THÈSE

Sur La régularité des Minimiseurs de Mumford-Shah en dimension 3 et supérieure.

Antoine Lemenant
Directeur de Thèse : Guy David

Université Paris-Sud XI Orsay

June 18, 2008

Contents

Segmentation d'image

Problème de segmentation :

Trouver les contours d'une image.

Segmentation d'image

Problème de segmentation :

Trouver les contours d'une image.

Segmentation d'image

Problème de segmentation :

Trouver les contours d'une image.

Segmentation d'image

Problème de segmentation :

Trouver les contours d'une image.

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Image

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Image

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

Couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u, K); K \subset \Omega \text{ est fermé }, u \in W^{1,2}(\Omega \backslash K)\}$$

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Image

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

Couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u, K); K \subset \Omega \text{ est fermé }, u \in W^{1,2}(\Omega \backslash K)\}$$

Resolution de Mumford-Shah

$$\min_{(u,K)\in\mathcal{A}} J(u, K)$$

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Image

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

Couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u, K); K \subset \Omega \text{ est fermé }, u \in W^{1,2}(\Omega \backslash K)\}$$

Resolution de Mumford-Shah

$$\min_{(u,K)\in\mathcal{A}} J(u, K)$$

$$J(u, K) :=$$

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Image

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

Couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u, K); K \subset \Omega \text{ est fermé }, u \in W^{1,2}(\Omega \backslash K)\}$$

Resolution de Mumford-Shah

$$\min_{(u,K)\in\mathcal{A}} J(u, K)$$

$$J(u, K) := \int_\Omega |u - g|^2 dx$$

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Image

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

Couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u,K); K \subset \Omega \text{ est fermé }, u \in W^{1,2}(\Omega \backslash K)\}$$

Resolution de Mumford-Shah

$$\min_{(u,K)\in\mathcal{A}} J(u,K)$$

$$J(u,K) := \int_\Omega |u-g|^2 dx + \int_{\Omega\backslash K} |\nabla u|^2 dx$$

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Image

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\Omega)$.

Couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u,K);\, K \subset \Omega \text{ est fermé },\, u \in W^{1,2}(\Omega \backslash K)\}$$

Resolution de Mumford-Shah

$$\min_{(u,K)\in\mathcal{A}} J(u,K)$$

$$J(u,K) := \int_\Omega |u-g|^2 dx + \int_{\Omega\backslash K} |\nabla u|^2 dx + H^1(K)$$

Existence

Existence

L'existence d'au moins un minimiseur est prouvé en 1989 par E. De Giorgi, M. Carriero, A. Leaci en utilisant la théorie SBV.

Régularité de l'ensemble singulier

Régularité de l'ensemble singulier

La conjecture de Mumford-Shah (1989)

Soit (u, K) un minimiseur réduit pour la fonctionnelle J. Alors K est une union finie d'arcs de classe C^1.

Régularité de l'ensemble singulier

La conjecture de Mumford-Shah (1989)

Soit (u, K) un minimiseur réduit pour la fonctionnelle J. Alors K est une union finie d'arcs de classe C^1.

Proposition

Si la conjecture est vraie, alors les arcs qui composent K ne peuvent se rencontrer que en leur extrémité par nombre de 3, en faisant des angles de $120°$.

Un petit tour en E.D.P.

Un petit tour en E.D.P.

Equations variationnelles

Si K est le graphe d'une fonction f de régularité $C^{1,\alpha}$ dans $B(x,r)$ alors u est la solution faible du problème suivant

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & u-g & \text{dans } B(x,r)^{\pm} \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & 0 & \text{sur } K \cap B(x,r) \\ -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+\nabla f^2}}\right) & = & [|\nabla u|^2 + (u-g)^2]^{\pm} & \text{sur } K \cap B(x,r) \end{array}$$

Un petit tour en E.D.P.

Equations variationnelles

Si K est le graphe d'une fonction f de régularité $C^{1,\alpha}$ dans $B(x,r)$ alors u est la solution faible du problème suivant

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & u-g & \text{dans } B(x,r)^{\pm} \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & 0 & \text{sur } K\cap B(x,r) \\ -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+\nabla f^2}}\right) & = & [|\nabla u|^2+(u-g)^2]^{\pm} & \text{sur } K\cap B(x,r) \end{array}$$

D'où :(voir [AFP], [KLM])

Si K est $C^{1,\alpha}$ et si g est $C^{k,\alpha}$, alors K est $C^{k+2,\sigma}$. De plus si g est analytique, alors K est analytique.

Régularité, état de l'art

Régularité, état de l'art

- K est localement Alfors-Régulière.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 1991 M. Carriero, A. Leaci pour $N \geq 2$

Régularité, état de l'art

- K est localement Alfors-Régulière.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 1991 M. Carriero, A. Leaci pour $N \geq 2$
- K possède la propriété des projections.
  - 1991 F. Dibos, G. Koepfler pour $N = 2$

Régularité, état de l'art

- K est localement Alfors-Régulière.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 1991 M. Carriero, A. Leaci pour $N \geq 2$
- K possède la propriété des projections.
  - 1991 F. Dibos, G. Koepfler pour $N = 2$
- K possède la propriété de bissection.
  - 1997 S. Solimini pour $N \geq 2$

Régularité, état de l'art

- K est localement Alfors-Régulière.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 1991 M. Carriero, A. Leaci pour $N \geq 2$
- K possède la propriété des projections.
  - 1991 F. Dibos, G. Koepfler pour $N = 2$
- K possède la propriété de bissection.
  - 1997 S. Solimini pour $N \geq 2$
- K possède la propriété d'uniforme concentration.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 2000 S. Rigot + 1997 G. David, S. Semmes pour $N \geq 2$
  - 2001 F. Maddalena, S. Solimini pour $N \geq 2$

