



HAL
open science

Application du quotient de Rayleigh au calcul des valeurs propres d'opérateurs différentiels par la méthode des différences finies

Touria Ghemires

► **To cite this version:**

Touria Ghemires. Application du quotient de Rayleigh au calcul des valeurs propres d'opérateurs différentiels par la méthode des différences finies. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1979. Français. NNT : . tel-00289217

HAL Id: tel-00289217

<https://theses.hal.science/tel-00289217>

Submitted on 20 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Analyse numérique

par

Touria GHEMIRES



**APPLICATION DU QUOTIENT DE RAYLEIGH
AU CALCUL DES VALEURS PROPRES
D'OPERATEURS DIFFERENTIELS
PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES.**



Thèse soutenue le 28 juin 1979 devant la Commission d'Examen :

Président : N. GASTINEL

Examineurs : F. CHATELIN
F. ROBERT

Invité : P. BERNA

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1977-1978

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-présidents : M. René PAUTHENET

M. Georges LESPINARD

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Electronique - automatique
BESSON Jean	Chimie minérale
BLOCH Daniel	Physique du solide - cristallographie
BONNETAIN Lucien	Génie chimique
BONNIER Etienne	Métallurgie
* BOUDOURIS Georges	Electronique - automatique
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide - cristallographie
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique - automatique
COUMES André	Electronique - automatique
DURAND Francis	Métallurgie
FELICI Noël	Electronique - automatique
FOULARD Claude	Electronique - automatique
LANCIA Roland	Electronique - automatique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire corpusculaire
LESPINARD Georges	Mécanique
MOREAU René	Mécanique
PARIAUD Jean-Charles	Chimie - physique
PAUTHENET René	Electronique - automatique
PERRET René	Electronique - automatique
POLOUJADOFF Michel	Electronique - automatique
TRAYNARD Philippe	Chimie - physique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
* en congé pour études	

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuël	Electronique - automatique
BOUVARD Maurice	Génie mécanique
COHEN Joseph	Electronique - automatique
GUYOT Pierre	Métallurgie physique
LACOUME Jean-Louis	Electronique - automatique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide - cristallographie

.../...

MM. ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
ROBERT François	Analyse numérique
ZADWORNY François	Electronique - automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
CHARTIER Germain	Electronique - automatique
CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
IVANES Marcel	Electronique - automatique
LESIEUR Marcel	Mécanique
MORET Roger	Physique nucléaire - corpusculaire
PIAU Jean-Michel	Mécanique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M. SOHM Jean-Claude	Chimie Physique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M. FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM. ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
BRONOEL Guy	Maître de Recherche
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)
E.N.S.E.E.G.

MM. BISCONDI Michel	Ecole des Mines St. Etienne (dépt. Métallurgie)
BOOS Jean-Yves	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
DRIVER Julian	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)

.../...

MM. KOBYLANSKI André	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LE COZE Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LESBATS Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LEVY Jacques	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
RIEU Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
SAINFORT	C.E.N. Grenoble (Métallurgie)
SOUQUET	U.S.M.G.
CAILLET Marcel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
COULON Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
GUILHOT Bernard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LALAUZE René	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LANCELOT Francis	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SARRAZIN Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SOUSTELLE Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THEVENOT François	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THOMAS Gérard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TOUZAIN Philippe	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TRAN MINH Canh	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL	Centre d'études nucléaires de Grenoble
KAMARINOS	Centre national recherche scientifique

E.N.S.E.G.P.

M. BORNARD	Centre national recherche scientifique
Mme CHERUY	Centre national recherche scientifique
MM. DAVID	Centre national recherche scientifique
DESCHIZEAUX	Centre national recherche scientifique

APPLICATION DU QUOTIENT DE RAYLEIGH AU CALCUL DES
VALEURS PROPRES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS PAR
LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Je tiens tout d'abord à remercier Madame F. CHATELIN d'avoir bien voulu m'accueillir dans son équipe et d'avoir dirigé ce travail.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur N. GASTINEL d'avoir accepté de présider le Jury.

J'exprime tous mes remerciements à Monsieur F. ROBERT et Monsieur P. BERNA d'avoir eu l'amabilité de participer au Jury.

Je témoigne ma sympathie à mes camarades de l'équipe d'Analyse Numérique, particulièrement à Messieurs J. LEMORDANT P. REDONT, et Y. SAAD.

Que soit également remerciée Melle BICAIS["] pour sa participation dans la réalisation matérielle de ce manuscrit.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

NOTATIONS -----	4
CHAPITRE 1 - <u>L'APPROXIMATION DISCRETE DU PROBLEME DE VALEURS PROPRES</u>	7
1. Approximation discrete d'espaces de Banach et d'opérateurs -----	9
1.1 Approximation discrete d'espaces de Banach -----	9
1.2 Suite discrètement convergente et suite discrètement compacte	11
1.3 Approximation discrète d'opérateurs linéaires continus -----	12
1.4 Autres types de convergence d'opérateurs -----	15
1.5 Relations entre les convergences stables et régulières -----	16
1.6 Convergence des opérateurs de projections -----	19
2. Approximation du problème de valeurs propres -----	22
2.1 Définitions spectrales -----	23
2.2 Opérateurs de Fredholm d'indice nul -----	25
2.3 Approximation de (P) $Ax = \lambda Bx$ -----	32
2.4 Résultats de convergence -----	34
CHAPITRE 2 - <u>BORNES D'ERREUR ET QUOTIENT DE RAYLEIGH GENERALISE APPLIQUE</u> <u>A L'APPROXIMATION DISCRETE</u>	
1. Bornes d'erreur dans l'approximation discrète -----	49
1.1 Problème adjoint -----	49
1.2 Bornes d'erreur -----	53
2. Le quotient de Rayleigh généralisé associé à l'approximation discrète -----	59

2.1 L'opérateur "prolongement" et l'approximation associée -----	59
2.2 Bornes d'erreur -----	63
2.3 Quotient de Rayleigh -----	66
2.4 Calculabilité de ρ_n dans le cas d'une valeur propre simple -	69

CHAPITRE 3 - QUOTIENT DE RAYLEIGH DISCRET ET APPLICATION A LA METHODE
DES DIFFERENCES FINIES 71

1. Quotient de Rayleigh discret -----	71
1.1 Hypothèses -----	72
1.2 Quotient de Rayleigh discret -----	75
2. Applications numériques -----	78
2.1 Exemple 1 -----	79
2.2 Exemple 2 -----	87
3. Conclusions -----	92
BIBLIOGRAPHIE -----	94

INTRODUCTION

Dans les méthodes pratiques d'approximation de valeurs propres d'opérateur un point essentiel est d'approcher au mieux et au moindre coût la valeur propre exacte. Dans ce but nous nous sommes intéressés à la technique d'amélioration des valeurs propres par calcul du quotient de Rayleigh dans le cas d'un problème différentiel approché par la méthode des différences finies.

Pour un opérateur T autoadjoint dans un espace de Hilbert H , le quotient de Rayleigh construit sur un vecteur non nul, $x \in \text{Dom}(T)$ est défini par $\rho = \frac{(Tx, x)}{(x, x)}$. Le quotient de Rayleigh a été utilisé pour la localisation des valeurs propres d'opérateurs différentiels autoadjoints par G. Temple [20] et T. KATO [12] puis par K. Yosida [31].

Lorsque T est approché par T_n , opérateur défini dans H et autoadjoint, le quotient de Rayleigh est construit sur un vecteur propre de T_n . Dans ce cas ρ est une approximation de λ , valeur propre de T , d'ordre ϵ^2 si ϵ est l'ordre de l'erreur sur les vecteurs propres.

Dans le cas où l'opérateur T n'est pas auto-adjoint, l'extension de ce résultat s'obtient par le quotient de Rayleigh généralisé, $\rho = \frac{(Tx, x^*)}{(x, x^*)}$, où $x \in \text{Dom}(T)$, $x^* \in \text{Dom}(T^*)$ et $(x, x^*) \neq 0$ (voir [5] et [15]).

En pratique, d'une part x et x^* sont respectivement des vecteurs propres des approximations T_n de T et T_n^* de T^* ; d'autre part, T_n est de rang fini. Le calcul des vecteurs propres de T_n^* n'est pas nécessaire, il suffit de calculer les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice associée à T_n .

Lorsque T est un opérateur intégral, l'utilisation du quotient de Rayleigh est simple (voir [4] et [16]). Si T est approché par $T_n = \pi_n T \pi_n$, où π_n est une projection dans H , c'est la méthode de Galerkin. Dans ce cas la valeur propre approchée est égale au quotient de Rayleigh construit sur les vecteurs propres approchés.

Dans le cas d'un problème différentiel elliptique

(P) $Ax = \lambda Bx$, plusieurs cas se présentent :

- 1°) L'approximation par des éléments finis conformes de (P) est équivalente à l'approximation par la méthode de Galerkin de (P') : $Tx = \frac{1}{\lambda} x$ où $T = A^{-1}B$, avec la projection de π_n orthogonale. Donc la valeur propre approchée est d'emblée d'ordre supérieur à l'ordre obtenu sur les vecteurs propres.
- 2°) L'approximation par différences finies de (P), dans certains cas simples, est équivalente à l'approximation par la méthode de Fredholm du problème (P') (voir [22]). On sait que dans ce cas la valeur propre approchée est différente du quotient de Rayleigh. Nous avons donc été amené à l'étude du cas de l'approximation par des différences finies.

Nous commençons par présenter dans le chapitre 1 l'ensemble des résultats théoriques de l'approximation discrète du problème (P) : $Ax = \lambda Bx$, où $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$; E et F sont des espaces de Banach.

L'introduction d'un opérateur de prolongement permet d'établir des bornes d'erreur a posteriori des éléments propres dans le chapitre 2. Elle nous permet aussi d'obtenir une approximation T_n , de l'opérateur de Green associé, dans le même espace qui est assez artificielle en pratique.

Nous avons été amenée à introduire dans le chapitre 3 une notion de quotient de Rayleigh discret bien adaptée au calcul par la méthode des différences finies. Ce quotient conserve la propriété fondamentale du quotient de Rayleigh : être une approximation de λ d'ordre supérieur à celui de l'erreur sur les vecteurs propres, sous des hypothèses de convergence des problèmes adjoints.

Des expériences numériques sont données à la fin du troisième chapitre.

NOTATIONS

E et F sont des espaces de Banach complexes. On note leurs normes respectives $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F muni de la norme $\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}$

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$$

$$A, B \in \mathcal{L}(E, F)$$

$\rho(A, B)$ et $\sigma(A, B)$ sont respectivement l'ensemble résolvant et le spectre de (A, B) (définition au paragraphe 2.1 du chapitre 1).

Pour $z \in \rho(A, B)$, $R(z) = (A - zB)^{-1}$ est la résolvante associée (A, B) .

λ est une valeur propre isolée de (A, B)

Γ (ou $\Gamma(\lambda)$) est une courbe rectifiable fermée qui isole λ .

Δ est l'ouvert limité par Γ

$z_0 \in \rho(A, B) \cap \Delta$ est fixé

$$\Delta' = \left\{ t = \frac{1}{z - z_0}, z \in \Delta, z \neq z_0 \right\}.$$

E_n, F_n sont des espaces de Banach complexes de dimension finie. On note leurs normes $\| \cdot \|_{E_n}$ et $\| \cdot \|_{F_n}$.

$\mathcal{L}(E_n, F_n)$ est l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E_n dans F_n ,

muni de la norme
$$\|A_n\| = \sup_{\substack{x_n \in E_n \\ x_n \neq 0}} \frac{\|A_n x_n\|_{F_n}}{\|x_n\|_{E_n}}$$

$$A_n, B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n).$$

$\rho(A_n, B_n)$, $\sigma(A_n, B_n)$, $\mathcal{R}_n(z)$ sont les analogues de $\rho(A, B)$, $\sigma(A, B)$, et $R(z)$.

λ_n est une valeur propre de (A_n, B_n)

N' , N'' , N''' désignent des sous-suites infinies de \mathbf{N} .

Schéma de l'approximation des valeurs propres

$$\boxed{Ax = \lambda Bx}$$

<u>Si $0 \in \rho(A)$</u>		<u>Si $z_0 \in \rho(A, B)$</u>
$x = \lambda A^{-1} Bx$		$(A - z_0 B)x = (\lambda - z_0) Bx$
$A^{-1} Bx = \mu x, \mu = \frac{1}{\lambda}$		$T = (A - z_0 B)^{-1} B$
\Downarrow		\Downarrow
$P(0) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} (A^{-1} B - t)^{-1} dt$		$P(z_0) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(\frac{1}{\lambda - z_0})} (R(z_0) B - t)^{-1} dt$

$$M = P(0)E = P(z_0)E$$

$$\boxed{A_n x_n = \lambda_n B_n x_n}$$

$A_n^{-1} B_n x_n = \mu_n x_n, \mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$	\Downarrow	$\mathcal{C}_n x_n = \mu_n x_n, \mu_n = \frac{1}{\lambda_n - z_0}$
\Downarrow		\Downarrow
$\mathcal{P}_n(0) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(\frac{1}{\lambda_n})} (A_n^{-1} B_n - t)^{-1} dt$		$\mathcal{C}_n = \mathcal{P}_n(z_0) B_n = (A_n - z_0 B_n)^{-1} B_n$
\Downarrow		\Downarrow
$\mathcal{P}_n(z_0) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(\frac{1}{\lambda_n - z_0})} (\mathcal{C}_n - t)^{-1} dt$		$\mathcal{P}_n(z_0) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(\frac{1}{\lambda_n - z_0})} (\mathcal{C}_n - t)^{-1} dt$

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{P}_n(0)E_n = \mathcal{P}_n(z_0)E_n$$

si $r_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ et $p_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$: $r_n p_n = 1_{E_n}$

$$T_n = p_n \mathcal{C}_n r_n$$

$$\bar{P}_n = p_n \mathcal{P}_n r_n$$

$$Q_n = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(\frac{1}{\lambda_n - z_0})} (T_n - t)^{-1} dt$$

CHAPITRE - 1

L'APPROXIMATION DISCRETE DU PROBLEME DE VALEURS PROPRES

Nous commençons par définir l'approximation discrète d'un espace de Banach E sur \mathbb{C} par une suite d'espaces de Banach sur \mathbb{C} (E_n), $n \in \mathbb{N}$, et les principaux types de convergence discrète d'une suite d'opérateurs linéaires continus de E_n dans F_n vers $A \in \mathcal{L}(E, F)$, ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F . F est un espace de Banach approché par la suite (F_n), $n \in \mathbb{N}$. Les E_n (resp. F_n) ne sont en général pas des sous-espaces vectoriels de E (resp. F).

Nous présentons l'approximation au sens discret du problème de valeurs propres : (P) $Ax = \lambda Bx$, où $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ et λ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie. Nous commençons par donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point du spectre soit une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie. Ensuite nous considérons le problème approché :

$$(P_n) \quad A_n x_n = \lambda B_n x_n, \quad \text{où } A_n, B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$$

avec E_n et F_n des espaces de Banach de même dimension finie.

Sous l'hypothèse de la convergence stable de $A_n - zB_n$ vers $A - zB$ pour tout $z \in \Delta \setminus \{\lambda\}$, où Δ est un ouvert qui isole λ , nous donnons les résultats de convergence des résolvantes, de convergence des valeurs propres de (P_n) vers λ et de convergence des vecteurs invariants.

Sous l'hypothèse de la convergence régulière de $A_n - zB_n$ vers $A - zB$ pour tout $z \in \Delta$, nous obtenons de plus la conservation des ordres de multiplicité algébrique et la convergence des vecteurs propres de (P_n) vers ceux de (P) .

La notion d'approximation discrète d'opérateur et d'espaces a été formalisée initialement par Stummel [18,19]. Son application à l'approximation spectrale a été développée par Grigorieff [7,8,9,10]. Ces travaux ont été repris et simplifiés par Vainikko [25,26]. Nous donnons ici une présentation qui s'inspire largement de [25,26] et de [9] et qui introduit le cadre théorique nécessaire à l'étude des bornes d'erreurs qui résultent de l'emploi du quotient de Rayleigh. Lorsque nous avons repris des démonstrations qui existent dans la littérature, les références sont clairement indiquées.

1 - APPROXIMATION DISCRETE D'ESPACES DE BANACH ET D'OPERATEURS

1.1 - Approximation discrète d'espaces de Banach

Soit E un espace de Banach sur \mathbb{C} . Une suite d'espaces de Banach sur \mathbb{C} (E_n) , $n \in \mathbb{N}$, approche au sens discret E s'il existe une suite d'opérateurs (r_n) dits de "restriction", où $r_n : E \rightarrow E_n$, $n \in \mathbb{N}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

(H1) compatibilité des normes de E et E_n :

$$\|r_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(H2) r_n est asymptotiquement linéaire :

$$\|r_n(\alpha x + \beta y) - \alpha r_n x - \beta r_n y\|_{E_n} \rightarrow 0$$

pour tout scalaire α, β et tout $x, y \in E$.

Si les propriétés (H1) et (H2) sont vérifiées, nous dirons que (E_n, r_n) définit une approximation de E .

Remarque :

La propriété (H2) peut être remplacée par :

(H'2) $r_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mais nous gardons l'hypothèse plus générale (H'2) car dans certaines méthodes de discrétisation, il existe une restriction plus naturelle qui est linéaire seulement sur un sous-espace dense E' de E . Voyons un exemple pris dans [23].

Soit $\Omega =]0,1[$ et $E = L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω muni de la norme

$$\|x\|_E = \left(\int_{\Omega} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Soit $\Omega_n = \{t_1^n, t_2^n, \dots, t_n^n\}$ une discrétisation de Ω telle que $\text{dist}(t, \Omega_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, pour tout $t \in \Omega$.

Si $\int_{\Omega} x(t) dt \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} x(t_i^n)$ est une formule de quadrature convergente pour tout $x \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, ensemble des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, avec les coefficients $\alpha_i^{(n)}$ positifs:

$E_n = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme : $\|x_n\|_{E_n} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} |(x_n)_i|^2 \right)^{1/2}$

* Pour $x \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, on pose $r_n x = (x(t_i^n))_{1 \leq i \leq n}$;
 r_n est alors linéaire sur $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $\|r_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E$ pour $x \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

* Si on considère une autre restriction r'_n , par exemple :

$$x \in L^2(\Omega), r'_n x = \left(\frac{1}{h_i^n} \int_{S_i^n} x(t) dt \right)_{1 \leq i \leq n},$$

$$\text{où } S_i^n = \left[t_i^n - \frac{h_i^n}{2}, t_i^n + \frac{h_i^n}{2} \right], \quad \sum_{i=1}^n h_i^n = 1, \quad h_i^n \rightarrow 0$$

$$\text{et } h_i^n \geq \gamma \cdot \alpha_i^{(n)} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

alors

$$\cdot r'_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$$

$$\cdot \|r'_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\| \quad \text{pour tout } x \in L^2(\Omega)$$

* soit l'opérateur \tilde{r}_n défini par :

$$x \in L^2(\Omega) \rightarrow \tilde{r}_n(x) = \begin{cases} r_n(x) & \text{si } x \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ r'_n(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

alors \tilde{r}_n vérifie (H1) et (H2).

Remarque :

Si r_n vérifie les hypothèses (H1) et (H'2) alors $\|r_n\| \leq \text{constante}$, pour tout n (théorème de la borne uniforme).

1.2 - Suite discrètement convergente et suite discrètement compacte

Définition 1

Une suite (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_n$, converge discrètement vers $x \in E$ si

$$\|x_n - r_n x\|_{E_n} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Nous notons la convergence discrète de (x_n) vers x par : $x_n \xrightarrow{(r)} x$ et la convergence d'une sous-suite définie pour $n \in N'$, $N' \subset \mathbb{N}$ par $x_n \xrightarrow[N']{(r)} x$ (ou $x_n \xrightarrow[N']{} x$, s'il n'y a pas de confusion possible).

Voici quelques propriétés de la convergence discrète :

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si } x_n \xrightarrow{(r)} x \\ \text{et } x_n \xrightarrow{(r)} x' \end{array} \right\} \text{ alors } x = x'.$$

$$(2) \quad \text{Si } x_n \xrightarrow{(r)} x \quad \text{alors pour toute sous-suite } N' \subset \mathbb{N}$$
$$x_n \xrightarrow[N']{(r)} x$$

$$(3) \quad \text{Si } x_n \xrightarrow{(r)} x \quad \text{alors } \|x_n\|_{E_n} \leq \text{constante pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Définition 2

Une suite (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_n$ est discrètement compacte ou r -compacte si :

pour toute sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$, il existe $N'' \subset N'$ et $x \in E$ tels que : $x_n \xrightarrow[N'']{(r)} x$.

