Choix multicritère et analyse algébrique de données ordinales

Gert Köhler

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE
en Mathématiques Appliquées
option : Recherche Opérationnelle

par

Gert KÖHLER

CHOIX MULTICRITERE
ET ANALYSE ALGEBRIQUE
DE DONNEES ORDINALES

Thèse soutenue le 29 juin 1978 devant la Commission d'Examen :

Président	: C. BENZAKEN
Examinateur	: P. JULLIEN
Rapporteur	: H. RAYNAUD
Invité	: B. MONJARDET

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmocodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président
Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et électrométallurgie
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electrostatique
	FOULARD Claude	Automatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	ROUXEL Roland	Automatique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme.	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan	Automatique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

A Martyne

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier

Monsieur BENZAKEN qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse

Monsieur JULLIEN et Monsieur MONJARDET qui ont bien voulu accepter d'être membres du jury

Je remercie également Monsieur RAYNAUD qui a su créer une équipe de choix multicritère dont l'ambiance est particulièrement chaleureuse et stimulante.

Je voudrais finalement adresser mes remerciements à Monsieur DRIDI pour sa collaboration et l'intérêt qu'il a porté à mon travail et à Monsieur TERRIER pour son aide, ses suggestions précieuses et ses encouragements.

S O M M A I R E

.../...

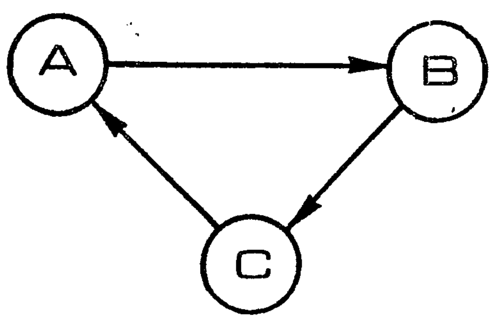
Introduction

Le travail présenté dans cette thèse traite de ce qui est appelé aujourd'hui *"le choix collectif"* ou *"l'agrégation des opinions individuelles"*.

Historiquement, le problème mathématique a été posé au moment de la révolution française par Condorcet [6] et après, par Borda [5] .

Ces mathématiciens ont été les premiers à étudier les propriétés de divers modes de scrutins dont le plus connu est sans aucun doute la méthode de la majorité simple. Elle consiste à demander à chaque votant un classement des candidats suivant un ordre total, puis à définir le classement collectif en considérant ces mêmes candidats paire par paire : s'il y a plus d'individus qui préfèrent le candidat A au candidat B, alors A sera préféré à B dans le classement collectif.

Cette méthode simple qui semble raisonnable a cependant le grand inconvénient de ne pas toujours fournir un ordre collectif. Condorcet fut le premier à remarquer que, dans une décision collective issue de la majorité simple appliquée à trois candidats A, B, C, A pouvait être préféré à B, B à C, et C à A ; c'est ce qu'on appelle *"Effet de Condorcet"*.

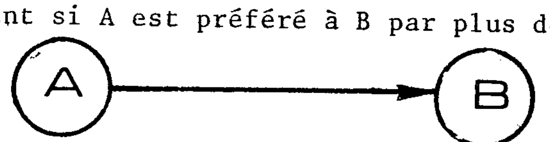


Les recherches qui ont suivi se sont dirigées vers la définition de meilleures règles de décision collective jusqu'à ce que Arrow bouleverse par un théorème célèbre, le concept de règle de choix "*démocratique*" ; il a en effet mis en évidence que la seule règle obéissant aux principes de "*souveraineté*" et de "*loyauté*" est celle qui confère à un individu unique le statut de dictateur imposant à tous les votants ces préférences personnelles [1] .

Il s'est avéré que toute tentative visant à supprimer la nécessité d'un dictateur devait mettre en cause des axiomes représentant jusqu'alors des principes démocratiques. Ainsi a débuté la recherche des conditions sans lesquelles la méthode majoritaire est applicable sans risque "*d'effet de Condorcet*" . S'engageant dans cette voie, Black proposa les conditions "*d'unimodalité*" et "*d'unimaxialité*" * [3] . Il fut suivi par Inada ("*uniminimalité*"* et "*bi-partition*") puis par Ward et Sen qui trouvèrent une condition ("*sans carré latin*") englobant toutes les précédentes [9][17][19]. La condition de Blin [4] ("*Consistance multidimensionnelle*") est elle aussi un cas particulier de celle de Sen. Toutes ces conditions restreignent le nombre d'ordres individuels différents admissibles. La condition "*d'étoilement*" (Terrier [18]) lève la limitation sur la variété des opinions mais entraîne en contre partie des restrictions sur la répartition de celles-ci au moment du vote.

La méthode majoritaire simple ne semblant décidemment pas être satisfaisante, nous nous sommes alors intéressés à la "*règle majoritaire au seuil q %*", q étant un entier compris entre 0 et 100. Cette règle fait précéder B par A dans l'opinion collective si et seulement si le nombre de votants préférant A à B dans leur opinion individuelle est supérieur à q %.

On peut ainsi définir un graphe dit de surclassement dont les sommets sont en correspondance biunivoque avec les candidats. Un arc joindra 2 sommets A et B si et seulement si A est préféré à B par plus de q % des votants.



"plus de q % des votants préfèrent A à B
moins de q % des votants préfèrent B à A".

* Connue dans la littérature sous les noms "*Condition de Black*" et "*Condition d'Inada*", abandonnées ici en raison du caractère symétrique qu'elles présentent en fait.

Il est clair que le graphe de surclassement n'est pas toujours complet si le seuil p est strictement supérieur à 50 % : cela signifie alors que certains candidats peuvent être non comparables entre eux.

"moins de q % des votants préfèrent A à B
moins de q % des votants préfèrent B à A"

Le seuil étant fixé à 50 %, il y a effet de Condorcet si et seulement si le graphe de surclassement contient un circuit. Ainsi, les conditions de BLACK, INADA, WARD, SEN, BLIN et TERRIER sont suffisantes pour qu'au seuil de 50 % le graphe de surclassement soit sans circuit.

Nous nous sommes attachés dans cette thèse, à la détermination, un seuil q étant fixé, de conditions empêchant l'apparition de l'effet de Condorcet. Ces conditions généralisent la plupart des précédentes et ont l'avantage d'être pour des seuils supérieurs à 50 % beaucoup moins restrictives que les conditions enoncées auparavant.

On trouve au premier chapitre, quelques propriétés d'un graphe de surclassement au seuil q %, $q \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ et une réponse à une question soulevée par E. JACQUET-LAGREZE [10] : "L'absence de carré latin d'ordre p, $p \in \mathbb{N}$, est-elle une condition suffisante pour que le graphe de surclassement au seuil $\frac{p-2}{p-1} \cdot 100$ % soit sans circuit, pour $p \geq 4$?"

En particulier, on montre la relation qui existe entre deux seuils critiques, où l'un est le plus grand seuil pour lequel le graphe de surclassement sera dit contenir un graphe d'ordre total et l'autre le plus petit seuil pour lequel le graphe de surclassement est sans circuit.

Nous allons présenter une procédure permettant de déterminer rapidement, un graphe de surclassement étant donné, ces deux seuils.

Entre autre, cette procédure va nous donner une méthode d'agrégation des opinions et permettre de tester facilement si un graphe simple est sans circuit.

Nous généralisons les conditions d'unimaximalité et uniminimalité dans le 2ème chapitre qui contient également des algorithmes de reconnaissance de ces conditions. On montre que ces dernières correspondent à des modèles cohérents de choix individuel.

On ne connaissait pas jusqu'à présent, le nombre d'ordres individuels différents admissibles vérifiant les conditions d'unimaximalité et d'uniminimalité : la détermination d'une borne supérieure de ce nombre est un résultat inattendu du chapitre 3.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous présentons des conditions définies par rapport à un ordre de référence, ainsi que des algorithmes de reconnaissance de ces conditions. On montre quelques relations paradoxales entre les conditions précédentes.

CHAPITRE I

Graphe de surclassement

1 Graphe de surclassement –

Méthode majoritaire

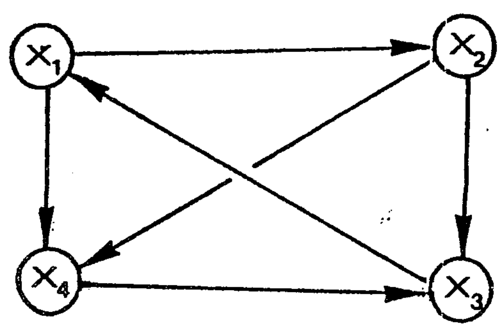
Soit $X = \{x_1, .., x_n\}$ un ensemble d'objets à classer, $|X| = n$.
Toute famille finie $E = 0_1, 0_2, ..., 0_m$ d'ordres totaux 0_i sur X (ou bulletins de vote) est appelée "*ETAT DE L'OPINION*".
Remarquons que les ordres $0_i \in E$ ne sont pas nécessairement différents. Nous notons $0 = (x_i, x_j, x_k ...)$ pour exprimer que dans l'ordre 0 x_i précède x_j, x_j précède x_k, etc... Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Un état de l'opinion est par exemple le suivant :

$$E = \{(x_1, x_2, x_4, x_3), (x_2, x_4, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_4, x_2), (x_2, x_4, x_3, x_1), (x_1, x_4, x_3, x_2)\} \text{, donc } |E| = 5.$$

La méthode majoritaire -simple- est définie ainsi :

"S'il y a dans E strictement plus d'ordres dans lesquels l'objet x précède y que d'ordres dans lesquels y précede x, alors dans l'opinion collective l'objet x surclasse l'objet y.

La relation de surclassement définie par la méthode majoritaire simple peut être visualisée : (cf. exemple précédent).



où $x \longrightarrow y$ désigne que dans l'opinion collective x surclasse y.

On remarque que la relation de surclassement contient des circuits, ce qui rend impossible de trouver un ordre total comme classement collectif.

Ce paradoxe est généralement connu sous le nom "EFFET DE CONDORCET" (Condorcet qui fut le premier à remarquer ce paradoxe [6]). Nous allons généraliser la méthode majoritaire simple de la manière suivante :

1.1.1. *DEFINITION* : *"METHODE MAJORITAIRE AU SEUIL β "*

> Soit $\beta \in [0, 1[$ et soit $|E| = m$.
> "Si dans E le nombre d'ordres classant l'objet x avant l'objet y est strictement supérieur à $\beta.m$, alors dans l'opinion collective x surclasse y".

La méthode majoritaire simple correspond à un seuil $\beta = 1/2$. A la méthode majoritaire au seuil β correspond -indifféremment du point de vue logique- la relation de surclassement R (β) ou graphe de surclassement G (β) que nous définissons de la manière suivante :

1.1.2. *DEFINITION* : *"GRAPHE DE SURCLASSEMENT G(β)"*

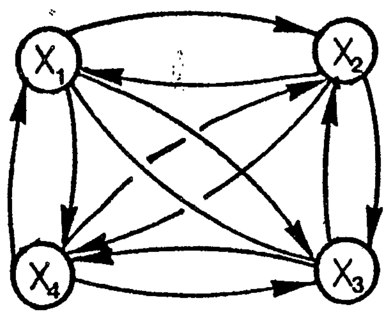
> On appelle graphe de surclassement $G(\beta) = (X, R(\beta))$, le graphe dont les sommets sont identifiés aux objets à classer de X et
> $(x_i, x_j) \in R(\beta) \Longleftrightarrow$ Le nombre d'ordres de E ayant classé x_i avant x_j est strictement supérieur à $\beta.m$ où $\beta \in [0,1[$ et $m = |E|$

On peut généraliser la notion "Effet de Condorcet" d'une manière naturelle en disant :

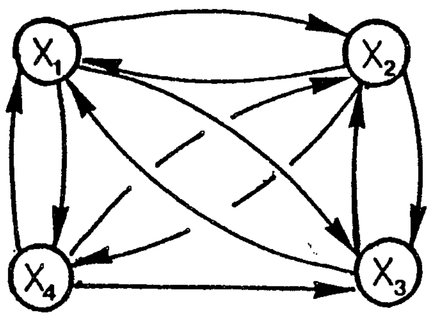
> "Il n'y a pas d'effet Condorcet pour le seuil β si le graphe de surclassement G (β) ne contient pas de circuit".

Reprenons l'exemple précédent.

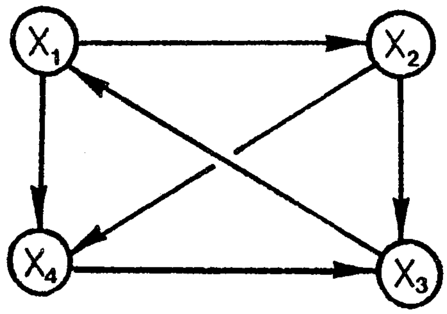
On obtient le graphe de surclassement G (β) :



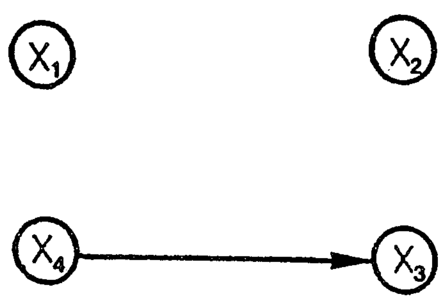
$G(0)$



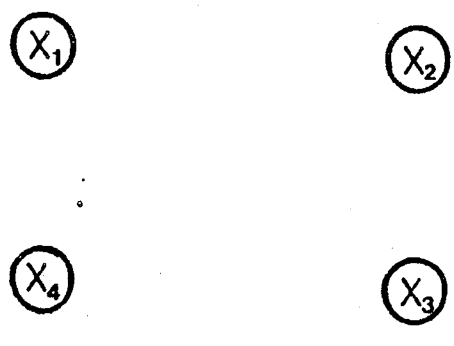
$G(\frac{1}{5})$



$G(\frac{2}{5})$



$G(\frac{3}{5})$



$G(\frac{4}{5})$

Les conditions de BLACK, INADA et WARD, etc... sont suffisantes pour qu'avec un seuil $\beta = 1/2$ le graphe de surclassement G (1/2) soit transitif -dans le cas où $|E|$ est impair.

Pour un seuil $\beta \geqslant 1/2$, G (β) est sans circuit si E vérifie une de ces conditions.

Mais ces conditions sont excessivement restrictives en ce qui concerne la diversité d'ordres individuels admissibles dans un même état de l'opinion satisfaisa une de ces conditions.

Dans les chapitres suivants, nous allons donner des conditions beaucoup moins restrictives pour les seuils $\beta > 1/2$. Nous allons remarquer que les seuils β qui se laissent exprimer sous la forme $\beta = \frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ jouent un rôle particulier.

Les deux paragraphes qui suivent sont consacrés à l'étude de propriétés des grap de surclassement G (β).

2 Chemins et circuits dans un graphe de surclassement

1.2.1. *PROPOSITION* [11]

Soit $|E| = m$ et désignons par $\beta_i.m$ le nombre d'ordres classant x_i avant x_{i+1}, $i = 1,\ldots, p$.

Le nombre d'ordres de E classant $(x_1 > x_2 > \ldots. > x_{p+1})$ est alors supérieur ou égal à

$$\boxed{\left[\sum_{i=1}^{p} \beta_i - (p-1)\right]\cdot m}$$

DEMONSTRATION : (par induction)

Désignons par E_i l'ensemble des ordres de E classant x_i avant x_{i+1}, $i=1\ldots, p$ donc $|E_i| = \beta_i.m$

a) Soit $p = 2$

Le nombre d'ordres classant $x_1 > x_2 > x_3$ est :

$$|E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cup E_2|$$
$$\geq (\beta_1 + \beta_2 - 1)m.$$

b) Supposons que la proposition soit vraie pour $p = 2$ jusqu'à $p = q-1$.

c) Soit $p = q$. Notons W l'ensemble d'ordres classant $(x_1 > x_2 > \ldots > x_p)$. Le nombre d'ordres classant $(x_1 > x_2 > \ldots > x_p > x_{q+1} = x_{p+1})$ est :

$$|W \cap E_p| = |W| + |E_p| - |W \cup E_p|$$

d'après b)
$$\geq \left[\sum_{i=1}^{p-1} \beta_i - (p-2) + \beta_p - 1\right]\cdot m$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{p} \beta_i - (p-1)\right].m$$

EXEMPLE : Supposons que E = 100, et que l'on a :

dans 80 ordres x_1 avant x_2, dans 45 x_2 avant x_3, et dans 80 x_3 avant x_4

$$X_1 \xrightarrow{80} X_2 \xrightarrow{45} X_3 \xrightarrow{80} X_4$$

alors on sait qu'au moins dans 5 ordres on trouve $(x_1 > x_2 > x_3 > x_4)$
(puisque 80 + 45 + 80 - 200 = 5).

Conséquences de cette proposition

1.2.2. a) Soit G (β) un graphe de surclassement pour un seuil β, $\beta \in [0,1[$.
S'il existe dans G (β) un chemin d'une longueur p, alors le nombre d'ordres dans lesquels les objets de ce chemin sont classés dans l'ordre du chemin est strictement supérieur à $[p.\beta - (p-1)]\cdot m$ d'après la définition de G (β).

b) Si β se laisse exprimer sous la forme $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, 3,..$

alors le nombre d'ordres ayant classé les objets d'un chemin d'une longueur p dans l'ordre du chemin est strictement supérieur à :

$$[p\cdot\frac{(\nu-1)}{\nu} - p - 1].m = \boxed{\frac{\nu-p}{\nu}.m}$$

Donc si $p = \nu$ il existe alors au moins un ordre ayant classé les objets dans l'ordre du chemin.

si $p = \nu - 1$ alors le nombre d'ordres ayant classé les objets dans l'ordre du chemin est strictement supérieur à $\frac{1}{\nu}.m$

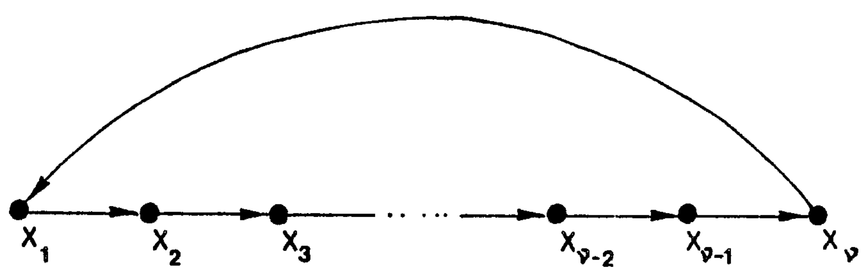
Cette dernière remarque nous permet de démontrer d'une manière très simple la proposition suivante :

1.2.3. *PROPOSITION* [10]

Soit ν un entier donné.
Si $\beta \geq \frac{\nu - 1}{\nu}$ alors G (β) ne contient pas de circuit d'ordre $\leq \nu$

DEMONSTRATION :

Supposons que G (β) contienne un circuit d'ordre ν :



D'après la remarque précédente, le nombre d'ordres dont la restriction aux objets x_1 , x_2 ,..., x_ν s'écrit :

$(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$

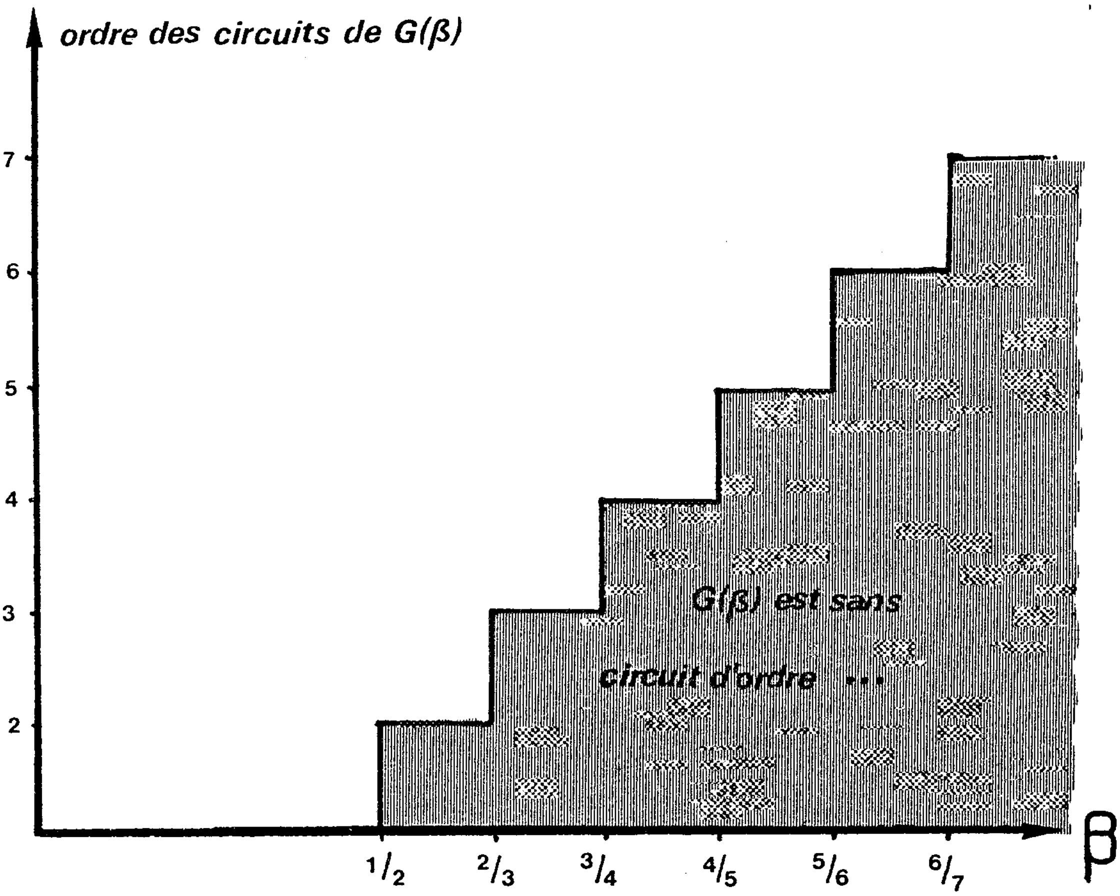
est strictement supérieur à $\frac{1}{\nu}.m$, $m = |E|$.

Donc le nombre d'ordres ayant classé x_ν avant x_1 est inférieur à $(1 - \frac{1}{\nu}) \cdot m = \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot m$.

Or, $\beta \geq \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot m$, l'arc (x_ν , x_1) ne peut pas appartenir à G (β). ■

La figure ci-après visualise ce résultat.

.../...

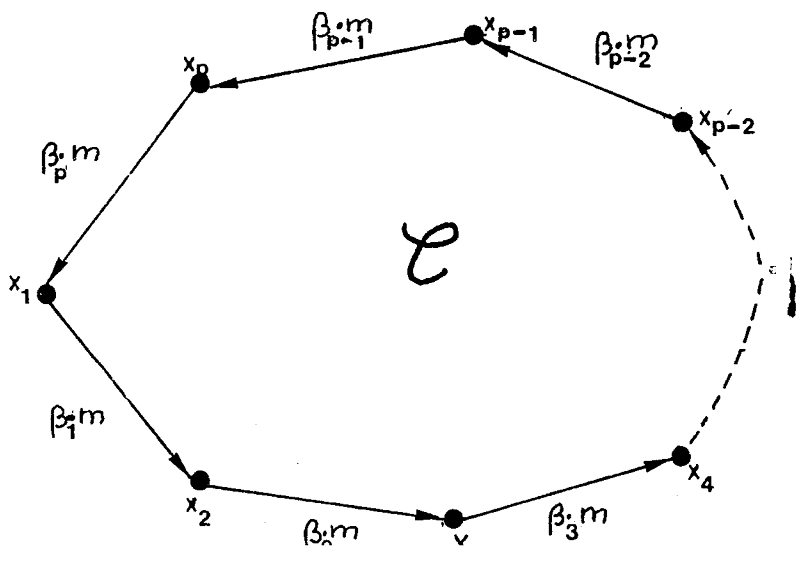


1.2.4. *DEFINITION*

On appelle *valuation* d'un circuit $\mathcal{C} = (x_1 , x_2 , \ldots, x_p , x_{p+1} = x_1$

la somme suivante : $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \beta_i}$

où $\beta_i \cdot m$ désigne le nombre d'ordre de E, $|E| = m$ ayant classé x_i avant x_{i+1}.



1.2.5. *REMARQUE*

Si $\mathcal{C}^{-1}$ désigne le circuit dans le sens opposé de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{C}^{-1} = (x_1 , x_p , x_{p-1} ,\ldots, x_2 , x_1)$, alors on vérifie trivialement que la valuation d'un circuit d'une longueur p plus la valuation du circuit opposé $\mathcal{C}^{-1}$ est égale à p.

1.2.6. *PROPOSITION* [8], [14]

Soit G (0) un graphe de surclassement pour $\beta = 0$. (Il suffit qu'un votant préfère x à y, que l'arc (x, y) soit indiqué sur le graphe de surclassement). La valuation de tout circuit de longueur p de G (0) vérifie :

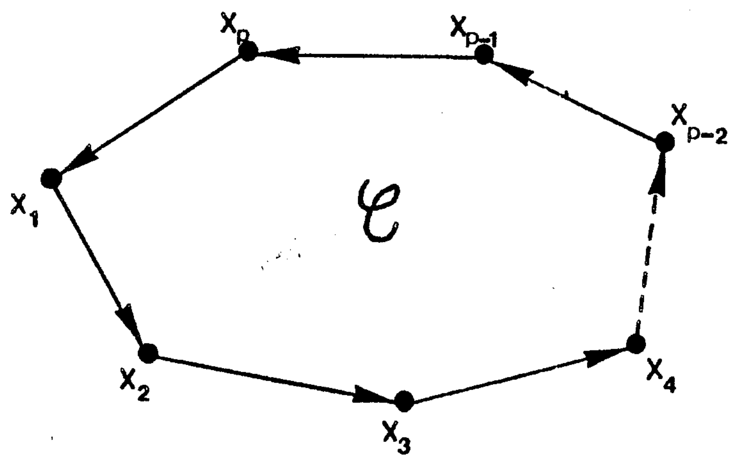
$$\boxed{1 \leq \sum_{i=1}^{p} \beta_i \leq p-1} \qquad p = 2, 3, 4,\ldots.$$

DEMONSTRATION

Supposons que G (0) contienne un circuit de longueur p ayant une valuation $\sum_{i=1}^{p} \beta_i$

Montrons que $\sum_{i=1}^{p} \beta_i$ est inférieur ou égal à p-1.

Soit $\mathcal{C} = (x_1, x_2,\ldots, x_p , x_{p+1} = x_1)$



D'après la proposition 1, le nombre d'ordres dont la restriction aux objets du circuit s'écrit : $(x_1 > x_2 > \dots > x_p)$ est supérieur ou égal à

$$\left(\sum_{i=1}^{p-1} \beta_i - (p - 2) \right) . m$$

On en conclut que le nombre d'ordres ayant classé x_1 avant x_p est inférieur ou égal à

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i - (p - 2) \right) . m$$

Ce nombre est par hypothèse, égal à $\beta_p . m$, donc

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i - (p - 2) \right) . m \geq \beta_p . m$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i \leq p - 1$$

On en conclut immédiatement que la valuation d'un circuit doit être supérieure ou égale à 1. En effet, sinon le circuit opposé aurait une valuation supérieure à p-1.

REMARQUE

Soit G un graphe simple, complet et symétrique dont les arcs soient valués de la façon à ce que la somme des valuations de deux arcs parallèles soit constante.

La proposition précédente donne une condition nécessaire pour qu'un tel graphe soit un graphe de surclassement. Mais cette condition n'est pas suffisante. T. DRIDI [7] a donné un contre-exemple.

1.2.7. *PROPOSITION* [11]

Soit ν un entier donné et soit $\beta \geq \frac{\nu-1}{\nu}$.

Si G (β) contient un circuit d'ordre (ν + 1), alors, de E, l'on peut extraire (ν + 1) ordres dont la restriction aux objets du circuit forme un carré latin d'ordre ν + 1.

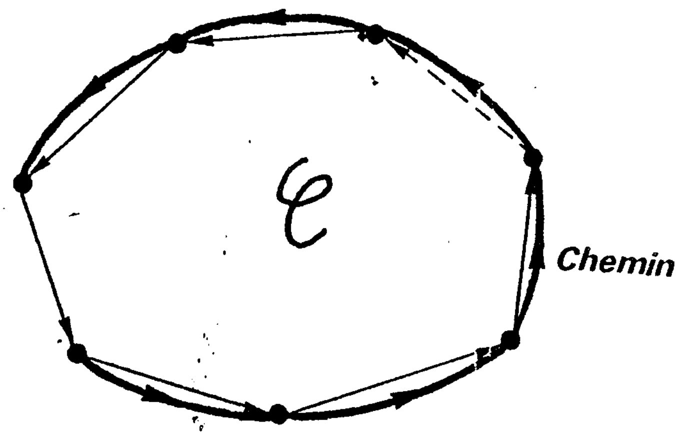
EXEMPLE

Carré latin d'ordre 4 :

1,	2,	3,	4
2,	3,	4,	1
3,	4,	1,	2
4,	1,	2,	3

DEMONSTRATION

Dans un circuit d'ordre (ν+ 1) il existe (ν + 1) chemins différents d'une longueur ν.



Notons Y l'ensemble des objets formant le circuit $\mathcal{C}$. D'après la remarque 1.2.2. b) pour chacun de ces (ν + 1) chemins, on peut trouver dans E un ordre dans lequel les objets de Y sont classés dans l'ordre du chemin. La restriction de ces (ν + 1) ordres aux objets de Y forme bien un carré latin d'ordre (ν + 1).

REMARQUE

Si on ne peut pas extraire de E, de carré latin d'ordre (ν+ 1), alors :

- Il peut y avoir des carrés latins d'ordre inférieur à ν+ 1, mais on ne peut pas extraire de carré latin d'ordre supérieur à (ν+ 1) (on en extrairait trivialement des carrés latins d'ordre inférieur).

Le rapprochement de la proposition 1.2.3. de la proposition 1.2.7. fournit le :

1.2.8. *THEOREME* [11]

Soit ν un entier donné, et β un seuil supérieur ou égal à $\frac{\nu+1}{\nu}$.
Si l'on ne peut pas extraire de E un carré latin d'ordre (ν + 1), alors G (β) ne contient pas de circuit d'ordre inférieur ou égal à (ν + 1).

1.2.9. *REMARQUES*

a) Pour un seuil β = 1/2 ce théorème est une conséquence de la condition de WARD ("Absence de carré latin d'ordre 3").

b) Si le graphe de surclassement G (β) est complet et antisymétrique, alors l'absence de circuit d'ordre 3 implique que ce graphe G (β) est transitif et donc sans circuit.

c) Si $|E|$ est impaire, alors G (1/2) est complet et antisymétrique. Dan ce cas, la condition de WARD est donc suffisante pour qu'il n'y ait pas de circuit dans G (1/2).
Inversement, si G (1/2) contient un circuit, alors on peut extraire de E un carré latin d'ordre 3. Mais on voit facilement que la conditio de transitivité de WARD n'est pas nécessaire.

Pour qu'il n'y ait pas de carré latin dans E, il faut et il suffit qu'au moins une des trois conditions suivantes soit vérifiée pour tout $Y \subset X$, $|Y| = 3$:

1°) *"Unimaximalité"*

Un des objets de Y n'est jamais placé en queue de E (Y) (E(Y) désigne la restriction de E aux objets de Y).

2°) *"Uniminimalité"*

Un des objets de Y n'est jamais placé en tête de E(Y).

3°) *"Séparabilité en 2 groupes"*

Un des objets de Y n'est jamais placé au milieu de E(Y).

En effet, soient : (a , b , c) (c , b , a)
(b , c , a) (b , a , c)
(c , a , b) (a , c , b)

l'ensemble des permutations possibles sur les 3 objets a, b, c.

Pour que les carrés latins soient impossibles, il faut qu'une permutation au moins dans chacun des groupes soit interdite dans E. On vérifie facilement que quel que soit le couple de permutation interdite, une des trois conditions précédentes est vérifiée.

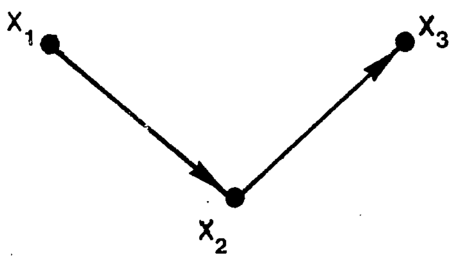
Si E vérifie la condition de WARD, alors le graphe de surclassement $G(\beta)$, $\beta = 1/2$ a la propriété suivante :

1.2.10 *PROPOSITION*

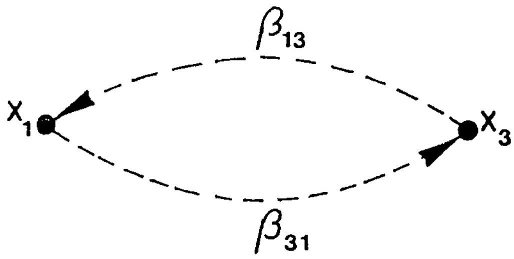
Si un état de l'opinion E vérifie la condition de WARD, alors $G(\beta)$ est transitif pour tout seuil $\beta \geq 1/2$

DEMONSTRATION

Supposons que les arcs (x_1, x_2) et (x_2, x_3) appartiennent au graphe G( ), mais que l'arc "transitif" (x_1, x_3) n'y appartienne pas.