Régularité, état de l'art

- K est localement Alfors-Régulière.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 1991 M. Carriero, A. Leaci pour $N \geq 2$
- K possède la propriété des projections.
  - 1991 F. Dibos, G. Koepfler pour $N = 2$
- K possède la propriété de bissection.
  - 1997 S. Solimini pour $N \geq 2$
- K possède la propriété d'uniforme concentration.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 2000 S. Rigot + 1997 G. David, S. Semmes pour $N \geq 2$
  - 2001 F. Maddalena, S. Solimini pour $N \geq 2$
- K est uniformélent rectifiable.
  - 1996 G. David, S. Semmes $N = 2$
  - 1997 G. David, S. Semmes $N \geq 2$

Régularité, état de l'art

- K est localement Alfors-Régulière.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 1991 M. Carriero, A. Leaci pour $N \geq 2$
- K possède la propriété des projections.
  - 1991 F. Dibos, G. Koepfler pour $N = 2$
- K possède la propriété de bissection.
  - 1997 S. Solimini pour $N \geq 2$
- K possède la propriété d'uniforme concentration.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 2000 S. Rigot + 1997 G. David, S. Semmes pour $N \geq 2$
  - 2001 F. Maddalena, S. Solimini pour $N \geq 2$
- K est uniformélent rectifiable.
  - 1996 G. David, S. Semmes $N = 2$
  - 1997 G. David, S. Semmes $N \geq 2$
- K est $C^{1,\alpha}$ presque partout.
  - 1996 G. David $N = 2$
  - 1997 L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara $N \geq 2$

Régularité, état de l'art

- K est localement Alfors-Régulière.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 1991 M. Carriero, A. Leaci pour $N \geq 2$
- K possède la propriété des projections.
  - 1991 F. Dibos, G. Koepfler pour $N = 2$
- K possède la propriété de bissection.
  - 1997 S. Solimini pour $N \geq 2$
- K possède la propriété d'uniforme concentration.
  - 1989 G. Dal Maso, J-M. Morel, S. Solimini pour $N = 2$
  - 2000 S. Rigot + 1997 G. David, S. Semmes pour $N \geq 2$
  - 2001 F. Maddalena, S. Solimini pour $N \geq 2$
- K est uniformélent rectifiable.
  - 1996 G. David, S. Semmes $N = 2$
  - 1997 G. David, S. Semmes $N \geq 2$
- K est $C^{1,\alpha}$ presque partout.
  - 1996 G. David $N = 2$
  - 1997 L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara $N \geq 2$
- La conjecture est vraie pour toute composante connexe isolée de K.
  - 1996 A. Bonnet ($N = 2$).

Le théorème d'Alexis Bonnet

Limite d'explosion

Le théorème d'Alexis Bonnet

Limite d'explosion

$$K_n := \varepsilon_n^{-1}(K - x_0)$$

Le théorème d'Alexis Bonnet

Limite d'explosion

$$K_n := \varepsilon_n^{-1}(K - x_0)$$

$$u_n := \varepsilon_n^{-\frac{1}{2}} u(x_0 + \varepsilon_n x)$$

Le théorème d'Alexis Bonnet

Limite d'explosion

$$K_n := \varepsilon_n^{-1}(K - x_0)$$

$$u_n := \varepsilon_n^{-\frac{1}{2}} u(x_0 + \varepsilon_n x)$$

$$\Omega_n := \varepsilon_n^{-1}(\Omega - x_0)$$

Le théorème d'Alexis Bonnet

Limite d'explosion

$$K_n := \varepsilon_n^{-1}(K - x_0)$$

$$u_n := \varepsilon_n^{-\frac{1}{2}} u(x_0 + \varepsilon_n x)$$

$$\Omega_n := \varepsilon_n^{-1}(\Omega - x_0)$$

$$(u_n, K_n) \to_{\varepsilon_n \to 0} (u_\infty, K_\infty)$$

et (u_∞, K_∞) est un Minimiseur global.

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseur Global

A minimiseur global dans $\mathbb{R}^N$ est un couple (u, K) tel que

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseur Global

A minimiseur global dans $\mathbb{R}^N$ est un couple (u, K) tel que

$$K \text{ est fermé dans } \mathbb{R}^2$$

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseur Global

A minimiseur global dans $\mathbb{R}^N$ est un couple (u, K) tel que

$$K \text{ est fermé dans } \mathbb{R}^2$$

$$u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^2 \backslash K)$$

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseur Global

A minimiseur global dans $\mathbb{R}^N$ est un couple (u, K) tel que

$$K \text{ est fermé dans } \mathbb{R}^2$$

$$u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^2 \backslash K)$$

$$H^1(K \cap B) + \int_{B \backslash K} |\nabla u|^2 \leq H^1(L \cap B) + \int_{B \backslash K} |\nabla v|^2$$

pour tout compétiteur (v, L) pour (u, K) dans B.

Le théorème d'Alexis Bonnet

Compétiteur

Un compétiteur pour (u, K) dans $B \subset \mathbb{R}^2$ est un couple (v, L) tel que

Le théorème d'Alexis Bonnet

Compétiteur

Un compétiteur pour (u, K) dans $B \subset \mathbb{R}^2$ est un couple (v, L) tel que

$$\left.\begin{array}{r}K = L\\ v = u\end{array}\right\} \text{ dans } \mathbb{R}^N \backslash B$$

Le théorème d'Alexis Bonnet

Compétiteur

Un compétiteur pour (u, K) dans $B \subset \mathbb{R}^2$ est un couple (v, L) tel que

$$\left.\begin{array}{r}K = L\\ v = u\end{array}\right\} \text{ dans } \mathbb{R}^N \backslash B$$

Condition de séparation: Si $x, y \in \mathbb{R}^N \backslash K$ sont séparés par K ils le sont aussi par L.

