



HAL
open science

Etude des stables dans les graphes sans étoile

Najiba Sbihi

► **To cite this version:**

Najiba Sbihi. Etude des stables dans les graphes sans étoile. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1978. Français. NNT: . tel-00288171

HAL Id: tel-00288171

<https://theses.hal.science/tel-00288171>

Submitted on 16 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Mathématiques Appliquées

par

Najiba SBIHI



**ETUDE DES STABLES
DANS LES GRAPHEES SANS ETOILE**



Thèse soutenue le 30 juin 1978 devant la Commission d'Examen :

Président : M. SAKAROVITCH

Examineurs : C. BENZAKEN

P. JULLIEN

J.P. UHRY

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIER Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUFET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVITCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERTEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président

Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et électrometallurgie
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electrostatique
	FOULARD Claude	Automatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	ROUXEL Roland	Automatique
----	---------------	-------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNÝ François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme.	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan	Automatique
----	-------------	-------------

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Je remercie vivement Monsieur Michel SAKAROVITCH de m'avoir accueillie dans son laboratoire et d'avoir accepté de diriger cette thèse.

Je tiens également à remercier Messieurs Claude BENZAKEN et Pierre JULLIEN pour l'honneur qu'ils me font en participant au Jury.

Que Monsieur Jean Pierre UHRY trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour sa bienveillance, sa disponibilité et l'intérêt qu'il a porté à l'élaboration de ce travail.

Je suis particulièrement sensible à la chaleur et l'enthousiasme qui animent l'équipe de recherche opérationnelle et je tiens à exprimer à tous ses membres ma sincère sympathie.

Je remercie aussi Mademoiselle Geneviève BICAIS qui a effectué avec compétence et amabilité la frappe de cette thèse ainsi que les membres du service de reprographie pour l'excellente qualité de leur travail et leur précieuse collaboration.

Najiba SBIHI

TABLE DES MATIERES

	<i>Pages</i>
<i>INTRODUCTION</i> -----	1
 <i>CHAPITRE - I - SUR LES BITROIDES</i>	
§ 1 - <i>Préliminaire</i> -----	3
§ 2 - <i>Exemple de bitroïde</i> -----	4
§ 3 - <i>Quelques propriétés des bitroïdes</i> -----	7
§ 4 - <i>Bimatroïdes et stables d'un graphe</i> -----	10
 <i>CHAPITRE - II - QUELQUES PROPRIETES DES GRAPHS SANS ETOILE</i>	
§ 1 - <i>Stables de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile</i> -----	15
§ 2 - <i>Stables parfaits dans les graphes sans étoile</i> -----	17
§ 3 - <i>Propriété d'intersection</i> -----	22
§ 4 - <i>Quelques facettes du polytope associé aux stables d'un graphe sans étoile</i> -----	25
 <i>CHAPITRE - III - ALGORITHME DE RECHERCHE D'UN STABLE DE CARDINALITE MAXIMUM DANS UN GRAPHE SANS ETOILE</i>	
§ 1 - <i>Définitions et résultats préliminaires</i> -----	34
§ 2 - <i>Introduction des opérations de réduction</i> -----	37
§ 3 - <i>L'algorithme proposé</i> -----	45
§ 4 - <i>Exemple d'application de l'algorithme</i> -----	48
§ 5 - <i>Justification de l'algorithme</i> -----	52
§ 6 - <i>Complexité de l'algorithme</i> -----	93
§ 7 - <i>Description de l'algorithme de Minty</i> -----	94
 <i>CONCLUSION</i> -----	 97
 <i>BIBLIOGRAPHIE</i> -----	 98

INTRODUCTION

Parmi les problèmes NP complets que l'on connaît, figure le problème (P) de la recherche dans un graphe sur les sommets duquel est définie une fonction poids, d'un stable de poids maximum.

On peut cependant caractériser certaines classes de graphes dans lesquelles (P) est polynomial, par exemple les graphes triangulés [9], les graphes de comparabilité [9], les graphes série-parallèles [2] etc...

Une famille I d'indépendants est une famille de parties d'un ensemble fini E telle que toute partie d'un élément de I appartient aussi à I . Les éléments de $P(E)-I$ sont appelés des dépendants.

Le problème (P) est un problème de recherche d'un indépendant de poids maximum. Ce dernier problème est polynomial dans certaines familles d'indépendants satisfaisant la propriété suivante :

- L'adjonction d'un élément de E à un indépendant crée au plus deux dépendants minimaux.

Exemples : - indépendants d'un matroïde

- couplages d'un graphe

- indépendants de l'intersection de deux matroïdes.

Un bitroïde est une famille d'indépendants satisfaisant la propriété énoncée ci-dessus. Cette notion a été introduite par J.P. UHRV afin d'englober les trois exemples donnés ci-dessus de façon à donner un algorithme commun de résolution du problème (P) dans tous les bitroïdes.

Nous rappelons dans le chapitre I quelques résultats sur les bitroïdes et nous donnons une caractérisation des graphes dans lesquels les stables sont les indépendants de l'intersection d'un bimatroïde.

La classe de graphes dans lesquels les stables sont les indépendants d'un bitroïde est celle des graphes n'admettant pas de sous-graphe isomorphe à K_{13} (appelés graphes sans étoile). Cette classe contient les graphes adjoints.

Le chapitre II est consacré à l'étude de quelques propriétés des graphes sans étoile, en particulier nous donnons une caractérisation des graphes sans étoile admettant un stable parfait pour lesquels tout stable de cardinalité maximum est parfait et nous étudions quelques facettes du polytope associé aux stables d'un graphe sans étoile.

Enfin nous proposons dans le chapitre III un algorithme polynomial de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile qui est basé comme celui du couplage maximum [7], sur un théorème de chaînes alternées et qui nécessite deux opérations de réduction : l'une d'entre elles, analogue à celle des "blossom" d'Edmonds réduit le graphe par rapport à un cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq, l'autre réduit le graphe par rapport à une clique.

Cet algorithme est différent de celui de Minty [11] puisque celui-ci construit un graphe annexe dans lequel il applique l'algorithme du couplage maximum d'Edmonds.

CHAPITRE - I

SUR LES BITROIDES

I - PRELIMINAIRE

Définition 1

Soit E un ensemble fini ; une famille I d'indépendants (de support E) est un ensemble de parties de E tel que :

$$A \in I, B \subset A \Rightarrow B \in I$$

Le couple $\mathcal{G} = (E, I)$ est appelé un génoïde.

Les éléments maximaux de I sont appelés bases.

On désigne par dépendants les éléments de $\mathcal{P}(E) - I$ et par circuits les dépendants minimaux.

Exemple :

Soit E un ensemble fini ;

$(E, \mathcal{P}(E))$ est un génoïde dont E est la seule base et dont l'ensemble des circuits est vide.

Remarque 1 : Il est équivalent de définir un génoïde, connaissant son support, par ses indépendants, ses dépendants, ses bases ou ses circuits.

Définition 2

Soit \mathcal{C} l'ensemble des circuits d'un génoïde $\mathcal{G} = (E, I)$; on dit que \mathcal{G} est un matroïde si

$$\forall (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^2, \quad \forall a \in C_1 \cap C_2, \quad \forall b \in C_1 - C_2, \quad \exists C \in \mathcal{C} \quad \text{tel que}$$

$$b \in C \subset C_1 \cup C_2 - \{a\}$$

Théorème 1 [18]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un génoïde défini par l'ensemble \mathcal{C} de ses circuits, soit un matroïde est que :

$$\forall (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^2, \quad \forall a \in C_1 \cap C_2, \quad \exists C \in \mathcal{C} \quad \text{tel que } C \subset C_1 \cup C_2 - \{a\}$$

Remarque 2 : Une propriété caractéristique des matroïdes est que l'adjonction d'un élément du support à un indépendant crée au plus un circuit.

Définition 3 :

On appelle bitroïde un génoïde $\mathcal{G} = (E, I)$ tel que $\forall I \in I, \forall e \in E - I, I \cup \{e\}$ contient au plus deux circuits.

II - EXEMPLES DE BITROIDES

I - Indépendants d'un bimatroïde :

Définition 4 :

Soient $M_1 = (E, I_1)$ et $M_2 = (E, I_2)$ deux matroïdes ; le génoïde $\mathcal{G} = (E, I_1 \cap I_2)$ est appelé intersection des matroïdes M_1 et M_2 , ou encore bimatroïde.

Remarque 3 : Soit \mathcal{G} l'intersection de deux matroïdes $M_1 = (E, I_1)$ et $M_2 = (E, I_2)$. Un circuit de \mathcal{G} est un circuit de l'un ou moins de ces deux matroïdes. Par conséquent, l'adjonction d'un élément de E à un indépendant de \mathcal{G} crée au plus deux circuits de \mathcal{G} : \mathcal{G} est donc un bitroïde.

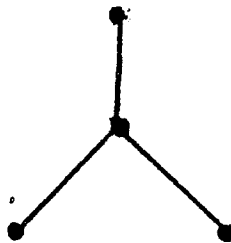
2 - Stables dans les graphes sans étoile

Définition 5

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté dont X représente l'ensemble des sommets, E celui des arêtes.

On appelle sous graphe de G construit sur le sous-ensemble S de X , le graphe $G_S = (S, E')$ où E' désigne l'ensemble des arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S . Si E' est vide, alors S est appelé un stable de G .

On appellera étoile ou encore K_{13} le graphe représenté ci-dessous :



Un graphe sera dit sans étoile s'il n'admet pas de sous-graphe isomorphe à une étoile.

Remarque 4 : Soient $G = (X, E)$ un graphe sans étoile et \mathcal{S} l'ensemble des stables de G . (X, \mathcal{S}) est un génoïde dont les circuits sont les paires de sommets adjacents. L'adjonction d'un sommet à un stable crée donc au plus deux circuits : (X, \mathcal{S}) est un bitroïde. Réciproquement, la classe de graphes dans lesquels les stables sont les indépendants d'un bitroïde est celle des graphes sans étoile.

Exemples de graphes sans étoile

(i) Graphe adjoint d'un graphe (line-graph)

Soit $G = (X, E)$ un graphe. Le graphe adjoint \bar{G} de G est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes. Beineke a donné une caractérisation de ces graphes par sous-graphes exclus dont le graphe K_{13} [1].

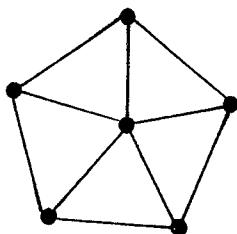
(ii) Graphe quasi-adjoint

Soit $G = (X, E)$ un graphe. G est dit quasi-adjoint si le voisinage de tout sommet peut être partitionné en deux cliques, ce qui est équivalent à dire que le complémentaire du voisinage de tout sommet (au sens des arêtes) est biparti. J.F. Maurras a défini un graphe presque biparti comme étant un graphe tel que le sous-graphe construit sur les sommets non voisins d'un sommet quelconque soit biparti. Un graphe quasi-adjoint est donc le complémentaire d'un graphe presque biparti.

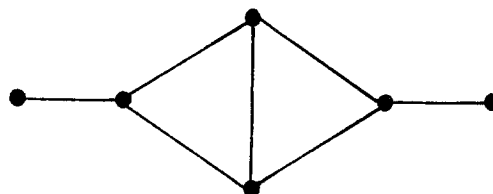
Il est évident qu'un graphe quasi-adjoint est un graphe sans étoile. La réciproque n'est pas vraie : en effet, le graphe sans étoile de la figure (a) n'est pas un graphe quasi-adjoint.

Par ailleurs, tout graphe adjoint est quasi-adjoint : en effet, soit $G = (X, E)$ un graphe dont le graphe adjoint est \bar{G} . Soient x un sommet de \bar{G} et (x_1, x_2) l'arête de G associée à x . Le voisinage de x est l'ensemble des sommets qui correspondent aux arêtes de G qui sont adjacentes à l'arête (x_1, x_2) : il peut donc être partitionné en deux cliques.

La classe des graphes quasi-adjoints contient strictement celle des graphes adjoints : le graphe quasi-adjoint de la figure (b) n'est pas un graphe adjoint puisqu'il fait partie des neuf configurations que Beineke exclut dans la caractérisation qu'il a donné des graphes adjoints.



- fig. (a) -



- fig. (b) -

3 - k-couplages d'un grapheDéfinition 6

Soient $G = (X, E)$ un graphe et k un entier. On appelle k -couplage de G un sous-ensemble \mathcal{C} de E tel que tout sommet de G soit adjacent à au plus k arêtes de \mathcal{C} .

Remarque 5 - Soient $G = (X, E)$ un graphe et I l'ensemble de ses k -couplages. Un circuit du génoïde $\mathcal{G} = (E, I)$ est un ensemble de $(k+1)$ arêtes adjacentes à un même sommet. Par conséquent, lorsqu'on ajoute une arête à un k -couplage on crée au plus deux circuits : \mathcal{G} est un bitroïde.

III - QUELQUES PROPRIETES DES BITROIDESThéorème 2 [18]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un génoïde dont \mathcal{C} représente l'ensemble des circuits, soit un bitroïde est que :

$$\forall (C', C'', C''') \in \mathcal{C}^3, \quad \forall a \in C' \cap C'' \cap C''', \quad \exists C \in \mathcal{C} \text{ tel que}$$

$$C \subset C' \cup C'' \cup C''' \quad \text{-(a)}$$

Définition 7

Soit $\mathcal{G} = (E, I)$ un génoïde dont \mathcal{B} représente l'ensemble des bases. On dit que \mathcal{G} satisfait la propriété de continue cardinalité de ses bases. Si

$$\forall \beta, \quad \min_{B \in \mathcal{B}} |B| \leq \beta \leq \max_{B \in \mathcal{B}} |B| \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } |B| = \beta$$

Théorème 3 [18]

Les bitroïdes satisfont la propriété de continue cardinalité des bases.

Démonstration :

Soit $\mathcal{G} = (E, I)$ un bitroïde dont \mathcal{B} représente l'ensemble des bases.
 Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $|B| < \max_{\tilde{B} \in \mathcal{B}} |\tilde{B}|$.

Montrons que : $\exists B' \in \mathcal{B}$ tel que $|B'| = |B| + 1$.

Soit $B' \in \mathcal{B}$ tel que $|B'| > |B|$ et tel que $|B' \cap B|$ soit maximum pour cette propriété.

Soit $a \in B - B'$.

1er cas : $B' \cup \{a\}$ contient un circuit unique, soit C ;

$$C \not\subseteq B \Rightarrow \exists b \in (B' - B) \cap C$$

$$I = B' \cup \{a\} - \{b\} \in I.$$

$$\text{De plus } |I| = |B'| \text{ et } |I \cap B| > |B' \cap B|$$

contradiction.

2ème cas : $B' \cup \{a\}$ contient deux circuits distincts C' et C'' ;

(i) si $\exists b \in C' \cap C'' \cap (B' - B)$ alors $I = B' \cup \{a\} - \{b\} \in I$,

$$|I| = |B'| \text{ et } |I \cap B| > |B' \cap B| -$$

contradiction.

(ii) Si $C' \cap C'' \cap (B' - B) = \emptyset$ alors

$$C' \not\subseteq B \Rightarrow \exists b' \in C' \cap (B' - B)$$

$$C'' \not\subseteq B \Rightarrow \exists b'' \in C'' \cap (B' - B)$$

$$I = B' \cup \{a\} - \{b', b''\} \in I$$

$$|I| = |B'| - 1$$

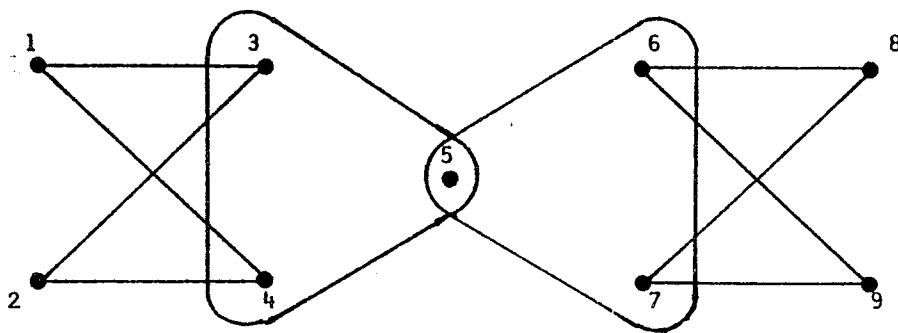
$$\left. \begin{array}{l} |I \cap B| > |B' \cap B| \end{array} \right\} \Rightarrow |I| = |B| \Rightarrow |B'| = |B| + 1$$

c.q.f.d.

Remarque 6 :

Plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire se ramènent au problème (\mathcal{P}) de la recherche dans un génoïde sur le support duquel est définie une fonction poids, d'un indépendant de poids maximum, par exemple le problème de la recherche d'un stable de poids maximum dans un graphe. Ce type de problème est bien résolu, i.e. à l'aide d'un algorithme polynomial en n (n désignant la cardinalité du support), dans le cas du couplage [7], de même que dans celui des indépendants d'un bimatroïde [14]. La notion de bitroïde a été introduite afin d'englober ces deux génoïdes et de donner un algorithme commun de résolution du problème (\mathcal{P}) dans tout génoïde satisfaisant la propriété bitroïdale, cet algorithme se basant sur une généralisation des notions de chaîne alternée et de sommet insaturé des algorithmes de couplages.

La notion de chaîne alternée peut facilement être généralisée en chaîne alternée dans les hypergraphes ([1], [19]) celle de sommet insaturé par une base \mathcal{B} désignerait un élément du support dont l'ajonction à \mathcal{B} crée exactement un circuit. Cependant cette dernière généralisation ne permet pas de conserver la propriété suivante du couplage : si B est une base de cardinalité non maximum, alors il existe un sommet insaturé. En effet, considérons le bitroïde dont les circuits sont les arêtes de l'hypergraphe représenté ci-dessous :



$B = \{3,4,6,7\}$ est une base de cardinalité non maximum, puisque $\{1,2,5,9,8\}$ est une base de cardinalité cinq. B ne satisfait pas la propriété énoncée ci-dessus.

Par conséquent, on ne peut avoir pour les bitroïdes un théorème analogue à celui des chaînes alternées par rapport à un couplage. D'où la nécessité de restreindre la définition donnée des bitroïdes.

Définition 8

Soit $\mathcal{G} = (E, I)$ un bitroïde dont \mathcal{C} représente l'ensemble des circuits. \mathcal{G} sera dit fort si :

$$\forall (C', C'', C''') \in \mathcal{C}^3 \text{ tel que } \exists a \in C' \cap C'' \cap C''' ;$$

on peut extraire deux circuits parmi C', C'' et C''' , disons C' et C'' tels que :

$$\forall b \in C' \Delta C'' \text{ (différence symétrique), } \exists C \in \mathcal{C} \text{ tel que}$$

$$b \in C \subset C' \cup C'' - \{a\}.$$

Remarque 7 :

Tous les bitroïdes définis dans le paragraphe II sont des bitroïdes forts, par contre le bitroïde de la remarque 6 n'est pas fort ; on peut en effet vérifier que les circuits $\{5,6,7\}$, $\{6,8\}$ et $\{6,9\}$ ne satisfont pas la propriété énoncée dans la définition 8. M. Sakarovitch conjecture que les bitroïdes forts satisfont la propriété du couplage énoncée dans la remarque 6, ce qui permet d'espérer trouver un algorithme polynomial de résolution du problème (\mathfrak{P}) dans les bitroïdes forts. C'est ainsi que s'est posé le problème de déterminer un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile.

IV - BIMATROIDES ET STABLES D'UN GRAPHE

L'objet de ce paragraphe est de caractériser les graphes dans lesquels les stables sont les indépendants d'un bimatroïde. Dans la suite de ce paragraphe on désignera par $G = (X, E)$ un graphe dont \mathcal{S} représente l'ensemble des stables.

Remarque 8 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{S} soit l'ensemble des indépendants de l'intersection de deux matroïdes $M_1 = (X, I_1)$ et $M_2 = (X, I_2)$ est que l'adjonction d'un sommet à un stable crée au plus deux circuits, ces deux circuits n'appartenant pas au même matroïde.

Ceci est une conséquence de la remarque 2.

Lemme 1 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que (X, \mathcal{F}) soit un matroïde est que les composantes connexes de G soient des cliques.

Démonstration :

C'est une conséquence de la remarque 2.

Lemme 2 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que (X, \mathcal{F}) soit un bi-matroïde est qu'il existe un recouvrement des arêtes de G par deux familles de cliques deux à deux disjointes (au sens des sommets).

Démonstration :

Ceci est une conséquence du lemme 1 et de la remarque 8.

Remarque 9 :

Démontrer que (X, \mathcal{F}) est un bimatroïde est équivalent à trouver une coloration des arêtes de G à l'aide de deux couleurs (une arête pouvant avoir ces deux couleurs), telle que si un sommet x est adjacent à deux sommets x_1 et x_2 non voisins, alors les arêtes (x, x_1) et (x, x_2) ont chacune une seule couleur, ces couleurs étant différentes.

Proposition 1 :

Si (X, \mathcal{F}) est un bimatroïde alors tout sommet appartient à au plus deux cliques maximales.

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde : supposons donc qu'il existe un sommet x appartenant à trois cliques maximales G_{K_1} , G_{K_2} et G_{K_3} .

(X, \mathcal{F}) étant un bimatroïde, il existe une coloration des arêtes de G qui satisfait la propriété énoncée dans la remarque 9. Les arêtes d'une clique maximale ont obligatoirement une couleur commune.

- G_{K_1} et G_{K_2} sont des cliques maximales $\Rightarrow \exists (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tel que $(x_1, x_2) \notin E \Rightarrow (x, x_1)$ et (x, x_2) ont des couleurs différentes, disons (x, x_1) est coloriée en vert, (x, x_2) en rouge. Donc toutes les arêtes de G_{K_1} sont coloriées en vert, celles de G_{K_2} en rouge.
- G_{K_1} et G_{K_3} sont des cliques maximales $\Rightarrow \exists (x'_1, x_3) \in K_1 \times K_3$ tel que $(x'_1, x_3) \notin E \Rightarrow (x, x'_1)$ et (x, x_3) ont des couleurs différentes. Or (x, x'_1) est coloriée en vert, donc (x, x_3) est coloriée en rouge de même que toutes les arêtes de G_{K_3} .
- G_{K_2} et G_{K_3} sont des cliques maximales $\Rightarrow \exists (x'_2, x'_3) \in K_2 \times K_3$ tel que $(x'_2, x'_3) \notin E$. Or les arêtes (x, x'_2) et (x, x'_3) sont toutes les deux coloriées en rouge. Contradiction.

Proposition 2 :

Si (X, \mathcal{S}) est un bimatroïde alors G ne contient pas de cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq.

Théorème 4

(X, \mathcal{S}) est un bimatroïde si et seulement si G ne contient pas de cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq et si tout sommet appartient à au plus deux cliques maximales.

Démonstration :

a) Condition nécessaire :

C'est une conséquence des propositions 1 et 2.

b) Condition suffisante :

On met en évidence une coloration des arêtes de G qui satisfait la propriété de la remarque 9 à l'aide de l'algorithme suivant.

Algorithme de coloration des arêtes

- (0) Soit $G = (X, E)$ un graphe vérifiant la condition énoncée dans le théorème ;
soit $x \in X$;
- (1) Si x appartient à une seule clique maximale G_K alors colorier les arêtes de G_K en vert, sinon soient G_{K_1} et G_{K_2} les deux cliques maximales de G qui contiennent x ; colorier les arêtes de G_{K_1} en vert, celles de G_{K_2} en rouge.
- (2) S'il existe une arête non coloriée alors aller en (3) sinon terminer :
on a trouvé une coloration des arêtes de G telle que si un sommet x est adjacent à deux sommets x_1 et x_2 non adjacents entre eux, alors les arêtes (x, x_1) et (x, x_2) ont des couleurs différentes, chacune de ses arêtes ayant une seule couleur.
- (3) S'il existe un sommet adjacent à une arête coloriée et à une arête non coloriée alors aller en (4) sinon aller en (5) ;
- (4) Soit x un sommet adjacent à une arête coloriée et à une arête non coloriée ;
soient G_{K_1} la clique maximale contenant x dont toutes les arêtes sont coloriées et G_{K_2} la clique maximale différente de G_{K_1} qui contient x ;
colorier les arêtes de G_{K_2} en vert (resp. rouge) si les arêtes de G_{K_1} sont coloriées en rouge (resp. vert) ; aller en (2) ;
- (5) Soit x un sommet qui n'est incident à aucune arête coloriée ; aller en (1) ;

La justification de cet algorithme est évidente puisque s'il existait un sommet x adjacent à deux arêtes n'appartenant pas à une même clique et ayant une couleur commune alors on mettrait en évidence un cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq.

