



HAL
open science

Variations sur l'effet Condorcet

David Romero

► **To cite this version:**

David Romero. Variations sur l'effet Condorcet. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1978. Français. NNT : . tel-00288168

HAL Id: tel-00288168

<https://theses.hal.science/tel-00288168>

Submitted on 16 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Mathématiques Appliquées

par

David ROMERO



**VARIATIONS
SUR
L'EFFET CONDORCET**



Thèse soutenue le 28 juin 1978 devant la Commission d'Examen :

Président : C. BENZAKEN

Examinateur : P. JULLIEN

Rapporteur : H. RAYNAUD

Invité : G. KREWERAS

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLJET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARDE Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMTIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVITCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NÔEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPEPIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULLIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert NEMOZ Alain NOUGARET Marcel PARAMELLE Bernard PECCOUD François	Mécanique (IUT I) Thermodynamique Automatique (IUT I) Pneumologie Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René PERRIER Guy PHELIP Xavier RACHAIL Michel RACINET Claude RAMBAUD André RAMBAUD Pierre RAPHAEL Bernard	Métallurgie (IUT I) Géophysique-Glaciologie Rhumatologie Médecine interne Gynécologie et obstétrique Hygiène et hydrologie (Pharmacie) Pédiatrie Stomatologie Bactériologie (Pharmacie)
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Chimie physique
MM.	ROBERT Jean-Bernard Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René SHOM Jean-Claude STOEBNER Pierre VROUSOS Constantin	Cancérologie Chimie générale Anatomie pathologie Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick HODGES Christopher	Spectro physique Transition de phases
-----	---------------------------------------	--

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

A Lucia et à Caterina.

RECONNAISSANCE.

Ce travail a faillit ne jamais être publié. Je voudrais, en conséquence, exprimer ici ma profonde reconnaissance à ceux dont l'encouragement a été décisif pour son achèvement.

En tout premier lieu à mon ami et directeur de thèse, Hervé Raynaud, qui m'a enseigné tant de choses et de qui je voudrais encore beaucoup apprendre.

A Eric Terrier, dont l'optimisme scientifique m'a été contagieux.

A Ernesto Azorín, qui a eu la patience d'écouter, des heures durant, le chapelet de mes idées folles.

A Emilio Zamudio, compagnon d'armes, qui m'a fait le plaisir d'introduire quelques uns de mes résultats à ses élèves de l'Université de Mexico.

Aux charmants Bernard Blancke et William Johns.

Pour eux, tous, et pour ceux qui ne sont pas mentionnés ici, ma sincère gratitude.

Xalapa, Mexique, décembre de 1977.

C O N T E N U .

	page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. POSITION DU PROBLEME	7
CHAPITRE 2. L'UNIMODALITE	12
CHAPITRE 3. ORDRES UNIMODAUX ET PROBLEMES D'OPTIMISATION COMBINATOIRE	44
CHAPITRE 4. LA PSEUDO-UNIMODALITE ET LA QUASI-UNIMODALITE	79
CHAPITRE 5. LES CONDITIONS DE COOMBS ET DE RAMIFICATION	89
CHAPITRE 6. LA CONSISTANCE MULTIDIMENSIONNELLE ET L'ETOILEMENT	115
CHAPITRE 7. DES CONDITIONS MIROIR A CELLE DE WARD	135
REFERENCES	152
LISTE DE SYMBOLES	156

I N T R O D U C T I O N .

Bientôt vieux de 200 ans, le problème de l'agrégation des opinions demeure un défi. Alors qu'à l'origine il ne relevait que de la politique, il est déjà passé sous la loupe des mathématiciens, psychologues et économistes du monde entier, qui lui ont dédié une bibliographie abondante. [Riker 1961] est un excellent historique du problème et plus récemment [Niemi et Riker 1976] le présente d'une façon accessible au non-initié. Le débat est cependant loin d'être clos. Les résultats sont nombreux, certes, mais l'essentiel du problème demeure non résolu.

Qu'est-ce donc le problème de l'agrégation des opinions? Une collectivité démocratique veut choisir devant un ensemble d'objets. Chacun des individus composant la collectivité exprime ses préférences au moyen d'un vote, vote qui sera pris en compte d'une façon ou d'une autre dans la détermination de l'opinion collective (*).

Or ce vote peut revêtir plusieurs formes. La plus simple consiste à indiquer uniquement l'objet préféré, ce qui permet de former une opinion collective en appliquant le principe de la majorité simple. Bien que ce système paraisse raisonnable, il peut être contesté: en effet, les individus n'ont indiqué sur leurs votes qu'un objet, alors qu'il faudrait tenir compte de leurs préférences sur les objets restants, si on veut que le choix collectif soit plus "juste".

(*) Par opinion collective nous entendons non seulement l'objet préféré collectivement, mais un ordre sur l'ensemble des objets. Cet ordre permet de prévoir le cas où le choix ne peut pas être appliqué, par exemple, la démission du président élu.

Dans une forme de vote moins simple chaque individu exprime ses préférences en indiquant un ordre total sur l'ensemble des objets. Ceci conduit au problème devenu par la suite classique: Quelle méthode d'agrégation des ordres doit-on utiliser pour former l'opinion collective?

Déjà en 1781 Condorcet proposait sa "Méthode majoritaire", méthode qui paraît très "juste", mais qui présente un défaut capital: lorsqu'on l'applique il pourrait en résulter des incohérences(*) empêchant la détermination d'une opinion collective.

Le défaut majeur de la méthode majoritaire mit les chercheurs en quête de "meilleurs" méthodes d'agrégation. Cette recherche s'est arrêtée lorsqu'en 1948 J.K. Arrow démontra par son célèbre théorème l'impossibilité de l'existence des méthodes d'agrégation "démocratiques" et "raisonnables" (#).

Le résultat d'Arrow éleva le débat. Les uns contestaient les définitions de "raisonnable" proposées par Arrow, pendant que d'autres les acceptaient avec leurs lourdes conséquences et par suite, résignés, se mettaient à chercher des conditions restrictives au prix desquelles la méthode majoritaire était transitive.

Il en résulte que depuis lors, nombre de conditions ont été proposées, les unes très restrictives, les autres moins. On est cependant en droit de se demander dans quelle mesure ces conditions sont naturelles et propres à l'homme; en effet,

(*) Ces incohérences sont connues sous le nom "d'effet Condorcet". Lorsqu'elles en résultent on dit que la méthode majoritaire n'est pas "transitive".

(#) On trouve dans [Arrow1974] une bonne traduction française de l'ouvrage de base "Social Choice and Individual Values".

bien que du point de vue théorique l'effet Condorcet puisse toujours apparaître, est-il à craindre dans les choix collectifs réels? en d'autres termes, n'y aurait-il pas de conditions auxquelles les collectivités se plieraient spontanément? Dans la négative, faut-il abandonner le principe de liberté et exiger des collectivités qu'elles expriment leurs choix en respectant des conditions particulières?

Dans ce travail nous avons voulu rassembler des résultats variés - pour la plupart originaux à notre connaissance - au sujet des conditions algébriques de transitivité de la méthode majoritaire. Ces résultats appartiennent à une de 4 catégories suivantes:

1) La formulation de nouvelles conditions, auxquelles on peut donner une interprétation psychologique.

2) L'établissement de rapports (du point de vue ensembliste) entre les différentes conditions.

3) Le développement de procédures permettant de décider rapidement si un ensemble d'ordres (votes) donné satisfait ou non telle ou telle condition. Ces procédures pourraient être applicables principalement en psycho-sociologie. Il est manifeste qu'il serait intéressant d'analyser les votes des collectivités les plus diverses, afin de dégager des règles générales sur l'applicabilité des conditions et même d'en imaginer des nouvelles, plus performantes.

4) Le rapprochement de la condition d'unimodalité avec des problèmes, en apparence fort dissemblables, d'optimisation combinatoire. Ce rapprochement ouvre une voie de recherche: les conditions n'auraient-elles pas une interprétation dans d'autres domaines que les choix collectifs?

Le chapitre 1 contient une exposition succincte du problème de l'agrégation des opinions.

La condition d'unimodalité semble être la plus importante de toutes les conditions connues. Elle est traitée au chapitre 2, ainsi qu'une procédure pour vérifier si un ensemble d'ordres quelconque obéit ou non à cette condition.

Le chapitre 3 a pour but l'établissement des liens entre la condition d'unimodalité et quelques problèmes d'optimisation combinatoire, tel le problème de l'arbre de poids minimum.

Deux conditions apparentées à l'unimodalité: la quasi-unimodalité et la pseudo-unimodalité font l'objet du chapitre 4. La quasi-unimodalité, à notre connaissance, est proposée ici pour la première fois. La pseudo-unimodalité a été souvent confondue, à tort, avec l'unimodalité.

La condition de ramification qui, à notre connaissance, n'a jamais été proposée, est une des généralisations de la fameuse condition de Coombs. Les deux sont étudiées dans le chapitre 5.

Ensuite, le chapitre 6 est dédié aux conditions de consistance multidimensionnelle et d'étoilement, cette dernière étant, des conditions présentées dans ce travail, la plus large dans un certain sens. Nous développons dans ce chapitre des procédures efficaces pour vérifier si un ensemble d'ordres quelconque obéit ou non à l'une ou l'autre de ces conditions.

Finalement, dans le chapitre 7 nous faisons quelques généralisations des conditions étudiées dans les chapitres 2 à 6. En particulier nous discutons les deux conditions d'Inada et la condition de Ward.

Ceci dit, il ne nous reste qu'à inviter le lecteur à nous accompagner dans les domaines qui nous ont passionnés tout au long de ce travail.

C H A P I T R E 1 .
P O S I T I O N D U P R O B L E M E .

	page
1.1.- INTRODUCTION	8
1.2.- L'AGREGATION DES OPINIONS	8
1.3.- LA METHODE MAJORITAIRE	8
1.4.- LE THEOREME D'ARROW	9
1.5.- LES CONDITIONS DE TRANSITIVITE DE LA METHODE MAJORITAIRE	10

1.1.- INTRODUCTION.- Dans ce chapitre, après une exposition succincte du problème de l'agrégation des opinions (§1.2) et de celle de la méthode majoritaire (§1.3), nous rappellerons le Théorème d'Arrow (§1.4). Finalement (§1.5), nous présenterons sommairement les conditions de transitivité de la méthode majoritaire qui seront étudiées du 2ème au 7ème chapitre.

1.2.- L'AGREGATION DES OPINIONS.- Soit V un ensemble d'individus (votants) et A un ensemble d'objets (candidats). Si chaque individu émet son opinion individuelle (vote) en classant tous les éléments de A , c'est-à-dire, en indiquant un ordre total sur A (*), quel ordre sur A peut être considéré comme issu de l'agrégation des ordres individuels? D'une façon plus générale, quelle est la "meilleure" manière d'agréger les opinions individuelles pour former une opinion collective?

Beaucoup de méthodes d'agrégation d'ordres ont été suggérées, de Borda (en 1781) à [Köhler 1976], en passant par toutes celles présentées entre autres dans [Jacquet-Lagrèze 1973], [Black 1971], [Niemi et Riker 1976], dont la célèbre méthode majoritaire due au Marquis de Condorcet.

1.3.- LA METHODE MAJORITAIRE.- S'il y a dans V plus d'individus préférant l'objet a à l'objet b , que d'individus

(*) Nous ne considérons dans ce travail que des ordres totaux stricts. Dans beaucoup de cas les résultats ici énoncés peuvent être généralisés facilement aux préordres. Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, le classement : a_1 est préféré à a_2 , a_2 est préféré à a_3 , ..., a_{n-1} est préféré à a_n , sera noté $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \dots \succ a_{n-1} \succ a_n$, ou $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Quand on aura seulement deux objets a et b , "a est préféré à b" sera noté $a \succ b$.

préférant b à a, alors dans l'ordre collectif de V, a sera préféré à b. Telle est la règle d'agrégation de la méthode majoritaire. Hélas, même si cette méthode est "démocratique" et semble "raisonnable", son application conduit, comme le montre Condorcet lui-même, au paradoxe suivant(*): elle ne donne pas nécessairement naissance à un ordre collectif. Exemple [Kreweras 1963]: $A = \{a, b, c\}$, $V = \{1, 2, \dots, 60\}$, ordres individuels: (a,b,c) pour 23 des votants, (b,a,c) pour 2 des votants, (b,c,a) pour 17 votants, (c,a,b) pour 10 des votants, (c,b,a) pour 8 des votants. Dans l'ordre collectif de V on devra donc préférer: a à b (par 33 vs. 27), b à c (par 42 vs. 18), c à a (par 35 vs. 25).

1.4.- LE THEOREME D'ARROW.- Ce théorème ayant été formulé pour le cas général des préordres, nous n'en énonçons ici qu'une forme très simplifiée.

Théorème.- Il n'existe pas de méthode d'agrégation d'ordres qui satisfasse les axiomes suivants:

A.1) La méthode peut s'appliquer à des données comprenant au moins 3 ordres à agréger et au moins 3 objets.

A.2) Liberté des individus.- Tous les ordres individuels sont admissibles. On n'impose aucune restriction aux votants.

A.3) Souveraineté de la collectivité.- La méthode ne doit exclure à priori aucun ordre collectif; en d'autres termes l'application cherchée doit être surjective.

A.4) Loyauté.- Si la méthode à partir d'un certain ensemble de votes conduit à ce que dans l'ordre collectif, on préfère a à b, et si dans un nouvel ensemble de votes tous

(*) Ce paradoxe est connu dans la littérature française sous le nom d'effet Condorcet ou d'intransitivité de la méthode majoritaire.

ceux qui individuellement préféreraient a à b continuent à faire de même, alors la méthode à partir de ce nouvel ensemble doit encore conduire à un ordre collectif dans lequel on préfère a à b.

A.5) Démocratie (non-dictature).- La méthode ne doit privilégier aucun individu particulier en définissant l'ordre collectif comme étant précisément celui de cet individu, sans tenir aucun compte des autres.

A.6) L'opinion collective est toujours un ordre total.

1.5.- LES CONDITIONS DE TRANSITIVITE DE LA METHODE MAJORITAIRE.- Le résultat d'Arrow provoqua deux types de réactions. Chez les uns, ne voulant pas accepter les décourageantes conclusions du théorème, on conteste vivement les axiômes et le débat se poursuit aujourd'hui(*); chez les autres, auxquels nous nous assimilons, on accepte les conclusions et, essayant de revendiquer la méthode majoritaire, on cherche à quelle condition elle pourrait être appliquée sans que l'on ait à craindre l'apparition de l'effet Condorcet; en d'autres termes, on cherche les "conditions de transitivité de la méthode majoritaire"(CTMM).

C'est ainsi que dans les années 40 D. Black ouvre le feu en proposant la condition d'unimodalité ("single-peakedness" qui fut suivie de la condition de Coombs, de deux conditions d'Inada ("single-cavedness" et "bipartition") et de la condition de Ward ("sans carré latin"). Plus tard [Sen 1966] établit une condition plus générale qui traitait le cas des préordres. Récemment J.M. Blin a suggéré la condition de "consistance

(*) Voir, par exemple, la rubrique "Letters" dans Scientific American d'octobre 1976.

multidimensionnelle": cas particulier de la condition de Ward. Par la suite E. Terrier a généralisé la condition de consistance multidimensionnelle au moyen de la condition "d'étoilement". A cette liste nous ajoutons deux nouvelles conditions: "ramification" et "quasi-unimodalité", qui sont un complément de la condition d'unimodalité.

C H A P I T R E 2 .
L ' U N I M O D A L I T E .

	page
2.1.- INTRODUCTION	13
2.2.- PRESENTATION INTUITIVE DE L'UNIMODALITE	14
2.3.- DEFINITION ET PROPRIETES DE L'UNIMODALITE	16
2.4.- TEST DE L'UNIMODALITE PAR RAPPORT A UN ORDRE DE REFERENCE CONNU	19
2.5.-SERPENTS ET PYRAMIDES	19
2.6.- TEST DE L'UNIMODALITE SANS ORDRE DE REFERENCE CONNU	27
2.7.- REMARQUES DIVERSES	39

"Les savants exhumaient, dans les faubourgs de Mexico, la pyramide aux serpents et découvraient que ce n'était pas une pyramide, mais huit -un oignon de pierre aux multiples pelures..."
C.W.Ceram, dans "Des dieux, des tombeaux, des savants".

2.1.- INTRODUCTION.- La condition d'unimodalité est une CTMM. Cette condition peut être considérée comme la plus importante de celles qui ont pu être imaginées. Tout d'abord parce qu'elle a montré, la première, qu'il existe des situations de choix collectifs dans lesquelles la méthode majoritaire est toujours efficacement appliquée, et de ce fait elle a été un guide et un modèle des CTMM qui l'ont suivie. Ensuite, comme nous le verrons au §2.2, parce qu'elle demeure la condition la plus chargée de sens psychologique et économique (voir par exemple [Coombs et al 1970], [Luce et Galanter 1965]). Entre autres, [Coombs 1964], [Degenne 1972] et [Parlebas 1972], font remarquer que dans la plupart des situations de choix il est important de savoir, du point de vue psychologique, si l'ensemble d'ordres considéré obéit à la condition d'unimodalité. Dans l'affirmative, on peut s'aventurer à faire l'hypothèse suivante: il existe une dimension ou caractéristique selon laquelle les objets sont quantifiés, explicitement ou implicitement, d'une façon tacite et de la même manière par tous les votants. Ainsi, ce chapitre est animé, presque intégralement, par le désir de répondre à la question: un ensemble d'ordres quelconque, obéit-il à la condition d'unimodalité?

Au §2.3 nous traitons quelques aspects algébriques de l'unimodalité, laquelle dépend toujours de l'existence d'un "ordre de référence" sur l'ensemble des objets. Au §2.4 nous présentons une procédure pour tester si un ensemble d'ordres obéit à la condition d'unimodalité par rapport à un ordre de référence donné. Ensuite (§2.5) nous introduisons les concepts de "serpent" et de "pyramide", lesquels, tout en nous permettant de voir la condition d'unimodalité d'un point de vue nouveau, nous conduisent directement à une procédure efficace (§2.6) pour tester l'unimodalité lorsque l'ordre de référence est inconnu. Nous finissons le chapitre en ajoutant quelques remarques (§2.7) à propos de cette condition.

2.2.- PRESENTATION INTUITIVE DE L'UNIMODALITE.- Nous prions le lecteur de bien vouloir classer les objets:

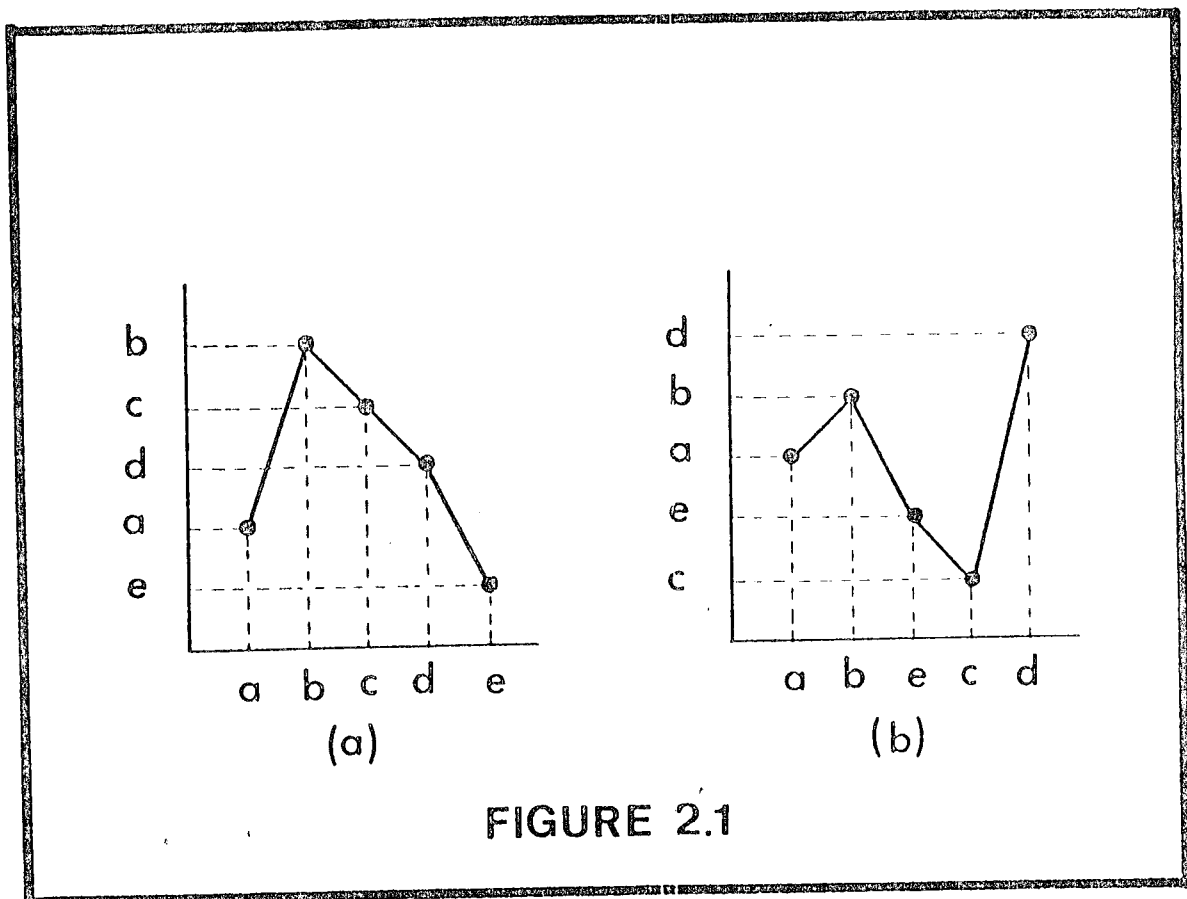
- $a_1 = 0$ sandwiches,
- $a_2 = 1$ sandwich,
- $a_3 = 2$ sandwiches,
- $a_4 = 3$ sandwiches,
- $a_5 = 4$ sandwiches,
- $a_6 =$ plus de 4 sandwiches,

par ordre décroissant de préférence selon sa faim au moment où il lira ces lignes. Nous pouvons espérer, intuitivement, que le classement fourni ne saurait être quelconque. Par exemple, si le lecteur vient de faire un copieux repas, son classement sera vraisemblablement $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$; si, par contre, il a une faim de loup, son classement probable sera l'ordre inverse $(a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$. Entre ces deux situations extrêmes, nous pouvons imaginer des ventres plus ou moins pleins, ce qui donnera aux classements une allure particulière. Plus précisément, en supposant que l'objet préféré est a_3 , alors celui qui le suit immédiatement (par ordre décroissant de préférence) ne peut pas être que a_2 ou a_4 ; en supposant que ce soit a_4 , alors l'objet classé en 3ième place devrait être soit a_2 , soit a_5 ; et ainsi de suite, l'objet classé en $(i+1)$ -ième place devant être "voisin" de l'ensemble à i objets déjà classés dans les i premières places.

Nous pouvons imaginer facilement de nombreuses situations de choix similaires. En effet, au lieu des sandwiches, les objets auraient pu être le nombre d'enfants désirés dans le mariage, ou les budgets à prévoir pour la construction d'un nouvel hôpital. Ces situations ont toutes un trait commun: il existe un ordre privilégié sur l'ensemble des objets, appelé "ordre de référence" (dans l'exemple l'ordre $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$), par rapport auquel on espère que les classements fournis présenteront une certaine "régularité", formalisée sous le nom d'unimodalité. Le nom d'unimodalité, au premier abord exotique, provient de la comparaison d'un ordre unimodal à l'ordre de référence; si l'on place le premier en abscisse, et le second

en ordonnée, on voit apparaître une disposition unimodale.

Exemple 2.1.:- L'ordre (b,c,d,a,e) est unimodal par rapport à l'ordre (a,b,c,d,e) et l'ordre (d,b,a,e,c) n'est pas unimodal par rapport à l'ordre (a,b,e,c,d). Voir fig. 2.1a et 2.1b, respectivement.



D. Black analyse cette condition dans plusieurs publications (qui ont été réunies et systématiquement présentées dans [Black 1971]). Il démontre que la satisfaction de cette condition est contradictoire avec l'apparition de l'effet Condorcet lorsqu'on applique la méthode majoritaire, autrement dit, l'unimodalité est une CTMM.

Comme le fait remarquer [Inada 1964], il n'y a pas une mais deux conditions d'unimodalité: l'une évidente, l'autre cachée. La condition évidente est celle que Black et Arrow ont voulu proposer, c'est-à-dire, la forme d'unimodalité précédemment introduite. La condition cachée, que nous appellerons

la condition de "pseudo-unimodalité", est formulée d'une façon implicite dans les démonstrations d'Arrow. Nous donnerons une définition formelle de la pseudo-unimodalité au chapitre 4. Pour le moment nous nous contentons de dire qu'elle contient l'unimodalité et que, à commencer par Arrow lui-même, de nombreux auteurs ont à tort confondu les deux conditions en une seule.

2.3.- DEFINITIONS ET PROPRIETES DE L'UNIMODALITE.-Soient V un ensemble fini de votants et A un ensemble fini de n objets. Chaque votant émet son opinion individuelle en indiquant un ordre total sur A . L'ensemble des opinions individuelles exprimées est appelé "état de l'opinion". Dans un effort de simplification et de clarté, nous nous sommes restreints dans ce chapitre aux états de l'opinion dont les ordres sont tous différents. Si le lecteur le désire, il pourra étendre facilement les concepts et résultats au cas général des états de l'opinion comprenant des ordres individuels identiques.

Définition 2.1.- Soit $x=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un ordre quelconque sur A , et soient a_i, a_j, a_k , trois objets quelconques, avec $i < j < k$. Tout ordre z sur A est dit "unimodal"(*) par rapport à l'ordre de référence x si, sur z , l'objet a_j n'est jamais surclassé par a_i et a_k simultanément.

Exemple 2.2.- Soit $A=\{a,b,c,d\}$ et soit $x=(a,b,c,d)$ l'ordre de référence. Sont unimodaux par rapport à x : (a,b,c,d) , (b,a,c,d) , (b,c,a,d) , (b,c,d,a) . Ne sont pas unimodaux par rapport à x : (a,c,b,d) car b est surclassé par a et par c ; (d,a,b,c) car c est surclassé par a et par d .

Proposition 2.1. ([Barbut et Frey 1971]).- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordre z soit unimodal par rapport à un ordre de référence x est que, pour tout triplet $\{a,b,c\}$ de x (avec $a > b > c$), si les objets a et c sont contigus dans z alors l'objet b se trouve placé dans z avant eux.

(*) Certains auteurs utilisent le mot "blackien".

Démonstration.- La condition est nécessaire car si les objets a et c sont contigus sur z , lorsque z est unimodal par rapport à x , l'objet b ne peut être que placé avant eux (voir définition 2.1). La condition est suffisante: si, lorsque a et c sont contigus sur z , b se trouve placé avant eux, z est unimodal par rapport à x puisque l'ordre de ces objets sur z est (b,c,a) ou (b,a,c) . (Cette proposition ne suppose aucunement que a et c se trouvent, dans x , séparés par le seul objet b . De ce fait, tous les objets situés dans x entre a et c se trouvent, dans z , placés avant eux)

C. Q. F. D.

Définition 2.2.- Un état de l'opinion E est dit obéir à la condition d'unimodalité ou être unimodal, s'il existe un ordre de référence par rapport auquel tous les ordres appartenant à E sont unimodaux.

Exemple 2.3.- L'état de l'opinion $E = \{x=(b,a,c,d), y=(d,a,b,c), z=(b,c,a,d)\}$ est unimodal car les ordres x, y, z sont tous unimodaux par rapport à l'ordre (c,b,a,d) . Par contre, l'état de l'opinion $F = \{u=(a,b,c,d), v=(b,c,d,a), w=(c,d,a,b)\}$ n'est pas unimodal, car il n'existe pas d'ordre sur l'ensemble $\{a,b,c,d\}$ par rapport auquel u, v, w soient unimodaux.

Proposition 2.2.- Il y a 2^{n-1} ordres unimodaux par rapport à un ordre de référence donné sur n objets.

Démonstration ([Desplas 1967]).- En queue d'un ordre unimodal z se trouve nécessairement soit le premier objet de l'ordre de référence, soit le dernier (2 possibilités); l'avant dernier objet de z ne peut être qu'une des deux extrémités de l'ordre de référence amputé du dernier objet de z (2 possibilités); etc. On a ainsi à chaque étape deux possibilités et en tout $(n-1)$ étapes entraînant un choix car la dernière possibilité est fixée. Au total, il y a donc 2^{n-1} ordres unimodaux sur n objets.

C. Q. F. D.

Exemple 2.4.:- Il y a $2^{4-1}=8$ ordres unimodaux par rapport à l'ordre (a,b,c,d) , à savoir: (a,b,c,d) , (b,a,c,d) , (b,c,a,d) , (b,c,d,a) , (c,b,a,d) , (c,b,d,a) , (c,d,b,a) , (d,c,b,a) .

Remarque 2.1.:- On serait tenté de croire que si l'ordre x disons, est unimodal par rapport à l'ordre y , alors y est aussi unimodal par rapport à x . Pourtant il n'en est rien, comme le prouve l'exemple suivant: $x=(b,c,a)$, $y=(a,b,c)$.

Proposition 2.3.:- La condition d'unimodalité est une CTMM.

Démonstration ([Desplas 1967]).- Nous raisonnerons par l'absurde, en supposant qu'un état de l'opinion E est unimodal et que pourtant l'application de la méthode majoritaire dans E conduise à l'effet Condorcet. Si on a l'effet Condorcet, alors il existe trois objets a , b , c tels qu'une majorité préfère a à b , une autre b à c , une dernière enfin c à a .

On ne peut avoir dans l'ordre de référence que l'un des six cas suivants:

$a \succ b \succ c$ ou $c \succ b \succ a$ (b entre a et c),
 $b \succ a \succ c$ ou $c \succ a \succ b$ (a entre b et c),
 $a \succ c \succ b$ ou $b \succ c \succ a$ (c entre a et b).

Puisque $a \succ b$ pour une majorité et $b \succ c$ pour une autre majorité, alors dans E il existe un ordre où $a \succ b \succ c$, ce qui exclut (d'après la définition 2.1) que dans l'ordre de référence c soit entre a et b .

Puisque $b \succ c$ pour une majorité et $c \succ a$ pour une autre majorité, alors dans E il existe un ordre où $b \succ c \succ a$, ce qui exclut que dans l'ordre de référence a soit entre b et c .

Puisque $c \succ a$ pour une majorité et $a \succ b$ pour une autre majorité, alors dans E il existe un ordre où $c \succ a \succ b$, ce qui exclut que dans l'ordre de référence b soit entre a et c .

Il ne peut donc pas y avoir d'ordre de référence tel que trois majorités se dégagent pour les préférences $a \succ b$, $b \succ c$, $c \succ a$.

C. Q. F. D.

2.4.- TEST DE L'UNIMODALITE PAR RAPPORT A UN ORDRE DE REFERENCE CONNU.- Pour déterminer si un état de l'opinion quelconque E est unimodal par rapport à un ordre de référence donné $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on peut appliquer la procédure suivante pour tout ordre z appartenant à E .

Procédure 2.1.- Soit $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

- 0) $i = 1$; $j = k = n$.
- 1) Si $z_k = x_i$ alors $i = i + 1$, aller en (3);
sinon aller en (2).
- 2) Si $z_k = x_j$ alors $j = j - 1$, aller en (3);
sinon l'ordre z n'est pas unimodal par rapport à l'ordre x , stop.
- 3) $k = k - 1$;
si $k > 0$ aller en (1); sinon l'ordre z est unimodal par rapport à l'ordre x , stop.

Cette procédure découle de la démonstration de la proposition 2.2.

2.5.- SERPENTS ET PYRAMIDES.- Dans ce paragraphe l'ensemble d'objets considéré sera l'ensemble des n premiers entiers

Définition 2.3.- Nous appellerons "pyramide" T_n le tableau pyramidal de la fig. 2.2, où le contenu t_{ij} de la case

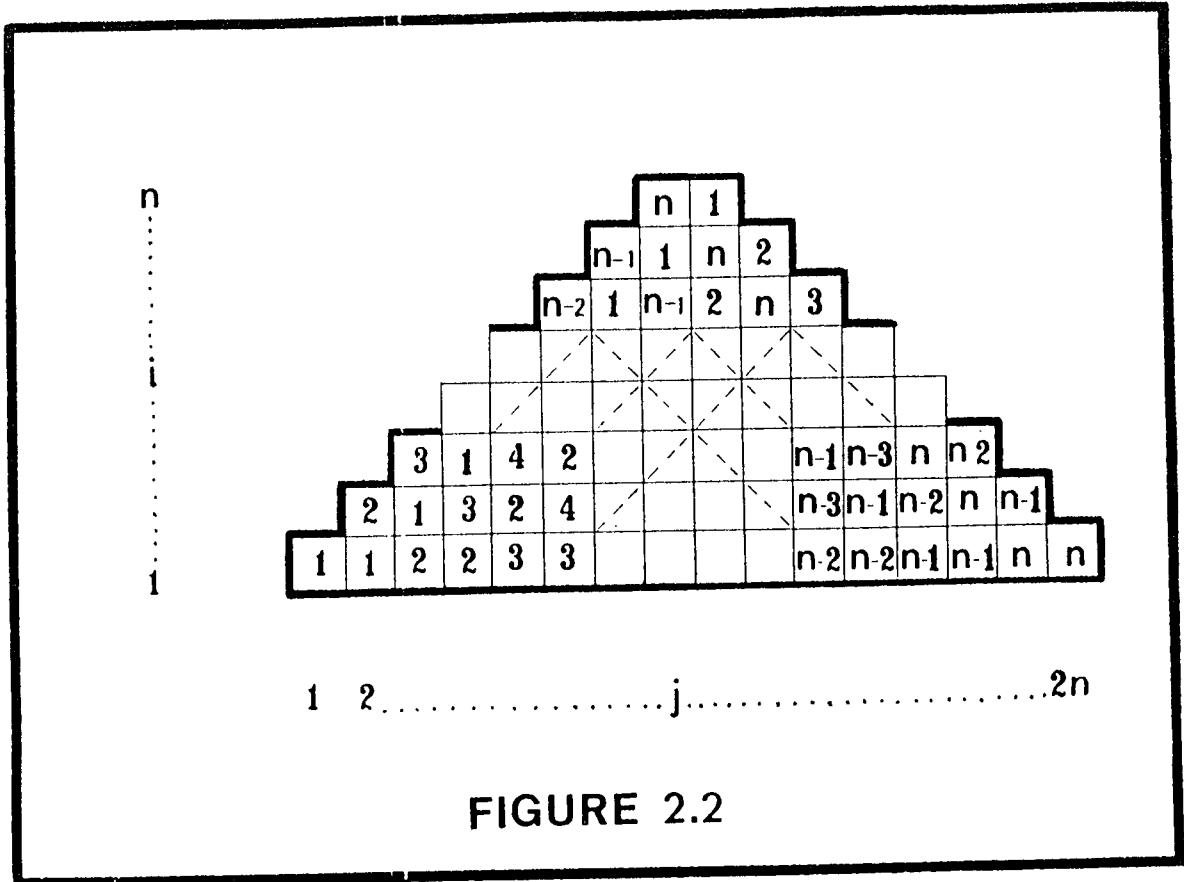


FIGURE 2.2

(i, j) est défini comme suit (pour $1 \leq i \leq n$ et $i \leq j \leq 2n+1-i$) :

Si $(i+j)$ est pair alors $t_{ij} = (i+j)/2 \dots \dots (I)$,

Si $(i+j)$ est impair alors $t_{ij} = (j-i+1)/2 \dots \dots (II)$.

N. B.- Deux définitions intuitives de T_n peuvent être données avec les méthodes constructives suivantes:

Méthode I.

Pas 1.- On dessine les bords de la pyramide.

Pas 2.- On met les chiffres 1, 1, 2, 2, ..., n, n sur toute la première ligne de T_n .

Pas 3.- Le premier (respectivement deuxième)

chiffre de tout couple de chiffres égaux sur la première ligne, se propage vers sa gauche (respectivement droite) tout au long de la diagonale qui le contient.

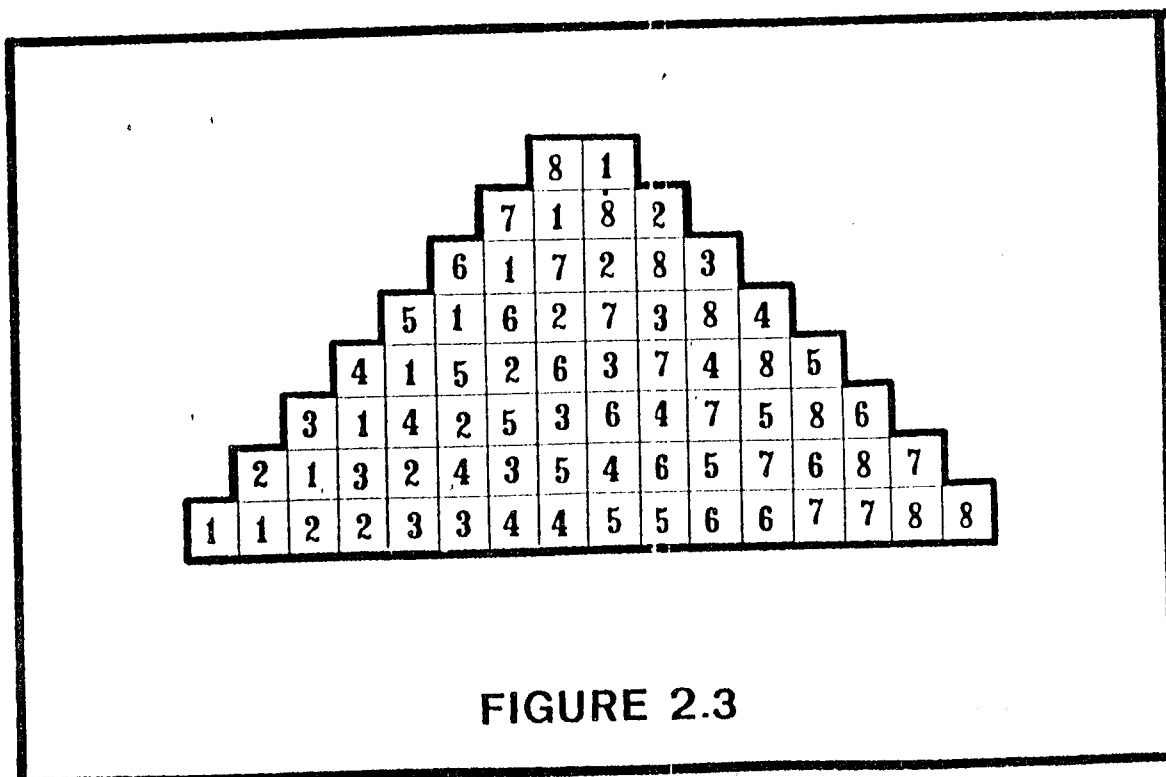
Méthode II.

Pas 1.- On dessine les bords de la pyramide.

Pas 2.- En partant du bas (respectivement du haut) de T_n on inscrit les chiffres 1, 2, ..., n dans les cases du bord gauche (respectivement droit) de T_n .

Pas 3.- Les chiffres des bords se propagent vers le bas de T_n tout au long des diagonales qui les contiennent.

Exemple 2.5.- La pyramide T_8 de la fig. 2.3.



Définition 2.4.:- La suite $(t_{1j_1}, t_{2j_2}, \dots, t_{nj_n}) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ est appelée "serpent" sur T_n si pour tout i ($1 \leq i \leq n-1$) on vérifie: $|j_i - j_{i+1}| \leq 1$ et $s_i \neq s_{i+1}$.

N. B.- Un serpent peut être construit comme suit:

Pas 1.- On choisit dans T_n une case quelconque sur la première ligne.

Pas 2.- Tant qu'on n'est pas arrivé au sommet de T_n , on se place dans la ligne immédiatement supérieure, et on choisit sur elle une case qui:

- a) Soit contiguë à la dernière case choisie,
- et b) contienne un chiffre différent du contenu de la dernière case choisie.

On remarquera que ce procédé ne se bloque que lorsque l'on arrive au sommet de T_n . Le serpent est alors terminé.

Exemple 2.6.:- Les suites $(3,2,4,5,6,7,8,1)$, $(4,5,3,6,2,7,1,8)$ et $(6,5,4,3,2,1,7,8)$ sont des serpents sur T_8 (voir fig. 2.3).

Proposition 2.4.:- Pour tout serpent $(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)$ sur T_n , pour tout i ($1 \leq i \leq n-1$), on a: $|s_i - s_{i+1}| = 1$ ou i .

Démonstration.- Le tableau ci-dessous (page suivante) analyse tous les cas possibles à l'aide des formules (I) et (II) de la définition 2.3.

C. Q. F. D.

Notons B_n l'ensemble des ordres unimodaux par rapport à l'ordre $x=(1,2,\dots,n)$.

Notons D_n l'ensemble des ordres $z=(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sur l'ensemble des n premiers entiers tels que, pour tout i

Valeur de $s_i = t_{ij}$	Valeur de s_{i+1}	$s_i - s_{i+1}$
Si $(i+j)$ est pair alors $s_i = (i+j)/2$.	Si $s_{i+1} = t_{i+1, j+1}$, alors $(i+1) + (j+1)$ est pair, en conséquence $s_{i+1} = (i+j+2)/2$.	-1
	Si $s_{i+1} = t_{i+1, j}$, alors $(i+1)+j$ est impair, d'où $s_{i+1} = (j-i)/2$.	i
	Si $s_{i+1} = t_{i+1, j-1}$, alors $(i+1) + (j-1)$ est impair, d'où $s_{i+1} = (i+j)/2$.	0 (zéro). N.B. - Ces deux cas ne sont pas possibles car, par définition des serpents: $s_i \neq s_{i+1}$.
Si $(i+j)$ est impair, alors $s_i = (j-i+1)/2$.	Si $s_{i+1} = t_{i+1, j+1}$, alors $(i+1) + (j+1)$ est impair, d'où $s_{i+1} = (j-i+1)/2$.	
	Si $s_{i+1} = t_{i+1, j}$, alors $(i+1)+j$ est pair, d'où $s_{i+1} = (i+j+1)/2$.	-i
	Si $s_{i+1} = t_{i+1, j-1}$, alors $(i+1) + (j-1)$ est impair, d'où $s_{i+1} = (j-i-1)/2$.	1

($1 \leq i \leq n-1$) on vérifie de manière disjunctive:

$$\alpha) \quad |t_i - t_{i+1}| = 1,$$

ou $\beta) \quad |t_i - t_{i+1}| = i$ et (t_1, \dots, t_{i-1}) est une permutation des entiers r tels que:

$$\min\{t_i, t_{i+1}\} < r < \max\{t_i, t_{i+1}\}.$$

N. B.- Dans les paragraphes suivants nous ferons souvent allusion à ces deux conditions.

Proposition 2.5.:- $D_n \subset B_n$.

Démonstration.- Raisonnons par l'absurde, en supposant que $y = (t_1, \dots, t_n) \in D_n$ et $y \notin B_n$. Si $y \notin B_n$ il existe alors (voir proposition 2.1) un triplet $\{p, q, r\}$ d'entiers, avec $1 \leq p < q < r \leq n$, tel que, p et r étant contigus sur y , q se trouve placé sur y après eux.

D'autre part $|p-r| > 1$ et si $y \in D_n$, la condition β ci-dessus est satisfaite, q se trouve donc placé sur y avant p et r .

L'entier q ne peut pas se trouver simultanément avant et après p et r , d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

Théorème 2.1.:- L'ensemble S_n des serpents sur T_n est identique à l'ensemble B_n .

Démonstration (par récurrence).- Pour $n=1$: $B_n = \{(1)\} = S_n$, le théorème est vrai. Pour $n=2$:

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

d'où $S_n = \{(2,1), (1,2)\} = B_n$, et le théorème est encore vrai.

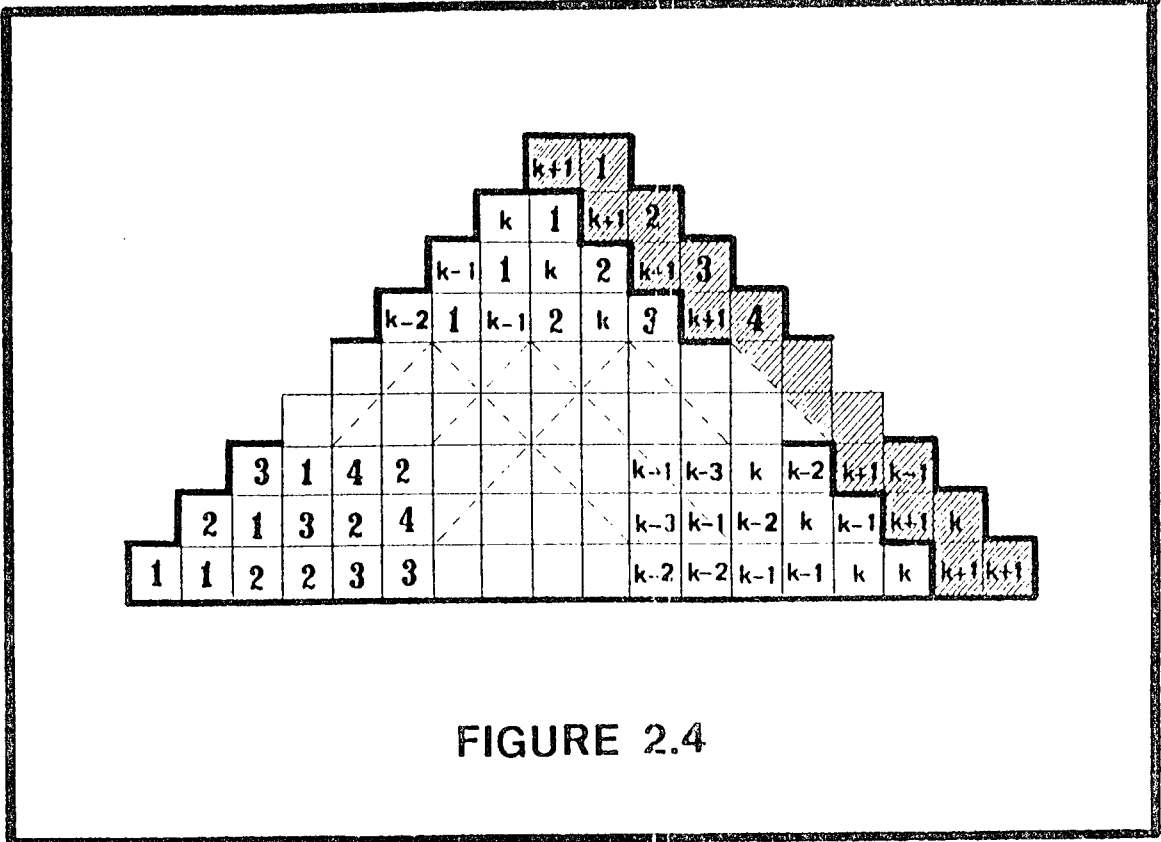


FIGURE 2.4

Supposons que le théorème soit vrai pour $n=k$, c'est-à-dire, $S_k = B_k$, et démontrons qu'alors il est vrai pour $n=k+1$. Dans la fig. 2.4 nous avons représenté T_k et T_{k+1} simultanément. La zone hachurée correspond à ce qu'il faut ajouter à T_k pour qu'elle devienne T_{k+1} .

Soit $e = (s_1, \dots, s_{k+1})$ un serpent sur T_{k+1} . En tenant compte de la définition du serpent, on voit qu'une fois que ce dernier rentre dans la zone hachurée, il ne peut plus la quitter; en conséquence, il existe un indice g ($1 \leq g \leq k+1$) tel que (s_1, \dots, s_{g-1}) soit entièrement sur T_k et (s_g, \dots, s_{k+1}) sur la zone hachurée de T_{k+1} .

Si pour tout i ($1 \leq i \leq k$), le serpent e satisfait la condition α ou la condition β , alors $S_{k+1} \subset D_{k+1}$, et de la proposition 2.5 on pourra conclure $S_{k+1} \subset B_{k+1}$.

