



Modélisation multi-échelle de l'endommagement et de la rupture dans les milieux (quasi-) fragiles

Gabriela Bilbie

► To cite this version:

Gabriela Bilbie. Modélisation multi-échelle de l'endommagement et de la rupture dans les milieux (quasi-) fragiles. Mécanique [physics.med-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT : . tel-00289091

HAL Id: tel-00289091

<https://theses.hal.science/tel-00289091>

Submitted on 19 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER -
GRENOBLE 1**

N° attribué par la bibliothèque
/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_

Présentée par
Gabriela BÎLBÎE

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Discipline : Mécanique

**Modélisation multi-échelle de l'endommagement et de la
rupture dans les milieux (quasi-) fragiles**

Date de soutenance : 13 juillet 2007

JURY

Président :	M. Denis CAILLERIE	Professeur, Institut National Polytechnique de Grenoble
Rapporteurs :	M. Jean-Jacques MARIGO	Professeur, Université Paris VI
	M. Nicolas MOËS	Professeur, École Centrale de Nantes
Examineur :	M. René CHAMBON	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble
Examinatrice :	Mme. Anna PANDOLFI	Professeur, Politecnico di Milano
Directeur de thèse :	M. Cristian DASCALU	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble

Thèse préparée au Laboratoire "Sols, Solides, Structures - Risques" (3S-R)
Laboratoire mixte : U.J.F. - I.N.P.G. - C.N.R.S. (U.M.R. 5521)
Domaine universitaire BP n° 53 - 38041 GRENOBLE cedex 9

Remerciements

Je voudrais exprimer, dans cette page traditionnelle, le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du laboratoire Sols, Solides, Structures - Risques (3S-R, Université Joseph Fourier - Institut National Polytechnique de Grenoble - CNRS).

Évidemment, ce travail n'aurait pas eu lieu sans la direction et le soutien de mon directeur de thèse, Cristian DASCALU, Professeur à l'UJF. Je le remercie vivement, non seulement, pour ses conseils scientifiques, sa disponibilité permanente et sa patience, mais aussi, pour la confiance, l'encouragement qu'il m'a accordé pendant ces années. Durant tout ce temps, j'ai découvert le monde de la recherche scientifique.

Je suis, particulièrement, reconnaissante et je voudrais remercier Denis CAILLERIE, Professeur à l'INPG, non seulement, pour avoir présidé le jury de ma soutenance, mais aussi pour les nombreuses discussions sur des problèmes analytiques. Ses conseils et son intérêt, au cours de ce travail, m'ont été un facteur stimulant.

Pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs, mes remerciements s'adressent, également, à Jean-Jacques MARIGO, Professeur à l'Université Paris VI, ainsi qu'à Nicolas MOËS, Professeur à l'École Centrale de Nantes.

Je remercie également, Anna PANDOLFI, Professeur à Politecnico di Milano, pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse, ainsi que pour ses remarques pertinentes sur mon travail.

Je tiens à remercier, très fortement, René CHAMBON, Professeur à l'UJF, pour avoir participé au jury de cette thèse. Les multiples discussions que nous avons eu, pendant ces années, d'un point de vue scientifique ont beaucoup contribué à la réalisation de mon travail. Je lui suis très reconnaissante.

Durant tout ce temps, à plusieurs reprises, j'ai pu partager mes réflexions avec tous les membres de l'équipe GDR. Les discussions, avec Pierre, Panos, Yannick, pendant les réunions numériques, m'ont été une source d'inspiration et d'encouragement inestimable. Merci, tout spécialement, à Eleni Agiasoftou pour les multiples discussions sur l'homogénéisation asymptotique et Jérémy Frey, pour les échanges "inutiles" que nous avons eues en général. Merci du fond du coeur au chef de cette équipe géniale, "Monsieur le Professeur" Cino Viggiani, pour sa bonne humeur et ses encouragements.

Je voudrais, maintenant, m'adresser à tous ceux que j'ai croisé dans le laboratoire ces 1001 jours. A vous les secrétaires (toujours souriantes, sans qui l'administration serait une tâche redoutable), à vous les techniciens, à vous les chercheurs, professeurs ou autres maîtres de conférences, à vous les DEA ou les stagiaires, à vous pauvres compagnons de galères du mon bureau E-123, I-123 ou bien I-101...et aux

autres MERCI !

Je tiens à remercier la joyeuse bande de thésards, d'ici ou des quatre coins du monde, grâce à qui quelques questions essentielles sur la culture et l'art culinaire ont été résolues. Mais, aussi, grâce à qui, mes compétences onomatopées se sont développées. Merci à vous tous, collègues du bâtiment E et du bâtiment I, avec qui j'ai partagé des cafés (oui, je sais, d'eau chaude !) des repas, mais également des événements et des fous rires consécutifs, qui resteront inoubliables.

Dans un autre contexte, mais aussi agréable et satisfaisant, je veux remercier tous les gens que j'ai pu rencontrer au cours de cette période, en dehors de 3S-R. Je tiens, spécialement, à remercier Danièle et ses amis, grâce à qui, dans la barrière de l'Ile Verte, j'ai découvert "ma famille" grenobloise.

Aussi, je pense à une autre famille, des bords de la Loire, qui m'a apportée de la chaleur humaine. Un merci à vous, Françoise et Jean-Pierre. Merci à toi, Samantha, où que tu sois...

Je ne peux terminer ces remerciements, sans évoquer ceux qui sont restés à 2500 km, en Roumanie.

Ce travail n'aurait pas eu lieu sans les soutiens et les conseils de Sanda et Victor Țigoiu, Professeurs à l'Université de Bucarest. J'espère qu'ils considéreront ces mots comme un signe de ma profonde gratitude.

Je voudrais, à présent, remercier ceux qui sont toujours présents dans mon cœur, malgré la distance, ma grande famille de Buciumeni. Această teză este dedicată celor ce mi-au oferit "cei 7 ani de-acasă", părinților mei, surorii mele, tuturor celor ce au avut încredere în mine. Vouă tuturor : MULȚUMESC !

Á present, si vous êtes curieux de savoir comment l'endommagement et la rupture dans le milieu quasi-fragile sont modélisés, tournez cette page et commencez par le "Résumé".

Résumé

Modélisation multi-échelle de l'endommagement et de la rupture dans les milieux (quasi-) fragiles

Dans la première partie de ce manuscrit, nous développons un nouveau procédé pour obtenir des modèles d'endommagement pour les solides, pour lesquels la loi d'évolution d'endommagement est déduite par homogénéisation, à partir d'une analyse microstructurale. La nouvelle approche est illustrée dans le cas des matériaux fragiles. L'outil principal est une analyse énergétique macroscopique sur une cellule de taille finie, qui mène, par homogénéisation, à une équation macroscopique d'évolution d'endommagement. Dans cette équation, la longueur des microfissures apparaît comme variable d'endommagement et la taille de la cellule de périodicité représente un paramètre de longueur interne du matériau. La dissipation, liée au frottement sur les lèvres des microfissures, est également prise en compte.

Dans la deuxième partie, nous étudions les comportements instables des milieux granulaires modélisés par des grains élastiques, en grandes déformations, et des microfissures inter-granulaires. On emploie une méthode d'éléments finis à deux échelles. Les frontières entre les grains sont modélisées avec des lois cohésives, frottement et contact unilatéral. Nous prouvons que la décohesion entre les grains est à l'origine des macro-instabilités, indiquées par la perte d'ellipticité du problème d'équilibre. On étudie l'influence des conditions aux frontières, des paramètres de la loi cohésive et du frottement. Nous donnons des exemples de bifurcation et nous montrons que la réponse macroscopique dépend de la taille de VER.

Mots clés : endommagement, micro-fissures, homogénéisation asymptotique et numérique, microstructure granulaire, interfaces cohésives, effet de taille et effet d'échelle, instabilité et localisation, éléments finis et X-FEM

Abstract

Multiscale modelling of damage and fracture in (quasi-) brittle media

In the first part of the manuscript we develop a new method to obtain damage models for solids, by homogenisation, starting from a micro-structural analysis. The new approach is illustrated for brittle materials. The main ingredient is an energy analysis on a periodicity cell of finite length leading, through homogenisation, to a macroscopic damage evolution law. In this equation, the size of the periodicity cell is an internal material length. The model is then extended to take into account friction on micro-cracks.

In the second part, we study unstable behaviours of granular media consisting elastic grains, in the framework of large strain, and inter-granular micro-cracks. We use a computational homogenization scheme with two-level finite elements. For inter-granular interfaces we consider cohesive laws with friction and unilateral contact. We prove that inter-granular decohesion is the origin of macro-instabilities, indicated by the loss of ellipticity of the equilibrium problem. The influence of microscopic boundary conditions, cohesive law parameters and friction is pointed out. We give examples of bifurcated solutions and we show the dependence of the macroscopic response on the size of the representative elementary volume.

Keywords : damage, micro-cracks, asymptotic and numerical homogenization, granular micro-structure, cohesive zone models, size effect, instability and localization, finite elements and X-FEM

Table des matières

Table des figures	1
Introduction générale	5
1 Rupture et endommagement	5
2 Effets d'échelles	7
3 Méthodes d'homogénéisation	8
4 Modélisation des discontinuités	10
4.1 Modèles utilisant le re-maillage	10
4.2 Modèles d'interface	11
4.3 Modèles sans maillage	11
4.4 Modèles basés sur la partition de l'unité	12
5 Aperçu du contenu de la thèse	13
 I Endommagement et effets d'échelle dans les matériaux solides élastiques : approche par homogénéisation asymptotique	 15
 1 Microfissures avec contact unilatéral sans frottement	 17
1.1 Introduction	17
1.2 Position du problème	20
1.3 Homogénéisation	21
1.4 Bilan d'énergie	26
1.5 Loi d'évolution de l'endommagement	30
1.6 Endommagement fragile unilatéral. Implémentation numérique.	32
1.6.1 Le modèle constitutif utilisé	32
1.6.2 Algorithme du code d'éléments finis	33
1.7 Applications numériques	35
1.7.1 Calcul des fonctions $\xi^{ij}(\mathbf{y})$	35
1.7.2 Calcul des fonctions $C_{ijkl}(d)$	36

1.7.3	Le comportement macroscopique local	38
1.7.4	Le comportement macroscopique global	39
1.8	Conclusions	49
2	Modélisation de la macro-fissuration avec X-FEM	51
2.1	Introduction	51
2.2	Concept théorique de la méthode d'éléments finis étendus (X-FEM)	52
2.3	Application de la méthode de X-FEM pour le modèle d'endommagement fragile unilatéral. Stratégie de résolution du problème incrémental	54
2.4	Illustrations numériques	55
2.5	Conclusion	59
3	Microfissures avec contact unilatéral et frottement de Coulomb	61
3.1	Introduction	61
3.2	Formulation du problème avec des conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb	62
3.3	Loi de comportement homogénéisée	63
3.4	Loi d'évolution de l'endommagement	66
3.5	Implémentation numérique	70
3.5.1	Le modèle constitutif utilisé	70
3.5.2	Algorithme du code d'éléments finis	71
3.5.3	Calcul des fonctions C_{ijkl} et des intégrales dI_{ijkl}	73
3.5.4	Réponse élémentaire. Etude de la loi homogénéisée	76
3.6	Conclusion	81

II Micro/macro instabilités et effets d'échelle dans les milieux granulaires : analyse par homogénéisation numérique 83

Introduction	85
4 Quelques rappels	87
4.1 Introduction	87
4.2 Grandes déformations et hyperélasticité	88
4.2.1 Cinématique des milieux continus	88
4.2.2 Equations d'équilibre	90
4.2.3 Lois de comportement hyperélastique	92
4.3 Lois d'interface des modèles de force cohésive	94
4.4 Bifurcation pour des modèles usuels	97

4.4.1	Critère de localisation - théorie de Rice, 1976	98
4.4.2	Lois linéaires en vitesse	99
4.4.3	Lois multi-linéaires en vitesse	100
4.4.4	Lois incrémentalements non linéaires	101
5	Problème micro/macro	103
5.1	Introduction	103
5.2	Les hypothèses de base	103
5.3	Position du problème sur un VER	105
5.3.1	Conditions sur la frontière extérieure du VER	106
5.3.2	Conditions sur la frontière intérieure du VER	107
5.4	Couplage entre la microstructure et la macrostructure	109
5.5	Construction de la loi constitutive macroscopique	110
5.6	Analyse d'instabilité macroscopique	111
6	Implémentation numérique	115
6.1	Introduction	115
6.2	Formulation forte du problème sur un VER	116
6.3	Principe des travaux virtuels sur un VER	117
6.4	Discrétisation du temps - méthode incrémentale	118
6.5	Application de la méthode de Newton-Raphson au problème incrémental	118
6.6	Discrétisation d'éléments finis	119
6.6.1	Calcul du résidu élémentaire et de la matrice de rigidité élémentaire sur un élément de volume	120
6.6.2	Calcul du résidu élémentaire et de la matrice de rigidité élémentaire sur un élément de l'interface	122
6.6.3	Résolution du problème sur un pas	125
7	Exemples numériques	131
7.1	Introduction	131
7.2	Tests numériques avec des déformations linéaires imposées sur le bord	132
7.3	Déformations linéaires - déformations périodiques. Comparaison	136
7.4	Déformations périodiques	139
7.4.1	VER à une cellule	139
7.4.2	VER contenant plusieurs cellules	144
7.5	Conclusions	144
	Conclusions générales et perspectives	147

Bibliographie	151
Articles et publications	159
Annexes	161
A	161
A.1 Les outils de la mécanique élastique linéaire de la rupture	161
A.1.1 Comportement asymptotique des champs mécaniques	161
A.1.2 Taux de restitution d'énergie	165
A.1.3 Intégrales indépendantes du contour	167
A.2 Bases fondamentales des déformations macroscopiques pour une fissure horizontale	168
A.3 Definition des vecteurs unitaires normal et tangent sur la microfissure pour les quatre orientations	169
B	171
B.1 Quelques précisions sur la mise en oeuvre numérique	171
B.1.1 Transformation géométrique isoparamétrique en dimension 2D . Calcul d'opérateurs	171
B.1.2 Méthode d'intégration numérique	174

Table des figures

1.1	Milieu fissuré avec une microstructure locale périodique.	20
1.2	Mise à l'échelle de la cellule unitaire à la période spatiale microstructurale	22
1.3	Application d'une "force superficielle" sur la fissure	24
1.4	Cellule unitaire avec une fissure	27
1.5	L'application de la déformation macroscopique fondamentale sur la cellule unitaire . . .	35
1.6	Maillage de la cellule unitaire avec une fissure. Déplacement total sur la configuration déformée	36
1.7	Les coefficients effectifs pour une fissure d'orientation (a)	37
1.8	Les coefficients effectifs pour une fissure d'orientation (c)	37
1.9	L'évolution de la limite d'initiation de l'endommagement en fonction de la taille de la cellule de périodicité ε pour un chargement uniaxial : (a) traction, (b) compression . . .	38
1.10	Domaine d'élasticité en déformation macroscopique plane pour trois valeurs de ε quand (a) $e_{x22} = 0$ et (b) $e_{x12} = 0$	39
1.11	Géométrie et chargement pour un essai biaxial	39
1.12	Evolution de la zone d'endommagement, en traction	41
1.13	Courbe de comportement global contrainte - déplacement, en traction	41
1.14	Dépendance de maillage en traction : zone d'endommagement	42
1.15	Dépendance de maillage en traction : courbes de comportement global	42
1.16	L'influence de la taille de cellule en traction : Courbes de comportement global	43
1.17	Influence de la longueur des micro-fissures préexistantes sur la zone de distribution de l'endommagement	43
1.18	Formation d'une bande localisée d'endommagement en compression : initialisation centrale	44
1.19	Courbe de comportement globale contrainte - déplacement pour une initialisation centrale, en compression	44
1.20	Formation d'une bande localisée d'endommagement en compression : initialisation dans la partie basse de l'échantillon	45
1.21	Courbe de comportement globale contrainte - déplacement dans le cas d'initialisation au bord inférieur, en compression	45

1.22	Dépendance de maillage en compression : zone d'endommagement	46
1.23	Dépendance de maillage en compression : courbes de comportement globales	47
1.24	L'influence de la taille de cellule en compression : courbes de comportement global . . .	47
1.25	Influence de la zone "fissure" sur la largeur de la bande de localisation d'endommagement	48
1.26	Influence de la longueur des micro-fissures préexistantes dans la même "macro-fissure", sur le mode de localisation d'endommagement.	48
2.1	Description des ensembles E_I , E_J , E_K de l'approximation du champ de déplacement élément fini enrichi	53
2.2	Illustration du choix de la valeur de $H(x)$	53
2.3	Géométrie et chargement pour l'essai de traction uniaxiale	55
2.4	Contrainte globale vs. déplacement appliquée, en traction.	56
2.5	Configuration déformée pour différentes étapes de rupture en traction uniaxiale.	56
2.6	Géométrie et chargement pour un essai en flexion	57
2.7	Contrainte globale vs. déplacement appliquée, en flexion.	58
2.8	Configuration déformée pour différentes étapes de rupture en flexion	58
2.9	Échantillon avec macro-fissure et chargement pour une essai de traction uniaxiale	59
2.10	Contrainte globale vs. déplacement appliquée	59
2.11	Configuration déformée pour différentes étapes de rupture, de l'échantillon avec une macro-fissure, en traction uniaxial	60
3.1	Domaine de linéarité	64
3.2	Les coefficients effectifs pour une fissure d'orientation (d) dans les deux sens de glissement	75
3.3	Les intégrales dI_{ijkl} pour une fissure d'orientation (d) dans les deux sens de glissement .	76
3.4	Le coefficient C_{1212} et l'intégrale dI_{1212} pour une fissure d'orientation (a) ou (d) dans les deux sens de glissement	77
3.5	Courbe contrainte - déformation en compression uniaxiale, avec ou sans frottement . . .	78
3.6	Evolution du seuil d'initialisation d'endommagement en fonction de la taille de cellule ε pour une chargement (droite) de compression uniaxiale ; (gauche) compression biaxiale	79
3.7	Domaine d'élasticité en déformations macroscopiques planes pour trois valeurs de μ_f quand (a) $e_{x22} = 0$ et (b) $e_{x12} = 0$	79
3.8	Courbe contrainte - déformation calculée pour deux valeurs de confinement différentes .	80
3.9	Courbe contrainte - déformation calculée. Influence du coefficient de frottement	80
4.1	Configurations eulérienne et lagrangienne	88
4.2	Schéma de la fissure et de la zone cohésive	94
4.3	Lois d'interface de Dugdale et Barenblatt dans la direction normale	95
4.4	Lois d'interface de Needleman dans la direction normale	95

4.5	Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent	96
4.6	Lois d'interface de Camacho et Ortiz dans la direction normale	97
4.7	Principe de l'analyse de bifurcation en bande de cisaillement	98
5.1	Schéma de localisation/homogénéisation	104
5.2	La configuration de référence d'une cellule unitaire périodique	105
5.3	Schéma de la zone cohésive dans la configuration (a) non-déformée et (b) déformée	107
5.4	Evolution des forces tangentielle et normale avec contact unilatéral en fonction du saut respectivement tangent et normal	109
6.1	La méthode de Newton-Raphson sur un increment	119
6.2	Discrétisation d'éléments finis	120
6.3	Schéma de l'élément d'interface cohésive	123
7.1	(a) VER non-périodique avec 2 et 15 grains ; (b) VER périodique avec 9 grains	132
7.2	Hierarchie de comportement instable. Independence de maillage pour un VER avec 2 grains	133
7.3	Courbe de comportement global, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour différentes valeurs de $\delta_n = \delta_t$. La valeur du paramètre de décohesion λ sur l'interface	134
7.4	Courbes globales de comportement, contrainte (MPa) fonction du facteur de chargement α , pour différentes valeurs de T_{max} et la valeur correspondante du paramètre de décohesion λ	135
7.5	Courbes globales de comportement, contrainte (MPa), fonction du facteur de chargement α , pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ_0 et la valeur correspondant du paramètre de décohesion λ	135
7.6	Zones de (non) ellipticité dans le plan de chargement macroscopique, avec ou sans frottement($\mu_0 = 0.1$).	136
7.7	Courbes globales de comportement, contrainte P_{11} (MPa) en fonction du facteur de chargement α pour différents jeux de paramètres	136
7.8	Courbes globales de comportement contrainte en fonction du facteur de chargement α	137
7.9	Minimum de $\det(\mathbf{Q})$ en fonction du facteur de chargement α	138
7.10	Courbe globale de comportement contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α	138
7.11	Courbes de comportement macroscopique, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour les paramètres de la loi cohésive $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm, $T_{max} = 1$ MPa, le coefficient de frottement $\mu_0 = 0.3$, et pour différentes valeurs de l'incrément et du critère de convergence	140

7.12	Profil de convergence pour l'incrément correspondant au facteur de chargement $\alpha = 0.219140$	
7.13	Courbe global contrainte de cisaillement vs. facteur de chargement avec charge-décharge partielle	141
7.14	Enveloppes réponse pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ($\alpha = 0.150$) et pour $\ d\bar{\mathbf{F}}\ = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$	142
7.15	Enveloppes réponse pour des recherche directionnelles à partir d'un même état initial ($\alpha = 0.283$) et pour $\ d\bar{\mathbf{F}}\ = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$	142
7.16	Envelopes réponses pour des recherches directionnelles à partir de plusieurs états initiaux	143
7.17	Rupture non-périodique : Courbes de comportement macroscopique, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour les paramètres de la loi cohésive $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm, $T_{max} = 1$ MPa, et le coefficient frottement $\mu_0 = 0.5$, pour différents VERs a 1, 4 ou 9 cellules périodiques. Les points sur la courbe correspondent à : (1) le premier incrément pour lequel au niveau d'interface il y a des points situés dans la zone d'adoucissement, (2) instant de bifurcation (critère de Rice est satisfait), (3) VER à 9 cellules fissuré.	145
7.18	Rupture périodique : Courbes de comportement macroscopique, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour les paramètres de la loi cohésive $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm, $T_{max} = 1$ MPa, et sans frottement, pour différents VERs a 1, 4 ou 9 cellules périodiques.	145
A.1	Zone autour de la pointe d'une fissure	162
A.2	System local de coordonnées en pointe d'une fissure	162
A.3	Les modes fondamentaux de la mécanique de la rupture	163
A.4	Les contours pour l'intégrale J	167
A.5	Vecteurs unitaires normal et tangent à la microfissure	169
B.1	Transformation géométrique de l'élément parent carré à l'élément courant ou à l'élément de référence	171

Introduction générale

1 Rupture et endommagement

La mécanique de la rupture est utilisée pour l'étude et la prédiction de la propagation de fissures dans les matériaux solides, en fonction du chargement auquel elle est soumise. Le cadre de la mécanique de la rupture (quasi-)fragile se limite à l'étude de la fissuration des milieux continus, supposés élastiques.

En 1920, partant du premier principe de la thermodynamique, Griffith [44] a établi la première théorie de la rupture, basée sur un formalisme énergétique. Il s'agit d'une relation directe entre la taille du défaut (la fissure) et la contrainte de la rupture, dans un milieu élastique. Le défaut devient instable et conduit à la rupture lorsque la quantité d'énergie disponible, en pointe du défaut, atteint une valeur critique spécifique du matériau. Cette théorie est, parfaitement, adaptée aux matériaux fragiles. Son domaine d'application ne s'étend pas aux matériaux ductiles. En effet, la dissipation d'énergie, liée au mécanisme de plastification, est en dehors des hypothèses de cette théorie.

Irwin [54], en 1948, étend la théorie de Griffith, en incluant un terme de dissipation d'énergie, dû à l'écoulement plastique près des extrémités d'une fissure, afin que cette théorie puisse être applicable aux matériaux ductiles. En 1956, il développe la notion de taux de restitution d'énergie. En 1957, à l'aide des travaux de Westergaard [119], sur les champs de déplacements et des contraintes élastiques près de l'extrémité d'une fissure, sous un chargement donné, Irwin établit que les déplacements et les contraintes peuvent être décrits, à l'aide des seuls paramètres caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit : les facteurs d'intensités des contraintes, paramètres reliés au taux de restitution d'énergie. Paris utilise ce concept de facteurs d'intensités des contraintes pour formuler des lois de vitesse de propagation de fissure de fatigue, utilisées pour la prédiction des durées de vie des structures.

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, Irwin, Dugdale et Barenblatt [4], et d'autres chercheurs proposent des formulations, qui prennent en compte l'existence d'une zone plastique sur les champs des contraintes et des déplacements, à l'extrémité d'une fissure, en proposant le concept d'une correction de zone plastique. En 1968, Rice [93] et Bui [11] introduisent la notion d'intégrales indépen-

dantes du contour, dont le concept est toujours utilisé, surtout dans les modélisations numériques.

Plus récemment, le problème difficile de l'initiation de la rupture a été considéré (e.g. Francfort et Marigo [40], Del Piero et Truskinovsky [29], Charlotte et al. [20]) par une approche variationnelle.

Dans l'annexe A.1, nous allons détailler les différents concepts qui ont jalonné le développement des outils, tels que les modes de rupture, le taux de restitution d'énergie, les facteurs d'intensité des contraintes et les intégrales indépendantes de contour.

La mécanique de la rupture considère l'existence des fissures, en modifiant les conditions aux limites de la structure. En revanche, **la mécanique de l'endommagement** ne fait intervenir les défauts qu'au travers d'un concept d'homogénéisation. En même temps, elle décrit leur évolution de façon macroscopique, tout en restant dans le cadre de la mécanique de milieux continus.

Après années 70, la mécanique de l'endommagement continu s'est largement développée, à partir des concepts introduits initialement par Kachanov [56], qui a introduit une variable continue d'endommagement dans le cadre de la rupture, par fluage des métaux, sous sollicitation unidimensionnelle. Cette idée a été reprise par Rabotnov [90]. La théorie de l'endommagement permet, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, de rendre compte de la dégradation progressive des matériaux. Son domaine d'application couvre aussi bien le domaine des premières détériorations, que la prise en compte des effets de cumul non-linéaire du dommage, ainsi que la prévision de l'amorçage d'une macro-fissure. A la suite des travaux de l'école russe, la mécanique de l'endommagement s'est d'abord développée en Europe, essentiellement pour des applications au fluage des matériaux métalliques. L'école anglaise, avec entre autre les travaux de Leckie et Hayhurst [64] a apporté une contribution remarquable au début des années 70. Sur le plan théorique, les concepts de base de la mécanique de l'endommagement ont été énoncé par Chaboche [16], Lemaitre [68]. Ils ont recherché aussi d'autres types d'endommagement (fatigue, rupture ductile) [15], [67].

Au début des années 80, la mécanique d'endommagement a été reconnue aux Etats-Unis, avec les travaux de Krajcinovic [62], de Ortiz [82] et beaucoup d'autres.

Un des problèmes actuels de la théorie de l'endommagement est la relation entre les lois phénoménologiques et les aspects de micro-fissuration à petite échelle. Les modélisations de l'endommagement peuvent être rangées en deux catégories : modèles macroscopiques et approches micro-mécaniques. Dans l'approche macroscopique, particulièrement efficace pour le calcul de structures, l'endommagement est pris en compte à l'aide de variables internes. Il s'agit souvent d'une variable scalaire pour l'endommagement isotrope ou de variables tensorielles d'ordre 2, pour un endommagement anisotrope. Les travaux actuellement, les plus avancés dans cette catégorie, tentent associer les divers éléments de la modélisation macroscopique sur des considérations issues de l'analyse micromécanique des milieux multifissurés. Il est clair que ces modélisations doivent être soutenues par des travaux relevant de démarches microméca-

niques. En effet, celles-ci visent à apporter un éclairage plus physique, sur l'étude des phénomènes en jeu, en essayant de relier le comportement macroscopique aux évolutions microstructurales des matériaux. Cette thèse se propose de donner quelques éléments de réponse à cette question.

2 Effets d'échelles

L'effet d'échelle est une question importante, pour l'analyse de grandes structures étudiées et examinées sur des échantillons plus petits, dans le laboratoire. En mécanique du solide, le problème de l'effet d'échelle, qui présente le plus grand intérêt, est celui de l'effet de taille de la micro-structure sur la résistance à la rupture de la structure. Ce problème est très ancien, car il est antérieur à la mécanique des matériaux et des structures.

L'analyse d'effet d'échelle peut être observée dès le *XVI^{ème}* siècle, lorsque Leonardo da Vinci affirmait que *parmi des cordes de même épaisseur, la plus longue est la moins résistante* et qu'une corde *est d'autant plus résistante... qu'elle est courte*. Cette règle est la première affirmation sur l'effet d'échelle, bien que la proportionnalité entre la longueur de la corde et la résistance nominale ait été un peu exagérée.

En 1683, dans son ouvrage où il fonda les bases de la mécanique des matériaux, Galileo rejetait la loi proposée par da Vinci. Ainsi il remarqua que les animaux de grande taille ont des os relativement plus massifs que ceux de petite taille. Ce qu'il appela la *faiblesse des géants*.

En 1686, Mariotte fit plusieurs essais avec des cordes. Il observa *qu'une longue corde et une plus courte peuvent toujours reprendre la même charge, à moins qu'il n'y ait une imperfection dans la plus longue, laquelle viendrait alors à céder avant la courte*. Il proposa que cela résultait du principe de la *variabilité de la matière dont la résistance absolue n'est pas la même en tout point*. A ce moment-là, les mathématiques n'étaient pas assez avancées pour énoncer correctement l'explication statistique de l'effet d'échelle, donnée deux siècles plus tard par Weibull.

En 1921, Griffith fondait la théorie de la mécanique de la rupture et il introduisait, également, cela dans l'étude de l'effet d'échelle. Il concluait que *la fragilité des matériaux isotropes ... est due à la présence de discontinuités ou de défauts... La résistance effective des matériaux manufacturés pourrait être multipliée au moins par 10 ou 20 si ces défauts pouvaient être éliminés*. Cette affirmation est basée sur des expériences faites sur des fibres de verre avec différents défauts microscopiques.

En 1939, Weibull a clôturé la discussion sur la théorie de l'effet d'échelle statistique, initiée par Mariotte, en récapitulant des résultats de plusieurs chercheurs. Il proposa alors, une loi de puissance avec un seuil. Avec la théorie de Weibull, le cadre de la théorie statistique de l'effet d'échelle devient complet. Jusqu'aux années 80, il n'y a pas de nouvelles explications sur les effets d'échelle. Seulement, des analyses probabilistes ont été faites. Pendant les deux dernières décennies, l'analyse d'effet d'échelle, dû à la zone de processus de rupture en matériau, a été étudiée et mathématiquement énoncée.

Le problème d'effet d'échelle le plus complexe est posé pour les matériaux quasi-fragiles, parce que ces matériaux sont incapables de présenter des déformations plastiques. Ils cèdent selon une rupture, caractérisée par une zone d'élaboration de la fissuration (située en fond de la fissure), relativement importante (Hillerborg et al. [53] ; Bazant [5]), dans laquelle, le matériau subit de l'endommagement distribué, lié à un adoucissement, sous la forme de micro-fissuration et de frottement de glissement. Autrement dit, la rupture de ces matériaux n'apparaît pas dès l'amorçage de la fissuration, comme c'est le cas pour les matériaux fragiles. En outre, la taille de cette zone semble être indépendante de la taille de la structure. En effet, d'après les observations expérimentales effectuées par Pijaudier-Cabot et Bazant [88], cette taille serait liée à celle de la plus grosse hétérogénéité du matériau.

A l'échelle macroscopique, deux types d'effet d'échelle sont observés dans les matériaux quasi-fragiles : l'effet de volume qui se situe à l'échelle de l'éprouvette du laboratoire et l'effet d'échelle de structure se situant à l'échelle de la structure.

L'effet d'échelle de volume est souvent lié à l'existence de défauts dans les matériaux. En effet, à cause de l'hétérogénéité du matériau, la résistance locale des éléments de matière n'est pas uniforme. Elle suit une distribution aléatoire. Par conséquent, la probabilité de trouver des éléments de faible résistance (des défauts) croît si la taille de l'éprouvette augmente. Cependant, il semble que cet effet devienne négligeable à partir d'un certain volume de l'éprouvette d'essai.

Comme les performances mécaniques des structures réelles ne sont pas forcément identiques à celles des éprouvettes du laboratoire, le passage à l'échelle de la structure nécessite de prendre en compte les effets d'échelles.

Un autre effet d'échelle, se situant à une échelle inférieure mésoscopique, et il caractérise la dépendance des performances mécaniques des matériaux de la taille de leur microstructure. Ce phénomène est connu souvent sous le nom **d'effet de taille**. En effet, une amélioration significative de ces performances, notamment au voisinage de la rupture (résistance en traction/compression, etc.) a été observée dans plusieurs types de matériaux, lorsqu'on diminue la taille de leur microstructure hétérogènes, tout en gardant les mêmes fractions volumiques des constituantes. Autrement dit, ces performances mécaniques subissent un effet de taille négatif de l'augmentation de la taille de la microstructure de ces matériaux.

3 Méthodes d'homogénéisation

Les matériaux comprenant un grand nombre d'hétérogénéités représentent une classe importante parmi les autres. La description des processus physiques qui les concernent devient délicate, voir impossible, si toutes les hétérogénéités sont prises en compte. L'idée - très ancienne et classique - est donc de découvrir, si possible, un matériau macroscopiquement équivalent. L'étude des relations entre les descriptions locales et macroscopiques est d'un très grand intérêt. La description macroscopique peut être obtenue soit par une étude phénoménologique ou expérimentale, directement à l'échelle macroscopique,

soit par une technique d'homogénéisation, c'est-à-dire par passage de la description microscopique à la description macroscopique. Dans ce qui suit, nous allons poursuivre cette deuxième voie.

Par extension du cas de l'élasticité linéaire, on décrit suivant le comportement macroscopique par des modules effectifs ou homogénéisés.

La méthode la plus simple de calcul des coefficients homogénéisés est la méthode de moyenne sur les composantes hétérogènes, pondérées par leur fraction volumique. Une méthode plus complexe a été proposée par Eshelby [37] et encore développée par plusieurs auteurs (voir, par exemple, Mori et Tanaka [77]). Les propriétés du matériau équivalent sont obtenues, en utilisant des solutions analytiques (ou semi-analytiques) d'un problème aux limites pour une hétérogénéité, dans une matrice infinie. Une extension de cette méthode, l'approche auto-cohérent, a été réalisée par Hill [51], Christensen et Lo [23]. Par cette méthode, on ne peut pas représenter de façon raisonnable le cas de l'hétérogénéité très contrasté.

Une autre méthode d'homogénéisation est celle basée sur des développements asymptotiques (Bensoussan et al. [10], Sanchez-Palencia [103], Bakhvalov et Panasenko [3]). La méthode utilise des développements asymptotiques par rapport à un paramètre, de dimension microscopique, qui reste petit par rapport à la taille de la macrostructure. Cette méthode fournit les modules du comportement effectifs, ainsi que les champs locaux des contraintes et des déformations. Dans sa forme classique, cette méthode n'est effective que pour des géométries simples de la microstructure. Cette difficulté peut-être dépassée par des enrichissements numériques (Guedes et Kikuchi [47], Terada et Kikuchi [111], Ghosh et al. [42]).

Une autre approche, particulièrement intéressante, dans le cas des grandes déformations, est la technique d'homogénéisation purement numérique. Cette technique a été beaucoup développée dans les dernières années (Smit et al [104], Feyel et Chaboche [38], Terada et Kikuchi [112], Kouznetsova et al. [59], [60], Miehe et Koch [73], Miehe [74]). Dans ce cas, nous n'avons aucune forme analytique de comportement macroscopique, mais on calcule numériquement la réponse contrainte-déformation en chaque point d'intérêt au niveau macroscopique. Ce calcul fait appel à des solutions numériques de problèmes microscopiques sur un VER (Volume Élémentaire Représentatif). Cette faiblesse, au niveau de la loi macroscopique, donnée par l'absence d'une loi analogique, est compensée par une grande liberté sur :

- (a) la modélisation en grandes déformations
- (b) l'incorporation de non-linéarité et d'indépendance du temps
- (c) la prise en compte des aspects physiques et géométriques complexes de la microstructure.

Les calculs à deux échelles faits par homogénéisation sont, généralement, coûteux en temps et nécessitent une implémentation de calcul parallèle.

4 Modélisation des discontinuités

La méthode des éléments finis est considérée comme robuste pour la simulation numérique d'une grande partie des problèmes en mécanique des solides. Cependant, certaines applications restent particulièrement difficiles, comme la modélisation des surfaces de discontinuité (fissures, interfaces matérielles, ...). Si l'on considère la méthode standard des éléments finis, le maillage doit se conformer et respecter les surfaces de discontinuités, ce qui rend sa construction délicate. L'approximation d'éléments finis est, en effet, classiquement très régulière à l'intérieur des éléments. De plus, la modélisation des discontinuités dans la solution ne peut se faire qu'en bordure des éléments, donc les surfaces de discontinuité ne peuvent couper les éléments. Comme la position de la fissure pouvant évoluer dans le temps (propagation, bifurcation, croissance de cavités,...), un remaillage et un raffinement du maillage, en pointe de fissure, à chaque pas de temps, devient indispensable.

4.1 Modèles utilisant le re-maillage

Les méthodes, utilisant le re-maillage, ont été les premières utilisées pour modéliser les discontinuités. Basé sur la méthode des éléments finis classique, le maillage du modèle est reconstruit à chaque pas de temps, ainsi que les bords des éléments correspondent aux discontinuités. Les noeuds localisés sur ces bords sont dédoublés et répartis de part et d'autre de la discontinuité. Les développements les plus récents limitent le re-maillage à la zone proche de la discontinuité. Compte-tenu de sa simplicité (un code de calcul EF standard et un algorithme de re-maillage sont suffisants), différentes versions de cette technique ont été implémentées dans des codes commerciaux, pour l'analyse quasistatique. Pourtant, plusieurs inconvénients majeurs demeurent : la sensibilité au maillage de l'évolution de la discontinuité est l'un d'entre eux. En fait, l'utilisateur doit connaître, "à priori", la réponse du modèle pour choisir les zones de raffinement ; de plus, la direction de propagation de la discontinuité sera très sensible à l'alignement des noeuds. Une autre difficulté est liée à la gestion des données de sortie pour les points géométriques, autour de la discontinuité, en raison des différents maillages. Même si ces techniques sont parvenues à un assez haut degré de maturité, elles restent difficiles à appliquer pour l'analyse des propagation des discontinuités.

Pour remédier aux problèmes de raffinement du maillage en pointe de fissure et au coût de calculs élevés, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été utilisées dans différentes études, comme les méthodes basées sur le déplacement du maillage ou des noeuds, la méthode de relâchement de noeuds, la méthode de remaillage interactif.

Pour résoudre le problème d'adaptation de maillage, par éléments finis avec l'évolution de la géométrie du modèle, due à la propagation d'une discontinuité, de nombreuses techniques ont vu le jour ces dernières années. Ces méthodes essayent de modéliser une fissure ou la propagation d'une fissure sans remaillage. Nous présenterons, succinctement, dans la suite quelques unes d'entre elles.

4.2 Modèles d'interface

Les modèles des interfaces s'appuient sur une loi de comportement, faisant intervenir la force et le saut du déplacement entre deux parties d'un domaine. D'un point de vue élément fini, ces dernières sont représentées par des éléments d'interface, correspondant à des quadrangles d'épaisseur nulle (dégénérées en segment). Ces éléments sont utilisés pour modéliser des fissures, dont on connaît, a priori, le trajet de propagation, ou pour modéliser les interfaces dans un milieu granulaire. Pour tenir compte de plusieurs possibilités de propagation de la fissure, Xu et Needleman ([120]) ont proposé un modèle avec des potentiels des interfaces cohésives entre tous les éléments finis adjacents. La discrétisation est basée sur une formulation d'éléments finis avec des éléments classiques, en volume, encadrés par des éléments cohésifs. Cette approche a été suivie par Camacho, Ortiz et leurs collaborateurs [[83], [14], [85]], ainsi que par Remmers, De Borst et Needleman plus récemment [92]. Son efficacité a été prouvée pour la simulation dynamique de la fissuration multiple et pour la fragmentation. Mais, la direction des fissures est limitée aux bords des éléments, tandis que le chemin de propagation est toujours influencé par le maillage. La densité de maillage joue, aussi, un rôle important pour la dissipation d'énergie dans la zone de discontinuité. Ainsi, des lois d'échelle pour lier les paramètres du modèle à la taille du maillage ont été implémentées. Le concept de potentiel cohésif a été, d'ailleurs, repris dans certains développements, qui ont suivi pour compléter les modèles d'évolution des discontinuités.

L'utilisation des éléments d'interface a le gros avantage de représenter une discontinuité, sans sortir du cadre classique de la théorie des éléments finis.

4.3 Modèles sans maillage

Une autre famille de méthodes développées, en ces dernières années, sont dites sans maillage parce que l'approximation ne repose pas sur un maillage, mais sur un ensemble de points. Dans ces méthodes, sont considérés des points répartis de manière arbitraire sur le domaine étudié. Ce qui suggère que la totalité des points peut être régénérée, si nécessaire. En chaque point, des degrés de liberté sont définis. Ils agissent sur des fonctions de base, à support compact autour du point. Différentes méthodes ont été proposées pour la construction des fonctions de base, par exemple, les éléments diffus ([78]), la méthode "Element Free Galerkin" ([9]). Ces approches dites "meshless" ou "meshfree" permettent, en principe, de se débarrasser de toutes les difficultés associées au maillage. Ces particularités les rendent assez attractives pour résoudre des problèmes de la mécanique de la rupture. En utilisant une méthode sans maillage, on peut ajouter ou enlever des points, en utilisant un estimateur d'erreur. Cependant, l'état actuel de modélisation des problèmes de propagation de fissures, par cette méthode, reste à un niveau élémentaire. La difficulté majeure de cette méthode consiste en l'estimation des erreurs locales et globales d'une manière consistante et à développer un générateur de points robuste pour contrôler cette erreur estimée en chaque pas de propagation [65]. Une bonne estimation d'erreur et une bonne distribution des points choisis sont très importantes pour une modélisation de ce type. Aussi, des opérations triviales dans le cadre d'élé-

ments finis comme l'évaluation d'une fonction de forme en un point, l'intégration des formes bilinéaires et linéaires ou la prise en compte des conditions aux limites des type Dirichlet ne sont pas triviales et sont même coûteuses. Donc, cette méthode nécessite des développements numériques importants. De plus, pour la propagation de la fissure, on a besoin d'un outil de réarrangement des points, ce qui ne change pas la nature de la difficulté de remaillage, du problème.

4.4 Modèles basés sur la partition de l'unité

D'autres méthodes ont été développées pour prendre en compte, numériquement, une discontinuité du champ de déplacement. Ces méthodes sont basées sur la méthode de la partition de l'unité (PUM), proposée par Melenk et Babuska [72]. La prise en compte de la discontinuité est effectuée en enrichissant l'interpolation des champs de déplacement sur chaque nœud, dont le support est traversé par une surface de discontinuité. Dans leurs travaux, Wells et Sluys [118] choisissent l'interpolation du déplacement suivante :

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}\mathbf{d} + H_{\Gamma}\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{u}} \quad (1)$$

où \mathbf{N} désigne l'opérateur des fonctions de forme classique, \mathbf{d} les déplacements nodaux, $\tilde{\mathbf{u}}$ le saut de déplacement et H_{Γ} la fonction de Heaviside sur la surface de discontinuité Γ . Notons que l'interpolation du saut de déplacement est identique à celle du déplacement. Le saut en déplacement est considéré comme un degré de liberté supplémentaire du problème global. Cette approche conduit à une augmentation du nombre de degrés de liberté (sur les nœuds, dont le support est traversé par une discontinuité) au fur et à mesure que la fissure évolue. Ainsi, au cours du calcul, la taille du problème évolue.

D'autres approches, proches de celle de Wells, sont basées sur la partition d'unité. Une des plus importante est la méthode des éléments finis étendus, développée à Northwestern University par Belytschko et Black [7]. Le terme original de X-FEM (eXtended Finite Element Method) est introduit et utilisé pour développer la modélisation complète de fissures, par Moës et al. [76]. Cette méthode permet de prendre en compte des évolutions de fissures partout dans le domaine et dans toutes les directions indépendamment du maillage. Cette flexibilité a le gros avantage de pouvoir modéliser n'importe quelle évolution géométrique de fissure sans remaillage. Dans les articles cités précédemment, la fissure est considérée comme une surface de discontinuité sans interaction entre les lèvres de la fissure. Pour cette méthode, un type d'enrichissement particulier est introduit pour modéliser la pointe de fissure. L'approximation correspond à (1) avec un terme supplémentaire, qui enrichit les nœuds des éléments contenant une pointe de fissure. Le choix des fonctions de forme, en pointe de fissure, est établi, à partir de développements asymptotiques de la solution, en élasticité linéaire du champ de déplacement.

Depuis, la méthode a été continuellement améliorée et développée, pour l'analyse de la bifurcation de la fissure [27], pour la modélisation tri-dimensionnelle [106], pour l'analyse dynamique [8]. Plus récemment Dolbow et al. [33] ont permis de coupler la méthode de X-FEM avec une loi de contact frottement

pour simuler la propagation de fissure en compression. Par ailleurs, Moës et Belyschko [75] ont étendu cette méthode en introduisant une loi de cohésion entre les lèvres de la fissure. Notons, aussi, que la modélisation de la fissures cohésives en s'appuyant sur les propriétés de la partition de l'unité des éléments finis a fait l'objet de travaux présentés par Wells et al. [118]. Une description de l'implémentation numérique de la méthode des éléments finis étendus, pour le cas statique, a été également publiée par Sukumar et Prévost [56].

Un des meilleurs attributs de la méthode de X-FEM est que l'on maintient la matrice de résolution creuse et symétrique, dans le cadre de la méthode classique des éléments finis. Cette technique apporte une méthode numérique robuste et assez précise pour la modélisation des discontinuités fortes (déplacement) (Dolbow [32], Zi et Belytschko [122], Zi et al. [123]), ainsi que pour des discontinuités faibles (déformations) (Chessa et al. [21] et Chessa et al. [22]).

5 Aperçu du contenu de la thèse

La thèse est organisée en deux parties : la première décrit une approche d'homogénéisation des milieux micro-fissurés par des développements asymptotiques, tandis que la deuxième partie considère une méthode d'homogénéisation numérique pour des micro-structures granulaires, avec des fissures d'interface cohésives et frottantes.

Dans **la première partie**, nous développons un nouveau procédé pour obtenir des modèles micro-mécaniques d'endommagement pour les solides. Pour ce faire, la loi d'évolution d'endommagement est complètement déduite d'une analyse micro-structurale. La nouvelle approche est illustrée dans le cas des matériaux fragiles.

L'outil principal est une analyse énergétique microscopique sur une cellule de taille finie, qui mène, par homogénéisation, à une équation macroscopique d'évolution de l'endommagement. Dans cette équation, la longueur normalisée des micro-fissures apparaît comme variable d'endommagement et la taille de cellule comme paramètre de longueur interne du matériau. La présence de cette longueur interne dans la loi résultante d'endommagement conduit, de façon naturelle, à la prédiction des effets de taille.

Dans **le Chapitre 1**, le modèle est formulé dans des conditions générales aux bords des micro-fissures. Afin d'illustrer sa capacité à décrire des comportements expérimentaux connus d'endommagement, quelques exemples numériques sont donnés dans le cas des micro-fissures avec contact unilatéral.

Dans **le Chapitre 2**, nous allons introduire, dans le schéma de calcul incrémental en éléments finis, des discontinuités en déplacement, correspondant aux macro-fissures. Ceci, dans chaque élément du maillage macroscopique, pour lequel la cellule micro correspondante est traversée en quasi-totalité par une micro-fissure. Parmi plusieurs méthodes, qui permettent d'introduire une discontinuité dans le maillage, nous avons choisi la méthode X-FEM.

Pour parvenir à un véritable modèle de comportement, susceptible de rendre compte des phénomènes observés expérimentalement par exemple dans les géomatériaux, il est nécessaire de prendre en compte la dissipation liée au frottement sur les lèvres des micro-fissures. Cette démarche sera présentée dans **le Chapitre 3**, où nous allons prendre en compte les conditions de Signorini avec le frottement de Coulomb sur des fissures rectilignes.

Dans **la deuxième partie**, nous allons considérer un milieu granulaire, contenant des micro-fissures inter-granulaires. Notre objectif est d'établir un lien entre l'initiation des macro-instabilités et le comportement de cohésion sur les micro-fissures inter-granulaires. La méthode d'homogénéisation employée, dans cette partie, est la méthode numérique des éléments finis à deux échelles.

Dans **le Chapitre 4**, nous présentons une courte étude bibliographique, précisant le cadre et les outils sur lesquels nous nous sommes appuyés pour développer notre modélisation.

La méthode d'homogénéisation numérique, pour le passage micro-macro, est décrite dans **le Chapitre 5**. Après un court passage en revue des hypothèses de base et des concepts généraux, nous présentons le problème sur un volume élémentaire représentatif (VER), avec des interfaces cohésives et deux types de conditions sur la frontière extérieure (soit en déformations linéaires, soit avec des conditions périodiques). Enfin, nous présentons une analyse de perte d'ellipticité macroscopique et on définit le concept de l'instabilité adopté dans cette partie.

Les détails de résolution numérique du problème mécanique sur le VER sont décrits dans **le Chapitre 6**.

Dans **le Chapitre 7**, nous donnons des résultats numériques pour différentes géométries particulières du VER. D'abord, nous considérons un VER composé de deux grains séparés par une interface cohésive. Cette géométrie simple fournit un mode élémentaire de déformation, qui sera reproduit dans des géométries plus complexes. L'influence des conditions aux frontières, des paramètres de la loi cohésive et du frottement est, également, étudiée dans ce chapitre. Pour des distributions périodiques des microstructures granulaires, nous montrons que la réponse macroscopique dépend de la taille de la microstructure.

Première partie

Endommagement et effets d'échelle dans les matériaux solides élastiques : approche par homogénéisation asymptotique

Chapitre 1

Microfissures avec contact unilatéral sans frottement

Sommaire

1.1	Introduction	17
1.2	Position du problème	20
1.3	Homogénéisation	21
1.4	Bilan d'énergie	26
1.5	Loi d'évolution de l'endommagement	30
1.6	Endommagement fragile unilatéral. Implémentation numérique.	32
1.6.1	Le modèle constitutif utilisé	32
1.6.2	Algorithme du code d'éléments finis	33
1.7	Applications numériques	35
1.7.1	Calcul des fonctions $\xi^{ij}(\mathbf{y})$	35
1.7.2	Calcul des fonctions $C_{ijkl}(d)$	36
1.7.3	Le comportement macroscopique local	38
1.7.4	Le comportement macroscopique global	39
1.8	Conclusions	49

1.1 Introduction

Les modèles continus d'endommagement sont généralement phénoménologiques, la micro-fissuration, étant représentée comme une dégradation des modules élastiques, par une variable d'endommagement, pour laquelle les lois d'évolution sont postulées. Durant ces dernières années, des efforts considérables ont été faits, afin d'établir un lien entre les phénomènes micro-structuraux de rupture et les comportements macroscopiques correspondants.

En dépit d'un grand nombre de recherches dans ce domaine (voir par exemple Nemat-Nasser et le Hori [80] pour une présentation synthétique), la modélisation micro-mécanique de l'évolution de l'endommagement des corps solides reste une question ouverte. Presque tous les travaux consacrés au sujet sont confinés au cas de fissures stationnaires. Comme exception, on peut citer les travaux de Prat et Bazant [89] ou Caiazzo et Constanzo [13], qui tiennent compte de l'évolution de micro-fissures. En général, l'analyse micro-mécanique des fissures stationnaires est complétée par des hypothèses phénoménologiques sur l'évolution de l'endommagement.

Dans cette première partie, nous développons un nouveau procédé pour obtenir des modèles micro-mécaniques d'endommagement pour les solides, pour lesquels la loi d'évolution d'endommagement est complètement déduite d'une analyse micro-structurale. La méthode de changement d'échelle est l'homogénéisation périodique, basée sur des développements asymptotiques ([10], [103], [3]). Cette méthode mathématique rigoureuse a été utilisée, pour des milieux élastiques avec des micro-fissures stationnaires, dans Sanchez [103], Leguillon et Sanchez-Palencia [66], et en combinaison avec des hypothèses phénoménologiques, en ce qui concerne la loi d'évolution d'endommagement dans Lene [69], Gosh *et al.* [43], Raghavan et Gosh [91].

Notre objectif est de déduire une loi de l'évolution d'endommagement, qui est complètement obtenue par homogénéisation, sans hypothèses phénoménologiques supplémentaires. L'outil principal est une analyse énergétique microscopique sur une cellule de taille finie, qui mène, par homogénéisation, à une équation macroscopique d'évolution de l'endommagement. Dans cette équation, la longueur normalisée des micro-fissures apparaît comme variable d'endommagement et la taille de cellule comme paramètre de longueur interne du matériau. La présence de cette longueur interne dans la loi résultante d'endommagement conduit, de façon naturelle, à la prédiction des effets de taille.

Dans les dernières décades, beaucoup de tentatives ont été faites pour produire des modèles mécaniques, dans lesquels la réponse dépend de l'échelle spatiale des micro-hétérogénéités. Les formulations, de type milieux continus généralisés, introduisent, au niveau macroscopique, une longueur interne du matériau. Aussi, elles résolvent le problème de dépendance des solutions au maillage, obtenu avec les formulations classiques. La plupart de ces modèles sont phénoménologiques, sans lien précis avec la microstructure. De plus, beaucoup de questions demeurent ouvertes, en ce qui concerne les aspects de bases de tels modèles, comme par exemple la formulation de conditions limites d'ordre supérieur. Des contributions intéressantes sont données par Smyshlyaev et Cherednichenko [105] et Peerlings et Lleck [86], qui ont proposé une méthode rigoureuse, pour obtenir des équations homogénéisées, par gradient de contrainte, à partir des descriptions microstructurales, pour des médias biphasés périodiques. La taille d'une cellule de périodicité apparaît, dans leur modèle, comme une longueur interne avec une signification claire, au niveau de la microstructure.

Notre formulation demeure dans le cadre des formulations classiques de milieux continus, mais

présente un paramètre de longueur interne dans la loi d'évolution d'endommagement, comme conséquence du bilan microscopique d'énergie et d'un critère de propagation du type Griffith pour les micro-fissures. Nous prouvons que la présence de cette longueur matérielle évite une dépendance significative du maillage des solutions en éléments finis pour des phénomènes de localisation de l'endommagement.

