Caractérisation mécanique et outil d'aide au dimensionnement des collages structuraux

Sébastien Joannès

▶ **To cite this version:**

Sébastien Joannès. Caractérisation mécanique et outil d'aide au dimensionnement des collages structuraux. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2007. Français. NNT : 2007ENMP1528 . tel-00288527

HAL Id: tel-00288527

https://pastel.hal.science/tel-00288527

Submitted on 17 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MINES PARIS
ParisTech

Collège doctoral

ED n°432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

N° attribué par la bibliothèque

|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

T H E S E

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité "Sciences et Génie des Matériaux"

présentée et soutenue publiquement par
Sébastien JOANNÈS

le 17 décembre 2007

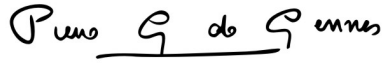
CARACTÉRISATION MÉCANIQUE ET OUTIL D'AIDE AU DIMENSIONNEMENT DES COLLAGES STRUCTURAUX

Directeur de thèse : Jacques RENARD

Jury

M.	Y. CHEVALIER	Supméca Paris	Rapporteur/Président
M.	J. F. CARON	Ecole Nationale des Ponts et Chaussées	Rapporteur
M.	S. FAYS	Renault	Examinateur
M.	A. THIONNET	Université de Bourgogne	Examinateur
M.	J. RENARD	Ecole des Mines de Paris	Directeur de thèse

Le vrai point d'honneur n'est pas d'être toujours dans le vrai. Il est d'oser, de proposer des idées neuves, et ensuite de les vérifier.[a]



[a] Pierre-Gilles DE GENNES (1932-2007), extrait du discours *Honneur et Patience* prononcé à l'Institut de France le mardi 22 octobre 2002 à l'occasion de la rentrée des cinq Académies.

Remerciements

« Si tu veux aller vite, pars seul ; mais si tu veux aller loin, pars accompagné » dit un proverbe peul. Que de chemin parcouru pour aboutir à ce mémoire de thèse. Bien des étapes ont été nécessaires et je mesure à présent combien certaines rencontres ont pu être déterminantes. Aussi, je voudrais remercier ici tous ceux et celles qui m'ont accompagné dans cette entreprise.

Une entreprise captivante, débutée il y a maintenant trois ans sous la direction de Jaques RENARD à qui je dois d'avoir pu traiter un sujet pluridisciplinaire, aussi ouvert d'un point de vue expérimental que numérique. Qu'il soit assuré de mes sincères remerciements pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ma vie de doctorant.

Pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail et pour les échanges scientifiques qui ont pu en découler, je ne pourrais poursuivre ces remerciements sans exprimer ma vive reconnaissance aux membres du jury. Merci à Yvon CHEVALIER et Jean-François CARON pour la relecture experte de mon manuscrit. J'ai particulièrement apprécié la qualité de leur analyse qui a su enrichir et ouvrir de nouvelles perspectives à ce travail. Merci également à Alain THIONNET pour sa patience, sa rigueur et son goût pour la mécanique. Ce fut un plaisir de recevoir ses conseils et ses enseignements. Merci enfin à Samuel FAYS, moteur industriel de cette étude, qui a suivi et soutenu ma progression avec disponibilité et enthousiasme. Son ouverture d'esprit et son envie de comprendre ont été particulièrement motivantes.

Mettons maintenant au grand jour tous ceux dont les noms n'apparaissent pas sur la couverture mais qui ont contribué, de près comme de plus loin, au bon déroulement de cette thèse.

Pour la partie expérimentale, je dois beaucoup aux multiples talents de Yann AURIAC, Yves FAVRY et Jean-Christophe TEISSÈDRE. Sans leur ingéniosité, la qualité des essais présentés ici n'aurait sans doute pas été la même. Partager leur expérience fut pour moi très enrichissant. Je n'oublie pas non plus la fructueuse collaboration avec Vladimir GANTCHENKO concernant les essais dynamiques. Un grand merci à eux quatre de m'avoir simplifié si souvent la tâche.

Je voudrais remercier Farida AZZOUZ pour ses conseils avisés sur la partie numérique et son aide dans l'utilisation couplée d'ABAQUS® et de Z-mat. Ma reconnaissance se tourne également vers Nicolas LAURENT et Cyril GABORIT, deux spécialistes de la programmation, sans qui l'exploitation numérique de mon programme n'aurait pas été possible.

Par-delà la technique, mes remerciements s'adressent à toutes les personnes qui ont participé ou participent à la vie du Centre des Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de

Paris, sous la direction de Jean-Pierre TROTTIER puis d'Esteban BUSSO :

- Je pense aux équipes techniques et administratives dont l'efficacité et le dévouement contribuent au rayonnement du laboratoire.
- Je pense à tous les membres de l'équipe, au sens large du terme, au sein de laquelle j'ai bénéficié de conditions de travail idéales en termes de compétences, d'écoute et d'encouragements (Anthony, Anne, Michel, …).
- Je pense à mes anciens compagnons de route et amis qui m'ont fait partager de très bons moments (Sébastien, Bénédicte, Ludovic, Julien, Christophe, Kamel, Géraldine, Olivier, Yann, Céline, Pongsak, Nicolas, …). Une mention spéciale pour Olivier MARIO avec qui j'ai pris grand plaisir à partager le sujet d'étude.
- Je pense aux étudiants du Mastère CoMaDiS que j'ai côtoyés et connus pendant ces années. Quelques-uns ont opté pour poursuivre en thèse eux aussi, la plupart ont préféré suivre un parcours différent. Mais « à chacun son chemin », pourrait-on ajouter au proverbe.

Le lecteur patient comprendra qu'à ce stade, la présente énumération ne saurait prétendre à l'exhaustivité. Alors je pense à tous ceux qui cherchent leur nom dans ces remerciements et que je n'oublierai pas.

Bien entendu, je ne peux clore cette page sans adresser toute ma gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenu. Merci à mon frère, mes parents et grands-parents pour leur grande affection, je leur dois beaucoup et bien plus encore. Leur joie de venir à ma soutenance et leur fierté furent pour moi le plus merveilleux des cadeaux.

Sébastien JOANNÈS

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Les enjeux du collage structural moderne **5**
1.1 Le collage structural moderne 5
1.1.1 Une technique séculaire 5
1.1.2 Le collage structural et l'automobile 10
1.1.3 Efficacité des adhésifs structuraux 12
1.2 Au cœur du problème 15
1.2.1 Simple complexité ou complexe simplicité ? 16
1.2.2 Comment caractériser l'adhésif ? 17
1.2.3 Comment modéliser le joint ? 17

I Etude expérimentale **21**

2 Présentation des matériaux de l'étude **25**
2.1 Les matériaux du projet TRAIC 25
2.2 L'adhésif époxy 25
2.2.1 Synthèse et mise en œuvre 25
2.2.2 Propriétés physico-chimiques 27
2.3 Les substrats métalliques 33
2.3.1 Alliage d'aluminium 33
2.3.2 Acier 33
2.4 Assemblages 33

3 Caractérisations mécaniques **37**
3.1 Essais mécaniques traditionnels 37
3.1.1 Caractérisation de l'adhésif à l'état massif 38
3.1.2 Tests de validation sur assemblages 44
3.2 Approche multi-axiale 50
3.2.1 Un dispositif expérimental spécifique 51
3.2.2 Instrumentation des essais 57
3.2.3 Résultats des essais en quasi-statique 57

4 Analyses micro-mécaniques **63**
4.1 Les « effets d'épaisseur » : introduction 63
4.1.1 Des contraintes résiduelles 63
4.1.2 Une zone d'interphase 64
4.2 Observations micro-mécaniques de l'adhésif β 66
4.2.1 Examens microscopiques 66
4.2.2 Essais micro-mécaniques 77
4.3 Influence des charges minérales sur les effets d'épaisseur 79
4.3.1 Effets des contraintes thermiques 80
4.3.2 Caractérisation mécanique de l'adhésif β_{NC} 83
4.3.3 Evaluation de l'endommagement par mesures ultrasonores 85
4.3.4 Au delà des effets d'épaisseur... 89

II Modélisation du comportement de l'adhésif **93**

5 Modèle de comportement : concepts généraux **97**
5.1 Introduction 97
5.2 Rappels de thermodynamique 99
5.2.1 Thermodynamique et processus irréversibles 99
5.2.2 Définition du système, notations 99
5.2.3 Lois de conservation et premier principe 101
5.2.4 Inégalité de Clausius-Duhem, second principe 102
5.3 Formulation des lois de comportement 103
5.3.1 Principes et hypothèses 103
5.3.2 Méthode de l'état local 105
5.3.3 Application à l'élasto-visco-plasticité 108
5.3.4 Loi d'écoulement 110

6 Modèle de comportement : application à l'adhésif **113**
6.1 Formulation des lois de comportement de l'adhésif 113
6.1.1 Position du problème 113
6.1.2 Modélisation de l'élasto-visco-plasticité de la phase polymère 114
6.1.3 Modélisation de l'endommagement des charges minérales 122
6.1.4 Etablissement d'un critère de rupture 129
6.2 Implémentation du modèle de comportement 130
6.2.1 Choix du schéma d'intégration 130
6.2.2 Quelques éléments de programmation 131
6.3 Identification des coefficients du modèle 135
6.3.1 Mise en œuvre de la simulation numérique 135
6.3.2 Identification du tenseur de rigidité élastique 138
6.3.3 Identification de la plasticité de la phase polymère 140
6.3.4 Identification de l'endommagement et de la rupture 142

6.4 Analyse de la pertinence du modèle 144

III De l'éprouvette à l'assemblage industriel 147

7 Dimensionner les assemblages collés 151
7.1 Des approches très variées 151
7.1.1 Modèles analytiques et pré-dimensionnement 151
7.1.2 Analyse numérique par la méthode des éléments finis 152
7.1.3 Modèle de zone cohésive et éléments d'interface 153
7.1.4 Développements asymptotiques raccordés 154
7.2 Apports d'une formulation hiérarchique 155
7.2.1 Introduction didactique aux méthodes adaptatives 156
7.2.2 méthode-p et fonctions d'interpolation hiérarchique 162
7.3 Vers un nouvel outil de dimensionnement 171
7.3.1 Capturer les fortes variations de la solution 172
7.3.2 Atteindre la troisième dimension 176
7.3.3 Manier un modèle de comportement anisotrope non-linéaire 187
7.4 Une mise à l'épreuve graduelle 189
7.4.1 Validation élémentaire : le « patch-test » 189
7.4.2 Ebauche d'une validation sur sous-systèmes 190

8 Conditions d'exploitations « industrielles » 195
8.1 Des sollicitations sévères 195
8.2 Fatigue oligocyclique 195
8.3 Vieillissement climatique 201

Conclusion et perspectives 203

A Code source ZebFront : quelques éléments 205
A.1 Préambule 205
A.2 `@Class` 206
A.3 `@Derivative` 207
A.4 `@StrainPart` 209

B Fichier matériau 211
B.1 Données Z-mat 211
B.2 Interprétation des cartes et cœfficients 213

Bibliographie 215

Introduction générale

Contexte et motivation de l'étude

Concevoir des voitures plus sûres, plus confortables et plus légères : tel est le défi à relever par les constructeurs et équipementiers automobiles à l'aube du XXI^{e} siècle.

De nos jours, le développement d'un nouveau véhicule doit concilier un certain nombre d'exigences : à l'amélioration des prestations en terme de sécurité et de confort, s'ajoute la réduction des coûts et des délais de fabrication tout en garantissant l'économie d'énergie et la préservation de l'environnement. Dans ce contexte, les constructeurs et équipementiers s'intéressent de plus en plus à des matériaux jusqu'alors réservés à des applications aéronautiques comme le magnésium, l'aluminium ou les composites à matrice organique. Pour les véhicules de grandes séries et malgré des performances certaines, le coût global des solutions mono-matériaux demeure bien trop élevé. Les différentes études technologiques et économiques menées ces dernières années ont conduit au déploiement de structures multi-matériaux adaptées qui permettent d'exploiter au mieux les propriétés de tous les matériaux utilisés. Les perspectives d'amélioration des véhicules grâce à l'utilisation de telles structures passent cependant par le développement de techniques d'assemblage spécifiques. L'introduction de pièces en aluminium dans les monocoques en acier est un excellent exemple d'assemblage mixte à réaliser. Pour ce type d'assemblage, le soudobrasage hybride et laser permet de traiter des configurations géométriques classiques comme le recouvrement de tôles minces. Dans le cas de configurations plus complexes et pour tirer pleinement parti des avantages d'une structure mixte acier/aluminium, il faut recourir à d'autres procédés comme le collage structural.

Déjà très utilisées pour le montage des pare-brise, l'assemblage des pièces plastiques de l'habitacle ou la protection anticorrosion, les colles hautes performances trouvent ainsi de nouvelles applications au sein même de la structure des véhicules. Le collage permet d'éviter toute opération d'usinage endommageante et les liaisons continues obtenues mènent à une répartition uniforme des contraintes. Aujourd'hui, il n'y a plus de domaine technique qui puisse ignorer l'importance du collage structural.

Le potentiel mécanique du collage structural est cependant rarement utilisé faute d'outils de conception suffisamment développés et peut-être encore d'un manque de confiance dans sa durabilité. Les quelques applications connues sur des pièces de structure sont des jonctions hybrides comme le soudo-collage, le rivetage-collage ou le boulonnage-collage. Ainsi, la Lotus Elise doit son originalité à un châssis monocoque en aluminium riveté-collé, qui s'inspire des techniques aéronautiques. L'Avantime de Renault offre également un très bon exemple de

jonction hybride pour la fixation d'une superstructure en aluminium sur une plateforme en acier par boulonnage-collage. Faute de pouvoir appréhender et garantir la tenue du collage, le dimensionnement est réalisé sur les éléments de fixation ponctuels qui ne devraient assurer que le maintien des tolérances dimensionnelles et géométriques. Cela se traduit par un surcoût de la fonction assemblage non compatible avec les automobiles des gammes inférieures comme les citadines (segment B) ou les compactes et familiales (segment M). Au delà de ses excellentes propriétés mécaniques et d'un coût compétitif s'il est utilisé de manière rationalisée, l'essor du collage structural est aujourd'hui limité par le manque de connaissances de son comportement. Les problèmes de vieillissement en milieu humide ou de dimensionnement mécanique en statique ou en fatigue, constituent vraisemblablement les principaux obstacles à surmonter.

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre d'une étude à l'initiative de Renault visant à lever les verrous technologiques, mais également psychologiques, en vu d'accroître et de pérenniser l'emploi du collage structural pour des véhicules de grandes séries. Cette démarche s'est concrétisée par le lancement en 2003 d'un programme de recherche et développement baptisé « TRAIC[1] » et labellisé par le Ministère de l'Industrie (projet RNMP). Construit autour d'un consortium de cinq partenaires[2] et piloté par Renault, ce projet vise à montrer la viabilité industrielle des concepts multi-matériaux collés. Avec un cahier des charges emprunté à une pièce de série, il s'agit de réaliser un train arrière constitué de deux bras en fonderie d'aluminium et d'une traverse en acier. L'utilisation du collage structural comme mode d'assemblage primaire pour ce type de liaison mixte constitue un aspect très novateur sur une pièce de sécurité fortement sollicitée. Outre l'application finale visée sur véhicule, l'accomplissement du projet permet également de dégager des méthodes et des outils spécifiques aux problèmes d'assemblages par collage.

La contribution du Centre des Matériaux au projet TRAIC concerne l'acquisition d'un savoir-faire permettant de sécuriser l'emploi du collage structural. Afin de répondre au mieux à cette problématique, deux études ont été menées en parallèle.

La première étude, menée par O. MARIO[3], s'est intéressée à décrire l'influence du vieillissement sur le dimensionnement des assemblages collés. Il s'agissait de répondre à la question suivante : Comment garantir les performances de la jonction collée tout au long de sa durée de vie ? Au niveau physico-chimique, les environnements hygrothermiques sont connus pour être particulièrement endommageants pour les résines polymères et donc pour les adhésifs structuraux. Les travaux de O. MARIO ont permis de dégager les cinétiques de diffusion au sein de l'adhésif et à en évaluer l'impact sur les propriétés mécaniques.

La deuxième étude, présentée dans ce manuscrit, a revêtu un aspect plus numérique. Aujourd'hui encore, les méthodes de caractérisation et les outils basés sur la méthode des éléments finis ne sont pas toujours appropriés aux applications industrielles du collage structural. L'épaisseur caractéristique des joints d'adhésifs, de quelques centaines de micromètres, nécessite d'adopter des méthodologies spécifiques. Quelles sont alors les techniques à mettre en œuvre

[1] L'acronyme TRAIC signifie « **Tr**ain **A**rrière acier aluminium **I**nnovant par **C**ollage structural ».

[2] Auto Châssis International, ARCELOR, BREA, DOW Automotive et le Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris.

[3] [MARIO, 2007]

pour caractériser et dimensionner un assemblage collé ? Cette étude a consisté à développer une démarche expérimentale et numérique permettant d'envisager un outil d'aide au dimensionnement dans le cadre de sollicitations quasi-statiques monotones ou répétées.

Contenu du mémoire

Cette étude s'inscrit dans une logique de compréhension du comportement mécanique des assemblages collés. Articulée autour de trois parties, la structure du manuscrit vise à traduire le cheminement progressif que nous avons suivi pour bâtir un outil d'aide au dimensionnement. En marge de ce découpage, le premier chapitre nous permet d'introduire l'essentiel du vocabulaire que nous utiliserons par la suite. Plutôt qu'un lexique, nous avons souhaité présenter les notions essentielles en respectant l'ordre dans lequel l'Humanité les a rencontrés. On découvrira donc les premières techniques d'assemblage par collage pour finalement conduire aux enjeux du collage structural moderne et préciser les axes concernés par ce travail.

La première partie s'ouvre ensuite sur une description des matériaux de l'étude (chapitre 2) avant d'aborder la caractérisation du comportement de l'adhésif, tout d'abord en tant que matériau à l'état massif, puis en tant que joint de colle (chapitre 3). Un éclairage particulier sur la morphologie de la microstructure et le rôle de celle-ci sur le comportement est proposé dans le quatrième chapitre.

Cette plongée au cœur de la matière nous permet d'étayer la seconde partie qui traite de la modélisation du comportement non-linéaire de l'adhésif. Aussi, le cinquième chapitre se veut introductif et rappelle le formalisme associé à une approche phénoménologique. Une modélisation des mécanismes dissipatifs est ensuite exposée (chapitre 6) avant d'être implémentée dans un code d'intégration numérique.

La troisième partie, qui clôt ce manuscrit, revient sur le contexte de l'étude en suggérant un rapprochement entre l'éprouvette et l'assemblage industriel. Il s'agit en particulier de préciser la démarche numérique qui nous a permis d'aboutir à un outil d'aide au dimensionnement des assemblages collés (chapitre 7). Le huitième et dernier chapitre se limite à aborder les particularités du comportement dans le cadre de sollicitations d'exploitation sévères comme la fatigue oligocyclique ou le vieillissement climatique.

Nous concluons ce travail par un point sur les principaux résultats pour, *in fine*, dégager les perspectives d'amélioration future.

Chapitre 1

Les enjeux du collage structural moderne

1.1 Le collage structural moderne

Si le collage est une pratique populaire ancestrale, la notion de *collage structural* n'est apparue qu'au siècle dernier. L'expression « collage structural » est aujourd'hui utilisée pour rendre compte de la haute performance mécanique d'un assemblage collé. De manière plus générale, nous pouvons cependant dire qu'un collage est structural lorsqu'il permet d'obtenir des assemblages de structures durables dont la solidité est comparable à celle des matériaux constitutifs. Comme nous allons le voir, de tels assemblages existent depuis bien longtemps et par collage structural, nous entendrons collage structural moderne, expression empruntée à P. COUVRAT[1].

Les paragraphes qui suivent vont nous permettre de retracer l'évolution de ces techniques d'assemblages, tout en mentionnant les caractéristiques des principales familles de colles et d'adhésifs. Les substances capables de produire une jonction adhésive sont très variées et le récit chronologique adopté ci-après (§ 1.1.1) rendra compte des différents mécanismes d'*adhésion* mis en jeu. Tous ces mécanismes ont par ailleurs été détaillés par de nombreux auteurs[2].

1.1.1 Une technique séculaire

Depuis les époques les plus reculées, le collage a contribué au perfectionnement des techniques d'assemblages structuraux, des plus rudimentaires aux plus sophistiquées[3]. Comment est-on passé d'un collage de structure ancestral au collage structural tel que nous l'entendons aujourd'hui ?

Associé à la ligature et au coinçage, le collage est certainement l'une des premières techniques d'assemblage que l'homme ait utilisée pour la fabrication d'outils. Pour allier une pointe en os à d'autres éléments comme un manche en bois, l'homme préhistorique utilisait les produits à sa

[1] [COUVRAT, 1992]

[2] [GOOD, 1976], [KINLOCH, 1987], [SHANAHAN, 1991], [BAGHDACHI, 1997], [PACKHAM, 2005], etc. Cette courte liste ne saurait prétendre à l'exhaustivité mais renvoie à des périodes différentes de l'histoire de l'adhésion.

[3] [BARQUINS, 2004]

disposition. Qu'elles soient d'origines minérale, végétale ou animale, de nombreuses substances naturelles possèdent des propriétés adhésives. En voici quelques-unes :

- le bitume qui est composé d'un mélange d'hydrocarbures,
- la glu qui s'obtient en pilant l'écorce intérieure du houx,
- le latex qui s'écoule de l'écorce de certaines variétés d'hévéa,
- la sève résineuse des conifères,
- le blanc d'œuf,
- la cire d'abeille,
- la gomme laque produite par certaines espèces de cochenilles,
- etc.

Les premières manifestations de l'utilisation par l'Homme des matières naturelles pour leur pouvoir adhésif semblent remonter à environ 3500 ans avant le début de l'ère chrétienne. Au Proche-Orient, des outils en bois, munis d'éclats de silex maintenus par du bitume ont été retrouvés dans le sable du désert de Judée. Du côté de l'Occident, la diversité et la richesse archéologique des sites lacustres ont également permis de mettre à jour des colles d'emmanchement d'outils en silex. Ainsi, dans le Jura, au bord des lacs de Chalain et de Clairvaux, la fouille de villages néolithiques a conduit à la découverte d'instruments tels que des haches de pierre assemblées à l'aide de colle végétale comme la bétuline[4] (FIG. 1.1)[5].

© http://www.archeoprovence.com

FIG. 1.1 – Réplique d'une hache taillée et ligaturée sur un manche en bois. Les cordelettes en fibres naturelles sont encollées avec un goudron végétal.

1.1.1.1 Les colles à prise physique

Pour ces premières applications, l'adhésion a lieu par *prise physique*. Cela signifie notamment que le polymère existe déjà dans sa forme finale mais pour être utilisé il doit se présenter sous une forme liquide. Les *substances colloïdales naturelles* sont en émulsion aqueuse ou en solution organique avant de procurer un pouvoir collant par évaporation du solvant.

[4] Obtenu par chauffage d'écorce de bouleau, la bétuline ou brai de bouleau est une pâte noirâtre qui était appliquée à chaud pour la fixation des pièces.

[5] [PETREQUIN *et al.*, 1997]

C'est ainsi qu'à l'autre bout du monde, les peuples précolombiens exploitaient le « cao tchu » ou « bois qui pleure ». À l'état naturel, le caoutchouc se présente sous la forme d'un liquide d'apparence laiteuse appelé latex. Cette substance, présente dans une grande variété de plantes dont l'hévéa, était utilisée pour façonner des objets utilitaires ou imperméabiliser des toiles en fibres naturelles. Le caoutchouc et ses dérivés entrent encore aujourd'hui dans la formulation de nombreux adhésifs élastomères. Sur le même principe que les substances colloïdales naturelles, les colles à *base solvantée* commercialisées actuellement conviennent particulièrement au collage des matériaux poreux. La « colle contact » à base néoprène en est un excellent exemple.

Quelques siècles plus tard, cherchant à réaliser des assemblages devant supporter des efforts mécaniques toujours plus importants, les égyptiens mirent en œuvre le premier collage par fusion à base de soufre. Cette méthode consistait à enduire une lame ou une pointe de soufre avant de l'insérer dans un manche. Il fallait ensuite chauffer l'assemblage jusqu'à obtenir la fusion du soufre. En se refroidissant, celui-ci créait alors des liens puissants entre les différents éléments. Sur le même principe, les Romains utilisèrent le plomb. Ces techniques sont à l'origine des colles *thermofusibles* ou *hot melts*. Ces colles sont sans solvants et se présentent sous forme solide à température ambiante. Après fusion de la colle, c'est le refroidissement qui permet d'achever l'assemblage.

Les époques passeront mais la technologie du collage n'évoluera que très lentement. Au service de l'Homme, le collage aura réussi à traverser les siècles sans pour autant livrer tous ses secrets. Si les colles de structure existaient déjà à l'Age de la pierre nouvelle[6], le concept de collage structural moderne n'est apparu qu'au siècle dernier avec le développement des transports.

C'est l'aéronautique qui a ouvert la voie car l'armature des premiers aéroplanes nécessitait légèreté et solidité. Ces deux propriétés étaient notamment obtenues grâce au bois, premier matériau composite naturel. Pour l'assemblage, la colle à base de caséine de lait qui venait d'être mise au point en 1897 par deux allemands, A. SPITTELER et W. KIRSCHE[7], fut remarquablement performante. La caséine, à l'origine de l'efficacité de la colle, tire son nom du latin *caseus* qui signifie fromage : depuis l'Antiquité, les artisans utilisaient du lait caillé mélangé de chaux vive pour coller le bois. Avec l'extraction de la caséine à la fin du XIX^{ème} siècle, l'Homme a su passer du collage empirique à la science du collage. La production industrielle de colle à base de caséine prit vite de l'ampleur et durant la première guerre mondiale, les allemands l'utilisèrent pour l'assemblage de toutes les pièces en bois des aéroplanes et des dirigeables. Les performances des assemblages collés des aéronefs de la première guerre mondiale (FIG. 1.2) montra le chemin à toute l'industrie de la construction. Le collage structural moderne était né.

[6]Du grec *neos* (nouveau) et *lithos* (pierre), le Néolithique se définit étymologiquement comme l'Age de la pierre nouvelle ou parfois l'Age de la pierre polie.

[7]Ces travaux sur la caséine du lait ont également permis à Adolf SPITTELER et à son associé Wilhelm KRISCHE de déposer un brevet pour l'une des première matière plastique, la galalithe.

© http://www.mwmiller.theaerodrome.com

FIG. 1.2 – Aperçu de la membrure en bois assemblée par collage de l'Albatros D.Va dérivé du D.III. En 1917, avant de piloter son triplan Fokker Dr.1 qui le rendra célèbre, le baron Manfred VON RICHTHOFEN (Diable Rouge) vola sur ce type d'appareil.

1.1.1.2 Les colles réactives

Pour toutes les colles à prise physique présentées précédemment, aucune réaction chimique ne se produit et à la fin des années 1920, certains assemblages structuraux étaient encore irréalisables. Il a fallu attendre le développement de la chimie des polymères pour obtenir une amélioration significative des performances des adhésifs. C'est ainsi que durant l'entre-deux-guerres, les adhésifs « synthétiques » ont connu un essor considérable. Les colles dites *réactives* à *prise chimique* offrirent à l'industrie de nouvelles possibilités.

Les polymères à la base des adhésifs synthétiques sont obtenus par *polymérisation* de monomères suivant deux processus chimiques :

- la polymérisation par étape ou *polycondensation*,
- la polymérisation en chaîne ou *polyaddition*.

La prise chimique est assurée par la *réticulation* qui permet de lier de manière permanente les macromolécules entre elles. Cette phase nécessite d'utiliser un *agent de réticulation* également appelé *durcisseur* dans certains cas. Un adhésif sera dit *mono-composant* si l'agent de réticulation et le polymère sont conditionnés ensemble dans un mélange homogène. La réticulation des adhésifs mono-composant doit alors être activée par un procédé additionnel comme l'application de chaleur pour les systèmes *thermodurcissables* ou d'autres facteurs (absence d'oxygène[8], humidité, rayonnement UV, etc.) pour les systèmes *durcissables à froid*, c'est à dire durcissables à température ambiante. Par opposition, la réticulation des adhésifs *bi-composants* est provoquée par le simple mélange, dans des proportions déterminées, entre le polymère et le durcisseur. Ces

[8] Adhésifs anaérobies.

adhésifs se présentent donc sous la forme de deux produits séparés. Outre le polymère et l'agent de réticulation, la *formulation* des colles est complexe et les performances découlent de l'adjonction de *charges* et d'*additifs* dans des proportions gardées secrètes par les fabricants.

La segmentation des colles réactives varie selon les secteurs d'activités, les applications ou de la variété des bases chimiques. Suivant cette dernière classification, parmi les colles réactives les plus utilisées, se trouvent les adhésifs structuraux :

- époxy,
- polyuréthanes,
- acryliques,
- phénoliques,
- etc.

C'est ainsi que dans les années 1940 apparaît à la fois aux USA, en Grande-Bretagne et en Allemagne, le collage sur substrats métalliques[9]. Comme pour la Grande Guerre, la seconde guerre mondiale fut un catalyseur technique pour le développement du collage structural moderne et dès 1950 ces nouvelles colles trouvèrent des applications commerciales ambitieuses. En ce qui concerne l'aviation, le constructeur De Havilland utilisa sur le Comet un adhésif époxy dénommé Redux®[10] pour assembler de nombreuses pièces dont toutes les lisses du fuselage et des ailes (FIG. 1.3). A l'heure actuelle, plusieurs milliers de mètres carrés sont assemblés par collage sur les gros porteurs[11].

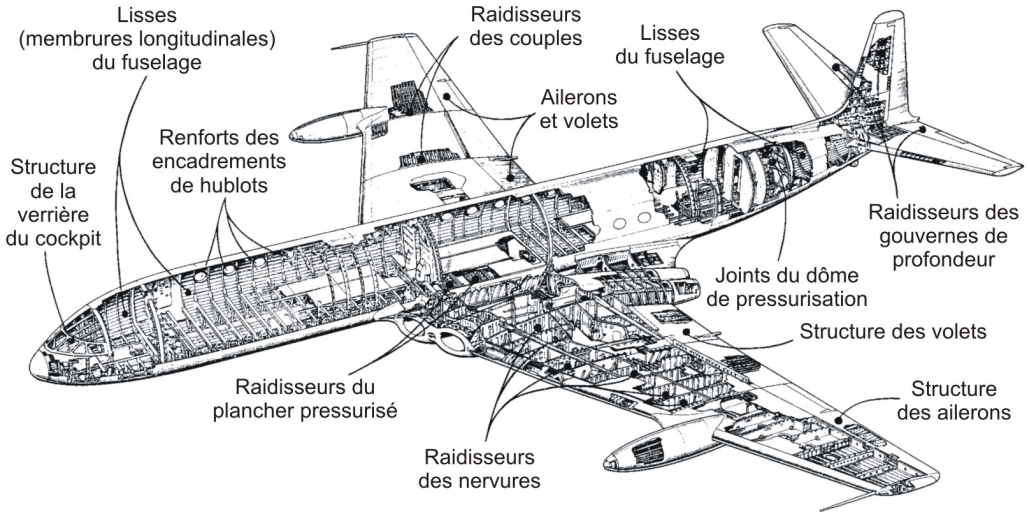


FIG. 1.3 – Exemples de pièces assemblées par collage avec l'adhésif Redux® sur le quadriréacteur De Havilland Comet.

Dans le domaine des transports terrestres, le collage structural a fait son apparition dans les années 1960 sur automobile (§ 1.1.2). Quelques années plus tard, le secteur ferroviaire

[9][COGNARD, 2003b]

[10]Cet adhésif a été mis au point par Norman DE BRUYNE (1904-1997) en 1941. L'appellation Redux® signifie « **Re**search at **Dux**ford » [BISHOPP, 1997].

[11][COGNARD, 2003a]

commença à utiliser les adhésifs structuraux en vu de l'allègement des véhicules. De l'urbain à la grande vitesse, la charge à l'essieu est un paramètre fondamental pour le transport ferroviaire et l'amélioration des prestations passe aujourd'hui par l'utilisation de structures multi-matériaux. Les composites sont encore modérément utilisés mais participent aux performances du matériel. Les adhésifs structuraux se retrouvent principalement dans l'assemblage des planchers, des pavillons ou des raidisseurs des faces latérales, mais également dans les portes et les bouts avant. Sur le TGV Duplex, malgré une capacité de transport doublée, l'utilisation couplée d'aluminium et de composites pour les caisses des remorques a permis de conserver une charge à l'essieu adaptée à la grande vitesse. Au delà du gain de masse, le collage structural est utilisé pour ses qualités multi-fonctionnelles : isolation phonique, mécanique, thermique, etc.

L'expérience acquise dans le domaine des transports a permis au collage structural de gagner de nombreuses disciplines : ameublement, travaux publics, mécanique et dans un tout autre domaine, la médecine avec les cyanoacrylates pour la chirurgie sans suture.

1.1.2 Le collage structural et l'automobile

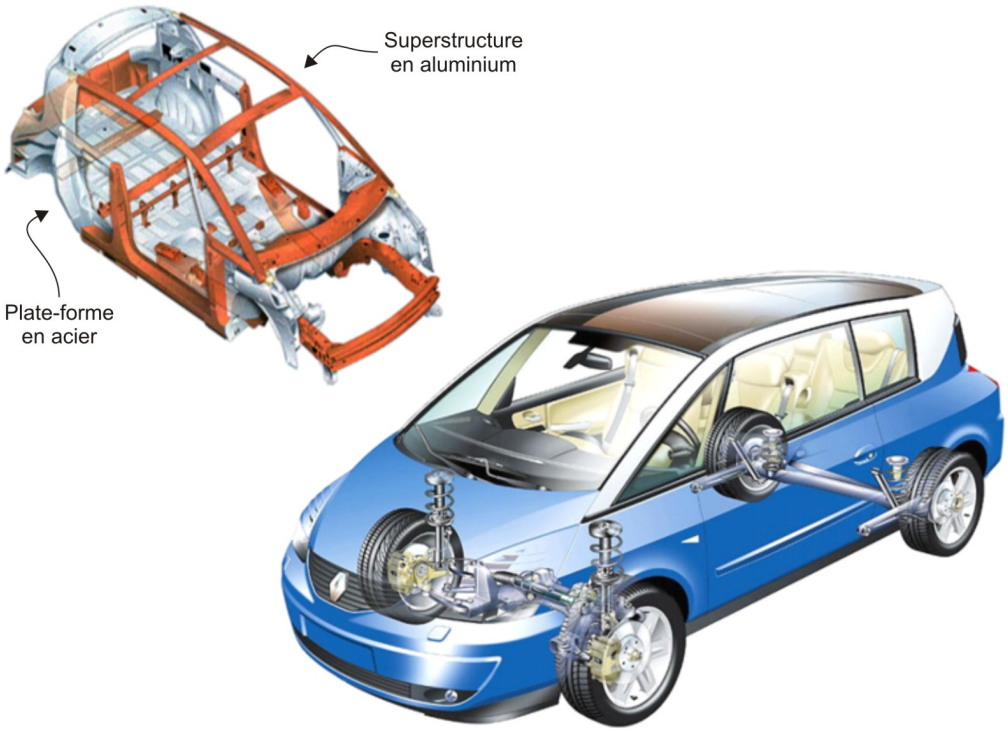
Après l'aéronautique, le collage structural a gagné le secteur automobile et représente aujourd'hui un atout considérable pour les constructeurs et équipementiers[12]. Dans ce secteur, les contraintes de mise en œuvre sont nombreuses et les performances des adhésifs ne sont plus les seules caractéristiques décisives. La première chose à considérer est le fait que les mécanismes d'adhésion sont relativement lents pour les cadences de production. Pour que ce délai ne soit pas pénalisant, il faut donc adjoindre à l'assemblage une fixation complémentaire, quasi instantanée, qui permette de garantir la géométrie et assurer la production tout au long du temps de prise. De plus, l'application doit se faire à l'atelier d'assemblage des caisses en blanc et à ce stade les éléments à assembler sont plus ou moins gras et poussiéreux. Pour les pièces en acier, c'est cet état de surface qui permet cependant de prévenir une corrosion prématurée. Il faut donc coller dans des conditions incertaines et variables. Dans les années 1980, il a été montré que certains adhésifs époxy peuvent absorber avantageusement une faible quantité d'huile grâce à des charges minérales[13]. Enfin, la polymérisation de la colle ne doit pas perturber ou être perturbée par les étapes de traitements de surface et de cataphorèse.

Malgré toutes ces contraintes, 4 à 5 kilogrammes de colle interviennent aujourd'hui dans l'assemblage des différents éléments d'une voiture de tourisme. L'introduction du collage dans les véhicules remonte en fait au début des années 60, avec le collage de raidisseurs[14]. Quelques années plus tard, Gurit-Essex[15] proposa de remplacer les joints chaussant les pare-brise par de la colle assurant la liaison tôle/verre. Cela constituait alors les premiers collages de vitrage en Europe grâce aux adhésifs polyuréthanes. Par ce procédé, il a été possible de transférer une partie de la rigidité du pare-brise à la caisse ; celui-ci devenant un composant structural du véhicule et participant à la sécurité passive en cas d'accident.

[12] [COGNARD, 2003a]
[13] [GREIVELDINGER *et al.*, 2000]
[14] [COGNARD, 2003a], [FAYS, 2003]
[15] Gurit-Essex AG est né d'une joint-venture du suisse Gurit-Herberlein et de l'américain Essex Chemical Company Inc. En 2001, la division Automotive de Dow Chemical a fusionné avec Gurit-Essex AG.

Cela fait maintenant une quinzaine d'années que le collage est utilisé de manière courante sur les véhicules haut de gamme (segment H). Pour les routières et berlines de luxe comme la Volvo S80, la BMW série 7 ou la Mercedes-Benz Classe S, la quantité d'adhésif employée a été mutipliée par 4 en 10 ans : 30 mètres linéaires de joints d'adhésifs cumulés en 1996 pour plus de 120 mètres aujourd'hui[16]. Les performances de la Lotus Elise, sortie en 1995, reposent en grande partie sur la conception innovante de son châssis riveté-collé en aluminium. En ayant recours à cette technique, les ingénieurs ont pu utiliser des alliages « hautes performances » difficilement soudables[17].

En France, l'Avantime de Renault exploite le boulonnage-collage pour l'assemblage d'une superstructure en aluminium sur un châssis en acier (FIG. 1.4). La rigidité offerte par cette technique autorise des innovations anticonformistes comme un pavillon entièrement vitré ou l'absence de pieds milieu pour les portières.



© D'après une documentation du service de presse Renault

FIG. 1.4 – La superstructure en aluminium de l'Avantime est fixée par boulonnage-collage à la plate-forme en acier.

Aujourd'hui, la plupart des constructeurs se tournent vers des adhésifs à haute absorption d'énergie pour optimiser la sécurité passive de leurs véhicules.

[16] `http://automotive.dow.com`
[17] [KOCHAN, 1996]

1.1.3 Efficacité des adhésifs structuraux

1.1.3.1 Adhésion et Cohésion

Quelle que soit son origine, l'efficacité d'une colle repose sur deux propriétés fondamentales :
- une propriété d'*adhésion*[18] relative à des mécanismes d'interface,
- une propriété de *cohésion* au sein de l'adhésif qui rend compte des forces d'attraction entre les molécules.

Alors que la cohésion de la matière est une notion commune à tous les matériaux, l'adhésion ne subsiste qu'entre deux corps. Les mécanismes d'adhésion sont complexes et plusieurs théories ont été avancées pour tenter d'en décrire les phénomènes. Ces théories relèvent en fait d'approches très différentes et dépendent des échelles d'observation. Pour les chimistes, l'adhésion est due à des interactions moléculaires entre l'adhésif et le substrat. Les physiciens considèrent davantage les dissipations d'énergie pour rendre compte des phénomènes observés. Appréhender le phénomène d'adhésion nécessite donc de faire appel à plusieurs domaines scientifiques. Les travaux de P. G. DE GENNES[19] à la fin des années 1980 permirent de mieux comprendre le rôle du transport des molécules.

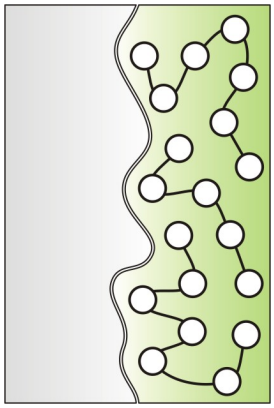
Cependant, à l'heure actuelle, aucune théorie ne permet de rendre compte de la globalité des phénomènes observés. Certains auteurs ont cherché à classer les mécanismes envisagés par grands principes. Ainsi, A. J. KINLOCH[20] et M. E. R. SHANAHAN[21] proposent l'adhésion par ancrage mécanique, l'adhésion massique et l'adhésion spécifique présentée dans le tableau TAB. 1.1.

[18] Il faut distinguer les termes « adhésion » et « adhérence ». Adhérence du latin *adhaerentia* s'emploie surtout au sens matériel et qualifie l'état d'un objet qui tient fortement à un autre. Du latin *adhaesio*, l'adhésion représente l'action d'adhérer : il s'agit du phénomène physique ou chimique créant l'adhérence. Le chassé-croisé entre le français et l'anglais concernant ces deux termes est source de confusions pour de nombreux auteurs. Par abus de langage, nous utiliserons souvent adhésion à la place d'adhérence afin de s'adapter aux usages. La norme NF EN 923 (Adhésifs - Termes et définitions) définit tous les termes utilisés dans le collage.

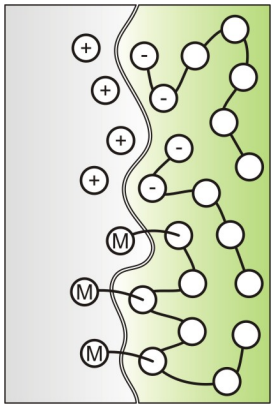
[19] Pierre-Gilles DE GENNES (1932-2007) obtint le prix Nobel de Physique en 1991 pour ces travaux multidisciplinaires sur la matière condensée et sur les mystères de l'adhésion.

[20] [KINLOCH, 1987]

[21] [SHANAHAN, 1991]

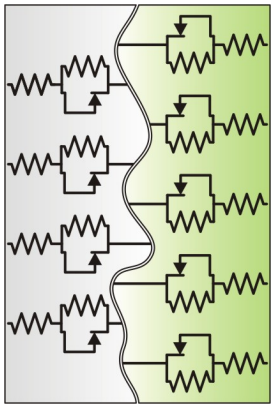


L'ancrage mécanique[22] de l'adhésif est l'une des premières théories avancées pour justifier l'adhésion. Celle-ci serait possible grâce à la pénétration de l'adhésif dans les irrégularités, microcavités et pores de la surface pendant la mise en œuvre. Cette théorie met donc en avant l'importance de la rugosité des interfaces.



L'adhésion spécifique regroupe plusieurs modèles relatifs aux interactions physico-chimiques entre l'adhésif et le substrat.

- Le modèle de l'attraction électrostatique[23] assimile l'assemblage collé à un condensateur plan et suppose des interactions de charges électriques entre les deux matériaux.
- L'adhésion chimique réside dans la création de liaisons covalentes entre les molécules de l'adhésif et du substrat.
- La théorie de l'adsorption thermodynamique ou du *mouillage*[24] s'intéresse à décrire les énergies libres interfaciales.
- Le modèle de diffusion[25] explique l'adhésion par des mouvements moléculaires.



L'adhésion massique prend en compte les propriétés de chaque constituant (adhésif et substrat) ainsi que les phénomènes interfaciaux lors de la séparation.

- La théorie de la « couche de faible cohésion » (Weak Boundary Layer, WBL)[26] suppose l'existence d'une couche frontière affaiblie par des défauts (impuretés, bulles d'air, composés de faible masse moléculaire) et dans laquelle se propage la rupture. Il s'agit davantage d'une discussion à propos de la rupture que de la description d'un mécanisme d'adhésion à proprement parler.
- Le modèle rhéologique[27] tente de relier l'énergie d'adhésion aux phénomènes dissipatifs des tests mécaniques.
- La dissipation moléculaire exprime également une dissipation d'énergie mais lorsque la vitesse de sollicitation est quasi-nulle (effet entropique)[28].

© Joannès

TAB. 1.1 – Différents mécanismes d'adhésion.

[22] [MC BAIN et HOPKINS, 1925]
[23] [DERYAGIN *et al.*, 1957]
[24] [KINLOCH, 1987]
[25] [VOYUTSKII et MARGOLINA, 1957]
[26] [BIKERMANN, 1961]
[27] [LAKE et THOMAS, 1967]
[28] [SHANAHAN et MICHEL, 1991]

1.1.3.2 Interfaces et surfaces

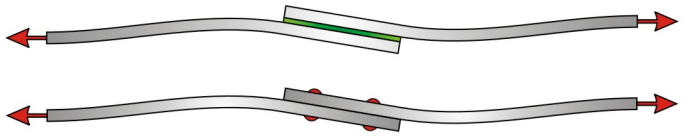
La qualité du collage dépend de nombreux paramètres et l'on doit considérer un assemblage collé comme constitué de deux substrats, d'un adhésif mais surtout de deux interfaces. A ce propos, W. PAULI[29] était particulièrement clairvoyant lorsqu'il exprima son sentiment à propos des surfaces :

God made solids, but surfaces were the work of the devil.[30]

Avant collage, la préparation des surfaces permet dans certains cas d'optimiser l'adhésion. Le choix du traitement est fonction des substrats, de l'adhésif et des performances recherchées. La première étape consiste généralement à éliminer les contaminants et les couches d'oxydes fragilisées pour ensuite pouvoir appliquer un *primaire* adapté. Le nettoyage peut être mécanique (abrasion, sablage, ultrasons), chimique (solvant, attaque chimique), électro-chimique, etc. Le traitement par un primaire permet de protéger le substrat avant collage et renforce les liaisons interfaciales.

1.1.3.3 Sollicitations mécaniques et modes de rupture

Contrairement aux modes d'assemblages ponctuels, le collage forme un joint continu sur une grande surface assurant une meilleure répartition des contraintes (FIG. 1.5).



© Joannès

FIG. 1.5 – La liaison collée permet de répartir les efforts sur une plus grande surface que pour les liaisons ponctuelles. Les concentrations de contraintes sont donc atténuées.

Cependant, les assemblages collés ne peuvent pas être sollicités de n'importe quelle manière (FIG. 1.6). Il est très important que le joint travaille préférentiellement en *cisaillement* afin de répartir les efforts sur la plus grande surface possible. La plupart des colles résistent également très bien en *compression*. Dans le cas de la *traction*, du *clivage* ou du *pelage*, des concentrations de contraintes apparaissent et favorisent la rupture.

En reprenant la terminologie des paragraphes précédents, une rupture confinée au sein d'un matériau est dite *cohésive*. Ce type de rupture peut bien entendu se produire au sein de l'adhésif ou dans le substrat puisqu'un collage structural doit permettre d'obtenir un assemblage « dont la solidité est comparable à celle des matériaux constitutifs » (§ 1.1). Une rupture à l'interface colle/substrat est dite *adhésive* ou *interfaciale*. Les ruptures adhésives traduisent une adhérence

[29] Physicien américain d'origine autrichienne, Wolfgang PAULI (1900-1958) obtint en 1945 le prix Nobel de Physique pour sa définition du principe de l'exclusion en mécanique quantique.

[30] *Dieu créa les solides, mais les surfaces sont l'œuvre du diable.*

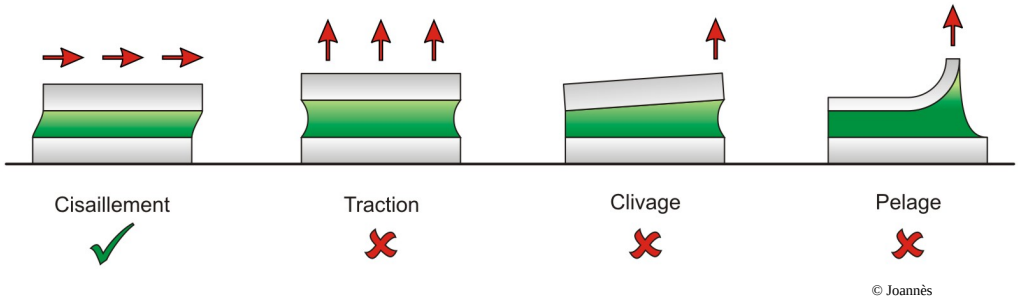


FIG. 1.6 – Différents modes de sollicitations mécaniques.

insuffisante. La rupture se fait parfois non pas à l'interface *stricto sensu*, mais très proche de celle-ci, on parle de rupture dans l'*interphase*. La fissure peut alterner entre ces trois types de faciès au cours d'une même sollicitation de l'assemblage (FIG. 1.7).

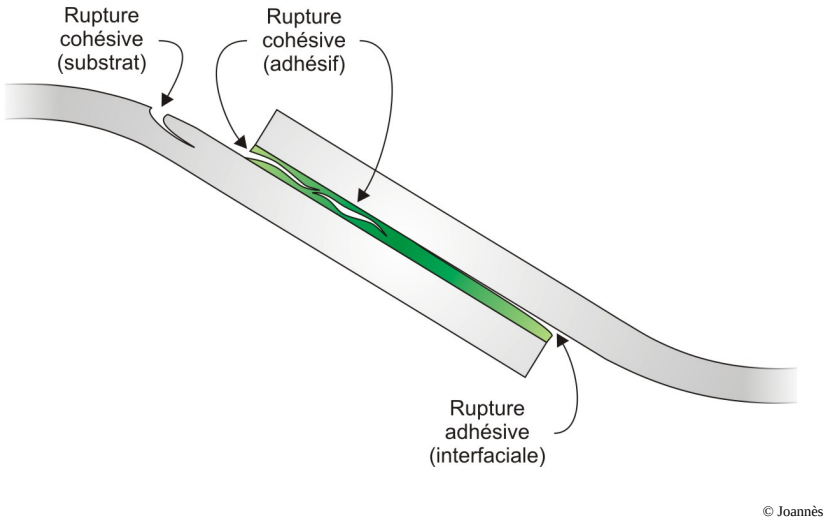


FIG. 1.7 – Différents modes de ruptures.

1.2 Au cœur du problème

Les performances d'un assemblage collé dépendent de nombreux paramètres et il est encore aujourd'hui très difficile de pouvoir prédire la rupture. C'est pourtant l'une des étapes à franchir pour faire progresser le collage structural moderne. Afin de décrire les principaux problèmes rencontrés dans cet exercice difficile, intéressons-nous à l'un des essais les plus symboliques : le cisaillement sur joint collé à simple recouvrement. La simplicité de la géométrie et la représentativité qu'il offre des applications ont fait que le joint collé à simple recouvrement a été très largement étudié par de nombreux auteurs[31].

[31] Voir la bibliographie proposée par [HALIOUI et LIEURADE, 1991].

1.2.1 Simple complexité ou complexe simplicité ?

L'éprouvette est constituée de deux tôles rectangulaires réunies dans leurs longueurs par un joint de colle. Les tôles se chevauchent partiellement d'une *longueur de recouvrement* prédéfinie. Nous ne cherchons pas à tester une configuration particulièrement favorable mais à éprouver un assemblage usuel. L'essai consiste à solliciter l'éprouvette en traction de manière à faire travailler l'adhésif en cisaillement (§ 1.1.3.3). Il faudrait plutôt dire « préférentiellement » en cisaillement car en cours d'essai et au fur et à mesure que la charge augmente, l'éprouvette se tord et les tôles fléchissent (FIG. 1.8). L'état de déformation au sein de l'adhésif est alors très complexe. Certaines zones fortement contraintes blanchissent, traduisant une *cavitation* du polymère. Sous l'intensité de la charge, les tôles plastifient et une amorce de fissure apparaît dans le joint au niveau des extrémités du recouvrement… La destruction de l'assemblage est soudaine et brutale. Le faciès montre une rupture de type cohésive dans la colle.

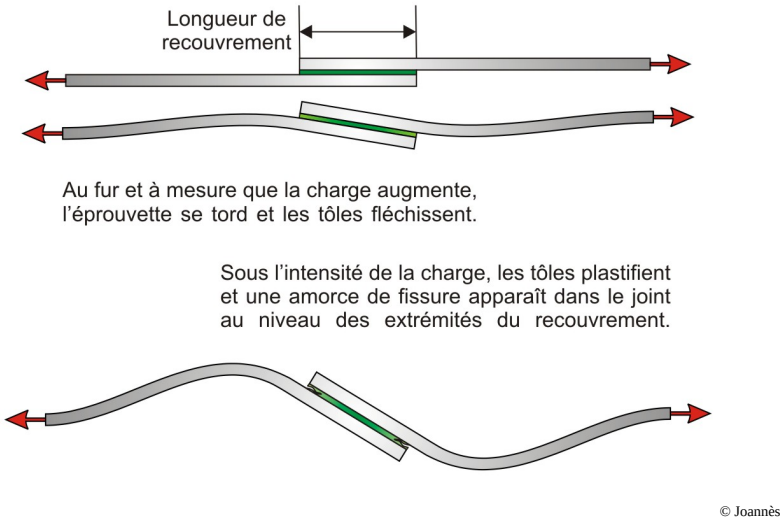


FIG. 1.8 – Un essai sur joint collé à simple recouvrement.

L'expérience que nous venons de décrire permet de souligner les principales difficultés rencontrées pour établir un outil d'aide au dimensionnement des assemblages collés. La première remarque que nous pouvons faire concerne le type de rupture et constitue une hypothèse fondamentale pour la suite de ce travail : quelle que soit la sollicitation, nous considérerons que la rupture de l'assemblage est localisée et de type cohésive. C'est par ailleurs ce que nous avons pu vérifier dans la plupart des essais réalisés. La rupture est donc pilotée par les propriétés intrinsèques[32] des matériaux en présence. Par définition du collage structural, les niveaux de charge engagés avant la ruine de l'assemblage occasionnent des déformations irréversibles dans les différents éléments. La première difficulté consiste donc à pouvoir caractériser tous les matériaux de l'assemblage sur une large plage de leur comportement.

[32]Une propriété intrinsèque ne doit pas dépendre des exigences de l'essai : géométrie de l'éprouvette, nature des substrats, etc. Dans le cas des assemblages collés, l'expression « propriétés *in situ* » est certainement préférable car elle renvoie aux effets d'échelle de la matière.

Mais comment accéder au comportement
d'un film d'adhésif de quelques
centaines de micromètres ?

Outre les propriétés *in situ* des matériaux, la résistance du joint collé à simple recouvrement est influencée par de multiples facteurs, à commencer par la géométrie. Les propriétés mécaniques statiques dépendent en effet des trois grandeurs caractéristiques suivantes : épaisseur des tôles, longueur de recouvrement et épaisseur du joint. Si les deux premières grandeurs sont accessibles avec une précision correcte, il n'en va pas de même de l'épaisseur du joint qui peut être de l'ordre de quelques dizaines de micromètres pour les films minces. De plus, l'expérience sur le joint a révélé un état de déformation extrêmement complexe avec une concentration des contraintes dans certaines zones ; un deuxième problème vient d'apparaître.

Comment un modèle peut-il rendre compte
d'un état de déformation si complexe
dans une zone tant confinée ?

Les deux questions que nous venons de poser constituent deux obstacles que nous avons tenté de surmonter. Ils sont abordés dans les parties II et III de ce manuscrit. Les deux paragraphes suivants permettent néanmoins de préciser les résultats attendus.

1.2.2 Comment caractériser l'adhésif ?

Le dimensionnement d'un assemblage collé passe par une étape de caractérisation de l'adhésif. Pour cela, il est important de définir des essais qui permettent d'accéder aux propriétés *in situ*. Peut-on par exemple considérer que le comportement de l'adhésif dans un *état massif* est semblable à celui sous forme de film dans l'assemblage ? Cette question servira de point de départ à la première partie de ce mémoire.

Parmi les nombreux tests existant sur assemblage, très peu permettent d'avoir une approche réellement quantitative vis-à-vis des propriétés du film d'adhésif. Il faut en outre pouvoir s'assurer de la reproductibilité des essais en ayant accès à l'état de déformation par mesure directe ou indirecte. Qu'il s'agisse de la mise en œuvre ou des mesures, la complexité des tests traditionnels devient maximale lorsqu'on souhaite prendre en compte la multi-axialité des contraintes. Afin de pallier ces défauts, nous nous sommes attachés à développer un dispositif et des méthodes d'essais spécifiques qui nous ont permis :

- d'accéder par mesures indirectes aux propriétés *in situ* de l'adhésif,
- de maîtriser l'état de déformation multi-axial du joint de colle,
- d'étudier l'influence de nombreux paramètres comme l'épaisseur de colle, la fatigue mécanique ou le vieillissement climatique.

1.2.3 Comment modéliser le joint ?

Pendant plus de soixante ans, des configurations de joint collé à simple recouvrement ont été étudiées conduisant au développement de nombreux modèles analytiques. Ces modèles permettent d'évaluer la distribution des contraintes dans le plan médian du joint de colle.

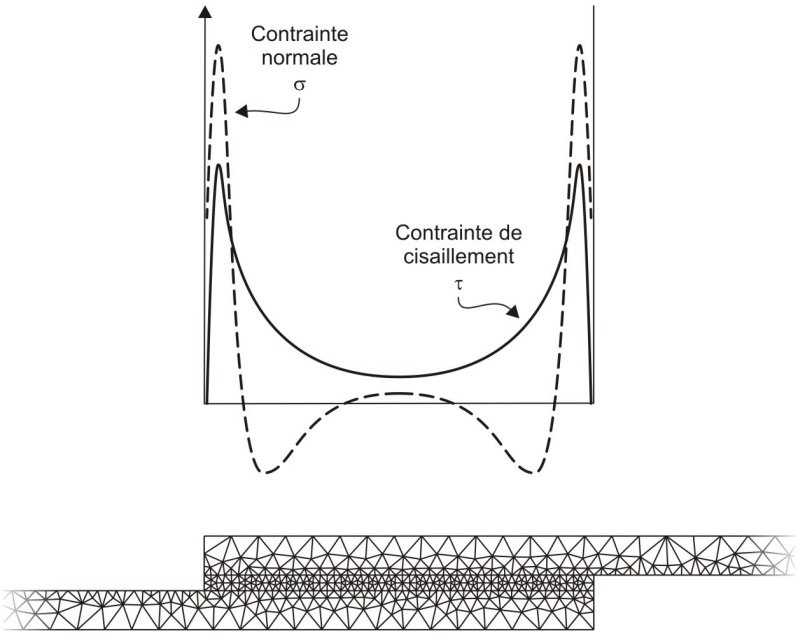
En 1938 O. VOLKERSEN[33] fut le premier à proposer une approche pour analyser ce genre d'assemblages. Dans sa théorie, il ne considère que le cisaillement de l'adhésif et la déformation axiale des adhérents. Les matériaux sont représentés par leurs propriétés linéaires élastiques isotropes. Malgré la simplicité des hypothèses adoptées, le modèle de O. VOLKERSEN fait apparaître des surcontraintes au niveau des extrémités du recouvrement. Cela coïncide notamment avec les observations que l'on peut faire en cours d'essais (§ 1.2.1). Une amélioration significative du modèle a été apportée par M. GOLAND[34] et E. REISSNER en introduisant des moments fléchissants aux bords du joint pour rendre compte de l'effet excentré du chargement. Presque trois décennies plus tard, L. J. HART-SMITH[35] formula un modèle similaire en adoptant une approche élasto-plastique. Ce modèle constitue alors un premier pas vers la prédiction de la rupture de l'assemblage que d'autres auteurs[36] ont abordée par la suite.

A des degrés divers, ces modèles permettent d'accéder à des informations essentielles pour prédire la résistance de l'assemblage. Dans bien des cas, les approches analytiques conduisent à des modélisations suffisantes pour un pré-dimensionnement. Cependant, ne s'appliquant qu'à des géométries relativement simples, elles ne sont pas universelles.

Parallèlement au développement des approches analytiques, l'évolution et les performances des ordinateurs ont rendu les techniques numériques plus attrayantes. Les méthodes de résolution par *éléments finis* permettent notamment d'analyser des configurations variées et complexes. Mais cette complexité affecte la mise en œuvre du calcul : le degré de précision souhaité est en correspondance directe avec le nombre et le type d'éléments utilisés. Si l'on reprend l'exemple du joint collé à simple recouvrement (FIG. 1.9), la taille des éléments utilisés pour conserver une qualité de maillage adéquate est incompatible avec un calcul de structure industrielle. Néanmoins, au prix de calculs coûteux[37], l'analyse par éléments finis fournit un champ de contraintes satisfaisant pour conduire à la prédiction de la rupture.

Pour contourner ces difficultés, plusieurs solutions ont été proposées à la fin des années 1980. Pour chacune d'elles, il s'agissait de combiner la facilité d'une approche analytique avec les avantages et la finesse d'une méthode numérique. Ainsi, les *modèles de zones cohésives* ont conduit à l'implémentation d'éléments finis spécifiques dits d'interface que l'on retrouve à l'heure actuelle dans la plupart des grands codes commerciaux. Basés sur une approche très différente, les *développements asymptotiques raccordés* permettent d'accéder à une très bonne représentation du caractère tridimensionnel des effets de bords. Malgré les améliorations apportées, ces méthodes sont difficilement applicables au niveau industriel : les éléments d'interfaces ne résolvent qu'en partie le problème du raffinement de maillage et l'application des développements asymptotiques raccordés nécessite une double résolution du problème, en champs lointains et en champs proches.

[33] [VOLKERSEN, 1938]
[34] [GOLAND et REISSNER, 1944]
[35] [HART-SMITH, 1973]
[36] [BIGWOOD et CROCOMBE, 1990], [OPLINGER, 1991], [ADAMS et MALLICK, 1992], etc.
[37] Les méthodes de résolution basées sur des hypothèses cinématiques conduisent à une représentation médiocre du champ de contrainte au niveau des bords libres si le raffinement du maillage est insuffisant. Or c'est au voisinage de ces extrémités que l'on observe la plupart des phénomènes de dégradation : comportement non-linéaire, endommagement, fissuration,etc.



© Joannès

FIG. 1.9 – Simulation numérique de l'évolution du champ de contraintes au cœur du joint d'adhésif. Les fortes variations au voisinage des extrémités du recouvrement corroborent le scénario de rupture.

Dans le cadre de cette étude, nous nous sommes penchés sur une formulation d'éléments finis spécifiques[38] conduisant à un outil numérique qui permet :

- de conserver une taille de maille « industrielle » tout en garantissant la convergence des résultats et la précision en bord de joint,
- d'assurer la compatibilité avec une formulation en déplacement usuellement adoptée par la majorité des codes commerciaux,
- d'être facilement exploitable en bureau d'étude par l'intermédiaire de pré- et post-traitements dédiés.

[38] Formulation en déplacements de type hiérarchique.

Première partie

Etude expérimentale

L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE *constitue le fondement de toute théorie scientifique. Guidée par l'observation, l'expérience permet d'accéder à une meilleure connaissance de notre environnement. L'interprétation des phénomènes rencontrés nécessite cependant la plus grande prudence : L'expérience ne se trompe jamais, ce sont nos jugements qui divaguent, […]*[a] *Gardant à l'esprit cette maxime, la première partie du manuscrit est consacrée à l'étude expérimentale du comportement mécanique de l'adhésif.*

Après une brève présentation physico-chimique des matériaux de l'étude (chapitre 2), nous abordons dans le troisième chapitre la caractérisation en quasi-statique de l'adhésif. Celui-ci est tout d'abord considéré sous forme massive avant d'être caractérisé au sein d'un assemblage. La complexité des essais dans ce dernier cas a nécessité de mettre en place une méthodologie adaptée et de réaliser un dispositif expérimental spécifique. L'objectif est d'identifier et de quantifier les phénomènes dissipatifs afin de pouvoir mieux appréhender le comportement mécanique.

Par une incursion à l'échelle microstructurale, le quatrième chapitre examine les mécanismes à l'origine des phénomènes macroscopiques mesurés. Il s'agit notamment de préciser les causes probables des « effets d'épaisseur » mis en évidence expérimentalement.

---

[a] *La esperienza non falla, ma sol fallano i nostri giudizi, promettendosi di lei cose che non sono in sua potestà.*, L. DE VINCI (1452-1519).

Chapitre 2

Présentation des matériaux de l'étude

2.1 Les matériaux du projet TRAIC

Les sections qui suivent regroupent les données disponibles auprès des fournisseurs concernant les matériaux du projet TRAIC. L'assemblage étudié consiste à emmancher une pièce tubulaire en acier dans un support en fonderie d'aluminium. La fixation est assurée par un adhésif structural époxy de la gamme BETAMATE™ produit par la société DOW Automotive.

2.2 L'adhésif époxy

L'adhésif utilisé est un adhésif monocomposant, constitué d'un pré-polymère époxy de type DGEBA (diglicidyl éther de bisphénol A) et d'un agent de réticulation DDA (dicyandiamide). La formulation de l'adhésif commercial que nous désignerons par β est complétée par un ajout de charges et d'additifs qui permettent notamment d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques du polymère de base. D'après les renseignements du fournisseur, l'adhésif se compose des principaux éléments suivants :

- résine époxy (DGEBA),
- agent de réticulation : durcisseur (DDA),
- charges minérales : wollastonite, talc, ...
- agent de thixotropie : fumée de silice traitée,
- flexibilisant[1],
- activateur de surface.

2.2.1 Synthèse et mise en œuvre

Les adhésifs époxy résultent de la réaction entre une résine époxy (pré-polymère) et un durcisseur pour former un réseau tridimensionnel stable et infusible. Les premières résines apparues sur le marché étaient à base de bisphénol A et d'épichlorhydrine[2]. La réaction en présence de soude de ces deux composants permet de synthétiser la résine DGEBA (FIG. 2.1).

[1] Un flexibilisant ou flexibilisateur permet d'augmenter la résistance au choc (résilience), tout en abaissant un peu la viscosité.

[2] [BARDONNET, 1992]

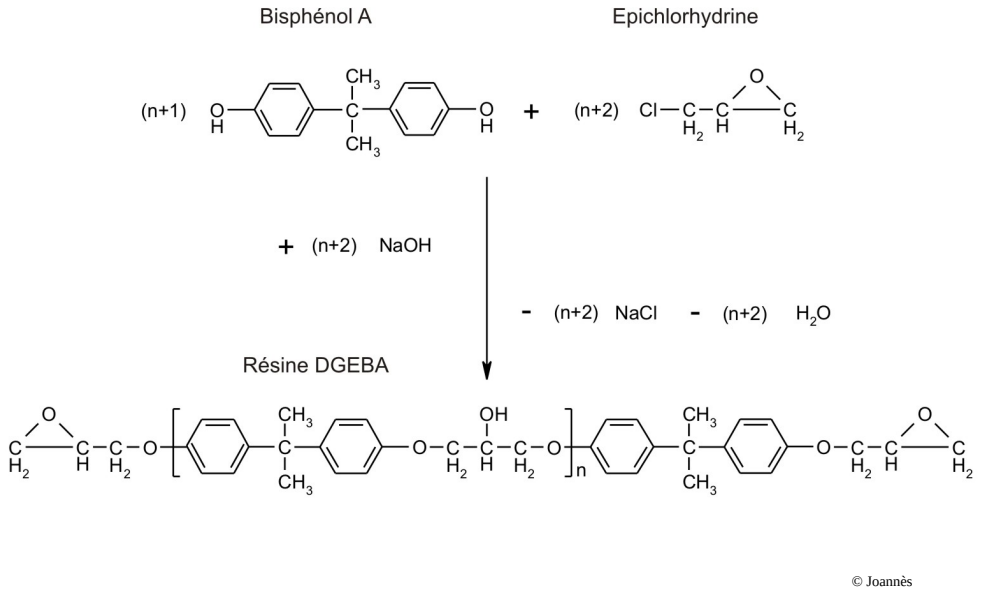


FIG. 2.1 – Synthèse de la résine époxy DGEBA.

L'agent de réticulation agit sur la résine et provoque le pontage des chaînes polymères. Schématiquement, les mécanismes réactionnels résultent de la combinaison d'une amine primaire avec les cycles époxy de la résine (FIG. 2.2). Les liaisons entre les molécules se développent dans les trois directions grâce à une réaction en chaîne (polyaddition).

La réticulation est activée thermiquement et débute vers 130°C. La formation du réseau est sensible aux conditions de mise en œuvre qui peuvent faire varier les propriétés physico-chimiques de l'adhésif. Dans cette situation, le temps de cuisson est particulièrement déterminant. Pour l'ensemble des essais présentés dans ce mémoire, la réticulation est obtenue par un maintien à 180°C pendant 60 minutes après une montée en température de 10°C/min à partir de l'ambiante. Ce mode opératoire répond aux contraintes relatives au projet TRAIC et a été proposé par le formulateur.

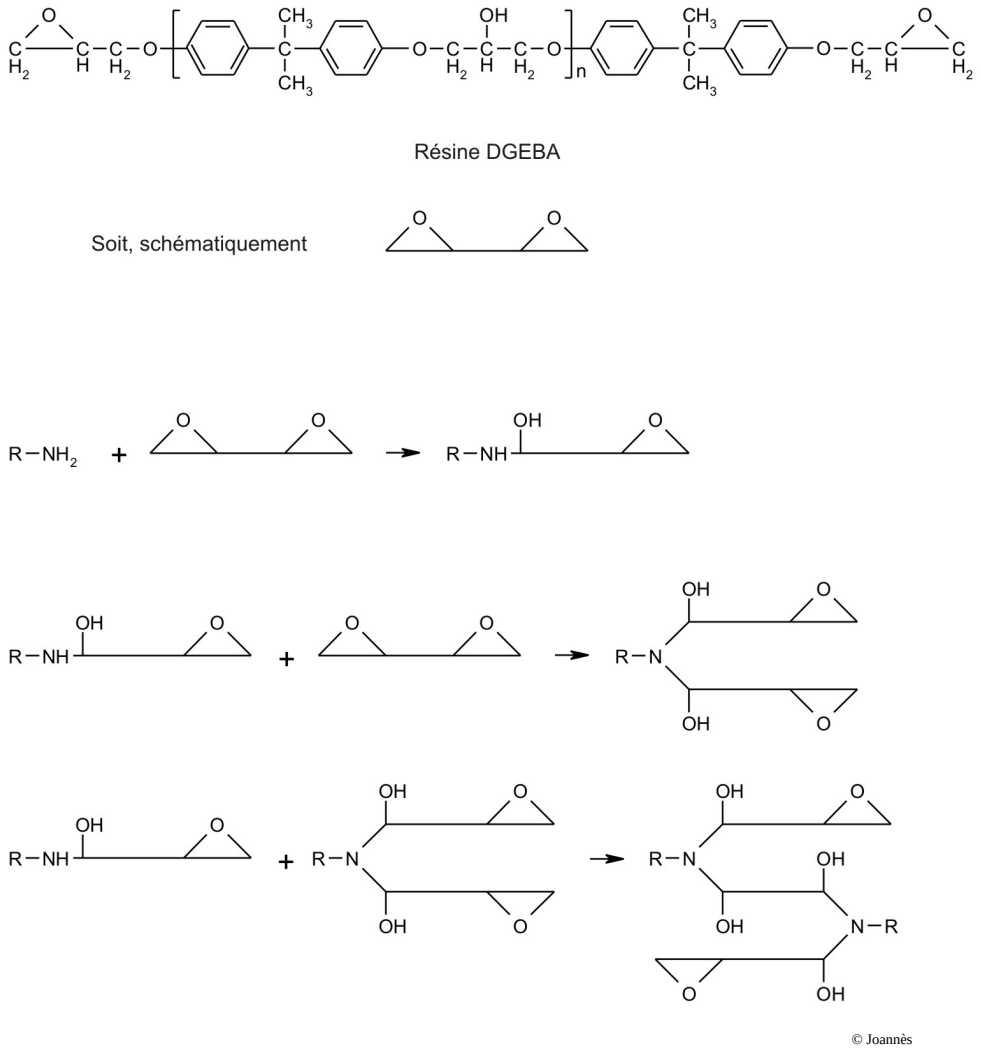


FIG. 2.2 – Lors de la réticulation, les amines primaires ($R-NH_2$) provoquent l'ouverture et le pontage des cycles époxy de la résine.

2.2.2 Propriétés physico-chimiques

Préalablement à la caractérisation mécanique proprement dite, les « données fournisseur » ont été complétées par un certain nombre d'essais permettant d'accéder aux propriétés physico-chimiques. Ces essais ont par ailleurs validé le mode opératoire employé pour réaliser des assemblages avec l'adhésif β.

La calorimétrie différentielle à balayage (DSC)[3] est une méthode d'analyse thermique qui permet de suivre l'évolution de la réticulation en fonction de la température. Il s'agit de mesurer la différence de quantité de chaleur nécessaire pour augmenter la température de l'échantillon par rapport à celle d'une référence.

En mode « single-heating rate », la DSC fournit une information cinétique à partir d'un unique balayage dynamique. L'appareil utilisé est un DSC-92 de la société SETRAM. Après un équilibre

[3]Differential Scanning Calorimetry.

isotherme d'une minute, l'évolution du flux de chaleur est enregistrée depuis la température ambiante jusqu'à 280°C, en imposant une rampe linéaire de 10°C/min. Pour l'adhésif β, la forme du thermogramme obtenu (FIG. 2.3) sur une cuisson complète montre un pic exothermique à environ 175°C, ce qui justifie la température choisie pour le mode opératoire. La chaleur de réaction ΔH, supposée indépendante de la température, est mesurée par intégration du pic exothermique. En considérant que la réaction est totale, nous noterons cette chaleur ΔH_{totale}.

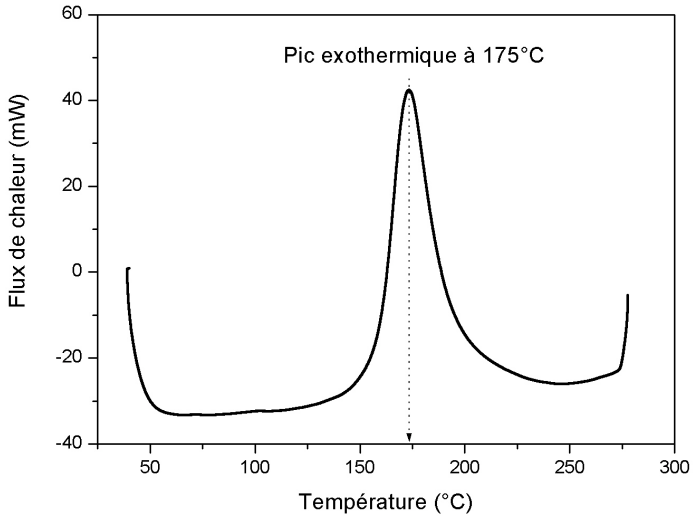


FIG. 2.3 – Thermogramme DSC : évolution du flux de chaleur de réaction en fonction de la température durant une cuisson dynamique à 10°C/min.