Soient β_{13} m le nombre d'ordres de E, $|E| = m$, dans lesquels $(x_1 > x_3)$
et β_{31} m le nombre d'ordres de E, $|E| = m$, dans lesquels $(x_3 > x_1)$



Par hypothèse on a $\beta_{13} \leq \beta$ et $\beta_{31} \leq \beta$

D'où, puisque $\beta_{13} + \beta_{31} = 1$ $\quad \beta_{13} \geq 1 - \beta$ (1)
et $\beta_{31} \geq 1 - \beta$ (2)

D'après la proposition 1.2.1., le nombre d'ordres dont la restriction aux objets x_1, x_2, x_3 s'écrit :

1°) (x_1, x_2, x_3) est strictement supérieur à $(2\cdot\beta - 1).m \geq 0$

2°) (x_2, x_3, x_1) " " " " $(\beta + \beta_{31} - 1).m \geq 0$ (d'après (2))

3°) (x_3, x_1, x_2) " " " " $(\beta + \beta_{13} - 1).m \geq 0$ (d'après (1))

On peut donc extraire de E, le carré latin :

$$(x_1 , x_2 , x_3)$$
$$(x_2 , x_3 , x_1)$$
$$(x_3 , x_1 , x_2)$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que E vérifie la condition de WARD.

D'après ces résultats on peut penser que la généralisation de la *condition de WARD* :

"Un état de l'opinion vérifie la condition $W(\nu)$ si on ne peut pas extraire de carré latin d'ordre $+ 1$ "

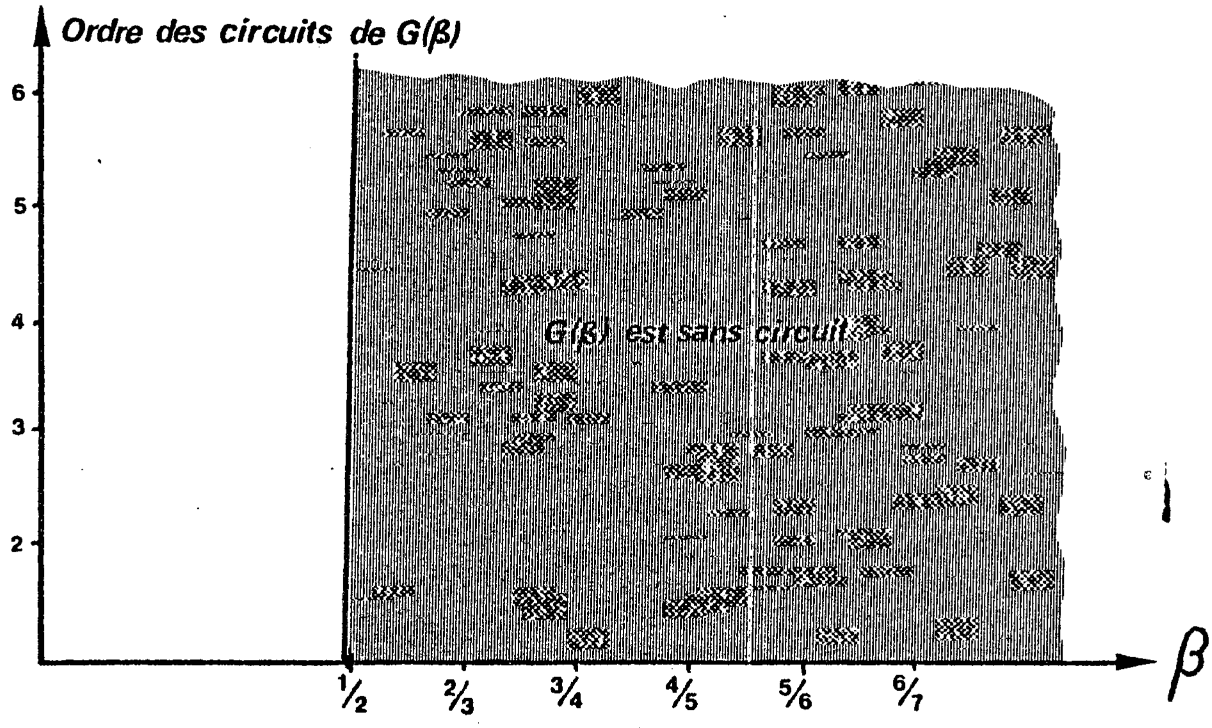
est suffisante pour

que G (β), $\beta \geq \frac{\nu-1}{\nu}$ soit sans circuit. Par exemple : si on ne peut pas extraire de E de carré latin d'ordre 4 (et donc non plus de carré latin d'ordre supérieur), G (β), $\beta \geq 2/3$ est-il sans circuit ?

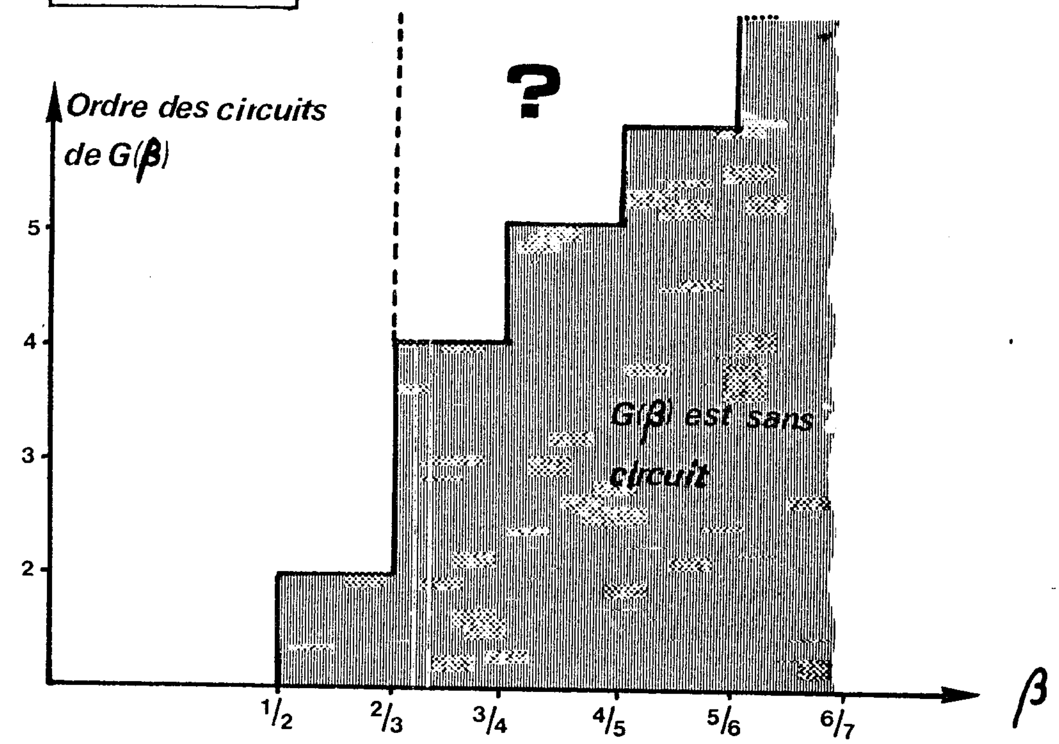
On sait d'après le théorème 1.2.8. que $G(\beta)$ pour $\beta \geq 2/3$, ne contient pas de circuit d'ordre ≤ 4.

Les résultats obtenus jusqu'ici sont présentés dans les figures ci-après.

Cas 1: $\boxed{E \text{ vérifie } W(2)}$



Cas 2: $\boxed{E \text{ vérifie } W(3)}$



Rappel de notation :

Nous désignons par E(Y) la restriction de l'état de l'opinion aux objets de $Y \subsetneq X$.

L'exemple suivant va répondre à la question posée précédemment.

1.2.11 *EXEMPLE* [11]

Soient $|E| = 100$ et $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ l'ensemble des objets à classer. Considérons l'état de l'opinion suivant :

33 ordres : (5, 2, 3, 4, 1)
19 ordres : (1, 5, 2, 3, 4)
18 ordres : (4, 1, 2, 3, 5)
10 ordres : (1, 3, 4, 5, 2)
10 ordres : (4, 1, 3, 5, 2)
10 ordres : (3, 4, 2, 1, 5)

Cet état de l'opinion ne contient pas de carré latin d'ordre ≥ 4 : pour le vérifier, il suffit de restreindre E aux 5 sous-ensembles Y_i de cardinalité 4 de X :

$Y_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y_2 = \{5, 2, 3, 4\}$, $Y_3 = \{1, 5, 3, 4\}$

$Y_4 = \{1, 2, 5, 4\}$, $Y_5 = \{1, 2, 3, 5\}$

On obtient (sans pondération) :

$$E(Y_1) = \{(2,3,4,1),\ (1,2,3,4),\ (4,1,2,3),\ (1,3,4,2),\ (4,1,3,2),\ (3,4,2,1)\}$$

$$E(Y_2) = \{(5,2,3,4),\ (5,2,3,4),\ (4,2,3,5),\ (3,4,5,2),\ (4,3,5,2),\ (3,4,2,5)\}$$

$$E(Y_3) = \{(5,3,4,1),\ (1,5,3,4),\ (4,1,3,5),\ (1,3,4,5),\ (4,1,3,5),\ (3,4,1,5)\}$$

$$E(Y_4) = \{(5,2,4,1),\ (1,5,2,4),\ (4,1,2,5),\ (1,4,5,2),\ (4,1,5,2),\ (4,2,1,5)\}$$

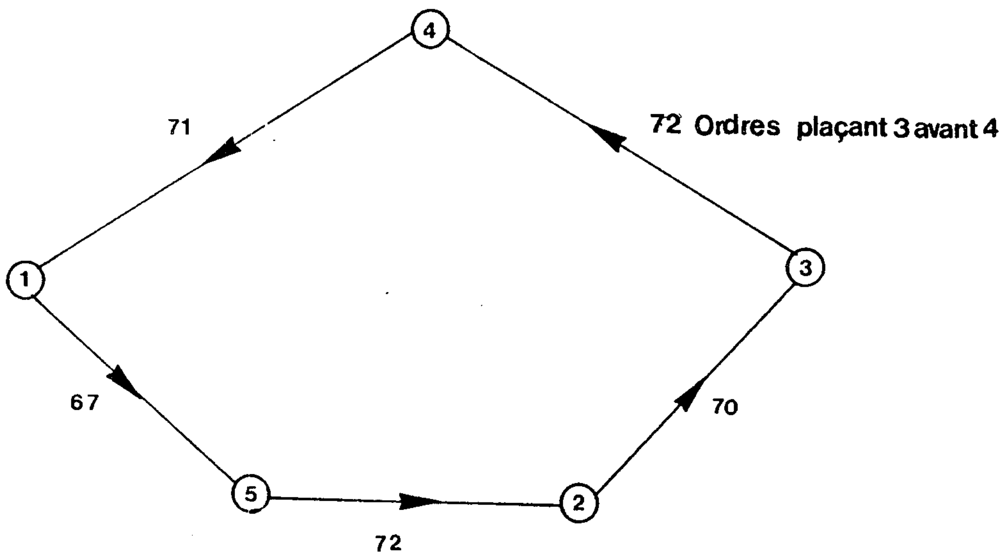
$$E(Y_5) = \{(5,2,3,1),\ (1,5,2,3),\ (1,2,3,5),\ (1,3,5,2),\ (1,3,5,2),\ (3,2,1,5)\}$$

On voit que dans :

- $E(Y_1)$ l'objet "1" n'est jamais en troisième position
- $E(Y_2)$ l'objet "5" n'est jamais en deuxième position
  l'objet "4" n'est jamais en troisième position
  l'objet "3" n'est jamais en quatrième position
- $E(Y_3)$ l'objet "5" n'est jamais en troisième position
  l'objet "3" n'est jamais en quatrième position
- $E(Y_4)$ l'objet "2" n'est jamais en première position
- $E(Y_5)$ l'objet "2" n'est jamais en première position
  l'objet "1" n'est jamais en deuxième position

On en conclut qu'on ne peut pas extraire de E un carré latin d'ordre 4, c'est-à-dire que E vérifie W(3).

Le graphe de surclassement G(2/3) est le suivant :



Le graphe de surclassement contient donc un circuit. Ceci contredit que la génér. lisation de WARD, proposée : "Absence de carré latin d'ordre $\nu + 1$" suffise pour que $G(\beta)$, $\beta \geq \frac{\nu - 1}{\nu}$ ne contienne pas de circuit -pour $\nu > 2$-.

Remarquons que la construction d'un contre-exemple est loin d'être évidente. D'ailleurs, cet exemple répond à une question soulevée par JACQUET-LAGREZE [10]

3 Seuils critiques pour un graphe de surclassement

Soit $G(\beta) = (X, R(\beta))$ un graphe de surclassement donné. Nous allons nous intéresser particulièrement aux seuils notés α et qui seront tous les seuils pour lesquels le graphe de surclassement est sans circuit, et aux seuils notés γ pour lesquels le graphe de surclassement contient un graphe d'un ordre total, c'est-à-dire que la relation de surclassement définie par $R(\beta)$ contiendra un ordre total.

Il est clair que pour un seuil élevé, le graphe de surclassement ne contient pas, en général, de circuit, mais ne contiendra pas de graphe d'un ordre total non plus, tandis que pour un seuil voisin de zéro, $R(\beta)$ contiendra un ordre total, mais contiendra un grand nombre de circuits.

Notons : $\underline{\alpha}$ = seuil minimal pour lequel $R(\beta)$ ne contient pas de circuit,

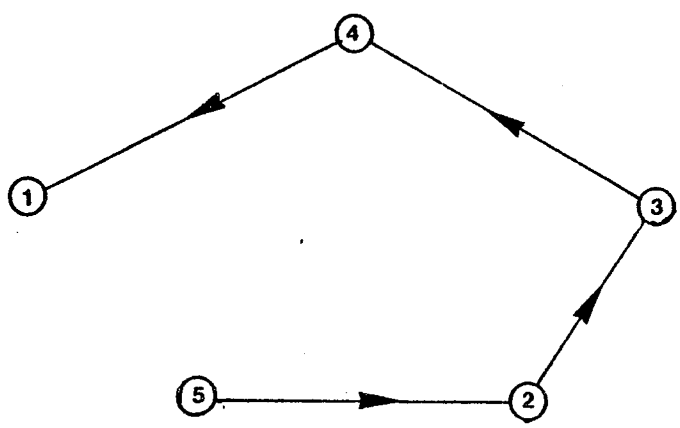
$\overline{\gamma}$ = seuil maximal pour lequel $R(\beta)$ contient un ordre total.

1.3.1. *EXEMPLE* : Reprenons l'exemple 1.2.11.

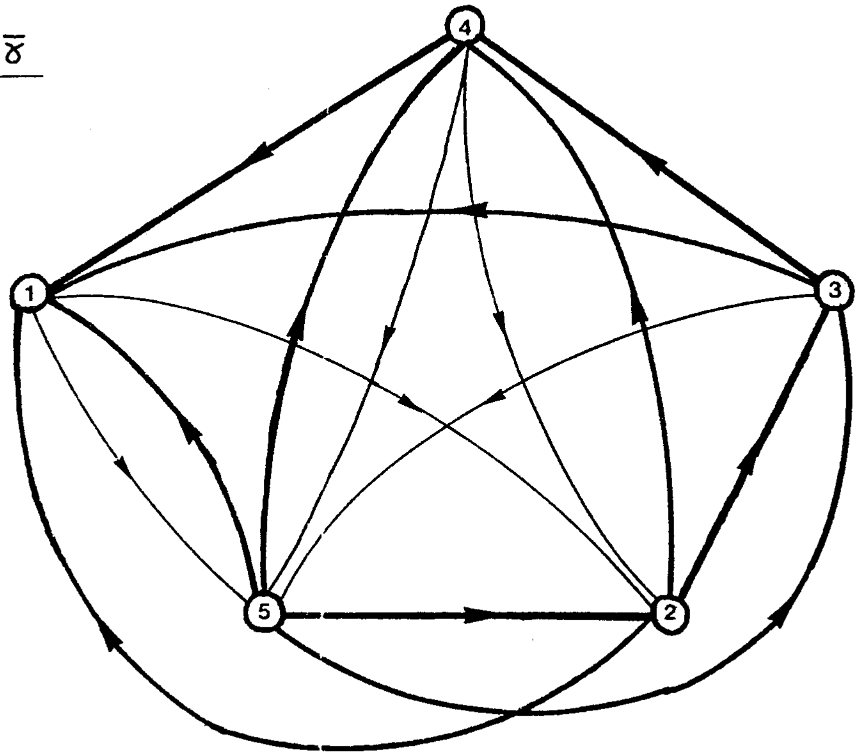
En essayant différents seuils, on trouve $\underline{\alpha} = \frac{67}{100}$ et $\overline{\gamma} = \frac{32}{100}$

Les graphes de surclassement pour ces deux seuils, sont les suivants :

Seuil $\underline{\alpha}$:



SEUIL $\bar{\gamma}$



Nous avons désigné en épais "——" le sous-graphe correspondant à l'ordre total $0 \subset R(\bar{\gamma})$, $0 = (5, 2, 3, 4, 1)$.

Remarquons que dans cet exemple on a : $\underline{\alpha} + \bar{\gamma} = 1 - \frac{1}{m}$, m = 100
Nous allons montrer que cette relation est toujours vérifiée.

Dans la suite, nous supposerons donner un état de l'opinion composé de m ordres totaux sur X, et par souci de simplicité de la présentation, des seuils variant de $\frac{1}{m}$ en $\frac{1}{m}$.

1.3.2. *LEMME*

Soit $\boxed{\gamma + \alpha < 1}$

Si $(y, x) \notin R(\alpha)$ alors $(x, y) \in R(\gamma)$

DEMONSTRATION

Soit $\beta.m$ le nombre d'ordres dans lesquels l'objet y précède l'objet x.
Puisque $(y, x) \notin R(\alpha)$ on a $\beta.m \leq \alpha.m$
et donc $\beta \leq \alpha$ (1)

Le nombre d'ordres dans lesquels x précède y est $(1 - \beta).m$

D'après (1) : $(1 - \beta) \geq (1 - \alpha)$

Or $\gamma + \alpha < 1$ et donc : $(1 - \beta) > \gamma$

On en conclut que $(x, y) \in R(\gamma)$. ■

1.3.3. *PROPOSITION*

Soit $\boxed{\gamma + \alpha < 1}$

Si $R(\alpha)$ ne contient pas de circuit, alors $R(\gamma)$ contient un ordre total.

DEMONSTRATION

Puisque la relation de surclassmeent $R(\alpha)$ ne contient pas de circuit, elle peut être prolongée en un ordre total que nous notons O.

Si x précède y dans O, on a, d'une manière exclusive :

- soit $(x, y) \notin R(\alpha)$ et $(y, x) \notin R(\alpha)$
- soit $(x, y) \in R(\alpha)$ et $(y, x) \notin R(\alpha)$.

Dans les deux cas, en vertu du lemme 1.3.2., $(x, y) \in R(\gamma)$, donc $O \subset R(\gamma)$. ■

1.3.4. *LEMME*

Soit $\boxed{\gamma + \alpha \geq 1 - \frac{1}{m}}$, $m = |E|$

Si $(x, y) \in R(\gamma)$ alors, $(y, x) \notin R(\alpha)$.

DEMONSTRATION:

Soit $\beta \cdot m$ le nombre d'ordres dans lesquels y précède x, donc $(1 - \beta) \cdot m$ est le nombre d'ordres dans lesquels x précède y.

$$(x, y) \in R(\gamma) \Longleftrightarrow (1 - \beta) > \gamma \Longleftrightarrow \beta < (1 - \gamma) \qquad (1)$$

Puisque $\gamma + \alpha \geq 1 - \frac{1}{m}$
ou $1 - \gamma \leq \alpha + \frac{1}{m}$. On obtient d'après (1): $\beta < \alpha + \frac{1}{m}$

Puisque α varient de $\frac{1}{m}$ à $\frac{1}{m}$ on obtient : $\beta \leq \alpha$

Mai ceci implique que $(y, x) \notin R(\alpha)$. ■

1.3.5. *PROPOSITION*

> Soit $\boxed{\gamma + \alpha \geq 1 - \frac{1}{m}}$
>
> Si $R(\gamma)$ contient un ordre total, alors $R(\alpha)$ ne contient pas de circuit

DEMONSTRATION

Soit $Y \subseteq X$. Il existe dans Y un objet qui dans $R(\gamma)$ précède (resp. ne précède pas) tous les autres éléments de Y.

D'après le lemme 1.3.4., ce même objet n'a aucun précédent (resp. aucun successeur) dans $R(\alpha)$. Les objets de Y ne sauraient donc constituer un cycle de $R(\alpha)$. ■

Le rapprochement des deux propositions précédentes nous fournit le théorème suivant :

1.3.6. *THEOREME*

Soit $\boxed{\gamma + \alpha = 1 - \frac{1}{m}}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) $R(\alpha)$ ne contient pas de circuit,
2) $R(\gamma)$ contient un ordre total.

Remarquons que ce théorème n'est plus vrai si :

$$\gamma + \alpha \geq 1 \quad \text{ou} \quad \gamma + \alpha < 1 - \frac{1}{m}$$

1.3.7. *CONCLUSION* [11]

$$\boxed{\underline{\alpha} + \overline{\gamma} = 1 - \frac{1}{m}} \quad , \; m = |E|$$

REMARQUE : Le plus grand seuil β pour lequel $G(\beta)$ contient un circuit est donc :

$$\beta = \underline{\alpha} - \frac{1}{m} = 1 - \overline{\gamma} - \frac{2}{m}$$

Une procédure rapide pour déterminer $\bar{\gamma}$: [11]

1.3.8. *DESCRIPTION DE LA PROCEDURE*

Soit X = $\{x_1 , \ldots, x_n\}$ l'ensemble des objets à classer.

ETAPE 1 : Construire le tableau des P_{ij} = nombre d'ordres dans lesquels x_i précède x_j .

Les objets de X sont dits non classés.

ETAPE 2 : Chercher sur le tableau le seuil maximal pour lequel un objet surclasse tous les objets non classés. Classer l'objet correspondant à la suite des objets déjà classés.

Retirer du tableau les P_{ij} correspondants.

ETAPE 3 : Réitérer l'étape 2 jusqu'à ce que l'on obtienne un ordre total sur X. Le minimum des seuils trouvés à l'étape 2 donne le seuil $\bar{P}$ et l'ordre total construit sur X est contenu dans $R(\bar{\gamma})$ où

$$\bar{\gamma} = (\bar{P} - 1) . \frac{1}{m}$$

Exemple et disposition pratique des calculs

Reprenons l'exemple 1.2.11. Le tableau des P_{ij} s'écrit :

	57	57	29	67
43		70	52	28
43	30		72	48
71	48	28		48
33	72	52	52	

- Le premier seuil s'obtient en cherchant le maximum des minimum pour chaque ligne :

$$33 = \max \ (29, 28, 30, 28, 33)$$

x_5 est classé en tête, on supprime la 5ème ligne et la 5ème colonne du tableau.

- Le second seuil est égal à 43 et x_2 est classé en second.
- Le troisième seuil est égal à 43 et x_3 est classé troisième.
- Le quatrième seuil est égal à 71 et x_4 est classé quatrième.

$\overline{P} = \min \left\{ 33, 43, 43, 71 \right\} = 33$

donc $\overline{\gamma} = \dfrac{32}{100}$ et l'ordre O correspondant est :

$O = (x_5 , x_2 , x_3 , x_4 , x_1)$. (cf. exemple 1.3.1.).

JUSTIFICATION

Soit E un état de l'opinion formé de m ordres totaux sur un ensemble X de n objets.
L'apllication de la procédure nous a conduit à un ordre O obtenu pour un seuil $\overline{P} = P_{\ell q}$

Supposons qu'il existe un autre ordre O' correspondant à un seuil $P' = \min\limits_{(x_i, x_j) \in O} P_{ij}$

Notons Y l'ensemble des successeurs de x_ℓ dans O.

- Si x_ℓ est également en tête de Y dans O' c'est que : $P' \leq P_{\ell q} = \overline{P}$

- Si x_ℓ n'est pas en tête de Y dans O', c'est donc qu'il est dominé dans O' par un élément y et donc :

$$P' = \min_{(x_i, x_j) \in O'} P_{ij} \leq \min_{(x_i, x_j) \in O(Y)} P_{ij}$$

$\leq$ min P_{ij} de la ligne correspondant à y dans le tableau restreint aux objets de Y.

$\leq$ Par construction, au min P_{ij} de la ligne de x du tableau restreint aux objets de Y.

$= \overline{P}$

P' est donc bien maximal. On vérifie trivialement que l'ordre obtenu par réitération de l'étape 2 est contenu dans $R(\overline{\gamma})$ où $\overline{\gamma} = (\overline{P} - 1) / m$.

D'après 1.3.7. on a : $\underline{\alpha} + \overline{\gamma} = 1 - \frac{1}{m}$

Donc si $\overline{P}$ désigne le seuil obtenu par la procédure précédente, on a :

$$\underline{\alpha} = 1 - \frac{1}{m} - \overline{\gamma}$$
$$= 1 - \frac{1}{m} - (\overline{P} - 1) / m$$

1.3.9. $$\boxed{\underline{\alpha} = 1 - \frac{\overline{P}}{m}}$$

<u>REMARQUE</u> : L'ordre inverse de O va minimiser la valeur maximale des P_{ij}

La procédure permet également de résoudre les problèmes plus généraux suivants[11] :

P1:

> Soit G(X, U) un graphe simple, complet et symétrique, orienté et valué aux arcs.
> Trouver le tournoi transitif contenu dans G qui maximise la valeur de son arc minimal.

P'1:

> Soit G(X, U) un graphe simple, complet et symétrique, orienté et valué aux arcs.
> Trouver le tournoi transitif contenu dans G qui minimise la valeur de son arc minimal (en échangeant dans la procédure la recherche des maxima et celle des minima).

P2:

> Soit G(X, U) un graphe simple, orienté, asymétrique (pas nécessairement complet).
> - G(X, U) contient-il un circuit ?
>   Ce qui revient au même :
> - Peut-on prolonger la relation de surclassement définie par les arcs de G en ordre total ?

Procédure pour P2:

Soit H(X, V) le graphe simple complet et symétrique, orienté et valué aux arcs de la façon suivante :

1) Si $(x_i, x_j) \in U$ alors (x_i, x_j) a la valeur 1
et (x_j, x_i) a la valeur 0

2) Si $(x_i, x_j) \notin U$ et $(x_j, x_i) \notin U$ alors chacun de ces deux arcs a la valeur 1/2

Appliquons la procédure précédente pour le tableau des P_{ij} = valeur de l'arc (x_i, x_j). On a :

$$\boxed{\bar{P} \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow G(X, U) \text{ est sans circuit}}$$

<u>En effet</u> :

- Si G contenait un circuit, alors il existerait au moins un arc (x, y) de ce circuit qui n'appartiendrait pas au tournoi défin par l'ordre obtenu par la procédure. Donc l'arc (y, x) appartiendrait nécessairement au tournoi. Puisque (y, x) a la valeur 0, on obtiendrait $\overline{P} = 0$

- De l'autre côté, si G(X, U) est sans circuit, on vérifie trivialement que $\overline{P} \geq \frac{1}{2}$.

D'ailleurs, si $\overline{P} = 1$, alors G(X, U) est un graphe d'un ordre total.

1.3.10. *Une règle d'agrégation des opinions* : [11]

Si l'on prend pour opinion collective un des ordres totaux correspondant au seuil $\overline{P}$ et donné par la procédure précédente (1.3.8.) on sera certain d'avoir satisfait au moins $\overline{P}$ votants sur toutes les préférences binaires.

Il est bien clair, par ailleurs, que cette règle prolonge la méthode majoritaire dans le cas où celle-ci donne un ordre total.

On peut voir facilement que cette règle viole l'axiome d'indépendance d'ARROW. Considérons par exemple l'état de l'opinion suivant :

- 42 votants préfèrent x_1 à x_2 à x_3
- 25 votants préfèrent x_2 à x_3 à x_1
- 33 votants préfèrent x_3 à x_1 à x_2

Le tableau des P_{ij} correspondants est donné ci-après :

	75	42
25		67
58	33	

Notre méthode conduit à (x_1, x_2, x_3). Restreinte à $Y = \{x_1, x_3\}$ elle donne (x_3, x_1)

Si on la compare à la méthode JACQUET-LAGREZE qui cherche à maximiser $\sum_{(x_i, x_j) \in O} P_{ij}$ et qui peut être considérée comme "compensatoire", la méthode que nous proposons, qui cherche à maximiser $\min_{(x_i, x_j) \in O} P_{ij}$, peut être considérée comme "non compensatoire".

REMARQUE

Même dans des cas où ces deux méthodes aboutissent à un même ordre, la méthode majoritaire peut ne pas être applicable. C'est le cas dans l'exemple cité précédemment.

1.3.11. *Une CNS pour que $G(\frac{\nu-1}{\nu})$ soit sans circuit:*

Soit E un état de l'opinion donné sur X.
Soit $Y \subseteq X$.

Nous allons dire qu'un objet $y \in Y$ est "sélectionné" ("rejeté") à la majorité de $(\frac{\nu - 1}{\nu})$ si l'on ne peut trouver dans $Y - \{y\}$ un objet préféré à y (auquel y est préféré) par strictement plus de $\frac{\nu - 1}{\nu} \cdot |E|$ votants.

Nous allons montrer que les trois conditions suivantes sont nécessairement suffisantes pour que $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ soit sans circuit :

CNS 1 : Pour tout $Y \subseteq X$ il existe un objet "sélectionné"

CNS 2 : Pour tout $Y \subseteq X$ il existe un objet "rejeté"

CNS 3 : Pour tout $Y \subseteq X$, $|Y| \geq 2$ il existe un objet w "sélectionné" et un objet z "rejeté" et $w \neq z$.

Remarquons qu'un objet "non rejeté" correspond dans le sous-graphe $G_Y(\frac{\nu - 1}{\nu})$ de $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ à une source, un objet "non sélectionné" à un puits.

La proposition suivante montre (dans un cas plus général) que ces trois conditions sont équivalentes.

1.3.12 *PROPOSITION* [11]

Pour un graphe $G = (X, U)$ orienté, sans boucle, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1°) G est sans circuit

2°) Tout sous-graphe $G_Y = (Y, U_Y)$ contient au moins un puits

3°) Tout sous-graphe $G_Y = (Y, U_Y)$ contient au moins une source

4°) Tout sous-graphe $G_Y : (Y, U_Y)$ contient au moins un puits z et une source w, et $z \neq w$. ($|Y| \geq 2$).

DEMONSTRATION

a) (1) $\Rightarrow$ (2) Soit G_Y un sous-graphe de G. Dans ce sous-graphe un voyageur qui suit le sens des arcs ne rencontre jamais deux fois le même sommet (sinon G contiendrait un circuit). Puisque le graphe est fini, il arrive finalement à un sommet z de Y, tel que $d^+(z) = 0$, donc z est un puits.

b) (2) $\Rightarrow$ (3) Soit G_Y un sous-graphe de G. Le voyageur qui suit le sens inverse des arcs ne peut jamais rencontrer le même sommet. En effet sinon G_Y contiendrait un circuit et le sous-graphe de G_Y restreint aux sommets du circuit ne contiendrait pas de puits. Donc le voyageur arrive finalement à un sommet w tels que $d^-(w) = 0$, donc w est une source.

c) (3) $\Rightarrow$ (4) Une source w n'est équivalente à un puits que s'il s'agit d'un sommet isolé. Dans ce cas, il reste d'autres sommets dans $G_{Y-\{w\}}$ auxquels le raisonnement de (b) s'applique.

d) (4) $\Rightarrow$ (1) Montrons que $\neg$ (1) $\Rightarrow \neg$ (4). Ceci est évident, puisque si G contenait un circuit, le sous-graphe correspondant aux sommets du circuit ne contiendrait ni source et ni puits.

■

CHAPITRE II

Généralisation de l'unimaximalité et de l'uniminimalité

Introduction

La condition de WARD (et en particulier les formes d'unimaximalité et d'uniminimalité) (*) est suffisante pour qu'au seuil $\beta = \frac{1}{2}$, $G(\beta)$ soit sans circuit. Evidemment, elle est aussi suffisante pour qu'avec un seuil supérieur à $\frac{1}{2}$, $G(\beta)$ soit sans circuit. Mais cette condition est loin d'être nécessaire !

Nous allons proposer pour des seuils supérieurs à $\frac{2}{3}$, des conditions suffisantes beaucoup moins restrictives.

Nous avons vu au chapitre 1 que la généralisation suivante de la condition de WARD "On ne peut trouver d'ensemble d'opinions individuelles formant un carré latin latin d'ordre $(\nu+1)$" n'implique pas que le graphe $G(\frac{\nu-1}{\nu})$, $\nu \geq 3$ soit sans circuit.

Par contre, on peut généraliser d'une manière naturelle et efficace, les conditions d'unimaximalité et d'uniminimalité. Cette généralisation est l'objet du présent chapitre.

Applons $B(\nu)$ (resp. $I(\nu)$) ces conditions généralisées. Il est, d'autre part, bien connu, que la condition de "single-peakedness" est un cas particulier de d'unimaximalité, la "single-cavedness" un cas particulier de l'uniminimalité.

Ces deux conditions, single-peakedness et single-cavedness, sont définies par rapport à un ordre de référence R ; elles ont l'avantage de se prêter à la représentation graphique et à l'interprétation psychologique.

(*) Connues dans la littérature sous les noms : "Condition de Black" et "Condition d'Inada", abandonnées ici en raison du caractère symétrique qu'elles présentent en fait.

Dans le même ordre d'idées, on présente au paragraphe 2, la condition "montagneus qui est à la fois un cas particulier de l'unimaximalité et une généralisation de la condition de BLACK.

Cette condition est elle aussi représentable graphiquement ; de plus on peut lui associer un modèle de comportement de choix individuel. Remarquons que les mêmes raisonnements sont valables pour la condition "inverse" de B(γ), la condition I(γ), puisque si un ensemble d'ordres vérifie B(γ), l'ensemble des ordres inversés vérifie I(γ).

