7 17^2}$	-0.218...
1/6	$[0, 6]$	-	$-\frac{1}{36} + \text{fatras}$	0.006...
1/6	$[0, 5, 1]$	+	$-\frac{5}{36} - "$	-0.173...

TABLE 2. Développement en fraction continue de quelques rationnels, côté correspondant (- pour la gauche et + pour la droite), et valeur des coefficients  $A$  devant  $\log n/n$  dans le développement asymptotique.

On notera dans le tableau 2 que la symétrie  $P_{-\theta} = s \circ P_{\theta} \circ s$  où  $s(z) = \bar{z}$  implique une symétrie dans les coefficients  $A$  (même si la fonction  $Y$  elle-même n'est pas symétrique par  $\theta \mapsto -\theta$ ). Cette symétrie se traduit en une conjugaison entre les applications de cornes de  $P_{p/q}$  et celles de  $P_{-p/q}$ , conjugaison par une application de la forme  $z \mapsto \tau - z$  qui échange en particulier les bouts des cylindres.

$p/q$	$\Gamma$	$c_{arith}$	$c_{geom}$
0	$-\frac{1}{2}$	0	0
1/2	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0
1/3	$\frac{-1}{147} + i \frac{23\sqrt{3}}{2646}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{23+16\log 2\pi}{3^4 7^2} \pi \sqrt{3}$
2/3	$\frac{-1}{147} - i \frac{23\sqrt{3}}{2646}$	$\frac{1}{18} + \frac{\log 2}{9}$	$-\frac{23+16\log 2\pi}{3^4 7^2} \pi \sqrt{3}$
1/4	$\frac{441+293i}{9248}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{586+365\log 2\pi}{2^7 17^2}$
3/4	$\frac{441-293i}{9248}$	$\frac{5}{48} + \frac{\log 3}{16}$	$-\frac{586+365\log 2\pi}{2^7 17^2}$

TABLE 3. Le coefficient  $c(p/q)$  dans le développement asymptotique.

$p/q$	$c_{arith}$	$c_{geom}$	$c(p/q)$
0	0	0	0
1/2	-0.25	0	-0.25
1/3	-0.222...	0.071...	-0.150...
2/3	0.132...	-0.071...	0.060...
1/4	-0.187...	0.106...	-0.080...
3/4	0.172...	-0.106...	0.066...
1/5	-0.16	0.123...	-0.036...
1/6	-0.138...	0.130...	-0.008...
1/7	-0.122	0.132...	0.010...
2/7	0.024	0.013...	0.038...
1/8	-0.109	0.132...	0.023...
3/8	-0.072	0.022...	-0.050...

TABLE 4. Quelques valeurs numériques.

Explicitons un peu plus le développement de  $\Upsilon$  en  $p/q = 0$ . En notant  $\mathcal{E}_s[p/q, \nu]$  la famille de renormalisée paraboliques associée à  $p/q$  et au choix de  $\nu \in \{-1, +1\}$  (ainsi que d'un cylindre de  $P_{p/q}$ , normalisé selon les conventions de la section 4 chapitre 1) on a  $\forall s \in \mathbb{Q}$ , quand  $n \rightarrow +\infty$

$$\Upsilon\left(\frac{1}{n+s}\right) = \log 2\pi + \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}[0,+1]}(s) \pm \pi^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(le terme en  $(\log n)/n$  est nul) avec  $\pm = +$  si on a choisi de travailler dans un cylindre répulsif pour définir  $\mathcal{E}$  et  $\pm = -$  si on a choisi un cylindre attractif.