Par le même procédé d'analyse, plusieurs échantillons nous ont permis de confirmer la durée du plateau thermique (temps de cuisson) recommandée par le formulateur. Avant d'être analysé par DSC, chaque échantillon est tout d'abord placé, pendant un temps déterminé, dans une enceinte régulée à 180°C. Pour des temps de maintien graduels, la chaleur de réaction résiduelle $\Delta H_{\text{résiduelle}}$ est évaluée. Par comparaison avec la chaleur de réaction obtenue pour une cuisson complète ΔH_{totale}, il est possible d'évaluer le degré de conversion α (2.1).

$$\alpha = \frac{\Delta H_{\text{totale}} - \Delta H_{\text{résiduelle}}}{\Delta H_{\text{totale}}} = 1 - \frac{\Delta H_{\text{résiduelle}}}{\Delta H_{\text{totale}}} \tag{2.1}$$

Lorsque le degré de conversion tend vers 1, la réticulation est achevée. C'est ce que l'on obtient pour un temps de maintien de 60 minutes à 180°C (FIG. 2.4). Les conditions du mode opératoire sont ainsi validées. Il faut cependant noter que nous n'avons pas considéré l'apport énergétique de la montée en température qui constitue une marge de sécurité appréciable.

La transition vitreuse marque le passage de l'état vitreux (dur et fragile) à l'état caoutchoutique (mou et ductile) d'un polymère. Elle intervient à une température notée T_g et est liée aux mouvements macromoléculaires[4]. Cette transition se caractérise généralement par une

[4][HALARY *et al.*, 1989]

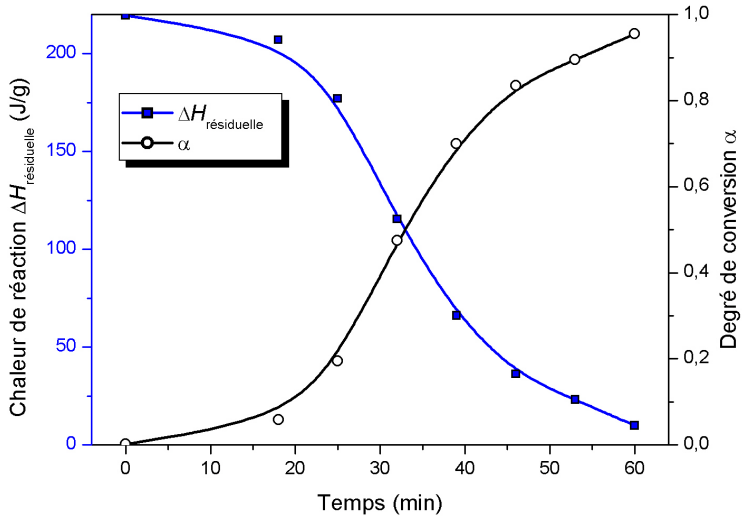


FIG. 2.4 – Evolution conjuguée entre la chaleur de réaction résiduelle et le degré de conversion en fonction du temps de cuisson. La réaction est totale pour un temps de maintien de 60 minutes à 180°C.

chute significative des propriétés mécaniques pouvant aller jusqu'à une baisse d'un facteur 100. Il convient donc d'estimer cette température de transition afin de s'assurer qu'elle se situe en dehors de la plage d'utilisation de l'adhésif [-40°C ; +60°C]. De nombreuses techniques permettent d'accéder à la valeur de T_g et nous nous sommes intéressés à des méthodes thermo-mécaniques comme la DMTA[5] et le pendule de torsion. En plus de la température, ces deux techniques imposent des sollicitations mécaniques sinusoïdales, en traction/compression pour la DMTA et en cisaillement pour le pendule de torsion. Lorsqu'un matériau *visco-élastique* est soumis à une excitation sinusoïdale ε^* (en notation complexe) de pulsation ω et d'amplitude ε_0 (2.2), la contrainte complexe qui en résulte σ^* est déphasée par rapport à la déformation ε^* d'un angle δ (2.3).

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t)} \tag{2.2}$$

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)} \tag{2.3}$$

Le module complexe d'élasticité M^* s'écrit alors selon (2.4).

$$M^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos(\delta) + i\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\sin(\delta) = M' + iM'' \tag{2.4}$$

M' est le module réel (ou de conservation) et représente l'énergie accumulée sous forme élastique, donc restituable. M'' est le module de perte (ou de dissipation) et correspond à l'énergie dissipée par frottements internes, ceux-ci résultant de la viscosité du milieu. Le module de M^*, au sens

[5]Dynamic Mechanical Thermal Analysis.

mathématique, est noté M (2.5) et s'apparente au module élastique obtenu pour un essai statique[6].

$$M = |M^*| = \sqrt{M'^2 + M''^2} \tag{2.5}$$

Le « facteur de perte » ou « coefficient d'amortissement » est défini par (2.6).

$$\tan(\delta) = \frac{M''}{M'} \tag{2.6}$$

Un balayage en température associé à ce type d'analyse permet de mettre en évidence les changements d'états. Un maximum local de $\tan(\delta)$ caractérise en effet une transition de la matière, c'est à dire l'échange d'une grande quantité d'énergie.

La valeur de la température de transition vitreuse dépend de la fréquence de travail et de l'appareillage utilisé. Pour ces analyses, nous avons travaillé sur des instruments METRAVIB : visco-analyseurs VA 4000 pour la DMTA et SMD 2000 pour le pendule de torsion. Les données d'essais figurent dans le tableau (TAB. 2.1).

	DMTA	Pendule de torsion
Fréquence de travail	5 Hz	1 Hz
Rampe de température	2°C/min	2°C/min
Plage de température	de +20°C à +200°C	de -100°C à +180°C

TAB. 2.1 – Données d'essais thermo-mécaniques pour la DMTA et le pendule de torsion dont l'équipement nous a permis d'atteindre des températures négatives.

Les thermogrammes présentés sur la figure (FIG. 2.5) indiquent une température de transition vitreuse de l'ordre de 120°C, bien supérieure à la température maximale d'utilisation de l'adhésif. Il est toutefois intéressant de noter que les propriétés élastiques E et G sont peu dépendantes de la température sur la plage d'utilisation [-40°C ; +60°C] (FIG. 2.6 et FIG. 2.7). Dans ces conditions d'essai et à la température ambiante (20°C), le module d'Young est de l'ordre de 2200 MPa et le module de cisaillement de 900 MPa.

L'évolution de $\tan(\delta)$ pour l'essai au pendule de torsion fait apparaître une relaxation sous-vitreuse vers -45°C (FIG. 2.7). La relaxation principale est quant à elle associée à la transition vitreuse que nous venons de définir.

[6]Le module M désigne alors le module d'Young E ou le module de Coulomb G suivant la sollicitation appliquée.

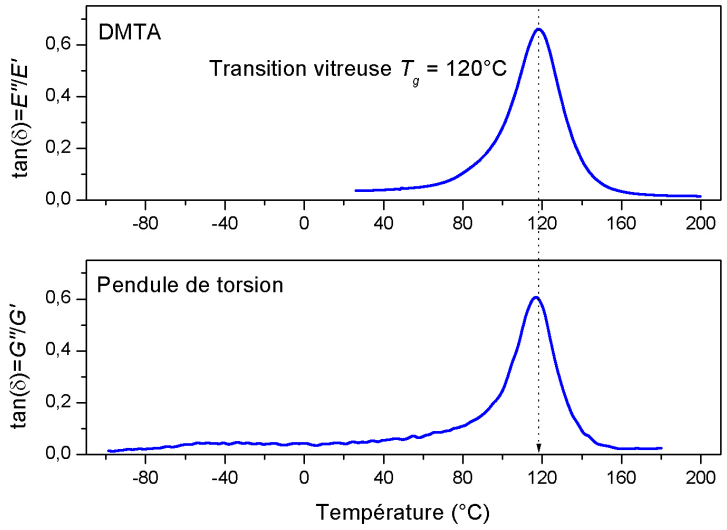


FIG. 2.5 – L'évolution du coefficient d'amortissement $\tan(\delta)$ sur les thermogrammes de la DMTA et du pendule de torsion fait apparaître un pic de relaxation vers 120°C.

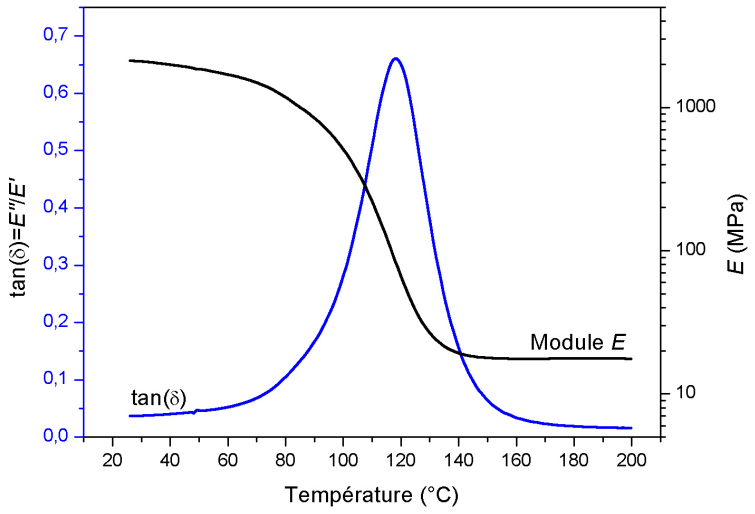


FIG. 2.6 – Spectre DMTA à 5 Hz et 2°C/min pour un échantillon chauffé de +20°C à +200°C.

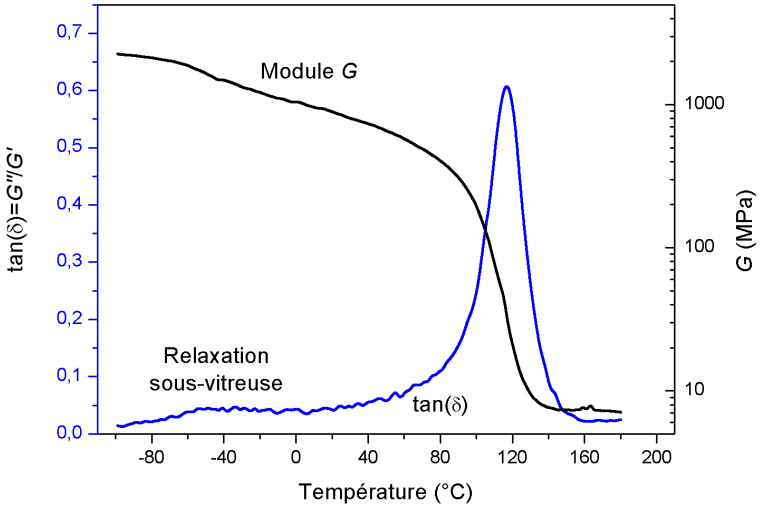


FIG. 2.7 – Spectre thermo-mécanique obtenu au pendule de torsion à 1 Hz et 2°C/min de -100°C à +180°C.

2.3 Les substrats métalliques

2.3.1 Alliage d'aluminium

Les alliages d'aluminium pour fonderie sont des « alliages légers » dont la proportion d'aluminium est supérieure à 84%. L'alliage que nous avons utilisé est un aluminium-silicium (AS)[7] de la série[8] 40000 des AlSi7Mg. Le silicium, à hauteur de 7%, permet d'optimiser la coulabilité du métal et limite les risques de criques. L'apport de magnésium, en très faible quantité, complète la formulation (TAB. 2.2) en améliorant les caractéristiques mécaniques finales. Cet alliage est parfaitement adapté à la fonderie sable employée pour le projet TRAIC.

Eléments	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Ti	Zn
(%)	6,5-7,5	0,19	0,05	0,1	0,25-0,45	0,08-0,25	0,07

TAB. 2.2 – Composition chimique de l'alliage d'aluminium AlSi7Mg.

2.3.2 Acier

Pour les quelques essais mécaniques sur substrats acier, nous avons utilisé une nuance non alliée de désignation[9] C10 (anciennement XC10). Cette nuance à 0,1% de carbone contient, en faibles quantités, des traces de manganèse, de silicium ou de cuivre (TAB. 2.3) qui permettent d'améliorer ses propriétés mécaniques et sa résistance à la corrosion. Le C10, considéré comme extra doux, présentait en outre l'avantage de pouvoir être usiné facilement.

Eléments	C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Mo
(%)	0,1	0,5	0,24	0,014	0,020	0,11	0,10	0,02
	Cu	Sn	As	Al	Ti	V	Nb	
	0,33	0,017	0,013	0,012	0,012	0,001	0,001	

TAB. 2.3 – Composition chimique de l'acier C10.

Pour l'étude d'adhésion en vieillissement climatique, des nuances d'aciers mieux adaptées ont également été testées[10].

2.4 Assemblages

Pour tout assemblage collé, l'épaisseur du joint est de première importance. La croyance populaire juge souvent que plus le joint de colle est fin, meilleur est le collage. Il est vrai que la perte des propriétés mécaniques d'un joint trop épais est généralement expliquée par la probabilité

[7] Ancienne désignation française de la norme NF A 02-004 (Désignation conventionnelle des matériaux - Aluminium, alliages d'aluminium de fonderie, zinc et alliages de zinc de fonderie).

[8] Selon la norme EN 1780-1 (Aluminium et alliages d'aluminium - Système de désignation applicable aux lingots pour refusion en aluminium allié, aux alliages-mères et aux produits moulés - Partie 1 : système de désignation numérique).

[9] Selon la norme NF EN 10084 (Aciers pour cémentation).

[10] [MARIO, 2007]

plus importante de trouver un défaut de taille critique. L'expérience montre cependant que ce ne sont pas les joints les plus fins[11] qui présentent les performances les plus élevées. Il existe donc vraisemblablement une épaisseur optimale[12].

Afin de mieux appréhender ces effets d'épaisseur, les essais sur assemblages ont été conduits pour une plage de joints allant de 100 µm à plus de 1500 µm avec une tolérance de ± 50 µm.

Sur un assemblage mixte, la phase de réticulation de l'adhésif est très délicate du fait de la dilatation différentielle des substrats. Ce phénomène est à l'origine de contraintes résiduelles dans les matériaux qui peuvent être responsables de la ruine prématurée de la structure. Les deux schémas de la figure FIG. 2.8 exposent les conséquences de la dilatation différentielle sur un joint d'adhésif.

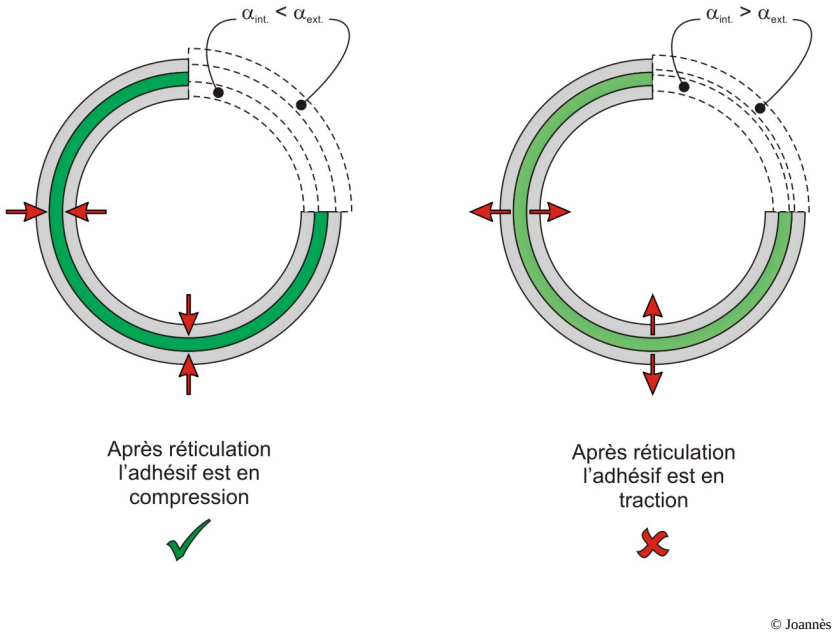


FIG. 2.8 – Vue en coupe de l'assemblage par emmanchage-collage de deux tubes de natures différentes. Sur le schéma de gauche, le tube intérieur se dilate moins que le tube extérieur lors de la cuisson (partie en pointillés). Le retour à la température ambiante conduit alors à la mise en compression du joint d'adhésif. Le comportement est tout autre sur le schéma de droite pour lequel les coefficients de dilation sont inversés entre les deux tubes. La dilatation thermique différentielle entre substrats de natures différentes induit des contraintes au sein de l'adhésif qui peuvent nuire à la tenue mécanique.

Avant collage, la préparation des surfaces métalliques a simplement consisté à émeriser puis dégraisser à l'acétone les substrats. Il s'agissait de supprimer la couche d'oxyde superficielle sans

[11] La diminution de l'épaisseur du joint s'accompagne d'une augmentation du pic d'intensité des contraintes au voisinage des extrémités.

[12] Pour un industriel, l'épaisseur optimale intègre généralement le coût de tolérances trop contraignantes et le prix d'un surplus d'adhésif.

recourir à des apprêtages lourds et coûteux. Sauf mention contraire, tous les essais sur assemblage présentés dans ce manuscrit ont été réalisés sur des substrats en alliage d'aluminium.

Chapitre 3

Caractérisations mécaniques

3.1 Essais mécaniques traditionnels

Un demi-siècle d'utilisation des colles structurales a donné naissance à de multiples tests de caractérisation mécanique. Bien souvent, ces tests ont été mis au point pour des applications particulières et sont difficilement exploitables dans un autre contexte. Les tests les plus appréciés, que ce soit pour leur simplicité ou pour leur pertinence, ont cependant été regroupés et normalisés[1]. Parmi les tests destructifs les plus fréquemment utilisés sur assemblages, on retrouve les configurations suivantes :

- pelage lorsque l'un au moins des substrats est souple,
- clivage en coin,
- traction en bout,
- cisaillement plan à simple ou double recouvrement,
- cisaillement de torsion sur cylindre ou sur tube.

Le pelage et le clivage permettent d'avoir accès à l'énergie d'adhésion apparente du système alors que les essais de traction ou de cisaillement conduisent davantage à des propriétés cohésives.

Pour simuler le comportement des assemblages collés, l'obtention des caractéristiques mécaniques *in situ* de l'adhésif est nécessaire. Parmi les tests présentés précédemment, très peu permettent d'accéder à ce type de données. Seul le cisaillement, de préférence sur substrats épais ou sur tubes, paraît approprié[2]. Pour la plupart des essais sur assemblages, une approche comparative est privilégiée et les résultats obtenus ne peuvent en aucun cas être utilisés à des fins de simulation. D'ailleurs, les termes employés pour les décrire ne trompent pas : essai de « tenue » à un effort, test de « résistance » à la rupture ou encore évaluation d'une « aptitude » particulière… Il est vrai que la mesure d'une propriété *in situ*, c'est à dire indépendante des exigences de l'essai, est relativement délicate dans le cas des assemblages collés. A la difficulté

[1] AFNOR (Association Française de Normalisation, `http://www.afnor.org`), DIN (Deutsches Institut für Normung, `http://www.din.de`), BSI (British Standards Institution, `http://www.bsi-global.com`), CEN (Comité Européen de Normalisation, `http://www.cen.eu`), ASTM (American Society for Testing and Material, `http://www.astm.org`), ISO (Organisation internationale de normalisation, `http://www.iso.org`), etc.

[2] [JEANDRAU, 1993]

expérimentale de travailler sur un joint de quelques centaines de micromètres, s'ajoute une incertitude sur le champ de déformation appliqué.

Afin de contourner ces obstacles, certaines normes proposent de caractériser l'adhésif à l'état massif[3], c'est à dire sous forme de plaques pouvant aller jusqu'à plusieurs millimètres d'épaisseur (§ 3.1.1). Cette technique est *a priori* idéale pour obtenir les caractéristiques mécaniques intrinsèques du polymère réticulé :

- facilité de mise en œuvre,
- pas d'influence de la géométrie d'un quelconque support,
- le champ de déformation imposé peut être uniaxial et uniforme.

Peut-on cependant considérer qu'un joint d'adhésif au sein d'un assemblage a les mêmes propriétés que le polymère réticulé en masse ? Ce point est encore aujourd'hui sujet à controverses. En effet, si certains auteurs[4] ont montré qu'il existe une bonne corrélation entre ces deux configurations pour de nombreux adhésifs, certains résultats[5] restent parfois inexpliquées. Tenant compte de ces discussions, nous avons décidé de mener une caractérisation de l'adhésif à l'état massif puis de confronter les résultats à ceux obtenus sur un assemblage élémentaire.

3.1.1 Caractérisation de l'adhésif à l'état massif

Des échantillons d'adhésif massif d'environ 2 à 3 millimètres d'épaisseur ont été réalisés en compressant la colle pendant la réticulation entre deux morceaux de polytétrafluoroéthylène (PTFE[6]) maintenus parallèles. Nous obtenons ainsi des plaques d'adhésif qui peuvent être usinées. La qualité des échantillons dépend de la polymérisation en masse et il convient de vérifier l'absence de bulles et de défauts.

Deux types d'éprouvettes haltères ont été découpés dans ces plaques en se conformant à la géométrie préconisée par la norme NF EN ISO 527 (Plastiques - Détermination des propriétés en traction) (FIG. 3.1).

Les propriétés mécaniques de l'adhésif β ont pu être analysées sur une large gamme d'essais :

- traction uniaxiale à vitesse de déformation imposée,
- charge/décharge,
- fluage/recouvrance,
- essais vibratoires.

Chacun de ces essais nous a permis d'accéder à différents aspects du comportement de l'adhésif.

[3] Un échantillon massif désigne une lame d'adhésif réticulée sans substrat. Le terme massif ne préjuge pas de l'épaisseur.

[4] [DOLEV et ISHAI, 1981], [JEANDRAU, 1993], [LILLEHEDEN, 1994], etc.

[5] [DEAN *et al.*, 1996]

[6] Le PTFE, est un polymère thermoplastique découvert par R. J. PLUNKETT de la compagnie DuPont en 1938. Il présente une remarquable résistance à la plupart des produits chimiques, reste stable à température élevée (point de fusion à 327°C) et sa structure lui confère un capital anti-adhérent particulièrement recherché. Ce polymère est actuellement commercialisé sous les marques Teflon®, Ertaflon®, Fluon®, Hostaflon® ou Sorefon® (`http://www.fr.wikipedia.org`).

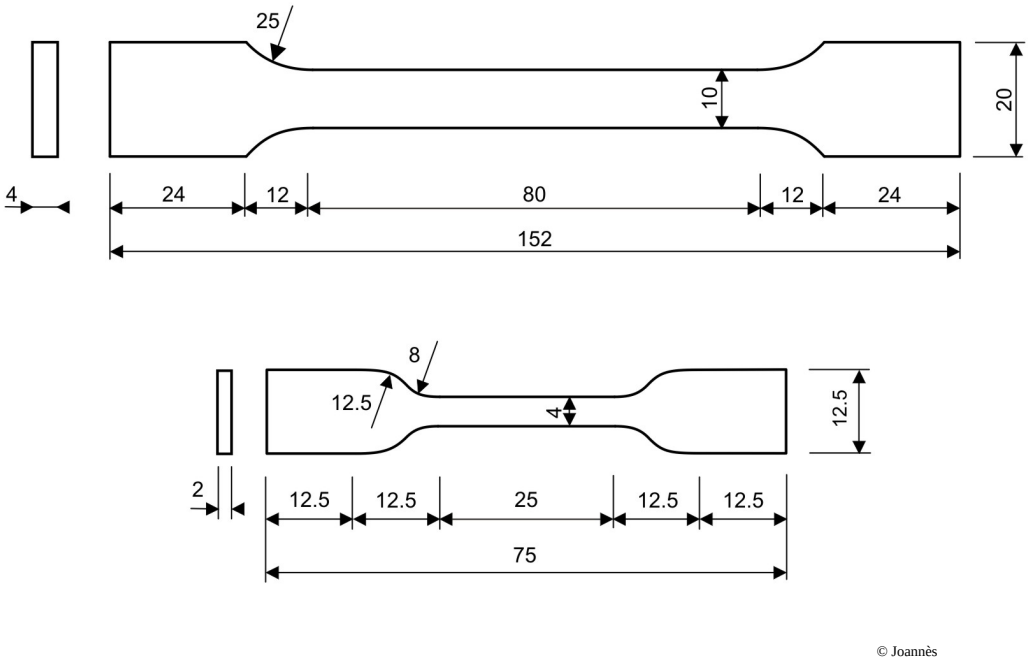


FIG. 3.1 – Géométrie des éprouvettes haltères découpées dans des plaques d'adhésifs selon la norme NF EN ISO 527.

3.1.1.1 Traction uniaxiale à vitesse de déformation imposée

Les essais de traction uniaxiale ont été conduits sur une plage de vitesse de déformation allant de 10^{-5} s^{-1} à 10^{-1} s^{-1}. Une cellule de charge de 500 daN ± 0,2% permet de relever l'effort et l'allongement est mesuré par l'intermédiaire d'un extensomètre. Des jauges de déformation complètent le dispositif en vue de l'évaluation du coefficient de Poisson ν. La figure FIG. 3.2 confronte les courbes contrainte/déformation[7] obtenues. Le comportement de l'adhésif présente un caractère non linéaire, marqué par une dépendance vis-à-vis de la vitesse de sollicitation (*viscosité*). Pour chaque courbe, le module d'Young[8] E a été évalué dans la partie linéaire. Pour des vitesses de sollicitations quasi-statiques, c'est à dire inférieures à 10^{-2} s^{-1}, ce module est relativement constant et s'élève à 2500 ± 190 MPa (FIG. 3.3).

De manière similaire, le coefficient de Poisson a été mesuré à 0,30 ± 0,05. Si nous considérons que l'adhésif à l'état massif est isotrope, nous pouvons évaluer le module de Coulomb G par la relation (3.1). Celui-ci s'élève alors à 965 ± 110 MPa.

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{3.1}$$

[7] Compte tenu des valeurs obtenues, nous considérons ici que la grandeur nominale de la déformation (allongement relatif $\Delta\ell/\ell_0$) est représentative de l'état de déformation vraie ($\ln\,(1+\Delta\ell/\ell_0)$) du matériau.

[8] Module apparent.

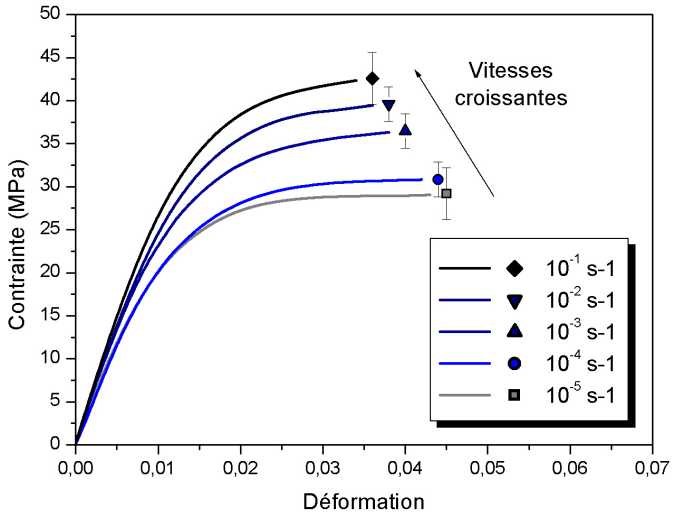


FIG. 3.2 – Courbes contrainte/déformation obtenues sur éprouvettes haltères pour différentes vitesses de déformation.

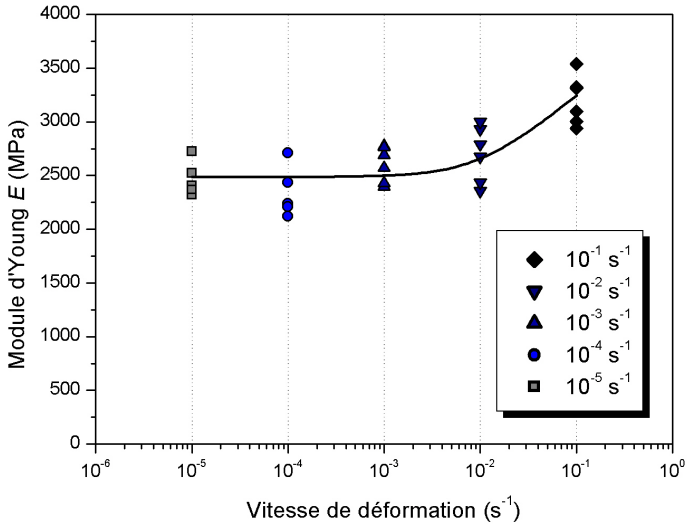


FIG. 3.3 – Evolution du module d'Young en fonction de la vitesse de sollicitation.

3.1.1.2 Essais de charge/décharge

Des essais de charge/décharge ont été conduits pour trois paliers de contraintes : 10, 15 et 20 MPa. Les courbes obtenues confirment le caractère visqueux de l'adhésif : la déformation est différée et l'éprouvette tend à retrouver sa longueur initiale après que la contrainte soit redevenue nulle (FIG. 3.4). Nous avons par ailleurs noté qu'au-delà de 15 MPa, l'éprouvette présente une légère déformation permanente résultant de mécanismes dissipatifs comme de l'endommagement.

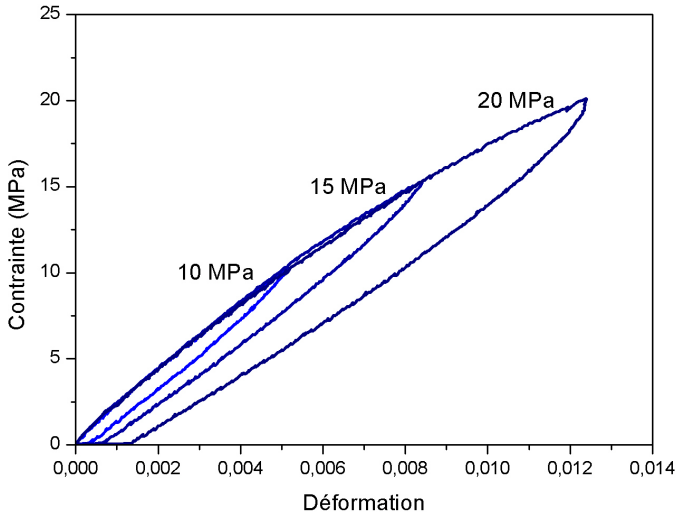


FIG. 3.4 – Essais de charge/décharge sur éprouvettes haltères pour trois paliers de contraintes.

3.1.1.3 Essais de fluage/recouvrance

L'essai de fluage consiste à appliquer une charge de valeur fixée à l'éprouvette et d'enregistrer l'évolution de la déformation correspondante en fonction du temps (FIG. 3.5). Après annulation de la contrainte pour les paliers de 5, 10 et 15 MPa, la recouvrance est totale : il s'agit de *visco-élasticité*. Après un palier à 25 MPa et quel que soit le temps de recouvrance, l'éprouvette présente une déformation permanente (*visco-plasticité*).

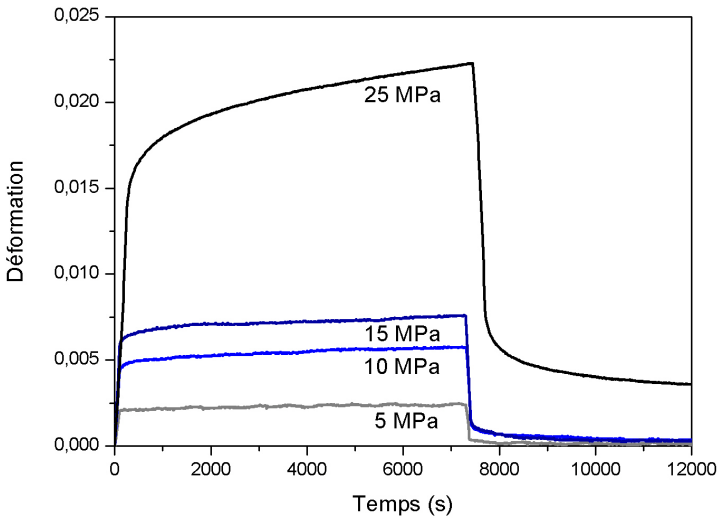


FIG. 3.5 – Essais de fluage/recouvrance sur éprouvettes haltères pour quatre paliers de contraintes.

3.1.1.4 Essais vibratoires

Comme nous l'avons vu précédemment (§ 2.2.2), l'application de vibrations forcées (DMTA, pendule de torsion) permet d'évaluer la valeur des modules d'élasticité. Sur un principe similaire, quelques essais vibratoires nous ont permis de compléter la caractérisation de l'adhésif à l'état massif. Les méthodes dynamiques[9] mises en œuvre sur des barreaux permettent d'explorer un domaine de fréquence allant du hertz à plusieurs dizaines de kilohertz. Parmi ces méthodes, nous avons utilisé deux types de sollicitations :

- l'excitation en résonance (vibrations propres),
- l'oscillation libre (méthode pendulaire).

La méthode des vibrations propres consiste à solliciter un échantillon par propagation d'ondes élastiques à fréquences continument ajustables. Le mode de sollicitation peut être longitudinal, en flexion ou en torsion. L'échantillon est excité harmoniquement de manière électrostatique ou mécanique et l'amplitude des déformations induites est mesurée en fonction de la fréquence. Le spectre de réponse passe par un maximum à la fréquence de résonance du système[10], qui s'exprime en fonction :

- de la géométrie du barreau,
- du rapport entre la masse additionnelle et la masse de l'échantillon,
- du module élastique (E ou G),
- de la masse volumique du matériau.

Lorsque l'on peut négliger l'effet des masses additionnelles[11] sur la fréquence de résonance, les fréquences propres du barreau sont données par les relations (3.2), (3.3) et (3.4).

$$\text{Vibrations longitudinales} \qquad f_{\ell,2\,n+1} = \frac{2\,n+1}{4\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.2}$$

$$\text{Vibrations de flexion} \qquad f_{\ell,i} = \frac{(k\ell)_i^2}{2\,\pi}\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{3.3}$$

$$\text{Vibrations de torsion} \qquad f_{t,2\,n+1} = \frac{2\,n+1}{4\ell}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\sqrt{12\frac{k_1\,e^2}{e^2+a^2}} \tag{3.4}$$

[9] [CHEVALIER, 2002], [CHEVALIER, 2003]

[10] Le système à considérer se compose de l'échantillon et d'une masse additionnelle éventuellement nécessaire à l'excitation.

[11] Comme le clinquant en acier sur la figure FIG. 3.6.

Les paramètres[12] de ces relations sont :

- $2\,\ell$ la longueur totale du barreau,
- a et e les dimensions de la section S, I désignant son inertie de flexion par rapport à l'axe principal considéré,
- E et G les modules d'Young et de Coulomb,
- ρ la masse volumique du barreau,
- n et i permettent de désigner les différentes fréquences propres,
- Les coefficients $(k\ell)_i^2$ et k_1 sont respectivement des facteurs dépendants des fréquences propres (k est le nombre d'onde) et de la forme du barreau.

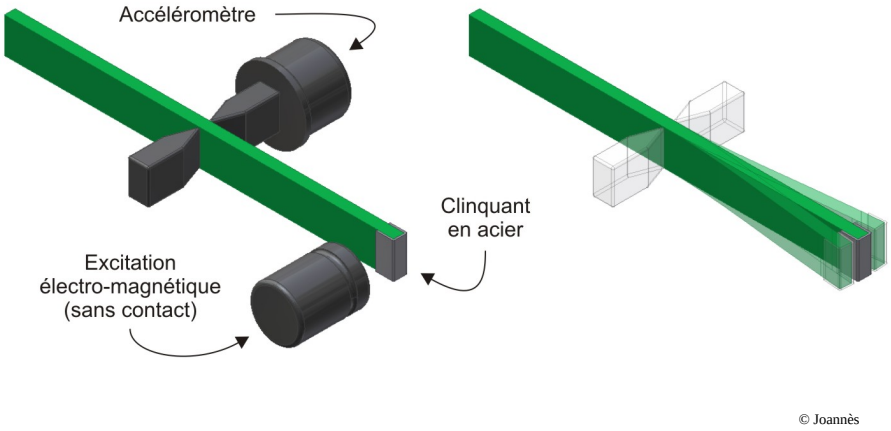


FIG. 3.6 – Dispositif d'essai en configuration de sollicitation de flexion.

Les vibrations longitudinales et de flexion permettent d'évaluer le module d'Young[13] à 3300 MPa pour des sollicitations respectives de 7320 Hz et 211 Hz. En torsion, le module de Coulomb s'élève à 1081 MPa pour une fréquence de 2110 Hz. Ces deux modules peuvent être mis en relation avec les mesures effectuées à vitesse de déformation imposée sur éprouvettes haltères. Ainsi, d'après la figure FIG. 3.3, ces valeurs correspondent à une sollicitation uniaxiale de l'ordre de 10^{-1} s^{-1}.

La méthode pendulaire est basée sur le principe des pendules sympathiques de F. SAVART, et l'appareillage de mesure a été proposé par P. LE ROLLAND et P. SORIN. L'éprouvette est encastrée à une extrémité dans un bâti rigide et l'autre extrémité est fixée à une traverse (FIG. 3.7). Cette traverse supporte deux pendules identiques. Lorsque l'un des pendules est écarté de sa position d'équilibre et se met à osciller, son énergie d'oscillation est transmise au second pendule par l'intermédiaire de l'éprouvette qui travaille en flexion. Alors que l'amplitude du premier pendule diminue puis s'annule, le second pendule se met à osciller. Dans le cas d'un matériau peu amortissant, les oscillations des pendules alternent : l'un s'arrête quand l'autre se trouve à amplitude maximale, ils sont alors appelés « pendules sympathiques ». La période τ séparant deux arrêts successifs d'un même pendule permet de mesurer le module d'Young de l'éprouvette

[12] [TIMOSHENKO, 1936]
[13] Il s'agit d'un module dynamique évalué à la fréquence de l'essai.

$E = (a\tau - b)/I$ (a et b sont des constantes du montage). Pour cet essai, la valeur du module d'Young s'élève à 3400 MPa.

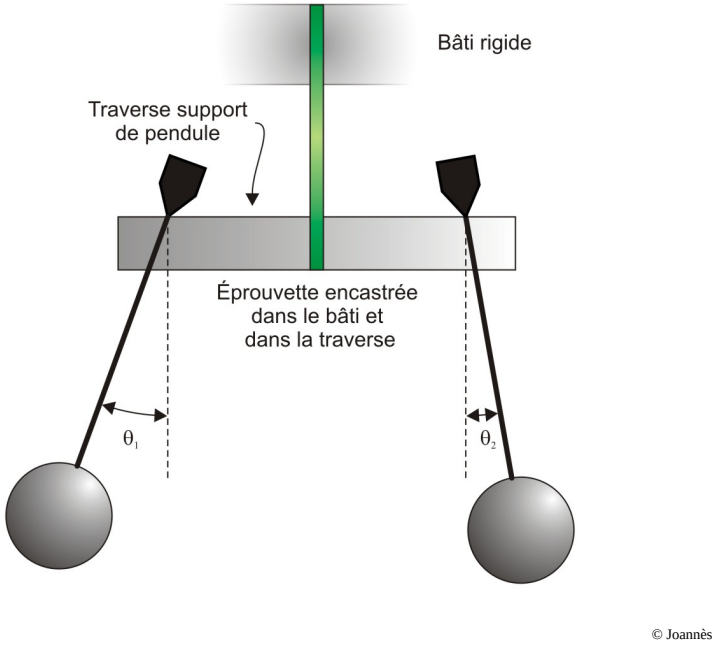


FIG. 3.7 – Montage dit des « pendules sympathiques ».

3.1.2 Tests de validation sur assemblages

Les paragraphes qui suivent tentent d'apporter des éléments de réponse à la question que nous nous sommes posé en début de section 3.1 : Peut-on considérer qu'un joint d'adhésif au sein d'un assemblage a les mêmes propriétés que le polymère réticulé en masse ?

Une méthode directe et évidente consisterait à caractériser l'adhésif au sein de l'assemblage afin de comparer les résultats à ceux obtenus à l'état massif. Malgré l'existence d'essais normalisés, la caractérisation sur assemblage demeure très délicate : celle-ci exige la plus grande rigueur au niveau de la mise en œuvre, de la mesure et de l'exploitation des résultats. De plus, nous ne cherchons pas *a priori* à caractériser une nouvelle fois l'adhésif, mais à valider ou non l'utilisation des données acquises à l'état massif. La méthode que nous avons suivie permet de s'affranchir de l'étape la plus difficile : l'examen des résultats d'essais en vue d'« extraire » un comportement *in situ*. Pour cela, nous avons exploité la simulation numérique en nous basant sur les données directement issues des capteurs (charge, déplacement). Les coefficients matériau du modèle étaient bien entendu ceux obtenus à l'état massif.

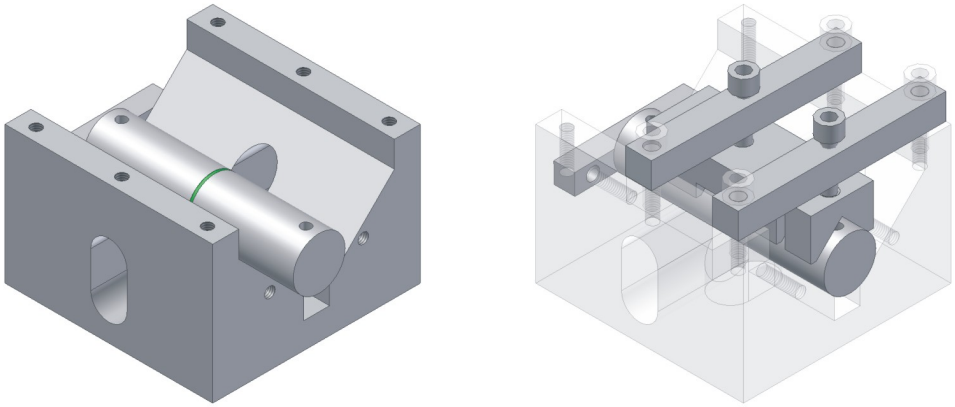
3.1.2.1 Essais sur cylindres

Le critère principal concernant les essais était la commodité de la mise en œuvre. Nous avons donc opté pour une géométrie cylindrique[14], aisément usinable en alliage d'aluminium (§ 2.3.1),

[14]Une éprouvette est constituée de deux cylindres de 20 mm de diamètre pour 40 mm de longueur.

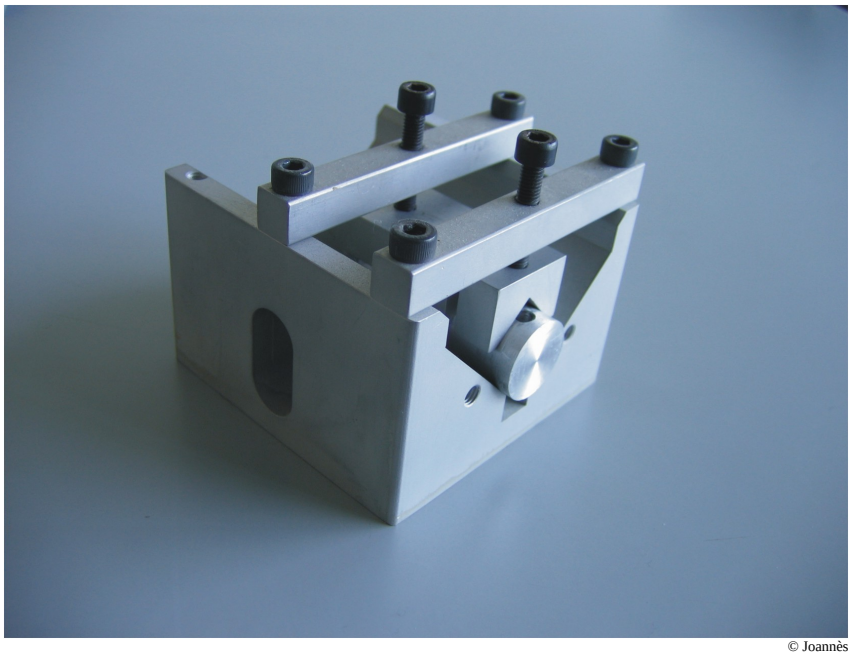
qui avait en outre l'avantage de pouvoir être utilisée aussi bien en cisaillement qu'en traction.

Pour l'assemblage des cylindres, un dispositif spécifique a été conçu. Constitué d'une gorge centrale en V, évidée pour faciliter le collage, ce dispositif assure l'alignement des deux parties de l'éprouvette (FIG. 3.8 et FIG. 3.9). L'épaisseur du joint est fixée par l'intermédiaire d'un clinquant en acier de 300 µm. Afin de garantir une configuration identique pour toutes les éprouvettes, le surplus de colle est supprimé avant réticulation.



© Joannès

FIG. 3.8 – Une gorge en V permet d'assurer le centrage des éprouvettes cylindriques durant la mise en œuvre.

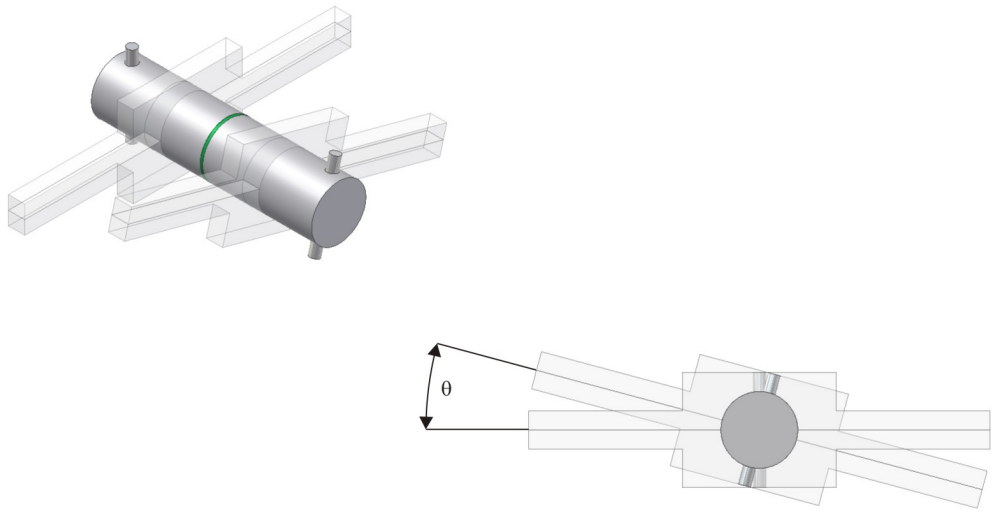


© Joannès

FIG. 3.9 – Dispositif d'assemblage des cylindres.

Il fallait également pouvoir acquérir, avec une précision suffisante, les données expérimentales charge/déplacement nécessaires à la validation numérique (§ 3.1.2.2). L'essai de torsion consiste

à appliquer un moment selon l'axe de l'éprouvette par l'intermédiaire d'un bras de levier. Du côté du mors fixe de la machine, le couple résultant C est mesuré par l'intermédiaire de jauges extensométriques. La configuration utilisée permet d'imposer une vitesse angulaire de 10^{-4} rad.s^{-1}, soit une vitesse de déformation au sein de l'adhésif de l'ordre de 3.10^{-3} s^{-1} dans le domaine élastique. Un capteur de déplacement linéaire LVDT[15] permet de contrôler l'angle de torsion θ[16] (FIG. 3.10). La charge et le déplacement sont relevés avec des incertitudes absolues respectives de ± 0,2 N.m et ± 5 µm. Les résultats des essais sont reportés sur la figure FIG. 3.11.



© Joannès

FIG. 3.10 – Dispositif de mesure de l'angle de torsion sur les éprouvettes cylindriques. Un capteur LVDT déporté permet d'évaluer le déplacement relatif des barres de mesure et consécutivement l'angle de rotation $theta$.

L'essai de traction est plus délicat à réaliser car il faut pouvoir mesurer un déplacement de quelques dizaines de micromètres seulement. Pour cela, nous avons employé un extensomètre dont la résolution est de l'ordre du micromètre ; la base de mesure étant de 11,0 mm. Une cellule de charge de 5000 daN assure la transcription de l'effort avec une incertitude absolue inférieure à ± 0,2%. L'essai est contrôlé en vitesse de charge qui est fixée à 3 daN/s. Les résultats charge/allongement sont présentés sur la figure FIG. 3.12.

La dispersion obtenue est très importante bien que l'écart-type des épaisseurs considérées soit relativement satisfaisant : 60 µm pour une moyenne à 330 µm. Il est possible de traiter les données en retranchant une estimation de l'allongement des substrats et en normant l'allongement « résiduel » par l'épaisseur du joint de colle (FIG. 3.13). L'amélioration de la dispersion est cependant intimement liée à l'alignement des cylindres qui doit être contrôlé de

[15] Linear Voltage Differential Transformer.

[16] Le capteur LVDT est déporté afin de pouvoir évaluer l'angle de torsion avec une précision suffisante.

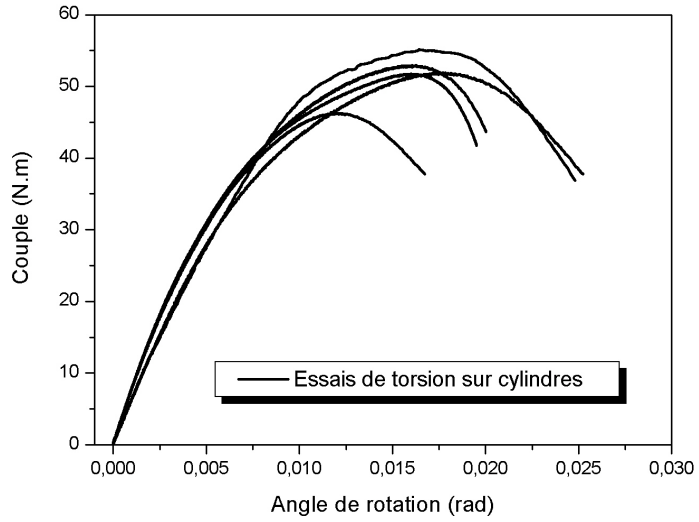


FIG. 3.11 – Résultats des essais de torsion sur cylindres.

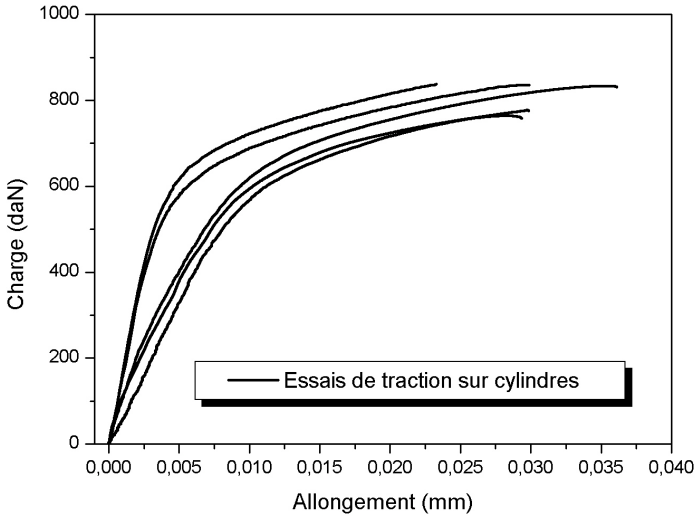


FIG. 3.12 – Résultats bruts (charge/allongement) des essais de traction sur cylindres.

manière plus précise. Cela souligne davantage toute la difficulté que représente la caractérisation sur assemblage. Ces essais constituent néanmoins une base de départ suffisante pour évaluer la pertinence des résultats obtenus à l'état massique.

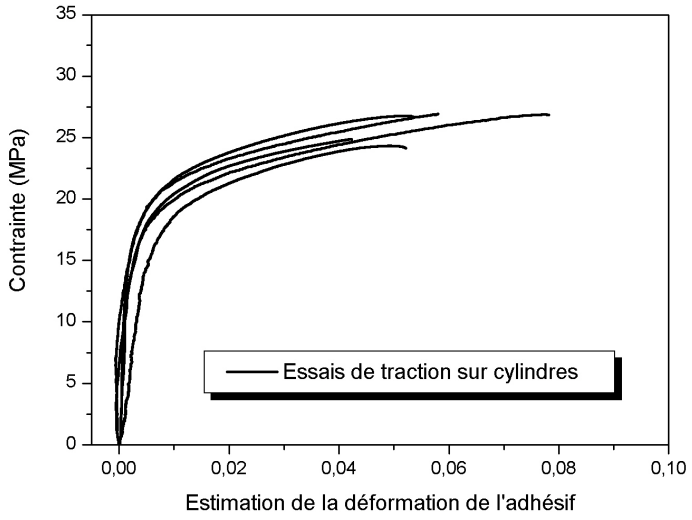


FIG. 3.13 – Résultats traités des essais de traction sur cylindres : estimation de la contrainte et de la déformation moyenne au sein de l'adhésif.

3.1.2.2 Confrontation numérique des résultats

La confrontation des résultats entre la caractérisation à l'état massif et les tests sur assemblage a consisté à simuler numériquement ces derniers ; les coefficients matériau du modèle étant issus des données massives.

L'éprouvette a été modélisée par éléments finis[17] tridimensionnels (FIG. 3.14), ce qui nous permettait d'éprouver la sensibilité à l'alignement des tests mécaniques. Nous avons par ailleurs raisonnablement raffiné la zone du joint pour ne pas « lisser » l'état de déformation pluriaxial. Le chargement est appliqué de manière à reproduire la configuration d'essai : application d'un couple pour la torsion et d'un effort réparti pour la traction. Afin de respecter le principe de B. DE SAINT-VENANT, le chargement est repoussé suffisamment loin de la zone du joint. On se place par ailleurs dans l'hypothèse des petites perturbations (§ 5.2.2).

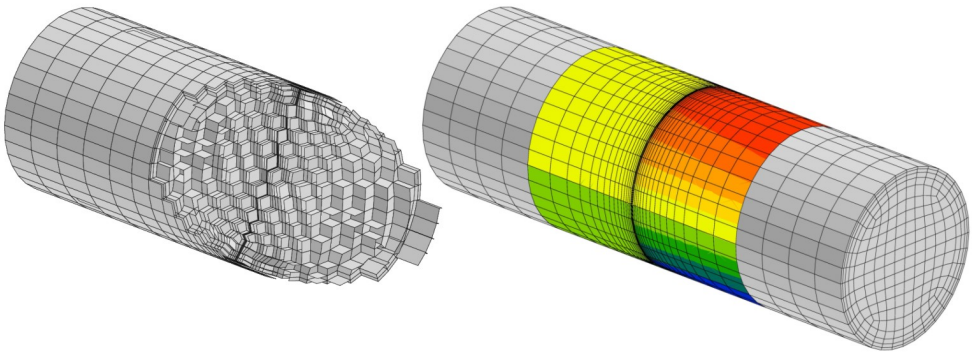
Pour simuler le comportement de l'adhésif nous avons choisi d'utiliser un modèle élasto-plastique[18] isotrope à écrouissage cinématique et critère de von Mises (§ 5.3.3). Les coefficients du modèle correspondent à une identification menée sur éprouvettes haltères pour une sollicitation quasi-statique.

Les résultats numériques sont présentés sur les figures FIG. 3.15 et FIG. 3.16. Si nous nous contentons d'examiner la partie élastique, la rigidité en traction est correctement rendue[19] alors que celle en cisaillement est largement surestimée. Cette différence ne peut pas uniquement s'expliquer par des imprécisions expérimentales ou la sensibilité du modèle. Pour l'adhésif β,

[17] La *méthode des éléments finis* est évoqué dans le chapitre 7.

[18] Nous ne considérons ici que la montée en charge et pour ne pas alourdir le modèle, les effets visqueux ne sont pas considérés.

[19] Relativement à la dispersion des résultats.



© Joannès

FIG. 3.14 – Détail du maillage et simulation numérique des essais de torsion sur cylindre.

il semble donc qu'il n'y ait pas de corrélation directe entre les données matériau issues de l'état massif et celles régissant le comportement des assemblages.

Par ailleurs, l'examen de la partie plastique montre que le critère de von Mises n'est pas adapté pour rendre compte des phénomènes agissant au sein d'un joint de colle : dans le cas de la traction, il n'y a pas de « détection » de la plasticité et celle-ci apparaît bien trop tôt pour le cisaillement. Nous verrons par la suite qu'avec le confinement, le polymère devient sensible à la pression hydrostatique et que d'autres formes de critère sont nécessaires.

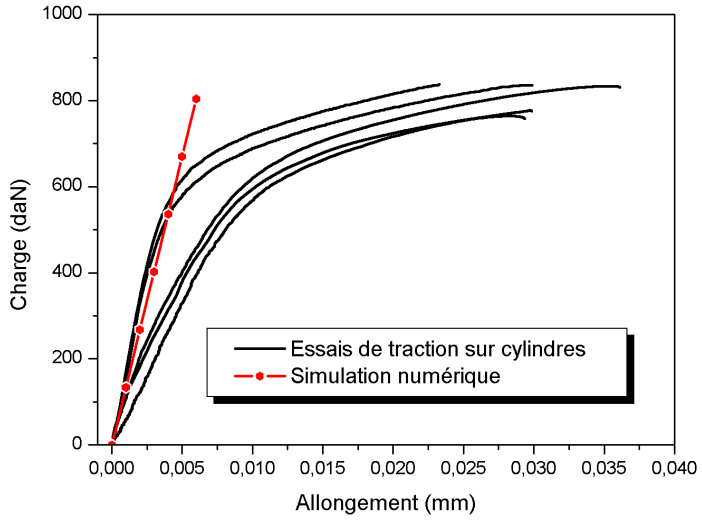


FIG. 3.15 – Comparaison des essais de traction sur cylindres et de la simulation numérique correspondante. Le modèle élasto-plastique basé sur le critère de von Mises n'est pas adapté à la simulation du comportement de l'adhésif confiné au sein d'un assemblage.

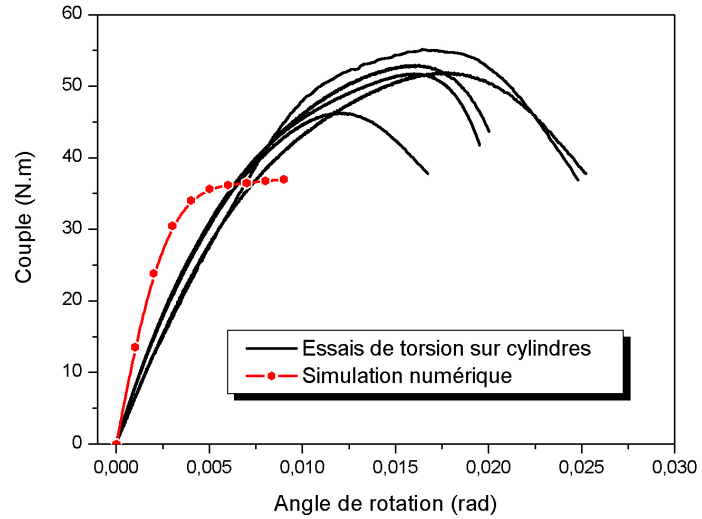


FIG. 3.16 – Comparaison des essais de torsion sur cylindres et de la simulation numérique correspondante. En utilisant le comportement de l'adhésif massif pour simuler la réaction d'un joint, nous surestimons très largement la rigidité apparente.

3.2 Approche multi-axiale

Les premiers essais menés sur l'adhésif β n'ont pas permis de déboucher sur des propriétés mécaniques intrinsèques : les résultats obtenus ne permettent vraisemblablement pas de faire le

rapprochement entre l'adhésif à l'état massif et celui au sein d'un assemblage. Dans le chapitre 4 nous tenterons d'en comprendre la raison par une étude micro-mécanique. Auparavant et afin de poursuivre notre objectif de modèle de comportement, il est opportun de caractériser l'adhésif sur assemblage. Les essais menés sur cylindres ont mis au jour certaines difficultés expérimentales qu'il convient de surmonter :

- difficulté de mise en œuvre pour maintenir un alignement ou une épaisseur donnée,
- difficulté des mesures,
- difficulté d'exploitation des résultats que nous avions contournée en utilisant la simulation numérique.

De plus, les résultats de la simulation précédente nous amènent à penser que le comportement de l'adhésif ainsi confiné pourrait dépendre de la direction de sollicitation. Une approche multi-axiale est donc nécessaire pour évaluer l'influence respective de la traction et du cisaillement sur le comportement.

3.2.1 Un dispositif expérimental spécifique

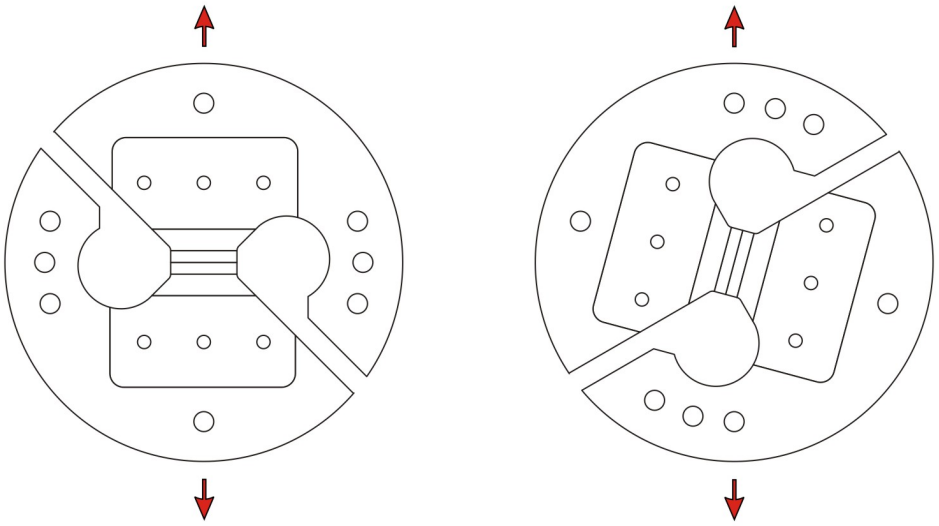
Pour poursuivre la caractérisation, nous avons donc cherché à élaborer un dispositif d'essais spécifique[20]. Celui ci devait pouvoir être utilisé en modes multi-axiaux aussi facilement que pour la traction ou le cisaillement. Nous envisagions également la possibilité de tester différentes épaisseurs avec une tolérance relativement faible. Enfin, la géométrie des éprouvettes et le système d'accrochage se devaient de garantir un champ de contrainte le plus uniforme possible dans le plan médian du joint de colle en atténuant les effets de bord.

3.2.1.1 Etude bibliographique

Plusieurs auteurs ont essayé de concevoir un tel dispositif. Le montage expérimental de M. ARCAN[21], élaboré à la fin des années 1970, permet de combiner et de contrôler parfaitement des sollicitations de traction perpendiculaire et de cisaillement transverse. Le test original s'applique à une éprouvette homogène et massive mais avec quelques modifications, le système a été utilisé pour des films d'adhésifs[22]. Le modèle présenté sur la figure FIG. 3.17 est composé de deux supports angulaires liés à deux embases immobilisant l'échantillon à tester. Les secteurs des supports sont percés à leur circonférence de manière à faire varier la direction de sollicitation. Il est très difficile de produire un cisaillement pur, cependant le montage proposé par M. ARCAN a prouvé son efficacité et il est possible d'obtenir un cisaillement suffisamment uniforme dans la zone utile de l'éprouvette. L'avantage principal de ce dispositif est de pouvoir solliciter une même géométrie d'éprouvette dans différentes configurations angulaires.

Lors de la sollicitation mécanique d'un assemblage collé, le champ de contrainte interfacial présente des singularités près des bords libres. Ces singularités perturbent les mesures des propriétés *in situ* et sont à l'origine de la rupture de l'assemblage. Il est donc important d'étudier correctement ces phénomènes afin de proposer des configurations visant à les diminuer. Le type

[20] Le matériel utilisé pour les essais sur cylindres n'était pas adapté à ce type d'approche.
[21] [ARCAN, 1978]
[22] [ARCAN et WEISSBERG, 1988]



© Joannèsd'après [ARCAN et WEISSBERG, 1988]

FIG. 3.17 – Dispositif d'essai permettant de solliciter une éprouvette collée dans différentes configurations angulaires.

et l'intensité de la singularité dépend de la géométrie du joint et des propriétés élastiques des deux matériaux[23].

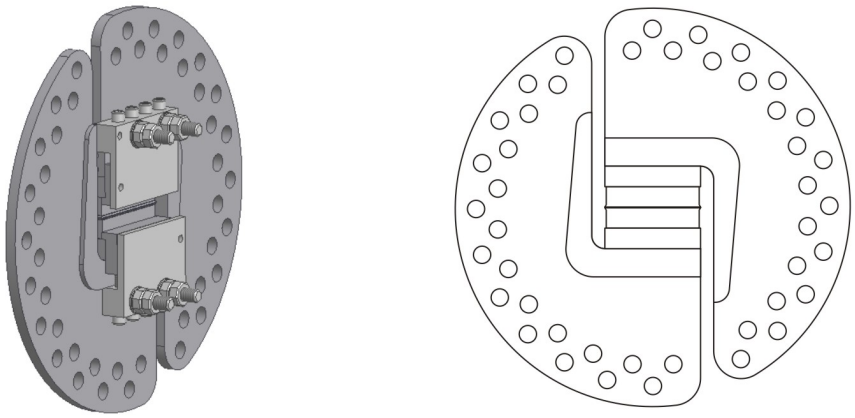
L'examen des concentrations de contraintes à l'interface de deux matériaux avec des hypothèses d'élasticité bidimensionnelle permet d'élaborer des solutions adaptées. L'angle de passage entre les deux matériaux apparaît comme un paramètre déterminant. D. LEGUILLON et E. SANCHEZ-PALANCIA[24], montrent que l'utilisation d'un « bec[25] » permet d'éliminer la contribution des singularités dues aux effets de bord.

Tenant compte des différentes études évoquées précédemment, J. Y. COGNARD[26] *et al* ont proposé un montage particulièrement performant pour caractériser les assemblages collés. Basé sur le dispositif de M. ARCAN, les efforts de conception se sont portés sur la géométrie des éprouvettes et sur le système d'accrochage[27] de celles-ci sur les disques supports. L'analyse numérique réalisée montre qu'un bon positionnement relatif des différentes pièces est primordial pour assurer la qualité des essais. Nous nous sommes appuyés sur les points clefs de la géométrie de ce montage pour élaborer le dispositif que nous avons utilisé (§ 3.2.1.2).

3.2.1.2 Le dispositif CdM

La forme générale du dispositif CdM reprend une configuration en deux demi-disques d'acier réunis par une éprouvette collée (FIG. 3.18).
Cette configuration est directement exploitable sur une machine de traction quelle que soit la sollicitation souhaitée : de la traction à la compression en passant par tous les modes mixtes de

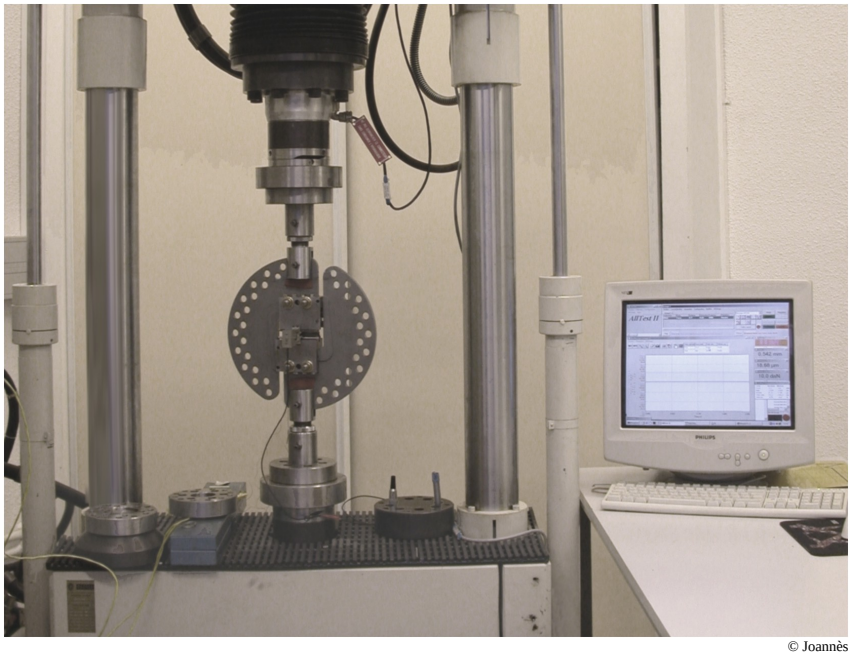
[23] [DUNDURS, 1969]
[24] [LEGUILLON et SANCHEZ-PALANCIA, 1987]
[25] Voir figure FIG. 3.20.
[26] [COGNARD *et al.*, 2005]
[27] Un système d'accrochage mal conçu peut générer une précharge non uniforme dans le joint de colle.



© Joannès

FIG. 3.18 – Le dispositif CdM reprend les points clefs des montages élaborés par M. ARCAN et J. Y. COGNARD : deux demi-disques supports en acier sont reliés entre eux par une éprouvette collée. Le dispositif fermé mesure environ 300 mm de diamètre.

cisaillement (FIG. 3.19). La géométrie de l'éprouvette permet par ailleurs de garantir un état de déformation relativement homogène au sein du joint. Une analyse paramétrique a été conduite sur la longueur de recouvrement, l'épaisseur des substrats et la forme du bec pour aboutir à la géométrie présentée sur la figure FIG. 3.20.



© Joannès

FIG. 3.19 – Les secteurs angulaires formés par les demi-disques supports permettent l'utilisation simple et directe d'une machine de traction quelle que soit la configuration de sollicitation souhaitée.

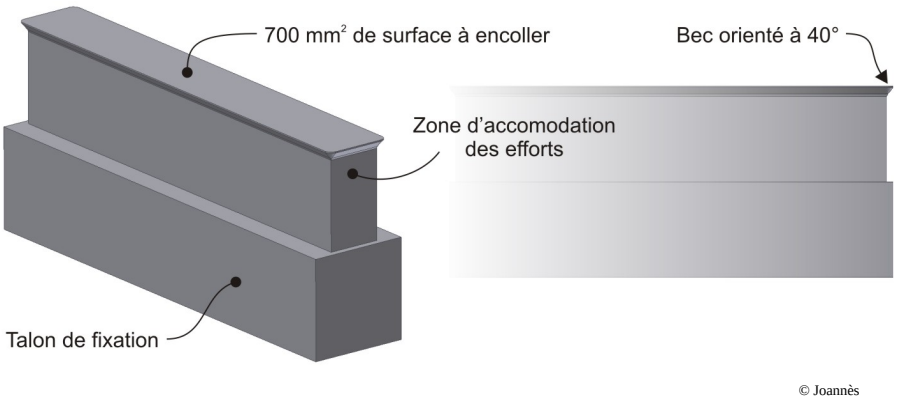
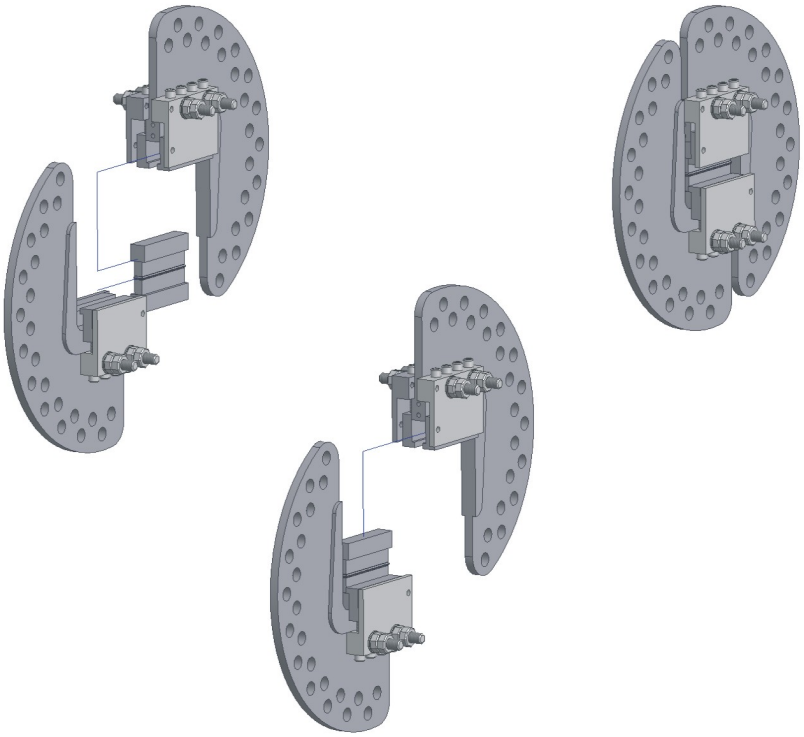


FIG. 3.20 – Géométrie d'une demi éprouvette permettant de garantir un état de déformation le plus homogène possible.

La fixation de l'éprouvette sur les demi-disques supports est obtenue par un système d'accrochage symétrique (FIG. 3.21). Durant la phase de serrage, le calage de l'éprouvette s'effectue naturellement, ce qui permet d'éviter les effets néfastes d'une précharge sur le joint de colle. Le centrage est assuré par des contraintes d'usinage sévères et un reprofilage rigoureux pour optimiser la planéité des substrats. Tout en conservant la qualité du centrage, les dimensions des talons de fixation autorisent l'ajout de cales pour faire varier l'épaisseur des joints de 100 µm à plus de 1500 µm. Une éprouvette étalon entièrement en aluminium et instrumentée a permis de valider ce système pour différentes configurations angulaires.

Outre le système d'accrochage, la reproductibilité des essais repose bien évidemment sur la qualité des éprouvettes. Comme pour l'assemblage des cylindres, un montage spécifique a été conçu (FIG. 3.22). Deux embases en acier assure le maintien de quatre demi-éprouvettes avant encollage. Des axes de centrage et des cales en acier complètent le dispositif qui est ensuite placé dans un four imposant le cycle de réticulation.