Découpons le domaine de variation de i en quatre intervalles:

- i) Si $1 \leq i \leq g-2$, les conditions α et β sont vérifiées car le serpent $f = (s_1, \dots, s_{g-1}, k+1-g, k+1-g-1, k+1-g-2, \dots, 1)$ sur T_k est un ordre unimodal par hypothèse inductive.
N. B. - Puisque f est une permutation des k premiers entiers, (s_1, \dots, s_{g-1}) est une permutation d'entiers r tels que $k+2-g \leq r \leq k$.
- ii) Si $i = g-1$, on a deux cas à envisager:
 - ii1) Si $|s_{g-1} - s_g| = 1$, alors la condition α est vérifiée.
 - ii2) Sinon $|s_{g-1} - s_g| = g-1$ (proposition 2.4). Par construction de T_{k+1} on a $s_g = k+1$, ce qui implique $s_g > s_{g-1}$ et en conséquence $s_{g-1} - s_g = -(g-1)$. En substituant la valeur de s_g on arrive finalement à: $s_{g-1} = k+2-g$. Du N.B. de (i) on déduit que (s_1, \dots, s_{g-2}) est une permutation d'entiers r tels que $k+3-g \leq r \leq k$, et en conséquence la condition β est vérifiée.
- iii) Si $i = g$ on a $|s_g - s_{g+1}| = g$ (proposition 2.4) et on peut conclure que, tenant compte du N.B. de (i), la condition β est vérifiée (en effet, (s_1, \dots, s_{g-1}) est une permutation des entiers r tels que $s_{g+1} = k+1-g < k+2-g \leq r \leq k < k+1 = s_g$).
- iv) Si $g+1 \leq i \leq k$, on voit immédiatement que la condition α est vérifiée.

En conséquence $S_{k+1} \subset D_{k+1}$ et on peut conclure que $S_{k+1} \subset B_{k+1} \dots \dots \dots$ (III).

Maintenant, en observant T_{k+1} , nous voyons que pour n'importe quel serpent $e = (s_1, \dots, s_{k+1})$, s_{k+1} peut être choisi

de deux façons différentes; une fois ce choix effectué s_k peut aussi être choisi de deux façons différentes; et ainsi de suite, sauf s_1 , qui ne peut être choisi que d'une seule façon. Ceci peut clairement être argumenté à partir de la démonstration de la proposition 2.4. Nous avons donc: $|S_{k+1}| = 2^k$ et de la proposition 2.2 on tire: $|S_{k+1}| = |B_{k+1}| \dots \dots \dots (IV)$.

Enfin, en tenant compte de (III) et (IV), on a $S_{k+1} \equiv B_{k+1}$, et la démonstration par récurrence est complétée.

C. Q. F. D.

Les concepts de pyramide et de serpent nous permettent de représenter d'une façon visuelle harmonieuse l'ensemble des ordres unimodaux par rapport à un ordre donné. De plus, comme nous allons le voir maintenant, ces concepts permettent d'imaginer une procédure pour tester l'unimodalité d'un état de l'opinion quelconque, lorsque l'ordre de référence est inconnu.

2.6. - TEST DE L'UNIMODALITE SANS ORDRE DE REFERENCE CONNU.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction à ce chapitre, dans certaines situations de choix il est intéressant de répondre à la question: Pour un état de l'opinion quelconque, existe-t-il un ordre de référence x tel que E soit unimodal par rapport à x ? On pourrait résoudre le problème à l'aide de la procédure 2.1 du paragraphe 2.4, en prenant comme ordre de référence, un à un, tous les ordres sur n objets. Cette solution, bien évidemment, ne serait pas opérationnelle.

Nous avons donc développé dans ce paragraphe une procédure qui décrit -d'une façon efficace- l'ensemble des ordres par rapport auxquels E est unimodal.

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un état de l'opinion. Soit P_i l'ensemble (éventuellement vide) des ordres de référence par rapport auxquels l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ est unimodal. Il est évident que $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots \supset P_m$.

Intuitivement, la procédure que nous suggérons, consiste à construire successivement et d'une façon implicite, les ensembles P_i , en commençant par P_1 , puis P_2 , et ainsi de suite jusqu'à P_m . S'il existe un indice i_0 ($1 \leq i_0 \leq m$) tel que $P_{i_0} = \emptyset$, alors $P_i = \emptyset$ pour $i_0 < i \leq m$, et dans ce cas E n'est pas unimodal; si par contre $P_m \neq \emptyset$, alors E est unimodal.

Soit la pyramide $T_n = \{t_{ij}\}$ et δ une bijection de l'ensemble des n premiers entiers sur n'importe quel ensemble A .

Définition 2.5. - On appelle "configuration pyramidale" T'_n la pyramide d'éléments $t'_{ij} = \delta(t_{ij})$.

Remarque 2.2. - Il est évident qu'un état de l'opinion $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ est unimodal si et seulement s'il existe une configuration pyramidale dans laquelle x_k ($k=1, \dots, i$) soit un serpent.

On utilisera le concept de configuration pyramidale pour la construction des ensembles P_i . En effet, si $\Omega_i = \{ \theta \mid \text{les ordres } x_1, x_2, \dots, x_i \text{ sont des serpents dans la configuration pyramidale } \theta \}$, alors la construction de P_i revient à celle de Ω_i ; chaque élément de P_i est obtenu en lisant, du bas vers le haut, les cases du bord gauche de chaque élément de Ω_i .

Ω_1 est donc l'ensemble des configurations pyramidales tel que l'ordre $x_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ soit un serpent de chacune d'elles. Alors, pour tout élément de Ω_1 : soit $a_n = t'_{n,n} = t'_{n-1,n+1} = t'_{n-2,n+2} = \dots = t'_{2,2n-1} = t'_{1,2n}$, soit $a_n = t'_{n,n+1} = t'_{n-1,n} = t'_{n-2,n-1} = \dots = t'_{1,2} = t'_{1,1}$. Autrement dit, les configurations solution ont soit la forme de la fig. 2.5, soit celle de la fig. 2.6. Cette double possibilité peut être résumé en ne prenant qu'une d'elles (par exemple celle de la fig. 2.5) et en la munissant d'un "pivot" p_n qui "pend du plafond", autour duquel la pyramide peut "tourner (pivoter) de 180° " (voir fig. 2.7). Si

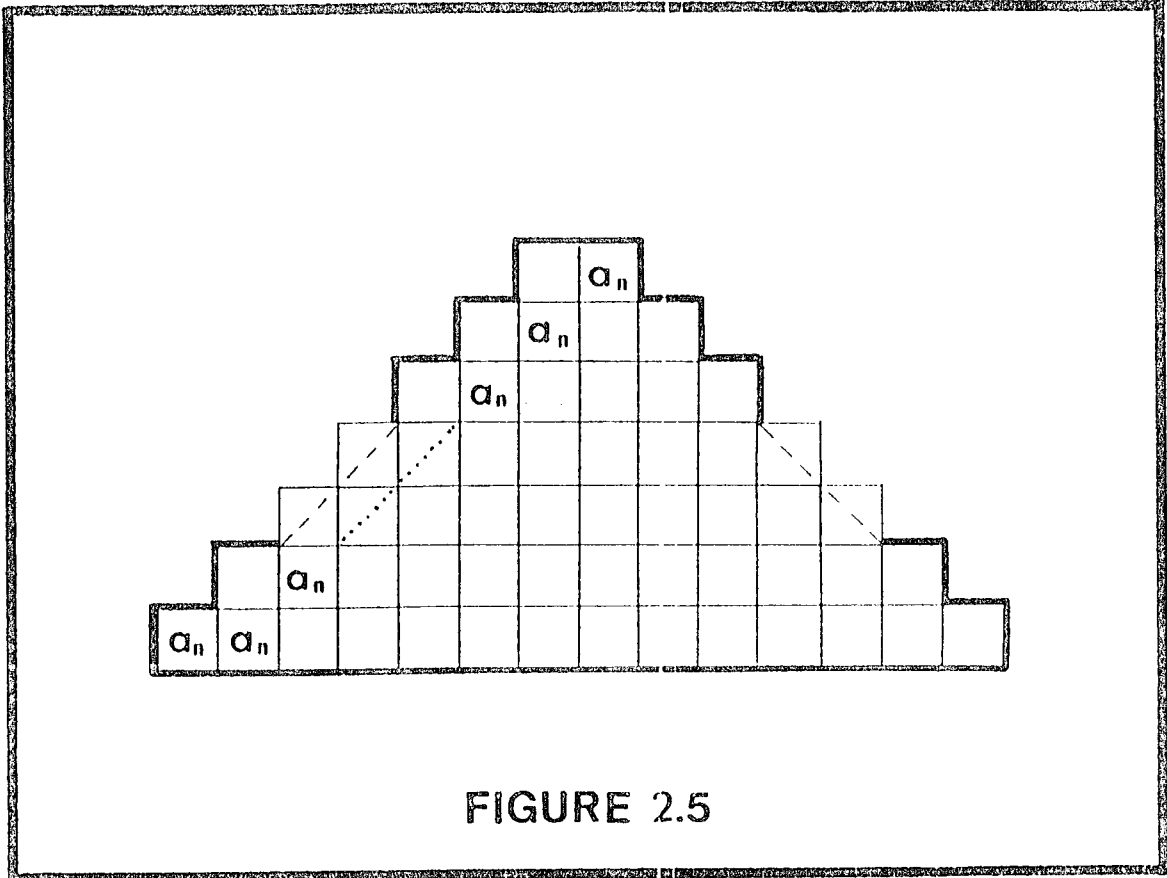


FIGURE 2.5

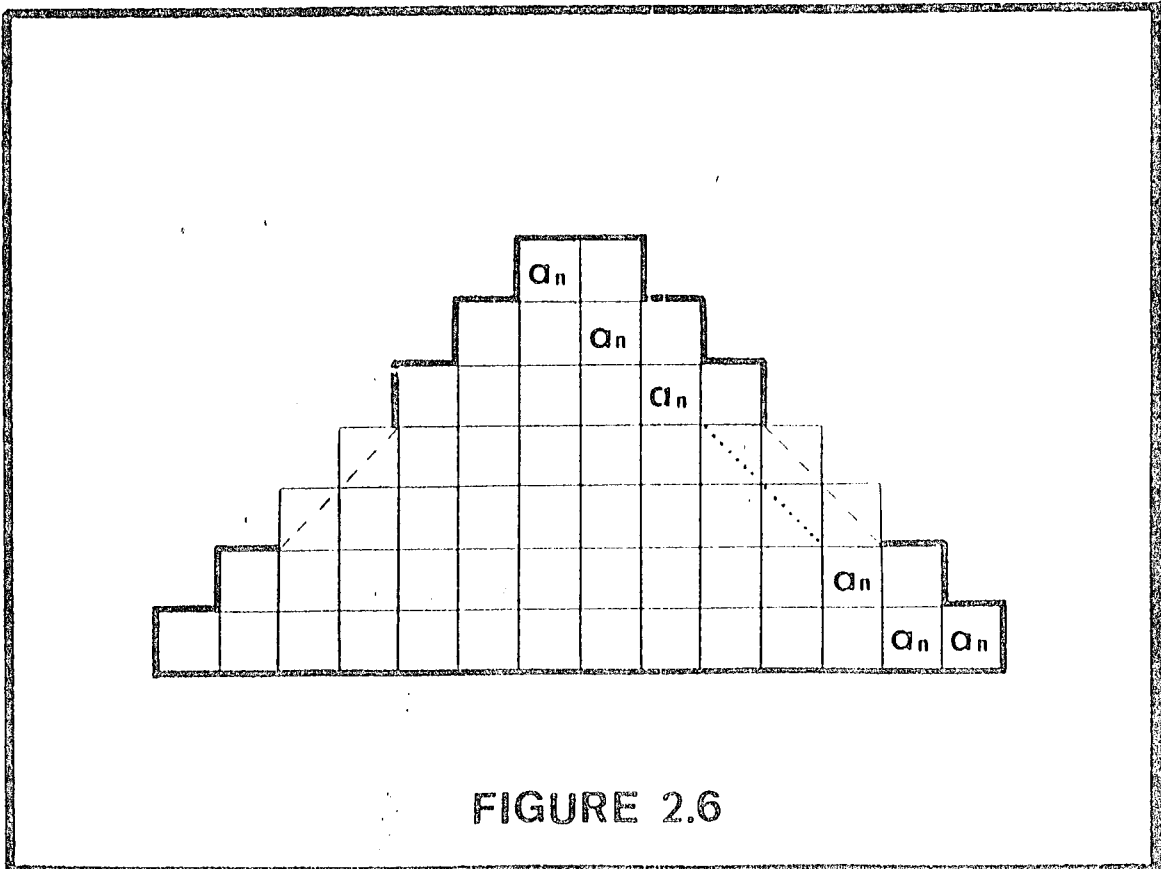


FIGURE 2.6

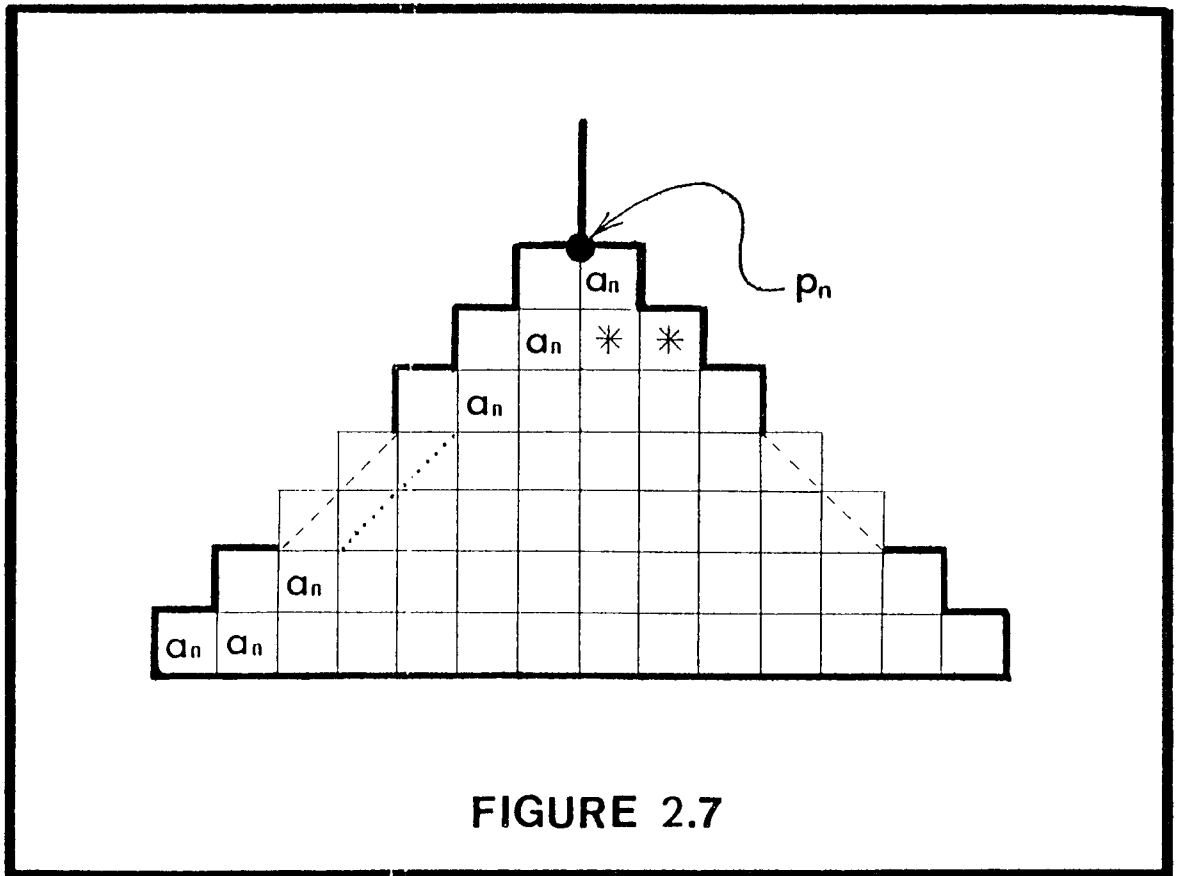


FIGURE 2.7

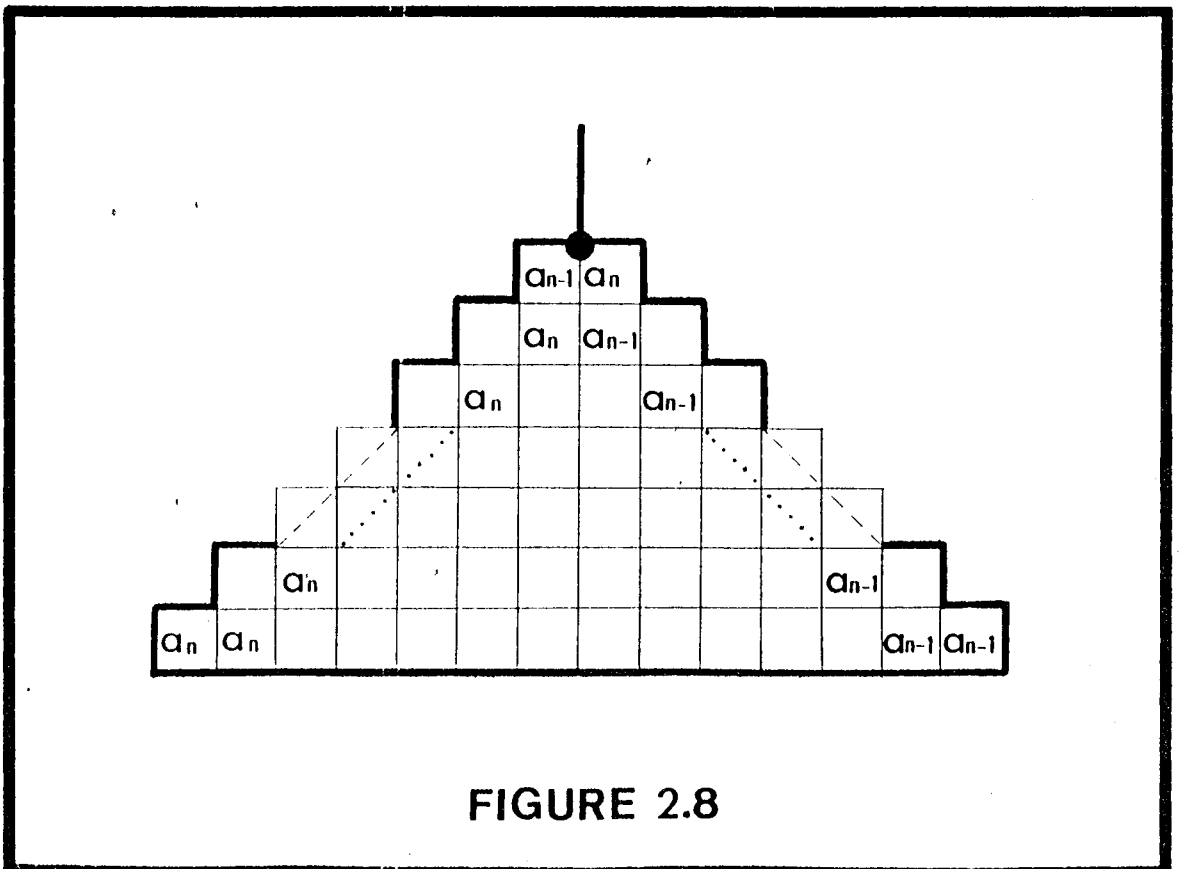


FIGURE 2.8

nous considérons maintenant dans x_1 l'objet a_{n-1} , cet objet doit occuper dans la pyramide de la fig. 2.7 une des deux cases marquées d'un astérisque. Nous avons indiqué à la fig. 2.8 et à la fig. 2.9 (page 32) les deux cas possibles; ils peuvent être résumés en ne prenant qu'un d'eux (par exemple celui de la fig. 2.9), et en insérant un pivot p_{n-1} , autour duquel, et indépendamment de la position du pivot p_n , la pyramide plus petite peut tourner de 180° (voir fig. 2.10). Si une analyse ultérieure venait à éliminer une des deux possibilités, par exemple celle de la fig. 2.8, alors la petite pyramide de la fig. 2.10 tournerait de 180° , le pivot p_{n-1} disparaîtrait et finalement on insérerait l'objet a_{n-1} dans la case $t'_{2,2}$ (propagation vers l'extérieur). Le résultat de ces manoeuvres est bien la pyramide de la fig. 2.9.

Pour le reste des objets, c'est-à-dire, a_1, a_2, \dots, a_{n-2} , nous répétons la procédure dans l'ordre $a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_1$, ce qui produit une suite de n pyramides, comme un oignon à n pelures, les unes emboîtées dans les autres et reliées au moyen de n pivots. Voir par exemple, la fig. 2.11 pour $n = 7$.

Nous pouvons remarquer que la considération de p_1 n'est pas nécessaire puisque ses deux positions produisent le même effet. Nous effaçons donc p_1 et propageons a_1 vers la pyramide immédiatement supérieure, ce qui donne comme résultat la fig. 2.12.

Etant donné qu'on a deux positions pour chaque pivot, il est évident que $|\Omega_1| = 2^{n-1}$. On décrit l'ensemble Ω_1 en combinant sur la fig. 2.12 les deux positions possibles de chacun des $n-1$ pivots. Pour avoir donc un élément de Ω_1 on effectue d'abord sur la fig. 2.12 une des combinaisons possibles, et ensuite on remplit les cases vides de la fig. 2.12 en propageant en diagonale les éléments des cases non-vides.

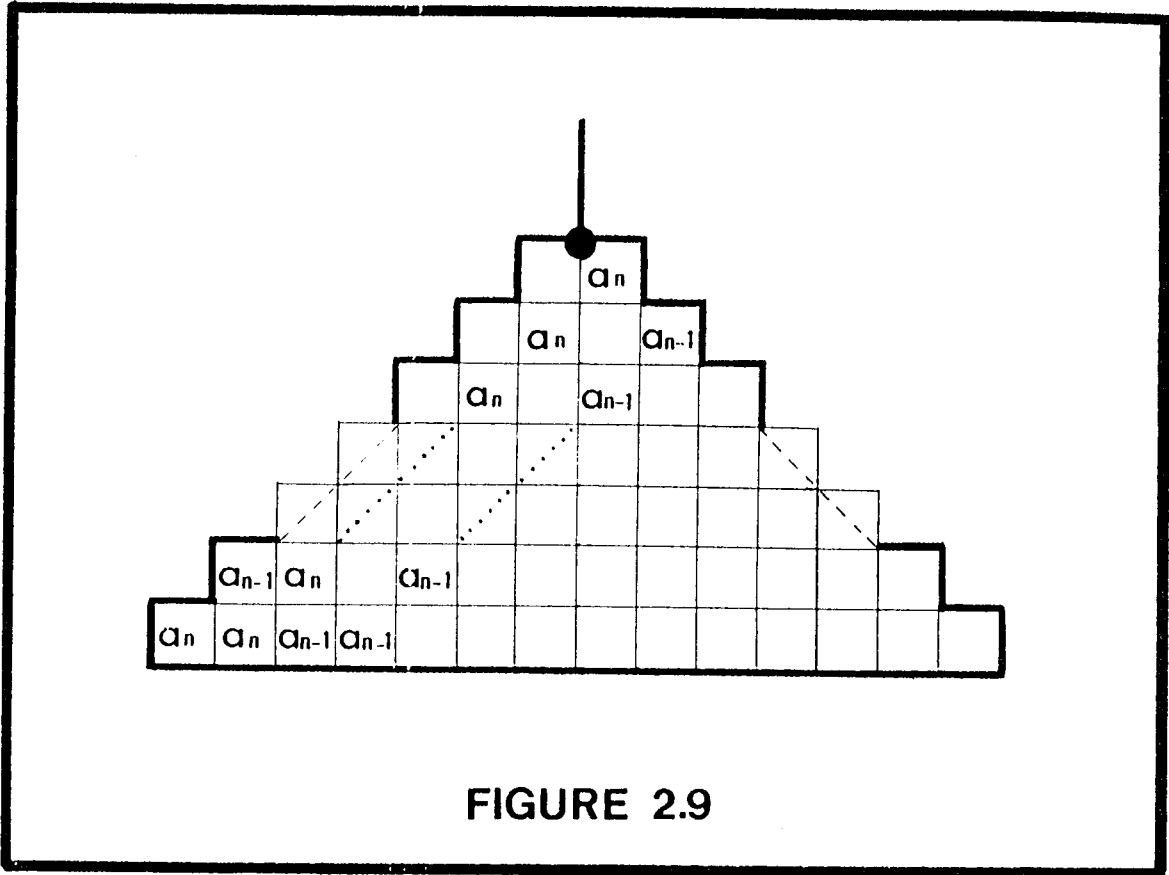


FIGURE 2.9

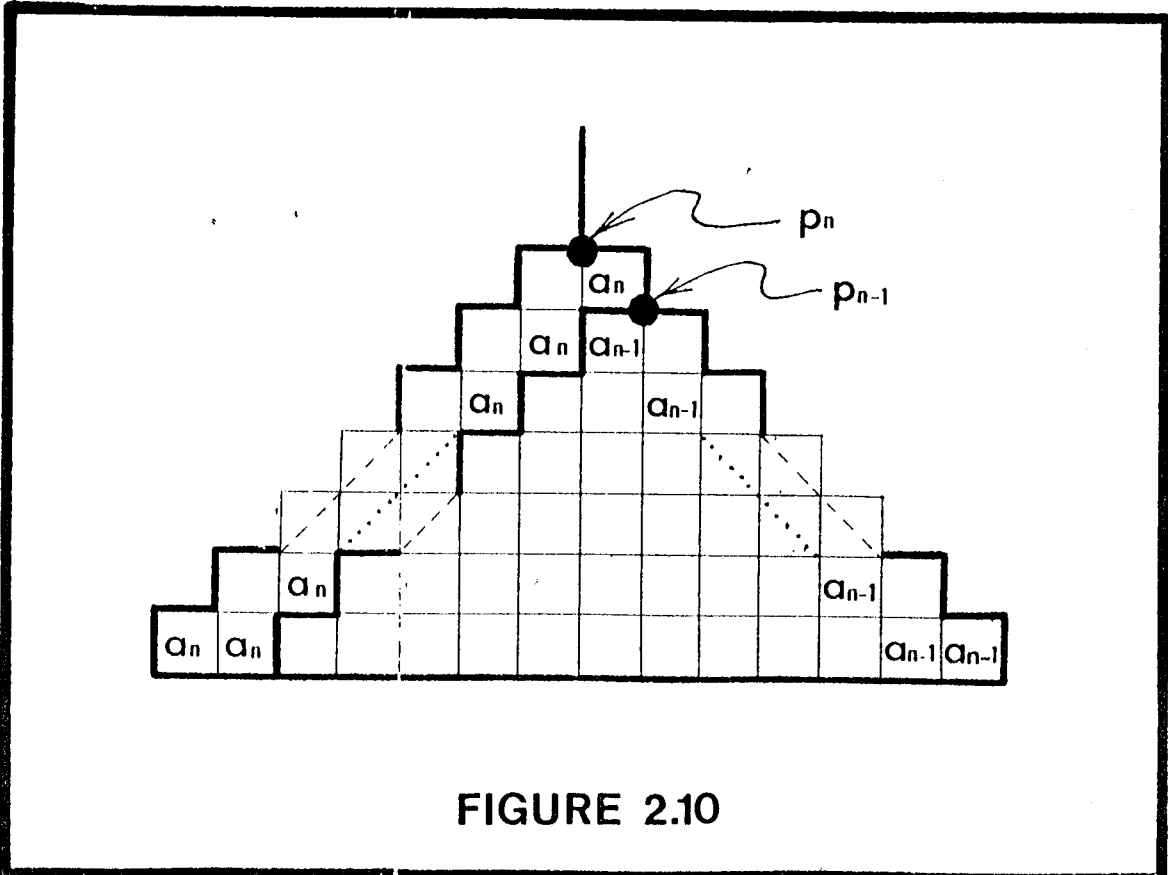


FIGURE 2.10

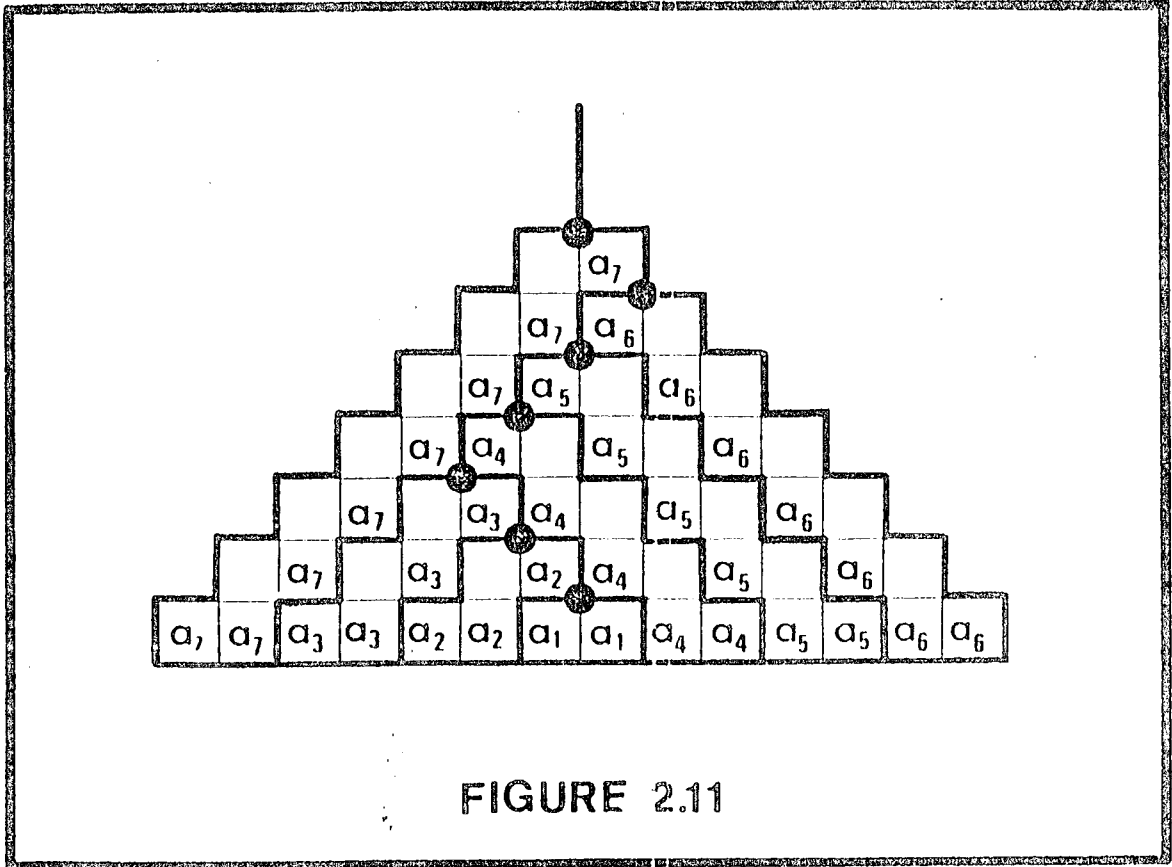


FIGURE 2.11

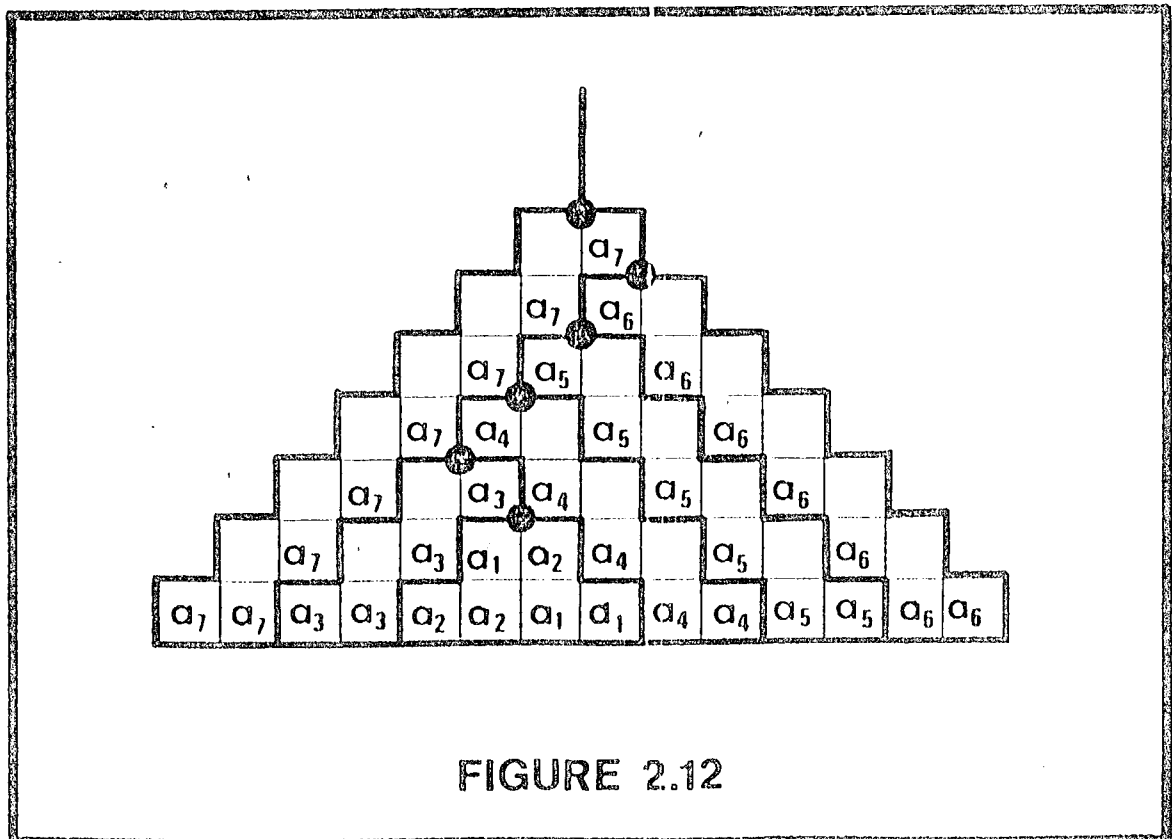


FIGURE 2.12

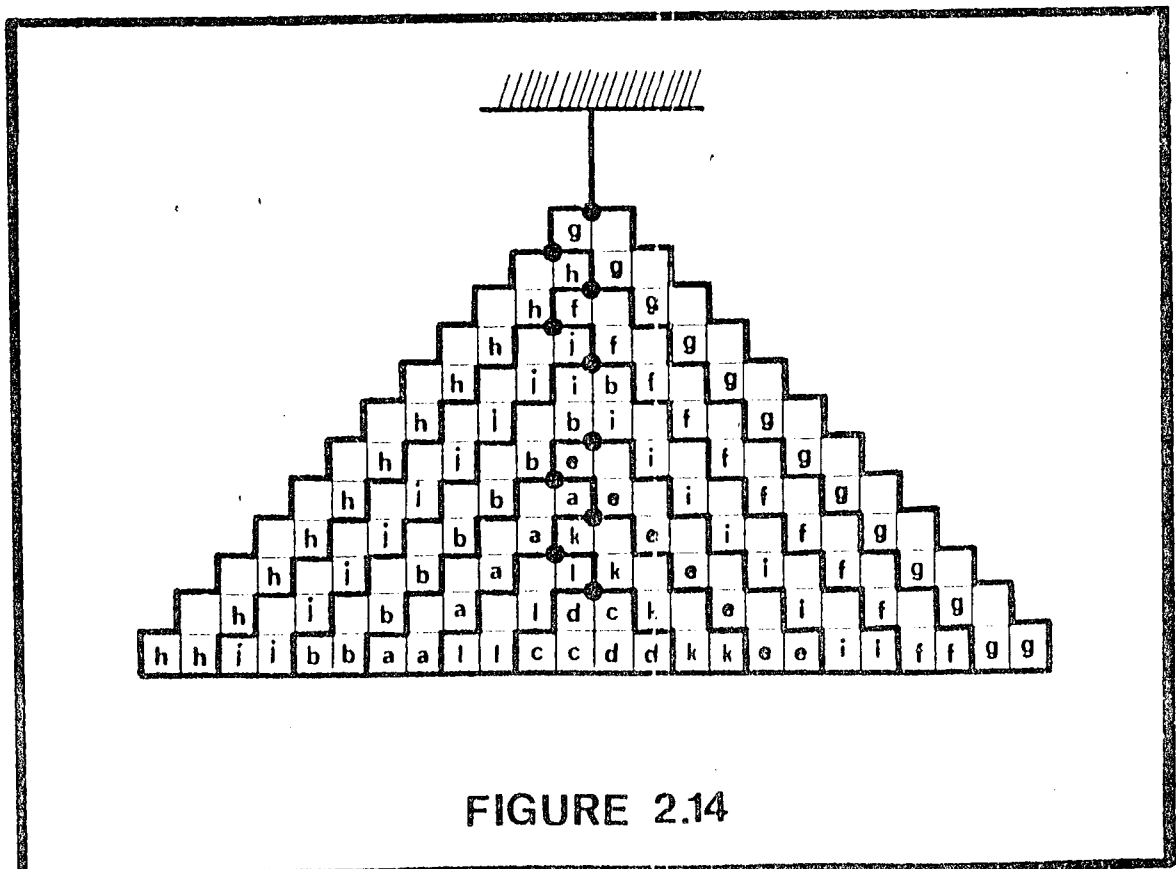
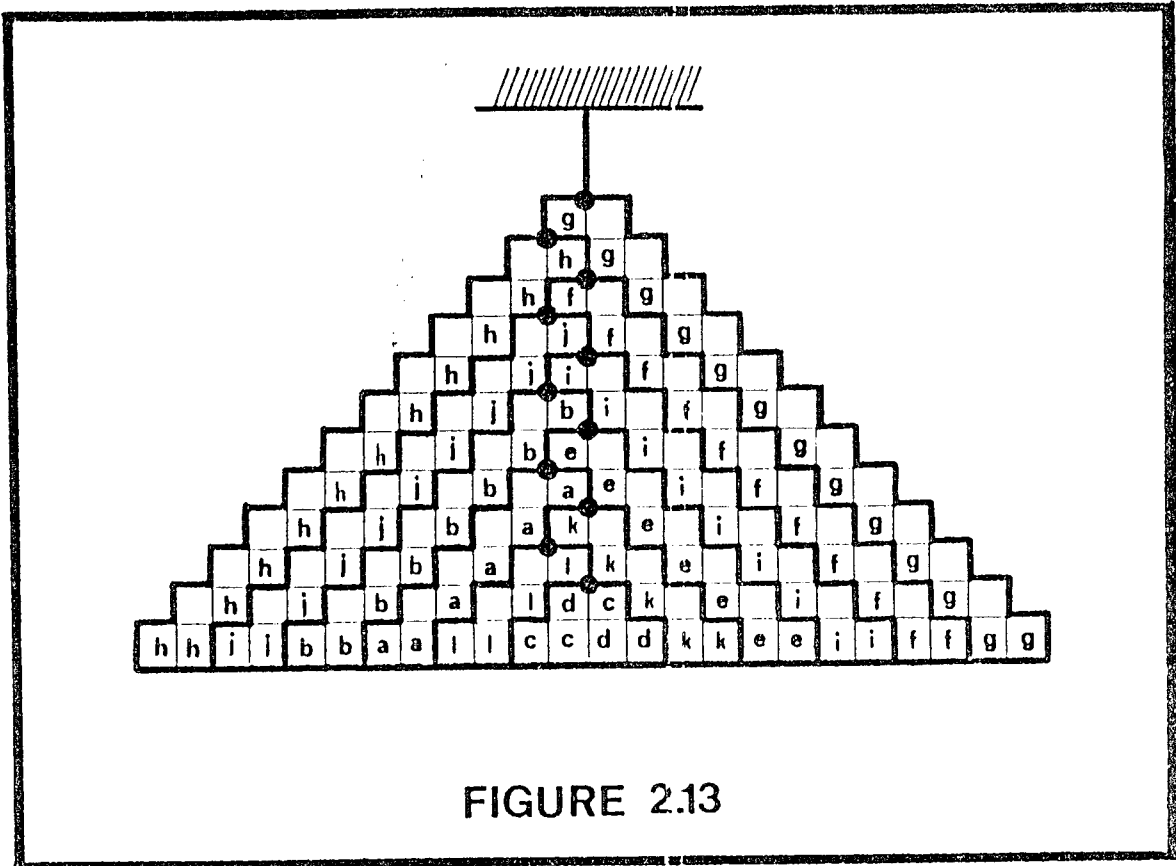
Ω_2 est bien évidemment le sous-ensemble de Ω_1 tel que x_2 soit un serpent de chaque élément de Ω_2 . D'une manière générale, Ω_{i+1} est le sous-ensemble de Ω_i tel que x_{i+1} soit un serpent de chaque élément de Ω_i .

Décrivons la procédure en détail à l'aide d'un exemple.

Exemple 2.7. - Déterminer si l'état de l'opinion $E = \{ x_1 = (c,d,l,k,a,e,b,i,j,f,h,g), x_2 = (c,d,l,k,a,e,i,b,j,f,h,g), x_3 = (l,d,k,c,a,e,b,i,f,h,g,j), x_4 = (d,l,c,k,a,e,b,f,i,h,j,g) \}$ est unimodal. Dans le cas affirmatif, énumérer les ordres par rapport auxquels il l'est.

Procédure. - En prenant l'ordre x_1 nous construisons tout d'abord la pyramide de la fig. 2.13 (page 35), ce qui nous fournit Ω_1 . Passons à l'ordre x_2 et, le lisant "à l'envers", essayons de "descendre" du haut de la pyramide de la fig. 2.13. Nous pouvons remarquer que pour les quatre derniers objets de x_2 cela est faisable, mais qu'il n'en est pas de même pour le cinquième objet de x_2 ($b \neq i$). On est donc obligé d'inscrire un "b" à côté du "i" au sommet de T_8^1 ; ceci fait disparaître p_7 (voir fig. 2.14 page 35). Nous voyons qu'ensuite on peut descendre jusqu'à la première ligne avec le restant de x_2 et affirmer que pour la construction de l'ensemble Ω_2 il suffit de considérer sur la fig. 2.14 les deux positions de chaque pivot. Puisqu'on a 10 pivots (p_7 a été effacé), alors $|\Omega_2| = 2^{10}$.

Considérons maintenant l'ordre x_3 et essayons de descendre du haut de la fig. 2.14 en le lisant à l'envers. Voyant que le dernier objet d' x_3 n'est pas g, mais j, on inscrit ce dernier à côté de g, c'est-à-dire qu'on fait $t_{12,13}^1 = j$. Dans la fig. 2.14 on a $t_{11,12}^1 = h$, tandis que d'après la définition des configurations pyramidales nous devons avoir $t_{12,13}^1 = t_{11,12}^1$. Pour résoudre ce problème nous disposons d'un atout: nous



pouvons pivoter autour de p_{11} pour ensuite faire $t'_{11,12} = j$, $t'_{2,23} = h$ et finalement faire disparaître p_{11} , ce qui donne la fig. 2.15; dans celle-ci, nous pouvons constater que nos déboires ne sont pas encore finis: en effet, on a $t'_{10,11} = f$, et l'on doit avoir également $t'_{10,11} = t'_{11,12} = t'_{12,13} = j$. Nous répétons donc la manoeuvre précédente, ce qui nous mène à la fig. 2.16.

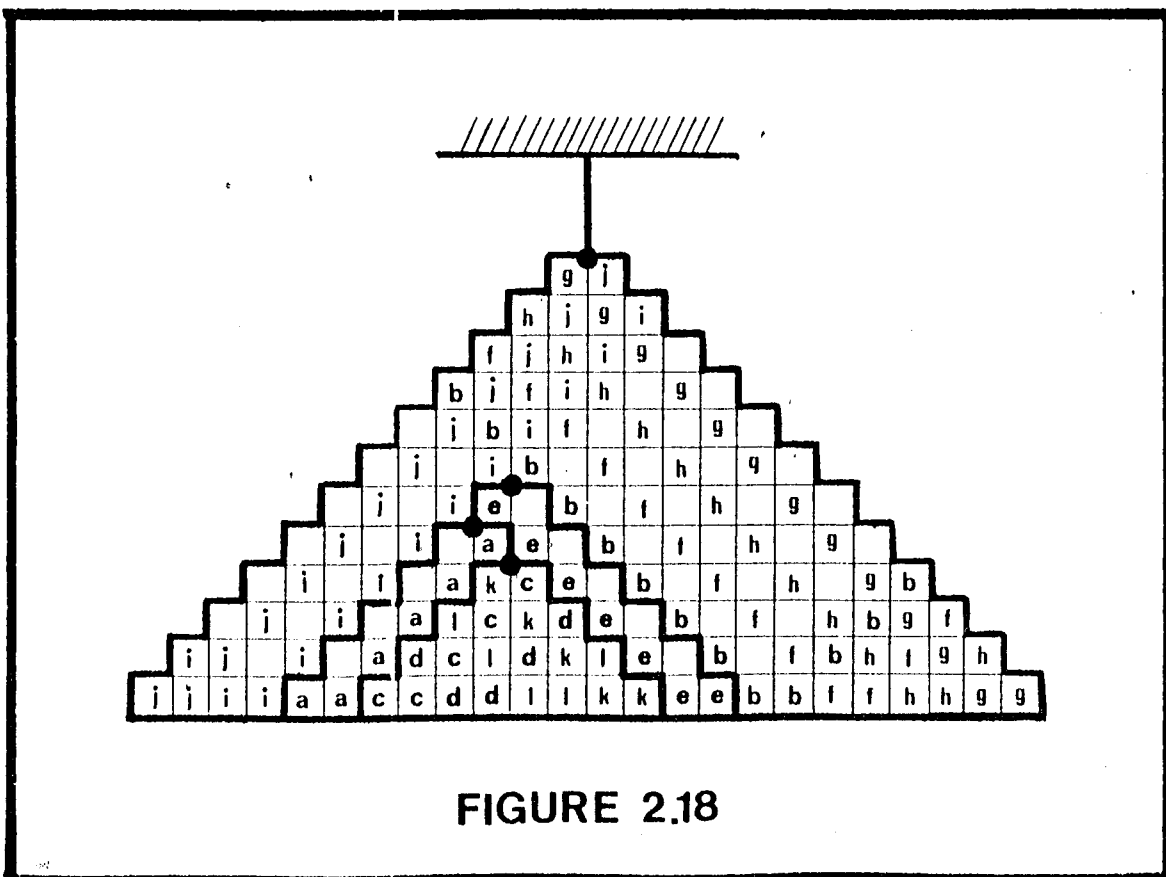
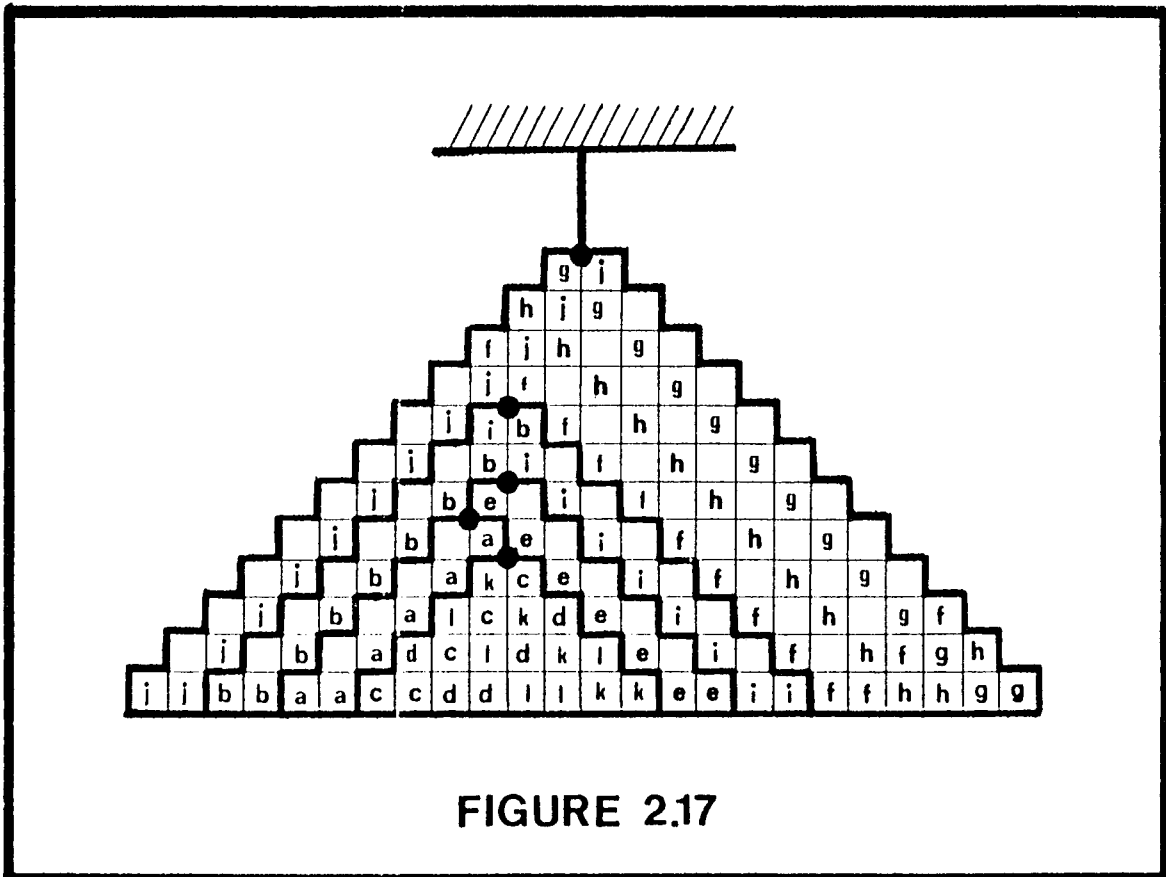
Revenons sur x_3 et essayons (fig. 2.16) de poursuivre la descente initiée avec j : elle est faisable jusqu'à l'objet a inclus; puis nous sommes obligés d'insérer le c à côté du k , et contraints à quelques pivotements pour obtenir finalement la fig. 2.17 (page 38). Les objets suivant de l'ordre x_3 permettent de descendre jusqu'à la première ligne.