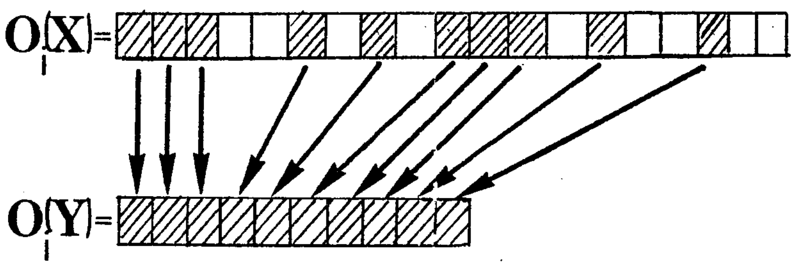
NOTATIONS DU CHAPITRE IV

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble des objets à classer, $n = |X|$.

Soit E ou E(X) un état de l'opinion sur X, $m = |E|$

Soit $O_i(X)$, $i = 1, \ldots, m$ les ordres individuels sur X formant l'état de l'opinion E.

On notera la restriction de l'ordre $O_i(X)$ aux objets de $Y \subseteq X$. Pour faciliter la compréhension intuitive de certains théorèmes, on utilisera par la suite des schémas du type suivant :



où  désigne un objet de Y

L'ensemble des $O_i(Y)$ pour $i = 1, \ldots, m$ sera noté E(Y), restriction de E(X) aux objets de Y.

1 Les conditions B(ν) et I(ν) [12]

2.1.1. *DEFINITION* $\boxed{B(\nu), I(\nu)}$

Soit ν un entier naturel, $\nu < |X|$.
Un état de l'opinion E obéit à la *condition* $B(\nu)$ ($I(\nu)$) si et seulement si pour tout sous-ensemble Y de X, $|Y| = \nu + 1$ il existe au moins un objet de Y qui ne se trouve jamais placé au dernier rang (premier rang) de E(Y).

2.1.2. *THEOREME* [ ]

Si un état de l'opinion E obéit à la condition $B(\nu)$ ($I(\nu)$) alors le graphe de surclassement $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ est sans circuit.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme suivant :

2.1.3. *LEMME*

Un état de l'opinion E obéit à la condition $B(\nu)$ ($I(\nu)$) si et seulement si les objets de Y placés au dernier (premier) rang de E(Y) sont en nombre strictement inférieur à $\nu + 1$.

Remarquons que la seule différence avec la définition 2.1.1. est qu'on n'a plus la restriction : $|Y| = \nu + 1$.

<u>DEMONSTRATION</u> (dans le cas $B(\nu)$):

a) La condition est évidemment suffisante.
b) Condition nécessaire:
Soit E un état de l'opinion vérifiant $B(\nu)$.
Soit $Y \subseteq X$ et notons W l'ensemble des objets placés au dernier rang de E(Y) et supposons que $|W| \geq \nu + 1$.

Considérons maintenant n'importe quel sous-ensemble W' de W avec $|W'| = \nu + 1$. Tous les objets de W' sont classés au moins une fois derniers dans un des ordres de E (W'), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Démontrons le théorème 1 pour la condition B(ν). La démonstration serait analogue si E vérifiait I(ν).

DEMONSTRATION:

Nous allons montrer que dans tout sous-graphe $G_Y\left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right)$ du graphe de surclassement $G\left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right)$ il existe un puits. On peut en déduire que $G\left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right)$ lui-même est sans circuit (cf. 1.3.11).

Soit donc E un état de l'opinion vérifiant B(ν). Le lemme 2.1.3. nous indique que pour tout $Y \subseteq X$ il existe au plus ν objets différents placés au dernier rang dans E(Y).

Soit $m = |E(X)|$.

Il existe donc pour tout Y un objet y de Y classé dernier dans $\left\lceil \frac{m}{\nu} \right\rceil$ ordres de E(Y) ($\lceil\,\rceil$ partie entière par excès).

Considérons le sous-graphe $G_Y\left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right) = \left(Y, U_Y\left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right)\right)$. Dans ce sous-graphe y est un puits. En effet :

Pout tout $x \in Y - \{y\}$ le nombre d'ordres de E(Y) où l'on trouve x placé avant y est supérieur ou égal à $\frac{m}{\nu}$.

Le nombre d'ordres dans lesquels y est placé avant x est donc inférieur à $m - \frac{m}{\nu} = \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot m$.
Donc quel que soit $x \in Y - \{y\}$, l'arc (x, y) n'appartient pas à $U_Y\left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right)$. ∎

Dans la suite de ce chapitre nous ne considérons que les états de l'opinion qui vérifient la condition B(ν). Les résultats et les démonstrations sont analogues lorsque les états de l'opinion vérifient la condition I (ν).

2 La condition $B(\nu)$ par rapport à un ordre de référence [12]

NOTATIONS

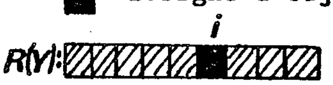
$R(X) = (r_1, \dots, r_n)$ désigne un ordre de référence sur les objets de X. Soit Y un sous ensemble de X. On notera R(Y) la restriction de cet ordre aux objets de Y.

2.2.1. *DEFINITION* $\boxed{B(\nu, i, R)}$

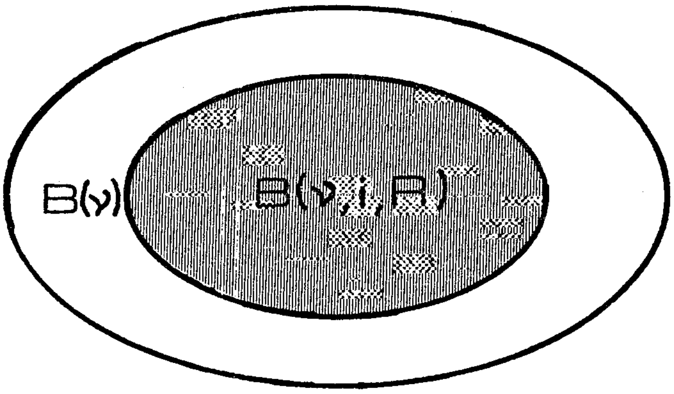
> Soient ν et i deux entiers donnés vérifiant : $1 \leq i \leq \nu + 1 \leq X$ et R(X) un ordre de référence sur les objets de X.
>
> Un état de l'opinion E obéit à la *condition* $B(\nu, i, R)$ si et seulement si pour tout sous-ensemble Y de $\nu + 1$ objets de X l'objet placé au rang i dans R(Y) ne se trouve jamais placé au dernier rang de E(Y).

désigne les objets de Y

désigne l'objet placé au rang i dans R(Y)



On voit que la condition $B(\nu, i, R)$ est un cas particulier de la condition $B(\nu)$. On trouve facilement des états de l'opinion E vérifiant $B(\nu)$ mais qui ne vérifient pas $B(\nu, i, R)$.



Donc un état de l'opinion qui vérifie la condition $B(\nu, i, R)$ vérifie aussi la condition $B(\nu)$. On en déduit immédiatement le :

2.2.2. *THEOREME*

> Si un état de l'opinion obéit à la condition $B(\nu, i, R)$ alors le graphe de surclassement $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ est sans circuit.

L'intérêt de la condition $B(\nu, i, R)$ provient de ce qu'on peut lui associer un :

2.2.3. ***Mécanisme de choix individuel*:**

Soit $R = (r_1, \cdots, r_n)$ l'ordre de référence et soient ν et i donnés.
Désignons par A_0 l'ensemble des $(i - 1)$ premiers objets de R et par D_0 l'ensemble des $(\nu + 1 - i)$ derniers objets de R.

$$R(X): \underbrace{\boxed{r_1}\boxed{\cdots}\boxed{r_{i-1}}}_{A_0}\boxed{r_i}\boxed{\cdots\cdots}\underbrace{\boxed{r_{n+i-\nu}}\boxed{\cdots}\boxed{r_n}}_{D_0}$$

Imaginons un votant construisant "son" ordre de la manière suivante :

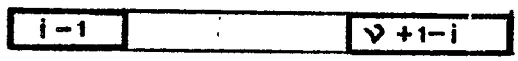
1) Il choisit un objet quelconque de $A_0 \cup D_0$ et et le place en n-ième position, c'est-à-dire au dernier rang.

2) Soit X_1 l'ensemble des (n-1) objets restant à classer. Comme précédemment, soit A_1 l'ensemble des (i - 1) premiers objets de R(X) et D_1 l'ensemble des (ν + 1 - i) derniers.

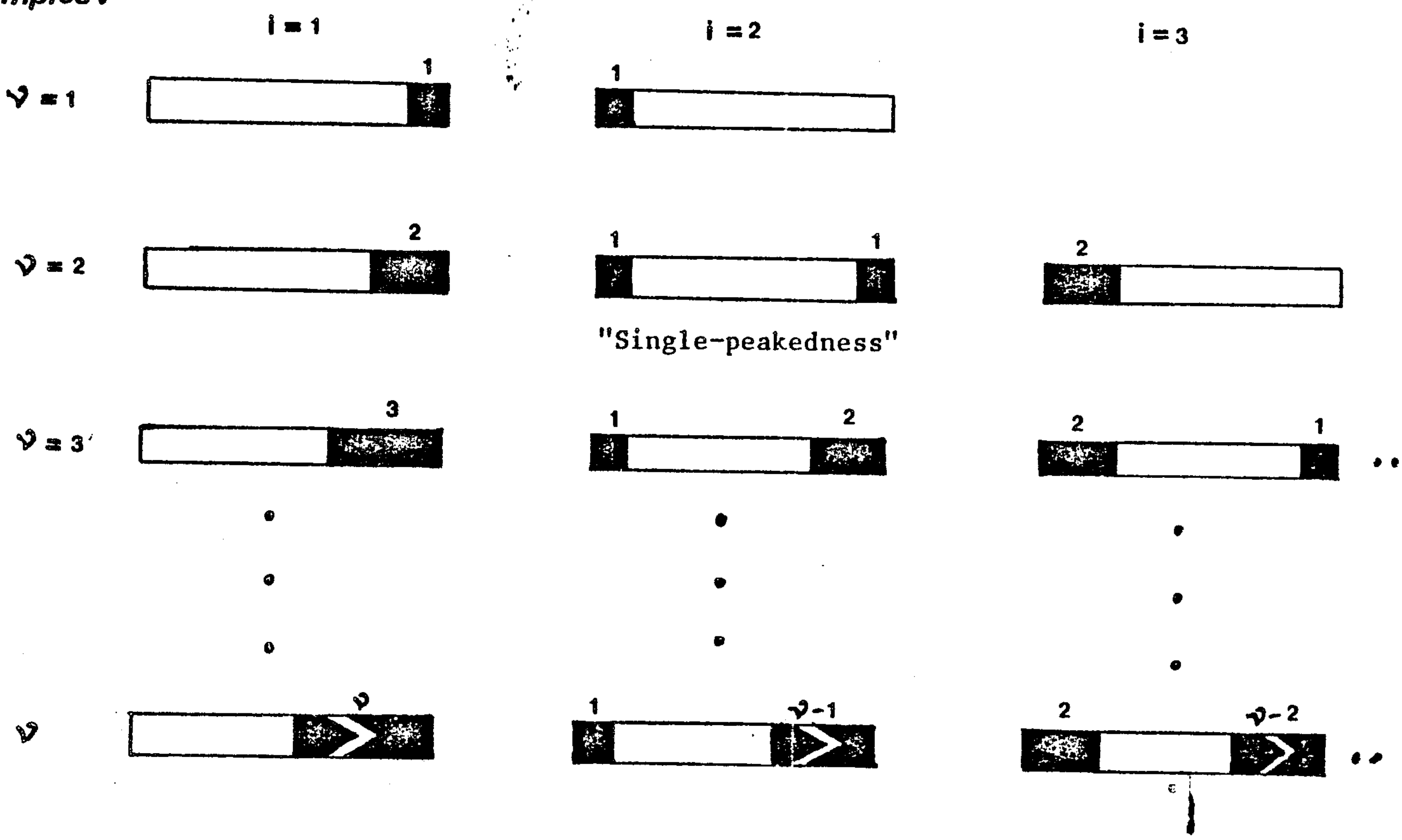
Dans $A_1 \cup D_1$ il choisit un objet quelconque qu'il place au (n - 1) ième rang et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que ν objets non classés.

3) Le votant classe alors sans contrainte les ν objets dans les ν premiers rangs de son ordre.

ν, i et R étant donnés, on utilisera par la suite, le schéma du type suivant pour présenter intuitivement le mécanisme de choix individuel correspondant :

R : 

Exemples :



Nous allons montrer que l'ensemble des ordres construits de cette façon est identique à l'ensemble des ordres vérifiant la condition $B(\nu, i, R)$. R, i et ν étant donnés, notons $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des ordres construits par l'algorithme précédent et $\mathcal{E}_B$ l'ensemble des ordres vérifiant la condition $B(\ , i, R)$.

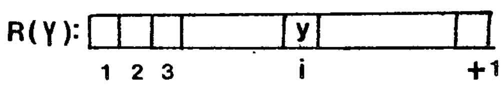
2.2.4. *PROPOSITION* $\boxed{\mathcal{E}_A \equiv \mathcal{E}_B}$ pour ν, i et R donnés.

DEMONSTRATION

1) $\boxed{\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B}$ c'est-à-dire tout ordre obtenu par l'algorithme vérifie $B(\nu, i, R)$.

Soit $O \in \mathcal{E}_A$ et soit $Y \subseteq X$, $|Y| = \nu + 1$.

Il s'agit de montrer que l'objet y occupant le rang i dans $R(Y)$ n'occupe jamais le dernier rang dans $O(Y)$.



En effet, pour qu'on puisse classer y en appliquant l'algorithme, il faut que

- soit y appartienne aux "$(i - 1)$ premiers objets" de R,
- soit y appartienne aux "$(\nu + 1 - i)$ derniers objets" de R,
- soit y appartienne aux derniers ν objets à classer (cf. 2.2.3. 3°)).

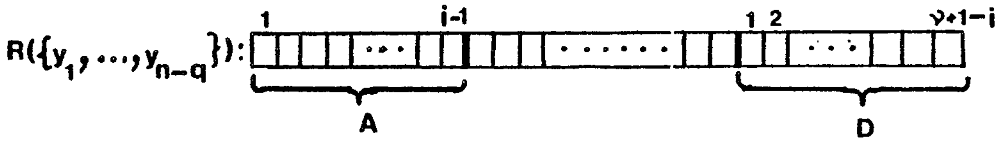
Dans ces trois cas, il faut qu'au moins un des objets de $Y - \{y\}$ ait déjà été classé, et donc classé derrière y.

2) $\boxed{\mathcal{E}_B \subseteq \mathcal{E}_A}$ c'est-à-dire tout ordre vérifiant $B(\nu, i, R)$ peut être obtenu par l'algorithme.

Soit $R = (r_1, \ldots, r_n)$ et soit $O = (y_1, \ldots, y_n)$ un ordre de $\mathcal{E}_B$

Soit $q \in \{0, 1, \ldots, n - \nu - 1\}$. Nous allons montrer que l'objet y appartient nécessairement à la réunion des $(i - 1)$ premiers objets de $R(\{y_1, \ldots, y_{n-q}\})$ et des $(\nu + 1 - i)$ derniers.

Notons A l'ensemble des premiers $(i - 1)$ objets de $R(\{y_1, \ldots y_{n-q}\})$ et D l'ensemble des derniers $(\nu + 1 - i)$ objets de $R(\{y_1, \ldots, y_{n-q}\})$.



Si l'objet y_{n-q} n'appartenait pas à l'ensemble $A \cup D$, y_{n-q} classé en queue dans $O(\{A \cup D \cup y_{n-q}\})$ occuperait le rang i dans $R(\{A \cup D \cup y_{n-q}\})$. Ceci serait en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle $O \in \mathcal{E}_B$.

L'algorithme précédent permet donc de construire l'ordre O de l'objet y_n jusqu'à l'objet $y_{\nu+1}$.

Les ν premiers objets de O peuvent aussi être placés par l'algorithme puisque ces objets sont placés sans contrainte.

Donc si $O \in \mathcal{E}_B$ alors, O peut être obtenu au moyen de l'algorithme précédent, c'est-à-dire $O \in \mathcal{E}_A$.

L'algorithme précédent nous permet de déterminer la cardinalité de $\mathcal{E}_B$ pour ν, i et R fixés:

2.2.5. *PROPOSITION*

> Soient $\nu \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq \nu + 1 \leq |X|$.
> et R un ordre de référence sur X, $|X| = n$. On a :
>
> $$\boxed{|\mathcal{E}_B| = \begin{cases} \nu! \cdot \nu^{n-\nu} & \text{si } n \geq \nu \\ n! & \text{si } n < \nu \end{cases}}$$

DEMONSTRATION :

Chacun des $(n - \nu + 1)$ premiers pas de l'algorithme permet ν choix possibles. Pour classer les $(\nu - 1)$ derniers objets on a $(\nu - 1)$! choix possibles. On a donc $\nu! \cdot \nu^{n-\nu}$ ordres possibles vérifiant $B(\nu, i, R)$.

Une représentation intuitive de la condition $B(\nu, i, R)$:

Soit $R = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ un ordre de référence et O un ordre quelconque sur X. Soient 2 axes orthogonaux dans le plan. Plaçons en abcisse les objets selon l'ordre R et en ordonnée les rangs 1, 2,...., n. Si l'objet r_k est placé au rang j dans O, on dessine un point en (r_k, j). On peut ainsi représenter O par n points du plan. Si l'on joint de la gauche vers la droite ces points, on obtient une courbe représentant O.

Ex. : $R = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ $\qquad O = (r_5, r_2, r_3, r_4, r_1)$

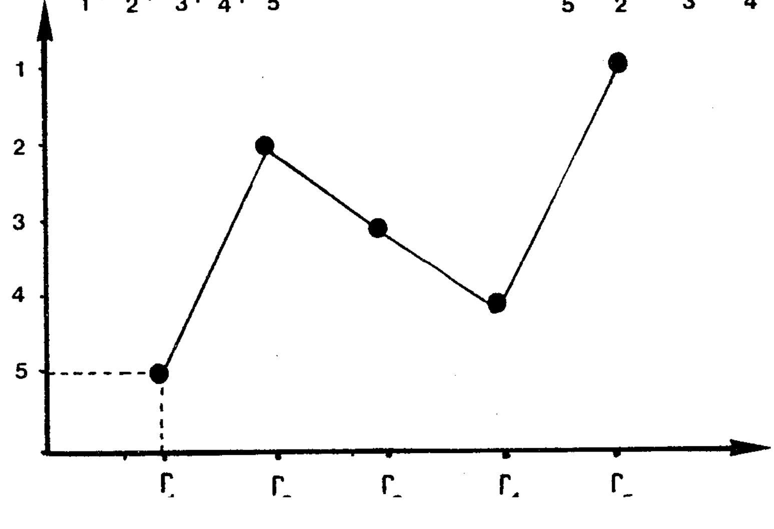


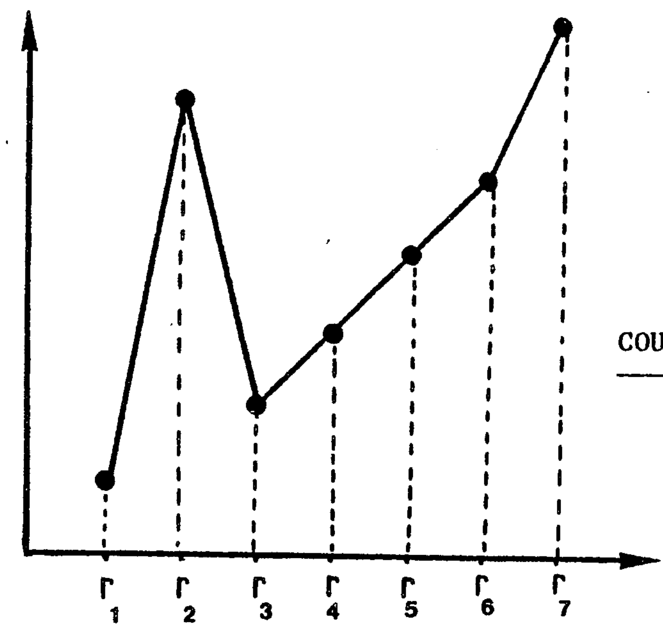
Figure 1

2.2.6. On dit qu'une telle courbe est *alpine croissante* (resp. décroissante) *de degré s* si et seulement si :

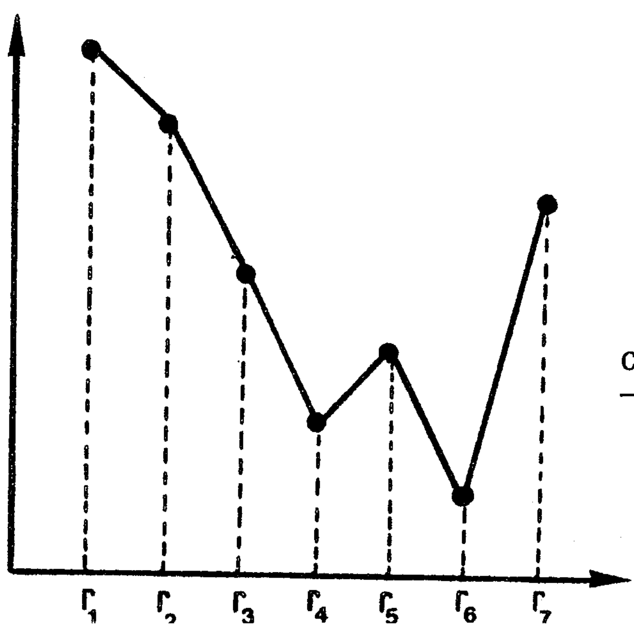
Un objet r_j placé au rang j dans R n'est jamais surclassé par plus de (s - 1) objets occupant dans R un rang inférieur (resp. supérieur) à j.

Ce qui s'écrit : Pout tout $r_j \in X$ il existe au plus (s - 1) objets appartenant à $X = \{r_1, \ldots, r_{j-1}\}$ (resp. $X = \{r_{j+1}, \ldots, r_n\}$) qui précédent r_j dans O.

Dans l'exemple précédent Fig. 1, la courbe est une courbe alpine croissante de degré 3, ou une courbe alpine décroissante de degré 5. Exemples :



COURBE ALPINE CROISSANTE DE DEGRE 2

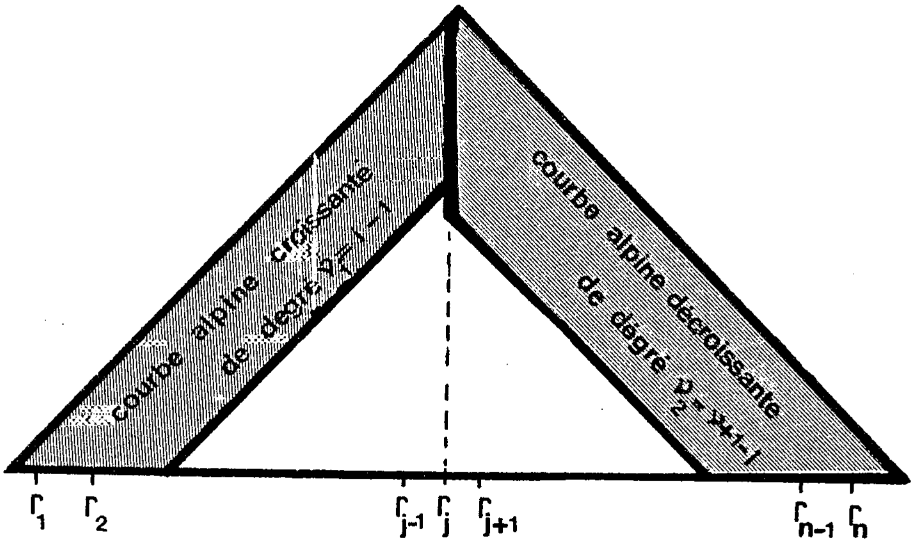


COURBE ALPINE DECROISSANTE DE DEGRE 3

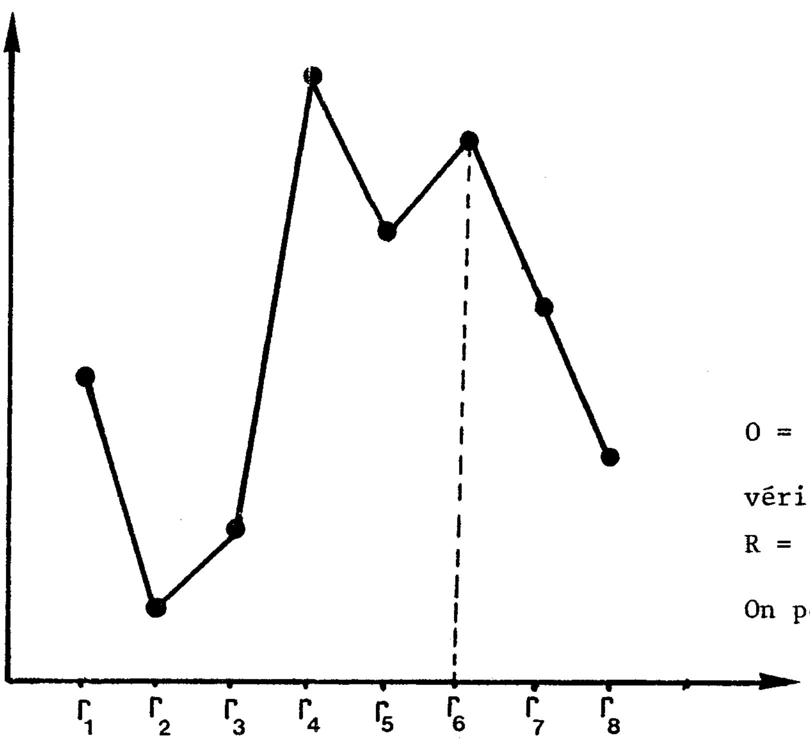
2.2.7. DEFINITION $\boxed{M(\nu, i, R)}$

Soient ν et i deux entiers donnés vérifiant $1 \leq i \leq \nu + 1 \leq |X|$
et $R = (r_1, \cdots, r_n)$ un ordre de référence sur X.
Un ordre O est *montagneux* par rapport à R (ou vérifie M(ν, i, R)) si
et seulement si :
Il existe un indice j, $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tel que :

. O $(\{r_1, \cdots, r_j\})$ soit une courbe alpine croissante de degré $\nu_1 = i -$
.. O $(\{r_{j+1}, \cdots, r_n\})$ soit une courbe alpine décroissante de degré $\nu_2 = \nu + 1 -$



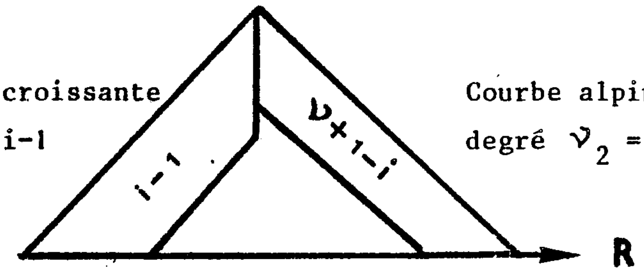
Ex. :



$O = (r_4, r_6, r_5, r_7, r_1, r_8, r_3, r_2$
vérifie M(3, 3, R) avec
$R = (r_1, r_2, \ldots, r_8)$
On peut prendre par ex. j =

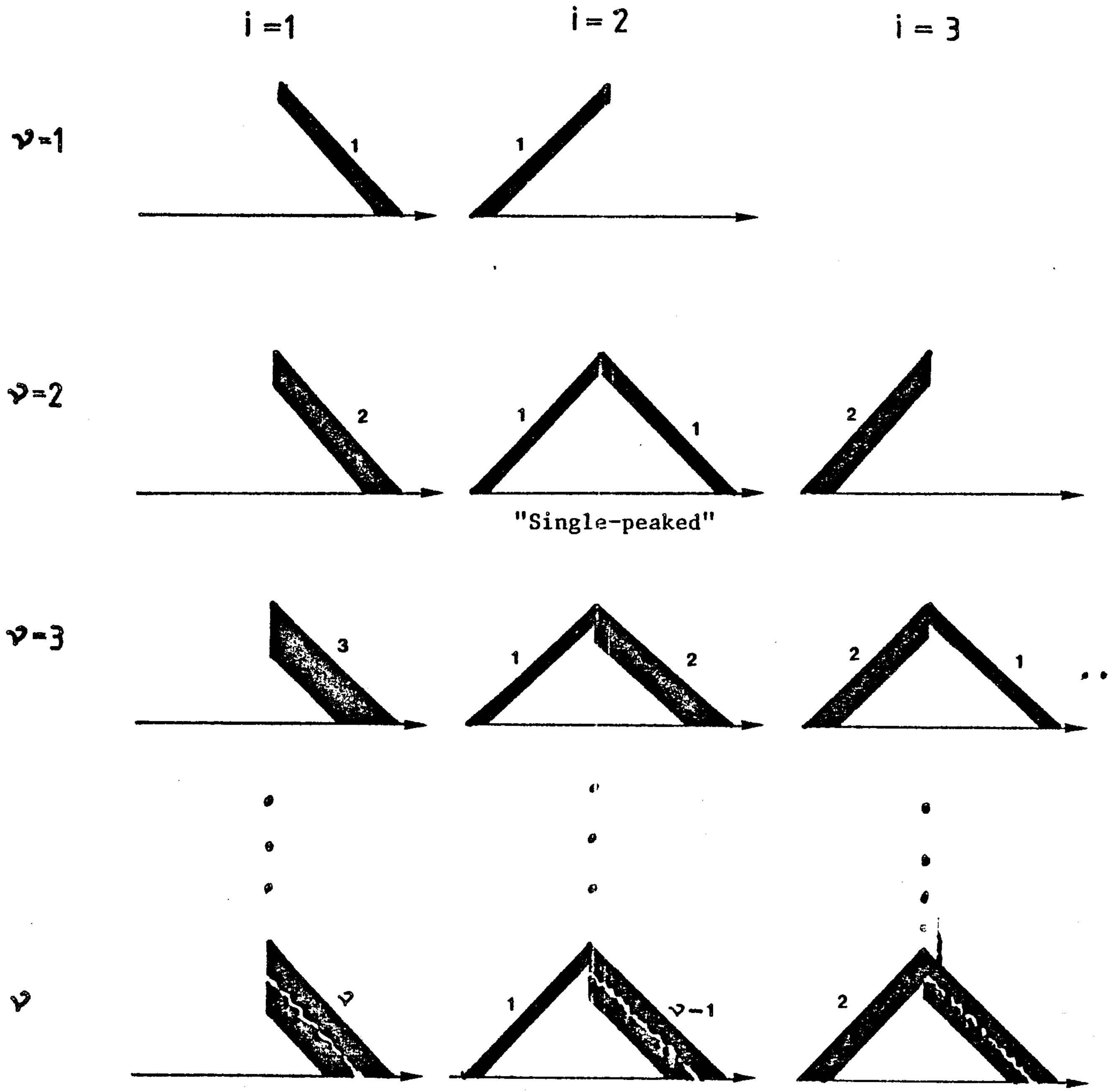
ν, i et R étant donnés, on utilisera par la suite, le schéma du type suivant pour présenter intuitivement un ordre montagneux (cf. 2.2.3.).

Courbe alpine croissante de degré $\nu_1 = i-1$



Courbe alpine décroissante de degré $\nu_2 = \nu + 1 - i$

2.2.8. EXEMPLE



Soit ν, i et R fixés et notons $\mathcal{E}_M$ l'ensemble des ordres sur X vérifiant M(ν, i, R) et $\mathcal{E}_B$ l'ensemble des ordres vérifiant B(ν, i, R).

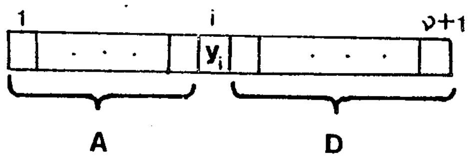
2.2.9. *PROPOSITION* $\boxed{\mathcal{E}_M \equiv \mathcal{E}_B}$ ν, i et R étant donnés.

DEMONSTRATION :

a) $\boxed{\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}_B}$ c'est-à-dire tout ordre montagneux vérifie B(ν, i, R).
Soit O un ordre vérifiant la condition M(ν, i, R). Montrons que pour tout $Y \subseteq X$, $|Y| = \nu + 1$, l'objet y_i occupant le rang i dans R(Y) ne se trouve jamais classé dernier dans O(Y).

Soit $Y \subseteq X$, $|Y| = \nu + 1$.
Désignons par A l'ensemble des (i - 1) premiers objets de R(Y)
et par D l'ensemble des (ν + 1 + i) derniers objets de R(Y).

R(Y) :



Deux cas sont possibles :

1) y_i appartient à la partie alpine croissante de la courbe associée à O et R
On a alors au plus $\nu_1 - 1 = i - 2$ objets de A qui précèdent y_i dans O(Y).
Or $|A| = i - 1$; il existe donc au moins un objet de A placé <u>après</u> y_i dans O(Y).

2) y_i appartient à la partie alpine décroissante de la courbe associée à O et R. Le raisonnement est le même en remplaçant A par D et ν_1 par $\nu_2 = \nu + 1 - i$.

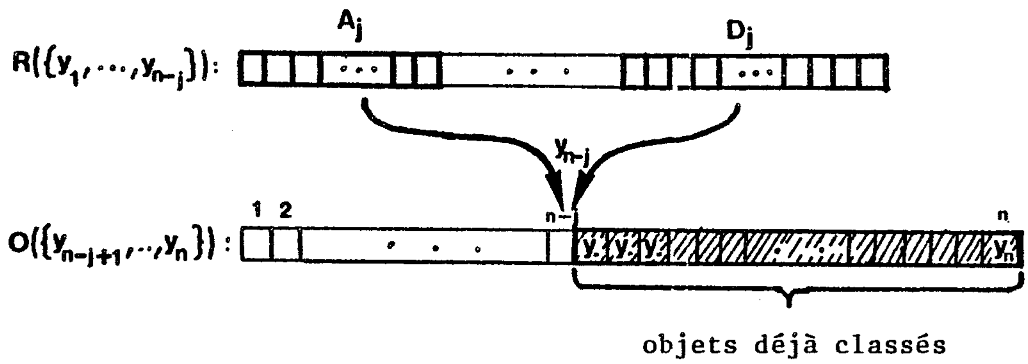
Cette inclusion est donc démontrée.

b) $\boxed{\mathcal{E}_B \subseteq \mathcal{E}_M}$: c'est-à-dire que tout ordre vérifiant B(ν, i, R) est un ordre montagneux M(ν, i, R).