© Joannès

FIG. 3.21 – Procédure de fixation de l'éprouvette sur les demi-disques supports.

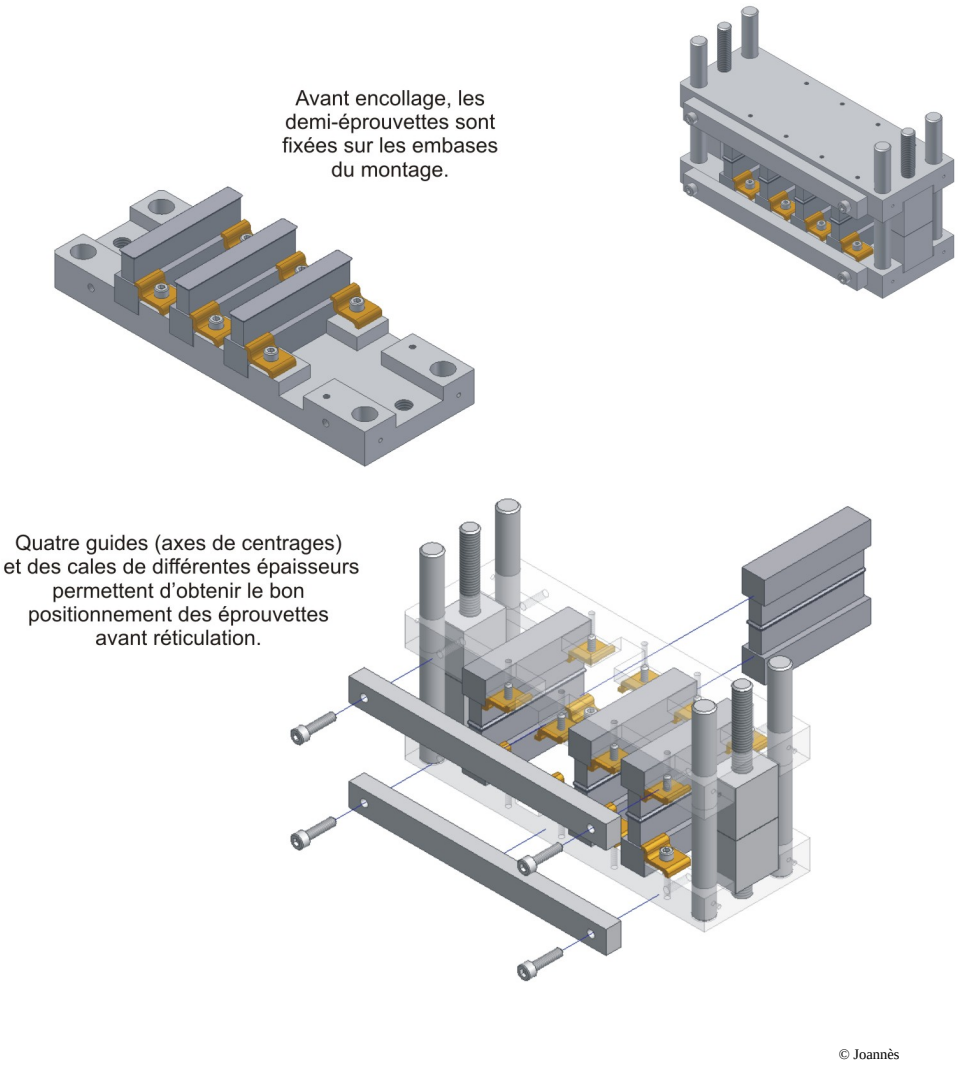
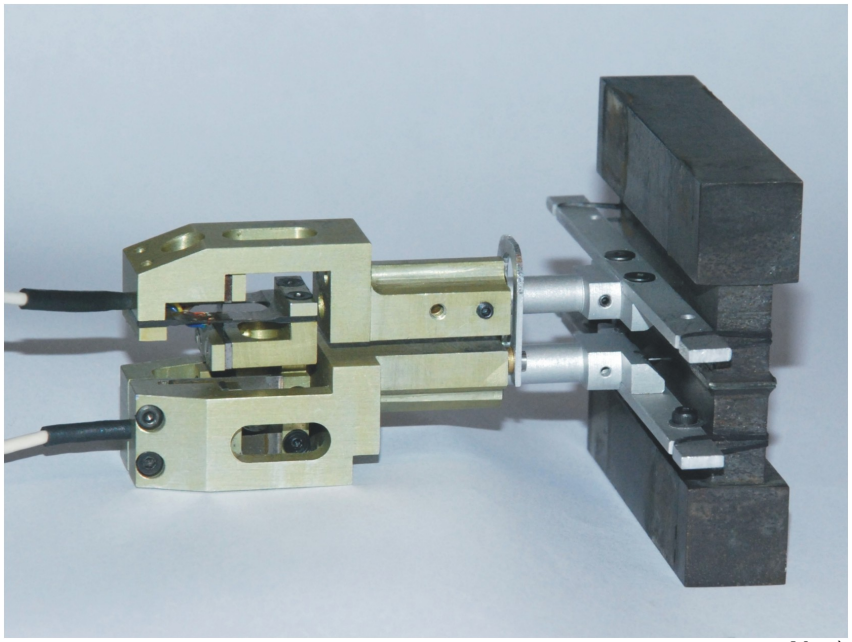


FIG. 3.22 – Montage d'assemblage des éprouvettes CdM.

3.2.2 Instrumentation des essais

Comme nous avons pu le constater pour les essais sur cylindres, la qualité de la mesure est essentielle pour cette campagne de caractérisation. Les déplacements attendus ne s'étendent pas au-delà de quelques dizaines de micromètres et nous avons donc employé une gamme d'extensomètres à grande résolution : de l'ordre du micromètre pour une base de mesure de 10,0 mm à 11,0 mm suivant le capteur. Dans le cas de la traction ou du cisaillement, les mesures ont été doublées afin de détecter un éventuel problème d'alignement de l'éprouvette. Un capteur spécifique a été adapté pour les essais biaxiaux.

La principale difficulté que nous avons rencontrée pour l'instrumentation a concerné la fixation des capteurs à l'éprouvette. Comme nous le verrons dans le chapitre 6, les fortes charges entraînent une légère rotation du dispositif en mode de cisaillement et en mode mixte. L'obtention des propriétés *in situ* de l'adhésif nécessite donc d'effectuer les mesures dans le repère local du joint et non dans le repère global du dispositif. En d'autres termes, la fixation du capteur doit permettre à celui-ci de suivre le mouvement « macroscopique » de l'éprouvette sans influencer la mesure locale. L'ancrage du capteur bi-axial est présenté sur la figure FIG. 3.23.



© Joannès

FIG. 3.23 – Capteur bi-axial fixé sur une éprouvette CdM.

Une cellule de charge de 10000 daN complète l'instrumentation et assure la transcription de l'effort avec une incertitude absolue inférieure à ± 0,2%.

3.2.3 Résultats des essais en quasi-statique

Les essais de caractérisation pour des sollicitations quasi-statiques sont contrôlés en vitesse de charge à 7 daN/s. Cela permet de conserver des vitesses de déformation inférieures à 10^{-3} s^{-1} sur une large plage de sollicitation (FIG. 3.24). Associées à la charge, les mesures de déplacement

permettent de déterminer la rigidité de l'assemblage collé. Quelles que soient les épaisseurs des joints, le dispositif CdM offre une bien meilleure reproductibilité que les essais sur cylindre (FIG. 3.25).

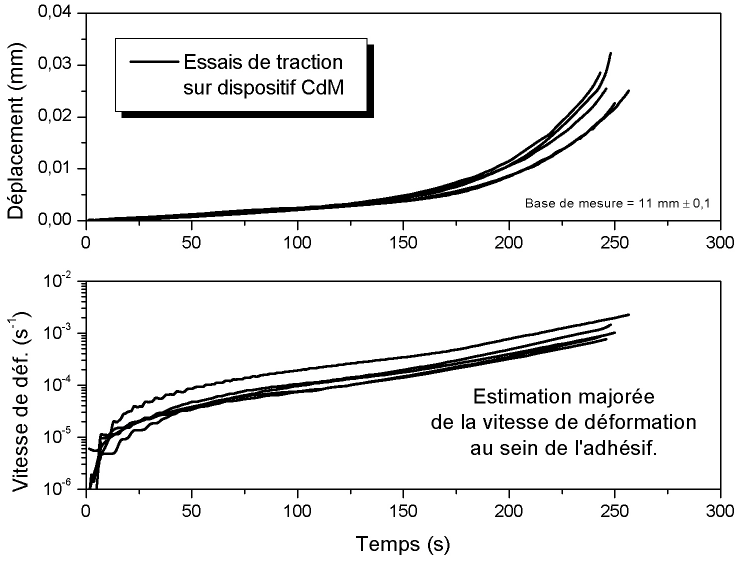


FIG. 3.24 – Malgré un contrôle en vitesse de charge, la vitesse de déformation au sein de l'adhésif reste inférieure à 10^{-3} s^{-1} sur une large plage de sollicitation : les essais sont bien quasi-statiques.

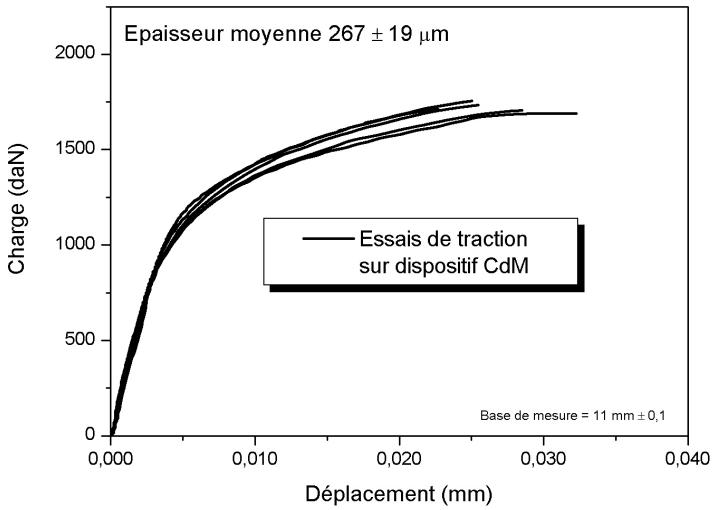


FIG. 3.25 – La reproductibilité des essais est bien meilleure que ce que nous avions obtenu sur cylindre.

Compte tenu de la géométrie des éprouvettes et de la déformation fortuite du dispositif en cours d'essai, nous avons préféré remonter aux propriétés de l'adhésif en nous appuyant sur la

simulation numérique comme dans le cas des essais sur cylindres. Les détails de la procédure d'identification figurent dans le chapitre 6.

3.2.3.1 Chute des modules d'élasticité et anisotropie du comportement

Le dépouillement[28] des essais en traction puis en cisaillement a permis d'évaluer les modules d'Young et de Coulomb de l'adhésif selon l'épaisseur du joint (FIG. 3.26 et FIG. 3.27). Ces résultats dévoilent de manière notable une chute des propriétés lorsque l'épaisseur d'adhésif devient inférieure à 700 µm. Malgré quelques défectuosités observées pour les joints de très faible épaisseur (< 100 µm), cela semble conforter les observations que nous avions obtenues sur cylindre.

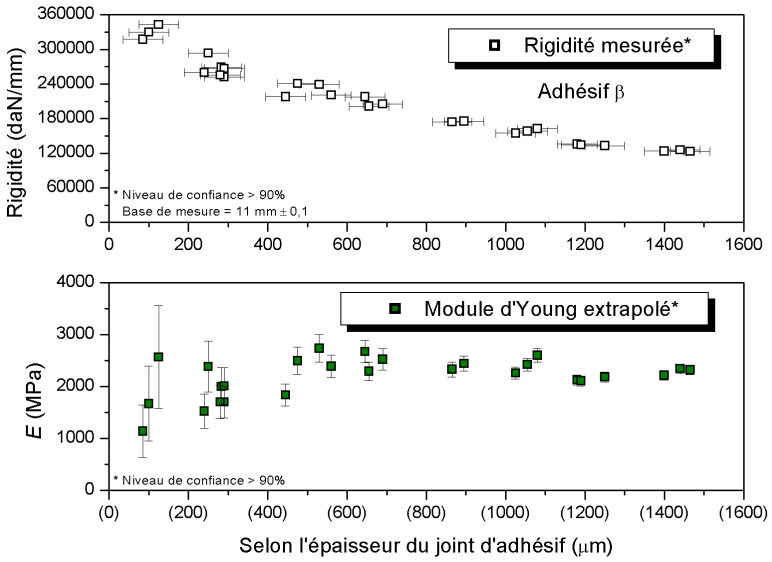


FIG. 3.26 – Evaluation du module d'Young de l'adhésif « selon l'épaisseur » du joint à partir de la rigidité mesurée. Sur le graphique correspondant au module, l'épaisseur est indiquée entre parenthèses : n'étant pas une propriété matériau, celle-ci est indirectement responsable de la valeur du module.

Cependant, même pour des joints épais, nous ne retrouvons pas totalement les propriétés de l'état massif : si le module d'Young s'élève bien à environ 2500 MPa, le module de Coulomb ne dépasse pas 600 MPa. Cela traduit une anisotropie d'autant plus marquée que l'épaisseur diminue (FIG. 3.28). Quelques essais sur substrats en acier ont par ailleurs permis de constater le même type de comportement.

[28] Numérique.

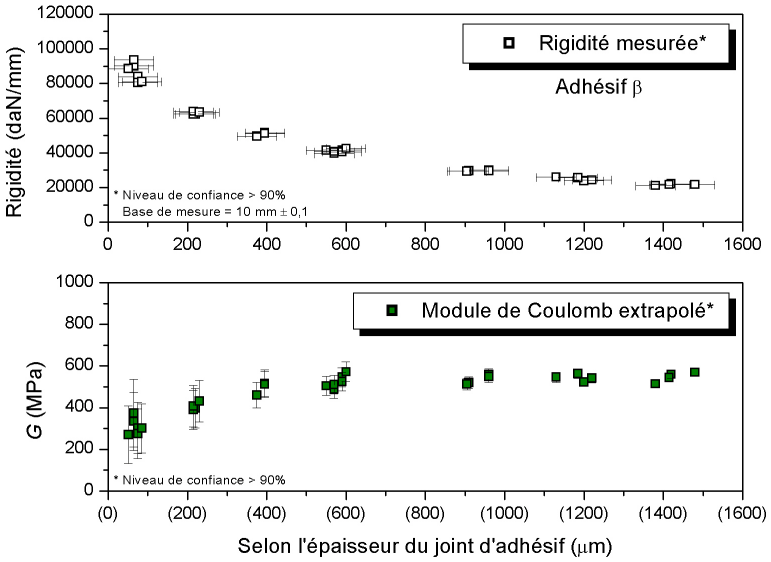


FIG. 3.27 – Evaluation du module de Coulomb de l'adhésif selon l'épaisseur du joint à partir de la rigidité mesurée. Pour les faibles épaisseurs de joint, la chute du module est manifeste.

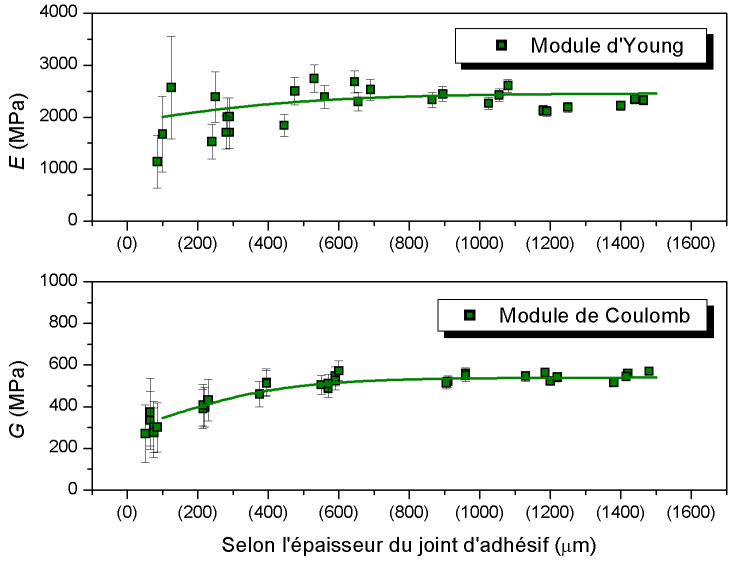


FIG. 3.28 – Evaluation des modules d'Young et de Coulomb de l'adhésif au sein d'un assemblage. Pour des joints épais, le module d'Young s'élève à environ 2500 MPa à l'instar de ce que nous avions mesuré sur l'adhésif à l'état massif. En revanche, le module de Coulomb ne dépasse pas 600 MPa contre 965 MPa à l'état massif. Cela traduit une anisotropie du comportement.

3.2.3.2 Sensibilité à la pression hydrostatique

Les effets de la composante hydrostatique des contraintes sur le comportement mécanique permettent de mettre en évidence les mécanismes régissant la déformation plastique. Si pour

un matériau cristallin la plasticité se traduit essentiellement par un glissement du réseau sans variation de volume, dans le cas des matériaux polymères il y a souvent une compressibilité plastique qui doit être représentée de manière spécifique. La sensibilité à la pression hydrostatique impacte directement le choix du modèle de comportement. Cette sensibilité a pu être évaluée à partir des essais multi-axiaux. Ainsi, sur le graphique de la figure FIG. 3.29 nous avons représenté le seuil plastique dans le plan (I_1, J)[29].

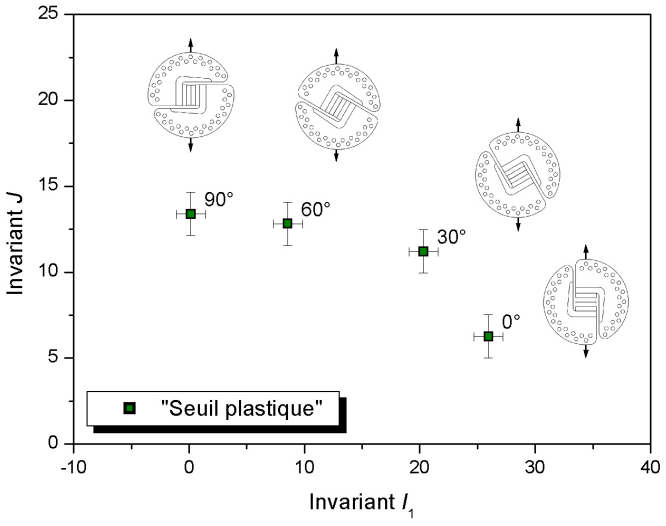


FIG. 3.29 – Evolution du seuil plastique dans le plan (I_1, J) pour différentes configurations d'orientation.

La répartition des points de mesures sous forme pseudo-elliptique traduit une forte sensibilité du comportement à la pression hydrostatique. L'inadéquation du critère de von Mises[30] que nous avions pressentie lors des essais sur cylindres est ici parfaitement illustrée.

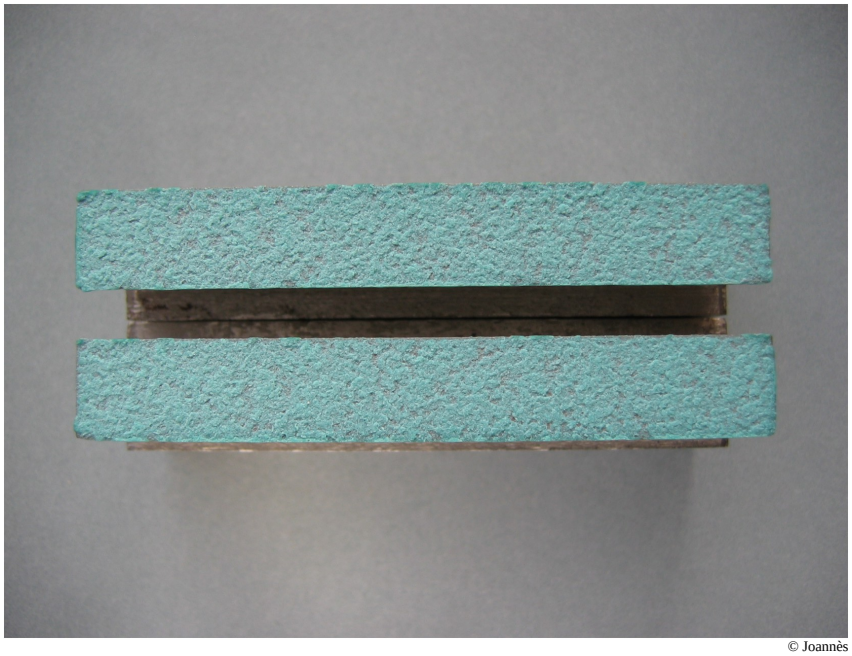
3.2.3.3 Faciès de rupture

Contrairement aux propriétés élastiques, dans une configuration axiale donnée, la rupture survient à un même niveau de charge quelle que soit l'épaisseur du joint. Les faciès obtenus présentent tous une rupture de type cohésive (FIG. 3.30). Sur les joints épais, le chemin de rupture suit l'interface tout en laissant une pellicule de colle sur les substrats (FIG. 3.31).

Nous commenterons ces observations dans le chapitre suivant en se penchant sur la microstructure de l'adhésif.

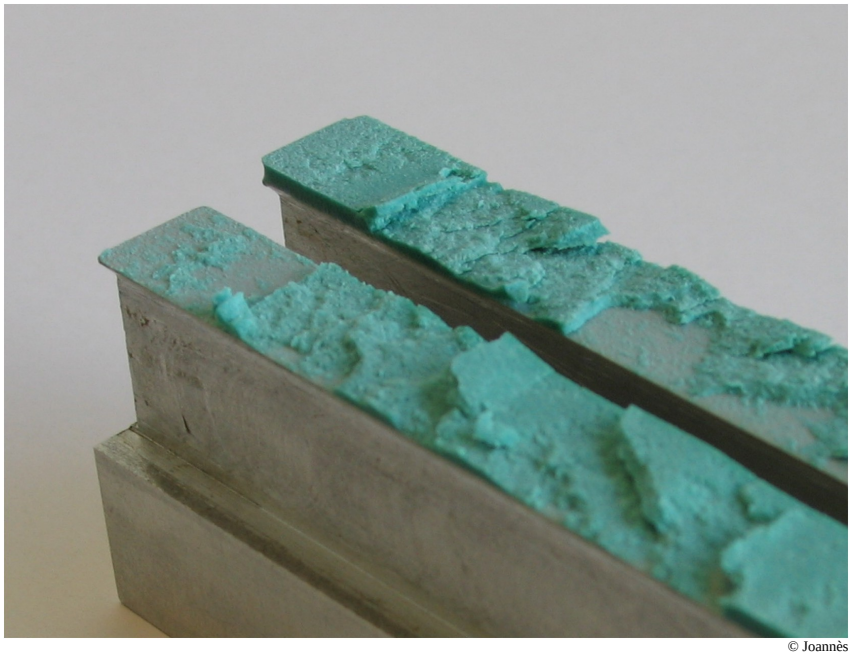
[29] Voir le chapitre 5 pour plus de détails.

[30] Insensible à la pression hydrostatique par définition, le critère de von Mises correspond à une droite horizontale dans un plan (I_1, J).



© Joannès

FIG. 3.30 – Faciès de rupture de type cohésive sur une éprouvette CdM : l'adhésif est présent des deux côtés du substrat en alliage d'aluminium (épaisseur du joint de l'ordre de 300 µm).



© Joannès

FIG. 3.31 – Faciès de rupture obtenu en cisaillement sur joint épais (1500 µm) : la rupture reste cohésive même si le chemin de séparation suit l'interface.

Chapitre 4

Analyses micro-mécaniques

4.1 Les « effets d'épaisseur » : introduction

Les essais mécaniques menés sur l'adhésif β n'ont pas permis d'établir un lien direct entre le comportement mécanique à l'état massif et celui existant au sein d'un assemblage. Pour cette dernière configuration, nous avons par ailleurs noté une chute des modules d'élasticité ainsi qu'une anisotropie du comportement, d'autant plus marquées que l'épaisseur du joint était faible. Ce sont ces deux phénomènes que nous regroupons sous l'expression : « effets d'épaisseur »[1].

Des résultats similaires[2] ont déjà été rapportés avec d'autres adhésifs époxy utilisés sur substrats métalliques. Si certains auteurs concluent à des insuffisances ou imprécisions expérimentales[3], la plupart s'accordent sur deux hypothèses :

- la conséquence des *contraintes résiduelles* amplifiées par le confinement,
- l'existence d'une *zone d'interphase* aux propriétés mécaniques spécifiques se formant entre le substrat et le polymère.

4.1.1 Des contraintes résiduelles

L'essor du collage structural moderne à partir des années 1950 a poussé les ingénieurs à assembler toutes sortes de matériaux. Les premières jonctions verre/métal s'achevaient souvent par une fissuration du verre : les conséquences des contraintes résiduelles au sein des assemblages collés ont été observées avant de pouvoir être étudiées.

Les contraintes résiduelles résultent d'une disparité des propriétés mécaniques, thermiques ou chimiques entre deux matériaux. La réticulation d'un film de colle sur une lame métallique se traduit par la déflexion[4] du système : l'effet bilame équilibre alors les contraintes internes (FIG. 4.1). Lorsque ces contraintes ne peuvent pas se répartir sur une zone d'accommodation suffisante, des micro-craquelures[5] apparaissent.

[1] L'épaisseur n'étant pas une propriété matériau, il serait plus juste de parler d'« effets induits » par le confinement, ce dernier étant la conséquence d'une mise en œuvre à une épaisseur donnée. Malgré cette imprécision, l'expression « effets d'épaisseur » sera employée afin d'alléger la lecture.

[2] [PERETZ, 1978], [BRISON, 1982], [DEAN *et al.*, 1996]

[3] [DOLEV et ISHAI, 1981], [JEANDRAU, 1993], [LILLEHEDEN, 1994], etc.

[4] [VON PREISSING, 1989]

[5] [MULVILLE et VAISHNAV, 1975], [ORSINI et SCHMIT, 1993], [THOULESS, 1994]

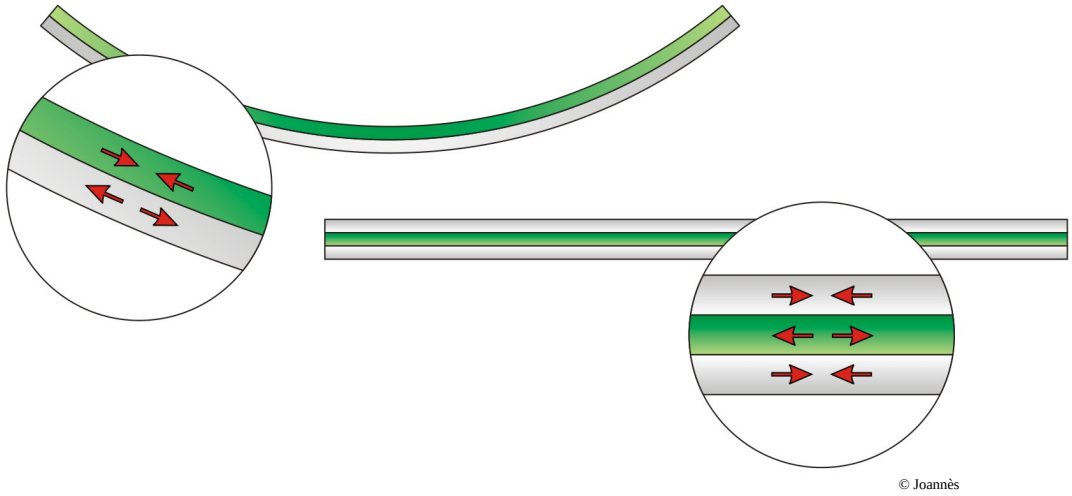


FIG. 4.1 – Mise en évidence des contraintes résiduelles dans un joint d'adhésif : effet bilame.

Dans les années 1980, plusieurs auteurs[6], se sont intéressés à l'évaluation des contraintes résiduelles et à leurs conséquences. Par des mesures fines et localisées, ils ont noté un affaiblissement des propriétés mécaniques dans une zone proche de l'interface (§ 4.1.2).

4.1.2 Une zone d'interphase

Les travaux concernant l'adhésion des réseaux époxy sur substrats métalliques ont conduit de nombreux auteurs à s'interroger sur les mécanismes chimiques en jeu.

En 1987, R. G. DILLINGHAM[7] et F. G. BOERIO ont utilisé la spectroscopie infrarouge à transformée de Fourier (FTIR[8]) pour étudier la réticulation d'un système époxy-amine sur aluminium. Près de l'interface, ils notent la présence d'une zone de composition chimique différente de l'adhésif massif.

En utilisant la même technique, J. NIGRO[9] et H. ISHIDA étudient en 1989 la réticulation d'un système similaire sur acier poli. La région interfaciale présente un taux de conversion du système beaucoup plus important que pour le reste de l'adhésif. La même expérience sans durcisseur aboutit à un résultat identique. Ces auteurs en concluent que les espèces en présence à la surface de l'acier sont capables de catalyser l'homo-polymérisation de l'époxy.

V. PÈCHERAUX[10] a étendu son étude à plusieurs systèmes époxy-durcisseur et différents substrats métalliques. Des analyses par DSC ont confirmé l'influence du métal sur la réticulation : suivant la nature du substrat, il y a variation de la morphologie des pics exothermiques. L'examen des températures de transition vitreuse a également révélé un taux de réticulation des adhésifs beaucoup plus élevé au voisinage de l'interface.

[6] [KNOLLMAN et HARTOG, 1982], [HAHN, 1983]
[7] [DILLINGHAM et BOERIO, 1987]
[8] La spectrométrie infrarouge permet d'obtenir des informations sur les liaisons chimiques existant au sein d'un matériau organique. Elle est basée sur l'absorption d'un rayonnement infrarouge par le matériau analysé.
[9] [NIGRO et ISHIDA, 1989]
[10] [PÉCHERAUX, 1990]

Depuis une dizaine d'années, l'effet catalytique du substrat métallique est régulièrement rapporté. Ces recherches ont mis en évidence que les prépolymères liquides époxy-amine réagissent avec des oxydes ou hydroxydes des substrats métalliques pour former des liaisons chimiques : il y a développement d'une zone d'interphase (FIG. 4.2).

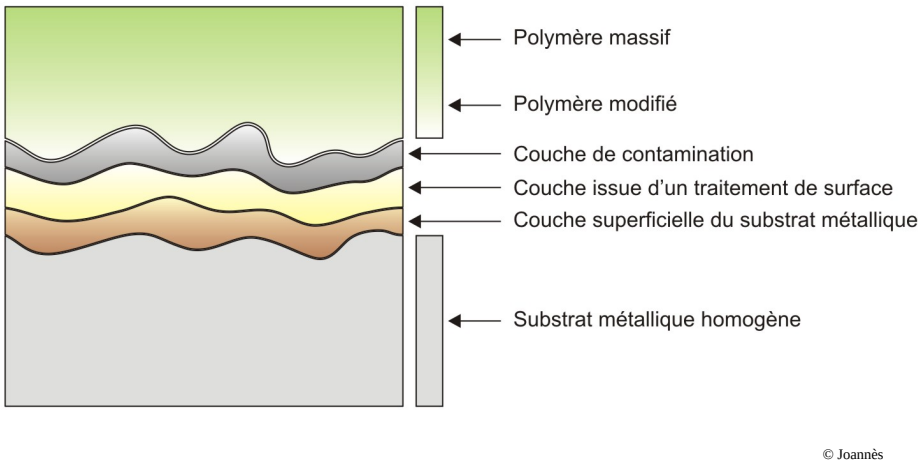


FIG. 4.2 – Représentation schématique de la zone d'interphase.

A la fin des années 1990, certains auteurs se sont penchés sur la caractérisation mécanique et physico-chimique des interphases. Des techniques de nanoindentation[11] ont par exemple permis de constater que la dureté de l'adhésif est 4% supérieure à proximité de l'interface.

De récents travaux[12] décrivent par ailleurs la formation de *complexes organométalliques* dans une zone pouvant s'étendre sur plusieurs dizaines des micromètres. Ces complexes ou chélates proviennent de la chimisorption[13] de l'amine et de la dissolution de la couche d'oxyde métallique par oxydoréduction. Lorsque la configuration des complexes leur permet de cristalliser, cette cristallisation se produit sous forme d'aiguilles de quelques micromètres de longueur[14]. Les cristaux jouent alors le rôle de charges, induisant de nouvelles propriétés mécaniques.

Pour observer la formation des chélates, A.A. ROCHE[15], J. BOUCHET et M. AUFREY ont prolongé le temps de contact avant réticulation entre le polymère liquide et le substrat métallique. Plus le temps de contact est long, plus la quantité de chélates est grande. La réaction ne semble saturer qu'au-delà de 60 minutes. Dans ces conditions, un film de 100 micromètres d'épaisseur présente un module d'Young trois fois supérieur à celui obtenu pour un état massif de l'adhésif. Les complexes organométalliques renforcent les propriétés mécaniques de l'interphase sauf si les contraintes résiduelles induites engendrent des micro-fissures[16]. Dans ce cas l'interphase constitue une couche de faible cohésion aux propriétés mécaniques affaiblies.

[11] [SAFAVI-ARDEBILI *et al.*, 1997]

[12] [ROCHE et GUILLEMENET, 1999], [BENTADJINE, 2000], [BOUCHET et ROCHE, 2002], [AUFREY, 2005]

[13] La chimisorption est une adsorption d'origine chimique : il s'agit du phénomène par lequel des molécules liquides se fixent sur les surfaces solides d'un adsorbant. La chimisorption met en jeu des énergies de liaison importantes.

[14] L'orientation des chélates peut induire une anisotropie du comportement mécanique.

[15] [ROCHE *et al.*, 2002]

[16] [LETERRIER *et al.*, 2001]

Enfin, il est bien évident que le phénomène d'interphase peut également apparaître entre le polymère et les charges minérales ou organiques ajoutées au sein de l'adhésif.

4.2 Observations micro-mécaniques de l'adhésif β

Les examens micro-mécaniques présentés dans cette section nous ont renseigné sur la microstructure de l'adhésif β. L'objectif était de déceler la présence d'éléments qui pouvaient être à l'origine des effets d'épaisseur : micro-craquelures, couche de faible cohésion, zone(s) d'interphase(s), etc.

4.2.1 Examens microscopiques

La microscopie optique et la microscopie électronique ont révélé une microstructure très complexe (FIG. 4.3 et FIG. 4.4). La formulation de l'adhésif β comporte en effet de nombreux additifs comme des charges minérales de talc ou de wollastonite. L'ajout de ces charges permet de réduire le coefficient de dilatation thermique, d'augmenter les propriétés mécaniques ou physico-chimiques mais également de réduire le coût final du produit. Avant de déterminer l'influence que ces charges peuvent avoir sur les effets d'épaisseur, il convient de préciser la morphologie de la microstructure.

4.2.1.1 Techniques d'analyse

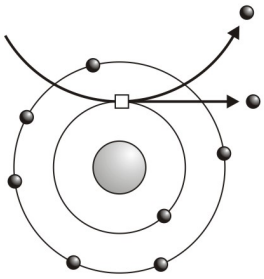
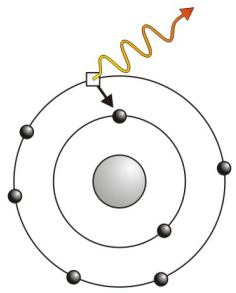
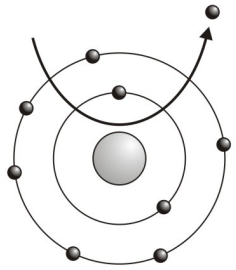
En microscopie optique (MO), une source lumineuse éclaire l'échantillon et les photons réfléchis sont conditionnés par des lentilles pour former l'image agrandie.

Pour la microscopie électronique, la source de lumière est remplacée par un faisceau d'électrons et les lentilles par des détecteurs électromagnétiques. La surface de l'échantillon est bombardée par un faisceau primaire de haute énergie, c'est à dire de plusieurs dizaines de kiloélectrons-volts. La conductibilité superficielle est assurée par un dépôt conducteur de quelques nanomètres d'épaisseur permettant l'évacuation des électrons. Les interactions entre les électrons incidents et la matière fournissent des informations sur la topographie ou sur la nature chimique de l'échantillon (TAB. 4.1).

Quel que soit le type de détecteur utilisé, le mode « balayage » de la microscopie électronique (MEB) permet de former une image par le déplacement du faisceau primaire sur la surface de l'échantillon.

En microanalyse X (WDS), il est ainsi possible de suivre point par point les variations de concentration des éléments de l'échantillon. On obtient alors un jeu de cartes de répartition qui peuvent ensuite être exploitées par des traitements d'images.

Les premières observations ont été effectuées en microscopie optique (ZEISS AXIO-VERT 405 M) puis en microscopie électronique à balayage (LEO 1450 VP). Des examens à la microsonde électronique (CAMECA SX50) nous ont ensuite permis de quantifier un certain nombre de paramètres micro-structuraux. Pour toutes ces analyses, les surfaces des échantillons ont subi une métallisation par un dépôt d'or-palladium ou de carbone après un polissage miroir.

	Lorsqu'un électron primaire pénètre dans la cible, il subit de nombreuses interactions inélastiques avec les électrons appartenant aux orbitales atomiques. Un électron primaire peut céder une partie de son énergie cinétique à un électron peu lié de la bande de conduction de l'atome. Il y a alors éjection de ce dernier que l'on qualifie d'électron *secondaire*. Les électrons secondaires sont émis des couches superficielles de l'échantillon et sont donc très sensibles aux aspérités de la surface. La moindre variation topographique modifie la quantité d'électrons collectés.
	L'éjection d'un électron d'une couche profonde provoque l'excitation de l'atome. Lors du retour à l'équilibre, un électron d'une couche supérieure vient combler la lacune créée par l'électron éjecté. Durant cette transition, l'électron périphérique perd une certaine quantité d'énergie qui peut se traduire par l'émission d'un *photon X*. L'énergie libérée est caractéristique des transitions électroniques de l'atome dont elle provient. Le spectromètre à dispersion de longueur d'onde (WDS, Wavelength Dispersive Spectroscopy) sépare les photons X par diffraction dans un cristal afin d'obtenir la composition chimique élémentaire de l'échantillon.
	L'électron primaire peut également entrer en collision avec un noyau atomique, il s'agit d'une interaction quasi-élastique. Dans ce cas, l'électron est réémis dans une direction proche de sa direction d'origine avec une faible perte d'énergie, il est *rétrodiffusé*. Les atomes les plus lourds, c'est à dire ceux qui ont un nombre important de protons, réémettent plus d'électrons que les atomes plus légers. Les électrons rétrodiffusés permettent d'accéder à un contraste de phase chimique. La profondeur de pénétration varie suivant de nombreux facteurs tels que la tension accélératrice, le numéro atomique ou la masse volumique du matériau analysé.

© Joannès

TAB. 4.1 – Interactions électron-matière à l'origine de la microscopie électronique.

4.2.1.2 Premières observations

Les images obtenues par microscopie optique sur une plaque d'adhésif font apparaître une microstructure très hétérogène (FIG. 4.3). Le contraste des photos met en évidence les multiples charges et additifs ajoutés à la résine. Il faut noter que la distribution de ces charges ne semble pas équivalente entre la face et la tranche de la plaque. La microstructure de la tranche apparaît en effet plus dense et présente une direction d'orientation des charges parallèle à la face.

Cette orientation est davantage visible sur les joints d'adhésifs observés en microscopie électronique (FIG. 4.4). L'anisotropie de distribution des charges pourrait être à l'origine des

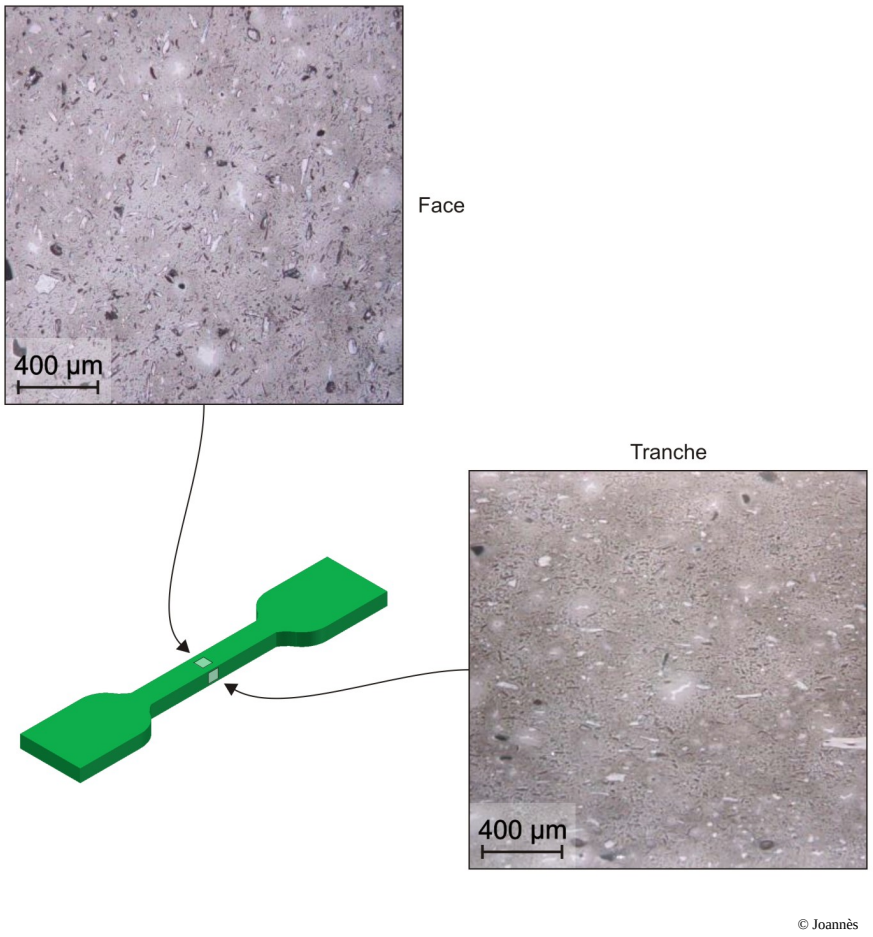


FIG. 4.3 – Microscopie optique conduite sur une plaque d'adhésif. Les microstructures de la face et de la tranche sembles différentes.

différences de comportement observées sur les essais mécaniques. Le paragraphe 4.2.1.4 clarifiera ce point.

En ce qui concerne la nature des charges, le contraste de phase chimique obtenu grâce aux électrons rétrodiffusés fait distinctement apparaître deux niveaux de gris différents. Les éléments possédant un numéro atomique élevé réémettent plus d'électrons que ceux ayant un numéro atomique plus faible. Les charges claires, sous forme d'agrégats relativement compacts, possèdent donc un numéro atomique moyen plus élevé que les charges foncées de forme plus fine. La microanalyse X nous a permis de préciser les concentrations en éléments chimiques des différents constituants de l'adhésif. L'examen des cartographies (FIG. 4.5) révèle que les deux types de charges majoritaires sont bien la wollastonite (silicate de calcium) et le talc (silicate de magnésium) (§ 4.2.1.3).

Vu l'importance des hétérogénéités introduites par les charges minérales, nous pouvons nous interroger sur la répartition des contraintes internes lors de la réticulation. Les variations des propriétés mécaniques au sein de l'adhésif pourraient engendrer des micro-fissures. Cette deuxième hypothèse sera largement développée dans la section 4.3.

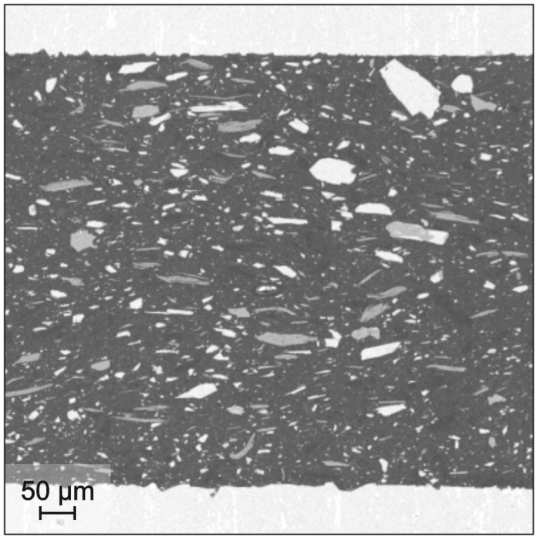


FIG. 4.4 – Joint d'adhésif d'environ 650 µm d'épaisseur observé en microscopie électronique à balayage (électrons rétrodiffusés).

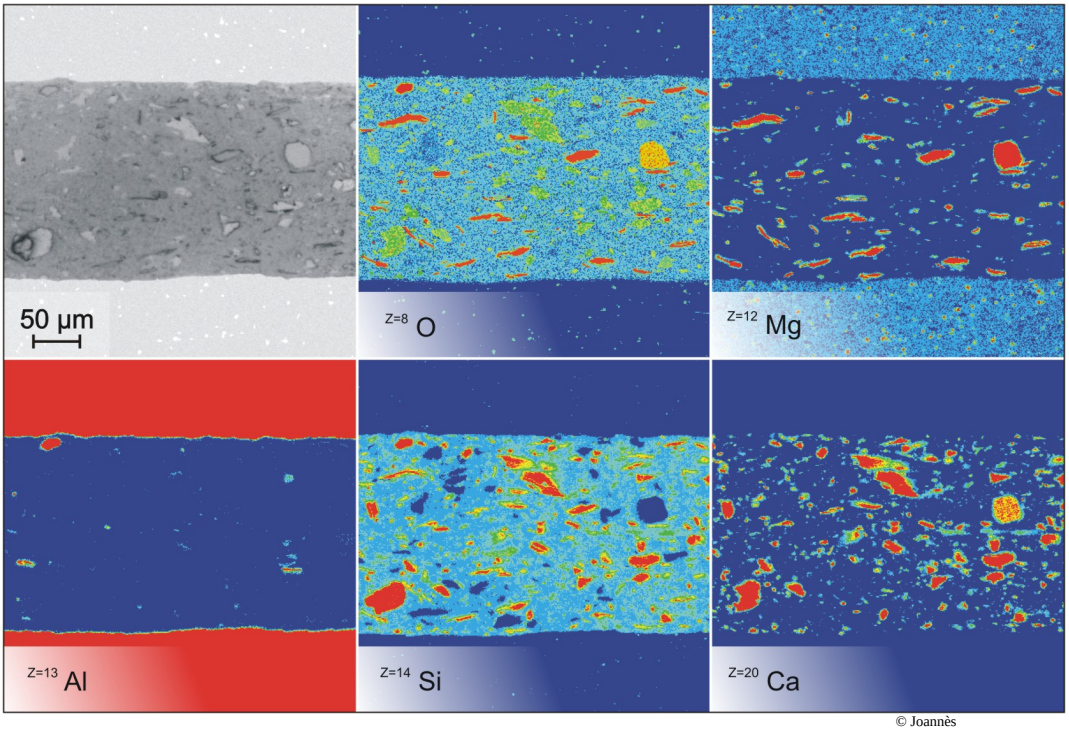


FIG. 4.5 – Analyse chimique d'un joint d'adhésif : juxtaposition d'une imagerie optique et des cartographies de micronanalyse X pour différents éléments. La palette de couleur utilisée (du bleu au rouge), traduit une teneur de plus en plus élevée de l'élément considéré.

Par ailleurs, les techniques d'analyses que nous avons utilisées (MO, MEB, WDS) ne nous ont pas permis de mettre en évidence une zone d'interphase. Contrairement aux études présentées dans le paragraphe 4.1.2, nous n'avons pas cherché à « cultiver » cette interphase en laissant l'époxy réagir avec le substrat métallique. Lors de la mise en œuvre des joints, le temps de contact

avant réticulation a rarement dépassé une dizaine de minutes. Cependant, il ne fait aucun doute qu'une zone d'interphase existe mais son étendue est très limitée et surtout insuffisante pour expliquer une chute des propriétés mécaniques. A la suite de ces premières observations, nous orientons notre analyse vers l'étude de la microstructure.

4.2.1.3 Morphologies et propriétés des charges

Avant de déterminer l'influence que les charges peuvent avoir au sein de la microstructure de l'adhésif β, il convient de présenter ici leurs particularités cristallographiques et notamment leurs morphologies et propriétés de clivage. La wollastonite comme le talc sont des silicates ordonnés dont la structure de base est formée par un tétraèdre $(SiO_4)^{4-}$ (FIG. 4.6). Suivant le mode d'agencement de ce tétraèdre avec des ions positifs (Ca^{2+}, Mg^{2+}, etc.), le silicate peut présenter une structure cristallographique plus ou moins clivable.

© Joannès

FIG. 4.6 – Le motif de base des silicates est composé par un atome de silicium tétra-coordonné, c'est-à-dire au centre d'un tétraèdre dont les quatre sommets sont occupés par des atomes d'oxygène. Afin de simplifier le motif, l'atome de silicium ne sera plus représenté dans les schémas suivants.

Pour la wollastonite (inosilicate de calcium), chaque tétraèdre partage un atome d'oxygène et constitue ainsi une chaîne simple $(SiO_3)^{2-}$ (FIG. 4.7). Les chaînes ont un motif de trois unités, dans lequel on peut distinguer deux types de tétraèdres distincts : ceux constituant un dimère et ceux reliant deux dimères entre eux, dits « pontants ». Les couches de calcium, en coordinence pseudo-octaédrique, complètent alors la structure en assurant la neutralité électrique du cristal et en liant plusieurs chaînes. Les liaisons assurées par les ions métalliques sont plus faibles que celles assurées par le partage d'atomes d'oxygène entre les pôles des tétraèdres. Cette faiblesse est à l'origine des trois plans de clivage de la wollastonite (FIG. 4.9).

Le talc est un phyllosilicate, c'est-à-dire un silicate lamellaire caractérisé par des feuillets plans (ou couches) de tétraèdres associés par trois de leurs sommets. Les atomes de silicium dans les phyllosilicates s'organisent ainsi selon un motif hexagonal planaire (FIG. 4.8). Les positions disponibles pour les cations et notamment le magnésium se trouvent au sommet de la couche. L'agencement parallèle de ces couches représente l'unité de clivage des phyllosilicates : clivage selon leur plan basal (FIG. 4.9).

En plus de la wollastonite et du talc, d'autres types de charges apparaissent sous forme de traces (AlMgO, CaMgO, etc.).

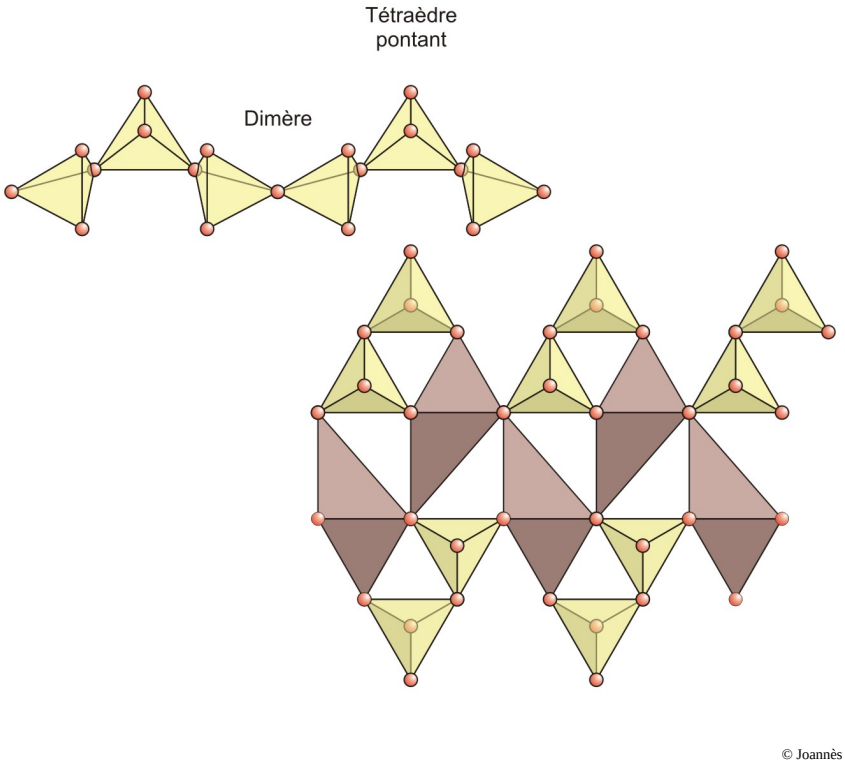


FIG. 4.7 – Arrangement des chaînes de wollastonite dans un plan infini. Les tétraèdres pontants permettent d'assurer la liaison entre plusieurs plans.

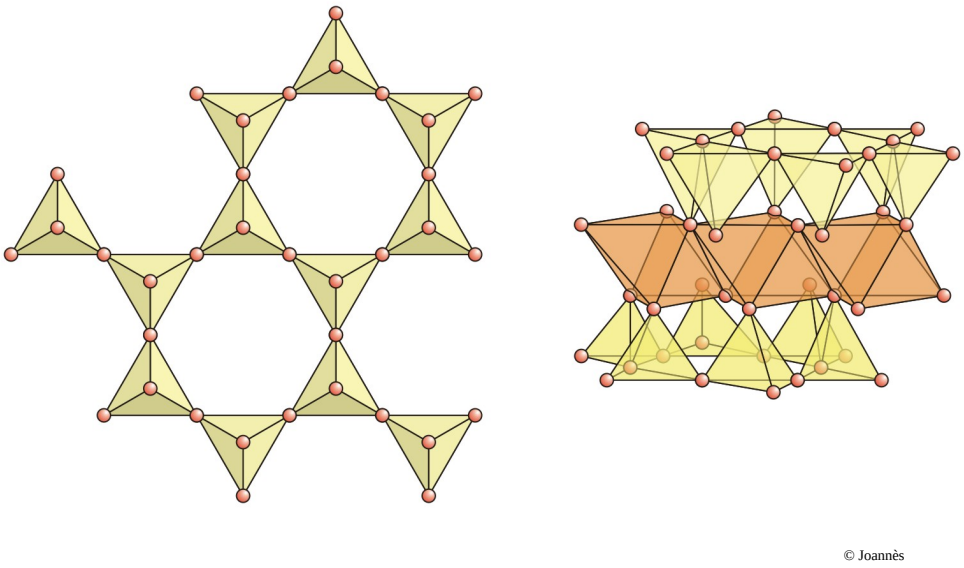


FIG. 4.8 – Motif hexagonal planaire des phyllosilicates et arrangement des feuillets de talc.

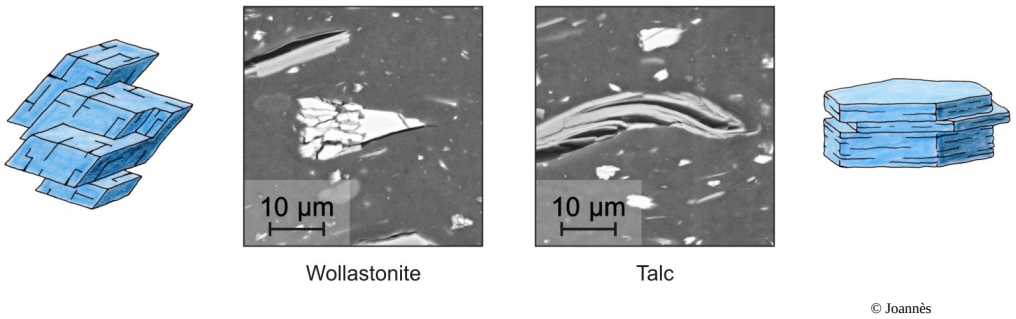


FIG. 4.9 – Schéma des plans de clivage de la wollastonite et du talc, mis en correspondance d'images obtenues en microscopie électronique.

4.2.1.4 Etude de l'anisotropie

La morphologie des charges de wollastonite (agrégats compacts allongés) et de talc (structures planes lamellaires) favorise leur orientation durant la mise en œuvre du joint. Les mécanismes sont assurément similaires à ceux que l'on retrouve pour les composites à fibres courtes lors de l'injection. En écoulement de cisaillement, la viscosité du polymère va donc avoir tendance à orienter les charges parallèlement à la direction du flux. Les charges subissent en fait un mouvement de rotation périodique et le cisaillement devient minimal lorsque celles-ci sont alignées avec l'écoulement (FIG. 4.10).

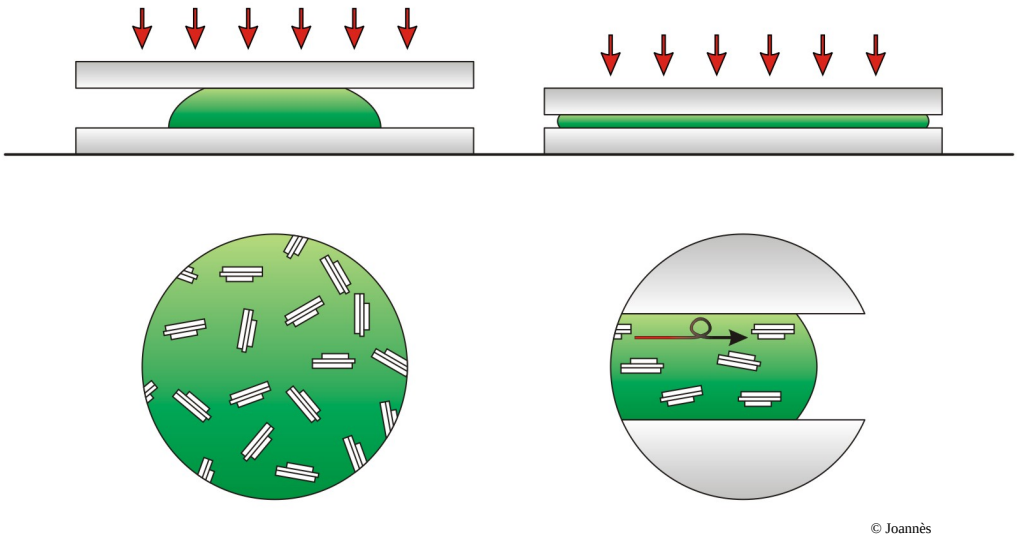


FIG. 4.10 – Mécanismes d'orientation des charges dans les plaques ou joints d'adhésif.

Compte tenu de ce phénomène d'anisotropie qui a pu être observé à maintes reprises, nous avons entrepris une étude visant à évaluer l'orientation pour différentes épaisseurs de joints. Couplées à l'analyse d'image, les cartographies de microanalyse X sont idéales pour ce genre d'étude. Des joints de 300, 900 et 1500 µm ont donc été préparés, cartographiés et traités de cette

manière (FIG. 4.11). Avec une technique de seuillage[17] adéquate, il est possible d'obtenir des cartes différentes pour chaque type de charge (FIG. 4.12).

© Joannès

FIG. 4.11 – Préparation d'une éprouvette destinée à la microanalyse X : bloc initial et coupe poli miroir d'un joint de 300 µm d'épaisseur.

Le module « Image Processing Toolbox » du logiciel Matlab® permet d'analyser des images binaires en fournissant un certain nombre d'informations sur les différentes régions[18] rencontrées. Le paramètre « orientation » qui nous intéresse ici correspond à l'angle formé entre l'axe horizontal et le grand axe d'une ellipse équivalente[19] à la région (FIG. 4.13). L'excentricité de cette ellipse renseigne sur le facteur de forme des charges.

Les résultats obtenus pour plusieurs centaines de charges font apparaître que la wollastonite et le talc présentent une excentricité proche de l'unité ; cela traduit des formes très allongées propices à une orientation privilégiée (TAB. 4.2 et FIG. 4.14).

	Aire moyenne (μm^2)	Excentricité moyenne
Wollastonite	157 ±149	0,82 ±0,15
Talc	163 ±149	0,96 ±0,04

TAB. 4.2 – Propriétés morphologiques des charges de wollastonite et de talc.

[17] Le seuillage est une méthode de segmentation qui permet d'isoler des objets dans l'image. Les problèmes d'effets de bords peuvent être résolus à l'aide de filtres d'érosion et de dilatation.

[18] Une région de l'image correspond à un groupe de pixels blancs « allumés » par opposition au fond noir « éteint ».

[19] L'équivalence porte sur les seconds moments (moments d'inerties) des surfaces de la région et de l'ellipse.

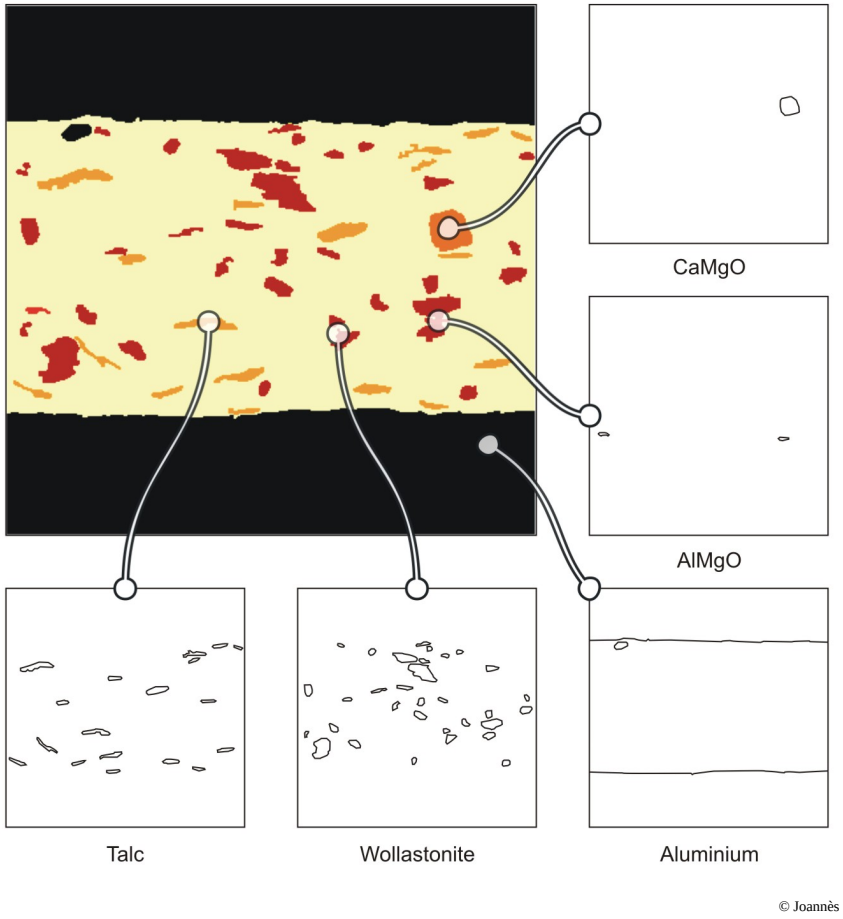


FIG. 4.12 – Technique de seuillage.

L'orientation des charges est effectivement très prononcée dans une direction parallèle aux surfaces des substrats. Par contre, contrairement à ce que l'on pouvait imaginer, la distribution est identique quelle que soit l'épaisseur du joint (FIG. 4.15). Nous retrouvons de même une fraction « surfacique » des charges constante[20] pour les trois épaisseurs étudiées. Les effets d'épaisseur ne proviennent donc pas directement de l'anisotropie observée mais celle-ci influence certainement le comportement macroscopique. A morphologie identique, une variation de confinement peut en effet avoir des conséquences importantes sur la répartition des contraintes.

[20]Tous les échantillons considérés ici sont issus d'un même lot de colle. D'après le formulateur, la fraction massique des charges peut légèrement varier d'un lot à l'autre.

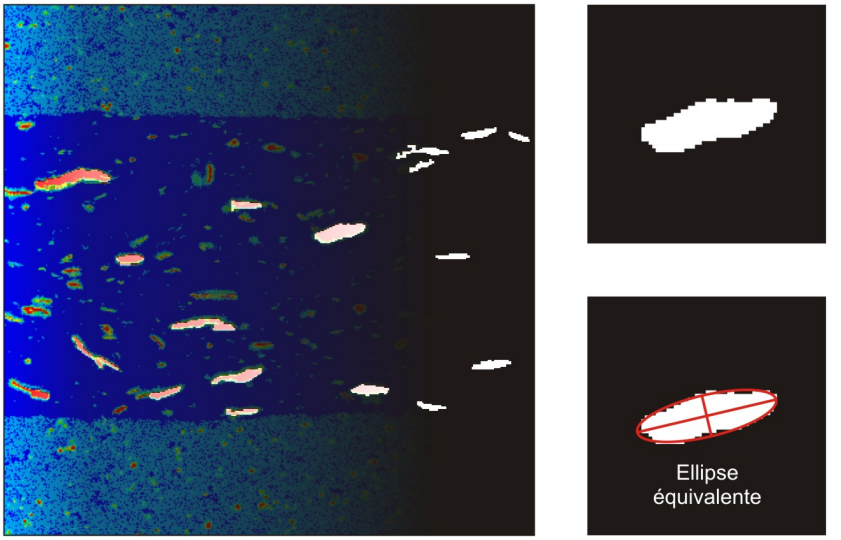


FIG. 4.13 – Ellipse équivalente.

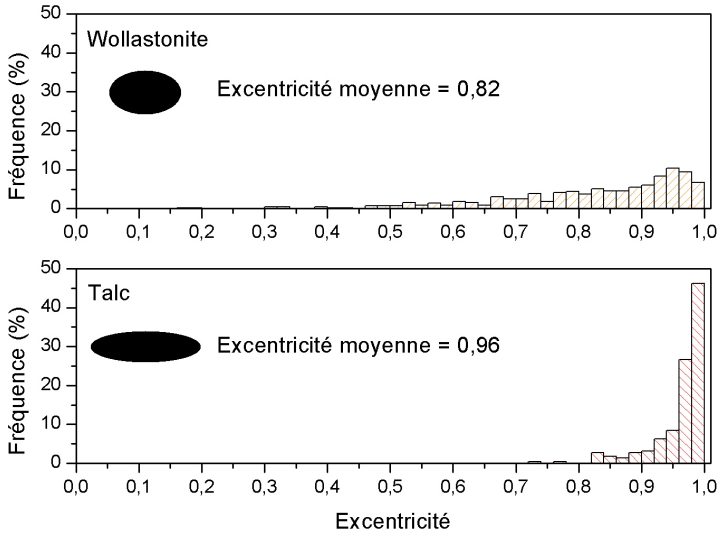


FIG. 4.14 – Distribution de l'excentricité des charges de wollastonite et de talc.

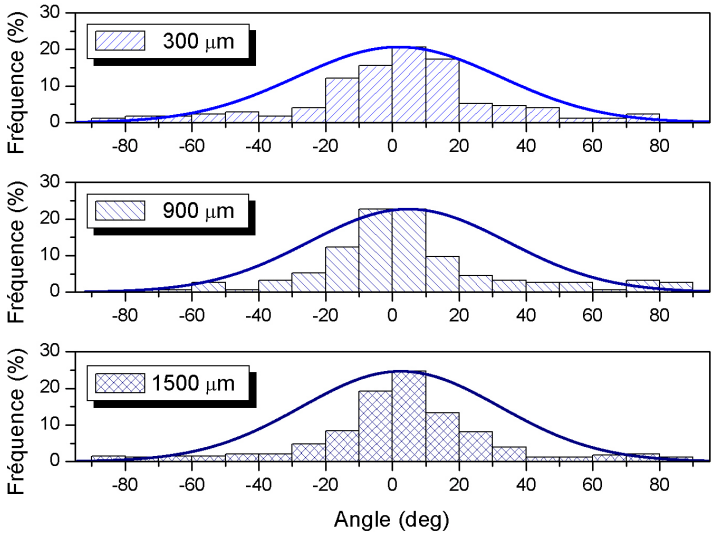


FIG. 4.15 – Distribution de l'orientation des charges minérales pour trois épaisseurs de joint. Les échelles sont identiques pour les trois graphiques.

4.2.2 Essais micro-mécaniques

Afin de comprendre les mécanismes microstructuraux à l'origine du comportement mécanique de l'adhésif β, des essais de traction et de cisaillement ont été conduits au sein de la chambre du MEB. Il s'agissait notamment de mieux appréhender l'influence de l'orientation des charges sur l'endommagement et la rupture.

4.2.2.1 Dispositif

Le MEB que nous avons utilisé dispose d'une platine de traction entièrement instrumentée, destinée à des observations mécaniques *in situ*. Outre l'électronique de commande, l'équipement est composé d'une cellule de charge de 250 daN et d'un capteur LVDT permettant de relever le déplacement de la partie mobile. Du fait de l'exiguïté de la chambre, les éprouvettes nécessitent des dimensions réduites. Deux configurations d'assemblage ont donc été développées en vue de procéder à des sollicitations de traction et de cisaillement (FIG. 4.16).

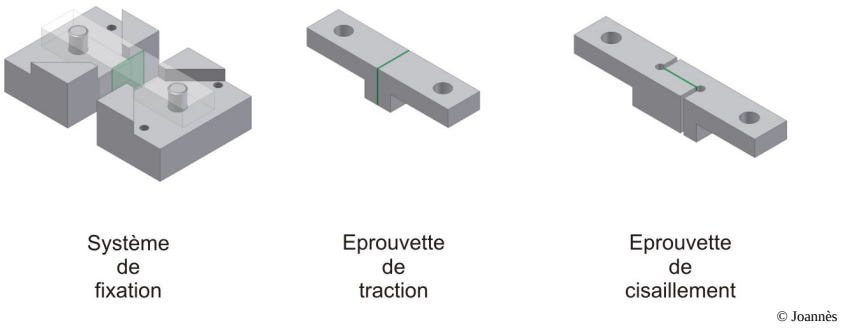


FIG. 4.16 – Eprouvettes destinées aux essais micro-mécaniques. D'une quarantaine de millimètres de longueur, celles-ci ont été dessinées pour favoriser la rupture au niveau de la zone d'observation.

Les éprouvettes présentent une géométrie dissymétrique favorisant la visualisation des phénomènes : en plus de la traction ou du cisaillement, un mode de flexion est introduit dans l'assemblage. Les contraintes maximales se trouvent ainsi localisées à la surface visible de l'éprouvette. La flexion additionnelle interdit cependant toute mise en correspondance directe entre les observations et le niveau de charge relevé.

Afin d'adapter les sollicitations à la vitesse de balayage, nous avons travaillé en imposant des paliers de charges progressifs. Les observations étaient alors réalisées en coupant l'asservissement de manière à limiter les parasites électro-magnétiques.

4.2.2.2 Résultats

Les images de la figure FIG. 4.17 montrent la progression de l'endommagement pour une sollicitation en cisaillement. La déformation imposée à l'éprouvette est en partie absorbée par le glissement des feuillets de talc les uns sur les autres. Les charges s'ouvrent alors progressivement (exfoliation) en formant un réseau de microfissures et de cavités par lesquelles

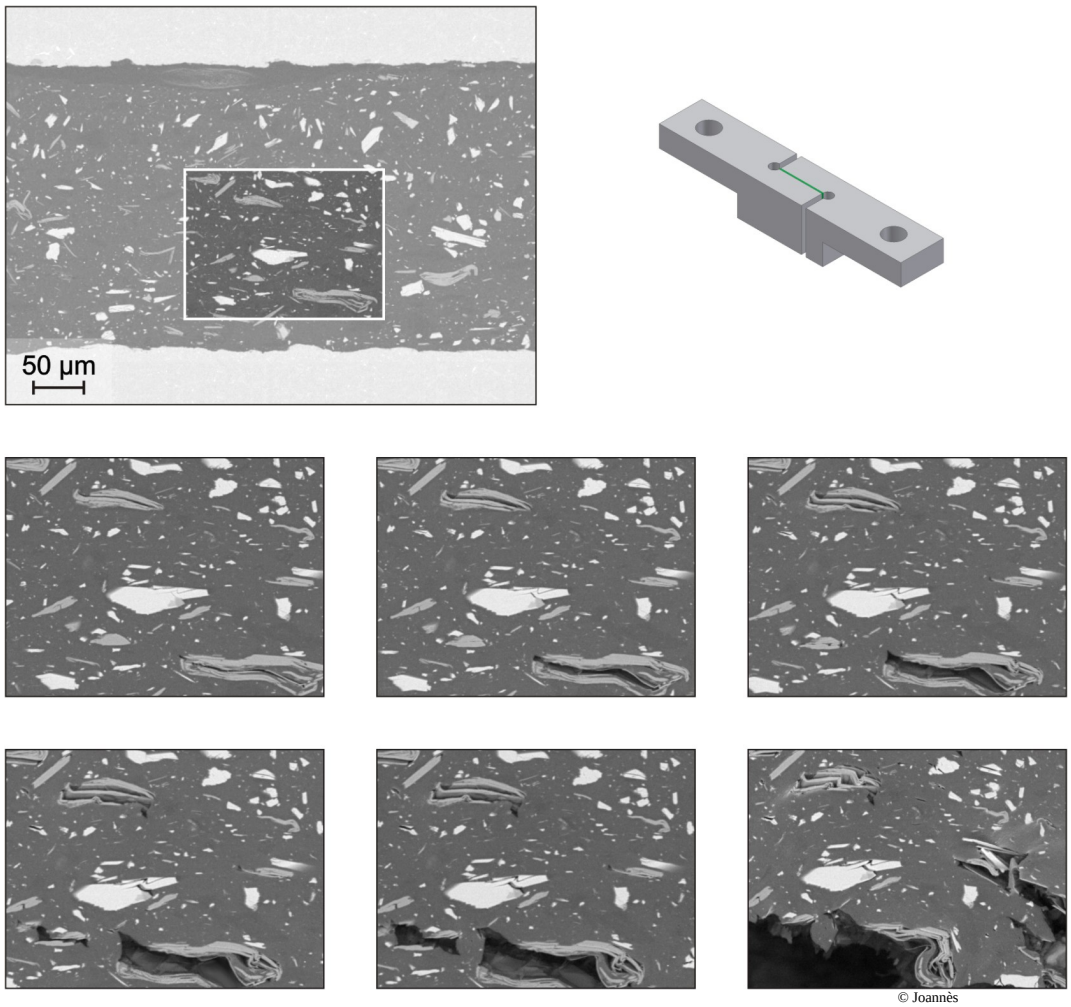


FIG. 4.17 – Les images (électrons rétrodiffusés) obtenues pendant un essai de cisaillement *in situ* sur assemblage permettent de visualiser les mécanismes d'endommagement pour des sollicitations croissantes jusqu'à la rupture.

la rupture (macrofissure) peut se propager. A plusieurs reprises nous avons pu observer que les fissures atteignant l'interface repartaient très rapidement, au cœur du joint, vers les zones denses en talc. Les mécanismes en traction sont similaires : la déformation est tout d'abord réduite à l'ouverture des charges qui forment des ilôts de microfissures ; lorsque le niveau de contrainte devient trop important, une macrofissure se transmet de proche en proche à l'ensemble du joint (FIG. 4.18). Ces observations expliquent notamment que les faciès de rupture pour l'adhésif β soient toujours de types cohésifs. Tout en absorbant la déformation, le talc affaiblit le joint.