L'analyse énergétique est fait sur une cellule de périodicité de dimension finie, contenant une seule micro-fissure, pour des trajectoires arbitraires régulières de la micro-fissure, a priori connues. Nous développons, ensuite, un procédé numérique basé sur les solutions élémentaires homogénéisées, correspondant aux différentes trajectoires de la fissure, afin de permettre différentes orientations possibles de la fissure. Les coefficients homogénéisés sont calculés, en début du calcul macroscopique, pour chaque orientation et longueur de la micro-fissure. Nous proposons un schéma incrémental, où à chaque incrément nous résolvons une équation d'endommagement différente, pour calculer la longueur de la micro-fissure. Si l'endommagement à l'incrément précédent n'était pas encore initié, nous calculons la longueur de la micro-fissure pour toutes les orientations, puis nous choisissons l'orientation, donnant la longueur la plus importante, son orientation étant maintenue pendant les incréments ultérieurs. L'irréversibilité de l'endommagement est assurée en cherchant seulement les solutions croissantes en longueur. Le modèle peut décrire l'initialisation de la fissure, quand l'état initial est intact, c'est-à-dire la loi d'évolution d'endommagement peut modéliser l'initiation et la croissance des micro-fissures.

Le modèle est formulé dans des conditions générales aux bords de la micro-fissure. Afin d'illustrer sa capacité à décrire des comportements expérimentaux connus d'endommagement, quelques exemples numériques sont donnés dans le cas des micro-fissures avec contact unilatéral. Au niveau macroscopique, le switch entre les comportements homogénéisés, correspondant à l'ouverture ou à la fermeture de la fissure, est réalisé numériquement. De cette façon, un modèle unilatéral d'endommagement est obtenu. Les différentes orientations locales des micro-fissures sont fournies par la loi d'endommagement, une réponse macroscopique non isotrope et hétérogène. Le modèle tient compte, également, du comportement différent, avec différentes énergies de rupture, en traction et en compression.

Ce chapitre est composé de sept sections organisées de la manière suivante : après la première section donnée par l'introduction qui précède, dans la deuxième section, nous présenterons le problème étudié. La troisième section est consacrée à l'application de la méthode d'homogénéisation, pour déduire les équations d'équilibre macroscopique. Le matériau équivalent obtenu est un matériau élastique, non isotrope et hétérogène. L'équation homogénéisée d'énergie est obtenue sous forme d'équation d'évolution pour l'endommagement dans la quatrième section. Dans la 5ème section, nous donnons l'analyse énergétique menant à la loi macroscopique d'endommagement. Le cas particulier du contact unilatéral sans frottement est détaillé dans la section six et les illustrations numériques correspondantes sont présentées dans la section sept de ce chapitre.

1.2 Position du problème

Nous considérons un milieu élastique isotrope comprenant un grand nombre de microfissures. On suppose que cette structure présente une distribution de fissures localement périodique. Le domaine peut donc être recouvert par un ensemble de cellules périodiques, contenant une fissure (voir Fig. 1.1). On suppose que les microfissures sont lisses et de longueur d^ε . La longueur d^ε est dépendante du temps t et elle peut être différente d'une fissure à l'autre.

Soit \mathcal{B} le domaine ouvert de \mathbb{R}^2 , de frontière régulière, contenant \mathcal{N} microfissures $\mathcal{C}_n, n = 1, \dots, \mathcal{N}$ et la partie occupée par le matériau est $\mathcal{B}_s = \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$, où $\mathcal{C} = \cup_{n=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{C}_n$. Dans la partie solide \mathcal{B}_s , nous avons les équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = 0, \quad \text{dans } \mathcal{B}_s \quad (1.1)$$

et les relations constitutives de l'élasticité linéaire anisotrope

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^\varepsilon), \quad (1.2)$$

où \mathbf{u}^ε et $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ sont les champs de déplacements et de contraintes. On définit e_{zij} le tenseur de déformation dans l'hypothèse de petites déformations

$$e_{zij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_j} + \frac{\partial u_j}{\partial z_i} \right). \quad (1.3)$$

où l'indice z indique que les dérivées sont prises par rapport à z . Dans le cas particulier d'un matériau isotrope, les coefficients élastiques a_{ijkl} sont donnés par

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.4)$$

avec λ et μ les constantes de Lamé.

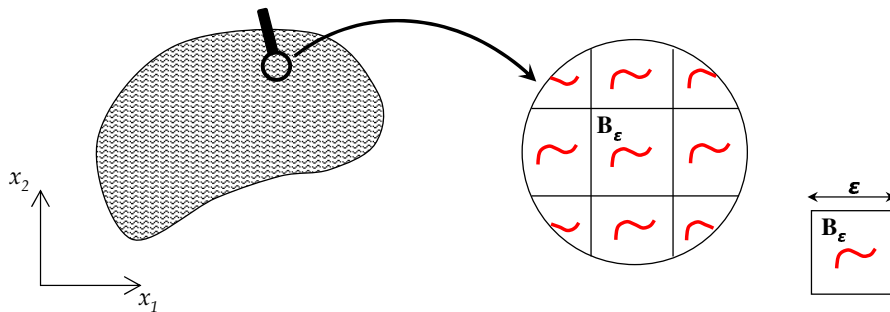


FIG. 1.1 – Milieu fissuré avec une microstructure locale périodique.

Nous supposons que les bords de la fissure sont libres de contraintes, si la fissure est ouverte, et en contact unilatéral, si la fissure est fermée. Ces deux solutions sont exprimées par les deux jeux de formules :

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} = 0 ; [\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{N}] > 0 \quad (1.5)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N}] = 0 ; \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} < 0 ; \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} = 0 ; [\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{N}] = 0 \quad (1.6)$$

où \mathbf{N} est le vecteur normale unitaire, \mathbf{T} le vecteur tangent unitaire à la fissure et $[\cdot]$ le saut à travers les lèvres de la fissures. Nous considérons que chaque microfissure est caractérisée, en totalité, par une des deux conditions. Le fait que chaque microfissure soit complètement ouverte ou fermée, est une hypothèse valable pour de petites longueurs de fissures. Le passage d'un état à l'autre sera décrit ultérieurement, au niveau des solutions homogénéisées.

La propagation d'une micro-fissure est décrite par la théorie de Griffith [44], où toute fissure a une énergie proportionnelle à sa longueur. Il postule qu'il y aura propagation et donc augmentation de l'énergie, si cette dernière est parfaitement compensée par la restitution de l'énergie élastique causée par l'avancée de la fissure. Dans le cas des problèmes quasi-statiques, ce critère peut se formuler en terme de taux de restitution d'énergie élastique exprimé comme :

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{n} \, ds \quad (1.7)$$

où Γ_r est le cercle d'un rayon infinitésimal, entourant l'extrémité de la fissure, \mathbf{n} est le vecteur normal au cercle Γ_r , \mathbf{e} est le vecteur unitaire dans la direction de propagation (voir Fig. 1.2) et

$$b_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} a_{mnkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{xmn}(\mathbf{u}^\varepsilon) \delta_{ij} - \sigma_{jk}^\varepsilon u_{k,i}^\varepsilon$$

est le tenseur de contrainte Eshelby.

Le critère de Griffith stipule que la propagation a lieu quand une limite critique d'énergie, \mathcal{G}_c , est attendue

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \mathcal{G}_c \quad (1.8)$$

tandis qu'il n'y a aucune évolution de la fissure $\mathcal{G}^\varepsilon < \mathcal{G}_c$, où \mathcal{G}_c désigne le taux de restitution d'énergie critique et correspond à la ténacité du matériau.

1.3 Homogénéisation

La microstructure locale périodique est construite à partir d'une cellule unitaire $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ mise à l'échelle par un petit paramètre ε , afin que la période du matériau soit εY , comme dans la Fig. 1.2. De cette façon, le paramètre ε apparaît, naturellement, comme une longueur caractéristique de la microstructure. Nous supposons que cette longueur est assez petite par rapport aux dimensions du milieu, afin que l'on puisse distinguer deux variables d'espace physique, macro- et microscopique, notées

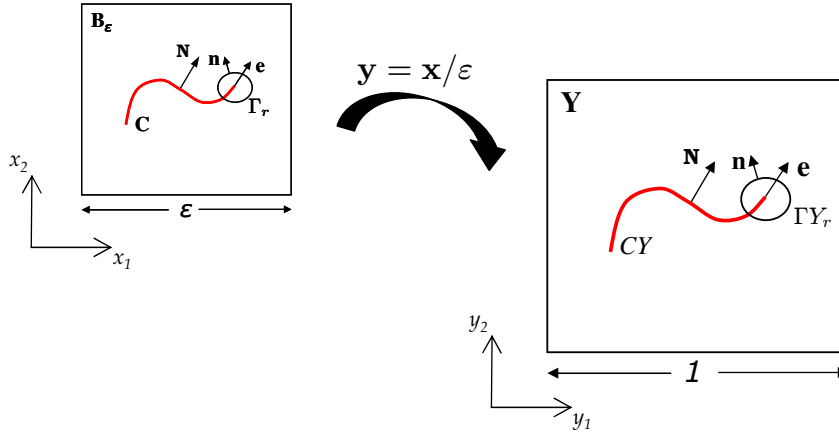


FIG. 1.2 – Mise à l'échelle de la cellule unitaire à la période spatiale microstructurale du matériau.

respectivement \mathbf{x} et \mathbf{y} . La variable \mathbf{x} est la *variable macroscopique* ou *lente* et \mathbf{y} , la *variable microscopique* ou *rapide*. La variable rapide \mathbf{y} décrit les interactions à courte distance, alors que la variable lente \mathbf{x} décrit les interactions à longue distance. Du fait de la séparation d'échelles, chaque grandeur Φ apparaît comme une fonction de ces deux variables et on obtient deux écritures équivalentes :

$$\Phi = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$$

qui est le point de vue macroscopique et

$$\Phi = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$$

qui est le point de vue microscopique.

Remarquons que du fait des deux variables d'espace, la dérivation spatiale prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

La cellule unitaire Y contient une fissure CY et on note la partie solide par $Y_s = Y \setminus CY$. La longueur CY est $d = d^\varepsilon / \varepsilon$.

Pour étudier le comportement de \mathbf{u}^ε lorsque ε est petit par rapport à 1, on peut rechercher (cf. Bakhvalov N. and Panasenko G. [3], Benssosan *et al.* [10]) un développement asymptotique de \mathbf{u}^ε et $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ sous la forme

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^{(-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots \quad (1.10)$$

où $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \mathbf{x} \in \mathcal{B}_s, \mathbf{y} \in Y$ sont fonctions périodiques en \mathbf{y} , de période Y .

Substituant les expressions (1.9) et (1.10) dans l'équation (1.1), nous obtenons pour différentes puissances de ε

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(-1)}}{\partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}^{(-1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} = 0. \quad (1.11)$$

De plus, la relation constitutive (1.2) et la condition (1.3) utilisant les équations (1.9) et (1.10), donnent

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-1)} &= a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)}), \\ \sigma_{ij}^{(0)} &= a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})), \\ \sigma_{ij}^{(1)} &= a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(2)})), \end{aligned} \quad (1.12)$$

En ce qui concerne les conditions sur la frontière de fissure, pour les fissures ouvertes, nous obtenons

$$\sigma_{ij}^{(-1)} N_j = 0, \quad \sigma_{ij}^{(0)} N_j = 0, \quad \sigma_{ij}^{(1)} N_j = 0, \quad \text{sur } CY^\pm. \quad (1.13)$$

et pour les fissures en compression la condition du contact unilatéral se traduit pour l'ordre m en ε , ($m = -1, 0, 1$) par les relations :

$$[\sigma_{ij}^{(m)} N_j] = 0, \quad N_j \sigma_{ij}^{(m)} < 0, \quad T_j \sigma_{ij}^{(m)} = 0 \quad (1.14)$$

Nous introduisons, ensuite, l'espace $\tilde{\mathcal{D}}(Y_s)$ des vecteurs de déplacement définis sur Y_s périodique, de moyenne nulle sur Y_s :

$$\tilde{\mathcal{D}}(Y_s) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(Y_s)]^2, Y - \text{périodique en } y, \int_{Y_s} \mathbf{v} \, dy = 0 \right\}.$$

Les relations (1.11a) et (1.13a) donnent un problème aux limites, en traction, pour $\mathbf{u}^{(0)}$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)})) = 0, \quad \text{dans } Y_s \quad (1.15)$$

$$(a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)})) N_j = 0, \quad \text{sur } CY^\pm. \quad (1.16)$$

A partir de ce système, on peut montrer que la fonction $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ est indépendante de la variable microscopique ([102]), représentant un champ de déplacement macroscopique. Cela montre que $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ est une fonction $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ à laquelle s'ajoute des termes rapidement oscillants.

Le problème pour la fonction $\mathbf{u}^{(1)} \in \tilde{\mathcal{D}}$ est obtenu à partir des équations (1.11b) et (1.13b) pour $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ donné, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) = 0, \quad \text{dans } Y_s \quad (1.17)$$

$$a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) N_j = -a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j, \quad \text{sur } CY^\pm \quad (1.18)$$

où nous avons tenu compte des conditions de périodicité sur la frontière extérieure de la cellule.

Si nous considérons que la géométrie de la fissure est donnée par une ligne droite, nous proposons une méthode pour faire la distinction entre les états microscopiques d'ouverture et de contact. La relation (1.18) indique que sur les bords de la fissure, dans la cellule unitaire, la solution macroscopique peut être considérée comme une "force superficielle - \mathbf{f} ", appliquées sur les lèvres de la fissure (Fig. 1.3). L'orientation de ce vecteur force par rapport à la direction normale la fissure, c'est-à-dire la tendance de cette force à ouvrir ou fermer la fissure, peut être considérée comme un indicateur de l'état d'ouverture ou de fermeture. Au niveau macroscopique, ces deux états induisent une séparation de l'espace \mathbf{R} des variables $e_{x11}, e_{x12}, e_{x22}$, en deux sous-domaines \mathbf{R}^\pm définies par :

$$\mathbf{R}^\pm = \left\{ \mathbf{e}_x \mid N_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j \gtrless 0 \right\} \quad (1.19)$$

où les signes $+$ et $-$ correspondent respectivement à la traction et la compression. De cette façon, le passage entre les deux comportements homogénéisés élémentaires, correspondant à la traction et la compression, est réalisé au niveau macroscopique, en fonction du champ global de déformation.

Sur chaque sous-domaine, la solution de ce problème est une fonction vectorielle linéaire de $\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})$.

Si nous choisissons un système de générateurs E^{pq} des déformations macroscopiques fondamentales dans chaque sous-domaine, nous écrivons la déformation macroscopique $e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)})$ comme une combinaison linéaire de ces éléments. Un choix élémentaire est de considérer :

$$\begin{aligned} E_{ij}^{pq} &= \delta_{ip} \delta_{jq}, & \text{dans } \mathbf{R}^+ \\ E_{ij}^{pq} &= -\delta_{ip} \delta_{jq}, & \text{dans } \mathbf{R}^- \end{aligned} \quad (1.20)$$

pour p, q fixés.

Ainsi, si le vecteur ξ^{pq} est la solution particulière, correspondant à $e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) = E_{ij}^{pq}$ avec p et q fixés, la solution de (1.11b) - (1.13b) s'écrit :

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \xi^{pq}(\mathbf{y}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)})(\mathbf{x}, t), \quad \xi \in \tilde{\mathcal{D}} \quad (1.21)$$

où $\xi(\mathbf{y})$ est la *fonction caractéristique* représentant les modes de déformations élémentaires de la cellule unitaire [3], [2].

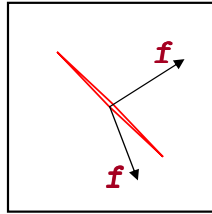


FIG. 1.3 – Application d'une "force superficielle" sur la fissure

Le problème (1.17)-(1.18) est équivalent au problème sur la cellule écrit en ξ^{pq} , où l'on tient compte de la condition de périodicité, sur la frontière extérieure de la cellule

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\xi^{pq})) = 0, \quad \text{dans } Y_s, \quad (1.22)$$

$$a_{ijkh} e_{ykh}(\xi^{pq}) N_j = -a_{ijpq} N_j, \quad \text{sur } CY^\pm \quad (1.23)$$

pour tous p et q fixés et $\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) \in \mathbf{R}^+$.

Le troisième problème cellulaire s'obtient à partir du (1.11c) - (1.13c)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} = 0, \quad \text{dans } Y_s, \quad (1.24)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} N_j = 0, \quad \text{sur } CY^\pm. \quad (1.25)$$

Nous introduisons l'opérateur moyenne sur la période

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_s} \cdot dy, \quad (1.26)$$

où $|Y|$ désigne la mesure de Y . Si on applique l'opérateur moyenne à l'équation (1.24), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = 0 \quad (1.27)$$

et

$$\Sigma_{ij}^{(0)} \equiv \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = C_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (1.28)$$

où

$$C_{ijkl}(d, \mathbf{e}_x) = \begin{cases} C_{ijkl}^+(d), & \mathbf{e}_x \in \mathbf{R}^+ \\ C_{ijkl}^-(d), & \mathbf{e}_x \in \mathbf{R}^- \end{cases} \quad (1.29)$$

avec

$$C_{ijkl}^\pm(d) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_s} (a_{ijkl} + a_{ijmn} e_{ymn}(\xi_\pm^{kl})) dy \quad (1.30)$$

sont les coefficients homogénéisés du matériau considéré.

Si nous combinons les équations (1.27) et (1.28), nous pouvons obtenir l'équation d'équilibre homogénéisé

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) = 0. \quad (1.31)$$

Remarque : Sur la **symétrie** du tenseur C_{ijkl}

Soit E^{kl} un système de générateurs dans l'espace de \mathbf{e}_x . Dans l'hypothèse que $E_{ij}^{kl} = \pm \delta_{ki} \delta_{lj}$, nous montrons que les coefficients C_{ijkl} sont symétriques en i et j , k et l et ce, par rapport aux couples (i, j) et (k, l) .

Par construction, une partie de la symétrie est vérifiée :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

Pour démontrer que

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

considérons la relation

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) \right) = 0.$$

En multipliant cette relation par $\alpha \in \tilde{\mathcal{D}}$ et par intégration sur Y_s , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{CY} a_{ijkl} \left(e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) [\alpha_i] N_j ds_y - \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\alpha) dy = \\ \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\alpha) dy \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nous remplaçons, dans cette relation, successivement

$$e_{xkl} = \delta_{kp} \delta_{lq} \text{ et } \alpha = \xi^{mn}$$

puis

$$e_{xkl} = \delta_{km} \delta_{ln} \text{ et } \alpha = \xi^{pq}$$

La symétrie du produit scalaire et du tenseur d'élasticité permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{ykl}(\xi^{pq}) e_{yij}(\xi^{mn}) dy = \\ \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{kp} \delta_{lq} + e_{ykl}(\xi^{pq})) [\xi_i^{mn}] N_j ds_y - \int_{Y_s} a_{pqkl} e_{ykl}(\xi^{mn}) dy = \\ \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\xi^{mn})) [\xi_i^{pq}] N_j ds_y - \int_{Y_s} a_{mnkl} e_{ykl}(\xi^{pq}) dy = \end{aligned}$$

La dernière égalité démontre la symétrie de C_{ijkl} . Si on tient compte de cette symétrie, nous pouvons écrire les coefficients dans un tableau, rangé sous la forme

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{(0)} \\ \Sigma_{12}^{(0)} \\ \Sigma_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1122} \\ C_{1112} & C_{1212} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{1112} & C_{2222} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{x11}(\mathbf{u}^{(0)}) \\ 2e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}) \\ e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}) \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

1.4 Bilan d'énergie

Dans cette section, nous construisons des lois d'endommagement, basées sur une méthode de bilan énergétique micro-mécanique, dans un volume élémentaire, contenant une micro-fissure en évolution. On suppose que la trajectoire de la micro-fissure est régulière et a priori connue. Plus tard, on considérera

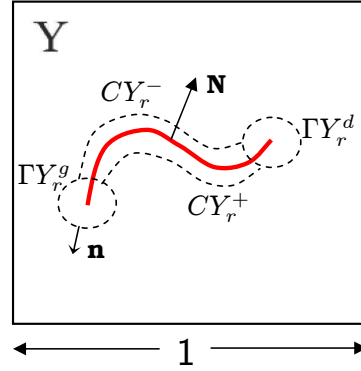


FIG. 1.4 – Cellule unitaire avec une fissure

plusieurs directions possibles de fissuration. Pour une propagation symétrique des pointes de la fissure par rapport au point central, l'évolution de la fissure est complètement décrite par la variation de sa longueur.

L'analyse dans cette section sera faite, pour des conditions, sur la fissure, dans la cellule unitaire plus générales que les conditions données par les relations (1.5-1.6). Nous considérons que :

$$[\sigma^{(0)} \mathbf{N}] = 0 \quad (1.34)$$

Nous démontrons le résultat suivant :

Proposition : Dans les conditions de continuité (1.34), le bilan énergétique, pendant l'évolution, s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{Y_s} \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy + \mathcal{G}_y \dot{d} = \int_{CY} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y \quad (1.35)$$

avec

$$\mathcal{G}_y = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma Y_r} \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{n} ds_y \quad (1.36)$$

où

$$\begin{aligned} b_{ij}(\mathbf{u}^{(1)}) &= U(\mathbf{u}^{(1)}) \delta_{ij} - \sigma_{ik}(\mathbf{u}^{(1)}) \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_j} \\ U(\mathbf{u}^{(1)}) &= \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) \\ \sigma_{ik}(\mathbf{u}^{(1)}) &= a_{iklm} e_{ylm}(\mathbf{u}^{(1)}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Preuve : Soit $Y_r \subset Y$ la partie solide définie par $Y_r = Y \setminus \{CY_r^+ \cup CY_r^- \cup \Gamma Y_r^g \cup \Gamma Y_r^d\}$ avec la propriété

$$\lim_{r \rightarrow 0} Y_r = Y_s.$$

En multipliant (1.17) par $\dot{u}_i^{(1)}$ et en intégrant sur Y_r , on aboutit à :

$$\int_{Y_r} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) dy - \int_{Y_r} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \dot{u}_i^{(1)} \right) dy = 0 \quad (1.38)$$

La première intégrale, dans l'expression précédente, est évaluée, en utilisant le théorème de transport (voir [113], eqn (81.4)) de la manière suivante

$$\int_{Y_r} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) dy = \frac{d}{dt} \int_{Y_r} \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy + \int_{\Gamma Y_r^g \cup \Gamma Y_r^d} \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) \frac{d}{dt} n_p e_p ds_y$$

La deuxième intégrale, en utilisant une intégration par parties et en tenant compte de la périodicité de $\mathbf{u}^{(1)}$ sur la frontière extérieure ainsi que de la condition sur la fissure requise par cette proposition, s'écrit sous la forme

$$\int_{Y_r} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \dot{u}_i^{(1)} \right) dy = \int_{CY_r^+} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) N_j^+ [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y - \int_{\Gamma Y_r^g \cup \Gamma Y_r^d} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) n_j \dot{u}_i^{(1)} ds_y$$

où \mathbf{N}^+ est la normale à la fissure sur la frontière positive.

Si on remplace les deux intégrales en (1.38), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{Y_r} \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy + \\ & \int_{\Gamma Y_r^g \cup \Gamma Y_r^d} \left(\frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) \frac{d}{dt} n_p e_p + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) n_j \dot{u}_i^{(1)} \right) ds_y - \\ & \int_{CY_r^+} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) N_j^+ [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y = 0 \end{aligned}$$

Par passage à la limite $r \rightarrow 0$, on aboutit à

$$\frac{d}{dt} \int_{Y_s} \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy + \frac{d}{dt} (\mathcal{G}_y^g + \mathcal{G}_y^d) - \int_{CY} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y = 0$$

Supposant que $\mathcal{G}_y^g = \mathcal{G}_y^d = \mathcal{G}_y$, nous déduisons la relation (1.35).

Ceci nous permet de formuler le résultat principal de cette section :

Théorème : Pour $[\sigma_{ij}^{(0)} N_j] = 0$ sur les frontières de fissure CY de longueur $d(t)$ en évolution, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \dot{d} \frac{dC_{ijkl}}{dd} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) + \mathcal{G}_y \dot{d} \\ & + \frac{d}{dt} \int_{CY} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(0)} N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y - \int_{CY} \sigma_{ij}^{(0)} N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Preuve : Multipliant l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) = 0$$

par $\dot{u}_i^{(1)}$, et en intégrant sur Y_s avec la propriété de périodicité en y de $\mathbf{u}^{(1)}$ sur le bord extérieur, on obtient

$$\int_{CY} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y = \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\dot{\mathbf{u}}^{(1)}) dy \quad (1.40)$$

En additionnant (1.35) avec (1.40) et en regroupant ce résultat, on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y - \mathcal{G}_y \dot{d} = \\ & \frac{d}{dt} \int_{Y_s} \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy + \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{ykl}(\dot{\mathbf{u}}^{(1)}) dy \end{aligned}$$

Si on utilise la formule de transport et que l'on tient compte que $\mathbf{u}^{(0)}$ ne depend pas de la variable \mathbf{y} , la deuxième intégrale dans le membre de droite devient

$$\begin{aligned} & \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{ykl}(\dot{\mathbf{u}}^{(1)}) dy = \\ & \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy - \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans la relation précédente et en regroupant les termes nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y - \mathcal{G}_y \dot{d} - \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} \left(e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy = \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy - \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy \quad (1.41) \end{aligned}$$

La dernière intégrale, dans le membre de gauche, s'obtient en multipliant

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) = 0.$$

par $u_i^{(1)}$ et en intégrant sur Y_s avec la condition (1.34), sous la forme

$$\int_{Y_s} (a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy = \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [u_i^{(1)}] ds_y$$

Cette relation dans (1.41) donne

$$\begin{aligned} & \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y - \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [u_i^{(1)}] ds_y - \mathcal{G}_y \dot{d} = \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy - \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy \quad (1.42) \end{aligned}$$

Ensuite, nous calculons le membre de droite. Pour cela, nous développons l'expression du $\mathbf{u}^{(1)}$, en fonction de $\mathbf{u}^{(0)}$ dans (1.21) et utilisant l'expression (1.30). Dès lors, nous prouvons facilement l'égalité

$$\int_{Y_s} (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) dy = (C_{ijkl} - a_{ijkl}) e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (1.43)$$

En utilisant cette égalité et en tenant compte de la symétrie de C_{ijkl} , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy - \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy = \\ & \frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}}{dd} \dot{d} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (1.44) \end{aligned}$$

Remplaçant ces deux résultats en 1.41, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y - \mathcal{G}_y \dot{d} - \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [u_i^{(1)}] ds_y = \\ & \frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}}{dd} \dot{d} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) \end{aligned}$$

forme équivalente avec (1.39).

1.5 Loi d'évolution de l'endommagement

Dans cette section, nous construisons une loi d'évolution de l'endommagement à partir de la relation (1.39), en utilisant les propriétés de la solution homogénéisée et la relation entre les taux de restitution d'énergie à différentes échelles.

Pour équation (1.39), nous pouvons exprimer les intégrales en termes des fonctions caractéristiques ξ_i^{pq} par :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{CY} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(0)} N_j [u_i^{(1)}] ds_y = \\ & \dot{d} \frac{d}{dd} \left(\frac{1}{2} \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j [\xi_i^{pq}] ds_y \right) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \\ & \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j [\xi_i^{pq}] ds_y e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \end{aligned} \quad (1.45)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{CY} \sigma_{ij}^{(0)} N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y = \\ & \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j [\xi_i^{pq}] ds_y e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) + \\ & \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j [\dot{\xi}_i^{pq}] ds_y e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \end{aligned} \quad (1.46)$$

En remplaçant ces relations en (1.39), on obtient

$$\begin{aligned} & \dot{d} \left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}}{dd} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) + \mathcal{G}_y + \right. \\ & \left. \frac{d}{dd} \left(\frac{1}{2} \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j [\xi_i^{pq}] ds_y \right) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) - \\ & \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j \left[\frac{d\xi_i^{pq}}{dd} \right] ds_y e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \Bigg) = 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

De fait, nous allons montrer, ultérieurement, que \mathcal{G}_y peut être exprimé avec \mathcal{G}^ε et que, si le critère de propagation (1.8) est utilisé dans la relation d'énergie, nous obtenons une loi d'endommagement sous la forme

$$\dot{d} \left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}}{dd} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) + \frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon} + I_{mnpq} e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) = 0 \quad (1.48)$$

où

$$I_{mnpq} = \frac{d}{dd} \left(\frac{1}{2} \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j [\xi_i^{pq}] ds_y \right) - \int_{CY} a_{ijkl} (\delta_{mk} \delta_{nl} + e_{ykl}(\xi^{mn})) N_j \left[\frac{d\xi_i^{pq}}{dd} \right] ds_y \quad (1.49)$$

Remarques :

(1) Dans la relation (1.48), nous avons utilisé la propriété de symétrie de l'intégrale I_{ijkl} en i et j , k et l , mais aussi la symétrie par rapport au couple (i, j) et (k, l) . Cette propriété est valable dans les mêmes hypothèses que celles de la symétrie du C_{ijkl} . Elle peut être prouvée par une technique analogue.

(2) L'équation (1.48) est, en totalité, exprimée en fonction de la solution homogénéisée $\mathbf{u}^{(0)}$. Les coefficients homogénéisés (1.30) et les intégrales (1.49) peuvent être calculés, à priori, en utilisant la solution sur la cellule unitaire pour différentes longueurs et trajectoires de la fissure.

Dans (1.48), nous avons utilisé la relation entre les taux de restitution d'énergie :

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \varepsilon \mathcal{G}_y \quad (1.50)$$

Cette relation introduit un paramètre de longueur de la microstructure ε dans la loi d'évolution d'endommagement.

Pour obtenir la relation (1.50), nous utilisons dans l'expression (1.7) du taux de restitution d'énergie initial, le développement à deux-échelles (1.9) de $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$. Dans le développement de $e_{xkl}(\mathbf{u}^\varepsilon)$ et σ_{jk}^ε nous prenons les termes à l'ordre ε^0

$$\begin{aligned} e_{xkl}(\mathbf{u}^\varepsilon) &= e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \\ \sigma_{jk}^\varepsilon &= a_{jkmn} (e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ymn}(\mathbf{u}^{(1)})) \end{aligned}$$

Donc, la relation (1.7) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\varepsilon = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Y_r}} e_i & \left(\frac{1}{2} a_{mnkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) (e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ymn}(\mathbf{u}^{(1)})) \delta_{ij} - \right. \\ & \left. a_{ikmn} (e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ymn}(\mathbf{u}^{(1)})) \left(\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_j} \right) \right) n_j dS \end{aligned} \quad (1.51)$$

Nous effectuons dans l'intégrale (1.51) la transformation de variable $y = x/\varepsilon$, avec $dS = \varepsilon ds_y$, en tenant compte de la singularité de $\mathbf{u}^{(1)}$ aux extrémités de fissure (voir [41]), nous obtenons que :

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \varepsilon \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{Y_r}} e_i \left(\frac{1}{2} a_{mnkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{ymn}(\mathbf{u}^{(1)}) \delta_{ij} - a_{ikmn} e_{ymn}(\mathbf{u}^{(1)}) \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_j} \right) n_j ds_y$$

Par conséquent, on a l'identité recherchée $\mathcal{G}^\varepsilon = \varepsilon \mathcal{G}_y$.

Nous remarquons qu'écrire l'équilibre de l'énergie d'un volume élémentaire de taille ε sur une cellule unitaire fait apparaître la longueur ε dans la loi d'endommagement. La dépendance de taille du taux

de restitution d'énergie rend inadéquat le procédé classique d'homogénéisation asymptotique, qui étudie le comportement de champs à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour des quantités dépendantes de taille, comme le taux de restitution d'énergie, l'analyse adéquate est celle dans laquelle ε demeure fini. Nous notons que l'analyse dans [105] et [86] est également faite pour une taille finie de cellules, qui apparaît dans les équations homogénéisées comme longueur interne. Dans ce qui suit, nous montrons comment cette longueur interne influence la réponse macroscopique du matériau.

1.6 Endommagement fragile unilatéral. Implémentation numérique.

La loi générale d'endommagement, obtenue dans la section précédente, sera utilisée dans ce paragraphe dans le cas particulier de l'endommagement fragile unilatéral. Sur la frontière des micro-fissures fermées, nous considérons le contact unilatéral sans frottement. Après avoir passé en revue le système d'équations décrivant ce modèle, nous proposons un schéma d'intégration numérique en éléments finis.

1.6.1 Le modèle constitutif utilisé

Pour la géométrie des microfissures, nous supposons qu'elles sont droites et que la propagation est symétrique par rapport au point central. Plusieurs orientations de la fissure sont possibles (voir Figs. 1.7, 1.8) et nous proposons un algorithme numérique pour choisir la bonne orientation ainsi que pour calculer la longueur de la fissure.

Les équations, dans la section précédente, sont écrites sous la forme :

- l'équation d'équilibre homogénéisée :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}(d) e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) = 0 \quad (1.52)$$

- loi d'évolution d'endommagement :

$$\left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) + \frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon} \right) \dot{d} = 0 \quad (1.53)$$

- condition d'irréversibilité de l'endommagement

$$\dot{d} \geq 0 \quad (1.54)$$

Nous remarquons que la loi d'endommagement tient compte de l'initialisation des micro-fissures, quand on commence à partir d'un premier état initial intact. Pour l'évolution de l'endommagement nous avons la condition $\dot{d} \neq 0$, donc la parenthèse (1.53) doit être nulle. Pour $e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})$ donné, cette relation est une équation algébrique en d . Ceci suggère un schéma numérique dans lequel l'équation d'endommagement et l'équation d'équilibre ne sont pas résolues simultanément. Dans le cas où nous n'avons pas trouvé une solution d pour laquelle la parenthèse (1.53) est nulle, on tire la conclusion que l'endommagement n'évolue pas, c'est-à-dire $\dot{d} = 0$.

La dernière condition (1.54) exprime le fait que les microfissures ne peuvent qu'augmenter en longueur pendant la déformation du corps. Dans une résolution incrémentale, la condition d'irréversibilité est assurée en cherchant de nouvelles solutions d , plus grandes que les précédentes .

Maintenant, nous décrivons l'algorithme numérique pour résoudre le système (1.52 - 1.54). Les coefficients homogénéisés sont fonctions de la variable d'endommagement d , qui represent la longueur de la microfissure normalisée. Donc, nous pouvons, calculer, au début, une seule fois les coefficients, pour chaque orientation, en traction, ou en compression, pour un grand nombre de $d \in [0, 1]$, obtenant de cette façon, par une méthode d'interpolation, les fonctions numériques $C_{ijkl}(d)$.

Remarque :

Dans l'hypothèse $d \in [0, 1]$ - longueur de la microfissure normalisée, la relation (1.53), pour des fissures de type oblique (Fig. 1.8 (c) et (d)), s'écrit :

$$\left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) + \frac{G_c \sqrt{2}}{\varepsilon} \right) \dot{d} = 0 \quad (1.55)$$

1.6.2 Algorithme du code d'éléments finis

Le système (1.52 - 1.54) est résolu par une méthode incrémentale, dans laquelle le déplacement macroscopique est calculé, approximativement, par la méthode d'éléments finis. Le calcul de la variable d'endommagement est fait en chaque point d'intégration, par la résolution numérique de l'équation d'endommagement. Pour le calcul numérique nous avons utilisé des éléments bilinéaires quadrilatéraux, avec quatre points de Gauss, pour calculer les déplacements. Mais, l'évolution de la micro-fissure (d) et du module tangent C_{ijkl} ne sont calculés qu'en un seul point de Gauss.

Pour les essais simulés, dans la section suivante, nous utilisons l'algorithme numérique suivant :

Algorithme du code d'éléments finis

1. Début

2. Initialisation des données et calcul des coefficients homogénéisés :

- $n = 1$
- en chaque élément nous considérons un point de Gauss, où nous initialisons d_e^1 , $e=1$, $nelem$
- calcul des $C_{ijkl}(d_e^1)$

3. Calcul incrémental des déplacements (u^{n+1}) et des déformations avec les coefficients homogénéisés du pas précédent $C_{ijkl}(d_e^n)$.

4. Résolution de l'équation d'endommagement pour obtenir d_e^{n+1} en chaque élément

- S'il y a déjà une fissure, nous gardons l'orientation :
 - vérification de l'état de traction/compression (\mathbf{R}^+ ou \mathbf{R}^-) de la fissure (condition (1.19))
 - calcul de $d_e^{n+1} \in [d_e^n, 1]$, en résolvant l'équation (1.53), pour les coefficients homogénéisés en tension/compression, par la méthode de dichotomie
- Sinon, boucle sur toutes les orientations considérées
 - vérification de l'état de traction/compression de la fissure (condition (1.19))
 - calcul de $d_e^{n+1} \in [d_e^n, 1]$ en fonction de chaque orientation de la fissure
 - choix de la longueur la plus importante de la fissure avec le maintien de son orientation pour les étapes ultérieures

5. Calcul des coefficients homogénéisés $C_{ijkl}(d_e^{n+1})$ et calcul des contraintes

$$\Sigma_{ij}^{n+1} = C_{ijkl}(d_e^{n+1})e_{xkl}^{n+1}$$

6. Si $n < n_{max}$, $n = n + 1$ retour au point 3, sinon aller en 7.

7. Fin

1.7 Applications numériques

Les applications traitées, dans cette section, correspondent au cas d'un matériau élastique, isotrope de module d'Young $E = 2e9$ Pa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Pour la simplicité, nous considérons quatre orientations possibles des microfissures, comme dans les Figs 1.7 et 1.8. Comme nous l'avons mentionné dans les sections précédentes, la première étape est de calculer la solution $\xi^{ij}(\mathbf{y})$ du problème (1.22-1.23), nécessaire pour calculer les coefficients homogénéisés, C_{ijkl} . Ensuite nous présentons le comportement macroscopique local et, à la fin de cette partie, nous donnons des résultats numériques pour des tests, respectivement, en traction et en compression.

1.7.1 Calcul des fonctions $\xi^{ij}(\mathbf{y})$

D'abord, nous avons vu dans la section 1.3 que l'espace \mathbf{R} des variables \mathbf{e}_x doit être séparé en deux sous-domaines \mathbf{R}^\pm , en fonction de l'état du chargement appliqué. Nous pouvons choisir le jeu E^{kl} des déformations macroscopiques fondamentales sous la forme $E_{ij}^{kl} = \delta_{ki}\delta_{lj}$, qui est un système de générateurs dans \mathbf{R}^+ , ou sous la forme $E_{ij}^{kl} = -\delta_{ki}\delta_{lj}$, qui représente un système de générateurs dans \mathbf{R}^- .

En résolvant les six problèmes bidimensionnels d'élasticité, avec conditions de périodicité sur la période de base et les forces "sources" sur la fissure, nous obtenons deux jeux des fonctions ξ^{kl} correspondant à la traction et à la compression. La résolution numérique du problème bidimensionnel en ξ a été réalisé par la méthode des éléments finis, programmée en Matlab [71], avec l'utilisation du code Femlab. Nous avons utilisé des éléments isoparamétriques à 6 noeuds. Les conditions de périodicité sont satisfaites avec les multiplicateurs de Lagrange. La condition de contact unilatéral est réalisée par une méthode de pénalisation. Sur une cellule, nous avons réalisé plusieurs calculs pour différents maillages, avant de retenir, pour tous les calculs, un maillage à 1500 éléments.

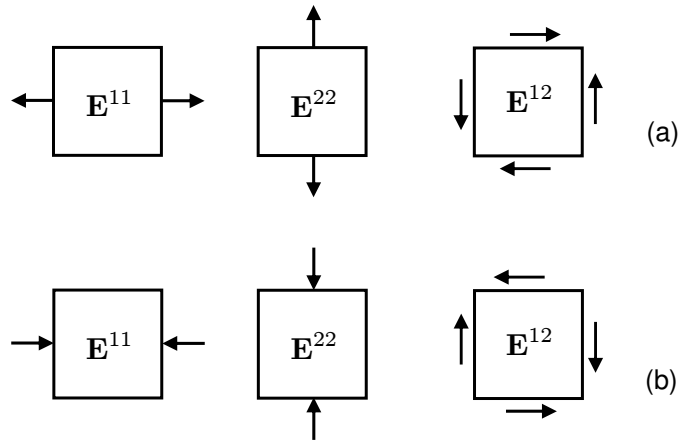


FIG. 1.5 – L'application de la déformation macroscopique fondamentale sur la cellule unitaire

Dans la Fig. 1.5 nous montrons les six déformations macroscopiques fondamentales qui caractérisent la force appliquée sur la fissure.

Ensuite, nous montrons dans la Fig. 1.6(a), la période de base unitaire avec une fissure oblique de type (d) (Fig. 1.8), de longueur $d = 0.6$, servant au calcul des fonctions ξ^{kl} , ainsi que le maillage utilisé. Dans la même figure, on représente le déplacement total ($\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, où ξ_1, ξ_2 sont les déplacements dans la direction x_1 et x_2 respectivement) sur la cellule unitaire, après déformation.

1.7.2 Calcul des fonctions $C_{ijkl}(d)$

Une fois que nous avons calculé toutes les fonctions $\xi^{kl}(\mathbf{y})$, pour 30 valeurs de longueurs d , nous avons déterminé, par une interpolation, pour chaque orientation de la fissure, les deux jeux des coefficients. Les coefficients sont donnés sous forme des fonctions $C_{ijkl}(d)$ d'ordre 10. Dans les Figs. 1.7 et 1.8, nous avons représenté les composantes non-nulles des coefficients effectifs, calculés en fonction de différentes longueurs de la fissure, pour les orientations (a) et (d).

Par une rotation de $\pi/2$, nous obtenons que le problème avec une fissure verticale est identique au problème avec une fissure horizontale. Donc nous pouvons en déduire que $C_{1111}^{(b)} = C_{2222}^{(a)}$, $C_{1212}^{(b)} = C_{1212}^{(a)}$ et $C_{2222}^{(b)} = C_{1111}^{(a)}$.

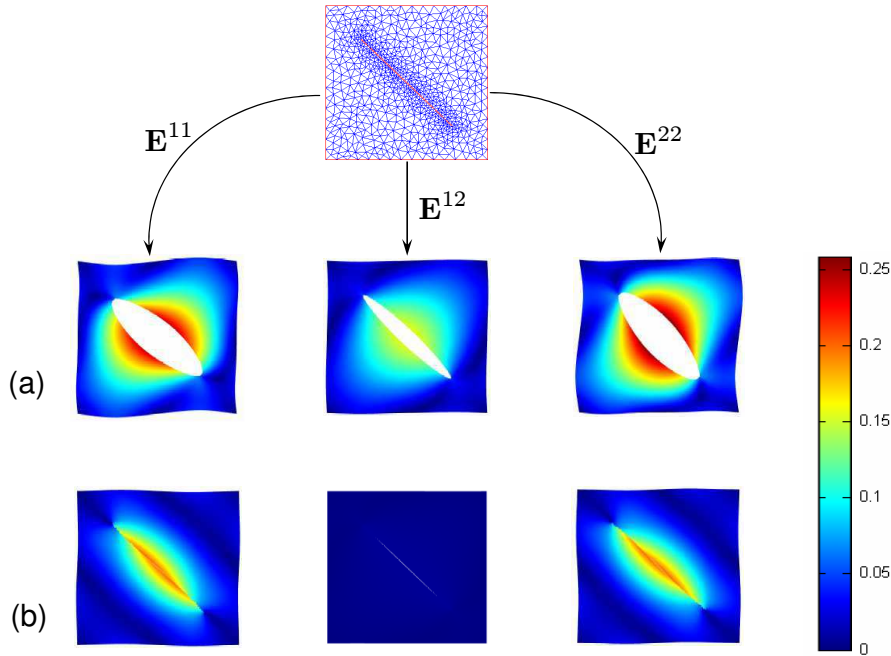


FIG. 1.6 – Maillage de la cellule unitaire avec une fissure ; (a-b) le déplacement total sur la configuration déformée (amplifiée par 0.5)

Aussi on obtient une correspondance entre les coefficients calculés pour les orientations (c) et (d), où l'on obtient les mêmes coefficients. Le seul changeant de signe est $C_{1112}^{(c)} = -C_{1112}^{(d)}$

Remarques :

La présence de la microfissure mène à l'anisotropie induite dans la réponse globale.

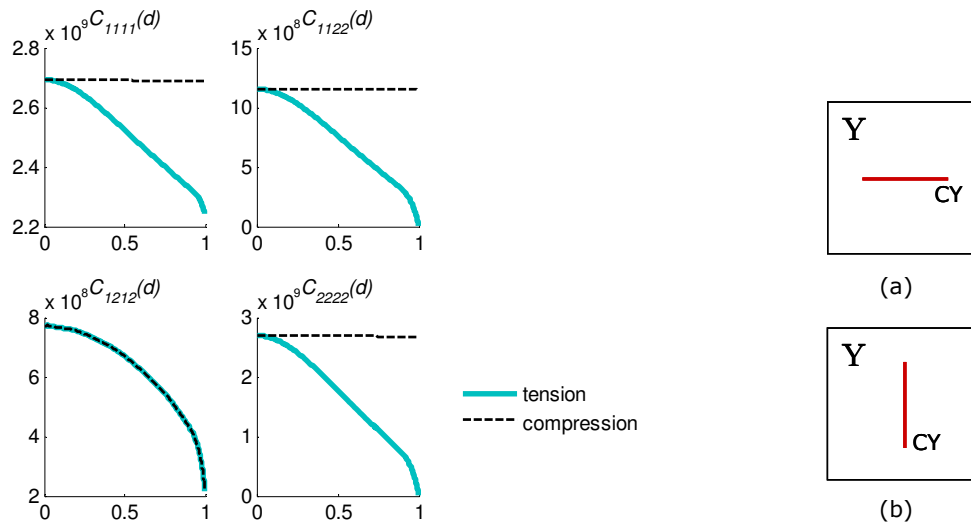


FIG. 1.7 – Les coefficients effectifs pour une fissure d'orientation (a)

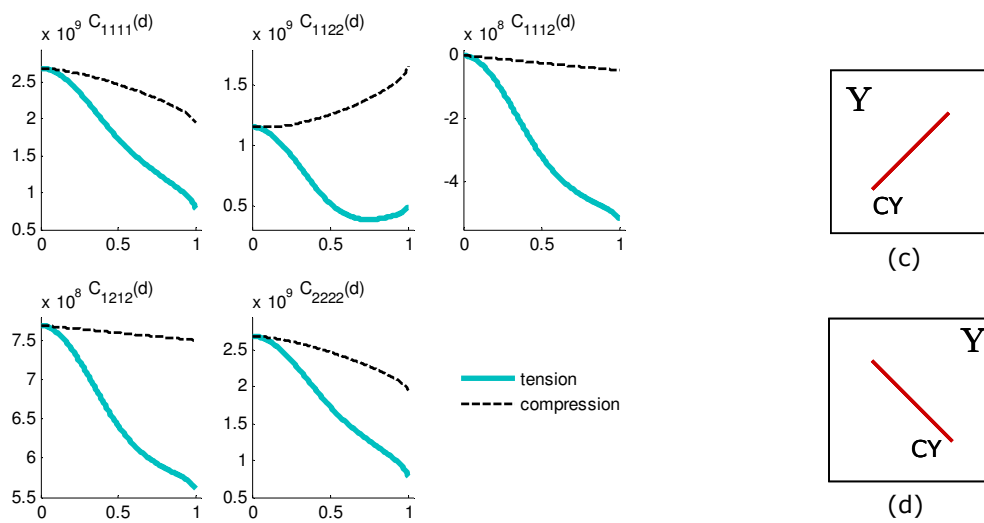


FIG. 1.8 – Les coefficients effectifs pour une fissure d'orientation (c)

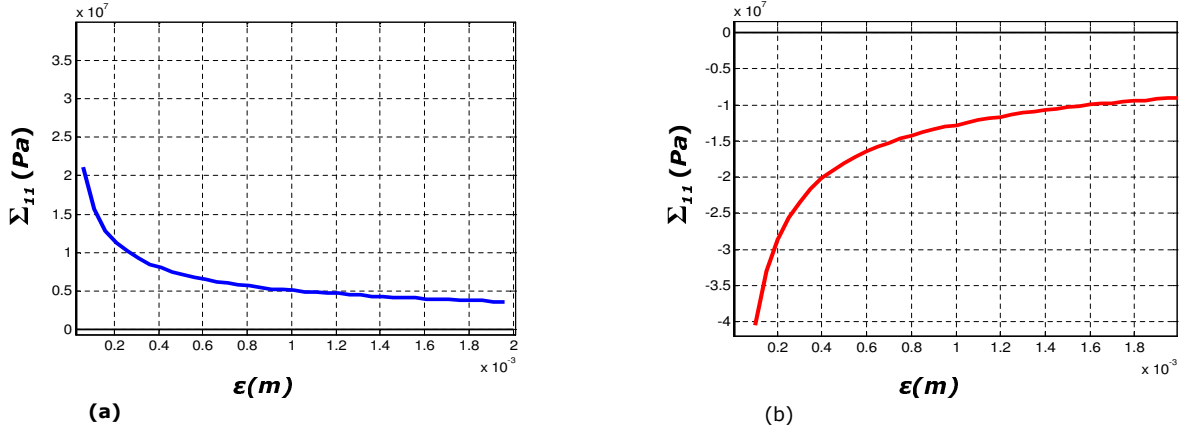


FIG. 1.9 – L'évolution de la limite d'initiation de l'endommagement en fonction de la taille de la cellule de périodicité ϵ pour un chargement uniaxial : (a) traction, (b) compression

1.7.3 Le comportement macroscopique local

Après avoir calculé les coefficients effectifs, nous nous sommes intéressé à l'effet de taille sur le comportement homogénéisé. Pour réaliser cette étude, nous imposons une déformation \mathbf{e}_x , puis nous analysons la réponse constitutive qui résulte, en utilisant l'algorithme numérique présenté dans la section 1.6. La Fig. 1.9 montre la dépendance du seuil d'initialisation de l'endommagement en fonction de la taille de cellule ϵ . Les essais sont faits dans le cadre des sollicitations uniaxiales, où on applique une déformation e_{x11} , pour chaque valeur de ϵ . Les différentes courbes correspondent au chargement en traction et en compression, respectivement. Nous observons que pour des valeurs plus faibles de la taille de la cellule, on obtenons un seuil d'initiation de l'endommagement plus élevé.

Dans la Fig. 1.10, nous pouvons voir l'influence de la taille de la cellule, au début de l'endommagement, pour des sollicitations macroscopiques biaxiales. Nous avons considéré trois valeurs différentes de ϵ , pour lesquelles nous avons tracé le domaine élastique, en déformations planes macroscopiques, quand (a) $e_{x22} = 0$ et (b) $e_{x12} = 0$. On constate que pour les plus faibles valeurs de ϵ le domaine élastique est beaucoup plus important, Donc, on trouve un résultat similaire à celui obtenu dans le cas du chargement uniaxial.

Nous constatons que ce résultat correspond à ce que Griffith a démontré avec ses expériences sur les fibres de verre (voir [44] et où il est arrivé à la conclusion que "la résistance effective des matériaux manufacturés pourrait être multipliée, au moins par 10 ou 20, si ces défauts pouvaient être éliminés".

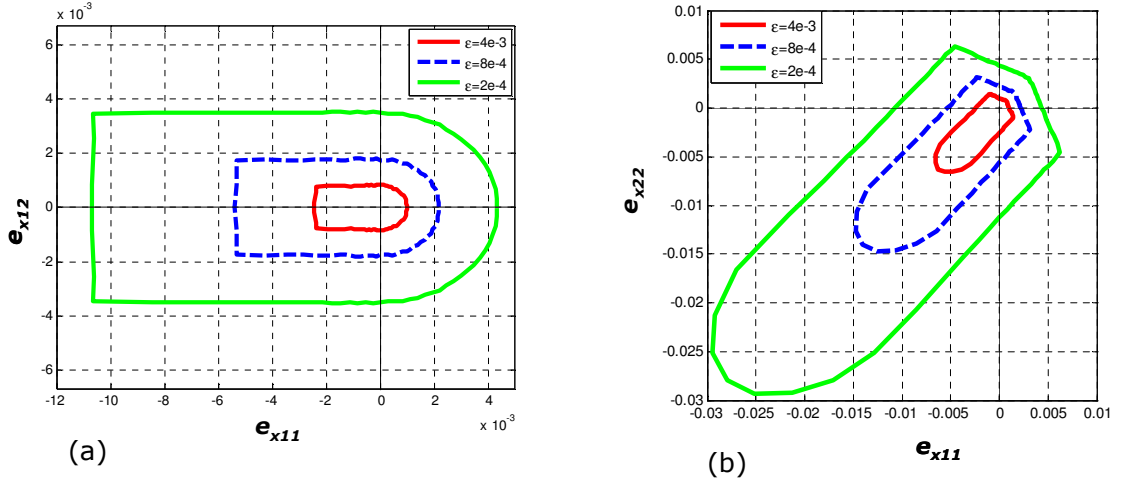


FIG. 1.10 – Domaine d'élasticité en déformation macroscopique plane pour trois valeurs de ε quand (a) $e_{x22} = 0$ et (b) $e_{x12} = 0$

1.7.4 Le comportement macroscopique global

Nous considérons, ensuite, deux essais en déformations planes pour une configuration donnée sur la Fig. 1.11. En ce qui concerne les conditions aux limites, les plateaux supérieurs et inférieurs sont supposés rigides et restent horizontaux. De plus, le plateau inférieur est fixé en un point, ce qui empêche tout déplacement de corps rigide. Une pression P est appliquée sur les frontières latérales.

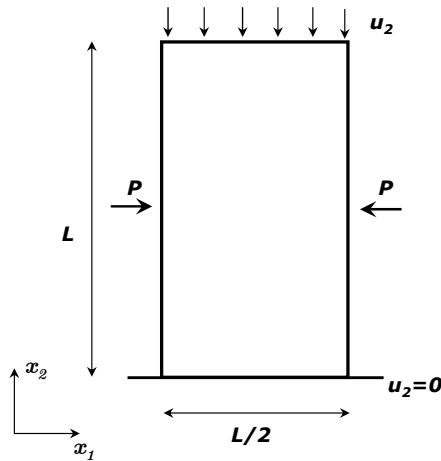


FIG. 1.11 – Géométrie et chargement pour un essai biaxial

1.7.4.1 Essais en traction uniaxiale

Le premier essai considéré est un essai en traction uniaxiale, avec les frontières latérales libres de contraintes ($P = 0$). La dimension de l'échantillon est donnée par $L = 0.1m$ (cf. Fig. 1.11). Un déplacement vertical $u_2 = u$ est imposé sur la tête de l'échantillon ($x_2 = 0.1$) et sur le plateau bas ($x_2 = 0$). Nous imposons un déplacement nul $u_2 = 0$. Les propriétés du matériau sont données par les mêmes constantes élastiques, utilisées antérieurement, et l'énergie de la rupture est $\mathcal{G}_c = 1J/m^2$.