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseurs globaux pour $N = 2$

Si (u, K) est un minimiseur global dans $\mathbb{R}^2$ et si K est connexe, alors il est l'un de la liste ci dessous :

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseurs globaux pour $N = 2$

Si (u, K) est un minimiseur global dans $\mathbb{R}^2$ et si K est connexe, alors il est l'un de la liste ci dessous :

- $K = \emptyset$ et u est constant.

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseurs globaux pour $N = 2$

Si (u, K) est un minimiseur global dans $\mathbb{R}^2$ et si K est connexe, alors il est l'un de la liste ci dessous :

- $K = \emptyset$ et u est constant.
- K est une droite et u est localement constant

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseurs globaux pour $N = 2$

Si (u, K) est un minimiseur global dans $\mathbb{R}^2$ et si K est connexe, alors il est l'un de la liste ci dessous :

- $K = \emptyset$ et u est constant.
- K est une droite et u est localement constant
- K est une hélice et u est localement constant

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseurs globaux pour $N = 2$

Si (u, K) est un minimiseur global dans $\mathbb{R}^2$ et si K est connexe, alors il est l'un de la liste ci dessous :

- $K = \emptyset$ et u est constant.
- K est une droite et u est localement constant
- K est une hélice et u est localement constant
- K est une demie droite et u est un *Cracktip*.

Le théorème d'Alexis Bonnet

Minimiseurs globaux pour $N = 2$

Si (u, K) est un minimiseur global dans $\mathbb{R}^2$ et si K est connexe, alors il est l'un de la liste ci dessous :

- $K = \emptyset$ et u est constant.
- K est une droite et u est localement constant
- K est une hélice et u est localement constant
- K est une demie droite et u est un *Cracktip*.

Remarque

La connaissance complète des minimiseurs globaux sans hypothèse de connexité donnerai une réponse positive à la conjecture de Mumford-Shah.

Quels sont les minimiseurs globaux dans $\mathbb{R}^3$?

Quels sont les minimiseurs globaux dans $\mathbb{R}^3$?

Bonne question !

Quels sont les minimiseurs globaux dans $\mathbb{R}^3$?

Bonne question !

$\Rightarrow$ Premier "sujet" de thèse. (voir chapitre suivant...)

Théorème de Guy David (1996)

Régularité près des droites et hélices dans $\mathbb{R}^2$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ tels que si (u, K) est un minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Théorème de Guy David (1996)

Régularité près des droites et hélices dans $\mathbb{R}^2$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ tels que si (u, K) est un minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Si Z est un cône minimal (Droite ou Hélice) contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

Théorème de Guy David (1996)

Régularité près des droites et hélices dans $\mathbb{R}^2$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ tels que si (u, K) est un minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Si Z est un cône minimal (Droite ou Hélice) contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

Alors il existe un $C^{1,\alpha}$-difféomorphisme Φ tel que

$$\Phi(Z \cap B(x, cr)) = K \cap B(x, cr)$$

.

L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara's Theorem (1997)

Régularité près d'un hyperplan dans $\mathbb{R}^N$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara's Theorem (1997)

Régularité près d'un hyperplan dans $\mathbb{R}^N$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Si Z est un hyperplan contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara's Theorem (1997)

Régularité près d'un hyperplan dans $\mathbb{R}^N$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Si Z est un hyperplan contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

Alors il existe un $C^{1,\alpha}$ difféomorphisme Φ tel que

$$\Phi(Z \cap B(x, cr)) = K \cap B(x, cr)$$

.

L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara's Theorem (1997)

Régularité près d'un hyperplan dans $\mathbb{R}^N$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Si Z est un hyperplan contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

Alors il existe un $C^{1,\alpha}$ difféomorphisme Φ tel que

$$\Phi(Z \cap B(x, cr)) = K \cap B(x, cr)$$

.

Remarque

La preuve utilise le "tilt" qui ne semble pas bien approprié pour des situations géométriques différentes d'un hyperplan.

Peut on généraliser ce résultat dans $\mathbb{R}^3$?

[D] $\Rightarrow N = 2$ régulier près des droites et hélices

Peut on généraliser ce résultat dans $\mathbb{R}^3$?

[D] $\Rightarrow N = 2$ régulier près des droites et hélices
[AFP] $\Rightarrow N \geq 2$ régulier près des hyperplans

Peut on généraliser ce résultat dans $\mathbb{R}^3$?

[D] $\Rightarrow N = 2$ régulier près des droites et hélices
[AFP] $\Rightarrow N \geq 2$ régulier près des hyperplans
Question : considérer une généralisation des hélices dans $\mathbb{R}^3$
($\mathbb{Y} :=$ *helice* $\times \mathbb{R}$).

Peut on généraliser ce résultat dans $\mathbb{R}^3$?

[D] $\Rightarrow N = 2$ régulier près des droites et hélices
[AFP] $\Rightarrow N \geq 2$ régulier près des hyperplans
Question : considérer une généralisation des hélices dans $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{Y} := helice \times \mathbb{R}$). Est ce que K est régulier près d'un $\mathbb{Y}$?

Peut on généraliser ce résultat dans $\mathbb{R}^3$?

[D] $\Rightarrow N = 2$ régulier près des droites et hélices
[AFP] $\Rightarrow N \geq 2$ régulier près des hyperplans
Question : considérer une généralisation des hélices dans $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{Y} :=$ *helice* $\times \mathbb{R}$). Est ce que K est régulier près d'un $\mathbb{Y}$? et d'un $\mathbb{T}$ (troisième cône minimal dans $\mathbb{R}^3$) ?