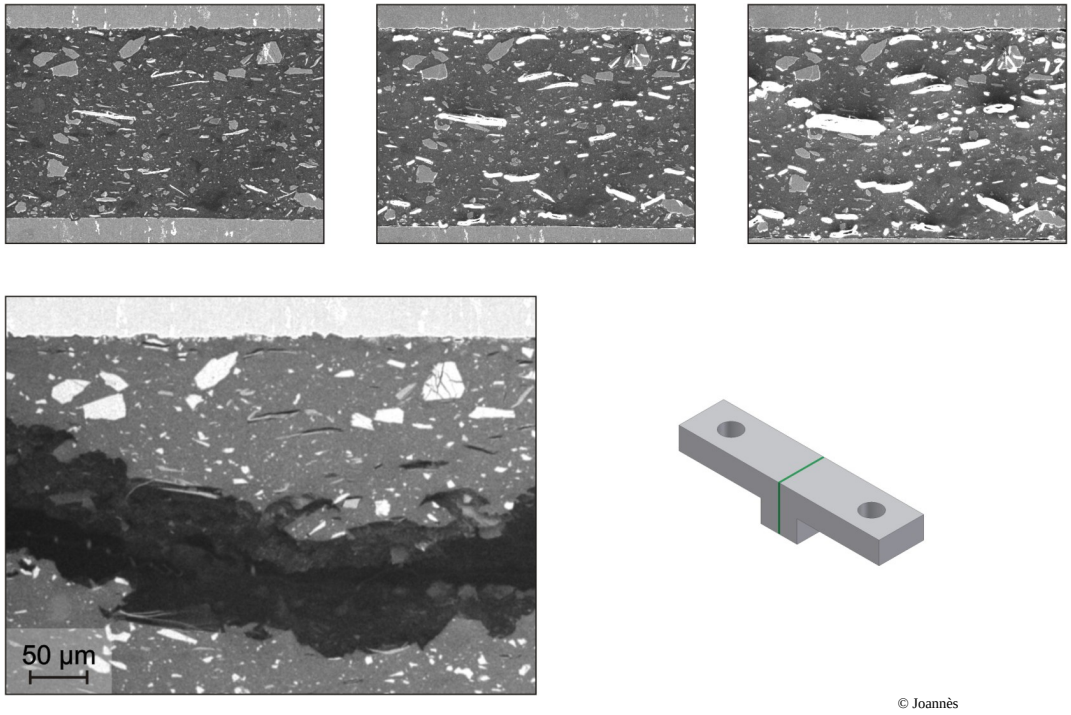


FIG. 4.18 – Visualisation en microscopie électronique de l'évolution de l'endommagement lors d'un essai de traction *in-situ*. Sur les trois premières images, l'observation des électrons secondaires permet de saisir la moindre variation topographique de la surface.

4.3 Influence des charges minérales sur les effets d'épaisseur

Les observations micro-mécaniques précédentes nous ont permis de repousser certaines hypothèses concernant les effets d'épaisseur. Pour les assemblages considérés, la zone d'interphase chimique présente en effet une étendue bien trop limitée pour pouvoir expliquer seule les phénomènes rencontrés. De même, si l'orientation des charges de l'adhésif β peut conduire à une anisotropie du comportement, nous avons montré qu'en aucun cas cette orientation joue un rôle direct sur les effets d'épaisseur. Par contre, l'hétérogénéité de la microstructure couplée au confinement influence la répartition des contraintes et notamment des contraintes résiduelles. Après réticulation, celles-ci se répartissent sous la forme d'un gradient dont les valeurs maximales sont atteintes au niveau des interfaces. Plus l'épaisseur du joint est faible, plus le taux de contrainte moyen est élevé. Lorsque l'épaisseur du joint augmente, il devient possible de négliger les effets interfaciaux devant le comportement global.

Conformément aux observations micro-mécaniques, nous pouvons supposer que le champ de contraintes résiduelles est en parti absorbé par l'ouverture des charges minérales et notamment du talc. L'orientation de celui-ci parallèlement aux interfaces favoriserait l'amorce d'un endommagement anisotrope qui pourrait être responsable des chutes de propriétés dans le cas des joints fins. Afin de vérifier cette hypothèse et rendre compte du rôle des charges pour les

effets d'épaisseur, nous avons entrepris d'étudier les points suivants :

- manifestation de l'endommagement dû à des contraintes d'origine thermique,
- caractérisation mécanique d'une formulation « allégée » de l'adhésif β que nous noterons β_{NC} pour « non chargé »,
- évaluation de l'endommagement initial par mesures ultrasonores sur les adhésifs β et β_{NC}.

4.3.1 Effets des contraintes thermiques

La réticulation de l'adhésif β est activée thermiquement et s'effectue à 180 °C. A cette température, les transformations chimiques du polymère induisent les premières contraintes résiduelles. Le refroidissement jusqu'à la température ambiante achève de contraindre l'adhésif par des contractions différentielles entre les différents constituants. C'est ce deuxième phénomène que nous allons traiter.

4.3.1.1 Simulation numérique

Afin de mieux appréhender la répartition des contraintes issues de la réticulation, nous avons simulé un refroidissement de 180 °C à 20 °C sur une microstructure réelle. Le maillage a pu être obtenu par l'intermédiaire des cartographies de microanalyse X. Il a tout d'abord fallu vectoriser les régions binaires issues de l'analyse d'image afin d'obtenir des domaines numériques pour chaque type de constituant (aluminium, polymère, charges). Ces domaines ont ensuite été maillés en deux dimensions avec une méthode frontale[21] classique et des éléments linéaires à quatre nœuds (FIG. 4.19). Enfin, des propriétés d'élasticité ont été attribuées à chaque domaine conformément aux données[22] du tableau TAB. 4.3.

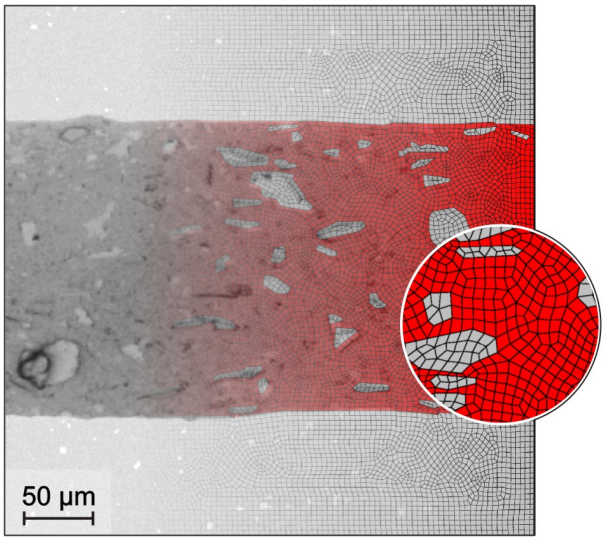


FIG. 4.19 – Maillage d'une microstructure réelle obtenue à partir des cartographies de microanalyse X.

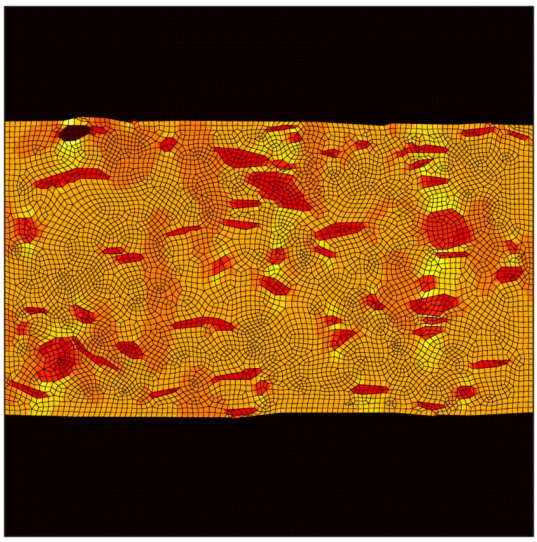
[21] Advancing front method.
[22] [NAUDIN et CLOZZA, 1987], [WATERMAN et ASHBY, 1991]

		Aluminium (substrats)	Polymère (matrice)	Charges
Module d'Young	E (MPa)	69000	2000	8000
Module de Coulomb	G (MPa)	26500	770	3000
Coefficient de dilatation thermique	α (10^{-6} °C^{-1})	23	50	6,5

TAB. 4.3 – Paramètres thermo-mécaniques destinées à la simulation numérique du refroidissement d'un joint d'adhésif. L'approche étant plus qualitative que quantitative, nous n'avons pas tenu compte de la variation des modules d'élasticité en fonction de la température.

Pour ce calcul thermo-mécanique nous avons fait l'hypothèse des déformations planes et les bords du maillage ont été encastrés pour modéliser les symétries géométriques. A l'issue du calcul, les contraintes résiduelles apparaissent naturellement près des interfaces et autour des charges (FIG. 4.20). Dans ces conditions, nous pouvons aisément concevoir que le talc se clive en fines lamelles conduisant à l'initiation d'un réseau de microfissures. Cet endommagement local sera d'autant plus important que les épaisseurs des joints seront faibles.

La conséquence des contraintes résiduelles aux interfaces est parfois avancée pour expliquer les notions d'interphases[23]. Pour l'adhésif β, l'orientation des charges de talc renforce ce phénomène.



© Joannès

FIG. 4.20 – Répartition des contraintes de von Mises à la suite d'un refroidissement de 180 °C à 20 °C. Plus la couleur est foncée, plus le domaine concerné est sollicité.

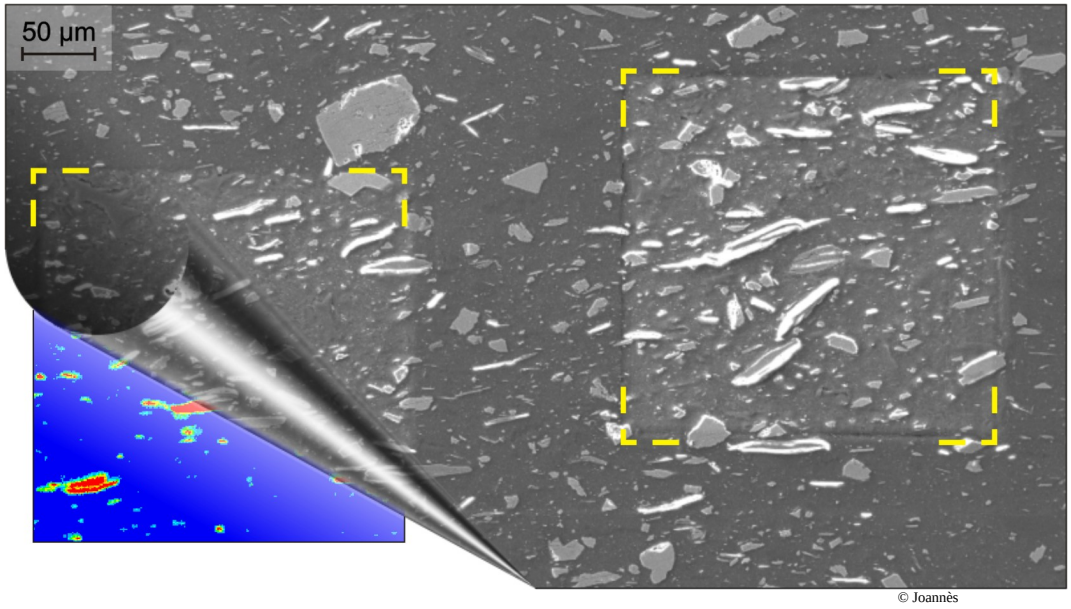


FIG. 4.21 – Observation de l'endommagement en microscopie électronique à balayage (électrons secondaires) après analyse en microanalyse X. Les zones qui ont été balayées par le faisceau sont clairement identifiables.

4.3.1.2 Observation du phénomène

Nous avons pu visualiser ce phénomène d'endommagement d'origine thermique sur les joints préalablement analysés à la microsonde. Le bombardement d'électrons a en effet conduit à un échauffement local important[24]. Sur la figure FIG. 4.21, les zones qui ont été balayées par le faisceau sont clairement identifiables : contrairement au reste de l'échantillon, les charges de talc y sont toutes exfoliées. Lorsque cette exfoliation ne suffit plus à absorber les déformations, les microfissures se propagent à la matrice époxy (FIG. 4.22).

[23] [HAHN, 1984], [BOUCHET *et al.*, 1999]
[24] L'échauffement produit est difficilement quantifiable.

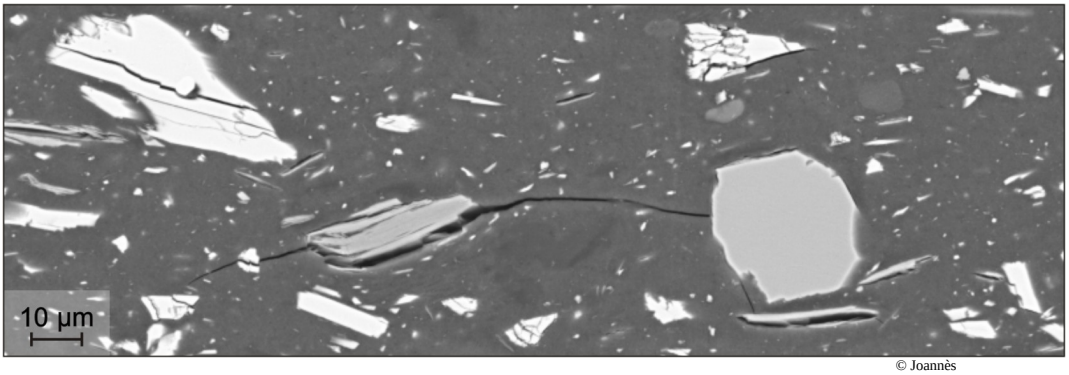


FIG. 4.22 – Observation de l'endommagement en microscopie électronique à balayage (électrons rétrodiffusés) après analyse en microanalyse X. Les microfissures qui se sont propagées à la matrice époxy n'apparaissent pas sur l'image réalisée en microscopie optique avant analyse (FIG. 4.5).

4.3.2 Caractérisation mécanique de l'adhésif β_{NC}

Le rôle indirect joué par les charges minérales semble primordial pour les effets d'épaisseur. Dans le but d'évaluer cette influence, nous nous sommes intéressés à une résine DGEBA-DDA non chargée désignée par β_{NC}.

La caractérisation de cette résine brute à l'état massif fait tout d'abord apparaître des propriétés d'élasticité presque deux fois plus basses que celles de l'adhésif chargé (TAB. 4.4). Dans ces conditions, le rôle globalement renforçant des charges minérales est indéniable.

		Adhésif β	Adhésif β_{NC}
Module d'Young	E (MPa)	2500 ± 190	1350 ± 150
Module de Coulomb	G (MPa)	965 ± 110	500 ± 75
Coefficient de Poisson	ν	0,30 ± 0,05	0,35 ± 0,05

TAB. 4.4 – Comparaison des propriétés élastiques des adhésifs β et β_{NC} à l'état massique.

En ce qui concerne les assemblages, nous avions montré que pour des joints inférieurs à 700 µm les propriétés d'élasticité de l'adhésif β subissent une chute conséquente. Pour l'adhésif non chargé β_{NC}, les résultats sont différents : il n'y a presque pas de variation des modules (FIG. 4.23 et FIG. 4.24).

Les valeurs sur assemblages sont assez stables et très légèrement inférieures à celles obtenues sur les échantillons massifs : une bonne concordance du module d'Young et moins de 8% d'écart pour le module de Coulomb. Pour les épaisseurs importantes le module de Coulomb supposé est bien inférieur à celui de l'adhésif chargé (FIG. 4.25). En revanche, pour des épaisseurs inférieures à 300 µm, nous observons une inversion des performances au profit de la résine brute. Cela

conforte notre hypothèse en indiquant que les charges minérales semblent bien à l'origine des effets d'épaisseurs.

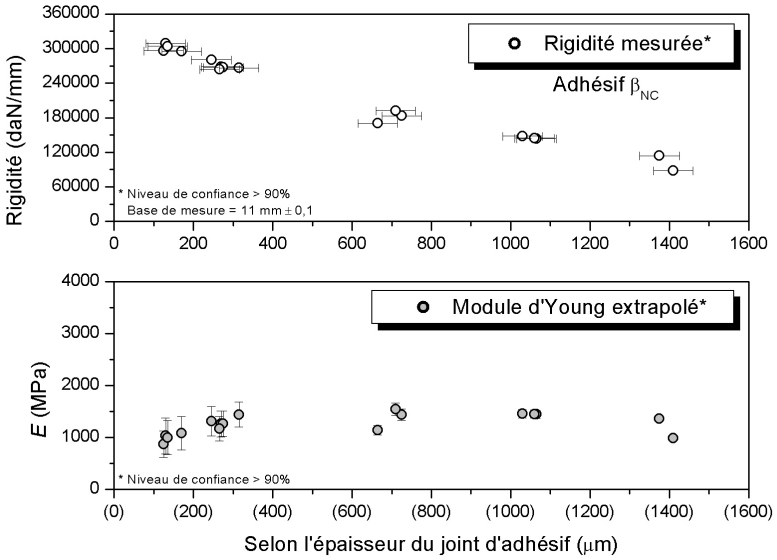


FIG. 4.23 – Evaluation du module d'Young de l'adhésif non chargé β_{NC} selon l'épaisseur du joint à partir de la rigidité mesurée.

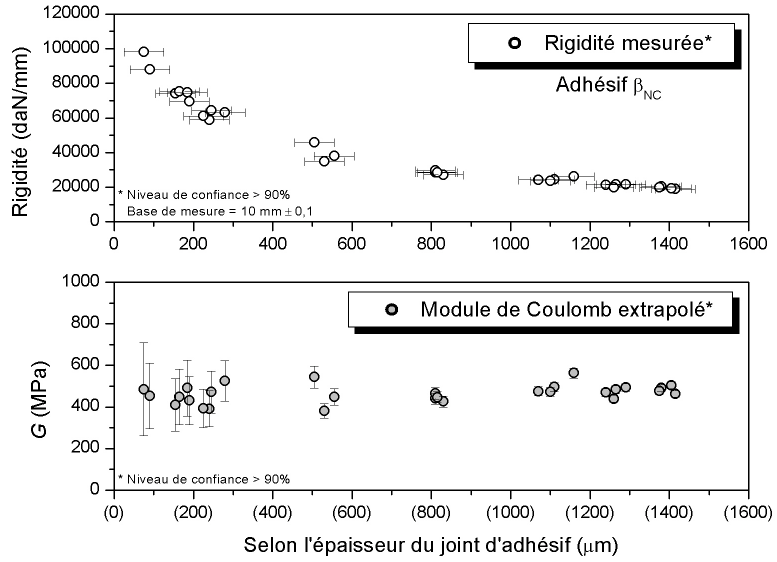


FIG. 4.24 – Evaluation du module de Coulomb de l'adhésif non chargé β_{NC} selon l'épaisseur du joint à partir de la rigidité mesurée.

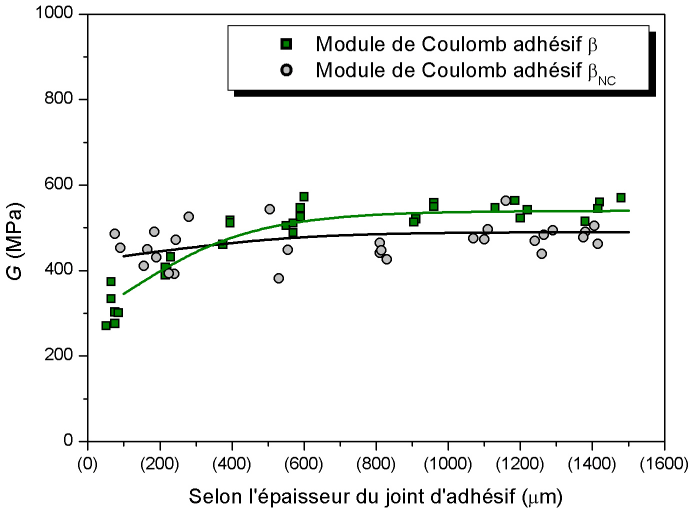


FIG. 4.25 – Comparaison des modules de Coulomb obtenues pour les adhésifs β et β_{NC} selon l'épaisseur du joint. La chute des propriétés de l'adhésif chargé est clairement mise en évidence.

4.3.3 Evaluation de l'endommagement par mesures ultrasonores

Les résultats précédents confortent l'hypothèse selon laquelle la chute des propriétés de l'adhésif β serait due à un endommagement initial plus ou moins important. Du fait des échelles concernées, il est cependant très difficile de pouvoir observer ce phénomène en microscopie et il est encore moins évident d'estimer la densité des microfissures en fonction de l'épaisseur du joint.

En tant que méthodes non destructives, les techniques ultrasonores sont utilisées depuis de nombreuses années pour détecter des défauts sur des pièces mécaniques. La propagation des ondes ultrasonores est en effet affectée par la présence de discontinuités comme des cavités, des hétérogénéités ou des microfissures.

4.3.3.1 Les ondes ultrasonores

La production d'ondes ultrasonores se fonde sur le principe de piézoélectricité : lorsqu'un cristal est soumis à un champ électrique périodique, il se déforme et produit des ondes mécaniques de périodicité identique à celle du courant excitateur. Si cette perturbation est transmise à un solide, des ondes élastiques prennent naissance et se propagent dans le milieu. On distingue généralement deux types d'ondes : les ondes planes susceptibles de se propager à l'intérieur d'un solide et les ondes de surface. Dans le but d'évaluer l'endommagement au cœur de l'adhésif, seules les ondes planes polarisées rectilignement nous intéressent. Parmi ces ondes planes, il existe les ondes longitudinales et les ondes transversales.

Les ondes longitudinales, appelées aussi ondes de traction/compression, possèdent une direction de polarisation parallèle au sens de propagation. Elles présentent la vitesse de phase la plus élevée C_L mais celle-ci dépend des dimensions transversales du milieu solide dans lequel

l'onde se propage. En effet, les conditions aux limites sur la surface du faisceau ultrasonore sont primordiales. Lorsque l'onde intéresse toute la section de l'échantillon, celui-ci fait notamment office de guide d'ondes.

Comme leur nom l'indique, les ondes transversales ou de cisaillement ont une direction de polarisation perpendiculaire à la direction de propagation. Nous noterons C_T la célérité de ces ondes qui ne dépend pas des dimensions transversales du milieu.

L'équation de propagation de l'acoustique linéaire établit une relation entre les propriétés des ondes acoustiques se propageant dans un milieu et les propriétés mécaniques de ce milieu. Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope, les célérités C_L et C_T s'expriment facilement en fonction des paramètres d'élasticité. Si l'onde se propage à l'intérieur d'un massif de grandes dimensions vis-à-vis de celles du faisceau, la célérité longitudinale est donnée par la relation (4.1). La valeur de C_T (4.2) est indépendante des dimensions transversales de l'échantillon. λ et μ correspondent aux coefficients de Lamé du milieu de propagation et ρ désigne sa masse volumique.

$$C_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{4.1}$$

$$C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{4.2}$$

Lorsque le milieu est dispersif, les vitesses de phase varient avec la fréquence et une partie des ondes est absorbée et/ou diffractée par le milieu. Toute discontinuité de la matière perturbe la propagation de l'onde. C_L et C_T sont donc directement source d'informations sur les propriétés microstructurales du matériau. Par comparaison des vitesses de phase sur des joints de différentes épaisseurs, nous avons cherché à mettre en évidence un endommagement initial sur l'adhésif β qui serait quasi inexistant sur la formulation non chargée β_{NC}.

4.3.3.2 Protocole expérimental et résultats

Les échantillons sont constitués de deux substrats de 10 mm d'épaisseur, dont la géométrie permet d'obtenir un joint calibré par l'intermédiaire de cales (FIG. 4.26). Après réticulation, les extrémités des substrats sont découpées afin d'obtenir des blocs de formes identiques. L'influence des surfaces libres sur la propagation des ondes longitudinales est ainsi équivalente pour toutes les configurations. Pour chaque adhésif (β et β_{NC}), une série de 8 blocs a été réalisée avec des épaisseurs cibles de 100, 300, 500, 700, 900, 1100, 1300 et 1500 µm. L'épaisseur réelle du joint est obtenue par le différentiel existant entre les dimensions[25] des substrats et l'épaisseur du bloc final. Pour ces mesures, nous avons atteint une précision de l'ordre de ±10 µm.

L'instrumentation des échantillons consiste à placer un émetteur d'ondes ultrasonores sur une face et un récepteur sur la face opposée (FIG. 4.27). Un fluide coupleur est déposé entre les transducteurs et la surface de l'échantillon afin d'améliorer le coefficient de transmission. Le

[25]Le même outil de mesure a été utilisé pour conduire cette évaluation dans le but d'éliminer les erreurs systématiques.

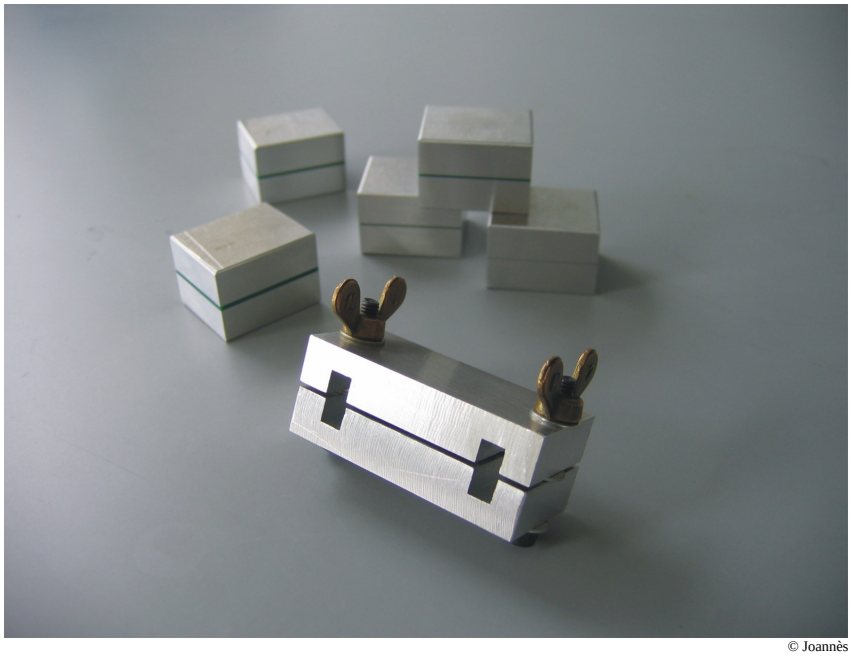

© Joannès

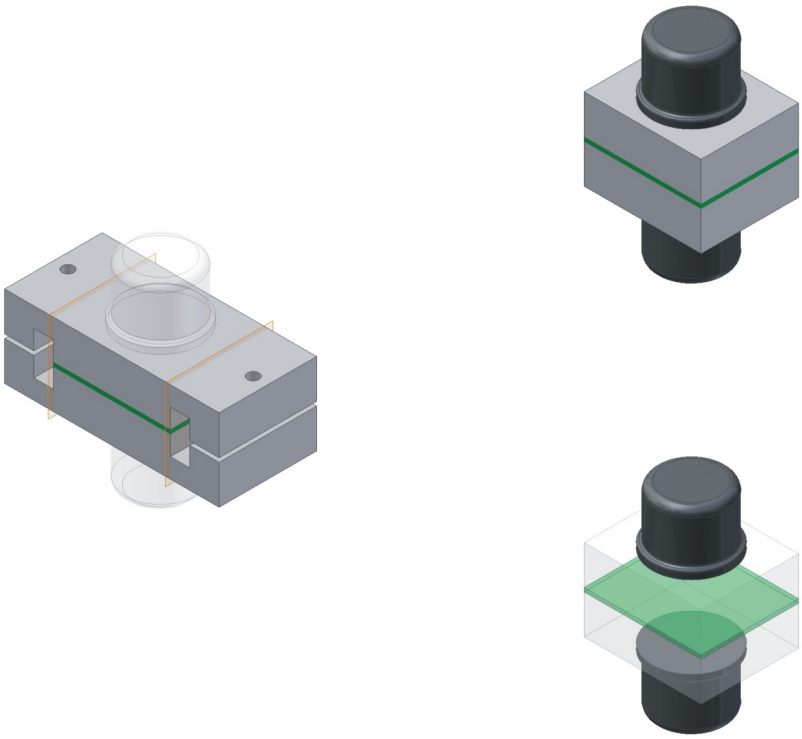
FIG. 4.26 – Les échantillons destinés aux essais ultrasonores sont constitués de deux substrats de 10 mm d'épaisseur et d'un joint calibré par l'intermédiaire de cales étalons.

récepteur permet d'évaluer le temps de propagation de l'onde Δt et ainsi remonter aux célérités C en utilisant l'épaisseur e (4.3).

$$\begin{aligned} C_{\text{adhésif}} &= \frac{e_{\text{adhésif}}}{\Delta t_{\text{adhésif}}} \quad \text{avec} \quad \Delta t_{\text{adhésif}} = \Delta t_{\text{total}} - \Delta t_{\text{substrats}} \\ C_{\text{adhésif}} &= \frac{e_{\text{adhésif}}}{\Delta t_{\text{total}} - \dfrac{e_{\text{substrats}}}{C_{\text{substrats}}}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pour cette étude, nous avons utilisé des substrats en alliage d'aluminium (AlSi7Mg) et en acier (C10). Les vitesses de phase longitudinale et transversale de ces matériaux ont pu être mesurées sur les substrats seuls (TAB. 4.5). Il est intéressant de noter que la géométrie considérée permet de faire l'hypothèse que les ondes longitudinales se propagent dans un massif infini. Nous pouvons en effet remonter aux propriétés élastiques des alliages employés en appliquant les relations (4.1) et (4.2). Sur assemblage, le matériel utilisé ne nous a pas permis de traiter la propagation des ondes dans l'acier pour des épaisseurs de joints supérieures à 900 µm : le faisceau incident n'étant pas assez énergétique pour tout traverser.

Pour l'adhésif β, la chute des célérités longitudinales et transversales lorsque l'épaisseur du joint diminue traduit une hétérogénéité de plus en plus importante du milieu (FIG. 4.28). A faible épaisseur, nous pouvons supposer qu'un réseau de microfissures (endommagement initial) perturbe la propagation des ondes. Il est important de noter que, contrairement à ce que



© Joannès

FIG. 4.27 – L'instrumentation des échantillons consiste à enserrer l'assemblage entre deux transducteurs ultrasonores.

		Alliage d'aluminium (AlSi7Mg)	Acier (C10)
Ondes longitudinales	C_L (m/s)	6290 ±20	5910 ±20
Ondes transversales	C_T (m/s)	3170 ±20	3220 ±20

TAB. 4.5 – Vitesses de phase longitudinale et transversale dans les deux types de substrats.

l'on pouvait imaginer, les mêmes résultats ont été obtenus sur des échantillons massifs. Cela traduit tout d'abord le fait que les effets d'épaisseur apparaissent bien lors de la réalisation des joints et sont également présents pour des plaques de faible épaisseur. Mise à part la nature des substrats, le procédé de mise en œuvre est effectivement analogue pour ces deux configurations. Ce phénomène tend également à confirmer l'anisotropie du comportement induit par l'orientation des charges.

Comme nous pouvions le supposer, les mesures menées sur l'adhésif non chargé β_{NC} ne font pas apparaître de chute sur les célérités (FIG. 4.29).

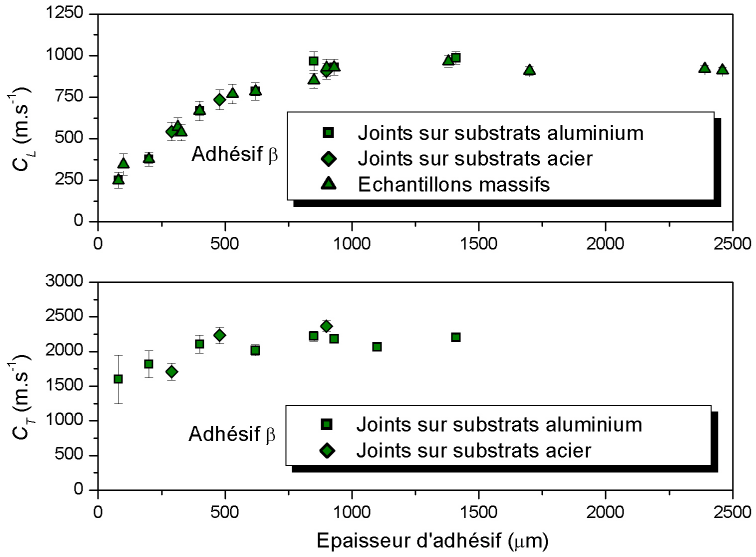


FIG. 4.28 – Evolution des vitesses de phase au sein de l'adhésif β selon son épaisseur. La chute de célérité observée peut être mis en correspondance avec les résultats de caractérisation mécanique.

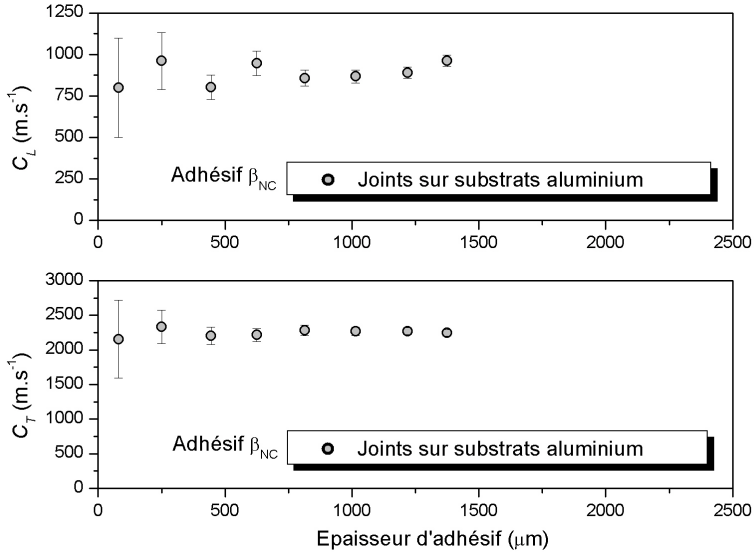


FIG. 4.29 – Evolution des vitesses de phase au sein de l'adhésif β_{NC} selon son épaisseur. Aucune chute de célérité n'apparaît.

4.3.4 Au delà des effets d'épaisseur…

Au terme de cette étude[26], il est naturel de se demander quel est réellement l'intérêt d'introduire des charges minérales qui induisent une perte des propriétés mécaniques, précisément sur la plage des épaisseurs pratiquées (FIG. 4.25). Il convient tout d'abord de relativiser cette perte qui influence relativement peu la rigidité de l'assemblage.

[26]Egalement disponible dans les articles [JOANNÈS *et al.*, 2006] et [MARIO *et al.*, 2006].

Il est ensuite essentiel de considérer cette interrogation dans un contexte élargi : les charges minérales permettent en premier lieu d'adapter le polymère aux contraintes industrielles. Qu'il s'agisse de la viscosité, de la tenue à l'humidité ou de la capacité du polymère à absorber une faible quantité d'huile, la présence des charges minérales est fondamentale si l'on souhaite optimiser les performances. Un autre aspect concerne le caractère déterministe de la rupture. L'adhésif chargé β présente en effet une rupture cohésive dont la survenue est relativement répétitive (FIG. 4.30).

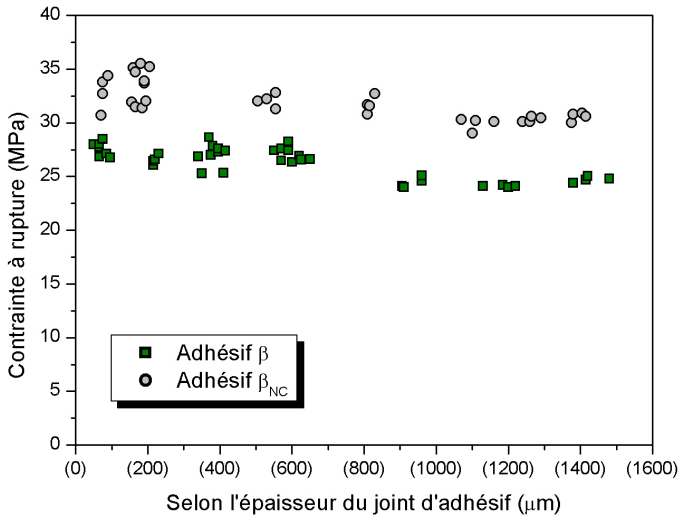
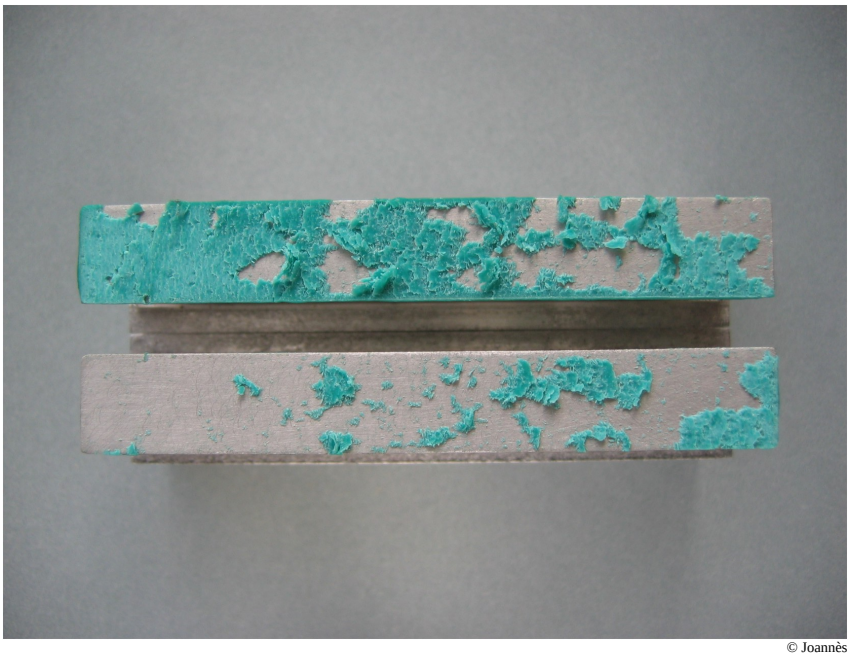


FIG. 4.30 – Evolution de la contrainte à rupture en cisaillement sur les adhésifs β et β_{NC} selon l'épaisseur du joint. L'adhésif β présente une rupture dont la survenue est relativement indépendante de l'épaisseur. Le talc agit comme un « fusible » dont le pouvoir de coupure est prédéterminé.

Bien que la contrainte à rupture de l'adhésif β_{NC} soit supérieure à celle de la formulation commerciale β (FIG. 4.30), le faciès évoque constamment une rupture adhésive (FIG. 4.31). Dans l'esprit collectif ce type de rupture est généralement synonyme d'un mauvais collage et il est effectivement plus sécurisant de travailler avec des événements déterministes. Si les propriétés d'élasticité dépendent du degré d'endommagement, la rupture est conditionnée par un taux de défauts qu'il convient donc de maîtriser. De manière imagée, le talc agit comme un « fusible » dont le pouvoir de coupure est prédéterminé.



© Joannès

FIG. 4.31 – Faciès de rupture de type adhésive sur une éprouvette CdM en alliage d'aluminium assemblée avec l'adhésif non chargé β_{NC} (épaisseur du joint de l'ordre de 300 µm).

Deuxième partie

Modélisation du comportement de l’adhésif

POUVOIR COMPRENDRE *et deviner les réactions de la nature qui nous entoure. De tous temps, les Hommes ont cherché à représenter les phénomènes physiques qu'ils observaient en formulant des lois et des principes. Capitalisés au fil des découvertes, ces fondements scientifiques permettent aujourd'hui de bâtir des modèles cohérents.*

Le cinquième chapitre présente le cadre général d'écriture du modèle de comportement mécanique de l'adhésif. En se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations, l'objectif est de rappeler le formalisme associé à une approche phénoménologique basée sur la thermodynamique des milieux continus.

S'appuyant sur les observations expérimentales, le sixième chapitre propose un modèle de comportement dérivé du critère de Drucker-Prager. Les mécanismes d'endommagement à l'origine de l'anisotropie du comportement sont pris en compte de manière spécifique. L'implémentation du modèle est réalisée grâce au pré-processeur ZebFront du code ZéBuLoN et une procédure d'identification des paramètres est exposée.

Chapitre 5

Modèle de comportement : concepts généraux

5.1 Introduction

Un modèle[1] de comportement s'attache à décrire les phénomènes physiques qui interviennent lors de la mise en œuvre ou l'évolution en service des matériaux. Diverses approches permettent d'élaborer de tels modèles mais, afin de rendre compte du couplage existant entre les propriétés mécaniques et la microstructure, nous adopterons une description phénoménologique. Cette approche s'appuie sur l'identification des principaux mécanismes responsables de la ruine du matériau mis en évidence expérimentalement. Bien entendu, à travers cette démarche, la pertinence du modèle repose sur le choix des phénomènes à prendre en considération. Pour ne pas proposer des lois trop complexes faisant intervenir un grand nombre de paramètres, il ne faut retenir que les phénomènes susceptibles de jouer un rôle significatif sur le comportement. Le modèle est alors indissociable de l'application envisagée et des principes et hypothèses de base servant de cadre général.

L'objectif de ce chapitre est donc de rappeler les notions élémentaires pour la définition des modèles phénoménologiques élasto-visco-plastiques. Ces modèles s'expriment généralement sous forme différentielle et permettent donc de tenir compte du caractère héréditaire de certains phénomènes. Dans ce contexte, l'approche thermodynamique des processus irréversibles des milieux continus offre un cadre conceptuel homogène et cohérent. Reposant sur des principes fondamentaux que nous ne pouvons pas transgresser, la *méthode de l'état local* proposée par P. GERMAIN[2] permet d'associer aux mécanismes microstructuraux du matériau des variables internes qui concentrent les informations importantes. Cette méthode est très largement utilisée

[1] Il convient ici de préciser le sens physique du vocabulaire que nous utiliserons par la suite :
- un *modèle* représente la structure perceptible d'« une réalité ». Pour un domaine de validité fixé, il existe des rapports de similitude entre les grandeurs mesurables expérimentalement et celles du modèle qui peuvent être calculées *a priori* ; le modèle revêt un aspect prévisionnel. Un modèle est bâti autour de *lois* et respecte des *principes* (ex. Modèle de comportement de monocristal).
- le *principe* est à la physique ce que l'axiome est aux mathématiques et le dogme à la religion. Il s'agit d'une relation générale non démontrée mais vérifiée dans ses conséquences (ex. Principe fondamental de la dynamique).
- une *loi* établit une relation générale entre plusieurs variables (ex. Loi de Hooke).

[2] [GERMAIN, 1973]

pour l'analyse du comportement des matériaux métalliques sous chargements complexes. Bien que les origines physiques des processus irréversibles soient différentes dans les matériaux organiques, le même formalisme peut-être appliqué. Combinées à la méthode de l'état local, d'autres hypothèses importantes seront présentées dans la section 5.3.

La description d'un modèle de comportement élasto-visco-plastique classique[3] nécessite au minimum la définition de trois éléments constitutifs :

- une *loi élastique* qui donne l'état de contrainte du matériau en fonction de son état de déformation élastique.
- un seuil qui sépare le domaine élastique, à l'intérieur duquel le comportement est purement *réversible*, du domaine élasto-visco-plastique[4] dans lequel se produisent des transformations *irréversibles*. Le seuil, généralement appelé *critère de plasticité*, peut être décrit par une fonction convexe[5] à valeurs réelles. Cette fonction, baptisée *fonction de charge*[6], prend des valeurs négatives dans le domaine élastique.
- une *loi d'écoulement* qui, comme son nom l'indique, caractérise la direction[7] de l'écoulement du matériau lorsque le seuil est dépassé. En général, une partie de la déformation totale étant réversible, la loi d'écoulement ne décrit que l'évolution de la partie irréversible de la déformation. On parle alors de déformations *inélastiques*. Ces dernières altèrent habituellement la taille et la forme du seuil. Pour rendre compte de cette modification, la fonction de charge est écrite grâce à des variables supplémentaires : les variables d'écrouissage. Il est dans ce cas nécessaire de spécifier l'évolution de ces variables par l'intermédiaire des *lois d'écrouissage*. La loi élastique, le critère de plasticité, les lois d'écoulement ainsi que les lois d'écrouissage constituent les *lois de comportement*, briques essentielles à la construction des modèles phénoménologiques.

Etablir un modèle de comportement consiste donc à répondre aux deux questions suivantes :

Quand y-a-t'il déformation plastique ?
(critère de plasticité, lois d'écrouissage)

Comment s'effectue cette déformation plastique ?
(loi d'écoulement)

Avant de traiter de la formulation des lois de comportement (§ 5.3), il convient de préciser le cadre de travail en rappelant sous une forme condensée (§ 5.2) tous les concepts de base qui seront utilisés par la suite.

[3] [LEMAITRE et CHABOCHE, 1985], [FRANÇOIS *et al.*, 1991], [BESSON *et al.*, 2001]

[4] Un modèle purement plastique peut être obtenu par le « passage à la limite » d'un modèle visco-plastique (§ 5.3.4).

[5] Le domaine représentatif de cette fonction est tel que tout segment reliant deux points du domaine se trouve à l'intérieur du domaine.

[6] Ou *surface de charge*.

[7] Et son intensité dans le cas d'un modèle élasto-visco-plastique.

5.2 Rappels de thermodynamique

5.2.1 Thermodynamique et processus irréversibles

La thermodynamique est née au début de l'ère industrielle de la nécessité d'optimiser le fonctionnement des machines à vapeur. La portée universelle des principes qui la fondent lui ont rapidement permis de dépasser le cadre historique des machines thermiques pour traiter des transformations qui affectent l'énergie d'un système en évolution. La thermodynamique complète aujourd'hui les autres disciplines de la physique et son application en vue de la modélisation du comportement d'un matériau consiste donc à faire un bilan d'énergie du milieu considéré. La formulation d'une loi de comportement est alors guidée par le respect des deux premiers principes : conservation de l'énergie et accroissement de l'entropie du système.

La discipline présentée communément sous le nom de « thermodynamique classique » ne s'intéresse en général qu'aux systèmes homogènes en équilibre. Seules des évolutions qualifiées de « réversibles » et présentées comme une succession d'états d'équilibres sont envisagées. Afin de traiter de manière rigoureuse tous les mécanismes dissipatifs, couplés ou non, qui apparaissent dans les transformations de la matière, une extension des notions de la thermodynamique classique est nécessaire. Cette extension vers une thermodynamique des processus irréversibles est relativement récente et fait encore aujourd'hui l'objet de controverses. Comme le dit si bien J. COIRIER[8], *la thermodynamique est une science qui n'a pas encore atteint son état d'équilibre*. Dans la suite de ce travail, nous nous placerons dans le cadre du formalisme décrit par P. GERMAIN[9] qui a largement contribué au concept d'équilibre local de la thermodynamique des processus irréversibles. Il est intéressant de noter que les prémices de cette théorie figuraient déjà dans les travaux de J. FOURIER dans la première moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Formalisée par les chimistes T. DE DONDER et L. ONSAGER, la thermodynamique des processus irréversibles a été appliquée aux systèmes mécaniques par C. ECKART et M. BIOT vers 1950. Des progrès constants concernant la prise en compte des phénomènes non linéaires étendent les champs d'application de cette branche de la thermodynamique pour formuler des modèles de comportement de plus en plus complexes. Une abondante littérature[10] existe dans ce domaine et les paragraphes qui suivent rappellent simplement les concepts généraux qui permettent de définir la méthode de l'état local.

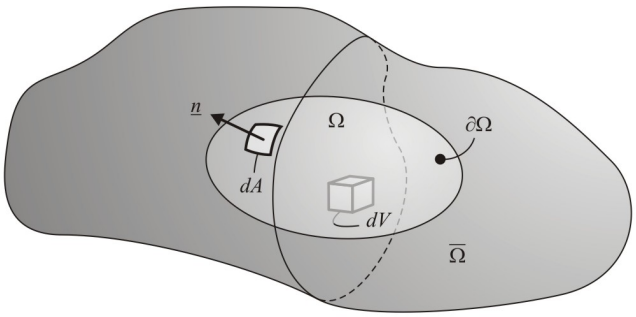
5.2.2 Définition du système, notations

La classe de matériaux sur laquelle porte notre attention peut être représentée par un système matériel, solide et déformable. Ce système est constitué de points « matériels » ou particules qui coïncident à chaque instant et de manière bijective avec des points de l'espace physique[11]. A une échelle suffisamment grande, il est possible de faire l'hypothèse de continuité de la matière et ainsi adopter la théorie classique des milieux continus. Pour cela, on affecte à chaque point matériel les propriétés d'un petit[12] élément de volume, statistiquement représentatif de la matière

[8] [COIRIER, 2001]
[9] [GERMAIN, 1973]
[10] Voir [BESSON *et al.*, 2001].
[11] Espace affine réel euclidien de dimension 3.
[12] Suffisamment important vis-à-vis des hétérogénéités mais de taille raisonnable pour que les dérivées partielles issues de la mécanique des milieux continus aient un sens.

située au voisinage du point considéré. Cet élément de volume est appelé *Volume Elémentaire Représentatif*[13] (VER). Nous noterons par ailleurs ρ, le rapport entre la masse de matière contenue dans le VER et son volume (masse volumique).

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, considérons un système matériel représenté dans l'espace physique par un ensemble[14] continu de points, $\mathcal{D}$. Isolons une partie quelconque $\Omega \subset \mathcal{D}$. A chaque instant t, Ω est constitué des mêmes particules et forme un sous-système fermé de $\mathcal{D}$. Notons $\partial\Omega$ sa frontière de normale unitaire sortante $\underline{n}$ et $\bar{\Omega}$ le sous-ensemble complémentaire, tels que Ω, $\partial\Omega$ et $\bar{\Omega}$ forment une partition de $\mathcal{D}$. Un élément de volume de Ω est noté dV et un élément d'aire de $\partial\Omega$ est noté dA (FIG. 5.1). En tout point M de Ω, le solide est soumis à des forces volumiques massiques $\underline{f}$ et reçoit une densité volumique de chaleur r. A la frontière $\partial\Omega$, un vecteur contrainte $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}$ schématise les actions mécaniques de $\bar{\Omega}$ sur Ω et un flux de chaleur $\underline{q}$ est échangé. Comme nous venons de le voir, un trait placé sous une variable désigne un tenseur d'ordre 1 (vecteur). De la même manière, le signe « tilde » permet de désigner un tenseur d'ordre 2.



© Joannès

FIG. 5.1 – Le système matériel considéré est représenté dans l'espace physique par un ensemble de points désigné par $\mathcal{D}$. Ω, $\partial\Omega$ et $\bar{\Omega}$ forment une partition de $\mathcal{D}$.

Il est bien évident qu'il serait plus exact de mentionner la dépendance en espace et en temps des différentes variables présentées précédemment. Cependant, lorsqu'il n'y aura aucune confusion possible et pour ne pas surcharger l'écriture, cette notation sera implicite[15].

Lorsque le système matériel évolue au cours du temps, la position des particules est déterminée dans un référentiel $\mathcal{R}$, donnée conjointe d'une horloge et d'un repère d'espace. Le repère d'espace est défini par son origine O et une base orthonormée directe $b = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$. A l'instant t, la position du point matériel M est notée $\underline{x}$, son déplacement $\underline{u}$, sa vitesse $\underline{v}$ et son accélération $\underline{\gamma}$. Déjà introduit, le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ correspond au champ tensoriel du second ordre qui établit la dépendance du vecteur contrainte $\underline{T}$ par rapport à $\underline{n}$. Enfin,

[13] Pour tous les matériaux, il existe une dimension caractéristique des hétérogénéités. La taille du VER dépend donc de la nature du milieu considéré.

[14] Au sens mathématique, on suppose que cet ensemble est connexe par arc, fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$.

[15] Nous noterons par exemple $\underline{n}$ à la place de $\underline{n}\,(\mathrm{M}, t)$.

nous travaillons dans l'hypothèse des petites perturbations[16] et le tenseur des déformations est désigné par $\underset{\sim}{\varepsilon}$.

5.2.3 Lois de conservation et premier principe

Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme., A. LAVOISIER, 1777.

En physique, une loi[17] de conservation exprime que pour un système isolé, toute propriété mesurable reste constante au cours de l'évolution du système. Ainsi, les trois premières relations qui fondent la thermomécanique des milieux continus sont :

– la conservation de la masse,

$$\forall t, \forall \Omega \subset D, \quad \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dA = 0 \tag{5.1}$$

– la conservation de la quantité de mouvement,

$$\forall t, \forall \Omega \subset D, \quad \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, \underline{v} \, dV = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \, dA + \int_\Omega \rho \, \underline{f} \, dV \tag{5.2}$$

qui peut prendre une autre forme…

$$\begin{aligned} \forall t, \forall \Omega \subset D, \qquad & \int_\Omega \rho \, \underline{\gamma} \, dV = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\sigma}.\underline{n} \, dA + \int_\Omega \rho \, \underline{f} \, dV \\ & \int_\Omega \rho \, \underline{\gamma} \, dV = \int_\Omega \underline{\mathrm{div}} \left(\underset{\sim}{\sigma} \right) \, dV + \int_\Omega \rho \, \underline{f} \, dV \\ & \int_\Omega \left(\rho \, \underline{\gamma} - \underline{\mathrm{div}} \left(\underset{\sim}{\sigma} \right) - \rho \, \underline{f} \right) \, dV = \underline{0} \end{aligned}$$

… conduisant à l'expression de l'équilibre local,

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \underline{\mathrm{div}} \left(\underset{\sim}{\sigma} \right) + \rho \, \underline{f} = \rho \, \underline{\gamma} \tag{5.3}$$

– conservation de l'énergie (e désigne ici l'énergie interne[18] spécifique),

$$\begin{aligned} \forall t, \forall \Omega \subset D, \quad & \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{v}.\underline{v} \right) \, dV = \\ & \int_\Omega \left(\underline{f}.\underline{v} + r \right) \, dV + \int_{\partial\Omega} \left(\underline{T}.\underline{v} - \underline{q}.\underline{n} \right) \, dA \end{aligned} \tag{5.4}$$

L'équation bilan (5.4) constitue le *premier principe* de la thermodynamique. Enoncé pour la première fois par J. R. VON MAYER en 1845, le premier principe s'écrit généralement sous une

[16] Nous regroupons sous le nom d'hypothèse des petites perturbations (HPP) par rapport à un état d'équilibre, les petits déplacements, les petites transformations, les petites déformations ainsi que les petites variations de température. Dans ce contexte, on s'autorise à confondre les variables de Lagrange et d'Euler.

[17] Il serait plus juste de parler de principe.

[18] En thermodynamique, l'énergie interne est souvent notée $\mathcal{U}$ et sa forme spécifique (massique) u. En mécanique, la lettre « u » étant déjà attribuée au déplacement, l'énergie libre spécifique est noté e.

forme plus condensée (5.5), où $\mathcal{E}$ désigne l'énergie interne du système, $\mathcal{K}$ son énergie cinétique, $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ la puissance des efforts extérieurs et $\mathcal{Q}$ le taux de chaleur reçue.

$$\forall t, \forall \Omega \subset D, \quad \frac{d}{dt}(\mathcal{E} + \mathcal{K}) = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{Q} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_\Omega \rho\, e\, dV \\ \mathcal{K} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\, \underline{v}.\underline{v}\, dV \\ \mathcal{P}_{\text{ext}} &= \int_\Omega \underline{f}.\underline{v}\, dV + \int_{\partial\Omega} \underline{T}.\underline{v}\, dA \\ \mathcal{Q} &= \int_\Omega r\, dV - \int_{\partial\Omega} \underline{q}.\underline{n}\, dA \end{aligned}$$

Par la suite, nous utiliserons une forme locale du premier principe ne faisant intervenir que la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\text{int}}$ et la chaleur reçue. Cette expression peut être obtenue en appliquant le théorème de l'énergie cinétique (5.6).

$$\forall t, \forall \Omega \subset D, \quad \frac{d\mathcal{K}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{\text{int}} = -\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}\, dV \tag{5.6}$$

$\underline{\underline{D}}$ désigne le tenseur des vitesses de déformation et dans l'hypothèse des petites perturbations, $\underline{\underline{D}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}/dt$. En adoptant la notation « $\dot{\cdot}$ » pour désigner la dérivée par rapport au temps[19], le premier principe de la thermodynamique s'écrit finalement sous forme locale (5.7).

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \rho\, \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + r - \operatorname{div}\left(\underline{q}\right) \tag{5.7}$$

5.2.4 Inégalité de Clausius-Duhem, second principe

Les transformations réelles sont irréversibles, notamment à cause de phénomènes dissipatifs : le système ne peut pas « revenir en arrière » de façon spontanée. En thermodynamique ceci est formalisé dans le cadre du *second principe* par un terme de création d'entropie S qui caractérise le fait que le désordre global {système, environnement} augmente ou bien encore qu'une partie de l'information sur le système a été perdue. Au travers de l'inégalité de Clausius-Duhem, cette seconde loi de la thermodynamique permet de définir les évolutions admissibles pour tout système. Le second principe doit donc être utilisé comme une restriction des formes de lois de comportement. Enoncé sous diverses formes par S. CARNOT, R. CLAUSIUS ou W. THOMSON[20], le second principe de la thermodynamique s'exprime selon l'inéquation (5.8).

$$\forall t, \forall \Omega \subset D, \quad \frac{dS}{dt} \geq \int_\Omega \frac{r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\underline{q}.\underline{n}}{T} dA \quad \text{avec} \quad S = \int_\Omega \rho\, s\, dV \tag{5.8}$$

[19] Dérivée particulaire.

[20] Mieux connu en tant que Lord KELVIN.

Dans l'expression précédente, il ne faut pas confondre le scalaire T désigant la température, avec le vecteur des contraintes $\underline{T}$. Par application du théorème de la divergence, nous obtenons la forme locale (5.9). L'inégalité fondamentale correspond alors à la combinaison des formes locales des premier et second principes (5.10).

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \rho\, \dot{s} + \mathrm{div}\left(\frac{\underline{q}}{T}\right) - \frac{r}{T} \geq 0 \tag{5.9}$$

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \rho\, (T\, \dot{s} - \dot{e}) + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{q}.\frac{\overline{\mathrm{grad}\,(T)}}{T} \geq 0 \tag{5.10}$$

Enfin, l'*inégalité de Clausius-Duhem* (5.11), nécessaire à l'écriture des lois de comportement, s'obtient en introduisant l'énergie libre[21] spécifique $\psi = e - T\, s$.

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho\, \left(\dot{\psi} + s\, \dot{T}\right) - \underline{q}.\frac{\overline{\mathrm{grad}\,(T)}}{T} \geq 0 \tag{5.11}$$

5.3 Formulation des lois de comportement

Elaborer un modèle de comportement consiste à construire des relations mathématiques permettant de relier les efforts internes, représentés par les contraintes, aux grandeurs cinématiques décrivant la déformation du milieu. Déduites de l'expérience, ces *relations constitutives* sont également appelées *lois de comportement.*

5.3.1 Principes et hypothèses

Pour un développement plus aisé des relations constitutives et pour limiter le domaine de validité du modèle proposé, les lois de comportement doivent obéir à des principes. Ces principes ne constituent pas de nouvelles lois de la mécanique mais conduisent à des formulations mathématiques exploitables. Ils ont été rassemblés et harmonisés dans les années 1960 par quelques auteurs parmi lesquels on peut citer C. TRUESDELL[22] et W. NOLL. Les paragraphes qui suivent présentent les plus importants de ces principes qui sont classiquement utilisés pour l'écriture des modèles de comportement.

5.3.1.1 Principe d'objectivité

Le *principe d'objectivité,* également connu sous le nom de *principe d'indifférence matérielle,* postule que les propriétés d'un milieu matériel ne dépendent pas du référentiel d'observation. Les relations traduisant les lois de comportement doivent donc être indépendantes du référentiel choisi pour étudier le mouvement. On traduit cette exigence en écrivant que les lois de comportement doivent relier des grandeurs objectives à l'aide de fonctions elles-mêmes indépendantes du référentiel.

[21] L'énergie libre de Helmholtz est souvent notée $\mathcal{F}$ en thermodynamique.

[22] [TRUESDELL et TOUPIN, 1960], [TRUESDELL et NOLL, 1965]

5.3.1.2 Principe du déterminisme

Les lois de comportement ont pour but d'exprimer la réponse d'un matériau à une excitation donnée, en fonction de l'histoire du mouvement et de la température de toutes les particules du milieu matériel considéré. Pour cela, il faut postuler un *principe de déterminisme*, c'est-à-dire que la matière peut conserver la mémoire de ses expériences passées. Suivant les simplifications adoptées, il est possible de distinguer des milieux matériels sans mémoire, à mémoire durable ou à mémoire évanescente.

Il existe différentes manières d'appliquer le principe du déterminisme dans les lois de comportement. La façon la plus générale consiste à considérer que la réponse cherchée à l'instant t et au point M, s'exprime à l'aide d'une fonctionnelle $\mathcal{F}_{\mathrm{M},\tau\leq t}$ (5.12).

$$A_I\left(\mathrm{M},t\right)=\mathcal{F}_{\mathrm{M},\tau\leq t}\left(\Pi\left(\mathrm{M},\tau\leq t\right),\bar{\Pi}\left(\bar{\mathrm{M}},\tau\leq t\right)\right) \tag{5.12}$$

Cette expression formelle indiquant que la valeur à l'instant t et au point M d'une grandeur A_I, dépend de toute l'histoire du comportement. C'est à dire l'histoire du mouvement et de la température :

- du point M, $\Pi\left(\mathrm{M},\tau\leq t\right)$,
- des points matériels influents sur M et notés $\bar{\mathrm{M}}$, $\bar{\Pi}\left(\bar{\mathrm{M}},\tau\leq t\right)$.

5.3.1.3 Principe de l'action locale

Après la prise en compte des aspects temporels du principe du déterminisme, intéressons nous aux aspects spatiaux de l'action locale. Le *principe de l'action locale* stipule que seule compte l'histoire d'un voisinage arbitrairement petit de la particule considérée. Autrement dit, le comportement en un point matériel ne dépend que des variables définies en ce point et non pas de ce qui se passe dans son voisinage. Le milieu est alors qualifié de *matériellement simple* si le comportement local ne dépend que du premier gradient de la transformation $\underset{\sim}{F}=\mathrm{grad}\left(\underline{x}\right)$ et de $\mathrm{grad}\left(T\right)$. Dans le cas des milieux de type *gradient*, cette dépendance est généralisée à des gradients d'ordre plus élevés.

Toutes les quantités que nous introduirons par la suite suivront le principe de l'action locale et nous ne nous intéresserons ici qu'à des milieux matériellement simples.

5.3.1.4 Respect des symétries matérielles

La formulation des relations constitutives doit tenir compte de la géométrie microstructurale de la matière. La plupart des matériaux présentent une structure qui dépend de l'orientation suivant laquelle on les regarde. Cette anisotropie résulte d'une distribution particulière des éléments microstructuraux (charges, fibres, cristaux, ...). Il existe cependant des situations où le matériau présente un certain nombre de symétries locales. Les relations constitutives doivent en tenir compte en respectant les invariances géométriques définies par le *groupe des symétries matérielles*[23].

[23] Le nombre d'éléments du groupe des symétries matérielles dépend de la « classe cristallographique » concernée. Un matériau isotrope est par exemple invariant dans toute rotation de sa configuration de référence, alors qu'un matériau isotrope transverse présente un axe de symétrie privilégié.

5.3.2 Méthode de l'état local

La *méthode de l'état local* proposée par P. GERMAIN[24] repose sur l'axiome qu'à *tout instant, l'état thermomécanique de toute particule d'un milieu matériel est complètement défini par la connaissance d'un certain nombre de grandeurs thermodynamiques (scalaires, vectorielles ou de manière plus générale tensorielles) appelées variables d'état. Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas pour définir l'état.* Conformément au principe de l'action locale, ces variables ne dépendent que du point matériel considéré.

Reposant sur les principes fondamentaux évoqués précédemment, la méthode de l'état local offre un cadre de travail rigoureux et flexible comme en témoignent les nombreuses lois de comportement qui ont été développées à partir de cette approche.

5.3.2.1 Variables d'état

C'est l'expérience qui guide le choix subjectif des variables d'état et leur nombre dépend du degré de précision souhaité. Les variables d'état sont classées en deux catégories :

- les *variables observables* comme la déformation totale $\underset{\sim}{\varepsilon}$ et la température T pour les modèles élasto-visco-plastiques.
- les *variables internes* ou cachées qui représentent les phénomènes dissipatifs irréversibles, non accessibles par des mesures directes.

Ainsi, les phénomènes tels que l'écrouissage ou l'endommagement nécessitent l'introduction de variables internes représentant l'évolution de la microstructure du matériau. Certaines variables internes peuvent cependant être définies par rapport à une variable observable. C'est notamment le cas de la déformation élastique qui est mesurée indirectement par la déformation totale. En petites perturbations, on suppose généralement qu'il y a partition de la déformation totale en déformation purement élastique ($\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}$) et en déformation inélastique irréversible ($\underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}$). On écrit alors $\underset{\sim}{\varepsilon}_{el} = \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}$.

Pour la suite, nous désignerons les variables internes, autres que les déformations, de manière formelle par $\boldsymbol{\alpha}_I$. Le caractère gras pouvant représenter une variable scalaire, vectorielle ou tensorielle.

5.3.2.2 Potentiel thermodynamique et lois d'état

La méthode de l'état local postule que l'évolution du système matériel est une succession d'équilibres thermodynamiques locaux. Si l'évolution globale est très lente, les équilibres locaux peuvent être étendus à des domaines plus vastes, au point qu'une grande partie du système matériel peut être considéré en équilibre[25].

En mécanique, déterminer la position d'équilibre d'un système consiste à rechercher le minimum d'une fonction « énergie potentielle ». Par analogie, une telle fonction est appelée potentiel d'état en thermodynamique et fut introduite par G. GREEN vers 1840. Ainsi, le potentiel

[24] Voir aussi [LEMAITRE et CHABOCHE, 1985], [FRANÇOIS *et al.*, 1991] et [BESSON *et al.*, 2001].

[25] Sans adaptation, de tels choix imposent de ne considérer que des phénomènes dont les vitesses d'évolution sont compatibles avec le temps de relaxation du milieu considéré.

d'état ou *potentiel thermodynamique* est une fonction scalaire des variables d'état qui décrit l'énergie stockée localement par le matériau. En introduisant le potentiel thermodynamique, on cherche à obtenir les *lois d'états* qui dérivent de cette fonction. Les quatre potentiels les plus couramment utilisés sont : l'énergie interne, l'énergie libre, l'enthalpie et l'enthalpie libre. Chacun de ces potentiels a un jeu de *variables naturelles*[26] et suivant les variables d'état choisies, on sélectionne le potentiel thermodynamique le mieux adapté.

L'énergie libre, déjà introduite dans l'inégalité de Clausius-Duhem (5.11) sous sa forme spécifique ψ, dépend des variables naturelles $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et T ainsi que des variables internes $\underline{\underline{\varepsilon}}_{el}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{ir}$[27] et $\boldsymbol{\alpha}_I$ (5.13).

$$\psi : \underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{\underline{\varepsilon}}_{el}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{ir}, \boldsymbol{\alpha}_I \mapsto \psi\left(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{\underline{\varepsilon}}_{el}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{ir}, \boldsymbol{\alpha}_I\right) = \psi\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{el} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{ir}, T, \boldsymbol{\alpha}_I\right) \tag{5.13}$$

En dérivant le potentiel thermodynamique par rapport au temps, nous obtenons l'équation (5.14). Celle-ci peut ensuite être introduite dans l'inégalité de Clausius-Duhem et conduire à l'expression (5.15).

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{el}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el} + \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_I}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_I \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \qquad & \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{ir} - \rho\left(\dot{\psi} + s\dot{T}\right) - \underline{q}.\frac{\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,(T)}{T} \geq 0 \\ & \left(\underline{\underline{\sigma}} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{el}}\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{ir} - \rho\left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T}\right)\dot{T} \cdots \\ & \cdots - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_I}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_I - \underline{q}.\frac{\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,(T)}{T} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Avant de poursuivre, simplifions cette expression en considérant que pour toute la suite de ce travail, nous ne traiterons que des transformations isothermes ($\dot{T} = 0$) et uniformes en température ($\underline{\mathrm{grad}}\,(T) = 0$).

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \left(\underline{\underline{\sigma}} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{el}}\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{el} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{ir} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_I}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_I \geq 0 \tag{5.16}$$

En posant les relations (5.17) et (5.18) qui constituent les *lois d'état*, l'inégalité de Clausius-Duhem se met sous la forme de produits[28] entre forces et flux thermodynamiques (5.19). Par analogie avec la loi d'état (5.17), la variable $\mathbf{A}_I$ est appelée *contrainte généralisée* et est associée à la *déformation généralisée* $\boldsymbol{\alpha}_I$.

[26] Ces variables sont dites « naturelles » car c'est leur variation qui détermine l'évolution du potentiel d'état.

[27] Nous nous plaçons ici dans un cas simplifié où l'on suppose que $\underline{\underline{\varepsilon}}_{ir}$ n'apparait pas dans la partie irréversible de la fonction énergie libre [THIONNET et MARTIN, 2004].

[28] De manière équivalente, dans un système mécanique le travail d'une force résulte du produit de celle-ci par le déplacement induit.

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}_{el}} \tag{5.17}$$

$$\mathbf{A}_I = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_I} \tag{5.18}$$

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \underset{\sim}{\sigma} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir} - \mathbf{A}_I \, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_I \geq 0 \tag{5.19}$$

Pour un processus entièrement réversible, les variables flux dissipatives $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir}$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_I$ sont nulles[29] et la relation (5.17) permet de calculer le tenseur des contraintes à partir de la seule connaissance de ψ. Par contre, dans le cas d'un processus irréversible, l'écriture du potentiel thermodynamique n'est pas suffisante : il ne permet que la définition des variables associées aux variables internes. Il faut donc disposer de *lois complémentaires* décrivant l'évolution de ces dernières.

5.3.2.3 Pseudo-potentiel de dissipation et lois complémentaires

Dans le cas d'une transformation irréversible, la dissipation d'énergie correspond aux différents produits de la relation (5.19). Sous cette forme, la dissipation est qualifiée d'intrinsèque[30] car elle est associée à l'évolution des variables internes.

Pour décrire l'évolution des processus dissipatifs, on postule généralement l'existence d'un *pseudo-potentiel de dissipation* noté φ (5.20). Construit à l'image du potentiel thermodynamique, celui-ci est une fonction[31] dont dérivent les forces thermodynamiques. Les *lois complémentaires* s'expriment alors selon les équations (5.21) et (5.22).

$$\varphi : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_I \mapsto \varphi \left(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_I \right) \tag{5.20}$$

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir}} \tag{5.21}$$

$$\mathbf{A}_I = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}_I} \tag{5.22}$$

Il est cependant plus commode d'écrire le pseudo-potentiel de dissipation en fonction des contraintes généralisées. On utilise alors la transformée de Legendre-Fenchel[32] qui permet d'établir la fonction duale φ^* et conduire aux relations (5.23) et (5.24). En pratique, ce sont les lois complémentaires qui sont identifiées expérimentalement et le pseudo-potentiel ou son dual fournissent un cadre pour leur écriture.

[29] Ce qui assure la vérification du second principe de la thermodynamique.

[30] La dissipation intrinsèque est généralement notée Φ_1.

[31] Pour assurer la positivité de la dissipation, φ doit être une fonction scalaire positive, nulle à l'origine, continue et convexe par rapport aux variables flux.

[32] [LEMAITRE et CHABOCHE, 1985], [COIRIER, 2001]

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \tag{5.23}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_I = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{A}_I} \tag{5.24}$$

De manière conceptuelle, si nous désignons par Z le vecteur constitué par $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\mathbf{A}_I$ et par z celui composé de $\underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}$ et $-\boldsymbol{\alpha}_I$, l'écriture des lois complémentaires consiste à trouver une fonction potentielle φ^* qui vérifie l'équation (5.25).

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Z} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} Z & = & \{\underset{\sim}{\sigma}, \mathbf{A}_I\} \\ z & = & \{\underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}, -\boldsymbol{\alpha}_I\} \end{array} \right. \tag{5.25}$$

De telles lois sont qualifiées de *lois normales* et les modèles ainsi obtenus sont appelés *modèles standards généralisés.*

5.3.2.4 Procédure d'écriture des lois de comportement

Comme nous venons de le voir, la méthode de l'état local permet de définir les lois de comportement d'un matériau en s'appuyant sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Nous résumons ici les trois étapes fondamentales de cette méthode :

1. Choix des variables thermodynamiques susceptibles de décrire les mécanismes et phénomènes que l'on souhaite représenter ($\boldsymbol{\alpha}_I$ et sa variable conjuguée $\mathbf{A}_I$).
2. Choix de la forme du potentiel thermodynamique (par exemple l'énergie libre spécifique ψ) dont découleront les lois d'état.
3. Choix de la forme du pseudo-potentiel de dissipation nécessaire à l'établissement des lois complémentaires décrivant l'évolution des variables internes.

5.3.3 Application à l'élasto-visco-plasticité

Après cette présentation du cadre général d'écriture des lois de comportement, il convient de répondre aux deux questions posées dans l'introduction (§ 5.1) : A partir de quel évènement y-a-t'il déformation irréversible et comment s'effectue cette déformation dissipative ? En se basant sur un schéma de comportement élasto-visco-plastique simple, l'objectif de cette section est de rappeler les notions élémentaires de surface de charge, lois d'écrouissage et loi d'écoulement. Il s'agit notamment de préciser la démarche que nous suivrons pour établir le modèle de comportement de l'adhésif dans le chapitre 6.