Pour cet essai, nous initialisons l'endommagement, en considérant 6 éléments, contenant des microfissures horizontales préexistantes (avec $d = 1$, fissures traversant la cellule), positionnées à mi-hauteur et de part et d'autre de l'échantillon (Fig. 1.12-1). La Fig. 1.12 représente une séquence d'évolution de la zone endommagée, pendant un chargement en traction.

La Fig. 1.13 nous montre la courbe globale de la contrainte en fonction du déplacement imposé. Les points présentés sur cette courbe correspondent à chaque étape d'endommagement dans la Fig. 1.12, où le dernier point est choisi une fois que la largeur de la zone d'endommagement n'évolue plus. Nous observons alors que la courbe globale de comportement possède un fort radoucissement, correspondant à la propagation de nouvelles micro-fissures.

Maintenant nous nous intéressons à l'influence du maillage. Nous avons utilisé deux types de maillage, l'un à 20×41 éléments, et l'autre à 30×61 éléments. La distribution d'endommagement est donnée en Fig.1.14 et la courbe globale contrainte-déplacement en Fig. 1.15. Les deux zones d'endommagement et les courbes contrainte-déplacement correspondantes sont à peu près identiques. Les premiers tests indiquent que la largeur de la bande de localisation de l'endommagement ne montre pas une dépendance classique importante du maillage. Ce résultat est une conséquence de l'introduction, dans le modèle, d'une longueur interne par la loi d'endommagement.

A présent, nous analysons l'influence de la taille de la microstructure sur la réponse structurale de l'échantillon. Dans la Fig. 1.16 nous présentons la courbe globale contrainte - déplacement pour trois calculs, où seule la taille de la cellule ε est changée. On trouve que le comportement global du matériau (Fig. 1.16) est influencé de la même manière que le comportement obtenu dans l'analyse locale : pour des petites dimensions de la microstructure, on obtient la rupture avec des chargements plus importants.

Finalement, nous montrons que la zone d'endommagement est sensible au processus d'initialisation de la rupture. Sur la Fig. 1.17, nous avons représenté trois zones d'endommagement différentes. Elles correspondent à l'initiation avec des micro-fissures, préexistantes, de longueur différente ($d=0.8$, $d=0.5$ et $d=0.2$, respectivement), dans 6 éléments, situés à mi-hauteur de l'échantillon. En soit, nous faisons trois tests pour voir l'influence de la micro-fissure préexistante. Sur la configuration initiale, nous considérons 6 éléments à micro-fissures de longueur $d=0.8$, $d=0.5$, $d=0.2$ respectivement et on constate que dans les trois cas les zones sont différentes. Les longueurs plus importantes des micro-fissures préexistantes, donnent une évolution d'endommagement mieux dirigée et nous obtenons une zone d'endommagement mieux localisée. Pour des micro-fissures initiales plus petites, l'évolution de l'endommagement n'est pas

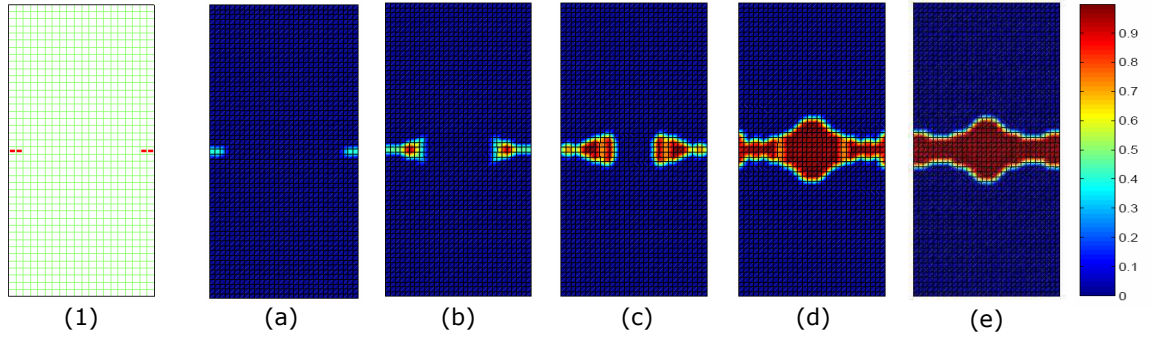


FIG. 1.12 – Evolution de la zone d'endommagement, en traction, pour une configuration initiale représentée dans la figure (1) (configuration réel)

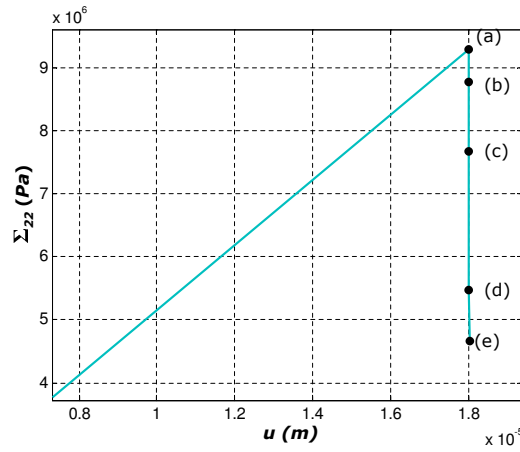


FIG. 1.13 – Courbe de comportement global contrainte - déplacement, en traction

aussi bien orientée et la zone est plus diffuse.

1.7.4.2 Essai en compression biaxiale

Nous présentons, désormais, pour le même matériau, deux essais en compression biaxiale. La géométrie est décrite en Fig. 1.11, avec $L = 0.1m$. Une pression de confinement est appliquée, initialement, sur les frontières latérales de l'échantillon. Ensuite, elle est maintenue de manière constante pendant qu'un déplacement vertical $u_2 = u$ de compression est appliqué. Pour une valeur de l'énergie de la rupture de $\mathcal{G}_c = 28J/m^2$ et une taille de la microstructure de $\varepsilon = 8e - 5m$, nous considérons deux échantillons, où l'on initie, différemment, la zone endommagée (Fig.1.18-(1), Fig. 1.20-(1) respectivement). Pour les deux configurations nous représentons plusieurs états de propagation de la zone d'endommagement. Les deux tests diffèrent entre eux par la zone où on initialise l'endommagement avant le chargement. La configuration initiale et l'évolution de l'endommagement correspondant sont représentées dans la Fig.

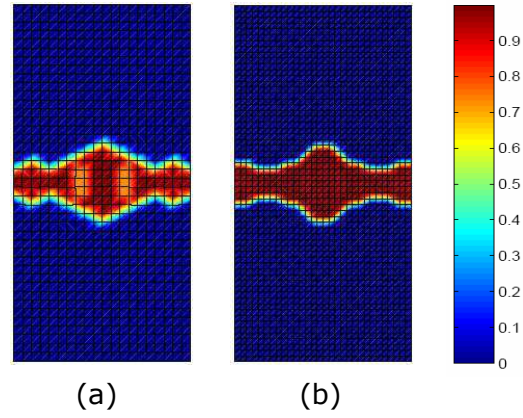


FIG. 1.14 – Dépendance de maillage en traction : zone d’endommagement, pour deux maillages différents (a) 820 éléments, (b) 1830 éléments.

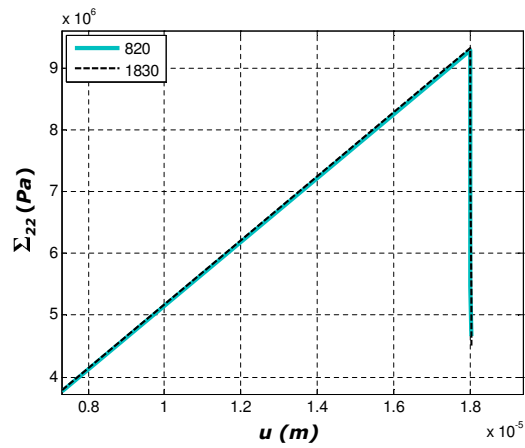


FIG. 1.15 – Dépendance de maillage en traction : courbes de comportement global (contrainte - déplacement) identiques pour les deux maillages présentés en fig. 1.14.

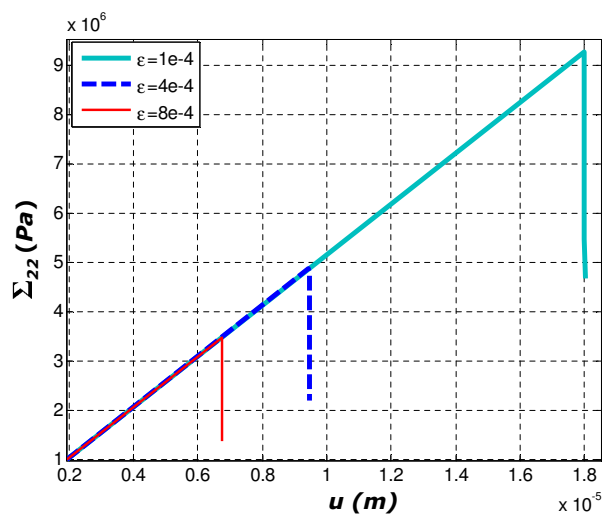


FIG. 1.16 – L'influence de la taille de cellule en traction : Courbes de comportement global contrainte - déplacement pour différentes valeurs de ε .

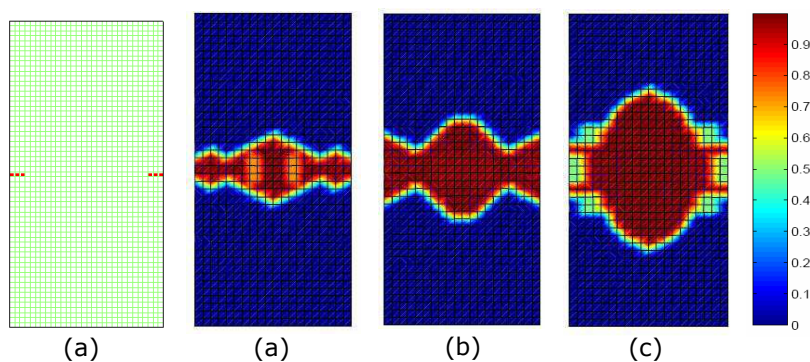


FIG. 1.17 – Influence de la longueur des micro-fissures préexistantes (a) $d=0.8$, (b) $d=0.5$, (c) $d=0.2$ sur la zone de distribution de l'endommagement

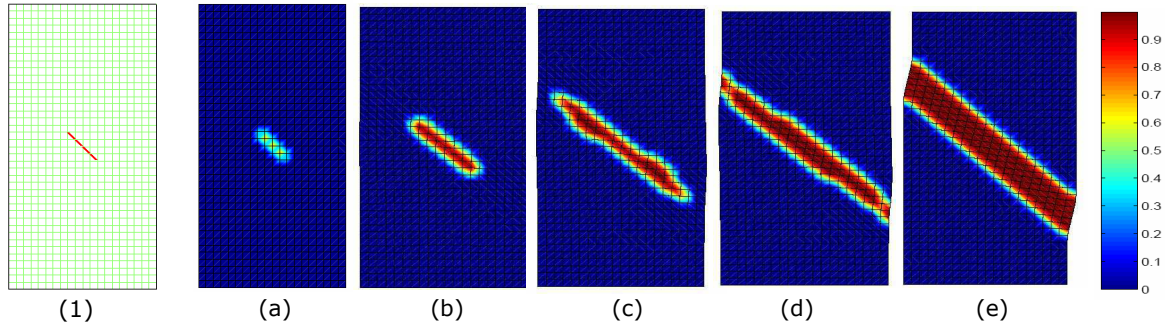


FIG. 1.18 – Formation d'une bande localisée d'endommagement en compression : initialisation centrale (configuration déformée amplifiée par 10)

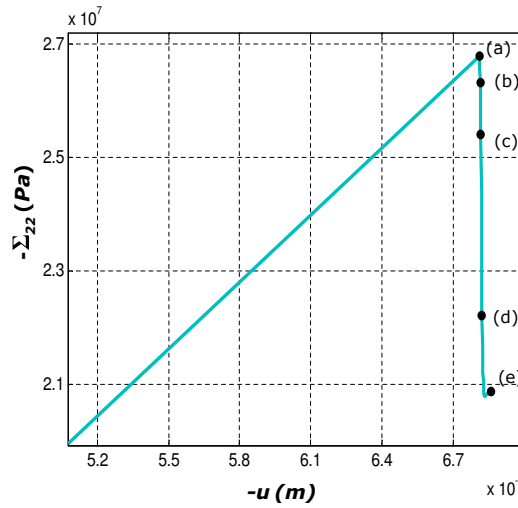


FIG. 1.19 – Courbe de comportement globale contrainte - déplacement pour une initialisation centrale, en compression (cas Fig. 1.18)

1.18 et la Fig. 1.20, respectivement. Les deux cas mènent au comportement de localisation de l'endommagement. Les courbes globales correspondantes, contrainte-déplacement sont données sur la Fig.1.19 et Fig. 1.21.

Maintenant, nous étudions la dépendance du maillage de la solution de l'élément fini. Nous considérons trois maillages différents : 10×20 éléments, 15×31 éléments et 20×40 éléments, pour le même échantillon (c'est-à-dire que dans les trois cas, nous avons le même mode d'initialisation et la longueur de défaut préexistant est identique). Les distributions localisées d'endommagement sont montrées dans la Fig. 1.22 et les courbes contrainte-déplacement sont données dans la Fig. 1.23. Il est évident que ni la largeur de la bande, ni la courbe de réponse globale ne présentent une dépendance importante du maillage. Nous avons effectué une deuxième analyse sur la dépendance de maillage, en utilisant, trois maillages

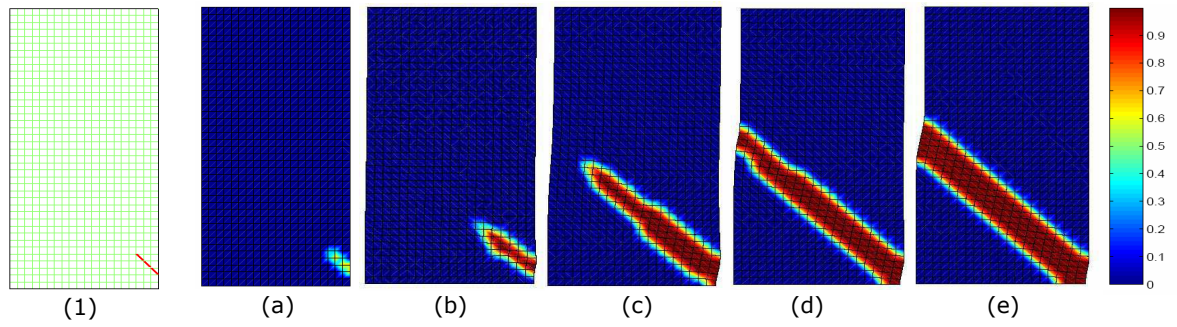


FIG. 1.20 – Formation d'une bande localisée d'endommagement en compression : initialisation dans la partie basse de l'échantillon (configuration déformée amplifiée par 10)

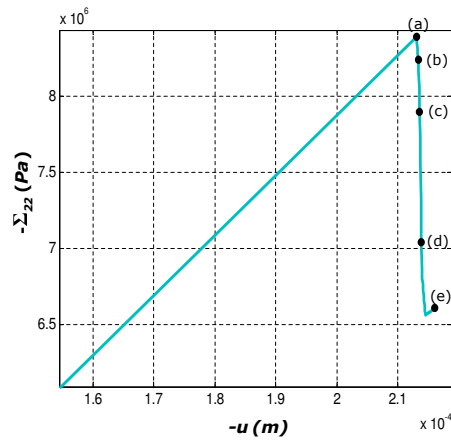


FIG. 1.21 – Courbe de comportement globale contrainte - déplacement dans le cas d'initialisation au bord inférieur, en compression (cas Fig. 1.20)

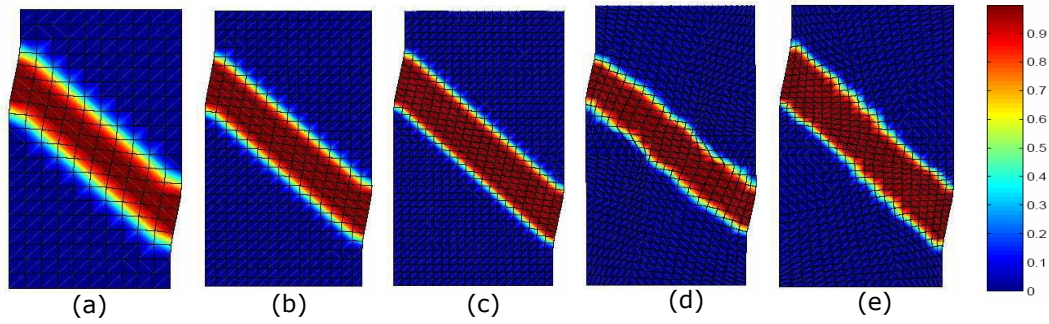


FIG. 1.22 – Dépendance de maillage en compression : zone d'endommagement, pour trois maillages uniformes différents (a) 200, (b) 455, (c) 800 éléments et deux maillages non-uniformes (d-e) (configuration déformée amplifiée par 10).

avec 800 éléments, distribués uniforme ou non-uniforme (Fig. 1.22(c-e)). Nous pouvons constater, encore une fois, que la largeur de la bande ne présente pas une dépendance significative du maillage. Une analyse plus détaillée est nécessaire, avant de tirer une conclusion sur la dépendance de maillage.

Les effets de taille sont, également, présents en compression. La dépendance de la réponse globale en fonction de la longueur microstructurale ε est présentée sur la Fig. 1.24. Ces courbes correspondent à l'initiation avec des macro-fissures, au centre de l'échantillon, décrit antérieurement (Figs. 1.18 and 1.19).

De façon similaire qu'au test en traction, on étudie la sensibilité de la bande localisée, en fonction de la distribution initiale de l'endommagement. Sur la Fig. 1.25 nous montrons l'état initial pour trois essais, pour lesquels, en chaque élément, nous avons supposé $d = 1$. D'un essai à l'autre, le nombre d'éléments qui composent la "fissure" initiale change. Dans ces conditions, nous obtenons différentes largeurs de la bande. Nous avons obtenu un effet similaire à celui en traction : plus nous orientons l'évolution initiale d'endommagement, plus la bande obtenue est localisée.

Nous observons, également, une dépendance importante du mode de déclenchement, lorsque, pour la même longueur de la "macro-fissure" initiale, nous considérons que celle-ci est formée de microfissures de différentes longueurs. En effet, sur la Fig. 1.26 nous pouvons voir différents modes de localisation, qui correspondent aux longueurs initiales ((a) $d(0) = 1$, (b) $d(0) = 0.9$, (c) $d(0) = 0.8$, (d) $d(0) = 0.6$). La signification physique de ce résultat numérique est identique au précédent. Si on oriente la propagation, la distribution d'endommagement sera plus localisée. Dans ce cas-ci, nous notons le passage d'une bande à l'autre et également la formation d'une bande réfléchie.

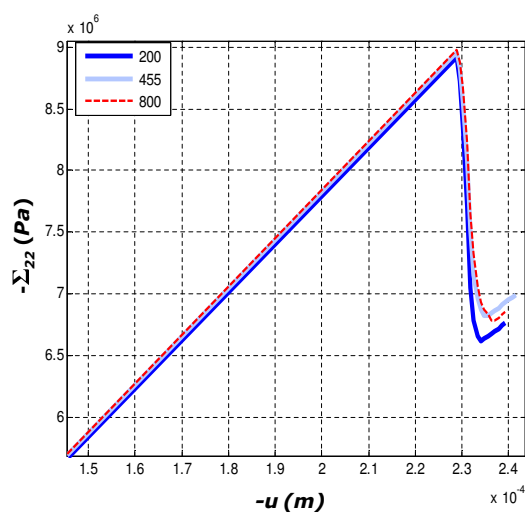


FIG. 1.23 – Dépendance de maillage en compression : courbes de comportement globales (contrainte - déplacement) pour les maillages présentés en fig. 1.22.

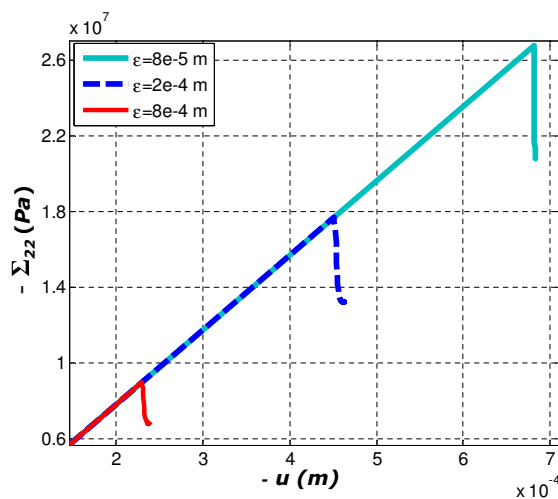


FIG. 1.24 – L'influence de la taille de cellule en compression : courbes de comportement global contrainte - déplacement pour différents valeurs du ϵ .

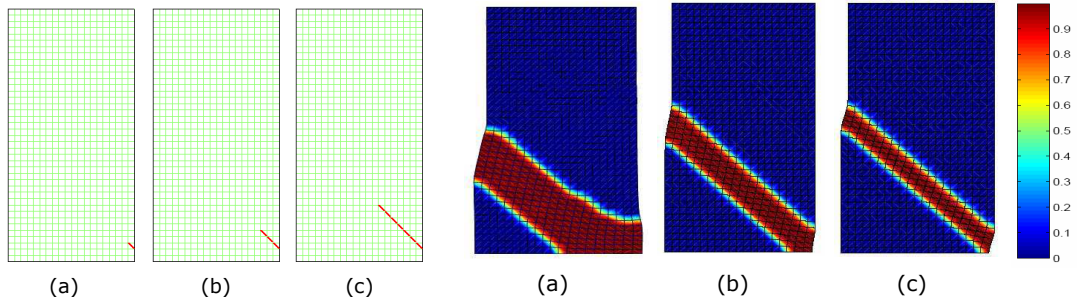


FIG. 1.25 – Influence de la zone "fissure" sur la largeur de la bande de localisation d'endommagement (configuration déformée amplifiée par 10)

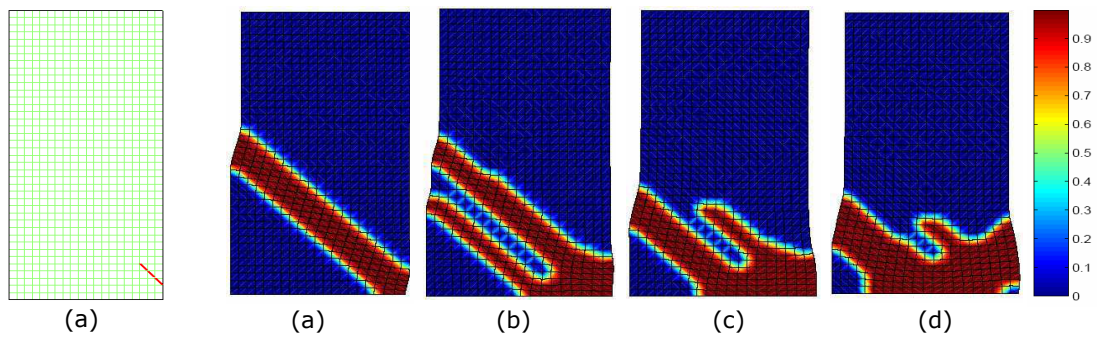


FIG. 1.26 – Influence de la longueur des micro-fissures préexistantes : (a) $d(0) = 1$, (b) $d(0) = 0.9$, (c) $d(0) = 0.8$, (d) $d(0) = 0.6$, dans la même "macro-fissure", sur le mode de localisation d'endommagement (configuration déformée amplifiée par 10)

1.8 Conclusions

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une nouvelle méthode pour construire les modèles micro-mécaniques d'endommagement. La technique d'homogénéisation asymptotique a été utilisée pour déduire la réponse globale d'un corps élastique micro-fissuré. Pour les micro-fissures en évolution, à partir du bilan énergétique microscopique, nous avons obtenu, sans aucune hypothèse phénoménologique, une loi d'évolution d'endommagement. Pour le traitement de la loi d'endommagement, la méthode classique d'homogénéisation avec des développements asymptotiques a été adoptée pour l'analyse énergétique sur une cellule de taille finie.

Le modèle d'endommagement résultant décrit la dégradation du matériau, l'effet de taille, les comportements différents de rupture en traction / compression, l'anisotropie induite. L'effet d'échelle est bien mise en évidence par l'apparition, dans la loi homogénéisée d'endommagement, d'une longueur interne microstructurale. Pour illustrer cette nouvelle approche, le cas de l'endommagement fragile unilatéral a été analysé en détail.

Un schéma numérique, basé sur des approximations d'éléments finis, a été considéré, ainsi que des résultats numériques, en traction uniaxiale et en compression biaxiale, ont été présentés. Des comportements expérimentaux connus, comme la localisation de l'endommagement et la réponse dépendante de la taille de la micro-structure, ont été reproduits avec ce nouveau modèle. Basé sur une description micro-mécanique correcte de la dissipation d'énergie, le modèle ne présente pas une dépendance significative de maillage pour les solutions numériques, localisées, en éléments finis.

Chapitre 2

Modélisation de la macrofissure avec X-FEM

Sommaire

2.1	Introduction	51
2.2	Concept théorique de la méthode d'éléments finis étendus (X-FEM)	52
2.3	Application de la méthode de X-FEM pour le modèle d'endommagement fragile unilatéral. Stratégie de résolution du problème incrémental	54
2.4	Illustrations numériques	55
2.5	Conclusion	59

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons choisi de nous placer dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Dans ce cadre, nous allons développer un modèle d'endommagement fragile unilatéral, grâce à une approche d'homogénéisation asymptotique.

Dans la section 1.6, nous avons présenté une méthode incrémentale de résolution du problème homogénéisé, dans lequel le déplacement macroscopique est calculé, approximativement, par la méthode des éléments finis. Comme il a été déjà mentionné, la loi d'endommagement permet l'initialisation des micro-fissures du moment où l'on part d'un état initial sans défaut.

Dans ce chapitre, nous allons introduire, dans le schéma de calcul incrémental, des discontinuités en déplacement, correspondant aux macro-fissures de chaque élément du maillage macroscopique, pour lequel la cellule micro correspondante est traversée, en quasi-totalité, par une micro-fissure (soit $d > 0.95$). Parmi plusieurs méthodes qui permettent d'introduire une discontinuité dans le maillage (présentées dans la section 4) de l'introduction, nous avons choisi la méthode X-FEM.

Cette méthode, d'introduire une macro-fissure, à l'endroit de localisation micro, par l'approche X-FEM a été utilisé déjà par plusieurs auteurs (voir Comi *et al.* [25], de Borst *et al.* [28], Hettich et Ramm [48]).

Ce chapitre est dédié à la présentation de ce travail. Il est organisé de la manière suivante : dans la section 2.2 nous présentons les concepts théoriques de la méthode de X-FEM. l'application de la méthode pour le modèle d'endommagement unilatéral fragile fait l'objet de la section suivante. Enfin, dans la dernière section, nous donnons quelques exemples numériques.

2.2 Concept théorique de la méthode d'éléments finis étendus (X-FEM)

La méthode des éléments finis étendus, connue sous l'acronyme X-FEM (pour eXtended Finite Element Method), est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture, depuis 1999, grâce aux travaux de Moës et al. [76]. C'est une extension de la méthode des éléments finis, qui permet de modéliser la présence d'un défaut (fissure ou autre) sans le mailler explicitement. Seul le maillage de la structure sans défaut (non fissurée) est nécessaire. Ensuite, la méthode de partition de l'unité, introduite par Melenk et Babuska [72], est utilisée afin d'enrichir l'approximation de l'élément fini standard, par des fonctions additionnelles. Un choix pertinent de l'enrichissement permet de libérer le maillage de son obligation de se conformer aux discontinuités. Cette approche permet de représenter un champ de déplacement discontinu d'une part et d'autre d'une fissure et de prendre en compte le comportement asymptotique du champ des contraintes à sa pointe.

Cette méthode a plusieurs avantages :

- elle est générale et non liée à un comportement particulier du matériau (élastique, plastique, ...)
- l'enrichissement reste valable quelle que soit la dimension du problème et quel que soit le type des éléments utilisés
- la croissance de la fissure ne nécessite aucun remaillage, seule la géométrie de la fissure est nécessaire pour définir les éléments à enrichir.

En quelque sorte, X-FEM étend les possibilités de la méthode éléments finis sans perdre les avantages.

Concrètement, la présence de fissures dans un corps est associée à :

- (i) un champ de déplacement discontinu le long de la fissure
- (ii) un champ de contraintes présentant une singularité en $1/\sqrt{r}$ en pointe de fissure.

Par conséquent, la méthode de X-FEM enrichit l'approximation standard élément fini par des fonctions additionnelles :

- (i) discontinues pour modéliser les discontinuités du champ de déplacement
- (ii) d'autres fonctions pour caractériser le champ asymptotique en pointe de fissure.

Le champ de déplacement est donc considéré comme la somme des deux champs : un champ continu et un discontinu, où l'enrichissement X-FEM se fait localement, près de la fissure. Dans le cadre d'une

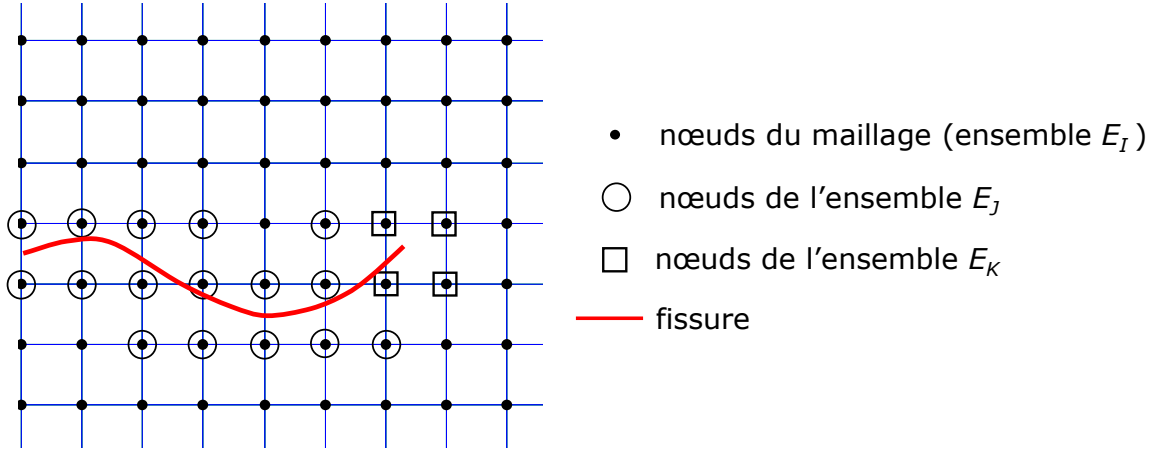


FIG. 2.1 – Description des ensembles E_I , E_J , E_K de l'approximation du champ de déplacement élément fini enrichi

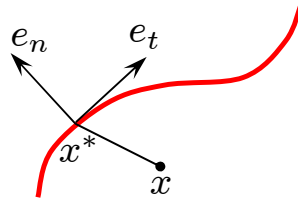


FIG. 2.2 – Illustration du choix de la valeur de $H(x)$

fissure avec un front ponctuel, l'approximation X-FEM du champ de déplacement est la suivante :

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{i \in E_I} u_i N_i(x)}_1 + \underbrace{\sum_{j \in E_J} a_j N_j(x) H(x)}_2 + \underbrace{\sum_{k \in E_K} N_k(x) \left(\sum_{l=1}^4 b_k^l F_l(r, \theta) \right)}_3 \quad (2.1)$$

où :

- le terme 1 correspond à l'approximation élément fini standard avec E_I l'ensemble des nœuds du maillage, u_i et N_i respectivement, les degrés de liberté et la fonction de forme associée au nœud i
- le terme 2 est un enrichissement lié à la discontinuité de la fissure, avec $E_J \subset E_I$ l'ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité, comme indiqué sur la Fig. 2.1, et les coefficients a_i les degrés de liberté supplémentaires, associés à l'utilisation de la fonction discontinue $H(x)$, fonction d'Heaviside généralisée. Les nœuds de E_J sont tels que leur support coupe la fissure mais sans contenir le front.

En considérant Γ_C comme une courbe paramétrique, pour chaque point x du domaine, nous pou-

vons trouver, sur Γ_C , le point le plus proche x^* de x . En ce point, les vecteurs respectivement normal, e_n , et tangentiel, e_t , à la courbe sont construits, tel que $e_t \times e_n = e_z$, où e_z pointant vers l'extérieur de la page, comme c'est indiqué sur la Fig. 2.2. La fonction $H(x)$ est alors donnée par l'expression suivante :

$$H(x) = \begin{cases} +1, & \text{si } (x - x^*)e_n > 0 \\ -1, & \text{si } (x - x^*)e_n < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

- le terme 3 traduit la singularité des contraintes le long du front. $E_K \subset E_I$ est le sous-ensemble de nœuds dont le support contient ce front, comme indiqué sur la Fig. 2.1, et b_k^l , $l = 1, \dots, 4$, les degrés de liberté correspondants. Les fonctions $F_l(r, \theta)$, $l = 1, \dots, 4$, modélisant le fond de la fissure, sont données en élasticité par :

$$\{F_l(r, \theta)\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2.3)$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires, dans un repère local, lié à la pointe de la fissure.

2.3 Application de la méthode de X-FEM pour le modèle d'endommagement fragile unilatéral. Stratégie de résolution du problème incrémental

Dans la section 1.6.2, nous avons présenté un algorithme incrémental de résolution du problème, dans lequel le champ de déplacement macroscopique est calculé, approximativement, par la méthode d'éléments finis. Ensuite, le calcul d'endommagement est fait, en chaque point d'intégration, par la résolution numérique de l'équation d'endommagement.

Quand la variable d'endommagement, d , calculée préalablement, devient, approximativement, égale à 1, nous proposons d'introduire dans ces éléments une fissure macroscopique. En s'inspirant des techniques de la méthode de X-FEM, nous allons enrichir les degrés de liberté des nœuds, qui forment ces éléments par des fonctions contenant des discontinuités.

L'algorithme présenté dans la section 1.6.2 reste valable, à l'exception du pas no. 3 ("*Calcul incrémental des déplacements (u^{n+1}) et des déformations avec les coefficients homogénéisés du pas précédent $C_{ijkl}(d_e^n)$ par la méthode de Newton*"), qui sera remplacé par l'implémentation numérique de la méthode de X-FEM dans l'algorithme suivant :

Implémentation numérique de la méthode de X-FEM

- 3.1. Sélection des éléments à enrichir (éléments qui ont $(d_e^n) > 0.95$)
- 3.2. Sélection des nœuds à enrichir et de la direction d'enrichissement (donnée par l'orientation de la micro-fissure)
- 3.3. Augmentation du nombre des degrés de liberté par nœuds concernés
- 3.4. Analyse géométrique de la discontinuité, partition d'éléments, détermination des coordonnées des nouveaux points d'intégration, enrichissement des fonctions de forme
- 3.5. Calcul de la matrice de rigidité et du vecteur des forces en utilisant les coefficients homogénéisés du pas précédent $C_{ijkl}(d^n)$
- 3.6. Résolution du problème $(u_i^{n+1}, i \in E_I \text{ et } a_j^{n+1}, j \in E_J)$
- 3.7. Calcul des déformations e_x^{n+1}

Par la suite nous considérons des chargements simples, qui conduisent à des rupture en Mode I. Le comportement dans un élément est donné par les calculs effectués dans la cellule associée à un seul point de Gauss. Une fois que cette cellule est traversée par une micro-fissure, nous considérerons une macro-fissure qui traverse l'élément macro correspondant. Le seul type d'enrichissement utilisé, ici, se fait par la discontinuité, avec des fonction de type Heaviside, c'est à dire que dans la fonction de déplacement donnée par la relation 2.1 nous considérons seulement les deux premiers termes.

Notre objectif est, uniquement, d'illustrer l'approche qui mène jusqu'à la rupture macroscopique, sans entrer dans les détails d'implémentation X-FEM. Une telle étude sera l'objet de futures recherches.

2.4 Illustrations numériques

Dans ce paragraphe nous présentons trois exemples numériques qui montrent l'apparition et la propagation des fissures macroscopiques.

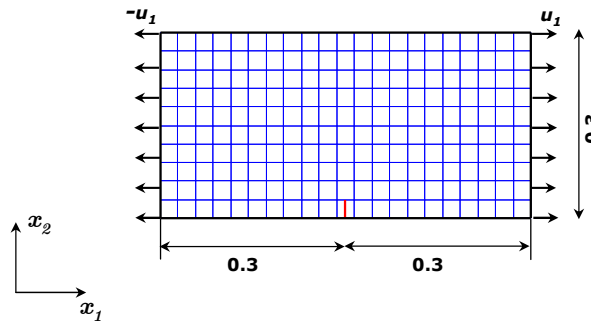


FIG. 2.3 – Géométrie et chargement pour l'essai de traction uniaxiale

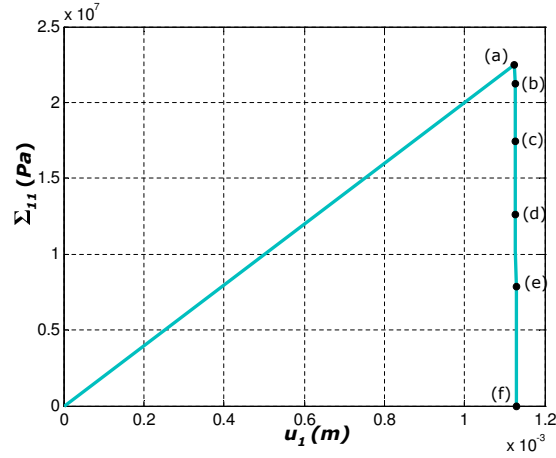


FIG. 2.4 – Contrainte globale vs. déplacement appliquée, en traction.

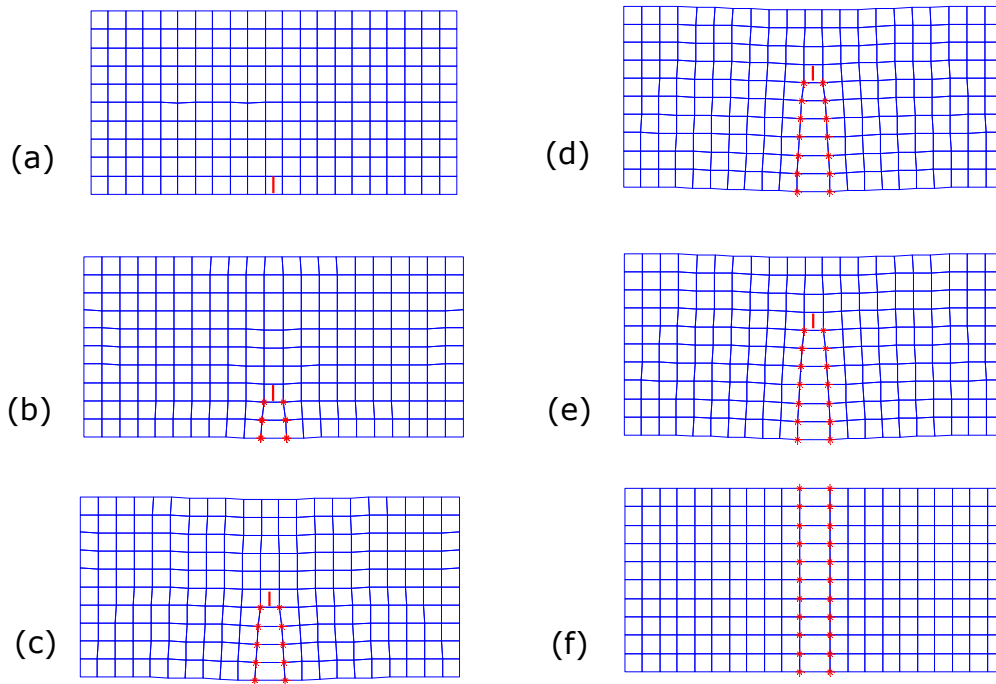


FIG. 2.5 – Configuration déformée (amplifiée par 10) pour différentes étapes de rupture en traction uniaxiale.

Le premier modèle numérique utilisé est illustré dans la Fig. 2.3. Il représente une structure simple avec une micro-fissure initialisée dans un élément situé à la frontière latérale, à mi-longueur d'échantillon. Un chargement de traction uniaxiale est appliqué sur les bords latéraux, de manière à favoriser

l'ouverture des micro-fissures en Mode I, ce qui a pour conséquence l'évolution d'endommagement.

L'état de déformations planes est considéré et les principaux paramètres du modèle sont :

- dimensions : 0.6×0.3 m
- les constantes de matériau élastique : $E = 2e9$ Pa, $\nu = 0.3$
- l'énergie de la rupture 100 J/m²
- la taille de cellule élémentaire $\epsilon = 8e - 4$ m
- le chargement appliqué est un déplacement, u_1 , imposé incrémental dans la direction x_1 .
- le maillage possède 21 éléments dans la direction x_1 et 11 éléments dans la direction x_2 .

Dans la Fig. 2.4, nous avons représenté la contrainte globale sur l'échantillon, en fonction du déplacement appliqué. On remarque un adoucissement brutal, correspondant au caractère fragile de l'endommagement.

Dans la Fig. 2.5, nous avons représenté la configuration déformée, amplifiée par 10, pour plusieurs états successifs de la rupture. Sur cette figure, on peut voir, clairement, la propagation de la discontinuité du champ de déplacement, au niveau de la macro-fissure.

Le deuxième exemple proposé est un test de flexion en trois points. La géométrie, les conditions aux limites considérés et le maillage utilisé sont donnés dans la Fig. 2.6. Les paramètres de matériau sont les mêmes que pour le test en traction.

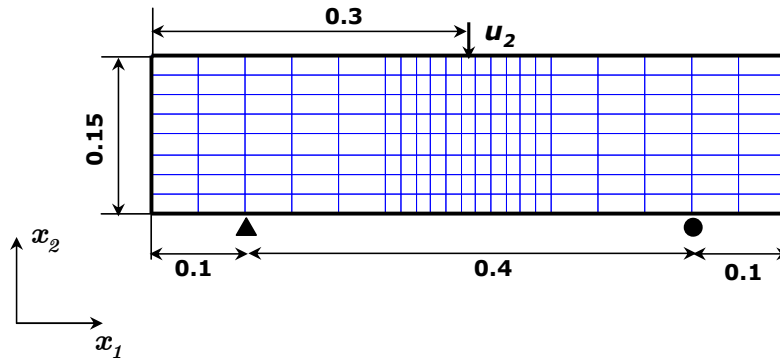


FIG. 2.6 – Géométrie et chargement pour un essai en flexion

Une observation importante est que, dans cet exemple nous partons d'un état initial sans micro-fissures, ni défaut macroscopique. Dès lors, on peut voir que le modèle d'endommagement est capable de décrire l'initialisation des micro-fissures. Ensuite, l'endommagement évolue et conduit à l'apparition (si la longueur de la micro-fissure est plus grande que 0.95) et la propagation d'une macro-fissure. Comme pour le premier exemple, nous présentons une série d'états successifs de rupture et leurs positions correspondantes sur la courbe contrainte-déplacement.

Le troisième exemple considéré est donnée dans la Fig. 2.9, où nous avons choisi un échantillon contenant une macro-fissure centrale, de longueur 0.012 m et d'épaisseur $1e - 5$ m, orientée à 45° . L'éner-

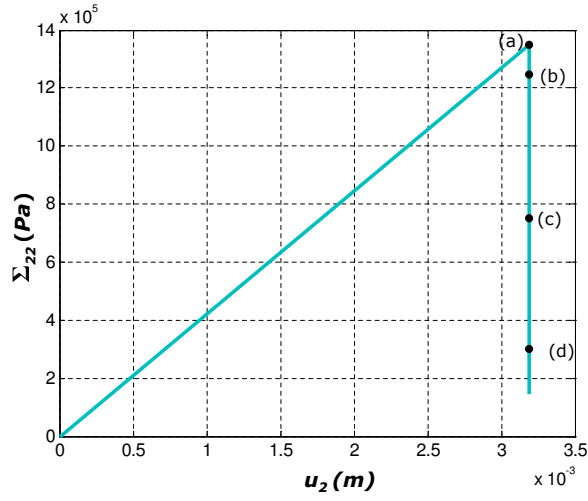


FIG. 2.7 – Contrainte globale vs. déplacement appliquée, en flexion.

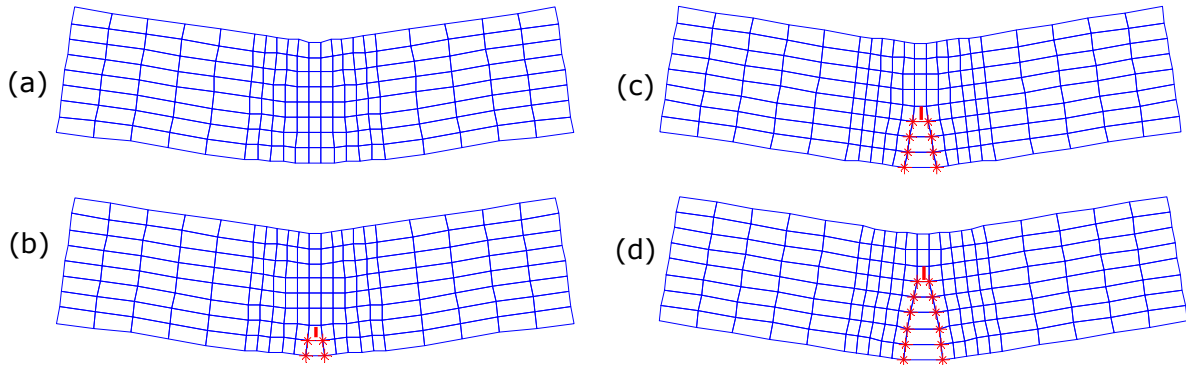


FIG. 2.8 – Configuration déformée (amplifiée par 10) pour différentes étapes de rupture en flexion

gie de rupture est $\mathcal{G}_c = 28 \text{ J/m}^2$ et la taille de cellule élémentaire $\varepsilon = 2.7e - 4 \text{ m}$.

Le chargement donne naissance à une rupture de type "wing", qui se développe, à partir des pointes de la macro-fissure existante. Comme précédemment, dans ce cas, il s'agit d'un mode d'ouverture. La succession des états de propagation des deux macro-fissures est présentée dans les Figs. 2.10 et 2.11.

Nous avons, également, effectué des premiers tests en compression uniaxiale sur la direction x_2 . Dans le cas présent, nous avons retrouvé un mode en "wing", similaire à celui en traction sur x_1 . Cette implémentation est en cours et sera continuée après la rédaction de ce manuscrit.

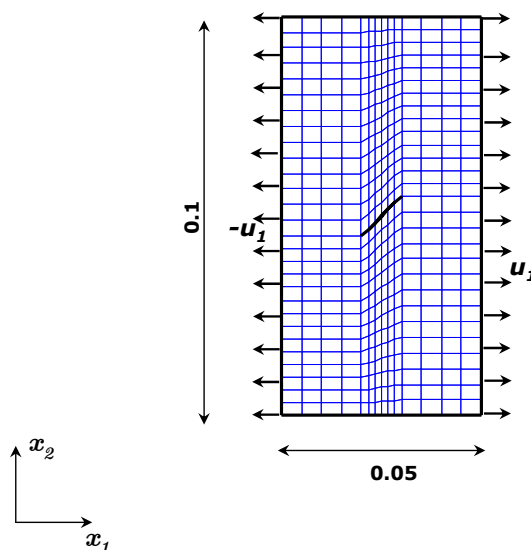


FIG. 2.9 – Échantillon avec macro-fissure et chargement pour une essai de traction uniaxiale

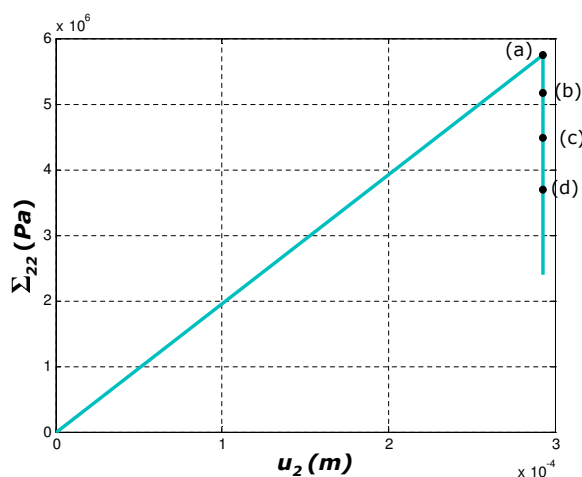


FIG. 2.10 – Contrainte globale vs. déplacement appliquée

2.5 Conclusion

Nous avons montré, dans ce chapitre, comment introduire les discontinuités de rupture macroscopique, à partir de l'information micro-structurale, transmise par le modèle d'endommagement.

Ainsi, nous avons construit un modèle, qui permet la description du processus de détérioration d'un matériau sain en passant par les phases :

- (a) apparition des micro-fissures

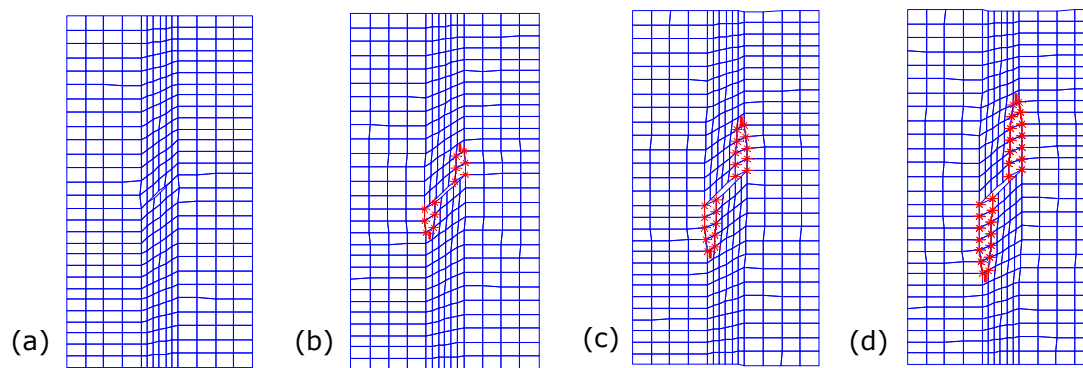


FIG. 2.11 – Configuration déformée (amplifiée par 10) pour différentes étapes de rupture, de l'échantillon avec une macro-fissure, en traction uniaxial

(b) évolution de la zone endommagée

(c) initiation de la macro-rupture

La méthode X-FEM s'est montrée un outil puissant et adapté pour la modélisation numérique de la phase (c).

Notre objectif était, seulement, l'illustration de la méthode sans entrer dans les détails complexes d'implémentation numérique. Cela fera l'objet de recherches futures.

Chapitre 3

Microfissures avec contact unilatéral et frottement de Coulomb

Sommaire

3.1	Introduction	61
3.2	Formulation du problème avec des conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb	62
3.3	Loi de comportement homogénéisée	63
3.4	Loi d'évolution de l'endommagement	66
3.5	Implémentation numérique	70
3.5.1	Le modèle constitutif utilisé	70
3.5.2	Algorithme du code d'éléments finis	71
3.5.3	Calcul des fonctions C_{ijkl} et des intégrales dI_{ijkl}	73
3.5.4	Réponse élémentaire. Etude de la loi homogénéisée	76
3.6	Conclusion	81

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons présenté une loi d'évolution d'endommagement pour un matériau fragile, avec contact unilatéral et sans prise en considération du frottement. Le modèle analytique a été formulé dans des conditions générales sur les bords des microfissures. Les exemples numériques ont été considérés en prenant en compte quatre orientations pour des microfissures rectilignes.

Pour parvenir à un véritable modèle de comportement, susceptible de rendre compte des phénomènes observés expérimentalement, il semble nécessaire de prendre en compte la dissipation liée au frottement

sur les lèvres des microfissures, ainsi que l'endommagement lié à la propagation de ces fissures.

Un modèle d'homogénéisation, dans le cas du contact unilatéral avec du frottement, a été proposé par Andrieux et al. [1] pour modéliser le comportement des matériaux, tels que les bétons et les roches. Une hypothèse importante, faite par ces auteurs, au niveau du problème local, est qu'une fissure est rectiligne et petite, en comparaison avec les dimensions de la cellule de base. Dans ce cas, en utilisant une méthode de moyenne, ils mettent en œuvre un modèle d'endommagement pour retrouver des résultats expérimentaux sur des essais en traction et en compression, sur du béton. Les auteurs proposent une approche par homogénéisation pour le calcul des modules effectifs. Ils obtiennent un lien entre le paramètre d'endommagement et la microstructure.

Un modèle similaire au modèle d'Andrieux et al. a été proposé par Leguillon D. et Sanchez-Palencia E. [66], mais sans propagation des micro-fissures.

Un autre modèle d'homogénéisation d'un solide hyperélastique, contenant des micro-fissures à distribution périodique, en présence de conditions de Signorini, avec frottement, est proposé par Telega [109].

Dans ce chapitre, nous allons reprendre le modèle présenté, au premier chapitre, en prenant en compte les conditions de Signorini, avec frottement de Coulomb sur des fissures rectilignes. Après la description du problème, nous déduisons par homogénéisation une loi de comportement macroscopique et une loi d'évolution d'endommagement. Dans le dernier paragraphe, nous présentons la réponse locale du matériau homogène, obtenu pour des sollicitations "simples" imposées.

3.2 Formulation du problème avec des conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb

Nous allons considérer un milieu élastique isotrope, comprenant un grand nombre de micro-fissures à distribution localement périodique. Le domaine peut donc être recouvert par un ensemble de cellules périodiques, contenant chacune une fissure (voir Fig. 1.1). Nous supposons que les microfissures sont lisses et de longueur d^ε . La longueur d^ε est dépendante du temps t et elle peut être différente d'une fissure à l'autre.

