



**HAL**  
open science

# Cohomologie rationnelle du groupe linéaire et extensions de bifoncteurs

Antoine Touzé

► **To cite this version:**

Antoine Touzé. Cohomologie rationnelle du groupe linéaire et extensions de bifoncteurs. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2008. Français. NNT : . tel-00289942

**HAL Id: tel-00289942**

**<https://theses.hal.science/tel-00289942>**

Submitted on 24 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2008

N° B.U. : 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**COHOMOLOGIE RATIONNELLE DU GROUPE LINÉAIRE  
ET EXTENSIONS DE BIFONCTEURS**

**Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes**

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Antoine TOUZÉ**

*le 26 mai 2008 à l'Université de Nantes.*

<i>Président du jury</i>	: Jean LANNES	Professeur (Ecole Polytechnique)
<i>Rapporteurs</i>	: Geoffrey POWELL	C.R. au C.N.R.S. (Université de Paris 13)
	Wilberd VAN DER KALLEN	Professeur (Université d'Utrecht)
<i>Examineurs</i>	: Vincent FRANJOU	Professeur (Université de Nantes)
	François LAUDENBACH	Professeur émérite (Université de Nantes)
	Geoffrey POWELL	C.R. au C.N.R.S. (Université de Paris 13)
	Christoph SORGER	Professeur (Université de Nantes)
	Jean-Claude THOMAS	Professeur émérite (Université d'Angers)
	Wilberd VAN DER KALLEN	Professeur (Université d'Utrecht)
<i>Directeur de thèse</i>	: Vincent FRANJOU	
<i>Laboratoire</i>	: Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)	

N° E.D. : 0366-357



« *Alors là, minuta. Esta la interest not ge-rigolen avec ça.* »  
Marcel Gotlib, Der Rubrica of the Bracofsky

Cette thèse est la conclusion de trois années de doctorat au laboratoire Jean Leray, mais c'est aussi le produit d'un parcours pas tout à fait rectiligne dans les études supérieures. Je dois beaucoup à l'influence, à l'aide et aux encouragements des personnes rencontrées en route pendant toutes ces années.

En premier lieu, je dois remercier mon directeur de thèse, Vincent Franjou, de m'avoir accepté comme étudiant et de m'avoir confié un sujet aussi prometteur. Nos chemins s'étaient déjà croisés avant cette thèse : j'ai été son stagiaire pendant l'été 2003, et il a guidé mes premiers pas en topologie algébrique. A l'époque je n'étais pas complètement engagé sur la voie des mathématiques, et je lui suis également reconnaissant d'avoir encadré ce stage qui fut un moment charnière de mon parcours.

Je remercie Jean Lannes, François Laudénbach, Geoffrey Powell, Christoph Sorger, Jean-Claude Thomas et Wilberd van der Kallen qui m'ont fait l'honneur d'être membres de mon jury. Je tiens à remercier particulièrement mes deux rapporteurs : Wilberd van der Kallen et Geoffrey Powell. Ils ont minutieusement lu une première version du manuscrit et y ont relevé des erreurs, des incohérences, des points obscurs et des maladroites de toutes sortes. Leurs nombreuses remarques et suggestions ont grandement amélioré la qualité du manuscrit. Si le résultat définitif est un tant soit peu lisible, c'est en grande partie grâce à leur travail et je les en remercie vivement.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'influence des différents professeurs qui m'ont enseigné les mathématiques tout au long de mon parcours. En particulier, je tiens à remercier Hubert Carnec, mon professeur de seconde au Lycée Guist'hau, et surtout Jean-Louis Leters, mon professeur de première année de classe préparatoire à Clémenceau. En plus de leurs grandes qualités pédagogiques, ils ont su me communiquer quelque chose de précieux : la passion pour les mathématiques.

Poursuivre de longues études est parfois autant une question de moyens matériels que de motivation. Avant d'entamer mon doctorat, j'ai eu la chance de bénéficier pendant deux années du financement de l'École Normale Supérieure de Cachan. Je suis redevable envers cette vénérable institution, ainsi qu'envers Aymeric Autin qui m'a démontré par l'exemple qu'il était possible d'y accéder.

Une des choses les plus importantes pour survivre à trois longues années de thèse, c'est l'ambiance au quotidien. J'ai beaucoup apprécié l'atmosphère chaleureuse que j'ai connue au laboratoire Jean Leray pendant ces trois années. Je tiens à dire un énorme merci à toute l'équipe des thésards-et-assimilés du laboratoire Jean Leray. Merci tout particulièrement à Alex, Aymeric, Fanny, Alain, Manu, Skander, Nico, Simon "Vezco", Julien, Vincent, Simon, Rodolphe ainsi qu'à mes deux super "co-bureaux" : Étienne, son humour particulier et sa bonne humeur et Ronan, aux multiples talents. La taroinche de midi, les soirées poker ou jeux de société, les paris sportifs, les discussions de toutes sortes et bien d'autres choses encore ont constitué le bien agréable quotidien de trois

années passées ensemble, et dont le souvenir n'est pas prêt de s'effacer. Merci encore à Archibald, Alaric, Benedec, Francis et Dieu pour nos soirées occupées à sillonner l'Europe de l'Est, et merci aux livreurs de pizza nantais qui acceptent de venir livrer jusque dans les Carpathes, dans ces contrées reculées où l'on n'en souffre que trop.

Un grand merci également aux habitué(e)s du rendez-vous de 12h12 : Anne-Claire, Déborah, Laetitia, Patrick et Vincent. Ce fut un réel plaisir que de partager avec vous tous ces repas gastronomiques !

Merci à Pierre, Étienne et Aline pour votre présence quasi-quotidienne depuis des années, et tout ce que nous avons vécu ensemble.

Enfin, je ne saurais jamais assez remercier ma famille, au sens large et recomposée, qui m'a accompagné, encouragé et supporté (dans tous les sens du terme) depuis le début.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Conventions</b>	<b>19</b>
<b>1 Rappels sur les catégories de foncteurs polynomiaux</b>	<b>21</b>
1.1 Rappels d'algèbre linéaire . . . . .	22
1.1.1 Dualité $A$ -linéaire . . . . .	22
1.1.2 Algèbres symétriques, extérieures, à puissances divisées . . . . .	22
1.1.3 La catégorie $\mathcal{V}_A$ . . . . .	24
1.2 Foncteurs polynomiaux selon Friedlander et Suslin . . . . .	24
1.2.1 Polynômes . . . . .	24
1.2.2 Foncteurs polynomiaux . . . . .	25
1.2.3 Foncteurs de degré fini . . . . .	27
1.2.4 Dualité de Kuhn . . . . .	28
1.3 Présentation alternative des foncteurs polynomiaux . . . . .	29
1.3.1 Définition des catégories $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$ et $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ . . . . .	29
1.3.2 Propriétés de la composition . . . . .	30
1.3.3 Catégories de $n$ -foncteurs polynomiaux . . . . .	32
1.4 Algèbre homologique dans $\mathcal{P}_A(n)$ . . . . .	33
1.4.1 Projectifs . . . . .	33
1.4.2 Résolutions projectives canoniques . . . . .	34
1.4.3 Foncteurs polynomiaux à valeurs quelconques . . . . .	37
1.4.4 Résolutions injectives canoniques . . . . .	37
1.4.5 Produits tensoriels . . . . .	38
1.4.6 Foncteurs produit et diagonale . . . . .	39
1.4.7 Foncteurs exponentiels . . . . .	41
1.5 Changement de base . . . . .	43
1.6 Twist de Frobenius . . . . .	46
1.6.1 Twist de Frobenius d'un $\mathbb{A}$ -module . . . . .	46
1.6.2 Twist de Frobenius et foncteurs polynomiaux . . . . .	47

<b>2</b>	<b>Extensions entre foncteurs à une variable</b>	<b>51</b>
2.1	Résolutions injectives des twists de $S^\mu$	52
2.2	Transparence du twist de Frobenius	54
2.3	Extensions entre foncteurs classiques	57
<b>3</b>	<b>Symétrisations de foncteurs polynomiaux</b>	<b>61</b>
3.1	Le problème de symétrisation	62
3.1.1	$\mathfrak{S}$ -foncteurs	62
3.1.2	Le problème de symétrisation	63
3.2	Foncteur de symétrisation	64
3.3	Calculs explicites	69
3.3.1	Symétrisation des invariants	69
3.3.2	Symétrisation des produits tensoriels	70
3.3.3	Symétrisation des foncteurs composés	73
3.4	Le foncteur <i>sym</i> comme adjoint	74
3.4.1	Comparaison avec les extensions de Kan	74
3.4.2	Le foncteur <i>sym</i> comme adjoint	75
3.4.3	Applications	79
<b>4</b>	<b>Cohomologie des bifoncteurs</b>	<b>83</b>
4.1	Catégorie des bifoncteurs polynomiaux	83
4.1.1	Bifoncteurs polynomiaux selon Franjou et Friedlander	84
4.1.2	Propriétés de la catégorie des bifoncteurs polynomiaux	85
4.2	Cohomologie des bifoncteurs	86
4.2.1	Définition	86
4.2.2	Cohomologie des bifoncteurs séparables	87
4.2.3	Lien avec la cohomologie rationnelle	87
4.3	Premiers calculs	92
4.3.1	Cohomologie des produits tensoriels twistés	92
4.3.2	Calcul de $H_{\mathcal{P}}^0$	93
4.3.3	Une propriété de symétrie de la cohomologie	97
4.3.4	Cohomologie des bifoncteurs sur $\mathbb{Z}$	98
<b>5</b>	<b>Calculs de cohomologie en caractéristique <math>p</math> première</b>	<b>99</b>
5.1	Transparence du twist de Frobenius	101
5.1.1	Cohomologie des injectifs twistés	101
5.1.2	Cohomologie des bifoncteurs twistés	102
5.1.3	Transparence du twist de Frobenius	104
5.1.4	Conjecture de transparence du twist	109
5.1.5	Application aux calculs de cohomologie	110
5.2	Caractéristique d'Euler-Poincaré	112
5.3	Symétrisations et changement de base	114

<b>6</b>	<b>Cohomologie des tenseurs symétriques twistés</b>	<b>119</b>
6.1	Cohomologie de $S^{\mu(r)}gl$	120
6.2	Applications	123
6.2.1	Étude des complexes symétriques	123
6.2.2	Calcul de la cohomologie de $L^{p(r)}gl$	128
6.2.3	Calcul de la cohomologie de $\Gamma^{p(r)}gl$	130
<b>7</b>	<b>Combinatoire du pléthysme <math>S^{\mu}(V \otimes W)</math></b>	<b>137</b>
7.1	Présentation standard de $S^{\mu}(V \otimes W)$	138
7.1.1	Filtration de Cauchy de $S^d(V \otimes W)$	138
7.1.2	Présentation standard de $S^{\mu}(V \otimes W)$	142
7.2	Applications	145
7.2.1	Présentation de $H_{\mathcal{P}}^*(S^{\mu(r)}gl)$	145
7.2.2	Bases explicites de la cohomologie de degré 0	147
<b>A</b>	<b>Catégories exactes</b>	<b>151</b>
<b>B</b>	<b>Représentations linéaires des groupes</b>	<b>153</b>
B.1	Invariants et coinvariants	153
B.1.1	Invariants	153
B.1.2	Coinvariants	154
B.1.3	Norme	154
B.2	Modules de permutation	155
B.3	Foncteurs de Schur, de coSchur et de Weyl	157
B.3.1	Uplets, partitions et diagrammes	157
B.3.2	Définition des foncteurs de Schur, coSchur et Weyl	159
B.3.3	Foncteurs de Schur en grande caractéristique	161
<b>C</b>	<b>Algèbre homologique</b>	<b>165</b>
C.1	Filtrations	165
C.1.1	Produits tensoriels de filtrations	165
C.1.2	Présentations des modules filtrés	167
C.2	Suites spectrales hypercohomologiques	168
C.2.1	Conventions de notation	168
C.2.2	Suites spectrales d'un double complexe	169
C.2.3	Suites spectrales hypercohomologiques	170
<b>D</b>	<b>Cohomologie rationnelle de <math>GL_n</math></b>	<b>171</b>
D.1	Schémas en groupes affines et cohomologie rationnelle	171
D.1.1	Schémas en groupes affines	171
D.1.2	Exemple : les groupes algébriques de matrices	172
D.1.3	Représentation des schémas en groupes affines algébriques	173
D.1.4	Points fixes rationnels et cohomologie rationnelle	174
D.1.5	Changement de base	175



D.2	Cohomologie rationnelle de $GL_n$ . . . . .	175
D.2.1	Une filtration de $S^*(A^{n \vee \oplus r} \oplus A^{n \oplus q})$ . . . . .	175
D.2.2	Le théorème fondamental pour $GL_n$ . . . . .	176
<b>Bibliographie</b>		<b>181</b>

# Introduction

La théorie des invariants classique s'intéresse au calcul des générateurs des algèbres d'invariants. Dans cette thèse, nous travaillons sur une version contemporaine de cette théorie : nous calculons des classes de cohomologie. Nos calculs s'effectuent dans un cadre « générique » : nous calculons la cohomologie des groupes linéaires  $GL_n$  à coefficients dans des représentations fonctorielles, pour des valeurs élevées de  $n$ .

## De la théorie des invariants à la cohomologie des bifoncteurs

### Théorie des invariants sur le corps des nombres complexes

Un *groupe algébrique de matrices* sur  $\mathbb{C}$  est un groupe de matrices  $G \subset M_n(\mathbb{C})$  dont les éléments sont les solutions d'un système d'équations polynomiales (avec pour inconnues les coefficients  $m_{ij}$  des matrices). Les groupes de matrices usuels sont des exemples de groupes algébriques. Par exemple,  $SL_{n,\mathbb{C}}$  est défini par l'équation polynomiale  $\det[m_{i,j}] = 1$ . A première vue, le groupe linéaire ne semble pas rentrer dans cette définition car  $\det M \neq 0$  est une *inéquation* polynomiale. Cependant,  $GL_{n-1,\mathbb{C}}$  s'identifie au groupe des matrices carrées de taille  $n$  de la forme  $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1/\det M \end{bmatrix}$ . Il est donc défini par le système d'équations polynomiales :

$$\begin{aligned} m_{in} &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ m_{nj} &= 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq n-1, \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)} &= 1. \end{aligned}$$

Une action linéaire d'un groupe  $G$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$  est un morphisme de groupes  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . Une *action rationnelle* du groupe algébrique de matrices  $G$  est une action linéaire de  $G$  telle que les coordonnées matricielles de  $\rho(g)$  sont des polynômes en les coordonnées matricielles de  $g$ . Par exemple, si  $G$  est un sous-groupe algébrique de  $GL(V)$ , l'action usuelle :  $(g, v) \mapsto g(v)$  est une action rationnelle.

Soit  $V$  une représentation de  $G$ . On peut lui associer le sous-espace vectoriel  $V^G$  des points fixes :

$$V^G = \{v \in V, \forall g \in G \ g.v = v\} .$$

La *théorie des invariants* étudie les propriétés de ces points fixes.

Les groupes algébriques usuels tels que  $GL_{n,\mathbb{C}}$ ,  $SL_{n,\mathbb{C}}$ ,  $SO_{n,\mathbb{C}}$  ou  $Sp_{n,\mathbb{C}}$ , et plus généralement tous les groupes algébriques dont le radical est un tore sont *linéairement réductifs*, i.e. toute représentation de ces groupes est isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles [33, p. 191]. Par conséquent, sur  $\mathbb{C}$  le foncteur des points fixes  $-^G$  est exact : toute suite exacte courte  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$  de représentations de  $G$  induit une suite exacte courte de points fixes :

$$0 \rightarrow U^G \rightarrow V^G \rightarrow W^G \rightarrow 0 .$$

### Cohomologie rationnelle des groupes algébriques

Les définitions des groupes algébriques de matrices peuvent se formuler en remplaçant le corps des nombres complexes par un anneau commutatif quelconque<sup>1</sup>. Dans ce contexte, la théorie des invariants est nettement plus difficile. En effet, les groupes de matrices usuels ne sont plus linéairement réductifs, même lorsque l'anneau de base est un corps algébriquement clos. Par exemple, prenons pour anneau  $A = \mathbb{K}$  un corps algébriquement clos de caractéristique 2, et  $\mathfrak{gl}_2$  l'espace vectoriel  $\mathfrak{gl}_2 = \text{End}(\mathbb{K}^2)$  sur lequel  $GL_{2,\mathbb{K}}$  agit (rationnellement) par conjugaison. On a une suite exacte courte de représentations :

$$0 \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{gl}_2) \rightarrow \mathfrak{gl}_2^{\otimes 2} \rightarrow S^2(\mathfrak{gl}_2) \rightarrow 0 ,$$

mais l'application induite au niveau des points fixes :

$$(\mathfrak{gl}_2^{\otimes 2})^{GL_{2,\mathbb{K}}} \rightarrow S^2(\mathfrak{gl}_2)^{GL_{2,\mathbb{K}}}$$

n'est pas une surjection. Son conoyau est un espace vectoriel de dimension un, noté  $H_{\text{rat}}^1(GL_{2,\mathbb{K}}, \Lambda^2(\mathfrak{gl}_2))$ .

Cet exemple illustre le cas général. Le foncteur  $-^G$  des points fixes est seulement exact à gauche. Ses foncteurs dérivés définissent la *cohomologie rationnelle*  $H_{\text{rat}}^*(G, -)$  de  $G$ . La cohomologie rationnelle de  $G$  est donc caractérisée par les deux propriétés suivantes.

- (1) Pour toute représentation  $V$  de  $G$ , on a  $H_{\text{rat}}^0(G, V) = V^G$ .
- (2) Toute suite exacte  $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$  de représentations de  $G$  induit une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow H_{\text{rat}}^0(G, V') \rightarrow H_{\text{rat}}^0(G, V) \rightarrow H_{\text{rat}}^0(G, V'') \rightarrow H_{\text{rat}}^1(G, V') \rightarrow \dots$$

Par construction, la cohomologie rationnelle est donc à la fois une généralisation et un outil pour la théorie des invariants.

### Bifoncteurs polynomiaux et cohomologie rationnelle de $GL_n$

Dans ce travail, nous abordons les calculs de cohomologie rationnelle des groupes linéaires par le biais des catégories de foncteurs. L'utilisation de foncteurs pour construire

---

<sup>1</sup>Si l'anneau de base n'est pas un corps algébriquement clos, on considère les schémas en groupes affines plutôt que les groupes de matrices proprement dits, cf. annexe D.

des représentations est classique dans le cas des groupes (non algébriques). Si  $V$  est une représentation du groupe  $G$  et  $F$  un foncteur de la catégorie des  $A$ -modules vers la catégorie des  $A$ -modules, alors le  $A$ -module  $F(V)$  est muni de l'action de  $G$  définie par :

$$\begin{aligned} G \times F(V) &\rightarrow F(V) \\ (g, v) &\mapsto F(g)(v) . \end{aligned}$$

La notion de foncteur polynomial est une modification de la notion usuelle de foncteur, de façon à garantir que si  $V$  est une représentation rationnelle du groupe linéaire  $GL_n$  alors la représentation définie par la formule ci-dessus est encore une représentation rationnelle.

Les catégories de foncteurs polynomiaux possèdent une structure assez riche pour développer l'algèbre homologique usuelle. On définit la cohomologie  $H_{\mathcal{P},A}^*(B)$  d'un bifoncteur  $B$  défini sur un anneau  $A$  (contravariants en la première variable et covariants en la seconde) en termes d'extensions dans la catégorie des bifoncteurs. La cohomologie des bifoncteurs calcule la cohomologie du groupe linéaire.

**Théorème (4.2.11).** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $A$  et  $n \geq d$ . Il existe un isomorphisme naturel en  $B$  :*

$$H_{\mathcal{P},A}^*(B) \xrightarrow{\cong} H_{\text{rat}}^*(GL_n/A, B(A^n, A^n)) .$$

Ce théorème est dû à Franjou et Friedlander dans le cas d'un corps [13, Th 1.5], et est démontré au chapitre 4 dans le cas d'un anneau  $A$  quelconque. Il permet de transposer le problème du calcul de la cohomologie rationnelle du groupe linéaire dans la catégorie des bifoncteurs polynomiaux. Cette démarche est avantageuse car un certain nombre de phénomènes propres aux représentations fonctorielles rendent les calculs plus aisés dans la catégorie des bifoncteurs polynomiaux.

## Un problème ouvert en cohomologie rationnelle

Nous détaillons maintenant le problème « d'engendrement cohomologique fini ». Ce problème est une généralisation dans le cadre de la cohomologie rationnelle du quatorzième problème de Hilbert qui concerne la théorie des invariants. C'est la motivation principale des calculs menés dans ce travail.

### Le quatorzième problème de Hilbert

Soit  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre des polynômes à  $n$  indéterminées et  $\rho : SL_{k,\mathbb{C}} \rightarrow GL_{n,\mathbb{C}}$  une action rationnelle de  $SL_{k,\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{C}^n$ . La composée d'un polynôme et de l'application linéaire  $\rho(g)$  est encore un polynôme. Le groupe linéaire  $SL_{k,\mathbb{C}}$  agit donc sur  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Cette action respecte le produit de polynômes. L'ensemble  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{SL_{k,\mathbb{C}}}$  des invariants de cette représentation de  $SL_{k,\mathbb{C}}$  constitue donc une sous-algèbre de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

Des calculs explicites avaient conduit les mathématiciens du XIX<sup>ème</sup> siècle à conjecturer que ces algèbres d'invariants étaient *de type fini*. Des progrès spectaculaires sur

cette question furent effectués à la fin du siècle grâce à Hilbert. En 1890, il démontra [22] que les algèbres d'invariants  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{SL_{k,\mathbb{C}}}$  sont toutes de type fini, introduisant pour cela des idées et des méthodes nouvelles (par exemple le « Nullstellensatz ») qui sont la base de l'algèbre moderne. Connaissant le résultat pour les groupes  $SL_{k,\mathbb{C}}$ , on peut s'intéresser à d'autres groupes, et poser la question plus générale suivante.

**Question 1.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos et soit  $G$  un groupe algébrique agissant rationnellement par automorphismes d'algèbres sur une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative de type fini  $\mathcal{A}$ . L'algèbre des invariants  $\mathcal{A}^G$  est-elle de type fini ?

Cette question est un cas particulier du quatorzième des vingt-deux problèmes que Hilbert proposa à la communauté mathématique lors du congrès international de 1900. La réponse à cette question est négative en général [34]. Cependant, Nagata démontra [35] en 1964 que la réponse est positive si le groupe  $G$  est *géométriquement réductif*. Haboush démontra ensuite que les groupes dont le radical est un tore sont géométriquement réductifs [21]. Les groupes usuels de matrices  $GL_{n,\mathbb{K}}$ ,  $SL_{n,\mathbb{K}}$ ,  $SO_{n,\mathbb{K}}$  et  $Sp_{n,\mathbb{K}}$  sont donc des exemples de groupes géométriquement réductifs.

### Engendrement cohomologique fini : la conjecture de van der Kallen

Soit  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos et soit  $G$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{K}$ . Si  $G$  agit rationnellement sur une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  par automorphismes d'algèbres, alors la cohomologie rationnelle  $H_{rat}^*(G, \mathcal{A})$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre qui contient l'algèbre des invariants  $\mathcal{A}^G$ . Suivant [44], on dit que  $G$  possède la propriété d'engendrement cohomologique fini (ECF) si non seulement l'algèbre des invariants  $\mathcal{A}^G$  mais plus généralement la cohomologie rationnelle  $H_{rat}^*(G, \mathcal{A})$  tout entière est de type fini dès que  $\mathcal{A}$  est de type fini.

**Question 2.** Quels sont les groupes algébriques qui possèdent la propriété (ECF) ?

Si un groupe algébrique  $G$  vérifie la propriété (ECF), alors pour toute algèbre  $\mathcal{A}$  de type fini, la sous-algèbre  $\mathcal{A}^G$  est de type fini. Le groupe  $G$  est donc nécessairement géométriquement réductif [37]. Van der Kallen a conjecturé que cette condition est *suffisante*.

**Conjecture 1.** [43] Si  $G$  est un groupe géométriquement réductif, alors  $G$  possède la propriété (ECF).

En caractéristique nulle les groupes géométriquement réductifs sont linéairement réductifs et leur algèbre de cohomologie  $H_{rat}^*(G, \mathcal{A})$  est donc égale à l'algèbre des invariants  $\mathcal{A}^G$ . Le problème se réduit donc au problème déjà résolu de théorie des invariants. En caractéristique non nulle, van der Kallen a réduit [43, 39] la preuve de sa conjecture à une question qui porte sur la cohomologie rationnelle des groupes linéaires.

Soit  $\mathfrak{gl}_n$  l'algèbre de Lie de  $GL_{n,\mathbb{K}}$ , c'est-à-dire l'algèbre des matrices carrées de taille  $n$ , munie de l'action (rationnelle) de  $GL_{n,\mathbb{K}}$  par conjugaison. Par changement de base le long du morphisme de Frobenius  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto x^p$ , on produit [24] une nouvelle représentation de  $GL_{n,\mathbb{K}}$ , notée  $\mathfrak{gl}_n^{(1)}$ . Enfin, l'algèbre des puissances divisées  $\Gamma^*(\mathfrak{gl}_n^{(1)})$  de

cette représentation est encore une représentation (rationnelle) de  $GL_{n,\mathbb{K}}$ . La conjecture de van der Kallen se réduit au problème suivant, qui porte sur l'existence de « classes universelles » dans la cohomologie de  $GL_{n,\mathbb{K}}$  à coefficients dans cette représentation.

**Problème 1.** [43] Peut-on trouver des classes  $c[m] \in H_{\text{rat}}^{2m}(GL_{n,\mathbb{K}}, \Gamma^m(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (1)  $c[1]$  est la classe du vecteur de Witt.
- (2) Si  $\Delta_{i,j} : \Gamma^{i+j} \rightarrow \Gamma^i \otimes \Gamma^j$  est la comultiplication, alors :

$$(\Delta_{i,j})_*(c[i+j]) = c[i] \cup c[j] \quad \text{pour } i, j \geq 1.$$

Van der Kallen a résolu ce problème par l'affirmative pour  $n = 2$  [43] et pour  $n = 3$  en caractéristique  $p = 2$  [44].

### Reformulation du problème en cohomologie des bifoncteurs

Les foncteurs utilisés habituellement pour construire des représentations, tels que le twist de Frobenius  $V \mapsto V^{(1)}$ , les puissances divisées  $V \mapsto \Gamma^m(V)$  ou le bifoncteur  $gl(V, W) = \text{Hom}_A(V, W)$  sont des foncteurs polynomiaux. Lorsque  $A = \mathbb{K}$  est un corps, l'évaluation du bifoncteur  $\Gamma^{m(1)}gl = \Gamma^m \circ I^{(1)} \circ gl$  sur la représentation rationnelle  $\mathbb{K}^n$  de  $GL_{n,\mathbb{K}}$  donne la représentation  $\Gamma^m(\mathfrak{gl}_n^{(1)})$ . On peut donc formuler la conjecture suivante, qui résout le problème de van der Kallen pour tous les entiers  $n$  :

**Conjecture 2.** Il existe des classes  $c[m] \in H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^{2m}(\Gamma^{m(1)}gl)$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (1)  $c[1]$  est un générateur  $H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^2(I^{(1)}gl)$ .
- (2) Notons  $\Delta_{i,j} : \Gamma^{i+j} \rightarrow \Gamma^i \otimes \Gamma^j$  la comultiplication. Alors :

$$(\Delta_{i,j})_*(c[i+j]) = c[i] \cup c[j] \quad \text{pour } i, j \geq 1.$$

### Résultats principaux

Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Dans cette thèse, nous sommes parvenus à calculer la cohomologie du bifoncteur  $\Gamma^{p(r)}gl$  en caractéristique  $p$ .

**Théorème (6.2.29).** *La série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  s'obtient en ajoutant la série*

$$(t + t^2 + \dots + t^{2p-2}) \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}}$$

*à la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ .*

En degré  $2p$ , les cohomologies des bifoncteurs  $\Gamma^{p(1)}gl$  et  $S^{p(1)}gl$  ont donc même rang. Il est possible de calculer la cohomologie du bifoncteur  $S^{p(1)}gl$  et de déduire de cette information que la comultiplication  $\Delta : \Gamma^p \rightarrow \otimes^p$  induit un isomorphisme

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^{2p}(\Gamma^{p(r)}gl) \xrightarrow{\simeq} H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^{2p}(gl^{(r)\otimes p})^{\mathfrak{S}_p}.$$

Cet isomorphisme permet de construire la classe universelle  $c[p]$  en caractéristique  $p$ .

Les bifoncteurs  $S^{n(r)}gl$  des puissances symétriques twistées de  $gl$  ont d'étroites relations avec les puissances divisées twistées de  $gl$ . Si  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  est un  $n$ -uplet d'entiers positifs, on note  $S^{\mu(r)}gl$  le bifoncteur polynomial  $S^{\mu_1(r)}gl \otimes \dots \otimes S^{\mu_k(r)}gl$ . Nous parvenons à calculer la série de Poincaré de tous les bifoncteurs de ce type :

**Théorème (6.1.1).** *Soient  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un  $n$ -uplet de poids  $d$  et  $r$  un entier positif. Le  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl)$  est libre de type fini et sa série de Poincaré est égale à la série de Poincaré des coinvariants du  $\mathfrak{S}_d$ -module gradué  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r) \otimes d})$  sous l'action du sous-groupe  $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu_n} \subset \mathfrak{S}_d$ .*

Les puissances symétriques sont des foncteurs duaux des puissances divisées. D'après la proposition 5.2.1, la caractéristique d'Euler de la cohomologie du bifoncteur  $\Gamma^{m(1)}gl$  est donc égale à celle de la cohomologie de  $S^{m(1)}gl$ .

Ces calculs reposent sur une méthode plus générale pour étudier la cohomologie des bifoncteurs  $B^{(r)}$  obtenus par précomposition d'un bifoncteur  $B$  par le twist de Frobenius. Les bifoncteurs précédents sont de cette forme car le bifoncteur  $gl$  commute avec le twist :  $I^{(1)}gl \simeq gl^{(1)}$ . Nous construisons une suite spectrale qui permet de comparer la cohomologie d'un bifoncteur  $B^{(r)}$  avec celle du bifoncteur  $B(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2)$  obtenu par précomposition de  $B$  par le foncteur  $V \mapsto V^{\oplus p^r}$  sur sa première variable.

**Théorème (5.1.8).** *Soient  $r$  un entier positif et  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Il existe un foncteur  $E(-, r)$  qui à un bifoncteur  $B$  associe une suite spectrale  $E(B, r)$  telle que :*

(i) *Si on gradue  $E_2^{*,*}(B, r)$  par le degré total :  $\deg E_2^{i,j}(B, r) = i + j$ , alors on a un isomorphisme  $\mathbb{Z}/2$ -gradué :*

$$E_2^{*,*}(B, r) \simeq H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2)).$$

(ii)  *$E(B, r)$  converge vers  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B^{(r)})$ .*

On dit (définition 5.1.10) que le twist de Frobenius est *transparent* pour le bifoncteur  $B$  si pour tout  $r$ , la suite spectrale  $E(B, r)$  dégénère à la seconde page. Dans ce cas, la cohomologie du bifoncteur twisté  $B^{(r)}$  se lit sur celle du bifoncteur  $B(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2)$  qui est beaucoup plus simple à étudier. Comme application de ce principe, nous donnons au théorème 5.1.26 une description (partielle) de la cohomologie d'un bifoncteur twisté lorsque le twist est transparent. Nous étudions au paragraphe 5.1.3 des conditions nécessaires ou suffisantes pour la transparence du twist.

Le calcul de la série de Poincaré de  $\Gamma^{p(r)}gl$  montre que le twist de Frobenius est transparent pour  $\Gamma^p gl$ , tout comme il l'était déjà pour les puissances symétriques de  $gl$ . Nous conjecturons que c'est le cas général.

**Conjecture (5.1.20).** Le twist de Frobenius est transparent pour tous les bifoncteurs.

La transparence du twist pour les bifoncteurs de la forme  $\Gamma^m gl$  permettrait de produire les classes de la conjecture 2, et donc de démontrer la conjecture de van der Kallen.

## Contenu détaillé de la thèse

Nous présentons maintenant plus en détails le contenu de la thèse. Chaque chapitre possède par ailleurs une introduction.

### Avertissement

Les foncteurs que nous étudions dans cette thèse sont appelés « foncteurs strictement polynomiaux » dans la littérature [18, 15, 9, 17, 14]. En effet, l'appellation « foncteurs polynomiaux » est déjà utilisée pour désigner les foncteurs de la catégorie  $\mathcal{F}$  des foncteurs des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des  $k$ -espaces vectoriels qui vérifient une certaine équation aux différences finies [11]. Pour alléger le texte et les énoncés, et comme il n'y a pas de confusion possible, nous ne mentionnerons jamais le « strictement ». Nous parlerons donc (abusivement) de foncteurs polynomiaux pour désigner les foncteurs introduits par Friedlander et Suslin [18].

### Chapitre 1 : Rappels sur les catégories de foncteurs polynomiaux

Ce chapitre est une présentation détaillée des catégories de foncteurs polynomiaux. Nous étudions ces catégories dans la plus grande généralité : foncteurs à  $n$  variables, définis sur un anneau commutatif quelconque. La catégorie des foncteurs polynomiaux à  $n$  variables, homogènes de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  est notée  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . La plupart des résultats de ce chapitre ne sont pas originaux. Ce sont des généralisations évidentes des résultats connus dans le cadre des foncteurs polynomiaux à  $n$  variables sur un corps, ou dans le cadre des foncteurs polynomiaux à une variable sur un anneau.

Signalons tout de même quelques contributions (minimes) de ce chapitre. La première est l'existence de résolutions injectives et projectives naturelles dans les catégories de foncteurs (propositions 1.4.9 et 1.4.14). Ces résolutions sont connues depuis l'avènement des foncteurs polynomiaux [18], mais leur naturalité ne semble jamais avoir été utilisée. Cette naturalité sera utilisée dans le chapitre 3 (construction du foncteur de symétrisation) et dans le chapitre 5 (construction de suites spectrales naturelles). La seconde est une présentation succincte dans la section 1.4.3 des catégories de foncteurs polynomiaux à valeurs quelconques et de leur relation avec les catégories de foncteurs polynomiaux usuelles. Enfin, la remarque 1.5.5 rectifie une petite erreur contenue dans [40].

### Chapitre 2 : Extensions entre foncteurs à une variable

Dans ce court chapitre, nous calculons des groupes d'extensions entre foncteurs à une variable (corollaire 2.3.3, théorème 2.3.4) en caractéristique positive. Les résultats obtenus sont connus depuis plusieurs années [15, 9], mais les méthodes que nous utilisons sont en revanche nouvelles, simples et efficaces. Nous généraliserons ces méthodes (notamment le théorème 2.2.5) dans le cadre des bifoncteurs au chapitre 5. Ce chapitre a donc deux objectifs. Premièrement, redémontrer des calculs classiques dont nous aurons besoin par la suite. Deuxièmement, mettre en action dans le cadre plus simple des



foncteurs à une variable les techniques que nous utiliserons plus tard pour calculer la cohomologie des bifoncteurs.

### Chapitre 3 : Symétrisations de foncteurs polynomiaux

Ce chapitre traite des symétrisations injectives de foncteurs à  $n$  variables sur un anneau quelconque. La notion de symétrisation d'un foncteur polynomial a été introduite dans [9] dans le cadre des foncteurs à une variable sur un corps. Elle joue dans cet article un rôle essentiel.

**Définition.** Soient  $(d_1, \dots, d_n)$  des entiers et  $f$  un foncteur  $A$ -linéaire de la catégorie des  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ -modules vers la catégorie des  $A$ -modules. On dit que  $f$  est une symétrisation d'un foncteur polynomial à  $n$ -variables  $F \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  si

$$f(V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}) = F(V_1, \dots, V_n).$$

Nous utiliserons la notion de symétrisation aux chapitres 4 et 5. L'évaluation des symétrisations sur certains  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules particuliers servira à décrire la cohomologie des bifoncteurs (proposition 4.3.2 et théorème 5.1.26). Pour que cette utilisation des symétrisations soit intéressante, il faut résoudre les deux problèmes suivants :

1. Associer à chaque foncteur polynomial  $F$  une symétrisation de  $F$ , *et ceci naturellement en  $F$ .*
2. Déterminer le plus explicitement possible les symétrisations obtenues.

Le premier problème n'a pas été abordé dans [9], mais une solution a été proposée dans [17], dans le cadre particulier des foncteurs à une variable sur un corps. Nous construisons au théorème 3.2.1 un choix naturel *sym* de symétrisation des foncteurs polynomiaux.

Sur un corps et pour les foncteurs à une variable, notre foncteur *sym* coïncide (cf. remarque 3.2.3) avec avec le foncteur de symétrisation  $j_*$  construit dans [17]. Dans la section 3.4, nous expliquons en quoi notre principe de construction est différent de celui utilisé dans [17], et pourquoi le principe de construction utilisé dans [17] ne se généralise pas de manière satisfaisante sur un anneau quelconque.

Dans ce chapitre, nous étudions également le deuxième problème. Nous déterminons explicitement les symétrisations d'un certain nombre de foncteurs polynomiaux (propositions 3.3.4, 3.3.8, 3.3.11 et 3.4.17).

### Chapitre 4 : Cohomologie des bifoncteurs

Dans ce chapitre nous introduisons la catégorie  $\mathcal{P}_A(1, 1)$  des bifoncteurs polynomiaux (contravariants en une variable et covariants en la seconde) sur un anneau commutatif  $A$ . La cohomologie d'un bifoncteur  $B$  homogène de bidegré  $(d, d)$  est définie comme le groupe d'extensions :

$$H_{\mathcal{P}, A}^*(B) := \text{Ext}_{\mathcal{P}_A(1, 1)}^*(\Gamma^d gl, B),$$

où  $\Gamma^d gl$  est la précomposition du foncteur  $\Gamma^d$  des puissances divisées par le bifoncteur  $gl(-1, -2) = \text{Hom}_A(-1, -2)$ . Lorsque  $B$  est un bifoncteur séparable, ie. de la forme

$\text{Hom}_A(F(-1), G(-2))$  on a un isomorphisme :

$$H_{\mathcal{P},A}^*(\text{Hom}_A(F, G)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(F, G) ,$$

La cohomologie des bifoncteurs généralise donc les calculs d'extensions de foncteurs polynomiaux à une variable. Le résultat principal du chapitre est :

**Théorème (4.2.11).** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $A$  et  $n \geq d$ . Il existe un isomorphisme naturel en  $B$  :*

$$H_{\mathcal{P},A}^*(B) \xrightarrow{\cong} H_{\text{rat}}^*(GL_n/A, B(A^n, A^n)) .$$

Ce résultat n'était connu auparavant que dans le cas où  $A$  est un corps [13, Th 1.5]. Notre démonstration repose sur des calculs explicites de théorie classique des invariants et fournit lorsque  $A$  est un corps, une nouvelle démonstration de [13, Th 1.5] et [18, Cor 3.13].

## Chapitre 5 : Calculs de cohomologie en caractéristique $p$ première

Dans ce chapitre nous développons des techniques de calcul de la cohomologie des bifoncteurs en caractéristique  $p$  première.

La première technique est la plus importante. Elle permet de mieux comprendre l'influence des twists de Frobenius sur la cohomologie. Le point de départ est le théorème suivant, qui généralise le théorème 2.2.5 du deuxième chapitre :

**Théorème (5.1.8).** *Soient  $r$  un entier positif et  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Il existe un foncteur  $E(-, r)$  qui à un bifoncteur  $B$  associe une suite spectrale  $E(B, r)$  telle que :*

(i) *Si on gradue  $E_2^{*,*}(B, r)$  par le degré total :  $\deg E_2^{i,j}(B, r) = i + j$ , alors on a un isomorphisme  $\mathbb{Z}/2$ -gradué :*

$$E_2^{*,*}(B, r) \simeq H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus}{-1}{}^{p^r}, -2)) .$$

(ii)  *$E(B, r)$  converge vers  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B^{(r)})$ .*

Lorsque la suite spectrale dégénère à la deuxième page, la cohomologie de  $B^{(r)}$  se lit, à une regraduation près, sur celle du bifoncteur non twisté  $B(-\overset{\oplus}{-1}{}^{p^r}, -2)$ . Le twist n'a donc qu'un effet minime et prévisible sur la cohomologie de  $B$ . Ceci justifie la définition suivante :

**Définition (5.1.10).** Soit  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  défini sur un anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$  première. On dit que le twist de Frobenius est *transparent* pour  $B$  si toutes les suites spectrales  $E(B, r)$ ,  $r \geq 0$ , dégénèrent à la deuxième page.

L'intérêt de ce phénomène de transparence est que la cohomologie du bifoncteur  $B(-_1^{\oplus p^r}, -_2)$  est plus simple à calculer que celle de  $B^{(r)}$ . Si  $B \in \mathcal{P}_A(1, 1)$  est un bifoncteur contravariant en la première variable et covariant en la seconde, on note  $DB \in \mathcal{P}_A(2)$  le bifoncteur covariant en ses deux variables défini par  $DB(-_1, -_2) = B(-_1^{\vee}, -_2)$ . Comme application de la notion de transparence du twist, on démontre :

**Théorème (5.1.26).** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première et  $r$  un entier positif. Il existe un morphisme naturel en  $B$  :*

$$\phi_{B,r} : H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B^{(r)}) \rightarrow \text{sym}(DB)(H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})) .$$

*Si le twist de Frobenius est transparent pour  $B$ , ce morphisme est surjectif. Si  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B(-_1^{\oplus p^r}, -_2)) = 0$  pour  $* > 0$  alors  $\phi_{B,r}$  est un isomorphisme.*

Dans le cas particulier où  $\mathbb{A}$  est un corps et  $B$  est un bifoncteur séparable, ce théorème est une généralisation du théorème principal de [9].

Motivés par ces applications, nous étudions dans la section 5.1.3 des conditions de transparence du twist de Frobenius et donnons des exemples. En fait, nous ne disposons pas d'exemple de bifoncteur pour lequel le twist n'est pas transparent. Dans la section 5.1.4 nous formulons et étayons la conjecture suivante :

**Conjecture (5.1.20).** Le twist de Frobenius est transparent pour tous les bifoncteurs.

Les deux autres techniques développées dans ce chapitre concernent d'une part la caractéristique d'Euler et d'autre part les séries de Poincaré de la cohomologie des bifoncteurs. Elles sont donc valables lorsque l'anneau de base  $\mathbb{A}$  est un corps.

La caractéristique d'Euler est une donnée intéressante pour la cohomologie des bifoncteurs définis sur un corps. En effet, de nombreux bifoncteurs usuels n'ont pas ou peu de cohomologie en degré impair, et la caractéristique d'Euler constitue donc une minoration intéressante de la taille de leur cohomologie. Dans la section 5.2 nous développons des techniques pour calculer aisément cette caractéristique d'Euler. Pour cela, nous nous appuyons sur les outils développés préalablement : changement de base, symétrisations et théorème 5.1.8. L'énoncé suivant regroupe nos conclusions :

**Théorème (techniques de calcul de caractéristique d'Euler).** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique  $p$  non nulle.*

- *Twists de Frobenius.*

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B^{(r)}) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B(-_1^{\oplus p^r}, -_2)) .$$

- *Dualité de Kuhn. Notons  $F^\sharp$  le dual de Kuhn d'un foncteur  $F$ , on a :*

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(Fgl) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(F^\sharp gl) .$$

- *Changement de caractéristique.* Si  $B$  est un bifoncteur défini sur  $\mathbb{Z}$  et  $B_{\mathbb{K}}$  le bifoncteur obtenu par changement de base sur le corps  $\mathbb{K}$  alors  $\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B_{\mathbb{K}})$  ne dépend pas de  $\mathbb{K}$  (et donc pas de la caractéristique)

Le changement de caractéristique est intéressant pour obtenir des calculs explicites. En effet, que lorsque la caractéristique est nulle, la cohomologie est nulle en degré strictement positif (cf. corollaire 4.2.13). La caractéristique d'Euler est donc égale à la dimension de la cohomologie en degré 0. Or on connaît la cohomologie de degré zéro en termes de symétrisations (proposition 4.3.2) et en caractéristique nulle les symétrisations sont très explicites (cf. chapitre 3).

Enfin, nous souhaitons pouvoir effectuer des calculs explicites de séries de Poincaré pour la cohomologie des bifoncteurs sur un corps de caractéristique positive (par exemple  $\mathbb{F}_p$ ). Supposons que  $B$  est un bifoncteur défini sur  $\mathbb{Z}$ , et notons  $B_{\mathbb{K}}$  le bifoncteur sur  $\mathbb{K}$  obtenu par changement de base. En vue du théorème 5.1.26, nous cherchons donc à obtenir la dimension de l'espace vectoriel obtenu en évaluant la symétrisation  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d})$ .

Malheureusement, la symétrisation  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})$  n'est pas toujours connue explicitement. La symétrisation  $\text{sym}(DB_{\mathbb{C}})$  sur le corps de base  $\mathbb{C}$  est par contre plus facile à calculer. Pour calculer la dimension du  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d}))$  on adopte donc la stratégie suivante :

1. On découpe le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d})$  en une somme directe de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules de permutation  $\mathbb{F}_p E$ .
2. Le théorème suivant permet ensuite de ramener le calcul de la dimension de  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{F}_p E)$  au calcul plus facile de la dimension de  $\text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{C}E)$ .

**Théorème (5.3.2).** *Soit  $B \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{Z}}^d$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  et  $p$  un nombre premier. Supposons que le  $\mathbb{Z}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^1(B(-\overset{\oplus}{1}, -2))$  n'a pas de  $p$ -torsion. Alors pour tout  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module élémentaire  $\mathbb{Z}E$ , la dimension du  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{F}_p)$  est égale à la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{C})$ .*

Cette stratégie permettra par exemple de calculer les séries de Poincaré de la cohomologie des tenseurs symétriques twistés de  $gl$  au chapitre 6.

## Chapitre 6 : Cohomologie des tenseurs symétriques twistés

Ce chapitre présente des calculs explicites de séries de Poincaré de bifoncteurs obtenus grâce aux techniques développés dans le chapitre 5. Notre principal résultat concerne la famille de tenseurs symétriques twistés de  $gl$  c'est-à-dire des bifoncteurs obtenus en précomposant un produit tensoriel  $S^{\mu(r)}$  de puissances symétriques twistées par le bifoncteur  $gl(-1, -2) = \text{Hom}_{\mathbb{A}}(-1, -2)$ .

**Théorème (6.1.1).** *Soient  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un  $n$ -uplet de poids  $d$ ,  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $r$  un entier positif. Le  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl)$  est libre de type fini et sa série de Poincaré est égale à la série de Poincaré des coinvariants du  $\mathfrak{S}_d$ -module gradué  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$  sous l'action du sous-groupe  $\mathfrak{S}_{\mu} = \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu_n} \subset \mathfrak{S}_d$ .*

Une démonstration élémentaire (mais technique) de ce théorème a été publiée dans [41]. Le résultat n'était préalablement connu que pour  $p < d$  et  $p = d = 2$  [13, Th 5.1]. Nous utilisons ensuite ce résultat pour obtenir de nouvelles séries de Poincaré. Notons  $L^p$  le quotient de  $S^p$  par le sous-foncteur  $I^{(1)}$ .

**Théorème (6.2.17).** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $r$  un entier positif. La série de Poincaré de la cohomologie de  $L^{p(r)}gl$  s'obtient en ajoutant la série :*

$$\frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}}(t + t^3 + \dots + t^{2p-5} + t^{2p-3} - 1)$$

à la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ .

Lorsque  $p = 2$  le foncteur  $L^2$  est égal au foncteur  $\Lambda^2$  des puissances extérieures. Notre théorème redonne donc un résultat connu [13, Th 5.1]. Lorsque  $p \neq 2$ , ce résultat est nouveau, tout comme le suivant :

**Théorème (6.2.29).** *La série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  s'obtient en ajoutant la série*

$$(t + t^2 + \dots + t^{2p-2}) \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}}$$

à la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ .

Enfin, nos résultats sur la cohomologie des tenseurs symétriques twistés de  $gl$  nous permettent d'étudier le comportement après passage à la cohomologie des complexes construits Troesch [42], qui généralisent en toute caractéristique  $p$  première les complexes classiques connus [16, 18] pour  $p = 2$  :

$$S^{np} \rightarrow S^{np-1} \otimes S^1 \rightarrow S^{np-2} \otimes S^2 \rightarrow \dots \rightarrow S^1 \otimes S^{np-1} \rightarrow S^{np} .$$

Nous en déduisons (corollaire 6.2.11) des renseignements sur les applications induites en cohomologie par les morphismes entre tenseurs symétriques. En particulier la multiplication  $gl^{(r)\otimes d} \rightarrow S^{d(r)}gl$  n'induit pas un morphisme surjectif en cohomologie.

## Chapitre 7 : Combinatoire du pléthysme $S^\mu(V \otimes W)$

Ce chapitre utilise et développe la combinatoire introduite par Akin, Buchsbaum et Weyman dans [4]. Dans cet article les auteurs construisent [4, §III] une filtration explicite du bifoncteur  $S^n(-1 \otimes -2)$  dont le gradué est une somme directe de produits tensoriels de foncteurs de Schur  $S_\lambda(-1) \otimes S_\lambda(-2)$ . D'autre part on dispose [4, Th II.2.16] de présentations des foncteurs de Schur  $S_\lambda$ .

En prenant les produits tensoriels et les sommes adéquates, on a donc une filtration de  $S^\mu(-1 \otimes -2)$  et une présentation du gradué associé à cette filtration. En reprenant les calculs de [4], nous montrons comment en déduire (théorème 7.1.11) une présentation explicite de  $S^\mu(-1 \otimes -2)$ . Nous appelons cette présentation « présentation standard » :

$$\mathcal{R}_\mu(-1, -2) \xrightarrow{\mathcal{X}_\mu} \mathcal{G}_\mu(-1, -2) \xrightarrow{\Phi_\mu} S^\mu(-1 \otimes -2) \rightarrow 0 .$$

En dualisant la première variable, on obtient une présentation du bifoncteur  $S^\mu gl$ . Nous montrons au théorème 7.2.4 que cette présentation induit après passage au twist une de la cohomologie de  $S^{\mu(r)} gl$ . L'intérêt de cette présentation est que les bifoncteurs obtenus en dualisant la première variable de  $\mathcal{R}_\mu$  et de  $\mathcal{G}_\mu$  sont faciles à comprendre en cohomologie (ce sont des foncteurs séparables). Ce théorème nous donne donc une description explicite (mais complexe) de la cohomologie, plus naturelle que la série de Poincaré obtenue au chapitre 6.

Enfin, nous utilisons la combinatoire développée dans [4] pour donner (corollaire 7.2.12) une base explicite sur  $\mathbb{Z}$  de  $H_{\mathcal{P}}^0(S^n gl)$ .



# Conventions

Dans tout le document, les anneaux et les algèbres sont toujours supposés unitaires, et les corps sont toujours supposés commutatifs. Nous utiliserons les conventions de notation suivantes :

La lettre minuscule  $p$  désigne un nombre premier

La lettre  $A$  désigne un anneau commutatif unitaire

La lettre  $\mathbb{A}$  désigne un anneau commutatif unitaire de caractéristique  $p$  première

La lettre  $\mathbb{K}$  désigne un corps

Le symbole  $\mathbb{F}_q$  désigne un corps à  $q$  éléments

La lettre  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels

La lettre  $\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers relatifs

La lettre  $\mathbb{Q}$  désigne le corps de nombres rationnels

La lettre  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes





# Chapitre 1

## Rappels sur les catégories de foncteurs polynomiaux

Dans ce chapitre, nous présentons les catégories de foncteurs polynomiaux. Nous commençons par quelques rappels et notations d'algèbre linéaire, et nous introduisons la catégorie  $\mathcal{V}_A$  des  $A$ -modules projectifs de type fini sur un anneau commutatif  $A$ .

Nous donnons ensuite deux points de vue sur les catégories de foncteurs polynomiaux. Le premier point de vue, développé au paragraphe 1.2, suit la description faite dans [18, 15, 40]. La notion de foncteur polynomial  $y$  est présentée comme une modification de la notion usuelle de foncteur de  $\mathcal{V}_A \rightsquigarrow \mathcal{V}_A$ . Dans le paragraphe 1.3, nous développons un deuxième point de vue inspiré de [14, 17]. Un foncteur polynomial  $y$  est décrit comme un foncteur au sens usuel du terme, mais on remplace la catégorie  $\mathcal{V}_A$  à la source par une catégorie  $\Gamma^d \mathcal{V}_A$  qui code le caractère polynomial du foncteur. C'est ce deuxième point de vue que nous utiliserons dans la suite du chapitre.

Sur un anneau de base  $A$  quelconque, les catégories de foncteurs polynomiaux ne sont pas des catégories abéliennes. Cependant, ce sont des catégories exactes au sens de Quillen, cf. annexe A. Au prix de quelques précautions mineures (il faut travailler avec des suites exactes courtes et des résolutions *admissibles*), on peut donc  $y$  faire de l'algèbre homologique comme dans les catégories abéliennes. Dans les paragraphes 1.4 et 1.5, nous présentons des techniques bien connues [18, 15, 14, 40] pour faire des calculs d'extensions dans les catégories de foncteurs polynomiaux.

Enfin, dans le paragraphe 1.6, nous présentons en détail le twist de Frobenius  $I^{(1)}$  sur un anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique première. Ce foncteur polynomial joue un rôle important pour la théorie des représentations des groupes algébriques [18, 15, 10, 43]. Son étude sera l'un des points centraux des chapitres 2 et 5.

Terminons par une remarque. Bien que les catégories de foncteurs polynomiaux sont fortement reliées aux représentations du groupe algébrique  $GL_n$ , la notion de groupe algébrique n'intervient pas dans ce chapitre, hormis dans la proposition 1.2.16 qui stipule que les foncteurs polynomiaux fournissent des représentations rationnelles des groupes linéaires. La liaison avec la cohomologie rationnelle du groupe linéaire sera effectuée plus tard, au chapitre 4.

## 1.1 Rappels d'algèbre linéaire

Soit  $A$  un anneau commutatif. On rappelle qu'un  $A$ -module projectif de type fini est un facteur direct d'un  $A$ -module libre de type fini.

### 1.1.1 Dualité $A$ -linéaire

Si  $V$  est un  $A$ -module, on note  $V^\vee$  son dual  $A$ -linéaire :

$$V^\vee := \text{Hom}_A(V, A).$$

Le dual d'un module projectif de type fini est encore un module projectif de type fini. Si  $V, W$  sont des  $A$ -modules projectifs de type fini et  $d$  un entier positif, on connaît des isomorphismes  $A$ -linéaires, naturels en  $V, W$  :

$$\begin{aligned} V &\simeq (V^\vee)^\vee, \\ V^\vee \otimes_A W &\simeq \text{Hom}_A(V, W), \\ \text{Hom}_A(V, W)^\vee &\simeq \text{Hom}_A(V^\vee, W^\vee), \\ V^\vee \otimes_A W^\vee &\simeq (V \otimes_A W)^\vee, \\ \text{Hom}_A(V, W)^{\otimes d} &\simeq \text{Hom}_A(V^{\otimes d}, W^{\otimes d}). \end{aligned}$$

### 1.1.2 Algèbres symétriques, extérieures, à puissances divisées

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement la construction et les propriétés des algèbres symétriques, extérieures et à puissances divisées. Ce matériel classique est contenu par exemple dans [28] ou [12, annexe 2]. Soit  $V$  un  $A$ -module projectif de type fini. L'algèbre tensorielle sur  $V$  est le  $A$ -module gradué  $\bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d}$  muni de la multiplication

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_\ell) \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_\ell)$$

et avec unité  $1 \in A = V^{\otimes 0}$ .

L'algèbre symétrique  $S^*(V)$  est l'algèbre graduée obtenue comme quotient de l'algèbre tensorielle par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $v \otimes v' - v' \otimes v$ , avec  $v, v' \in V$ . Notons  $(v_1, \dots, v_d) \in S^d(V)$  l'image de l'élément  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$  par la projection  $V^{\otimes d} \rightarrow S^d(V)$ . Si  $V$  et  $W$  sont des  $A$ -modules projectifs de type fini, on appelle formule exponentielle l'isomorphisme  $A$ -linéaire gradué, naturel en  $V, W$  :

$$\begin{aligned} S^*(V) \otimes_A S^*(W) &\xrightarrow{\cong} S^*(V \oplus W) \\ (v_1 \dots v_k) \otimes (w_1 \dots w_\ell) &\mapsto (v_1 \dots v_k w_1 \dots w_\ell) \end{aligned}$$

L'application  $V \rightarrow V \oplus V, v \mapsto (v, v)$  induit un morphisme  $S^*(V) \rightarrow S^*(V \oplus V)$ . La composée

$$S^*(V) \rightarrow S^*(V \oplus V) \simeq S^*(V) \otimes_A S^*(V)$$

définit une comultiplication sur  $S^*(V)$ . Munie de cette comultiplication et augmentée par  $S^0(V) = A$ ,  $S^*(V)$  est une algèbre de Hopf graduée. La structure multiplicative de l'algèbre symétrique se traduit agréablement en termes de coinvariants (cf. annexe B.1.2). Si  $k, \ell$  sont deux entiers positifs, le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{k+\ell}$  agit sur  $V^{\otimes k+\ell}$  par permutation des facteurs. Le produit tensoriel  $S^k(V) \otimes S^\ell(V)$  est égal aux coinvariants de  $V^{\otimes k+\ell}$  sous l'action du sous-groupe  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\ell$  et  $S^{k+\ell}(V)$  est égal aux coinvariants sous l'action de  $\mathfrak{S}_{k+\ell}$ . L'inclusion  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\ell \subset \mathfrak{S}_{k+\ell}$  induit une surjection

$$\left(V^{\otimes k+\ell}\right)_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\ell} \twoheadrightarrow \left(V^{\otimes k+\ell}\right)_{\mathfrak{S}_{k+\ell}}$$

qui est précisément égale à la multiplication.

L'algèbre extérieure  $\Lambda^*(V)$  sur le  $A$ -module projectif de type fini  $V$  est l'algèbre graduée définie comme quotient de l'algèbre tensorielle sur  $V$  par l'idéal engendré par les éléments  $v \otimes v$  avec  $v \in V$ . On a également une formule exponentielle, ie. un isomorphisme  $A$ -linéaire gradué, naturel en les modules projectifs de type fini  $V, W$  :

$$\Lambda^*(V) \otimes_A \Lambda^*(W) \simeq \Lambda^*(V \oplus W) .$$

On définit sur  $\Lambda^*(V)$  une structure d'algèbre de Hopf graduée analogue à celle de l'algèbre symétrique. Pour tout  $A$ -module projectif de type fini, on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées, naturel en  $V$  :

$$\Lambda^*(V)^\vee \simeq \Lambda^*(V^\vee) .$$

Enfin, l'algèbre à puissances divisées  $\Gamma^*(V)$  sur le  $A$ -module projectif de type fini  $V$  est l'algèbre de Hopf graduée définie par la formule :

$$\Gamma^*(V) := S^*(V^\vee)^\vee .$$

Cette algèbre graduée satisfait également à une formule exponentielle :

$$\Gamma^*(V \oplus W) \simeq \Gamma^*(V) \otimes_A \Gamma^*(W) .$$

La comultiplication de l'algèbre à puissances divisées s'interprète agréablement en termes d'invariants. Si  $k, \ell$  sont deux entiers positifs, le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{k+\ell}$  agit sur  $V^{\otimes k+\ell}$  par permutation des facteurs. Le produit tensoriel  $\Gamma^k(V) \otimes \Gamma^\ell(V)$  est égal aux invariants de  $V^{\otimes k+\ell}$  sous l'action du sous-groupe  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\ell$  et  $\Gamma^{k+\ell}(V)$  est égal aux invariants sous l'action de  $\mathfrak{S}_{k+\ell}$ . L'inclusion  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\ell \subset \mathfrak{S}_{k+\ell}$  induit une injection  $(V^{\otimes k+\ell})^{\mathfrak{S}_{k+\ell}} \hookrightarrow (V^{\otimes k+\ell})^{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\ell}$ . Ces applications définissent une injection

$$\left(V^{\otimes k+\ell}\right)^{\mathfrak{S}_{k+\ell}} \hookrightarrow \bigoplus_{i+j=k+\ell} \left(V^{\otimes k+\ell}\right)^{\mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_j}$$

qui est précisément égale à la comultiplication de l'algèbre à puissances divisées.

### 1.1.3 La catégorie $\mathcal{V}_A$

Soit  $\mathcal{M}od(A)$  la catégorie abélienne des  $A$ -modules et des applications  $A$ -linéaires. On note  $\mathcal{V}_A$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}od(A)$  ayant pour objets les  $A$ -modules projectifs de type fini. La catégorie  $\mathcal{V}_A$  est une catégorie  $A$ -linéaire, c'est-à-dire une catégorie dont les Hom sont des  $A$ -module et où la composition est bilinéaire. Elle possède des sommes finies et des produits finis qui en font une catégorie additive.

Si  $A$  est un corps, la catégorie  $\mathcal{V}_A$  est abélienne, mais ce n'est pas le cas si l'anneau  $A$  est un anneau commutatif quelconque : la catégorie  $\mathcal{V}_A$  n'est pas stable par noyaux et conoyaux. Par exemple sur  $A = \mathbb{Z}$ , le morphisme  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$  n'admet pas de conoyau dans  $\mathcal{V}_A$ . Si  $A$  est un anneau principal ou plus généralement un anneau de Dedekind [5, définition p. 445], tous les morphismes admettent des noyaux. Malgré ce défaut d'existence de noyaux et de conoyaux en général, la catégorie  $\mathcal{V}_A$  possède une structure suffisamment riche pour pouvoir faire de l'algèbre homologique : c'est une catégorie exacte au sens de Quillen, cf. annexe A.

Soit  $d$  un entier positif. Les parties homogènes de degré  $d$  des algèbres tensorielles, symétriques, extérieures et divisées définissent des endofoncteurs de  $\mathcal{V}_A$ , notés respectivement  $\otimes^d, S^d, \Lambda^d, \Gamma^d$ . Les multiplications ou comultiplications de ces algèbres définissent des transformations naturelles de foncteurs. Par exemple, la multiplication de l'algèbre symétrique induit pour tout couple  $k, \ell$  d'entiers naturels une transformation naturelle  $S^k \otimes S^\ell \rightarrow S^{k+\ell}$ .

## 1.2 Foncteurs polynomiaux selon Friedlander et Suslin

### 1.2.1 Polynômes

Soient  $A$  un anneau commutatif et  $V, W \in \mathcal{V}_A$  des  $A$ -modules projectifs de type fini. On pose

$$\text{Hom}_{\text{Pol}}(V, W) := S^*(V^\vee) \otimes W .$$

Les éléments de  $\text{Hom}_{\text{Pol}}(V, W)$  sont appelés polynômes de  $V$  dans  $W$ . Un polynôme est dit homogène de degré  $d \geq 0$  si c'est un élément de  $S^d(V^\vee) \otimes W$ . Les applications linéaires s'identifient aux polynômes homogènes de degré 1 et toute application bilinéaire  $U \times V \rightarrow W$  définit un polynôme homogène de degré 2 de  $U \times V$  dans  $W$ .

Un polynôme de  $V$  vers  $W$  détermine une application polynomiale entre les ensembles  $V$  et  $W$ . L'application polynomiale correspondant au polynôme  $f = \phi_1 \dots \phi_d \otimes w \in S^d(V^\vee) \otimes W$  est encore notée  $f$  et est donnée par la formule

$$f(v) = \phi_1(v) \dots \phi_d(v)w .$$

Pour  $I = (i_1, \dots, i_d)$  on note  $\phi_I$  l'élément  $\phi_{i_1} \dots \phi_{i_d} \in S^d(V^\vee)$ . On définit la composition des polynômes

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Pol}}(U, V) \times \text{Hom}_{\text{Pol}}(V, W) & \rightarrow & \text{Hom}_{\text{Pol}}(U, W) \\ (Q, P) & \mapsto & P \circ Q \end{array}$$

par la formule usuelle :

$$\left( \sum_J \psi_J \otimes w_J \right) \circ \left( \sum_I \phi_I \otimes v_I \right) := \sum_J \left( \sum_I \psi_{j_1}(v_I) \phi_I \right) \cdots \left( \sum_I \psi_{j_d}(v_I) \phi_I \right) \otimes w_J .$$

Cette loi est associative, et la composée d'un polynôme (homogène) de degré  $d$  et d'un polynôme (homogène) de degré  $e$  est un polynôme (homogène) de degré  $de$ .

### 1.2.2 Foncteurs polynomiaux

Soient  $\mathcal{C}^1, \dots, \mathcal{C}^n$  des catégories. La catégorie produit  $\mathcal{C}^1 \times \cdots \times \mathcal{C}^n$  est la catégorie dont les objets sont des  $n$ -uplets  $(C_1, \dots, C_n)$  où  $C_i$  est un objet de  $\mathcal{C}^i$  pour tout  $i$ , avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^1 \times \cdots \times \mathcal{C}^n} ((C_1, \dots, C_n); (C'_1, \dots, C'_n)) := \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^i} (C_i, C'_i)$$

et par définition, la loi de composition dans  $\mathcal{C}^1 \times \cdots \times \mathcal{C}^n$  est le produit des lois de composition dans les  $\mathcal{C}^i$ .

**Définition 1.2.1.** [40, def 2.1, def 3.5] Un  $n$ -foncteur polynomial  $T$  sur un anneau commutatif  $A$  :

$$T : \mathcal{V}_A^{\times n} \rightsquigarrow \mathcal{V}_A$$

est la donnée pour tout  $\underline{V} \in \mathcal{V}_A^{\times n}$  d'un élément  $T(\underline{V}) \in \mathcal{V}_A$  et pour toute paire  $\underline{V}, \underline{W} \in \mathcal{V}_A^{\times n}$  d'un polynôme

$$T_{\underline{V}, \underline{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_A}(T(\underline{V}), T(\underline{W})) ,$$

vérifiant les deux conditions :

- (1)  $T_{\underline{V}, \underline{V}}(\mathrm{Id}_{\underline{V}}) = \mathrm{Id}_{T(\underline{V})}$  .
- (2) Pour tous  $\underline{U}, \underline{V}, \underline{W} \in \mathcal{V}_A^{\times n}$ , le diagramme suivant de polynômes commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\underline{U}, \underline{V}) \times \mathrm{Hom}(\underline{V}, \underline{W}) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Hom}(\underline{V}, \underline{W}) \\ \downarrow T_{\underline{U}, \underline{V}} \times T_{\underline{V}, \underline{W}} & & \downarrow T_{\underline{V}, \underline{W}} \\ \mathrm{Hom}(T(\underline{U}), T(\underline{V})) \times \mathrm{Hom}(T(\underline{V}), T(\underline{W})) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Hom}(T(\underline{U}), T(\underline{W})) . \end{array}$$

*Remarque 1.2.2.* Comme un polynôme définit une application (polynomiale), un foncteur polynomial définit un foncteur au sens usuel du terme. Cependant, deux foncteurs polynomiaux différents peuvent définir, par oubli de structure, le même foncteur au sens usuel. C'est le cas par exemple du twist de Frobenius  $-(1)$  (cf. définition 1.6.2) et du foncteur identité sur le corps premier  $A = \mathbb{F}_p$ .

*Exemple 1.2.3.* Les foncteurs puissances divisées  $\Gamma^d$ , puissances extérieures  $\Lambda^d$ , puissances symétriques  $S^d$  et puissances tensorielles  $\otimes^d$  ont une structure de foncteur polynomial. Par exemple,  $\otimes_{V, W}^d$  est le polynôme homogène de degré  $d$  de  $\mathrm{Hom}_A(V, W)$

dans  $\text{Hom}_A(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$  obtenu en prenant l'image de  $\text{Id}_{\text{Hom}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})}$  par l'application induite par la multiplication :

$$\text{Hom}(V, W)^{\vee \otimes d} \otimes \text{Hom}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d}) \rightarrow S^d(\text{Hom}(V, W)^\vee) \otimes \text{Hom}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d}) .$$

*Exemple 1.2.4.* Soit  $S$  un  $n$ -foncteur polynomial et pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $T_i$  un  $t_i$ -foncteur polynomial. Alors le foncteur composé :  $S(T_1, \dots, T_n)$  a une structure de  $\sum t_i$ -foncteur polynomial donnée par la formule de composition des polynômes.

*Exemple 1.2.5.* Si  $T, T'$  sont des  $n$ -foncteurs polynomiaux, alors leur produit tensoriel  $(T \otimes T')(V) = T(V) \otimes T'(V)$  est muni d'une structure de  $n$ -foncteur polynomial de la façon suivante. Le polynôme  $(T \otimes T')_{\underline{V}, \underline{W}}$  est l'image de  $T_{\underline{V}, \underline{W}} \otimes T'_{\underline{V}, \underline{W}}$  par l'application induite par la multiplication :

$$\begin{aligned} (S^*(\text{Hom}(\underline{V}, \underline{W})^\vee))^{\otimes 2} \otimes \text{Hom}(T(\underline{V}), T(\underline{W})) \otimes \text{Hom}(T'(\underline{V}), T'(\underline{W})) \\ \rightarrow S^*(\text{Hom}(\underline{V}, \underline{W})^\vee) \otimes \text{Hom}((T \otimes T')(\underline{V}), (T \otimes T')(\underline{W})) . \end{aligned}$$

De même, si  $T$  (resp.  $T'$ ) est un  $n$  (resp.  $m$ )-foncteur polynomial, le produit tensoriel extérieur  $(T \boxtimes T')(\underline{V}, \underline{V}') = T(\underline{V}) \otimes T'(\underline{V}')$  est muni d'une structure de  $(n+m)$ -foncteur polynomial.

**Définition 1.2.6.** Une transformation naturelle  $f : S \rightarrow T$  entre deux  $n$ -foncteurs polynomiaux est la donnée, pour tout  $\underline{V} \in \mathcal{V}_A^{\times n}$  d'une application linéaire  $f_{\underline{V}} : S(\underline{V}) \rightarrow T(\underline{V})$  telle que le diagramme suivant de polynômes commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\underline{V}, \underline{W}) & \xrightarrow{S_{\underline{V}, \underline{W}}} & \text{Hom}(S(\underline{V}), S(\underline{W})) \\ \downarrow T_{\underline{V}, \underline{W}} & & \downarrow f_{\underline{W}} \circ - \\ \text{Hom}(T(\underline{V}), T(\underline{W})) & \xrightarrow{- \circ f_{\underline{V}}} & \text{Hom}(S(\underline{V}), T(\underline{W})) . \end{array}$$

*Exemple 1.2.7.* Soit  $X^* = S^*, \Lambda^*$  ou  $\Gamma^*$ . Les transformations naturelles données par la multiplication  $X^k \otimes X^\ell \rightarrow X^{k+\ell}$ , la comultiplication  $X^{k+\ell} \rightarrow X^k \otimes X^\ell$  ou la permutation  $X^k \otimes X^\ell \simeq X^\ell \otimes X^k$  sont des transformations naturelles de foncteurs polynomiaux.