Peut on généraliser ce résultat dans $\mathbb{R}^3$?

[D] $\Rightarrow N = 2$ régulier près des droites et hélices
[AFP] $\Rightarrow N \geq 2$ régulier près des hyperplans
Question : considérer une généralisation des hélices dans $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{Y} := \textit{helice} \times \mathbb{R}$). Est ce que K est régulier près d'un $\mathbb{Y}$? et d'un $\mathbb{T}$ (troisième cône minimal dans $\mathbb{R}^3$) ?
$\Rightarrow$ Deuxième "sujet" de thèse. (voir chapitre 2...)

Contents

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Competiteur

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, $(u, K) \in \mathcal{A}$, et B une boule telle que $\bar{B} \subset \Omega$.

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Competiteur

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, $(u, K) \in \mathcal{A}$, et B une boule telle que $\bar{B} \subset \Omega$. Alors $(v, L) \in \mathcal{A}$ est un compétiteur pour (u, K) dans B si :

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Competiteur

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, $(u, K) \in \mathcal{A}$, et B une boule telle que $\bar{B} \subset \Omega$. Alors $(v, L) \in \mathcal{A}$ est un compétiteur pour (u, K) dans B si :

- $v = u$ dans $\Omega \backslash B$

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Competiteur

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, $(u, K) \in \mathcal{A}$, et B une boule telle que $\bar{B} \subset \Omega$. Alors $(v, L) \in \mathcal{A}$ est un compétiteur pour (u, K) dans B si :

- $v = u$ dans $\Omega \backslash B$
- $K = L$ dans $\Omega \backslash B$

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Competiteur

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, $(u, K) \in \mathcal{A}$, et B une boule telle que $\bar{B} \subset \Omega$. Alors $(v, L) \in \mathcal{A}$ est un compétiteur pour (u, K) dans B si :

- $v = u$ dans $\Omega \backslash B$
- $K = L$ dans $\Omega \backslash B$
- Condition de séparation : si $x, y \in \Omega \backslash (B \cup K)$ sont séparés par K, alors ils sont aussi séparés par L.

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Competiteur

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, $(u, K) \in \mathcal{A}$, et B une boule telle que $\bar{B} \subset \Omega$. Alors $(v, L) \in \mathcal{A}$ est un compétiteur pour (u, K) dans B si :

- $v = u$ dans $\Omega \backslash B$
- $K = L$ dans $\Omega \backslash B$
- Condition de séparation : si $x, y \in \Omega \backslash (B \cup K)$ sont séparés par K, alors ils sont aussi séparés par L.

Fonction Jauge

h est une fonction de jauge si c'est une fonction positive, croissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\lim_{t \to 0} h(t) = 0$$

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Minimiseur de Mumford-Shah

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, h une fonction de jauge.

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Minimiseur de Mumford-Shah

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, h une fonction de jauge.

$$\int_{B\setminus K} |\nabla u|^2 dx + H^{N-1}(K \cap B) \leq \int_{B\setminus L} |\nabla v|^2 dx + H^{N-1}(L \cap B) + r^{N-1} h(r)$$

pour toute boule $B \subset \Omega$ et pour tout compétiteur (v, L) pour (u, K) dans B.

Autre Définition des minimiseurs de Mumford-Shah

Minimiseur de Mumford-Shah

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, h une fonction de jauge.

$$\int_{B\setminus K} |\nabla u|^2 dx + H^{N-1}(K \cap B) \leq \int_{B\setminus L} |\nabla v|^2 dx + H^{N-1}(L \cap B) + r^{N-1} h(r)$$

pour toute boule $B \subset \Omega$ et pour tout compétiteur (v, L) pour (u, K) dans B.

Proposition :

Un minimiseur pour la fonctionnelle J est un minimiseur de Mumford-Shah avec $h(r) = C_N \|g\|_\infty^2 r$ comme fonction jauge et C_N est une constante dimensionnelle.

Contents

Ensembles MS-presque minimaux

Définition des compétiteurs

Ensembles MS-presque minimaux

Définition des compétiteurs

Un M.S-compétiteur pour l'ensemble E dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble fermé F tel qu'il existe une boule $B \subset \Omega$ de rayon r telle que

$$F \backslash B = E \backslash B$$

Ensembles MS-presque minimaux

Définition des compétiteurs

Un M.S-compétiteur pour l'ensemble E dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble fermé F tel qu'il existe une boule $B \subset \Omega$ de rayon r telle que

$$F \backslash B = E \backslash B$$

Plus condition de séparation: si $x, y \in \Omega \backslash (B \cup E)$ sont séparés par E alors ils sont aussi séparés par F.

Ensembles MS-presque minimaux

Définition des compétiteurs

Un M.S-compétiteur pour l'ensemble E dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble fermé F tel qu'il existe une boule $B \subset \Omega$ de rayon r telle que

$$F \backslash B = E \backslash B$$

Plus condition de séparation: si $x, y \in \Omega \backslash (B \cup E)$ sont séparés par E alors ils sont aussi séparés par F.

Ensemble M.S.-presque minimal

Un ensemble $E \subset \Omega$ est M.S-presque minimal avec fonction jauge h si

$$H^{N-1}(E \cap B) \leq H^{N-1}(F \cap B) + r^{N-1} h(r)$$

pour tout MS-compétiteur F pour E dans la boule B de rayon r.

Ensemble minimal global

Definition

Un ensemble minimal global E est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^N$ tel que

$$H^{N-1}(E \cap B) \leq H^{N-1}(F \cap B)$$

pour tout compétiteur F.