Nous notons avec \mathcal{B} le domaine ouvert de \mathbb{R}^2 , de frontière régulière, contenant \mathcal{N} microfissures $\mathcal{C}_n, n = 1, \dots, \mathcal{N}$. La partie occupée par le matériau est $\mathcal{B}_s = \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$, où $\mathcal{C} = \cup_{n=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{C}_n$. Avec les notations utilisées au Chapitre 1, en repère orthonormé, les champs de contrainte σ^ε , de déformation \mathbf{e}_x et de déplacement \mathbf{u}^ε vérifient en tout point de \mathcal{B}_s les relations (1.1) - (1.4). Sur la fissure, si elle est ouverte, on a la condition de contrainte nulle, donnée par la relation (1.5). Lorsque la fissure est fermée, nous adoptons des conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb.

La condition de contact unilatéral est exprimée par les relations suivantes :

$$[\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N}] = 0 ; \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} < 0 ; [\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{N}] = 0 \quad (3.1)$$

où \mathbf{N} est le vecteur normal unitaire, \mathbf{T} le vecteur tangent unitaire à la fissure et $[\cdot]$ le saut à travers les lèvres de la fissure.

En notant μ_f le coefficient du frottement, les conditions de frottement de Coulomb sont :

$$\begin{aligned} \text{Si } |\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N}| &< -\mu_f \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} & \text{alors } d[\mathbf{u}^\varepsilon \mathbf{T}]/dt &= 0 \\ \text{Si } |\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N}| &= -\mu_f \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} & \text{alors } \exists \Lambda \geq 0 \text{ tel que } d[\mathbf{u}^\varepsilon \mathbf{T}]/dt &= \Lambda \text{ sign}(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cette condition représente deux situations physiques, qui sont le collement ou l'adhérence ("*stik*") quand $d[\mathbf{u}^\varepsilon \mathbf{T}]/dt = 0$ et le glissement ("*slip*"), quand $d[\mathbf{u}^\varepsilon \mathbf{T}]/dt \neq 0$.

3.3 Loi de comportement homogénéisée

Le volume élémentaire représentatif du matériau est constitué d'une cellule carrée unitaire Y avec une fissure CY . Ainsi, nous notons par $Y_s = Y \setminus CY$ la partie solide, comme dans la section 1.3 (voir Fig. 1.2).

Dans la section 1.3 nous avons traité le cas de la fissure ouverte ; dans ce paragraphe nous supposons que la fissure est fermée. En utilisant les développements asymptotiques de \mathbf{u}^ε et $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$, donnés par (1.9) et (1.10), on obtient les équations d'équilibre et les relations constitutives pour différentes puissances de ε sous la forme (1.11), (1.12) respectivement. Les conditions sur la fissure pour différentes puissances de ε , ($m = -1, 0$ ou 1) sont :

$$[T_i \sigma_{ij}^{(m)} N_j] = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{Si } |T_i \sigma_{ij}^{(m)} N_j| < -\mu_f N_i \sigma_{ij}^{(m)} N_j \quad \text{alors } d[u_i^{(m)} T_i]/dt = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{Si } |T_i \sigma_{ij}^{(m)} N_j| = -\mu_f N_i \sigma_{ij}^{(m)} N_j \quad \text{alors } d[u_i^{(m)} T_i]/dt \neq 0 \quad (3.5)$$

En utilisant les relations précédentes pour l'ordre (-1) de ε , nous obtenons le problème (1.15) - (1.16) aux limites pour $\mathbf{u}^{(0)}$. L'ordre (0) donne, alors, le problème suivant, pour la fonction $\mathbf{u}^{(1)}$:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) = 0, \quad \text{dans } Y_s \quad (3.6)$$

$$[a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) N_j] = -[a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j], \quad \text{sur } CY \quad (3.7)$$

$$N_i a_{ijkl} (e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})) N_j < 0, \quad \text{sur } CY \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} T_i a_{ijkl} (e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})) N_j = \\ \mu_f N_i a_{ijkl} (e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})) N_j \text{ sign}([u_i^{(1)} T_i]) \quad \text{sur } CY \end{aligned} \quad (3.9)$$

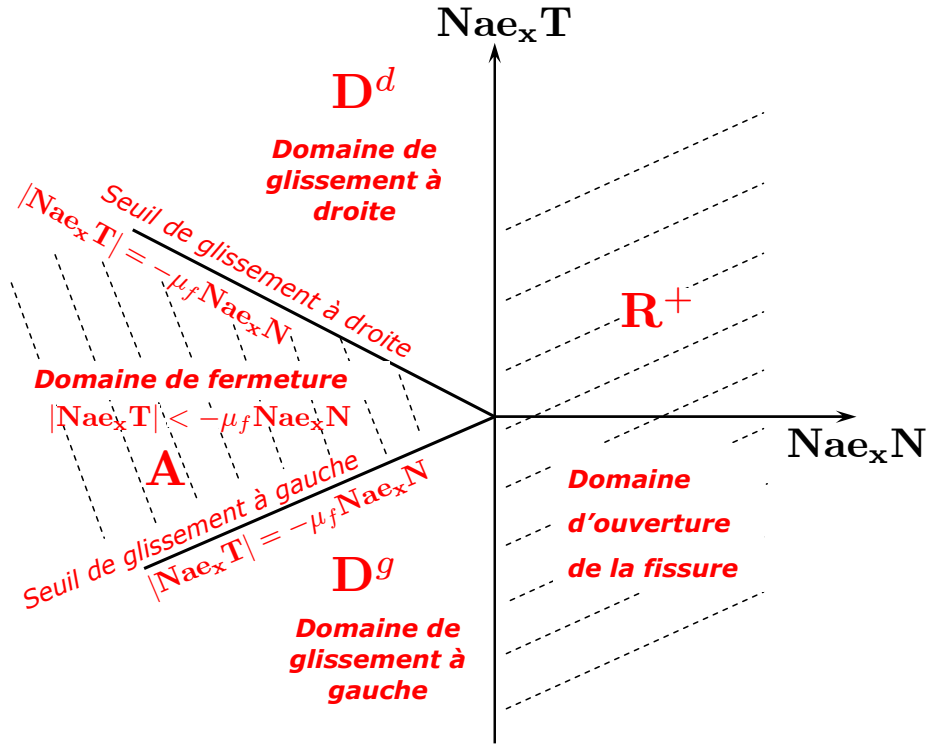


FIG. 3.1 – Domaine de linéarité

La relation (3.9) n'est possible que si on vérifie les conditions de Coulomb (3.2). De plus, la présence de $\text{sign}([u_i^{(1)} T_i])$ dans la relation (3.9), implique que la solution n'a pas une dépendance linéaire en $\mathbf{u}^{(1)}$. Nous déduisons ainsi l'existence des trois domaines convexes de linéarité de l'espace \mathbf{e}_x définis par :

$$\mathbf{R}^+ = \left\{ \mathbf{e}_x \mid N_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j > 0 \right\} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{D}^d = \left\{ \mathbf{e}_x \mid N_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j < 0 \text{ et } T_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j > 0 \right\} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{D}^g = \left\{ \mathbf{e}_x \mid N_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j < 0 \text{ et } T_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j < 0 \right\} \quad (3.12)$$

dont le point \mathbf{e}_x ne peut pas sortir. Pour faire plus facilement référence à chaque sous-domaine, on les appellera par :

- \mathbf{R}^+ le domaine de linéarité pour une fissure ouverte
- \mathbf{D}^d le domaine de glissement à droite
- \mathbf{D}^g le domaine de glissement à gauche
- $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}^d \cup \mathbf{D}^g$ le domaine d'adhérence, pour le cas des fissures fermées.

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{e}_x \mid N_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j < 0 \text{ et } |T_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j| < -\mu_f N_i a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j \right\}$$

Ces différentes situations sont illustrées dans la Fig. 3.1. Dans chaque domaine, la solution $\mathbf{u}^{(1)}$ peut être écrite comme une fonction linéaire de \mathbf{e}_x . On peut remarquer que les trois domaines, ainsi définis, ne font

intervenir que des grandeurs macroscopiques. Ce qui nous permet de décrire le comportement sur une micro-fissure, seulement, par la déformation macroscopique $\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})$.

Si on choisit un système de générateurs \mathbf{E}^{pq} des déformations macroscopiques fondamentales pour chaque domaine, alors la déformation macroscopique \mathbf{e}_x s'écrit comme une combinaison linéaire de ces éléments sous la forme :

$$\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) = \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) \mathbf{E}^{pq} \quad (3.13)$$

où α_{pq} , avec p et q fixés, sont fonctions linéaires de $\mathbf{u}^{(0)}$. Si le vecteur $\boldsymbol{\eta}^{pq}$ est la solution particulière, correspondant à $e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) = E_{ij}^{pq}$, p et q fixés, la solution de (3.6)-(3.8) s'écrit :

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\eta}^{pq}(\mathbf{y}) \alpha_{pq}(\mathbf{x}, t) \quad (3.14)$$

Le problème (3.6) - (3.9) est équivalent au problème sur la cellule, écrit en $\boldsymbol{\eta}^{pq}$, sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq})) = 0, \quad \text{dans } Y_s \quad (3.15)$$

$$[a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) N_j] = -[a_{ijkl} E_{kl}^{pq} N_j], \quad \text{sur } CY \quad (3.16)$$

$$N_i a_{ijkl} (e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) + E_{kl}^{pq}) N_j < 0, \quad \text{sur } CY \quad (3.17)$$

$$T_i a_{ijkl} (e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) + E_{kl}^{pq}) N_j = \pm \mu_f N_i a_{ijkl} (e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) + E_{kl}^{pq}) N_j \quad \text{sur } CY \quad (3.18)$$

où les signes \pm en relation (3.18) sont associés avec le sens de glissement respectivement $+$ quand $\mathbf{E}^{pq} \in \mathbf{D}^d$ et $-$ pour $\mathbf{E}^{pq} \in \mathbf{D}^g$.

Dans la section 1.3 nous avons que la loi de comportement macroscopique s'obtient, en appliquant, l'opérateur de moyenne (1.26) pour $\sigma_{ij}^{(0)}$.

$$\Sigma_{ij}^{(0)} \equiv \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle$$

ou encore

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = \int_{Y_s} (a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) dy$$

Lorsque la fissure est fermée, il faut analyser séparément, l'adhérence et le glissement.

Dans le cas du glissement, nous avons vu que nous pouvons choisir des déformations macroscopiques fondamentales, dans chaque domaine de linéarité (3.13), tel que la solution $\mathbf{u}^{(1)}$ soit de la forme (3.14) et donc :

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = \int_{Y_s} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) dy \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (3.19)$$

ou écrit sous la forme

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijmn}^\alpha \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (3.20)$$

où

$$C_{ijmn}^\alpha = \int_{Y_s} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) dy \quad (3.21)$$

En regroupant les termes, nous pouvons écrire (3.20)

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijmn} e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (3.22)$$

où C_{ijmn} sont obtenus comme une combinaison de C_{ijmn}^α . Nous devons remarquer que les valeurs de C_{ijmn} dépendent des domaines \mathbf{D}^d , \mathbf{D}^g et \mathbf{R}^+ .

Dans le cas d'adhérence, la condition $d[\mathbf{u}^\varepsilon \mathbf{T}]/dt = 0$ indique que nous n'avons plus d'évolution sur la micro-fissure. On peut, alors, voir, facilement, que

$$\int_{Y_s} a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) dy = \frac{1}{2} a_{ijkl} \int_{CY} \left([u_k^{(1)}] N_l + [u_l^{(1)}] N_k \right) ds_y$$

Si on tient compte que $[u_m^{(1)} N_m] = 0$, cela implique que $[u_k^{(1)}] = [u_m^{(1)} T_m] T_k$. De fait, on obtient la loi de comportement dans le cas d'adhérence

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{kl}^p(\mathbf{u}^{(1)})) \quad (3.23)$$

avec

$$e_{kl}^p(\mathbf{u}^{(1)}) = \frac{1}{2} (T_k N_l + T_l N_k) \int_{CY} [u_m^{(1)} T_m] ds_y \quad (3.24)$$

où on rappelle que \mathbf{N} et \mathbf{T} désignent les vecteurs unitaires, respectivement normal et tangent à la fissure. Cette dernière composante de la déformation représente la partie non élastique.

Remarques :

- (1) Le premier terme dans l'expression du C_{ijkl}^α n'est pas symétrique dans tous les cas. La symétrie dépend du système de générateurs choisi. Cette propriété est transmise aussi pour C_{ijkl} , quand ils sont considérés sur un seul sous-domaine. Cependant, les coefficients globaux, comprenant ceux calculés sur \mathbf{D}^d , \mathbf{D}^g et \mathbf{R}^+ , restent symétriques.
- (2) Dans le domaine à fissure ouverte, nous avons un comportement élastique, réversible, tant que la fissure ne se propage pas.
- (3) Lorsque la fissure est en adhérence, après une propagation, le comportement homogénéisé inclut un glissement permanent au long de la fissure.

3.4 Loi d'évolution de l'endommagement

Nous distinguons le cas de la fissure ouverte de celui de la fissure fermée.

Dans le cas des *fissures ouvertes*, nous avons vu que la loi d'évolution d'endommagement est donné par la relation (1.53)

$$\left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) + \frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon} \right) \dot{d} = 0 \quad (3.25)$$

où $C_{ijkl}(d)$ sont les coefficients symétriques, calculés en traction (voir section 1.3).

Pour le cas des *fissures fermées*, si nous tenons compte des conditions de frottement de Coulomb, on doit faire la différence entre l'adhérence et le glissement. Quand le seuil de glissement n'est pas atteint, sur une fissure pré-existante, alors il n'y a pas de glissement ou d'endommagement.

Dans le cas avec glissement, nous pouvons avoir une propagation de la fissure. Il est donc nécessaire que le glissement évolue pour que l'endommagement s'accroisse.

La loi d'évolution d'endommagement, en section 1.5, a été déduite, en utilisant la condition générale (1.34) et les déformations macroscopiques fondamentales, écrites sous la forme $E_{ij}^{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Dans ce cas de glissement, l'égalité (1.42), écrite en termes de \mathbf{e}_x et $\mathbf{u}^{(1)}$, est encore valable. Si on exprime en cette relation \mathbf{e}_x et $\mathbf{u}^{(1)}$ en termes de \mathbf{E}^{pq} , et les solutions caractéristiques $\boldsymbol{\eta}^{pq}$, nous pouvons déterminer la loi d'endommagement. De plus, comme les déformations \mathbf{E}^{pq} sont choisies dans un domaine de linéarité, on tient compte, de cette façon, des deux sens de glissement.

On réécrit l'égalité (1.42) sous une forme équivalente :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy - \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy + \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [u_i^{(1)}] ds_y - \\ & \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y + \mathcal{G}_y \dot{d} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nous allons exprimer chaque intégrale de la relation (3.26), en fonction des \mathbf{E}^{pq} et $\boldsymbol{\eta}^{pq}$, tout en utilisant 3.13 et 3.14, respectivement.

Les deux premières intégrales donnent :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy - \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{xkl}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) e_{yij}(\mathbf{u}^{(1)}) dy = \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} E_{kl}^{mn} e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) - \\ & \frac{1}{2} \int_{Y_s} a_{ijkl} E_{kl}^{mn} e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy (\alpha_{mn}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) - \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)})) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dans cette relation, nous allons exprimer l'intégrale $\int_{Y_s} a_{ijkl} e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy$ en deux modes différents. D'abord, si on tient compte de la symétrie du tenseur élastique, l'expression (3.21) implique la forme équivalente suivante :

$$\int_{Y_s} a_{klij} e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy = C_{klpq}^\alpha - a_{klij} E_{ij}^{pq}$$

comme le seul terme dépendant de t est C_{klpq}^α , la première intégrale du membre de droite devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} a_{ijkl} E_{kl}^{mn} e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) = \frac{1}{2} \frac{dC_{klpq}^\alpha}{dt} E_{kl}^{mn} \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}). \quad (3.28)$$

La deuxième intégrale, peut être transformée en une intégrale sur la frontière. On peut voir facilement que si on tient compte de la symétrie du tenseur élastique et des conditions de périodicité sur la frontière extérieure que

$$\int_{Y_s} a_{klij} e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy = \int_{CY} a_{ijkl} [\eta_i^{pq}] N_j ds_y$$

d'où l'on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{Y_s} a_{ijkl} E_{kl}^{mn} e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy (\alpha_{mn}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) - \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)})) = \\ \frac{1}{2} \int_{CY} a_{ijkl} E_{kl}^{mn} [\eta_i^{pq}] N_j ds_y (\alpha_{mn}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) - \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)})) \end{aligned} \quad (3.29)$$

La troisième intégrale devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [u_i^{(1)}] ds_y = \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\eta_i^{pq}] ds_y \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \\ \frac{1}{2} \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\eta_i^{pq}] ds_y (\alpha_{mn}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)})) \end{aligned} \quad (3.30)$$

La quatrième intégrale peut être évaluée sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{CY} \left(a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) N_j [\dot{u}_i^{(1)}] ds_y = \\ \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\dot{\eta}_i^{pq}] ds_y \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \\ \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\dot{\eta}_i^{pq}] ds_y \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Les expressions obtenues (3.28), (3.29), (3.30) et (3.31) en (3.26) donnent :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \frac{dC_{klpq}^\alpha}{dt} E_{kl}^{mn} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\eta_i^{pq}] ds_y - \right. \\ \left. \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\dot{\eta}_i^{pq}] ds_y \right) \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \\ \frac{1}{2} \int_{CY} a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}) N_j [\eta_i^{pq}] ds_y (\alpha_{mn}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) - \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)})) + \\ \mathcal{G}_y \dot{d} = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dès lors, nous avons obtenu une loi d'évolution d'endommagement écrite sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \frac{dC_{klpq}^\alpha}{dt} E_{kl}^{mn} + I_{mnpq}^\alpha \right) \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \\ S_{mnpq}^\alpha (\alpha_{mn}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) - \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\dot{\mathbf{u}}^{(0)})) + \mathcal{G}_y \dot{d} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

où

$$I_{mnpq}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\eta_i^{pq}] ds_y - \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j [\dot{\eta}_i^{pq}] ds_y \quad (3.34)$$

$$S_{mnpq}^\alpha = \frac{1}{2} \int_{CY} a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}) N_j [\eta_i^{pq}] ds_y \quad (3.35)$$

Remarque :

Nous allons, à présent, donner un résultat concernant la **symétrie** du tenseur S_{mnpq}^α .

Il est évident qu'une partie de la symétrie est vérifiée :

$$S_{mnpq}^\alpha = S_{nmpq}^\alpha = S_{mnqp}^\alpha$$

Intéressons-nous à la démonstration de

$$S_{mnpq}^\alpha = S_{pqmn}^\alpha$$

L'idée est de transformer les expressions du S_{pqmn}^α , de manière à obtenir une formule symétrique. Nous allons considérer, successivement,

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) = 0 \quad \text{dans } Y_s$$

en multipliant par $\boldsymbol{\eta}^{pq}$ et en intégrant par parties, on aboutit à

$$\int_{CY} a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}) N_j[\eta_i^{pq}] ds_y = \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}) e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) dy \quad (3.36)$$

puis, on multiplie par $\boldsymbol{\eta}^{mn}$ l'expression

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq})) = 0 \quad \text{dans } Y_s$$

et l'intégration par parties donne

$$\int_{CY} a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) N_j[\eta_i^{mn}] ds_y = \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{mn}) dy \quad (3.37)$$

La symétrie du produit scalaire et du tenseur d'élasticité permet d'écrire :

$$2S_{mnpq}^\alpha = 2S_{pqmn}^\alpha = \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) e_{yij}(\boldsymbol{\eta}^{mn}) dy.$$

Ceci achève la démonstration de la symétrie du tenseur S_{mnpq}^α .

Ce résultat indique que le deuxième terme dans la loi d'évolution d'endommagement, donné par (3.33), s'annule, et la loi devient :

$$\dot{d} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{dC_{klpq}^\alpha}{dt} E_{kl}^{mn} + dI_{mnpq}^\alpha \right) \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \mathcal{G}_y \right) = 0 \quad (3.38)$$

où dI_{mnpq}^α est donné par

$$dI_{mnpq}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{dd} \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j[\eta_i^{pq}] ds_y - \int_{CY} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) N_j \left[\frac{d\eta_i^{pq}}{dd} \right] ds_y \quad (3.39)$$

Nous remarquons que cette forme met en évidence la contribution du frottement, par rapport à la loi d'évolution d'endommagement, donnée par (1.48-1.49), en section 1.5.

3.5 Implémentation numérique

Dans cette section, nous allons présenter la résolution numérique du problème homogénéisé, avec frottement, par la méthode d'élément fini. Dans le paragraphe 3.5.1 nous réécrivons le modèle constitutif, développé dans les sections 3.3 - 3.4, suivi d'un algorithme d'élément fini, pour résoudre ce système.

Pour un matériau élastique et isotrope, défini par les constantes de Lamé (le module d'Young, $E = 2e9$ MPa, et le coefficient de Poisson, $\nu = 0.3$), contenant un grand nombre de microfissures, nous faisons une analyse pour différentes valeurs du coefficient de frottement $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.3$, $\mu_f = 0.5$, respectivement.

Dans le paragraphe 3.5.3, nous présentons le chemin analytique du calcul des coefficients et des intégrales. Ensuite, nous illustrerons, comparativement, les fonctions $C_{ijkl}(d)$ et $I_{ijkl}(d)$, pour différentes valeurs de coefficient de frottement. Ces fonctions sont utilisées, ultérieurement, dans le paragraphe 3.5.4, dans la loi de comportement homogénéisé, utilisée pour étudier la réponse d'une cellule unitaire, soumise à des chargements "simples".

3.5.1 Le modèle constitutif utilisé

Nous avons vu, dans la section précédente, que le problème homogénéisé que nous cherchons à résoudre, est donné par le système d'équations :

- la loi de comportement homogénéisé :
 - si on se trouve dans le domaine de la fissure ouverte ou dans le cas de glissement de la fissure

$$\Sigma_{ij} = C_{ijmn}^{\alpha} \alpha_{mn} \quad \text{avec} \quad C_{ijmn}^{\alpha} = \int_{Y_s} (a_{ijkl} E_{kl}^{mn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn})) \, dy \quad (3.40)$$

ou, en regroupant les termes, on a :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijmn} e_{xmn} \quad \text{avec} \quad C_{ijmn} = \int_{Y_s} (a_{ijmn} + a_{ijkl} e_{ykl}(\boldsymbol{\xi}^{mn})) \, dy \quad (3.41)$$

ou $\boldsymbol{\xi}^{mn}$ sont déterminés en fonction de $\boldsymbol{\eta}^{mn}$.

- si la fissure est dans le domaine d'adhérence

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^{(0)} &= a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{kl}^p(\mathbf{u}^{(1)})) \\ \text{avec } e_{kl}^p(\mathbf{u}^{(1)}) &= \frac{1}{2} (T_k N_l + T_l N_k) \int_{CY} [u_m^{(1)} T_m] \, ds_y \end{aligned} \quad (3.42)$$

- l'équation d'équilibre

$$\text{div } \Sigma_{ij} = 0 \quad (3.43)$$

- loi d'évolution d'endommagement

$$\dot{d} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{dC_{klpq}^{\alpha}}{dt} E_{kl}^{mn} + dI_{mnpq}^{\alpha} \right) \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \mathcal{G}_y \right) = 0 \quad (3.44)$$

sous une forme équivalente, en regroupant les termes, nous avons :

$$\dot{d} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{dC_{klpq}}{dt} + dI_{mnpq} \right) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) + \mathcal{G}_y \right) = 0 \quad (3.45)$$

– Condition d'irréversibilité par endommagement

$$\dot{d} \geq 0 \quad (3.46)$$

Remarque : Comme on est intéressé par le comportement macroscopique local en appliquant des déformations simples, pour avoir une écriture simplifiée au niveau macroscopique, on a choisi de calculer C_{ijmn} et dI_{ijmn} , plutôt que de calculer C_{ijmn}^α et dI_{ijmn}^α .

3.5.2 Algorithme du code d'éléments finis

Pour résoudre le système (3.40 - 3.46) nous utiliserons comme, dans le premier chapitre, la méthode des éléments finis pour déterminer les déplacements macroscopiques. Le principe de calcul est le même, nous utilisons des éléments bilinéaires quadrilatéraux, à un seul point de Gauss, pour le calcul de l'endommagement.

Algorithme du code d'éléments finis

1. Début
2. Initialisation des données et calcul des coefficients homogénéisés :
 - $n = 1$
 - dans chaque élément on considère un point de gauss où on initialise d_e^1 , $e=1$, n_{elem}
 - calcul de $C_{ijkl}(d_e^1)$
3. Calcul incrémental des déplacements (u^{n+1}) et de déformations \mathbf{e}_x^{n+1} avec les coefficients homogénéisés du pas précédent $C_{ijkl}(d_e^n)$ par la méthode de Newton.
4. Résolution de l'équation d'endommagement pour obtenir d_e^{n+1} en chaque élément
 - Si il y a déjà une fissure, on garde l'orientation :
 - vérification de l'état de traction/ adhérence/ glissement à droite/ glissement à gauche ($\mathbf{e}_x \in \mathbf{R}^+$ ou \mathbf{A} ou \mathbf{D}^d ou \mathbf{D}^g respectivement)
 - calcul de $d_e^{n+1} \in [d_e^n, 1]$ en résolvant l'équation (3.45) par la méthode de dichotomie, avec les coefficients homogénéisés calculés dans le domaine correspondant, si $\mathbf{e}_x \in \mathbf{R}^+$ ou \mathbf{D}^d ou \mathbf{D}^g
 - $d_e^{n+1} = d_e^n$ et \mathbf{e}^p est calculé avec $[\mathbf{u}^{(1)}]_e^n$ si la fissure se trouve dans l'état d'adhérence
 - Sinon, boucle sur toutes les orientations considérées
 - vérification de l'état de traction/adhérence/glissement à droite ou à gauche de la fissure
 - calcul de $d_e^{n+1} \in [d_e^n, 1]$ si on se trouve dans un état où la fissure peut évoluer, en fonction de chaque orientation de la fissure
 - $d_e^{n+1} = 0$ si la fissure se trouve dans l'état d'adhérence
 - choix de la longueur plus importante de la fissure et on maintient son orientation
5. Calcul des coefficients homogénéisés $C_{ijkl}(d_e^{n+1})$ et calcul des contraintes (formule (3.41) si on a une évolution possible de la fissure, ou formule (3.42) si la fissure est collée).
6. Si $n < n_{max}$, $n = n + 1$ et retour au point 3, sinon aller à 7.
7. Fin

3.5.3 Calcul des fonctions C_{ijkl} et des intégrales dI_{ijkl}

Dans ce paragraphe, nous présentons les calculs pour obtenir les coefficients homogénéisés C_{ijkl} et les intégrales dI_{ijkl} , nécessaires pour déterminer la loi de comportement macroscopique et l'évolution d'endommagement. On voit, facilement, que pour une longueur d de la microfissure donnée, les coefficients et les intégrales dépendent, uniquement, des solutions des problèmes élémentaires.

Comme dans le premier chapitre, nous considérerons quatre orientations différentes pour la microfissure et nous calculerons C_{ijkl} et dI_{ijkl} dans le cas de glissement à droite ou à gauche, pour plusieurs longueurs normalisées de la fissure $d \in [0, 1]$.

Ensuite, nous présenterons en détail, le calcul de la solution $\mathbf{u}^{(1)}$, au niveau d'une cellule élémentaire, avec une fissure orientée à 45° (Fig. 3.2(d)). Pour les autres orientations, nous avons résolu les problèmes de façon similaire.

Dans ce cas, les trois sous-domaines de linéarité deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^+ &= \{\mathbf{e}_x \mid (\lambda + \mu)(e_{x11} + e_{x22}) + \mu e_{x12} \geq 0\} \\ \mathbf{D}^d &= \{\mathbf{e}_x \mid (\lambda + \mu)(e_{x11} + e_{x22}) + \mu e_{x12} < 0 \text{ et } \mu(e_{x11} - e_{x22}) \geq 0\} \\ \mathbf{D}^g &= \{\mathbf{e}_x \mid (\lambda + \mu)(e_{x11} + e_{x22}) + \mu e_{x12} < 0 \text{ et } \mu(e_{x11} - e_{x22}) < 0\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le cas en traction a été présenté dans la section 1.7. Maintenant, on s'intéresse aux résolutions des problèmes en compression dans les deux sens de glissement.

D'abord, nous allons considérer le glissement à droite. Soit $({}^d\mathbf{E}^{kl}) \in \mathbf{D}^d$, les déformations macroscopiques fondamentales pour lesquelles \mathbf{e}_x s'écrit comme une combinaison linéaire de $({}^d\mathbf{E}^{kl})$. Nous choisirons cette base sous la forme :

$$\left\{ {}^d\mathbf{E}^{11} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad {}^d\mathbf{E}^{12} = {}^d\mathbf{E}^{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad {}^d\mathbf{E}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.48)$$

En fonction de cette base, $\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})$ devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) &= {}^d\alpha_{kl} {}^d\mathbf{E}^{kl} \quad \text{avec} \\ {}^d\alpha_{11} &= -2e_{x11}; \quad {}^d\alpha_{12} = {}^d\alpha_{21} = -e_{x12}; \quad {}^d\alpha_{22} = 2e_{x11} - 2e_{x22} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Si ${}^d\boldsymbol{\eta}^{kl}$ sont les solutions élémentaires obtenues quand on applique ${}^d\mathbf{E}^{kl}$, la solution du problème, écrit sur la cellule unitaire, $\mathbf{u}^{(1)}$ est donnée par

$$\mathbf{u}^{(1)} = \alpha_{kl} \boldsymbol{\eta}^{kl} \quad (3.50)$$

avec les solutions $\boldsymbol{\eta}^{kl}$ calculées, ultérieurement.

En regroupant les termes, nous obtenons la forme équivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= e_{xkl} {}^d\boldsymbol{\xi}^{kl} \\ \text{où } {}^d\boldsymbol{\xi}^{11} &= -2{}^d\boldsymbol{\eta}^{11} + 2{}^d\boldsymbol{\eta}^{22}; \quad {}^d\boldsymbol{\xi}^{12} = {}^d\boldsymbol{\xi}^{21} = -{}^d\boldsymbol{\eta}^{12}; \quad {}^d\boldsymbol{\xi}^{22} = -{}^d\boldsymbol{\eta}^{22} \end{aligned} \quad (3.51)$$

En mode similaire, pour le glissement à gauche, nous définissons la base ${}^d\mathbf{E}^{kl} \in \mathbf{D}^g$

$$\left\{ {}^g\mathbf{E}^{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad {}^g\mathbf{E}^{12} = {}^g\mathbf{E}^{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad {}^g\mathbf{E}^{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.52)$$

et on obtient

$${}^g\alpha_{11} = -2e_{x11} + 2e_{x22}; \quad {}^g\alpha_{12} = {}^g\alpha_{21} = -e_{x12}; \quad {}^g\alpha_{22} = -2e_{x22} \quad (3.53)$$

et

$${}^g\xi^{11} = -{}^g\eta^{11}; \quad {}^g\xi^{12} = {}^g\xi^{21} = -{}^g\eta^{12}; \quad {}^g\xi^{22} = 2{}^g\eta^{12} - 2{}^g\eta^{22} \quad (3.54)$$

Dans les fonctions des bases choisies, dans les deux sens de glissement, nous avons à résoudre 5 problèmes élémentaires, qui donnent les solutions : ${}^d\eta^{11}$; ${}^d\eta^{12} = {}^d\eta^{21} = {}^g\eta^{12} = {}^g\eta^{21} = \eta^{12}$; ${}^d\eta^{22}$; ${}^g\eta^{11}$ et ${}^g\eta^{22}$, respectivement.

Pour l'implémentation numérique avec une méthode de pénalisation pour le contact unilatéral (κ_n - constante de pénalité), les 5 problèmes s'écrivent :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl} ({}^d\eta^{11})) = 0 \\ N_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^d\eta^{11}) N_j = (3\lambda/2 + \mu) N_1 N_1 + (3\lambda/2 + 2\mu) N_2 N_2 + \kappa_n [{}^d\eta_i^{11} N_i] ([{}^d\eta_i^{11} N_i] \leq 0) \\ T_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^d\eta^{11}) N_j = (3\lambda/2 + \mu) N_1 T_1 + (3\lambda/2 + 2\mu) N_2 T_2 - \mu_f \kappa_n [{}^d\eta_i^{11} N_i] ([{}^d\eta_i^{11} N_i] \leq 0) \end{array} \right.$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl} (\eta^{12})) = 0 \\ N_i a_{ijkl} e_{ykl} (\eta^{12}) N_j = 2\mu N_1 N_2 + \kappa_n [\eta_i^{12} N_i] ([\eta_i^{12} N_i] \leq 0) \\ T_i a_{ijkl} e_{ykl} (\eta^{12}) N_j = \mu N_1 T_2 + \mu N_2 T_1 - \mu_f \kappa_n [\eta_i^{12} N_i] ([\eta_i^{12} N_i] \leq 0) \end{array} \right.$$

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl} ({}^d\eta^{22})) = 0 \\ N_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^d\eta^{22}) N_j = \lambda N_1 N_1 + (\lambda + 2\mu) N_2 N_2 + \kappa_n [{}^d\eta_i^{22} N_i] ([{}^d\eta_i^{22} N_i] \leq 0) \\ T_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^d\eta^{22}) N_j = \lambda N_1 T_1 + (\lambda + 2\mu) N_2 T_2 - \mu_f \kappa_n [{}^d\eta_i^{22} N_i] ([{}^d\eta_i^{22} N_i] \leq 0) \end{array} \right.$$

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl} ({}^g\eta^{11})) = 0 \\ N_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^g\eta^{11}) N_j = (\lambda + 2\mu) N_1 N_1 + \lambda N_2 N_2 + \kappa_n [{}^g\eta_i^{11} N_i] ([{}^g\eta_i^{11} N_i] \leq 0) \\ T_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^g\eta^{11}) N_j = (\lambda + 2\mu) N_1 T_1 + \mu N_2 T_2 - \mu_f \kappa_n [{}^g\eta_i^{11} N_i] ([{}^g\eta_i^{11} N_i] \leq 0) \end{array} \right.$$

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl} ({}^g\eta^{22})) = 0 \\ N_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^g\eta^{22}) N_j = (3\lambda/2 + 2\mu) N_1 N_1 + (3\lambda/2 + \mu) N_2 N_2 + \kappa_n [{}^g\eta_i^{22} N_i] ([{}^g\eta_i^{22} N_i] \leq 0) \\ T_i a_{ijkl} e_{ykl} ({}^g\eta^{22}) N_j = (3\lambda/2 + 2\mu) N_1 T_1 + (3\lambda/2 + \mu) N_2 T_2 - \mu_f \kappa_n [{}^g\eta_i^{22} N_i] ([{}^g\eta_i^{22} N_i] \leq 0) \end{array} \right.$$

Une fois les solutions η^{kl} calculées, nous déterminons ξ^{kl} et nous pouvons calculer ${}^{gd}C_{ijkl}(d)$ et ${}^{gd}dI_{ijkl}(d)$, pour plusieurs longueurs d connues, avec les relations :

$${}^{gd}C_{ijmn} = \int_{Y_s} a_{ijmn} + a_{ijkl}e_{ykl}({}^{gd}\xi^{mn}) dy \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} {}^{gd}dI_{mnpq} = & \frac{1}{2} \frac{d}{dd} \int_{CY} (a_{ijmn} + a_{ijkl}e_{ykl}({}^{gd}\xi^{mn})) N_j [{}^{gd}\xi_i^{pq}] ds_y - \\ & \int_{CY} (a_{ijmn} + a_{ijkl}e_{ykl}({}^{gd}\xi^{pq})) N_j \left[\frac{d{}^{gd}\xi_i^{pq}}{dd} \right] ds_y \end{aligned} \quad (3.56)$$

Remarque : La définition des vecteurs normal et tangent est donnée dans l'annexe A.3.

Dans les Figs. 3.2 et 3.3 nous représentons les composantes non-nulles des coefficients homogénéisés et des intégrales dI_{ijkl} , qui correspondent à l'orientation (d) , dans les deux sens de glissement, pour différentes valeurs du coefficient de frottement. La figure de droite correspond au glissement à droite, et la figure à gauche au glissement dans l'autre direction. On peut voir, facilement, que les coefficients et les intégrales ne sont pas symétriques dans chaque sous-domaine de linéarité. En revanche, nous pouvons retrouver la symétrie, démontrée, analytiquement, dans la section 3.4 pour $S_{ijkl} = C_{ijkl} + dI_{ijkl}$. Pour l'orientation (c) nous choisirons le système des générateurs des déformations fondamentales similaires avec l'orientation (d) , telle que la relation trouvée, dans le cas de traction entre les coefficients, reste encore valable, indépendamment du sens de glissement.

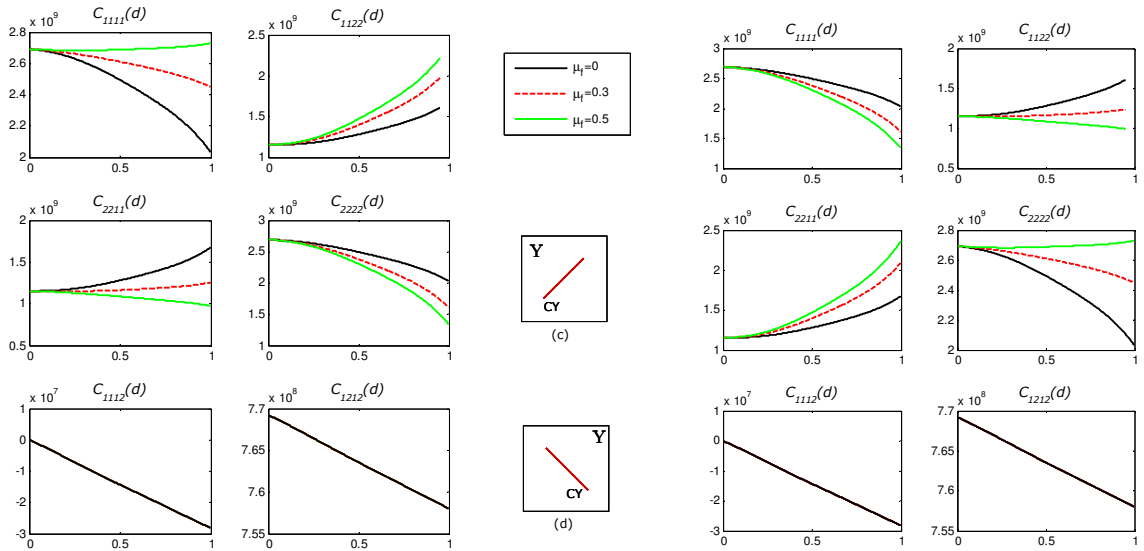
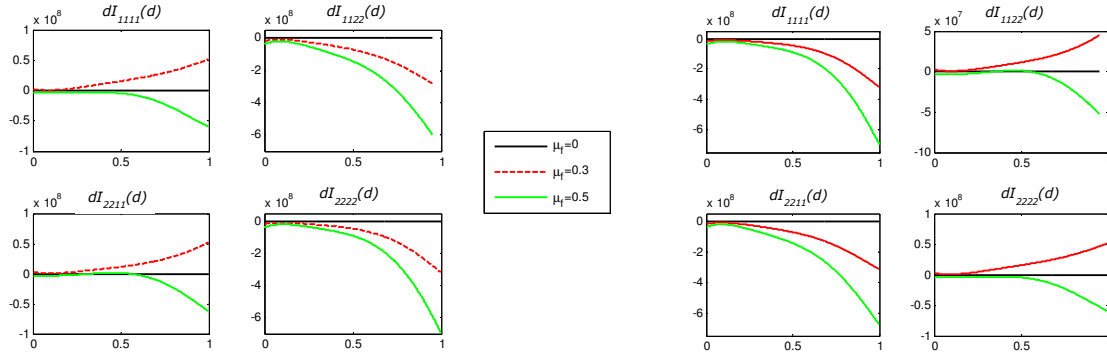


FIG. 3.2 – Les coefficients effectifs pour une fissure d'orientation (d) dans les deux sens de glissement

Dans le cas d'une fissure horizontale ou verticale nous choisirons \mathbf{E}^{11} et \mathbf{E}^{22} (voir Annexe A.2), tel qu'au niveau de cellule, les forces soient perpendiculaires aux lèvres de la fissure. Cette condition implique une


 FIG. 3.3 – Les intégrales dI_{ijkl} pour une fissure d'orientation (d) dans les deux sens de glissement

fermeture de la fissure sans glissement. Donc, dans cette situation, le matériau se comporte comme un matériau sans fissure, d'où on va obtenir $C_{1111} = a_{1111}$, $C_{2222} = a_{2222}$ et $C_{1122} = a_{1122}$, respectivement. Le seul coefficient qui évolue et qui dépend aussi du coefficient de frottement, est C_{1212} . Ainsi, la seule intégrale non nulle est dI_{1212} . Dans la Fig. 3.4, nous représentons le coefficient $C_{1212}(d)$, l'intégrale $dI_{1212}(d)$ pour trois valeurs différentes du coefficient de frottement ($\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.3$, $\mu_f = 0.5$). Nous constatons que le coefficient homogénéisé C_{1212} approche a_{1212} , lorsque le coefficient de frottement augmente. On peut dire que le matériau se "raidit" puisque d'une part on a une fissure fermée, et d'autre part le glissement est "freiné" par le frottement. Conséquence, nous n'avons pas beaucoup d'évolution de la fissure.

En outre, nous pouvons voir facilement que, dans ce cas, il n'y a pas de différence entre les coefficients et les intégrales obtenus, pour les deux sens de glissement.

3.5.4 Réponse élémentaire. Etude de la loi homogénéisée

Dans ce paragraphe, nous utilisons les lois de comportement obtenues, pour étudier la réponse d'une cellule unitaire, à des chargements "simples". Les résultats demeurent valables pour un matériau à fissuration "homogène", dont toutes les fissures ont la même taille et la même orientation.

Le premier cas présenté est le chargement en compression uniaxiale, sans ou avec frottement ($\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.3$, $\mu_f = 0.5$), sans fissures pré-existantes.

Les principaux aspects du comportement en compression uniaxiale avec le modèle sont les suivants (Fig. 3.5) :

- le comportement est élastique endommageable
- les fissures horizontales et verticales ne sont pas activées (le chargement en compression simple est transmis sur la microfissure par les "sources", qui sont perpendiculaires à la microfissure et orientées, de telle sorte que la fissure soit fermée)
- dans le cas d'une microfissure oblique (orientation (c) ou (d)), deux situations sont possibles en

fonctions du coefficient de frottement. Nous montrons, facilement, que pour un coefficient de frottement inférieur à 0.4 nous nous trouvons toujours dans le domaine d'une possibilité de glissement \mathbf{D}^g . Donc, une initialisation/ propagation de la microfissure est possible.

- en cours d'un cycle charge/décharge, on peut voir que le comportement est réversible pour des valeurs $\mu_f \leq 0.4$
- pour un coefficient de frottement $\mu_f > 0.4$, le seuil de glissement n'est jamais atteint. Nous n'avons pas la possibilité d'initialiser une fissure, ou, si elle existe, elle ne peut pas évoluer. Par conséquence, le matériau garde ses propriétés initiales, pendant le cycle complet charge / décharge.

Remarque : Dans le cas de chargement en compression uniaxial ($e_{x11} < 0$), pour une fissure orientée à 45° ou -45° la condition d'adhérence devient :

$$|T_i a_{ij11} e_{x11} N_j| < -\mu_f N_i a_{ij11} e_{x11} N_j \quad (3.57)$$

avec T_i, N_i donnés dans le tableau A.1 et

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

D'où, nous obtenons que pour des valeurs

$$\mu_f > \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$$

en compression uniaxiale le seuil de glissement n'est jamais atteint.

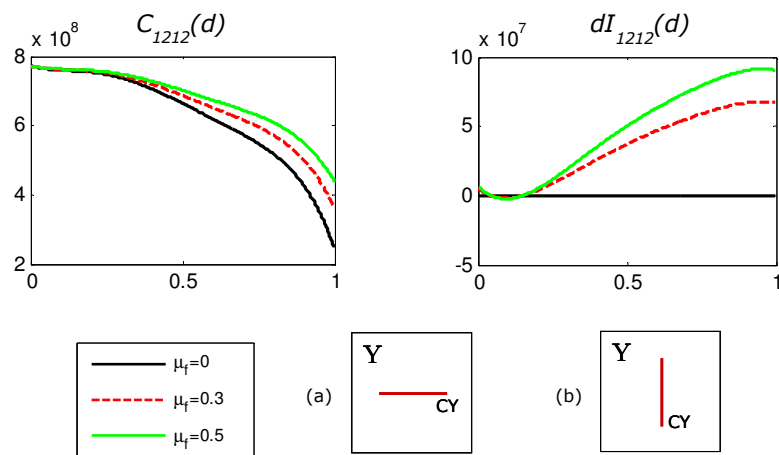


FIG. 3.4 – Le coefficient C_{1212} et l'intégrale dI_{1212} pour une fissure d'orientation (a) ou (d) dans les deux sens de glissement

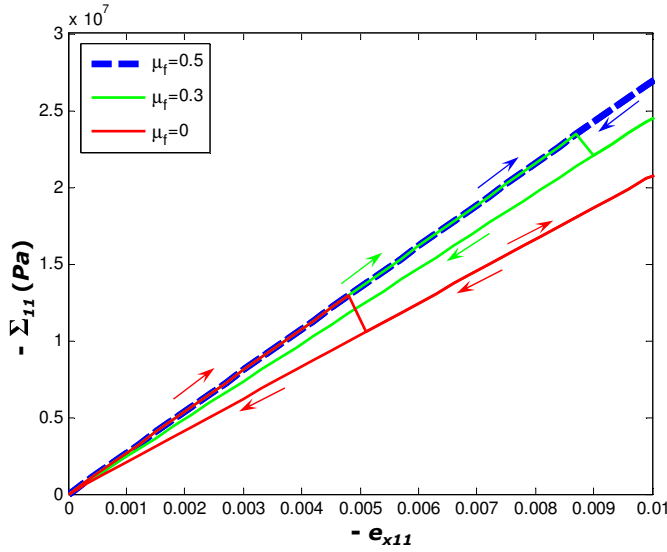


FIG. 3.5 – Courbe contrainte - déformation en compression uniaxiale, avec ou sans frottement

Pour le cas sans frottement et le cas avec un coefficient de frottement de $\mu_f = 0.3$, nous représentons, dans la Fig. 3.6 (droite), le seuil d'initialisation d'endommagement, en fonction de la taille de la cellule ε . Nous avons vu déjà que dans le cas sans frottement, pour des cellules plus petites nous avons une limite d'initialisation plus élevée. Avec un coefficient de frottement ($\mu_f = 0.3$), nous retrouvons le même comportement. Aussi, la limite commence à être assez élevée pour des cellules plus grandes que dans le cas sans frottement. De plus, comme nous l'avons déjà vu, pour le coefficient de frottement $\mu_f = 0.5$, dans le cas de la compression uniaxiale, indifféremment de la taille de cellule, il n'est pas possible d'avoir une initialisation d'endommagement.

Ensuite, pour une cellule de dimension $\varepsilon = 8e - 4 m$, pour les trois valeurs du coefficient de frottement, nous sommes intéressé à déterminer le début de la zone d'endommagement pour des sollicitation macroscopiques biaxiales. Pour cela, nous considérons deux situations (Fig. 3.7 : (a) $e_{x22} = 0$ et (b) $e_{x12} = 0$). Dans les deux cas, on trace les domaines d'élasticité.

Dans la Fig. 3.7(a), où l'on applique un chargement dans une direction combinée avec un cisaillement, nous observons que pour des valeurs faibles du coefficient de frottement, nous trouvons un domaine non-endommagé fermé. Nous avons donc, dans toutes les directions, une propagation possible de la fissure. Ce domaine est plus grand si le coefficient de frottement est plus élevé. En revanche, pour des valeurs plus importantes relative au coefficient de frottement, on se trouve dans la zone de fissure fermée et collée. En cette zone, nous ne pouvons pas avoir une initialisation ou une évolution de la fissure (domaine ouvert). Aussi, dans le cas de compression biaxiale, dans le plan $(e_{x11} - e_{x22})$, même pour $\mu_f = 0.3$ nous avons une zone très importante, dans laquelle il n'y a ni endommagement, ni rupture.

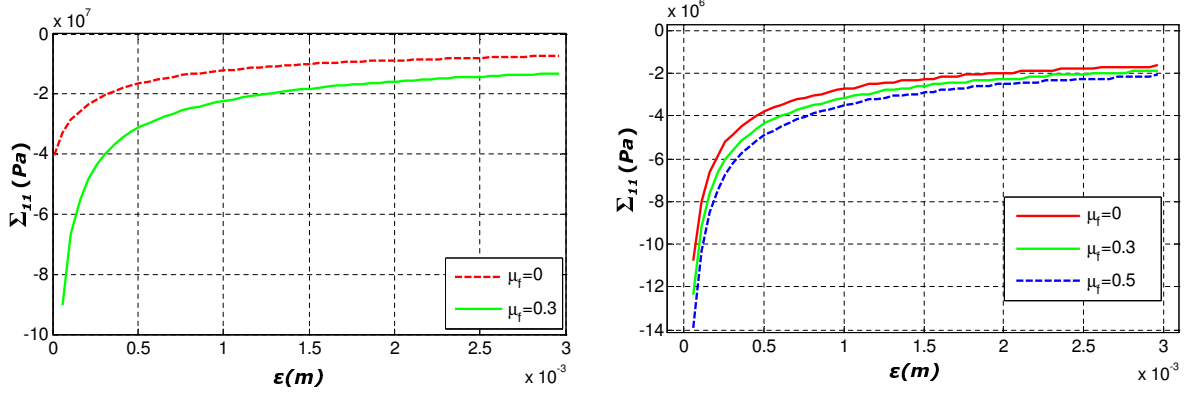


FIG. 3.6 – Evolution du seuil d’initialisation d’endommagement en fonction de la taille de cellule ε pour une chargement (droite) de compression uniaxiale ; (gauche) compression biaxiale

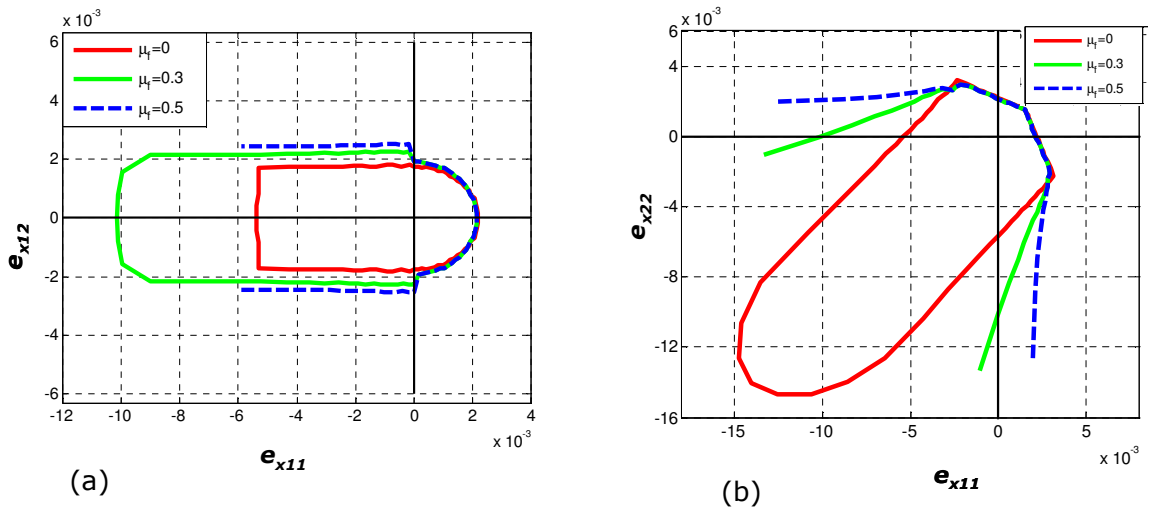


FIG. 3.7 – Domaine d’élasticité en déformations macroscopiques planes pour trois valeurs de μ_f quand (a) $e_{x22} = 0$ et (b) $e_{x12} = 0$

Pour un chargement uniforme mixte ($e_{x11} - e_{x12}$), dans les deux directions, nous représentons la limite d’endommagement en fonction de la dimension de la cellule (Fig. 3.6).

Enfin, nous allons donner quelques exemples de chargement biaxial, pour lesquels nous trouvons des déformations résiduelles à la fin d’un cycle charge / décharge.

Nous considérerons un échantillon représenté par une cellule de taille $\varepsilon = 8e - 4m$, avec une microfissure horizontale pré-existante. Le coefficient du frottement est $\mu_f = 0.6$.

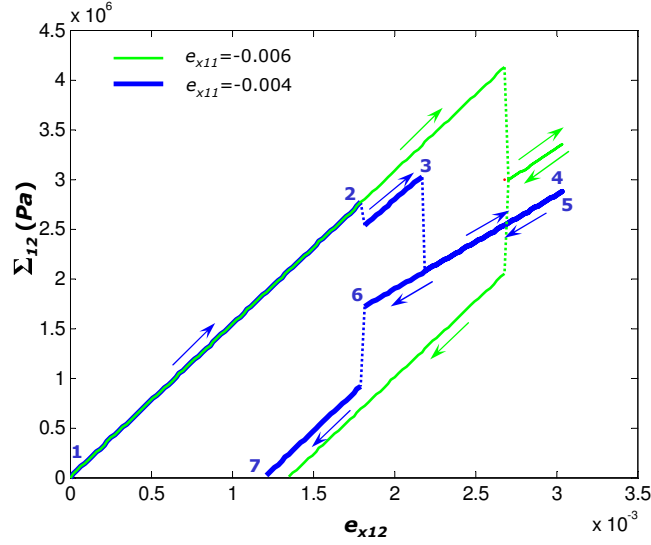


FIG. 3.8 – Courbe contrainte - déformation calculée pour deux valeurs de confinement différentes

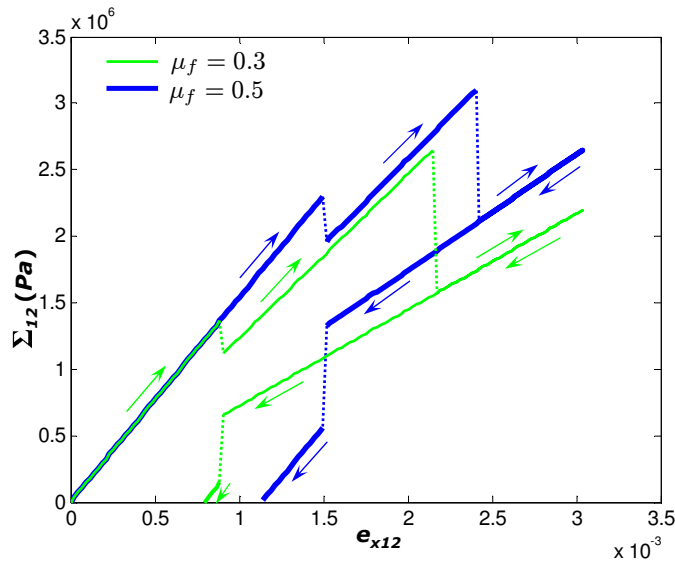


FIG. 3.9 – Courbe contrainte - déformation calculée. Influence du coefficient de frottement

Nous réalisons, tout d'abord, une montée en charge dans la direction perpendiculaire à la fissure, jusqu'à $e_{x11} = -0.004$, dans laquelle aucun glissement n'apparaît, puisque le cisaillement est nul dans l'éprouvette. La micro-fissure est fermée dans cette phase.

