



HAL
open science

Application de la théorie de la perturbation des opérateurs linéaires à l'obtention de bornes d'erreurs sur les éléments propres et à leur calcul

Patrick Redont

► To cite this version:

Patrick Redont. Application de la théorie de la perturbation des opérateurs linéaires à l'obtention de bornes d'erreurs sur les éléments propres et à leur calcul. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1979. Français. NNT: . tel-00289609

HAL Id: tel-00289609

<https://theses.hal.science/tel-00289609>

Submitted on 23 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

Mathématiques appliquées

par

REDONT Patrick



**APPLICATION DE LA THEORIE DE LA PERTURBATION DES
OPERATEURS LINEAIRES A L'OBTENTION DE BORNES D'ERREUR
SUR LES ELEMENTS PROPRES ET A LEUR CALCUL.**



Thèse soutenue le 28 Juin 1979 devant la commission d'examen.

N. GASTINEL **Président**

F. CHATELIN

M. DUC - JACQUET **Examineurs**

P. BERNA

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1977-1978

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-présidents : M. René PAUTHENET

M. Georges LESPINARD

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Electronique - automatique
BESSON Jean	Chimie minérale
BLOCH Daniel	Physique du solide - cristallographie
BONNETAIN Lucien	Génie chimique
BONNIER Etienne	Métallurgie
* BOUDOURIS Georges	Electronique - automatique
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide - cristallographie
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique - automatique
COUMES André	Electronique - automatique
DURAND Francis	Métallurgie
FELICI Noël	Electronique - automatique
FOULARD Claude	Electronique - automatique
LANCIA Roland	Electronique - automatique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire corpusculaire
LESPINARD Georges	Mécanique
MOREAU René	Mécanique
PARIAUD Jean-Charles	Chimie - physique
PAUTHENET René	Electronique - automatique
PERRET René	Electronique - automatique
POLOUJADOFF Michel	Electronique - automatique
TRAYNARD Philippe	Chimie - physique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
* en congé pour études	

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuël	Electronique - automatique
BOUVARD Maurice	Génie mécanique
COHEN Joseph	Electronique - automatique
GUYOT Pierre	Métallurgie physique
LACOUME Jean-Louis	Electronique - automatique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide - cristallographie

.../...

MM. ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
ROBERT François	Analyse numérique
ZADWORNÝ François	Electronique - automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
CHARTIER Germain	Electronique - automatique
CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
IVANES Marcel	Electronique - automatique
LESIEUR Marcel	Mécanique
MORET Roger	Physique nucléaire - corpusculaire
PIAU Jean-Michel	Mécanique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M. SOHM Jean-Claude	Chimie Physique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M. FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM. ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
BRONOEL Guy	Maître de Recherche
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)
E.N.S.E.E.G.

MM. BISCONDI Michel	Ecole des Mines St. Etienne (dépt. Métallurgie)
BOOS Jean-Yves	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
DRIVER Julian	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)

.../...

MM. KOBYLANSKI André	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LE COZE Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LESBATS Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LEVY Jacques	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
RIEU Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
SAINFORT	C.E.N. Grenoble (Métallurgie)
SOUQUET	U.S.M.G.
CAILLET Marcel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
COULON Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
GUILHOT Bernard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LALAUZE René	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LANCELOT Francis	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SARRAZIN Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SOUSTELLE Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THEVENOT François	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THOMAS Gérard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TOUZAIN Philippe	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TRAN MINH Canh	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL	Centre d'études nucléaires de Grenoble
KAMARINOS	Centre national recherche scientifique

E.N.S.E.G.P.

M. BORNARD	Centre national recherche scientifique
Mme CHERUY	Centre national recherche scientifique
MM. DAVID	Centre national recherche scientifique
DESCHIZEAUX	Centre national recherche scientifique

APPLICATION DE LA THEORIE DE LA PERTURBATION DES
OPERATEURS LINEAIRES A L'OBTENTION DE
BORNES D'ERREUR SUR LES ELEMENTS PROPRES
ET A LEUR CALCUL

Je dois remercier Mme F. CHATELIN d'avoir permis
la réalisation de ce travail.

Je remercie M. N. GASTINEL, d'avoir accepté de
présider le Jury.

Je remercie également MM. DUC-JACQUET et BERNA
d'avoir accepté de faire partie du Jury.

A mon camarade Jacques LEMORDANT qui m'a prodigué
son temps, ses connaissances et ses encouragements,
vont ma gratitude et un peu de mon amitié.

1

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION -----	1
CHAPITRE I - METHODE D'ITERATION POUR LE CALCUL DE VALEURS PROPRES ET DE VECTEURS PROPRES D'OPERATEURS LINEAIRES FERMES	
I. INTRODUCTION -----	3
1. Rappels succints sur les opérateurs fermés -----	3
2. Notations, hypothèses -----	5
3. Trois lemmes -----	6
II. SERIES DE PERTURBATION DES ELEMENTS PROPRES DE $T(t)$ --	9
1. Série de perturbation de la projection spectrale --	10
2. Série de perturbation de la moyenne des valeurs propres de l'intérieur de Γ -----	11
3. "Série de perturbation du vecteur propre" -----	17
III. CALCUL DES COEFFICIENTS DE $\lambda(t)$ ET $\psi(t)$ PAR ITERATION LORSQUE λ_0 EST UNE VALEUR PROPRE SIMPLE -----	18
1. Formules itératives pour λ_n et ψ_n -----	18
2. Un résultat de convergence -----	20
3. Remarque -----	22
IV. CONCLUSIONS - REMARQUES -----	23
CHAPITRE II - APPROXIMATION PAR ITERATION DES ELEMENTS PROPRES D'UN OPERATEUR LINEAIRE FERME QUASI-DECOMPOSE PAR UNE PROJECTION DE RANG 1	
I. INTRODUCTION -----	25
1. Hypothèses -----	25
2. Les itérations -----	27
3. Notations -----	29
4. Remarque -----	30
II. MAJORATION DES QUANTITES $ \lambda_k $ ET $\ \psi_k\ $ -----	31
1. Hypothèse de récurrence -----	31
2. Vérification de l'hypothèse de récurrence -----	32

III.	CONVERGENCE DES SERIES $\varphi(t)$ ET $\lambda(t)$ -----	34
IV.	LE SPECTRE DE T AU VOISINAGE DE λ_0 -----	36
V.	OPTIMALITE DES BORNES -----	40
VI.	COMPARAISON DE NOS RESULTATS AUX RESULTATS DEJA CONNUS -----	41
	1. Comparaison à Fiedler et Ptak [5] -----	42
	2. Comparaison à Ptak [8] -----	44
	3. Comparaison aux bornes de Lemordant [7] -----	46
VII.	EXEMPLE NUMERIQUE -----	47
VIII.	EXPERIENCES NUMERIQUES -----	53
IX.	CONCLUSIONS -----	60

CHAPITRE III - APPROXIMATION DES ELEMENTS PROPRES
D'UN OPERATEUR LINEAIRE FERME PAR ITERATION :
CAS GENERAL

I.	INTRODUCTION -----	61
II.	ETUDE DES SERIES DE PERTURBATION : "cas issue de la convergence en norme" -----	62
	1. Hypothèses ; notations -----	62
	2. Majoration des quantités $ \lambda_n $ et $\ \psi_n\ $ -----	63
	3. Convergence des séries de perturbation ; bornes d'erreur sur les éléments propres -----	65
	4. Le spectre T au voisinage de λ_0 -----	67
	5. Justification du choix de la quantité ϵ -----	68
	6. Comparaison aux résultats de Kato [6] -----	69
	7. Cas où T et T_0 sont bornés -----	70
	8. Expériences numériques -----	73
III.	ETUDE DES SERIES DE PERTURBATION : "cas issu de la convergence collectivement compacte " -----	78
	1. Notations ; hypothèses -----	78
	2. Localisation de la valeur propre λ de T_{∞} -----	79
	3. Comportement et convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ ---	80
	3. Comportement et convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ -----	83
	4. Justification du choix de la quantité ϵ -----	86
	6. Cas où T et T_0 sont bornés -----	88
	7. Expériences numériques -----	88
IV.	CONCLUSIONS -----	96

CHAPITRE IV - APPROXIMATION D'UN SOUS-ESPACE INVARIANT
D'UN OPERATEUR LINEAIRE PAR ITERATION

I.	INTRODUCTION -----	97
II.	PRELIMINAIRES -----	98
	1. Cadre ; premières notations -----	98
	2. Opérateurs matriciels -----	100
	3. Généralisation de la notion de résolvante réduite -	101
III.	APPROXIMATION D'UN SOUS-ESPACE INVARIANT D'UN OPERATEUR LINEAIRE PAR ITERATION : PRESENTATION FORMELLE -----	106
	1. Hypothèses -----	106
	2. Les itérations -----	106
	3. Un résultat de convergence -----	108
	4. Remarque -----	109
IV.	CAS D'UN OPERATEUR QUASI-DECOMPOSE PAR UNE PROJECTION DE RANG q -----	110
	1. Hypothèses -----	110
	2. Notations -----	111
	3. Les itérations -----	112
	4. Théorème de convergence -----	112
	5. Intérêt du théorème de convergence et des itérations	115
	6. Exemples numériques -----	117
V.	CONCLUSION -----	125
	ANNEXE - APPROXIMATION D'OPERATEURS INTEGRAUX COMPACTS -----	126
I.	APPROXIMATION SPECTRALE D'OPERATEURS -----	126
II.	APPROXIMATION SPECTRALE D'OPERATEURS INTEGRAUX COMPACTS	128
	1. Opérateurs intégraux compacts -----	128
	2. Approximation d'un opérateur compact par des méthodes de projection -----	128
	3. Approximation d'un opérateur intégral compact par des méthodes de quadrature approchée -----	130
III.	EXEMPLES D'OPERATEURS INTEGRAUX COMPACTS -----	130
	REFERENCES -----	133

INTRODUCTION

Ce travail porte essentiellement sur l'approximation des valeurs propres isolées simples et des vecteurs propres associés, d'un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach. Il s'agit d'une part d'obtenir des bornes d'erreur sur les éléments propres, et d'autre part, dans certains cas, de proposer des améliorations calculables des éléments propres approchés.

L'outil employé est principalement la théorie de la perturbation des opérateurs linéaires. Soit T un opérateur linéaire fermé d'éléments propres λ et φ , et T_0 une "approximation" de T d'éléments propres λ_0 et φ_0 ; on considère que T résulte de la perturbation de T_0 par $T - T_0$.

Au premier chapitre nous établissons l'existence de séries de perturbation pour la valeur propre $\sum_n \lambda_n$ et le vecteur propre $\sum_n \varphi_n$, ainsi que leur convergence vers λ et φ quand T_0 est "assez proche" de T . Nous donnons en particulier une condition suffisante précise pour que la série $\sum_n \lambda_n$ converge vers λ .

Des formules itératives permettent le calcul des termes λ_n et φ_n , et sont à la base des chapitres suivants.

Au chapitre II, où nous avons en vue l'établissement de bornes d'erreur, nous examinons le cas où T est approché par un opérateur T_0 de la forme $T_0 = P_0 T P_0 + (1 - P_0) T (1 - P_0)$, où P_0 est une projection de rang 1. On obtient des majorations fines de $\|\varphi - \varphi_0\|$ et $|\lambda - \lambda_0|$ qui précisent l'ordre d'approximation de $\lambda_0 = \text{trace}(P_0 T P_0)$, quotient de Rayleigh généralisé associé à T et P_0 . Le calcul effectif des bornes d'erreur nécessite la résolution d'un système linéaire dont la taille égale le rang de T_0 . Les résultats obtenus sont comparés à ceux déjà connus sur le sujet (voir [5],[7],[8]) et sont testés sur des opérateurs intégraux autoadjoints.

Au chapitre III nous examinons l'intérêt numérique des séries de perturbation : les termes λ_n et φ_n , calculables par itération, fournissent un moyen pratique d'approximation de λ et φ . Nous avons été guidé par le cas où T est un opérateur compact approché au sens de la norme, ou de façon collectivement compacte par une suite T_n . Pour n assez grand, on choisit $T_0 = T_n$ comme approximation de T ; les sommes partielles $\sum_{i=0}^k \lambda_i$ et $\sum_{i=0}^k \varphi_i$ sont des approximations de λ et φ qui sont calculables si l'on sait évaluer des termes de la forme Tx , et la résolvante réduite de T_0 (problème équivalent à la résolution d'un système linéaire dont la taille est le rang de T_0). Nous étudions le comportement des séries de perturbation suivant que T_0 résulte d'une approximation en norme ou collectivement compacte de T , et nous donnons des bornes d'erreur sur $\|\varphi - \sum_{i=0}^k \varphi_i\|$ et $|\lambda - \sum_{i=0}^k \lambda_i|$.

Les résultats de ce chapitre sont illustrés numériquement sur des opérateurs intégraux à noyau compacts, approchés par des méthodes de projection ou de quadrature approchée.

Enfin, au chapitre IV, nous généralisons la méthode itérative et les résultats de convergence exposés au chapitre II, au cas où la valeur propre λ_0 de T_0 est multiple, ou encore au cas d'un groupe de valeurs propres.

CHAPITRE - I

=====

METHODE D'ITERATION POUR LE CALCUL DE VALEURS PROPRES
ET DE VECTEUR PROPRES D'OPERATEURS LINEAIRES FERMES

Dans ce chapitre nous établissons l'existence des séries de perturbation pour les éléments propres d'une famille d'opérateurs de la forme :

$$T(t) = T_0 + t(T - T_0).$$

Les résultats obtenus figurent déjà aux chapitres II et VII de Kato [6], et sont valables pour " $|t|$ assez petit". Cependant, vu la forme simple de $T(t)$, nous pouvons montrer simplement l'existence des séries de perturbation et en préciser le disque de convergence.

Ensuite nous considérons une méthode itérative du calcul des coefficients des séries de perturbation.

I - INTRODUCTION

1) Rappels succints sur les opérateurs fermés

a) Soit X un espace de Banach sur \mathbb{C} , et X^* l'espace adjoint (l'espace des formes semi-linéaires sur X).

La dualité entre X et X^* sera notée ainsi :

$$x^*(x) = \langle x, x^* \rangle, \quad \forall x \in X, \quad \forall x^* \in X^*.$$

On désignera par $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans X .

b) Soit $T : D \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé de domaine D dense.

Rappelons que T est fermé si et seulement si son graphe $G(T) = \{(x,y) \in D \times X \mid y = Tx\}$ est fermé dans $X \times X$.

L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

- $(T-z)D$ soit dense dans X
 - $(T-z) : D \rightarrow X$ admette un inverse appartenant à $\mathcal{L}(X)$,
- est l'ensemble résolvant de T , que nous noterons $\rho(T)$.

Le spectre de T est l'ensemble $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$.

Une valeur propre de T est tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $T-z$ ne soit pas injectif.

Si T est borné nous noterons par $r(T)$ son rayon spectral :

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n}$$

c) Soit $T : D \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé.

Si λ est une valeur propre isolée de T , de multiplicité algébrique finie m , alors :

- au voisinage de λ , sauf en λ , la résolvante $R(T,z) = (T-z)^{-1}$ existe en tant qu'opérateur linéaire continu de X dans $D \subseteq X$.

- l'opérateur P (projection spectrale) défini par :

$$P = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(T,z) dz,$$

où Γ est une courbe fermée simple isolant λ du reste du spectre, est une projection de rang m , ayant les propriétés suivantes :

$$\cdot PX \subseteq PD$$

$$\cdot T(1-P)D \subseteq (1-P)X$$

$$\cdot TPx = PTx, \quad \forall x \in X$$

• si $m = 1$, tout vecteur x de Px est un vecteur propre et vérifie : $TPx = PTx = \lambda x$.

- La résolvante réduite S de T en λ est l'opérateur défini par :

$$S = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (z-\lambda) R(T,z) dz$$

L'opérateur $S : X \rightarrow X$ est continu et vérifie :

$$\cdot S(T-\lambda)x = (1-P)x, \quad \forall x \in D$$

$$\cdot (T-\lambda)Sx = (1-P)x, \quad \forall x \in X$$

$$\cdot SX = (1-P)D$$

$$\cdot S = \lim_{z \rightarrow \lambda} R(T,z)(1-P) = \lim_{z \rightarrow \lambda} (1-P) R(T,z)$$

2) Notations ; hypothèses

Les notations et hypothèses présentées ici seront conservées dans toute la suite.

Soient $T : D \subseteq X \rightarrow X$ et $T_0 : D_0 \subseteq X \rightarrow X$ deux opérateurs fermés de domaines D et D_0 denses tels que $D_0 \subseteq D$.

Nous supposons que T_0 a une valeur propre λ_0 isolée du reste du spectre et de multiplicité algébrique finie m .

Soient P_0 et S_0 la projection spectrale et la résolvante réduite associées à T_0 en λ_0 .

3) Trois lemmes :

Considérons pour $t \in \mathbb{C}$, la famille d'opérateurs :

$$T(t) = T_0 + t(T - T_0) : D_0 \subseteq X \rightarrow X.$$

L'opérateur $T(t)$ est défini sur D_0 , mais n'est, en général, pas fermé, sauf pour $t = 0$.

Cependant, si T_0 est assez proche de T , en un certain sens, alors $T(t)$ est fermé au voisinage de 0 comme le montre le lemme suivant.

a) Lemme :

Si $\rho(T_0)$ n'est pas vide et que z_0 en soit un élément alors, pour $|t| < r((T - T_0)R(T_0, z_0))$:

- l'opérateur $T(t) : D_0 \subseteq X \rightarrow X$ est fermé

- $T(t) - z_0$ est inversible en tant qu'opérateur de D dans X ; son inverse est continu et vaut

$$\begin{aligned} R(t, z_0) &= R(T_0, z_0) [1 + t(T - T_0)R(T_0, z_0)]^{-1} \\ &= R(T_0, z_0) \sum_{n=0}^{\infty} [-t(T - T_0)R(T_0, z_0)]^n \end{aligned}$$

Démonstration :

Remarquons d'abord que $T_0 R(T_0, z_0)$ et $TR(T_0, z_0)$ sont bornés en tant qu'opérateurs fermés de domaine X (théorème du graphe fermé). Donc l'expression $r((T-T_0)R(T_0, z_0))$ a un sens.

L'opérateur $T(t, z_0) = R(T_0, z_0)[1+t(T-T_0)R(T_0, z_0)]^{-1}$ existe, est borné, de domaine X , d'image D_0 , pour $|t| < r((T-T_0)R(T_0, z_0))$.

On montre ensuite classiquement les relations :

$$- R(t, z_0)(T(t)-z_0)x = x \quad , \quad \forall x \in D_0$$

$$- (T(t)-z_0)R(t, z_0)x = x \quad , \quad \forall x \in P$$

Par suite $(T(t)-z_0)^{-1} = R(t, z_0)$ existe, est borné, donc fermé, donc $T(t)$ est fermé.

b) Lemme :

La fonction $z \in \rho(T_0) \rightarrow r((T-T_0)R(T_0, z_0))$ est semi-continue supérieurement.

Démonstration :

Posons : $U(z) = (T-T_0)R(T_0, z)$; l'opérateur $U(z) : X \rightarrow X$ est continu, et U est une fonction continue de z .

Fixons $\epsilon > 0$ et $z_0 \in \rho(T_0)$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|U(z_0)^n\|^{1/n} \leq r(U(z_0)) + \frac{\epsilon}{2}$$

Puisque la fonction : $z \in \rho(T_0) \rightarrow \|U(z)^n\|^{1/n}$ est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|z-z_0| \leq \alpha \Rightarrow \|U(z)^n\|^{1/n} \leq \|U(z_0)^n\|^{1/n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq r(U(z_0)) + \varepsilon$$

Puisque $r(U(z)) = \liminf \|U(z)^n\|^{1/n}$, on a :

$$|z-z_0| \leq \alpha \Rightarrow r(U(z)) \leq r(U(z_0)) + \varepsilon$$

Corollaire :

Soit C un compact de $\rho(T_0)$; la fonction
 $z \in C \rightarrow r((T-T_0)R(T_0, z))$ atteint son maximum sur C .

c) Lemme :

Sous les hypothèses suivantes :

- C est un compact de $\rho(T_0)$
- $U : z \in C \rightarrow U(z) \in \mathcal{L}(X)$ est une application continue de z qui à z associe l'opérateur continu $U(z)$.
- On pose $r = \max_{z \in C} r(U(z))$ (le maximum existe d'après le corollaire précédent),

On a le résultat suivant :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) / (\forall z \in C) (\|U(z)^N\|^{1/N} < r + \varepsilon)$$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Au cours de la démonstration du lemme précédent on a obtenu le résultat suivant :

- à tout $z \in C$ on peut associer un entier n_z et un réel $\alpha_z > 0$ telsque :

$(z' \in C)$ et $(|z-z'| \leq \alpha_z) \Rightarrow$

$$\|U(z')^{n_z}\|^{1/n_z} \leq r(U(z)) + \epsilon \leq r + \epsilon$$

La famille des boules ouvertes $B(z, \alpha_z)$, $z \in C$, forme un recouvrement de C dont on peut extraire un recouvrement fini $B(z_i, \alpha_i)$, $i = 1, \dots, p$.

Posons : $N = n_{z_1} \times \dots \times n_{z_p}$.

Tout z' de C appartient à une boule $B(z_i, \alpha_i)$ au moins et vérifie :

$$\|U(z')^N\|^{1/N} \leq \|U(z')^{n_{z_i}}\|^{1/n_{z_i}} \leq r + \epsilon.$$

II - SERIES DE PERTURBATION DES ELEMENTS PROPRES DE $T(t)$

Les trois lemmes précédents permettent maintenant d'appliquer à $T(t)$ la théorie de la perturbation pour des familles analytiques d'opérateurs fermés.

Supposons que la courbe Γ soit incluse dans le disque $\{|z - \lambda_0| < r(S_0)\}$.
Posons :

$$r = \max_{z \in \Gamma} r((T - T_0)R(T_0, z)).$$

La démarche que nous allons suivre est celle présentée dans [6], chapitre II. Nous montrerons seulement que les séries de perturbation convergent dans le disque $|t| < r^{-1}$.

Les hypothèses étant celles du paragraphe I.2, rappelons que, d'après le lemme I.3.a), l'opérateur :

$$T(t) = T_0 + t(T - T_0) : D_0 \subseteq X \rightarrow X$$

est fermé de domaine D_0 pour $|t| < r^{-1}$

1) Série de perturbation de la projection spectrale

Pour $|t| < r^{-1}$ et $z \in \Gamma$, la résolvante $R(t, z) = R(T(t), z)$ de $T(t)$ en z existe et vaut, d'après le lemme I.3.a :

$$R(t, z) = R(T_0, z) \sum_{n=0}^{\infty} t^n (-1)^n [(T - T_0)R(T_0, z)]^n$$

La projection spectrale $P(t)$, associée à la partie du spectre de $T(t)$ à l'intérieur de Γ , existe et a pour expression :

$$P(t) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(T_0, z) \sum_{n=0}^{\infty} t^n (-1)^n [(T - T_0)R(T_0, z)]^n dz$$

Le lemme I.3.c) permet de permuter les signes \int et \sum :

$$P(t) = \frac{-1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} t^n (-1)^n \int_{\Gamma} R(T_0, z) [(T - T_0)R(T_0, z)]^n dz$$

Pour $|t| < r^{-1}$ et $z \in \Gamma$, la résolvante $R(T_0, z)$ a pour expression (voir [6] p. 39)

$$R(T_0, z) = \sum_{n=-m}^{\infty} (z - \lambda_0)^n S^{(n+1)},$$

avec les notations :

$$S^{(0)} = -P_0$$

$$S^{(1)} = S_0 ; S^{(n)} = (S_0)^n$$

$$S^{(-1)} = D_0 = \text{opérateur nilpotent associé à } T_0 \text{ en } \lambda_0$$

$$S^{(-n)} = (D_0)^n$$

Le coefficient de $(z-\lambda_0)^{-1}$ dans

$R(T_0, z)[(T-T_0)R(T_0, z)]^n$ est donc :

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_{n+1} = n \\ k_i \geq -(m-1)}} S^{(k_1)} (T-T_0) S^{(k_2)} \dots (T-T_0) S^{(k_{n+1})}$$

D'où l'expression de $P(t)$, pour $|t| < 1/r$

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_{n+1} = n \\ k_i \geq -(m-1)}} S^{(k_1)} (T-T_0) S^{(k_2)} \dots (T-T_0) S^{(k_{n+1})}$$

2) Série de perturbation de la moyenne des valeurs propres à l'intérieur de Γ :

Puisque $P(t)$ est une projection qui dépend continuellement de t , le rang $P(t)$ est constant dans le disque $|t| < r^{-1}$ (résultat démontré dans [6] p. 34).

Donc : $\dim P(t)X = \dim P(0)X = n$, ce qui montre que $T(t)P(t)$ a n valeurs propres, comptées avec leurs ordres de multiplicité algébrique, à l'intérieur de Γ .

L'opérateur $T(t)P(t) : X \rightarrow X$ est continu, de rang fini ; on peut en définir la trace $\text{tr}(T(t)P(t))$ (voir [6] pp. 160-162), et nous poserons :

$$\lambda(t) = \frac{1}{m} \text{tr}(T(t)P(t))$$

C'est la moyenne arithmétique des valeurs propres de $T(t)$ à l'intérieur de Γ . Remarquons $\lambda(0) = \lambda_0$.

Nous allons voir que $\lambda(t)$ est analytique, bien que chaque valeur propre de $T(t)$ puisse ne pas être analytique (voir [6] p. 65).

a) Analyticité de $\lambda(t)$

Fixons t_0 dans le disque $|t| < r^{-1}$. Nous allons montrer que $\lambda(t)$ est analytique autour de t_0 .

La projection $P(t_0)$ s'écrit :

$$P(t_0) = \sum_{i=1}^m \langle \cdot, \varphi_i^* \rangle \varphi_i$$

où φ_i et φ_i^* vérifient, pour $i, j, = 1, \dots, m$.

$$- \varphi_i \in P(t_0)D_0 \subseteq P_0 X$$

$$- \varphi_i^* \in D(T(t_0)^*) \subseteq X^*$$

- $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sont linéairement indépendants

$$- \langle \varphi_j, \varphi_i^* \rangle = \delta_{ij}.$$

Au voisinage de t_0 la matrice $(\langle P(t)\varphi_j, \varphi_i^* \rangle)$ est inversible, car pour $t = t_0$ c'est la matrice identité.

Les fonctions $c_{ij}(t)$ définies par :

$$\sum_{j=1}^m c_{ij}(t) \langle P(t)\varphi_k, \varphi_j^* \rangle = \delta_{ik}$$

pour $i = 1, \dots, m$ et $k = 1, \dots, m$

sont donc analytiques autour de t_0 .

Au voisinage de t_0 les vecteurs $P(t)\varphi_1, \dots, P(t)\varphi_m$ sont linéairement indépendants, et il est facile de vérifier que l'opérateur :

$$x \in X \rightarrow \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}(t) \langle P(t)x, \varphi_j^* \rangle \right) P(t) \varphi_i$$

est la projection $P(t)$.

L'opérateur $T(t)P(t)$ est défini par :

$$T(t)P(t)x = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}(t) \langle P(t)x, \varphi_j^* \rangle \right) T(t)P(t)\varphi_i$$

et sa trace vaut ([6] pp. 160-162) :

$$\begin{aligned} \text{tr}(T(t)P(t)) &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m c_{ij}(t) \langle P(t)T(t)P(t)\varphi_i, \varphi_j^* \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m c_{ij}(t) \langle P(t)T_0\varphi_i + t P(t)(T-T_0)\varphi_i, \varphi_j^* \rangle. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, cette expression est analytique autour de t_0 ; donc $\lambda(t)$ l'est aussi.

b) Calcul des coefficients du développement en série de $\lambda(t)$.