D'après 2.2.4., on a $\mathcal{E}_B \equiv \mathcal{E}_A$

Nous allons montrer que $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_M$ c'est-à-dire que si l'ordre O est obtenu par l'algorithme, alors sa courbe représentative vérifie M(ν, i, R).

A l'étape j de l'algorithme, on place l'objet y_{n-j} au rang (n - j) de O. Cet objet appartient à A_j ou D_j, où A_j désigne les (i-1) premiers objets de la restriction de l'ordre de référence R aux objets non encore classés et D_j les $\nu + 1 - i$ derniers.



Notons A' l'ensemble des objets choisis dans les A
et D' l'ensemble des objets choisis dans les D
$\Big\}$ (j = 0, ..., n - ν)

Soit F l'ensemble des derniers objets classés et soit R(F) = $(z_1, \dots, z_\nu)$.

Posons $A = A' \cup \{z_1, \dots, z_{i-1}\}$

$D = D' \cup \{z_i, \dots, z_\nu\}$

Montrons que sur R(A), O(A) est représenté par une courbe alpine croissante de degré i-1.

Soit $y \in A$.

Au moment où l'on classe y il y a au plus (i-2) objets non classés occupant dans R(X) un rang antérieur à celui de y. En effet :

- ou bien y est parmi les ν derniers classés, donc $y \in \{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$
- ou bien il a été pris dans un A_j.

Dans les deux cas, il restait, non classés, au plus i - 2 objets occupant dans R des rangs antérieurs et ces objets sont les seuls objets de A qui précèdent y dans O.

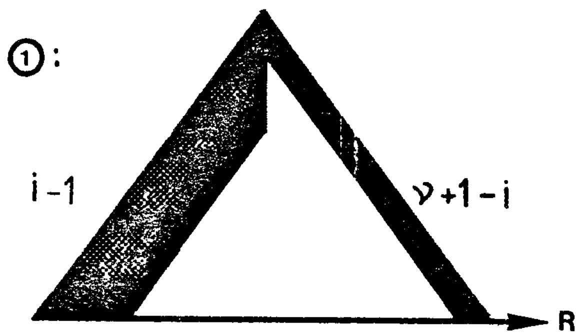
Un raisonnement analogue montre que sur R(D), O(D) est représenté par une courbe alpine décroissante de degré $\nu - i + 1$.

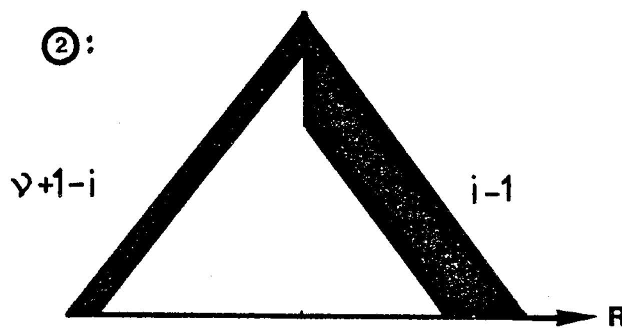
REMARQUE :

a) On vérifie trivialement que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) E vérifie $B(\nu, i, R)$

(2) E vérifie $B(\nu, \nu + 2 - i, R^{-1})$.

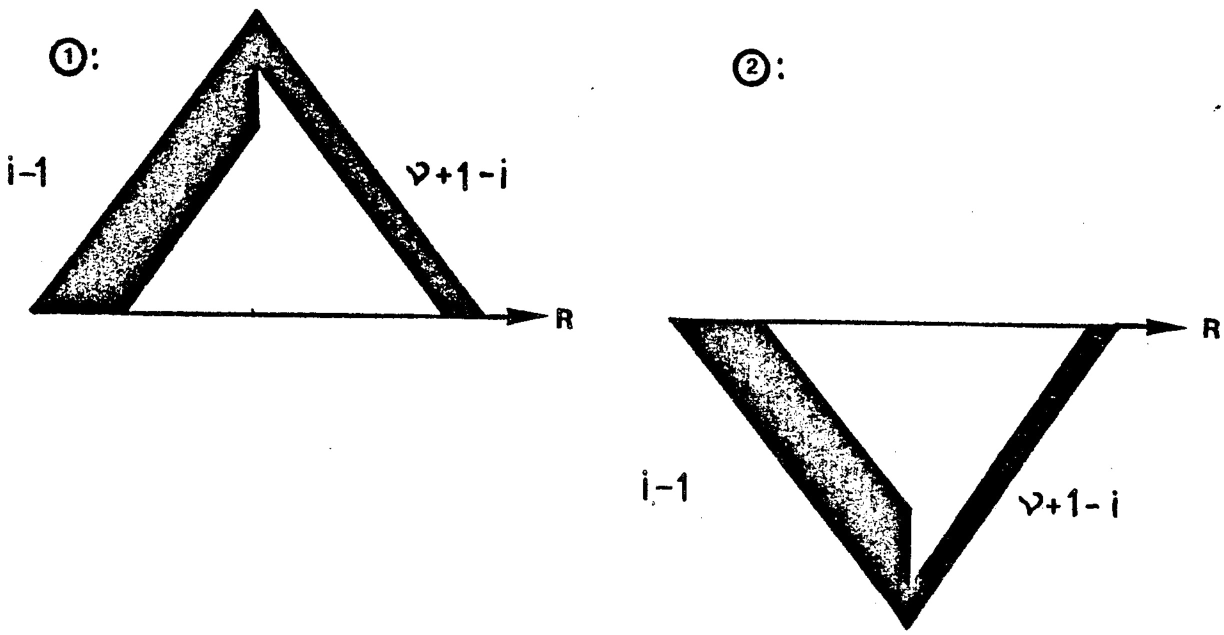




b) Soit E^{-1} l'état de l'opinion obtenu en inversant tous les ordres de E. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

① E vérifie B(ν, i, R)

② E^{-1} vérifie I(ν, i, R) (*)



(*) La condition I(ν, i, R) est définie de manière analogue à celle décrite en 2.2.1. en remplaçant "dernière" par "première".

3 Test de la condition montagneuse

Soit E un état de l'opinion donné. Nous nous proposons de tester si E vérifie la condition B(ν, i, R) :

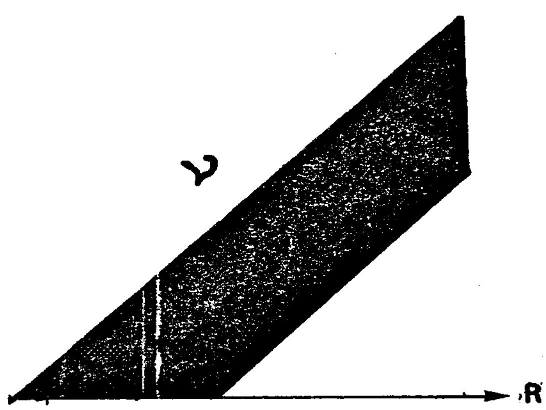
1°) Quand l'ordre de référence est donné,
2°) Quand l'ordre de référence est inconnu.

Le premier type de problème est en général plus facile à résoudre. Nous pouvons évidemment résoudre le problème 2 en essayant tous les ordres de référence, ce qui nous ramène au problème 1. Mais cette démarche n'est pas opérationnelle puisque :

I - *E vérifie-t-il la condition B(ν,1,R) ?*

Si E vérifie B(ν, ν+1, R) (ou B(ν, 1, R^{-1})) alors tout ordre O $\in$ E correspond à une courbe croissante de degré ν par rapport à R. Nous avons symboliser ceci par la figure suivante :

(cf. 2.2.8) : "Tout objet est surclassé par au plus ν objets placés avant lui dans R".



E étant donné, quel est le plus petit entier $\underline{\nu}$ tel que E vérifie une condition B($\underline{\nu}$, 1, R) pour un R au moins ?

Soient $|X| = n$ et ν un entier donné.

Désignons par $W = (W_1, W_2, \dots W_n)$ une séquence de n sous-ensembles de X vérifiant :

$$\boxed{W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n = X}$$

Nous allons dire qu'un ordre de référence R sur X, noté $R = (r_1, \dots r_n)$ "*couvre*" W pour l'entier ν si et seulement si :

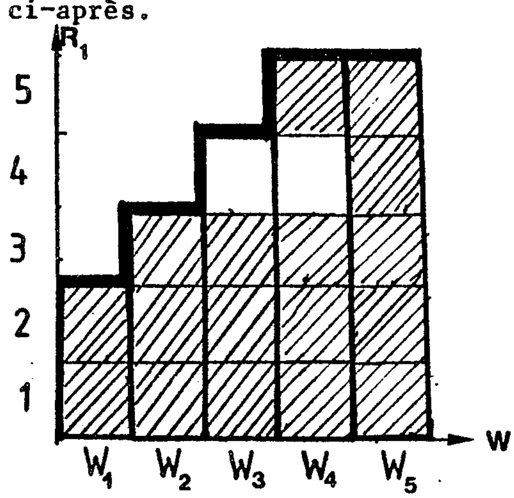
$$\boxed{W_t \subseteq \{r_1, \dots, r_{\nu+t-1}\}} \qquad \forall\, t \leq n-\nu+1$$

<u>EXEMPLE</u>

Soient $X = \{1, \dots, 5\}$, $\nu = 2$

et $W = (\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\})$

$R_1 = (1, 2, 3, 4, 5,)$ couvre W pour $\nu = 2$ comme on peut s'en rendre compte dans la figure ci-après.



Par contre, $R_2 = (1, 2, 4, 5, 3)$ ne couvre pas W puisque

$W = \{1, 2, 3\} \not\subseteq \{r_1, r_2, r_3\} = \{1, 2, 4\}$.

W et ν étant donnés, nous notons $\mathcal{R}(W, \nu)$ l'ensemble des ordres (de référence) qui couvre W pour l'entier ν.

2.3.1. *LEMME* :

> Etant donné une séquence W telle que $W_1 \subseteq \ldots \subseteq W_n = X$ de n sous-ensembles de X, alors le plus petit entier ν tel que $\mathcal{R}(W,\nu)$ soit non vide, est : $\boxed{\underline{\nu} = \max_{t=1,\ldots,n} \{ |W_t| - t + 1 \}}$

DEMONSTRATION

1) $\mathcal{R}(W, \underline{\nu}) \neq \emptyset$. Par hypothèse $\forall t$ on a $|W_t| \leq t - 1 + \underline{\nu}$

On vérifie facilement que tout ordre R qui contient le pré-ordre :
$(W_1, \{W_2 - W_1\}, \{W_3 - W_2\}, \ldots, \{W_n - W_{n-1}\})$
couvre W pour l'entier $\underline{\nu}$.

2) Soit $\nu < \underline{\nu}$:

Montrons que si ν est plus petit que $\underline{\nu}$ alors $\mathcal{R}(W,\nu)$ est vide. Supposons que l'énoncé soit faux, c'est-à-dire qu'il existe un ordre $R = (r_1, \ldots r_n)$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{R}(W, \nu)$ où $\nu < \underline{\nu}$. D'après la définition de $\underline{\nu}$ il existe un indice $k \in \{1, \ldots n\}$ tel que :

$$|W_k| = \underline{\nu} + k - 1$$

L'ensemble $\{ r_1, \ldots, r_{\nu+k-1}\}$ de cardinalité $\nu + k - 1$ qui est donc inférieure à celle de W_k , ne pourrait donc contenir W_k . Donc R ne peut pas "couvrir" W pour ν .

Soit E un état de l'opinion donné. Désignons par W_1 l'ensemble des objets de X qui occupent le dernier rang dans E et par W_t l'ensemble des objets de X qui occupent dans E les t dernier rangs, $t = 1, \ldots, n$.

EXEMPLE

Soient $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$$E = \begin{Bmatrix} (1, 2, 3, 4, 5), \\ (2, 3, 1, 5, 4), \\ (2, 3, 1, 4, 5), \\ (1, 2, 4, 5, 3) \end{Bmatrix}$$

On a $W_1 = \{3, 4, 5\}$, $W_2 = \{3, 4, 5\}$, $W_3 = \{1, 3, 4, 5\}$ etc.

Rappelons que si un état de l'opinion E vérifie la condition $B(\nu, \nu+1, R)$ l'algorithme suivant permet de construire tout ordre de E (cf. : 2.2.3.).

Algorithme:

Soit $R = (r_1 , r_2 , \ldots r_n)$. Désignons par A l'ensemble des premiers objets de R, donc $A = \{r_1 , \ldots, r_\nu\}$
Un ordre O de E se construit de la manière suivante :

1) Choisir un objet de A et le placer au dernier rang, c'est-à-dire au rang n de O.
2) Soit X_1 l'ensemble des $(n - 1)$ objets restant à classer et comme précédemment soit A l'ensemble des premiers ν objets de $R(X_1)$.
   Choisir dans A un objet quelconque et le classer au rang $(n - 1)$. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que ν objets non classés. Les classer sans contrainte dans les premier ν rangs de O.
   Nous avons symbolisé cet algorithme (cf. 2.2.3.) :

R:

ν

2.3.2. *THEOREME*

Soit E un état de l'opinion sur X, $|X| = n$, ν un entier vérifiant $1 \leq \nu \leq X$ et $R = (r_1, \ldots, r_n)$ un ordre de référence sur X. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) E vérifie la condition $B(\nu, \nu + 1, R)$

(2) Pour tout $t = 1, 2, \ldots n - \nu + 1$ on a :

$$\boxed{W_t \subseteq \{r_1, \ldots, r_{\nu+t-1}\}}$$

où W_t désigne l'ensemble des objets de **E** qui occupent les t derniers rangs.

DEMONSTRATION

(1) $\longrightarrow$ (2) : L'algorithme précédent permet de construire tout ordre de E. D'où

- L'ensemble des objets de X classés derniers dans E est contenu dans $\{r_1, \ldots, r_\nu\}$, donc $W_1 \subseteq \{r_1, \ldots, r_\nu\}$
- Les seuls objets de X qui peuvent être classés dans les deux derniers rangs de E, l'ensemble W_2, sont les objets de $\{r_1, \ldots r_{\nu+1}\}$ etc.

(2) $\longrightarrow$ (1) : Soit $O = (y_1, \ldots y_{n+1-t}, \ldots, y_n)$ un ordre de E qui vérifie (2) . Il s'agit de montrer que l'algorithme précédent permet de construire O.

Ceci revient à montrer que l'objet y_{n+1-t} se trouve, dans la restriction de l'ordre de référence aux objets $\{y_1, \ldots, y_{n+1-t}\}$ dans les premiers ν rangs, pour tout $t = 1, \ldots, n$.

L'ensemble $\{y_{n+1-t}, \ldots, y_n\}$ est contenu dans l'ensemble $\{r_1, \ldots, r_{\nu+t-1}\}$ puisque par hypothèse on a :

$$\{y_{n+1-t}, \ldots y_n\} \subseteq W_t \subseteq \{r_1, \ldots, r_{\nu+t-1}\}$$

On a $\left|\{r_1, \ldots, r_{\nu+t-1}\} - \{y_{n+2-t}, \ldots y_n\}\right|$

$= \left|\{r_1, \ldots, r_{\nu+t-1}\}\right| - \left|\{y_{n+2-t}, \ldots y_n\}\right|$

$= (\nu + t - 1) - (t - 1)$

$= \nu$

Donc l'objet y_{n+1-t} appartient aux premiers ν objets de la restriction de l'ordre de référence aux objets de $\{y_1, \ldots, y_{n+1-t}\}$.

■

Les résultats précédents nous permettent donc de résoudre les problèmes suivants :

P1

Etant donné un entier ν vérifiant $1 \leq \nu \leq |X|$, et un ordre de référence R,
E vérifie-t-il la condition $B(\nu, \nu + 1, R)$?

Algorithme : On construit la séquence $W = (W_1, W_2, \ldots W_n)$ et on vérifie la condition 2 du théorème.

P2

Etant donné un entier ν, existe-t-il un ordre de référence R, tel E vérifie la condition $B(\nu, \nu + 1, R)$?

Algorithme : On construit la séquence $W : (W_1, \ldots W_n)$.

Si $$\nu \geq \max_{t=1,\ldots,n} \{|W_t| - t + 1\}$$

alors E vérifie la condition $B(\nu, \nu + 1, R)$ pour tout ordre $R \in \mathcal{R}(W, \nu)$.

Si $\nu < \max_{t=1,\ldots,n}\{|W_t| - t + 1\}$ alors il n'existe pas d'ordre satisfaisant (d'après le lemme 2.3.1.).

P3 | Etant donné un état de l'opinion E, trouver le plus petit entier ν^* tel que E vérifie la condition $B(\nu^*, \nu^* + 1, R)$ pour un certain ordre de référence R à déterminer.

REMARQUE

Cet entier ν^* est particulièrement intéressant : d'une part, si ν^* est petit par rapport à $|X|$, on peut dire que les votants ont pris principalement un critère en considération (qui classe les objets dans le même ordre que R), et d'autre part si E vérifie $B(\nu, \nu + 1, R)$ alors $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ est sans circuit.

Algorithme : On construit la séquence $W = (W_1, \ldots, W_n)$ et l'on pose

$$\nu^* = \max_{t=1,\ldots,n} \{ |W_t| - t + 1 \}$$

D'après le lemme 2.3.1., $\mathcal{R}(W, \nu^*)$ est non vide.
D'après le théorème précédent, E vérifie la condition $B(\nu^*, \nu^* + 1, R)$ pour tout ordre $R \in \mathcal{R}(W, \nu^*)$.

EXEMPLE :

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$E = \{(2, 5, 3, 1, 6, 4) \\ (5, 3, 2, 1, 4, 6) \\ (4, 1, 3, 2, 5, 6) \\ (6, 3, 5, 2, 1, 4) \\ (3, 2, 1, 5, 6, 4) \\ (5, 2, 3, 1, 4, 6)\}$$

On a $W_1 = \{1, 6\}$, $W_2 = \{1, 4, 5, 6\}$, $W_3 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

$W_4 = W_5 = W_6 = X$

a) Problème 1 :

Soit R = (6, 1, 4, 2, 3, 5) et $\nu = 3$

On a $W_1 \subseteq \{r_1, r_2, r_3\} = \{6, 1, 4\}$

et $W_2 \not\subseteq \{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \{6, 1, 4, 2\}$

Donc E ne vérifie pas la condition B (3, 4, R = (6, 1, 4, 2, 3, 5))

b) Problème 2 :

Soit $\nu = 4$

On a $\nu \geq \max_{t=1,\dots,6} \{|W_t| - t + 1\} = 3$

E vérifie donc la condition B(4, 5, R) pour tout R $\in \mathcal{R}(W, 4)$ et $\mathcal{R}(W, 4)$ est non vide.

c) Problème 3 :

On a $\nu' = 3 = \max_{t=1,\dots,6} \{ |W_t| - t + 1\}$

c'est-à-dire que E vérifie la condition B (3, 4, R) pour tout R $\in \mathcal{R}(W, 3)$ par exemple R = (4, 6, 1, 5, 2, 3).

II - *E vérifie-t-il la condition $B(\nu, i, R)$?*

Soit E un état de l'opinion donné sur X.
Proposons nous de chercher le plus petit entier ν^* tel qu'il existe :

- un entier i vérifiant $1 \leq i \leq \nu^* + 1$
- un ordre de référence R sur X

de sorte que E vérifie la condition $B(\nu^*, i, R)$.

Cet entier ν^* est pour plusieurs raison intéressant. D'une part, il pourrait être pris pour mesure du "flou" de E par rapport à la condition de BLACK, et d'autre part on sait que si E vérifie la condition $B(\nu^*, i, R)$ alors le graphe de surclassement $G(\frac{\nu^* - 1}{\nu^*})$ est sans circuit.

Le théorème suivant permet de déterminer d'une manière très simple, un état de l'opinion étant donné, des bornes, notées $\underline{\nu}$ et $\overline{\nu}$ pour ν^*.

2.3.3. *THEOREME*

> Etant donné un état de l'opinion E sur X, alors ν^* vérifie :
>
> $$\boxed{\underline{\nu} \leq \nu^* \leq \overline{\nu}}$$
>
> où $\overline{\nu} = \max_{t=1,\dots,n} \{|W_t| - t + 1\}$
>
> et $\underline{\nu} = \max_{t=1,\dots,n} \{|W_t| - 2t + 2\}$

<u>DEMONSTRATION</u>

Soit E un état de l'opinion vérifiant $B(\nu^*, i, R)$. Deux cas sont à considérer :

a) <u>$i \in \{2, 3, \dots, \nu^*\}$</u>

D'après la définition de l'algorithme $A(\nu, i, R)$ (cf. 2.2.3.) on a :

$|W_1| \leq \nu^*$

$|W_2| \leq \nu^* + 2$

$\vdots$

$|W_t| \leq \nu^* + 2t - 2$

Donc $\nu^* \geq \max_{t=1,\dots,n} \{|W_t| - 2t + 2\}$

b) $\underline{i \in \{1, \nu^* + 1\}}$

D'après le lemme (2.3.1.) on a $\nu^* = \max\limits_{t=1,\dots,n} \{|W_t| - t + 1\}$.

EXEMPLE

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et

$$E = \left\{\begin{array}{l}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \\ (4, 5, 1, 3, 2, 6, 8, 7) \\ (1, 2, 4, 3, 7, 8, 5, 6) \\ (7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8) \\ (5, 3, 1, 8, 2, 7, 4, 6)\end{array}\right\}$$

On a

$W_1 = \{6, 7, 8\}$ donc $|W_1| = 3$

$W_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ donc $|W_2| = 5$

$W_3 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ donc $|W_3| = 5$

$W_4 = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ donc $|W_4| = 6$

$W_5 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ donc $|W_5| = 7$

$W = W = W = 8$

On obtient $\overline{\nu} = \max \{3, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1\} = 4$

et $\underline{\nu} = \max \{3, 3, 1, 0, -1, \dots\} = 3$

donc $\nu^* \in \{3, 4\}$

2.3.4. *REMARQUE*

Soit E un état de l'opinion donné vérifiant la condition $B(\nu, i, R)$ où $R = (r_1, \ldots, r_n)$

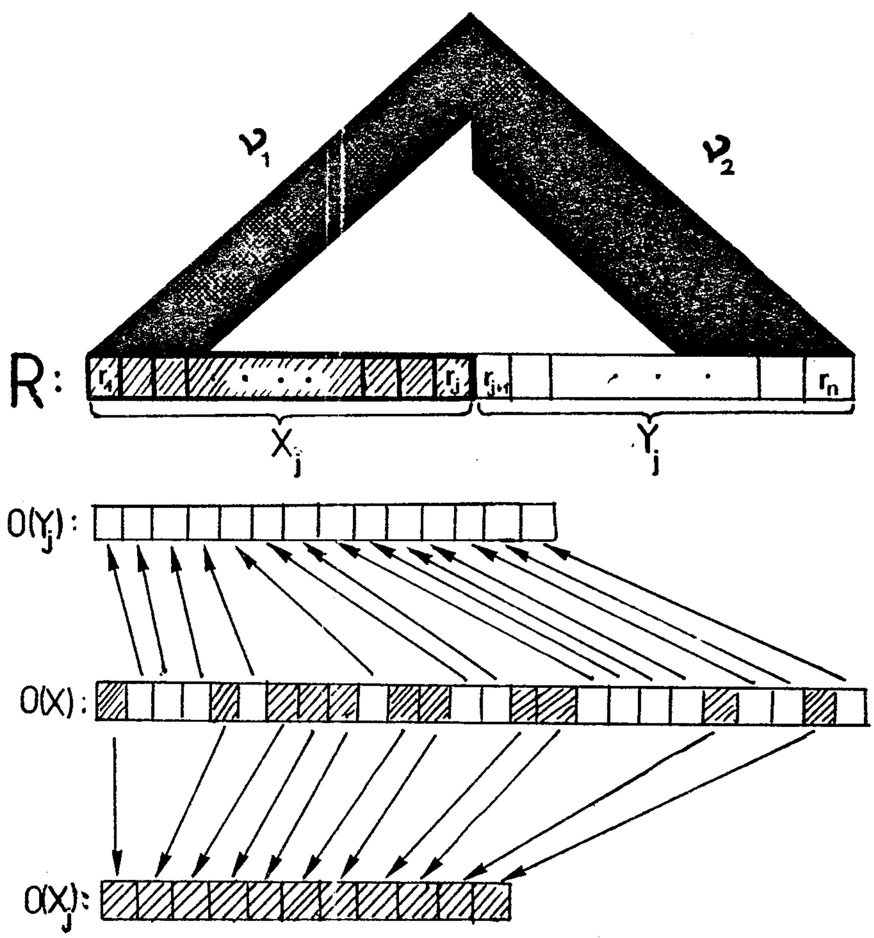
Posons $\nu_1 = i - 1$ et $\nu_2 = \nu + 1 - i$.

Soit $O \in E$. D'après la définition (2.2.7.) il existe un indice $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tel que :

1. $O(X_j) = O(\{r_1, \ldots, r_j\})$ est une courbe alpine croissante de degré
2. $O(Y_j) = O(\{r_{j+1}, \ldots, r_n\})$ est une courbe alpine décroissante de degré ν_2.

Rappelons que cet indice j n'est en général pas le même pour les différents ordres de E.

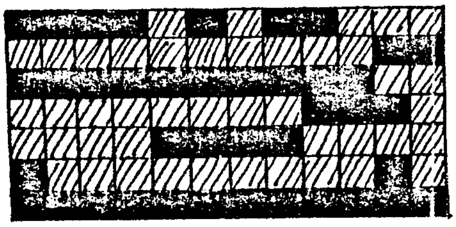
Nous avons symbolisé ceci : (cf. 2.2.7. et 2.2.8.)

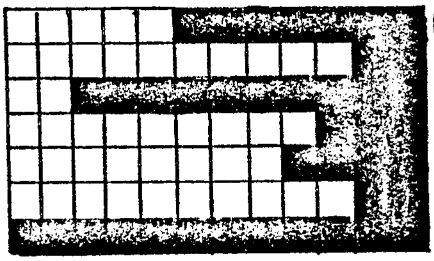


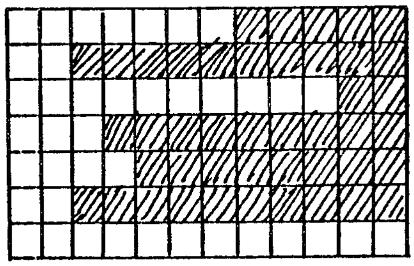
Notons :

$$E^1 = \left\{ O_k(X_{j(k)}) \;\middle|\; \begin{array}{l} O_k \in E \text{ et on peut associer à } O_k(X_{j(k)}) \text{ une courbe} \\ \text{alpine croissante de degré } \nu_1 \end{array} \right\}$$

$$E^2 = \left\{ O_k(Y_{j(k)}) \;\middle|\; \begin{array}{l} O_k \in E \text{ et on peut associer à } O_k(X_{j(k)}) \text{ une courbe} \\ \text{alpine décroissante de degré } \nu_2 \end{array} \right\}$$

E :  O_1 ⋮

E^1 :  $O_1(X_{j(1)})$ ⋮

E^2 :  $O_1(Y_{j(1)})$ ⋮

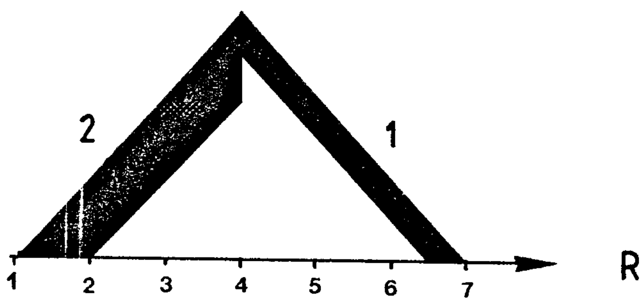
Désignons par W_1^p l'ensemble des objets qui se trouvent au dernier rang de E^p, $p = 1,2$.

et par W_t^p l'ensemble des objets de X occupant dans E^p les derniers t rangs.

2.3.5. *EXEMPLE*

Soit X = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et R = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

L'état de l'opinion suivant vérifie la condition B(3, 3, R), symbolisé (cf. 2.2.8.)



E =

(4, 5, 6, 7, 3, 2, 1)	O_1
(5, 3, 6, 4, 1, 2, 7)	.
(4, 5, 6, 1, 3, 7, 2)	.
(1, 5, 6, 4, 3, 2, 7)	.
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)	O_5

Un des "découpages" possibles est :

E^1 =

(3, 2, 1)	O^1 (X_3)
(3, 4, 1, 2)	.
(4, 1, 3, 2)	.
(1, 5, 4, 3, 2)	.
	O_5 (X_0)

E^2 =

(4, 5, 6, 7)	O^1 (Y_3)
(5, 6, 7)	.
(5, 6, 7)	.
(6, 7)	.
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)	O_5 (Y_0)

D'après le théorème 2.3.2. et la remarque précédente, on obtient :

2.3.6. *PROPOSITION* :

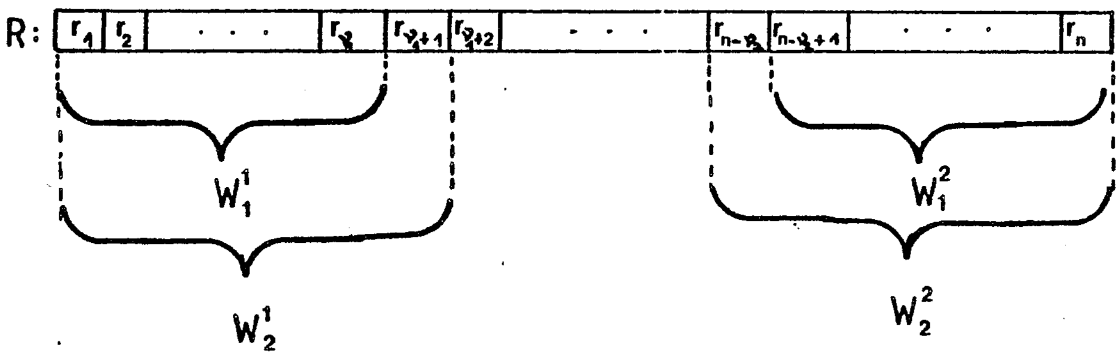
Etant donné deux entiers ν et i vérifiant :
$1 \leq i \leq \nu + 1$, $1 \leq \nu < |X|$ et un ordre de référence
$R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ sur X.
Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

① E vérifie $B(\nu, i, R)$

② a) $W_t^1 \subseteq \{r_1, \dots, r_{\nu_1+t-1}\}$ pour tout $t \leq n - \nu_1 + 1$

b) $W_t^2 \subseteq \{r_1, \dots, r_{n-\nu_2-t+2}\}$ pour tout $t \leq n - \nu_2 + 1$

où $\nu_1 = i - 1$ et $\nu_2 = \nu + 1 - i$



Cette proposition nous permet de résoudre le problème suivant :

P1: Soient un état de l'opinion donné, i et ν deux entiers vérifiant $1 \leq i \leq \nu + 1$, $1 \leq \nu < |X|$ et $R = (r_1, \dots, r_n)$ un ordre de référence sur X.
E vérifie-t-il la condition $B(\nu, i, R)$?

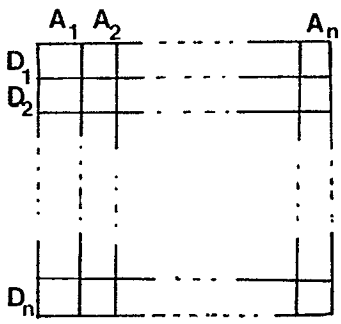
Pour résoudre ce problème, nous proposons l'algorithme suivant :

Soit T un tableau à n lignes et n colonnes.

Nous marquons la colonne t par $A_t = \begin{cases} \{r_1, \ldots, r_{\nu_1+t-1}\} & , t \leq n - \nu_1 + 1 \\ X & , t > n - \nu_1 + 1 \end{cases}$

et la ligne t par $D_t = \begin{cases} \{r_n, \ldots, r_{n-\nu_2-t+2}\} & , t \leq n - \nu_2 + 1 \\ X & , t > n - \nu_2 + 1 \end{cases}$

T:



EXEMPLE

Reprenons l'exemple 2.3.5. On a R = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) et $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$. Le tableau T est le suivant :

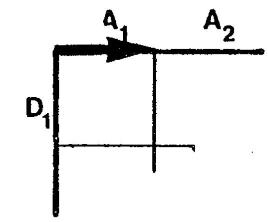
	{1,2}	{1,2,3}	{1,...,4}	{1,...,5}	{1,...,6}	X	X
{7}							
{6,7}							
{5,6,7}							
{4,5,6,7}							
{3,4,5,6,7}							
{2,3,4,5,6,7}							
X							

T

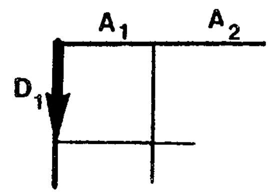
Soit $O = (y_1, \ldots, y_n)$ un ordre de E.