Remarque 10 :

Soit $G = (X, E)$ un graphe tel que (X, \mathcal{J}) soit un bimatroïde. Tout sommet de G est donc adjacent à au plus deux cliques maximales de G , par conséquent G est un graphe sans étoile. G ne contient pas d'anticycle impair : en effet

si G contenait un anticycle impair G_A alors G ne contenant pas de cycle impair sans corde, on aurait $|A| \geq 7$ et par conséquent tout sommet de A appartiendrait à $\frac{|A|-1}{2}$ cliques maximales ce qui contredirait le fait que tout sommet de G appartient à au plus deux cliques maximales.

G est donc un graphe sans étoile ne contenant pas de cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq ni d'anticycle impair. C'est donc un graphe parfait car la conjecture des graphes parfaits est démontrée pour les graphes sans étoile [17].

Théorème 4 (bis)

Une condition nécessaire et suffisante pour que (X, \mathcal{S}) soit un bimatroïde est que G soit un graphe parfait dont tout sommet appartient à au plus deux cliques maximales.

CHAPITRE - II

QUELQUES PROPRIETES DES GRAPHS SANS ETOILE

I - STABLES DE CARDINALITE MAXIMUM DANS UN GRAPHE SANS ETOILE

Remarque 1

Soit $G = (X,E)$ un graphe sans étoile, S un stable de G .
Tout sommet de G est adjacent à au plus deux sommets de S .

Définition 1

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile et S un stable de G .

- un sommet de G sera dit insaturé (par S) s'il est adjacent à un seul sommet de S , saturé (par S) s'il est adjacent à deux sommets de S .
- On appellera chaîne alternée (par rapport à S) un sous graphe de G qui est une chaîne dont les sommets appartiennent alternativement à S et à $(X-S)$.
- Une chaîne augmentante (par rapport à S) est une chaîne alternée joignant deux sommets insaturés.

A une chaîne alternée par rapport à un couplage \mathcal{C} d'un graphe G , correspond dans le graphe adjoint \bar{G} de G , une chaîne alternée par rapport au stable constitué des sommets de \bar{G} associés aux arêtes de \mathcal{C} .

Remarque 2

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile et S un stable de G . S'il existe une chaîne augmentante G_X , par rapport à S , alors S n'est pas un stable de cardinalité maximum puisque $S' = S \Delta X'$ est un stable de G de cardinalité $|S|+1$.

Théorème 1

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile (tel que $|X|$ soit fini) et S un stable maximal de G ;
Une condition nécessaire et suffisante pour que S soit un stable de cardinalité maximum est qu'il n'existe pas de chaîne augmentante par rapport à S .

Démonstration :

a) Condition nécessaire

C'est une conséquence de la remarque 2.

b) Condition suffisante

Soient S un stable maximal de G vérifiant la condition énoncée dans le théorème et S' un stable de G de cardinalité maximum. Tout sommet $S \Delta S'$ est adjacent soit à un soit à deux sommets de $S \Delta S'$, car S et S' sont tous deux maximaux et car G est un graphe sans étoile.

Les composantes connexes de $G_{S \Delta S'}$, sont donc soit des cycles élémentaires pairs soit des chaînes élémentaires.

Par ailleurs, une composante connexe de $G_{S \Delta S'}$, qui est une chaîne élémentaire ne peut avoir un nombre impair de sommets car sinon ce serait une chaîne augmentante par rapport à S ou S' ce qui contredirait les hypothèses : S et S' ont donc même cardinalité.

c.q.f.d.

Corollaire :

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile et S un stable maximal de G .
Si le sous-graphe de G construit sur l'ensemble des sommets insaturés est une clique alors S est un stable de cardinalité maximum.

Remarque 3

M. Sakarovitch conjecture que les bitroïdes forts satisfont la propriété (P) suivante :

Si S_0 est une base non maximum, alors il existe une séquence de bases S_1, S_2, \dots, S_k telle que :

$$(i) \quad |S_0| = |S_1| = \dots = |S_{k-1}| = |S_k| - 1$$

$$(ii) \quad |S_{i-1} \cap S_i| = |S_{i-1}| - 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k$$

Cette conjecture est vraie pour le bitroïde des stables (d'un graphe sans étoile) dont on a vu qu'il était fort (cf. Remarque I.7).

En effet, considérons dans un graphe sans étoile $G = (X, E)$ un stable maximal S_0 qui n'est pas de cardinalité maximum. On peut donc d'après le théorème 1 mettre en évidence une chaîne \mathcal{C} augmentante par rapport à S_0 ; \mathcal{C} est définie par la séquence $(x_0, s_0, x_1, s_1, \dots, s_{k-1}, x_k)$

Posons :

$$S_{i+1} = S_i \cup \{x_i\} - \{s_i\} \quad \text{pour } i = 0, \dots, k-2$$

$$S_k = S_{k-1} \cup \{x_{k-1}, x_k\} - \{s_{k-1}\}$$

On vérifie aisément que les S_i sont des bases et qu'ils satisfont les axiomes (i) et (ii) de la propriété (P).

II - STABLES PARFAITS DANS LES GRAPHES SANS ETOILE

Définition 2

Soit $G = (X, E)$ un graphe, \mathcal{C} un couplage de G . On dit que \mathcal{C} est parfait s'il sature tous les sommets de G .

Remarque 4

Pour l'étude de l'existence d'un couplage parfait dans un graphe, on peut supposer sans perte de généralité que le graphe est simple auquel cas la définition 2 devient équivalente à dire que \mathcal{C} est un couplage parfait si toute arête de $E - \mathcal{C}$ est adjacente à deux arêtes de \mathcal{C} .

Dans un graphe admettant un couplage parfait, le nombre de sommets est pair et tout couplage de cardinalité maximum est parfait.

Notation :

Soient $G = (X, E)$ un graphe et Y un sous-ensemble de X . On désignera par $V(Y)$ l'ensemble des sommets de $X - Y$ qui sont adjacents à au moins un sommet de Y , si $Y = \{x\}$ alors par abus d'écriture, on désignera $V(Y)$ par $V(x)$.

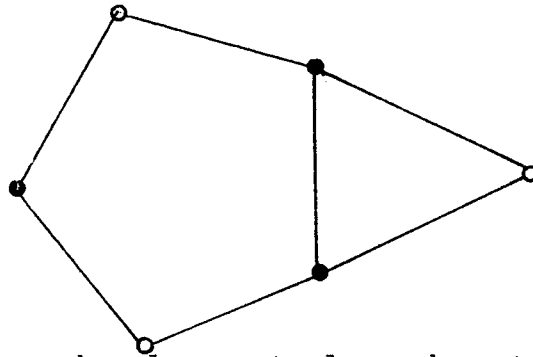
Définition 3

Soit $G = (X, E)$ un graphe sans étoile tel qu'il n'existe aucun couple de sommets x et y adjacents entre eux tels que $V(x) - \{y\} = V(y) - \{x\}$. Un stable S de G sera dit parfait si tous les sommets de $X - S$ sont saturés par S .

Remarque 5

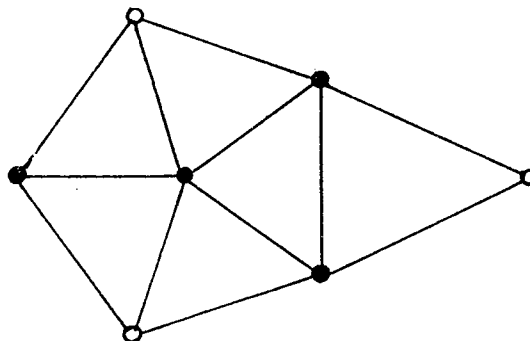
(i) L'existence d'un stable parfait ne dépend pas de la parité du nombre de sommets du graphe.

Soit G le graphe représenté ci-dessous, S un stable de G ; on représentera les sommets de S par des cercles.



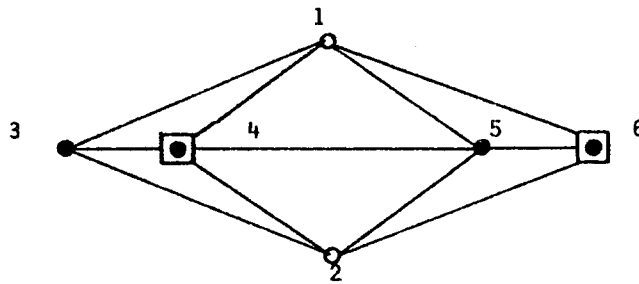
S est parfait et le nombre de sommets du graphe est pair.

Considérons à présent le graphe G représenté ci-dessous et S un stable de G



S est parfait et G contient un nombre impair de sommets.

- (ii) Un stable parfait est de cardinalité maximum (puisqu'il n'existe pas de sommet insaturé).
- (iii) Dans un graphe sans étoile admettant un stable parfait, un stable de cardinalité maximum n'est pas forcément parfait : en effet, soit G le graphe représenté ci-dessous S_1 (resp. S_2) un stable de G dont les sommets sont représentés par des cercles (resp. des carrés).



S_1 est parfait, par contre S_2 n'est pas parfait puisqu'il laisse insaturé le sommet 3.

Théorème 2

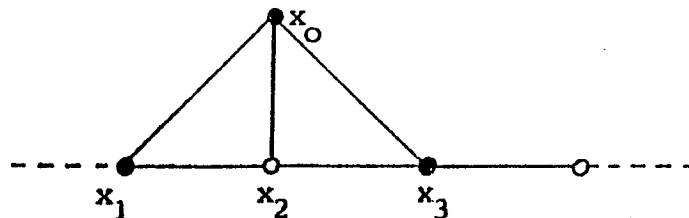
Soit $G = (X, E)$ un graphe sans étoile admettant un stable parfait S^* . Une condition nécessaire et suffisante pour que tout stable de cardinalité maximum de G soit parfait est qu'il n'existe pas de sommet adjacent à exactement trois sommets d'un cycle pair sans corde G_C tel que $|C \cap S^*| = \frac{|C|}{2}$.

Démonstration :

a) Condition nécessaire

Supposons que tout stable de cardinalité maximum de G soit parfait est qu'il existe un sommet x_0 adjacent à exactement trois sommets x_1, x_2 et x_3 d'un cycle pair sans corde G_C tel que $|C \cap S^*| = \frac{|C|}{2}$. $S = S^* \Delta C$ est un stable de cardinalité maximum qui n'est pas parfait puisqu'il laisse insaturé le sommet x_0 .

- contradiction -



b) Condition suffisante

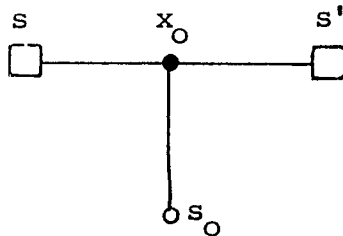
Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un stable S de cardinalité maximum de G qui ne soit pas parfait. Soit donc x_0 un sommet insaturé par S .

S et S^* étant des stables de cardinalité maximum, les composantes connexes de $G_{S\Delta S^*}$ sont soit des cycles élémentaires pairs soit des chaînes élémentaires ayant un nombre pair de sommets.

Or une composante connexe de $G_{S\Delta S^*}$ ne peut être une chaîne élémentaire car l'une de ses extrémités serait un sommet insaturé par S^* (ce qui contredirait le fait que S^* est un stable parfait). Par conséquent les composantes connexes de $G_{S\Delta S^*}$ sont des cycles élémentaires pairs (sans corde).
Donc $x_0 \notin S^*$. Soit s_0 le sommet de S qui est adjacent à x_0 :

1er cas : $s_0 \in S^*$

Soient s et s' les sommets de S^* qui sont adjacents à x_0 .



$G_{\{x_0, s, s_0, s'\}} \neq K_{13} \Rightarrow (s_0, s) \notin E$ ou $(s_0, s') \in E$ (disons $(s_0, s) \in E$) ;

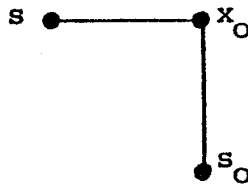
(i) si $(s_0, s') \in E$ alors x_0 serait adjacent à exactement trois sommets du cycle pair sans corde qu'est la composante connexe de $G_{S\Delta S^*}$ contenant s_0 - contradiction -

(ii) si $(s_0, s') \notin E$ alors s' n'appartenant pas à S , il serait adjacent à deux sommets s'_1 et s'_2 de S tous deux différents de s_0 :

$G_{\{s', s'_1, s'_2, x_0\}} = K_{13}$ - contradiction -

2ème cas : $s_0 \in S^*$

Soit s le sommet de $S^* - \{s_0\}$ qui est adjacent à x_0



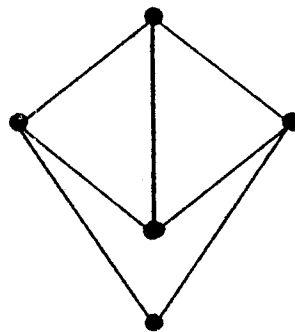
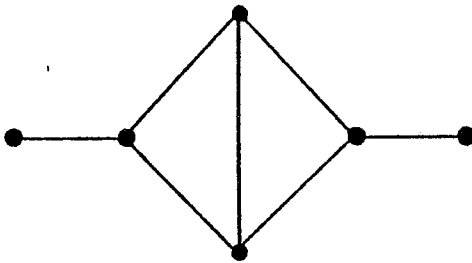
$$s \notin S \Rightarrow |V(s) \cap S| = 2$$

Posons $V(s) \cap S = \{s_1, s_2\}$:

$$G_{\{s, s_1, s_2, x_0\}} = K_{13} \text{ - contradiction -}$$

Corollaire

Soit $G = (X, E)$ un graphe sans étoile admettant un stable parfait.
 Si G n'admet pas de sous-graphe isomorphe à l'un des deux graphes représentés ci-dessous alors tout stable de cardinalité maximum est parfait.



Définition 4

Soit $G = (X, E)$ un graphe, une clique de G sera dite spéciale si elle contient un sommet dont les adjacents en dehors de la clique forment une clique et si elle est minimale pour cette propriété.

Un sommet x de G est dit simplicial si $G_{V(x)}$ est une clique.

Remarque 6

Soit $G = (X,E)$ un graphe sans étoile, S^* un stable parfait de G . Tout sommet simplicial de G appartient à S^* .

On peut donc pour étudier l'existence d'un stable parfait dans un graphe sans étoile, supposer que le graphe ne contient pas de sommet simplicial.

Conjecture :

Soit $G = (X,E)$ un graphe sans étoile ne contenant pas de sommet simplicial. Si le nombre de cliques spéciales de G est impair alors G n'admet pas de stable parfait.

III - PROPRIETE D'INTERSECTION

Définition 5

On appelle polyèdre de \mathbb{R}^n l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^n qui appartiennent à l'intersection de m -demi-espaces.

P peut donc s'écrire $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ où A est une matrice $m \times n$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m .

On appelle polytope un polyèdre borné.

Définition 6

Soit P un polyèdre de \mathbb{R}^n ; un vecteur de P est un sommet s'il se trouve à l'intersection d'au moins n hyperplans limites des demi-espaces dont l'intersection est P .

Définition 7

Soit P un polyèdre de \mathbb{R}^n .

On dit que P possède la propriété d'intersection si l'adjonction de la contrainte

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k.$$

($k \in \mathbb{N}$) aux contraintes définissant P ne crée pas de nouveau sommet.

Définition 8

Soient s vecteurs x_1, x_2, \dots, x_s de \mathbb{R}^n . On appelle enveloppe convexe de ces points le polytope :

$$\text{CO}(\{x_1, \dots, x_s\}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i \text{ avec } \lambda_i \geq 0 \right. \\ \left. \text{pour } i = 1, 2, \dots, s \text{ et } \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \right\}$$

Définition 9

Soient $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $G = (X, E)$ un graphe. Le vecteur représentatif d'un stable S de G est le vecteur x de \mathbb{R}^n défini par :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle polytope associé aux stables de G , qu'on note $P(G)$, l'enveloppe convexe des vecteurs représentatifs des stables de G .

Le support d'un vecteur entier x de $P(G)$ est l'ensemble $\{v_i / x_i = 1\}$.

Définition 10

Soient P un polyèdre et (x, y) un couple de sommets de P . x et y sont dits voisins si

$$\left. \begin{array}{l} \forall z, z \in \text{Co}(\{x, y\}) \\ \forall A, A \subset P - \text{Co}(\{x, y\}) \end{array} \right\} \Rightarrow z \notin \text{Co}(A)$$

On dit alors que $\text{Co}(\{x, y\})$ est une arête de P .

Remarque 7 :

Soit $G = (X, E)$ un graphe tel que $|X| = n$.

$x \in P(G) \cap \mathbb{N}^n \iff x$ est un sommet de $P(G)$.

Théorème 3 (Chvatal [5]) :

Soit $G = (X, E)$ un graphe.

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux sommets de $P(G)$ soient voisins, est que le sous graphe de G construit sur la différence symétrique de leurs supports soit connexe.

Théorème 4 (Calvillo [3])

Soit $G = (X, E)$ un graphe.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $P(G)$ satisfasse la propriété d'intersection est que G soit un graphe sans étoile.

Démonstration : (MAURRAS)

a) Condition nécessaire

Soit $G = (X, E)$ un graphe tel que $P(G)$ possède la propriété d'intersection. Supposons que G admette un sous graphe isomorphe à K_{13} , soit G_Q .

Posons $Q = \{d, v_1, v_2, v_3\}$. d est le sommet de degré trois de G_Q .

$S = \{d\}$ et $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ sont des stables de G ; $|X| = n$;

Soient x et y les vecteurs représentatifs de S et S' respectivement.

Posons $z = \frac{x+y}{2} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$. On a $\sum_{i=1}^n z_i = 2$; ceci implique que l'adjonction de la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i \leq 2$ aux contraintes de $P(G)$ crée un nouveau

sommet à savoir le point z

- contradiction -

b) Condition suffisante

Soit $G = (X, E)$ un graphe sans étoile tel que $|X| = n$.

Si $P(G)$ ne satisfait pas la propriété d'intersection alors il existe un entier k tel que l'intersection de $P(G)$ avec le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n x_i \leq k\}$ contienne un sommet x^* qui n'est pas un sommet de $P(G)$.

x^* appartient donc à une arête $Co((x, y))$ de $P(G)$ ce qui implique que parmi les sommets x et y , il y en a un dont le support S est un stable de G de cardinalité supérieure à k , le support S' de l'autre étant un stable de cardinalité inférieure à k ; par conséquent $|S - S'| \geq 2$.

Or d'après le théorème 2, $G_{S \Delta S'}$ est connexe, c'est donc soit une chaîne élémentaire, soit un cycle élémentaire pair: $|S - S'| \leq 1$.

- contradiction -

IV - QUELQUES FACETTES DU POLYTOPE ASSOCIE AUX STABLES D'UN GRAPHE

SANS ETOILE

Définition 11

Soit P un polytope de \mathbb{R}^n ; soient $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que la contrainte $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \alpha_0$ définit une face F de P si

$$\forall x \in P, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \alpha_0$$

Si de plus il existe n points x^1, x^2, \dots, x^n de P affinement indépendants tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^k = \alpha_0$ pour $k = 1, 2, \dots, n$ alors la face F est appelée une facette de P .

Exemples :

Soit $G = (X, E)$ un graphe ; $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;

- 1) si G est une clique alors $\sum_{i=1}^n x_i \leq 1$ est une facette de P(G) ;
- 2) si G est un cycle impair sans corde alors $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n-1}{2}$ est une facette de P(G) ;
- 3) si G est un anticycle impair alors $\sum_{i=1}^n x_i \leq 2$ est une facette de P(G).

Remarque 8 :

Les facettes d'un polytope P constituent un ensemble minimum de contraintes définissant P. C'est ce qui explique l'intérêt porté à l'étude des facettes puisque la résolution à l'aide du simplexe, d'un problème qui peut être formulé comme un programme linéaire (P) ne peut être envisagée que si le nombre de contraintes de (P) n'est pas trop grand. Par ailleurs, pour déterminer une solution optimale entière d'un programme linéaire, on peut appliquer le simplexe sur l'enveloppe convexe des solutions réalisables entières, laquelle est obtenue en ajoutant des facettes. C'est ainsi que plusieurs procédures de génération de facettes ont été proposées, notamment en ce qui concerne le polytope associé aux stables d'un graphe.

Exemple : Procédure I (Nemhauser et Trotter) [12]

Soit $G = (X, E)$ un graphe ; $X = \{v_1, \dots, v_n\}$.
 Considérons une facette de $P(G_{X-\{v_n\}})$ définie par $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \leq \alpha_0$.
 Posons

$$\alpha_n = \max(0, \max_{x \in P(G_{X-\{v_n\}})} \{ \sum_{i \in V(v_n)} \alpha_i x_i \})$$

Alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \alpha_0 \text{ est une facette de } P(G).$$

Proposition

Soient $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $G = (X, E)$ un graphe sans étoile.
 $\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i x_i \leq \alpha_0$ est une contrainte booléenne (i.e. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k}) \in \{0, 1\}^{n-k}$)
 qui définit une facette de $P(G_{X-\{v_{n-k+1}, \dots, v_n\}})$.
 On définit α_j à partir de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}$ à l'aide de la procédure I
 et ce pour $j = n-k+1, \dots, n$.
 On a alors
 $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}, \forall j$.

Démonstration

G étant un graphe sans étoile, la cardinalité maximum d'un stable de $G_{V(v_i)}$ est inférieure ou égale à deux ($\forall i$).
 Par conséquent dans $G_{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-k}\}}$, la cardinalité maximum d'un stable chute d'au plus deux unités, lorsqu'on supprime les sommets de $V(v_i)$, pour $i = n-k+1, \dots, n$. Ceci implique que $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$ pour $i = n-k+1, \dots, n$.

Exemple

Soit $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $G = (X, E)$ un graphe sans étoile tel que

- i) $G_{X-\{v_n\}}$ est un anticycle impair ;
- ii) $V(v_n) = X - \{v_n\}$;

$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq 2$ est une facette de $P(G_{X-\{v_n\}})$ laquelle engendre dans $P(G)$,
 d'après la procédure I la facette $\sum_{i=1}^{n-1} x_i +$

Conjecture

Toute contrainte qui définit une facette du polytope associé aux stables d'un graphe sans étoile $G = (X, E)$ peut s'écrire
 $\sum_{i=1}^{|X|} \alpha_i x_i \leq \alpha_0$ avec $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$ pour $i = 1, 2, \dots, |X|$ et $\alpha_0 \in \mathbb{N}$.

Remarque 9

Cette conjecture est compatible avec la conjecture suivante de J.F. Maurras :

Soit $G = (X,E)$ un graphe quasi-adjoint ; $P(G)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^{|X|} \\ x \geq 0 \\ Ax \leq b \end{cases}$$

où A est une matrice $m \times |X|$ dont les éléments valent 0 ou 1 et b un vecteur de \mathbb{N}^m .

En effet, un graphe est quasi-adjoint si aucun sommet n'est adjacent à tous les sommets d'un anticycle impair.

Procédure II de Chvatal (de génération de faces)[4]

Soit $G = (X,E)$ un graphe ayant n sommets.

Soit $P_k(G)$ un polytope contenant $P(G)$, défini par

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ A_k x \leq b_k \end{cases}$$

où A_k est une matrice $m \times n$ dont les éléments sont entiers et b un vecteur de \mathbb{N}^m . $A_k = (a_{ij}^k)_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^m$; posons $\beta_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ij}^k$ pour $j = 1, 2, \dots, n$

$$\beta_0 = \langle \alpha, b_k \rangle$$

$$\lambda = \text{p.g.c.d} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

On a alors : $x \in P(G) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\lambda} x_i \leq \lfloor \frac{\beta_0}{\lambda} \rfloor$ (partie entière de $\frac{\beta_0}{\lambda}$)

Soit $P_{k+1}(G)$ le polytope défini par :

avec

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n ; \\ A_{k+1} x \leq b_{k+1} \end{cases}$$

et

$$A_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\hspace{10em}}_n & \\ \hline A_k & \\ \hline \beta_1/\lambda & \dots & \beta_n/\lambda \end{array} \right) \begin{matrix} m \\ m+1 \end{matrix}$$

$$b_{k+1} = \begin{pmatrix} b_k \\ \beta_0 \\ \lfloor \frac{\beta_0}{\lambda} \rfloor \end{pmatrix}$$

$$P(G) \subset P_{k+1}(G) \subset P_k(G).$$

La construction de $P_{k+1}(G)$ constitue une itération de la procédure II de génération de faces de Chvatal.

Théorème 5 (Chvatal [4.])

Soit $G = (X,E)$ un graphe dont A est la matrice d'incidence arêtes-sommets $|X| = n$; $|E| = m$; soit $P_0(G)$ le polytope de \mathbb{R}^n défini par

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0 \\ Ax \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} \end{cases}$$

Partant de $P_0(G)$, on obtient $P(G)$ en un nombre fini d'itérations de la procédure II de Chvatal.