La moyenne des valeurs propres $\lambda(t)$ vérifie :

$$\lambda(t) - \lambda_0 = \frac{1}{m} \text{tr}[(T(t) - \lambda_0)P(t)] \quad ([6] \text{ p. 75})$$

Or :

$$(T(t) - \lambda_0)P(t) = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (z - \lambda_0) R(t, z) dz \quad ([6] \text{ p. 77})$$

D'après le lemme I.3.a; :

$$(T(t) - \lambda_0)P(t) = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (z - \lambda_0) R(T_0, z) \sum_{n=0}^{\infty} [-t(T - T_0)R(T_0, z)]^n dz$$

Le lemme I.3.c. permet d'intervertir les signes \int et Σ (on néglige en plus le terme $n = 0$, car $(T(o)-\lambda_0)P(o) = 0$) :

$$(T(t)-\lambda_0)P(t) = \frac{-1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} t^n (-1)^n \int_{\Gamma} (z-\lambda_0)R(T_0, z) [(T-T_0)R(T_0, z)]^n dz$$

Examinons le reste :

$$A_n(t) = - \frac{1}{2i\pi} \sum_{p=n}^{\infty} t^p (-1)^p \int_{\Gamma} (z-\lambda_0)R(T_0, z) [(T-T_0)R(T_0, z)]^p dz$$

Où encore :

$$(1) A_n(t) = (T(t)-\lambda_0)P(t) + \frac{1}{2i\pi} \sum_{p=1}^{n-1} t^p (-1)^p \int_{\Gamma} (z-\lambda_0)R(T_0, z) [(T-T_0)R(T_0, z)]^p dz$$

On a :

$$\|A_n(t)\| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{p=n}^{\infty} |t|^p \cdot \max_{z \in \Gamma} \|(z-\lambda_0)R(T_0, z)\| \cdot \max_{z \in \Gamma} \|[(T-T_0)R(T_0, z)]^p\|$$

Ce qu'on peut majorer, d'après le lemme I.3.c., par :

$$\|A_n(t)\| \leq t^n \frac{c}{1-r|t|}$$

où c est une constante ne dépendant pas de t .

Maintenant l'égalité (1), où on évalue les intégrales comme on l'a fait au paragraphe II,1, montre que $A_n(t)$ est un opérateur de rang fini N , ne dépendant que de n ; donc :

$$\text{tr}(A_n(t)) \leq t^n \frac{CN}{1-r|t|}$$

On en déduit que pour tout n , $\lambda(t)$ admet le développement suivant :

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \dots + \lambda_{n-1} t^{n-1} + o(t^n),$$

où λ_p est donné par :

$$(2) \quad \lambda_p = \frac{-(-1)^p}{2i\pi m} \operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} (z-\lambda_0) R(T_0, z) [(T-T_0) R(T_0, z)]^p dz \right)$$

Puisque le paragraphe a) a montré que $\lambda(t)$ est analytique dans le disque $|t| < r^{-1}$, on a en fait :

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p t^p$$

où λ_p est donné par (2).

c) Autre expression des coefficients de $\lambda(t)$:

Suivant l'idée de [6] p. 78, nous allons donner une expression plus simple de λ_p .

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme

Soient $A(z), B(z) : X \rightarrow X$ deux familles d'opérateurs continus, admettant au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ les développements suivants :

$$A(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} (z-z_0)^n A_n \quad , \quad p \in \mathbb{N}$$

$$B(z) = \sum_{n=-q}^{\infty} (z-z_0)^n B_n \quad , \quad q \in \mathbb{N}$$

Supposons que pour tout couple (A_i, B_j) avec $i+j = -1$, au moins l'un des deux opérateurs A_i ou B_j soit de rang fini.

Soit Γ une courbe simple du voisinage de z_0 , entourant z_0 .

Alors :

$$\operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} A(z) B(z) dz \right) = \operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} B(z) A(z) dz \right)$$

Démonstration

Elle est simple. Nous la donnons sans commentaires :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} A(z)B(z)dz \right) &= 2i\pi \sum_{i+j=-1} \operatorname{tr}(A_i B_j) \\ &= 2i\pi \sum_{i+j=-1} \operatorname{tr}(B_j A_i) \\ &= \operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} B(z)A(z)dz \right) \end{aligned}$$

Ce lemme nous permet, à partir de la formule (2), de donner l'expression suivante de λ_p :

$$\lambda_p = \frac{-(-1)^p}{2i\pi mp} \operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} (z-\lambda_0) \sum_{q=0}^{p-1} [(T-T_0)R(T_0,z)]^q R(T_0,z) [(T-T_0)R(T_0,z)]^{p-q} dz \right)$$

Suivant maintenant [6] pp. 78-79, nous obtenons successivement :

$$\lambda_p = \frac{-(-1)^p}{2i\pi mp} \operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} (z-\lambda_0) \frac{d}{dz} [(T-T_0)R(T_0,z)]^n dz \right)$$

$$\lambda_p = \frac{-(-1)^p}{2i\pi mp} \operatorname{tr} \left(\int_{\Gamma} [(T-T_0)R(T_0,z)]^n dz \right)$$

$$\lambda_p = \frac{(-1)^p}{mp} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_p=p \\ k_i \geq -(m-1)}} \operatorname{tr}((T-T_0)S^{(k_1)} \dots (T-T_0)S^{(k_p)})$$

3) "Série de perturbation du vecteur propre"

Nous supposons ici que λ_0 est une valeur propre simple ($m = 1$) ; φ_0 est un vecteur propre associé à T_0 et λ_0 .

Pourvu que l'opérateur $1 + [(T(t) - T_0) - (\lambda(t) - \lambda_0)]S_0$ soit inversible, le vecteur

$$(4) \quad \varphi(t) = \varphi_0 - t S_0 \{1 + [t(T - T_0) - (\lambda(t) - \lambda_0)]S_0\}^{-1} (T - T_0) \varphi_0$$

est un vecteur propre (voir [6] p. 92).

Pour $|t|$ assez petit, $\varphi(t)$ admet donc le développement :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n$$

avec :

$$- \varphi_0 \in P_0 D_0$$

$$- \varphi_n \in (1 - P_0) D_0, n \geq 1.$$

On ne peut préciser ici de façon simple le rayon de convergence $1/r'$ de la série $\varphi(t)$.

Si $c(t)$ est une fonction analytique, à valeurs complexes, alors $c(t) \varphi(t)$ est un vecteur propre dont le développement diffère de celui de $\varphi(t)$.

Nous réservons donc le terme "série de perturbation du vecteur propre" au développement de $\varphi(t)$.

Nous particularisons $\varphi(t)$ à cause de sa simplicité et de son importance dans la suite ; remarquons que $\varphi(t) \neq 0$ sur son disque de convergence $|t| < 1/r'$, car $P_0 \varphi(t) = \varphi_0$; remarquons aussi que $\varphi(t)$ appartient à D_0 .

Nous ne cherchons pas à calculer les coefficients φ_n , à partir de l'égalité (4), car la partie suivante nous en donnera les expressions par récurrence.

III - CALCUL DES COEFFICIENTS DE $\lambda(t)$ ET $\varphi(t)$ PAR ITERATION,
LORSQUE λ_0 EST UNE VALEUR PROPRE SIMPLE

Les hypothèses sont toujours celles du paragraphe I.2 et de la partie II (début).

Nous supposons en plus que λ_0 est une valeur propre simple de T_0 .

La projection spectrale P_0 s'écrit alors :

$$P_0 = \frac{\langle \cdot, \varphi_0^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle} \varphi_0$$

avec :

- $\varphi_0 \in D_0$, vecteur propre de T_0 associé à λ_0

- $\varphi_0^* \in D(T_0^*) \subseteq X^*$

- $\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle \neq 0$, $\|\varphi_0\| = \|\varphi_0^*\| = 1$

1) Formules itératives pour λ_n et φ_n :

Nous suivons ici les idées de [4].

a) Commençons par montrer l'égalité :

$$(5) \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_{n-k} = T_0 \varphi_n + (T - T_0) \varphi_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Ce résultat s'obtient en identifiant les coefficients de t^n dans :
 $T(t) \varphi(t) = \lambda(t) \varphi(t)$; ce qui doit être justifié, l'opérateur $T(t)$ étant seulement borné.

Définissons u_n par : $\lambda(t) \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n u_n$.

On a :

$$(6) \quad (T(t)-z)\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - z\varphi_n)t^n, \text{ pour } z \in \mathbb{C}$$

Pour $z \in \Gamma$, la résolvante $R(t,z) = [T(t)-z]^{-1}$ existe et s'écrit :

$$R(t,z) = R(T_0,z) \sum_{n=0}^{\infty} [-(T-T_0)R(T_0,z)]^n$$

En multipliant chaque membre de (6) par $R(t,z)$, et en identifiant les coefficients de t^n , on obtient :

$$(7) \quad \varphi_n = R(T_0,z) \sum_{k=0}^n [-(T-T_0)R(T_0,z)]^k [u_{n-k} - z\varphi_{n-k}]$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} (T_0 - z)\varphi_n &= (u_n - z\varphi_n) \\ &\quad - (T-T_0)R(T_0,z) \sum_{k=0}^{n-1} [-(T-T_0)R(T_0,z)]^k [u_{n-1-k} - z\varphi_{n-1-k}] \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit, en tenant compte de (7) :

$$(T_0 - z)\varphi_n = u_n - z\varphi_n - (T-T_0)\varphi_{n-1}$$

Ce qui démontre l'égalité (5), vu que $u_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_{n-k}$.

b) L'égalité (5) s'écrit également :

$$(T_0 - \lambda_0)\varphi_n = -(T-T_0)\varphi_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \varphi_{n-k} + \lambda_n \varphi_0, \quad n \geq 0$$

Après multiplication de chaque membre par S_0 d'une part, et P_0 d'autre part, et en se rappelant que φ_n , $n \geq 1$, appartient à $(1-P_0)D_0$, on obtient les relations de récurrence suivantes :

$$(8.1) \quad \varphi_n = S_0 [-(T-T_0)\varphi_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \varphi_{n-k}] \quad , \quad n \geq 1$$

(8)

$$(8.2) \quad \lambda_n = \langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle^{-1} \langle P_0(T-T_0)\varphi_{n-1}, \varphi_0^* \rangle \quad , \quad n \geq 1$$

Ces formules nous donnent les coefficients de $\varphi(t)$ et $\lambda(t)$ pour $|t| < \min(\frac{1}{r}, \frac{1}{r^r})$.

En fait, vu que $\lambda(t)$ est analytique pour $|t| < \frac{1}{r}$, les formules (8) donnent les coefficients de $\lambda(t)$ pour $|t| < 1/r$.

On ne peut en dire autant du vecteur propre $\varphi(t)$.

2) Un résultat de convergence

a) On remarque que φ_n , $n \geq 1$, peut s'écrire :

$$\varphi_n = S_0 \psi_n, \text{ avec } \psi_n \in (1-P_0)X$$

Avec ce "changement de variable", les itérations (8) deviennent :

$$(9.1) \quad \psi_1 = -(1-P_0)(T-T_0)\varphi_0$$

$$(9.2) \quad \lambda_1 = \langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle^{-1} \langle P_0(T-T_0)\varphi_0, \varphi_0^* \rangle$$

$$(9) \quad (9.3) \quad \psi_n = -(1-P_0)(T-T_0)S_0\psi_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k S_0\psi_{n-k}, \quad n \geq 2$$

$$(9.4) \quad \lambda_n = \langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle^{-1} \langle \psi_{n-1}, [(T-T_0)S_0]^n \varphi_0^* \rangle, \quad n \geq 2$$

L'intérêt des itérations (9) est de mettre en évidence l'opérateur $(T-T_0)S_0 : X \rightarrow X$, qui est continu ; ce qui permet d'énoncer le lemme qui suit :

b) Lemme III.2.b)

Si les séries $\sum_{n=1}^{\infty} t^n \psi_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \lambda_n$ convergent respectivement vers $\Psi(t)$ et $\lambda(t)$ sur le disque $|t| < R$ (R constante réelle), alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n$ converge vers un vecteur $\varphi(t)$, et on a :

$$T(t)\varphi(t) = \lambda(t)\varphi(t) \text{ avec } P_0\varphi(t) = \varphi_0.$$

Démonstration :

Remarquons déjà que la série $\varphi(t) = \varphi_0 + S_0\Psi(t)$ converge. Des formules (9.3) et (9.4) on tire facilement :

$$T_0 S_0 \psi_n + (T-T_0)S_0\psi_{n-1} = \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_{n-k}, \quad n \geq 2$$

Après multiplication par t^n , on somme pour $n \geq 2$ et $|t| < R$, ce qui est possible car $T_0 S_0$ et $(T-T_0)S_0$ sont bornés :

$$T_0 S_0 (\Psi(t) - t\psi_1) + t(T-T_0)S_0\Psi(t) = \lambda(t)\varphi(t) - [\lambda_0\varphi_0 + t(\lambda_0\varphi_1 + \lambda_1\varphi_0)]$$

De (9.1) et (9.2) on tire :

$$T_0 S_0(t\psi_1) + t(T - T_0)\varphi_0 = t(\lambda_0\varphi_1 + \lambda_1\varphi_0)$$

Des deux dernières égalités on tire :

$$T_0 S_0\psi(t) + t(T - T_0)[\varphi_0 + S_0\psi(t)] = \lambda(t)\varphi(t) - \lambda_0\varphi_0$$

Ce qui démontre le lemme vu que $\varphi_0 + S_0\psi(t) = \varphi(t)$.

3) Remarque :

Soit $\varphi^* \in X^*$ un vecteur tel que $\langle \varphi_0, \varphi^* \rangle \neq 0$, et considérons la projection P' sur φ_0 définie par :

$$P' = \frac{\langle \cdot, \varphi^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi^* \rangle} \varphi_0$$

Pour $|t|$ assez petit, on a :

$$\varphi(t) = P'\varphi(t) + (1 - P')\varphi(t) = c(t)\varphi_0 + (1 - P')\varphi(t),$$

où $c(t)$ est une fonction analytique qui ne s'annule pas.

Donc, pour $|t|$ assez petit,

$$\varphi'(t) = \frac{\varphi(t)}{c(t)} = \varphi_0 + \frac{(1 - P')\varphi(t)}{c(t)}$$

est un vecteur propre fonction analytique de t .

Partant de l'égalité $T(t)\varphi'(t) = \lambda(t)\varphi'(t)$, si on calcule les coefficients λ_n et φ'_n de $\lambda(t)$ et $\varphi'(t)$ comme au paragraphe III.1, on trouve :

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi'_n = (1-P')S_0[-(T-T_0)\varphi'_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \varphi'_{n-k}] , & n \geq 1 \\ \lambda_n = \langle \varphi_0, \varphi^* \rangle^{-1} \langle (T-T_0)\varphi'_{n-1} + T_0\varphi'_n, \varphi^* \rangle , & n \geq 1 \end{cases}$$

Nous ne savons pas préciser simplement le rayon de convergence de $\varphi'(t)$; mais celui de $\lambda(t)$ est $1/r$, et l'expression de λ_n donnée par (10) coïncide avec celle donnée par (8), vu l'unicité du développement.

Les formules (10) ne dépendent pas de φ_0^* (en effet $(1-P')S_0$ ne dépend pas de φ_0^*).

Le conditionnement du calcul de λ_n par (10) dépend de $|\langle \varphi_0, \varphi^* \rangle^{-1}| = \|P'\|$, alors que le conditionnement du calcul de λ_n par (8) dépend de $|\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle^{-1}| = \|P_0\|$; le calcul de λ_n par (10) est donc préférable quand la projection P_0 est mal conditionnée, vu qu'on a le choix de φ^* .

Par contre, le calcul de λ_n par (8) ne nécessite que la connaissance de φ_{n-1} alors que le calcul de λ_n par (10) nécessite la connaissance de φ'_{n-1} et de φ'_n (donc la résolution supplémentaire d'un système linéaire).

IV - CONCLUSIONS - REMARQUES

- a) Si T_0 a une valeur propre λ_0 de multiplicité algébrique m isolée par une courbe simple fermée Γ , alors pour $|t| < 1/r$,
 $r = \max_{z \in \Gamma} r((T-T_0)R(T_0, z))$, l'opérateur $T(t) = T_0 + t(T-T_0)$ a m valeurs propres à l'intérieur de Γ , et la projection spectrale

$$P(t) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(t, z) dt$$
 et la moyenne des valeurs propres de $T(t)$ sont analytiques (rappelons que ce résultat connu est démontré simplement vu la forme de $T(t)$).

b) Si λ_0 est simple, on peut mettre en évidence un vecteur propre analytique $\varphi(t)$ (dont nous ne savons préciser le rayon de convergence $1/r'$).

Les coefficients de $\lambda(t)$ et $\varphi(t)$ sont donnés par les itérations (9) ; ces coefficients sont effectivement calculables car ils ne font intervenir que des quantités du type : $T_0x, S_0x, Tx, P_0x, x \in X$.

c) Notre but étant de comparer les éléments propres de T_0 à ceux de T , le paramètre t n'a guère qu'un rôle formel ; seul le cas $t = 1$ nous intéresse. En vue de quoi nous pouvons énoncer les résultats suivants :

- si $r = \max_{z \in \Gamma} r((T-T_0)R(T_0, z)) < 1$, alors l'opérateur $T : D_0 \subseteq X \rightarrow X$ est fermé, a m valeurs propres à l'intérieur de Γ , et si $m = 1$ la série $\sum \lambda_n$ converge vers la valeur propre de T à l'intérieur de Γ .

- Corollaire du lemme III.2.b)

Dans le cas où λ_0 est une valeur propre simple, si $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty$, si $\sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\| < +\infty$, alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ convergent respectivement vers λ et φ tels que : $T\varphi = \lambda\varphi$ avec $P_0\varphi = \varphi_0$.

De plus λ est une valeur propre simple de T .

Ce résultat sera exploité ultérieurement (voir Chapitre II, partie III).

CHAPITRE - II

=====

APPROXIMATION PAR ITERATION DES ELEMENTS PROPRES

D'UN OPERATEUR LINEAIRE FERME QUASI-DECOMPOSE

PAR UNE PROJECTION DE RANG 1

Dans ce chapitre nous considérons les séries de perturbation de la valeur propre et du vecteur propre associés à la famille particulière suivante :

$$T(t) = T_0 + t(T-T_0)$$

où $T_0 = P_0 T P_0 + (1-P_0) T (1-P_0)$ et où P_0 est une projection de rang 1. L'opérateur T est dit quasi-décomposé par P_0 , si les séries de perturbation de la valeur propre et du vecteur propre de $T(t)$ convergent pour $t = 1$. Nous examinons la convergence des séries, les bornes d'erreur qu'on peut en tirer, et l'intérêt pratique des séries de perturbation pour raffiner une valeur propre simple et un vecteur propre. Nous comparons aussi les bornes d'erreur obtenues aux résultats déjà connus ([5],[7],[8])

I - INTRODUCTION

1) Hypothèses

Soit $T : D \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé de domaine D dense dans X .

Soient $\varphi_0 \in D$ et $\varphi_0^* \in X^*$ deux vecteurs normés tels que $\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle \neq 0$.

L'opérateur $P_0 : X \rightarrow X$ ainsi défini :

$$P_0 x = \frac{\langle x, \varphi_0^* \rangle \varphi_0}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle}$$

est une projection continue de rang 1 dont l'image est incluse dans D .

L'opérateur $TP_0 : X \rightarrow X$ est un opérateur fermé de domaine X , donc il est continu (d'après le théorème du graphe fermé). Par suite l'opérateur $P_0 TP_0 : X \rightarrow X$ est un opérateur continu. Soit λ_0 le nombre défini par $\lambda_0 P_0 = P_0 TP_0$.

Considérons l'opérateur $T_0 : D \subseteq X \rightarrow X$ de domaine D défini ainsi :

$$x \in D \rightarrow T_0 x = \lambda_0 P_0 x + (1-P_0)T(1-P_0)x$$

Il est clair que λ_0 est une valeur propre de T_0 et que φ_0 est un vecteur propre associé.

Nous supposons que l'opérateur $T_0 : D \subseteq X \rightarrow X$ est fermé et que λ_0 en est une valeur propre simple et isolée.

Puisque $P_0 TP_0 = \lambda_0 P_0$ est un opérateur borné, l'hypothèse que nous venons de faire équivaut à supposer que l'opérateur

$$(1-P_0)T(1-P_0) : (1-P_0)D \subseteq (1-P_0)X \rightarrow (1-P_0)X$$

est fermé et que λ_0 n'appartient pas à son spectre.

Vu ces hypothèses, la résolvante réduite S_0 de T_0 en λ_0 existe (voir chapitre I paragraphe I.1.b).

Nous désignerons par \bar{S}_0 la restriction de S_0 à $(1-P_0)X$; l'opérateur \bar{S}_0 vérifie :

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &: (1-P_0)X \rightarrow (1-P_0)D \subseteq (1-P_0)X \\ \bar{S}_0(T_0 - \lambda_0)x &= x, \quad \forall x \in (1-P_0)D \\ (T_0 - \lambda_0)\bar{S}_0x &= x, \quad \forall x \in (1-P_0)X \\ \|\bar{S}_0\| &\leq \|S_0\| \end{aligned}$$

2) Les itérations

Considérons la famille d'opérateurs :

$$T(t) = T_0 + t(T - T_0) : D \subseteq X \rightarrow X, \quad t \in \mathbb{C}$$

D'après le chapitre I, nous savons que, pour $|t|$ assez petit, l'opérateur $T(t)$ admet une valeur propre $\lambda(t)$ et un vecteur propre $\varphi(t)$ qui sont analytiques :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \lambda_n \\ \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n, \quad \varphi_n \in (1-P_0)D \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

Les coefficients λ_n et φ_n sont donnés par les formules (8.1) et (8.2) du chapitre précédent. Dans le cas particulier que nous envisageons, ces formules deviennent :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & T_0 \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0 \\
 (2) \quad & \varphi_1 = -S_0 T \varphi_0 = -\bar{S}_0 (1-P_0) T \varphi_0 \\
 (3) \quad & \lambda_1 = 0 \\
 (4) \quad & \varphi_k = \bar{S}_0 \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \varphi_{k-i}, \quad \text{pour } k \geq 2 \\
 (5) \quad & \lambda_k = \frac{\langle P_0 T \varphi_{k-1}, \varphi_0^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle}, \quad \text{pour } k \geq 2
 \end{aligned}$$

Nous aurons aussi besoin dans la suite des séries (λ_n) et (ψ_n) , $n \geq 1$, déjà introduites au paragraphe III.2.a. du chapitre I. Ici, les séries (λ_n) et (ψ_n) sont définies par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \psi_1 = (1-P_0) T \varphi_0 \\
 (7) \quad & \lambda_1 = 0 \\
 (8) \quad & \psi_n = \bar{S}_0 \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \psi_{n-i}, \quad n \geq 2 \\
 (9) \quad & \lambda_n = \frac{\langle \psi_{n-1}, (TS_0)^* \varphi_0^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle}, \quad n \geq 2
 \end{aligned}$$

3) Notations

On adopte les notations suivantes :

- $u_0 = (T-T_0)\varphi_0 = (1-P_0)T\varphi_0$, vecteur résiduel
- $u = S_0 u_0 = S_0(T-T_0)\varphi_0$
- $v_0^* = (T^*-T_0^*)\varphi_0^*$, si v_0^* est défini (voir le paragraphe 4)
- $v^* = [(T-T_0)S_0]^* \varphi_0^*$
- $\eta = |\langle u_0, v^* \rangle| = |\langle (T-T_0)\varphi_0, [(T-T_0)S_0]^* \varphi_0^* \rangle|$
- $\Gamma = \|\bar{S}_0\|$
- $p = \|P_0\| = |\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle|^{-1}$
- $\epsilon = p \cdot \max(\eta\Gamma, \|[(T-T_0)S_0]^* \varphi_0^*\| \|S_0(T-T_0)\varphi_0\|)$
 $= p \cdot \max(\eta\Gamma, \|v^*\| \|u^*\|)$

- Soit S la fonction suivante :

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}, \quad \text{pour } |x| \leq 1/4$$

Pour $|x| \leq 1/4$, $S(x)$ admet le développement :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{n}{2n} x^n$$

Nous poserons aussi :

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{pour } |x| \leq 1/4 \text{ et } k \geq 0$$

Les coefficients a_n vérifient :

$$(1) \quad a_n = \sum_{k=1}^n a_{k-1} a_{n-k}$$

4) Remarque

Revenons sur les hypothèses du paragraphe 1. L'opérateur T de domaine dense D admet un adjoint $T^* : D^* \subseteq X^* \rightarrow X^*$; D^* est dense dans X^* car $\rho(T) \neq \emptyset$ (voir [6] p. 169). Si on suppose $\varphi_0^* \in D^*$, alors Lemordant dans [7], montre que la décomposition de T par P_0 donne un opérateur T_0 fermé de domaine D .

En pratique, l'opérateur T est donné, et l'on a quelque liberté sur le choix de la projection P_0 (qui est censée approcher la projection spectrale P de T). Puisque D^* est dense dans X^* , il n'y a pas d'inconvénient à supposer : $\varphi_0^* \in D^*$.

Ajoutons que cette hypothèse fait apparaître une plus grande symétrie dans les quantités introduites aux paragraphes précédents ; par exemple, de $[(T-T_0)S_0]^* \varphi_0^* = S_0^*(T-T_0)^* \varphi_0^*$ on déduit :

$$\eta = |\langle S_0(T-T_0)\varphi_0, (T-T_0)^*\varphi_0^* \rangle| = |\langle (T-T_0)\varphi_0, S_0^*(T-T_0)^*\varphi_0^* \rangle|$$

$$\varepsilon = p.\max(\eta\Gamma, \|S_0^*(T-T_0)^*\varphi_0^*\| \|S_0(T-T_0)\varphi_0\|).$$

Dans la suite, nous ne conserverons que l'hypothèse : T_0 fermé de domaine D . Mais répétons que la condition $\varphi_0^* \in D^*$, simple et naturelle, s'impose en pratique.

II - MAJORATION DES QUANTITES $|\lambda_k|$ et $\|\psi_k\|$:

Vu le résultat obtenu au chapitre I paragraphe , nous considérons les séries (λ_k) et (ψ_k) , pour $k \geq 1$, plutôt que les séries (λ_k) et (ψ_k) , pour $k \geq 0$. Nous allons donner, par récurrence, des bornes pour les quantités $|\lambda_k|$ et $\|\psi_k\|$.

1) Hypothèse de récurrence

Nous faisons l'hypothèse suivante pour $k \geq 1$:

	$\psi_{2k} = 0$
(H _k)	$\psi_{2k+1} = M_k S_0 T \varphi_0$
	$M_k : (1-P_0)X \rightarrow (1-P_0)X$ est un opérateur continu tel que : $\ M_k\ \leq a_k \eta \rho \epsilon^{k-1}$

L'hypothèse H₁ est vraie comme le montrent les calculs suivants :

$$- \psi_2 = \bar{S}_0 \lambda_1 \psi_1 = 0$$

$$- \lambda_2 = \frac{\langle \psi_1, v^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle} = \frac{\langle T \varphi_0, v^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle}$$

$$- \psi_3 = \lambda_2 \bar{S}_0 \psi_1 = \lambda_2 S_0 T \varphi_0 = M_3 S_0 T \varphi_0$$

$$\text{avec : } M_3 = \lambda_2 : (1-P_0)X \rightarrow (1-P_0)X$$

$$\text{et : } \|M_3\| = |\lambda_2| = \eta = a_1 \eta \epsilon^0$$

2) Vérification de l'hypothèse de récurrence

Supposons que (H_k) soit vrai pour $1 \leq k \leq \ell-1$, où ℓ est un entier supérieur ou égal à 2.