Une étude de la compacité discrète a été faite par G. Vainikko [23].

1.3 - Approximation discrète d'opérateurs linéaires continus de E dans F.

Soient E et F deux espaces de Banach sur C, et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F, muni de la norme :

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Soient les suites d'espace de Banach sur C $\{E_n\}$, $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ et les suites d'opérateurs de restrictions $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ telles que (E_n, r_n) et (F_n, s_n) forment une approximation de E et F respectivement.

Soient $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Définition :

(T_n) , $n \in \mathbb{N}$ converge discrètement vers T, si : $x_n \xrightarrow{(r)} x$ entraîne $T_n x_n \xrightarrow{(s)} Tx$.

Cette convergence sera notée : $T_n \xrightarrow{(r,s)} T$.

On dit aussi que (T_n) est une approximation discrète de T

Nous présentons des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la convergence discrète de (T_n) vers T. (Vainikko [25]).

Proposition 1.1.

Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $T_n \xrightarrow{(r,s)} T$

(ii) Il existe une constante M , telle que :
 $\|T_n\| \leq M$, pour n suffisamment grand ;
 pour tout $x \in E$, $\|T_n r_n x - s_n T x\|_{F_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(iii) Il existe une constante M telle que
 $\|T_n\| \leq M$, pour n assez grand, et il existe une partie E'
 dense dans E telle que
 $\forall x \in E', \|T_n r_n x - s_n T x\|_{F_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Démonstration :

(i) \Rightarrow (ii)

Supposons qu'il existe une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ telle que
 $\|T_n\|_{n \in N'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, c'est-à-dire qu'il existe une suite (x_n) , $n \in N'$ avec
 $\|x_n\|_{E_n} = 1$ et $\|T_n x_n\|_{F_n} \rightarrow \infty$ alors $x'_n = \frac{x_n}{\|T_n x_n\|_{F_n}} \rightarrow 0$ pour $n \in N'$ et
 $n \rightarrow +\infty$, avec $\|T_n x'_n\|_{F_n} = 1$, ce qui est impossible.

Il existe donc une constante M positive et $n_0 \in \mathbb{N}$:

$\|T_n\| \leq M$, pour tout $n \geq n_0$.

Il est évident que (i) entraîne que $\|T_n r_n x - s_n T x\|_{F_n} \rightarrow 0$ pour tout $x \in E$.

(ii) \Rightarrow (iii) évident.

(iii) \Rightarrow (i) :

Soit une suite (x_n) , $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, telle que $x_n \xrightarrow{(r)} x$, quand $n \rightarrow +\infty$. $x \in E$.

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $x' \in E'$ avec $\|x-x'\|_E < \epsilon$.

De plus on a :

$$\begin{aligned} \|T_n x_n - s_n T x\|_{F_n} &\leq \|T_n(x_n - r_n x)\|_{F_n} + \|T_n(r_n x - r_n x')\|_{F_n} \\ &\quad + \|s_n T x' - s_n T x\|_{F_n} + \|T_n r_n x' - s_n T x'\|_{F_n} \end{aligned}$$

Or pour $n \geq n_0$:

$$\cdot \|T_n(x_n - r_n x)\|_{F_n} \leq M \cdot \|x_n - r_n x\|_{E_n} \text{ qui tend vers } 0.$$

$$\cdot \|T_n(r_n x - r_n x')\|_{F_n} \leq M \cdot \|r_n x - r_n x'\|_{E_n} \text{ qui tend vers } \|x-x'\|_E$$

comme $\|T_n r_n x' - s_n T x'\|_{F_n} \rightarrow 0$ puisque $x' \in E'$

$$\text{et } \|s_n T x' - s_n T x\|_{F_n} \rightarrow \|T x' - T x\|_F \leq \|T\| \cdot \|x-x'\|_E$$

nous avons pour n suffisamment grand :

$$\|T_n x_n - s_n T x\| \leq \epsilon, \text{ donc } T_n x_n \xrightarrow{(s)} T x$$

et la proposition est démontrée. •

1.4 - Autres types de convergence discrète d'opérateurs

Nous allons introduire des notions de convergence plus forte, la convergence stable, la convergence régulière et la convergence compacte.

Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1 :

(T_n) , $n \in \mathbb{N}$, est une approximation stable de T si :

$$(i) \quad T_n \xrightarrow{(r,s)} T$$

(ii) Pour n assez grand, T_n est inversible $T_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$ et $\|T_n^{-1}\| \leq \text{constante}$.

Nous noterons cette convergence : $T_n \xrightarrow[\text{stable}]{} T$.

Définition 2 :

(T_n) , $n \in \mathbb{N}$ est une approximation régulière de T , notée $T_n \xrightarrow[\text{reg}]{} T$, si

$$(i) \quad T_n \xrightarrow{(r,s)} T$$

(ii) Si (x_n) est une suite bornée et $(T_n x_n)$ est s -compacte alors (x_n) est r -compacte.

Définition 3 :

$(T_n), n \in \mathbb{N}$, est une approximation compacte de T , notée

$$T_n \xrightarrow[\text{comp}]{} T, \text{ si}$$

(i) $T_n \xrightarrow{(r,s)} T.$

(ii) Si $(x_n), n \in \mathbb{N}$ est une suite bornée alors $(T_n x_n), n \in \mathbb{N}$, est s-compacte.

Nous allons donner des relations entre la convergence stable et la convergence régulière (G. Vainikko [25]).

1.5 - Relation entre les convergences stable et régulière

Proposition 1.2

Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n), n \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } T_n \xrightarrow{\text{stable}} T \\ \text{et } T \text{ surjectif} \end{array} \right\} \text{ alors : } T_n \xrightarrow{\text{reg}} T$$

Démonstration :

La convergence stable entraîne pour n assez grand l'existence de $T_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$ et $\|T_n^{-1}\| \leq M.$

Soit une suite $(x_n), x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$ avec $\|x_n\|_{E_n} \leq 1$ et telle que il existe une sous-suite $N' \subset \mathbb{N} : T_n x_n \xrightarrow[N']{} y \in F.$

Comme T est surjectif, il existe $x \in E$ tel que $y = Tx.$
Pour n suffisamment grand :

$$\begin{aligned} x_n - r_n x &= T_n^{-1} (T_n x_n - T_n r_n x) \\ &= T_n^{-1} (T_n x_n - s_n Tx) + T_n^{-1} (s_n Tx - T_n r_n x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\|x_n - r_n x\|_{E_n} \leq M. (\|T_n x_n - s_n y\|_{F_n} + \|s_n T x - T_n r_n x\|_{F_n})$$

Comme $T_n x_n \xrightarrow[N']{(s)} y$ et $T_n r_n x \xrightarrow{(s)} T x$, alors $\|x_n - r_n x\|_{E_n} \xrightarrow[N']{} 0$.

Nous avons démontré que si $(T_n x_n)$ est s-compacte avec (x_n) bornée, alors (x_n) est r-compacte. Nous avons donc une convergence régulière.

Proposition 1.3

Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $n \in \mathbb{N}$

Si $T_n \xrightarrow{\text{reg}} T$

et T injectif

$\dim E_n = \dim F_n < \infty$

} alors $T_n \xrightarrow{\text{stable}} T$ et T est surjectif

Démonstration

Soit une suite bornée dans le noyau de T_n , $x_n \in \text{Ker}(T_n)$ et $\|x_n\|_E \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. La convergence régulière entraîne l'existence d'une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ telle que $x_n \xrightarrow[N']{(r)} x \in E$.

La convergence de T_n vers T entraîne alors : $0 = T_n x_n \xrightarrow[N']{} T x$, d'où $x \in \text{Ker}(T)$, comme T est injective, $x = 0$.
Par conséquent $\text{Ker}(T_n) = \{0\}$ pour n assez grand. Du fait que E_n et F_n sont des espaces de même dimension finie et $T_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ est injectif, T_n est alors surjectif et $T_n^{-1} : F_n \rightarrow E_n$ est continu.
Nous allons démontrer qu'il existe une constante M et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $n \geq n_0$: $\|T_n^{-1}\| \leq M$.

Supposons que ce résultat soit faux, alors il existe une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ et (x_n) , $n \in N'$, avec

$$\|x_n\|_{E_n} = 1$$

et

$$\|T_n x_n\|_{F_n} \xrightarrow[N']{} 0$$

La convergence régulière entraîne alors qu'il existe $x \in E$, et $N'' \subset N'$ avec : $x_n \xrightarrow[N'']{(r)} x$ ce qui entraîne $\|x\|_E = 1$ et $T_n x_n \xrightarrow[N'']{} Tx$.

D'où $\|x\|_E = 1$ et $\|Tx\|_F = 0$ ce qui est impossible puisque T est injectif.

Nous avons donc démontré que la convergence est stable ; il suffit maintenant de montrer que T est surjectif. En effet ; soit $y \in F$, alors $s_n y \in F_n$ et pour n assez grand $x_n = T_n^{-1} s_n y \in E_n$ avec

$$T_n x_n = s_n y \rightarrow y$$

et

$$\|x_n\| \leq M \|s_n y\| \text{ qui est borné.}$$

D'où, en utilisant la convergence régulière, l'existence d'une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ et d'un $x \in E$ tels que :

$$x_n \xrightarrow[N']{} x, \text{ ce qui entraîne que}$$

$$T_n x_n \xrightarrow[N']{} Tx, \text{ et alors } Tx = y. \bullet$$

Des deux propositions précédentes, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire :

Soient E_n et F_n de même dimension finie, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1°) T est injectif et $T_n \xrightarrow[\text{reg}]{} T$

2°) T est surjectif et $T_n \xrightarrow[\text{stable}]{} T$

Ce résultat est encore valable dans le cas où il n'y a pas d'hypothèse sur les dimensions de E_n et F_n , mais en faisant l'hypothèse que T_n est un opérateur de Fredholm d'indice nul, ce qui est plus général (voir Vainikko [25]).

1.6 - Convergence des opérateurs de projections

Soit $P \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur de projection dans E , c'est-à-dire $P^2 = P$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de projections dans E_n , $P_n \in \mathcal{L}(E_n)$. Nous notons $M = PE$ l'image de E par P et $M_n = P_n E_n$ l'image de E_n par P_n . Nous allons donner quelques propriétés classiques [9,25] sur les dimensions de M_n et M résultant de la convergence de P_n vers P . Pour cela voici un lemme qui sera utilisé par la suite :

Lemme 1.4 :

Soit $\{x^1, \dots, x^m\}$ un système de m vecteurs de E linéairement indépendants. Si $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite d'éléments de E_n , $1 \leq k \leq m$, telle que : $x_n^k \xrightarrow{(r)} x^k$ pour $k = 1, 2, \dots, m$.

Alors : étant donnée la suite de constantes $(a_n^k)_{k=1, \dots, m}$ la suite $(\sum_{k=1}^m a_n^k x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, est uniformément bornée en n si et seulement si : $\sum_{k=1}^m |a_n^k| \leq \text{constante}$, pour n assez grand.

Démonstration

Il est évident que la condition est suffisante, démontrons qu'elle est nécessaire :

Posons $x_n = \sum_{k=1}^m a_n^k x_n^k$, $n \in \mathbb{N}$, on peut supposer que $\|x_n\|_{E_n} \leq 1$.

Supposons $\sum_{k=1}^m |a_n^k| \xrightarrow{N'} \infty$, où N' est une sous-suite dans \mathbb{N} .

En prenant $x_n^i = \frac{x_n}{\sum_{k=1}^m |a_n^k|} = \sum_{k=1}^m \frac{a_n^k}{\sum_{k=1}^m |a_n^k|} x_n^k$, on a :

$\sum_{k=1}^m |b_n^k| = 1$, donc il existe une sous-suite $N'' \subset N'$ et $b_k \in \mathbb{C}$ tels que :

$$b_n^k \xrightarrow[N'']{} b^k \text{ pour } k = 1, 2, \dots, m \text{ et } \sum_{k=1}^m |b^k| = 1, \text{ et}$$

$$\|x_n'\|_{E_n} = \left\| \sum_{k=1}^m b_n^k x_n^k \right\|_{E_n} \xrightarrow[N'']{} \left\| \sum_{k=1}^m b^k x^k \right\|_E$$

Comme

$$\|x_n'\| \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^m |a_n^k|} \xrightarrow[N']{} 0, \text{ il y a contradiction.}$$

THEOREME 1.5.

Si M est de dimension finie et $P_n \xrightarrow{(r)} P$, alors :

$$\dim M_n \geq \dim M \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Démonstration

Soit m la dimension de M et soit $\{x^1, \dots, x^m\}$ une base de M . Nous commençons par démontrer le résultat suivant :

1°) Si une suite (x_n^k) , $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de E_n est telle que $x_n^k \xrightarrow{(r)} x^k$, pour $k = 1, 2, \dots, m$, alors $\{x_n^1, \dots, x_n^m\}$, pour n assez grand, est un système de vecteurs linéairement indépendants.

En effet, si (α_n^k) est une suite de scalaires, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$, avec $\sum_{k=1}^m \alpha_n^k x_n^k = 0$, alors (lemme 1.4), il existe une constante M et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ $\sum_{k=1}^m |\alpha_n^k| \leq M$. Donc pour toute sous suite $N' \subset \mathbb{N}$, il existe une sous-suite $N'' \subset N'$ et m scalaires $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m$ tels que :

$$\alpha_n^k \xrightarrow[N'']{} \alpha^k \text{ pour } 1 \leq k \leq m,$$

d'où

$$0 = \sum_{k=1}^m \alpha_n^k x_n^k \xrightarrow[N'']{} \sum_{k=1}^m \alpha^k x^k$$

et alors $\alpha^k = 0$ et $\alpha_n^k \rightarrow 0$, pour $k = 1, 2, \dots, m$

Le premier résultat est alors démontré.

2°) Comme $P_n \xrightarrow{(r)} P$, on a : $P_n r_n x^k \rightarrow P x^k$ pour $k = 1, 2, \dots, m$.
 On déduit du résultat du 1°), que $\{P_n r_n x^1, \dots, P_n r_n x^m\}$ est un système de m vecteurs linéairement indépendants dans M_n . Donc $\dim M_n \geq m$. •

THEOREME 1.6

Si M est de dimension finie, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $P_n \xrightarrow[\text{comp.}]{} P$
- (ii) $P_n \xrightarrow{(r)} P$ et $\dim M_n = \dim M$, pour n assez grand.

Démonstration

(i) => (ii)

D'après le théorème 1.5 $\dim M_n \geq \dim M = m$.

Supposons que $\dim M_n \geq m+1$, alors on peut trouver dans M_n , $m+1$ vecteurs linéairement indépendants : $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^{m+1}$ qu'on peut supposer de norme 1 : $\|x_n^k\|_{E_n} = 1$, pour $k = 1, 2, \dots, m+1$.

Comme $x_n^k = P_n x_n^k$, (x_n^k) , $n \in \mathbb{N}$, est une suite r -compacte, c'est-à-dire que pour toute sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$, il existe une sous-suite $N'' \subset N'$ et $x^k \in E$ tels que : $x_n^k \xrightarrow[N'']{} x^k$, ce qui entraîne

$$x_n^k = P_n x_n^k \xrightarrow[N'']{} P x^k$$

Donc, $x^k = P x^k \in M$ pour $k = 1, 2, \dots, m+1$ et x^1, x^2, \dots, x^{m+1} sont linéairement indépendants ce qui est impossible.

(ii) => (i)

Soit $\{x^1, \dots, x^m\}$ une base de M . Si $x_n^k = P_n r_n x^k$ alors $\{x_n^1, \dots, x_n^m\}$ est une base de M_n telle que $x_n^k \xrightarrow{(r)} x^k$ pour $k = 1, 2, \dots, m$.

Considérons une suite bornée (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_n$ et $\|x_n\|_E \leq 1$; pour n assez grand il existe des scalaires $\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^m$ tels que

$$P_n x_n = \sum_{k=1}^m \alpha_n^k x_n^k \text{ et } \sum_{k=1}^m |\alpha_n^k| \leq \text{constante (lemme 1.4).}$$

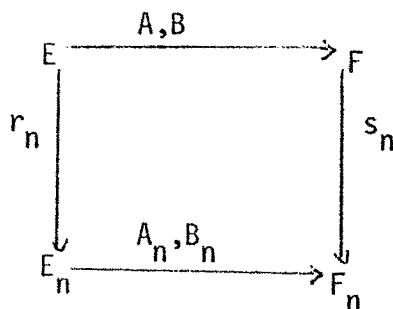
Soit $N' \subset \mathbb{N}$ une sous-suite, on peut trouver une sous-suite $N'' \subset N'$ et des scalaires $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ tels que $\alpha_n^k \xrightarrow{N''} \alpha^k$ pour $k = 1, 2, \dots, m$; d'où :

$$P_n x_n = \sum_{k=1}^m \alpha_n^k x_n^k \xrightarrow{N''} \sum_{k=1}^m \alpha^k x^k$$

Donc $(P_n x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite r -compacte. •

2 - APPROXIMATION DU PROBLEME DE VALEURS PROPRES

Soient E et F deux espaces de Banach sur \mathbb{C} et $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$. (E_n) et (F_n) , $n \in \mathbb{N}$, sont deux suites d'espaces de Banach sur \mathbb{C} qui approchent E et F respectivement et dont les suites des opérateurs de restriction associés sont respectivement (r_n) et (s_n) , $n \in \mathbb{N}$. Nous considérons aussi deux suites d'opérateurs dans $\mathcal{L}(E_n, F_n)$, (A_n) et (B_n) $n \in \mathbb{N}$. Nous avons le schéma suivant :



Nous supposons pour toute la suite que E_n et F_n sont de même dimension finie. Nous rappelons les propriétés vérifiées par r_n et s_n :

(H1) r_n (resp. s_n) vérifie la propriété de compatibilité des normes $\|\cdot\|_{E_n}$ et $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_{F_n}$ et $\|\cdot\|_F$).

(H2) r_n (resp. s_n) est asymptotiquement linéaire

2.1 - Définitions spectrales

Nous donnons les définitions [9, 13] et les notations des éléments spectraux associées au problème généralisé, associé au couple d'opérateurs (A,B) : trouver $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$(P) \quad Ax = \lambda Bx, \quad 0 \neq x \in E$$

1°) Ensemble résolvant et Spectre

L'ensemble résolvant de (A,B) noté $\rho(A,B)$ est défini par :

$$\rho(A,B) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } (A-zB)^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)\}.$$

$\rho(A,B)$ un ouvert de \mathbb{C} .

Le complémentaire dans \mathbb{C} de $\rho(A,B)$ est le spectre de (A,B) noté $\sigma(A,B)$.

2°) Résolvante, valeur propre isolée et projection spectrale

Pour tout $z \in \rho(A,B)$, $(A-zB)^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ et $R(z) = (A-zB)^{-1}$ est la résolvante, c'est une fonction analytique de z dans $\rho(A,B)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$, est une valeur propre de (A,B) si λ est un point du spectre pour lequel il existe $u \in E$ non nul tel que $Au = \lambda Bu$.

λ est dite isolée si on peut trouver un ouvert Δ de \mathbb{C} contenant λ et tel que $\Delta \cap \sigma(A,B) = \{\lambda\}$.

Si λ est une valeur propre isolée, il existe une courbe fermée Γ simple, rectifiable qui entoure un voisinage de λ et l'isole du reste du spectre.

On appelle projection spectrale associée à λ l'opérateur

$$P = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(z) \cdot B \, dz$$

P est une projection continue dans E .

Soit $z_0 \in \Delta \cap \rho(A, B)$, on a l'identité suivante dite équation des résolvantes :

$$(1) \quad R(z_0) B - \mu I = \mu R(z_0) (\lambda B - A)$$

où I est l'opérateur identité sur E et $\mu = \frac{1}{\lambda - z_0}$.

L'opérateur $T = R(z_0) B$ est continu, son spectre est l'image par la fonction $z \rightarrow \frac{1}{z - z_0}$ du spectre de (A, B) . Le problème de valeurs propres classique associé à T :

trouver $\mu \in \mathbb{C}$ tel que:

$$(P') \quad Tx = \mu x, \quad 0 \neq x \in E$$

est équivalent au problème (P). En effet, on montre facilement la proposition suivante :

Proposition 2.1

- (i) λ est valeur propre de (P) $\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\lambda - z_0}$ est valeur propre de (P')
- (ii) P est la projection spectrale associée à μ et $\text{Ker}(A - \lambda B) = \text{Ker}(T - \mu I)$.

$M = PE$ est le sous-espace invariant de T associé à μ .

