

Sur l'implosion parabolique, la taille des disques de Siegel et une conjecture de Marmi, Moussa et Yoccoz

Arnaud Chéritat (en commun avec Xavier Buff)

Institut de Mathématiques de Toulouse

Toulouse, 23 Mai 2008

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Cette conjecture concerne une fonction que nous appellerons Υ (Upsilon) dont la définition est la suivante : soit

$$P_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z + z^2,$$

soit $r(\alpha)$ le *rayon conforme* du disque de Siegel de P_α . [▶ graphe](#)

La *somme de Brjuno*, dans sa variante définie par Yoccoz, est

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_0 \cdots \alpha_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n}$$

où $\alpha_{n+1} = \text{Frac}(1/\alpha_n)$ et $\alpha_0 = \text{Frac}(\alpha)$. Elle sert d'estimation de $-\log r(\alpha)$, et la fonction Υ est le *terme d'erreur* :

$$\Upsilon(\alpha) = \Phi(\alpha) + \log r(\alpha).$$

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Cette conjecture concerne une fonction que nous appellerons Υ (Upsilon) dont la définition est la suivante : soit

$$P_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha} z + z^2,$$

soit $r(\alpha)$ le *rayon conforme* du disque de Siegel de P_α . [▶ graphe](#)

La *somme de Brjuno*, dans sa variante définie par Yoccoz, est

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_0 \cdots \alpha_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n}$$

où $\alpha_{n+1} = \text{Frac}(1/\alpha_n)$ et $\alpha_0 = \text{Frac}(\alpha)$. Elle sert d'estimation de $-\log r(\alpha)$, et la fonction Υ est le *terme d'erreur* :

$$\Upsilon(\alpha) = \Phi(\alpha) + \log r(\alpha).$$

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

- Yoccoz a prouvé à peu de chose près que Υ est bornée (vers 1988).
- Marmi en a tracé le graphe par ordinateur (après, avant ?).
- (voici un graphe en basse résolution que j'ai obtenu en 2002)

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

- Yoccoz a prouvé à peu de chose près que Υ est bornée (vers 1988).
- Marmi en a tracé le graphe par ordinateur (après, avant ?).
- (voici un graphe en basse résolution que j'ai obtenu en 2002)

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

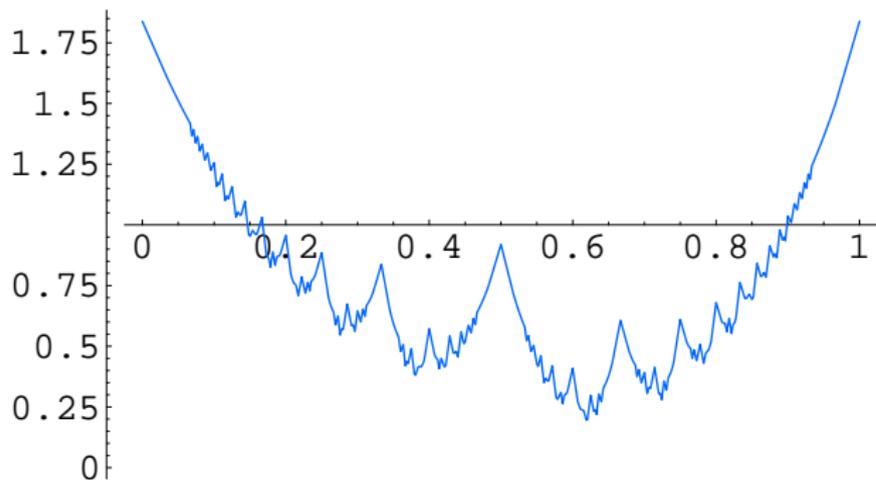
Introduction

- Yoccoz a prouvé à peu de chose près que Υ est bornée (vers 1988).
- Marmi en a tracé le graphe par ordinateur (après, avant ?).
- (voici un graphe en basse résolution que j'ai obtenu en 2002)

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

- Yoccoz a prouvé à peu de chose près que Υ est bornée (vers 1988).
- Marmi en a tracé le graphe par ordinateur (après, avant ?).
- (voici un graphe en basse résolution que j'ai obtenu en 2002)



La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} .
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.
- (C) Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.
- (C) Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

► meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} .
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.
- (C) Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.
- (C) Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

► meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} . ✓ BC 2003
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.
- (C) Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.
- (C) Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

► meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} . \checkmark BC 2003
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.
- (C) Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.
- (C) Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

► meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} . \checkmark BC 2003
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est $1/2$ -Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.
- (C) Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.
- (C) Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

► meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} . \checkmark BC 2003
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) ~~Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.~~
- (C) Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.
- (C) Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

► meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} . \checkmark BC 2003
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) ~~Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.~~
- (C) ~~Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.~~
- (C) Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

► meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} . ✓ BC 2003
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) ~~Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.~~
- (C) ~~Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.~~
- (C) ~~Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).~~
- (C) Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

▶ meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Introduction

Conjectures associées.

- (Marmi) Υ est restriction d'une fonction continue sur \mathbb{R} . ✓ BC 2003
- (Marmi, Moussa, Yoccoz) Υ est 1/2-Hölderienne.
- (?) $\Upsilon(\alpha)$ atteint son minimum en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.
- (C) ~~Υ est différentiable de chaque côté de chaque rationnel.~~
- (C) ~~Υ est Lipschitzienne en chaque rationnel.~~
- (C) ~~Chaque rationnel est un maximum local (en pointe).~~
- (C) ~~Le graphe possède une tangente horizontale en $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.~~

▶ meilleur graphe

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Théorème principal de cet exposé

Théorème (BC)

Pour tout intervalle I , la fonction Υ n'est δ -Hölderienne sur I pour aucun $\delta > 1/2$, et n'a pas variation bornée sur I .

En d'autres mots, si la conjecture MMY est vraie, alors $1/2$ est l'exposant optimal.

La preuve est basée sur un développement limité d' Υ aux rationnels.

La conjecture de Marmi, Moussa, Yoccoz

Théorème principal de cet exposé

Théorème (BC)

Pour tout intervalle I , la fonction Υ n'est δ -Hölderienne sur I pour aucun $\delta > 1/2$, et n'a pas variation bornée sur I .

En d'autres mots, si la conjecture MMY est vraie, alors $1/2$ est l'exposant optimal.

La preuve est basée sur un développement limité d' Υ aux rationnels.

Le développement limité

Son premier terme : la valeur de la limite

Théorème (BC 2002)

$$\gamma\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\log 2\pi}{q} + \log L_a\left(\frac{p}{q}\right) + \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

où (définitions page suivante)

L_a = taille asymptotique du point fixe parabolique de $P_{p/q}^q$,

Φ_{trunc} = somme de Brjuno tronquée.

Exemple :

Le développement limité

Son premier terme : la valeur de la limite

Théorème (BC 2002)

$$\Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\log 2\pi}{q} + \log L_a\left(\frac{p}{q}\right) + \Phi_{\text{trunc}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

où (définitions page suivante)

L_a = taille asymptotique du point fixe parabolique de $P_{p/q}^q$,

Φ_{trunc} = somme de Brjuno tronquée.

Exemple :

$$\Upsilon(0) = \log 2\pi.$$

Le développement limité

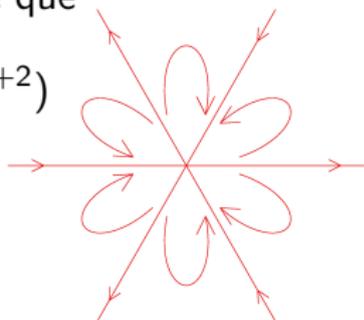
... définitions

Taille asymptotique : rappelons que $P_{p/q}$ possède en 0 un point parabolique avec exactement q pétales, c'est à dire que

$$P_{p/q}^q(z) = z + Cz^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2})$$

et $C \neq 0$. On pose alors

$$L_a = \frac{1}{|qC|^{1/q}},$$



constante qui intervient dans l'expression de la vitesse de convergence des orbites dans les pétales :

$$\left| P_{p/q}^{nq}(z) \right|_{n \rightarrow \infty} \sim L_a / n^{1/q}.$$

Le développement limité

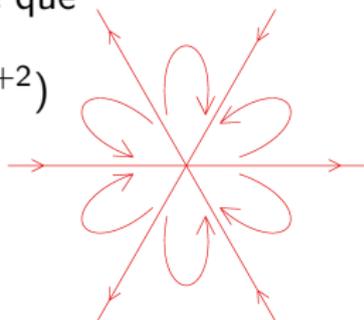
... définitions

Taille asymptotique : rappelons que $P_{p/q}$ possède en 0 un point parabolique avec exactement q pétales, c'est à dire que

$$P_{p/q}^q(z) = z + Cz^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2})$$

et $C \neq 0$. On pose alors

$$L_a = \frac{1}{|qC|^{1/q}},$$



constante qui intervient dans l'expression de la vitesse de convergence des orbites dans les pétales :

$$\left| P_{p/q}^{nq}(z) \right|_{n \rightarrow \infty} \sim L_a / n^{1/q}.$$

Le développement limité

... définitions

Somme de Brjuno : rappelons que

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_0 \cdots \alpha_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n}$$

où $\alpha_{n+1} = \text{Frac}(1/\alpha_n)$ et $\alpha_0 = \text{Frac}(\alpha)$.

Somme de Brjuno tronquée : si l'on part de $\alpha_0 = \text{Frac}(p/q)$, alors $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_m = 0$, après quoi la suite α_n n'est plus définie. On pose

$$\Phi_{\text{trunc}}(p/q) = \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_0 \cdots \alpha_{n-1} \log \frac{1}{\alpha_n}.$$

Le développement limité

Développement de quoi ?

Prenons l'un des deux développements en fraction continue de p/q :

$$p/q = [a_0, \dots, a_k] = a_0 + 1/(a_1 + \dots).$$

Soit $s \in \mathbb{R}$ et

$$x_n = [a_0, \dots, a_k, n + s] = a_0 + 1/(\dots + 1/(n + s)).$$

Selon le développement de p/q choisi, $x_n \rightarrow p/q$ soit par la gauche, soit par la droite.

Le développement limité

en lui-même

$$x_n = [a_0, \dots, a_k, n + s] = a_0 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n + s}} = \frac{p}{q} + \frac{(-1)^k}{q^2} \cdot \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Théorème (BC 2006)

Il existe des constantes $A, B_s \in \mathbb{R}$ telles que : si $s \in \mathbb{Q}$ alors

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exemple :

Le développement limité

en lui-même

$$x_n = [a_0, \dots, a_k, n + s] = a_0 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n + s}} = \frac{p}{q} + \frac{(-1)^k}{q^2} \cdot \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Théorème (BC 2006)

Il existe des constantes $A, B_s \in \mathbb{R}$ telles que : si $s \in \mathbb{Q}$ alors

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exemple :

$$\Upsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \log 2\pi + 0 - \frac{7.052\dots}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le développement limité

Définitions

- Soit l l'indice holomorphe de $P_{p/q}^q$ en 0 (aussi appelé *Invariant Formel*) et $\gamma = \frac{q+1-l}{2} =$ résidu itératif d'Écalte divisé par q .
- Soit \mathcal{E}_θ la *renormalisée parabolique* (c.à.d. l'*application de cornes*, ou encore l'*invariant de Martinet-Ramis*). C'est une famille d'applications telles que $\mathcal{E}_\theta = e^{2i\pi\theta} \mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0(0) = 0$ et $\mathcal{E}'_0(0) = 1$.
- Pour $s \in \mathbb{Q}$, soit $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$ définie par analogie avec le cas polynomial par $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s) = \log(2\pi)/q + \log L_a(\mathcal{E}, s) + \Phi_{\text{trunc}}(s)$.

Note : La famille \mathcal{E} est définie à partir des coordonnées de Fatou de $P_{p/q}^q$. Celles-ci ne sont bien définies qu'à addition près d'une constante : il y a un choix à faire à ce niveau. Modifier ce choix a pour conséquence de conjuguer la famille \mathcal{E} par une application linéaire. Cela modifie alors $L_a(\mathcal{E}, s)$ et $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$.

Le développement limité

Définitions

- Soit I l'indice holomorphe de $P_{p/q}^q$ en 0 (aussi appelé *Invariant Formel*) et $\gamma = \frac{q+1-I}{2} = \text{résidu itératif d'Écalle divisé par } q$.
- Soit \mathcal{E}_θ la *renormalisée parabolique* (c.à.d. l'*application de cornes*, ou encore l'*invariant de Martinet-Ramis*). C'est une famille d'applications telles que $\mathcal{E}_\theta = e^{2i\pi\theta} \mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0(0) = 0$ et $\mathcal{E}'_0(0) = 1$.
- Pour $s \in \mathbb{Q}$, soit $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$ définie par analogie avec le cas polynomial par $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s) = \log(2\pi)/q + \log L_a(\mathcal{E}, s) + \Phi_{\text{trunc}}(s)$.

Note : La famille \mathcal{E} est définie à partir des coordonnées de Fatou de $P_{p/q}^q$. Celles-ci ne sont bien définies qu'à addition près d'une constante : il y a un choix à faire à ce niveau. Modifier ce choix a pour conséquence de conjuguer la famille \mathcal{E} par une application linéaire. Cela modifie alors $L_a(\mathcal{E}, s)$ et $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$.

Le développement limité

Le terme logarithmique

Rappel

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$A = -\frac{q_{k-1}}{q^2} - \nu \frac{2\pi \operatorname{Im} \gamma\left(\frac{p}{q}\right)}{q}.$$

où

- $\nu = (-1)^k$ détermine le côté par lequel $x_n \rightarrow p/q$,
- q_{k-1} est le dénominateur de l'avant-dernière réduite p_{k-1}/q_{k-1} de p/q .

Les nombres ν , q_{k-1} et A dépendent tous du choix de la fraction continue de p/q .