Une conséquence immédiate de cette hypothèse est :

- $\lambda_{2k+1} = 0$ pour $1 \leq k \leq \ell-1$
- $|\lambda_{2k}| = \frac{|\langle M_{k-1} S_0 u, v^* \rangle|}{|\langle \psi_0, \psi_0^* \rangle|}$
- $|\lambda_{2k}| \leq a_{k-1} \eta p \epsilon^{k-1}$ pour $2 \leq k \leq \ell$

Puisque $\lambda_1 = 0$ et $|\lambda_2| = a_0 \eta$, on a en fait :

$$(11) \quad \lambda_{2k+1} = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq \ell-1$$

$$(12) \quad |\lambda_{2k}| \leq a_{k-1} \eta p \epsilon^{k-1} \text{ pour } 1 \leq k \leq \ell$$

Montrons maintenant que l'hypothèse (H_ℓ) est vraie :

Examinons $\Psi_{2\ell}$

$$\begin{aligned} \Psi_{2\ell} &= \sum_{i=1}^{2\ell-1} \lambda_i \bar{S}_0 \Psi_{2\ell-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\ell-1} \lambda_{2i+1} \bar{S}_0 \Psi_{2(\ell-i)-1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} \lambda_{2i} S_0 \Psi_{2(\ell-i)} \end{aligned}$$

D'après notre hypothèse de récurrence et sa conséquence (11), on a donc :

$$\Psi_{2\ell} = 0.$$

Examinons $\Psi_{2\ell+1}$:

$$\begin{aligned}\Psi_{2\ell+1} &= \sum_{i=1}^{2\ell} \lambda_i \bar{S}_0 \Psi_{2\ell+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_{2i} \bar{S}_0 \Psi_{2(\ell-i)+1} \quad , \text{ d'après (11)}\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H_k) , pour $1 \leq k \leq \ell-1$, on a :

$$\Psi_{2\ell+1} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \bar{S}_0 [\lambda_{2i} M_{\ell-i}] S_0^T \varphi_0 + {}_{2\ell} S_0^T \varphi_0$$

Posons :

$$M_{\ell} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \lambda_{2i} \bar{S}_0 M_{\ell-i} + \lambda_{2\ell}$$

D'une part : $\Psi_{2\ell+1} = M_{\ell} S_0^T \varphi_0$

D'autre part, M_{ℓ} est un opérateur linéaire continu de $(1-P_0)X$ dans $(1-P_0)X$ dont la norme vérifie :

$$\|M_{\ell}\| \leq \sum_{i=1}^{\ell-1} |\lambda_{2i}| \Gamma \|M_{\ell-i}\| + |\lambda_{2\ell}|$$

$$\|M_{\ell}\| \leq \sum_{i=1}^{\ell-1} a_{i-1} \eta p \Gamma \varepsilon^{\ell-2} a_{\ell-i} + a_{\ell-1} \eta p \varepsilon^{\ell-1}$$

(d'après $(H_1) \dots (H_{\ell-1})$, et d'après (12))

$$\|M_{\ell}\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_{i-1} a_{\ell-i} \right) \eta p \varepsilon^{\ell-1}$$

$$\|M_{\ell}\| \leq a_{\ell} \eta p \varepsilon^{\ell-1} \quad , \quad \text{d'après (11)}$$

L'hypothèse (H_ρ) est donc vérifiée.

En conclusion l'hypothèse (H_k) est vraie quelque soit $k \geq 1$

Ajoutons les inégalités suivantes qui découlent de l'hypothèse (H_k) , pour $k \geq 1$:

$$(13) \quad \psi_{2k} = 0$$

$$(14) \quad \|\psi_{2k+1}\| \leq \frac{\eta p \|S_0 u_0\|}{\varepsilon} a_k \varepsilon^k$$

$$(15) \quad \varphi_{2k} = 0$$

$$(16) \quad \|\varphi_{2k+1}\| \leq \frac{\eta p \|S_0 u_0\|}{\varepsilon} a_k \varepsilon^k$$

III - CONVERGENCE DES SERIES $\varphi(t)$ ET $\lambda(t)$:

Les résultats (11), (12), (13), (14) et les propriétés du développement en série de la fonction S , montrent que pour $|t| \leq 1/4$, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \eta_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n$ convergent. D'après le lemme III.2.b du chapitre I, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \lambda_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n$ convergent vers une valeur propre $\lambda(t)$ et un vecteur propre $\varphi(t)$ de l'opérateur : $T(t) = T_0 + t(T - T_0)$.

En particulier, si $\varepsilon \leq 1/4$, nous pouvons considérer le cas $t = 1$ et énoncer le théorème suivant :

Théorème :

Si $\varepsilon \leq 1/4$ alors,

a) la série $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ converge vers une valeur propre λ de l'opérateur T

b) On a les bornes d'erreur suivantes :

$$|\lambda - \sum_{i=0}^{2k} \lambda_i| = |\lambda - \sum_{i=0}^{2k+1} \lambda_i| \leq \eta p S_k(\epsilon), \text{ pour } k \geq 0$$

En particulier :

$$|\lambda - \lambda_0| = |\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq \eta p S(\epsilon) = \eta p \frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}$$

c) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ converge vers le vecteur propre φ de T associé à λ qui vérifie : $P_0 \varphi = \varphi_0$

d) On a les bornes d'erreur suivantes :

$$\|\varphi - \sum_{i=0}^{2k+1} \varphi_i\| = \|\varphi - \sum_{i=0}^{2k+2} \varphi_i\| \leq \frac{\eta p \Gamma \|S_0 u_0\|}{\epsilon} S_{k+1}(\epsilon), \quad k \geq 0$$

$$\|\varphi - \varphi_0\| \leq \|S_0 u_0\| + \frac{\eta p \Gamma \|S_0 u_0\|}{\epsilon} S_1(\epsilon)$$

e) Les bornes suivantes sont un peu moins fines mais plus simples :

$$\|\varphi - \sum_{i=0}^{2k+1} \varphi_i\| = \|\varphi - \sum_{i=0}^{2k+2} \varphi_i\| \leq \|S_0 u_0\| S_{k+1}(\epsilon), \quad k \geq 0$$

$$\|\varphi - \varphi_0\| \leq \|S_0 u_0\| S(\epsilon)$$

Si on remarque que la condition $\epsilon \leq 1/4$ entraîne $1 \leq S(\epsilon) \leq 2$, le théorème ci-dessus a pour corollaire les résultats simples suivants :

Corollaire :

Si $\varepsilon \leq 1/4$, alors T admet une valeur propre λ et un vecteur propre qui vérifient :

$$\cdot |\lambda - \lambda_0| \leq 2\eta p = 2\|P_0\| |\langle u, v^* \rangle|$$

$$\cdot \|\varphi - \varphi_0\| \leq 2\|S_0 u_0\| = 2\|S_0(T - T_0)\varphi_0\|$$

Remarque :

Les développements de $\lambda(t)$ et $\varphi(t)$ montrent que ηp et $\|S_0 u_0\|$ sont les termes principaux de l'erreur sur $|\lambda - \lambda_0|$ et $\|\varphi - \varphi_0\|$ respectivement.

IV - LE SPECTRE DE T AU VOISINAGE DE λ_0 :

Nous allons préciser le spectre de T au voisinage de λ_0 , en montrant le résultat suivant :

Théorème

Si $\varepsilon \leq 1/4$, l'opérateur T a une seule valeur propre λ dans le disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z - \lambda_0| < R\}$ avec

$$R = \frac{1 - \eta \Gamma p S(\varepsilon) - p \|u\| \|v^*\|}{\Gamma(1 - \eta \Gamma p S(\varepsilon))}$$

De plus la multiplicité algébrique de λ vaut 1. Ajoutons pour préciser l'ordre de grandeur de R que R vérifie :

$$\frac{1}{2\Gamma} \leq R \leq \frac{1}{\Gamma}$$

Démonstration :

Elle est assez longue ; nous la donnons en quatre étapes.

a) Rappelons d'abord l'inégalité :

$$\epsilon = p \max (\eta\Gamma, \|u\| \|v^*\|) \leq 1/4$$

Remarquons ensuite que $S(\epsilon)$ vérifie alors :

$$1 \leq S(\epsilon) \leq 2$$

D'où l'on déduit successivement

$$\eta p \Gamma S(\epsilon) \leq 1/2$$

$$1 - \eta p \Gamma S(\epsilon) \geq 1/2$$

D'où les inégalités :

$$0 \leq p \|u\| \|v^*\| \leq 1/2 (1 - \eta p \Gamma S(\epsilon))$$

$$p \|u\| \|v^*\| \leq (1 - \eta p \Gamma S(\epsilon))^2$$

De la première ligne on déduit :

$$\frac{1}{2\Gamma} \leq R \leq \frac{1}{\Gamma}$$

et de la seconde :

$$\eta p \Gamma S(\epsilon) \leq 1 - \frac{p \|u\| \|v^*\|}{1 - \eta p \Gamma S(\epsilon)} = R \Gamma$$

Or, d'après la partie IV, on sait que T admet une valeur propre λ qui vérifie :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \eta S(\epsilon) \leq R$$

Donc λ appartient au disque Δ .

- b) Nous allons maintenant montrer que λ est le seul point du spectre de T qui appartient à Δ , en prouvant que pour $z \in \Delta - \{\lambda\}$, la résolvante de T existe.

Considérons l'équation résolvante :

$$(T-z)y = x \text{ avec } x \in X \text{ et } y \in D.$$

Posons : $x = x' + x'' = Px + (1-P)x$

$$y = y' + y'' = Py + (1-P)y$$

L'équation résolvante équivaut au système suivant :

$$(17) \quad P_0(T-z)(y' + y'') = x'$$

$$(18) \quad (1-P_0)(T-z)(y' + y'') = x''$$

Par hypothèse l'opérateur $(1-P_0)(T_0 - \lambda_0)(1-P_0)$ est inversible dans $(1-P_0)X$ et a \bar{S}_0 pour inverse.

Donc pour $|z - \lambda_0| < \frac{1}{\Gamma}$, l'opérateur $(1-P_0)(T-z)(1-P_0)$ est inversible dans $(1-P_0)X$ et son inverse $S(z)$ vérifie :

$$(19) \quad S(z) = \bar{S}_0 \sum_{n=0}^{\infty} [(z - \lambda_0)\bar{S}_0]^n$$

Remarquons que, comme \bar{S}_0 , $S(z)$ est à valeurs dans $(1-P_0)D$.
Pour $|z - \lambda_0| < \frac{1}{\Gamma}$, l'équation (18) s'écrit :

$$(20) \quad y'' = S(z) [x'' - (1-P_0)(T-z)y']$$

Expression que l'on reporte dans (17) pour obtenir après quelques calculs faciles :

$$(21) \quad \langle (P_0(T-z) - P_0TS(z)(1-P_0)T) \varphi_0, \varphi_0^* \rangle y' = \\ \langle x' - P_0TS(z)x'', \varphi_0^* \rangle \varphi_0$$

L'équation résolvante équivaut donc à (20) et (21).

Si le coefficient $c(z) = \langle (P_0(T-z) - P_0TS(z)(1-P_0)T) \varphi_0, \varphi_0^* \rangle$ n'est pas nul, alors (y', y'') est une fonction continue de (x', x'') . Autrement dit, si $|z - \lambda_0| < \frac{1}{\Gamma}$ et $c(z) \neq 0$, alors la résolvante de $(T-z)$ existe.

c) La valeur propre λ de T vérifie :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \eta p S(\varepsilon) \leq \frac{1}{2\Gamma} \leq \frac{1}{\Gamma}$$

Puisque λ n'appartient pas à $\rho(T)$ c'est que l'on a $c(\lambda) = 0$. Alors $c(z)$ s'écrit :

$$c(z) = c(z) - c(\lambda) = -(z - \lambda) [1 + \langle P_0TS(z)S(\lambda)(1-P_0)T \varphi_0, \varphi_0^* \rangle]$$

D'après (19), le crochet de dualité s'écrit :

$$\langle P_0TS(z)S(\lambda)(1-P_0)T \varphi_0, \varphi_0^* \rangle \\ = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} [(z - \lambda_0) \bar{S}_0]^n, \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0) \bar{S}_0]^n \cdot S_0 T \varphi_0, (TS_0)^* \varphi_0^* \right\rangle$$

D'où la majoration :

$$|\langle P_0TS(z)S(\lambda)(1-P_0)T \varphi_0, \varphi_0^* \rangle| \leq \frac{p \|u\| \|v^*\|}{(1 - \eta \Gamma p S(\varepsilon))(1 - |z - \lambda_0| \Gamma)}$$

Cette dernière quantité est strictement inférieure à 1 quand z appartient à Δ .

En résumé, quand z appartient à $\Delta - \{\lambda\}$, le coefficient $c(z)$ n'est pas nul, et z appartient à $\rho(T)$. Le spectre de T à l'intérieur de Δ se réduit donc à λ .

- d) Enfin, on tire des équations (20) et (21) par intégration autour de λ que la projection spectrale associée à T et λ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{cases} y' = \frac{\langle x' - P_0 T S(\lambda) x'', \varphi_0^* \rangle}{1 + \langle P_0 T [S(\lambda)]^2 T \varphi_0, \varphi_0^* \rangle} \varphi_0 \\ y'' = \frac{\langle x' - P_0 T S(\lambda) x'', \varphi_0^* \rangle}{1 + \langle P_0 T [S(\lambda)]^2 T \varphi_0, \varphi_0^* \rangle} S(\lambda) (1 - P_0) T \varphi_0 \end{cases}$$

Puisque P est de rang 1, la multiplicité algébrique de λ est 1. (sans aller jusqu'à calculer P , on pouvait aussi conclure en remarquant que dans le développement de $(T-z)^{-1}$ l'ordre du pôle λ est 1).

V - OPTIMALITE DES BORNES

Les bornes données aux paragraphes b. et e. du théorème III sont optimales en tant que fonctions de $(x, y) = (\eta p, \varepsilon)$ pour la valeur propre et en tant que fonctions de $(z, y) = (\|S_0 u_0\|, \varepsilon)$ pour le vecteur propre.

Il suffit, pour le montrer, de considérer la matrice 2×2 suivante :

$$T(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha t \\ -\beta t & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{avec } P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} ;$$

Les nombres α, β, γ sont strictement positifs.

On vérifie sur cet exemple les relations suivantes :

$$x = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad y = \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}, \quad z = \frac{\beta}{\gamma}$$

et :

$$\lambda(t) = xt^2 S(yt^2)$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -zt S(yt^2) \end{pmatrix}$$

Ce qui assure que (pour $y \leq 1/4$ et $t = 1$) les égalités ont lieu dans les bornes b. et e. du théorème III.

VI - COMPARAISON DE NOS RESULTATS AUX RESULTATS DEJA CONNUS

Les hypothèses et les notations étant toujours celles du paragraphe I, rappelons que le théorème III nous a donné en particulier les résultats suivants :

Sous l'hypothèse

$$(\Omega) \left\{ \begin{array}{l} \text{(H)} \quad \epsilon \leq 1/4 \\ \text{on a :} \\ - \quad |\lambda - \lambda_0| \leq \eta \rho S(\epsilon) = B \\ - \quad \lambda \text{ est la seule valeur propre de } T \text{ dans le disque} \\ \quad \quad |z - \lambda_0| < R \quad (R \text{ donné au paragraphe IV}) \\ - \quad \|\varphi - \varphi_0\| \leq \|S_0 u_0\| S(\epsilon) \end{array} \right.$$

Nous allons comparer ce résultat à trois autres concernant le cas d'une valeur propre simple ; les travaux sont cités en imposant nos propres notations (voir I.3).

Nous poserons : $v_0^* = (T^* - T_0^*) \psi_0^*$ (quand v_0^* est défini).

1. Comparaison à Fiedler et Ptak [5]

- a) Dans [5], les auteurs considèrent le cas où T est une matrice de taille $n \times n$ et $P_0 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ la projection canonique (de norme 1) sur un vecteur de base. Trois méthodes itératives, différentes de celle que nous avons envisagée, sont considérées pour le calcul de λ et donnent la même estimation au premier pas pour $|\lambda - \lambda_0|$. Les démonstrations présentées sont très calculatoires et assez fastidieuses ; il n'y a pas de résultat pour le vecteur propre.

Pour la valeur propre, le résultat est le suivant :

Avec les notations $e = \|u_0\| \|v_0\| \Gamma^2$, $\alpha = \frac{\eta \Gamma}{(1-e)^2}$ et sous l'hypothèse :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(H1)} \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\eta \Gamma} + \sqrt{e} < 1, \\ \text{on a :} \\ - |\lambda - \lambda_0| < \frac{\eta}{1-e} S(\alpha) = B_1 \\ - \lambda \text{ est la seule valeur propre de } T \text{ dans le disque} \\ \quad |z - \lambda_0| < R_1, \text{ avec } R_1 = \frac{\eta}{1-e} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}}{2\alpha} \end{array} \right\} (\mathcal{R}_1)$$

- b) Nous allons montrer rapidement sur des exemples que (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}_1) ne sont pas comparables ; c'est-à-dire que des deux hypothèses (H) et (H1) aucune n'implique l'autre ; et que, quand (H) et (H1) sont vérifiées, on ne peut prédire de B ou B_1 et de R ou R_1 , quelle est la borne la plus fine, ou quel est le rayon d'isolation le plus grand. Dans les exemples \mathbb{C}^3 est muni de la norme du maximum.

- (H) \nrightarrow (H₁) :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix} ; \quad \epsilon = \frac{2}{9} ; \quad \epsilon_1 = 2$$

- (H₁) \nrightarrow (H) :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 1 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} ; \quad \epsilon = \frac{4}{9} ; \quad \epsilon_1 = \frac{2}{3}$$

- (H) et (H₁) vraies ; B₁ > B ; R > R₁ ;

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \epsilon = \frac{1}{6} ; \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}$$

$$\cdot B = \frac{1}{3} S\left(\frac{1}{6}\right) ; \quad B_1 = \frac{4}{11} S\left(\frac{1}{6} \times \frac{144}{121}\right)$$

L'inégalité B < B₁ suit car S est une fonction croissante

$$\cdot R = \frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} ; \quad R_1 = \frac{4}{3}$$

- (H) et (H₁) vraies ; B₁ < B ; R < R₁ ;

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & c+1 & 0 \\ x & 0 & c+1 \end{bmatrix} \quad \text{avec : } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } c > 4$$

$$\cdot \epsilon = \frac{1}{c^2} ; \quad \epsilon_1 = \frac{1+\sqrt{x}}{c}$$

. On démontre les deux relations suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B}{\eta} = S\left(\frac{1}{c^2}\right)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B_1}{\eta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c^2}}$$

Or S vérifie : $S(t) > \frac{1}{1-t}$ pour $0 < t < 1/4$;
donc lorsque x est assez voisin de 0 on a : $B > B_1$.

. On démontre également que R et R_1 admettent les développements suivants :

$$R = c\left[\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) - \frac{x}{c^4} S\left(\frac{1}{c^2}\right) + O(x^2)\right]$$

$$R_1 = c\left[\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) + O(x^2)\right]$$

Quand x est proche de 0^+ , on a donc : $R < R_1$.

2. Comparaison à Ptak [8] :

a) Dans [8], Ptak considère le cas d'un opérateur continu de la forme :

$$T : \mathbb{C} \times Y \rightarrow \mathbb{C} \times Y \quad (Y : \text{espace de Banach})$$

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_0 x + \langle y, \alpha^* \rangle \\ x\beta + Cy \end{pmatrix},$$

avec : $\alpha^* \in Y^*$, $\beta \in Y$, $C \in \mathcal{L}(Y)$.

Ce cadre rentre dans le nôtre, si on identifie C à $P_0 X$, Y à $(1-P_0)X$, et si on munit X de la norme $\|P_0 x\| + \|(1-P_0)x\|$, de sorte que $p = 1$.

Ptak établit de façon élégante les résultats suivants (qui ne concernent que la valeur propre) :

Posons $e = \|u_0\| \|v_0^*\| \Gamma^2$

(\mathcal{R}_2)	{	<p>Sous l'hypothèse</p> <p>$(H_2) \quad e < \frac{1}{m_0} \quad , \quad \text{avec } m_0 = 5,22\dots$</p> <p>on a :</p> $ \lambda - \lambda_0 \leq \frac{\eta}{1 - e w_0^2} = B_2 \quad , \quad \text{avec } w_0^2 = 2,44 \dots$
(\mathcal{R}_3)	{	<p>Sous l'hypothèse :</p> <p>$(H_3) \quad e < 1/4$</p> <p>on a :</p> $ \lambda - \lambda_0 \leq \frac{e}{\Gamma} \cdot S(e) = B_3$

- b) Les résultats (\mathcal{R}_2) et (\mathcal{R}_3) sont moins bons que (\mathcal{R}) .
 Les relations $(H_2) \Rightarrow (H)$, $(H_3) \Rightarrow (H)$, $B < B_3$ sont évidentes, et la vérification de $B < B_2$ ne nécessite qu'un calcul élémentaire.

3) Comparaison aux bornes de Lemordant [7]

Sous les hypothèses envisagées au paragraphe I.4, et en étudiant directement les coefficients de la série de perturbation de $\lambda(t)$, Lemordant montre, en particulier, dans [7] les résultats suivants :

$$(\mathcal{R}_4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous les hypothèses :} \\ \\ (H_4) \left\{ \begin{array}{l} - |\langle S_0^k u_0, v_0^* \rangle| \leq a \varepsilon'^k, \quad k \geq 1 \\ - a \geq \Gamma \\ - p a^2 \varepsilon' < 1/4 \end{array} \right. \\ \\ \text{on a :} \\ - |\lambda - \lambda_0| \leq \eta + p a \varepsilon' S_1(p a^2 \varepsilon') \\ - \|\Psi - \varphi_0\| \leq \|S_0 u_0\| S(p a^2 \varepsilon') \\ - \lambda \text{ est la seule valeur propre de } T \text{ dans le} \\ \text{disque} \\ |z - \lambda_0| \leq \frac{2 p a \varepsilon'}{1 + \sqrt{1 - 4 p a^2 \varepsilon'}} \end{array} \right.$$

Il est difficile de comparer rigoureusement (\mathcal{R}_4) à (\mathcal{R}) ; faisons seulement remarquer que si $\varepsilon < 1/4$, le choix :

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{p \Gamma^2}, \quad a = \Gamma$$

est possible, et donne :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \eta + \frac{\varepsilon}{\Gamma} S_1(\varepsilon)$$

$$\|\Psi - \varphi_0\| \leq \|S_0 u_0\| S(\varepsilon)$$

Pour le vecteur propre on retrouve la borne donnée par (\mathcal{R}) , et pour la valeur propre une borne un peu moins bonne ($\eta \leq \frac{\varepsilon}{T}$).

Le résultat (\mathcal{Q}_4) est plus général que (\mathcal{Q}) , car la condition d'application (H_4) est plus large que (H) , et permet de traiter directement le cas de matrices triangulaires (voir [7]), ce que nous pouvons éventuellement faire après transformation de la matrice.

Les bornes données par (\mathcal{Q}) et (\mathcal{Q}_4) ont formellement la même expression ; remarquons que (\mathcal{Q}) met en évidence le facteur η dans la majoration de $|\lambda - \lambda_0|$.

VII - EXEMPLE NUMERIQUE

Nous allons appliquer le résultat (\mathcal{R}) à l'estimation des deux plus grandes valeurs propres de la matrice :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & 3\alpha & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 3\alpha^2 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 2\alpha^3 \end{bmatrix}$$

Cet exemple est tiré de [9], p. 368, avec $\alpha = 10^{-3}$, où sont calculées les valeurs propres de T :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1,002\ 002 \\ \lambda_2 &= 9,969\ 950 \cdot 10^{-4} \\ \lambda_3 &= 4,005\ 294 \cdot 10^{-6} \\ \lambda_4 &= 7,497\ 653 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

Les deux premiers vecteurs propres sont :

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,000\ 999 \\ 0,000\ 001 \\ 0,000\ 000 \end{bmatrix} ; \varphi_2 = \begin{bmatrix} -0,893\ 979 \\ 0,447\ 214 \\ 0,000\ 451 \\ 0,000\ 000 \end{bmatrix}$$

L'espace \mathbb{C}^4 est muni de la norme euclidienne.

Les calculs sont limités à la précision $O(\alpha^2)$.

Les notations sont toujours celles de I.3. ; e_i est le i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^4 .

Première valeur propre

On décompose T par la projection orthogonale P_0 sur le premier vecteur de base : $P_0 = \langle \cdot, \varphi_0^* \rangle \varphi_0$, $p = 1$.

On a donc :

$$\varphi_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\alpha & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 3\alpha^2 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 2\alpha^3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_0 = \begin{bmatrix} 3\alpha-1 & 2\alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 3\alpha^2-1 & 2\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 & 2\alpha^3-1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\lambda_0 = 1$$

$$- \quad u_0 = (T - T_0) \varphi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad S_0 u_0 = \begin{bmatrix} 0(\alpha^2) \\ -\alpha + 0(\alpha^2) \\ 0(\alpha^2) \\ 0(\alpha^2) \end{bmatrix}$$

$$\|S_0 u_0\| = \alpha + 0(\alpha^2)$$

$$- \quad v_0^* = (T^* - T_0^*) \varphi_0^* = [0 ; 2 ; 3 ; 4]$$

$$S_0^* v_0^* = [0(\alpha) ; -2 + 0(\alpha) ; -3 + 0(\alpha) ; -4 + 0(\alpha)]$$

$$\|S_0^* v_0^*\| = \sqrt{29} + 0(\alpha)$$

$$- \quad \eta = 2\alpha + 0(\alpha^2)$$

$$- \quad \|\bar{S}_0\| = \Gamma \leq 1 + 0(\alpha)$$

$$- \quad \text{D'où : } \epsilon = p \max(\eta \Gamma, \|S_0 u_0\| \|S_0^* v_0^*\|) \leq \sqrt{29} \alpha + 0(\alpha^2).$$

- Nous pouvons donc supposer que la condition $\epsilon \leq 1/4$ est vérifiée pour $\alpha = 10^{-3}$; d'où les résultats :

$$\cdot \quad |\lambda - 1| \leq \eta p S(\epsilon) \leq 2\alpha + 0(\alpha^2) \# 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{valeur exacte : } |\lambda - 1| = 2,002 \cdot 10^{-3}$$

$$\cdot \quad \|\varphi - \varphi_0\| \leq \|S_0 u_0\| S(\epsilon) \leq \alpha + 0(\alpha^2) \# 10^{-3}$$

$$\text{valeur exacte : } \|\varphi - \varphi_0\| = 0,999 \cdot 10^{-3}$$

$$\cdot \quad R = \frac{1 - 2\alpha - \alpha\sqrt{29} + 0(\alpha^2)}{1 - 2\alpha + 0(\alpha^2)} = 1 - \alpha\sqrt{29} + 0(\alpha^2) \# 0,994 \ 6$$

$$\text{valeur exacte : } R = 1,001 \ 0$$

Deuxième valeur propre

Si on décompose T par la projection orthogonale sur le deuxième vecteur de base, la condition $\epsilon \leq 1/4$ n'est pas vérifiée.

Ayant remarqué que $-2e_1+e_2$ est un vecteur propre approché de T, on définit P_0 comme la projection sur $-2e_1+e_2$ parallèlement à l'hyperplan $(e_1 ; e_3 ; e_4)$. On a : $p = \|P_0\| = \sqrt{5}$.

Soit \mathcal{B} la base $\{e_1 ; -2e_1+e_2 ; e_3 ; e_4\}$ et \mathcal{B}^* la base adjointe $\{e_1+2e_2 ; e_2 ; e_3 ; e_4\}$.