Nous associons à cet ordre une ligne brisée notée $L(O)$ qu'on construit de la façon suivante :

<u>ETAPE 1</u> : <u>Si $y_n \in A_1$</u> alors faire :



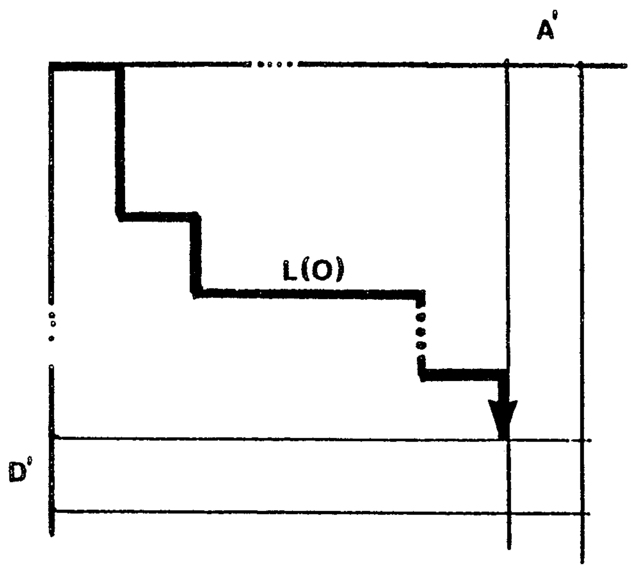
<u>Si $y_n \in D_1$</u> alors faire :



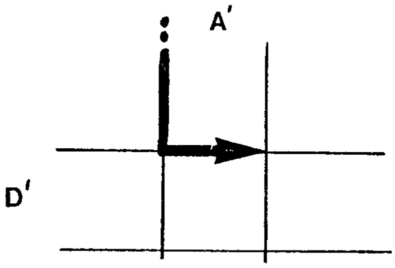
<u>Si $y_n \notin A_1 \cup D_1$</u> STOP (O ne vérifie pas la condition $B(\nu, i, R)$)

<u>ETAPE K</u> : $K \in \{2, \ldots, n\}$

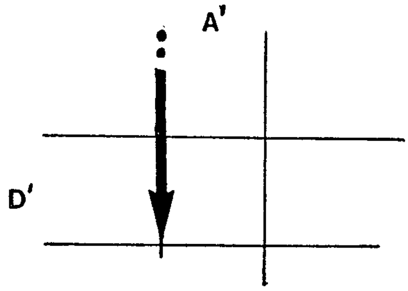
Soient D' le marquage de la ligne en dessous de l'extrêmité de L(O) et A' le marquage de la colonne à droite de l'extrêmité de L(O). Soit y' le dernier objet de O non encore associé à L(O).



Si y' $\in$ A' alors faire



Si y' $\in$ D' alors faire



Si y' $\notin$ A' $\cup$ D' STOP (O ne vérifie pas la condition B(ν, i, R)).

Si on peut ainsi représenter O par une ligne brisée dans T (où le marquage dépend de R, ν et i) alors O vérifie la condition B(ν, i, R).

En effet :

1°) L'ordre O restreint aux objets correspondant aux segments horizontaux de L(O) vérifie la condition 2 a) de 2.3.6..

2°) L'ordre restreint aux objets correspondant aux segments verticaux de L(O) vérifie la condition 2 b) de 2.3.6.

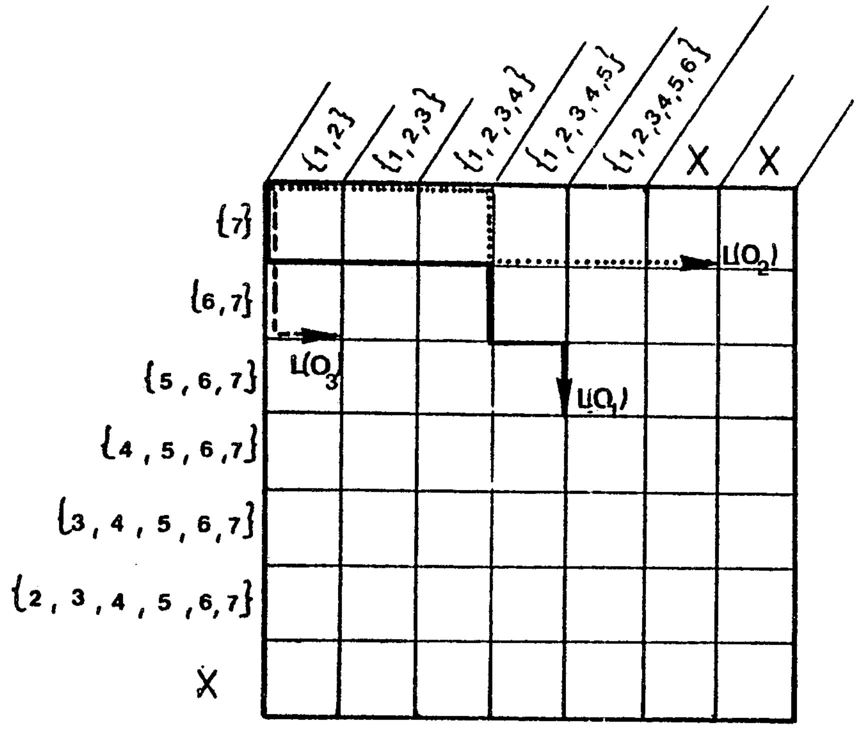
EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent, et soient :

O_1 = (5, 3, 6, 4, 1, 2, 7)
O_2 = (6, 3, 5, 7, 4, 2, 1)
O_3 = (1, 3, 5, 4, 2, 6, 7)

On a :

T:



désigne la ligne brisée correspondant à O_1

" " " " " " O_2

" " " " " " O_3

O_1 et O_2 vérifient donc la condition B(3, 3, R) où R = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Par contre, O_3 ne vérifie pas cette condition puisque l'objet "4" n'appartient ni à $\{1, 2, 3\} = A_2$ ni à $\{5, 6, 7\} = D_3$.

Nous nous proposons maintenant de résoudre le problème suivant :

P2

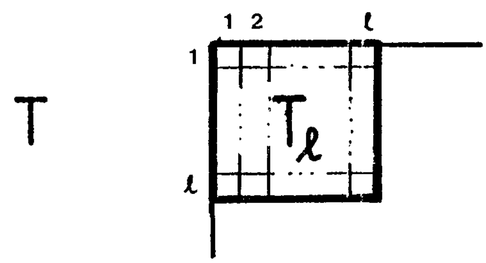
> Etant donné un état de l'opinion E sur X, deux entiers i et j vérifiant $1 \leq \nu < |X|$, $1 \leq i < \nu + 1$.
> Existe-t-il un ordre de référence R tel que E vérifie la condition $B(\nu, i, R)$?

REMARQUE

Le théorème 2.3.3. nous permet de tester l'existence d'un tel ordre R. En effet, ν doit être compris entre $\underline{\nu}$ et $\bar{\nu}$.

Algorithme de marquage successif :

Notons T_ℓ le sous-tableau de T qui contient les cases qui occupent dans T les ℓ premières lignes et colonnes, $\ell = 1, \ldots, n$



Nous cherchons un ordre de référence R, noté $R = (r_1, \ldots, r_n)$ tel que si l'on marque les lignes de T par D_t
et les colonnes de T par A_t
alors tout ordre O de E se laisse représenter par une ligne brisée L(O) dans T (rappelons que A_t désigne les premiers $\nu_1 + t - 1$ objets de R,
et D_t désigne les derniers $\nu_2 + t - 1$ objets de R).

Dans ce cas, nous allons dire que ce marquage est "*réalisable*".

Propriétés d'un marquage "réalisable"

1) Par définition de A_ℓ et D_ℓ on a :

$D_\ell \cup A_{n-\nu-\ell} = X$ et $D_\ell \cap A_{n-\nu-\ell+2} = \emptyset$ pour $\ell = 1, \ldots, n - \nu + 1$.

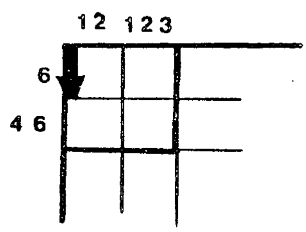
C'est-à-dire que dans un marquage réalisable, l'ensemble qui marque la ligne ℓ se déduit de X en retirant l'ensemble $A_{n-\nu-\ell}$ de la colonne $n - \nu - \ell$.

2) Pour qu'un marquage de T soit réalisable, il faut que pour tout sous-tableau T_ℓ de T ($\ell = 1, .., n$) on ait :

Pour tout ordre O, $O \in E$, l'extrêmité terminale de la ligne brisée L(O) correspondante touche au moins un des bords du tableau T_ℓ ou L(O) ait la longueur n ($n = |X|$).

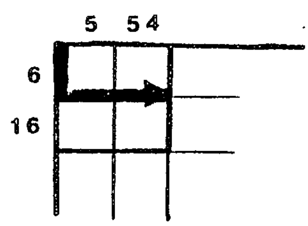
EXEMPLE : Soit O = (1, 2, 3, 4, 5, 6)

a)



Non réalisable

b)



Réalisable (pour T_2)

3) W_k désigne l'ensemble des objets de X qui occupent dans E les k dernières positions (k = 1,..., n). Il est facile de voir que pour qu'un marquage soit réalisable, il faut que les objets du marquage de la ligne k et de la colonne k contiennent W_k , c'est-à-dire :

$$\boxed{W_k \subseteq D_k \cup A_k} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

ALGORITHME :

Soit E un état de l'opinion donné. Soient ν et i deux entiers donnés vérifiant $1 \leq \nu < X$, $1 \leq i \leq \nu + 1$. Nous cherchons un ordre de référence R tel que E vérifie la condition $B(\nu, i, R)$.

ETAPE 1 : Choisir un marquage réalisable pour le sous-tableau T_1 .

ETAPE K : ($k = 2, \ldots, n$).
Chercher un marquage réalisable pour T_k . S'il n'est plus possible de marquer T_k , alors retourner à l'étape inférieure où il y a eu un choix multiple de marquage et choisir un marquage non encore utilisé.

Si on ne trouve pas ainsi un marquage réalisable, c'est qu'on ne peut trouver d'ordre de référence convenable.

Si $D_1, \ldots D_n$ et $A_1, \ldots, A_n$ est un marquage réalisable, alors tout ordre R qui contient le pré-ordre :

$$\left(D_1, (D_2 - D_1), D_3 - D_2), \ldots, (D_{n-\nu} - D_{n-\nu-1}), (X - D_{n-\nu})\right)$$

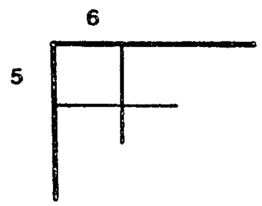
convient.

EXEMPLE **Test de la condition " single - peackedness"**

Soit $E = \{(4, 3, 2, 1, 6, 5), = O_1$
$(4, 3, 6, 2, 1, 5), = O_2$
$(2, 4, 3, 1, 5, 6), = O_3$
$(1, 2, 5, 4, 3, 6)\} = O_4$

Soit $\nu = 2$ et $i = 1$, c'est-à-dire que nous voulons tester si E est blackien (single-peaked) par rapport à un ordre de référence à déterminer.

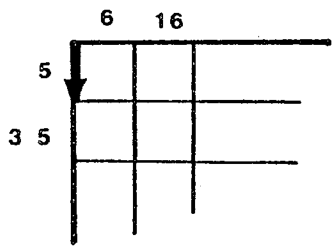
On a $W_1 = \{5, 6\}$ donc $A_1 = \{6\}$, $D_1 = \{5\}$ sont possibles comme marquage pour T_1



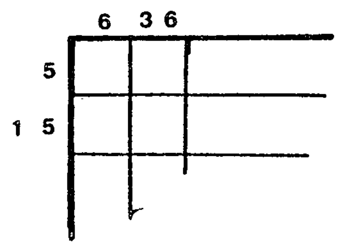
On a $W_2 = \{6, 5, 1, 3\}$ donc on a deux possibilités de marquage :

- soit $A_2 = \{6, 1\}$ et $D_2 = \{5, 3\}$
- soit $A_2 = \{6,3\}$ et $D_2 = \{5, 1\}$.

La première possibilité est un marquage non réalisable puisque par exemple $L(O_2)$ $O_2 = (4, 3, 6, 2, 1, 5)$ ne touche aucun bord du tableau T_2:

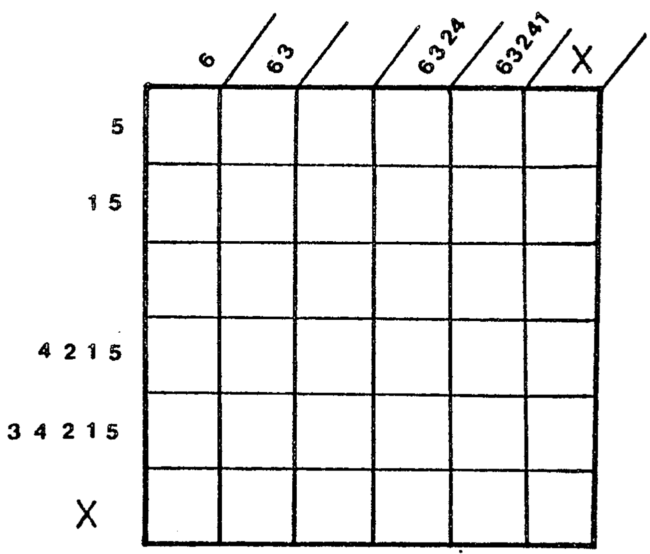


Le deuxième marquage convient (tout ordre de E touche un des bords de T_2).



Un marquage doit vérifier : $D_\ell \cup A_{n-\nu-\ell+2} = X$ pour $\ell = 1, \dots, n - \nu + 1$

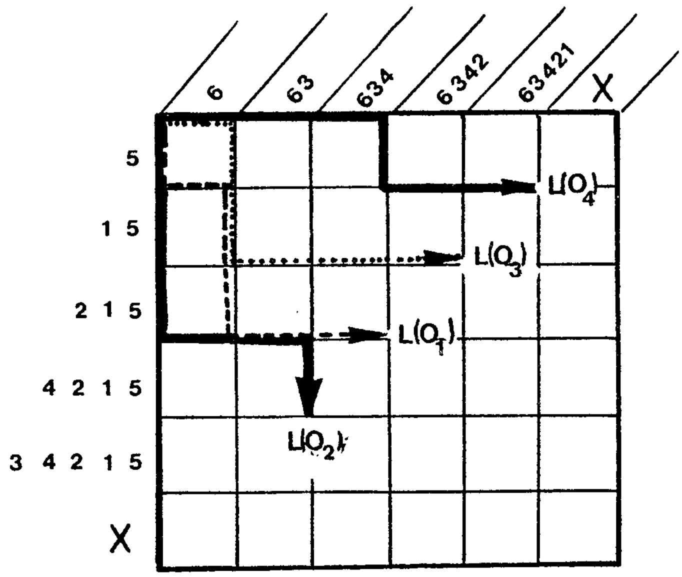
Donc le tableau est jusqu'ici marqué ainsi



On a $W_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Pour que la ligne brisée associée à $O_4 = (1, 2, 5, 4, 3, 6)$ touche le bord de T_3 il faut marquer la colonne 3 par $\{6, 3, 4\} = A_3$ et puisque $A_3 \cup D_3 = X$, on doit marquer la ligne 3 par $\{5, 1, 2\}$.

Ainsi tout le tableau T est marqué. Il reste à vérifier que tout ordre O se laisse représenter par des lignes brisées de longueur 6 dans T.



On en conclut que E est "blackien" par rapport à l'ordre de référence R = (5, 1, 2, 4, 3, 6).

REMARQUE

Si E vérifie la condition B(2,2, R) ("single-peaked"), alors à chaque étape de l'algorithme <u>un seul</u> marquage est réalisable (si un seul ordre de référence est possible).

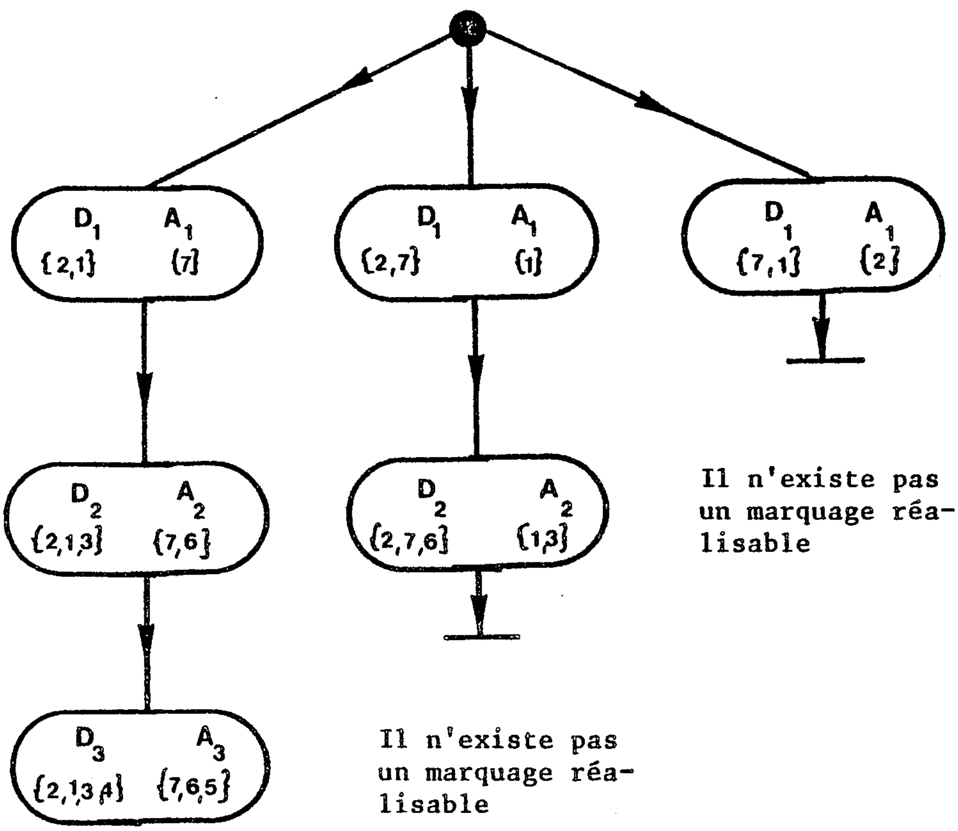
EXEMPLE 2 :

Soit X = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

Soit E = { (1, 3, 4, 5, 6, 7, 2) O_1
(5, 7, 6, 4, 2, 3, 1) O_2
(3, 5, 6, 7, 4, 2, 1) O_3
(5, 3, 4, 1, 2, 6, 7)} O_4

1) Posons $\nu = 2$ et $i = 2$.
On a $W_1 = \{1, 2, 7\}$ mais $|A_1| = 1$ et $|D_1| = 1$. Il ne peut donc pas exister un ordre R tel que E vérifie la condition B(2, 2, R).

2) Posons $\nu = 3$ et $i = 2$.
On a $|D_1| = 2$, $|D_2| = 3$ etc...
$|A_1| = 1$, $|A_2| = 2$ etc...



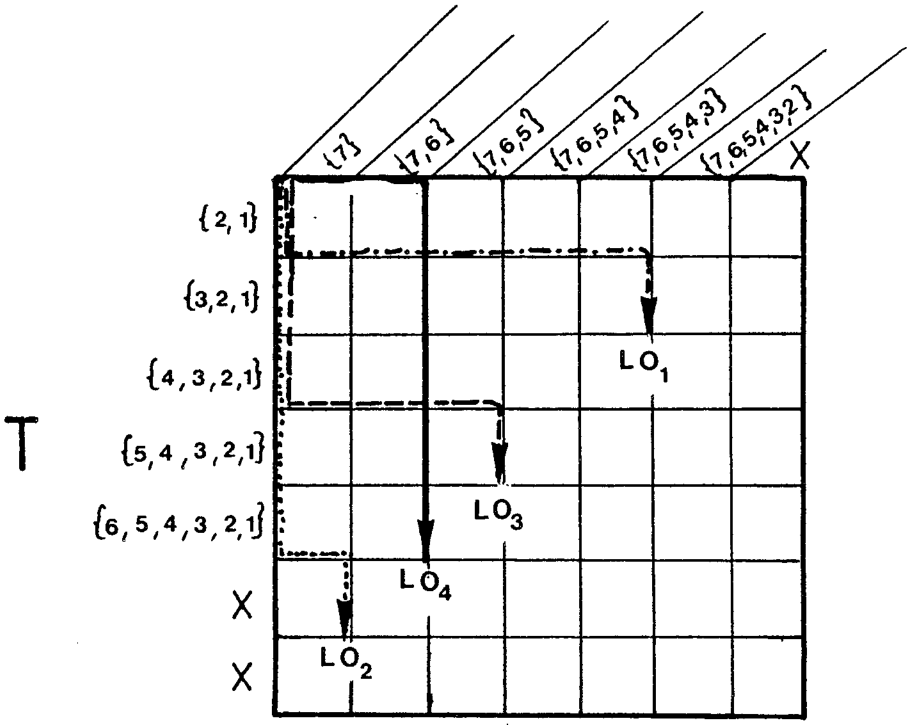
Marquages réalisables pour T_1

Marquages réalisables pour T_2

Marquage réalisable pour T_3

On vérifie que le marquage à gauche aboutit à un marquage réalisable pour T.

E vérifie la condition B(3, 2, R) où R = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
ou R = (2, 1, 3, 4, 5, 6, 7).



REMARQUE

Soit E un état de l'opinion vérifiant B(ν, i, R) (R étant inconnu).
Si N(E) = $\nu ! \, \nu^{n-\nu}$ alors on peut voir que pour T_1, T_2,... T_n = T il existe <u>un seul</u> marquage réalisable.

Le premier algorithme opérationnel de déterminer, dans le cas particulier du single-peaked, l'ordre de référence, est due à D. ROMERO [15].

5 Condition Maximax

Les conditions présentées dans ce paragraphe sont des cas particuliers des conditions B(ν) et I(ν). Elles sont définies par rapport à un ensemble d'ordres de références. Nous associons à ces conditions, un modèle de comportement individuel de choix. Nous justifierons le terme "maximax" en interprétant le mécanisme de choix individuel.

2.5.1. *NOTATIONS* : *MATRICE* $\mathfrak{R}$ *DE REFERENCE*

Soit X = $\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des objets à classer. Soient ν un entier donné et $R_1, \ldots, R_\nu$ ν ordres de référence sur les objets de X.

Notons $R_i(Y)$, $i = 1, \ldots \nu$ la restriction de l'ordre de référence R aux objets de $Y \subseteq X$.

Désignons par $\mathfrak{R}(X)$ la matrice de référence ($\nu \times n$) :

$$\mathfrak{R}(X) = \begin{pmatrix} R_1(X) \\ R_2(X) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_\nu(X) \end{pmatrix}$$

Si Y désigne un sous-ensemble de X, on notera :

$$\mathfrak{R}(Y) = \begin{pmatrix} R_1(Y) \\ R_2(Y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_\nu(Y) \end{pmatrix}$$

La matrice représentant la restriction des ordres de référence aux seuls objets de Y.

Désignons par P(Y) l'ensemble des objets de $Y \subseteq X$, qui se trouvent placés dans la première colonne de $\mathcal{R}(Y)$.

2.5.2. *EXEMPLE*

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$$\begin{array}{cc} \mathcal{R}(X) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 2, & 4, & 5, & 1 \\ 4, & 1, & 3, & 2, & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1(X) \\ R_2(X) \\ R_3(X) \end{array} \end{array}$$

On a $P(X) = \{1, 3, 4\}$

Soit $Y = \{2, 4, 5\}$, on a :

$$\begin{array}{cc} \mathcal{R}(Y) = \begin{pmatrix} 2, & 4, & 5 \\ 2, & 4, & 5 \\ 4, & 2, & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1(Y) \\ R_2(Y) \\ R_3(Y) \end{array} \end{array}$$

et $P(Y) = \{2, 4\}$

2.5.3. *DEFINITION* : **Maximax**

Soient un entier donné, X = n et $\mathcal{R}$ une matrice de référence $(\nu \times n)$. Un état de l'opinion E vérifie la condition *Maximax* (ν) si et seulement si pour tout sous-ensemble Y de X, les seuls objets qui se trouvent classés au premier rang de E(Y) sont les objets qui appartiennent à P(Y).

On justifiera l'emploi du terme "maximax" en 2.5.8.

2.5.4. *REMARQUE*

On a $|P(Y)| \leq \nu$ pour tout $Y \subseteq X$, si $\mathcal{R}$ est une matrice de référence ($\nu \times n$). Donc pour tout sous-ensemble X' de $\nu + 1$ objets de X, on a au plus ν objets calssés en tête dans E(X'). Un état de l'opinion qui vérifie MAXIMAX (ν) vérifie donc aussi I(ν). Il en découle :

2.5.5. *PROPOSITION*

Si un état de l'opinion E vérifie la condition Maximax (ν), alors le graphe de surclassement $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ est sans circuit.

2.5.6. *MODELE DE COMPORTEMENT DE VOTANTS*

Commençons par un exemple.

Soient A, B, C, D, E des skieurs qui se classent suivant les résultats obtenus dans les compétitions nationales, ainsi :

- Descente : A, B, E, C, D
- Slalom spécial : C, E, B, D, A
- Slalom géant : D, B, E, A, C.

Pour sélectionner quelques skieurs pour les Jeux Olympiques d'hiver, on les classe dans un ordre total suivant la probabilité de gagner une médaille. Il est évident que la probabilité de gagner une médaille ne dépend pas seulement du niveau national (cf. ci-dessus) mais aussi du niveau international.

Néanmoins, il est par exemple plus probable que A gagne une médaille dans la descente que B, mais il y a peut-être peu de chance pour A de gagner si le niveau international est très élevé. Pour classer les candidats, il est naturel de procéder ainsi :

Suivant le niveau international, on va classer :

soit A, soit C, soit D en tête.

Si on a classé par exemple le skieur A en tête, on va choisir pour la deuxième position entre B, C et D. Suivant les niveaux internationaux, on peut par exemple obtenir les classements suivants :

(A, B, C, E, D)
(D, E, C, A, B)
(C, E, A, D, B) etc...

Nous allons voir que l'ensemble de ces classements vérifie la condition Maximax (3) par rapport à la matrice de référence.

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} A, & B, & E, & C, & D \\ C, & E, & B, & D, & A \\ D, & B, & E, & A, & C \end{pmatrix}$$

<u>Ce mécanisme de choix individuel</u> peut être écrit de la manière suivante :

Soit $\mathcal{R}(X)$ une matrice ($\vartheta \times n$) de référence donnée. Un votant exprime son opinion individuelle selon la règle suivante : Il place un objet, noté y_1 de l'ensemble P(X) au premier rang de son ordre individuel. Ensuite, il choisit un objet de l'ensemble $P(X - \{y_1\})$ et le place au deuxième rang de son ordre individuel etc...

Reprenons l'exemple 2.5.2. On peut obtenir les ordres individuels suivants :

$O_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $O_2 = (3, 4, 2, 1, 5)$, $O_3 = (4, 5, 1, 2, 3)$, etc...

Soit $\mathcal{R}(X)$ une matrice ($\nu \times n$) de référence donnée. Désignons par $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des ordres construits par le mécanisme de choix précédent et par $\mathcal{E}_M$ l'ensemble des ordres vérifiant la condition Maximax. On a :

2.5.7. *PROPOSITION*

$$\boxed{\mathcal{E}_A \equiv \mathcal{E}_M}$$

DEMONSTRATION

1) $\underline{\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_M}$:

se déduit directement des définitions.

2) $\underline{\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}_A}$:

Soit $O = (y_1, \ldots, y_n)$ un ordre appartenant à $\mathcal{E}_M$. L'objet y_i se trouve donc classé en tête de $O(Y_i)$ où $Y_i = \{y_i, \ldots, y_n\}$. $i = 1, \ldots, n$.

Puisque O appartient à $\mathcal{E}_M$ on a:

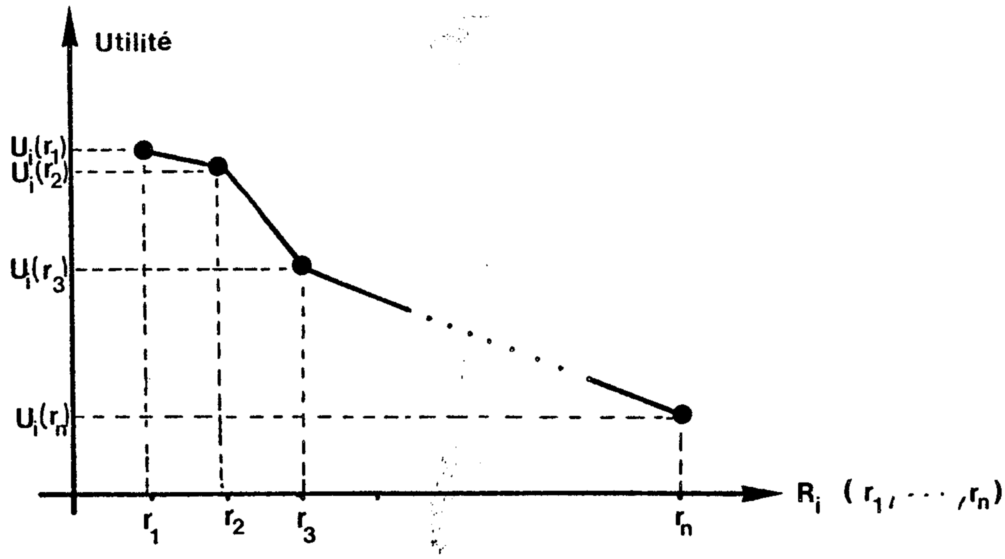
$y_i \in P(Y_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

On peut en conclure que le mécanisme de choix individuel permet de construire O. ∎

2.5.8. *INTERPRETATION DU TERME "MAXIMAX"*

Nous pouvons dire qu'un ordre de référence R_i, $i \in \{1, \ldots, \nu\}$ représente le classement des objets suivant un critère (par exemple le niveau national dans la descente, la taille, température, prix, etc...).

Supposons que les critères soient tels que l'objet classé en tête de $R_i(Y)$ ait pour le critère correspondant la plus grande utilité parmi tous les objets de $Y \subseteq X$. Ceci implique que la fonction d'utilité soit strictement décroissante (pour chaque ordre de référence).



On suppose donc qu'un votant attribue à chaque objet x de X, un vecteur à composantes :

$$x \rightsquigarrow (U_1(x), U_2(x), \ldots, U_\nu(x))$$

où $U_i(x)$ représente l'utilité de x par rapport à l'ordre de référence $R_i(X)$, $i = 1, \ldots, \nu$.

Nous supposons qu'un votant classe l'objet y, $y \in Y \subseteq X$ en tête de l'ensemble Y si et seulement si :

$$\boxed{\max_{i=1,..,\nu} \{U_i(y)\} = \max_{x \in Y} \left(\max_{i=1,..,\nu} \{U_i(x)\} \right)}$$

On peut voir que ce modèle de choix du type "maximax" peut être considéré comme identique au modèle de comportement des votants décrit en 2.5.6. (à condition de choisir des utilités convenables). Un votant qui agit ainsi, n'a donc pas "compensé" les utilités de l'objet y. Par contre, un votant qui "compense" les utilités, classerait l'objet y, $y \in Y \subseteq X$ en tête de l'ensemble Y à condition que :

$$\sum_{i=1}^{\nu} U_i(y) = \max_{x \in Y} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} U_i(x) \right\}$$

Si on reprend l'exemple des skieurs, les courbes d'utilité seront le niveau national pour les différentes disciplines, donc décroissantes, et l'importance de ce classement, donc la hauteur de la courbe, dépend du niveau international.

Remarquons que, par exemple, pour le combiné (descente, slalom spécial, slalom géant ensemble) on classe les skieurs plutôt d'après la deuxième règle. On compenserait donc les différentes performances et on classerait par exemple B en tête.

Pour un exemple de modèle compensatoire, on pourra se reporter à KÖHLER [11] (Mémoire 1976).

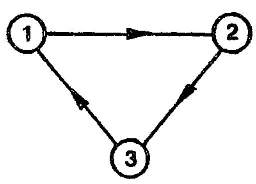
2.5.9. *REMARQUES*

1) La condition présentée ici est la meilleure possible dans le sens suivant :

Si un état de l'opinion E vérifie la condition Maximax pour ν ordres de référence, il peut exister des circuits dans $G(\frac{\nu' - 1}{\nu'})$ ou $\nu' < \nu$.

Exemple : $\nu = 3$, $\nu' = 2$, $X = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} (1, 2, 3) \\ (2, 3, 1) \\ (3, 1, 2) \end{pmatrix}$

L'état de l'opinion $E = \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\}$ suit la condition Maximax(3). Le graphe de surclassement correspondant est :



2) La condition inverse de la condition Maximax, le condition Minimin s'obtient en remplaçant dnas la définition 2.5.3. "premier rang" par "dernier rang".

Evidemment, si un état de l'opinion vérifie la condition minimin (ν), alors il vérifie aussi la condition $B(\nu)$.

De même on vérifie trivialement que les conditions suivantes sont équivalentes, R et ν étant donnés :

1 E vérifie la condition MAXIMAX

2 E^{-1} vérifie la condition MINIMIN

(où E^{-1} désigne l'état de l'opinion obtenu en inversant tout ordre de E).

CHAPITRE III

Treillis associé à un état de l'opinion

Introduction :

Au chapitre précédent nous avons pu associer une représentation graphique à une condition algébrique : la condition $B(\nu, i, R)$. Il semble naturel de chercher à suivre une démarche analogue pour la condition $B(\nu)$.

Nous introduisons à cette fin, dans le présent chapitre, un "treillis associé à un état de l'opinion E". Ce treillis possède des propriétés intéressantes dans le cas où E vérifie la condition $B(\nu)$. Il permet en particulier de répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le plus grand nombre d'ordres individuels différents qu'un état de l'opinion E vérifiant la condition $B(\nu)$ peut contenir ?
   Ce nombre sera désormais noté par N_ν .

2. Désignons par N(E) le nombre d'ordres individuels différents contenus dans E, et notons $E \subset E'$ si et seulement si tous les ordres de E se retrouvent au moins une fois dans E'.
   Soit E un état de l'ominion donné vérifiant la condition $B(\nu)$. Existe-t-il un état de l'opinion E', $E \subset E'$, vérifiant également la condition $B(\nu)$ tel que : $N(E') = N_\nu$?