Le développement limité

Définitions

- Soit l l'indice *holomorphe* de $P_{p/q}^q$ en 0 (aussi appelé *Invariant Formel*) et $\gamma = \frac{q+1-l}{2} = \text{résidu itératif d'Écalle divisé par } q$.
- Soit \mathcal{E}_θ la *renormalisée parabolique* (c.à.d. l'*application de cornes*, ou encore l'*invariant de Martinet-Ramis*). C'est une famille d'applications telles que $\mathcal{E}_\theta = e^{2i\pi\theta} \mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0(0) = 0$ et $\mathcal{E}'_0(0) = 1$.
- Pour $s \in \mathbb{Q}$, soit $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$ définie par analogie avec le cas polynomial par $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s) = \log(2\pi)/q + \log L_a(\mathcal{E}, s) + \Phi_{\text{trunc}}(s)$.

Note : La famille \mathcal{E} est définie à partir des coordonnées de Fatou de $P_{p/q}^q$. Celles-ci ne sont bien définies qu'à addition près d'une constante : il y a un choix à faire à ce niveau. Modifier ce choix a pour conséquence de conjuguer la famille \mathcal{E} par une application linéaire. Cela modifie alors $L_a(\mathcal{E}, s)$ et $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$.

Le développement limité

Définitions

- Soit l l'indice *holomorphe* de $P_{p/q}^q$ en 0 (aussi appelé *Invariant Formel*) et $\gamma = \frac{q+1-l}{2} = \text{résidu itératif d'Écalle divisé par } q$.
- Soit \mathcal{E}_θ la *renormalisée parabolique* (c.à.d. l'*application de cornes*, ou encore l'*invariant de Martinet-Ramis*). C'est une famille d'applications telles que $\mathcal{E}_\theta = e^{2i\pi\theta} \mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0(0) = 0$ et $\mathcal{E}'_0(0) = 1$.
- Pour $s \in \mathbb{Q}$, soit $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$ définie par analogie avec le cas polynomial par $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s) = \log(2\pi)/q + \log L_a(\mathcal{E}, s) + \Phi_{\text{trunc}}(s)$.

Note : La famille \mathcal{E} est définie à partir des coordonnées de Fatou de $P_{p/q}^q$. Celles-ci ne sont bien définies qu'à addition près d'une constante : il y a un choix à faire à ce niveau. Modifier ce choix a pour conséquence de conjuguer la famille \mathcal{E} par une application linéaire. Cela modifie alors $L_a(\mathcal{E}, s)$ et $\Upsilon_{\mathcal{E}}(s)$.

Le développement limité

Le terme linéaire

Rappel

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$B_s = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{q} + c$$

où c est une constante qui dépend des choix de coordonnées de Fatou.

Le développement limité

Dépendance en s

Écrivons en vert les termes dépendant de s .

$$x_n = [a_0, \dots, a_k, n + s] = a_0 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n + s}}$$

Le développement

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$B_s = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{q} + c$$

Le développement limité

Application au manque de régularité de Υ

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$B_s = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{q} + c$$

Maintenant, on prend deux rationnels $s, s' \in \mathbb{Q}$ et on pose

$$x_n = [a_0, \dots, a_k, n + s]$$

$$x'_n = [a_0, \dots, a_k, n + s']$$

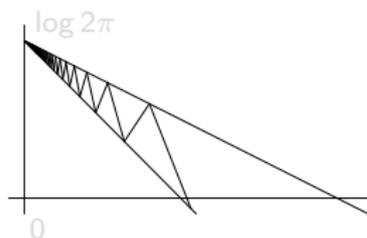
Alors quand $n \rightarrow +\infty$, d'une part

$$x'_n - x_n \sim \frac{\text{cst}}{n^2}$$

pour une certaine constante $\text{cst} = \nu \frac{s - s'}{q^2}$, d'autre part

$$\Upsilon(x'_n) - \Upsilon(x_n) = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s') - \Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{qn} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, pour que notre théorème principal soit vrai près de p/q , il suffit que $\Upsilon_{\mathcal{E}}$ soit une fonction *non constante*. On sait démontrer cette non-constance.



► Details

Le développement limité

Application au manque de régularité de Υ

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$B_s = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{q} + c$$

Maintenant, on prend deux rationnels $s, s' \in \mathbb{Q}$ et on pose

$$x_n = [a_0, \dots, a_k, n + s]$$

$$x'_n = [a_0, \dots, a_k, n + s']$$

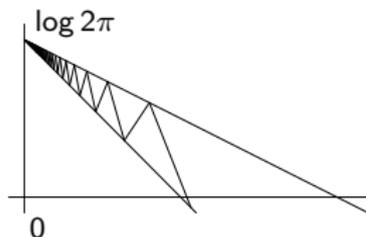
Alors quand $n \rightarrow +\infty$, d'une part

$$x'_n - x_n \sim \frac{\text{cst}}{n^2}$$

pour une certaine constante $\text{cst} = \nu \frac{s - s'}{q^2}$, d'autre part

$$\Upsilon(x'_n) - \Upsilon(x_n) = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s') - \Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{qn} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, pour que notre théorème principal soit vrai près de p/q , il suffit que $\Upsilon_{\mathcal{E}}$ soit une fonction *non constante*. On sait démontrer cette non-constance.



► Details

Le développement limité

Application au manque de régularité de Υ

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$B_s = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{q} + c$$

Maintenant, on prend deux rationnels $s, s' \in \mathbb{Q}$ et on pose

$$x_n = [a_0, \dots, a_k, n + s]$$

$$x'_n = [a_0, \dots, a_k, n + s']$$

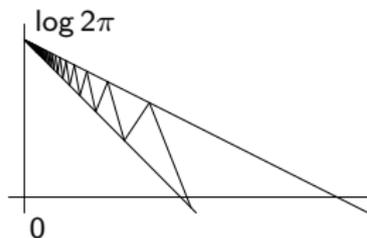
Alors quand $n \rightarrow +\infty$, d'une part

$$x'_n - x_n \sim \frac{\text{cst}}{n^2}$$

pour une certaine constante $\text{cst} = \nu \frac{s - s'}{q^2}$, d'autre part

$$\Upsilon(x'_n) - \Upsilon(x_n) = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s') - \Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{qn} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

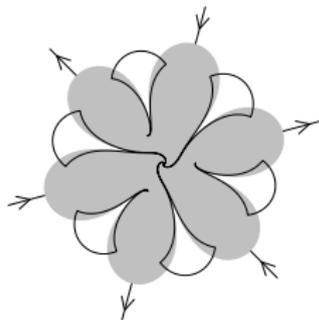
Ainsi, pour que notre théorème principal soit vrai près de p/q , il suffit que $\Upsilon_{\mathcal{E}}$ soit une fonction *non constante*. On sait démontrer cette non-constance. [▶ Détails](#)



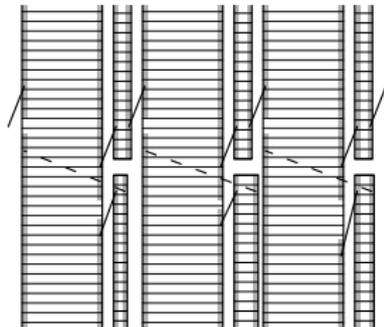
Le développement limité

Idée de la preuve

Il s'agit d'implosion parabolique. Notons $f_n = P_{\chi_n}^q$. On compare la dynamique de f_n à celle d'un champ de vecteur χ_n : plus précisément on compare f_n à g_n , flot de χ_n au temps 1.



On travaille dans des coordonnées qui redressent le champ de vecteurs. Ces coordonnées définissent une surface de Riemann dont les changements de cartes sont des translations. Les points fixes non multiples du champ de vecteur correspondent à des "cylindres obliques" de cette surface de translation.



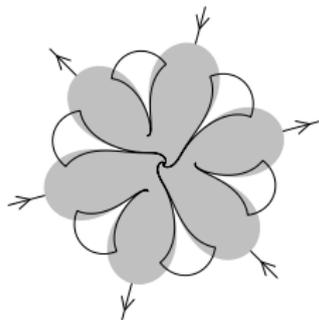
Dans ces coordonnées, g_n devient la translation $T_1(z) = z + 1$ et f_n devient une application F_n proche de T_1 . Souvent, c'est le champ de vecteurs $\chi_n = f_n(z) - z$ qui est utilisé. Il a certes les mêmes points fixes que f_n , mais le champ de vecteurs $\chi_n = (f_n - z)^{\frac{\log f'_n}{f'_n - 1}}$ a l'avantage de donner à g_n les mêmes multiplicateurs que f_n aux points fixes. Alors F_n tend vers T_1 aux bouts des cylindres. On définit ensuite des cylindres fondamentaux, une application de premier retour \mathcal{R}_n , puis on démontre la convergence vers la situation parabolique : \mathcal{R}_n tend vers l'application de cornes. Il faut également relier la valeur de la taille asymptotique pour \mathcal{R}_n à celle de f_n : cela se fait en estimant finement le changement de variables.

Utilité du champ de vecteurs χ_n : permettre de travailler avec F_n , plus simple, d'effectuer les estimées, et de démontrer la convergence.

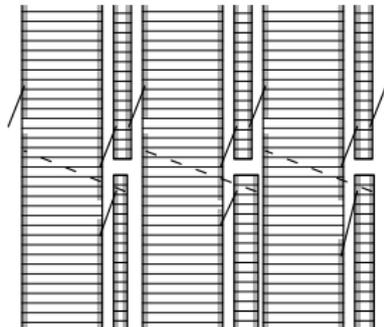
Le développement limité

Idée de la preuve

Il s'agit d'implosion parabolique. Notons $f_n = P_{x_n}^q$. On compare la dynamique de f_n à celle d'un champ de vecteur χ_n : plus précisément on compare f_n à g_n , flot de χ_n au temps 1.



On travaille dans des coordonnées qui redressent le champ de vecteurs. Ces coordonnées définissent une surface de Riemann dont les changements de cartes sont des translations. Les points fixes non multiples du champ de vecteur correspondent à des "cylindres obliques" de cette surface de translation.



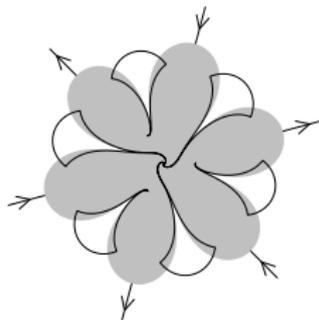
Dans ces coordonnées, g_n devient la translation $T_1(z) = z + 1$ et f_n devient une application F_n proche de T_1 . Souvent, c'est le champ de vecteurs $\chi_n = f_n(z) - z$ qui est utilisé. Il a certes les mêmes points fixes que f_n , mais le champ de vecteurs $\chi_n = (f_n - z)^{\frac{\log f'_n}{f'_n - 1}}$ a l'avantage de donner à g_n les mêmes multiplicateurs que f_n aux points fixes. Alors F_n tend vers T_1 aux bouts des cylindres. On définit ensuite des cylindres fondamentaux, une application de premier retour \mathcal{R}_n , puis on démontre la convergence vers la situation parabolique : \mathcal{R}_n tend vers l'application de cornes. Il faut également relier la valeur de la taille asymptotique pour \mathcal{R}_n à celle de f_n : cela se fait en estimant finement le changement de variables.

Utilité du champ de vecteurs χ_n : permettre de travailler avec F_n , plus simple, d'effectuer les estimées, et de démontrer la convergence.

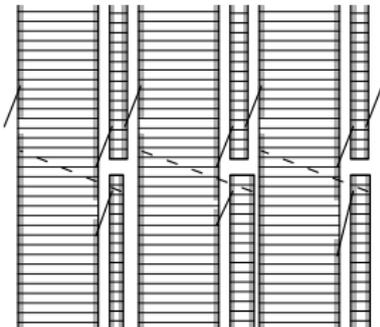
Le développement limité

Idée de la preuve

Il s'agit d'implosion parabolique. Notons $f_n = P_{x_n}^q$. On compare la dynamique de f_n à celle d'un champ de vecteur χ_n : plus précisément on compare f_n à g_n , flot de χ_n au temps 1.



On travaille dans des coordonnées qui redressent le champ de vecteurs. Ces coordonnées définissent une surface de Riemann dont les changements de cartes sont des translations. Les points fixes non multiples du champ de vecteur correspondent à des "cylindres obliques" de cette surface de translation.



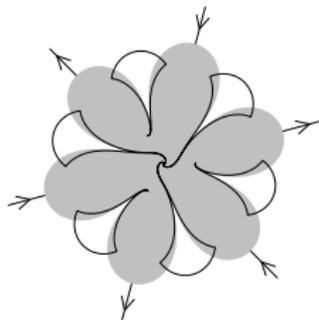
Dans ces coordonnées, g_n devient la translation $T_1(z) = z + 1$ et f_n devient une application F_n proche de T_1 . Souvent, c'est le champ de vecteurs $\chi_n = f_n(z) - z$ qui est utilisé. Il a certes les mêmes points fixes que f_n , mais le champ de vecteurs $\chi_n = (f_n - z)^{\frac{\log f'_n}{f'_n - 1}}$ a l'avantage de donner à g_n les mêmes multiplicateurs que f_n aux points fixes. Alors F_n tend vers T_1 aux bouts des cylindres. On définit ensuite des cylindres fondamentaux, une application de premier retour \mathcal{R}_n , puis on démontre la convergence vers la situation parabolique : \mathcal{R}_n tend vers l'application de cornes. Il faut également relier la valeur de la taille asymptotique pour \mathcal{R}_n à celle de f_n : cela se fait en estimant finement le changement de variables.

Utilité du champ de vecteurs χ_n : permettre de travailler avec F_n , plus simple, d'effectuer les estimées, et de démontrer la convergence.

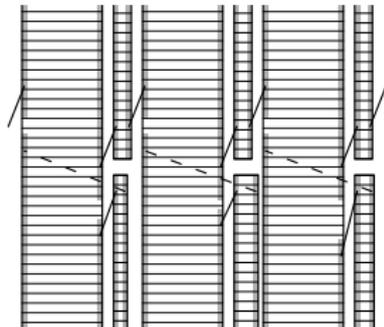
Le développement limité

Idée de la preuve

Il s'agit d'implosion parabolique. Notons $f_n = P_{x_n}^q$. On compare la dynamique de f_n à celle d'un champ de vecteur χ_n : plus précisément on compare f_n à g_n , flot de χ_n au temps 1.