On peut vérifier :

**Proposition 1.2.8.** Soit  $f : S \rightarrow T$  une transformation naturelle entre deux  $n$ -foncteurs polynomiaux. Supposons que pour tout  $\underline{V} \in \mathcal{V}_A^{\times n}$ ,  $\text{Ker } f_{\underline{V}}$  (resp.  $\text{Coker } f_{\underline{V}}$ , resp.  $\text{Im } f_{\underline{V}}$ ) est un module projectif de type fini, alors  $f$  admet un noyau (resp. un conoyau, resp. une image).

**Corollaire 1.2.9.** Soit  $f : S \rightarrow T$  une transformation naturelle entre deux  $n$ -foncteurs telle que pour tout  $\underline{V} \in \mathcal{V}_A^{\times n}$ ,  $f_{\underline{V}}$  est surjective. Alors  $f$  admet un noyau.

*Exemple 1.2.10.* Soit  $\lambda/\lambda'$  un diagramme gauche. Le foncteur de Schur  $S_{\lambda/\lambda'}$  sur  $A$  (cf. définition B.3.12 et corollaire B.3.16) est un foncteur polynomial.

### 1.2.3 Foncteurs de degré fini

Soient  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  et  $\underline{W} = (W_1, \dots, W_n)$  deux objets de  $\mathcal{V}_A^{\times n}$ . On a un isomorphisme :

$$S^d \left( \text{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W})^\vee \right) \simeq \bigoplus_{d_1 + \dots + d_n = d} \bigotimes_{i=1}^n S^{d_i} \left( \text{Hom}_{\mathcal{V}_A}(V_i, W_i)^\vee \right) .$$

Un polynôme  $f$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W})$  dans  $W$  est homogène de degré total  $d$  si  $f$  est un élément de  $S^d \left( \text{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W})^\vee \right) \otimes W$  et il est homogène de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  si  $f$  est un élément de  $\bigotimes_{i=1}^n S^{d_i} \left( \text{Hom}_{\mathcal{V}_A}(V_i, W_i)^\vee \right) \otimes W$ .

**Définition 1.2.11.** Soit  $T$  un  $n$ -foncteur polynomial. On dit que  $T$  est de degré fini si les degrés des polynômes  $T_{\underline{V}, \underline{W}}$  sont majorés. On dit que  $T$  est homogène de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  (resp. homogène de degré total  $d$ ) si tous les polynômes  $T_{\underline{V}, \underline{W}}$  sont homogènes de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  (resp. homogènes de degré total  $d$ ).

*Exemple 1.2.12.* Les foncteurs  $\Lambda^d$ ,  $S^d$ ,  $\Gamma^d$ ,  $\otimes^d$  sont des foncteurs homogènes de degré  $d$ . Si  $\lambda/\lambda'$  est un diagramme gauche de poids  $d$ , le foncteur de Schur  $S_{\lambda/\lambda'}$  (cf. définition B.3.12) est également un foncteur homogène de degré  $d$ .

*Exemple 1.2.13.* Le foncteur  $\bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^d$  est un foncteur polynomial qui n'est pas de degré fini.

**Définition 1.2.14.** Soit  $A$  un anneau commutatif. On note  $\mathcal{P}_A(n)$  la catégorie des foncteurs polynomiaux de degré fini et des transformations naturelles entre de tels foncteurs. On note  $\mathcal{P}_{d,A}(n)$  (resp.  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ ) la sous-catégorie pleine des foncteurs polynomiaux homogènes de degré total  $d$  (resp. de degré  $(d_1, \dots, d_n)$ ).

**Abus de notation 1.2.15.** Les notations introduites dans la définition précédente sont relativement lourdes. Pour alléger les formules, on s'autorisera les abus suivants.

- Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'anneau  $A$ , on omettra de l'indiquer. Par exemple, on pourra écrire  $\mathcal{P}_d(n)$  au lieu de  $\mathcal{P}_{d,A}(n)$ .
- Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le nombre de variables, on pourra ne pas l'indiquer. Par exemple, on pourra écrire  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}$  au lieu de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ .
- Enfin, lorsque  $n = 1$ , on omet d'indiquer le nombre de variables. Ainsi,  $\mathcal{P}_A$  signifie  $\mathcal{P}_A(1)$  et  $\mathcal{P}_{d,A}$  signifie  $\mathcal{P}_{d,A}(1)$ .

A l'instar des catégories de foncteurs usuelles [36, p. 80], les catégories de foncteurs polynomiaux  $\mathcal{P}_A(n)$  (resp.  $\mathcal{P}_{d,A}(n)$ ,  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ ) héritent de la structure de la catégorie  $\mathcal{V}_A$  située au but. Ainsi, ce sont des catégories  $A$ -linéaires additives. Les noyaux et les conoyaux sont calculés au but quand ils existent. Si  $A$  est un anneau de Dedekind, tout morphisme admet un noyau. Si  $A$  est un corps, les catégories de foncteurs polynomiaux sont abéliennes.

Soit  $T$  un  $n$ -foncteur polynomial et  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{V}_A^{\times n}$ . Par functorialité de  $T$ , le polynôme

$$T_{\underline{V}, \underline{V}} : \prod_{i=1}^n \text{End}_A(V_i) \rightarrow \text{End}(T(\underline{V}))$$



induit une action (polynomiale) du monoïde  $\prod_{i=1}^n \text{End}_A(V_i)$  sur  $T(\underline{V})$ . En restreignant au groupe linéaire, on obtient une structure de  $GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_n)$ -module rationnel sur  $T(\underline{V})$ . On a donc :

**Proposition 1.2.16.** [40, p. 702] Soit  $A$  un anneau commutatif, et  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  un  $n$ -uplet de modules projectifs de type fini, et  $T$  un  $n$ -foncteur polynomial de degré fini sur  $A$ . Alors  $T(\underline{V})$  est muni d'une structure de  $GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_n)$ -module rationnel.

**Proposition 1.2.17.** [18, prop 2.6],[40, p. 703, p.710] Les catégories additives  $A$ -linéaires  $\mathcal{P}_A(n)$  et  $\mathcal{P}_{d,A}(n)$  se décomposent en somme directe de leurs sous-catégories pleines :

$$\mathcal{P}_A(n) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{d,A}(n), \quad \mathcal{P}_{d,A}(n) = \bigoplus_{d_1 + \cdots + d_n = d} \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n).$$

*Démonstration.* Soit  $T$  un  $n$ -foncteur polynomial de degré fini et  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{V}_A^{\times n}$ . D'après la proposition 1.2.16, on a une structure de  $GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_n)$ -module rationnel (et même polynomial) sur  $T(\underline{V})$ .

Notons  $T_d(\underline{V})$  le sous-module de  $T(\underline{V})$  de éléments de poids total  $d$ , c'est-à-dire le sous-module constitués des points fixes rationnels [24, I 2.10] de  $T(\underline{V})$  sous l'action du sous-groupe des homothéties

$$G_m = \{\lambda(\text{Id}_{V_1} \times \cdots \times \text{Id}_{V_n})\} \subset GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_n).$$

On note également  $T_{d_1, \dots, d_n}(\underline{V})$  le sous-espace de poids  $(d_1, \dots, d_n)$  de  $T(\underline{V})$ , c'est-à-dire l'espace vectoriel des points fixes sous l'action du sous-groupe

$$G_m^{\times n} = \{\lambda_1 \text{Id}_{V_1} \times \cdots \times \lambda_n \text{Id}_{V_n}\} \subset GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_n).$$

Comme les groupes  $G_m$  et  $G_m^{\times n}$  sont diagonalisables, on a des décompositions en somme directe [24, I 2.11(3)] :

$$T(\underline{V}) = \bigoplus_{d \geq 0} T_d(\underline{V}), \quad T_d(\underline{V}) = \bigoplus_{d_1 + \cdots + d_n = d} T_{d_1, \dots, d_n}(\underline{V}).$$

On vérifie alors que  $T_d$  (resp.  $T_{d_1, \dots, d_n}$ ) est un  $n$ -foncteur polynomial homogène de degré total  $d$  (resp. homogène de degré  $(d_1, \dots, d_n)$ ), avec pour polynômes  $T_{d, \underline{V}, \underline{W}}$  et  $T_{d_1, \dots, d_n, \underline{V}, \underline{W}}$  les composantes homogènes de  $T_{\underline{V}, \underline{W}}$  de degré correspondant.  $\square$

#### 1.2.4 Dualité de Kuhn

Soit  $\mathcal{C}$  un catégorie. La catégorie opposée  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  est la catégorie qui a les mêmes objets que  $\mathcal{C}$  et dont les morphismes sont donnés par la formule  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C, D) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C)$ .

Soit  $A$  un anneau commutatif. Si  $V \in \mathcal{V}_A$  est un  $A$ -module projectif de type fini alors son dual  $A$ -linéaire  $V^\vee$  est encore un  $A$ -module projectif de type fini. La formule  $T^\sharp(\underline{V}) = T(V_1^\vee, \dots, V_n^\vee)^\vee$  a donc un sens et définit un foncteur à valeur dans la catégorie  $\mathcal{V}_A$  des  $A$ -modules projectifs de type fini. On lui donne une structure de foncteur polynomial en définissant pour toute paire  $\underline{V}, \underline{W}$  le polynôme  $T_{\underline{V}, \underline{W}}^\sharp \in \text{Hom}_{\text{Pol}}(\text{Hom}(\underline{V}, \underline{W}), \text{Hom}_A(T^\sharp(\underline{V}), T^\sharp(\underline{W})))$  par la formule :  $T_{\underline{V}, \underline{W}}^\sharp = T_{\underline{W}^\vee, \underline{V}^\vee}$ .

**Définition-Proposition 1.2.18.** *Si  $T$  est un  $n$ -foncteur polynomial, son dual de Kuhn  $T^\sharp$  défini par  $T^\sharp(\underline{V}) = T(V_1^\vee, \dots, V_n^\vee)^\vee$  est encore un  $n$ -foncteur polynomial. On obtient ainsi une équivalence de catégories :*

$$(-)^\sharp : \mathcal{P}_A(n)^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_A(n)$$

qui préserve les degrés.

### 1.3 Présentation alternative des foncteurs polynomiaux

Soient  $V, W$  des  $A$ -modules projectifs de type fini. L'isomorphisme naturel en  $V, W$

$$S^d(V^\vee) \otimes_A W \simeq \text{Hom}_A(\Gamma^d(V), W)$$

permet d'interpréter un polynôme de  $V$  dans  $W$  comme une application  $A$ -linéaire de  $\Gamma^*(V)$  dans  $W$ . En utilisant cette remarque, nous allons donner une définition alternative des catégories de foncteurs polynomiaux homogènes, calquée sur celle donnée dans [14, p. 21]. Pour cela, nous introduisons tout d'abord des catégories auxiliaires.

#### 1.3.1 Définition des catégories $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$ et $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$

Soit  $d$  un entier positif et  $V, W$  deux  $A$ -modules projectifs de type fini. Le produit des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  agit sur le produit tensoriel  $V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d}$  par permutation des facteurs. Le produit tensoriel  $\Gamma^d(V) \otimes \Gamma^d(W)$  s'identifie aux invariants de  $V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d}$  sous cette action. Le produit tensoriel  $(V \otimes W)^{\otimes d}$  est muni d'une action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  donnée par la formule :

$$(\sigma, \tau).(v_1 \otimes w_1) \otimes \cdots \otimes (v_d \otimes w_d) = (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes w_{\tau^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes w_{\tau^{-1}(d)}),$$

de telle sorte que l'isomorphisme  $A$ -linéaire

$$\begin{aligned} V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d} &\rightarrow (V \otimes W)^{\otimes d} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_d &\mapsto (v_1 \otimes w_1) \otimes \cdots \otimes (v_d \otimes w_d) \end{aligned}$$

soit un isomorphisme  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -équivariant. La  $d$ -ème puissance divisée  $\Gamma^d(V \otimes W)$  s'identifie aux invariants de  $(V \otimes W)^{\otimes d}$  sous l'action du sous-groupe diagonal  $\Delta \mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ . On note  $i_d$  l'injection, naturelle en  $V, W$

$$i_d : \Gamma^d(V) \otimes \Gamma^d(W) \hookrightarrow \Gamma^d(V \otimes W)$$

obtenue comme la composée :

$$\left( V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d} \right)^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d} \simeq \left( (V \otimes W)^{\otimes d} \right)^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d} \hookrightarrow \left( (V \otimes W)^{\otimes d} \right)^{\Delta \mathfrak{S}_d}.$$

On note  $\gamma^d$  l'application naturelle en  $V$

$$\begin{aligned} \gamma^d : V &\rightarrow \Gamma^d(V) \\ x &\mapsto x^{\otimes d}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\mathcal{V}_A$  désigne la catégorie des  $A$ -modules projectifs de type fini et des applications  $A$ -linéaires, et  $\mathcal{V}_A^{\times n}$  la catégorie produit dont les objets sont des  $n$ -uplets  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  de  $A$ -modules projectifs de type fini et dont les morphismes sont donnés par la formule  $\text{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}) = \prod_{i=1}^n \text{Hom}_A(V_i, W_i)$ . Posons  $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  (resp.  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ ) la catégorie qui a les mêmes objets que  $\mathcal{V}_A^{\times n}$ , c'est-à-dire les  $n$ -uplets  $(V_1, \dots, V_n)$  de  $A$ -modules projectifs de type fini, et dont les Hom sont les  $A$ -modules respectivement donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}) &= \Gamma^d \text{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}) \\ &= \Gamma^d \left( \prod_{i=1}^n \text{Hom}_A(V_i, W_i) \right) \\ &\simeq \bigoplus_{d_1 + \dots + d_n = d} \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} \text{Hom}_{\mathcal{V}_A}(V_i, W_i), \\ \text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}) &= \bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{d_i} \text{Hom}_{\mathcal{V}_A}(V_i, W_i). \end{aligned}$$

Les morphismes identité d'un objet  $\underline{V}$  de  $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  et d'un objet  $\underline{W}$  de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  sont donnés respectivement par les formules :

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\underline{V}} &= \gamma^d(\text{Id}_{V_1 \times \dots \times V_n}) \in \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{V}), \\ \text{Id}_{\underline{W}} &= \bigotimes_{i=1}^n \gamma^{d_i}(\text{Id}_{W_i}) \in \text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{W}, \underline{W}). \end{aligned}$$

La loi de composition dans  $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  est induite par la composition dans  $\mathcal{V}_A^{\times n}$  et par l'inclusion naturelle  $i_d$  :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^d \text{Hom}(\underline{U}, \underline{V}) \otimes \Gamma^d \text{Hom}(\underline{V}, \underline{W}) & \xrightarrow{i_d} & \Gamma^d(\text{Hom}(\underline{U}, \underline{V}) \otimes \text{Hom}(\underline{V}, \underline{W})) \\ & \searrow \circ & \downarrow \\ & & \Gamma^d \text{Hom}(\underline{U}, \underline{W}) \end{array}$$

De même, la loi de composition dans  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  est induite par la loi de composition dans  $\mathcal{V}_A$  et par l'inclusion naturelle  $i_{d_1} \otimes \dots \otimes i_{d_n}$ . Ces lois de compositions font de  $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  et  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  des catégories  $A$ -linéaires.

### 1.3.2 Propriétés de la composition

Soient  $A$  un anneau commutatif et  $d$  un entier positif. La proposition suivante exprime une propriété de factorisation dans la catégorie  $\Gamma^d \mathcal{V}_A$ . Soit  $V$  est un  $A$ -module libre de type fini de rang supérieur ou égal à  $d$ , et soit  $f : U \rightarrow W$  un morphisme entre deux objets de  $\Gamma^d \mathcal{V}_A$ . Alors il existe une famille finie de morphismes  $g_i : U \rightarrow V$  et une famille finie de morphismes  $h_i : V \rightarrow W$  tels que  $f = \sum h_i \circ g_i$ . Cette propriété de factorisation généralise la formule bien connue dans le cas  $d = 1$  :

$$\text{Hom}_A(U, A) \otimes \text{Hom}_A(A, W) \simeq U^\vee \otimes W \simeq \text{Hom}_A(U, W).$$

**Proposition 1.3.1.** *Soient  $A$  un anneau commutatif,  $U, W$  des  $A$ -modules projectifs de type fini et  $V$  un  $A$  module libre. Si le rang de  $V$  est supérieur ou égal à  $d$  alors la composition dans  $\Gamma^d \mathcal{V}_A$  induit un morphisme surjectif :*

$$\Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(U, V)) \otimes \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(V, W)) \twoheadrightarrow \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(U, W)) .$$

*Démonstration.* Si  $U$  (resp.  $W$ ) est facteur direct dans le  $A$ -module libre  $L_U$  (resp.  $L_V$ ) on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(L_U, V)) \otimes \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(V, L_W)) & \longrightarrow & \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(L_U, L_W)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(U, V)) \otimes \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(V, W)) & \longrightarrow & \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(U, W)) , \end{array}$$

dans lequel les épimorphismes verticaux s'obtiennent à partir de l'injection  $U \hookrightarrow L_U$  et de la surjection  $L_W \rightarrow W$ . Ainsi, le résultat pour les  $A$ -modules projectifs de type fini découle du résultat pour les  $A$ -modules libres. A partir de maintenant, nous supposons donc que  $U$  et  $W$  sont libres.

On utilise l'identification  $\mathrm{Hom}_A(U, V) = U^\vee \otimes V$ . La composition des applications  $A$ -linéaires s'identifie avec l'application :

$$\begin{array}{ccc} (U^\vee \otimes V) \otimes (V^\vee \otimes W) & \rightarrow & U^\vee \otimes W \\ u' \otimes v \otimes v' \otimes w & \mapsto & v'(v)u' \otimes w . \end{array}$$

Soit  $(v_1, \dots, v_{\mathrm{rg} V})$  une base de  $V$  et notons  $(v_1^\#, \dots, v_{\mathrm{rg} V}^\#)$  sa base duale.

D'après la proposition B.2.5,  $\Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(U, W)) = (\mathrm{Hom}_A(U, W)^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$  est constitué de combinaisons linéaires d'éléments du type :

$$\begin{aligned} \underbrace{(a_1 \dots a_1)}_{i_1 \text{ termes}} \underbrace{a_2 \dots a_2}_{i_2 \text{ termes}} \dots \underbrace{a_n \dots a_n}_{i_n \text{ termes}} & := \sum_{x \in \mathfrak{S}_d \cdot a_1^{\otimes i_1} \otimes \dots \otimes a_n^{\otimes i_n}} x \\ & = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d / \mathfrak{S}_{i_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{i_n}} a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

où les  $a_i$  sont des tenseurs :  $a_i = u_i \otimes w_i$  et  $i_1 + \dots + i_n = d$ .

Pour démontrer la proposition, il nous suffit donc de trouver des antécédents dans  $\Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(U, V)) \otimes \Gamma^d(\mathrm{Hom}_A(V, W))$  aux éléments de ce type. Comme le rang de  $V$  est supérieur ou égal à  $d$ , on peut définir pour tout  $1 \leq k \leq d$  des éléments  $b_k$  et  $c_k$  par la formule :

$$b_k := u_k \otimes v_k \in \mathrm{Hom}_A(U, V) , \quad c_k := v_k^\# \otimes w_k \in \mathrm{Hom}_A(V, W) .$$

Le morphisme induit par la composition dans  $\Gamma^d \mathcal{V}_A$  envoie l'élément :

$$\underbrace{(b_1 \dots b_1)}_{i_1 \text{ termes}} \dots \underbrace{(b_n \dots b_n)}_{i_n \text{ termes}} \otimes \underbrace{(c_1 \dots c_1)}_{i_1 \text{ termes}} \dots \underbrace{(c_n \dots c_n)}_{i_n \text{ termes}} \quad (*)$$

sur la somme :

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_d / \mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_n} \\ \tau \in \mathfrak{S}_d / \mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_n}}} \left( \prod_{k=1}^n v_{\tau(k)}(v_{\sigma(k)}) \right) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)} \otimes w_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\tau(n)}.$$

Tous les termes de cette somme sont nuls sauf lorsque  $\sigma = \tau$ . Le terme correspondant vaut alors  $u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)} \otimes w_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(n)}$ . Ainsi l'élément (\*) est envoyé sur le générateur  $(a_1 \dots a_n)$ . Le morphisme induit par la composition est donc surjectif.  $\square$

Par produit tensoriel, on obtient une propriété de factorisation similaire dans les catégories  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ .

**Corollaire 1.3.2.** *Soit  $A$  un anneau commutatif et  $d_1, \dots, d_n$  des entiers. Notons  $\underline{A}$  le  $n$ -uplet  $\underline{A} = (A^{d_1}, \dots, A^{d_n})$ . Pour toute paire d'objets  $\underline{U}, \underline{W}$  de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ , la composition induit une application linéaire surjective :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{U}, \underline{A}) \otimes \mathrm{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{A}, \underline{W}) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{U}, \underline{W}).$$

### 1.3.3 Catégories de $n$ -foncteurs polynomiaux

Soit  $T$  un  $n$ -foncteur polynomial homogène de degré total  $d$ , au sens de la définition 1.2.1. Pour toute paire  $\underline{V}, \underline{W}$  d'objets de  $\mathcal{V}_A^{\times n}$ , le polynôme

$$T_{\underline{V}, \underline{W}} \in S^d \left( \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W})^\vee \right) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_A}(T(\underline{V}), T(\underline{W}))$$

peut être vu comme une application linéaire

$$T_{\underline{V}, \underline{W}} \in \mathrm{Hom}_A \left( \Gamma^d \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_A}(T(\underline{V}), T(\underline{W})) \right).$$

Les deux conditions de la définition 1.2.1 sont équivalentes au fait que la prescription :

$$\begin{aligned} T'(\underline{V}) &:= T(\underline{V}) \\ T'_{\underline{V}, \underline{W}}(f) &:= T_{\underline{V}, \underline{W}}(f) \end{aligned}$$

définit un foncteur  $A$ -linéaire  $T' : \Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n} \rightsquigarrow \mathcal{V}_A$ . Le foncteur  $\mathcal{V}_A^{\times n} \rightsquigarrow \mathcal{V}_A$  obtenu en oubliant la structure de foncteur polynomial de  $T$  (cf. remarque 1.2.2) n'est autre que la précomposition du foncteur  $A$ -linéaire  $T'$  par le foncteur (non linéaire)  $\gamma^d : \mathcal{V}_A^{\times n} \rightsquigarrow \Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  qui envoie  $V$  sur  $V^{\otimes d}$ . Enfin, les transformations naturelles (au sens de la définition 1.2.6) entre deux foncteurs polynomiaux  $S$  et  $T$  correspondent aux transformations naturelles  $A$ -linéaires entre les foncteurs  $A$ -linéaires  $S'$  et  $T'$ . Les notions de foncteur polynomial de degré fini et de catégories de foncteurs polynomiaux de degrés finis sont donc équivalentes aux notions suivantes.

**Définition 1.3.3.** Un foncteur polynomial homogène de degré total  $d$  (resp. de degré  $(d_1, \dots, d_n)$ ) est un foncteur  $A$ -linéaire de la catégorie  $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  (resp.  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ ) dans la catégorie  $\mathcal{V}_A$ .

**Définition 1.3.4.** On note  $\mathcal{P}_{d,A}(n)$  (resp.  $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$ ) la catégorie des foncteurs polynomiaux homogènes de degré total  $d$  (resp. homogènes de degré  $(d_1, \dots, d_n)$ ), et des transformations  $A$ -linéaires. On note  $\mathcal{P}_A(n)$  la somme directe des catégories  $(\mathcal{P}_{d,A}(n))_{d \geq 0}$ .

## 1.4 Algèbre homologique dans $\mathcal{P}_A(n)$

Sur un anneau  $A$  quelconque, les catégories de foncteurs polynomiaux ne sont pas abéliennes en général : il leur manque des noyaux et des conoyaux. Cependant, ce sont des catégories exactes au sens de Quillen (cf. annexe A). Les suites exactes courtes admissibles sont les suites courtes  $0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$  dont l'évaluation sur tout  $\underline{V} \in \mathcal{V}_A^{\times n}$  donne une suite exacte. D'après la proposition 1.4.9, tout foncteur de  $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$  possède une résolution projective admissible (c'est-à-dire une résolution projective qui s'obtient comme une composée de Yoneda de suites exactes courtes admissibles). Les groupes d'extensions entre deux foncteurs polynomiaux sont donc bien définis.

La catégorie  $\overline{\mathcal{P}}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$  des foncteurs polynomiaux à *valeurs quelconques* définie au paragraphe 1.4.3 possède les noyaux et les conoyaux qui font défaut à  $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$  : c'est une catégorie abélienne. Elle possède les mêmes projectifs que sa sous-catégorie pleine  $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$  et l'inclusion  $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n) \subset \overline{\mathcal{P}}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$  induit (proposition 1.4.10) un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)}^*(T, T') = \mathrm{Ext}_{\overline{\mathcal{P}}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)}^*(T, T') .$$

On peut donc penser aux groupes d'extensions dans la catégorie exacte  $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$  comme étant calculés dans la catégorie abélienne  $\overline{\mathcal{P}}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$ .

### 1.4.1 Projectifs

*Notation 1.4.1.* Soit  $(d_1, \dots, d_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers et  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n) \in \Gamma^{d_1,\dots,d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  un  $n$ -uplet de  $A$ -modules projectifs de type fini. On note :

$$\begin{aligned} P_{\underline{V}}^{d_1,\dots,d_n} &:= \mathrm{Hom}_{\Gamma^{d_1,\dots,d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, -) , \\ &= \Gamma^{d_1} \mathrm{Hom}_A(V_1, -) \boxtimes \cdots \boxtimes \Gamma^{d_n} \mathrm{Hom}_A(V_n, -) . \end{aligned}$$

**Lemme 1.4.2.** *Pour tout objet  $\underline{V}$  de  $\Gamma^{d_1,\dots,d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ , le  $n$ -foncteur  $P_{\underline{V}}^{d_1,\dots,d_n}$  est un projectif de la catégorie  $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}(n)$ .*

*Démonstration.* L'isomorphisme de Yoneda, naturel en  $T$  :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}}(P_{\underline{V}}^{d_1,\dots,d_n}, T) \simeq T(\underline{V})$$

montre que le foncteur  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,A}}(P_{\underline{V}}^{d_1,\dots,d_n}, -)$  est exact.  $\square$

### 1.4.2 Résolutions projectives canoniques

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $T \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  un  $n$ -foncteur polynomial sur  $A$ , homogène de degré  $(d_1, \dots, d_n)$ . Nous construisons dans ce paragraphe des résolutions projectives naturelles à l'aide du lemme de Yoneda. Notons  $\underline{A}$  le  $n$ -uplet  $\underline{A} := (A^{d_1}, \dots, A^{d_n})$  et  $\theta_{T, \underline{V}}$  l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \theta_{T, \underline{V}} : T(\underline{A}) \otimes \text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{A}, \underline{V}) &\rightarrow T(\underline{V}) \\ a \otimes f &\mapsto T_{\underline{A}, \underline{V}}(f)(a). \end{aligned}$$

**Lemme 1.4.3.** *La famille  $(\theta_{T, \underline{V}})_{\underline{V} \in \Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}$  définit un morphisme :*

$$\theta_T \in \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(T(\underline{A}) \otimes P_{\underline{A}}^{d_1, \dots, d_n}, T).$$

**Lemme 1.4.4.** *Le morphisme  $\theta_T$  est un épimorphisme admissible.*

*Démonstration.* Tous les épimorphismes sont des épimorphismes admissibles d'après le corollaire 1.2.9. Montrons que  $\theta_T$  est un épimorphisme, c'est-à-dire que pour tout objet  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  l'application linéaire  $\theta_{T, \underline{V}}$  est surjective.

Il suffit de le démontrer dans le cas particulier où les  $A$ -modules  $V_i$  sont tous libres. En effet si les  $V_i$  sont des  $A$ -modules projectifs, alors chaque  $V_i$  est facteur direct dans un  $A$ -module libre  $L_i$ . La projection  $\underline{L} \rightarrow \underline{V}$  induit une projection  $T(\underline{L}) \rightarrow T(\underline{V})$ . D'après le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(\underline{A}) \otimes \text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{A}, \underline{L}) & \xrightarrow{\theta_{T, \underline{L}}} & T(\underline{L}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\underline{A}) \otimes \text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{A}, \underline{V}) & \xrightarrow{\theta_{T, \underline{V}}} & T(\underline{V}), \end{array}$$

la surjectivité de  $\theta_{T, \underline{V}}$  est donc une conséquence directe de celle de  $\theta_{T, \underline{L}}$ .

Si  $\underline{V}$  est un  $n$ -uplet de  $A$ -modules libres, le  $A$ -module  $\text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{A}, \underline{V})$  est lui-même libre. On en choisit une base  $(f_i)_{1 \leq i \leq q}$ . Démontrer la surjectivité de  $\theta_{T, \underline{V}}$  revient à démontrer la surjectivité de l'application linéaire :

$$\bigoplus_{i=1..q} T(\underline{A}) \xrightarrow{\oplus T(f_i)} T(\underline{V}).$$

Pour obtenir cette surjectivité, nous construisons maintenant une section de l'application linéaire  $\oplus T(f_i)$ . D'après le corollaire 1.3.2, il existe une famille  $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$  d'éléments de  $\text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{A})$  tels que la composition dans  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  envoie  $\sum s_i \otimes f_i$  sur  $\text{Id}_{\underline{V}}$ . Le morphisme

$$T(\underline{V}) \xrightarrow{\Pi T(s_i)} \bigoplus_{i=1..q} T(\underline{A})$$

est une section de  $\oplus T(f_i)$ . En effet,

$$\begin{aligned} (\oplus T(f_i)) \circ (\amalg T(s_i)) &= \sum_{i=1}^q T(f_i) \circ T(s_i) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^q f_i \circ s_i\right) \\ &= T(\text{Id}_{\underline{V}}) = \text{Id}_{T(\underline{V})}. \end{aligned}$$

□

**Définition 1.4.5.** On définit le foncteur

$$P : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$$

par les formules :

$$\begin{aligned} T &\rightsquigarrow P(T) := T(\underline{A}) \otimes P_{\underline{A}}^{d_1, \dots, d_n} \\ \text{Hom}(T, T') \ni f &\rightsquigarrow P(f) := f_{\underline{A}} \otimes \text{Id}_{P_{\underline{A}}^{d_1, \dots, d_n}} \in \text{Hom}(P(T), P(T')). \end{aligned}$$

**Lemme 1.4.6.** *Le foncteur  $P$  est exact.*

*Démonstration.* Soit  $0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$  une suite exacte admissible de foncteurs polynomiaux. L'évaluation de cette suite sur  $\underline{A}$  est exacte, de même que son produit tensoriel par le  $A$ -module projectif  $P_{\underline{A}}^{d_1, \dots, d_n}(\underline{V})$ . Ainsi, pour tout  $\underline{V}$  de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  la suite  $0 \rightarrow P(T')(\underline{V}) \rightarrow P(T)(\underline{V}) \rightarrow P(T'')(\underline{V}) \rightarrow 0$  est exacte. □

**Lemme 1.4.7.** *La famille  $(\theta_T)_{T \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}$  définit une transformation naturelle  $\theta$  du foncteur  $P$  vers le foncteur identité de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ .*

*Démonstration.* Pour démontrer le lemme, il faut vérifier que si  $f : T \rightarrow T'$  est une transformation naturelle, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T(\underline{A}) \otimes P_{\underline{A}}^{d_1, \dots, d_n} & \xrightarrow{\theta_T} & T \\ \downarrow f_{\underline{A}} \otimes \text{Id} & & \downarrow f \\ T'(\underline{A}) \otimes P_{\underline{A}}^{d_1, \dots, d_n} & \xrightarrow{\theta_{T'}} & T' \end{array} .$$

Ceci revient à vérifier pour tout objet  $\underline{V}$  de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T(\underline{A}) \otimes \text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{A}, \underline{V}) & \xrightarrow{\theta_{T, \underline{V}}} & T(\underline{V}) \\ \downarrow f_{\underline{A}} \otimes \text{Id} & & \downarrow f_{\underline{V}} \\ T'(\underline{A}) \otimes \text{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{A}, \underline{V}) & \xrightarrow{\theta_{T', \underline{V}}} & T'(\underline{V}) \end{array} .$$



Mais ce dernier n'est rien d'autre qu'un déguisement du diagramme commutatif vérifié par la transformation naturelle  $f$  :

$$\begin{array}{ccc} T(\underline{A}) & \xrightarrow{T(g)} & T(\underline{V}) \\ \downarrow f_A & & \downarrow f_V \\ T'(\underline{A}) & \xrightarrow{T'(g)} & T'(\underline{V}) . \end{array}$$

□

**Lemme 1.4.8.** *Il existe un foncteur exact  $K_\theta : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  et une transformation naturelle  $i : K_\theta \rightarrow P$ , tel que pour tout foncteur polynomial  $T$  on a une suite exacte courte :*

$$0 \rightarrow K_\theta(T) \xrightarrow{i_T} P(T) \xrightarrow{\theta_T} T \rightarrow 0 .$$

*Démonstration.* Les morphismes  $\theta_T \in \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(P(T), T)$  sont des épimorphismes admissibles. On dispose donc pour tout  $f \in \text{Hom}(T, T')$  d'un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(\theta_T) & \xrightarrow{i_T} & P(T) & \xrightarrow{\theta_T} & T \\ & & \downarrow P(f) & & \downarrow f \\ \text{Ker}(\theta_{T'}) & \xrightarrow{i_{T'}} & P(T') & \xrightarrow{\theta_{T'}} & T' \end{array}$$

On définit  $K_\theta$  par  $K_\theta(T) := \text{Ker}(\theta_T)$  et  $K_\theta(f)$  est la restriction de  $P(f)$  à  $K_\theta(T)$  à la source et à  $K_\theta(T')$  au but. Par commutativité du diagramme la famille des  $(i_T)_{T \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}$  définit une transformation naturelle  $K_\theta \rightarrow P$ . Il reste à vérifier que  $K_\theta$  est un foncteur exact, ce qui découle directement de l'exactitude des foncteurs  $P$  et  $\text{Id}$ . □

**Proposition 1.4.9.** *Il existe un foncteur exact*

$$\text{PRes}_\bullet : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \text{CC}_\bullet(\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n))$$

*de la catégorie des  $n$ -foncteurs polynomiaux homogènes de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  vers la catégorie des complexes de chaînes  $n$ -foncteurs, qui à un  $n$ -foncteur  $T$  associe une résolution projective admissible de  $T$  par des projectifs de la forme  $U \otimes P_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_n}$  où les  $U$  sont des  $A$ -modules projectifs de type fini.*

*Démonstration.* On dispose déjà avec le foncteur  $P$  (définition 1.4.5) du début de la résolution, il nous suffit d'itérer la construction grâce au lemme 1.4.8. Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $K_\theta^n$  la composée itérée  $n$  fois de  $K_\theta$  (En particulier  $K_\theta^0 = \text{Id}$  et  $K_\theta^1 = K_\theta$ ). On définit  $\text{PRes}_i := P \circ K_\theta^i$  et on définit la transformation naturelle  $\partial_n : \text{PRes}_n \rightarrow \text{PRes}_{n-1}$  comme la composée des transformations naturelles :

$$\partial_n := P \circ K_\theta^n \xrightarrow{\theta_{K_\theta^n}} K_\theta^n \xrightarrow{\cong} K_\theta \circ K_\theta^{n-1} \xrightarrow{i_{K_\theta^{n-1}}} P \circ K_\theta^{n-1} .$$

Pour vérifier l'exactitude du foncteur  $\text{PRes}_\bullet$ , il faut vérifier que chacun des foncteurs  $\text{PRes}_i$  est exact, ce qui découle de l'exactitude des foncteurs  $P$  et  $K_\theta$  (lemmes 1.4.6 et 1.4.8).  $\square$

### 1.4.3 Foncteurs polynomiaux à valeurs quelconques

Notons  $\overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  la catégorie dont les objets sont les foncteurs  $A$ -linéaires

$$T : \Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n} \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$$

de la catégorie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  définie au paragraphe 1.3.1 vers la catégorie des  $A$ -modules, et dont les morphismes sont les transformations naturelles  $A$ -linéaires entre de tels foncteurs. Cette catégorie de foncteurs possède des sommes directes, des produits, des noyaux et des conoyaux calculés au but. Elle hérite donc de la structure de catégorie abélienne de  $\text{Mod}(A)$ .

Les définitions et les démonstrations des paragraphes 1.4.1 et 1.4.2 utilisent les propriétés de la catégorie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  et la  $A$ -linéarité, mais pas le fait que les foncteurs sont à valeurs dans les  $A$ -modules projectifs de type fini. Elles restent donc valables pour la catégorie  $\overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  des foncteurs polynomiaux à valeurs quelconques. On a donc :

**Proposition 1.4.10.** *La catégorie abélienne  $\overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  des foncteurs polynomiaux à valeurs quelconques possède assez de projectifs. Elle contient  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  comme sous-catégorie pleine, et l'inclusion*

$$\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \subset \overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$$

*conserve les projectifs. L'inclusion induit donc pour toute paire  $T, T'$  de foncteurs polynomiaux de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  un isomorphisme :*

$$\text{Ext}_{\overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}^*(T, T') = \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}^*(T, T') .$$

*Remarque 1.4.11.* En général, le bidual  $A$ -linéaire  $M^{\vee\vee}$  d'un  $A$ -module  $M$  n'est pas isomorphe à  $M$ . A cause de ce défaut, la dualité de Kuhn n'a pas de bonnes propriétés dans  $\overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . En particulier, les tenseurs symétriques ne sont pas des injectifs dans  $\overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . Plus généralement les résultats des paragraphes suivants ne s'étendent pas à la catégorie des foncteurs polynomiaux à valeurs quelconques.

### 1.4.4 Résolutions injectives canoniques

*Notation 1.4.12.* Soit  $(d_1, \dots, d_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers et  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n) \in \Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  un  $n$ -uplet de  $A$ -modules projectifs de type fini. On note  $I_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}$  le dual de Kuhn du projectif  $P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}$  :

$$\begin{aligned} I_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n} &:= P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n} \# , \\ &= S^{d_1} \text{Hom}_A(V_1, -) \boxtimes \cdots \boxtimes S^{d_n} \text{Hom}_A(V_n, -) . \end{aligned}$$

En utilisant la dualité de Kuhn, on peut obtenir pour chaque énoncé des paragraphes 1.4.1 et 1.4.2 un énoncé dual qui concerne les injectifs de la catégorie  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . En particulier on obtient :

**Lemme 1.4.13.** *Pour tout objet  $\underline{V}$  de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ , le  $n$ -foncteur  $I_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}$  est un injectif de la catégorie  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ .*

**Proposition 1.4.14.** *Il existe un foncteur exact*

$$\text{IRes}^\bullet : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow CC^\bullet(\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n))$$

de la catégorie des  $n$ -foncteurs polynomiaux homogènes de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  vers la catégorie des complexes de cochaînes de  $n$ -foncteurs, qui à un  $n$ -foncteur  $T$  associe une résolution injective admissible de  $T$ , par des injectifs de la forme  $U \otimes I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_n}$  où les  $U$  sont des  $A$ -modules projectifs de type fini.

### 1.4.5 Produits tensoriels

On rappelle (cf. exemple 1.2.5) que si  $T$  et  $T'$  sont des foncteurs polynomiaux à plusieurs variables, on note  $T \boxtimes T'$  leur produit tensoriel extérieur, et  $T \otimes T'$  leur produit tensoriel.

**Proposition 1.4.15.** *Les produits tensoriels définissent des bifoncteurs exacts en chaque variable :*

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{P}_{c_1, \dots, c_n, A}(n) \times \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) &\rightsquigarrow \mathcal{P}_{c_1+d_1, \dots, c_n+d_n, A}(n), \\ \boxtimes : \mathcal{P}_{c_1, \dots, c_n, A}(n) \times \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_m, A}(m) &\rightsquigarrow \mathcal{P}_{c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_m}(n+m). \end{aligned}$$

De plus, le produit tensoriel (externe) de deux projectifs (resp. injectifs) est un projectif (resp. injectif).

*Démonstration.* L'exactitude des suites courtes admissible  $0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$  se teste au but (dans la catégorie  $\mathcal{V}_A$ ) et le produit tensoriel est exact dans la catégorie  $\mathcal{V}_A$ . Les deux bifoncteurs sont donc biexactes.

Pour montrer que le produit tensoriel de deux projectifs est projectif, il suffit de le montrer pour les foncteurs  $P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}$ . L'assertion est évidente pour le produit tensoriel externe :  $P_{\underline{V}}^{c_1, \dots, c_n} \boxtimes P_{\underline{W}}^{d_1, \dots, d_m} = P_{\underline{V}, \underline{W}}^{c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_m}$ . Pour le produit tensoriel interne, la formule exponentielle donne :

$$P_{\underline{V} \oplus \underline{W}}^{c_1+d_1, \dots, c_n+d_n} = \bigoplus_{i_1+j_1=(c_1+d_1), \dots, i_n+j_n=(c_n+d_n)} P_{\underline{V}}^{i_1, \dots, i_n} \otimes P_{\underline{W}}^{j_1, \dots, j_n}$$

Ainsi,  $P_{\underline{V}}^{c_1, \dots, c_n} \otimes P_{\underline{W}}^{d_1, \dots, d_n}$  est facteur direct du projectif  $P_{\underline{V} \oplus \underline{W}}^{c_1+d_1, \dots, c_n+d_n}$ , donc projectif.  $\square$

**Proposition 1.4.16.** *Pour  $1 \leq i \leq n$  soient  $S_i, T_i \in \mathcal{P}_A(n_i)$ . Si pour tout  $i$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_A(n_i)}^*(S_i, T_i)$  est un  $A$ -module plat, alors on a un isomorphisme :*

$$\bigotimes_{i=1}^n \text{Ext}_{\mathcal{P}_A(n_i)}^*(S_i, T_i) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{\mathcal{P}_A(\sum n_i)}^*(S_1 \boxtimes \cdots \boxtimes S_n, T_1 \boxtimes \cdots \boxtimes T_n) .$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{R}_\bullet^i$  une résolution projective de  $S_i$ . Le complexe total associé au  $n$ -complexe

$$\mathcal{R}_\bullet^1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{R}_\bullet^n$$

est une résolution projective de  $S_1 \boxtimes \cdots \boxtimes S_n$ . En utilisant le lemme de Yoneda on obtient un isomorphisme de  $n$ -complexes

$$\text{Hom}(\mathcal{R}_\bullet^1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{R}_\bullet^n, T_1 \boxtimes \cdots \boxtimes T_n) \simeq \bigotimes_{i=1}^n \text{Hom}(\mathcal{R}_\bullet^i, T_i) .$$

L'homologie du complexe total associé au  $n$ -complexe de gauche est égale à  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_A(\sum n_i)}^*(S_1 \boxtimes \cdots \boxtimes S_n, T_1 \boxtimes \cdots \boxtimes T_n)$  et celle associée au  $n$ -complexe de droite peut être comparée à  $\bigotimes_{i=1}^n \text{Ext}_{\mathcal{P}_A(n_i)}^*(S_i, T_i)$  par le théorème de Künneth pour les  $A$ -modules [30, th 10.2 p. 166].  $\square$

### 1.4.6 Foncteurs produit et diagonale

Rappelons que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  désigne la catégorie dont les objets sont des  $n$ -uplets  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  de  $A$ -modules projectifs de type fini, et les morphismes sont donnés par la formule :

$$\text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}) = \Gamma^d \left( \prod_{k=1}^n \text{Hom}_A(V_k, W_k) \right) = \Gamma^d \left( \bigoplus_{k=1}^n \text{Hom}_A(V_k, W_k) \right) .$$

La diagonale  $d_n : \text{Hom}_A(V, W) \rightarrow \text{Hom}_A(V, W)^{\times n}$ ,  $f \mapsto d_n(f) = (f, \dots, f)$  induit un morphisme  $\Gamma^d d_n : \Gamma^d \text{Hom}_A(V, W) \rightarrow \Gamma^d(\text{Hom}_A(V, W)^{\times n})$ . De même, l'inclusion  $\pi_n : \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_A(V_i, W_i) \subset \text{Hom}_A(\bigoplus_{i=1}^n V_i, \bigoplus_{i=1}^n W_i)$  induit un morphisme  $\Gamma^d \pi_n : \Gamma^d(\bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_A(V_i, W_i)) \rightarrow \Gamma^d \text{Hom}_A(\bigoplus_{i=1}^n V_i, \bigoplus_{i=1}^n W_i)$ .

**Définition 1.4.17.** On définit le foncteur  $A$ -linéaire  $D_n : \Gamma^d \mathcal{V}_A \rightsquigarrow \Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}$  par les formules :

$$\begin{aligned} V &\mapsto (V, \dots, V) \\ f \in \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A}(V, W) &\mapsto \Gamma^d d_n(f) \in \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(D_n(V), D_n(W)) . \end{aligned}$$

et le foncteur  $A$ -linéaire  $\Pi_n : \Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n} \rightsquigarrow \Gamma^d \mathcal{V}_A$  par les formules :

$$\begin{aligned} (V_1, \dots, V_n) &\mapsto \bigoplus_{i=1}^n V_i \\ f \in \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, \underline{W}) &\mapsto \Gamma^d \pi_n(f) \in \text{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A}(\Pi_n(\underline{V}), \Pi_n(\underline{W})) . \end{aligned}$$

**Proposition 1.4.18.** *Les paires  $(D_n, \Pi_n)$  et  $(\Pi_n, D_n)$  sont des paires d'adjoints, ie. on a des isomorphismes :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A}(\Pi_n(\underline{V}), W) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, D_n(W)), \\ \mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A}(W, \Pi_n(\underline{V})) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(D_n(W), \underline{V}).\end{aligned}$$

*Démonstration.* Le premier isomorphisme s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A}(\Pi_n(\underline{V}), W) &= \Gamma^d \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=1}^n V_i, W\right) \simeq \Gamma^d \left(\prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}_A(V_i, W)\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, (W, \dots, W)) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{V}_A^{\times n}}(\underline{V}, D_n(W)).\end{aligned}$$

La démonstration du deuxième isomorphisme est similaire.  $\square$

Les foncteurs  $D_n$  et  $\Pi_n$  forment des paires d'adjoints donc [14, lemme 1.3 p. 10] la précomposition par ces foncteurs induit des paires de foncteurs adjoints  $- \circ D_n : \mathcal{P}_{d,A}(n) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{d,A}(1)$  et  $- \circ \Pi_n : \mathcal{P}_{d,A}(1) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{d,A}(n)$ .

**Lemme 1.4.19.** *Soit  $P$  un projectif de  $\mathcal{P}_{d,A}(n)$  et  $P'$  un projectif de  $\mathcal{P}_{d,A}(1)$ . Alors  $P \circ D_n$  est un projectif de  $\mathcal{P}_{d,A}(1)$  et  $P' \circ \Pi_n$  est un projectif de  $\mathcal{P}_{d,A}(n)$ .*

*Démonstration.* Les deux assertions se démontrent de manière similaire, nous démontrons la première. Comme tout projectif est facteur direct d'un projectif de la forme  $P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}$  (cf. notation 1.4.1) et que le foncteur  $- \circ D_n$  est additif, il suffit de démontrer l'assertion pour un projectif de cette forme. Soit  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  un  $n$ -uplet de modules projectifs de type fini. On a

$$P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n} \circ D_n = \bigotimes_{i=1}^n P_{V_i}^{d_i}.$$

Comme le produit tensoriel de projectifs est projectif d'après la proposition 1.4.15, ceci démontre l'assertion.  $\square$

Lorsqu'une paire d'adjoints possède en plus une propriété de préservation des projectifs, comme c'est le cas avec les foncteurs  $- \circ D_n$  et  $- \circ \Pi_n$ , l'isomorphisme d'adjonction au niveau des  $\mathrm{Hom}$  se prolonge au niveau des  $\mathrm{Ext}^*$ . Nous énonçons ce fait dans la proposition suivante.

**Proposition 1.4.20.** [15, p. 672] *Soit  $F \in \mathcal{P}_{d,A}$  et  $G \in \mathcal{P}_{d,A}(n)$ . On a des isomorphismes, naturels en  $F, G$  :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{d,A}(n)}^*(F \circ \Pi_n, G) &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{d,A}}^*(F, G \circ D_n) \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{d,A}(n)}^*(G, F \circ \Pi_n) &\simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{d,A}}^*(G \circ D_n, F).\end{aligned}$$

*Démonstration.* La démonstration de [14, lemme 1.4 p. 10], passe sans encombre du cas des catégories abéliennes au cas des catégories exactes.  $\square$

**Corollaire 1.4.21.** *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $F, G, H$  des foncteurs polynomiaux homogènes de degrés respectifs  $f, g, h$  sur  $A$ . Alors*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(F, G \otimes H) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A(2)}^*(F^{(g,h)}, G \boxtimes H)$$

où  $F^{(g,h)}$  désigne la composante homogène de degré  $(g, h)$  de  $F \circ \Pi_2$ .

### 1.4.7 Foncteurs exponentiels

**Définition 1.4.22.** [15, p. 670] On appelle foncteur exponentiel une famille  $(E^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  de foncteurs polynomiaux de  $\mathcal{P}_A$ , munie d'isomorphismes naturels :

$$E^0(V) \simeq A, \quad E^n(V \oplus W) \simeq \bigoplus_{m=0}^n E^m(V) \otimes E^{n-m}(W).$$

*Exemple 1.4.23.* Les familles  $(S^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}, (\Lambda^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}, (\Gamma^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  des puissances symétriques, extérieures et divisées forment des foncteurs exponentiels.

*Exemple 1.4.24.* Sur un anneau de caractéristique  $p$  première, le quotient de l'algèbre symétrique  $S^*$  par l'idéal des puissances  $p$ -èmes est noté  $L^*$ . Lorsque  $p = 2$  on a  $L^* \simeq \Lambda^*$ . La famille  $(L^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  forme un foncteur exponentiel.

**Définition 1.4.25.** Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers et  $(E^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  un foncteur exponentiel. On note  $E^\mu$  le foncteur :

$$E^\mu = E^{\mu_1} \otimes \dots \otimes E^{\mu_n}.$$

Si  $E^* = S^*$  (resp.  $\Lambda^*$ , resp.  $\Gamma^*$ ), on appelle tenseurs symétriques (resp. alternés, resp. divisés) les foncteurs de la forme  $E^\mu$ .

En utilisant l'adjonction entre les foncteurs somme et diagonale (proposition 1.4.20) et le théorème de Künneth (proposition 1.4.16), on obtient :

**Proposition 1.4.26.** [15, cor. 1.8] *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  et  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$  des uplets de poids  $d$  et  $E^*, F^*$  des familles de foncteurs exponentiels tels que pour tout  $n$   $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(E^n, F^n)$  est un  $A$ -module plat. On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(E^\gamma, F^\nu) \simeq \bigoplus_{\substack{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l} \\ \forall i \mu_{i,1} + \dots + \mu_{i,l} = \gamma_i \\ \forall j \mu_{1,j} + \dots + \mu_{k,j} = \nu_j}} \bigotimes_{\substack{s=1, \dots, k \\ t=1, \dots, l}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(E^{\mu_{s,t}}, F^{\mu_{s,t}}).$$

*Démonstration.* L'isomorphisme est donné par la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}
& \bigoplus_{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l}} \bigotimes_{s=1..k} \bigotimes_{t=1..l} \text{Ext}^*(E^{\mu_{s,t}}, F^{\mu_{s,t}}) \\
\stackrel{(1)}{\cong} & \bigoplus_{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l}} \bigotimes_{s=1..k} \text{Ext}^*(\bigotimes_t E^{\mu_{s,t}}, \bigotimes_t F^{\mu_{s,t}}) \quad (\text{cf. prop. 1.4.16}) \\
\stackrel{(2)}{\cong} & \bigoplus_{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l}} \bigotimes_{s=1..k} \text{Ext}^*(E^{\gamma_s} \circ \Pi_l, \bigotimes_t F^{\mu_{s,t}}) \\
\stackrel{(3)}{\cong} & \bigoplus_{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l}} \bigotimes_{s=1..k} \text{Ext}^*(E^{\gamma_s}, \bigotimes_t F^{\mu_{s,t}}) \quad (\text{cf. prop. 1.4.20}) \\
\stackrel{(4)}{\cong} & \bigoplus_{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l}} \text{Ext}^*(\bigotimes_s E^{\gamma_s}, \bigotimes_s \bigotimes_t F^{\mu_{s,t}}) \quad (\text{cf. prop. 1.4.16}) \\
\stackrel{(5)}{\cong} & \bigoplus_{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l}} \text{Ext}^*(\bigotimes_s E^{\gamma_s}, \bigotimes_t \bigotimes_s F^{\mu_{s,t}}) \\
\stackrel{(6)}{\cong} & \text{Ext}^*(\bigotimes_s E^{\gamma_s}, \bigoplus_{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l}} \bigotimes_t \bigotimes_s F^{\mu_{s,t}}) \\
\stackrel{(7)}{\cong} & \text{Ext}^*(\bigotimes_s E^{\gamma_s}, \bigotimes_t F^{\nu_t} \circ \Pi_k) \\
\stackrel{(8)}{\cong} & \text{Ext}^*(\bigotimes_s E^{\gamma_s}, \bigotimes_t F^{\nu_t}) \quad (\text{cf. prop. 1.4.20})
\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.4.27.** [9, p. 779] Soient  $\gamma, \nu$  des  $n$ -uplets d'entiers. Tout morphisme de  $S^\lambda \rightarrow S^\mu$  se décompose comme une somme de morphismes obtenus en composant des comultiplications, des permutations et des multiplications entre tenseurs symétriques.

*Démonstration.* D'après la proposition précédente, on a :

$$\text{Hom}(S^\gamma, S^\nu) \cong \bigoplus_{\substack{(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq l} \\ \forall i \mu_{i,1} + \dots + \mu_{i,l} = \gamma_i \\ \forall j \mu_{1,j} + \dots + \mu_{k,j} = \nu_j}} \bigotimes_{s=1..k} \text{Hom}(S^{\mu_{s,t}}, S^{\mu_{s,t}}) (*)$$

Comme  $\text{Hom}(S^{\mu_{s,t}}, S^{\mu_{s,t}})$  est un  $A$ -module libre de rang 1 engendré par le morphisme identité, il nous suffit de vérifier que l'isomorphisme  $(*)$  envoie  $\bigotimes_{s,t} \text{Id} \in \bigotimes_{s,t} \text{Hom}(S^{\mu_{s,t}}, S^{\mu_{s,t}})$  sur la composée :

$$\bigotimes_{s=1}^k S^{\gamma_s} \xrightarrow{\otimes \Delta_s} \bigotimes_{s=1}^k \bigotimes_{t=1}^l S^{\mu_{s,t}} \cong \bigotimes_{t=1}^l \bigotimes_{s=1}^k S^{\mu_{s,t}} \xrightarrow{\otimes m_t} \bigotimes_{t=1}^l S^{\nu_t} .$$

Ceci se fait en suivant explicitement les isomorphismes de la démonstration de la proposition 1.4.26. □

## 1.5 Changement de base

Dans cette partie, on fixe  $d_1, \dots, d_n$  des entiers positifs,  $A$  un anneau commutatif et  $A'$  une  $A$ -algèbre commutative. Pour plus de concision, on note  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ) la catégorie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A$  (resp.  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_{A'}$ ) définie au paragraphe 1.3. Ainsi,  $\Gamma$  désigne la catégorie  $A$ -linéaire dont les objets sont les  $n$ -uplets  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  de  $A$ -modules projectifs de type fini, et dont les ensembles de morphismes sont donnés par la formule :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A}(\underline{V}, \underline{W}) = \Gamma^{d_1} \mathrm{Hom}_A(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma^{d_n} \mathrm{Hom}_A(V_n, W_n).$$

### Définition du foncteur de changement de base

Si  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  est un  $n$ -uplet de  $A$ -modules projectifs, on note  $\underline{V} \otimes A'$  le  $n$ -uplet contenant le  $A'$ -module projectif  $V_i \otimes_A A'$  en  $i$ -ème position. Les morphismes des catégories  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont reliés par la formule :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma}(\underline{V}, \underline{W}) \otimes_A A' \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma'}(\underline{V} \otimes A', \underline{W} \otimes A')$$

Pour tout  $\underline{V}' \in \Gamma'$ , on introduit la catégorie  $(-\otimes A' \downarrow \underline{V}')$  dont les objets sont les paires  $(\underline{V}, f)$  où  $\underline{V}$  est un objet de  $\Gamma$  et  $f : \underline{V} \otimes A' \rightarrow \underline{V}'$  un morphisme de  $\Gamma'$ , et dont les morphismes  $(\underline{V}, f) \rightarrow (\underline{V}', f')$  sont les morphismes  $\phi : \underline{V} \rightarrow \underline{V}'$  tels que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} \underline{V} \otimes A' & \xrightarrow{\quad} & \underline{W} \otimes A' \\ & \searrow \phi \otimes A' & \swarrow \\ & \underline{V}' & \end{array} .$$

On note  $Q : (-\otimes A' \downarrow \underline{V}') \rightsquigarrow \Gamma$  le foncteur de projection qui à une paire  $(\underline{V}, f)$  associe  $\underline{V}$ , et  $T \otimes A' : \Gamma \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(A')$  le foncteur qui à  $\underline{V}$  associe  $T(\underline{V}) \otimes A'$ . Soit  $T \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  un  $n$ -foncteur polynomial sur  $A$ . On définit le  $n$ -foncteur  $T_{A'}$  par la formule :

$$T_{A'}(\underline{V}') := \varinjlim \left[ (-\otimes A' \downarrow \underline{V}') \xrightarrow{Q} \Gamma \xrightarrow{T \otimes A'} \mathrm{Mod}(A') \right].$$

En d'autres termes,  $T_{A'}$  est l'extension de Kan à gauche [31, chap X.3] de  $T \otimes A'$  le long du foncteur  $\Gamma \rightsquigarrow \Gamma'$  qui à  $\underline{V}$  associe  $\underline{V} \otimes A'$ .

**Lemme 1.5.1.** *Si  $\underline{V}$  est un  $n$ -uplet de  $A$ -modules projectifs de type fini, on a  $T_{A'}(\underline{V} \otimes A') = T(\underline{V}) \otimes A'$ . De plus, le foncteur  $T_{A'}$  est à valeurs dans les  $A'$ -modules projectifs de type fini.*

*Démonstration.* La première assertion résulte du fait que  $(\underline{V}, \mathrm{Id}_{\underline{V} \otimes A'})$  est un objet final dans la catégorie  $(-\otimes A' \downarrow \underline{V}')$ . Pour la deuxième assertion, si  $\underline{V}' \in \Gamma'$  alors  $\underline{V}'$  est un facteur direct dans un  $n$ -uplet  $(A'^{a_1}, \dots, A'^{a_n})$ . Par functorialité,  $T_{A'}(\underline{V}')$  est facteur direct du  $A'$ -module projectif  $T(A'^{a_1}, \dots, A'^{a_n}) \otimes A'$ . Ainsi,  $T_{A'}(\underline{V}')$  est un  $A'$ -module projectif.  $\square$

L'association  $T \mapsto T_{A'}$  définit un foncteur de changement de base de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  vers  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)$ , additif et  $A$ -linéaire.



## Propriétés du changement de base

**Lemme 1.5.2.** *Le foncteur de changement de base est exact.*

*Démonstration.* Prenons  $0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow 0$  une suite exacte courte admissible dans  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ , et considérons la suite obtenue par changement de base

$$0 \rightarrow R_{A'} \rightarrow S_{A'} \rightarrow T_{A'} \rightarrow 0 \quad (*)$$

Si  $\underline{V} \in \Gamma$ , l'évaluation de cette suite sur  $\underline{V} \otimes A' \in \Gamma'$  est isomorphe à

$$0 \rightarrow R(\underline{V}) \otimes_A A' \rightarrow S(\underline{V}) \otimes_A A' \rightarrow T(\underline{V}) \otimes_A A' \rightarrow 0 \quad (**)$$

La suite exacte  $0 \rightarrow R(\underline{V}) \rightarrow S(\underline{V}) \rightarrow T(\underline{V}) \rightarrow 0$  est scindée car  $T(\underline{V})$  est projectif. La suite  $(**)$  est donc exacte. Si  $\underline{V}'$  est un objet de  $\Gamma'$ , alors  $\underline{V}'$  est facteur direct dans un  $\underline{V} \otimes A'$ , où  $\underline{V} \in \Gamma$ . L'évaluation de la suite  $(*)$  sur  $\underline{V}'$  est donc facteur direct dans une suite exacte, donc exacte.  $\square$

**Lemme 1.5.3.** *Soient  $\underline{V}$  un  $n$ -uplet de  $A$ -modules projectifs de type fini et  $P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}$  le projectif associé (cf. notation 1.4.1). On a :*

$$\left( P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n} \right)_{A'} = P_{\underline{V} \otimes A'}^{d_1, \dots, d_n} .$$

*Démonstration.* Par construction du changement de base et en utilisant la propriété universelle de la limite, on obtient une transformation naturelle  $P_{\underline{V} \otimes A'} \rightarrow (P_{\underline{V}})_{A'}$ . D'après le lemme 1.5.1, l'évaluation de cette transformation naturelle sur les objets de  $\Gamma \otimes A'$  est un isomorphisme. Si  $\underline{W}' \in \Gamma'$  alors  $\underline{W}'$  est facteur direct dans un certain  $\underline{W} \otimes A' \in \Gamma'$ . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P_{\underline{V} \otimes A'}(\underline{W} \otimes A') & \xrightarrow{\cong} & (P_{\underline{V}})_{A'}(\underline{W} \otimes A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{\underline{V} \otimes A'}(\underline{W}') & \longrightarrow & (P_{\underline{V}})_{A'}(\underline{W}') \end{array}$$

Et par conséquent, l'évaluation de la transformation naturelle  $P_{\underline{V} \otimes A'} \rightarrow (P_{\underline{V}})_{A'}$  sur  $\underline{W}'$  est surjective. De même, elle est injective.  $\square$

**Théorème 1.5.4.** *Soit  $A'$  une  $A$ -algèbre commutative. Le foncteur de changement de base  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)$  est exact et préserve les projectifs. De plus, on a un morphisme canonique  $A'$ -linéaire :*

$$\phi : \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}^*(S, T) \otimes_A A' \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}^*(S_{A'}, T_{A'})$$

*qui est un isomorphisme si  $A'$  est  $A$ -plat. Enfin, si  $A$  est de Dedekind, alors pour tout  $i \geq 0$  ce morphisme s'inscrit dans une suite exacte courte de  $A'$ -modules (qui scinde non naturellement) :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}^i(S, T) \otimes_A A' &\xrightarrow{\phi} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}^i(S_{A'}, T_{A'}) \\ &\rightarrow \text{Tor}^A(\text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}^{i+1}(S, T), A') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'exactitude provient du lemme 1.5.2. La conservation des projectifs provient du lemme 1.5.3.

Si  $S = P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}$ , on a un isomorphisme  $A'$ -linéaire (naturel en les deux variables) entre  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}(P_{\underline{V}_{A'}}^{d_1, \dots, d_n}, T_{A'})$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}(P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}, T) \otimes_A A'$ , donné par la composée des isomorphismes  $A'$ -linéaires :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}((P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n})_{A'}, T_{A'}) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}(P_{\underline{V}_{A'}}^{d_1, \dots, d_n}, T_{A'}) \\ &\simeq T_{A'}(\underline{V}_{A'}) \simeq T(\underline{V}) \otimes_A A' \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}(P_{\underline{V}}^{d_1, \dots, d_n}, T) \otimes_A A' , \end{aligned}$$

où le premier isomorphisme est donné par le lemme 1.5.3, le second par le lemme de Yoneda  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)$ , le troisième par le lemme 1.5.1 et le dernier par le lemme de Yoneda dans  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ .

Si  $P_\bullet$  est une résolution projective de  $S$ , on a donc un isomorphisme de complexes :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}(P_{A'}_\bullet, T_{A'}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(P_\bullet, T) \otimes_A A' .$$

L'homologie du complexe de gauche est égale à  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A'}(n)}^*(S_{A'}, T_{A'})$ . Si  $A'$  est  $A$ -plat, l'homologie du membre de droite vaut  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}^*(S, T) \otimes_A A'$ . Si  $A$  est un anneau de Dedekind et  $A'$  est un anneau quelconque, on peut appliquer le théorème des coefficients universels [7, Chap X, §4, cor. 1 du Th. 3]. On a donc une suite exacte courte (attention aux exposants qui sont différents car nous travaillons sur des complexes de cochaînes) :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^i(\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(P_\bullet, T)) \otimes_A A' &\rightarrow H^i(\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(P_\bullet, T) \otimes_A A') \\ &\rightarrow \text{Tor}^A(H^{i+1}(\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(P_\bullet, T), A') \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

*Remarque 1.5.5.* Notre théorème de changement de base est l'analogue à plusieurs variables des énoncés [40, prop 2.6, cor 2.7]. Toutefois, il faut faire attention au fait que l'énoncé de changement de base dans [40, prop 2.6] comporte une erreur (sans incidence sur les autres résultats de l'article). En effet, le morphisme  $\text{Hom}(S, T) \otimes_A A' \rightarrow \text{Hom}(S_{A'}, T_{A'})$  n'est pas toujours un isomorphisme. Par exemple, on a :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^2, \Lambda^2) = 0 , \quad \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{F}_2}}(S^2, \Lambda^2) = \mathbb{F}_2 .$$

En effet, sur  $\mathbb{Z}$  aussi bien qu'en caractéristique 2,  $\text{Hom}(S^2, \otimes^2)$  et  $\text{Hom}(S^2, S^2)$  sont de dimension 1, avec pour bases respectives la comultiplication et l'identité. La suite exacte longue induite par la suite de Koszul  $\Lambda^2 \rightarrow \otimes^2 \rightarrow S^2$  est donc de la forme :

$$\text{Hom}(S^2, \Lambda^2) \hookrightarrow \text{Hom}(S^2, \otimes^2) \xrightarrow{\times 2} \text{Hom}(S^2, S^2) \twoheadrightarrow \text{Ext}^1(S^2, \Lambda^2) .$$

En caractéristique 2, l'application  $-\times 2$  est nulle. On a donc  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{F}_2}}(S^2, \Lambda^2) = \text{Ext}_{\mathbb{F}_2}^1(S^2, \Lambda^2) = \mathbb{F}_2$ , alors qu'en caractéristique nulle  $-\times 2$  est injective donc  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^2, \Lambda^2)$  est nul.

**Corollaire 1.5.6.** *Soit  $F, G$  des  $n$ -foncteurs polynomiaux sur  $\mathbb{Z}$ , tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}^1(F, G) = 0$ . Le rang du  $A$ -module libre  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(F_A, G_A)$  est indépendant de l'anneau  $A$  considéré.*

*Démonstration.* Soit  $P$  un projectif et  $P \twoheadrightarrow F$  un épimorphisme admissible. Le  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(P, G)$  est libre de type fini d'après le lemme de Yoneda. Le  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(F, G)$  est un sous-module de ce module, donc lui aussi libre de rang  $r$  fini. D'après le théorème 1.5.4,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(F_A, G_A)$  est donc un  $A$ -module libre de rang  $r$ .  $\square$

## 1.6 Twist de Frobenius

Dans ce paragraphe,  $\mathbb{A}$  désigne un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première.

### 1.6.1 Twist de Frobenius d'un $\mathbb{A}$ -module

Le morphisme de Frobenius  $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto x^p$  est un morphisme d'anneau. Notons  $\mathbb{A}_\phi$  le  $A$ -bimodule qui coïncide avec  $\mathbb{A}$  en tant que  $\mathbb{A}$ -module à gauche, et dont la multiplication à droite par un scalaire  $\lambda$  étant donnée par  $a \cdot \lambda := a\phi(\lambda)$ . Si  $V$  est un  $\mathbb{A}$ -module (à gauche), on définit le  $\mathbb{A}$ -module (à gauche) « twisté »  $V^{(1)}$  comme le produit tensoriel du  $\mathbb{A}$ -module à gauche  $V$  par le bimodule  $\mathbb{A}_\phi$  [30, p. 143] :

$$V^{(1)} := \mathbb{A}_\phi \otimes V .$$

Le twist de Frobenius  $-^{(1)} = \mathbb{A}_\phi \otimes -$  est un foncteur additif exact à droite de la catégorie des  $\mathbb{A}$ -modules dans la catégorie des  $\mathbb{A}$ -modules. Si  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  est un corps, toutes les suites exactes de  $\mathbb{K}$ -modules se scindent . En raison de son caractère additif, le twist de Frobenius devient alors un foncteur *exact* de la catégorie des  $\mathbb{K}$ -modules dans la catégorie des  $\mathbb{K}$ -modules.

Si  $v \in V$  on note  $v^{(1)}$  l'élément  $1 \otimes v \in V^{(1)}$ . Ainsi  $V^{(1)}$  est le  $\mathbb{A}$ -module engendré par l'ensemble  $\{v^{(1)}, v \in V\}$ , quotienté par les relations :

$$(\lambda v)^{(1)} = \lambda^p v^{(1)}, \quad v^{(1)} + w^{(1)} = (v + w)^{(1)} .$$

Nous donnons quelques propriétés élémentaires du twist de Frobenius, cf. [40, p. 706] :

- (i) Si  $V$  est un  $\mathbb{A}$ -module libre de base  $(v_1, \dots, v_n)$  alors  $V^{(1)}$  est un  $\mathbb{A}$ -module libre de base  $(v_1^{(1)}, \dots, v_n^{(1)})$ .
- (ii) L'application  $(V \otimes_{\mathbb{A}} W)^{(1)} \rightarrow V^{(1)} \otimes_{\mathbb{A}} W^{(1)}, (v \otimes w)^{(1)} \mapsto v^{(1)} \otimes w^{(1)}$  est un isomorphisme, naturel en  $V, W$ .
- (iii) Soit  $V$  un  $\mathbb{A}$ -module projectif de type fini. L'application  $(V^\vee)^{(1)} \rightarrow (V^{(1)})^\vee$  qui à  $\lambda \otimes f$  associe le morphisme :

$$\begin{aligned} V^{(1)} &\rightarrow \mathbb{A} \\ \mu \otimes v &\mapsto \lambda \mu(f(v))^p \end{aligned}$$

est un isomorphisme, naturel en  $V$ .

(iv) Soient  $V, W$  des  $\mathbb{A}$ -modules projectifs de type fini. L'application  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(V, W)^{(1)} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(V^{(1)}, W^{(1)})$  qui à  $\lambda \otimes f$  associe  $\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_\phi} \otimes f$  est un isomorphisme, naturel en  $V, W$ .

Enfin, le twist de Frobenius est intimement lié à l'algèbre symétrique. En effet, soit  $V$  un  $\mathbb{A}$ -module projectif. L'application

$$\begin{aligned} S^n(V^{(1)}) &\rightarrow S^{np}(V) \\ (v_1^{(1)} \dots v_n^{(1)}) &\mapsto (v_1^p \dots v_n^p) \end{aligned}$$

définit un morphisme  $\mathbb{A}$ -linéaire injectif, naturel en  $V$ . Dualement on obtient un épimorphisme  $\mathbb{A}$ -linéaire  $\Gamma^{np}(V) \rightarrow \Gamma^n(V^{(1)})$ .