3. Soit E un état de l'opinion donné. Quel est le plus petit entier $\underline{\nu}$ tel que E vérifie la condition $B(\nu)$? D'après la définition de la condition $B(\nu)$ il est clair qu'un état de l'opinion vérifie toujours $B(\nu^{*})$, $\nu^{*} = |X|$.

1 Treillis T(E) [13]

NOTATIONS

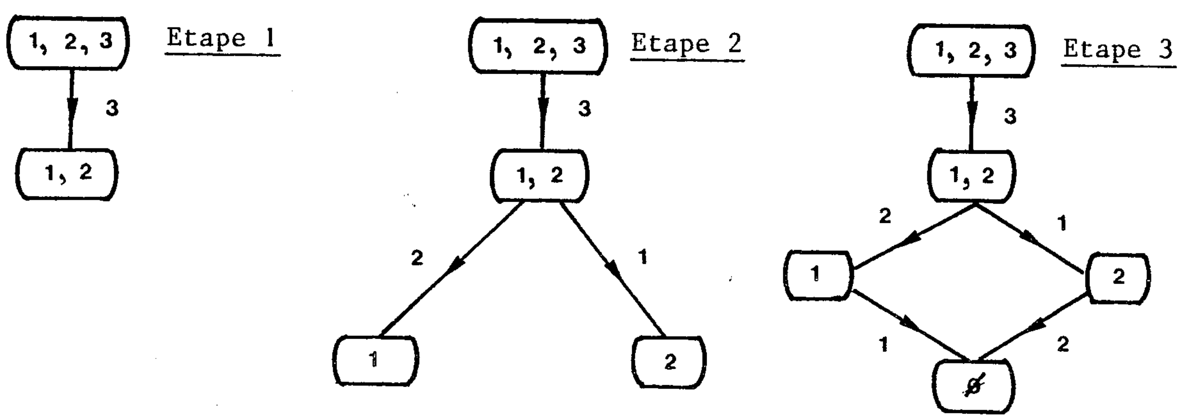
Soit X $= \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des objets à classer, $|X| = n$.
Soit $Y \subseteq X$, E(Y) désigne la restriction de l'état de l'opinion E aux seuls objets de l'ensemble Y.

3.1.1. *DEFINITION* **Treillis *T(E)***

> Soit E un état de l'opinion donné sur X. On appelera "*treillis associé à l'état de l'opinion E*" le graphe T(E) = $(\mathcal{X}, U)$ simple orienté défini de la ménière suivante :
>
> Chaque partie de X désigne au plus un sommet de T. X et $\{\emptyset\}$ sont des sommets de T.
>
> L'ensemble des successeurs d'un sommet Y s'obtient en otant à Y, de toutes les façons possibles, un des objets qui, dans E(Y) se trouve classé en queue.
>
> Y est joint à ses successeurs par des arcs dirigés vers le bas.

EXEMPLE

Soit X : $\{1, 2, 3\}$ E= $\{(1, 2, 3), (2, 1, 3)\}$



3.1.2. *PROPRIETES DE T(E)*

1°) Pour tout sommet Y de $\mathfrak{X}$ il existe un chemin de longueur $(|X| - |Y|)$ allant de X à Y dans T.

2°) Pour tout sommet Y de $\mathfrak{X}$, $Y \neq \{\emptyset\}$ l'ensemble des arcs sortants est non vide. On peut en conclure que pour tout $Y \in \mathfrak{X}$ il existe un chemin d'une longueur $|Y|$ allant de Y à $\{\emptyset\}$.

3°) D'après 1°) et 2°) T(E) est donc bien un treillis.

Si on associe à chaque arc (Y, Z) de U l'objet y, y = Y - Z, à tout chemin liant deux sommets de T(E) correspond une séquence unique d'objets.

Il est clair qu'une séquence d'objets donnés puisse correspondre a priori à zéro, un ou plusieurs chemins.

Dans la suite de ce chapitre, nous désignons par :

. $\mathcal{C}(Y,Z)$ l'ensemble des chemins distincts liant deux sommets Y et Z de T(E),

.. $\Omega^+(Y)$ l'ensemble des objets correspondant à des arcs ayant leur extrémité initiale dans Y,

... $W(Y)$ l'ensemble des objets qui se trouvent en dernière position de E(Y).

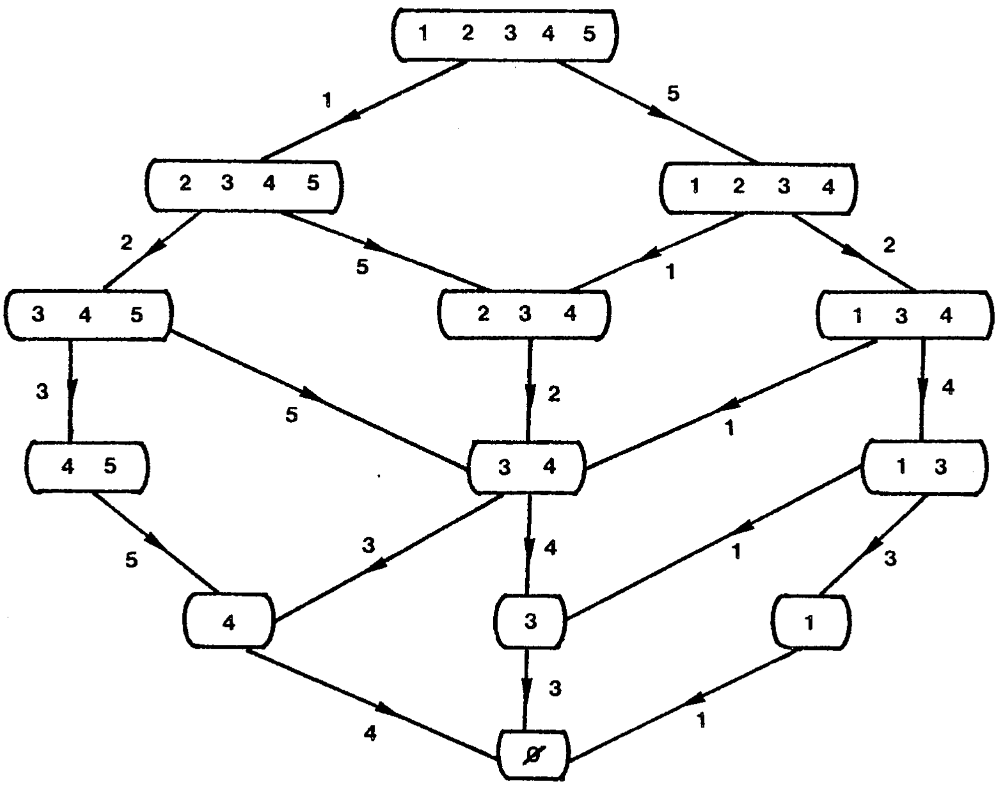
Si T(E) désigne le treillis associé à l'état de l'opinion E, on a d'après la définition 3.1.1. :

$$\boxed{\Omega^+(Y) = W(Y)}$$

3.1.3. *EXEMPLE*

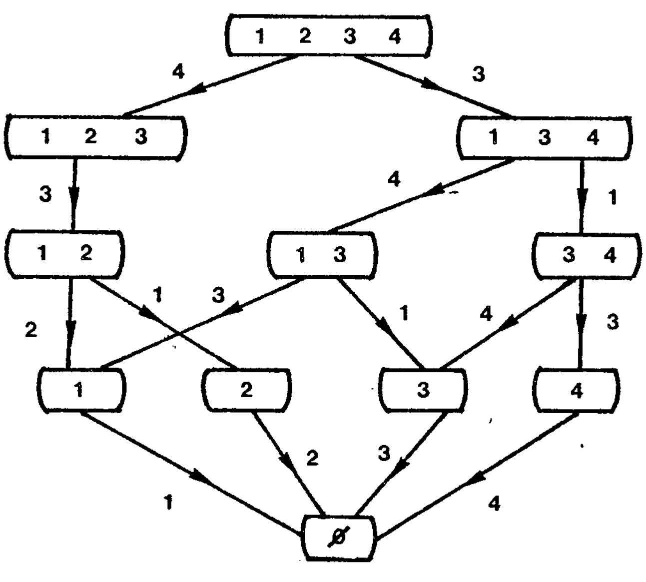
Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et E $\{(4, 3, 2, 5, 1), (3, 4, 2, 5, 1), (1, 3, 4, 2, 5), (4, 5, 3, 2, 1)\}$

Le treillis $T(E) = (\mathcal{X}, U)$ associé à E est le suivant :



On a : $\mathcal{C}(\{1, 2, 3, 4\}, \{3\}) = \{(1, 2, 4)\ (2, 1, 4)\ (2, 4, 1)\}$

Considérons maintenant le treillis T suivant :

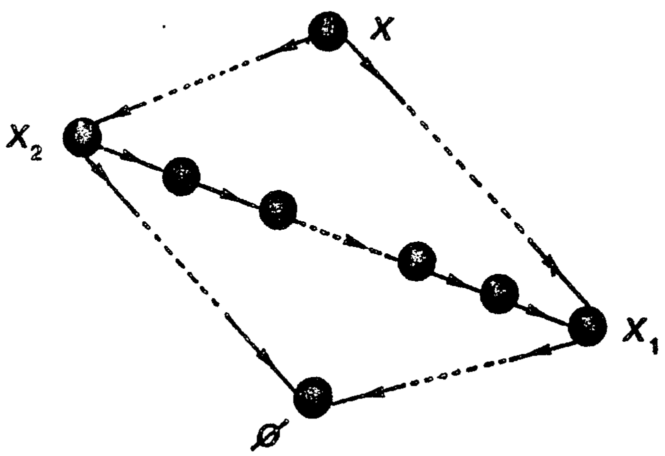


Existe-t-il un état de l'opinion E tel que le treillis T(E) associé à E soit identique au treillis T donné ?

La proposition 3.1.4. fournit un critère qui permet de répondre à cette question par la négative.

3.1.4. *PROPOSITION*

Soit T(E) = ($\mathfrak{X}$, U) le treillis associé à un état de l'opinion E. Soient X et X deux sommets de T(E). Si $X_1 \subset X_2$ alors il existe un chemin dans T(E) liant X_2 à X_1 .



DEMONSTRATION:

Considérons un voyageur partant de X , qui suit le sens des arcs et qui utilise seulement les arcs correspondant aux objets appartenant à $X_2 - X_1$. Ce voyageur arrive finalement à un sommet Y vérifiant :

1°) $X_1 \subseteq Y$

2°) $\Omega^+(Y) \subseteq X_1$

Si Y = X_1 alors l'énoncé est démontré. Supposons donc que $X_1 \subset Y$.

Soit y un objet appartenant à Y - X_1. Puisque tout objet classé en queue dans E(Y) appartient à X_1. L'objet y précèderait dans tout ordre O de E au moins un des objets de X_1 .

Donc dans tout sous-ensemble X' de X, $X_1 \subset X'$ et contenant y, y ne se trouverait jamais classé en queue. Ceci implique que tout prédécesseur de X_1 contiendrait l'objet y, mais puisque X_1 ne contient pas y, la seule manière de passer d'un prédécesseur à X_1 est d'éliminer y, ce qui est impossible. ■

REMARQUE

Soit E un état de l'opinion et $T(E) = (\mathcal{X}, U)$ le treillis associé .
La proposition précédente permet d'affirmer que l'ordre sur les parties qui résultent de l'inclusion contient les arcs du treillis.

Tout chemin de T remonte (en sens inverse) de $\{\emptyset\}$ jusqu'à X. On peut donc fabriquer un état de l'opinion en prenant les ordres correspondant aux chemins remontants.

Nous allons nommer cet état de l'opinion : "*état de l'opinion associé au treillis* $T(E)$" et nous l'appelons E_T

D'après la définition du treillis T(E) associé à un état de l'opinion, on voit que :

3.1.5. $$\boxed{T(E_T) \equiv T(E)}$$

c'est-à-dire que le treillis $T(E_T)$ associé à E_T est identique au treillis T(E).

3.1.6. $$\boxed{E \subseteq E_T}$$

c'es-à-dire que tout ordre de E se retrouve dans E_T.

3.1.7. *EXEMPLE*

Reprenons l'exemple 3.1.3. On a :

$$E_T = \{ \begin{array}{ll} (4, 5, 3, 2, 1) & * \\ (4, 3, 5, 2, 1) & \\ (3, 4, 5, 2, 1) & \\ (3, 4, 2, 5, 1) & * \\ (4, 3, 2, 1, 5) & * \\ (3, 4, 2, 1, 5) & \\ (3, 4, 1, 2, 5) & \\ (1, 3, 4, 2, 5) \} & * \end{array}$$

Les ordres qui appartiennent à E sont marqués (*).

3.1.8. *PROPOSITION*

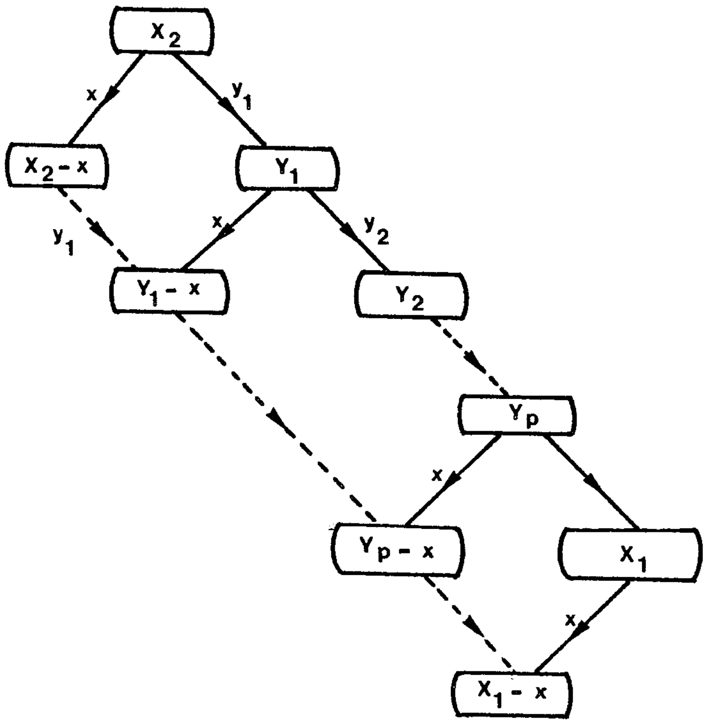
Soit T un sous-treillis du treillis de l'inclusion étroite des parties de X, $\{X\}$ et $\{\emptyset\}$ des sommets de T et T tel que : Si X_1, X_2 sont deux sommets de T vérifiant $X_1 \subset X_2$ alors il existe un chemin allant de X_2 à X_1.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. si X_1 et X_2 sont deux successeurs de X_3 alors ils ont un successeur commun.
2. si $(X_2 - \{x\})$ est un successeur de X_2 alors tout sommet $X_1 \subset X_2$ contenant l'objet x admet $(X_1 - \{x\})$ parmi ses successeurs.

DEMONSTRATION

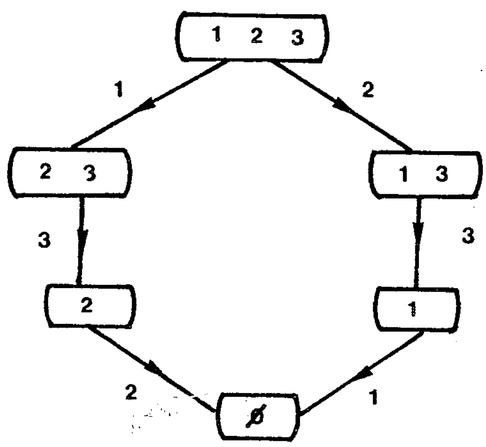
1 → 2 La figure suivante dessine le chemin allant de X_2 à X_1



On voit facilement que d'après (1) Y_1 doit compter parmi ses successeurs $(Y_1 - \{x\})$, Y_2 , $(Y_2 - \{x\})$ etc...

2 → 1 Evident.

L'exemple suivant montre que la proposition 3.1.4. était nécessaire mais pas suffisante :



Le treillis dessiné suit la condition de la proposition 3.1.8. et pourtant aucun état de l'opinion ne peut donner un tel treillis. La proposition 3.1.9. fournit une CNS.

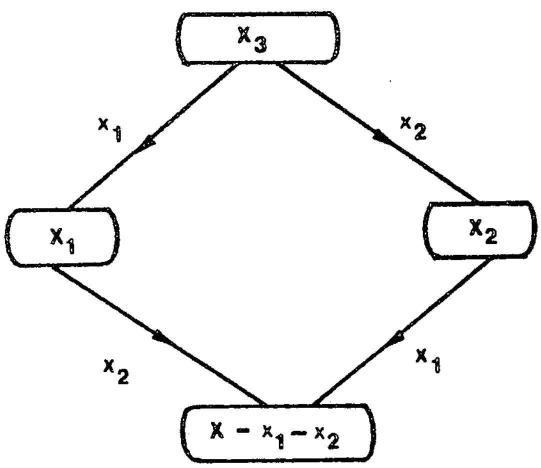
3.1.9. *PROPOSITION*

> Une CNS, pour que T soit un "treillis associé à un état de l'opinion", est que :
>
> ① X, $\emptyset$ soient des sommets de T,
> ② T soit contenu dans le treillis de l'inclusion étroite des parties de X,
> ③ Si X_1 et X_2 sont deux successeurs de X_3 alors ils ont un successeur commun,
> ④ Si $X_1 \supset X_2$ alors, il existe un chemin allant de X_1 à X_2 ..

<u>DEMONSTRATION</u>

a) <u>Soit E un état de l'opinion sur X.</u>

① et ② sont évidemment vérifiés. ④ est la proposition 3.1.4.. Montrons que la condition ③ est vérifiée :



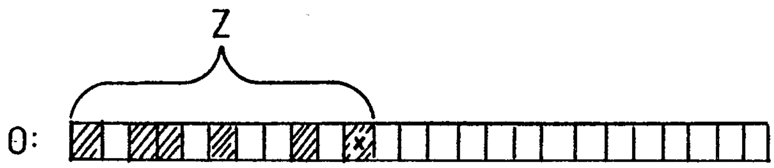
Dans $E(X_3)$ l'objet x_2 se trouve classé en queue. Puisque $X_1 \subset X_3$ dans $E(X_1)$ l'objet x_2 se trouve aussi classé en queue. X_1 a donc le successeur $(X_1 - x_2) = (X - x_1 - x_2)$. D'une manière analogue, on montre que $(X - x_1 - x_2)$ est successeur de X .

b) Soit E_T l'état de l'opinion associé à un treillis vérifiant ①, ②, ③, ④. Nous allons montrer que le treillis associé à E_T est identique au treillis T D'après la définition 3.1.1., ceci revient à démontrer que pour tout sommet Y de T, l'ensemble des objets correspondant aux arcs sortants, noté $\Omega^+(Y)$ est identique à l'ensemble des objets classés en dernière position de $E_T(Y)$. Cet ensemble sera noté $\Omega^+_T(Y)$.

Ainsi, le sommet X a dans le treillis associé à E_T les mêmes successeurs que dans T, et ces successeurs ont eux-mêmes dans les deux treillis les mêmes successeurs, etc...

1) Il est évident que $\Omega^+(Y) \subseteq \Omega^+_T(Y)$.

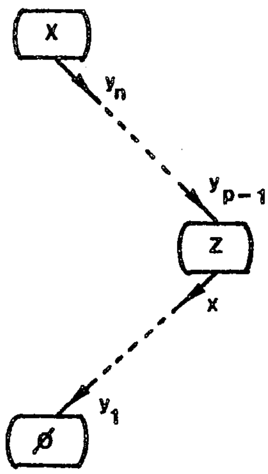
2) Supposons qu'il existe un sommet Y de T tel que $\Omega^+(Y) \subset \Omega^+_T(Y)$.
   Soit $x \in \Omega^+_T(Y) - \Omega^+(Y)$.
   Il existe donc un ordre O de E_T qui classe l'objet x en queue de l'ensemble Z où $Y \subseteq Z$.



désigne un objet de Y

Le chemin correspondant à cet ordre dans T est le suivant :

$O = (y_1, y_2, \ldots, y_p = x, y_{p+1}, \ldots, y_n)$.



D'après la proposition (3.1.8.), (Y - x) doit être un successeur de Y, donc $x \notin \Omega^+_T(Y) - \Omega^+(Y)$ et $x \in \Omega^+_T(Y) - \Omega^+(Y)$, d'où la contradiction. ■

Désignons par **N(E)** le nombre d'ordres individuels différents contenus dans l'état de l'opinion E.

3.1.10 *PROPOSITION*

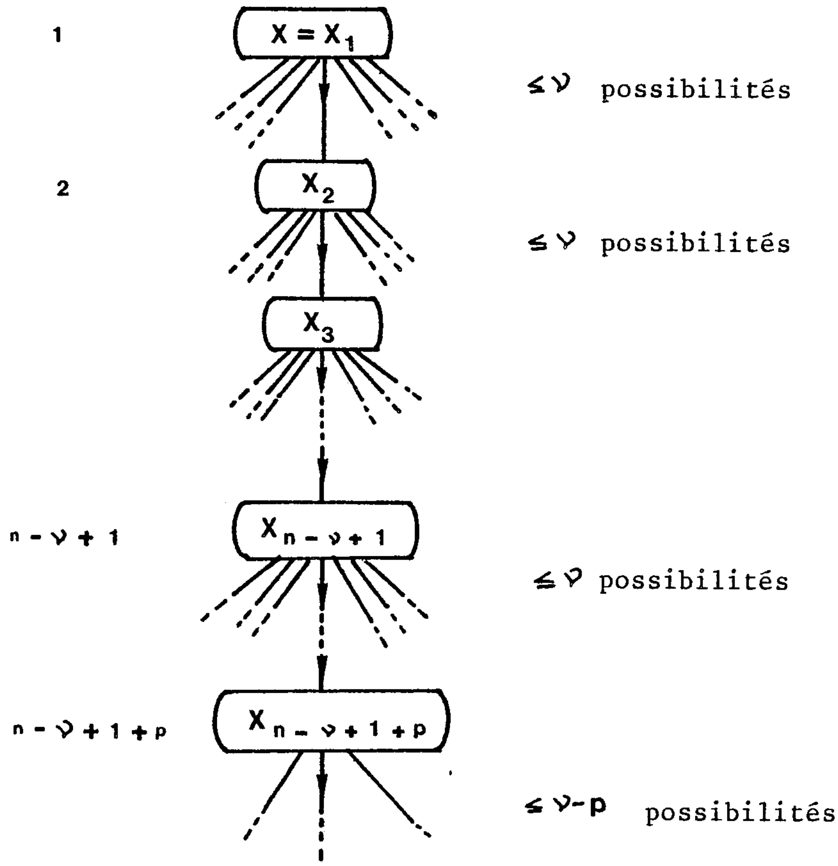
> Soit T(E) = ($\mathfrak{X}$, U) le treillis associé à l'état de l'opinion E, ν un entier donné et $|X| = n$. Si pour tout $Y \in \mathfrak{X}$ on a $|\Omega^+(Y)| \leq \nu$ alors
>
> $$\boxed{N(E_T) \leq \begin{cases} \nu! \cdot \nu^{n-\nu} & \text{si } n \geq \nu \\ n! & \text{sinon} \end{cases}}$$

DEMONSTRATION

Evaluons une borne supérieure du nombre de chemins différents dans T(E). Commençons par le sommet X.

A chaque niveau j, j = 1,...n - ν + 1 (voir figure ci-après) de T(E), on a au plus, ν possibilités de choix.

A chaque niveau $n - \nu + 1 + p$, $p = 1, \dots, \nu - 1$ on a au plus $\nu - p$ possibilités de choix, puisque $|\Omega^+(Y)| \leq |X| = \nu - p$. Il existe donc au plus $\nu!\,\nu^{n-\nu}$ chemins différents.



3.1.11 *REMARQUE*

Si $|\Omega^+(Y)| = \nu$ pour tout sommet de T(E) vérifiant $|Y| \geq \nu$ et $|\Omega^+(W)| = |W|$ pour tout sommet de T(E) vérifiant $|W| < \nu$ on a alors $N(E\ \ ) = \nu!\cdot\nu^{n-\nu}$.

2 Caractérisation du treillis associé à un état de l'opinion E vérifiant B(ν) ou I(ν) — Dénombrement des ordres admissibles [13]

Il est bien connu que les états de l'opinion blackiens ne peuvent pas contenir plus que $2^{|X|-1}$ ordres individuels différents. La condition de BLACK est un cas particulier de la condition d'unimaximalité. On est donc tenté de penser qu'un état de l'opinion qui vérifie la condition d'unimaximalité peut contenir plus de $2^{|X|-1}$ ordres individuels différents. Ce point sera contredit dans le théorème 3.2.2. de ce chapitre.

De même, la condition B(ν, i, R) est un cas particulier de la condition B(ν). Malgrè cela, elle n'est pas moins restrictive que cette dernière pour ce qui est du nombre d'ordres individuels différents autorisés.

Le dénombrement de ces ordres s'appuie sur une caractérisation du treillis T associé à un état de l'opinion vérifiant la condition B(ν).

Cette caractérisation va nous permettre, pour un entier ν et un état de l'opinion donnés, de tester si E vérifie la condition B(ν). De plus, on peut déterminer le plus petit entier $\underline{\nu}$ tel que E vérifie la condition B($\underline{\nu}$).

3.2.1. *PROPOSITION*

Soit E un état de l'opinion donné, vérifiant la condition $B(\nu)$, et soit $T(E) = (\mathcal{X}, U)$ le treillis associé.
On a $|\Omega^+(Y)| \leq \nu$ pour tout $Y \in \mathcal{X}$.

DEMONSTRATION

Immédiate d'après le lemme 1 - chap. II. ■

3.2.2. *THEOREME*

Notons N(E) le nombre d'ordres individuels différents contenus dans un état de l'opinion E.
Si E vérifie la condition $B(\nu)$, alors

$$\boxed{N(E) \leq \begin{cases} \nu! \cdot \nu^{|X|-\nu} & \text{si } |X| \geq \nu \\ |X|! & \text{sinon} \end{cases}}$$

DEMONSTRATION

Si E vérifie la condition $B(\nu)$, alors dans T(E), $\forall\ Y \in \mathcal{X}$ on a $|\Omega^+(Y)| \leq \nu$
La proposition 3.1.10 nous permet alors d'affirmer que :

$$N(E_T) \leq \begin{cases} \nu!\, \nu^{|X|-\nu} & \text{si } |X| \geq \nu \\ |X|! & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus $N(E) \leq N(E_T)$, d'où le résultat. ■

Soit E un état de l'opinion donné. Nous notons W(Y) l'ensemble des objets de $Y \subseteq X$ qui se trouvent classés au moins une fois en dernière position d'un ordre de E(Y).

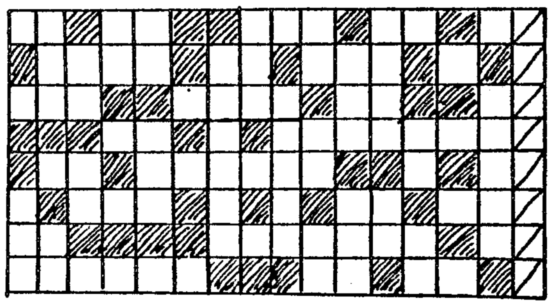
3.2.3. *LEMME*

> Soit E un état de l'opinion sur X. Soient $Y \subseteq Z \subseteq X$. Si $W(Z) \subseteq Y$, alors $W(Y) \equiv W(Z)$.

DEMONSTRATION

On vérifie facilement ce lemme d'après les deux figures suivantes :

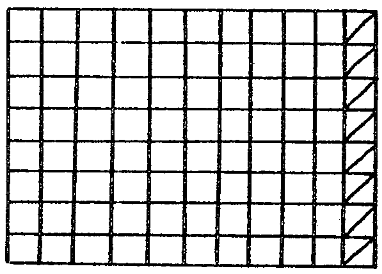
E(Z) :



▧ désigne les objets appartenant à l'ensemble Z - Y.

◺ désigne les objets de W(Z) qui n'appartiennent pas à l'ensemble Z - Y.

E(Y) :



3.2.4. *THEOREME*

> Soit ν un entier donné, E un état de l'opinion et $T = (\mathcal{X}, U)$ son treillis associé. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
>
> 1. E vérifie la condition $B(\nu)$,
>
> 2. $|\Omega^{+}(Y)| \leq \nu$ pour tout $Y \in \mathcal{X}$.

REMARQUE

On pense généralement aue ② ⟶ ① est trivialement vérifié d'après la définition de la condition $B(\nu)$. Mais l'ensemble $\mathcal{X}$ ne contient pas <u>toutes</u> les parties de X, (ou toutes les parties de X de cardinal $\nu + 1$).

DEMONSTRATION

① ⟶ ②: C'est la proposition 3.2.1.

② ⟶ ①: Nous allons montrer que $\neg$① ⟶ $\neg$② Autrement dit, si E ne vérifie pas la condition $B(\nu)$, alors il existe un $Z \in \mathcal{X}$ tel que $|\Omega^+(Z)| > \nu$.

Supposons donc que E ne vérifie pas la condition $B(\nu)$. Il existe donc un sous-ensemble Y de X, tel que $|W(Y)| > \nu$.

Cas n° 1 : <u>$Y \in \mathcal{X}$</u> alors on a $|\Omega^+(Y)| = |W(Y)| > \nu$.

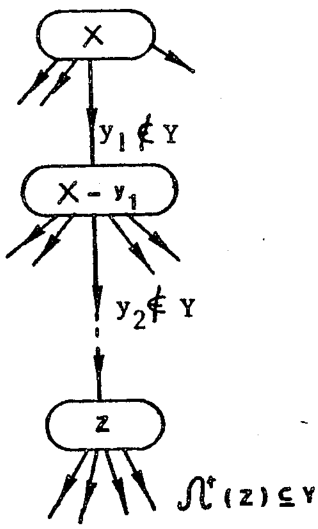
Cas n° 2 : <u>$Y \notin \mathcal{X}$</u>

Posons $\nu^* = W(Y)$
Montrons qu'il existe unsommet $Z \in \mathcal{X}$ tel que $|\Omega^+(Z)| = \nu^*$

Imaginons un voyageur partant de X, qui suit le sens des arcs, et qui utilise seulement les arcs correspondant aux objets qui n'appartiennent pas à Y. (cf. figure ci-après). Ce voyageur arrive finalement à un sommet Z où :

. $\Omega^+(Z) \subseteq Y$, et
.. $Z \supseteq Y$

$T = (\mathcal{X}, U)$



Puisque T est le treillis associé à l'état de l'opinion E, on a : $\Omega^+(Z) = W(Z)$
Nous vérifions donc les hypothèses du lemme 3.2.3., donc $|\Omega^+(Z)| = |W(Z)| = \nu^*$

Donc si un état de l'opinion ne vérifie pas la condition $B(\nu)$, il existe un sommet $Z \in \mathcal{X}$ tel que : $|\Omega^+(Z)| > \nu$. $\blacksquare$

3.2.5. *COROLLAIRE*

> Soit E un état de l'opinion donné, et $T = (\mathcal{X}, U)$ le treillis associé.
> Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
>
> 1. ν^* est le plus petit entier, tel que E vérifie $B(\nu^*)$
> 2. $\nu^* = \max \{ |\Omega^+(Z)| \mid Z \in \mathcal{X} \}$

Le théorème 3.2.4. et le corollaire 3.2.5. nous donnent une méthode pour tester la condition $B(\nu)$ sur un état de l'opinion donné.

3.2.6. *PROPOSITION*

> Soit E un état de l'opinion donné, et E_T l'état de l'opinion associé à T, où T désigne le treillis associé à E.
> ν un entier donné, les deux conditions suivantes sont équivalentes :
>
> 1. E vérifie $B(\nu)$,
> 2. E_T vérifie $B(\nu)$.

DEMONSTRATION

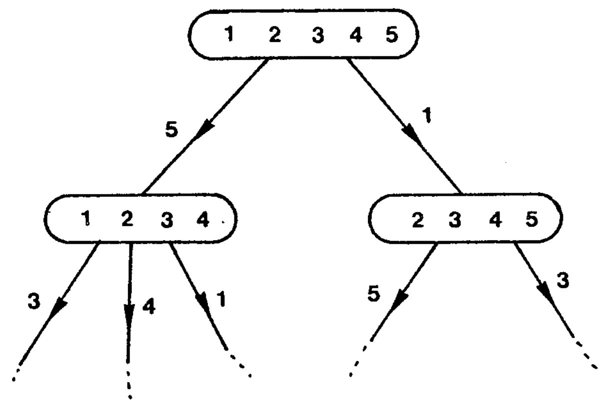
D'après la définition d'un treillis associé à un état de l'opinion, le treillis associé E_T est identique au treillis "initial" T.

3.2.7. *EXEMPLE*

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

et $E = \{(1, 2, 3, 4, 5)$
$(3, 2, 1, 4, 5)$
$(2, 4, 5, 3, 1)$
$(4, 2, 5, 3, 1)$
$(2, 3, 1, 4, 5)$
$(2, 1, 4, 3, 5)\}$

On obtient $T = (\mathcal{X}, U)$



On a $|\Omega^+(Z)| \leq 3$ pout tout $Z \in \mathcal{X}$. E vérifie donc la condition B(3).

Remarquons que cette méthode est beaucoup plus rapide que celle qui consiste à tester sur les ensembles X' de 3 objets de X si B(2) est vérifiée,
puis sur les ensembles X" de 4 objets de X si B(3) est vérifié, etc...