On travaille dans des coordonnées qui redressent le champ de vecteurs. Ces coordonnées définissent une surface de Riemann dont les changements de cartes sont des translations. Les points fixes non multiples du champ de vecteur correspondent à des "cylindres obliques" de cette surface de translation.



Dans ces coordonnées, g_n devient la translation $T_1(z) = z + 1$ et f_n devient une application F_n proche de T_1 . Souvent, c'est le champ de vecteurs $\chi_n = f_n(z) - z$ qui est utilisé. Il a certes les mêmes points fixes que f_n , mais le champ de vecteurs $\chi_n = (f_n - z)^{\frac{\log f'_n}{f'_n - 1}}$ a l'avantage de donner à g_n les mêmes multiplicateurs que f_n aux points fixes. Alors F_n tend vers T_1 aux bouts des cylindres. On définit ensuite des cylindres fondamentaux, une application de premier retour \mathcal{R}_n , puis on démontre la convergence vers la situation parabolique : \mathcal{R}_n tend vers l'application de cornes. Il faut également relier la valeur de la taille asymptotique pour \mathcal{R}_n à celle de f_n : cela se fait en estimant finement le changement de variables.

Utilité du champ de vecteurs χ_n : permettre de travailler avec F_n , plus simple, d'effectuer les estimées, et de démontrer la convergence.

Une normalisation des coord. de Fatou

Rappel

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$B_s = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{q} + c$$

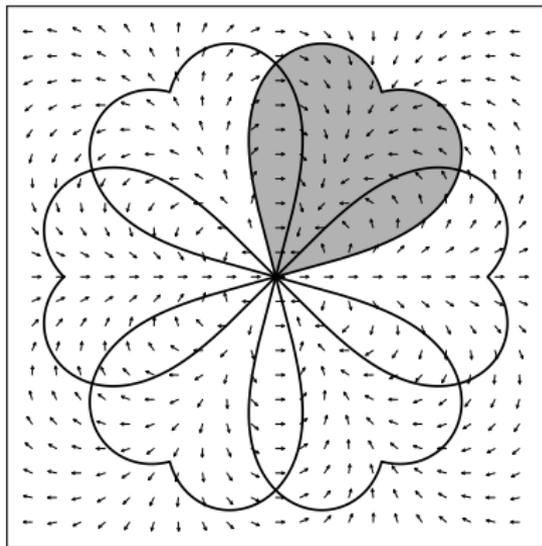
Rappelons que $\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)$ et c dépendent du choix de coordonnées de Fatou (par contre, la quantité B_s en est indépendante).

Nous allons décrire dans quelques pages une *normalisation des coordonnées de Fatou*, c'est à dire en fixer un choix particulier.

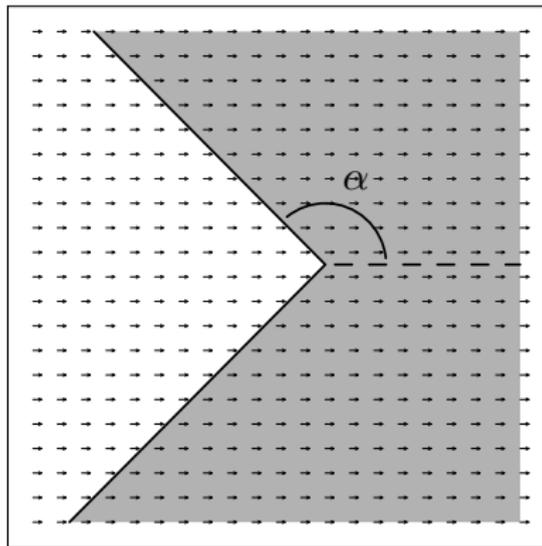
Ce choix étant fait, nous pourrons donner la valeur de la constante c correspondante.

Une normalisation des coord. de Fatou

Les coordonnées de Fatou



coord. F.
→



Un α -pétale est un pétale envoyé par les coordonnées de Fatou sur un secteur d'axe de symétrie horizontal et d'ouverture = 2α .

Une normalisation des coord. de Fatou

Un développement des coordonnées de Fatou

Considérons la forme différentielle suivante, où pol désigne la partie polaire :

$$\omega = \text{pol}\left(\frac{1}{f(z) - z} + \frac{q+1}{2z}\right) dz = \text{pol}\left(\frac{f' - 1}{(f - z) \log f'}\right) dz$$

Théorème

Quand $z \rightarrow 0$ dans un α -pétale ($\alpha < \pi$) :

$$\phi - \int \omega \rightarrow \text{cst}$$

Une normalisation des coord. de Fatou

La normalisation

On normalise d'abord la primitive de ω . On a

$$\omega = \left(\frac{C}{z^{q+1}} + \frac{a_{-q}}{z^q} + \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{\gamma q}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \right) dz.$$

où $C \in \mathbb{C}$ est la constante du développement $P_{p/q}^q(z) = z + Cz^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2})$.

Sur un α -pétale donné, on choisit alors la primitive $\int_{\text{nor}} \omega$ telle que

$$\int_{\text{nor}} \omega = \frac{-1}{qCz^q} - \frac{a_{-q}}{(q-1)z^{q-1}} - \dots - \frac{a_{-2}}{z} + \gamma \log(\pm qCz^q) + 0 + o(1)$$

pour la branche de $z \mapsto \log(\dots)$ qui est réelle sur l'axe du pétale (sur cet axe, on a justement $\pm qCz^q > 0$).

Une fois normalisée $\int \omega$, on normalise la coordonnée de Fatou ϕ en demandant

que $\phi_{\text{nor}} - \int_{\text{nor}} \omega \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$ dans le pétale.

Une normalisation des coord. de Fatou

La normalisation

On normalise d'abord la primitive de ω . On a

$$\omega = \left(\frac{C}{z^{q+1}} + \frac{a_{-q}}{z^q} + \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{\gamma q}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \right) dz.$$

où $C \in \mathbb{C}$ est la constante du développement $P_{p/q}^q(z) = z + Cz^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2})$.

Sur un α -pétale donné, on choisit alors la primitive $\int_{\text{nor}} \omega$ telle que

$$\int_{\text{nor}} \omega = \frac{-1}{qCz^q} - \frac{a_{-q}}{(q-1)z^{q-1}} - \dots - \frac{a_{-2}}{z} + \gamma \log(\pm qCz^q) + 0 + o(1)$$

pour la branche de $z \mapsto \log(\dots)$ qui est réelle sur l'axe du pétale (sur cet axe, on a justement $\pm qCz^q > 0$).

Une fois normalisée $\int \omega$, on normalise la coordonnée de Fatou ϕ en demandant

que $\phi_{\text{nor}} - \int_{\text{nor}} \omega \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$ dans le pétale.

Expression d'une constante

La constante c

Rappel

$$\Upsilon(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \Upsilon\left(\frac{p}{q}\right) + A \frac{\log n}{n} + B_s \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$B_s = \frac{\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)}{q} + c$$

Nous travaillons maintenant avec les coordonnées de Fatou normalisées. Cela fixe les valeurs de $\Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu s)$ et de c (la quantité B_s est par contre indépendante de la normalisation).

Ce choix étant fait, nous pouvons donner la valeur de la constante c correspondante. Pour cela, il nous faut introduire encore une constante.

Expression d'une constante

Encore une constante...

Partons de $\theta = p/q$ et perturbons-le : $\theta = p/q + \varepsilon$. Alors le point parabolique de $P_{p/q}$ explose en un cycle $\langle z_1, \dots, z_q \rangle$ de P_θ . Soit

$$\sigma(\varepsilon) = \prod z_i.$$

Alors σ est une fonction analytique de ε et

$$\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

On pose :

$$\Gamma = \frac{-1}{4i\pi q^2} \cdot \frac{b}{a}$$

Expression d'une constante

... et encore des constantes

Théorème

Pour les *coordonnées de Fatou normalisées* :

$$c = (c_{\text{arith}} + c_{\text{geom}})\nu + \frac{\pi^2}{q} \operatorname{Re} \gamma \left(\frac{p}{q} \right)$$

$$c_{\text{arith}} = -\frac{1}{q^2} \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(q_{k-1} \log \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_0 \cdots \alpha_k} \right) + (-1)^m q_{m-1} \right)$$

$$c_{\text{geom}} = \frac{2\pi}{q} \operatorname{Im} (\Gamma + \gamma \log 2\pi).$$

Pour une fraction p/q donnée, les nombres c_{arith} et c_{geom} sont indépendants du côté duquel $x_n \rightarrow p/q$ (c.à.d. indépendants du signe de ν).

Fin

Merci pour votre attention.

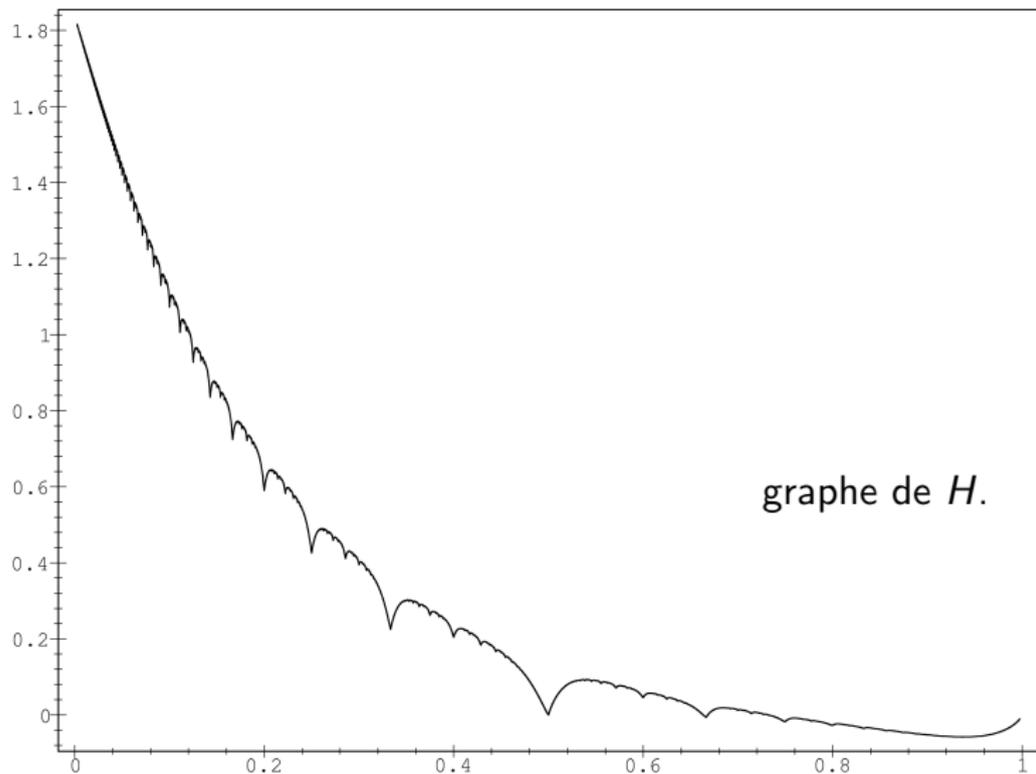
La fonction arithmétique Φ satisfait l'équation fonctionnelle suivante

$$\forall \alpha \in]0, 1], \quad \Phi(\alpha) - \alpha\Phi(1/\alpha) = \log \frac{1}{\alpha}.$$