Dans la base \mathcal{B} , on a :

$$- \quad T = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & 2\alpha & 3+4\alpha & 4+2\alpha \\ \alpha & \alpha & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 3\alpha^2 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 2\alpha^3 \end{bmatrix}$$

$$- \quad T_0 = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & 0 & 3+4\alpha & 4+2\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+\alpha^2 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 2\alpha^3 \end{bmatrix}$$

$$- \quad \bar{S}_0 = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 3+4\alpha & 4+2\alpha \\ 0 & 3\alpha-1 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha^2-1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$- \quad \lambda_0 = \alpha$$

$$- \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2e_1+e_2) = -0,894 \ 427 \ e_1 + 0,447 \ 214 \ e_2$$

$$u_0 = (T - T_0) \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_0 u_0 = \alpha \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} + 0(\alpha^2)$$

$$\|S_0 u_0\| = \alpha \sqrt{\frac{26}{5}} + 0(\alpha^2)$$

Dans la base \mathcal{B}^* , on a :

$$\psi_0^* = e_2$$

$$v_0^* = (T^* - T_0^*) \varphi_0^* = [\alpha ; 0 ; 2\alpha ; \alpha]$$

$$S_0^* v_0^* = [0 ; 0 ; 1 ; 3] + \alpha [1 ; 0 ; 4 ; 0] + 0(\alpha^2)$$

$$\|S_0^* v_0^*\| = \sqrt{10} + \alpha \sqrt{\frac{8}{5}} + 0(\alpha^2)$$

$$D'où : \eta = |\langle u_0, S_0^* v_0^* \rangle| = |\langle S_0 u_0, v_0^* \rangle| = \frac{3\alpha^2}{\sqrt{5}} + 0(\alpha^3)$$

On obtient une majoration de $r = \|\bar{S}_0\|$, en écrivant \bar{S}_0 sous la forme :

$$\bar{S}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+\alpha & 3+4\alpha & 4+2\alpha & \\ \hline 0 & -\alpha & 0 & \\ 0 & 0 & -\alpha & \\ \hline & & & + 0(\alpha^2) \end{array} \right)^{-1}$$

$$\bar{S}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\alpha} & \frac{3+4\alpha}{\alpha(1+\alpha)} & \frac{4+2\alpha}{\alpha(1+\alpha)} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} + 0(\alpha^0)$$

Une majoration de la norme euclidienne de la matrice s'obtient en utilisant l'inégalité : $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{3} \|\cdot\|_1$ (normes matricielles).

D'où l'on tire :

$$\Gamma \leq \sqrt{3} \left\{ \frac{5}{\alpha} + O(\alpha^0) \right\}$$

On en déduit :

$$\varepsilon = \rho \max(\eta\Gamma, \|S_0 u_0\| \|S_0^* v_0^*\|) \leq 15\sqrt{3}\alpha + O(\alpha^2)$$

Pour $\alpha = 10^{-3}$, nous considérons que la condition $\varepsilon \leq 1/4$ est vérifiée ; d'où les bornes suivantes :

$$- |\lambda - 0,001| \leq \eta \rho S(\varepsilon) \leq 3\alpha^2 + O(\alpha^3) \# 3.10^{-6}$$

$$\text{valeur exacte : } |\lambda - 0,001| = 3,005.10^{-6}$$

$$- \|\varphi - \varphi_0\| \leq \|S_0 u_0\| (S(\varepsilon) \leq \alpha \frac{26}{5} + O(\alpha^2)) \# 2,3.10^{-3}$$

$$\text{valeur exacte : } \|\varphi - \varphi_0\| = 0,450.10^{-3}$$

$$- R = \frac{1 - \eta\Gamma\rho S(\varepsilon) - \|S_0 u_0\| \|S_0^* v_0^*\|}{(1 - \eta\Gamma\rho S(\varepsilon))} = \frac{\alpha}{5\sqrt{3}} + O(\alpha^2) \# 1,2.10^{-4}$$

$$\text{valeur exacte : } R = 9,9.10^{-4}.$$

On remarquera sur cet exemple, que la valeur importante de $\Gamma \# 9.10^3$ est balancée par la valeur petite de $\eta \# 10^{-6}$.

Cet exemple met aussi en évidence l'importance du produit scalaire $\langle u_0, S_0^* v_0^* \rangle$: alors que u_0 et $S_0^* v_0^*$ sont respectivement d'ordres α et α^0 , le produit scalaire est d'ordre α^2 .

VIII - EXPERIENCES NUMERIQUES

Voir l'annexe , pour ce qui concerne les opérateurs intégraux.

Nous avons testé les bornes données par le théorème de la partie III sur les éléments propres des opérateurs $T = \text{EXP}$ et $T = \text{COS}$.

L'espace de référence est $\mathcal{L}^2(0,1)$.

L'opérateur a été approché sur n points ($n \in \{4,6,8,10,12,16,20,30\}$) par l'opérateur T_n^M ($M \in \{F,N,G,S\}$).

De T_n^M on calcule un vecteur propre normé φ_n^M , puis le quotient de Rayleigh associé à φ_n^M et T : $\lambda_n^M = \langle T\varphi_n^M, \varphi_n^M \rangle$.

Désignons par P_0 la projection orthogonale sur φ_n^M et T_0 l'opérateur $T_0 = P_0 T P_0 + (1-P_0) T (1-P_0)$; T_0 admet $\lambda_0 = \lambda_n^M$ et $\varphi_0 = \varphi_n^M$ pour éléments propres.

Nous n'avons pas calculé exactement les quantités qui interviennent au théorème de la partie III, mais des majorations de celles-ci, en tenant compte de la symétrie de T et T_0 :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \leq \varepsilon' = (\Gamma \| (T-T_0) \varphi_0 \|^2 \\ |\lambda - \lambda_0| \leq \eta S(\varepsilon) \leq \Gamma \| (T-T_0) \varphi_0 \|^2 S(\varepsilon') \end{array} \right.$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\varphi - \varphi_0\| \leq \|S_0 (T-T_0) \varphi_0\| S(\varepsilon) \leq \Gamma \| (T-T_0) \varphi_0 \| S(\varepsilon') \end{array} \right.$$

Pour les quatre méthodes F, N, G, S, nous avons considéré

- les 3 plus grandes valeurs propres de EXP : tableaux 1,2,3.
- la plus grande valeur propre de COS : tableau 5.

Si nous négligeons les résultats fournis par la méthode de Sloan appliquée à la première valeur propre de EXP, qui donnent une majoration excessive de $|\lambda - \lambda_0|$, on constate que les bornes données par (22) sont plus grandes

dans un rapport de :

- 5 environ pour la première valeur propre
- 10 environ pour la deuxième
- 50 environ pour la troisième

L'inégalité (23) a été vérifiée pour le vecteur propre approché, fourni par la méthode de Nyström, associée aux 3 plus grandes valeurs propres de EXP : Tableau 4.

Tableau 1 : Opérateur : $T = EXP$
première valeur propre

Notations : n : nombre de points de discrétisation de T_n^M
 M : méthode de discrétisation

n	M	(1)	(2)	(3)	(4)	5
4	F	2,3-2	3,5-4	4,4-4	4,2-4	1
	N	7,8-5	2,8-9	4,7-9	1,4-9	3
	G					
	S					
6	F	1,3-2	1,1-4	1,4-4	1,2-4	1
	N	1,5-5	1,5-10	1,9-10	5,7-11	3
	G	2,1-3	3,0-6	3,7-6	5,8-7	6
	S	2,0-3	2,4-6	3,0-6	3,7-11	10^4
8	F	8,5-3	4,6-5	6,0-5	5,0-5	1
	N	4,9-6	1,5-11	1,9-11	5,8-12	3
	G	1,1-3	7,6-7	9,5-7	5,7-8	17
	S	1,0-5	6,4-7	8,0-7	1,2-11	10^5
10	F	6,1-3	2,4-5	3,0-5	2,9-5	1
	N	2,0-6	2,6-12	3,2-12	9,7-13	3
	G	6,6-4	2,8-7	3,5-7	4,3-8	8
	S	6,0-4	2,3-7	2,9-7	4,7-12	10^5
12	F	4,7-3	1,4-5	1,8-5	1,0-5	2
	N	9,7-7	6,0-13	9,0-13	2,3-13	3
	G					
	S	4,0-4	1,0-7	1,3-7	2,2-12	10^4
16	F	3,0-3	5,8-6	9,0-6	5,6-6	1
	N	3,1-7	6,0-14	8,0-14	2,3-14	3
	G					
	S	2,2-4	3,0-8	3,8-8	6,6-13	10^5
20	F	2,2-3	3,0-6	3,8-6	3,8-6	1
	N	1,3-7	1,0-14	1,3-14	4,2-15	3
	G	1,4-4				
	S		1,2-8	1,5-8	2,6-13	10^5

(1) : $\|(T-T_0)\varphi_0\|$

(2) : $\epsilon' = (\Gamma \|(T-T_0)\varphi_0\|)^2$

$\Gamma \neq 0,80$

(3) : $\Gamma \|(T-T_0)\varphi_0\|^2 S(\epsilon')$

(4) : $|\lambda - \lambda_0|$

(5) : quotient $\frac{(3)}{(4)}$

n	M	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
4	F	1,8-2	2,9-2	3,9-3	8,4-4	5
	N	5,9-4	3,3-5	3,4-6	1,6-7	21
	G	4,1-3	1,6-3	1,6-4	1,6-5	10
	S	4,8-2	0,22	2,2-2	1,8-3	11
6	F	8,7-3	7,1-3	8,0-4	2,9-4	3
	N	1,2-4	1,4-6	1,4-7	6,7-9	21
	G	1,5-3	2,1-4	2,2-5	2,1-6	10
	S	1,7-2	2,8-2	2,9-3	2,4-4	12
8	F	5,3-3	2,7-3	2,8-4	1,3-4	2
	N	3,8-5	1,4-7	1,4-8	6,7-10	21
	G	7,6-4	5,5-5	5,6-6	8,8-7	6
	S	8,8-3	7,4-3	7,6-4	6,2-5	12
10	F	3,7-3	1,3-3	1,4-4	7,7-5	2
	N	1,6-5	2,3-8	2,4-9	1,1-10	22
	G	4,6-4	2,0-5	2,1-6	2,3-7	8
	S	5,3-3	2,7-3	2,8-4	2,3-5	12
12	F	2,8-3	7,1-4	8,0-5	5,2-5	2
	N	7,5-6	5,3-9	6,0-10	2,6-11	23
	G	3,1-4	9,1-6	9,3-7	3,1-7	3
	S	3,6-3	1,2-3	1,2-4	1,0-5	12
16	F	1,7-3	2,8-4	2,9-5	1,8-5	2
	N	2,4-6	5,3-10	6,0-11	2,7-12	22
	G	1,6-4	2,6-6	2,7-7	2,2-8	12
	S	1,9-3	3,5-4	3,6-5	3,0-6	12
20	F	1,2-3	1,4-4	1,5-5	1,1-5	1
	N	9,8-7	9,0-11	1,0-11	4,4-13	23
	G					
	S	1,2-3	1,4-4	1,4-5	1,2-6	12
30	F	6,5-4	4,0-5	4,2-6	4,1-6	1
	N	1,9-7	1,9-6	3,6-13	1,7-14	21
	G					
	S	5,1-4	2,5-5	2,6-6	2,1-7	12

Tableau 2 :
opérateur T = EXP
deuxième valeur propre

Notations :
Celles du tableau 1
 $\Gamma = 9,8$

n	M	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
4	F	6,4-3	3,4		2,4-4	
	N	4,8-3	2,0		5,2-5	
	G	1,1-3	9,0-2	3,2-4	5,6-5	6
	S	0,35	10 ⁴		8,8-2	
6	F	3,4-3	0,99		7,8-5	
	N	1,0-3	8,4-2	2,9-4	2,2-6	132
	G	3,9-4	1,2-2	4,3-5	7,1-6	6
	S	0,13	10 ³		1,3-2	
8	F	2,1-3	0,36		3,8-5	
	N	3,2-4	8,6-3	2,8-5	2,3-7	122
	G	2,0-4	3,2-3	1,1-5	2,1-6	5
	S	6,7-2	360		3,3-3	
10	F	1,4-3	0,16	6,6-4	2,2-5	30
	N	1,3-4	1,4-3	5,0-6	3,9-8	128
	G	1,2-4	1,2-3	4,2-6	4,0-7	11
	S	4,1-2	130		1,2-3	
12	F	9,9-4	8,3-2	2,9-4	1,5-5	18
	N	6,4-5	3,4-4	1,2-6	9,1-9	132
	G	8,1-5	5,3-4	1,9-6	4,7-8	40
	S	2,7-2	61		5,5-4	
16	F	5,8-4	2,8-2	1,1-4	6,1-6	18
	N	2,0-5	3,4-5	1,2-7	9,1-10	132
	G	4,4-5	1,5-4	5,4-7	9,6-8	6
	S	1,4-2	17		1,6-4	
20	F	3,8-4	1,2-2	4,3-5	3,6-6	12
	N	8,2-6	5,7-6	2,0-8	1,5-1P	133
	G	2,7-5	6,0-5	2,1-7	1,7-8	12
	S	9,1-3	6,8		6,2-5	
30	F	1,8-4	2,7-3	9,0-6	1,3-6	7
	N	1,6-6	2,2-7	8,0-10	5,9-12	136
	G	1,2-5	1,1-5	3,8-8	3,1-9	12
	S	3,9-3	1,3		1,1-5	

Tableau 3

Opérateur T = EXP

troisième valeur propre

Notations :

Celles du tableau 1

P # 286

n	i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
6	1	1,5-5	1,5-10	1,2-5	9,5-6	1
	2	1,2-4	1,4-6	1,2-3	2,2-4	5
	3	1,0-3	8,4-2	0,31	5,8-3	53
8	1	4,9-6	1,5-11	3,9-6	3,0-6	1
	2	3,8-5	1,4-7	3,7-4	7,1-5	5
	3	3,2-4	8,6-3	9,2-2	1,9-3	48
16	1	3,1-7	1,5-12	2,5-7	1,9-7	1
	2	2,4-6	1,1-10	2,3-5	4,5-6	5
	3	2,0-5	2,3-7	5,7-3	1,2-3	48

Tableau 4 : opérateur $T = \text{EXP}$

Vecteur propre approché fourni par la méthode de Nystroem

Notations :

n : nombre de points de discrétisations de T_n^M

i : numéro de la valeur propre

(1) : $\|(T-T_0)\varphi_0\|$

(2) : $\varepsilon' = (\Gamma \|(T-T_0)\varphi_0\|)^2$

(3) : $\Gamma \|(T-T_0)\varphi_0\| S(\varepsilon')$

(4) : $\|\varphi - \varphi_0\|$

(5) : quotient : $\frac{(3)}{(4)}$

n	M	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
4	F	1,8-2	1,1-2	1,9-3	1,4-3	1
	N	7,4-3	2,0-3	3,3-4	6,5-5	5
	G	1,3-2	6,5-3	1,1-3	4,5-4	2
	S	9,6-3	3,4-3	5,6-4	9,2-5	6
6	F	9,4-3	3,3-3	5,4-4	4,4-4	1
	N	3,2-3	3,8-4	6,2-5	1,5-5	4
	G	4,9-3	8,8-4	1,4-4	5,6-5	3
	S	3,6-3	4,8-4	7,8-5	1,3-5	6
8	F	6,1-3	1,4-3	2,2-4	1,8-4	1
	N	1,8-3	1,1-4	1,9-5	8,1-6	4
	G	2,5-3	2,3-4	3,8-5	8,6-6	5
	S	1,9-3	1,3-4	2,1-5	3,5-6	6
10	F	4,3-3	6,8-4	1,1-4	9,3-5	1
	N	1,1-3	4,6-5	7,6-6	2,2-6	3
	G	1,5-3	8,5-5	1,4-5	3,5-6	4
	S	1,1-3	4,7-5	7,8-6	1,3-6	6
12	F	3,3-3	3,9-4	6,4-5	5,7-5	2
	N	7,7-4	2,2-5	3,6-6	1,1-6	3
	G					
	S	7,6-4	2,1-5	3,5-6	5,8-7	6
16	F	2,1-3	1,6-4	2,7-5	1,5-5	2
	N	4,3-4	6,8-6	1,1-6	3,4-7	3
	G					
	S	4,1-4	6,2-6	1,0-6	1,6-7	6
20	F	1,5-3	8,2-5	1,3-5	4,1-6	3
	N	2,7-4	2,7-6	4,5-7	1,4-7	3
	G					
	S	2,6-4	2,5-6	4,0-7	6,1-8	7
30	F	8,2-4	2,5-5	4,1-6	3,3-6	1
	N	1,2-4	5,0-7	8,2-8	2,6-8	3
	G					
	S	1,1-4	4,8-7	7,9-8	8,8-9	10

Tableau 5 :

opérateur COS

première valeur propre

Notations :

Celles du tableau 1

$\Gamma = 6,1$

IX. CONCLUSIONS

Le calcul itératif des coefficients des séries de perturbation a fourni un outil théorique qui a permis d'estimer l'erreur faite sur la valeur propre λ et le vecteur propre φ de T , lorsqu'on les approche par λ_0 et φ_0 éléments propres de $T_0 = P_0 T P_0 + (1-P_0)T(1-P_0)$, où P_0 est une projection de rang 1.

Pour la valeur propre, les bornes d'erreurs obtenues sont proches de celles données dans [5], [7], ou meilleures ([8]).

Pour le vecteur propre, elles sont proches de celles données dans [7].

Par contre les méthodes utilisées pour établir les bornes sont très différentes les unes des autres.

La condition d'application des bornes ($\epsilon \leq 1/4$) peut être difficile à vérifier pratiquement, car elle fait intervenir $\|\bar{S}_0\|$ (rappelons que [7] donne une condition plus large que la nôtre).

Dans le cas où T est un opérateur (de rang infini) le calcul du terme $S_0(T-T_0)\varphi_0$ ne peut se faire qu'en résolvant l'équation $(T_0 - \lambda_0)x = (T-T_0)\varphi_0$. En pratique on ne peut qu'approcher la solution de cette équation.

Enfin, vu que $P_0 = \frac{\langle \cdot, \varphi_0^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle} \varphi_0$, λ_0 n'est autre que le quotient de Rayleigh de T calculé à partir de φ_0 et φ_0^* : $\lambda_0 = \langle T \varphi_0, \varphi_0^* \rangle$.

On retrouve, rappelée de façon rapide (voir [3] p. 50, pour plus de précision, la propriété que :

- λ_0 est "d'ordre 1" quand φ_0 est une bonne approximation de
- λ_0 est "d'ordre 3" quand, en plus φ_0^* est une bonne approximation de φ^* .

CHAPITRE - III

=====

APPROXIMATION DES ELEMENTS PROPRES D'UN OPERATEUR

LINEAIRE FERME PAR ITERATION

CAS GENERAL

I - INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons étudié, du point de vue des valeurs propres et des vecteurs propres, l'approximation d'un opérateur T par un opérateur de la forme $P_0 T P_0 + (1 - P_0) T (1 - P_0)$.

La méthode d'itération a conduit à des bornes, semble-t-il assez précises, sur les éléments propres, et en plus fournit un moyen de calculer ceux-ci.

En pratique T est une matrice, et lorsque sa dimension n est grande le calcul de $S_0 x$ peut devenir problématique (résolution d'un système linéaire de taille $n-1$).

Souvent, lors de la discrétisation d'opérateurs compacts par exemple, on connaît une approximation numérique T_0 de T dont le rang p est bien moindre que celui de T (qui peut être infini), et qui vérifie $\max_{z \in \Gamma} r((T - T_0)R(R_0, z)) < 1$. Il est alors naturel d'itérer à partir de T et T_0 (sans chercher à approcher T par un opérateur de la forme $P_0 T P_0 + (1 - P_0) T (1 - P_0)$) ; le calcul de $S_0 x$ ne nécessite plus que la résolution d'un système linéaire de taille $p-1$.

Dans le chapitre II nous avons surtout considéré les séries de perturbation comme un outil théorique ; ici nous les considérons davantage comme un moyen de calcul des éléments propres, dont nous examinons le comportement

II - ETUDE DES SERIES DE PERTURBATION : "CAS ISSU DE LA CONVERGENCE EN NORME"

Dans cette partie nous considérons les séries de perturbation $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ de la valeur propre et du vecteur propre de $T_0 + (T - T_0)$.

Nous cherchons à exhiber des majorations du type : $|\lambda_n| \leq \alpha_n \varepsilon^n$ et $\|\varphi_n\| \leq \beta_n \varepsilon^n$. Bien que T et T_0 soient supposés fermés nous avons pour idée directrice le cas où T et T_0 sont bornés et proches au sens de la norme.

1. - Hypothèses ; notations

a) Hypothèses :

Les hypothèses sont celles définies au paragraphe I.2 du chapitre I. Nous les rappelons brièvement :

- $T : D \subseteq X \rightarrow X$ opérateur fermé de domaine dense D
- $T_0 : D_0 \subseteq X \rightarrow X$ opérateur fermé de domaine dense D_0
- $D_0 \subseteq D$.
- λ_0 , valeur propre simple isolée de T_0
- $\varphi_0 \in D_0$, vecteur propre normé associé à T_0 et λ_0
- $\varphi_0^* \in \text{Dom}(T_0^*)$, vecteur propre normé associé à T_0^* et $\bar{\lambda}_0$
- $P_0 = \frac{\langle \cdot, \varphi_0^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle} \varphi_0$, projection spectrale de T_0 en λ_0
- S_0 , résolvante réduite de T_0 en λ_0

Nous allons travailler sur les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n'$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, dont les coefficients sont définis par :

(1)

$$\Psi_1' = -(T-T_0)\varphi_0$$

(2)

$$\lambda_1 = \frac{\langle (T-T_0)\varphi_0, \varphi_0^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle}$$

(3)

$$\Psi_n' = -(T-T_0)S_0\Psi_{n-1}' + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k S_0\Psi_{n-k}', \quad n \geq 2$$

(4)

$$\lambda_n = \frac{\langle \Psi_{n-1}', [(T-T_0)S_0]^* \varphi_0^* \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle}, \quad n \geq 2$$

Les vecteurs Ψ_n' ici définis et les vecteurs Ψ_n définis par les formules (9) du chapitre I vérifient : $\Psi_n = (1-P_0)\Psi_n'$. Rappelons aussi :

$$\varphi_n = S_0\Psi_n = S_0\Psi_n', \quad n \geq 2.$$

b) Notations :

Les notations sont les suivantes :

- $\eta = \|(T-T_0)\varphi_0\|$, norme du vecteur résiduel

- $p = \|P_0\| = |\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle|^{-1}$

- $\Gamma = \|S_0\|$

- $\mu = \|[(T-T_0)S_0]^* \varphi_0^*\| \leq \|(T-T_0)S_0\|$

- $\epsilon = \max(\|(T-T_0)S_0\| ; \eta \Gamma p)$

- les coefficients a_k et les fonctions S et S_k ont été définis au paragraphe I.3 du chapitre II.

2. Majoration des quantités $|\lambda_n|$ et $\|\Psi_n'\|$

Nous allons donner, par récurrence, des majorations sur les coefficients $|\lambda_n|$ et $\|\Psi_n'\|$; le raisonnement ressemble à celui fait à la partie II du chapitre II.

a) Hypothèse de récurrence :

Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$(H_k) \quad \|\Psi'_k\| \leq a_k \varepsilon^{k-1} \eta \quad \text{pour } k \geq 1$$

L'hypothèse (H_1) est vraie.

D'après la relation (4), l'hypothèse (H_k) entraîne :

$$(5) \quad |\lambda_{k+1}| \leq a_k \varepsilon^{k-1} \eta \mu p$$

$$(6) \quad |\lambda_{k+1}| \leq a_k \varepsilon^k \eta p$$

Remarquons aussi :

$$(7) \quad |\lambda_1| \leq \eta p.$$

b) Vérification de l'hypothèse de récurrence :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons que (H_k) soit vrai pour $k = 1, \dots, n-1$.

De la formule (3) on déduit :

$$\|\Psi'_n\| \leq \|(T-T_0)S_0\| \|\Psi'_{n-1}\| + \sum_{k=1}^{n-1} |\lambda_k| \|S_0\| \|\Psi'_{n-k}\|$$

En tenant compte des majorations données par (H_k) , (6) et (7) on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Psi'_n\| &\leq \|(T-T_0)S_0\| a_{n-1} \varepsilon^{n-2} \eta \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} \varepsilon^{k-1} \eta p \Gamma a_{n-k} \varepsilon^{n-k-1} \eta \end{aligned}$$

$$\|\Psi'_n\| \leq \eta (a_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} a_{n-k}) \varepsilon^{n-1} = \eta a_n \varepsilon^{n-1}$$

Ce qui vérifie l'hypothèse (H_n) .

L'hypothèse de récurrence (H_k) est donc vraie pour tout $k \geq 1$.

Signalons comme conséquence immédiate de l'hypothèse (H_k) :

$$(8) \quad \|\varphi_k\| \leq \Gamma \eta a_k \varepsilon^{k-1}$$

3. Convergence des séries de perturbation ; bornes d'erreur sur les éléments propres

a) Les inégalités (H_k) , (5), (6), (7), (8), la relation $\Psi_n = (1-P_0)\Psi_n'$ et le corollaire IV.c du chapitre I permettent d'énoncer le théorème suivant :

THEOREME

Si $\varepsilon \leq 1/4$ alors :

α) la série $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ converge vers une valeur propre λ de l'opérateur T

β) on a les bornes d'erreur suivantes :

$$\left| \lambda - \sum_{k=0}^n \lambda_k \right| \leq p \eta \mu \frac{S_n(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{pour } n \geq 1$$

en particulier

$$\left| \lambda - (\lambda_0 + \lambda_1) \right| \leq p \eta \mu \frac{S_1(\varepsilon)}{\varepsilon} = p \eta \mu [1 + O(\varepsilon)]$$

$$\left| \lambda - \lambda_0 \right| \leq p \left| \langle (T - T_0) \varphi_0, \varphi_0^* \rangle \right| + p \eta \mu \frac{S_1(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

γ) les bornes suivantes sont un peu moins fines mais plus simples :

$$\left| \lambda - \sum_{k=0}^n \lambda_k \right| \leq p \eta S_n(\varepsilon) \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$\left| \lambda - \lambda_0 \right| \leq p \eta S(\varepsilon) = p \eta [1 + O(\varepsilon)].$$

δ) la série $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$ converge vers le vecteur propre φ de T associé à λ qui vérifie : $P_0 \varphi = \varphi_0$.

ε) On a les bornes d'erreur suivantes :

$$\left\| \varphi - \sum_{k=0}^n \varphi_k \right\| \leq \Gamma_n \frac{S_{n+1}(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{pour } n \geq 0$$

En particulier

$$\left\| \varphi - \varphi_0 \right\| \leq \Gamma_0 \frac{S_1(\varepsilon)}{\varepsilon} = \Gamma_0 [1+O(\varepsilon)].$$

b) Si on remarque que la condition $0 \leq \varepsilon \leq 1/4$ entraîne :

$$1 \leq S(\varepsilon) \leq 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq \frac{S_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq 4,$$

le théorème précédent a pour corollaire :

Corollaire :

Si $\varepsilon \leq 1/4$ alors l'opérateur T admet une valeur propre λ et un vecteur propre φ qui vérifient :

- $|\lambda - \lambda_0| \leq 2 \|P_0\| \cdot \|(T - T_0)\varphi_0\|$
- $|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq 4 \|P_0\| \cdot \|(T - T_0)\varphi_0\| \cdot \|[(T - T_0)S_0]^* \varphi_0^* \|$
- $\|P \varphi_0\| \leq 4 \|S_0\| \cdot \|(T - T_0)\varphi_0\|$

Ces bornes sont simples et, mis à part les quantités ε et S_0 elles sont facilement calculables.

c) Remarques :

- Le théorème qui précède met en évidence les faits suivants :
 - . λ_0 est une approximation de λ d'ordre $\eta = \|(T - T_0)\varphi_0\|$ et p_n est le terme principal de l'erreur
 - . φ_0 est une approximation de φ d'ordre $\eta = \|(T - T_0)\varphi_0\|$ et Γ_n est le terme principal de l'erreur.