**Lemme 1.6.1.** *Pour tout  $\mathbb{A}$ -module projectif de type fini  $V$ , on a des suites exactes, naturelles en  $V$  :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S^n(V^{(1)}) \rightarrow S^{np}(V) \xrightarrow{\Delta} S^{np-1}(V) \otimes V, \\ \Gamma^{np-1}(V) \otimes V \xrightarrow{m} \Gamma^{np}(V) \rightarrow \Gamma^n(V^{(1)}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

dans lesquelles  $m$  (resp.  $\Delta$ ) désigne la multiplication de  $\Gamma^*$  (resp. la comultiplication de  $S^*$ ).

*Démonstration.* La première suite correspond au début du complexe de De Rham en caractéristique  $p$  [14, Lemme 1.2, p. 8]. Elle est donc exacte. L'exactitude de la deuxième suite s'obtient à partir de la première par dualité.  $\square$

## 1.6.2 Twist de Frobenius et foncteurs polynomiaux

**Définition 1.6.2.** Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Le twist de Frobenius est le foncteur polynomial  $I^{(1)}$  de degré  $p$  qui associe à un  $\mathbb{A}$ -module projectif de type fini  $V \in \Gamma^p \mathcal{V}_{\mathbb{A}}$  le  $\mathbb{A}$ -module projectif de type fini  $V^{(1)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{A}}$ , et dont l'action sur les morphismes de  $\mathrm{Hom}_{\Gamma^p \mathcal{V}_{\mathbb{A}}}(V, W)$  est donnée par la composée :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^p \mathcal{V}_{\mathbb{A}}}(V, W) = \Gamma^p \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(V, W) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(V, W)^{(1)} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(V^{(1)}, W^{(1)}).$$

**Définition 1.6.3.** Soient  $d_1, \dots, d_n$  des entiers positifs et  $F \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, \mathbb{A}}$  un  $n$ -foncteur polynomial sur un anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$  première. On note  $F^{(1)}$  le  $n$ -foncteur polynomial homogène de degré  $(pd_1, \dots, pd_n)$  obtenu en précomposant  $F$  par le twist de Frobenius sur chacune de ses variables :

$$F^{(1)} := F(I^{(1)}, \dots, I^{(1)}).$$

Plus généralement, si  $r \geq 1$  est un entier, on note  $F^{(r)}$  le foncteur :

$$F^{(r)} := F^{(r-1)}(I^{(1)}, \dots, I^{(1)}) = F(I^{(r)}, \dots, I^{(r)}).$$

Nous démontrons maintenant des propriétés cohomologiques du twist de Frobenius, qui nous seront utiles au chapitre 2.

**Proposition 1.6.4.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première,  $r$  un entier positif et  $F, G, H \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}$  des foncteurs polynomiaux homogènes de degrés respectifs  $f, g, h$ . Si l'un des entiers  $g$  ou  $h$  n'est pas multiple de  $p^r$  alors on a :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(F^{(r)}, G \otimes H) = 0 .$$

*Démonstration.* D'après le corollaire 1.4.21 on a un isomorphisme  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(F^{(r)}, G \otimes H) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(2)}^*(F^{(r)(g,h)}, G \boxtimes H)$ , où  $F^{(r)(g,h)}$  désigne la composante homogène de degré  $(g, h)$  de  $F^{(r)} \circ \Pi_2$ . Mais comme  $I^{(r)}$  est un foncteur de degré  $p^r$  qui commute aux sommes directes, cette composante homogène est nulle lorsque  $g$  et  $h$  ne sont pas tous les deux multiples de  $p^r$ .  $\square$

**Corollaire 1.6.5.** *Soit  $F$  un foncteur polynomial,  $\mu$  un uplet et  $r$  et  $k$  des entiers supérieurs ou égaux à 1. L'inclusion  $S^{\mu(r)} \hookrightarrow S^{p^r \mu}$  induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, S^{\mu(r)}(I^{\oplus k})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, S^{p^r \mu}(I^{\oplus k})) .$$

*Dualement, la surjection  $\Gamma^{p^r \mu} \twoheadrightarrow \Gamma^{\mu(r)}$  induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(\Gamma^{\mu(r)}(I^{\oplus k}), F^{(r)}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(\Gamma^{p^r \mu}(I^{\oplus k}), F^{(r)}) .$$

*Démonstration.* Le deuxième isomorphisme s'obtient à partir du premier par dualité de Kuhn. Démontrons le premier isomorphisme. Il nous suffit de démontrer que pour tout entier  $r \geq 0$  et pour tout  $\ell$ -uplet  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell)$ , l'inclusion  $S^{\mu(r)} \hookrightarrow S^{p^r \mu}$  induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, S^{\mu(r)}(I^{\oplus k})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, S^{p^r \mu}(I^{\oplus k})) .$$

Pour cela, nous utilisons la suite exacte

$$0 \rightarrow S^{\mu(r)} \rightarrow S^{p^r \mu} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\ell} S^{p^r \mu_1(r-1)} \otimes \dots \otimes \left( S^{(p-1)\mu_i(r-1)} \otimes I^{r-1} \right) \otimes \dots \otimes S^{p^r \mu_\ell(r-1)}$$

obtenue en prenant un produit tensoriel de suites exactes données par le lemme 1.6.1. D'après la proposition 1.6.4 précédente l'image du terme de droite par le foncteur  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, -)$  est nulle. Le résultat découle alors de l'exactitude à gauche de ce foncteur.  $\square$

**Corollaire 1.6.6.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première, et  $d, r$  des entiers positifs. Le  $\mathbb{A}$ -module  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d, \mathbb{A}}}(\Gamma^{d(r)}, S^{d(r)})$  est libre de rang un, et de base le morphisme composé :*

$$f : \Gamma^{d(r)} \xrightarrow{\Delta^{(r)}} \otimes^{d(r)} \xrightarrow{m^{(r)}} S^{d(r)} .$$

*Démonstration.* D'après le corollaire précédent, on a un isomorphisme  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d, \mathbb{A}}}(\Gamma^{d(r)}, S^{d(r)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d, \mathbb{A}}}(\Gamma^{p^r d}, S^{d(r)})$ . Le lemme de Yoneda donne un isomorphisme :  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d, \mathbb{A}}}(\Gamma^{p^r d}, S^{d(r)}) \simeq S^{d(r)}(\mathbb{A})$ . Le  $\mathbb{A}$ -module  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{p^r d, \mathbb{A}}}(\Gamma^{d(r)}, S^{d(r)})$

est donc libre de rang un. Soit  $b$  une base de ce module. Il existe  $\lambda \in \mathbb{A}$  tel que  $\lambda b = f$ . Nous ne nous reste plus qu'à démontrer que  $\lambda$  est inversible. Soit  $V$  un  $\mathbb{A}$  module libre de rang  $n$  et  $(v_1^{(r)}, \dots, v_n^{(r)})$  une base de  $V^{(r)}$ . On dispose alors d'une base de  $\Gamma^d(V^{(r)})$  contenant le vecteur  $v_1^{(r)\otimes d}$  et d'une base de  $S^d(V^{(r)})$  contenant le vecteur  $(v_1^{(r)} \dots v_1^{(r)})$ . Soit  $\mu \in \mathbb{A}$  la composante selon  $(v_1^{(r)} \dots v_1^{(r)})$  du vecteur  $b(v_1^{(r)\otimes d})$ . Comme  $f$  envoie  $v_1^{(r)\otimes d}$  sur  $(v_1^{(r)} \dots v_1^{(r)})$  on a  $\lambda\mu = 1$ .  $\square$

**Proposition 1.6.7.** *Soient  $d_1, \dots, d_n$  des entiers positifs,  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $F, G \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, \mathbb{A}}$  deux  $n$ -foncteurs polynomiaux. La précomposition par le twist de Frobenius induit un isomorphisme, naturel en  $F, G$  :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, \mathbb{A}}}(F, G) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd_1, \dots, pd_n, \mathbb{A}}}(F^{(1)}, G^{(1)}) .$$

*Démonstration.* En utilisant l'exactitude à gauche en chacune des deux variables des bifoncteurs :

$$F, G \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, \mathbb{A}}}(F, G) \quad \text{et} \quad F, G \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd_1, \dots, pd_n, \mathbb{A}}}(F^{(1)}, G^{(1)}) ,$$

on se ramène au cas où  $F$  est un projectif et  $G$  est un injectif. Il nous suffit donc de montrer que si  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  et  $\mu^1, \dots, \mu^n$  sont des uplets de poids  $d_1, \dots, d_n$ , la précomposition par le twist de Frobenius induit un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, \mathbb{A}}}(\Gamma^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{\lambda^n}, S^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu^n}) \\ \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd_1, \dots, pd_n, \mathbb{A}}}(\Gamma^{\lambda^1(1)} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{\lambda^n(1)}, S^{\mu^1(1)} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu^n(1)}) . \end{aligned}$$

D'après le théorème de Künneth 1.4.16, il nous suffit donc de démontrer que pour tout entier  $d$  et toute paire  $\lambda, \mu$  de uplets de poids  $d$  la précomposition par le twist de Frobenius induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d, \mathbb{A}}}(\Gamma^\lambda, S^\mu) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd, \mathbb{A}}}(\Gamma^{\lambda(1)}, S^{\mu(1)}) .$$

En appliquant la proposition 1.4.26 aux foncteurs exponentiels  $\Gamma^*, S^*, \Gamma^{*(1)}$  et  $S^{*(1)}$ , on obtient un diagramme commutatif dans lequel les morphismes verticaux sont induits par la précomposition par le twist de Frobenius :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d, \mathbb{A}}}(\Gamma^\lambda, S^\mu) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\nu, s, t} \bigotimes_{s, t} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\nu, s, t, \mathbb{A}}}(\Gamma^{\nu, s, t}, S^{\nu, s, t}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd, \mathbb{A}}}(\Gamma^{\lambda(1)}, S^{\mu(1)}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\nu, s, t} \bigotimes_{s, t} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\nu, s, t, \mathbb{A}}}(\Gamma^{\nu, s, t(1)}, S^{\nu, s, t(1)}) . \end{array}$$

Pour démontrer la proposition, il ne nous reste donc qu'à vérifier que pour tout entier positif  $d$ , la précomposition par le twist de Frobenius induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d, \mathbb{A}}}(\Gamma^d, S^d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd, \mathbb{A}}}(\Gamma^{d(1)}, S^{d(1)}) .$$

Ce isomorphisme résulte du corollaire 1.6.6.  $\square$



## Chapitre 2

# Extensions entre foncteurs à une variable

Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Les représentations rationnelles twistées du groupe linéaire apparaissent naturellement dans un certain nombre de problèmes cohomologiques [18, 10, 43]. Les groupes d'extensions entre foncteurs polynomiaux twistés apportent des informations sur de telles représentations (cf. [18, cor. 3.13] ou corollaire 4.2.12 du chapitre 4). Les calculs d'extensions entre foncteurs polynomiaux twistés à une variable ont donc logiquement déjà été l'objet de beaucoup d'attention [18, 15, 9, 17].

Dans ce chapitre, Nous présentons une nouvelle approche des calculs d'extensions entre foncteurs polynomiaux twistés. Cette nouvelle approche repose sur les résolutions injectives explicites des tenseurs symétriques twistés construites par Troesch [42]. Nous rappelons ces résolutions dans le paragraphe 2.1.

Puis nous constatons (lemme 2.2.4) que les groupes d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(F^{(r)}, S^{\mu(r)})$  sont formels, c'est-à-dire qu'ils se calculent comme l'homologie d'un complexe de chaînes dont la différentielle est nulle. En conséquence, le twist de Frobenius est « transparent » pour les paires de foncteurs  $F, S^{\mu}$ . Par « transparent », nous signifions que le twist de Frobenius n'a quasiment aucun effet sur les groupes d'extensions : le  $\mathbb{A}$ -module  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(F^{(r)}, S^{\mu(r)})$  est à une graduation près, isomorphe au  $\mathbb{A}$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F, S^{\mu}(I^{\oplus p^r}))$ . Cette notion de transparence sera développée dans le cadre plus général des bifoncteurs au chapitre 5 (cf. définition 5.1.10).

Enfin, dans le paragraphe 2.3, nous utilisons ce phénomène de transparence pour redémontrer de manière efficace un certain nombre de calculs déjà connus [18, 15, 9, 17]. Certains de ces calculs (notamment le théorème 2.3.4) nous seront utiles dans les chapitres 4 et 5.



## 2.1 Résolutions injectives des twists de puissances symétriques

Dans ce paragraphe, nous rappelons les résultats obtenus par Troesch dans [42]. Il y a produit des résolutions injectives explicites des puissances symétriques twistées. Ces résolutions généralisent à un anneau de caractéristique  $p$  première les complexes symétriques connus auparavant [16, 18] en caractéristique  $p = 2$ .

### Rappels sur les $p$ -complexes

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne,  $\mathbb{F}_p$ -linéaire, munie d'un produit monoïdal  $\otimes$ . Par exemple,  $\mathcal{A}$  est la catégorie  $\mathcal{P}$  des foncteurs polynomiaux sur un corps de caractéristique  $p$ , munie du produit tensoriel usuel.

**Définition 2.1.1.** Un  $p$ -complexe (positif) de  $\mathcal{A}$  est un objet gradué de  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{C}^\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n$$

muni d'une  $p$ -différentielle, c'est-à-dire d'un morphisme  $d$  de degré 1 tel que  $d^p = 0$ .

Pour tout entier  $s$  compris entre 1 et  $p - 1$  on peut associer au  $p$ -complexe  $\mathcal{C}^\bullet$  un complexe  $\mathcal{C}_{[s]}^\bullet$  avec comme différentielle une alternance des morphismes  $d^s$  et  $d^{p-s}$  :

$$\mathcal{C}_{[s]}^\bullet : \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d^s} \mathcal{C}^s \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^p \xrightarrow{d^s} \mathcal{C}^{p+s} \xrightarrow{d^s} \mathcal{C}^{2p} \rightarrow \dots$$

**Définition 2.1.2.** On dit qu'un  $p$ -complexe  $\mathcal{C}^\bullet$  est une  $p$ -résolution de  $F$  si pour tout  $s \in [1, p - 1]$  le complexe  $\mathcal{C}_{[s]}^\bullet$  est une résolution de  $F$ . Un  $p$ -complexe est dit  $p$ -acyclique si c'est une  $p$ -résolution de 0.

Si on munit le produit tensoriel de deux  $p$ -complexes  $\mathcal{C}^\bullet$  et  $\mathcal{D}^\bullet$  de la différentielle  $d_{\mathcal{C}} \otimes 1 + 1 \otimes d_{\mathcal{D}}$  (sans signe), on obtient à nouveau un  $p$ -complexe.

**Proposition 2.1.3.** [42, Th 2.3.1] Soit  $\mathcal{C}^\bullet$  une  $p$ -résolution de  $F$  et  $\mathcal{D}^\bullet$  une  $p$ -résolution de  $G$ . Alors le produit tensoriel  $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})^\bullet$  est une  $p$ -résolution de  $F \otimes G$ .

### Résolutions des puissances symétriques twistées

Nous énonçons maintenant le résultat dû à Troesch :

**Théorème 2.1.4.** Soit  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$ . On peut munir le foncteur polynomial

$$S^n(I^{\oplus p^r}) \simeq \bigoplus_{i_0 + \dots + i_{p^r-1} = n} S^{i_0} \otimes \dots \otimes S^{i_{p^r-1}}$$

d'une  $p$ -différentielle  $d$  vérifiant les propriétés suivantes.

(1) Le degré cohomologique d'un élément de  $S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_{p^r-1}}$  est

$$0.i_0 + 1.i_1 + \cdots + (p^r - 1)i_{p^r-1}$$

et la  $p$ -différentielle augmente le degré cohomologique de  $p^{r-1}$ .

(2) Si  $n$  est multiple de  $p^r$  alors  $(S^n(I^{\oplus p^r}), d)$  est une  $p$ -résolution de  $S^{n/p^r(r)}$ . Sinon  $(S^n(I^{\oplus p^r}), d)$  est  $p$ -acyclique.

*Démonstration.* Le résultat est vrai si  $\mathbb{A} = \mathbb{F}_p$  est un corps premier d'après [42, Th 2]. Le foncteur de changement de base  $\mathcal{P}_{\mathbb{F}_p} \rightsquigarrow \mathcal{P}_{\mathbb{A}}$  est exact (théorème 1.5.4), et de plus il transforme les tenseurs symétriques sur  $\mathbb{F}_p$  en tenseurs symétriques sur  $\mathbb{A}$ . Le théorème précédent est donc valable sur tout anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$ .  $\square$

Le  $p$ -complexe  $(S^n(I^{\oplus p^r}), d)$  est noté  $(B_n^\bullet(r), d)$  dans [42]. Sa différentielle est de degré cohomologique  $p^{r-1}$ , et  $(B_n^\bullet(r), d)$  est la somme directe des  $p^{r-1}$  sous- $p$ -complexes  $(B_n^{i+p^{r-1}\bullet}(r), d)$  définis de la façon suivante. Pour  $i \in [0, p^{r-1} - 1]$ ,  $B_n^{i+p^{r-1}\bullet}(r)$  est le sous- $p$ -complexe formé des éléments de degrés cohomologiques congrus à  $i$  modulo  $p^{r-1}$  :

$$0 \rightarrow B^i(r) \xrightarrow{d} B^{i+p^{r-1}}(r) \xrightarrow{d} B^{i+2p^{r-1}}(r) \rightarrow \dots$$

La propriété (2) du théorème signifie précisément (cf. [42, Th. 4.3.2]) :

- Si  $i \neq 0$ , les  $p$ -complexes  $(B_n^{i+p^{r-1}\bullet}(r), d)$  sont  $p$ -acycliques.
- Si  $i = 0$ , il y a deux cas. Si  $p^r$  divise  $n$ , le  $p$ -complexe  $(B_n^{p^{r-1}\bullet}(r), d)$  est une  $p$ -résolution de  $S^{n/p^r(r)}$ . Sinon,  $(B_n^{p^{r-1}\bullet}(r), d)$  est  $p$ -acyclique.

**Définition 2.1.5.** Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers positifs. Le produit tensoriel des  $p$ -complexes  $(S^{p^r \mu_i}(I^{\oplus p^r}), d)$  forme une  $p$ -résolution de  $S^{\mu(r)}$  que l'on note  $B_\mu^\bullet(r)$ .

**Définition 2.1.6.** Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers positifs. On appelle résolution de Troesch de  $S^{\mu(r)}$ , la résolution  $\mathcal{I}_{\mu(r)}^\bullet$  associée à la  $p$ -résolution  $B_\mu^\bullet(r)$  pour l'entier  $s = 1$  :

$$\mathcal{I}_{\mu(r)}^\bullet := (B_\mu^\bullet(r))_{[1]} .$$

*Exemple 2.1.7.* Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique  $p = 3$ . La  $p$ -résolution  $B_{(1)}^\bullet(1)$  de  $I^{(1)}$  est de la forme :

$$S^{(3,0,0)} \xrightarrow{d} S^{(2,1,0)} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} S^{(2,0,1)} \\ \oplus \\ S^{(1,2,0)} \end{array} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} S^{(1,1,1)} \\ \oplus \\ S^{(0,3,0)} \end{array} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} S^{(1,0,2)} \\ \oplus \\ S^{(0,2,1)} \end{array} \xrightarrow{d} S^{(0,1,2)} \xrightarrow{d} S^{(0,0,3)} .$$

La résolution de Troesch de  $I^{(1)}$  est donc :

$$\mathcal{I}_{(1)(1)}^\bullet : S^{(3,0,0)} \xrightarrow{d} S^{(2,1,0)} \xrightarrow{d^2} \begin{array}{c} S^{(1,1,1)} \\ \oplus \\ S^{(0,3,0)} \end{array} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} S^{(1,0,2)} \\ \oplus \\ S^{(0,2,1)} \end{array} \xrightarrow{d^2} S^{(0,0,3)} .$$

## 2.2 Transparence du twist de Frobenius

**Définition 2.2.1.** Soit  $M = [m_{i,j}]$  une matrice à coefficients entiers positifs, avec  $k$  lignes (numérotées de 1 à  $k$ ) et  $p^r$  colonnes (numérotées de 0 à  $p^r - 1$ ). On définit le foncteur polynomial gradué  $S^M$  comme le foncteur concentré en degré cohomologique

$$\sum_{j=0}^{p^r-1} j \left( \sum_{i=1}^k m_{i,j} \right)$$

et égal à

$$S^M := (S^{m_{1,0}} \otimes \dots \otimes S^{m_{1,p^r-1}}) \otimes \dots \otimes (S^{m_{k,0}} \otimes \dots \otimes S^{m_{k,p^r-1}}) .$$

**Lemme 2.2.2.** Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers positifs. On a un isomorphisme de foncteurs gradués par le degré cohomologique :

$$B_\mu^*(r) \simeq \bigoplus_M S^M ,$$

la somme de droite étant étendue à toutes les matrices  $[m_{i,j}]$  à coefficients positifs à  $k$  lignes et  $p^r$  colonnes qui vérifient pour tout  $1 \leq i \leq k$  l'égalité  $\sum_{j=0}^{p^r-1} m_{i,j} = \mu_i$ .

*Démonstration.* Par définition du foncteur polynomial gradué  $B_\mu^*(r)$  on a des isomorphismes de foncteurs gradués

$$\begin{aligned} B_\mu^*(r) &= \bigotimes_{i=1}^k B_{\mu_i}^*(r) \simeq \bigotimes_{i=1}^k \left( \bigoplus_{m_{i,0} + \dots + m_{i,p^r-1} = \mu_i} S^{m_{i,0}} \otimes \dots \otimes S^{m_{i,p^r-1}} \right) \\ &\simeq \bigoplus_{\substack{m_{1,0} + \dots + m_{1,p^r-1} = \mu_1 \\ \dots \\ m_{k,0} + \dots + m_{k,p^r-1} = \mu_k}} \bigotimes_{i=1}^k (S^{m_{i,0}} \otimes \dots \otimes S^{m_{i,p^r-1}}) , \end{aligned}$$

où le degré cohomologique d'un facteur  $S^{m_{i,j}}$  est égal à  $j m_{i,j}$ . La dernière somme est précisément égale, en tant que foncteur gradué, à la somme des  $S^M$  de l'énoncé.  $\square$

En appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_\mathbb{A}}(F^{(r)}, -)$  au foncteur  $B_\mu^*(r)$  gradué par le degré cohomologique on obtient le  $\mathbb{A}$ -module gradué  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_\mathbb{A}}(F^{(r)}, B_\mu^*(r))$ .

**Lemme 2.2.3.** Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers positifs. Le  $\mathbb{A}$ -module gradué  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_\mathbb{A}}(F^{(r)}, B_\mu^*(r))$  est concentré en degrés multiples de  $p^r$ .

*Démonstration.* On utilise la description de  $B_\mu^*(r)$  donnée dans le lemme 2.2.2 précédent. Soit  $M = [m_{i,j}]$  une matrice à coefficients entiers positifs telle que pour tout  $1 \leq i \leq k$  on a  $\sum_{j=0}^{p^r-1} m_{i,j} = \mu_i$ . Si le foncteur  $S^M$  est de degré cohomologique non multiple de  $p^r$ , alors il existe un coefficient  $m_{i_0, j_0}$  de  $M$  qui n'est pas multiple de  $p^r$ . D'après la proposition 1.6.4, on a alors  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_\mathbb{A}}(F^{(r)}, S^M) = 0$ .  $\square$

**Lemme 2.2.4 (Formalité de  $\text{Ext}^*(F^{(r)}, S^{\mu(r)})$ ).** Soient  $F$  un foncteur polynomial,  $r$  un entier positif,  $\mu$  un  $k$ -uplet d'entiers positifs et  $\mathcal{I}_{\mu(r)}^\bullet$  la résolution de Troesch de  $S^{\mu(r)}$ . Les objets du complexe

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, \mathcal{I}_{\mu(r)}^\bullet)$$

sont nuls en degré cohomologique impair. On a donc l'égalité :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(F^{(r)}, S^{\mu(r)}) = \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, \mathcal{I}_{\mu(r)}^*) .$$

*Démonstration.* Par définition, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, \mathcal{I}_{\mu(r)}^\bullet) = \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, B_{\mu}^\bullet(r))_{[1]} .$$

La différentielle du  $p$ -complexe  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, B_{\mu}^\bullet(r))$  est de degré cohomologique  $p^{r-1}$ . Les objets de degrés cohomologiques impairs du complexe  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, \mathcal{I}_{\mu(r)}^\bullet)$  sont donc les objets de degrés cohomologiques congrus à  $p^{r-1}$  modulo  $p^r$  du  $p$ -complexe  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, B_{\mu}^\bullet(r))$ . Il sont donc nuls d'après le lemme 2.2.3.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat de transparence du twist de Frobenius pour les foncteurs polynomiaux :

**Théorème 2.2.5.** Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Soient  $F$  un foncteur polynomial sur  $\mathbb{A}$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers positifs et  $r$  un entier positif. Il existe un isomorphisme non gradué, naturel en  $F$  :

$$\xi^d : \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F, S^{\mu}(I^{\oplus p^r})) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(F^{(r)}, S^{\mu(r)}) .$$

De plus, si on décompose  $S^{\mu}(I^{\oplus p^r})$  à l'aide de la formule exponentielle :

$$S^{\mu}(I^{\oplus p^r}) \simeq \bigoplus_{\substack{\mu_{1,0} + \dots + \mu_{1,p^r-1} = \mu_1 \\ \dots \\ \mu_{n,0} + \dots + \mu_{n,p^r-1} = \mu_n}} \bigotimes_{i=1}^n S^{(\mu_{i,0}, \dots, \mu_{i,p^r-1})}$$

alors  $\xi^d$  envoie le facteur direct  $\text{Hom}(F, \bigotimes_{i=1}^n S^{(\mu_{i,0}, \dots, \mu_{i,p^r-1})})$  sur des classes de degré

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{p^r-1} j \mu_{i,j} .$$

De même, on a un isomorphisme non gradué, naturel en  $F$  :

$$\xi^g : \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(\Gamma^{\mu}(I^{\oplus p^r}), F) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{\mu(r)}, F^{(r)})$$

qui envoie le facteur direct  $\text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n \Gamma^{(\mu_{i,0}, \dots, \mu_{i,p^r-1})}, F)$  sur des classes de degré

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{p^r-1} j \mu_{i,j} .$$

*Démonstration.* Nous n'effectuons que la démonstration pour  $\xi^d$ , le cas de  $\xi^g$  s'obtient par dualité de Kuhn. D'après le lemme de formalité 2.2.4, on a une égalité de  $\mathbb{A}$ -modules gradués :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F^{(r)}, S^{\mu(r)}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, \mathcal{I}_{\mu(r)}^*) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^*(r))_{[1]} \quad (2.1)$$

De plus, la différentielle du  $p$ -complexe  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(F^{(r)}, B_{\mu}^*(r))$  est de degré cohomologique  $p^{r-1}$ . On a donc une égalité de  $\mathbb{A}$ -modules (non gradués)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^*(r))_{[1]} = \left( \bigoplus_{p^r | i} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^i(r)) \right) \oplus \left( \bigoplus_{p^r \nmid j} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^{j+p^{r-1}}(r)) \right).$$

D'après le lemme 2.2.3, le  $\mathbb{A}$ -module gradué  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^*(r))$  est concentré en degrés multiples de  $p^r$ . En rajoutant des  $\mathbb{A}$ -modules nuls, on obtient l'égalité de  $\mathbb{A}$ -modules non gradués :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^*(r))_{[1]} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^i(r)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, S^{p^r \mu}(I^{\oplus p^r})).$$

L'inclusion  $S^{\mu(r)}(I^{\oplus p^r}) \hookrightarrow S^{p^r \mu}(I^{\oplus p^r})$  induit un isomorphisme après passage au foncteur  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, -)$  d'après le corollaire 1.6.5. On a donc un isomorphisme, naturel en  $F$  :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, S^{\mu(r)}(I^{\oplus p^r})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^*(r))_{[1]} \quad (2.2)$$

Enfin, d'après la proposition 1.6.7, la précomposition par le twist de Frobenius induit un isomorphisme, naturel en  $F$  :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F, S^{\mu}(I^{\oplus p^r})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, S^{\mu(r)}(I^{\oplus p^r})) \quad (2.3)$$

En composant les isomorphismes (2.3), (2.2) et (2.1) on obtient donc un isomorphisme de  $\mathbb{A}$ -modules non gradués, naturel en  $F$  :

$$\xi^d : \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F, S^{\mu}(I^{\oplus p^r})) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F^{(r)}, S^{\mu(r)}).$$

De plus, si on décompose  $S^{\mu(r)}(I^{\oplus p^r})$  à l'aide de la formule exponentielle, l'inclusion  $S^{\mu(r)}(I^{\oplus p^r}) \hookrightarrow S^{p^r \mu}(I^{\oplus p^r})$  envoie le terme  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, \bigotimes_{i=1}^n S^{(\mu_{i,0}, \dots, \mu_{i,p^r-1})}(r))$  dans le facteur direct  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^{\ell}(r)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, S^{p^r \mu}(I^{\oplus p^r}))$ , avec  $\ell = p^r \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{p^r-1} j \mu_{i,j}$ . L'isomorphisme (2.2) envoie donc le terme  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, \bigotimes_{i=1}^n S^{(\mu_{i,0}, \dots, \mu_{i,p^r-1})}(r))$  dans un terme de degré  $2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{p^r-1} j \mu_{i,j}$  du  $\mathbb{A}$ -module gradué  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, B_{\mu}^*(r))_{[1]}$ . Comme les isomorphismes (2.1) et (2.3) respectent le degré, on obtient notre assertion sur  $\xi^d$ .  $\square$

## 2.3 Application au calcul des extensions entre foncteurs classiques

Dans ce paragraphe, nous utilisons le théorème 2.2.5 de transparence du twist de Frobenius pour retrouver un certain nombre de calculs déjà connus, contenus dans les articles [18, 15, 9, 17]. Le premier résultat est une application directe du théorème 2.2.5 :

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Le  $\mathbb{A}$ -module d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})$  est un  $\mathbb{A}$ -module libre gradué, de rang 1 dans tous les degrés  $2i$  avec  $0 \leq i \leq p^r - 1$  et nul dans les autres degrés. Il est isomorphe, en tant que module non gradué, au  $\mathbb{A}$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(I, I^{\oplus p^r})$ .*

*Remarque 2.3.2.* La transparence du twist ne permet pas de retrouver facilement la structure d'algèbre de  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})$  donnée par le produit de Yoneda et calculée dans [18, Th. 4.10].

Nous examinons maintenant les extensions entre paires de foncteurs  $\Gamma^{d(r)}, F^{(r)}$ . Notons  $\mathcal{V}_A^*$  la catégorie des  $A$ -modules projectifs de type fini gradués positivement et des applications linéaires respectant la graduation. Si  $F \in \mathcal{P}_{d,A}$  pour  $d > 0$ , on peut prolonger  $F$  en un foncteur

$$F : \mathcal{V}_A^* \rightsquigarrow \mathcal{V}_A^* .$$

Pour cela, si  $V^* \in \mathcal{V}_A^*$  on choisit  $n$  tel que  $V^k = 0$  pour  $k > n$  et on pose :

$$\begin{cases} F(V^*) = F(\oplus V^i) = \bigoplus_{\mu_0 + \dots + \mu_n = d} F^\mu(V^0, \dots, V^n) \\ \deg F^\mu(V^0, \dots, V^n) = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot i \end{cases}$$

où  $F^\mu$  désigne la partie homogène de degré  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  de  $F \circ \Pi_n$  (cf. §1.4.6). La définition ne dépend pas du  $n$  choisi. Avec cette définition, nous pouvons maintenant énoncer le résultat [9, cor 5.1], [17, prop 4.2.1] :

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et soit  $F \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{A}}$ . On a des isomorphismes, naturels en  $F$  :*

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{d(r)}, F^{(r)}) &\simeq F(\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})) , \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(F^{(r)}, S^{d(r)}) &\simeq F^\sharp(\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})) . \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous démontrons le cas de  $\text{Ext}^*(\Gamma^{d(r)}, F^{(r)})$ , le deuxième cas s'obtient par dualité. D'après le théorème 2.2.5, on a un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\mu_0 + \dots + \mu_{p^r-1} = d} \text{Hom}(\Gamma^{(\mu_0, \dots, \mu_{p^r-1})}, F) = \text{Hom}(\Gamma^d(I^{\oplus p^r}), F) \xrightarrow[\simeq]{\xi^g} \text{Ext}^*(\Gamma^{\mu(r)}, F^{(r)}) .$$

Si on pose  $\deg \text{Hom}(\Gamma^{(\mu_0, \dots, \mu_{p^r-1})}, F) = 2 \sum \mu_i \cdot i$ , alors  $\xi^g$  respecte la graduation.

De plus si  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_{p^r-1})$  est un uplet de poids  $d$  on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} F^\mu(A, \dots, A) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mu_0, \dots, \mu_{p^r-1}}(n)}(\Gamma^{\mu_0} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{\mu_{p^r-1}}, F^\mu) \quad (\text{Yoneda}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{P}_d(n)}(\Gamma^{\mu_0} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{\mu_{p^r-1}}, F) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{(\mu_0, \dots, \mu_{p^r-1})}, F) \quad (\text{Prop.1.4.20}) \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.1,  $E_r^* = \text{Ext}_{\mathcal{P}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})$  est un espace vectoriel gradué nul sauf dans les degrés  $2i$  pour  $0 \leq i \leq p^r - 1$  où l'on a  $E_r^{2i} = \mathbb{A}$ . En identifiant  $E_r^{2i}$  avec le  $i$ -ème facteur  $\mathbb{A}$  de  $F^\mu(\mathbb{A}, \dots, \mathbb{A})$ , on obtient donc un isomorphisme :

$$F(E_r^*) = \bigoplus_{\mu_0 + \dots + \mu_{p^r-1} = d} F^\mu(E_r^0, \dots, E_r^{p^r-1}) \simeq \bigoplus_{\mu_0 + \dots + \mu_{p^r-1} = d} \text{Hom}(\Gamma^\mu, F).$$

Par définition de la graduation sur  $F(E_r^*)$ , cet isomorphisme respecte le degré. En le postcomposant par  $\xi^g$ , on obtient notre résultat.  $\square$

Enfin, notre théorème 2.2.5 de transparence du twist de Frobenius permet de retrouver rapidement une partie des résultats de [15].

**Théorème 2.3.4.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des uplets de poids  $d$  et  $r > j$  des entiers. Les morphismes :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, S^{\lambda(r)}) \quad (2.4)$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \Gamma^{\lambda(r)}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)}) \quad (2.5)$$

factorisent pour donner des isomorphismes :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)})_{\mathfrak{S}_\lambda} \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, S^{\lambda(r)}) \quad (2.6)$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \Gamma^{\lambda(r)}) \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)})_{\mathfrak{S}_\lambda} \quad (2.7)$$

*Démonstration.* Nous étudions le premier morphisme, l'étude du deuxième est analogue. Comme  $\Gamma^{p^{r-j}\mu}(I^{\oplus p^j})$  est projectif, la présentation :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda} \otimes^d \xrightarrow{\oplus 1 - \sigma} \otimes^d \rightarrow S^\lambda$$

induit une présentation :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(\Gamma^{p^{r-j}\mu}(I^{\oplus p^j}), \otimes^{d(r-j)}) &\xrightarrow{\oplus 1 - \sigma} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(\Gamma^{p^{r-j}\mu}(I^{\oplus p^j}), \otimes^{d(r-j)}) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(\Gamma^{p^{r-j}\mu}(I^{\oplus p^j}), S^{\lambda(r-j)}). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 2.2.5, on obtient donc la présentation suivante des groupes d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, S^{\lambda(r)})$  :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)}) &\xrightarrow{\oplus 1 - \sigma} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, S^{\lambda(r)}). \end{aligned}$$

Le morphisme (2.4) est donc surjectif et passe au quotient en un isomorphisme (2.6).  $\square$

De manière analogue, on peut facilement démontrer :

**Théorème 2.3.5.** *Soit  $A$  un anneau de caractéristique  $p$  première,  $p \neq 2$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des uplets de poids  $d$  et  $r > j$  des entiers. Les morphismes :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)}) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \Lambda^{\lambda(r)}) \quad (2.8)$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \Lambda^{\lambda(r)}) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)}) \quad (2.9)$$

*factorisent pour donner des isomorphismes :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*((\Gamma^{p^{r-j}})^{\otimes d(j)}, \otimes^{d(r)})_{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \Lambda^{\lambda(r)}) \quad (2.10)$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \Lambda^{\lambda(r)}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\Gamma^{p^{r-j}\mu(j)}, \otimes^{d(r)})_{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda} \quad (2.11)$$





## Chapitre 3

# Symétrisations de foncteurs polynomiaux

Soit  $A$  un anneau commutatif. Les  $n$ -foncteurs polynomiaux homogènes de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  sont les foncteurs  $A$ -linéaires de la catégorie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  dans la catégorie des  $A$ -modules. La catégorie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ -modules d'après le lemme 3.1.6. Une question naturelle qui se pose alors est de savoir comment prolonger un  $n$ -foncteur  $F$  en un foncteur  $A$ -linéaire  $f$  de la catégorie des  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ -modules dans la catégorie des  $A$ -modules. On appelle symétrisation de  $F$  un tel prolongement  $f$ .

La notion de symétrisation d'un foncteur polynomial a été introduite par Chałupnik dans [9], dans le cadre des foncteurs à une variable et lorsque l'anneau  $A = \mathbb{K}$  est un corps. Elle joue dans cet article un rôle essentiel, tant dans les démonstrations que dans les énoncés. Par exemple, Chałupnik décrit [9, Th. 4.3, Th. 4.4 et Th. 6.1] les groupes d'extensions entre certaines paires de foncteurs twistés  $F^{(r)}, G^{(r)}$  comme l'image d'un certain  $\mathfrak{S}_d$ -bimodule gradué  $B_r$  par des symétrisations  $f^\sharp$  et  $g$  de  $F^\sharp$  et  $G$  :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{d^r, \mathbb{K}}}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \simeq g(f^\sharp(B_r)).$$

Dans les chapitres 4 et 5, nous développerons des méthodes qui généralisent les calculs de Chałupnik. Les symétrisations des foncteurs polynomiaux nous serviront à formuler certains résultats, par exemple la proposition 4.3.2 et le théorème 5.1.26. Pour que les résultats de ces calculs soient les plus explicites possibles, il est donc important de décrire le plus précisément possible les symétrisations obtenues. Nous nous attaquons à ce problème dans ce chapitre.

Nous expliquons tout d'abord ce que nous recherchons dans le paragraphe 3.1. Nous souhaitons construire un foncteur *sym*, qui associe à chaque  $n$ -foncteur  $F$  une symétrisation  $f$ , exact à gauche et qui envoie les injectifs de la forme  $S^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\lambda^n}$  sur le foncteur des coinvariants sous l'action du sous-groupe de Young  $\mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}$ .

Une méthode possible pour obtenir un foncteur de symétrisation est la suivante. Notons  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}, A}$  la catégorie des foncteurs  $A$ -linéaires des  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ -modules vers les  $A$ -modules. En restreignant un élément de  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}, A}$  à la sous-catégorie

$\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ , on obtient un foncteur polynomial à valeurs quelconques. On dispose donc d'un foncteur d'évaluation  $ev : \mathcal{F}_{\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}, A} \rightsquigarrow \overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . D'après [31, chap. X], ce foncteur  $ev$  admet un adjoint à droite  $s : \overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$ . On peut donc penser à associer à un foncteur polynomial  $F$  la symétrisation  $s(F)$ . C'est d'ailleurs la méthode utilisée dans [17] pour obtenir des symétrisations injectives lorsque  $A = \mathbb{K}$  est un corps. Mais ce procédé n'est pas satisfaisant sur un anneau quelconque. En effet, la symétrisation  $s(S^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\lambda^n})$  n'a pas une expression explicite simple en général : elle n'est pas égale aux coinvariants sous l'action de  $\mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}$  (cf. paragraphe 3.4.1). Dans le paragraphe 3.2, nous développons donc un autre procédé de symétrisation, basé sur l'existence de résolutions injectives canoniques dans  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  (cf. proposition 1.4.14).

Nous calculons explicitement de nombreuses symétrisations dans le troisième paragraphe. Enfin, nous étudions dans le paragraphe 3.4 les relations entre notre procédé et le procédé basé sur l'utilisation d'un adjoint de  $ev$ .

## 3.1 Le problème de symétrisation

### 3.1.1 $\mathfrak{S}$ -foncteurs

Dans ce paragraphe, on se fixe  $A$  un anneau commutatif et  $d_1, \dots, d_n$  des entiers. On désigne par  $\mathfrak{S}$  le groupe  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ . On note  $\text{Mod}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules et des applications linéaires, et  $\text{Mod}(A\mathfrak{S})$  la catégorie des  $A$ -modules munis d'une action  $A$ -linéaire de  $\mathfrak{S}$  et des applications  $A$ -linéaires équivariantes.

**Définition 3.1.1.** Un  $\mathfrak{S}$ -foncteur est un foncteur  $f : \text{Mod}(A\mathfrak{S}) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$  tel que :

- (1)  $f$  est un foncteur  $A$ -linéaire.
- (2)  $f$  commute aux sommes finies.

Soient  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  des uplets de poids  $d_1, \dots, d_n$  et  $M$  un  $\mathfrak{S}$ -module. Les exemples suivants sont des  $\mathfrak{S}$ -foncteurs.

*Exemple 3.1.2.* [Foncteur des coinvariants]

On note  $\text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)}$  le  $\mathfrak{S}$ -foncteur défini par la formule :

$$\text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} M := M_{\mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} .$$

*Exemple 3.1.3.* [Foncteur des invariants]

On note  $\text{inv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)}$  le  $\mathfrak{S}$ -foncteur défini par la formule :

$$\begin{aligned} \text{inv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} M &:= M^{\mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} \\ &= \text{Ker} \left[ M \xrightarrow{\Pi(\sigma - \text{Id})} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} M \right] . \end{aligned}$$

*Exemple 3.1.4.* [Foncteur des invariants sous l'action alternée]

On définit le  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $\text{alt}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)}$  par la formule :

$$\text{alt}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} M := \text{Ker} \left[ M \rightarrow \bigoplus_{\langle \tau \rangle \subset \mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} M_{\langle \tau \rangle} \right],$$

où la somme directe est prise sur tous les sous-groupes  $\langle \tau \rangle$  engendrés par une transposition  $\tau$ . Lorsque la caractéristique  $p$  est différente de 2,  $\text{alt}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} M$  est égal aux invariants de  $M$  sous l'action alternée de  $\mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}$  :

$$\text{alt}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} M = \text{Ker} \left[ M \xrightarrow{\prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} \epsilon(\sigma) \sigma - \text{Id}} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} M \right].$$

**Définition 3.1.5.** On note  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$  la catégorie dont les objets sont les  $\mathfrak{S}$ -foncteurs et dont les flèches sont les transformations naturelles  $A$ -linéaires entre  $\mathfrak{S}$ -foncteurs.

La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$  possède sommes, produits, noyaux et conoyaux calculés au but, et hérite donc de la structure de catégorie abélienne de  $\text{Mod}(A)$ , cf. [36, Th 4.1].

### 3.1.2 Le problème de symétrisation

Soient  $V, W$  des  $A$ -modules. Le groupe  $\mathfrak{S}_d$  agit sur  $\text{Hom}_A(V, W)^{\otimes d}$  par permutation des facteurs :

$$\sigma.(f_1 \otimes \dots \otimes f_d) = f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma^{-1}(d)}.$$

Si  $V$  et  $W$  sont des  $A$ -modules projectifs de type fini, on a un isomorphisme  $\text{Hom}_A(V, W)^{\otimes d} \simeq \text{Hom}_A(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$  (cf. chapitre 1, paragraphe 1.2). Notons  $\cdot_W$  et  $\cdot_V$  les actions de  $\mathfrak{S}_d$  sur  $W^{\otimes d}$  et  $V^{\otimes d}$  par permutation des facteurs. Si  $v_1 \otimes \dots \otimes v_d \in V^{\otimes d}$  on a :

$$\begin{aligned} (\sigma.(f_1 \otimes \dots \otimes f_d))(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) &= f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma^{-1}(d)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) \\ &= f_{\sigma^{-1}(1)}(v_1) \otimes \dots \otimes f_{\sigma^{-1}(d)}(v_d) \\ &= \sigma \cdot_W (f_1(v_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes f_d(v_{\sigma(d)})) \\ &= \sigma \cdot_W ((f_1 \otimes \dots \otimes f_d)(\sigma^{-1} \cdot_V (v_1 \otimes \dots \otimes v_d))). \end{aligned}$$

D'après la formule B.2 de l'annexe, l'identification entre  $\text{Hom}_A(V, W)^{\otimes d}$  et  $\text{Hom}_A(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$  induit donc un isomorphisme entre  $\Gamma^d \text{Hom}_A(V, W)$  et le  $A$ -module  $\text{Hom}_{A\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$  des applications équivariantes de  $V^{\otimes d}$  vers  $W^{\otimes d}$ . En considérant les produits tensoriels, on obtient le :

**Lemme 3.1.6.** *Le foncteur  $A$ -linéaire  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n} \rightsquigarrow \text{Mod}(A\mathfrak{S})$  défini par :*

$$\begin{aligned} (V_1, \dots, V_n) &\mapsto V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n} \\ \bigotimes_i \Gamma^{d_i} \text{Hom}_A(V_i, W_i) \ni f &\mapsto f \in \bigotimes_i \text{Hom}_{A\mathfrak{S}_{d_i}}(V_i^{\otimes d_i}, W_i^{\otimes d_i}) \end{aligned}$$

*est pleinement fidèle. Il identifie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A$  à une sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(A\mathfrak{S})$ .*

On peut donc restreindre un  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $f$  à la catégorie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ . On obtient alors un foncteur polynomial à valeurs quelconques (cf. paragraphe 1.4.3 du chapitre 1).

**Définition 3.1.7.** [9, def 3.2] On dit qu'un  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $f$  est une symétrisation d'un foncteur  $F \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  si

$$f(V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}) = F(V_1, \dots, V_n).$$

On dit que  $f$  est une symétrisation *injective* s'il existe en outre une transformation naturelle  $f \rightarrow \bigoplus_k \text{coinv}_{(\lambda^1, k, \dots, \lambda^n, k)}$  dont l'évaluation sur  $V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}$  est un monomorphisme.

*Exemple 3.1.8.* Si  $\mu^1, \dots, \mu^n$  sont des uplets, le foncteur  $\text{coinv}_{(\mu^1, \dots, \mu^n)}$  est une symétrisation injective de  $S^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu^n}$ . De même, le foncteur  $\text{inv}_{(\mu^1, \dots, \mu^n)}$  (resp.  $\text{alt}_{(\mu^1, \dots, \mu^n)}$ ) est une symétrisation injective de  $\Gamma^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{\mu^n}$  (resp. de  $\Lambda^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Lambda^{\mu^n}$ ).

*Exemple 3.1.9.* Soit  $A$  un anneau commutatif de caractéristique  $q$  impaire et  $d \geq q$  un entier. Le foncteur  $f : \text{Mod}_{\mathfrak{S}_d}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$  qui envoie le  $\mathfrak{S}_d$ -module  $M$  sur le quotient de  $(M^{\text{alt}})^{\mathfrak{S}_d}$  par l'image de la norme  $(M^{\text{alt}})^{\mathfrak{S}_d} \rightarrow (M^{\text{alt}})^{\mathfrak{S}_d}$  est un exemple de symétrisation injective non nulle du foncteur nul, cf. corollaire B.2.9.

Dans toute la suite de ce chapitre nous nous intéressons au problème de trouver des symétrisations pour les foncteurs polynomiaux. Plus précisément, nous étudions les questions suivantes :

**Questions 3.1.10.**

- (i) Comment associer à tout  $n$ -foncteur polynomial  $F$  un  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $f$  ?
- (ii) Peut-on s'arranger pour que ce procédé soit naturel en  $F$ , respecte les noyaux et envoie le foncteur polynomial  $S^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\lambda^n}$  sur le  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $\text{coinv}_{\lambda^1, \dots, \lambda^n}$  ?
- (iii) Calculer le plus explicitement possible les symétrisations injectives obtenues par ce procédé.

*Remarque 3.1.11.* Les conditions du (ii) sont nécessaires pour démontrer la proposition 4.3.2 du chapitre 4, et du théorème 5.1.26 du chapitre 5. Elles permettent également d'effectuer des calculs explicites de symétrisations (injectives).

## 3.2 Foncteur de symétrisation

Soit  $A$  un anneau commutatif,  $d_1, \dots, d_n$  des entiers. On note  $\mathfrak{S}$  le groupe  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ . Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème suivant, qui répond aux questions 3.1.10 (i) et (ii).

**Théorème 3.2.1.** *Il existe un foncteur  $A$ -linéaire, additif et exact à gauche*

$$\text{sym} : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A} \rightsquigarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$$

tel que si  $F \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}$  on a un isomorphisme  $F(V_1, \dots, V_n) \simeq \text{sym}(F)(\bigotimes_{i=1}^n V^{\otimes d_i})$  naturel en  $F$ , et tel que si les  $\lambda^i$  sont des partitions de poids  $d_i$  alors

$$\text{sym}(\boxtimes_{i=1}^n S^{\lambda^i}) = \text{coinv}_{\lambda^1, \dots, \lambda^n}.$$

Un tel foncteur est unique à un isomorphisme naturel près.

*Remarque 3.2.2.* La catégorie  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}$  n'est en général qu'une catégorie exacte (cf. section 1.4). L'exactitude à gauche du foncteur  $sym$  signifie (cf. annexe A) que l'image d'une suite exacte courte *admissible* par  $sym$  est une suite exacte aux deux premiers termes.

*Remarque 3.2.3.* Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Dans [17, Prop 3.2.2], Franjou et Pirashvili construisent un foncteur  $j_*$  qui à un foncteur  $F \in \mathcal{P}_{d, \mathbb{K}}$  associe une symétrisation injective de  $F$ . Ce foncteur  $j_*$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire, additif, exact à gauche et de plus si  $\lambda$  est un  $n$ -uplet de poids  $d$ , on a un isomorphisme naturel [17, lemme 3.2.5] :  $j_*(S^\lambda) \simeq \text{coinv}_\lambda$ . D'après l'unicité du théorème 3.2.1 on a donc un isomorphisme naturel en  $F$  :  $j_*(F) \simeq sym(F)$ .

La démonstration du théorème 3.2.1 se déroule en trois étapes. On définit d'abord un foncteur de symétrisation  $s$  sur une sous-catégorie de cogénérateurs injectifs de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}$ . Puis on étend le foncteur  $s$  à un foncteur  $sym$  défini sur la catégorie  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}$  tout entière. Nous suivons donc la démarche adoptée dans [9, Prop 3.1], mais nous utilisons un ingrédient supplémentaire : l'existence de résolutions injectives naturelles (proposition 1.4.14), pour obtenir la functorialité qui fait défaut dans [9, Prop 3.1]. Enfin, nous démontrons l'unicité du foncteur  $sym$  dans une troisième étape.

### Étape 1 : Foncteur $s$ de symétrisation des injectifs

**Lemme 3.2.4.** [9, lemme 3.2] Soient  $\lambda^i, \mu^i$  des uplets de poids  $d_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . L'évaluation sur le  $\mathfrak{S}$ -module  $V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}$  induit un isomorphisme :

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}}(\text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)}, \text{coinv}_{(\mu^1, \dots, \mu^n)}) \\ & \xrightarrow[\simeq]{ev} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(S^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\lambda^n}, S^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu^n}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous démontrons tout d'abord que l'évaluation est injective. Soit  $\theta$  une transformation naturelle telle que  $ev(\theta) = 0$ . Si pour tout  $i$   $V_i$  est un  $A$ -module libre de rang supérieur à  $d_i$ , alors  $V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}$  contient le  $\mathfrak{S}$ -module libre de dimension un  $A\mathfrak{S}$  comme facteur direct. La transformation naturelle  $\theta$  est donc nulle sur tous les  $\mathfrak{S}$ -modules libres. Si  $V \in \text{Mod}(A\mathfrak{S})$  est un  $\mathfrak{S}$ -module quelconque, et si  $L_V$  est le  $A\mathfrak{S}$ -module libre de base  $V$ , on dispose d'une surjection  $\mathfrak{S}$ -équivariante :

$$\begin{aligned} L_V := A\mathfrak{S}V & \twoheadrightarrow V \\ a\sigma e_v & \mapsto a\sigma.v \end{aligned}$$

On a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} L_V & \xrightarrow{\theta_{L_V}} & \text{coinv}_{(\mu^1, \dots, \mu^n)} L_V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} V & \xrightarrow{\theta_V} & \text{coinv}_{(\mu^1, \dots, \mu^n)} V \end{array}$$

Comme  $L_V$  est libre,  $\theta_{L_V}$  est nulle et les morphismes verticaux étant des surjections,  $\theta_V$  est nulle.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à montrer que  $ev$  est surjective. D'après la proposition 1.4.16, tout morphisme entre les foncteurs séparables  $S^{\lambda^1} \boxtimes \cdots \boxtimes S^{\lambda^n}$  et  $S^{\mu^1} \boxtimes \cdots \boxtimes S^{\mu^n}$  s'écrit comme une somme de morphismes du type  $f_1 \boxtimes \cdots \boxtimes f_n$ . Comme l'évaluation respecte la composition, et que tout morphisme entre puissances symétriques s'obtient en composant des multiplications des permutations et des comultiplications (proposition 1.4.27) il nous suffit donc de montrer que l'évaluation atteint les morphismes du type :

$$\text{Id}_{S^{\lambda^1}} \boxtimes \cdots \boxtimes \text{Id}_{S^{\lambda^{i-1}}} \boxtimes f \boxtimes \text{Id}_{S^{\lambda^{i+1}}} \boxtimes \cdots \boxtimes \text{Id}_{S^{\lambda^n}}$$

dans les trois cas suivants :

- (1)  $f : S^\lambda \otimes S^a \otimes S^b \otimes S^{\lambda'} \rightarrow S^\lambda \otimes S^{a+b} \otimes S^{\lambda'}$  est une multiplication.
- (2)  $f : S^\lambda \otimes S^a \otimes S^b \otimes S^{\lambda'} \rightarrow S^\lambda \otimes S^b \otimes S^a \otimes S^{\lambda'}$  est une permutation.
- (3)  $f : S^\lambda \otimes S^{a+b} \otimes S^{\lambda'} \rightarrow S^\lambda \otimes S^a \otimes S^b \otimes S^{\lambda'}$  est une comultiplication.

Dans le premier (resp. deuxième) cas,  $ev$  envoie la surjection naturelle (resp. l'isomorphisme naturel) entre les foncteurs coinvariant en jeu sur le morphisme voulu. Dans le dernier cas, notons  $Sh_{a,b}$  l'ensemble des  $(a,b)$ -shuffles du sous-groupe  $1 \times \mathfrak{S}_{a+b} \times 1$  de  $\mathfrak{S}_{\lambda^i}$ . Pour tout module  $M$ , le morphisme :

$$\sum_{\sigma \in 1 \times \cdots \times 1 \times Sh_{a,b} \times 1 \times \cdots \times 1} \sigma : M \rightarrow M$$

induit un morphisme :

$$\text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^{i-1}, (\lambda, a+b, \lambda'), \lambda^{i+1}, \dots, \lambda^n)}(M) \rightarrow \text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^{i-1}, (\lambda, a, b, \lambda'), \lambda^{i+1}, \dots, \lambda^n)}(M)$$

qui est un antécédent du morphisme voulu.  $\square$

*Notation 3.2.5.* Notons  $Inj_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  qui a pour objets les sommes (finies) de foncteurs :

$$S^{\mu^1} \boxtimes \cdots \boxtimes S^{\mu^n} \otimes V,$$

où  $V$  est  $A$ -module projectif de type fini et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des uplets de poids respectifs  $d_1, \dots, d_n$ .

**Définition 3.2.6.** Le foncteur  $s$  est le foncteur additif  $A$ -linéaire

$$s : Inj_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$$

qui à  $S^{\mu^1} \boxtimes \cdots \boxtimes S^{\mu^n} \otimes V$  associe le  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $\text{coinv}_{(\mu^1, \dots, \mu^n)}(-) \otimes V$  et à une transformation naturelle  $\psi$  entre tenseurs symétriques associe l'unique (cf. lemme 3.2.4) transformation naturelle dont l'évaluation sur  $V_1^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes V_n^{\otimes d_n}$  est égale à  $\psi$ .

## Étape 2 : Prolongement de $s$ en un foncteur de symétrisation

**Lemme 3.2.7.** *Il existe un foncteur exact*

$$\mathrm{IRes}^\bullet : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow CC^\bullet(\mathrm{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n))$$

de la catégorie des  $n$ -foncteurs polynomiaux homogènes de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  vers la catégorie des complexes de cochaînes de  $\mathrm{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ , qui à un  $n$ -foncteur  $T$  associe une résolution injective admissible de  $T$ .

*Démonstration.* La proposition 1.4.14 nous donne un foncteur qui à  $F$  associe une résolution injective de  $F$  par des injectifs de la forme  $I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_n} \otimes V$ , où  $I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_n}$  est l'injectif  $\boxtimes_{i=1}^n S^{d_i} \mathrm{Hom}(A^{d_i}, -)$  (cf. notation 1.4.12) et  $V$  est un  $A$ -module projectif de type fini. Les injectifs  $I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_n} \otimes V$  ne sont pas des objets de la catégorie  $\mathrm{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . Cependant, la formule exponentielle donne un isomorphisme :

$$\begin{aligned} I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_n} &= S^{d_1} \mathrm{Hom}_A(A^{d_1}, -) \boxtimes \dots \boxtimes S^{d_n} \mathrm{Hom}_A(A^{d_n}, -) \\ &\simeq \bigoplus_{\forall j \mu_j \text{ } d_j\text{-uplet de poids } d_j} S^{\mu_1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu_n} \end{aligned}$$

qui nous permet de considérer  $\mathrm{IRes}^\bullet$  comme un foncteur à valeurs dans  $CC^\bullet(\mathrm{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n))$   $\square$

**Lemme 3.2.8.** *Soit  $F$  un objet de  $\mathrm{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . La résolution  $\mathrm{IRes}^\bullet(F)$  se scinde dans  $\mathrm{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ .*

**Définition 3.2.9.** Le foncteur  $\mathrm{sym} : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A} \rightsquigarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$  est le foncteur  $A$ -linéaire et additif qui envoie un élément  $F \in \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  sur le noyau du morphisme :

$$s(\mathrm{IRes}^0(F)) \rightarrow s(\mathrm{IRes}^1(F)) .$$

Le lemme suivant montre que le foncteur  $\mathrm{sym}$  est un prolongement du foncteur  $s$  à toute la catégorie  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ .

**Lemme 3.2.10.** *Soit  $F \in \mathrm{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . Il existe un isomorphisme, naturel en  $F$  :*

$$s(F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{sym}(F) .$$

*Démonstration.* Nous allons montrer que le morphisme naturel  $s(i_F) : s(F) \rightarrow s(\mathrm{IRes}^0(F))$  induit un isomorphisme entre  $s(F)$  et  $\mathrm{sym}(F)$ . Pour cela, il nous suffit de vérifier l'exactitude aux deux premiers termes de la suite :

$$0 \rightarrow s(F) \xrightarrow{s(i_F)} s(\mathrm{IRes}^0(F)) \rightarrow s(\mathrm{IRes}^1(F)) \quad (*)$$

D'après le lemme 3.2.8, la résolution  $\mathrm{IRes}^\bullet(F)$  se scinde dans  $\mathrm{Inj}(\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n))$ . Comme  $s$  est additif, la suite  $(*)$  est scindée et à fortiori exacte aux deux premiers termes.  $\square$



**Lemme 3.2.11.** *Le foncteur  $\text{sym}$  est exact à gauche.*

*Démonstration.* Soit  $F \hookrightarrow G \rightarrow H$  une suite exacte courte dans  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$ . En la résolvant par le foncteur  $\text{IRes}^\bullet$  et en appliquant le foncteur  $s$  on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \text{sym}(H) & \longrightarrow & s\text{IRes}^0(H) & \longrightarrow & s\text{IRes}^1(H) \longrightarrow \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \text{sym}(G) & \longrightarrow & s\text{IRes}^0(G) & \longrightarrow & s\text{IRes}^1(G) \longrightarrow \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \text{sym}(F) & \longrightarrow & s\text{IRes}^0(F) & \longrightarrow & s\text{IRes}^1(F) \longrightarrow \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Par définition de  $\text{sym}$ , les lignes sont exactes aux deux premiers termes. nous allons montrer que les deux colonnes de droite sont exactes. Une chasse élémentaire montre que si c'est la cas, alors la suite  $\text{sym}(F) \rightarrow \text{sym}(G) \rightarrow \text{sym}(H)$  est exacte aux deux premier termes.

On note  $J$  l'injectif  $J := S^{d_1} \text{Hom}(A^{d_1}, -) \boxtimes \dots \boxtimes S^{d_n} \text{Hom}(A^{d_n}, -)$  et  $\underline{A}$  le n-uplet  $(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})$ . D'après la construction du foncteurs  $\text{IRes}^\bullet$ , les deux colonnes de droites sont de la forme :

$$0 \rightarrow s(J \otimes R(\underline{A})) \xrightarrow{s(J \otimes \phi(\underline{A}))} s(J \otimes S(\underline{A})) \xrightarrow{s(J \otimes \psi(\underline{A}))} s(J \otimes T(\underline{A})) \rightarrow 0$$

où  $0 \rightarrow R \xrightarrow{\phi} S \xrightarrow{\psi} T \rightarrow 0$  est une suite exacte. Les colonnes sont donc de la forme :

$$s(J) \otimes \left[ 0 \rightarrow R(\underline{A}) \xrightarrow{\phi(\underline{A})} S(\underline{A}) \xrightarrow{\psi(\underline{A})} T(\underline{A}) \rightarrow 0 \right] \quad (*)$$

Mais  $T(\underline{A})$  est un  $A$ -module projectif, donc la suite exacte courte

$$0 \rightarrow R(\underline{A}) \xrightarrow{\phi(\underline{A})} S(\underline{A}) \xrightarrow{\psi(\underline{A})} T(\underline{A}) \rightarrow 0$$

scinde. Par linéarité du produit tensoriel, la suite (\*) scinde. Elle est donc exacte.  $\square$

### Étape 3 : unicité du foncteur $\text{sym}$

Si deux foncteurs remplissent les conditions du théorème 3.2.1, ils sont égaux sur la sous-catégorie  $\text{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}$  dont les objets sont les sommes directes de foncteurs de la forme  $(\boxtimes_{i=1}^n S^{\lambda^i}) \otimes V$  avec  $V$  un  $A$ -module projectif de type fini. Les objets

de  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}$  s'obtiennent tous comme des noyaux de morphismes de  $\text{Inj}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  d'après le lemme 3.2.7. Or, les deux foncteurs commutent aux noyaux. La propriété universelle des noyaux [31, p. 187] induit donc un isomorphisme naturel entre ces deux foncteurs.

### 3.3 Calculs explicites

#### 3.3.1 Symétrisation des invariants

**Définition 3.3.1.** Soit  $A$  un anneau commutatif et  $\mathfrak{S}$  le groupe  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ . On dit que  $f \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$  admet une coprésentation de Young si elle admet une coprésentation par des sommes directes finies de foncteurs  $\text{coinv}$  :

$$f \hookrightarrow \bigoplus_k \text{coinv}_{(\lambda^1, k, \dots, \lambda^n, k)} \rightarrow \bigoplus_l \text{coinv}_{(\mu^1, l, \dots, \mu^n, l)} .$$

*Notation 3.3.2.* On note  $\text{Cop}(\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A})$  la sous catégorie pleine de  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$  ayant pour objets les symétrisations de  $n$ -foncteurs polynomiaux, qui admettent une coprésentation de Young.

L'évaluation sur le  $\mathfrak{S}$ -module  $V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}$  induit un foncteur :

$$ev : \text{Cop}(\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) .$$

**Lemme 3.3.3.** Pour tout  $f \in \text{Cop}(\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A})$ , il existe un isomorphisme :

$$f \xrightarrow[\simeq]{\phi_f} \text{sym}(ev(f)) .$$

*Démonstration.* Supposons que  $f$  admet une coprésentation de Young  $f \hookrightarrow y_f^0 \rightarrow y_f^1$ . On a un diagramme commutatif dont les colonnes sont les isomorphismes obtenus à partir du lemme 3.2.10 :

$$\begin{array}{ccccc} f \hookrightarrow & \longrightarrow & y_f^0 & \longrightarrow & y_f^1 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{sym}(ev(f)) \hookrightarrow & \longrightarrow & \text{sym}(ev(y_f^0)) & \longrightarrow & \text{sym}(ev(y_f^1)) \end{array}$$

Par exactitude de  $ev$  et exactitude à gauche de  $\text{sym}$ , les lignes de ce diagramme sont exactes aux deux premiers termes. Le morphisme  $y_f^0 \xrightarrow{\simeq} \text{sym}(ev(y_f^0))$  factorise donc en un isomorphisme  $\phi_f : f \simeq \text{sym}(ev(f))$ .  $\square$

**Proposition 3.3.4.** Soient  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  des uplets. On a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{inv}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} &\simeq \text{sym}(\Gamma^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{\lambda^n}) , \\ \text{alt}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} &\simeq \text{sym}(\Lambda^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Lambda^{\lambda^n}) . \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le foncteur d'oubli qui à un  $\mathfrak{S}$ -module  $M$  associe le  $A$ -module sous-jacent est égal au foncteur des coinvariants sous l'action du sous-groupe de Young  $\{\text{Id}\} \subset \mathfrak{S}$ . Par définition, les foncteurs  $\text{inv}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)}$  et  $\text{alt}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)}$  admettent donc des coprésentations de Young (cf. exemples 3.1.3 et 3.1.4) :

$$\begin{aligned} \text{inv}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} M &\hookrightarrow M \xrightarrow{\Pi(\sigma - \text{Id})} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} M, \\ \text{alt}^{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} M &\hookrightarrow M \rightarrow \bigoplus_{\langle \tau \rangle \subset \mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}} M_{\langle \tau \rangle}. \end{aligned}$$

Le lemme 3.3.3 permet donc de conclure.  $\square$

### 3.3.2 Symétrisation des produits tensoriels

**Lemme 3.3.5.** *Soient  $F, G$  des foncteurs polynomiaux à plusieurs variables. Alors  $\text{sym}(F \boxtimes G)$  est (naturellement en  $F, G$ ) isomorphe au noyau du morphisme :*

$$\text{sym}(\text{IRes}^0(F) \boxtimes \text{IRes}^0(G)) \rightarrow \begin{array}{c} \text{sym}(\text{IRes}^1(F) \boxtimes \text{IRes}^0(G)) \\ \oplus \text{sym}(\text{IRes}^0(F) \boxtimes \text{IRes}^1(G)) \end{array}.$$

*Démonstration.* En effet, les complexes  $\mathcal{I}^\bullet = \text{IRes}^\bullet(F) \boxtimes \text{IRes}^\bullet(G)$  et  $\mathcal{J}^\bullet = \text{IRes}^\bullet(F \boxtimes G)$  sont des résolutions injectives de  $F \boxtimes G$  qui ont le même terme d'indice 0. Le résultat découle de l'existence d'une équivalence d'homotopie entre ces deux complexes, égale à l'identité sur le terme d'indice 0.  $\square$

**Définition 3.3.6.** ([17, §2.7], [9, p. 781]) Soient  $d_1, \dots, d_n$  des entiers, notons  $\mathfrak{S}^1$  et  $\mathfrak{S}^2$  les groupes  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_i}$  et  $\mathfrak{S}_{d_{i+1}} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ . Pour tout  $f \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}^1, A}$  et  $g \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}^2, A}$  on définit  $f \odot g \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}^1 \times \mathfrak{S}^2, A}$  par la formule de composition :

$$f \odot g(M) = f \circ g \circ \text{Res}_{1 \times \mathfrak{S}^2}^{\mathfrak{S}^1 \times \mathfrak{S}^2} M.$$

Ce procédé définit un bifoncteur  $- \odot - : \mathcal{F}_{\mathfrak{S}^1, A} \times \mathcal{F}_{\mathfrak{S}^2, A} \rightsquigarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{S}^1 \times \mathfrak{S}^2, A}$ , exact en la première variable.

*Remarque 3.3.7.* La formule de composition a bien un sens. En effet, si  $M$  est un  $H \times G$ -module, alors en restreignant l'action de  $H \times G$  au sous groupe  $1 \times G$ , on obtient un  $G$ -module  $\text{Res}_{1 \times G}^{H \times G} M$  et les éléments de  $H$  s'identifient à des automorphismes  $G$ -équivariants de ce module. Par conséquent, si  $g$  est un  $G$ -foncteur alors  $g(\text{Res}_{1 \times G}^{H \times G} M)$  admet une structure naturelle de  $H$ -module.

**Proposition 3.3.8.** *Soient  $F, G$  des foncteurs polynomiaux à plusieurs variables. Il existe une transformation naturelle :*

$$\psi_{F, G} : \text{sym}(F) \odot \text{sym}(G) \rightarrow \text{sym}(F \boxtimes G).$$

*De plus, dans les deux cas suivants  $\psi_{F, G}$  est un isomorphisme :*

- (1) Le foncteur  $G$  est un tenseur symétrique :  $G = \oplus S^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu^m}$ .  
(2) Le foncteur  $F$  admet une coprésentation  $F \hookrightarrow I_F^0 \rightarrow I_F^1$ , où les foncteurs  $I_F^k$  sont des sommes directes de foncteurs du type  $\otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m}$ .

*Démonstration.* Soient  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  et  $\mu^1, \dots, \mu^m$  des uplets. On a un isomorphisme (d'après la proposition B.1.2) entre le foncteur  $\text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n)} \odot \text{coinv}_{(\mu^1, \dots, \mu^m)}$  et le foncteur  $\text{coinv}_{(\lambda^1, \dots, \lambda^n, \mu^1, \dots, \mu^m)}$ . On obtient donc un carré commutatif, naturel en  $F, G$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{sym}(\text{IRes}^0(F)) \odot \text{sym}(\text{IRes}^0(G)) & \xrightarrow{\simeq} & \text{sym}(\text{IRes}^0(F) \boxtimes \text{IRes}^0(G)) \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) \\ \text{sym}(\text{IRes}^1(F)) \odot \text{sym}(\text{IRes}^0(G)) & \xrightarrow{\simeq} & \text{sym}(\text{IRes}^1(F) \boxtimes \text{IRes}^0(G)) \\ \oplus \text{sym}(\text{IRes}^0(F)) \odot \text{sym}(\text{IRes}^1(G)) & & \oplus \text{sym}(\text{IRes}^0(F) \boxtimes \text{IRes}^1(G)) \end{array}$$

D'après le lemme 3.3.5, le noyau du morphisme (2) est égal à  $\text{sym}(F \boxtimes G)$ . Pour démontrer l'existence de  $\psi_{F,G}$ , il suffit donc de vérifier la nullité de la précomposition du morphisme (1) par le morphisme :

$$\text{sym}(F) \odot \text{sym}(G) \rightarrow \text{sym}(\text{IRes}^0(F)) \odot \text{sym}(\text{IRes}^0(G))$$

Mais ceci résulte de la functorialité de  $-\odot-$ .