Nous effectuons, alors, un cycle sur la charge en cisaillement. La figure 3.8 illustre les courbes contrainte de cisaillement - déformation appliquée obtenues, ainsi que 5 étapes de l'essai :

- entre les points 1 – 2 le comportement est élastique, on a un blocage de glissement par le confi-

nement (la pente est donnée par les coefficients élastiques a). Le matériau, dans cette étape, se comporte comme un matériau sans fissure.

- l'étape 2 – 3 quand le glissement apparaît (la pente est donnée par les coefficients homogénéisés $C(d_1)$, d_1 la longueur de la fissure). Cette étape se finit par une propagation de la fissure.
- étape 3 – 4 nous montons encore en charge (avec la pente $C(d_2)$, d_2 la nouvelle longueur de la fissure)
- le décharge débute par le point 5 et la première partie de décharge (étape 5 – 6) est élastique avec la pente $C(d_2)$.
- étape 7 – 8 blocage du glissement par le frottement.

Nous arrivons dans un état de contrainte nulle dans l'éprouvette, alors qu'en terme de déformation, nous voyons qu'il subsiste une déformation résiduelle.

Dans la Fig. 3.8, nous pouvons voir que le domaine élastique, au début de chargement, est plus grand quand le confinement est plus important.

L'influence du coefficient de frottement est illustrée dans la Fig. 3.9. Nous remarquons, alors, qu'un coefficient de frottement plus important augmente le seuil de glissement et, également, celui de rupture. L'origine de ce comportement se trouve dans la dissipation d'énergie par frottement sur les lèvres de la fissure.

3.6 Conclusion

Nous avons étendu, dans ce chapitre, le modèle d'endommagement fragile au cas des micro-fissures frottantes.

Des comportements irréversibles, qui correspondent aux glissements bloqués sur les micro-fissures ont été mis en évidence.

La loi d'endommagement obtenue tient compte de la dissipation par frottement sur les lèvres des micro-fissures.

D'autres investigations sont nécessaires pour caractériser le résultat obtenu dans ce cas. Comme pour le chapitre précédent, des recherches sur ce sujet sont en cours et continueront après la thèse.

Deuxième partie

Micro/macro instabilités et effets d'échelle dans les milieux granulaires : analyse par homogénéisation numérique

Introduction

Dans cette partie, nous allons considérer un milieu granulaire contenant des micro-fissures inter-granulaires. Dès lors notre objectif est d'établir un lien entre l'initiation de la macro-instabilité et la micro-fissuration inter-granulaires. La méthode d'homogénéisation employée dans cette partie est la méthode numérique des éléments finis à deux échelles.

Le principe de base de l'homogénéisation numérique a été défini par Suquet [108] comme étant constitué de quatre phrases :

- définition d'un volume élémentaire représentatif (VER) dont on assume que le comportement constitutif est connu,
- formulation des conditions à la frontière de la microstructure en fonction des variables macroscopiques et de leurs applications sur le VER,
- calcul des variables macroscopiques en fonction des variables microscopiques,
- obtention d'une loi numérique au niveau macroscopique.

Les idées principales de l'homogénéisation numérique ont été établies par Suquet [108], Guedes et Kikuchi [47], Terada et Kikuchi [111], Ghosh et al. [42], puis développées et améliorées dans les travaux plus récents de Feyel et Chaboche [38], Kouznetsova et al. [59], Miehe et Koch [73], Miehe [74].

Quelques caractéristiques importantes de la méthode de l'homogénéisation numériques sont :

- comme la réponse macroscopique est obtenue en totalité par des échanges avec le VER, aucune hypothèse explicite n'est à faire sur le format de la réponse constitutive macroscopique,
- le module tangent constitutif macroscopique est obtenu numériquement à partir de la microstructure,
- la méthode est valable dans le cadre des grandes déformations, si les constituants micro-structurels sont modélisés dans un cadre géométriquement non linéaire. En plus, au niveau de la microstructure, on peut considérer des modèles constitutifs non linéaires arbitraires.

Le problème sur le VER est un problème classique avec des conditions aux limites, qui peut être résolu par la méthode des éléments finis. La technique micro-macro, entièrement couplée, est toujours coûteuse d'un point de vue de temps de calcul. Ceci peut être surmonté par la mise en place du calcul parallèle (Feyel et Chaboche, [38]).

Comme notre objectif est d'établir un lien entre l'apparition des macro-instabilités et les micro-fissures,

nous allons considérer des analyses locales, au niveau d'un seul point macroscopique, en imposant un gradient de déformation. Les échanges entre la macro-structure et le VER seront assurés par deux types de conditions aux limites :

- déformations linéaires pour un volume élémentaire représentatif composé d'un matériau hétérogène irrégulier,
- déformations périodiques et tractions anti-périodiques sur les bords pour un VER à géométrie périodique.

La microstructure est composée de grains déformables séparés par des interfaces cohésives. On se situe dans l'hypothèse des grandes déformations et, pour caractériser les grains, on utilise le matériau hyper-élastique Saint Venant-Kirchhoff. Au niveau des interfaces inter-granulaires, on considère des lois cohésives de traction - déplacement de type Tvergaard [116]. Une loi de frottement de type Coulomb simplifiée est également définie pour ces interfaces. En considérant que l'équation d'équilibre, à l'intérieur des grains, reste elliptique, nous prouvons que la perte d'ellipticité de l'équation d'équilibre homogénéisée, peut être donnée par la décohésion inter-granulaire.

Dans le Chapitre 4, on présente une courte étude bibliographique, précisant les informations, le cadre et les outils, sur lesquels nous nous sommes appuyés pour développer le modèle.

La méthode d'homogénéisation numérique, par le passage micro-macro, donnée dans le Chapitre 5, est ensuite utilisée pour faire l'analyse de perte d'ellipticité.

Quelques détails de la résolution numérique du problème mécanique sur le VER sont décrit dans le Chapitre 6.

Dans le Chapitre 7, on présente des résultats numériques pour différentes géométries particulières du VER. D'abord, nous considérons un VER composé de deux grains séparés par une interface cohésive. Cette géométrie simple fournit un modèle élémentaire de déformation qui sera reproduit dans des géométries plus complexes. L'influence des conditions aux frontières est également donnée dans ce chapitre. Nous avons effectué pour le cas d'un VER périodique une analyse de perte d'unicité, ainsi que des recherches directionnelles, afin de tracer des enveloppes réponses, permettant de comparer la réponse incrémentale.

Enfin, nous considérons les modèles granulaires, qui sont, périodiquement, reproduit dans le VER. Dans ce cas, la réponse est obtenue numériquement pour différentes configurations (nombres des cellules de périodicité considérée pour décrire le VER, coefficients de frottement et paramètres de la loi cohésive). Nous donnons des solutions numériques différentes pour un VER unicellulaire. De plus, nous montrons des solutions supplémentaires pour un VER comprenant plusieurs cellules, ayant une distribution périodique. Pour une taille de la cellule donnée, nous trouvons que la réponse macroscopique dépend de la taille de la microstructure.

Chapitre 4

Quelques rappels

Sommaire

4.1	Introduction	87
4.2	Grandes déformations et hyperélasticité	88
4.2.1	Cinématique des milieux continus	88
4.2.2	Equations d'équilibre	90
4.2.3	Lois de comportement hyperélastique	92
4.3	Lois d'interface des modèles de force cohésive	94
4.4	Bifurcation pour des modèles usuels	97
4.4.1	Critère de localisation - théorie de Rice, 1976	98
4.4.2	Lois linéaires en vitesse	99
4.4.3	Lois multi-linéaires en vitesse	100
4.4.4	Lois incrémentalements non linéaires	101

4.1 Introduction

Cette étude bibliographique se décompose en trois parties principales. Celles-ci présentent les informations, le cadre et les outils sur lesquels nous nous sommes appuyés pour développer le modèle dans cette partie.

Ensuite, nous présenterons un rappel des notions caractéristiques de problèmes de grandes déformations et la manière de formuler les lois de comportement de milieux hyperélastiques. En deuxième section, nous donnerons quelques lois d'interfaces des modèles de force cohésive, existantes dans la littérature. Dans la troisième section, nous présentons les principaux travaux concernant l'unicité de solution d'un problème aux limites.

4.2 Grandes déformations et hyperélasticité

Nous considérons une structure \mathcal{B} qui occupe, à l'état initial un domaine $\mathcal{V}_0 \in \mathbb{R}^2$, supposé être un état naturel, c'est à dire libre d'efforts. Cette configuration \mathcal{V}_0 sera, par la suite, nommée configuration de référence.

Soumise à des sollicitations, la structure \mathcal{B} va se déformer et occuper un nouveau domaine $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^2$. Ce domaine \mathcal{V} est lié à la configuration déformée, qui ensuite nous définirons comme un cadre dans lequel cette déformation peut être décrite, puis simulée.

4.2.1 Cinématique des milieux continus

Une particule de la structure \mathcal{B} occupe dans la configuration de référence \mathcal{V}_0 , le point M_0 de coordonnées $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, exprimées dans un repère d'espace orthonormé $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Les coordonnées de M_0 sont dites coordonnées lagrangiennes et la configuration initiale est également nommée configuration lagrangienne.

Cette même particule occupe dans la configuration déformée \mathcal{V} , le point M de coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Les coordonnées de M sont dites eulériennes. Aussi \mathcal{V} est la même configuration eulérienne ou physique, car c'est cette configuration qui traduit la déformation réelle de la structure \mathcal{B} , lorsque celle-ci est soumise à des sollicitations (voir Fig. 4.1).

La relation permettant de relier la configuration de référence \mathcal{V}_0 et la configuration déformée \mathcal{V} est donnée par :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \quad (4.1)$$

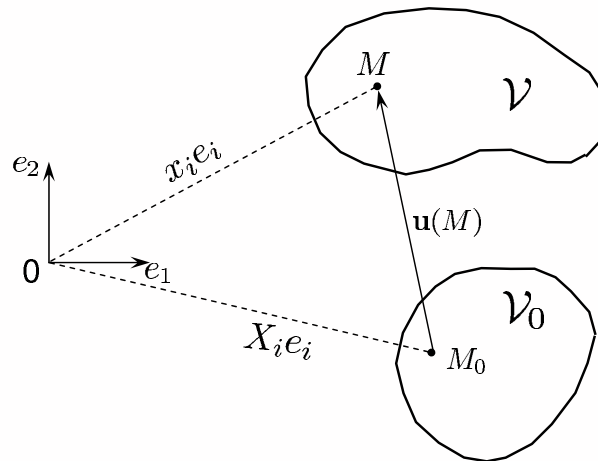


FIG. 4.1 – Configurations eulérienne et lagrangienne

Dès lors, la fonction vectorielle φ , qui permet de passer de \mathcal{V}_0 à \mathcal{V} , est une fonction inversible.

En différenciant l'expression (4.1), nous avons :

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_J} dX_J \quad (4.2)$$

en respectant la convention de sommation sur les indices répétés.

Ainsi, soient $\mathbf{dM}_0 = (dX_1, dX_2)$ un vecteur infinitésimal au point M_0 et $\mathbf{dM} = (dx_1, dx_2)$ un vecteur infinitésimal au point M , il devient :

$$\mathbf{dM} = \mathbf{F} \mathbf{dM}_0 \quad (4.3)$$

\mathbf{F} est le tenseur gradient de déformation au point M_0 .

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Il traduit la déformation de la structure \mathcal{B} qui, soumise à une sollicitation donnée, est passée d'un état initial \mathcal{V}_0 à un état déformé \mathcal{V} .

De même, si nous introduisons le vecteur déplacement \mathbf{u} d'une particule, de M_0 à M , défini par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}_0 \mathbf{M} \quad (4.5)$$

ce qui se traduit par :

$$\forall M \in \mathcal{V}, \mathbf{OM} = \mathbf{OM}_0 + \mathbf{u}(M_0) \quad \text{ou encore } \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (4.6)$$

alors le tenseur de gradient de déformation \mathbf{F} est donné par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}, \quad \text{avec } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité d'ordre 2 et \mathbf{D} est le gradient de déplacement.

Nous notons par J le déterminant de \mathbf{F} qui représente le jacobien de la transformation \mathcal{V}_0 dans \mathcal{V} :

$$J = \det \mathbf{F} \quad (4.8)$$

Enfin, à partir de ce tenseur des déformations, nous introduisons classiquement des tenseurs dérivés qui, entre autres, sont utilisés pour formuler les lois de comportement, comme par exemple le tenseur symétrique des dilatations (ou le tenseur de Cauchy-Green droit) \mathbf{C} , défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (4.9)$$

\mathbf{F}^T est alors la matrice transposée de \mathbf{F} , ainsi que ses invariants I_1, I_2, I_3 donnés par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \det \mathbf{C} \\ I_2 &= \frac{1}{2} (\det(\mathbf{C}^2) - (\det \mathbf{C})^2) \\ I_3 &= \text{tr } \mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec $\text{tr } \mathbf{C}$ la *trace* de \mathbf{C} ($\text{tr } \mathbf{C} = C_{ij}\delta_{ij}$).

En outre, nous définissons, le tenseur de déformation de Green, \mathbf{E} , sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \mathbf{D})^T \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{D}) - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) + \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T\end{aligned}\quad (4.11)$$

ou encore sous la forme d'une notation vectorielle :

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Pour plus de précisions sur la définition de ces quantités cinématiques, voir par exemple Ciarlet [24]

4.2.2 Equations d'équilibre

Une fois les grandeurs cinématiques définies, il convient de préciser les grandeurs mécaniques, traduisant la notion d'effort.

Comme nous venons de le voir précédemment, la déformation de la structure \mathcal{B} peut être représentée dans les deux configurations : de référence \mathcal{V}_0 et actuelle \mathcal{V} , respectivement. On va écrire les équations d'équilibre dans chacune d'entre elles.

a) Configuration eulérienne

En introduisant le tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, défini dans la configuration courante par :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (4.13)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure unitaire à $\partial\mathcal{V}$ et \mathbf{t} les efforts imposés sur le bord $\partial\mathcal{V}$ de \mathcal{V} .

On a l'équation :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{t} dS = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = 0 \quad (4.14)$$

En appliquant le théorème de divergence, on obtenons

$$\int_{\mathcal{V}} (\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV = 0 \quad (4.15)$$

d'où

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (4.16)$$

où \mathbf{b} sont les forces volumiques imposées à l'ensemble de \mathcal{V} et $\text{div}_{\mathbf{x}}$ est l'opérateur divergence par rapport aux variables eulériennes (x_1, x_2) .

L'équation de bilan de moment induit la symétrie du tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

L'inconvénient majeur de l'équation (4.14) est qu'elle est exprimée dans la configuration eulérienne, qui est a priori inconnue. Cette équation est donc très difficilement exploitable. Par conséquent, il semble plus simple de l'exprimer dans une configuration connue, par exemple la configuration initiale.

a) Configuration lagrangienne

Etant donné, les relations qui existent entre la configuration lagrangienne \mathcal{V}_0 et la configuration eulérienne \mathcal{V} , on montre aisément (Ciarlet [24] ; Duvaut [35]) que l'équation (4.14) est équivalente à :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{b} J dV_0 + \int_{\partial\mathcal{V}_0} \boldsymbol{\sigma} J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS_0 = 0 \quad (4.17)$$

où \mathbf{F}^{-T} l'inverse de la transposée de \mathbf{F} .

En introduisant le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff défini par :

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (4.18)$$

nous avons donc :

$$\int_{\mathcal{V}_0} (\text{Div}_{\mathbf{x}} \mathbf{P} + \mathbf{b} J) dV_0 = 0 \quad (4.19)$$

qui peut être également écrit sous la forme locale :

$$\text{Div}_{\mathbf{x}} \mathbf{P} + \mathbf{b}_{\mathbf{x}} = 0, \quad \text{avec } \mathbf{b}_{\mathbf{x}} = \mathbf{b} J. \quad (4.20)$$

Toutefois, nous remarquons que, contrairement au tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff n'est pas symétrique. De fait, on peut lui préférer le second tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , qui, lui, est symétrique et est défini par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}. \quad (4.21)$$

Signalons, enfin, que dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, ces trois tenseurs de contraintes s'identifient au premier ordre.

On constate que la relation (4.19) est de façon évidente, puisque \mathcal{V}_0 est connue, comme beaucoup plus simple à manipuler que la précédente, à savoir (4.15). Par conséquent, c'est cette relation, exprimée dans la configuration lagrangienne, ou de référence, que dorénavant nous utiliserons.

A présent, que les équations d'équilibre (4.15) et (4.19) ont été définies, nous allons donner quelques détails, sur la modélisation du comportement des matériaux que nous utiliserons par la suite.

4.2.3 Lois de comportement hyperélastique

Les matériaux considérés sont des matériaux de comportement hyperélastique. C'est à dire que, comme tous matériaux élastiques, après avoir été soumis à une sollicitation, ces matériaux reviennent à leur configuration de référence, instantanément et sans aucune dissipation ($\text{Div}_{\mathbf{X}} \mathbf{P} = 0$).

Le comportement de tels matériaux est défini à partir de la densité d'énergie du matériau, notée Ψ , sous la forme :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.22)$$

Dans le cas où les matériaux étudiés sont isotropes dans leur configuration de référence et qu'ils satisfont le principe de l'indifférence matérielle, on montre (Rivlin [98] ; Ciarlet [24]) que leurs densités d'énergie ne sont fonction que des invariants du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} défini par (4.9). On a, ainsi, sous ces hypothèses :

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{X}, I_1, I_2, I_3) \quad (4.23)$$

On obtient alors :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \left(\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \left(\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \left(\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} \right) \quad (4.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} &= 2\mathbf{F} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} &= 2(I_1\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{C}) \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} &= 2I_3\mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Comportement hyperélastique linéarisé en hypothèse des petites déformations

Dans le cadre de petites déformations, les tenseurs de contraintes sont équivalents au premier ordre. Examinons, par exemple, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} . Par définition on a :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.26)$$

	Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$	PK no. 1 \mathbf{P}	PK no. 2 \mathbf{S}
$\boldsymbol{\sigma}$	—	$\frac{1}{J} \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$	$\frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$
\mathbf{P}	$J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	—	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$
\mathbf{S}	$J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}$	—

TAB. 4.1 – Relations entre les tenseurs de contraintes

Ensuite, en utilisant l'équation (4.24), il devient :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_j} \frac{\partial \mathbf{I}_j}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.27)$$

Ainsi

$$\mathbf{S} = 2 \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_1} + \mathbf{I}_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_2} \mathbf{C} + \mathbf{I}_3 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_3} \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (4.28)$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, \mathbf{C} est racine de son polynôme caractéristique, c'est à dire que :

$$\mathbf{C}^3 - \mathbf{I}_1 \mathbf{C}^2 + \mathbf{I}_2 \mathbf{C} + \mathbf{I}_3 \mathbf{I} = 0 \quad (4.29)$$

Alors

$$\mathbf{I}_3 \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - \mathbf{I}_1 \mathbf{C} + \mathbf{I}_2 \mathbf{I} \quad (4.30)$$

On en déduit une nouvelle expression de \mathbf{S} , sous la forme :

$$\mathbf{S} = \alpha_0(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3) \mathbf{I} + \alpha_1(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3) \mathbf{C} + \alpha_2(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3) \mathbf{C}^2 \quad (4.31)$$

où les coefficients α_i sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_1} + \mathbf{I}_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_2} + \mathbf{I}_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_3} \right) \\ \alpha_1 &= -2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_2} + \mathbf{I}_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_3} \right) \\ \alpha_2 &= 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Par la suite, en linéarisant cette expression au premier ordre du voisinage de $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ (où \mathbf{E} est le tenseur de déformation de Green (4.11)), et en tenant compte du fait que l'état initial est un état libre de contraintes, on obtient :

$$\mathbf{S} = \lambda(\text{tr } \mathbf{E}) + 2\mu \mathbf{E} + O(\mathbf{E}) \quad (4.33)$$

Les caractéristiques λ et μ sont les coefficients de Lamé, classiquement utilisés en hypothèse de petites déformations et sont définis par :

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}_2} \right) \Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \\ \lambda &= -2\mu + 4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{I}_1^2} + 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{I}_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{I}_3^2} + 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{I}_1 \partial \mathbf{I}_2} + 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{I}_2 \partial \mathbf{I}_3} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{I}_1 \partial \mathbf{I}_3} \right) \Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

La loi constitutive linéarisée (4.33) est souvent utilisée en grandes déformations. Ce modèle de comportement est appelé Saint-Venant Kirchhoff.

4.3 Lois d'interface des modèles de force cohésive

Nous appelons loi d'interface une relation entre le déplacement relatif et la force d'interaction entre les lèvres d'une fissure. Dans cette section, nous présenterons quelques unes d'entre elles, basées sur la notion de force cohésive. Cette dernière s'appuie sur des observations expérimentales en pointe de fissure, telles que l'apparition de micro fissures, la croissance de cavité ou le développement de zones de plastification. Cela correspond à une zone de transition entre le milieu sain et une vraie fissure (voir Fig. 4.2)

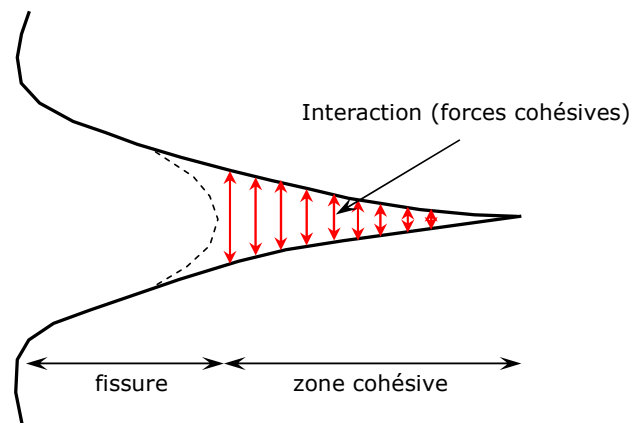


FIG. 4.2 – Schéma de la fissure et de la zone cohésive

Tant que la taille de cette zone est petite devant l'échelle de la structure, les principes de la mécanique de la rupture linéaire peuvent être appliqués. Dans le cas contraire, cette zone doit être prise en compte. Les premiers modèles furent introduits par Dugdale [34] et Barenblatt [4] au début des années soixante. Prenant acte du fait que les contraintes infinies en pointe de fissure, prédites par le modèle élastique, n'ont pas de signification physique, ces derniers ont émis l'hypothèse de l'existence d'une "zone cohésive" (Fracture Process Zone dans la littérature), dans laquelle des forces s'exercent entre les futures lèvres de la fissure. Dans les années soixante-dix, Hillerborg et al. [53] ont introduit le concept d'énergie de rupture dans les modèles de force cohésive, et proposé quelques relations de comportement entre la traction et le saut de déplacement pour le béton. De nombreux modèles ont été développés depuis. Ensuite on va citer quelques uns :

Modèle de Dugdale et Barenblatt(1960 - 1962) [34, 4]

Ce modèle décrit l'évolution des forces de traction T_n en fonction du saut de déplacement normal Δ_n . Le saut reste nul, tant que la force n'atteint pas une valeur critique T_c . Puis le comportement utilisé est celui d'un solide rigide parfait jusqu'à un seuil d'ouverture δ_n au-delà duquel l'interaction des lèvres

devient nulle (voir Fig. 4.3)

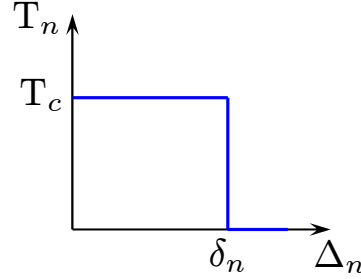


FIG. 4.3 – Lois d'interface de Dugdale et Barenblatt dans la direction normale

Modèle de Needleman (1987)[79]

Ce modèle décrit l'évolution des forces cohésives normale T_n et tangentielle T_t en fonction des composantes normale et tangentielle du saut de déplacement Δ_n et Δ_t . On représente sur la Fig. 4.4 l'évolution de la force normale en fonction du saut normal lorsque le saut tangent est nul.

La force normale et tangentielle dérivent, respectivement, d'un potentiel Ψ :

$$T_n = \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_n}, \quad T_t = \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_t}$$

Ce potentiel est choisi comme une fonction polynomiale, faisant intervenir les paramètres : T_c contrainte critique du matériau en ouverture, δ_c saut critique au-delà duquel l'interaction entre les lèvres de fissure devient nulle, ainsi que la part de résistance au glissement par rapport à la résistance normale. On note que lorsque Δ_n , la valeur de la contrainte normale dérivant du potentiel, joue le rôle d'une pénalisation, afin

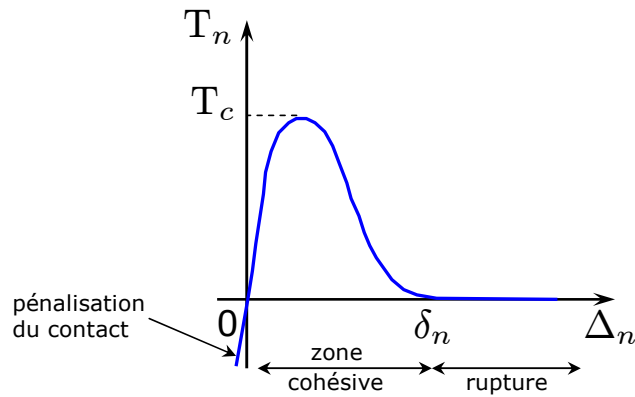


FIG. 4.4 – Lois d'interface de Needleman dans la direction normale

de tenir compte de la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure. Aucune autre hypothèse n'intervient pour prendre en compte cette condition. Notons que ce modèle fut repris et modifié par de nombreux auteurs. Citons par exemple Rice et Wang [97] qui ont proposé une expression exponentielle du potentiel. La différence avec le modèle précédent tient au fait que la force tend, asymptotiquement, vers zéro quand le saut de déplacement augmente. Ce modèle ne fait donc pas intervenir le paramètre δ_c .

Modèle de Tvergaard (1990) [114]

Ce modèle reprend le modèle de Needleman datant de 1987. Il introduit une notion d'irréversibilité du comportement : la décharge s'effectue linéairement, ainsi qu'un frottement de Coulomb post décohesion. On représente sur la Fig. 4.5 l'allure de la force tangentielle, en fonction du saut tangentiel, lorsque le saut normal est nul.

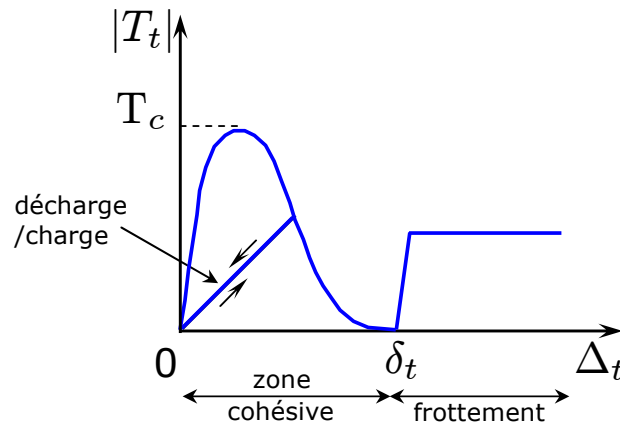


FIG. 4.5 – Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent

On note que le modèle formulé initialement, par l'auteur, s'appuie sur un indicateur de décohesion, variant de zéro à un. Ainsi, il fait intervenir le saut normé par le saut critique, qui fait office de variable d'endommagement, dont dépendent les forces d'interaction. A partir de ce modèle, d'autres modèles ont été développés. Par exemple, Chaboche et al. [17] (1997), pour modéliser la décohesion interfaciale dans les composites à matrice métallique, proposent d'activer le frottement de Coulomb, dès le début de la décohesion. Aussi, une loi trapézoïdale a été utilisée par Tvergaard et Hutchinson (1993) [115], Roychowdhury et Narasimhan (2000) [99] dans divers calculs numériques.

Modèle de Camacho, Ortiz et Pandolfi (1996-1999) [14, 83]

Une autre modèle a été proposé par Camacho, Ortiz et Pandolfi [14], en utilisant une relation linéaire

avec une pente négative, entre la traction d'interface et la séparation, dans leurs simulations d'endommagement d'impacts sur solides fragiles.

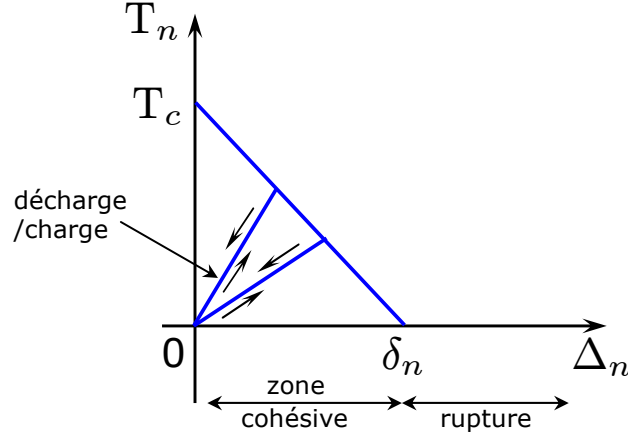


FIG. 4.6 – Lois d'interface de Camacho et Ortiz dans la direction normale

4.4 Bifurcation pour des modèles usuels

Dans cette section, nous présentons les principaux travaux concernant l'unicité de solution d'un problème aux limites. Notons qu'il n'y a pas (ou peu) de résultats théoriques généraux sur la perte d'unicité de solution d'un problème aux limites, pour un problème d'évolution. La notion de bifurcation est définie comme la transition d'un chemin fondamental de comportement vers un chemin alternatif, au cours de l'évolution d'un processus physique.

Plusieurs approches ont été effectuées pour détecter la bifurcation dans un problème aux limites. Elles peuvent se diviser en deux grands groupes : le groupe des résultats globaux et celui des résultats partiels.

- Le premier groupe est basé sur les travaux de Hill [49], qui a établi un critère suffisant d'unicité d'un problème aux limites formulé en vitesse. Le critère est valable pour des modèles élastoplastiques standards, puis non standards, avec un mécanisme plastique, mais aussi avec les modèles d'endommagement et les modèles hypoplastiques (Chambon [18])
- L'autre grand groupe concerne des résultats partiels, pour lesquels un mode de bifurcation, homogène ou non, est spécifié. Ces résultats, sur une bifurcation moins générale, permettent de donner des critères plus précis et adaptés à plus de lois constitutives. Le mode de bifurcation qui nous intéresse est la bifurcation en bande de cisaillement, autrement dit la localisation des déformations. Dans ce mode de bifurcation, nous supposons que le problème aux limites admet une solution homogène, et nous essayons de savoir si une autre solution, présentant une bande de cisaillement, est une solution possible du problème. Les travaux de Rice [94] ont alors permis de formuler un

critère de localisation bien connu basé sur l'annulation du déterminant de tenseur acoustique. Nous présenterons ce phénomène, dans les études de bifurcation, impliquant une localisation des déformations, à la suite des travaux de Rice. L'étude de bifurcation en localisation des déformations ne constitue pas une étude générale de bifurcation, mais postule plutôt pour un mode particulier de déformation. Il est ainsi possible qu'un autre mode de bifurcation, précède celui qui nous intéresse ici.

4.4.1 Critère de localisation - théorie de Rice, 1976

Le développement effectué par Rice [94] suppose que le milieu étudié soit infini et homogène, vis à vis des variables d'état (contrainte, déformation,...) ; et que le problème se limite aux solides non visqueux. Ces hypothèses permettent d'étudier la localisation de la déformation comme un problème de bifurcation et de supposer l'existence d'une solution homogène au problème formulé en vitesse. Ayant ainsi défini le cadre de l'étude, l'objectif de Rice est de rechercher si une déformation, suivant un mode localisé, peut constituer une autre solution que le mode homogène. (voir Fig. 4.7)

Condition cinématique

Nous notons par $\dot{\mathbf{F}}^0$ le gradient de vitesse dans le milieu homogène, en tout point de l'échantillon. Nous supposons qu'il existe une autre solution $\dot{\mathbf{F}}^1$, qui présente une bande de cisaillement, pour laquelle la cinématique à l'extérieur de la bande correspond à $\dot{\mathbf{F}}^0$. La relation, liant les gradients de vitesse dans la bande et à l'extérieur de la bande, dans un repère global du milieu, s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{F}}^1 = \dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n} \quad (4.35)$$

\mathbf{n} est la normale à la bande et \mathbf{q} un vecteur quelconque qui définit le mode de localisation (voir Fig. 4.7).

Condition statique

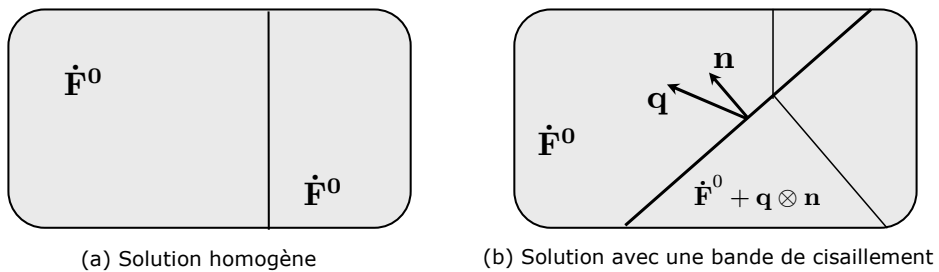


FIG. 4.7 – Principe de l'analyse de bifurcation en bande de cisaillement

Nous notons par $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^1$ la dérivée temporelle (par rapport à un repère fixe) de la contrainte de Cauchy, dans la bande de cisaillement, et nous considérons que $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0$ se situe à l'extérieur de la bande. Alors, tout au long des frontières de cisaillement, les équations d'équilibre imposent qu'il y ait la continuité du vecteur de contrainte :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^1 \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{n} \quad (4.36)$$

Condition de bifurcation

Après avoir décrit les conditions cinématiques et statiques du problème, il faut définir les équations constitutives, décrivant le comportement du matériau. La loi de comportement peut être présentée sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{G}(\dot{\mathbf{F}}) \quad (4.37)$$

Dans le cas présent, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ représente la dérivée de la contrainte de Cauchy par rapport à un repère fixe et \mathcal{G} est une fonction tensorielle dépendant de l'état a priori inconnu.

En remplaçant la condition cinématique (4.35) et la loi de comportement (4.37) dans la condition statique (4.36), on obtient qu'une bifurcation en bande est possible si'il existe une normale \mathbf{n} et un vecteur $\mathbf{q} \neq 0$ tel que :

$$\left(\mathcal{G}(\dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n}) - \mathcal{G}(\dot{\mathbf{F}}^0) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.38)$$

Il est important de préciser la nature de la loi constitutive employée.

On va, maintenant, présenter l'influence de la loi utilisée sur le critère de bifurcation général, exprimé par (4.38).

4.4.2 Lois linéaires en vitesse

Si la loi de comportement est linéaire en vitesse, alors la fonction \mathcal{G} est une fonction linéaire. On peut alors définir un tenseur constitutif B_{ijkl} du quatrième ordre tel que :

$$\dot{\sigma}_{ij} = B_{ijkl} \dot{F}_{kl} \quad (4.39)$$

D'où, la condition de bifurcation générale (4.38) devient après simplification :

$$\det(n_j B_{ijkl} n_l) = 0 \quad (4.40)$$

Remarque : Le critère (4.40) est également appelé critère d'ellipticité, car il correspond, dans le cas d'une analyse linéaire, à la perte d'ellipticité du système d'équations aux dérivées partielles, gouvernant l'équilibre local.

4.4.3 Lois multi-linéaires en vitesse

Rudnicki et Rice [100] ont été les premiers à étudier les lois multi-linéaires. Dans un cadre plus général, Chambon [19] a établi un théorème fondamental, permettant l'analyse de la bifurcation pour les lois multi-linéaires. Les hypothèses sont les suivantes :

(a) La loi de comportement 4.37 est divisée en ν relations linéaires liant $\dot{\mathbf{F}}$ à $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, de telle sorte que chaque relation linéaire soit valable pour des valeurs de $\dot{\mathbf{F}}$, appartenant à un hypercône noté H^α . La loi s'exprime donc par :

$$\dot{\mathbf{F}} \in H^\alpha \Rightarrow \dot{\sigma}_{ij} = B_{ijkl}^\alpha \dot{F}_{kl} \quad \text{pour } \alpha \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (4.41)$$

(b) L'ensemble de n hypercônes forme une partition de l'espace des valeurs de $\dot{\mathbf{F}}$.

(c) Finalement, pour qu'il n'y ait pas de discontinuité dans la réponse, on suppose que, sur la frontière commune de deux hypercônes H^α et H^β , la réponse obtenue avec les tenseurs \mathbf{B}^α et \mathbf{B}^β est identique. D'où,

$$\left(B_{ijkl}^\alpha - B_{ijkl}^\beta \right) \dot{F}_{kl} = 0 \quad (4.42)$$

La surface entre deux hypercônes H^α et H^β est donc un hyperplan, qui doit vérifier l'équation

$$\alpha_{kl}^{<\alpha \setminus \beta>} \dot{F}_{kl} = 0, \quad (4.43)$$

où $\alpha_{kl}^{<\alpha \setminus \beta>}$ est la normale de l'hyperplan. Comme tous les champs de vitesses \dot{F}_{kl} , vérifiant (4.42), doivent également vérifier (4.43), nous en déduisons la relation :

$$B_{ijkl}^\beta - B_{ijkl}^\alpha = b_{ij}^{<\alpha \setminus \beta>} a_{kl}^{<\alpha \setminus \beta>} \quad (4.44)$$

Cette définition est très générale pour toutes les catégories de modèles élasto-plastiques.

Après avoir donné une définition de ces modèles multi-linéaires, il est possible d'en écrire la condition de bifurcation.

Supposant, maintenant, que $\dot{\mathbf{F}}^0$ et $\dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n}$ appartiennent, respectivement, aux hypercônes H^0 et H^1 , en utilisant la relation (4.41), le critère de bifurcation s'écrit :

$$\left((B_{ijkl}^1 - B_{ijkl}^0) \dot{F}_{kl}^0 + B_{ijkl}^1 q_k n_l \right) n_j = 0 \quad (4.45)$$

Un cas particulier de cette condition consiste à supposer, que le comportement à l'intérieur de la bande et à l'extérieur de la bande sont décrits par les mêmes équations constitutives,. Alors, $\dot{\mathbf{F}}^0$ et $\dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n}$ appartiennent au même hypercône, ce qui permet de retrouver un critère de bifurcation semblable à celui obtenu pour une loi linéaire :

$$\det(B_{ijkl}^1 n_l n_j) = 0 \quad (4.46)$$

Pour les lois multi-linéaires, Chambon [19] a réalisé une étude générale de la localisation en bande de cisaillement. Il en déduit le théorème suivant :

Au cours d'un chargement monotone repéré par le paramètre strictement croissant λ , la valeur critique λ^c (valeur minimale de λ pour laquelle la bifurcation est possible), correspond au moins à une solution non triviale $(\dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n})$, telle que cette solution :

- *appartienne à une frontière de zone,*
- *ou bien telle que \mathbf{q} ait des composantes infinies.*

A partir de ce théorème, il a établi une méthode générale de résolution du problème complet de localisation pour les modèles multi-linéaires. Par exemple, en appliquant cette méthode aux lois élasto-plastiques à deux zones, il a pu retrouver les résultats de Rice et Rudnicki [96].

4.4.4 Lois incrémentalements non linéaires

Des modèles, basés sur une formulation entièrement non linéaire, ont été développés pour décrire le comportement des géomatériaux. Pour cette famille de lois, se pose aussi le problème de la bifurcation continue et de la bifurcation discontinue. La plupart du temps, ces modèles admettent une linéarisation directionnelle au voisinage d'une direction $\dot{\mathbf{F}}^*$:

$$\dot{\sigma}_{ij} = B_{ijkl} \left(\text{dir} \dot{\mathbf{F}}^* \right) \dot{F}_{kl} + t_{ij} \quad (4.47)$$

où

$$\text{dir} \dot{\mathbf{F}}^* = \frac{\dot{\mathbf{F}}^*}{\|\dot{\mathbf{F}}^*\|} \quad (4.48)$$

et

$$\lim_{\text{dir} \dot{\mathbf{F}} \rightarrow \text{dir} \dot{\mathbf{F}}^*} \frac{\mathbf{t}}{\|\dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^*\|} \quad (4.49)$$

La plupart des études, réalisées sur ces modèles, ne sont pas complètes (cf. Desrues et Chambon [30]). Elles sont simplifiées par des hypothèses assez restrictives comme :

- *l'intensité du gradient de vitesse à l'intérieur de la bande est négligeable devant celle du milieu homogène :*

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{n} \ll \dot{\mathbf{F}}^0 \quad (4.50)$$

alors :

$$\dot{\mathbf{F}}^1 = \dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n} \approx \dot{\mathbf{F}}^0 \quad (4.51)$$

donc

$$\det \left(B_{ijkl} \left(\text{dir} \dot{\mathbf{F}}^0 \right) n_i n_j \right) = 0 \quad (4.52)$$

qui est une forme similaire au critère classique de localisation pour les modèles linéaires. Etant adopté par Rudnicki et Rice [100] et Vardoulakis [117], cette approche est la plus utilisée. Cependant, cette

hypothèse semble peu réaliste, au vue des résultats expérimentaux qui montrent une intensité très importante de la déformation à l'intérieur de la bande par rapport à celle en-dehors de la bande.

• *l'intensité du gradient de vitesse à l'intérieur de la bande est largement supérieure à celle du milieu homogène :*

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{n} \gg \dot{\mathbf{F}}^0 \quad (4.53)$$

d'où :

$$\dot{\mathbf{F}}^1 = \dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{n} \approx \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{n} \quad (4.54)$$

On obtient donc un critère non linéaire qui s'écrit :

$$\mathcal{G}_{ij}(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{n})n_j = 0 \quad (4.55)$$

.

• *la réponse fondamentale a la forme d'un cisaillement parallèle à la bande est*

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{n} = \gamma \dot{\mathbf{F}}^0 \quad (4.56)$$

alors

$$\dot{\mathbf{F}}^1 = (1 + \gamma) \dot{\mathbf{F}}^0 \quad (4.57)$$

Nous supposons par ailleurs que $\text{dir}(\dot{\mathbf{F}}^1) = \text{dir}(\dot{\mathbf{F}}^0)$. Nous obtenons alors, le critère classique de bifurcation.

Pourtant, il n'existe aucune méthode générale permettant de résoudre théoriquement le problème complet de localisation, avec des modèles incrémentalement non linéaires. Des études numériques sont alors indispensables pour conclure.

Chapitre 5

Problème micro/macro

Sommaire

5.1	Introduction	103
5.2	Les hypothèses de base	103
5.3	Position du problème sur un VER	105
5.3.1	Conditions sur la frontière extérieure du VER	106
5.3.2	Conditions sur la frontière intérieure du VER	107
5.4	Couplage entre la microstructure et la macrostructure	109
5.5	Construction de la loi constitutive macroscopique	110
5.6	Analyse d'instabilité macroscopique	111

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode d'homogénéisation numérique par le passage micro-macro. Les hypothèses de base et les concepts généraux sont récapitulés dans la section 5.2. Dans la section 5.3, nous présentons le problème sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER), avec des interfaces cohésives et deux types de conditions sur la frontière extérieure (soit en déformations linéaires, soit avec des conditions périodiques). Ensuite, nous donnons le couplage entre la microstructure et la macrostructure. Parallèlement, nous montrons la construction numérique de la loi constitutive macroscopique, utilisée ultérieurement. Enfin, on présentera une analyse de perte d'ellipticité macroscopique et on définira le concept de l'instabilité adoptée.

5.2 Les hypothèses de base

On assume que la configuration du matériau au niveau macroscopique est suffisamment homogène. Seulement, au niveau microscopique, elle est hétérogène (la morphologie est composée par des grains,

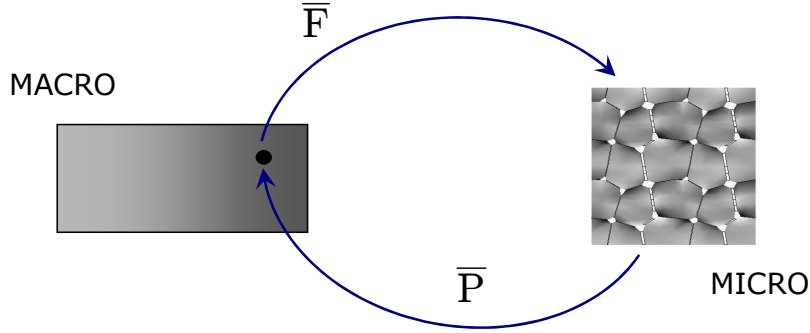


FIG. 5.1 – Schéma de localisation/homogénéisation. On impose un gradient de déformation $\bar{\mathbf{F}}$ et on récupère le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{P}}$.

des interfaces, des cavités). Cela est schématiquement illustré en Fig. 5.1. La dimension de la longueur macroscopique est beaucoup plus grande que les dimensions microscopiques, de sorte qu'une approche de continuum soit justifiée pour chaque constituant.

La méthode d'homogénéisation numérique implique que le tenseur du gradient de déformation macroscopique $\bar{\mathbf{F}}$ soit calculé, pour chaque point matériel de la macrostructure (par exemple, les points de gauss du maillage macroscopique dans le cadre de la méthode d'éléments finis). Le tenseur du gradient de déformation $\bar{\mathbf{F}}$ est, ensuite, utilisé pour formuler les conditions aux limites du VER, qui est assigné à ce point. Après avoir calculé la solution du problème sur le VER, le tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff no. 1 macroscopique $\bar{\mathbf{P}}$ est obtenu en faisant la moyenne de la contrainte dans le VER. En conséquence, on a obtenu une relation entre la contrainte et la déformation macroscopique dans le point macroscopique. De plus, le module tangent macroscopique local est calculé à partir du module tangent de la microstructure. Ce schéma d'homogénéisation est représenté dans la Fig. 5.1.

Le procédé micro-macro, décrit ici, est un procédé "contrôlé en déformation". C'est-à-dire qu'au niveau macroscopique, le problème est formulé de la façon suivante : pour un gradient de déformation macroscopique donné, $\bar{\mathbf{F}}$, nous déterminons la contrainte $\bar{\mathbf{P}}$ et le module tangent macroscopique, basé sur la réponse de la microstructure. Un procédé "contrôlé en tension" (donné une contrainte macroscopique locale, on obtient la déformation) est également possible. Cependant, une méthode de ce type ne s'adapte pas directement dans le cadre standard d'éléments finis, qui est habituellement utilisé pour trouver la solution du problème avec des conditions aux limites. D'autre part, en cas de grandes déformations, les effets de rotation macroscopique doivent être ajoutés au tenseur de contrainte pour déterminer, en mode unique, le tenseur de gradient de déformation. Ce phénomène complique l'implémentation numérique. De fait, l'approche "contrôlé en contrainte" n'est, généralement, pas adoptée dans l'homogénéisation numérique micro-macro couplée.

5.3 Position du problème sur un VER

Les propriétés physiques et géométriques de la microstructure sont identifiées par un VER. Pour toutes les analyses, on considère que la cellule élémentaire contient des microstructures granulaires. Le choix du VER n'est pas toujours évident. Le VER doit être assez grand pour représenter la microstructure et, en même temps, il doit être suffisamment petit pour permettre de modéliser, correctement, le comportement. Plusieurs exemples de VER sont donnés, ultérieurement, dans la section 1.7.4.

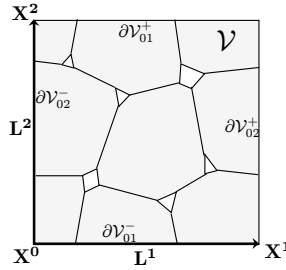


FIG. 5.2 – La configuration de référence d'une cellule unitaire périodique

Alors, le problème, au niveau du VER, peut être formulé comme un problème standard en mécanique de solides quasistatiques.

Nous considérons $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^2$ un volume représentatif bidimensionnel de la configuration non-déformée du corps (Fig. 5.2). On dénote par $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{V}_0$ la partie solide du corps et par $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{V}_0$ les cavités existantes dans la microstructure. Aussi, nous avons $\mathcal{V}_0 = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{H}_0$ et $\partial \mathcal{B}_0 = \partial \mathcal{V}_0 \cup \partial \mathcal{H}_0$, où $\partial \mathcal{V}_0$ qui représente la frontière extérieure du VER. $\partial \mathcal{H}_0$ représente, alors, la réunion des frontières intérieures et $\partial \mathcal{B}$ la frontière du corps solide.

On dénote par \mathbf{X} le vecteur de position initiale pour un point (dans le domaine de référence \mathcal{V}_0), et sa position actuelle est donnée par $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{t})$, où $\varphi : \mathcal{B}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est l'application non-linéaire de déformation. Nous décrivons par $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{X}}$ le tenseur de gradient de déformation de la microstructure.

Le VER est dans un état d'équilibre. Ceci est, mathématiquement, donné par l'équation d'équilibre écrite en terme de contrainte de Piola Kirchhoff numéro 1, $\mathbf{P}(\mathbf{X})$

$$\text{Div} \mathbf{P}(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{en } \mathcal{B}_0 \quad \text{avec } (\mathbf{P} \mathbf{F}^T)^T = \mathbf{P} \mathbf{F}^T \quad (5.1)$$

Les caractéristiques mécaniques des composantes de la microstructure sont décrites par certaines lois constitutives, d'où nous aurons des relations contrainte-déformation, qui dépendent du temps et de l'histoire de chaque constituant microstructural :

$$\mathbf{P}^m(t) = \mathcal{F}_t^m \{ \mathbf{F}^m(\tau), \tau \in [0, t] \} \quad (5.2)$$

où t dénote le temps courant, $m = 1, N$, avec N nombre de composantes différentes de la microstructure (grains, interfaces, cavités).

5.3.1 Conditions sur la frontière extérieure du VER

La transition de l'échelle micro à l'échelle macro est réalisée en imposant le tenseur de gradient de déformation macroscopique $\bar{\mathbf{F}}$ par différentes méthodes. En général, sont utilisées trois types de conditions sur le bord. Il y a des déformations linéaires, des tensions uniformes si le matériau du VER est hétérogène, et des conditions de périodicité en déformation et d'anti-périodicité en tension, si le VER est périodique.

Dans le cas de *déformations linéaires* appliquées sur le bord, le vecteur position du point, situé sur la frontière extérieure du VER dans un état déformé, est donné par

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{F}}(t)\mathbf{X} \quad \text{sur } \partial\mathcal{V}_0 \quad (5.3)$$

Pour des *conditions en tension* nous donnons

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{P}}(t)\mathbf{N}(\mathbf{X}) \quad \text{sur } \partial\mathcal{V}_0 \quad (5.4)$$

Ces conditions sont écrites en termes de contrainte de Piola Kirchhoff $\bar{\mathbf{P}}$, avec \mathbf{N} la normale extérieure sur $\partial\mathcal{V}_0$. Cependant, les conditions en tension sur les bords données par (5.4) ne définissent pas complètement le problème micro. C'est ce que nous avons affirmé dans le paragraphe 5.2, les conditions ne sont pas facilement utilisables pour les calculs à deux échelles. Par conséquence, dans notre étude, les conditions en tension ne sont pas utilisées. Elles ont été présentées ici, seulement pour la généralité.

Pour les matériaux hétérogènes périodiques on peut imposer des *conditions périodiques* sur le bord. Ces conditions s'écrivent dans la forme générale :

$$\varphi(\mathbf{X}^+, t) - \varphi(\mathbf{X}^-, t) = \bar{\mathbf{F}}(t)(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}^+, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{X}^-, t), \quad \text{avec } \mathbf{t}(\mathbf{X}^\pm) = \mathbf{P}\mathbf{N}^\pm \quad (5.6)$$

où les signes $+$ et $-$ sont associés pour les frontières opposées, $\partial\mathcal{V}_0^+ = \partial\mathcal{V}_{01}^+ \cup \partial\mathcal{V}_{02}^+$ et $\partial\mathcal{V}_0^- = \partial\mathcal{V}_{01}^- \cup \partial\mathcal{V}_{02}^-$ respectivement, et on dénote par $\mathbf{N}^+ = -\mathbf{N}^-$ la normale extérieure dans le point correspondant sur $\partial\mathcal{V}_0^\pm$.

La périodicité du matériau peut être définie dans la configuration lagrangienne par deux vecteurs de périodicité $\{\mathbf{L}^p\}_{p=1,2}$ avec l'origine en $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\mathbf{X}^p + \mathbf{L}^p, t) - \varphi(\mathbf{X}^p, t) = \bar{\mathbf{F}}(t)\mathbf{L}^p \quad (5.7)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}^p + \mathbf{L}^p, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{X}^p, t), \quad \text{avec } \mathbf{t}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}\mathbf{N} \quad (5.8)$$

où \mathbf{N} est la normale extérieure.

On peut voir que ces conditions périodiques, données par les formules (5.7-5.8), conservent la périodicité du VER dans son état déformé.

En outre, on doit mentionner que (voir aussi Miehe [74] ; Terada et al. [110]) les conditions de périodicité fournissent une meilleure évaluation des propriétés globales que le déplacement prescrit ou les conditions en tension (voir également la section 1.7.4).