Conjecture d'Edmonds

Soit $G = (X, E)$ un graphe sans étoile dont A est la matrice d'incidence cliques maximales-sommets. $|X| = n$; $|E| = m$;

Soit $P_0(G)$ le polytope défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0 \\ Ax \leq \mathbb{1}_m \end{array} \right.$$

Toute contrainte qui définit une facette de $P(G)$ s'obtient au bout d'une seule itération de la procédure II de Chvatal à partir de $P_0(G)$.

Théorème 6

Soient $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $G = (X, E)$ un graphe dont A est la matrice d'incidence arêtes-sommets ; $|E| = m$.

On suppose que $P(G_{X-\{v_n\}}) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} / Bx \leq b\}$ où B est une matrice dont les éléments sont entiers et b un vecteur entier.

Soit $P_C(G)$ le polytope de \mathbb{R}^n défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0 \\ Ax \leq \mathbb{1}_m \\ B(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})^t \leq b \end{array} \right.$$

Toute facette de $P(G)$ définie par une contrainte de la forme $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + x_n$ s'obtient au bout d'une seule itération de la procédure II de Chvatal sur $P_C(G)$.

Démonstration

B est une matrice $p \times (n-1)$, b un vecteur de \mathbb{N}^p .

Posons $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$

$$C = \begin{array}{|c|} \hline \overbrace{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}^n \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ p \\ \downarrow \\ n \end{array} \quad \text{et } C = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_m, b_1, \dots, b_p)^t$$

Considérons les deux programmes linéaires duaux ci-dessous :

$$(P) \begin{cases} Cx \leq c \\ x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \langle \alpha, x \rangle = z(\max) \end{cases} \quad (D) \begin{cases} yC \geq \alpha \\ y \in \mathbb{R}^{m+p}; y \geq 0 \\ \langle y, c \rangle = w(\min) \end{cases}$$

Soit x^* une solution optimale de (P); $\langle \alpha, x^* \rangle = \alpha^*$.

1er cas $\alpha^* = \alpha_0$.

Soit y^* une solution optimale de (D).

$$\begin{aligned} x \in P_c(G) &\Rightarrow \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq c_i \quad \forall i \\ &\Rightarrow y_i^* \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq y_i^* c_i \quad \forall i \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{m+p} y_i^* \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m+p} y_i^* c_i = \alpha^* \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m+p} y_i^* c_{ij} x_j \leq \alpha^* \end{aligned}$$

or

$$\sum_{i=1}^{m+p} y_i^* c_{ij} \geq \alpha_j$$

$$\text{Donc } \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \alpha^*$$

c.q.f.d.

2ème cas $\alpha^* > \alpha_0$

On a alors : $x_n^* \neq 0$;

(i) si $x_n^* = 1$ alors $x_i^* = 0 \quad \forall i$ tel que $v_i \in V(v_n)$;

Soit $\tilde{x} \in \mathbb{N}^{n-1} \cap P(G_{X-\{v_n\}})$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_i = \max_{x \in P(G_{X-\{v_n\}})} \left(\sum_{[i/v_i \in V(v_n)]} \alpha_i x_i \right)$$

si $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_i = \alpha_0$ alors posons

$$x_i = \begin{cases} \tilde{x}_i & \text{si } i \notin V(n) \cup \{n\} \\ 0 & \text{si } i \in V(n) \\ 1 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

On a alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0 + 1$.

- contradiction -

Donc $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_i < \alpha_0$

$$\sum_{i \neq n} \alpha_i x_i^* = \sum_{\{i/v_i \in V(n)\}} \alpha_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_i < \alpha_0$$

$$\Rightarrow \alpha^* - \alpha_0 < \alpha_n x_n^* = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = [\alpha^*].$$

c.q.f.d.

(ii) Si $0 < x_n^* < 1$ alors soit \tilde{x} une solution optimale de

$$\begin{cases} x \in P(G_{X-\{v_n\}}) \\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i = z(\max) \end{cases}$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_i \leq \alpha_0$$

Donc

$$\sum_{i \neq n} \alpha_i x_i^* \leq \sum_{i \neq n} \alpha_i \tilde{x}_i \leq \alpha_0.$$

D'où

$$\alpha^* - \alpha_0 \leq \alpha_n x_n^* = x_n^* < 1.$$

Par conséquent :

$$\alpha_0 = [\alpha^*]$$

c.q.f.d.

CHAPITRE - III

ALGORITHME DE RECHERCHE D'UN STABLE DE CARDINALITE MAXIMUM DANS UN GRAPHE SANS ETOILE

I - DEFINITIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES

Lemme 1

Soient $G = (X, E)$ un graphe sans étoile, S un stable de G , x_0 et x_k deux sommets insaturés par S non adjacents entre eux. Soit $\mathcal{C} = (X', E')$ une chaîne élémentaire de G dont les sommets appartiennent alternativement à S et à $(X-S)$ et qui joint x_0 et x_k . \mathcal{C} est définie par la séquence

$(x_0, s_0, x_1, s_1, \dots, s_{k-1}, x_k)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{C} soit un sous-graphe de G est que $(x_i, x_{i+1}) \notin E$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Démonstration :

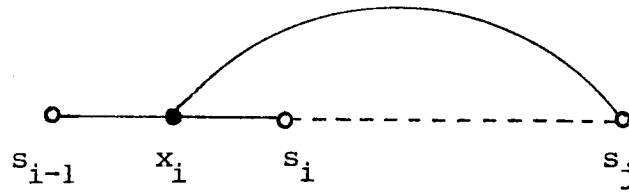
a) Condition nécessaire :

C'est une conséquence de la définition d'un sous-graphe.

b) Condition suffisante :

Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $(x_i, x_{i+1}) \notin E$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$ et que \mathcal{C} ne soit pas un sous-graphe de G . G_X contiendrait donc une arête e appartenant à $E-E'$.

(i) si $e = (x_i, s_j)$ avec $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq k-1$ alors d'après les hypothèses $i \neq 0$ et $i \neq k$;



Ceci contredit la remarque II.1

(ii) Si $e = (x_0, x_j)$ avec $2 \leq j \leq k-1$ alors

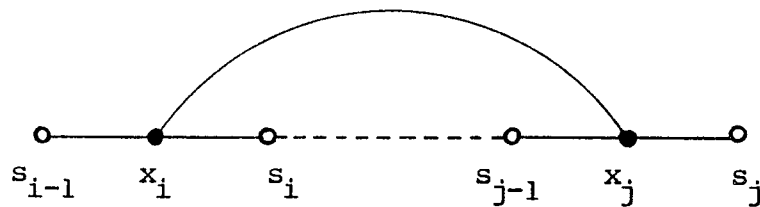
$$G_{\{x_j, s_{j-1}, s_j, s_0\}} \neq K_{1,3} \Rightarrow (x_0, s_{j-1}) \in E \text{ ou } (x_0, s_j) \in E$$

par conséquent x_0 serait saturé par S .

- contradiction -

(iii) si $e = (x_k, x_j)$ avec $1 \leq j \leq k-2$ alors un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus conduit à une contradiction.

(iv) si $e = (x_i, x_j)$ avec $1 \leq i < j-1 \leq k-2$



alors

$$G_{\{x_i, s_{i-1}, x_j, s_i\}} \neq K_{1,3} \Rightarrow (s_{i-1}, x_j) \in E \text{ ou } (s_i, x_j) \in E$$

ce qui contredit la remarque II.1.

Définition 1

Soient $G = (X, E)$ un graphe sans étoile et S un stable maximal de G . Soit x un sommet adjacent à un sommet s de S . On dira que x est inessentiel si :

$$\forall x', x' \in V(s) - \{x\} \Rightarrow \begin{cases} x' \in V(x) \\ \text{ou} \\ |V(x) \cap S| = 2 \text{ et } V(x) \cap S = V(x') \cap S \end{cases}$$

Remarque 1 :

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile et S un stable de G ; un sommet inessentiel x ne peut pas appartenir à une chaîne augmentante par rapport à S . On peut donc, dans la recherche de chaîne augmentante par rapport à S , effacer les sommets inessentiels.

Notations :

- Soit \mathcal{C} une chaîne élémentaire ; soient x et y deux sommets de \mathcal{C} ; on notera $\mathcal{C}(x,y)$ la portion de la chaîne \mathcal{C} joignant x et y .
- On désignera par c.a. une chaîne alternée par rapport à un stable S d'un graphe sans étoile.
- Une chaîne alternée C_t pourra être désignée par la séquence des sommets qui lui appartiennent ; par extension C_t pourra désigner l'ensemble des sommets de la séquence définissant C_t .

Définition 2

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile, S un stable de G et C_t une c.a. de G ; on dira que C_t satisfait la propriété (*) si et seulement s'il n'existe aucun sommet de G adjacent à trois sommets consécutifs de C_t .

Remarque 2 :

L'algorithme que nous allons présenter, se basant sur le théorème II.1, a pour objet de détecter dans le graphe des chaînes augmentantes, et ce à l'aide d'une procédure de marquage des sommets analogue à celle utilisée dans l'algorithme du couplage d'Edmonds [7] . Cette procédure nécessite deux opérations de réduction.

II - INTRODUCTION DES OPERATIONS DE REDUCTION

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile et S un stable maximal de G qui n'est pas de cardinalité maximum.

D'après le corollaire du théorème II.1, il existe un sommet insaturé x_0 non adjacent à au moins un autre sommet insaturé. La procédure (P) suivante décrit le schéma général de l'algorithme de marquage (inspiré de l'algorithme de couplage dans les graphes bipartis) pour détecter une chaîne augmentante par rapport à S issue de x_0 .

Procédure (P)

- (o) Donner la marque $(+,0)$ à x_0 ;
- (1) S'il existe un sommet x marqué $(+,.)$ non encore examiné, alors donner la marque $(-,x)$ à tout sommet adjacent à x non marqué et aller en (1) ;
- (2) S'il existe un sommet s de S marqué $(-,.)$ et non encore examiné, alors donner la marque $(+,s)$ à tout sommet adjacent à s non marqué sinon terminer ;
S'il existe un sommet insaturé marqué $(+,s)$ alors terminer : on peut mettre en évidence une chaîne augmentante issue de x_0 , sinon aller en (1).

Remarque 3 :

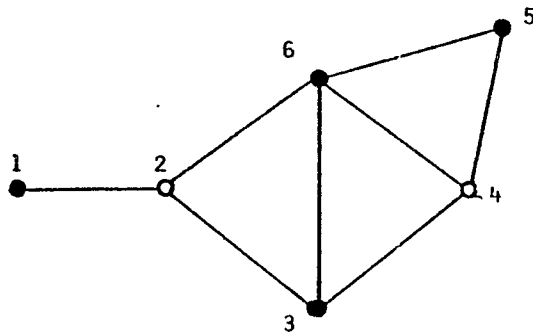
D'après le lemme 1, la chaîne obtenue en remontant les marquages à partir d'un sommet marqué $(+,.)$ est un sous-graphe. Par conséquent, lorsqu'on marque $(+,.)$ un sommet insaturé x'_0 différent de x_0 , on peut mettre en évidence une chaîne augmentante joignant x_0 et x'_0 .

La procédure proposée peut cependant ne pas détecter de chaîne augmentante issue de x_0 alors qu'il en existe dans le graphe. Ceci se produit dans les deux situations décrites ci-dessous.

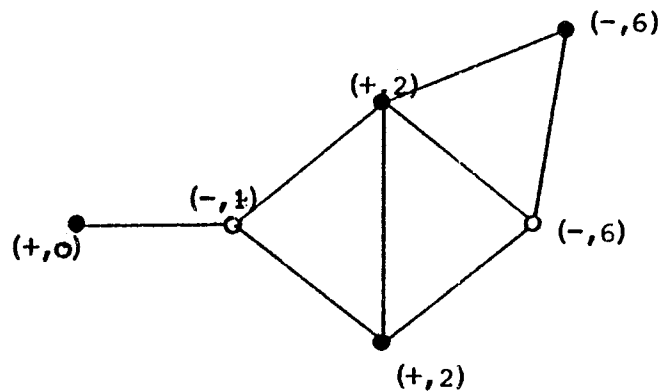
Dans la suite, on représentera les sommets du stable par des cercles.

Premier cas :

Soient $G = (X,E)$ le graphe représenté ci-dessous et S un stable maximal de G :



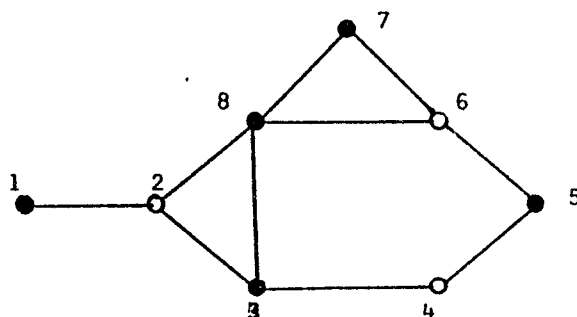
On applique la procédure (P) à partir du sommet 1 ce qui donne les marquages suivants :



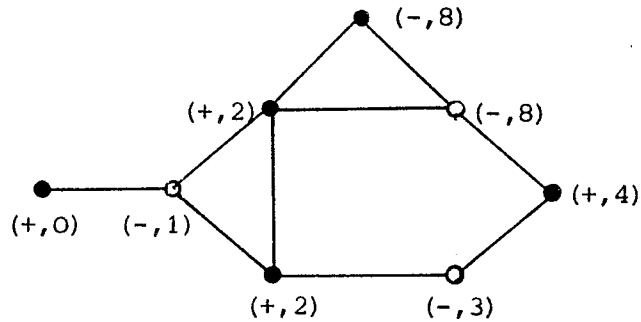
On ne peut plus faire de marquages et on n'a pas détecté de chaîne augmentante issue du sommet 1 alors qu'il en existe une à savoir $G_{\{1,2,3,4,5\}}$. Ceci est dû au fait qu'on a examiné le sommet 6 avant le sommet 3 et plus précisément au fait que le sommet 5 n'est pas adjacent à tous les sommets marqués $(+,.)$ qui sont adjacents au sommet 4.

Deuxième cas :

Soient $G = (X,E)$ le graphe représenté ci-dessous et S un stable de G .



L'application de la procédure (P) à partir du sommet 1 donne les marquages suivants :



La procédure ne permet pas de détecter de chaîne augmentante issue du sommet 1 alors que $G_{\{1,2,3,4,5,6,7\}}$ en est une.

Ici la difficulté provient de l'existence du cycle impair sans corde

$G_{\{3,4,5,6,8\}}$.

Remarque 4 :

Pour pallier ces deux difficultés nous avons établi deux opérations de réduction du graphe qui ont chacune les trois propriétés suivantes :

- (i) Le graphe obtenu après réduction conserve la structure de graphe sans étoile .
- (ii) S'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 dans le graphe de départ, alors il en existe une dans le graphe réduit et réciproquement .
- (iii) On peut facilement à partir d'une chaîne augmentante issue de x_0 dans le graphe réduit, engendrer une chaîne augmentante issue de x_0 dans le graphe de départ.

Définition 3

Soit $G = (X, E)$ un graphe sans étoile et C un sous-ensemble de X tel que G_C soit un cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq. Soit A l'ensemble des sommets de $X-C$ qui sont adjacents à des sommets de C . On appellera réduction de G par rapport au cycle impair sans corde G_C l'opération qui consiste à :

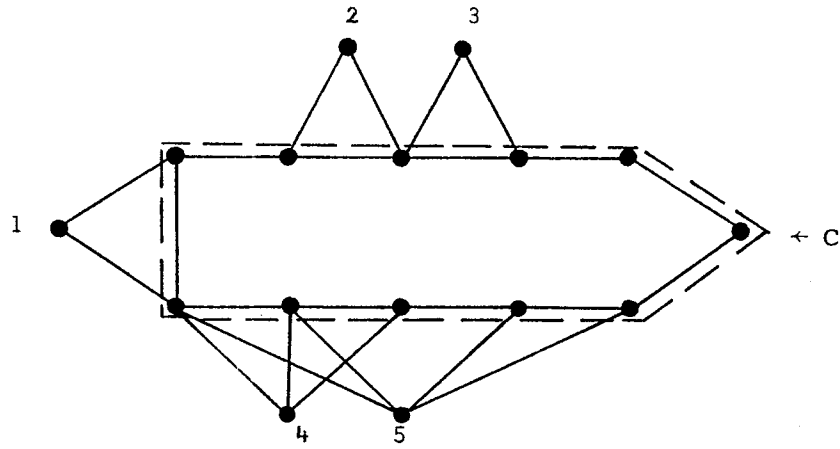
- (i) supprimer les sommets de A qui sont adjacents à plus de deux sommets de C , de même que les sommets de C ; soit A_1 l'ensemble des sommets de A restants après cette opération ;
- (ii) remplacer G_{A_1} par une clique.

Remarque 5 :

Cette opération de réduction est tout-à-fait analogue à celle des "blossom" dans l'algorithme du couplage d'Edmonds [7] . En effet, soit $G = (X, E)$ un graphe quelconque, $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{E})$ son graphe adjoint. Considérons un cycle impair élémentaire C de G . Soit \bar{G}_C le graphe adjoint de C , A l'ensemble des sommets de $\bar{X}-\bar{C}$ qui sont adjacents à des sommets de \bar{C} . A un sommet de G , correspond une clique de \bar{G} . La contraction de C dans G consiste à remplacer le sous graphe de G construit sur les sommets de C par un sommet x qu'on relie par une arête à l'extrémité n'appartenant pas à C de toute arête de G ayant une seule extrémité dans C . Ceci équivaut dans \bar{G} d'une part à supprimer les sommets de \bar{C} et ceux de \bar{G} qui correspondent aux cordes de C (lesquels sont les sommets de A adjacents à plus de deux sommets de \bar{C}) et d'autre part à remplacer par une clique le sous-graphe de \bar{G} construit sur les sommets correspondant aux arêtes de G qui ont une seule extrémité dans C (ces sommets sont les sommets de A qui sont adjacents à exactement deux sommets de \bar{C}).

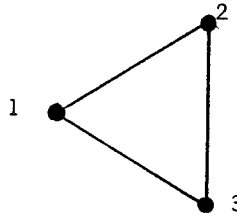
Exemple de réduction par rapport à un cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq.

Soit G le graphe représenté ci-dessous, C un cycle impair sans corde de longueur supérieure à cinq de G .



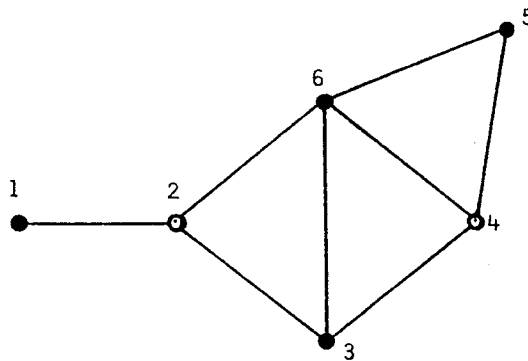
$$A = \{1,2,3,4,5\} ; \quad A_r = \{1,2,3\}.$$

Après réduction de G par rapport à C , on obtient le graphe suivant :

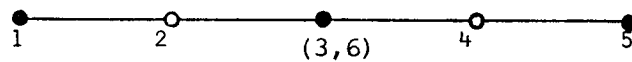


Remarque 6 :

La deuxième opération de réduction que nous avons établie n'a pas d'équivalent dans la théorie du couplage. C'est une réduction par rapport à une clique. Pour l'introduire, reprenons l'exemple de la page 29 :

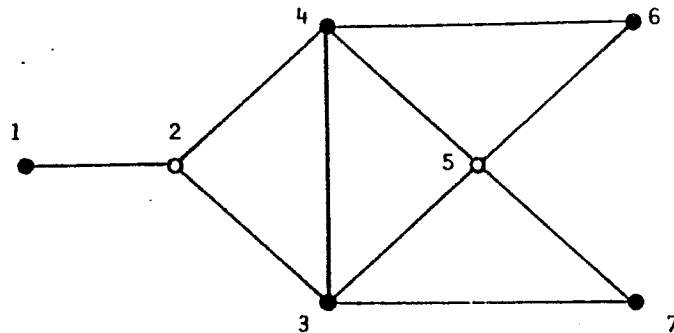


Pour détecter la chaîne augmentante $\{1,2,3,4,5\}$ on va dans ce cas contracter la clique $\{3,6\}$ en un sommet qu'on relie par une arête à tout sommet adjacent à la fois à 3 et à 6. Ce qui donne :

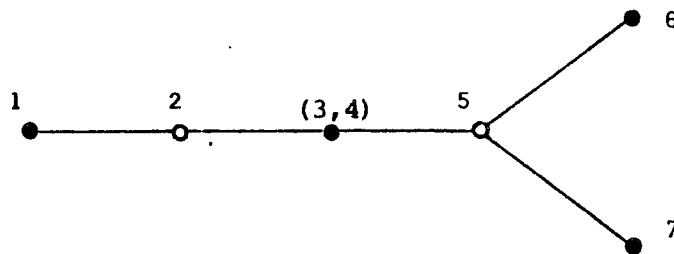


Cependant cette opération devra être faite avec quelques précautions pour que le graphe réduit conserve la structure de graphe sans étoile. Ainsi quand on

contracte la clique $\{3,4\}$ dans le graphe G représenté ci-dessous :

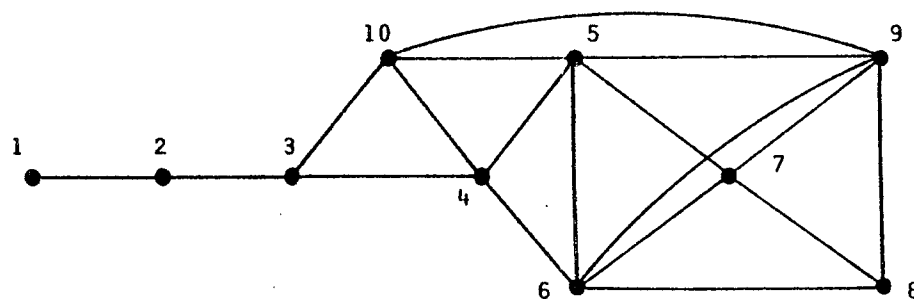


On obtient le graphe G_1 suivant :



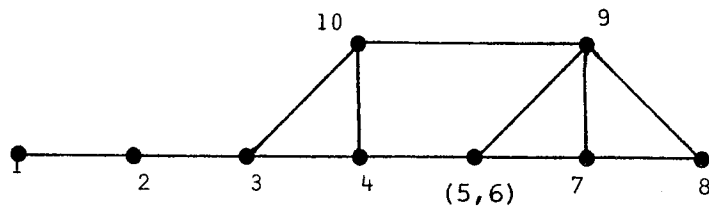
On remarque alors que le sous-graphe de G_1 construit sur $\{5,6,7,(3,4)\}$ est une étoile. Pour remédier à cela, on relie par une arête les sommets 6 et 7 ⁽¹⁾.

Considérons à présent le graphe G représenté ci-dessous :



La réduction de G par rapport à la clique $\{5,6\}$ donne le graphe G_1 représenté ci-après :

(1) Il conviendra de montrer que cette opération ne supprime pas toutes les chaînes augmentantes issues de x_0 (cf. § IV).



On remarque que :

$$G_1_{\{9,10,(5,6),8\}} = K_{13}$$

Ici pour détruire cette étoile, on supprime le sommet 9 (1).

Définition 4 :

Soient $G = (X,E)$ un graphe sans étoile et s un sommet de G adjacent à tous les sommets d'une clique $A(s)$ de G .

Considérons les sous-ensembles de $X-A(s)$ suivants :

$A =$ l'ensemble des sommets non adjacents à s , adjacents à au moins un sommet de $A(s)$ et différents de s .

$B =$ l'ensemble des sommets adjacents à s et à au moins un sommet de $A(s)$;

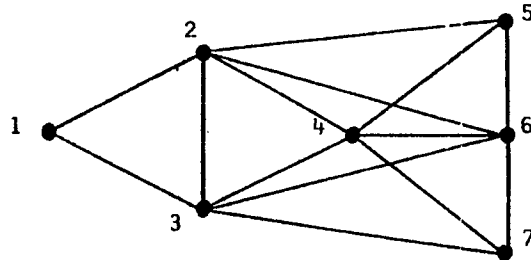
$C =$ l'ensemble des sommets qui sont chacun adjacents à tous les sommets de $A(s)$.

On appellera réduction de G par rapport à la clique $A(s)$ l'opération qui consiste à :

- (i) supprimer les sommets de $B \cap C$ qui sont adjacents à au moins un sommet de $A-C$; soit B_r (resp. C_r) l'ensemble des sommets de B (resp. C) restants après cette opération ;
- (ii) contracter $A(s)$ en un sommet qu'on relie par une arête à tout sommet de C_r ;
- (iii) remplacer G_{B_r} par une clique.