$$\Upsilon\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+s}}\right) = \log 2\pi - \frac{\log n}{n} + \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}[0,-1]}(s) \pm \pi^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où<sup>21</sup>

$$\Upsilon\left(-\frac{1}{n+s}\right) = \log 2\pi - \frac{\log n}{n} + \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}[0,-1]}(s) \pm \pi^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En  $p/q = 1/2$  :

$$\Upsilon\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n+s}}\right) = \frac{\log 2\pi}{2} - \frac{\log n}{4n} + \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}[1/2,-1]}(s) \pm \frac{11\pi^2}{32} - \frac{1}{4}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Upsilon\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n+s}}}\right) = \frac{\log 2\pi}{2} - \frac{\log n}{4n} + \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}[1/2,+1]}(s) \pm \frac{11\pi^2}{32} + \frac{1}{4}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donnons maintenant quelques valeurs numériques de la taille asymptotique en 0 de  $\mathcal{E}$  avec  $\nu = 1$  et nombre de rotation  $s = 0$  :

$$\log L \approx -18.760 \quad \text{dans le cylindre répulsif,}$$

$$\log L \approx 0.979 \quad \text{dans le cylindre attractif.}$$

Cela donne la valeur numérique suivante pour le coefficient  $B$  :

$$B \approx -7.052$$

d'où l'on déduit le développement asymptotique suivant :

$$\Upsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \log 2\pi - \frac{7.052 \dots}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Cela semble en accord avec les données expérimentales (voir la fin de la section 24.1.2).

21. par  $\Upsilon(x-1) = \Upsilon(x)$  et comme  $\frac{1}{1+\frac{1}{n+s}} - 1 = \frac{-1}{n+1+s}$

Enfin, donnons les valeurs numériques de  $\gamma(\mathcal{E}_0)$  pour  $p/q = 0$  et  $p/q = 1/2$  :

$$\begin{aligned} p/q = 0, \quad v = 1, \quad \gamma(\mathcal{E}_0) &\simeq 0.47618 + 0.05230 \\ p/q = 1/2, \quad v = 1, \quad \gamma(\mathcal{E}_0) &\simeq 0.48162 + 0.04289 \end{aligned}$$

Par symétrie réelle<sup>22</sup> de  $P_0$  et  $P_{1/2}$ , les valeurs de  $\gamma(\mathcal{E}_0)$  pour  $v = -1$  sont les conjuguées des valeurs ci-dessus.

**24.3. Symétries.** Étant donné un nombre  $p/q$ , ses deux développements en fraction continue peuvent se noter  $[a_0, \dots, a_{k-1}, a_k, 1]$  et  $[a_0, \dots, a_{k-1}, 1 + a_k]$ . Dans le premier,  $q_k + q_{k-1} = q$ . Le second a le même  $q_{k-1}$  que le premier. Donc la somme des dénominateurs des pénultièmes réduites des deux développements est égale à  $q$ . Cela implique :

**Proposition 89** (D'un côté à l'autre de  $p/q$ ).

$$A(p/q, +) + A(p/q, -) = -\frac{1}{q}$$

La relation  $P_{1-\theta} = P_{-\theta} = s \circ P_\theta \circ s$  où  $s(z) = \bar{z}$  implique que  $L_a(1 - p/q) = L_a(p/q)$ . La quantité  $Y(p/q)$  ne possède pas tout à fait cette symétrie car la version de la fonction arithmétique de Brjuno que nous avons choisie est asymétrique. Étant donné  $p/q \in [1/2, 1]$  et  $[0, 1, a_2, \dots, a_m]$  un de ses développements, le nombre  $1 - p/q$  a pour développement  $[0, 1 + a_2, \dots, a_m]$ , et  $\forall n > 0$ , la  $n^{\text{è}}$  réduite de ce dernier vaut 1 moins la  $n + 1$ -ème réduite du précédent :

$$\begin{aligned} \forall r \in [1/2, 1], \quad Y(1-r) &= Y(r) + (1-r) \log \frac{r}{1-r}, \\ \Phi_{\text{trunc}}(1-r) &= \Phi_{\text{trunc}}(r) + (1-r) \log \frac{r}{1-r}. \end{aligned}$$