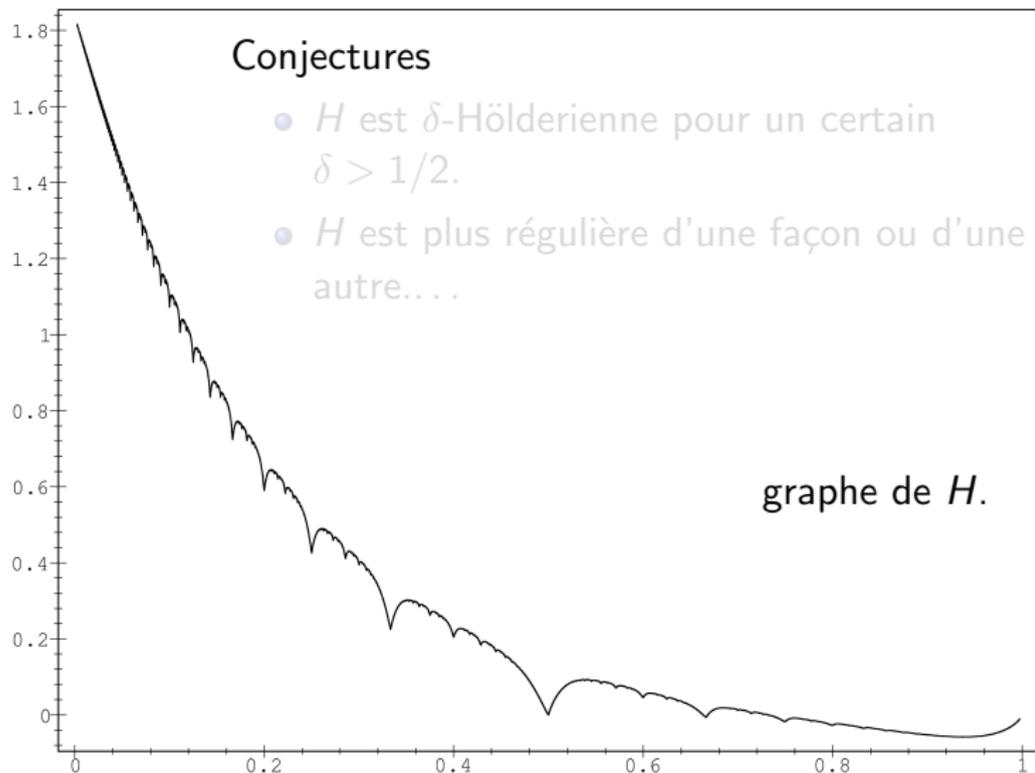
Il est donc naturel de s'intéresser à

$$H(\alpha) = \Upsilon(\alpha) - \alpha\Upsilon(1/\alpha).$$

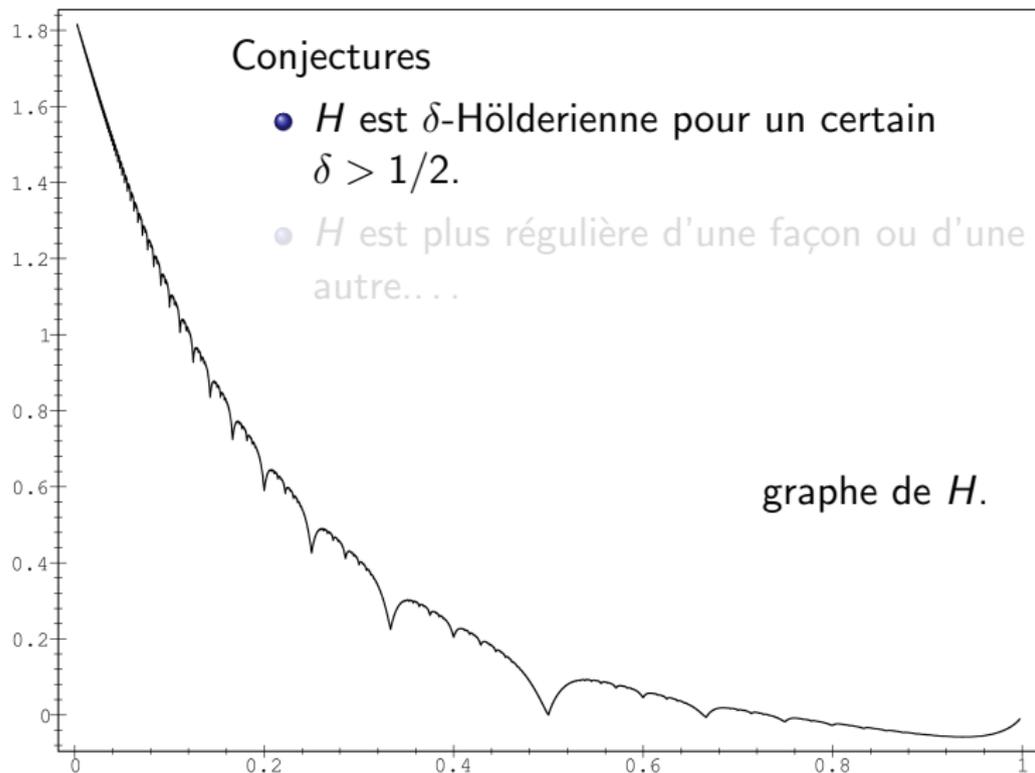
L'équation fonctionnelle



L'équation fonctionnelle



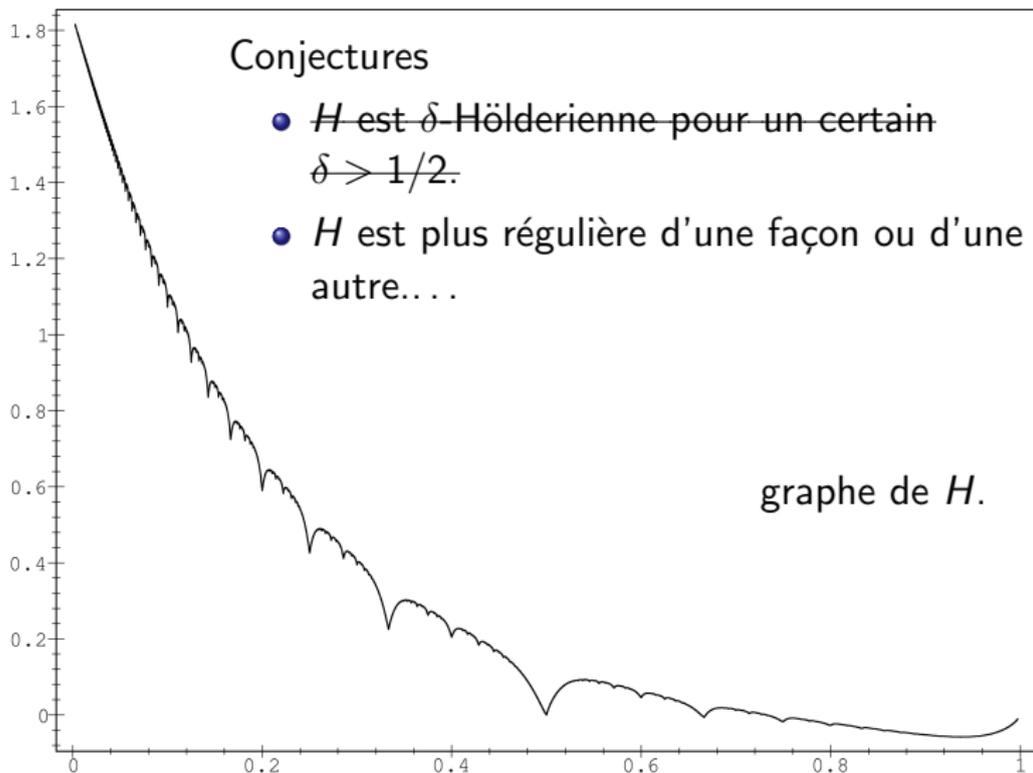
L'équation fonctionnelle



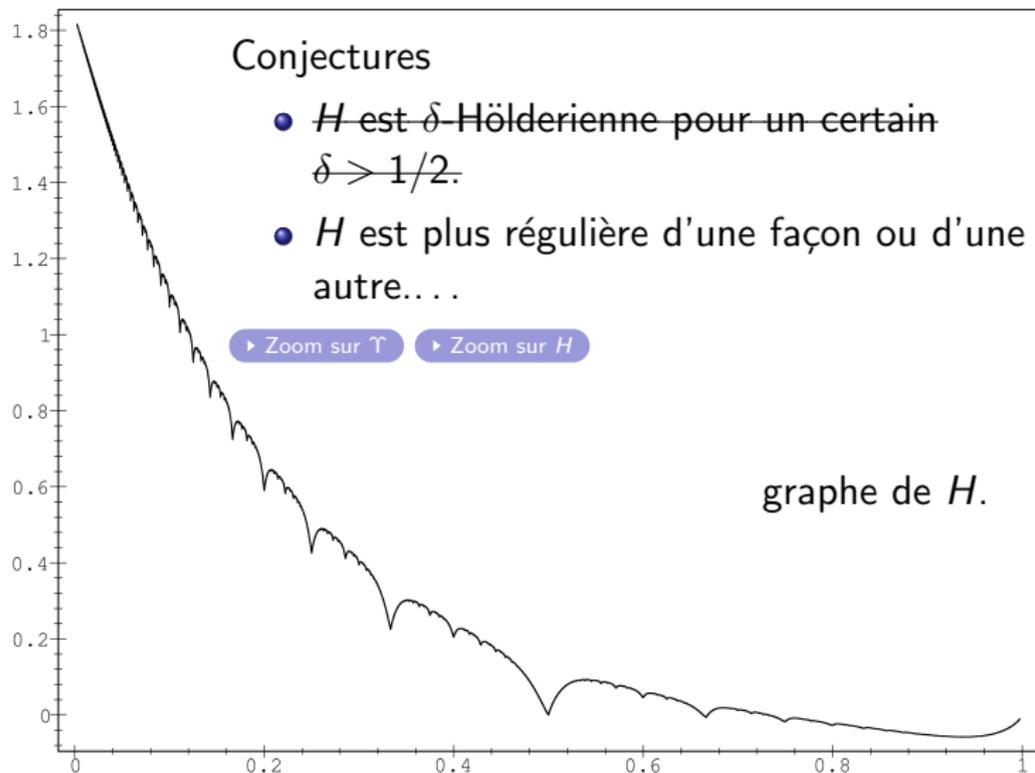
L'équation fonctionnelle

Conjectures

- ~~H est δ -Hölderienne pour un certain $\delta > 1/2$.~~
- H est plus régulière d'une façon ou d'une autre....



L'équation fonctionnelle



Le développement limité

Une conjecture

Notre développement implique que la fonction

$$\frac{\Upsilon\left(\frac{p}{q} + \nu\varepsilon\right) - \Upsilon(p/q)}{\varepsilon} + \nu q^2 A \log \varepsilon.$$

où l'on substitue $\varepsilon = \frac{1}{n+x}$ converge simplement pour $x \in \mathbb{Q}$ vers la fonction

$$\nu q^2 (B_x - A \log q^2) = \nu q \Upsilon_{\varepsilon}(-\nu x) + \text{cst}.$$

Conjecture

La convergence est uniforme.

► Illustration

Le développement limité

Une conjecture

Notre développement implique que la fonction

$$\frac{\Upsilon\left(\frac{p}{q} + \nu\varepsilon\right) - \Upsilon(p/q)}{\varepsilon} + \nu q^2 A \log \varepsilon.$$

où l'on substitue $\varepsilon = \frac{1}{n+x}$ converge simplement pour $x \in \mathbb{Q}$ vers la fonction

$$\nu q^2 (B_x - A \log q^2) = \nu q \Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu x) + \text{cst.}$$

Conjecture

La convergence est uniforme.

► Illustration

Le développement limité

Une conjecture

Notre développement implique que la fonction

$$\frac{\Upsilon\left(\frac{p}{q} + \nu\varepsilon\right) - \Upsilon(p/q)}{\varepsilon} + \nu q^2 A \log \varepsilon.$$

où l'on substitue $\varepsilon = \frac{1}{n+x}$ converge simplement pour $x \in \mathbb{Q}$ vers la fonction

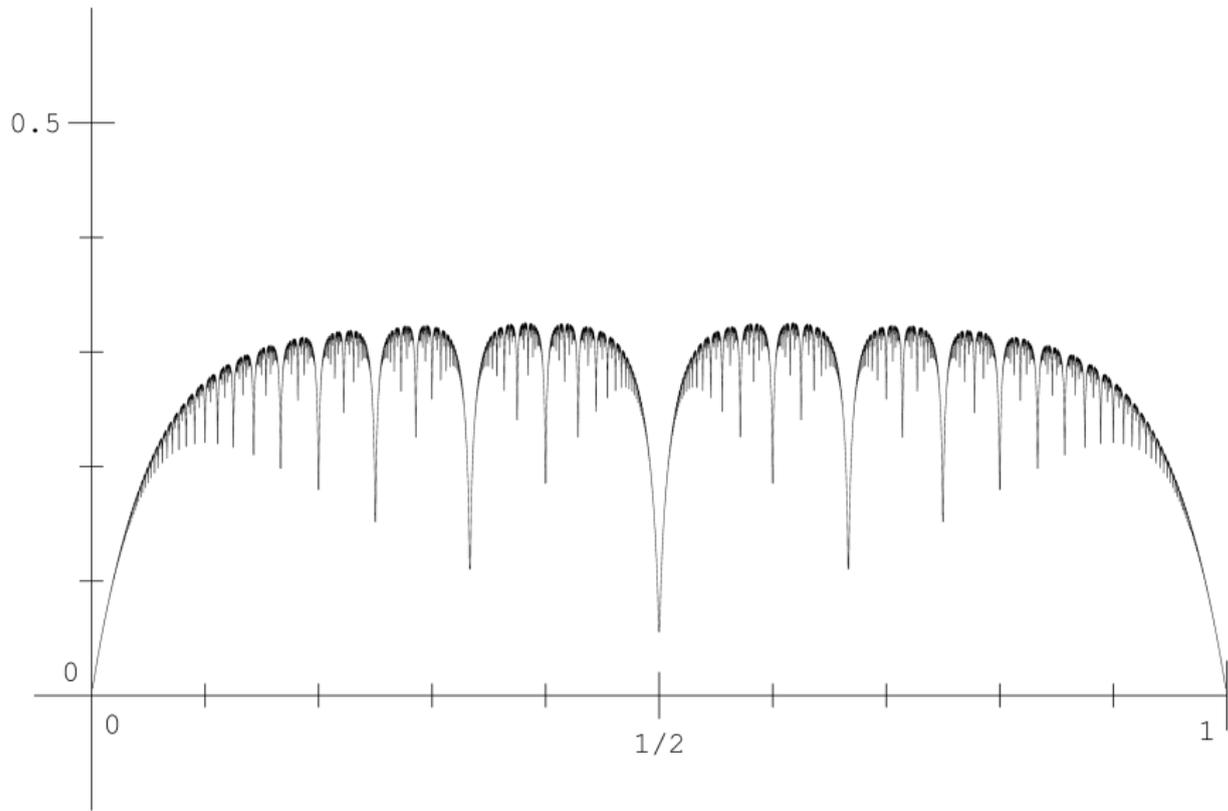
$$\nu q^2 (B_x - A \log q^2) = \nu q \Upsilon_{\mathcal{E}}(-\nu x) + \text{cst.}$$