5.3.3.1 Critère et surface de charge

La surface de charge définit les limites du domaine d'élasticité du matériau. Son choix est basé sur les observations expérimentales et elle s'exprime généralement sous la forme d'une fonction scalaire des forces thermodynamiques $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\mathbf{A}_I$. Notée f, cette fonction de charge est

associée à un critère tel que pour $f\left(\underset{\sim}{\sigma}, \mathbf{A}_I\right) \leq 0$[33], le matériau reste dans le domaine élastique. Parmi les critères les plus courants, on peut citer le critère de von Mises[34] qui s'exprime selon la relation (5.26).

$$f\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = J\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) - R_0 \quad \text{avec} \quad J\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = \sqrt{3\, J_2\left(\underset{\sim}{\sigma}\right)} \tag{5.26}$$

Où R_0 désigne la dimension du domaine d'élasticité et J_2 le deuxième invariant[35] du déviateur des contraintes. Pour respecter les symétries matérielles, il est en effet pratique de travailler avec les invariants du tenseur des contraintes définis par les relations (5.27) à (5.32).

$$I_1 = \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) \tag{5.27}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\sigma}^2\right) \tag{5.28}$$

$$I_3 = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\sigma}^3\right) \tag{5.29}$$

$$J_1 = \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{s}\right) \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{\sigma} - \frac{I_1}{3}\underset{\sim}{I} \quad \text{le déviateur des contraintes} \tag{5.30}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{s}^2\right) \tag{5.31}$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{s}^3\right) \tag{5.32}$$

Le critère formulé par R. VON MISES n'est donc pas sensible à la pression hydrostatique $(I_1/3)\ \underset{\sim}{I}$, hypothèse qui se vérifie expérimentalement par un grand nombre de matériaux. Nous avons pu nous rendre compte que cette hypothèse n'est plus valable dans le cas d'un adhésif confiné au sein d'un assemblage.

Dans le critère (5.26), l'utilisation de la racine carré permet de donner à la fonction de charge la dimension d'une contrainte. Même si cela est beaucoup plus pratique pour l'identification, il n'y a pas d'usage général en la matière[36].

Lorsque le point représentatif de l'état des contraintes atteint la surface de charge ($f\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = 0$), deux cas de comportements sont possibles :

- la surface de charge n'évolue pas et son expression conduit à un modèle *parfaitement plastique*,
- la surface de charge évolue et il est nécessaire d'introduire de nouvelles variables internes (les *variables d'écrouissage*) pour rendre compte de cette évolution.

[33] Pour simplifier l'écriture, on considèrera par la suite que l'on travaille sur le domaine d'élasticité initial et que la contrainte généralisée $\mathbf{A}_I$ est nulle.

[34] Ce critère figurait déjà dans les travaux de J. C. MAXWELL en 1865 mais est généralement rattaché aux résultats de R. VON MISES publiés en 1913.

[35] $J\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = \sqrt{3\, J_2\left(\underset{\sim}{\sigma}\right)}$ est souvent appelé *contrainte équivalente de von Mises*.

[36] [SALENÇON, 2005]

5.3.3.2 Lois d'écrouissage

Historiquement attachée aux dislocations des matériaux métalliques, la notion d'écrouissage a peu à peu été étendue à d'autres classes de matériaux. Le phénomène d'écrouissage se traduit aujourd'hui par un effet d'expansion[37] et/ou translation de la surface de charge, sans préjuger des mécanismes microstructuraux responsables. Au niveau phénoménologique, l'écrouissage est décrit par l'intermédiaire de variables d'état qui interviennent au niveau de la fonction de charge. Les équations donnant l'évolution de ces variables forment les *lois d'écrouissage*.

L'expansion de la surface de charge correspond à la théorie de l'*écrouissage isotrope* de G. I. TAYLOR[38] et H. QUINNEY. Cette théorie admet que le domaine élastique se transforme pendant l'écrouissage par une homothétie centrée sur l'origine. La variable d'état introduite est la dimension du domaine d'élasticité, généralement notée R. Lorsque l'évolution de cette variable est gouvernée par la *déformation plastique cumulée* p, la fonction de charge prend la forme de la relation (5.33).

$$f\left(\underline{\sigma}, R\right) = f\left(\underline{\sigma}\right) - R\left(p\right) \tag{5.33}$$

Le phénomène de translation s'exprime par l'intermédiaire d'une variable d'état tensorielle $\underset{\sim}{X}$ et correspond à la théorie de l'*écrouissage cinématique* de W. PRAGER[39]. La modification de la fonction de charge s'opère selon l'expression (5.34).

$$f\left(\underline{\sigma}, \underset{\sim}{X}\right) = f\left(\underline{\sigma} - \underset{\sim}{X}\right) \tag{5.34}$$

La figure FIG. 5.2 schématise ces deux types d'écrouissage dans l'espace des contraintes principales.

5.3.4 Loi d'écoulement

La *loi d'écoulement* définit la façon dont se développent les déformations irréversibles. Dans le cas des modèles élasto-visco-plastiques standards généralisés (§ 5.3.2.3), il est classique de postuler une forme du pseudo-potentiel φ^* ne dépendant des forces thermodynamiques qu'au travers de la fonction de charge f (5.35).

$$\varphi^*\left(\underline{\sigma}, \mathbf{A}_I\right) = \varphi^*\left(f\left(\underline{\sigma}, \mathbf{A}_I\right)\right) \tag{5.35}$$

En reprenant la notation des vecteurs $Z = \left\{\underline{\sigma}, \mathbf{A}_I\right\}$ et $z = \left\{\underline{\varepsilon}_{ir}, -\boldsymbol{\alpha}_I\right\}$, la vitesse d'évolution des variables internes est alors donnée par la relation (5.36).

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial Z} \tag{5.36}$$

[37] Pour certains matériaux, il peut également se produire un phénomène d'adoucissement conduisant à la contraction du domaine élastique.

[38] [TAYLOR et QUINNEY, 1931]

[39] [PRAGER, 1955]

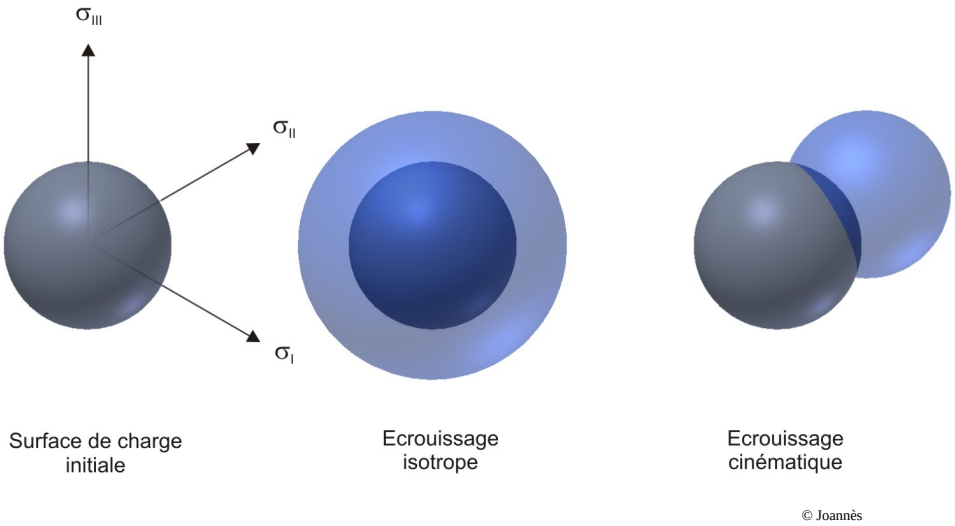


FIG. 5.2 – Représentation schématique des mécanismes de l'écrouissage isotrope (expansion) et cinématique (translation) sur le domaine d'élasticité.

Dans le membre de droite, le premier terme est appelé *fonction de viscosité* et définit l'intensité[40] de l'écoulement. Le deuxième terme donne la direction. Par la suite, on pourra noter $\underset{\sim}{n}$ le gradient de f par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$. Lorsque la viscosité tend vers zéro, il n'est plus possible de définir l'intensité de l'écoulement. On passe à la plasticité qui est souvent introduite comme un cas limite[41] des modèles prenant en compte la viscosité. Dans ce cas, une condition supplémentaire est nécessaire pour déterminer l'intensité de l'écoulement. L'hypothèse la plus courante est de considérer que la dissipation intrinsèque (§ 5.3.2.3) est maximale. Puisque nous cherchons à maximiser $\Phi_1 = Z\,\dot{z}$ sous la contrainte $f\left(\underset{\sim}{\sigma}, \mathbf{A}_I\right) \leq 0$, il suffit d'introduire un multiplicateur de Lagrange $\dot{\lambda}$ et former la fonction (5.37) à minimiser.

$$\mathcal{L}\left(Z\right) = Z\,\dot{z} - \dot{\lambda}\,f \tag{5.37}$$

La condition de Kuhn-Tucker permet de rendre minimale la fonction $\mathcal{L}$ en annulant toutes ses dérivées partielles (5.38). Il suffit alors de postuler une loi d'évolution sous cette forme pour maximiser la dissipation intrinsèque.

$$\dot{z} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial Z} \quad \text{soit} \quad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_I = -\dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}_I} \tag{5.38}$$

Dans le cadre des modèles élasto-plastiques, le multiplicateur de Lagrange est qualifié de *multiplicateur plastique*. Il remplace la fonction de viscosité et peut être déterminé par la *condition de cohérence* $\dot{f} = 0$.

[40] C'est un scalaire.
[41] [BESSON *et al.*, 2001]

Chapitre 6

Modèle de comportement : application à l'adhésif

6.1 Formulation des lois de comportement de l'adhésif

La première étape de ce chapitre consiste à formuler les lois de comportement mécanique de l'adhésif β. La description phénoménologique des mécanismes microstructuraux permet cependant d'élargir le domaine d'application du modèle proposé aux adhésifs « moins chargés ».

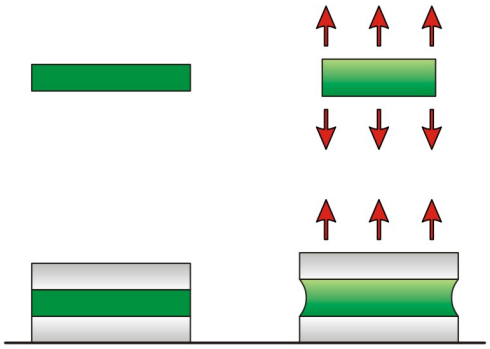
6.1.1 Position du problème

Les modèles phénoménologiques de comportement basés sur la thermodynamique des processus irréversibles n'ont pas évolué de manière identique pour tous les matériaux. Si la littérature relative aux matériaux métalliques est très abondante, il n'en est pas de même pour les polymères et encore moins pour les adhésifs. De nombreuses questions restent posées quant à la prise en compte des mécanismes microstructuraux de ces derniers. Nous avons par ailleurs pu constater, dans le chapitre 3, l'échec du modèle classique de von Mises.

Dans les années 1990, un programme de recherche mené par le National Physical Laboratory (NPL, UK) a permis de dégager les grands axes de développement nécessaires à la modélisation du comportement des adhésifs structuraux[1]. Du fait du confinement, il est impératif de prendre en considération les effets induits par l'augmentation de la pression hydrostatique. L'adhésif sollicité au sein d'un assemblage présente une variation de volume incompatible avec l'*hypothèse d'incompressibilité plastique* de la plupart des modèles destinés aux métaux (FIG. 6.1).

Les publications des équipes du NPL indiquent la possibilité de faire appel au modèle établi par D. C. DRUCKER[2] et W. PRAGER en 1952. Nous développerons ce modèle dans le paragraphe 6.1.2.4. Dans le cas des adhésifs renforcés par des charges élastomères, B. DUNCAN et G. DEAN proposent une alternative appropriée en utilisant un *modèle de cavitation*, basé sur

[1] [DEAN et CROCKER, 2001], [DUNCAN et DEAN, 2003]
[2] [DRUCKER et PRAGER, 1952]



© Joannès

FIG. 6.1 – Sous une sollicitation mécanique, le confinement du joint d'adhésif empêche celui-ci de se déformer naturellement. Cela provoque une variation de volume incompatible avec l'hypothèse d'incompressibilité plastique.

celui de A. L. GURSON[3]. En suivant la même démarche, nous avons cherché à établir un modèle qui prenne en compte les charges minérales.

L'analyse micro-mécanique menée sur l'adhésif β a fait apparaître que le comportement non-linéaire de celui-ci était dépendant de deux phénomènes :

- la déformation élasto-visco-plastique de la phase polymère,
- l'endommagement des charges minérales dont la distribution induit une anisotropie du comportement mécanique.

Les paragraphes qui suivent présentent la modélisation de ces deux mécanismes que nous avons intentionnellement découplés. Après la prise en compte des non-linéarités, nous proposons un critère de rupture macroscopique, pouvant être exploité quel que soit le taux de charges de l'adhésif. Nous nous plaçons dans le cadre de travail rappelé dans le chapitre 5 et nous nous limitons aux transformations mécaniques isothermes[4].

6.1.2 Modélisation de l'élasto-visco-plasticité de la phase polymère

Pour cette partie du modèle, il s'agit de prendre en compte la haute sensibilité du comportement mécanique à la pression hydrostatique. Nous utilisons pour cela une forme adaptée du critère de Drucker-Prager. Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que la phase polymère est isotrope[5] et que les non-linéarités proviennent d'un réarrangement du réseau moléculaire.

[3] [GURSON, 1977]

[4] Les matériaux constitutifs de l'adhésif étant faiblement conducteurs de la chaleur, nous estimons que les variations de température au sein du milieu sont suffisamment faibles pour n'induire aucune modification notable des propriétés mécaniques.

[5] Ce qui a pu être vérifié lors des essais sur l'adhésif non chargé β_{NC} (§ 4.3.2).

6.1.2.1 Choix des variables d'état

Puisque nous ne considérons que des transformations isothermes, la seule variable d'état observable est la déformation totale $\underset{\sim}{\varepsilon}$. On suppose que cette déformation se partitionne en une déformation élastique $\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}$ réversible et une déformation non recouvrable $\underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}$ (6.1).

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}_{el} + \underset{\sim}{\varepsilon}_{ir} \tag{6.1}$$

Compte tenu de la partition écrite, seules deux déformations parmi les trois possibles sont à inscrire au titre des variables d'état. Nous choisissons de prendre $\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}$ et $\underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}$ comme variables d'état ; les variables $\underset{\sim}{\sigma}_{el} = \underset{\sim}{\sigma}$ et $\underset{\sim}{\sigma}_{ir}$ y sont naturellement associées.

L'évolution du domaine élastique est modélisée par l'intermédiaire d'une variable scalaire définissant sa taille (R) et d'une variable tensorielle indiquant sa position ($\underset{\sim}{X}$). Par similitude avec $\underset{\sim}{\sigma}$, R et $\underset{\sim}{X}$ sont les variables duales respectives de p et $\underset{\sim}{\alpha}$ que nous introduisons comme variables internes. Le tableau TAB. 6.1 présente le bilan des choix opérés.

Variables d'état internes	Variables d'état duales
$\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}$	$\underset{\sim}{\sigma}$
$\underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}$	$\underset{\sim}{\sigma}_{ir}$
p	R
$\underset{\sim}{\alpha}$	$\underset{\sim}{X}$

TAB. 6.1 – Variables d'état et variables duales nécessaires à la modélisation de l'élasto-visco-plasticité de la phase polymère.

6.1.2.2 Ecriture du potentiel thermodynamique et lois d'état

Compte tenu des variables d'état, nous choisissons l'énergie libre spécifique ψ comme potentiel thermodynamique. De la même manière que pour la déformation totale, on suppose que le potentiel thermodynamique peut être partitionné selon la nature des phénomènes considérés : réversibles et irréversibles. Une partie ψ_{el} contient la modélisation des phénomènes élastiques et ψ_{ir} ne dépend que des phénomènes dissipatifs. Cela se traduit par la relation (6.2).

$$\psi\left(\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}, p, \underset{\sim}{\alpha}\right) = \psi_{el}\left(\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}\right) + \psi_{ir}\left(p, \underset{\sim}{\alpha}\right) \tag{6.2}$$

L'absence de la variable $\underset{\sim}{\varepsilon}_{ir}$ dans la partie irréversible de l'énergie libre implique[6] une valeur nulle de $\underset{\sim}{\sigma}_{ir}$. On pose alors les expressions (6.3) et (6.4) pour définir le potentiel thermodynamique. $\underset{\approx}{C}_0$ correspond au tenseur de rigidité élastique. R_0, H, Q et b sont les coefficients pilotant la taille de la surface de charge (écrouissage isotrope). C permet de faire évoluer la position du domaine élastique (écrouissage cinématique).

[6] [THIONNET et MARTIN, 2004]

$$\rho\,\psi_{el}\left(\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}\right) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}_{el} : \underset{\sim}{C}_0 : \underset{\sim}{\varepsilon}_{el} \tag{6.3}$$

$$\rho\,\psi_{ir}\left(p, \underset{\sim}{\alpha}\right) = R_0\,p + \frac{1}{2}H\,p^2 + Q\,\left[p + \frac{1}{b}\exp\left(-b\,p\right)\right] + \frac{1}{3}C\,\underset{\sim}{\alpha} : \underset{\sim}{\alpha} \tag{6.4}$$

Les lois d'état sont données par les relations (6.5) à (6.7).

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho\,\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}} = \underset{\sim}{C}_0 : \underset{\sim}{\varepsilon}_{el} \tag{6.5}$$

$$R = \rho\,\frac{\partial\psi}{\partial p} = R_0 + H\,p + Q\,\left[1 - \exp\left(-b\,p\right)\right] \tag{6.6}$$

$$\underset{\sim}{X} = \rho\,\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\alpha}} = \frac{2}{3}C\,\underset{\sim}{\alpha} \tag{6.7}$$

6.1.2.3 Construction des lois complémentaires

Qu'il s'agisse de l'adhésif β ou de sa forme non chargée β_{NC}, on a pu noter une dépendance du comportement vis-à-vis de la vitesse de sollicitation. On postule donc dans un premier temps l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation permettant de définir une fonction de viscosité de la forme (6.8). Il s'agit d'une généralisation du modèle de F. H. NORTON où n et K sont les coefficients de la loi visco-plastique.

$$\varphi^* = \frac{K}{n+1}\left(\frac{f}{K}\right)^{n+1} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial f} = \left(\frac{f}{K}\right)^n \tag{6.8}$$

Les lois complémentaires s'écrivent alors selon les relations (6.9) à (6.11), dans lesquelles il ne faut pas confondre le scalaire n, coefficient de la loi visco-plastique, avec $\underset{\sim}{n}$ donnant la direction de l'écoulement.

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir} = \left(\frac{f}{K}\right)^n \frac{\partial f}{\partial\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\frac{f}{K}\right)^n \underset{\sim}{n} \tag{6.9}$$

$$\dot{p} = -\left(\frac{f}{K}\right)^n \frac{\partial f}{\partial R} \tag{6.10}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\alpha}} = -\left(\frac{f}{K}\right)^n \frac{\partial f}{\partial\underset{\sim}{X}} \tag{6.11}$$

Si l'on ne souhaite pas prendre en considération la viscosité, il faut remplacer son expression par un multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$. Les lois complémentaires sont alors définies par les relations (6.12) à (6.14).

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n} \tag{6.12}$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial R} \tag{6.13}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\alpha}} = -\dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}} \tag{6.14}$$

6.1.2.4 Fonction de charge à haute sensibilité hydrostatique

Que ce soit pour la visco-plasticité ou pour la plasticité, il convient maintenant de fixer la forme de la fonction de charge f. Celle-ci doit notamment respecter les symétries matérielles. Pour un matériau isotrope comme dans le cas présent pour la phase polymère, la valeur de la fonction de charge ne doit pas dépendre de l'orientation de $\underset{\sim}{\sigma}$. Pour cela, le *théorème de représentation*[7] énonce que f doit s'exprimer selon l'une des possibilités suivantes :

- f est une fonction symétrique des contraintes principales,
- f est une fonction des trois premiers invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$ (I_1, I_2 et I_3),
- f est une fonction de I_1 et des invariants J_2 et J_3 du déviateur des contraintes.

Pour les deux dernières possibilités, il est bien entendu envisageable de considérer une participation nulle de l'un ou l'autre des invariants. C'est d'ailleurs le cas de la fonction proposée par R. VON MISES qui n'utilise que le deuxième invariant du déviateur des contraintes (J_2).

Nous souhaitons cependant que la fonction de charge présente une sensibilité à la pression hydrostatique. Il faut pour cela prendre en compte l'invariant I_1, comme dans l'expression linéaire proposée par D. C. DRUCKER et W. PRAGER (6.15), où β est une constante positive.

$$f\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = J\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) - \beta\, R_0 + (\beta - 1)\; I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) \quad \text{avec} \quad \beta \geq 0 \tag{6.15}$$

La fonction (6.15) se ramène à l'expression de von Mises si l'on pose $\beta = 1$. Le domaine d'élasticité correspondant peut être représenté dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des contraintes principales par un cylindre noté VM sur la figure FIG. 6.2. La forme conique DP1 est obtenue en faisant intervenir la partie hydrostatique de l'expression (6.15) et la forme quadratique DP2 s'écrit selon (6.16).

$$f\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = J^2\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) - \beta\, R_0^2 + (\beta - 1)\; I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}\right)\; R_0 \quad \text{avec} \quad \beta \geq 0 \tag{6.16}$$

Afin de paramétrer la sensibilité à I_1, nous proposons d'étendre la forme quadratique par une forme en puissance et nous notons alors la fonction de charge f_a (6.17).

$$f_a\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = J^a\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) - \beta\, R_0^a + (\beta - 1)\; I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}\right)\; R_0^{a-1} \quad \text{avec} \quad \beta \geq 0, a \geq 1 \tag{6.17}$$

[7] [WINEMAN et PIPKIN, 1964]

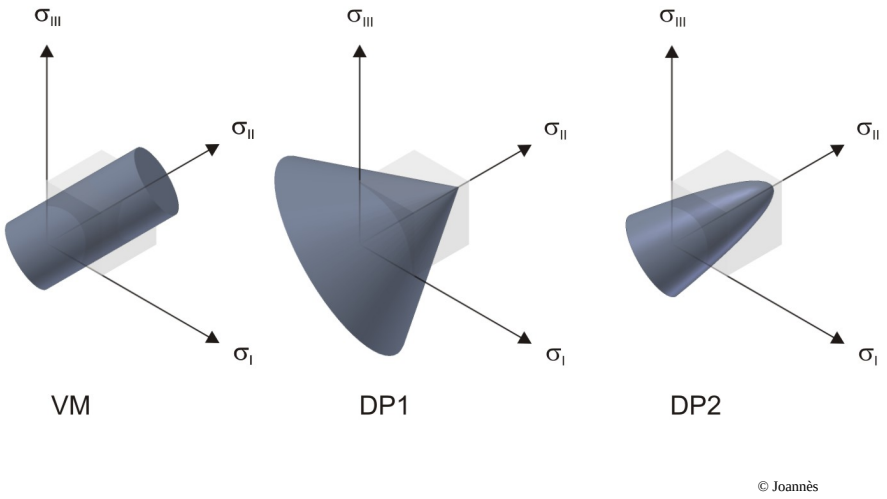


FIG. 6.2 – Représentation dans l'espace des contraintes principales des domaines d'élasticité engendrés par un paramétrage particulier des expressions (6.15) et (6.16) : VM (6.15) avec ($R0 = 10$, $\beta = 1$), DP1 (6.15) avec ($R0 = 10$, $\beta = 1,5$), DP2 (6.16) avec ($R0 = 10$, $\beta = 1,5$).

L'introduction des variables d'écrouissage conduit finalement à écrire f_a selon (6.18).

$$\boxed{f_a\left(\underline{\sigma}, R, \underline{X}\right) = J^a\left(\underline{\sigma} - \underline{X}\right) - \beta\, R^a\left(p\right) + \left(\beta - 1\right)\, I_1\left(\underline{\sigma} - \underline{X}\right)\, R^{a-1}\left(p\right) \quad \text{avec} \quad \beta \geq 0, a \geq 1} \tag{6.18}$$

Les domaines d'élasticité correspondant à l'expression (6.18) pour différentes valeurs de a et β sont représentés sur la figure FIG. 6.3.

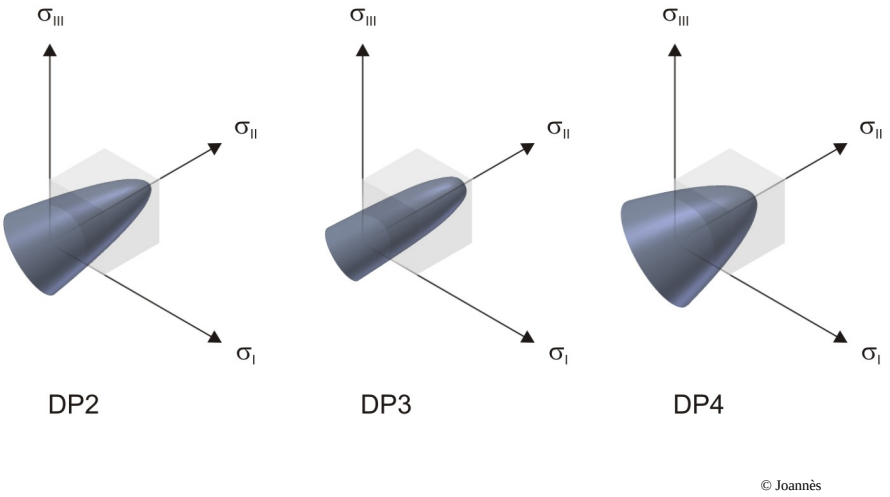


FIG. 6.3 – DP2 ($R0 = 10$, $a = 2$, $\beta = 1,5$), DP3 ($R0 = 10$, $a = 4$, $\beta = 1,5$), DP4 ($R0 = 10$, $a = 2$, $\beta = 2$)

Bien que l'expression (6.18) puisse tout à fait être utilisée sous cette forme, nous avons préféré la rendre homogène à une contrainte pour faciliter l'identification. Nous définissons alors la fonction de charge finale f sous la forme (6.19).

$$\boxed{f\left(f_a\right) = \text{signe}(f_a)\ \sqrt[a]{|f_a|} \quad \text{avec} \quad a \geq 1} \tag{6.19}$$

6.1.2.5 Retour sur les lois complémentaires

Les lois complémentaires présentées dans le paragraphe 6.1.2.3, sont écrites en *plasticité associée*. Cela signifie que la règle d'écoulement est associée au critère. En faisant l'hypothèse que la fonction f ne sert plus pour l'écrouissage mais sert toujours pour l'écoulement, nous nous plaçons en *plasticité simplement associée* et cela offre alors un cadre moins restrictif. Il n'y a pas de dépendance biunivoque entre l'écrouissage et la déformation irréversible.

Nous choisissons alors une *fonction d'écoulement* notée F, différente de l'expression de la fonction de charge f et définie par la relation (6.20), où C et D sont les paramètres de l'écrouissage cinématique[8].

$$F = f + \frac{3}{4}\frac{D}{C}\underset{\sim}{X} : \underset{\sim}{X} \tag{6.20}$$

En plasticité[9], les lois complémentaires s'écrivent alors selon les expressions (6.21) à (6.23).

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n} \tag{6.21}$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial R} \tag{6.22}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\alpha}} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} \tag{6.23}$$

La détermination du multiplicateur plastique passe par l'écriture de la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ (6.24).

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R}\dot{R} + \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}} : \dot{\underset{\sim}{X}} = 0 \tag{6.24}$$

Les expressions de $\dot{R}$ et $\dot{\underset{\sim}{X}}$ s'obtiennent par différentiation des fonction R et X, conduisant aux relations (6.25) et (6.26).

$$\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial \underset{\sim}{\alpha}} : \dot{\underset{\sim}{\alpha}} + \frac{\partial R}{\partial p}\dot{p} = -\dot{\lambda}\frac{\partial R}{\partial \underset{\sim}{\alpha}} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} - \dot{\lambda}\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial R} \tag{6.25}$$

$$\dot{\underset{\sim}{X}} = \frac{\partial \underset{\sim}{X}}{\partial \underset{\sim}{\alpha}} : \dot{\underset{\sim}{\alpha}} + \frac{\partial \underset{\sim}{X}}{\partial p}\dot{p} = -\dot{\lambda}\frac{\partial \underset{\sim}{X}}{\partial \underset{\sim}{\alpha}} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} - \dot{\lambda}\frac{\partial \underset{\sim}{X}}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial R} \tag{6.26}$$

[8] [LEMAITRE et CHABOCHE, 1985]

[9] Pour la visco-plasticité, il suffit de remplacer le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ par la fonction de viscosité (6.8).

En utilisant les lois d'état (6.5) à (6.7), nous obtenons les expressions des dérivées partielles de R et X en fonction de ψ.

$$\frac{\partial R}{\partial \underset{\sim}{\alpha}} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}\, \partial p} \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \tag{6.28}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{X}}{\partial \underset{\sim}{\alpha}} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}^2} \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{X}}{\partial p} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p\, \partial \underset{\sim}{\alpha}} \tag{6.30}$$

Reportons les relations (6.27) à (6.30) dans les expressions (6.25) et (6.26) pour pouvoir réécrire la condition de cohérence selon (6.33).

$$\dot{R} = -\dot{\lambda} \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}\, \partial p} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \frac{\partial F}{\partial R} \right) \tag{6.31}$$

$$\dot{\underset{\sim}{X}} = -\dot{\lambda} \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}^2} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p\, \partial \underset{\sim}{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial R} \right) \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}\, \partial p} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \frac{\partial F}{\partial R} \right) \cdots \\ &\qquad \cdots - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}} : \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}^2} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p\, \partial \underset{\sim}{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial R} \right) = 0 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Par des changements de variables adéquats, l'expression (6.33) permet alors d'accéder à la valeur de $\dot{\lambda}$ (6.34).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} &= \underset{\sim}{n} \\ \dot{\underset{\sim}{\sigma}} &= \underset{\sim}{C}_0 : \left(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ir} \right) = \underset{\sim}{C}_0 : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\, \underset{\sim}{C}_0 : \underset{\sim}{n} \\ M_1 &= \frac{\partial f}{\partial R} \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}\, \partial p} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \frac{\partial F}{\partial R} \right) \\ M_2 &= \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}} : \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}^2} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p\, \partial \underset{\sim}{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial R} \right) \\ M &= M_1 + M_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{\lambda} = \frac{\underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{C}_0 : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}{M + \underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{C}_0 : \underset{\sim}{n}}} \tag{6.34}$$

Déterminons maintenant les valeurs de $\underset{\sim}{n}$, M_1 et M_2 en fonction des choix opérés sur le potentiel thermodynamique ψ (6.3) et (6.4), sur la fonction de charge f (6.19) et sur la fonction d'écoulement F (6.20).

$$\forall f_a \neq 0, \quad \underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial f_a} &= \frac{\partial \operatorname{signe}(f_a)}{\partial f_a}\sqrt[a]{|f_a|} + \frac{\partial \sqrt[a]{|f_a|}}{\partial f_a}\operatorname{signe}(f_a) \\
&= \frac{1}{a}\frac{\partial |f_a|}{\partial f_a}\frac{\sqrt[a]{|f_a|}}{|f_a|}\operatorname{signe}(f_a) \\
&= \frac{1}{a}\operatorname{signe}(f_a)\ \frac{\sqrt[a]{|f_a|}}{|f_a|}\operatorname{signe}(f_a) \\
&= \frac{1}{a}\frac{\sqrt[a]{|f_a|}}{|f_a|} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial f_a} \xrightarrow[f_a\to 0]{} +\infty
\end{aligned} \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_a}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} &= \frac{\partial J^a\left(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}\right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + (\beta-1)\ \frac{\partial I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}\right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} R^{a-1}(p) \\
&= \frac{\partial J^a\left(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}\right)}{\partial \underset{\sim}{s}} : \frac{\partial \underset{\sim}{s}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + (\beta-1)\ \frac{\partial \underset{\sim}{I} : \left(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}\right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} R^{a-1}(p) \\
&= \frac{3\,a}{2}\frac{\underset{\sim}{s}-\underset{\sim}{X}}{J\left(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}\right)} J^{a-1}\left(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}\right) + (\beta-1)\ \underset{\sim}{I}\, R^{a-1}(p)
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\forall f_a \neq 0, \quad M_1 = \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial R}\left(\rho\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}\,\partial p} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}\frac{\partial F}{\partial R}\right) \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial f_a} &= \frac{1}{a}\frac{\sqrt[a]{|f_a|}}{|f_a|} \quad \text{voir (6.36)} \\
\frac{\partial f_a}{\partial R} &= -\beta\,a\,R^{a-1}(p) + (\beta-1)\ I_1\left(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}\right)\ (a-1)\ R^{a-2}(p) \qquad (6.39) \\
\rho\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}\,\partial p} &= 0 \qquad (6.40) \\
\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} &= \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial \underset{\sim}{X}} + \frac{3}{2}\frac{D}{C}\underset{\sim}{X} \\
&= -\underset{\sim}{n} + \frac{3}{2}\frac{D}{C}\underset{\sim}{X} \qquad (6.41) \\
\rho\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} &= H + Q\,b\,\exp(-b\,p) \qquad (6.42) \\
\frac{\partial F}{\partial R} &= \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial R} \quad \text{voir (6.36) et (6.39)}
\end{aligned}$$

$$\forall f_a \neq 0, \quad M_2 = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}} : \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}^2} : \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \, \partial \underset{\sim}{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial R} \right) \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}} &= \frac{\partial f}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial \underset{\sim}{X}} \\ &= -\underset{\sim}{n} \quad \text{voir (6.41)} \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\alpha}^2} = \frac{2}{3} C \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}} &= -\underset{\sim}{n} + \frac{3}{2} \frac{D}{C} \underset{\sim}{X} \quad \text{voir (6.41)} \\ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \, \partial \underset{\sim}{\alpha}} &= 0 \end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{\partial f}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial R} \quad \text{voir (6.36) et (6.39)}$$

6.1.3 Modélisation de l'endommagement des charges minérales

Les essais micro-mécaniques menés sur l'adhésif β ont fait apparaître des mécanismes d'endommagement propres aux charges minérales et plus particulièrement au talc. D'après les analyses conduites dans le chapitre 4, nous pouvons supposer que l'amorce de l'endommagement durant la phase de réticulation est le principal responsable des effets d'épaisseur. La description adoptée dans cette section rend donc « endommageable » la partie élastique du modèle de comportement ($\underset{\sim}{\varepsilon}_{el} \rightarrow \underset{\sim}{\varepsilon}_{ed}$).

Dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, les fissures ont une taille de l'ordre de celle de l'élément de volume représentatif du matériau dans lequel elles se développent et les modèles traduisent la conséquence de ce phénomène au niveau des propriétés mécaniques macroscopiques. Généralement, les modèles d'endommagement utilisent la notion de variable interne qui peut être scalaire, vectorielle ou tensorielle. Pour cette étude, nous nous sommes basé sur l'approche vectorielle proposée par A. THIONNET[10] et J. RENARD, elle même issue des travaux de R. TALREJA[11]. Cette approche, établie pour des matériaux composites, permet de tenir compte de la géométrie des fissures et traduire le caractère *unilatéral*[12] du dommage.

6.1.3.1 Choix des variables d'état

Dans l'approche que nous avons suivie, les mécanismes d'endommagement sont modélisés par des vecteurs $\underline{V}_{[i]}$ caractérisant l'intensité et la direction de réseaux de microfissures identiques[13]. Chaque vecteur $\underline{V}_{[i]}$ dépend en fait de trois variables scalaires conduisant à

[10] [THIONNET et RENARD, 1993]

[11] [TALREJA, 1985]

[12] Ce phénomène s'observe lors du passage d'une sollicitation de traction à une sollicitation de compression par une augmentation de la raideur due à la fermeture des fissures.

[13] La notation « $[i]$ » permet de prendre en considération plusieurs réseaux comme nous le verrons par la suite.

donner à la Mécanique de l'Endommagement la notion de mode de sollicitation d'une macro-fissure rencontrée en Mécanique de la Rupture. Examinons pour cela une fissure « modèle » caractéristique du réseau microfissuré et dont les lèvres sont représentées par deux plans parallèles (FIG. 6.4). Suivant les sollicitations mécaniques extérieures, nous pouvons distinguer trois régimes de fissurations : le mode 1 correspond à une ouverture par extension des lèvres tandis que les modes 2 et 3 prennent en compte le glissement d'une lèvre sur l'autre.

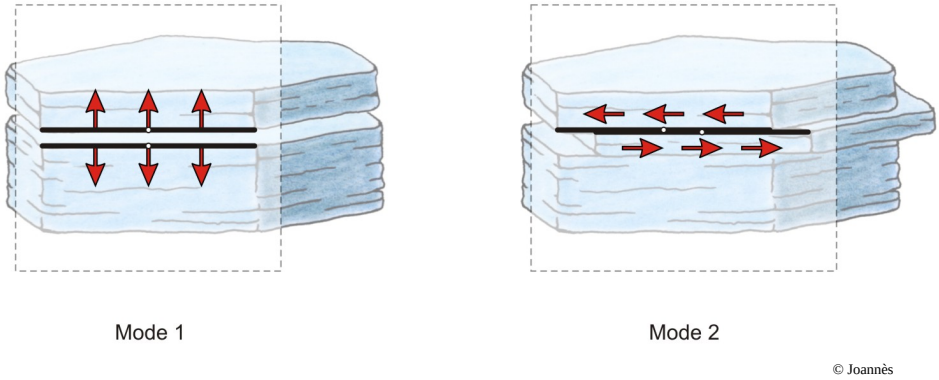


FIG. 6.4 – Les deux premiers modes d'ouverture d'une fissure peuvent être représentés dans un même plan. Le mode 3 apparaît alors comme un glissement antiplan.

Ainsi, la première variable interne notée $m_{d[i]}$ caractérise le mode d'ouverture de la fissure. La variable $r_{d[i]}$ complète l'information géométrique en indiquant le « rayon » d'ouverture. Les effets conjugués de ces deux variables entraînent une évolution continue du tenseur des rigidités au passage des états de compression et de traction. Enfin, le niveau d'endommagement global est quantifié par l'intermédiaire de $\alpha_{d[i]}$. Leurs variables conjuguées sont respectivement notées $M_{d[i]}$, $R_{d[i]}$ et $A_{d[i]}$ (TAB. 6.2).

Variables d'état internes	Variables d'état duales
ε_{ed}	σ
$\alpha_{d[i]}$	$A_{d[i]}$
$m_{d[i]}$	$M_{d[i]}$
$r_{d[i]}$	$R_{d[i]}$

TAB. 6.2 – Variables d'état et variables duales nécessaires à la modélisation de l'endommagement.

6.1.3.2 « Fonctions potentielles » : apport de la Théorie des Invariants

Les lois d'état et les lois complémentaires sont issues de fonctions scalaires qui peuvent être construites suivant certaines règles bien définies (§ 5.3.1). Il est souvent difficile de formuler ces lois et le but de la Théorie des Invariants est de fournir un cadre d'écriture cohérent et

méthodique. L'ouvrage de A. THIONNET[14], C. MARTIN et S. BARRADAS propose une démarche générale et systèmatique conduisant à des fonctions potentielles[15] sous formes polynômiales dont on déduit ensuite les lois d'état et les lois complémentaires. Nous n'aborderons pas ici les notions mathématiques nécessaires à la mise en œuvre de la méthode mais nous en utiliserons les résultats afin de construire les fonctions potentielles du modèle d'endommagement des charges minérales.

Les données d'entrée sont l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables d'état et les éléments du groupe $\mathcal{S}$ représentant les symétries matérielles[16] du milieu considéré. La construction des fonctions potentielles repose ensuite sur les étapes suivantes :

1. A partir des composantes de $\mathcal{V}$ et par application du théorème de E. NOETHER[17], il s'agit de bâtir une famille génératrice d'invariants de $\mathcal{V}$ sous l'action de $\mathcal{S}$.
2. Suivant la finesse de la modélisation que l'on souhaite, il s'agit ensuite de construire le polynôme le plus général constitué des éléments identifiés précédemment en se fixant des conditions sur les degrés partiels et totaux.
3. L'objectivité du modèle est assurée par la tensorialité des coefficients du polynôme.

6.1.3.3 Ecriture du potentiel thermodynamique et lois d'état

Les variables d'état se résument ici au tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}$ et aux vecteurs $\underline{V}_{[i]}\left(\alpha_{d[i]}, m_{d[i]}, r_{d[i]}\right)$ qui modélisent les phénomènes internes de fissuration. Pour simplifier le problème, nous faisons l'hypothèse que l'endommagement de chaque réseau de fissuration est indépendant. Cela se traduit mathématiquement par le fait que l'évolution du vecteur $\underline{V}_{[i]}$ est découplée de celle des vecteurs $\underline{V}_{[j],\, j\neq i}$. Nous nous limiterons donc à l'ensemble $\mathcal{V} = \{\underline{\underline{\varepsilon}}_{ed},\, \underline{V}\}$, le vecteur $\underline{V}$ représentant alors de manière quelconque « l'un » des réseaux de microfissures. Toutes les composantes de $\mathcal{V}$ sont données dans une base orthonormée directe $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ (6.46).

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{ed} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ed,11} & \varepsilon_{ed,12} & \varepsilon_{ed,13} \\ \varepsilon_{ed,12} & \varepsilon_{ed,22} & \varepsilon_{ed,23} \\ \varepsilon_{ed,13} & \varepsilon_{ed,23} & \varepsilon_{ed,33} \end{pmatrix} \quad \underline{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{6.46}$$

Pour définir le groupe des symétries matérielles de l'adhésif β, nous assimilons le talc à un prisme hexagonal régulier d'axe $\underline{x}_3$ (FIG. 6.5). Dans cette configuration, nous faisons l'hypothèse que l'évolution découplée de trois réseaux de microfissures suffit à rendre compte du caractère isotrope transverse du comportement. En conséquence, nous définissons trois repères locaux obtenus par rotation d'axe $\underline{x}_3$ et d'angles 0, $\pi/3$ et $2\pi/3$ radians.
Nous considérons par ailleurs que la déformation de chaque réseau de microfissures peut être représentée par les modes 1 et 2 locaux[18]. Dans chaque repère, le vecteur $\underline{V}$ peut alors

[14] [THIONNET *et al.*, 2003]
[15] Potentiel thermodynamique et pseudo-potentiel des dissipations.
[16] On suppose que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(3)$ et invariable au cours du temps.
[17] Emmy NOETHER (1882-1935) est l'une des grandes figures de l'Ecole mathématique allemande du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle.
[18] Le mode 3 du réseau $[i]$ se transforme en mode 2 pour les réseaux $[j]$, $j \neq i$.

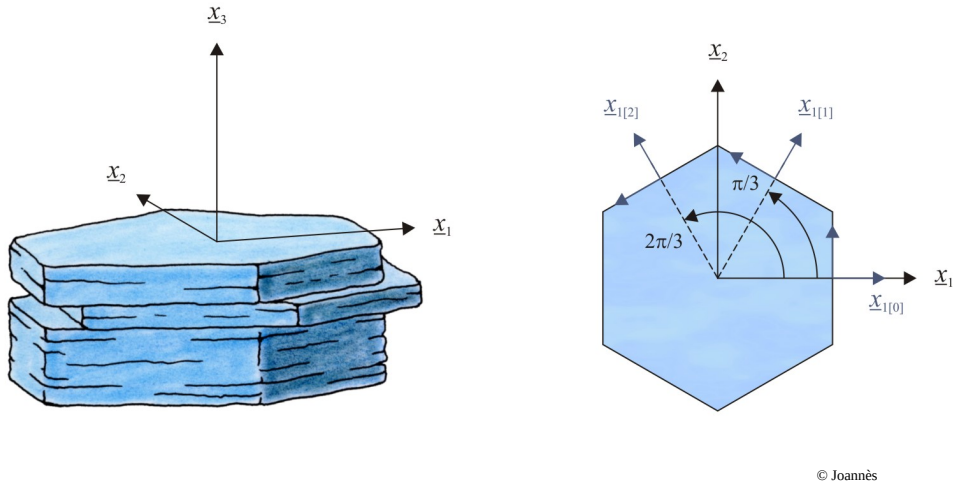


FIG. 6.5 – Schématisation du talc par un prisme hexagonal régulier.

s'exprimer uniquement en fonction de ses composantes normale (selon $\underline{x}_{3[i]}$, notée V_N) et tangentielle (selon $\underline{x}_{1[i]}$, notée V_T). De la même manière, nous pouvons limiter le tenseur des déformations à ses composantes planes $\varepsilon_{ed,11}$, $\varepsilon_{ed,13}$ et $\varepsilon_{ed,33}$. Les transformations orthogonales qui laissent invariantes la description locale de cette géométrie d'endommagement sont l'identité I et la rotation $R_{2[i]}$ qui forment le groupe des symétries matérielles $\mathcal{S}$ (6.47).

$$\mathcal{S} = \left\{I, R_{2[i]}\right\}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{2[i]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.47}$$

Pour des raisons liées à des considérations physiques, on souhaite écrire la fonction énergie libre comme un polynôme invariant sous $\mathcal{S}$ de degré partiel 0 ou 2 par rapport aux composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}$ et $\underline{V}$. L'application des trois étapes relatives à la Théorie des Invariants mentionnées précédemment (§ 6.1.3.2) conduit à écrire l'énergie libre sous la forme (6.48), où P_{20}, P_{02} et P_{22} sont les polynômes les plus généraux répondant aux impératifs que l'on s'est fixé. Outre les publications précédemment citées, l'origine de ce résultat est détaillée par B. BONNET[19] et l'intégralité des calculs pourra être trouvée dans le travail de thèse de N. REVEST[20].

$$\psi_{ed}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}, \underline{V}\right) = P_{20}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}\right) + P_{02}\left(\underline{V}\right) + P_{22}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}, \underline{V}\right) \tag{6.48}$$

L'application de la 3ème étape de la méthode permet de formuler P_{20} en fonction du tenseur $\underset{\sim}{C}_0$ caractérisant les rigidités du matériau vierge d'endommagement. De même, P_{22} peut s'exprimer en fonction de trois tenseurs de comportement : $\underset{\sim}{C}_N$, $\underset{\sim}{C}_T$ et $\underset{\sim}{C}_{NT}$. Il est par ailleurs possible d'annuler P_{02} en considérant qu'il n'y a pas d'énergie stockée lorsque la fissure est fermée[21]. Enfin, les composantes de $\underline{V}$ (V_N et V_T) s'expriment en fonction des déplacements normaux $U_N\left(m_d, r_d\right)$ et tangentiels $U_T\left(m_d, r_d\right)$ des lèvres de la fissure

[19] [BONNET, 2005]
[20] [REVEST, 2009]
[21] Cela est équivalent à considérer qu'aucune inclusion ne peut empêcher une fissure de se refermer complètement.

caractéristique, ainsi qu'en fonction d'une relation $f_d(\alpha_d)$ permettant de prendre en considération le niveau d'endommagement selon (6.49) et (6.50).

$$V_N(\alpha_d, m_d, r_d) = f_d(\alpha_d)\, U_N(m_d, r_d) \tag{6.49}$$

$$V_T(\alpha_d, m_d, r_d) = f_d(\alpha_d)\, U_T(m_d, r_d) \tag{6.50}$$

Dans le cadre de l'élasticité endommageable traitée actuellement et par analogie avec ψ_{el} présenté en (6.3), nous pouvons écrire ψ_{ed} sous la forme (6.51).

$$\begin{aligned}
\rho\,\psi_{ed}\left(\underline{\varepsilon}_{ed}, \underline{V}(\alpha_d, m_d, r_d)\right) &= \frac{1}{2}\underline{\varepsilon}_{ed} : \underset{\sim}{C}(\alpha_d, m_d, r_d) : \underline{\varepsilon}_{ed} \\
\underset{\sim}{C}(\alpha_d, m_d, r_d) &= \underset{\sim}{C}_0 - f_d^2(\alpha_d)\, \underset{\sim}{C}_d(m_d, r_d) \\
\underset{\sim}{C}_d(m_d, r_d) &= \underset{\sim}{C}_T\, U_T^2(m_d, r_d) \cdots \\
&\quad \cdots + \underset{\sim}{C}_N\, U_N^2(m_d, r_d) \cdots \\
&\quad \cdots + \underset{\sim}{C}_{NT}\, U_N^2(m_d, r_d)\; U_T^2(m_d, r_d)
\end{aligned} \tag{6.51}$$

D'un point de vue mathématique, ψ_{ed} remplace ψ_{el} dans la partition du potentiel thermodynamique ψ abordée en (6.2). Les lois d'état propres à la partie endommageable sont données par les relations (6.52) à (6.55).

$$\underline{\sigma} = \rho\,\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}_{ed}} = \underset{\sim}{C}(\alpha_d, m_d, r_d) : \underline{\varepsilon}_{ed} \tag{6.52}$$

$$A_d = \rho\,\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_d} = \frac{1}{2}\underline{\varepsilon}_{ed} : \left[-\frac{\partial f_d^2(\alpha_d)}{\partial \alpha_d}\underset{\sim}{C}_d(m_d, r_d)\right] : \underline{\varepsilon}_{ed} \tag{6.53}$$

$$M_d = \rho\,\frac{\partial \psi}{\partial m_d} \tag{6.54}$$

$$R_d = \rho\,\frac{\partial \psi}{\partial r_d} \tag{6.55}$$

Dans la suite de ce travail, nous supposons que lorsque les fissures sont fermées, les frottements entre leurs lèvres sont nuls. Les variables m_d et r_d ne sont donc pas dissipatives et cela se traduit par $M_d = 0$ et $R_d = 0$. L'application du théorème des fonctions implicites conduit à écrire que $m_d = m_d\left(\underline{\varepsilon}_{ed}, \alpha_d\right)$ et $r_d = r_d\left(\underline{\varepsilon}_{ed}, \alpha_d\right)$.

6.1.3.4 Explicitation des fonctions f_d, m_d, r_d et des sauts de déplacement U_N et U_T

f_d est la fonction de lissage des chutes de rigidité en fonction de α_d. Il s'agit d'une fonction croissante que nous définissons selon (6.56). Nous pouvons noter que lorsque le matériau est sain (i.e. $\alpha_d = 0$), il n'y a aucune chute de rigidité.

$$f_d^2(\alpha_d) = \frac{\alpha_d}{1 + \alpha_d} \tag{6.56}$$

Pour déterminer la forme des fonctions m_d et r_d, il est bien entendu possible de tenir compte d'une description locale et microscopique de la fissure caractéristique en « mesurant » les paramètres géométriques. Plus simplement, nous considérons m_d et r_d comme des fonctions scalaires définissant macroscopiquement le mode et le rayon d'ouverture. Pour une valeur d'endommagement donnée, m_d doit être une fonction continue à valeurs dans $[1,\,2]$ (6.57) et r_d une fonction continue et positive.

$$\begin{aligned} \text{si} \quad \varepsilon_{33} > 0, \quad m_d &= \frac{2\,\varepsilon_{13}^2 + \dfrac{\varepsilon_{33}^2}{q^2}}{\varepsilon_{13}^2 + \dfrac{\varepsilon_{33}^2}{q^2}} \quad \text{sinon} \quad m_d = 2 \qquad (6.57) \\ \text{avec} \quad q^2 &= \left(\frac{\varepsilon_{33[R]}}{\varepsilon_{13[R]}}\right)^2 \quad \text{dissymétrie traction/cisaillement} \\ \text{si} \quad \varepsilon_{33} > 0, \quad r_d &= \sqrt{\varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{13}^2} \quad \text{sinon} \quad r_d = \sqrt{\varepsilon_{13}^2} \qquad (6.58) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un état de déformation nulle, les sauts de déplacement U_N et U_T doivent s'annuler selon les relations (6.59) et (6.60).

$$\forall m_d, \quad U_N\left(m_d, r_d = 0\right) = 0 \qquad (6.59)$$

$$\forall m_d, \quad U_T\left(m_d, r_d = 0\right) = 0 \qquad (6.60)$$

Lors de l'ouverture de la fissure caractéristique en mode 1 ou en mode 2, le vecteur modélisant l'endommagement doit posséder une composante unique[22], normale ou tangentielle. Cela impose les relations (6.61) et (6.62).

$$\forall r_d, \quad U_N\left(m_d = 1, r_d\right) = 0 \qquad (6.61)$$

$$\forall r_d, \quad U_T\left(m_d = 2, r_d\right) = 0 \qquad (6.62)$$

Pour des raisons physiques[23] et pour une accessibilité plus aisée à l'identification, nous souhaitons limiter l'influence des paramètres m_d et r_d sur les sauts de déplacement, tout en garantissant une restauration progressive des propriétés du matériau au passage de la frontière entre la traction et la compression. On utilise pour cela une forme exponentielle avec un paramètre d'atténuation ϑ_d conduisant aux relations (6.63) et (6.64).

$$U_N = \left(1 - \mathrm{e}^{-\vartheta_d(2-m_d)}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\vartheta_d\, r_d}\right) \qquad (6.63)$$

$$U_T = \left(1 - \mathrm{e}^{-\vartheta_d(m_d-1)}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\vartheta_d\, r_d}\right) \qquad (6.64)$$

[22] Il y a bien entendu deux composantes en mode mixte.

[23] Le comportement du matériau endommagé ne doit pas dépendre de l'amplitude des contraintes [THIONNET et RENARD, 1993].

6.1.3.5 Evolution de l'endommagement : loi complémentaire

L'évolution de la variable d'endommagement[24] α_d doit tenir compte de l'inégalité de Clausius-Duhem qui se résume pour cette partie du modèle à l'inéquation (6.65).

$$-A_d\,\dot{\alpha_d} \geq 0 \quad \forall \dot{\alpha_d} \tag{6.65}$$

Tout en tenant compte de l'inégalité précédente, le phénomène d'endommagement étant supposé indépendant du temps (absence de viscosité) l'évolution de la variable α_d peut se faire en postulant l'existence d'une fonction seuil g. Cette fonction est associée à un critère convexe tel que pour $g\left(\varepsilon_{ed}, \alpha_d, m_d, r_d\right) \leq 0$, le matériau ne subit pas d'endommagement. La loi complémentaire qui nous intéresse ici s'écrit alors selon la relation (6.66) où g est définie selon (6.67).

$$\dot{\alpha}_d \;=\; -\dot{\lambda}_d \frac{\partial g}{\partial A_d} \tag{6.66}$$

$$g\left(\varepsilon_{ed}, \alpha_d, m_d, r_d\right) = A_d - A_{d0} \quad \text{où} \quad A_{d0} = y_2 + \frac{y_1 - y_2}{1 + \mathrm{e}^{(\alpha_d - \alpha_{d0})/\Delta_d}} \tag{6.67}$$

Dans l'expression de A_{d0}, les paramètres y_1 et y_2 définissent les limites minimale et maximale de la courbe sigmoïde utilisée comme seuil d'endommagement (FIG. 6.6). α_{d0} et Δ_d permettent de fixer la position du point d'inflexion et la pente de la courbe en ce point.

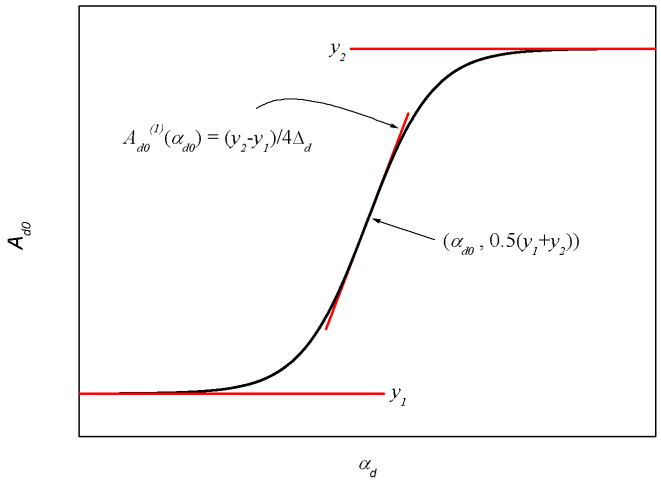


FIG. 6.6 – Courbe sigmoïde permettant de définir le seuil d'endommagement.

[24] Les variables m_d et r_d n'étant pas dissipatives, seule l'évolution de α_d est à définir.

La détermination du multiplicateur d'endommagement $\dot{\lambda}_d$ passe par l'écriture de la condition de cohérence $\dot{g} = 0$ (6.68).

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{ed} + \frac{\partial g}{\partial \alpha_d}\dot{\alpha}_d + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial m_d}\dot{m}_d + \frac{\partial g}{\partial r_d}\dot{r_d}}_{\text{pas de dissipation}\rightarrow 0} \\ &= \frac{\partial A_d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{ed} - \dot{\lambda}_d \left(\frac{\partial A_d}{\partial \alpha_d} - \frac{\partial A_{d0}}{\partial \alpha_d} \right) \end{aligned} \tag{6.68}$$

La loi d'état concernant la variable A_d (6.53) nous permet d'exprimer les dérivées partielles (6.69) et (6.70) en fonction de ψ pour aboutir à la valeur de $\dot{\lambda}_d$ (6.71).

$$\frac{\partial A_d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{ed} \partial \alpha_d} \tag{6.69}$$

$$\frac{\partial A_d}{\partial \alpha_d} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_d^2} \tag{6.70}$$

$$\boxed{\dot{\lambda}_d = \frac{\rho \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{ed} \partial \alpha_d} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{ed}}{\rho \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_d^2} - \dfrac{\partial A_{d0}}{\partial \alpha_d}}} \tag{6.71}$$

6.1.4 Etablissement d'un critère de rupture

La détermination de la résistance mécanique ultime d'un assemblage collé est décrite par certains auteurs comme étant plus un art qu'une science. Il est vrai que cette entreprise présente de multiples facettes et dépend de la qualité de la description phénoménologique du matériau.

D'un point de vue physique, il est naturel de vouloir relier la rupture aux mécanismes d'endommagement. Dans notre cas, cette approche est complexe car elle fait intervenir de manière couplée l'endommagement des charges et l'initiation des fissures dans le polymère. Une autre possibilité consiste alors à considérer ces deux phénomènes de manière macroscopique en établissant un critère de rupture à l'image du critère de plasticité. Si nous considérons *a priori* que la forme de l'enveloppe de rupture est similaire à celle utilisée pour la plasticité, nous pouvons nous contenter d'introduire un paramètre R_1 définissant la taille de la surface de rupture représentée par la fonction f_{ar} (6.72).

$$\boxed{\begin{aligned} f_{ar}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = J^a\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) - \beta\, R_1^a + (\beta - 1)\; I_1\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\; R_1^{a-1} \\ \text{avec} \quad \beta \geq 0, a \geq 1 \end{aligned}} \tag{6.72}$$

Nous définissons par ailleurs la fonction f_r (6.73) qui permet d'obtenir des valeurs plus appropriées au concept de « rupture » : la limite ultime du matériau est obtenue lorsque le critère atteint et dépasse une valeur unitaire.

$$\boxed{f_r\left(f_{ar}\right) = \max\left(0, 1 + \text{signe}(f_{ar}) \sqrt[a]{|f_{ar}|}\right) \quad \text{avec} \quad a \geq 1} \tag{6.73}$$

La simplicité de cette approche macroscopique permet de traiter l'adhésif non chargé sans autre adaptation supplémentaire.

6.2 Implémentation du modèle de comportement

Nous avons choisi d'implémenter le modèle de comportement de l'adhésif dans le code de calcul ZéBuLoN dont la programmation *orientée objet* lui confère un haut niveau de flexibilité. Z-mat, la librairie matériaux de ZéBuLoN, peut ainsi être complétée par des modèles « utilisateur » via le pré-processeur ZebFront. Ce dernier propose un accès aisé à des moyens mathématiques dédiés et performants : les relations constitutives du comportement peuvent être formulées naturellement sous forme scalaires, vectorielles ou tensorielles. De plus, l'implémentation d'un nouveau modèle de comportement sous ZebFront est facilitée par la pré-programmation de deux méthodes d'intégration :

- explicite de type Runge-Kutta,
- implicite basée sur un schéma à point milieu généralisé (θ-method).

6.2.1 Choix du schéma d'intégration

Au cours d'un calcul par éléments finis, les relations constitutives du comportement sont prises en compte localement au sein de chaque élément. Comme nous avons pu le voir, ces relations font intervenir :

- un couple de variables spécifiques[25] au problème à résoudre ($\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}$),
- un jeu de variables internes ($\boldsymbol{\alpha}_I$),
- un jeu de variables auxiliaires[26] ($\mathbf{A}_I$),
- des paramètres extérieurs comme un champ de température ou une concentration en eau (P_{aram}),
- des coefficients matériaux (scalaires, vectoriels ou tensoriels) tels que le tenseur de rigidité élastique, les coefficients d'écrouissage ou encore les paramètres de la fonction de charge (C_{oeff}).

Parmi les relations constitutives, les lois d'évolutions se présentent généralement sous la forme d'équations différentielles à intégrer (6.74).

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_I = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_I\left(\underline{\varepsilon}, \dot{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}_I, \mathbf{A}_I, P_{\text{aram}}, \dot{P}_{\text{aram}}, C_{\text{oeff}}\left(\boldsymbol{\alpha}_I, \mathbf{A}_I, P_{\text{aram}}\right)\right) \tag{6.74}$$

[25] Tout comportement (mécanique, thermique, etc.) est piloté par une variable spécifique baptisée « primale ». En mécanique, il s'agit par exemple du tenseur des déformations pour un problème formulé en petites perturbations ou du gradient de la transformation pour un problème en grandes déformations. La réponse du comportement est alors donnée par l'intermédiaire d'une variable « duale ».

[26] Nous entendons par « variable auxiliaire » toute variable dont l'obtention ne nécessite pas d'intégration. Il s'agit par exemple des variables duales, associées de manière explicite aux variables internes par les lois d'état. Il s'agit également des variables disponibles en post-traitement comme la contrainte équivalente de von Mises.

Dans une formulation en déplacements[27], la déformation $\underset{\sim}{\varepsilon}$ ainsi que sa dérivée $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ sont des grandeurs directement accessibles[28]. Elles constituent des données d'entrée de l'équation (6.74) au même titre que les valeurs initiales d'intégration. Cette équation différentielle peut être évaluée de manière incrémentale : on impose alors un incrément de temps $\Delta t = t_1 - t_0$ qui se traduit mécaniquement par un incrément de déformation $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$. En plus de $\underset{\sim}{\varepsilon}^{t_1}$ et $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$, l'état du comportement est connu à l'instant t_0 ($\underset{\sim}{\sigma}^{t_0}$, $\boldsymbol{\alpha}_I^{t_0}$, $\mathbf{A}_I^{t_0}$, ...) et par un schéma d'intégration adapté nous cherchons à déterminer l'état actualisé à la fin de l'incrément ($\underset{\sim}{\sigma}^{t_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_I^{t_1}$, $\mathbf{A}_I^{t_1}$, ...).

Le comportement doit également fournir la *matrice tangente* (6.75) nécessaire au calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{L}} = \frac{\partial \Delta\underset{\sim}{\sigma}}{\partial \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{6.75}$$

L'intégration numérique des relations constitutives du comportement repose sur une adaptation de méthodes généralistes plus ou moins simples à implémenter. La pré-programmation de deux schémas d'intégrations complémentaires justifie l'intérêt du pré-processeur ZebFront. Ainsi, le schéma explicite de type Runge-Kutta permet un développement rapide du modèle au prix d'un temps CPU moyennement performant et une stabilité incertaine pour des chargements complexes. Le schéma implicite à point milieu généralisé (θ-method) offre plus de robustesse mais est bien plus difficile à mettre en œuvre car il nécessite la définition de la matrice jacobienne du comportement.

En phase de modélisation initiale, nous avons opté pour le schéma explicite autorisant une progression aisée dans l'implémentation.

6.2.2 Quelques éléments de programmation

Le modèle de comportement est écrit dans un fichier source dont le langage est issu du C++. Avant d'être compilé, le code est interprété par ZebFront au travers de directives préfixées par le symbole « `@` ». De manière synthétique, nous ne présentons ici que les trois étapes clefs de l'implémentation[29] :

1. Définition des attributs et propriétés du comportement au travers d'une classe spécifique (`@Class`).
2. Evaluation des dérivées temporelles de toutes les variables à intégrer selon un schéma explicite (`@Derivative`).
3. Détermination en post-intégration des variables auxiliaires et de la matrice tangente cohérente (`@StrainPart`).

[27] Ceux-ci sont de ce fait supposés connus.
[28] En adoptant la notation indicielle, on a sous l'hypothèse des petites perturbations $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$.
[29] Le code source de ces trois directives figure en annexe A.

6.2.2.1 `@Class`

Un nouveau modèle de comportement est déclaré par une classe, au sens informatique du terme, dont la spécificité dérive d'un type « `BEHAVIOR`[30] ». A l'image de la description des relations constitutives du comportement (§ 6.2.1), un objet de cette classe peut être considéré comme la collection :

- d'un couple de variables primale (`@Grad`) et duale (`@Flux`),
- d'un jeu de variables internes (`@_VarInt`),
- d'un jeu de variables auxiliaires (`@_VarAux`),
- de paramètres extérieurs,
- de coefficients matériaux (`@Coeff`).

Par défaut, « `@Grad` » correspond à la variable « `eto` » ($\underline{\varepsilon}$) et « `@Flux` » à la variable « `sig` » ($\underline{\sigma}$). Pour les variables internes et auxiliaires, le caractère « _ » doit être remplacé par « `s` » pour un scalaire, « `v` » pour un vecteur ou « `t` » pour un tenseur symétrique. Des objets mathématiques dédiés permettent alors de compléter l'implémentation : `VECTOR`, `MATRIX`, `TENSOR2`, ...

Pour prendre en compte les différents réseaux de microfissures, nous définissons une variable « `damage_system_number` » dont la valeur fixe le nombre et les orientations des systèmes de glissement. Ainsi, pour obtenir une cellule hexagonale telle que nous l'avons décrite précédemment, il faut paramétrer 6 directions privilégiées (2×3). L'utilisation d'un objet « `EULER_ROTATION`[31] » pré-programmé facilite grandement la gestion d'une telle approche.

Enfin, nous avons simplifié le paramétrage de la fonction seuil d'endommagement en remplaçant α_{d0} et Δ_d par les abscisses des points à 1% et 99% de l'amplitude de la courbe sigmoïde.

[30] `BASIC_NL_BEHAVIOR` dans notre cas.

[31] Utilisé dans la fonction « `compute_rot` » dont seul le prototype est précisé ici.

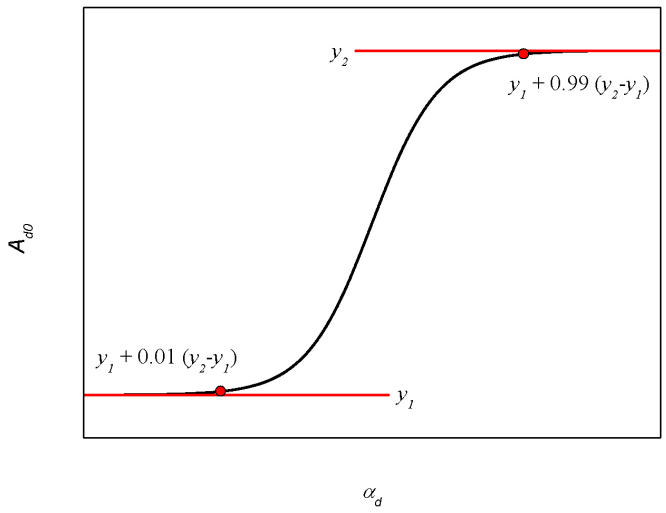
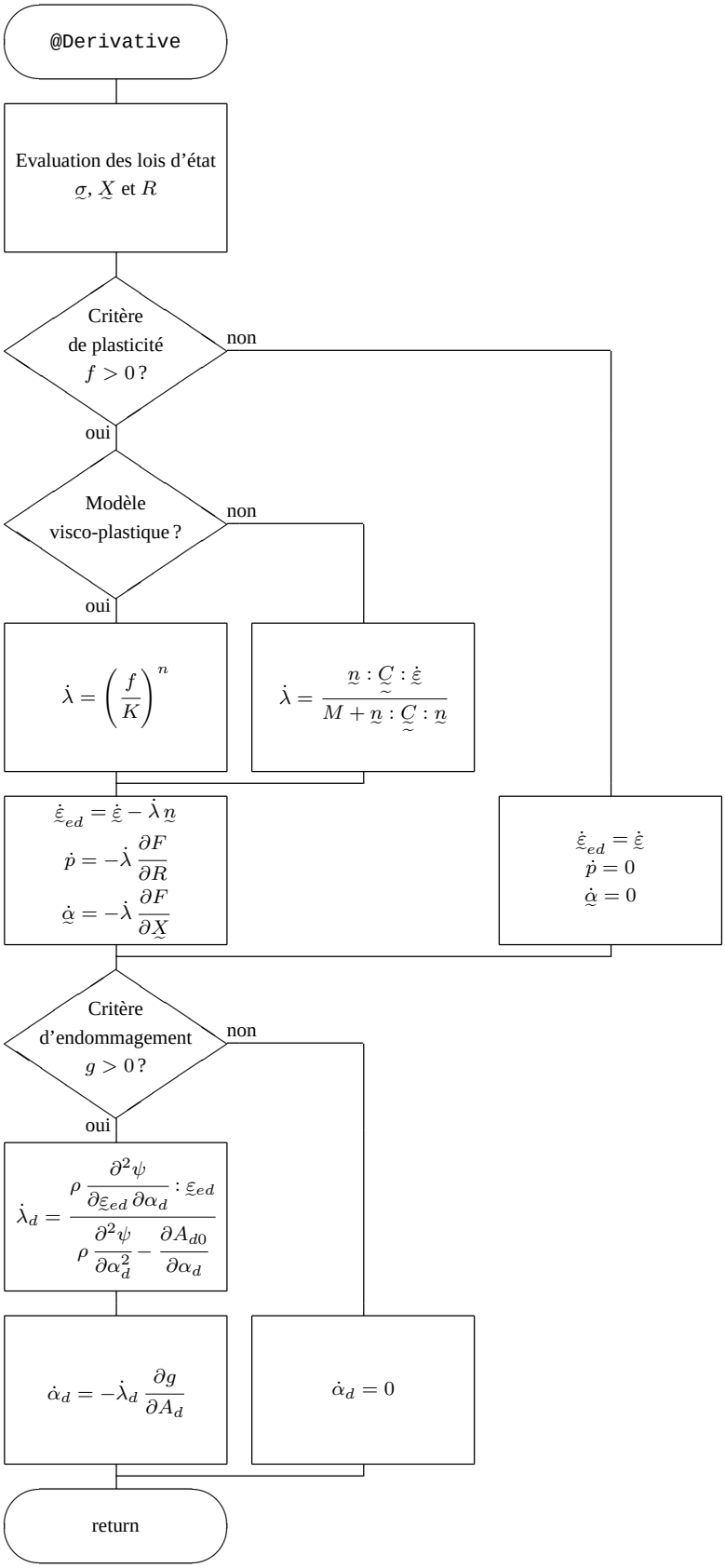


FIG. 6.7 – Nouveau paramétrage de la courbe sigmoïde permettant de définir le seuil d'endommagement.

6.2.2.2 `@Derivative`

Le choix d'un schéma d'intégration explicite revient à implémenter une directive de type « `@Derivative` ». Les équations différentielles associées aux variables à intégrer sont résolues de manière séquentielle. L'algorithme que nous avons utilisé est exposé dans un ordinogramme (cf. page suivante).


@Derivative
Evaluation des lois d'état $\underset{\sim}{\sigma}$, $\underset{\sim}{X}$ et R
Critère de plasticité $f > 0$?
non
oui
Modèle visco-plastique ?
non
oui
$\dot{\lambda} = \left(\frac{f}{K}\right)^n$
$\dot{\lambda} = \frac{\underset{\sim}{n} : \underset{\sim\sim}{C} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}{M + \underset{\sim}{n} : \underset{\sim\sim}{C} : \underset{\sim}{n}}$
$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ed} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n}$
$\dot{p} = -\dot{\lambda}\,\frac{\partial F}{\partial R}$
$\dot{\underset{\sim}{\alpha}} = -\dot{\lambda}\,\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{X}}$
$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{ed} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$
$\dot{p} = 0$
$\dot{\underset{\sim}{\alpha}} = 0$
Critère d'endommagement $g > 0$?
non
oui
$\dot{\lambda}_d = \frac{\rho\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}_{ed}\,\partial \alpha_d} : \underset{\sim}{\varepsilon}_{ed}}{\rho\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_d^2} - \frac{\partial A_{d0}}{\partial \alpha_d}}$
$\dot{\alpha}_d = -\dot{\lambda}_d\,\frac{\partial g}{\partial A_d}$
$\dot{\alpha}_d = 0$
return

6.2.2.3 `@StrainPart`

A la suite de l'intégration du comportement par itérations successives, il faut encore déterminer la variable duale, les variables auxiliaires ainsi que la matrice tangente du comportement. Ces opérations sont menées dans la méthode `@StrainPart`. Notons par ailleurs que la matrice tangente cohérente est approximée par la matrice de rigidité du comportement.

6.3 Identification des coefficients du modèle

Après l'implémentation du modèle, il convient d'identifier les coefficients définis dans la classe de comportement. Cela consiste à trouver un jeu de valeurs décrivant au mieux le matériau étudié. Schématiquement, la classe de comportement définit l'aspect qualitatif des phénomènes à mettre en œuvre et les coefficients quantifient leurs influences. Les valeurs des coefficients sont rassemblés dans un fichier « matériau » qui est interprété par ZéBuLoN au début de la phase d'intégration. Nous avons par ailleurs mis en place des mots clefs spécifiques qui permettent de paramétrer la complexité du modèle :

- prise en compte de la viscoplasticité avec « `**use_norton` »,
- prise en compte de l'endommagement avec « `**use_damage` »,
- évaluation du critère de rupture avec « `**compute_failure` ».

Dans le cadre de ce travail, nous n'avons pas pris en considération la visco-plasticité qui représentait un phénomène de deuxième ordre par rapport aux objectifs visés. Nous donnerons néanmoins un moyen d'obtenir les deux coefficients associés. Mise à part la partie élastique (§ 6.3.2), toutes les valeurs qui sont données ici se rapportent à des joints d'épaisseur 300 µm.