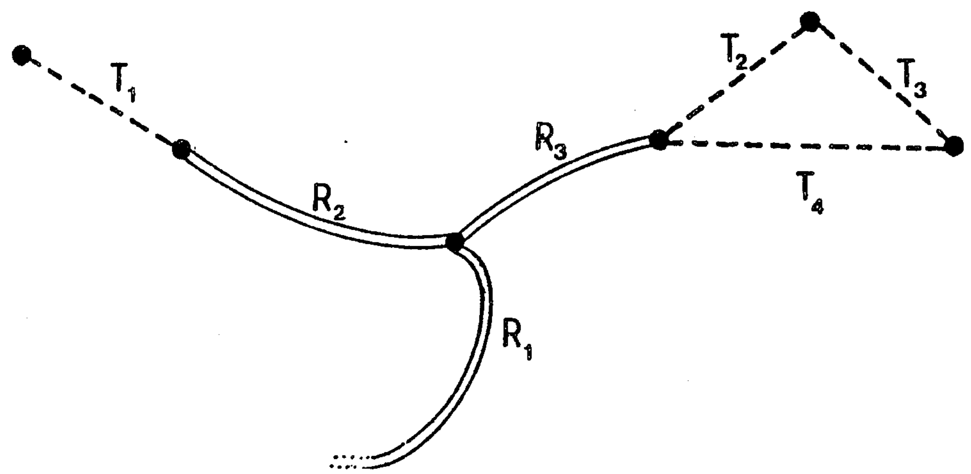
3.2.8. *EXEMPLE D'UN ETAT DE L'OPINION VERIFIANT LA CONDITION I(3)*

L'AMENAGEMENT D'UNE STATION DE SKI :

La construction de la station de ski peut être décomposée ainsi :

. Construction des routes $R_{1, 2, 3}$

.. Construction des téléphériques $T_{1, 2, 3, 4}$



Pour construire les routes R_2 et R_3 il faut tout d'abord que la route R_1 soit terminée. La construction du téléphérique T_1 ne peut commencer que lorsque la route R_2 est achevée. Il est nécessaire que la route R_3 soit terminée pour qu'on puisse commenser T_2 ou T_4 . La construction de T_2 ou de T_4 doit être terminée pour que la construction du téléphérique T_3 puisse débuter.

Supposons que les travaux ne puissent être exécutés parallèlement, c'est-à-dire qu'on ne puisse pas par exemple construire T_2 et T_4 en même temps. Un ordonnancement possible est le plan d'exécution suivant que nous écrivons comme un ordre total : $(R_1 > R_2 > R_3 > T_1 > T_2 > T_4 > T_3)$.

C'est-à-dire que l'on construit R_1 ensuite R_2 etc...

L'ensemble des ordonnancements possibles est présenté dans la figure ci-après:

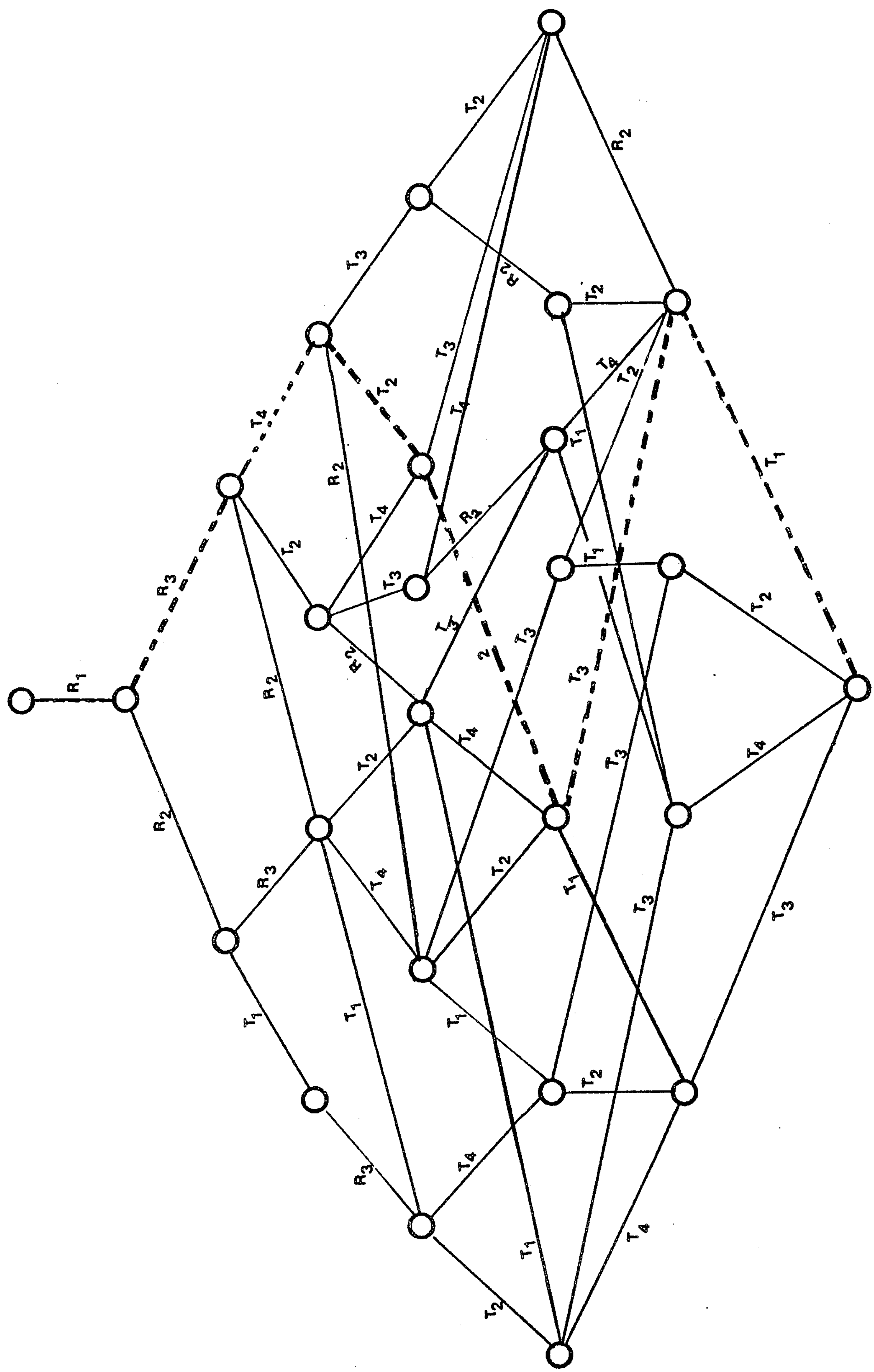
Un ordonnancement possible correspond à un chemin de haut en bas. Par exemple

$$(R_1 > R_3 > T_4 > T_2 > R_2 > T_3 > T_1)$$

Nous considérons l'ensemble de tous les ordonnancments possibles comme un état de l'opinion sur l'ensemble des objets $\{R_1, R_2, R_3, T_1, T_2, T_3, T_4\}$
Nous avons montré (cf. 2.3.4.) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cet état de l'opinion E vérifie la condition B(3) est :

Dans le treillis associé à E de tout sommet, le nombre des successeurs est inférieur ou égal à trois.

Puisque E vérifie la condition $B(\nu)$ si et seulement si E^{-1} vérifie $I(\nu)$, nous pouvons utiliser ce résultat. Dans le graphe de la figure ci-après qui est le treillis associé à E^{-1} où E désigne l'ensemble de tous les ordonnancemnets possibles, tout sommet a au plus 3 successeurs, donc E^{-1} vérifie B(3) et E, I(3).



3 Etat de l'opinion de cardinalité maximale vérifiant la condition B(ν) [13]

Au paragraphe précédent, nous avons vu qu'un état de l'opinion sur un ensemble de n objets vérifiant $B(\nu)$ ne pouvait pas contenir plus de $N_\nu = \nu!\,\nu^{n-\nu}$ ordres individuels différents.

Ainsi N_ν est une borne supérieure au nombre d'ordres différents que l'on peut trouver dans un tel état de l'opinion. On peut alors légitimement se poser la question suivante :

Soit ν un entier naturel et E un état de l'opinion donnés vérifiant la condition $B(\nu)$. Existe-t-il un état de l'opinion $E' \supseteq E$ vérifiant aussi $B(\nu)$, tel que $N(E') = N_\nu$, où $N(E')$ désigne le nombre d'ordres différents dans E' ?

La réponse (assez inattendue) à cette question fait l'objet de ce paragraphe.

<u>Rappelons quelques résultats obtenus jusqu'ici:</u>

Soit E un état de l'opinion et $T(E) = (\mathcal{X}, U)$ le treillis associé. On a :

① $E \subseteq E_{T(E)}$ (cf. 3.1.6.)

② Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

. E vérifie $B(\nu)$

.. $E_{T(E)}$ vérifie $B(\nu)$

... $|\Omega^+(Y)| \leq \nu$ pour tout $Y \in \mathcal{X}$ (cf. 3.2.4. et 3.2.6.).

③ Si E vérifie $B(\nu)$, alors $N(E) \leq N(E\ \ ) \leq N_\nu$ (cf. 3.2.2.).

OPERATION 1 :

Soit T = ($\mathcal{X}$, U) le treillis associé à un état de l'opinion E vérifiant B(ν).

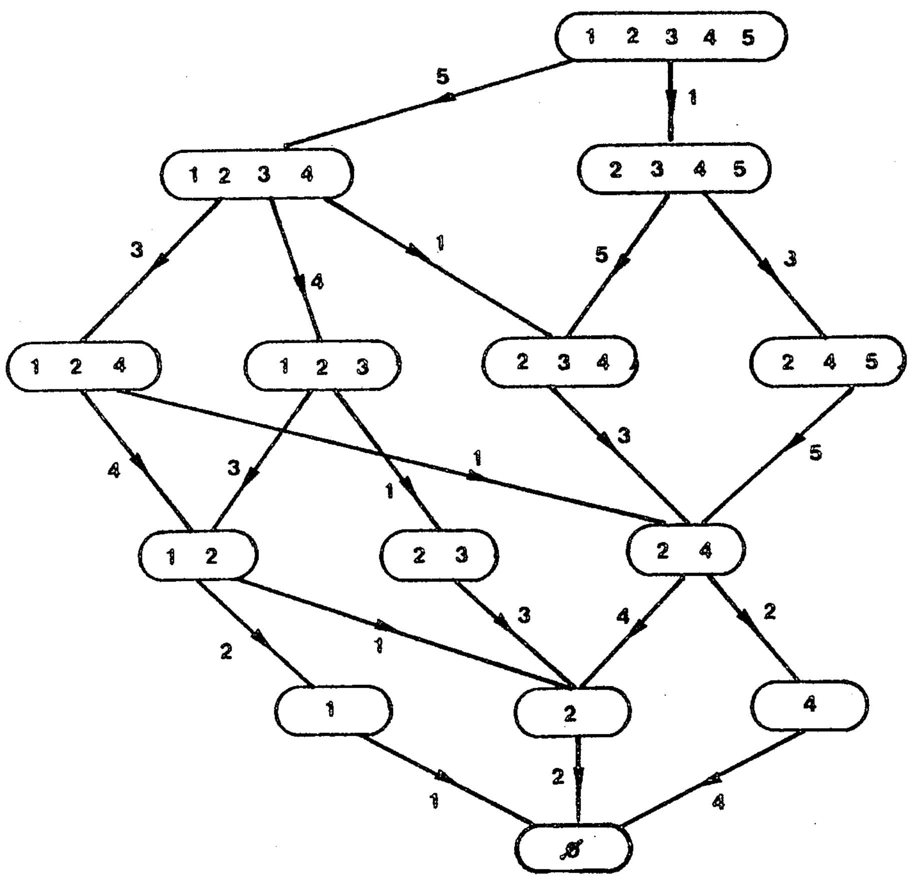
Remplacer ce treillis par un treillis T_1 ayant les mêmes sommets et arcs du niveau n au niveau ν et dans lequel on aurait ajouté aux niveaux suivants le plus possible d'arcs et de sommets.

REMARQUE

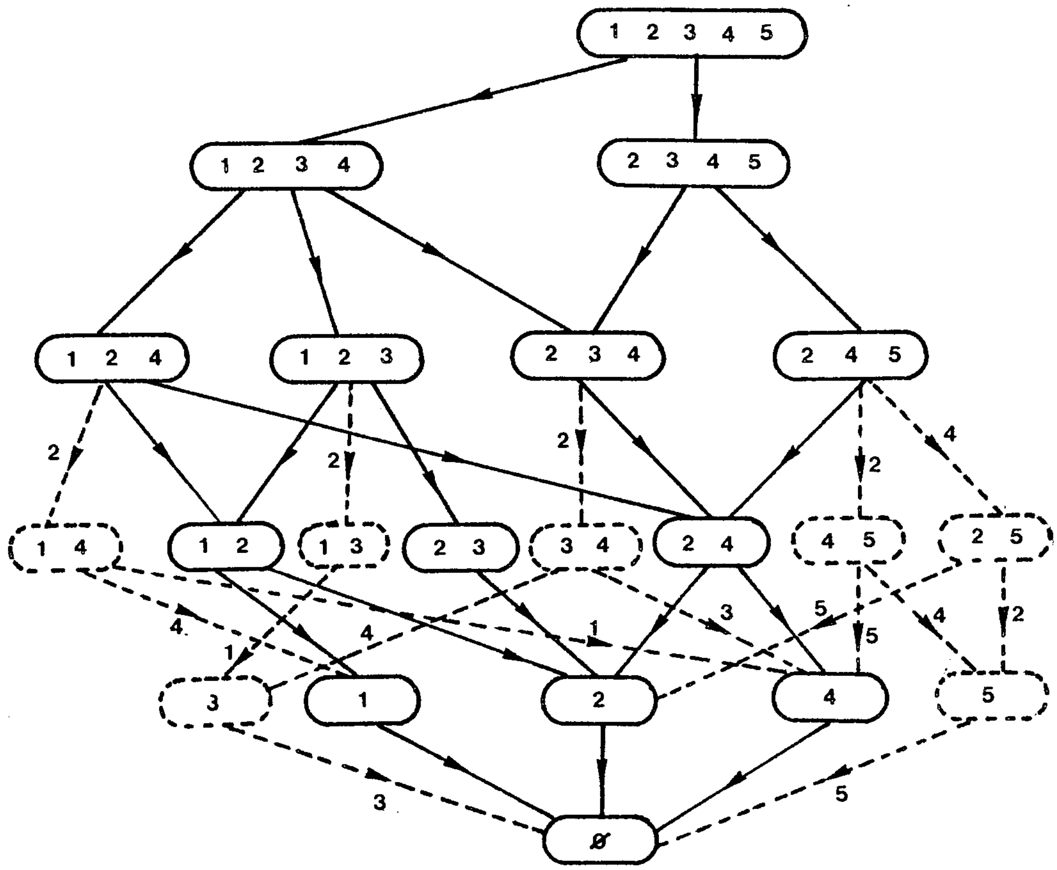
$\nu!$ chemins vont alors de tout sommet Y du niveau ν au sommet $\{\emptyset\}$ ..

EXEMPLE

Reprenons l'exemple 3.2.7. On a T = ($\mathcal{X}$, U) , $\nu = 3$



Le treillis T_1 est le suivant :



3.3.1. *PROPOSITION*

> L'état de l'opinion E_{T_1} associé au treillis T_1 vérifie la condition $B(\nu)$.

<u>DEMONSTRATION</u>

Chaque sommet Y du treillis T_1 vérifie par construction: $|\Omega^+(Y)| \leq \nu$.

Donc si nous montrons que le treillis associé à E_{T_1} est identique au treillis T_1 alors E_{T_1} vérifie la condition $B(\nu)$ (cf. 3.2.4.).

Ceci revient à montrer (cf. 3.1.5. et 3.1.9.) que si X_1 et X_2 sont deux successeurs de X_3 dans T_1 alors ils ont un successeur commun.

Cas n° 1 : Pour tout couple de sommet X_1 et X_2 de cardinalité inférieure ou égale à ν cette propriété est vérifiée (par définition de l'opération 1).

Cas n° 2 : Si X_1 et X_2' appartiennent à un niveau supérieur à ν, alors ils étaient contenus dans le treillis T initial, dans lequel la propriété est vérifiée.

E_{T_1} vérifie donc la condition $B(\nu)$. ∎

OPERATION 2

Soit $T = (\mathcal{X}, U)$ le treillis associé à un état de l'opinion E vérifiant $B(\nu)$.

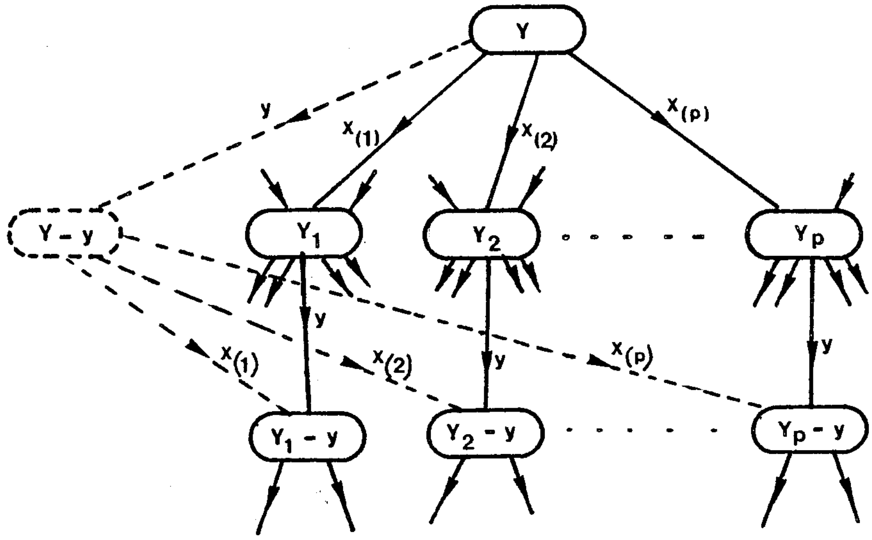
On considère les sommets $Y \in \mathcal{X}$ tels que :

1°) $|Y| > \nu$ (c'est-à-dire de niveau strictement supérieur à ν),

2°) Le nombre des successeurs de Y est p, $p < \nu$

Si dans ces sommets on peut en trouver un dont les p successeurs ont tous un successeur qui se déduit par l'extraction de l'objet y, alors on ajoute au treillis au niveau $|Y| - 1$ le sommet $(Y - y)$ et tous les arcs qui peuvent le joindre a priori.

Désignons par T_2 le treillis ainsi obtenu.



Y_1 ,... Y_p désignent les successeurs de Y

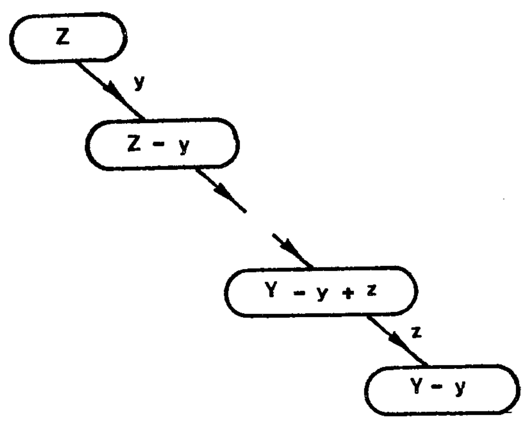
3.3.2. *PROPOSITION*

> a) Y est le seul prédécesseur de (Y-y) dans T_2 ,
> b) $(Y_1 - y),\ldots, (Y_p - y)$ sont les seuls successeurs de (Y - y) dans T_2

Cette proposition montre que les arcs pointillés dans la figure précédente sont les seuls nouveaux arcs de T_2.

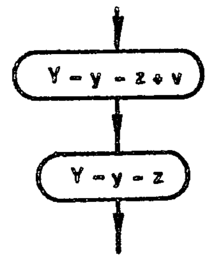
DEMONSTRATION

a) Montrons que T_2 ne contient pas de sommet (Y - y + z) avec $z \neq y$. S'il existait un tel sommet dans T_2 il existerait aussi dans T_2 un sommet Z contenant Y + z et qui précèderait (Z - y).

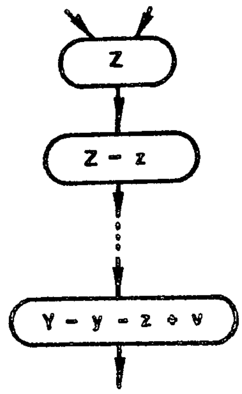


Si $(Z - y)$ est un successeur de Z dans T_2, Y doit aussi précéder $(Y - y)$ puisque $Y \subset Y + z \subseteq Z$ (cf. 3.1.8.).
Le treillis T contiendrait donc le sommet $(Y - y)$, d'où la contradiction.

b) Montrons que T_2 ne contient pas de sommet $(Y - y - z)$ qui soient différents des sommets $(Y_i - y)$, $i \in \{1,\ldots, p\}$. S'il existait un tel sommet dans T_2 il existerait aussi dans T_2 un prédécesseur $(Y - y - z + v) \neq Y_i$, $i = 1,\ldots,p$.

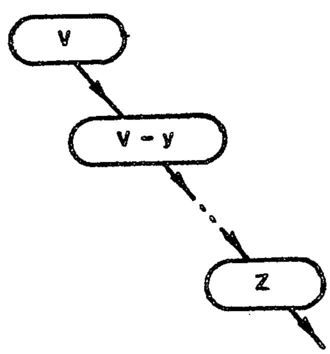


Ce sommet $(Y - y - z + v)$ aurait un prédécesseur Z qui précèderait $(Z - z)$.



Cas n° 1 : Si $\underline{y \in Z}$ on a alors $Y \subset Z$. Donc d'après 3.1.8. Y précèderait $(Y - z)$ dans T, d'où la contradiction.

Cas n° 2 : Si $\underline{y \in Z}$ il existerait un sommet V dans T qui précèderait $(V - y)$.



On a $Y \subsetneq V$. Donc d'après 3.1.8. Y précèderait $(Y - y)$ d'où la contradiction.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent.

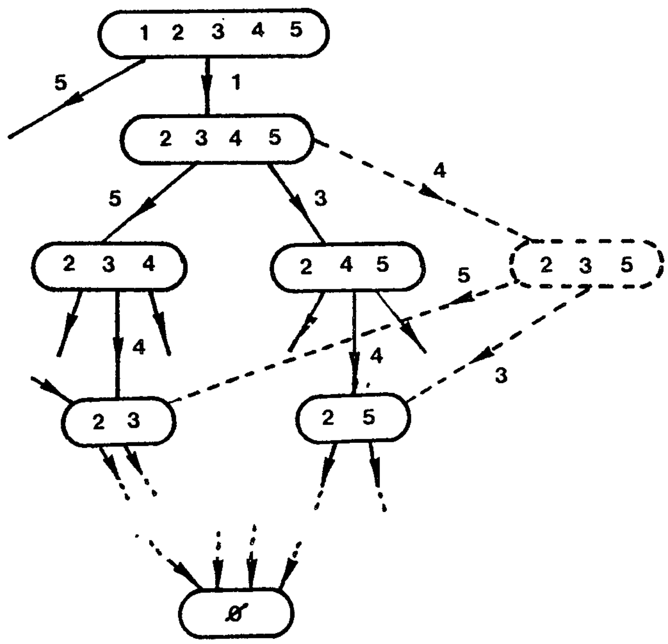
$Y = \{2, 3, 4, 5\}$ a la cardinalité 4, donc supérieure à 3 ($= \nu$).

Y précède $Y_1 = \{2, 3, 4\}$ et $Y_2 = \{2, 4, 5\}$

et $\bigcap_{j=1}^{2} \Omega^+(Y_j) = \{2,4\}$

Soit y = 4. L'opération 2 complète le treillis de la manière suivante :

T_2



Remarquons qu'on peut maintenant effectuer l'opération 1.

3.3.3. *PROPOSITION*

> L'état de l'opinion E_{T_2} associé au treillis T_2 vérifie la condition $B(\nu)$.

DEMONSTRATION

Dans le treillis T_2 chaque sommet a par construction, au plus ν successeurs.

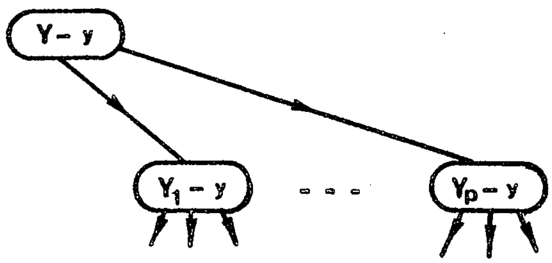
Pour montrer que E_{T_2} vérifie $B(\nu)$, il suffit donc de montrer, comme nous allons le faire, que le treillis associé à E_{T_2} est identique à T_2.

Ceci revient à montrer (cf. 3.1.5. et 3.1.9.) que si X_1 et X_2 sont deux successeurs de X_3 dans T_2 alors, ils ont un successeur commun. $\}$ *

Pour tout triplet de sommets X_1, X_2, X_3 appartenant à T, cette propriété est vérifiée dans T_2, puisque T est le treillis associé à E.

Il s'agit donc de montrer que pout tout triplet contenant le nouveau sommet (Y - y), la propriété (*) est vérifiée

Soit X_3 = (Y - y). Les seuls successeurs de (Y - y) dans T_3 sont les sommets $(Y_1 - y)$, $(Y_2 - y), \ldots, (Y_p - y)$ (cf. 3.3.2.).



Puisque ces sommets appartiennent à T, ils ont donc deux à deux, un successeur commun. Par exemple, $(Y_1 - y)$ et $(Y_p - y)$ le sommet $(Y - x_{(1)} - x_{(p)} - y)$ (Notation cf. Opération 2).

Soit $X_1 = (Y - y)$. Puisque le seul prédécesseur de $(Y - y)$ est Y (cf. 3.3.2.), X_2 est un des sommets Y_i , $i \in \{1,\ldots, p\}$, Les sommets $(Y - y)$ et (Y_i) ont comme successeur commun, le sommet $(Y_i - y)$.

Le treillis T_2 vérifie dont (*) et E_{T_2} la condition $B(\nu)$. ∎

Pourquoi ces opérations ?

Soit E un état de l'opinion donné et soit $T = (\mathcal{X}, U)$ le treillis associé. Supposons que E vérifie la condition $B(\nu)$ et $N(E) < N_\nu$.

Par une suite d'opérations 1 et 2, nous voulons obtenir un treillis T_{final} pour lequel :

1°) $E_{T_{final}}$ vérifie la condition $B(\nu)$,

2°) $E \subset E_{T_{final}}$

3°) $N(E_{T_{final}}) = N_\nu$

L'algorithme suivant va nous permettre de construire un tel treillis (s'il existe !).

ALGORITHME

Soit T le treillis initial.

① Effectuer l'opération 1 (si possible)

② Appeler candidat tout sommet Y, $|Y| > \nu$ du treillis transformé par l'opération 1, pour lequel le nombre de successeurs est inférieur à ν.

S'il n'existe pas de candidat : STOP I

Sinon, choisir un candidat de cardinalité minimale.

Si les successeurs de ce candidat ont un arc sortant commun, alors effectuer l'opération 2. Retourner à ①.

Sinon STOP II (les conditions pour qu'on puisse effectuer l'opération 2 ne sont pas vérifiées).

Remarquons que si l'algorithme s'arrête à STOP I, alors tout sommet Y du treillis final vérifie :

1°) Si $|Y| > \nu$ alors le nombre des successeurs est ν (il n'existe plus de candidat).

2°) Si $|Y| \leq \nu$ alors le nombre des successeurs est $|Y|$ (on a effectué l'opération 1).

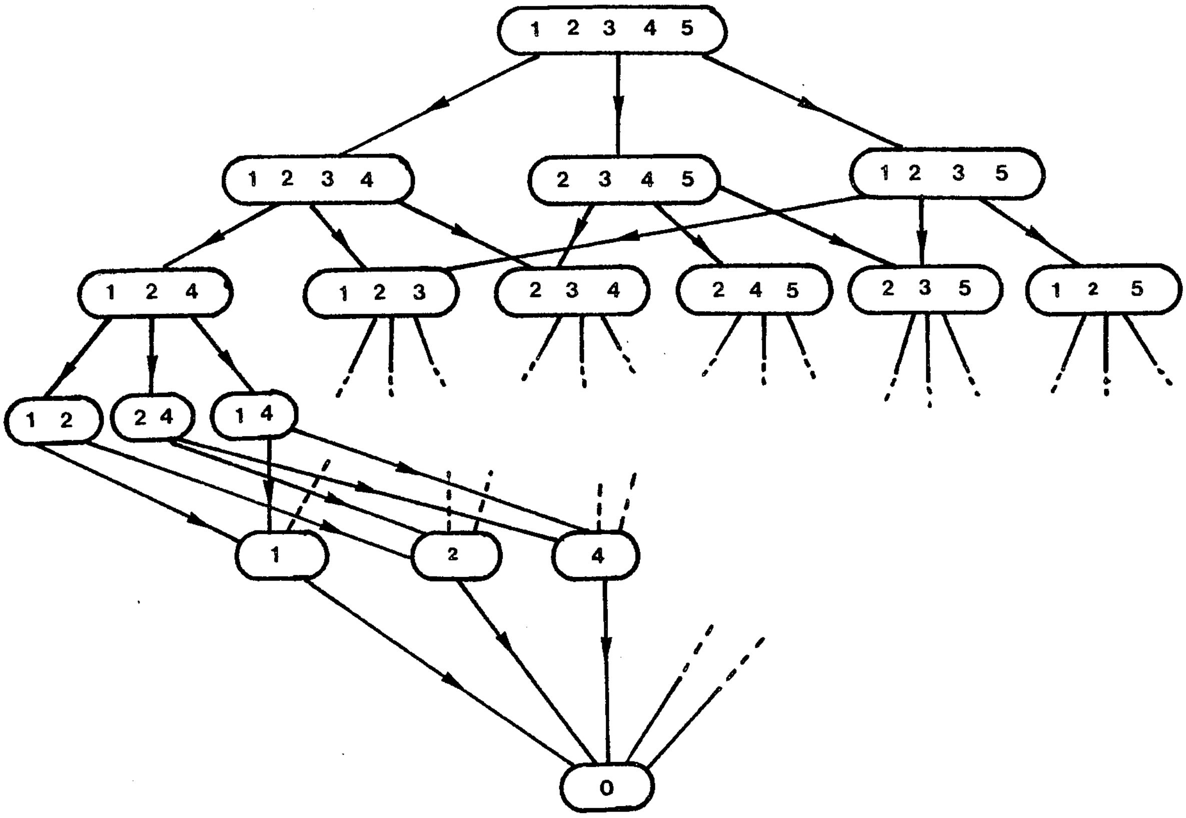
D'après 3.1.11. l'état de l'opinion associée au treillis final contient $N_\nu = \nu! \nu^{n-\nu}$ ordres individuels différents, et d'après 3.3.1. et 3.3.3. il vérifie la condition $B(\nu)$.

Donc si nous pouvons montrer que quel que soit l'état de l'opinion E initial vérifiant $B(\nu)$ l'algorithme ne s'arrête jamais à STOP II, nous avons montré que :

Pour tout état de l'opinion E vérifiant la condition $B(\nu)$, il existe un état de l'opinion $\bar{E} \supseteq E$ vérifiant la condition $B(\nu)$ tel que $N(\bar{E}) = N_\nu$.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple 3.2.7. et appliquons l'algorithme.
On obtient finalement le treillis suivant :



3.3.4. *THEOREME*

Soit $\nu \leq 3$, $\nu \in \mathbb{N}$.
Pour tout état de l'opinion E vérifiant la condition $B(\nu)$, il existe un état de l'opinion $\overline{E} \supseteq E$ vérifiant aussi la condition $B(\nu)$ tel que : $\boxed{N(\overline{E}) = N_\nu}$

Autrement dit, tout état de l'opinion "maximale par rapport à $B(\nu)$" est maximum, c'est-à-dire contient N_ν ordres individuels différents, pour $\nu \leq 3$.

DEMONSTRATION

$\nu = 1$: évident puisque $N_1 = 1$.

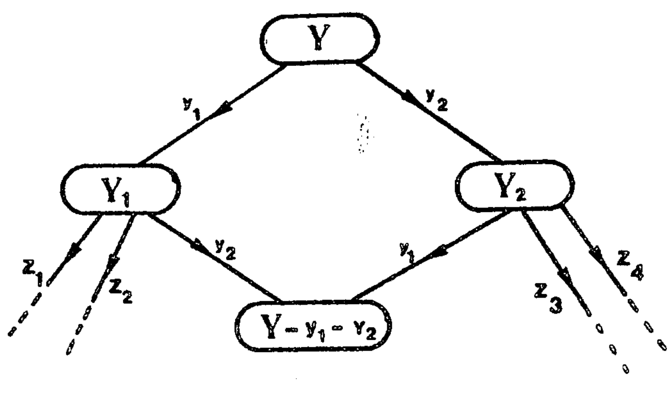
$\nu = 2$: Soit $T = (\mathfrak{X}, U)$ le treillis associé à un état de l'opinion E vérifiant B(2).
Il s'agit de montrer que si Y est un candidat de cardinalité minimale, c'est-à-dire un sommet Y, $|Y| > 2$ ayant un seul successeur, alors ce successeur a un arc sortant (commun), c'est ce qui est évident.

$\nu = 3$: Soit $T = (\mathfrak{X}, U)$ le treillis associé à un état de l'opinion vérifiant B(3). Soit Y un candidat de cardinalité minimal.
Si Y précède un seul sommet, alors ce sommet a évidemment un arc sortant (commun).

Supposons donc que Y précède Y_1 et Y_2.
On a $|Y| > 3$, donc $|Y_1| \geq 3$ et $|Y_2| \geq 3$.
Y_1 et Y_2 précèdent chacun trois sommets. En effet, Y est un candidat de cardinalité minimale dans le treillis transformé par l'opération 1.

Notons $y_i = Y - Y_i$, $i = 1,2$

Les sommets Y_1 et Y_2 ont un successeur commun, puisque $T = (\mathfrak{X}, U)$ est le treillis associé à un état de l'opinion.
Donc $y_2 \in \Omega^+(Y_1)$ et $y_1 \in \Omega^+(Y_2)$.