Lorsque, lisant x_4 à l'envers, on est obligé de faire $t'_{9,12} = i$, il s'en suit un pivotement et la disparition du pivot p_8 , ce qui donne finalement la fig. 2.18.

Pour énumérer maintenant l'ensemble P_4 , c'est-à-dire, l'ensemble des ordres par rapport auxquels E est unimodal, il suffit de combiner sur la fig. 2.18 les deux positions de chacun des 4 pivots. Pour chaque combinaison on remplit les cases vides d'une manière unique, ce qui détermine l'ordre de référence qui peut être lu sur le bord gauche de la configuration pyramidale du bas vers le haut.

Les $2^4 = 16$ ordres de référence ainsi trouvés sont les suivants:

(j,i,c,d,l,k,a,e,b,f,h,g), (g,h,f,b,e,a,k,l,d,c,i,j),
 (j,i,k,l,d,c,a,e,b,f,h,g), (g,h,f,b,e,a,c,d,l,k,i,j),
 (j,i,a,c,d,l,k,e,b,f,h,g), (g,h,f,b,e,k,l,d,c,a,i,j),
 (j,i,a,k,l,d,c,e,b,f,h,g), (g,h,f,b,e,c,d,l,k,a,i,j),
 (j,i,e,c,d,l,k,a,b,f,h,g), (g,h,f,b,a,k,l,d,c,e,i,j),
 (j,i,e,k,l,d,c,a,b,f,h,g), (g,h,f,b,a,c,d,l,k,e,i,j),
 (j,i,e,a,c,d,l,k,b,f,h,g), (g,h,f,b,k,l,d,c,a,e,i,j),
 (j,i,e,a,k,l,d,c,b,f,h,g), (g,h,f,b,c,d,l,k,a,e,i,j).



Si à n'importe quel moment de la procédure on était arrivé à la nécessité d'affecter deux objets différents à la même case, alors on aurait pu en conclure que E n'était pas unimodal.

Cette procédure est très efficace. En effet, elle utilise une seule fois, au maximum, chaque objet dans chaque ordre de E (ce qui fait $m \times n$ comparaisons), et elle ne regarde qu'une seule fois, au maximum, les cases de la configuration pyramidale (ce qui fait $n^2 + n$ comparaisons). D'autre part, les pivotements autour des pivots p_1 et p_n n'ayant pas de sens, on effectue, au maximum, $n - 2$ pivotements.

2.7.- REMARQUES DIVERSES.- Dans ce paragraphe nous continuons de développer le thème unimodalité. Nous commençons par proposer une conjecture pour ensuite montrer comment les "tables d'inversions" peuvent aider à dévoiler les secrets de l'unimodalité.

Quel est le nombre maximum \bar{n} d'ordres sur n objets par rapport auxquels un ensemble de m ordres différents est unimodal? Si $m = 1$ on peut facilement constater (voir la fig. 2.12) que le nombre de pivots est égal à $n - 1$, d'où $\bar{n} = 2^{n-1}$. Si, d'autre part, $m > 2^{n-1}$, de la proposition 2.2 on tire $\bar{n} = 0$. Pour $m=2,3,\dots,2^{n-1}$ nous appliquerons le raisonnement suivant: \bar{n} s'obtient lorsque l'ensemble de m ordres est tel qu'en lui appliquant la procédure du §2.6, le nombre de pivots effacés est minimum.

Conjecture 2.1.- Le nombre minimum \bar{n} de pivots effacés lorsqu'on applique la procédure du paragraphe 2.6 à un ensemble de m ($m=2,3,\dots,2^{n-1}$) ordres différents est tel que $2^{\bar{n}-1} < m \leq 2^{\bar{n}}$, autrement dit, $\bar{n} = \lceil \log_2 m \rceil$.

Pour $m=2$ et $m=2^{n-1}$ la conjecture s'avère vraie. En effet, si on applique la procédure du §2.6 à l'ensemble $\{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n), (a_2, a_1, a_3, \dots, a_n)\}$, on n'efface que le pivot p_1 (voir par exemple la fig. 2.12), c'est-à-dire, $\hat{n}=1$. D'autre part, si on applique la dite procédure à un ensemble E à $m=2^{n-1}$ ordres unimodaux, on efface tous les pivots sauf p_n , car on peut faire une bijection entre E et l'ensemble des serpents dans la pyramide. On a donc $\hat{n}=n-1$.

Il reste donc à prouver la conjecture pour les valeurs intermédiaires de m .

Si la conjecture 2.1 s'avère vraie, alors pour $m=2, 3, \dots, 2^{n-1}$: $\hat{n} = 2^{n-\hat{n}} = 2^{n-\lceil \log_2 m \rceil}$.

Proposition 2.6.:- Si $z=(t_1, t_2, \dots, t_n) \in B_n$, alors pour tout i ($1 \leq i \leq n-1$) on a $\lvert t_i - t_{i+1} \rvert = 1$ ou i .

Démonstration.- Elle est immédiate à partir de la proposition 2.4 et du théorème 2.1.

C. Q. F. D.

Notons cependant, que l'inverse n'est pas vrai, c'est-à-dire, que tout ordre $z=(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sur l'ensemble des n premiers entiers, dans lequel on a $\lvert t_i - t_{i+1} \rvert = 1$ ou i ($i=1, \dots, n-1$), n'est pas nécessairement unimodal par rapport à l'ordre $x=(1, \dots, n)$.

Exemple 2.8.:- Si $z=(4, 3, 1, 2)$, il vérifie $\lvert t_i - t_{i+1} \rvert = 1$ ou i ($i=1, \dots, n-1$) et pourtant il n'est pas unimodal par rapport à l'ordre $(1, 2, 3, 4)$.

Proposition 2.7.:- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordre $z=(t_1, \dots, t_n)$ sur l'ensemble des n premiers entiers soit unimodal par rapport à l'ordre $x=(1, \dots, n)$, est que pour tout i ($1 \leq i \leq n-1$) on vérifie de manière disjonctive:

$\alpha)$ $\|t_i - t_{i+1}\| = 1,$
 ou $\beta)$ $\|t_i - t_{i+1}\| = i$ et (t_1, \dots, t_{i-1}) est une permutation
 des entiers r tels que $\min\{t_i, t_{i+1}\} < r < \max\{t_i, t_{i+1}\}$

Démonstration.- La condition suffisante est l'objet de la proposition 2.5. La condition nécessaire découle immédiatement des résultats du théorème 2.1, à savoir: $S_n \subset D_n$ et $S_n \equiv B_n$ implique $B_n \subset D_n$.

C. Q. F. D.

Le concept de table d'inversion est associé à une permutation (ou à un ordre) de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Plusieurs sortes de tables d'inversions peuvent être définies, par exemple la table d'inversions $a=(a_1, \dots, a_n)$ de la permutation $t=(t_1, \dots, t_n)$ est obtenue en faisant a_i égal au nombre d'éléments de t à gauche de i qui sont plus grands que i .

Exemple 2.9.- La table d'inversions a de la permutation $(5, 1, 8, 2, 6, 4, 7, 3)$ est $(1, 2, 5, 3, 0, 1, 1, 0)$, car 5 est à gauche de 1; 5 et 8 sont à gauche de 2; etc.

[Knuth 1973] souligne l'importance des tables d'inversions, en montrant que "une table d'inversions détermine d'une façon unique la permutation correspondante"; de ce fait, nous pouvons traduire un problème posé en termes de permutations sous la forme d'un problème de tables d'inversions, et ce dernier peut être plus facile à résoudre.

D'autres tables d'inversions sont les suivantes:

- $b=(b_1, \dots, b_n)$, où b_i est égal au nombre d'éléments de t à droite de i qui sont plus petits que i .

- $c=(c_1, \dots, c_n)$, où c_i est égal au nombre d'éléments de t à gauche de t_i qui sont plus grands que t_i , c'est-à-dire,
 $c_i = a_{t_i}$.

- $d=(d_1, \dots, d_n)$ où d_i est égal au nombre d'éléments de t à droite de t_i qui sont plus petits que t_i , c'est-à-dire, $d_i = b_{t_i}$.

Exemple 2.10.:- Si $t=(5,1,8,2,6,4,7,3)$, alors $b=(0,0,0,1,4,2,1,5)$, $c=(0,1,0,2,1,3,1,5)$ et $d=(4,0,5,0,2,1,1,0)$.

On peut établir d'intéressantes relations entre les différentes tables d'inversions, comme par exemple ([Knuth 1973]): $t_i = i + d_i - c_i$. En ce qui concerne la condition d'unimodalité, nous montrerons au moyen du lemme suivant, comment les tables d'inversions d permettent de caractériser d'une façon élégante les ordres unimodaux par rapport à l'ordre $(1,2, \dots, n)$, et comment devient trivial, lorsqu'il est posé en termes de tables d'inversions d , le problème de la vérification de l'unimodalité par rapport à un ordre donné.

Soit J_n l'ensemble de permutations z telles que pour $i=1, \dots, n-1$, on ait $0 \leq d_i - d_{i-1} \leq 1$.

Lemme 2.1.:- $B_n \equiv J_n$.

Démonstration.- Nous démontrons tout d'abord que si $z \in B_n$, alors $z \in J_n$, c'est-à-dire, $B_n \subset J_n$. En effet, $z \in B_n \Rightarrow$ (voir proposition 2.7) pour tout i ($i=1, \dots, n-1$):

$\alpha)$ $\|t_i - t_{i+1}\| = 1$,
 ou $\beta)$ $\|t_i - t_{i+1}\| = i$ et (t_1, \dots, t_{i-1}) est une permutation d'entiers r tels que $\min\{t_i, t_{i+1}\} < r < \max\{t_i, t_{i+1}\}$.

Si $\|t_i - t_{i+1}\| = 1$, alors on doit envisager deux cas:

A) $t_i > t_{i+1} \Rightarrow d_{i+1} = d_i - 1 \Rightarrow d_i - d_{i+1} = 1$.

B) $t_i < t_{i+1} \Rightarrow d_{i+1} = d_i \Rightarrow d_i - d_{i+1} = 0$.

Si $\|t_i - t_{i+1}\| = i$ et (t_1, \dots, t_{i-1}) est une permutation des entiers r tels que $\min\{t_i, t_{i+1}\} < r < \max\{t_i, t_{i+1}\}$, on doit aussi envisager deux cas:

C) $t_i > t_{i+1} \Rightarrow \exists j > i+1$ tel que $t_{i+1} < t_j < t_i$, donc $d_{i+1} = d_i - 1$, ce qui implique $d_i - d_{i+1} = 1$.

D) $t_i < t_{i+1} \Rightarrow \exists j > i+1$ tel que $t_i < t_j < t_{i+1}$, donc $d_{i+1} = d_i$, ce qui implique $d_i - d_{i+1} = 0$.

On peut donc conclure $B_n \subset J_n \dots\dots\dots(I)$.

Démontrons maintenant que la cardinalité de J_n n'est pas supérieure à 2^{n-1} . En effet, nous avons $d_n = 0$ pour n'importe quelle permutation; en conséquence, pour toute permutation $z \in J_n$ on a $d_{n-1} = 0$ ou $d_{n-1} = 1$, c'est-à-dire, deux possibilités. d_{n-1} étant choisi, pour d_{n-2} nous avons encore deux possibilités: celle qui donne $d_{n-1} - d_{n-2} = 0$, et celle qui donne $d_{n-1} - d_{n-2} = 1$. Et ainsi de suite, d_{i+1} étant choisi, pour d_i nous avons deux possibilités; d'où $|J_n| \leq 2^{n-1} \dots(II)$.

Finalement, de (I) et (II) on tire $B_n \equiv J_n$.

C. Q. F. D.

Nous finissons ce paragraphe et ce chapitre en posant un problème qui n'est pas nouveau. Soit E un état de l'opinion sur n objets, et soit x un ordre de référence. Si nous établissons une mesure du degré d'unimodalité de E par rapport à x , quel est l'ordre sur les objets qui maximise cette mesure? La mesure peut être, par exemple, le quotient $\lambda/|E|$, où λ est le nombre d'ordres de E qui sont unimodaux par rapport à x . [Degenne 1972] utilise une mesure un peu plus compliquée appelée "coefficient d'ajustement". On ne s'intéresse évidemment qu'à des procédures qui fourniraient une réponse en un temps économique (ou polynomial si l'on veut).

C H A P I T R E 3 .
O R D R E S U N I M O D A U X
E T P R O B L E M E S
D ' O P T I M I S A T I O N C O M B I N A T O I R E .

	page
3.1.- INTRODUCTION	45
3.2.- L'OMBRE D'UN ARBRE	45
3.3.- QUATRE PROBLEMES D'OPTIMISATION COMBINATOIRE	49
3.4.- LES ORDRES UNIMODAUX ET L'ARBRE DE POIDS MINIMUM	52
3.5.- LES ORDRES UNIMODAUX ET LA CHAINE HAMILTONIENNE MINIMALE	59
3.6.- LES ORDRES UNIMODAUX ET L'AGREGATION TYPOLOGIQUE LINEAIRE	59
3.7.- LES ORDRES UNIMODAUX ET LA MINIMISATION DU TEMPS D'ACCES	76

3.1.- INTRODUCTION.- L'étude des ordres unimodaux n'a été motivée, à notre connaissance, que par le problème de l'agrégation des opinions, et par quelques expériences psychosociologiques.

Du fait de son interprétation psychologique et économique, la condition d'unimodalité ne pourrait-elle pas être utile dans d'autres domaines? Dans ce chapitre nous établissons quelques résultats qui pourraient aider à la compréhension de la structure de certains problèmes combinatoires de recherche d'un optimum, en mettant en évidence l'existence d'un lien entre leur résolution et la théorie des ordres unimodaux. Même si ces résultats sont sans intérêt pratique immédiat, ils nous semblent révélateurs, et ébauchent une réponse à la question que nous venons de poser.

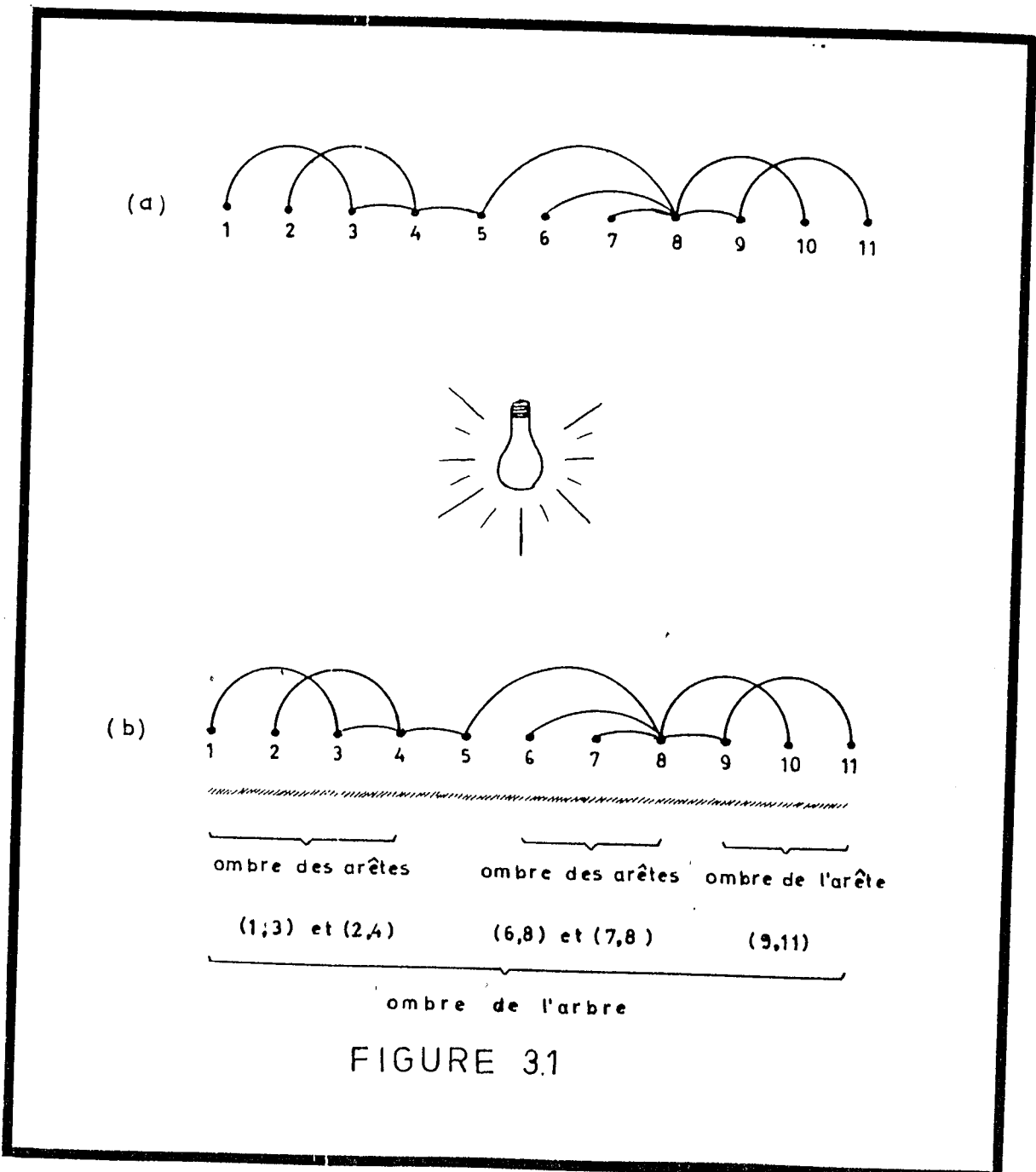
Nous développons tout d'abord (§3.2) quelques résultats concernant les arbres qui seront utiles dans les paragraphes qui suivront. Ensuite, nous présentons (§3.3) quatre problèmes combinatoires de recherche d'un optimum, pour lesquels nous établissons (§3.4, §3.5, §3.6, §3.7) des liens avec l'identification des états de l'opinion unimodaux.

3.2.- L'OMBRE D'UN ARBRE.- Un arbre est un graphe non orienté, connexe, sans cycle. Dessinons un arbre quelconque de façon à ce que ses n sommets se trouvent espacés régulièrement sur une ligne droite. Soit par exemple l'arbre de la fig 3.1(a) de la page 46. Après l'avoir dessiné, re-numérotons ses sommets de 1 à n de la gauche vers la droite.

Imaginons maintenant qu'une source lumineuse lointaine projette l'ombre de notre arbre, comme dans la fig. 3.1(b), où nous pouvons remarquer que, par exemple, l'ombre de l'arête (6,8) est la même que celle des arêtes (6,8) et (7,8) prises ensemble.

En considérant qu'une arête joignant deux sommets consécutifs sur la droite, $(i, i+1)$, projette une ombre de longueur unitaire, la cardinalité d'un sous-ensemble quelconque d'arêtes de l'arbre est-elle inférieure, égale ou supérieure à la longueur totale de l'ombre qu'elles projettent sur la corde?

En théorie des graphes il existe plusieurs façons fort



simples de caractériser les arbres; par exemple, un graphe non orienté à n sommets est un arbre si et seulement s'il est connexe et possède $(n-1)$ arêtes. Ci-dessous nous proposons une caractérisation originale des arbres qui, bien qu'étant moins simple, fournit une réponse à la question que nous venons de poser et s'avère utile pour les résultats du paragraphe 3.4.

Soit $G=(X,E)$ un graphe connexe non orienté à n sommets et $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un ordre sur X . Dans le graphe $H=(X, E \cup F)$ où $F=\{(x_k, x_{k+1}) \mid 1 \leq k < n\}$, nous considérons les ensembles d'arêtes:

$$\varphi(x_i, x_j) = \{(x_k, x_{k+1}) \mid \min\{i, j\} \leq k < \max\{i, j\}\} \quad \forall (x_i, x_j) \in E.$$

$$\varphi(D) = \bigcup_{e \in D} \varphi(e) \quad \forall D \subset E.$$

Théorème 3.1.- G est un arbre si et seulement si
 $|D| \leq |\varphi(D)| \quad \forall D \subset E.$

Démonstration.-

a) La condition est suffisante. Nous raisonnerons par l'absurde. Supposons donc que G étant un arbre, il existe un $\hat{D} \subset E$ tel que $|\hat{D}| > |\varphi(\hat{D})|$.

Notons $\xi(x_i, x_j) = \{x_k \mid \min\{i, j\} \leq k \leq \max\{i, j\}\} \quad \forall (x_i, x_j) \in E,$
 et $\xi(D) = \bigcup_{e \in D} \xi(e) \quad \forall D \subset E.$

Considérons le graphe $G'=(\xi(\hat{D}), \hat{D} \cup \varphi(\hat{D}))$ et faisons une partition de $\hat{D} = \bigcup_{i=1}^k \hat{D}_i$ telle que les sous-graphes $G'_i=(\xi(\hat{D}_i), \hat{D}_i \cup \varphi(\hat{D}_i))$ soient les composantes connexes de G' . Dessinons "linéairement" le graphe $G''=(X, \hat{D})$ selon l'ordre x (voir fig. 3.2 à la page 48).

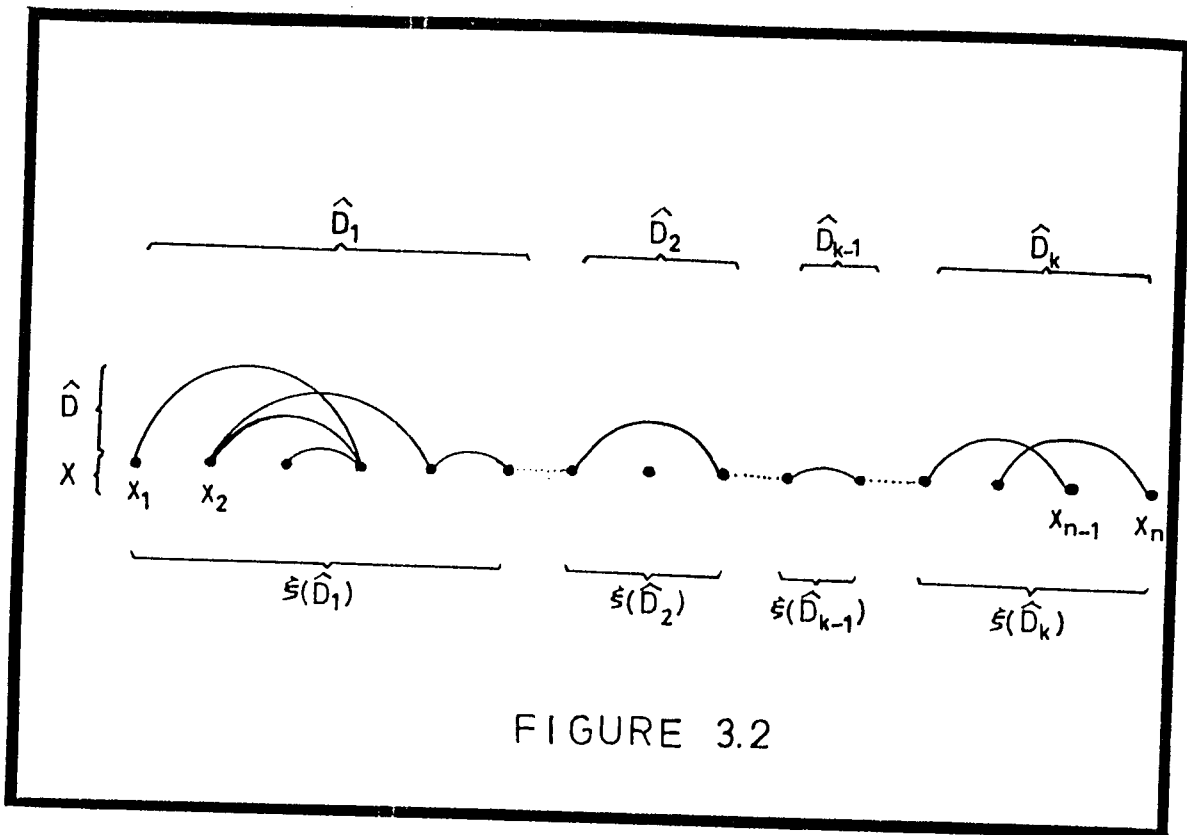


FIGURE 3.2

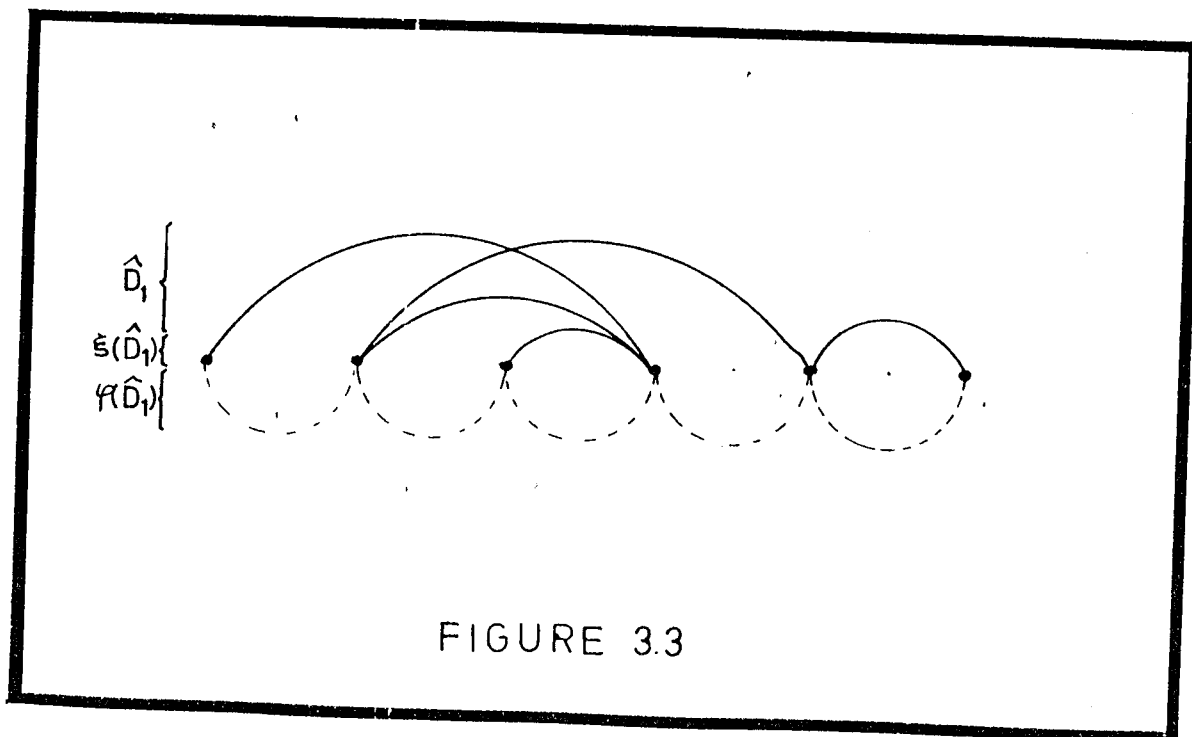


FIGURE 3.3

La fig. 3.3 (page 48) nous permet de constater que pour $i=1, \dots, k$:

$$|\varphi(\hat{D}_i)| = |\xi(\hat{D}_i)| - 1 \dots\dots\dots(I)$$

Nous avons: $\xi(\hat{D}_i) \cap \xi(\hat{D}_j) = \emptyset \Rightarrow \varphi(\hat{D}_i) \cap \varphi(\hat{D}_j) = \emptyset$,

d'où $|\varphi(\hat{D})| = \sum_{i=1}^k |\varphi(\hat{D}_i)| \dots\dots\dots(II).$

D'autre part $|\hat{D}| = \sum_{i=1}^k |\hat{D}_i| \dots\dots\dots(III).$

Par hypothèse $|\hat{D}| > |\varphi(\hat{D})|$, alors de (II) et (III) on déduit qu'il existe un indice \hat{i} ($1 \leq \hat{i} \leq k$) tel que $|\hat{D}_{\hat{i}}| > |\varphi(\hat{D}_{\hat{i}})|$; mais de (I) on a $|\varphi(\hat{D}_{\hat{i}})| = |\xi(\hat{D}_{\hat{i}})| - 1 \Rightarrow |\hat{D}_{\hat{i}}| > |\xi(\hat{D}_{\hat{i}})| - 1 \Rightarrow |\hat{D}_{\hat{i}}| \geq |\xi(\hat{D}_{\hat{i}})|$. Alors le graphe partiel $\hat{G} = (\xi(\hat{D}_{\hat{i}}), \hat{D}_{\hat{i}})$ posséderait un cycle, ce qui est impossible puisque G est un arbre.

b) La condition est nécessaire. Supposons, en raisonnant par l'absurde, que $|D| \leq |\varphi(D)|$ pour tout $D \subset E$, et que G possède un cycle. Alors, G étant connexe, on a $n \leq |E|$.

D'autre part, pour $D=E$, $|E| \leq |\varphi(E)|$. Comme $\varphi(E)=F$, $|\varphi(E)| = |F| = n - 1$. D'où l'on tire $n \leq |E| \leq |\varphi(E)| = |F| = n - 1$, qui est impossible.

C. Q. F. D.

La cardinalité d'un sous-ensemble quelconque d'arêtes d'un arbre est donc toujours inférieure ou égale à la longueur totale de l'ombre que ce sous-ensemble projette.

3.3. - QUATRE PROBLEMES D'OPTIMISATION COMBINATOIRE. - Soit un ensemble B de n objets $\{1, 2, \dots, n\}$. On se donne pour tout couple d'objets i, j , un poids $a_{ij} \in \mathbb{R}^+$ ($a_{ij} = a_{ji}$). Les poids ne structurent pas nécessairement B comme un espace métrique.

La matrice $A=(a_{ij})$ peut être considérée comme la matrice d'incidence généralisée d'un graphe non-orienté G dont les arêtes seront valuées par les a_{ij} . Nous considérons sur ce graphe les problèmes suivants:

- L'arbre de poids minimum.- Trouver un arbre dans G tel que la somme des poids des arêtes de cet arbre soit minimale.

- La chaîne hamiltonienne minimale.- Trouver une chaîne hamiltonienne (c'est-à-dire, qui passe par tous les sommets du graphe) telle que la somme des poids des arêtes de cette chaîne soit minimale.

- L'agrégation typologique linéaire.- En considérant a_{ij} comme l'indice de dissemblance entre les objets i et j , aligner les objets de façon à grouper le plus possible ceux qui se ressemblent le plus (qui sont le moins dissemblants). Ce problème, ainsi défini, reste ambigu. En effet, comment mesurer ce "plus possible"? Maintes façons peuvent être envisagées; nous en avons retenu une, et le problème peut être formulé comme suit: trouver une permutation $\sigma=(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sur B telle que
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-j) \cdot a_{t_i t_j}$$
 soit maximal.

- La minimisation du temps d'accès.- En considérant les objets comme des modules de programmation, et a_{ij} comme le nombre de fois que l'exécution du module j suit l'exécution du module i , trouver une affectation des modules aux cylindres d'un disque (un module par cylindre) de façon à minimiser le temps moyen d'accès. Il faut remarquer que ce problème est défini sur une matrice A qui n'est pas forcément symétrique.

Les trois premiers problèmes n'ont pas en général la même solution optimale quand ils sont définis sur la même matrice d'incidence. Par exemple, dans la fig. 3.5 (page 51) nous indiquons les solutions optimales (toutes différentes) des trois premiers problèmes définis sur la matrice de la fig. 3.4.

	a	b	c	d
a	0	1	2	3
b	1	0	4	100
c	2	4	0	7
d	3	100	7	0

FIGURE 34

Arbre de poids minimum	Chaîne hamiltonienne minimale	Agrégation typologique linéaire
<p>$1 + 2 + 3 = 6$</p>	<p>$1 + 3 + 4 = 8$</p>	<p>$100 \times 3 + (1 + 7) \times 2 + 4 + 2 + 3 = 325$</p>



FIGURE 3.5

3.4.- LES ORDRES UNIMODAUX ET L'ARBRE DE POIDS MINIMUM.-

Soit X un ensemble de n villes. Imaginons que les a_{ij} de la matrice A du paragraphe 3.3 représentent les distances entre les villes i et j. Un voyageur se trouvant dans la ville i peut fournir un classement o^i (ordre strict si on suppose toutes les distances différentes) des n villes par ordre croissant d'éloignement. Nous noterons $\rho(A) = \{o^1, o^2, \dots, o^n\}$ l'état de l'opinion formé par l'ensemble des classements du voyageur lorsque celui-ci prend comme poste d'observation chacune des villes. Soit $G=(X,E,a)$ le graphe symétrique complet valué à n sommets associé à la matrice A.

Remarque.- A tout ordre $o=(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sur X nous pouvons associer trivialement la chaîne hamiltonienne (t_1, t_2, \dots, t_n) . Dans la suite nous identifierons les deux.

Lemme 3.1.- $\rho(A)$ est unimodal par rapport à l'ordre $(1, 2, \dots, n)$ si et seulement si pour tout quadruplet d'indices $\{i, j, k, l\}$ avec $1 \leq k \leq i \leq j < l \leq n$ ou $1 \leq k < i \leq j \leq l \leq n$, on a $a_{ij} < a_{kl}$.

Intuitivement, un élément a_{ij} ($i \leq j$) de la matrice A (voir fig. 3.6 à la page 53) est plus petit que n'importe quel élément de la zone à hachures verticales  (et plus grand que n'importe quel élément de la zone à hachures horizontales ).

Démonstration.-

a) La condition est suffisante. $\rho(A)$ est unimodal par rapport à l'ordre $(1, 2, \dots, n)$, donc o^i ($i=1, \dots, n$) est aussi unimodal par rapport à l'ordre $(1, 2, \dots, n)$, ce qui entraîne:

$$a_{ii} < a_{i,i+1} < a_{i,i+2} < \dots < a_{in} \dots \dots \dots (I)$$

et $a_{ii} < a_{i,i-1} < a_{i,i-2} < \dots < a_{i1} \dots \dots \dots (II).$

De (I): $a_{ij} < a_{i1}$ ($i \leq j < 1$) $\dots \dots \dots (III).$

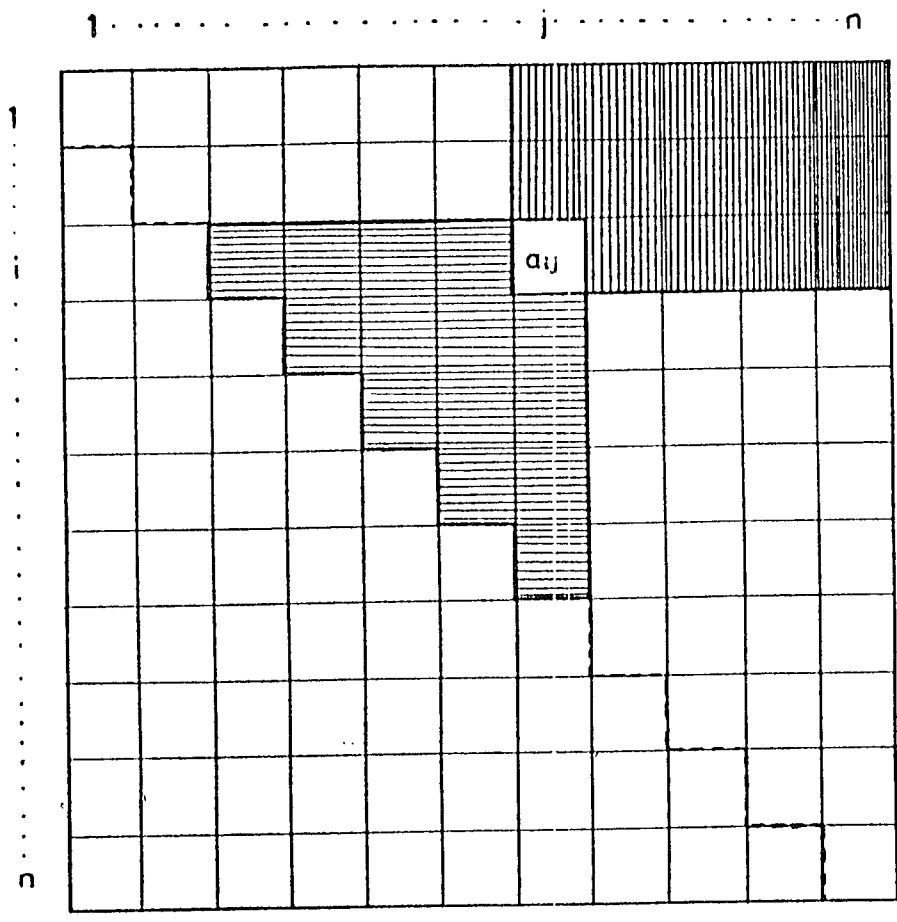


FIGURE 3.6

De (II), étant donné que la matrice A est symétrique:
 $a_{ii} < a_{i-1,i} < a_{i-2,i} < \dots < a_{1i} \Rightarrow a_{ij} < a_{kj} \quad (k < i \leq j) \dots \dots (IV).$

Il suffit maintenant de combiner les équations (III) et (IV), pour en déduire le résultat cherché:

$$a_{ij} < a_{kl} \text{ pour } 1 \leq k \leq i \leq j < l \leq n \text{ ou pour } 1 \leq k < i \leq j \leq l \leq n.$$

b) La condition est nécessaire. La matrice A vérifie $a_{ij} < a_{kl}$ pour $1 \leq k \leq i \leq j < l \leq n$ et pour $1 \leq k < i \leq j \leq l \leq n$, d'où, pour tout i:

$$a_{ii} < a_{i,i+1} < a_{i,i+2} < \dots < a_{in} \dots \dots \dots (V)$$

et $a_{ii} < a_{i-1,i} < a_{i-2,i} < \dots < a_{1i}$. Or cette dernière expression, étant donné que la matrice A est symétrique, entraîne: $a_{ii} < a_{i,i-1} < a_{i,i-2} < \dots < a_{i1} \dots \dots \dots (VI).$

Finalement de (V) et (VI) on déduit que l'ordre ρ^i doit bien être unimodal par rapport à l'ordre $(1, 2, \dots, n)$.

C. Q. F. D.

Corollaire 3.1.:- Si $\rho(A)$ est unimodal par rapport à l'ordre $(1, 2, \dots, n)$, alors pour tout quadruplet d'indices $\{i, j, k, l\}$ avec $1 \leq k \leq i \leq j \leq l \leq n$ on a $a_{ij} \leq a_{kl}$.

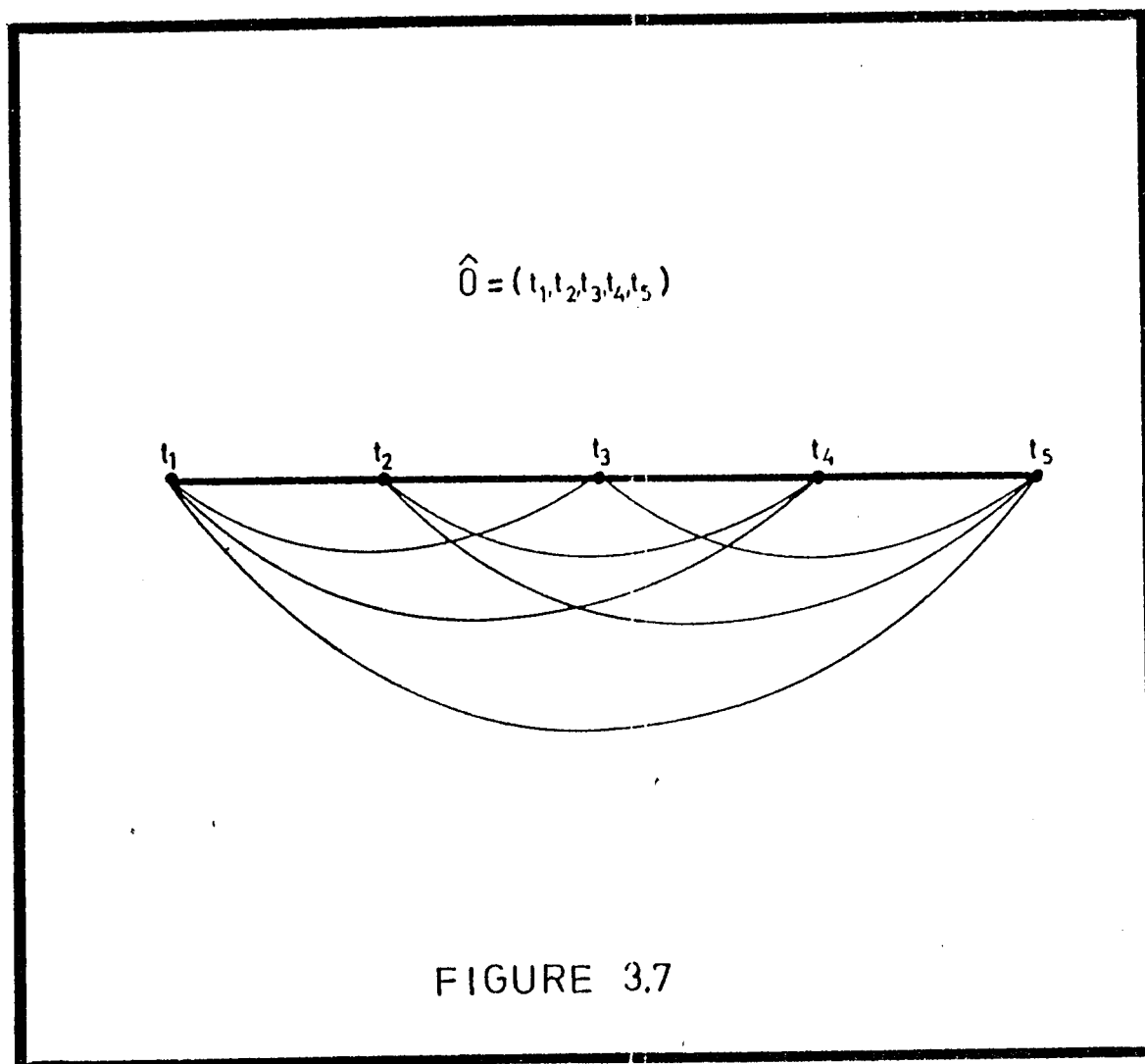
Démonstration.- Evidente à partir de lemme 3.1 et du fait que si $k=i$ et $j=l$, alors $a_{ij} = a_{kl}$.

Théorème 3.2.:- S'il existe un ordre $\delta = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ sur X tel que $\rho(A)$ soit unimodal par rapport à δ , alors la chaîne associée à δ est une solution optimale au problème de l'arbre de poids minimum défini sur G.

Démonstration.- Nous appellerons "enchaînée" (respect. "déchaînée") toute arête de G qui appartient (respect. n'appartient pas) à la chaîne δ . Soit R (respect. P) l'ensemble

d'arêtes enchaînées (respect. déchaînées). Exemple: dans la fig. 3.7 nous avons indiqué en traits épais les arêtes enchaînées et en traits minces les arêtes déchaînées.

Soit e l'arête $(t_i, t_j) \in E$; pour plus de clarté dans la démonstration, nous noterons le poids de l'arête e par $a(e)$



au lieu de $a_{t_i t_j}$.

Associons à toute arête (t_i, t_j) de G l'ensemble des arêtes enchaînées:

$$\varphi(t_i, t_j) = \{(t_k, t_{k+1}) \mid (t_k, t_{k+1}) \in E \text{ et } \min\{i, j\} \leq k < \max\{i, j\}\} \dots (I).$$

Il est évident que $\varphi(r)=r$ pour tout $r \in R$ et donc

$$a(r) = a(\varphi(r)) \text{ pour tout } r \in R \dots\dots\dots(II).$$

Comme $\rho(A)$ est unimodal par rapport à δ alors du lemme 3.1 on tire:

$$a(t_k, t_{k+1}) < a(t_k, t_{k+2}) < \dots < a(t_k, t_n) \quad 1 \leq k < n-1 \dots\dots(III)$$

$$\text{et } a(t_k, t_{k+1}) < a(t_{k-1}, t_{k+1}) < \dots < a(t_1, t_{k+1}) \quad 1 < k \leq n-1 \dots\dots(IV).$$

De ce couple d'expressions on déduit:

$$a(t_i, t_j) > a(t_k, t_{k+1}) \text{ pour tout } (t_k, t_{k+1}) \in \varphi(t_i, t_j) \text{ et pour} \\ \text{tout } (t_i, t_j) \in P \dots\dots\dots(V),$$

autrement dit, la longueur d'une arête déchaînée quelconque est strictement supérieure à celles des arêtes enchaînées qui lui sont associées par φ . En effet:

si $i=k$, alors $j > k+1$ et de (III) on tire $a(t_k, t_{k+1}) < a(t_i, t_j)$;
 si $j=k+1$, alors $i < k$ et de (IV) on tire $a(t_k, t_{k+1}) < a(t_i, t_j)$;
 si $i < k$ et $j > k+1$, alors de (III) et (IV), on tire $a(t_k, t_{k+1}) < a(t_k, t_j) < a(t_i, t_j)$.

Nous démontrerons le théorème par l'absurde, en supposant qu'il existe un ensemble d'arêtes Q , formant un arbre de poids total inférieur à celui de δ .

Notons $Q_P = P \cap Q$, $Q_R = R \cap Q$; il est évident que

$$Q_P \neq \emptyset \dots\dots\dots(VI).$$

Soit le graphe biparti $H=(\hat{Q}, \hat{R}, \varphi)$, où les ensembles de sommets \hat{Q} et \hat{R} représentent les ensembles d'arêtes Q et R respectivement, et φ désigne l'application multivoque (I).

Q forme un arbre dans G et en conséquence, du théorème 3.1 on tire: pour tout $Y \subset Q$ $|Y| \leq |\varphi(Y)|$, d'où pour tout $\hat{Y} \subset \hat{Q}$ $|\hat{Y}| \leq |\varphi(\hat{Y})|$. Or, d'après le théorème de Koenig-Hall(*) on peut affirmer qu'il existe un couplage W de \hat{Q} sur \hat{R} .

Soit un arc $(q, \hat{r}) \in W$, $q \in Q$, $r \in R$. Si $q \in Q_R$, alors d'après (II): $a(q) = a(r)$. Si $q \in Q_p$ alors, d'après (V): $a(q) > a(r)$. L'ensemble Q_p n'étant pas vide (éq. (VI)), le poids total de Q est forcément plus grand que celui de \hat{o} , d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

De ce théorème nous déduisons les corollaires suivants:

Corollaire 3.2.:- La chaîne associée à \hat{o} est unique dans ce sens qu'elle est solution optimale du problème de l'arbre de poids minimum (si les a_{ij} sont différents pour tous les couples (i, j) avec $i < j$).

Démonstration.- Supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe une solution optimale différente de \hat{o} . Si elle est différente de \hat{o} , elle a au moins une arête déchaînée, et d'après le théorème 3.2 le poids total de cette solution est supérieur au poids de la chaîne associée à \hat{o} , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Corollaire 3.3.:- Si $\rho(A)$ est unimodal, alors il l'est par rapport à un seul ordre (#) \hat{o} .

Démonstration.- Si $\rho(A)$ était unimodal par rapport à

(*) Théorème de Koenig-Hall.- Etant donné un graphe biparti $G=(Y, Y', \Gamma)$, on peut coupler Y sur Y' si et seulement si pour tout $A \subset Y$: $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

(#) A l'ordre inverse $\hat{o}' = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1)$ près.

plusieurs ordres, ils seraient tous des solutions optimales du problème de l'arbre de poids minimum, ce qui est en contradiction avec l'unicité de la solution optimale (corollaire 3.1).