Ensemble minimal global

Definition

Un ensemble minimal global E est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^N$ tel que

$$H^{N-1}(E \cap B) \leq H^{N-1}(F \cap B)$$

pour tout compétiteur F.

Théorème [G. David 2008]

Dans $\mathbb{R}^3$, voici la liste des ensembles minimaux globaux (excepté $\emptyset$):

- Cônes de type $\mathbb{P}$
- Cônes de type $\mathbb{Y}$
- Cônes de type $\mathbb{T}$

Théorem of Jean Taylor

Théorème de Jean Taylor (1976) et Guy David (2008)

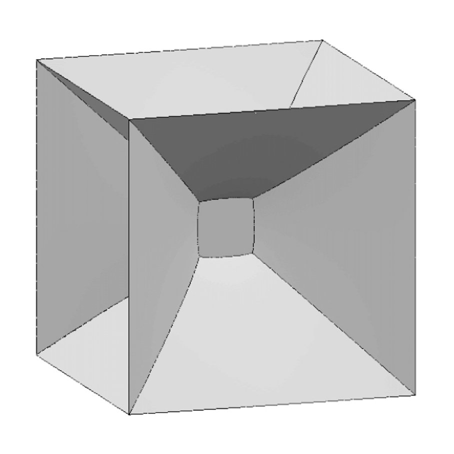
Tout Ensemble MS-presque minimal dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est localement équivalent à un cône minimal par un difféomorphisme de classe $C^{1,\alpha}$.

Exemples

Sur un cube

Exemples

Sur un cube

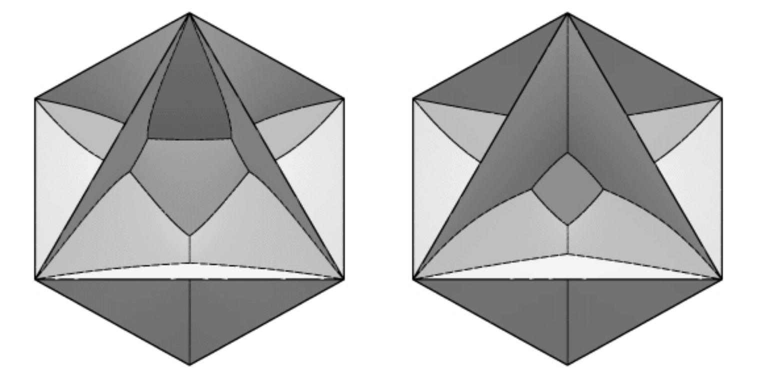


Exemples

Sur un octaèdre

Exemples

Sur un octaèdre



Contents

Minimiseurs Globaux dans $\mathbb{R}^3$

Liste des minimseurs globaux connus dans $\mathbb{R}^3$:

Minimiseurs Globaux dans $\mathbb{R}^3$

Liste des minimseurs globaux connus dans $\mathbb{R}^3$:

- $K = \emptyset$, u est constante.

Minimiseurs Globaux dans $\mathbb{R}^3$

Liste des minimseurs globaux connus dans $\mathbb{R}^3$:

- $K = \emptyset$, u est constante.
- $K = \mathbb{P}$ ou $K = \mathbb{Y}$ ou $K = \mathbb{T}$ et u est localement constante.

Minimiseurs Globaux dans $\mathbb{R}^3$

Liste des minimseurs globaux connus dans $\mathbb{R}^3$:

- $K = \emptyset$, u est constante.
- $K = \mathbb{P}$ ou $K = \mathbb{Y}$ ou $K = \mathbb{T}$ et u est localement constante.
- K est un demi plan et $u = Craktip \times \mathbb{R}$.

Minimiseurs Globaux dans $\mathbb{R}^3$

Liste des minimseurs globaux connus dans $\mathbb{R}^3$:

- $K = \emptyset$, u est constante.
- $K = \mathbb{P}$ ou $K = \mathbb{Y}$ ou $K = \mathbb{T}$ et u est localement constante.
- K est un demi plan et $u = Craktip \times \mathbb{R}$.

A ce jour on en connaît pas d'autres...

Rappel de certaines choses qu'on ne sait pas faire...

Unicité de u sachant K

Rappel de certaines choses qu'on ne sait pas faire...

Unicité de u sachant K

En dimension 2, u et K sont liés par la formule :

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial z}(z)\right)^2 = -\frac{1}{2\pi}\int_K \frac{dH^1(\omega)}{(z-\omega)^2} \qquad \text{pour } z \in \mathbb{C}\backslash K$$

Rappel de certaines choses qu'on ne sait pas faire...

Unicité de u sachant K

En dimension 2, u et K sont liés par la formule :

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial z}(z)\right)^2 = -\frac{1}{2\pi}\int_K \frac{dH^1(\omega)}{(z-\omega)^2} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}\backslash K$$

$\Rightarrow$ u est déterminée de façon unique en fonction de K à constante additive près

Rappel de certaines choses qu'on ne sait pas faire...

Unicité de u sachant K

En dimension 2, u et K sont liés par la formule :

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial z}(z)\right)^2 = -\frac{1}{2\pi}\int_K \frac{dH^1(\omega)}{(z-\omega)^2} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}\backslash K$$

$\Rightarrow$ u est déterminée de façon unique en fonction de K à constante additive près

On ne sait pas si c'est vrai en dimension supérieure.

Rappel de certaines choses qu'on ne sait pas faire...

Unicité de u sachant K

En dimension 2, u et K sont liés par la formule :

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial z}(z)\right)^2 = -\frac{1}{2\pi}\int_K \frac{dH^1(\omega)}{(z-\omega)^2} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}\backslash K$$

$\Rightarrow$ u est déterminée de façon unique en fonction de K à constante additive près
On ne sait pas si c'est vrai en dimension supérieure.