Si on prend la suite  $x_n = [0, 1, a_2, \dots, a_m, n + s]$  du théorème principal, alors la transformation  $1 - x_n = [0, 1 + a_2, \dots, a_m, n + s]$  transforme une suite tendant vers sa limite par la gauche en une suite tendant par la droite et vice-versa (i.e.  $v$  devient  $-v$ ) et ne modifie pas  $s$ . De cela, on déduit

**Proposition 90** (Passage au polynôme conjugué).

$$(1) \quad \forall p/q \in [0, 1], \quad A(1 - p/q, -v) = A(p/q, v)$$

$$(2) \quad \text{pour } p/q \in [1/2, 1], \quad B(1 - p/q, -v, s) = B(p/q, v, s) + v \frac{\frac{1}{p/q} + \log \frac{1-p/q}{p/q}}{q^2}$$

La symétrie de conjugaison se transfère en une symétrie de la normalisation des coordonnées de Fatou et implique que la quantité  $Y_{\mathcal{E},v}(-vs)$  ne change pas

22.  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

(bien que  $v$  devienne  $-v$ ,  $p/q$  devienne  $1 - p/q$ , et  $\mathcal{E}$  change aussi). Également,  $\gamma(1 - p/q) = \overline{\gamma(p/q)}$ . Cela permet de soumettre les symétries des coefficients  $A$  et  $B$  de la proposition 90 ci-dessus à une contre-vérification en utilisant directement les formules donnant  $A$  et  $B$  de la section 20, et ça marche. . . Entre autres, on obtient :

**Proposition 91** (Compléments).

$$(1) \quad \forall p/q \in [0, 1], \quad A_L(1 - p/q, -v) = A_L(p/q, v) \quad (\text{notations de la section 23})$$

$$(2) \quad \forall p/q \in [0, 1], \quad c_{\text{geom}}(1 - p/q) + c_{\text{geom}}(p/q) = 0$$

$$(3) \quad \text{pour } p/q \in [1/2, 1] : c_{\text{arith}}(1 - p/q) + c_{\text{arith}}(p/q) = \frac{-\left(\frac{1}{p/q} + \log \frac{1-p/q}{p/q}\right)}{q^2}$$





## Conclusion

Même si la plupart des résultats, en particulier le développement de  $\Upsilon$ , nous étaient connus depuis plusieurs années, leur rédaction, en particulier celle du chapitre 3, a demandé beaucoup de temps. Ce temps nous a permis d'effectuer de nombreuses expériences numériques, à titre exploratoire mais aussi vérificatif. Certaines ont été présentées dans les compléments du chapitre 4.

La normalisation des coordonnées de Fatou, devrait être explorée plus en avant, en particulier son comportement par changement de variable.

De façon probablement liée à la question précédente, on pourrait s'interroger sur la signification de la constante  $\Gamma$  intervenant dans le développement asymptotique de  $\Upsilon$  quand on adopte notre normalisation. Voir la section 17, chapitre 3.

La régularité de la fonction  $H$  mentionnée à la section 24.1.5, chapitre 4, liée à l'équation fonctionnelle vérifiée par  $\Upsilon$ , mérite également une certaine attention. Même si son graphe a l'air plus régulier que celui de  $\Upsilon$ , il est très probable que l'exposant Höldérien optimal pour  $H$  soit également d' $1/2$ .

Il reste bien sûr à démontrer la conjecture de Marmi-Moussa-Yoccoz, mais là il faut utiliser d'autres outils. Probablement la renormalisation cylindrique. Voir les travaux de Shishikura.

De façon peut-être liée, notre développement aux rationnels  $p/q$  est restreint à des suites spéciales de rationnels  $x_n \rightarrow p/q$ . Or nous pensons qu'il a un domaine de validité plus grand. Voir la section 24.1.2 du chapitre 4.

Enfin, nos résultats demandent à être étendus à des familles plus générales.