C. Q. F. D.

Le fait que le problème de l'arbre de poids minimum ait comme solution optimale une chaîne, implique-t-il l'unimodalité de $\rho(A)$? La réponse est négative, et le contreexemple de

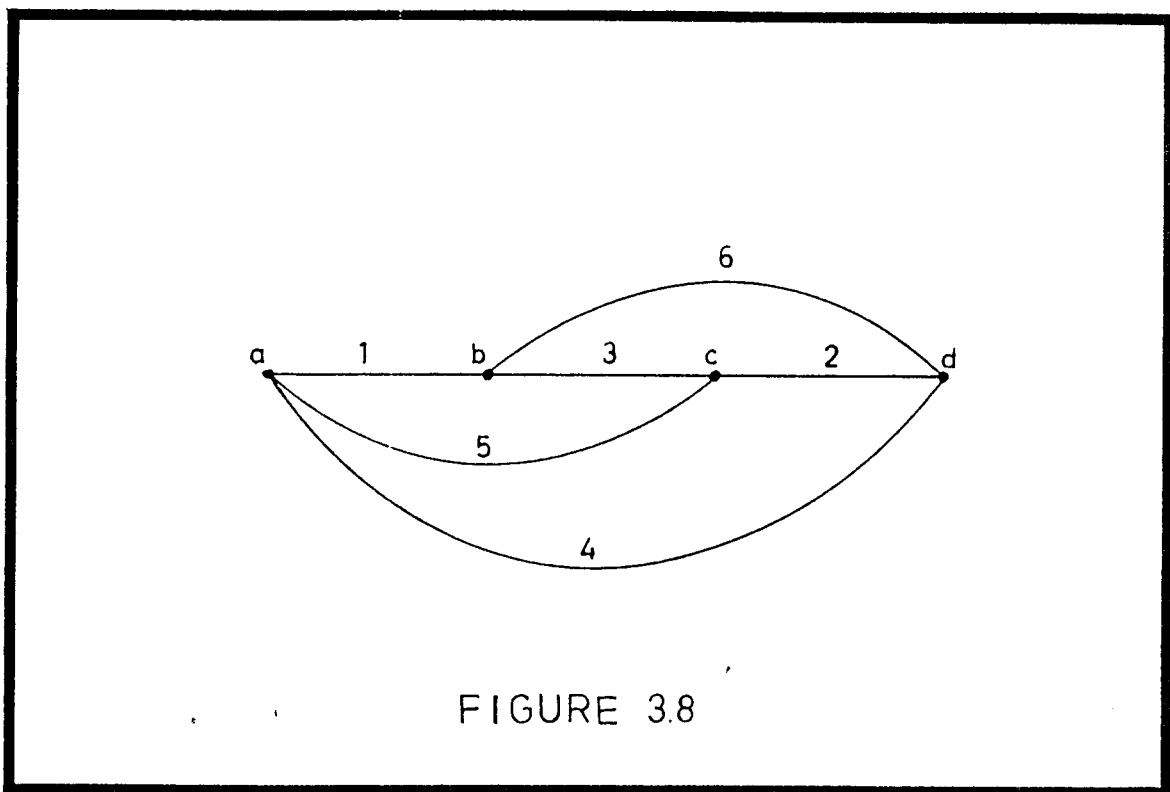


FIGURE 3.8

la fig. 3.8 le prouve: l'arbre de poids minimum sur ce graphe est la chaîne (a,b,c,d), et on peut constater que $\rho(A) = \{(a,b,d,c), (b,a,c,d), (c,d,b,a), (d,c,a,b)\}$ n'est pas unimodal, puisque les quatre objets différents a, b, c, d, se trouvent placés en dernière place qui ne peut, dans un état de l'opinion unimodal, être prise que par deux objets différents au plus.

3.5.- LES ORDRES UNIMODAUX ET LA CHAÎNE HAMILTONIENNE

MINIMALE.- Des résultats du paragraphe 3.4, et d'une façon immédiate, nous déduisons maintenant un lien entre les ordres unimodaux et le problème de la chaîne hamiltonienne minimale.

Proposition 3.1.- S'il existe un ordre \hat{o} sur X tel que $\rho(A)$ soit unimodal par rapport à \hat{o} , alors \hat{o} est une solution optimale au problème de la chaîne hamiltonienne minimale défini sur G .

Démonstration.- Evidente à partir du théorème 3.2 et du fait que: si la solution optimale du problème de l'arbre de poids minimum défini sur le graphe G est une chaîne, alors cette chaîne est solution optimale de problème de la chaîne hamiltonienne défini sur le même graphe.

C. Q. F. D.

3.6.- LES ORDRES UNIMODAUX ET L'AGREGATION TYPOLOGIQUE

LINEAIRE.- Un étudiant veut ranger n livres côte-à-côte sur une seule étagère (voir fig. 3.9 à la page 60), et cela d'une façon "logique", c'est-à-dire, de manière à grouper le plus possible les livres qui se ressemblent le plus .

Supposons qu'il existe des nombres a_{ij} susceptibles de mesurer le degré de dissemblance entre les livres i et j . Soucieux d'atteindre son but au moyen d'une méthode "exacte", l'étudiant forme tout d'abord la matrice $A = \{a_{ij}\}$ (qui est, évidemment, symétrique par rapport à la diagonale principale) et, décidant de mesurer la "valeur" d'un rangement $\sigma = (t_1, \dots, t_n)$ quelconque par la quantité $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \cdot a_{t_i t_j}$, il cherche le rangement qui la maximise.

Exemple 3.1.- Supposons que l'étudiant ne possède que quatre livres, à savoir: Astronomie, Biologie, Géométrie et Topologie. Si les degrés de dissemblance sont ceux du tableau

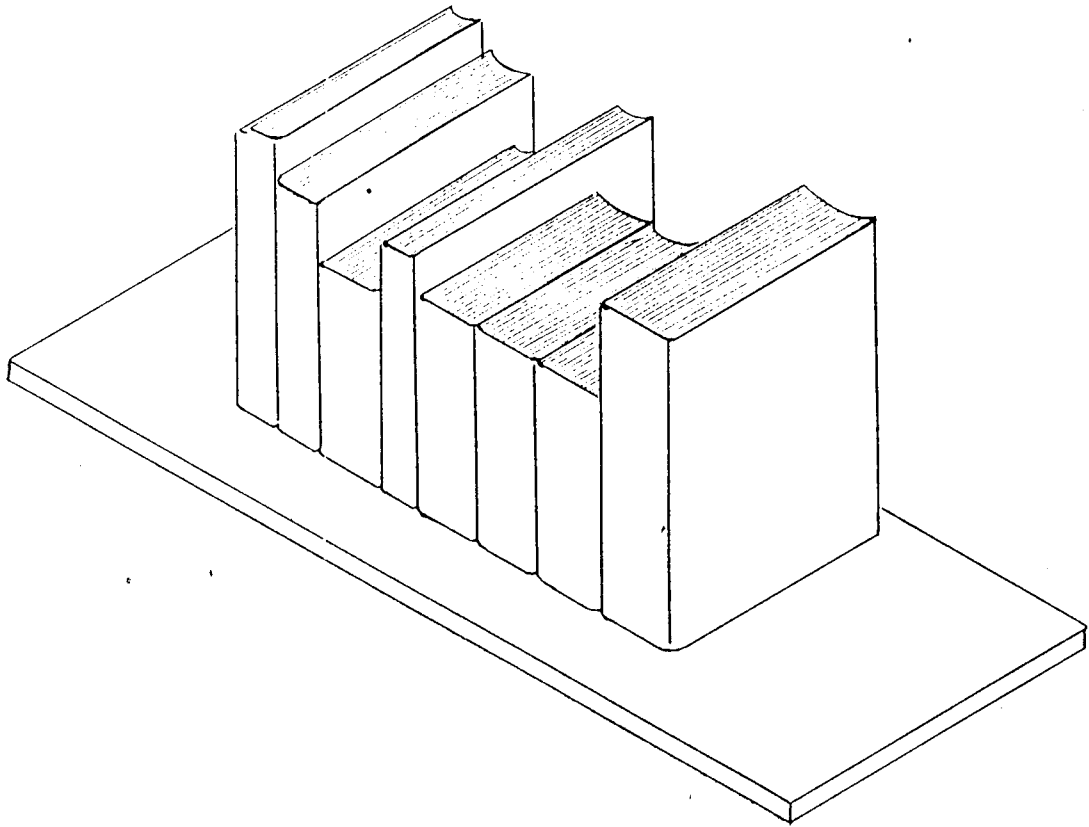


FIGURE 3.9

de la fig. 3.10, alors la valeur du rangement (A,B,G,T) est égale à: $8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_1 + 7x_2 + 2x_1 = 53$. Le rangement (A,G,T,B) qui semble "meilleur" a, en effet, une valeur supérieure: $4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_1 + 6x_2 + 7x_1 = 59$.

Lorsque n est quelconque, le problème que se pose l'étudiant est un problème classé "difficile" par les chercheurs opérationnels; on ne connaît pas d'algorithme capable de fournir une solution exacte en un temps polynomial. La discussion d'un tel algorithme est un sujet qui tombe hors du domaine de ce travail. Nous nous contentons d'établir dans ce paragraphe quelques résultats qui montrent un lien avec la théorie des préférences unimodales et donnent une condition suffisante pour la résolution du problème en un temps polynomial.

Pour clore la discussion nous proposerons une conjecture

	A	B	G	T
A	0	8	4	5
B	8	0	6	7
G	4	6	0	2
T	5	7	2	0

FIGURE 3.10

qui généralise nos résultats lorsque la fonction à maximiser a une forme particulière.

Soit $G=(X,E)$ le graphe symétrique complet valué à n sommets ($n \geq 2$), associé à la matrice $A=\{a_{ij}\}$.

Soit $o=(x_1, \dots, x_{\xi-1}, x_{\xi}, x_{\xi+1}, \dots, x_n)$ un ordre sur X .
Notons $o(\xi)$ l'ordre $(t_1, \dots, t_{n-1})=(x_1, \dots, x_{\xi-1}, x_{\xi+1}, \dots, x_n)$, restriction de o à l'ensemble $X-\{x_{\xi}\}$.

Exemple 3.2. Si $o=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, alors $o(1)=(x_2, x_3, x_4)$, $o(2)=(x_1, x_3, x_4)$, etc.

Proposition 3.2. Si l'ordre $o=(x_1, \dots, x_n)$ est unimodal par rapport à l'ordre $\hat{o}=(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, alors $o(i)$ est unimodal par rapport à $\hat{o}(j)$ si $x_i=\hat{x}_j$.

Démonstration.- Par l'absurde. Nous supposons que o est unimodal par rapport à \hat{o} et qu'il existe un couple d'indices i, j , avec $x_i=\hat{x}_j$, tel que $o(i)$ n'est pas unimodal par rapport à $\hat{o}(j)$.

Comme $o(i)$ n'est pas unimodal par rapport à $\hat{o}(j)$, alors (voir définition 2.1 à la page 16) il existe dans l'ensemble $X-\{\hat{x}_j\}$ un triplet $\hat{x}_f, \hat{x}_g, \hat{x}_h$ ($f < g < h$) tel que, sur $o(i)$, \hat{x}_g est surclassé simultanément par \hat{x}_f et \hat{x}_h . On déduit que, sur o , \hat{x}_g est aussi surclassé simultanément par \hat{x}_f et \hat{x}_h , ce qui implique que o n'est pas unimodal par rapport à \hat{o} , d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

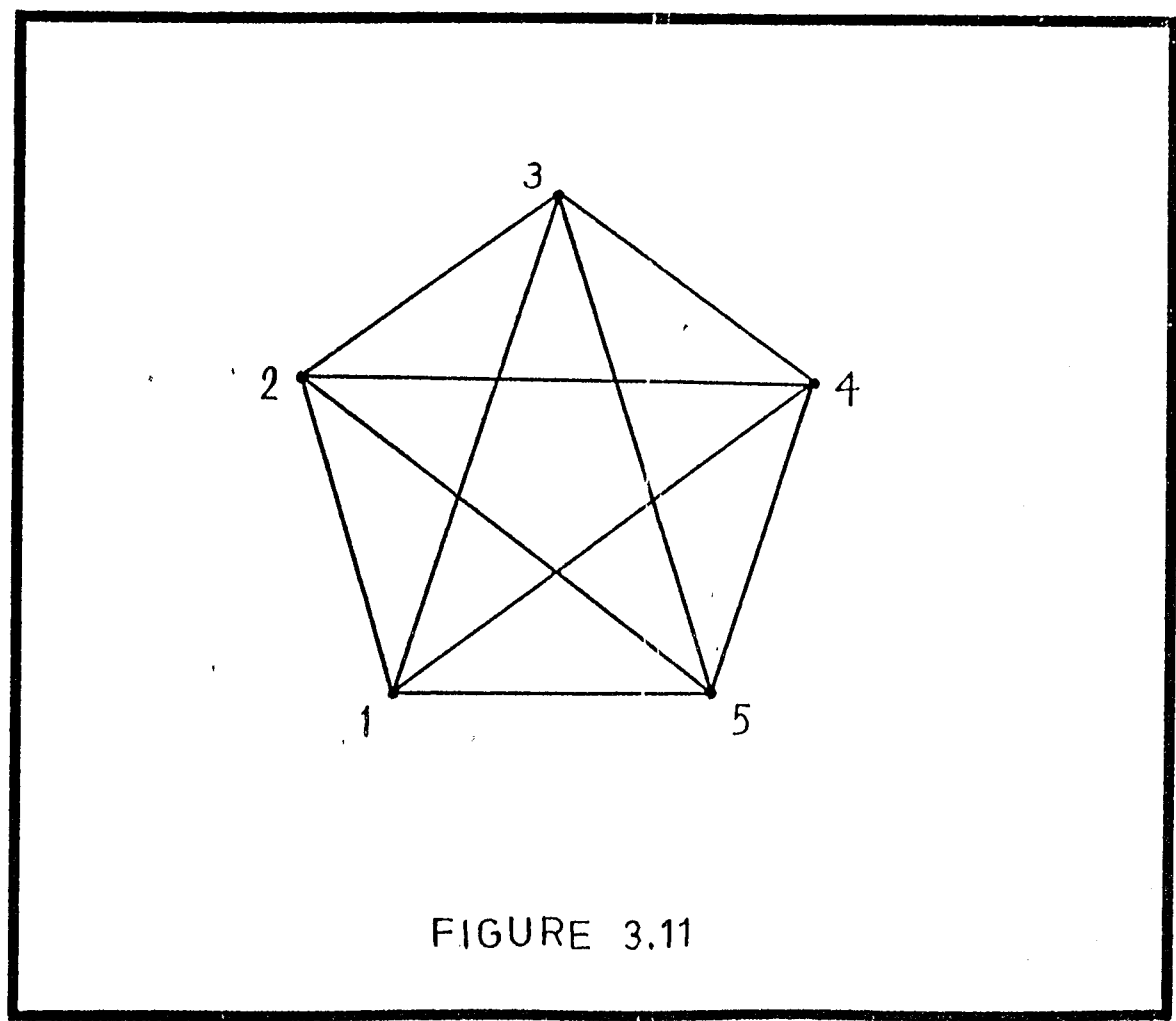
Soit $X' \subset X$, $|X'|=n'$. A tout ordre $o=(t_1, \dots, t_{n'})$ sur X' on peut associer le multigraphe valué $H_o=(X, E_o)$, où chaque arête entre t_i et t_j a le poids $a_{t_i t_j}$ et où entre t_i et t_j on place exactement $|j-i|$ arêtes.

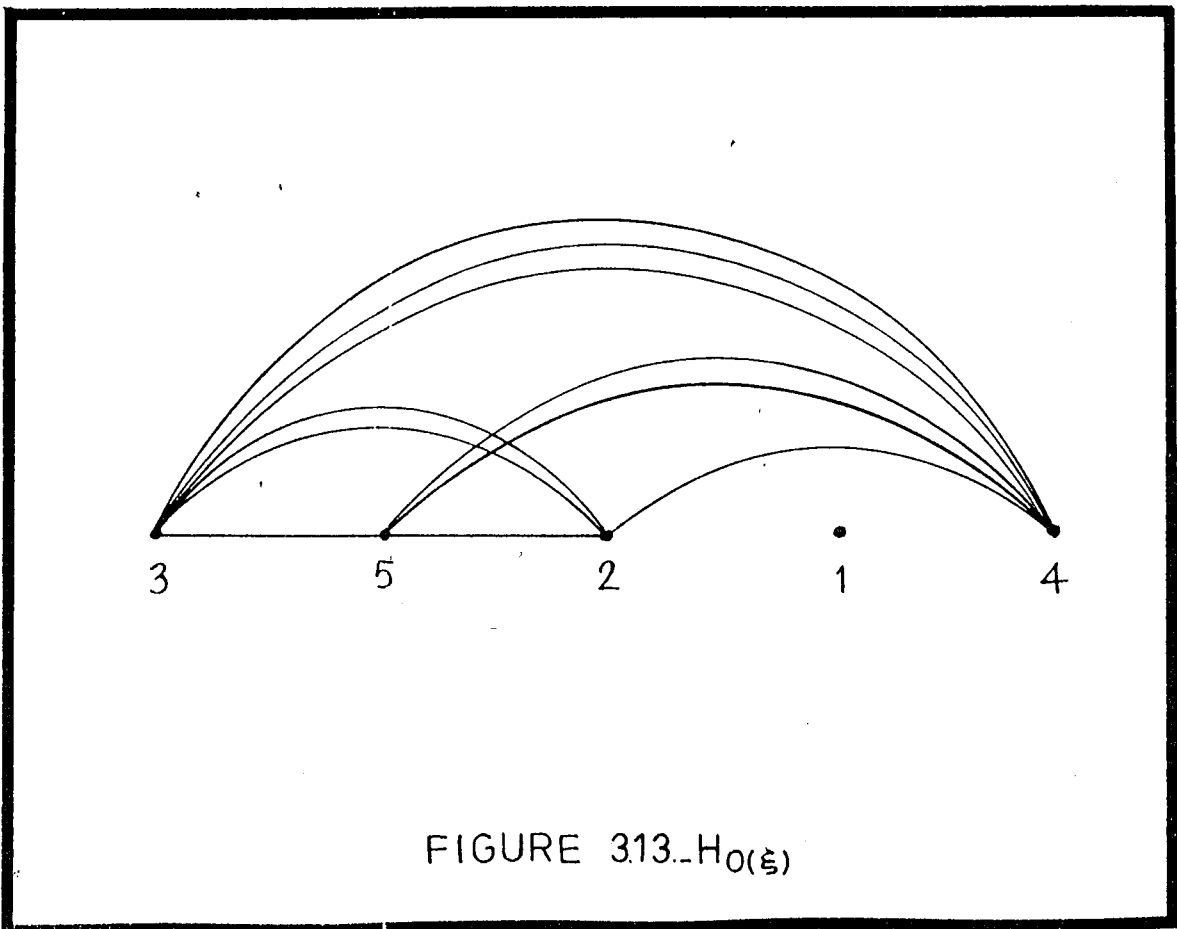
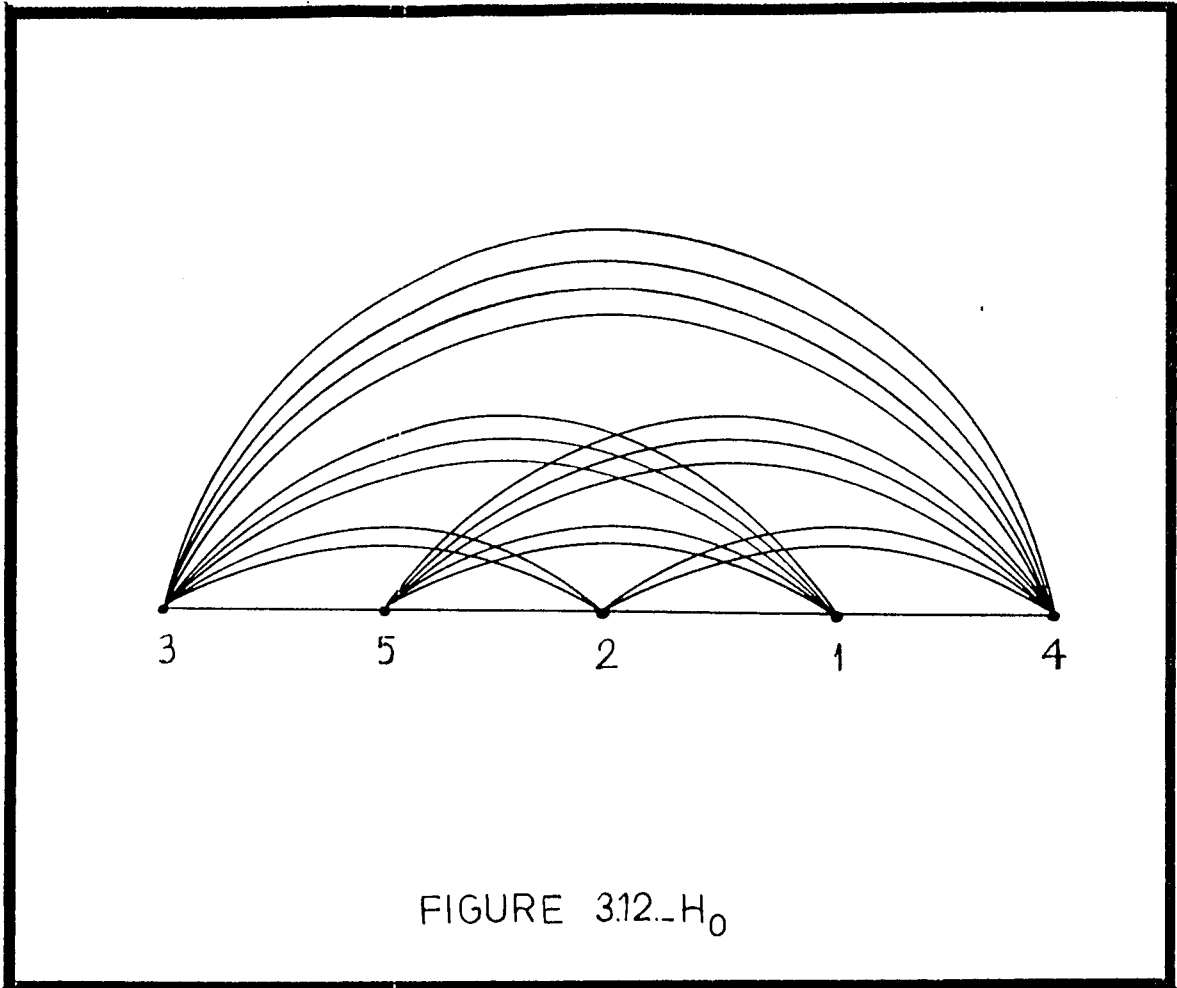
Exemple 3.3.:- Si le graphe G est celui de la fig. 3.11, $o=(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=(3,5,2,1,4)$ et $\xi=4$, alors $o(\xi)=(3,5,2,4)$. H_o et $H_o(\xi)$ sont donc les multigraphes des figures 3.12 et 3.13 (page 64), respectivement. Dans un souci de clarté nous dessinerons toujours en ligne les sommets du graphe H_o , et nous omettrons, sauf exception, les poids sur les arêtes.

Associons à $o(\xi)$ le multigraphe valué $J_{o(\xi)}=(X, E_o - E_{o(\xi)})$. Autrement dit, $J_{o(\xi)}$ est le sous-graphe de H_o obtenu lorsque l'on enlève de H_o les arêtes appartenant à $H_o(\xi)$.

Exemple 3.4.:- Pour les données de l'exemple 3.3, $J_{o(4)}$ est représenté à la fig. 3.14 (page 65).

On voit que l'ensemble des arêtes de $J_{o(\xi)}$ peut être construit comme suit:





1) De chaque sommet x_i tel que $i < \xi$ on fait partir une arête vers chacun des sommets x_j tels que $j > \xi$.

2) Du sommet x_ξ on fait partir exactement $|\xi - i|$ arêtes vers chacun des sommets x_i ($i \neq \xi$).

Remarque.- Si $\xi = n'$ ou 1, alors toutes les arêtes de $J_0(\xi)$ passent par le sommet x_ξ .

Définition 3.1.:- Soient deux multigraphes valués $H_1 = (X_1, E_1)$ et $H_2 = (X_2, E_2)$. Nous dirons qu'on peut sous-coupler H_1 sur H_2 s'il existe un couplage de E_1 sur E_2 tel que chaque arête de E_1 soit couplée à une arête de E_2 de poids supérieur ou égal.

Tout comme dans le paragraphe 3.4 nous formons à partir du graphe G (ou de la matrice $A = \{a_{ij}\}$ si l'on veut) l'état de l'opinion $\rho(A)$.

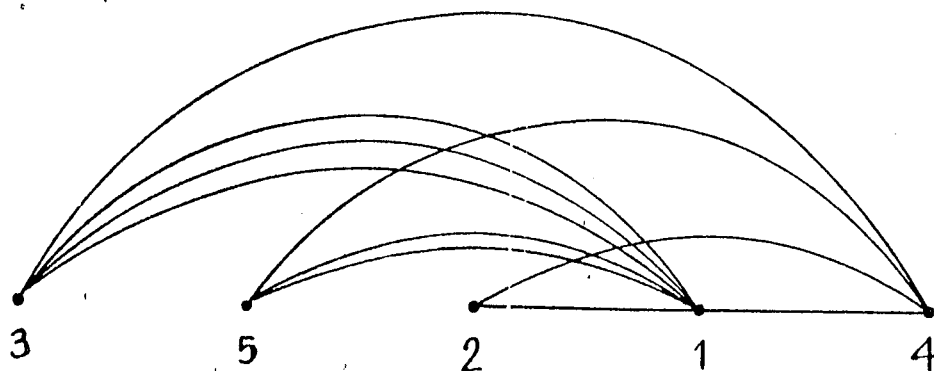


FIGURE 3.14.- $J_0(\xi)$

Nous énonçons et démontrons maintenant un lemme qui nous sera utile par la suite.

Lemme 3.2. - S'il existe un ordre $\hat{\sigma} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ sur X tel que $\rho(A)$ soit unimodal par rapport à $\hat{\sigma}$, alors pour tout ordre $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sur X on peut sous-coupler $J_{\sigma(n)}$ sur $J_{\hat{\sigma}(\xi)}$, avec $\hat{x}_\xi = x_n$.

Démonstration. - Puisque toutes les arêtes de $J_{\sigma(n)}$ passent par $x_n = \hat{x}_\xi$ (voir remarque plus haut), nous pouvons noter les arêtes $(\hat{x}_i, \hat{x}_\xi) \in E_{\sigma} - E_{\sigma(n)}$; i sera toujours différent de ξ .

Associons à toute arête i de $J_{\sigma(n)}$ l'ensemble d'arêtes de $J_{\hat{\sigma}(\xi)}$:

$$\varphi(i) = \{ (\hat{x}_g, \hat{x}_h) \mid (\hat{x}_g, \hat{x}_h) \in E_{\hat{\sigma}} - E_{\hat{\sigma}(\xi)} \text{ et } g \leq \min\{i, \xi\}, h \geq \max\{i, \xi\} \}.$$

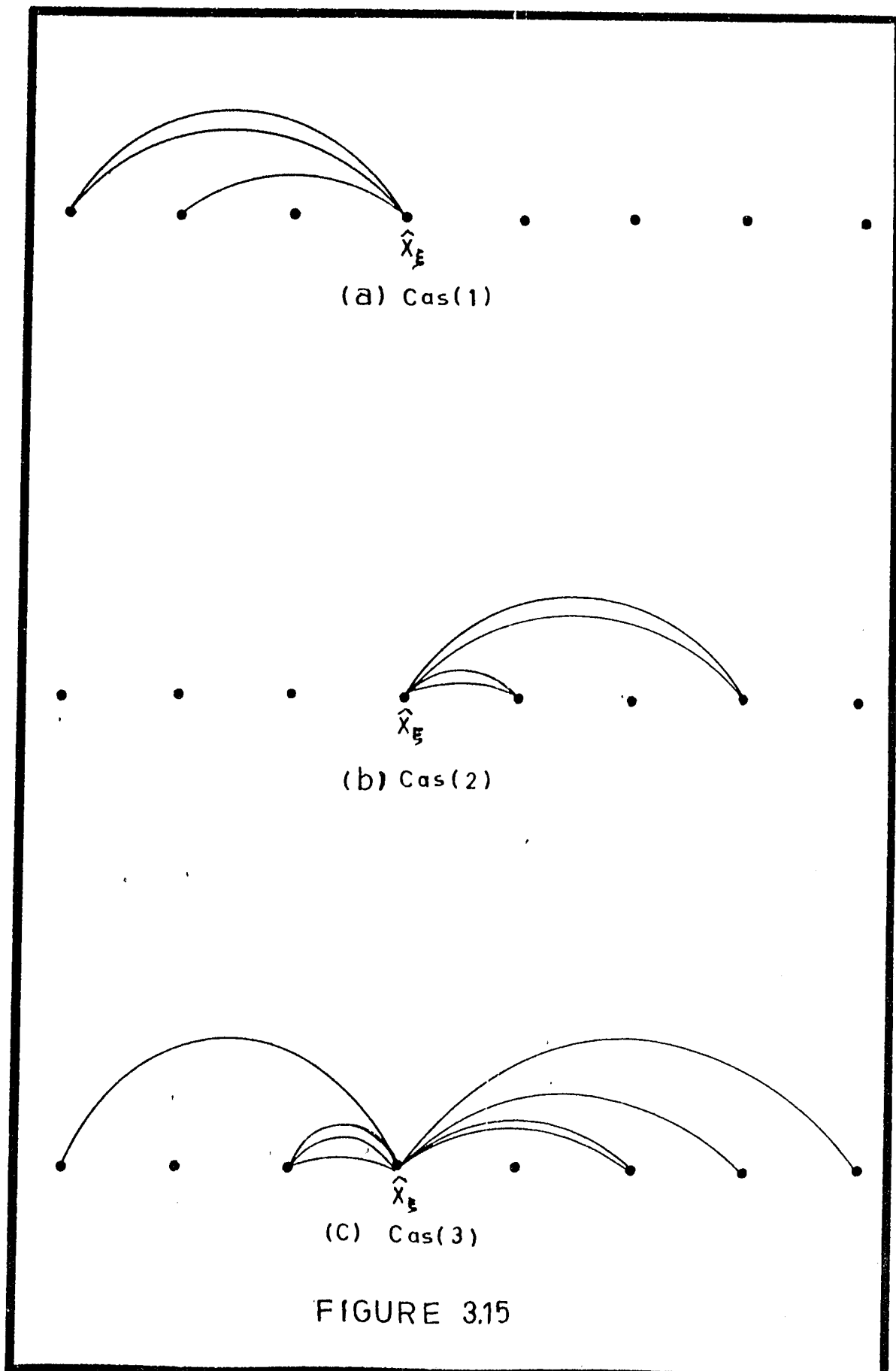
Si $i < \xi$, alors $\varphi(i)$ est constitué par les arêtes de $J_{\hat{\sigma}(\xi)}$ qui ont une extrémité dans $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i\}$ et l'autre extrémité dans $\{\hat{x}_\xi, \dots, \hat{x}_n\}$.

Si $i > \xi$, alors $\varphi(i)$ est constitué par les arêtes de $J_{\hat{\sigma}(\xi)}$ qui ont une extrémité dans $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_\xi\}$ et l'autre extrémité dans $\{\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_n\}$.

$\rho(a)$ étant unimodal par rapport à l'ordre $\hat{\sigma} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, puisque pour toute arête $r = (\hat{x}_g, \hat{x}_h) \in \varphi(i)$ on vérifie $g \leq \min\{i, \xi\} < \max\{i, \xi\} \leq h$, alors en vertu du corollaire au lemme 3.1 (page 54) on déduit: $a_i \leq a_r$ pour tout $r \in \varphi(i)$ (I).

On pose $\varphi(P) = \bigcup_{i \in P} \varphi(i)$, pour tout $P \subset \{\text{arêtes de } J_{\sigma(n)}\}$.

Nous allons montrer que $|P| = p \leq |\varphi(P)|$, pour tout $P \subset \{\text{arêtes de } J_{\sigma(n)}\}$. Soit (d_1, \dots, d_p) un classement des arêtes $i \in P$ par ordre non-décroissant des indices i . Quel que soit P on se trouve nécessairement dans l'un des trois cas suivants:



- 1) $d_p < \xi$,
- 2) $d_1 > \xi$,
- 3) $d_1 < \xi$ et $d_p > \xi$.

Si nous dessinons le graphe $J_{o(n)}$ avec ses sommets dans l'ordre $\hat{o}=(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ nous verrons que le cas (1) correspond à: "toutes les arêtes de P sont à gauche de \hat{x}_ξ " (voir fig. 3.15(a) à la page 67), le cas (2) correspond à: "toutes les arêtes de P sont à droite de \hat{x}_ξ " (voir fig. 3.15(b)), le cas (3) correspond à: "les arêtes de P sont à droite et à gauche de \hat{x}_ξ " (voir fig. 3.15(c)). Nous envisageons les trois cas successivement.

Cas(1).- Soient $k=(\hat{x}_k, \hat{x}_\xi)$ et $l=(\hat{x}_1, \hat{x}_\xi)$ deux arêtes de P. Formons les ensembles $\varphi(k)$ et $\varphi(l)$:

$$\varphi(k) = \{(\hat{x}_g, \hat{x}_h) \mid (\hat{x}_g, \hat{x}_h) \in E_{\hat{o}} - E_{\hat{o}(\xi)} \text{ et } g \leq k < \xi \leq h\},$$

$$\varphi(l) = \{(\hat{x}_g, \hat{x}_h) \mid (\hat{x}_g, \hat{x}_h) \in E_{\hat{o}} - E_{\hat{o}(\xi)} \text{ et } g \leq 1 < \xi \leq h\}.$$

De ces expressions il résulte que si $k \leq 1$, alors toute arête appartenant à $\varphi(k)$ appartient aussi à $\varphi(l)$, ce qui entraîne: $\varphi(k) \subseteq \varphi(l)$, d'où il devient évident que $\varphi(d_1) \subseteq \varphi(d_2) \subseteq \dots \subseteq \varphi(d_p)$, et finalement:

$$\varphi(P) = \bigcup_{j=1, \dots, p} \varphi(d_j) = \varphi(d_p) \dots \dots \dots (II).$$

Or $|\varphi(P)| = |\varphi(d_p)|$ peut être calculé. En effet:

$$|\varphi(d_p)| = d_p(n-\xi) + \sum_{v=\xi-d_p}^{\xi-1} v \dots \dots \dots (III).$$

Exemple 3.5.- Soient $n=7$, $\xi=4$, $d_p=2$. Nous avons indiqué $\varphi(d_p)$ dans la fig. 3.16. $d_p \cdot (n-\xi)$ donne le nombre d'arêtes dessinées au-dessus et $\left[\begin{matrix} \xi-1 \\ \sum_{v=\xi-d_p} v \end{matrix} \right]$ donne le nombre d'arêtes dessinées en-dessous.

D'autre part, en tenant compte de la formule

$$\sum_{w=s-r}^s w = (s-r) \cdot (r+1) + \sum_{v=1}^r v \dots\dots\dots (IV),$$

et en faisant $s=\xi-1$, $r=d_p-1$, de l'équation (III) on tire:

$$|\varphi(P)| = d_p \cdot (n-\xi) + (\xi-d_p) \cdot d_p + \sum_{v=1}^{d_p-1} v = (n-d_p) \cdot d_p + \sum_{v=1}^{d_p-1} v.$$

Encore à l'aide de la formule (IV) et en faisant $s=n-1$, $r=d_p-1$, de cette dernière expression on tire:

$$|\varphi(P)| = \sum_{w=n-d_p}^{n-1} w \dots\dots\dots (V).$$

Calculons maintenant la cardinalité maximum de l'ensemble P; elle est égale au nombre maximum d'arêtes qui peuvent être adjacentes à l'ensemble de sommets: $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_d\}$. Ce nombre

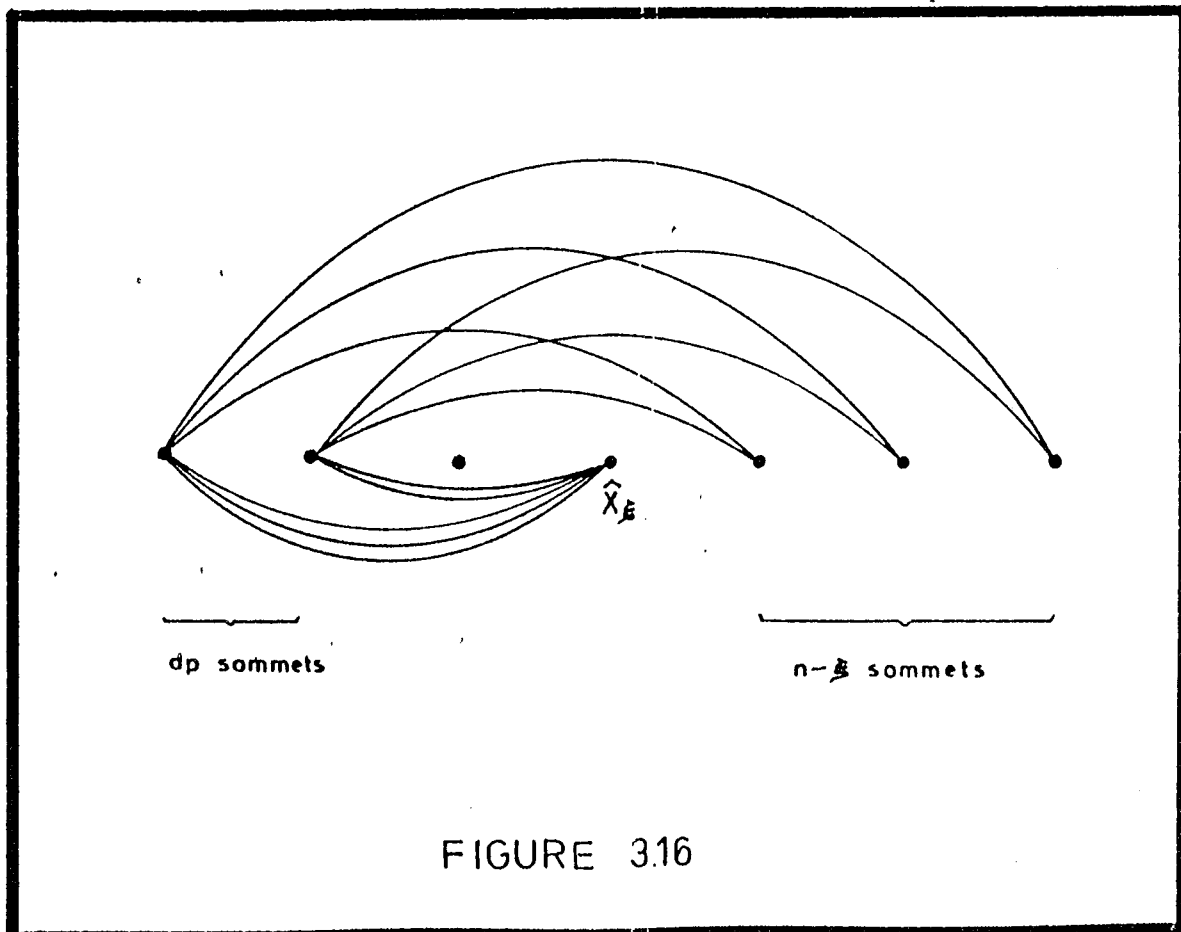


FIGURE 3.16

est atteint lorsque (n-1) arêtes sont incidentes à un de ces sommets, (n-2) arêtes sont incidentes à un autre sommet, ..., et (n-d_p) arêtes sont incidentes au dernier sommet (voir plus haut la façon dont on peut construire l'ensemble des arêtes de J_o(ξ)).

Plus précisément: $|P| \leq (n-1) + (n-2) + \dots + (n-d_p) =$

$$\sum_{w=n-d_p}^{n-1} w, \text{ et de (V) on tire: } |P| \leq |\varphi(P)| \dots\dots\dots \text{(VI).}$$

Cas (2).-Etant donné que ce cas, par symétrie, se ramène au cas (1) étudié plus haut, on peut en déduire:

$$\varphi(P) = \varphi(d_1) \dots\dots\dots \text{(VII),}$$

$$|\varphi(P)| = \sum_{w=d_1-1}^{n-1} w \dots\dots\dots \text{(VIII),}$$

$$|P| \leq |\varphi(P)| \dots\dots\dots \text{(IX).}$$

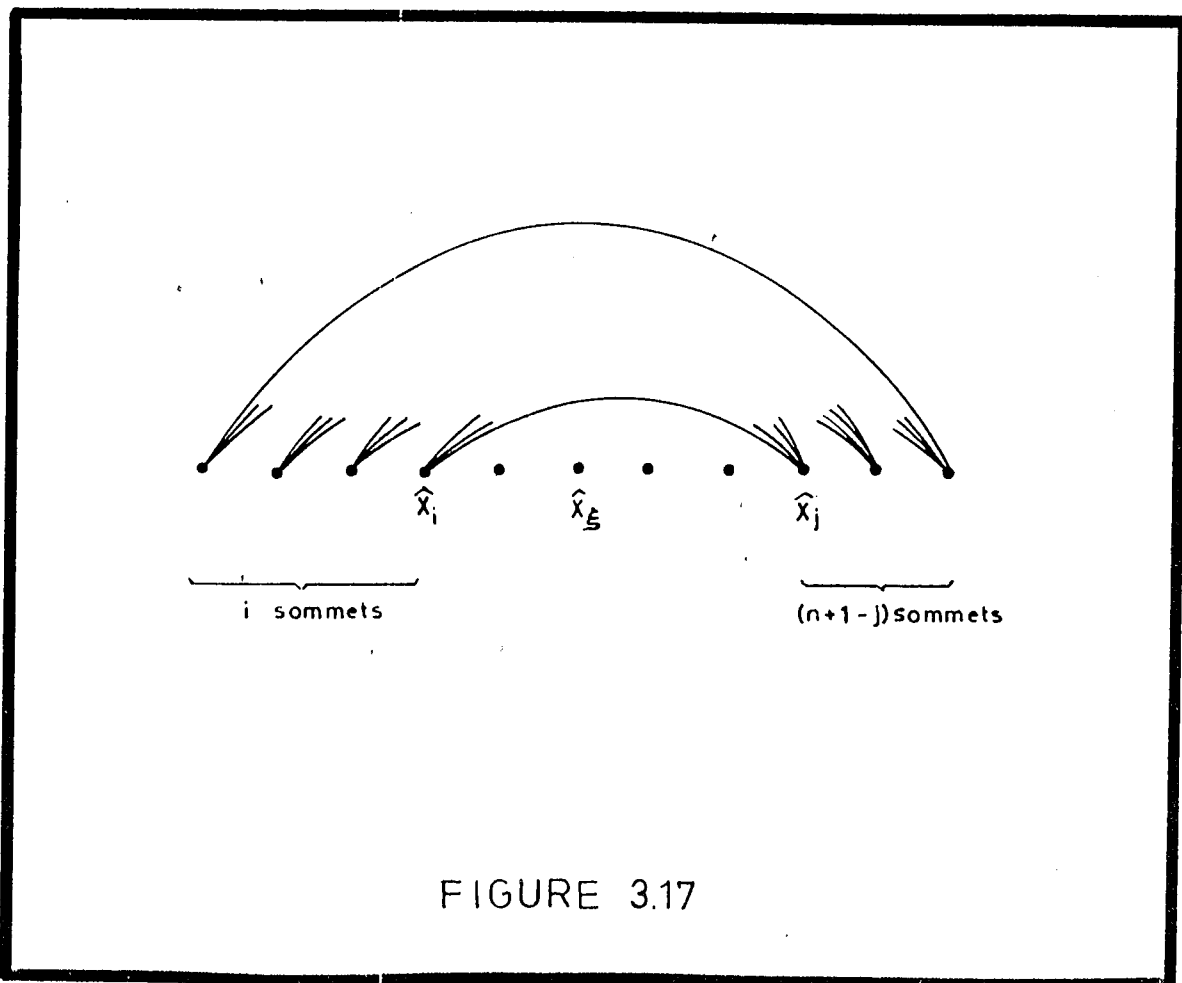


FIGURE 3.17

Cas (3).- Dans ce cas nous pouvons partitionner P en deux parties P' et P'' de façon à ce que P' soit entièrement à gauche de \hat{x}_ξ et P'' entièrement à droite de \hat{x}_ξ .

Calculons tout d'abord $|\varphi(i) \cap \varphi(j)|$ lorsque $i \in P'$ et $j \in P''$. Le calcul est facile quand on regarde la fig. 3.17 (page 70). En effet, $|\varphi(i) \cap \varphi(j)| = i \cdot (n+1-j) \dots \dots \dots (X)$.

Or $|\varphi(P)| = |\varphi(P')| + |\varphi(P'')| - |\varphi(P') \cap \varphi(P'')|$. Si $p' = |P'|$, des équations (II) et (VII) on tire: $\varphi(P') = \varphi(d_{p'})$ et $\varphi(P'') = \varphi(d_{p'+1})$, et $|\varphi(P)| = |\varphi(d_{p'})| + |\varphi(d_{p'+1})| - |\varphi(d_{p'}) \cap \varphi(d_{p'+1})|$.

En considérant les équations (V), (VIII) et (X) on a:

$$|\varphi(P)| = \sum_{w=n-d_{p'}}^{n-1} w + \sum_{w=d_{p'+1}-1}^{n-1} w - d_{p'} \cdot (n+1-d_{p'+1}).$$

Pour alléger les notations posons $d_{p'} = j$ et $d_{p'+1} = k$. En développant:

$$\begin{aligned} |\varphi(P)| &= \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1-j)(n-j)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(k-2)(k-1)}{2} - jn - j + jk. \\ &= \frac{(n-1)n - n^2 + nj + n - j + nj - j^2 + n^2 - n - k^2 + k + 2k - 2 - 2jn - 2j + 2jk}{2} \\ &= \frac{(n-1)n - k^2 + jk + 2k + jk - j^2 - 2j + k - j - 2}{2} \\ &= \frac{(n-1)n - (k-j-1)(k-j-2)}{2} \\ &= \sum_{w=1}^{n-1} w - \sum_{w=1}^{k-j-2} w = \sum_{w=k-j-1}^{n-1} w \end{aligned}$$

soit $|\varphi(P)| = \sum_{w=d_{p'+1}-d_{p'}-1}^{n-1} w \dots \dots \dots (XI)$.

D'autre part, pour $d_{p'}$ et $d_{p'+1}$ quelconques, la cardinalité maximum de l'ensemble P est égale au nombre maximum d'arêtes qui peuvent être adjacentes à l'ensemble de sommets: $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{d_{p'}-1}, \hat{x}_{d_{p'}}, \hat{x}_{d_{p'+1}}, \hat{x}_{d_{p'+1}+1}, \dots, \hat{x}_n\}$; or ce nombre est atteint lorsqu'on place $(n-1)$ arêtes dans un de ces sommets, puis $(n-2)$ arêtes dans un autre, et ainsi de suite jusqu'au dernier sommet. Plus précisément:

$$|P| \leq (n-1) + (n-2) + \dots + (d_{p'+1} - d_{p'} - 1) = \sum_{w=d_{p'+1}-d_{p'}-1}^{n-1} w,$$

et de (XI) on tire: $|P| \leq |\varphi(P)| \dots\dots\dots$ (XII).

Nous avons donc étudié les trois cas possibles, pour lesquels nous avons déterminé en (VI), (IX) et (XII) que pour tout P , $|P| \leq |\varphi(P)|$. A nouveau, nous utilisons le théorème de Koenig-Hall (page 57) pour en déduire qu'on peut toujours coupler les arêtes de $J_{o(n)}$ sur celles de $J_{\hat{o}(\xi)}$, et en vertu de l'expression (I) nous concluons qu'on peut sous-coupler $J_{o(n)}$ sur $J_{\hat{o}(\xi)}$.

C. Q. F. D.

Lemme 3.3. - S'il existe un ordre $\hat{o} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ sur X tel que $\rho(A)$ soit unimodal par rapport à \hat{o} , alors pour tout ordre $o = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sur X on peut sous-coupler H_o sur $H_{\hat{o}}$.

Démonstration.- Par récurrence. Pour $n=1,2$ le lemme est trivialement vrai. A titre d'exemple et pour entraîner l'intuition, considérons le cas $n=3$; soient a, b, c les sommets de G . L'ensemble d'ordres sur X est $\{o^1 = (a, b, c), o^2 = (a, c, b), o^3 = (b, a, c), o^4 = (c, b, a), o^5 = (b, c, a), o^6 = (c, a, b)\}$. A la fig. 3.18 (page 73) nous avons représenté les multigraphes $H_{o^1} = H_{o^4}$, $H_{o^2} = H_{o^5}$, $H_{o^3} = H_{o^6}$.