Exemples de réduction par rapport à une clique

1) Soit G le graphe représenté ci-dessous :



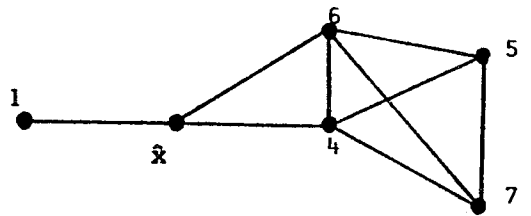
$$s = 4 ; A(s) = \{2,3\}$$

Pour réduire G par rapport à la clique $A(s)$, on définit les ensembles A, B et C considérés ci-dessus,

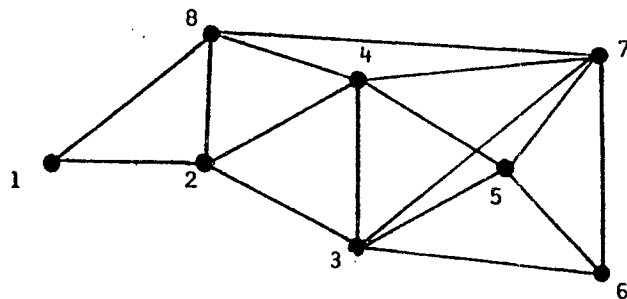
$$\begin{aligned} A &= \{1\} \\ B &= \{5,6,7\} \\ C &= \{1,4,6\} \end{aligned}$$

$$A-C = \emptyset \Rightarrow B_r = B \text{ et } C_r = C .$$

Désignons par \hat{x} le sommet qui résulte de la contraction de $A(s)$; le graphe obtenu après réduction de G par rapport à $A(s)$ est représenté ci-dessous :



2) Soit G le graphe représenté ci-dessous :



$$s = 5 ; A(s) = \{3,4\}$$

On a donc :

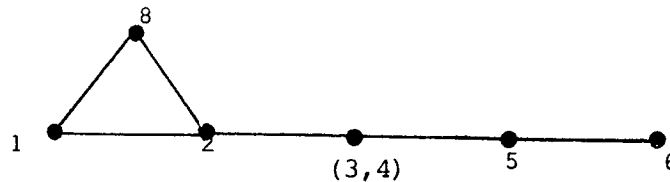
$$A = \{2,8\}$$

$$B = \{6,7\}$$

$$C = \{2,5,7\}$$

$$B \cap C = 7 \text{ et } V(7) \cap (A-C) = \{8\} \Rightarrow B_r = \{6\} \text{ et } C_r = \{2,5\}$$

Après réduction de G par rapport à $A(5)$ on obtient le graphe représenté ci-dessous :



III - L'ALGORITHME PROPOSE

Notation :

La chaîne obtenue, dans le graphe $G^k = (X_k, E_k)$ dont S est un stable, en remontant les marquages à partir d'un sommet x (resp. $s \in S$) marqué $(+, .)$ (resp. $(-, .)$) sera notée $C_k(x)$ (resp. $C_k(s)$).

Algorithme :

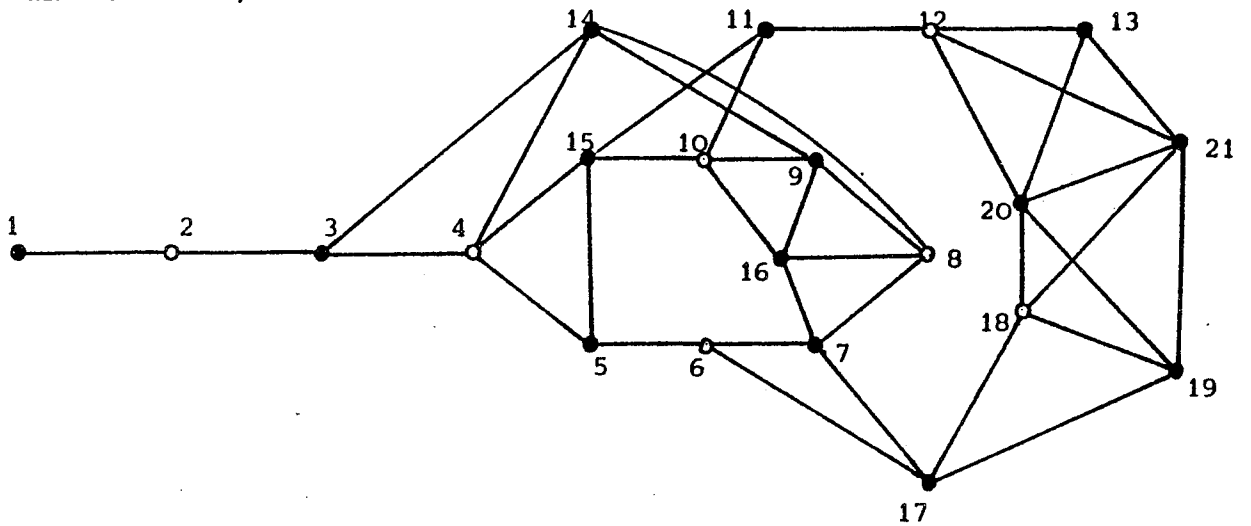
- (0) Soient $G = (X, E)$ un graphe sans étoile et S un stable maximal de G ;
- (1) Supprimer les sommets inessentiels dans G ; soit $G' = (X', E')$ le graphe obtenu après cette opération ; soit I l'ensemble des sommets insaturés par S dans G' ;

- (2) si $I = \emptyset$ ou si G_I^0 est une clique alors terminer : S est un stable de cardinalité maximum sinon soit x_0 un sommet de I non adjacent à tous les autres sommets de I , dans G^0 ;
supprimer les sommets de $X'-S$ qui sont adjacents à x_0 , de même que les sommets inessentiels .
Soit $G^0 = (X_0, E_0)$ le graphe obtenu après ces opérations ;
donner la marque $(+,0)$ à x_0 ; poser $k = 0$, $M = \emptyset$ et $P = \{x_0\}$;
- (3) si $M = P = \emptyset$ alors il n'existe pas de chaîne augmentante issue de x_0 ;
 $I := I - \{x_0\}$; effacer toutes les marques ; considérer le graphe G^1 et aller en (2) ;
- (4) si $P \neq \emptyset$ alors aller en (5) , sinon aller en (6) ;
- (5) soit $x \in P$, $(+,s)$ sa marque ; soit s' le sommet de $S - \{s\}$ qui est adjacent à x ; soit $A(s')$ l'ensemble des sommets marqués $(+,s)$ qui sont adjacents à s' ; si $A(s') = \{x\}$ alors aller en (5.1) sinon aller en (5.2) ;
- (5.1) si s' est marqué $(-,.)$ alors aller en (5.1.1) sinon aller en (5.1.2) ;
- (5.1.1) poser $C = C_k(x) \Delta C_k(s')$; soit s_t le sommet de $S-C$ qui est adjacent à des sommets de C . Supprimer les sommets marqués $(-,s_t)$ qui sont adjacents à un sommet de $S \cap C$. Soit G_C^{k+1} le graphe obtenu après cette opération ; G_C^{k+1} est un cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq.
Réduire G^{k+1} par rapport à G_C^{k+1} ; supprimer les sommets inessentiels ; soit G^{k+2} le graphe obtenu après ces opérations ;
soit $M(C)$ (resp. $P(C)$) l'ensemble des sommets de G^{k+2} qui ont été marqués $(-,.)$ (resp. $(+,.)$) à partir d'un sommet de C ;
soit $N(C)$ l'ensemble des sommets de G^{k+2} qui sont non marqués et adjacents à s_t ; donner la marque $(+,s_t)$ à tout sommet de $M(C) \cup N(C) \cup P(C)$;
 $P := P \cup M(C) \cup N(C) - \{x\}$; $M := M - \{s'\}$; $k := k+2$;
s'il existe $x_0 \in P \cap I$ alors aller en (6.1) sinon aller en (3) ;

- (5.1.2) donner la marque $(-,x)$ à s' et la marque $(-,s')$ à tout sommet non marqué qui est adjacent à x ;
 $P := P - \{x\}$; $M := M \cup \{s'\}$; aller en (4) ;
- (5.2) soit G^{k+1} le graphe obtenu en réduisant G^k par rapport à la clique $A(s')$; soit \hat{x} le sommet qui résulte de la contraction de $A(s')$;
 $k := k+1$; donner la marque $(+,s)$ à \hat{x} ;
 si $A(s') \subset P$ alors aller en (5.2.1) sinon aller en (5.2.2) ;
- (5.2.1) $P := P \cup \{\hat{x}\} - A(s')$; aller en (5) ;
- (5.2.2) soit $P(s')$ l'ensemble des sommets de $V(s') - V(\hat{x})$ qui sont soit marqués $(-,s')$ soit non marqués . Donner la marque $(+,s')$ à tout sommet de $P(s')$, la marque $(-,x)$ à s' ;
 $P := P \cup P(s') - A(s')$; s'il existe $x'_0 \in P \cap I$ alors aller en (6.1) sinon aller en (3) ;
- (6) soit $s \in M$; $M := M - \{s\}$; soit $\sigma(s)$ l'ensemble des sommets non marqués qui sont adjacents à s ;
 si $\sigma(s) = \emptyset$ alors aller en (3) sinon donner la marque $(+,s)$ à tout sommet de $\sigma(s)$; $P := P \cup \sigma(s)$; s'il existe $x'_0 \in P \cap I$ alors aller en (6.1) sinon aller en (6.2) .
- (6.1) $C_k(x'_0)$ est une chaîne augmentante issue de x'_0 dans G^k qui permet d'engendrer dans G une chaîne augmentante issue de x'_0 , soit $G_{\bar{X}}$;
 $S := S \Delta \bar{X}$; effacer toutes les marques , considérer le graphe G et aller en (1) ;
- (6.2) soit $\Sigma(s)$ l'ensemble des sommets marqués $(-,s)$ qui sont saturés par S et adjacents à au moins un sommet de $\sigma(s)$; si $\Sigma(s) = \emptyset$ alors aller en (5) sinon supprimer les sommets de $\Sigma(s)$; supprimer les sommets inessentiels .
 Soit G^{k+1} le graphe obtenu après ces opérations ;
 $k := k+1$; aller en (5) .

IV - EXEMPLE D'APPLICATION DE L'ALGORITHME

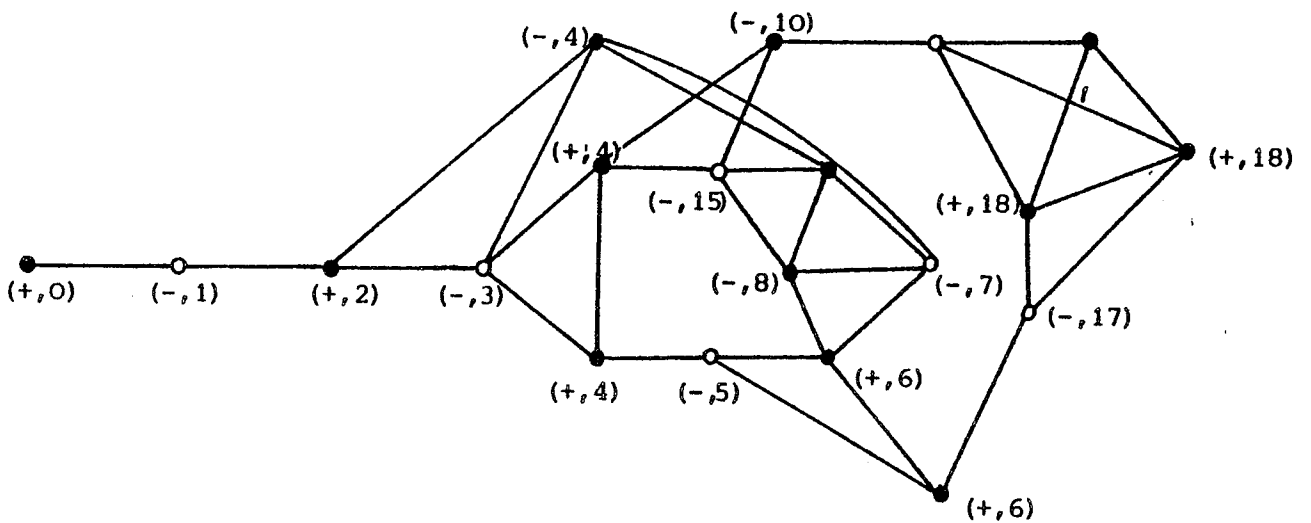
Soit $G = (X, E)$ le graphe sans étoile représenté ci-dessous et S un stable maximal de G ;



On supprime le sommet 19 car c'est un sommet inessentiel. Soit G' le graphe obtenu après cela; $I = \{1, 13\}$.

On pose $x_0 = 1$, $G^0 = G'$;

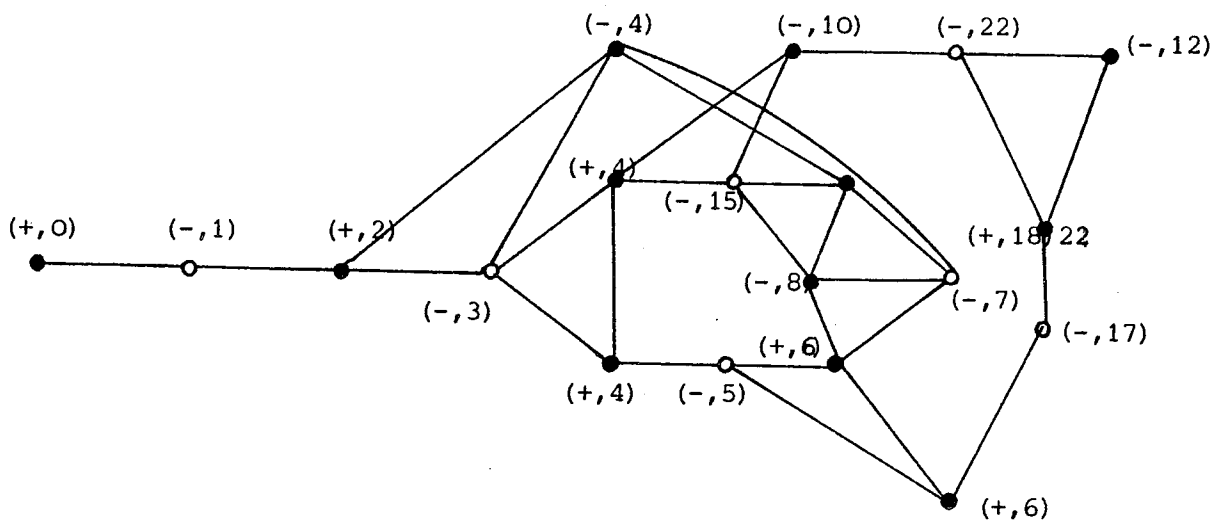
On applique l'algorithme à partir de x_0 dans G^0 ce qui donne les marquages suivants :



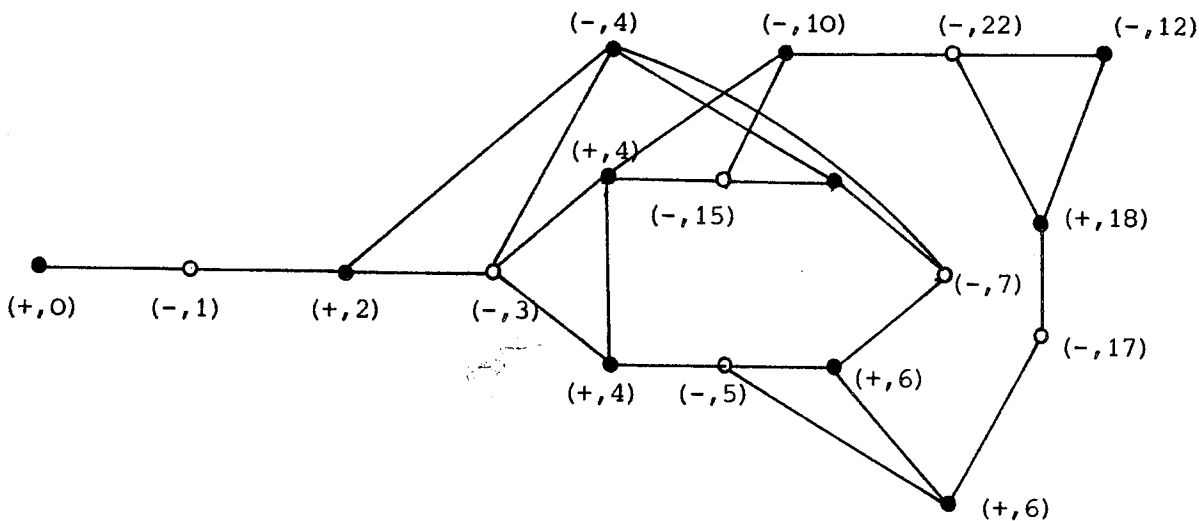
A ce niveau on a $P = \{20, 21\}$ et $M = \{8, 10\}$;

Traitons le sommet 20 ; $s = 18$, $s' = 12$ et $A(s') = \{20,21\}$.

On réduit donc G^0 par rapport à la clique $A(s')$ qu'on contracte en un sommet soit le sommet 22 ; on obtient le graphe G^1 représenté ci-dessous :



Nous avons marqué les sommets 12 et 13 à partir du sommet 22 après quoi $P = \emptyset$ et $M = \{8,10,12\}$; examinons le sommet 8 ; on a $\sigma(8) = \{9\}$ et $\Sigma(8) = \{16\}$; on supprime le sommet 16 ce qui donne le graphe G^2 représenté ci-dessous :

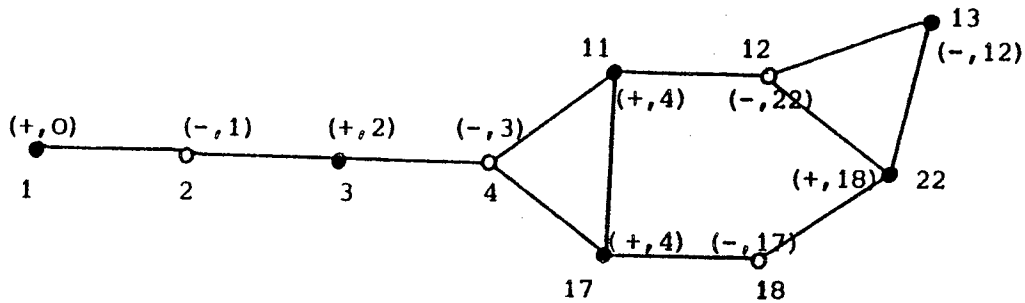


On donne la marque (+,8) au sommet 9 ; $P = \{9\}$.

On examine donc le sommet 9 ; $s = 8$ et $s' = 10$.

Or s' est marqué (-,15); posons $C = C_2(7) \Delta C_2(8)$;

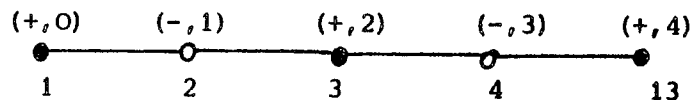
On a $s_t = 4$; on supprime le sommet 14 car c'est un sommet marqué $(-,4)$ qui est adjacent à un sommet de $S \cap C$ à savoir le sommet 8. Soit G^3 le graphe obtenu après cette opération ; G_C^3 est un cycle impair sans corde de longueur supérieure à cinq ;
 le graphe G^4 représenté ci-dessous résulte de la réduction de G^3 par rapport à G_C^3 .



On a alors $P = \{11\}$ et $M = \{12\}$.

Lorsqu'on traite le sommet 11, on constate que le sommet s' correspondant, à savoir le sommet 12 est marqué $(-,22)$;

$G^4_{\{11,12,22,18,17\}}$ est un cycle impair sans corde de longueur cinq ; soit G^5 le graphe obtenu en réduisant G^4 par rapport à ce cycle impair ; G^5 est représenté ci-dessous :



On a $P = \{13\} = P \cap I$; $\mathcal{C}_5 = C_5(13) = G^5$ est une chaîne augmentante par rapport à S dans G^5 . Nous allons voir à présent comment \mathcal{C}_5 engendre une chaîne augmentante issue de x_0 dans G .

Le sommet 13 a été marqué $(+,4)$ au cours de l'opération de marquage qui a suivi la réduction de G^4 par rapport à $G^4_{\{11,12,22,18,17\}}$.

Le sommet 13 est relié au sommet 4 par la c.a. $C_4 = G^4_{\{4,11,12,13\}}$ et au sommet 1 par la c.a. $\mathcal{C}_4 = G^4_{\{1,2,3\}} \cup C_4$ qui est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^4 .

Par ailleurs le sommet 11 a été marqué $(+,4)$ au cours des marquages qui ont suivi

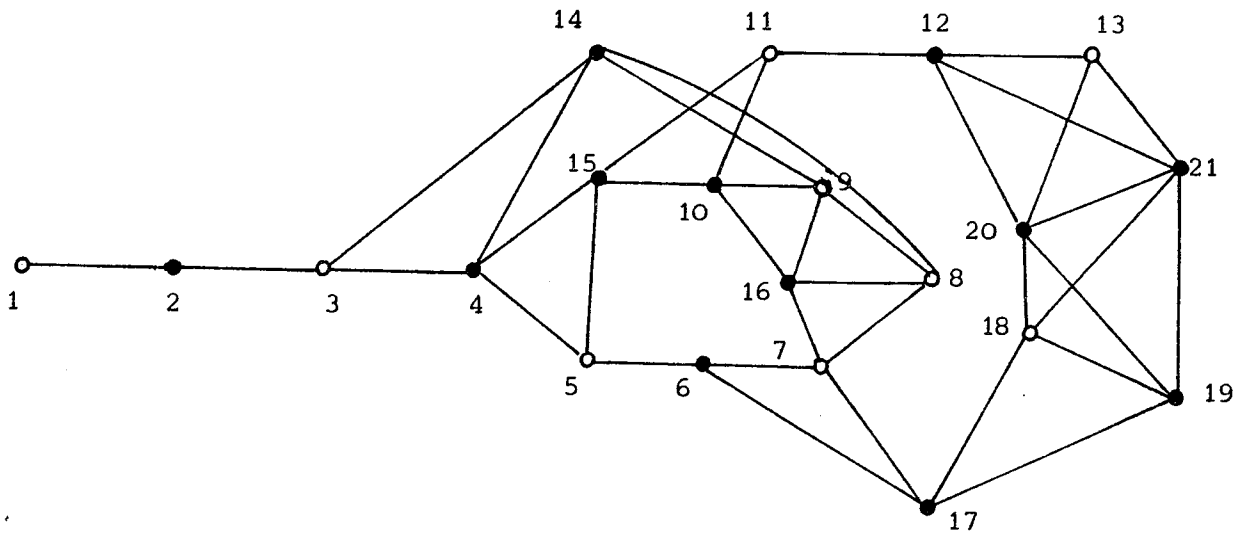
la réduction de G^3 par rapport au cycle impair $G^3_{\{5,6,7,8,9,10,15\}}$.

Le sommet 11 est relié au sommet 4 par la c.a.

$$C_3 = G^3_{\{4,5,6,7,8,9,10,11\}}$$

En insérant C_3 entre les sommets 4 et 11 dans \mathcal{C}_4 on obtient la c.a.

$\mathcal{C} = G^3_{\{1,2,3,\dots,11,12,13\}}$ qui est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G ; on augmente alors le stable S ce qui donne :



On remarque alors que l'ensemble I des sommets insaturés par S se réduit au sommet 19 : S est donc un stable de G de cardinalité maximum.

IV - JUSTIFICATION DE L'ALGORITHME

I - INTRODUCTION

Pour justifier l'algorithme proposé , nous allons d'une part en justifier le pas (3) et d'autre part traiter les trois points suivants:

- 1°) justifier les suppressions de sommets que l'on fait au pas (6.2);
- 2°) démontrer la validité de l'opération de réduction par rapport à un cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq ;
- 3°) démontrer la validité de l'opération de réduction par rapport à une clique ;

et ce en faisant l'hypothèse (H) suivante:

Pour démontrer l'un des points mentionnés ci-dessus , nous supposerons les deux autres points démontrés. Ceci est licite parce qu'on peut supposer sans perte de généralité que lorsqu'on traite un point , on n'a pas encore eu à faire des opérations dont la démonstration de la validité fait l'objet d'un autre point et ce , parce que le graphe obtenu après chaque opération conserve la propriété de graphe sans étoile et l'existence ou la non existence de chaîne augmentante issue du sommet insaturé de départ.