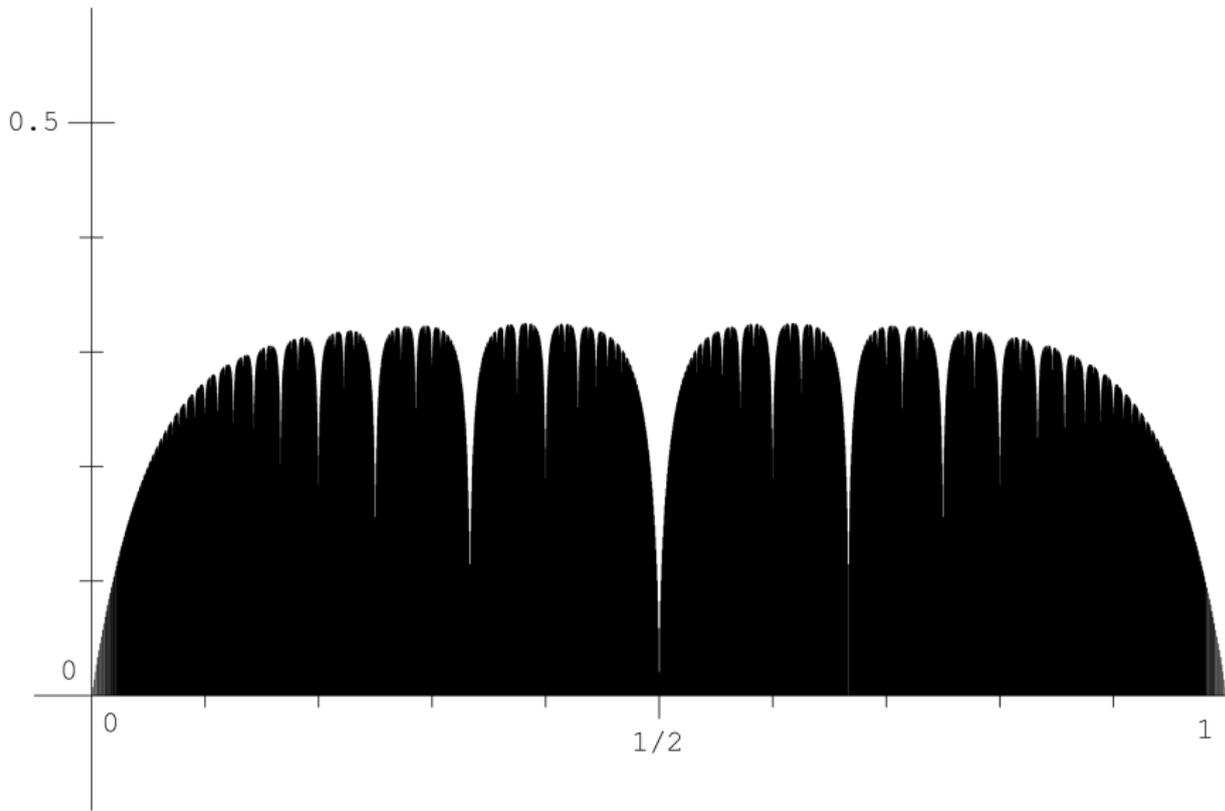
Conjecture

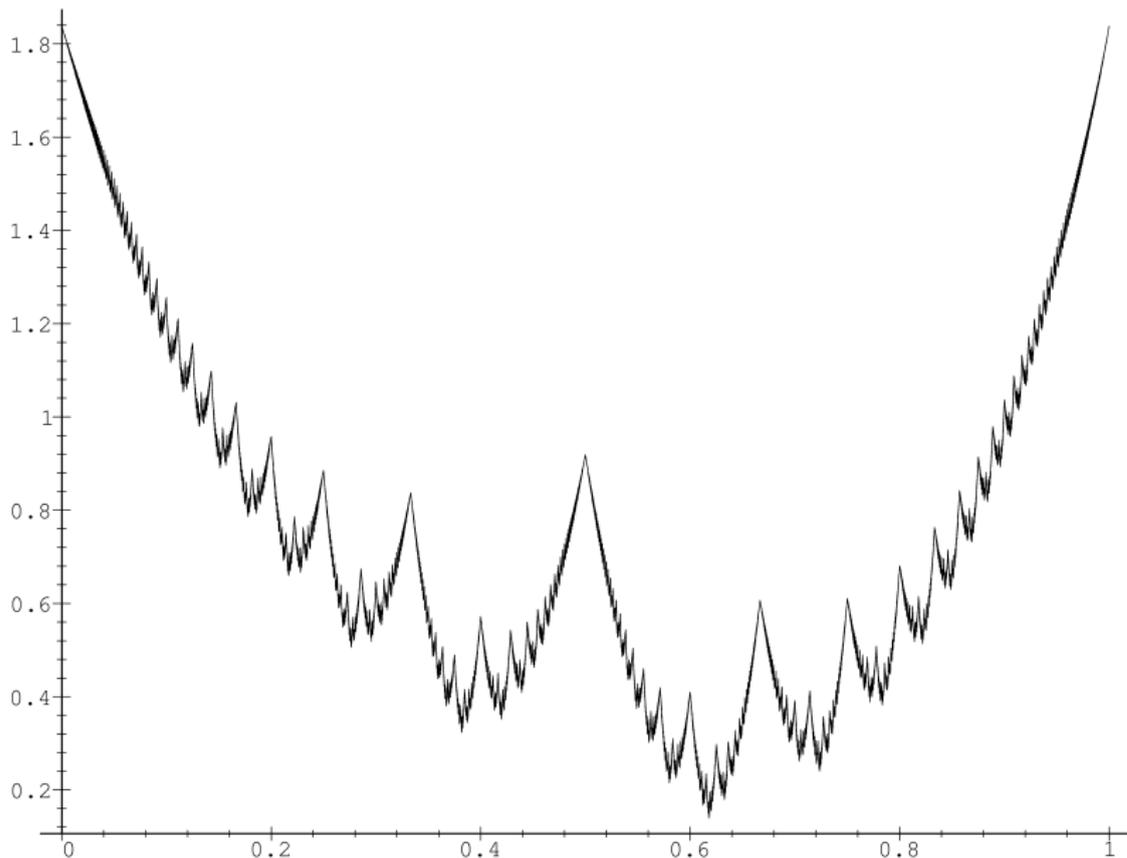
La convergence est uniforme.

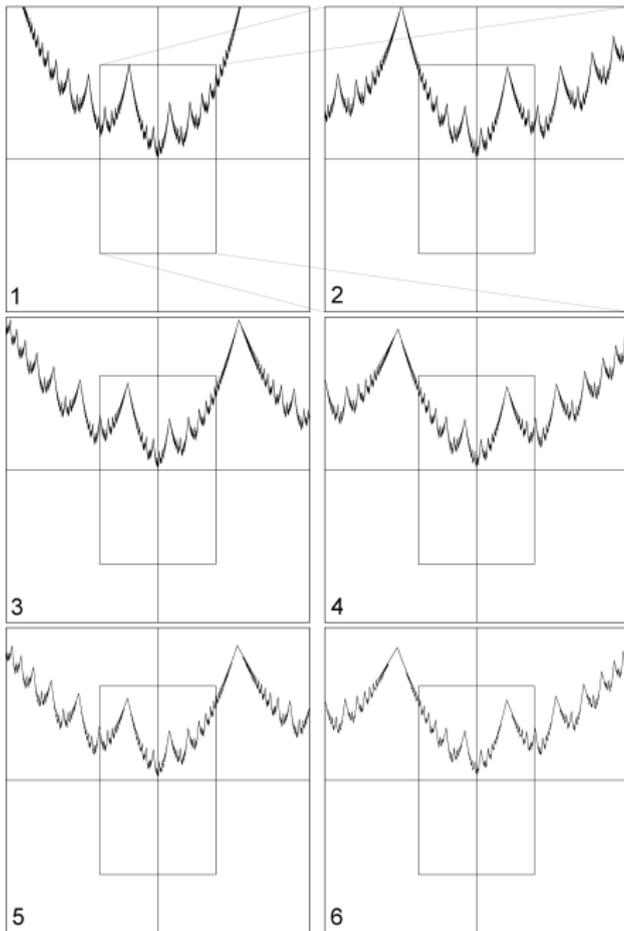
► Illustration

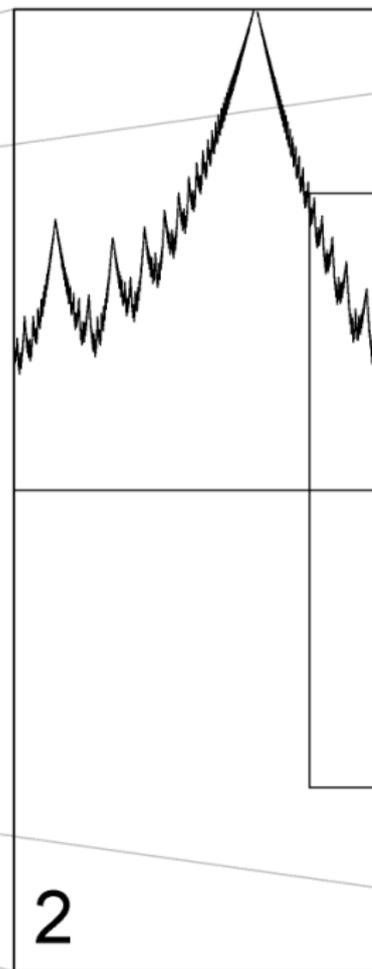
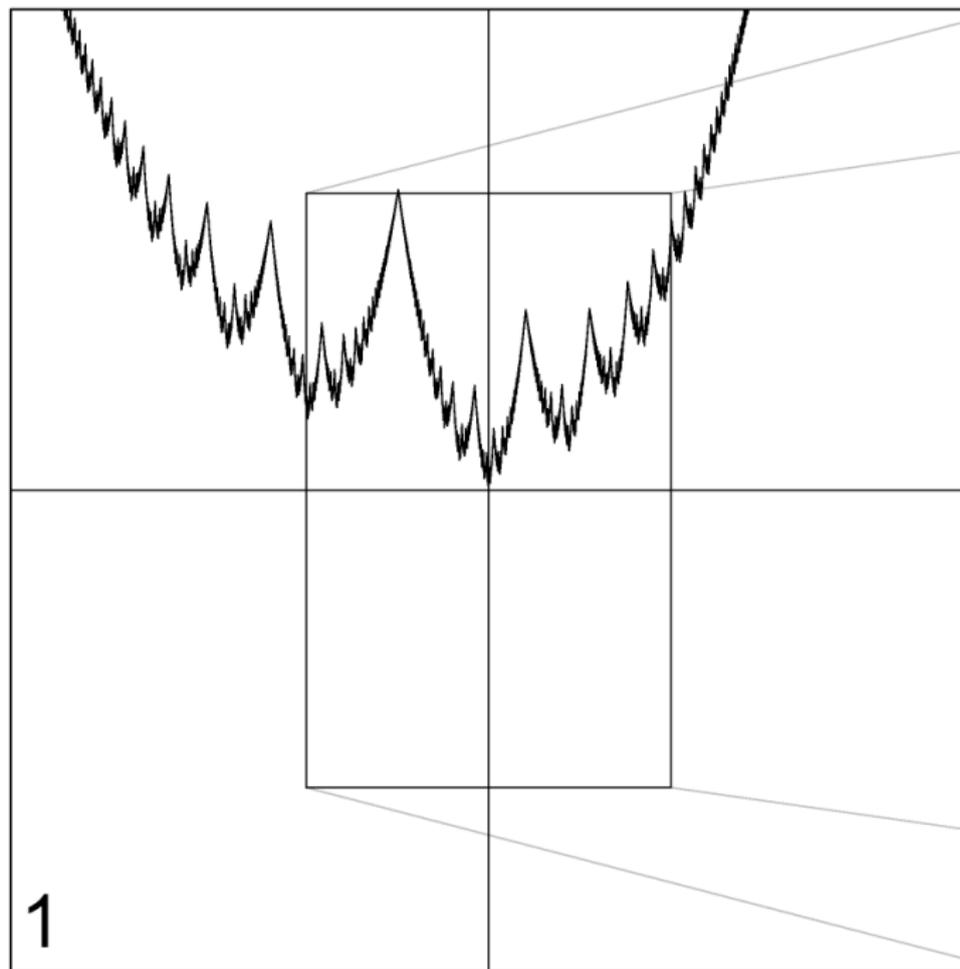
Merci beaucoup.