En supposant que $\rho(A)$ est unimodal par rapport à o^1 , le lemme 3.1 implique: $a_{ab} < a_{ac}$ et $a_{bc} < a_{ac}$.

Nous pouvons sous-coupler H_0^2 et H_0^5 sur H_0^1 (voir fig. 3.19 à la page 74), nous pouvons sous-coupler H_0^3 et H_0^6 sur H_0^1 (voir fig. 3.20), et nous pouvons trivialement sous-coupler H_0^1 et H_0^4 sur H_0^1 ; donc le lemme est vrai pour $n=3$ puisque a, b et c désignent des objets quelconques.

Supposons le lemme vrai pour $n=k$ et démontrons qu'alors il est vrai pour $n=k+1$.

Soient $\hat{o}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1})$, $o=(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ et ξ l'indice tel que $\hat{x}_\xi = x_{k+1}$.

1) $\rho(A)$ étant unimodal par rapport à \hat{o} , de la proposition 3.2 on tire: l'état de l'opinion sur l'ensemble $X-\{\hat{x}_\xi\}$ est aussi unimodal par rapport à $\hat{o}(\xi)$. Comme par hypothèse le lemme est vrai pour $n=k$, alors on peut sous-coupler $H_{o(k+1)}$

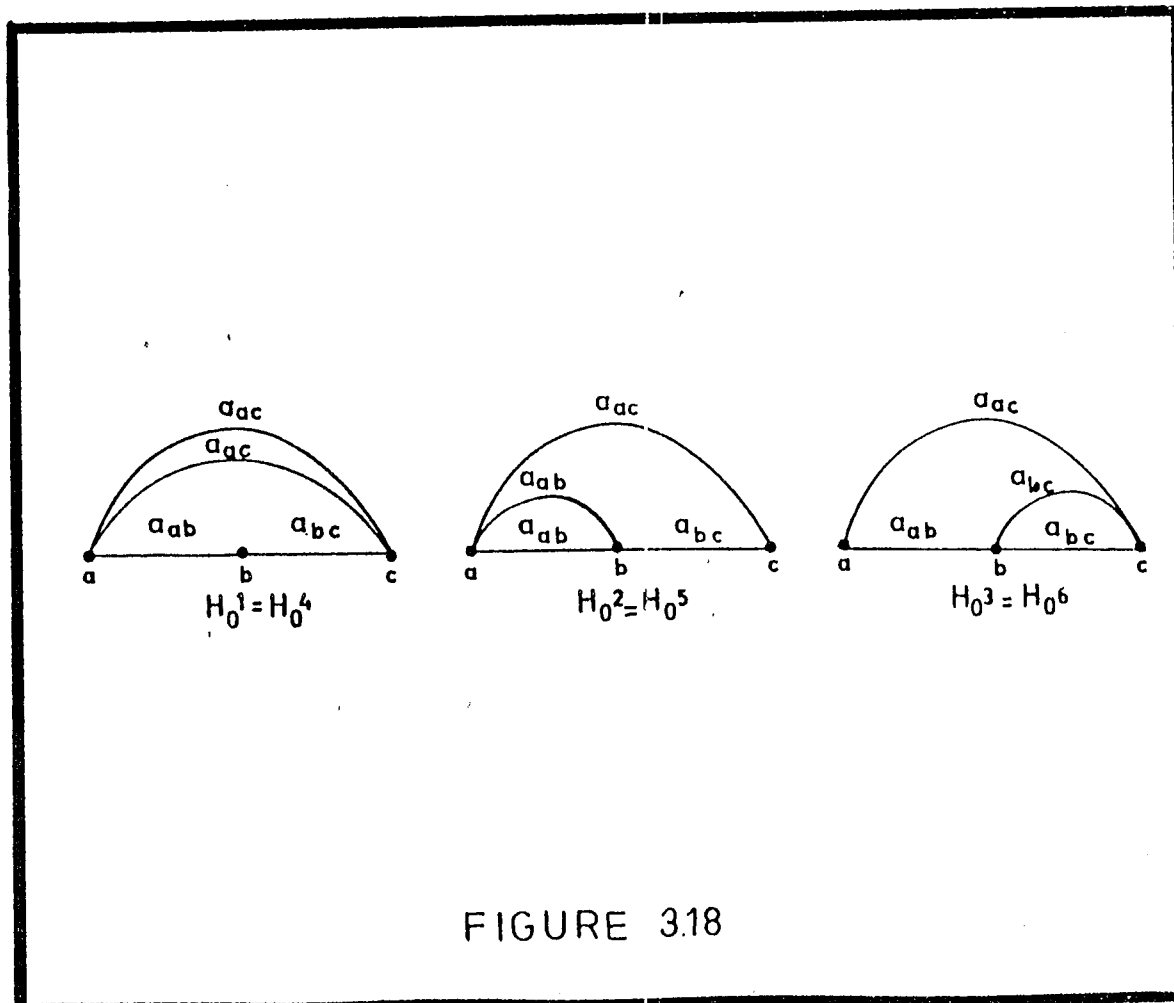


FIGURE 3.18

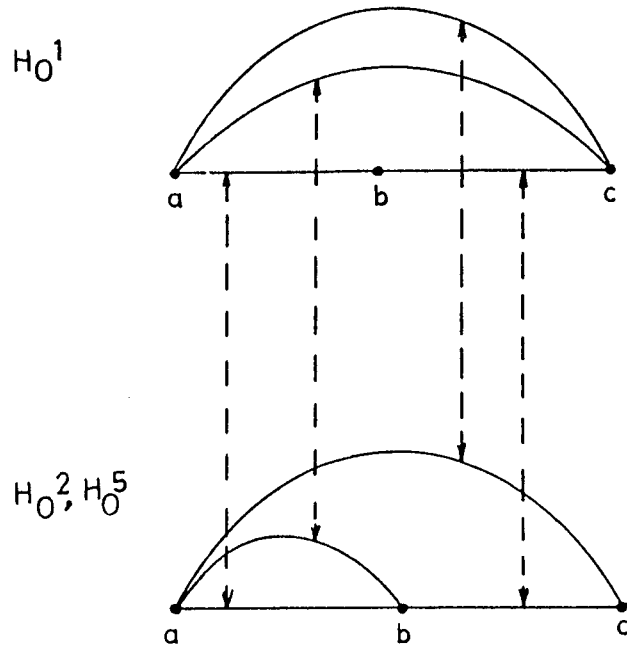


FIGURE 3.19

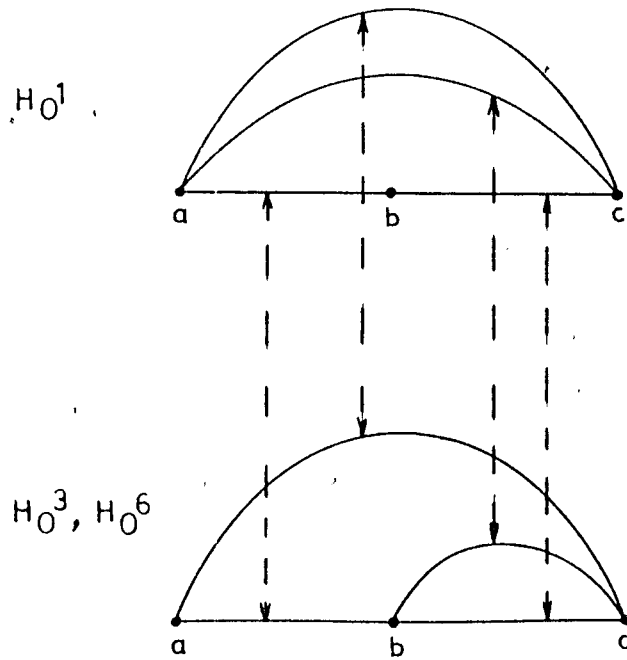


FIGURE 3.20

sur $H_{\delta(\xi)}$.

2) Du lemme 3.2 on tire: on peut sous-coupler $J_{o(k+1)}$ sur $J_{\delta(\xi)}$.

L'ensemble des arêtes de H_o (respect. de H_{δ}) peut être partitionné en deux sous-ensembles: l'ensemble des arêtes de $H_{o(k+1)}$ (respect. de $H_{\delta(\xi)}$) et l'ensemble des arêtes de $J_{o(k+1)}$ (respect. de $J_{\delta(\xi)}$). Donc, en vertu de ce que nous venons d'établir, on peut sous-coupler H_o sur H_{δ} pour $n=k+1$ sommets.

C. Q. F. D.

Les résultats développés dans ce paragraphe nous permettent d'établir ensuite un lien entre la condition d'unimodalité et le problème de l'agrégation typologique linéaire, ce dernier pouvant être formalisé comme suit:

Si nous associons à tout ordre $o=(x_1, \dots, x_n)$ sur X le nombre

$$V(o) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \cdot a_{x_i x_j}, \text{ trouver un ordre } \delta \text{ sur } X \text{ tel}$$

que $V(\delta) \geq V(o)$ pour tout ordre o sur X .

Théorème 3.3:- S'il existe un ordre $\hat{o}=(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ sur X tel que $\rho(A)$ soit unimodal par rapport à \hat{o} , alors \hat{o} est une solution optimale au problème de l'agrégation typologique linéaire.

Démonstration.- Par l'absurde. Nous supposons que, $\rho(A)$ étant unimodal par rapport à \hat{o} , il existe un ordre o tel que $V(o) > V(\hat{o})$.

Si nous considérons les multigraphes $H_o=(X, E_o)$ et $H_{\hat{o}}=(X, E_{\hat{o}})$, il est évident que $V(o) = \sum_{e \in E_o} a_e$ et $V(\hat{o}) = \sum_{e \in E_{\hat{o}}} a_e$.

Du lemme 3.3 on tire qu'on peut sous-coupler H_o sur $H_{\hat{o}}$

et en conséquence $\sum_{e \in E_0} a_e \leq \sum_{e \in E_{\hat{o}}} a_e \Rightarrow V(o) \leq V(\hat{o})$, d'où la contradiction avec l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Lorsque dans le problème de l'agrégation typologique linéaire la fonction à maximiser a la forme:

$$W(o) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)^\beta \cdot a_{x_i x_j},$$

où $\beta \geq 1$, nous conjecturons que le théorème 3.3 reste vrai:

S'il existe un ordre $\hat{o} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ sur X , tel que $\rho(A)$ soit unimodal par rapport à \hat{o} , alors $W(\hat{o}) \geq W(o)$ pour tout ordre o sur X .

3.7.- LES ORDRES UNIMODAUX ET LA MINIMISATION DU TEMPS

D'ACCES.- Un informaticien veut placer un ensemble de n modules de programmation dans une unité périphérique d'un ordinateur; cette unité peut être soit un disque magnétique à n cylindres, où chaque module doit occuper un cylindre, soit une bande magnétique pouvant avancer aussi bien en avant qu'en arrière, et où chaque module doit occuper un enregistrement physique. L'informaticien connaît le nombre de fois b_{ij} que l'exécution de module j suit l'exécution du module i dans une période donnée ($b_{ii}=0$), et son problème est de trouver le rangement (ordre) des modules dans l'unité périphérique qui minimise le temps total d'accès. Ce problème est posé dans [Ramamoorthy et Bevins 1971] et dans [Aspinall 1972]. Le temps total d'accès pour un rangement quelconque $o = (x_1, \dots, x_n)$ des modules est

$$T = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n t_{ij} \cdot b_{x_i x_j} \dots \dots \dots (1)$$

où t_{ij} est le temps d'accès du cylindre i au cylindre j du disque (ou de l'enregistrement physique i à l'enregistrement

physique j de la bande magnétique), et peut être calculé comme suit:

$$t_{ij} = K + d_{ij}/V ,$$

où: K est égal à la somme du temps de démarrage du cylindre i plus le temps d'arrêt au cylindre j , qui est une constante; V est la vitesse de déplacement de la pointe de lecture; d_{ij} est la distance entre les cylindres i et j et est égale à $|i-j|$, donc $d_{ij}=d_{ji}$.

Alors de (1):

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (K + |i-j| / V) \cdot b_{x_i x_j} \\ &= K \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{x_i x_j} + (1/V) \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |i-j| \cdot b_{x_i x_j} . \end{aligned}$$

$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{x_i x_j}$ étant une constante, comme K et V , le rangement qui minimise $T' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |i-j| \cdot b_{x_i x_j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \cdot (b_{x_i x_j} + b_{x_j x_i})$ minimise aussi bien T .

$$\text{Si } a'_{ij} = b_{ij} + b_{ji}, \text{ alors } T' = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \cdot a'_{x_i x_j} .$$

Finalement en posant $a_{ij} = \hat{a} - a'_{ij}$, où $\hat{a} = \max_{1 \leq i < j \leq n} \{a'_{ij}\}$,

le rangement qui maximise $T'' = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \cdot a_{x_i x_j}$ minimise T' .

Nous voyons donc que le problème de la minimisation du temps d'accès est équivalent à celui de l'agrégation typologique linéaire du paragraphe précédent. Le lien avec les ordres unimodaux est immédiat: nous formons l'état de l'opinion $\rho(A)$

et le théorème 3.3 peut s'appliquer. A remarquer que $\rho(A)$ peut aussi bien être construit à partir de la matrice B. En effet, dans l'ordre o^i le module g précède le module h si et seulement si $b_{ih} + b_{hi} < b_{ig} + b_{gi}$.

C H A P I T R E 4 .

L A P S E U D O - U N I M O D A L I T E
E T L A Q U A S I - U N I M O D A L I T E .

	page
4.1.- INTRODUCTION	80
4.2.- LA CONDITION DE PSEUDO-UNIMODALITE	80
4.3.- MODELES COMPENSATOIRES ET NON-COMPENSATOIRES DE CHOIX	82
4.4.- LA CONDITION DE QUASI-UNIMODALITE	83

4.1.- INTRODUCTION.- Dans ce chapitre nous présentons et discutons deux CTMM fortement apparentées à la condition d'unimodalité.

1) La pseudo-unimodalité, aussi vieille que l'unimodalité, puisqu'elle est née dans les démonstrations d'Arrow au sujet de l'unimodalité, sera présentée au paragraphe 4.2.

2) La quasi-unimodalité, intermédiaire de deux conditions précédentes, et dont l'intérêt découle du sens psychologique qu'on peut lui donner. A notre connaissance elle n'a jamais été étudiée nulle part. Le paragraphe 4.3 a pour but de présenter des modèles de choix utiles à la compréhension de cette condition de quasi-unimodalité, laquelle fera l'objet du paragraphe 4.4.

4.2.- LA CONDITION DE PSEUDO-UNIMODALITE.- Comme nous l'avons indiqué plus haut, dans les démonstrations d'Arrow, d'une façon implicite, se trouve formulée une CTMM moins forte que l'unimodalité. Depuis lors, elle a gardé à tort dans la littérature anglo-saxonne le nom de "single-peaked condition", ce qui a induit en erreur les chercheurs qui l'ont souvent confondue avec l'unimodalité. Nous avons pris la liberté de l'appeler la "condition de pseudo-unimodalité". Elle peut être définie comme suit:

Définition 4.1.- Un état de l'opinion E sur un ensemble A d'objets obéit à la condition de pseudo-unimodalité ou est pseudo-unimodal, si pour tout triplet d'objets de A il existe un objet qui n'est surclassé par les deux autres dans aucun des ordres de E.

Notons **U** l'ensemble des états de l'opinion unimodaux et **P** celui des états de l'opinion pseudo-unimodaux.

Proposition 4.1.:- $U \subsetneq P$.

Démonstration.- Nous démontrerons d'abord que $U \subset P$.
En effet, soit $x=(x_1, \dots, x_n)$ un ordre de référence par rapport auquel un état de l'opinion E est unimodal ($E \in U$). Soient trois objets quelconques x_i, x_j, x_k , tels que $i < j < k$; alors de par la définition 2.1 (page 16) on sait que, sur E, x_j n'est jamais classé en queue, et en conséquence $E \in P$.

D'autre part, l'état de l'opinion $F = \{(a, d, b, c), (b, d, c, a), (c, d, b, a)\}$, qui n'est pas unimodal, appartient à **P**, puisque pour tout triplet d'objets il y a un objet qui n'est jamais classé en queue:

<u>triplet</u>	<u>objet jamais classé en queue</u>
a, b, c	b
a, b, d	d
a, c, d	d
b, c, d	d

C. Q. F. D.

Proposition 4.2.:- Si un état de l'opinion E obéit a la condition de pseudo-unimodalité, alors deux objets différents au plus peuvent constituer le dernier objet de tout ordre de E.

Démonstration.- En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il y ait trois objets différents a, b, c, occupant la dernière place dans trois ordres de E. Alors dans le triplet {a, b, c} tout objet, sur E, se trouve au moins une fois classé

en dernier; E n'appartient donc pas à **P**, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

C. Q. F. D.

A propos de cette condition, plusieurs questions viennent naturellement à l'esprit: quelle est la cardinalité maximale d'un état de l'opinion (avec tous les ordres différents) pseudo-unimodal? Comment tester au moyen d'un algorithme efficace la présence de la condition de pseudo-unimodalité? A-t-elle une interprétation psychologique et économique?

En ce qui concerne les deux premières questions, nous ne connaissons pas de réponse à ce jour. Voulant répondre à la dernière question, nous sommes parvenus à formuler des conditions qui possèdent une claire interprétation psychologique et économique, mais qui, hélas! sont plus fortes que la condition de pseudo-unimodalité. Les conditions mentionnées sont la condition de "ramification" qui sera présentée au chapitre 5, et celle de "quasi-unimodalité", dont nous allons parler maintenant et qui est plus générale que la condition d'unimodalité.

4.3.- MODELES COMPENSATOIRES ET NON-COMPENSATOIRES DE CHOIX.- Il existe des situations de choix qui ne peuvent être approchées que par des modèles "compensatoires", modèles qui supposent des interactions entre les caractéristiques d'un objet donné, la valeur d'une caractéristique compensant la valeur d'une autre. Un modèle compensatoire typique est celui de la programmation linéaire. En effet, chaque objet (chaque solution réalisable) est valué en faisant la somme pondérée des valeurs des caractéristiques (variables); ainsi la faible valeur d'une variable peut-elle être compensée à l'optimum par la forte valeur d'une autre.

D'autres situations de choix sont plus fidèlement représentées par des modèles "non-compensatoires" (voir par exemple

[Einhorn 1970]), des modèles qui supposent l'absence d'interaction entre les caractéristiques d'un objet, la valeur d'une caractéristique ne compensant pas la valeur d'une autre. Les modèles maximin, minimax, maximax, minimin, sont des exemples de modèles "non-compensatoires". Le modèle maximin en particulier est applicable lorsque la performance globale d'un objet est déterminée par sa caractéristique la plus faible; par exemple, la résistance d'une chaîne à la tension est déterminée par la résistance de son maillon le plus faible, indépendamment de la résistance des autres maillons. Nous pouvons aussi rencontrer naturellement des modèles non-compensatoires en Biologie: la mort d'un être vivant, ne dépend-elle pas de l'état de santé de l'organe vital le plus faible?

Nous avons présenté ici des exemples idéalisés, alors que dans la plupart des situations de choix réelles on pressent un mélange du "compensatoire" et du "non-compensatoire"

4.4.- LA CONDITION DE QUASI-UNIMODALITE.- Cette condition implique que les votants possèdent des mécanismes de choix non-compensatoires du type maximin. Nous montrerons que l'unimodalité en est un cas particulier. La quasi-unimodalité, à son tour, apparaîtra comme un cas particulier de la pseudo-unimodalité.

Nous introduirons le concept de la quasi-unimodalité à l'aide d'un exemple.

Imaginons qu'un ensemble de n malades séjourne dans un hôpital. Le cardiologue fait un classement $x=(x_1, \dots, x_n)$ des malades d'après l'état de santé de leur coeur: pour tout $i=1, \dots, n-1$, le malade x_{i+1} a un coeur moins sain que le malade x_i . D'une façon analogue, un urologue fait un classement $y=(y_1, \dots, y_n)$ des malades, d'après l'état de santé de leurs reins. En supposant que l'état de santé global de ces malades puisse être déterminé uniquement en fonction de l'état des 2

organes mentionnés, nous demandons à plusieurs médecins de l'hôpital de classer les malades d'après leur état de santé global. Plus précisément, chaque médecin classera en dernier le malade qui lui semble le plus gravement malade, en avant dernier celui qui, à l'exclusion du dernier classé, lui semble le plus gravement malade, et ainsi de suite.

Si chaque médecin estime que la proximité de la mort dépend de la santé de l'organe vital le plus faible (mécanisme de choix maximin), on peut raisonnablement espérer que, lorsqu'il connaît les classements x et y , dans son propre classement:

1) Le dernier classé z_n , sera soit x_n , soit y_n , selon son appréciation personnelle de la gravité d'un coeur malade relative à celle des reins malades.

2) L'avant-dernier classé z_{n-1} , sera un des deux malades se trouvant en queue des classements x et y amputés de z_n , etc., pour tout $k=1,2,\dots,n-1$, le malade z_k sera un des deux malades se trouvant en queue des classements x et y amputés des malades $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n$.

Les médecins ayant en général des appréciations différentes, ils fournissent des classements différents.

Il est évident que cet exemple peut se généraliser à d'autres situations de choix similaires dans lesquelles:

- Le classement des objets ne dépend que de deux caractéristiques ou dimensions indépendantes (dans l'exemple, le coeur et les reins).

- Chaque classement est formé en tenant compte (à la manière indiquée dans l'exemple) des deux ordres de référence (x et y). Chaque ordre de référence est construit en considérant une seule des caractéristiques.

Nous dirons que les classements individuels sont "quasi-unimodaux" par rapport aux ordres de référence x et y .

Plus formellement, soit $x=(x_1, \dots, x_n)$ un ordre sur un ensemble A de n objets. Soit $B \subset A$. Nous noterons $x|B$ l'ordre sur l'ensemble $A-B$, qui résulte de la suppression des objets B dans l'ordre x . Par exemple, si $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $B=\{x_1, x_3, x_4\}$ et $x=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, alors $x|B=(x_2, x_5)$.

Notons $\theta(x)$ le dernier objet de l'ordre x . Soit $y=(y_1, \dots, y_n)$ un ordre sur A (y peut être égal à x).

Définition 4.2.:- Un ordre $z=(z_1, \dots, z_n)$ est quasi-unimodal par rapport aux ordres de référence x et y , si

$$z_n = \theta(x) \quad \text{ou} \quad \theta(y),$$

et $z_i = \theta(x|\{z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_n\})$ ou $\theta(y|\{z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_n\})$ pour $i=1, \dots, n-1$.

Définition 4.3.:- Un état de l'opinion E est quasi-unimodal s'il existe deux ordres x et y tels que tout élément de E soit quasi-unimodal par rapport à x et à y .

Notons \mathbb{Q} l'ensemble de tous les états de l'opinion quasi-unimodaux.

$$\text{Lemme 4.1.}:- \quad \mathbb{U} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{P}$$

Démonstration.-

1) $\mathbb{U} \subsetneq \mathbb{Q}$. Si $E \in \mathbb{U}$ alors il existe un ordre $x=(x_1, \dots, x_n)$ par rapport auquel E est unimodal, ce qui implique qu'il existe deux ordres $x=(x_1, \dots, x_n)$ et $y=(x_n, \dots, x_1)$, par rapport auxquels il est unimodal. Il nous est maintenant possible de déduire de la définition 4.2 qu'il existe deux ordres, x et y , par rapport auxquels E est quasi-unimodal $\Rightarrow E \in \mathbb{Q}$.

L'inclusion étant démontrée, nous démontrons l'inclusion stricte au moyen d'un exemple. En effet, on peut constater que l'état de l'opinion $E = \{(a,b,c,d), (d,b,c,a)\}$ est quasi-unimodal par rapport à $x = (a,b,c,d)$ et à $y = (d,b,c,a)$, et l'on vérifie rapidement qu'il n'est pas unimodal.

La condition d'unimodalité se confond donc avec la condition de quasi-unimodalité lorsque les ordres de référence sont inverse l'un de l'autre.

II) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$. Soit $E \in \mathbb{Q}$. Nous démontrerons que sur E , pour tout triplet d'objets, il y en a un qui n'est jamais classé en queue, et en conséquence $E \in \mathbb{P}$ (voir définition 4.1 à la page 80).

Comme $E \in \mathbb{Q}$, alors il existe deux ordres $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ tels que E est quasi-unimodal par rapport à eux. Soient 3 objets x_i, x_j, x_k tels que $i < j < k$. Ces trois objets figurent dans y dans un des $3!$ ordres possibles sur 3 objets. Le tableau de la fig. 4.1 montre que, pour chaque possibilité, il y a au moins un objet qui n'est jamais classé en queue dans aucun des ordres de E .

Si les objets x_i, x_j, x_k figurent dans y dans l'ordre	Alors ces objets ne se trouvent jamais en queue.
x_i, x_j, x_k	x_i, x_j
x_i, x_k, x_j	x_i
x_j, x_i, x_k	x_i, x_j
x_j, x_k, x_i	x_j
x_k, x_i, x_j	x_i
x_k, x_j, x_i	x_j

FIGURE 4.1

L'inclusion étant démontrée, nous démontrons l'inclusion stricte à l'aide d'un exemple: en effet, on peut constater que l'état de l'opinion $F = \{(a,b,c,d), (c,b,d,a), (d,b,c,a)\}$:

a) Est pseudo-unimodal, car pour tout triplet d'objets il y en a un qui n'est jamais classé en queue.

b) N'est pas quasi-unimodal parce que: 1) Dans F , le dernier objet étant soit a soit d , ces objets se trouvent forcément classés derniers dans les deux ordres de référence $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, autrement dit, $x_4 = a$ et $y_4 = d$. 2) L'ordre $(a,b,c,d) \in F$ implique $y_3 = c$ et l'ordre $(d,b,c,a) \in F$ implique $x_3 = c$. Finalement, on voit qu'il est impossible que l'ordre $(c,b,d,a) \in F$ soit quasi-unimodal par rapport aux ordres x et y , quels que soient x_1, x_2, y_1, y_2 .

C. Q. F. D.

La fig. 4.2 représente le lemme 4.1.

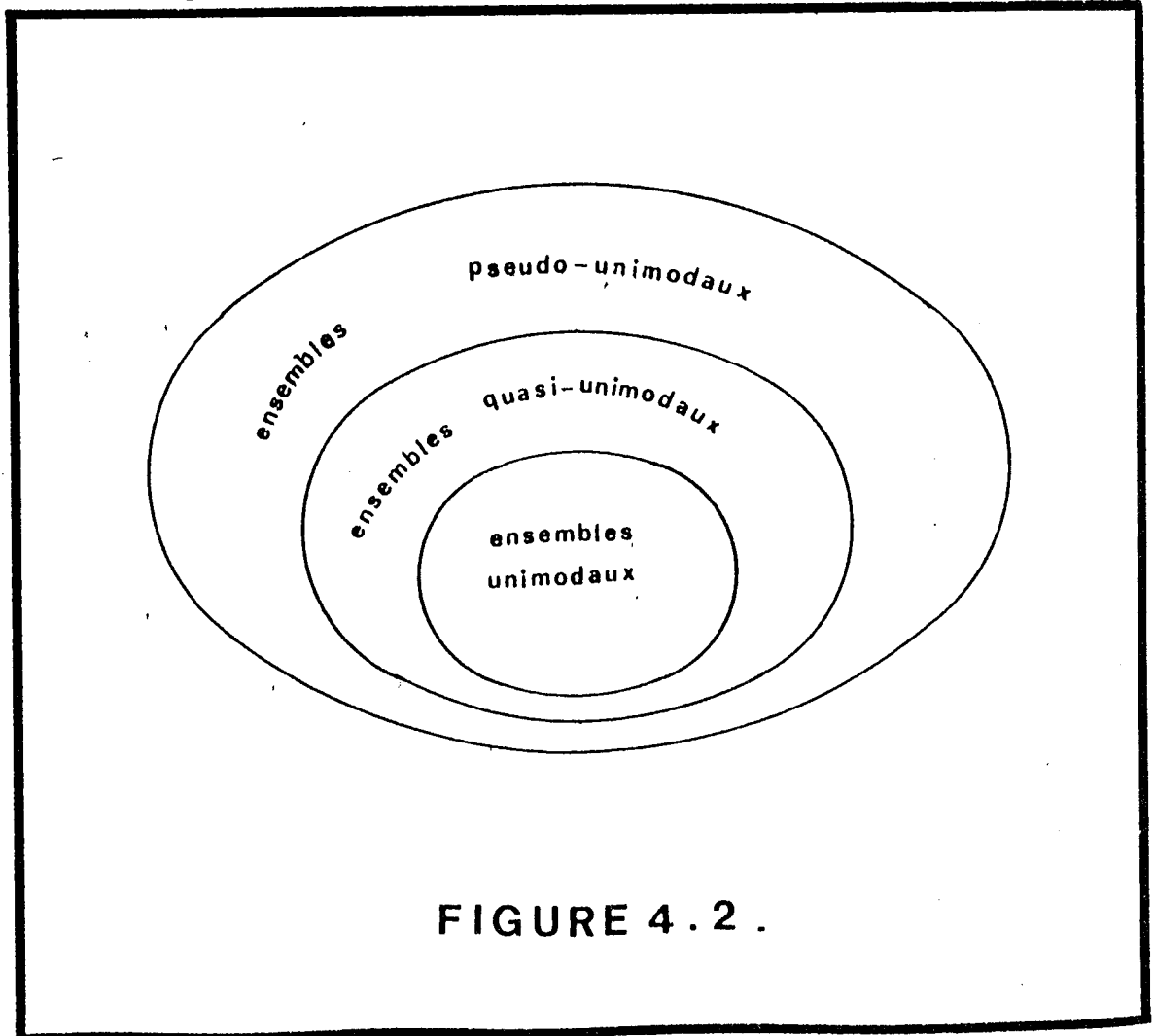


FIGURE 4.2 .

Remarque.- Si les ordres de référence x et y sont égaux, alors tous les ordres quasi-unimodaux par rapport à x et y sont égaux à x .

Le test de la condition de quasi-unimodalité par rapport à deux ordres de référence x et y connus est trivial. Moins trivial nous semble le problème de l'existence et de la détermination des ordres de référence par rapport auxquels un état de l'opinion quelconque pourrait être quasi-unimodal. Nous laissons donc ouvert ce problème dont la résolution pourrait être utile en psychologie du choix.

Il est évident, d'autre part, que la généralisation de la condition de quasi-unimodalité par rapport à un ensemble de p ordres ($p > 2$) peut être applicable dans le domaine psychologique. Nous nous sommes bornés cependant, au cas de $p=2$, parce que c'est le seul qui garantisse la transitivité de la méthode majoritaire, et de ce fait, c'est le seul qui rentre dans le cadre de ce travail. En effet, lorsqu'il y a au moins trois ordres de référence, si ceux-ci sont quelconques, trois objets a, b, c , différents peuvent figurer en queue de ces ordres; un état de l'opinion du genre $\{(\dots, a, b, c), (\dots, b, c, a), (\dots, c, a, b)\}$ conduit à l'effet Condorcet tout en pouvant satisfaire la condition de quasi-unimodalité à 3 dimensions.

5.1.- INTRODUCTION.- Dans ce chapitre nous présentons et discutons deux CTMM apparentées à l'unimodalité: la condition de Coombs et la condition de ramification. La condition de Coombs (§5.2) est moins générale que l'unimodalité et en conséquence elle a peu d'intérêt du point de vue de la transitivité de la méthode majoritaire, mais elle n'en est pas moins intéressante pour d'autres raisons. En premier lieu par l'interprétation psychologique qu'on peut en donner, et en second lieu parce qu'elle conduit à une généralisation naturelle: la condition de ramification (§5.3), à laquelle on peut également donner une interprétation psychologique (§5.4).

5.2.- LA CONDITION DE COOMBS.- Imaginons que dans l'hyper-espace \mathbb{R}^k se trouvent placés un ensemble de m hyper-chats et un ensemble de n hyper-souris. Etant donné que les hyper-souris sont aussi grasses les unes que les autres, chaque hyper-chat préfère, de deux hyper-souris quelconques, celle qui est le plus près de lui. Chaque hyper-chat fournit donc un classement des n hyper-souris par ordre de préférence (ordre strict si l'on suppose toutes les distances différentes) et l'ensemble des classements constitue un état de l'opinion.

Cette image peut être formalisée de la façon suivante:

Soient $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ deux ensembles de points dans \mathbb{R}^k . Les éléments de V seront appelés "points votants" et ceux de A seront appelés "points objets". Notons $d(x, y)$ la distance euclidienne entre les points x et y et associons à V et A l'état de l'opinion $\mu(V, A) = \{o^1, o^2, \dots, o^m\}$ sur l'ensemble A , où l'ordre $o^i = (t_1^i, \dots, t_n^i)$ est tel que

$d(v_i, t_g^i) < d(v_i, t_h^i)$ si et seulement si $g < h$. Nous supposons qu'aucun point votant n'est à équidistance de deux points objets; en conséquence $\mu(V, A)$ est formé d'ordres stricts.

Nous énonçons maintenant les problèmes suivants:

(1) Etant donné un entier k et un état de l'opinion E sur l'ensemble B , trouver dans \mathbb{R}^k deux ensembles de points V et A , en bijection avec E et B , respectivement, tels que $\mu(V, A) \equiv E$.

(2) Etant donné un état de l'opinion E , existe-t-il un entier k tel que le problème (1) puisse être résolu?

(3) Quel est le plus petit entier k_0 pour lequel le problème (1) a une solution?

Si $k_0 = 2$, par exemple, lorsqu'en pinçant le plan au point votant correspondant à $e \in E$, on le soulève comme s'il s'agissait d'un mouchoir, et ensuite on réduit le mouchoir à une ligne, l'ordre des points objets sur cette ligne est égal à e .

[Coombs 1964] traite ces problèmes en montrant leur intérêt psychologique, qui vient du fait que chacune des dimensions de l'espace \mathbb{R}^{k_0} peut être considérée comme représentative d'une caractéristique des objets de A . Les états de l'opinion tels que $k_0 = 1$ méritent une attention particulière; dans ce cas, les objets et les votants peuvent être représentés simultanément par des points sur une ligne droite. Cette représentation est souvent appelée "modèle unidimensionnel de Coombs".

Définition 5.1. - Un état de l'opinion E est dit obéir à la condition de Coombs si $k_0 = 1$.

Notons K l'ensemble de tous les états de l'opinion obéissant à la condition de Coombs.

Proposition 5.1.:- ([Coombs 1964]) Si un état de l'opinion E sur n objets obéit à la condition de Coombs et si tous les éléments de E sont différents, alors $|E| \leq C_n^2 + 1$.

Démonstration.- Si $E \in \mathbf{K}$ alors les ensembles de votants et d'objets peuvent être représentés par des points sur une ligne droite, sur laquelle on peut choisir une origine arbitraire.



Considérons deux points objets a_1 et a_2 quelconques. Si nous découpons la ligne au point médian $a_{med} = (a_1 + a_2)/2$, nous obtenons deux zones. Il est évident que tous les votants dont les points représentatifs se trouvent à gauche de a_{med} (respectivement à droite de a_{med}) préfèrent a_1 à a_2 (respectivement a_2 à a_1).

Nous pouvons déterminer le point médian de toute paire de points objets. L'ensemble des points médians (en nombre égal à C_n^2) nous permet de découper \mathbb{R} en un nombre de zones inférieur ou égal à $C_n^2 + 1$ (le cas "inférieur" se présente si deux points médians coïncident). Si les ordres de deux votants sont différents, alors leurs points votants correspondants doivent se trouver sur des zones différentes. Puisque le nombre maximum d'ordres différents est égal au nombre de zones, $|E| \leq C_n^2 + 1$.

C. Q. F. D.

Proposition 5.2.:- L'ensemble \mathbf{K} des états de l'opinion obéissant à la condition de Coombs est inclus strictement dans l'ensemble \mathbf{U} des états de l'opinion unimodaux. Autrement dit $\mathbf{K} \subsetneq \mathbf{U}$.

Démonstration.- Nous démontrons d'abord $\mathbf{K} \subset \mathbf{U}$. Si $E \in \mathbf{K}$ alors les ensembles de votants et d'objets sont représentés par des points sur une ligne droite. Si on prend comme ordre de référence l'ordre x des points objets lus de gauche à droite sur la ligne, on voit alors que pour tout point votant et pour

tout triplet de points objets a, b, c , figurant dans l'ordre (a,b,c) sur x , le point objet b n'est pas surclassé par a et c simultanément. De la définition 2.1 (page 16) nous déduisons que $E \in \mathbb{U}$.

Nous démontrons l'inclusion stricte à l'aide des propositions 5.1 (page 92) et 2.2 (page 17). En effet, pour un ordre de référence donné nous pouvons former un état de l'opinion unimodal à 2^{n-1} ordres différents. Comme pour $n \geq 4$ on a $C_n^2 + 1 < 2^{n-1}$, alors cet état de l'opinion ne peut pas obéir à la condition de Coombs.

C. Q. F. D.

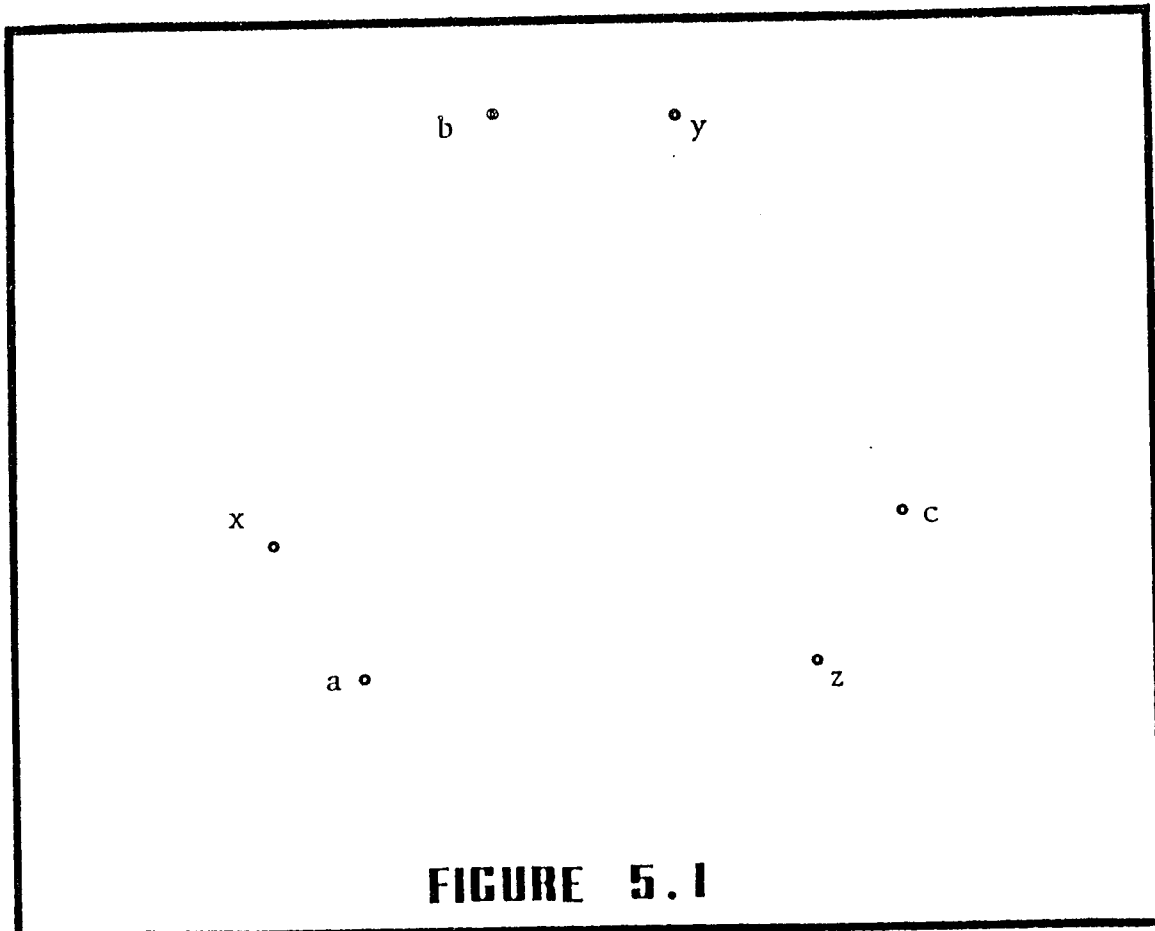
Corollaire 5.1:- La condition de Coombs est une CTMM.

Dans les conditions de Coombs et d'unimodalité il existe un ordre de référence sous-jacent. La différence fondamentale de ces deux conditions peut être imagée de la façon suivante:

Sur un objet rigide, une règle en bois par exemple, nous plaçons des hyper-chats et des hyper-souris. L'ordre des hyper-souris sur la règle est l'ordre de référence. L'état de l'opinion fourni par les hyper-chats obéira à la condition de Coombs et, nécessairement, à la condition d'unimodalité.

Si maintenant la règle n'est plus rigide, mais ultra-élastique (caoutchouc), et si chaque hyper-chat a le pouvoir de déformer à son gré la règle (il pourrait rallonger certaines parties de la règle en même temps qu'il en raccourcirait d'autres), avant de faire son classement, alors l'état de l'opinion formé par les hyper-chats pourra ne plus obéir à la condition de Coombs, mais il obéira toujours à la condition d'unimodalité.

Lorsqu'on passe du modèle unidimensionnel ($k_0=1$) au modèle multidimensionnel ($k_0 \geq 2$), la propriété de transitivité de la méthode majoritaire n'est, malheureusement, plus garantie.



Par exemple, pour $k_0=2$, si les hyper-souris a, b, c , et les hyper-chats x, y, z , sont placés de la façon indiquée à la fig. 5.1, l'état de l'opinion formé est $\{(a,b,c), (b,c,a), (c,a,b)\}$, et l'effet Condorcet apparaît lorsqu'on applique la méthode majoritaire.

Les problèmes (1), (2) et (3) mentionnés à la page 91 ont été résolus (voir [Coombs 1964]). Nous pouvons cependant poser 3 nouveaux problèmes, (1'), (2') et (3'), dont l'énoncé serait identique à celui des problèmes (1), (2) et (3), respectivement, à la seule différence près que, dans \mathbb{R}^k la distance entre deux points n'est pas euclidienne, mais rectangulaire(*). L'importance de ces problèmes a été signalée dans

(*) La distance rectangulaire entre deux points x, y de \mathbb{R}^k est égale à $\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$, où x_1, x_2, \dots, x_k sont les coordonnées du point x et y_1, y_2, \dots, y_k celles du point y .

[Coombs 1964] et, à notre connaissance ils n'ont pas encore été résolus. Dans les paragraphes suivants, tout en traitant une nouvelle CTMM, nous apportons quelques réponses aux problèmes mentionnés.

5.3.- LA CONDITION DE RAMIFICATION.- Dans le paragraphe précédent et afin de développer l'intuition au sujet des conditions de Coombs et d'unimodalité, nous avons fait promener des hyper-chats et des hyper-souris sur des règles en bois et en caoutchouc. Que se passe-t-il si nous les laissons maintenant promener sur un arbre (voir fig. 5.2) ? Nous considérons que la distance entre une hyper-souris et un hyper-chat est égale à la longueur du chemin unique (l'épaisseur des branches est négligeable) que l'hyper-chat doit parcourir pour l'atteindre (les hyper-chats ne peuvent ni sauter ni voler).

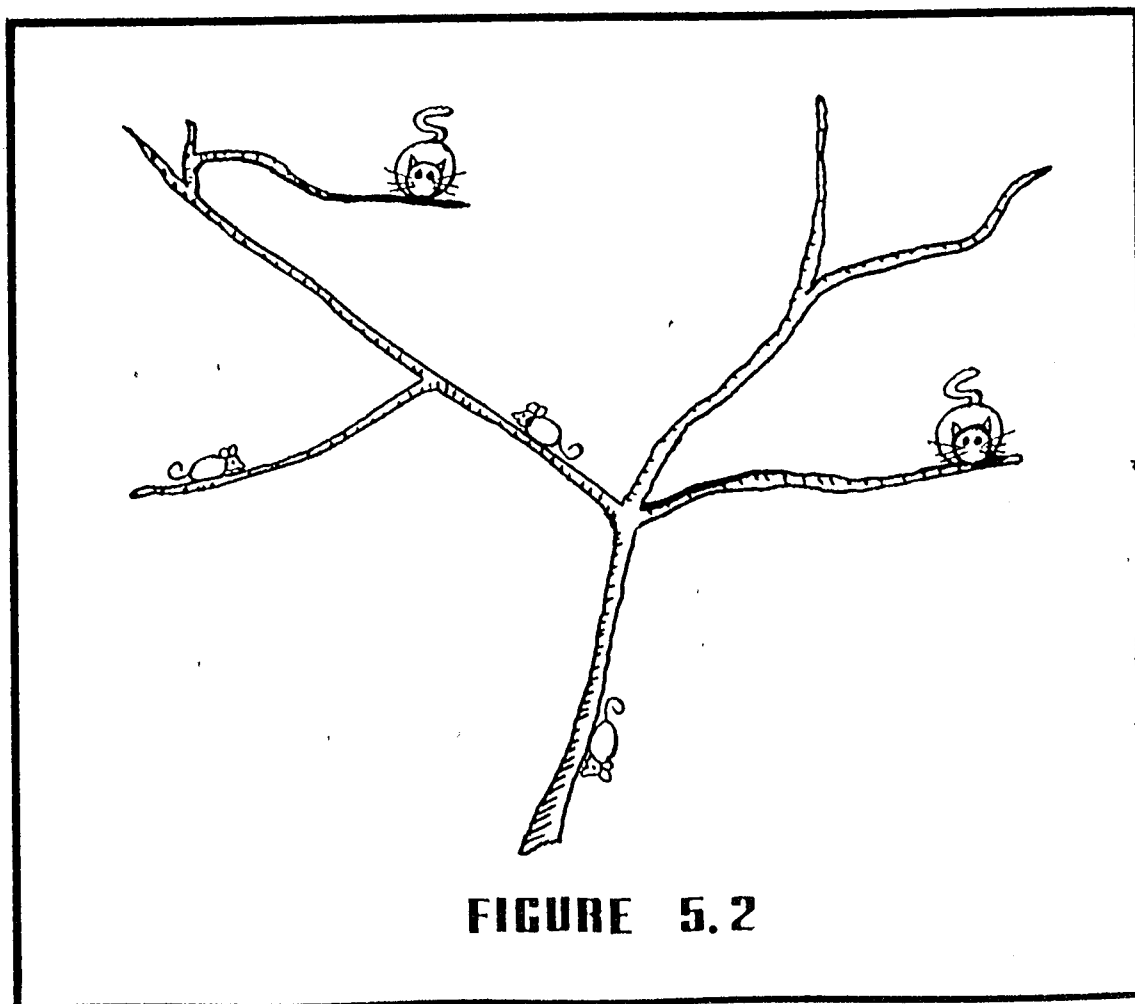


FIGURE 5.2

Cette image, comme nous le verrons, donne naissance à une nouvelle CTMM: la condition de ramification.

Soit $G=(X,U)$ un arbre, dont les arêtes seront valuées par des réels positifs (longueur d'une arête). La "distance" entre deux sommets quelconques de l'arbre sera égale à la longueur du chemin unique qui les relie. Soient $A \subset X$ et $V \subset X$ quelconques et formons un état de l'opinion sur A de la façon suivante: pour chaque $v \in V$ les éléments de A sont classés par ordre croissant de leur distance à v . L'état de l'opinion ainsi formé sera noté $\mu(G,A,V)$.

Remarque.- Nous supposons qu'aucun élément de V n'est à équidistance de deux éléments de A , en conséquence les éléments de $\mu(G,A,V)$ sont des ordres stricts.

Définition 5.2.:- Un état de l'opinion E est dit obéir à la condition de ramification, s'il existe un triplet (G,A,V) tel que $E=\mu(G,A,V)$.

Notons \mathbb{R} l'ensemble de tous les états de l'opinion obéissant à la condition de ramification.

Proposition 5.3.:- Si un état de l'opinion E sur n objets obéit à la condition de ramification, et si tous les ordres de E sont différents, alors $|E| \leq C_n^2 + 1$.

Démonstration.- Si $E \in \mathbb{R}$ alors il existe un triplet (G,A,V) tel que $E=\mu(G,A,V)$. Considérons dans la fig. 5.3 (page 97) deux éléments de A : x_1 et x_2 . Si nous découpons l'arbre au point médian de x_1 et x_2 nous obtiendrons deux zones; on voit facilement que tous les éléments de V qui se trouvent sur la zone gauche (respect. droite) préfèrent x_1 à x_2 (respect. x_2 à x_1).