L'objectif de cette section est donc de fournir un protocole d'identification basé sur les essais multi-axiaux du chapitre 3. Une première campagne d'essais avec une éprouvette étalon instrumentée avait permis de valider le dispositif pour différentes configurations angulaires. Durant cette phase de tests, nous avions remarqué que les fortes charges appliquées entraînaient la déformation du système de fixation et induisaient une légère rotation de l'éprouvette. La prise en compte de cet épiphénomène ainsi que la géométrie particulière des éprouvettes permet d'améliorer la pertinence de l'identification mais nécessite de recourir à la simulation numérique des essais. Préalablement à l'identification, nous exposons ci-après les principaux éléments de cette simulation.

6.3.1 Mise en œuvre de la simulation numérique

Recourir à la simulation numérique en vue de l'identification des coefficients matériaux exige une modélisation suffisamment représentative des essais. Pour cela, il convient notamment de se baser sur les données d'enregistrement en prévoyant un « dépouillement numérique » identique à celui qui est mené avec les capteurs d'acquisition. L'étape initiale a donc consisté à reproduire la campagne de validation avec l'éprouvette étalon. Il s'agissait de « calibrer » la modélisation en identifiant de manière spécifique le comportement du montage. Nous avons entrepris le maillage complet du dispositif en le décomposant en sous-domaines de type « `elset` » (FIG. 6.8).

Dans le cas de l'éprouvette étalon, les parties `el_corps` et `el_adhesif` ont bien entendu été adaptées au contexte. Ces deux sous-domaines sont par ailleurs paramétrables pour prendre en considération des épaisseurs de joint différentes. Sur la figure FIG. 6.8, la zone plus fortement densifiée en nœuds de part d'autre du plan médian de l'éprouvette autorise un dépouillement numérique correspondant à la mesure extensométrique. De la même manière, les goupilles (`el_goup`) permettent d'imposer la charge.

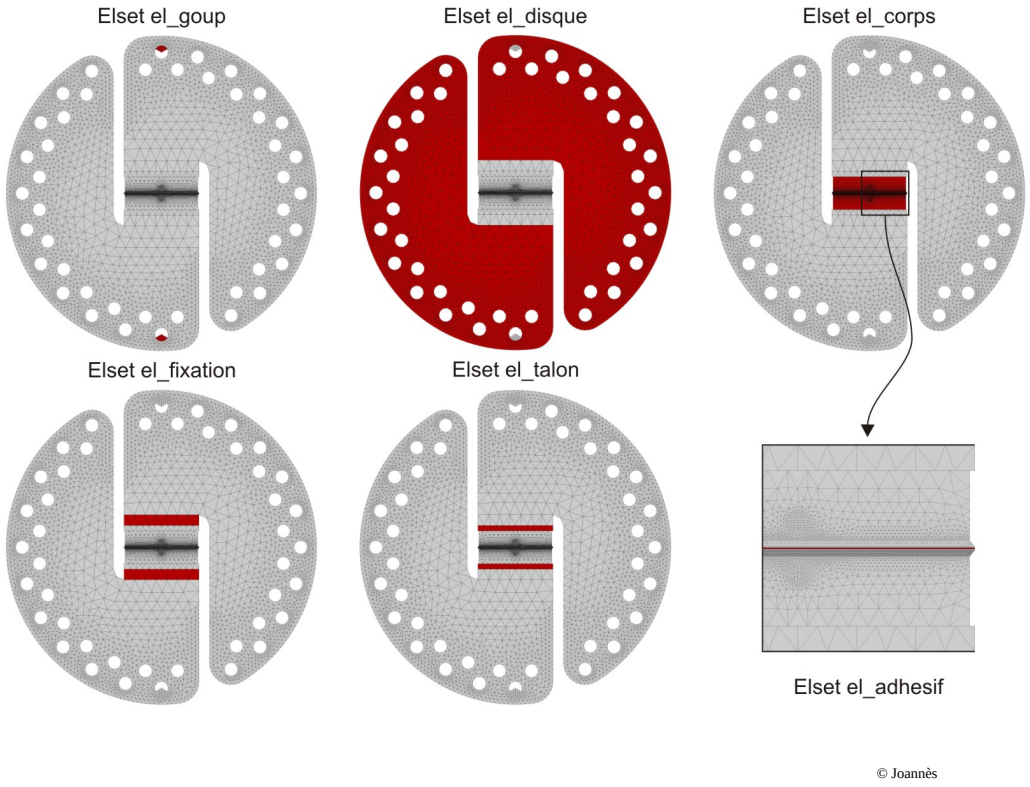
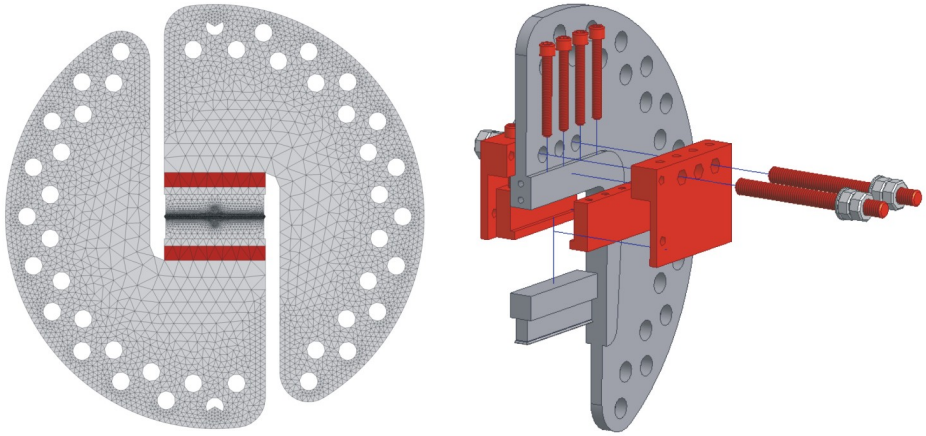


FIG. 6.8 – Maillage tridimensionnel du dispositif CdM destiné à simuler les essais sur assemblages.

S'il est relativement aisé de prévoir le comportement d'une pièce métallique monolithique comme un disque (`el_disque`), cela n'est pas le cas de la zone de fixation (`el_fixation`) qui présente une grande complexité (FIG. 6.9). L'intérêt de l'éprouvette étalon est ici parfaitement mis en évidence car, lors de l'essai de validation, seul le comportement de la fixation demeure inconnu.

La modélisation adéquate de la zone de fixation a nécessité d'établir un comportement dissymétrique entre la traction et la compression. L'assemblage par vissage induit en effet une grande souplesse en traction et n'est pas véritablement sollicité en compression puisque le talon de l'éprouvette est alors en contact avec la face d'appui du disque. L'assemblage est également relativement flexible en cisaillement. L'obtention d'un tel comportement sous ZéBuLoN passe par l'utilisation d'un modèle élastique paramétré. Nous avons choisi de faire évoluer le « module



© Joannès

FIG. 6.9 – La modélisation de la zone de fixation de l'éprouvette nécessite de prendre en considération le comportement mécanique de l'accostage.

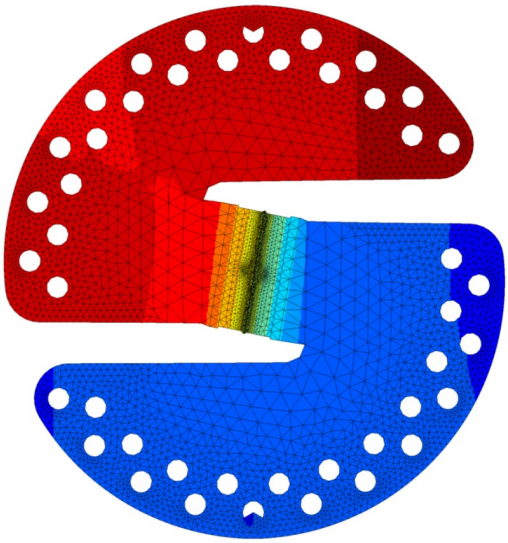
d'Young[32] » entre 76000 MPa (compression) et 300 MPa (traction) en utilisant une fonction sigmoïde pour garantir la continuité de la transition. Le module de Coulomb équivalent a, quant à lui, été évalué à 3000 MPa.

Nous avons par ailleurs pu vérifier que, pour les charges considérées, nous restons dans un domaine élastique sur l'ensemble du montage.

Dans ces conditions, la simulation d'un essai de cisaillement fait clairement apparaître la rotation de l'éprouvette (FIG. 6.10) et donc la nécessité de dépouiller les mesures dans le repère local[33] de celle-ci. Nous pouvons également nous interroger sur la pertinence des essais de cisaillement mais il convient de relativiser le phénomène mis en évidence. Il faut tout d'abord préciser que la rotation, amplifiée 5000 fois sur la figure FIG. 6.10, n'intervient véritablement que pour des charges importantes et la rigidité initiale n'est quasiment pas impactée. D'autre part, nous avons montré dans le chapitre 3 que la trace du tenseur de rigidité d'un joint collé travaillant en configuration de cisaillement approchait bien zéro. Nous pouvons donc poursuivre la procédure d'identification que nous venons d'aborder.

[32] Il s'agit ici d'un module équivalent puisque nous ne pouvons pas sérieusement parler de module d'Young pour la fixation.

[33] Au niveau numérique un programme de post-traitement analyse les déplacements globaux de la zone d'ancrage de l'extensomètre puis interpole ceux-ci dans un repère local en fonction de la base de mesure souhaitée.



© Joannès

FIG. 6.10 – Simulation de la rotation de l'éprouvette lors d'un essai de cisaillement. Les déplacements sont amplifiés 5000 fois.

6.3.2 Identification du tenseur de rigidité élastique

Le tenseur de rigidité élastique $\underset{\sim}{C}_0$ dépend, dans le cas le plus général, de 21 composantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Or, nous avons pu constater au cours des analyses micro-mécaniques que l'adhésif présente un plan d'isotropie issu de l'orientation des charges minérales. Cela nous permet d'assimiler le comportement de l'adhésif à un comportement *isotrope transverse*[34].. En restant dans le repère du matériau, cette réduction renvoie à l'identification de 5 composantes indépendantes uniquement. Dans le plan du joint ou plan d'isotropie $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$, nous faisons l'hypothèse que le comportement correspond à celui d'un échantillon massif[35]. Nous pouvons alors définir les modules E_1, E_2, ν_{12} et G_{12} en considérant les relations (6.76) et en s'appuyant sur la caractérisation de l'adhésif à l'état massif.

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = E_2 = 2500 \pm 190 \text{ MPa} \\ \nu_{12} = 0,30 \pm 0,05 \end{array}\right\} \quad G_{12} = \frac{E_1}{2\,(1+\nu_{12})} = 965 \pm 110 \text{ MPa} \tag{6.76}$$

En ce qui concerne les composantes antiplanes, le dépouillement numérique des essais sur assemblages nous permet d'accéder aux modules E_3, $\nu_{13} = \nu_{23}$ et $G_{13} = G_{23}$. La première étape de l'identification a consisté à établir une « table » de rigidité pour des épaisseurs de joints allant de 100 à 1500 µm, prenant en compte des niveaux de propriétés élastiques croissantes. Pour le

[34] Un comportement isotrope transverse est invariant par rotation d'angle quelconque autour d'un axe perpendiculaire au plan d'isotropie

[35] Malgré une épaisseur importante, celui-ci présente une microstructure anisotrope similaire à celle que l'on retrouve au sein d'un joint d'adhésif. L'échantillon massif présente donc l'avantage de pouvoir solliciter « une microstructure orientée » dans le plan d'isotropie.

dépouillement, nous avons ensuite établi un programme d'interpolation permettant d'estimer les propriétés *in situ* de l'adhésif à partir des données d'enregistrement de l'essai : rigidité et épaisseur du joint. Les résultats sont reportés graphiquement sur la figure FIG. 6.11.

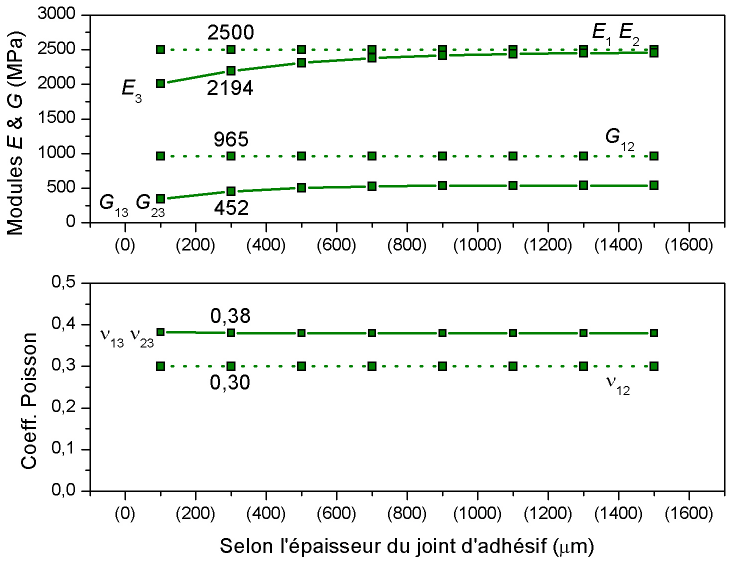


FIG. 6.11 – Résultat d'identification des propriétés élastiques selon l'épaisseur du joint d'adhésif.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, la chute des propriétés élastiques peut être imputée à un endommagement initial plus ou moins important. Il y a alors deux façons de prendre en compte ce phénomène suivant que l'on place l'origine du modèle en amont ou en aval de la mise en œuvre du joint. Dans le premier cas il convient d'identifier l'endommagement se produisant durant la réticulation : celui-ci permet alors d'impacter la rigidité avant toute sollicitation mécanique. Dans le deuxième cas nous considérons que la chute des propriétés élastiques est héritée des conditions de réalisation : l'identification des coefficients de $\underset{\sim}{C}_0$ permet de rendre compte de l'endommagement initial *a posteriori*. Si le premier cas est relativement séduisant, sa complexité limite pour l'instant toute tentative d'application. Nous nous sommes donc naturellement orientés vers la deuxième solution qui consiste à choisir[36] les coefficients du modèle en fonction de l'épaisseur du joint.

[36] Encore faut-il que le modèle géométrique associé soit suffisamment fin pour ne pas « gommer » la chute des propriétés.

Les coefficients du tenseur $\underset{\sim}{C}_0$ s'obtiennent par inversion de la matrice de souplesse (6.77).

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \tag{6.77}$$

6.3.3 Identification de la plasticité de la phase polymère

Avant de quantifier la plasticité de la phase polymère, il convient de prendre en compte la sensibilité du comportement à la pression hydrostatique. Nous avons pour cela trois coefficients à notre disposition qui permettent d'accommoder le seuil plastique : R_0, a et β. Leur identification s'appuie sur les données des essais multi-axiaux reportées dans un plan (I_1, J) et repose sur un ajustement non-linéaire. Ce dernier utilise la méthode des moindres carrés et l'algorithme itératif de Levenberg-Marquardt[37]. Le résultat de l'optimisation (FIG. 6.12) impose des valeurs relativement élevées des termes a et β pour traduire la haute sensibilité du comportement à la pression hydrostatique ($R0 = 12,42$, $a = 8,49$, $\beta = 1,91$).

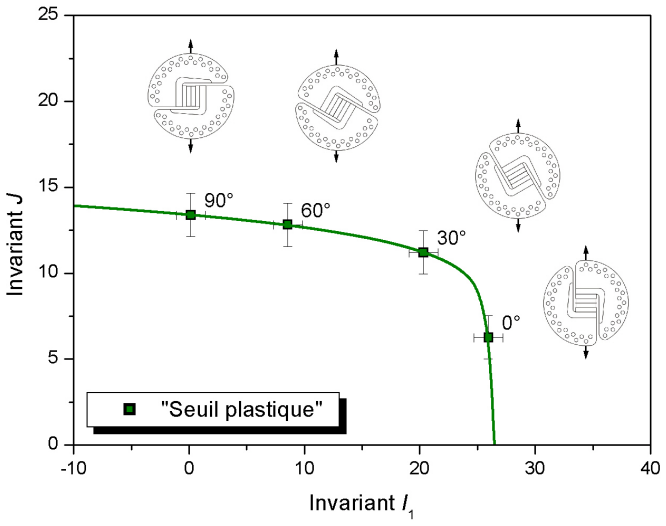


FIG. 6.12 – Résultat d'identification du seuil plastique très sensible à la pression hydrostatique ($R0 = 12,42$, $a = 8,49$, $\beta = 1,91$).

[37] [LEVENBERG, 1944], [MARQUARDT, 1963]

Le domaine d'élasticité correspondant à l'identification précédente peut être représenté dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des contraintes principales (FIG. 6.13).

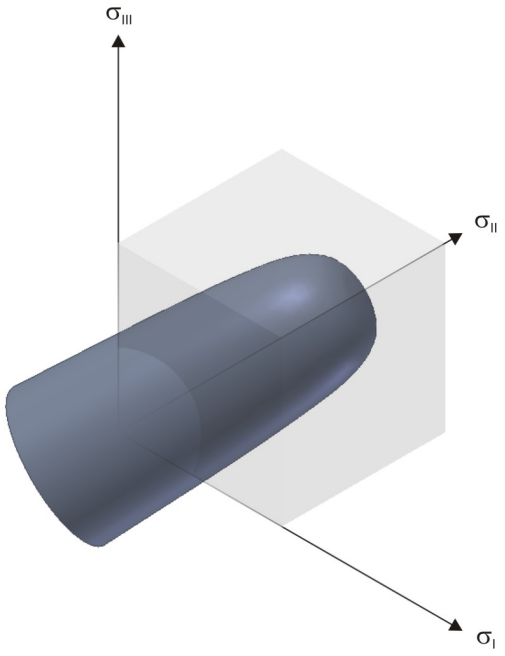


FIG. 6.13 – Représentation dans l'espace des contraintes principales du domaine d'élasticité obtenu pour ($R0 = 12,42$, $a = 8,49$, $\beta = 1,91$).

L'identification de la plasticité de la phase polymère s'obtient aisément à partir des essais sur échantillons massifs. Après optimisation, les coefficients C et D de l'écrouissage cinématique rendent parfaitement compte de la non-linéarité du domaine plastique (FIG. 6.14).
Comme nous l'avions préalablement indiqué, nous ne prenons pas en considération la viscosité qui s'exprime par l'évolution du seuil plastique en fonction de la vitesse de sollicitation. Cependant, le modèle dispose des coefficients n et K caractérisant le potentiel d'écoulement de Norton et ces deux coefficients peuvent être identifiés sur les différents essais en vitesses de déformation.

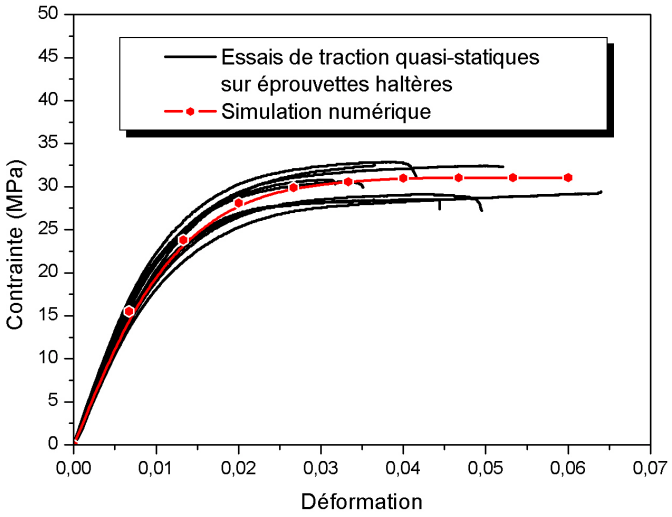


FIG. 6.14 – Corrélation entre la simulation numérique et les essais de traction quasi-statique sur éprouvettes haltères ($C = 4005$, $D = 22029$).

6.3.4 Identification de l'endommagement et de la rupture

Contrairement à l'élasto-plasticité traitée dans les deux paragraphes précédents, nous avons rencontré de nombreuses difficultés pour l'identification de l'endommagement : postuler que l'endommagement évolue sous forme sigmoïdale est une chose relativement aisée mais déterminer sa valeur l'est moins. Il est bien entendu possible, par observations microscopiques, d'évaluer l'évolution de la densité de fissures en fonction du niveau de charge. Toutefois, cette démarche est longue et aurait été difficile à réaliser. Nous sommes donc restés ici dans le cadre d'une approche globale.

La taille du modèle géométrique[38] s'est également révélée handicapante en induisant des temps de calcul prohibitifs pour une phase d'identification. Au niveau du modèle de comportement nous pâtissons en partie de la faible performance du schéma explicite et du grand nombre d'itérations nécessaires pour faire converger l'algorithme. Dans ce contexte, nous avons préféré diminuer la taille du problème en « extrayant » le comportement moyenné de l'adhésif. Rappelons que l'étape d'identification, qui vise à trouver les meilleurs coefficients possibles afin de minimiser l'écart entre les courbes expérimentales et les courbes simulées, nécessite de faire un compromis entre la qualité des résultats, le temps passé pour la recherche des coefficients et les dispersions expérimentales. Nous avons donc travaillé successivement sur la traction puis le cisaillement en modélisant temporairement l'intégralité de la non-linéarité du comportement par de la plasticité[39]. Nous pouvions ensuite isoler la complexité du chargement au sein du joint pour le simuler sur un volume élémentaire représentatif constitué d'un unique point d'intégration. Passé l'obstacle dû à la lenteur des calculs, nous avons pu identifier l'endommagement en traction puis

[38] Plusieurs centaines de milliers de degrés de libertés.

[39] L'isotropie de la plasticité permet de travailler sur un nombre plus petit de variables : le temps de calcul est donc réduit.

celui en cisaillement sur cette nouvelle base très « locale ». Les tenseurs $\underset{\sim}{C}_N$ et $\underset{\sim}{C}_T$ quantifient la perte de raideur due aux composantes V_N et V_T de l'endommagement. Le tenseur $\underset{\sim}{C}_{NT}$ prend en considération le couplage entre les modes 1 et 2 de l'endommagement. Pour chaque réseau de microfissures nous considérons ces effets négligeables et nous réduisons $\underset{\sim}{C}_{NT}$ à un tenseur nul. Le fichier matériau issu de la phase d'identification figure en annexe B.

Au delà des difficultés rencontrées, le résultat d'identification est très encourageant (FIG. 6.15 et FIG. 6.16).

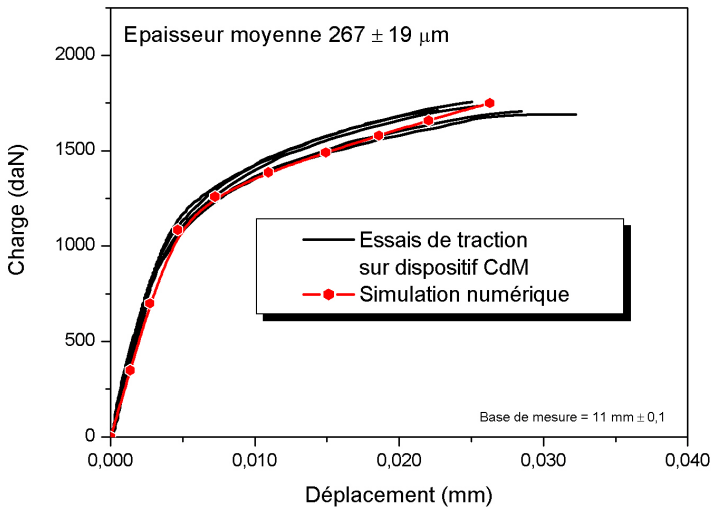


FIG. 6.15 – Résultat d'identification du comportement de l'adhésif β sollicité en traction sur le dispositif CdM.

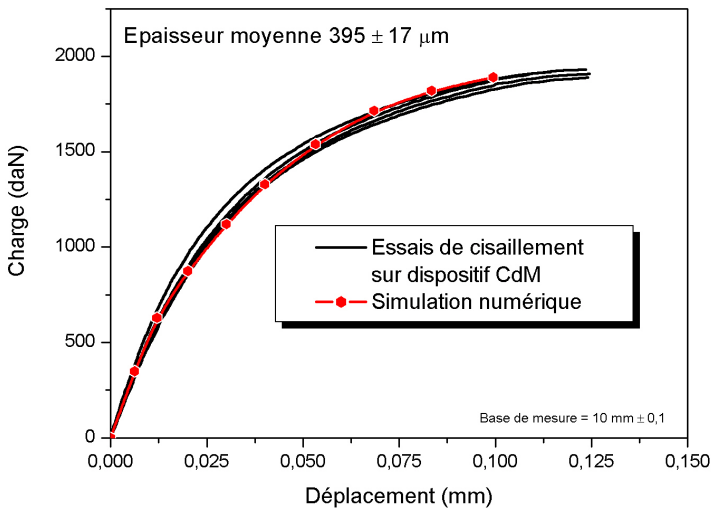


FIG. 6.16 – Résultat d'identification du comportement de l'adhésif β sollicité en cisaillement sur le dispositif CdM.

En ce qui concerne la rupture, le paramètre R_1 permet de définir la limite ultime du matériau au travers d'un critère proche de celui utilisé pour la plasticité.

6.4 Analyse de la pertinence du modèle

A la suite de l'identification, l'évaluation de la pertinence du modèle consiste à étudier la réponse de celui-ci lors d'un essai vierge vis-à-vis de l'identification. Nous reprenons pour cela les essais sur cylindres du chapitre 3 pour lesquelles nous disposons d'une base expérimentale suffisamment fiable[40]. Les figures FIG. 6.17 et FIG. 6.18 présentent une bonne corrélation entre les essais et la simulation numérique.

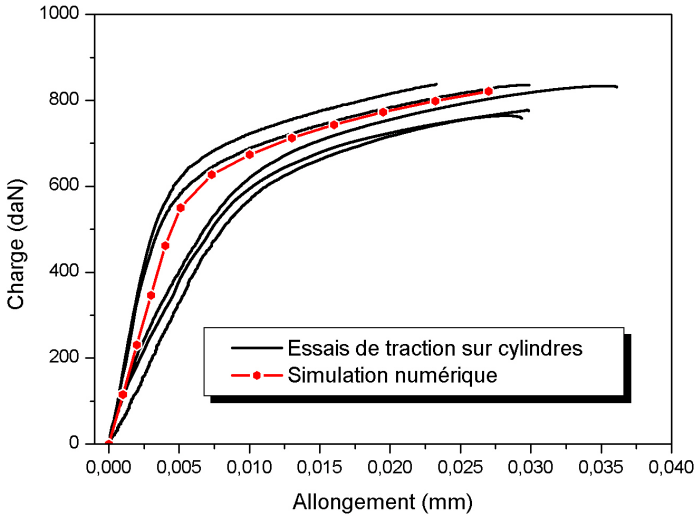


FIG. 6.17 – Résultat de simulation des essais de traction sur cylindres.

Comme pour la phase d'identification, il faut néanmoins souligner que nous subissons la faible performance du schéma d'intégration qui se traduit par des temps de calculs excessifs. Le schéma explicite, qui nous permettait une progression aisée dans cette phase d'exploration, s'avère en effet handicapant en ce qui concerne la vitesse de convergence. Pour une exploitation industrielle, il serait profitable d'utiliser un schéma plus robuste.

[40] Si nous avions eu une telle base pour des essais sur éprouvettes à simple recouvrement, nous aurions pu éprouver le modèle sur une configuration plus représentative d'un sous-système industriel.

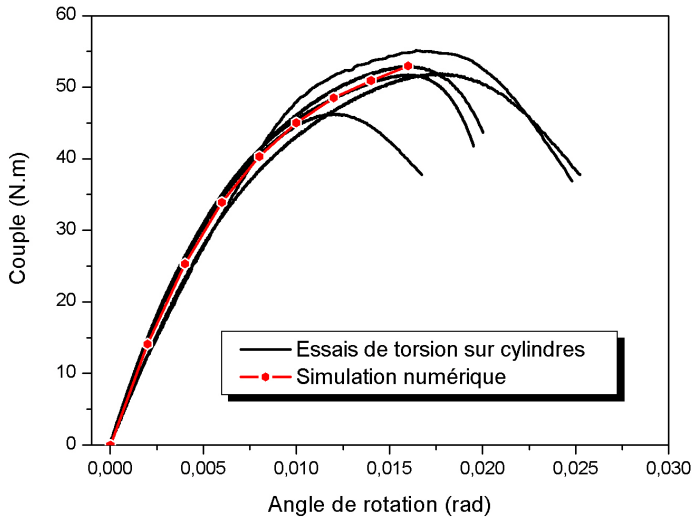


FIG. 6.18 – Résultat de simulation des essais de torsion sur cylindres.

Troisième partie

De l’éprouvette à l’assemblage industriel

FAVORISER LE RAPPROCHEMENT *entre l'éprouvette et l'assemblage industriel. Tel est l'enjeu de cet ultime volet qui nous permet de répondre au deuxième objectif de l'étude : savoir dimensionner les assemblages collés. Malgré l'utilisation croissante du collage structural, de nombreuses questions restent encore posées quant à la modélisation géométrique en vue d'optimiser et/ou de prédire la durée de vie en service.*

Les développements de l'analyse numérique ont conduit à l'émergence d'outils de conception spécifiques qui restent cependant difficilement applicables au niveau industriel. Parmi ces outils, les éléments finis ont incontestablement bouleversé le monde du calcul scientifique ; l'évolution actuelle de cette méthode d'analyse ouvre de nombreuses perspectives. Ainsi, le septième chapitre exploite une formulation hiérarchique particulièrement efficace face aux contraintes que posent les assemblages collés. La pertinence de la méthode est évaluée sur des sous-systèmes représentatifs de l'application industrielle visée.

Au delà des sollicitations quasi-statiques jusqu'alors considérées, l'adhésif présente un comportement particulier lorsqu'il est soumis à des variations de contraintes répétées ou à des conditions environnementales sévères. En vue d'une évolution du modèle initialement proposé, l'objectif du huitième et dernier chapitre est d'exposer les particularités du comportement intervenant en fatigue oligocyclique et en vieillissement climatique.

Chapitre 7

Dimensionner les assemblages collés

7.1 Des approches très variées

En dimensionnement des structures, il est connu de longue date que certaines géométries comme les coins, les arêtes ou les entailles peuvent provoquer des concentrations de contraintes nocives pour la tenue mécanique. Il en est de même lorsque des structures font intervenir plusieurs composants aux propriétés mécaniques différentes. Concevoir un assemblage collé nécessite donc de déceler la présence de ces phénomènes très localisés afin d'en évaluer l'impact sur la tenue mécanique.

Pour les assemblages les plus élémentaires comme le joint collé à simple recouvrement, l'approche analytique semble bien adaptée. Cependant, dans le cas de configurations géométriques plus complexes, il est impossible de décrire analytiquement le champ de contraintes au sein de l'adhésif et il faut alors recourir à des méthodes numériques. Les paragraphes qui suivent exposent les approches habituellement adoptées pour dimensionner les assemblages collés.

7.1.1 Modèles analytiques et pré-dimensionnement

La pertinence d'un modèle analytique réside en grande partie sur le choix des hypothèses simplificatrices. Les phénomènes physiques prépondérants doivent être convenablement pris en compte alors que les phénomènes d'ordres inférieurs sont négligés. La plupart des modèles actuels proposent des formulations élasto-plastiques aussi bien pour l'adhésif que pour les substrats. Cela permet d'obtenir des prédictions suffisamment fiables pour un pré-dimensionnement.

Bien qu'élémentaires, les configurations traitées par des modèles analytiques sont relativement nombreuses :

- joints à recouvrement simple, double, en gradins, biseauté,
- joints à enture simple ou double,
- joints en bouts,
- assemblages tubulaires,
- etc.

En première approximation, il est souvent possible de représenter un assemblage complexe par l'un de ces modèles élémentaires. Des outils informatiques, faciles à mettre en œuvre pour les

bureaux d'études, ont été aménagés dans ce sens par des centres techniques ou des industriels. A titre d'exemple, on peut citer le logiciel CADIAC du CETIM[1].

7.1.2 Analyse numérique par la méthode des éléments finis

La *méthode des éléments finis* (MEF) est un outil de résolution numérique aujourd'hui très largement répandu dans les bureaux d'études. De manière générale, cette méthode permet de résoudre les problèmes physiques régis par des équations aux dérivées partielles. En mécanique du solide déformable, il s'agit de rechercher la solution d'un problème continu en se plaçant dans un espace équivalent discrétisé par des éléments finis. Le niveau de précision de la solution est fortement dépendant du degré de discrétisation adopté.

Dans le cas des assemblages collés, il convient de mailler suffisamment finement le joint d'adhésif pour faire apparaître les phénomènes de concentrations de contraintes. Cependant, outre l'augmentation du coût de calcul, le remaillage est particulièrement pénalisant dans le cadre d'un développement industriel. A l'heure actuelle, pour représenter une pièce comme l'essieu du projet TRAIC, les bureaux d'études utilisent des éléments de quelques millimètres de longueur caractéristique (FIG. 7.1) alors que l'épaisseur du joint de colle ne dépasse pas quelques centaines de micromètres…

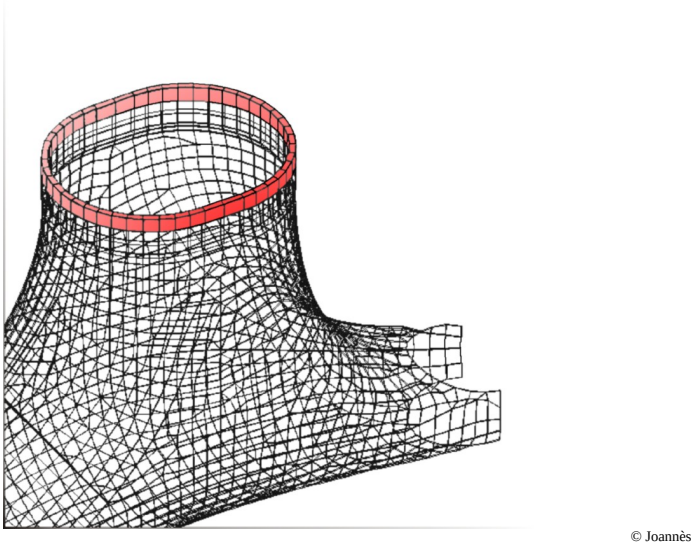


FIG. 7.1 – Exemple de maillage industriel issu du projet TRAIC.

Le dimensionnement numérique des joints collés nécessite donc d'exploiter tout le potentiel de la méthode des éléments finis en ayant recours à des approches spécifiques. A l'heure actuelle, il semble évident que le dimensionnement des assemblages collés passe par une stratégie globale/locale[2] : le dimensionnement en raideur peut être réalisé en utilisant un modèle global avec des éléments conventionnels alors que l'analyse dans les zones sensibles peut être menée sur un modèle adapté.

[1] [JEGGY, 1992]
[2] [NGUYEN, 2004]

7.1.3 Modèle de zone cohésive et éléments d'interface

Dans le cas d'un calcul par éléments finis, le joint d'adhésif peut être traité comme une interface idéalisée avec une transmission appropriée des déplacements et des efforts entre les deux matériaux. Schématiquement, cela consiste à remplacer le joint par des modèles rhéologiques dont le plus simplifié est le ressort.

Ainsi, les *modèles de zones cohésives*[3] (MZC) introduits à la fin des années 1980 permettent de rendre compte des propriétés de cohésions interfaciales. La plupart de ces modèles établissent une relation entre la force de contact surfacique T et le saut de déplacement u de part et d'autre de l'interface. L'écriture proposée par l'équation (7.1) peut s'appliquer à tous les modes de sollicitations[4].

$$T(u) = E\frac{u}{\delta}F(\lambda) \tag{7.1}$$

E correspond à la rigidité initiale, u/δ désigne le déplacement relatif normalisé par le saut de déplacement critique et λ caractérise le degré d'endommagement.

La force de contact surfacique doit être interprétée comme étant un effort de liaison entre les deux matériaux. Par conséquent, une interface d'épaisseur non nulle et non endommagée satisfait à une relation linéaire entre u et T. Une interface entièrement fissurée se traduit par un effort de liaison nul entre les deux surfaces, à moins que celles-ci entrent en contact lors d'une compression. La transition entre l'état initial et la rupture de l'interface doit rendre compte de la progression non-linéaire des phénomènes dissipatifs : plasticité, microfissuration, cavitation. Cela est pris en considération par l'intermédiaire de la fonction d'endommagement F qui peut être définie de multiples manières. Généralement, cette fonction de $\lambda \in [0;1]$ évolue de façon continue en respectant les propriétés (7.2).

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(1) = 0 \tag{7.2}$$

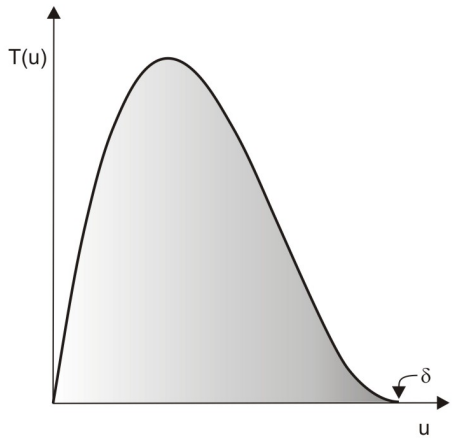
Un exemple simple de la fonction d'endommagement est donné par la relation (7.3) qui conduit à l'évolution de T présentée sur la figure FIG. 7.2.

$$F(\lambda) = \begin{cases} (1-\lambda)^2 & \lambda \leq 1 \\ 0 & \lambda > 1 \end{cases} \tag{7.3}$$

Si le déplacement relatif entre les surfaces est négatif, le modèle peut suivre une relation linéaire entre u et T quelle que soit la valeur du paramètre λ. Cela permet d'empêcher l'interpénétration entre les matériaux. En revanche, lorsque le déplacement relatif s'élève, l'évolution de l'endommagement affaiblit peu à peu l'interface jusqu'à provoquer sa ruine lorsque l'on atteint le déplacement critique δ.

La plupart des codes éléments finis actuels permettent d'utiliser des éléments d'interface implémentés avec un modèle de zone cohésive. Dans le cas des assemblages collés, le

[3] [NEEDLEMAN, 1987], [TVERGAARD et HUTCHINSON, 1992]
[4] [CHABOCHE *et al.*, 2001]



© Joannès

FIG. 7.2 – Force de contact surfacique évoluant avec un endommagement de forme quadratique.

comportement du film d'adhésif est représenté par l'intermédiaire d'une loi de séparation des substrats à l'image de la relation (7.1). Cela fait maintenant plus d'une vingtaine d'années que ces modèles sont utilisés dans des activités de recherches appliquées ou fondamentales pour explorer une large variété de problèmes.

Cependant, la percée vers des applications industrielles se fait attendre. Le principal obstacle concerne la dépendance des résultats vis-à-vis du maillage et, par voie de conséquence, une difficulté d'identification des paramètres du modèle. Certains outils d'aide au dimensionnement des assemblages collés traitent parfois ces aspects de manière autonome. L'ISAT[5] propose par exemple un programme informatique utilisant des éléments finis d'interface à formulation mixte[6]. Cet outil permet de respecter les conditions de continuité[7] aux interfaces mais reste restreint au cas de l'élasticité plane linéaire.

7.1.4 Développements asymptotiques raccordés

Pour de nombreux problèmes physiques, la modélisation se heurte à la présence d'un ou plusieurs « petits paramètres », souvent de nature géométrique, qui « perturbent » de manière non négligeable les champs résultats locaux. C'est notamment le cas d'un joint d'adhésif dont l'épaisseur est très faible devant la surface de recouvrement. La prise en compte de cette épaisseur par des techniques de discrétisation classiques est déraisonnable et coûteuse. Cependant, c'est au sein du joint d'adhésif que se produisent les phénomènes de plus grande importance pour le dimensionnement. Il est donc exclu de ne pas tenir compte de ce « petit paramètre ».

Une idée relativement naturelle consiste alors à développer des modèles approchés fondés sur un *développement asymptotique* de la solution par rapport au petit paramètre. En mathématiques,

[5] Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports.
[6] [ESTEVES, 1995]
[7] Continuité du déplacement et continuité des composantes transverses du vecteur contrainte.

un développement asymptotique d'une fonction f donnée dans un voisinage fixé, est une somme finie de fonctions de références qui donne une bonne approximation du comportement de la fonction f dans le voisinage considéré. Cette technique appartient à une famille plus générale de méthodes dites de *perturbation*[8]. Le point clef pour appliquer ces méthodes est donc de dégager un petit paramètre qui permet de simplifier le problème général lorsqu'il tend à s'annuler.

Dans le cas d'un assemblage collé, il est évident que la résolution du problème est simplifiée si l'on considère une épaisseur de joint nulle (le joint est virtuellement supprimé). La solution est alors représentée sous la forme d'un développement dit *extérieur* ou en champ lointain (7.4).

$$\underline{u}_{\varepsilon}(x,y) = \underline{u}_0(x,y) + \text{petite correction} \tag{7.4}$$

Le déplacement $\underline{u}_0$ est solution du problème posé sur le domaine non perturbé. Il est clair que cette solution est satisfaisante dès que l'on s'éloigne de la perturbation. D'où sa désignation d'extérieure ou de lointaine. Mais, comme nous avons pu le voir, cette représentation est incomplète lorsque l'on s'intéresse aux mécanismes de rupture de l'assemblage.

Par un changement d'échelle, il est possible de définir un problème *intérieur* ou en champ proche. La dilatation des variables d'espace permet d'obtenir un domaine dans lequel la perturbation devient une composante géométrique macroscopique. Pour que le problème général reste bien posé, le comportement du champ lointain s'approchant de l'origine doit « raccorder » avec le comportement du champ proche s'éloignant de la perturbation.

Grâce à une double description du problème, les développements asymptotiques raccordés conduisent à des modèles peu gourmands en temps de calcul et suffisamment riches pour rendre compte de l'effet d'épaisseur du joint d'adhésif[9]. Cependant, ces méthodes font appel à des théories mathématiques relativement complexes et nécessitent une implémentation logicielle spécifique pour être couplées à la méthode des éléments finis.

7.2 Apports d'une formulation hiérarchique

Les modèles de zones cohésives et les développements asymptotiques raccordés souffrent d'une mise en œuvre et d'une exploitation difficile pour des applications industrielles. Ces deux méthodes nécessitent de modifier les stratégies de dimensionnement au niveau des bureaux d'études en traitant les assemblages collés de manière singulière. Dans ce travail de thèse, nous proposons une méthodologie alternative qui permet d'estimer la résistance des joints collés tout en conservant des outils logiciels et des moyens traditionnels. Nous exploitons les techniques de calcul par éléments finis en nous basant sur une *formulation hiérarchique* des *fonctions d'interpolation* élémentaires. Accompagnée d'un pré-traitement spécifique, cette formulation permet de conserver des maillages « industriels » avec une description raisonnable des joints collés tout en assurant une compatibilité totale avec les codes commerciaux.

[8] La théorie des perturbations est une méthode qui permet de trouver une solution approchée d'une équation E_{ε} dépendante d'un paramètre ε, lorsque la solution E_0 (obtenue pour $\varepsilon \to 0$), est connue exactement.

[9] [GILIBERT et RIGOLOT, 1979], [LEGUILLON et ABDELMOULA, 2000]

7.2.1 Introduction didactique aux méthodes adaptatives

Afin de mieux appréhender l'apport d'une formulation hiérarchique, nous rappelons dans les paragraphes qui suivent les notions essentielles de la méthode des éléments finis. Nous ne considérons ici que les aspects « opérationnels » de la méthode ; les théories mathématiques sous-jacentes étant régulièrement abordées dans de nombreux ouvrages[10]. Notre propos est par ailleurs illustré par un problème unidimensionnel particulièrement didactique : l'équilibre mécanique d'une *barre*[11] élastique soumise à un effort normal. Connaissant l'effort appliqué et les propriétés mécaniques de la barre, l'exercice consiste à déterminer les champs de déplacement et de contrainte induits par le chargement. L'examen détaillé de ce problème permet en outre de préciser sans ambiguïté les notations retenues dans ce manuscrit.

7.2.1.1 Idéalisation du problème physique, forme variationnelle

Avant d'entamer tout calcul, il convient de poser correctement le problème. L'étape d'idéalisation permet à ce titre de traduire une situation physique dans un langage mathématique approprié.

Ainsi, nous considérons que la barre est homogène, de longueur ℓ et d'aire de section droite A constante. Le problème est unidimensionnel et l'axe d'étude est désigné par $(\mathrm{O}, \underline{x}_1)$ (FIG. 7.3). Nous reprenons ici les notations utilisées pour la description d'un système matériel dans le cadre de la mécanique des milieux continus (cf. chapitre 5). Ω, $\partial\Omega$ et $\bar{\Omega}$ désignent respectivement l'intérieur, la frontière et l'extérieur de la barre étudiée. A l'instant t, la position du point matériel M est donnée par le vecteur $\underline{\mathrm{OM}} = x\,\underline{x}_1$. Les propriétés matériau de la barre sont réduites à E pour le module d'Young et à ρ pour la masse volumique[12]. Une densité massique d'effort, $\underline{f}\,(\mathrm{M}, t)$, est appliquée sur toute la longueur[13] de la barre qui est encastrée à l'origine O. A l'extrémité L, un effort ponctuel $\underline{F}$ complète le chargement mécanique. Nous considérons par ailleurs que la distribution des forces dans une section droite ne dépend que de la valeur de l'effort normal $\underline{\mathcal{N}}\,(\mathrm{M}, t)$. Le déplacement de la section courante est noté $\underline{u}\,(\mathrm{M}, t)$. Afin d'alléger l'écriture, la dépendance en espace et en temps des grandeurs précédentes sera le plus souvent implicite ; le contexte différenciera alors la fonction de sa valeur en un point.

En projection sur l'axe d'étude, le bilan des efforts mécaniques appliqués à un tronçon de barre compris entre les sections droites d'abscisses x et $x + dx$ conduit à l'écriture de l'équilibre local (7.5) sous la forme d'une *équation aux dérivées partielles*.

$$\forall t, \forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} + \rho\, A\, f = \rho\, A\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.5}$$

[10] Voir par exemple l'abondante bibliographie disponible dans les ouvrages de O. C. ZIENKIEWICZ [ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005b], [ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 2005], [ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005a].

[11] Au sens mécanique du terme, c'est à dire un élément de structure dont les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur et qui ne travaille qu'en traction-compression le long de son axe.

[12] La masse linéique est déterminée par le produit $\rho\, A$.

[13] La densité linéique d'effort $\rho\, A\, \underline{f}$ possède « suffisamment de régularité » pour procéder aux calculs d'intégration à suivre.

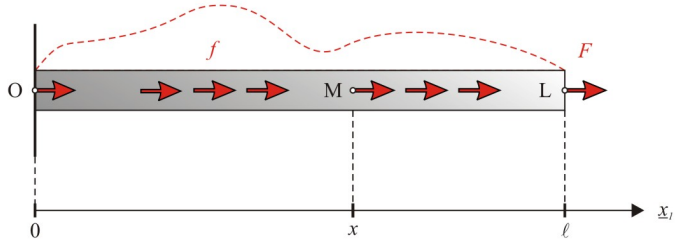


FIG. 7.3 – Problème d'équilibre mécanique d'une barre élastique soumise à un effort normal.

Notre propos étant avant tout d'illustrer l'apport d'une formulation hiérarchique des fonctions d'interpolation, nous simplifions le problème en considérant que celui-ci est *stationnaire*. La disparition de la dépendance en temps conduit à une équation d'équilibre sous *forme différentielle* (7.6).

$$\forall \mathrm{M} \in \Omega, \quad \frac{d\mathcal{N}}{dx} + \rho\, A\, f = 0 \tag{7.6}$$

La seule composante non nulle du tenseur des déformations est $\varepsilon_{11} = du/dx$ (*condition de compatibilité*). Le comportement se résume à la *loi constitutive* $\sigma_{11} = E\,\varepsilon_{11}$ et les *conditions aux limites* $u\,(\mathrm{O}) = 0$ et $\mathcal{N}\,(\mathrm{L}) = F$ achèvent de traduire le problème en un système d'équations dont la fonction inconnue recherchée est u.

$$\begin{cases} E\,A\,\dfrac{d^2u}{dx^2} + \rho\,A\,f = 0 & \forall \mathrm{M} \in \Omega \\ u\,(\mathrm{O}) = 0 & \text{pour } \mathrm{M} = \mathrm{O}(x = 0) \\ \left[\dfrac{du}{dx}\right]_{\mathrm{L}} = \dfrac{F}{E\,A} & \text{pour } \mathrm{M} = \mathrm{L}(x = \ell) \end{cases} \tag{7.7}$$

La résolution du système (7.7) par la méthode des éléments finis nécessite de transformer l'écriture locale en une formulation globale plus propice à l'analyse numérique. Cette nouvelle écriture est appelée forme *variationnelle* ou forme *intégrale* du problème. L'application de la *méthode des résidus pondérés* consiste à annuler le produit scalaire[14] entre le *résidu de l'équation d'équilibre* $r\,(u) = -E\,A\,d^2u/dx^2 - \rho\,A\,f$ et une *fonction test* arbitraire notée u^*. Ainsi, une première forme intégrale du problème est donnée par la relation (7.8).

$$\forall u^*, \forall x \in [0; \ell\,], \quad -\int_{x=0}^{\ell} u^*\,E\,A\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx - \int_{x=0}^{\ell} u^*\,\rho\,A\,f\,dx = 0 \tag{7.8}$$

[14] Sous certaines conditions que l'on suppose satisfaites, on montre que dans l'espace vectoriel des fonctions :

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathrm{I}} f\,(x)\; g\,(x)\; dx = 0 \quad \forall f\,(x) \quad \Leftrightarrow \quad g\,(x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

où $\langle f, g\rangle$ désigne le produit scalaire entre f et g.

L'intégration par parties nous permet d'obtenir une autre forme intégrale dite *faible*[15] qui permet de diminuer les conditions imposées aux fonctions admissibles u en choisissant d'annuler u^* de manière appropriée. La forme variationnelle[16] (7.9) ne nécessite que deux conditions de Dirichlet : $u\left(0\right)=0$ et $u^*\left(0\right)=0$.

$$\forall x\in\left[0;\ell\right],\quad \int_{x=0}^{\ell}\frac{du^*}{dx}E\,A\,\frac{du}{dx}dx=\int_{x=0}^{\ell}u^*\,\rho\,A\,f\,dx+u^*\left(\ell\right)\,F \tag{7.9}$$

7.2.1.2 Forme discrétisée, éléments finis

L'étape d'idéalisation précédente a permis de formuler un problème physique selon une écriture mathématique bien mieux adaptée à une résolution numérique. Cependant, la difficulté inhérente au problème continu initial s'est intégralement reportée sur la forme variationnelle : la notion de dimension « infinie » est toujours présente. La méthode d'approximation par éléments finis employée consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ défini par morceaux sur des sous-domaines[17] Ω_i de Ω : le problème continu initial est alors discrétisé. Les sous-domaines sont des *mailles* auxquelles il faut adjoindre une description des champs locaux pour former les *éléments*. Les champs locaux sont déterminés en un nombre fini de *valeurs nodales*[18] puis sont ensuite interpolés sur l'élément selon les *fonctions d'interpolation*. C'est à ce niveau que nous trouverons la possibilité d'adopter une formulation hiérarchique (§ 7.2.2).

Le champ de déplacement global u est ainsi approximé par l'intermédiaire de n_g valeurs nodales[19] u_i et des fonctions d'interpolation N_i.

La représentation (7.10) fait apparaître la notation « matrice [ ] - vecteur { } » que nous utiliserons par la suite.

$$u\left(x\right)=\left[N_1\left(x\right)\,\cdots\,N_i\left(x\right)\,\cdots\,N_{n_g}\left(x\right)\right]\left\{\begin{array}{c}u_1\\\vdots\\u_i\\\vdots\\u_{n_g}\end{array}\right\}=\left[N\left(x\right)\right]\left\{U\right\} \tag{7.10}$$

[15] L'idée de la formulation faible part de la constatation qu'une intégration par partie abaisse d'une unité le degré de dérivation de la fonction u recherchée :

$$\forall x\in\left[0;\ell\right],\quad -\int_{x=0}^{\ell}u^*\,E\,A\,\frac{d^2u}{dx^2}dx=\int_{x=0}^{\ell}\frac{du^*}{dx}E\,A\,\frac{du}{dx}dx-\left[u^*\,E\,A\,\frac{du}{dx}\right]_{x=0}^{\ell}$$

[16] La démarche suivie ici pour construire une forme variationnelle du problème est purement mathématique. En mécanique, le *théorème des travaux virtuels* permet d'établir de telles formulations par des interprétations physiques : après imposition d'un déplacement arbitraire cinématiquement admissible, l'équilibre de la structure est obtenu par égalisation entre les travaux des efforts internes et externes. C'est ce que nous obtenons dans la relation (7.9) en considérant u^* comme un déplacement arbitraire.

[17] Les sous-domaines Ω_i forment une partition de Ω.

[18] Les positions des *nœuds* de l'élément sont choisies arbitrairement dans la maille tout en privilégiant des critères de continuité inter-éléments.

[19] Les *degrés de liberté* du problème.

De la même manière que pour la matrice d'interpolation $[N]$, nous introduisons les matrices $[D]$ et $[\ B]$ (7.11).

$$u = [N]\ \{U\} \quad \text{donc} \quad \frac{du}{dx} = [D]\ [N]\ \{U\} = [B]\ \{U\} \tag{7.11}$$
$$\text{où} \quad [D] = \left[\frac{d}{dx}\right] \quad \text{et} \quad [B] = \left[\frac{dN_1}{dx} \cdots \frac{dN_i}{dx} \cdots \frac{dN_{n_g}}{dx}\right]$$

Pour la discrétisation de la forme intégrale faible, nous considérons que la solution recherchée u et la fonction test u^* appartiennent au même espace de dimension finie : il s'agit de la méthode dite de B. G. GALERKIN. Nous pouvons de cette manière écrire les relations (7.12) et (7.13).

$$u^* = [N]\ \{U^*\} = \{U^*\}^T\ [N]^T \tag{7.12}$$
$$\frac{du^*}{dx} = [B]\ \{U^*\} = \{U^*\}^T\ [B]^T \tag{7.13}$$

En reportant ces expressions dans la forme intégrale faible (7.9), nous obtenons le système d'équations algébriques de notre problème (7.14). Le vecteur $\{F_{nod}\}$ ne contient qu'une composante non nulle : l'effort F à l'extrémité libre de la barre.

$$[K]\ \{U\} = \{F\} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned} [K] &= \int_{x=0}^{\ell} [B]^T\ E\,A\ [B]\ dx \\ \{F\} &= \int_{x=0}^{\ell} [N]^T\ \rho\,A\,f\,dx + \{F_{nod}\} \quad \text{avec} \quad \{F_{nod}\} = [N\,(\ell)]^T\ F \end{aligned}$$

Dans la pratique, $[K]$, $\{U\}$ et $\{F\}$ sont construits élément par élément puis *assemblés* pour former le système algébrique global (7.14). Au niveau élémentaire, nous pouvons donc définir $[K^e]$, $\{U^e\}$ et $\{F^e\}$ à partir des matrices $[N^e]$ et $[B^e]$ (7.15) à (7.20). L'élément de longueur ℓ_e comporte n_e valeurs nodales.

$$u^e = [N^e]\ \{U^e\} \tag{7.15}$$
$$[N^e] = \left[N_1^e \cdots N_i^e \cdots N_{n_e}^e\right] \tag{7.16}$$
$$\frac{du^e}{dx} = [B^e]\ \{U^e\} \tag{7.17}$$
$$[B^e] = \left[\frac{dN_1^e}{dx} \cdots \frac{dN_i^e}{dx} \cdots \frac{dN_{n_g}^e}{dx}\right] \tag{7.18}$$
$$[K^e] = \int_{\ell_e} [B^e]^T\ E\,A\ [B^e]\ dx \tag{7.19}$$
$$\{F^e\} = \int_{\ell_e} [N^e]^T\ \rho\,A\,f\,dx \tag{7.20}$$

7.2.1.3 Résolution et méthodes adaptatives

La poursuite de cette entrée en matière nécessite d'attribuer des valeurs numériques[20] aux données du problème :

- géométrie $\ell = 1$ et $A = 1$,
- matériau $E = 1$ et $\rho = 1$,
- mécanique $F = 0$ et $\forall x \in [0; \ell]\,, \quad f\,(x) = -\sin\,(8\,x)$

Ce choix autorise une résolution analytique et donc exacte du système (7.7). Nous notons u_{ex} (7.21) cette solution qui nous permettra de juger plus aisément de la pertinence de telle ou telle solution approchée u.

$$u_{ex}\,(x) = -\frac{1}{64}\sin\,(8\,x) + \frac{1}{8}\cos\,(8)\;x \tag{7.21}$$

En ce qui concerne la résolution numérique, nous employons un *élément de référence*[21] à interpolation polynomiale de type Lagrange. L'espace de référence est repéré par la variable ξ et la transformation géométrique permettant de relier les coordonnées des nœuds de l'élément réel $\{X\}$ à l'espace de référence est donnée par la relation (7.22).

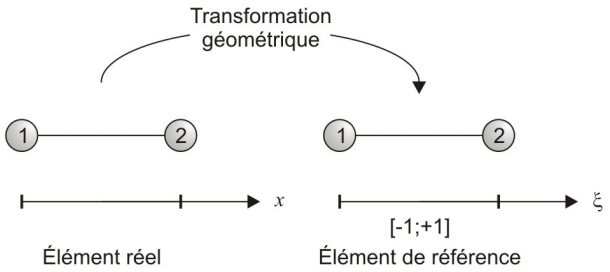


FIG. 7.4 – Transformation géométrique d'un l'élément à deux nœuds entre l'espace réel et l'espace de référence.

$$x\,(\xi) = [P_1\,(\xi)\;\cdots\;P_i\,(\xi)\;\cdots\;P_{n_e}\,(\xi)] \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n_e} \end{array} \right\} = [P\,(\xi)]\;\{X\} \tag{7.22}$$

Nous choisissons par ailleurs des *fonctions d'interpolation géométriques* P_i identiques[22] aux fonctions d'interpolation N_i^e. Pour une interpolation linéaire, nous obtenons la relation (7.23) qui garantit une continuité C_0 entre éléments.

[20] La concordance des unités est ici implicitement respectée.

[21] L'élément de référence est repéré dans un espace de référence et peut être mis en correspondance avec chaque élément réel par une transformation géométrique dédiée et bijective. La définition analytique de chaque élément réel et remplacée par celle, plus simple, de son élément de référence.

[22] L'élément est dit *iso-paramétrique*.

$$N_i^e(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{2} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad \text{soit} \quad [N^e] = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \quad \frac{1}{2}(1+\xi)\right] \tag{7.23}$$

L'obtention de $[B^e]$ (7.25) et $[K^e]$ (7.26) requiert le calcul de la *matrice jacobienne*[23] de la transformation : $J(\xi) = \ell_e/2$. La contribution de la densité linéique d'effort est prise en compte de manière globale lors de l'assemblage.

$$[B^e] = \frac{2}{\ell_e}\left[-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right] \tag{7.25}$$

$$[K^e] = \int_{\xi=-1}^{1} [B^e]^T \; E\,A \; [B^e] \; \frac{\ell_e}{2} d\xi \quad \text{soit} \quad [K^e] = \frac{E\,A}{\ell_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

Bien que la solution recherchée soit une fonction à variation relativement « douce », pour que son approximation soit « acceptable » la discrétisation doit être « suffisante ». Cette quasi-lapalissade est mise en évidence par la figure FIG. 7.5 qui compare les approximations réalisées pour un nombre de maille croissant sur la barre. Malgré un champ de déplacement localement pauvre (linéaire), la convergence vers la solution exacte est manifeste lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Cette approche renvoie à la notion de *qualité de la solution* et aux *méthodes adaptatives* associées qui cherchent à minimiser l'erreur de discrétisation. Dans le cas où l'on intervient sur la conformation du maillage comme illustré précédemment, on parle de *méthode-h*[24]. Plutôt que de raffiner le maillage, on aurait pu fixer la discrétisation puis augmenter le degré d'interpolation du champ de déplacement : c'est la *méthode-p* que nous exposons dans les paragraphes suivants. Ces deux méthodes sont diamétralement opposées par leur philosophie de base : beaucoup d'éléments de faible degré ou peu d'éléments de degré élevé.

[23] Lors d'un changement de variables, l'intégration sur le nouvel espace nécessite de recourir au déterminant de la matrice jacobienne, le *jacobien*, contenant les dérivées partielles de la transformation selon les nouvelles variables :

$$J(\xi,\eta,\zeta) \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \tag{7.24}$$

Afin de garantir une distorsion acceptable de l'élément réel, aucune singularité sur le jacobien n'est toléré.

[24] Un raffinement h consiste à adapter la taille des mailles tout en conservant la description des éléments. Parmi les possibilités offertes, on peut distinguer les raffinements uniformes (FIG. 7.5) et les approches de repositionnement nodaux parfois qualifiée de raffinement r.

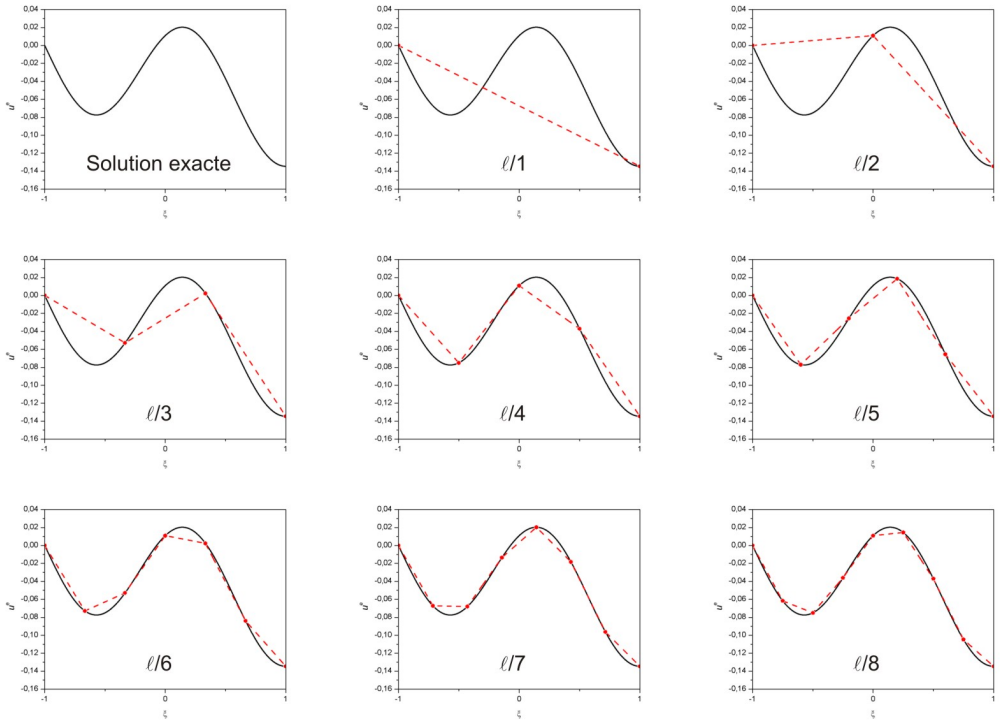


FIG. 7.5 – Approximations successives de la solution exacte par la méthode-h.

7.2.2 méthode-p et fonctions d'interpolation hiérarchique

Dès l'apparition de la méthode des éléments finis, des degrés d'interpolation élevés ont été testés avec plus ou moins de succès. Il s'agissait des prémisses de la méthode-p mais il a fallu attendre l'introduction d'une formulation dite hiérarchique[25] pour atteindre toute l'efficacité escomptée. Sous l'impulsion de plusieurs équipes scientifiques[26], la formulation hiérarchique est arrivée à maturité au milieu des années 1980 et trouve aujourd'hui des applications[27] au sein des bureaux d'études.

7.2.2.1 Le concept d'une formulation hiérarchique

Pour obtenir des degrés d'interpolation élevés, nous pouvons étendre la démarche entreprise avec les polynômes de Lagrange (7.23). Si nous souhaitons construire une interpolation quadratique, il est nécessaire d'ajouter un nœud sur l'élément de référence pour porter le degré de liberté supplémentaire (FIG. 7.6). Les fonctions d'interpolations correspondantes sont reportées en (7.27).

[25] [PEANO, 1975]

[26] Se référer aux ouvrages [ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005b] et [BABUŠKA et SZABÓ, 1991].

[27] Quelques codes commerciaux actuels (Pro/MECHANICA®, StressCheck®, ANSYS®, etc.) proposent des méthodes adaptatives basées sur une formulation hiérarchique mais la plupart des développements sont réalisés sur des codes expérimentaux.

$$[N^e] = \left[\frac{1}{2}(-\xi)\ (1-\xi) \quad \frac{1}{2}(\xi)\ (1+\xi) \quad 1-\xi^2 \right] \tag{7.27}$$

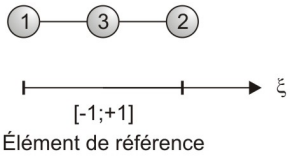


FIG. 7.6 – Définition d'un élément à trois nœuds dans l'espace de référence.

Comme nous pouvons le constater en comparant les expressions (7.23) et (7.27) ainsi que la figure FIG. 7.7, la formulation basée sur les polynômes de Lagrange est « totale ». C'est-à-dire qu'une augmentation du degré nécessite la réécriture de l'ensemble des fonctions d'interpolation de l'élément : on ne retrouve pas les expressions linéaires dans l'interpolation quadratique.

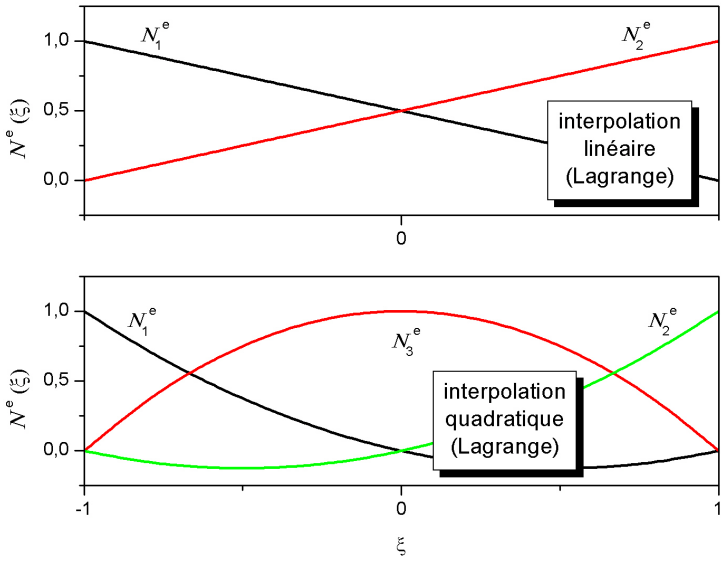


FIG. 7.7 – Le passage d'une interpolation linéaire à une interpolation quadratique nécessite la réécriture de l'ensemble des fonctions d'interpolation.

L'objectif de la formulation hiérarchique vise à supprimer l'inconvénient de la formulation totale que nous venons d'observer. Le concept est relativement simple : pour augmenter le degré d'interpolation il convient d'ajouter des termes à l'interpolation précédente. Une approximation par éléments finis est dite hiérarchique si le passage à un degré $p+1$ n'altère pas les fonctions d'interpolation de degrés inférieurs (1 à p).

Reprenons l'interpolation linéaire abordée en (7.23) et tâchons d'obtenir une interpolation quadratique sans modifier les fonctions N_1^e et N_2^e (7.28).

$$u^e(\xi) = N_1^e(\xi)\ u_1^e + N_2^e(\xi)\ u_2^e \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_1^e(\xi) = \dfrac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2^e(\xi) = \dfrac{1}{2}(1+\xi) \end{cases} \tag{7.28}$$

Pour y parvenir, il suffit de remarquer que les dérivées secondes de N_1^e et N_2^e sont nulles en tout point de l'élément. Ainsi, si nous introduisons un degré de liberté supplémentaire relatif à la dérivée seconde de u_{ex} en un troisième nœud placé au centre de l'élément, les fonctions d'interpolation linéaire ne seront pas modifiées.

$$u^e(\xi) = N_1^e(\xi)\ u_1^e + N_2^e(\xi)\ u_2^e + Q_3^e(\xi)\ \left.\frac{d^2 u_{ex}}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} \tag{7.29}$$

Dans l'équation (7.29) précédente, Q_3^e est un polynôme de degré deux respectant les conditions suivantes :

- valeur nulle pour $\xi = -1$ et $\xi = 1$

$$Q_3^e(-1) = Q_3^e(1) = 0$$

- valeur unité de la dérivée seconde pour $\xi = 0$

$$\left.\frac{d^2 Q_3^e}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} = 1$$

Sous ces conditions nous identifions le polynôme $Q_3^e : \xi \mapsto \left(\xi^2 - 1\right)/2$ représenté sur la figure FIG. 7.8. Avec cette nouvelle interpolation quadratique, nous mettons clairement en évidence le concept de la formulation hiérarchique.

Nous pouvons imaginer augmenter le degré de l'interpolation bien au-delà de deux tout en conservant une formulation hiérarchique. En notant p le degré souhaité, il suffit de contraindre le polynôme correspondant Q_{p+1}^e de la même manière que précédemment. Nous déduisons alors par un processus itératif, l'expression (7.30).

$$\forall p \in \mathbb{N} \,|\, p \geq 2, \quad Q_{p+1}^e(\xi) = \begin{cases} \left(\xi^p - 1\right)/p! & p \text{ pair} \\ \left(\xi^p - \xi\right)/p! & p \text{ impair} \end{cases} \tag{7.30}$$

Les représentations graphiques des polynômes Q_{p+1}^e de degrés 2 à 7 révèlent que l'interpolation perdra de son efficacité au-delà du degré 3 : la convergence vers une « fenêtre rectangulaire » pour p pair et une « dent de scie » pour p impair est en effet très rapide (FIG. 7.9). Avec de telles fonctions, il est préférable de raffiner le maillage si l'on ne parvient pas à capturer les variations de la solution avec une interpolation cubique.

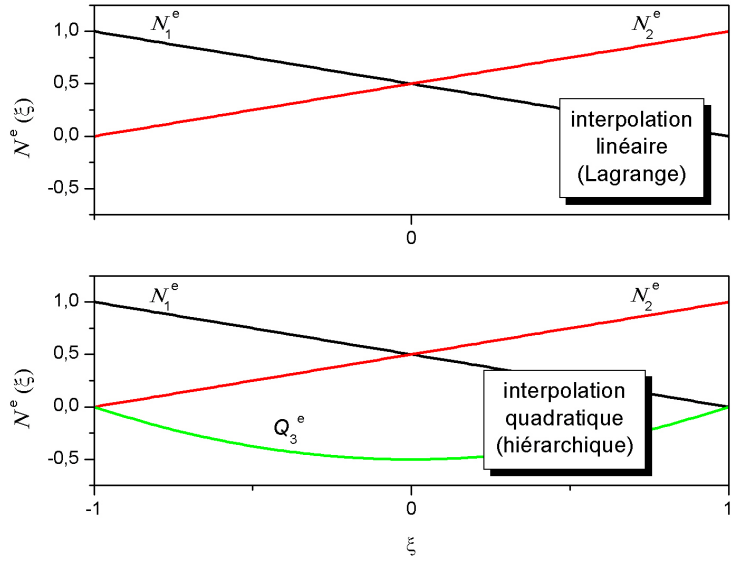


FIG. 7.8 – Exemple d'interpolation hiérarchique : le passage d'un degré p à un degré $p+1$ n'altère pas les fonctions d'interpolation de degrés 1 à p.

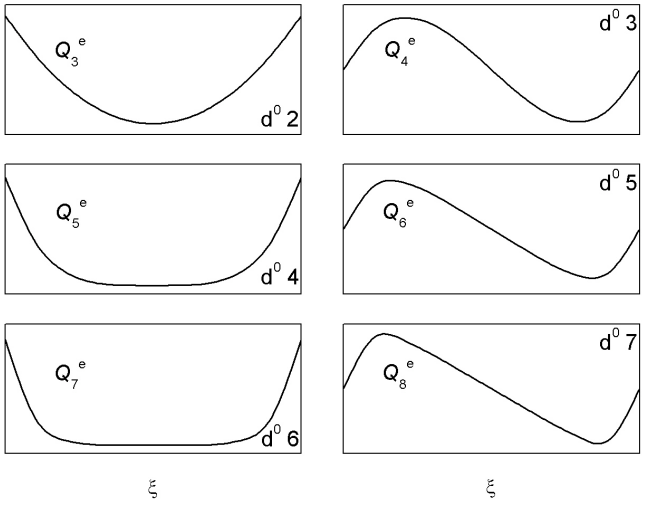


FIG. 7.9 – Les polynômes Q^e_{p+1} de degrés 2 à 7 forment un jeu de fonctions d'interpolation hiérarchique.

7.2.2.2 Orthogonalité des polynômes

La détermination de la matrice de rigidité $[K^e]$ requiert le calcul du produit des dérivées des fonctions d'interpolation. Si ces fonctions dérivées étaient orthogonales, cela se traduirait par une matrice de rigidité diagonale ; l'inversion du système (7.14) serait alors immédiat. Il est bien entendu possible de modifier les polynômes Q^e_{p+1} en appliquant un procédé d'orthogonalisation

comme l'algorithme de Gram-Schmidt[28] qui permet de transformer une base quelconque d'un espace vectoriel euclidien en une base orthogonale. Cependant, il est plus commode de recourir à une famille de *polynômes orthogonaux* qui possède intrinsèquement la propriété d'orthogonalité.

Le domaine des polynômes orthogonaux a été exploré durant le XIX^{e} siècle par de nombreux mathématiciens[29] dont la plupart ont laissé leur nom à une suite de polynômes distincts. L'orthogonalité de chaque suite de polynômes est relative à un produit scalaire pondéré défini selon (7.31). La fonction w désigne la fonction « poids » et I représente l'intervalle d'orthogonalité. Avec cette définition, f et g sont orthogonales entre elles lorsque leur produit scalaire est bien entendu égal à zéro.