5.3.2 Conditions sur la frontière intérieure du VER

Nous avons deux types de frontières internes : interfaces cohésives entre les grains et des frontières libres de contraintes, au tour de l'intersection des interfaces ou à l'intersection d'une interface avec une frontière externe. (Fig. 5.3)

Dans le premier cas, nous utiliserons une lois de traction-séparation sur l'interface (voir [116] et [121]). Nous considérons deux points matériels, situés en pointe de fissure, dans deux grains voisins, notés par A et B , respectivement. Dans la configuration de référence, les deux points coïncident, $\mathbf{X}^A = \mathbf{X}^B$ (Fig. 5.3). Les vecteurs de position dans la configuration courante sont $\mathbf{x}^A = \mathbf{x}^B$, d'où les vecteurs de déplacement sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^A &= \mathbf{x}^A - \mathbf{X}^A \\ \mathbf{u}^B &= \mathbf{x}^B - \mathbf{X}^B \end{aligned} \quad (5.9)$$

Le vecteur de déplacement relatif entre les points A et B est donné par :

$$\Delta \mathbf{u}^{AB} = \mathbf{u}^A - \mathbf{u}^B. \quad (5.10)$$

Nous considérons $(\mathbf{T}^0, \mathbf{N}^0)$, un repère local sur l'interface, avec \mathbf{N}^0 un vecteur unitaire normal et \mathbf{T}^0 un vecteur tangent à celui-ci. Nous pouvons écrire les composantes normale et tangentielle, du vecteur de

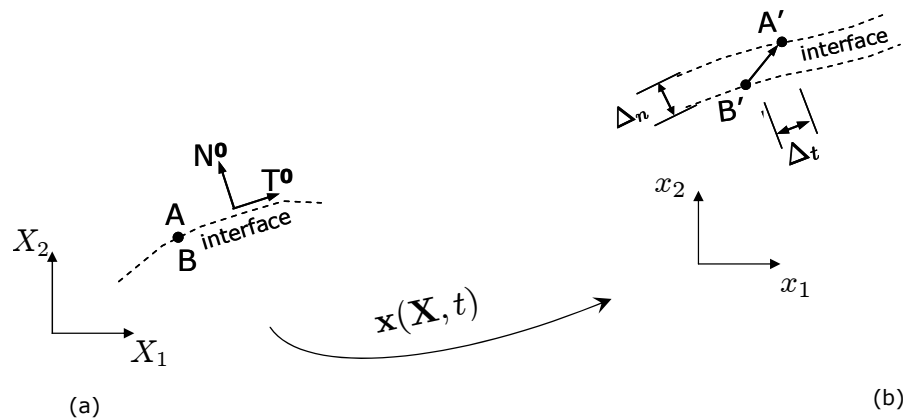


FIG. 5.3 – Schéma de la zone cohésive dans la configuration (a) non-déformée et (b) déformée

déplacement relative :

$$\begin{aligned}\Delta_t &= \Delta \mathbf{u}^{AB} \cdot \mathbf{T}^0 \\ \Delta_n &= \Delta \mathbf{u}^{AB} \cdot \mathbf{N}^0\end{aligned}\tag{5.11}$$

Avec ces notations, nous définissons la loi de traction-séparation sur l'interface :

$$\mathbf{P}_A \mathbf{N}^0 = \mathbf{P}_B \mathbf{N}^0 = \mathbf{t}^0; \quad \mathbf{t}^0 = \mathbf{t}^0(\Delta)\tag{5.12}$$

avec la composante normale et la composante tangentielle

$$\begin{aligned}t_t^0 &= \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{T}^0 \\ t_n^0 &= \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{N}^0\end{aligned}\tag{5.13}$$

La loi d'interface est donnée par les formules :

$$\begin{aligned}t_t^0 &= f_t(\Delta_t, \Delta_n) \\ t_n^0 &= f_n(\Delta_t, \Delta_n).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Ensuite, nous considérons les fonction f_t et f_n qui définissent une loi cohésive. Pour obtenir cette loi, nous définissons, aussi, un paramètre effectif non-dimensionnel $\hat{\lambda}$, sous la forme :

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right)^2}, & \Delta_n > 0, \\ \left|\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right|, & \Delta_n \leq 0, \end{cases}\tag{5.15}$$

Dans la configuration non-déformée, $\hat{\lambda}$ est égal à zéro, puisque les points A et B coïncident. Pendant la séparation sur l'interface, $\hat{\lambda}$ augmente et atteint la valeur 1 quand la séparation est complète. Nous avons noté par δ_n et δ_t , le saut critique, respectivement normal et tangentiel, au-delà duquel l'interaction entre les lèvres de fissures devient nulle, ainsi que la partie de résistance au glissement.

Nous considérons une fonction $f(\lambda)$ définie par

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{27}{4} T_{max}(1 - 2\lambda + \lambda^2), & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0, & \lambda \geq 1 \end{cases}\tag{5.16}$$

Pour une histoire de la cinématique

$$t \rightarrow \Delta_n(t), \Delta_t(t)$$

on définit $\lambda(t)$ par

$$\lambda(t) = \sup_{\tau \leq t} \hat{\lambda}(\tau)$$

qui represent un paramètre d'endommagement sur l'interface.

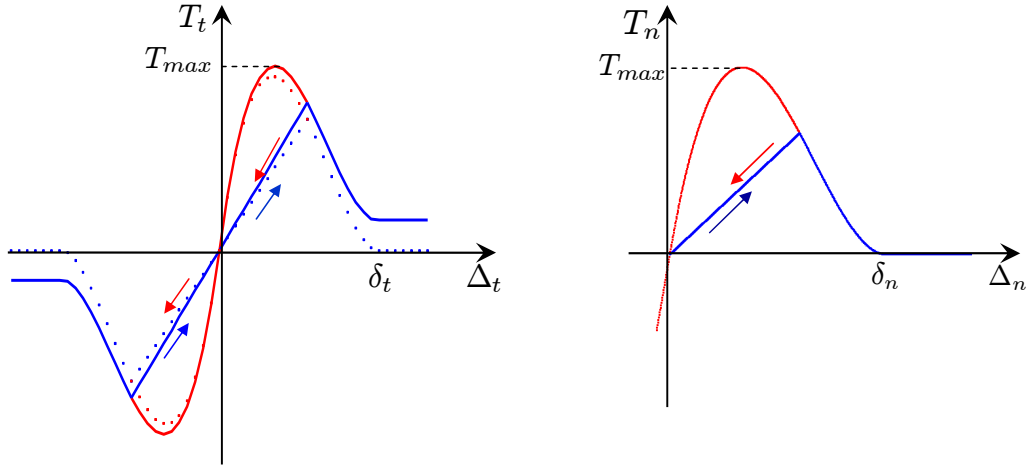


FIG. 5.4 – Evolution des force tangentielle et normale avec contact unilatéral en fonction de saut respectivement tangent et normal. Pour la courbe en trait plein, on a pris en compte le frottement de Coulomb

Alors, la loi de comportement s'écrit :

$$t_n^0(X) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_n} f(\lambda(t)) \Delta_n, & \Delta_n > 0 \\ \kappa_n \Delta_n, & \Delta_n < 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

$$t_t^0(X) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_t} f(\lambda(t)) \Delta_t, & \Delta_n > 0, \\ \frac{1}{\delta_t} f(\lambda(t)) \Delta_t - \text{sign}(\Delta_t) \mu_f T_n, & \Delta_n < 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

avec

$$\mu_f = \begin{cases} \mu_0 \frac{|\Delta_t|}{\delta_t} & \lambda < 1, \\ \mu_0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.19)$$

Le contact unilatéral est implémenté par une méthode de pénalisation, avec la constante κ_n . Dans la Fig. 5.4, nous avons représenté les forces tangentielle et normale.

Le frottement de Coulomb est activé progressivement, au début de la décohesion, et complètement, après la décohesion totale, avec μ_0 le coefficient de frottement. Cette loi de frottement décrit un comportement réversible, au niveau des interfaces, avec la possibilité de glissement pendant la décharge.

5.4 Couplage entre la microstructure et la macrostructure

Le couplage entre les niveaux macroscopique et microscopique est basé sur le calcul de la moyenne des théorèmes. Le calcul de la moyenne pour des expressions, en utilisant l'intégration, a été réalisé

initialement par Hill (1963) [50] pour des petites déformations, et plus tard prolongé par Hill (1984) [52] et Nemat-Nasser (1999) [81].

Nous avons noté par $\bar{\mathbf{P}}$ le tenseur de la première contrainte macroscopique de Piola Kirchhoff et le gradient de la macro-déformation par $\bar{\mathbf{F}}$. On postule que le tenseur macroscopique $\bar{\mathbf{F}}$ est la moyenne en volume du tenseur microstructural \mathbf{F} du gradient de déformation, et on peut calculer, en utilisant le théorème de divergence, cette intégrale comme une intégrale de surface (voir aussi [74]) :

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{|\mathcal{V}_0|} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F} dA ds \quad (5.20)$$

Une relation similaire est obtenue entre la contrainte macroscopique et la contrainte microscopique :

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{|\mathcal{V}_0|} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} dA \quad (5.21)$$

De cette façon, nous obtenons la réponse macroscopique de VER, sous forme d'une loi constitutive numérique.

5.5 Construction de la loi constitutive macroscopique

D'une manière générale, le procédé numérique d'homogénéisation nous conduit à une loi constitutive macroscopique de la forme :

$$\bar{\mathbf{P}}(t) = \mathcal{F}^t\{\bar{\mathbf{F}}(\tau), \tau \in [0, t]\} \quad (5.22)$$

qui donne le tenseur de contrainte Piola-Kirchhoff no.1, $\bar{\mathbf{P}}$ au moment t en fonction de l'histoire du gradient de déformation macroscopique $\bar{\mathbf{F}}$ ($\bar{\mathbf{F}}(\tau); \tau \in [0, t]$)

Pour toute histoire de $\bar{\mathbf{F}}$, nous supposons que $\bar{\mathbf{P}}$ admet à tout moment t une dérivée à droite $\dot{\bar{\mathbf{P}}}$, par rapport au temps t

$$\dot{\bar{\mathbf{P}}} = \lim_{\delta t \rightarrow 0, \delta t > 0} \frac{\bar{\mathbf{P}}(t + \delta t) - \bar{\mathbf{P}}(t)}{\delta t} \quad (5.23)$$

Nous supposons, également, qu'une histoire de $\bar{\mathbf{F}}$ étant donnée, la dérivée temporelle à droite $\dot{\bar{\mathbf{P}}}$, dépend seulement de la dérivée à droite $\dot{\bar{\mathbf{F}}}$ de $\bar{\mathbf{F}}$:

$$\dot{\bar{\mathbf{P}}} = \mathcal{G}(\dot{\bar{\mathbf{F}}}) \quad (5.24)$$

où la fonction \mathcal{G} est, généralement, non-linéaire par rapport à l'argument $\dot{\bar{\mathbf{F}}}$ et peut dépendre aussi de l'histoire ($\bar{\mathbf{F}}(\tau); \tau \in [0, t]$). Puisqu'il n'y a pas de viscosité dans le modèle, \mathcal{G} est positivement homogène de degré I par rapport à son argument.

Conformément à l'intégration numérique en temps de l'équation constitutive (5.22), la fonction \mathcal{G} peut être calculée de la façon suivante. Supposons que l'on a fait n incréments pour une histoire donnée de $\bar{\mathbf{F}}$, jusqu'au pas n et que l'on ait obtenu ainsi la valeur $\bar{\mathbf{P}}_n$ du tenseur de contrainte Piola-Kirchhoff I.

Considérons l'incrément $\dot{\bar{\mathbf{F}}}\Delta t$ du gradient de déformation $\bar{\mathbf{F}}$, sur l'intervalle Δt , qui conduit à la valeur numérique $\bar{\mathbf{P}}^*$ du tenseur de Piola-Kirchhoff I. La dérivée à droite de $\bar{\mathbf{P}}^*$ peut être approchée par :

$$\dot{\bar{\mathbf{P}}} = \frac{\bar{\mathbf{P}}^* - \bar{\mathbf{P}}_n}{\Delta t} \quad (5.25)$$

Il est évident que la dépendance de $\dot{\bar{\mathbf{P}}}$ sur $\dot{\bar{\mathbf{F}}}$ donne (implicitement) la fonction \mathcal{G} .

Dans ce qui suit nous nous restreignons au cas où l'histoire de $\bar{\mathbf{F}}$ est donnée par $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{G}^0$. \mathbf{G}^0 est un tenseur donné et α est le paramètre de chargement qui joue le rôle de t variant de manière monotone de 0 à 1.

Sur ce chemin, le tenseur de Piola Kirchhoff I est une fonction de α :

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathcal{P}(\alpha) \quad (5.26)$$

En l'absence des effets de viscosité, il est convenable de prendre $t = \alpha$.

En dérivant par rapport à α , on déduit que $\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \mathbf{G}^0$ sur le chemin donné. La définition de la fonction \mathcal{G} nous conduit à la formule approchée suivante :

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}^0) \approx \frac{\mathcal{P}(\alpha + \Delta\alpha) - \mathcal{P}(\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (5.27)$$

5.6 Analyse d'instabilité macroscopique

Nous considérons un processus de déformation quasi-statique à l'échelle macroscopique. Si $\bar{\mathbf{X}}$ représente la position d'un point matériel dans la configuration de référence, le problème consiste à déterminer l'application de transformation, $\bar{x}_i(\bar{X}_I, t)$ où $\bar{\mathbf{x}}$ est la position à l'instant t du point matériel $\bar{\mathbf{X}}$. L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{P}_{iJ}}{\partial \bar{X}_J} = 0 \quad (5.28)$$

La relation constitutive (5.22) est obtenue par homogénéisation de $\bar{\mathbf{F}}$. Le gradient de la déformation macroscopique est défini par $\bar{F}_{kL} = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial \bar{X}_L}$.

Considérons maintenant le problème incrémental, correspondant. L'inconnu du problème est la vitesse $v_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t}$, dans l'équation

$$\frac{\partial \dot{\bar{P}}_{iJ}}{\partial \bar{X}_J} = 0 \quad (5.29)$$

obtenue par dérivation, par rapport au temps t du (5.28), l'équation constitutive incrémentale (5.24) et les conditions aux limites incrémentales.

La perte d'unicité du problème incrémental est étudiée par la méthode de Rice [94]. On cherche $\dot{\bar{\mathbf{F}}}$ discontinue sur la frontière d'une bande de localisation. On démontre que cette discontinuité doit être telle que

$$\dot{\bar{F}}^1_{kL} = \dot{\bar{F}}^0_{kL} + q_k N_L \quad (5.30)$$

où \mathbf{N} est la normale ($\|\mathbf{N}\| = 1$) à l'interface, $\dot{\mathbf{F}}^1$ l'incrément du gradient de déformation de même côté que \mathbf{N} et $\dot{\mathbf{F}}^0$ d'autre côté de l'interface. Le vecteur contrainte doit être continu à travers l'interface :

$$\left(\dot{\bar{P}}^1_{iJ} - \dot{\bar{P}}^0_{iJ} \right) N_J = 0 \quad (5.31)$$

Comme $\dot{\bar{\mathbf{P}}}^1$ et $\dot{\bar{\mathbf{P}}}^0$ sont liées à $\dot{\bar{\mathbf{F}}}^1$ et $\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0$, respectivement par l'équation (5.24). Les inconnus \mathbf{q} et \mathbf{N} doivent satisfaire les équations

$$\left(\mathcal{G}_{iJ}(\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0 + \mathbf{q} \otimes \mathbf{N}) - \mathcal{G}_{iJ}(\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0) \right) N_J = 0 \quad (5.32)$$

pour $\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0$ donnée.

Il est clair que pour chaque \mathbf{N} , $\mathbf{q} = 0$ est une solution. La perte d'unicité a lieu si, il y a une solution $\mathbf{q} \neq 0$ pour l'équation (5.32).

Pour le processus de déformation macroscopique quasi-statique, la question de perte d'ellipticité revient à la détermination d'une valeur α , pour laquelle l'équation (5.32) a une solution non triviale $\mathbf{q} \neq 0$.

L'équation (5.32) est non linéaire et son étude est en générale difficile, en particulier, dans notre cas, où la fonction \mathcal{G} est obtenue sous forme numérique. Dans ce cas, nous restreignons la recherche d'une solution (5.32) au cas où le tenseur $\dot{\bar{\mathbf{F}}}^1$ est proche de $\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0$. C'est le mode de bifurcation continu dans le sens proposé par Rice ([94]).

Pour \mathcal{G} différentiable par rapport à $\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0$, l'équation (5.32) devient après linéarisation :

$$B_{iJkL}(\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0) q_k N_L N_J = 0 \quad (5.33)$$

où $B_{iJkL}(\dot{\bar{\mathbf{F}}}^0) = \left. \frac{\partial \mathcal{G}_{iJ}}{\partial \dot{\bar{F}}_{kL}} \right|_{\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}^0}$

Il est clair que l'équation (5.33) a une solution non triviale, si et seulement si, le tenseur acoustique \mathbf{Q} , défini par $Q_{ik} = B_{iJkL} N_L N_J$, est singulier :

$$\det \mathbf{Q} = 0. \quad (5.34)$$

Pour des VER sans interfaces, le comportement homogénéisé est hyperélastique et la condition précédente revient à la condition de perte d'ellipticité, telle qu'elle est définie dans [58]. Dans ce sens, notre analyse généralise celle de Knowles et Sternberg [58], en reliant la perte d'ellipticité à la non unicité de problème incremental.

Pour le processus quasistatique particulier, considéré avec $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{G}^0$, nous avons $\dot{\bar{\mathbf{F}}}$ constant et égal à \mathbf{G}^0 , ainsi que la fonction $\mathcal{G}(\mathbf{G}^0)$ qui peut être approchée par (5.27).

Quand à la différentiation numérique de \mathcal{G} , nous pouvons employer une formule en différences finies

$$B_{iJkL} = \frac{\mathcal{G}_{iJ}(\mathbf{G}^0 + \varepsilon \Delta^{kL}) - \mathcal{G}_{iJ}(\mathbf{G}^0)}{\varepsilon} \quad (5.35)$$

où Δ^{kL} est un tenseur d'ordre 2 donné par la relation suivante :

$$(\Delta^{kL})_{iJ} = \begin{cases} 1, & (kL) = (iJ), \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.36)$$

La perte d'ellipticité exprimée par (5.34) est le concept d'instabilité adopté dans cette étude. D'autres modes d'instabilité peuvent apparaître notamment à cause du frottement, cela nécessite des études plus approfondies.

Dans ce qui suit, on vérifiera la condition (5.34) pour la loi constitutive homogénéisée comme un indicateur de l'apparition de comportement instable macroscopique (par exemple, une bande de localisation). La question de la stabilité peut être également formulée au niveau microscopique. On peut montrer (e.g. [58]) que, pour $\lambda' + 2\mu' > 0$, $\mu' > 0$, (où λ' et μ' sont les coefficients de Lamé) les relations (5.17-5.18) assurent l'ellipticité forte du problème d'équilibre macroscopique. Ceci montre que les instabilités macroscopiques sont exclusivement les résultats de la rupture par decohérence sur les interfaces intergranulaires.

Chapitre 6

Implémentation numérique

Sommaire

6.1	Introduction	115
6.2	Formulation forte du problème sur un VER	116
6.3	Principe des travaux virtuels sur un VER	117
6.4	Discrétisation du temps - méthode incrémentale	118
6.5	Application de la méthode de Newton-Raphson au problème incrémental . .	118
6.6	Discrétisation d'éléments finis	119
6.6.1	Calcul du résidu élémentaire et de la matrice de rigidité élémentaire sur un élément de volume	120
6.6.2	Calcul du résidu élémentaire et de la matrice de rigidité élémentaire sur un élément de l'interface	122
6.6.3	Résolution du problème sur un pas	125

6.1 Introduction

Les détails de résolution numérique du problème mécanique sur un VER, présenté dans le chapitre 5, sont donnés dans ce chapitre.

Pour commencer, nous présentons la formulation forte du problème sur un VER, suivie par la formulation faible. Dans la section 6.4, nous donnons la discrétisation en temps en utilisant une méthode incrémentale. Ensuite, nous appliquons la méthode de Newton-Raphson, pour résoudre le problème sur un pas. Les conditions sur le bord, sont, soit en déformations linéaires, soit avec des conditions périodiques.

6.2 Formulation forte du problème sur un VER

Nous avons vu dans la section précédente, que le problème mécanique sur un VER que nous cherchons à résoudre, est donné par le système d'équations :

- le gradient de déformation

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (6.1)$$

- la loi de comportement d'un matériau hyperélastique de Saint-Venant Kirchhoff donnée par

$$\mathbf{S} = \lambda' \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu' \mathbf{E} \quad (6.2)$$

où $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$ est le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff numéro 2 et $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ est le tenseur de déformation de Green-Lagrange.

- l'équation d'équilibre écrite en termes de contrainte de Piola Kirchhoff numéro 1, $\mathbf{P}(\mathbf{X})$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{en } \mathcal{B}_0 \quad \text{avec } (\mathbf{P} \mathbf{F}^T)^T = \mathbf{P} \mathbf{F}^T \quad (6.3)$$

où l'opérateur $\nabla_{\mathbf{X}}$ dénote la différentielle dans la configuration de référence.

- les conditions sur la frontière extérieure du VER

a) déformations linéaires

$$\varphi(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X} \quad \text{sur } \partial \mathcal{V}_0 \quad (6.4)$$

b) déformations périodiques

$$\varphi(\mathbf{X}^+) - \varphi(\mathbf{X}^-) = \bar{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \quad \text{sur } \partial \mathcal{V}_0 \quad (6.5)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}^+) = -\mathbf{t}(\mathbf{X}^-), \quad \text{où } \mathbf{t}(\mathbf{X}^\pm) = \mathbf{P} \mathbf{N}^\pm \quad (6.6)$$

- les conditions sur les interfaces cohésives

$$\mathbf{P}_A \mathbf{N}^0 = \mathbf{P}_B \mathbf{N}^0 = \mathbf{t}^0; \quad \mathbf{t}^0 = \mathbf{t}^0(\Delta) \quad \text{sur } \partial \mathcal{H}_0 \quad (6.7)$$

où $\mathbf{t}^0 = [t_t^0 \ t_n^0]$ et $\Delta = [\Delta_t \ \Delta_n]$, où Δ_n et Δ_t sont les composantes normale et tangentielle, respectivement, du saut de déplacement sur l'interface.

Ces équations représentent la forme forte du problème mécanique associé à un comportement d'un milieu hyper-élastique granulaire. Les formes variationnelles, qui sont présentées dans la section 6.3, ont pour objet de réécrire ce problème mécanique, sous une forme intégrale (non-locale), de manière à mettre en œuvre une méthode de discrétisation.

6.3 Principe des travaux virtuels sur un VER

La formulation du principe des travaux virtuels est obtenue en multipliant l'équation (6.3) par un champ cinématiquement admissible \mathbf{u}^* . Ensuite, cette relation est intégrée sur le volume de référence \mathcal{V}_0 . Après une intégration par parties sur le domaine \mathcal{V}_0 et en utilisant le théorème de divergence, nous obtenons pour tout champ \mathbf{u}^* cinématiquement admissible :

$$\int_{\mathcal{V}_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* : \mathbf{P} \, d\mathcal{V}_0 - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}^0 \mathbf{u}^* \, ds_0 = 0 \quad (6.8)$$

Puisque nous avons supposé des conditions aux limites en déplacement sur toute la frontière, l'intégrale sur la frontière extérieure s'annule et le deuxième terme devient :

$$- \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}^0 \mathbf{u}^* \, ds_0 = \int_{\partial \mathcal{H}_0} (t_n^0 \Delta_n^* + t_t^0 \Delta_t^*) \, ds_0 \quad (6.9)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_t^* &= \Delta \mathbf{u}^{*AB} \cdot \mathbf{T}^0 \\ \Delta_n^* &= \Delta \mathbf{u}^{*AB} \cdot \mathbf{N}^0 \\ \Delta \mathbf{u}^{*AB} &= \mathbf{u}^{*A} - \mathbf{u}^{*B} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Nous introduisons le résidu :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\mathcal{V}_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* : \mathbf{P} \, d\mathcal{V}_0 + \int_{\partial \mathcal{H}_0} (t_n^0 \Delta_n^* + t_t^0 \Delta_t^*) \, ds_0 \quad (6.11)$$

et le problème peut maintenant s'écrire :

Trouver une fonction \mathbf{u} telle que

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = 0 \quad (6.12)$$

pour tout champ de déplacement \mathbf{u}^ cinématiquement admissible.*

Pour ce qui suit, nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \mathcal{R}^V(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + \mathcal{R}^I(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \quad (6.13)$$

avec

$$\mathcal{R}^V(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\mathcal{V}_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* : \mathbf{P} \, d\mathcal{V}_0 \quad (6.14)$$

$$\mathcal{R}^I(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\partial \mathcal{H}_0} (t_n^0 \Delta_n^* + t_t^0 \Delta_t^*) \, ds_0 \quad (6.15)$$

6.4 Discrétisation du temps - méthode incrémentale

Ne pouvant écrire les équations (6.12) à tout instant, nous faisons le choix que ces équations soient vérifiées pour des valeurs discrètes du temps, formant une suite croissante de Nin valeurs. Comme nous avons vu dans le paragraphe précédent, en absence d'effet visqueux, le rôle du temps est joué par un paramètre de chargement α , $\alpha^0 = 0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{Nin} = \alpha$ avec $(\bar{\mathbf{F}}^n = \mathbf{I} + \alpha^n \mathbf{G}^0)$. Nous chercherons donc les champs \mathbf{u}^n qui satisfont les équations suivantes :

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, Nin\}$$

$$\int_{\mathcal{V}_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* : \mathbf{P}^n d\mathcal{V}_0 + \int_{\partial \mathcal{H}_0} (t_n^{0n} \Delta_n^* + t_t^{0n} \Delta_t^*) ds_0 = 0 \quad (6.16)$$

pour tout champ de déplacement virtuel \mathbf{u}^* cinématiquement admissible, de manière à ce que la loi de comportement :

$$\mathbf{P}^n(\alpha) = \mathcal{F}_\alpha \{ \mathbf{F}^n(\tau), \tau \in [0, \alpha] \} \quad (6.17)$$

soit satisfaite.

Si nous supposons le problème résolu jusqu'à l'incrément n , nous pouvons faire une hypothèse cinématique, permettant de passer des champs $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$ connu au champ \mathbf{u}^{n+1} inconnu.

6.5 Application de la méthode de Newton-Raphson au problème incrémental

Nous allons, maintenant, étudier la méthode de résolution du couple d'équations (6.16-6.17), par la méthode de Newton-Raphson (Fig. 6.1). On se place dans le cas où une configuration \mathcal{V}^{n-1} est complètement connue. Nous supposons connaître une estimation de la configuration inconnue \mathcal{V}^n , que l'on notera par \mathcal{V}^{n^i} . Puis, nous chercherons une "meilleure approximation" $\mathcal{V}^{n^{i+1}}$ de la configuration \mathcal{V}^n . Nous supposons, donc, être dans la boucle i d'itération de la méthode de Newton-Raphson. Partant de l'approximation \mathbf{u}^{n^i} de la solution, on cherche une correction $\delta \mathbf{u}$ telle que :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}^{n^i} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = 0 \quad (6.18)$$

$$\mathbf{u}^{n^{i+1}} = \mathbf{u}^{n^i} + \delta \mathbf{u}. \quad (6.19)$$

D'où on trouve

$$0 = \mathcal{R}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) \delta \mathbf{u} + \|\delta \mathbf{u}\| \varepsilon(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \quad (6.20)$$

Négligeant le terme $\|\delta \mathbf{u}\| \varepsilon(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ nous devons, maintenant, résoudre le problème linéaire suivant :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) \delta \mathbf{u} = -\mathcal{R}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*); \quad (6.21)$$

Nous pouvons calculer le résidu et la matrice tangente comme une somme du résidu et de la matrice tangente calculés, en volume et sur les interfaces cohésives. En utilisant les formules suivantes, nous avons le résidu sous la forme :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) = \mathcal{R}^V(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) + \mathcal{R}^I(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) \quad (6.22)$$

avec

$$\mathcal{R}^V(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) = \int_{\mathcal{V}_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* : \mathbf{P}(\mathbf{u}^{n^i}) d\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} \text{sym}(\mathbf{F}^T(\mathbf{u}^{n^i}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^*) : \mathbf{S}(\mathbf{u}^{n^i}) d\mathcal{V}_0 \quad (6.23)$$

$$\mathcal{R}^I(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) = \int_{\partial\mathcal{H}_0} \mathbf{t}^0(\mathbf{u}^{n^i}) \cdot \Delta^* ds_0 \quad (6.24)$$

Ainsi, en tenant compte de $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$, nous avons la matrice tangente :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) = \frac{\partial \mathcal{R}^V}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) + \frac{\partial \mathcal{R}^I}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) \quad (6.25)$$

où

$$\frac{\partial \mathcal{R}^V}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) = \frac{d}{d\mathbf{u}} \int_{\mathcal{V}_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) d\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* : \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{u}} \right) d\mathcal{V}_0 \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}^I}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n^i}, \mathbf{u}^*) = \frac{d}{d\mathbf{u}} \int_{\mathcal{H}_0} \mathbf{t}^0(\mathbf{u}^{n^i}) \cdot \Delta^* ds_0 = \int_{\mathcal{H}_0} \frac{d\mathbf{t}^0}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n^i}) \cdot \Delta^* ds_0 \quad (6.27)$$

La solution est, a priori, cherchée dans un espace de fonctions vectorielles de dimension infinie. Nous allons, en fait, le résoudre dans un sous espace de dimension finie de cet espace.

6.6 Discrétisation d'éléments finis

Ensuite, nous appliquons la discrétisation d'éléments finis aux équations variationnelles, 6.21. Nous considérons que le volume \mathcal{V}_0 contient $nelV$ des éléments en volume et $nelI$ des éléments sur l'interface

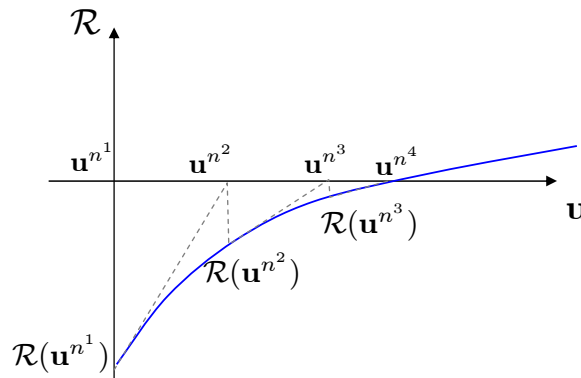


FIG. 6.1 – La méthode de Newton-Raphson sur un increment

cohésive (Fig. 6.2). Nous avons noté par \mathbf{U} le vecteur global de déplacement des noeuds et par \mathbf{U} le vecteur de déplacement des nœuds correspondants à chaque élément.

Après la discrétisation, nous avons obtenu le problème suivant :

Trouver une fonction \mathbf{U}^{n^i} telle que

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) \delta \mathbf{U} = -\mathcal{R}(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) \quad (6.28)$$

pour tout champ de déplacement \mathbf{U}^ cinématiquement admissible.*

Les expressions pour le résidu et pour la matrice tangente sont données par :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \sum_{e=1}^{nelV} [\mathbf{R}^V(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*)]_e + \sum_{e=1}^{nelI} [\mathbf{R}^I(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*)]_e \quad \text{en } \mathcal{V}_0 \text{ et } \partial \mathcal{H}_0 \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \sum_{e=1}^{nelV} \left[\frac{\partial \mathbf{R}^V}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) \right]_e + \sum_{e=1}^{nelI} \left[\frac{\partial \mathbf{R}^I}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) \right]_e \quad (6.30)$$

où \mathbf{R}^V et \mathbf{R}^I représentent le résidu élémentaire sur les éléments de volume et d'interface respectivement, $\frac{\partial \mathbf{R}^V}{\partial \mathbf{U}}$ et $\frac{\partial \mathbf{R}^I}{\partial \mathbf{U}}$ constituent la matrice de rigidité élémentaire sur les éléments de volume et d'interface respectivement.

6.6.1 Calcul du résidu élémentaire et de la matrice de rigidité élémentaire sur un élément de volume

a) Calcul du résidu élémentaire

Nous considérons en volume, uniquement, des éléments quadrilatéraux. Sur un élément de volume, noté ω_e^V , le résidu élémentaire est évalué par la formule suivante :

$$\mathbf{R}^V(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \left(\sum_{pg} \mathbf{B}_{nl}^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{J}_X \mathbf{w} \right) \mathbf{U}^* \quad (6.31)$$

pour tout champ de déplacement virtuelle \mathbf{U}^* cinématiquement admissible. L'intégrale a été calculée en utilisant la méthode de Gauss, où pg désigne les point de Gauss que nous avons considéré en chaque

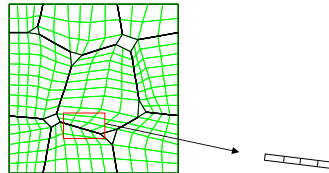


FIG. 6.2 – Discrétisation d'éléments finis

élément. Nous avons noté par $\bar{\mathbf{S}}$ est le tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff no.2 écrit sous la forme vectorielle.

Pour obtenir cette relation, nous avons exprimé, dans l'équation (6.23), les quantités qui contient \mathbf{u}^{n^i} et \mathbf{u}^* , en utilisant les fonctions de forme \mathbf{N} et l'opérateur de déformation \mathbf{B}_{nl} , sous la forme :

$$\mathbf{u}^{n^i} = \mathbf{N}\mathbf{U}^{n^i} \quad (6.32)$$

$$\mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{F}^T \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^*)} = \mathbf{B}_{nl} \mathbf{U}^* \quad (6.33)$$

où \mathbf{U} et \mathbf{U}^* représentent les vecteurs de déplacement dans les nœuds d'un élément, pour le champ de déplacement inconnu, ainsi que pour le champ de déplacement virtuel.

Pour calculer \mathbf{B}_{nl} nous avons remplacé $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}$, et $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^* = \mathbf{D}^*$, où \mathbf{D} représente le gradient de déplacement, dans l'équation (6.33). Nous obtenons, alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{nl} \mathbf{U}^* &= \mathbf{L} \overline{\text{sym}((\mathbf{D} + \mathbf{I})^T \cdot \mathbf{D}^*)} \\ &= \mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{D}^*)} + \mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}^*)} \\ &= \mathbf{B}_l \mathbf{U}^* + \mathbf{B}_n \mathbf{U}^* \end{aligned} \quad (6.34)$$

où \mathbf{B}_l est l'opérateur qui calcule les composantes linéaires du tenseur de déformation de Green dans la forme vectorielle. Ainsi, \mathbf{B}_n est l'opérateur qui calcule les composantes non-linéaires du tenseur de déformation de Green dans la forme vectorielle (voir equation 4.12).

Le tenseur de déformation de Green sous la forme vectorielle est calculé d'après la formule :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{D})} + \mathbf{L} \frac{1}{2} \overline{\text{sym}(\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D})} \\ &= \mathbf{B}_l \mathbf{U}^{n^i} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n \mathbf{U}^{n^i} = \mathbf{B}_{nl2} \mathbf{U}^{n^i} \end{aligned} \quad (6.35)$$

b) Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Après discrétisation en éléments finis, pour la matrice de rigidité sur l'élément de volume ω_e^V , nous avons obtenu :

$$\frac{\partial \mathbf{R}^V}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \left(\sum_{pg} \left[\mathbf{B}_{nl}^T \frac{d\bar{\mathbf{S}}}{d\bar{\mathbf{E}}} \mathbf{B}_{nl} + \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G} \right] \mathbf{wJ}_x \right) \mathbf{U}^* \quad (6.36)$$

pour tout champ de déplacement virtuel \mathbf{U}^* cinématiquement admissible.

Pour obtenir cette relation, nous avons utilisé :

$$\frac{d\bar{\mathbf{S}}}{d\mathbf{U}} = \frac{d\bar{\mathbf{S}}}{d\bar{\mathbf{E}}} \frac{d\bar{\mathbf{E}}}{d\mathbf{U}} = \frac{d\bar{\mathbf{S}}}{d\bar{\mathbf{E}}} \mathbf{B}_{nl} \quad (6.37)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{E}}}{d\mathbf{U}} &= \frac{d}{d\mathbf{U}} \left[\mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{D})} + \frac{1}{2} \mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D})} \right] \\ &= \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_n = \mathbf{B}_{nl}\end{aligned}\quad (6.38)$$

et

$$d\mathbf{F} = d(\mathbf{D} + \mathbf{I}) = d\mathbf{D} \quad (6.39)$$

et

$$\mathbf{D}^* : (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G} \mathbf{U}^{n^i} \quad (6.40)$$

où \mathbf{G} est l'opérateur qui transforme le gradient de déplacement dans une forme vectorielle :

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{G} \mathbf{U}^{n^i} \quad (6.41)$$

et

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Remarques :

1) Dans la matrice de rigidité, on peut distinguer deux parties. La première contient une information de non-linéarité matérielle, liée au modèle de comportement choisi :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}^V}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) \right|_{mat} = \left(\sum_{pg} \left[\mathbf{B}_{nl}^T \frac{d\tilde{\mathbf{S}}}{d\bar{\mathbf{E}}} \mathbf{B}_{nl} \right] \mathbf{w} \mathbf{J}_{\mathbf{X}} \right) \mathbf{U}^*$$

et la deuxième partie contient les non-linéarités géométriques (dans l'hypothèse des petites déformations cette partie est nulle).

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}^V}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) \right|_{geom} = \left(\sum_{pg} \left[\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G} \right] \mathbf{w} \mathbf{J}_{\mathbf{X}} \right) \mathbf{U}^*$$

2) Pour l'élément isoparamétrique à quatre noeuds, le calcul des opérateurs est donné en Annexe B.1

6.6.2 Calcul du résidu élémentaire et de la matrice de rigidité élémentaire sur un élément de l'interface

Maintenant, nous considérons un élément de l'interface notée ω_e^I , représenté par un quadrangle à quatre nœuds dégénéré en segment (i.e. les nœuds $I - J$ et $I + 1 - J + 1$ ont les mêmes coordonnées). Nous le représentons sur la Fig. 6.3 par un rectangle dont l'orientation des grands côtés définit le repère local à l'élément $(\mathbf{N}^0, \mathbf{T}^0)$, avec \mathbf{N}^0 un vecteur unitaire normal au grand côté et \mathbf{T}^0 un vecteur tangent à celui-ci.

Nous allons considérer, comme dans la section 5.3.2, un point A , qui se trouve d'un côté de l'interface, et son correspondant, B , situé de l'autre côté. Les vecteurs de position dans la configuration courante sont $\mathbf{x}^A = \mathbf{x}^B$, d'où les vecteurs de déplacement sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^A &= \mathbf{x}^A - \mathbf{X}^A \\ \mathbf{u}^B &= \mathbf{x}^B - \mathbf{X}^B\end{aligned}\quad (6.43)$$

Le vecteur de déplacement relatif entre les points A et B est donné par :

$$\Delta \mathbf{u}^{AB} = \mathbf{u}^A - \mathbf{u}^B. \quad (6.44)$$

où écrit sous une forme matricelle :

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1^{AB} \\ \Delta u_2^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_1^B \\ u_2^B \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_1^B \\ u_2^B \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Et ses composantes normal et tangentielle sont :

$$\begin{aligned}\Delta_t &= \Delta \mathbf{u}^{AB} \cdot \mathbf{T}^0 \\ \Delta_n &= \Delta \mathbf{u}^{AB} \cdot \mathbf{N}^0\end{aligned}\quad (6.46)$$

où \mathbf{T}^0 et \mathbf{N}^0 sont définis sur l'élément d'interface dans la configuration de référence. Ils peuvent être calculés en fonction des coordonnées nodales de cet élément, $\mathbf{X}^I, \mathbf{X}^{I+1}$ par la formule :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^0 \\ \mathbf{N}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{Q} \quad (6.47)$$

Avec ces notations, nous pouvons réécrire le déplacement relatif aux directions normales et tangents sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Delta_t \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \Delta u_1^{AB} \\ \Delta u_2^{AB} \end{bmatrix} \quad (6.48)$$



FIG. 6.3 – Schéma de l'élément d'interface cohésive

Dans la section 5.3.2, nous avons défini les composantes normal et tangentielle du vecteur de tension en fonction des variables Δ_n et Δ_t , tels que :

$$\begin{aligned} t_t^0 &= f_t(\Delta_t, \Delta_n) \\ t_n^0 &= f_n(\Delta_t, \Delta_n) \end{aligned} \quad (6.49)$$

Avec ces notation établies, nous allons calculer le résidu élémentaire et la matrice de rigidité pour un élément de ce type.

a) Calcul du résidu élémentaire

D'après l'équation (6.11), le résidu sur un élément d'interface cohésive peut être écrit sous une forme matricielle :

$$\mathbf{R}^I(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \int_{\omega_e^I} t_t^0 \Delta_t^* + t_n^0 \Delta_n^* d\omega = \int_{\omega_e^I} \begin{bmatrix} t_t^0 & t_n^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_t^* \\ \Delta_n^* \end{bmatrix} d\omega \quad (6.50)$$

Cette intégrale est calculée sur un élément parent (représenté par l'intervalle $[-1, 1]$), en utilisant (6.45) et (6.48) après la relation :

$$\mathbf{R}^I(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \int_{\omega_{par}^I} \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{H} ([u_1^A \ u_2^A \ u_1^B \ u_2^B]^*)^T \mathbf{J}_\mathbf{x} d\omega^{par} \quad (6.51)$$

Sur l'élément cohésif typique donné en Fig. 6.3 on peut exprimer le vecteur de déplacement par interpolation, en utilisant les fonctions de forme $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2]$ de dimension 1 (voir B.1) et les déplacements de noeuds $I, I+1, J, J+1$

$$\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_1^B \\ u_2^B \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} N_J & 0 & N_{J+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_J & 0 & N_{J+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_I & 0 & N_{I+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_I & 0 & N_{I+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^J \\ u_2^J \\ u_1^{J+1} \\ u_2^{J+1} \\ u_1^I \\ u_2^I \\ u_1^{I+1} \\ u_2^{I+1} \end{bmatrix}^* = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{U}^* \quad (6.52)$$

où $N_J = N_I = N_1$ et $N_{J+1} = N_{I+1} = N_2$

Par une méthode d'intégration numérique de type Gauss (voir Annexe B.1) on obtient :

$$\mathbf{R}^I(\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \left(\sum_{pg} \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{H} \bar{\mathbf{N}}_w \mathbf{J}_\mathbf{x} \right) \mathbf{U}^* \quad (6.53)$$

pour tout champ de déplacement virtuel \mathbf{U}^* cinématiquement admissible.

b) Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Pour calculer la matrice de rigidité sur un élément d'interface, nous partons des équations (6.27) et nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{R}^I}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \frac{d}{d\mathbf{U}} \int_{\omega_e^I} [t_t^0 \ t_n^0] \begin{bmatrix} \Delta_t^* \\ \Delta_n^* \end{bmatrix} d\omega = \int_{\omega_e^I} [dt_t^0 \ dt_n^0] \begin{bmatrix} \Delta_t^* \\ \Delta_n^* \end{bmatrix} d\omega \quad (6.54)$$

où

$$\begin{bmatrix} dt_t^0 \\ dt_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial \Delta_t} & \frac{\partial f_t}{\partial \Delta_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial \Delta_t} & \frac{\partial f_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta_t \\ d\Delta_n \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} d\Delta_t \\ d\Delta_n \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

Utilisant (6.44), (6.48), (6.52) en (6.54) nous avons :

$$\frac{\partial \mathbf{R}^I}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \left(\int_{\omega_e^I} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \bar{\mathbf{N}} d\omega \right) \mathbf{U}^* \quad (6.56)$$

Et cette intégrale est calculée par la méthode de Gauss en dimension 1 sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{R}^I}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}^{n^i}, \mathbf{U}^*) = \left(\sum_{pg} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{w}_{\mathbf{J}_X} \right) \mathbf{U}^* \quad (6.57)$$

pour tout champ de déplacement virtuel \mathbf{U}^* cinématiquement admissible.

6.6.3 Résolution du problème sur un pas

Maintenant nous avons à résoudre une équation de type :

$$[\mathbf{K}^{n^i}] \delta \mathbf{U} = -[\mathbf{R}^{n^i}] \quad (6.58)$$

où la matrice de rigidité \mathbf{K}^{n^i} et le vecteur résidu \mathbf{R}^{n^i} sont obtenus par sommation des matrices de rigidité élémentaires et des vecteurs élémentaires respectivement par la formule :

$$[\mathbf{R}^{n^i}] = \sum_{e=1}^{nelemV} \left(\sum_{pg} \mathbf{B}_{nl}^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{w}_{\mathbf{J}_X} \right)_e + \sum_{e=1}^{nelemI} \left(\sum_{pg} \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{H} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{w}_{\mathbf{J}_X} \right)_e \quad (6.59)$$

$$[\mathbf{K}^{n^i}] = \sum_{e=1}^{nelemV} \left(\sum_{pg} \left[\mathbf{B}_{nl}^T \frac{d\bar{\mathbf{S}}}{d\mathbf{E}} \mathbf{B}_{nl} + \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G} \right] \mathbf{w}_{\mathbf{J}_X} \right)_e + \sum_{e=1}^{nelemI} \left(\sum_{pg} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{w}_{\mathbf{J}_X} \right)_e \quad (6.60)$$

Nous allons nous placer dans le cas où les conditions aux limites aux frontières sont des conditions en

- a) déformations linéaires
- b) déformations uniformes périodiques.

Dans les deux cas, tous les nœuds ont le même type de conditions. Pour simplifier le calcul, nous allons, d'abord, séparer les nœuds en deux catégories. Il y a les nœuds situés à l'intérieur du VER et les nœuds situés sur la frontière extérieure du VER. Soit, N le nombre total de nœuds du maillage et M le nombre

de nœuds situés sur la frontière extérieure, avec la condition $M < N$. Alors, nous pouvons construire deux matrices de permutation $\mathbb{P}_a \in \mathcal{M}(2N - 2M, 2N)$ et $\mathbb{P}_b \in \mathcal{M}(2M, 2N)$, qui permettent de séparer les nœuds et de réécrire le vecteur de déplacement ainsi que le vecteur résidu sous la forme :

$$\mathcal{U}^{n^i} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_a^{n^i} \\ \mathcal{U}_b^{n^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_a \mathcal{U}^{n^i} \\ \mathbb{P}_b \mathcal{U}^{n^i} \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{R}^{n^i}] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a^{n^i} \\ \mathbf{R}_b^{n^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_a \mathbf{R}^{n^i} \\ \mathbb{P}_b \mathbf{R}^{n^i} \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

où les indices a et b sont associés avec les nœuds intérieurs et les nœuds sur la frontière extérieure du VER. Similairement, au point (6.61), la matrice globale de rigidité est partitionnée en

$$[\mathbf{K}^{n^i}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^{n^i} & \mathbf{K}_{ab}^{n^i} \\ \mathbf{K}_{ba}^{n^i} & \mathbf{K}_{bb}^{n^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_a \mathbf{K}^{n^i} \mathbb{P}_a^T & \mathbb{P}_a \mathbf{K}^{n^i} \mathbb{P}_b^T \\ \mathbb{P}_b \mathbf{K}^{n^i} \mathbb{P}_a^T & \mathbb{P}_b \mathbf{K}^{n^i} \mathbb{P}_b^T \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

a) Déformations linéaires sur la frontière du VER

Nous allons nous placer dans le cas le plus simple, où les conditions limites aux frontières du volume représentatif sont des conditions en déformations linéaires. Chaque nœud q , situé sur la frontière extérieure à l'incrément $n + 1$, a un déplacement imposé par la relation (6.4), écrit sous la forme discrète :

$$\mathbf{x}_q^{n+1} = \bar{\mathbf{F}}^{n+1} \mathbf{X}_q, \quad q = 1, \dots, M, \quad \bar{\mathbf{F}}^{n+1} = \mathbf{I} + \alpha^{n+1} \mathbf{G}^0 \quad (6.63)$$

ou écrite en déplacement

$$\mathcal{U}_q^{n+1} = \alpha^{n+1} \mathbf{G}^0 \mathbf{X}_q, \quad q = 1, \dots, M, \quad (6.64)$$

et

$$\Delta \mathcal{U}_q = \mathcal{U}_q^{n+1} - \mathcal{U}_q^n = \Delta \alpha \mathbf{G}^0 \mathbf{X}_q, \quad q = 1, \dots, M, \quad (6.65)$$

Nous en deduisons donc que, sur un pas itératif, la condition imposée sur la frontière est

$$\mathcal{U}_q^{n^{i+1}} - \mathcal{U}_q^{n^i} = \delta \mathcal{U}_q, \quad \text{où} \quad \delta \mathcal{U}_q = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (6.66)$$

La prise en compte des valeurs imposées sur la frontière du champ inconnu est fait par la méthode de suppression des équations, c'est-à-dire dans le système final $[\mathbf{K}^{n^i}] \delta \mathcal{U} = [\mathbf{R}^{n^i}]$, où l'on ne va garder que les composantes de $\delta \mathcal{U}$, qui ne sont pas données. Si on tient compte de la répartition du système, en fonction des positions des nœuds du maillage, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^{n^i} & \mathbf{K}_{ab}^{n^i} \\ \mathbf{K}_{ba}^{n^i} & \mathbf{K}_{bb}^{n^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathcal{U}_a \\ \delta \mathcal{U}_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a^{n^i} \\ \mathbf{R}_b^{n^i} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

Nous pouvons donc extraire un sous système correspondant à $2N - 2M$ inconnus, en supprimant les lignes et les colonnes b de la matrice $[\mathbf{K}^{n^i}]$, écrite sous la forme

$$[\mathbf{K}_{aa}^{n^i}] \delta \mathcal{U}_a = - [\mathbf{R}_a^{n^i}] \quad (6.68)$$

Dès lors, nous obtenons les déplacements aux nœuds situés à l'intérieur du VER.

$$\delta \mathbf{U}_a = - \left[\mathbf{K}_{aa}^{n^i} \right]^{-1} \left[\mathbf{R}_a^{n^i} \right] \quad (6.69)$$

b) Déformations uniformes périodiques sur la frontière du VER

Pour implémenter les conditions périodiques nous avons besoin de grouper les nœuds situés sur les frontières opposées ($\partial \mathcal{V}^+$, $\partial \mathcal{V}^-$) en P paires $(\mathbf{X}_q^+, \mathbf{X}_q^-)_{q=1, \dots, P}$.

Avant de définir les conditions périodiques, introduisons quelques notations :

$$\overline{\mathbf{G}}^0 = \alpha^{n+1} \begin{bmatrix} G_{11}^0 & G_{12}^0 & G_{21}^0 & G_{22}^0 \end{bmatrix}^T \quad (6.70)$$

et

$$\mathbb{D}_q^+ = \begin{bmatrix} X_1^+ & 0 \\ 0 & X_2^+ \\ X_2^+ & 0 \\ 0 & X_1^+ \end{bmatrix}_q, \quad \mathbb{D}_q^- = \begin{bmatrix} X_1^- & 0 \\ 0 & X_2^- \\ X_2^- & 0 \\ 0 & X_1^- \end{bmatrix}_q, \quad (6.71)$$

avec

$$\mathbb{Q}_q^T = \mathbb{D}_q^+ - \mathbb{D}_q^-, \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^T = [\mathbb{Q}_1^T, \mathbb{Q}_2^T, \dots, \mathbb{Q}_P^T] \quad (6.72)$$

et

$$\mathbf{X}_q^\pm = [X_1^\pm \ X_2^\pm]_q^T \quad (6.73)$$

Pour faire le lien entre les nœuds appartenant à la même paire, on peut construire une matrice $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(P, 2M)$, qui contient comme éléments $\{0, 1, -1\}$ sous la forme

$$\mathbb{P} = [\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots, \mathbb{P}_P] \quad (6.74)$$

où

$$(\mathbf{x}_q^+ - \mathbf{x}_q^-) = \mathbb{P}_q \mathbf{x}_b \quad (6.75)$$

avec \mathbf{x}_b , le vecteur des nœuds situés sur la frontière extérieure.

La condition des déformations périodiques implique

$$\mathbf{x}_q^{n+1+} - \mathbf{x}_q^{n+1-} = \overline{\mathbf{F}}^{n+1} (\mathbf{X}_q^+ - \mathbf{X}_q^-), \quad q = 1, \dots, P \quad (6.76)$$

ou écrite en déplacement

$$\mathbf{u}_q^{n+1+} - \mathbf{u}_q^{n+1-} = \alpha^{n+1} \overline{\mathbf{G}}^0 (\mathbf{X}_q^+ - \mathbf{X}_q^-), \quad q = 1, \dots, P \quad (6.77)$$

voir encore sous une forme plus compacte

$$\mathbb{P}\mathbf{x}_b^{n+1} = \mathbb{Q}^T \overline{\mathbf{F}}^{n+1}, \quad \text{équivalent à} \quad \mathbb{P}\mathbf{u}_b^{n+1} = \mathbb{Q}^T \overline{\mathbf{G}}^0 \quad (6.78)$$

Pour résoudre le système (6.58) avec la condition (6.78) nous allons introduire les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{M}(2M, 1)$, qui représentent le vecteur force extérieure, associé aux paires des nœuds.

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, le système d'équation algébrique non-linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_a^{n^{i+1}} = 0 \\ \mathbf{R}_b^{n^{i+1}} = \mathbb{P}^T \boldsymbol{\pi}^{n^{i+1}} \\ \mathbb{P}\mathbf{u}_b^{n^{i+1}} = \mathbb{Q}^T \overline{\mathbf{G}}^0 \end{cases} \quad (6.79)$$

où $\mathbf{u}^{n^{i+1}} = \mathbf{u}^{n^i} + \delta\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\pi}^{n^{i+1}} = \boldsymbol{\pi}^{n^i} + \delta\boldsymbol{\pi}$.