Par extension, on appellera M sous-espace "invariant" du problème généralisé (P), associé à la valeur propre λ .

La multiplicité algébrique m de λ (ou μ) est la dimension de M .

La multiplicité géométrique de λ (ou de μ) est la dimension de $\text{Ker}(A-\lambda B)$, noyau qui est identique à $\text{Ker}(T-\mu I)$.

L'indice de λ (ou de μ) est le plus petit entier ℓ tel que $\text{Ker}(T-\mu I)^\ell = \text{Ker}(T-\mu I)^{\ell+1}$, $1 \leq \ell \leq m$.

2.2 - Opérateur de Fredholm d'indice nul

Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point du spectre de (A,B) soit une valeur propre isolée et de multiplicité algébrique finie. La démonstration de ce résultat est inspirée de quelques démonstrations de [13].

Nous commençons d'abord par donner la définition d'un opérateur de Fredholm d'indice nul.

Définition 1 :

Soit $H \in \mathcal{L}(E,F)$, H est un opérateur de Fredholm si

- . $\text{Ker}(H)$ et HE sont fermés,
- . $\dim \text{Ker}(H)$ et $\text{Codim } HE$ sont finies,

où $\text{Codim } HE$ est la dimension de l'espace quotient F/HE .

Définition 2 :

$H \in \mathcal{L}(E,F)$ opérateur de Fredholm est d'indice nul si

$$\text{ind}(H) = 0,$$

où $\text{ind}(H) = \dim \text{Ker}(H) - \text{Codim } HE$.

Lemme 2.2.

Soit X un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(X)$.

Si le noyau de T est de dimension finie alors : pour tout $k \in \mathbb{N}$, le noyau $\text{Ker}(T^k)$ est de dimension finie.

Démonstration

Le résultat étant vrai pour $k = 1$, par hypothèse, nous supposons que $N_0 = \text{Ker}(T^{k-1})$ est de dimension finie. Alors $N_1 = \text{Ker}(T^k)$ est un sous-espace fermé de X , ($T^k \in \mathcal{L}(X)$). L'opérateur T^{k-1} restreint à N_1 noté $T_1 = T^{k-1}|_{N_1} : N_1 \rightarrow N_1$ est continu. $\text{Ker}(T_1) = N_0$ est de dimension finie; comme $T_1 N_1 \subset N_0$, $\dim(N_1/N_0) = \dim(T_1 N_1) \leq \dim N_0$ et alors $\dim N_1$ est finie. •

Lemme 2.3.

Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\text{Ker}(T)$ soit de dimension finie et que TE soit fermé dans F .

Alors, si M est un sous-espace fermé dans E , TM est fermé dans F .

Démonstration

Soit l'espace quotient $E_0 = E/\text{Ker}(T)$. Les éléments de E_0 sont les classes d'équivalence notées \bar{u} , avec $u \in E$. $\bar{v} = \bar{u} \Leftrightarrow v-u \in \text{Ker}(T)$. E_0 muni de la norme induite :

$$\|\bar{u}\| = \inf_{u \in \bar{u}} \|u\| = \text{dist}(u, \text{Ker}(T)), \text{ est un espace de}$$

Banach.

. Puisque $\bar{u} = \bar{v} \Leftrightarrow Tu = Tv$, nous pouvons définir l'opérateur linéaire $T_0 : E_0 \rightarrow TE$ par $T_0 \bar{u} = Tu$, pour tout $\bar{u} \in E_0$. TE est fermé dans F , donc TE muni de la norme induite par F est un espace de Banach.

T_0 est continu : Soit (\bar{u}_n) une suite dans E_0 telle que $\|\bar{u}_n\| \rightarrow 0$, c'est-à-dire $d(u_n, \text{Ker}(T)) \rightarrow 0$ donc il existe $z_n \in \text{Ker}(T) : \|u_n - z_n\|_E \rightarrow 0$ donc $T(u_n) = T(u_n - z_n) \rightarrow 0$, puisque T est continu. Donc $T_0 \bar{u}_n = Tu_n \rightarrow 0$.

T_0 est inversible : T_0 est surjectif, de plus :

$T_0 \bar{u} = 0 \Leftrightarrow Tu = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(T)$, donc T_0 est inversible et son inverse est alors continu.

. Soit M_0 le sous-espace de E_0 défini par $M_0 = \{\bar{u} \in E_0 / u \in M\}$. M_0 est alors fermé dans E_0 puisque M et $\text{Ker}(T)$ sont des sous-espaces fermés de E .

. Par définition de T_0 et M_0 on a $T_0 M_0 = TM$, comme T_0^{-1} est continu $T_0 M_0$ est fermé dans TE donc dans F . •

THEOREME 2.4.

Soient $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ et Δ un ouvert ^{borné} de \mathbb{C} alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $A - \lambda B$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul, pour tout $\lambda \in \Delta$.
- (ii) $\Delta \subset \rho(A, B) \cup \{\text{valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie de } (A, B)\}$.

Démonstration :

(ii) => (i)

Soit $\lambda \in \Delta$, si $\lambda \in \rho(A,B)$ alors $(A-\lambda B)^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ et $A-\lambda B$ est de Fredholm d'indice nul.

Si λ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie, $M = PE$ et $N = QF$ sont de même dimension finie m , où

$$P = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} F(z) B dz \quad \text{et} \quad Q = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} B R(z) dz.$$

$\Gamma \subset \Delta$ est une courbe fermée qui entoure λ .

Soient $M' = (1-P)E$ et $N' = (1-Q)F$, alors $E = M \oplus M'$ et $F = N \oplus N'$ avec $(A-\lambda B)M \subset N$ et $(A-\lambda B)M' \subset N'$.

Considérons les restrictions de l'opérateur $A-\lambda B$ à M et M' :

$$H = (A-\lambda B) \upharpoonright M : M \rightarrow N,$$

$$H' = (A-\lambda B) \upharpoonright M' : M' \rightarrow N',$$

H est un opérateur de Fredholm d'indice nul, puisque $\dim M = \dim N = m < \infty$. H' est un opérateur inversible.

$\text{Ker}(A-\lambda B) = \text{Ker}(H)$ qui est de même dimension que N/HM .

Comme N' et HM sont fermés $(A-\lambda B)E = HM + N'$ est un sous-espace fermé de F .
Donc les espaces quotients $F/(A-\lambda B)E$ et N/HM sont isomorphes et alors $A-\lambda B$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.

(i) => (ii)

(a) Soit $\lambda \in \Delta$ alors $(A-\lambda B)E$ est fermé et

$\dim \text{Ker}(A-\lambda B) = \text{codim}((A-\lambda B)E) = g$ est finie.

- si $g = 0$ alors $A-\lambda B$ est inversible et $(A-\lambda B)^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$,
(théorème du graphe fermé), donc $\lambda \in \rho(A,B)$.

- si $g \neq 0$ alors il existe $u \in \text{Ker}(A-\lambda B)$, $u \neq 0$ donc λ est une valeur propre de (A,B) .

(b) Nous allons démontrer que si $\lambda \in \Delta$, est une valeur propre de (A,B) , alors λ est un point isolé du spectre de (A,B) .

Supposons que ce ne soit pas le cas.

Soit $\lambda_n \in \sigma(A,B)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ et $\lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$.

Alors pour $n \geq n_0$, $\lambda_n \in \Delta$ et d'après (a) λ_n est une valeur propre de (A,B) . Donc il existe une suite de vecteurs u_n telle que $(A-\lambda_n B)u_n = 0$, $\|u_n\|_E = 1$ et $\|u_n - u_m\|_E \geq \gamma > 0$ pour $n \neq m$.

Soit E_1 un supplémentaire de $N = \text{Ker}(A-\lambda B)$ dans E , $E = N \oplus E_1$; considérons l'opérateur $A-\lambda B$ restreint à E_1 ,

$$A_1 = A-\lambda B \upharpoonright E_1 : E_1 \rightarrow (A-\lambda B)E$$

A_1 est inversible et son inverse $S : (A-\lambda B)E \rightarrow E_1$, est continu.

Comme $u_n \in E$, $u_n = u_n^0 + u_n^1$ où $u_n^0 \in N$ et $u_n^1 \in E_1$; soit $f_n = (A-\lambda B)u_n^1$, alors $f_n = (A-\lambda B)u_n^1 = A_1 u_n^1$ et $u_n^1 = S f_n$.

D'autre part $f_n = (\lambda_n - \lambda)u_n \rightarrow 0$, ce qui entraîne que $u_n^1 = S f_n \rightarrow 0$.

Donc il existe $N' \subset N$ et $u \in N$ tels que : $u_n \xrightarrow[N']{} u$ et

$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$ pour $n, m \in N'$ et $n, m \rightarrow \infty$ ce qui contredit l'hypothèse.

Donc λ est une valeur propre isolée de (A,B) .

(c) Pour démontrer que λ est de multiplicité algébrique finie, il suffit de remarquer que puisque λ est isolée, $\Delta \cap \rho(A,B) \neq \emptyset$. Soient $z_0 \in \Delta \cap \rho(A,B)$ et $T = R(z_0)B$. $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\mu = \frac{1}{\lambda - z_0}$ est une valeur propre isolée de T de multiplicité algébrique égale à celle de λ . Soit M le sous-espace invariant par T , associé à μ , $\dim M < \infty$ est assuré par le lemme suivant : (dont nous donnons la démonstration après la fin de celle-ci).

Lemme 2.5

Avec les notations et les hypothèses précédentes, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$M \subset N((T_M^{-\mu} I_M)^{k_0}),$$

avec

$$T_M = T \upharpoonright_M : M \rightarrow M$$

I_M étant l'identité sur M .

Puisque $T_M^{-\mu} I_M \in \mathcal{L}(M)$, M est un sous-espace fermé de E et $\text{Ker}(T_M^{-\mu} I_M) = \text{Ker}(A - \lambda B)$ qui est de dimension finie ; le lemme 2.2 entraîne que M est de dimension finie. •

Démonstration du lemme 2.5

L'identité (1) : $T^{-\mu} I = \mu R(z_0)(\lambda B - A)$ entraîne :

. $N = \text{Ker}(T_M^{-\mu} I_M) = \text{Ker}(A - \lambda B)$ est de dimension finie,

. $(T_M^{-\mu} I_M)M = \mu R(z_0)(\lambda B - A)M$.

Comme M est un sous-espace fermé de E , le lemme 2.3 entraîne que $(\lambda B - A)M$ est fermé donc $(T_M^{-\mu} I_M)M$ est fermé et $(T_M^{-\mu} I_M)^k M$ est une suite décroissante de sous-espaces fermés, $k = 1, 2, \dots$

Par conséquent $N_k = N \cap (T_M^{-\mu} I_M)^k M$, $k = 1, 2, \dots$, est une suite décroissante de sous-espaces de dimension finie, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_k$, pour tout $k \geq k_0$.

Soient $N_0 = N_{k_0}$ et $X_0 = (T_M^{-\mu} I_M)^{k_0} M$. Nous allons démontrer que $N_0 = \{0\}$ et $X_0 = \{0\}^0$

Considérons l'opérateur $T_0 : X_0 \rightarrow X_0$ défini par $T_0 x = (T_M - \mu I_M)x$ pour tout $x \in X_0$.

T est continu et $\text{Ker}(T_0) = N_0$. Comme on a :

$$* \quad N_0 \subset (T_M - \mu I_M)^{k_0+k} M, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

$$* \quad (T_M - \mu I_M)^{k_0+k} M = T_0^k X_0, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

$$\text{Ker}(T_0) = N_0 \subset T_0^k X_0 \text{ et } \text{Ker}(T_0^k) \subset T_0 X_0, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Comme N_0 est un sous-espace de X_0 de dimension finie, il existe un sous-espace M_0 fermé, tel que $X_0 = N_0 \oplus M_0$.

Nous considérons alors l'opérateur :

$$T_1 = T_0|_{M_0} : M_0 \rightarrow T_0 X_0$$

T_1 est continu, inversible et son inverse S_0 est continu de $T_0 X_0$ dans M_0 .

* Soit $u_0 \in N_0$

Comme $N_0 \subset T_0 X_0$, il existe $u_1 \in M_0$ tel que

$S u_0 = u_1$; donc $u_1 \in \text{Ker}(T_0^2)$ et $\text{Ker}(T_0^2) \subset T_0 X_0$. On peut donc construire une suite (u_k) , $k = 1, 2, \dots$, telle que $u_k = S_0 u_{k-1}$ et $T_0^{k+1} u_k = 0$.
D'où $S_0^k u_0 = u_k$ appartient à $T_0^k X_0$.

$$\text{Donc } \|u_0\| = \|T_0^k S_0^k u_0\| \leq \|T_0^k\| \cdot \|S_0\|^k \cdot \|u_0\|.$$

Comme $\|T_0^k\|^{1/k} \rightarrow 0$, pour k suffisamment grand $\|T_0^k\|^{1/k} < \frac{1}{\|S_0\|}$
c'est-à-dire $\|T_0^k\| \cdot \|S_0\|^k < 1$.

Donc nécessairement $u_0 = 0$ et alors :

$$N_0 = \{0\}, \quad M_0 = X_0 \quad \text{et} \quad T_0 : X_0 \rightarrow X_0$$

est inversible et son inverse est continu.

* Soit $u \in X_0$,

$$u = S_0 T_0 u = S_0^n T_0^n u, \text{ donc } \|u\| \leq \|S_0\|^n \cdot \|T_0^n\| \cdot \|u\|.$$

Or pour $n \geq n_0$, $\|S_0\|^n \cdot \|T_0^n\| < 1$ donc $u = 0$ et alors $X_0 = \{0\}$ où $X_0 = (T_M - \mu I_M)^{k_{OM}}$. Ainsi le lemme est démontré. •

Le théorème 2.4 donne donc une condition nécessaire et suffisante sur (A,B) pour qu'un point du spectre de (A,B) soit une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie. C'est le seul cas que nous considérerons dans la suite.

2.3 - Approximation de (P)

$A, B \in \mathcal{L}(E, F)$; nous nous intéressons à l'approximation de λ valeur propre isolée de multiplicité algébrique m finie de (A, B) , c'est-à-dire solution de :

$$(P) \quad Ax = \lambda \cdot Bx, \quad 0 \neq x \in E$$

E, F étant approchés par E_n, F_n , A, B par A_n, B_n alors les valeurs propres de (P) vont être approchées par les valeurs propres λ_n solutions du problème discret :

$$(P_n) \quad A_n x_n = \lambda_n B_n x_n, \quad 0 \neq x_n \in E_n$$

$\rho(A_n, B_n)$, $\sigma(A_n, B_n)$ et $\mathfrak{R}_n(z) = (A_n - zB_n)^{-1}$ désignent respectivement l'ensemble résolvant, le spectre et la résolvante associés à (P_n) .

Soit Δ un ouvert contenant λ et qui l'isole du reste du spectre de (P) .
 Supposons que (P_n) ait dans Δ des valeurs propres notées $\lambda_n^1, \lambda_n^1, \dots, \lambda_n^i$.
 $\mathcal{P}_n^k, k = 1, \dots, i$ sont les projections spectrales associées, alors la
 projection spectrale associée à l'ensemble $\lambda_n^1, \dots, \lambda_n^i$ des valeurs propres
 dans Δ est $\mathcal{P}_n = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_n(z) B_n dz$, où $\Gamma \subset \Delta$ entoure toutes les valeurs
 propres $\mathcal{P}_n = \sum_{k=1}^i \mathcal{P}_n^k$, $\mathcal{U}_n = \mathcal{P}_n E_n$ est le sous-espace invariant associé.

Soit $z_0 \in \rho(A, B) \cap \Delta$, fixé, sous la condition :

$$(*) \quad z_0 \in \rho(A_n, B_n), \text{ pour tout } n \geq n_0(z_0),$$

On a l'identité suivante :

$$(2) \quad \mathcal{Q}_n(z_0) B_n^{-1} \mu_n I_n = \mu_n \mathcal{Q}_n(z_0) (\lambda_n B_n - A_n)$$

où $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n - z_0}$; et où I_n est l'opérateur identité sur E_n .

L'opérateur $\mathcal{C}_n = \mathcal{Q}_n(z_0) B_n$ est continu de E_n dans E_n . Le spectre de \mathcal{C}_n
 est l'image par la fonction $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ du spectre de (A_n, B_n) . Le problème

$$(P'_n) \quad \mathcal{C}_n x_n = \mu_n x_n, \quad 0 \neq x_n \in E_n$$

est équivalent au problème (P_n) . En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 2.6

Sous la condition $(*)$

- (i) λ_n est valeur propre de (A_n, B_n) si et seulement si μ_n est une valeur propre de \mathcal{C}_n .
- (ii) \mathcal{P}_n est la projection spectrale associée à μ et $\text{Ker}(A_n - \lambda_n B_n) = \text{Ker}(\mathcal{C}_n - \mu_n I_n)$.

Le problème (P'_n) est une approximation de

$$(P') \quad Tx = \mu x, \quad 0 \neq x \in E$$

En effet, les identités (1) et (2) nous donnent

Proposition 2.7

Soit $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$. Si $A_n - z_0 B_n \xrightarrow{\text{stab}} A - z_0 B$, alors :

$(*)$ est vérifiée et les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la convergence stable (resp. régulière) de $A_n - z B_n$ vers $A - z B$
- (ii) La convergence stable (resp. régulière) de $\mathcal{C}_n - t I_n$ vers $T - t I$; où $t = \frac{1}{z - z_0}$.

2.4 - Résultats de convergence

Dans le théorème suivant nous donnons la démonstration (Stumme [19]) de la convergence des résolvantes et des projections spectrales sous l'hypothèse de la convergence stable.

THEOREME 2.8

Si $A_n - z B_n \xrightarrow{\text{stable}} A - z B$, pour tout $z \in \Delta \cap \rho(A, B)$ alors

1°) $\mathcal{R}_n(z) \xrightarrow{(s, r)} R(z)$, pour tout $z \in \Delta \cap \rho(A, B)$

2) $\mathcal{S}_n \xrightarrow{(r)} P$.

Démonstration

1°) La convergence stable entraîne que $A_n - zB_n$ est inversible pour n assez grand et que $z \in \Delta \cap \rho(A, B)$; $\mathcal{Q}_n(z) = (A_n - zB_n)^{-1}$ est alors continu et $\|\mathcal{Q}_n(z)\| \leq M(z)$, pour tout $n \geq n_0$.

Pour $y \in F$ et $n \geq n_0$:

$$r_n R(z)y - \mathcal{Q}_n(z)s_n y = \mathcal{Q}_n(z) [(A_n - zB_n)r_n - s_n(A - zB)] R(z)y$$

d'où

$$\|r_n R(z)y - \mathcal{Q}_n(z)s_n y\|_{E_n} \leq M(z) \cdot \|((A_n - zB_n)r_n - s_n(A - zB))R(z)y\|_{E_n}$$

Le deuxième membre de cette inégalité tend vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$.

Donc :

$$\mathcal{Q}_n(z) \xrightarrow{(s, r)} R(z).$$

2°) Convergence des projections spectrales.

. Nous remarquons d'abord que $\mathcal{Q}_n(z)B_n \xrightarrow{(r)} R(z)B$, à cause de l'équation des résolvantes et du 1°) du théorème. Nous avons aussi pour tout compact $K \subset \rho(A, B) \cap \Delta$, $\sup_{z \in K} \|\mathcal{Q}_n(z)B_n\| \leq M$ pour $n \geq n_0(K)$, d'où

$$\|\mathcal{P}_n\| = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_n(z)B_n dz \leq \frac{\text{mes}(\Gamma)}{2\pi} \sup_{z \in \Gamma} \|\mathcal{Q}_n(z)B_n\|$$

d'où :

$$\|\mathcal{P}_n\| \leq M'.$$

. si $x \in E$, il nous reste à démontrer que $\|\mathcal{P}_n r_n x - r_n P x\|_{E_n} \rightarrow 0$. Comme r_n est seulement asymptotiquement linéaire, ce résultat n'est pas immédiat.