Comme on l'a vu dans le chapitre II, on sera parfois amené au cours des opérations de réduction à ajouter des arêtes afin de garder la structure de graphe sans étoile . Cependant l'adjonction d'une arête entre deux sommets x et x' n'appartenant pas au stable ne doit pas altérer l'existence de chaîne augmentante issue du sommet insaturé x_0 de départ , aussi serons-nous amenés à montrer dans ce cas que s'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 empruntant x et x' , alors il en existe une qui ne les emprunte pas simultanément . Pour démontrer cela nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme 2 :

Soient $G^k = (X_k, E_k)$ un graphe sans étoile et S un stable de G^k ;
 soit s_t un sommet de S relié à un sommet insaturé x_0 par une c.a. C_t définie
 par la séquence $(x_0, s_0, \dots, x_t, s_t)$. Soient x et x' deux sommets de $X_k - S - \{x_0\}$
 reliés à s_t par des c.a. C et C' respectivement; on suppose que :

$$(i) \quad C_t \cap C = C_t \cap C' = \{s_t\}; \quad x \notin C'; \quad x' \notin C;$$

$$(ii) \quad G_{C_t \cup C - \{x\}}^k \quad \text{et} \quad G_{C_t \cup C' - \{x'\}}^k \quad \text{sont des c.a. ;}$$

$$(iii) \quad \text{si } C = \{s_t, x\} \quad \text{alors } (x_t, x) \notin E_k;$$

$$(iv) \quad \text{si } C' = \{s_t, x'\} \quad \text{alors } (x_t, x') \notin E_k;$$

$$(v) \quad C_t \text{ satisfait la propriété } (*);$$

Soit \mathcal{C} une chaîne augmentante joignant x_0 et x'' empruntant x et x' dans
 cet ordre en partant de x_0 telle que :

$$- \quad V(C - \{x\}) \cap (\mathcal{C}(x_0, x) \cup \mathcal{C}(x', x'')) \subset V(s_t) \cup \{x, x'\}$$

$$- \quad V(C' - \{x'\}) \cap (\mathcal{C}(x_0, x) \cup \mathcal{C}(x', x'')) \subset V(s_t) \cup \{x, x'\}.$$

Il existe une chaîne augmentante \mathcal{C}' joignant x_0 et x'' empruntant
 au plus un des deux sommets x et x' .

Démonstration :

$$\text{Posons :} \quad Y = C_t \cap \mathcal{C}(x', x'')$$

1er cas $Y = \emptyset$

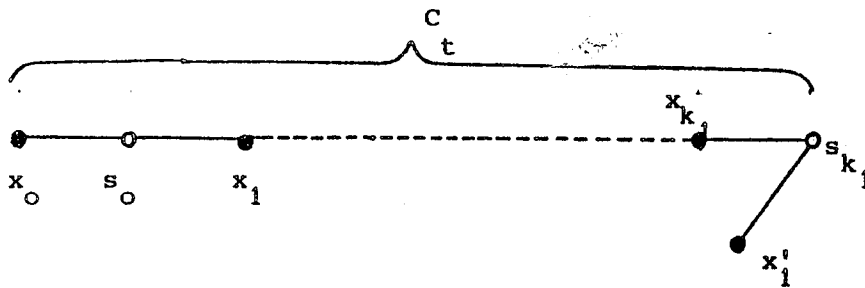
$\mathcal{C}' = G_{C_t}^k \cup C' \cup \mathcal{C}(x', x'')$ convient car c'est une c.a. d'après le lemme 1.

2ème cas $Y \neq \emptyset$

Dans ce cas, la construction de \mathcal{C}' se fait de manière algorithmique ; avant de donner l'algorithme, nous allons expliquer comment il fonctionne sur quelques pas.

On suppose que pour parcourir \mathcal{C} , on part de x_0

- 1 - Soit s_{k_1} le dernier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à Y ;
 $s_{k_1} \in S$ (d'après la remarque II.1)
 Soit x'_1 le sommet de \mathcal{C} qui suit s_{k_1}



- a) si $(x_{k_1}, x'_1) \notin E_k$ alors d'après le lemme 1

$$\mathcal{C}' = G_{C_t}^k(x_0, s_{k_1}) \cup \mathcal{C}(s_{k_1}, x''_0) \text{ convient.}$$

- b) si $(x_{k_1}, x'_1) \in E_k$ alors

(1) si $s_{k_1} = s_t$ alors $\mathcal{C}' = G_{\mathcal{C}(x_0, x)}^k \cup C \cup \mathcal{C}(s_t, x''_0)$

est une chaîne augmentante issue de x_0 ne contenant pas x' .

- (2) si $x_{k_1} \neq s_t$ alors $(x'_1, x_{k_1+1}) \notin E_k$ car C_t satisfait la propriété (*).

2 - Soit s_{k_2} le premier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à $\mathcal{C}(x_0, x) \cap C_t(s_{k_1}, s_t)$ (s'il existe)

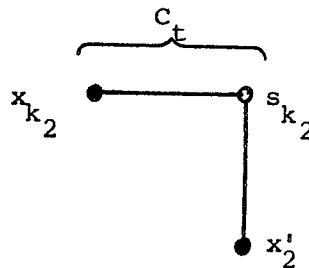
- si s_{k_2} n'existe pas alors :

$$\mathcal{C}' = G^k \mathcal{C}(x_0, x) \cup C \cup C_t(s_{k_1}, s_t) \cup \mathcal{C}(s_{k_1}, x'') \text{ est une c.a.}$$

d'après le lemme 1 ; c'est donc une chaîne augmentante issue de x_0 qui n'emprunte pas le sommet x' .

- si s_{k_2} existe alors $s_{k_2} \in S$ (d'après la remarque II.1).

Soit x'_2 le sommet de \mathcal{C} qui précède s_{k_2} ; $x'_2 \notin C_t$ d'après la définition de s_{k_2} ;



a) si $(x_{k_2}, x'_2) \notin E_k$ alors d'après le lemme 1,

$$\mathcal{C}' = G^k \mathcal{C}(x_0, s_{k_2}) \cup C_t(s_{k_1}, s_{k_2}) \cup \mathcal{C}(s_{k_1}, x'') \text{ est une chaîne}$$

augmentante issue de x_0 n'empruntant pas x' .

b) si $(x_{k_2}, x'_2) \in E_k$ alors

(1) si $s_{k_2} = s_t$ alors d'après le lemme 1,

$$\mathcal{C}' = G^k \mathcal{C}(x_0, s_t) \cup C' \cup \mathcal{C}(x', x'') \text{ est une c.a.,}$$

c'est donc une chaîne augmentante issue de x_0 qui n'emprunte pas le sommet x .

(2) si $s_{k_2} \neq s_t$ alors $(x'_2, x_{k_2+1}) \notin E_k$ car C_t satisfait la propriété (*).

3 - Soit s_{k_3} le dernier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à $C_t(s_{k_2}, s_t) \cap \mathcal{C}(x', x''_0)$ (s'il existe).

- si s_{k_3} n'existe pas alors d'après le lemme 1

$$\mathcal{C}' = G^k \mathcal{C}(x_0, s_{k_2}) \cup C_t(s_{k_2}, s_t) \cup \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}(x', x''_0)$$

est une c.a., donc une chaîne augmentante issue de x_0 n'empruntant pas le sommet x .

- si s_{k_3} existe alors soit x'_3 le sommet de \mathcal{C} qui suit s_{k_3}

a) si $(x_{k_3}, x'_3) \notin E_k$ alors

$$\mathcal{C}' = G^k \mathcal{C}(x_0, s_{k_2}) \cup C_t(s_{k_2}, s_{k_3}) \cup \mathcal{C}(s_{k_3}, x''_0)$$

est une chaîne augmentante issue de x_0 qui n'emprunte ni x , ni x' .

b) si $(x_{k_3}, x'_3) \in E_k$ alors

(1) si $s_{k_3} = s_t$ alors d'après le lemme 1

$$\mathcal{C}' = G^k \mathcal{C}(x_0, x) \cup C \cup \mathcal{C}(s_t, x''_0)$$

est une c.a., c'est donc une chaîne augmentante issue de x_0 qui n'emprunte pas x' .

(2) si $s_{k_3} \neq s_t$ alors $(x'_3, x_{k_3+1}) \notin E_k$ car C_t satisfait la propriété (*).

On définit alors s_{k_4} à partir de s_{k_3} , comme on a défini s_{k_2} à partir de s_{k_1} et ainsi de suite, d'où l'algorithme suivant :

Algorithme de construction de \mathcal{C}' dans le cas où $Y \neq \emptyset$

- (0) Soit s_{k_1} le dernier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à Y ; soit x'_1 le sommet de \mathcal{C} qui suit s_{k_1} ; $j = 1$;
 Si $(x'_1, x_{k_1}) \notin E_k$ alors stop :

$\mathcal{C}' = G_{C_t(x_0, s_{k_1})}^k \cup \mathcal{C}(s_{k_1}, x''_0)$ est une chaîne augmentante issue de x_0 n'empruntant ni x , ni x' .

- (1) si $s_{k_j} = s_t$ alors stop :

$\mathcal{C}' = G_{\mathcal{C}(x_0, x)}^k \cup C \cup \mathcal{C}(s_t, x''_0)$ est une chaîne augmentante issue de

x_0 n'empruntant pas x' .

si $s_{k_j} \neq s_t$ alors $s_{k_{j+1}}$ le premier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à

$\mathcal{C}(x_0, x) \cap C_t(s_{k_j}, s_t)$ (s'il existe) ;

- si $s_{k_{j+1}}$ n'existe pas alors stop :

$\mathcal{C}' = G_{\mathcal{C}(x_0, x)}^k \cup C \cup C_t(s_{k_j}, s_t) \cup \mathcal{C}(s_{k_j}, x''_0)$ est une chaîne

augmentante issue de x_0 n'empruntant pas x' .

- si $s_{k_{j+1}}$ existe alors soit x'_{j+1} le sommet de \mathcal{C} qui précède $s_{k_{j+1}}$.

- (i) si $(x_{k_{j+1}}, x'_{j+1}) \notin E_k$ alors stop :

$\mathcal{C}' = G_{\mathcal{C}(x_0, s_{k_{j+1}})}^k \cup C_t(s_{k_j}, s_{k_{j+1}}) \cup \mathcal{C}(s_{k_j}, x''_0)$ est une

chaîne augmentante issue de x_0 ne contenant ni x , ni x' .

(ii) si $(x_{k_{j+1}}, x'_{j+1}) \in E_k$ alors :

- si $s_{k_{j+1}} = s_t$ alors stop :

$\mathcal{C}' = G^k_{\mathcal{C}}(x_0, s_t) \cup C' \cup \mathcal{C}(x', x'')$ est une chaîne augmentante

issue de x_0 ne contenant pas x' .

- si $s_{k_{j+1}} \neq s_t$ alors soit $s_{k_{j+2}}$ le dernier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à $\mathcal{C}(x', x'') \cap C_t(s_{k_{j+1}}, s_t)$ (s'il existe).

- si $s_{k_{j+2}}$ n'existe pas alors stop :

$\mathcal{C}' = G^k_{\mathcal{C}}(x_0, s_{k_{j+1}}) \cup C_t(s_{k_{j+1}}, s_t) \cup C' \cup \mathcal{C}(x', x'')$ est une

chaîne augmentante issue de x_0 ne contenant pas x .

- si $s_{k_{j+2}}$ existe alors soit x'_{j+2} le sommet de \mathcal{C} qui suit $s_{k_{j+2}}$.

(i) si $(x_{k_{j+2}}, x'_{j+2}) \notin E_k$ alors stop :

$\mathcal{C}' = G^k_{\mathcal{C}}(x_0, s_{k_{j+1}}) \cup C_t(s_{k_{j+1}}, s_{k_{j+2}}) \cup \mathcal{C}(s_{k_{j+2}}, x'')$

est une chaîne augmentante issue de x n'empruntant ni x , ni x' .

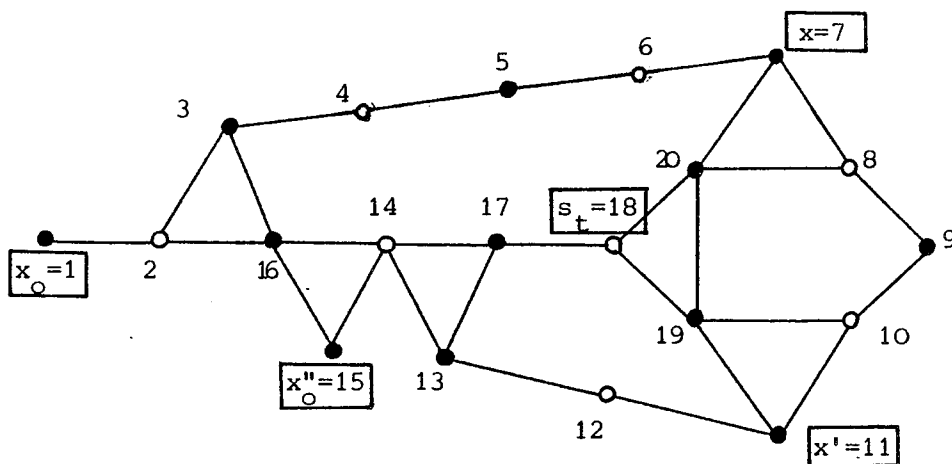
(ii) si $(x_{k_{j+2}}, x'_{j+2}) \in E_k$ alors $j := j+2$ et aller en (1).

Justification de cet algorithme :

L'algorithme est certainement fini puisque C_t ayant un nombre fini de sommets, le nombre de s_{k_j} que l'on met en évidence est fini. Par ailleurs, le sous-graphe \mathcal{C}' de G^k que l'on construit est une chaîne d'après le lemme 1 et la propriété (*) de la chaîne C_t .

Exemple :

Soient $G^k = (X_k, E_k)$ le graphe sans étoile représenté ci-dessous et S un stable de G^k :



On applique le lemme 2 à $C_t = G^k_{\{1,2,16,14,17,18\}}$

$C = G^k_{\{18,19,10,9,8,7\}}$

$C' = G^k_{\{18,20,8,9,10,11\}}$

$\mathcal{C} = G^k_{\{1,2,\dots,15\}}$

On a

$$s_{k_1} = 14, \quad x_{k_1} = 16 \quad \text{et} \quad x'_1 = 15$$

$(x'_1, x_{k_1}) \in E_k$ et s_{k_2} n'existe pas donc :

$$\mathcal{C}' = G^k_{\mathcal{C}(x_0, x)} \cup C \cup C_t(s_{k_1}, s_t) \cup \mathcal{C}(s_{k_1}, x''_0)$$

$$= G^k_{\mathcal{C}(1,7)} \cup C \cup C_t(14,18) \cup \mathcal{C}(14,15)$$

$$= G^k_{\{1,2,\dots,10,19,18,17,14,15\}}$$

\mathcal{C}' est une chaîne augmentante issue de $x_0 = 1$ qui emprunte le sommet $x = 7$ mais ne contient pas le sommet $x' = 11$.

Remarque 7 :

La chaîne \mathcal{C}' construite à partir de la chaîne \mathcal{C} à l'aide du lemme 2 ne contient aucun sommet de $\mathcal{C}(x, x') - \{x, x'\}$. De plus, si $s_t \in \mathcal{C}(x_0, x)$ (resp. $\mathcal{C}(x', x'')$) alors x (resp. x') $\notin \mathcal{C}'$.

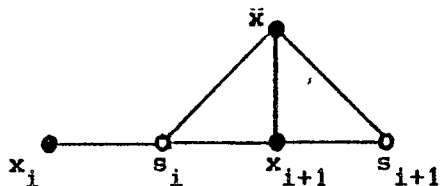
Lemme 3 :

Soient $G^k = (X_k, E_k)$ un graphe sans étoile et S un stable de G^k ; soit s_t un sommet de S marqué $(-, x_t)$ au cours de l'application de l'algorithme à partir du sommet insaturé x_0 . La c.a. $C_t = C_k(s_t) = (x_0, s_0, \dots, x_t, s_t)$ satisfait la propriété (*).

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde. Supposons que C_t ne satisfasse pas la propriété (*), c'est-à-dire qu'il existe un sommet x de $X_k - C_t$ adjacent à trois sommets consécutifs de C_t .

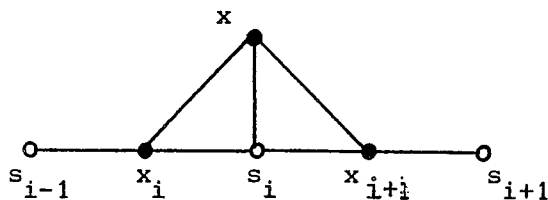
1er cas : x est adjacent à s_i, x_{i+1} et s_{i+1} avec $0 \leq i \leq t-1$.



- si x est marqué $(+, s_i)$ alors on aurait réduit le graphe par rapport à la clique $A(s_{i+1}) = \{y \in V(s_{i+1}) / y \text{ marqué } (+, s_i)\}$
 - contradiction-

- si x n'est pas marqué $(+, s_i)$ alors x serait marqué $(-, s_i)$.
 Etant saturé et adjacent à un sommet de $\sigma(s_i)$ à savoir le sommet x_{i+1} , x appartiendrait à $\Sigma(s_i)$: il aurait donc dû être supprimé.
 - contradiction -

2ème cas : x est adjacent à exactement trois sommets consécutifs de C_t qui sont x_i, s_i et x_{i+1} avec $1 \leq i \leq t-1$.



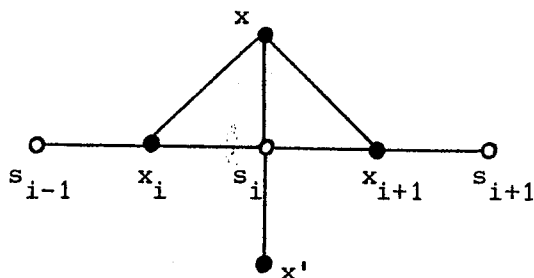
- Remarquons que x est insaturé par S : en effet si x était adjacent à un sommet s'_i de $S - \{s_i\}$ alors

$$G^k_{\{x, s'_i, x_i, x_{i+1}\}} \neq K_{13} \Rightarrow s'_i = s_{i-1} \text{ ou } s'_i = s_{i+1}$$

ce qui contredirait le fait que x est adjacent à exactement à trois sommets de C_t .

- Montrons à présent que x est inessentiel.

Soit x' un sommet de $V(s_i) - \{x, x_i, x_{i+1}\}$



$$G^k_{\{s_i, x_i, x_{i+1}, x'\}} \neq K_{13} \Rightarrow (x', x_i) \in E_k \text{ ou } (x', x_{i+1}) \in E_k$$

(i) si $(x', x_i) \in E_k$ alors :

$$\left. \begin{array}{l} G^k_{\{x_i, s_{i-1}, x, x'\}} \neq K_{13} \\ x \text{ est insaturé par } S \end{array} \right\} \Rightarrow (x', s_{i-1}) \in E_k \text{ ou } (x', x) \in E_k$$

Or d'après le premier cas, $(x', s_{i-1}) \notin E_k$, donc $(x', x) \in E_k$.

(ii) si $(x^i, x_{i+1}) \in E_k$ alors même raisonnement que ci-dessus.

x est donc inessentiel puisque $V(s_i) - \{x\} \subset V(x)$;

x aurait été supprimé - contradiction -

2 - JUSTIFICATION DU PAS (6.2)

Soit s_t un sommet de S marqué $(-, x_t)$ dans $G^k = (X_k, E_k)$ que l'on traite au pas (6) de l'algorithme.

On a :

$$\sigma(s_t) = \{y \in V(s_t) / y \text{ non marqué}\}$$

et $\Sigma(s_t) = \{y \in (V(s_t) - I) \cap V(\sigma(s_t)) / y \text{ est marqué } (-, s_t)\}$

On suppose que $\Sigma(s_t) \neq \emptyset$; montrons que la suppression des sommets de $\Sigma(s_t)$ n'entraîne pas la suppression de toutes les chaînes augmentantes issues de x_0 .

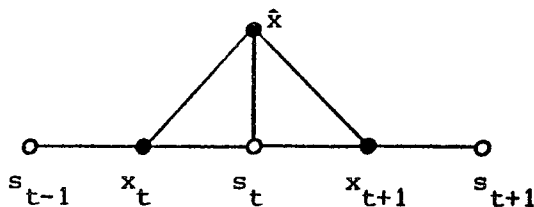
Soient \hat{x} un sommet de $\Sigma(s_t)$ et x_{t+1} un sommet de $\sigma(s_t)$ adjacent à \hat{x} .

D'après l'algorithme $x_{t+1} \notin I$ (car on ne considère $\Sigma(s_t)$ que si $\sigma(s_t) \cap I = \emptyset$) ; soit donc s_{t+1} le sommet de $S - \{s_t\}$ qui est adjacent à x_{t+1} .

Posons $C_t = C_k(s_t) = (x_0, s_0, x_1, \dots, x_t, s_t)$. D'après le lemme 3, C_t satisfait la propriété (*).

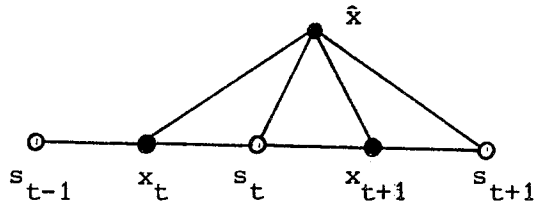
Supposons qu'il existe une chaîne augmentante \mathcal{C} issue de x_0 empruntant le sommet \hat{x} . Pour démontrer que l'on peut supprimer \hat{x} , nous allons exhiber une chaîne augmentante \mathcal{C}' issue de x_0 ne contenant pas \hat{x} .

$\hat{x} \in \Sigma(s_t) \Rightarrow \hat{x} \notin I$. Soit \hat{s} le sommet de $S - \{s_t\}$ qui est adjacent à \hat{x} .



$$G_{\{\hat{x}, \hat{s}, x_t, x_{t+1}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow \hat{s} = s_{t-1} \text{ ou } \hat{s} = s_{t+1}$$

Or $\hat{s} \neq s_{t-1}$ car C_t satisfait la propriété (*). Par conséquent $\hat{s} = s_{t+1}$



Soit x (resp x') le sommet de $\mathcal{C} - \{\hat{x}\}$ qui est adjacent à s_t (resp. s_{t+1}).

$$G_{\{s_t, x_t, x_{t+1}, x\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, x_t) \in E_k \text{ ou } (x, x_{t+1}) \in E_k$$

- si $(x, x_t) \in E_k$ alors $G_{\{x_t, \hat{x}, x, s_{t-1}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, s_{t-1}) \in E_k$
- contradiction, car C_t satisfait la propriété (*).

- si $(x, x_{t+1}) \in E_k$ alors $(x', x_{t+1}) \notin E_k$ car sinon

$$G_{\{x_{t+1}, \hat{x}, x', x\}}^k = K_{13}$$

On suppose que pour parcourir \mathcal{C} on part de x_0 .

- si x se trouve avant x' dans \mathcal{C} alors posons :

$$C = G_{\{s_t, x\}}^k \text{ et } C' = G_{\{s_t, x_{t+1}, s_{t+1}, x'\}}^k$$

- si x se trouve après x' dans \mathcal{C} alors posons :

$$C = G_{\{s_t, x_{t+1}, s_{t+1}, x'\}}^k \text{ et } C' = G_{\{s_t, x\}}^k$$

On vérifie aisément que C_t , C , C' et \mathcal{C} satisfont les conditions du lemme 2. Par conséquent, l'application de ce lemme à ces quatre c.a. fournit une chaîne augmentante \mathcal{G}' issue de x_0 contenant x ou bien x' mais n'empruntant pas \hat{x} (d'après la remarque 7).

On peut donc supprimer les sommets de $\Sigma(s_t)$ sans altérer l'existence de chaîne augmentante issue de x_0 ni la structure de graphe sans étoile, puisque tout sous graphe d'un graphe sans étoile est sans étoile.

Si G^k est un graphe adjoint, alors on démontre que l'arête correspondant à \hat{x} n'est pas indispensable, c'est-à-dire que sa suppression n'entraîne pas la suppression de toutes les chaînes augmentantes issue de l'extrémité insaturée de l'arête correspondant au sommet x_0 .

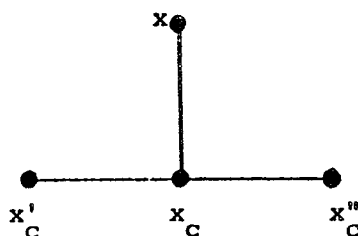
3 - JUSTIFICATION DE L'OPERATION DE REDUCTION PAR RAPPORT A UN CYCLE IMPAIR SANS CORDE DE LONGUEUR SUPERIEURE OU EGALE A CINQ

Considérons un cycle impair sans corde de longueur supérieure ou égale à cinq détecté dans le graphe $G^k = (X_k, E_k)$ soit $G_{\hat{C}}^k$, au pas (5.1.1.) de l'algorithme et ce, au cours de la recherche d'une chaîne augmentante issue du sommet insaturé x_0 .

Soit \tilde{A} l'ensemble des sommets de $X_k - (\hat{C} \cup S)$ qui sont adjacents à des sommets de \hat{C} .