Nous pouvons déterminer le point médian de toute paire d'éléments de A . L'ensemble de points médians (en nombre égal

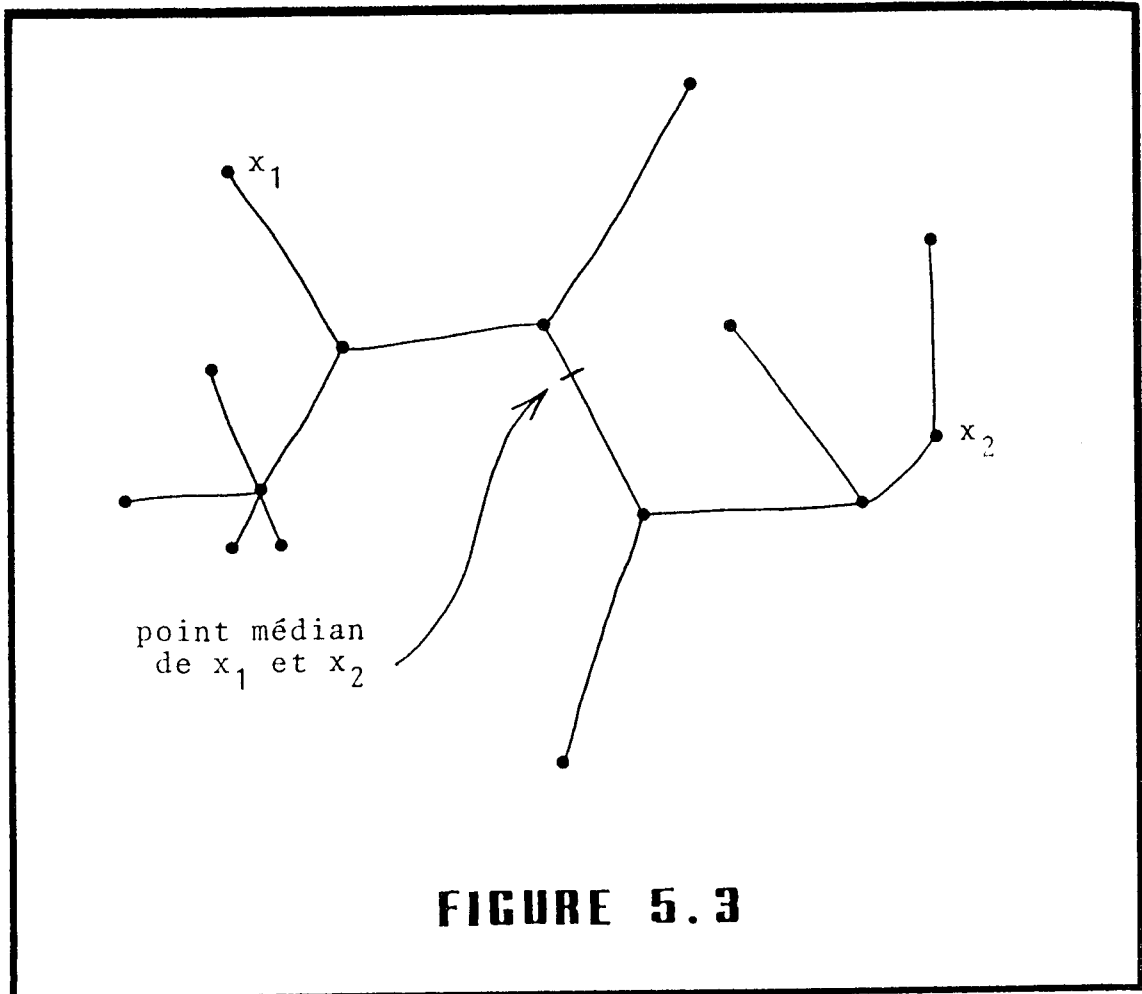


FIGURE 5.3

à C_n^2) nous permet de découper l'arbre en un nombre de zones inférieur ou égal à $C_n^2 + 1$ (le cas "inférieur" se présente si deux points médians coïncident).

Si deux ordres de E sont différents, alors leurs sommets représentatifs doivent se trouver sur deux zones différentes. Puisque le nombre maximum d'ordres différents est égal au nombre de zones, $|E| \leq C_n^2 + 1$.

C. Q. F. D.

Comment la condition de ramification est-elle placée par rapport aux CTMM déjà présentées au lecteur? Nous répondons à cette question au moyen du lemme 5.1 et des propositions 5.4 à 5.10, dont les résultats seront résumés par la fig. 5.10 (page 105). Rappelons tout d'abord les notations des chapitres précédents:

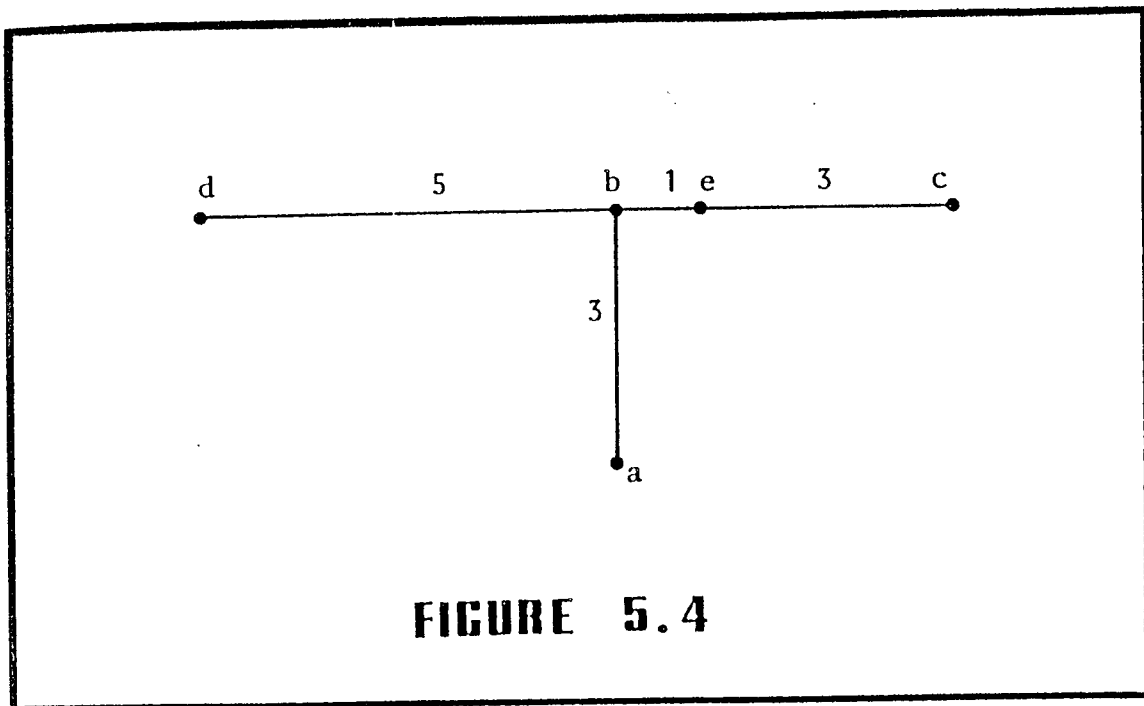


FIGURE 5.4

Ensemble des états de l'opinion obéissant à la condition de	Symbole
unimodalité	U
pseudo-unimodalité	P
quasi-unimodalité	Q
Coombs	K

Proposition 5.4. : $K \not\subseteq R$

Démonstration.- Nous démontrons d'abord $K \subset R$. Ceci est trivial puisqu'on peut considérer qu'une ligne droite est un arbre sans "fourche" (dont les sommets sont au plus de degré 2).

Nous démontrons l'inclusion stricte à l'aide d'un exemple. Soit l'état de l'opinion $E = \{(d, b, a, c), (b, a, c, d), (b, c, a, d)\}$. Sur la fig. 5.4 nous avons représenté un graphe G , avec $V = \{d, b, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, tel que $\mu(G, A, V) = E$, et en conséquence $E \in R$. Nous

voyons d'autre part, à l'aide des pyramides (voir chapitre 2), que E n'est pas unimodal et en vertu de la proposition 5.2 (page 92) on tire $E \notin K$.

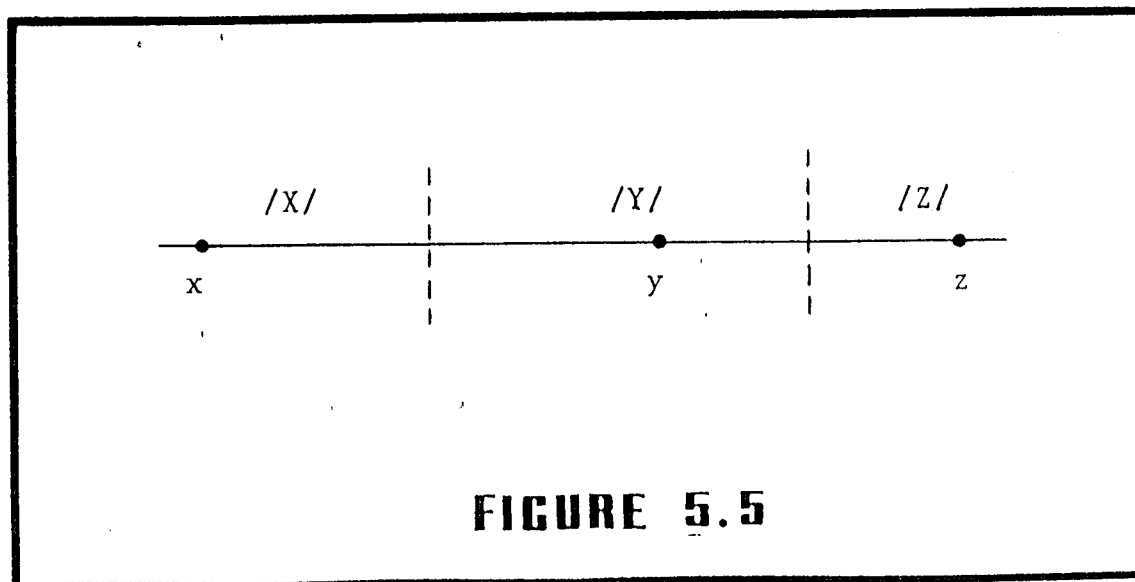
C. Q. F. D.

Lemme 5.1. - $R \subsetneq P$

Démonstration.- Démontrons d'abord $R \subset P$. Soit $E \in R$; si le nombre d'objets est égal à 1 ou 2 on a trivialement $R \subset P$. Dans le cas où le nombre d'objets est supérieur à 2, nous démontrerons que, pour tout triplet d'objets (x,y,z) , il y en a un qui, dans E , n'est jamais classé en queue; et en vertu de la définition 4.1 (page 80): $R \subset P$.

Deux cas sont à analyser: soit un des trois objets se trouve sur le chemin unique qui relie les deux autres, soit aucun objet ne se trouve sur le chemin qui relie les deux autres.

Premier cas.- Soit y l'objet se trouvant sur le chemin qui relie les objets x et z (voir fig. 5.5). Nous coupons l'arbre en deux points: au point médian de x et y , et au point médian de y et z . Comme résultat de cette opération on obtient 3 morceaux d'arbre: le morceau $/X/$ qui contient x , $/Y/$ qui



contient y et $/Z/$ qui contient z . Or, tous les votants se trouvant en $/X/$ placent z en queue, les votants se trouvant en $/Y/$ placent y en tête et les votants se trouvant en $/Z/$ placent x en queue. En conséquence, l'objet y n'est jamais classé en queue.

Deuxième cas.- Aucun objet ne se trouve sur le chemin qui relie les deux autres. G étant un arbre, il existe un sommet unique w qui se trouve sur les chemins (x,y) , (x,z) et (y,z) simultanément (voir fig. 5.6). Soient d_{xw} , d_{yw} , d_{zw} les distances de w à x , y , z , respectivement. Supposons que $d_{yw} < d_{xw}$, d_{zw} . Nous coupons encore l'arbre en deux points: au point médian de x et y , et au point médian de y et z . On obtient encore 3 morceaux d'arbre: $/X/$ qui contient x , $/Y/$ qui contient y et $/Z/$ qui contient z . Or, les votants se trouvant en $/X/$ placent z en queue, les votants se trouvant en $/Y/$ placent y en tête et les votants se trouvant en $/Z/$ placent x en queue. En conséquence, l'objet y n'est jamais classé en queue.

L'inclusion stricte se démontre à l'aide des propositions 2.2 (page 17) et 5.3 (page 96). En effet, nous pouvons former un état de l'opinion $F \in \mathbb{U}$ à 2^{n-1} ordres différents; comme

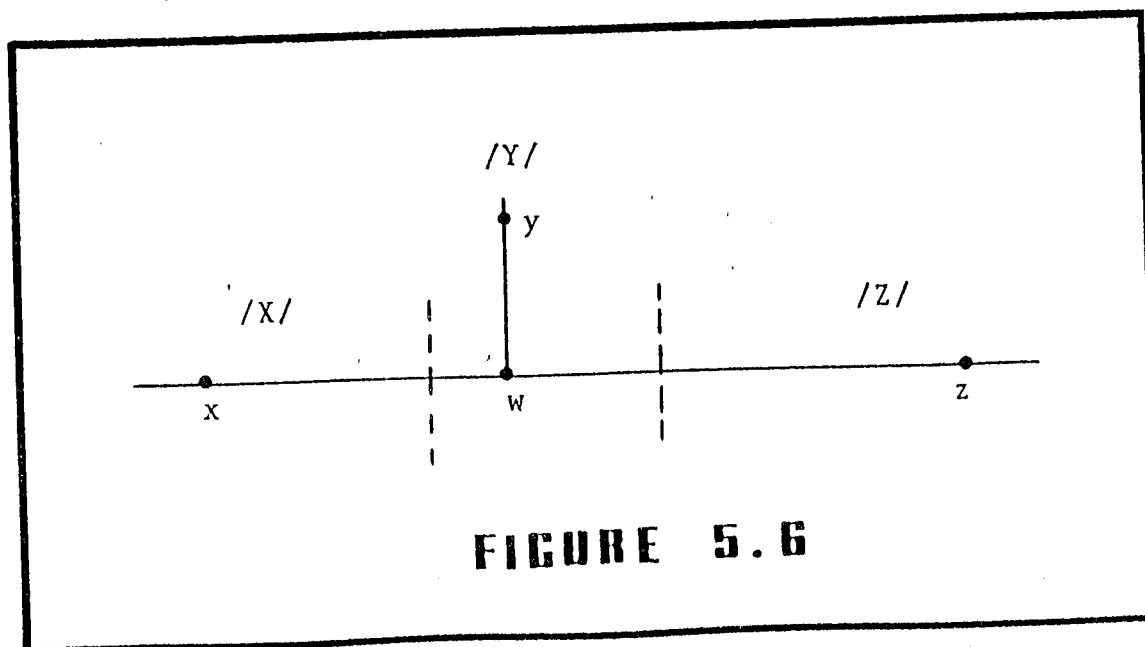


FIGURE 5.6

$U \subseteq P$ alors $F \in P$. D'autre part, pour $n \geq 4$ on a $C_n^2 + 1 < 2^{n-1}$,
et en conséquence F ne peut pas appartenir à R .

C. Q. F. D.

Proposition 5.5.:- $QUR \not\subseteq P$

Démonstration.- Démontrons d'abord $QUR \subset P$. Ceci est immédiat à partir des lemmes 4.1 (page 85) et 5.1 (page 99).

L'inclusion stricte est démontrée à l'aide d'un exemple. Soit l'état de l'opinion $E = \{(b,c,f,d,e), (c,b,f,d,e), (c,f,b,d,e), (c,f,d,b,e), (c,f,d,e,b), (f,d,e,c,b), (d,f,e,c,b), (e,f,d,c,b), (f,c,b,d,e), (f,c,d,b,e), (f,c,d,e,b), (f,d,c,e,b)\}$.

(1) Cet état de l'opinion est pseudo-unimodal ($E \in P$), comme on peut le constater:

triplet	objet jamais en queue
b,c,d	c
b,c,e	c
b,c,f	c
b,d,e	d
b,d,f	f
b,e,f	f
c,d,e	d
c,d,f	f
c,e,f	f
d,e,f	f

(2) Le lecteur peut voir sans peine qu'il est impossible de construire deux ordres de référence par rapport auxquels E serait quasi-unimodal, et en conséquence $E \notin \mathbf{Q}$.

(3) Puisque $|E|=12$, de la proposition 5.3 (page 96) on tire $E \notin \mathbf{R}$.

C. Q. F. D.

Proposition 5.6. : $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \neq \emptyset$.

Démonstration.- Soit l'état de l'opinion $F = \{(a,b,c,d), (d,b,c,a), (c,b,d,a)\}$. A la fig. 5.7 nous avons représenté un graphe G avec $V = \{a,c,d\}$, $A = \{a,b,c,d\}$, tel que $\mu(G,A,V) = F$, et en conséquence $F \in \mathbf{R}$.

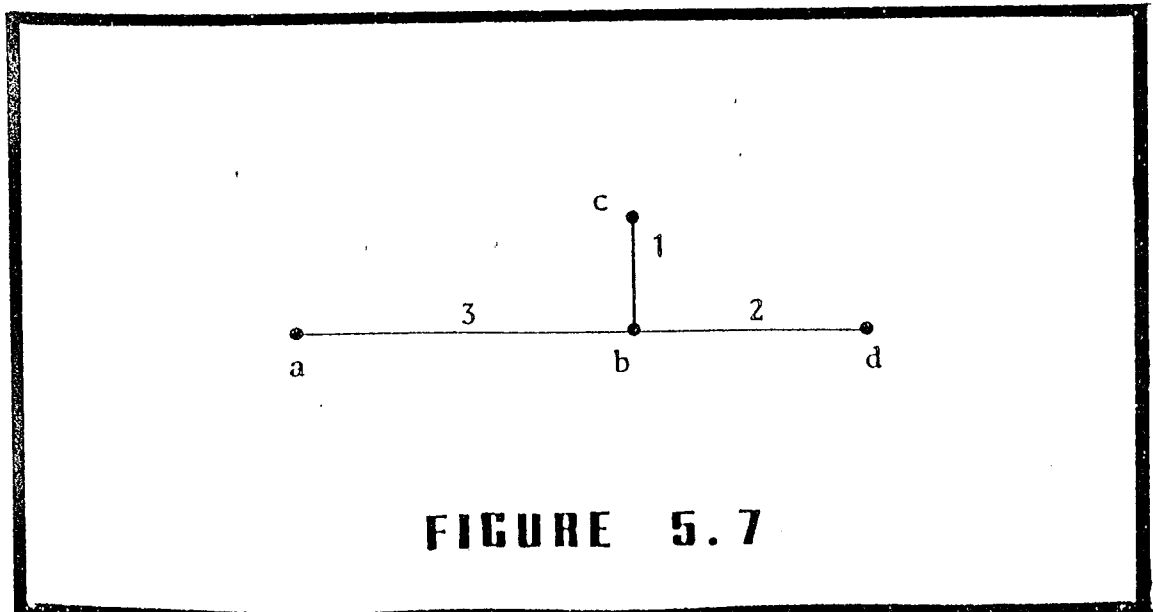
D'autre part, F n'est pas quasi-unimodal (voir deuxième partie de la démonstration du lemme 4.1 à la page 86). En conséquence $F \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

C. Q. F. D.

Proposition 5.7. : $\mathbf{U} - \mathbf{R} \neq \emptyset$.

Démonstration.- Il suffit de considérer un état de l'opinion $E \in \mathbf{U}$, sur plus de 3 objets et à 2^{n-1} ordres différents. De la proposition 5.3 on tire $E \notin \mathbf{R}$ et en conséquence $E \in \mathbf{U} - \mathbf{R}$.

C. Q. F. D.



Proposition 5.8.:- $\mathbf{Q} - (\mathbf{U} \cup \mathbf{R}) \neq \emptyset$.

Démonstration.- Il est facile de constater que l'état de l'opinion $F = \{(a, e, b, c, d), (e, a, b, c, d), (e, b, a, c, d), (b, e, a, c, d), (e, b, c, a, d), (b, e, c, a, d), (d, b, e, c, a), (b, d, e, c, a), (e, b, d, c, a), (b, e, d, c, a), (b, e, c, d, a), (e, b, c, d, a)\}$ est quasi-unimodal par rapport aux ordres de référence (a, e, b, c, d) et (d, b, e, c, a) , donc $F \in \mathbf{Q}$.

A l'aide des pyramides (chapitre 2) on vérifie aisément qu'il n'est pas unimodal, donc $F \notin \mathbf{U}$ et vu que $|F| = 12 > C_5^2 + 1 = 11$, de la proposition 5.3 (page 96) on tire $F \notin \mathbf{R}$.

C. Q. F. D.

Proposition 5.9.:- $\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q} - \mathbf{U}) \neq \emptyset$.

Démonstration.- L'état de l'opinion $E = \{(a, b, c, d), (d, b, c, a)\}$ est quasi-unimodal par rapport aux ordres (a, b, c, d) et (d, b, c, a) , donc $E \in \mathbf{Q}$. A l'aide des pyramides on vérifie aisément qu'il n'est pas unimodal, donc $E \in \mathbf{Q} - \mathbf{U}$. Finalement il obéit à la condition de ramification (voir fig. 5.7, avec $V = \{a, d\}$). D'où: $E \in \mathbf{R} \cap (\mathbf{Q} - \mathbf{U})$.

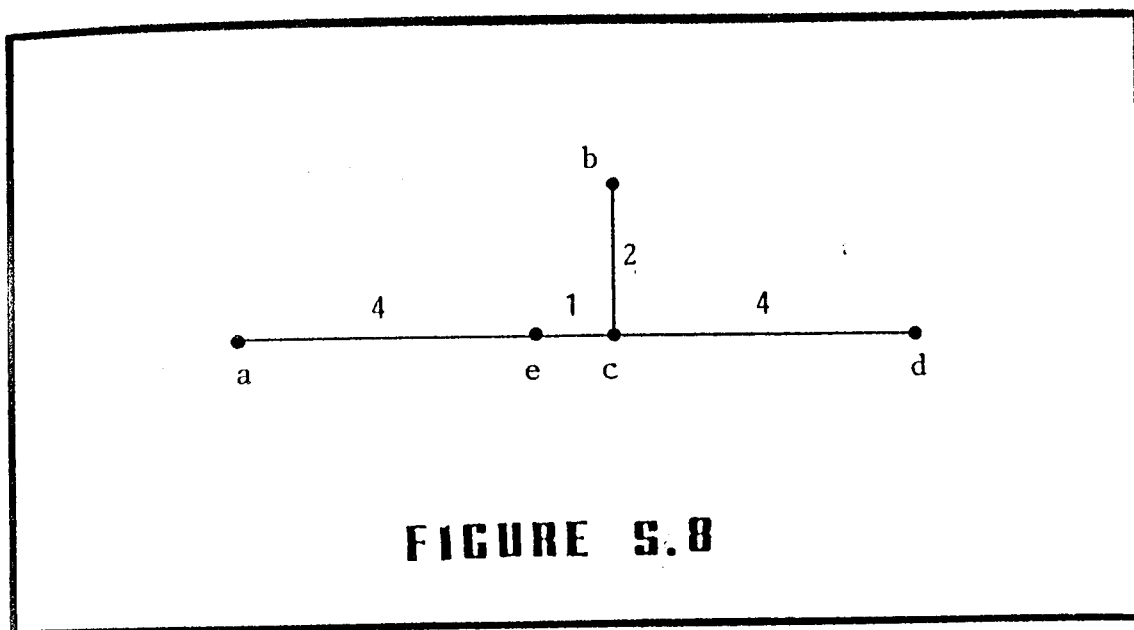
C. Q. F. D.

Proposition 5.10.:- $\mathbf{K} \not\subseteq \mathbf{U} \cap \mathbf{R}$.

Démonstration (cette démonstration est due à M. E. Mazert de l'Université de Grenoble).- Démontrons tout d'abord $\mathbf{K} \subset \mathbf{U} \cap \mathbf{R}$. Ceci est immédiat à partir des propositions 5.2 (page 92) et 5.4 (page 98).

L'inclusion stricte est démontrée à l'aide d'un exemple. Soit l'état de l'opinion $E = \{(c, b, a, d), (b, c, d, a), (d, c, b, a)\}$. Nous démontrerons qu'il appartient à $(\mathbf{U} \cap \mathbf{R}) - \mathbf{K}$.

(1) L'on vérifie facilement que E est unimodal par rapport à l'ordre (a, b, c, d) . $E \in \mathbf{U}$.



(2) A la fig. 5.8 nous avons représenté un graphe G avec $V=\{b,d,e\}$, $A=\{a,b,c,d\}$, tel que $\mu(G,A,V)=E$, et en conséquence $E \in \mathbf{R}$.

(3) Puisque tous les ordres de E finissent soit par d soit par a alors, sur la droite de Coombs, ces objets se trouvent forcément premier et dernier. Vu que l'ordre (d,c,b,a) appartient à E , on déduit que l'ordre des objets sur la droite de Coombs est (a,b,c,d) (ou (d,c,b,a) si l'on veut).

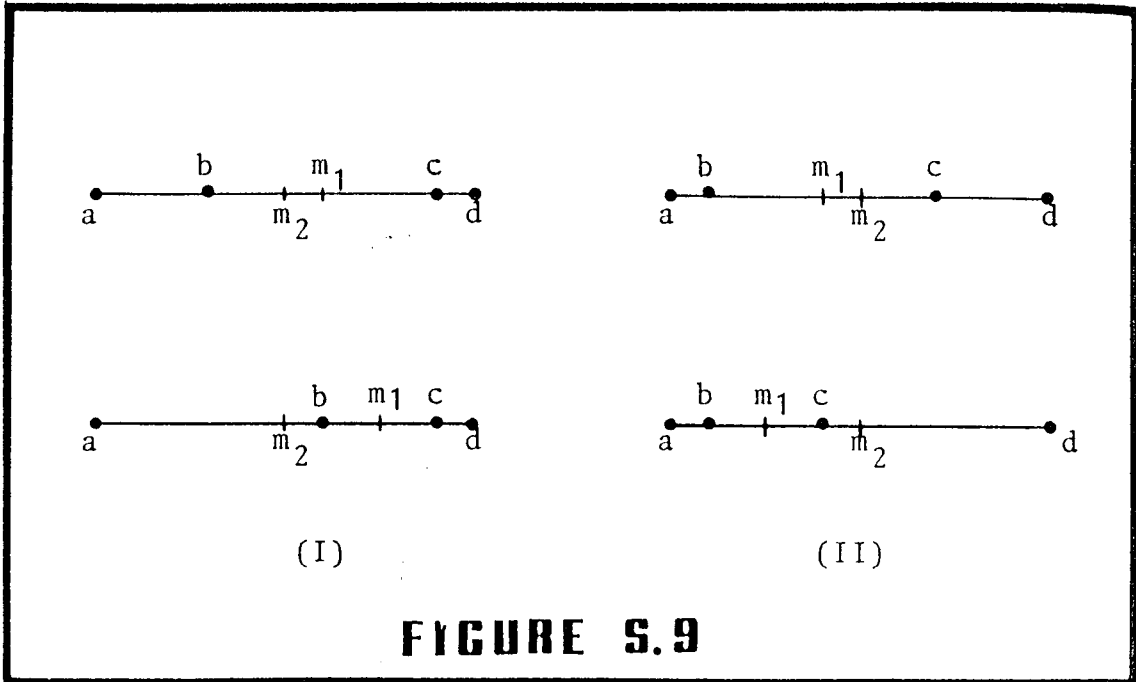
Nous considérons maintenant tous les cas possibles pour le placement des objets b et c sur le segment de droite \overline{ad} .

- Si le point médian m_1 de b et c est à droite du point médian m_2 de a et d (voir dans la fig. 5.9(I) à la page 105 les deux cas possibles), alors l'ordre (c,b,a,d) ne peut pas appartenir à E et donc si E appartient à \mathbf{K} , m_1 doit se trouver à gauche de m_2 .

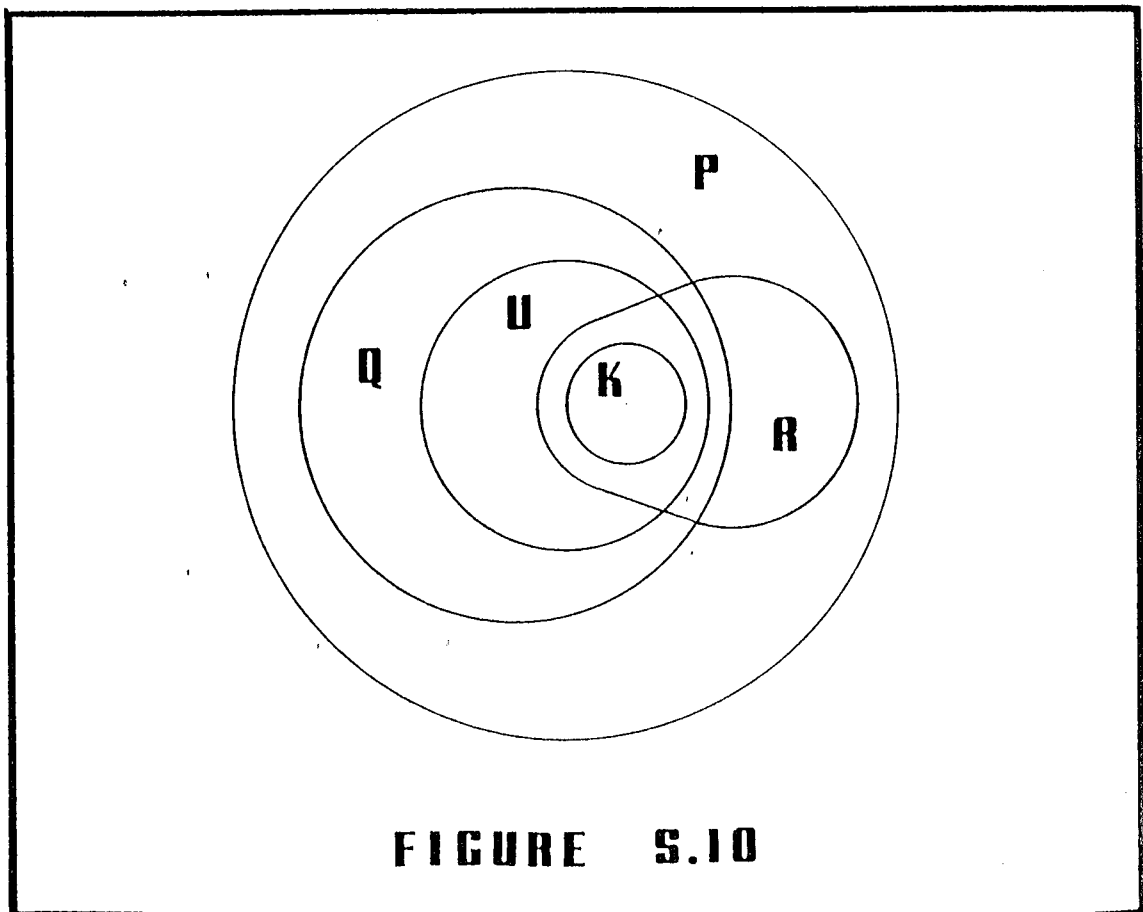
- Si le point médian m_1 est à gauche de m_2 (voir dans la fig. 5.9(II) les deux cas possibles), alors l'ordre (b,c,d,a) ne peut pas appartenir à E .

On conclut donc que $E \notin \mathbf{K}$.

C. Q. F. D.



Nous résumons les résultats de la proposition 5.2, des lemmes 4.1 et 5.1 et des propositions 5.4 à 5.10, dans la fig. 5.10, où toutes les zones indiquées sont non-vides.



Dans le chapitre 7 nous présenterons des conditions "duales" (conditions "miroir") des CTMM représentées sur la fig. 5.10, ce qui nous permettra de généraliser les résultats obtenus dans ce chapitre.

Malgré l'établissement des conditions de quasi-unimodalité et de ramification, les états de l'opinion pseudo-unimodaux, dans leur ensemble, demeurent sans interprétation psychologique. Autrement dit, un état de l'opinion appartenant à $P - (Q \cup R)$, a-t-il un sens psychologique? Cette question reste ouverte.

5.4.- UN SENS PSYCHOLOGIQUE POUR LA CONDITION DE RAMIFICATION.- [Coombs 1964] suggère que certains mécanismes neurologiques pourraient être représentés par des modèles utilisant une métrique non pas euclidienne mais "rectangulaire" ("city-block" model). De ce fait la résolution des problèmes (1'), (2'), (3') mentionnés à la fin du paragraphe 5.2 pourrait être utile dans la psychologie du choix.

Dans ce paragraphe:

- Nous fournissons une réponse au problème (2') lorsque l'état de l'opinion considéré obéit à la condition de ramification. Ce résultat permet de donner un sens psychologique à la condition de ramification.

- Nous proposons une conjecture au sujet du problème (3') lorsque l'état de l'opinion considéré obéit à la condition de ramification.

Soit un arbre $G=(X,U)$, avec $|X| \geq 3$. A tout sous-ensemble non-vide Y de X nous associons le sous-arbre de G : $G_Y=(X_Y,U_Y)$, tel que $Y \subset X_Y$ et $|X_Y|$ est minimum. Autrement dit, G_Y est le "plus petit" sous-arbre de G qui "contient" Y .

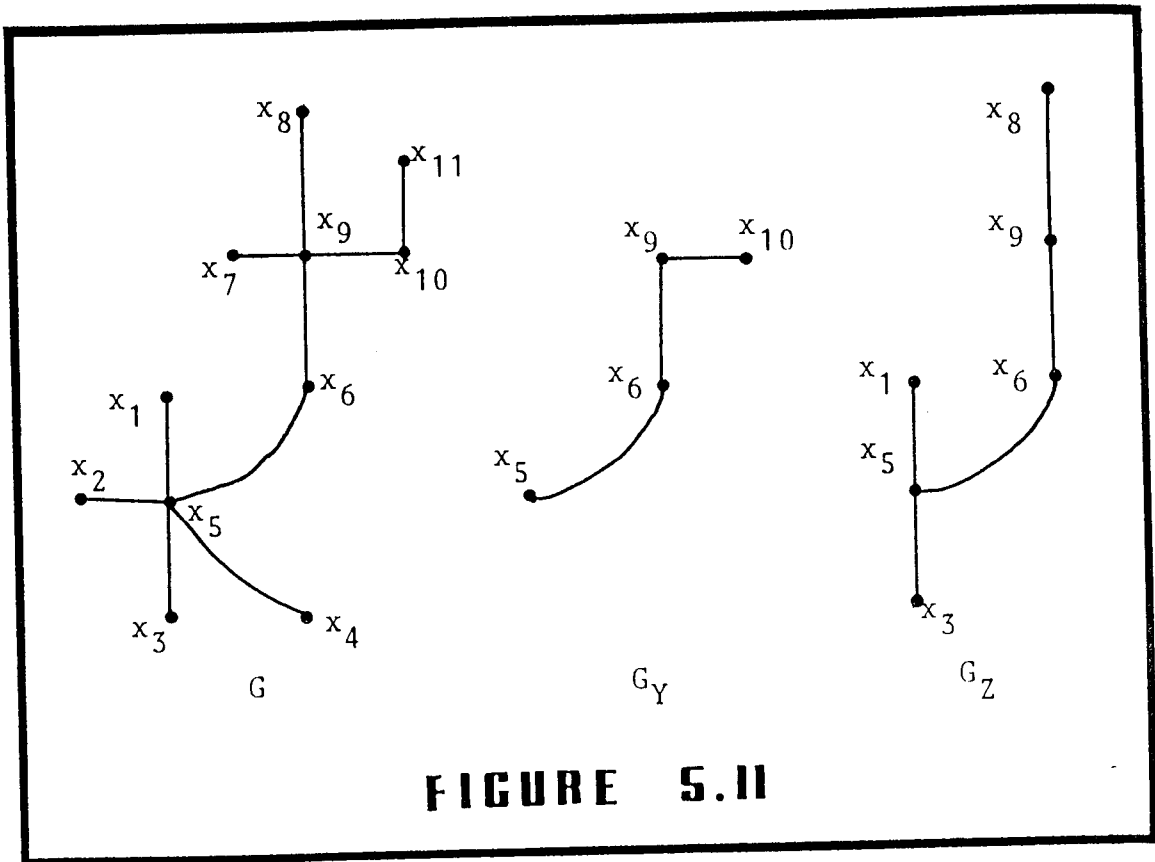


FIGURE 5.11

Exemple.- La fig. 5.11 représente les arbres G , G_Y et G_Z , avec $Y = \{x_5, x_{10}\}$ et $Z = \{x_1, x_3, x_6, x_8\}$.

Remarques:

- (a) Comme G est un arbre, alors G_Y est unique.
- (b) Si $x \in X_Y$ et $Y \subset Z$, alors $x \in X_Z$.
- (c) Si $|Y|=2$, alors G_Y formé une chaîne.
- (d) Pour tout $x, y \in Y$, si z se trouve sur le chemin unique qui relie x et y , alors $z \in X_Y$.

Notons \bar{X} l'ensemble des sommets pendants de l'arbre $G = (X, U)$.

Proposition 5.11. - Si dans un arbre $G=(X,U)$, avec $|\bar{X}| \geq 4$, il existe $Y^\circ = \{x^\circ, y^\circ\} \subset \bar{X}$, tel que $X_{Y^\circ} \cap X_{\bar{X}-Y^\circ} = \emptyset$, alors:

I) Pour tout $x \in X_{Y^\circ}$ le degré de x dans G est inférieur à 4.

II) Il existe dans X_{Y° un sommet unique tel que, dans G , son degré soit égal à 3.

Démonstration. -

I) Pour tout $x \in X_{Y^\circ}$ le degré de x dans G est inférieur à 4. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe un sommet $\bar{x} \in X_{Y^\circ}$ tel que son degré soit supérieur ou égal à 4. Or, de l'ensemble d'arêtes incidentes à \bar{x} , une d'elles mène à x° , une autre mène à y° et le reste (au moins 2) mène à l'ensemble $\bar{X} - Y^\circ$. Ce qui veut dire qu'il existe deux sommets dans $\bar{X} - Y^\circ$ tels que \bar{x} se trouve sur le chemin unique qui les relie. De la remarque (d) on tire $\bar{x} \in X_{\bar{X}-Y^\circ}$, ce qui entraîne $X_{Y^\circ} \cap X_{\bar{X}-Y^\circ} \neq \emptyset$, d'où la contradiction.

II) Il existe dans X_{Y° un sommet unique tel que, dans G , son degré soit égal à 3. En raisonnant par l'absurde, supposons: a) qu'il n'existe aucun sommet dans X_{Y° tel que, dans G , son degré soit égal à 3, ou b) qu'il existe dans X_{Y° deux sommets v et w , tels que, dans G , leur degré soit égal à 3.

Si (a), alors le degré, dans G , de tous les sommets appartenant à X_{Y° est égal à 1 ou 2. Comme G_{Y° forme une chaîne (remarque (c)), on déduit que G n'est pas connexe, d'où la contradiction.

Si (b) alors v a trois voisins dont deux appartiennent à X_{Y° et un n'appartient pas à X_{Y° ; soit v' ce dernier sommet. Le sommet w a aussi trois voisins dont deux appartiennent à X_{Y° et un n'appartient pas à X_{Y° ; soit w' ce dernier sommet (voir fig. 5.12 à la page 109).

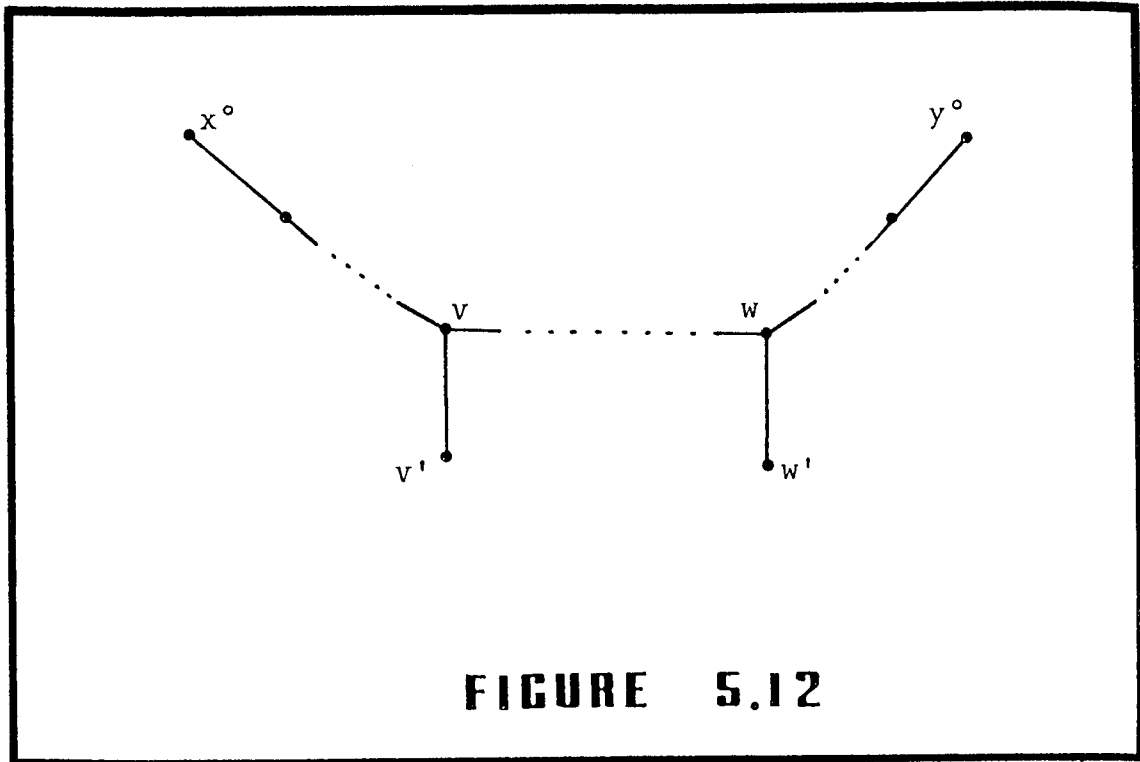


FIGURE 5.12

Il existe donc un sommet v'' (v'' pourrait se confondre avec v') appartenant à $\bar{X} - Y^\circ$ tel que v' se trouve sur le chemin qui relie v et v'' . D'une façon analogue, il existe un sommet w'' (w'' pourrait se confondre avec w') appartenant à $\bar{X} - Y^\circ$ tel que w' se trouve sur le chemin qui relie w et w'' . Alors v se trouve sur le chemin unique qui relie v'' et w'' ; de la remarque (d) on tire $v \in X_{\bar{X}-Y^\circ}$, ce qui entraîne $X_{Y^\circ} \cap X_{\bar{X}-Y^\circ} \neq \emptyset$, d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

Proposition 5.12. - Dans tout arbre $G=(X,U)$, avec $|\bar{X}| \geq 4$, il existe $Y^*=\{x^*,y^*\} \subset \bar{X}$ tel que $X_{Y^*} \cap X_{\bar{X}-Y^*} \neq \emptyset$.

Démonstration.- En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe un arbre $G=(X,U)$, avec $|\bar{X}| \geq 4$, tel que pour tout sous-ensemble $Y=\{x,y\} \subset \bar{X}$, on ait $X_Y \cap X_{\bar{X}-Y} = \emptyset$.

Considérons un sous-ensemble $Y^\circ=\{x^\circ,y^\circ\} \subset \bar{X}$.

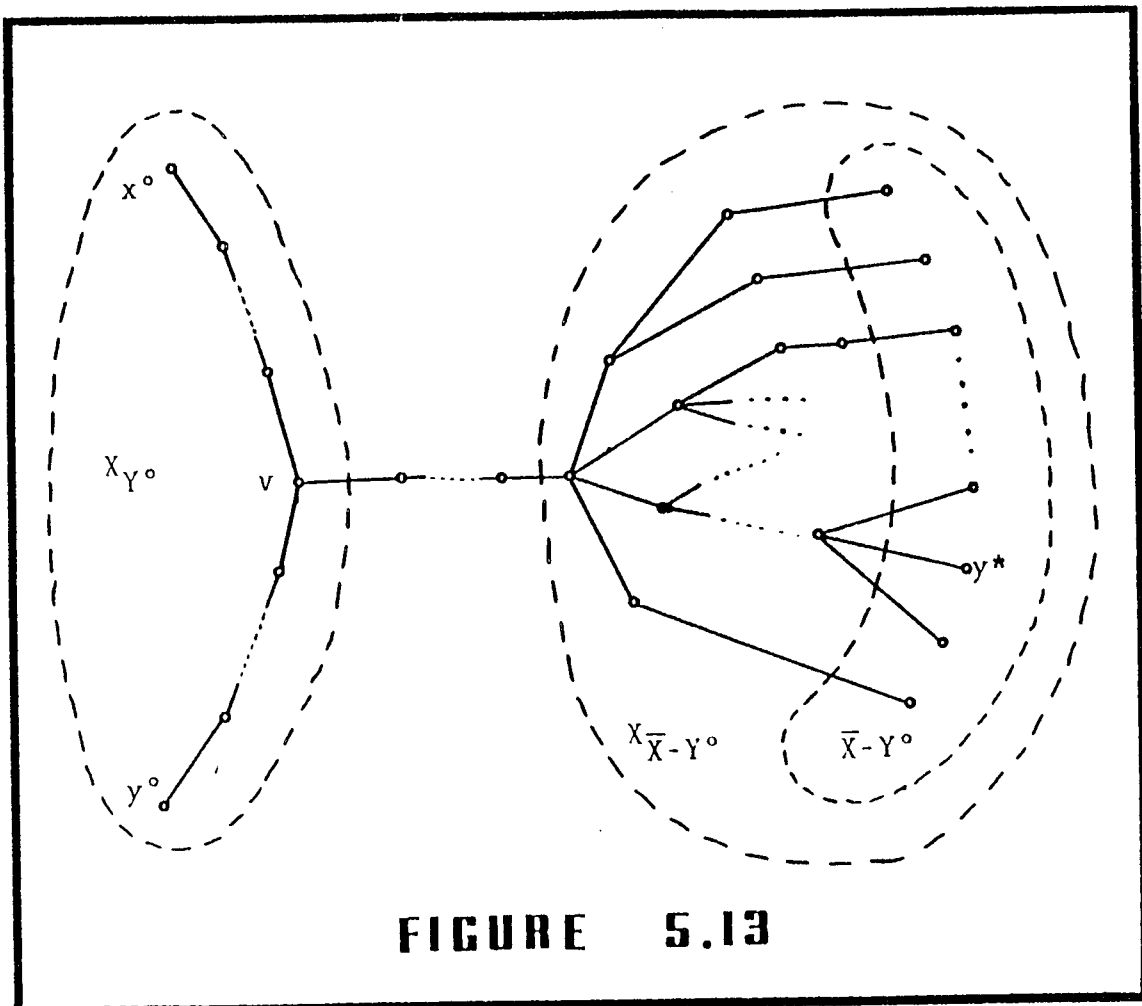


FIGURE 5.13

De la proposition 5.12 et de la remarque (c) X_{Y^0} forme une chaîne (voir fig. 5.13) d'au moins 3 sommets dont un, le sommet v , a exactement 3 voisins dans G .

Comme $|\bar{X}| \geq 4$, alors $|\bar{X} - Y^0| \geq 2$. Soit $x^* = x^0$ et y^* un élément de $\bar{X} - Y^0$, $Y^* = \{x^*, y^*\}$. En conséquence, v appartient à X_{Y^*} et v appartient aussi à $X_{\bar{X}-Y^*}$, ce qui entraîne $X_{Y^*} \cap X_{\bar{X}-Y^*} \neq \emptyset$, d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

Soit un état de l'opinion $E \in \mathbb{R}$ et soit $G = (X, U)$ un arbre tel que $\mu(G, A, V) = E$. On pose $|X| \geq 2$.