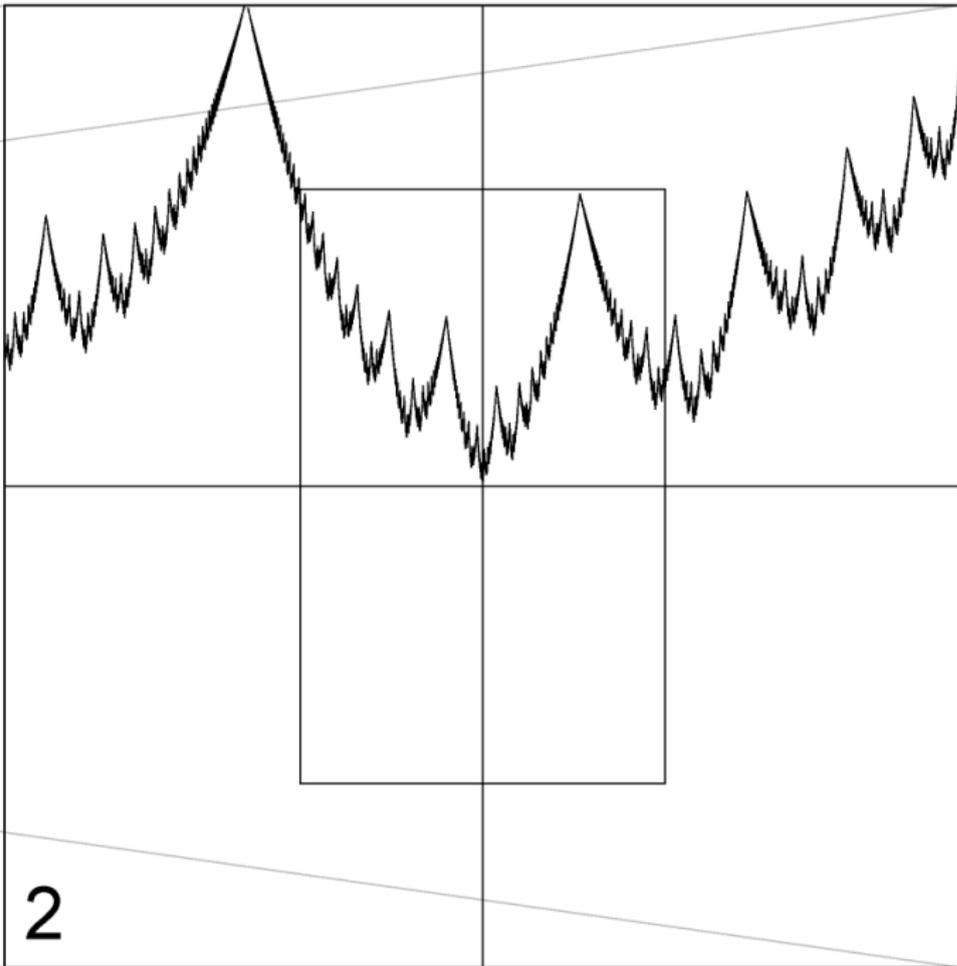




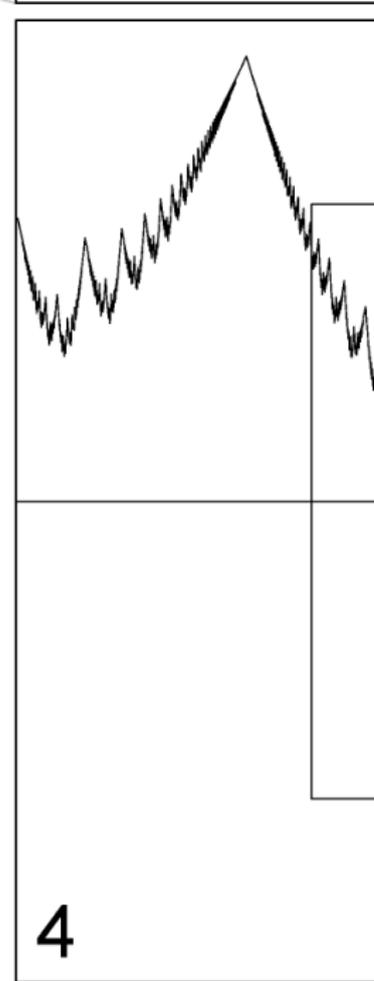
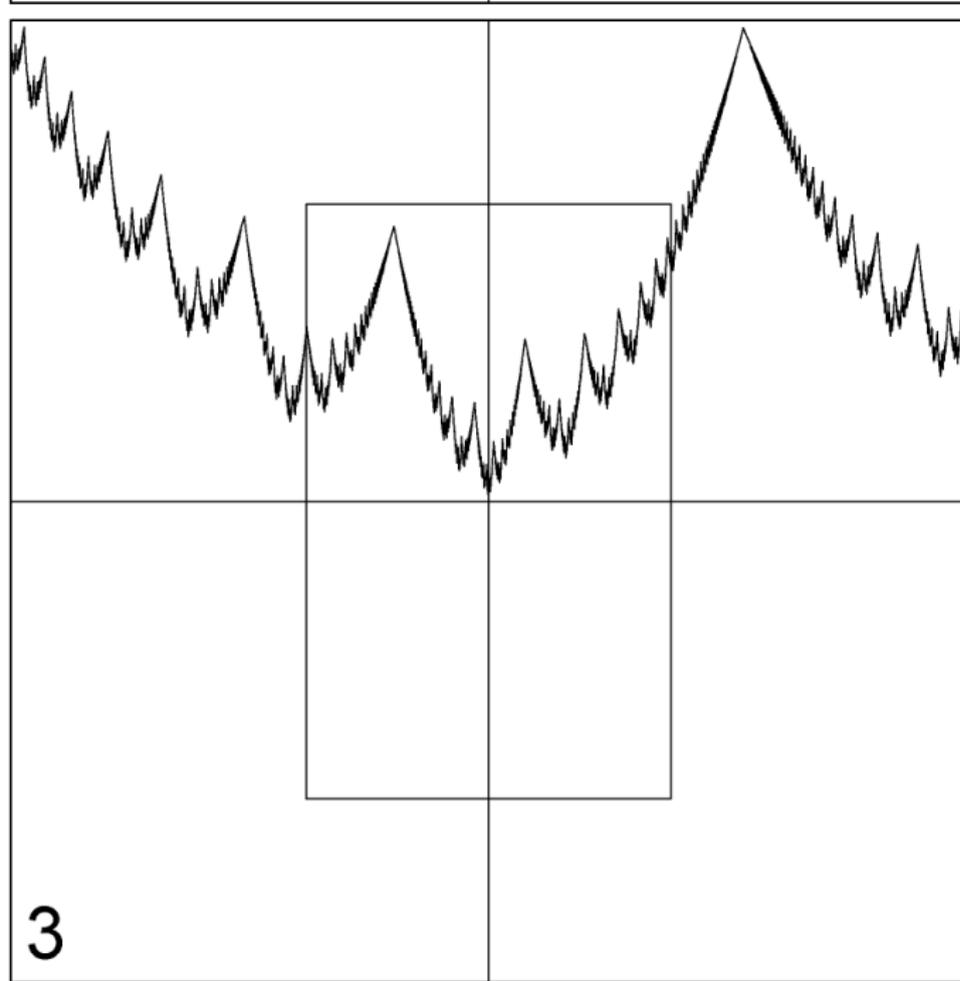


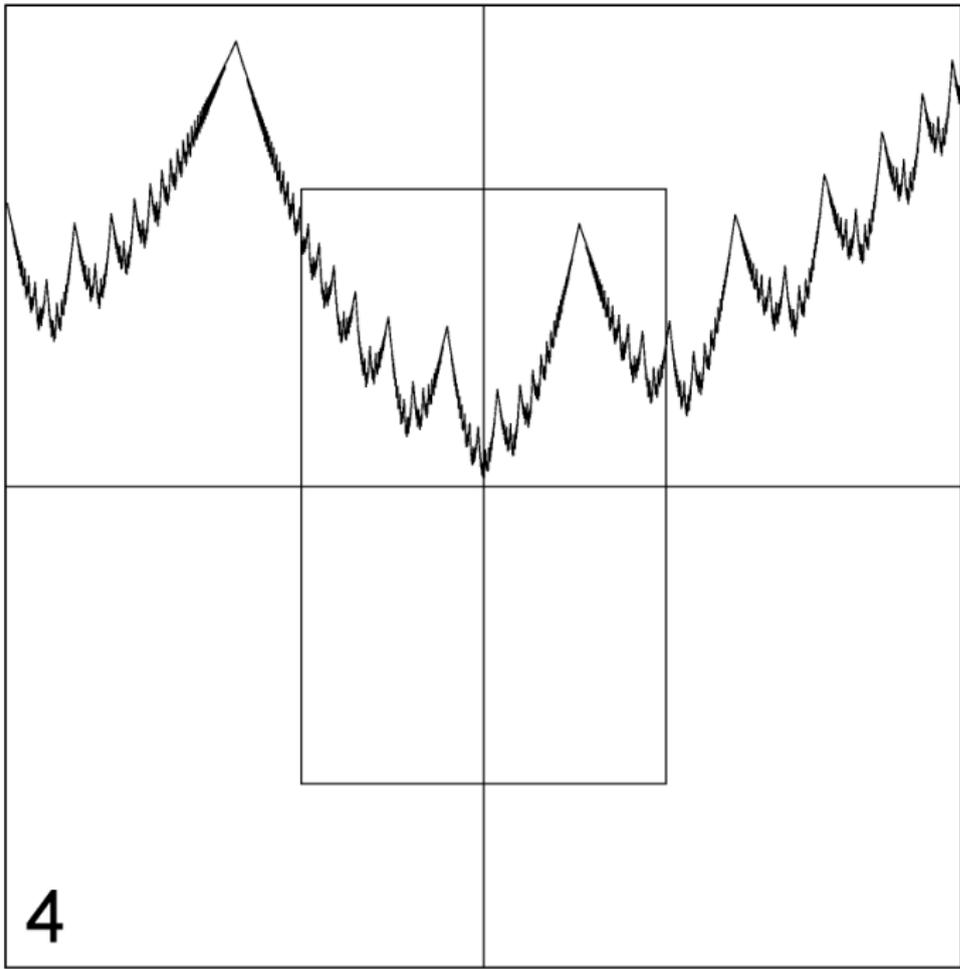




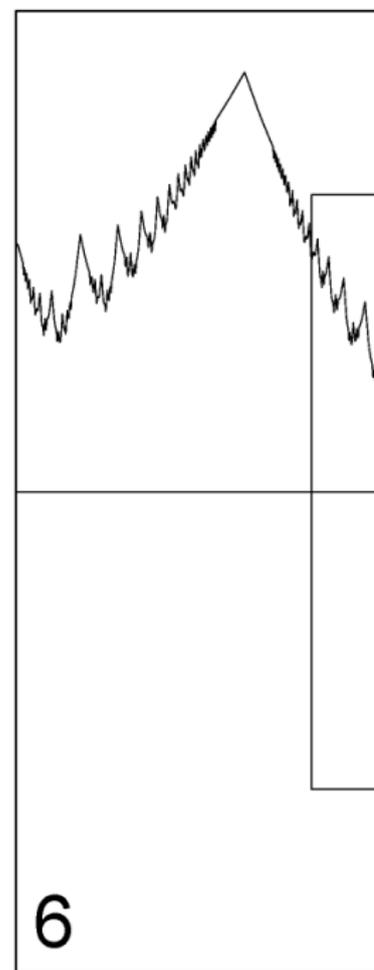
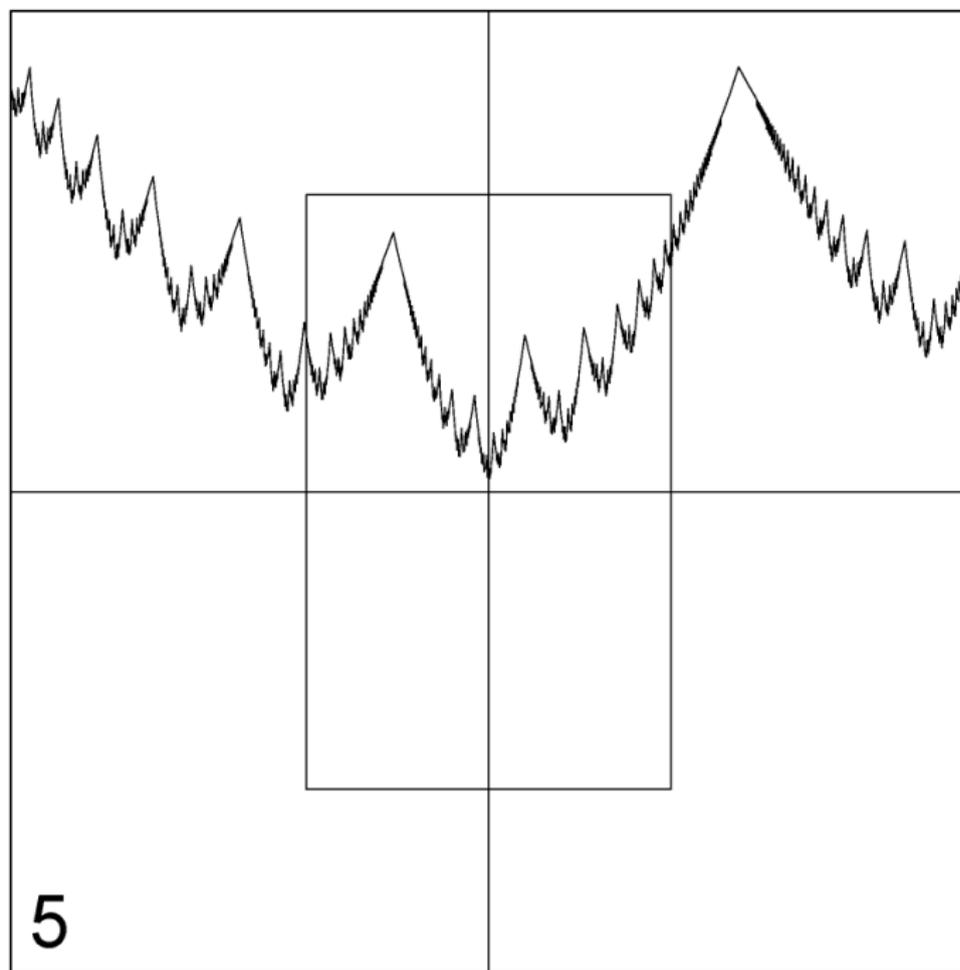