- si P_0 est connu, c'est-à-dire si φ_0 et φ_0^* le sont, le calcul de λ_1 est très simple :

$$\lambda_1 = \frac{\langle (T-T_0)\varphi_0, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}$$

D'où :

$$\lambda_0 + \lambda_1 = \frac{\langle T\varphi_0, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}$$

Le terme $\lambda_0 + \lambda_1$ est donc le quotient de Rayleigh de T calculé en φ_0 et φ_0^* . Le corollaire qui précède montre que l'erreur sur $|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)|$ est d'ordre $\eta\mu$. On retrouve le fait que l'approximation de λ par le quotient de Rayleigh est d'ordre 2 quand φ_0 et φ_0^* sont des bornes approximations de φ et φ^* (résultat déjà signalé dans la partie IV du chapitre II).

- La convergence des séries $\sum \lambda_n$ et $\sum \varphi_n$ est régulière et leurs restes sont majorés par le reste d'une sérieⁿ de type géométrique.

4. Le spectre de T au voisinage de λ_0 :

On peut préciser le spectre de T au voisinage de λ_0 par le théorème suivant :

THEOREME :

Si $\varepsilon \leq 1/4$, l'opérateur T a une seule valeur propre λ dans le disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z - \lambda_0| < R\}$ avec

$$R = \frac{1}{\Gamma} \left\{ 1 - \|(T-T_0)S_0\| - \frac{\Gamma\eta\mu}{1 - (\Gamma\eta\mu S(\varepsilon) + \|(T-T_0)S_0\|)} \right\}.$$

La multiplicité algébrique de λ vaut 1, et R vérifie :

$$\frac{1}{2\Gamma} \leq R \leq \frac{1}{\Gamma}.$$

Démonstration :

Nous n'en donnerons que quelques étapes, car elle est tout-à-fait semblable à la démonstration donnée dans la partie IV du chapitre II.

L'équation résolvante $(T-z)x = y$ équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = S(z) \{y'' - (1-P_0)Tx'\} \\ (z-\lambda)\{1 - \langle TS(z)S(\lambda)T\varphi_0, \varphi_0^* \rangle\}x' = \langle y' - TS(z)y'', \varphi_0^* \rangle \varphi_0, \end{array} \right.$$

avec les notations :

- $x = P_0x + (1-P_0)x = x' + x''$
- $y = P_0y + (1-P_0)y = y' + y''$
- $S(z)$ est la résolvante réduite en 0 de $(1-P_0)S(T-z)(1-P_0)$

De l'égalité :

$$S(z) = S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [((z-\lambda_0) - (T-T_0))S_0]^n,$$

on déduit les majorations suivantes :

$$|\langle TS(z)S(\lambda)T\varphi_0, \varphi_0^* \rangle| \leq \frac{\|S(\lambda)\| \eta \mu}{1 - (|z-\lambda_0| \Gamma + \|(T-T_0)S_0\|)}$$

$$\|S(\lambda)\| \leq \frac{\Gamma}{1 - (\Gamma \eta \mu S(\varepsilon) + \|(T-T_0)S_0\|)}$$

qui conduisent au théorème.

5. Justification du choix de la quantité ε

Nous montrons ici que les résultats précédents s'appliquent à $T_0 = T_n$, quand T_n est une approximation en norme de T .

Les notations sont celles du paragraphe 1, l'indice 0 étant remplacé par l'indice n.

Soit $T : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire continu, et $T_n : X \rightarrow X$ une suite d'opérateurs linéaires continus telle que : $\|T - T_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

On a alors (voir [3], page 35) :

$$\|R(T, z) - R(T_n, z)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad \forall z \in \rho(T)$$

$$\|P - P_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

De ces relations on déduit :

$$\sup_n \|P_n\| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_n \|S_n\| < +\infty.$$

La quantité φ_n , majorée par $\|T - T_n\| \cdot \|P_n\| \cdot \|S_n\|$, tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini.

Pour n assez grand, les résultats des paragraphes précédents s'appliquent à T et $T_0 = T_n$; en particulier on peut calculer les éléments propres de T par itération à partir de ceux de T_n , et appliquer les résultats des parties 3 et 4.

6. Comparaison aux résultats de Kato [6]

Dans [6] pages 91 et 93, par une technique de séries majorantes, Kato montre le résultat suivant :

Sous l'hypothèse :

$$(H) \quad \sqrt{\eta p \Gamma} + \sqrt{\|(T - T_0)S_0\|} < 1,$$

On a :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot |\lambda - \lambda_0| \leq \eta p [1 + 0(\epsilon)] \\ \cdot |\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq \eta p \|(T - T_0)S_0\| [1 + 0(\epsilon)] \\ \cdot \|\varphi - \varphi_0\| \leq \eta \Gamma [1 + 0(\epsilon)] \\ \cdot \lambda \text{ est la seule valeur propre de } T \text{ dans le disque } |z - \lambda_0| \leq R' \\ \text{avec} \end{array} \right.$$

$$R' = \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{\eta p \Gamma}{\sqrt{\dots}}$$

Nous n'avons pas précisé les fonctions $O(\epsilon)$ (données dans [6]) pour simplifier.

De la comparaison de ces résultats à ceux des théorèmes des paragraphes 3 et 4, on déduit :

- la condition (H) est plus générale que la nôtre :
 $\epsilon \leq 1/4$, donc plus intéressante.
- les bornes d'erreur sur $|\lambda - \lambda_0|$ sont du même ordre que les nôtres.
- de même pour $\|\varphi - \varphi_0\|$
- pour le quotient de Rayleigh $\lambda_0 + \lambda_1$, la borne que nous donnons
 $\eta p \|[(T - T_0) S_0]^* \varphi_0^*\| (1 + O(\epsilon))$ est plus fine que celle donnée par (9) :
 $\eta p \|(T - T_0) S_0\| (1 + O(\epsilon))$.
- les rayons d'isolation R' , et R (donné par le théorème du paragraphe 4) sont difficilement comparables ; nous pensons que R est plus intéressant que R' au vu des inégalités :

$$\frac{1}{2\Gamma} \leq R \leq \frac{1}{\Gamma}$$

$$0 \leq R' \leq \frac{1}{\Gamma}$$

7. Cas où T et T_0 sont bornés

Dans les paragraphes précédents, supposer T et T_0 fermés nous a amené, dans nos majorations, à faire apparaître l'opérateur $(T - T_0) S_0$ qui est borné.

Quand T et T_0 sont bornées, ce que nous supposons dans ce paragraphe, on peut aussi bien faire apparaître l'opérateur $S_0(T - T_0)$, continu.

Les quantités η, p, Γ étant celles définies au paragraphe 1.6, posons :

- $\eta' = \|S_0(T-T_0)\varphi_0\| \leq \|S_0(T-T_0)\|$
- $\mu' = \|(T^*-T_0^*)\varphi_0^*\|$
- $\varepsilon' = \max(\|S_0(T-T_0)\|, \mu' \Gamma p)$

On démontre, comme nous l'avons fait aux paragraphes 2 et 3, les résultats suivants :

THEOREME :

Si $\varepsilon' \leq 1/4$, alors :

- α) la série $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ converge vers une valeur propre λ de T
- β) on a les bornes d'erreur suivantes :

$$|\lambda - \sum_{k=0}^n \lambda_k| \leq p \eta' \mu' \frac{S_n(\varepsilon')}{\varepsilon'}, \text{ pour } n \geq 1.$$

En particulier :

$$|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq p \eta' \mu' \frac{S_1(\varepsilon')}{\varepsilon'} = p \eta' \mu' (1 + O(\varepsilon'))$$

$$|\lambda - \lambda_0| \leq p |\langle (T-T_0)\varphi_0, \varphi_0^* \rangle| + p \eta' \mu' \frac{S_1(\varepsilon')}{\varepsilon'}$$

- γ) les bornes suivantes sont un peu moins fines, mais plus simples :

$$|\lambda - \sum_{k=0}^n \lambda_k| \leq p \eta' S_n(\varepsilon'), \text{ pour } n \geq 1$$

$$|\lambda - \lambda_0| \leq p \eta S(\varepsilon') = p \eta [1 + O(\varepsilon')]$$

- δ) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$ converge vers le vecteur propre de T associé à λ qui vérifie $P_0 \varphi = \varphi_0$.

- ε) On a les bornes d'erreur suivantes :

$$\|\varphi - \sum_{k=0}^n \varphi_k\| \leq \eta' \frac{S_{n+1}(\varepsilon')}{\varepsilon'}, \text{ pour } n \geq 0$$

en particulier :

$$\|\varphi - \varphi_0\| \leq \eta' \frac{S_1(\varepsilon')}{\varepsilon'} = \eta' (1 + O(\varepsilon'))$$

Corollaire :

Si $\varepsilon' \leq 1/4$, alors l'opérateur T admet une valeur propre λ et un vecteur propre φ qui vérifient :

$$- |\lambda - \lambda_0| \leq 2\|P_0\| \cdot \|(T - T_0)\varphi_0\|$$

$$- |\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq 4\|P_0\| \cdot \|S_0(T - T_0)\varphi_0\| \cdot \|(T^* - T_0^*)\varphi_0^*\|$$

$$- \|\varphi - \varphi_0\| \leq 4\|S_0(T - T_0)\varphi_0\|$$

THEOREME

Si $\varepsilon' \leq 1/4$, l'opérateur T a une seule valeur propre λ dans le disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z - \lambda_0| < R\}$ avec

$$R = \frac{1}{\Gamma} \{1 - \|S_0(T - T_0)\|\} - \frac{\lambda' \mu'}{1 - (\eta' p_0^2(\varepsilon') + \|S_0(T - T_0)\|)}$$

La multiplicité algébrique de λ vaut 1 et R vérifie

$$\frac{1}{2\Gamma} \leq R \leq \frac{1}{\Gamma}$$

Ces résultats sont très proches de ceux énoncés aux paragraphes 3 et 4 ; et les remarques faites alors sont toujours valables.

L'intérêt des résultats de ce paragraphe est de mettre en évidence le facteur $\|S_0(T - T_0)\varphi_0\|$ au lieu de $\|S_0\| \|(T - T_0)\varphi_0\|$ dans la majoration de

$$\|\varphi - \sum_{k=0}^n \varphi_k\|.$$

8. Expériences numériques

Voir l'annexe I pour ce qui concerne les opérateurs intégraux.

Les résultats du paragraphe 7 ont été éprouvés sur l'opérateur $T = \text{EXP}$ approché par T_n^N et T_n^P , et sur l'opérateur $T = \text{COS}$ approché par T_n^P ; il y a convergence en norme dans $\mathcal{C}^2(0,1)$ pour la méthode de projection, et dans $\mathcal{C}^1(0,1)$ pour la méthode de Nystroem.

Nous n'avons pas calculé ϵ' et avons supposé la condition $\epsilon' \leq 1/4$ remplie (ce qui est justifié au vu de la "convergence" des séries de perturbation).

- a) La majoration $|\lambda - \lambda_0| \leq 2 \|P_0\| \cdot \|(T - T_0)\varphi_0\|$ a été vérifiée pour les 3 premières valeurs propres de EXP approché par T_n^N (tableau 6) et par T_n^P (tableau 7); ainsi que pour la plus grande valeur propre de COS approché par T_n^P (tableau 7).

Les bornes nous semblent réalistes et sont :

- 2 fois trop grandes pour la première valeur propre
- 4 à 20 fois trop grandes pour la deuxième valeur propre
- 30 à 300 fois trop grandes pour la troisième valeur propre.

- b) La majoration $\|\varphi - \varphi_0\| \leq 4 \|S_0(T - T_0)\varphi_0\|$ a été vérifiée pour les 3 premiers vecteurs propres de EXP approché par T_n^N (tableau 6).

Les bornes obtenues sont 3 fois trop grandes seulement dans les 3 cas.

- c) Enfin, le comportement géométrique des séries de perturbation a été vérifié.
- sur EXP approché par T_n^N pour les 3 premières valeurs propres et les vecteurs propres associés (tableau 8).
 - sur EXP approché par T_n^P pour les 3 premières valeurs propres (tableau 9).
 - sur COS approché par T_n^P pour la plus grande valeur propre (tableau 10).

Dans tous les cas $\lambda_0 + \lambda_4$ est une nette amélioration de λ_0 .

n	i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
6	1	3,1-5	1,3-5	2	2,7-5	9,5-6	3
	2	2,4-4	5,8-5	4	6,3-4	2,2-4	3
	3	2,0-3	6,2-5	32	1,6-2	5,8-3	3
8	1	9,8-6	4,1-6	2	8,6-6	3,0-6	3
	2	7,6-5	1,8-5	4	2,0-4	7,1-5	3
	3	6,4-4	2,0-5	32	5,3-3	1,9-3	3
16	1	6,1-7	2,6-7	2	5,4-7	1,9-7	3
	2	4,8-6	1,2-6	4	1,3-5	4,5-6	3
	3	4,0-5	1,3-6	31	3,4-4	1,2-4	3

Tableau 6 :

Opérateur $T = \text{EXP}$ approché par T_n^N ; 3 premières valeurs et vecteurs propres

Notations : n : nombre de points de discrétisations de T_n^N

i : numéro de la valeur propre

(1) : $2 \|P_0\| \cdot \|(T - T_0) \varphi_0\|$

(4) : $4 \|S_0(T - T_0)\varphi_0\|$

(2) : $|\lambda - \lambda_0|$

(5) : $\|\varphi - \varphi_0\|$

(3) : quotient $\frac{(1)}{(2)}$

(6) : quotient $\frac{(4)}{(5)}$

TABLEAU 7

Opérateurs $T = \text{EXP}$ et $T = \text{COS}$ approchés par T_n^p

M	i	n	4	6	8	10	12	16	20	30	40	50
E X P	1	(1)		4,2-3	2,2-3	1,3-3	8,8-4	4,4-4	3,0-4	1,3-4	7,0-5	4,4-5
		(2)		2,0-3	1,0-3	6,0-4	4,0-4	2,2-4	1,4-4	5,8-5	3,2-5	2,0-5
		(3)		2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	(1)	8,2-3	3,0-3	1,5-3	9,2-4	6,2-4	3,4-4	2,0-4	8,8-5	5,0-5	3,0-5
		(2)	2,4-4	1,1-4	6,3-5	3,9-5	2,6-5	1,4-5	9,0-6	3,9-6	2,1-6	1,4-6
		(3)	34	30	24	24	24	24	22	23	24	21
	3	(1)	2,2-3	7,8-4	4,0-4	2,4-4	1,6-4	8,8-5	5,4-5	2,4-5	1,3-5	8,0-6
		(2)	6,7-5	6,4-6	5,7-7	3,3-7	4,5-7	3,6-7	2,6-7	1,2-7	7,1-8	4,6-8
		(3)	33	122	702	727	356	244	208	200	180	174
C O S	1	(1)	8,2-3	3,0-3	1,6-3	9,6-4	6,5-4	3,5-4	2,2-4	1,0-4	6,0-5	4,1-5
		(2)	2,7-2	9,8-3	5,0-3	3,0-3	2,0-3	1,1-3	6,9)4	2,9-4	1,6-4	9,8-5
		(3)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2

Notations : celles du tableau 6.

TABLEAU 8 :

Méthode d'itération sur l'opérateur $T = \text{EXP}$ approché

par T_n^N sur 6 points

i	k	0	1	2	3
1	(1)	1,3...	1,3-5	4,6-9	3,7-13
	(2)	1,3-5	4,6-9	3,7-13	4,4-16
	(3)	1	1,3-5	2,1-9	1,6-13
	(4)	8,1-6	1,6-9	1,2-13	8,3-16
2	(1)	0,1...	5,8-5	8,1-8	5,3-12
	(2)	5,8-5	8,1-8	5,2-12	6,5-14
	(3)	1	1,3-4	1,2-7	1,7-10
	(4)	1,3-4	1,1-7	1,4-10	1,3-13
3	(1)	3,...-3	6,2-5	1,2-7	3,1-9
	(2)	6,2-5	1,1-7	3,0-9	3,8-11
	(3)	1	2,6-3	3,6-5	5,0-7
	(4)	2,5-3	3,1-5	4,2-7	3,7-9

Notations :

i : numéro de la valeur propre

k : pas de l'itération

(1) : $|\lambda_k|$

(2) : $|\lambda - \sum_{n=0}^k \lambda_n|$

(3) : $\|\varphi_k\|$

(4) : $\|\varphi - \sum_{n=0}^k \varphi_n\|$

Tableau 9 : Méthode d'itération sur l'opérateur $T = \text{EXP}$ approché par T_n^P

Notations : Celles du tableau 8.

n	i	(k)	0	1	2
6	1	(1)	1,3..	2,0-3	8,1-8
		(2)	2,0-3	8,1-8	1,2-10
	2	(1)	0,1..	1,1-4	1,3-7
		(2)	1,1-4	1,3-7	2,4-10
	3	(1)	0,00.	6,4-6	2,2-8
		(2)	6,4-6	2,2-8	9,4-11
8	1	(1)	1,3..	1,0-3	2,6-8
		(2)	1,0-3	2,6-8	1,9-11
	2	(1)	0,1..	6,3-5	3,2-8
		(2)	6,3-5	3,2-8	2,7-11
	3	(1)	0,00.	5,7-7	2,1-9
		(2)	5,7-7	2,1-9	2,7-12
10	1	(1)	1,3..	6,0-4	1,0-8
		(2)	6,0-4	1,0-8	4,6-12
	2	(1)	0,11	3,9-5	1,1-8
		(2)	3,9-5	1,1-8	5,6-12
	3	(1)	3,6-3	3,3-7	3,1-10
		(2)	3,3-7	3,1-10	7,5-14
12	1	(1)	1,4	4,0-4	4,6-9
		(2)	4,0-4	4,6-9	1,4-12
	2	(1)	0,11	2,6-5	5,0-9
		(2)	2,6-5	5,0-9	1,6-12
	3	(1)	3,6-3	4,5-7	4,6-11
		(2)	4,5-7	4,6-11	3,9-14
16	1	(1)	1,4	2,2-4	1,4-9
		(2)	2,2-4	1,4-9	2,2-13
	2	(1)	0,11	1,4-5	1,4-9
		(2)	1,4-5	1,4-9	2,4-13
	3	(1)	3,6-3	3,6-7	1,0-11
		(2)	3,6-7	1,0-11	1,6-14

n	k	0	1	2
6	(1)	0,17	2,8-3	3,4-4
	(2)	3,0-3	2,0-4	1,5-4
8	(1)	0,17	1,5-3	1,6-4
	(2)	1,6-3	8,8-5	6,9-5
10	(1)	0,17	9,1-4	8,4-5
	(2)	9,6-4	5,0-5	3,5-5
12	(1)	0,17	6,1-4	5,3-5
	(2)	6,5-4	3,3-5	2,0-5
16	(1)	0,16	3,3-4	2,8-5
	(2)	3,5-4	2,0-5	8,2-6
20	(1)	0,16	2,1-4	1,8-5
	(2)	2,2-4	1,4-5	1,4-6
30	(1)	0,16	9,1-5	1,2-5
	(2)	1,0-4	1,0-5	1,3-6
40	(1)	0,16	5,0-5	1,0-5
	(2)	6,0-5	9,7-6	4,6-7
50	(1)	0,16	3,3-5	8,9-6
	(2)	4,1-5	8,6-6	2,7-2

Tableau 10 : Méthode d'itération sur l'opérateur $T = \text{COS}$ approché par T_n^P

Notations : celles du tableau 8

III - ETUDE DES SERIES DE PERTURBATION : "CAS ISSU DE LA CONVERGENCE COLLECTIVEMENT COMPACTE"

L'étude faite dans la partie précédente règle essentiellement la convergence des séries de perturbation $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ dans le cas où la norme $\|T-T_0\|$ est assez petite.

Dans de nombreux exemples, la norme $\|T-T_0\|$ n'est pas petite, et il y a pourtant convergence des séries de perturbation ; c'est en particulier le cas de la convergence collectivement compacte (voir l'annexe).

Ayant ce type d'approximation en vue, nous allons exhiber des majorations de $|\lambda_n|$ et $\|\varphi_n\|$ qui doivent régler la convergence des séries de perturbation. Nous supposons d'abord T et T_0 fermés, puis T et T_0 bornés.

1. Notations, hypothèses

Les hypothèses concernant T et T_0 sont celles du paragraphe II.1.a. Rappelons seulement que φ_0 est simple.

Les notations sont les suivantes :

- $\eta = \|(T-T_0)\varphi_0\|$

- $\rho = \|P_0\| = |\langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle^{-1}|$

- $\Gamma = \|S_0\|$

- $\sigma = \|(T-T_0)S_0\|$

- $\mu = \max(\eta\rho\Gamma, \sigma)$

- $B =$ boule unité de X

- $K = \bigcup_{k \geq 0} \left(\frac{S_0}{\Gamma}\right)^k (T-T_0)S_0 B$

- $\alpha =$ diamètre $((T-T_0)S_0 K)$

- $\epsilon = \max(\alpha, \eta\rho\Gamma\mu)$

$$- SP(x) = \frac{1}{2} (S(x)+S(-x)) ; SI(x) = \frac{1}{2} (S(x)-S(-x))$$

$$- S_0^{(k)} = \begin{cases} S_0^k & \text{si } k \geq 1 \\ -P_0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Nous ne travaillerons pas dans la suite sur les coefficients λ_n et φ_n obtenus par itération à partir des formules (8) du chapitre I. Nous travaillerons directement sur les développements de la résolvante, de la valeur propre et du vecteur propre de T obtenus au chapitre I.

Signalons deux inégalités qui découlent des notations précédentes :

$$(10) \quad \|(T-T_0)S_0^{(k)}(T-T_0)S_0^{(\ell)}\| \leq \epsilon \Gamma^{k+\ell-2}, \quad k \geq 0, \ell \geq 0$$

$$(11) \quad \|(T-T_0)S_0^{(k)}\| \leq \mu \Gamma^{k-1}, \quad k \geq 0$$

2. Localisation de la valeur propre λ de T :

D'après la partie II du chapitre I, si Γ est une courbe fermée qui isole λ_0 du reste du spectre de T_0 et qui soit telle que $\max_{z \in \gamma} r((T-T_0)R(T_0, z)) < 1$, alors l'opérateur T a une valeur propre λ et une $z \in \gamma$ seule à l'intérieur de γ .

Or la résolvante $R(T_0, z)$ a pour expression :

$$R(T_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} (z-\lambda_0)^{n-1}$$

Donc :

$$[(T-T_0)R(T_0, z)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (z-\lambda_0)^{n-2} \sum_{p=0}^n (T-T_0)S_0^{(p)}(T-T_0)S_0^{(n-p)}.$$

En tenant compte de (10) on obtient :

$$\begin{aligned} \|[(T-T_0)R(T_0, z)]^2\| &\leq \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (\Gamma |z_0 - \lambda|)^{n-2} \\ &\leq \frac{3-2\Gamma |z_0 - \lambda|}{(1-\Gamma |z_0 - \lambda|)^2} + \left(\frac{\eta \Gamma p}{|z - \lambda_0| \Gamma} \right)^2 + \frac{2\eta \sigma p \Gamma}{|z - \lambda_0| \Gamma} \end{aligned}$$

En tenant compte de : $\max(\eta\Gamma\rho\sigma, (\eta\Gamma\rho)^2) \leq \epsilon$, on obtient :

$$\|[(T-T_0)R(T_0, z)]^2\| \leq \frac{\epsilon}{(\Gamma|z-\lambda_0|)^2(1-\Gamma|z-\lambda_0|)^2}$$

Une condition suffisante pour $r((T-T_0)R(T_0, z)) < 1$ est donc :

$$|z-\lambda_0|\Gamma(1-|z-\lambda_0|\Gamma) < \sqrt{\epsilon}$$

Soit, pour $\sqrt{\epsilon} < 1/4$:

$$\frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma} S(\sqrt{\epsilon}) = \frac{1-1-4\sqrt{\epsilon}}{2\Gamma} < |z-\lambda_0| < \frac{1+1-4\sqrt{\epsilon}}{2\Gamma} \leq \frac{1}{\Gamma}$$

On en déduit le résultat suivant :

THEOREME :

Si $\sqrt{\epsilon} < 1/4$, alors :

- a) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ converge vers une valeur propre λ de T
- b) on a : $|\lambda-\lambda_0| \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma} S(\sqrt{\epsilon})$
- c) λ est simple et c'est la seule valeur propre de T dans le disque de centre λ_0 et de rayon $R = \frac{1+\sqrt{1-4\sqrt{\epsilon}}}{2\Gamma}$ (notons : $R \leq \frac{1}{\Gamma}$).

Ce théorème fournit déjà une estimation de $|\lambda-\lambda_0|$ et assure la convergence de la série de perturbation pour la valeur propre. Le paragraphe suivant va donner une meilleure borne pour $|\lambda-\lambda_0|$ et va préciser le comportement des coefficients λ_n .

3. Comportement et convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$

D'après le théorème précédent la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ converge vers une valeur propre λ de T.

Nous allons majorer les coefficients λ_n directement à partir de l'expression de λ_n donnée au chapitre I paragraphe II.2.c. :

$$\lambda_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = n-1 \\ k_i \geq 0}} \text{tr} ((T-T_0)S_0^{(k_1)} \dots (T-T_0)S_0^{(k_n)})$$

Considérons le coefficient

$$c_n = |\text{tr}((T-T_0)S_0^{(k_1)} \dots (T-T_0)S_0^{(k_n)})|$$

où k_1, \dots, k_n vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 + \dots + k_n = n-1 \\ k_i \geq 0 \end{array} \right.$$

Vu qu'on peut permuter les opérateurs circulairement on a :

$$c_n = |\text{tr}((T-T_0)S_0^{(k_1)} \dots (T-T_0)S_0^{(k_{n-1})} (T-T_0)P_0)|$$

où k_1, \dots, k_{n-1} vérifient :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 + \dots + k_{n-1} = n-1 \\ k_i \geq 0 \end{array} \right.$$

Donc, l'opérateur dont on prend la trace étant de rang 1 :

$$c_n \leq np \| (T-T_0)S_0^{(k_1)} \dots (T-T_0)S_0^{(k_{n-1})} \|$$

Distinguons deux cas suivant la parité de n :

- $n = 2q+1$:

$$c_n \leq np \| (T-T_0)S_0^{(k_1)} (T-T_0)S_0^{(k_2)} \| \dots \| (T-T_0)S_0^{(k_{2q-1})} (T-T_0)S_0^{(k_{2q})} \|$$

$$c_n \leq np \epsilon^q, \text{ d'après (10) et (12)}$$

- $n = 2q+2$

$$c_n \leq \eta p \| (T-T_0) S_0^{(k1)} (T-T_0) S_0^{(k2)} \| \dots$$

$$\dots \| (T-T_0) S_0^{(k2q-1)} (T-T_0) S_0^{(k2q)} \| \cdot \| (T-T_0) S_0^{(k2q+1)} \|$$

$$c_n \leq \eta p \epsilon^q \mu, \text{ d'après (10), (11), (12)}$$

D'où la majoration suivante :

$$|\lambda_n| \leq \frac{1}{n} N c_n,$$

où $N = C_{2n-2}^{n-1}$ est le nombre de solutions du système (12). Donc :

$$|\lambda_n| \leq \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} c_n = a_{n-1} c_n$$

En distinguant suivant la parité de n , on obtient :

- $n = 2q+1$:

$$|\lambda_n| \leq \eta p a_{2q} (\sqrt{\epsilon})^{2q}$$

- $n = 2q+2$:

$$|\lambda_n| \leq \eta p \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} a_{2q+1} (\sqrt{\epsilon})^{2q+1}$$

D'où le théorème suivant :

THEOREME :

Si $\sqrt{\epsilon} < 1/4$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ converge vers une valeur propre λ de T .