Un sommet x de \tilde{A} est adjacent à au moins deux sommets de \hat{C} . En effet, soit x_c un sommet de $V(x) \cap \hat{C}$.

$$V(x_c) \cap \hat{C} = \{x'_c, x''_c\}.$$



$$G_{\{x_c, x_c', x_c''\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, x_c') \in E_k \text{ ou } (x, x_c'') \in E_k$$

c.q.f.d.

Par ailleurs, $|\hat{C} \cap S| = \frac{|\hat{C}|-1}{2}$ et $\hat{C} \cap I = \emptyset$.

Soit donc s_t le seul sommet de $S-\hat{C}$ qui est adjacent à des sommets de \hat{C} ; s_t est adjacent à exactement deux sommets de \hat{C} .

D'après le lemme 3, $C_t = C_k(s_t) = (x_0, s_0, \dots, x_t, s_t)$ satisfait la propriété (*).

3.1 - Montrons qu'on peut joindre par une arête tout couple de sommets de \tilde{A}

Pour cela démontrons que s'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 empruntant plus d'un sommet de \tilde{A} , alors il en existe une qui contient au plus un sommet de \tilde{A} et ce, à l'aide du lemme 2.

Supposons donc qu'il existe une chaîne augmentante \mathcal{C} issue de x_0 contenant plus d'un sommet de \tilde{A} .

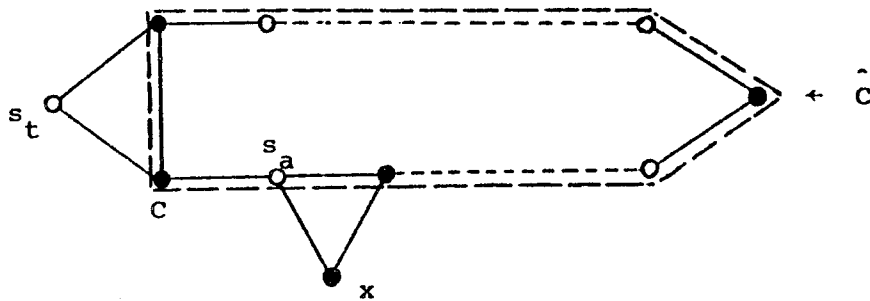
Soit x'' l'extrémité de \mathcal{C} différente de x_0 ; on suppose que pour parcourir \mathcal{C} on part de x_0 .

Soit x (resp. x') le premier (resp. dernier) sommet de \mathcal{C} qui appartient à \tilde{A} . Montrons qu'il existe deux c.a. C et C' joignant s_t à x et x' respectivement qui, avec C_t et \mathcal{C} , satisfont les conditions du lemme 2.

a) Recherche de C

Soit s_a (resp. s) le sommet de \mathcal{C} qui précède (resp. suit) x .

- (i) si $s_a \in \hat{C}$ alors dans $G_{\hat{C} \cup \{s_t\}}^k$ il existe deux c.a. C_1 et C_2 joignant s_t et s_a dont l'une seulement a un seul sommet adjacent à x , disons C_1 ; posons $C = G_{C_1}^k \cup \{x\}$.



(ii) si $s_a \notin \hat{C}$ alors deux cas se présentent.

(ii.1) si $s \in \hat{C}$ alors supposons que x soit adjacent à plus de deux sommets de \hat{C} . On serait dans l'un des deux cas de figure suivants :

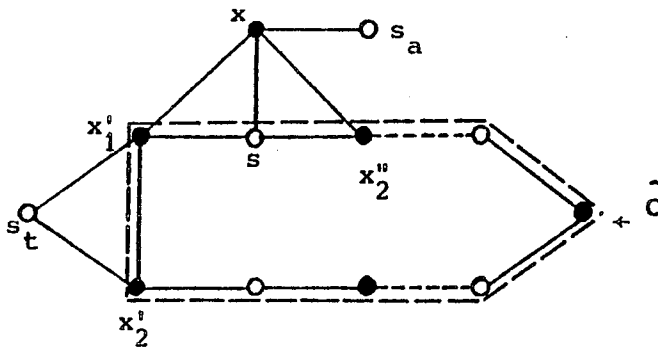


Figure 1

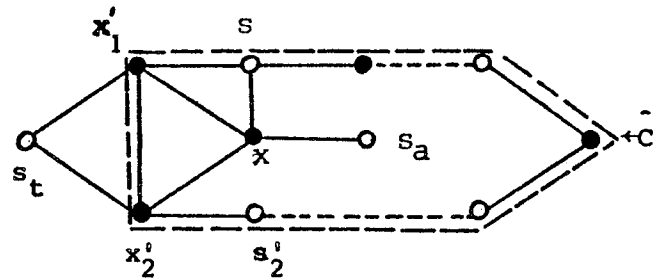


Figure 2

Soit $A(s)$ l'ensemble des sommets marqués $(+, s_t)$ qui sont adjacents à s ; $x_1^i \in A(s)$.

Dans le cas de la figure (1),

$$G_{\{x, x_1^i, x_2^ii, s_a\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow s_a = s_t$$

dans le cas de la figure (2),

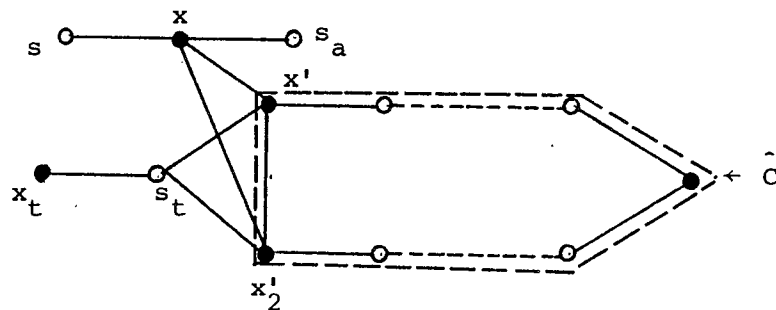
$$G_{\{x, x_2^i, s, s_a\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow s_a = s_t$$

$$\Rightarrow x \in A(s) \cup \Sigma(s_t)$$

Ceci est impossible, car on aurait soit réduit le graphe par rapport à la clique $A(s_t)$ (si $x \in A(s_t)$, soit supprimé x s'il appartient à $\Sigma(s_t)$.

Par conséquent, x est adjacent à exactement deux sommets de \hat{C} et C s'obtient alors de la même manière que dans le cas (i).

(ii.2) si $s \notin \hat{C}$ alors on se trouve dans le cas de figure suivant :



pour que $G_{\{x, s, s_a, x'_1\}}^k$ ne soit pas une étoile, il faut que $s_a = s_t$
 ou $s = s_t$
 si $(x, x_t) \in E_k$ alors

si $s_a = s_t$ alors $G_{\{x, x'_1, x_t, s\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow s = s_{t-1}$

Ceci contredit le fait que C_t satisfait la propriété (*).

si $s = s_t$ alors un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus aboutit à une contradiction.

Donc $(x, x_t) \notin E_k$. Posons $C = G_{\{s_t, x\}}^k$.

b) Recherche de C'

Soit s' le sommet de \mathcal{C} qui précède x , x'' le sommet de \mathcal{C} qui précède s' ;

(i) si $s' \in \hat{C}$ alors supposons que x' soit adjacent à exactement trois sommets de \hat{C} . On serait dans l'un des cas de figure suivants :

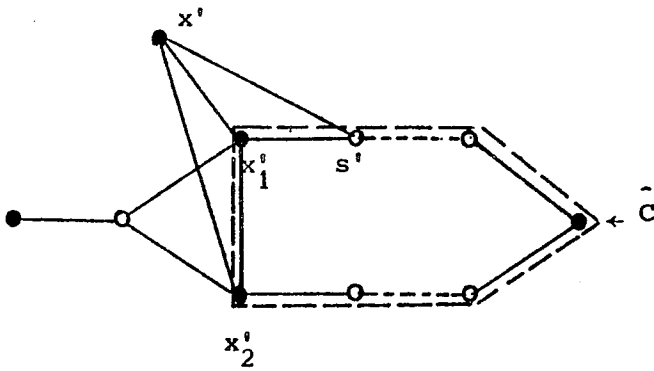


Figure (3)

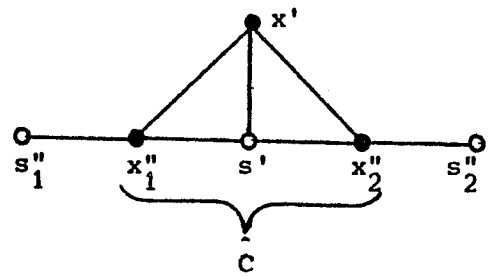
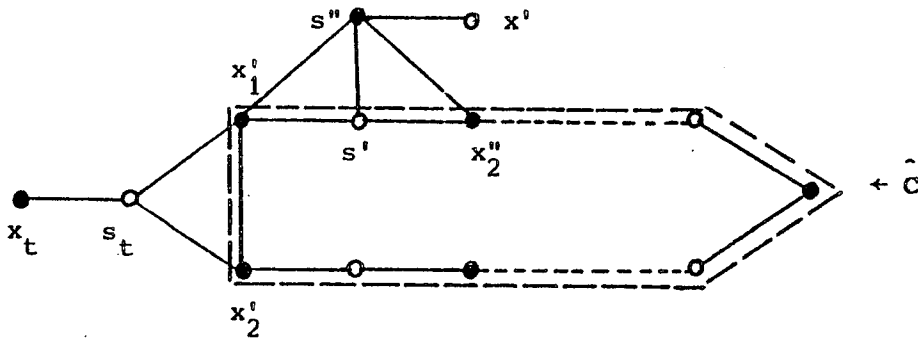


Figure (4)

Dans le cas de la figure (3), on démontre comme dans le cas de la figure (2) que $x' \in A(s') \cup \Sigma(s_t)$ ($A(s')$ étant l'ensemble des sommets de $V(s')$ qui sont marqués $(+, s_t)$). Ce cas est donc impossible.

Cas de la figure (4)

- (1) si $x' \notin I$ alors x' est adjacent à un sommet s'' de $S-\{s'\}$



$$G_{\{x', s'', x'_1, x''_2\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow s'' = s_t$$

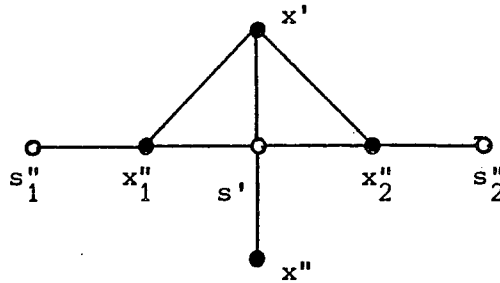
si $(x'_1, x_t) \in E_k$ alors $G_{\{x', x_t, x'_1, x''_2\}}^k = K_{13}$ - contradiction -

Donc $(x', x_t) \notin E_k$; $x' \in A(s') = \{y \in V(s') / y \text{ marqué } (+, s_t)\}$

et $|A(s')| \geq 2$. On aurait donc réduit le graphe par rapport à la clique $A(s')$ - contradiction -

(2) si $x' \in I$ alors on peut supposer sans perte de généralité que s' a été marqué $(-,.)$ à partir de x'_1 .

(α) si s' a été examiné, i.e. $s' \notin M$, alors x'' est marqué $(+,s')$.



$$G^k_{\{s', x''_1, x''_2, x''\}} \neq K_{13} \Rightarrow (x'', x''_1) \in E_k \text{ ou } (x'', x''_2) \in E_k$$

- si $(x'', x''_1) \in E_k$ alors $G^k_{\{x''_1, x', x'', s''_1\}} \neq K_{13} \Rightarrow (x'', s''_1) \in E_k$

ceci contredit le lemme 3 (appliqué à s').

- si $(x'', x''_2) \in E_k$ alors $G^k_{\{x''_2, s''_2, s'', x''_1\}} \neq K_{13} \Rightarrow (x'', s''_2) \in E_k$

$$\Rightarrow x'' \in A(s''_2) = \{y \in V(s''_2) / y \text{ marqué } (+, s')\}$$

or $A(s''_2) \neq \{x''\}$; on aurait donc réduit le graphe par rapport à la clique $A(s''_2)$ - contradiction -

(β) si $s' \in M$ alors comme dans le cas ci-dessus x'' est adjacent à x''_1 ou à x''_2 ; soit $A(s') = \{y \in V(s') / y \text{ est marqué } (+, s''_2)\}$

- si $(x'', x''_1) \in E_k$ alors même raisonnement que ci-dessus

- si $(x'', x''_2) \in E_k$ alors ou bien x'' est marqué $(-, s''_2)$ auquel cas x'' appartient à $\Sigma(s''_2)$ ou bien x'' est marqué $(+, s''_2)$ auquel cas x'' appartient à $A(s')$. Ceci est impossible car dans le premier cas on aurait supprimé x'' , dans le second cas on aurait réduit le graphe par rapport à la clique $A(s')$.

Donc x' est adjacent à deux, quatre ou cinq sommets de \hat{C} . Si x' est adjacent à exactement deux sommets de \hat{C} alors C' s'obtient de la même manière que dans le cas a-(i). Sinon on se trouve dans l'un des sept cas de figure suivants :

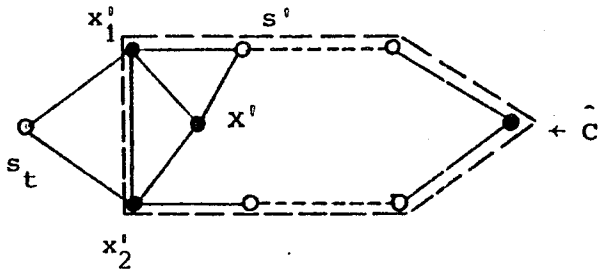


Figure 5

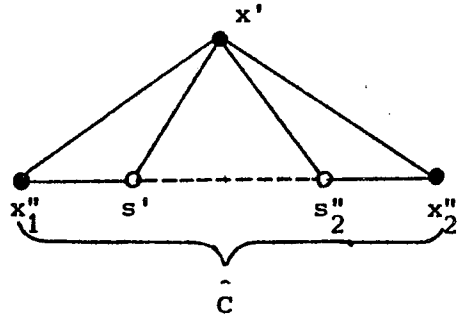


Figure 6

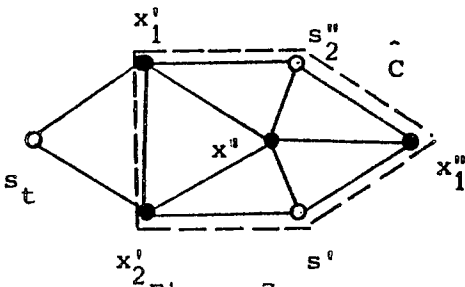


Figure 7

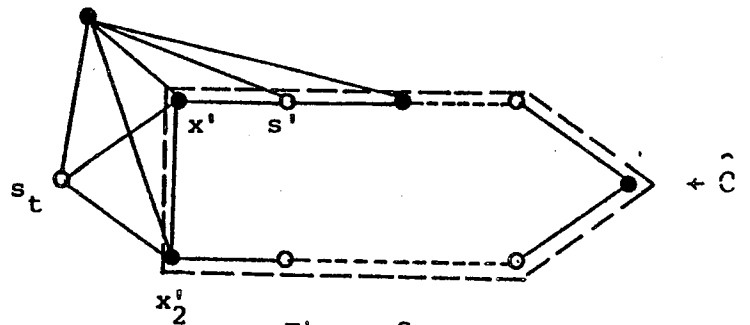


Figure 8

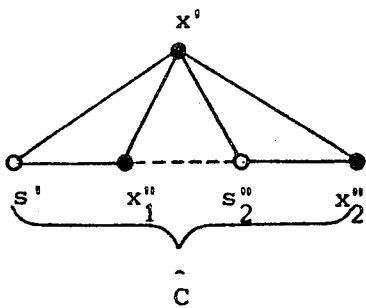


Figure 9

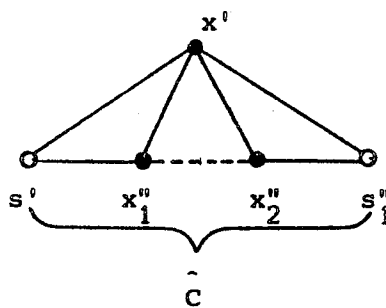


Figure 10

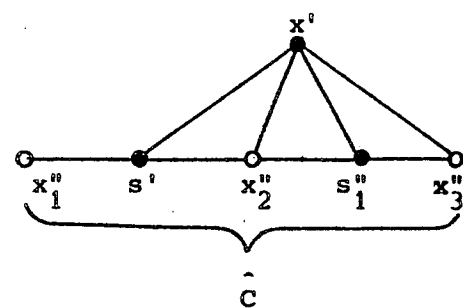


Figure 11

Cas des figures (5), (6) et (7)

Ces cas sont impossibles car ils contredisent le fait que x' soit le dernier sommet de \hat{C} qui appartienne à \tilde{A} .

Cas de la figure (8)

Même raisonnement que dans le cas de la figure (4).

Cas des figures (9) et (10)

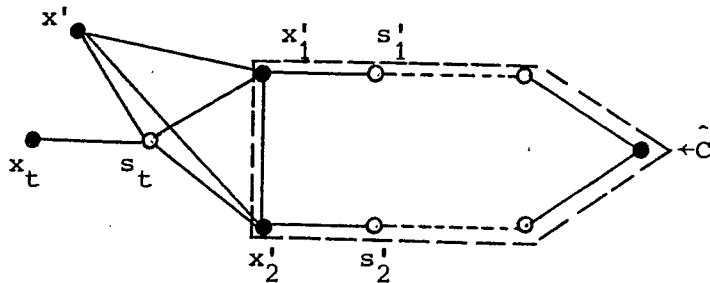
Dans $G_{C \cup \{s_t\}}^k$, il existe deux c.a. C_1 et C_2 joignant s_t et s' dont l'une seulement a un seul sommet adjacent à x' , disons C_1 ; posons $C' = G_{C_1 \cup \{x\}}^k$.

Cas de la figure (11)

Ce cas est impossible car $x' \in \Sigma(s_1'')$ si x' est marqué $(-, s_1'')$ et car $x' \in A(s_1'') = \{y \in V(s_1'') / y \text{ marqué } (+, s_1')\}$ et x' est marqué $(+, s_1')$.

(ii) si $s' \notin \hat{C}$ alors deux cas se présentent :

(ii.1) si $x' \in I$ alors on est dans le cas de figure suivant :



si $(x', x_t) \in E_k$ alors $C_k(s_1')$ et $C_k(s_2')$ contrediraient le lemme 3. Donc $(x', x_t) \notin E_k$. Posons : $C' = G_{\{s_t, x'\}}^k$

(ii.2) si $x' \notin I$ alors C' s'obtient de la même manière que C dans le cas a-(ii).

C_t, C, C' et \mathcal{C} satisfont les conditions du lemme 2.

L'application de ce lemme fournit alors une chaîne augmentante \mathcal{C}' issue de x_0 contenant au plus l'un des deux sommets x et x' et plus précisément au plus un sommet de \tilde{A} (d'après la remarque 7).

On peut donc relier tout couple de sommets de \tilde{A} par une arête sans altérer l'existence de chaîne augmentante issue de x_0 .

Par ailleurs, le sommet \hat{x} de \tilde{A} que \mathcal{C}' contient éventuellement est adjacent à exactement deux sommets de \hat{C} .

En effet, si \hat{x} est adjacent à plus de deux sommets de \hat{C} alors

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } x = \hat{x} \text{ alors } s_t \in \mathcal{C}(x_0, x). \\ \text{si } x' = \hat{x} \text{ alors } s_t \in \mathcal{C}(x', x'') \end{array} \right\} \text{ ceci contredit la remarque 7.}$$

On peut donc supprimer les sommets de \tilde{A} qui sont adjacents à plus de deux sommets de \hat{C} puisque si une chaîne augmentante issue de x_0 emprunte un tel sommet alors elle contient un autre sommet de \tilde{A} et par conséquent à l'aide du lemme 2 on peut exhiber une chaîne augmentante issue de x_0 ne contenant pas de sommet x de A tel que $|V(x) \cap \hat{C}| > 2$.

De plus on peut relier par une arête tout sommet restant de \tilde{A} à s_t car toute chaîne augmentante issue de x_0 contenant un seul sommet de \tilde{A} , contient nécessairement le sommet s_t .

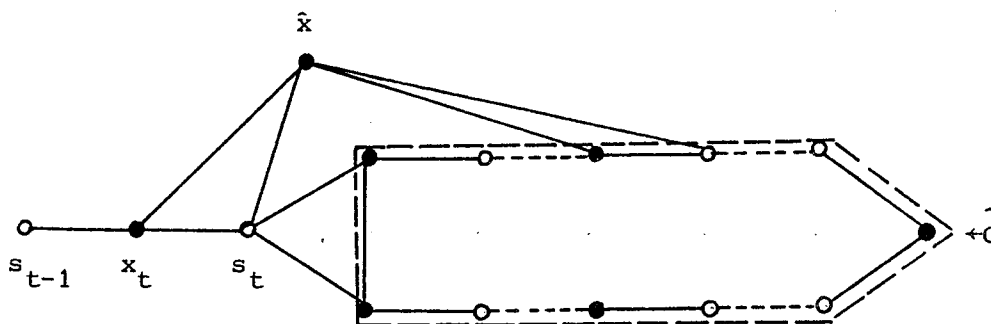
3.2 - On peut supprimer les sommets de $V(S \cap \hat{C})$ qui sont marqués $(-, s_t)$

Soit \hat{x} un sommet de $V(S \cap \hat{C})$ marqué $(-, s_t)$.

Pour supprimer \hat{x} , nous allons montrer que s'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 contenant \hat{x} , alors il en existe une qui ne contient pas \hat{x} et ce en utilisant le lemme 2.

Soit donc \mathcal{C} une chaîne augmentante issue de x_0 empruntant \hat{x} .

Soit x le sommet de $\mathcal{C} - \{\hat{x}\}$ qui est adjacent à s_t



si $(x, x_t) \in E_k$ alors $G_{\{x_t, s_{t-1}, \hat{x}, x\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, s_{t-1}) \in E_k$ ce qui contredit le fait que C_t satisfait la propriété $(*)$. Donc $(x, x_t) \notin E_k$. Pour parcourir \mathcal{C} , on part de x_0 .

1er cas :

x se trouve après \hat{x} dans \mathcal{C} .

Soit x' le premier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à \tilde{A} . x' est adjacent à exactement deux sommets de \hat{C} d'après le 3.1.a. et la chaîne alternée C joignant s_t et x' s'obtient de la même manière que C dans le 3.1.a.

Posons $C' = G_{\{s_t, x'\}}^k$.

2ème cas :

x se trouve avant \hat{x} dans \mathcal{C} .

Soit x' le dernier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à \tilde{A} . La chaîne alternée C' joignant s_t et x' s'obtient de la même manière que C' dans le 3.1.b.

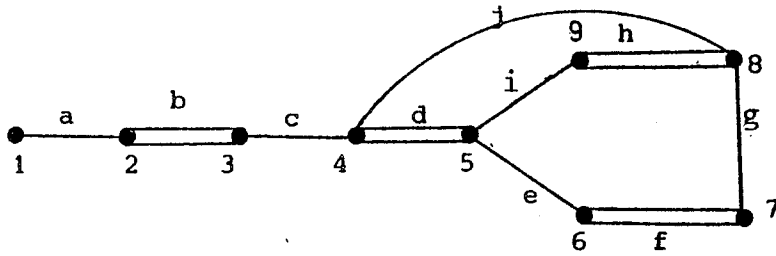
Posons $C = G_{\{s_t, x'\}}^k$.

L'application du lemme 2 aux c.a. C_t, \mathcal{C}, C et C' fournit une chaîne augmentante issue de x_0 qui n'emprunte pas \hat{x} d'après la remarque 7.

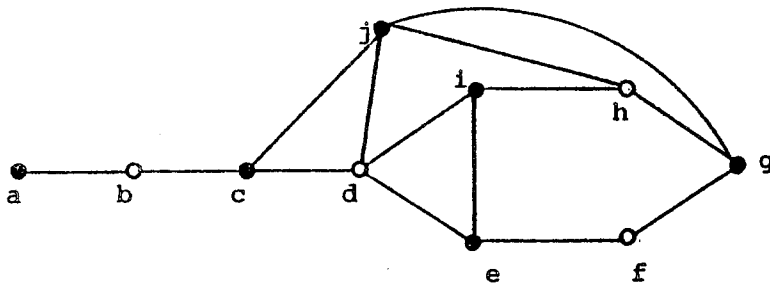
c.q.f.d.

A présent examinons à quoi correspond cette opération dans l'algorithme du couplage.