Supposons maintenant que  $G = S^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu^m}$ . Pour montrer que  $\psi_{F,G}$  est un isomorphisme, il nous suffit de démontrer que  $\text{sym}(F) \odot \text{sym}(G)$  est égal au noyau de (1). Mais  $G$  est un facteur direct dans  $\text{IRes}(G)^0$  et les foncteurs  $-\odot-$  et  $\text{sym}$  sont additifs. Le noyau de (1) est donc égal au noyau de

$$\text{sym}(\text{IRes}^0(F)) \odot \text{sym}(G) \rightarrow \text{sym}(\text{IRes}^1(F)) \odot \text{sym}(G) .$$

Comme  $-\odot-$  est exact vis-à-vis de sa variable de gauche on obtient le résultat.

De même, si  $F = \otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m}$ , alors  $F$  est un facteur direct dans  $\text{sym}(\text{IRes}^0(F))$  et par additivité de  $-\odot \text{sym}(G)$ , le noyau de (1) est égal au noyau de

$$\text{sym}(F) \odot \text{sym}(\text{IRes}^0(G)) \rightarrow \text{sym}(F) \odot \text{sym}(\text{IRes}^1(G)) \quad (3)$$

Comme  $\text{sym}(F)$  est égal au foncteur oubli  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_m}}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$ , le foncteur  $\text{sym}(F) \odot -$  est exact. Le noyau du morphisme (3) est donc égal à  $\text{sym}(F) \odot \text{sym}(G)$  et la transformation naturelle  $\psi_{F,G}$  est donc un isomorphisme.

Enfin, si  $F$  admet une coprésentation par des somme directes de produits tensoriels  $\otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m}$ , on utilise les isomorphismes

$$\text{sym}(I_F^k) \odot \text{sym}(G) \xrightarrow[\simeq]{\psi} \text{sym}(I_F^k \boxtimes G)$$

et l'exactitude de  $-\odot-$  vis à vis de la variable de gauche pour conclure que  $\psi_{F,G}$  est un isomorphisme.  $\square$

La deuxième condition d'isomorphisme, ie :  $F$  admet une coprésentation par des sommes de produits tensoriels, permet également de faire fonctionner la proposition 3.3.11. Pour cette raison, nous énumérons dans la proposition suivante un certain nombre de cas où cette condition est vérifiée.

**Proposition 3.3.9.** *Soit  $F$  un  $m$ -foncteur polynomial sur un anneau  $A$ . Si l'on se trouve dans l'une des situations ci-dessous, alors  $F$  admet une coprésentation de la forme :*

$$F \hookrightarrow \bigoplus_{i=1, \dots, k} \otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m} \rightarrow \bigoplus_{j=1, \dots, l} \otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m} .$$

- (1) Le foncteur  $F$  est de degré  $(d_1, \dots, d_m)$  et  $A$  est un anneau contenant  $\mathbb{Q}$  ou de caractéristique  $p > \max d_i$ .
- (2) Le foncteur  $F$  est facteur direct dans  $\otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m}$ .
- (3) Il existe des uplets  $\mu^1, \dots, \mu^m$  tels que  $F = \Gamma^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Gamma^{\mu^m}$ .
- (4)  $A$  est de caractéristique  $p \neq 2$  et il existe des uplets  $\mu^1, \dots, \mu^m$  tels que  $F = \Lambda^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Lambda^{\mu^m}$ .

*Démonstration.* Dans le premier cas, le foncteur  $F$  admet une résolution injective

$$F \hookrightarrow I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_m} \otimes V^0 \rightarrow I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_m} \otimes V^1 \rightarrow \dots ,$$

où  $I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_m}$  désigne (cf. notation 1.4.12) l'injectif :

$$I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_m} = S^{d_1}(A^{d_1^\vee} \otimes -) \boxtimes \dots \boxtimes S^{d_m}(A^{d_m^\vee} \otimes -) ,$$

et où les  $V_i$  sont des  $A$ -modules projectifs de type fini. L'hypothèse sur la caractéristique assure que pour tout  $i$ ,  $S^{d_i}$  est facteur direct dans  $\otimes^{d_i}$ . Pour  $s = 0, 1$ , il existe donc un foncteur  $S_s$  et un entier  $k_s$  tel que

$$I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_m} \otimes V^s \oplus S_s \simeq \bigoplus_{i=1..k_s} \otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m} .$$

La coprésentation voulue s'obtient alors en prenant la somme directe de la résolution de  $F$  avec la coprésentation :

$$0 \rightarrow S_0 \hookrightarrow S_0 \oplus I_{(A^{d_1}, \dots, A^{d_n})}^{d_1, \dots, d_m} \otimes V^0 \oplus S_1 .$$

Dans le deuxième cas, le résultat est immédiat car  $F$  s'exprime comme le noyau d'un projecteur  $p : \otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m} \rightarrow \otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m}$ .

Le troisième cas est similaire au dernier cas. Dans le dernier cas, la caractéristique  $p$  est différente de 2 et le foncteur  $\Lambda^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes \Lambda^{\mu^m}$  des invariants de  $\otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m}$  sous l'action alternée du groupe  $\mathfrak{S}_{\mu^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu^m}$  est donc égal au noyau du morphisme :

$$\otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m} \xrightarrow{\prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu^m}} (\epsilon(\sigma)\sigma - \text{Id})} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu^m}} \otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_m} .$$

□

*Remarque 3.3.10.* Les deux propositions ci-dessus montrent que l'on peut souvent identifier  $\text{sym}(F \boxtimes G)$  au foncteur  $\text{sym}(F) \odot \text{sym}(G)$ , qui est plus facile à calculer. Ce n'est cependant pas toujours le cas.

En effet, prenons  $A$  un anneau de caractéristique 2 (par exemple  $A = \mathbb{F}_2$  est le corps premier de caractéristique 2). On munit  $A\mathfrak{S}_2$  d'une structure de  $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ -module par la formule  $(\tau, \sigma).e_\zeta = e_{\tau\zeta\sigma^{-1}}$ . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{sym}(\otimes^2) \odot \text{sym}(\Gamma^2)(A\mathfrak{S}_2) & \xrightarrow[\text{(a)}]{\cong} & \text{sym}(\otimes^2 \boxtimes \Gamma^2)(A\mathfrak{S}_2) & \xrightarrow[\text{(b)}]{\cong} & \text{Hom}(S^2, \otimes^2) \\ \downarrow \text{(1)} & & \downarrow \text{(2)} & & \downarrow \text{(3)} \\ \text{sym}(S^2) \odot \text{sym}(\Gamma^2)(A\mathfrak{S}_2) & \xrightarrow[\text{(a)}]{} & \text{sym}(S^2 \boxtimes \Gamma^2)(A\mathfrak{S}_2) & \xrightarrow[\text{(b)}]{\cong} & \text{Hom}(S^2, S^2) \end{array}$$

dans lequel les flèches (a) sont fournies par la proposition 3.3.8 ci-dessus, les isomorphismes naturels (b) sont fournis par le corollaire 4.3.2 du chapitre suivant. Comme le foncteur  $-\odot \text{sym}(\Gamma^2)$  est exact, la flèche (1) est surjective. Mais d'autre part, l'étude de la suite de Koszul  $\Lambda^2 \rightarrow \otimes^2 \rightarrow S^2$  (cf. remarque 1.5.5 du premier chapitre) montre que la flèche (3) est nulle. Comme  $\text{Hom}(S^2, S^2) \neq 0$ , la flèche (3) n'est pas surjective. Ceci interdit à la transformation naturelle :

$$\text{sym}(S^2) \odot \text{sym}(\Gamma^2) \rightarrow \text{sym}(S^2 \boxtimes \Gamma^2)$$

d'être un isomorphisme.

### 3.3.3 Symétrisation des foncteurs composés

Soit  $n \geq 1$  un entier. On note  $\Delta_n$  le foncteur

$$\Delta_n : \text{Mod}_{\mathfrak{S}_d^{\times n}}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathfrak{S}_d}(A)$$

qui à un  $\mathfrak{S}_d^{\times n}$ -module  $M$  associe le  $\mathfrak{S}_d$ -module  $M$  obtenu par restriction de l'action au sous-groupe diagonal  $\Delta\mathfrak{S}_d := \{(\sigma, \dots, \sigma), \sigma \in \mathfrak{S}_d\} \subset \mathfrak{S}_d^{\times n}$ .

Si  $F$  est un foncteur polynomial à une variable, homogène de degré  $d$ , l'évaluation de  $\text{sym}(F) \circ \Delta_n$  sur le  $\mathfrak{S}_d^{\times n}$ -module  $V_1^{\otimes d} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d}$  est égale à  $F(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$ . Il est donc naturel de se demander quelle est la relation entre  $\text{sym}(F) \circ \Delta_n$  et la symétrisation du  $n$ -foncteur polynomial  $F(\text{Id}^{\boxtimes n})$  qui au  $n$ -uplet  $(V_1, \dots, V_n)$  associe  $F(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$ .

Il n'existe pas de transformation naturelle non nulle « évidente » entre les foncteurs  $\text{sym}(-) \circ \Delta_n$  et  $\text{sym}(-(\text{Id}^{\boxtimes n}))$  qui nous permettrait de comparer facilement ces deux procédés de symétrisation. Cependant, on peut tout de même comparer ces deux procédés lorsque  $F$  admet une coprésentation injective.

**Proposition 3.3.11.** *Soit  $F$  un foncteur polynomial admettant une coprésentation par des sommes de produits tensoriels :*

$$F \hookrightarrow \bigoplus_{i=1..k} \otimes^d \rightarrow \bigoplus_{i=1..l} \otimes^d .$$

Il existe un isomorphisme :

$$\text{sym}(F) \circ \Delta_n \xrightarrow{\cong} \text{sym}(F(\text{Id}^{\boxtimes n})) .$$

*Démonstration.* D'après le lemme 3.3.3, il nous suffit de montrer que le  $\mathfrak{S}_d^{\times n}$ -foncteur  $\text{sym}(F) \circ \Delta_n$  admet une coprésentation de Young. Or  $\text{sym}(F) \circ \Delta_n$  est égal au noyau du morphisme

$$\bigoplus_{i=1..k} \text{sym}(\otimes^d) \circ \Delta_n \rightarrow \bigoplus_{i=1..l} \text{sym}(\otimes^d) \circ \Delta_n \quad (*)$$

Comme pour tout  $n$ -uplet  $(d_1, \dots, d_n)$  le foncteur  $\text{sym}(\otimes^{d_1} \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^{d_n})$  est égal au foncteur oubli  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$ , on a :

$$\text{sym}(\otimes^d) \circ \Delta_n = \text{sym}(\underbrace{\otimes^d \boxtimes \dots \boxtimes \otimes^d}_{n \text{ termes}}) .$$

La coprésentation (\*) est donc une coprésentation de Young. □

*Remarque 3.3.12.* L'hypothèse de la proposition ci-dessus est vérifiée dans un nombre important de cas (cf. proposition 3.3.9). Dans certaines situations de faveur (par exemple lorsque  $A$  est un corps, cf. proposition 3.4.14), l'isomorphisme de la proposition est même naturel en  $F$ .

Cependant, on verra dans les chapitres suivants qu'en général on n'a pas d'isomorphisme naturel entre  $\text{sym}(F) \circ \Delta_n$  et  $\text{sym}(F(V_1 \boxtimes \dots \boxtimes V_n))$ . En effet, les tenseurs symétriques de  $gl$  vérifient la troisième « Ext-condition » (cf. corollaire 6.1.2). De plus la multiplication  $I \otimes S^{p-1} \rightarrow S^p$  induit un morphisme  $\text{sym}(I \otimes S^{p-1}) \rightarrow \text{sym}(S^p)$  surjectif. Si on avait  $\text{sym}(S^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2})) = \text{sym}(S^\mu) \circ \Delta_2$ , alors d'après le théorème 5.1.26, la multiplication  $S^{p-1} \otimes I \rightarrow S^p$  induirait une surjection  $H_{\mathcal{P}}^*(S^{p-1} \otimes Igl) \rightarrow H_{\mathcal{P}}^*(S^p gl)$ . Or ceci est en contradiction avec le corollaire 6.2.11.

## 3.4 Le foncteur $\text{sym}$ comme adjoint

Soient  $A$  un anneau commutatif,  $d_1, \dots, d_n$  des entiers et  $\mathfrak{S}$  le groupe  $\mathfrak{S}_{d_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{d_n}$ .

### 3.4.1 Comparaison avec les extensions de Kan

Revenons sur la construction évoquée dans l'introduction du chapitre. Notons  $j$  le foncteur d'inclusion de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  dans  $\text{Mod}(A\mathfrak{S})$  fourni par le lemme 3.1.6. la précomposition par  $j$  induit un foncteur  $ev : \mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A} \rightsquigarrow \overline{\mathcal{P}}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)$  qui à un  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $f$  associe sa restriction sur  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  (cette restriction est un foncteur polynomial à valeurs quelconques).

Le foncteur  $ev$  admet un adjoint à droite d'après [31, X.3 p. 233], noté  $Ran_j$ , et qui à tout foncteur polynomial  $T$  associe l'extension de Kan à droite selon  $j$ . Plus précisément, soit  $M$  un  $\mathfrak{S}$ -module. La catégorie  $(M \downarrow j)$  est la catégorie dont les objets sont les paires

$(f, N)$  où  $N$  est un  $\mathfrak{S}$ -module de la forme  $\bigotimes_i V_i^{\otimes d_i}$  avec  $V_i$   $A$ -modules projectifs et  $f$  est une application  $A$  linéaire équivariante, et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs dans  $\mathcal{M}od(A\mathfrak{S})$  :

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ N & \xrightarrow{\phi} & N' \end{array} .$$

Notons  $Q : (M \downarrow j) \rightsquigarrow \Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  le foncteur de projection, qui à l'objet  $(f, N)$  associe  $N$ . L'image d'un foncteur polynomial  $T$  par  $Ran_j$  est le  $\mathfrak{S}$ -foncteur  $Ran_j(T)$  défini sur les objets de  $\mathcal{M}od(A\mathfrak{S})$  par la formule [31, X.3 Th. 1] :

$$Ran_j(T)(M) := \lim_{\leftarrow} \left[ (M \downarrow j) \xrightarrow{Q} \Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n} \xrightarrow{T} \mathcal{M}od(A) \right] .$$

Par construction, le foncteur  $Ran_j$  est additif,  $A$ -linéaire et exact à gauche. C'est donc un bon candidat pour un foncteur de symétrisation répondant aux questions 3.1.10(ii). Cependant on a :

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  des partitions de poids  $d_1, \dots, d_n$  et  $M$  un  $\mathfrak{S}$ -module sur  $\mathbb{Z}$ . Le  $\mathbb{Z}$ -module  $Ran_j(\boxtimes_{i=1}^n S^{\lambda^i})(M)$  n'a pas de torsion.*

*Démonstration.* Par définition,  $Ran_j(\boxtimes_{i=1}^n S^{\lambda^i})(M)$  est un sous  $\mathbb{Z}$ -module du produit  $\prod_{N \in (M \downarrow j)} N_{\mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}}$ . Les  $N_{\mathfrak{S}_{\lambda^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda^n}}$  n'ayant pas de torsion (car les  $N$  sont des modules de permutation), le produit n'en a pas non plus, et on obtient notre résultat.  $\square$

Ainsi, sur  $\mathbb{Z}$  (et plus généralement sur un anneau principal qui n'est pas un corps), on n'a pas d'isomorphisme entre les  $\mathfrak{S}$ -foncteurs  $\text{coinv}_{\lambda^1, \dots, \lambda^n}$  et  $Ran_j(\boxtimes_{i=1}^n S^{\lambda^i})$ . En effet, contrairement à ce qui se passe avec  $Ran_j(\boxtimes_{i=1}^n S^{\lambda^i})$ , l'image d'un  $\mathfrak{S}$ -module  $M$  par  $\text{coinv}_{\lambda^1, \dots, \lambda^n}$  n'est pas forcément un module libre (par exemple si  $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  avec action triviale ou  $M = \mathbb{Z}$  avec action donnée par la signature). Notre foncteur  $sym$  est donc différent du foncteur  $Ran_j$ .

### 3.4.2 Le foncteur $sym$ comme adjoint

Dans ce paragraphe, nous étudions comment modifier la définition du foncteur  $sym$  pour le faire apparaître comme un adjoint à droite du foncteur  $ev$ . Plus précisément, nous étudions sous quelles conditions on peut remplacer la catégorie d'arrivée  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}, A}$  du foncteur  $sym$  par une nouvelle catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$ .

#### Choix possibles pour la catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$

Dans tout ce paragraphe, on fixe  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  et  $\mathcal{C}(A)$  deux catégories vérifiant les axiomes suivants :

(A1)  $\mathcal{C}(A)$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\mathcal{M}od(A)$  des  $A$ -modules, stable par somme finie, par produit tensoriel fini, et admettant des noyaux.



- (A2)  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\text{Mod}(A\mathfrak{S})$  des  $\mathfrak{S}$ -modules sur  $A$ , contenant la catégorie  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$ .
- (A3) Les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  et  $\mathcal{C}(A)$  sont reliées par la propriété suivante : pour tout  $V \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  et tout sous-groupe  $H$  de  $\mathfrak{S}$  le  $A$ -module des coinvariants  $V_H$  est un objet de  $\mathcal{C}(A)$ .

**Lemme 3.4.2.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Les paires suivantes vérifient les axiomes (A1-A3) :*

- (1)  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A) = \text{Mod}_{\mathfrak{S}}(A)$  et  $\mathcal{C}(A) = \text{Mod}(A)$ .
- (2) Si  $A$  noethérien,  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  est la catégorie des  $\mathfrak{S}$ -modules qui sont des  $A$ -modules de type fini sur  $A$  et  $\mathcal{C}(A)$  est la catégorie des  $A$ -modules de type fini.
- (3) Si  $A$  est de Dedekind,  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  est la catégorie des facteurs directs des modules de permutation de dimension finie et  $\mathcal{C}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules projectifs de type fini.
- (4) Si  $A$  est principal,  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  est la catégorie des modules de permutation de dimension finie (cf. annexe B.2) et  $\mathcal{C}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules libres de type fini.

**Définition 3.4.3.** Soient  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  deux catégories vérifiant les axiomes (A1-A3). On appelle  $\mathfrak{S}$ -foncteur sur  $A$  un foncteur  $A$ -linéaire

$$F : \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A) \rightsquigarrow \mathcal{C}(A) .$$

On note  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$  la catégorie des  $\mathfrak{S}$ -foncteurs sur  $A$  et des transformations naturelles entre  $\mathfrak{S}$ -foncteurs.

La catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie abélienne des foncteurs de  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  dans  $\text{Mod}(A)$ . Elle possède des sommes finies, des produits tensoriels et des noyaux calculés au but.

*Exemple 3.4.4.* Soient  $\lambda^i$  des partitions de poids  $d_i$ . D'après l'axiome (A3), les foncteurs de coinvariants  $\text{coinv}_{\lambda^1, \dots, \lambda^n}$  sont des objets de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$ . Comme  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$  est stable par noyaux, les foncteurs  $\text{inv}_{\lambda^1, \dots, \lambda^n}$  et  $\text{alt}_{\lambda^1, \dots, \lambda^n}$  sont aussi des objets de cette catégorie.

Notons  $j$  l'inclusion de  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  dans  $\text{Mod}(A\mathfrak{S})$ . La précomposition du foncteur  $\text{sym}$  par  $j$  induit un foncteur (encore noté  $\text{sym}$ ) de  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  dans  $\text{Mod}(A)$ .

**Proposition 3.4.5.** *Soient  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  deux catégories vérifiant les axiomes (A1-A3). Le foncteur  $\text{sym}$  est à valeurs dans  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$ .*

### Propriété d'adjonction

**Définition 3.4.6.** Soient  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  deux catégories vérifiant les axiomes (A1-A3). On dit que  $f \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}, A}$  admet une coprésentation de Young si elle admet une coprésentation par des sommes directes finies de foncteurs  $\text{coinv}$  :

$$f \hookrightarrow \bigoplus_k \text{coinv}_{(\lambda^{1,k}, \dots, \lambda^{n,k})} \rightarrow \bigoplus_l \text{coinv}_{(\mu^{1,l}, \dots, \mu^{n,l})} .$$

*Notation 3.4.7.* On note  $Cop(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A})$  la sous catégorie pleine de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}$  ayant pour objets les symétrisations de  $n$ -foncteurs polynomiaux, qui admettent une coprésentation de Young.

*Remarque 3.4.8.* Il existe des  $\mathfrak{S}$ -foncteurs  $f$  qui admettent des coprésentations par des coinvariants :

$$f \hookrightarrow -G \rightarrow -H$$

pour  $G$  et  $H$  des sous-groupes  $\mathfrak{S}$ , mais qui n'admettent pas de coprésentation de Young (c'est-à-dire de coprésentation dans laquelle  $G$  et  $H$  sont des sous-groupes de Young de  $\mathfrak{S}$ ).

En effet prenons  $A = k$  un corps, et  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S}_d,k}$  la catégorie des foncteurs des  $\mathfrak{S}_d$ -espaces vectoriels sur  $k$  vers les  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soit  $f$  un foncteur cohérent [17, def 2.2.1] qui est une symétrisation non nulle du foncteur nul. Son dual  $f^\sharp(-) := f(-^\vee)^\vee$  admet une coprésentation par des coinvariants car  $(-^G)^\sharp = -G$ . Cependant,  $f^\sharp$  est également un foncteur cohérent et une symétrisation injective du foncteur nul. On a donc pour toute partition  $\lambda$  de poids  $d$  [17, prop 3.2.2 et lemme 3.2.5] :

$$\mathrm{Hom}(f^\sharp, \mathrm{coin}_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(0, S^\lambda) = 0 .$$

Ainsi, il n'y a pas de transformation naturelle non nulle entre  $f$  et un foncteur de coinvariants sous un sous-module de Young  $\mathfrak{S}_\lambda$  de  $\mathfrak{S}_d$ . Le corollaire B.2.9 de l'annexe fournit un tel exemple de symétrisation cohérente non nulle du foncteur nul.

L'évaluation sur le  $\mathfrak{S}$ -module  $V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}$  induit un foncteur :

$$ev : Cop(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) .$$

Par construction, le foncteur  $sym$  est à valeurs dans  $Cop(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A})$ . Nous allons maintenant voir dans quelles conditions ces foncteurs sont adjoints. Pour cela, nous introduisons deux axiomes supplémentaires.

- (A4) Pour tout  $M \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  il existe un objet  $L_M$  de  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  tel que  $L_M$  soit une somme directe d'éléments de  $\Gamma^{d_1, \dots, d_n} \mathcal{V}_A^{\times n}$  et un morphisme surjectif  $L_M \rightarrow M$ .
- (A5) Les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A), \mathcal{C}(A)$  sont stables par dualité et le bidual d'un objet  $M$  est isomorphe à  $M$ .

**Lemme 3.4.9.** *Les paires  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A), \mathcal{C}(A)$  suivantes satisfont les axiomes (A1-A5).*

- (1)  *$A$  est un corps,  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  est la catégorie des  $A$ -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire de  $\mathfrak{S}$ , et  $\mathcal{C}(A)$  est la catégorie des  $A$ -espaces vectoriels de dimension finie.*
- (2)  *$A$  est un anneau principal,  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  est la catégorie des  $A$ -modules de permutation de dimension finie, et  $\mathcal{C}(A)$  est la catégorie des  $A$ -modules libres de type fini.*
- (3)  *$A$  est un anneau de Dedekind,  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  est la catégorie des facteurs directs de  $A$ -modules de permutation de dimension finie, et  $\mathcal{C}(A)$  est la catégorie des  $A$ -modules projectifs de type fini.*

**Proposition 3.4.10.** *Supposons que les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  vérifient les axiomes (A1-A5). L'évaluation induit un isomorphisme (naturel en  $f, g$ ) :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cop}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A})}(f, g) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(f), ev(g)) .$$

*Démonstration.* Supposons que les axiomes (A1-A4) sont vérifiés. Dans ce cas la démonstration du lemme 3.2.4 s'adapte dans notre nouveau cadre et pour tout uplets  $\lambda^i, \mu^i$  de poids  $d_i$  le foncteur d'évaluation induit un isomorphisme :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}}(\mathrm{coinv}(\lambda^1, \dots, \lambda^n), \mathrm{coinv}(\mu^1, \dots, \mu^n)) \\ & \xrightarrow[\simeq]{ev} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(S^{\lambda^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\lambda^n}, S^{\mu^1} \boxtimes \dots \boxtimes S^{\mu^n}) . \end{aligned}$$

Si l'axiome (A5) est également vérifié, alors la catégorie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}$  est stable par dualité de Kuhn, et le dual de Kuhn de  $\mathrm{inv}(\mu^1, \dots, \mu^n)$  est le foncteur  $\mathrm{coinv}(\mu^1, \dots, \mu^n)$ . D'après la proposition B.1.1 et le lemme de Yoneda on a donc un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}(f, \mathrm{coinv}(\mu^1, \dots, \mu^n)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{inv}(\mu^1, \dots, \mu^n), f^\sharp) \simeq f^\sharp(\mathfrak{S}/\mathfrak{S}_{\mu^1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu^n}) \quad (*)$$

Démontrons la proposition dans le cas  $g = \mathrm{coinv}(\mu^1, \dots, \mu^n)$ . Soit  $f \hookrightarrow y_f^0 \rightarrow y_f^1$  une coprésentation de Young de  $f$ . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S},A}}(y_f^1, g) & \xrightarrow[\simeq]{ev} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(y_f^1), ev(g)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S},A}}(y_f^0, g) & \xrightarrow[\simeq]{ev} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(y_f^0), ev(g)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S},A}}(f, g) & \xrightarrow{ev} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(f), ev(g)) \end{array}$$

D'après la relation (\*) la colonne de gauche est exacte aux deux derniers termes. Comme  $ev(g)$  est injectif la colonne de droite est exacte aux deux derniers termes. L'évaluation de la dernière ligne est donc un isomorphisme.

Si maintenant  $g$  est quelconque, soit  $g \hookrightarrow y_g^0 \rightarrow y_g^1$  une coprésentation de Young de  $g$ . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S},A}}(f, g) & \xrightarrow{ev} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(f), ev(g)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S},A}}(f, y_g^0) & \xrightarrow[\simeq]{ev} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(f), ev(y_g^0)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S},A}}(f, y_g^1) & \xrightarrow[\simeq]{ev} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(f), ev(y_g^1)) \end{array}$$

Les colonnes sont exactes aux deux premiers termes par exactitude à gauche de  $\mathrm{Hom}(f, -)$  et  $\mathrm{Hom}(ev(f), -)$ . L'évaluation de la première ligne est donc un isomorphisme.  $\square$

**Corollaire 3.4.11.** *Si les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  vérifient les axiomes (A1-A5), alors les foncteurs  $(ev, sym)$  forment une paire d'adjoints : on a un isomorphisme (naturel en  $f, g$ ) :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cop}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A})}(f, sym(G)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n)}(ev(f), G) .$$

**Corollaire 3.4.12.** *Si les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  vérifient les axiomes (A1-A5), alors le foncteur  $sym : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}$  est pleinement fidèle.*

### 3.4.3 Applications

Fixons  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$  et  $\mathcal{C}(A)$  deux catégories vérifiant les axiomes (A1-A5). Des exemples de choix possibles sont donnés par le lemme 3.4.9. Dans cette situation, le foncteur  $sym : \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n, A}(n) \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}$  est un adjoint du foncteur d'évaluation. Dans ce paragraphe, nous appliquons cette propriété pour obtenir de nouveaux résultats.

#### Symétrisation des foncteurs composés

**Lemme 3.4.13.** *Si les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  vérifient les axiomes (A1-A5), alors pour tout  $f \in \mathrm{Cop}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A})$ , il existe un isomorphisme naturel en  $f$  :*

$$f \xrightarrow[\simeq]{\phi_f} sym(ev(f))$$

*Démonstration.* Supposons que  $f$  admet une coprésentation de Young  $f \hookrightarrow y_f^0 \rightarrow y_f^1$ . On a un diagramme commutatif dont les colonnes sont les isomorphismes obtenus à partir du lemme 3.2.10 :

$$\begin{array}{ccccc} f \hookrightarrow & & y_f^0 & \longrightarrow & y_f^1 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ sym(ev(f)) \hookrightarrow & & sym(ev(y_f^0)) & \longrightarrow & sym(ev(y_f^1)) \end{array}$$

Par exactitude de  $ev$  et exactitude à gauche de  $sym$ , les lignes de ce diagramme sont exactes aux deux premiers termes. Le morphisme  $y_f^0 \xrightarrow{\simeq} sym(ev(y_f^0))$  factorise donc en un isomorphisme  $\phi_f : f \simeq sym(ev(f))$ .

Fixons deux foncteurs  $f, g$  et choisissons deux coprésentations de Young de  $f$  et  $g$ . D'après le raisonnement précédent, on obtient deux isomorphismes  $\phi_f$  et  $\phi_g$ , qui dépendent à priori du choix des coprésentations. Soit  $\theta : f \rightarrow g$ . Alors le carré commute :

$$\begin{array}{ccc} sym(ev(f)) & \xrightarrow{sym(ev(\theta))} & sym(ev(g)) \\ \phi_f \uparrow & & \uparrow \phi_g \\ f & \xrightarrow{\theta} & g \end{array} .$$

En effet, les évaluations des deux morphismes  $sym(ev(\theta))$  et  $\phi_g \circ \theta \circ \phi_f^{-1}$  sur le  $\mathfrak{S}$ -module  $V_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes V_n^{\otimes d_n}$  sont égales, donc ces deux morphismes sont égaux d'après la proposition 3.4.10.

Si on prend  $f = g$  et  $\theta = \text{Id}$ , on obtient que l'isomorphisme  $\phi_f$  ne dépend pas du choix de la résolution. Avec  $f, g, \theta$  quelconques, on obtient la functorialité de  $\phi_f$ .  $\square$

En remplaçant l'utilisation du lemme 3.3.3 par celle du lemme précédent dans la démonstration de la proposition 3.3.11, on obtient un nouveau résultat, plus précis (on a gagné la naturalité en  $F$ ).

**Proposition 3.4.14.** *Supposons que les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  vérifient les axiomes (A1-A5). Soit  $F$  un foncteur polynomial sur un anneau commutatif  $A$  admettant une coprésentation par des sommes de produits tensoriels :*

$$F \hookrightarrow \bigoplus_{i=1..k} \otimes^d \rightarrow \bigoplus_{i=1..l} \otimes^d .$$

Il existe un isomorphisme (dans  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}$ ), naturel en  $F$  :

$$\text{sym}(F) \circ \Delta_n \xrightarrow{\cong} \text{sym}(F(\text{Id}^{\boxtimes n})) .$$

### Symétrisation des foncteurs de Schur

Nous nous intéressons maintenant aux exemples de symétrisations injectives des foncteurs de Schur utilisés dans [9, p.778]. Le foncteur de Schur  $S_{\lambda/\lambda'}$  sur  $A$  est égal à l'image du morphisme (cf. définition B.3.12) :

$$d_{\lambda/\lambda'} : \Lambda^{\lambda/\lambda'} \hookrightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\widetilde{\lambda/\lambda'}}} \otimes^d \twoheadrightarrow S^{\widetilde{\lambda/\lambda'}} .$$

**Définition 3.4.15.** Soit  $\lambda/\lambda'$  un diagramme gauche de poids  $d$  et  $\widetilde{\lambda/\lambda'}$  son diagramme conjugué. On note  $s_{\lambda/\lambda'}$  la symétrisation injective de  $S_{\lambda/\lambda'}$  obtenue comme image du morphisme :

$$\partial_{\lambda/\lambda'} : \text{alt}^{\lambda/\lambda'} \hookrightarrow \text{Id} \xrightarrow{\sigma_{\widetilde{\lambda/\lambda'}}} \text{Id} \twoheadrightarrow \text{coinv}_{\widetilde{\lambda/\lambda'}} .$$

*Remarque 3.4.16.* Si l'anneau  $A$  contient  $\mathbb{Q}$  ou est de caractéristique  $p > d$ , on dispose de la définition équivalente suivante de  $s_{\lambda/\lambda'}$  donnée par la proposition B.3.27. On fait un tableau en numérotant les coefficients non nuls du diagramme gauche  $\mu/\mu'$  dans l'ordre lexicographique, on note  $a_{\lambda/\lambda'} \in A\mathfrak{S}_d$  la somme des éléments de  $\mathfrak{S}_d$  qui préservent les lignes et  $b_{\lambda/\lambda'} \in A\mathfrak{S}_d$  la somme alternée des éléments qui préservent les colonnes. On a alors

$$s_{\lambda/\lambda'}(M) = b_{\lambda/\lambda'} \circ a_{\lambda/\lambda'}(M) .$$

**Proposition 3.4.17.** *Supposons que les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(A)$ ,  $\mathcal{C}(A)$  vérifient les axiomes (A1-A5). Soit  $\lambda/\lambda'$  un diagramme gauche de poids  $d$ . Il existe un monomorphisme (dans  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{S},A}$ ) :*

$$s_{\lambda/\lambda'} \hookrightarrow \text{sym}(S_{\lambda/\lambda'})$$

dont l'évaluation sur  $M = V^{\otimes d}$  est un isomorphisme. Si l'anneau  $A$  contient  $\mathbb{Q}$  ou est de caractéristique  $p > d$ , cette transformation naturelle est un isomorphisme.

*Démonstration.* Tout d'abord, la composée

$$\widetilde{\partial_{\lambda/\lambda'}} : \text{sym}(\Lambda^{\lambda/\lambda'}) \simeq \text{alt}^{\lambda/\lambda'} \xrightarrow{\partial_{\lambda/\lambda'}} \text{coinv}_{\widetilde{\lambda/\lambda'}} \simeq \text{sym}(S^{\widetilde{\lambda/\lambda'}})$$

est égale au morphisme  $\text{sym}(d_{\lambda/\lambda'})$ . En effet, leurs évaluations sur  $V^{\otimes d}$  sont égales et le foncteur  $\text{sym}$  est pleinement fidèle.

Le conoyau de  $d_{\lambda/\lambda'}$  prend ses valeurs dans les modules libres de type fini d'après le théorème B.3.14. C'est donc un foncteur polynomial d'après la proposition 1.2.8. Notons  $p : S^{\widetilde{\lambda/\lambda'}} \rightarrow \text{Coker } d_{\lambda/\lambda'}$  la projection. Par exactitude à gauche de  $\text{sym}$ , on a  $\text{sym}(S_{\lambda/\lambda'}) = \text{Ker } \text{sym}(p)$ .

De plus,  $\text{sym}(p) \circ \text{sym}(d_{\lambda/\lambda'}) = \text{sym}(p \circ d_{\lambda/\lambda'}) = 0$ . L'isomorphisme  $\text{coinv}_{\widetilde{\lambda/\lambda'}} \simeq \text{sym}(S^{\widetilde{\lambda/\lambda'}})$  induit donc une transformation naturelle injective :

$$s_{\lambda/\lambda'} = \text{Im } \partial_{\lambda/\lambda'} \hookrightarrow \text{Ker } \text{sym}(p) = \text{sym}(S_{\lambda/\lambda'}) \quad (*)$$

Si  $A$  contient  $\mathbb{Q}$  ou est de caractéristique  $p > d$ , alors d'après la proposition B.3.25, le morphisme structurel  $\Lambda^{\lambda/\lambda'} \rightarrow S_{\lambda/\lambda'}$  admet une section. Sa symétrisation induit donc une surjection  $\text{sym}(\Lambda^{\lambda/\lambda'}) \rightarrow \text{sym}(S_{\lambda/\lambda'})$ , et on a donc  $\text{Im } \text{sym}(d_{\lambda/\lambda'}) = \text{sym}(S_{\lambda/\lambda'}) = \text{Ker } \text{sym}(p)$ . La transformation naturelle (\*) est donc un isomorphisme.  $\square$



## Chapitre 4

# Cohomologie des bifoncteurs polynomiaux

Dans ce chapitre, nous généralisons tout d'abord à un anneau  $A$  commutatif quelconque la définition de la catégorie  $\mathcal{P}_A(1, 1)$  des bifoncteurs polynomiaux (contravariants en la première variable, covariants en la seconde) introduite par Franjou et Friedlander dans [13]. Par dualité sur la variable contravariante (cf. lemme 4.1.7), cette catégorie est équivalente à la catégorie  $\mathcal{P}_A(2)$  introduite dans le chapitre 1. Nous en déduisons la structure de la catégorie  $\mathcal{P}_A(1, 1)$ .

Suivant [13], nous définissons ensuite dans le paragraphe 4.2 la cohomologie  $H_{\mathcal{P}, A}^*(B)$  d'un bifoncteur  $B \in \mathcal{P}_A(1, 1)$  homogène de bidegré  $(d, d)$  comme un  $A$ -module d'extensions dans la catégorie des bifoncteurs polynomiaux :

$$H_{\mathcal{P}, A}^*(B) = \text{Ext}_{\mathcal{P}_A(1,1)}^*(\Gamma^d gl, B) .$$

Puis nous démontrons que si  $n$  est un entier supérieur ou égal à  $d$ , la cohomologie  $H_{\mathcal{P}, A}^*(B)$  calcule la cohomologie rationnelle de  $GL_n/A$  à coefficients dans la représentation  $B(A^n, A^n)$  (théorème 4.2.11). Ce théorème est le résultat principal du chapitre et fournit une forte motivation pour l'étude de la cohomologie des bifoncteurs polynomiaux. Il n'était auparavant connu que dans le cas où  $A = \mathbb{K}$  est un corps [13, Th. 1.5]. Nous parvenons à démontrer ce résultat sur un anneau commutatif quelconque en adoptant une nouvelle approche, qui repose sur un calcul explicite de théorie classique des invariants (théorème D.2.6). Puis nous utilisons le théorème 4.2.11 pour obtenir des informations (corollaires 4.2.13 et 4.2.14) sur la cohomologie des bifoncteurs que l'algèbre homologique dans la catégorie  $\mathcal{P}_A(1, 1)$  ne semble pas apporter facilement.

Enfin dans le paragraphe 4.3, nous établissons quelques calculs sur la cohomologie des bifoncteurs.

### 4.1 Catégorie des bifoncteurs polynomiaux

Soit  $A$  un anneau commutatif. On rappelle (cf. chapitre 1) que  $\mathcal{V}_A$  désigne la catégorie des  $A$ -modules projectifs de type fini sur  $A$  et que si  $V$  est un  $A$ -module,  $V^\vee$  désigne le



dual  $A$ -linéaire de  $V$ .

#### 4.1.1 Bifoncteurs polynomiaux selon Franjou et Friedlander

**Définition 4.1.1.** Un bifoncteur polynomial  $B$  (contravariant en la première variable, covariant en la seconde variable) sur  $A$  :

$$B : \mathcal{V}_A^{\text{op}} \times \mathcal{V}_A \rightsquigarrow \mathcal{V}_A$$

est la donnée pour tout  $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}_A^{\text{op}} \times \mathcal{V}_A$  d'un élément  $B(V_1, V_2) \in \mathcal{V}_A$  et pour tous  $V_1, V_2, W_1, W_2$  d'un polynôme  $B_{V_1, V_2, W_1, W_2}$  :

$$\text{Hom}_A(W_1, V_1) \times \text{Hom}_A(V_2, W_2) \rightarrow \text{Hom}_A(B(V_1, V_2), B(W_1, W_2)) ,$$

vérifiant les deux conditions :

- (1)  $B_{V_1, V_2, V_1, V_2}(\text{Id}_{V_1}, \text{Id}_{V_2}) = \text{Id}_{B(V_1, V_2)}$  .
- (2) Pour tous modules projectifs de type fini  $U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2$ , la précomposée du polynôme  $B_{U_1, U_2, W_1, W_2}$  par le polynôme induit par la composition :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(V_1, U_1) \times \text{Hom}(U_2, V_2) \times \text{Hom}(W_1, V_1) \times \text{Hom}(V_2, W_2) \\ \rightarrow \text{Hom}(W_1, U_1) \times \text{Hom}(U_2, W_2) \end{aligned}$$

est égale à la postcomposée de  $B_{V_1, V_2, W_1, W_2} \times B_{U_1, U_2, V_1, V_2}$  par l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \text{Hom}(B(U_1, U_2), B(V_1, V_2)) \times \text{Hom}(B(V_1, V_2), B(W_1, W_2)) \\ \rightarrow \text{Hom}(B(U_1, U_2), B(W_1, W_2)) . \end{aligned}$$

**Définition 4.1.2.** Une transformation naturelle  $f : B \rightarrow B'$  entre deux bifoncteurs polynomiaux est la donnée, pour tout  $V_1, V_2$  d'une application linéaire  $f_{V_1, V_2} : B(V_1, V_2) \rightarrow B'(V_1, V_2)$  telle que le diagramme suivant de polynômes commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(V_1, U_1) \times \text{Hom}(U_2, V_2) & \xrightarrow{B_{U_1, U_2, V_1, V_2}} & \text{Hom}(B(U_1, U_2), B(V_1, V_2)) \\ \downarrow B'_{U_1, U_2, V_1, V_2} & & \downarrow f_{V_1, V_2} \circ - \\ \text{Hom}(B'(U_1, U_2), B'(V_1, V_2)) & \xrightarrow{- \circ f_{U_1, U_2}} & \text{Hom}(B(U_1, U_2), B'(V_1, V_2)) . \end{array}$$

**Définition 4.1.3.** Soit  $B$  un bifoncteur polynomial. On dit que  $B$  est de degré fini si les degrés des polynômes  $B_{V_1, V_2, W_1, W_2}$  sont majorés. On dit que  $B$  est homogène de bidegré  $(d, e)$  (resp. homogène de degré total  $d$ ) si tous les polynômes  $B_{V_1, V_2, W_1, W_2}$  sont homogènes de bidegré  $(d, e)$  (resp. homogènes de degré total  $d$ ).

**Définition 4.1.4.** On note  $gl$  le bifoncteur polynomial homogène de bidegré  $(1, 1)$  qui à une paire  $(V, W)$  associe  $gl(V, W) = V^\vee \otimes W$ . Si  $F$  est un foncteur polynomial, on note  $Fgl$  le bifoncteur polynomial obtenu en précomposant  $F$  par le bifoncteur  $gl$ .

*Remarque 4.1.5.* Soit  $A$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Le bifoncteur  $gl$  commute au twist de Frobenius :  $I^{(r)}gl \simeq gl^{(r)}$ .

**Définition 4.1.6.** On note  $\mathcal{P}_A(1, 1)$  (resp.  $\mathcal{P}_{e,A}^d$ ) la catégorie  $A$ -linéaire des bifoncteurs (contravariants en la première variable, covariants en la seconde variable), de degré fini (resp. homogènes de bidegré  $(d, e)$ ) et des applications naturelles entre de tels bifoncteurs.

### 4.1.2 Propriétés de la catégorie des bifoncteurs polynomiaux

Les définitions ci-dessus sont identiques (à une dualité près) aux définitions en rapport avec la catégorie  $\mathcal{P}_A(2)$ . Par exemple, si  $B$  est un bifoncteur polynomial contravariant en la première variable et covariant en la seconde, alors le bifoncteur  $B(-\check{1}, -2)$  est bifoncteur polynomial covariant au sens de la définition 1.2.1 du chapitre 1.

**Lemme 4.1.7.** Soit  $B(-1, -2)$  un objet de  $\mathcal{P}_A(1, 1)$ . Alors  $B(-\check{1}, -2)$  est un objet de  $\mathcal{P}_A(2)$ , de même degré. La dualité sur la première variable induit donc une équivalence de catégorie qui préserve le degré :

$$D : \mathcal{P}_A(1, 1) \rightsquigarrow \mathcal{P}_A(2) .$$

*Remarque 4.1.8.* Le foncteur  $D$  envoie  $gl \in \mathcal{P}_{1,A}^1$  sur  $Dgl = I \boxtimes I \in \mathcal{P}_{1,1,A}$ .

Tous les résultats du premier chapitre se transposent donc à la catégorie  $\mathcal{P}_A(1, 1)$ . En particulier on obtient les énoncés suivants :

**Proposition 4.1.9.** Soit  $B \in \mathcal{P}_A(1, 1)$ . Son dual de Kuhn  $B^\sharp$  défini par  $B^\sharp(V, W) = B(V^\vee, W^\vee)^\vee$  est encore un élément de  $\mathcal{P}_A(1, 1)$ . La dualité de Kuhn définit une équivalence de catégories qui préserve le bidegré :

$$(-)^\sharp : \mathcal{P}_A(1, 1)^{\text{op}} \rightsquigarrow \mathcal{P}_A(1, 1) .$$

**Proposition 4.1.10.** La catégorie  $A$ -linéaire additive  $\mathcal{P}_A(1, 1)$  se décompose en la somme directe de ses sous-catégories pleines

$$\mathcal{P}_A(1, 1) = \bigoplus_{(d,e)} \mathcal{P}_{e,A}^d .$$

**Proposition 4.1.11.** Les catégories  $\mathcal{P}_A(1, 1)$  et  $\mathcal{P}_{e,A}^d$  ont une structure de catégorie exacte si l'on prend pour suites exactes courtes admissibles les suites  $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$  qui sont exactes après évaluation sur les paires  $(V, W) \in \mathcal{V}_A^{\times 2}$ .

*Notation 4.1.12.* Soient  $d, e$  des entiers positifs et  $V, W$  des  $A$ -modules projectifs de type fini. On note :

$$\begin{aligned} P_{e,V}^{d,W} &:= \Gamma^d \text{Hom}(-1, V) \otimes \Gamma^e \text{Hom}(W, -2) , \\ I_{e,V}^{d,W} &:= S^d \text{Hom}(-1, V) \otimes S^e \text{Hom}(W, -2) . \end{aligned}$$

**Proposition 4.1.13.** *Soient  $d, e$  des entiers positifs,  $V, W$  des  $A$ -modules projectifs de type fini, et  $B \in \mathcal{P}_{e,A}^d$  un bifoncteur polynomial sur  $A$ . On a des isomorphismes naturels en  $B, V, W$  :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{e,A}^d}(P_{e,V}^{d,W}, B) &\simeq B(V, W), \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{e,A}^d}(B, I_{e,V}^{d,W}) &\simeq B^\sharp(W, V).\end{aligned}$$

Les foncteurs  $P_{e,V}^{d,W}$  et  $I_{e,V}^{d,W}$  sont respectivement des projectifs et des injectifs de  $\mathcal{P}_{e,A}^d$ . Il existe un foncteur exact  $\mathrm{PRes}_\bullet$  (resp.  $\mathrm{IRes}^\bullet$ ) qui à un bifoncteur  $B$  associe une résolution projective (resp. injective) admissible de  $B$  par des projectifs de la forme  $U \otimes P_{e,A^d}^{d,A^e}$  où  $U$  est un  $A$ -module projectif de type fini (resp. des injectifs de la forme  $U \otimes I_{e,A^d}^{d,A^e}$ ).

*Remarque 4.1.14.* Le bifoncteur  $gl^{\otimes d}$  est un injectif de  $\mathcal{P}_{d,A}^d$ . En effet, la formule exponentielle montre que c'est un facteur direct du projectif  $P_{d,A^d}^{d,A^d}$ .

**Théorème 4.1.15.** *Soit  $A'$  une  $A$ -algèbre commutative. On dispose d'un foncteur de changement de base  $\mathcal{P}_A(1,1) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{A'}(1,1)$  exact qui préserve les projectifs. De plus, on a un morphisme canonique  $A'$ -linéaire :*

$$\phi : \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A(1,1)}^*(S, T) \otimes_A A' \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{A'}(1,1)}^*(S_{A'}, T_{A'})$$

qui est un isomorphisme si  $A'$  est  $A$ -plat. Enfin, si  $A$  est un anneau de Dedekind, alors pour tout  $i$  ce morphisme s'inscrit dans une suite exacte courte de groupes abéliens :

$$\begin{aligned}0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A(1,1)}^i(S, T) \otimes_A A' &\xrightarrow{\phi} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{A'}(1,1)}^i(S_{A'}, T_{A'}) \\ &\rightarrow \mathrm{Tor}^A(\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A(1,1)}^{i+1}(S, T), A') \rightarrow 0\end{aligned}$$

## 4.2 Cohomologie des bifoncteurs

### 4.2.1 Définition

**Définition 4.2.1.** Soit  $A$  un anneau commutatif et soit  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $A$ . On appelle cohomologie du bifoncteur  $B$  le groupe d'extensions :

$$H_{\mathcal{P},A}^*(B) := \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A(1,1)}^*(\Gamma^d gl, B).$$

**Abus de notation 4.2.2.** Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible concernant l'anneau de base  $A$ , on pourra omettre le  $A$  pour alléger la notation. On écrira donc  $H_{\mathcal{P}}^*$  au lieu de  $H_{\mathcal{P},A}^*$ .

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $A$  un anneau principal et soit  $B \in \mathcal{P}_{d,A}^d$  un bifoncteur polynomial. Les  $A$ -modules  $H_{\mathcal{P},A}^i(B)$  sont des  $A$ -modules type fini.*

*Démonstration.* Soit  $P_\bullet$  une résolution projective de  $\Gamma^d gl$ . La cohomologie du bifoncteur  $B$  est donnée par l'homologie du complexe de  $A$ -modules  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(P_\bullet, B)$ . Si  $P_{d,V}^{d,W}$  est un projectif standard, le  $A$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(P_{d,V}^{d,W}, B) \simeq B(V, W)$  est projectif de type fini, donc libre de type fini car  $A$  est principal. Les cycles et les bords du complexe  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(P_\bullet, B)$  sont donc des  $A$ -modules libres de type fini et leurs quotients sont des  $A$ -modules de type fini.  $\square$

### 4.2.2 Cohomologie des bifoncteurs séparables

**Définition 4.2.4.** Un bifoncteur séparable est un bifoncteur de la forme :

$$\mathcal{H}om(F, G)(-1, -2) := F^\vee(-1) \otimes G(-2) = F^\sharp(-1^\vee) \otimes G(-2)$$

où  $F, G$  sont deux foncteurs polynomiaux.

Les injectifs  $I_{e,V}^{d,W}$  et les projectifs  $P_{e,V}^{d,W}$  de la catégorie  $\mathcal{P}_{e,A}^d$  sont des bifoncteurs séparables. En effet on a :

$$P_{e,V}^{d,W} = \mathcal{H}om(I_V^d, P_W^e), \quad I_{e,V}^{d,W} = \mathcal{H}om(P_V^d, I_W^e),$$

où  $I_V^d$  et  $P_V^d$  désignent les injectifs et les projectifs dans la catégorie des foncteurs à une variable (cf. notation 1.4.1). On a un isomorphisme naturel :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(\Gamma^d gl, \mathcal{H}om(P_V^d, I_W^d)) \simeq S^d \text{Hom}_A(W, V) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(P_V^d, I_W^d)$$

obtenu en mettant bout à bout l'isomorphisme de la proposition 4.1.13 et l'inverse de l'isomorphisme donné par le lemme de Yoneda dans  $\mathcal{P}_{d,A}$ . Si  $\mathcal{H}om(F, G)$  est un bifoncteur séparable, on a donc un isomorphisme de bicomplexes :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(\Gamma^d gl, \mathcal{H}om(\text{PRes}_\bullet(F), \text{IRes}^\bullet(G))) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}}(\text{PRes}_\bullet(F), \text{IRes}^\bullet(G)).$$

Le complexe total associé au bicomplexe  $\mathcal{H}om(\text{PRes}_\bullet(F), \text{IRes}^\bullet(G))$  est une résolution injective de  $\mathcal{H}om(F, G)$ . En prenant l'homologie des complexes totaux on obtient donc [13, prop 2.2] :

**Proposition 4.2.5.** *Soit  $A$  un anneau commutatif et  $F, G$  des foncteurs polynomiaux homogènes de degré  $d$  sur  $A$ . On a un isomorphisme naturel en  $F, G$  :*

$$H_{\mathcal{P},A}^*(\mathcal{H}om(F, G)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_{d,A}}^*(F, G).$$

### 4.2.3 Lien avec la cohomologie rationnelle

Dans ce paragraphe, nous établissons un lien entre la cohomologie des bifoncteurs et la cohomologie rationnelle du groupe linéaire. Nous renvoyons à l'annexe D pour plus de détails sur les groupes algébriques et la cohomologie rationnelle.

Soit  $B$  un bifoncteur polynomial sur un anneau  $A$ . Pour toute paire de  $A$ -modules projectifs de type fini  $V, W$ , le polynôme  $B_{V,W} : \text{End}(V^\vee) \times \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(B(V, W))$

induit un morphisme de groupes algébriques  $GL(V^\vee) \times GL(W) \rightarrow GL(B(V, W))$ . Lorsque  $V = W$ , on le précompose par l'inclusion diagonale  $g \mapsto (g^{-1}, g)$  pour obtenir une action rationnelle :

$$GL(V) \times B(V, V) \rightarrow B(V, V), \quad (g, x) \mapsto B_{V, V}(g^{-1}, g)(x).$$

**Lemme 4.2.6.** *Soit  $A$  un anneau commutatif, et  $B$  un bifoncteur sur  $A$ . Le morphisme d'évaluation, naturel en  $B$  :*

$$e_{B, n} : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d, A}^d}(\Gamma^d gl, B) & \rightarrow & B(A^n, A^n) \\ f & \mapsto & f_{A^n}(\gamma^d \text{Id}_{A^n}) \end{array}$$

est à valeurs dans  $B(A^n, A^n)^{GL_n/A}$ .

**Lemme 4.2.7.** *Soit  $A$  un anneau commutatif, et  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $A$ . Si  $n \geq d$ , le morphisme :*

$$e_{B, n} : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d, A}^d}(\Gamma^d gl, B) & \rightarrow & B(A^n, A^n) \\ f & \mapsto & f_{A^n}(\gamma^d \text{Id}_{A^n}) \end{array}$$

est injectif

*Démonstration.* Soit  $n$  un entier. Notons  $comp$  le morphisme de bifoncteurs défini par la composée

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^d(\text{Hom}_A(-1, A^n)) \otimes \Gamma^d(\text{Hom}_A(A^n, -2)) & & \\ \downarrow & \searrow^{comp} & \\ \Gamma^d(\text{Hom}_A(-1, A^n) \otimes \text{Hom}_A(A^n, -2)) & \longrightarrow & \Gamma^d gl(-1, -2) \end{array}$$

l'évaluation de la transformation naturelle  $comp$  sur la paire  $(A^n, A^n)$  envoie  $(\gamma^d \text{Id}_{A^n})^{\otimes 2} \in \Gamma^d(\text{Hom}_A(A^n, A^n))^{\otimes 2}$  sur  $\gamma^d \text{Id}_{A^n} \in \Gamma^d(\text{Hom}_A(A^n, A^n))$ . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d, A}^d}(P_{d, A^n}^{d, A^n}(-1, -2), B(-1, -2)) & \xrightarrow{\simeq} & B(A^n, A^n) \\ \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d, A}^d}(comp, B(-1, -2)) \uparrow & \nearrow^{e_{B, n}} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d, A}^d}(\Gamma^d \text{Hom}_A(-1, -2), B(-1, -2)) & & \end{array}$$

dans lequel l'isomorphisme horizontal est donné par le lemme de Yoneda. D'après la proposition 1.3.1, si  $n \geq d$  alors  $comp$  est un épimorphisme. Le morphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d, A}^d}(comp, B(-1, -2))$  est alors injectif, et  $e_{B, n}$  également.  $\square$

Pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$  on note  $(i|j) \in S^2((V^{\oplus p} \oplus V^{\vee \oplus q})^\vee)$  le polynôme homogène de degré 2 défini par la formule (cf. annexe D, théorème D.2.6) :

$$(i|j)(x_1, \dots, x_p, f_1, \dots, f_q) := f_j(x_i).$$

**Lemme 4.2.8.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $d$  un entier et  $V$  un  $A$ -module libre de rang  $n$ . Le  $A$ -module*

$$S^d(V^{\vee \oplus d} \oplus V^{\oplus d})^{GL_n/A} \simeq \left( S^d(V^{\vee \oplus d}) \otimes S^d(V^{\oplus d}) \right)^{GL_n/A}$$

*est engendré par la famille des produits  $(i_1|j_1) \dots (i_d|j_d)$ , où les indices  $i_k$  et  $j_k$  sont des entiers compris entre 1 et  $d$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du corollaire D.2.7. □

**Lemme 4.2.9.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Le morphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(\Gamma^d gl, S^\mu(-_1^\vee) \otimes S^\lambda(-_2)) & \rightarrow & S^\mu(A^{n \vee}) \otimes S^\lambda(A^n) \\ f & \mapsto & f_{A^n}(\gamma^d \text{Id}_{A^n}) \end{array}$$

*induit une surjection sur  $(S^\mu(A^{n \vee}) \otimes S^\lambda(A^n))^{GL_n/A}$ .*

*Démonstration.* D'après l'isomorphisme de foncteurs

$$S^d(-_1^{\vee \oplus d}) \otimes S^d(-_2^{\oplus d}) \simeq \bigoplus_{\lambda, \mu \text{ uplets de poids } d} S^\mu(-_1^\vee) \otimes S^\lambda(-_2),$$

il suffit de montrer que le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(\Gamma^d gl, S^d(-_1^{\vee \oplus d}) \otimes S^d(-_2^{\oplus d})) & \rightarrow & (S^d(A^{n \vee \oplus d}) \otimes S^d(A^{n \oplus d}))^{GL_n/A} \\ f & \mapsto & f_{A^n}(\gamma^d \text{Id}_{A^n}) \end{array}$$

est surjectif. Le lemme 4.2.8 nous donne une famille génératrice du  $A$ -module libre de droite. Nous allons montrer que le morphisme ci-dessus atteint tous ces générateurs.

Soit  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $A^n$ ,  $(a_i^\#)_{1 \leq i \leq n}$  sa base duale et  $(a_i^{\#\#})_{1 \leq i \leq n}$  sa base biduale. L'isomorphisme canonique  $A^n \simeq A^{n \vee \vee}$  envoie donc  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  sur  $(a_i^{\#\#})_{1 \leq i \leq n}$ . Si  $k$  est un entier compris entre 1 et  $d$  et  $v \in A^n$ , on note  $v^k$  le vecteur  $(0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \in A^{n \oplus d}$  où  $v$  est en  $k$ -ème position.

Soient  $k$  et  $l$  deux entiers. Calculons une expression maniable du polynôme  $(k|l) \in S^1(A^{n \vee \oplus d}) \otimes S^1(A^{n \oplus d})$ . Soit  $(x^1, \dots, x^k, \phi^1, \dots, \phi^k) = (x, \phi)$  un vecteur de  $A^{n \oplus d} \oplus A^{n \vee \oplus d}$ . On a :

$$(k|l)(x, \phi) = \phi^k(x^l) = \sum_{i=1}^n \phi(a_i^k) a_i^\# \left( \sum_{j=1}^n a_j^{\#l}(x) a_j \right) = \sum_{i=1}^n \phi(a_i^k) a_j^{\#l}(x).$$

Ainsi, on a l'égalité  $(k|l) = \sum_{i=1}^n a_j^{\#l} \otimes a_i^{\#\#k}$ . Si  $(k_1, \dots, k_d)$  et  $(l_1, \dots, l_d)$  sont deux  $d$ -uplets d'entiers, le polynôme  $(k_1|l_1)(k_2|l_2) \dots (k_d|l_d) \in S^d(A^{n \vee \oplus d}) \otimes S^d(A^{n \oplus d})$  est donc donné par la formule :

$$(k_1|l_1)(k_2|l_2) \dots (k_d|l_d) = \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1}^{\#l_1} a_{i_2}^{\#l_2} \dots a_{i_d}^{\#l_d} \otimes a_{i_1}^{\#\#k_1} a_{i_2}^{\#\#k_2} \dots a_{i_d}^{\#\#k_d}.$$

Il ne nous reste plus qu'à produire un morphisme  $f : \Gamma^d(-_1^\vee \otimes -_2) \rightarrow S^d(-_1^{\vee \oplus d}) \otimes S^d(-_2^{\oplus d})$  dont l'évaluation sur

$$\gamma^d \text{Id}_{A^n} = \left( \sum_{i=1}^n a_i^\# \otimes a_i \right)^{\otimes d} \in \Gamma^d(A^{n^\vee} \otimes A^n)$$

est égale à  $(k_1|l_1)(k_2|l_2) \dots (k_d|l_d)$ . Mais le morphisme

$$\begin{aligned} i_{k_1, \dots, k_d, l_1, \dots, l_d} : (V^\vee \otimes W)^{\otimes d} &\rightarrow (V^{\vee \oplus d})^{\otimes d} \otimes (W^{\oplus d})^{\otimes d} \\ \otimes_{i=1}^d (v_i \otimes w_i) &\mapsto \left( \otimes_{i=1}^d v_i^{k_i} \right) \otimes \left( \otimes_{i=1}^d w_i^{l_i} \right) \end{aligned}$$

envoie  $\gamma^d \text{Id}_{A^n}$  sur  $(\otimes_{i=1}^d a_i^{\#k_i}) \otimes (\otimes_{i=1}^d a_i^{l_i})$ . Si on définit  $f_{k_1, \dots, k_d, l_1, \dots, l_d}$  comme la composée

$$\begin{aligned} \Gamma^d(-_1^\vee \otimes -_2) \subset (-_1^\vee \otimes -_2)^{\otimes d} &\xrightarrow{i_{k_1, \dots, k_d, l_1, \dots, l_d}} \left( -_1^{\vee \oplus d} \right)^{\otimes d} \otimes \left( -_2^{\oplus d} \right)^{\otimes d} \\ &\xrightarrow{m} S^d(-_1^{\vee \oplus d}) \otimes S^d(-_2^{\oplus d}), \end{aligned}$$

alors l'évaluation du morphisme  $f_{k_1, \dots, k_d, l_1, \dots, l_d}$  sur  $\gamma^d \text{Id}_{A^n}$  est égale au polynôme  $(k_1|l_1)(k_2|l_2) \dots (k_d|l_d)$ .  $\square$

**Proposition 4.2.10.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Le morphisme, naturel en  $B$  :*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(\Gamma^d gl, B) &\rightarrow B(A^n, A^n)^{GL_n/A} \\ f &\mapsto f_{A^n}(\gamma^d \text{Id}_{A^n}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme si  $n \geq d$ .

*Démonstration.* Le morphisme est à valeurs dans  $B(A^n, A^n)^{GL_n/A}$  d'après le lemme 4.2.6. D'après les lemmes 4.2.7 et 4.2.9, La proposition est vraie dans le cas où  $B$  est un bifoncteur injectif de la forme  $S^\mu(-_1^\vee) \otimes S^\lambda(-_2)$ . D'après la proposition 4.1.13, tout bifoncteur  $B$  homogène de bidegré  $(d, d)$  admet une résolution par des sommes directes de tel bifoncteurs injectifs. Comme les foncteurs

$$B \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(\Gamma^d gl, B) \text{ et } B \rightsquigarrow B(A^n, A^n)^{GL_n/A}$$

sont exacts à gauche et additifs, le résultat est valable pour un bifoncteur  $B$  quelconque.  $\square$

**Théorème 4.2.11.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $A$  et  $n \geq d$ . Il existe un isomorphisme naturel :*

$$H_{\mathcal{P},A}^*(B) \xrightarrow{\cong} H_{\text{rat}}^*(GL_n/A, B(A^n, A^n)).$$

*Démonstration.* Les foncteurs  $B \rightsquigarrow H_{\mathcal{P},A}^*(B)$ ,  $B \rightsquigarrow H_{\text{rat}}^*(GL_n/A, B(A^n, A^n))$  sont des  $\delta$ -foncteurs : ils transforment toute suite exacte courte admissible en suite exacte longue, et tout morphisme de suites exactes courtes en morphisme de suites exactes longues. De plus, ils sont tous les deux nuls en degré strictement positif sur les injectifs de  $\mathcal{P}_A(1, 1)$ . Pour la cohomologie des bifoncteurs, cela résulte de la définition 4.2.1 en termes d'extensions, et pour la cohomologie rationnelle, c'est une conséquence du corollaire D.2.5. L'isomorphisme naturel  $H_{\mathcal{P},A}^0(B) \simeq H_{\text{rat}}^0(GL_n/A, B(A^n, A^n))$  donné par la proposition 4.2.10 se prolonge donc de manière unique en un isomorphisme entre les  $\delta$ -foncteurs  $B \rightsquigarrow H_{\mathcal{P},A}^*(B)$  et  $B \rightsquigarrow H_{\text{rat}}^*(GL_n/A, B(A^n, A^n))$  d'après [8, prop III.5.2]. Cette proposition est énoncée dans le cadre des catégories abéliennes, mais on obtient sa démonstration dans le cas d'une catégorie exacte en remplaçant les suites exactes courtes par des suites exactes courtes admissibles.  $\square$

Nous dressons maintenant une liste de corollaires du théorème 4.2.11. En appliquant le théorème à des bifoncteurs séparables, on obtient tout d'abord une généralisation de [18, cor. 3.13] à un anneau  $A$  quelconque.

**Corollaire 4.2.12.** *Soient  $A$  un anneau commutatif,  $F, G \in \mathcal{P}_{d,A}$  deux foncteur polynomiaux homogène de degré  $d$  et  $n \geq d$  un entier. On a un isomorphisme, naturel en  $F, G$  :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{d,A}}^*(F, G) \simeq \text{Ext}_{GL_n/A}^*(F(A^n), G(A^n)) .$$

**Corollaire 4.2.13.** *Si  $B \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(1, 1)$  est un bifoncteur défini sur  $\mathbb{C}$  alors  $H_{\mathcal{P},\mathbb{C}}^i(B) = 0$  pour  $i > 0$ .*

*Démonstration.* Le groupe algébrique  $GL_n/\mathbb{C}$  est linéairement réductif [23, p. 125],[45, p. 97], [29, §6.2]. Par conséquent, le foncteur des points fixes sous l'action de  $GL_n/\mathbb{C}$  est exact. La cohomologie rationnelle de  $GL_n/\mathbb{C}$  est donc nulle en degré strictement positif. D'après le théorème 4.2.11, il en va de même pour la cohomologie des bifoncteurs sur  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.14.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Pour tout bifoncteur  $B$  sur  $\mathbb{K}$ , il existe un entier  $n_B$  tel que  $H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^n(B) = 0$  pour  $n > n_B$ .*

*Remarque 4.2.15.* Comme la cohomologie d'un bifoncteur  $B$  sur un corps  $\mathbb{K}$  s'annule à partir d'un certain degré et que les espaces vectoriels  $H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^i(B)$  sont de dimension finie, la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi$  de cette cohomologie a un sens :

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^i(B) .$$

**Corollaire 4.2.16.** *Soient  $A$  un anneau commutatif,  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  et  $n \geq d$  un entier. Notons  $p : A^{n+1} \rightarrow A^n$  et  $i : A^n \rightarrow A^{n+1}$  la surjection et l'injection du facteur direct  $A^n$  dans  $A^{n+1}$  et  $j : GL_n/A \hookrightarrow GL_{n+1}/A$ ,  $M \mapsto \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , l'inclusion correspondante. On a un isomorphisme :*

$$H_{\text{rat}}^*(GL_{n+1}/A, B(A^{n+1}, A^{n+1})) \xrightarrow[\simeq]{H_{\text{rat}}^*(j, B(i,p))} H_{\text{rat}}^*(GL_n/A, B(A^n, A^n)) .$$



*Démonstration.* Notons  $p : A^{n+1} \rightarrow A^n$  et  $i : A^n \rightarrow A^{n+1}$  la surjection et l'injection du facteur direct  $A^n$  dans  $A^{n+1}$ . On a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,A}^d}(\Gamma^d gl, B) & \xrightarrow{e_{B,n+1}} & B(A^{n+1}, A^{n+1}) \\ & \searrow e_{B,n} & \downarrow B(i,p) \\ & & B(A^n, A^n) \end{array}$$

Le morphisme  $A$ -linéaire  $B(i, p)$  est compatible aux actions de  $GL_{n+1}/A$  et  $GL_n/A$  : pour toute  $A$ -algèbre  $A'$  tout  $g \in GL_n(A')$  et tout  $x \in B(A^{n+1}, A^{n+1}) \otimes A'$  on a :

$$(B(i, p) \otimes A')(j(g).x) = g. (B(i, p) \otimes A')(x).$$

Le morphisme  $B(i, p)$  induit donc un morphisme  $B(A^{n+1}, A^{n+1})^{GL_{n+1}/A} \rightarrow B(A^n, A^n)^{GL_n/A}$ . D'après la commutativité du triangle et la proposition 4.2.10 le morphisme  $B(i, p)$  induit donc un isomorphisme naturel en  $B$  :

$$H_{\mathrm{rat}}^0(GL_{n+1}/A, B(A^{n+1}, A^{n+1})) \xrightarrow{\cong} H_{\mathrm{rat}}^0(GL_n/A, B(A^n, A^n)).$$

Les foncteurs

$$B \rightsquigarrow H_{\mathrm{rat}}^*(GL_{n+1}/A, B(A^{n+1}, A^{n+1})) \quad \text{et} \quad B \rightsquigarrow H_{\mathrm{rat}}^*(GL_n/A, B(A^n, A^n))$$

sont des  $\delta$ -foncteurs, nuls en degré strictement positif sur les injectifs de  $\mathcal{P}_d^d$ . D'après [8, prop III.5.2], cet isomorphisme en degré 0 se prolonge de manière unique en un isomorphisme de  $\delta$ -foncteurs.  $\square$

## 4.3 Premiers calculs

### 4.3.1 Cohomologie des produits tensoriels twistés

Le groupe  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  agit sur le bifoncteur  $gl^{\otimes d}$ , les éléments de  $\mathfrak{S}_d \times \{\mathrm{Id}\}$  agissant par permutation des variables covariantes et ceux de  $\{\mathrm{Id}\} \times \mathfrak{S}_d$  par permutation des variables contravariantes. L'effet  $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  est donc donné par la formule :

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) : gl^{\otimes d}(-1, -2) = (-\underset{\vee}{1} \otimes -2)^{\otimes d} &\rightarrow gl^{\otimes d}(-1, -2) \\ \otimes(x_i \otimes y_i) &\mapsto \otimes(x_{\sigma^{-1}(i)} \otimes y_{\tau^{-1}(i)}). \end{aligned}$$

Soient  $F, G$  des foncteurs polynomiaux à une variable. En précomposant la première variable de  $gl$  par  $F$  et la seconde par  $G$ , l'action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  sur  $gl^{\otimes d}$  induit une action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  sur le bifoncteur  $gl(F, G)^{\otimes d}$ . Par functorialité de  $H_{\mathcal{P}, A}^*(-)$ , cette action induit une structure de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module gradué sur  $H_{\mathcal{P}, A}^*(gl(F, G)^{\otimes d})$ .

Les bifoncteurs  $gl(F, G)^{\otimes d}$  et  $\mathcal{H}om(F^{\otimes d}, G^{\otimes d})$  sont isomorphes. D'après la proposition 4.2.5, on a donc un isomorphisme, naturel en  $F, G$  :

$$H_{\mathcal{P}, A}^*(gl(F, G)^{\otimes d}) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(F^{\otimes d}, G^{\otimes d}) \quad (*)$$

En outre, on peut définir une action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  sur  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(F^{\otimes d}, G^{\otimes d})$  en faisant agir  $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  comme le morphisme  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\sigma^{(-1)}, \tau)$ . Dans ce cas, l'isomorphisme (\*) est  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -équivariant.