La série $\lambda(t) - \lambda_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$ est majorée terme à terme par la série suivante :

$$\eta p t \{ SP(t\sqrt{\epsilon}) + \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} SI(t\sqrt{\epsilon}) \}$$

En particulier :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \eta p \{ SP(\sqrt{\epsilon}) + \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} SI(\sqrt{\epsilon}) \} = \eta p \{ 1 + \mu + o(\epsilon) \}$$

$$|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq \eta p \{ SP(\sqrt{\epsilon}) - 1 + \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} SI(\sqrt{\epsilon}) \} = \eta p \{ \mu + o(\epsilon) \}.$$

Remarquons que pour $0 \leq x \leq 1/4$ on a les inégalités suivantes :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq SP(x) \leq \sqrt{2} \quad , \quad x \leq SI(x) \leq 4(2-\sqrt{2})x \\ x^2 \leq SP(x)-1 \leq 4(\sqrt{2}-1)x^2. \end{array} \right.$$

Du théorème on déduit alors le résultat suivant :

Corollaire :

Si $\sqrt{\epsilon} < 1/4$, l'opérateur T a une valeur propre λ qui vérifie :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \eta p \{ \sqrt{2} + 4\sqrt{2} (\sqrt{2}-1)\mu \}$$

$$|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq 4(\sqrt{2}-1)\eta p \{ \mu\sqrt{2} + \epsilon \}$$

Remarque : Le théorème précédent montre que :

- λ_0 est une approximation de λ d'ordre ηp ; le terme principal de l'erreur sur $|\lambda - \lambda_0|$ est $\eta p(1+\mu)$.

- le quotient de Rayleigh $\lambda_0 + \lambda_1$ est une approximation de λ d'ordre $\eta p \mu$, ce qui est aussi le terme principal de l'erreur.

En général μ n'est pas une quantité petite avec ϵ , et le quotient de Rayleigh donne une précision du même ordre ηp que λ_0 .

- la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ n'est pas régulière, mais se fait par paliers de deux ; dans le cas général où μ n'est pas petit :

$$\sum_{i=0}^{2k} \lambda_i \text{ et } \sum_{i=0}^{2k+1} \lambda_i \text{ donnent la même précision } \eta p \epsilon^k \text{ sur } \lambda .$$

4. Comportement et convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$:

D'après le paragraphe II.3 du chapitre I, le terme φ_n est le coefficient de t^n dans :

$$\varphi(t) = \varphi_0 - S_0 [1 + t(T - T_0)S_0 - (\lambda(t) - \lambda_0)S_0]^{-1} t(T - T_0) \varphi_0$$

Posons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n t^n = -t(T-T_0)S_0 - (\lambda(t) - \varphi_0)S_0$$

Nous cherchons une majoration du coefficient de t^n dans :

$$[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n t^n]^{-1}$$

Puisqu'on a :

$$[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n t^n]^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_p = n \\ k_i \geq 1}} \Lambda_{k_1} \dots \Lambda_{k_p},$$

on considère un terme de la forme :

$$\alpha_n = \Lambda_{k_1} \dots \Lambda_{k_p}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 + \dots + k_p = n \\ 1 \leq p \leq n, \quad k_i \geq 1 \end{array} \right.$$

Le terme α_n est lui-même une somme de termes de la forme :

$$\beta_n = \lambda_{m_1} \dots \lambda_{m_s} S_0^{\ell_0} [(T-T_0)S_0] S_0^{\ell_1} \dots [(T-T_0)S_0] S_0^{\ell_{p-s}}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 + \dots + m_s + p - s = n \\ \ell_0 + \dots + \ell_{p-s} = s \\ 0 \leq s \leq p \leq n \end{array} \right.$$

En utilisant les majorations de $|\lambda_n|$ obtenues au paragraphe 4, et après quelques calculs on obtient les majorations suivantes de β_n :

- $n = 2q$:

$$\|\beta_n\| \leq \epsilon^q$$

- $n = 2q+1$:

$$\|\beta_n\| \leq \epsilon^{q\mu}$$

Le coefficient de t^n dans $[1 - \sum \Lambda_n t^n]^{-1}$ est donc majoré par $\gamma_n \|B_n\|$, où γ_n est le coefficient de t^n dans S^{-1} :

$$[1 - (t+S(t))]^{-1} = \frac{1}{t} (S(t)-1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^n$$

On en déduit la majoration suivante de φ_n :

- $n = 2q+1$:

$$\|\varphi_n\| \leq \frac{\Gamma\eta}{\sqrt{\epsilon}} a_{2q+1} (\sqrt{\epsilon})^{2q+1}$$

- $n = 2q+2$:

$$\|\varphi_n\| \leq \frac{\Gamma\eta}{\sqrt{\epsilon}} a_{2q+2} \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} (\sqrt{\epsilon})^{2q+2}$$

D'où le théorème suivant :

THEOREME :

Si $\sqrt{\epsilon} < 1/4$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ converge vers le vecteur propre de T associé à λ qui vérifie $P_0 \varphi = \varphi_0$.

La série $\varphi(t) - \varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ est majorée terme à terme par la série suivante :

$$\frac{\Gamma\eta}{\sqrt{\epsilon}} \{SI(t\sqrt{\epsilon}) + \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} (SP(t\sqrt{\epsilon}) - 1)\}$$

En particulier :

$$\|\varphi - \varphi_0\| \leq \frac{\eta\Gamma}{\sqrt{\epsilon}} \{SI(\sqrt{\epsilon}) + \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} (SP(\sqrt{\epsilon}) - 1)\} = \eta\Gamma(1 + \mu O(\epsilon))$$

$$\|\varphi - (\varphi_0 + \varphi_1)\| \leq \frac{\eta\Gamma}{\sqrt{\epsilon}} \{SI(\sqrt{\epsilon}) - \sqrt{\epsilon} + \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}} (SP(\sqrt{\epsilon}) - 1)\} = \eta\Gamma\{\mu O(\epsilon)\}$$

En tenant compte des inégalités (13), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire :

Si $\sqrt{\epsilon} < 1/4$, alors le vecteur propre λ de T associé à φ et défini par $P_0 \varphi = \varphi_0$ vérifie :

$$\|\varphi - \varphi_0\| \leq 4(\sqrt{2}-1)\eta\Gamma\{\sqrt{2}+\mu\}$$

$$\|\varphi - (\varphi_0 + \varphi_1)\| \leq \eta\Gamma\{4(\sqrt{2}-1)\mu + (7-4\sqrt{2})\varepsilon\}.$$

Remarques :

Comme pour la valeur propre, le théorème qui précède montre que :

- φ_0 et $\varphi_0 + \varphi_1$ sont des approximations de φ d'ordre $\eta\Gamma$, $\varphi_0 + \varphi_1$ n'améliorant pas en général φ_0 .
- $\sum_{n=0}^{2q} \varphi_n$ et $\sum_{n=0}^{2q+1} \varphi_n$ donnent la même approximation $\eta\Gamma\varepsilon^q$ sur φ .

Nous verrons que cela ne se vérifie pas toujours numériquement.

5. Justification du choix de la quantité ε :

Nous considérons ici le cas où T est un opérateur compact approché de façon collectivement compacte (voir l'annexe) par une suite d'opérateurs compacts T_n .

On définit les quantités $\alpha_n, \eta_n, p_n, \Gamma_n, \mu_n, \varepsilon_n$ à partir de T et T_n comme on a défini $\alpha, \eta, p, \Gamma, \mu, \varepsilon$ à partir de T et T_0 au paragraphe 1.

Nous allons montrer que, en général, ε_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; ce qui permet d'appliquer les résultats des paragraphes précédents à T et $T_0 = T_n$, pour n assez grand, et donc de calculer les éléments propres de T par itération à partir de ceux de T_n .

Des propriétés de la convergence collectivement compacte, il ressort immédiatement :

$$\cdot \eta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\cdot \sup_n \max(\Gamma_n, \eta_n, p_n) < +\infty$$

donc :

$$\eta_n p_n \Gamma_n \mu_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Nous montrons maintenant : $\alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, avec :

- $\alpha_n = \text{diamètre} ((T-T_n)S_n K_n)$
- $K_n = \bigcup_{k \geq 0} \left(\frac{S_n}{\|S_n\|} \right)^k (T-T_n)S_n B$

L'ensemble $\mathcal{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T-T_n)S_n B$ est relativement compact, et on a :

$$K_n \subseteq \bigcup_{k \geq 0} \left(\frac{S_n}{\|S_n\|} \right)^k \mathcal{K}.$$

Posons : $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$; on a : $K_n \subseteq K$ et $\alpha_n \leq \text{diamètre} ((T-T_n)S_n K)$.

Soit S la résolvante réduite de T en λ et $\sigma(S)$ le spectre de S . Nous supposerons que l'ensemble $\sigma' = \{z \in \sigma(S), |z| = \|S\|\}$ est formé d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicités algébriques finies. Nous allons montrer sous cette hypothèse que K est relativement compact.

Posons $\sigma'' = \sigma(S) - \sigma'$. La partie σ'' peut être isolée de σ' par un cercle γ'' de centre 0 et de rayon $\alpha \|S\|$, avec $\alpha < 1$.

Soit γ' une courbe isolant σ' du disque limité par γ'' . Pour n assez grand la projection $P'_n = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} R(T_n, z) dz$ existe et converge de façon collective compacte vers la projection P'

$$P' = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} R(T, z) dz.$$

Supposons, pour simplifier, que σ' se compose d'une seule valeur simple μ . Alors pour n assez grand, S_n a une seule valeur propre, simple, μ_n à l'intérieur de γ' .

Or on a : $S_n = S'_n + S''_n$, avec :

$$- S'_n = P'_n S_n P'_n = \mu_n P'_n$$

$S'_n \rightarrow P S P = \mu P$, de façon collective compacte.

$$- S''_n = (1-P'_n) S_n (1-P'_n)$$

$$\|S''_n\| \leq \alpha \|S\| \leq \beta \|S_n\|, \text{ où } \beta \text{ vérifie : } \beta < 1.$$

Posons :

$$K' = \bigcup_{n,k} \left(\frac{S'_n}{\|S'_n\|} \right)^k \mathcal{K} \text{ et } K'' = \bigcup_{n,k} \left(\frac{S''_n}{\|S''_n\|} \right)^k \mathcal{K}.$$

On montre, en examinant les suites extraites de K' ou K'' , ce que nous ne détaillerons pas, que K' et K'' sont relativement compacts ; donc K qui est inclus dans $K' \cup K''$ l'est aussi. Par suite α_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

7. Cas où T et T_0 sont bornés

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe II.7, quand T et T_0 sont bornés, on peut faire apparaître l'opérateur $S_0(T-T_0)$, au lieu de $(T-T_0)S_0$, dans les séries de perturbation, et donner des bornes d'erreur en fonction entre autres, de $S_0(T-T_0)$.

Les résultats qu'on obtiendrait sont très proches de ceux déjà obtenus aux paragraphes II.2, II.3, II.4 ; leur seul intérêt est de faire apparaître la quantité $\|S_0(T-T_0)\varphi_0\|$ dans la majoration de $\|\varphi - \sum_{k=0}^n \varphi_k\|$, au lieu de $\|S_0\| \cdot \|(T-T_0)\varphi_0\|$.

8. Expériences numériques

Voir l'annexe pour ce qui concerne les opérateurs intégraux.

Les résultats théoriques qui précèdent ont été testés sur les opérateurs COS, N1 et N2 approchés par la méthode de Nystroem.

- a) Les bornes $\lambda - \lambda_0 = \eta\rho(1+\mu+O(\epsilon))$ et $\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1) = \eta\rho(\mu+O(\epsilon))$ sont toutes testées dans les tableaux 11, 12, 13 où sont donnés les rapports $\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\eta}$ et $\frac{|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)|}{\eta}$.

On constate que λ_0 et $\lambda_0 + \lambda_1$ sont de l'ordre de η et donnent la même précision sur λ ; $\lambda_0 + \lambda_1$ n'améliore pas λ_0 .

b) Les bornes $\|\varphi - \varphi_0\| = \|S_0(T-T_0)\varphi_0\| [1+\mu+O(\varepsilon)]$ et

$\|\varphi - (\varphi_0 + \varphi_1)\| = \|S_0(T-T_0)\varphi_0\| [\mu+O(\varepsilon)]$ sont testées dans les tableaux 12 et 13 où sont donnés les rapports

$$\frac{\|\varphi - \varphi_0\|}{\|S_0(T-T_0)\varphi_0\|} \quad \text{et} \quad \frac{\|\varphi - (\varphi_0 + \varphi_1)\|}{\|S_0(T-T_0)\varphi_0\|}$$

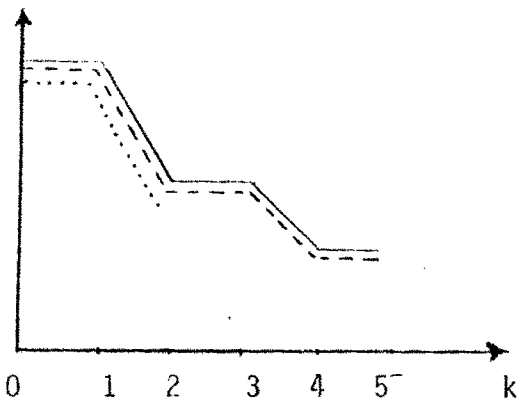
Les résultats expérimentaux sont meilleurs que ceux annoncés par la théorie pour l'approximation de Nyström. Si $\|\varphi - \varphi_0^N\|$ est bien d'ordre $\|S_0^N(T-T_0^N)\varphi_0^N\|$ on constate que $\|\varphi - (\varphi_0^N + \varphi_1^N)\|$ est d'ordre supérieur à $\|S_0^N(T-T_0^N)\varphi_0^N\|$; le vecteur $\varphi_0^N + \varphi_1^N$ est une amélioration de φ_0^N , ce que nous n'avons pas su expliquer.

Les résultats théoriques et expérimentaux concordent dans le cas de l'approximation de T par T_0^G . Le vecteur $\varphi_0^G + \varphi_1^G$ est égal au vecteur propre φ_0^S de l'approximation de Sloan T_0^S (voir l'annexe pour la définition de T_0^G et T_0^S). Le tableau 13 bis montre que les quantités $\|(T-T_0^G)\varphi_0^G\|$ et $\|(T-T_0^S)\varphi_0^S\|$ sont du même ordre; donc $\varphi_0^S = \varphi_0^G + \varphi_1^G$ n'améliore pas φ_0^G .

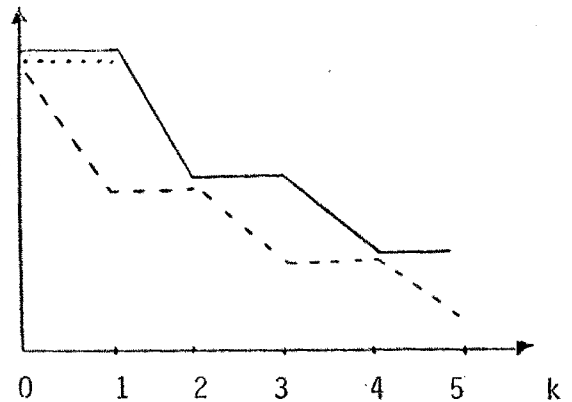
Cette différence dans le comportement des vecteurs propres des approximations -collectivement compactes- de Sloan et de Nyström est restée inexpliquée.

Les résultats théoriques et expérimentaux relatifs aux approximations collectivement compactes de Nyström et de Galerkin sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

$$|\lambda - \sum_{i=0}^k \lambda_i|$$



$$\|\varphi - \sum_{i=0}^k \varphi_i\|$$



- _____ : comportement théorique
- : méthode de Nystroem
- : méthode de Galerkine

c) Les tableaux 14 et 15 donnent le comportement des séries de perturbation $\sum_{n=0}^k \lambda_n$ et $\sum_{n=0}^k \varphi_n$ pour les opérateurs N1 et N2 approchés par la méthode de Nyström.

On observe une convergence par paliers de deux :

- pour la valeur propre $\sum_{n=0}^{2k} \lambda_n$ et $\sum_{n=0}^{2k+1} \varphi_n$ donnent à peu près la même précision sur λ , comme prévu au paragraphe 3.

- pour le vecteur propre $\sum_{n=0}^{2k+1} \varphi_n$ et $\sum_{n=0}^{2k+2} \varphi_n$ donnent à peu près la même précision sur φ , ce qui n'annonçait pas le paragraphe 4.

Tableau 11 - Opérateur COS approché par T_n^N : première valeur propre

n	4	6	8	10	12	16	20	30
(1)	9,7-3	4,4-3	2,6-3	1,8-3	1,3-3	6,9-4	3,6-4	1,7-4
(2)	6,6-3	2,7-3	1,5-3	9,3-4	6,4-4	3,5-4	2,2-4	9,2-5
(3)	5,6-3	2,5-3	1,4-3	9,1-4	6,3-4	3,6-4	2,3-4	1,1-4
(4)	0,68	0,63	0,56	0,53	0,48	0,51	0,60	0,55
(5)	0,58	0,58	0,54	0,51	0,48	0,53	0,64	0,67

Notations :

n : nombre de points de discrétisation de T_n^N

(1) : $\|(T-T_n)\varphi_n\|$

(2) : $|\lambda-\lambda_0|$

(3) : $|\lambda-(\lambda_0+\lambda_1)|$

(4) : $|\lambda-\lambda_0|/\|(T-T_n)\varphi_n\|$

(5) : $|\lambda-(\lambda_0+\lambda_1)|/\|(T-T_n)\varphi_n\|$

Tableau 12 : opérateur N1 approché par T_n^N : quatre premières valeurs et vecteurs propres

Notations :

- n, (1), (2), (3), (4), (5) : voir tableau 11
- (6) : $\|\varphi - \varphi_0\|$
 (7) : $\|\varphi - (\varphi_0 + \varphi_1)\|$
 (8) : $\|\varphi - \varphi_0\|/(1)$
 (9) : $\|\varphi - (\varphi_0 + \varphi_1)\|/(1)$

i	n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	16	6,4-4	3,4-4	3,6-4	0,54	0,56	2,9-3	2,7-5	4,6	4,2-2
	20	3,5-4	2,2-4	2,3-4	0,61	0,65	1,6-3	9,3-6	4,4	2,6-2
	30	1,5-4	9,0-5	1,1-4	0,59	0,72	7,2-4	2,0-6	4,7	1,3-2
2	20	3,5-4	2,2-4	2,3-4	0,62	0,66	6,3-3	1,5-4	18	4,3
	30	1,6-4	9,1-5	1,1-4	0,59	0,71	2,9-3	3,3-5	19	0,21
3	16	6,6-4	3,5-4	3,5-4	0,53	0,54	2,8-2	2,5-3	42	3,8
	20	3,6-4	2,2-4	2,3-4	0,61	0,61	1,5-2	7,9-4	41	2,2
	30	1,6-4	9,1-5	1,1-4	0,58	0,70	6,8-3	1,7-4	43	1,1
4	16	6,3-4	3,6-4	3,6-4	0,57	0,56	4,3-2	6,2-3	68	9,8
	20	3,6-4	2,2-4	2,3-4	0,62	0,64	2,6-2	2,5-3	74	7
	30	1,6-4	9,2-5	1,1-4	0,58	0,69	1,2-2	5,3-4	77	3,4

Tableau 13 : Opérateur N2 approché par T_n^N : trois premiers valeurs et vecteurs propres.

Notations : celles du tableau 12

i	n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	8	5,9-3	3,6-3	3,5-3	0,60	0,60	6,9-3	1,8-4	1,2	3,2-2
	12	2,9-3	1,6-3	1,6-3	0,54	0,55	3,5-3	4,0-5	1,2	1,4-2
2	6	1,3-2	5,6-3	6,2-3	0,44	0,49	3,9-2	3,2-3	3,1	0,26
	8	6,9-3	3,3-3	3,5-3	0,48	0,50	2,0-2	1,0-3	2,9	0,14
	12	2,9-3	1,5-3	1,6-3	0,52	0,54	8,8-3	2,2-4	3,0	7,7-2
3	6	1,3-2	8,3-3	5,9-3	0,63	0,45	6,7-2	1,0-2	3,0	0,77
	8	6,6-2	4,0-3	3,5-3	0,61	0,52	3,0-2	2,6-3	4,6	0,39
	12	2,0-3	1,6-3	1,6-3	0,54	0,52	1,4-2	5,9-4	4,8	0,20

Tableau 13 bis : valeurs de $\|(T-T_n^G)\varphi_n^G\|$ et $\|(T-T_n^S)\varphi_n^S\|$

On rappelle : $\varphi_n^{oG} + \varphi_n^{1G} = \varphi_n^{oS} = \varphi_n^S$

n		4	6	8	10	12	16	20	30	40	50
E X P	G		2,9-3	1,5-3	9,3-4	6,3-4	3,4-4	2,1-4	9,2-5	5,0-5	2,7-5
	S		2,0-3	1,0-3	6,1-4	4,1-4	2,2-4	1,4-4	5,9-5	3,2-5	2,1-5
C O S	G	1,9-2	7,6-3	4,1-3	2,6-3	1,8-3	9,9-4	6,4-3	2,8-4	1,5-4	7,0-5
	S	9,0-3	3,3-3	1,7-3	1,1-3	7,0-4	3,7-4	2,3-4	1,0-5	5,6-5	3,5-5

Tableau 14 : Méthode d'itération appliquée à l'opérateur N1 approché par T_{16}^N

i	k	0	1	2	3	4	5
1	(1)	0,10..	-2,0-4	1,1-4	3,6-7	-1,2-7	-1,2-9
	(2)	9,0-5	-1,1-4	-2,5-7	1,2-7	9,3-10	-2,6-10
	(3)		1,2	2,2-3	0,49	7,8-3	0,28
	(4)	,0	1,9-3	6,8-6	2,0-6	2,1-9	4,2-9
	(5)	7,2-4	2,0-6	7,8-7	6,9-9	1,7-9	2,6-11
	(6)		2,8-3	0,39	8,9-3	0,24	1,5-2
3	(1)	0,01..	-2,0-4	1,1-4	3,2-6	-9,3-7	-8,8-8
	(2)	9,1-5	-1,1-4	-2,2-6	1,0-6	7,2-8	-1,6-8
	(3)		1,2	2,0-2	0,46	2,2-2	0,23
	(4)	1,0	1,7-2	5,6-4	1,4-4	1,5-5	2,1-6
	(5)	6,8-3	1,7-4	6,0-5	5,0-6	9,6-7	1,5-7
	(6)		2,5-2	0,36	8,3-2	0,19	0,16
2	(1)	0,01..	-2,0-4	1,1-4	1,4-6	-4,5-7	-1,8-8
	(2)	9,1-5	-1,2-4	-9,8-7	4,7-7	1,5-8	-3,8-9
	(3)		1,2	8,9-3	0,48	3,1-2	0,26
	(4)	1,0	7,5-3	1,1-4	3,1-5	1,3-6	2,4-7
	(5)	2,3-3	3,2-5	1,2-5	4,4-7	9,8-8	6,4-9
	(6)		1,1-2	0,38	3,6-2	0,22	6,5-2
4	(1)	0,00..	-2,0-4	1,1-4	5,6-6	-1,5-6	-2,6-7
	(2)	9,2-5	-1,1-4	-3,9-6	1,7-6	2,2-7	-4,1-8
	(3)		1,2	3,5-2	0,42	0,13	0,19
	(4)	1,0	3,0-2	1,7-3	3,9-4	7,6-5	7,2-6
	(5)	1,2-2	5,3-4	1,8-4	2,7-5	4,1-6	1,4-6
	(6)		4,4-2	0,33	0,15	0,15	0,34

Notations :

i : numéro de la valeur propre

k : pas de l'itération

(1) : λ_k

(2) : $\lambda - \sum_{n=0}^k \lambda_n$

(3) : $\frac{|\lambda - \sum_{n=0}^k \lambda_n|}{k-1}$
 $\frac{|\lambda - \sum_{n=0}^k \lambda_n|}{k-1}$

(4) : $\|\varphi_k\|$

(5) : $\|\varphi - \sum_{n=0}^k \varphi_n\|$

(6) : $\frac{\|\varphi - \sum_{n=0}^k \varphi_n\|}{k-1}$
 $\frac{\|\varphi - \sum_{n=0}^k \varphi_n\|}{k-1}$

Tableau 15 : Méthode d'itération appliquée à l'opérateur N2 approché par T_{30}^N

Notations : celles du tableau 14

k	i	0	1	2	3	4	5
1	(1)	0,35..	3,1-3	-1,6-3	2,3-5	-7,4-6	3,1-7
	(2)	-1,6-3	1,6-3	-1,6-5	7,1-6	-2,4-7	6,7-8
	(3)		1,0	1,0-2	0,45	3,4-2	0,28
	(4)	1,0	6,7-3	1,0-4	3,1-5	1,4-6	3,0-7
	(5)	3,5-3	4,0-5	1,6-5	5,8-7	1,5-7	9,1-9
	(6)		1,1-2	0,40	3,6-2	0,26	6,0-2
2	(1)	-0,16..	3,1-3	-1,5-3	-4,9-5	1,3-5	1,3-6
	(2)	-1,5-3	1,6-3	3,4-5	-1,4-5	-1,1-6	2,3-7
	(3)		1,0	2,2-2	0,41	7,8-2	0,21
	(4)	1,0	1,7-2	5,3-4	1,5-4	1,5-5	2,2-6
	(5)	8,8-3	2,2-4	7,9-5	6,8-6	1,2-6	2,1-7
	(6)		2,6-2	0,35	8,6-2	0,18	0,17
3	(1)	-0,10..	3,2-3	-1,5-3	-7,7-5	1,8-5	3,2-6
	(2)	-1,6-3	1,5-3	5,6-5	-2,1-5	-3,1-6	5,1-8
	(3)		0,95	3,6-2	0,38	0,15	1,6-2
	(4)	1,0	2,8-2	1,4-3	3,2-4	5,6-5	
	(5)	1,4-2	5,9-4	2,3-4	1,7-4		
	(6)		4,1-2	0,38	0,74		

IV. CONCLUSION

Dans le cas général que nous avons envisagé la méthode d'itération fournit un moyen pratique d'approcher les éléments propres λ et \mathcal{F} de T à partir de ceux de T_0 .

Dans le cas où T_0 est proche de T au sens de la norme, la théorie et les expériences numériques montrent que les séries $\Sigma \lambda_n$ et $\Sigma \mathcal{F}_n$ convergent de façon régulière, presque géométrique vers λ et \mathcal{F} . En particulier $\lambda_0 + \lambda_1$ et $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1$ sont de nettes améliorations de λ_0 et \mathcal{F}_0 .

Toujours dans ce cas, la partie II a donné des bornes d'erreur calculables pour $|\lambda - \lambda_0|$ et $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_0\|$. Si l'on veut des bornes précises il est certainement préférable de calculer le quotient de Rayleigh associé à T , \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_0^* et d'appliquer les résultats du chapitre II.

Dans le cas où T_0 est proche de T au sens de la convergence collectivement compacte, les séries $\Sigma \lambda_n$ et $\Sigma \mathcal{F}_n$ convergent par paliers de deux vers λ et \mathcal{F} : il faut itérer deux fois avant d'améliorer le résultat précédent.

Pour la valeur propre la théorie et les expériences numériques montrent que : $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ améliore λ_0 , mais $\lambda_0 + \lambda_1$ n'améliore pas λ_0 .

Pour le vecteur propre, les expériences numériques montrent que dans certains cas, (méthode de Nyström) $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1$ améliore \mathcal{F}_0 , mais $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ n'améliore pas $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1$, alors que dans d'autres cas (méthode de Sloan) $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1$ n'améliore pas \mathcal{F}_0 .

CHAPITRE - IV
=====

APPROXIMATION D'UN SOUS-ESPACE INVARIANT
D'UN OPERATEUR LINEAIRE PAR ITERATION

I - INTRODUCTION

Notre but est de généraliser les calculs faits au chapitre II pour approcher un vecteur propre et une valeur propre de l'opérateur T , et de les appliquer à la détermination approchée d'un sous-espace invariant de T et de la matrice représentant T dans ce sous-espace.