Soit $\epsilon > 0$

Il existe alors une constante $\delta > 0$ telle que pour toute subdivision $\sigma = (z_1, z_2, \dots, z_{\ell+1})$ de Γ , vérifiant $|\sigma| = \max_{1 \leq i \leq \ell} |z_{i+1} - z_i| < \delta$

$$\left\| \int_{\Gamma} R(z) B_x dz - S_{\sigma} \right\| \leq \epsilon.$$

avec : $S_{\sigma} = \sum_{i=1}^{\ell} (z_{i+1} - z_i) R(\xi_i) B_x$
 et

$$\xi_i \in (z_i, z_{i+1})$$

De même, si $S_{\sigma}^n = \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_i) R_n(\xi_i) B_n r_n x$,
 on a :

$$\begin{aligned} P_n r_n x - r_n P x &= (S_{\sigma}^n - r_n S_{\sigma}) + \left(\int_{\Gamma} \mathcal{Q}_n(z) B_n r_n x dz - S_{\sigma}^n \right) \\ &+ (r_n S_{\sigma} - r_n \int_{\Gamma} R(z) B_x dz - r_n (S_{\sigma} - \int_{\Gamma} R(z) B_x dz)) \\ &+ r_n (S_{\sigma} - \int_{\Gamma} R(z) B_x dz). \end{aligned}$$

Fixons la subdivision σ de Γ de telle sorte que $|\sigma| < \delta$ et $|\sigma| < \epsilon/M$,
 alors :

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\| \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_n(z) B_n r_n x dz - S_{\sigma}^n \right\|_{E_n} &= \left\| \sum_{i=1}^{\ell} \int_{z_i}^{z_{i+1}} (\mathcal{Q}_n(z) - \mathcal{Q}_n(\xi_i)) B_n r_n x dz \right\|_{E_n} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell} \text{mes}(\widehat{z_i, z_{i+1}}) \sup_{s \in \widehat{z_i, z_{i+1}}} \|(\mathcal{Q}_n(z) - \mathcal{Q}_n(\xi_i)) B_n r_n x\|_{E_n} \end{aligned}$$

en utilisant l'identité :

$$\Omega_n(z) - \Omega_n(\varepsilon_i) = (z - \varepsilon_i) \Omega_n(z) \Omega_n(\varepsilon_i)$$

on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Gamma} \mathcal{P}_n(z) B_n r_n x dz - S_{\sigma}^n \right\|_{E_n} \\ & \leq \sum_{i=1}^{\ell} \text{mes}(\widehat{z_i z_{i+1}}) \sup_{z \in (\widehat{z_i z_{i+1}})} (|z - \varepsilon_i| \cdot \|\Omega_n(z)\|) \cdot \|\Omega_n(\varepsilon_i) B_n\| \cdot \|r_n x\|_{E_n} \end{aligned}$$

$\leq M \cdot \varepsilon / M = \varepsilon$ pour $n \geq n_1$. M étant une constante

$$b) \left\| r_n S_{\sigma} - r_n \int_{\Gamma} T(z) B x dz - r_n (S_{\sigma} \int_{\Gamma} R(z) B x dz) \right\|_{E_n}$$

$\rightarrow 0$

(hypothèse H2).

$$\begin{aligned} c) & \left\| r_n (S_{\sigma} - \int_{\Gamma} R(z) B x dz) \right\|_{E_n} \\ & \leq \left\| S_{\sigma} - \int_{\Gamma} R(z) B x dz \right\|_{E} + \varepsilon / 2 \leq \varepsilon \quad \text{pour } n \geq n_2 \end{aligned}$$

(hypothèse H1).

$$\begin{aligned} d) & \left\| S_{\sigma}^n - r_n S_{\sigma} \right\|_{E_n} = \\ & \leq \left\| r_n S_{\sigma} - \sum_{i=1}^{\ell} (z_{i+1} - z_i) r_n R(\varepsilon_i) B x \right\|_{E_n} + \\ & \left\| \sum_{i=1}^{\ell} (z_{i+1} - z_i) (\Omega_n(\varepsilon_i) B_n - r_n R(\varepsilon_i) B) x \right\|_{E_n} \end{aligned}$$

L'hypothèse (H2) pour r_n entraîne que pour $n \geq n_3$

$$\|r_n S_\sigma - \sum_{i=1}^{\ell} (z_{i+1} - z_i) r_n R(\xi_i) Bx\|_{E_n} \leq \epsilon.$$

de même le deuxième terme :

$$\left\| \sum_{i=1}^{\ell} (z_{i+1} - z_i) (\mathcal{P}_n(\xi_i) B_n r_n x - r_n R(\xi_i) Bx) \right\|_{E_n}$$

$$\leq \text{mes}(\Gamma) \max_{1 \leq i \leq \ell} \|\mathcal{P}_n(\xi_i) B_n r_n x - r_n R(\xi_i) Bx\|_{E_n}$$

$$\leq \epsilon, \quad \text{pour } n \geq n_4.$$

(convergence de $\mathcal{P}_n(\xi_i) B_n$ vers $R(\xi_i) B$).

Donc :

Pour $x \in E$ et pour tout $\epsilon > 0$ fixé en utilisant a), b), c) et d)
 si $n_0 = \max_{1 \leq i \leq 4} (n_i)$ pour $n \geq n_0$:

$$\|r_n P x - \mathcal{P}_n r_n x\|_{E_n} \leq 4 \cdot \epsilon$$

Nous avons alors démontré que $\mathcal{P}_n \xrightarrow{(r)} P$. •

Remarques

1°) La convergence stable en $z_0 \in \rho(A, B)$ entraîne que (*) est vérifiée pour z_0 .

2°) Soit $z \in \rho(A, B)$ et soit à résoudre $(A - zB)x = f$, $f \in F$ en l'approchant par $(A_n - zB_n)x_n = f_n$ où $f_n \in F_n$ est tel que : $f_n \xrightarrow{(s)} f$ alors :

$$A_n - zB_n \xrightarrow{\text{stable}} A - zB \iff x_n \xrightarrow{(r)} x$$

THEOREME 2.9

Si $A_n - zB_n \xrightarrow{(r,s) \text{ stable}} A - zB$, pour tout $z \in \Delta \cap \rho(A, B)$ alors :

1°) il existe une suite de valeurs propres de (P_n) dans Δ qui converge vers λ .

λ est le seul point limite possible pour toute sous-suite de valeurs propres de (P_n) dans Δ .

2°) Pour n assez grand, (P_n) a au moins m valeurs propres dans Δ .

3°) Pour tout $x \in M$, il existe une suite (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{M}_n$ telle que $x_n \xrightarrow{(r)} x$.

Démonstration

La convergence stable entraîne $\mathcal{P}_n \xrightarrow{(r)} P$ (Th. 2.8) donc pour n assez grand $m_n = \dim \mathcal{M}_n \geq m = \dim M$ (Th. 1.5), c'est-à-dire que pour $n \geq n_0$ il existe au moins m valeurs propres de (P_n) à l'intérieur de Γ . Ce résultat reste vrai pour toute courbe fermée à l'intérieur de Δ et entourant λ . D'où l'existence d'au moins m valeurs propres de (P_n) qui convergent vers λ .

Supposons qu'une suite de valeurs propres (λ_n) de (P_n) converge vers $\lambda_0 \in \Delta$; soit u_n le vecteur propre normé associé à λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Si $\lambda_0 \in \rho(A, B) \cap \Delta$ alors il existe une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ telle que $u_n \xrightarrow[N']{(r)} u \in E$, puisque $A_n - \lambda_0 B_n \xrightarrow{(r,s) \text{ stable}} A - \lambda_0 B$, la convergence est donc régulière et $0 = (A_n - \lambda_n B_n) u_n \xrightarrow{(s)} (A - \lambda B) u$, donc $\lambda_0 \in \sigma(A, B)$ et $\lambda_0 = \lambda$.

Pour la dernière partie, il suffit de constater si $x \in M$, alors $x_n = \mathcal{P}_n r_n x \in \mathcal{M}_n$ et $x_n \xrightarrow{(r)} x$ puisque $\mathcal{P}_n \xrightarrow{(r)} P$.

Le résultat précédent montre donc l'existence d'une suite convergente de vecteurs invariants.

Nous verrons avec le théorème 2.12 une condition qui assure la convergence des vecteurs propres.

Lemme 2.10

Soient G un espace de Banach sur \mathbb{C} et (G_n, q_n) , $n \in \mathbb{N}$ une approximation discrète de G .

Soient les opérateurs $H \in \mathcal{L}(G, F)$, $K \in \mathcal{L}(E, G)$, $H_n \in \mathcal{L}(G_n, F_n)$ et $K_n \in \mathcal{L}(E_n, G_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} H_n \xrightarrow[\text{reg}]{(q,s)} H \\ K_n \xrightarrow[\text{reg}]{(r,q)} K \end{array} \right\} \Rightarrow H_n K_n \xrightarrow[\text{reg}]{(r,s)} H.K$$

Démonstration

Soit une suite (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_n$, $\|x_n\|_{E_n} \leq 1$ et telle que $\{H_n K_n x_n\}$ s-compacte.

Il existe une constante M telle que $\|K_n\| \leq M, (K_n \rightarrow K)$.

Donc $\{K_n x_n\}$ est une suite bornée et comme $H_n \xrightarrow[\text{reg}]{(q,s)} H$ alors $\{K_n x_n\}$ est q-compacte ; en utilisant la convergence régulière de K_n vers K , $\{x_n\}$ est une suite r-compacte.

Lemme 2.11

Si $H, H' \in \mathcal{L}(E, F)$ et $H_n, H'_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, H surjectif.

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} H_n \xrightarrow[\text{stable}]{} H \\ H'_n \xrightarrow[\text{comp}]{} H' \end{array} \right\} \Rightarrow H_n + H'_n \xrightarrow[\text{reg}]{} H + H'$$

Démonstration :

La proposition (2.1) entraîne que $H_n \xrightarrow{\text{reg}} H$; soit une suite (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_n$, $\|x_n\|_{E_n} = 1$.
 S'il existe une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ et $y \in F$ avec $(H_n + H'_n)x_n \xrightarrow{N'} y$
 comme $H'_n \xrightarrow{\text{comp}} H$, il existe $N'' \subset N'$ et $y' \in F$, avec
 $H'_n x_n \xrightarrow{N''} y'$ donc $H_n x_n \xrightarrow{N''} y - y'$, puisque $H_n \xrightarrow{\text{reg}} H$, il existe $N''' \subset N''$
 et $x \in E$ tels que $x_n \xrightarrow{N'''} x$. •

La convergence régulière des opérateurs assure la convergence compacte des projections spectrales, c'est-à-dire la conservation des dimensions. Ce résultat a été démontré par V.G. Vainniko [27], en utilisant la "mesure de non compacité" ; P. Redont [17] en a donné une autre démonstration plus simple que nous donnons ici.

THEOREME 2.12

Soit Δ un ouvert qui isole λ .

Si $A_n - zB_n \xrightarrow{\text{reg}} A - zB$ pour tout $z \in \Delta$ alors :

$$1) \quad \Omega_n(z) \xrightarrow{(s,r)} R(z) \quad \text{pour } z \in \Delta \cap \rho(A,B)$$

$$\mathcal{S}_n \xrightarrow{(r)} P$$

$$2^\circ) \quad \dim \mathcal{M}_n = \dim M \text{ pour tout } n \text{ suffisamment grand.}$$

Démonstration :

1°) Si $z \in \Delta \cap \rho(A,B)$ la convergence régulière entraîne la convergence stable (Prop. 1.3.).

En utilisant le théorème précédent, le 1°) est acquis, donc la convergence des valeurs propres.

2°) Comme $\dim M = m$ est finie et $\mathcal{P}_n \xrightarrow{(r)} P$ le théorème 1.5, entraîne que $m_n \geq m$ pour n assez grand, il suffit donc de voir que $m_n \leq m$:

Supposons $\dim \mathcal{M}_n > \dim M = m$, pour tout $n \in N'$, $N' \subset \mathbb{N}$. Alors pour $n \in N'$, il existe $m+1$ vecteurs linéairement indépendants $u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^{m+1}$ avec $\|u_n^i\|_{E_n} = 1$,

$$(\mathcal{C}_n - \mu_n^i)^{k_n^i} u_n^i = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}_n - \mu_n^i)^{k_n^i - 1} u_n^i \neq 0$$

μ_n^i étant une valeur propre de T_n qui approche μ , pour $i = 1, 2, \dots, m+1$

a) Nous commençons par démontrer que pour $i \in \{1, 2, \dots, m+1\}$, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que $k_i^n \leq k_i$ pour tout $n \geq n_0$.

Supposons que ce résultat soit faux pour un i donné, alors on peut trouver une sous-suite $N'' \subset \mathbb{N}$ avec $k_i^n \xrightarrow{N''} +\infty$ c'est-à-dire qu'il existe une suite (x_n^k) , $\|x_n^k\|_{E_n} = 1$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} (\mathcal{C}_n - \mu_n^i)^{k_n^k} x_n^k = 0 \\ (\mathcal{C}_n - \mu_n^i)^{k_n^k - 1} x_n^k \neq 0 \end{cases}$$

pour $k = 1, 2, \dots, m+1$, et $n \in N''$, $n \geq n_0$.

Comme $\mu_n^i \xrightarrow{N''} \mu$, $T_n - \mu_n^i I_n \xrightarrow{\text{reg}} T - \mu I$;

En utilisant le lemme 2.10, $(\mathcal{C}_n - \mu_n^i)^{k_n^k} \xrightarrow{\text{reg}} (T - \mu I)^k$, donc il

existe une sous-suite $N''' \subset N''$ et $x_n^k \in E_n$, $x_n^k \xrightarrow{N'''} \xrightarrow{(r)} x^k$,

pour $k = 1, 2, \dots, m+1$ du fait que $P_n \rightarrow P$, $x_n^k = \mathcal{P}_n x_n^k \rightarrow P x^k \Rightarrow x^k \in M$

Comme $\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^{m+1}\}$ est un système linéairement indépendant il en est de même de $\{x^1, x^2, \dots, x^{m+1}\}$ ce qui contredit $x^k \in M$,

$k = 1, 2, \dots, m+1$, $\dim M = m$.

b) En utilisant le résultat précédent, $k_i^n \leq k_i$ pour $n \geq n_0$ et $i = 1, 2, \dots, m+1$, nous avons

$$(\mathcal{C}_n - \mu_n^i)^{k_i} u_n^i = 0 \quad \text{et} \quad \|u_n^i\|_{E_n} = 1 \quad \text{pour } n \in N'$$

Le lemme 1.5 entraîne l'existence d'une sous-suite $N'' \subset N'$, et $u^i \in E$, avec

$$u_n^i \xrightarrow[N'']{(r)} u^i, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m+1$$

Puisque $\mathcal{P}_n \xrightarrow{(r)} P$, $u_n^i = \mathcal{P}_n u_n^i \rightarrow P u^i$, donc $u^i = P u^i \in M$ pour $i = 1, 2, \dots, m+1$ et $\{u^1, u^2, \dots, u^{m+1}\}$ sont linéairement indépendants, ce qui est faux.

Le théorème 2.12 est alors démontré. •

Nous avons donc une condition suffisante de forte stabilité au sens de F. Chatelin [3].

C'est aussi une condition nécessaire comme le montre le corollaire suivant [25] :

Corollaire

Soit Δ un ouvert qui isole λ .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(H3) \quad A_n - zB_n \xrightarrow[\text{reg}]{(r,s)} A - zB, \quad \text{pour } z \in \Delta$$

$$(H'3) \quad A_n - zB_n \xrightarrow[\text{stable}]{(r,s)} A - zB, \quad \text{pour } z \in \Delta \cap \rho(A, B) \text{ et}$$

$m_n = m$, pour n suffisamment grand.

Démonstration :

Pour $z \in \Delta \cap \rho(A, B)$ la convergence stable est équivalente à la convergence régulière (prop. 1.2 et 1.3). Il suffit de démontrer que (H'3) entraîne $A_n - \lambda B_n \xrightarrow[\text{reg}]{} A - \lambda B$, pour $\lambda \in \Delta \cap \sigma(A, B)$.

Pour cela nous commençons par démontrer que

$$\mathcal{C}_n - \mu I_n \xrightarrow[\text{reg}]{} T - \mu I, \quad (\mu = \frac{1}{\lambda - z_0}).$$

En effet, $\mu I_n - \mathcal{C}_n = \mu I_n - \mathcal{C}_n(1 - \mathcal{P}_n) + \mathcal{C}_n \mathcal{P}_n$ où

$$1) \quad \mathcal{C}_n \mathcal{P}_n \xrightarrow[\text{comp.}]{} TP, \text{ puisque } \mathcal{P}_n \xrightarrow[\text{comp.}]{} P \text{ (r)}$$

et $\mathcal{C}_n \xrightarrow{(r)} T$.

$$2) \quad \mu I_n - \mathcal{C}_n(1 - \mathcal{P}_n) \xrightarrow[\text{stable}]{} \mu I - T(1 - P), \text{ car}$$

$\mu \in \rho(\mathcal{C}_n(1 - \mathcal{P}_n))$ pour $n \geq n_0$.

En utilisant le lemme 2.11, nous avons la convergence régulière de $T_n - \mu I_n$ vers $T - \mu I$. De plus les identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n - \lambda B_n = (\lambda - z_0)(A_n - z_0 B_n)(\mu I_n - T_n) \\ A - \lambda B = (\lambda - z_0)(A - z_0 B)(\mu I - T) \end{array} \right.$$

en passant par le lemme 2.10 entraînent la convergence régulière de $A_n - \lambda B_n$ vers $A - \lambda B$. •

Nous résumons les résultats de convergence des éléments propres dans le théorème suivant.

THEOREME 2.13

Soit Δ un ouvert qui isole λ . Alors sous les hypothèses suivantes :

(H1) r_n et s_n sont asymptotiquement linéaires

(H2) compatibilité des normes

(H3) $A_n - zB_n \xrightarrow[\text{reg}]{} A - zB$ pour tout $z \in \Delta$.

On a les trois propriétés :

(i) convergence des valeurs propres avec conservation des ordres de multiplicité algébrique :

- * il existe une suite (λ_n) , $n \in \mathbb{N}$, de valeurs propres de (A_n, B_n) : $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$
- * si (λ_n) est une suite de valeurs propres de (A_n, B_n) telle qu'il existe une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$, avec (λ_n) , $n \in N'$, convergente alors $\lambda_n \xrightarrow[N']{} \lambda$.
- * Pour n suffisamment grand (A_n, B_n) a exactement m valeurs propres dans Δ comptées avec leur ordre de multiplicité.

(ii) Convergence des sous-espaces invariants :

- * si $x \in M$, avec $\|x\|_E = 1$, alors il existe une suite (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{W}_n$ avec $x_n \xrightarrow{(r)} x$.
- * si $x_n \in \mathcal{W}_n$ et $\|x_n\|_E \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, alors de toute sous-suite $N'' \subset \mathbb{N}$, on peut extraire une sous-suite $N'' \subset N'$ telle que $x_n \xrightarrow[N'']{} x$, avec $x \in M$.

(iii) Convergence des vecteurs propres :

si (x_n) , $n \in \mathbb{N}$ est une suite de vecteurs propres normés de (A_n, B_n) , alors on peut extraire une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ telle que $x_n \xrightarrow[N']{(r)} x$, où x est un vecteur propre de (A, B) associé à λ .

Démonstration

(i) et (ii) résultent des théorèmes précédents. Il nous reste à démontrer (iii).

Soit (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, une suite de vecteurs propres de (A_n, B_n) associés à λ_n , telle que $\|x_n\|_E = 1$ (ii) entraîne l'existence d'une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ et d'un $x \in M^n$ tels que : $x_n \xrightarrow[N']{} x$ comme $A_n - \lambda_n B_n \xrightarrow[N']{(r,s)} A - \lambda B$, on a :

$$0 = (A_n - \lambda_n B_n)x_n \xrightarrow[N']{(r,s)} (A - \lambda B)x$$

d'où $x \in \text{Ker}(A - \lambda B)$.

CHAPITRE 2

BORNES D'ERREUR ET QUOTIENT DE RAYLEIGH GENERALISE APPLIQUE A L'APPROXIMATION DISCRETE

Dans cette partie nous commençons par définir le problème adjoint de (P) et par donner une condition suffisante pour la convergence des éléments propres des problèmes adjoints. Ensuite nous rappelons les bornes d'erreur théoriques sur les valeurs propres, les vecteurs propres et celles sur l'ouverture entre les sous-espaces invariants.

Nous définissons une suite d'opérateurs (p_n) de "prolongement" de E_n dans E . (p_n) permet de définir des approximations de vecteurs propres et du sous-espace invariant dans E . Nous donnons des bornes d'erreur a posteriori des éléments propres.

Le quotient de Rayleigh généralisé dans le cas de l'approximation discrète est une approximation des valeurs propres d'ordre supérieur à celui des vecteurs propres, sous certaines hypothèses. Ce résultat reste néanmoins théorique sous cette forme lorsque A et B sont des opérateurs différentiels, car le calcul du quotient de Rayleigh nécessite la résolution d'un problème différentiel, ce qui rend son utilisation très coûteuse.