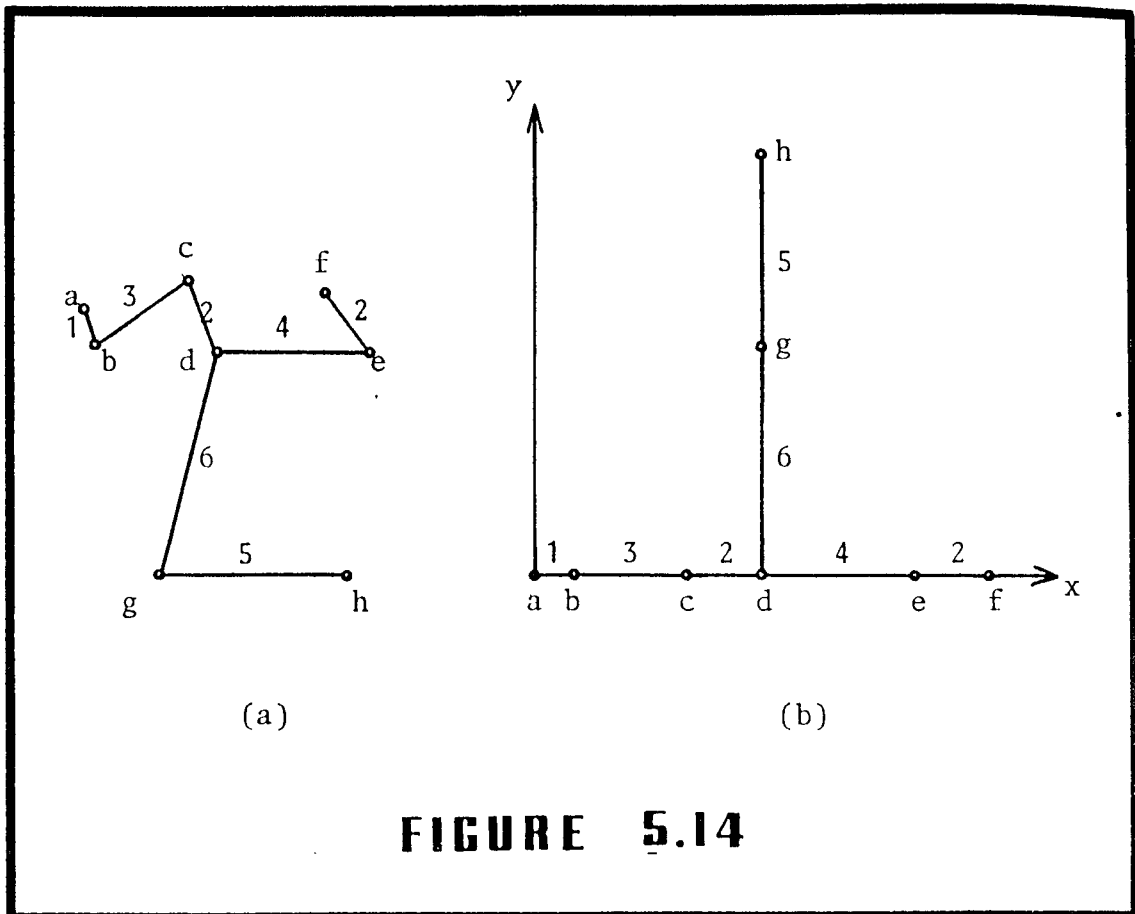


FIGURE 5.14

Lemme 5.2. - Si $E \in \mathbb{R}$ alors le problème (2') de Coombs peut être résolu avec $k = \lceil |\bar{X}|/2 \rceil$, où \bar{X} est l'ensemble des sommets pendants de G . Nous dirons alors que G peut être "plongé" dans \mathbb{R}^k .

Démonstration. - Par récurrence sur la cardinalité de \bar{X} .

Pour $|\bar{X}|=2$ alors $k = \lceil 2/2 \rceil = 1$. En effet, il suffit de dessiner l'arbre (qui en fait est une chaîne) sur une ligne droite que nous plaçons en \mathbb{R}^1 .

Pour $|\bar{X}|=3$ (voir fig. 5.14(a)) alors $k = \lceil 3/2 \rceil = \lceil 1,5 \rceil = 2$. En effet, il suffit de choisir deux des sommets pendants de G (par exemple les sommets a et f dans l'arbre de la fig. 5.14(a)), dont l'un (par exemple a) sera placé à l'origine 0 et l'autre sur l'axe x de \mathbb{R}^2 à une distance égale à la longueur du chemin unique qui les relie sur l'arbre (voir fig. 5.14(b)). Tous les

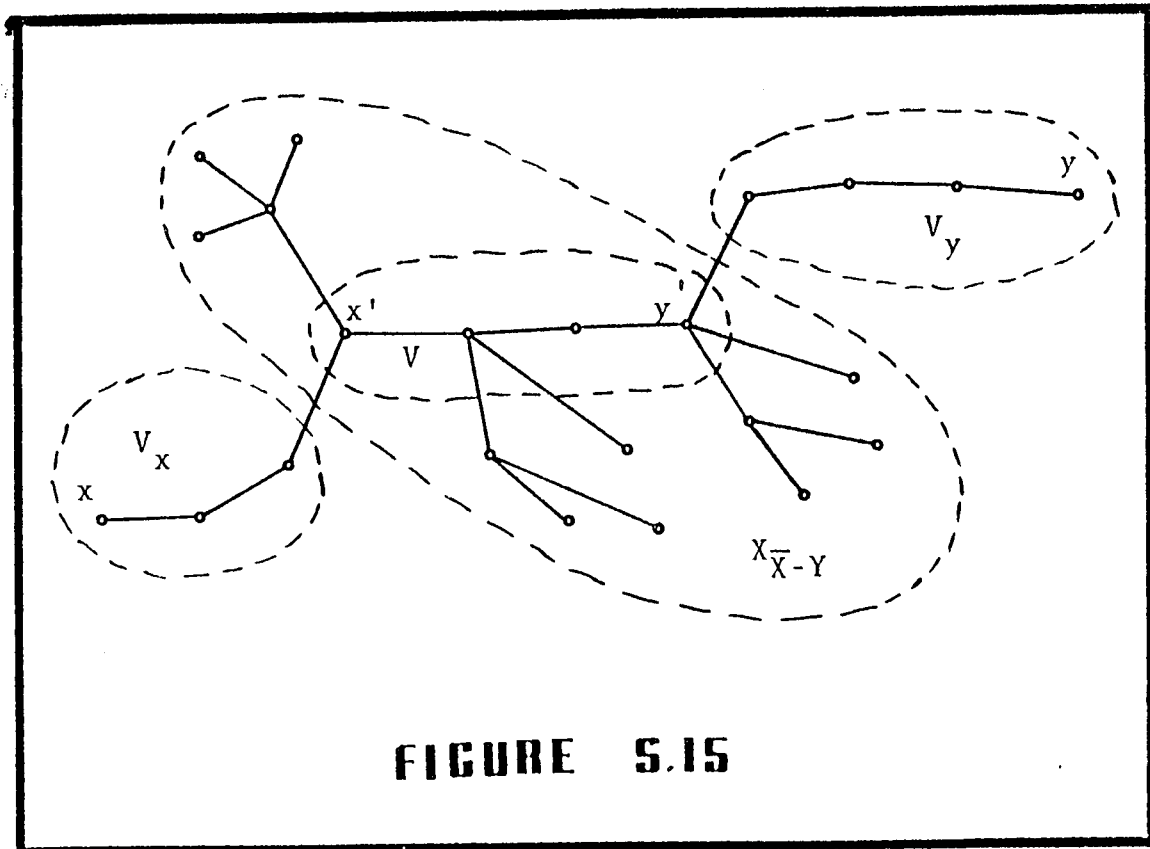


FIGURE 5.15

sommets de G se trouvant sur ce chemin seront également placés sur l'axe x . Finalement, nous plaçons les sommets restants (g et h) sur la verticale qui passe par le sommet d . Donc le lemme est vrai pour $|\bar{X}|=3$.

Supposons le lemme vrai pour $|\bar{X}|=q$ et démontrons qu'alors il est vrai pour $|\bar{X}|=q+2$. Soit donc un graphe à $|\bar{X}|=q+2 \geq 4$ sommets pendants. De la proposition 5.12 on peut affirmer qu'il existe $Y=\{x,y\} \subset \bar{X}$ tel que $X_Y \cap X_{\bar{X}-Y} = V \neq \emptyset$ (voir fig. 5.15).

Notons $V_x = X_{V \cup \{x\}} - V$, $V_y = X_{V \cup \{y\}} - V$, et soient $x' \in V$ tel que, des éléments de V , x' est le plus proche de x ; $y' \in V$ tel que, des éléments de V , y' est le plus proche de y . Remarque: x' et y' pourraient se confondre.

Le sous-arbre $G' = (X_{\bar{X}-Y}, U_{\bar{X}-Y})$ possède $|\bar{X}|-2=q$ sommets pendants et par hypothèse il peut être plongé dans $\mathbb{R}^{\lfloor q/2 \rfloor}$.

Pour tout $z \in X_{\bar{X}-Y}$ nous noterons $(z_1, z_2, \dots, z_{\lceil q/2 \rceil})$ ses coordonnées dans $\mathbb{R}^{\lceil q/2 \rceil}$. En particulier $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{\lceil q/2 \rceil})$ et $(y'_1, y'_2, \dots, y'_{\lceil q/2 \rceil})$ sont les coordonnées, respectivement, des sommets x' et y' .

Nous plongeons G dans $\mathbb{R}^{\lceil q/2 \rceil + 1}$ de la façon suivante:

- Pour tout $z \in X_{\bar{X}-Y}$ les coordonnées seront $(z_1, z_2, \dots, z_{\lceil q/2 \rceil}, 0)$.

- pour tout $z \in V_x$ les coordonnées seront $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{\lceil q/2 \rceil}, -d(x', z))$, où $d(x', z)$ est la distance, sur l'arbre, entre les sommets x' et z .

- Pour tout $z \in V_y$ les coordonnées seront $(y'_1, y'_2, \dots, y'_{\lceil q/2 \rceil}, d(y', z))$, où $d(y', z)$ est la distance, sur l'arbre, entre les sommets y' et z .

Il est facile de vérifier que, pour tout couple de sommets de G , la distance rectangulaire dans $\mathbb{R}^{\lceil q/2 \rceil + 1} = \mathbb{R}^{\lceil (q+2)/2 \rceil}$ est la même que la distance sur l'arbre, et en conséquence le lemme est vrai pour $|X'| = q+2$.

C. Q. F. D.

Soit $E \in \mathbf{R}$ et soit \mathcal{A}_E l'ensemble d'arbres $G=(X,U)$ tel que $\mu(G,A,V)=E$. Un arbre $G^*=(X^*,U^*)$ sera appelé "réduit" si $|X^*| \leq |X|$ pour tout $G=(X,U)$ appartenant à \mathcal{A}_E .

Proposition 5.13. - Dans un arbre réduit tous les sommets pendants appartiennent à A .

Démonstration. - Par l'absurde. Supposons qu'il existe un arbre G° réduit tel qu'un de ses sommets pendants n'appartienne pas à A . Soit x ce sommet pendant. Si $x \notin V$ alors il est évident que lorsqu'on enlève x à G° le sous-arbre restant appartient à \mathcal{A}_E et en conséquence G° n'est pas réduit. Si d'autre part $x \in V$, lorsque nous enlevons x à G° (ainsi qu'à V)

et puis nous ajoutons le sommet y (y est le sommet adjacent à x dans G°) à V , le nouvel arbre appartient aussi à \mathcal{A}_E tout en ayant un sommet en moins; en conséquence G° n'est pas réduit. D'où la contradiction.

C. Q. F. D.

Conjecture 5.1.:- Si $E \in \mathbf{R}$, alors tous les arbres réduits appartenant à \mathcal{A}_E possèdent le même nombre χ_E de sommets pendants.

Conjecture 5.2.:- Si un état de l'opinion E obéit à la condition de ramification, alors dans le problème (3') de Coombs $k_0 = \lceil \chi_E / 2 \rceil$.

Nous venons de voir pourquoi l'étude de la condition de ramification pourrait être utile en psychologie, mais pour cela il faudrait, tout d'abord, disposer d'une procédure efficace pour tester sa présence. Nous n'avons pas réussi à trouver une telle procédure, mais nous ne pensons pas pour autant qu'il s'agisse là d'une tâche très difficile.

Nous finissons ce chapitre en ouvrant une question: existe-t-il un lien entre les états de l'opinion obéissant à la condition de ramification et certains problèmes d'optimisation combinatoire?

C H A P I T R E 6 .
L A C O N S I S T A N C E
M U L T I D I M E N S I O N N E L L E
E T L ' E T O I L E M E N T .

	page
6.1.- INTRODUCTION.	116
6.2.- LE PERMUTOEDRE	116
6.3.- LA CONDITION DE CONSISTANCE MULTIDIMENSIONNELLE	120
6.4.- LA CONDITION D'ETOILEMENT	128

"Les gens ont des étoiles qui ne sont pas les mêmes. Pour les uns, qui voyagent, les étoiles sont des guides. Pour d'autres elles ne sont rien que de petites lumières. Pour d'autres qui sont des savants elles sont des problèmes..."

A. de Saint-Exupéry, dans "Le petit prince!"

6.1.- INTRODUCTION.- Les conditions de consistance multidimensionnelle ([Blin 1973]) et d'étoilement ([Terrier 1976]) sont nées du concept de "permutoèdre", lequel s'est avéré guider fructueusement l'intuition en offrant une représentation visuelle.

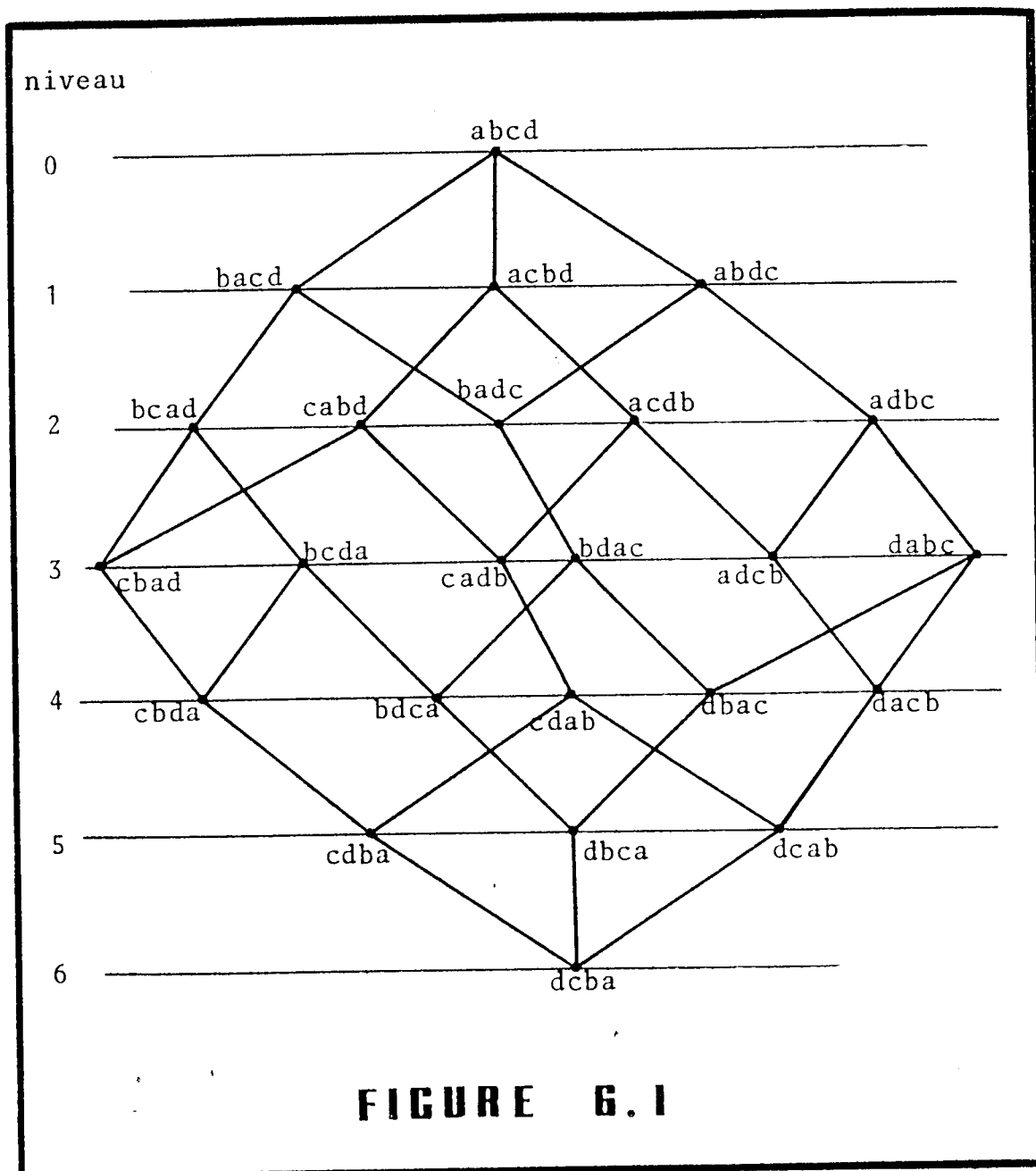
Le permutoèdre est un graphe amplement étudié dans la littérature. On peut en trouver de bonnes présentations dans [Barbut et Frey 1971], [Guilbaud et Rosenstiehl 1963], et [Jacquet-Lagrèze 1973].

Après avoir rappelé quelques propriétés et définitions relatives au permutoèdre (§6.2), nous présentons (§6.3) la condition de consistance multidimensionnelle, ainsi qu'une procédure performante permettant de décider si un état de l'opinion quelconque obéit ou non à cette condition. Le paragraphe 6.4 est dédié à la condition d'étoilement dont nous explicitons quelques propriétés et proposons une procédure de test.

Par souci de clarté nous ne considérons dans ce chapitre que des états de l'opinion dont tous les ordres sont différents. Si l'on veut, les résultats ici énoncés peuvent sans difficulté être étendus au cas général.

6.2.- LE PERMUTOEDRE.-

Définition 6.1.- Soit A un ensemble de n objets. On appelle permutoèdre le graphe $P(X,U)$, où X est l'ensemble des sommets



du graphe qui correspond bijectivement à l'ensemble des ordres totaux sur A (on a $|X|=n!$), et $u \in U$, $u=(x,y)$, $x \in X$, $y \in X$, si et seulement si les ordres (sommets) x et y sont égaux à une transposition de deux objets voisins près.

Le permutoèdre sur n objets sera aussi noté P_n .

Exemple 6.1.:- Le permutoèdre associé à $A=\{a,b,c,d\}$ se trouve représenté à la fig. 6.1.

Un état de l'opinion sur A dans lequel tous les ordres sont différents, correspond donc à un sous-ensemble de X.

Exemple 6.2.:- Peuvent être considérés comme états de l'opinion dans le permutoèdre de la fig. 6.1 les ensembles: \emptyset , $\{(b,a,c,d)\}$, $\{(b,c,d,a), (a,b,c,d), (b,a,c,d)\}$, X.

Définition 6.2.:- La distance ([Barbut et Frey 1971]) $d(x,y)$ entre les sommets $x \in X$ et $y \in X$ est le nombre minimum d'arêtes d'une chaîne du permutoèdre d'extrémités x et y.

Définition 6.3.:- Toute chaîne d'extrémités x et y ($x \neq y$) et dont la longueur est égale à $d(x,y)$ est dite chaîne tendue de x à y. On la note $f(x,y)$.

Exemple 6.3.:- Dans la fig. 6.1 les chaînes $((a,b,c,d), (b,a,c,d), (b,c,a,d), (c,b,a,d))$ et $((a,b,c,d), (a,c,b,d), (c,a,b,d), (c,b,a,d))$ sont des chaînes tendues, tandis que les chaînes $((a,b,c,d), (a,b,d,c), (b,a,d,c), (b,a,c,d))$ et $((b,c,a,d), (b,c,d,a), (b,d,c,a), (b,d,a,c), (b,a,d,c))$ ne le sont pas.

Définition 6.4.:- Soit $E \subset X$, $|E| \geq 2$. Le sommet $x \in E$ est dit périphérique dans E s'il existe un sommet ξ dans E tel que $d(x,\xi) \geq d(y,z)$ pour tout $y \in E$, $z \in E$.

Définition 6.5.:- Soit $M_{f(x,y)}$ l'ensemble des sommets se trouvant sur une chaîne tendue $f(x,y)$. $M_{f(x,y)}$ est appelé le chaînoïde de $f(x,y)$ et possède les trois propriétés suivantes:

Propriété 1.- Il contient exactement deux sommets périphériques (x et y).

Propriété 2.- On peut ordonner l'ensemble $M_{f(x,y)}$ par la relation d'ordre stricte définie par $x_i < x_j \Leftrightarrow d(x_1, x_i) < d(x_1, x_j)$ ($i < j$), avec $x_1 = x$ et $x_{|M_{f(x,y)}|} = y$.

Propriété 3.- Si $|M_{f(x,y)}| \geq 3$, alors pour tout trio $(x_i, x_j, x_k) \subset M_{f(x,y)}$, avec $i < j < k$: $d(x_i, x_k) = d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k)$.

La propriété 3 ci-dessus découle de l'application du principe d'optimalité de Bellman à la chaîne $f(x,y)$.

Remarque.- Tout sous-ensemble de $M_{f(x,y)}$ possède les 3 propriétés énoncées.

Proposition 6.1.- Soient $x=(a_1, \dots, a_n)$ et $y=(b_1, \dots, b_n)$ deux ordres sur n objets. Si $y \neq x$ alors il existe sur y un couple d'objets voisins b_i, b_{i+1} ($b_i = a_j, b_{i+1} = a_k$) tel que $k < j$.

Démonstration (par l'absurde).- Supposons $y \neq x$ et pour tout couple d'objets voisins dans y : b_i, b_{i+1} ($b_i = a_j, b_{i+1} = a_k$) on ait $j < k$. Si nous essayons de construire l'ordre x en respectant cette condition on arrive, par transitivité, à $x=y$, d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

Définition 6.6.- Soit $x \in X$. Le sommet $x^* \in X$ est dit opposé à x si $d(x, x^*) \geq d(x, y)$ pour tout $y \in X$.

Remarque.- On peut voir facilement que pour tout $x \in X$ x^* est unique et $d(x, x^*) = C_n^2 = n \cdot (n-1) / 2$.

Exemple 6.4.- Le sommet (d, c, b, a) est opposé au sommet (a, b, c, d) dans le permutoèdre de la fig. 6.1.

Soit $x \in X$. Associons à x la partition de X : $\{\mathcal{Y}(0), \mathcal{Y}(1), \dots, \mathcal{Y}(C_n^2)\}$, où $\mathcal{Y}(i)$ est l'ensemble des sommets ξ tels que $d(x, \xi) = i$. $\mathcal{Y}(0) = \{x\}$, $\mathcal{Y}(C_n^2) = \{x^*\}$.

Proposition 6.2.- Soit x et sa partition associée: $\{\mathcal{Y}(0), \mathcal{Y}(1), \dots, \mathcal{Y}(n \cdot (n-1) / 2)\}$. Pour tout $y \in \mathcal{Y}(i)$, si $i \neq 0$ et $i \neq n \cdot (n-1) / 2$, alors il existe toujours $y' \in X$ tel que $(d(y, y') = 1)$ et ($y' \in \mathcal{Y}(i-1)$ ou $y' \in \mathcal{Y}(i+1)$).

Démonstration.- Comme $y \neq x$, alors de la proposition 6.1 il existe un couple d'objets voisins sur y qui, selon x et y , sont dans des ordres différents. Si ce couple est inversé sur y , on obtient un ordre y' pour lequel $d(y, y')=1$ et $d(x, y')=d(x, y) - d(y, y') = d(x, y) - 1$. En conséquence $y' \in \mathcal{Y}(i-1)$.

Comme $y \neq x^*$ alors de la proposition 6.1 il existe un couple d'objets voisins sur y qui, selon x^* et y , sont dans des ordres différents, ou mieux, qui selon x et y ont le même ordre. Si ce couple est inversé sur y , on obtient un ordre y' pour lequel $d(y, y')=1$ et $d(x, y')=d(x, y)+d(y, y')=d(x, y)+1$. En conséquence $y' \in \mathcal{Y}(i+1)$.

C. Q. F. D.

Proposition 6.3.- Pour tout $x, y \in X$, il existe une chaîne tendue $f(x, x^*)$ tel que $y \in M_{f(x, x^*)}$.

Démonstration.- Soit i tel que $y \in \mathcal{Y}(i)$. Par la proposition 6.2 nous pouvons toujours construire une chaîne R allant de y vers x^* de longueur $(n \cdot (n-1)/2) - i$; et aussi une chaîne S allant de y vers x de longueur i . Puisque la longueur de la chaîne Q obtenue par l'union des chaînes R et S est égale à $(n \cdot (n-1)/2) - i + i = n \cdot (n-1)/2$, il s'agit (voir définition 6.6 à la page 119) d'une chaîne tendue $f(x, x^*)$ passant, par construction, par y .

C. Q. F. D.

6.3.- LA CONDITION DE CONSISTANCE MULTIDIMENSIONNELLE.-

Définition 6.7. ([Blin 1973]).- Soit $E \subset X$ et soit $x \in X$. E est dit obéir à la condition de consistance multidimensionnelle s'il existe une chaîne tendue $f(x, x^*)$ tel que $E \subset M_{f(x, x^*)}$.

Nous désignerons par **C** l'ensemble de tous les états de l'opinion qui obéissent à la condition de consistance multidimensionnelle.

Proposition 6.4.:- Si $E \in \mathbb{C}$ alors $|E| \leq C_n^2 + 1$,

Démonstration. - Nous avons $d(x, x^*) = C_n^2$, donc $|M_{f(x, x^*)}| = C_n^2 + 1$ pour tout chaînoïde $M_{f(x, x^*)}$. Par hypothèse $E \in \mathbb{C}$, ce qui entraîne, de la définition 6.7: $|E| \leq |M_{f(x, x^*)}| = C_n^2 + 1$.
C. Q. F. D.

La ressemblance entre les propositions 6.4 et 5.3 (page 96) est frappante. Ainsi, nous proposons la conjecture suivante.

Conjecture 6.1.:- Un état de l'opinion E obéit à la condition de Coombs si et seulement si E obéit aux conditions d'unimodalité et de consistance multidimensionnelle simultanément.

Proposition 6.5.:- Soient $x \in X$ et $y \in X$, $x \neq y$. Si l'objet a est préféré à l'objet b dans x et aussi dans y , alors pour toute chaîne tendue $f(x, y)$ et tout z appartenant au chaînoïde correspondant $M_{f(x, y)}$, a est préféré à b dans z .

Démonstration. - Soit $a > b$ dans x et dans y , et supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe un $z \in M_{f(x, y)}$ tel que $a < b$ dans z .

Soit $f(x, y)$ une chaîne tendue passant par z , et soit la chaîne tendue $f(x, z)$ contenue dans $f(x, y)$. Il existe alors un couple de sommets voisins $\{x', x''\} \subset M_{f(x, z)}$ tels que deux objets a et b soient voisins sur x' et x'' , et tels que $a > b$ dans x' et $b > a$ dans x'' .

Des deux sommets x' et x'' , le dernier est le plus éloigné de x , d'où: $d(x, x'') = d(x, x') + 1$. Des deux sommets x' et x'' , le dernier est le plus éloigné de y , d'où: $d(y, x'') = d(y, x') + 1$. En faisant l'addition de ces deux équations: $d(x, x'') + d(y, x'') = d(x, x') + d(y, x') + 2$.

D'autre part, $x'' \in M_{f(x, y)}$ implique: $d(x, x'') + d(y, x'') =$

$d(x,y)$, et $x' \in M_{f(x,y)}$ implique: $d(x,x')+d(y,x')=d(x,y)$.

En conséquence: $d(x,y)=d(x,y)+2$, d'où la contradiction qui nous fait rejeter l'existence de z où b serait préféré à a .
C. Q. F. D.

Soit $E \in \mathbf{L}$. Il existe donc deux sommets opposés x et x^* tels que tous les ordres de E appartiennent à $M_{f(x,x^*)}$.

Définition 6.8.:- Nous appellerons ordre médian dans E , o_{med} , l'ordre de E tel que, si $E^x = \{e \in E \mid d(x,e) \leq d(x,o_{med})\}$,
 $E^{x^*} = \{e \in E \mid d(x^*,e) \leq d(x^*,o_{med})\}$, alors $|E^x| = |E^{x^*}|$ (il y a autant d'éléments de E "d'un côté de o_{med} " que de l'autre).

Proposition 6.6.:- [Blin 1973] Soit E un état de l'opinion appartenant à \mathbf{L} . Soit ψ la règle majoritaire. Si $|E|$ est impair alors l'image par ψ de E est l'ordre médian o_{med} .

Démonstration.- [Terrier 1976] Choisissons deux objets a et b tels que a soit placé avant b dans o_{med} . Nous savons que soit dans x , soit dans x^* a est préféré à b . Admettons que ce soit dans x . Nous pouvons alors affirmer (proposition 6.5) que, pour tout y de E tel que $d(x,y) \leq d(x,o_{med})$, a sera préféré à b dans y . Si nous notons E^{ab} l'ensemble des ordres y de E tels que a soit préféré à b dans y , nous pouvons écrire $|E^{ab}| \geq |E^x| + 1 = ((|E|-1)/2) + 1 = (|E|+1)/2$.

La règle majoritaire donne donc la préférence de la collectivité à a sur b . L'argument étant valable quelque soient les objets a et b , tels que a est préféré à b dans o_{med} , on peut conclure que $\psi(E) = o_{med}$.

C. Q. F. D.

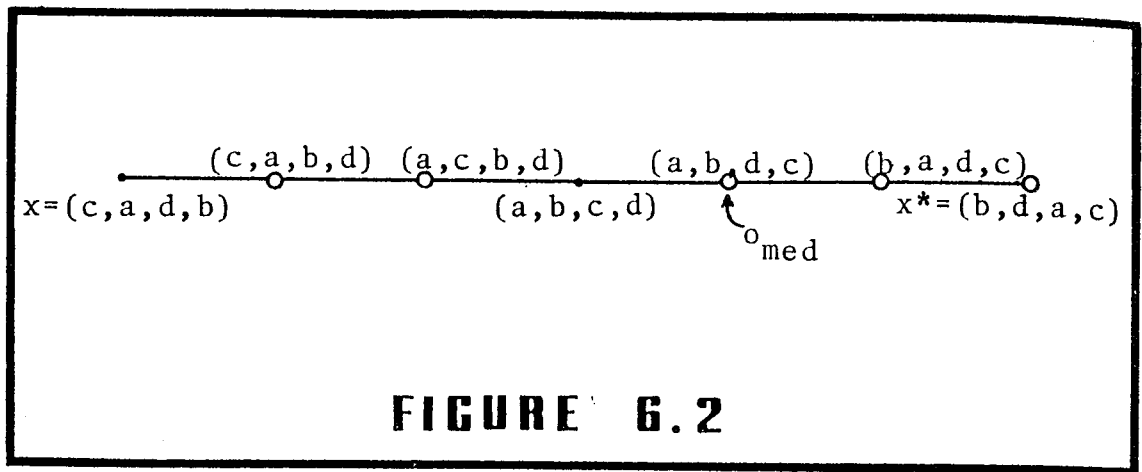


FIGURE 6.2

Exemple 6.5. :- $E = \{(c, a, b, d), (a, c, b, d), (a, b, d, c), (b, a, d, c), (b, d, a, c)\}$. $\psi(E) = o_{med} = (a, b, d, c)$. Voir fig. 6.2.

Proposition 6.7. :- Soit $E \subset X$. Si $|E| = 1$ ou 2, alors $E \in \mathcal{C}$.

Démonstration.- Elle est triviale.

C. Q. F. D.

Lemme 6.1. :- Soit $E \subset X$, $|E| = m \geq 3$. $E \in \mathcal{C}$ si et seulement si, dans E , les trois conditions suivantes sont vérifiées simultanément:

- a) Il existe uniquement deux sommets $x_1 \in E$ et $x_m \in E$ périphériques dans E .
- b) La relation $<$ définie par $x_i < x_j$ si et seulement si $d(x_1, x_i) < d(x_1, x_j)$, est un ordre total strict $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ sur E .
- c) Pour tout trio $\{x_i, x_j, x_k\} \subset E$ avec $i < j < k$, on a $d(x_i, x_k) = d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k)$.

Démonstration.-

1) La condition est nécessaire. Si $E \in \mathcal{C}$ alors il existe une chaîne $f(x, x^*)$ telle que $E \subset M_{f(x, x^*)}$. Comme E possède les trois propriétés du chaînoïde $M_{f(x, x^*)}$, alors E satisfait aux trois conditions du lemme.

II) La condition est suffisante. Si E satisfait les conditions (a) et (b) du lemme, on peut former l'ordre $x_1 < \dots < x_m$, $x_i \in E$ ($i=1, \dots, m$). Si de plus, la condition (c) est satisfaite, on vérifie que $d(x_1, x_m) = \sum_{i=1}^{m-1} d(x_i, x_{i+1})$; en conséquence, il existe une chaîne tendue $f^\circ(x_1, x_m)$ telle que $E \subset M_{f^\circ(x_1, x_m)}$.

Soit maintenant $R(x_1, x_1^*)$ l'ensemble des chaînes tendues reliant x_1 et x_1^* et passant par x_m (cet ensemble n'est pas vide de par la proposition 6.3, page 120). On voit aisément que toute chaîne tendue entre x et y peut être prolongée en une chaîne tendue entre x et x^* . Il existe donc une chaîne tendue $f(x_1, x_1^*) \in R(x_1, x_1^*)$ telle que $M_{f^\circ(x_1, x_m)} \subset M_{f(x_1, x_1^*)}$.

Nous pouvons donc conclure $E \subset M_{f(x_1, x_1^*)}$.
C. Q. F. D.

Corollaire 6.1 :- $\{x, y, z\} \in \mathbf{C}$ et $y = o_{\text{med}}$ si et seulement si $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$.

Le lemme 6.1 fournit un moyen de déterminer si un état de l'opinion quelconque sur n objets obéit à la condition de consistance multidimensionnelle. En effet, il suffit de calculer au préalable les distances entre tout couple de sommets de E, puis de vérifier les trois conditions du lemme. Cependant, puisque le nombre de distances à calculer est égal à $m \cdot (m-1)/2$, la procédure indiquée pourrait s'avérer longue lorsque m est grand. Le théorème suivant suggère une procédure beaucoup plus rapide.

Théorème 6.1 :- Soit $E = \{x_1, \dots, x_m\}$ ($m \geq 2$) un état de l'opinion obéissant à la condition de consistance multidimensionnelle. L'état de l'opinion $E \cup \{z\}$ ($z \in X - E$) obéit à la condition de consistance multidimensionnelle si et seulement si une des trois conditions suivantes est vérifiée:

$$\alpha) d(x_1, x_m) + d(x_m, z) = d(x_1, z).$$

$$\beta) d(x_1, x_m) + d(x_1, z) = d(x_m, z).$$

$\gamma) d(x_1, z) + d(z, x_m) = d(x_1, x_m)$ et il existe un indice i ($1 \leq i < m$) tel que:

$$d(x_1, x_i) < d(x_1, z) < d(x_1, x_{i+1})$$

et $d(x_i, x_{i+1}) = d(x_i, z) + d(z, x_{i+1}).$

Démonstration.-

I) La condition est suffisante. Nous démontrons que si l'état de l'opinion $E \cup \{z\}$ satisfait l'une des 3 conditions du théorème, alors les trois conditions du lemme 6.1 sont vérifiées et en conséquence $E \cup \{z\} \in \mathbf{C}$.

Ia) Si $E \cup \{z\}$ satisfait la condition (∞), $d(x_1, x_m) + d(x_m, z) = d(x_1, z)$ entraîne:

- Les sommets x_1 et z sont périphériques dans $E \cup \{z\}$,

- On peut former l'ordre $x_1 < x_2 < \dots < x_m < z$, car $E \in \mathbf{C}$ et $d(x_1, z) > d(x_1, x_m)$.

- De $d(x_1, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, z) = d(x_1, z)$ on déduit $d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, z) = d(x_1, z) - d(x_1, x_{m-1}) \dots \dots \dots (1)$

Mais de l'inégalité triangulaire on tire:

$$d(x_{m-1}, z) \leq d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, z) \dots \dots \dots (2)$$

et $d(x_1, z) \leq d(x_1, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, z) \dots \dots \dots (3)$

De (1) et (2) on tire: $d(x_{m-1}, z) \leq d(x_1, z) - d(x_1, x_{m-1}) \dots \dots (4)$

De (3): $d(x_1, z) - d(x_1, x_{m-1}) \leq d(x_{m-1}, z) \dots \dots \dots (5)$

De (4) et (5): $d(x_{m-1}, z) = d(x_1, z) - d(x_1, x_{m-1}) \dots \dots \dots (6)$

De (6) et (1): $d(x_{m-1}, z) = d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, z)$ et on peut conclure $E \cup \{z\} \in \mathbf{C}$.

Ib) Si $E \cup \{z\}$ satisfait la condition (β) la démonstration est semblable à (Ia).

Ic) Si $E \cup \{z\}$ satisfait la condition (γ), $d(x_1, z) + d(z, x_m) = d(x_1, x_m)$ entraîne:

- Les sommets x_1 et x_m sont périphériques dans $E \cup \{z\}$.

- On peut former l'ordre $x_1 < x_2 < \dots < x_i < z < x_{i+1} < \dots < x_m$, car $d(x_1, z) < d(x_1, x_m)$ et en plus il existe i tel que $d(x_1, x_i) < d(x_1, z) < d(x_1, x_{i+1})$.

- Enfin $d(x_i, z) + d(z, x_{i+1}) = d(x_i, x_{i+1})$ implique la condition (c) du lemme 6.1 et on conclut $E \cup \{z\} \in \mathbf{C}$.

II) La condition est nécessaire. Soit $E \cup \{z\} \in \mathbf{C}$. Deux cas sont à traiter:

IIa) Si z est périphérique dans $E \cup \{z\}$ il est évident qu'une des deux conditions (a) ou (b) du lemme 6.1 sera satisfaite.

IIb) Sinon la condition (c) du lemme 6.1 entraîne la condition (γ) du théorème.

Les sommets de X qui appartiennent à $E \cup \{z\}$ sont en effet le long d'une chaîne tendue et les sommets périphériques de $E \cup \{z\}$ sont nécessairement le premier et le dernier sommet dans l'ordre qu'il est possible de construire selon la méthode habituelle.

C. Q. F. D.

Du théorème 6.1 on déduit immédiatement une procédure pour vérifier si un état de l'opinion quelconque E obéit à la

condition de consistance multidimensionnelle:

0) Si $|E| \leq 2$ fin: $E \in \mathbf{C}$.

Sinon on choisit deux sommets quelconques $x_1, x_m \in E$.
 $V = \{x_1, x_m\}$, $m = |E| - 2$.

1) Si pour un sommet $z \in E - V$:

- la condition (α) du théorème 6.1 est vérifiée, alors $x_m = z$, aller en (2);
- la condition (β) du théorème 6.1 est vérifiée, alors $x_1 = z$, aller en (2);
- la condition (δ) du théorème 6.1 est vérifiée, alors aller en (2).

Sinon fin: $E \notin \mathbf{C}$.

2) $m = m - 1$;

si $m = 0$ alors fin: $E \in \mathbf{C}$,

sinon $V = V \cup \{z\}$, aller en (1).

On voit facilement que le nombre de distances qu'il faut calculer pour finir la procédure est borné supérieurement par $4m$.

En revenant à la condition de Coombs, si la conjecture 6.1 (page 121) s'avérait vraie, pour vérifier si un état de l'opinion quelconque obéit à cette condition il suffirait d'utiliser, l'une après l'autre, les procédures de test de l'unimodalité (paragraphe 2.6) et de consistance multidimensionnelle (ci-dessus).

6.4.- LA CONDITION D'ETOILEMENT.- En s'appuyant sur la notion de consistance multidimensionnelle, E. Terrier a proposé la condition d'étoilement qui est, des CTMM présentées dans ce travail, la plus large dans un certain sens.

Définition 6.9 [Terrier 1976].- Un état de l'opinion E est dit obéir à la condition d'étoilement, s'il existe $x^{\circ} \in E$, tel que $E - \{x^{\circ}\}$ puisse être partitionné en p sous-ensembles E_1, E_2, \dots, E_p tels que pour tout i ($i=1, \dots, p$):

$$1) E_i \cup \{x^{\circ}\} \in \mathbf{C}.$$

$$2) x^{\circ} \text{ est médian dans } E_i \cup \{x^{\circ}\}.$$

Lorsque E obéit à la condition d'étoilement on dit que E est une étoile et x° est appelé "centre de l'étoile".

Notons \mathbf{E} l'ensemble de tous les états de l'opinion obéissant à la condition d'étoilement.

Proposition 6.8 ([Terrier 1976]).- Soit ψ la règle majoritaire. Si un état de l'opinion E appartient à \mathbf{E} , alors l'image par ψ de E est le centre de l'étoile x° .

Démonstration.- Soient $|E|=m$ et $|E_i|=m_i$ pour $i=1, \dots, p$. $m = \sum_{i=1}^p m_i + 1$. Soient a et b deux objets tels que a soit préféré à b dans x° . Pour tout i, $E_i \cup \{x^{\circ}\}$ obéit à la condition de consistance multidimensionnelle. La proposition 6.6 (page 122) nous permet d'affirmer que, dans $E_i \cup \{x^{\circ}\}$ ($i=1, \dots, p$), il existe au moins $(m_i/2)+1$ ordres dans lesquels a est préféré à b. Le nombre total d'ordres dans lesquels a est préféré à b est donc au moins égal à

$$1 + \sum_{i=1}^p (m_i/2) = 1 + (m-1)/2 = (m+1)/2.$$

La règle majoritaire donne donc la préférence de la collectivité à a sur b. L'argument étant valable quelque soient

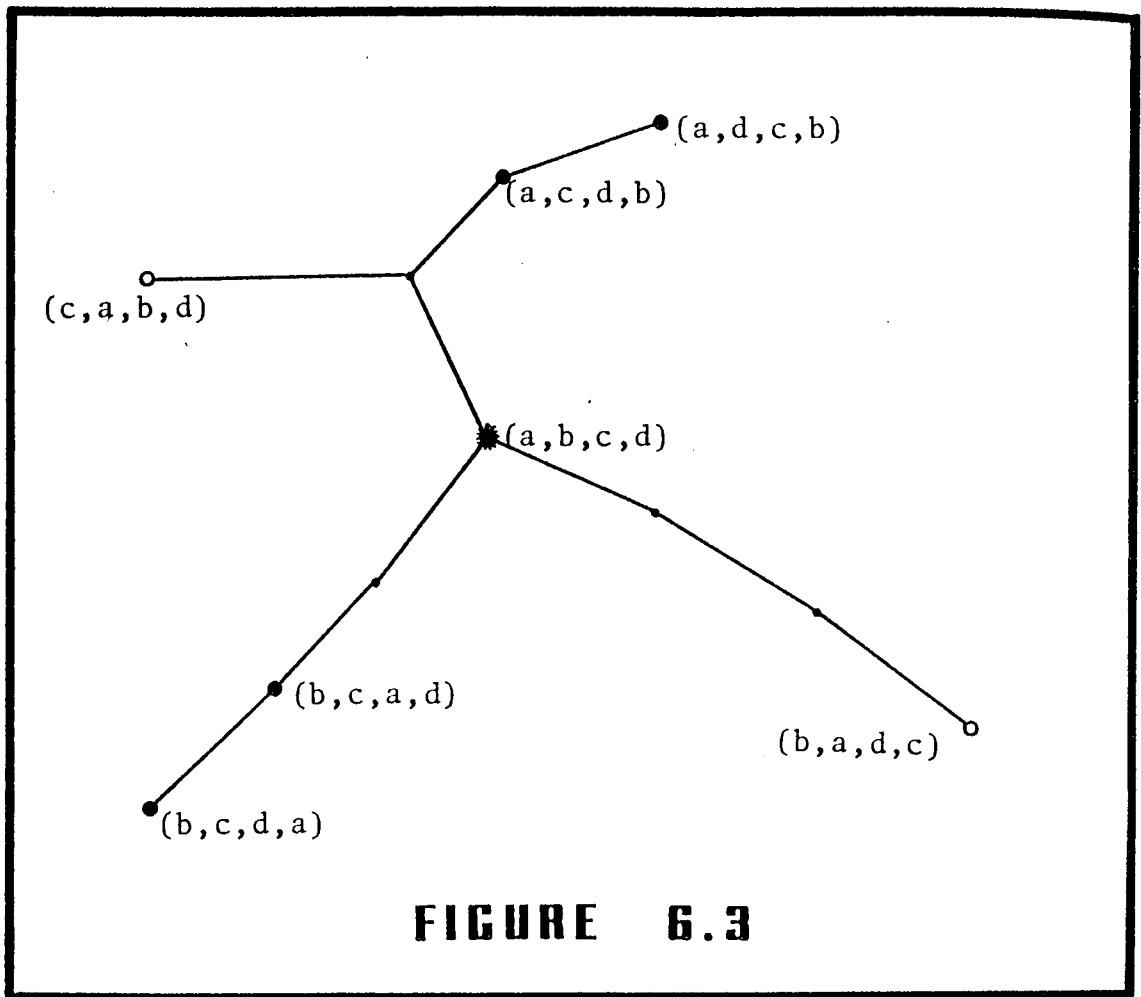


FIGURE 6.3

les objets a et b , tels que a soit préféré à b dans x° , on peut conclure $\psi(E) = x^\circ$.

C. Q. F. D.

Exemple 6.6. :- L'état de l'opinion $E = \{(c, a, b, d), (b, a, d, c), (a, d, c, b), (a, c, d, b), (b, c, a, d), (b, c, d, a), (a, b, c, d)\}$ est une étoile dont le centre x° est (a, b, c, d) . En effet, on peut partitionner $E - \{x^\circ\}$ en (voir fig. 6.3) : $E_1 = \{(c, a, b, d), (b, a, d, c)\}$ et $E_2 = \{(a, d, c, b), (a, c, d, b), (b, c, a, d), (b, c, d, a)\}$, avec $E_1 \in \mathbf{C}$ et $E_2 \in \mathbf{C}$ et $\psi(E) = (a, b, c, d) = x^\circ$.

De la proposition 6.8 on déduit les corollaires suivants:

Corollaire 6.2. :- La condition d'étoilement est une CTMM.

Corollaire 6.3. :- Si $E \in \mathbf{C}$ et $|E|$ est impair, alors $E \in \mathbf{E}$.

Démonstration.- Puisque $|E|$ est impair, alors il existe un ordre médian o_{med} . En faisant $x^\circ = o_{med}$:

$$- (E - \{x^\circ\}) \cup \{x^\circ\} \equiv E \in \mathbf{E}.$$

$$- x^\circ \text{ est médian dans } (E - \{x^\circ\}) \cup \{x^\circ\}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire 6.4.:- Si $\psi(E) \notin E$, alors $E \notin \mathbf{E}$.

Proposition 6.9.:- $E \in \mathbf{E}$ si et seulement s'il existe x° appartenant à E , tel que $E' = E - \{x^\circ\}$ puisse être partitionné en $|E'|/2 = p$ sous-ensembles $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \dots, \underline{E}_p$, tels que pour tout $i = 1, \dots, p$:

$$1) \underline{E}_i \cup \{x^\circ\} \in \mathbf{E}.$$

$$2) x^\circ \text{ est médian dans } \underline{E}_i \cup \{x^\circ\}.$$

Démonstration.- La condition est évidemment nécessaire de la définition 6.9.

La condition est suffisante. Supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe un état de l'opinion $E \in \mathbf{E}$ tel que $E - \{x^\circ\}$ ne puisse pas être partitionné en $p = (|E| - 1)/2$ sous-ensembles $\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_p$, tels que pour tout $i, i = 1, \dots, p$:

$$1) \underline{E}_i \cup \{x^\circ\} \in \mathbf{E}.$$

$$2) x^\circ \text{ est médian dans } \underline{E}_i \cup \{x^\circ\}.$$

Il est évident que pour tout $i, i = 1, \dots, p: |\underline{E}_i| = 2$. $E \in \mathbf{E}$ implique, de la définition 6.9, que $E - \{x^\circ\}$ peut être partitionné en p sous-ensembles E_1, \dots, E_p , tels que pour tout $i, i = 1, \dots, p$:

$$1) E_i \cup \{x^\circ\} \in \mathbf{E}.$$

$$2) x^\circ \text{ est médian dans } E_i \cup \{x^\circ\}.$$

Comme $p \neq p$ par hypothèse et d'autre part $|E_i| \geq 2$, $i=1, \dots, p$, on tire $p < p$ et il existe donc un indice ξ ($1 \leq \xi \leq p$) tel que $|E_\xi| > 2$. Soient x_ξ et y_ξ les sommets périphériques dans E_ξ . Nous pouvons former une nouvelle partition de $E - \{x^\circ\}$ en $p' = p + 1$ sous-ensembles $E_1^*, \dots, E_{p'}^*$, en faisant

$$E_i^* = E_i \quad \text{pour } i \neq \xi, p',$$

$$E_\xi^* = E_\xi - \{x_\xi, y_\xi\},$$

$$E_{p'}^* = \{x_\xi, y_\xi\}.$$

Cette nouvelle partition satisfait clairement:

$$1) E_i^* \cup \{x^\circ\} \in \mathbf{C}.$$

$$2) x^\circ \text{ est médian dans } E_i^* \cup \{x^\circ\}.$$

La valeur de p' peut être: soit égale à p , soit inférieure à p . $p' = p$ étant en contradiction avec l'hypothèse, p' est strictement inférieur à p . Dans ce cas on peut réappliquer le raisonnement ci-dessus afin d'obtenir, successivement, des nouvelles partitions à p^2, p^3, \dots, p^k éléments, avec $p^{i+1} = p^i + 1$, $i=1, \dots, k-1$, jusqu'à ce que $p^k = p$, ce qui nous mène à une contradiction.