K est conique ?

On ne sait pas montrer que si (u, K) est un minimseur global alors K est une ensemble conique...

Si K est conique, alors u est homogène

Définition

Soit K un ensemble conique dans $\mathbb{R}^N$ centré en 0. On dira que K est acceptable si $S^{N-1} \cap K$ est une union finie d'arc C^2 et si de plus $S^{N-1} \backslash K$ possède la propriété du cône.

Si K est conique, alors u est homogène

Définition

Soit K un ensemble conique dans $\mathbb{R}^N$ centré en 0. On dira que K est acceptable si $S^{N-1} \cap K$ est une union finie d'arc C^2 et si de plus $S^{N-1} \backslash K$ possède la propriété du cône.

Théorème 1

Si (u, K) est un minimiseur global dans $\mathbb{R}^N$ et si K est un cône acceptable, alors $u + u_0$ est une fonction $\frac{1}{2}$-homogène où u_0 est une fonction localement constante.

Si K est conique, alors u est homogène

Idées de la preuve :

Décomposer u en somme de fonction harmonique homogènes et faire une explosion et une implosion pour tuer tous les termes de degré différents de $\frac{1}{2}$.

Si K est conique, alors u est homogène

Idées de la preuve :

Décomposer u en somme de fonction harmonique homogènes et faire une explosion et une implosion pour tuer tous les termes de degré différents de $\frac{1}{2}$.

Remarque 1:

L'idée de la preuve est simple mais sa mise en oeuvre est délicate compte tenu des problèmes de régularité dans les domaines coniques.

Si K est conique, alors u est homogène

Idées de la preuve :

Décomposer u en somme de fonction harmonique homogènes et faire une explosion et une implosion pour tuer tous les termes de degré différents de $\frac{1}{2}$.

Remarque 1:

L'idée de la preuve est simple mais sa mise en oeuvre est délicate compte tenu des problèmes de régularité dans les domaines coniques.

Corollaire :

Si (u, K) est un minimiseur global, alors

$$\Delta_N u = \frac{3-2N}{4} u \text{ sur } S^{N-1} \backslash K$$

Applications :

Proposition 1 :

Si K est un demi plan, alors u est forcément de la forme $Cracktip \times \mathbb{R}$.

Applications :

Proposition 1 :

Si K est un demi plan, alors u est forcément de la forme $\mathit{Cracktip} \times \mathbb{R}$.

Proposition 2:

Si P_0 est un demi plan, la plus petite v.p. sur $S^{N-1} \backslash P_0$ vaut $\frac{3}{4}$ et les fonctions propres sont de la forme (en coord. sphériques)

$$f(r, \theta, z) = Ar^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{\theta}{2})$$

Applications :

Proposition 1 :

Si K est un demi plan, alors u est forcément de la forme *Cracktip* $\times \mathbb{R}$.

Proposition 2:

Si P_0 est un demi plan, la plus petite v.p. sur $S^{N-1} \backslash P_0$ vaut $\frac{3}{4}$ et les fonctions propres sont de la forme (en coord. sphériques)

$$f(r,\theta,z) = Ar^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{\theta}{2})$$

Remarque :

La proposition 1 se déduit du Théorème 1 et de la Proposition 2. Mais dans la thèse il existe une preuve de la Proposition 1 indépendante du Théorème 1, et par les techniques de cette preuve on redémontre la Proposition 2.

Applications:

Cas d'un secteur angulaire dans $\mathbb{R}^3$

$$S_\theta := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0);\, r \geq 0, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$$

Applications:

Cas d'un secteur angulaire dans $\mathbb{R}^3$

$$S_\theta := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0); r \geq 0, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$$

Proposition

Il n'existe pas de minimiseur global où K est un secteur angulaire S_θ strictement entrant ou sortant (i.e. différent de P_0).

Applications:

Cas d'un secteur angulaire dans $\mathbb{R}^3$

$$S_\theta := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0); r \geq 0, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$$

Proposition

Il n'existe pas de minimiseur global où K est un secteur angulaire S_θ strictement entrant ou sortant (i.e. différent de P_0).

Conjecture toujours ouverte :

Si K est inclus dans P_0 alors $K = P_0$.

Applications:

Cas où u est constante 1:

Soit (u, K) un minimiseur global et soit Ω une composante connexe de $S^{N-1}\backslash K$ qui soit un polygone curviligne convexe avec bords C^∞. Alors u est constante dans la composante connexe de $\mathbb{R}^N\backslash K$ qui contient Ω.

Applications:

Cas où u est constante 1:

Soit (u, K) un minimiseur global et soit Ω une composante connexe de $S^{N-1}\backslash K$ qui soit un polygone curviligne convexe avec bords C^∞. Alors u est constante dans la composante connexe de $\mathbb{R}^N\backslash K$ qui contient Ω.

Corollaire:

Il n'existe pas de minimiseur global (u, K) tel que $S^{N-1}\backslash K$ soit formé de polygones curvilignes convexes autres que le $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$.

Applications:

Cas où u est constante 1:

Soit (u, K) un minimiseur global et soit Ω une composante connexe de $S^{N-1} \backslash K$ qui soit un polygone curviligne convexe avec bords C^∞. Alors u est constante dans la composante connexe de $\mathbb{R}^N \backslash K$ qui contient Ω.

Corollaire:

Il n'existe pas de minimiseur global (u, K) tel que $S^{N-1} \backslash K$ soit formé de polygones curvilignes convexes autres que le $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$.

Cas où u est constante 2:(non convexe)

Soit (u, K) un minimiseur global et soit Ω_ω une composante connexe de $\mathbb{R}^N \backslash K$ qui soit un secteur angulaire (en coord. cylindriques)

$$\Omega_\omega := \{x \in \mathbb{R}^3; 0 < \theta < \omega\}$$

avec $\omega < 2\pi$. Alors u est constante dans Ω.