Dans toute la suite nous supposons que λ est une valeur propre isolée par Δ , de multiplicité algébrique finie m , et d'indice ℓ . λ est solution du problème :

$$(P) \quad Ax = \lambda Bx, \quad 0 \neq x \in E, \quad A, B \in \mathcal{L}(E, F)$$

qui est équivalent au problème :

$$(P') \quad Tx = \mu x, \quad 0 \neq x \in E,$$

où $\mu = \frac{1}{\lambda - z_0}$, $T = R(z_0)B \in \mathcal{L}(E)$ et $z_0 \in \Delta \cap \rho(A, B)$ fixé.

E est approché par (E_n, r_n) , F par (F_n, s_n) et $A - zB$ par $A_n - zB_n$, pour tout $z \in \Delta$. Nous supposons les hypothèses suivantes vérifiées :

(H1) compatibilité des normes de E et E_n et de F et F_n

(H2) r_n et s_n sont asymptotiquement linéaires.

(H3) $A_n - zB_n \xrightarrow{\text{reg}} A - zB$, pour tout $z \in \Delta$.

Le problème approché de (P) est :

$$(P_n) \quad A_n x_n = \lambda_n B_n x_n, \quad 0 \neq x_n \in E_n, \quad A_n, B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$$

qui est équivalent à :

$$(P'_n) \quad \mathcal{C}_n x_n = \mu_n x_n, \quad 0 \neq x_n \in E_n,$$

où

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{R}_n(z_0)B_n \in \mathcal{L}(E_n) \text{ et } \mu_n = \frac{1}{\lambda_n - z_0}.$$

Les hypothèses (H1), (H2) et (H3) assurent la convergence des valeurs propres de (P_n) avec conservation des ordres de multiplicité algébrique ; $\lambda_n^1, \lambda_n^2, \dots, \lambda_n^m$ désignent les valeurs propres de (P_n) dans Δ comptées avec leur ordre de multiplicité, x_n^i désigne un vecteur propre associé à λ_n^i , pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Nous posons :

$$w_n^i = \frac{1}{\lambda_n^i - z_0} \text{ et } \bar{\lambda}_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \lambda_n^i.$$

Nous désignons par c une constante générique.

1. BORNES D'ERREURS DANS L'APPROXIMATION DISCRETE

Avant de donner les résultats sur les bornes d'erreurs, de l'approximation des éléments propres de (P) par ceux de (P_n) , nous définissons le problème adjoint de (P) et l'approximation associée.

1.1 - Problème adjoint

Soit E^* l'espace adjoint de E , c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles semi-linéaires continues sur E . F^* est l'espace adjoint de F . On notera par \langle, \rangle la dualité entre un espace et son adjoint.

Soient A^* et B^* les opérateurs adjoints respectivement de A et B ; $A^*, B^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$.

Le spectre $\sigma(A^*, B^*)$ et l'ensemble résolvant $\rho(A^*, B^*)$ sont respectivement les conjugués dans \mathbb{C} de $\sigma(A, B)$ et $\rho(A, B)$.

La résolvante de (A^*, B^*) , $R_*(z) = (A^* - zB^*)^{-1}$ est telle que :
 $R_*(\bar{z}) = (A^* - \bar{z}B^*)^{-1} = [(A - zB)^{-1}]^* = [R(z)]^*$, $z \in \rho(A, B)$.

Le problème adjoint de (P) est :

$(P_*) \quad A^*y = \bar{\lambda} B^*y, \quad 0 \neq y \in F^*$

qui est équivalent au problème :

$(P'_*) \quad T_*y = \bar{\mu}y, \quad 0 \neq y \in F^*$
--

où $T_* = R_*(\bar{z}_0)B^* \in \mathcal{L}(F^*)$ et $\bar{\mu} = \frac{1}{\bar{\lambda} - \bar{z}_0}$.

$\bar{\lambda}$ (resp. $\bar{\mu}$) est une valeur propre isolée de (A^*, B^*) (resp. T_*) de multiplicité algébrique m et d'indice ℓ .

Désignons par P_* la projection spectrale associée à $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$, $M_* = P_* F^*$ est le sous-espace invariant dans F^* .

Nous donnons les relations entre P_* et P^* l'opérateur adjoint de P , et entre M_* et $M^* = P^* E^*$ l'espace adjoint de M .

Proposition 1.1

On a les relations :

(i) $P_* = R_*(\bar{z}_0)P^*(A^* - \bar{z}_0 B^*)$

(ii) $M_* = R_*(\bar{z}_0)M^*$.

Démonstration :

Soit T^* l'opérateur adjoint de T , où $T = R(z_0)B$; alors $T^* = B^* R_*(\bar{z}_0) \in \mathcal{L}(E^*)$ et :

(3) $T_* = R_*(\bar{z}_0)T^*(A^* - \bar{z}_0 B^*)$.

Puisque $\bar{\mu}$ est une valeur propre de T^* , et P^* est la projection spectrale dans E^* associé à $\bar{\mu}$, la proposition (i) est évidente ; (i) entraîne (ii).

Nous allons définir les problèmes approchés de (P_*) et (P'_*) .

Soient E_n^*, F_n^* les espaces adjoints de E^*, F^* . A_n^* et B_n^* sont les opérateurs adjoints de A et B , $A_n^*, B_n^* \in \mathcal{L}(F_n^*, E_n^*)$.

$\sigma(A_n^*, B_n^*)$ et $\rho(A_n^*, B_n^*)$ sont respectivement les conjugués dans \mathbb{C} de $\sigma(A, B)$ et $\rho(A, B)$. La résolvante de (A_n^*, B_n^*) , $\mathcal{R}_{n^*}(z) = (A_n^* - zB_n^*)^{-1}$ est telle que :

$$\mathcal{R}_{n^*}(\bar{z}) = (A_n^* - \bar{z}B_n^*)^{-1} = [(A_n - zB_n)^{-1}]^* = [\mathcal{R}_n(z)]^*, \quad z \in \rho(A_n, B_n)$$

$\bar{\lambda}$ est une valeur propre de (A_n^*, B_n^*) . Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), $z_0 \in \rho(A_n, B_n)$ pour n assez grand donc $\bar{z}_0 \in \rho(A_n^*, B_n^*)$. Considérons alors l'opérateur $\mathcal{C}_{n^*} = \mathcal{R}_{n^*}(\bar{z}_0)B_n^*$.

$\bar{\mu}_n = \frac{1}{\bar{\lambda}_n - \bar{z}_0}$ est une valeur propre de \mathcal{C}_{n^*} et les deux problèmes suivants sont équivalents :

$$(P_{n^*}) \quad A_n^* y_n = \bar{\lambda}_n B_n^* y_n, \quad 0 \neq y_n \in F_n^*$$

$$(P'_{n^*}) \quad \mathcal{C}_{n^*} y_n = \bar{\mu}_n y_n, \quad 0 \neq y_n \in F_n^*$$

Soient \mathcal{P}_{n^*} la projection spectrale associée à $\bar{\lambda}_n$ et $\bar{\mu}_n$ et $\mathcal{M}_{n^*} = \mathcal{P}_{n^*} F_n^*$ le sous-espace invariant associé. Nous avons l'analogie de la proposition 1.1, où \mathcal{P}_n^* est l'opérateur adjoint de \mathcal{P}_n et $\mathcal{M}_n^* = \mathcal{P}_n^* E_n^*$, à partir de :

$$(4) \quad \mathcal{C}_{n^*} = \mathcal{R}_{n^*}(\bar{z}_0) \mathcal{C}_n^* (A_n^* - \bar{z}_0 B_n^*).$$

Proposition 1.2.

$$(i) \quad \mathcal{P}_{n^*} = \mathcal{R}_{n^*}(\bar{z}_0) \mathcal{P}_n^* (A_n^* - \bar{z}_0 B_n^*);$$

$$(ii) \quad \mathcal{M}_{n^*} = \mathcal{R}_{n^*}(\bar{z}_0) \mathcal{M}_n^*$$

Nous donnons une condition suffisante pour avoir la convergence des éléments propres du problème (P_{n*}) vers ceux de (P_*) . Pour cela, nous supposons l'existence de deux suites d'opérateurs de restriction : (r'_n) et (s'_n) , $n \in \mathbb{N}$, telles que :

$$(E_n^*, r'_n) \text{ et } (F_n^*, s'_n), n \in \mathbb{N}$$

sont des approximations de E^* et F^* respectivement.

THEOREME 1.3

Sous les hypothèses précédentes, si

$$(H_*) \quad A_n^* - \bar{z} B_n^* \xrightarrow{(s', r')} A^* - \bar{z} B, \text{ pour tout } z \in \Delta,$$

alors :

$$(H_3^*) \quad A_n^* - \bar{z} B_n^* \xrightarrow{\text{reg}} A^* - \bar{z} B^*, \text{ pour tout } z \in \Delta.$$

Démonstration :

L'hypothèse (H3) entraîne que $\|\mathcal{R}_n(z)\| \leq M(z)$, pour tout n suffisamment grand et tout $z \in \Delta \cap \rho(A, B)$. Comme $\|\mathcal{R}_{n*}(\bar{z})\| = \|\mathcal{R}_n(z)\|$, $\mathcal{R}_{n*}(\bar{z})$ est uniformément borné en n , pour tout $z \in \Delta \cap \rho(A, B)$ et :

$$A_n^* - \bar{z} B_n^* \xrightarrow{\text{stable} (s', r')} A^* - \bar{z} B^*, \text{ pour tout } z \in \Delta \cap \rho(A, B)$$

D'autre part, $\dim \mathcal{M}_{n*} = \dim \mathcal{M}_n = \dim M = \dim M_* = m$, pour n assez grand, d'où :

$$A_n^* - \bar{z} B_n^* \xrightarrow{\text{reg}} A^* - \bar{z} B^*, \text{ pour tout } z \in \Delta,$$

d'après le corollaire du théorème 2.12 (chap. 1).

Corollaire :

Les hypothèses du théorème 1.3 assurent la convergence des éléments propres des problèmes adjoints, analogue au théorème 2.13 (chap. 1).

1.2. - BORNES D'ERREUR

Les hypothèses (H1), (H2) et (H3) assurent la convergence des valeurs propres, des vecteurs propres et celle des vecteurs invariants (chap. 1, th. 2.13). Si de plus $r_n \in \mathcal{L}(M, r_n M)$ nous établissons des bornes d'erreur [0,25] exprimées en fonction de la quantité :

$$\epsilon_n = \max_{\substack{x \in M \\ \|x\|_E=1}} \|(A_n - \lambda B_n)r_n x - B_n r_n x'\|_{F_n},$$

où x' est l'unique élément de M associé à x et vérifiant $(A - \lambda B)x = Bx'$. En effet, $x'' = \mu(T - \mu)x \in M$. Comme $\mu = \frac{1}{\lambda - z_0} \neq 0$, $T_{\mu} : M \rightarrow M$ est inversible et il existe $x' \in M$, unique tel que $Tx' = x''$.

En utilisant l'identité (1), $Tx' = x'' \Leftrightarrow (A - \lambda B)x = Bx'$

$\theta(r_n M, \mathcal{M}_n) = \max(\delta(r_n M, \mathcal{M}_n), \delta(\mathcal{M}_n, r_n M))$ est l'ouverture entre les sous-espaces $r_n M$ et \mathcal{M}_n ,

où

$$\delta(r_n M, \mathcal{M}_n) = \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\|_E=1}} \text{dist}(r_n x, \mathcal{M}_n),$$

et

$$\delta(\mathcal{M}_n, r_n M) = \sup_{\substack{x_n \in \mathcal{M}_n \\ \|x_n\|_{E_n}=1}} \text{dist}(x_n, r_n M).$$

THEOREME 1.4.

Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), si $r_n \in \mathcal{L}(M, r_n M)$, alors pour n suffisamment grand :

$$(i) \cdot \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda - \lambda_n^i| \leq C \epsilon_n^{1/\ell};$$

$$\cdot \max_{1 \leq i \leq m} \text{dist}(x_n^i, r_n \text{Ker}(A - \lambda B)) \leq C \epsilon_n^{1/\ell}.$$

(ii)

$$\cdot |\lambda - \hat{\lambda}_n| \leq C \epsilon_n;$$

$$\cdot \theta(r_n M, \mathcal{M}_{V_n}) \leq C \epsilon_n.$$

Démonstration :

(i) Soit u_n un vecteur propre normé de \mathcal{E}_n associé à la valeur propre μ_n qui représente l'une des valeurs propres μ_n^i , $i = 1, 2, \dots, m$. $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n - z_0}$.

Soit $v_n^* \in \mathcal{H}_n^*$ tel que $\langle u_n, v_n^* \rangle = 1$.

$v_n' = \frac{v_n^*}{\|v_n^*\|}$ n'est pas nécessairement un vecteur propre de \mathcal{E}_n^* , mais

$$(\mathcal{E}_n^* - \bar{\mu}_n)^{\ell} v_n' = 0.$$

Soit x un vecteur propre de T associé à μ tel que $x_n \xrightarrow{(r)} x$.

$$(\mathcal{E}_n - \mu_n) r_n x = (\mathcal{E}_n r_n - r_n T) x + (\mu - \mu_n) r_n x;$$

$$(\mathcal{E}_n - \mu_n)^{\ell} r_n x = \sum_{k=0}^{\ell-1} (\mathcal{E}_n - \mu_n)^{\ell-k} (\mathcal{E}_n r_n - r_n T) x + (\mu - \mu_n)^{\ell} r_n x.$$

Comme

$$\langle (\mathcal{E}_n - \mu_n)^{\ell} r_n x, v_n' \rangle = \langle r_n x, (\mathcal{E}_n^* - \bar{\mu}_n) v_n' \rangle = 0,$$

$$(\mu - \mu_n)^\ell \langle r_n x, v_n' \rangle = \sum_{k=0}^{\ell-1} \langle (\mathcal{C}_n - \mu_n)^{\ell-k} (\mathcal{C}_n r_n - r_n T) x, v_n' \rangle ;$$

où

$$|\langle r_n x, v_n' \rangle - \langle u_n, v_n' \rangle| \rightarrow 0 \text{ et } \langle u_n, v_n' \rangle = \frac{1}{\|v_n\|} .$$

Donc

$\langle u_n, v_n' \rangle = \text{dist}(u_n, (1 - \mathcal{P}_n)E_n)$, qui est uniformément borné en n ,
et pour n assez grand :

$$|\mu_n - \mu|^\ell \leq C \|(r_n T - \mathcal{C}_n r_n)x\|_{E_n} .$$

Comme

$$\mu_n = \frac{1}{\lambda_n - z_0} \text{ et } \mu = \frac{1}{\lambda - z_0} ,$$

$$|\lambda_n - \lambda|^\ell \leq C \|(r_n T - \mathcal{C}_n r_n)x\|_{E_n} .$$

$$\begin{aligned} (r_n T - \mathcal{C}_n r_n)x &= \mathcal{R}_n(z_0) ((A_n - z_0 B_n) r_n R x - B_n r_n x) \\ &= \mathcal{R}_n(z_0) ((A_n - \lambda B_n) r_n T x + (\lambda - z_0) B_n r_n (T - \mu)x) \\ &= \mathcal{R}_n(z_0) ((A_n - \lambda B_n) r_n T x - B_n r_n R(z_0) (A - \lambda B)x) \end{aligned}$$

$x \in M$, $x'' = \frac{1}{\mu} (T - \mu)x$ appartient à M et $x'' = R(z_0)(A - \lambda B)x$.

Comme $T|_M$ est inversible il existe $x' \in M$ unique tel que $Tx' = x''$.

$$Tx' = x'' \Leftrightarrow Bx' = (A - \lambda B)x .$$

D'où :

$$\|(r_n T - \mathcal{C}_n r_n)x\| \leq C \varepsilon_n , \text{ pour tout } x \in M .$$

Il nous reste à démontrer que $d_n \leq C \varepsilon_n^{1/\lambda}$; où $d_n = \text{dist}(u_n, r_n N)$ et $N = \text{Ker}(A-\lambda B)$.

Soit $y_n \in r_n N$ tel que $d_n = \|u_n - y_n\|_{E_n}$. Alors :

$$(*) \quad d_n \leq C \|(A_n - \lambda_n B_n)(u_n - y_n)\|, \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

En effet, supposons que (*) soit faux, alors il existe une sous-suite $N' \subset N$ telle que $d_n \neq 0$ et

$$\|(A_n - \lambda_n B_n) \frac{u_n - y_n}{d_n}\|_{F_n} \xrightarrow{N'} 0.$$

La convergence régulière (H3) entraîne alors l'existence de $N'' \subset N'$ et de $u_0 \in E$ tels que :

$$(**) \quad \frac{1}{d_n} (u_n - y_n) \xrightarrow{N''} u_0.$$

$$\left\| \frac{1}{d_n} (u_n - y_n) \right\|_{E_n} = 1 \text{ entraîne que } \|u_0\|_E = 1.$$

$$(**) \text{ entraîne que } (A_n - \lambda_n B_n) \frac{u_n - y_n}{d_n} \xrightarrow{N''} (A - \lambda B)u_0.$$

$$\text{Donc } u_0 \in N \text{ et } d_n \leq \|u_n - y_n - d_n r_n u_0\|_{E_n}.$$

$$\text{Puisque } d_n \neq 0, n \in N', 1 \leq \left\| \frac{u_n - y_n}{d_n} - r_n u_0 \right\|_{E_n},$$

ce qui contredit (**). (*) est alors démontrée.

$$(A_n - \lambda_n B_n)(u_n - y_n) = (A_n - \lambda B_n)y_n + (\lambda - \lambda_n)B_n y_n$$

car u_n est un vecteur propre de (A_n, B_n) associé à λ_n .

(*) entraîne que :

$$d_n \leq C (|\lambda - \lambda_n| \cdot \|B_n y_n\|_{F_n} + \|(A_n - \lambda B_n)y_n\|_{F_n});$$

c'est-à-dire :

$$d_n \leq C(|\lambda - \lambda_n| + \max_{\substack{u \in N \\ \|u\|=1}} \|(A_n - \lambda B_n)r_n u\|_{F_n})$$

$$\leq C \varepsilon_n^{1/\ell}.$$

(ii)

Soit $\{x^1, \dots, x^m\}$ une base normalisée de M et $\{y^1, \dots, y^m\}$ sa base adjointe : $y^i \in M$ et $\langle x^i, y^j \rangle = \delta_{ij}$, pour $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Pour n assez grand, les m vecteurs $x_n^i = \sum_n r_n x^i$, pour $i = 1, 2, \dots, m$ forment une base de \mathcal{M}_n .

Désignons par S_n la restriction à \mathcal{M}_n^* de l'opérateur linéaire $(r_n P)^* = P^*(r_n M)^*$. $S_n : \mathcal{M}_n^* \rightarrow M^*$. Nous montrons que S_n est continu, inversible, d'inverse S_n^{-1} uniformément borné en n .

En effet, si S_n^{-1} n'est pas uniformément borné en n , on peut trouver une sous-suite $N' \subset \mathbb{N}$ et $v_n \in \mathcal{M}_n^*$ avec $\|v_n\| = 1$ tels que $\|S_n v_n\| \xrightarrow{N'} 0$.
Donc :

$$\langle x, S_n v_n \rangle \xrightarrow{N'} 0, \text{ pour tout } x \in E.$$

c'est-à-dire : $\langle r_n P x, v_n \rangle \xrightarrow{N'} 0$, pour tout $x \in E$.

D'où $\|v_n\| \xrightarrow{N'} 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\|v_n\| = 1$. Donc $\|S_n^{-1}\| \leq C$.

Ce résultat implique l'existence de $y_n^i \in \mathcal{M}_n^*$ solution de $(r_n P)^* y_n^i = y^i$,
 $\|y_n^i\| \leq C$, pour $i = 1, 2, \dots, m$.

De plus on a :

$$\langle x_n^i, y_n^j \rangle = \langle \sum_n r_n x^i, y_n^j \rangle$$

$$= \langle x^i, y^j \rangle$$

Donc $\langle x_n^i, y_n^j \rangle = \delta_{i,j}$, pour $i, j = 1, 2, \dots, m$; et $\{y_n^1, \dots, y_n^m\}$ est la base adjointe de $\{x_n^1, \dots, x_n^m\}$.