Après la linéarisation nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{aa}^{n^i} \delta\mathbf{u}_a + \mathbf{K}_{ab}^{n^i} \delta\mathbf{u}_b + \mathbf{R}_a^{n^i} = 0 \\ \mathbf{K}_{ba}^{n^i} \delta\mathbf{u}_a + \mathbf{K}_{bb}^{n^i} \delta\mathbf{u}_b + \mathbf{R}_b^{n^i} - \mathbb{P}^T \boldsymbol{\pi} - \mathbb{P}^T \delta\boldsymbol{\pi} = 0 \\ \mathbb{P}\mathbf{u}_b^{n^i} + \mathbb{P}\delta\mathbf{u}_b - \mathbb{Q}^T \overline{\mathbf{G}}^0 = 0 \end{cases} \quad (6.80)$$

La solution est obtenue, dans les étapes suivantes, par une méthode d'élimination. Nous déterminerons dans la première équation du système (6.80)₁ $\delta\mathbf{u}_a$ tel que :

$$\delta\mathbf{u}_a = -(\mathbf{K}_{aa}^{n^i})^{-1} (\mathbf{R}_a^{n^i} + \mathbf{K}_{ab}^{n^i} \delta\mathbf{u}_b) \quad (6.81)$$

on le remplace dans la deuxième équation du système (6.80)₂, après nous obtenons le système réduit :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{n^i} \delta\mathbf{u}_b - \mathbb{P}^T \delta\boldsymbol{\pi} + \tilde{\mathbf{R}}_b^{n^i} - \mathbb{P}^T \boldsymbol{\pi}^{n^i} = 0 \\ \mathbb{P}\delta\mathbf{u}_b + \mathbb{P}\mathbf{u}_b^{n^i} - \mathbb{Q}^T \overline{\mathbf{G}}^0 = 0 \end{cases} \quad (6.82)$$

où

$$\tilde{\mathbf{R}}_b^{n^i} = \mathbf{R}_b^{n^i} - \mathbf{K}_{ba}^{n^i} (\mathbf{K}_{aa}^{n^i})^{-1} \mathbf{R}_a^{n^i} \quad (6.83)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{n^i} = \mathbf{K}_{bb}^{n^i} - \mathbf{K}_{ba}^{n^i} (\mathbf{K}_{aa}^{n^i})^{-1} \mathbf{K}_{ab}^{n^i} \quad (6.84)$$

Pour (6.82)₁ nous obtenons la correction $\delta\mathbf{u}_b$ des déplacements des nœuds de la frontière extérieur du VER donnée par :

$$\delta\mathbf{u}_b = -(\tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{n^i})^{-1} (\tilde{\mathbf{R}}_b^{n^i} - \mathbb{P}^T \boldsymbol{\pi}^{n^i} - \mathbb{P} \delta\boldsymbol{\pi}) \quad (6.85)$$

Cette relation introduite en (6.82)₂ nous avons la correction des multiplicateurs de Lagrange :

$$\delta\boldsymbol{\pi} = - \left[\mathbb{P} (\tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{n^i})^{-1} \mathbb{P}^T \right]^{-1} \left[(\mathbb{P}\mathbf{u}_b^{n^i} - \mathbb{Q}^T \overline{\mathbf{G}}^0) - \mathbb{P} (\tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{n^i})^{-1} (\tilde{\mathbf{R}}_b^{n^i} - \mathbb{P}^T \boldsymbol{\pi}^{n^i}) \right] \quad (6.86)$$

Avec une notation plus compacte de forme

$$\bar{\mathbf{r}}^{n^i} = \left[(\mathbb{P}\mathcal{U}_b^{n^i} - \mathbf{Q}^T \overline{\mathbf{G}^0}) - \mathbb{P}(\tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{n^i})^{-1} (\tilde{\mathbf{R}}_b^{n^i} - \mathbb{P}^T \boldsymbol{\pi}^{n^i}) \right] \quad (6.87)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{n^i} = \left[\mathbb{P}(\tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{n^i})^{-1} \mathbb{P}^T \right] \quad (6.88)$$

nous avons

$$\delta \boldsymbol{\pi} = -[\bar{\mathbf{K}}^{n^i}]^{-1} \bar{\mathbf{r}}^{n^i} \quad (6.89)$$

Nous pouvons, alors, calculer successivement $\delta \mathcal{U}_b$ et $\delta \mathcal{U}_a$, en utilisant les équation (6.85) et (6.81).

Chapitre 7

Exemples numériques

Sommaire

7.1	Introduction	131
7.2	Tests numériques avec des déformations linéaires imposées sur le bord	132
7.3	Déformations linéaires - déformations périodiques. Comparaison	136
7.4	Déformations périodiques	139
7.4.1	VER à une cellule	139
7.4.2	VER contenant plusieurs cellules	144
7.5	Conclusions	144

7.1 Introduction

Les tests numériques, que nous présentons ici, ont pour but d'établir un lien entre la décohé- sion inter- granulaire, la perte d'ellipticité et la bifurcation de la réponse homogénéisée pour une micro-structure granulaire. Comme on a vu dans le paragraphe 5.6, pour détecter les seuils de bifurcations, nous avons considéré le critère de Rice (5.34). La notion d'instabilité adoptée, dans ce chapitre, est liée à la perte d'ellipticité.

Nous nous attachons, ici, à l'étude du comportement homogénéisé, au lien entre l'instabilité au ni- veau des interfaces de la micro-structure et à l'instabilité macroscopique, ou à l'apparition de différents modes de rupture, en fonction de plusieurs paramètres de la loi cohésive. Un rôle important sur le com- portement macroscopique est joué par les conditions aux limites du VER.

Dans cette section nous allons considérer différents types de géométrie de la microstructure. Dans un premier cas, nous considérons pour le VER une structure hétérogène non-périodique avec deux ou plusieurs grains séparés par des interfaces cohésives. Ensuite, nous prenons des VER composés par une ou plusieurs cellules périodiques (Fig. 7.1).

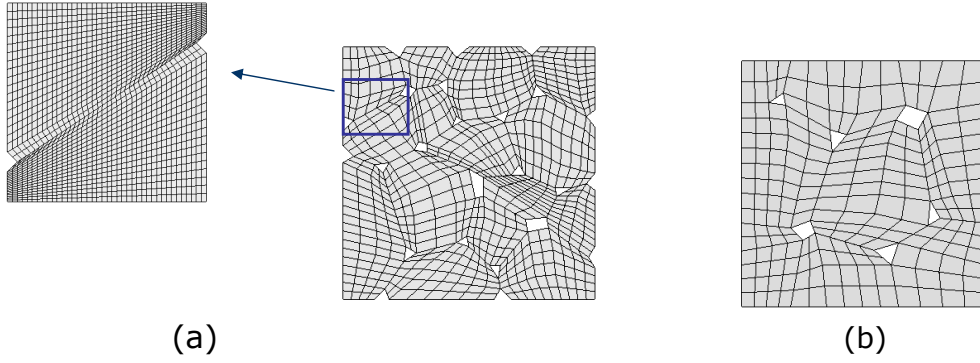


FIG. 7.1 – (a) VER non-périodique avec 2 et 15 grains ; (b) VER périodique avec 9 grains

Pour tous les tests effectués, nous avons considéré que chaque sous-domaine de grain est composé d'un matériau St-Venant Kirchhoff, avec comme paramètres, les constantes de Lamé $\lambda' = 1442.3$ MPa, $\mu' = 961.5$ MPa.

Tous les calculs présentés, ici, ont été effectués avec l'hypothèse des grandes déformations, en utilisant un algorithme d'éléments finis formulé en Lagrangian total (c'est-à-dire sur la configuration de référence). Les interfaces entre les grains sont modélisées en utilisant les éléments finis cohésifs (voir, par exemple [83], [120]).

Les conditions sur le bord, en déformations linéaires ou périodiques, sont appliquées, en utilisant un gradient de déformation macroscopique de la forme : $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{G}^0$ où \mathbf{G}^0 est une charge macroscopique fixe et α est un indice de chargement courant qui va de 0 à 1.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Le premier cas traité est l'analyse de perte d'ellipticité, fait sur les VER, représentés dans la Fig. 7.1(a), avec des déformations linéaires. Ensuite, nous analysons l'influence des conditions limites sur le comportement homogénéisé. Enfin, nous finirons par le cas périodique, en prenant une cellule périodique comme le montre la Fig. 7.1(b). La réponse constitutive macroscopique est obtenue, numériquement, pour des VER comprenant un nombre différent des cellules périodiques et de valeurs différentes pour le coefficient de frottement et de paramètres de la loi cohésive, qui caractérise les interfaces.

7.2 Tests numériques avec des déformations linéaires imposées sur le bord

Dans cette section, nous considérons deux exemples des géométries non-périodiques, avec des conditions sur le bord en déformations linéaires.

La première géométrie utilisée est une structure simple carré de 1.0 mm, composée de deux grains séparés par une interface (Fig. 7.1(a)). Tous les calculs sont faits en compression, en appliquant un gradient

de déformation $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{G}^0$, où $\mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$. La Fig. 7.2 est obtenue pour les paramètres de la loi cohésive, $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm et $T_{max} = 10$ MPa et montre la hiérarchie de comportement instable pour notre modèle. Sous la courbe globale de comportement, en fonction du facteur de chargement α , nous observons un retard entre le moment où les premiers points situés sur l'interface se trouvent dans la zone d'adoucissement (étape (1)) et la perte de macro-ellipticité (étape (2)). Le point marqué (3), dans la Fig. 7.2, correspond à la première occurrence de décohésion totale, au niveau micro. Nous pouvons remarquer que la perte d'unicité de la solution macroscopique correspond à une certaine longueur, qui se trouve dans la zone d'adoucissement de l'interface. Ce résultat est similaire à celui obtenu en [26], où ils ont montré qu'une longueur critique de la région, située en zone d'adoucissement, est nécessaire pour activer des modes d'instabilités. Considérons, maintenant, la question de la dépendance du maillage sur nos résultats. Nous avons considéré trois maillages différents avec 156 éléments, 600 éléments et 2352 éléments, respectivement. On peut facilement voir, dans la Fig. 7.2(gauche) que les trois points critiques, obtenus avec les trois maillages différents correspondent au même chargement. Nous avons également représenté, dans Fig. 7.2, le profil sur l'interface obtenu avec les trois maillages, pour l'instant de chargement correspondant à la perte d'ellipticité (2). On peut remarquer que les trois régions coïncident. Nous croyons que l'indépendance du maillage est due à la stabilité à l'intérieur des grains, ainsi qu'au fait de l'adoucissement des comportements microscopiques. Ces derniers se produisent, seulement, sur des ensembles de mesure zéro.

Nous donnons, ensuite, plusieurs résultats numériques, pour montrer la dépendance de l'instant de la

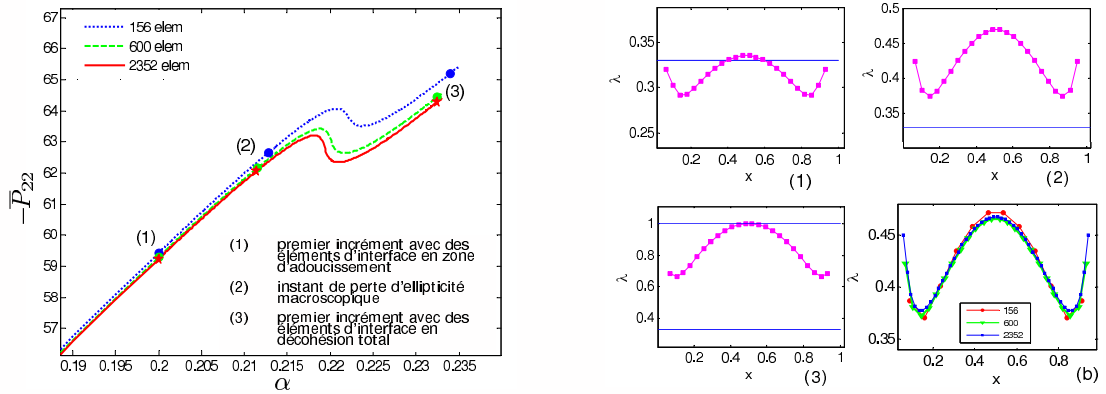


FIG. 7.2 – Gauche : Courbe de comportement macroscopique, contrainte (MPa), en fonction du facteur de chargement α , pour 3 maillages différents. Droite : La valeur de λ , qui correspond aux chargements de pas choisis pour le maillage. Pour l'instant (2), nous avons représenté dans la figure (b) le profil sur l'interface de λ pour les trois maillages - les points situés en zone d'adoucissement correspondent à $\lambda > 1/3$ et ce en zone de décohésion complète à $\lambda \geq 1$

perte d'ellipticité au niveau macroscopique, en fonction des différents paramètres de la loi cohésive.

Pour la représentation dans la Fig. 7.3, nous avons considéré le même chargement compressif, $T_{max} = 30$ MPa, sans frottement et différentes valeurs de $\delta_n = \delta_t$. Le résultat numérique prouve que la perte d'ellipticité correspond aux longueurs différentes de la zone d'interface, qui se trouve en régime adouci. Ces longueurs dépendent des paramètres de la loi cohésive. Un lien similaire entre les instabilités micro-macro est illustré dans Fig. 7.4, pour différentes valeurs de T_{max} . Pour des valeurs grandes de T_{max} , seulement quelques éléments instables d'interface sont nécessaires pour la perte d'ellipticité au niveau macro. Alors que pour des valeurs petites de T_{max} , tous les éléments d'interface doivent être dans le régime adoucissant.

L'influence du paramètre de frottement, μ_0 est analysée dans la Fig. 7.5. Nous pouvons voir que la présence du frottement a un effet d'empêchement sur le déclenchement des macro-instabilités. Dans la Fig. 7.6, nous avons représenté les régions d'ellipticité/non-ellipticité dans le plan de chargement macroscopique $\bar{F}_{11} - \bar{F}_{22}$, avec et sans le frottement sur l'interface. On peut remarquer la différence entre la traction et la compression, en ce qui concerne le domaine de macro-ellipticité. Mais aussi, le fait que dans quelques directions, nous n'avons pas constaté de perte d'ellipticité. La courbe complète de décohésion, correspondant à la rupture totale du volume élémentaire, est également représentée. La comparaison entre les deux cas confirme que le frottement a un effet de retard sur le début de macro-instabilité.

La deuxième géométrie de VER est une structure granulaire illustrée dans Fig. 7.1. Nous considérons $\mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ accompagné de différentes variations pour les paramètres T_{max} , $\delta_n = \delta_t$, et μ_0 ,

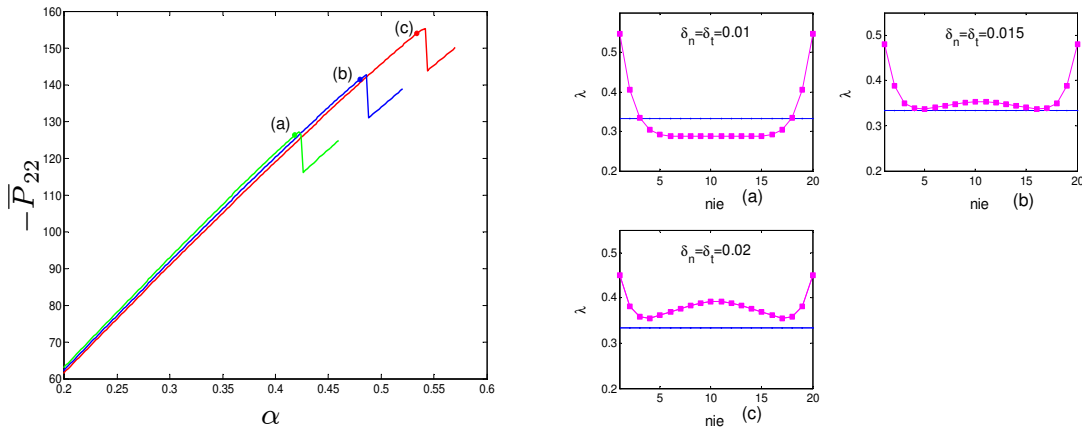


FIG. 7.3 – Gauche : Courbe de comportement global, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour différentes valeurs de $\delta_n = \delta_t$. Droite : La valeur du paramètre de décohésion λ sur l'interface (nie = nombre des éléments sur l'interface). Les points situés en zone d'adoucissement correspondent à $\lambda > 1/3$ (la ligne horizontale).

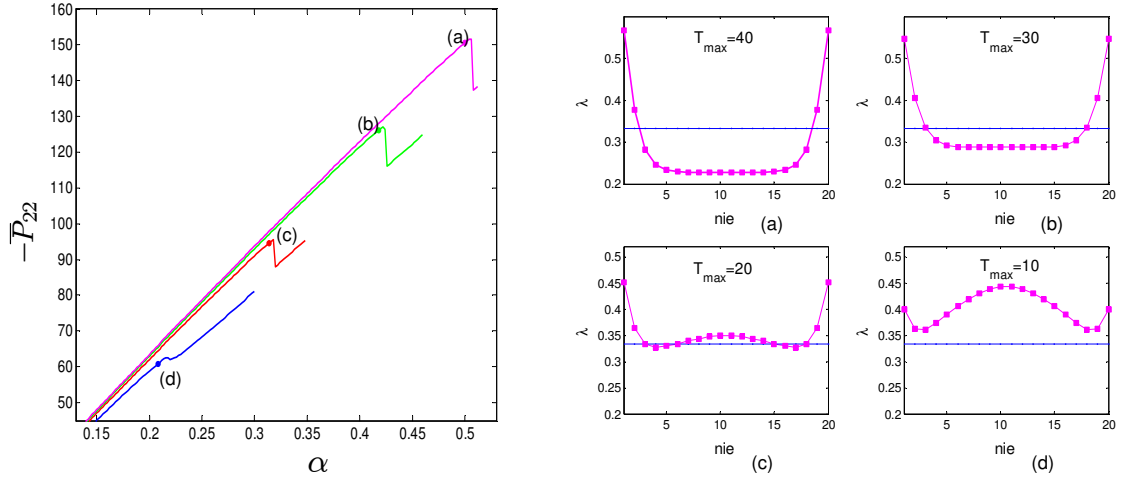


FIG. 7.4 – Courbes globales de comportement, contrainte (MPa) fonction du facteur de chargement α , pour différentes valeurs de T_{max} et la valeur correspondante du paramètre de décohesion λ

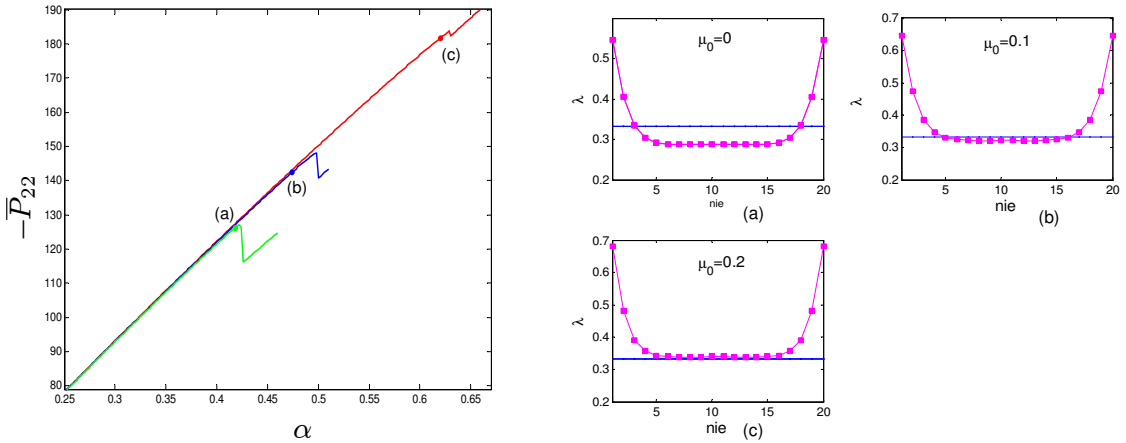


FIG. 7.5 – Courbes globales de comportement, contrainte (MPa), fonction du facteur de chargement α , pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ_0 et la valeur correspondante du paramètre de décohesion λ .

comme il est décrit dans la légende de Fig. 7.7. Nous retrouvons, dans ce test, les ruptures successives, du type décrit précédemment. Ceci est illustré par les trois configurations de VER en Fig. 7.7. Cette décohesion, par étapes, mène à une combinaison de zones stables/instables dans la réponse macroscopique. L'influence des différents paramètres précisés auparavant peut être observée ici. Dans ce cas-ci, les décohésions successives ont lieu sur un grand nombre d'interfaces, menant à une région de macro-instabilité, dans la réponse homogénéisée. Les influences des paramètres de cohésion et de frottement, illustrées dans le cas simple, considéré en cette section, demeureront vraies pour des géométries microstructurales plus complexes.

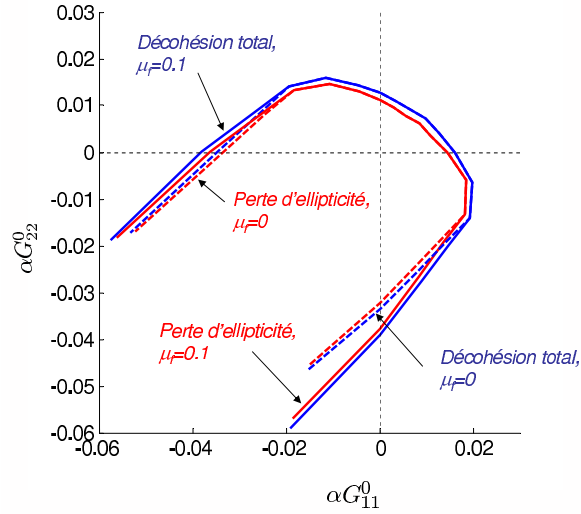


FIG. 7.6 – Zones de (non) ellipticité dans le plan de chargement macroscopique, avec ou sans frottement ($\mu_0 = 0.1$). Nous représentons les courbes de perte d'ellipticité et de décohésion totale dans tous les points d'interfaces.

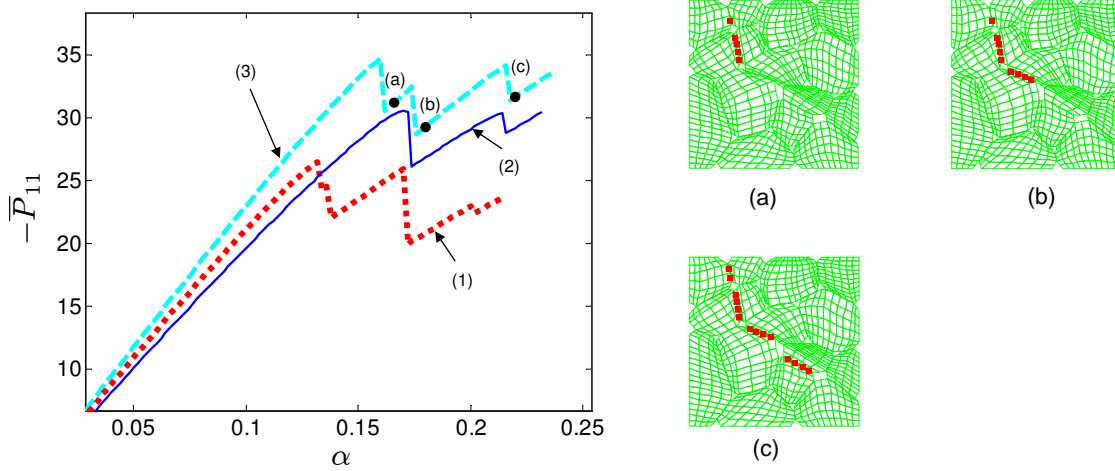


FIG. 7.7 – Courbes globales de comportement, contrainte P_{11} (MPa) en fonction du facteur de chargement α pour différents jeux de paramètres 1) $T_{max} = 20$, $\delta_n = \delta_t = 0.01$, $m u_0 = 0$; 2) $T_{max} = 20$, $\delta_n = \delta_t = 0.015$, $\mu_0 = 0$; 3) $T_{max} = 30$, $\delta_n = \delta_t = 0.01$, $\mu_0 = 0$. Dans le cas 3), nous montrons trois configurations successives de VER ainsi que les zones correspondantes de decohesion complete sur des frontières intergranulaires

7.3 Déformations linéaires - déformations périodiques. Comparaison

Pour mettre en évidence l'influence des conditions sur le bord, nous allons considérer un premier exemple avec une géométrie périodique très simple, représentées par une carré de dimension 1.0 mm,

composé de deux grains séparés par une interface verticale cohésive. Une analyse complète, sur la perte d'ellipticité, sera faite dans les deux cas.

Le lien entre la déformation macroscopique ($\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{G}^0$ où $\mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) et le VER est réalisé par des déformations linéaires et par des conditions uniformes périodiques, respectivement.

Convention : Dans ce paragraphe, toutes les courbes obtenues avec des conditions linéaires sont tracées avec des lignes en pointillé. Par ailleurs, la ligne continue est utilisée pour les courbes en conditions périodiques.

Dans la Fig. 7.8, nous représentons la contrainte globale, dans la direction de chargement, en fonction du facteur de chargement α , et ce, dans les deux types de conditions. Nous pouvons voir une grande différence entre les deux courbes. Le comportement en configuration linéaire est approximativement linéaire. En revanche, la courbe en conditions périodiques s'adoucit. Les conditions périodiques dans le cas de traction uniaxiale impliquent, au niveau de l'interface, le même comportement de chaque élément. Cela va déterminer un comportement global, dans la direction de chargement similaire, avec le comportement de l'interface (voir Fig. 5.4). Dès lors, la courbe présente un maximum $\bar{P}_{11}^{max} = T_{max}$.

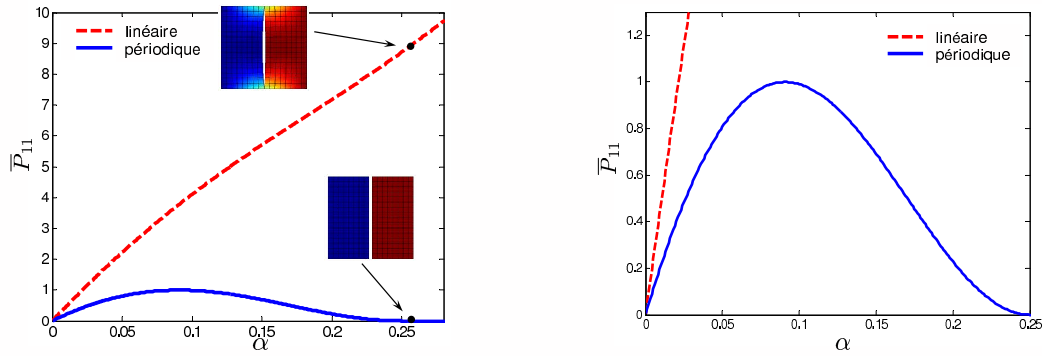


FIG. 7.8 – Courbes globales de comportement contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α . Comparaison entre déformations linéaires sur les bords et déformations périodiques.

Dans la Fig. 7.9, nous représentons le $\min(\det(\mathbf{Q}))$ dans les deux cas en fonction du paramètre α . Nous pouvons voir que les deux courbes sont approximativement similaires. Toutefois, la courbe en déformations linéaires ne devient jamais négative. Donc, le critère de Rice n'est pas vérifié, en ce cas. En revanche, dans le cas des conditions périodiques, le critère de Rice est vérifié pour tous les $\alpha > 0.098$. Aussi, dans la Fig. 7.9 (droite), nous avons représenté le profil de $\det(\mathbf{Q})$ en fonction de $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour trois valeurs différentes du facteur α ($\alpha = 0.04, 0.098, 0.15$).

Comme nous avons constaté, les conditions linéaires sont trop restrictives et elles influencent beaucoup le comportement, au niveau de l'interface. Ensuite, nous considérons un deuxième exemple, où

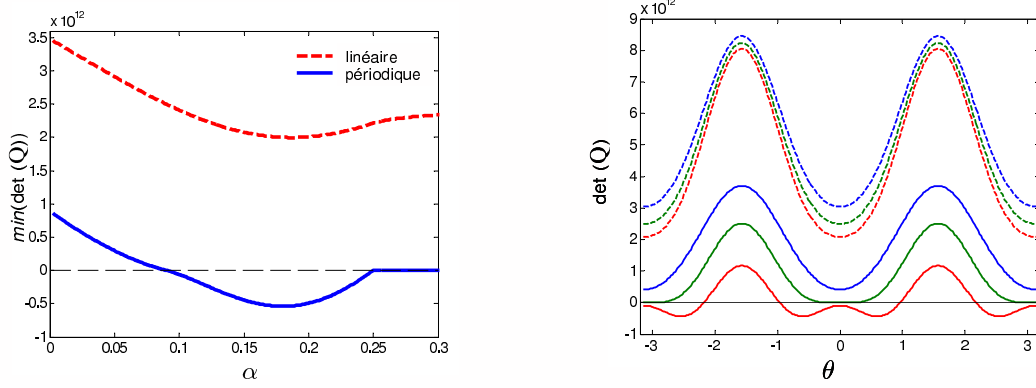


FIG. 7.9 – Minimum de $\det(Q)$ en fonction du facteur de chargement α . Evolution du déterminant pour différentes orientations de bande, à trois états de chargement α

nous avons choisi un VER contenant plusieurs grains, de dimension 1.0 mm, avec les propriétés des interfaces cohésives, données par $T_{max} = 1$ MPa, $\delta_n = \delta_t = 0.01$ et le coefficient de frottement $\mu_0 = 0.3$. Le chargement appliqué est $\mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dans la Fig. 7.10 on peut, également, voir que, dans ce cas, le comportement peut être très différent entre les conditions linéaires et les conditions périodiques.

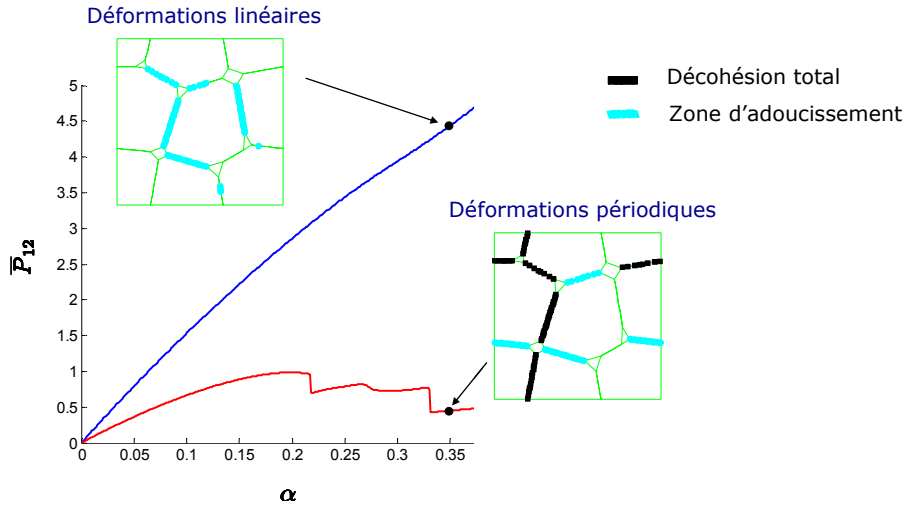


FIG. 7.10 – Courbe globale de comportement contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α . Comparaison entre déformations linéaires sur les bords et déformations périodiques.

7.4 Déformations périodiques

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser une structure granulaire périodique. Les grains sont caractérisés par les mêmes constantes de matériau que dans les paragraphes antérieurs. La première analyse est faite sur un VER, contenant une cellule périodique. Elle montre la possibilité d'avoir une bifurcation de la solution. Ensuite, nous allons évoquer un VER, contenant plusieurs cellules. Puis, nous allons présenter l'apparition de nouvelles solutions pour cette situation. L'influence du nombre des cellules sur la réponse macroscopique est, aussi, donnée.

7.4.1 VER à une cellule

Sur un VER contenant une cellule unitaire périodique, nous appliquons un chargement fixe $\mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Nous étudierons, alors, la perte d'ellipticité et l'apparition des fissures par la décohésion totale. Nous nous intéressons, également, à faire une recherche directionnelle, pour tracer des enveloppes, qui permettront de comparer la réponse incrémentale.

7.4.1.1 Perte d'ellipticité

La Fig. 7.11 représente le comportement global des différentes solutions obtenues, en appliquant un chargement fixe \mathbf{G}^0 , par des conditions périodiques. Nous considérons les paramètres cohésifs $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm, $T_{max} = 1$ MPa et le coefficient de frottement, $\mu_f = 0.3$.

Une analyse sur la perte d'ellipticité a été, également, effectuée dans le cas présent. Nous en avons établi une hiérarchie entre les points de passage de la zone stable à la zone instable (soit au niveau macroscopique, soit au niveau de l'interface), puis le moment de la décohésion totale. Cette hiérarchie est marquée sur la courbe globale contrainte - facteur de chargement par les points (1) – (4).

Une fois que le critère de Rice a été vérifié, on observe qu'il y a clairement une bifurcation de la solution du problème macroscopique, en obtenant deux solutions distinctes. Les différentes solutions ont été obtenues en changeant le pas de l'incrément ($\Delta\alpha$) ou la valeur de critère de convergence (er). L'instant de bifurcation est placé avant l'apparition des points en déchoésion totale au niveau de l'interface.

Nous présentons, dans la Fig. 7.11 (droite), le profil du paramètre de décohésion sur les interfaces, pour les deux solutions. Cela se déroule à différents instants, en spécifiant le nombre d'itérations (Ni), dans l'incrément nécessaires pour trouver la solution. Nous constatons que pour les premiers incréments (le facteur de chargement $\alpha < 0.219$), nous avons une très bonne convergence (3-4 itérations), indifférente du critère de convergence ou du pas d'incrément utilisé. Une fois le critère de bifurcation vérifié, pour le facteur de chargement $\alpha = 0.219$, il semble que l'algorithme numérique oscille entre deux solutions.

Nous donnons, dans la Fig. 7.12, le profil de convergence sur l'incrément correspondant au facteur de chargement $\alpha = 0.219$. On s'aperçoit, très bien, que l'erreur est importante et qu'elle ne diminue pas

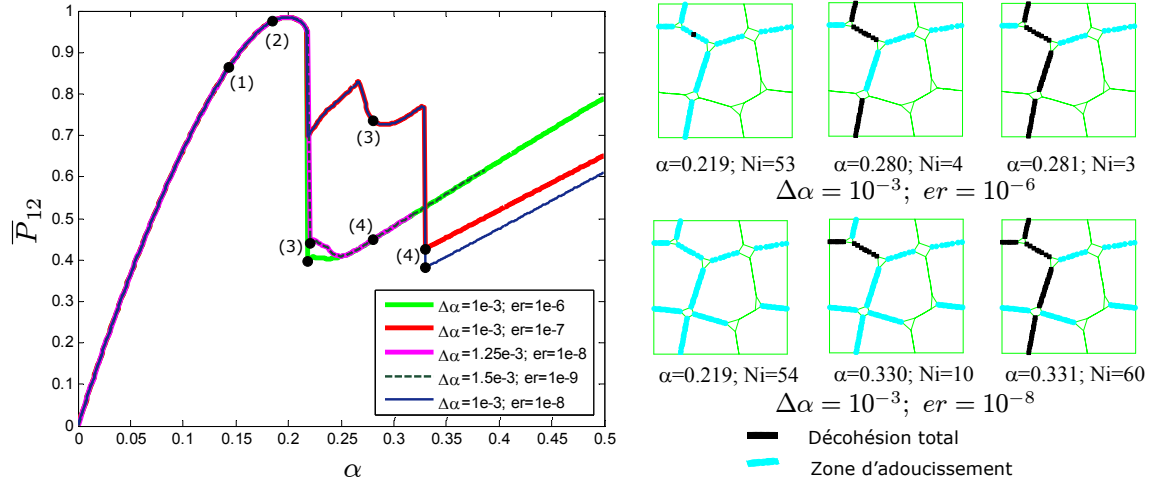


FIG. 7.11 – Gauche : Courbes de comportement macroscopique, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour les paramètres de la loi cohésive $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm, $T_{max} = 1$ MPa, le coefficient de frottement $\mu_0 = 0.3$, et pour différentes valeurs de l'incrément ($\Delta\alpha$) et du critère de convergence (er). Les points sur la courbe correspondent à : (1) - le premier incrément pour lequel, au niveau de l'interface, il y a des points situés dans la zone d'adoucissement. (2) - l'instant de bifurcation (le critère de Rice est satisfait), (3) qui est associé avec les premiers points de l'interface qui sont en décohésion complète, et (4)- VER fissuré. Droite : Le paramètre de décohésion λ sur les interfaces.

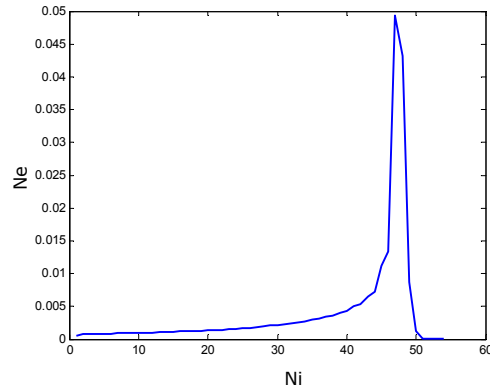


FIG. 7.12 – Profil de convergence pour l'incrément correspondant au facteur de chargement $\alpha = 0.219$: l'erreur numérique, Ne , en fonction de nombre d'itération, Ni .

rapidement, comme pour les autres incréments (même si les premières itérations des autres pas ont à peu près la même erreur). L'algorithme est, en fait, en train de "chercher" la bonne solution. Après plusieurs itérations, l'algorithme diverge, puis revient sur la première solution, avant de converger très rapidement (4 itérations) définitivement.

A cet instant, en fonction du critère de convergence, nous retrouvons soit une solution avec plus de points de l'interface situés dans la zone adoucissante, soit une solution qui a déjà des points en décohésion totale. Remarquons qu'avec un critère de convergence classique de 10^{-3} , le calcul n'aurait pas convergé vers les mêmes solutions.

Nous avons repris, ensuite, les paramètres utilisés pour obtenir la première solution. Par la suite, nous nous sommes intéressés à étudier l'influence de la décharge partielle, pendant un chemin charge-décharge partielle-charge. Dans la Fig. 7.13, on met en évidence, qu'après la décharge partielle, le matériau revient au même état de contrainte que celui qu'il a subi précédemment.

7.4.1.2 La simulation des recherches directionnelles

Gudehus [46], en 1979, a défini la notion de recherche directionnelle, pour tracer des enveloppes réponses, qui permettent de comparer, de manière géométrique, la réponse incrémentale unitaire de différentes relations constitutives.

Nous présentons une analyse directionnelle, en considérant la solution du problème obtenue avec le critère de convergent $er = 1e - 8$ et un facteur de chargement $\Delta\alpha = 1e - 3$.

Comme la charge appliquée est donnée par $\mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc dans le plane $(\bar{F}_{11}, \bar{F}_{12})$, notre choix est de faire une recherche directionnelle dans ce plan là. Cette recherche est faite à partir d'un état contrainte - déformation qualifié d'état initial en appliquant, toujours à partir de ce même état, plusieurs incréments de chargement $d\bar{\mathbf{F}} = (d\bar{F}_{11}, d\bar{F}_{12})$, de norme $\|d\bar{\mathbf{F}}\| = \sqrt{d\bar{F}_{11}^2 + d\bar{F}_{12}^2}$, indentique pour

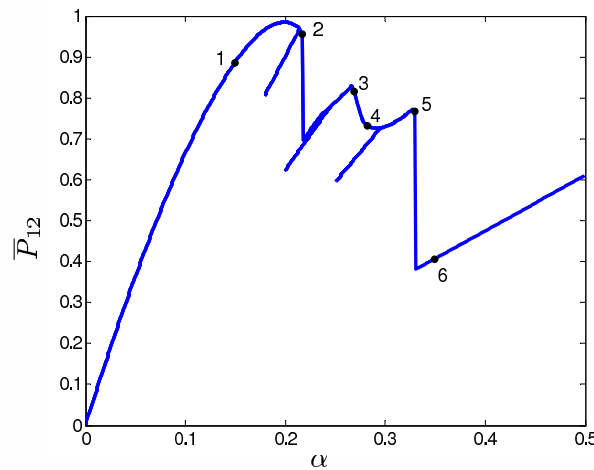


FIG. 7.13 – Courbe global contrainte de cisaillement vs. facteur de chargement avec charge-décharge partielle

chaque incrément. L'incrément de charge est défini par :

$$\begin{aligned} d\bar{F}_{11} &= \|d\bar{\mathbf{F}}\| \cos \theta \\ d\bar{F}_{12} &= \|d\bar{\mathbf{F}}\| \sin \theta \end{aligned} \quad (7.1)$$

En faisant varier θ de 0° à 360° , chaque direction en déformations est inspectée.

Pour chaque incrément de chargement dF , un vecteur réponse $dP = (d\bar{P}_{11}, d\bar{P}_{12})$ est associé.

Pour effectuer cette recherche directionnelle, on doit fixer deux paramètres : le nombre de directions (θ) et la taille de l'incrément de chargement ($\|d\bar{\mathbf{F}}\|$).

Nous avons considéré 36 directions, soit une sollicitation tout les 10° . En revanche, la taille de la norme de l'incrément de chargement est plus difficile à prendre. Bien que le choix d'une valeur de $\|d\bar{\mathbf{F}}\|$

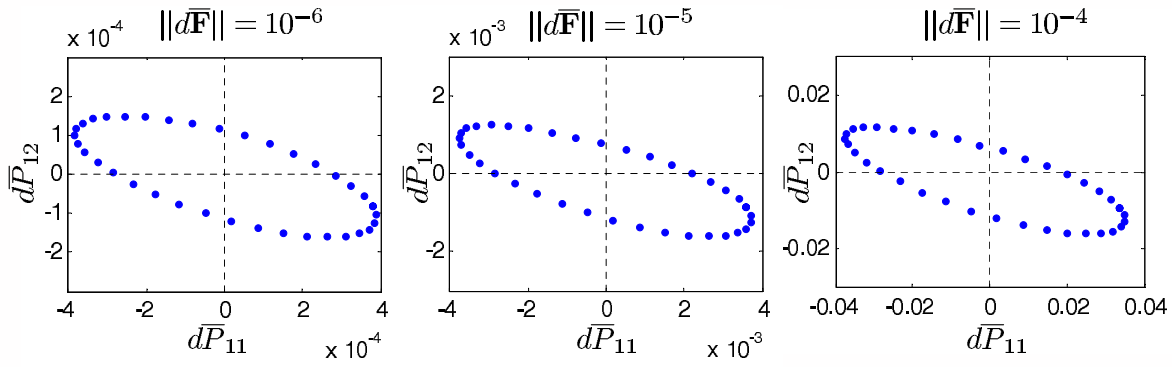


FIG. 7.14 – Enveloppes réponse pour des recherches directionnelles à partir d'un même état initial ($\alpha = 0.150$) et pour $\|d\bar{\mathbf{F}}\| = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$

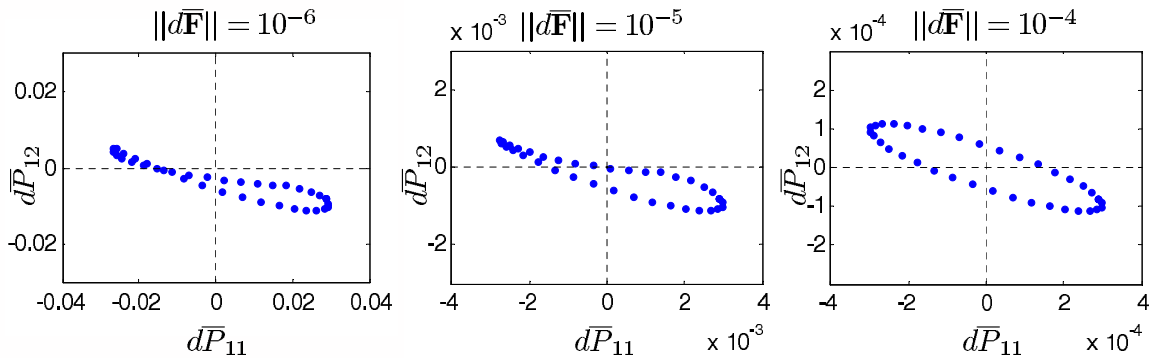


FIG. 7.15 – Enveloppes réponse pour des recherche directionnelles à partir d'un même état initial ($\alpha = 0.283$) et pour $\|d\bar{\mathbf{F}}\| = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$

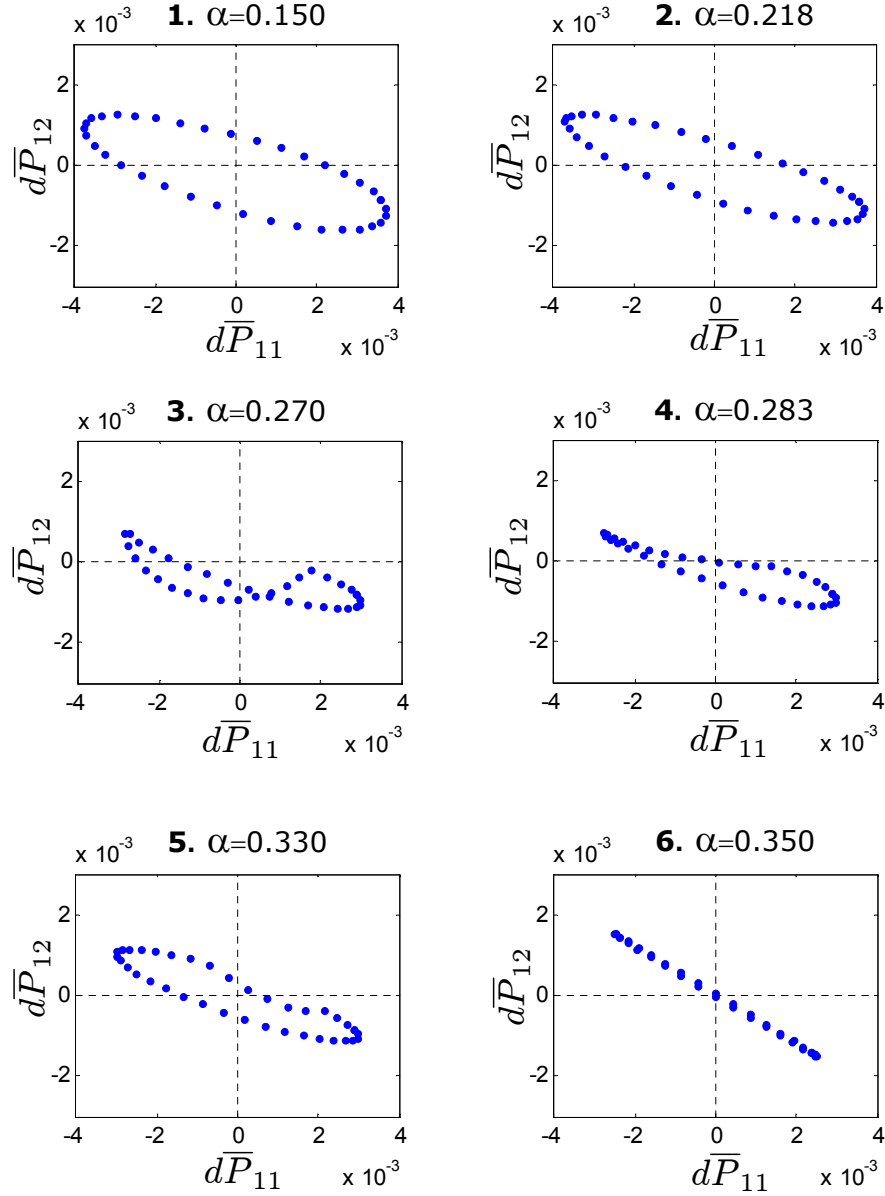


FIG. 7.16 – Envelopes réponses pour des recherches directionnelles à partir de plusieurs états initiaux

soit quelque peu arbitraire, nous nous sommes basés sur le fait que l'incrément de chargement doit permettre de caractériser le comportement mécanique du matériau à l'état de contrainte - déformation considérée. Comme notre modèle présente des déformations ponctuelles au niveau de l'interface, au cours de la sollicitation, nous risquons de ne prendre pas en compte le comportement, sur l'interface, pour des valeurs trop faibles de $\|d\bar{\mathbf{F}}\|$ (cf. Figs. 7.14 et 7.15). Nous avons donc opté pour une valeur $\|d\bar{\mathbf{F}}\| = 10^{-5}$, qui permet de rester au plus près de l'état initial, tout en prenant en compte, à la vue de Fig. 7.15, des processus induits par la non-linéarité de la loi cohésive.

La Fig. 7.16 montre les enveloppes réponses pour des recherches directionnelles effectuées à partir des différents états initiaux, marqués sur la Fig. 7.13, avec les nombres 1 – 6. Pour $\alpha < 0.219$ (voir les figures correspondant aux points 1 et 2), les enveloppes réponses sont des ellipses, qui au début sont centrées sur l'origine du repère. Ensuite, pour des chargements plus importants, les ellipses sont légèrement perturbées. On peut affirmer que ces enveloppes réponses sont typiques d'un comportement incrémentalement linéaire isotrope. Plus on s'éloigne d'un état isotrope, en augmentant la valeur de α , plus les enveloppes réponses s'allongent pour finalement dégénérer en une droite.

7.4.2 VER contenant plusieurs cellules

Considérons maintenant que le VER est composé de plusieurs cellules de périodicité. Nous prouvons l'existence de nouvelles solutions, qui ne peuvent pas être obtenues par la reproduction périodique des solutions obtenues sur la cellule unitaire.

Dans les Figs. 7.17 et 7.18, nous représentons la contrainte globale de cisaillement en fonction du facteur de chargement α , pour un VER composé d'une, de 4 ou de 9 cellules périodiques. Le même critère de convergence est utilisé pour les solutions numériques. Ainsi, nous recherchons la même hiérarchie, pour les différents moments d'instabilités précédente.

Des calculs numériques sont faits pour les mêmes paramètres, sauf la valeur du coefficient de frottement. Les résultats sont montrés dans les Figs. 7.17 et 7.18.

On remarque que la présence du frottement induit un nouveau mode de rupture, qui ne respecte plus la périodicité. Néanmoins, pour les interfaces sans frottement, la rupture reste toujours périodique. On peut voir facilement que pour le mode de rupture périodique, la réponse globale est indépendante du nombre des cellules choisies. Quand la rupture ne respecte plus la périodicité, étant dépendante du nombre des cellules considérées dans le VER, le comportement homogénéisé passe alors dans un régime adoucissant. Donc, pour une taille de grain donnée, ceci montre une dépendance de la réponse globale sur la taille du VER.

7.5 Conclusions

Nous avons considéré une méthode d'homogénéisation numérique pour un milieu granulaire. Au niveau de la micro-structure, nous avons considéré une morphologie avec des grains élastiques, séparés par des interfaces cohésives et frottements. Notre analyse s'est concentrée sur la relation entre le comportement instable aux différents niveaux : micro et macro.

Au niveau micro, l'instabilité était indiquée par le régime adoucissant de la loi cohésive intergranulaire. Tandis qu'au niveau macroscopique, le comportement instable est caractérisé par la perte d'ellipticité du problème d'équilibre. Ceci entraîne des conséquences sur la pertinence du comportement homogénéisé.

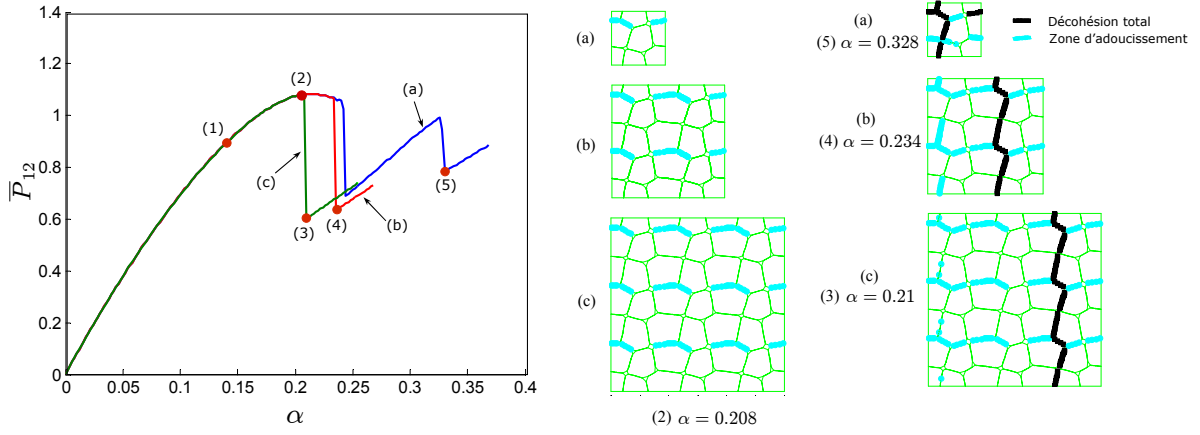


FIG. 7.17 – Rupture non-périodique : Courbes de comportement macroscopique, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour les paramètres de la loi cohésive $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm, $T_{max} = 1$ MPa, et le coefficient frottement $\mu_0 = 0.5$, pour différents VERs à 1, 4 ou 9 cellules périodiques. Les points sur la courbe correspondent à : (1) le premier incrément pour lequel au niveau d'interface il y a des points situés dans la zone d'adoucissement, (2) instant de bifurcation (critère de Rice est satisfait), (3) VER à 9 cellules fissuré.

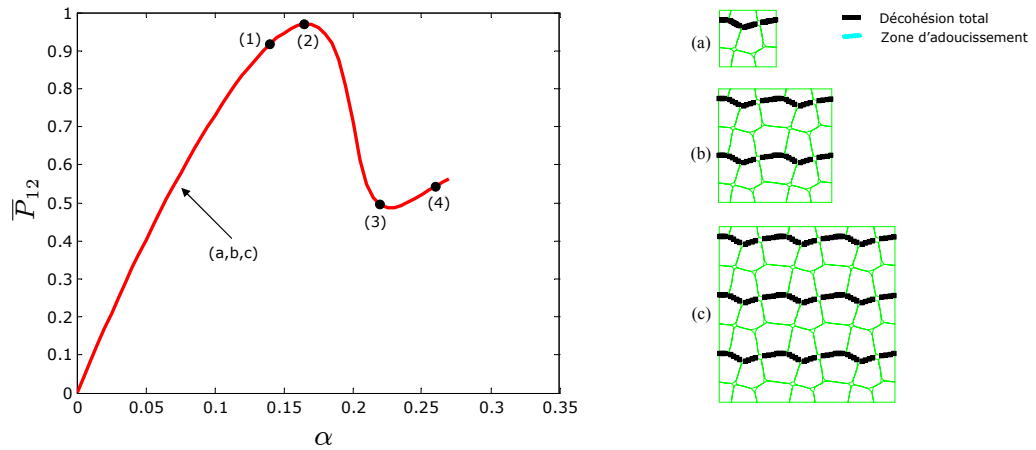


FIG. 7.18 – Rupture périodique : Courbes de comportement macroscopique, contrainte (MPa) en fonction du facteur de chargement α , pour les paramètres de la loi cohésive $\delta_n = \delta_t = 0.01$ mm, $T_{max} = 1$ MPa, et sans frottement, pour différents VERs à 1, 4 ou 9 cellules périodiques.

Dans un premier temps, nous avons considéré un VER à géométrie simple (deux grains séparés par une interface) et nous avons établi, dans ce cas, une hiérarchie du comportement de détérioration. Le lien avec l'instabilité macroscopique a été mis en évidence. Nous avons montré que ce lien est fortement dépendant des paramètres de cohésion et de frottement.