Contents

Théorème

Régularité près des $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}^3$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que si (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Théorème

Régularité près des $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}^3$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que si (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Si Z est un cône de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

Théorème

Régularité près des $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}^3$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que si (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Si Z est un cône de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

Alors il existe un $C^{1,\alpha}$ difféomorphisme Φ tel que

$$\Phi(Z \cap B(x, cr)) = K \cap B(x, cr)$$

.

Théorème

Régularité près des $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}^3$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que si (u, K) est un Minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Si Z est un cône de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ contenant $x \in K$ tel que

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

Alors il existe un $C^{1,\alpha}$ difféomorphisme Φ tel que

$$\Phi(Z \cap B(x, cr)) = K \cap B(x, cr)$$

.

Remarque

La preuve fonctionne en dimension N pour le cas des $\mathbb{P}$.

Corollaire

Singularités quand l'énergie est petite dans $\mathbb{R}^3$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que si (u, K) est un Minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h,

Corollaire

Singularités quand l'énergie est petite dans $\mathbb{R}^3$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que si (u, K) est un Minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h,
si

$$\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)} |\nabla u|^2 + h(r) \leq \varepsilon$$

Corollaire

Singularités quand l'énergie est petite dans $\mathbb{R}^3$

Il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante positive $c < 1$ telle que si (u, K) est un Minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h, si

$$\frac{1}{r^2}\int_{B(x,r)} |\nabla u|^2 + h(r) \leq \varepsilon$$

alors il existe un difféomorphisme $C^{1,\alpha}$ Φ et un cône minimal Z tel que

$$\Phi(Z \cap B(x, cr)) = K \cap B(x, cr)$$

.

Contents

Stratégie

But

Stratégie

But

Contrôler l'énergie de u

Stratégie

But

Contrôler l'énergie de u

Utiliser Jean Taylor.

Contents

Monotonie de l'énergie

Question

Monotonie de l'énergie

Question

Soit $K \subset B(x,r) \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble fermé avec $x \in K$ et u un minimiseur d'énergie dans $B(x,r)\backslash K$.

Monotonie de l'énergie

Question

Soit $K \subset B(x,r) \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble fermé avec $x \in K$ et u un minimiseur d'énergie dans $B(x,r)\backslash K$. Posons

$$\omega_2(x,s) := \frac{1}{s^{N-1}} \int_{B(x,s)\backslash K} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Monotonie de l'énergie

Question

Soit $K \subset B(x,r) \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble fermé avec $x \in K$ et u un minimiseur d'énergie dans $B(x,r)\backslash K$. Posons

$$\omega_2(x,s) := \frac{1}{s^{N-1}} \int_{B(x,s)\backslash K} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Quels conditions peut-on mettre sur K pour avoir pour tout $a < 1$

$$\omega_2(x,ar) \leq a^\gamma \omega_2(x,r)$$

avec γ une puissance positive ?

Monotonie de l'énergie

Exemples

Monotonie de l'énergie

Exemples

- $K = \emptyset$ $\quad \triangleright$ OK car u est harmonique

Monotonie de l'énergie

Exemples

- $K = \emptyset$ $\triangleright$ OK car u est harmonique
- $K = \mathbb{P}$ $\triangleright$ OK par reflection

Monotonie de l'énergie

Exemples

- $K = \emptyset$ ▷ OK car u est harmonique
- $K = \mathbb{P}$ ▷ OK par reflection
- K est Ensemble Reifenberg-plat avec petite constante ▷ OK par un argument de compacité

Monotonie de l'énergie

Exemples

- $K = \emptyset$ $\quad \triangleright$ OK car u est harmonique
- $K = \mathbb{P}$ $\quad \triangleright$ OK par reflection
- K est Ensemble Reifenberg-plat avec petite constante $\quad \triangleright$ OK par un argument de compacité
- $K = \mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ $\quad \triangleright$ OK par l'argument de Bonnet et une minoration de la plus petite valeur propre dans $S^2 \backslash Z$

Monotonie de l'énergie

Exemples

- $K = \emptyset$ $\triangleright$ OK car u est harmonique
- $K = \mathbb{P}$ $\triangleright$ OK par reflection
- K est Ensemble Reifenberg-plat avec petite constante $\triangleright$ OK par un argument de compacité
- $K = \mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ $\triangleright$ OK par l'argument de Bonnet et une minoration de la plus petite valeur propre dans $S^2 \backslash Z$
- K un ensemble ε_0-minimal avec petite constante $\triangleright$ OK par compacité

Monotonie de l'énergie

Exemples

- $K = \emptyset$ $\quad \triangleright$ OK car u est harmonique
- $K = \mathbb{P}$ $\quad \triangleright$ OK par reflection
- K est Ensemble Reifenberg-plat avec petite constante $\quad \triangleright$ OK par un argument de compacité
- $K = \mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ $\quad \triangleright$ OK par l'argument de Bonnet et une minoration de la plus petite valeur propre dans $S^2 \backslash Z$
- K un ensemble ε_0-minimal avec petite constante $\quad \triangleright$ OK par compacité
- K un ensemble $(\varepsilon_0, \varepsilon)$-minimal avec petites constantes $\quad \triangleright$ OK par compacité

Contents

Argument de temps d'arrêt

Les mauvaises boules

$$\beta(x,r) := \inf_{Z \ni x} \{ \frac{1}{r} \sup_{y \in K \cap B(x,r)} d(y,Z) \}$$