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \langle f, g \rangle_w = \int_{\mathrm{I}} w(x)\ f(x)\ g(x)\ dx \tag{7.31}$$

Les polynômes orthogonaux occupent une place importante dans les mathématiques et une place prépondérante pour la méthode-p des éléments finis. Parmi tous les polynômes évoqués précédemment, seuls les éléments relatifs à la suite de Legendre coïncident d'emblée avec ce que nous recherchons pour les dérivées des fonctions d'interpolation :

- intervalle d'orthogonalité $\mathrm{I} = [-1; 1]$
- fonction poids $\forall x \in \mathrm{I}, \quad w(x) = 1$

Le terme général de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Legendre peut être défini de manière équivalente par la *formule de Rodrigues*[30] (7.32) ou par la relation de récurrence découverte par P. O. BONNET au milieu du XIX^{e} siècle (7.33).

$$\forall x \in [-1; 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n\right] \tag{7.32}$$

$$\forall x \in [-1; 1], \forall n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 2,$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n}[(2\,n-1)\ x\, L_{n-1}(x) - (n-1)\ L_{n-2}(x)] \tag{7.33}$$

$$\text{avec} \quad L_0(x) = 1, L_1(x) = x$$

Etant donné une suite de polynômes de Legendre sur $[-1; 1]$, tout élément de cette suite est orthogonal à n'importe quel polynôme de degré strictement inférieur (7.34).

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad \langle L_n, L_m \rangle_1 = \begin{cases} \dfrac{2}{2\,n+1} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.34}$$

[28] Le nom de cette méthode rend hommage aux deux mathématiciens Jörgen Pedersen GRAM (1850-1916) et Erhard SCHMIDT (1876-1959) pour leurs recherches sur les espaces vectoriels de dimension finie. Concernant l'algorithme proprement dit, il faut noter que les fondements figuraient déjà dans les travaux de Pierre DE LAPLACE (1749-1827) et Augustin CAUCHY (1789-1857).

[29] Comme les français Adrien LEGENDRE (1752-1833), Charles HERMITE (1822-1901), Edmond LAGUERRE (1834-1886), l'allemand Carl JACOBI (1804-1851), le russe Pafnouti TCHEBYCHEV (1821-1894) parfois translittéré en P. CHEBYSHEV ou encore l'autrichien Leopold GEGENBAUER (1849-1903).

[30] Olinde RODRIGUES (1795-1851).

Reprenons une nouvelle fois l'interpolation linéaire rappelée en (7.23) et utilisons l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour construire une formulation hiérarchique efficace. Nous notons désormais $N^e_{\mathrm{N}i}$ les fonctions d'interpolation (linéaires) de Lagrange et $N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}$ les fonctions hiérarchiques de degré p que nous ajoutons. L'interprétation des indices N et A sera donnée ultérieurement.

En se référant à l'ouvrage de I. BABUŠKA[31] et B. A. SZABÓ, l'écriture de telles fonctions découle de la normalisation du produit scalaire (7.34) que nous pouvons exprimer selon (7.35) où δ_{nm} correspond au symbole de Kronecker[32].

$$\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad \int_{x=-1}^{1}\sqrt{\frac{2\,n+1}{2}}\,L_n\,(x)\,\sqrt{\frac{2\,m+1}{2}}\,L_m\,(x)\;dx=\delta_{nm} \tag{7.35}$$

Nous pouvons maintenant définir les fonctions $N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}$ basées sur une formulation hiérarchique orthonormée (7.36). Ces fonctions ne sont pas rattachées à un nœud physique mais correspondent à des *modes bulles*[33] linéiques relatifs à l'« arête[34] » de l'élément ; d'où la distinction entre fonctions d'interpolation nodale $N^e_{\mathrm{N}i}$ et d'arête $N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}$. Les modes « nodaux » permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements tandis que les modes bulles enrichissent le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément. Les degrés de liberté ajoutés $u^e_{\mathrm{A1}\{p\}}$ sont associés aux « amplitudes des déplacements hiérarchiques ».

$$\begin{aligned}
\forall p\in\mathbb{N}\,|\,p\geq 2,\quad N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}\,(\xi) &= \phi_p\,(\xi)\quad\text{et}\quad N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}\,(-1)=N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}\,(1)=0 \qquad (7.36)\\
\text{avec}\quad \phi_p\,(\xi) &= \sqrt{\frac{2\,p+1}{2}}\int_{x=-1}^{\xi}L_{p-1}\,(x)\;dx\\
&= \sqrt{\frac{2\,p+1}{2}}\,\frac{1}{2\,p+1}\,[L_p\,(\xi)-L_{p-2}\,(\xi)]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\,p-2}}\,[L_p\,(\xi)-L_{p-2}\,(\xi)]
\end{aligned}$$

Les représentations graphiques des fonctions d'interpolation hiérarchique $N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}$ de degrés 2 à 7 permettent d'apprécier les oscillations périphériques (FIG. 7.10). Celles-ci peuvent aider à capturer de fortes variations du déplacement en bord d'élément.

[31] [BABUŠKA et SZABÓ, 1991]

[32] La notation δ_{ij} introduite par Leopold KRONECKER (1823-1891) vaut 1 si $i=j$ et 0 sinon.

[33] L'ensemble des fonctions d'interpolation de degré p inclut ceux des degrés inférieurs $p-1, p-2, \ldots$ comme sous-ensembles. Cela peut être illustré par l'emboîtement des poupées russes de tailles successives : la plus volumineuse contenant toutes les poupées de tailles inférieures.

[34] Dans ce problème unidimensionel, nous appelons « arête » le segment liant les deux extrémités de l'élément.

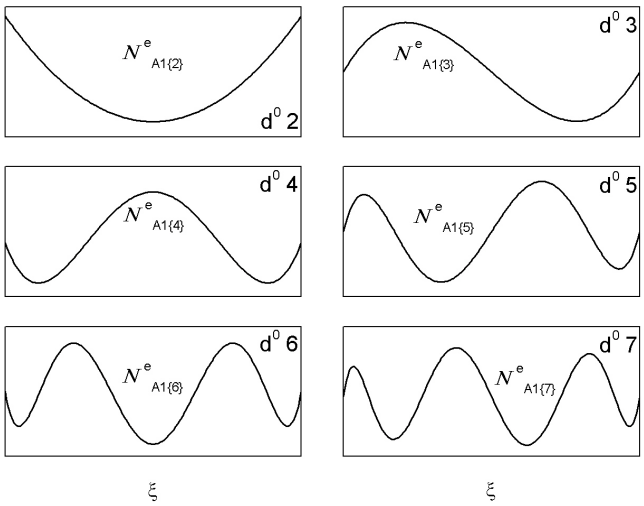


FIG. 7.10 – Fonctions d'interpolation hiérarchique de degrés 2 à 7 basées sur les polynômes de Legendre.

7.2.2.3 Avantages et limitations

Tout en gardant en trame de fond le modèle unidimensionnel de la barre élastique comme support, nous proposons ici de dégager les principaux avantages et limitations d'une formulation hiérarchique. Il s'agit pour cela de « mettre à l'épreuve » la formulation sélectionnée, basée sur les polynômes de Legendre, en résolvant à nouveau le problème de la barre pour lequel la solution exacte u_{ex} est connue (7.21). Grâce à la méthode-p, nous parvenons à approcher cette solution de manière très satisfaisante malgré l'utilisation d'un unique[35] élément (FIG. 7.11).
Pour une approximation de degré $p = 8$, nous avons recours à 9 degrés de liberté. Cela est donc directement comparable avec la discrétisation à 8 éléments linéaires que nous avions conduite auparavant (FIG. 7.5). La première remarque que nous pouvons faire concerne la résolution et plus particulièrement la structure des matrices de rigidité à « inverser »[36]. Dans le cas de la méthode-h, la matrice de rigidité globale possède une *structure de bande* plus large que dans le cas de la méthode-p : la disposition des éléments non nuls est renseignée par le symbole « • » (7.37). Avec la méthode-p et conformément à ce que nous avions envisagé, grâce à l'orthogonalité des polynômes de Legendre, nous obtenons une matrice quasi-diagonale : l'inversion est alors naturelle. Au-delà du contexte simplifié de cet exemple unidimensionnel, il est évident que pour des problèmes bi- ou tridimensionnels de grandes tailles, les structures matricielles ne seront pas aussi efficaces. Néanmoins, il peut être montré que le *nombre de conditionnement* associé à l'utilisation d'une formulation hiérarchique est bien souvent meilleur que pour une formulation

[35] Pour la transformation géométrique, nous conservons une interpolation linéaire quel que soit le degré du champ de déplacement approximé. A partir du degré $p = 2$, notre élément devient donc *sub-paramétrique*.

[36] La résolution du système linéaire $[K]\ \{U\} = \{F\}$ nécessite généralement de recourir à des méthodes numériques spécifiques dérivées de la procédure d'élimination de Gauss ou de la factorisation de Cholesky.

totale[37]. Cela constitue un premier avantage de la méthode-p sur la méthode-h.

$$[K_h] = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & & \bullet & \bullet & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \qquad [K_p] = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

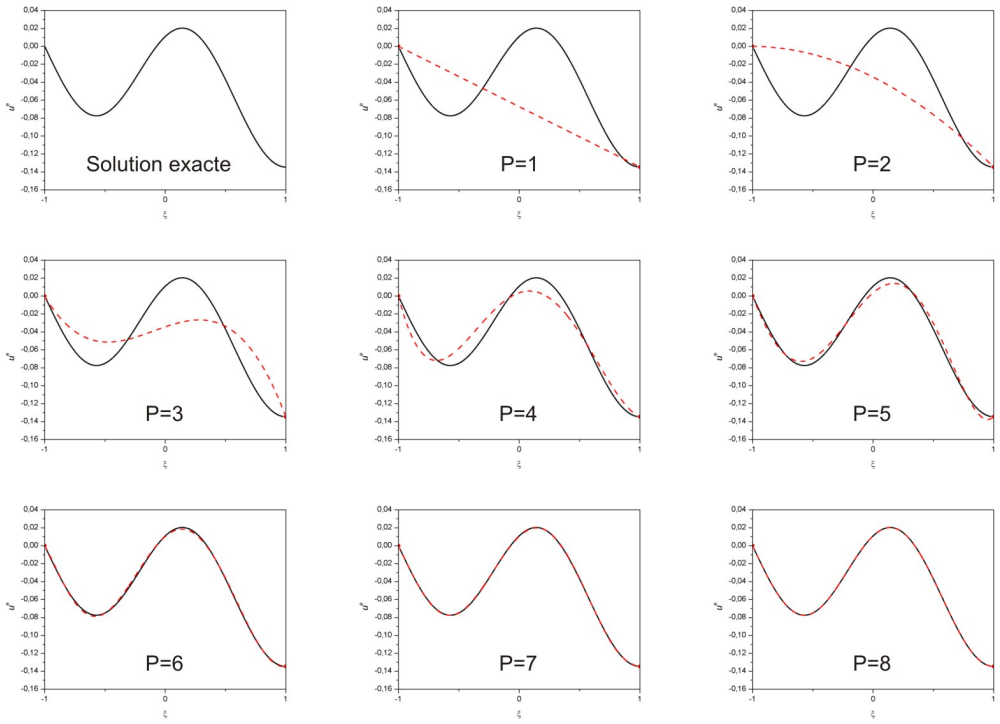


FIG. 7.11 – Approximations successives de la solution exacte par la méthode-p.

Concernant les résultats et du fait que nous connaissons la solution exacte, la quantification de l'*erreur d'approximation* est un moyen pertinent de comparaison entre les deux approches. Quelles que soient les coordonnées choisies, cette erreur d'approximation est définie localement en tout point du maillage par la relation (7.38).

$$e = u - u_{ex} \tag{7.38}$$

L'erreur locale est cependant mal adaptée à notre démarche et nous privilégions le calcul d'une norme[38] de cette erreur (7.39) afin d'avoir une vision globale de la qualité de la solution.

[37] [CUGNON, 2000], [DÜSTER, 2001]

[38] La norme L_2 présentée en (7.39) est associée au produit scalaire.

$$\|e\|_{L_2} = \left[\left(\int_\Omega e^2 \, d\Omega\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.39}$$

Si nous reportons sur un graphique la valeur relative η_{L_2} (7.40) de cette norme en fonction du nombre de degrés de liberté mis en jeu, nous remarquons que la convergence est bien plus rapide avec la méthode-p (FIG. 7.12).

$$\eta_{L_2} = \frac{\|e\|_{L_2}}{\|u_{ex}\|_{L_2}} \tag{7.40}$$

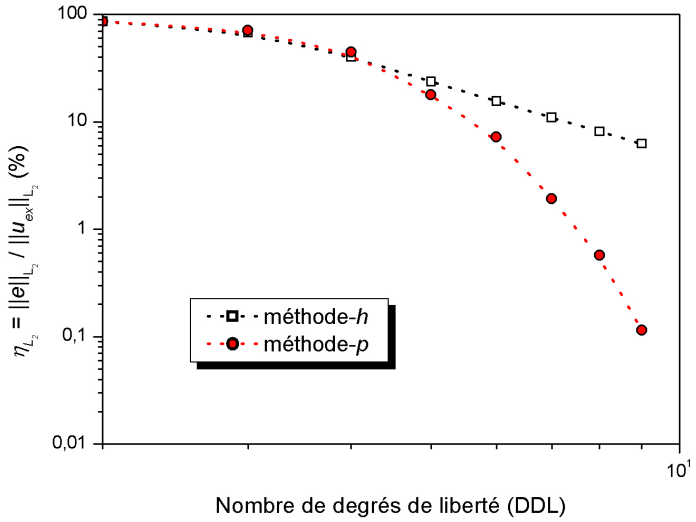


FIG. 7.12 – La méthode-p converge plus rapidement que la méthode-h.

Le taux de convergence est cependant intimement lié au type de problème à résoudre[39] :

1. Lorsque la solution exacte est partout analytique, le taux de convergence de la méthode-p est exponentiel alors que celui de la méthode-h n'est qu'algébrique.
2. Lorsque la solution exacte contient un nombre fini de points singuliers, le taux de convergence de la méthode-p est algébrique ; il est cependant plus élevé que celui de la méthode-h.
3. Lorsque la solution contient un nombre infini de points singuliers, le taux de convergence de la méthode-p est identique à celui de la méthode-h.

En pratique, l'erreur telle que décrite en (7.38) n'est jamais accessible et il faut recourir à des *estimateurs*[40] *d'erreur* plus ou moins difficiles à mettre en œuvre. Néanmoins, lorsque l'on dispose d'une suite de solutions, il est possible d'appliquer la méthode d'extrapolation de L. F. RICHARDSON basée sur la propriété de convergence asymptotique de la solution éléments

[39] [GUI et BABUŠKA, 1986]
[40] [ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005b], [AKIN, 2004]

finis. Sur un principe similaire, nous pouvons mettre à profit la formulation hiérarchique qui offre un *indicateur d'erreur* économique : il suffit pour cela de comparer deux approximations successives de degrés $p-1$ et p en considérant que la solution de degré p est exacte. En se calquant sur la relation (7.40), l'exploitation de cet indicateur conduit à un nouvel estimateur[41] (7.41). Nous reportons dans le tableau TAB. 7.1 les valeurs de η_{L_2} ainsi obtenues.

$$\eta_{L_2} \approx \frac{\left\| u_{\{p-1\}} - u_{\{p\}} \right\|_{L_2}}{\left\| u_{\{p\}} \right\|_{L_2}} \tag{7.41}$$

Degré p	2	3	4	5	6	7	8
(7.40) $\eta_{L_2} =$ (%)	70,94	44,64	17,82	7,19	1,92	0,57	0,12
(7.41) $\eta_{L_2} \approx$ (%)	61,04	40,48	15,74	6,68	1,78	0,55	NC

TAB. 7.1 – Comparaison entre la valeur de η_{L_2} et son estimation obtenue avec deux solutions successives (NC : non calculé).

Au travers des différentes opérations conduites sur le problème unidimensionnel de la barre élastique, nous avons pu appréhender simplement et de manière concrète l'apport d'une formulation hiérarchique. Parmi les avantages de la méthode-p, la formulation hiérarchique :

- autorise l'exploitation d'un maillage « industriel » dont la taille des éléments est conservée tout au long des calculs,
- assure la compatibilité avec une formulation en déplacements et avec la méthode-h,
- maintien un taux de convergence la plupart du temps favorable,
- offre un indicateur d'erreur économique et nécessaire à la mise en œuvre d'une procédure d'automatisation des calculs.

Il faut néanmoins souligner que la plupart des codes commerciaux ne disposent pas d'outils de pré- et post-traitement permettant d'afficher des éléments à haut degré d'interpolation. Lorsque cela est possible, il subsiste généralement des limitations dont :

- un plafonnement du degré d'interpolation,
- une restriction aux modèles de comportement élastiques linéaires,
- une adaptation uniforme du maillage.

7.3 Vers un nouvel outil de dimensionnement

Jusqu'à maintenant nous nous sommes attachés à décrire les principaux attributs d'une formulation hiérarchique. Un certain nombre d'avantages ont pu être relevés et nous en avons tiré parti au profit des assemblages collés en développant un nouvel outil de dimensionnement. Cet outil prend la forme d'un sous-programme qui permet d'enrichir une portion du maillage avec des éléments à formulation hiérarchique. Le sous-programme est organisé de façon modulaire et permet, entre autres, de gérer la phase de construction des matrices et vecteurs élémentaires.

[41] [CUGNON, 2000]

Puisque nous n'agissons que sur les zones collées, l'étape d'assemblage ainsi que la résolution du problème aux éléments finis sont confiées à un code généraliste[42].

Autour du sous-programme gravitent des moyens de pré- et post-traitement spécifiques qui ont fait l'objet d'un travail collaboratif avec notre principal partenaire industriel. Le pré-traitement a pour but de transformer le fichier de données décrivant le problème (maillage, conditions aux limites et sollicitations) afin de substituer aux éléments standards des éléments à formulation hiérarchique dans les zones collées. Le programme intègre notamment une stratégie de numérotation des degrés de liberté supplémentaires particulièrement efficace : l'enrichissement des éléments est entièrement piloté par l'intermédiaire des « arêtes » du maillage. Assisté d'un indicateur d'erreur, ce choix permet d'envisager une automatisation des calculs. Le post-traitement complète les informations graphiques pour la visionneuse en représentant les données calculées avec la formulation hiérarchique.

Pris dans son ensemble, l'outil ainsi implémenté représente une dizaine de millier de lignes de code dont près des deux tiers sont consacrés au sous-programme central. Plusieurs rapports relatifs au projet TRAIC décrivent la structure du programme ainsi que son mode d'utilisation. Dans les paragraphes qui suivent, nous avons choisi de souligner trois points clefs qui constituent la spécificité de ce nouvel outil de dimensionnement.

7.3.1 Capturer les fortes variations de la solution

Pouvoir capturer les fortes variations de la solution au voisinage des extrémités du joint… Pour ce premier objectif, la barre élastique est une nouvelle fois mise à contribution. Il s'agit ici d'imposer une solution à très forte variation[43] puis d'étudier l'efficacité de la formulation hiérarchique en fonction du degré choisi. Les nouvelles données du problème sont les suivantes :

- géométrie $\ell = 1$ et $A = 1$,
- matériau $E = 1$ et $\rho = 1$,
- mécanique $F = \lambda$ et $\forall x \in [0; \ell]\,, \quad f\,(x) = -\lambda\ (\lambda - 1)\ x^{\lambda - 2}$

La résolution analytique conduit naturellement à la solution u_{ex} (7.42).

$$u_{ex}\,(x) = x^{\lambda} \tag{7.42}$$

Sur un joint collé sollicité mécaniquement, la zone affectée par les concentrations de contraintes a une longueur caractéristique de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du joint. Compte tenu des paramètres géométriques de notre barre, nous choisissons de poser $\lambda = 50$. Relativement à la taille de notre maille, l'intensité de la variation produite est alors suffisante pour reproduire la concentration de contrainte que l'on aurait sur un joint de quelques centaines de micromètres d'épaisseur.

A première vue (FIG. 7.13), avec un unique élément de degré d'interpolation $p = 8$, nous parvenons difficilement à approcher la solution exacte de « degré 50 ». Nous pouvons bien

[42] Le logiciel de calcul employé est ABAQUS® mais la description informatique de notre démarche ne rentrant pas dans le cadre de ce manuscrit, nous ne ferons pas allusion au langage utilisé.

[43] La fonction puissance $x \mapsto x^{\lambda}$ répond à cette définition tout en permettant d'ajuster l'intensité de la variation.

entendu continuer à augmenter le degré ou raffiner le maillage mais cela serait au détriment du temps de calcul et des objectifs visés.

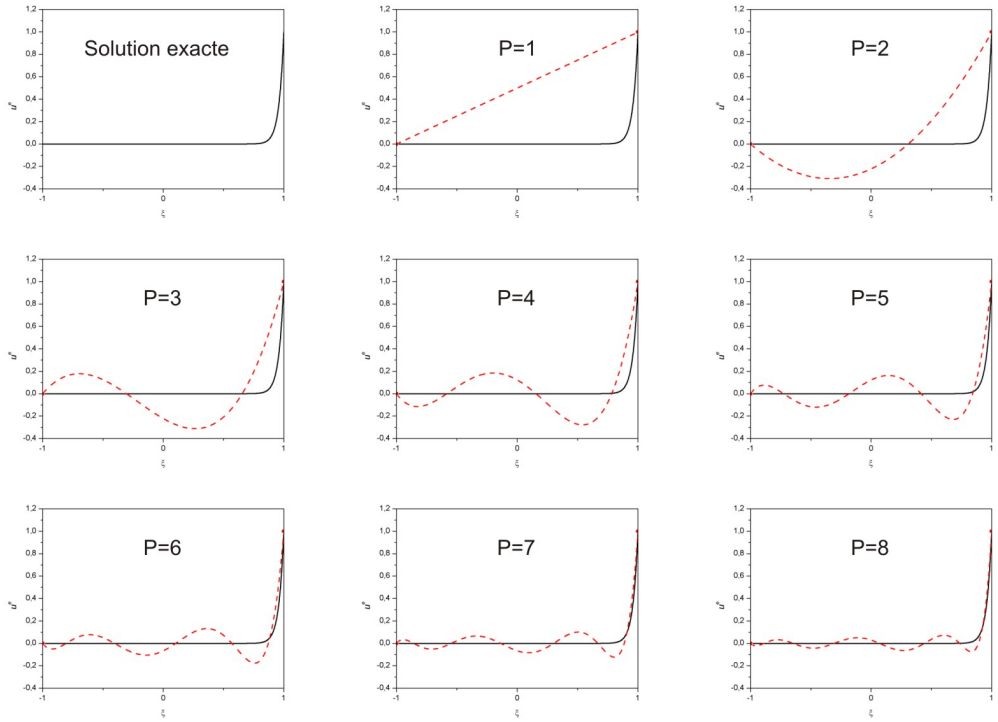


FIG. 7.13 – Approximations successives de la solution exacte par la méthode-p. Malgré un degré d'interpolation $p = 8$, nous ne parvenons pas à approcher cette solution à forte variation.

Il faut également noter que les oscillations observées ne favorisent pas la recherche du résultat. Si l'intégration de la matrice de rigidité et des vecteurs élémentaires est ici accessible analytiquement, cela est rarement le cas pour les problèmes plus complexes. Dans le cas ou l'élément est déformé, la transformation géométrique n'est plus linéaire et la matrice jacobienne est une fonction polynomiale compliquée. L'intégration explicite devient alors impossible et il faut recourir aux techniques d'intégration numérique. Celles-ci consistent à remplacer la somme continue par une somme discrète de termes calculés en des points pondérés spécifiques. Dans le cas unidimensionnel[44], on calcule l'intégrale d'une fonction quelconque γ sur l'élément de référence par la relation (7.43).

$$\int \gamma(\xi)\, d\xi = \sum_i w_i\, \gamma(\xi_i) \tag{7.43}$$

L'intégration numérique ne donne donc qu'une valeur approchée de l'intégrale dont l'évaluation dépend du nombre, de la position ξ_i et de la pondération w_i des *points d'intégration*. Parmi les méthodes disponibles, la quadrature de Gauss-Legendre est la plus répandue. Si le nombre de points d'intégration est ajusté par rapport au degré de la fonction à intégrer, la méthode de Gauss-

[44] La généralisation aux cas bi- et tridimensionnel est aisée : il suffit d'utiliser une intégration par direction (§ 7.3.2).

Legendre unidimensionnelle n'introduit aucune erreur sur l'évaluation de l'intégrale. Elle permet, avec n_{pg} points de calculs, d'intégrer exactement un polynôme d'ordre $p \leq 2\,n_{pg} - 1$. Au degré p, la matrice de rigidité fait apparaître le produit des dérivées des fonctions d'interpolation $N^e_{\mathrm{A1}\{p\}}$; le polynôme à intégrer est donc de degré $2\,(p-1)$. Choisir $n_{pg} \geq p - 1/2$, entraîne l'intégration exacte de la matrice de rigidité de notre problème. Au prix d'une perte en précision mais d'un gain en volume de calcul, il est possible d'utiliser une *intégration réduite*. Cependant, les points d'intégration constituent pour nous les points d'évaluation des grandeurs du modèle de comportement : variables primale et duale, variables internes et auxiliaires. Dans ce contexte, nous n'avons pas souhaité utiliser l'intégration réduite qui aurait appauvri la représentativité de la solution. Puisque nous cherchons surtout à capturer les fortes variations de la solution au voisinage des extrémités de l'élément, la méthode de Gauss-Legendre est particulièrement appropriée. En effet, les abscisses ξ_i des points de calculs sont choisies à l'intérieur du domaine d'intégration et correspondent aux racines des polynômes de Legendre (§ 7.2.2.2). Plus le degré est élevé, plus les points se rapprochent de la frontière du domaine. Au degré $p = 8$, 8 points d'intégration sont nécessaires pour une intégration exacte. Ceux-ci sont représentés par des symboles carrés sur la figure FIG. 7.14.

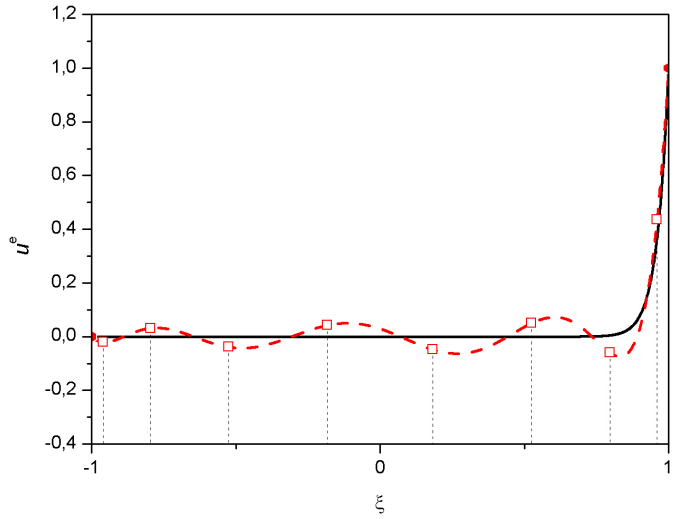


FIG. 7.14 – Approximation de la solution exacte par un polynôme de degré 8. Les points d'intégration (symboles carrés) constituent des points d'évaluation des grandeurs du modèle.

Afin d'atténuer les phénomènes d'oscillations, nous proposons d'optimiser les éléments précédemment décrits pour « dilater » les phénomènes en bordure de maille. Nous choisissons pour cela de compléter l'interpolation géométrique linéaire (7.23) par une interpolation cubique appropriée. Il est essentiel que celle-ci ne modifie pas la valeur des fonctions d'interpolation à la frontière de l'élément. En notant provisoirement r la nouvelle variable d'espace, le polynôme adéquat sur $[-1;1]$ est donné par la relation (7.44). Celle-ci est exprimée en fonction de la dérivée

en limite de domaine notée δ. Si $\delta = 1$, il n'y a aucune transformation supplémentaire mais lorsque $\delta \to 0$, la dilatation devient maximale (FIG. 7.15).

$$\forall r \in [-1;1], \quad A(r) = a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 \tag{7.44}$$
$$\text{avec} \quad a_0 = \frac{\delta - 1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = a_0 - 1 \quad \text{et} \quad a_3 = 0$$

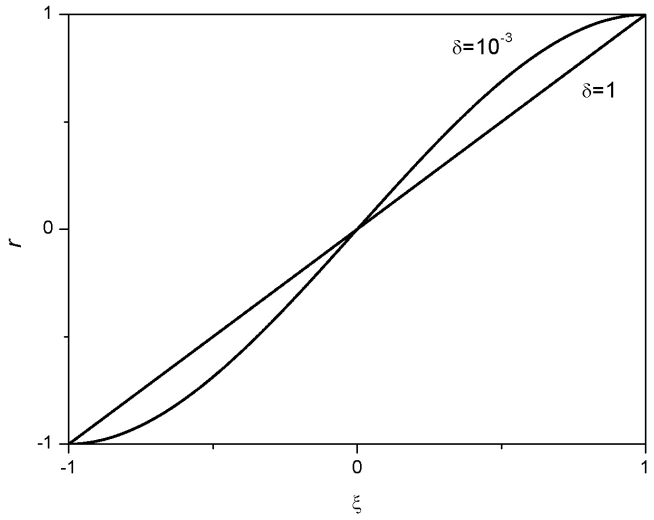


FIG. 7.15 – Transformation géométrique entre ξ et r en fonction de la valeur de δ. lorsque $\delta \to 0$ la dilatation devient maximale.

Les nouvelles fonctions d'interpolation géométriques ne sont donc plus identiques aux fonctions d'interpolation nodale du champ solution, sauf si $\delta = 1$. Nous choisissons par ailleurs de conserver un élément pseudo-isoparamétrique ou sub-paramétrique et la transformation supplémentaire n'intervient donc qu'à partir du degré $p = 3$. En réutilisant la notation introduite en (7.22), nous obtenons le vecteur (7.45).

$$[P^e] = \left[\frac{1}{2}(1 - A(\xi)) \quad \frac{1}{2}(1 + A(\xi))\right] \quad \text{avec} \quad A(\xi) \quad \text{défini par (7.44)} \tag{7.45}$$

Tout en conservant le degré $p = 8$, le simple ajout de cette transformation géométrique supplémentaire nous permet de trouver une valeur de δ pour laquelle l'erreur η_{L_2} est minimale (FIG. 7.16).

Si nous reportons η_{L_2} en fonction de δ dans un graphique à échelle logarithmique (FIG. 7.17), nous remarquons tout d'abord que l'erreur minimale, pour $\delta \approx 0,4$, est de l'ordre de 3% contre plus de 40% sans dilatation. Même lorsque $\delta \to 0$, l'erreur reste asymptotiquement deux fois plus petite que ce que nous obtenons de manière directe. Le problème soulevé par cette technique est le suivant : à quelle valeur faut-il fixer δ pour obtenir, sans « tâtonnement », une erreur minimale ?

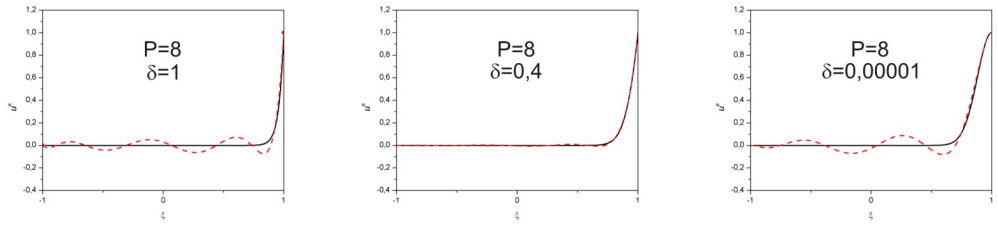


FIG. 7.16 – Approximations de la solution exacte par un polynôme de degré 8. Tout en conservant le degré d'interpolation, le simple ajout d'une dilatation appropriée permet de minimiser l'erreur d'approximation.

L'idéal serait de pouvoir relier la valeur de δ à l'intensité de la variation, elle-même fonction de l'épaisseur du joint dans le cas d'un assemblage collé. Cependant, le degré d'interpolation intervient également et nous avons reporté sur le graphique de la figure FIG. 7.17 les minimums de η_{L_2} pour différents degrés. L'alignement de ces points s'avère particulièrement profitable si l'on souhaite poursuivre ce travail sur l'efficacité de δ. En attendant, nous avons remarqué qu'une valeur de δ comprise entre 0,1 et 0,6 permettait d'optimiser les calculs pour la plupart des solutions à fortes variations.

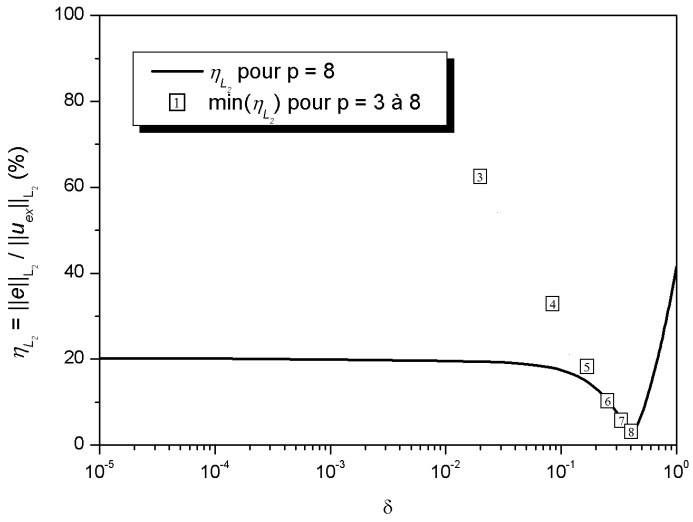


FIG. 7.17 – L'évolution de la valeur de η_{L_2} en fonction de δ fait clairement apparaître une zone où l'erreur d'approximation est minimale. Cette zone semble se déplacer proportionnellement au degré d'interpolation.

7.3.2 Atteindre la troisième dimension

Jusqu'à maintenant, nous avons travaillé sur des problèmes unidimensionnels dont le seul but était de simplifier notre exposé. Pour revenir au contexte de cette étude et proposer un outil

de dimensionnement des assemblages collés, il convient maintenant de « donner du volume » aux éléments à formulation hiérarchique que nous avons adoptés. L'outil que nous évoquons ici permet de gérer une librairie d'éléments à deux ou trois dimensions. Nous présentons ci-après, dans leur espace de référence, deux éléments indispensables.

7.3.2.1 Element à deux variables d'espace

Le premier élément implémenté est associé à une maille carrée $[-1;1] \times [-1;1]$ définie dans le plan $(\xi;\eta)$ et dont les sommets sont numérotés 1 à 4 (FIG. 7.18).

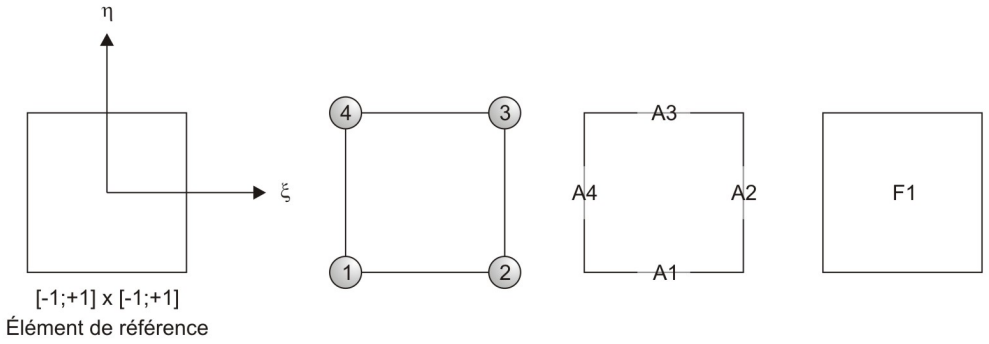


FIG. 7.18 – Elément bidimensionnel à 4 nœuds géométriques, 4 arêtes et 1 face représenté dans son espace de référence.

L'interpolation géométrique linéaire (avec ou sans dilatation) utilise les quatre nœuds situés aux sommets de la maille. La matrice d'interpolation géométrique est définie par la relation (7.46). Les fonctions bilinéaires $P^e_{\mathrm{N}i}$ sont obtenues par le produit terme à terme des fonctions d'interpolation unidimensionnelles.

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P^e_{\mathrm{N}1} & 0 & P^e_{\mathrm{N}2} & 0 & P^e_{\mathrm{N}3} & 0 & P^e_{\mathrm{N}4} & 0 \\ 0 & P^e_{\mathrm{N}1} & 0 & P^e_{\mathrm{N}2} & 0 & P^e_{\mathrm{N}3} & 0 & P^e_{\mathrm{N}4} \end{bmatrix} \tag{7.46}$$

$$P^e_{\mathrm{N}i} = \frac{1}{2}(1 + \xi_{\mathrm{N}i}\, A(\xi))\ \frac{1}{2}(1 + \eta_{\mathrm{N}i}\, A(\eta)) \quad \text{voir } (7.44)$$

Sur le même schéma, nous construisons la matrice d'interpolation du champ solution $[N^e]$ (7.47) qui nécessite l'introduction des fonctions d'interpolation faciale N^e_{F}.

$$[N^e] = [N^e_{\mathrm{N}} \quad N^e_{\mathrm{A}} \quad N^e_{\mathrm{F}}] \tag{7.47}$$

Pour faciliter la description de $[N^e]$, nous l'avons décomposée en trois sous-matrices, chacune dédiée à un type d'interpolation : nodale (7.48), arêtière (7.49) et faciale (7.50). Le degré d'interpolation est défini par p_ξ et p_η selon la direction concernée.

$$[N^e_{\mathrm{N}}] = \begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{N}1} & 0 & N^e_{\mathrm{N}2} & 0 & N^e_{\mathrm{N}3} & 0 & N^e_{\mathrm{N}4} & 0 \\ 0 & N^e_{\mathrm{N}1} & 0 & N^e_{\mathrm{N}2} & 0 & N^e_{\mathrm{N}3} & 0 & N^e_{\mathrm{N}4} \end{bmatrix} \qquad (7.48)$$

$$N^e_{\mathrm{N}i} = \frac{1}{2}(1+\xi_{\mathrm{N}i}\,\xi)\ \frac{1}{2}(1+\eta_{\mathrm{N}i}\,\eta)$$

$$[N^e_{\mathrm{A}}] = \overbrace{\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{A}1\{2\,\ldots\,p_\xi,1\}} & N^e_{\mathrm{A}2\{1,2\,\ldots\,p_\eta\}} & N^e_{\mathrm{A}3\{2\,\ldots\,p_\xi,1\}} & N^e_{\mathrm{A}4\{1,2\,\ldots\,p_\eta\}} \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{A}2\{1,2\}} & 0 & \cdots & N^e_{\mathrm{A}2\{1,p_\eta\}} & 0 \\ 0 & N^e_{\mathrm{A}2\{1,2\}} & \cdots & 0 & N^e_{\mathrm{A}2\{1,p_\eta\}} \end{bmatrix}} \qquad (7.49)$$

$$\overbrace{\frac{1}{2}(1+\xi)\ \phi_{p=p_\eta}(\eta)}^{\text{voir (7.36)}}$$

$$[N^e_{\mathrm{F}}] = \overbrace{\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{F}1\{2\,\ldots\,p_\xi,2\,\ldots\,p_\eta\}} \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{F}1\{2,2\}} & 0 & \cdots & N^e_{\mathrm{F}1\{2,p_\eta\}} & 0 & \cdots & N^e_{\mathrm{F}1\{p_\xi,p_\eta\}} & 0 \\ 0 & N^e_{\mathrm{F}1\{2,2\}} & \cdots & 0 & N^e_{\mathrm{F}1\{2,p_\eta\}} & \cdots & 0 & N^e_{\mathrm{F}1\{p_\xi,p_\eta\}} \end{bmatrix}} \qquad (7.50)$$

$$\overbrace{\phi_{p=2}(\xi)\ \phi_{p=p_\eta}(\eta)}^{\text{voir (7.36)}}$$

Sur les figures FIG. 7.19 et FIG. 7.20, nous donnons respectivement une représentation graphique de l'interpolation bilinéaire seule et de l'interpolation bilinéaire couplée à une interpolation hiérarchique de degré 2. Pour cette dernière, nous pouvons vérifier que les fonctions arêtières et faciale ne modifient en rien l'interpolation bilinéaire initiale.

L'augmentation uniforme du degré d'interpolation nécessite de faire intervenir d'autres fonctions faciales (FIG. 7.21). En revanche, il est possible d'augmenter le degré de manière indépendante sur chacune des arêtes (FIG. 7.22). De cette façon, il est possible d'assurer la jonction avec des éléments standards en assurant une compatibilité totale des fonctions d'interpolation.

L'écriture de la matrice $[B^e]$ (7.51) suit la décomposition adoptée pour $[N^e]$ en (7.47).

$$[B^e] = [D^e]\ [N^e] \quad \text{où} \quad [D^e] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\xi} \end{bmatrix} \qquad (7.51)$$

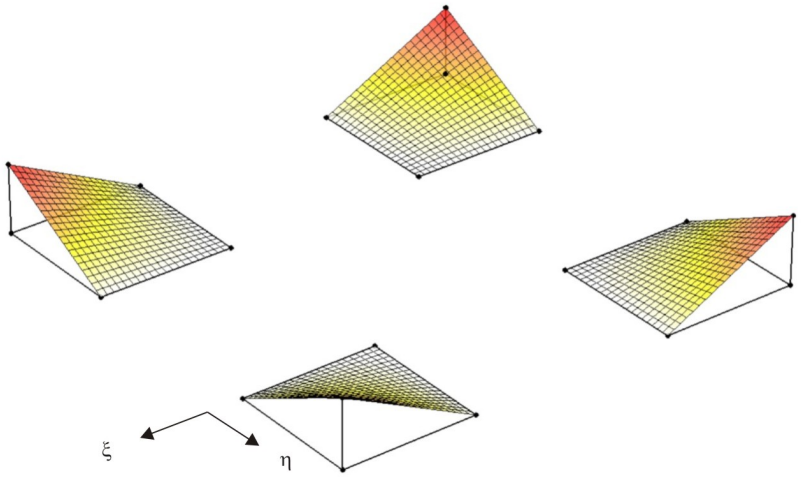


FIG. 7.19 – Représentation graphique d'une interpolation bilinéaire sur un élément bidimensionnel à 4 nœuds géométriques.

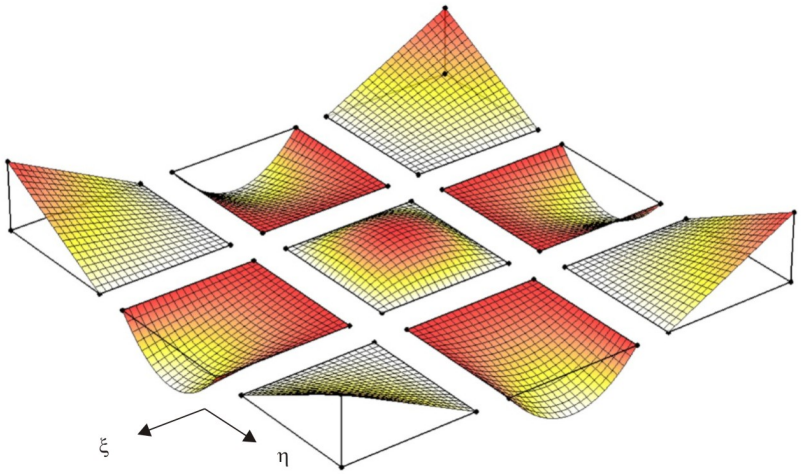


FIG. 7.20 – Représentation graphique d'une interpolation bilinéaire couplée à une interpolation hiérarchique de degré 2 sur un élément bidimensionnel à 4 nœuds géométriques. L'ajout des fonctions d'interpolation hiérarchique ne modifie en rien l'interpolation bilinéaire initiale.

Nous pouvons maintenant définir la matrice de rigidité élémentaire (7.52) à partir de la matrice tangente du comportement (6.75) et du jacobien de la transformation.

$$[K^e] = \int_{\xi=-1}^{1} \int_{\eta=-1}^{1} [B^e]^T \, [L] \, [B^e] \, |J(\xi,\eta)| \tag{7.52}$$

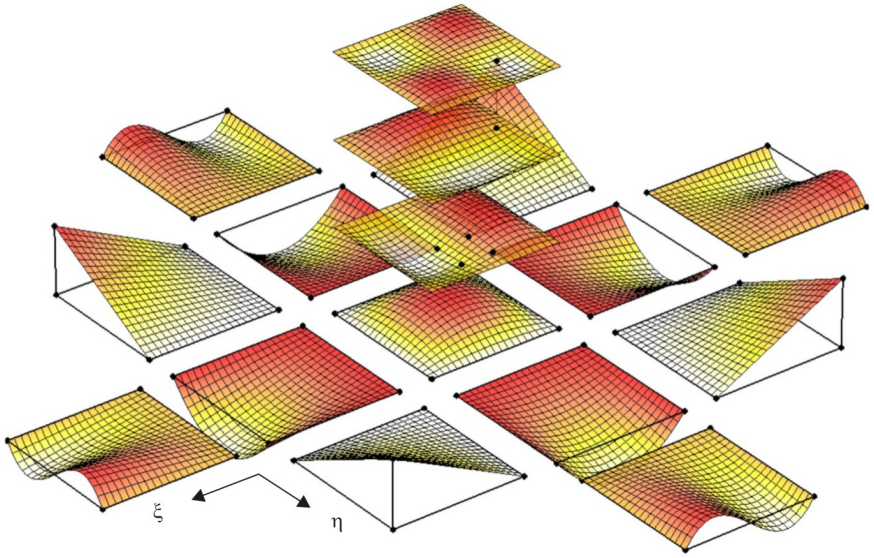


FIG. 7.21 – Représentation graphique d'une interpolation hiérarchique de degré 3 uniforme sur un élément bidimensionnel à 4 nœuds géométriques. L'augmentation du degré nécessite d'introduire des fonctions d'interpolation faciale.

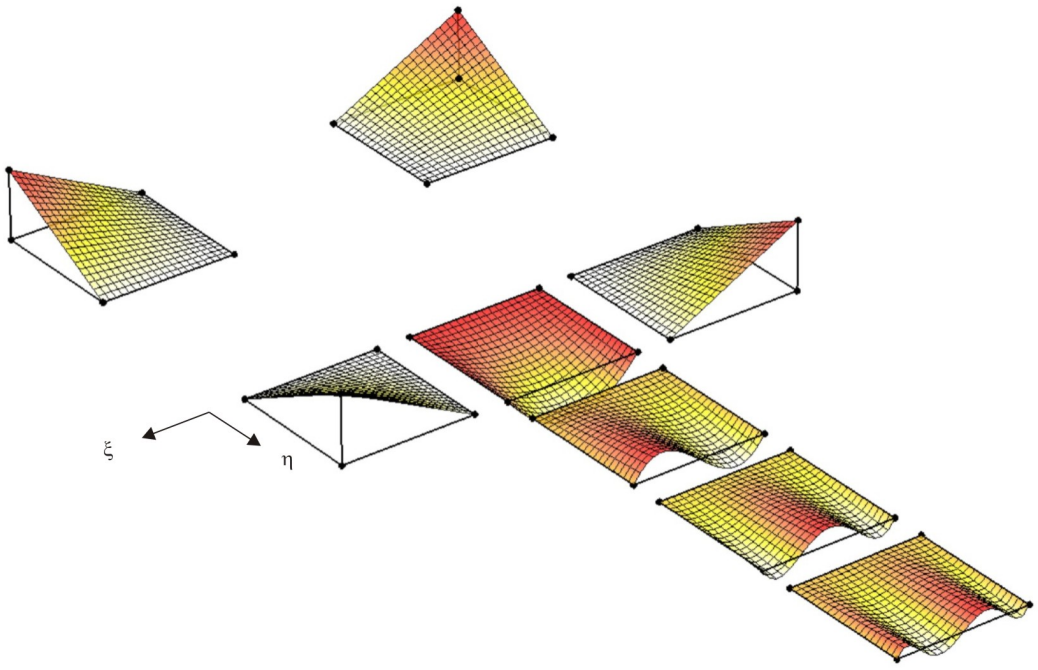


FIG. 7.22 – Représentation graphique d'une interpolation hiérarchique de degré 5 portée par une seule arête d'un élément bidimensionnel à 4 nœuds géométriques.

Pour l'intégration numérique sur cette maille carré, la méthode « produit » est très simple d'utilisation puisqu'elle consiste à traiter chaque direction ξ et η séparément (7.53).

$$\iint \gamma(\xi,\eta)\; d\xi\, d\eta = \sum_i \sum_j w_i\, w_j\, \gamma(\xi_i,\eta_j) \tag{7.53}$$

7.3.2.2 Element à trois variables d'espace

L'élément tridimensionnel est associé à une maille cubique $[-1;1] \times [-1;1] \times [-1;1]$ définie dans le plan $(\xi;\eta;\zeta)$ et dont les sommets sont numérotés 1 à 8 (FIG. 7.18).

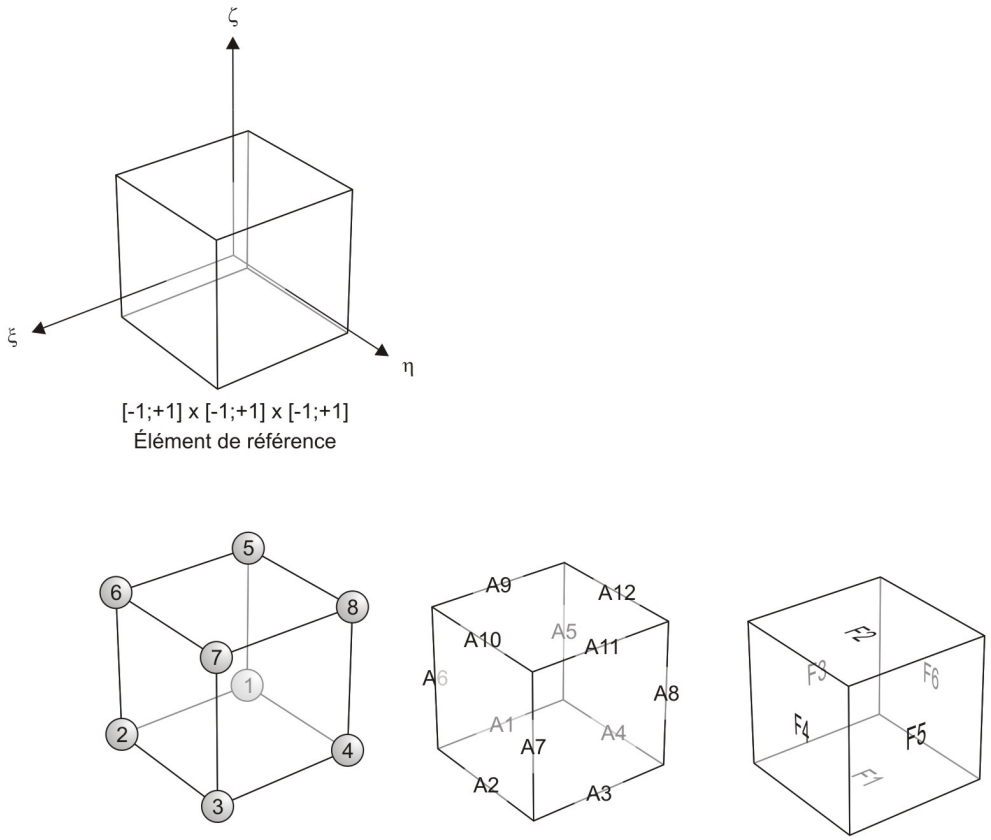


FIG. 7.23 – Elément tridimensionnel à 8 nœuds géométriques, 12 arêtes et 6 faces représenté dans son espace de référence.

Comme pour l'élément bidimensionnel, l'interpolation géométrique utilise les nœuds situés aux sommets de la maille. La matrice d'interpolation (7.54) utilise des fonctions trilinéaires bâties sur le même schéma que les fonctions bilinéaires de l'élément bidimensionnel.

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P^e_{\mathrm{N}1} & 0 & 0 & \cdots & P^e_{\mathrm{N}8} & 0 & 0 \\ 0 & P^e_{\mathrm{N}1} & 0 & \cdots & 0 & P^e_{\mathrm{N}8} & 0 \\ 0 & 0 & P^e_{\mathrm{N}1} & \cdots & 0 & 0 & P^e_{\mathrm{N}8} \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

$$P^e_{\mathrm{N}i} = \frac{1}{2}(1+\xi_{\mathrm{N}i}\,A(\xi))\;\frac{1}{2}(1+\eta_{\mathrm{N}i}\,A(\eta))\;\frac{1}{2}(1+\zeta_{\mathrm{N}i}\,A(\zeta)) \quad \text{voir (7.44)}$$

En plus des fonctions d'interpolation faciale, la matrice $[N^e]$ (7.55) fait intervenir des fonctions d'interpolation interne N^e_{I}.

$$[N^e] = [N^e_{\mathrm{N}} \quad N^e_{\mathrm{A}} \quad N^e_{\mathrm{F}} \quad N^e_{\mathrm{I}}] \tag{7.55}$$

Nous retrouvons dans les relations qui suivent l'expression des fonctions d'interpolation nodale (7.56), arêtière (7.57) faciale (7.58) et interne (7.59).

$$[N^e_{\mathrm{N}}] = \begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{N1}} & 0 & 0 & \cdots & N^e_{\mathrm{N8}} & 0 & 0 \\ 0 & N^e_{\mathrm{N1}} & 0 & \cdots & 0 & N^e_{\mathrm{N8}} & 0 \\ 0 & 0 & N^e_{\mathrm{N1}} & \cdots & 0 & 0 & N^e_{\mathrm{N8}} \end{bmatrix} \tag{7.56}$$

$$N^e_{\mathrm{N}i} = \frac{1}{2}(1+\xi_{\mathrm{N}i}\,\xi)\ \frac{1}{2}(1+\eta_{\mathrm{N}i}\,\eta)\ \frac{1}{2}(1+\zeta_{\mathrm{N}i}\,\eta)$$

$$[N^e_{\mathrm{A}}] = \overbrace{\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{A1}\{2\,\ldots\,p_\xi,1,1\}} & \cdots & N^e_{\mathrm{A5}\{1,1,2\,\ldots\,p_\zeta\}} & \cdots & N^e_{\mathrm{A12}\{1,2\,\ldots\,p_\eta,1\}} \end{bmatrix}}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{A5}\{1,1,2\}} & 0 & 0 & \cdots & N^e_{\mathrm{A5}\{1,1,p_\zeta\}} & 0 & 0 \\ 0 & N^e_{\mathrm{A5}\{1,1,2\}} & 0 & \cdots & 0 & N^e_{\mathrm{A5}\{1,1,p_\zeta\}} & 0 \\ 0 & 0 & N^e_{\mathrm{A5}\{1,1,2\}} & \cdots & 0 & 0 & N^e_{\mathrm{A5}\{1,1,p_\zeta\}} \end{bmatrix}} \tag{7.57}$$

$$\overbrace{\frac{1}{2}(1-\xi)\ \frac{1}{2}(1-\eta)\ \phi_{p=2}\,(\zeta)} \quad \text{voir (7.36)}$$

$$[N^e_{\mathrm{F}}] = \overbrace{\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{F1}\{2\,\ldots\,p_\xi,2\,\ldots\,p_\eta,1\}} & \cdots & N^e_{\mathrm{F3}\{2\,\ldots\,p_\xi,1,2\,\ldots\,p_\zeta\}} & \cdots & N^e_{\mathrm{F6}\{1,2\,\ldots\,p_\eta,2\,\ldots\,p_\zeta\}} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} N^e_{\mathrm{F3}\{2,1,2\}} & 0 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & N^e_{\mathrm{F3}\{2,1,2\}} & 0 & \cdots & & & \\ 0 & 0 & N^e_{\mathrm{F3}\{2,1,2\}} & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdots & N^e_{\mathrm{F3}\{2,1,p_\zeta\}} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & N^e_{\mathrm{F3}\{2,1,p_\zeta\}} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N^e_{\mathrm{F3}\{2,1,p_\zeta\}} & \cdots \end{matrix} \tag{7.58}$$

$$\begin{matrix} \cdots & N^e_{\mathrm{F3}\{p_\xi,1,p_\zeta\}} & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & N^e_{\mathrm{F3}\{p_\xi,1,p_\zeta\}} & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & N^e_{\mathrm{F3}\{p_\xi,1,p_\zeta\}} \end{matrix} \Bigg]$$

$$\overbrace{\phi_{p=2}\,(\xi)\ \frac{1}{2}(1-\eta)\ \phi_{p=p_\zeta}\,(\zeta)} \quad \text{voir (7.36)}$$

$$
[N_{\mathrm{I}}^{e}] = \overbrace{\left[N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2\,\ldots\,p_\xi, 2\,\ldots\,p_\eta, 2\,\ldots\,p_\zeta\}} \right]}
$$

$$
\overbrace{\left[
\begin{array}{cccc}
N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,2,2\}} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,2,2\}} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,2,2\}} & \cdots
\end{array}
\right.}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\cdots & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,2,p_\zeta\}} & 0 & 0 \quad \cdots \\
\cdots & 0 & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,2,p_\zeta\}} & 0 \quad \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,2,p_\zeta\}} \quad \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\cdots & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,p_\eta,p_\zeta\}} & 0 & 0 \quad \cdots \\
\cdots & 0 & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,p_\eta,p_\zeta\}} & 0 \quad \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{2,p_\eta,p_\zeta\}} \quad \cdots
\end{array}
\qquad (7.59)
$$

$$
\left.
\begin{array}{ccc}
\cdots & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{p_\xi,p_\eta,p_\zeta\}} & 0 \qquad 0 \\
\cdots & 0 & N^{e}_{\mathrm{I}\,\{p_\xi,p_\eta,p_\zeta\}} \quad 0 \\
\cdots & 0 & 0 \qquad N^{e}_{\mathrm{I}\,\{p_\xi,p_\eta,p_\zeta\}}
\end{array}
\right]
$$

$$
\overbrace{\phi_{p=p_\xi}(\xi)\ \phi_{p=p_\eta}(\eta)\ \phi_{p=p_\zeta}(\zeta)} \quad \text{voir (7.36)}
$$

Les fonctions d'interpolation interne ne peuvent être représentées graphiquement que sur des coupes dans le volume de l'élément. C'est l'objet de la figure FIG. 7.24 qui reproduit deux configurations d'interpolation interne.

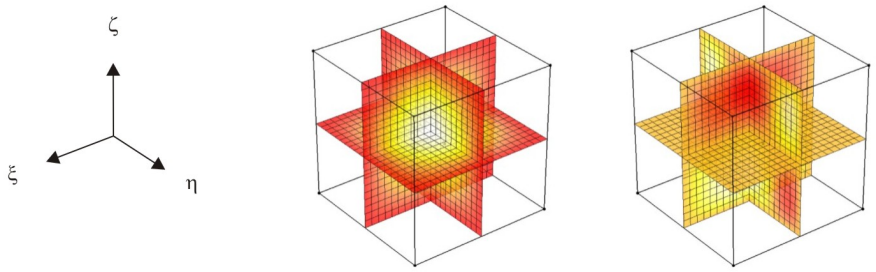


FIG. 7.24 – Représentations graphiques de deux interpolations internes sur un élément tridimensionnel à 8 nœuds géométriques. La première est uniforme de degré 2 et la seconde correspond au degré ($p_\xi = 2, p_\eta = 4, p_\zeta = 3$).

Avec trois variables d'espace, la matrice $[B^e]$ prend la forme de l'expression (7.60).

$$[B^e] = [D^e]\,[N^e] \quad \text{où} \quad [D^e] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\xi} & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\zeta} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial\xi} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{bmatrix} \tag{7.60}$$

La matrice de rigidité élémentaire s'écrit selon l'expression (7.61) pour être intégrée numériquement selon (7.62).

$$[K^e] = \int_{\xi=-1}^{1}\int_{\eta=-1}^{1}\int_{\zeta=-1}^{1} [B^e]^T\,[L]\,[B^e]\,|J(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi d\eta d\zeta \tag{7.61}$$

$$\iiint \gamma(\xi,\eta)\;d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k w_i\,w_j\,w_k\,\gamma(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \tag{7.62}$$

7.3.2.3 Extension à une interpolation géométrique « quadratique »

L'enrichissement des fonctions d'interpolation du champ solution est inefficace voire inutile si l'approximation géométrique reste grossière. C'est notamment le cas lorsque le joint de colle n'est plus plan ; il faut alors recourir à des éléments dont la courbure reproduit celle des substrats. Si nous souhaitons conserver une compatibilité totale avec les éléments les plus courants, il faut utiliser une interpolation géométrique « quadratique » de type Lagrange ou serendip.

La famille d'éléments quadratiques de Lagrange est définie comme étant interpolée par l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à deux pour chacune des variables d'espace. Sur un élément bidimensionnel carré à deux variables d'espaces (FIG. 7.25), il est donc nécessaire d'introduire cinq nœuds supplémentaires par rapport à une interpolation linéaire pour engendrer un polynôme arbitraire constitué des termes $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\,\eta, \eta^2, \xi^2\,\eta, \xi\,\eta^2, \xi^2\,\eta^2$. La figure FIG. 7.26 fait apparaître la représentation des neuf fonctions d'interpolation ainsi créées. Nous pouvons noter que, contrairement à une interpolation hiérarchique, les fonctions d'interpolation bilinéaire ne sont pas conservées lorsque l'on augmente le degré d'une unité.
Afin d'économiser le volume des calculs, beaucoup d'éléments quadratiques appartiennent à la famille de serendip qui ne retient pas le nœud milieu indispensable à la famille de Lagrange. Les

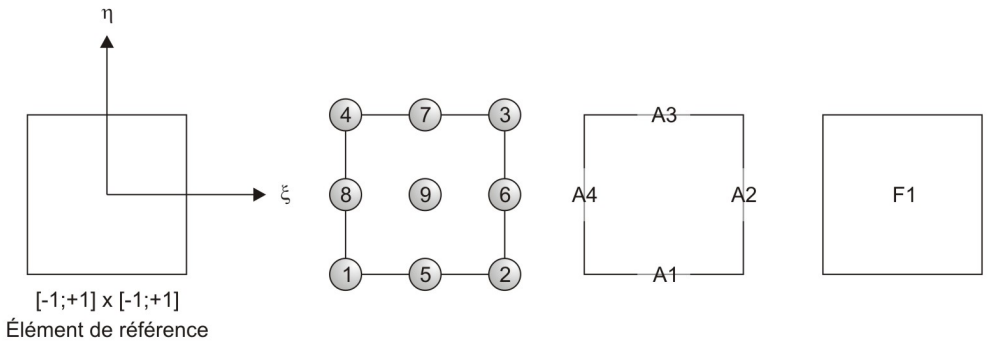


FIG. 7.25 – Elément bidimensionnel à 9 nœuds géométriques, 4 arêtes et 1 face représenté dans son espace de référence.

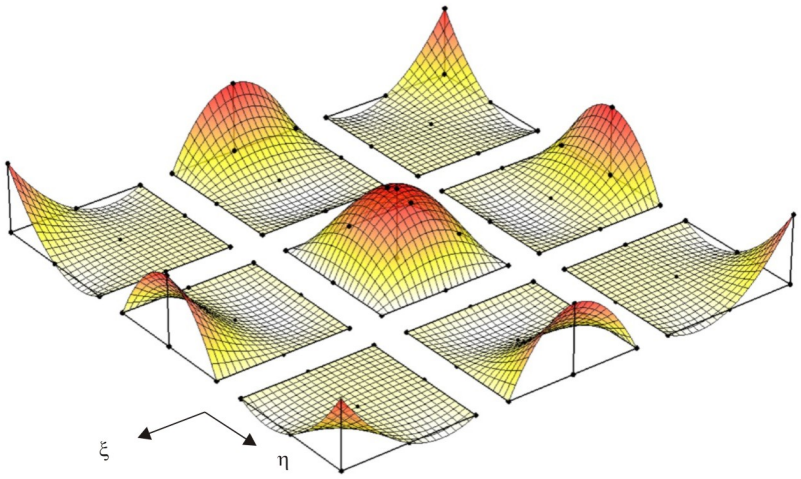


FIG. 7.26 – Représentation graphique d'une interpolation quadratique de Lagrange sur un élément bidimensionnel à 9 nœuds géométriques.

éléments de la famille de serendip[45] sont en fait obtenus en associant des fonctions d'interpolation seulement aux sommets et côtés de la maille. Au premier degré, les éléments de Lagrange et de serendip sont identiques. Au second degré, la maille de serendip n'est définie que par 8 nœuds (FIG. 7.27). Nous pouvons alors étendre ce raisonnement à la troisième dimension : pour définir un élément hexaédrique de serendip, 20 nœuds sont requis (FIG. 7.28). La modularité du code que nous avons écrit à été l'un des principaux objectifs de la phase d'implémentation. Nous avons donc posé les premières briques nécessaires à une interpolation géométrique quadratique.

[45]En 1754, dans une lettre adressée à son ami H. MANN, l'écrivain anglais H. WALPOLE forge le néologisme *serendipity* en lui donnant pour définition la faculté de *découvrir, par hasard et sagacité, des choses qu'on ne cherche pas* [CATELLIN, 2003]. Il s'inspire pour cela d'un conte antique évoquant le voyage et les aventures des trois princes de Serendip, aujourd'hui appelé Sri Lanka. Ce néologisme sera repris au cours du XX^{ème} siècle et se diffusera largement dans les milieux scientifiques anglo-saxons. Il fait aujourd'hui l'objet d'usages terminologiques très divers. Les fonctions d'interpolation de serendip découlent d'un raisonnement particulièrement ingénieux rappelant la définition de H. WALPOLE [ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005b].

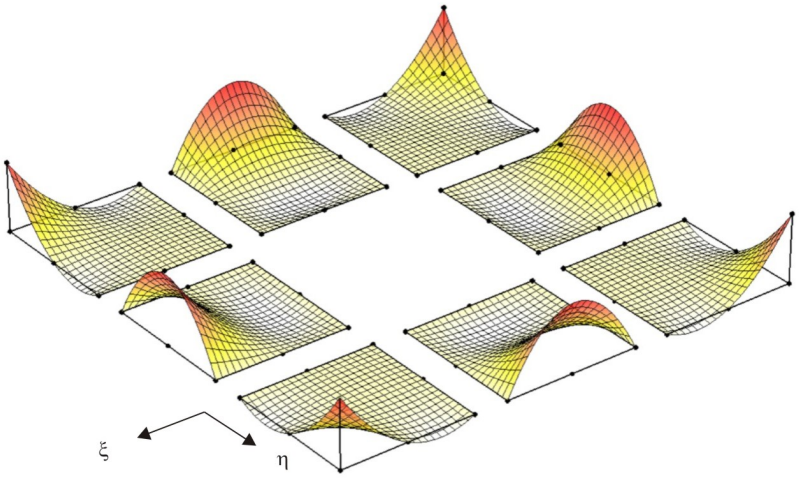


FIG. 7.27 – Représentation graphique d'une interpolation quadratique de serendip sur un élément bidimensionnel à 8 nœuds géométriques. Le nœud central est économisé.

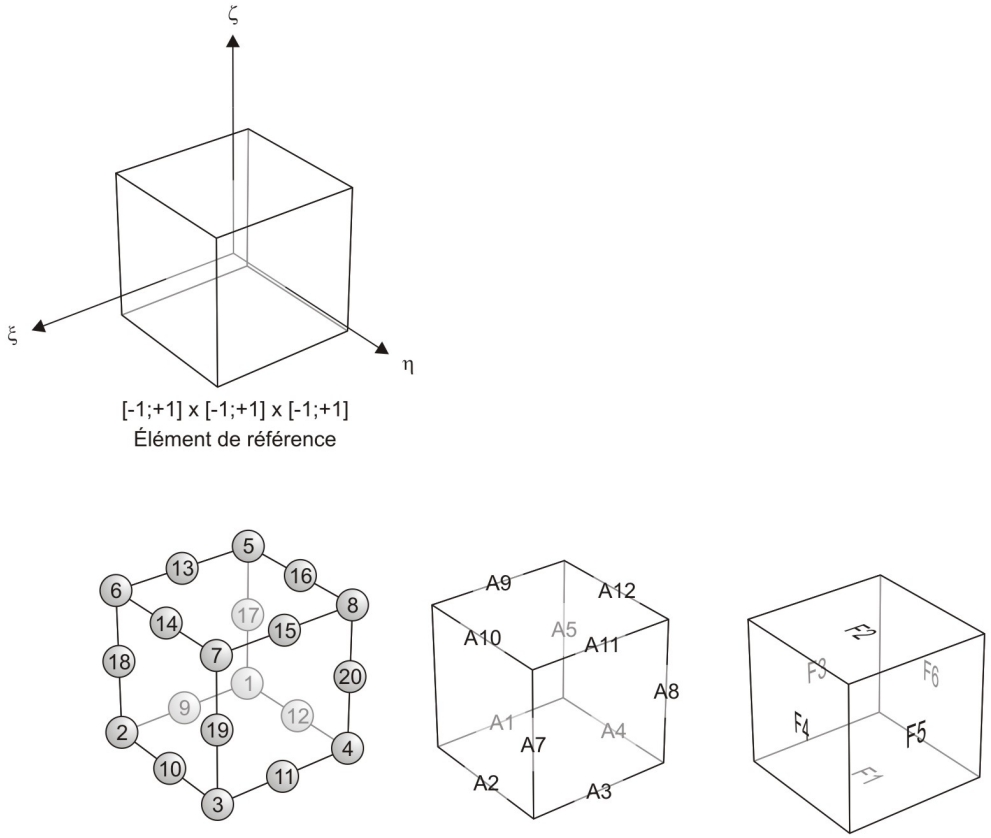


FIG. 7.28 – Elément tridimensionnel à 20 nœuds géométriques, 12 arêtes et 6 faces représenté dans son espace de référence.

7.3.3 Manier un modèle de comportement anisotrope non-linéaire

Pour chaque incrément de déformation, le modèle de comportement doit fournir l'incrément de contrainte correspondant ainsi que la matrice tangente $\underset{\sim}{\underline{L}}$. Une estimation de cette dernière peut parfois suffire à évaluer la matrice de rigidité élémentaire. Dans le cas d'un comportement non-linéaire, plusieurs itérations peuvent être requises pour que la solution converge. Cependant, quelle que soit la méthode de résolution adoptée, la description du comportement doit rester indépendante du problème aux éléments finis : l'élément ne « connaît » pas le comportement mais sa formulation tient évidemment compte de la classe[46] de celui-ci. En ce sens, l'évaluation du comportement apparaît comme un bloc « logiciel » autonome. Lorsque le comportement est anisotrope, il est indispensable de tenir compte de l'orientation locale que l'on souhaite employer. A cette étape du calcul, l'attribution d'un repère propre à chaque élément est profitable (FIG. 7.29).

Les transformations entre ces repères locaux et le repère global de la structure peuvent être exprimées par l'intermédiaire des angles d'Euler.

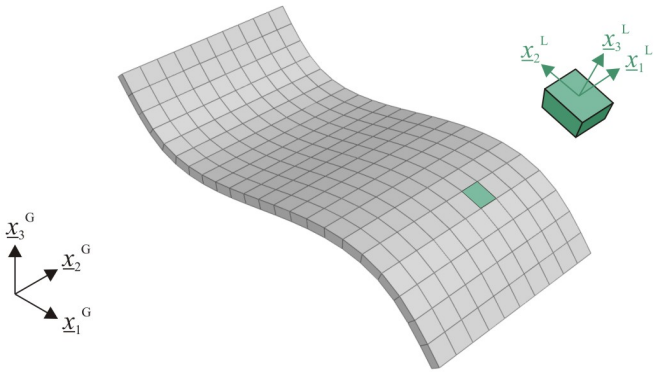


FIG. 7.29 – Le repère local de l'élément doit permettre de définir l'orientation du matériau par rapport au repère global de la structure.

7.3.3.1 Les Angles d'Euler

Les angles d'Euler, au nombre de trois, sont choisis de façon à définir complètement l'orientation d'une base orthonormée locale $b^L = \left(\underline{x}_1^L, \underline{x}_2^L, \underline{x}_3^L\right)$ par rapport à la base orthonormée globale $b^G = \left(\underline{x}_1^G, \underline{x}_2^G, \underline{x}_3^G\right)$. Ces trois angles, généralement[47] notés ψ (*précession*), θ (*nutation*) et φ (*rotation propre*), correspondent aux rotations représentées sur la figure FIG. 7.30.

[46] En mécanique : hypothèse des petites perturbations ou des grandes transformations, ...

[47] En sciences des matériaux, les angles d'Euler sont également notés φ_1, ϕ et φ_2 selon la désignation de H. J. BUNGE [BUNGE, 1982].

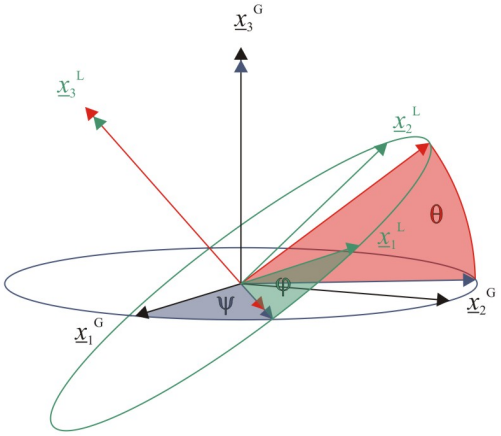


FIG. 7.30 – Les trois angles d'Euler.

La matrice de changement de base de b^L à b^G, notée $[P]$, peut être déterminée par l'expression[48] (7.63).

$$
\begin{aligned}
[P] &= [P_\varphi]\,[P_\theta]\,[P_\psi] \qquad (7.63)\\
[P_\varphi] &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\\
[P_\theta] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\\
[P_\psi] &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

7.3.3.2 Formules de changement de base

Tous les calculs élémentaires exécutés dans le sous-programme principal sont fait localement avant d'être transformés dans le repère global de la structure. La matrice de passage (7.63) permet d'établir les relations entre grandeurs locales et globales. Pour un scalaire s, un vecteur $\{\underline{v}\}$ et une matrice carrée $[M]$, les formules de changement de base sont données par les relations (7.64) à (7.66).

[48] La « matrice de passage » de b^L à b^G est par définition :

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{x}_1^L \\ \underline{x}_2^L \\ \underline{x}_3^L \end{array} \right\} = [P] \left\{ \begin{array}{c} \underline{x}_1^G \\ \underline{x}_2^G \\ \underline{x}_3^G \end{array} \right\}$$

$$s^L = s^G \tag{7.64}$$

$$\left\{\underline{v}^L\right\} = [P]^T \left\{\underline{v}^G\right\} \tag{7.65}$$

$$\left[M^L\right] = [P]^T \left[M^G\right] [P] \tag{7.66}$$

7.4 Une mise à l'épreuve graduelle

Quelle que soit le façon d'opérer, la mise en œuvre d'un nouvel outil numérique nécessite une phase de validation progressive. L'expérience montre que le « bon fonctionnement » du modèle peut être garantie par un test élémentaire. Dans un premier temps, tous les éléments (finis) d'un code de calcul doivent en effet réussir le « *patch-test*[49] » que nous exposerons dans le paragraphe suivant. Bien que primordiale, la réussite de ce test n'est en aucun cas un critère suffisant pour attester de la « qualité » du modèle sur un maillage quelconque. Aussi, dans un deuxième temps, posons-nous les bases d'une validation sur sous-systèmes d'assemblages collés.