Ensuite, nous avons considéré des structures granulaires périodiques plus complexes. Nous avons identifié différents modes de rupture microscopique. Dès lors, nous avons montré la non unicité de la solution sur une cellule de périodicité. Puis, nous avons prouvé que pour un VER à plusieurs cellules de périodicité, les modes de micro-ruptures peuvent respecter ou non la périodicité. Dans le premier cas, il n'y a pas d'effet de taille (échelle) dans la réponse homogénéisée ; cette réponse est indépendante du nombre de cellules dans le VER, même quand l'ellipticité macroscopique est perdue. Dans le deuxième cas, quand la rupture ne respecte pas la micro-périodicité, la réponse macroscopique devient dépendante du nombre de cellules de périodicité dans le VER. Dans ce cas, cette réponse fait intervenir des effets d'échelle (taille de la micro-structure).

Conclusions générales et perspectives

Dans ce travail, nous avons présenté des résultats concernant la modélisation à deux échelles des phénomènes de détérioration dans les matériaux fragiles et quasi-fragiles.

Dans la première partie, la technique d'homogénéisation asymptotique a été utilisée pour déduire la réponse globale d'un corps élastique micro-fissuré. Pour les micro-fissures en évolution, à partir du bilan énergétique microscopique, on a obtenu, sans faire d'hypothèses phénoménologiques, une loi d'évolution d'endommagement. Pour l'obtention de la loi d'endommagement, la méthode classique d'homogénéisation, basée sur des développements asymptotiques, a été adaptée pour l'analyse énergétique sur une cellule de taille finie.

Le modèle d'endommagement résultant décrit la dégradation du matériau, des effets de taille, des différentes possibilités de comportements de rupture en traction / compression et l'anisotropie induite. L'effet d'échelle est bien mis en évidence par l'apparition, dans la loi homogénéisée d'endommagement, d'une longueur interne microstructurale. Pour illustrer cette nouvelle approche, le cas de l'endommagement fragile unilatéral a été analysé en détail.

Un schéma numérique, basé sur des approximations d'éléments finis, a été considéré. Aussi, des résultats numériques ont été obtenus pour des tests standard, en traction uniaxiale ou en compression biaxiale. Des comportements expérimentaux connus, tels que la localisation de l'endommagement et la réponse dépendante de la taille de la micro-structure, ont été reproduits avec ce nouveau modèle. Basé sur une description micro-mécanique correcte de la dissipation d'énergie, le modèle assure l'indépendance de maillage pour les solutions numériques localisées en éléments finis.

De plus, dans la première partie, nous avons, également, donné une méthode, pour introduire les discontinuités de rupture macroscopique, à partir de l'information micro-structurale, transmise par le modèle d'endommagement.

La modélisation numérique de l'initiation des discontinuités a été faite par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). La méthode X-FEM s'est montrée un outil puissant et adapté pour la modélisation numérique de l'apparition des macro-fissures.

Ainsi, nous avons construit un modèle, qui permet la description du processus de détérioration d'un matériau sain, en passant par les phases : d'apparition des micro-fissures, d'évolution de la zone endommagée, d'initiation de la macro-rupture.

Notre objectif a été, seulement, d'illustrer la méthode, sans considérer des cas complexes, nécessitant beaucoup d'effort d'implémentation numérique. Cela fera l'objet de recherches futures.

Nous avons, ensuite, étendu le modèle d'endommagement fragile au cas des micro-fissures frottantes. Des comportements irréversibles, qui correspondent aux glissements bloqués sur les micro-fissures, ont été mis en évidence, dans ce cas. La loi d'endommagement obtenue tient compte de la dissipation par frottement sur les lèvres des micro-fissures.

Dans la deuxième partie, nous avons considéré une méthode d'homogénéisation numérique pour un milieu granulaire. Au niveau de la micro-structure, nous avons considéré une morphologie avec des grains élastiques, séparés par des interfaces cohésives et frottantes. Notre analyse s'est concentrée sur la relation entre le comportement instable aux différents niveaux : micro et macro.

Au niveau microscopique, l'instabilité est indiquée par le régime adoucissant de la loi cohésive inter-granulaire, tandis qu'au niveau macroscopique, le comportement instable est caractérisé par la perte d'ellipticité du problème d'équilibre. Ceci entraîne des conséquences sur la pertinence du comportement obtenu par homogénéisation.

Dans un premier temps, nous avons considéré un VER à géométrie simple (deux grains séparés par une interface). Puis, nous avons établi une hiérarchie du comportement de détérioration. Le lien avec l'instabilité macroscopique a été mis en évidence. Nous avons montré que ce lien est fortement dépendant des paramètres de cohésion et de frottement.

Ensuite, nous avons considéré des structures granulaires périodiques plus complexes et nous avons identifié les différents modes de rupture microscopiques. Nous avons montré la non unicité de la solution sur une cellule de périodicité. Cela pourrait être interprété en lien avec la non-reproductibilité des résultats expérimentaux.

Nous avons, ensuite, considéré le cas d'un VER à plusieurs cellules de périodicité. Par la suite, nous avons prouvé que les modes de micro-rupture peuvent respecter ou non la périodicité. Dans le premier cas, il n'y a pas d'effet de taille (échelle) dans la réponse homogénéisée ; cette réponse est indépendante du nombre des cellules dans le VER. Cela se vérifie, même quand l'ellipticité macroscopique est perdue. Dans le deuxième cas, la réponse macroscopique devient dépendante du nombre de cellules de périodicité dans le VER, lorsque la rupture ne respecte pas la micro-périodicité. Dans ce cas, la réponse obtenue par homogénéisation fait intervenir des effets d'échelle (taille de la micro-structure).

Perspectives

Pour finir ce travail, nous pouvons évoquer quelques perspectives qui pourraient être envisageables à court terme :

- Une extension, des modèles d'endommagement présents dans la première partie, au cas 3D serait motivée par son intérêt pour certaines applications
- L'implémentation avec X-FEM de l'initiation de la macro-fissuration mérite d'être développée

dans des cas plus complexes, tels que des fissures en compression, avec frottement, en bifurcation etc.

- L'analyse locale, faite dans la deuxième partie, sera intégrée dans un schéma de type EF^2 , pour l'étude du comportement global
- Les difficultés de modélisation de la réponse homogénéisée nécessite une régularisation. Une solution possible est de considérer une méthode d'homogénéisation de second ordre (par exemple Kouznetsova [60]).

Bibliographie

- [1] Andrieux, S., Bamberger, Y. and Marigo, J.J., 1986. Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches, *J. Mec. Theor. Appl.*, vol. 5, pp. 471-513.
- [2] Auriault, J-L., 1991, Heterogeneous Medium. Is it an equivalent macroscopic Description possible ?, *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 29, pp. 785-795.
- [3] Bakhvalov, N. and Panasenko, G., 1989. Homogenisation : Averaging Processes in Periodic Media, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.
- [4] Barenblatt, G. I., 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7, pp. 55-129.
- [5] Bazant, Z.P., 1976. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *J. Engng. Mech. (ASCE)* 102, pp. 225 - 238
- [6] Bazant, Z. P. and Planas, J. 1997. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [7] Belytschko, T. and Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 45(5) pp. 601-620.
- [8] Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., and Zi G., 2003. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 58, pp. 1873 - 1905.
- [9] Belytschko, T., Lu, Y., Gu, L., 1994. Element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 37, pp. 229 - 256.
- [10] Benssousan, A., Lions, J.L. and Papanicolaou, G., 1978. Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam.
- [11] Bui, H.D., 1978. Mécanique de la rupture fragile. Paris : Masson.
- [12] Broberg, K.B., 1999. Cracks and Fracture, Academic press, San Diego.
- [13] Caiazzo, A.A. and Constanzo, F., 2000. On the constitutive relations of materials with evolving microstructure due to microcracking, *Int. J. Solids Struct.*, vol. 37, 3375-3398.
- [14] Camacho, G. T., Ortiz, M., 1996. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *Int. J. Solids Struct.* 33, pp. 2899 - 2938.

- [15] Chaboche, J.-L., 1974. Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire. *Revue française de mécanique*, 50-51, pp. 71-82.
- [16] Chaboche, J.-L., 1977. Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. In *Problèmes Non Linéaires de Mécanique*, Symposium Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, pp. 137-159.
- [17] Chaboche, J.-L., Girard, R. and Schaff, A., 1997. Numerical analysis of composite système by using interphase/interface models. *Computational Mechanics*, 20, pp. 3-11.
- [18] Chambon, R., *Problèmes aux limites pour des modèles de comportement inélastique, le cas de la plasticité. Bifurcation et localisation. Spécificité des géomatériaux*, rapport interne.
- [19] Chambon, R., 1986. Bifurcation par localisation en bande de cisaillement, une approche avec des lois incrementalement non linéaires, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, Vol 5, N 2, PP 277-298.
- [20] Charlotte M., Laverne J., Marigo J.-J., 2006. Initiation of cracks with cohesive force models : a variational approach, *European journal of mechanics. A. Solids* , vol. 25, no 4 , pp. 649-669
- [21] Chessa, J. and Belytschko, T., 2003. The extended finite element method for twophase fluids. *ASME J. of Appl. Mechanics*, 70(1), pp. 10-17.
- [22] Chessa, J., Wang H. and Belytschko T., 2003. On construction of blending elements for local partition of unity enriched finite element methods. *Int. J. Num. Meth.*, 57(7), pp. 1015-1038.
- [23] Christensen, R. M. and Lo, K. H., 197). Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27, pp. 315 - 330.
- [24] Ciarlet, P.G., 1986. *Elasticité tridimensionnelle*, Masson
- [25] Comi, C., Mariani S., Perego U., 2007. An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, vol. 31, pp. 213-238.
- [26] Dascalu, C., Ionescu I.R. and Campillo M., 2000. Fault Finiteness and Initiation of Dynamic Shear Instability, *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 177, pp.163-176.
- [27] Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar N., and Belytschko T., 2000. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 48, pp. 1741 - 1760.
- [28] De Borst R., Remmers J.J.C. and Needleman A., 2006. Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models. *Engng. Fract. Mech.*, vol. 73, pp. 160-177.
- [29] Del Piero, G. and Truskinovsky, L., 2001. Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity. *Int. J. Solids Structures*, 38, pp. 1135 - 1148

-
- [30] Desrues J. and Chambon R., 1989. Shear band analysis for granular materials ; the question of incremental non linearity. *Ingenieur Archiv*, vol. 59, pp 187 - 196.
- [31] Dhatt, G. and Touzot, G., 1981. Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S.A. Editeur, Paris, et Les Presses de l'Université Laval, Québec.
- [32] Dolbow, J. 1999. An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics ; Ph. D. Thesis, Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA.
- [33] Dolbow, J., Moës, N. and Belytschko, T., 2001. A extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 190 51-52 pp. 6825-6846.
- [34] Dugdale, D. S., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids* 8, pp. 100-108
- [35] Duvaut, G., 1990. *Mécanique des milieux continus*, Masson
- [36] Elkadi, A.S. and van Mier, J.G.M., 1997. Experimental Investigation of Size Effect in Concrete Fracture under Multiaxial Compression, *Int. J. Fracture*, Vol. 140, pp. 55-71.
- [37] Eshelby, J. D., 1957. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. Lond A*, 241, pp. 376 - 396.
- [38] Feyel, F. and Chaboche, J.-L., 2000. FE^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber SiC/Ti composite materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183, pp. 309 - 330.
- [39] Francfort G. A. and Marigo J.-J., 1993. Stable damage evolution in a brittle continuous medium, *European journal of mechanics. A. Solids* vol. 12, no2, pp. 149-189.
- [40] Francfort G.A. and Marigo J.-J., 1998. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids*, 8, pp. 1319 - 1342.
- [41] Freund, L.B., 2004. *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.
- [42] Ghosh S., Lee, K., and Moorthy, S., 1995. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and Voronoi cell finite element method. *Int. J. Solids Structures*, 32(1) :27 - 62.
- [43] Ghosh, S. Lee K. and Raghavan, P., 2001. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials, *Int. J. Solids Structures*, vol. 38, pp. 2335-2385.
- [44] Griffith, A., 1920. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London CCXXI-A*, 163-198.
- [45] Grisvard P., 1989. Singularités en élasticité, *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 107, pp. 157-180.
- [46] Gudehus, G., 1979. A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. *Proc. 3th Int. Conf. Num. Meth. Geom.*, Aachen, ed. Balkema.

- [47] Guedes, J. M. and Kikuchi, N. 1990. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 83, pp. 143 - 198.
- [48] Hettich, T. and Ramm, E., 2006. Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 195, pp. 4753 - 4767 .
- [49] Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6, pp. 236 - 249
- [50] Hill, R., 1963. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, 11, pp. 357 - 372
- [51] Hill, R., 1965. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13, pp. 213 - 222.
- [52] Hill, R., 1984. On macroscopic effects of heterogeneity in elastoplastic media at finite strain. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 95, pp. 481-494.
- [53] Hillerborg, A., Modeer, M. and Petersson, P. E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* 6(6), pp. 163-168.
- [54] Irwin G. R., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. of Appl. Mechanics*, 24 pp. 361 - 364.
- [55] Jaubert A. and Marigo J.-J., 2006. Justification of Paris-type fatigue laws from cohesive forces model via a variational approach, *Contin. Mech. Thermodyn.* 18, pp. 23-45.
- [56] Kachanov, L.M., 1958. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk.*, 8, pp. 26-31
- [57] Kanninen M.F. and Popelar C.H., 1985. *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press
- [58] Knowles, J. K. and Sternberg, E., 1977. On the Failure of Ellipticity of the Equations for Finite Elastostatic Plane Strain., *Arch. Rat. Mech. Anal*, vol. 63, pp. 321-336.
- [59] Kouznetsova, V., Brekelmans, W. A. M., and Baaijens, F. P. T., 2001. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Comput. Mech.*, 27, pp. 37 - 48.
- [60] Kouznetsova, V., Geers, M. G. D., and Brekelmans, W. A. M., 2002. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 54, pp. 1235 - 1260.
- [61] Kouznetsova, V., Geers, M. G., and Brekelmans, W. A. M., 2002. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 54, pp. 1235-1260.

-
- [62] Krajcinovic D. and Fonseka G.U., 1981. The continuous damage theory of brittle materials. Parts 1 and 2. J. of Applied Mechanics, 48, pp. 809-824.
 - [63] Leblond, J.-B., 2003. Mécanique de la rupture fragile et ductile", Hermès science publications.
 - [64] Leckie, F.A. et Hayhurst, D.R., 1974. Creep rupture of structures. Proc. Royal Soc. London, 340, pp. 323-347.
 - [65] Lee, G. H., Chung H. J. and Choi C. K., 2003. Adaptive crack propagation analysis with element-free Galerkin method. Int. J. Numer. Meth. Engng. 56, pp. 331 - 350.
 - [66] Leguillon, D. and Sancez-Palencia, E., 1982. On the behavior of a cracked elastic body with (or without) friction, J. Mec. Theor. Appl., vol. 1, pp. 195-209.
 - [67] Lemaitre, J. et Chaboche, J.-L., 1978. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement, J. de mécanique appliquée, 2(3), pp. 317-365.
 - [68] Lemaitre, J., 1996. A course on Damage Mechanics. Springer Verlag.
 - [69] Lene, F., 2004. Damage constitutive relations for composite materials, Engng. Fract. Mech., vol. 25, pp. 713-728.
 - [70] Marigo J. J. and Truskinovsky T., 2004. Initiation and propagation of fracture in the models of Griffith and Barenblatt, Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol. 16(4), pp 391-409.
 - [71] Matlab user's guide, The Mathworks, Inc 2004
 - [72] Melenk, J.M. and Babuska, I., The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 136 pp. 289-314.
 - [73] Miehe, C. and Koch, A., 2002,. Computational micro-to-macro transition of discretized microstructures undergoing small strain. Arch. Appl. Mech., 72, pp. 300 - 317.
 - [74] Miehe, C., 2003. Computational Micro-to-Macro Transition for Discretized Micro-Structures of Heterogeneous Materials at Finite Strains Based on the Minimization of Averaged Incremental Energy. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 192, pp. 559-591
 - [75] Moës, N. and Belytschko, T., 2002. Extended finite element method for cohesive crack growth. Eng. Frac. Mechs. 69 pp. 813-833.
 - [76] Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. Int. J. Num. Meth. Eng. 46 pp. 131-150.
 - [77] Mori, T., and Tanaka, K., 1973. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta. Metall., 21, pp. 571 - 574.
 - [78] Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., 1992. Generalizing the Finite Element Method : Diffuse Approximation and Diffuse Elements, Journal of Computational Mechanics, vol. 10, no. 5, pp. 307 - 318.

- [79] Needleman, A., 1987. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. of Appl. Mechanics*, 54 , pp. 525-531.
- [80] Nemat-Nasser, S. and Hori, M., 1999. *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Elsevier, Amsterdam-Lausanne-New York.
- [81] Nemat-Nasser, S., 1999. Averaging theorems in finite deformation plasticity. *Mech. Mater.*, 31, pp. 493-523.
- [82] Ortiz, M., 1985. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mech. of Materials*, 4, pp. 67-93.
- [83] Ortiz, M., Pandolfi, A., 1999. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* vol. 44, pp. 1267-1282
- [84] Pandolfi, A., Krysl, P., and Ortiz, M., 1999. Finite element simulation of ring expansion and fragmentation. *Int. J. Fracture*, **95(1-4)** pp. 279 - 297
- [85] Pandolfi A., Conti S., Ortiz M., 2006. A Recursive-Faulting Model of Distributed Damage in Confined Brittle Materials *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54, pp. 1972-2003.
- [86] Peerlings, R.H.J. and Fleck, N.A., 2004. Computational evaluation of strain gradient elasticity constants, *Int. J. Multiscale Comput. Engng.*, vol. 2, pp. 599-619.
- [87] Pensée, V., Kondo, D. and Dormieux, L., 2002. Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials, *J. Engng. Mech.* **128**, pp. 889-897.
- [88] Pijaudier-Cabot, G. and Bazant, Z., 1987. Nonlocal damage theory, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, 113, pp. 1512 - 1533.
- [89] Prat, P.C. and Bazant, Z.P., 1997. Tangential stiffness of elastic materials with systems of growing or closing cracks, *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, pp. 611-636.
- [90] Rabotnov, Y.N., 1969. *Creep problems in structural members*, North-Holland.
- [91] Raghavan, P. and Ghosh, S., 2005. A continuum damage mechanics model for unidirectional composites undergoing interfacial debonding, *Mech. of Materials*, vol. 37, pp. 955-979.
- [92] Remmers, J.C., Borst, R., and Needleman, A., 2003. Simulation of fast crack growth using cohesive segments. In *VII International Conference on Computational Plasticity. COMPLAS*.
- [93] Rice, J.R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379 - 386.
- [94] Rice, J.R., 1976. The Localization of Plastic Deformation. In : *Theoretical and Applied Mechanics* (ed. W.T. Koiter), North-Holland Amsterdam, pp. 207-220.
- [95] Rice, J.R., 1976. The localization of plastic deformation, *International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, W.D.Koiter eds, North Holland Publishing Comp.

-
- [96] Rice, J.R and Rudnicki, J.W., 1980. A note on some features on the theory of localization of deformation. *Int. J. Solids Structures*, N16, pp. 597- 605.
 - [97] Rice, J. R. and Wang, J.- S., 1989. Embrittlement of interfaces by solute segregation. *Materials Science and Engineering A*, 107, pp. 23-40.
 - [98] Rivlin, R.S., 1948. Large elastic deformation of isotropic materials I. Fundamental concepts, *Phil. Trans Roy. Soc., A*, 240, pp. 459-490.
 - [99] Roychowdhury, S. et Narasimhan, R., 2000. A cohesive finite element formulation for modelling fracture and delamination in solids, *Sādhanā*, Vol. 25, Part 6, December 2000, pp. 5-1587.
 - [100] Rudnicki, J.W. and Rice, J. R., 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials, *JMPS*, vol 23, pp. 371-394.
 - [101] Ruiz G., Pandolfi A., Ortiz M., 2001. Three-Dimensional Cohesive Modeling of Dynamic Mixed-Mode Fracture *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 (1-2), pp. 97-120
 - [102] Sanchez-Palencia, E., 1974. Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physique hétérogènes, *Int. J. Enging. Sci.*, vol.12, pp.331.
 - [103] Sanchez-Palencia, E., 1980. *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, vol.127, Springer, Berlin.
 - [104] Smit, R. J. M., Brekelmans, W. A. M., and Meijer, H. E. H., 1998. Prediction of the mechanical behaviour of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155, pp. 181 - 192.
 - [105] Smyshlyaev, V.P. and Cherednichenko, K.D., 2000. On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, pp. 1325-1357.
 - [106] Sukumar, N., Moës, N., Belytschko, T. and Moran, B., 2000. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 48(11) pp. 1549-151570.
 - [107] Sukumar, N. and Prévost, J.-H., 2003. Modelling quasi-static crack growth with the extended finite element method. part I : Computer implementation. *Int. J. Solids Struct.*, 40, pp. 7513 - 7537.
 - [108] Suquet, P. M., 1985. Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. In Sawczuk, A. and Bianchi, G., editors, *Plasticity today : modelling, methods and applications*, London. Elsevier Applied Science Publishers., pp. 279 - 310.
 - [109] Telega, J.J., 1990. Homogenization of fissured elastic solids in the presence of unilateral conditions and friction, *Comput. Mech.*, 6, pp. 109-127.
 - [110] Terada, K., Hori, M., Kyoya, T., and Kikuchi, N., 2000. Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approach, *Int. J. Solids Structures*, 37, pp. 2285 - 2311.

- [111] Terada, K. and Kikuchi, N., 1995. Nonlinear homogenization method for practical applications. In Ghosh, S. and Ostoja-Starzewski, M., editors, *Computational Methods in Micromechanics*, AMD-Vol. 212/MD-Vol. 62, pp. 1 - 16. ASME.
- [112] Terada, K. and Kikuchi, N., 2001. A class of general algorithms for multiscale analyses of heterogeneous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, vol. 190, pp. 5427-5464.
- [113] Truesdell, C. A. and Toupin, R. A., 1960. *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, vol. III-1, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [114] Tvergaard, V., 1990. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Mater. Sci. Engng.* 125, pp. 203-213.
- [115] Tvergaard, V, Hutchinson, J. W., 1993. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *J. Mech. Phys. Solids* 41, pp. 1119 - 1135
- [116] Tvergaard, V., 2003. Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids *Engineering Fracture Mechanics* vol. 70, pp. 1859-1868
- [117] Vardoulakis, I., 1981. Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sample, *In: J. Solids Struct.*, vol 17, pp. 1085-1101.
- [118] Wells, G.N. and Sluys, L.J., 2001. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 50 pp. 2667-2682.
- [119] Westergaard, H.M., 1939. Bearing pressures and cracks. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, pp. 49 - 53.
- [120] Xu, X.-P., Needleman, A., 1994. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *J. Mech. Phys. Solids* vol. 42, pp. 1397-1434
- [121] Yang B. and Ravi-Chandar K., 1998. A single-domain dual-boundary-element formulation incorporating a cohesive zone model for elastostatic cracks. *Int. J. of Fracture*, vol. 93, pp. 115 - 144.
- [122] Zi, G. and Belytschko, T. 2003. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 57, pp. 2221-2240.
- [123] Zi, G., Song, J.H., Budyn, E., Lee, S.H. and Belytschko, T., 2004. A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth. *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering* ; 12, pp. 901- 915.
- [124] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 2000. *The finite element method*, fifth edition. Vol. 1 : *The Basis*, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK.

Articles et publications

1. Dascalu C., Bilbie G., Chambon R., 2005. Micro-fissuration et localisation macroscopique : une approche par homogénéisation numérique, Microstructures et propriétés des matériaux Paris, 17-18 mars 2005, L. Dormieux ed., Presses de l'ENPC, pp. 223-229.
2. Bilbie G., Dascalu C., Chambon R., Caillerie D., 2006. Instabilities micro-fracture elastic bodies, in Proceedings of II International Conference on Nonsmooth / Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering, Thessaloniki, Greece, July 7 - 8, 2006, pp. 479 - 486.
3. Bilbie G., Dascalu C., Chambon R., Caillerie D., 2007. Micro-fracture instabilities in granular solids, 7th International Workshop on Bifurcation, Instabilities and Degradation in Mechanics June 13-16, 2005, Chania, Greece , org. Exadaktylos G. and Vardoulakis I., in Bifurcations, Instabilities, Degradation in Geomechanics, Exadaktylos G. and Vardoulakis I. Ed. Springer Verlag, pp. 231-242.
4. Agiasofitou E., Dascalu C., Bilbie G., 2006. Asymptotic homogenization for heterogeneous media with evolving microcracks, in Proceedings of 16th European Conference of Fracture, Alexandroupolis, Greece, July 3-7, 2006, E.E. Gdoutos ed.
5. Dascalu C., Bilbie G., Agiasofitou E., 2006. Asymptotic Homogenization for Elastic Media with Evolving Microcracks , Workshop Mechanics of Materials, org. R. Kienzler, D. L. Mc Dowell and E.A. Werner, January 22 - 28, 2006, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany
6. Bilbie G., Dascalu C., Chambon R., Caillerie D., Micro-fracture instabilities in granular solids (accepté Acta Geotechnica)
7. Dascalu C., Bilbie G., Agiasofitou E., Damage and size effects in elastic solids : a homogenization approach (accepté Int. J. Solids Structures)
8. Dascalu C., Bilbie G., Damage Material Forces a Homogenization Approach (soumis)

Annexe A

A.1 Les outils de la mécanique élastique linéaire de la rupture

Dans cette annexe, nous présentons le comportement asymptotique des champs mécaniques, au voisinage du front d'une fissure, dans les milieux élastiques. Nous définissons les modes fondamentaux de rupture et les facteurs d'intensité des contraintes correspondants. Nous effectuons une analyse énergétique de la rupture et nous introduisons le taux de restitution d'énergie ainsi que l'intégrale indépendante de contour J .

Nos références principales sont Kanninen M.F. and Popelar C.H. [57], Broberg [12], Freund [41], Leblond [63].

A.1.1 Comportement asymptotique des champs mécaniques

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement asymptotique des champs de contrainte et du déplacement, au voisinage du front d'une fissure.

Nous considérons la déformation statique d'un corps élastique linéaire, homogène et isotrope, qui subit de petites déformations. Il occupe un domaine \mathcal{B} , dont nous notons la frontière extérieure par $\partial\mathcal{B}$. Il contient une fissure C libre de contraintes. En absence des forces volumiques, le corps est soumis aux forces de surfaces $\mathbf{f}(t)$ sur $\partial\mathcal{B}_f$ et le déplacement $\mathbf{u}^d(t)$ imposé sur $\partial\mathcal{B}_u$ (avec $\partial\mathcal{B}_f \cap \partial\mathcal{B}_u = \emptyset$) (voir Fig. A.1). Le problème d'équilibre, avec les conditions aux limites, à chaque instant de temps t , peut être écrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \text{ dans } \mathcal{B} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ dans } \mathcal{B} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_i \text{ sur } \partial\mathcal{B}_f \quad (\text{A.3})$$

$$u_i = u_i^d \text{ sur } \partial\mathcal{B}_u \quad (\text{A.4})$$

où \mathbf{u} est le champ vectoriel de déplacement, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ sont les composantes du champ tensoriel symétrique de déformation, $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ tensoriel symétrique de contrainte de Cauchy et \mathbf{n} représente

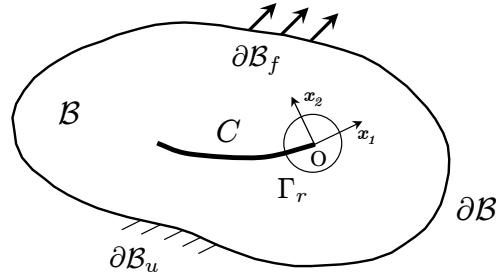


FIG. A.1 – Zone autour de la pointe d'une fissure

la normale extérieure à la frontière $\partial\mathcal{B}$. Pour un matériau homogène, élastique et isotrope, les coefficients élastiques a_{ijkl} sont donnés par $a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, avec λ et μ les constantes de Lamé.

la fissure est considérée libre de contrainte :

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \text{ sur } C^\pm \quad (\text{A.5})$$

Nous avons dénoté par C^\pm les deux frontières de la fissure.

A un moment donné du temps, le problème aux limites, élasto-statique est linéaire. On peut, alors, établir (voir Grisvard [45]) que le champ de contrainte, au voisinage du front de fissure, peut être décrit comme une superposition de modes de déformations élémentaire.

Nous considérons un système local de coordonnées (Fig. A.2), où x_1 est la direction tangentielle à la fissure, dans le voisinage du front d'une fissure, et x_2 est la direction normale à la fissure.

Nous nous intéressons au champ de contraintes au voisinage du front de fissure. Ces contraintes dépendent de la longueur de la fissure, des forces appliquées et de la configuration géométrique. Le premier à avoir déterminé et résolu les équations de ces champs, pour le cas statique, a été Irwin [54], en 1957, en s'appuyant sur les travaux de Griffith [44]. Il a montré que les contraintes, au voisinage de la pointe de la fissure, ont la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^1 \quad (\text{A.6})$$

où r et θ (Fig. A.2) sont les coordonnées polaires, centrées sur la pointe de la fissure, ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$). Les fonctions, f_{ij}^{I-III} sont des fonctions angulaires, connues pour chaque mode.

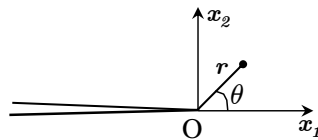


FIG. A.2 – System local de coordonnées en pointe d'une fissure

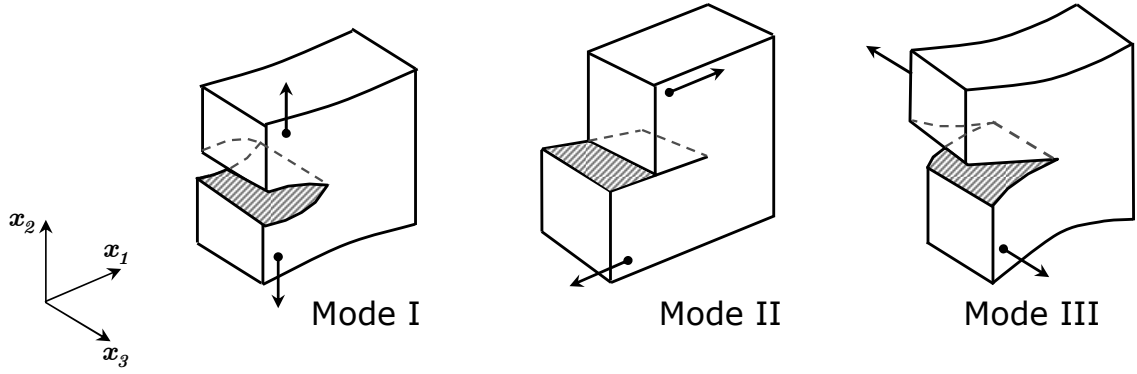


FIG. A.3 – Les modes fondamentaux de la mécanique de la rupture

Les expressions de ces fonctions vont être données ultérieurement, dans cette section. K_{I-III} sont les facteurs d'intensité de contraintes pour les trois modes fondamentaux de la rupture. Les fonctions, $\sigma_{ij}^{(1)}$ sont les contraintes appliquées au front de la fissure, des termes non-singuliers.

Les expressions analytiques des trois facteurs d'intensité de contraintes dépendent, dans le cas de la rupture statique, de la longueur de la fissure, de la géométrie et du chargement. Ils déterminent, à eux seuls, les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements. Pour cette raison, ce sont ces facteurs qui interviendront dans les critères de fissuration.

Les trois modes fondamentaux de rupture, correspondant aux déplacements relatifs des frontières de la fissure (Fig. A.3), sont les suivantes :

- **Mode I** : mode d'ouverture (traction), où les lèvres s'écartent l'une de l'autre, suivant la direction x_2 , suite au chargement σ_{22} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode I est défini par :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0) \quad (\text{A.7})$$

En cas de compression, il ne peut être négatif, car cela signifierait que les lèvres se pénètrent et il faut alors tenir compte du contact entre les lèvres.

- **Mode II** : mode de glissement (cisaillement plane), où les lèvres glissent l'une sur l'autre selon la direction x_1 , perpendiculaire au front de fissure, qui apparaît lors d'un cisaillement σ_{12} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode II est défini par :

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, 0) \quad (\text{A.8})$$

- **Mode III** : mode de déchirement (cisaillement hors plane), où les lèvres se déplacent l'une par rapport à l'autre selon la direction x_3 , parallèle au front de la fissure, qui apparaît lors d'un cisaillement σ_{23} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode III est défini par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(r, 0) \quad (\text{A.9})$$

La superposition des trois modes est suffisante pour décrire le cas, le plus général, de déplacement des lèvres de la fissure.

Dans les corps isotropes, élastiques, linéaires, les termes dominants dans les contraintes et les déplacements asymptotiques, dans le voisinage du front d'une fissure, pour chaque mode fondamentale, peuvent être déterminés (Kanninen et Popelar, [57]) après les formules :

In isotropic linear elastic bodies the dominant stress terms and the asymptotic displacements near the crack tip, for each fundamental mode, can be deduced (e.g. Kanninen and Popelar 1985) as :

En mode I :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), & \text{en déformations planes} \\ 0, & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

En mode II :

$$\sigma_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), & \text{en déformations planes} \\ 0, & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

En mode III :

$$\sigma_{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.19})$$

À partir des relations obtenues pour le champ de contraintes, pour chaque mode pur de rupture, les équations de l'élasticité permettent d'obtenir les composantes du champ de déplacement :

En mode I :

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (\text{A.20})$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (\text{A.21})$$

En mode II :

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (\text{A.22})$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(-\cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (\text{A.23})$$

En mode III :

$$u_3 = \frac{K_{III}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.24})$$

où κ est la constante de Kosolov. Elle est définie, différemment, selon le cas considéré : état plan de contraintes ou état plan de déformations :

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{en déformations planes} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu), & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Si le corps élastique a une géométrie simple, nous pouvons déterminer des valeurs exactes pour K_I , K_{II} et K_{III} . Nous considérons un plan infini, qui contient une fissure centrée, de longueur $2a$. Cette fissure est soumise à une charge infinie, donnée par les contraintes de traction σ_{22}^∞ et de cisaillement, σ_{12}^∞ et σ_{23}^∞ . La solution analytique de ce problème peut être obtenue, en utilisant les fonctions complexes (Broberg, [12]). Ensuite, les facteurs d'intensité sont déduites sous la forme :

$$K_I = \sqrt{\pi a} \sigma_{22}^\infty ; K_{II} = \sqrt{\pi a} \sigma_{12}^\infty ; K_{III} = \sqrt{\pi a} \sigma_{23}^\infty \quad (\text{A.26})$$

Nous notons que les facteurs d'intensité dépendent de la longueur et du chargement de la fissure.

A.1.2 Taux de restitution d'énergie

Les origines des méthodes énergétiques dans l'étude de la rupture sont dans le travail de Griffith [44], qui a compris l'importance de l'évaluation de la variation de l'énergie, pendant l'avancement de la fissure fragile. Il a associé la dissipation de l'énergie, pendant la propagation de fissure à l'énergie de création des nouvelles surfaces de discontinuité.

Dans cette section, nous introduisons le concept de *taux de restitution d'énergie*, noté \mathcal{G} . Par sa définition, \mathcal{G} représente ainsi la quantité d'énergie, par unité de longueur de fissure, qui est fournie par l'énergie élastique du corps et du chargement externe pour la création des nouvelles surfaces de la fissure. Soit $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}$ la partie solide définie par $\mathcal{B}_r = \mathcal{B} \setminus \{C_+ \cup C_- \cup \Gamma_r\}$ (voir Fig. A.4), avec la propriété

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{B}_r = \mathcal{B}.$$

La solution quasi-statique de déplacement est une fonction de la position et du temps $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$. Nous notons par U la densité d'énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (\text{A.27})$$

Considérons une éventuelle évolution d'un front de la fissure, dans la direction donnée par le vecteur unitaire $\mathbf{e}(t)$, avec la vitesse $c(t)$. En multipliant A.1 par \dot{u}_i et en intégrant sur \mathcal{B}_r , on obtient une relation globale :

$$\int_{\mathcal{B}_r} \frac{d}{dt} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dx - \int_{\mathcal{B}_r} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \dot{u}_i) dx = 0 \quad (\text{A.28})$$

La première intégrale est exprimée en utilisant le théorème de transport (voir [113], eqn (81.4)) et pour la deuxième nous utiliserons une intégration par parties et nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_r} U dx + \int_{\Gamma_r} U c e_k n_k ds - \int_{\partial \mathcal{B}_f} f_i \dot{u}_i ds + \int_{\Gamma_r} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i ds = 0 \quad (\text{A.29})$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure, qui correspond au contour du Γ_r autour de la pointe de la fissure. Des expressions particulières, pour les termes asymptotiques dans le voisinage du front de la fissure, permettent de supposer que :

$$\dot{u}_i \approx -c u_{i,k} e_k \quad (\text{A.30})$$

d'où nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_r} U dx + c \int_{\Gamma_r} e_k b_{kj} n_j ds = \int_{\partial \mathcal{B}_f} f_i \dot{u}_i ds \quad (\text{A.31})$$

avec

$$b_{kj} = U \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} \quad (\text{A.32})$$

est le tenseur de contrainte Eshelby.

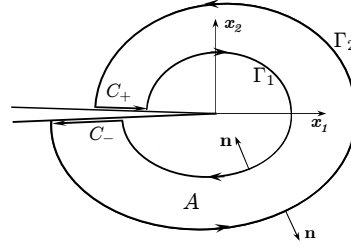
Par passage à la limite $r \rightarrow 0$, on aboutit à :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} U dx + c \mathcal{G} = \int_{\partial \mathcal{B}_f} f_i \dot{u}_i ds \quad (\text{A.33})$$

où :

$$\mathcal{G} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} e_k b_{kj} n_j ds \quad (\text{A.34})$$

Nous pouvons observer que l'équation d'énergie (A.33-A.34) tient compte de la dissipation d'énergie, causée par l'extension de la fissure. La quantité \mathcal{G} est appelé *le taux de restitution d'énergie*. Il représente le taux potentiel d'énergie dissipée, au cours d'une extension virtuel d'une fissure unitaire sur une trajectoire prévue. Donc, dans le cas des problèmes quasi-statiques, le critère de propagation de fissure, peut être formulé en termes de taux de restitution d'énergie. Ce critère stipule que la propagation a lieu quand une limite critique d'énergie, \mathcal{G}_c , est attendue, tandis qu'il n'y a aucune évolution de la fissure si le taux de restitution d'énergie est inférieur à cette limite.


FIG. A.4 – Les contours pour l'intégrale J

A.1.3 Intégrales indépendantes du contour

Une autre avancée importante dans l'étude de la mécanique de la rupture a été apportée par l'introduction de l'intégrale indépendante du contour J de Eshelby [37] et Rice [93].

L'intégrale J est donnée, en notation indicielle, par

$$J = \int_{\Gamma} e_k (U \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) n_j d\Gamma \quad (\text{A.35})$$

dans laquelle U est la densité d'énergie élastique de déformation.

La propriété d'indépendance du chemin peut être montrée en considérant un domaine fermé A , autour de la pointe de la fissure, avec la frontière $\partial A = \Gamma_1 \cup C_+ \cup \Gamma_2 \cup C_-$ (voir Fig. A.4). On peut voir facilement que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} b_{kj} = 0 \quad (\text{A.36})$$

et en intégrant sur le domaine A , on obtient

$$\int_A e_k \frac{\partial}{\partial x_j} (U \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) ds = 0. \quad (\text{A.37})$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} e_k (U \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) n_j ds - \int_{\Gamma_2} e_k (U \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k}) n_j ds + \\ & \int_{C_+ \cup C_-} e_k (U n_k - \sigma_{ij} u_{i,k}) n_j ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Comme les fissures sont considérées libres de contraintes, nous avons $\sigma_{ij} n_j = 0$ sur C^\pm et aussi $e_k n_k = 0$ sur la fissure. D'où, nous obtenons $J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_2}$.

Tenant compte de ce résultat, nous pouvons voir que cette intégrale J présente trois caractéristiques, qui l'ont rendue incontournable lors de l'élaboration des modèles numériques, développées, ensuite, pour la simulation de la rupture :

- elle a la signification physique d'un taux de restitution de l'énergie
- elle a une valeur unique pour tout contour arbitraire autour de la pointe de la fissure

- elle peut être rapportée au facteur d'intensité de contraintes, en approchant le contour d'évaluation à la pointe de la fissure.

A.2 Bases fondamentales des déformations macroscopiques pour une fissure horizontale

- Les sous-domaines de linéarité :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^+ &= \{\mathbf{e}_x \mid \lambda e_{x11} + (\lambda + 2\mu)e_{x22} \geq 0\} \\ \mathbf{D}^d &= \{\mathbf{e}_x \mid \lambda e_{x11} + (\lambda + 2\mu)e_{x22} < 0 \text{ et } 2\mu e_{x12} \geq 0\} \\ \mathbf{D}^g &= \{\mathbf{e}_x \mid \lambda e_{x11} + (\lambda + 2\mu)e_{x22} < 0 \text{ et } 2\mu e_{x12} < 0\}\end{aligned}\quad (\text{A.39})$$

- les déformations macroscopiques fondamentales ${}^d\mathbf{E}^{kl} \in \mathbf{D}^d$ et ${}^g\mathbf{E}^{kl} \in \mathbf{D}^g$

$$\left\{ {}^d\mathbf{E}^{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad {}^d\mathbf{E}^{12} = {}^d\mathbf{E}^{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad {}^d\mathbf{E}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{A.40})$$

$$\left\{ {}^g\mathbf{E}^{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad {}^g\mathbf{E}^{12} = {}^g\mathbf{E}^{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad {}^g\mathbf{E}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{A.41})$$

- les coefficients ${}^d\alpha_{kl}$ et ${}^g\alpha_{kl}$:

$${}^d\alpha_{11} = -e_{x11} - e_{x12}; \quad {}^d\alpha_{12} = {}^d\alpha_{21} = e_{x12}; \quad {}^d\alpha_{22} = -e_{x22} \quad (\text{A.42})$$

$${}^g\alpha_{11} = -e_{x11} + e_{x12}; \quad {}^g\alpha_{12} = {}^g\alpha_{21} = -e_{x12}; \quad {}^g\alpha_{22} = -e_{x22} \quad (\text{A.43})$$

- les solutions écrites en ξ^{kl}

$${}^d\xi^{11} = -{}^d\eta^{11}; \quad {}^d\xi^{12} = {}^d\xi^{21} = -\frac{1}{2}{}^d\eta^{11} + {}^d\eta^{12}; \quad {}^d\xi^{22} = -{}^d\eta^{22}; \quad (\text{A.44})$$

$${}^g\xi^{11} = -{}^g\eta^{11}; \quad {}^g\xi^{12} = {}^g\xi^{21} = \frac{1}{2}{}^g\eta^{11} - {}^g\eta^{12}; \quad {}^g\xi^{22} = -{}^g\eta^{22} \quad (\text{A.45})$$

A.3 Définition des vecteurs unitaires normal et tangent sur la microfissure pour les quatre orientations

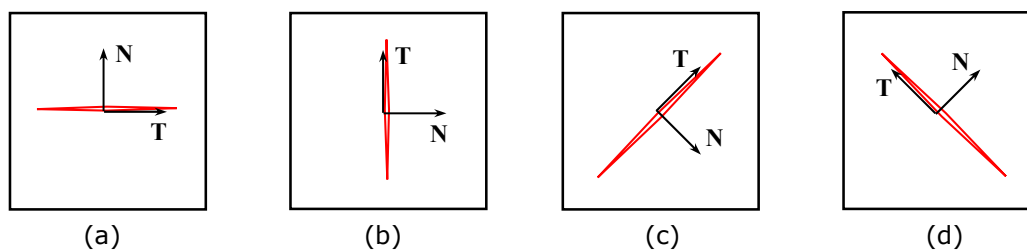


FIG. A.5 – Vecteurs unitaires normal et tangent à la microfissure

Dans la Fig. A.5, nous avons représenté schématiquement les vecteurs unitaires normal et tangent pour les quatre fissures orientées différemment. Les valeurs numériques de ces vecteurs sont données dans le tableau A.1.

Les vecteurs unitaires normal et tangent		
orientation	$[N_1, N_2]$	$[T_1, T_2]$
(a)	$[0, 1]$	$[1, 0]$
(b)	$[1, 0]$	$[0, 1]$
(c)	$[\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$	$[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$
(d)	$[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$	$[\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$

TAB. A.1 – Vecteurs unitaires normal et tangent à la microfissure orientée différemment

Annexe B

B.1 Quelques précisions sur la mise en oeuvre numérique

B.1.1 Transformation géométrique isoparamétrique en dimension 2D. Calcul d'opérateurs

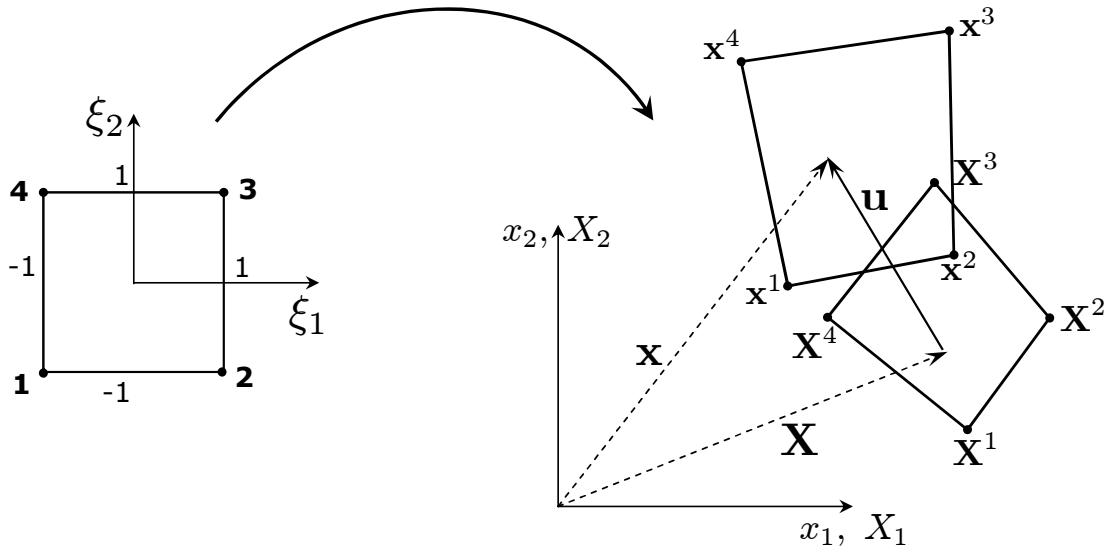


FIG. B.1 – Transformation géométrique de l'élément parent carré à l'élément courant ou à l'élément de référence

L'élément parent considéré est un carré $[-1, 1]^2$, où on construit une base de type 1, ξ_1 , ξ_2 , $\xi_1\xi_2$. En utilisant cette base, on peut écrire :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}]\mathbf{N}^T(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{B.1})$$

Polynômes de Lagrange (2D)			
Nœud	$N_i(\xi_1, \xi_2)$	$\partial N_i / \partial \xi_1$	$\partial N_i / \partial \xi_2$
1	$(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)/4$	$-(1 - \xi_2)/4$	$-(1 - \xi_1)/4$
2	$(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)/4$	$(1 - \xi_2)/4$	$-(1 + \xi_1)/4$
3	$(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)/4$	$(1 + \xi_2)/4$	$(1 + \xi_1)/4$
4	$(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)/4$	$-(1 + \xi_2)/4$	$(1 - \xi_1)/4$

TAB. B.1 – Fonctions d'interpolation sur l'élément parent 2D

où $[\mathbf{X}]$ est la matrice des coordonnées de noeuds dans la configuration de référence, écrite sous la forme

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 & X_1^4 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 & X_2^4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

où X_i^j représente la coordonnée i du nœud j dans la configuration de référence, et \mathbf{N} est la matrice avec les fonctions de forme

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{B.3})$$

Dans la configuration courante, nous avons une écriture similaire :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}] \mathbf{N}^T(\xi) \quad (\text{B.4})$$

où $[\mathbf{x}]$ est la matrice des coordonnées de nœuds dans la configuration courante écrite sous la forme

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Le gradient de déformation est calculé par la formule

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = ([\mathbf{x}] \mathbf{D} \mathbf{N}^T) ([\mathbf{X}] \mathbf{D} \mathbf{N}^T)^{-1} \quad (\text{B.6})$$

et le gradient de déplacement s'écrit :

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = ([\mathbf{U}] \mathbf{D} \mathbf{N}^T) ([\mathbf{x}] \mathbf{D} \mathbf{N}^T)^{-1} = [\mathbf{U}] \mathbf{D} \mathbf{N}_{\mathbf{x}}^T \quad (\text{B.7})$$

où $\mathbf{D} \mathbf{N}$ est la matrice avec les dérivées de fonctions de forme

$$[\mathbf{D} \mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

et $[\mathbf{U}]$ est la matrice des nœuds de déplacements

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} U_1^1 & U_1^2 & U_1^3 & U_1^4 \\ U_2^1 & U_2^2 & U_2^3 & U_2^4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

et \mathbf{DN}_X est la matrice qui contient les dérivées de fonctions de forme en fonction de coordonnées lagrangiennes

$$[\mathbf{DN}_X] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \frac{\partial N_3}{\partial X_2} & \frac{\partial N_4}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

et on calcule par

$$\mathbf{DN}_X = ([\mathbf{X}]\mathbf{DN}^T)^{-T} \mathbf{DN} = \mathbf{J}_X^{-T} \mathbf{DN} \quad (\text{B.11})$$

Le gradient de déplacement peut être calculé sous une forme vectorielle :

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{21} \\ D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_2} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \mathbf{GU} \quad (\text{B.12})$$

Dans l'équation (6.34) l'opérateur linéaire \mathbf{B}_l appliqué au vecteur de déplacement nodal \mathbf{U} donné :

$$\mathbf{B}_l \mathbf{U} = \mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{D})} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} + D_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Si on donne en facteur \mathbf{U} dans l'équation (B.13), en utilisant l'équation (B.12), nous obtenons l'expression pour \mathbf{B}_l de forme

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \frac{\partial N_3}{\partial X_2} & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & \frac{\partial N_4}{\partial X_2} & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Pour l'équation (6.34), nous avons utilisé l'opérateur non-linéaire \mathbf{B}_n appliqué au vecteur de déplacement \mathbf{U} qui est définie par :

$$\mathbf{B}_n \mathbf{U} = \mathbf{L} \overline{\text{sym}(\mathbf{D}^T \mathbf{D})} = \begin{bmatrix} D_{11}D_{11} + D_{21}D_{21} \\ D_{12}D_{12} + D_{22}D_{22} \\ D_{11}D_{12} + D_{21}D_{22} + D_{12}D_{11} + D_{22}D_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Par la factorisation de \mathbf{U} de l'équation (B.15) et en utilisant (B.12), nous obtenons

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} D_{11} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & D_{21} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & D_{11} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & D_{21} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} \\ D_{12} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & D_{22} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & D_{12} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & D_{22} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} \\ D_{11} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + D_{12} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & D_{21} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + D_{22} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & D_{11} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + D_{12} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & D_{21} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + D_{22} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} \\ \dots & D_{11} \frac{\partial N_4}{\partial X_1} & D_{21} \frac{\partial N_4}{\partial X_1} & \\ \dots & D_{12} \frac{\partial N_4}{\partial X_2} & D_{22} \frac{\partial N_4}{\partial X_2} & \\ \dots & D_{11} \frac{\partial N_4}{\partial X_2} + D_{12} \frac{\partial N_4}{\partial X_1} & D_{21} \frac{\partial N_4}{\partial X_2} + D_{22} \frac{\partial N_4}{\partial X_1} & \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Polynômes de Lagrange (1D)		
Nœud	$N_i(\xi)$	$\partial N_i/\partial \xi$
1	$(1 - \xi)/2$	$-1/2$
2	$(1 + \xi)/2$	$1/2$

TAB. B.2 – Fonctions d’interpolation sur l’élément parent 1D

Remarque : En dimension 1, l’élément parent considéré est l’intervalle $[-1, 1]$, et la base de monôme est constituée des polynomes 1 et ξ . Les fonctions d’interpolation associées au nœud i sont données dans le tableau B.2.

B.1.2 Méthode d’intégration numérique

Pour intégrer les différentes composantes des matrices et des vecteurs élémentaires, une méthode d’intégration numérique, de type Gauss, est utilisée (Dhatt and Touzot [31], Zienkiewicz and Taylor [124]) pour des éléments parents 1D ou 2D.

a) En dimension 1D

Dans le paragraphe précédent, on a vu que l’élément parent choisi en 1D est l’intervalle $[-1, 1]$, donc nous allons évaluer l’intégrale I , de toute fonction f , sur cet intervalle, grâce à la formule suivante :

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \simeq \sum_{i=1}^{n_G} w_i f(\xi^i) \quad (\text{B.17})$$

où ξ^i est la coordonnée d’un point d’intégration, i dans le repère de l’élément parent et w_i le poids qui est associé à chacun de ces points d’intégration. Dans le code, les intégrales sur les éléments d’interfaces sont calculées en utilisant 1 jusqu’à 4 points d’intégration, pour lesquels nous donnons les valeurs de leurs coordonnées et leur poids respectif, dans le tableau B.3.

b) En dimension 2D

Dans le cas 2D, on a choisi comme élément parent le carré $[-1, 1]^2$, pour calculer l’intégrale I de toutes fonctions f , il suffit de constater que :

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right) d\xi_2 \simeq \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^{n_G} w_i f(\xi_1^i, \xi_2) \right) d\xi_2 \simeq \sum_{i=1}^{n_G} \sum_{j=1}^{n_G} w_i w_j f(\xi_1^i, \xi_2^j) \quad (\text{B.18})$$

Donc pour calculer l’intégrale numérique en dimension 2 sur le carré $[-1, 1]^2$, cela consiste à utiliser les mêmes valeurs (tableau B.3) qu’en 1D pour chacune des variables.

Quadrature de Gauss (1D)		
n_G	Points d'intégration ξ^i	Poids d'intégration w_i
1	0	2
2	-0.577350269189626 +0.577350269189626	1 1
3	-0.774596669241483 0.0 +0.774596669241483	0.555555555555556 0.888888888888889 0.555555555555556
4	-0.861134311594053 -0.339981043584856 +0.339981043584856 +0.861134311594053	0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454

TAB. B.3 – Intégration numérique sur l'intervalle parent $[-1, 1]$