Considérons l'opérateur $\tilde{T} = T|_M : M \rightarrow M$; \tilde{T} est continu, inversible et \tilde{T}^{-1} est continu. De même l'inverse de $\tilde{\mathcal{C}}_n = \mathcal{C}_n|_{\mathcal{N}_n} : \mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}_n$ existe et est uniformément borné en n . Nous avons alors :

$$\begin{cases} m(\lambda - z_0) = \text{Tr}(\tilde{T}^{-1}) = \sum_{i=1}^m \langle r_n \tilde{T}^{-1} x_n^i, y_n^i \rangle ; \\ m(\hat{\lambda}_n - z_0) = \text{Tr}(\tilde{\mathcal{C}}_n^{-1}) = \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\mathcal{C}}_n^{-1} x_n^i, y_n^i \rangle ; \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} m(\lambda - \hat{\lambda}_n) &= \sum_{i=1}^m \langle (r_n \tilde{T}^{-1} - \tilde{\mathcal{C}}_n^{-1} \mathcal{P}_n r_n) x_n^i, y_n^i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\mathcal{C}}_n^{-1} (\mathcal{C}_n r_n - r_n T) \tilde{T}^{-1} x_n^i, y_n^i \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$|\lambda - \hat{\lambda}_n| \leq C \cdot \max_{x \in M, \|x\|_E=1} \|(\mathcal{C}_n r_n - r_n T)x\|_{E_n} \leq C \cdot \varepsilon_n$$

Pour démontrer la dernière majoration, nous considérons un vecteur $x \in M$ avec $\|x\|_E = 1$.

$$\begin{aligned} \text{dist}(r_n x, \mathcal{N}_n) &\leq \|r_n x - \mathcal{P}_n r_n x\|_{E_n} \\ &\leq \|(r_n \mathcal{P} - \mathcal{P}_n r_n)x\|_{E_n} \\ &\leq C \max_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E=1}} \|(r_n T - \mathcal{C}_n r_n)x\| \leq C \cdot \varepsilon_n \end{aligned}$$

Donc

$$\delta(r_n M, \mathcal{N}_n) \leq C \varepsilon_n.$$

Comme $\epsilon_n \rightarrow 0$, $\dim r_n M = \dim \mathcal{N}_n$ et

$$\delta(\mathcal{N}_n, r_n M) \leq \frac{1}{1 - \delta(r_n M, \mathcal{N}_n)} \delta(r_n M, \mathcal{N}_n),$$

pour n assez grand, d'après une propriété sur les ouvertures démontrée par T. Kato [13]. D'où $\delta(\mathcal{N}_n, r_n M) \leq C\epsilon_n$.

D'après les bornes d'erreur établies, les valeurs propres et les vecteurs propres sont en général du même ordre. Nous allons voir que si le problème adjoint converge ponctuellement, le quotient de Rayleigh généralisé est une approximation des valeurs propres d'ordre supérieur.

2 - LE QUOTIENT DE RAYLEIGH GENERALISE ASSOCIE A L'APPROXIMATION DISCRETE

Dans cette partie nous faisons en plus de (H1)-(H3) l'hypothèse :

$$(H4) \quad r_n \in \mathcal{L}(E, E_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque r_n est linéaire, l'hypothèse (H2) se réduit alors à : s_n asymptotiquement linéaire.

De plus on a :

$$\|r_n\| \leq C.$$

L'hypothèse (H4), qui peut paraître assez restrictive au premier abord, ne l'est pas en pratique où E se trouve être égal à D le domaine de définition de l'opérateur différentiel. Les opérateurs de restriction utilisés en pratique sont linéaires sur D .

2.1 - L'opérateur prolongement et l'approximation associée

Nous allons introduire une suite d'opérateurs $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que : $p_n : E_n \rightarrow E$ soit linéaire continu et vérifie les hypothèses suivantes

$$(H5) \quad \|p_n\| \leq \text{constante}$$

$$(H6) \quad r_n p_n = I_{E_n}$$

$$(H7) \quad p_n r_n x \rightarrow x, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

p_n est alors l'opérateur de prolongement associé à E et (E_n, r_n) .

Considérons l'opérateur T_n défini par :

$$(5) \quad T_n = p_n \mathcal{C}_n r_n.$$

T_n est linéaire, continu de E dans E . Soit le problème :

(P_n'')	$T_n x_n = \mu_n x_n, \quad 0 \neq x_n \in E$
-----------	---

En utilisant (4) et la relation :

$$(6) \quad T_n - T = p_n (\mathcal{C}_n r_n - r_n T) + (p_n r_n - 1)T,$$

nous avons immédiatement la proposition suivante :

Proposition 2.1

Sous les hypothèses (H1) - (H7) on a :

- (i) $T_n x \rightarrow Tx$, pour tout $x \in E$.
- (ii) Les opérateurs T_n et \mathcal{C}_n ont les mêmes valeurs propres.
- (iii) x_n est un vecteur propre de \mathcal{C}_n associé à μ_n si et seulement si $\varphi_n = p_n x_n$ est un vecteur propre de T_n associé à μ_n .

Soit Q_n la projection spectrale associée à μ_n , valeur propre de T_n . Nous explicitons la relation entre Q_n et $\bar{P}_n = p_n \mathcal{Q}_n r_n$. Si M_n est le sous-espace invariant associé à T_n : $T_n M_n = M_n$. $M_n = p_n \mathcal{M}_n$.

THEOREME 2.2.

Sous les hypothèses (H1)-(H7), on a les propriétés :

- (i) $\bar{P}_n = Q_n p_n r_n$
- (ii) $\bar{P}_n x \rightarrow Px$, pour tout $x \in E$.
- (iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{P}_n - P)B$ est relativement compact, si B est la boule unité de E .

Les propriétés (ii) et (iii) définissant la convergence collectivement compacte de \bar{P}_n vers P (P.M. Anselone [1]). (ii) et (iii) sont encore vraies si \bar{P}_n est remplacé par Q_n .

Démonstration :

Propriété (i)

Il suffit de voir que pour tout $t \in \rho(\mathcal{C}_n)$

$$(T_n - t I)^{-1} p_n r_n = p_n (\mathcal{C}_n - t I_n)^{-1} r_n.$$

En effet,

$$\begin{aligned} (T_n - T I) p_n (\mathcal{C}_n - t I_n)^{-1} r_n &= (p_n \mathcal{C}_n - t p_n) (\mathcal{C}_n - t I_n)^{-1} r_n \\ &= p_n r_n, \end{aligned}$$

et

$$p_n (\mathcal{C}_n - t I_n)^{-1} r_n (T_n - t I_n) = p_n r_n.$$

D'où le résultat (i) par intégration sur t .

Propriété (ii)

$$(\bar{P}_n - P)x = p_n (\mathcal{S}_n r_n - r_n P)x + (p_n r_n - 1)Px,$$

donc

$$\|(\bar{P}_n - P)x\|_E \rightarrow 0 \quad , \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Propriété (iii)

Il suffit de voir que $\bar{P}_n E = p_n \mathcal{S}_n r_n E = p_n \mathcal{M}_n$ donc $\dim \bar{P}_n E = \dim \mathcal{M}_n$ et pour n assez grand $\dim \bar{P}_n E = \dim PE = m$, qui est finie. Comme $\bar{P}_n \rightarrow P$, la convergence est alors collectivement compacte [1].

Remarque : La convergence collectivement compacte de \bar{P}_n vers P entraîne que :

$$1^\circ) \quad \|(T - T_n)\bar{P}_n\| \rightarrow 0 ;$$

$$2^\circ) \quad \|(P - \bar{P}_n)\bar{P}_n\| \rightarrow 0.$$

A l'aide des hypothèses plus restrictives (H4)-(H7) nous allons pouvoir établir des bornes d'erreur a posteriori. C'est-à-dire faisant intervenir des éléments propres de T_n .

2.2. - Bornes d'erreur

Nous donnons les bornes d'erreur de l'approximation dans E , associée à p_n , des vecteurs propres et du sous-espace invariant M en fonction de ϵ_n défini précédemment et de :

$$\epsilon_n^0 = \max_{\substack{x \in M \\ \|x\|_E = 1}} \|(p_n r_n - I)x\|_E$$

THEOREME 2.3

Pour n assez grand, on a :

- (i) $\max_{1 \leq i \leq m} \text{dist}(p_n x_n^i, N(A - \lambda B)) \leq C(\epsilon_n^{1/l} + \epsilon_n')$
- (ii) $\theta(M_n, M) \leq C(\epsilon_n + \epsilon_n')$

La démonstration de ce résultat est immédiate en remarquant que pour tout $x_n \in \mathcal{M}_n$ et $x \in M$,

$$\|p_n x_n - x\|_E \leq C \|x_n - r_n x\|_{E_n} + \|(p_n r_n - I)x\|_E.$$

Le théorème 2.1 donne alors les bornes ci-dessus. ●

Nous établissons maintenant les bornes a posteriori en fonction de la quantité :

$$\eta_n = \max_{\substack{\varphi_n \in M_n \\ \|\varphi_n\|_E = 1}} \|(A - \lambda_n B) \varphi_n - B \varphi_n'\|_F,$$

où φ_n' est l'unique élément de M_n associé à φ_n et vérifiant :
 $(A_n - \lambda_n B_n) r_n \varphi_n = B_n r_n \varphi_n'$. En effet, nous avons $u_n = r_n \varphi_n \in \mathcal{M}_n$ et
 $u_n'' = \mu_n (\mathcal{C}_n - \mu_n I_n) u_n \in \mathcal{M}_n$. Comme $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n - z_0} \neq 0$, la restriction de \mathcal{C}_n
à \mathcal{M}_n , $\mathcal{C}_n \upharpoonright \mathcal{M}_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ est inversible ; il existe alors $u_n' \in \mathcal{M}_n$ unique,
tel que : $\mathcal{C}_n u_n' = u_n''$.

Un utilisant l'identité (2), nous avons :

$$\mathcal{C}_n u_n' = u_n'' \Leftrightarrow (A_n - \lambda_n B_n) u_n = B_n u_n'$$

D'où l'existence et l'unicité de $\varphi_n' = p_n u_n'$.

THEOREME 2.4.

Pour n assez grand, on a :

(i) $|\lambda - \hat{\lambda}_n| \leq C \eta_n ;$

(ii) $\theta(\mathcal{M}_n, r_n M) \leq c \eta_n ;$

(iii) $\theta(M_n, M) \leq C \eta_n.$

Démonstration :

(i) L'opérateur $\mathcal{P}_n r_n$ restreint à M, $J_n = \mathcal{P}_n r_n|_M : M \rightarrow M$, est continu et inversible ; son inverse J_n^{-1} est continu et uniformément borné en n. Nous avons alors :

$$m(\lambda - \hat{\lambda}_n) = \text{Tr} (J_n \tilde{T}^{-1} J_n^{-1} - \tilde{\mathcal{C}}_n^{-1}),$$

où \tilde{T}^{-1} et $\tilde{\mathcal{C}}_n^{-1}$ sont respectivement les inverses de $\tilde{T} = T|_M : M \rightarrow M$ et $\tilde{\mathcal{C}}_n = \mathcal{C}_n|_{\mathcal{M}_n} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$.

Soit $\{x_n^1, \dots, x_n^m\}$ une base normalisée de \mathcal{M}_n et $\{y_n^1, \dots, y_n^m\}$ sa base adjointe $\|y_n^i\| \leq C$ pour $i = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned} m(\lambda - \hat{\lambda}_n) &= \sum_{i=1}^m \langle (J_n \tilde{T}^{-1} J_n^{-1} - \tilde{C}_n^{-1}) x_n^i, y_n^i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle r_n \tilde{T}^{-1} J_n^{-1} (\mathcal{C}_n - r_n T p_n) \tilde{C}_n^{-1} x_n^i, y_n^i \rangle \end{aligned}$$

d'où

$$|\lambda - \hat{\lambda}_n| \leq C. \max_{\substack{u_n \in \mathcal{N}_n \\ \|u_n\|_{E_n} = 1}} \|(\mathcal{C}_n - r_n T p_n) u_n\|_{E_n}$$

Cette dernière quantité est majorée par $C \eta_n$.

En effet, pour tout $u_n \in \mathcal{N}_n$, $\|u_n\|_{E_n} = 1$,

$$\|(r_n T p_n - \mathcal{C}_n) u_n\|_{E_n} \leq C. \|(T p_n - p_n \mathcal{C}_n) u_n\|_E.$$

$$(T p_n - p_n \mathcal{C}_n) u_n = R(z_0) (B p_n - (A - z_0 B) p_n \mathcal{C}_n) u_n$$

$$(T p_n - p_n \mathcal{C}_n) u_n = R(z_0) (B p_n (\mu_n - \mathcal{C}_n) - (A - \lambda_n B) p_n \mathcal{C}_n) u_n$$

$$(T p_n - p_n \mathcal{C}_n) u_n = R(z_0) (B p_n \mathcal{R}_n(z_0) (A_n - \lambda_n B_n) u_n - (A - \lambda_n B) p_n \mathcal{C}_n u_n).$$

Si $u'_n \in \mathcal{N}_n$ est tel que $(A_n - \lambda_n B_n) u_n = B_n u'_n$, c'est-à-dire

$$\mathcal{R}_n(z_0) (A_n - \lambda_n B_n) u_n = \mathcal{C}_n u'_n, \text{ alors :}$$

$$(7) \quad (T p_n - p_n \mathcal{C}_n) u_n = R(z_0) (B p_n \mathcal{C}_n u'_n - (A - \lambda_n B) p_n \mathcal{C}_n u_n)$$

donc

$$\|(T p_n - p_n \mathcal{C}_n) u_n\|_E \leq C \eta_n.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \theta(r_n M, \mathcal{M}_n) &\leq \| (r_n P p_n - \mathcal{P}_n) \mathcal{S}_n \| \\ &\leq C \| (r_n T p_n - \mathcal{E}_n) \mathcal{S}_n \| \leq C \eta_n. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \theta(M, M_n) &\leq \| (P - \bar{P}_n) \bar{P}_n \| = \| (P p_n - p_n \mathcal{P}_n) \mathcal{S}_n r_n \| \\ &\leq C \| (T p_n - p_n \mathcal{E}_n) \mathcal{S}_n \| \\ &\leq C \eta_n. \bullet \end{aligned}$$

2.3 - Quotient de Rayleigh

Soit $\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m\}$ une base normalisée de \mathcal{M}_n et $\{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^m\}$ sa base adjointe dans \mathcal{M}_n^* . $\|y_n^i\| \leq C$. L'opérateur $r_n T p_n \mathcal{S}_n$ est de rang fini donc :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(r_n T p_n \mathcal{S}_n) &= \sum_{i=1}^m \langle r_n T p_n x_n^i, y_n^i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle T p_n x_n^i, r_n^* y_n^i \rangle \end{aligned}$$

Posons $\varphi_n^i = p_n x_n^i$ et $\psi_n^i = r_n^* y_n^i$. $\langle \varphi_n^i, \psi_n^j \rangle = \langle x_n^i, y_n^j \rangle = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, \dots, m$.

$\{\varphi_n^1, \varphi_n^2, \dots, \varphi_n^m\}$ est une base de M_n et $\{\psi_n^1, \dots, \psi_n^m\}$ est une base de $r_n^* \mathcal{M}_n^* = M_n^*$.

Donc :

$$\text{Tr}(r_n T p_n \mathcal{S}_n) = \text{Tr}(T \bar{P}_n) = \text{Tr}(T Q_n).$$

Posons :

$$\rho_n = \frac{1}{m} \text{Tr}(r_n T p_n \mathcal{S}_n).$$

Introduisons la quantité η_n^* définie par :

$$\eta_n^* = \max_{\substack{\Psi_n \in M_n^* \\ \|\Psi_n\|=1}} \|(\Lambda_n^* - \bar{\lambda}_n B_n^*) \Psi_n - B_n^* \Psi_n'\|$$

où Ψ_n' est l'unique élément de M_n^* associé à Ψ_n et vérifiant

$$(A_n^* - \bar{\lambda}_n B_n^*) p_n^* \Psi_n' = B_n^* p_n^* \Psi_n.$$

En effet, $v_n = p_n^* \Psi_n \in \mathcal{N}_n^*$ et $v_n'' = \bar{\mu}_n (\mathcal{C}_n^* - \bar{\mu}_n) v_n \in \mathcal{M}_n^*$.

Donc il existe $v_n' \in \mathcal{N}_n^*$, unique, tel que : $\mathcal{C}_n^* v_n' = v_n''$. $\Psi_n' = r_n^* v_n'$.

Nous avons aussi : $\mathcal{C}_n^* v_n' = v_n'' \Leftrightarrow (A_n^* - \bar{\lambda}_n B_n^*) v_n' = B_n^* v_n'$.

THEOREME 2.5.

Sous les hypothèses (H1)-(H7) pour n assez grand, on a :

$$|\mu - \rho_n| \leq C \eta_n \eta_n^*.$$

Démonstration :

Puisque $T_n x \rightarrow Tx$ et que la convergence de Q_n vers P est collectivement compacte, le théorème 2.6 de [5] s'applique. Donc pour n assez grand :

$$|\mu - \rho_n| \leq C \|(T - T_n)Q_n\| \cdot \|(T^* - T_n^*)Q_n^*\|$$

où

$$\|(T - T_n)Q_n\| = \|(T - T_n)\bar{P}_n\| \leq C \eta_n,$$

et

$$\|(T^* - T_n^*)Q_n^*\| = \|(T^* - T_n^*)\bar{P}_n^*\| \leq C \eta_n^*.$$

Remarque :

Le résultat ci-dessus n'est intéressant du point de vue numérique que si η_n^* tend vers 0. Nous en donnons une condition suffisante.

Lemme 2.6.

Si en plus des hypothèses (H1)-(H7), on suppose :

$$(H_1^*) \quad (E_n^*, p_n^*) \text{ est une approximation de } E^*$$

$$(H_2^*) \quad (p_n^* r_n^*)^* y \rightarrow y, \quad \text{pour tout } y \in E^*.$$

$$(H_3^*) \quad \mathcal{C}_n^* \bar{z} \xrightarrow{(p^*)} T^* \bar{z}, \quad \text{pour tout } z \in \Delta.$$

Alors :

$$T_n^* y \rightarrow T^* y, \quad \text{pour tout } y \in E^*.$$

Démonstration :

Soit $y \in E^*$, $\|T_n^* y - T^* y\| \leq \|(\bar{r}_n^* p_n^* - 1) T_n^* y\| + \|r_n^* (p_n^* T^* - \mathcal{C}_n^* p_n^*) y\|$
 comme $\|r_n^*\| = \|r_n\| \leq C$, les hypothèses (H_2^*) et (H_3^*) entraînent que
 $\|T_n^* y - T^* y\| \rightarrow 0$.

THEOREME 2.7.

Sous les hypothèses (H1)-(H7) et (H_1^*) - (H_3^*) , on a :

$$\eta_n^* \rightarrow 0.$$

Démonstration :

Puisque $T_n^* y \rightarrow T^* y$, pour tout $y \in E^*$, $\|(T^* - T_n^*) \bar{P}_n^*\| \rightarrow 0$.
 En utilisant (7), nous avons : $\eta_n^* \leq C \|(T^* - T_n^*) \bar{P}_n^*\|$; donc $\eta_n^* \rightarrow 0$.

Remarque :

L'hypothèse (H_3^*) est vérifiée dès que :

$$A_n^* - \bar{z} B_n^* \xrightarrow{(p^*, r^*)} A^* - \bar{z} B^*, \text{ pour tout } z \in \Delta.$$

2.4. - Calculabilité de ρ_n dans le cas d'une valeur propre simple

Nous supposons $m = 1$. $x_n \in E_n$ et $y_n \in F_n^*$ sont des vecteurs de norme 1 tels que :

$$A_n x_n = \lambda_n B_n x_n \quad \text{et} \quad A_n^* y_n^* = \bar{\lambda}_n B_n^* y_n^*$$

Alors :

$$\rho_n = \frac{\langle r_n T p_n x_n, y_n \rangle}{\langle x_n, (A_n - z_0 B_n)^* y_n \rangle}$$

Si les hypothèses du théorème 2.7 sont vérifiées, $\rho_n' = \rho_n^{-1} + z_0$ est une approximation de λ meilleure que $\hat{\lambda}_n = \lambda_n$.

Dans le cas de l'approximation du problème différentiel (P) par des différences finies $E_n = F_n = \mathcal{C}^N$ et A_n, B_n sont des matrices. Pour calculer ρ_n' , il faut :

1°) résoudre (P_n) et calculer un vecteur propre de (P_{n^*}) , où (P_n) et (P_{n^*}) sont des problèmes matriciels de taille N.

2°) Calculer $\varphi_n = p_n x_n$.

3°) Calculer $\psi_n = T p_n x_n$, ce qui revient à résoudre l'équation $(A - z_0 B)\psi_n = B\varphi_n$, $\psi_n \in E$. A et B sont des opérateurs différentiels.

4°) Calculer $v_n = (A_n^* - \bar{z}_0 B_n^*) y_n$.