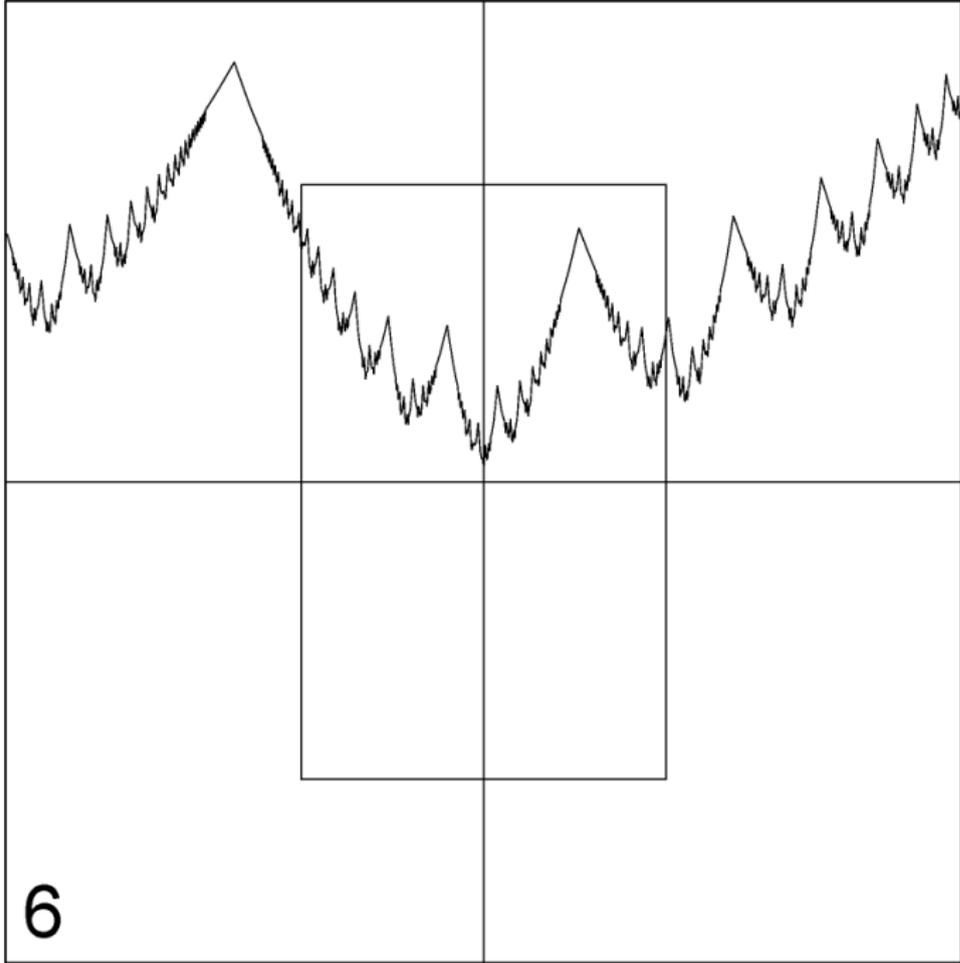
2



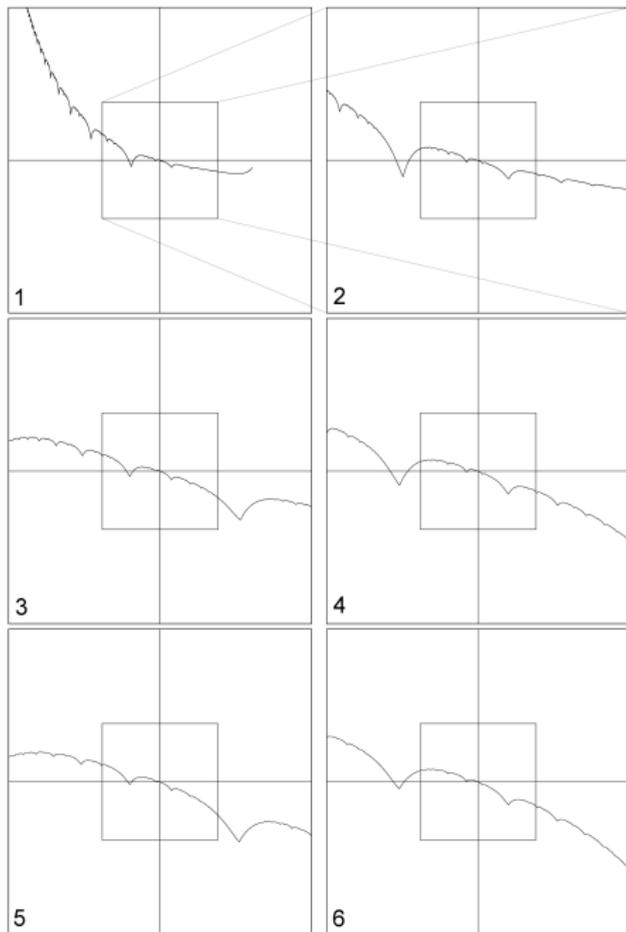


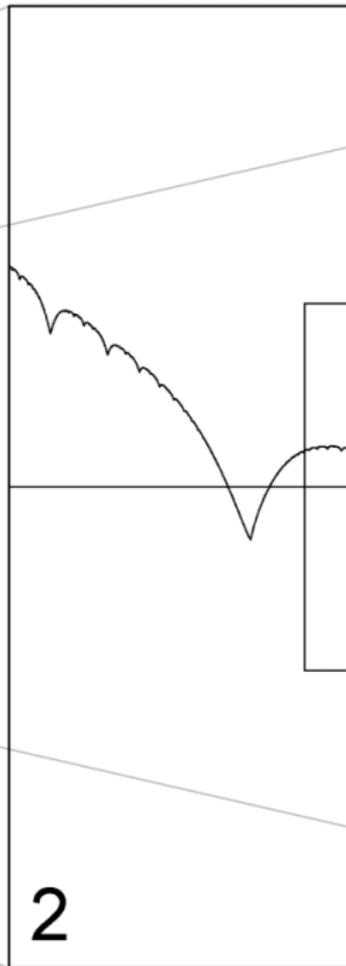
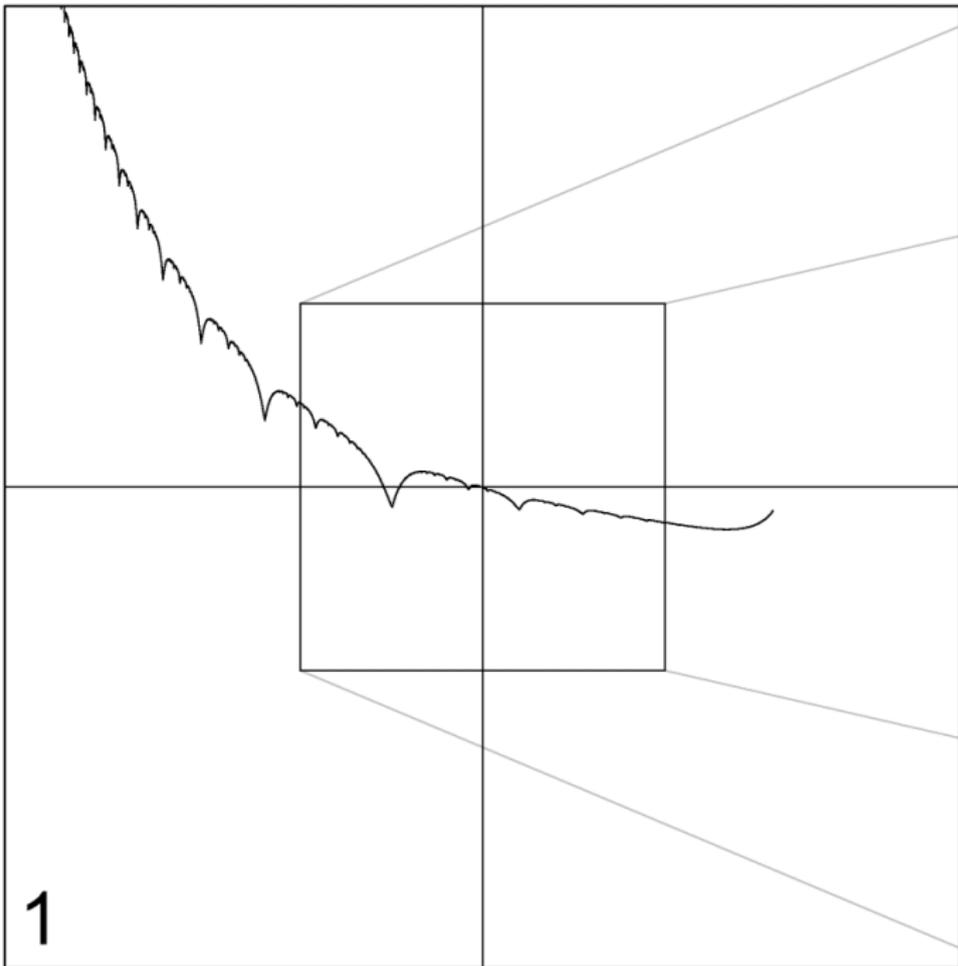
4