7.4.1 Validation élémentaire : le « patch-test »

Introduite au début des années 1970, la technique du patch-test est suffisamment efficace pour vérifier l'implémentation du programme, l'existence de modes parasites ou l'aptitude à converger du modèle. Il s'agit d'une approche pragmatique qui s'effectue sur un groupe d'éléments dont l'agencement présente au moins un nœud interne. Les expressions françaises de « *complétude collective* » ou de « *test de rapiéçage* » pour décrire la méthode sont particulièrement explicites.

Sur un maillage irrégulier, il s'agit donc d'imposer aux nœuds externes des déplacements (test cinématique), ou des chargements (test mécanique) correspondant à un état de déformation constante ou nulle (mode rigide). Le test est réussi si le(s) déplacement(s) du ou des nœuds internes ainsi que les déformations et les contraintes dans les éléments sont bien caractéristiques de la sollicitation imposée.

Nous avons utilisé ces deux approches pour valider nos éléments bidimensionnel à 4 nœuds géométriques et tridimensionnel à 8 nœuds géométriques. Compte tenu du futur emploi de ces éléments au sein d'un maillage « classique », nous appliquons les sollicitations sur une bordure d'éléments à interpolation bi- ou trilinéaire, l'augmentation du degré d'interpolation ne concernant que les éléments partageant le nœud interne excentré. Le patch-test a ainsi pu être validé sur une configuration proche de celle visée. Les figures FIG. 7.31 et FIG. 7.32 présentent les maillages employés.

[49] [ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005b], [DHATT *et al.*, 2005]

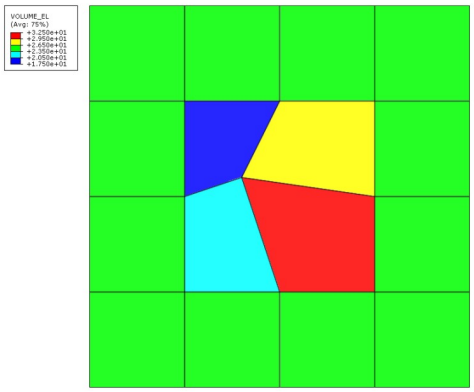


FIG. 7.31 – Patch-test sur éléments bidimensionnels à 4 nœuds. L'approche numérique permet de vérifier la qualité du calcul des grandeurs élémentaires. Nous représentons ici l'évaluation du « volume » de l'élément.

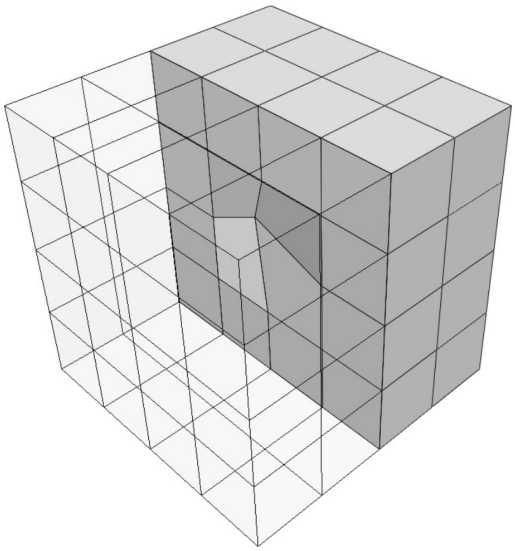


FIG. 7.32 – Patch-test sur éléments tridimensionnels à 8 nœuds. Les éléments testés partagent le nœud interne excentré et reçoivent leurs sollicitations par l'intermédiaire d'une bordure d'éléments à interpolation trilinéaire.

7.4.2 Ebauche d'une validation sur sous-systèmes

Les tests précédents ont permis de valider le bon fonctionnement numérique des éléments à interpolation hiérarchique implémentés dans ABAQUS®. Nous proposons ici d'ébaucher une validation sur sous-systèmes qui permette d'évaluer la pertinence de l'outil vis-à-vis des assemblages collés.

Le premier problème est directement dérivé du patch-test : par la suppression de quatre éléments et le réajustement du nœud central, nous obtenons un maillage en forme

de « L » (FIG. 7.33). Cette configuration est particulièrement intéressante d'un point de vue numérique puisqu'elle induit un très fort gradient de contrainte.

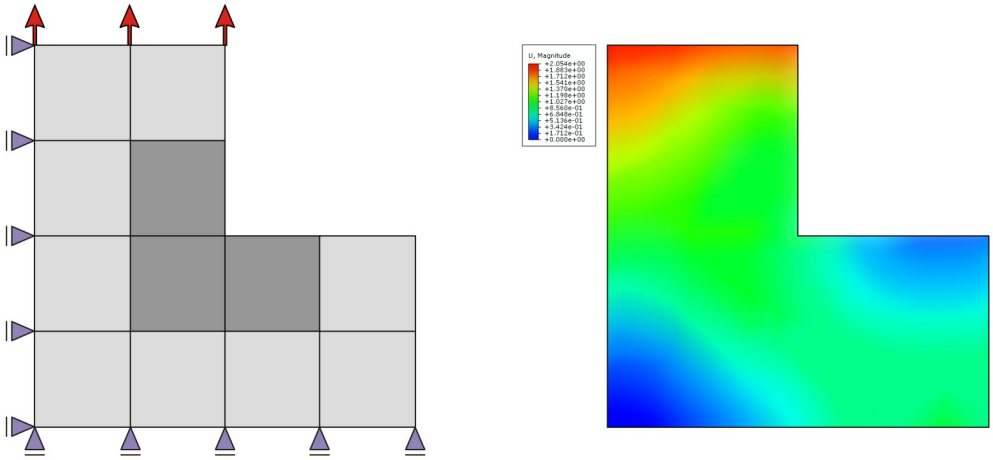


FIG. 7.33 – Configuration en « L » propice à la validation numérique des éléments à interpolation hiérarchique. Représentation des conditions aux limites et visualisation du champ de déplacement induit.

Notre modèle comporte 12 éléments bidimensionnels à 4 nœuds géométriques. Les trois éléments centraux possèdent des propriétés d'élasticité[50] dix fois supérieures à celles des éléments périphériques. La sollicitation consiste à imposer un déplacement uniforme à la frontière supérieure du L, tout en immobilisant de manière appropriée la base et le côté (FIG. 7.33). Sur les arêtes périphériques, supports d'application des conditions aux limites, le degré d'interpolation est figé (interpolation linéaire). Le degré des arêtes intérieures est, quant à lui, libre d'évoluer de façon indépendante et hétérogène. Cependant et par simplicité, nous l'avons fixé à une valeur de 4 pour réaliser le calcul.

Un maillage de « référence », comportant 2700 éléments à interpolation linéaire (5642 degrés de liberté), permet d'apprécier la qualité de la réponse du modèle hiérarchique qui ne comporte que 378 degrés de liberté. La figure FIG. 7.34 confronte les résultats obtenus pour le cisaillement plan.

Malgré le nombre réduit de degrés de liberté de l'approche hiérarchique, nous n'avons noté aucun gain de temps de calcul. Il est vrai que l'appel d'un sous-programme externe pour l'évaluation de chaque matrice de rigidité élémentaire pénalise assurément l'étape d'assemblage.

Au-delà de la simple confrontation des résultats, ce problème présente de nombreux atouts. Dans un contexte bidimensionnel simplifié, il pourrait permettre d'évaluer l'efficacité du paramètre de dilatation présenté sur la barre élastique pour capturer les fortes variations de la solution (§ 7.3.1). De la même manière et dans un souci d'automatisation des calculs, il est envisageable d'utiliser un indicateur d'erreur non-local mais propre à chaque arête pour faire évoluer le degré d'interpolation (§ 7.2.2.3). Des tests de faisabilité très concluants ont été réalisés dans ce sens.

[50] Le modèle de comportement est fournit par le module Z-mat du code ZéBuLoN (cf. chapitre 6).

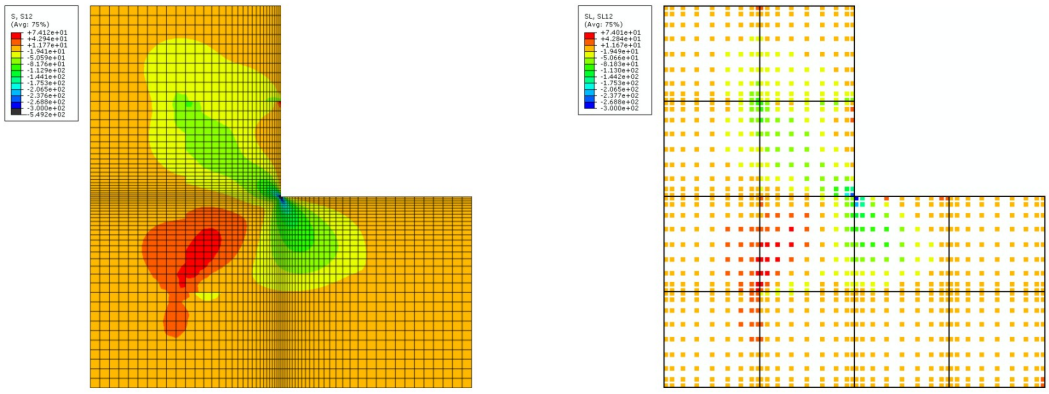


FIG. 7.34 – Confrontation des résultats (cisaillement plan) obtenus par une approche hiérarchique et par un modèle de référence. La bonne corrélation de ces résultats manifeste la pertinence de l'approche hiérarchique.

En complément de ce premier problème, nous avons souhaité travailler sur des sous-systèmes tridimensionnels représentatifs d'assemblages collés. Trois configurations ont été définies :

- le cisaillement sur joint collé à simple recouvrement (FIG. 7.35),
- le pelage (FIG. 7.36),
- la compression sur tubes emmanchés (FIG. 7.37).

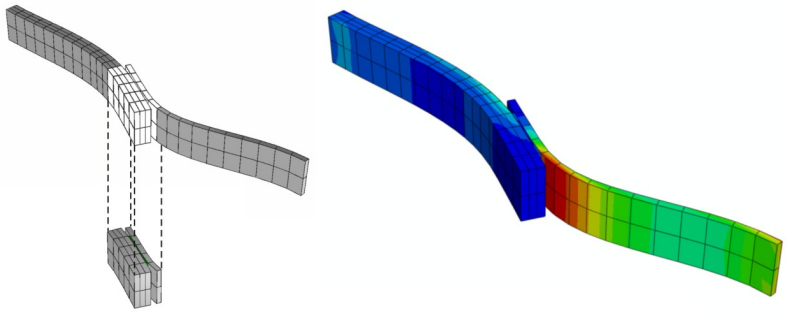


FIG. 7.35 – Cisaillement sur joint collé à simple recouvrement. Au niveau du joint, les éléments à formulation standard sont remplacés par des éléments à formulation hiérarchique ; la compatibilité de l'interpolation sur les zones de transition est assurée.

Pour chacune de ces éprouvettes, nous avons pu expérimenter l'approche hiérarchique combinée à une loi de comportement anisotrope non-linéaire.

L'objectif était d'établir une procédure de modélisation opérationnelle vis-à-vis des assemblages collés :

1. A partir d'un fichier de mise en donné classique, le pré-traitement permet de remplacer les éléments standards des zones collés par des éléments à formulation hiérarchique. La compatibilité de l'interpolation sur les zones de transition est assurée. Pour les arêtes intérieures, le degré initial est préalablement fixé mais peut évoluer localement selon le besoin. Cette adaptation locale pourra être obtenue automatiquement en utilisant un indicateur d'erreur et un critère non-local lié à chaque arête. Durant cette phase, il est important que le modèle de comportement soit le plus simple possible (élasticité linéaire).
2. Une fois la précision souhaitée atteinte, le calcul peut être lancé avec une loi de comportement non-linéaire. Le sous-programme principal génère des fichiers résultats pour les variables nodales (*problem*`.node`), l'évaluation du comportement aux points d'intégration (*problem*`.integ`), l'extrapolation éventuelle de ces grandeurs aux nœuds géométriques (*problem*`.extra`) ou au centroïde de l'élément (*problem*`.center`).
3. Le post-traitement permet de conformer le fichier résultat pour qu'il soit exploitable sur la visionneuse. Il s'agit notamment de permettre la visualisation des grandeurs locales au sein du joint collé (FIG. 7.36).

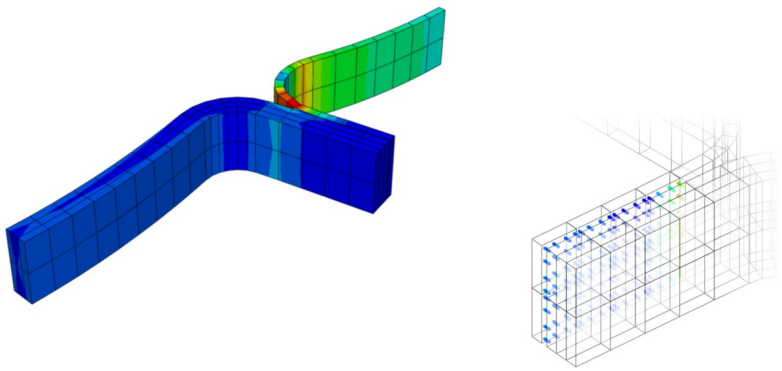


FIG. 7.36 – Pelage d'un joint collé. L'utilisation d'un post-traitement adapté permet de visualiser dans le joint les grandeurs locales obtenus par l'approche hiérarchique.

Il ne s'agit là que d'une ébauche de la validation de notre outil d'aide au dimensionnement des assemblages collés. Si l'aspect opérationnel semble particulièrement efficace, il reste à vérifier la performance du modèle de comportement ainsi couplée à l'approche hiérarchique.

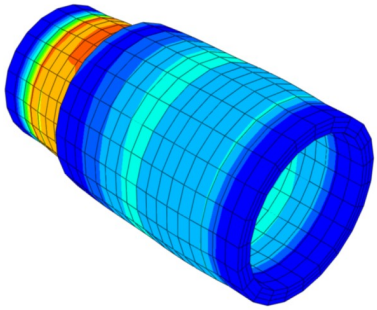


FIG. 7.37 – Compression sur tubes emmanchés. Dans le cas d'un comportement anisotrope, la bonne orientation des éléments est essentielle.

Chapitre 8

Conditions d'exploitations « industrielles »

8.1 Des sollicitations sévères

La défiance à l'égard du collage structural moderne, évoquée dans l'introduction générale, porte essentiellement sur sa durabilité sous sollicitations sévères. De nombreux facteurs peuvent influer sur la durée de vie d'un assemblage collé. Nous n'avons pas besoin de souligner combien la fatigue mécanique et le vieillissement climatique sont importants pour l'application industrielle visée dans cette étude. L'évolution indispensable de notre outil d'aide au dimensionnement devra intégrer ces deux facteurs qui interviennent en service et diminuent les performances des assemblages collés.

La section 8.2 se limite à présenter la campagne d'essais ainsi que les principaux résultats obtenus lorsque l'adhésif β est soumis à des variations de contraintes répétées. En vue de la prise en compte future des mécanismes de fatigue, nous suggérons une interprétation phénoménologique des résultats.

Dans un autre domaine, le cyclage climatique est particulièrement endommageant pour un polymère comme l'adhésif époxy objet de cette étude. Au travers de sa thèse de doctorat, la contribution d'O. MARIO[1] a consisté à dégager les cinétiques de diffusion hydrique au sein du matériau et à en évaluer l'impact sur les propriétés mécaniques. Bien que débordant du strict cadre mécanique traité jusqu'alors, la section 8.3 résume quelques éléments d'importance.

8.2 Fatigue oligocyclique

Les essais de fatigue mécanique ont été conduits sur assemblage en exploitant la capacité du dispositif CdM décrit dans le chapitre 3. Au vu des résultats obtenus préalablement sur l'anisotropie du comportement, nous avons sollicité l'assemblage en traction puis en cisaillement. L'instrumentation est identique à ce que nous avions mis en place pour les essais quasi-statiques. A savoir : un capteur extensométrique à grande résolution et une cellule de charge de 10000 daN. En ce qui concerne les éprouvettes, nous avons conservé une épaisseur de joint de 300 µm et

[1] [MARIO, 2007]

utilisé des substrats en acier. La sollicitation cyclique imposée est contrôlée en vitesse de charge selon deux types de signaux en alternance périodique (FIG. 8.1) :

– une rampe de charge/décharge à 7 daN/s,
– une sinusoïde dont la vitesse maximale de charge est fixée à 1400 daN/s.

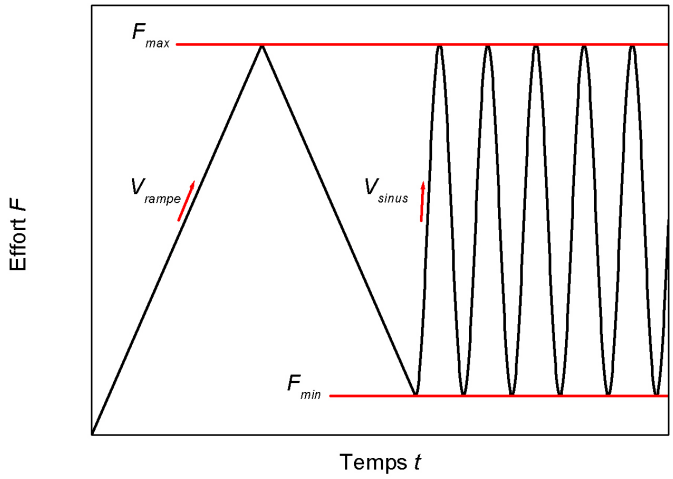


FIG. 8.1 – Deux types de signaux sont imposés en alternance périodique.

Ces deux signaux, en configuration pulsante ($R = F_{min}/F_{max} \rightarrow 0,1$), permettent respectivement :

– d'évaluer périodiquement la rigidité en situation quasi-statique,
– de « fatiguer » l'assemblage sous de fortes amplitudes de contraintes.

Compte tenu de la masse et de la dimension du montage, nous avons écarté l'étude des phénomènes vibratoires à haute fréquence. Les sollicitations à plus grandes amplitudes nous ont permis de travailler sur le domaine de fatigue oligocyclique[2]. La fréquence du signal sinusoïdal est alors ajustée pour conserver une vitesse de charge constante quelle que soit l'amplitude choisie (FIG. 8.2).

En configuration de traction puis de cisaillement, nous avons progressivement abaissé le niveau de charge jusqu'à atteindre plus de 10^5 cycles. Il faut noter qu'à ce niveau, un essai dure environ une semaine malgré l'augmentation de la fréquence. Pour chaque essai, nous avons fait correspondre sur un graphique le nombre de cycles à rupture avec le niveau de charge maximal atteint (FIG. 8.3). Cette *courbe d'endurance* nous permet de constater que, pour un même niveau de charge, la traction est plus endommageante que le cisaillement. Cette différence semble cependant s'atténuer lorsque la sollicitation diminue. En extrapolant les résultats au delà de 10^5 cycles, nous pouvons supposer que le million de cycles serait obtenu pour une charge inférieure à 900 daN. Le champ de contrainte alors induit au sein de l'adhésif permettrait de ne pas dépasser le seuil d'irréversibilité du comportement du polymère. Nos informations sont

[2]Dans le domaine oligocyclique, le chargement est tel qu'il provoque, à chaque cycle, une déformation plastique du matériau. Dans ce cas, la durée de vie dépasse difficilement 10^5 cycles.

cependant insuffisantes pour évoquer l'existence d'une *limite d'endurance* parfois remarquée par certains auteurs[3].

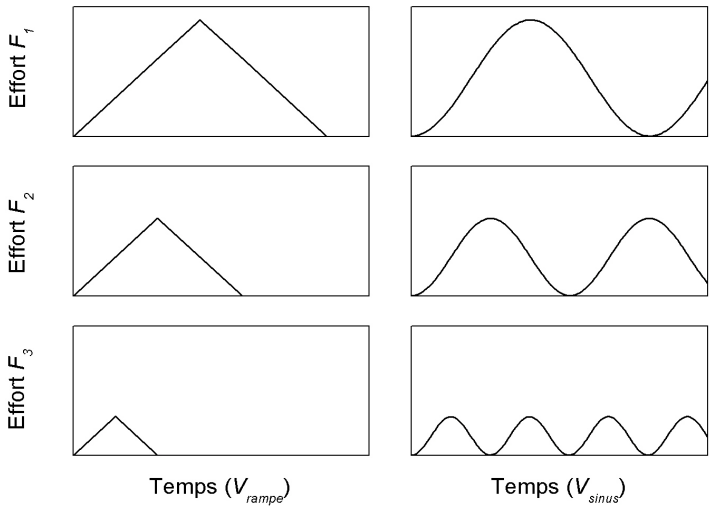


FIG. 8.2 – La vitesse de charge maximale induite par le signal sinusoïdale est maintenue constante.

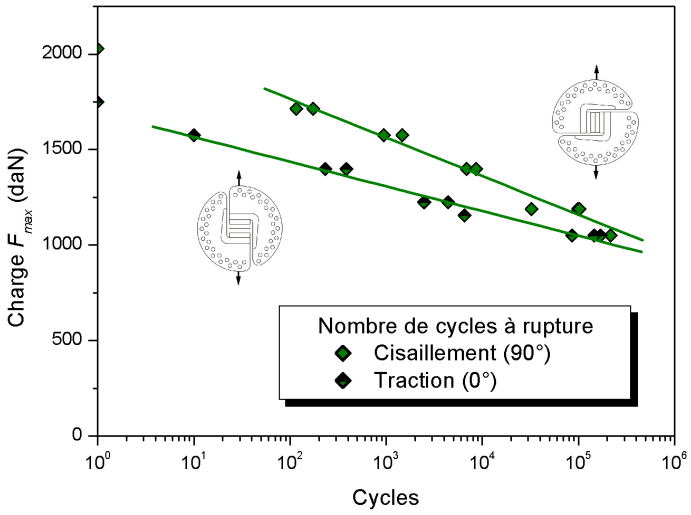


FIG. 8.3 – La courbe d'endurance fait apparaître une évolution parfaitement logarithmique.

L'alignement quasi-exemplaire des points d'essai depuis les sollicitations statiques monotones jusqu'au domaine de fatigue endurance, nous permet d'imaginer que les mécanismes à l'origine de l'endommagement sont uniques. Faute de pouvoir suivre en microscopie les phénomènes

[3][KINLOCH, 1987]

microstructuraux de fatigue[4], nous allons chercher à étayer cette hypothèse par un dépouillement temporel des résultats. Ainsi, pour un essai de cisaillement chargé à 1190 daN, les figures FIG. 8.4 et FIG. 8.5 rendent compte de l'évolution au cours du temps des deux paramètres mesurables :

– la rigidité de l'assemblage,
– l'amplitude du déplacement relatif des substrats.

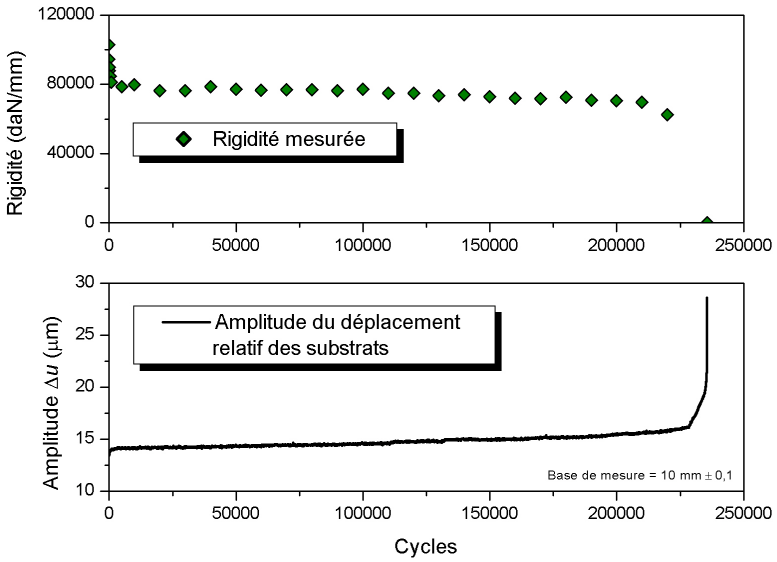


FIG. 8.4 – Evolution de la rigidité de l'assemblage et de l'amplitude du déplacement relatif des substrats pour un essai de cisaillement chargé à 1190 daN (échelle linéaire).

L'échelle linéaire de la figure FIG. 8.4 fait apparaître une chute très brutale de la rigidité de l'assemblage sur le premier millier de cycles avant une stabilisation autour de 80000 daN/mm. Le passage à une échelle logarithmique (FIG. 8.5) est particulièrement intéressant puisque la chute de rigidité observée évolue plus simplement que ce que l'on pouvait imaginer : cette décroissance « logarithmique » touche presque la totalité de l'essai.

La progression de l'endommagement transparaît également sur l'évolution de l'amplitude du déplacement relatif des substrats Δu qui ne cesse de croître, conduisant inexorablement vers la rupture. Cette dernière semble par ailleurs se produire sur plusieurs centaines de cycles et il est ainsi relativement aisé d'examiner la zone ultime. C'est ce que nous avons entrepris sur la figure FIG. 8.6 où nous faisons apparaître l'évolution de Δu sur les 250 derniers cycles pour trois charges différentes. S'il est évident que l'endommagement ne progresse pas à la même vitesse, nous pouvons observer que le comportement en zone ultime est néanmoins identique quel que soit le niveau de sollicitation. Un constat similaire peut être fait sur les essais en traction (FIG. 8.7). Ces observations confortent l'hypothèse selon laquelle les mécanismes à l'origine de l'endommagement puis de la rupture sont uniques : qu'il s'agisse d'un essai quasi-

[4]Quelques observations *in situ* ont tout de même été tentées grâce à la platine de traction décrite au chapitre 4 en répétant des sollicitations d'amplitude variable. Nous n'avons alors pas distingué d'autre phénomène d'endommagement que celui induit par l'exfoliation du talc.

statique monotone ou de fatigue endurance, la rupture cohésive d'un joint d'adhésif β semble conditionnée par un même taux de défauts.

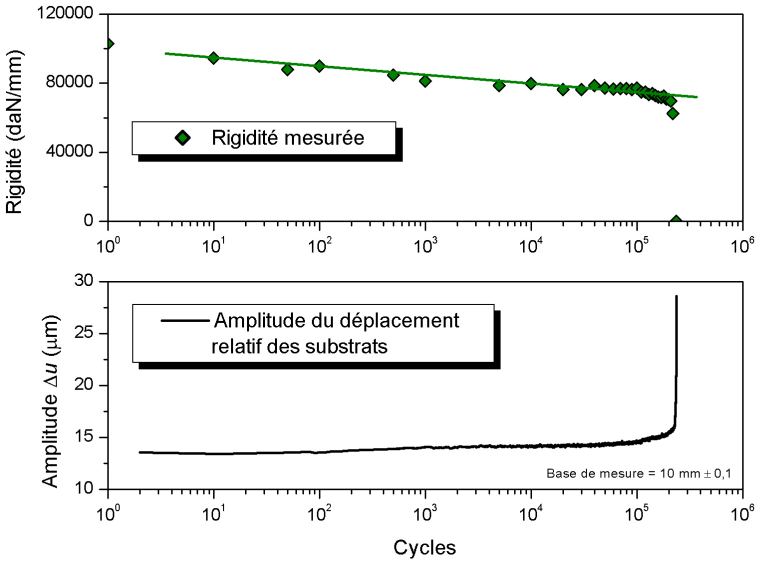


FIG. 8.5 – Evolution de la rigidité de l'assemblage et de l'amplitude du déplacement relatif des substrats pour un essai de cisaillement chargé à 1190 daN (échelle logarithmique).

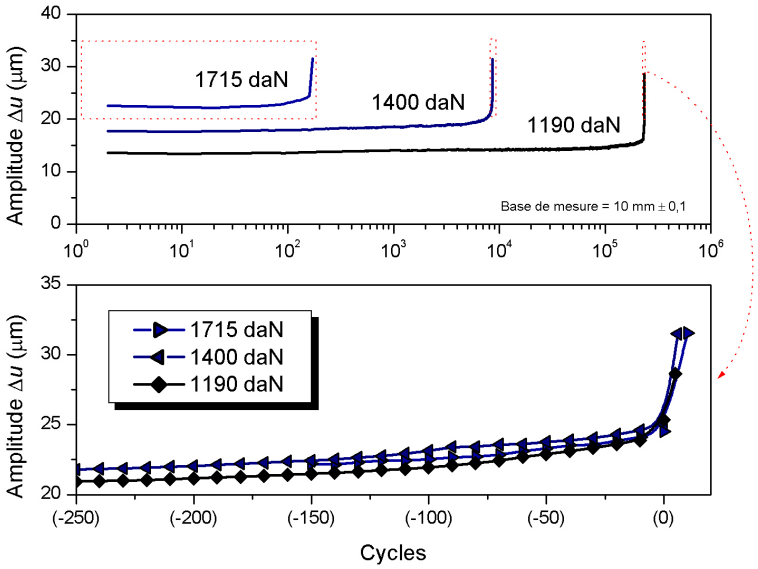


FIG. 8.6 – Evolution de l'amplitude du déplacement relatif des substrats pour trois chargements de cisaillement. Quel que soit ce dernier, l'assemblage ne semble pas pouvoir supporter plus de 25 µm d'amplitude.

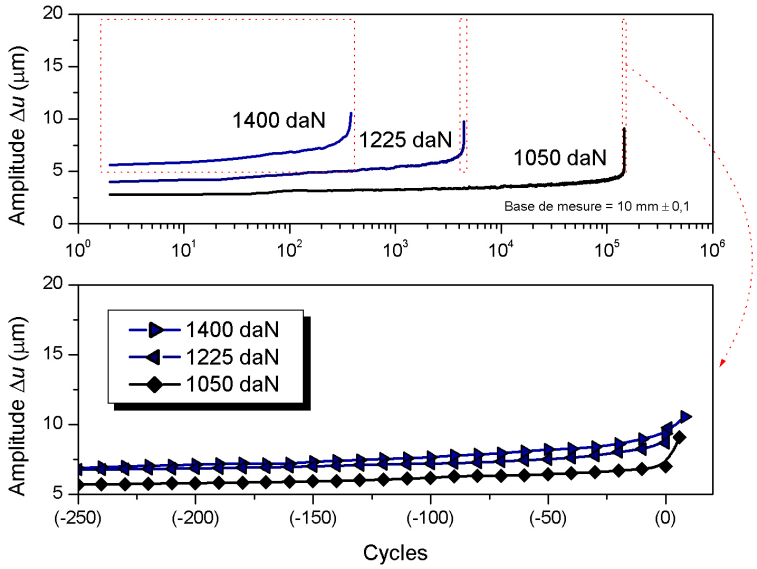


FIG. 8.7 – Evolution de l'amplitude du déplacement relatif des substrats pour trois chargements de traction. Comme pour le cisaillement, le comportement de l'adhésif en zone ultime semble unique.

Compte tenu des résultats précédents et en s'appuyant sur l'étude micro-mécanique conduite au chapitre 4, nous proposons l'interprétation suivante :

1. Sous chargement mécanique, l'exfoliation des charges de talc permet d'absorber une partie de la déformation imposée à l'adhésif (FIG. 8.8). La décroissance logarithmique de la rigidité de l'assemblage peut s'expliquer par un amorçage nécessaire des micro-fissures.
2. L'ouverture des premières charges de talc forment un réseau de cavités qui s'étendent bientôt aux charges à proximité immédiate. L'endommagement progresse régulièrement induisant une augmentation du taux de défauts.
3. Lorsque le taux de défauts atteint son seuil maximal, l'endommagement se propage dans la matrice sous forme d'une macro-fissure fatale à la tenue mécanique de l'assemblage.

Comme nous l'avons déjà envisagé, la présence du talc permet vraisemblablement d'assurer une évolution déterministe de l'endommagement puis de la rupture.

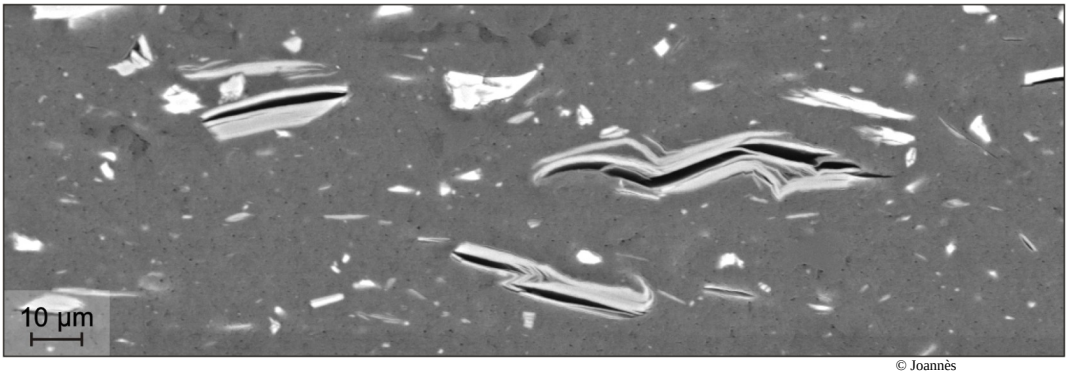


FIG. 8.8 – L'exfoliation des charges de talc facilite la déformation de l'adhésif et permet vraisemblablement de maîtriser l'évolution de l'endommagement.

8.3 Vieillissement climatique

Grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques et leurs grandes résistances thermique et chimique, les résines époxy sont aujourd'hui employées dans de multiples applications. Cependant, ces résines présentent une sensibilité hydrique qui peut limiter leur utilisation en milieu humide. Dans ce contexte, il est légitime de s'interroger sur la capacité des adhésifs époxy à conserver leurs performances originelles une fois exposés à des conditions environnementales sévères. Par le passé, de nombreux travaux[5] ont montré que le vieillissement climatique[6] se manifeste par une dégradation des propriétés d'élasticité du polymère. En ce qui concerne la formulation β, objet de cette étude, nous avons également pu noter une rupture prématurée des assemblages et l'apparition de décollements adhésifs.

Les résultats des diverses caractérisations menées sur l'adhésif β au cours de cycles de vieillissement contrôlés sont discutés dans le travail de thèse d'O. MARIO[7]. Sans aborder la complexité des mécanismes de dégradation nous souhaitons, dans cette dernière section, mettre l'accent sur le dimensionnement des assemblages collés « vieillis ».

D'un point de vue mécanique, les conséquences du vieillissement climatique sur le matériau sont intimement liées à deux paramètres : la concentration en eau et la température. Il est donc primordial d'identifier les cinétiques de diffusion[8] hydrique afin de pouvoir établir une cartographie de la concentration en eau dans le joint à tout instant de la vie de l'assemblage. Le gradient de concentration doit permettre de renseigner le modèle de comportement sur l'état de dégradation local du matériau lors du calcul de dimensionnement mécanique. Des travaux en ce sens sont régulièrement publiés pour des structures en composites. D'un point de vue industriel, le problème peut cependant être simplifié en évaluant uniquement la durée nécessaire à la saturation en eau du joint. Le calcul de dimensionnement s'appuie alors sur un paramètre

[5] Se référer à [KINLOCH, 1987].

[6] Sous humidité relative et température élevées.

[7] [MARIO, 2007]

[8] Souvent fickiennes mais parfois plus sophistiqués comme dans le cas de l'adhésif β qui nécessite de recourir à la théorie proposée par H. G. CARTER et K. G. KIBLER [CARTER et KIBLER, 1978].

de concentration homogène sur l'ensemble du polymère et constitue la borne inférieure des performances mécaniques de l'assemblage.

Malgré l'attractivité et la commodité de cette approche, il reste actuellement très difficile de prédire les ruptures adhésives qui surviennent lors du vieillissement climatique des assemblages collés. Les perspectives de développement en ce sens sont multiples.

Conclusion et perspectives

En dépit de performances mécaniques reconnues, l'utilisation des adhésifs structuraux comme mode d'assemblage primaire sur des pièces fortement sollicitées reste encore aujourd'hui très timide. La méconnaissance de leur comportement constitue le principal obstacle à leur introduction massive comme technique d'assemblage. Les moyens de caractérisation et les outils basés sur la méthode des éléments finis ne sont pas toujours appropriés aux applications industrielles. L'épaisseur caractéristique des joints d'adhésifs, de quelques centaines de micromètres, nécessite d'adopter des méthodologies spécifiques.

L'objectif de cette étude fut de développer une démarche expérimentale et numérique permettant d'aboutir à un outil d'aide au dimensionnement des assemblages collés. Ce travail s'inscrivant dans un contexte industriel, nous avons utilisé comme support une formulation d'adhésif époxy en exploitation commerciale que nous avons ponctuellement nommé β.

En premier lieu, l'enjeu était d'aboutir à un modèle de comportement quasi-statique, suffisamment prédictif pour sécuriser l'emploi du collage structural. Pour accéder au comportement non-linéaire *in situ* du joint d'adhésif, nous avons développé un dispositif expérimental dérivé du système de M. ARCAN. Il fallait notamment pouvoir caractériser l'adhésif dans l'assemblage et non l'assemblage lui-même. Ce dispositif expérimental permet de faire varier la direction de sollicitation tout en garantissant un état de déformation relativement uniforme au sein du joint. Il s'est avéré aussi efficace en fatigue oligocyclique qu'en chargement quasi-statique monotone.

Par une incursion à l'échelle microstructurale, nous avons pu préciser les causes probables des « effets d'épaisseur » mis en évidence expérimentalement[9]. Ceux-ci sont notamment à l'origine de la distinction controversée entre le comportement d'un adhésif à l'état massif et celui sous forme de joint. Ainsi, la microstructure chargée de l'adhésif n'est probablement pas étrangère à ce phénomène. Les charges minérales de wollastonite et de talc, de part leur morphologie, ont en effet tendance à s'orienter parallèlement à la surface des substrats au cours de l'élaboration des joints. Cette orientation conduit, d'une part à une anisotropie du comportement, d'autre part à une faiblesse de l'adhésif d'autant plus importante que l'épaisseur du joint est petite.

S'appuyant sur ces observations, nous avons proposé un modèle de comportement basé sur la thermodynamique des milieux continus. La formulation est dérivée du critère de Drucker-Prager afin de tenir compte de la dépendance vis-à-vis de la pression hydrostatique. Ce modèle englobe la prise en compte de la plasticité de la phase polymère et de l'endommagement des

[9] Les propriétés d'élasticité de l'adhésif chutent lorsque l'épaisseur du joint diminue.

charges minérales. Ce dernier est traité de manière phénoménologique par une description des mécanismes microstructuraux : grâce à la microscopie électronique à balayage nous nous sommes appuyés sur l'examen *in situ* d'essais de traction ou de cisaillement.

L'écriture modulaire du modèle, implémenté dans le code ZéBuLoN, devrait permettre de s'adapter à de nombreuses familles d'adhésifs plus ou moins chargés. L'identification des paramètres pour l'adhésif β a mis en évidence la faible performance du schéma d'intégration explicite. Cependant, les résultats sont très encourageants et le modèle permet de rendre compte de l'anisotropie et de la non-linéarité du comportement. L'optimisation du schéma d'intégration devrait permettre d'engager une campagne de validation plus complète.

Indépendamment de l'étude comportementale de l'adhésif, son utilisation industrielle nécessite des outils de dimensionnement adaptés aux méthodes par éléments finis. La localisation des surcontraintes dans les structures multi-matériaux impose bien souvent l'emploi d'un trop grand nombre d'éléments. Une nouvelle approche basée sur une formulation hiérarchique des fonctions d'interpolation a été utilisée. Celle-ci permet de prendre en compte les phénomènes localisés régissant le comportement des joints d'adhésif tout en garantissant la compatibilité avec une modélisation industrielle plus grossière. Dans sa version actuelle, l'outil est implémenté[10] dans le code ABAQUS® et permet des analyses quasi-statiques quelconques. La pertinence des éléments à formulation hiérarchique, illustrée dans le cas unidimensionnel, est simplement conjecturée sur des problèmes tridimensionnels. Les premières simulations sur sous-systèmes ont cependant permis de vérifier le bon fonctionnement opérationnel de l'outil.

Ainsi, nous pensons avoir contribué au développement d'un outil de calcul qui, bien utilisé, peut grandement faciliter le dimensionnement des assemblages collés. Au-delà d'une nécessaire validation plus poussée, plusieurs améliorations sont d'ores et déjà envisageables. Concernant le modèle de comportement, nous pouvons noter les points suivants :

- optimisation du schéma d'intégration,
- évaluation et prise en compte de l'endommagement initial de manière phénoménologique,
- établissement d'un critère de rupture basé sur l'évolution des paramètres microstructuraux.

D'un point de vue industriel, la mise en œuvre de la formulation hiérarchique présentée dans ce manuscrit pourrait profiter des développements suivants :

- généralisation de l'indicateur d'erreur et automatisation de l'adaptabilité du degré d'interpolation,
- utilisation d'éléments à interpolation géométrique quadratique,
- analyse et perfectionnement du paramètre de dilatation employé pour capturer les fortes variations de la solution en bord d'élément.

[10] Sous forme d'un sous-programme principal couplé à un pré- et post-traitement spécifique.

Annexe A

Code source ZebFront : quelques éléments

A.1 Préambule

```
// ========================================================================
//   HIGH HYDROSTATIC SENSITIVITY BEHAVIOR
//
//   Damaged elasticity (use_damage)
//   Exponent Drucker-Prager plasticity criteria
//   User isotropic non-linear hardening
//   User kinematic non-linear hardening
//   User Norton flow (use_norton_flow)
//   Exponent Drucker-Prager failure criteria (compute_failure)
//
//   sebastien.joannes@ensmp.fr, 2007
// ========================================================================
```

```
#include <Elasticity.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Print.h>
```

A.2 @Class

```
@Class HIGH_HYDROSTATIC_SENSITIVITY : BASIC_NL_BEHAVIOR {
   @Name     high_hydrostatic_sensitivity;
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @Tags     use_damage;
   @SubClass ELASTICITY damage_cn;
   @SubClass ELASTICITY damage_ct;
   @SubClass ELASTICITY damage_cnt;
   @tVarInt  eed;
   VECTOR    slip_system;
   int       damage_system_number;
   @sVarInt  ald [damage_system_number];
   @sVarAux  md [damage_system_number];
   @sVarAux  rd [damage_system_number];
   @Coefs    damage_ratio;
   @Coefs    damage_min,damage_max,damage_a1,damage_a2;
   @Coefs    damage_limit_factor;
   @Tags     use_norton_flow;
   @Coefs    K, n;
   @Coefs    a, beta;
   @Coefs    R0, H, Q, b;
   @Coefs    C, D;
   @tVarInt  alp;
   @sVarInt  epcum;
   @tVarAux  epi, X;
   @sVarAux  R;
   @sVarAux  I1,J;
   @Tags     compute_failure;
   @Coefs    R1;
   @sVarAux  failure;

   //Prototypes des fonctions
   double compute_md(TENSOR2&);
   double compute_rd(TENSOR2&);
   double compute_f2d(SCALAR_VINT&,const int&);
   double compute_Un(SCALAR_VAUX&,SCALAR_VAUX&);
   double compute_Ut(SCALAR_VAUX&,SCALAR_VAUX&);
   double compute_Ad0(const int&,const int&);
   TENSOR4 compute_damage_tensor(SCALAR_VAUX&,SCALAR_VAUX&);
   TENSOR4 compute_Ci(const int&,const int&);
   TENSOR4 compute_Cd();
   TENSOR2 compute_rot(const double&,const double&,const double&); };
```

A.3 @Derivative

```
@Derivative {
   TENSOR2 rot;
   for (int ii=0;ii<slip_system.size();ii++) {
      rot = compute_rot(slip_system[ii],0.,0.);
      TENSOR2 eed_loc = rotate_tensor(eed,rot);
      md[ii] = compute_md(eed_loc);
      rd[ii] = compute_rd(eed_loc);
   }
   TENSOR4 Cd = compute_Cd();

   //Lois d'Etats
   sig = Cd*eed;
   X = (2./3.)*C*alp;
   R = R0+H*epcum+Q*(1.-exp(-b*epcum));
```

```
   //Fonction de charge
   TENSOR2 sigeff = deviator(sig-X);
   J = sqrt(1.5*(sigeff|sigeff));
   TENSOR2 Id2 = TENSOR2::unity(tsz());
   I1 = trace(sig-X);
   double fa = pow(J,a)-beta*pow(R,a)+(beta-1.)*I1*pow(R,a-1.);
   double f = sign(fa)*pow(sign(fa)*fa,1./a); //pb si abs()

   //Critere de plasticite
   if (f>0.) {
      double df_dfa = pow(fa,1./a-1.)/a;
      TENSOR2 dfa_dsig = 1.5*a*sigeff/J*pow(J,a-1.)+(beta-1.)*Id2*pow(R,a-1.);
      double dfa_dR = -beta*a*pow(R,a-1.)+(beta-1.)*(a-1.)*I1*pow(R,a-2.);
      TENSOR2 norm = df_dfa*dfa_dsig;
      double df_dR = df_dfa*dfa_dR;
      double dlbd;
      if (use_norton_flow) {
         dlbd = pow(f/K,n);
      } else {
         double M1 = norm|(2./3.*C*norm-D*X);
         double M2 = df_dR*df_dR*(H+Q*b*exp(-b*epcum));
         double M = M1+M2;
         dlbd = (norm|(Cd*deto))/(M+(norm|(Cd*norm)));
      }
      if (dlbd<0.) dlbd = 0.;
      depcum = -dlbd*df_dR;
      deed = deto-dlbd*norm;
      if (C>0.) {
          dalp = -dlbd*(1.5*D/C*X-norm);
      } else {
          dalp = 0.;
      }
   } else {
       depcum = 0.;
       deed = deto;
       dalp = 0.;
   }
```

```
   //Evolution de l'endommagement
   double Ad;
   double Ad0;
   double damage_saturation = damage_a2;
   double g;
   TENSOR2 dAd_deed;
   double dAd_dald;
   double dAd0_dald;
   double dlbd;
   for (int ii=0;ii<slip_system.size();ii++) {
      Ad = 0.5*eed|(compute_Ci(ii,1)*eed);
      Ad0 = compute_Ad0(ii,0);
      g = Ad-Ad0;
      if (use_damage && (g>0.) && (ald[ii]<damage_saturation) && (Ad!=0.)) {
         dAd_deed = compute_Ci(ii,1)*eed;
         dAd_dald = 0.5*eed|(compute_Ci(ii,2)*eed);
         dAd0_dald = compute_Ad0(ii,1);
         dlbd = (dAd_deed|deed)/(dAd_dald-dAd0_dald);
         dald[ii] = -dlbd;
         if (dald[ii]<0.) dald[ii] = 0.;
      } else {
         dald[ii] = 0.;
      }
   }
}
```

A.4 @StrainPart

```
@StrainPart {
   TENSOR2 rot;
   for (int ii=0;ii<slip_system.size();ii++) {
      rot = compute_rot(slip_system[ii],0.,0.);
      TENSOR2 eed_loc = rotate_tensor(eed,rot);
      md[ii] = compute_md(eed_loc);
      rd[ii] = compute_rd(eed_loc);
   }
   TENSOR4 Cd = compute_Cd();
   epi = eto-eed;

   //Lois d'Etats
   sig = Cd*eed;
   X = (2./3.)*C*alp;
   R = R1;

   //Critere de rupture
   if (compute_failure) {
      TENSOR2 sigeff_r = deviator(sig);
      double J_r = sqrt(1.5*(sigeff_r|sigeff_r));
      TENSOR2 Id2 = TENSOR2::unity(tsz());
      double I1_r = Id2|sig;
      double fa_r = pow(J_r,a)-beta*pow(R1,a)+(beta-1.)*I1_r*pow(R1,a-1.);
      double f_r = sign(fa_r)*pow(sign(fa_r)*fa_r,1./a); //pb si abs()
      failure = 1.0+f_r;
      if (failure<0.) failure = 0.;
   } else {
      failure = 0.;
   }
   //Matrice tangente
   if (m_flags&CALC_TG_MATRIX) m_tg_matrix = Cd;
}
```

Annexe B

Fichier matériau

B.1 Données Z-mat

```
***behavior high_hydrostatic_sensitivity
 **elasticity orthotropic
   y1111 3764.08277439;
   y2222 3764.08277439;
   y3333 3442.78245517;
   y1122 1841.00585132;
   y2233 1871.0223348;
   y3311 1871.0223348;
   y1212 961.538461538;
   y2323 452.278492293;
   y3131 452.278492293;
```

```
 **damage_cn orthotropic
   y1111 0.
   y2222 0.
   y3333 430.
   y1122 0.
   y2233 0.
   y3311 0.
   y1212 0.
   y2323 0.
   y3131 0.
 **damage_ct orthotropic
   y1111 0.
   y2222 0.
   y3333 0.
   y1122 0.
   y2233 0.
   y3311 0.
   y1212 0.
   y2323 75.
   y3131 75.
 **damage_cnt orthotropic
   y1111 0.
   y2222 0.
   y3333 0.
   y1122 0.
   y2233 0.
   y3311 0.
   y1212 0.
   y2323 0.
   y3131 0.
 **damage_system_number 6
```

```
 **use_damage
%**use_norton
 **compute_failure
```

```
 **model_coef
   damage_ratio 1.
   damage_min 0.
   damage_max 1.
   damage_a1 0.02
   damage_a2 10.
   damage_limit_factor 1.e3
%  K
%  n
   a 8.49
   beta 1.91
   R0 12.42
%  H
%  Q
%  b
   C 4005.
   D 22029.
%  R1
***return
```

B.2 Interprétation des cartes et cœfficients

Objet	Coefficient	Nature
`**elasticity`	$\underset{\sim}{C}_0$	Tenseur d'ordre 4
`**damage_cn`	$\underset{\sim}{C}_N$	Tenseur d'ordre 4
`**damage_ct`	$\underset{\sim}{C}_T$	Tenseur d'ordre 4
`**damage_cnt`	$\underset{\sim}{C}_{NT}$	Tenseur d'ordre 4
`**damage_system_number`		Scalaire
`**use_damage`		Option
`**use_norton`		Option
`**compute_failure`		Option
`**model_coef`		Bloc de données
`damage_ratio`		Scalaire (`**use_damage`)
`damage_min`		Scalaire (`**use_damage`)
`damage_max`		Scalaire (`**use_damage`)
`damage_a1`		Scalaire (`**use_damage`)
`damage_a2`		Scalaire (`**use_damage`)
`damage_limit_factor`		Scalaire (`**use_damage`)
`K`	K	Scalaire (`**use_norton`)
`n`	n	Scalaire (`**use_norton`)
`a`	a	Scalaire (seuil plastique)
`beta`	β	Scalaire (seuil plastique)
`R0`	R_0	Scalaire (seuil plastique)
`H`	H	Scalaire (écrouissage isotrope)
`Q`	Q	Scalaire (écrouissage isotrope)
`b`	b	Scalaire (écrouissage isotrope)
`C`	C	Scalaire (écrouissage cinématique)
`D`	D	Scalaire (écrouissage cinématique)
`R1`	R_1	Scalaire (`**compute_failure`)

© Joannès

TAB. B.1 – `***behavior high_hydrostatic_sensitivity`.

Bibliographie

[ADAMS et MALLICK, 1992] ADAMS, R. D. et MALLICK, V. (1992). A method for the stress analysis of lap joints. *The Journal of Adhesion*, 38(3–4):199–217.

[AKIN, 2004] AKIN, J. E. (2004). *Finite element analysis with Error Estimation*. Pre-publication draft.

[ARCAN, 1978] ARCAN, M. (1978). A method to produce uniform plane-stress states with applications to fiber-reinforced materials. *Experimental Mechanics*, 18(4):141–146.

[ARCAN et WEISSBERG, 1988] ARCAN, M. et WEISSBERG, V. (1988). A Uniform Pure Shear Testing Specimen for Adhesive Characterization. Rapport technique STP 981, American Society for Testing and Materials.

[AUFREY, 2005] AUFREY, M. (2005). *Caractérisation physico-chimique des interphases époxyde-diamine oxyde ou hydroxyde métallique, et de leurs constituants*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France.

[BABUŠKA et SZABÓ, 1991] BABUŠKA, I. et SZABÓ, B. A. (1991). *Finite element analysis*. John Wiley and Sons.

[BAGHDACHI, 1997] BAGHDACHI, J. A. (1997). Fundamentals of adhesion. *The Journal of Coatings Technology*, 69(870):85–91.

[BARDONNET, 1992] BARDONNET, P. (1992). Traité des Matériaux Métalliques. Résines époxydes (EP) - Composants et propriétés. Rapport technique A3465, Techniques de l'Ingénieur.

[BARQUINS, 2004] BARQUINS, M. (2004). Le collage : un moyen ancestral, moderne et durable pour assembler. `http://culturesciences.chimie.ens.fr`.

[BENTADJINE, 2000] BENTADJINE, S. (2000). *Mécanismes de formation et propriétés physico-chimiques et mécaniques des interphases époxy-diamine/métal*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France.

[BESSON *et al.*, 2001] BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J. L. et FOREST, S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès.

[BIGWOOD et CROCOMBE, 1990] BIGWOOD, D. A. et CROCOMBE, A. D. (1990). Non-linear adhesive bonded joint design analysis. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 10(1): 31–41.

[BIKERMANN, 1961] BIKERMANN, J. J. (1961). *The science of adhesive joints*. Academic Press.

[BISHOPP, 1997] BISHOPP, J. A. (1997). The history of Redux® and the Redux bonding process. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 17(4):287–301.

[BONNET, 2005] BONNET, B. (2005). *Comportement au choc de matériaux composites pour applications automobiles*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, ParisTech, France.

[BOUCHET et ROCHE, 2002] BOUCHET, J. et ROCHE, A. A. (2002). The formation of epoxy/metal interphases : mechanisms and their role in practical adhesion. *The Journal of Adhesion*, 78(9):799–830.

[BOUCHET *et al.*, 1999] BOUCHET, J., ROCHE, A. A. et HAMELIN, P. (1999). Internal stresses, Young's modulus and practical adhesion of organic coatings applied onto 5754 aluminium alloy. *Thin Solid Films*, 355–356:270–276.

[BRISON, 1982] BRISON, H. F. (1982). The viscoelastic constitutive modelling of adhesives. *Composites*, 13(4):377–382.

[BUNGE, 1982] BUNGE, H. J. (1982). *Texture analysis in materials science*. Butterworth.

[CARTER et KIBLER, 1978] CARTER, H. G. et KIBLER, K. G. (1978). Langmuir-type model for anomalus moisture diffusion in composite resins. *Journal of Composite Materials*, 12(2):118–131.

[CATELLIN, 2003] CATELLIN, S. (2003). Sérendipité. *Société Française pour l'Histoire des Sciences de l'Homme*, 25:27–32.

[CHABOCHE *et al.*, 2001] CHABOCHE, J. L., FEYEL, F. et MONERIE, Y. (2001). Interface Debonding Models : A viscous regularization with a limited rate dependency. *International Journal of Solids and Structures*, 38(18):3127–3160.

[CHEVALIER, 2002] CHEVALIER, Y. (2002). Essais dynamiques sur composites. Caractérisation aux basses fréquences. Rapport technique AM5400, Techniques de l'Ingénieur.

[CHEVALIER, 2003] CHEVALIER, Y. (2003). Essais dynamiques sur composites. Caractérisation aux hautes fréquences. Rapport technique AM5401, Techniques de l'Ingénieur.

[COGNARD *et al.*, 2005] COGNARD, J. Y., DAVIES, P. et SOHIER, L. (2005). Development of an improved adhesive test method for composite assembly design. *Composites Science and Technology*, 65(3–4):359–268.

[COGNARD, 2003a] COGNARD, P. (2003a). Traité de Génie Mécanique. Collage des Métaux - Applications. Rapport technique BM7621, Techniques de l'Ingénieur.

[COGNARD, 2003b] COGNARD, P. (2003b). Traité de Génie Mécanique. Collage des Métaux - Généralités, Caractéristiques. Rapport technique BM7620, Techniques de l'Ingénieur.

[COIRIER, 2001] COIRIER, J. (2001). *Mécanique des milieux continus : Cours et exercices corrigés*. Dunod.

[COUVRAT, 1992] COUVRAT, P. (1992). *Le collage Structural Moderne (Théorie et pratique)*. Tec & Doc - Lavoisier.

[CUGNON, 2000] CUGNON, F. (2000). *Automatisation des calculs éléments finis dans le cadre de la méthode-p*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique.

[DEAN et CROCKER, 2001] DEAN, G. D. et CROCKER, L. (2001). The Use of Finite Element Methods for Design with Adhesives. Rapport technique Measurement Good Practice Guide (48), National Physical Laboratory, UK.

[DEAN *et al.*, 1996] DEAN, G. D., DUNCAN, B. C., ADAMS, R., THOMAS, R. et VAUGHN, L. (1996). Comparison of Bulk and Joint Specimen Tests for Determining the Shear Properties of Adhesives. Rapport technique CMMT(B)51, National Physical Laboratory, UK.

[DERYAGIN *et al.*, 1957] DERYAGIN, B. V., KROTOVA, N. A., KARASSEV, V. V., KIRILLOVA, Y. M. et ALEINIKOVA, I. N. (1957). *In Proceedings of the Second International Congress on Surface Activity*.

[DHATT *et al.*, 2005] DHATT, G., TOUZOT, G. et LEFRANÇOIS, E. (2005). *Méthode des éléments finis*. Hermès - Lavoisier.

[DILLINGHAM et BOERIO, 1987] DILLINGHAM, R. G. et BOERIO, F. G. (1987). Interphase composition in aluminum/epoxy adhesive joints. *The Journal of Adhesion*, 24(2–4):315–335.

[DOLEV et ISHAI, 1981] DOLEV, G. et ISHAI, O. (1981). Mechanical Characterization of Adhesive Layer in-situ and as Bulk Material. *The Journal of Adhesion*, 12(4):283–294.

[DRUCKER et PRAGER, 1952] DRUCKER, D. C. et PRAGER, W. (1952). Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2):157–165.

[DUNCAN et DEAN, 2003] DUNCAN, B. et DEAN, G. (2003). Measurements and models for design with modern adhesives. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 23(2):141–149.

[DUNDURS, 1969] DUNDURS, J. (1969). Discussion of edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *Journal of Applied Mechanics*, 36(3):650–652.

[DÜSTER, 2001] DÜSTER, A. (2001). *High order finite elements for three dimensional, thin-walled nonlinear continua*. Thèse de doctorat, Technische Universität München, Germany.

[ESTEVES, 1995] ESTEVES, J. L. (1995). *Joint design : programme d'aide à la conception des assemblages collés utilisant les élèments finis mixtes d'interface*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, Dijon, France.

[FAYS, 2003] FAYS, S. (2003). Adhesive Bonding Technology in the Automotive Industry. *Adhesion and Interface*, 4(2):37–48.

[FRANÇOIS *et al.*, 1991] FRANÇOIS, D., PINEAU, A. et ZAOUI, A. (1991). *Comportement mécanique des matériaux. Volume 1 : élasticité et élastoplasticité*. Hermès.

[GERMAIN, 1973] GERMAIN, P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson.

[GILIBERT et RIGOLOT, 1979] GILIBERT, Y. et RIGOLOT, Y. (1979). Analyse asymptotique des assemblages à double recouvrement sollicité en cisaillement par traction. *Mécanique des Solides*, 288:287–290.

[GOLAND et REISSNER, 1944] GOLAND, M. et REISSNER, E. (1944). The stresses in cemented joints. *Journal of Applied Mechanics*, 11(1):17–27.

[GOOD, 1976] GOOD, R. J. (1976). On the Definition of Adhesion. *The Journal of Adhesion*, 8(1):1–9.

[GREIVELDINGER *et al.*, 2000] GREIVELDINGER, M., JACQUET, D., VERCHERE, D. et SHANAHAN, M. E. R. (2000). Collage de substrats huilés : Devenir et influence de l'huile sur la formation d'une interphase. *Annales de chimie*, 25(3):211–224.

[GUI et BABUŠKA, 1986] GUI, W. et BABUŠKA, I. (1986). The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension - Part I : The error analysis of the p-version. *Numerische Mathematik*, 49:577–612.

[GURSON, 1977] GURSON, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void growth : Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 99(1):2–15.

[HAHN, 1983] HAHN, H. T. (1983). Residual stresses in polymer matrix composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 10(4):266–278.

[HAHN, 1984] HAHN, H. T. (1984). Residual Stress in the Interfacial Bond Zone of Curing Adhesives by a Sensitive Strain Measurement Technique. *The Journal of Adhesion*, 17(1):21–32.

[HALARY *et al.*, 1989] HALARY, J. L., CUKIERMAN, S. et MONNERIE, L. (1989). Relations entre structure chimique et propriétés mécaniques dans les réseaux époxydes. *Bulletin de la Societé Chimique de Belgique*, 98(9–10):623–634.

[HALIOUI et LIEURADE, 1991] HALIOUI, M. et LIEURADE, H. P. (1991). Les joints collés à simple recouvrement : les facteurs du comportement mécanique. *Matériaux et Techniques*, 79(3–4):17–28.

[HART-SMITH, 1973] HART-SMITH, L. J. (1973). Adhesive-bonded single-lap joints. Rapport technique CR-112236, NASA.

[JEANDRAU, 1993] JEANDRAU, J. P. (1993). *Technologie du collage structural pour les applications en mécanique*. Publications CETIM.

[JEGGY, 1992] JEGGY, T. (1992). CETIM-CADIAC calcule vos collages. Rapport technique 129, CETIM Informations.

[JOANNÈS *et al.*, 2006] JOANNÈS, S., MARIO, O., GANTCHENKO, V., RENARD, J. et SHANAHAN, M. E. R. (2006). Influence de la microstructure sur les effets d'épaisseur dans les joints collés. *Revue des composites et des matériaux avancés*, 16(3):363–383.

[KINLOCH, 1987] KINLOCH, A. J. (1987). *Adhesion and Adhesives*. Chapman and Hall.

[KNOLLMAN et HARTOG, 1982] KNOLLMAN, G. C. et HARTOG, J. J. (1982). Shear Modulus Gradients in Adhesive Interfaces as Determined by Means of Ultrasonic Waves. *Journal of Applied Physics*, 53(3):1516–1524.

[KOCHAN, 1996] KOCHAN, A. (1996). Lotus : aluminium extrusions and adhesives. *Assembly Automation*, 16(4):19–21.

[LAKE et THOMAS, 1967] LAKE, G. J. et THOMAS, A. G. (1967). The Strength of Highly Elastic Materials. *In Proceedings of the Royal Society of London*.

[LEGUILLON et ABDELMOULA, 2000] LEGUILLON, D. et ABDELMOULA, R. (2000). Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint. *International Journal of Solids and Structures*, 37(19):2651–2672.

[LEGUILLON et SANCHEZ-PALANCIA, 1987] LEGUILLON, D. et SANCHEZ-PALANCIA, E. (1987). *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. Masson.

[LEMAITRE et CHABOCHE, 1985] LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.

[LETERRIER *et al.*, 2001] LETERRIER, Y., WYSER, Y. et MANSON, J. (2001). Internal Stresses and Adhesion of Thin Silicon Oxide Coatings on Poly(ethylene terephthalate). *Journal of Adhesion Science Technology*, 15(7):841–865.

[LEVENBERG, 1944] LEVENBERG, K. (1944). A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2:164–168.

[LILLEHEDEN, 1994] LILLEHEDEN, L. (1994). Mechanical properties of adhesives in situ and in bulk. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 14(1):31–37.

[MARIO, 2007] MARIO, O. (2007). *Etude du vieillissement des assemblages structuraux acier/aluminium : influence de l'environnement sur le dimensionnement*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, ParisTech, France.

[MARIO *et al.*, 2006] MARIO, O., JOANNÈS, S., RENARD, J. et GANTCHENKO, V. (2006). Influence de la microstructure sur les propriétés mécaniques des joints collés. *In Conférence Matériaux 2006*.

[MARQUARDT, 1963] MARQUARDT, D. (1963). An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11(2):431–441.

[MC BAIN et HOPKINS, 1925] MC BAIN, J. W. et HOPKINS, D. G. (1925). Adhesives and adhesive action. *Journal of Physical Chemistry*, 29(2):188–204.

[MULVILLE et VAISHNAV, 1975] MULVILLE, D. R. et VAISHNAV, R. (1975). Interfacial Crack Propagation. *The Journal of Adhesion*, 7(3):215–233.

[NAUDIN et CLOZZA, 1987] NAUDIN, C. A. et CLOZZA, C. (1987). Traité - Charges. Rapport technique A3220, Techniques de l'Ingénieur.

[NEEDLEMAN, 1987] NEEDLEMAN, A. (1987). A continuum model for void crack nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54(3):525–531.

[NGUYEN, 2004] NGUYEN, V. T. (2004). *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, ParisTech, France.

[NIGRO et ISHIDA, 1989] NIGRO, J. et ISHIDA, H. (1989). Cure behavior of very thin epoxy resin films on steel. *Journal of Applied Polymer Science*, 38(12):2191–2204.

[OPLINGER, 1991] OPLINGER, D. W. (1991). A layered beam theory for single lap joints. Rapport technique MTL TR 91-23, U. S. Army Materials Technolgy Laboratory.

[ORSINI et SCHMIT, 1993] ORSINI, H. et SCHMIT, F. (1993). Influence of residual thermal stresses on the fracture behavior of hybrid bonded joints. *The Journal of Adhesion*, 43(1):55–68.

[PACKHAM, 2005] PACKHAM, D. E. (2005). *Hanbook of Adhesion*. John Wiley and Sons.

[PÉCHERAUX, 1990] PÉCHERAUX, V. (1990). *Influence de la nature de la surface métallique sur la formation d'une interphase dans un système métal-époxyde*. Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace, France.

[PEANO, 1975] PEANO, A. G. (1975). *Hierarchies of conforming finite elements*. Thèse de doctorat, Washington University, St. Louis, USA.

[PERETZ, 1978] PERETZ, D. (1978). Shear stress-strain characteristics of adhesive layers. *The Journal of Adhesion*, 9(2):115–122.

[PETREQUIN *et al.*, 1997] PETREQUIN, P., DELATTRE, N. et VAN BOS, M. (1997). *Colles d'emmanchement d'outils en silex du niveau VIII*, pages 397–399. Les sites littoraux néolithiques de Clairvaux-les-Lacs et de Chalain (Jura). Maison des Sciences de l'Homme.

[PRAGER, 1955] PRAGER, W. (1955). The theory of plasticity : a survey of recent achievements. *In Proceedings of the Institution for Mechanical Engineers*.

[REVEST, 2009] REVEST, N. (2009). *Titre provisoire : Comportement en fatigue de structures épaisses en matériaux composites*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, ParisTech, France. Thèse en cours.

[ROCHE *et al.*, 2002] ROCHE, A. A., BOUCHET, J. et AUFREY, M. (2002). Influence des propriétés physico-chimiques et mécaniques des interfaces époxy/métal sur l'adhérence. *In Conférence Matériaux 2002*.

[ROCHE et GUILLEMENET, 1999] ROCHE, A. A. et GUILLEMENET, J. (1999). Mechanical and chemical properties of organic coatings applied to metallic sheet substrates. *The Journal of Adhesion*, 342(1–2):52–60.

[SAFAVI-ARDEBILI *et al.*, 1997] SAFAVI-ARDEBILI, V., SINCLAIR, A. N. et SPELT, J. K. (1997). Experimental Investigation of the Interphase in an Epoxy-Aluminium System. *The Journal of Adhesion*, 62(1–4):93–111.

[SALENÇON, 2005] SALENÇON, J. (2005). *De l'Elasto-plasticité au Calcul de la rupture*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique.

[SHANAHAN, 1991] SHANAHAN, M. E. R. (1991). Adhesion and wetting : similarities and differences (physical phenomena). *Rubber World*, 205(1):28–36.

[SHANAHAN et MICHEL, 1991] SHANAHAN, M. E. R. et MICHEL, F. (1991). Physical adhesion of rubber to glass : cross-link density effects near equilibrium. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 11(3):170–176.

[TALREJA, 1985] TALREJA, R. (1985). A continuum mechanics characterization of damage in composite materials. *In Proceedings of the Royal Society of London*.

[TAYLOR et QUINNEY, 1931] TAYLOR, G. I. et QUINNEY, H. (1931). The plastic distortion of metals. *In Philosophical Transactions of the Royal Society*.

[THIONNET et MARTIN, 2004] THIONNET, A. et MARTIN, C. (2004). *Mécanique et comportement des milieux continus, Tome 1 : Concepts Généraux*. Ellipses.

[THIONNET *et al.*, 2003] THIONNET, A., MARTIN, C. et BARRADAS, S. (2003). *Mécanique et comportement des milieux continus, Tome 2 : Applications et Théorie des Invariants*. Ellipses.

[THIONNET et RENARD, 1993] THIONNET, A. et RENARD, J. (1993). Meso-macro approach to transverse cracking in laminated composites using Talreja's model. *Composites Engineering*, 3(9):851–871.

[THOULESS, 1994] THOULESS, M. D. (1994). Residual Stresses in Thin Films. *In Proceedings of the 4th. International Conference on Residual Stresses*.

[TIMOSHENKO, 1936] TIMOSHENKO, S. (1936). *Théorie de l'élasticité*. Béranger éditeur.

[TRUESDELL et NOLL, 1965] TRUESDELL, C. et NOLL, W. (1965). *The non-linear field theories of mechanics, Handbuch der Physik*. Springer Verlag.

[TRUESDELL et TOUPIN, 1960] TRUESDELL, C. et TOUPIN, R. A. (1960). *The classical field theories, Handbuch der Physik*. Springer Verlag.

[TVERGAARD et HUTCHINSON, 1992] TVERGAARD, V. et HUTCHINSON, J. W. (1992). The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6):1377–1397.

[VOLKERSEN, 1938] VOLKERSEN, O. (1938). Die Niektraftverteilung in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschritten. *Luftfahrtforschung*, 15(1):41–47.

[VON PREISSING, 1989] VON PREISSING, F. J. (1989). Applicability of the classical curvature-stress relation for thin films on plate substrates. *Journal of Applied Physics*, 66(9):4262–4268.

[VOYUTSKII et MARGOLINA, 1957] VOYUTSKII, S. S. et MARGOLINA, Y. (1957). The nature of self-adhesion (tack) of polymers. *Rubber Chemistry and Technology*, 30:531–543.

[WATERMAN et ASHBY, 1991] WATERMAN, N. A. et ASHBY, M. F. (1991). *Materials selector*. Elsevier Applied Science.

[WINEMAN et PIPKIN, 1964] WINEMAN, A. S. et PIPKIN, A. C. (1964). Material symmetry restrictions on constitutive equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(3): 184–214.

[ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 2005] ZIENKIEWICZ, O. C. et TAYLOR, R. L. (2005). *The Finite Element Method, for solid and structural mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 6ème édition.

[ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005a] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. et NITHIARASU, P. (2005a). *The Finite Element Method, for fluid dynamics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 6ème édition.

[ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005b] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. et ZHU, J. Z. (2005b). *The Finite Element Method, its basis & fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 6ème édition.

Résumé

Ces dernières années, le collage structural est devenu une technique d'assemblage particulièrement prisée par l'industrie des transports. Son développement est néanmoins ralenti par des restrictions sévères et des règles de dimensionnement qui demeurent quelque peu empiriques. Aujourd'hui encore, les méthodes de caractérisation et les outils basés sur la méthode des éléments finis ne sont pas toujours appropriés aux applications industrielles.

Ce travail de thèse a consisté à développer une démarche expérimentale et numérique permettant d'envisager un outil d'aide au dimensionnement des collages structuraux. Pour caractériser mécaniquement l'adhésif au sein d'un assemblage, un dispositif expérimental dérivé du système de M. ARCAN est employé. Celui-ci permet de faire varier la direction de chargement tout en conservant un état de contrainte relativement uniforme au sein du joint. S'appuyant sur les observations expérimentales, un modèle de comportement non linéaire basé sur un critère de Drucker-Prager généralisé est alors proposé. Un éclairage particulier sur la morphologie de la microstructure apporte des éléments concernant les mécanismes d'endommagement.

Afin de surmonter les contraintes informatiques industrielles (raffinement du maillage, temps CPU, etc.), un outil numérique a été développé. Celui-ci est basé sur la version-p de la méthode des éléments finis qui permet de conserver des maillages « industriels » avec une description raisonnable des joints collés. Cet outil est apparu assez performant pour détecter les effets de bord sur des maillages grossiers.

Ce travail constitue un premier pas vers une prédiction simplifiée de la tenue mécanique des collages structuraux.

Mots-clés : *collage structural, essais multi-axiaux, endommagement des charges, modèle de Drucker-Prager généralisé, MEF version-p, formulation hiérarchique.*

Abstract

In recent years, structural adhesive bonding has become a popular joining method for the transportation industry. Its development is nevertheless hindered by several limitations and by design rules that are still somewhat empirical. Even today, characterisation methods and finite element tools are not always appropriate for industrial applications.

This thesis work consisted in developing an experimental and numerical approach to bring help in the design of structural adhesive bonds. For the mechanical characterisation of the adhesive within structural assemblies, a modified experimental M. ARCAN set up is used. This set up allows varying the loading direction while preserving a relatively uniform state of stress inside the joint. On the basis of experimental observations, a non-linear phenomenological material model based on a generalized Drucker-Prager criterion is proposed. A specific focus on the microstructure morphology brings some information concerning damage mechanisms.

To overcome industrial calculation constraints (mesh refinement, CPU time, etc.), an efficient computer tool has also been developed. It is based on the p-version finite element method which allows keeping « industrial » mesh with a reasonable description of adhesive joints. This computer tool has shown to be reliable and successful to detect edge effects on coarse meshes.

This work is a first step to facilitate predicting the fracture of structural adhesive joints.

Keywords : *structural adhesive bonding, multi-axial tests, fillers damage evolution, generalized Drucker-Prager model, p-version FEM, hierarchic formulation.*