5°) Calculer $\rho_n^{-1} = \frac{\langle x_n, v_n \rangle}{\langle r_n, v_n \rangle}$ qui est le rapport de deux produits scalaires de vecteurs dans \mathbb{C}^N . $\rho_n' = \rho_n^{-1} + z_0$.

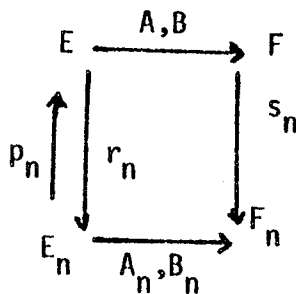
La difficulté du calcul de ρ_n' vient du 3°) où il faut résoudre un système différentiel. Dans le chapitre suivant nous proposons une autre approximation de λ , le quotient de Rayleigh discret, qui est de même ordre que ρ_n' et dont le calcul ne nécessite pas la résolution d'un système différentiel.

CHAPITRE 3

QUOTIENT DE RAYLEIGH DISCRET ET APPLICATION A LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Dans cette dernière partie nous construisons à partir de (P_n) et de (P_{n^*}) une approximation de λ , valeur propre isolée simple de (P) , d'ordre supérieur à celui des vecteurs propres. C'est le quotient de Rayleigh discret. A la fin de ce chapitre nous donnons des applications numériques.

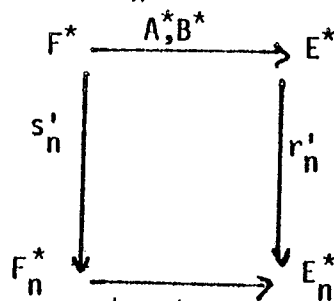
Nous gardons toujours les mêmes notations :



Nous supposons les hypothèses (H1)-(H7) du chapitre 2 vérifiées. λ est une valeur propre simple de (A, B) , donc pour n assez grand, λ_n est une valeur propre simple de (A_n, B_n) .

1. QUOTIENT DE RAYLEIGH DISCRET

Soient (s'_n) et (r'_n) des opérateurs de restriction vérifiant le schéma :



Considérons un sous-espace F' de F^* et une suite de sous-espaces F'_n de F_n^* tels que :

$$\cdot M_* \subset F' \text{ et } \mathcal{M}_{n*} \subset F'_n$$

$$\cdot T_* F' \subset F' \text{ et } \mathcal{T}_{n*} F'_n \subset F'_n$$

Nous rappelons que $z_0 \in \rho(A_n, B_n)$, pour n assez grand, et que

$$T_* = R_*(\bar{z}_0)B^* \in \mathcal{L}(F^*)$$

et

$$\mathcal{T}_{n*} = \mathcal{R}_{n*}(\bar{z}_0)B_n^* \in \mathcal{L}(F_n^*)$$

Nous allons donner des hypothèses sur le problème adjoint.

1.1. - Hypothèses

Nous supposons F' et F'_n normés et les injections $i : F' \rightarrow F^*$ et $i_n : F'_n \rightarrow F_n^*$ continues.

Considérons alors les opérateurs suivants :

$$\tilde{T}_* = T_* \upharpoonright_{F'} : F' \rightarrow F'$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{n*} = \mathcal{T}_{n*} \upharpoonright_{F'_n} : F'_n \rightarrow F'_n$$

$$\tilde{s}_n = s_n' \upharpoonright_{F'} : F' \rightarrow F'_n$$

Nous supposons que les hypothèses :

$$(\tilde{H}1) \quad \|\tilde{s}_n y\|_{F'_n} \rightarrow \|y\|_{F'} \quad , \text{ pour tout } y \in F'$$

$$(\tilde{H}2) \quad \tilde{s}_n \in \mathcal{L}(F', F'_n)$$

$$(\tilde{H}3) \quad \tilde{\mathcal{T}}_{n*} \in \mathcal{L}(F'_n) \text{ et } \tilde{T}_* \in \mathcal{L}(F')$$

$$(\tilde{H}4) \quad \tilde{\mathcal{T}}_{n*} - \bar{t} \xrightarrow{(s')} \tilde{T}_* - \bar{t}, \text{ pour tout } t \in \Delta^s.$$

sont vérifiées. C'est-à-dire que (F'_n, \tilde{s}_n) est une approximation de F' et $\tilde{\mathcal{C}}_{n^*} - \bar{t}$ est une approximation de $\tilde{T}_* - \bar{t}$. L'hypothèse (H4) est vérifiée dès que $(A_n^* - \bar{z} B_n^*) \uparrow_{F'_n} \xrightarrow{(s', r')} (A^* - \bar{z} B^*) \uparrow_{F'}$.

Remarque :

Dans le cas où Ω est un ouvert borné, $F = L^2(\Omega)$ et E le domaine d'un opérateur différentiel A . Si B est l'injection canonique de E dans F , F' est le domaine de A_* , l'adjoint de A par rapport au produit scalaire de $L^2(\Omega)$. E_n et F_n sont des discrétisations de E et F . (voir exemples plus loin). F'_n est une discrétisation de F' . L'hypothèse ($\tilde{H}4$) est vérifiée si l'adjoint A_{n^*} , par rapport au produit scalaire discret de F_n , de A_n converge vers A_* .

Lemme 1.1.

Sous les hypothèses (H1)-(H7) et ($\tilde{H}1$)-($\tilde{H}4$) on a :

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n^*} - \bar{t} \xrightarrow[\text{reg}]{(s')} \tilde{T}_* - \bar{t} \quad , \quad \text{pour tout } t \in \Delta'.$$

Démonstration :

Soit $t \in \Delta'$, c'est-à-dire $t = \frac{1}{z - z_0}$ avec $z \in \Delta$ et $z \neq z_0$. Si $z \in \rho(A, B)$ alors :

$$(\tilde{\mathcal{C}}_{n^*} - \bar{t})^{-1} = \frac{1}{\bar{t}} \mathcal{R}_{n^*}(\bar{z})(A_n^* - \bar{z}_0 B_n^*), \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Donc :

$$\|(\tilde{\mathcal{C}}_{n^*} - \bar{t})^{-1}\| \leq C \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{C}}_{n^*} - \bar{t} \xrightarrow[\text{stable}]{(\tilde{s})} \tilde{T}_* - \bar{t}.$$

Comme $\mathcal{M}_{n^*} \subset F'_n$, $M_* \subset F'$ et $\dim \mathcal{M}_{n^*} = \dim M_* = 1$ la convergence est régulière pour tout $t \in \Delta'$. •

Sous les hypothèses du lemme 1.1., on a donc la convergence des vecteurs propres de $\tilde{\mathcal{C}}_{n^*}$ vers ceux de \tilde{T}_* .

Nous désignons par v un vecteur propre de norme 1, de \tilde{T}_* et par v_n un vecteur propre de \mathcal{C}_{n*} .

Nous allons introduire un opérateur de prolongement de F'_n dans F' que nous appelons \tilde{q}_n . Nous supposons alors que $\tilde{q}_n \in \mathcal{L}(F'_n, F')$ et que

$$(\tilde{H4}) \quad \|\tilde{q}_n\| \leq C$$

$$(\tilde{H5}) \quad \tilde{s}_n \tilde{q}_n = 1_{F'_n}$$

$$(\tilde{H6}) \quad \tilde{q}_n \tilde{s}_n v \rightarrow v \quad \text{pour tout } v \in F'.$$

Nous donnons les bornes d'erreurs sur les vecteurs propres en fonction de

$$\eta_n^* = \max_{\substack{v_n \in \mathcal{M}_{n*} \\ \|v_n\|_{F'} = 1}} \|(A^* - \bar{\lambda}_n B^*) \tilde{q}_n v_n\|_{E^*}$$

THEOREME 1.2

Sous les hypothèses (H1)-(H5) et ($\tilde{H1}$)-($\tilde{H6}$) on a :

$$(i) \quad \eta_n^* \rightarrow 0$$

$$(ii) \quad \|s'_n v - v_n\|_{F'_n} \leq C \eta_n^*$$

$$(iii) \quad \|q'_n v_n - v\|_{F'} \leq C \eta_n^*$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} (i) \quad \|(A^* - \bar{\lambda}_n B^*) \tilde{q}_n v_n\| &= |\bar{\lambda}_n - \bar{z}_0| \|(A - z_0 B)^* (\mathcal{C}_{n*} \tilde{q}_n v_n - T_* \tilde{q}_n v_n)\| \\ &\leq C \cdot \|\mathcal{C}_{n*} \tilde{q}_n v_n - T_* \tilde{q}_n v_n\|_{F_n^*} \\ &\leq C \|\tilde{\mathcal{C}}_{n*} \tilde{q}_n v_n - \tilde{T}_* \tilde{q}_n v_n\|_{F'_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Les bornes (i) et (ii) sont analogues à celles du théorème 2.4. du chapitre 2. •

1.2. - Quotient de Rayleigh discret

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Nous définissons le quotient de Rayleigh discret construit sur φ_n et ψ_n par :

$$\gamma_n(N) = \frac{\langle A_N r_N \varphi_n, s_N^i \psi_n \rangle}{\langle B_N r_N \varphi_n, s_N^i \psi_n \rangle}$$

où $\varphi_n = p_n x_n$ et $\psi_n = \tilde{q}_n v_n$. x_n étant un vecteur propre de (A_n, B_n) et v_n un vecteur propre de $\tilde{\mathcal{C}}_{n^*}$, c'est-à-dire de (A_n^*, B_n^*) .

En fonction de η_n^* définie précédemment et de $\eta_n = \max_{\substack{x_n \in \mathcal{C}_n \\ \|x_n\|=1}} \|(A - \lambda_n B) p_n x_n\|_F$ nous donnons une majoration de $|\lambda_N - \gamma_n(N)|$.

THEOREME 1.3.

Sous les hypothèses (H1)-(H7) et ($\tilde{H}1$)-($\tilde{H}5$) pour n assez grand il existe $N(n)$ tel que :

$$|\lambda_N - \gamma_n(N)| \leq C \eta_n \eta_n^*$$

pour tout $N \geq N(n)$.

Démonstration :

Considérons $\rho_n(N) = (\gamma_n(N) - z_0)^{-1}$. $\rho_n(N)$ va s'écrire :

$$\rho_n(N) = \frac{\langle \mathcal{C}_N r_N \varphi_n, (A_N^* - \bar{z}_0 B_N^*) s_N^i \psi_n \rangle}{\langle r_N \varphi_n, (A_N^* - \bar{z}_0 B_N^*) s_N^i \psi_n \rangle}$$

d'où

$$\rho_n(N)^{-1/N} = \frac{\langle (\mathcal{C}_N^{-1/N}) r_N \varphi_n, (A_N^* - \bar{z}_0 B_N^*) s_N^i \psi_n \rangle}{\langle r_N \varphi_n, (A_N^* - \bar{z}_0 B_N^*) s_N^i \psi_n \rangle}$$

Nous commençons par montrer que :

$$\alpha(n, N) = \langle r_N \varphi_n, (A_N^* - \bar{z}_0 B_N^*) s_N^i \psi_n \rangle - \langle x, (A^* - \bar{z}_0 B^*) v \rangle \rightarrow 0$$

quand $n, N \rightarrow \infty$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \alpha(n, N) &= \langle (A_N - z_0 B_N) r_N (\varphi_n - x), s_N^i \psi_n \rangle \\ &\quad + \langle (A_N - z_0 B_N) r_N x, s_N^i (\psi_n - v) \rangle \\ &\quad + \langle (A_N - z_0 B_N) r_N x - s_N (A - z_0 B) x, s_N^i \psi_n \rangle \\ &\quad + \langle r_N (A - z_0 B) x, s_N^i v \rangle - \langle (A - z_0 B) x, v \rangle \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\alpha(n, N)| &\leq C (\|\varphi_n - x\|_E + \|\psi_n - v\|_F + \|(A_N - z_0 B_N) r_N - s_N (A - z_0 B) x\|_{F_N}) \\ &\quad + |\langle s_N (A - z_0 B) x, s_N^i v \rangle - \langle (A - z_0 B) x, v \rangle|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que :

$$\bullet \text{ pour } n \geq n_0, \quad \|\varphi_n - x\|_E \leq \frac{\varepsilon}{C} \quad \text{et} \quad \|\psi_n - v\|_F \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

$$\bullet \text{ pour } N \geq n_0, \quad \|(A_N - z_0 B_N) r_N - s_N (A - z_0 B) x\|_{F_N} \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

$$\text{et} \quad |\langle s_N (A - z_0 B) x, s_N^i v \rangle - \langle (A - z_0 B) x, v \rangle| \leq \varepsilon$$

Donc, pour $n, N \geq n_0$, $|\alpha(n, N)| \leq 4\varepsilon$ et on a $\alpha(n, N) \rightarrow 0$, quand $n, N \rightarrow \infty$.
C'est -à-dire :

$$\langle r_N \varphi_n, (A_N^* - \bar{z}_0 B_N^*) s_N^i \psi_n \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N \rightarrow \infty} \langle x, (A^* - \bar{z}_0 B^*) v \rangle$$

D'autre part, on a :

$$| \langle (\mathcal{C}_N^{-\mu_N}) r_N \varphi_n, (A_N^* - \bar{z}_0 B_N^*) s_N^* \psi_n \rangle |$$

$$\leq C (\| \varphi_n - x \|_E + \| r_N x - x_N \|_{E_N}) (\| s_N^* v - v_N \|_{F_N^*} + \| \psi_n - v \|_F)$$

Donc

$$| \rho_n(N) - \mu_N | \leq C (\eta_n + \eta_N) (\eta_n^* + \eta_N^*)$$

Puisque $\eta_N \rightarrow 0$ et $\eta_N^* \rightarrow 0$, quand $N \rightarrow \infty$, pour n fixé, il existe $N(n)$ tel que :

$$\eta_N \leq \eta_n \text{ et } \eta_N^* \leq \eta_n^* \text{ pour } N \geq N(n)$$

d'où

$$| \rho_n(N) - \mu_N | \leq C \eta_n \eta_n^*$$

et

$$| \gamma_n(N) - \lambda_N | \leq C \eta_n \eta_n^* \bullet$$

De ce résultat nous déduisons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire :

Sous les hypothèses du théorème 1.3., pour n assez grand, il existe un entier $N(n)$ tel que

$$| \lambda - \lambda_n(N) | \leq C \eta_n \eta_n^*, \text{ pour tout } N \geq N(n).$$

Pour n fixé, le quotient $\rho_n(N)$ est en fait une approximation de

$$\rho_n = \frac{\langle T \varphi_n, (A^* - z_0 B^*) \psi_n \rangle}{\langle \varphi_n, (A^* - z_0 B^*) \psi_n \rangle}, \text{ qui est le quotient de Rayleigh généralisé}$$

de T construit sur les vecteurs φ_n et $(A^* - z_0 B^*) \psi_n$ qui sont respectivement des approximations des vecteurs propres de T et T^* .

Si $\gamma_n = \rho_n^{-1} + z_0$ alors $\gamma_n = \frac{\langle A \varphi_n, \psi_n \rangle}{\langle B \varphi_n, \psi_n \rangle}$ et on montre le résultat suivant :

THEOREME 1.4.

Sous les hypothèse du théorème 1.3., pour n assez grand, on a :

$$|\lambda - \gamma_n| \leq C \eta_n \eta_n^*.$$

Remarque :

Pour une méthode de différences finies il est plus facile de calculer $\gamma_n(N)$ que γ_n : en effet $\varphi_n = p_n u_n$ et $\psi_n = q_n' v_n$ sont des polynômes par morceaux, et si on appelle N' la taille des matrices A_N et B_N , les restrictions par r_N et s_N' sont dans $C^{N'}$. On a donc deux produits scalaires de $C^{N'}$ à calculer.

2 - EXEMPLES NUMERIQUES

Nous donnons quelques exemples de problèmes différentiels aux limites, discrétisés par des différences finies et vérifiant les hypothèses du premier paragraphe.

Nous commençons par introduire les espaces qui serviront dans ces exemples. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$). $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions à carré intégrable muni de la norme $\| \cdot \|_0$ associée au produit scalaire $(f, g) = \int_{\Omega} f(t)g(t)dt$.

$H^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$.

La norme sur $H^m(\Omega)$ est $\|f\|_m = \left(\sum_{|i| \leq m} \|D^i f\|_0^2 \right)^{1/2}$ où D est l'opérateur de dérivation.

∂ et $\bar{\partial}$ désignent les opérateurs de discrétisation :

$$(\partial u_N)_i = \frac{u_N^{i+1} - u_N^i}{h} \quad \text{et} \quad (\bar{\partial} u_N)_i = \frac{u_N^i - u_N^{i-1}}{h}, \quad \text{définis pour } i = 1, 2, \dots, N-1$$

u_N est un vecteur de \mathbb{R}^{N+1} de composantes u_N^j , $j = 0, 1, \dots, N$ et $h > 0$.

$$\cdot r_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$$

$$\cdot \|r_n u\|_{E_n} \rightarrow \|u\|_2$$

Soit $s_n : F \rightarrow F_n$

$$u \rightarrow s_n u = (0, u_n^1, \dots, u_n^{n-1}, 0)$$

$$\text{où } u_n^i = \begin{cases} u(t_i^n) & \text{si } u \in \mathcal{C}(0,1) \\ \frac{1}{h} \int_{t_i^n - \frac{h}{2}}^{t_i^n + \frac{h}{2}} u(t) dt & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot s_n \text{ est asymptotiquement linéaire} \\ \cdot \|s_n u\|_{F_n} \rightarrow \|u\|_0, \text{ pour tout } u \in F. \end{array} \right.$$

b) La convergence de \tilde{A}_n vers \tilde{A} est régulière.

c) L'opérateur de prolongement p_n est une interpolation polynomiale par morceaux. Si $u_n \in E_n$, $u^{(n)} = p_n u_n$ est un polynôme de degré 3 sur $[t_i, t_{i+1}]$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(n)}(t_j) = u_n^j \\ u^{(n)'}(t_j) = \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2h} \text{ pour } j = i, i+1, \end{array} \right.$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Comme les vecteurs propres sont dans $H^4(0,1)$ et pour $x \in H^4(0,1)$ $\|(1-p_n r_n)x\|_E \leq Ch^2$, on a donc η_n qui est d'ordre h^2 .

d) En prenant $F' = E$, $F_n' = E_n$, $\tilde{s}_n = r_n$ et $\tilde{q}_n = p_n$ on a η_n^* qui est d'ordre h^2 .

Donc : $|\lambda - \lambda_n| = O(h^2)$ et $|\lambda - \gamma_n(N)| = O(h^4)$

avec :
$$\gamma_n(N) = \frac{(A_N r_{Np_n} u_n, r_{Np_n} v_n)}{(r_{Np_n} u_n, r_{Np_n} v_n)}$$
,

$$A_n u_n = \lambda_n u_n \text{ et } A_n^T v_n = \lambda_n v_n$$

Nous prenons $N = n.j$, pour $j = 2, 3, \dots$

Si $j = 1$, $N = n$ et $\gamma_n(N) = \lambda_n$.

$\epsilon_n(j) = \lambda - \gamma_n(N)$ et $\epsilon_n(1) = \lambda - \lambda_n$.

Calcul de $\lambda_2 = 4\pi^2$

n = 10		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	1.47075	1.47075
2	0.34988	0.37192
4	0.05650	0.09321
6	0.00158	0.04119
7	-0.01009	0.03061
30	-0.07286	
100	-0.07431	

n = 20		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	0.37199	0.37199
2	0.09232	0.09321
6	0.00823	0.00789
8	0.00362	0.001385
10	0.00148	
12	0.00032	
13	-0.00007	
14	-0.00037	
20	-0.00136	
30	-0.00189	
50	-0.00482	
100	-0.00509	

n = 30		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	0.16536	0.16536
2	0.04413	0.04119
3	0.01817	0.01891
5	0.00628	0.00351
10	0.00062	
12	0.00075	
15	0.00034	
18	0.00011	
20	0.000016	
21	-0.000022	
50	-0.00091	

Notations :

$\epsilon_N = \lambda - \lambda_N$,

$\epsilon_n(j) = \lambda - \gamma_n(N)$

$N = nj$.

Tableau 1

2°) Interpolation par une fonction C^0

Soient $E = H_0^1(0,1) = \{f \in H^1(0,1) / f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = H^{-1}(0,1)$ l'espace dual de $H_0^1(0,1)$ par rapport à la norme de $L^2(0,1)$. On peut considérer que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(E,F)$.