Deux cas nous seront particulièrement utiles par la suite. Premièrement lorsque  $F = V \otimes -$  et  $G = W \otimes -$ , avec  $V$  et  $W$  deux  $A$ -modules projectifs de type fini, et deuxièmement lorsque  $F = G = I^{(r)}$ . Le théorème suivant détermine explicitement les  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules  $H_{\mathcal{P}, A}^*(gl(F, G)^{\otimes d})$  dans ces deux cas. Ce théorème est implicitement utilisé dans [9] et explicitement utilisé dans [13, 17]. Le deuxième cas du théorème est démontré dans [13, Th 1.8] sur un corps, mais la démonstration s'adapte sans problème à un anneau  $\mathbb{A}$  quelconque de caractéristique première. La démonstration du premier cas est analogue (en plus simple) à celle du deuxième cas. Remarquons enfin que dans le premier cas, le bifoncteur  $gl(V \otimes -, W \otimes -)^{\otimes d}$  est injectif et sa cohomologie est donc concentrée en degré zéro.

**Théorème 4.3.1.** *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $V, W$  deux  $A$ -modules projectifs de type fini. On a un isomorphisme  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -équivariant :*

$$\text{Hom}_A(V, W)^{\otimes d} \otimes A\mathfrak{S}_d \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{P}_A}((V \otimes -)^{\otimes d}, (W \otimes -)^{\otimes d}) \simeq H_{\mathcal{P}, A}^0(gl(V \otimes -, W \otimes -)^{\otimes d}),$$

où le premier isomorphisme est donné par la formule

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_d \otimes e_\sigma \mapsto ((f_1 \otimes -) \otimes \cdots \otimes (f_d \otimes -)) \circ \text{Hom}(\sigma^{-1}, (W \otimes -)^{\otimes d}).$$

De même, si  $\mathbb{A}$  est un anneau de caractéristique  $p$  première, on a un isomorphisme  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -équivariant :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(I^{(r)}, I^{(r)})^{\otimes d} \otimes A\mathfrak{S}_d \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(I^{(r)\otimes d}, I^{(r)\otimes d}) \simeq H_{\mathcal{P}, A}^*(gl^{(r)\otimes d}),$$

où le premier isomorphisme est donné par la formule

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_d \otimes e_\sigma \mapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) \circ \text{Ext}_{\mathcal{P}_A}^*(\sigma^{-1}, I^{(r)\otimes d}).$$

Dans les deux cas, l'action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  sur le membre de gauche est donnée par la formule :

$$(\sigma, \tau).v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes e_\zeta := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes e_{\sigma\zeta\tau^{-1}}.$$

### 4.3.2 Calcul de $H_{\mathcal{P}}^0$

Rappelons que  $D$  désigne le foncteur de dualité  $\mathcal{P}_A(1, 1) \rightsquigarrow \mathcal{P}_A(2)$  qui à  $B(-1, -2)$  associe  $B(-\frac{1}{1}, -2)$  (cf. lemme 4.1.7). La proposition suivante décrit la cohomologie de degré zéro des bifoncteurs  $B(V \otimes -, W \otimes -)$  comme le  $A$ -module résultant de l'évaluation du  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur  $\text{sym}(DB)$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P}, A}^0(gl(V \otimes -1, W \otimes -2)^{\otimes d})$  explicitement calculé au théorème 4.3.1.

**Proposition 4.3.2.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $V, W$  deux  $A$ -modules projectifs de type fini et  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $A$ . On a un isomorphisme naturel en  $B, V, W$  :*

$$H_{\mathcal{P}, A}^0(B(V \otimes -1, W \otimes -2)) \xrightarrow{\cong} \text{sym}(DB) \left( H_{\mathcal{P}, A}^0 \left( gl(V \otimes -1, W \otimes -2)^{\otimes d} \right) \right).$$

Jusqu'à la fin du paragraphe, nous adoptons la notation suivante. Si  $B \in \mathcal{P}_d^d$  est un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$ , on note  $B_W^V$  le bifoncteur polynomial homogène de bidegré  $(d, d)$  obtenu en précomposant la première variable par le foncteur  $V \otimes -$  et la deuxième variable par le foncteur  $W \otimes -$ . Le foncteur  $B \rightsquigarrow B_W^V$  est exact et dépend naturellement de  $V$  et  $W$ .

Reformulons l'énoncé de la proposition 4.3.2. Il nous faut démontrer que l'on a un isomorphisme naturel en  $B, V, W$  :

$$H_{\mathcal{P}, A}^0(B_W^V) \xrightarrow{\cong} \text{sym}(DB) \left( H_{\mathcal{P}, A}^0 \left( gl_W^{V \otimes d} \right) \right).$$

D'après la proposition 4.1.13, tout bifoncteur  $B$  homogène de bidegré  $(d, d)$  admet une résolution par des sommes directes de bifoncteurs injectifs du type  $\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)$ , où  $\lambda, \mu$  sont des uplets de poids  $d$ . Comme les foncteurs

$$B \rightsquigarrow H_{\mathcal{P}, A}^0(B_W^V) \quad \text{et} \quad B \rightsquigarrow \text{sym}(DB) \left( H_{\mathcal{P}, A}^0 \left( gl_W^{V \otimes d} \right) \right)$$

sont additifs et exacts à gauche, la proposition 4.3.2 se réduit à l'énoncé suivant :

**Proposition 4.3.3.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $V, W$  deux  $A$ -modules projectifs de type fini et  $\lambda, \mu$  des uplets de poids  $d$ . La comultiplication  $\Gamma^\lambda \hookrightarrow \otimes^d$  et la multiplication  $\otimes^d \rightarrow S^\lambda$  induisent un épimorphisme  $\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) \rightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)$ . Cet épimorphisme induit un isomorphisme :*

$$\text{sym}(D\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)) \left( H_{\mathcal{P}, A}^0 \left( \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V \right) \right) \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{P}, A}^0 \left( \mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)_W^V \right),$$

naturel en  $V, W$  et vis-à-vis des morphismes  $\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu) \rightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})$ .

La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de la proposition 4.3.3. Soient  $A$  un anneau commutatif,  $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$  des uplets de poids  $d$  et  $\phi : \mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu) \rightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})$  un morphisme. Le foncteur  $\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)$  est projectif, il existe donc  $\tilde{\phi}$  telle que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) & (D1) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & \\ \mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'}) & \end{array}$$

D'après le théorème 3.2.1, le foncteur  $\text{sym}$  associé au foncteur polynomial  $D\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) = \otimes^d \boxtimes \otimes^d$  le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur d'oubli qui envoie un  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $M$  sur le  $A$ -module  $M$  sous-jacent. On a donc une égalité, naturelle en  $V, W$  :

$$\text{sym}(D\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)) \left( H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) \right) = H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V).$$

Le lemme suivant montre que cette égalité est également naturelle vis à vis des morphismes  $\theta : \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) \rightarrow \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)$ .

**Lemme 4.3.4.** Soit  $\theta : \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) \rightarrow \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)$  une transformation naturelle. Alors le morphisme induit par  $\theta$  au niveau de la cohomologie de degré 0

$$H_{\mathcal{P}}^0(\theta) : H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) \rightarrow H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V)$$

est égal à  $\text{sym}(D(\theta))$ .

*Démonstration.* Par définition de l'action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  sur  $H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V)$ , c'est vrai si  $\theta$  est un élément de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  qui agit par permutation des variables de  $\otimes^d gl$ . Or on a :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d), \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\otimes^d, \otimes^d)^{\otimes 2} \simeq A(\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d).$$

Le premier isomorphisme résulte de la formule de Künneth (cf. proposition 1.4.16) et le deuxième isomorphisme de la proposition 1.4.26. Ainsi, toute transformation naturelle  $\theta : \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) \rightarrow \mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ . Par linéarité des foncteurs  $H_{\mathcal{P}}^0(-)$ ,  $D$  et  $\text{sym}$  l'énoncé est donc vrai pour toute transformation naturelle  $\theta$ .  $\square$

En appliquant les foncteurs  $H_{\mathcal{P}}^0$  et  $-^V_W$  au diagramme (D1), on obtient donc le diagramme commutatif suivant, naturel en  $V, W$  :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & \xrightarrow{\text{sym}(D\tilde{\phi})} & H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & (D2) \\ \downarrow H_{\mathcal{P}}^0(\pi) & & \downarrow H_{\mathcal{P}}^0(\pi') & \\ H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)_W^V) & \xrightarrow{H_{\mathcal{P}}^0(\phi)} & H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})_W^V) & \end{array}$$

**Lemme 4.3.5.** Le morphisme  $H_{\mathcal{P}}^0(\pi) : H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) \rightarrow H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)_W^V)$  est surjectif et factorise en un isomorphisme :

$$\overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi)} : H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V)_{\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu} \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)_W^V).$$

*Démonstration.* Dans cette démonstration, si  $V$  est un  $A$ -module projectif de type fini et  $F$  un foncteur polynomial à une variable, nous notons  $F_V$  le foncteur polynomial  $F(V \otimes -)$ . De cette façon, on a une égalité  $\mathcal{H}om(F, G)_W^V = \mathcal{H}om(F_V, G_W)$ . Le morphisme  $H_{\mathcal{P}}^0(\pi)$  est un morphisme entre foncteur séparables. D'après la proposition 4.2.5, l'énoncé du lemme revient à démontrer que la multiplication  $\otimes^d \rightarrow S^\lambda$  et la comultiplication  $\Gamma^\mu \rightarrow \otimes^d$  induisent un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, S_W^\mu).$$

Comme  $\Gamma_V^\lambda$  est un projectif de  $\mathcal{P}_{d,A}$ , le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, -)$  est exact et la présentation des puissances symétriques  $S^\mu$

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mu} \otimes^d \xrightarrow{\oplus 1 - \sigma} \otimes^d \rightarrow S^\mu \rightarrow 0$$

induit une présentation du  $A$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, S_W^\mu)$  :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mu} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, \otimes_W^d) \xrightarrow{\oplus^{1-\sigma}} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, \otimes_W^d) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, S_W^\mu) \rightarrow 0.$$

On reconnaît la présentation des coinvariants du  $\mathfrak{S}_d$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, \otimes_W^d)$  sous l'action du sous-groupe de Young  $\mathfrak{S}_\mu$ . La multiplication  $\otimes^d \rightarrow S^\lambda$  induit donc un isomorphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\mu} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, S_W^\mu)$ . De même le foncteur  $\otimes_W^d$  est un injectif de  $\mathcal{P}_{d,A}$ . La coprésentation des puissances divisées  $\Gamma^\lambda$  induit donc une suite exacte

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d) \xrightarrow{\oplus^{1-\sigma}} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, \otimes_W^d) \rightarrow 0.$$

Le foncteur des coinvariants est exact à droite, on a donc une suite exacte :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\mu} \xrightarrow{\oplus^{1-\sigma}} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\mu} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\mu} \rightarrow 0.$$

On reconnaît la présentation des coinvariants du  $\mathfrak{S}_d$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\mu}$  sous l'action du sous-groupe de Young  $\mathfrak{S}_\lambda$ . Par conséquent, la comultiplication  $\Gamma^\lambda \rightarrow \otimes^d$  induit un isomorphisme  $(\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\mu})_{\mathfrak{S}_\lambda} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\mu}$ . En composant les deux isomorphismes obtenus, on obtient que le morphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, S_W^\mu)$  est surjectif et se factorise en un isomorphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(\otimes_V^d, \otimes_W^d)_{\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\Gamma_V^\lambda, S_W^\mu)$ .  $\square$

D'après le théorème 3.2.1, le foncteur *sym* envoie le foncteur polynomial  $D\mathcal{H}om(\Gamma^\mu, S^\lambda) = S^\lambda \boxtimes S^\mu$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur coinvariant  $\text{coinv}_{\lambda, \mu}$  qui associe à un  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $M$  le  $A$ -module  $M_{\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu}$  des coinvariants de  $M$  sous l'action du groupe de Young  $\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu$ . De plus la projection  $M \twoheadrightarrow M_{\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu}$  naturelle en  $M$  est égale à la symétrisation du morphisme

$$D\pi : \otimes^d \boxtimes \otimes^d = D\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) \rightarrow D\mathcal{H}om(\Gamma^\mu, S^\lambda) = S^\mu \boxtimes S^\lambda.$$

On peut donc réécrire le diagramme (D2) sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & \xrightarrow{\text{sym}(D\tilde{\phi})} & H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & (D3) \\ \downarrow \text{sym}(D\pi) & & \downarrow \text{sym}(D\pi') & \\ \text{coinv}_{\lambda, \mu} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & & \text{coinv}_{\lambda', \mu'} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & \\ \simeq \downarrow \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi)} & & \simeq \downarrow \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi')} & \\ H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)_W^V) & \xrightarrow{H_{\mathcal{P}}^0(\phi)} & H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})_W^V) & \end{array}$$

Nous pouvons maintenant compléter le diagramme commutatif (D3) en un diagramme (D4) (que nous n'avons pas encore identifié comme un diagramme *commutatif*).

$$\begin{array}{ccc}
H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & \xrightarrow{\text{sym}(D\tilde{\phi})} & H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & (D4) \\
\downarrow \text{sym}(D\pi) & & \downarrow \text{sym}(D\pi') & \\
\text{coinv}_{\lambda, \mu} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & \xrightarrow{\text{sym}(D\phi)} & \text{coinv}_{\lambda', \mu'} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V) & \\
\downarrow \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi)} & & \downarrow \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi')} & \\
H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)_W^V) & \xrightarrow{H_{\mathcal{P}}^0(\phi)} & H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})_W^V) & 
\end{array}$$

**Lemme 4.3.6.** *Le diagramme (D4) commute.*

*Démonstration.* Le carré supérieur du diagramme commute car il s'obtient en appliquant les foncteurs  $D$ ,  $\text{sym}$  au diagramme commutatif (D1). Vérifions la commutativité du carré inférieur. Soit  $y \in \text{coinv}_{\lambda, \mu} H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V)$ . Par surjectivité de  $\text{sym}(D\pi)$ , il existe un élément  $x \in H_{\mathcal{P}}^0(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)_W^V)$  tel que  $y = \text{sym}(D\pi)(x)$ . On a :

$$\begin{aligned}
\overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi')} \circ \text{sym}(D\phi)(y) &= \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi')} \circ \text{sym}(D\phi) \circ \text{sym}(D\pi)(x) \\
&= \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi')} \circ \text{sym}(D\pi') \circ \text{sym}(D\tilde{\phi})(x) \\
&= H_{\mathcal{P}}^0(\phi) \circ \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi)}(x) \circ \text{sym}(D\pi)(x) \quad \text{par commutativité de (D3)} \\
&= H_{\mathcal{P}}^0(\phi) \circ \overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi)}(y).
\end{aligned}$$

Le carré inférieur est donc lui aussi commutatif.  $\square$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.3.3 : l'isomorphisme de la proposition est donné par  $\overline{H_{\mathcal{P}}^0(\pi)}$ , il est naturel en  $V, W$  et sa naturalité vis-à-vis des morphismes  $\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu) \rightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})$  est démontrée par la commutativité du diagramme (D4).

### 4.3.3 Une propriété de symétrie de la cohomologie

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $V$  un  $A$ -module projectif de type fini. Les bifoncteurs  $B(V^\vee \otimes -_1, -_2)$  et  $B(-_1, V \otimes -_2)$  ne sont pas isomorphes en général. Cependant leurs cohomologies sont isomorphes.

**Proposition 4.3.7.** *Soient  $A$  un anneau commutatif, et  $V$  un  $A$ -module projectif de type fini. On a un isomorphisme, naturel en  $B, V$  :*

$$H_{\mathcal{P}, A}^*(B(V^\vee \otimes -_1, -_2)) \simeq H_{\mathcal{P}, A}^*(B(-_1, V \otimes -_2))$$

*Démonstration.* On utilise le foncteur  $\text{IRes}^\bullet$  qui à un bifoncteur  $B$  associe une résolution injective de  $B$  (cf. proposition 4.1.13). En utilisant la formule exponentielle, on voit

facilement que si  $J$  est un injectif de  $\mathcal{P}_{d,A}^d$  alors  $I(V^\vee \otimes -1, -2)$  et  $I(-1, V \otimes -2)$  sont encore des injectifs de  $\mathcal{P}_{d,A}^d$ . L'homologie du complexe, naturel en  $B, V$

$$H_{\mathcal{P},A}^0(\text{IRes}(B)^\bullet(V^\vee \otimes -1, -2)) \quad (*)$$

calcule donc la cohomologie du bifoncteur  $B(V^\vee \otimes -1, -2)$ . D'après la proposition 4.3.2, ce complexe est isomorphe, naturellement en  $B, V$ , à l'évaluation du complexe de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteurs  $\text{sym}(\text{DIRes}(B)^\bullet)$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P},A}^0(\text{gl}(V^\vee \otimes -1, -2)^{\otimes d})$ . Or, d'après le théorème 4.3.1 on a un isomorphisme  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -équivariant, naturel en  $V$  :

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{P},A}^0(\text{gl}(V^\vee \otimes -1, -2)^{\otimes d}) &\simeq \text{Hom}_A(V^\vee, A)^{\otimes d} \otimes A\mathfrak{S}_d \\ &\simeq \text{Hom}_A(A, V)^{\otimes d} \otimes A\mathfrak{S}_d \simeq H_{\mathcal{P},A}^0(\text{gl}(-1, V \otimes -2)^{\otimes d}) . \end{aligned}$$

Ainsi, le complexe  $(*)$  est isomorphe (naturellement en  $B, V$ ) à l'évaluation de  $\text{sym}(\text{DIRes}(B)^\bullet)$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P},A}^0(\text{gl}(-1, V \otimes -2)^{\otimes d})$ . En utilisant de nouveau la proposition 4.3.2, on obtient un isomorphisme, naturel en  $B, V$  entre le complexe  $(*)$  et le complexe  $H_{\mathcal{P},A}^0(\text{IRes}(B)^\bullet(-1, V \otimes -2))$  qui calcule l'homologie du bifoncteur  $B(-1, V \otimes -2)$ . Cet isomorphisme de complexes induit un isomorphisme, naturel en  $B, V$ , entre les  $A$ -modules de cohomologie  $H_{\mathcal{P},A}^*(B(V^\vee \otimes -1, -2))$  et  $H_{\mathcal{P},A}^*(B(-1, V \otimes -2))$ .  $\square$

#### 4.3.4 Cohomologie des bifoncteurs sur $\mathbb{Z}$

**Proposition 4.3.8.** *Soit  $B$  un bifoncteur polynomial homogène de bidegré  $(b, b)$  sur  $\mathbb{Z}$ . Alors*

- (1) *Pour tout  $i > 0$ ,  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de torsion de type fini.*
- (2) *On a un isomorphisme naturel en  $B$  :*

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(B) \xrightarrow{\cong} \text{sym}(DB)(\mathbb{Z}\mathfrak{S}_b) ,$$

où l'action de  $\mathfrak{S}_b \times \mathfrak{S}_b$  sur  $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_b$  est donnée par  $(\sigma, \eta).e_\alpha = e_{\sigma\alpha\eta^{-1}}$ .

*Démonstration.* La deuxième assertion est déjà connue (proposition 4.3.2), il nous reste à montrer la première. La cohomologie du bifoncteur  $B_{\mathbb{C}}$  obtenu par changement de base sur les nombres complexes est nulle en degré strictement positif. D'après le théorème de changement de base 4.1.15, le groupe  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  est nul donc nul pour tout  $i > 0$ . Puisque les  $\mathbb{Z}$ -modules  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B)$  sont de type fini (proposition 4.2.3),  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de torsion.  $\square$

## Chapitre 5

# Calculs de cohomologie en caractéristique $p$ première

Dans ce chapitre, nous développons des techniques pour calculer la cohomologie des bifoncteurs sur un anneau commutatif  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$  première. Nous nous intéressons plus particulièrement à la cohomologie des bifoncteurs twistés. Dans chacun des trois paragraphes de ce chapitre, nous décrivons des techniques avec des objectifs différents. Dans le paragraphe 5.1 nous comparons pour un bifoncteur polynomial  $B$  la cohomologie d'un bifoncteur  $B^{(r)}$  twisté avec la cohomologie du bifoncteur  $B(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)$ . Nous en déduisons des résultats sur la cohomologie des bifoncteurs twistés. Dans le paragraphe 5.2, nous développons des techniques de calcul de la caractéristique d'Euler de la cohomologie des bifoncteurs. Enfin, dans le paragraphe 5.3, nous détaillons une technique de changement de base qui complète les techniques du paragraphe 5.1 et permettra d'effectuer des calculs explicites de séries de Poincaré au chapitre 6.

Revenons au contenu du paragraphe 5.1. Nous y développons une approche qui s'inspire et généralise les techniques de Chałupnik [9] dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux sur un corps. Le point de départ est la cohomologie  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$  des produits tensoriels twistés de  $gl$  décrite au théorème 4.3.1. En particulier, on remarque qu'on a un isomorphisme (non gradué) de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \simeq H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(gl(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)^{\otimes d}) \quad (*)$$

Nous généralisons cet isomorphisme au paragraphe 5.1. Plus précisément, nous démontrons au théorème 5.1.8 que si  $B$  est un bifoncteur et  $r$  un entier positif, il existe une suite spectrale  $E(B, r)$  qui converge vers la cohomologie de  $B^{(r)}$  et dont la deuxième page est isomorphe (de manière non graduée) à  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2))$ . Dans le cas des produits tensoriels twistés de  $gl$ , cette suite spectrale dégénère à la seconde page et ceci redonne l'isomorphisme (\*).

Plus généralement, pour un bifoncteur  $B$  tel que la suite spectrale  $E(B, r)$  dégénère à la deuxième page, la précomposition par le twist de Frobenius n'a qu'un effet très simple sur la cohomologie. La cohomologie de  $B^{(r)}$  se lit (à une graduation près) sur



la cohomologie de  $B(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)$ . Nous disons alors (définition 5.1.10) que le twist de Frobenius est *transparent* pour  $B$ .

La suite spectrale  $E(B, r)$  donne des renseignements importants sur la cohomologie des bifoncteurs pour lesquels le twist est transparent. Pour cette raison, nous étudions des conditions suffisantes de transparence du twist. Ces conditions (propositions 5.1.12, 5.1.13 et 5.1.15) sont appelées « Ext-conditions » en référence à la terminologie déjà employée par Chalupnik [9]. Nous conjecturons (conjecture 5.1.20) que le twist de Frobenius est transparent pour tous les bifoncteurs.

Enfin, nous utilisons la suite spectrale  $E(B, r)$  pour démontrer le théorème 5.1.26. Ce théorème donne des informations explicites sur la cohomologie de  $B^{(r)}$  lorsque le twist est transparent pour  $B$ , et donne dans les cas favorables une description complète de la cohomologie de  $B^{(r)}$  en termes de symétrisations. Ce théorème est une importante généralisation du théorème principal de [9], cf. remarque 5.1.28.

La caractéristique d'Euler de la cohomologie des bifoncteurs est une information intéressante. Par exemple, de nombreux bifoncteurs classiques (les injectifs twistés, les puissances symétriques twistées de  $gl \dots$ ) ont peu ou pas de cohomologie en degré impair. La caractéristique d'Euler fournit donc une minoration non triviale de la taille de leur cohomologie. Dans le paragraphe 5.2, nous développons des techniques pour calculer facilement la caractéristique d'Euler de la cohomologie des bifoncteurs. Comme exemple d'application, nous donnons une formule pour calculer la caractéristique d'Euler des bifoncteurs  $S_{\mu/\mu'}^{(r)} gl$  et  $W_{\mu/\mu'}^{(r)} gl$  obtenus en précomposant un foncteur de Schur ou de Weyl twisté avec le bifoncteur  $gl$ . A titre de comparaison, la cohomologie des bifoncteurs de ce type n'est connue que dans un petit nombre de cas : les tenseurs symétriques twistés de  $gl$  (théorème 6.1.1 du chapitre 6), les puissances divisées  $\Gamma^{p(r)} gl$  en caractéristique  $p$  (théorème 6.2.29 du chapitre 6) et lorsque la caractéristique de  $\mathbb{A}$  est plus grande que le degré des foncteurs en jeu [13, prop. 4.1].

Présentons maintenant le problème qui motive les développements du paragraphe 5.3. Soit  $B$  un bifoncteur défini sur  $\mathbb{Z}$  et  $B_{\mathbb{F}_p}$  le bifoncteur obtenu à partir de  $B$  par changement de base sur  $\mathbb{F}_p$ . Nous cherchons à calculer la série de Poincaré de la cohomologie de  $B_{\mathbb{F}_p}^{(r)}$ .

Les techniques développées au paragraphe 5.1 suggèrent l'approche suivante. Dans les cas favorables, le théorème 5.1.26 décrit la cohomologie de  $B_{\mathbb{F}_p}^{(r)}$  comme l'évaluation du  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur  $sym(DB_{\mathbb{F}_p})$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module gradué  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d})$  (explicitement décrit au théorème 4.3.1). L'inconvénient de cette approche est que le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur  $sym(DB_{\mathbb{F}_p})$  n'est pas toujours facile à calculer explicitement.

Dans le paragraphe 5.3, nous développons une technique qui permet de contourner cette difficulté. Le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d})$  se décompose en une somme directe de  $\mathbb{F}_p$ -modules de permutation dits « élémentaires » :

$$H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d}) \simeq \bigoplus_i \mathbb{F}_p E_i .$$

Pour calculer la série de Poincaré de la cohomologie de  $B_{\mathbb{F}_p}^{(r)}$ , il faut donc calculer la dimension des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{F}_p E_i)$ . Le résultat principal du paragraphe 5.3 est le théorème 5.3.2 qui affirme que sous certaines conditions, la dimension de ce  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel est égale à la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{C}E_i)$ . L'intérêt de cette technique de changement de base est que la symétrisation du bifoncteur  $DB_{\mathbb{C}}$  est nettement plus facile à calculer que celle du bifoncteur  $DB_{\mathbb{F}_p}$ . Cette idée montrera son efficacité au chapitre 6, où elle nous permettra de déterminer la série de Poincaré de la cohomologie des tenseurs symétriques twistés de  $gl$  (théorème 6.1.1).

## 5.1 Transparence du twist de Frobenius

### 5.1.1 Cohomologie des injectifs twistés

Soient  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première et  $\lambda, \mu$  des uplets de poids  $d$ . D'après le théorème 3.2.1, le foncteur  $\text{sym}$  envoie le foncteur polynomial à deux variables  $D\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur  $\text{coinv}_{\lambda, \mu}$  qui à un  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $M$  associe le  $\mathbb{A}$ -module  $M_{\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu}$  des coinvariants de  $M$  sous l'action du sous-groupe de Young  $\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu$ . La proposition suivante est donc une version renforcée du théorème 2.3.4, dans laquelle on a ajouté la naturalité vis-à-vis des morphismes  $\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu) \rightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})$ .

**Proposition 5.1.1.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  et  $\lambda, \mu$  des uplets de poids  $d$ . La comultiplication  $\Gamma^\lambda \hookrightarrow \otimes^d$  et la multiplication  $\otimes^d \twoheadrightarrow S^\lambda$  induisent un épimorphisme  $\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d) \twoheadrightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)$ . Cet épimorphisme induit un isomorphisme :*

$$\text{sym}(D\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)) \left( H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \right) \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)^{(r)}).$$

Cet isomorphisme est naturel vis-à-vis des morphismes

$$\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu) \rightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'}).$$

*Démonstration.* La démonstration est analogue à la démonstration de la proposition 4.3.3. La seule différence est la nécessité d'utiliser le théorème 2.3.4 pour justifier que l'application

$$H_{\mathcal{P}}^*(\pi) : H_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)^{(r)}) \rightarrow H_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})^{(r)})$$

factorise en un isomorphisme

$$\overline{H_{\mathcal{P}}^*(\pi)} : H_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{H}om(\otimes^d, \otimes^d)^{(r)})_{\mathfrak{S}_\lambda \times \mathfrak{S}_\mu} \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'})^{(r)}).$$

□

D'après la proposition 2.3.1 du chapitre 2, il existe un isomorphisme  $\mathbb{A}$ -linéaire (non gradué)  $\varsigma : \text{Hom}_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}(I^{\oplus p^r}, I) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})$ . La composée :

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^0(gl(I^{\oplus p^r}, I)^{\otimes d}) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}(I^{\oplus p^r}, I)^{\otimes d} \otimes \mathbb{A}\mathfrak{S}_d \\ &\xrightarrow{\varsigma^{\otimes d} \otimes \mathbb{A}\mathfrak{S}_d} \text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})^{\otimes d} \otimes \mathbb{A}\mathfrak{S}_d \simeq H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}), \end{aligned}$$

où les deux isomorphismes des extrémités sont donnés par le théorème 4.3.1, est un isomorphisme  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -équivariant. En le combinant avec les propositions 4.3.3 et 5.1.1, on obtient :

**Corollaire 5.1.2.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $\lambda, \mu$  des uplets de poids  $d$ . Il existe un isomorphisme (non gradué) :*

$$\xi : H_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^0(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda(I^{\oplus p^r}), S^\mu)) \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)^{(r)}) .$$

De plus, cet isomorphisme est naturel vis à vis des des morphismes

$$\mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu) \rightarrow \mathcal{H}om(\Gamma^{\lambda'}, S^{\mu'}) .$$

*Remarque 5.1.3.* Ce résultat est une généralisation du théorème 2.2.5. Dans le théorème 2.2.5, on ne disposait que de la naturalité vis-à-vis de la variable  $S^\mu$ . La naturalité est ici étendue aux deux variables. En examinant l'isomorphisme de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules gradués  $H_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^0(gl(I^{\oplus p^r}, I)^{\otimes d}) \simeq H_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^*(gl^{(r)\otimes d})$ , on peut montrer que  $\xi$  agit de la même manière sur les graduations que le morphisme  $\xi^g$  du théorème 2.2.5. Nous n'aurons pas besoin de cette information par la suite.

### 5.1.2 Cohomologie des bifoncteurs twistés

Soit  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première et  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $\mathbb{A}$ . On définit le bicomplexe  $\mathcal{C}^{\bullet, \bullet}(B, r)$  naturel en  $B$  par la formule :

$$\mathcal{C}^{\bullet, \bullet}(B, r) = \text{IRes}^*(\text{IRes}^{\bullet(r)}(B)) .$$

**Lemme 5.1.4.** *Le complexe  $\text{Tot}(\mathcal{C}^{\bullet, \bullet}(B, r))$  est une résolution injective de  $B^{(r)}$ .*

*Démonstration.* Notons  $\partial$  la différentielle verticale de ce bicomplexe et  $\delta$  la différentielle horizontale. Pour tout  $i$ , la colonne  $(\mathcal{C}^{i, \bullet}, \partial)$  de ce bicomplexe est une résolution de  $\text{IRes}^{i(r)}(B)$ . Comme le twist  $-^{(r)}$  est exact, si on calcule l'homologie selon les colonnes puis selon les lignes on obtient  $B^{(r)}$  en bidegré  $(0, 0)$  et 0 ailleurs. Le complexe  $\text{Tot}(\mathcal{C}^{\bullet, \bullet}(B))$  est donc une résolution de  $B^{(r)}$ .  $\square$

On munit le bicomplexe  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d, \mathbb{A}}}(\Gamma^{p^r d} gl, \mathcal{C}^{\bullet, \bullet}(B, r))$  de la filtration  $(F_i)_{i \geq 0}$  transverse aux lignes :  $F_{i_0} = \bigoplus_{i \geq i_0} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^{i, j}$ . En prenant la suite spectrale associée à ce bicomplexe et à cette filtration on obtient (théorème C.2.1) :

**Lemme 5.1.5.** *Pour tout entier  $r$  positif, il existe un foncteur  $E(-, r)$  qui à un bifoncteur polynomial  $B$  associe une suite spectrale cohomologique de premier quadrant  $(E_k(B, r), d_k)$  telle que :*

- (1) *La différentielle  $d_i$  est de bidegré  $(i, 1 - i)$ .*
- (2) *Les complexes  $(E_1^{\bullet, j}(B, r), d_1)$  et  $H_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^j(\text{IRes}^{\bullet(r)}(B))$  sont isomorphes.*
- (3) *La suite spectrale  $E_k(B, r)$  converge vers le gradué de la cohomologie de bifoncteur de  $B$  :*

$$E_\infty^{i, j}(B, r) = F_i H_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^{i+j}(B^{(r)}) / F_{i+1} H_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}^{i+j}(B^{(r)}) .$$

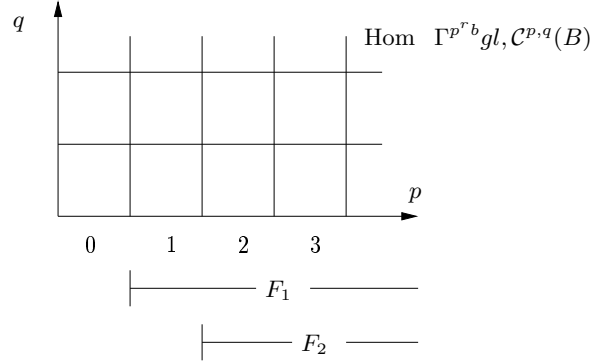


FIG. 5.1 – La filtration  $(F_i)_{i \geq 0}$

**Lemme 5.1.6.** *Soit  $B$  un bifoncteur polynomial et  $r$  un entier positif. Pour tout  $i \geq 0$ , on a un isomorphisme, naturel en  $B$  :*

$$H_{\mathcal{P}}^i \left( B(-\oplus_1^{p^r}, -2) \right) \cong \bigoplus_{j \geq 0} E_2^{i,j}(B, r).$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.1.5, on a pour tout  $j$  un isomorphisme de complexes :

$$\left( E_1^{\bullet,j}(B, r), d_1 \right) \simeq H_{\mathcal{P}}^j(\text{IRes}^{\bullet(r)}(B)).$$

D'autre part, d'après le corollaire 5.1.2, on a un isomorphisme de complexes :

$$H_{\mathcal{P}}^0(\text{IRes}^{\bullet}(B)(-\oplus_1^{p^r}, -2)) \xrightarrow[\xi]{\cong} \bigoplus_{j \geq 0} H_{\mathcal{P}}^j(\text{IRes}^{\bullet(r)}(B)).$$

Le complexe  $\text{IRes}^{\bullet}(B)(-\oplus_1^{p^r}, -2)$  est une résolution injective de  $B(-\oplus_1^{p^r}, -2)$ . L'isomorphisme de l'énoncé s'obtient donc en prenant l'homologie des complexes isomorphes  $H_{\mathcal{P}}^0(\text{IRes}^{\bullet}(B)(-\oplus_1^{p^r}, -2))$  et  $\bigoplus_{j \geq 0} E_1^{\bullet,j}(B, r)$ .  $\square$

**Lemme 5.1.7.** *Soit  $B$  un bifoncteur polynomial et  $r$  un entier positif. On gradue la deuxième page  $E_2^{*,*}(B, r)$  par le degré total :  $\deg E_2^{i,j}(B, r) = i + j$ . Alors on a un isomorphisme  $\mathbb{Z}/2$ -gradué, naturel en  $B$  :*

$$E_2^{*,*}(B, r) \simeq H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-\oplus_1^{p^r}, -2)).$$

*Démonstration.* Le lemme précédent donne un isomorphisme naturel en  $B$  :

$$\bigoplus_{i \geq 0} H_{\mathcal{P}}^i(B(-\oplus_1^{p^r}, -2)) \simeq \bigoplus_{i \geq 0} \bigoplus_{j \geq 0} E_2^{i,j}(B, r) \quad (*)$$

qui envoie les degrés pair  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^{\text{pair}}(B(-\oplus_1^{p^r}, -2))$  sur

$$\bigoplus_{i \text{ pair}} \bigoplus_{j \geq 0} E_2^{i,j}(B, r).$$

Mais la cohomologie des injectifs twistés de  $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1, 1)$  est nulle en degré impair (d'après la proposition 5.1.1), donc d'après le lemme 5.1.5, les lignes d'indice  $j$  impair de la suite spectrale sont nulles. Ainsi les degrés pairs du module gradué (par la graduation totale)  $E_2^{*,*}(B, r)$  sont donnés par la somme

$$\bigoplus_{i+j \text{ pair}} E_2^{i,j}(B, r) = \bigoplus_{i \text{ pair}, j \text{ pair}} E_2^{i,j}(B, r) = \bigoplus_{i \text{ pair}} \bigoplus_{j \geq 0} E_2^{i,j}(B, r).$$

L'isomorphisme (\*) respecte donc la parité des degrés.  $\square$

**Théorème 5.1.8.** *Soient  $r$  un entier positif et  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Il existe un foncteur  $E(-, r)$  qui à un bifoncteur  $B$  associe une suite spectrale  $E(B, r)$  telle que :*

(i) *Si on gradue  $E_2^{*,*}(B, r)$  par le degré total :  $\deg E_2^{i,j}(B, r) = i + j$ , alors on a un isomorphisme  $\mathbb{Z}/2$ -gradué :*

$$E_2^{*,*}(B, r) \simeq H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)).$$

(ii)  *$E(B, r)$  converge vers  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B^{(r)})$ .*

*Remarque 5.1.9.* Comme la suite spectrale  $E(B, r)$  est naturelle en  $B$ , la filtration de la cohomologie  $H_{\mathcal{P}}^*(B^{(r)})$  associée à cette suite spectrale est elle aussi naturelle en  $B$ . Ainsi tout morphisme  $f : B \rightarrow B'$  induit en cohomologie un morphisme  $H_{\mathcal{P}}^*(f^{(r)})$  qui respecte la filtration, et le morphisme  $\text{Gr}H_{\mathcal{P}}^*(f^{(r)})$  est bien défini (et est égal à  $E_{\infty}(f, r)$ ).

### 5.1.3 Transparence du twist de Frobenius

On dit qu'une suite spectrale  $(E_k, d_k)$  dégénère à la deuxième page si les différentielles  $(d_k)_{k \geq 2}$  sont nulles.

**Définition 5.1.10.** Soit  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  défini sur un anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$  première. On dit que le twist de Frobenius est *transparent* pour  $B$  si toutes les suites spectrales  $E(B, r)$ ,  $r \geq 0$ , dégénèrent à la deuxième page.

**Théorème 5.1.11.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $B$  un bifoncteur sur  $\mathbb{A}$ . Il existe une filtration naturelle sur la foncteur  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(-^{(r)})$  :*

$$H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(-^{(r)}) = F_0 H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(-^{(r)}) \supset F_1 H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(-^{(r)}) \supset \dots \supset F_n H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(-^{(r)}) \supset \dots$$

*Si le twist de Frobenius est transparent pour  $B$ , alors il existe un isomorphisme  $\mathbb{Z}/2$ -gradué, naturel en  $B$  :*

$$\text{Gr}H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B^{(r)}) \xrightarrow{\simeq} H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)).$$

## Conditions de transparence du twist de Frobenius

Nous détaillons maintenant trois conditions qui assurent chacune la transparence du twist. Nous appelons ces conditions des « Ext-conditions » car elles portent sur la forme des groupes d'extensions  $\text{Ext}^*(\Gamma^d gl, B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2))$ , et en référence à la terminologie déjà adoptée par M. Chalupnik [9, Th 4.4] pour les calculs dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ . Les trois conditions sont reliées entre elles par le schéma suivant (où  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  est un corps pour la première implication) :

$$\begin{array}{c} \text{Ext-condition 1 : } \forall r \in \mathbb{N}, \quad \dim H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B^{(r)}) = \dim H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2)) . \\ \uparrow \\ \text{Ext-condition 2 : } \forall r \in \mathbb{N}, \quad H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2)) = 0 \quad \text{si } * \text{ impair.} \\ \uparrow \\ \text{Ext-condition 3 : } \forall r \in \mathbb{N}, \quad H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2)) = 0 \quad \text{si } * > 0. \end{array}$$

De plus, les implications de ce schéma ne sont pas des équivalences, comme le montreront les exemples.

**Proposition 5.1.12 (Première « Ext-condition »).** *Soient  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique  $p$  première et  $B$  un bifoncteur polynomial sur  $\mathbb{K}$ . Le twist est transparent pour  $B$  si et seulement si pour tout  $r$  les  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B^{(r)})$  et  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2))$  ont même dimension totale.*

*Démonstration.* D'après le théorème 5.1.8, la dimension de la deuxième page de  $E(B, r)$  est égale à la dimension de  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2))$ . D'autre part, cette dimension est finie d'après la proposition 4.2.3 et le corollaire 4.2.14. Comme on a l'inégalité

$$\dim H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B^{(r)}) = \dim E_{\infty}(B, r) \leq \min_{i \geq 2} \dim \text{Ker } d_i \leq \dim E_2(B, r),$$

la suite spectrale dégénère donc à la deuxième page si et seulement si  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B^{(r)})$  et  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2))$  ont même dimension totale.  $\square$

**Proposition 5.1.13 (Deuxième « Ext-condition »).** *Soit  $B$  un bifoncteur polynomial sur un anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$  première. Si pour tout  $r$  la cohomologie de  $B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2)$  est nulle en degré impair, alors le twist de Frobenius est transparent pour  $B$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 5.1.6, si la cohomologie de  $B(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2)$  est nulle en degré impair alors les colonnes  $E_2^{i, *}(B, r)$  d'indice  $i$  impair sont nulles. Mais de plus, les lignes de la première page  $E_1^{*, j}(B, r)$  sont égales à  $H_{\mathcal{P}}^j(\text{IRes}^*(B)^{(r)})$ , et la cohomologie des  $r$ -twists des injectifs est nulle en degré impair (cf. proposition 5.1.1). En conséquence, les lignes  $E_2^{*, j}(B, r)$  d'indice  $j$  impair sont nulles. Si l'espace vectoriel  $E_2^{i, j}(B, r)$  est non nul on a donc  $i$  et  $j$  pairs. Pour tout couple  $(i, j)$  et tout entier  $k \geq 2$ , la différentielle  $d_k^{i, j} : E_2^{i, j}(B, r) \rightarrow E_2^{i+k, j+1-k}(B, r)$  est donc nulle car sa source ou son but est nul.  $\square$

Un des avantages la deuxième « Ext-condition » de la proposition 5.1.13 est sa stabilité par twist de Frobenius. En effet, on a :

**Proposition 5.1.14.** *Si un bifoncteur  $B$  vérifie la deuxième « Ext-condition » alors pour tout  $i \geq 0$ , le bifoncteur  $B^{(i)}$  vérifie également la deuxième « Ext-condition » .*

*Démonstration.* Si  $B$  vérifie la deuxième « Ext-condition » alors pour tout  $r$  et tout  $i$  positifs  $H_{\mathcal{P}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}p^{r+i}, -2))$  est nul en degré impair. Ainsi pour tout  $r$ , le foncteur  $B(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2)$  vérifie la deuxième « Ext-condition » . Par le théorème 5.1.11 on a donc un isomorphisme  $\mathbb{Z}/2$ -gradués entre les  $\mathbb{A}$ -modules gradués  $H_{\mathcal{P}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}p^{r+i}, -2))$  et  $H_{\mathcal{P}}^*(B^{(i)}(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2))$ . Comme le premier de ces deux modules gradués est nul en degré impair, le deuxième l'est également : les bifoncteurs  $B^{(i)}$  vérifient donc la deuxième « Ext-condition » .  $\square$

**Proposition 5.1.15 (Troisième « Ext-condition »).** *Soit  $B$  un bifoncteur polynomial sur un anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$  première. Si  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2)) = 0$  pour tout  $r$  et pour  $* > 0$ , alors le twist de Frobenius est transparent pour  $B$ , et de plus on a une égalité :*

$$\mathrm{Gr}H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B^{(r)}) = F_0H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B^{(r)}) = H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B^{(r)}) .$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.1.6, si la cohomologie de  $B(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2)$  est nulle en degré strictement positif, alors les colonnes de la deuxième page de la suite spectrale sont toutes nulles sauf la colonne  $E_2^{0,*}(B, r)$  d'indice 0. La suite spectrale dégénère donc à la deuxième page, et de plus on a, pour tout  $i > 0$  et tout  $k$ ,  $F_iH_{\mathcal{P}}^k(B^{(r)}) = 0$ .  $\square$

*Remarque 5.1.16.* La troisième « Ext-condition » appliquée aux bifoncteurs séparables redonne exactement la « Ext-condition » de [9, Th 4.4]. A la différence de la deuxième condition, elle n'est pas stable par twist de Frobenius. Par exemple, si  $B$  est un bifoncteur injectif de la forme  $B = \mathcal{H}om(\Gamma^\lambda, S^\mu)$ , alors les bifoncteurs  $B(-\overset{\oplus}{1}p^r, -2)$  sont encore injectifs et leur cohomologie est donc nulle en degré strictement positif. Par contre, la proposition 5.1.1 montre que pour tout  $i \geq 1$  le foncteur  $B^{(i)}$  possède de la cohomologie en degré strictement positif.

Ce phénomène est général. En effet, soit  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  qui vérifie la troisième Ext-condition, et tel que la cohomologie de degré 0 de  $B(-\overset{\oplus}{1}p^i, -2)$  soit non nulle. D'après la proposition 5.1.15, la cohomologie de  $B^{(i)}$  est isomorphe à la cohomologie de degré 0 de  $B(-\overset{\oplus}{1}p^i, -2)$ . La cohomologie de  $B^{(i)}$  est donc non nulle. De plus, d'après le théorème 5.1.26 la cohomologie de  $B^{(i)}$  est isomorphe à l'évaluation du  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur  $\mathrm{sym}(DB)$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module gradué  $H_{\mathcal{P}}^*(gl^{(i) \otimes d})$ . Or le théorème 4.3.1 montre qu'on a un isomorphisme de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules entre  $H_{\mathcal{P}}^0(gl^{(i) \otimes d})$  et  $H_{\mathcal{P}}^{2d(p^i-1)}(gl^{(i) \otimes d})$ . Ainsi la cohomologie de  $B^{(i)}$  ne peut pas être concentrée en degré 0. En conclusion  $B^{(i)}$  doit posséder un  $\mathbb{A}$ -module de cohomologie non nul en degré strictement positif, et  $B^{(i)}$  ne vérifie donc pas la troisième Ext-condition.

La proposition suivante permet de mieux cerner la différence entre la deuxième et la troisième condition.

**Proposition 5.1.17.** *Soit  $B$  un bifoncteur défini sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $B_{\mathbb{A}}$  le bifoncteur obtenu à partir de  $B$  par changement de base. Si la*

cohomologie de  $B_{\mathbb{A}}$  est nulle en degré impair, alors elle est nulle en degré strictement positif.

*Démonstration.* Par changement de base plat, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où  $\mathbb{A} = \mathbb{F}_p$ . Pour tout entier strictement positif  $i$ , le  $\mathbb{Z}$ -module de type fini  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B)$  ne contient pas de  $p$ -torsion. En effet, dans le cas contraire le théorème de changement de base 4.1.15 impliquerait que cette  $p$ -torsion se retrouve en degrés cohomologiques  $i$  et  $i - 1$ , ce qui est impossible car l'un de ces deux degrés est impair. D'après la proposition 4.3.8, les  $\mathbb{Z}$ -modules  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B)$  sont de torsion pour  $i > 0$ . En appliquant de nouveau le théorème de changement de base, on obtient donc la nullité de la cohomologie de  $B_{\mathbb{F}_p}$  en degré strictement positif.  $\square$

### Exemples de bifoncteurs pour lesquels le twist est transparent

Nous donnons maintenant une liste d'exemples de bifoncteurs vérifiant les différentes « Ext-conditions » .

**Lemme 5.1.18.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $\gamma, \nu$  des uplets de poids  $d$ . Pour tout  $i > 0$  on a  $H_{\mathcal{P},A}^i(\mathcal{H}om(\Lambda^\gamma, \Lambda^\nu)) = 0$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que par théorème de changement de base 4.1.15, il suffit de démontrer la proposition pour  $A = \mathbb{Z}$ . D'après la proposition 4.2.5, l'énoncé équivaut à démontrer que pour tous uplets  $\gamma, \nu$  de poids  $d$  on a  $\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^\gamma, \Lambda^\nu) = 0$  pour  $* > 0$ .

Mais si on sait que pour tout  $n$  le groupe abélien gradué  $\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^n, \Lambda^n)$  est libre alors pour tous les uplets  $\gamma, \nu$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^\gamma, \Lambda^\nu)$  s'exprime comme une somme directe de produits tensoriels de groupes abéliens gradués du type  $\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^n, \Lambda^n)$  (cf. proposition 1.4.26). Pour démontrer le lemme, il nous suffit donc de montrer que pour tout  $n$  le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^n, \Lambda^n)$  est nul en degré  $* > 0$  et vaut  $\mathbb{Z}$  en degré 0.

On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$  le résultat est trivial, supposons le vrai pour tout  $i < n$ . Examinons la première suite spectrale hypercohomologique associée au complexe de Koszul :

$$\Lambda^n \hookrightarrow \Lambda^{n-1} \otimes S^1 \rightarrow \dots \rightarrow S^n .$$

Pour tout  $i > 0$  on a :  $\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^i, S^i) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Gamma^i, \Lambda^i)$ , par dualité de Kuhn. Comme  $\Gamma^i$  est projectif cette extension est nulle en degré  $* > 0$ , et égale à  $\Lambda^i(\mathbb{Z})$  en degré 0 par le lemme de Yoneda. On peut donc utiliser la proposition 1.4.26 :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^n, \Lambda^{n-i} \otimes S^i) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^{n-i}, \Lambda^{n-i}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^i, S^i) .$$

Et on obtient donc :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^n, \Lambda^{n-i} \otimes S^i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 1 , \\ \text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(\Lambda^{n-i}, \Lambda^{n-i}) & \text{si } i = 1 . \end{cases}$$

La première page de la suite spectrale est donc complètement nulle, sauf la ligne d'indice 0 où l'on a  $E_1^{p,0} = \text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^p(\Lambda^n, \Lambda^n)$  et la ligne d'indice 1 où l'on a  $E_1^{p,1} =$



$\text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{Z}}^p(\Lambda^{n-1}, \Lambda^{n-1})$ . Comme la suite spectrale converge vers 0 (le complexe de Koszul est acyclique) la différentielle  $d_1$  induit un isomorphisme entre les deux lignes non nulles. On obtient donc :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{Z}}^*(\Lambda^n, \Lambda^n) = \text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{Z}}^*(\Lambda^{n-1}, \Lambda^{n-1}) = \mathbb{Z} \text{ si } * = 0, \quad = 0 \text{ sinon .}$$

□

On rappelle (définition B.3.18) que le foncteur de Weyl  $W_{\lambda/\lambda'}$  associé à un diagramme gauche  $\lambda/\lambda'$  désigne le dual de Kuhn du foncteur de Schur  $S_{\lambda/\lambda'} : W_{\lambda/\lambda'} = S_{\lambda/\lambda'}^\sharp$ . En appliquant la proposition suivante au cas particulier où  $A = \mathbb{A}$  est un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première, on démontre que les foncteurs de la forme  $\mathcal{H}om(W_{\lambda/\lambda'}, S_{\mu/\mu'})$  vérifient la troisième « Ext-condition » .

**Proposition 5.1.19.** *Soit  $A$  un anneau commutatif quelconque,  $\lambda/\lambda'$  et  $\mu/\mu'$  des diagrammes gauches de poids  $d$  et  $n$  un entier. Pour tout  $j > 0$ , on a*

$$H_{\mathcal{P}, A}^j(\mathcal{H}om(W_{\lambda/\lambda'}(I^{\oplus n}), S_{\mu/\mu'})) = 0 .$$

*Démonstration.* Par changement de base (4.1.15), on peut supposer  $A = \mathbb{Z}$ . D'après [3, §6 p. 186], pour tout diagramme gauche  $\mu/\mu'$  le foncteur de Schur  $S_{\mu/\mu'}$  admet une résolution  $\mathbb{A}_{\mu/\mu', \bullet}$  finie sur  $\mathbb{Z}$  par des sommes directes de tenseurs alternés :

$$0 \rightarrow \mathbb{A}_{\mu/\mu', n} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_{\mu/\mu', 0} \twoheadrightarrow S_{\mu/\mu'} .$$

avec pour tout  $k$ ,  $\mathbb{A}_{\mu/\mu', k}$  de la forme  $\mathbb{A}_{\mu/\mu', k} = \bigoplus \Lambda^\gamma$ .

En prenant le produit tensoriel des résolutions de  $S_{\mu/\mu'}$  et  $S_{\lambda/\lambda'}$ , on obtient une résolution finie  $\mathbb{A}_\bullet$  du bifoncteur

$$S_{\lambda/\lambda'}(-\oplus_1^{n\nu}) \otimes S_{\mu/\mu'}(-2) = \mathcal{H}om(W_{\lambda/\lambda'}(-\oplus_1^{n\nu}), S_{\mu/\mu'}(-2)) ,$$

où  $\mathbb{A}_k(-1, -2) = \bigoplus_{i+j=k} \mathbb{A}_{\lambda/\lambda', j}(-\oplus_1^{n\nu}) \otimes \mathbb{A}_{\mu/\mu', j}(-2)$ . A l'aide de la formule exponentielle, on peut mettre les bifoncteurs  $\mathbb{A}_k$  sous forme de sommes directes de foncteurs du type  $\mathcal{H}om(\Lambda^\gamma, \Lambda^\nu)$ , où  $\gamma$  et  $\nu$  sont des uplets de poids  $d$ .

Les  $\mathcal{H}om(\Lambda^\gamma, \Lambda^\nu)$  n'ont pas de cohomologie en degré positif d'après le lemme précédent. D'après le corollaire C.2.4 c'est également le cas du bifoncteur  $\mathcal{H}om(W_{\lambda/\lambda'}(I^{\oplus n}), S_{\mu/\mu'})$ . □

Le tableau suivant récapitule des exemples de bifoncteurs vérifiant chacune des « Ext-conditions » :

Ext-condition 1	$\Gamma^p gl, L^p gl$
Ext-condition 2	$\mathcal{H}om(\Gamma^d, F)^{(r)}$ $\mathcal{H}om(W_{\mu/\mu'}, S_{\lambda/\lambda'})^{(r)}$ (cf. prop. 5.1.14) $S^{n(r)} gl$
Ext-condition 3	$\mathcal{H}om(\Gamma^d, F)$ (cf. cor. 2.3.3) $\mathcal{H}om(W_{\mu/\mu'}, S_{\lambda/\lambda'})$ (cf. prop. 5.1.19) $S^n gl$ (cf. th. 6.1.1)

Précisons que les exemples de bifoncteurs vérifiant la deuxième Ext-condition ne vérifient pas la troisième Ext-condition si  $r \geq 1$  en vertu de la remarque 5.1.16.

### 5.1.4 Conjecture de transparence du twist

Nous ne disposons pas pour l'instant d'exemple de bifoncteur  $B$  pour lequel nous savons montrer que le twist n'est pas transparent.

**Conjecture 5.1.20.** *Le twist de Frobenius est transparent pour tous les bifoncteurs.*

Outre l'absence de contre-exemples, un certain nombre d'indices plaident en faveur de cette conjecture. Par exemple, la transparence du twist est une généralisation de l'injectivité du twist [13, prop. 3.2]. De plus, la transparence du twist est presque stable par noyau :

**Lemme 5.1.21.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique  $p$  première, et  $f : B \twoheadrightarrow B'$  un épimorphisme entre les bifoncteurs  $B$  et  $B'$ . Si le twist de Frobenius est transparent pour  $B$  et si  $B'$  vérifie la troisième « Ext-condition » alors le twist de Frobenius est transparent pour le bifoncteur  $\text{Ker } f$ .*

*Démonstration.* La suite exacte longue induite en cohomologie par la suite exacte courte  $\text{Ker } f \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B'$  donne l'égalité :

$$\dim H_{\mathcal{P}}^*(\text{Ker } f(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)) = \dim H_{\mathcal{P}}^*(B(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)) + \dim H_{\mathcal{P}}^*(B'(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)) - 2 \text{rg } H_{\mathcal{P}}^*(f(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)).$$

Comme le twist est transparent pour  $B$  et  $B'$ , d'après le théorème 5.1.11 la dimension de  $H_{\mathcal{P}}^*(\text{Ker } f(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2))$  est donc égale à

$$\dim H_{\mathcal{P}}^*(B^{(r)}) + \dim H_{\mathcal{P}}^*(B'^{(r)}) - 2 \text{rg } \text{Gr}H_{\mathcal{P}}^*(f^{(r)}).$$

Le bifoncteur  $B'$  vérifie la troisième condition. D'après la proposition 5.1.15, le gradué de l'homologie de  $B'$  est trivial et on a donc  $\text{rg } \text{Gr}H_{\mathcal{P}}^*(f^{(r)}) = \text{rg } H_{\mathcal{P}}^*(f^{(r)})$ . Ainsi la dimension de  $H_{\mathcal{P}}^*(\text{Ker } f(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2))$  est égale à

$$\dim H_{\mathcal{P}}^*(B^{(r)}) + \dim H_{\mathcal{P}}^*(B'^{(r)}) - 2 \text{rg } H_{\mathcal{P}}^*(f^{(r)}).$$

c'est-à-dire à la dimension de  $H_{\mathcal{P}}^*(\text{Ker } f^{(r)})$ . D'après la proposition 5.1.12, le twist de Frobenius est transparent pour le bifoncteur  $\text{Ker } f$ .  $\square$

Si on pouvait généraliser ce lemme au cas où le twist de Frobenius est transparent pour  $B'$ , alors on obtiendrait la conjecture pour tout bifoncteur admettant une résolution finie par des bifoncteurs pour lesquels le twist est transparent. Dans cette direction nous avons les énoncés suivants :

**Proposition 5.1.22.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique  $p$  première. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *Le twist de Frobenius est transparent pour tous les bifoncteurs de la forme  $Fgl$ .*
- (ii) *Pour tout épimorphisme de foncteurs polynomiaux  $f : S^\mu \twoheadrightarrow F$ , si le twist de Frobenius est transparent pour le bifoncteur  $Fgl$ , alors le twist de Frobenius est transparent pour le bifoncteur  $(\text{Ker } f)gl$ .*

(iii) Pour tout épimorphisme  $f : S^\mu \twoheadrightarrow F$  de foncteurs polynomiaux, si le twist est transparent pour le bifoncteur  $Fgl$  alors le rang de l'application induite en cohomologie par  $fgl : S^\mu gl \rightarrow Fgl$  est égal au rang de son gradué (pour la filtration évoquée au théorème 5.1.11) :

$$\text{rg Gr}H_{\mathcal{P}}^*(fgl^{(r)}) = \text{rg } H_{\mathcal{P}}^*(fgl^{(r)}) .$$

**Proposition 5.1.23.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique  $p$  première. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) Le twist de Frobenius est transparent pour les bifoncteurs séparables, i.e. de la forme  $\mathcal{H}om(F, G)$ .
- (ii) Pour tout épimorphisme de foncteurs polynomiaux  $f : S^\mu \twoheadrightarrow G$ , si le twist de Frobenius est transparent pour le bifoncteur  $\mathcal{H}om(F, G)$ , alors le twist de Frobenius est transparent pour le noyau du morphisme  $\mathcal{H}om(F, f) : \mathcal{H}om(F, S^\mu) \rightarrow \mathcal{H}om(F, G)$ .
- (iii) Pour tout épimorphisme  $f : S^\mu \twoheadrightarrow F$  de foncteurs polynomiaux, le rang de l'application induite en cohomologie par  $\mathcal{H}om(F, f)$  est égal au rang de son gradué (pour la filtration évoquée au théorème 5.1.11) :

$$\text{rg Gr}H_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{H}om(F, f)^{(r)}) = \text{rg } H_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{H}om(F, f)^{(r)}) .$$

### 5.1.5 Application aux calculs de cohomologie

Rappelons que si  $B \in \mathcal{P}_A(1, 1)$ , alors  $DB \in \mathcal{P}_A(2)$  est le bifoncteur (covariant en ses deux variables) défini par  $DB(-1, -2) = B(-1^\vee, -2)$ , où  $-^\vee$  désigne la dualité  $A$ -linéaire (cf. lemme 4.1.7). Le théorème 5.1.26 donne une description partielle de la cohomologie des bifoncteurs pour lesquels le twist est transparent. Pour les bifoncteurs qui vérifient la troisième « Ext-condition », ce théorème donne même une description complète. La démonstration du théorème 5.1.26 repose sur la description suivante de la deuxième page de la suite spectrale  $E(B, r)$ .

**Lemme 5.1.24.** Soient  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première,  $r$  un entier positif et  $B$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  sur  $\mathbb{A}$ . La colonne  $E_2^{0,*}(B, r)$  d'indice 0 de la deuxième page de la suite spectrale  $E(B, r)$  est isomorphe, naturellement en  $B$  au  $\mathbb{A}$ -module gradué :

$$E_2^{0,*}(B, r) \simeq \text{sym}(DB) \left( H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \right) .$$

De plus, si  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B(-1^{\oplus p^r}, -2)) = 0$  pour  $* > 0$ , les colonnes  $E_2^{i,*}(B, r)$  d'indice  $i \geq 1$  de la deuxième page sont nulles.

*Remarque 5.1.25.* Le lemme précédent interprète la colonne d'indice 0 de la deuxième page de la suite spectrale  $E(B, r)$  comme l'évaluation du  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -foncteur  $\text{sym}$  sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$ . Plus généralement, on pourrait interpréter les colonnes de la seconde page de notre suite spectrale en termes d'évaluation sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$  des foncteurs dérivés à droite du foncteur  $\text{sym}$ . Si l'on procède ainsi, on

peut faire apparaître la suite spectrale construite dans [17, prop. 4.2.2] comme une version de notre suite spectrale  $E(B, r)$ , dans le cas particulier où  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  est un corps et  $B$  est un bifoncteur séparable. Nous ne développerons pas plus loin ce point de vue car nous n'en tirerons pas de renseignement concret sur la cohomologie des bifoncteurs.

*Démonstration du lemme 5.1.24.* D'après le lemme 5.1.5, on a un isomorphisme de complexes bigradués, naturel en  $B$  :

$$(E_1^{\bullet,*}(B, r), d_1^{\bullet,*}) \simeq \left( H_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{IRes}(B)^{\bullet(r)}), H_{\mathcal{P}}^*(\partial^{\bullet}) \right) \quad (\star)$$

La colonne  $E_2^{0,*}(B, r)$  d'indice 0 de la deuxième page de  $E(B, r)$  est donc isomorphe au noyau de

$$H_{\mathcal{P}}^*(\partial^0) : H^*(\mathrm{IRes}(B)^{0(r)}) \rightarrow H^*(\mathrm{IRes}(B)^{1(r)}) .$$

D'après la proposition 5.1.1, la colonne  $E_2^{0,*}(B, r)$  est donc isomorphe (naturellement en  $B$ ) au noyau du morphisme

$$\mathrm{sym}(\mathrm{DIRes}(B)^0) \left( H_{\mathcal{P}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \right) \xrightarrow{\mathrm{sym}(D\partial^0)} \mathrm{sym}(\mathrm{DIRes}(B)^1) \left( H_{\mathcal{P}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \right) .$$

Par exactitude à gauche du foncteur  $\mathrm{sym}$ , on a donc un isomorphisme, naturel en  $B$  :

$$E_2^{0,*}(B, r) \simeq \mathrm{sym}(DB) \left( H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \right) .$$

Supposons maintenant que  $H_{\mathcal{P}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{pr}, -2)) = 0$  pour  $* > 0$ . Alors le complexe  $H_{\mathcal{P}}^0(\mathrm{IRes}(B)^{\bullet}(-\overset{\oplus}{1}{}^{pr}, -2))$ , qui calcule la cohomologie de  $B(-\overset{\oplus}{1}{}^{pr}, -2)$ , est exact sauf en degré 0. Or, d'après le corollaire 5.1.2, ce complexe est isomorphe (par un isomorphisme qui ne respecte pas la graduation  $*$ ) au complexe  $H_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{IRes}(B)^{\bullet(r)})$ . Le complexe  $H_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{IRes}(B)^{\bullet(r)})$  est donc exact sauf en degré 0. Sa cohomologie donne la deuxième page de  $E(B, r)$  d'après l'isomorphisme  $(\star)$ . Les colonnes de  $E_2(B, r)$  sont donc toutes nulles, sauf celle d'indice 0.  $\square$

**Théorème 5.1.26.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première et  $r$  un entier positif. Il existe un morphisme naturel en  $B$  :*

$$\phi_{B,r} : H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B^{(r)}) \rightarrow \mathrm{sym}(DB)(H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})) .$$

*Si le twist de Frobenius est transparent pour  $B$ , ce morphisme est surjectif. Si  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B(-\overset{\oplus}{1}{}^{pr}, -2)) = 0$  pour  $* > 0$  alors  $\phi_{B,r}$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On définit le morphisme  $\phi_{B,r}$  à partir du morphisme de coin de la suite spectrale  $E(B, r)$ . Plus précisément on définit  $\phi_{B,r}$  comme la composée :

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B^{(r)}) &= F_0 H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B^{(r)}) \twoheadrightarrow F_0 H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B^{(r)}) / F_1 H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(B^{(r)}) \\ &\simeq E_{\infty}^{0,*}(B, r) \subset E_2^{0,*}(B, r) \simeq \mathrm{sym}(DB)(H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})) , \end{aligned}$$

dans laquelle le dernier isomorphisme est donné par le lemme 5.1.24. Si le twist est transparent pour  $B$  alors la suite spectrale dégénère à la deuxième page et l'inclusion  $E_\infty^{0,*}(B, r) \subset E_2^{0,*}(B, r)$  est une égalité. Dans ce cas  $\phi_{B,r}$  devient un épimorphisme. Si de plus on a alors d'après le lemme 5.1.24 la deuxième page est nulle sauf éventuellement la colonne d'indice 0. La suite spectrale dégénère donc à la deuxième page et de plus on a  $F_1 H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(B^{(r)}) = 0$  d'après le lemme 5.1.5. Ainsi  $\phi_{B,r}$  est une composée d'isomorphismes, donc un isomorphisme.  $\square$

En appliquant le théorème 5.1.26 aux bifoncteurs séparables, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 5.1.27.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$  première,  $r$  un entier positif et  $F, G$  deux foncteurs polynomiaux homogènes de degrés  $d$  à une variable sur  $\mathbb{A}$ . Il existe un morphisme naturel en  $F, G$*

$$\phi_{F,G,r} : \text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(F^{(r)}, G^{(r)}) \rightarrow \text{sym}(F^\sharp \boxtimes G) \left( \text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(I^{(r)\otimes d}, I^{(r)\otimes d}) \right).$$

*Si le twist de Frobenius est transparent pour  $\text{Hom}(F, G)$  alors le morphisme  $\phi_{F,G,r}$  est surjectif. Si  $\text{Ext}_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(F(I^{\oplus p^r}), G) = 0$  pour  $* > 0$  alors  $\phi_{F,G,r}$  est un isomorphisme.*

*Remarque 5.1.28.* Dans le cas où  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  est un corps, le corollaire 5.1.27 est une généralisation du résultat principal de Chałupnik [9, Th. 4.4].

## 5.2 Caractéristique d'Euler-Poincaré

**Proposition 5.2.1.** *Soit  $F$  un foncteur polynomial sur un corps  $\mathbb{K}$ , et  $F^\sharp$  son dual de Kuhn. La caractéristique d'Euler-Poincaré de  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(Fgl)$  est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(F^\sharp gl)$ .*

*Démonstration.* La catégorie des foncteurs polynomiaux à une variable sur un corps  $\mathbb{K}$  est équivalente [18, Th 3.2] à la catégorie  $\text{Mod}(S(n, d, \mathbb{K}))$  des modules sur l'algèbre de Schur  $S(n, d, \mathbb{K})$  sur  $\mathbb{K}$ . Le foncteur  $F$  admet donc une filtration finie,  $F_0 \subset \dots \subset F_N = F$  dont les quotients successifs sont des sommes directes de foncteurs simples  $A_i$ . On a donc :

$$\chi_{H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(Fgl)} = \chi_{H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(\text{Gr}Fgl)} = \chi_{H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*} \left( \bigoplus_{i=1}^k A_i gl \right).$$

Dualement, on a une suite d'épimorphismes  $F_0^\sharp \leftarrow \dots \leftarrow F_N^\sharp = F^\sharp$ , dont les noyaux successifs sont des sommes directes de duaux de Kuhn des mêmes foncteurs simples  $A_i^\sharp$ . On a donc :

$$\chi_{H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*(F^\sharp gl)} = \chi_{H_{\mathcal{P}, \mathbb{K}}^*} \left( \bigoplus_{i=1}^k A_i^\sharp gl \right).$$

D'après [20, Th 3.5a], les simples sont autoduaux. On a donc l'égalité :

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(Fgl) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*\left(\bigoplus_{i=1}^k A_i gl\right) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*\left(\bigoplus_{i=1}^k A_i^\sharp gl\right) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(F^\sharp gl) .$$

□

*Remarque 5.2.2.* Un raisonnement analogue appliqué aux foncteurs polynomiaux à une variable montre que les caractéristiques d'Euler-Poincaré des groupes d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{K}}}^*(F, G)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{K}}}^*(F, G^\sharp)$  sont égales.

*Remarque 5.2.3.* La démonstration de la proposition 5.2.1 repose sur le fait que sur un corps  $\mathbb{K}$ , les foncteurs polynomiaux simples sont auto-duaux. Nous ne savons pas si les bifoncteurs polynomiaux simples ont la même propriété d'auto-dualité.

**Proposition 5.2.4.** *Soit  $B$  un bifoncteur sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique  $p$  première. On a l'égalité :*

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B^{(r)}) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B(-\overset{\oplus}{1} p^r, -2)) .$$

*Démonstration.* L'isomorphisme  $E_2^{*,*}(B, r) \simeq H_{\mathcal{P}}^*(B(-\overset{\oplus}{1} p^r, -2))$  du théorème 5.1.8 est  $\mathbb{Z}/2$ -gradué et conserve donc la caractéristique d'Euler. On a donc

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B(-\overset{\oplus}{1} p^r, -2)) = \chi E_2^{*,*}(B, r) .$$

Si  $\mathcal{C}^\bullet$  est un complexe gradué de dimension totale finie sur un corps  $\mathbb{K}$ , alors la caractéristique d'Euler de l'espace vectoriel gradué sous-jacent  $\mathcal{C}^*$  est égale à la caractéristique d'Euler de  $H^*(\mathcal{C}^\bullet)$ . En appliquant cette remarque aux complexes  $(E_i^\bullet, d_i)$ , où  $E_i^k = \bigoplus_{p+q=k} E_i^{p,q}(B, r)$ , on obtient l'égalité :

$$\chi E_2^{*,*}(B, r) = \chi E_\infty^{*,*}(B, r) = \chi \text{Gr} H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B^{(r)}) .$$

Le Gr n'ayant aucun effet sur la caractéristique d'Euler, on obtient notre résultat. □

**Proposition 5.2.5.** *Soit  $B$  un bifoncteur polynomial sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}$  un corps. La caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie du bifoncteur  $B_{\mathbb{K}}$  obtenu par changement de base sur  $\mathbb{K}$  est égale au rang du  $\mathbb{Z}$ -module libre  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(B)$  :*

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B_{\mathbb{K}}) = \text{rg } H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(B) .$$

*En particulier, la caractéristique d'Euler de la cohomologie de  $B_{\mathbb{K}}$  ne dépend pas de la caractéristique de  $\mathbb{K}$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathbb{K}$  est un corps de caractéristique nulle,  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{Z}$ -plat et par le théorème de changement de base 4.1.15 on a donc :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^i(B_{\mathbb{K}}) \simeq H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K} \quad (= 0 \text{ si } i > 0) .$$

Ainsi on a l'égalité :  $\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B_{\mathbb{K}}) = \dim H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^0(B_{\mathbb{K}}) = \text{rg } H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(B)$ .