Argument de temps d'arrêt

Les mauvaises boules

$$\beta(x,r) := \inf_{Z \ni x} \{ \frac{1}{r} \sup_{y \in K \cap B(x,r)} d(y,Z) \}$$

$$d(x) := \inf\{ r ; \forall t \geq r, \beta(x,t) \leq \varepsilon_0 \}$$

Argument de temps d'arrêt

Les mauvaises boules

$$\beta(x,r) := \inf_{Z \ni x} \{ \frac{1}{r} \sup_{y \in K \cap B(x,r)} d(y,Z) \}$$

$$d(x) := \inf\{r; \forall t \geq r, \beta(x,t) \leq \varepsilon_0\}$$

Mauvaises boules : $\{B_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de Vitali de

$$V := \bigcup_{x \in K \cap B(0,r_0)} B(x, d(x))$$

Argument de temps d'arrêt

Les mauvaises boules

$$\beta(x,r) := \inf_{Z \ni x} \{ \frac{1}{r} \sup_{y \in K \cap B(x,r)} d(y,Z) \}$$

$$d(x) := \inf\{r; \forall t \geq r, \beta(x,t) \leq \varepsilon_0\}$$

Mauvaises boules : $\{B_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de Vitali de

$$V := \bigcup_{x \in K \cap B(0,r_0)} B(x, d(x))$$

Pour tout $r \leq r_0$ on pose $I_r := \{i \in I; B_i \cap B(0,r) \neq \emptyset\}$

Argument de temps d'arrêt

Les mauvaises boules

$$\beta(x,r) := \inf_{Z \ni x} \{ \frac{1}{r} \sup_{y \in K \cap B(x,r)} d(y,Z) \}$$

$$d(x) := \inf\{r ; \forall t \geq r, \beta(x,t) \leq \varepsilon_0\}$$

Mauvaises boules : $\{B_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de Vitali de

$$V := \bigcup_{x \in K \cap B(0,r_0)} B(x, d(x))$$

Pour tout $r \leq r_0$ on pose $I_r := \{i \in I ; B_i \cap B(0,r) \neq \emptyset\}$
Définition de la "Mauvaise masse"

$$m(r) := \frac{1}{r^2} \sum_{i \in I_r} r_i^2.$$

Extension de Whitney

Extension de Whitney

Par un argument de type Whitney on arrive à étendre u dans V ce qui donne une méthode pour construire des compétiteurs sans perdre trop en énergie.

Contents

Très courte preuve

Très courte preuve

- Choisi un rayon $\rho \in [\frac{r}{2}, r]$ par Fubini tel que $V \cap \partial B(x,\rho)$ est plus petit que la moyenne $\frac{1}{r^2} \sum_{B_i \cap \partial B(x,r)} r_i^2 \leq \varepsilon m(r)$

Très courte preuve

- Choisi un rayon $\rho \in [\frac{r}{2}, r]$ par Fubini tel que $V \cap \partial B(x,\rho)$ est plus petit que la moyenne $\displaystyle\frac{1}{r^2}\sum_{B_i\cap\partial B(x,r)} r_i^2 \leq \varepsilon m(r)$
- Par compacité, dans chaque mauvaise boule on peut gagner η : $m(r) \leq \frac{C}{\eta}\omega_2(x,r) + Ch(r)$

Très courte preuve

- Choisi un rayon $\rho \in [\frac{r}{2}, r]$ par Fubini tel que $V \cap \partial B(x,\rho)$ est plus petit que la moyenne $\displaystyle\frac{1}{r^2}\sum_{B_i \cap \partial B(x,r)} r_i^2 \leq \varepsilon m(r)$
- Par compacité, dans chaque mauvaise boule on peut gagner η : $m(r) \leq \frac{C}{\eta}\omega_2(x,r) + Ch(r)$
- Comparaison avec un minimiseur d'énergie : $\omega_2(x,ar) \leq a^\gamma \omega_2(x,r) + \varepsilon m(r) + Ch(r)$

Très courte preuve

- Choisi un rayon $\rho \in [\frac{r}{2}, r]$ par Fubini tel que $V \cap \partial B(x,\rho)$ est plus petit que la moyenne $\displaystyle\frac{1}{r^2}\sum_{B_i \cap \partial B(x,r)} r_i^2 \leq \varepsilon m(r)$
- Par compacité, dans chaque mauvaise boule on peut gagner η : $m(r) \leq \frac{C}{\eta}\omega_2(x,r) + Ch(r)$
- Comparaison avec un minimiseur d'énergie : $\omega_2(x,ar) \leq a^\gamma \omega_2(x,r) + \varepsilon m(r) + Ch(r)$
- Estimations auto-améliorantes : $\omega_2(x,t) \leq Ct^\alpha$ et $m(t) \leq Ct^\alpha$

Très courte preuve

- Choisi un rayon $\rho \in [\frac{r}{2}, r]$ par Fubini tel que $V \cap \partial B(x,\rho)$ est plus petit que la moyenne $\displaystyle\frac{1}{r^2} \sum_{B_i \cap \partial B(x,r)} r_i^2 \leq \varepsilon m(r)$
- Par compacité, dans chaque mauvaise boule on peut gagner η : $m(r) \leq \frac{C}{\eta}\omega_2(x,r) + Ch(r)$
- Comparaison avec un minimiseur d'énergie : $\omega_2(x, ar) \leq a^\gamma \omega_2(x,r) + \varepsilon m(r) + Ch(r)$
- Estimations auto-améliorantes : $\omega_2(x,t) \leq Ct^\alpha$ et $m(t) \leq Ct^\alpha$
- Finalement prouver que pour tout MS-compétiteur L pour K on a :

$$H^2(K) \leq H^2(L) + [\omega_2(x,r) + m(r) + h(r)]r^2$$

Fin de l'exposé

Merci de votre attention !!