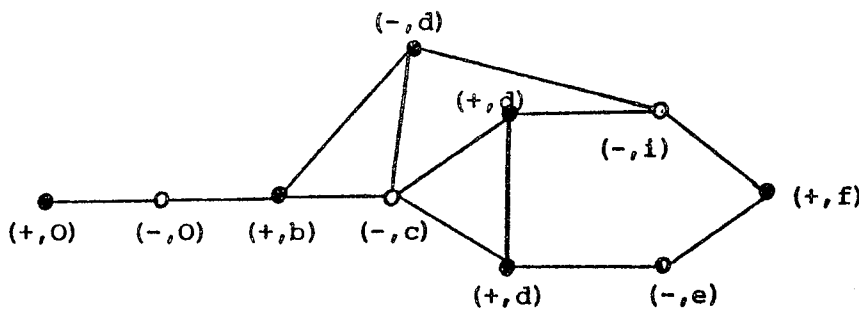
Soient G le graphe représenté ci-dessous et \mathcal{C} un couplage de G dont les arêtes sont représentées par des traits doubles :



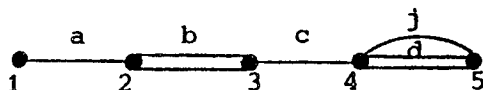
Le graphe adjoint \bar{G} de G est représenté ci-dessous. Soit S le stable constitué des sommets de \bar{G} qui correspondent aux arêtes de \mathcal{C} .



L'application de l'algorithme à partir de $x_0 = a$ donne les marquages suivants :



On détecte le cycle impair sans corde $\bar{G}_{\bar{C}}$ avec $\bar{C} = \{e, f, g, h, i\}$. De la même manière lorsqu'on applique l'algorithme du couplage dans G à partir du sommet insaturé 1, on détecte le cycle impair $G_{\{5,6,7,8,9\}}$ qu'on contracte après quoi on obtient le graphe représenté ci-dessous :



On voit bien que l'arête j ne sert à rien et qu'on peut très bien la supprimer. Or dans \bar{G} le sommet j qui correspond à l'arête j est marqué $(-,d)$ et est adjacent au sommet h de $S \cap \bar{C}$; par conséquent h est du type de \hat{x} .

On pourrait dans l'algorithme du couplage supprimer les arêtes telles que j dans G mais ceci n'est pas obligatoire, par contre dans \bar{G} on ne peut garder le sommet j après réduction de \bar{G} par rapport à \bar{G}_C , car il devient insaturé.

3.3 - S'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k alors il en existe une dans le graphe réduit et réciproquement

Désignons par G^{k+1} le graphe obtenu en réduisant G^k par rapport à G_C^k .

- a - Il est évident que l'existence d'une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k entraîne l'existence d'une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^{k+1} .
- b - Réciproquement, soit \mathcal{C}' une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^{k+1} . Si \mathcal{C}' ne contient aucun sommet de \tilde{A} alors \mathcal{C}' est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k .
Si \mathcal{C}' emprunte un sommet x de \tilde{A} alors on a vu qu'il existe dans $G_C^k \cup \{s_t, x\}$ une c.a. joignant s_t et x .

la chaîne \mathcal{C} obtenue en insérant dans \mathcal{C}' la chaîne C entre s_t et x est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G_k .

3.4 - Le graphe $G^{k+1} = (X_{k+1}, E_{k+1})$ est un graphe sans étoile

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe dans G^{k+1} une étoile soit G_Q^{k+1} . Soit d le sommet de degré trois de cette étoile.

$$Q = \{d, x, x', x''\} ; A = \tilde{A} \cup \{s_t\}$$

Il est clair que $d \notin A$ (car les sommets de A sont les seuls sommets dont le voisinage a été modifié)

$$\left. \begin{array}{l} G_{\{d,x,x',x''\}}^{k+1} = K_{13} \Rightarrow |\{x,x',x''\} \cap A| \leq 1 \\ \{x,x',x''\} \cap A = \emptyset \Rightarrow G_Q^k = K_{13} \end{array} \right\} \Rightarrow |\{x,x',x''\} \cap A| = 1$$

On peut donc supposer que $x \in A$.

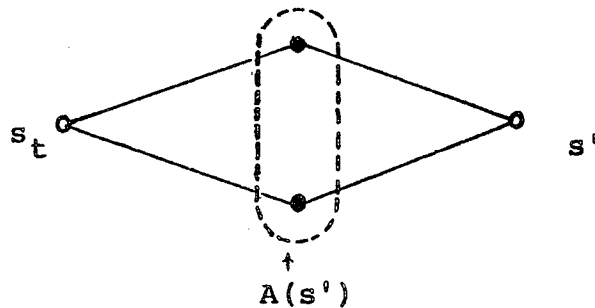
Soit $\hat{x} \in \hat{C} \cap V(d)$;

$$G_{\{d,x',x'',\hat{x}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x',\hat{x}) \in E_k \quad \text{ou} \quad (x'',\hat{x}) \in E_k$$

$\Rightarrow \{x',x''\} \cap A \neq \emptyset$ - contradiction -

4 - JUSTIFICATION DE L'OPERATION DE REDUCTION PAR RAPPORT A UNE CLIQUE

Soit $A(s')$ une clique de sommets marqués $(+,s_t)$ tous adjacents au sommet s' de S , détectée au pas (5) de l'algorithme au cours de la recherche d'une chaîne augmentante issue du sommet insaturé x_0 dans $G^k = (X_k, E_k)$.



$$\text{Posons : } A = V(A(s')) - V(s') \cup \{s'\}$$

$$B = V(A(s')) \cap V(s')$$

$$C = \bigcap_{\{x_c \in A(s')\}} V(x_c)$$

Remarquons que les ensembles A , B et C recouvrent $V(A(s'))$.

En effet, soit $x \in V(A(s'))$;

si $x \in \{s_t, s'\}$ alors $x \in C$;

si $x \notin \{s_t, s'\}$ alors soit $x_c \in A(s') \cap V(x)$;

$$G_{\{x_c, s_t, s', x\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, s_t) \in E_k \text{ ou } (x, s') \in E_k$$

or $x \in V(s_t) \cap V(s') - A(s') \Rightarrow x \in \Sigma(s_t)$; ceci contredit l'hypothèse (H) ;
donc $x \in A \cup B$.

Posons $C_t = C_k(s_t) = (x_0, s_0, \dots, x_t, s_t)$; d'après le lemme 3, C_t satisfait la propriété (*).

Pour justifier la réduction par rapport à $A(s')$, nous allons démontrer les quatre points suivants :

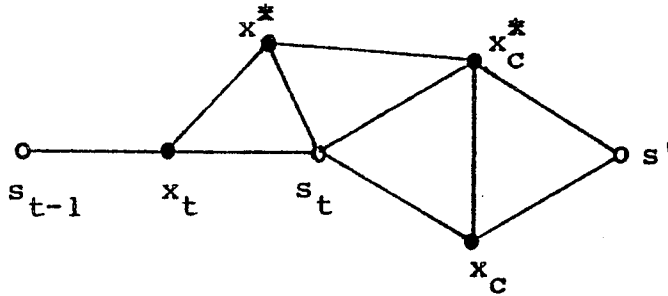
- 1) on peut supprimer les sommets de $B \cap C$ qui sont adjacents à un sommet de $A-C$.
- 2) On peut relier par une arête tout couple de sommets de B .
- 3) S'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 dans G_k alors il en existe une dans G^{k+1} et réciproquement.
- 4) Le graphe réduit $G^{k+1} = (X_{k+1}, E_{k+1})$ est un graphe sans étoile.

4.1 - On peut supprimer les sommets de $B \cap C \cap V(A-C)$

Remarquons tout d'abord que $A-C \subset I$ et que si $A-C$ est non vide alors $A \cap C = \{s_t\}$.
Soit $x_t^* \in A-C$, x_c^* (resp. x_c) un sommet de $A(s')$ adjacent (resp. non adjacent) à x_t^* .

$$(1) \quad G_{\{s_t, x_t, x^*, x_c\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x_t, x^*) \in E_k$$

Donc $V(s_t) - C \subset V(x_t)$.



si x^* est adjacent à un sommet s^* de $S - \{s_t\}$ alors

$$G_{\{x^*, s^*, x_t, x_c^*\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow s^* = s' \quad \text{ou} \quad s^* = s_{t-1}$$

si $s^* = s'$ alors $x^* \in \Sigma(s_t)$ - contradiction -

si $s^* = s_{t-1}$ alors x^* serait adjacent à trois sommets successifs de s_t ce qui contredirait le fait que C_t satisfait la propriété (*).

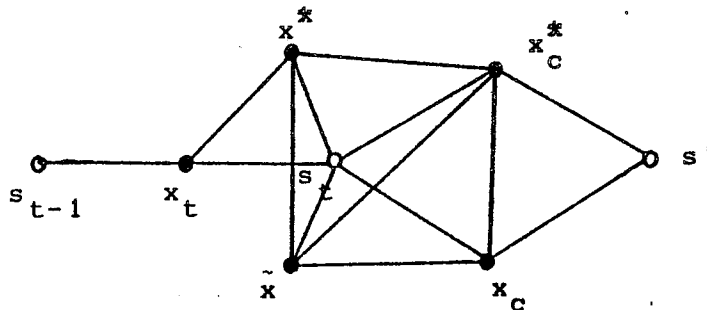
Donc $x^* \in I$

De plus $A \cap V(x_t) - \{s_t\} \subset I$.

(2) Supposons $A \cap C - \{s_t\} \neq \emptyset$;

soit donc $\tilde{x} \in A \cap C - \{s_t\}$;

$$G_{\{x_c^*, s', \tilde{x}, x_c^*\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x^*, \tilde{x}) \in E_k$$



(α) si $(\tilde{x}, x_t) \in E_k$ alors d'après le (1), $\tilde{x} \in I$.

Montrons que \tilde{x} est inessentiel ; en effet soit x' un sommet de $X_k - A(s')$ adjacent à s_t .

- si $(x', x_t) \in E_k$ alors

$$\left. \begin{array}{l} G_{\{x_t, \tilde{x}, x', s_{t-1}\}}^k \neq K_{13} \\ C_t \text{ satisfait la propriété } (*) \end{array} \right\} \Rightarrow (\tilde{x}, x') \in E_k$$

- si $(x', x_t) \notin E_k$ alors $x' \in A \cap C$;

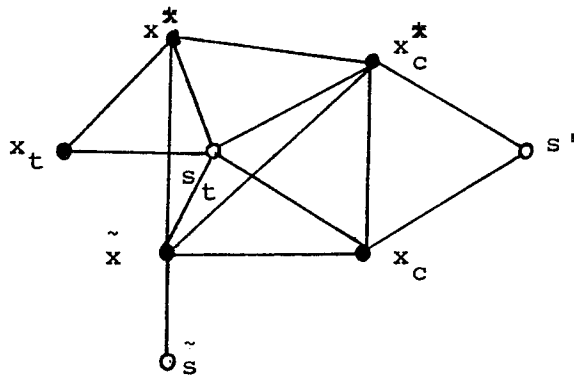
$$\left. \begin{array}{l} G_{\{x_c, x', \tilde{x}, s'\}}^k \neq K_{13} \\ x' \notin A(s') \end{array} \right\} \Rightarrow (\tilde{x}, x') \in E_k$$

x' est donc un sommet inessentiel et aurait donc été supprimé

- contradiction -

(β) si $(\tilde{x}, x_t) \notin E_k$ alors $\tilde{x} \notin I$ (car sinon on aurait détecté la chaîne augmentante $C_k(x)$ avant d'examiner $A(s')$).

Soit \tilde{s} le sommet de $S - \{s_t\}$ qui est adjacent à s_t .



$$G_{\{\tilde{x}, x_c, x_s^*, \tilde{s}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow \tilde{s} = s' \Rightarrow \tilde{x} \in A(s')$$

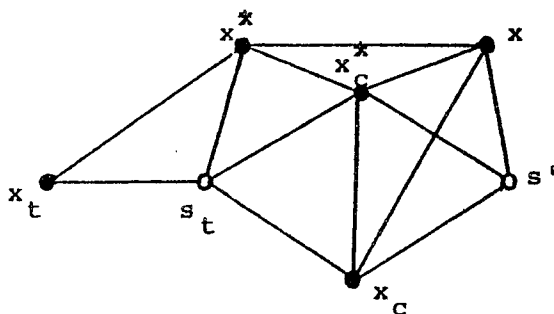
- contradiction -

Donc $A \cap C = \{s_t\}$.

Montrons à présent que s'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 empruntant un sommet x de $B \cap C$ adjacent à un sommet x^* de $A-C$, alors il en existe une qui ne contient pas x .

Soit $x \in B \cap C$, $x^* \in A-C$, x_c^* (resp. x_c) un sommet de $A(s')$ adjacent (resp. non adjacent) à x^* .

On suppose que $(x^*, x) \in E_k$.



D'après le (1), $x^* \in I$;

Montrons que $x \in I$;

En effet, si x était adjacent à un sommet s de $S-\{s'\}$ alors

$$G_{\{x, s', x^*, s\}}^k = K_{13} \quad \text{- contradiction -}$$

Soit \mathcal{C} une chaîne augmentante issue de x_0 contenant x .

On suppose que pour parcourir \mathcal{C} on part de x_0 .

Soit x' le sommet de \mathcal{C} qui précède s' ;

si $x' \in B$ alors soit $x'_c \in A(s') \cap V(x')$.

$$G_{\{x'_c, s_t, x, x'\}}^k = K_{13} \quad \text{- contradiction -}$$

Donc $x' \notin B$.

Soit \mathcal{C}' la chaîne obtenue en concaténant la chaîne $\mathcal{C}(x_0, s')$ et la c.a. $\{x_c, s_t, x^*\}$.

Montrons que \mathcal{C}' est une chaîne élémentaire. Pour cela il suffit de montrer que $s_t \notin \mathcal{C}(x_0, s')$, car x appartenant à C , x_c ne peut appartenir à \mathcal{C} .

Supposons donc que $s_t \in \mathcal{C}(x_0, s')$.

\mathcal{C} emprunterait donc un sommet x différent de x_t et adjacent à s_t .

$x \in C \Rightarrow \tilde{x} \notin A(s') ;$

- si $(\tilde{x}, x_t) \in E_k$ alors soit \tilde{x}' le sommet de $\mathcal{C} - \{\tilde{x}\}$ qui est adjacent à s_t .

$\tilde{x} \in \mathcal{C}(x_0, s')$ $\Rightarrow \tilde{x} \notin I \Rightarrow \tilde{x} \notin A$ (d'après (1))

$\forall \bar{x}, \bar{x} \in A(s'), G_{\{s_t, \tilde{x}, \tilde{x}', \bar{x}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (\bar{x}, \tilde{x}') \in E_k$

Donc $\tilde{x}' \in A \cap C$ ce qui est impossible d'après le (2).

- si $(\tilde{x}, x_t) \notin E_k$ alors $\tilde{x} \in A \cap C$ ce qui contredit le (2).

\mathcal{C}' est donc une chaîne élémentaire joignant x_0 et x^* , qui d'après le lemme 1 est un sous graphe de G^k . \mathcal{C}' est donc une chaîne augmentante issue de x_0 ne contenant pas le sommet x .

c.q.f.d.

On peut donc supprimer les sommets de $B \cap C$ qui sont adjacents à un sommet de $A-C$.

Cette opération ne crée pas de sommet inessentiel. En effet, soit $x \in B \cap C \cap V(A-C)$.

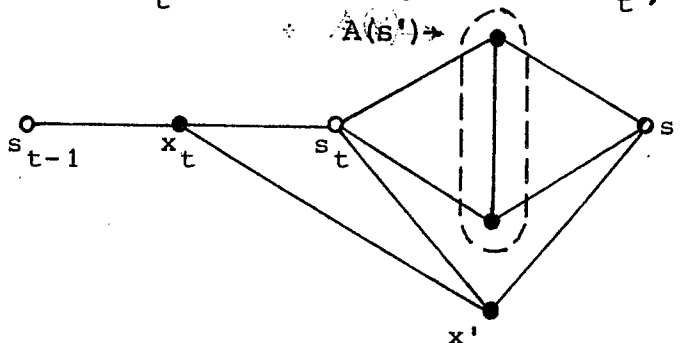
On a vu que $x \in I$.

$$V(s_t) - V(x) - \{x\} \subset V(s_t) - B$$

Soit $x' \in V(s_t) - V(x) - \{x\}$.

Supposons que x' devienne inessentiel après la suppression de x ; ceci implique que x' est adjacent à s_t (d'après la définition d'un sommet inessentiel).

Donc $x' \in V(s_t) - C$, par conséquent $x' \in V(x_t)$;



or x' n'est pas inessentiel dans G^k ; il existe donc $\tilde{x} \in V(s_t) - V(x') \cup V(s')$;
 si $\tilde{x} \in V(x_t)$ alors $G_{\{x_t, x', \tilde{x}, s_{t-1}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (\tilde{x}, x') \in E_k$
 (car C_t satisfait la propriété (*)).

Donc $\tilde{x} \notin V(x_t)$, par conséquent $\tilde{x} \in A \cap C$.
 Or d'après le (1), $A \cap C = \{s_t\}$ (car $A-C \neq \emptyset$)
 - contradiction -

4.2 - On peut relier par une arête tout couple de sommets de B

Pour démontrer cela nous allons suivre la même démarche que dans le 3.1, c'est-à-dire que nous allons montrer que s'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 empruntant deux sommets de B alors il en existe une qui contient au plus un de ces deux sommets et ce à l'aide du lemme 2.

Supposons donc qu'il existe une chaîne augmentante \mathcal{C} issue de x_0 contenant deux sommets x et x' de B dans cet ordre en partant de x_0 .

(i) $A(s') \subset V(\{x, x'\})$
 En effet, soit $x_c \in A(s')$;

$$G_{\{s', x_c, x, x'\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow x_c \in V(\{x, x'\})$$

(ii) $A(s') \cap V(x) \cap V(x') = \emptyset$
 En effet, supposons qu'il existe $x_c \in A(s') \cap V(x) \cap V(x')$:

$$G_{\{x_c, s_t, x, x'\}}^k = K_{13} \quad \text{- contradiction -}$$

Ceci implique que $\{x, x'\} \subset B-C$.

Soit x_p (resp. x'_p) un sommet de $A(s')$ non adjacent à x (resp. x').

$$\text{Posons } C = G_{\{s_t, x_p, s', x\}}^k$$

$$C' = G_{\{s_t, x'_p, s', x'\}}^k$$

L'application du lemme 2 aux c.a. C_t, \mathcal{C}, C et C' fournit une chaîne augmentante \mathcal{C}' issue de x_0 contenant plus un des deux sommets x et x' .

c.q.f.d.

4.3. - S'il existe une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k alors il en existe une dans le graphe réduit $G^{k+1} = (X_{k+1}, E_{k+1})$ et réciproquement

Soit \hat{x} le sommet qui résulte de la contraction de $A(s')$.

a) Soit \mathcal{C} une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k .

(i) si \mathcal{C} n'emprunte aucun sommet de B alors

(1) si \mathcal{C} n'emprunte aucun sommet de $A(s')$ alors \mathcal{C} est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k .

(2) si \mathcal{C} emprunte un sommet x_c de $A(s')$ alors la chaîne \mathcal{C}' obtenue en remplaçant x_c par \hat{x} dans \mathcal{C} est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^{k+1} .

(ii) si \mathcal{C} emprunte un sommet de B alors on peut supposer d'après le 4.2 que \mathcal{C} emprunte un seul sommet de B ; \mathcal{C} emprunte donc un sommet x_c de $A(s')$. La chaîne \mathcal{C}' obtenue en remplaçant x_c par \hat{x} dans \mathcal{C} est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^{k+1} .

b) Réciproquement soit \mathcal{C}' une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^{k+1} .

- (i) Si \mathcal{C}' n'emprunte pas \hat{x} alors \mathcal{C}' est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k .
- (ii) si \mathcal{C}' emprunte \hat{x} alors
- (1) si \mathcal{C}' emprunte un sommet x de B (resp. $A-C$) et si $\mathcal{C}' \cap (A-C)$ (resp. $\mathcal{C}' \cap B$) est vide, alors la chaîne \mathcal{C} obtenue en remplaçant dans \mathcal{C}' , \hat{x} par un sommet de $A(s')$ - $V(x)$ est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k .
 - (2) si \mathcal{C}' emprunte un sommet x de $B-C$ et un sommet x^* de $A-C$ tels que $A(s') - V(x) \cup V(x^*)$ soit non vide alors la chaîne \mathcal{C} obtenue en remplaçant dans \mathcal{C}' , \hat{x} par un sommet de $A(s') - V(x) \cup V(x^*)$ est une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k .
 - (3) si \mathcal{C}' emprunte un sommet x de $B-C$ et un sommet x^* de $A-C$ tels que $A(s')$ est inclus dans $V(x) \cup V(x^*)$, alors il n'existe pas de chaîne augmentante \mathcal{C} issue de x_0 empruntant x et x^* simultanément dans G^k .

En effet, supposons le contraire. Considérons le sommet \tilde{x} de $\mathcal{C} - \{x^*\}$ qui est adjacent à s_{t-1} .

Si $\tilde{x} \notin A(s')$ alors $\tilde{x} \notin A \cap C$ car $A-C \neq \emptyset$.

Donc $(\tilde{x}, x_t) \in E_k$

$$\left. \begin{array}{l} G_{\{x_t, s_{t-1}, x^*, \tilde{x}\}}^k \neq K_{13} \\ C_t \text{ satisfait la propriété } (*) \end{array} \right\} \Rightarrow (\tilde{x}, x^*) \in E_k \text{ - contradiction -}$$

Donc $\tilde{x} \in A(s')$ et par conséquent $\tilde{x} \in V(x) \cup V(x^*)$ - contradiction -

Soit x_C^* (resp. x_C) un sommet de $A(s')$ adjacent (resp. non adjacent) à x^* .

Posons $x^* = x'_{j+2}$

$$s_t = s^{j+1}$$

$$x_c^* = x^{j+1}$$

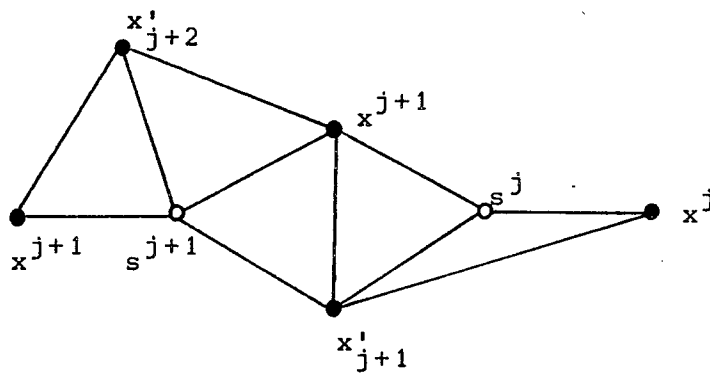
$$x_c = x'_{j+1}$$

$$x_t = x^{j+2}$$

\mathcal{C}' est définie par la séquence $(x^0 = x_0, s^0, \dots, x^j = x, s^j = s', \hat{x}, s^{j+1}, x^*)$.

Nous allons montrer dans ce cas qu'il existe dans G^k une chaîne augmentante \mathcal{C} issue de x_0 qui emprunte soit x^* et un sommet x'_j adjacent à $s^j = s'$, soit un sommet insaturé x'_j adjacent à s' .

On peut supposer sans perte de généralité que $x_c^* \notin V(x^j)$ puisque x^j appartient à B-C.



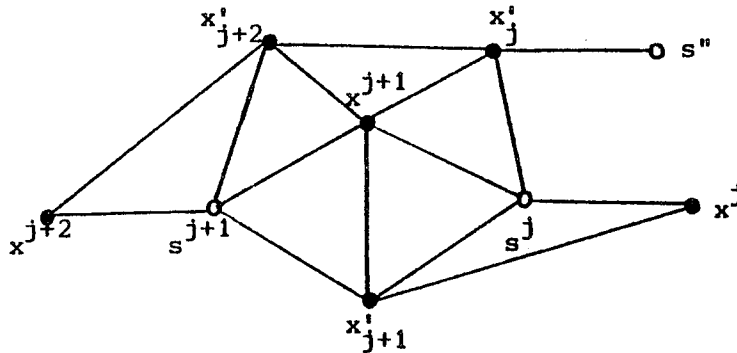
$$x'_{j+1} \text{ n'est pas inessentiel} \Rightarrow \exists x'_j \in V(s^j) - V(x'_{j+1}) - V(s^{j+1})$$

$$G^k_{\{s^j, x'_j, x^j, x^{j+1}\}} \neq K_{13} \Rightarrow (x'_j, x^{j+1}) \in E_k \text{ ou } (x'_j, x^j) \in E_k.$$

1er cas : $(x^{j+1}, x_j^i) \in E_k$

$$G^k_{\{x^{j+1}, x_j^i, x_{j+1}^i, x_{j+2}^i\}} \neq K_{13} \Rightarrow (x_j^i, x_{j+2}^i) \in E_k$$

si x_j^i est adjacent à un sommet s'' de $S - \{s^j\}$ alors



$$\left. \begin{array}{l} G^k_{\{x_j^i, x_{j+2}^i, s^j, s''\}} \neq K_{13} \\ x_{j+2}^i \in I \end{array} \right\} \Rightarrow s'' = s^{j+1} \Rightarrow x_j^i \in \Sigma(s^{j+1})$$

Ceci contredit l'hypothèse (H).