Si  $\mathbb{K}$  est un corps de caractéristique  $p$  on a  $\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B_{\mathbb{K}}) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^*(B_{\mathbb{F}_p})$  par platitude du changement de base. Mais si  $T$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de torsion de type fini on a [30, p. 150] :  $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{F}_p) \simeq T \otimes \mathbb{F}_p$ . D'après la proposition précédente, les  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B)$  sont des modules de torsion de type fini pour  $i > 0$ . En utilisant le théorème de changement de base on obtient donc :

$$\begin{aligned} \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(B_{\mathbb{K}}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^i(B_{\mathbb{F}_p}) \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} \left( H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(B) \otimes \mathbb{F}_p \oplus H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^{i+1}(B) \otimes \mathbb{F}_p \right) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(B) \otimes \mathbb{F}_p = \text{rg } H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(B) . \end{aligned}$$

□

**Corollaire 5.2.6.** *Soient  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche et  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique  $p$  première. On a l'égalité :*

$$\chi(H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(S_{\mu/\mu'}^{(r)} gl)) = \chi(H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(W_{\mu/\mu'}^{(r)} gl)) = \dim_{\mathbb{C}} s_{\mu/\mu'}((\mathbb{C}^{p^r})^{\otimes d} \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_d) ,$$

où le foncteur  $s_{\mu/\mu'}$  (définition 3.4.15) agit sur le  $\mathfrak{S}_d$ -module  $(\mathbb{C}^{p^r})^{\otimes d} \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$  dont la structure est donnée à gauche par la permutation des facteurs et à droite par conjugaison.

*Démonstration.* La première égalité résulte de la proposition 5.2.1. D'après la proposition précédente, on a :

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(S_{\mu/\mu'}^{(r)} gl) = \chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^* \left( S_{\mu/\mu'} gl(-1^{\oplus p^r}, -2) \right) .$$

Puis on remarque que le bifoncteur  $S_{\mu/\mu'}(gl^{\oplus p^r})$  est en fait défini sur  $\mathbb{Z}$ . D'après la proposition 5.2.5 la caractéristique d'Euler-Poincaré est indépendante du corps  $\mathbb{K}$  considéré. Si on se place sur  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il n'y a pas de cohomologie en degré non nul, d'où l'égalité :

$$\chi H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^*(S_{\mu/\mu'}^{(r)} gl) = \dim_{\mathbb{C}} H_{\mathcal{P},\mathbb{C}}^0 \left( S_{\mu/\mu'} gl(-1^{\oplus p^r}, -2) \right) .$$

Mais on sait calculer ce  $H_{\mathcal{P},\mathbb{C}}^0$  en termes de symétrisations injectives d'après le corollaire 4.3.2. Et de plus sur  $\mathbb{C}$  la symétrisation du bifoncteur  $S_{\mu/\mu'}(\text{Id}^{\boxtimes 2})$  est connue d'après les propositions 3.4.17 et 3.3.11, d'où le résultat. □

### 5.3 Symétrisations et changement de base

Pour obtenir des calculs explicites (par exemple des séries de Poincaré) de cohomologie des bifoncteurs, le théorème 5.1.26 et le corollaire 4.3.2 montrent l'intérêt de savoir calculer l'évaluation de la symétrisation  $\text{sym}(DB)$  d'un bifoncteur  $B$  de bidegré  $(d, d)$  sur les  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules du type  $H_{\mathcal{P},A}^*(gl^{(r)\otimes d})$ . Ces modules sont des  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules de permutation explicitement décrits dans le théorème 4.3.1, et sont des sommes directes de «  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules élémentaires » dans le sens suivant :

**Définition 5.3.1.** Soit  $A$  un anneau. On appelle  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module élémentaire un module de la forme  $A\mathfrak{S}_d/\mathfrak{S}_\mu \otimes A\mathfrak{S}_d$ , où  $\mu$  est un uplet de poids  $d$  et l'action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  est donnée par la formule :

$$(\lambda, \varsigma).e_{[\tau]} \otimes e_\sigma := e_{[\lambda\tau]} \otimes e_{\lambda\sigma\varsigma^{-1}} .$$

Nous cherchons donc à évaluer l'image des  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules élémentaires par les symétrisations de bifoncteurs homogènes de bidegré  $(d, d)$ . Pour cela, nous avons déjà explicité dans le chapitre 3, paragraphe 3.3, un certain nombre de ces symétrisations. En particulier, si l'anneau  $A$  contient  $\mathbb{Q}$  ou est de caractéristique  $p$  plus grande que les degrés foncteurs en jeu alors il est facile d'identifier les symétrisations. En effet si  $p > d$  ou si  $A$  contient  $\mathbb{Q}$  :

- pour tous foncteurs  $F, G$  à une variable de degré  $d$  on a

$$\begin{aligned} \text{sym}(F \boxtimes G) &\simeq \text{sym}(F) \odot \text{sym}(G) , \\ \text{sym}(F(-_1 \otimes -_2)) &\simeq \text{sym}(F) \circ \Delta_2 . \end{aligned}$$

- Pour tout uplet  $\mu$  de poids  $d$ , on a des isomorphismes

$$\text{sym}(S^\mu) \simeq \text{coinv}_\mu , \quad \text{sym}(\Gamma^\mu) \simeq \text{inv}^\mu , \quad \text{sym}(\Lambda^\mu) \simeq \text{alt}^\mu .$$

- Enfin, pour tout diagramme gauche  $\mu/\mu'$  on a un isomorphisme (valable si on considère les symétrisations et les  $s_{\mu/\mu'}$  comme des foncteurs définis sur les  $\mathfrak{S}_d$ -modules de permutation)

$$\text{sym}(S_{\mu/\mu'}) \simeq s_{\mu/\mu'} .$$

Le théorème suivant permet de ramener le calcul de la dimension de  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{F}_p E)$  au calcul de la dimension de  $\text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{C}E)$ , plus facile à effectuer.

**Théorème 5.3.2.** Soit  $B \in \mathcal{P}_{d, \mathbb{Z}}^d$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  et  $p$  un nombre premier. Supposons que le  $\mathbb{Z}$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{Z}}^1(B(-_1^{\oplus d}, -_2))$  n'a pas de  $p$ -torsion. Alors pour tout  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module élémentaire  $\mathbb{Z}E$ , la dimension du  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{F}_p)$  est égale à la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{C})$ .

Dans la suite de ce paragraphe, nous développons les outils nécessaires à la démonstration de ce théorème.

Soit  $M$  un  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\lambda, \mu$  deux uplets de poids  $d$  et  $\mathbb{K}$  un corps. Le morphisme  $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d)$ -linéaire  $M \rightarrow M \otimes \mathbb{K}$  induit un morphisme  $\mathbb{K}$ -linéaire

$$\text{coinv}_{\lambda, \mu}(M) \otimes \mathbb{K} \rightarrow \text{coinv}_{\lambda, \mu}(M \otimes \mathbb{K}) .$$

En composant avec les isomorphismes donnés par le lemme 3.2.10, on obtient donc un morphisme  $\theta_{\lambda, \mu}$  :

$$\theta_{\lambda, \mu} : \left( \text{sym}(S^\lambda \boxtimes S^\mu)(M) \right) \otimes \mathbb{K} \rightarrow \text{sym} \left( (S^\lambda \boxtimes S^\mu)_{\mathbb{K}} \right) (M \otimes \mathbb{K})$$

où  $(S^\lambda \boxtimes S^\mu)_{\mathbb{K}} \in \mathcal{P}_{d, d, \mathbb{K}}(2)$  désigne le foncteur obtenu par changement de base à partir du foncteur  $S^\lambda \boxtimes S^\mu \in \mathcal{P}_{d, d, \mathbb{Z}}(2)$  (on a donc  $(S^\lambda \boxtimes S^\mu)_{\mathbb{K}} = S^\lambda \boxtimes S^\mu \in \mathcal{P}_{d, d, \mathbb{K}}(2)$ ). Si  $M$  est un  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module de permutation sur  $\mathbb{Z}$ , alors la proposition B.2.3 montre que  $\theta_{\lambda, \mu}$  est un isomorphisme.



**Lemme 5.3.3.** Soit  $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$  des uplets de poids  $d$ ,  $\mathbb{K}$  un corps et  $\phi : S^\lambda \boxtimes S^\mu \rightarrow S^{\lambda'} \boxtimes S^{\mu'}$  un morphisme dans  $\mathcal{P}_{d,d,\mathbb{Z}}(2)$ . Pour tout  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module de permutation  $\mathbb{Z}E$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{sym}(S^\lambda \boxtimes S^\mu)(\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\text{sym}(\phi)} & \text{sym}(S^{\lambda'} \boxtimes S^{\mu'}) (\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{K} \\ \simeq \downarrow \theta_{\lambda,\mu} & & \simeq \downarrow \theta_{\lambda',\mu'} \\ \text{sym}((S^\lambda \boxtimes S^\mu)_{\mathbb{K}})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{K}) & \xrightarrow{\text{sym}(\phi_{\mathbb{K}})} & \text{sym}((S^{\lambda'} \boxtimes S^{\mu'})_{\mathbb{K}})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{K}) . \end{array}$$

*Démonstration.* D'après le corollaire 3.4.12 du chapitre précédent, le foncteur de symétrisation est pleinement fidèle. En d'autres termes, on a un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{d,d,\mathbb{K}}(2)}(F, G) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d, \mathbb{K}}}( \text{sym}(F), \text{sym}(G) ) ,$$

où  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d, \mathbb{K}}$  désigne la catégorie des foncteurs  $\mathbb{K}$ -linéaires définis sur les  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules de permutation de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et à valeurs dans les  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Pour vérifier l'égalité :

$$\text{sym}(\phi_{\mathbb{K}}) = \theta_{\lambda',\mu'} \circ \text{sym}(\phi) \otimes \mathbb{K} \circ \theta_{\lambda,\mu}^{-1} ,$$

il nous suffit donc de démontrer que ces deux morphismes coïncident sur les  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules  $V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d}$  où  $V = \mathbb{K}^v$ ,  $W = \mathbb{K}^w$ .

Mais en évaluant le diagramme du lemme sur le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module de permutation  $V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d}$  on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (S^\lambda \boxtimes S^\mu)(V, W) \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\phi \otimes \mathbb{K}} & (S^{\lambda'} \boxtimes S^{\mu'})(V, W) \otimes \mathbb{K} \\ \simeq \downarrow \theta_{\lambda,\mu} & & \simeq \downarrow \theta_{\lambda',\mu'} \\ (S^\lambda \boxtimes S^\mu)_{\mathbb{K}}(V \otimes \mathbb{K}, W \otimes \mathbb{K}) & \xrightarrow{\phi_{\mathbb{K}}} & (S^{\lambda'} \boxtimes S^{\mu'})_{\mathbb{K}}(V \otimes \mathbb{K}, W \otimes \mathbb{K}) . \end{array}$$

qui commute par construction du foncteur de changement de base. On obtient donc notre énoncé.  $\square$

On rappelle que si  $B \in \mathcal{P}_A(1,1)$  est un bifoncteur contravariant en sa première variable, covariant en la seconde, alors  $DB \in \mathcal{P}_A(2)$  est le bifoncteur (covariant en ses deux variables) défini par  $DB(-1, -2) = B(-1^\vee, -2)$ , où  $-^\vee$  désigne la dualité  $A$ -linéaire (cf. proposition 4.1.7).

**Lemme 5.3.4.** Soit  $B \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{Z}}^d$  un bifoncteur défini sur  $\mathbb{Z}$ ,  $p$  un nombre premier et  $\mathbb{Z}E$  un  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module de permutation. On a une injection  $\mathbb{F}_p$ -linéaire, naturelle en  $B$  :

$$(\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E)) \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow \text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{F}_p E) .$$

*Remarque 5.3.5.* En général, on n'a qu'une injection et pas un isomorphisme. Par exemple, si  $B$  est le bifoncteur  $\mathcal{H}om(S^2, \Lambda^2)$  la remarque 1.5.5 et la proposition 4.3.2 montrent que l'on a :

$$\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2) \otimes \mathbb{F}_2 = 0, \quad \text{sym}(DB_{\mathbb{F}_2})(\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_2) = \mathbb{F}_2 .$$

*Démonstration du lemme 5.3.4.* Soit  $DB \hookrightarrow I^0 \rightarrow I^1$  un début de résolution injective de  $DB$  dans  $\mathcal{P}_{d,d,\mathbb{Z}}(2)$ . Soit  $K$  le noyau du morphisme

$$\text{sym}(I^0)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p \rightarrow \text{sym}(I^1)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p .$$

On a un diagramme commutatif, dont toutes les lignes sont exactes aux deux premiers termes et dont les deux dernières colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \text{sym}(DB)(ZE) & \hookrightarrow & \text{sym}(I^0)(ZE) & \longrightarrow & \text{sym}(I^1)(ZE) \\ \downarrow \times p & & \downarrow \times p & & \downarrow \times p \\ \text{sym}(DB)(ZE) & \hookrightarrow & \text{sym}(I^0)(ZE) & \longrightarrow & \text{sym}(I^1)(ZE) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{sym}(I^0)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \text{sym}(I^1)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p \\ & \hookrightarrow & & & \\ K & \longrightarrow & & & \end{array}$$

Le morphisme  $\text{sym}(I^0)(ZE) \twoheadrightarrow \text{sym}(I^0)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p$  factorise donc en un morphisme  $\text{sym}(DB)(ZE) \rightarrow K$ . Par exactitude des lignes, la suite

$$0 \rightarrow \text{sym}(DB)(ZE) \xrightarrow{\times p} \text{sym}(DB)(ZE) \rightarrow K$$

est exacte, et on obtient donc une injection  $\text{sym}(DB)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow K$ . D'après le lemme 5.3.3, le morphisme  $\text{sym}(I^0)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p \rightarrow \text{sym}(I^1)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p$  s'identifie au morphisme  $\text{sym}(I_{\mathbb{F}_p}^0)(\mathbb{F}_p E) \rightarrow \text{sym}(I_{\mathbb{F}_p}^1)(\mathbb{F}_p E)$  et par exactitude à gauche de  $\text{sym}$ , on peut donc identifier  $K$  et  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{F}_p E)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 5.3.6.** Soit  $B \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{Z}}^d$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$  et  $p$  un nombre premier. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (1) Le  $\mathbb{Z}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^1(B(-\oplus_1^d, -2))$  n'a pas de  $p$ -torsion.
- (2) Pour tout entier  $k$ , le  $\mathbb{Z}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^1(B(-\oplus_1^k, -2))$  n'a pas de  $p$ -torsion.
- (3) Pour tout  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module élémentaire  $ZE$  on a un isomorphisme :

$$\text{sym}(DB)(ZE) \otimes \mathbb{F}_p \xrightarrow{\cong} \text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(ZE \otimes \mathbb{F}_p) .$$

*Démonstration.* D'après le corollaire 4.3.2 on a pour tout entier  $k$  un isomorphisme (où  $A = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{F}_p$ ) :

$$H_{\mathcal{P},A}^0(B_A(-\oplus_1^k, -2)) \xrightarrow{\cong} \text{sym}(DB_A) \left( H_{\mathcal{P},A}^0(\text{gl}(-\oplus_1^k, -2)^{\otimes d}) \right) \quad (*)$$

On a (2)  $\Rightarrow$  (1). Montrons (1)  $\Rightarrow$  (3). D'après le théorème de changement de base 4.1.15, si  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^1(B(-\oplus_1^d, -2))$  n'a pas de  $p$ -torsion alors on a un isomorphisme entre les espaces vectoriels de dimension finie  $\text{sym}(DB)(H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(\text{gl}(-\oplus_1^d, -2)^{\otimes d})) \otimes \mathbb{F}_p$  et  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^0(\text{gl}(-\oplus_1^d, -2)^{\otimes d}))$ . Comme le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(\text{gl}(-\oplus_1^d, -2)^{\otimes d})$  contient tous les  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -modules élémentaires comme facteurs directs, les injections du lemme 5.3.4 sont, pour une raison de dimension, des isomorphismes.

Montrons (3)  $\Rightarrow$  (2). Si l'énoncé (3) est vérifié, alors d'après la formule (\*) pour tout entier  $k$  on a un isomorphisme  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^0(B(-\oplus_1^k, -2)) \otimes \mathbb{F}_p \simeq H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^0(B_{\mathbb{F}_p}(-\oplus_1^k, -2))$ . Le théorème de changement de base 4.1.15 implique alors que  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^1(B(-\oplus_1^k, -2))$  n'a pas de  $p$ -torsion.  $\square$

**Proposition 5.3.7.** *Soit  $B \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{Z}}^d$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$ . Pour tout  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module élémentaire  $\mathbb{Z}E$  on a un isomorphisme :*

$$\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} \text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{C}).$$

*Démonstration.* Soit  $DB \hookrightarrow I^0 \rightarrow I^1$  un début de résolution injective de  $DB$  dans  $\mathcal{P}_{d,d,\mathbb{Z}}(2)$ . D'après le lemme 5.3.3, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{C} & \hookrightarrow & \text{sym}(I^0)(\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & \text{sym}(I^1)(\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{C} \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{C}) & \hookrightarrow & \text{sym}(I_{\mathbb{C}}^0)(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{sym}(I_{\mathbb{C}}^1)(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{C}) \end{array}$$

La première ligne est exacte par platitude de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{Z}$ , la deuxième ligne est exacte, on obtient donc notre isomorphisme.  $\square$

**Lemme 5.3.8.** *Soit  $B \in \mathcal{P}_{d,\mathbb{Z}}^d$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d, d)$ . Pour tout  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module élémentaire  $\mathbb{Z}E$  le  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E)$  est libre de rang fini.*

*Démonstration.* En effet, le module élémentaire  $\mathbb{Z}E$  est facteur direct du  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P}}^0(\text{gl}(-\oplus_1^d, -2)^{\otimes d})$  donc d'après la proposition 4.3.2,  $\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E)$  est un facteur direct du  $\mathbb{Z}$ -module  $H_{\mathcal{P}}^0(B(-\oplus_1^d, -2))$ , qui est libre d'après la proposition 4.2.3.  $\square$

*Démonstration du théorème 5.3.2.* D'après la proposition 5.3.6, la dimension de l'espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{F}_p})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{F}_p)$  est égale à celle de  $\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{F}_p$ . Le  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E)$  est libre d'après le lemme précédent, cette dimension est donc égale au rang de  $\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E)$ . Ce rang est lui-même égal à la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB)(\mathbb{Z}E) \otimes \mathbb{C}$ , qui est isomorphe au  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{sym}(DB_{\mathbb{C}})(\mathbb{Z}E \otimes \mathbb{C})$  d'après la proposition 5.3.7, d'où le résultat.  $\square$

## Chapitre 6

# Cohomologie des twists de tenseurs symétriques et applications

Dans ce chapitre, nous mettons en oeuvre les techniques de calcul développées au chapitre 5. Nous nous intéressons tout d'abord au cas des bifoncteurs  $S^{\mu(r)}gl$  obtenus en précomposant le twist d'un tenseur symétrique par le bifoncteur  $gl$ . Ces bifoncteurs sont intéressants à plusieurs titres. Tout d'abord,  $S^*gl$  correspond à la représentation classique de  $GL_n$  sur l'algèbre des polynômes sur  $\text{End}(A^n)$ . Cette représentation classique (et ses twists) interviennent naturellement dans d'autres problèmes. Par exemple, dans le calcul de la cohomologie du groupe  $GL_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$  à coefficients dans le corps premier  $\mathbb{F}_p$  [13]. Enfin, le calcul de la cohomologie des twists de  $S^\mu gl$  a également une importance interne à la théorie. En effet, tout bifoncteur de la forme  $Fgl$  admet une résolution *finie* par des (facteurs directs de) foncteurs du type  $S^\mu gl$ . Le calcul de la cohomologie de cette famille de bifoncteurs est donc un point de départ pour des calculs plus complexes.

Nous obtenons les séries de Poincaré des cohomologies des bifoncteurs de cette famille au premier paragraphe (théorème 6.1.1). Ce résultat n'était auparavant connu que pour  $S^2gl$  en caractéristique 2, ou lorsque la caractéristique  $p$  est plus grande que le degré des foncteurs en jeu [13, Prop. 4.1 et Th. 5.1]. Une démonstration un peu différente de ce résultat a été publiée dans [41, Th. 1.1].

Dans le paragraphe 6.2, nous nous basons sur le théorème 6.1.1 pour obtenir de nouveaux calculs. Nous étudions tout d'abord les suites spectrales associées aux complexes symétriques construits par Troesch [42]. Nous en déduisons des informations sur les applications induites en cohomologie par les morphismes entre tenseurs symétriques twistés de  $gl$ . Puis nous déterminons en caractéristique  $p$  les séries de Poincaré de cohomologie des twists des bifoncteurs  $\Gamma^p gl$  et  $\Lambda^p gl$  aux théorèmes 6.2.17 et 6.2.29. Ces résultats n'étaient auparavant connus qu'en caractéristique  $p = 2$  [13, Th. 5.1].

## 6.1 Cohomologie de $S^{\mu(r)}gl$

Soit  $M^*$  un  $A$ -module gradué, tel que pour tout  $i$ ,  $M^i$  est libre de rang fini. La série de Poincaré de  $M^*$  est la série entière définie par

$$P_{M^*}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{rg } M^i t^i .$$

Si  $A = \mathbb{K}$  est un corps et si  $B$  est un bifoncteur sur  $\mathbb{K}$ , alors pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $H_{\mathcal{P},\mathbb{K}}^i(B)$  est de dimension finie d'après la proposition 4.2.3. La série de Poincaré de la cohomologie d'un bifoncteur est donc bien définie si on travaille sur un corps.

Soient  $\mu$  un  $n$ -uplet d'entiers positifs de poids  $d$  et  $r$  un entier positif. Si  $\mathbb{A}$  est un anneau de caractéristique  $p$  première, alors pour tout  $i \in \mathbb{N}$  le  $\mathbb{A}$ -module de cohomologie  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^i(S^{\mu(r)}gl)$  est libre de type fini. En effet, d'après le théorème de changement de base 4.1.15 on a un isomorphisme de  $\mathbb{A}$ -modules gradués :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl) \simeq H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^*(S^{\mu(r)}gl) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{A} .$$

On peut donc parler de la série de Poincaré du  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl)$ , et de plus on peut se contenter de la calculer pour  $\mathbb{A} = \mathbb{F}_p$ .

Dans ce paragraphe, nous cherchons à calculer la série de Poincaré de la cohomologie du bifoncteur  $S^{\mu(r)}gl$ . Le foncteur polynomial (homogène de degré  $d$ )  $S^\mu$  admet une présentation par des sommes directes produits tensoriels :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mu} \otimes^d \xrightarrow{\oplus 1 - \sigma} \otimes^d \rightarrow S^\mu \rightarrow 0 \quad (\star)$$

En précomposant cette suite par le twist de Frobenius puis par le bifoncteur  $gl$ , et en appliquant le foncteur  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(-)$ , nous obtenons une suite :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mu} H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \xrightarrow{\oplus 1 - \sigma} H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl) \rightarrow 0 \quad (\star\star)$$

Les morphismes  $(1 - \sigma)$  de cette suite correspondent à l'action de  $\mathfrak{S}_d$  sur  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$  induite par la permutation des facteurs  $gl^{(r)}$  du produit tensoriel  $gl^{(r)\otimes d}$ . Cette action de  $\mathfrak{S}_d$  sur  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$  correspond à la restriction de la structure de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$  décrite au théorème 4.3.1 au sous groupe diagonal  $\Delta\mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ . En d'autres termes, on a un isomorphismes de  $\mathfrak{S}_d$ -modules :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_\mathbb{A}}^*(I^{(r)}, I^{(r)})^{\otimes d} \otimes \mathbb{A}\mathfrak{S}_d$$

où l'action de  $\mathfrak{S}_d$  sur le membre de droite est donné par la formule :

$$\sigma.v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes e_\varsigma := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes e_{\sigma\varsigma\sigma^{-1}} .$$

Si la caractéristique  $p$  est strictement plus grande que le degré  $d$  du foncteur  $S^\mu$ , la suite  $(\star)$  se scinde. La suite  $(\star\star)$  est donc exacte. Le morphisme  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl)$  est donc surjectif, et se factorise donc en un isomorphisme

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})_{\mathfrak{S}_\mu} \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl) .$$

Si la caractéristique  $p$  est inférieure ou égale à  $d$ , la suite  $(\star)$  ne se scinde pas. Pire, le morphisme  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d}) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl)$  n'est en général pas surjectif ! Malgré cela, le résultat sur la forme de la série de Poincaré de la cohomologie de  $S^{\mu(r)}gl$  reste valable indépendamment de la caractéristique, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 6.1.1.** *Soient  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un  $n$ -uplet de poids  $d$  et  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $r$  un entier positif. Le  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl)$  est libre de type fini et sa série de Poincaré est égale à la série de Poincaré des coinvariants du  $\mathfrak{S}_d$ -module gradué  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes d})$  sous l'action du sous-groupe  $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu_n} \subset \mathfrak{S}_d$ .*

**Corollaire 6.1.2.** *Le bifoncteur  $S^\mu gl$  vérifie la troisième « Ext-condition » (cf. proposition 5.1.15). Par conséquent, pour tout  $i$ , le twist de Frobenius est transparent pour le bifoncteur  $S^{\mu(i)}gl$ .*

La fin de ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 6.1.1. D'après le théorème de changement de base 4.1.15, on peut supposer  $\mathbb{A} = \mathbb{F}_p$ . La démonstration se déroule en plusieurs étapes.

**Étape 1 :**  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^*(S^\mu gl(-\overset{\oplus}{1}^n, -2)) = 0$  pour  $* > 0$ .

Dans cette première étape,  $A = \mathbb{Z}$ . On rappelle la filtration de Cauchy, construite par Akin, Buchsbaum et Weyman [4, Th III.1.4 pp. 244-245], que nous reformulons ici en termes de bifoncteurs. Ce résultat sera complété au chapitre 7.

**Théorème 6.1.3.** *Soit  $\ell$  un entier. L'ordre lexicographique sur les partitions de poids  $k$  induit une filtration de  $S^\ell gl$  par des bifoncteurs polynomiaux :*

$$0 \subseteq N_{(\ell)} \subseteq N_{(\ell-1,1)} \subseteq \dots \subseteq N_{(1,\dots,1)} = S^\ell gl$$

Le premier terme  $N_{(\ell)}$  est isomorphe à  $\mathcal{H}om(\Lambda^\ell, \Lambda^\ell)$ , et si  $\lambda$  est une partition et  $\lambda^\circ$  la suivante pour l'ordre lexicographique on a une suite exacte courte :

$$N_{\lambda^\circ} \hookrightarrow N_\lambda \rightarrow \mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda) .$$

Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un uplet. Notons  $(N_k^{\mu_i})_{k \geq 0}$  la filtration de Cauchy de  $S^{\mu_i}gl$ . Le produit tensoriel de ces filtrations forme une filtration  $(N_k^\mu)_{k \geq 0}$  de  $S^\mu gl$  définie par :

$$M_k^\mu = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} N_{k_1}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes N_{k_n}^{\mu_n} .$$

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  désignent  $n$  partitions, on note  $(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)$  le diagramme gauche tel que  $S_{(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)} = S_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes S_{\lambda_n}$ .

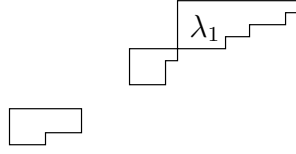


FIG. 6.1 – Le diagramme gauche  $(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)$

D'après le corollaire C.1.6 le gradué de  $S^\mu gl$  associé à la filtration  $(N_k^\mu)_{k \geq 0}$  est égal à :

$$\text{Gr}S^\mu gl = \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \dots |\lambda_n|=\mu_n} \text{Hom}(W_{(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)}, S_{(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)}) .$$

**Lemme 6.1.4.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $B \in \mathcal{P}_{d,d,A}(1,1)$  un bifoncteur homogène de bidegré  $(d,d)$  sur  $A$ . Supposons que  $B$  admet une filtration finie  $(B_k)_{0 \leq k \leq N}$  par des bifoncteurs, dont le gradué  $\text{Gr}B$  existe et vérifie  $H_{\mathcal{P},A}^*(\text{Gr}B) = 0$  pour  $* > 0$ . Alors  $H_{\mathcal{P},A}^*(B) = 0$  pour  $* > 0$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $k$  le quotient  $B_k/B_{k-1}$  est un facteur direct de  $\text{Gr}B$  et n'a donc pas de cohomologie en degré strictement positif. On peut alors démontrer par récurrence sur  $k$  que les suites exactes courtes  $B_{k-1} \hookrightarrow B_k \twoheadrightarrow B_k/B_{k-1}$  se scindent en cohomologie et que  $B_k$  n'a pas de cohomologie de degré strictement positif.  $\square$

**Lemme 6.1.5.** *Soit  $\mu$  un uplet de poids  $d$  et  $n$  un entier positif. Pour tout  $i > 0$  on a :  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(S^\mu gl(-_1^{\oplus n}, -_2)) = 0$ .*

*Démonstration.* Le foncteur  $gl$  est additif en sa première variable. On a donc  $gl(-_1^{\oplus n}, -_2) \simeq gl(-_1, -_2)^{\oplus n}$ . Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  un uplet. En utilisant la formule exponentielle on obtient :

$$S^\mu(gl^{\oplus n}) = \bigoplus_{\forall i=1..k \mu_{i,1} + \dots + \mu_{i,n} = \mu_i} \bigotimes_{i=1}^k S^{(\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n})} gl .$$

Le bifoncteur  $S^\mu gl(-_1^{\oplus n}, -_2)$  s'exprime donc comme une somme directe de bifoncteurs de la forme  $S^\lambda gl$ , et pour démontrer le lemme on peut donc se contenter de prendre  $n = 1$ . Dans ce cas, d'après la proposition 5.1.19, la filtration de  $S^\mu gl$  donnée plus haut vérifie les hypothèses du lemme précédent. On en déduit notre résultat.  $\square$

### Étape 2 : Description de $H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^*(S^{\mu(r)} gl)$ .

Soit  $\mu$  un uplet de poids  $d$ . Dans l'étape précédente, nous avons montré que pour tout  $n$  et tout  $i > 0$  on a :  $H_{\mathcal{P},\mathbb{Z}}^i(S^\mu gl(-_1^{\oplus n}, -_2)) = 0$ . Par changement de base (théorème 4.1.15), on a donc pour tout entier premier  $p$  la même égalité :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}^i(S^\mu gl(-_1^{\oplus n}, -_2)) = 0 \quad \text{si } i > 0 .$$

En utilisant le théorème 5.1.26 on obtient alors la description suivante de la cohomologie de  $S^{\mu(r)} gl$  :

**Lemme 6.1.6.** *Soit  $\mu$  un uplet de poids  $d$  et  $p$  un nombre premier. Pour tout  $r \geq 0$ , on a un isomorphisme :*

$$H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(S^{\mu(r)}gl) \simeq \text{sym}(S^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2})) \left( H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d}) \right) .$$

**Étape 3 : Série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(S^{\mu(r)}gl)$ .**

Le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d})$  se décompose comme une somme directe de  $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$ -modules de permutation élémentaires (définis en 5.3.1).

Soit  $\mathbb{F}_p E$  un  $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$ -module élémentaire. D'après le lemme 6.1.5, le  $\mathbb{Z}$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{Z}}^1(S^\mu gl(-\oplus_1^d, -_2))$  n'a pas de torsion et on peut donc changer de base pour calculer la dimension de  $\text{sym}(S^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{F}_p E)$ . Le théorème 5.3.2 nous indique en effet que dans ce cas, la dimension du  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel  $\text{sym}(S_{\mathbb{F}_p}^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{F}_p E)$  est égale à la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{sym}(S_{\mathbb{C}}^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{C}E)$ .

Mais grâce à la proposition 3.3.11, on a un isomorphisme (valable car on se trouve sur le corps  $\mathbb{C}$  de caractéristique nulle, mais faux sur un corps quelconque) :

$$\text{sym}(S_{\mathbb{C}}^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2})) \simeq \text{sym}(S_{\mathbb{C}}^\mu) \circ \Delta_2 ,$$

où  $\Delta_2$  est le foncteur qui envoie un  $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$ -module  $M$  sur le  $\mathfrak{S}_d$ -module obtenu en restreignant l'action de  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$  au sous-groupe diagonal  $\Delta \mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ . Comme le foncteur  $\text{sym}(S_{\mathbb{C}}^\mu)$  n'est autre que le foncteur qui à un  $\mathfrak{S}_d$ -module  $M$  associe les coinvariants de  $M$  sous l'action du sous groupe  $\mathfrak{S}_\mu \subset \mathfrak{S}_d$ , on obtient :

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \text{sym}(S_{\mathbb{F}_p}^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{F}_p E) = \dim_{\mathbb{C}} (\Delta_2 \mathbb{C}E)_{\mathfrak{S}_\mu} .$$

Par ailleurs si  $AE$  est un  $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$ -module élémentaire, alors  $\Delta_2 AE$  est un  $\mathfrak{S}_d$ -module de permutation. La dimension de  $(\Delta_2 AE)_{\mathfrak{S}_\mu}$  ne dépend donc pas de l'anneau  $A$  d'après le corollaire B.2.4. On obtient donc :

**Lemme 6.1.7.** *Soit  $\mu$  un uplet de poids  $d$ ,  $p$  un nombre premier et  $\mathbb{F}_p E$  un  $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$ -module élémentaire. La dimension de  $\text{sym}(S_{\mathbb{F}_p}^\mu(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{F}_p E)$  est égale à la dimension des coinvariants de  $\mathbb{F}_p E$  sous l'action du sous-groupe diagonal  $\Delta \mathfrak{S}_\mu \subset \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ .*

Puisque le  $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(gl^{(r)\otimes d})$  est une somme directe de modules élémentaires on conclut la démonstration du théorème 6.1.1 en appliquant le lemme précédent à la description de  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{F}_p}^*(S^{\mu(r)}gl)$  obtenue au lemme 6.1.6.

## 6.2 Applications

### 6.2.1 Étude des complexes symétriques

Dans ce paragraphe, on se place sur un anneau  $\mathbb{A}$  de caractéristique  $p$  première. Nous utilisons la transparence du twist pour les bifoncteurs  $S^\mu gl$  (corollaire 6.1.2) pour déterminer les suites spectrales hypercohomologiques associées aux complexes symétriques



[42] qui généralisent en caractéristique  $p$  quelconque les complexes symétriques classiques connus en caractéristique 2 [16, 18]. Ces suites spectrales donnent des informations sur les applications induites en cohomologie par les morphismes entre tenseurs symétriques.

### Rappels sur les complexes symétriques $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^\bullet$

Nous renvoyons le lecteur au paragraphe 2.1 pour les définitions et les propriétés relatives aux  $p$ -complexes. Rappelons les  $p$ -complexes construits par Troesch :

**Théorème 6.2.1.** [42, Th 2, Th 4.3.2] *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Pour tout  $n$  et tout  $j$ , on peut munir le foncteur polynomial*

$$B_n(j) := S^n(I^{\oplus p^j}) \simeq \bigoplus_{i_0 + \dots + i_{p^j-1} = n} S^{i_0} \otimes \dots \otimes S^{i_{p^j-1}}$$

d'une  $p$ -différentielle  $d$  vérifiant les propriétés suivantes.

(1) *Le degré cohomologique d'un élément de  $S^{i_0} \otimes \dots \otimes S^{i_{p^j-1}}$  est*

$$0.i_0 + 1.i_1 + \dots + (p^j - 1)i_{p^j-1}$$

*et la  $p$ -différentielle augmente le degré cohomologique de  $p^{j-1}$ .*

(2) *Soit  $(B_n^{i+p^{j-1}\bullet}(j), d)$  le facteur direct du  $p$ -complexe  $(B_n(j), d)$  formé des éléments de degrés cohomologiques congrus à  $i$  modulo  $p^{j-1}$ . Alors :*

- *Si  $i = 0$  et  $p^j$  divise  $n$ , le  $p$ -complexe  $(B_n^{i+p^{j-1}\bullet}(j), d)$  est une  $p$ -résolution de  $S^n/p^j(j)$ .*
- *Si non le  $p$ -complexe  $(B_n^{i+p^{j-1}\bullet}(j), d)$  est  $p$ -acyclique.*

**Définition 6.2.2.** Soient  $n, j$  des entiers strictement positifs,  $i \in [0, p^{j-1} - 1]$  et  $s \in [1, p - 1]$ . On appelle complexes symétriques les complexes  $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^\bullet$  associés au  $p$ -complexes  $\mathcal{S}_{n,j,i}^\bullet = B_n^{i+p^{j-1}\bullet}(j)$ .

*Remarque 6.2.3.* Par définition,  $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^\bullet$  s'obtient à partir du  $p$ -complexe  $B_n(j)$  en prenant pour différentielles une alternance de  $d^s$  et  $d^{p-s}$ . Comme la différentielle de  $B_n(j)$  est de degré  $p^{j-1}$ , si  $i = 0$  et si  $n$  est un multiple de  $p^j$  alors les éléments de plus haut degré du complexe  $\mathcal{S}_{n,j,0,[s]}^\bullet$  sont en degré  $(2n/p^j)(p^j - 1)$ .

*Exemple 6.2.4.* Supposons  $p = 2, j = 1, i = 0$ , alors les complexes  $\mathcal{S}_{n,1,0,[1]}^\bullet$  sont les complexes symétriques [16, §2] :

$$S^n \rightarrow S^{n-1} \otimes I \rightarrow S^{n-2} \otimes S^2 \rightarrow \dots \rightarrow I \otimes S^{n-1} \rightarrow S^n .$$

Si  $p = 2, j, i$  quelconques, les complexes  $\mathcal{S}_{n,j,i,[1]}^\bullet$  sont des facteurs directs des complexes  $B(j)$  construits par Friedlander et Suslin [18, Th. 8.4].

*Exemple 6.2.5.* Si  $p$  est quelconque  $j = 1$  et  $i = 0$ , le début du complexe  $\mathcal{S}_{n,1,0,[1]}^\bullet$  est  $S^n \rightarrow S^{n-1} \otimes I$  et la première différentielle est la comultiplication.



Pour tout entier  $\ell$  positif, le bifoncteur  $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^\bullet gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2)$  n'a pas de cohomologie en degré strictement positif. La page un de la première suite spectrale hypercohomologique est donc totalement nulle, sauf la colonne  $\mathbb{I}_1^{0,\bullet}$  d'indice 0 qui s'identifie au complexe  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^\bullet gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2))$ . Cette première suite spectrale dégénère donc à la deuxième page pour des raisons évidentes de lacunarité. L'aboutissant est donné par celui de la deuxième suite spectrale hypercohomologique. Celui-ci est nul si  $i \neq 0$  ou si  $n$  n'est pas un multiple de  $p^j$  et vaut  $\mathbb{I}_\infty^* = H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{n/p^j(j)} gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2))$  si  $i = 0$  et  $n$  est un multiple de  $p^j$ .  $\square$

*Remarque 6.2.9.* Supposons que  $p^j$  divise  $n$ . Alors la cohomologie du bifoncteur  $S^{n/p^j(j)} gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2)$  est non nulle en chaque degré  $\ell$  pair tel que  $0 \leq \ell \leq 2n(p^j - 1)/p^j$ .

En effet, le bifoncteur  $gl$  est facteur direct du bifoncteur  $gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2)$ . Le bifoncteur  $S^{n/p^j(j)} gl$  est donc facteur direct du bifoncteur  $S^{n/p^j(j)} gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2)$ . Ainsi si la cohomologie de  $S^{n/p^j(j)} gl$  est non nulle en degré  $\ell$ , il en va de même de la cohomologie de  $S^{n/p^j(j)} gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2)$ . Mais on sait calculer la cohomologie de  $S^{n/p^j(j)} gl$  : d'après le théorème 6.1.1, elle est égale aux coinvariants du  $\mathfrak{S}_{n/p^j}$ -module gradué  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(j)\otimes n/p^j})$  sous l'action de  $\mathfrak{S}_{n/p^j}$ . Le  $\mathfrak{S}_{n/p^j}$ -module gradué  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(gl^{(j)\otimes n/p^j})$  est une somme directe de modules de permutation (théorème 4.3.1), et les coinvariants d'un module de permutation sont non nuls (proposition B.2.3). Ainsi le bifoncteur  $S^{n/p^j(j)} gl$  et le bifoncteur  $S^{n/p^j(j)} gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2)$  possèdent de la cohomologie non nulle en chaque degré où  $gl^{(j)\otimes n/p^j}$  a de la cohomologie non nulle, c'est-à-dire dans tous les degrés pairs à partir du degré 0 et jusqu'au degré  $2n(p^j - 1)/p^j$ .

Nous déduisons de cette observation sur la cohomologie du bifoncteur  $S^{n/p^j(j)} gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2)$  que si  $p^j$  divise  $n$  alors le complexe  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(\mathcal{S}_{n,j,0,[s]}^\bullet gl(-\mathbb{1}^{\oplus m}, -2))$  n'est exact en *aucun* degré pair.

Considérons maintenant les complexes  $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{\bullet(r)} gl$  obtenus en précomposant les complexes symétriques par le twist de Frobenius et par le bifoncteur  $gl$ . En leur appliquant le foncteur  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(-)$  on obtient des complexes de  $\mathbb{A}$ -modules :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{0(r)} gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{1(r)} gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{2(r)} gl) \rightarrow \dots$$

La cohomologie de ces complexes est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 6.2.10.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première,  $n, j, i$  des entiers,  $s \in [1, p-1]$ , et  $r$  un entier positif.*

- (1) *Si  $i = 0$  et  $n$  est un multiple de  $p^j$ , alors le complexe  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathcal{S}_{n,j,0,[s]}^{\bullet(r)})$  est exact en degré impair et sa cohomologie en degré  $2k$  est isomorphe (de manière non graduée) au  $\mathbb{A}$ -module libre  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^{2k}(S^{n/p^j(j)}(gl^{\oplus p^r}))$ .*
- (2) *Sinon, le complexe  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathcal{S}_{n,j,[s]}^{\bullet(r)}(gl))$  est exact en tout degré.*

*Démonstration.* Les termes des complexes symétriques sont des sommes directes de tenseurs symétriques. Les bifoncteurs obtenus en précomposant un tenseur symétrique par

le bifoncteur  $gl$  vérifient la troisième Ext-condition d'après le corollaire 6.1.2. D'après la proposition 5.1.15, on a donc un isomorphisme (non gradué) de complexes :

$$H_{\mathcal{P},A}^*(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{\bullet(r)}) \simeq H_{\mathcal{P},A}^0(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{\bullet} gl(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2)).$$

Notre énoncé découle alors directement du lemme 6.2.8 □

**Corollaire 6.2.11.** *Soient  $n, r$  deux entiers positifs. Supposons  $n$  multiple de  $p$ . Le conoyau du morphisme induit en cohomologie par la multiplication :*

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{n-1(r)} gl \otimes gl^{(r)}) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{n(r)} gl)$$

est un  $\mathbb{A}$ -module libre non nul, isomorphe (de manière non graduée) au  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^{2n(p-1)/p}(S^{n/p(1)} gl(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2))$ .

*Démonstration.* On applique la proposition 6.2.10 au complexe  $\mathcal{S}_{n,1,0,[p-1]}^{\bullet(r)}$ , dont le plus haut degré cohomologique est  $2n(p-1)/p$  (cf. remarque 6.2.3) et dont la fin est égale à  $S^{n-1} \otimes I \rightarrow S^n$  (cf. exemple 6.2.6). □

**Corollaire 6.2.12.** *Soient  $n, r$  deux entiers positifs. Supposons  $n$  multiple de  $p$ . Le conoyau du morphisme induit en cohomologie par la comultiplication :*

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{n(r)} gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{n-1(r)} gl \otimes gl^{(r)})$$

est un  $\mathbb{A}$ -module libre non nul, isomorphe (de manière non graduée) au  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(S^{n/p(1)} gl(-\overset{\oplus p^r}{1}, -2))$ .

*Démonstration.* On applique la proposition 6.2.10 au complexe  $\mathcal{S}_{n,1,0,[1]}^{\bullet(r)}$  dont le début est égal à  $S^n \rightarrow S^{n-1} \otimes I$  (cf. exemple 6.2.5). □

**Corollaire 6.2.13.** *Soient  $n, j, r$  des entiers positifs et  $s \in [1, p-1]$ . La première suite spectrale hypercohomologique associée au complexe  $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{\bullet(r)} gl$  dégénère à la deuxième page.*

*Démonstration.* La page un de la première suite spectrale associée au complexe  $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{\bullet(r)} gl$  s'identifie au complexe  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{\bullet(r)})$  :

$$I_1^{k,l} = H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{l(r)}), \quad d_1^{k,l} = H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(\partial^l),$$

où  $\partial$  désigne la différentielle du complexe symétrique  $\mathcal{S}_{n,j,i,[s]}^{\bullet}$ . D'après la proposition 6.2.10, les lignes d'indice impair de la deuxième page sont nulles, et comme la cohomologie des tenseurs symétriques est nulle en degré impair (cf. théorème 6.1.1), les colonnes d'indice impair de la deuxième page sont également nulles. Mais pour tout  $m \geq 2$  la différentielle  $d_m$  de la page  $m$  est de bidegré  $(1-m, m)$ . Pour toute paire  $k, l$ , le morphisme  $d_m^{k,l} : I_m^{k,l} \rightarrow I_m^{k+1-m, l+m}$  est donc nul car sa source ou son but est nul. □

## 6.2.2 Calcul de la cohomologie de $L^{p(r)}gl$

Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $V$  un  $\mathbb{A}$ -module projectif de type fini. On rappelle (cf. exemple 1.4.24 du chapitre 1) que  $L^*(V)$  désigne le quotient de l'algèbre graduée  $S^*(V)$  par l'idéal engendré par les puissances  $p$ -èmes des éléments de  $S^*(V)$  :

$$L^*(V) = S^*(V) / \langle v^p, v \in V \rangle .$$

Pour tout  $n \geq 0$  le foncteur  $V \rightsquigarrow L^n(V)$  est muni d'une structure de foncteur polynomial homogène de degré  $n$ . Pour  $n < p$  on a  $S^n = L^n$  et pour  $n = p$  on a une suite exacte :

$$I^{(1)} \hookrightarrow S^p \twoheadrightarrow L^p .$$

En particulier le foncteur  $L^n$  n'est pas défini sur  $\mathbb{Z}$ , et il importe de savoir dans quelle caractéristique on travaille pour le définir.

L'objet de cette partie est de calculer la cohomologie du foncteur  $L^{p(r)}gl$ . Pour cela, nous examinons le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion  $I^{(r+1)}gl \rightarrow S^{p(r)}gl$ .

**Lemme 6.2.14.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. On considère le  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p$  avec l'action donnée sur la base  $(e_\eta)_{\eta \in \mathfrak{S}_p}$  par la formule  $(\sigma, \tau).e_\eta = e_{\sigma\eta\tau^{-1}}$ . Le  $\mathbb{A}$ -module  $\text{sym}(I^{(1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{A}\mathfrak{S}_p)$  est libre de rang 1. L'application :*

$$\text{sym}(I^{(1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{A}\mathfrak{S}_p) \rightarrow \text{sym}(S^p(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{A}\mathfrak{S}_p)$$

*induite par l'inclusion  $I^{(1)} \rightarrow S^p$  est injective.*

*Démonstration.* D'après la proposition 2.3.1, le  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^0(I^{(1)}gl)$  est libre de rang un. La proposition 4.3.2 donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^0(I^{(1)}gl) & \xrightarrow{(1)} & H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^0(S^p gl) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{sym}(I^{(1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{A}\mathfrak{S}_p) & \xrightarrow{(2)} & \text{sym}(S^p(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(\mathbb{A}\mathfrak{S}_p) . \end{array}$$

Le morphisme (1) est injectif par exactitude à gauche du foncteur  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^0(-)$ . Le morphisme (2) est donc injectif.  $\square$

Le  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p$  du lemme précédent est un cas particulier de  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module de permutation élémentaire. On rappelle (cf. définition 5.3.1) qu'un  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module élémentaire est un module de la forme  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p / \mathfrak{S}_\mu \otimes \mathbb{A}\mathfrak{S}_p$ , où  $\mu$  est un uplet de poids  $p$  et l'action de  $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p$  est donnée par la formule :

$$(\lambda, \varsigma).e_{[\tau]} \otimes e_\sigma := e_{[\lambda\tau]} \otimes e_{\lambda\sigma\varsigma^{-1}} .$$

L'intérêt de cette définition est que les  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -modules élémentaires sont les facteurs directs du  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r)\otimes p})$ .

Le lemme suivant étudie le comportement du foncteur  $\text{sym}(I^{(r+1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))$  sur les modules élémentaires non égaux à  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p$ .

**Lemme 6.2.15.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Si  $E$  est un  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module élémentaire différent de  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p$  alors  $\text{sym}(I^{(1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(E)$  est nul.*

*Démonstration.* D'après la proposition 2.3.1, le  $\mathbb{A}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(\mathfrak{gl}^{(1)}(-\oplus_1^{p^j}, -2))$  est libre de rang  $p^j$ . La proposition 4.3.2 donne un isomorphisme entre ce module et le  $\mathbb{A}$ -module  $\text{sym}(I^{(1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(\mathfrak{gl}(-\oplus_1^{p^j}, -2))^{\otimes p})$ . Or le théorème 4.3.1 donne isomorphisme de  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -modules :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(\mathfrak{gl}(-\oplus_1^{p^j}, -2))^{\otimes p} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{A}}(I^{\oplus p^j}, I)^{\otimes p} \otimes \mathbb{A}\mathfrak{S}_p,$$

où  $\text{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{A}}(I^{\oplus p^j}, I)$  est un  $\mathbb{A}$ -module libre de rang  $p^j$ . Si  $j$  est un entier supérieur ou égal à 1, le  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(\mathfrak{gl}(-\oplus_1^{p^j}, -2))^{\otimes p}$  contient donc tous les  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -modules élémentaires comme facteurs directs et contient  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p$  avec multiplicité  $p^j$ . D'après le lemme 6.2.14, le rang de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^0(I^{(1)}(\mathfrak{gl}^{\oplus p^j}))$  est donc égal à  $p^j$  plus la somme des rangs des  $\mathbb{A}$ -modules libres  $\text{sym}(I^{(1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(E)$  pour  $E$  différent de  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p$ . On en déduit le résultat.  $\square$

**Proposition 6.2.16.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première, et  $r$  un entier. L'application :*

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}\mathfrak{gl}) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}\mathfrak{gl})$$

*induite en cohomologie par l'injection  $I^{(1)} \rightarrow S^p$  est injective en degré multiple de  $2p$  et nulle dans les autres degrés. Son rang est  $p^r$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 2.3.1,  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(I^{(r+1)}\mathfrak{gl})$  est un  $\mathbb{A}$ -module libre de rang 1 si  $k$  est un entier pair tel que  $0 \leq k \leq 2p^{r+1} - 2$  et est un  $\mathbb{A}$ -module nul sinon. Pour démontrer la proposition, il nous suffit donc de montrer que le rang de l'application  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}\mathfrak{gl}) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}\mathfrak{gl})$  est 1 en degré multiple de  $2p$  et 0 ailleurs.

Mais d'après le théorème 5.1.26, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}\mathfrak{gl}) & \xrightarrow{\phi} & \text{sym}(I^{(1)}(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathfrak{gl}^{(r)\otimes p})) \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) \\ H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}\mathfrak{gl}) & \xrightarrow[\simeq]{\phi} & \text{sym}(S^p(\text{Id}^{\boxtimes 2}))(H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathfrak{gl}^{(r)\otimes p})), \end{array}$$

et le rang du morphisme (1) est donc égal au rang du morphisme (2).

Décomposons le  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -module  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\mathfrak{gl}^{(r)\otimes p})$  en  $\mathfrak{S}_p^{\times 2}$ -modules élémentaires. Le module  $\mathbb{A}\mathfrak{S}_p$  apparaît seulement dans les degrés multiples de  $2p$ , avec multiplicité 1. On applique alors les lemmes 6.2.14 et 6.2.15 pour obtenir le résultat.  $\square$

**Théorème 6.2.17.** *Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $r$  un entier positif. La série de Poincaré de la cohomologie de  $L^{p(r)}\mathfrak{gl}$  s'obtient en ajoutant la série :*

$$\frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}}(t + t^3 + \dots + t^{2p-5} + t^{2p-3} - 1)$$

à la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ .

*Démonstration.* Notons  $K_k$  le rang du noyau de l'application  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(I^{(r+1)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(S^{p(r)}gl)$  et  $I_k$  le rang de son image. D'après la proposition 6.2.16 :

$$\sum_{k \geq 0} I_k t^k = \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}}, \quad \sum_{k \geq 0} K_k t^k = \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^2} - \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}}.$$

D'après la suite exacte longue induite en cohomologie par la suite exacte courte  $I^{(1)} \hookrightarrow S^p \rightarrow L^p$ , la différence entre le rang de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(L^{p(r)}gl)$  et de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(S^{p(r)}gl)$  est donnée par la formule :

$$\text{rg } H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(L^{p(r)}gl) - \text{rg } H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(S^{p(r)}gl) = K_{k+1} - I_k.$$

La série de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(L^{p(r)}gl)$  s'obtient donc en ajoutant la série  $\sum_{k \geq 0} (K_{k+1} - I_k)t^k$  à la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ . Or, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} K_{k+1} t^{k+1} &= \sum_{k \geq 0} K_k t^k = \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^2} - \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}} \\ &= \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}} \left( \frac{1 - t^{2p}}{1 - t^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}} (t^2 + \dots + t^{2p-2}). \end{aligned}$$

En divisant ces égalités par  $t$  et en retranchant  $\sum_{k \geq 0} I_k t^k$  on obtient le résultat.  $\square$

### 6.2.3 Calcul de la cohomologie de $\Gamma^{p(r)}gl$

Dans toute cette partie,  $\mathbb{A}$  est un anneau de caractéristique  $p$  première. Le calcul de la cohomologie de  $\Gamma^{p(r)}gl$  s'effectue en deux étapes.

Nous calculons tout d'abord l'application  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^{*+2}(I^{(r)}gl)$  induite par le produit de Yoneda avec la classe de l'extension  $I^{(r)}gl \rightarrow S^{p(r-1)}gl \rightarrow \Gamma^{p(r-1)}gl \rightarrow I^{(r)}gl$ .

Ensuite, nous étudions les suites spectrales hypercohomologiques associées au complexe  $S^{p(r-1)}gl \rightarrow \Gamma^{p(r-1)}gl$  d'homologie  $I^{(r)}$  en degré 0 et 1. La différentielle de la deuxième suite spectrale hypercohomologique est donnée par la première étape. On en déduit l'aboutissant. Connaissant l'aboutissant et l'information donnée par la deuxième étape, la première suite spectrale nous donne la différence entre la cohomologie de  $S^{p(r)}gl$  (que l'on connaît) et la cohomologie de  $\Gamma^{p(r)}gl$ .

Avant de commencer le calcul de la cohomologie de  $\Gamma^{p(r)}gl$  proprement dit, nous effectuons un calcul préliminaire, qui nous sera utile dans la première étape.

**Calcul préliminaire :**  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+1+i)}gl, S^{p^r(1+i)}gl)$

**Proposition 6.2.18.** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première. Pour tout  $r \geq 0$  et tout  $i \geq 0$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+1+i)}gl, S^{p^r(1+i)}gl)$  est nul en degré impair. De plus, l'inclusion  $S^{p^r(1)} \hookrightarrow S^{p^{r+1}}$  induit une surjection :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+1+i)}gl, S^{p^r(1+i)}gl) \twoheadrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+1+i)}gl, S^{p^{r+1}(i)}gl)$$

La démonstration de cette proposition occupe la fin du paragraphe. On procède par récurrence sur l'entier  $i$ . Le cas  $i = -1$  est déjà connu :

**Lemme 6.2.19.** *Pour tout  $r \geq 0$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r)}gl, S^{p^r}gl) = 0$  si  $*$  impair.*

*Démonstration.* En effet on a un isomorphisme (par dualité de Kuhn) :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r)}gl, S^{p^r}gl) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl),$$

et  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}}(I^{(r)}, I^{(r)})$  est nul en degré impair.  $\square$

Pour conclure la démonstration de la proposition 6.2.18, il nous reste à montrer l'hérédité. On suppose que pour tout entier  $r$  positif, les extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+i+1)}gl, S^{p^{r+1}(i)}gl)$  sont nulles en degré impair. On veut démontrer que sous cette condition on a pour tout  $r \geq 0$  :

(HR1)  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+i+1)}gl, S^{p^r(i+1)}gl) = 0$  si  $*$  est impair.

(HR2) l'inclusion  $S^{p^r(1)} \hookrightarrow S^{p^{r+1}}$  induit une surjection

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+1+i)}gl, S^{p^r(1+i)}gl) \twoheadrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r+1+i)}gl, S^{p^{r+1}(i)}gl).$$

A cette fin on introduit les complexes suivants :

**Lemme 6.2.20.** *Pour tout  $r \geq 0$ , il existe un complexe acyclique  $S^{p^r(1)} \rightarrow F^0 \rightarrow \dots \rightarrow F^n$  vérifiant :*

1. les foncteurs  $F^i$  sont des sommes directes de tenseurs symétriques.
2.  $F^0 = S^{p^{r+1}}$ .
3. Si  $S^{p^{r+1}}$  est un facteur direct de  $F^i$ , alors  $i$  est pair.

*Démonstration.* On peut prendre pour  $F^\bullet$  le complexe symétrique  $\mathcal{S}_{p^{r+1}, 1, 0, [1]}^\bullet$  (cf. définition 6.2.2).  $\square$

Nous allons analyser la première suite spectrale hypercohomologique associée au complexe de bifoncteurs :

$$S^{p^r(i+1)} \rightarrow F^{0(i)} \rightarrow \dots \rightarrow F^{n(i)} \quad (*)$$

à l'aide du lemme d'annulation suivant (dont la démonstration est similaire à la démonstration de la proposition 1.6.4) :



**Lemme 6.2.21.** Soient  $B$  et  $B'$  des foncteurs polynomiaux homogènes de bidegré au moins  $(1,1)$ . Alors :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r)}gl, Bgl \otimes B'gl) = 0 .$$

Les lignes d'indice pair de la page un de la première suite spectrale associée au complexe  $(*)$  sont nulles d'après le lemme d'annulation 6.2.21 et le lemme 6.2.20 (3). Les colonnes d'indice impair de cette première page sont nulles sauf éventuellement sur la ligne  $I_1^{*,0}$  d'indice 0 d'après l'hypothèse de récurrence. La situation est récapitulée par le schéma suivant :

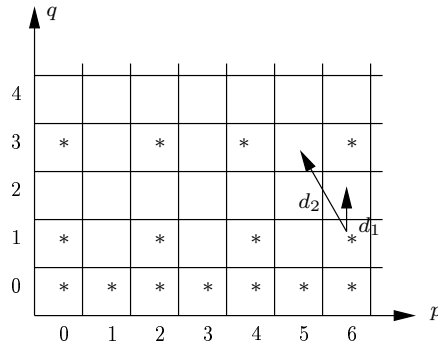


FIG. 6.2 – La page  $I_1^{p,q}$

où la ligne d'indice 0 vaut  $I_1^{*,0} = \text{Ext}^*(I^{(r+1+i)}gl, S^{p^r(1+i)}gl)$ , la ligne d'indice  $k \geq 1$  vaut  $I_1^{*,k} = \text{Ext}^*(I^{(r+1+i)}gl, F^{k-1(i)}gl)$ , et la première différentielle  $d_1^{*,0}$  de source la ligne d'indice 0 est induite par l'inclusion  $S^{p^r(1+i)} \hookrightarrow S^{p^{r+1}(i)}$ .

Pour des raisons de lacunarité, pour tout  $i \geq 1$ , les différentielles  $d_i^{2k+1,0}$  sont nulles. Comme la suite spectrale a un aboutissant nul (le complexe  $(*)$  est acyclique), ceci impose la nullité des  $I_1^{2k+1,0}$ . La condition (HR1) est donc vérifiée.

D'autre part, toujours pour des raisons de lacunarité, les différentielles  $d_i^{2k,1}$  dont la source est à la première ligne sont également toutes nulles. Comme les éléments de la première ligne ne survivent pas dans l'aboutissant, la première différentielle  $d_1^{2k,0} : I_1^{2k,0} \rightarrow I_1^{2k,1}$  est nécessairement surjective. Ceci démontre (HR2) et conclut la démonstration de la proposition 6.2.18.

### Première étape : calcul d'un produit de Yoneda

**Proposition 6.2.22.** Soit  $r$  un entier strictement positif. Pour tout  $n$ , l'application :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^n(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl) & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^{n+2}(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl) \\ c & \mapsto & e \circ c \end{array}$$

qui à une classe  $c$  associe le produit de Yoneda de  $c$  et de la classe  $e$  représentée par l'extension  $I^{(r)}gl \rightarrow S^{p^{(r-1)}}gl \rightarrow \Gamma^{p^{(r-1)}}gl \rightarrow I^{(r)}gl$  est égale à l'application nulle.

La démonstration de la proposition 6.2.22 occupe la fin de ce paragraphe.

**Lemme 6.2.23.** *L'algèbre  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r)}gl, I^{(r)}gl)$  (munie du produit de Yoneda) est commutative.*

*Démonstration.* On a des isomorphismes d'algèbres (toutes sont munies du produit de Yoneda) :

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r)}gl, I^{(r)}gl) \xrightarrow{\cong_D} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(2)}^*(I^{(r)\boxtimes 2}, I^{(r)\boxtimes 2}) \xleftarrow{\cong} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1)}^*(I^{(r)}, I^{(r)})^{\otimes 2} .$$

Le premier isomorphisme est l'isomorphisme de dualité du lemme 4.1.7 qui remplace la première variable par son dual  $A$ -linéaire. Le deuxième morphisme est le morphisme de Künneth, qui à une paire d'extensions associe leur produit tensoriel externe. C'est un isomorphisme d'après la proposition 1.4.16. On utilise ensuite le fait que  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1)}^*(I^{(r)}, I^{(r)})$  est une algèbre commutative [18, Th 4.10] pour conclure.  $\square$

**Lemme 6.2.24.** *Soit  $r$  un entier positif. Alors la surjection  $\Gamma^{p^r} \rightarrow I^{(r)}$  induit une surjection :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r)}gl, I^{(r)}gl) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl) .$$

*Démonstration.* Ce lemme s'obtient par dualité de Kuhn à partir du calcul préliminaire effectué précédemment (proposition 6.2.18).  $\square$

Soit  $c \in \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^n(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl)$ . D'après le lemme 6.2.24, la classe  $c$  peut être obtenue en tirant en arrière une certaine classe  $c' \in \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^n(I^{(r)}gl, I^{(r)}gl)$  par l'application  $\Phi : \Gamma^{p^r}gl \rightarrow I^{(r)}gl$ . En notant  $\circ$  la composition de Yoneda, on a donc :

$$e \circ c = e \circ (c' \Phi) = (e \circ c') \Phi = (c' \circ e) \Phi = c' \circ (e \Phi) .$$

La troisième égalité provient de la commutativité du produit de Yoneda dans l'algèbre  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^*(I^{(r)}gl, I^{(r)}gl)$  (lemme 6.2.23). Pour conclure la démonstration de la proposition 6.2.22, il nous suffit donc de montrer la nullité de la classe  $(e \Phi)$ , ce qui est précisément le résultat du :

**Lemme 6.2.25.** *L'extension obtenue en tirant en arrière  $I^{(r)}gl \rightarrow S^{p(r-1)}gl \rightarrow \Gamma^{p(r-1)}gl \rightarrow I^{(r)}gl$  par l'application  $\Phi : \Gamma^{p^r}gl \rightarrow I^{(r)}gl$  représente la classe de l'extension nulle  $0 \in \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^2(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl)$ .*

*Démonstration.* Le foncteur polynomial  $\Gamma^{p^r}$  est un projectif de  $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1)$ . On a donc  $\text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1)}^2(\Gamma^{p^r}, I^{(r)}) = 0$ . Ainsi, la classe de l'extension obtenue en tirant en arrière  $I^{(r)} \rightarrow S^{p(r-1)} \rightarrow \Gamma^{p(r-1)} \rightarrow I^{(r)}$  par la surjection  $\phi : \Gamma^{p^r} \rightarrow I^{(r)}$  est nulle. Or on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^2(I^{(r)}gl, I^{(r)}gl) & \xrightarrow{\Phi^2} & \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1,1)}^2(\Gamma^{p^r}gl, I^{(r)}gl) \\ \circ gl \uparrow & & \circ gl \uparrow \\ \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1)}^2(I^{(r)}, I^{(r)}) & \xrightarrow{\phi^2} & \text{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(1)}^2(\Gamma^{p^r}, I^{(r)}) = 0 . \end{array}$$

Le résultat en découle.  $\square$

## Deuxième étape : suites spectrales hypercohomologiques

Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $r$  un entier positif. Nous introduisons les suites spectrales hypercohomologiques  $\mathbb{I}_r^{*,*}$  et  $\mathbb{II}_r^{*,*}$  associées au complexe  $S^{p(r)}gl \rightarrow \Gamma^{p(r)}gl$ , dont la différentielle est induite par la norme  $S^p \rightarrow \Gamma^p$ . L'homologie de ce complexe est égale à  $I^{(r+1)}$  en degré 0 et 1.

**Lemme 6.2.26.** *La deuxième page de la suite spectrale  $\mathbb{II}_r^{*,*}$  est donnée par :*

$$\mathbb{II}_r^{*,0} = \mathbb{II}_r^{*,1} = H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}gl), \quad \mathbb{II}_r^{*,k} = 0 \text{ pour } k \geq 2.$$

*La suite dégénère à la deuxième page : les différentielles  $\mathbb{II}d_i$  sont nulles pour tout  $i \geq 2$ . La série de Poincaré de l'aboutissant est donc égale à :*

$$P(t) = (1+t) \frac{1-t^{2p^{r+1}}}{1-t^2} = \frac{1-t^{2p^{r+1}}}{1-t}.$$

*Démonstration.* La forme de la deuxième page est donnée par le théorème C.2.3. la différentielle  $\mathbb{II}d_2$  est donnée par le produit de Yoneda avec la classe de l'extension  $I^{(r)}gl \rightarrow S^{p(r-1)}gl \rightarrow \Gamma^{p(r-1)}gl \rightarrow I^{(r)}gl$ . Elle est donc nulle d'après la proposition 6.2.22. Les différentielles supérieures sont nulles pour des raisons de degré. Enfin, la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}gl) = \text{Ext}_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}, I^{(r+1)})$  est égale à  $(1-t^{2p^{r+1}})/(1-t)$ . On en déduit la série de Poincaré de l'aboutissant.  $\square$

De même on a :

**Lemme 6.2.27.** *La première page de la suite spectrale  $\mathbb{I}_r^{*,*}$  est donnée par :*

$$\mathbb{I}_r^{*,0} = H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl), \quad \mathbb{I}_r^{*,1} = H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl), \quad \mathbb{I}_r^{*,k} = 0 \text{ pour } k \geq 2.$$

*La première différentielle  $\mathbb{I}d_1^{*,0}$  est l'application induite en cohomologie par la norme. La suite dégénère à la deuxième page : les différentielles  $\mathbb{I}d_i$  sont nulles pour tout  $i \geq 2$ .*

Notons  $K_k$  le rang du noyau de l'application  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  induite en cohomologie de degré  $k$  par la norme et  $C_k$  son conoyau, avec la convention  $C_k = K_k = 0$  si  $k < 0$ . D'après le lemme 6.2.27, l'aboutissant de la première suite spectrale hypercohomologique  $\mathbb{I}_r^{*,*}$  a pour série de Poincaré

$$P(t) = \sum_{k \geq 0} (C_{k-1} + K_k)t^k.$$

Cette série est égale à celle de l'aboutissant de la deuxième suite spectrale, donnée par le lemme 6.2.26. On a donc :

$$\sum_{k \geq 0} (C_{k-1} + K_k)t^k = \frac{1-t^{2p^{r+1}}}{1-t} \tag{6.1}$$

**Lemme 6.2.28.** *Le noyau de l'application  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  a pour série de Poincaré*

$$\sum_{k \geq 0} K_k t^k = \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}} .$$

*Démonstration.* Le noyau de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  contient l'image du morphisme  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ . D'après la proposition 6.2.16, il est donc au moins de rang 1 en chaque degré cohomologique  $* = k2p$  avec  $k \in [0, p^r - 1]$ , donc de rang au moins  $p^r$

De plus, la comultiplication  $S^p \rightarrow \otimes^p$  factorise de deux manières :  $S^p \rightarrow \Gamma^p \rightarrow \otimes^p$  et  $S^p \rightarrow S^{p-1} \otimes I \rightarrow \otimes^p$ . Comme  $S^{p-1} \otimes I$  est un facteur direct de  $\otimes^p$ , la comultiplication  $S^{p-1} \otimes I \rightarrow \otimes^p$  induit une injection en cohomologie :

$$H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p-1(r)}gl \otimes gl^{(r)}) \hookrightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\otimes^{p(r)}gl) .$$

Ainsi, le noyau de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$ , est contenu dans le noyau du morphisme  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p-1(r)}gl \otimes gl^{(r)})$ . Ce dernier est de rang  $p^r$  d'après le corollaire 6.2.12, et le noyau de l'application induite en cohomologie par la norme est donc de rang au plus  $p^r$ .

Ainsi, le noyau du morphisme  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  est exactement égal à l'image du morphisme  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(I^{(r+1)}gl) \rightarrow H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

La différence entre le rang de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(\Gamma^{p(r)}gl)$  et de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(S^{p(r)}gl)$  est donnée par la formule :

$$\text{rg } H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(\Gamma^{p(r)}gl) - \text{rg } H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^k(S^{p(r)}gl) = C_k - K_k \quad (6.2)$$

Nous obtenons donc :

**Théorème 6.2.29.** *La série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  s'obtient en ajoutant la série*

$$(t + t^2 + \dots + t^{2p-2}) \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}}$$

*à la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$ .*

*Démonstration.* D'après la formule (6.2), la différence entre les séries de Poincaré de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(\Gamma^{p(r)}gl)$  et de  $H_{\mathcal{P},\mathbb{A}}^*(S^{p(r)}gl)$  est égale à  $\sum_{k \geq 0} (C_k - K_k)t^k$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (C_{k-1} - K_{k-1})t^k &= \sum_{k \geq 0} (C_{k-1} - K_k)t^k - \sum_{k \geq 0} K_k t^k - t \sum_{k \geq 0} K_{k-1} t^{k-1} \\ &= \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}} \left( \frac{1 - t^{2p}}{1 - t} - 1 - t \right) \\ &= \frac{1 - t^{2p^{r+1}}}{1 - t^{2p}} (t^2 + t^3 + \dots + t^{2p-1}) , \end{aligned}$$

où la deuxième égalité s'obtient à l'aide de la formule (6.1) et du lemme 6.2.28. On obtient notre résultat en divisant les deux séries par  $t$ .  $\square$



## Chapitre 7

# Combinatoire du pléthysme

## $S^\mu(V \otimes W)$

Soient  $\mathbb{A}$  un anneau de caractéristique  $p$  première et  $\mu$  un  $k$ -uplet d'entiers positifs de poids  $d$ . Si la caractéristique  $p$  est plus grande que  $d$ , alors la présentation du foncteur  $S^\mu$  par des produits tensoriels induit (cf. paragraphe 6.1 du chapitre 6) une présentation de la cohomologie de bifoncteur  $S^{\mu(r)}gl$  :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mu} H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r) \otimes d}) \xrightarrow{\oplus 1 - \sigma} H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(gl^{(r) \otimes d}) \rightarrow H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl) \rightarrow 0 .$$

Le bifoncteurs qui apparaissent à gauche dans cette présentation sont des bifoncteurs séparables, dont la cohomologie est simple à calculer. On peut en déduire la série de Poincaré de la cohomologie de  $S^{\mu(r)}gl$ , mais aussi de nombreux autres renseignements. Si la caractéristique  $p$  de  $\mathbb{A}$  est plus petite que  $d$ , on peut encore déterminer la série de Poincaré de  $H_{\mathcal{P}, \mathbb{A}}^*(S^{\mu(r)}gl)$ , cf. théorème 6.1.1. Mais on perd la présentation de la cohomologie, et les renseignements supplémentaires qu'une telle présentation peut apporter.