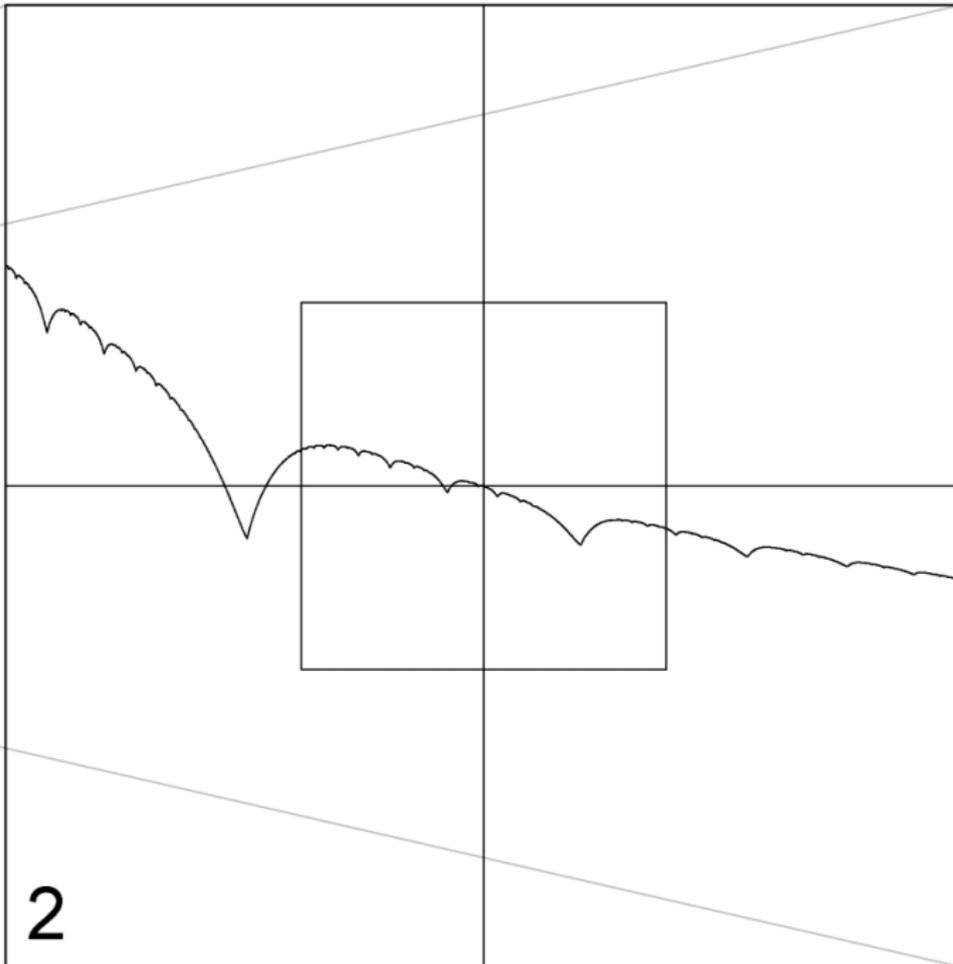




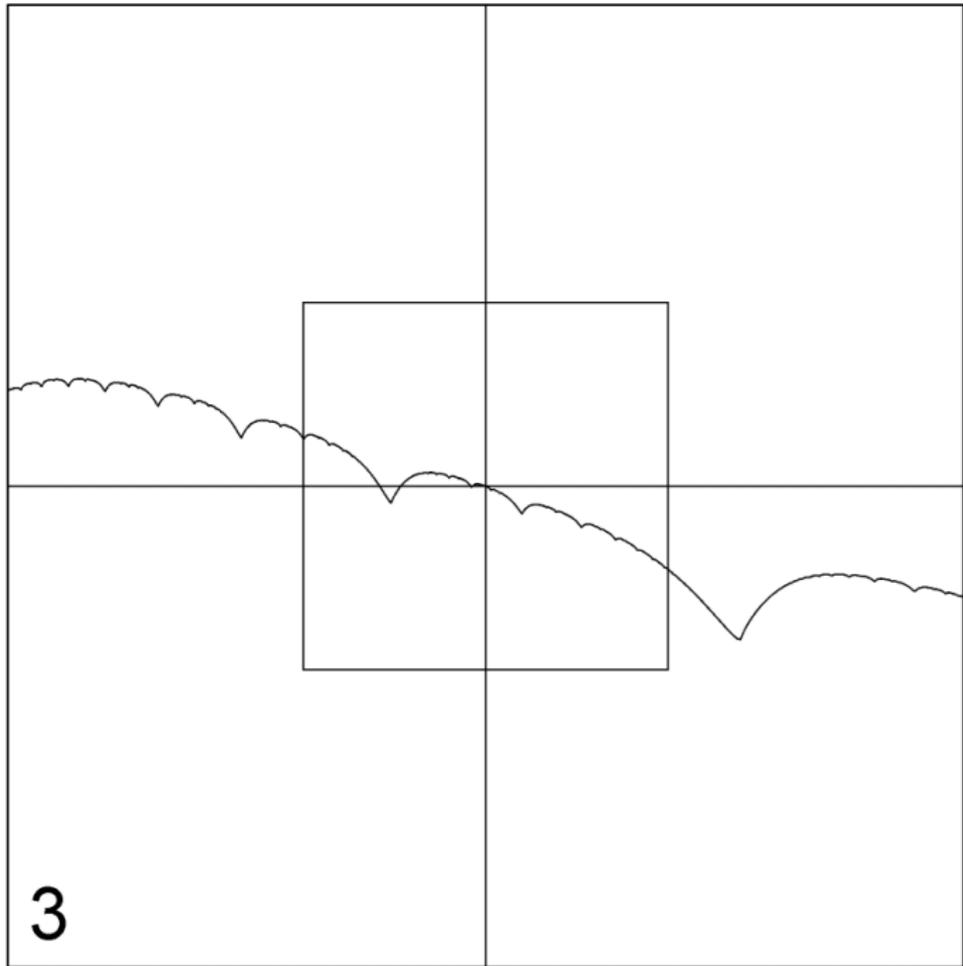
6



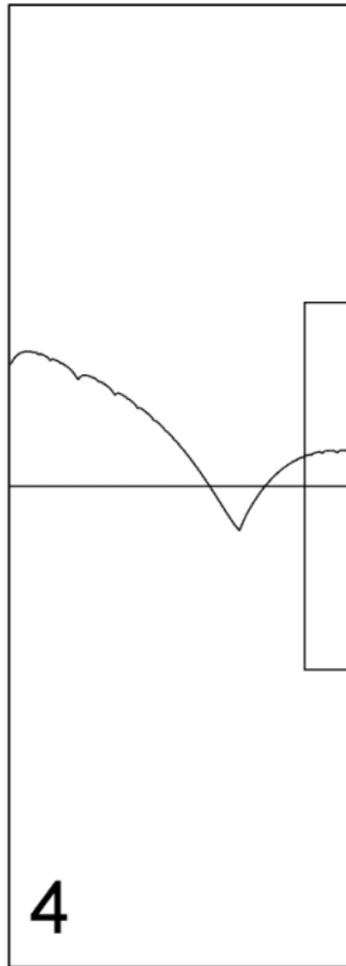




2



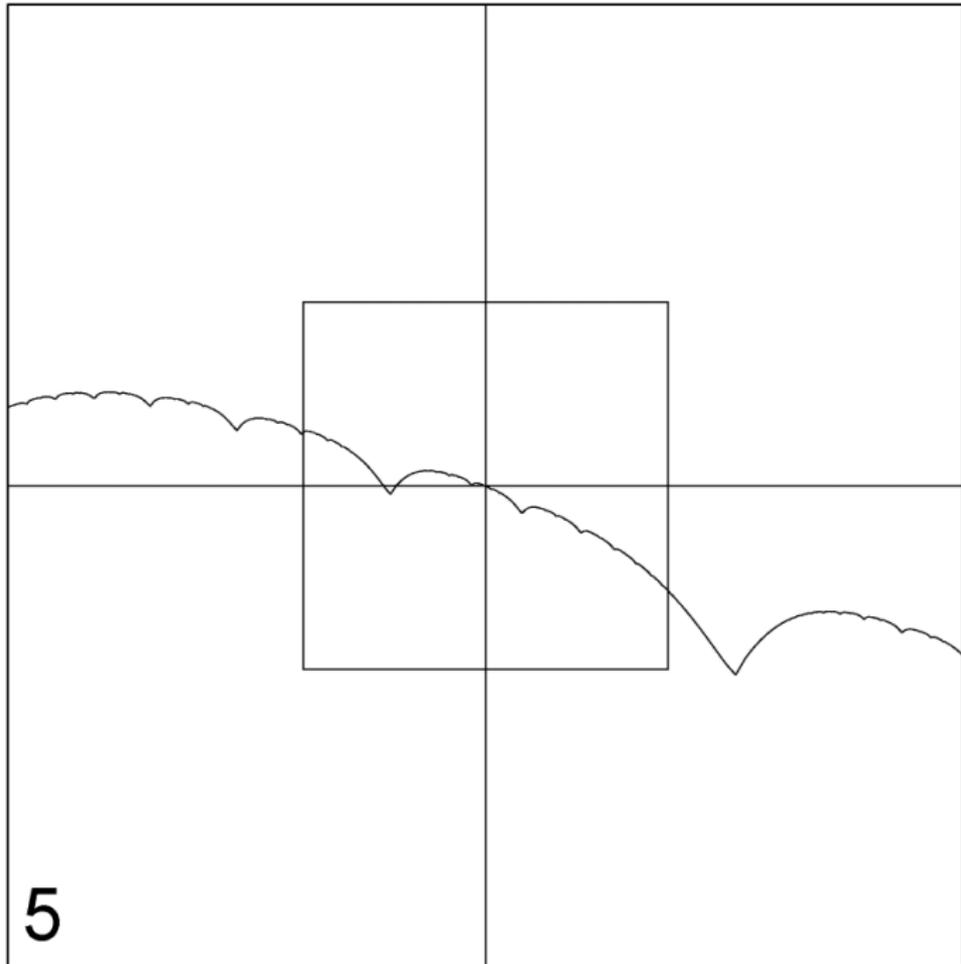
3



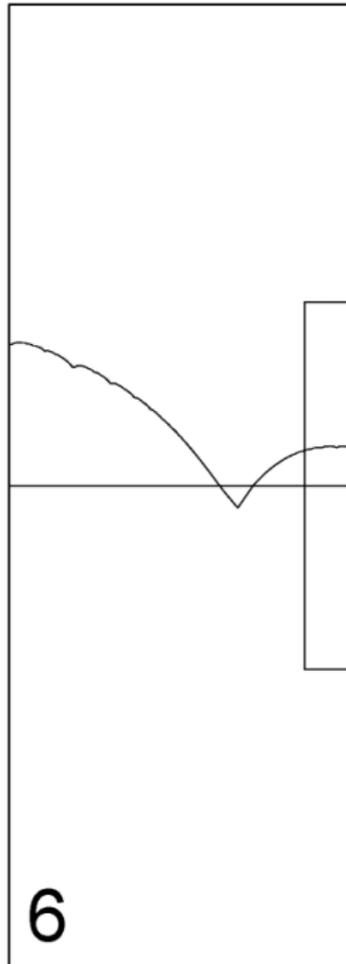
4



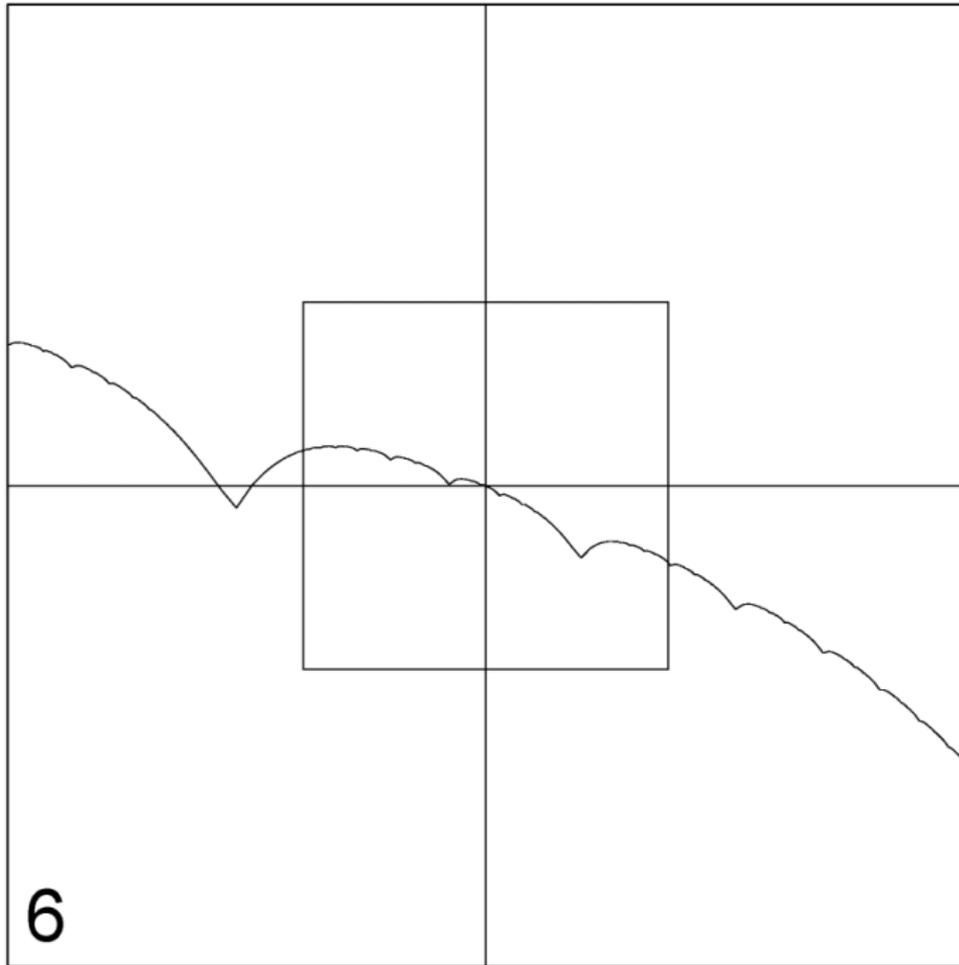
4



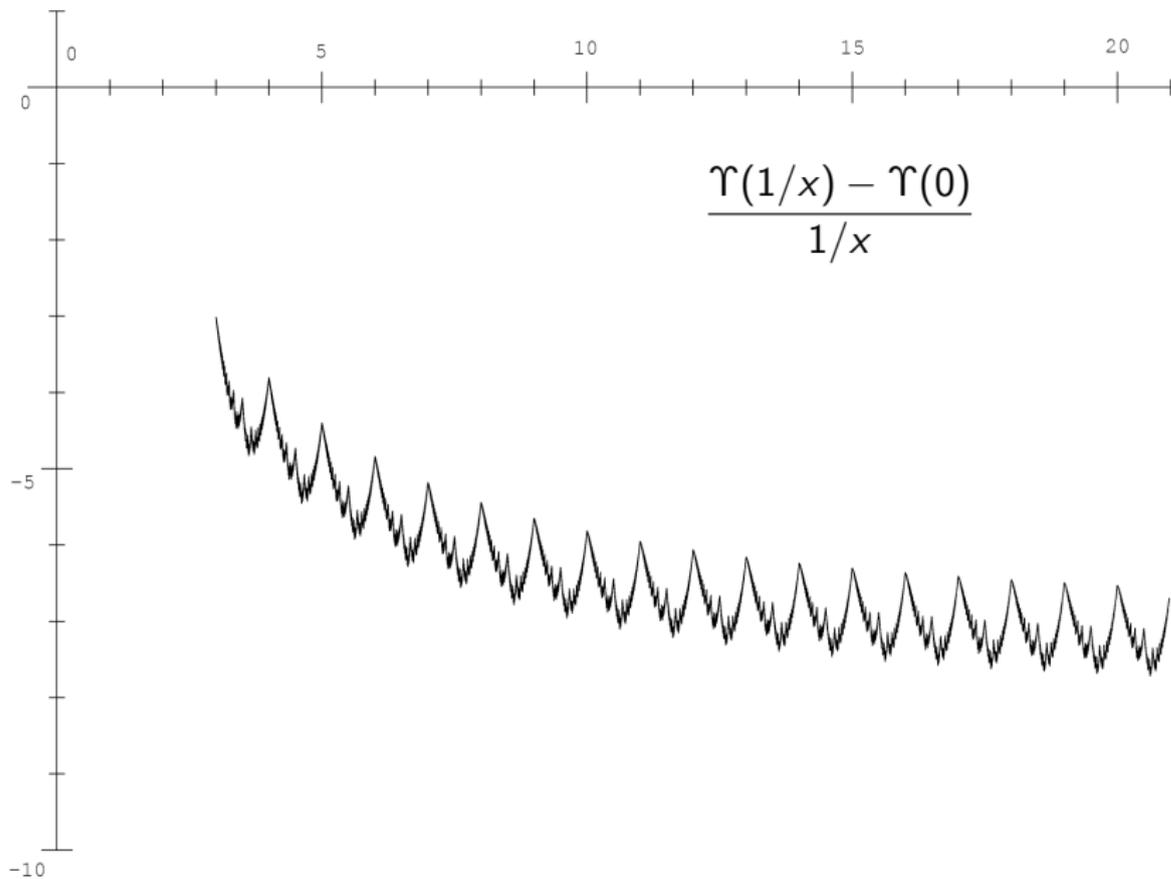
5

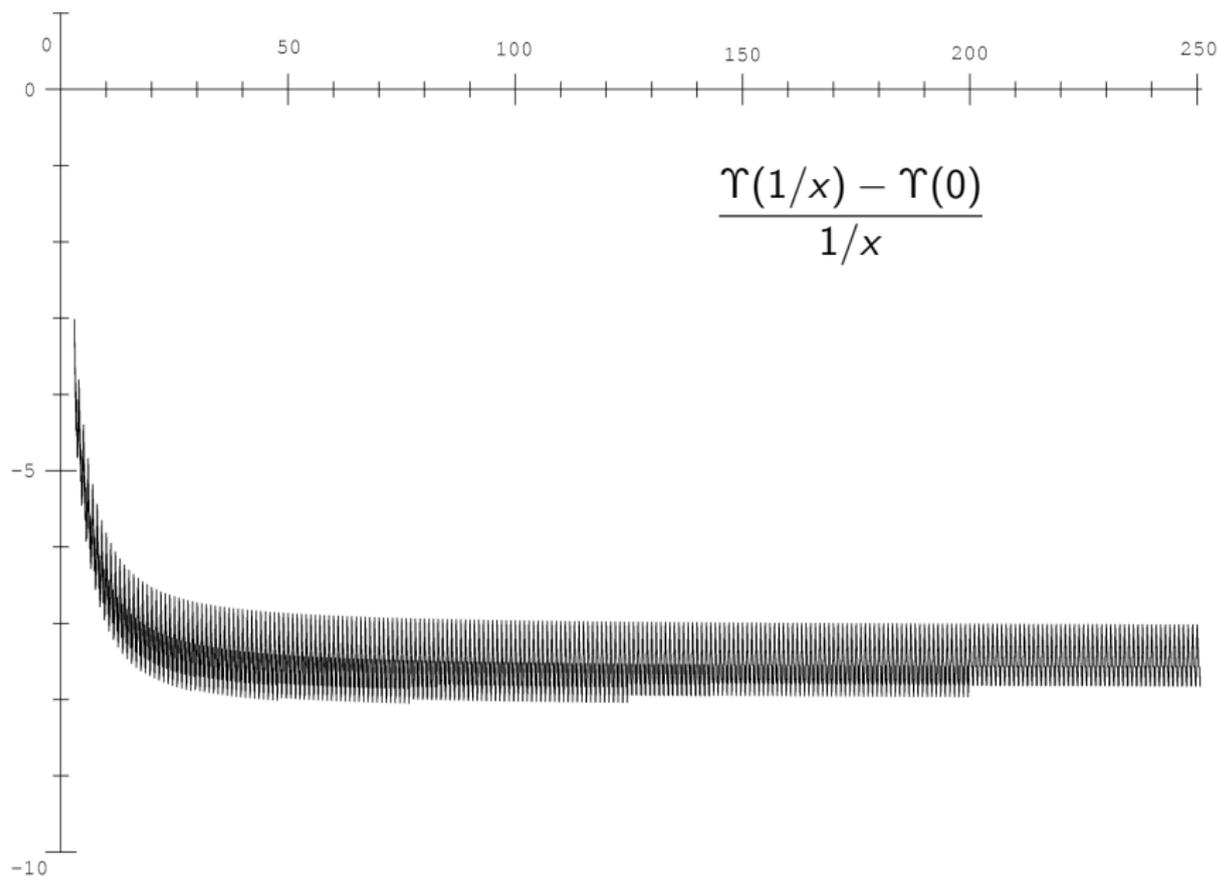


6



6





$\Upsilon_{\mathcal{E}}$ est non-constante

- Pour une famille de la forme $f_{\theta} = e^{2i\pi\theta}f_0$ avec $f_0(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$, on a

$$\Upsilon_f(0) - \Upsilon_f(1/2) = \frac{1}{2} \log |2\pi\gamma(f_0)|$$

- (Bergweiler Buff Epstein Shishikura) L'application de cornes d'un polynôme quadratique vérifie l'inégalité $\operatorname{Re} \gamma \geq 1/4$.

◀ Retour

$\Upsilon_{\mathcal{E}}$ est non-constante

- Pour une famille de la forme $f_{\theta} = e^{2i\pi\theta} f_0$ avec $f_0(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$, on a

$$\Upsilon_f(0) - \Upsilon_f(1/2) = \frac{1}{2} \log |2\pi\gamma(f_0)|$$

- (Bergweiler Buff Epstein Shishikura) L'application de cornes d'un polynôme quadratique vérifie l'inégalité $\operatorname{Re} \gamma \geq 1/4$.

◀ Retour