Donc $x_j^i \in I$.

Si $(x_j^i, x_j^j) \in E_k$ alors $G^k_{\{x_j^j, x_j^i, x_{j+1}^i, s^{j-1}\}} = K_{13}$

- contradiction -

Donc $(x_j^i, x_j^j) \notin E_k$.

D'après le lemme 1, $\mathcal{G} = G^k_{\mathcal{G}'(x_0, s^j)} \cup \{x_j^i\}$ est une c.a. ;

c'est donc une chaîne augmentante issue de x_0 dans G^k .

2ème cas : $(x^{j+1}, x_j^i) \notin E_k$

x_j^i est alors adjacent à x_j^j .

La construction de \mathcal{G} se fait dans ce cas de manière algorithmique.

Algorithme

(0) poser $r = j$

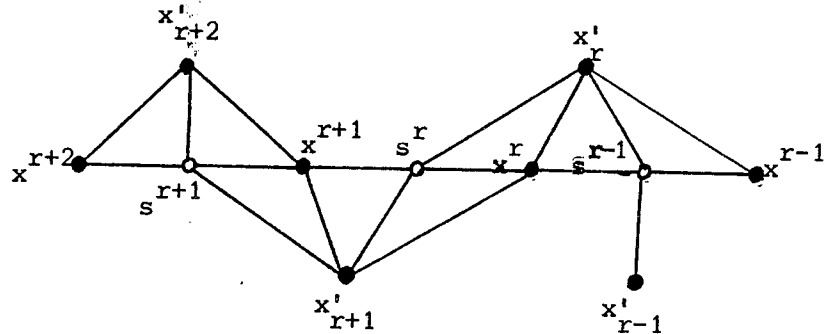
(1) $G_{\{x^r, x'_r, x'_{r+1}, s^{r-1}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x'_r, s^{r-1}) \in E_k$

(i) si $(x'_r, s^{r-1}) \notin E_k$ alors stop :

$\mathcal{C} = G_{\mathcal{C}(x_0, s^{r-1})}^k \cup \left(\bigcup_{i=r}^{j+1} \{x'_i, s^i\} \right) \cup \{x'_{j+2}\}$ est une chaîne
 augmentante issue de x_0 dans G^k .

(ii) si $(x'_r, s^{r-1}) \in E_k$ alors

x'_r n'est pas inessentiel $\Rightarrow \exists x'_{r-1} \in V(s^{r-1}) - V(x'_r) - V(s^r)$



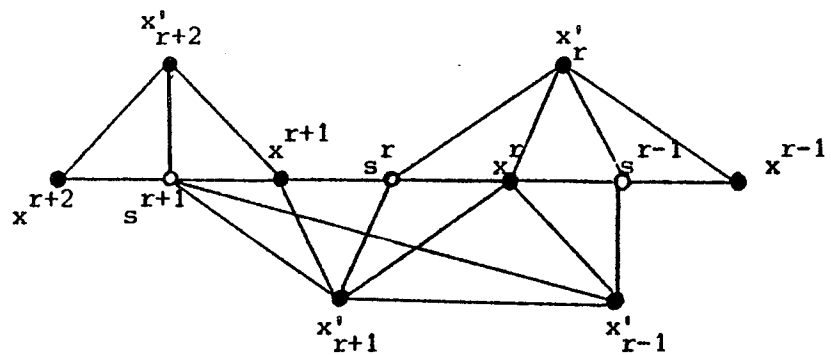
$G_{\{s^{r-1}, x^r, x^{r-1}, x'_{r-1}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x'_{r-1}, x^r) \in E_k$ ou $(x'_{r-1}, x^{r-1}) \in E_k$

(a) si $(x'_{r-1}, x^r) \in E_k$ alors

$G_{\{x^r, x'_r, x'_{r+1}, x'_{r-1}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x'_{r-1}, x'_{r+1}) \in E_k$

$G_{\{x'_{r+1}, s^{r+1}, s^r, x'_{r-1}\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x'_{r-1}, s^{r+1}) \in E_k$

(d'après la définition de x'_{r-1}).



$$G^k_{\{s^{r+1}, x_{r+2}, x_{r+1}, x_{r-1}^i\}} \neq K_{13} \Rightarrow (x_{r-1}^i, x_{r+1}^{r+1}) \in E_k$$

$$\text{ou } (x_{r-1}^i, x_{r+2}^{r+2}) \in E_k$$

$$- \text{ si } (x_{r-1}^i, x_{r+1}^{r+1}) \in E_k \text{ alors } G^k_{\{x_{r+1}^{r+1}, s^r, x_{r+2}^i, x_{r-1}^i\}} = K_{13} - \text{ impossible -}$$

$$- \text{ si } (x_{r-1}^i, x_{r+2}^{r+2}) \in E_k \text{ alors } G^k_{\{x_{r-1}^i, s^{r-1}, x_{r+1}^i, x_{r+2}^i\}} = K_{13} - \text{ impossible -}$$

(β) si $(x_{r-1}^i, x_{r-1}^{r-1}) \in E_k$ alors

$$x_r^i \in V(x_{r-1}^{r-1}) - S \Rightarrow x_{r-1}^{r-1} \neq x_0 \Rightarrow x_{r-1}^{r-1} \notin I$$

poser $r := r-1$ et aller en (1).

Justification de cet algorithme :

+ \mathcal{C} est une chaîne alternée d'après le lemme 1 ;

+ La chaîne \mathcal{C}' étant finie, le nombre de x_i^i que l'on met en évidence est donc fini ce qui implique la finitude de l'algorithme.

4.4 - Le graphe réduit $G^{k+1} = (X_{k+1}, E_{k+1})$ est un graphe sans étoile.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une étoile dans G^{k+1} , soit G_Q^{k+1} ; soit d le sommet de degré trois de cette étoile ; posons $Q = \{d, x, x', x''\}$.

Soit \hat{x} le sommet qui résulte de la contraction de $A(s')$.

d appartient obligatoirement à $A \cup B \cup \{\hat{x}, s'\}$ car sinon $G_Q^k = K_{13}$.

(i) si $d = s_t$ alors $G_Q^k \neq K_{13} \Rightarrow \hat{x} \in Q$

$$\forall y, y \in V(s_t) - V(\hat{x}) \Rightarrow y \in V(x_t)$$

Donc $x_t \notin Q$. Soit $\{x, x'\} = Q - \{d, \hat{x}\}$

$$\forall x_c \in A(s'), G_{\{x_c, s_t, x, x'\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x_c, x) \in E_k \text{ ou } (x_c, x') \in E_k$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ ou } x' \in A \Rightarrow \{x, x'\} \subset A \text{ car } \{x, x'\} \cap C = \emptyset$$

$$\Rightarrow \{x, x'\} \subset A - C \Rightarrow \begin{cases} \{x, x'\} \subset I \\ \{x, x'\} \subset V(x_t) \end{cases}$$

$$G_{\{x_t, s_{t-1}, x, x'\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, x') \in E_k \text{ - contradiction -}$$

(ii) si $d = \hat{x}$ alors soit $x_c \in A(s')$; $G_{\{x_c, x, x', x''\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow Q \cap \{s_t, s'\} \neq \emptyset$

or un sommet adjacent à \hat{x} est adjacent soit à s_t soit à s' .

Par conséquent $|Q \cap \{s_t, s'\}| = 1$.

- si $Q = \{\hat{x}, s_t, x, x'\}$ alors $\{x, x'\} \subset B$ et $(x, x') \in E_{k+1}$
- contradiction -

- si $Q = \{\hat{x}, s', x, x'\}$ alors $\{x, x'\} \subset A \cap C$

$$G_{\{x_c, s', x, x'\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, x') \in E_k$$

- contradiction -

(iii) si $d = s'$ alors, $\hat{x} \notin Q \Rightarrow G_Q^k = K_{13}$.

Donc $Q = \{s', \hat{x}, x, x'\}$.

$\forall x_c \in A(s'), G_{\{s', x_c, x, x'\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x_c, x) \in E_k$ ou $(x_c, x') \in E_k$
 $\Rightarrow x \in B$ ou $x' \in B$;

or $\{x, x'\} \cap V(\hat{x}) = \emptyset \Rightarrow \{x, x'\} \cap C = \emptyset \Rightarrow \{x, x'\} \subset B \Rightarrow (x, x') \in E_{k+1}$

- contradiction -

(iv) si $d \in A - \{s_t\}$ alors $\hat{x} \notin Q \Rightarrow G_Q^k = K_{13}$.

Donc $Q = \{d, \hat{x}, x, x'\}$ et $\{x, x'\} \cap C = \emptyset$

Soit $x_c \in A(s')$; $G_{\{d, x, x', x_c\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, x_c) \in E_k$ ou $(x', x_c) \in E_k$

$\times \Rightarrow \{x, x'\} \cap A \cup B - C \neq \emptyset$;

or $A - C = \emptyset$ car $A \cap C - \{s_t\} \neq \emptyset$

Donc $\{x, x'\} \subset B$ et $(x, x') \in E_{k+1}$

- contradiction -

(v) si $d \in B$ alors $\hat{x} \notin Q \Rightarrow G_Q^k = K_{13}$.

Donc $Q = \{d, \hat{x}, x, x'\}$ et $\{x, x'\} \cap C = \emptyset$;

si $(x, d) \in E_{k+1} - E_k$ alors $x \in B$. Soit $x_c \in V(x) \cap A(s')$

$G_{\{x_c, s_t, x, d\}}^k = K_{13}$

- contradiction -

De la même manière on démontre que $(x', d) \in E_k$.

Soit $x_c \in A(s')$; $G_{\{d, x_c, x, x'\}}^k \neq K_{13} \Rightarrow (x, x_c) \in E_k$ ou $(x_c, x') \in E_k$

$\Rightarrow \{x, x'\} \subset A \cup B - C$.

si $\{x, x'\} \cap (A-C) \neq \emptyset$ alors d aurait été supprimé puisque ce serait un sommet de C-A adjacent à un sommet de A-C.
 Donc $\{x', x\} \subset B-C$ et $(x, x') \in E_{k+1}$
 - contradiction -

Par conséquent l'opération de réduction par rapport à une clique conserve la structure de graphe sans étoile.

4.5 - Justification du pas (3) de l'algorithme

On suppose que $M = P = \emptyset$ et qu'il existe dans $G^k = (X_k, E_k)$ une chaîne augmentante $\mathcal{C} = G_{X'}^k$ issue du sommet insaturé x_0 .

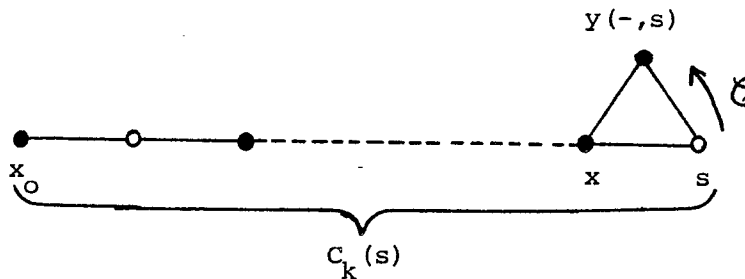
Posons :

$$A = \{x \in X' - S \text{ tel que } x \text{ est marqué } (-, s)\} ; A \neq \emptyset$$

Pour parcourir \mathcal{C} on part de x_0 ; soit x'' l'extrémité de \mathcal{C} différente de x_0 .
 Soit $A_F = \{x \in A / x \text{ marqué } (-, s) \text{ tel que } \mathcal{C} \text{ emprunte d'abord } s \text{ et ensuite } x\}$.

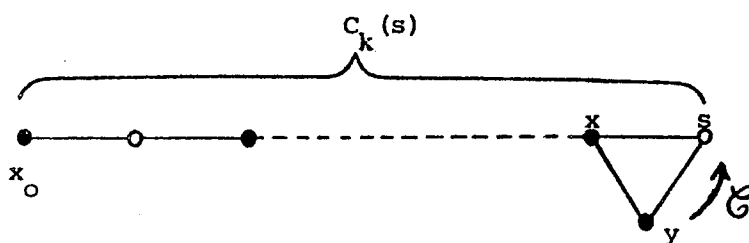
$$A_B = A - A_F$$

- (1) soit y le premier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à A ;
 supposons que $y \in A_F$;
 y est marqué $(-, s)$ et s est marqué $(-, x)$;



$G_k^k(x) \Delta \mathcal{C}(x_0, s)$ est un cycle impair sans corde dont tous les sommets ont été examinés, ce qui est impossible ; donc $y \in A_B$.

- (2) Soit y le dernier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à A ;
 supposons que $y \in A_B$;
 y est marqué $(-, s)$ et s est marqué $(-, x)$;

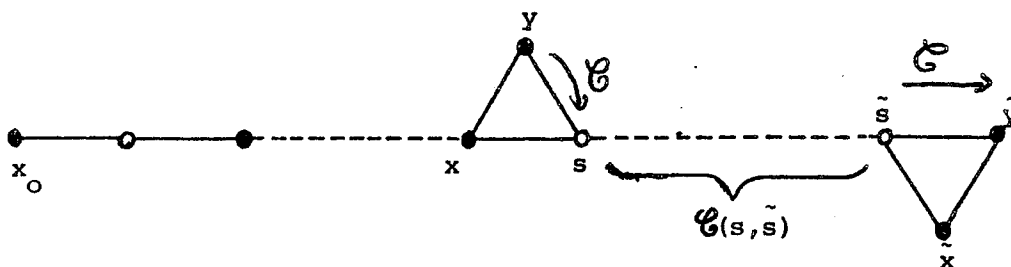


tous les sommets de $\mathcal{C}(s, x_0) - (x_0)$ ont été examinés, en particulier x_0'' a été marqué $(+, .)$. On aurait donc détecté la chaîne augmentante $C_k(x_0'')$
 - contradiction -

Par conséquent $y \in A_F$.

- (3) A_B n'étant pas vide d'après (1), soient y le dernier sommet de \mathcal{C} qui appartienne à A_B et \tilde{y} le premier sommet de A_F que \mathcal{C} emprunte après y (\tilde{y} existe d'après (2)).

Soient $(-, s)$ et $(-, \tilde{s})$ les marques respectives de y et \tilde{y} , $(-, x)$ et $(-, \tilde{x})$ celles de s et \tilde{s} .



tous les sommets de $\mathcal{E}(s, \tilde{s})$ ont été examinés, par conséquent
 $G_k^k(x) \Delta C_k(\tilde{s}) \cup \mathcal{E}(\tilde{s}, s)$ est un cycle impair sans corde par rapport
 auquel on aurait dû réduire le graphe G^k
 - contradiction -

Remarque 8 :

- 1°) Si $M = P = \emptyset$ dans le graphe $G^k = (X_k, E_k)$ alors le sous-graphe de G^k construit sur les sommets marqués $(+, .)$ et les sommets de S marqués $(-, .)$ est le graphe adjoint d'un arbre hongrois [6].
- 2°) L'augmentation du stable suivant la mise en évidence dans G^k d'une chaîne augmentante $C_k(x_0)$ issue de x_0 peut créer des sommets insaturés. Cependant on peut ne pas faire la recherche de chaîne augmentante à partir de tels sommets en opération de la façon suivante :

Soit $(+, s'')$ la marque de x_0'' ;

si $\{x_0''\} \notin V(A(s''))$ et s'il existe un sommet \tilde{x}_0 de $V(s'') \cap I$ marqué $(+, s'')$ tel que $\tilde{x}_0 \in V(A(s''))$ alors on considèrera la chaîne augmentante $C_k(\tilde{x}_0)$ plutôt que $C_k(x_0'')$.

V - COMPLEXITE DE L'ALGORITHME

On se propose dans ce paragraphe d'évaluer une borne supérieure du nombre N d'opérations que nécessite l'algorithme pour trouver un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile à n sommets.

L'algorithme consiste à construire pour chaque sommet insaturé x_0 non inessentiel le graphe adjoint d'un arbre enraciné de racine x_0 (rooted tree [6]).

Or lorsqu'on applique l'algorithme à partir d'un sommet insaturé x_0 , ou bien on ne détecte pas de chaîne augmentante issue de x_0 auquel cas la cardinalité de l'ensemble ID des sommets insaturés susceptibles d'être marqués (+,0) diminue d'une unité, ou bien on augmente le stable, et alors la cardinalité de ID diminue d'au moins une unité (compte tenu de la remarque 8).

On fait donc au plus $(n-1)$ recherches de chaînes augmentantes puisqu'il y a au plus $(n-1)$ sommets insaturés (cas où le graphe est une clique).

La recherche d'une chaîne augmentante issue d'un sommet insaturé comptant au plus n opérations, N est par conséquent majoré par n^2 .

VI - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE MINTY

Soit $G = (X, E)$ un graphe, S un stable dont on colorie les sommets en noir.

L'algorithme de Minty [11], pour déterminer un stable de cardinalité maximum dans G , consiste à :

- (i) Rechercher par énumération les chaînes augmentantes par rapport à S de longueur 3 ;
- (ii) Chercher des chaînes augmentantes de longueur supérieure à trois (si elles existent) ; pour cela on sélectionne deux sommets insaturés x_0 et x_0'' non voisins après quoi on supprime tous les sommets de $V(\{x_0, x_0''\}) - S$, de même que tout sommet insaturé différent de x_0 et x_0'' .
Pour chercher, si elle existe, une chaîne augmentante joignant x_0 et x_0'' , Minty cherche une chaîne augmentante par rapport à un couplage (si elle existe) dans un graphe annexe \bar{G} (appelé graphe d'Edmonds) dont la construction nécessite une classification des sommets noirs.

a) Classification des sommets noirs

Soit s un sommet noir. On partitionne $V(s)$ en classes appelées "ailes":

- un sommet insaturé constitue à lui seul une aile.
- les autres sommets de $V(s)$ sont partitionnés selon le sommet noir s' différent de s qui leur est adjacent (s' est appelé bout de l'aile).

Une chaîne augmentante empruntant s contient deux sommets de $V(s)$ appartenant à deux ailes différentes. Si une aile se réduit à un sommet insaturé alors s est dit régulier de première espèce sinon, si s a plus de deux ailes alors il est dit régulier de deuxième espèce, sinon s est appelé sommet irrégulier. Si s a moins de deux ailes alors il est dit inutile.

Si une chaîne augmentante \mathcal{C} joignant x_0 et x''_0 emprunte s alors elle emprunte deux sommets de $V(s)$ non voisins appartenant à deux ailes différentes de s . Pour déterminer alors quel couple de $V(s)^2$ peut appartenir à \mathcal{C} , on partitionne les voisins de s en deux classes appelées classes de sommets.

- Si s est un sommet régulier de première espèce alors on met le sommet insaturé dans une classe et le reste des voisins de s dans l'autre classe.
- Si s est un sommet régulier de deuxième espèce alors Minty a établi un théorème sur les relations symétriques qui permet de partitionner $V(s)$ en au plus deux classes de telle façon que si deux sommets appartiennent à deux classes différentes alors ces sommets ne sont pas voisins. Si le théorème évoqué permet de partitionner $V(s)$ en deux classes, alors on prendra comme classes de sommets relatives à s ces deux classes.

Sinon une classe de s sera $V(s)$ et l'autre sera l'ensemble vide.

Pour savoir comment progresser d'un sommet régulier s à un autre sommet régulier s' , on cherche les chaînes alternées dont tous les sommets noirs sont irréguliers et qui joignent deux sommets appartenant à des classes de sommets différentes (IWAP).

b) Construction de \bar{G}

Soit N le nombre de sommets réguliers. \bar{G} possède $2N+2$ sommets. A chaque sommet régulier s on associe une arête noire joignant deux sommets qui correspondent aux classes de s .

On joint les deux sommets restants par deux arêtes blanches correspondant à x_0 et x_0'' aux classes de sommets contenant ces deux sommets respectivement.

Après cela on joint par une arête blanche deux sommets de \bar{G} correspondant à deux classes de sommets s'il existe un IWAP joignant ces deux classes.

S'il existe une chaîne augmentante joignant x_0 et x_0'' alors il existe dans \bar{G} une chaîne augmentante par rapport au couplage constitué des arêtes noires et réciproquement.

L'approche de Minty est beaucoup plus simple que celle qui est proposée dans cette thèse. Cependant, bien que nous n'ayions pas su évaluer précisément la borne du nombre d'opérations de l'algorithme de Minty, il nous semble que celui-ci est d'un ordre de complexité supérieur au nôtre.

C O N C L U S I O N

Nous nous sommes intéressés au problème (P) de déterminer un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile afin de voir comment on pourrait généraliser les algorithmes de couplage aux bitroïdes ou à une certaine classe de bitroïdes.

Le fait qu'on ait réussi à trouver un algorithme polynomial pour résoudre le problème (P) nous permet d'espérer trouver un algorithme polynomial pour déterminer une base de cardinalité maximum dans une certaine classe de bitroïdes.

Un autre développement qui semble intéressant serait de chercher un algorithme de résolution de (P) dans lequel on chercherait des chaînes augmentantes issues de cliques de sommets insaturés au lieu de partir d'un seul sommet insaturé, notamment parce que cela permettrait de justifier l'algorithme à l'aide des théorèmes de la dualité en programmation linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BERGE
"Graphes et hypergraphes"
Dunod .
- [2] M. BOULALA et J.P. UHRV
"Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle"
Rapport de Recherche, I.R.M.A. de Grenoble .
- [3] CALVILLO
"P.H.D. Thesis"
Université de Waterloo .
- [4] V. CHVATAL
"Edmonds polytope and a hierarchy of combinational problems"
Discrete Mathematics 4 (1973) 305-337, North Holland, Publishing Company .
- [5] V. CHVATAL
"On certain polytopes associated with graphs"
C.R.M. 238, University of Montreal, October 1973 .
- [6] J. EDMONDS
"Paths, trees and flowers"
Canadian journal of Mathematics 17 (1965) 449-67.
- [7] J. EDMONDS
"Maximum matching and a polyhedron with (0,1) vertices"
J. Res. Bureau Stand. 69B, n° 1 et 2 (1965) 125-30.
- [8] J. EDMONDS
"Matroïd intersection"
Rapport.

- [9] D.R. FULKERSON
"Blocking polyhedra"
Proceedings of the Advanced Seminar in Graph Theory, University of Wisconsin (1969).
- [10] J.F. MAURRAS
"Polytopes à sommets dans $\{0,1\}$ "
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII.
- [11] GEORGES J. MINTY
"On maximal independent sets of vertices in clawfree graphs"
Indiana University (à paraître).
- [12] J.L. NEMHAUSER and L.E. TROTTER
"Properties of vertex packing and independent system polyhedra"
Mathematical Programming 6, (1974), 48-61.
- [13] J.L. NEMHAUSER and L.E. TROTTER
"Vertex Packing Structural properties and Algorithms"
Mathematical Programming 8, (1975), 232-248.
- [14] E. LAWLER
"Matroid intersection Algorithms"
Mathematical Programming IX.1, 1975.
- [15] M.W. PADBERG
"On the facial structure of set packing polyhedra"
Mathematical Programming 5 (1973), 199-215.
- [16] M.W. PADBERG
"On the complexity of set packing polyhedra"
Annals of Discrete Mathematics 1, (1977), 421-434.

- [17] K.R. PARIHASARATHY et G. RAVINDRA
"The strong perfect-graph conjecture is true for $K_{1,3}$ -free graphs"
Journal of Combinatorial Theory (B) 21, 212-223 (1976) .
- [18] M. SAKAROVITCH
"Deux ou trois choses que je sais des bitroïdes"
R.R.n°55 I.M.A.G.
- [19] M. SAKAROVITCH
"Sur quelques problèmes d'optimisation combinatoire"
Thèse d'Etat, U.S.M.G.
- [20] L.E. TROTTER
"A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra"
Discrete Mathematics 12, (1975), 373-388.
- [21] W.T. TUTTE
"Lectures on matroïds"
Journal of research NBS Vol. 69B n° 1 (1965) .
- [22] L.A. WOLSEY
"Further facet generating procedures for vertex packing polytopes"
Mathematical Programming 11, (1976), 158-163.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 5 juin 1978

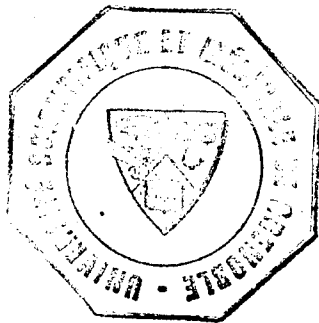
Le Président de la thèse

N. Sakon

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 6 juin 1978

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



Hubert C...

1978