La question qui se pose naturellement est la suivante. Existe-t-il dans le cas général une présentation des bifoncteurs de la forme  $S^{\mu(r)}gl$  par des bifoncteurs séparables faciles à étudier, et qui induit une présentation en cohomologie ? Nous répondons à cette question par l'affirmative dans ce chapitre.

Dans le paragraphe 7.1, nous nous plaçons sur un anneau commutatif  $A$  quelconque et nous reprenons la filtration du bifoncteur  $S^d(I \boxtimes I) \in \mathcal{P}_A(2)$  construite par Akin, Buchsbaum et Weyman dans [4], qui nous a déjà été utile au chapitre 6 (théorème 6.1.3). Le gradué de cette filtration est un somme directe de foncteurs séparables  $S_\lambda \boxtimes S_\lambda$ , où  $S_\lambda$  est le foncteur de Schur associé à cette partition  $\lambda$ . La présentation standard des foncteurs de Schur  $S_\lambda$  par des tenseurs alternés induit donc une présentation du gradué de  $S^d(I \boxtimes I)$  par des foncteurs séparables. Le premier résultat du chapitre est le théorème 7.1.11, qui montre que cette présentation du gradué de  $S^d(I \boxtimes I)$  se relève en une présentation du bifoncteur  $S^d(I \boxtimes I)$  lui-même. Puis nous démontrons le théorème 7.2.4 : quitte à précomposer la première variable par le foncteur de dualité  $-\vee$  pour se ramener dans  $\mathcal{P}_A(1, 1)$ , cette présentation  $S^{\mu(r)}gl$  par des bifoncteurs séparables induit

une présentation en cohomologie. Enfin, nous nous servons de cette construction pour décrire de manière explicite une base de la cohomologie de degré 0 du bifoncteur  $S^d gl$ .

Une question de combinatoire reste ouverte. Les présentations standard des foncteurs de Schur  $S_\lambda$  se prolongent [3] en des résolutions finies des foncteurs de Schur  $S_\lambda$  par des tenseurs alternés. On peut en déduire une résolution finie du gradué du bifoncteur  $S^d(I \boxtimes I)$ . Peut-on relever cette résolution finie du gradué de  $S^d(I \boxtimes I)$  en une résolution finie de  $S^d(I \boxtimes I)$  qui prolonge la présentation donnée au théorème 7.1.11 ?

## 7.1 Présentation standard de $S^\mu(V \otimes W)$

### 7.1.1 Filtration de Cauchy de $S^d(V \otimes W)$

Dans ce paragraphe nous rappelons la construction de la filtration de Cauchy de  $S^d(V \otimes W)$  décrite dans [4, §III] et déjà utilisée dans la démonstration du théorème 6.1.1. Nous présentons la construction dans le cadre des bifoncteurs polynomiaux sur l'anneau de base  $A = \mathbb{Z}$ , le théorème de changement de base 1.5.4 permet ensuite d'étendre les résultats à un anneau  $A$  quelconque. On fixe  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{Z}$ -modules libres de type fini. Rappelons (cf. paragraphe 1.2.3 du chapitre 1) que  $\mathbb{Z}$  étant un anneau principal, les morphismes entre bifoncteurs polynomiaux définis sur  $\mathbb{Z}$  admettent des noyaux et des images.

#### Définition des applications $\phi_\lambda$ [4, p. 243]

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit une application (naturelle en  $V, W$ )  $\phi_k : \Lambda^k(V) \otimes \Lambda^k(W) \rightarrow S^k(V \otimes W)$  par la formule :

$$\phi_k(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \otimes w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) = (-1)^{k(k-1)/2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma) (v_{\sigma(1)} \otimes w_1) \cdots (v_{\sigma(k)} \otimes w_k).$$

**Lemme 7.1.1.** *Les transformations naturelles  $\phi_k$  définissent des morphismes de foncteurs polynomiaux  $\phi_k : \Lambda^k \boxtimes \Lambda^k \rightarrow S^k(I \boxtimes I)$ .*

*Démonstration.* Il faut vérifier que les transformations naturelles de bifoncteurs  $\phi_k$  induisent des transformations naturelles de bifoncteurs *polynomiaux*. Notons  $K^k$  le foncteur polynomial obtenu comme noyau de la multiplication  $\otimes^k \rightarrow \Lambda^k$ . On a une suite exacte courte admissible  $\Lambda^k \boxtimes K^k \hookrightarrow \Lambda^k \boxtimes \otimes^k \rightarrow \Lambda^k \boxtimes \Lambda^k$ . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda^k \boxtimes K^k)(V, W) & & & & \\ \downarrow & \searrow & 0 & \searrow & \\ (\Lambda^k \boxtimes \otimes^k)(V, W) & \longrightarrow & (\otimes^k \boxtimes \otimes^k)(V, W) & \longrightarrow & S^k(I \boxtimes I)(V, W) \\ \downarrow & & \nearrow & \nearrow & \\ (\Lambda^k \boxtimes \Lambda^k)(V, W) & & & \nearrow & \phi_k \end{array}$$

Tous les objets de ce diagramme sont des bifoncteurs polynomiaux et tous les morphismes sauf  $\phi_k$  sont des morphismes de bifoncteurs polynomiaux. Le morphisme  $\phi_k$  s'obtient donc par factorisation dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}(2)$  de la composée  $\Lambda^k \boxtimes \otimes^k \rightarrow \otimes^k \boxtimes \otimes^k \rightarrow S^k(I \boxtimes I)$ , et est donc un morphisme de bifoncteurs polynomiaux.  $\square$

Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est une partition de poids  $d$ , l'application  $\phi_\lambda : \Lambda^\lambda(V) \otimes \Lambda^\lambda(W) \rightarrow S^d(V \otimes W)$  est définie comme faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{\lambda_1}(V) \otimes \Lambda^{\lambda_1}(W) \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_n}(V) \otimes \Lambda^{\lambda_n}(W) & \xrightarrow{\cong} & \Lambda^\lambda(V) \otimes \Lambda^\lambda(W) \\ \downarrow \phi_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \phi_{\lambda_n} & & \downarrow \phi_\lambda \\ S^\lambda(V \otimes W) & \xrightarrow{m} & S^d(V \otimes W) \end{array}$$

Comme les  $\phi_k$  sont des morphismes de bifoncteurs polynomiaux, les  $\phi_\lambda : \Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \rightarrow S^d(I \boxtimes I)$  sont également des morphismes de bifoncteurs polynomiaux.

*Remarque 7.1.2.* Les applications  $\phi_\lambda$  sont notées  $\langle , \rangle$  dans [4].

### Définition de la filtration de Cauchy [4, p. 244]

On ordonne les partitions de poids  $d$  par l'ordre lexicographique :

$$(1, \dots, 1) < \dots < (d-1, 1) < (d).$$

Pour toute partition  $\lambda$  de poids  $d$ , on pose :

$$M_\lambda(V, W) = \sum_{\lambda \leq \mu \mid |\mu|=d} \text{Im } \phi_\mu.$$

Le bifoncteur  $M_\lambda(-, -)$  étant défini comme l'image d'un morphisme de  $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}(2)$ , c'est un bifoncteur *polynomial*. On appelle filtration de Cauchy la filtration ainsi obtenue :

$$0 \subset \Lambda^d \boxtimes \Lambda^d = M_{(d)} \subset M_{(d-1,1)} \subset \dots \subset M_{(1,\dots,1)} = S^d(I \boxtimes I).$$

### Définition des morphismes $\square_t^{(\lambda_1, \lambda_2)}$ , $\widetilde{\square}_t^{(\lambda_1, \lambda_2)}$

On définit [4, Lemme II.2.7, Def. I.1.7] pour toute paire d'entiers  $\lambda_1, \lambda_2$  et tout  $t \leq \lambda_i$  un morphisme  $\square_t^{(\lambda_1, \lambda_2)} : \Lambda^{\lambda_1+t} \otimes \Lambda^{\lambda_2-t} \rightarrow \Lambda^{\lambda_1} \otimes \Lambda^{\lambda_2}$  de foncteurs polynomiaux comme la composée :

$$\Lambda^{\lambda_1+t} \otimes \Lambda^{\lambda_2-t} \rightarrow \Lambda^{\lambda_1} \otimes \Lambda^t \otimes \Lambda^{\lambda_2-t} \rightarrow \Lambda^{\lambda_1} \otimes \Lambda^{\lambda_2},$$

le premier morphisme étant obtenu à partir d'une comultiplication et le second à partir d'une multiplication. De même, on définit [4, Def. I.1.7] un morphisme  $\widetilde{\square}_t^{(\lambda_1, \lambda_2)}$  comme la composée :

$$\Lambda^{\lambda_1} \otimes \Lambda^{\lambda_2} \rightarrow \Lambda^{\lambda_1} \otimes \Lambda^t \otimes \Lambda^{\lambda_2-t} \rightarrow \Lambda^{\lambda_1+t} \otimes \Lambda^{\lambda_2-t}.$$

Le lemme suivant est contenu dans la première étape de la démonstration de la démonstration de [4, Cor III.1.2], et peut également se démontrer par un calcul direct.



**Lemme 7.1.3.** *Soit  $(\lambda_1, \lambda_2)$  une partition et  $0 \leq t \leq \lambda_2$ . Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{(\lambda_1+t, \lambda_2-t)} \boxtimes \Lambda^{(\lambda_1, \lambda_2)} & \xrightarrow{\square_t^{(\lambda_1, \lambda_2)} \otimes 1} & \Lambda^{(\lambda_1, \lambda_2)} \boxtimes \Lambda^{(\lambda_1, \lambda_2)} \\ \downarrow 1 \otimes \tilde{\square}_t^{(\lambda_1, \lambda_2)} & & \downarrow \phi_{(\lambda_1, \lambda_2)} \\ \Lambda^{(\lambda_1+t, \lambda_2-t)} \boxtimes \Lambda^{(\lambda_1+t, \lambda_2-t)} & \xrightarrow{\phi_{(\lambda_1+t, \lambda_2-t)}} & S^{\lambda_1+\lambda_2}(I \boxtimes I) . \end{array}$$

### Présentation standard des foncteurs de Schur

D'après [4, Def II.2.10, II.2.12 et Th II.2.16], pour toute partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de poids  $d$ , le morphisme :

$$\square_\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Id}_1 \otimes \dots \otimes \text{Id}_{i-1} \otimes \left( \sum_{t=1}^{\lambda_{i+1}} \square_t^{(\lambda_i, \lambda_{i+1})} \right) \otimes \text{Id}_{i+2} \otimes \dots \otimes \text{Id}_n$$

induit une présentation du foncteur de Schur  $S_\lambda$  :

$$R_\lambda \xrightarrow{\square_\lambda} \Lambda^\lambda \rightarrow S_\lambda \rightarrow 0$$

où le foncteur  $R_\lambda$  est une somme directe de produits tensoriels de puissances extérieures :

$$R_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \bigoplus_{t=1}^{\lambda_{i+1}} \Lambda^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})} \otimes \Lambda^{\lambda_i+t} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+1}-t} \otimes \Lambda^{(\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)}$$

**Définition 7.1.4.** Soit  $\lambda$  une partition, on appelle présentation standard la présentation  $R_\lambda \xrightarrow{\square_\lambda} \Lambda^\lambda \rightarrow S_\lambda \rightarrow 0$  ainsi obtenue.

### Gradué de la filtration de Cauchy

Le lemme suivant est une reformulation plus précise du résultat contenu dans la démonstration du [4, Cor III.1.2].

**Lemme 7.1.5.** *Soit  $\lambda$  une partition de poids  $d$ . Il existe un morphisme  $f_\lambda$  qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} R_\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda & \xrightarrow{\square_\lambda \otimes \text{Id}} & \Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \\ \downarrow f_\lambda & & \downarrow \phi_\lambda \\ \bigoplus_{\mu > \lambda} \Lambda^\mu \boxtimes \Lambda^\mu & \xrightarrow{\sum \phi_\mu} & S^d(I \boxtimes I) . \end{array}$$

*Démonstration.* Sur chaque terme

$$\mathbb{A}_{i,t}^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda = \left( \Lambda^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})} \otimes \Lambda^{\lambda_i+t} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+1}-t} \otimes \Lambda^{(\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)} \right) \boxtimes \Lambda^\lambda$$

de  $R_\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda$  on définit :  $f_{i,t}^\lambda : \mathbb{A}_{i,t}^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \rightarrow \mathbb{A}_{i,t}^\lambda \boxtimes \mathbb{A}_{i,t}^\lambda$  par la formule :

$$f_{i,t}^\lambda = \text{Id}_{\mathbb{A}_{i,t}^\lambda} \boxtimes \left( \text{Id}_{\Lambda^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})}} \otimes \tilde{\square}_t^{(\lambda_i, \lambda_{i+1})} \otimes \text{Id}_{\Lambda^{(\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)}} \right) .$$

D'après le lemme 7.1.3, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{i,t}^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda & \xrightarrow{\square_\lambda \otimes \text{Id}} & \Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \\ \downarrow f_{i,t}^\lambda & & \downarrow \phi_\lambda \\ \mathbb{A}_{i,t}^\lambda \boxtimes \mathbb{A}_{i,t}^\lambda & \xrightarrow{\phi_{i,t}^\lambda} & S^d(I \boxtimes I) \end{array}$$

où  $\phi_{i,t}^\lambda$  est la postcomposée de  $\phi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})} \otimes \phi_{(\lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t)} \otimes \phi_{(\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)}$  par la multiplication

$$S^{\sum_{k < i} \lambda_k}(I \boxtimes I) \otimes S^{\lambda_i + \lambda_{i+1}}(I \boxtimes I) \otimes S^{\sum_{k > i+1} \lambda_k}(I \boxtimes I) \rightarrow S^d(I \boxtimes I) .$$

Comme  $t \geq 1$ , en réordonnant les facteurs de  $\mathbb{A}_{i,t}^\lambda$  on obtient un isomorphisme

$$\sigma_{i,t}^\lambda : \mathbb{A}_{i,t}^\lambda \xrightarrow{\cong} \Lambda^\mu ,$$

où  $\mu$  est une partition de poids  $d$  plus grande (pour l'ordre lexicographique) que  $\lambda$ . De plus, par définition de  $\phi_\mu$  on a  $\phi_\mu \circ \sigma_{i,t}^\lambda = \phi_{i,t}^\lambda$ . On a donc pour tout  $(i, t)$  un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{i,t}^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda & \xrightarrow{\square_\lambda \otimes \text{Id}} & \Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \\ \downarrow \sigma_{i,t}^\lambda \circ f_{i,t}^\lambda & & \downarrow \phi_\lambda \\ \bigoplus_{\mu > \lambda} \Lambda^\mu \boxtimes \Lambda^\mu & \xrightarrow{\sum \phi_\mu} & S^d(I \boxtimes I) \end{array}$$

Si on pose  $f_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \bigoplus_{t=1}^{\lambda_{i+1}} \sigma_{i,t}^\lambda \circ f_{i,t}^\lambda$  on obtient donc notre énoncé.  $\square$

*Remarque 7.1.6.* De même, si  $\lambda$  est une partition de poids  $d$ , il existe un morphisme  $g_\lambda$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^\lambda \boxtimes R_\lambda & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \square_\lambda} & \Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \\ \downarrow g_\lambda & & \downarrow \phi_\lambda \\ \bigoplus_{\mu > \lambda} \Lambda^\mu \boxtimes \Lambda^\mu & \xrightarrow{\sum \phi_\mu} & S^d(I \boxtimes I) . \end{array}$$

**Lemme 7.1.7.** *Soit  $\lambda$  une partition de poids  $d$  et  $\lambda^\circ$  la partition suivante pour l'ordre lexicographique. Le carré de gauche du diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc}
R_\lambda(V) \otimes \Lambda^\lambda(W) & \xrightarrow{\square_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes \square_\lambda} & \Lambda^\lambda(V) \otimes \Lambda^\lambda(W) & \twoheadrightarrow & S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W) \\
\oplus \Lambda^\lambda(V) \otimes R_\lambda(W) & & & & \downarrow \text{---} \\
& \downarrow f_\lambda + g_\lambda & & & \downarrow \exists \beta_\lambda \\
\bigoplus_{\mu > \lambda} \Lambda^\mu(V) \otimes \Lambda^\mu(W) & & & & \downarrow \\
& \downarrow \sum \phi_\mu & & & \downarrow \\
M_{\lambda^\circ}(V, W) & \hookrightarrow & M_\lambda(V, W) & \twoheadrightarrow & (M_\lambda/M_{\lambda^\circ})(V, W)
\end{array}$$

et  $\phi_\lambda$  factorise en un morphisme  $\beta_\lambda : S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W) \rightarrow (M_\lambda/M_{\lambda^\circ})(V, W)$ .

*Démonstration.* La commutativité du carré de gauche est donnée par le lemme 7.1.5 et la remarque 7.1.6. Comme la première ligne du diagramme est une présentation de  $S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W)$  et la deuxième une présentation de  $(M_\lambda/M_{\lambda^\circ})(V, W)$ , la commutativité du carré de gauche assure le passage au quotient de  $\phi_\lambda$ .  $\square$

D'après [4, Th III.1.4],  $\beta_\lambda$  est un isomorphisme. Le foncteur  $M_\lambda/M_{\lambda^\circ}$  est donc en fait à valeurs dans les  $\mathbb{Z}$ -modules libres de type fini. C'est donc (cf. proposition 1.2.8) un foncteur polynomial, et le diagramme précédent peut se lire comme un diagramme commutatif dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}(2)$ . L'énoncé suivant récapitule la construction effectuée (on a travaillé sur l'anneau  $A = \mathbb{Z}$ , mais par le théorème de changement de base 1.5.4, on obtient le résultat sur un anneau  $A$  quelconque) :

**Théorème 7.1.8.** [4, §III] *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $d$  un entier. On a une filtration de  $S^d(I \boxtimes I)$  par des bifoncteurs  $M_\lambda$  indexés par les partitions de  $d$  et ordonnés dans l'ordre lexicographique :*

$$0 \subseteq M_{(d)} \subseteq M_{(d-1,1)} \subseteq \cdots \subseteq M_{(1,\dots,1)} = S^d(I \boxtimes I) .$$

*Le premier terme  $M_{(d)}$  est isomorphe à  $\Lambda^d \boxtimes \Lambda^d$ , et si  $\lambda$  est une partition et  $\lambda^\circ$  la suivante pour l'ordre lexicographique on a une suite exacte courte admissible :*

$$M_{\lambda^\circ} \hookrightarrow M_\lambda \twoheadrightarrow S_\lambda \boxtimes S_\lambda .$$

*Remarque 7.1.9.* On peut appliquer le foncteur de dualité  $D$  qui à un bifoncteur  $B \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}(2)$  associe le bifoncteur  $B(-\check{1}, -_2) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}(1, 1)$  au théorème 7.1.8. Si on pose  $N_\lambda := DM_\lambda$ , on obtient alors le théorème d'Akin, Buchsbaum et Weyman tel qu'il a été énoncé dans le chapitre 6, théorème 6.1.3.

### 7.1.2 Présentation standard de $S^\mu(V \otimes W)$

Dans ce paragraphe, on travaille sur un anneau  $A$  commutatif quelconque.

### Filtration de $S^\mu(V \otimes W)$

Soit  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  un uplet. Pour tout  $i$  on dispose de la filtration de Cauchy de  $S^{\mu_i}(I \boxtimes I)$ . En prenant le produit tensoriel de ces filtrations on obtient (corollaire C.1.6) une filtration  $(M_k)_{k \geq 0}$  dont le gradué est égal à la somme directe :

$$\mathrm{Gr}S^\mu(I \boxtimes I) = \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \dots |\lambda_n|=\mu_n} \bigotimes_{i=1}^n S_{\lambda_i} \boxtimes S_{\lambda_i},$$

la somme étant prise sur l'ensemble des familles  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de partitions de poids respectifs  $\mu_i$ .

Les partitions de poids  $\mu_i$  sont totalement ordonnées par l'ordre lexicographique :

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{\mu_i \text{ termes}} < \dots < (\mu_i - 1, 1) < (\mu_i) \quad (*)$$

Si  $\lambda_i$  est une partition de poids  $\mu_i$ , on note  $[[\lambda_i]]$  la place de la partition  $\lambda_i$  dans la suite (\*) en partant de l'élément le plus grand, auquel on attribue la place 0. Par exemple :  $[[(\mu_i)]] = 0$ ,  $[[(\mu_i - 1, 1)]] = 1$  et l'entier  $[[ (1, \dots, 1) ]]$  est égal au nombre de partitions de poids  $\mu_i$ , moins 1.

Avec cette notation, le  $k$ -ème terme  $M_k$  de la filtration de  $S^\mu(I \boxtimes I)$  est donné par la formule :

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{[[\lambda_1]] + \dots + [[\lambda_n]] = k} M_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes M_{\lambda_n}, \\ &= \sum_{[[\lambda_1]] + \dots + [[\lambda_n]] \leq k} \mathrm{Im}(\phi_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \phi_{\lambda_n}), \end{aligned}$$

où les morphismes  $\phi_{\lambda_i} : \Lambda^{\lambda_i} \boxtimes \Lambda^{\lambda_i} \rightarrow S^{\mu_i}(I \boxtimes I)$  sont les morphismes qui servent à définir la filtration de Cauchy de  $S^{\mu_i}(I \boxtimes I)$ , et le quotient de deux termes successifs de la filtration vaut :

$$M_k/M_{k-1} = \bigoplus_{[[\lambda_1]] + \dots + [[\lambda_n]] = k} \bigotimes_{i=1}^n S_{\lambda_i} \boxtimes S_{\lambda_i} \quad (7.1)$$

### Présentation du gradué de $S^\mu(V \otimes W)$

Pour toute partition  $\lambda$  on a (cf. définition 7.1.4) une présentation standard du foncteur de Schur  $S_\lambda$  :

$$R_\lambda \xrightarrow{\square_\lambda} \Lambda^\lambda \rightarrow S_\lambda \rightarrow 0.$$

Le produit tensoriel de ces présentations nous donne une présentation de  $\bigotimes_{i=1}^n S_{\lambda_i} \boxtimes S_{\lambda_i}$ . En formant une somme directe de ces présentations on obtient donc une présentation

du gradué de  $S^\mu(I \boxtimes I)$ . Plus précisément, posons :

$$\mathcal{G}_k = \bigoplus_{\sum[\lambda_i]=k} \bigotimes_{i=1}^n \Lambda^{\lambda_i} \boxtimes \Lambda^{\lambda_i} \quad (7.2)$$

$$\mathcal{R}_k = \bigoplus_{\sum[\lambda_i]=k} \bigoplus_{i=1}^n \left( \bigotimes_{j=1}^{i-1} \Lambda^{\lambda_j} \boxtimes \Lambda^{\lambda_j} \right) \otimes \left( \begin{array}{c} R_{\lambda_i} \boxtimes \Lambda^{\lambda_i} \\ \oplus \\ \Lambda^{\lambda_i} \boxtimes R_{\lambda_i} \end{array} \right) \otimes \left( \bigotimes_{j=i+1}^n \Lambda^{\lambda_j} \boxtimes \Lambda^{\lambda_j} \right) \quad (7.3)$$

$$\mathcal{X}_k = \bigoplus_{\sum[\lambda_i]=k} \sum_{i=1}^n \text{Id} \otimes (\square_{\lambda_i} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \square_{\lambda_i}) \otimes \text{Id} \quad (7.4)$$

alors la présentation de  $M_k/M_{k-1}$  est donnée par :

$$\mathcal{R}_k \xrightarrow{\mathcal{X}_k} \mathcal{G}_k \twoheadrightarrow M_k/M_{k-1} .$$

### Présentation standard de $S^\mu(V \otimes W)$

Soit  $\mu$  un uplet. Nous allons maintenant montrer que la présentation du gradué de  $S^\mu(I \boxtimes I)$  se relève en une présentation de  $S^\mu(I \boxtimes I)$ . On définit  $\Phi_k : \mathcal{G}_k \rightarrow S^\mu(I \boxtimes I)$  par la formule :

$$\Phi_k = \sum_{\sum[\lambda_i]=k} \bigotimes_{i=1}^n \phi_{\lambda_i} \quad (7.5)$$

et  $\Psi_k : \mathcal{R}_k \rightarrow \bigoplus_{i < k} \mathcal{G}_i$  par la formule :

$$\Psi_k = \sum_{\sum[\lambda_i]=k} \sum_{i=1}^n \text{Id} \otimes (f_{\lambda_i} + g_{\lambda_i}) \otimes \text{Id} \quad (7.6)$$

où  $f_{\lambda_i}$  et  $g_{\lambda_i}$  sont données par le lemme 7.1.5 et la remarque 7.1.6.  $\Psi_k$  est bien à valeurs dans  $\bigoplus_{i < k} \mathcal{G}_i$  car pour toute partition  $\lambda_i$  les morphismes  $f_{\lambda_i}$  et  $g_{\lambda_i}$  sont à valeurs dans une somme directe de termes  $\Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda$  avec  $\lambda > \lambda_i$  pour l'ordre lexicographique.

**Lemme 7.1.10.** *Pour tout entier  $k$  le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc} & & & \mathcal{R}_k & \\ & & & \downarrow \mathcal{X}_k & \\ & & \bigoplus_{i < k} \mathcal{G}_i & \swarrow \Psi_k & \mathcal{G}_k \\ & & \downarrow \sum \Phi_i & \searrow \Phi_k & \downarrow \\ M_{k-1} & \hookrightarrow & M_k & \twoheadrightarrow & M_k/M_{k-1} . \end{array}$$

*Démonstration.* Le  $A$ -module  $\mathcal{R}_k$  est défini (7.4) comme une somme directe de termes de la forme :

$$\bigotimes_{j=1}^{i-1} \Lambda^{\lambda_j} \boxtimes \Lambda^{\lambda_j} \otimes \left( \begin{array}{c} R_{\lambda_i} \boxtimes \Lambda^{\lambda_i} \\ \oplus \\ \Lambda^{\lambda_i} \boxtimes R_{\lambda_i} \end{array} \right) \otimes \bigotimes_{j=i+1}^n \Lambda^{\lambda_j} \boxtimes \Lambda^{\lambda_j} .$$

Pour vérifier que le pentagone central commute, il suffit de vérifier que les restrictions des morphismes  $\Phi_k \circ \mathcal{X}_k$  et  $(\sum_{i < k} \Phi_i) \circ \Psi_k$  à n'importe lequel de ces termes sont égales. Ceci découle du lemme 7.1.7.  $\square$

Le lemme précédent énonce que l'on est en situation d'utiliser la proposition C.1.8. On obtient donc :

**Définition-Théorème 7.1.11.** *Soient  $A$  un anneau commutatif, et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un uplet. La présentation standard de  $S^\mu(I \boxtimes I)$  désigne la présentation suivante :*

$$\mathcal{R}_\mu \xrightarrow{\mathcal{X}_\mu} \mathcal{G}_\mu \xrightarrow{\Phi_\mu} S^\mu(I \boxtimes I) \rightarrow 0 ,$$

où  $\mathcal{R}_\mu$  et  $\mathcal{G}_\mu$  sont des sommes de produits tensoriels de puissances extérieures données par les formules :

$$\mathcal{G}_\mu = \bigoplus_k \mathcal{G}_k , \quad \mathcal{R}_\mu = \bigoplus_k \mathcal{R}_k ,$$

où  $\Phi_\mu = \sum_k \Phi_k$  et où le morphisme  $\mathcal{X}_\mu : \mathcal{R}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$  est défini sur  $\mathcal{R}_k$  par la formule  $\mathcal{X}_\mu(r_k) = \mathcal{X}_k(r_k) - \Psi_k(r_k)$ .

Les bifoncteurs polynomiaux  $\mathcal{G}_k$ ,  $\mathcal{R}_k$ ,  $\Phi_k$ , et les transformations naturelles  $\mathcal{X}_k$  et  $\Psi_k$  sont explicitement définis dans les formules (7.2-7.6) ci-dessus.

## 7.2 Applications

### 7.2.1 Présentation de $H_{\mathcal{P}}^*(S^{\mu(r)} gl)$

Soit  $A$  un anneau commutatif. On rappelle qu'il existe pour toute partition  $\lambda$  [3, Th 6.1] une résolution finie (sur  $A$ ) de  $S_\lambda$  par des sommes directes de produits tensoriels de puissances extérieures :

$$0 \rightarrow \mathbb{A}_{\lambda,n} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{A}_{\lambda,0} \twoheadrightarrow S_\lambda \quad (*)$$

De plus, on connaît explicitement [3, p. 208] le début de la résolution. En particulier, cette résolution prolonge la présentation standard de  $S_\lambda$  (cf. définition 7.1.4) :

$$R_\lambda \xrightarrow{\square_\lambda} \Lambda^\lambda \rightarrow S_\lambda \rightarrow 0 .$$

*Notation 7.2.1.* On note  $D : \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}(2) \rightsquigarrow \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$  le foncteur qui à un bifoncteur  $B$  associe le bifoncteur  $B(-\check{1}, -_2)$ . Le foncteur  $D$  commute avec la précomposition par le twist de Frobenius : si  $B$  est un bifoncteur, on a  $D(B^{(r)}) = (DB)^{(r)}$ . Pour cette raison nous omettons les parenthèses et nous écrivons  $DB^{(r)}$ .

Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un uplet. Le paragraphe 7.1.2 nous donne une filtration  $(DM_k)_{k \geq 0}$  de  $S^\mu gl$ , obtenue en effectuant le produit tensoriel des filtrations de Cauchy des bifoncteurs  $D(S^{\mu_i}(I \boxtimes I)) = S^{\mu_i} gl$ . Les quotients successifs de cette filtration sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned} DM_k/DM_{k-1} &= \bigoplus_{[[\lambda_1]] + \dots + [[\lambda_n]] = k} \bigotimes_{i=1}^n D(S_{\lambda_i} \boxtimes S_{\lambda_i}) \\ &= \bigoplus_{[[\lambda_1]] + \dots + [[\lambda_n]] = k} \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}om(W_{\lambda_i}, S_{\lambda_i}) \end{aligned} \quad (7.7)$$

où l'entier  $[[\lambda]]$  associé à une partition  $\lambda$  est défini au paragraphe 7.1.2, et où le foncteur de Weyl  $W_\lambda$  est le dual de Kuhn du foncteur de Schur  $S_\lambda$ , cf. définition B.3.18. En prenant une somme directe de produits tensoriels de résolutions finies du type (\*) on obtient :

**Lemme 7.2.2.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. La présentation :*

$$D\mathcal{R}_k \xrightarrow{D\mathcal{X}_k} D\mathcal{G}_k \twoheadrightarrow DM_k/DM_{k-1}$$

se prolonge en une résolution finie de  $DM_k/DM_{k-1}$  :

$$0 \rightarrow \Lambda_{k,N} \rightarrow \dots \underbrace{\Lambda_{k,1}}_{=D\mathcal{R}_k} \rightarrow \underbrace{\Lambda_{k,0}}_{=D\mathcal{G}_k} \twoheadrightarrow DM_k/DM_{k-1},$$

où les  $\Lambda_{k,j}$  sont des sommes directes de bifoncteurs du type  $\mathcal{H}om(\Lambda^\delta, \Lambda^\gamma)$ .

**Lemme 7.2.3.** *Soit  $A$  un anneau commutatif et  $r$  un entier positif (avec  $r = 0$  si  $A$  n'est pas de caractéristique première). Pour tout entier  $k$  le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & H_{\mathcal{P}}^*(D\mathcal{R}_k^{(r)}) \\ & & & & \downarrow H_{\mathcal{P}}^*(D\mathcal{X}_k) \\ & & & & H_{\mathcal{P}}^*(D\mathcal{G}_k^{(r)}) \\ & \swarrow H_{\mathcal{P}}^*(D\Psi_k) & & \swarrow H_{\mathcal{P}}^*(D\Phi_k) & \downarrow \\ \bigoplus_{i < k} H_{\mathcal{P}}^*(D\mathcal{G}_i^{(r)}) & & & & H_{\mathcal{P}}^*(D\mathcal{G}_k^{(r)}) \\ \downarrow \sum H_{\mathcal{P}}^*(D\Phi_i) & & & & \downarrow \\ H_{\mathcal{P}}^*(DM_{k-1}^{(r)}) & \hookrightarrow & H_{\mathcal{P}}^*(DM_k^{(r)}) & \twoheadrightarrow & H_{\mathcal{P}}^*((DM_k/DM_{k-1})^{(r)}) \end{array}$$

De plus, la ligne et la colonne de droite du diagramme son exactes.

*Démonstration.* La commutativité du diagramme provient du lemme 7.1.10 et de la functorialité de  $H_{\mathcal{P},A}^*(-)$ . Il nous reste donc à démontrer l'exactitude de la ligne et de la colonne de droite.

Démontrons que la colonne de droite est exacte. D'après le lemme 5.1.18, les foncteurs  $\Lambda_{k,j}$  du lemme 7.2.2 vérifient  $H_{\mathcal{P}}^*(\Lambda_{k,j}(-\overset{\oplus}{1}P^r, -2)) = 0$  pour  $* > 0$ . Le complexe

$H_{\mathcal{P}}^*(\mathbb{A}_{k,\bullet}(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2))$  est donc (cf. corollaire C.2.4) exact, sauf au terme d'indice 0. De plus, le twist de Frobenius est transparent pour les foncteurs  $\mathbb{A}_{k,j}$  (cf. proposition 5.1.15). Le complexe  $H_{\mathcal{P}}^*(\mathbb{A}_{k,\bullet}^{(r)})$  est donc exact, sauf au terme d'indice 0. D'après le corollaire C.2.5, on a donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{\mathcal{P}}^*(\mathbb{A}_{k,N}(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2)) \rightarrow \cdots \rightarrow H_{\mathcal{P}}^*((DM_k/DM_{k-1})(-\overset{\oplus}{1}{}^{p^r}, -2)) \rightarrow 0 .$$

La colonne de droite, donnée par les trois derniers termes de cette suite, est donc exacte.

Comme la cohomologie des bifoncteurs du type  $\mathcal{H}om(\Lambda^\delta, \Lambda^\gamma)^{(r)}$  est nulle en degré impair et que la colonne de droite est exacte, la cohomologie des quotients  $(DM_k/DM_{k-1})^{(r)}$  est nulle en degré impair.

Il nous reste à démontrer que la ligne du diagramme est exacte. Pour cela, on démontre par récurrence sur  $k$  la propriété suivante : « La cohomologie de  $DM_k^{(r)}$  est nulle en degré impair et la ligne est exacte pour  $k$  ». Pour  $k = 0$ , il n'y a rien à démontrer car  $DM_{-1}^{(r)} = 0$ . Supposons la propriété vraie pour l'entier  $k - 1$ , on obtient alors la propriété pour l'entier  $k$  en examinant la suite longue induite en cohomologie par la suite :

$$DM_{k-1}^{(r)} \hookrightarrow DM_k^{(r)} \twoheadrightarrow (DM_k/DM_{k-1})^{(r)} .$$

□

Nous pouvons maintenant appliquer la proposition C.1.8 pour obtenir :

**Théorème 7.2.4.** *Soient  $A$  un anneau commutatif,  $r$  un entier positif (avec  $r = 0$  si  $A$  n'est de caractéristique première) et  $\mu$  un uplet. La présentation standard de  $S^\mu gl$  :*

$$D\mathcal{R}_\mu \xrightarrow{D\mathcal{X}_\mu} D\mathcal{G}_\mu \xrightarrow{D\Phi_\mu} S^\mu gl \rightarrow 0 ,$$

induit en cohomologie une présentation de  $H_{\mathcal{P},A}^*(S^{\mu(r)} gl)$  :

$$H_{\mathcal{P},A}^*(D\mathcal{R}_\mu^{(r)}) \xrightarrow{D\mathcal{X}_\mu} H_{\mathcal{P},A}^*(D\mathcal{G}_\mu^{(r)}) \xrightarrow{D\Phi_\mu} H_{\mathcal{P},A}^*(S^{\mu(r)} gl) \rightarrow 0 .$$

## 7.2.2 Bases explicites de la cohomologie de degré 0

Si  $V$  est un  $A$ -module libre, un élément  $v$  primitif [1, p. 148] de  $V$  est un élément tel que si  $v = aw$  alors  $a$  est une unité de  $A$ . En particulier un élément primitif est non nul. De plus, si  $V$  est un  $A$ -module libre de rang 1 tout élément primitif de  $V$  forme une base de  $V$ . A l'inverse, les éléments d'une base d'un  $A$ -module libre  $V$  de rang quelconque sont tous primitifs. Enfin, si  $V$  et  $W$  sont deux  $A$ -modules libres de type fini et si  $f : V \rightarrow W$  possède un élément primitif dans son image, alors  $f$  est un élément primitif de  $\text{Hom}_A(V, W)$ .

**Proposition 7.2.5.** *Soit  $A$  un anneau commutatif et  $\lambda$  une partition de poids  $d$ . Le  $A$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(\Lambda^\lambda, S_\lambda)$  est libre de rang 1, engendré par la surjection  $\Lambda^\lambda \twoheadrightarrow S_\lambda$  qui définit le foncteur de Schur  $S_\lambda$ .*



*Démonstration.* Le morphisme  $\Lambda^\lambda \twoheadrightarrow S_\lambda$  est primitif car surjectif. Il nous suffit donc de montrer que  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(\Lambda^\lambda, S_\lambda)$  est libre de rang 1.

D'après la proposition 5.1.19 et le corollaire 1.5.6, le rang du  $A$ -module libre  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(\Lambda^\lambda, S_\lambda)$  ne dépend pas de  $A$ .

On peut donc se contenter de le calculer pour  $A = \mathbb{C}$ . Dans ce cas, les foncteurs de Schur sont des représentations irréductibles de  $GL_n$  [19, Th 6.3(4)], et d'après le lemme de Schur [19, Lemme 1.7] ce rang est égal au nombre de fois où  $S_\lambda$  intervient dans la décomposition en représentations irréductibles de  $\Lambda^\lambda$ . En appliquant la règle de Pieri [2, Th. (3)(b) p. 168] on trouve que cette multiplicité est égale à 1.  $\square$

*Remarque 7.2.6.* Dans la démonstration précédente, on pourrait aussi référer à [19, ex. 6.13 p. 80] pour dire que la multiplicité de  $S_\lambda$  dans  $\Lambda^\lambda$  est égale au nombre de Kosta  $K_{\lambda\lambda}$  qui est égal à 1 [19, (A.10) p. 456] (attention, les foncteurs de Schur sont indexés par les partitions conjuguées dans [19] : notre foncteur  $S_\lambda$  y est noté  $S_{\lambda'}$ .)

**Corollaire 7.2.7.** *Si  $A$  un anneau commutatif et  $\lambda$  une partition de poids  $d$ , il existe un unique morphisme surjectif  $\Lambda^\lambda \twoheadrightarrow S_\lambda$ . De même, il existe un unique morphisme injectif  $W_\lambda \hookrightarrow \Lambda^\lambda$  primitif dans  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(W_\lambda, \Lambda^\lambda)$ .*

**Lemme 7.2.8.** *Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une partition et  $V$  un  $A$ -module libre de rang  $\lambda_1$ . Il existe une base du  $A$ -module libre  $S_\lambda(V)$  dont un élément est contenu dans l'image de la composée  $W_\lambda(V) \hookrightarrow \Lambda^\lambda(V) \twoheadrightarrow S_\lambda(V)$ .*

*Démonstration.* Rappelons (proposition B.3.19) que  $W_\lambda(V) = K_{\tilde{\lambda}}(V)$ . Il nous suffit donc d'exhiber un élément de la base standard [4, Th II.2.16] de  $S_\lambda(V)$  qui est dans l'image de la composée  $K_{\tilde{\lambda}}(V) \hookrightarrow \Lambda^\lambda(V) \twoheadrightarrow S_\lambda(V)$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_{\lambda_1})$  une base de  $V$ . La composée  $\Gamma^{\tilde{\lambda}}(V) \twoheadrightarrow K_{\tilde{\lambda}}(V) \hookrightarrow \Lambda^\lambda(V)$  est par définition égale à  $d'_\lambda$  (cf. définition B.3.13) et envoie  $v = \bigotimes_{i=1..n} e_i^{\otimes \tilde{\lambda}_i}$  sur

$$d'_\lambda(v) = \bigotimes_{i=1..n} e_1 \wedge \dots \wedge e_{\lambda_i}.$$

D'après [4, p.224], le morphisme  $d_\lambda : \Lambda^\lambda(V) \rightarrow S^{\tilde{\lambda}}(V)$  d'image  $S_\lambda(V)$  envoie  $d'_\lambda(v) \in K_{\tilde{\lambda}}(V)$  sur l'élément de  $S_\lambda(V)$  correspondant au tableau de forme  $\lambda$  et dont la  $i$ -ème colonne est remplie avec des  $i$  pour tout  $i = 1..n$ . Ce tableau est standard (cf. [4, def II.2.2]). Ainsi,  $d_\lambda(d'_\lambda(v))$  est un élément de la base standard [4, def II.2.16] de  $S_\lambda(V)$ . De plus, il est par construction dans l'image de  $K_{\tilde{\lambda}}(V) \hookrightarrow \Lambda^\lambda(V) \twoheadrightarrow S_\lambda(V)$ .  $\square$

**Proposition 7.2.9.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Pour toute partition  $\lambda$ , le  $A$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(W_\lambda, S_\lambda)$  est libre de rang 1, engendré par le morphisme :  $W_\lambda \hookrightarrow \Lambda^\lambda \twoheadrightarrow S_\lambda$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 5.1.19 et le corollaire 1.5.6, le rang du  $A$ -module libre  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(W_\lambda, S_\lambda)$  ne dépend pas de  $A$ . Or, sur  $\mathbb{C}$  on a un isomorphisme  $W_\lambda \simeq S_\lambda$ . Ainsi le rang de  $\text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(W_\lambda, S_\lambda)$  est égal à la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel

$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{C}}}(S_\lambda, S_\lambda)$ . Comme les foncteurs de Schur sont irréductibles sur  $\mathbb{C}$  [19, Th 6.3(4)], cette dimension vaut 1 d'après le lemme de Schur [19, Lemme 1.7].

Il nous reste à montrer que la composée  $W_\lambda \hookrightarrow \Lambda^\lambda \rightarrow S_\lambda$  des morphismes primitifs du corollaire 7.2.7 est un morphisme primitif. Pour cela, il nous suffit de vérifier qu'il existe un  $A$ -module projectif de type fini  $V$  tel que la composée  $W_\lambda(V) \hookrightarrow \Lambda^\lambda(V) \rightarrow S_\lambda(V)$  est un élément primitif de  $\text{Hom}_A(W_\lambda(V), S_\lambda(V))$ .

Pour cela il nous suffit de montrer que l'image de cette composée contient un élément primitif du  $A$ -module libre  $S_\lambda(V)$ , ce qui est le cas d'après le lemme précédent.  $\square$

**Proposition 7.2.10.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Pour toute partition  $\lambda$  de poids  $d$ , le  $A$ -module  $H_{\mathcal{P},A}^0(\mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda))$  est libre de rang 1, engendré par la composée :*

$$\Gamma^d gl \xrightarrow{D\phi_\lambda^\sharp} \mathcal{H}om(\Lambda^\lambda, \Lambda^\lambda) \rightarrow \mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda),$$

où  $\phi_\lambda : \Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \rightarrow S^d(I \boxtimes I)$  est le morphisme utilisé pour définir la filtration de Cauchy (cf. §7.1.1) et la surjection de droite est construite à partir du morphisme surjectif  $\Lambda^\lambda \rightarrow S_\lambda$ .

*Démonstration.* Le  $A$ -module  $H_{\mathcal{P},A}^0(\mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_A}(W_\lambda, S_\lambda)$  est libre de rang 1 d'après la proposition 7.2.9. Il nous reste donc à montrer que la composée

$$\Gamma^d gl \xrightarrow{D\phi_\lambda^\sharp} \mathcal{H}om(\Lambda^\lambda, \Lambda^\lambda) \rightarrow \mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda)$$

est un élément primitif de  $H_{\mathcal{P},A}^0(\mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda))$ . Pour cela, il nous suffit d'exhiber deux  $A$ -modules projectifs de type fini  $V, W$  tels que la composée

$$\Gamma^d(V \otimes W) \xrightarrow{\phi_\lambda^\sharp} \Lambda^\lambda(V) \otimes \Lambda^\lambda(W) \rightarrow S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W)$$

soit un élément primitif de  $\text{Hom}_A(\Gamma^d(V \otimes W), S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W))$ . Or, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma^d(V \otimes W) & \xrightarrow{\phi_\lambda^\sharp} & \Lambda^\lambda(V) \otimes \Lambda^\lambda(W) & \twoheadrightarrow & S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W) \\ \downarrow & \nearrow & & \nearrow & \\ M_\lambda^\sharp(V, W) & \longleftarrow & W_\lambda(V) \otimes W_\lambda(W) & & \end{array} \quad (1)$$

où les morphismes  $W_\lambda(V) \otimes W_\lambda(W) \hookrightarrow M_\lambda^\sharp(V, W)$  et  $\Gamma^d(V \otimes W) \twoheadrightarrow M_\lambda^\sharp(V, W)$  sont les duaux de Kuhn des morphismes  $M_\lambda(V, W) \rightarrow S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W)$  et  $M_\lambda(V, W) \hookrightarrow S^d(V \otimes W)$  qui interviennent dans la filtration de Cauchy de  $S^d(V \otimes W)$ , et où le morphisme (1) est obtenu par produit tensoriel du morphisme de la proposition 7.2.9.

D'après le lemme 7.2.8, si on choisit  $V = W = A^{\lambda_1}$ , le morphisme (1) a un élément primitif dans son image. Le diagramme nous montre que c'est alors aussi le cas pour la composée  $\Gamma^d(V \otimes W) \rightarrow \Lambda^\lambda(V) \otimes \Lambda^\lambda(W) \rightarrow S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W)$ , qui est donc un élément primitif de  $\text{Hom}_A(\Gamma^d(V \otimes W), S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W))$ .  $\square$

**Proposition 7.2.11.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Pour toute partition  $\mu$  de poids  $d$ , le  $A$ -module  $H_{\mathcal{P},A}^0(DM_\mu)$  est libre de base les composées :*

$$\Gamma^d gl \xrightarrow{D\phi_\lambda^\sharp} \mathcal{H}om(\Lambda^\lambda, \Lambda^\lambda) \xrightarrow{D\phi_\lambda} DM_\mu ,$$

où  $\phi_\lambda : \Lambda^\lambda \boxtimes \Lambda^\lambda \rightarrow S^d(I \boxtimes I)$  est le morphisme utilisé pour définir la filtration de Cauchy (cf. §7.1.1) et  $\lambda$  décrit l'ensemble des partitions de  $d$  telles que  $\lambda \geq \mu$  pour l'ordre lexicographique.

*Démonstration.* Nous démontrons le résultat par récurrence descendante sur les partitions ordonnées dans l'ordre lexicographique. Si  $\mu = (d)$  est la plus grande partition de poids  $d$ , le résultat n'est autre que la proposition 7.2.11. Supposons la propriété démontrée pour  $\mu^\circ$ , et soit  $\mu$  la partition précédente pour l'ordre lexicographique. On a une suite exacte :

$$H_{\mathcal{P},A}^0(DM_{\mu^\circ}) \hookrightarrow H_{\mathcal{P},A}^0(DM_\mu) \xrightarrow{p} H_{\mathcal{P},A}^0(DM_\mu/DM_{\mu^\circ}) .$$

D'autre part, la surjection  $\mathcal{H}om(\Lambda^\mu, \Lambda^\mu) \twoheadrightarrow DM_\mu/DM_{\mu^\circ}$  envoie le morphisme  $\phi_\mu^\sharp \in H_{\mathcal{P},A}^0(\mathcal{H}om(\Lambda^\mu, \Lambda^\mu))$  sur un élément  $b_\mu$  qui constitue une base de  $H_{\mathcal{P},A}^0(DM_\mu/DM_{\mu^\circ})$  (cf. proposition 7.2.11).

Alors la famille  $(\phi_\lambda \circ \phi_\lambda^\sharp)_{\lambda \geq \mu}$  est une famille libre de  $H_{\mathcal{P},A}^0(DM_\mu)$ . En effet, si  $\sum_{\lambda \geq \mu} a_\lambda \phi_\lambda \circ \phi_\lambda^\sharp = 0$ , on applique  $p$  à cette relation et on obtient  $a_\mu b_\mu = 0$ , donc  $a_\mu = 0$ . On a alors  $\sum_{\lambda > \mu} a_\lambda \phi_\lambda \circ \phi_\lambda^\sharp = 0$ , donc  $a_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda$  car par hypothèse de récurrence  $(\phi_\lambda \circ \phi_\lambda^\sharp)_{\lambda > \mu}$  est libre.

La famille  $(\phi_\lambda \circ \phi_\lambda^\sharp)_{\lambda \geq \mu}$  est une famille génératrice de  $H_{\mathcal{P},A}^0(DM_\mu)$ . En effet, soit  $f \in H_{\mathcal{P},A}^0(DM_\mu)$ . Il existe  $a_\mu \in A$  tel que  $p(f) = a_\mu b_\mu$ . Mais alors  $f - a_\mu \phi_\mu \circ \phi_\mu^\sharp \in H_{\mathcal{P},A}^0(DM_{\mu^\circ})$  s'exprime comme une combinaison linéaire des éléments de la famille  $(\phi_\lambda \circ \phi_\lambda^\sharp)_{\lambda > \mu}$  par hypothèse de récurrence. Ainsi  $f$  est combinaison linéaire des éléments de  $(\phi_\lambda \circ \phi_\lambda^\sharp)_{\lambda \geq \mu}$ .  $\square$

**Corollaire 7.2.12.** *Soit  $d$  un entier positif, le  $A$ -module  $H_{\mathcal{P},A}^0(S^d gl)$  est libre de base les composées :*

$$\Gamma^d gl \xrightarrow{D\phi_\lambda^\sharp} \mathcal{H}om(\Lambda^\lambda, \Lambda^\lambda) \xrightarrow{D\phi_\lambda} S^d gl ,$$

où  $\lambda$  décrit l'ensemble des partitions de  $d$ .

# Annexe A

## Catégories exactes

Dans cette annexe, nous fixons la terminologie utilisée sur les catégories exactes au sens de Quillen [38]. Ces catégories sont des catégories additives équipées d'une classe des suites exactes courtes admissibles qui vérifient des axiomes inspirés des propriétés des suites exactes courtes dans les catégories abéliennes.

Soit  $\mathcal{A}$  est une catégorie exacte qui possède assez de projectifs. En utilisant les suites exactes courtes *admissibles* à la place des suites exactes courtes, on peut y développer l'algèbre homologique usuelle comme dans les catégories abéliennes. Ce fait est utilisé dans [40] pour définir et travailler avec les extensions dans les catégories de foncteurs polynomiaux  $\mathcal{P}_A$  sur un anneau commutatif quelconque. Plus généralement, les catégories exactes permettent de développer le formalisme des catégories dérivées [25].

**Définition A.1.** Une catégorie exacte est une catégorie additive  $\mathcal{A}$  munie d'une classe  $\mathcal{E}$  de *suites exactes courtes admissibles*, ie. de triplets

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$$

qui vérifient les axiomes ci-dessous. Le morphisme  $i$  est appelé un *monomorphisme admissible* et  $p$  un *épimorphisme admissible*.

(E0) La classe  $\mathcal{E}$  est stable par isomorphisme. En d'autres termes, si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \end{array}$$

et si  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  est une suite exacte courte admissible, alors  $N' \rightarrow N \rightarrow N''$  est également une suite exacte courte admissible. La classe  $\mathcal{E}$  contient les suites exactes courtes scindées, c'est-à-dire les suites de la forme :

$$M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' .$$

(E1) Les monomorphismes admissibles  $i$  sont les noyaux de leurs épimorphismes admissibles associés, et les épimorphismes admissibles  $p$  sont les conoyaux de leurs

monomorphismes associés. La composée de deux épimorphismes admissibles est un épimorphisme admissible et la composée de deux monomorphismes admissibles est un monomorphisme admissible.

(E2) Si  $M \rightarrow M''$  est un épimorphisme admissible alors pour tout morphisme  $N'' \rightarrow M''$  de  $\mathcal{A}$ , il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & N'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M'' \end{array}$$

dans lequel  $N \rightarrow N''$  est un épimorphisme admissible. De même, si  $M' \rightarrow M$  est un monomorphisme admissible, pour tout morphisme  $M' \rightarrow M$  de  $\mathcal{A}$  il existe un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} M' & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N' & \longrightarrow & N \end{array}$$

dans lequel  $N' \rightarrow N$  est un monomorphisme admissible.

(E3) Si un morphisme  $p$  admet un noyau et s'il existe un morphisme  $f$  tel que la composée  $p \circ f$  est un épimorphisme admissible, alors  $p$  est un épimorphisme admissible. De même, si  $i$  admet un conoyau et s'il existe un morphisme  $g$  tel que  $g \circ i$  est un monomorphisme admissible, alors  $i$  est un monomorphisme admissible.

Le système d'axiomes de Quillen n'est pas minimal. On peut trouver un sous-ensemble d'axiomes équivalents dans [26, app. A].

*Exemple A.2.* Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Munie de l'ensemble  $\mathcal{E}$  de toutes les suites exactes courtes,  $\mathcal{A}$  devient une catégorie exacte.

*Exemple A.3.* Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Soient  $\mathcal{P}r$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  ayant pour objets les projectifs de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  la classe des suites exactes courtes de  $\mathcal{A}$  dont les objets sont dans  $\mathcal{P}r$ . La paire  $(\mathcal{P}r, \mathcal{E})$  est une catégorie exacte.

**Définition A.4.** Un foncteur additif  $F : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$  entre deux catégories exactes est exact s'il envoie toute suite exacte courte admissible de  $\mathcal{A}$  sur une suite exacte courte admissible de  $\mathcal{A}'$ .

**Définition A.5.** Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie exacte et  $Ab$  la catégorie des groupes abéliens. Un objet  $I$  de  $\mathcal{A}$  est injectif (resp. projectif) si le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A} \rightsquigarrow Ab$  (resp. le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ ) est un foncteur exact.

**Définition A.6.** Une catégorie exacte  $\mathcal{A}$  a assez d'injectifs (resp. de projectifs) si pour tout  $M \in \mathcal{A}$  il existe un injectif et un monomorphisme admissible  $M \rightarrow I$  (resp. un projectif  $P$  et un épimorphisme admissible  $P \rightarrow M$ ).

Un complexe d'injectifs  $I^\bullet$  est une résolution injective admissible de  $M \in \mathcal{A}$  s'il existe un monomorphisme admissible  $M \rightarrow I^0$  tel que le complexe  $M \rightarrow I^\bullet$  s'obtient comme un produit de Yoneda de suites exactes courtes admissibles.

## Annexe B

# Représentations linéaires des groupes

### B.1 Invariants et coinvariants

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $G$  un groupe. On note  $\mathcal{M}od_G(A)$  la catégorie dont les objets sont les  $A$ -modules munis d'une action  $G$ -linéaire et dont les morphismes sont les applications linéaires  $G$ -équivariantes. Si  $AG$  désigne l'anneau de groupe de  $G$  sur  $A$ , la catégorie  $\mathcal{M}od_G(A)$  s'identifie à la catégorie  $\mathcal{M}od(AG)$  des  $AG$ -modules.

#### B.1.1 Invariants

Soit  $M \in \mathcal{M}od_G(A)$  un  $G$ -module sur un anneau commutatif  $A$ . On appelle invariants de  $M$  sous  $G$  le sous-module  $M^G$  de  $M$  défini par :

$$M^G := \{m \in M, g.m = m \ \forall g \in G\}.$$

Si  $G \times H$  est un groupe produit agissant sur un  $A$ -module  $M$ , on a :

$$M^{G \times H} = (M^{1 \times H})^G \tag{B.1}$$

Si  $M, N$  sont des  $G$ -modules, on définit une action de  $G$  sur  $\text{Hom}_A(M, N)$  par la formule  $(g.f)(m) := g.f(g^{-1}.m)$ . On a alors

$$\text{Hom}_A(M, N)^G = \text{Hom}_{AG}(M, N) \tag{B.2}$$

**Proposition B.1.1.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $M$  un  $G$ -module sur  $A$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On a un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{AG}(AG/H, M) & \xrightarrow{\cong} & M^H \\ f & \mapsto & f(H). \end{array}$$

*Démonstration.* Pour tout  $m \in M^H$ , l'application  $A$ -linéaire  $f_m$  définie sur la base  $G/H$  de  $AG/H$  par la formule  $f_m(gH) := g.m$  est  $G$ -équivariante par construction. L'application  $M^H \rightarrow \text{Hom}_{AG}(AG/H, M)$ ,  $m \mapsto f_m$  est l'inverse du morphisme  $\text{Hom}_{AG}(AG/H, M) \rightarrow M^H$ ,  $f \mapsto f(H)$ .  $\square$

### B.1.2 Coinvariants

Soit  $M \in \text{Mod}_G(A)$  un  $G$ -module sur un anneau commutatif  $A$ . On appelle coinvariants de  $M$  sous  $G$  le  $A$ -module  $M_G$  obtenu comme quotient de  $M$  par le sous-module engendré par les éléments du type  $g.m - m$ , pour  $g \in G$  et  $m \in M$  :

$$M_G := M / \langle g.m - m, m \in M, g \in G \rangle .$$

Le  $A$ -module  $M_G$  vérifie la propriété universelle suivante. Pour tout  $G$ -module trivial  $N^{\text{triv}}$  et toute application équivariante  $f : M \rightarrow N^{\text{triv}}$ , il existe une unique application  $A$ -linéaire  $\tilde{f} : M_G \rightarrow N$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N^{\text{triv}} \\ \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ M_G & & . \end{array}$$

Inversement, cette propriété universelle caractérise  $M_G$  à un unique isomorphisme près. Cette propriété universelle se traduit par un isomorphisme  $A$ -linéaire, naturel en  $M, N$  :

$$\text{Hom}_{AG}(M, N^{\text{triv}}) \simeq \text{Hom}_A(M_G, N) \quad (\text{B.3})$$

En combinant cette formule avec la formule (B.2) on obtient un isomorphisme  $A$ -linéaire, naturel en  $M, N$  :

$$\text{Hom}_A(M_G, N) \simeq \text{Hom}_A(M, N^{\text{triv}})^G \quad (\text{B.4})$$

**Proposition B.1.2.** *Soit  $M$  un  $G \times H$  module. On a un isomorphisme :*

$$M_{G \times H} \simeq (M_{1 \times H})_G .$$

*Démonstration.* On a une chaîne d'isomorphismes naturels en  $N \in \text{Mod}(A)$  :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(M_{G \times H}, N) &\simeq \text{Hom}_A(M, N)^{G \times H} \simeq (\text{Hom}_A(M, N)^{1 \times H})^G \\ &\simeq \text{Hom}_A(M_{1 \times H}, N)^G \simeq \text{Hom}_A((M_{1 \times H})_G, N) . \end{aligned}$$

Le lemme de Yoneda donne alors l'isomorphisme voulu. □

### B.1.3 Norme

Soit  $G$  est un groupe fini, et  $M$  un  $G$ -module sur  $A$ . On appelle norme le morphisme  $A$ -linéaire :

$$\begin{aligned} N : M_G &\rightarrow M^G \\ [m] &\mapsto \sum_{g \in G} g.m = |\text{stab}_G(m)| \sum_{[g] \in G/\text{stab}_G(m)} g.m . \end{aligned}$$

**Lemme B.1.3.** Soit  $G$  un groupe fini, et  $M$  un  $G$ -module sur  $A$ . La composée :

$$M \twoheadrightarrow M_G \xrightarrow{N} M^G \hookrightarrow M$$

est égale au morphisme  $\sum_{g \in G} g \in AG$ .

Notons  $\phi$  la composée  $M^G \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M_G$ . En vertu du lemme précédent on a  $\phi \circ N = |G| \text{Id}_{M^G}$  et  $N \circ \phi = |G| \text{Id}_{M_G}$ . On obtient donc :

**Proposition B.1.4.** Soit  $G$  un groupe fini et  $M$  un  $G$ -module sur  $A$ . Si le cardinal de  $G$  est inversible dans  $A$ , alors la norme  $M_G \xrightarrow{N} M^G$  est un isomorphisme.

**Lemme B.1.5.** Soit  $M$  un  $G$ -module sur  $A$ ,  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $g \in G$ . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} M & \twoheadrightarrow & M_{gHg^{-1}} & \xrightarrow{N} & M^{gHg^{-1}} & \hookrightarrow & M \\ \downarrow g^{-1} & & & & & & \uparrow g \\ M & \twoheadrightarrow & M_H & \xrightarrow{N} & M^H & \hookrightarrow & M \end{array}$$

## B.2 Modules de permutation

**Définition B.2.1.** Un  $G$ -module  $M$  sur un anneau commutatif  $A$  est un module de permutation s'il existe un ensemble  $E$ , une action de groupe de  $G$  sur  $E$  et un isomorphisme  $G$ -équivariant  $M \simeq AE$ .

**Proposition B.2.2.** Soit  $AE$  un  $G$ -module de permutation de rang fini. Le dual  $(AE)^\vee := \text{Hom}_A(AE, A)$  est un module de permutation isomorphe à  $AE$ .

*Démonstration.* Notons  $\{e_1, \dots, e_n\}$  les éléments de  $E$  et  $\{e_1^\vee, \dots, e_n^\vee\}$  la base duale de  $E$ . L'action sur  $\text{Hom}_A(AE, A)$  est donnée par  $(g.f)(m) = f(g^{-1}.m)$ . Si  $g.e_i = e_j$ , alors  $(g.e_i^\vee)(e_k) = e_i^\vee(g^{-1}.e_k) = 1$  si  $k = j$  et 0 sinon. En d'autres termes, l'isomorphisme  $A$ -linéaire  $AE \rightarrow \text{Hom}_A(AE, A)$ ,  $e_i \mapsto e_i^\vee$  est  $G$ -équivariant.  $\square$

**Proposition B.2.3.** Soit  $AE$  un  $G$ -module de permutation. La surjection  $AE \twoheadrightarrow AE/G$  induit un isomorphisme :

$$(AE)_G \xrightarrow{\simeq} AE/G.$$

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{O}_i)$  la famille des orbites de  $E$  sous l'action de  $G$ . La surjection  $p : AE \twoheadrightarrow AE/G$  s'identifie au morphisme  $\bigoplus A\mathcal{O}_i \xrightarrow{\bigoplus p_i} \bigoplus A\mathcal{O}_i/G$ . On peut donc supposer l'action de  $G$  sur  $E$  transitive. Soit  $e_0 \in E$  et  $S$  le sous-module de  $AE$  engendré par  $\{e - e_0, e \in E\}$ . Alors  $Ae_0 \oplus S = AE$  et  $S \subset \langle g.m - m, m \in AE, g \in G \rangle$ . On a donc

$$Ae_0 + \langle g.m - m, m \in AE, g \in G \rangle = AE \quad (*)$$

De plus, l'intersection  $Ae_0 \cap \langle g.m - m, m \in AE, g \in G \rangle$  est nulle donc la somme  $(*)$  est directe. En passant au quotient  $p$  induit donc un isomorphisme.  $\square$



**Corollaire B.2.4.** *Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $E$ . Si  $E$  est fini alors le rang du  $A$ -module libre  $(AE)_G$  ne dépend pas de l'anneau  $A$ .*

**Proposition B.2.5.** *Soit  $AE$  un  $G$ -module de permutation, et soit  $(\mathcal{O}_i)$  la famille des orbites de  $E$  sous l'action de  $G$ . On a un isomorphisme*

$$\begin{aligned} \bigoplus_{|\mathcal{O}_i| < \infty} Ae_{\mathcal{O}_i} &\xrightarrow{\cong} (AE)^G \\ e_{\mathcal{O}_i} &\mapsto \sum_{e \in \mathcal{O}_i} e. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme  $(AE)^G = \bigoplus (A\mathcal{O}_i)^G$  on peut se contenter d'étudier une seule orbite  $\mathcal{O}$ .

Si  $\mathcal{O}$  est de cardinal infini, soit  $x \in A\mathcal{O}$ .  $x$  s'écrit comme une combinaison linéaire finie de vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathcal{O}$ . Soit  $e_{n+1}$  un autre élément de  $\mathcal{O}$  et  $g \in G$  tel que  $g.e_1 = e_{n+1}$ , alors  $g.x \neq x$ . Ainsi  $(A\mathcal{O})^G = \emptyset$ .

si  $\mathcal{O} = \{e_1, \dots, e_n\}$  est de cardinal fini, alors  $(A\mathcal{O})^G$  contient  $\sum_i e_i$ . Soit  $x = \sum \lambda_i e_i \in (A\mathcal{O})^G$ , et pour tout  $i$  soit  $g_i \in G$  tel que  $g_i.e_0 = e_i$ . L'égalité  $x = g_i.x$  montre alors que  $\lambda_0 = \lambda_i$ , donc  $x = \lambda_0 \sum_i e_i$ . Ainsi,  $(A\mathcal{O})^G$  est libre de base  $\sum_i e_i$ .  $\square$

Soit  $M$  un  $\mathfrak{S}_d$ -module sur un anneau  $A$  de caractéristique différente de 2. On note  $M^{\text{alt}}$  le  $\mathfrak{S}_d$ -module muni de l'action alternée :  $\mathfrak{S}_d \times M^{\text{alt}} \rightarrow M^{\text{alt}}$ ,  $(\sigma, m) \mapsto \epsilon(\sigma)m$ . Si  $A^{\text{sgn}}$  désigne le  $A$ -module  $A$  muni de l'action de  $\mathfrak{S}_d$  définie par la signature :  $\sigma.a := \epsilon(\sigma)a$ , alors  $M^{\text{alt}} = M \otimes_A A^{\text{sgn}}$ .

**Proposition B.2.6.** *Soit  $A$  un anneau de caractéristique différente de 2,  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathfrak{S}_d$  et  $AE$  un  $\mathfrak{S}_d$ -module de permutation.*

*Soit  $\mathcal{O}$  l'orbite de  $e_0 \in E$  sous l'action de  $G$ , les énoncés suivants sont équivalents :*

- (1)  $A\mathcal{O}^{\text{alt}G} \neq 0$ .
- (2) Le stabilisateur  $\text{stab}_G(e_0)$  de  $e_0$  sous l'action non alternée de  $G$  est contenu dans le groupe alterné :  $\text{stab}_G(e_0) \subset \mathcal{A}_d$ .
- (3)  $A\mathcal{O}^{\text{alt}G}$  est un  $A$ -module libre de rang 1, de base l'élément :

$$e_{\mathcal{O}^{\text{alt}}} := \sum_{e \in (G \cap \mathcal{A}_d).e_0} e - \sum_{e' \in \mathcal{O} \setminus (G \cap \mathcal{A}_d).e_0} e'.$$

*Démonstration.* Notons  $e_0, \dots, e_n$  les éléments de  $\mathcal{O}$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2). Supposons que pour tout  $i$ ,  $\text{stab}_G(e)$  contient un élément  $\alpha_i$  de signature  $-1$ . Soit  $x = \sum \lambda_i e_i$  un élément de  $A\mathcal{O}^{\text{alt}G}$ . Pour tout  $i$  on a :  $\lambda_i e_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j e_j = -\lambda_i e_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \alpha_i.e_j$ , donc  $\lambda_i = -\lambda_i = 0$ . On a donc  $A\mathcal{O}^{\text{alt}G} = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3). Si  $G \subset \mathcal{A}_n$  l'énoncé s'obtient grâce à la proposition B.2.5. Sinon, comme  $\text{stab}_G(e) \subset \mathcal{A}_d$ , les deux parties  $(G \cap \mathcal{A}_d).e_0$  et  $\mathcal{O} \setminus (G \cap \mathcal{A}_d).e_0$  sont *disjointes*, de même cardinal et forment une partition de  $\mathcal{O}$ . Ainsi,  $e_{\mathcal{O}^{\text{alt}}}$  est un élément non nul de  $A\mathcal{O}^{\text{alt}G}$ .

Notons  $e_0, \dots, e_k$ , resp.  $e'_0, \dots, e'_l$  les éléments des deux parties. Soit  $x = \sum \lambda_i e_i + \sum \lambda'_i e'_i \in A\mathcal{O}^{\text{alt}G}$ , alors pour tout  $g \in G \cap \mathcal{A}_d$  on a  $g.x = \sum \lambda_i g.e_i + \sum \lambda'_i g.e'_i = x = \sum \lambda_i e_i + \sum \lambda'_i e'_i$  donc pour tout  $i$  on a  $\lambda_i = \lambda_0$ ,  $\lambda'_i = \lambda'_0$ . De même, si  $\tau$  est un élément de signature  $-1$  qui envoie  $e_0$  sur  $e'_0$  l'égalité  $\tau.x = x$  implique que  $\lambda'_0 = -\lambda_0$ . Ainsi  $x$  est un multiple de  $e_{\mathcal{O}^{\text{alt}}}$ .  $\square$

**Corollaire B.2.7.** *Soit  $A$  un anneau de caractéristique différente de 2,  $G$  un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_d$  et  $AE$  un  $\mathfrak{S}_d$ -module de permutation de dimension finie. Le rang du  $A$ -module libre  $AO^{\text{alt}G}$  ne dépend pas de l'anneau  $A$ .*

**Corollaire B.2.8.** *Soit  $A$  un anneau de caractéristique différente de 2,  $G$  un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_d$ . Le module  $(A\mathfrak{S}_d/G)^{\text{alt}}$  est un  $\mathfrak{S}_d$ -module de permutation si et seulement si  $G \subset \mathcal{A}_d$ .*

*Démonstration.* Si  $G$  n'est pas un sous-groupe de  $\mathcal{A}_d$ , alors d'après la proposition B.2.6 on a  $A\mathfrak{S}_d/G^{\text{alt}} = 0$ . Ceci interdit à  $A\mathfrak{S}_d/G^{\text{alt}}$  d'être un module de permutation car les invariants d'un module de permutation de dimension finie sont non nuls d'après la proposition B.2.5. Si à l'inverse  $G \subset \mathcal{A}_d$  alors l'isomorphisme  $A$ -linéaire qui envoie  $\sigma G \in A\mathfrak{S}_d/G^{\text{alt}}$  sur  $\epsilon(\sigma)\sigma G \in A\mathfrak{S}_d/G$  est bien défini et  $\mathfrak{S}_d$ -équivariant.  $\square$

L'énoncé suivant donne un exemple de symétrisation injective non nulle (cf. définition 3.1.7) du foncteur polynomial nul.