Pour $u, v \in H_0^1(0,1)$, $\langle Au, v \rangle = (u', v') + 2(u', v) - (u, v)$

Les espaces E_n et F_n sont alors les suivants :

$E_n = \{u_n = (u_n^0, u_n^1, \dots, u_n^n) / u_n^0 = u_n^n = 0\}$ muni de la norme

$$\|u_n\|_{E_n} = (\|u_n\|_{n,0}^2 + \|\partial u_n\|_{n,0}^2)^{1/2}.$$

F_n est l'espace dual de E_n par rapport à $\|\cdot\|_{n,0}$

$$\tilde{A}_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n) : \langle \tilde{A}_n u_n, v_n \rangle = (\partial u_n, \partial v_n) + 2(\partial u_n, v) - (u_n, v_n)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad r_n &: E \rightarrow E_n \\ u &\rightarrow (u(t_i))_{0 < i \leq n} \end{aligned}$$

$$r_n \in \mathcal{L}(E, E_n) \text{ et } \|r_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_1$$

$$\begin{aligned} s_n &: F \rightarrow F_n \\ u &\rightarrow s_n u = (0, u_n^1, \dots, u_n^{n-1}, 0) \end{aligned}$$

$$\text{où } u_n^i = \begin{cases} u(t_i) & \text{si } u \in \mathcal{C}(0,1) \\ \frac{1}{h} \int_{t_i - \frac{h}{2}}^{t_i + \frac{h}{2}} u(t) dt & \text{sinon} \end{cases}$$

s_n est asymptotiquement linéaire et on a :

$$\|s_n x\|_{F_n} \rightarrow \|x\|_F, \text{ pour tout } x \in F.$$

b) L'opérateur $p_n : E_n \rightarrow E$ est tel que si $u_n \in E_n$, $p_n u_n$ est un polynôme de degré 2 par morceaux, défini pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$, par

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n u_n(t_j) = u_n^j \quad j = 1, 2 ; \\ (p_n u_n)'(t_i) = \frac{u_n^{i+1} - u_n^{i-1}}{2h} \end{array} \right.$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Pour $x \in H^2(0,1)$, $\|(1-p_n r_n)x\|_1 \leq Ch^2$.
Donc η_n est d'ordre h^2 .

c) En prenant $F' = E$, $F_n' = E_n$, $\tilde{s}_n = r_n$ et $\tilde{q}_n = p_n$, on a η_n^* qui est d'ordre h^2 .

Donc :

$$|\lambda - \lambda_n| = O(h^2)$$

$$|\lambda - \gamma_n(N)| = O(h^4)$$

Calcul de $\lambda^1 = \pi^2$

n = 10		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	0.01491	0.01414
4	0.00874	0.00794
5	0.00588	0.00503
6	0.00433	0.00327
50	0.00085	
100	0.00081	
200	0.00080	

n = 20		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	0.03180	0.03180
3	0.00359	0.00327
10	0.00037	
30	0.000085	
100	0.000053	
150	0.000051	
250	0.000050	

n=30		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	0.01442	0.01442
3	0.00159	0.00029
4	0.00090	0.00003
50	0.000015	
100	0.000011	
200	0.000010	

Notations : $N = nj$,

$$\epsilon_n(j) = \lambda^1 - \gamma_n(N)$$

$$\epsilon_N = \lambda^1 - \lambda_N^1$$

Tableau 2

Calcul de $\lambda^2 = 4\pi^2$

n = 10		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	1.47075	1.47075
2	0.32088	0.37199
4	0.02483	0.09321
5	-0.01090	0.06021
6	-0.03038	0.04119
10	-0.05869	0.01258
50	-0.07400	
80	-0.07439	
100	-0.07440	

n = 20		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	0.37199	0.37199
2	0.00398	0.09321
8	0.00069	0.01385
9	-0.00055	0.00549
10	-0.00091	
15	-0.00260	
20	-0.00425	
50	-0.00509	
80	-0.00518	

n = 30		
j	$\epsilon_n(j)$	ϵ_N
1	0.16536	0.16536
2	0.04073	0.04119
5	0.00564	0.00351
10	0.00062	
13	-0.00006	
14	-0.00018	
20	-0.00063	
50	-0.00098	
80	-0.001026	
100	-0.001035	

Notations :

$$N = nj$$

$$\epsilon_n(j) = \lambda^2 - \gamma_n(N)$$

$$\epsilon_N = \lambda^2 - \lambda_N^2$$

Tableau 3

2. . - Exemple 2 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \\ u(1,y) = u(0,y) \\ u(x,1) = u(x,0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ 0 \leq x,y \leq 1 \end{array} \right. \quad (CL)$$

Les valeurs propres de (P) sont $\lambda(p,k) = (4p^2+k^2)\pi^2$, $p = 0,1,2,\dots$
 $k = 1,2,\dots$

a) La discrétisation de (P) en h est donnée par :

$$(P_n) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}) = \lambda u_{ij} \\ \quad \quad \quad i,j = 1, \dots, n-1 \\ u_{1,j} = u_{0,j} = u_{nj} \quad \quad j = 0, 1, \dots, n \\ u_{i,n} = u_{i0} = 0 \quad \quad i = 0, 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (CL_n)$$

Dont la matrice associée est

$$A_n = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_n & & & -I_n \\ & -I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & -I_n \\ -I_n & & & B_n \end{pmatrix} \quad \text{qui est de taille } (n-1)^2,$$

$$\text{où } B_n = \begin{pmatrix} 3 & & & -1 \\ & 4 & & \\ -1 & & \ddots & \\ & & & 4-1 \\ -1 & & & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sont de taille } (n-1).$$

Le problème adjoint de (P) est

$$(P^*) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta v = \lambda v \quad \text{dans } \Omega \\ v(1,y) = 0 \\ v(x,0) = v(x,1) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,y) \end{array} \right\} \quad (CL^*)$$

dont la discrétisation en h est :

$$(P_n^*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h^2} \{v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} + v_{i-1,j} - 4v_{ij}\} = \lambda v_{ij} \\ \text{pour } ij = 1, 2, \dots, n-1 \\ v(1,j) = v(0,j) - v(n-1,j) \\ v(i,0) = v(i,n) = 0 \\ v(n,j) = 0 \end{array} \right\} \quad (CLn^*)$$

La matrice associée à (P_n^*) est

$$A'_n = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B'_n & & -I_n & & \\ & -I_n & & & \\ & & & & -I_n \\ & & & & & -I_n \\ & & & & -I_n & B'_n \end{pmatrix}$$

$$\text{où } B'_n = \begin{pmatrix} 3 & & -1 & & -1 \\ & -1 & 4 & & \\ & & & & -1 \\ & & & & & 4 & -1 \\ & & & & -1 & & 3 \end{pmatrix} = B_n^T$$

donc : $A'_n = A_n^T$.

b) $E = \{u \in H^2(\Omega) / u \text{ vérifiant (CL)}\}$

muni de la norme de $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. $F = L^2(\Omega)$.

Soit $E_n = \{u = (u_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} / u \text{ vérifiant (CL}_n)\}$.

muni de la norme :

$$\|u\|_{E_n} = h \left(\sum_{i,j} |u_{i,j}|^2 + \sum_{i,j} |(\partial u)_{i,j}|^2 + \sum_{i,j} |(\bar{\partial} \partial u)_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

$F_n = \{u = (u_{i,j}) / 1 \leq i,j \leq n-1\}$ muni de la norme $\|u\|_{F_n} = h(\sum u_{i,j}^2)^{1/2}$

Soit $\tilde{A}_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, l'opérateur associé à A_n .

$r_n : E \rightarrow E_n$

$$u \rightarrow (u_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} / u_{i,j} = u(t_i, t_j) \text{ si } 1 \leq i,j \leq n-1$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot r_n \in \mathcal{L}(E, E_n) \\ \cdot \|r_n u\|_{E_n} \rightarrow \|u\|_E \end{array} \right.$$

$s_n : F \rightarrow F_n$ est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in E, \quad s_n u = (u(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n} \\ u \notin E \quad s_n u = \left(\frac{1}{h^2} \int_{t_i - \frac{h}{2}}^{t_i + \frac{h}{2}} \int_{t_j - \frac{h}{2}}^{t_j + \frac{h}{2}} u(x,y) dx dy \right)_{1 \leq i,j \leq n} \end{array} \right.$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \|s_n u\|_{F_n} \rightarrow \|u\|_F \\ \cdot s_n \text{ est asymptotiquement linéaire et } s_n \upharpoonright_E \text{ est linéaire} \end{array} \right.$$

c) L'opérateur de prolongement $p_n : E_n \rightarrow E$ est défini sur chaque triangle de Ω par un polynôme de degré 9 : si $u \in E$, $p_n r_n u$ est l'interpolé de Hermite par morceaux sur chaque triangle T_i .
 T_i est un triangle ayant pour sommets des noeuds de discrétisation de Ω .

d) $F' = \{v \in H^2(\Omega) / v \text{ vérifie } (CL*)\}$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$.

$F'_n = \{v_n \in C^{n+3} / v_n \text{ vérifie } (CLn*)\}$ muni de la norme $\| \cdot \|_{n,2}$.

$F' \hookrightarrow F$ et $F'_n \hookrightarrow F_n$. $\tilde{s}_n = s_n|_{F'} \in \mathcal{L}(F', F'_n)$ et alors
 $\mathcal{E}_n^* \xrightarrow{\tilde{s}_n} T^*$ et η_n^* est d'ordre h

En calculant λ_n, u_n, v_n , on aura :

$$\gamma_n(N) = \frac{\langle A_N r_N p_n u_n, r_N p_n v_n \rangle}{\langle r_N p_n u_n, r_N p_n v_n \rangle}$$

$$|\lambda - \lambda_n| = O(h)$$

$$|\lambda - \gamma_n(N)| = O(h^2)$$

En prenant $N = nj$ pour $j = 2, 3, \dots$, on a les résultats :

Calcul de $\lambda = \pi^2$

n = 6	
j	$\epsilon_n(j)$
1	0.223433
2	0.045939
3	0.011885
4	-0.000119
6	-0.008711
10	-0.013131
20	-0.014993

n = 10	
j	$\epsilon_n(j)$
1	0.080908
2	0.018891
5	0.001275
6	0.000245
7	-0.000375
10	-0.000125
20	-0.001683

n = 16	
j	$\epsilon_n(j)$
1	0.031668
2	0.007711
3	0.003250
5	0.001687
6	0.000570
7	0.000333
9	0.000073
10	-0.000006
12	-0.000099

Notations :

$$N = nj ; \epsilon_n(j) = \lambda - \gamma_n(N)$$

Tableau 4

3. CONCLUSIONS

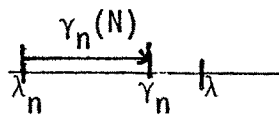
D'autres exemples numériques ont été faits et on a constaté deux cas :

- soit $\varepsilon_n(j) = \lambda - \gamma_n(N)$, $N = nj$, décroît toujours en gardant le même signe (cas 1 du schéma 1)
- Soit $\varepsilon_n(j)$ décroît en gardant un signe constant pour j variant entre 2 et j_0 , puis $\varepsilon_n(j)$ change de signe et commence à croître très lentement tout en restant assez petit (cas 2 du schéma 1).

D'un autre côté, on remarque que pour des valeurs de j relativement petites, $\gamma_n(N)$ est du même ordre que λ_n valeur propre d'une matrice de taille N , N très grand (schéma 2).

Enfin, les opérateurs de prolongement qui sont des interpolations polynômiales par morceaux doivent être suffisamment lisses pour ne pas diminuer l'ordre de l'erreur sur les vecteurs propres.

Cas n° 1 :



Cas n° 2 :

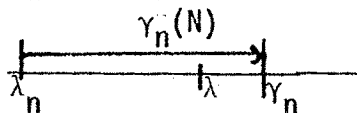
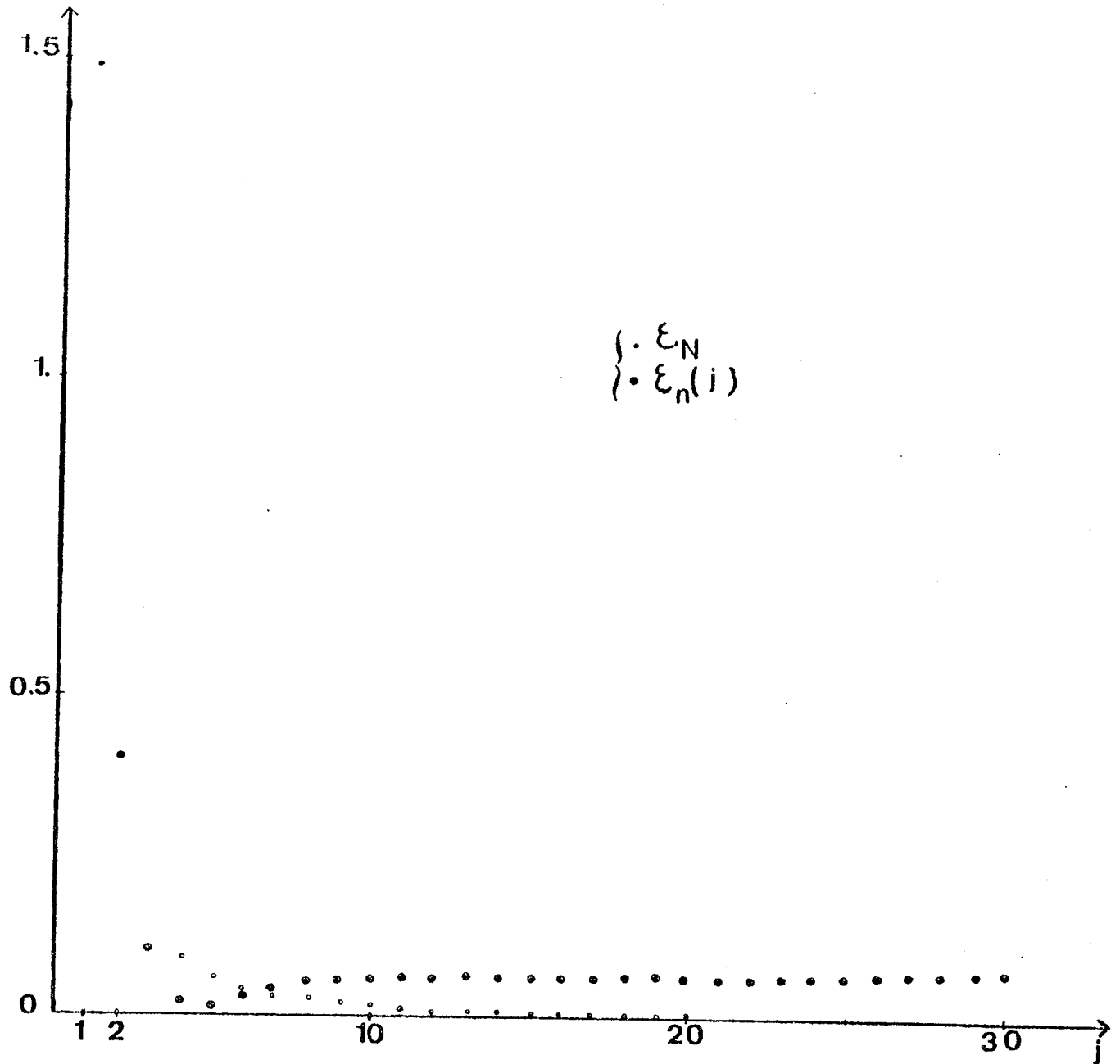


Schéma 1



Variation de $|\epsilon_N|$ et de $|\epsilon_n(j)|$ en fonction de j .

Valeurs du tableau 1, $n = 10, N = n j$.

Schéma 2

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANSELONE P.M.
Collectively compact operator approximation theory
Prentice Hall, 1971

- [2] CHATELIN F.
Utilisation du quotient de Rayleigh pour le calcul des valeurs propres
d'opérateurs linéaires.
Séminaire d'Analyse Numérique, n° 238, nov. 1975 - Université de Grenoble

- [3] CHATELIN F.
Théorie de l'approximation des opérateurs linéaires. Application au
calcul des valeurs propres d'opérateurs différentiels et intégraux.
Cours de DEA d'Analyse Numérique - Université de Grenoble 1976-1977

- [4] CHATELIN F.
Numerical computation of the eigenlements of linear integral operators
by iteration.
SIAM J. Num. Anal. Vol. 15, n° 6 decembre 1978

- [5] CHATELIN F.
Sur les bornes d'erreurs a posteriori pour les éléments propres
d'opérateurs linéaires
(à paraître dans Num. Math. 1979).

- [6] FORSYTHE G., WASON W.
Finite difference methods for partial differential equations .
Wiley Interscience, 1960

- [7] GRIGORIEFF R.D.
Über die Koerzitivität gewöhnlicher Differenzenoperatoren und die Konverp
Konverpenz von Mehrschrittverfahren .
Num. Math. 15, 196-218 (1970)

- [8] GRIGORIEFF R.D.
I. Qualitative Konvergenz
Num. Math. 24, 355-374 (1975)
- [10] GRIGORIEFF R.D.
II. Konvergenz Ordnung
Num. Math. 24, 415-433 (1975)
- [11] GRIGORIEFF R.D., JEGGLE H.
Approximation von Eigenwertproblemen bei nichtlinearer parameterabhängig
Manuscripta Math. 10, 245-271 (1973)
- [12] KATO T.
On the upper and lower bounds for eigenvalues
J. Phys. Soc. Japan, 4 334-339 (1949)
- [13] KATO T.
Perturbation theory for linear operators
Springer Verlag (1976)
- [14] KREISS H.O.
Difference approximation for boundary and eigenvalue for differential
equations.
Math. Comp. 26, 605-624 (1972)
- [15] LEMORDANT J.
Localisation d'un groupe de valeurs propres
Note d'Etude LA n° 46 CELAR, décembre 1977
- [16] REDONT P.
Application de la théorie de la perturbation des opérateurs linéaires
à l'obtention de bornes d'erreur sur les éléments propres et à leur
calcul.
Thèse de Dr Ingénieur, Université de Grenoble (1979)

- [17] REDONT P.
Communication personnelle 1979

- [18] STUMMEL F.
Diskrete Konvergenz linearer Operatoren
I. Math. Ann. 190, 45-92 (1970)

- [19] STUMMEL F.
Diskrete Konvergenz linearer Operatoren
II. Math. Z., 120, 231-264 (1971)

- [20] TEMPLE G.
The computation of characteristic numbers and characteristic function
Proc. Lond. Math. Soc. 29 (1928)

- [21] VAINIKKO G.
A difference method for ordinary differential equations
Zh. Vychisl. Mat fiz 9, 1057-1074 (1969)

- [22] VAINIKKO G.
The connection between mechanical quadrature and finite difference
methods
Zh. Vychisl. Mat. Mat. fiz 9, 2, 259-270, 1969

- [23] VAINIKKO G.
Discretely compact sequences
Zh. Vychisl. Math. mat. Fiz 14, 3, 572-583 (1974)

- [24] VAINIKKO G.
Convergence of the difference method when seeking the periodic
solution or ordinary differential equations
Zh. Vichisl. Mat. mat. Fiz. 15, 87-100, (1975)

- [25] VAINIKKO G.
Functionalanalysis der Diskretisierungs methoden
Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1976)

- [26] VAINIKKO G.
Über die Konvergenz un Divergenz von Näherungsmethoden bei
Eigenwertproblemen
10, Math. Nachr. Bd. 78, 145-164 - 1977
- [27] VAINIKKO G.
Über die Konvergenzbegriffe fñn lineare Operatoren in der Numerischen
Mathematik
Math. Nachr. 78, 165-183 -1977
- [28] VAINIKKO G.
Approximative methods for nonlinear equations
Nonlinear Analysis theory, methods & Applications, vol. 2 n° 6
647-687 -1978
- [29] VAINIKKO G.
Foundations of difference method for eigenvalue
Proc. of Intern. Summer school on finite difference and finite
element in geophysics
Liblice June 77, Czech. Acad. Publ. Prague - 1978
- [30] WILKINSON J.H., REINSCH C.
Handbook for automatic computation
Vol. II Linear Algebra, Springer Verlag - 1971
- [31] YOSIDA K.
Lectures on differential and integral equations
Intersceince Publishers - New-York - 1960

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 12 juin 1979

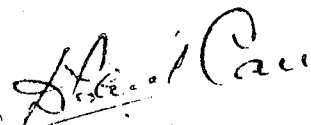
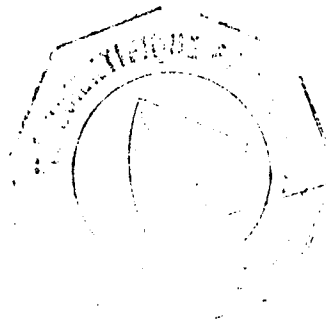
Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 12 juin 1979

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



Dr G. CAU