Notre motivation vient du fait que les calculs exposés aux chapitres précédents ne sont plus valables si λ_0 est une valeur propre multiple de l'opérateur T_0 qui approche T . En pratique, si λ_0 est simple mais non pas "assez isolée" du reste du spectre de T_0 , il n'est pas sûr que les itérations convergent ; en effet $\|\bar{S}_0\|$ peut alors être très grand (rappelons : $\|\bar{S}_0\| \geq 1/\text{distance}(\lambda_0, \sigma(T_0) - \{\lambda_0\})$) et la condition $\varepsilon \leq 1/4$ peut ne pas être vérifiée.

Les calculs que nous allons développer dans ce chapitre sont, formellement, les mêmes qu'au chapitre II.

L'idée directrice est la suivante : étant donné une approximation T_0 de T et un sous-espace invariant \emptyset_0 de T_0 , itérer à partir de \emptyset_0 de façon à approcher un sous-espace invariant \emptyset de T .

II - PRELIMINAIRES

Dans cette partie nous précisons les définitions, notations, hypothèses valables pour toute la suite du chapitre.

Puisque le formalisme est le même dans ce chapitre que dans le chapitre II, les notations et les définitions apparaissent particulièrement importantes.

1. Cadre ; premières notations

a) Soit X un espace de Banach sur \mathbb{C} , normé par $\|\cdot\|$. Soit q un entier naturel non nul.

L'espace X^q sera muni d'une des deux normes suivantes :

$$- x = (x_1, \dots, x_q) \in X^q \rightarrow \|x\|_q = N_1(x_1, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^q \|x_i\|$$

$$- x = (x_1, \dots, x_q) \in X^q \rightarrow \|x\|_q = N_\infty(x_1, \dots, x_q) = \max_i \|x_i\|$$

Dans le cas où X est un espace de Hilbert, on pourra aussi munir X^q de la norme suivante :

$$- x = (x_1, \dots, x_q) \in X^q \rightarrow \|x\|_q = N_2(x_1, \dots, x_q) = \left(\sum_{i=1}^q \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$$

L'introduction de ces normes sur X^q , n'est pas essentielle (on pourrait se contenter de toute norme équivalente) mais amène des simplifications par la suite (voir le paragraphe 2.b.α).

La norme d'un opérateur linéaire continu

$T : X^q \rightarrow X^q$ sera notée $\|T\|_{q,q}$.

L'espace $(X^*)^q$ sera muni de la norme N_∞, N_1 ou N_2 suivant que X^q est muni respectivement de la norme N_1, N_∞ ou N_2 . La norme de $(X^*)^q$ sera notée abusivement $\|\cdot\|_q$, comme celle de X^q .

- b) Soit $x = (x_1, \dots, x_q)$ un élément de X^q et soit $y^* = (y_1^*, \dots, y_q^*)$ un élément de $(X^*)^q$.

Nous désignerons par $\langle x, y^* \rangle$ la matrice $q \times q$ suivante :

$$(i, j) \rightarrow \langle x_i, y_j^* \rangle \quad (\text{dualité entre } X \text{ et } X^*)$$

Si on munit \mathbb{C}^q de la "même norme" N_1, N_∞ ou N_2 que X^q , alors on vérifie :

$$\|\langle x, y^* \rangle\| \leq \|x\|_q \|y^*\|_q$$

- c) Soit $T : D \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur fermé de domaine D dense dans X . Nous désignerons par \hat{T} son extension naturelle à X^q , définie par :

$$\hat{T} : D^q \subseteq X^q \rightarrow X^q$$

$$\hat{T}(x_1, \dots, x_q) = (Tx_1, \dots, Tx_q)$$

Il est évident que \hat{T} est un opérateur fermé de domaine D^q dense dans X^q ; de plus si T est borné : $\|T\| = \|\hat{T}\|_{q,q}$.

- d) Soit $T : D \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur fermé de domaine D dense dans X , et $T^* : D^* \subseteq X^* \rightarrow X^*$ son adjoint.

Soient x et y^* deux éléments de D^q et $(D^*)^q$ respectivement.

Il est facile de vérifier la relation (matricielle) suivante :

$$\langle \hat{T}x, y^* \rangle = \langle x, (T^*)y^* \rangle$$

Remarquons que, si T est un opérateur quelconque de X^q dans X^q , la relation : $\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^*y^* \rangle$ est fautive en général.

2. Opérateurs matriciels

a) Définition :

Considérons la matrice $q \times q$ M à coefficients dans \mathbb{C} :

$$M = (m^{i,j})$$

A cette matrice nous associons l'opérateur :

$$\tilde{M} = X^q \rightarrow X^q$$

$$\tilde{M} : (x^1, \dots, x^q) \rightarrow \left(\sum_{i=1}^q m^{1,i} x^i, \dots, \sum_{i=1}^q m^{q,i} x^i \right)$$

Il est clair que \tilde{M} est un opérateur linéaire continu défini sur X^q . Nous dirons que \tilde{M} est l'opérateur matriciel associé à la matrice M .

b) Propriété :

α) Lemme : L'espace X^q étant muni d'une des normes N_1 , N_∞ , ou N_2 dans le cas hilbertien, si on munit \mathbb{C}^q respectivement de la "même norme" N_1 , N_∞ ou N_2 , alors la norme de l'opérateur $\tilde{M} : X^q \rightarrow X^q$ égale la norme de la matrice M considérée comme opérateur de \mathbb{C}^q dans \mathbb{C}^q .

L'application qui à la matrice $M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$ associe l'opérateur $\tilde{M} \in \mathcal{L}(X^q)$ est un homomorphisme d'algèbre de Banach.

Nous ne donnerons pas la démonstration, facile à établir.

L'importance de ce lemme est qu'il permet de manipuler les opérateurs matriciels \tilde{M} comme des matrices.

β) Remarque : Soit \tilde{M} un opérateur matriciel, et $T : D \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur fermé de domaine dense D dans X . Il est facile de vérifier que $\tilde{T}\tilde{M}$ et $\tilde{M}\tilde{T}$ sont des opérateurs fermés de même domaine D^q dense dans X^q , et de plus :

$$\forall x \in D^q, \tilde{T}\tilde{M}x = \tilde{M}\tilde{T}x$$

Si M^{-1} existe, alors en vertu de l'homomorphisme déjà signalé :

$$\forall x \in D^q, Tx = (\tilde{M})^{-1} \tilde{T}Mx = (\tilde{M}^{-1}) \tilde{T}Mx$$

3. Généralisation de la notion de résolvante réduite

a) Hypothèses ; généralités

Soit $T_0 : D_0 \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur fermé de domaine dense D_0 dans X , et soit \tilde{T}_0 son extension à X^q .

Considérons une partie isolée du spectre de T_0 formée d'exactement q valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité algébrique : $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^q$.

Soit P_0 la projection spectrale associée aux valeurs propres $(\lambda_0^1 \dots \lambda_0^q)$. L'opérateur P_0 peut s'écrire :

$$P_0 = \sum_{i=1}^q \frac{\langle \cdot, \varphi_0^{*i} \rangle}{\langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*i} \rangle} \varphi_0^i$$

où $(\varphi_0^1, \dots, \varphi_0^q)$ est une base normée de $P_0 X$ et où $(\varphi_0^{*1}, \dots, \varphi_0^{*q})$ est une base normée de $P_0^* X^*$ associée à la précédente et qui vérifie :

$$\langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*j} \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$\langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*i} \rangle \neq 0$$

Posons : $\vartheta_0 = (\varphi_0^1, \dots, \varphi_0^q) \in X^q$

$$\vartheta_0^* = (\varphi_0^{*1}, \dots, \varphi_0^{*q}) \in X^{*q}$$

D'après le paragraphe 1.b., $\langle \vartheta_0, \vartheta_0^* \rangle$ représente la matrice $q \times q$ diagonale d'éléments $\langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*i} \rangle$.

Puisque φ_0 est un système de vecteurs invariants, on a :

$$T_0 \varphi_0^j = \sum_{i=1}^q a_{ij} \varphi_0^i$$

avec

$$a_{ij} = \frac{\langle T_0 \varphi_0^i, \varphi_0^{*j} \rangle}{\langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*i} \rangle}$$

Ce qui veut dire que dans la base φ_0 , l'opérateur T_0 est représenté par la matrice :

$$\Lambda_0 = (a_{ij}) = \langle \varphi_0, \varphi_0^* \rangle^{-1} \langle \hat{T}_0 \varphi_0, \varphi_0^* \rangle$$

(se souvenir des notations du paragraphe 1.B)

Signalons aussi la relation $\hat{T}_0 \varphi_0 = \tilde{\Lambda}_0 \varphi_0$

b) Définition de la résolvante réduite de \hat{T}_0 en $\lambda_0^1 \dots \lambda_0^q$

$\alpha)$ Il est clair que $\hat{P}_0 X^q = (P_0 X)^q$ et $(1 - \hat{P}_0) X^q = [(1 - P_0) X]^q$ sont des sous-espaces invariants par l'opérateur matriciel $\tilde{\Lambda}_0$.

Aussi, la projection \hat{P}_0 décompose l'opérateur \hat{T}_0 au sens de [6] p. 172 ; il ne s'agit là que de la généralisation de la notion de sous-espaces invariants pour un opérateur fermé, qui se traduit par :

$$- \hat{P}_0 D_0^q \subseteq D_0^q$$

$$- x \in D_0^q \cap \hat{P}_0 X^q \Rightarrow \hat{T}_0 x \in \hat{P}_0 X^q$$

$$- x \in D_0^q \cap (1 - \hat{P}_0) X^q \Rightarrow \hat{T}_0 x \in (1 - \hat{P}_0) X^q$$

Remarquons aussi que $\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0 : D_0^q \subseteq X^q \rightarrow X^q$ est un opérateur fermé de domaine dense D_0^q dans X^q , et qu'il est décomposé par la projection \hat{P}_0 .

De plus :

$$- (\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0) \hat{P}_0 x = 0, \quad \forall x \in X^q$$

$$- \hat{P}_0 (\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0) x = 0, \quad \forall x \in D^q$$

β) Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $(\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0) : (1 - \hat{P}_0) D_0^q \subseteq (1 - \hat{P}_0) X^q + (1 - \hat{P}_0) X^q$ a un inverse continu.

On cherche donc à résoudre en x :

$$(1) \quad (\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0) x = y$$

avec

$$- x \in (1 - \hat{P}_0) D^q$$

$$- y \in (1 - \hat{P}_0) X^q, \text{ donné}$$

La matrice Λ_0 peut s'écrire

$$\Lambda_0 = Q^{-1} L Q$$

où Q est une matrice inversible et L est une matrice triangulaire supérieure dont les pivots sont λ_0^i .

En vertu des remarques faites au paragraphe 2b, l'équation (1) équivaut successivement à :

$$(\hat{T}_0 - \tilde{Q}^{-1} \tilde{L} \tilde{Q}) x = y$$

$$(2) \quad (\hat{T}_0 - \tilde{L}) \tilde{Q} x = \tilde{Q} y$$

Posons $u = \tilde{Q} x$ et $v = \tilde{Q} y$; on a :

$$u \in (1 - \hat{P}_0) D_0^q \text{ et } v \in (1 - \hat{P}_0) X^q$$

L'équation (2) se détaille ainsi :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (T_0 - \lambda_0^1)u_1 = (L_{1,2}u_2 + \dots + L_{1,q}u_q) + v_1 \\ \vdots \\ (T_0 - \lambda_0^{q-1})u_{q-1} = L_{q-1,q}u_q + v_{q-1} \\ (T_0 - \lambda_0^q)u_q = v_q \\ \text{avec : } u_i \in (1-P_0)D_0 \text{ et } v_i \in (1-P_0)X \end{array} \right.$$

La résolution de ce système équivaut à la résolution de q équations du type suivant :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (T_0 - \lambda_0^i)u_i = w_i \\ u_i \in (1-P_0)D_0, \quad w_i \in (1-P_0)X \end{array} \right.$$

Soient $P_i : X \rightarrow X$ la projection spectrale et $S_i : X \rightarrow X$ la résolvante réduite associées à la valeur propre λ_0^i (rappelons que le rang de P_i égale la multiplicité algébrique de λ_0^i , c'est-à-dire le nombre de fois que la valeur λ_0^i apparaît dans la suite $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^q$).

Puisque P_0 est la projection spectrale associée à toutes les valeurs propres $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^q$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-P_0)D_0 \subseteq (1-P_i)D_0 \\ (1-P_0)X \subseteq (1-P_i)X \end{array} \right.$$

Avec ces remarques et les propriétés de S_i , il est immédiat que (4) équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = S_i w_i \\ u_i \in (1-P_0)D_0, \quad w_i \in (1-P_0)X \end{array} \right.$$

Le système (3) équivaut donc au suivant :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_q = S_q[v_q] \\ u_{q-1} = S_{q-1}[v_{q-1} + L_{q-1,q}u_q] \\ \vdots \\ u_1 = S_1[v_1 + L_{1,2}u_2 + \dots + L_{1,q}u_q] \\ u_i \in (1-P_0)D_0, \quad w_i \in (1-P_0)X \end{array} \right.$$

On obtient ainsi u en fonction de v de façon continue.

Puisque $v = \tilde{Q}y$ et $u = \tilde{Q}x$, l'équation initiale (1) est résoluble de façon continue.

Autrement dit : l'opérateur $\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0 : (1-\hat{P}_0)D_0^q \rightarrow (1-\hat{P}_0)X^q$ admet un inverse continu que nous noterons :

$$\bar{S}_0 : (1-\hat{P}_0)X^q \rightarrow (1-\hat{P}_0)D_0^q \subseteq (1-\hat{P}_0)X^q.$$

L'opérateur \bar{S}_0 est explicité par le système (5) et le changement de variables : $v = \tilde{Q}y$ et $u = \tilde{Q}x$.

Soit S_0 l'extension suivante de \bar{S}_0 :

$$S_0 : X^q \rightarrow X^q$$

$$x \in \hat{P}_0 X^q \rightarrow S_0 x = 0$$

$$x \in (1-\hat{P}_0)X^q \rightarrow S_0 x = \bar{S}_0 x$$

Nous dirons que S_0 est la résolvante réduite de \hat{T}_0 aux points $\lambda_0^1 \dots \lambda_0^q$.

Remarquons : $S_0 X^q = (1-\hat{P}_0)D_0^q$

L'opérateur S_0 vérifie :

$$- S_0 \hat{P}_0 = \hat{P}_0 S_0 = 0$$

$$- \forall x \in D_0^q, \quad S_0(\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0)x = (1 - \hat{P}_0)x$$

$$- \forall x \in X^q, \quad (\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0)S_0x = (1 - \hat{P}_0)x$$

III - APPROXIMATION D'UN SOUS-ESPACE INVARIANT D'UN OPERATEUR LINEAIRE PAR ITERATION : PRESENTATION FORMELLE

1) Hypothèses

Soient $T : D \subseteq X \rightarrow X$ et $T_0 : D_0 \subseteq X \rightarrow X$ deux opérateurs fermés de domaines denses D et D_0 avec $D_0 \subseteq D$. Soient \hat{T} et \hat{T}_0 leurs extensions naturelles à X^q .

Nous supposons connaître une partie isolée du spectre de T_0 formée de q valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité algébrique : $\lambda_0^1 \dots \lambda_0^q$.

Pour le reste, les grandeurs $P_0, \hat{P}_0, \theta_0, \theta_0^*, \varphi_0^i, \varphi_0^{*i}, \Lambda_0, \tilde{\Lambda}_0, \bar{S}_0, S_0$ ont déjà été définies dans la partie II précédente..

2) Les itérations

Nous allons exhiber deux séries $\sum \theta_i$ et $\sum \Lambda_i$ respectivement dans X^q et $\mathcal{L}(X^q)$, sans nous préoccuper de leur convergence ; faisons cependant remarquer que, avec les hypothèses précédentes, chaque terme θ_i ou Λ_i sera défini et effectivement calculable.

On considère la famille d'opérateurs suivante :

$$\hat{T}(t) = \hat{T}_0 + t(\hat{T} - \hat{T}_0) = \widehat{T_0 + t(T - T_0)}, \text{ pour } t \in \mathbb{C}$$

$$\hat{T}(t) : D_0^q \subseteq X^q \rightarrow X^q$$

(d'après les résultats du chapitre I, on sait que, s'il existe $z_0 \in \rho(T_0)$, alors, pour tout t vérifiant $|t| < r(T - T_0)R(T_0, z_0)$, l'opérateur $\hat{T}(t)$ est fermé de domaine D_0^q . Mais ici nous ne considérons t que comme un paramètre formel, seul le cas $\hat{T}(1) = \hat{T}$ nous intéressera ; il nous suffit que les opérateurs $\hat{T}(t)$ soient de domaine D_0^q).

Considérons un système de q vecteurs $\vartheta(t) = (\varphi^1(t), \dots, \varphi^q(t)) \in X^q$, dépendant analytiquement de t .

Il est clair que $\vartheta(t)$ est un système invariant par $\hat{T}(t)$, si et seulement si il existe une matrice $q \times q$ $\Lambda(t)$ telle que :

$$(6) \quad \hat{T}(t)\vartheta(t) = \tilde{\Lambda}(t)\vartheta(t)$$

Posons :

$$\vartheta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \vartheta_n$$

$$\Lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Lambda_n$$

où ϑ_0 et Λ_0 sont les éléments propres déjà définis associés à T_0 .

Si, dans (6), on identifie les puissances de n , on obtient les relations suivantes :

$$(\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0)\vartheta_n = -(\hat{T} - \hat{T}_0)\vartheta_{n-1} + \sum_{k=1}^n \tilde{\Lambda}_k \vartheta_{n-k}, \quad n \geq 1$$

Si on impose à ϑ_n , $n \geq 1$, d'appartenir à $(1 - \hat{P}_0)D_0^q$, cette équation équivaut aux deux suivantes, après composition par \hat{P}_0 et $(1 - \hat{P}_0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\hat{P}_0(\hat{T}-\hat{T}_0)\vartheta_{n-1} + \tilde{\Lambda}_n \vartheta_0 \quad n \geq 1 \\ (\hat{T}_0 - \tilde{\Lambda}_0)\vartheta_n = -(1-\hat{P}_0)(\hat{T}-\hat{T}_0)\vartheta_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\Lambda}_k \vartheta_{n-k}, \quad n \geq 1 \end{array} \right.$$

D'où on tire :

$$(7) \quad \boxed{\begin{array}{l} \vartheta_n = S_0 [-(\hat{T}-\hat{T}_0)\vartheta_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\Lambda}_k \vartheta_{n-k}] \quad n \geq 1 \\ \Lambda_n = \langle \vartheta_0, \vartheta_0^* \rangle^{-1} \langle (\hat{T}-\hat{T}_0)\vartheta_{n-1}, \vartheta_0^* \rangle \quad n \geq 1 \end{array}}$$

Puisque S_0 est à valeurs dans D_0^q , le vecteur ϑ_n appartient à D_0^q (qui est inclus dans D^q) ; et $(\hat{T}-\hat{T}_0)\vartheta_n$ existe.

Les termes ϑ_n et Λ_n sont donc bien définis.

3) Un résultat de convergence

a) Le vecteur ϑ_n , $n \geq 1$, peut aussi s'écrire $\vartheta_n = S_0 \psi_n$ où le vecteur ψ_n appartient à $(1-\hat{P}_0)X^q$ et, avec Λ_n , vérifie les relations récurrentes suivantes :

$$(8) \quad \boxed{\begin{array}{l} \psi_1 = -(1-\hat{P}_0)(\hat{T}-\hat{T}_0)\vartheta_0 \\ \Lambda_1 = \langle \vartheta_0, \vartheta_0^* \rangle^{-1} \langle (\hat{T}-\hat{T}_0)\vartheta_0, \vartheta_0^* \rangle \\ \psi_n = -(1-\hat{P}_0)(\hat{T}-\hat{T}_0)S_0 \psi_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\Lambda}_k S_0 \psi_{n-k}, \quad n \geq 2 \\ \Lambda_n = \langle \vartheta_0, \vartheta_0^* \rangle^{-1} \langle (\hat{T}-\hat{T}_0)S_0 \psi_{n-1}, \vartheta_0^* \rangle, \quad n \geq 2 \end{array}}$$

L'intérêt des formules (8) par rapport (7), est de mettre en évidence l'opérateur $(\hat{T}-\hat{T}_0)S_0 : X^q \rightarrow X^q$ qui est borné.

b) Lemme : Supposons que les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n\| \quad \text{dans } X^q$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\Lambda_n\| \quad \text{dans } \mathcal{L}(E^q)$$

alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n$ convergent respectivement vers Λ (dans $\mathcal{L}(E^q)$) et ϑ (dans X^q), et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T}\vartheta = \tilde{\Lambda}\vartheta \\ \hat{P}_0\vartheta = \vartheta_0 \end{array} \right.$$

Autrement dit : ϑ est un système de vecteurs invariants par T ; ce système est libre puisque ϑ_0 l'est ; dans la base ϑ , T est représenté par la matrice Λ .

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce lemme, celle donnée au chapitre I dans le cas simple se généralisant immédiatement à ce cas.

4) Remarque

Soit T un opérateur approché en norme ou de façon collectivement compacte par une suite T_n ; pour n assez grand on peut appliquer les itérations définies par (7) à T et $T_0 = T_n$, comme nous l'avons vu au chapitre III dans le cas simple.

Nous n'avons pas d'expérience numérique à ce sujet.

IV - CAS D'UN OPERATEUR QUASI-DECOMPOSE PAR UNE PROJECTION

1) Hypothèse

Soit $T : D \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur fermé de domaine dense D .

Soit $P_0 : X \rightarrow X$ une projection continue de rang q telle que $P_0 X \subseteq D$ et $P_0^* X^* \subseteq D^*$ (D^* est le domaine de définition de T^*).

L'opérateur P_0 peut s'écrire :

$$P_0 = \sum_{i=1}^q \frac{\langle \cdot, \varphi_0^{*i} \rangle}{\langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*i} \rangle} \varphi_0^i,$$

où $\vartheta_0 = (\varphi_0^1, \dots, \varphi_0^q) \in D^q$

et $\vartheta_0^* = (\varphi_0^{*1}, \dots, \varphi_0^{*q}) \in (D^*)^q$ sont deux systèmes de vecteurs normés tels que :

$$\cdot \langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*j} \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$\cdot \langle \varphi_0^i, \varphi_0^{*i} \rangle \neq 0.$$

L'opérateur $P_0 T P_0 : X \rightarrow X$ est défini et borné ; sa restriction à $P_0 X$ a q valeurs propres $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^q$. L'hypothèse $P_0^* X^* \subseteq D^*$ assure que l'opérateur T_0 défini par :

$$T_0 : D \subseteq X \rightarrow X$$

$$T_0 x = P_0 T P_0 x + (1 - P_0) T (1 - P_0) x,$$

est fermé (ou, de façon équivalente, que l'opérateur $(1 - P_0) T (1 - P_0) : D \subseteq X \rightarrow X$ est fermé -voir la remarque I.4 du chapitre II).

Nous supposerons que le spectre de la restriction de $(1 - P_0) T (1 - P_0)$ à $(1 - P_0) X$ ne contient aucune des valeurs $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^q$.

Ces hypothèses assurent que P_0 est la projection spectrale de T_0 associée au groupe de valeurs $\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^q$, et que la résolvante réduite $S_0 : X^q \rightarrow X^q$ de T_0 en ces points existe (voir le paragraphe II.3.b.) ; on notera \bar{S}_0 la restriction de S_0 à $(1-\hat{P}_0)X^q$.

Le système θ_0 est invariant par T_0 . Soit Λ_0 la matrice qui représente T_0 dans la base θ_0 ; on a :

$$\Lambda_0 = \langle \theta_0, \theta_0^* \rangle^{-1} \langle T_0 \theta_0, \theta_0^* \rangle = \langle \theta_0, \theta_0^* \rangle^{-1} \langle T \theta_0, \theta_0^* \rangle$$

$$\forall x \in X^q, \hat{P}_0 \hat{T} \hat{P}_0 x = \widehat{P_0 T P_0} x = \tilde{\Lambda}_0 \hat{P}_0 x$$

2) Notations :

Les notations sont les suivantes :

$$- U_0 = (\hat{T} - \hat{T}_0) \theta_0$$

$$- U = S_0 (\hat{T} - \hat{T}_0) \theta_0$$

$$- V_0^* = (\hat{T}^* - \hat{T}_0^*) \theta_0^*, \text{ qui est défini car } \theta_0^* \text{ appartient aux domaines de } \hat{T}^* \text{ et de } \hat{T}_0^*.$$

$$- \eta = \| \langle S_0 (\hat{T} - \hat{T}_0) \theta_0, (\hat{T}^* - \hat{T}_0^*) \theta_0^* \rangle \|$$

$$= \| \langle S_0 U_0, V_0^* \rangle \|$$

$$- p = \| \langle \theta_0, \theta_0^* \rangle^{-1} \|$$

$$- \Gamma = \| \bar{S}_0 \|_{q,q}$$

$$- \varepsilon = p \cdot \| U \|_q \| V_0^* \|_q \Gamma = p \| S_0 U_0 \|_q \| V_0^* \|_q \Gamma$$

- $S(x)$, $S_k(x)$, a_k ont été définis au paragraphe I.3 du chapitre II.

Remarque :

- η et p sont des normes de matrices dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$ ou des normes d'opérateurs matriciels dans $\mathcal{L}(X^q)$, en vertu du lemme II.2.b.α.

3) Les itérations

Appliquées à \hat{T} et $\hat{T}_0 = \hat{P}_0 \hat{T} \hat{P}_0 + (1 - \hat{P}_0) T (1 - \hat{P}_0)$, les itérations définies par (7) et (8) s'écrivent :

(9)

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\bar{S}_0 (1 - \hat{P}_0) \hat{T} \theta_0 = -S_0 \hat{T} \theta_0 \\ \Lambda_1 &= 0 \\ \theta_n &= \bar{S}_0 \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\Lambda}_k \theta_{n-k}, \quad n \geq 2 \\ \Lambda_n &= \langle \theta_0, \theta_0^* \rangle^{-1} \langle \hat{T} \theta_{n-1}, \theta_0^* \rangle, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -(1 - \hat{P}_0) \hat{T} \theta_0 \\ \Lambda_1 &= 0 \\ \psi_n &= \bar{S}_0 \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\Lambda}_k \psi_{n-k}, \quad n \geq 2 \\ \Lambda_n &= \langle \theta_0, \theta_0^* \rangle^{-1} \langle \bar{S}_0 \psi_{n-1}, V_0^* \rangle, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

4) Théorème de convergence

Les séries $\sum_n \psi_n$ et $\sum_n \Lambda_n$ peuvent être étudiées comme nous avons étudié les séries $\sum_n \Psi_n$ et $\sum_n \lambda_n$ dans la partie II du chapitre II, dans le cas d'une valeur propre simple.

Nous ne referons pas entièrement cette étude, nous contentant de donner l'hypothèse de récurrence vérifiée par les coefficients Ψ_n et d'énoncer le théorème de convergence qui en découle.