**Corollaire B.2.9.** *Soit  $A$  un anneau commutatif de caractéristique  $q$  impaire et  $d \geq q$  un entier. Le foncteur  $f : \text{Mod}_{\mathfrak{S}_d}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$  qui envoie le  $\mathfrak{S}_d$ -module  $M$  sur le quotient de  $(M^{\text{alt}})^{\mathfrak{S}_d}$  par l'image de la norme  $(M^{\text{alt}})_{\mathfrak{S}_d} \rightarrow (M^{\text{alt}})^{\mathfrak{S}_d}$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (1) *Si  $V$  est un  $A$ -module projectif de type fini alors  $f(V^{\otimes d}) = 0$ .*
- (2) *Soit  $c \in \mathfrak{S}_d$  un cycle de longueur  $q$ . Le  $A$ -module  $f(A\mathfrak{S}_d/(c))$  est libre de rang 1.*
- (3) *Il existe une transformation naturelle  $f \rightarrow \text{Id}$  dont l'évaluation sur  $V^{\otimes d}$  est un monomorphisme.*

*Démonstration.* Le deuxième point découle de la proposition B.2.6 : le  $A$ -module  $(A\mathfrak{S}_d/(c)^{\text{alt}})^{\mathfrak{S}_d}$  est libre de rang 1 et la norme envoie le générateur  $\text{Id}$  de  $(A\mathfrak{S}_d/(c)^{\text{alt}})_{\mathfrak{S}_d}$  sur  $|c| \cdot \sum_{[g] \in \mathfrak{S}_d/(c)} g \cdot \text{Id}$  c'est-à-dire sur l'élément nul car  $|c| = q$ .

Démontrons le premier point. Soit  $V$  est un  $A$ -module projectif de type fini, alors il existe un  $A$ -module libre  $L$ , tel que  $\text{Id}_V$  factorise en  $V \hookrightarrow L \rightarrow V$ . Pour démontrer que  $f(V) = 0$ , il suffit donc de montrer que  $f(L) = 0$ . Le premier point est donc équivalent à la surjectivité de la norme  $(L^{\otimes d})_{\mathfrak{S}_d} \rightarrow (L^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$ , pour tout  $A$ -module libre  $L$ . Mais si  $L$  est un  $A$ -module libre alors il existe des uplets  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  tels que  $L^{\otimes d} = \bigoplus_{\lambda} A\mathfrak{S}_d/(\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k})$ . Si  $\lambda \neq (1, 1, \dots, 1)$  alors le terme correspondant ne contribue pas aux invariants d'après la proposition B.2.6. Si  $\lambda = (1, \dots, 1)$ , la norme envoie le générateur  $\text{Id}$  de  $(A\mathfrak{S}_d^{\text{alt}})_{\mathfrak{S}_d}$  sur l'élément  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \epsilon(\sigma)\sigma$  qui constitue la base de  $(A\mathfrak{S}_d^{\text{alt}})^{\mathfrak{S}_d}$ . La norme est donc surjective.  $\square$

## B.3 Foncteurs de Schur, de coSchur et de Weyl

### B.3.1 Uplets, partitions et diagrammes

**Définition B.3.1.** On appelle uplet d'entiers une suite finie  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'entiers strictement positifs. Le nombre  $n$  est la longueur du uplet, et la somme  $x_1 + \dots + x_n$  le poids du uplet. Un uplet de longueur  $n$  est également appelé  $n$ -uplet.

**Définition B.3.2.** On appelle partition (d'un entier  $d$ ) un uplet décroissant (de poids  $d$ ). Si  $\lambda$  est une partition, on définit son conjugué  $\tilde{\lambda}$  comme la partition  $(\tilde{\lambda}_1, \dots)$  où  $\tilde{\lambda}_i$  est le nombre de termes de  $\lambda$  qui sont supérieur ou égaux à  $i$ .

*Exemple B.3.3.* Il existe cinq partitions de l'entier 4 :

$$(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1).$$

Leurs conjuguées respectives sont :

$$(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2), (3, 1), (4).$$

**Définition B.3.4.** Si  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont deux partitions on dit que  $\lambda' \subseteq \lambda$  si  $\lambda'$  est moins longue que  $\lambda$  et si  $\lambda'_i \leq \lambda_i$  pour tout  $i$  compris entre 1 et la longueur de  $\lambda'$ .

**Définition B.3.5.** Soit  $\lambda$  une partition. Le diagramme associé à  $\lambda$  est une matrice infinie à coefficients dans  $\mathbb{F}_2$  dont les lignes et les colonnes sont indexées par des entiers strictement positifs, et dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  vaut 1 si  $j \leq \lambda_i$  et vaut 0 sinon.

Si  $\lambda' \subseteq \lambda$  sont deux partitions, le diagramme gauche  $\lambda/\lambda'$  désigne la somme (dans  $\mathcal{M}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}(\mathbb{F}_2)$ ) des diagrammes associés à  $\lambda'$  et à  $\lambda$ . Le poids d'un diagramme gauche est le nombre de ses coefficients non nuls.

*Exemple B.3.6.* Considérons les partitions  $\lambda = (5, 3, 1, 1)$  et  $\lambda' = (3, 2, 1)$ . On a  $\lambda' \subseteq \lambda$ . Les diagrammes associés à  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont les matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Le diagramme gauche  $\lambda/\lambda'$  est égal à :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

**Définition B.3.7.** Si  $\lambda/\lambda'$  est un diagramme gauche le diagramme conjugué  $\widetilde{\lambda/\lambda'}$  désigne sa matrice transposée. On a donc :  $\widetilde{\lambda/\lambda'} = \widetilde{\lambda}/\widetilde{\lambda'}$ .

**Définition B.3.8.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers de poids  $n$ . Le sous-groupe de Young  $\mathfrak{S}_\lambda$  est le sous-groupe

$$\mathfrak{S}(\{1, \dots, \lambda_1\}) \times \mathfrak{S}(\{\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2\}) \times \dots \times \mathfrak{S}(\{n - \lambda_n + 1, \dots, n\})$$

du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\{1, \dots, n\})$ . On a donc  $\mathfrak{S}_\lambda \simeq \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_n}$ .

Si  $\lambda/\lambda'$  est un diagramme gauche, on note  $\mathfrak{S}_{\lambda/\lambda'}$  le sous-groupe de Young associé au uplet d'entiers  $(\lambda_1 - \lambda'_1, \lambda_2 - \lambda'_2, \dots)$ .

**Définition B.3.9.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  un  $k$ -uplet d'entiers, et  $X = S, \Lambda, \Gamma$ , on note

$$X^\lambda(M) := X^{\lambda_1}(M) \otimes \cdots \otimes X^{\lambda_n}(M).$$

Si  $\lambda/\lambda'$  est un diagramme gauche, on note

$$X^{\lambda/\lambda'}(M) := X^{(\lambda_1 - \lambda'_1, \lambda_2 - \lambda'_2, \dots)}(M).$$

**Définition B.3.10.** Soit  $\lambda/\lambda'$  un diagramme gauche de poids  $n$ . On ordonne l'ensemble  $\mathcal{E}_{\lambda/\lambda'}$  des couples  $(i, j)$  tels que le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $\lambda/\lambda'$  est non nul par l'ordre lexicographique :  $(i, j) \leq (k, l)$  si  $i < k$  ou  $i = k, j \leq l$ . L'ordre lexicographique définit une bijection croissante  $\phi_{\lambda/\lambda'} : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_{\lambda/\lambda'}$ . La transposition induit une bijection  $\tau_{\lambda/\lambda'} : \mathcal{E}_{\lambda/\lambda'} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_{\widetilde{\lambda/\lambda'}}$  qui à un couple  $(i, j)$  associe le couple  $(j, i)$ . On définit la permutation  $\sigma_{\lambda/\lambda'} \in \mathfrak{S}_n$  par la formule :

$$\sigma_{\lambda/\lambda'} := \phi_{\lambda/\lambda'}^{-1} \circ \tau_{\lambda/\lambda'}^{-1} \circ \phi_{\widetilde{\lambda/\lambda'}}.$$

En particulier on a  $\sigma_{\lambda/\lambda'}^{-1} = \sigma_{\widetilde{\lambda/\lambda'}}$ .

*Exemple B.3.11.* Considérons les partitions  $\lambda = (5, 3, 1, 1)$  et  $\lambda' = (3, 2, 1)$ . On a numéroté ci-dessous dans l'ordre lexicographique les couples  $(i, j)$  dont le coefficient est non nul pour le diagramme gauche  $\lambda/\lambda'$  et pour son conjugué :

$$\lambda/\lambda' : \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \widetilde{\lambda/\lambda'} : \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

La permutation  $\sigma_{\lambda/\lambda'}$  est donc donnée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|cccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \sigma_{\lambda/\lambda'}(i) & 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

### B.3.2 Définition des foncteurs de Schur, coSchur et Weyl

**Définition B.3.12.** [4, def. II.1.3] Soit  $A$  un anneau commutatif,  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$  et  $\widetilde{\mu/\mu'}$  son diagramme conjugué. On appelle foncteur de Schur associé à  $\mu/\mu'$  le foncteur

$$S_{\mu/\mu'} : \text{Mod}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$$

défini comme l'image du morphisme  $d_{\mu/\mu'} :$

$$\Lambda^{\mu/\mu'} \hookrightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\widetilde{\mu/\mu'}}} \otimes^d \rightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}}$$

où le morphisme  $\sigma_{\widetilde{\mu/\mu'}}$  agit par permutation sur les facteurs du produit tensoriel :  $\sigma_{\widetilde{\mu/\mu'}}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_d) = x_{\sigma_{\widetilde{\mu/\mu'}}^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma_{\widetilde{\mu/\mu'}}^{-1}(d)}$ .

Par exemple, le foncteur de Schur  $S_\mu$  associé (au diagramme gauche associé) à la partition  $\mu = (d)$  est le foncteur  $\Lambda^d$ , le foncteur de Schur associé à la partition  $(1, \dots, 1)$  de poids  $d$  est le foncteur  $S^d$ , et si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont  $n$  partitions et  $(\lambda_1 | \dots | \lambda_n)$  désigne le diagramme gauche suivant :

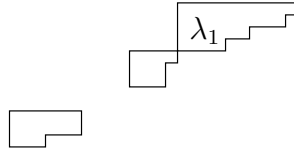


FIG. B.1 – Le diagramme gauche  $(\lambda_1 | \lambda_2 | \dots | \lambda_n)$

alors le foncteur de Schur  $S_{(\lambda_1 | \lambda_2 | \dots | \lambda_n)}$  est égal au produit tensoriel  $\bigotimes_{i=1}^n S_{\lambda_i}$ .

**Définition B.3.13.** [4, def. II.1.3] Soit  $A$  un anneau commutatif,  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$  et  $\widetilde{\mu/\mu'}$  son diagramme conjugué. On appelle foncteur de coSchur associé à  $\mu/\mu'$  le foncteur

$$K_{\mu/\mu'} : \text{Mod}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$$

défini comme l'image du morphisme  $d'_{\mu/\mu'} :$

$$\Gamma^{\mu/\mu'} \hookrightarrow \bigotimes^d \xrightarrow{\sigma_{\widetilde{\mu/\mu'}}} \bigotimes^d \twoheadrightarrow \Lambda^{\widetilde{\mu/\mu'}} .$$

**Théorème B.3.14.** [4, Th II.2.16 et II.3.16] Soit  $A$  un anneau commutatif. L'image d'un  $A$ -module libre de type fini par un foncteur de Schur  $S_{\mu/\mu'}$  (resp. coSchur  $K_{\mu/\mu'}$ ) est un  $A$ -module libre de type fini, et admet un supplémentaire dans  $S^{\widetilde{\mu/\mu'}}$  (resp.  $\Lambda^{\widetilde{\mu/\mu'}}$ ).

*Remarque B.3.15.* L'énoncé des théorèmes II.2.16 et II.3.16 de [4] est en fait nettement plus précis. Il donne un procédé de construction d'une base de  $S_{\mu/\mu'}(M)$  (resp.  $K_{\mu/\mu'}$ ) à partir d'une base du  $A$ -module libre de  $M$ , indépendamment de l'anneau  $A$  des coefficients. Le résultat s'exprime en termes de tableaux standard (resp. costandard).

**Corollaire B.3.16.** L'image d'un  $A$ -module projectif de type fini par un foncteur de Schur (resp. coSchur) est un  $A$ -module projectif de type fini.

*Démonstration.* Soit  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche. Par functorialité des foncteurs de Schur, si  $M$  est un facteur direct d'un  $A$ -module libre de type fini  $L$ , alors  $S_{\mu/\mu'}(M)$  est facteur direct du  $A$ -module libre de type fini  $S_{\mu/\mu'}(L)$ . Or les  $A$ -modules projectifs de type fini sont exactement les facteurs directs des  $A$ -modules libres de type fini.  $\square$

Soit  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$  et  $\widetilde{\mu/\mu'}$  son diagramme conjugué. Pour

tout  $A$ -module libre de type fini  $M$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \xrightarrow{(d_{\mu/\mu',M})^\vee} & & \\
S_{\mu/\mu'}^\sim(M)^\vee & \hookrightarrow & (M^{\otimes d})^\vee & \twoheadrightarrow & \Lambda^{\mu/\mu'}(M)^\vee \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\Gamma^{\mu/\mu'}(M^\vee) & \hookrightarrow & M^{\vee \otimes d} & \twoheadrightarrow & \Lambda^{\mu/\mu'}(M^\vee) \\
& & \xrightarrow{d'_{\mu/\mu',M^\vee}} & & 
\end{array} .$$

Ainsi on a un isomorphisme :

$$K_{\mu/\mu'}^\sim(M) = \text{Im } d'_{\mu/\mu',M^\vee} \simeq \text{Im } (d_{\mu/\mu',M}^\vee) .$$

Mais  $S_{\mu/\mu'}(M)$  admet un supplémentaire dans  $S_{\mu/\mu'}^\sim$  (théorème B.3.14). L'injection naturelle :

$$\text{Im } (d_{\mu/\mu',M}^\vee) \hookrightarrow (\text{Im } d_{\mu/\mu',M})^\vee = S_{\mu/\mu'}(M)^\vee$$

est donc un isomorphisme. On a donc :

**Proposition B.3.17.** [4, prop II.4.1] Soit  $M$  un  $A$ -module libre de type fini. On a un isomorphisme naturel :

$$S_{\mu/\mu'}(M)^\vee \simeq K_{\mu/\mu'}^\sim(M^\vee) .$$

**Définition B.3.18.** Soit  $A$  un anneau commutatif et  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$ . On appelle foncteur de Weyl associé à  $\mu/\mu'$  le foncteur

$$W_{\mu/\mu'} : \text{Mod}(A) \rightsquigarrow \text{Mod}(A)$$

dual du foncteur  $S_{\mu/\mu'}$  :

$$W_{\mu/\mu'}(M) = S_{\mu/\mu'}(M^\vee)^\vee .$$

**Proposition B.3.19.** Soit  $M$  un  $A$ -module libre de type fini. Alors  $W_{\mu/\mu'}(M)$  est un  $A$ -module libre de type fini et on a un isomorphisme naturel :

$$W_{\mu/\mu'}(M) = K_{\mu/\mu'}^\sim(M) .$$

### B.3.3 Foncteurs de Schur en grande caractéristique

La proposition B.3.22 donne une nouvelle définition des foncteurs de Schur  $S_{\mu/\mu'}$ , valable lorsque la caractéristique de l'anneau commutatif  $A$  est nulle ou plus grande que le poids des diagrammes  $\mu/\mu'$ .

**Définition B.3.20.** Soit  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$ , dont on numérote les coefficients non nuls dans l'ordre lexicographique (cf. exemple B.3.11). On note  $a_{\mu/\mu'} \in A\mathfrak{S}_d$  la somme des éléments qui préservent les lignes et  $b_{\mu/\mu'} \in A\mathfrak{S}_d$  la somme alternée des éléments qui préservent les colonnes.

Ainsi,  $a_{\mu/\mu'}$  est égal à la somme alternée des éléments du sous-groupe de Young  $\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}$  et  $b_{\mu/\mu'}$  est égal à la somme dans  $A\mathfrak{S}_d$  des éléments du sous-groupe conjugué  $\sigma_{\mu/\mu'} \cdot \widetilde{\mathfrak{S}}_{\mu/\mu'} \cdot \sigma_{\mu/\mu'}^{-1}$ .

En particulier, si  $M$  est un  $A$ -module libre de type fini, alors d'après le lemme B.1.3, le morphisme  $a_{\mu/\mu'}$  est égal à la composée  $M^{\otimes d} \xrightarrow{\text{mult}} \Lambda^{\mu/\mu'} \xrightarrow{\text{comult}} M^{\otimes d}$  et d'après le lemme B.1.5, le morphisme  $b_{\mu/\mu'}$  s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & M^{\otimes d} & \xrightarrow{b_{\mu/\mu'}} & M^{\otimes d} \\ & \swarrow \sigma_{\mu/\mu'}^{-1} & & & \swarrow \sigma_{\mu/\mu'} \\ M^{\otimes d} & \xrightarrow{\text{mult}} & S^{\mu/\mu'}(M) & \xrightarrow{\text{comult}} & M^{\otimes d} \end{array} .$$

On obtient donc :

**Lemme B.3.21.** Soit  $A$  un anneau commutatif,  $M$  un  $A$ -module libre de type fini et  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$ . Le morphisme  $b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}$  est égal à la composée :

$$M^{\otimes d} \rightarrow \Lambda^{\mu/\mu'}(M) \xrightarrow{d_{\mu/\mu'}} S^{\widetilde{\mu/\mu'}}(M) \rightarrow M^{\otimes d} \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} M^{\otimes d} .$$

Soit  $M$  un  $A$ -module libre de type fini. Notons  $\phi_{\mu/\mu'}$  la composée :

$$S_{\mu/\mu'}(M) \hookrightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}}(M) \xrightarrow{\text{comult}} M^{\otimes d} \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} M^{\otimes d} .$$

D'après le lemme précédent,  $b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}$  est égale à la composée :

$$M^{\otimes d} \rightarrow \Lambda^{\mu/\mu'}(M) \rightarrow S_{\mu/\mu'}(M) \xrightarrow{\phi_{\mu/\mu'}} M^{\otimes d} ,$$

et  $\phi_{\mu/\mu'}$  induit donc une surjection de  $S_{\mu/\mu'}(M)$  sur l'image de  $b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}$ . Si de plus  $A$  est un anneau de caractéristique nulle ou de caractéristique  $p$  supérieure au poids de  $\mu/\mu'$ , la comultiplication  $S^{\widetilde{\mu/\mu'}}(M) \rightarrow M^{\otimes d}$  est injective, donc  $\phi_{\mu/\mu'}$  l'est également. On obtient donc une nouvelle description des foncteurs de Schur :

**Proposition B.3.22.** Soit  $M$  un  $A$ -module libre de type fini. La composée :

$$S_{\mu/\mu'}(M) \hookrightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}}(M) \xrightarrow{\text{comult}} M^{\otimes d} \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} M^{\otimes d}$$

induit une surjection

$$S_{\mu/\mu'}(M) \twoheadrightarrow b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}(M^{\otimes d}) .$$

Si  $A$  est un anneau de caractéristique nulle ou  $p > d$ , cette surjection est un isomorphisme.

**Lemme B.3.23.** Soit  $M$  un  $A$ -module libre de type fini et  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$ . Il existe un morphisme  $\varrho_{\mu/\mu'}$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \Lambda^{\mu/\mu'}(M) \\ & & & & & & \downarrow \\ \Lambda^{\mu/\mu'}(M) & \xrightarrow{\quad} & M^{\otimes d} & \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} & M^{\otimes d} & \xrightarrow{\quad} & S^{\widetilde{\mu/\mu'}}(M) & \xrightarrow{\quad} & M^{\otimes d} & \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} & M^{\otimes d} \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & \Lambda^{\mu/\mu'}(M) \end{array}$$

*Démonstration.* Il nous faut montrer que la composée horizontale factorise par  $\Lambda^{\mu/\mu'}(M)$ . Soit  $x$  un élément de  $\Lambda^{\mu/\mu'}(M)$ . Son image par la comultiplication  $\Lambda^{\mu/\mu'}(M) \rightarrow M^{\otimes d}$  est de la forme :  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu/\mu'}} \epsilon(\sigma) \sigma.m$ , avec  $m \in M^{\otimes d}$ . Si on note  $G$  le groupe  $\sigma_{\mu/\mu'} \cdot \mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}} \cdot \sigma_{\mu/\mu'}^{-1}$ , la composée horizontale envoie donc  $x$  sur l'élément :

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in G} \tau. \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu/\mu'}} \epsilon(\sigma) \sigma.m \right) &= \sum_{\tau \in G, \sigma \in \mathfrak{S}_{\mu/\mu'}} \epsilon(\sigma) \sigma. \sigma^{-1}. \tau. \sigma.m \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu/\mu'}} \epsilon(\sigma) \sigma. \left( \sum_{\tau \in G} \sigma^{-1}. \tau. \sigma.m \right), \end{aligned}$$

qui est bien un élément de  $\Lambda^{\mu/\mu'}(M)$ . □

**Lemme B.3.24.** Soit  $M$  un  $A$ -module libre de type fini,  $\mu$  un uplet de poids  $d$ , et soit  $X = S, \Lambda$ . La composée

$$X^\mu(M) \xrightarrow{\text{comult}} M^{\otimes d} \xrightarrow{\text{mult}} X^\mu(M)$$

est égale à  $|\mathfrak{S}_\mu| \text{Id}$ .

Les composées suivantes sont égales :

$$\Lambda^{\mu/\mu'} \xrightarrow{d_{\mu/\mu'}} S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \rightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} \otimes^d \rightarrow \Lambda^{\mu/\mu'} \rightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} \otimes^d \rightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \quad (\text{B.5})$$

$$\Lambda^{\mu/\mu'} \xrightarrow{\varrho_{\mu/\mu'}} \Lambda^{\mu/\mu'} \rightarrow \otimes^d \rightarrow \Lambda^{\mu/\mu'} \rightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} \otimes^d \rightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \quad (\text{B.6})$$

$$\Lambda^{\mu/\mu'} \xrightarrow{\varrho_{\mu/\mu'}} \Lambda^{\mu/\mu'} \rightarrow \otimes^d \xrightarrow{\times |\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}|} \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} \otimes^d \rightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \quad (\text{B.7})$$

$$\Lambda^{\mu/\mu'} \xrightarrow{d_{\mu/\mu'}} S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \rightarrow \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} \otimes^d \xrightarrow{\times |\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}|} \otimes^d \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} \otimes^d \rightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \quad (\text{B.8})$$

$$\Lambda^{\mu/\mu'} \xrightarrow{d_{\mu/\mu'}} S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \rightarrow \otimes^d \rightarrow S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \xrightarrow{\times |\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}|} S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \quad (\text{B.9})$$

$$\Lambda^{\mu/\mu'} \xrightarrow{d_{\mu/\mu'}} S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \xrightarrow{\times |\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}| \cdot |\mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}}|} S^{\widetilde{\mu/\mu'}} \quad (\text{B.10})$$

L'égalité entre la première et la deuxième résulte du lemme B.3.23, pour passer de la deuxième à la troisième on utilise le lemme B.3.24, pour passer de la quatrième à la



cinquième on utilise  $\sigma_{\mu/\mu'}^{-1} = \sigma_{\mu/\mu'}$  et la dernière égalité provient à nouveau du lemme B.3.24. On obtient alors les deux propositions suivantes (la deuxième proposition est la traduction de la première à l'aide du lemme B.3.21) :

**Proposition B.3.25.** *Soit  $A$  un anneau,  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$ , et  $M$  un  $A$ -module libre de type fini. Notons  $c_{\mu/\mu'}$  la composée*

$$c_{\mu/\mu'} := S^{\widetilde{\mu/\mu'}}(M) \xrightarrow{\text{comult}} M^{\otimes d} \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} M^{\otimes d} \xrightarrow{\text{mult}} \Lambda^{\mu/\mu'}(M).$$

Alors on a l'égalité :

$$d_{\mu/\mu'} \circ c_{\mu/\mu'} \circ d_{\mu/\mu'} = |\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}| |\mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}}| d_{\mu/\mu'}.$$

En particulier, si l'anneau  $A$  contient  $\mathbb{Q}$  ou est caractéristique  $p > d$ , la restriction du morphisme  $|\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}|^{-1} |\mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}}|^{-1} c_{\mu/\mu'}$  au sous-module de Schur  $S_{\mu/\mu'}(M)$  est une section du morphisme structurel  $\Lambda^{\mu/\mu'}(M) \twoheadrightarrow S_{\mu/\mu'}(M)$ .

**Proposition B.3.26.** *Soit  $A$  un anneau,  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$ , et  $M$  un  $A$ -module libre de type fini. Le morphisme  $b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'} : M^{\otimes d} \rightarrow M^{\otimes d}$  vérifie :*

$$(b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}) \circ (b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}) = |\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}| |\mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}}| b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}.$$

En particulier, si l'anneau  $A$  contient  $\mathbb{Q}$  ou est caractéristique  $p > d$ , le module de Schur  $S_{\mu/\mu'}(M) \simeq b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}(M^{\otimes d})$  est un facteur direct dans  $M^{\otimes d}$ .

La proposition suivante est analogue à la proposition B.3.22, avec des hypothèses légèrement différentes. Elle nous permet d'identifier plusieurs formes de la symétrisation des foncteurs de Schur en grande caractéristique.

**Proposition B.3.27.** *Soit  $\mu/\mu'$  un diagramme gauche de poids  $d$ , et  $A$  un anneau contenant  $\mathbb{Q}$  ou de caractéristique  $p > d$  et  $M$  un  $\mathfrak{S}_d$ -module sur  $A$ . Alors le morphisme :*

$$\phi_{\mu/\mu'} : M_{\mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}}} \xrightarrow{N} M^{\mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}}} \hookrightarrow M \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} M$$

induit un isomorphisme de l'image de

$$\partial_{\mu/\mu'} : M^{\text{alt}\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}} \hookrightarrow M \xrightarrow{\sigma_{\mu/\mu'}} M \twoheadrightarrow M_{\mathfrak{S}_{\widetilde{\mu/\mu'}}}.$$

sur  $b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}(M)$ .

*Démonstration.* On procède comme pour la proposition B.3.22. D'après les lemmes B.1.3 et B.1.5, le morphisme

$$M \twoheadrightarrow M_{\text{alt}\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}} \xrightarrow{N_1} M^{\text{alt}\mathfrak{S}_{\mu/\mu'}} \xrightarrow{\partial_{\mu/\mu'}} M_{\widetilde{\mu/\mu'}} \xrightarrow{N_2} M^{\widetilde{\mu/\mu'}} \hookrightarrow M$$

est égal à  $b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}$ . Comme  $A$  est un anneau contenant  $\mathbb{Q}$  ou de caractéristique  $p > d$ , les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont des isomorphismes. Ainsi  $\phi_{\mu/\mu'}$  est injective et induit un isomorphisme de l'image de  $\partial_{\mu/\mu'}$  sur l'image de  $b_{\mu/\mu'} \circ a_{\mu/\mu'}$ .  $\square$

## Annexe C

# Résultats élémentaires d'algèbre homologique

### C.1 Filtrations

#### C.1.1 Produits tensoriels de filtrations

Soit  $A$  un anneau. Une filtration croissante (positive) d'un  $A$ -module  $M$  est une suite croissante de sous-modules  $(M_k)_{k \geq 0}$  de  $M$  tels que  $\bigcup M_k = M$ . Posons  $M_{-1} = 0$ . Le gradué du  $A$ -module filtré  $M$  est défini par la formule :

$$\text{Gr}M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k/M_{k-1} ,$$

**Définition C.1.1.** Soit  $A$  un anneau commutatif,  $M, N$  deux  $A$ -modules munis de filtrations croissantes  $(M_k)_{k \geq 0}$  et  $(N_k)_{k \geq 0}$ . Le produit tensoriel des filtrations  $(M_k), (N_k)$  est la filtration  $(M \otimes N)_k$  de  $M \otimes N$  définie par :

$$(M \otimes N)_k = \sum_{k_1+k_2=k} M_{k_1} \otimes N_{k_2} .$$

*Remarque C.1.2.* On peut définir le produit tensoriel de  $n$ -filtrations par une formule analogue. Le produit tensoriel de filtrations est associatif :

$$(M_k) \otimes (N_k) \otimes (P_k) \simeq [(M_k) \otimes (N_k)] \otimes (P_k) \simeq (M_k) \otimes [(N_k) \otimes (P_k)] .$$

**Lemme C.1.3.** Soit  $A$  un anneau,  $M_1, M_2$  deux sous-modules du  $A$ -module  $M$  et  $N_1, N_2$  des sous-modules de  $M_1, M_2$ . On a un isomorphisme :

$$(M_1 + M_2)/(M_1 \cap M_2 + N_1 + N_2) \simeq M_1/(M_1 \cap M_2 + N_1) \oplus M_2/(M_1 \cap M_2 + N_2) .$$

*Démonstration.* On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
& & M_1/(M_1 \cap M_2 + N_1) \oplus & & (M_1 + M_2) \\
& & M_2/(M_1 \cap M_2 + N_2) & & (M_1 \cap M_2 + N_1 + N_2) \\
& & \uparrow & & \uparrow \\
M_1 \cap M_2 \hookrightarrow & \xrightarrow{j_1 - j_2} & M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{+} & M_1 + M_2 \\
\parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
M_1 \cap M_2 \hookrightarrow & \xrightarrow{i_1 - i_2} & M_1 \cap M_2 + N_1 \oplus & \xrightarrow{+} & M_1 \cap M_2 + N_1 + N_2 \\
& & M_1 \cap M_2 + N_2 & & 
\end{array}$$

Les lignes et les colonnes sont exactes et une chasse dans le diagramme produit l'isomorphisme voulu.  $\square$

**Lemme C.1.4.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $M, N$  deux  $A$ -modules munis de filtrations croissantes  $(M_k)_{k \geq 0}$  et  $(N_k)_{k \geq 0}$ . Supposons que les gradués  $\text{Gr}M$  et  $\text{Gr}N$  sont projectifs, alors pour tous indices  $(i_1, i_2, j_1, j_2)$  on a :*

$$M_{i_1} \otimes N_{j_1} \cap M_{i_2} \otimes N_{j_2} = M_{\min(i_1, i_2)} \otimes N_{\min(j_1, j_2)}.$$

*Démonstration.* Supposons  $i_1 < i_2$  et  $j_1 > j_2$  (les autres cas sont triviaux). Pour tout  $k$   $M_k/M_{k-1}$  est projectif, on a donc un isomorphisme  $M_k \simeq M_k/M_{k-1} \oplus M_{k-1}$ . Ainsi  $M_{i_1}$  admet un supplémentaire  $M_{i_1, i_2}$  dans  $M_{i_2}$ . De même,  $N_{j_2}$  admet un supplémentaire  $N_{j_2, j_1}$  dans  $N_{j_1}$ . On a donc :

$$M_{i_2} \otimes N_{j_1} = (M_{i_1, i_2} \otimes N_{j_2, j_1}) \oplus (M_{i_1} \otimes N_{j_2, j_1}) \oplus (M_{i_1} \otimes N_{j_2}) \oplus (M_{i_1, i_2} \otimes N_{j_2}).$$

Soit  $x \in M_{i_2} \otimes N_{j_1}$ ,  $x$  se décompose de manière unique en  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  où les  $x_i$  sont dans les  $A$ -modules du membre de droite. Si  $x \in M_{i_1} \otimes N_{j_1} \cap M_{i_2} \otimes N_{j_2}$  alors  $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ , donc  $x \in M_{i_1} \otimes N_{j_2}$ .  $\square$

**Proposition C.1.5.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $M, N$  deux  $A$ -modules munis de filtrations croissantes  $(M_k)_{k \geq 0}$  et  $(N_k)_{k \geq 0}$  dont les gradués  $\text{Gr}M$  et  $\text{Gr}N$  sont projectifs. Les quotients successifs du produit tensoriel des filtrations sont donnés par la formule :*

$$(M \otimes N)_k / (M \otimes N)_{k-1} \simeq \bigoplus_{k_1 + k_2 = k} M_{k_1} / M_{k_1-1} \otimes M_{k_2} / M_{k_2-1}.$$

*Démonstration.* Soit  $k \geq 1$  fixé. On procède par récurrence l'indice  $i$  des couples  $M_i \otimes M_{k-i}$ . Si  $i = 0$ ,  $M_0$  est projectif (c'est un facteur direct du gradué de  $M$ ), on a donc une suite exacte courte

$$M_0 \otimes M_{k-1} \hookrightarrow M_0 \otimes M_k \twoheadrightarrow M_0 \otimes M_k / M_{k-1}.$$

Supposons maintenant que l'on a une suite exacte courte :

$$\sum_{j=0}^i M_j \otimes M_{k-j-1} \hookrightarrow \sum_{j=0}^i M_j \otimes M_{k-j} \twoheadrightarrow \bigoplus_{j=0}^i M_j / M_{j-1} \otimes M_{k-j} / M_{k-j-1}.$$

Nous allons montrer la suite reste exacte si on remplace  $i$  par  $i + 1$ . Posons :

$$\begin{aligned} F_1 &= M_{i+1} \otimes M_{k-i-2} & G_1 &= M_{i+1} \otimes M_{k-i-1} \\ F_2 &= \sum_{j=0}^i M_j \otimes M_{k-j-1} & G_2 &= \sum_{j=0}^i M_j \otimes M_{k-j} \end{aligned}$$

On a  $G_1 \cap G_2 = M_i \otimes M_{k-i-1}$  d'après le lemme C.1.4. On a donc :

$$\begin{aligned} G_1/(G_1 \cap G_2 + F_1) &= M_{i+1}/M_i \otimes M_{k-i-1}/M_{k-i-2}, \\ G_2/(G_1 \cap G_2 + F_2) &= G_2/F_2 = \bigoplus_{j=0}^i M_j/M_{j-1} \otimes M_{k-j}/M_{k-j-1}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme C.1.3, on obtient que la suite exacte est valable pour  $i + 1$ . Par récurrence (finie), on a l'expression de  $(M \otimes N)_k/(M \otimes N)_{k-1}$ .  $\square$

**Corollaire C.1.6.** *Soit  $A$  un anneau commutatif,  $M^0, \dots, M^n$  des  $A$ -modules munis de filtrations croissantes  $(M_k^i)_{k \geq 0}$  dont les gradués  $\text{Gr}M^i$  sont projectifs. Le gradué du produit tensoriel des filtrations est isomorphe au produit tensoriel des gradués des filtrations :*

$$\text{Gr}(M^0 \otimes \dots \otimes M^n) \simeq \text{Gr}M^0 \otimes \dots \otimes \text{Gr}M^n.$$

## C.1.2 Présentations des modules filtrés

**Lemme C.1.7.** *Si l'on dispose d'un diagramme commutatif de  $A$ -modules :*

$$\begin{array}{ccccccc} & & R & & & R' & \\ & & \downarrow \chi & & \psi & \downarrow \chi' & \\ & & G & & & G' & \\ & & \downarrow \phi & & \phi' & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{p} & M'/M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \\ & & 0 & & & 0 & \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes, alors on a une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccc} R' & \xrightarrow{+} & G' & & \\ \oplus & \searrow & \oplus & \searrow & \\ R & \longrightarrow & G & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

*Démonstration.* Le morphisme  $G \oplus G' \rightarrow M$ ,  $g + g' \mapsto \phi(g) + \phi'(g')$  est surjectif. En effet, soit  $m \in M'$ . Il existe  $g' \in G'$  tel que  $p(m) = p \circ \phi'(g')$ . Par exactitude de la ligne,  $m - \phi'(g') \in M$ , et il existe donc  $g \in G$  tel que  $\phi(g) = m - \phi'(g')$ .

La suite est exacte en  $G \oplus G'$ . En effet, soit  $g + g'$  tel que  $\phi(g) + \phi'(g') = 0$ . Alors  $p \circ \phi'(g') = -p \circ \phi(g) = 0$  et par exactitude de la deuxième colonne il existe donc  $r' \in R'$  tel que  $\chi'(r') = g'$ . On a alors :

$$\phi(g + \psi(r')) = \phi(g) + \phi(\psi(r')) = \phi(g) + \phi'(\chi'(r')) = \phi(g) + \phi'(g') = 0.$$

Par exactitude de la première colonne, il existe donc  $r \in R$  tel que  $g + \psi(r') = \chi(r)$ . On a donc  $g + g' = \chi(r) - \psi(r') + \chi(r')$ , ce qui démontre l'exactitude en  $G \oplus G'$ .  $\square$

**Proposition C.1.8.** Soit  $0 = M_{-1} \subset M_0 \subset \dots \subset M_m = M$  un  $A$ -module filtré tel que pour chaque  $k$  on a une présentation du  $k$ -ème quotient :  $R_k \xrightarrow{\chi_k} G_k \twoheadrightarrow M_k/M_{k-1}$ .

Supposons pour tout  $k$  il existe deux morphismes  $\phi_k$  et  $\psi_k$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & R_k \\
 & & & & \downarrow \chi_k \\
 & & & & G_k \\
 & \swarrow \psi_k & & \searrow \phi_k & \downarrow \\
 \bigoplus_{i < k} G_i & & & & M_k/M_{k-1} \\
 \downarrow \oplus \phi_i & & & & \uparrow \\
 M_{k-1} & \longrightarrow & M_k & \longrightarrow & M_k/M_{k-1}
 \end{array}$$

Alors on a une présentation de  $M$  donnée par :

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} R_i \xrightarrow{\chi} \bigoplus_{1 \leq i \leq n} G_i \xrightarrow{\oplus \phi_i} M$$

où l'image de  $r_i \in R_i$  par  $\chi$  est donnée par la formule :  $\chi(r_i) = \chi_i(r_i) - \psi_i(r_i)$ .

*Démonstration.* On démontre la proposition par récurrence sur la longueur  $m$  de la filtration. Si  $m = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Si la proposition est vraie pour une filtration de longueur  $m-1$ , on applique le lemme précédent en remplaçant  $R \rightarrow G \twoheadrightarrow M$  par la présentation de  $M_{m-1}$  obtenue par hypothèse de récurrence, et  $R' \rightarrow G' \twoheadrightarrow M'/M$  par la présentation de  $M_m/M_{m-1}$  fournie par hypothèse de la proposition. On obtient alors le résultat pour la filtration de longueur  $m$ .  $\square$

## C.2 Suites spectrales hypercohomologiques

### C.2.1 Conventions de notation

Soit  $\mathcal{C}^{\bullet, \bullet}$  un double complexe. On représente  $\mathcal{C}^{\bullet, \bullet}$  sous la forme d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C}^{p-1, q+1} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{p, q+1} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{p+1, q+1} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{C}^{p-1, q} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{p, q} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{p+1, q} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{C}^{p-1, q-1} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{p, q-1} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{p+1, q-1}
 \end{array}$$

La  $p$ -ème colonne du double complexe est donc constituée des objets  $\mathcal{C}^{p, \bullet}$  et la  $q$ -ème ligne est constituée des objets  $\mathcal{C}^{\bullet, q}$ .

De même, si  $(E_r^{*, *}, d_r)_{r \geq 0}$  est une suite spectrale, le premier indice indique les colonnes et le deuxième les lignes. Ainsi, les objets de la  $p$ -ème colonne de la page  $r$  sont les  $E_r^{p, *}$ , les objets de la  $q$ -ème ligne sont les  $E_r^{*, q}$ .

### C.2.2 Suites spectrales d'un double complexe

Soit  $(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}, d, \delta)$  un double complexe dans une catégorie abélienne, où  $d$  désigne la différentielle verticale et  $\delta$  la différentielle horizontale. Le complexe total  $\text{Tot}(\mathcal{C})^\bullet$  est le complexe défini par les formules :

$$\text{Tot}(\mathcal{C})^k = \bigoplus_{i+j=k} \mathcal{C}^{i,j}, \quad d_{\text{Tot}}(x) = d(x) + (-1)^p \delta(x) \quad \text{si } x \in \mathcal{C}^{p,q}.$$

Le double complexe dispose d'une filtration  $(F_i)_{i \geq 0}$  transverse aux lignes :  $F_{i_0} = \bigoplus_{i \geq i_0} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^{i,j}$ , qui induit une filtration du complexe total.

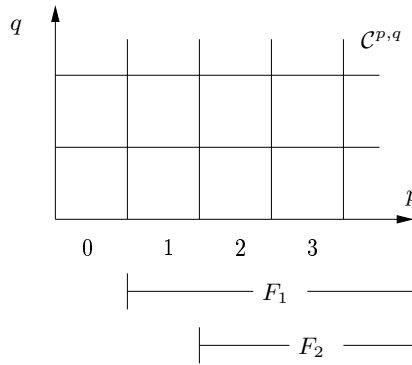


FIG. C.1 – La filtration  $(F_i)_{i \geq 0}$

**Théorème C.2.1.** [32, Th 2.15 P. 48] Soit  $\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}$  un double complexe. La filtration transverse aux lignes  $F_{i_0} = \bigoplus_{i \geq i_0} \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^{i,j}$  induit une suite spectrale  $(E_r^{*,*}, d_r)_{r \geq 1}$  vérifiant :

- (1) La différentielle  $d_i$  est de bidegré  $(i, 1 - i)$ .
- (2) La première page est donnée par les formules :

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{C}^{p,*}), \quad d_1^{p,q} = H^q(\delta).$$

- (3) Si  $\mathcal{C}^{p,q} = 0$  dès que  $p < 0$  ou  $q < 0$ , La suite spectrale  $E_r$  converge vers le gradué de la cohomologie du complexe total :

$$E_\infty^{i,j} = F_i H^{i+j}(\text{Tot}(\mathcal{C})^\bullet) / F_{i+1} H^{i+j}(\text{Tot}(\mathcal{C})^\bullet).$$

*Remarque C.2.2.* En choisissant la filtration  $(F'_i)_{i \geq 0}$  transverse aux colonnes, on obtient une autre suite spectrale  $E'_r{}^{p,q}, d_r$ , dont la deuxième page est donnée par  $E'_2{}^{p,q} = H_d^q H_\delta^p(\mathcal{C})$ , dont la  $i$ -ème différentielle  $d_i$  est de degré  $(1 - i, i)$  et qui converge vers le gradué de l'homologie du complexe total si le complexe  $\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}$  est premier quadrant.

### C.2.3 Suites spectrales hypercohomologiques

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Un complexe  $\mathcal{C}^\bullet$  positif de  $\mathcal{A}$  est un complexe de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{C}^i = 0$  dès que  $i < 0$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}^n \rightarrow \dots$$

Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}$  qui admet une résolution projective  $P_\bullet$ , on peut former le bicomplexe  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_\bullet, \mathcal{C}^\bullet)$ . Les deux suites spectrales de premier quadrant associées à ce bicomplexe sont appelées suites spectrales hypercohomologiques.

**Définition-Théorème C.2.3.** [14, p. 18] Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne avec assez de projectifs. A tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  et tout complexe positif  $(\mathcal{C}^\bullet, \delta)$ , on peut associer deux suites spectrales de premier quadrant  $(\text{I}_r, \text{Id}_r)_{r \geq 1}$  et  $(\text{II}_r, \text{II}d_r)_{r \geq 2}$ , appelées respectivement première et deuxième suite spectrale hypercohomologique, vérifiant :

(1) La différentielle  $\text{Id}_r$  de la première suite spectrale hypercohomologique est de bidegré  $(1-r, r) : \text{I}d_r^{s,t} : \text{I}_r^{s,t} \rightarrow \text{I}_r^{s+1-r, t+r}$ .

(1') La première page de la première suite spectrale hypercohomologique est donnée par les formules :

$$\text{I}_1^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^s(A, \mathcal{C}^t), \quad d_1^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^s(A, \delta^t).$$

(2) La différentielle  $\text{II}d_r$  de la deuxième suite spectrale hypercohomologique est de bidegré  $(r, 1-r) : \text{II}d_r^{s,t} : \text{II}_r^{s,t} \rightarrow \text{II}_r^{s+r, t+1-r}$ .

(2') La deuxième page de la deuxième suite spectrale hypercohomologique est donnée par la formule :

$$\text{II}_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^s(A, H^t(\mathcal{C}^\bullet)),$$

et la différentielle  $\text{II}d_2^{s,t} : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^s(A, H^t(\mathcal{C}^\bullet)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s+2}(A, H^{t-1}(\mathcal{C}^\bullet))$  est donnée par le produit de Yoneda avec la classe de l'extension :

$$0 \rightarrow H^{t-1}(\mathcal{C}^\bullet) \rightarrow \mathcal{C}^{t-1} / \text{Im } \delta^{t-2} \rightarrow \text{Ker } \delta^t \rightarrow H^t(\mathcal{C}^\bullet) \rightarrow 0.$$

(3) Les deux suites spectrales hypercohomologiques convergent vers le même aboutissant.

**Corollaire C.2.4.** Soit  $C$  un objet admettant une résolution finie  $\mathcal{C}_\bullet$  par des objets  $\mathcal{C}_i$  vérifiant  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, \mathcal{C}_i) = 0$  pour  $* > 0$ . Alors la suite :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, \mathcal{C}_N) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, \mathcal{C}_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, C) \rightarrow 0$$

est exacte. En particulier,  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, C) = 0$  pour  $* > 0$ .

**Corollaire C.2.5.** Soit  $C$  un objet admettant une résolution finie  $\mathcal{C}_\bullet$ . Supposons que le complexe  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, \mathcal{C}_\bullet)$  est exact, sauf au terme d'indice 0. Alors le complexe suivant est exact :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, \mathcal{C}_N) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, \mathcal{C}_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(A, C) \rightarrow 0.$$

## Annexe D

# Cohomologie rationnelle de $GL_n$

### D.1 Schémas en groupes affines et cohomologie rationnelle

Dans cette partie, nous rappelons la définition et quelques propriétés des schémas en groupes affines et de la cohomologie rationnelle. Nous prenons pour référence les livres [24] et [45].

#### D.1.1 Schémas en groupes affines

Rappelons que les anneaux sont toujours supposés unitaires. Soit  $A$  un anneau commutatif. Une  $A$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est un anneau  $\mathcal{A}$  muni d'un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow \mathcal{A}$ . Une algèbre est donc toujours supposée unitaire.

**Définition D.1.1.** Soit  $A$  un anneau commutatif. Un schéma en groupes affine algébrique  $G$  sur  $A$  est un foncteur représentable

$$G : \{A\text{-alg. comm. type fini}\} \rightsquigarrow \{\text{Gpes}\}$$

de la catégorie des  $A$ -algèbres commutatives de type fini dans la catégorie des groupes. Un morphisme de schémas est une transformation naturelle entre de tels foncteurs.

Soit  $G$  un schéma en groupes affine algébrique. On appelle algèbre des coordonnées de  $G$  la  $A$ -algèbre commutative de type fini  $A[G]$  qui représente  $G$ . Le fait que  $G$  soit un foncteur vers les groupes et non pas simplement vers les ensembles induit sur l'algèbre  $A[G]$  une structure d'algèbre de Hopf commutative (non graduée) sur  $A$  [24, p. 21]. D'après le lemme de Yoneda, on a une équivalence de catégories

$$\{A\text{-alg Hopf comm. de type fini}\}^{\text{op}} \rightsquigarrow \{\text{schémas en groupes aff. alg.}\}.$$

*Remarque D.1.2.* L'expression « schéma en groupes affine algébrique » est une expression composée de la manière suivante. Un schéma affine sur  $A$  est foncteur représentable de la catégorie des  $A$ -algèbres commutatives (non nécessairement de type fini) dans la catégorie des ensembles. Le terme « en groupes » signifie que le foncteur est à valeurs dans la catégorie des groupes. Enfin, le terme « algébrique » indique que le schéma est représenté par une algèbre *de type fini*.



*Exemple D.1.3.* Soit  $A$  un anneau commutatif.  $G = GL_n/A$  est le schéma représenté par l'algèbre

$$A[GL_n] := A[x_{i,j}, t]_{1 \leq i, j \leq n} / \det[x_{i,j}]t - 1 ,$$

avec le coproduit  $\Delta$  donné par les formules :

$$\Delta(x_{i,j}) = \sum_{k=1}^n x_{i,k} \otimes x_{k,j} , \quad \Delta(t) = t \otimes t ,$$

antipode  $\chi$  donné par les formules de Cramer :

$$\chi(x_{i,j}) = (-1)^{ij} t A_{i,j} , \quad \chi(t) = \det[x_{i,j}]$$

où  $A_{i,j}$  désigne le mineur d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $[x_{i,j}]$ , et augmentation  $\epsilon$  donnée par les formules :

$$\epsilon(t) = 1 \quad \epsilon(x_{i,j}) = 0 \text{ si } i \neq j \quad \epsilon(x_{i,j}) = 1 \text{ si } i = j.$$

### D.1.2 Exemple : les groupes algébriques de matrices

La référence pour ce paragraphe sur les groupes algébriques de matrices est [45, chap. 4]. Soit  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos. La topologie de Zariski sur  $M_n(\mathbb{K})$  est la topologie dont les fermés sont les lieux de zéros de polynômes sur  $M_n(\mathbb{K})$ .

**Définition D.1.4.** [45, p. 29] Un groupe algébrique de matrices sur  $\mathbb{K}$  est un sous-groupe  $G_{\mathbb{K}}$  de  $SL_{n,\mathbb{K}}$  fermé pour la topologie de Zariski sur  $M_n(\mathbb{K})$ .

En d'autres termes, un groupe algébrique de matrices est un sous-groupe de  $SL_{n,\mathbb{K}}$  défini par des équations polynomiales.

Si  $G_{\mathbb{K}}$  est un groupe algébrique de matrices, l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{K}[x_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$  qui s'annule sur  $G_{\mathbb{K}}$  forme un idéal  $\mathcal{I}(G_{\mathbb{K}})$  de l'algèbre  $\mathbb{K}[x_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ . L'algèbre des coordonnées de  $G_{\mathbb{K}}$  est l'algèbre quotient :

$$\mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}] := \mathbb{K}[x_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n} / \mathcal{I}(G_{\mathbb{K}}) .$$

Notons  $m$  et  $\iota$  la multiplication et l'inversion de  $G_{\mathbb{K}}$ . L'algèbre des coordonnées  $\mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}]$  est munie d'une structure d'algèbre de Hopf commutative de type fini grâce à la multiplication :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}] & \rightarrow & \mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}] \otimes \mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}] \\ f & \mapsto & f \circ m \end{array}$$

et à l'antipode :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}] & \rightarrow & \mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}] \\ f & \mapsto & f \circ \iota . \end{array}$$

L'algèbre de Hopf  $\mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}]$  possède encore une propriété supplémentaire : elle est *réduite*, c'est-à-dire qu'elle n'a pas d'éléments nilpotents autres que 0.

**Définition D.1.5.** Un schéma en groupe affine algébrique est *réduit* s'il est représenté par une algèbre réduite.

**Proposition D.1.6.** [45, §4.4 et 4.5] Soit  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos. Soit  $G_{\mathbb{K}}$  un groupe algébrique de matrices. L'algèbre des coordonnées de  $G_{\mathbb{K}}$  définit un schéma en groupes affine algébrique réduit noté  $G$  tel que  $G(\mathbb{K}) = G_{\mathbb{K}}$ .

Réciproquement, soit  $G$  un schéma en groupes affine algébrique et réduit sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $G$  est représenté par l'algèbre des coordonnées d'un groupe algébrique de matrices.

*Remarque D.1.7.* Pour les groupes de matrices classiques, tels que le groupe linéaire, on a deux notations :  $GL_n/A$  désigne le schéma en groupes sur  $A$  et  $GL_{n,\mathbb{K}}$  désigne le groupe algébrique de matrices.

### D.1.3 Représentation des schémas en groupes affines algébriques

Soit  $A$  un anneau commutatif. Si  $M$  est un  $A$ -module, on note  $GL(M)$  le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \{A\text{-alg. comm. type fini}\} & \rightsquigarrow & \{\text{Gpes}\} \\ \mathcal{A} & \mapsto & \text{End}_{\mathcal{A}}(M \otimes \mathcal{A})^{\times} \end{array}$$

qui à une  $A$ -algèbre de type fini  $\mathcal{A}$  associe le groupe des endomorphismes inversibles du  $\mathcal{A}$ -module  $M \otimes \mathcal{A}$ . Si  $M = A^n$ ,  $GL(M)$  est un foncteur représentable : on a un isomorphisme  $GL(M) \simeq GL_n$  [24, p. 20].

**Définition D.1.8.** [24, p. 25] Soient  $A$  un anneau commutatif et  $G$  un schéma en groupes affine algébrique sur  $A$ . Une représentation  $M$  de  $G$  est un  $A$ -module  $M$  muni d'une transformation naturelle de foncteurs  $G \rightarrow GL(M)$ . Un morphisme de représentations de  $G$  est une application  $A$ -linéaire  $f : M \rightarrow M'$  telle que pour toute  $A$ -algèbre commutative de type fini  $\mathcal{A}$ , l'application  $f \otimes \mathcal{A}$  est  $G(\mathcal{A})$ -équivariante.

Si  $G$  est un schéma en groupes affine algébrique, alors  $G(A[G]) = \text{End}_{A\text{-alg}}(A[G])$  agit sur  $M \otimes A[G]$ . On note  $\Delta_M$  l'application  $A$ -linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_M : M & \rightarrow & M \otimes A[G] \\ m & \mapsto & \text{Id}_{A[G]}(m \otimes 1) \end{array}$$

L'application  $\Delta_M$  fait de  $M$  un comodule sur l'algèbre de Hopf  $A[G]$ , et cette structure de comodule détermine complètement le  $G$ -module  $M$  [24, p. 27]. On a donc une équivalence de catégories :

$$\{G\text{-modules}\} \rightsquigarrow \{A[G]\text{-comodules}\} .$$

*Exemple D.1.9.* Soient  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos,  $r$  un entier positif et  $G_{\mathbb{K}}$  un sous-groupe algébrique de matrices de  $M_r(\mathbb{K})$ .

Une action du groupe algébrique  $G_{\mathbb{K}}$  sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $M$  est une action du groupe  $G_{\mathbb{K}}$  sur  $M$  telle que pour tout  $m \in M$  il existe un polynôme  $P_m(x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$  sur  $M_r(\mathbb{K})$  tel que pour tout  $g \in G$  on a  $g.m = P_m(g)$ .

Se donner une action du groupe algébrique  $G_{\mathbb{K}}$  revient à se donner une structure de  $\mathbb{K}[G_{\mathbb{K}}]$ -comodule sur  $M$ , c'est-à-dire une action sur  $M$  du schéma  $G$  associé à  $G_{\mathbb{K}}$ .

#### D.1.4 Points fixes rationnels et cohomologie rationnelle

**Définition D.1.10.** Soient  $A$  un anneau commutatif,  $G$  un schéma en groupes affine algébrique sur  $A$  et  $M$  un  $G$ -module. Les points fixes rationnels de  $M$  sous l'action de  $G$  sont les éléments du sous-module  $M^G$  défini par :

$$M^G = \{m \in M \mid g(m \otimes 1) = m \otimes 1 \quad \forall g \in G(\mathcal{A}), \forall \mathcal{A}\} .$$

Les points fixes rationnels du  $A$ -module  $M$  sous l'action de  $G$  sont donc en général différents des points fixes de  $M$  sous l'action du groupe  $G(A)$ . Néanmoins, si  $A = \mathbb{K}$  est un corps algébriquement clos, si  $G_{\mathbb{K}}$  est un groupe algébrique de matrices et si  $G$  est le schéma en groupes associé, alors le nullstellensatz implique que :

$$M^G = M^{G(\mathbb{K})} = M^{G_{\mathbb{K}}} .$$

**Définition D.1.11.** Un schéma en groupes affine algébrique est *plat* si son algèbre des coordonnées est un  $A$ -module plat.

**Proposition D.1.12.** [24, §4.2 p. 50] *Soit  $G$  un schéma en groupes affine algébrique plat. La catégorie des  $G$ -modules est une catégorie abélienne qui a assez d'injectifs.*

**Définition-Proposition D.1.13.** [24, p. 21 et p. 50] *Soit  $A$  un anneau commutatif et  $G$  un schéma en groupes affine algébrique plat sur  $A$ . Le foncteur des points fixes*

$$-^G : \{G\text{-mod}\} \rightsquigarrow \{A\text{-mod}\}$$

*est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés forment la cohomologie rationnelle de  $G$  :*

$$H_{\text{rat}}^n(G, -) = R^n(-^G) .$$

On a un isomorphisme de foncteurs :  $-^G \simeq \text{Hom}_G(A, -)$ , où  $A$  est muni d'une structure de  $G$ -module trivial. Par conséquent, la cohomologie rationnelle de  $G$  peut se réécrire sous la forme :

$$H_{\text{rat}}^*(G, -) = \text{Ext}_G^*(A, -) .$$

La proposition suivante donne donc un analogue dans le cadre de la cohomologie rationnelle de la proposition 4.2.5 du chapitre 4, qui fait le lien entre la cohomologie des bifoncteurs séparables et les extensions de foncteurs à une variable.

**Proposition D.1.14.** [24, p. 51] *Soient  $M, N, V$  des  $G$ -modules. Supposons que  $V$  est un  $A$ -module projectif de type fini. On a un isomorphisme, naturel en  $M, V, N$  :*

$$\text{Ext}_G^*(M, V^\vee \otimes N) \simeq \text{Ext}_G^*(M \otimes V, N) .$$

### D.1.5 Changement de base

Soient  $A$  un anneau commutatif,  $A'$  une  $A$ -algèbre de type fini,  $G$  un schéma en groupes affine algébrique sur  $A$  et  $M$  un  $G$ -module. Le foncteur des  $A'$ -algèbres commutatives de type fini vers les groupes représenté par l'algèbre  $A[G] \otimes_A A'$  est noté  $G/A'$ . Le  $A'$ -module  $M \otimes A'$  est muni d'une action de  $G/A'$ . Les cohomologies rationnelles de  $G$  et de  $G/A'$  sont reliées par un théorème de coefficients universels :

**Théorème D.1.15.** [24, I.4.18] *Soient  $A$  un anneau de Dedekind,  $A'$  une  $A$ -algèbre de type fini et  $G$  un groupe algébrique sur  $A$ . Pour tout  $G$ -module  $M$  libre de rang fini et tout  $i \geq 0$  on a une suite exacte courte de  $A'$ -modules :*

$$0 \rightarrow H^i(G, M) \otimes A' \rightarrow H^i(G/A', M \otimes A') \rightarrow \mathrm{Tor}^A(H^{i+1}(G, M), A') \rightarrow 0.$$

## D.2 Cohomologie rationnelle de $GL_n$

Soit  $A$  un anneau commutatif. Dans ce paragraphe, nous nous restreignons au cas du schéma en groupes  $GL_n/A$ . Le  $A$ -module libre  $A^n$  est muni d'une action de  $GL_n/A$ . On en déduit une action de  $GL_n/A$  sur l'anneau des polynômes sur  $A^{n \oplus r} \oplus A^{n \vee \oplus q}$ . Dans la suite, nous donnons quelques énoncés sur la cohomologie rationnelle de  $GL_n/A$  à coefficients cet anneau.

### D.2.1 Une filtration de $S^*(A^{n \vee \oplus r} \oplus A^{n \oplus q})$

**Proposition D.2.1.** *Soit  $A$  un anneau commutatif et  $\lambda, \mu$  des partitions. On a :*

$$H_{\mathrm{rat}}^*(GL_n/A, S_\lambda(A^{n \vee}) \otimes S_\mu(A^n)) = 0 \text{ pour } * > 0.$$

*Démonstration.* Le résultat est vrai pour  $A = \mathbb{Z}$  d'après [24, II.B4]. Le théorème des coefficients universels donne le résultat pour tout  $A$ .  $\square$

**Corollaire D.2.2.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Si un  $GL_n/A$ -module  $M$  admet une filtration dont le gradué est une somme directe de modules du type  $S_\lambda(A^{n \vee}) \otimes S_\mu(A^n)$ , alors*

$$H_{\mathrm{rat}}^*(GL_n/A, M) = 0 \text{ pour } * > 0.$$

Sur  $\mathbb{C}$  on a [19, p. 225] une décomposition du produit tensoriel de deux modules de Schur en une somme directe de modules de Schur :

$$S_\lambda(V) \otimes S_\mu(V) = \bigoplus_{\nu \text{ partition}} c(\lambda, \mu, \nu) S_\nu(V).$$

où les coefficients entiers  $c(\lambda, \mu, \nu)$  sont donnés par la règle de Littlewood-Richardson [19, p. 456]. Cette situation n'est plus valable sur un anneau quelconque. Par exemple, sur  $\mathbb{C}$  on a

$$V \otimes V = S_{(2)}(V) \oplus S_{(1,1)}(V) = \Lambda^2(V) \oplus S^2(V),$$

mais en caractéristique 2,  $\Lambda^2(V) = S_{(2)}(V)$  n'est plus facteur direct de  $V \otimes V$ . On peut néanmoins généraliser ce résultat à une filtration près :

**Théorème D.2.3.** [6] Soit  $A$  un anneau commutatif et  $\lambda, \mu$  deux partitions. Il existe une filtration du produit tensoriel  $S_\lambda \otimes S_\mu$  des foncteurs de Schur  $S_\lambda$  et  $S_\mu$  dont le gradué est isomorphe à la somme directe :

$$\mathrm{Gr}(S_\lambda \otimes S_\mu) = \bigoplus_{\nu \text{ partition}} c(\lambda, \mu, \nu) S_\nu ,$$

où les coefficients entiers  $c(\lambda, \mu, \nu)$  sont donnés par la règle de Littlewood-Richardson.

**Corollaire D.2.4.** Le  $GL_n/A$ -module  $S^*(A^{n \vee \oplus r} \oplus A^{n \oplus q})$  admet une filtration dont le gradué est une somme directe de modules du type  $S_\lambda(A^{n \vee}) \otimes S_\mu(A^n)$ .

**Corollaire D.2.5.** Soit  $A$  un anneau commutatif. On a :

- (i)  $H_{\mathrm{rat}}^*(GL_n/A, S^\mu(A^{n \vee}) \otimes S^\lambda(A^n)) = 0$  si  $* > 0$ .
- (ii)  $(S^*(A^{n \vee \oplus r} \oplus A^{n \oplus q}))^{GL_n/A} = (S^*(\mathbb{Z}^{n \vee \oplus r} \oplus \mathbb{Z}^{n \oplus q}))^{GL_n/\mathbb{Z}} \otimes A$ .

## D.2.2 Le théorème fondamental pour $GL_n$

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $V$  un  $A$ -module libre de rang fini. Notons  $A[V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}]$  l'algèbre des polynômes sur  $V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}$  à coefficients dans  $A$ . Le groupe  $GL(V)$  agit sur  $A[V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}]$  par automorphismes d'algèbres de la manière usuelle : si  $P$  est un polynôme alors  $g.P$  est donné par :

$$(g.P)(x_1, \dots, x_r, f_1, \dots, f_q) := P(g(x_1), \dots, g(x_r), f_1 \circ g^{-1}, \dots, f_q \circ g^{-1}) .$$

Les contractions sont les polynômes  $(i|j)$  homogènes de degré 2, définis par la formule :

$$(i|j)(x_1, \dots, x_r, f_1, \dots, f_q) := f_j(x_i) .$$

Les contractions sont invariantes sous l'action du groupe  $GL(V)$ .

**Théorème D.2.6.** [27, p. 16] Soit  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos et  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. L'anneau des invariants de  $\mathbb{K}[V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}]$  sous l'action de  $GL(V)$  est l'anneau engendré par les contractions :

$$\mathbb{K}[V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}]^{GL(V)} = \mathbb{K}[(i|j), i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, q] .$$

**Corollaire D.2.7.** Soit  $V$  un  $A$ -module libre de rang  $n$ . L'anneau des invariants  $A[V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}]^{GL_n/A}$  est l'anneau engendré par les contractions :

$$A[V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}]^{GL_n/A} = A[(i|j), i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, q] .$$

*Démonstration.* D'après le corollaire D.2.5(ii), il suffit de démontrer le résultat pour  $A = \mathbb{Z}$ . Soit  $B_{\mathbb{Z}}$  la sous-algèbre de  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[V^{\oplus r} \oplus V^{\vee \oplus q}]^{GL_n/\mathbb{Z}}$  engendrée par les contractions.  $B_{\mathbb{Z}}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre gradué par le degré des polynômes, et chaque  $B_{\mathbb{Z}}^i$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini. D'après le théorème des facteurs invariants on peut trouver une base  $(a_j)_{j=1..n}$  de  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^i$  et des entiers  $(d_j)_{j=1..k}$  tels que  $((d_j a_j)_{j=1..k})$  soit une base de  $B_{\mathbb{Z}}^i$ .

Appliquons le théorème fondamental D.2.6 et le corollaire D.2.5 : l'inclusion  $B_{\mathbb{Z}}^i \subset \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^i$  induit un isomorphisme :  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^i \otimes \mathbb{K} = B_{\mathbb{Z}}^i \otimes \mathbb{K}$ . Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ceci implique  $k = n$ . Pour  $\mathbb{K} = \tilde{\mathbb{F}}_p$  la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$ , ceci implique qu'aucun  $d_j$  n'est divisible par  $p$ . Les coefficients  $d_j$  sont donc tous égaux à 1 ou  $-1$ . Ainsi on a l'égalité  $B_{\mathbb{Z}}^i = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^i$ .  $\square$



# Bibliographie

- [1] W. A. ADKINS et S. H. WEINTRAUB : *Algebra*, vol. 136 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. An approach via module theory.
- [2] K. AKIN et D. A. BUCHSBAUM : Characteristic-free representation theory of the general linear group. *Adv. in Math.*, 58(2):149–200, 1985.
- [3] K. AKIN et D. A. BUCHSBAUM : Characteristic-free representation theory of the general linear group. II. Homological considerations. *Adv. in Math.*, 72(2):171–210, 1988.
- [4] K. AKIN, D. A. BUCHSBAUM et J. WEYMAN : Schur functors and Schur complexes. *Adv. in Math.*, 44(3):207–278, 1982.
- [5] M. AUSLANDER et D. A. BUCHSBAUM : *Groups, rings, modules*. Harper & Row Publishers, New York, 1974. Harper’s Series in Modern Mathematics.
- [6] G. BOFFI : The universal form of the Littlewood-Richardson rule. *Adv. in Math.*, 68(1):40–63, 1988.
- [7] N. BOURBAKI : *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1980 original [Masson, Paris; MR0610795].
- [8] H. CARTAN et S. EILENBERG : *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [9] M. CHALUPNIK : Extensions of strict polynomial functors. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(5):773–792, 2005.
- [10] E. CLINE, B. PARSHALL, L. SCOTT et W. van der KALLEN : Rational and generic cohomology. *Invent. Math.*, 39(2):143–163, 1977.
- [11] S. EILENBERG et S. MAC LANE : On the groups of  $H(\Pi, n)$ . I. *Ann. of Math. (2)*, 58:55–106, 1953.
- [12] D. EISENBUD : *Commutative algebra*, vol. 150 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [13] V. FRANJOU et E. M. FRIEDLANDER : Cohomology of bifunctors. *Proc. London Math. Soc.*, 2008. doi :10.1112/plms/pdn005.
- [14] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, T. PIRASHVILI et L. SCHWARTZ : *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, vol. 16 de *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.



- [15] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO et A. SUSLIN : General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2):663–728, 1999.
- [16] V. FRANJOU, J. LANNES et L. SCHWARTZ : Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3):513–538, 1994.
- [17] V. FRANJOU et T. PIRASHVILI : Strict polynomial functors and coherent functors. *manuscripta mathematica*, 2007. doi :10.1007/s00229-008-0184-9 link : <http://www.springerlink.com/content/80452261wul70808>.
- [18] E. M. FRIEDLANDER et A. SUSLIN : Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2):209–270, 1997.
- [19] W. FULTON et J. HARRIS : *Representation theory*, vol. 129 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [20] J. A. GREEN : *Polynomial representations of  $GL_n$* , vol. 830 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [21] W. J. HABOUSH : Reductive groups are geometrically reductive. *Ann. of Math. (2)*, 102(1):67–83, 1975.
- [22] D. HILBERT : Ueber die Theorie der algebraischen Formen. *Math. Ann.*, 36(4):473–534, 1890.
- [23] J. E. HUMPHREYS : *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.
- [24] J. C. JANTZEN : *Representations of algebraic groups*, vol. 107 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second éd., 2003.
- [25] B. KELLER : *Derived categories and their uses*. <http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/dcu.pdf>.
- [26] B. KELLER : Chain complexes and stable categories. *Manuscripta Math.*, 67(4):379–417, 1990.
- [27] H. KRAFT et C. PROCESI : *Classical Invariant theory*. 2000. <http://www.math.unibas.ch/~kraft/Papers/KP-Primer.pdf>.
- [28] S. LANG : *Algebra*, vol. 211 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third éd., 2002.
- [29] J. LE POTIER : *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*. Publications Mathématiques de l’Université Paris 7—Denis Diderot [Mathematical Publications of the University of Paris 7—Denis Diderot], 35. Université Paris 7—Denis Diderot U.F.R de Mathématiques, Paris, 1995. With a chapter by Christoph Sorger.
- [30] S. MAC LANE : *Homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition.
- [31] S. MACLANE : *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

- [32] J. MCCLEARY : *A user's guide to spectral sequences*, vol. 58 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second édn, 2001.
- [33] D. MUMFORD, J. FOGARTY et F. KIRWAN : *Geometric invariant theory*, vol. 34 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third édn, 1994.
- [34] M. NAGATA : On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.*, 81:766–772, 1959.
- [35] M. NAGATA : Invariants of a group in an affine ring. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3:369–377, 1963/1964.
- [36] N. POPESCU : *Abelian categories with applications to rings and modules*. Academic Press, London, 1973. London Mathematical Society Monographs, No. 3.
- [37] V. L. POPOV : On Hilbert's theorem on invariants. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 249(3):551–555, 1979.
- [38] D. QUILLEN : Higher algebraic  $K$ -theory. I. *In Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, p. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.
- [39] V. SRIVINAS et W. Van der KALLEN : Finite Schur filtration dimension for modules over an algebra with Schur filtration. 2007. [ArXiv :0706.0604v1](https://arxiv.org/abs/0706.0604v1).
- [40] A. SUSLIN, E. M. FRIEDLANDER et C. P. BENDEL : Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(3):693–728, 1997.
- [41] A. TOUZÉ : Cohomologie du groupe linéaire à coefficients dans les polynômes de matrices. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I 345*, p. 193–198, 2007.
- [42] A. TROESCH : Une résolution injective des puissances symétriques tordues. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(5):1587–1634, 2005.
- [43] W. Van der KALLEN : Cohomology with Grosshans graded coefficients. *In Invariant theory in all characteristics*, vol. 35 de *CRM Proc. Lecture Notes*, p. 127–138. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [44] W. van der KALLEN : A reductive group with finitely generated cohomology algebras. *In Algebraic groups and homogeneous spaces*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., p. 301–314. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.
- [45] W. C. WATERHOUSE : *Introduction to affine group schemes*, vol. 66 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979.