## Bibliographie

- [Ber] W. BERGWELER, *On the number of critical points in parabolic basins*, Ergodic Theory Dynam. Systems **22**, 655–669 (2002).
- [Br] A.D. BRJUNO, *Analytic forms of differential equations*, Trans. Mosc. Math. Soc. **25** (1971).
- [BC1] X. BUFF & A. CHÉRITAT, *Upper bound for the size of quadratic Siegel disks*, Inventiones Mathematicæ **156/1**, 1–24 (2004).
- [BC2] X. BUFF & A. CHÉRITAT, *The Brjuno Function Continuously Estimates the Size of Siegel Disks* Annals of Mathematics **164/1**, 265–312 (2006).
- [BC3] X. BUFF & A. CHÉRITAT, *A new proof of a conjecture of Yoccoz, Remarks, New results*, prépublication arXiv :math/0604470 (2006).
- [BE] X. BUFF & A.L. EPSTEIN, *A parabolic Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality*, Fund. Math. **172**, 249–289 (2002).
- [Ca] T. CARLETTI, *The 1/2-Complex Brjuno function and the Yoccoz function. A numerical study of the Marmi-Moussa-Yoccoz Conjecture*, prépublication arXiv math.DS/0306009 (2003).
- [CG] L. CARLESON & T. W. GAMELIN, *Complex Dynamics*, UTX, Springer (1993).
- [C] A. CHÉRITAT, *Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive*, Thèse, Université Paris-Sud, Orsay (2001).
- [C2] A. CHÉRITAT, *Semi-continuity of Siegel disks under parabolic implosion*, prépublication arXiv math.DS/0507250 (2005).
- [D] A. DOUADY, *Does a Julia set depend continuously on the polynomial?*, in **Complex dynamical Systems, The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia Sets**, R.L. Devaney, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **49**, American Mathematical Society, 1994. Edition : 1995.
- [DH] A. DOUADY & J.H. HUBBARD, *Étude dynamique des polynômes complexes*, Publications mathématiques d'Orsay, France (1984-85)
- [E] A.L. EPSTEIN, *Dynamics of Finite Type Complex Analytic Maps I : Global Structure Theory*, Manuscrit.
- [L] P. LAVAURS, *Systèmes Dynamiques holomorphes : explosion de points périodiques paraboliques*, Thèse, Université Paris-Sud, Orsay (1989).
- [Ma] S. MARMI, *Critical Functions for Complex Analytic Maps*, J. Phys. A : Math. Gen. **23**, 3447–3474 (1990).
- [MMY] S. MARMI, P. MOUSSA & J-C. YOCOZ, *The Brjuno functions and their regularity properties*, Comm. Math. Phys. **186**, 265–293 (1997).
- [MaR] J. MARTINET & J.P. RAMIS, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4<sup>e</sup> série, **16**, 571–621 (1983).
- [M] J. MILNOR, *Dynamics in one complex variable : Introductory lectures*, 2<sup>nd</sup> edition, Vieweg (2000).
- [Ri] E. RISLER, *Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications*, Mémoires de la SMF **77** (1999).
- [S1] M. SHISHIKURA, *On the parabolic bifurcation of holomorphic maps*, in **Dynamical systems and related topics** (Nagoya, 1990), 478–486, Adv. Ser. Dynam. Systems, **9**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1991).

- [S2] M. SHISHIKURA, *Bifurcation of parabolic fixed points*, in **The Mandelbrot set, Theme and Variations**, London Math. Soc. Lect. Note **274**, Ed. Tan Lei, Cambridge Univ. Press, 325–363 (2000).
- [S3] M. SHISHIKURA, *The Hausdorff Dimension of the Boundary of the Mandelbrot Set and Julia Sets*, *Annals of Mathematics. Second Series.* **147/2**, 225–267 (1998).
- [Th] W.P. THURSTON, *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1*, Princeton Mathematical series **35** (1997).
- [Y] J.C. YOCCOZ, *Petits diviseurs en dimension 1*, S.M.F., Astérisque **231** (1995).