Hypothèse de récurrence :

Pour $k \geq 1$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{2k} = 0 \\ \Psi_{2k+1} = M_k S_0 \hat{T} \vartheta_0 \\ M_k : (1-\hat{P}_0)X^q \rightarrow (1-\hat{P}_0)X^q \text{ est un opérateur continu tel que :} \\ \|M_k\| \leq a_k \eta \rho \epsilon^{k-1} \end{array} \right.$$

Théorème de convergence

Si $\epsilon \leq 1/4$ alors :

a) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k$ converge vers un système ϑ de q vecteurs indépendants ; le sous-espace engendré par ϑ est invariant par T ; on a : $\hat{P}_0 \vartheta = \vartheta_0$.

b) On a les bornes d'erreur suivantes :

$$\begin{aligned} \left\| \vartheta - \sum_{i=0}^{2k+1} \vartheta_i \right\|_q &= \left\| \vartheta - \sum_{i=0}^{2k+2} \vartheta_i \right\|_q \\ &\leq \frac{\eta \Gamma \rho \|U\|_q}{\epsilon} \cdot S_{k+1}(\epsilon), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left\| \vartheta - \vartheta_0 \right\|_q \leq \|U\|_q + \frac{\eta \Gamma \rho \|U\|_q}{\epsilon} S_1(\epsilon)$$

c) Les bornes suivantes sont un peu moins fines, mais plus simples :

$$\|\vartheta - \sum_{i=0}^{2k+1} \vartheta_i\|_q = \|\vartheta - \sum_{i=0}^{2k+2} \vartheta_i\|_q$$

$$\leq \|U\|_q S_{k+1}(\varepsilon) \quad , \quad k \geq 0$$

$$\|\vartheta - \vartheta_0\|_q \leq \|U\|_q S(\varepsilon)$$

d) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ converge vers une matrice $q \times q$ Λ qui représente la matrice de T dans la base ϑ :

$$\tilde{T}\vartheta = \tilde{\Lambda}\vartheta$$

e) On a les bornes d'erreur suivantes :

$$\|\Lambda - \sum_{i=0}^{2k} \Lambda_i\| = \|\Lambda - \sum_{i=0}^{2k+1} \Lambda_i\| \leq \eta p S_k(\varepsilon), \quad k \geq 0$$

En particulier :

$$\|\Lambda - \Lambda_0\| = \|\Lambda - (\Lambda_0 + \Lambda_1)\| \leq \eta p S(\varepsilon).$$

Rappelons que les normes matricielles qui interviennent sont définies par les normes N_1 ou N_∞ (ou N_2 quand X est un Hilbert) de \mathbb{C}^q (voir le paragraphe II.1.a.).

La condition $\varepsilon \leq 1/4$ entraînant $1 \leq S(\varepsilon) \leq 2$, le théorème précédent permet d'obtenir des bornes très simples pour $\|\vartheta - \vartheta_0\|_q$ et $\|\Lambda - \Lambda_0\|$.

Corollaire :

Si $\epsilon \leq 1/4$, alors :

$$\|\Lambda - \Lambda_0\| \leq 2\eta p = 2\| \langle S_0(\hat{T} - \hat{T}_0)\varphi_0, (\hat{T}^* - \hat{T}_0^*)\varphi_0^* \rangle \| \cdot \|P_0\|$$

$$\|\varphi - \varphi_0\|_q \leq 2\|U\|_q = 2\|S_0(\hat{T} - \hat{T}_0)\varphi_0\|_q$$

5. Intérêt du théorème de convergence et des itérations

Lorsque la condition de convergence ($\epsilon \leq 1/4$) est vérifiée, les formules (9) du paragraphe 3 fournissent d'une part une série $\sum_n \varphi_n$ dans X^q qui converge vers une base d'un sous-espace invariant de T , et d'autre part une série $\sum_n \Lambda_n$ de matrices $q \times q$ qui converge vers la matrice qui représente T dans la base φ .

Le spectre des matrices successives $\sum_{k=0}^n \Lambda_k$ converge vers le spectre de Λ , donc vers une partie du spectre de T .

Les itérations fournissent un moyen d'approcher simultanément plusieurs valeurs propres de T (ou une valeur propre multiple) et le sous-espace invariant total qui leur est associé.

Limitons nous au pas $n = 0$ de l'itération.

Posons $\alpha = \eta p S(\epsilon)$, $\alpha' = \|U\|_q S(\epsilon)$.

On a :

$$(11) \quad \|\Lambda - \Lambda_0\| \leq \alpha$$

$$(12) \quad \|\varphi - \varphi_0\|_q \leq \alpha'$$

La relation (11) fournit une première estimation de la distance entre le spectre de Λ_0 et celui de Λ : chaque valeur propre de Λ_0 approche une valeur propre de Λ (donc de T) à l'ordre 0 ($\alpha^{1/q}$) (voir [9] p. 63).

Cette précision est souvent médiocre. Nous allons examiner rapidement deux cas (non exhaustifs, mais auxquels il est possible de se ramener) où on peut améliorer la connaissance du spectre de Λ .

- Le spectre de Λ_0 est formé de q valeurs propres simples suffisamment isolées les unes des autres.

A partir de l'information fournie par Λ_0 et \emptyset_0 , on définit q projections P_0^i ($i = 1, \dots, q$) de rang 1, et on applique les résultats du chapitre II à la décomposition

$$P_0^i T P_0^i + (1-P_0^i) T (1-P_0^i) \text{ de } T \text{ par } P_0^i.$$

(voir le second exemple numérique : 6.b).

- Le spectre de Λ_0 est formé de q valeurs propres proches les unes des autres.

On ne cherche plus à estimer séparément les valeurs propres de Λ par celles de Λ_0 , mais la moyenne $\hat{\lambda}$ des valeurs propres de Λ par la moyenne λ_0 de celles de Λ_0 .

De (11) on déduit immédiatement :

$$|\hat{\lambda} - \lambda_0| = \frac{1}{q} |\text{trace} (\Lambda - \Lambda_0)| \leq \alpha.$$

Si Λ a une valeur propre de multiplicité q ; la relation (12) précise l'erreur sur le sous-espace invariant (sur le sous-espace propre si la valeur propre est semi-simple).

(voir le premier exemple numérique : 6.a).

6) Exemples numériques

a) Premier exemple :

Cas d'une valeur propre double (à 10^{-9} près)

$$\alpha) \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0,001 & 0,999\,999\,500 & 2 \\ 0,999\,999\,500 & 1,002\,001\,999 & 2,001\,997\,999 & 1,000\,999\,500 \\ -0,001 & 0,001\,997\,999 & 2,997\,998\,001 & 0,998\,999\,500 \\ 0 & 0,001 & 0,999\,999\,500 & 2 \end{bmatrix}$$

Aux erreurs d'arrondi près T est la matrice : $Q^{-1}AQ$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \text{Arcsin}10^{-3}$$

Les valeurs propres de T sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1,000\,000\,000 \\ \lambda_2 &= 1,000\,000\,000 \\ \lambda_3 &= 1,381\,968\,024 \\ \lambda_4 &= 3,618\,031\,976 \end{aligned}$$

Le système \emptyset suivant est une base du sous-espace invariant de T associé à λ_1 et λ_2 :

$$\emptyset = \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \\ 0 & ; & 0,001\,000\,000 \\ 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Dans cette base T a pour matrice :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1,000\ 000\ 000 & 0,000\ 000\ 000 \\ 1,000\ 000\ 000 & 1,000\ 000\ 000 \end{bmatrix}$$

L'espace C^4 sera muni de la norme $\sum_{i=1}^4 |x_i|$

$\beta)$ La matrice T sera décomposée par la projection orthogonale P_0 sur les deux premiers vecteurs de bases.

Dans la base :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'opérateur $T_0 = P_0 T P_0 + (1-P_0) T (1-P_0)$ est représenté par la matrice :

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,001 \\ 0,999\ 999\ 500 & 1,002\ 001\ 999 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de Λ_0 sont :

$$\begin{aligned} \lambda_0^1 &= 0,969\ 362\ 392 \\ \lambda_0^2 &= 1,032\ 639\ 607 \end{aligned}$$

Dans la base $\{(e_3, 0), (e_4, 0), (0, e_3), (0, e_4)\}$ on a :

$$\tilde{S}_0 = \begin{bmatrix} 1,006\ 071 & -1,008\ 104 & 0,002\ 026 & -0,003\ 039 \\ -1,009\ 112 & 2,013\ 165 & -0,003\ 042 & 0,005\ 062 \\ 2,026\ 342 & -3,038\ 501 & 1,010\ 129 & -1,014\ 187 \\ -3,041\ 543 & 5,061\ 798 & -1,015\ 202 & 2,023\ 299 \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } \bar{S}_0 U_0 = \begin{bmatrix} -0,001\ 005 \\ 0,001\ 008 \\ -0,001\ 022 \\ 0,003\ 036 \end{bmatrix}$$

De plus :

$$\langle \bar{S}_0 U_0, V_0^* \rangle = \begin{bmatrix} 0,001\ 011 & 0,005\ 051 \\ -0,001\ 003 & 0,000\ 993 \end{bmatrix}$$

γ) D'où les quantités suivantes :

$$- p = 1$$

$$- \Gamma = 11, 12$$

$$- \|\bar{S}_0 U_0\| = 6,26 \cdot 10^{-3}$$

$$- \|V_0^*\| = 2,00$$

$$- \epsilon = 0,139 \leq 1/4$$

$$- S(\epsilon) = 1,200$$

$$- \eta = 6,04 \cdot 10^{-3}$$

$$- \eta p S(\epsilon) = 7,3 \cdot 10^{-3}$$

$$- \|\bar{S}_0 U\| S(\epsilon) = 7,5 \cdot 10^{-3}$$

δ) D'où les estimations suivantes :

$$- \|\Lambda_0 - \Lambda\| \leq 7,3 \cdot 10^{-3}$$

valeur exacte : $3,0 \cdot 10^{-3}$.

$$- \|\theta_0 - \theta\| \leq 7,5 \cdot 10^{-3}$$

valeur exacte : $1,0 \cdot 10^{-3}$

Au vu des valeurs propres de Λ_0 , la matrice Λ (donc T) a deux valeurs propres proches de 1 ; la moyenne $\hat{\lambda}_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 = 1,001\ 001$ approche la moyenne $\hat{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ avec la précision prévue :

$$|\hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}| \leq 7,3 \cdot 10^{-3}$$

valeur exacte : $1,0 \cdot 10^{-3}$

b) Second exemple :

deux valeurs propres bien séparées

α) C^4 est muni de la norme $\sum_{i=1}^4 |x_i|$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \end{vmatrix}, \text{ avec } \alpha = 3 \cdot 10^{-3}$$

Valeurs propres de T :

$$\lambda_1 = -0,414\ 782\ 159$$

$$\lambda_2 = 2,407,408\ 618$$

$$\lambda_3 = 3,010\ 364\ 487$$

$$\lambda_4 = 1,997\ 009\ 053$$

Sous-espace invariant associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

$$\varnothing = \begin{vmatrix} 1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \\ -0,001\ 456\ 126 & ; & 0,002\ 936\ 395 \\ -0,000\ 013\ 395 & ; & 0,000\ 018\ 382 \end{vmatrix}$$

Vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et λ_2 :

$$\begin{vmatrix} 1,000\ 000\ 000 & ; & 1,000\ 000\ 000 \\ -0,707\ 701\ 289 & ; & 0,705\ 494\ 153 \\ 0,000\ 621\ 965 & ; & -0,003\ 527\ 735 \\ -0,000\ 000\ 773 & ; & -0,000\ 025\ 977 \end{vmatrix}$$

β) On décompose T par la projection orthogonale sur les deux premiers vecteurs de base.

$$\Lambda_0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \varnothing_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad \varnothing_0^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Valeurs propres de Λ_0 :

$$\lambda_0^1 = 1 - \sqrt{2} = -0,414\ 213\ 562$$

$$\lambda_0^2 = 1 + \sqrt{2} = 2,414\ 213\ 562$$

Dans la base $\{(e_3, 0) ; (e_4, 0) ; (0, e_3) ; (0, e_4)\}$ on a :

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{-2-8\alpha+\alpha^2} \begin{vmatrix} -2-\alpha & \alpha-4 & -2+2\alpha & -6 \\ -4\alpha+\alpha^2 & 2-2\alpha & -6\alpha & 4+2\alpha \\ -1+\alpha & -3 & -4-2\alpha & -8+2\alpha \\ -3\alpha & 2+\alpha & -8\alpha+2\alpha^2 & 4-4\alpha \end{vmatrix}$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} ; \bar{S}_0 U_0 = \frac{\alpha}{-2-8\alpha+\alpha^2} \begin{pmatrix} -2+2\alpha \\ -6\alpha \\ -4-2\alpha \\ -8\alpha+2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$V_0^* = [1 ; 2 ; 2 ; 1]$$

D'où :

$$\langle \bar{S}_0 U_0, V_0^* \rangle = \frac{\alpha}{-2-8\alpha+\alpha^2} \begin{vmatrix} -2-10\alpha & -4-18\alpha+4\alpha^2 \\ -4-2\alpha & -8-12\alpha+\alpha^2 \end{vmatrix}$$

γ) D'où :

$$P = 1$$

$$\Gamma = 11-46\alpha+0(\alpha^2) \# 10,86$$

$$\|\bar{S}_0 U_0\| = 3\alpha-5\alpha^2+0(\alpha^3) \# 8,96 \cdot 10^{-3}$$

$$\|V_0^*\| = 2$$

$$\eta = 6\alpha-9\alpha^2$$

$$\varepsilon = 66\alpha-245\alpha^2+0(\alpha^3) \# 0,196$$

$$S(\varepsilon) = 1,36$$

D'où les estimations :

$$-\|\Lambda - \Lambda_0\| \leq 24,3 \cdot 10^{-3}$$

valeur exacte : $8,9 \cdot 10^{-3}$

$$-\|\theta - \theta_0\| \leq 0,012 \ 0$$

valeur exacte : $0,003 \ 4$

δ) Sur cet exemple les valeurs propres de Λ_0 sont bien séparées.

$$\text{Les vecteurs } \psi_0^1 = e_1 - \frac{e_2}{\sqrt{2}} \text{ et } \psi_0^2 = e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{2}}$$

sont des vecteurs propres de T_0 .

Si on traite les deux valeurs propres séparément, en appliquant les résultats du chapitre II, et en décomposant T d'abord par la projection P_0^1 sur ψ_0^1 parallèlement à (ψ_0^2, e_3, e_4) , puis par la projection P_0^2 sur ψ_0^2 parallèlement à (ψ_0^1, e_3, e_4) , on trouve :

. première valeur propre :

$$\epsilon = 1,17 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda_0^1 = 1 - \sqrt{2} = -0,414 \ 213 \ 562$$

$$\psi_0^1 = e_1 - \frac{e_2}{\sqrt{2}}$$

$$|\lambda_0^1 - \lambda_1| \leq 0,69 \cdot 10^{-3} ; \text{ valeur exacte : } 0,57 \cdot 10^{-3}$$

$$\|\psi_0^1 - \psi_1\| \leq 1,8 \cdot 10^{-3} ; \text{ valeur exacte : } 1,2 \cdot 10^{-3}$$

. deuxième valeur propre :

$$\varepsilon = 0,144$$

$$\lambda_0^1 = 1 + \sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562$$

$$\varphi_0^1 = e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{2}}$$

$$|\lambda_0^2 - \lambda_2| \leq 10,1 \cdot 10^{-3} ; \text{ valeur exacte : } 6,8 \cdot 10^{-3}$$

$$\|\varphi_0^2 - \varphi_2\| \leq 9,2 \cdot 10^{-3} ; \text{ valeur exacte : } 5,2 \cdot 10^{-3}$$

On remarquera que pour la valeur propre λ^1 bien séparée du reste du spectre de T la quantité ε est très inférieure à $1/4$; alors que pour λ^2 , moins bien isolée la quantité ε est assez voisine de $1/4$.

V - CONCLUSION

L'intérêt de ce chapitre est d'avoir généralisé les résultats du chapitre II. Cette généralisation est indispensable dans le cas d'une valeur propre multiple et utile dans le cas de valeurs propres non assez isolées les unes des autres.

Les itérations envisagées fournissent à la fois un moyen de calcul pour approcher le sous-espace invariant \emptyset et la matrice Λ , et un outil théorique pour estimer l'erreur sur l'approximation.

Formellement, les résultats de ce chapitre et ceux du chapitre II sont les mêmes.

Le terme principal de l'erreur sur $\|\Lambda - \Lambda_0\|$ est la norme de la matrice

$$\langle \emptyset_0, \emptyset_0^* \rangle^{-1} \langle \bar{S}_0 (\hat{T} - \hat{T}_0) \emptyset_0, (\hat{T}^* - \hat{T}_0^*) \emptyset_0^* \rangle,$$

et sur $\|\emptyset - \emptyset_0\|_q$ c'est la norme dans X^q du vecteur $\bar{S}_0 (\hat{T} - \hat{T}_0) \emptyset_0$.

Signalons que dans [7], Lemordant étudie aussi l'approximation d'une partie du spectre de T , quand on le décompose par une projection P_0 de rang q . L'étude repose sur l'examen de la série de perturbation de la moyenne des valeurs propres.

Soit $\hat{\lambda}_0$ la moyenne des valeurs propres de Λ_0 ; des bornes sur la distance à $\hat{\lambda}_0$ des valeurs propres de Λ , et de leur moyenne sont données, ainsi qu'un minorant du rayon d'isolation des valeurs propres de Λ autour de $\hat{\lambda}_0$. Il est difficile de comparer ces résultats aux nôtres car les quantités qui mesurent l'approximation sont différentes. Disons seulement que les bornes d'erreur semblent du même ordre.

ANNEXE

APPROXIMATION D'OPERATEURS INTEGRAUX COMPACTS

I - APPROXIMATION SPECTRALE D'OPERATEURS

Soit X un espace de Banach sur \mathbb{C} , $T : X \rightarrow X$ un opérateur borné et $T_n : X \rightarrow X$ une suite d'opérateurs bornés.

Nous considérons les deux types de convergence suivants de T_n vers T (voir [3] chapitre 2).

Définition 1

T_n converge vers T en norme si :

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Définition 2

T_n converge vers T de façon collectivement compacte si (voir [1])

- $\forall x \in X, T_n x \rightarrow Tx, n \rightarrow \infty.$

- $\cup_n (T - T_n)B$ est relativement compact dans X , où B est la boule unité de X .

Soit λ une valeur propre simple isolée de T et φ un vecteur propre normé associé à T et λ .

La propriété suivante est commune aux deux notions de convergence définies ci-dessus.

PROPRIETE :

Il existe une suite λ_n de valeurs propres de T_n , et une suite φ_n de vecteurs propres associés à T_n et λ_n tels que :

$$\lambda_n \rightarrow \lambda, n \rightarrow \infty$$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi, n \rightarrow \infty$$

De plus, la quantité $\eta_n = \|(T_n - T)\varphi_n\|$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini et règle la convergence

$$\lambda_n - \lambda = O(\eta_n)$$

$$\varphi_n - \varphi = O(\eta_n)$$

Soit φ_n^* un vecteur propre normé associé à T_n^* et $\bar{\lambda}_n$.

Posons : $\lambda_n^0 = \lambda_n^1$, et soit λ_n^1 le premier itéré obtenu par les formules (8) du chapitre I.

$$\text{Soit : } \rho_n = \frac{\langle T_n \varphi_n, \varphi_n^* \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n^* \rangle} = \lambda_n^0 + \lambda_n^1$$

Le quotient de Rayleigh de T_n formé sur φ_n et φ_n^* .

PROPRIETE :

Le quotient de Rayleigh ρ_n converge vers λ ; la convergence est réglée par la quantité $\varepsilon_n \varepsilon_n^*$, avec $\eta_n^* = \|(T - T_n)\varphi_n^*\|$:

$$\lambda - \rho_n = O(\eta_n \eta_n^*)$$

Si T_n converge vers T en norme, alors η_n^* tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et ρ_n est une approximation "d'ordre 2" $\eta_n \eta_n^*$ de λ . (tableaux 1,2,3 du chapitre II et 8,9,10 du chapitre III).

Si T_n converge vers T de façon collectivement compacte, en général η_n^* ne tend pas vers 0 et ρ_n n'est qu'une approximation "d'ordre 1" η_n de λ (ρ_n n'améliore pas λ_n) (tableaux 11, 12, 13 du chapitre III).

II - APPROXIMATION SPECTRALE D'OPERATEURS INTEGRAUX COMPACTS

1. Opérateurs intégraux compacts

On désigne maintenant indifféremment par X l'espace $\mathcal{L}^2(0,1)$ ou $\mathcal{C}(0,1)$.

Soit $k : (x,t) \in [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue

L'opérateur $T : X \rightarrow X$ défini par :

$$Tx(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)dt$$

est un opérateur compact.

2. Approximation d'un opérateur compact par des méthodes de projection

Soit $\pi_n : X \rightarrow X$ une suite de projections qui converge ponctuellement vers l'identité.

On considère les approximations suivantes de T (opérateur compact) :

• $T_n^G = \pi_n T \pi_n$ approximation de Galerkin

• $T_n^S = T \pi_n$ approximation de Sloan

• $T_n^P = \pi_n T$ approximation de projection

Les approximations T_n^G et T_n^S convergent vers T de façon collectivement compacte, alors que T_n^P converge vers T en norme.

Indiquons par G, S, P les éléments propres relatifs à T_n^G, T_n^S, T_n^P ; rappelons que $\lambda_n^0 = \lambda_n, \lambda_n^1, \lambda_n^2 \dots$ et $\psi_n^0 = \psi_n, \psi_n^1, \dots$ désignent les premiers termes fournis par les itérations (8) du chapitre I, et que nous posons :

$$\rho_n = \lambda_n^0 + \lambda_n^1.$$

Les éléments propres associés à T_n^G , T_n^S et T_n^P vérifient :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \rho_n^G = \lambda_n^G = \lambda_n^S = \lambda_n^P \\ \cdot \lambda_n^{0G} + \lambda_n^{1G} + \lambda_n^{2G} = \lambda_n^{0P} + \lambda_n^{2P} = \rho_n^S = \rho_n^P = \lambda_n^{0P} + \lambda_n^{1P} \\ \cdot \varphi_n^{0G} + \varphi_n^{nG} = \varphi_n^S \end{array} \right.$$

Puisque T_n^P est une approximation en norme de T , d'après la partie II du chapitre III, on a :

$$\cdot \lambda - \lambda_n^{0P} = O(\eta_n^P)$$

$$\cdot \lambda - (\lambda_n^{0P} + \lambda_n^{1P}) = O(\eta_n^P \varepsilon_n^P) \quad \text{avec } \varepsilon_n^P \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

D'où l'on déduit, d'après les relations (1) :

$$\cdot \lambda - \lambda_n^G = O(\eta_n^P)$$

$$\cdot \lambda - \rho_n^S = \lambda - \rho_n^P = O(\eta_n^P \varepsilon_n^P)$$

Ce qui montre que $\rho_n^S = \rho_n^P$ est une amélioration de λ_n^G (tableaux 1,2,3 du chapitre II).

Puisque T_n^G est une approximation collectivement compacte de T , d'après la partie III du chapitre III on a :

$$\cdot \varphi - \varphi_n^{0G} = O(\eta_n^G)$$

$$\cdot \varphi - (\varphi_n^{0G} + \varphi_n^{1G}) = \varphi - \varphi_n^S = O(\eta_n^G \mu_n^G), \quad \text{où } \mu_n^G \text{ est un coef-}$$

ficient -borné- qui ne tend pas vers zéro en général.

Le vecteur φ_n^S n'est donc pas en général une approximation de φ_n^G (tableau 13 bis chapitre III).

3. Approximation d'un opérateur intégral compact par la méthode de Nyström

Considérons une suite de fonctionnelles linéaires de X dans C définie par :

$$x \rightarrow \sum_{i=1}^n p_{i,n} x(t_{i,n}) ;$$

et qui converge ponctuellement vers la fonctionnelle :

$$x \rightarrow \int_0^1 x(t) dt.$$

La méthode de Nyström consiste à approcher T par la suite d'opérateurs ainsi définis :

$$T_n^N x(s) = \sum_{i=1}^n p_{i,n} k(s; t_{i,n}) x(t_{i,n})$$

Dans X , la convergence de T_n^N vers T est collectivement compacte (voir [1]).

Si $\frac{\partial k}{\partial s}$, $\frac{\partial k}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 k}{\partial s \partial t}$ sont continus, il y a convergence en norme dans l'espace $C^1(0,1)$ (voir [2]).

Soit π_n l'interpolation affine par morceaux aux points $t_{1,n}, \dots, t_{n,n}$. La méthode de Fredholm consiste à approcher T par $T_n^F = \pi_n T_n^N$. Dans X la convergence de T_n^F vers T est collectivement compacte (voir [3] p. 61).

III - EXEMPLES D'OPERATEURS INTEGRAUX COMPACTS

Dans les expériences numériques nous avons considérés quatre opérateurs dits EXP, COS, N1 et N2. Les noyaux $k(s,t)$ associés sont réguliers ou non, symétriques ou non.

Pour chaque opérateur nous donnons ci-dessous les valeurs propres de plus grand module et les vecteurs propres associés quand ils sont connus analytiquement.

- Opérateur EXP : $k(s,t) = e^{st}$

$$\lambda_1 = 1,353\ 030\ 164\ 745\ 7$$

$$\lambda_2 = 0,105\ 934\ 224\ 090\ 89$$

$$\lambda_3 = 0,003\ 560\ 749\ 121$$

- Opérateur COS : $k(s,t) = |\cos s - \cos t|$

$$\lambda_1 = 0,164\ 564\ 509$$

- Opérateur N1 : $k(s,t) = s(1-t)$ si $s \leq t$
 $= t(1-s)$ si $t \leq s$

$$\lambda_1 = 1/\pi^2 = 0,101\ 321\ 183\ 642$$

$$\lambda_2 = 1/4\pi^2 = 0,025\ 330\ 295\ 910\ 6$$

$$\lambda_3 = 1/9\pi^2 = 0,001\ 257\ 309\ 293\ 6$$

$$\lambda_4 = 1/16\pi^2 = 0,006\ 332\ 573\ 977\ 65$$

vecteurs propres associés : $\varphi_i(t) = \sin(i\pi t)$

- Opérateur N2 : $k(s,t) = 2|s-t|$ si $t \leq s$
 $= \frac{1}{2}|s-t|$ si $s \leq t$

$$\lambda_1 = 0,360\ 319\ 399\ 516\ 556$$

$$\lambda_2 = 0,159\ 739\ 903\ 738\ 154$$

$$\lambda_3 = -0,100\ 386\ 878\ 511\ 146$$

vecteurs propres associés :

$$\varphi_1(t) = \exp(\omega t) + \alpha_1 \exp(-\omega t)$$

$$\varphi_i(t) = 4 \cos(\alpha_i t) + \cos(\alpha_i - 1)t \quad i = 2,3$$

avec :

$$\alpha_1 = 4,403\ 535\ 664\ 975\ 24$$

$$\alpha_2 = 3,956\ 063\ 875\ 005\ 68$$

$$\alpha_3 = 4,990\ 356\ 011\ 107\ 60$$

Ces opérateurs ont été approchés par $T_n^G, T_n^P, T_n^S, T_n^N$.

Pour les méthodes de projections π_n est l'interpolation linéaire par morceaux aux points $\frac{i}{n-1}$, $i = 0, \dots, n-1$.

Pour T_n^N la formule de quadrature approchée est celle de Gauss à 2 points (donc n est pair) :

$$- P_{i,n} = \frac{1}{n}$$

$$- t_{i,n} = (i - \frac{1}{\sqrt{3}})/n \quad \text{si } i \text{ est impair}$$

$$- t_{i,n} = (i-1 + \frac{1}{\sqrt{3}})/n \quad \text{si } i \text{ est pair}$$

Les valeurs propres ont été calculées par l'algorithme QR, et les vecteurs propres par un algorithme de retour inverse fournis par [10] contributions II, 13, 14, 18.

On rappelle que T_n^G, T_n^S, T_n^N appliqués aux quatre opérateurs dans X donnent une convergence collectivement compacte ; T_n^P donne une convergence en norme ; T_n^N appliqué à EXP dans $\mathcal{C}^1(0,1)$ donne aussi une convergence en norme.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 12 juin 1979

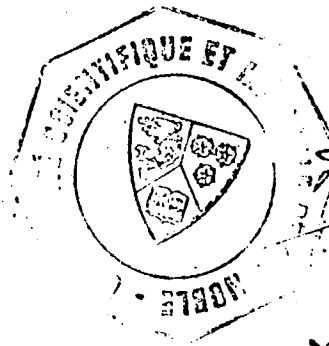
Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 12 juin 1979

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



J. G. CAU