C. Q. F. D.

Des corollaires 6.1 et 6.4, et de la proposition 6.9, on déduit facilement une procédure pour vérifier si un état de l'opinion quelconque E obéit ou non à la condition d'étoilement:

$$1) \text{ Déterminer } x^\circ = \psi(E).$$

Si $x^\circ \notin E$, alors $E \notin \mathbf{E}$, fin;

sinon aller en (2).

2) Soit $E' = E - \{x^0\}$.

Soit λ la cardinalité d'un couplage maximal dans le graphe $H=(E',U)$, où $(x,y) \in U$ si et seulement si $d(x,x^0)+d(x^0,y)=d(x,y)$.

Aller en (3).

3) Si $\lambda=|E'|/2$, alors $E \in \mathbf{E}$, sinon $E \notin \mathbf{E}$, fin.

En effet, si $\lambda=|E'|/2$, alors un couplage maximal sature tous les sommets de H . Chaque arête d'un couplage maximal correspond donc à un élément d'une partition de E' et en conséquence E est une étoile.

Si d'autre part $\lambda < |E'|/2$, alors on déduit que E n'est pas une étoile.

[Christofides 1975] présente un algorithme efficace (polynomial) pour trouver un couplage maximal dans un graphe quelconque.

Au moyen de la proposition qui suit, E. Terrier a montré que, de toutes les CTMM étudiées dans ce travail et dans un certain sens, la condition d'étoilement est celle qui autorise la plus grande diversité des opinions.

Proposition 6.10. : [Terrier 1976]

1) Un état de l'opinion composé de $(n! - 1)$ sommets du permutoèdre est une étoile.

2) Il n'y a pas d'état de l'opinion contenant plus de $(n! - 1)$ ordres différents et dans lequel la méthode majoritaire donnerait naissance à un ordre collectif.

Démonstration.-

- On démontre d'abord (2). Tout état de l'opinion (contenant des ordres différents entre eux) de cardinal supérieur à $(n! - 1)$ est de cardinal $n!$. Cet état de l'opinion est donc représenté par tout le permutoèdre P_n .

A tout sommet $x=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de P_n correspond un sommet opposé $x^*=(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ unique. Donc pour toute paire d'objets $a_i, a_j, i \neq j$, il y a autant d'ordres dans lesquels a_i précède a_j que d'ordres où a_j précède a_i . La règle majoritaire ne peut donc pas trancher entre les décisions " a_i précède a_j dans l'ordre collectif" et " a_j précède a_i dans l'ordre collectif". D'où le résultat (2).

- On démontre maintenant (1). Soit x° un sommet quelconque de P_n . Soit E l'état de l'opinion formé par tous les sommets de P_n moins $x^{\circ*}$, sommet opposé à x° . $E=X-\{x^{\circ*}\}$ entraîne $|E|=n!-1$. Notons $E'=E-\{x^\circ\}$. $|E'|=n!-2$. A tout x de E , $x \neq x^\circ$, associons x^* , sommet opposé à x . Soit $E_x=\{x, x^*\}$. $|E_x|=2$.

Pour montrer que E est une étoile il nous suffit de montrer:

I) L'ensemble $\{E_x\}_{x \in E'}$ forme une partition de E' ,

et II) Pour tout $x \in E'$, x° est médian dans $E_x \cup \{x^\circ\}$.

I) En effet, si $x_1 \neq x_2$, alors $x_1^* \neq x_2^*$, donc $x_1 \neq x_2$ entraîne $E_{x_1} \cap E_{x_2} = \emptyset$.

D'autre part $|\{E_x\}_{x \in E'}| = (n!-2)/2$ donc

$$\left| \bigcup_{x \in E'} E_x \right| = \sum_{x \in E'} |E_x| = ((n!-2)/2) \cdot 2 = n!-2 = |E'|.$$

$\{E_x\}_{x \in E'}$ forme donc bien une partition de E' .

II) Tout d'abord la proposition 6.3 (page 120) nous permet d'affirmer que pour tout $x \neq x^\circ$, il existe une chaîne tendue $f(x, x^*)$ telle que $x^\circ \in M_{f(x, x^*)}$. Donc $E_x \cup \{x^\circ\} \in \mathcal{C}$. D'autre part, puisque $E' = X - \{x^\circ\} - \{x^{\circ*}\}$, pour tout $x \in E'$, x° ne peut jamais être confondu avec x^* , sommet opposé à x ; d'où l'on tire (voir définition 6.8 à la page 122): $E^x = \{x\}$ et $E^{x^*} = \{x^*\}$, ce qui entraîne $|E^x| = |E^{x^*}|$. x° est donc médian dans $E_x \cup \{x^\circ\}$.

C. Q. F. D.

C H A P I T R E 7 .
D E S C O N D I T I O N S M I R O I R
A C E L L E D E W A R D

	page
7.1.- INTRODUCTION	136
7.2.- LES CONDITIONS MIROIR	136
7.3.- LA CONDITION DE BIPARTITION	142
7.4.- LA CONDITION DE WARD	143

"Pourquoi un miroir provoque-t-il une
inversion de droite à gauche et non
pas de bas en haut?"

M. Gardner, dans "L'univers ambidextre".

7.1.- INTRODUCTION.- Dans ce chapitre nous faisons quelques généralisations des CTMM étudiées dans les chapitres précédents.

Premièrement, au §7.2, nous introduisons le concept de "condition miroir", qui nous mène à des nouvelles CTMM, comme par exemple, à la condition "single-troughed" présentée dans [Vickrey 1960] et appelée "ordres co-blackiens" dans [Barbut et Frey 1971], et à la première condition d'Inada, appelée "single-caved" dans [Inada 1964].

Nous présentons ensuite (paragraphe 7.3), la deuxième condition d'Inada, appelée condition de "bipartition" dans [Inada 1964] et qui peut être considérée comme intermédiaire des conditions de pseudo-unimodalité et de la première condition d'Inada.

Finalement, au paragraphe 7.4 nous traitons la condition de Ward, qui a la propriété d'englober toutes les CTMM étudiées dans ce travail, exceptée la condition d'étoilement.

7.2.- LES CONDITIONS MIROIR.- Nous notons comme dans le chapitre 6, x^* l'ordre inverse (ou opposé) de l'ordre x . Soit E un état de l'opinion quelconque. Notons E^* l'état de l'opinion formé en inversant les ordres de E . Par exemple, si $E = \{a, b, \dots, y, z\}$, alors $E^* = \{a^*, b^*, \dots, y^*, z^*\}$.

Proposition 7.1.- $E \equiv (E^*)^*$.

Démonstration.- Triviale.

C. Q. F. D.

Proposition 7.2.:- Soit ψ la règle majoritaire, $\psi(E)=x$ si et seulement si $\psi(E^*)=x^*$.

Démonstration.- Triviale.

C. Q. F. D.

Soit $\mathbf{A}=\{E_1, E_2, \dots, E_s\}$ un ensemble d'états de l'opinion. L'ensemble $\{E_1^*, E_2^*, \dots, E_s^*\}$ sera noté \mathbf{A}^* .

Soit \mathfrak{C} une CTMM quelconque et soit \mathbf{X} l'ensemble d'états de l'opinion qui obéissent à cette condition.

Définition 7.1.:- Un état de l'opinion E est dit obéir à la condition miroir de la condition \mathfrak{C} , si E appartient à \mathbf{X}^* .

Proposition 7.3.:- La condition miroir de la condition \mathfrak{C} est une CTMM.

Démonstration.- Immédiate à partir de la proposition 7.2.

C. Q. F. D.

Nous rappelons ici les notations des chapitres précédents:

Ensemble d'états de l'opinion obéissant à la condition de	Symbole
Unimodalité	U
Pseudo-unimodalité	P
Quasi-unimodalité	Q
Coombs	K
Ramification	R
Consistance multidimensionnelle	C
Etoilement	E

Définition 7.2.:- Un état de l'opinion est dit obéir à la condition "miroir de l'unimodalité" s'il appartient à U^* .

La condition miroir de l'unimodalité a été proposée dans [Vickrey 1960] sous le nom de "single-troughed" et, tout comme pour l'unimodalité, on peut lui trouver une interprétation "psychologique": il existe un ordre de référence sous-jacent $\underline{x}=(x_1, \dots, x_n)$, et chaque votant choisit comme premier objet soit x_1 soit x_n (une des extrémités de l'ordre \underline{x}); comme deuxième objet une des extrémités de l'ordre \underline{x} amputé du premier objet choisi; et ainsi de suite.

Supposons par exemple, qu'à une altitude de 3,5 kms les turbulences de l'air soient assez fortes et que, au-delà et en-deça de cette altitude les turbulences diminuent progressivement. Si on demande à un ensemble d'aviateurs de classer les altitudes 1 km, 2 kms, ..., 8 kms, par ordre décroissant de préférence lorsqu'ils considèrent un vol Paris-Mexico, l'état de l'opinion ainsi formé obéira vraisemblablement à la condition miroir de l'unimodalité par rapport à l'ordre (1 km, 2 kms, ..., 8 kms).

Des situations semblables, dans lesquelles la condition miroir de l'unimodalité serait présente, peuvent être imaginées sans difficulté. Aussi, il n'est pas déraisonnable d'espérer que des états de l'opinion variés obéissent à cette condition. L'identification d'un ordre de référence par rapport auquel un état de l'opinion donné obéirait à la condition miroir de l'unimodalité, pourrait avoir un intérêt psychologique.

Pour tester la présence de cette condition dans un état de l'opinion E, nous proposons d'utiliser l'algorithme de test de l'unimodalité (voir paragraphe 2.6), ceci près que les ordres de E ne seront pas testés en les lisant du dernier objet vers le premier objet, mais dans le sens opposé, c'est-à-dire, du premier vers le dernier.

Au paragraphe 4.3 nous avons introduit le concept de "modèle non-compensatoire" de choix, dont le modèle minimax, qui nous a permis de donner une interprétation à la condition de quasi-unimodalité. En contraste avec ce modèle, le modèle maximax (également non-compensatoire) est applicable lorsque la performance globale d'un objet est déterminée par sa caractéristique la plus forte. Par exemple, pour former une équipe de basket-ball, les joueurs peuvent être sélectionnés sur la base d'une seule aptitude: défenseur, meneur de jeu, faiseur de points.

Définition 7.3. - Un état de l'opinion est dit obéir à la condition "miroir de la quasi-unimodalité" si E appartient à Q^* .

Tout comme la quasi-unimodalité, on peut aussi donner à sa condition miroir une interprétation psychologique (à savoir: les votants possèdent des mécanismes de choix "non-compensatoires" du type maximax).

Supposons par exemple, qu'un bureau de traductions veuille engager un bon interprète, soit en grec, soit en japonais. Dans un premier temps, on fait deux classements des candidats: dans le classement $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les candidats sont classés d'après leurs connaissances en grec, dans le classement $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ils sont classés d'après leurs connaissances en japonais. Dans un deuxième temps, les responsables du bureau classent les candidats, globalement, par ordre de préférence. Nous supposons que chaque candidat n'est considéré qu'en fonction de ses connaissances dans une de ces deux langues.

On peut espérer que, lorsqu'un responsable connaît les classements x et y , dans son propre classement:

1) le premier classé z_1 , sera soit x_1 , soit y_1 , selon son appréciation personnelle des connaissances de grec relatives aux connaissances de japonais.

2) le deuxième classé z_2 , sera un des deux candidats se trouvant en tête des classements x et y amputés de z_1 .

3) en général, le candidat z_k ($k=2, \dots, n$) sera un des deux candidats se trouvant en tête des classements x et y amputés des candidats z_1, \dots, z_{k-1} .

Les responsables ayant des appréciations différents, dans le cas général ils fournissent des classements aussi différents.

Il est évident que cet exemple peut se généraliser à d'autres situations de choix similaires dans lesquelles:

- Le classement des objets ne dépend que de DEUX caractéristiques ou dimensions indépendantes (dans l'exemple, le grec et le japonais).

- Chaque classement est formé en tenant compte (à la manière indiquée dans l'exemple et d'une façon implicite ou explicite) des deux ordres de référence (x et y). Chaque ordre de référence est formé en considérant une seule des caractéristiques.

Nous faisons remarquer maintenant que tous les résultats du paragraphe 4.4 concernant la condition de quasi-unimodalité peuvent être généralisés trivialement à sa condition miroir.

Définition 7.4. - Un état de l'opinion E est dit obéir à la condition "miroir de la pseudo-unimodalité" si E appartient à P^* .

La condition miroir de la pseudo-unimodalité a été proposée dans [Inada 1964] sous le nom de "single-cavedness" et tout comme la condition de pseudo-unimodalité (§4.2), elle a gardé à tort ce nom. Sa formulation originale est la suivante:

Définition 7.5.:- ([Sen 1966] et [Jacquet-Lagrèze 1973])
Un état de l'opinion E est dit "single-caved" si pour tout triplet d'objets et sur tout ordre de E, l'un des trois objets ne surclasse jamais simultanément les deux autres.

Les résultats du paragraphe 4.2, concernant la pseudo-unimodalité peuvent être trivialement généralisés à sa condition miroir. Nous ne connaissons pas d'interprétation psychologique pour cette condition.

Définition 7.6.:- Un état de l'opinion E est dit obéir à la "condition miroir de Coombs" si E appartient à K^* .

Définition 7.7.:- Un état de l'opinion E est dit obéir à la "condition miroir de la ramification" si E appartient à R^* .

En ce qui concerne ces deux dernières conditions nous pouvons généraliser trivialement les résultats du chapitre 5. A la fig. 7.1 (page 142) nous avons représenté la "figure miroir" de la fig. 5.10 (page 105).

En appliquant le concept de condition miroir à certaines CTMM connues nous avons fait jaillir des nouvelles CTMM. Cependant ceci n'est pas une règle; nous démontrerons que le dit concept appliqué aux conditions: de bipartition (§7.3), de Ward (§7.4) et de consistance multidimensionnelle (ci-après), ne permet pas de créer des nouvelles CTMM.

Proposition 7.4.:- La distance entre deux ordres x, y est égale à la distance entre les ordres inverses respectifs.
 $d(x,y) = d(x^*,y^*)$.

Démonstration.- $d(x^*,y^*) = d(x^*,x) - d(y^*,x) = d(x^*,x) - [d(y,y^*) - d(x,y)]$. Comme $d(x^*,x) = d(y^*,y)$, alors $d(x^*,y^*) = d(x,y)$.

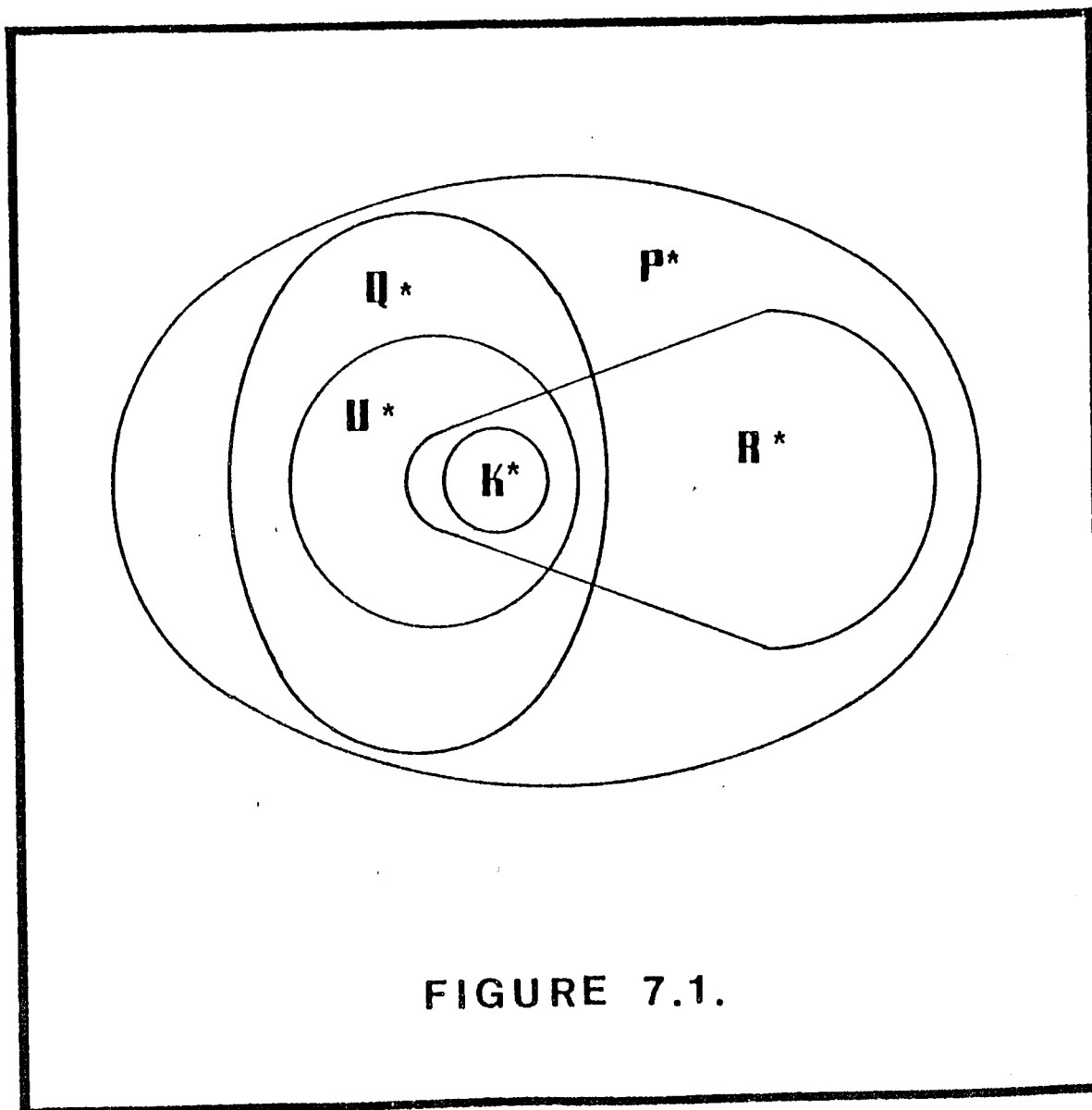
C. Q. F. D.

Proposition 7.5.- $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}^*$.

Démonstration.- Il suffit de démontrer que si $E \in \mathbf{C}$, alors $E^* \in \mathbf{C}$. Supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe un état de l'opinion $E^o \in \mathbf{C}$ tel que $E^{o*} \notin \mathbf{C}$. En vertu de la proposition 7.4, la matrice de distances des éléments de E^{o*} est identique à celle des éléments de E^o . Du théorème 6.1 nous concluons que $E^{o*} \in \mathbf{C}$, d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

7.3.- LA CONDITION DE BIPARTITION.- Cette CTMM a été



établie dans [Inada 1964] et peut être formulée comme suit:

Définition 7.8.- Un état de l'opinion E est dit obéir à la condition de bipartition si pour tout triplet d'objets et sur tout ordre de E, l'un des trois objets ne se trouve jamais entre les deux autres.

Notons **B** l'ensemble d'états de l'opinion obéissant à la condition de bipartition.

Proposition 7.6.- $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}^*$.

Démonstration.- Soit un état de l'opinion $E \in \mathbf{B}$. Dans E, pour tout triplet d'objets il y en a un qui n'est jamais entre les deux autres. Quand nous formons l'état de l'opinion E^* en inversant tous les ordres de E, il est évident que la condition est respectée, et en conséquence $E^* \in \mathbf{B}$.

C. Q. F. D.

Nous ne connaissons ni une interprétation psychologique pour cette condition, ni une procédure pour tester sa présence d'une façon efficace.

Si nous considérons cette condition ainsi que celles de pseudo-unimodalité et sa condition miroir, nous remarquons comment elles sont apparentées. Ces trois conditions seront généralisées dans le paragraphe suivant.

7.4.- LA CONDITION DE WARD.- Cette condition (appelée "sans-carré-latin") est citée dans [Sen 1966] comme un article "à paraître", et peut être établie comme suit:

Définition 7.9.- Un état de l'opinion E obéit à la condition de Ward si pour tout triplet d'objets $\{a, b, c\}$ on ne peut jamais trouver dans E trois ordres sur lesquels le triplet $\{a, b, c\}$ serait disposé en carré latin:

$$\begin{aligned} a &< b < c \\ c &< a < b \\ b &< c < a \end{aligned}$$

Ce carré latin n'est pas forcément formé par des objets contigus.

Exemple 7.1. - L'état de l'opinion $E = \{(b, c, d, a), (a, b, d, c), (a, d, b, c), (d, c, a, b)\}$ n'obéit pas à la condition de Ward puisqu'avec le triplet $\{a, b, c\}$ on peut former un carré latin sur les ordres $(b, c, d, a), (a, b, d, c), (d, c, a, b)$:

$$\begin{aligned} b &> c > a \\ c &> a > b \\ a &> b > c. \end{aligned}$$

Notons **W** l'ensemble des états de l'opinion qui obéissent à la condition de Ward.

Proposition 7.7. - La condition de Ward est une CTMM.

Démonstration. - Nous raisonnerons par l'absurde, en supposant qu'il existe un état de l'opinion $E^\circ \in \mathbf{W}$ dans lequel l'effet Condorcet se présente. Si l'effet Condorcet se présente, alors il existe un triplet d'objets $\{a, b, c\}$ tel que a est préféré à b par une majorité, b est préféré à c par une majorité, et c est préféré à a par une majorité. Notons $E(a, b)$, $E(b, c)$ et $E(c, a)$ les ensembles de votants qui ont placé a avant b , b avant c , et c avant a , respectivement. On a $|E(a, b)| > |E^\circ|/2$, $|E(b, c)| > |E^\circ|/2$, $|E(c, a)| > |E^\circ|/2$, ce qui implique $E(a, b) \cap E(b, c) \neq \emptyset$, $E(b, c) \cap E(c, a) \neq \emptyset$, $E(c, a) \cap E(a, b) \neq \emptyset$.

En conséquence il existe dans E° un ordre tel que $a > b > c$, un ordre tel que $b > c > a$, et un ordre tel que $c > a > b$. Les objets a, b, c , forment donc un carré latin sur ces ordres, d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

Proposition 7.8. - $W \equiv W^*$.

Démonstration.- Il est bien évident que si dans un état de l'opinion E on ne peut pas former de carré latin, alors dans l'état de l'opinion E* non plus.

C. Q. F. D.

Donc le concept de condition miroir ne permet pas de créer une nouvelle CTMM lorsqu'il est appliqué à la condition de Ward.

Quels sont les rapports de la condition de Ward avec les conditions étudiées précédemment? Cette question est résolue dans les propositions 7.9 à 7.11, qui établissent que la condition de Ward a la propriété d'englober toutes les conditions de transitivité de la méthode majoritaire étudiées dans ce travail, exceptée la condition d'étoilement. Ces résultats peuvent être visualisés à l'aide des figs. 7.2 à 7.4.

Proposition 7.9. - $C \subset W$.

Démonstration.- Supposons qu'il existe un état de l'opinion $E \in C$ tel que $E \notin W$.

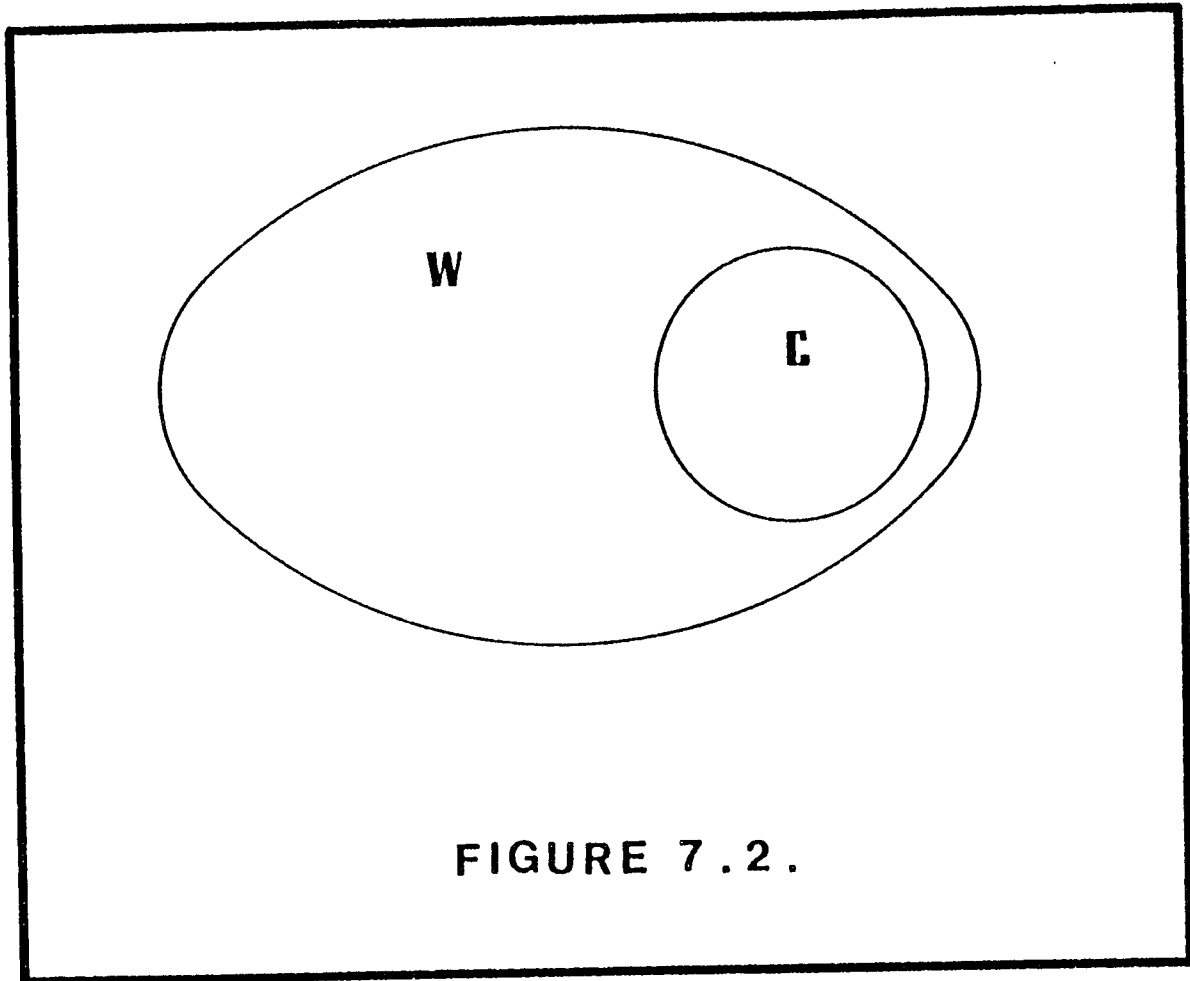
Si $E \notin W$, alors il existe un triplet d'ordres $T = \{x, y, z\} \subset E$ dans lequel le triplet d'objets $\{a, b, c\}$ peut être organisé de façon à former un carré latin. On a alors:

$$x = \dots \rightarrow a \rightarrow \dots \rightarrow b \rightarrow \dots \rightarrow c \rightarrow \dots$$

$$y = \dots \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow a \rightarrow \dots \rightarrow b \rightarrow \dots$$

$$z = \dots \rightarrow b \rightarrow \dots \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow a \rightarrow \dots$$

Comme $E \in C$, alors $T \in C$, ce qui implique, d'après le lemme 6.1 (page 123), qu'il existe dans T exactement deux sommets périphériques. Trois cas sont à envisager:



1) Si x et z sont les sommets périphériques dans T , alors de la proposition 6.6 on tire que, sur y , b est préféré à c , d'où la contradiction.

2) Si x et y sont les sommets périphériques dans T , alors d'une façon analogue on tire que, sur z , a est préféré à b , d'où la contradiction.

3) Si y et z sont les sommets périphériques dans T , alors on tire aussi que, sur x , c est préféré à a , d'où la contradiction.

C. Q. F. D.

Proposition 7.10. - $E \not\subseteq W, W \not\subseteq E, E \cap W \neq \emptyset$.

Démonstration.- Il suffit de trouver trois états de

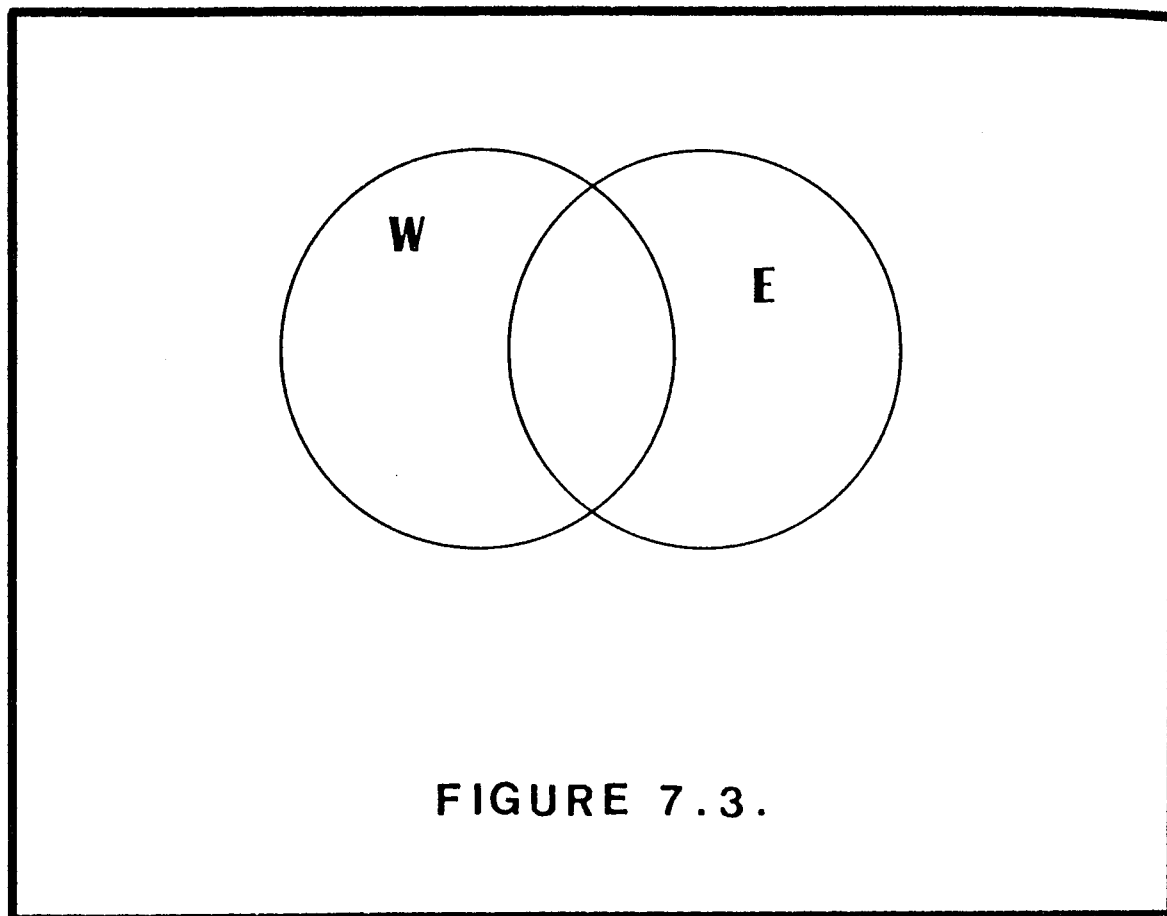


FIGURE 7.3.

l'opinion E_1, E_2, E_3 , tels que: $E_1 \in E$ et $E_1 \notin W$, $E_2 \in W$ et $E_2 \notin E$, $E_3 \in E$ et $E_3 \in W$. En effet: $E_1 = \{(a,b,c,d), (a,d,c,b), (b,a,d,c), (c,a,b,d), (b,c,a,d)\}$ est étoilé (centre de l'étoile: (a,b,c,d)) et d'autre part $E_1 \notin W$ puisqu'on peut former un carré latin avec les objets a, b, c . $E_2 = \{(a,b,d,c), (a,c,b,d), (b,a,c,d)\}$ appartient à W , car on ne peut pas former de carré latin; d'autre part, lorsqu'on applique la méthode majoritaire on trouve (a,b,c,d) comme ordre collectif; (a,b,c,d) n'appartient pas à E_2 et en conséquence $E_2 \notin E$. $E_3 = \{(a,b,c,d)\}$ appartient à $E \cap W$.

C. Q. F. D.

Proposition 7.11:- $PUP^*UBUC \not\subseteq W$.

Démonstration.- Nous démontrons d'abord que $PUP^*UBUC \subset W$. En effet, si un état de l'opinion appartient

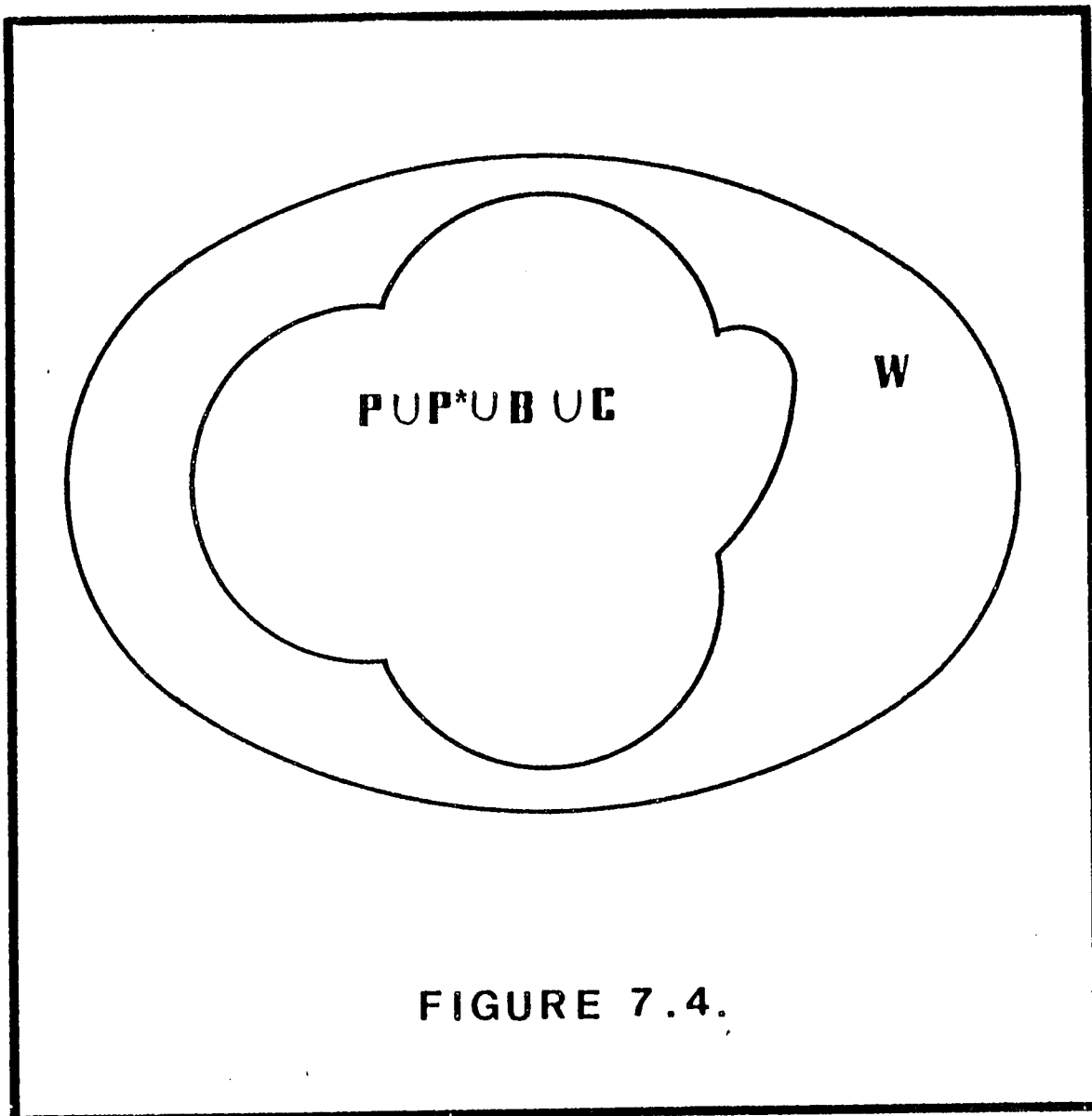


FIGURE 7.4.






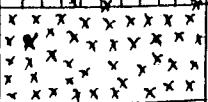


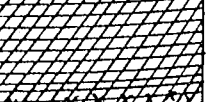
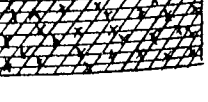

soit à **P**, soit à **P***, soit à **B**, il est impossible de former un carré latin; et si d'autre part il appartient à **C**, de la proposition 7.9 (page 145) on tire qu'il appartient forcément à **W**.



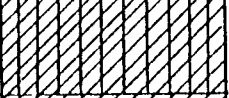
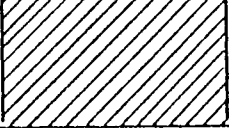
L'inclusion stricte est démontrée à l'aide d'un exemple. On peut vérifier que l'état de l'opinion $E = \{(a,b,c,d), (c,b,a,d), (c,b,d,a), (d,c,b,a), (d,b,c,a)\}$ obéit à la condition de Ward; mais $E \notin \mathbf{P}$ car pour le triplet $\{b, c, d\}$ tous les objets se trouvent en queue, $E \notin \mathbf{P}^*$ car pour le triplet $\{a,b,c\}$ tous les objets se trouvent en tête, $E \notin \mathbf{B}$ car pour le triplet $\{a,b,d\}$ tous les objets se trouvent au milieu, finalement $E \notin \mathbf{C}$ car les ordres

(a,b,c,d), (c,b,d,a), (d,b,c,a) ne sont pas "en ligne" (voir le permutoèdre de la fig. 6.1 à la page 117).

C. Q. F. D.

Nous avons donc placé la condition de Ward par rapport aux autres CTMM; mais comment est structuré l'ensemble $P \cup P^* \cup B \cup \underline{C}$? Le tableau suivant nous permet de répondre à la question. Aucun des sous-ensembles indiqués à la fig. 7.5 (page 150) n'est vide.

Etat de l'opinion E	E appartient à	E n'appartient pas à	E est un élément de la zone
$\{(b,c,d,a), (c,b,d,a), (c,b,a,d), (b,a,c,d), (d,c,b,a)\}$	P	P*, B, C	
$\{(d,c,b,a), (c,d,b,a), (c,b,d,a), (b,c,d,a)\}$	P, C	P*, B	
$\{(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c)\}$	P, C, P*	B	
$\{(a,b,c,d)\}$	P, C, P*, B	-	
$\{(b,c,d,a), (c,b,d,a), (d,c,b,a)\}$	P, C, B	P*	
$\{(a,b,c,d), (b,c,d,a), (c,b,d,a), (d,b,c,a)\}$	P, B	C, P*	
$\{(a,b,c,d), (a,d,c,b), (b,c,d,a), (d,c,b,a)\}$	B	P, C, P*	
$\{(a,b,c,d), (b,c,d,a), (b,d,c,a), (d,c,b,a)\}$	B, C	P, P*	
$\{(a,b,c,d), (a,c,b,d), (c,b,a,d), (c,b,d,a), (d,c,b,a)\}$	C	B, P, P*	
$\{(a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,d,b,c), (a,d,c,b)\}$	C, P*	B, P	
$\{(a,b,c,d), (a,d,c,b), (a,d,b,c)\}$	C, P*, B	P	

Etat de l'opinion E	E appartient à	E n'appartient pas à	E est un élément de la zone
$\{(d, c, b, a), (a, d, c, b)\}$ $\{(a, d, b, c), (a, c, b, d)\}$	P*, B	C, P	
$\{(a, b, c, d), (a, b, d, c)\}$ $\{(b, a, d, c), (b, a, c, d)\}$	P, P*, B	C	
$\{(a, b, c, d), (a, b, d, c)\}$ $\{(a, c, b, d), (b, a, c, d)\}$	P, P*	B, C	
$\{(a, b, c, d), (a, d, b, c)\}$ $\{(a, d, c, b), (d, a, b, c)\}$ $\{(d, c, a, b)\}$	P*	P*, B, C	

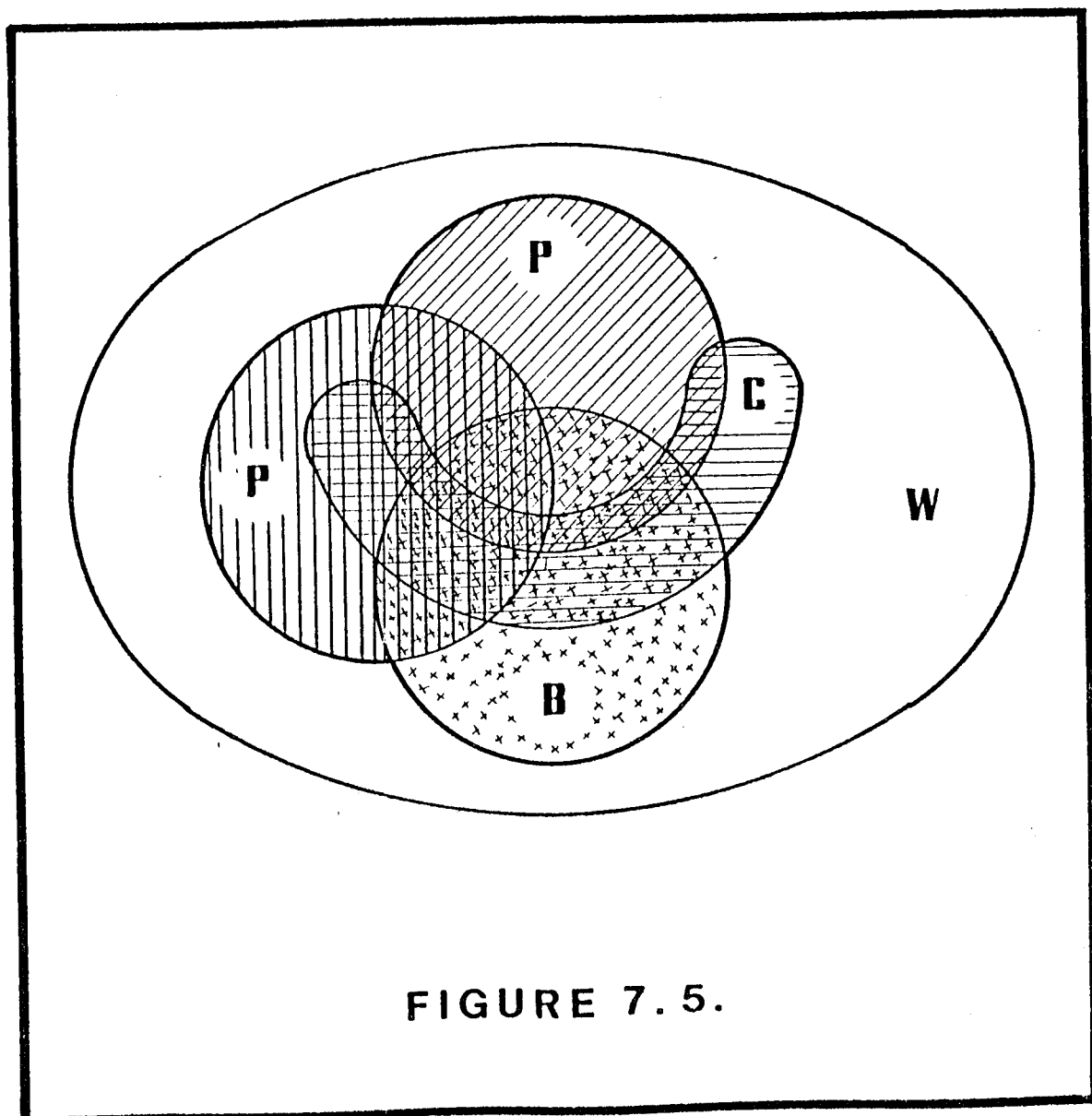


FIGURE 7.5.

Nous finissons ce chapitre en posant deux questions:
existe-t-il une interprétation psychologique ou économique
de la condition de Ward? Comment tester la présence de cette
condition d'une façon efficace?

REFERENCES .

- K. J. ARROW (1974) Choix collectif et préférences individuelles. Calmann-Lévy, Paris.
- L. ASPINALL (1972) Re-organisation algorithms. IBM United Kingdom Scientific Centre Report 29.
- M. BARBUT, L. FREY (1971) Techniques ordinales en analyse de données. Algèbre et Combinatoire. Hachette Université, Paris.
- D. BLACK (1971) The theory of committees and elections. University Press, Cambridge.
- J. M. BLIN (1973) The general concept of multidimensional consistency: some algebraic aspects of the aggregation problem. Multiple criteria decision making, University of South Carolina Press, Columbia.
- C. H. COOMBS (1964) A theory of data. Wiley, New York.
- C. H. COOMBS, R. M. DAWES, A. TVERSKY (1970) Mathematical Psychology. Prentice-Hall, New Jersey.
- N. CHRISTOFIDES (1975) Graph theory. An algorithmic approach. Academic Press.
- A. DEGENNE (1972) Techniques ordinales en analyse des données: Statistique. Hachette Université, Paris.
- M. DESPLAS (1967) Mathématiques de la décision économique. Compléments et exercices. Dunod, Paris.

- H. J. EINHORN (1970) The use of nonlinear, non compensatory models in decision making, *Psychological Bulletin* 73, 221-230.
- G. Th. GUILBAUD, P. ROSENSTIEHL (1963) Analyse algébrique d'un scrutin. *Mathématiques et Sciences Humaines* 4, 21-27.
- K. I. INADA (1964) A note on the simple majority decision rule. *Econometrica* 32, 525-531.
- E. JACQUET-LAGREZE (1973) Méthodes et programmes en analyse de données ordinales. Sema (Metra International), Direction Scientifique, Synthèse et Formation 81.
- D. E. KNUTH (1973) The art of computer programming. Sorting and Searching. Addison-Wesley Publishing Company.
- G. KÖHLER (1976) La prévention de l'effet Condorcet et quelques propriétés du graphe de surclassement pour les seuils de 0 à 100%. Mémoire de D.E.A., Université de Grenoble.
- G. KREWERAS (1963) Les décisions collectives. *Mathématiques et Sciences Humaines* 2, 25-35.
- R. D. LUCE, E. GALANTER (1965) Psychological Scaling. In *Handbook of Mathematical Psychology*; Luce, Bush, Galanter Eds. Wiley, New York.
- R. G. NIEMI, W. H. RIKER (1976) The choice of voting systems. *Scientific American* 6, 21-27.
- P. PARLEBAS (1972) Effet Condorcet et dynamique sociométrique II: Incohérences rationnelles et cohésions groupales. *Mathématiques et Sciences Humaines* 37, 37-67.

- C. V. RAMAMOORTHY, P. R. BEVINS (1971) Arranging frequency dependant data on sequential memories. Proc. AFIPS SJCC 38, 545-556.
- W. H. RIKER (1961) Voting and the summation of preferences: an interpretative bibliographical review of selected developements during the last decade. The American Political Science Review 55, 900-911.
- A. K. SEN (1966) A possibility theorem on majority decisions. Econometrica 34, 491-499.
- E. TERRIER (1976) Sur quelques problèmes d'agrégation de préférences. Mémoire de D.E.A. Université de Grenoble.
- W. VICKREY (1960) Utility, strategy and social decision rules. The Quarterly Journal of Economics 4, 507-535.

L I S T E D E S Y M B O L E S .

$[a]$	partie entière supérieure du nombre a .
$ a $	valeur absolue du nombre a .
$ A $	cardinalité de l'ensemble A .
\in	appartenant à.
\notin	n'appartenant pas à.
\S	paragraphe.
\emptyset	ensemble vide.
\mathbb{R}	ensemble des réels.
\mathbb{R}^+	ensemble des réels positifs.
\subset	sous-ensemble.
\subsetneq	sous-ensemble strict.
\forall	pour tout.
\exists	il existe.
\nexists	il n'existe pas.
$a > b$	l'objet a est préféré à l'objet b .
Σ	sommation.
\cup	union.
\cap	intersection.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 13 juin 1978

Le Président de la thèse

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'H. Allier', written over a horizontal line.

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Jean-Claude Carayon', written over a horizontal line.