Soit $\Omega^+(Y_1) - \{y_2\} = \{z_1, z_2\}$
et $\Omega^+(Y_2) - \{y_1\} = \{z_3, z_4\}$

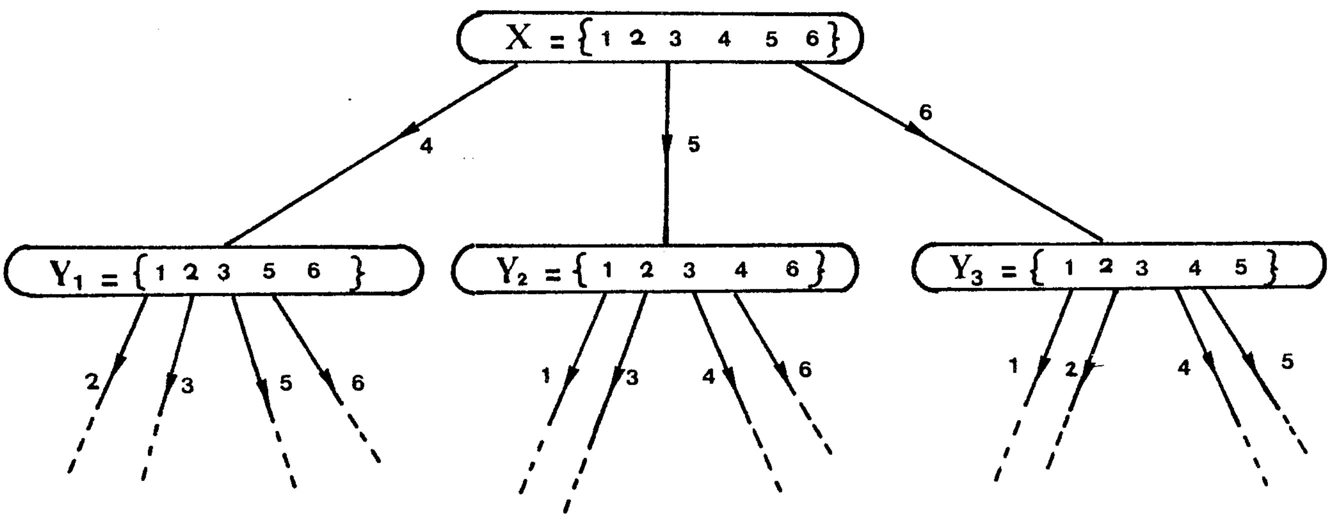
Il s'agit de montrer que Y_1 et Y_2 ont un arc sortant commun, donc de montrer que $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} \neq \emptyset$.
Posons $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ et montrons que $|Z| \leq 3$.

Dans la restriction de l'état de l'opinion associée à T aux objets de Z, tout objet de Z se trouve classé en queue. En effet, Z est contenu dans Y_1 et aussi dans Y_2 . D'après 3.2.6. cet état de l'opinion vérifie aussi la condition B(3), c'est-à-dire que le nombre d'objets classés en queue dans la restriction de cet état de l'opinion aux objets d'un sous-ensemble de X est inférieur ou égal à trois. Donc la cardinalité de Z est inférieure ou égale à trois. ∎

Pour un entier $\nu > 3$ le théorème précédent est faux comme le montrent les contre-exemples suivants :

$\boxed{\text{CAS } \nu = 4}$

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et E un état de l'opinion où le treillis T associé s'écrit de la manière suivante :



Nous supposons que tout sommet Y de T, $|Y| \leq 4$ ait $|Y|$ successeurs, c'est-à-dire $\Omega^+(Y) = Y$.

L'état de l'opinion E_T associé à T est ainsi défini d'une manière unique. E_T vérifie la condition B(4). En effet :

. Tout sommet de T a, au plus, 4 successeurs, et

.. Si X_1 et X_2 sont deux successeurs de X_3 alors, ils ont un successeur commun.

Le nombre d'ordres individuels (différents) de E est :

$$\begin{aligned} N(E) &= 3!\,4\cdot 4\cdot 3\cdot 2!\,! \\ &< 4\,!\,4^2 = N_4 \end{aligned}$$

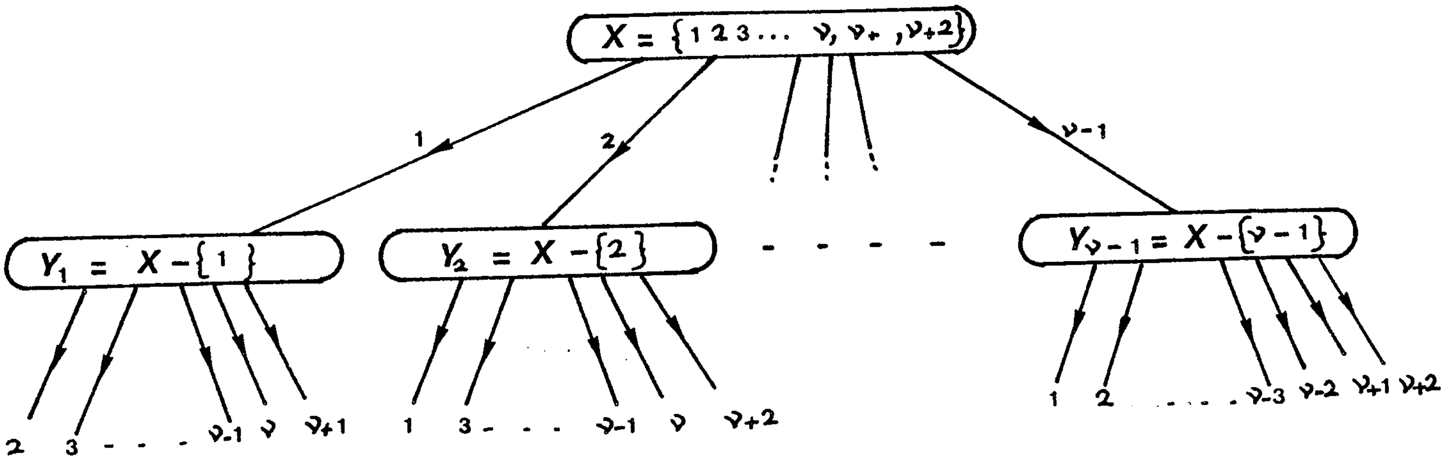
Le seul moyen d'accroitre $N(E_T)$ consiste à ajouter au sommet X, un autre successeur, soit $(X - \{1\})$ ou $(X - \{2\})$ ou $(X - \{3\})$.

Mais si on ajoute le successeur $(X - \{k\})$, $k \in \{1, 2, 3\}$, alors Y_k et $(X - \{k\})$ auraient le succeseur $(Y_k - \{k\})$ commun, et donc Y_k aurait 5 successeurs.

L'état de l'opinion E' obtenu ainsi ne vérifierait plus la condition B(4).

$\boxed{\text{CAS } \nu > 4}$

Soit $X = \{1, 2, 3, \ldots, \nu, \nu+1, \nu+2\}$ et soit E un état de l'opinion où le treillis associé s'écrit de la manière suivante :



Nous supposons que :

1) $Y_\ell = X - \{\ell\}$, $\ell = 1, \ldots, \nu - 1$

2) $\Omega^+(Y_1) = Y_1 - \{\nu + 2\}$

3) $\Omega^+(Y_2) = Y_2 - \{\nu + 1\}$

4) $\Omega^+(Y_\ell) = Y_\ell - \{\nu\}$, $\ell = 3, \ldots, \nu - 1$.

Comme au paravant, nous supposons que tout sommet Y de T $|Y| \leq \nu$ a $|Y|$ successeurs, c'est-à-dire $\Omega^+(Y) = Y$.

L'état de l'opinion E_T associé à T est ainsi défini d'une manière unique. E vérifie la condition $B(\nu)$. En effet :

. Tout sommet de T a au plus ν successeurs, et

.. Si X_1 et X_2 sont deux successeurs de X_3 alors ils ont un successeur commun.

On a : $N(E_T) = \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot N_\nu$

La seule possibilité d'augmenter $N(E_T)$ consiste à ajouter au sommet X un autre successeur. soit$(X - \{\nu\})$ ou $(X - \{\nu + 1\})$ ou$(X - \{\nu + 2\})$

Mais si on ajoutait le successeur$(X - \{\nu + k\})$, $k \in \{0, 1, 2\}$, alors Y_k et $(X - \{\nu + k\})$auraient le successeur $(Y_k - \{k\})$commun, donc Y_k aurait $\nu + 1$ successeurs.

L'état de l'opinion E' obtenu ainsi ne vérifierait plus la condition B(4).

REMARQUE

Nous n'avons, dans ce chapitre, examiné que la condition $B(\nu)$. Il est évident que des raisonnements analogues sont aussi valables pour la condition $I(\nu)$, puisque E vérifie $B(\nu)$ si et seulement si E^{-1} vérifie $I(\nu)$ (où E^{-1} désigne l'état de l'opinion obtenu en inversant tous les ordres de E).

8

CHAPITRE IV

Condition REF

Introduction :

Dans ce chapitre, nous proposons une condition plus générale que la condition "montagneuse" présentée au chapitre II, la Condition REF.

L'introduction des "états de l'opinion duaux" au paragraphe 1 nous permettra d'examiner les liens entre les classements des objets et les rangs qui peuvent être occupés par ces objets. Nous proposerons les conditions REF-Primal et REF-Dual.

Au paragraphe 2, nous introduisons la condition RANG qui "englobe" la condition REF-Primal et nous montrons que si un état de l'opinion vérifie la condition RANG, alors le graphe de surclassement pour le seuil correspondant est sans circuit.

Au paragraphe 3, la condition TRI -une condition "particulière" de REF-Primal- est présentée ainsi que des procédures de reconnaissance.

Dans le dernier paragraphe, nous examinons les liens entre ces différentes conditions en obtenant des résultats paradoxaux qui nous permettent d'éclaircir la structure d'un état de l'opinion vérifiant REF, "la fin justifie les moyens".

1 Condition REF et état de l'opinion dual

4.1.1. *DEFINITION* [11] ***REF***

Soient ν, i, et j des entiers tels que $1 \leq \nu < |X|$, $1 \leq i \leq \nu + 1$, $1 \leq j \leq \nu + 1$. Soit R un ordre de référence. Un état de l'opinion E vérifie une *condition REF* (où REF(ν, i, j, R)), si et seulement si :

Pour tout sous-ensemble Y de $\nu + 1$ objets de X, l'objet placé au rang i de R(Y) ne se trouve jamais placé au rang j de E(Y).

4.1.2. *EXEMPLE*

Soient $R = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et $\nu = 4$, $j = 3$, $i = 2$.
Toutes les permutations de l'ensemble d'objets $X = \{x_1, \ldots, x_5\}$ sont permises comme ordre individuel sauf les permutations qui ont placé l'objet x_2 au troisième rang.

Par exemple $(x_3, x_4, x_2, x_5, x_1)$ est interdit.

4.1.3. *REMARQUE*

On vérifie facilement que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1°) E vérifie REF (ν, i, j, R)
2°) E vérifie REF (ν, $\nu + 2 - j$, j, R^{-1})
3°) E^{-1} vérifie REF (ν, i, $\nu + 2 - j$, R)

(où E^{-1} désigne l'état de l'opinion obtenu en inversant tous les ordres de E).

Avant d'examiner les propriétés d'un état de l'opinion vérifiant une condition REF, introduisons les "*états de l'opinion duaux*".

Soient E un état de l'opinion donné et $R = (r_1, \dots, r_n)$ un ordre de référence sur les objets de X. A chaque ordre O de E, nous associons la matrice de permutations P(O) qu'on définit de la manière suivante :

$$P_i^j\,(O) = \begin{cases} 1 & \text{si l'objet } r_i \text{ se trouve au rang } j \text{ dans } O \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $P_i^j\,(O)$ désigne l'élément de P(O) situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne.

Il est clair que chaque ligne et chaque colonne de P(O) contient exactement un "1".

Tout ordre O peut s'écrire sous la forme d'un produit symbolique :

$$\begin{aligned} O &= R \circ P(O) \\ &= (r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) \circ \boxed{\quad P(O) \quad} \end{aligned}$$

La restriction d'un ordre O aux objets de $Y \subseteq X$ s'écrit :

$$O(Y) = R(Y) \circ P(O(Y))$$

où P(O(Y)) désigne la restriction de la matrice P(O) aux lignes et colonnes correspondant aux objets de Y.

EXEMPLE

Soient $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_5, x_6 \}$

$R = (r_1, r_2, \ldots, r_5, r_6) = (x_2, x_3, x_5, x_4, x_1, x_6)$ et

$O = (x_5, x_3, x_1, x_2, x_6, x_4)$.

On a :

$$P(O) : \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Nous définissons *l'ordre dual* noté O^R d'un ordre O de la façon suivante :

$$O^R = R. \; P(O)^T$$

où $P(O)^T$ désigne la matrice transposée de P(O).
Remarquons que l'ordre dual d'un ordre O dépend du choix de l'ordre de référence R. Rappelons que N(E) désigne le nombre d'ordres distincts contenus dans et notons E^R l'ensemble des ordres duaux correspondant à des ordres de E.

4.1.4. On vérifie trivialement les propriétés suivantes :

1°) $(O^R)^R = O$

2°) $(E^R)^R = E$

3°) $|E^R| = |E|$

4°) $N(E^R) = N(E)$

REMARQUES

1°) Soient m, i, j trois entiers vérifiant $1 \leq m \leq X$, $1 \leq i \leq m$, et $1 \leq j \leq m$.

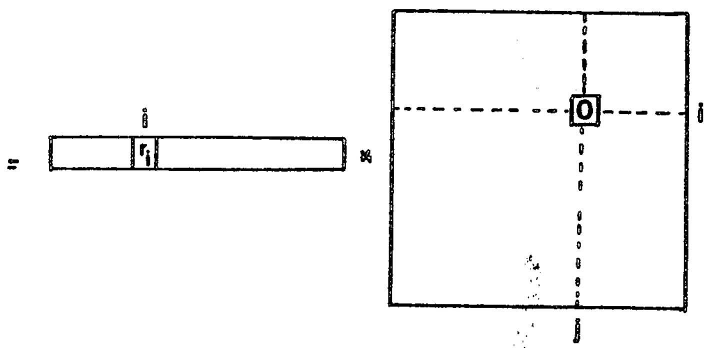
Si pour toute sous-matrice (m x m) de P(O) contenant m fois un "1", l'élément situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est un "O", alors il est facile de voir que dans toute sous-matrice (m x m) de $P(O)^T$ contenant m fois un "1" l'élément situé à l'intersection de la j-ème ligne et de la i-ème colonne est aussi "O".

2°) Soit E un état de l'opinion vérifiant la condition REF (ν, i, j, R).
Soit $O \in E$. Quel que soit le sous-ensemble Y de $\nu + 1$ objets de X, l'objet de rang i dans R(Y) ne peut avoir le rang j dans O(Y).

En d'autres termes :

L'élément de P(O(Y)) situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est "O".

O(Y) = R(Y) x P(O(Y))



Des deux remarques précédentes découle le :

4.1.5. *THEOREME DE DUALITE POUR LA CONDITION REF* (ν, i, j, R) :

> Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
>
> ① E vérifie la condition REF (ν, i, j, R)
>
> ② E^R vérifie la condition REF (ν, j, i, R).

4.1.6. *DEFINITION* **REF - PRIMAL , REF - DUAL**

> Soit E un état de l'opinion vérifiant REF (ν, i, j, R).
>
> - Si $(i \leq j$ et $i + j \leq \nu + 2)$ ou $(i \geq j$ et $i + j \geq \nu + 2)$, nous allons dire que E vérifie la condition REF-PRIMAL.
>
> - Si $(i \geq j$ et $i + j \leq \nu + 2)$ ou $(i \leq j$ et $i + j \geq \nu + 2)$, nous allons dire que E vérifie la condition REF-DUAL.

Remarquons qu'il peut y avoir des états de l'opinion qui vérifient à la fois la condition REF-PRIMAL et REF-DUAL. (par exemple pour $i = j$).

Le terme "dual - primal" est justifié par la proposition suivante :

4.1.7. *PROPOSITION*

> E vérifie une condition REF-PRIMAL $\Longleftrightarrow$ E^R vérifie une condition REF-DUAL.

DEMONSTRATION

D'après le théorème précédent, on sait que :

E vérifie REF (ν, i, j, R) $\longleftrightarrow$ E^R vérifie REF (ν, j, i, R). La définition 4.1.6. donne le résultat.

4.1.8. *REMARQUE*

Soit E un état de l'opinion vérifiant REF-DUAL, (REF-PRIMAL).
D'après 4.1.3., on voit que :

- E^{-1} vérifie aussi REF-DUAL, (REF-PRIMAL) (Cf. 4.1.3. - 3°)),
- E vérifie aussi REF-DUAL,(REF-PRIMAL) si l'ordre de référence R est inversé (cf. 4.1.3. - 2°)).

C'est-à-dire que les conditions REF-PRIMAL et REF-DUAL sont en quelque sorte "fermées" par rapport à l'inversion.

Nous pouvons représenter les conditions REF-DUAL et REF-PRIMAL de la manière suivante :

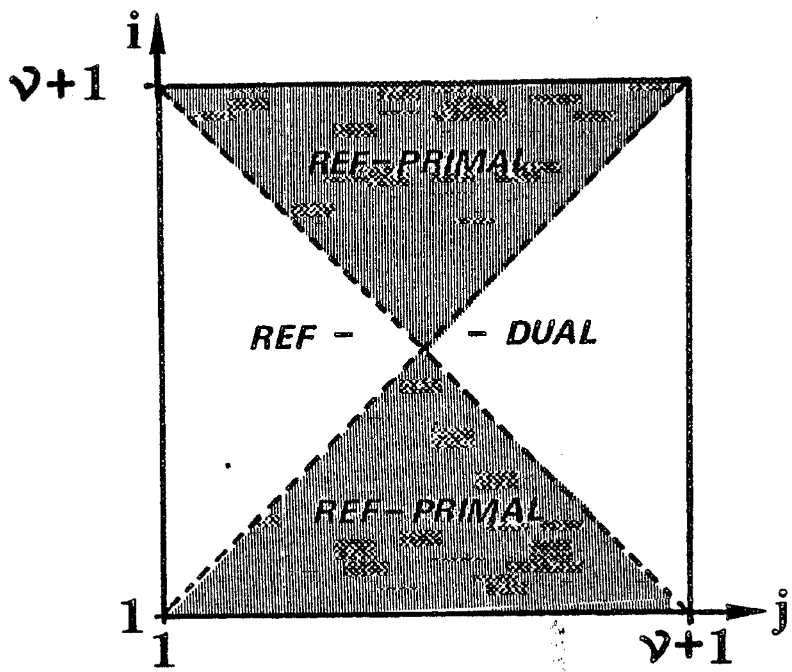


Figure 4.1.9

2 Condition RANG

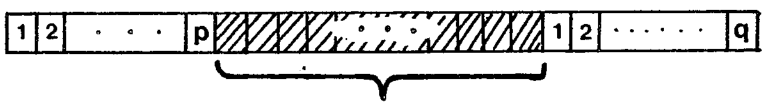
Dans ce paragraphe, nous introuduisons une condition plus générale que la condition REF-PRIMAL.

4.2.1. *DEFINITION* : $\boxed{\textit{RANG}}$

Soit ν , p, q, trois entiers vérifiant $\nu < |X|$ et $p + q = \nu$.
Un état de l'opinion E vérifie la condition *RANG* (ou RANG (ν, p, q)) si pour tout $Y \subseteq X$ il existe un objet y de Y qui, dans tout ordre O(Y) de E(Y) occupe :

- soit un des p premiers rangs,
- soit un des q derniers rangs,

mais jamais les rangs intermédiaires s'il en existe.



rangs interdits

4.2.2. *THEOREME* [11]

Si un état de l'opinion E vérifie la condition RANG(ν), alors le graphe de surclassement $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ est sans circuit.

DEMONSTRATION

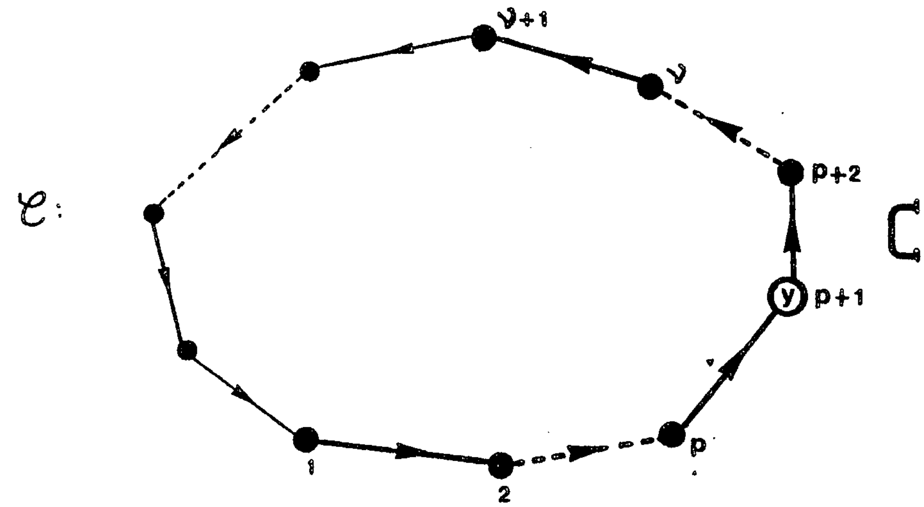
Nous allons montrer que si le graphe de surclassement $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ correspondant à un état de l'opinion contient un circuit, alors E ne vérifie aucune condition RANG(ν), quels que soient p et q.

Soit donc $\mathcal{C}$ un circuit dans $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$. D'après la proposition 1.2.3. du chapitre 1, la longueur m d'un tel circuit est strictement supérieure à ν. Notons Y l'ensemble des objets de X formant ce circuit $\mathcal{C}$.

Soient p et q deux entiers quelconques de l'ensemble $\{1,..,\nu\}$ vérifiant $p + q = \nu$.

Puisque E vérifie la condition RANG(ν), il existe donc un objet y de Y qui occupe dans E(Y) seulement certains des p premiers rangs et des q derniers rangs, mais jamais les rangs intermédiaires. Notons y cet objet.

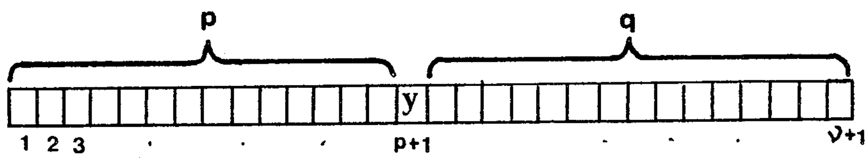
On peut toujours trouver dans $\mathcal{C}$ un chemin C de $\nu + 1$ sommets, tel que y soit le (p + 1)-ième objet de C (voir figure ci-après).



On sait de plus (cf. la remarque 1.2.2. b du chapitre 1), qu'à tout chemin de longueur $\nu + 1$ dans $G(\frac{\nu - 1}{\nu})$ correspond au moins un ordre de E dans lequel les objets sont ordonnés de la même manière que sur le chemin C.

Soit O un tel ordre de E. Désignons par X' l'ensemble des $\nu + 1$ objets faisant partie du chemin C. Dans la restriction O(X') de l'ordre O aux objets de X', l'objet y se trouve placé au rang (p + 1) (par construction de C).

O(X'):



L'objet y est alors nécessairement placé dans O(Y) dans un des rangs intermédiaires, c'est-à-dire n'occupe ni un des p premiers rangs, ni un des q derniers rangs.

Ce raisonnement est valable quels que soient p et q vérifiant $p + q = \nu$

On en conclut que E ne vérifie pas la condition RANG(ν).

Nous allons maintenant montrer que : $\boxed{\text{REF-PRIMAL} \subseteq \text{RANG}}$

Ceci revient à démontrer le lemme suivant :

4.2.3. *LEMME* [11]

> Si E vérifie une condition REF-PRIMAL (ν), alors, on peut trouver deux entiers p et q tels que $p + q = \nu$ et un objet qui, pour tout $Y \subseteq X$, $|Y| \geq \nu + 1$, ne se trouve dans E(Y) qu'à certains des :
> - p premiers rangs, et des
> - q derniers rangs.

DEMONSTRATION

1er Cas : $\boxed{i \leq j \quad \text{et} \quad i + j \leq \nu + 2}$

Montrons que l'objet r_i placé au rang i de R(Y) se trouve seulement dans les $p = j - 1$ premiers rangs et dans les $q = \nu + 1 - j$ derniers rangs de E(Y).

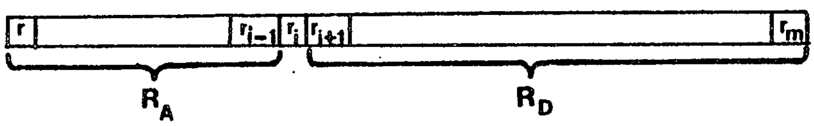
Soit $m = |Y|$.
Supposons que la conclusion du lemme soit fausse, c'est-à-dire, supposons qu'il existe un ordre O de E dans lequel l'objet r_i occupe le rang ℓ, $\ell \in \{j, j + 1, \ldots, m - (\nu + 1 - j)\}$

Montrons qu'il existe alors un sous-ensemble X' de X tel que :

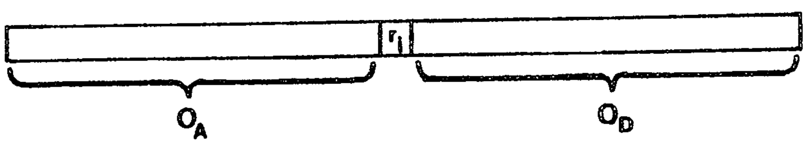
1. $|X'| = \nu + 1$
2. r_i se trouve au rang i dans R(Y)
3. r_i se trouve au rang j dans O(Y)

Notons $R = (r_1, r_2, \ldots, r_i, r_{i+1}, \ldots, r_m)$ l'ordre de référence donné restreint sur Y. Définissons les ensembles d'objets suivants :

$$R_A = \{r_k \mid k < i\} \qquad \text{et} \qquad R_D = \{r_k \mid k > i\}$$

R :


O_A désigne l'ensemble des objets de Y placés avant r_i dans O, et
O_D désigne l'ensemble des objets de Y placés derrière r_i dans O.

O :


Posons $r = |O_A \cap R_A|$ (1)

a) <u>Montrons que $|O_A \cap R_D| \geq j - 1 - r$</u>

On a $|O_A \cap R_D| = |O_A| - |O_A \cap R_A|$ (2)

Par hypothèse, l'objet r_i occupe un des rangs interdits, donc $|O_A| \geq j - 1$ (3)

D'après (1), (2) et (3) on a :

$|R_D \cap O_A| \geq j - 1$ (4)

b) <u>Montrons que $|O_D \cap R_D| \geq \nu + 2 + r - i - j$</u>

On a $|O_D \cap R_D| = |O_D| - |O_D \cap R_A|$ (5)

Par hypothèse, l'objet r_i occupe un des rangs interdits, donc $|O_D| \geq \nu + 1 - j$ (6)

Par définition $|R_A| = i - 1$ (7)

D'après (7) et (1) : $|R_A \cap O_D| = |R_A| - |O_A \cap R_A| = (i-1)-r$

Finalement en utilisant (6) et (5) on obtient :

$|R_D \cap O_D| \geq \nu+1-j-(i-1-r) = \nu+2+r - i-j$ (8)

c) <u>Montrons que $j - 1 - r \geq 0$</u>

D'après (1) et (7) on a $r = |O_A \cap R_A| \leq |R_A| = i-1$

Par hypothèse, $i \leq j$ donc $j - 1 - r \geq 0$

d) <u>Montrons que $\nu + 2 - r - i - j \geq 0$</u>

On a $\nu + 2 + r - i - j \geq \nu + 2 - (i + j)$

Par hypothèse, $i + j \leq \nu + 2$, donc $\nu + 2 + r - i - j \geq 0$

Désignons par X_1 un sous-ensemble de $(j - 1 - r)$ objets de $R_D \cap O_A$ par X_2 un sous-ensemble de $(\nu + 2 + r - i - j)$ objets de $R_D \cap O_D$.

$X' = R_A \cup X_1 \cup X_2 \cup \{r_i\}$ est le sous-ensemble de X cherché.

En effet :

(1) $|X'| = (i-1) + (j-1-r) + (\nu+2+r-i-j) + 1 = \nu+1$

(2) r_i se trouve au rang i dans $R(X')$ puisque $R_A \subset X'$ et $|R_A| = i-1$

(3) r_i se trouve au rang j dans $O(X')$ puisque :
$O_A \cap R_A \subset X'$ et $X_1 \subset X'$ et
$|O_A \cap R_A| = r$ et $|X_1| = j-1-r$.
Donc $(j-1)$ objets de O_A appartiennent à X'.

2ème cas : $\boxed{i \geq j \quad \text{et} \quad i+j \geq \nu+2}$

Soit E un état de l'opinion vérifiant la condition REF(ν, i, j, R) où i et j vérifient : $i \leq j$ et $i + j \leq \nu + 2$.
Montrons que E vérifie également une condition REF(ν, i_1, j_1, R_1) où $i_1 \geq j_1$ et $i_1 + j_1 \geq \nu + 2$.
D'après la remarque 4.1.3. 2°), E vérifie aussi la condition REF(ν, $\nu + 2 - i$, j, R^{-1}).
Donc $i_1 = \nu + 2 - i$ et $j_1 = j$.

Par hypothèse, $i + j \leq \nu + 2$ donc $j = j_1 \leq \nu + 2 - i = i_1$

On a i_1 et $j_1 = \nu + 2 - i + j$

Puisque par hypothèse $i \leq j$, on $i_1 + j_1 \geq \nu + 2$.

On peut conclure que si E vérifie REF-PRIMAL, E vérifie également RANG. ∎

CONCLUSION

Si un état de l'opinion vérifie la condition REF-PRIMAL pour un entier ν donné, alors $G(\frac{\nu-1}{\nu})$ est sans circuit.

3 Condition TRI

Dans ce paragraphe, nous allons examiner un cas particulier de la condition REF-PRIMAL. Rappelons que la condition montagneuse $B(\nu, i, R)$ est un cas particulier de la condition REF-DUAL :

$$B(\nu, i, R) \equiv REF(\nu, i, \nu + 1, R).$$

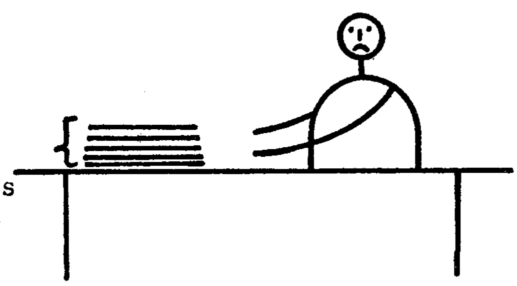
Le théorème 4.1.5. montre que la condition "duale" de $B(\nu, i, R)$ est la condition $REF(\nu, \nu + 1, i, R)$ que nous nommerons désormais la <u>*CONDITION TRI*</u>.

Considérons maintenant la triste situation suivante. Tous les chercheurs de l'I.R.M.A. de Grenoble reçoivent, dans le même ordre chronologique pendant un mois, les mêmes circulaires administratives (notées F_ℓ, $\ell = 1, \dots, n$) exigeant des réponses "immédiates".

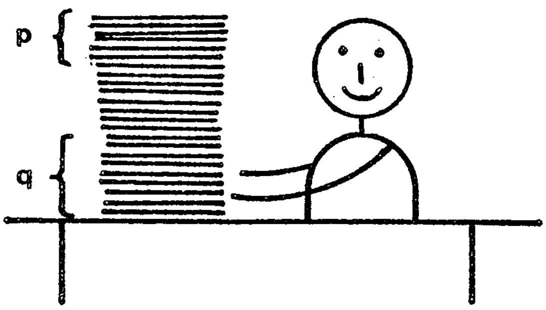
Soit $(F_1, \dots, F_n)$ l'ordre chronologique d'arrivée des fiches. Ecoeurés par leurs tracas administratifs, chacun des chercheurs utilise la méthode de tri suivante :

Il classe "correctement" les ν premières fiches reçues, c'est-à-dire de la plus importante à la moins importante, la plus importante étant située au-dessus de la pile.

ν fiches correctement classées



Quant aux fiches suivantes, s'il les trouve importantes, il les classe entre les p premières ($p \leq \nu$), sinon entre les $q = \nu - p$ dernières..



Si l'on suppose que tous les chercheurs utilisent la même méthode de tri "rationnelle", alors l'ensemble des classements vérifie la condition de tri pour :

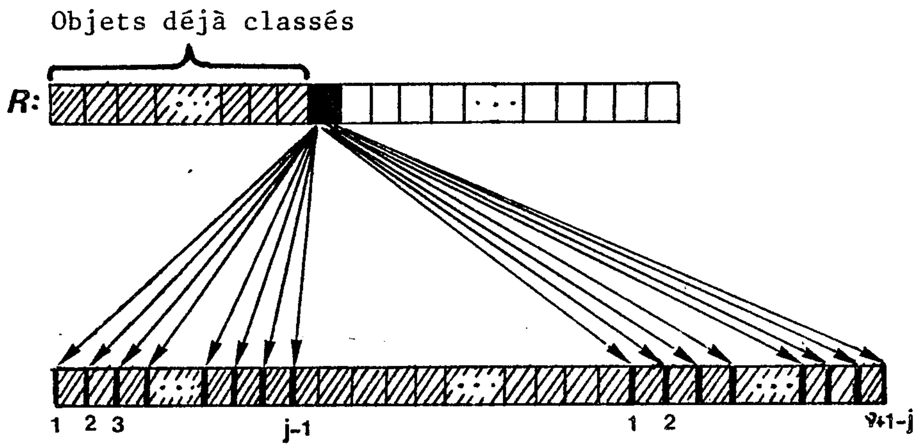
$$R = (F_1 , F_2 ,..., F_n), \ \nu \text{ et } j = p + 1$$

D'ailleurs, cette méthode de tri assure que les p circulaires les plus importantes se trouvent en haut de la pile.

La méthode de rangement présentée dans l'exemple précédent peut être formalisée par l'algorithme suivant :

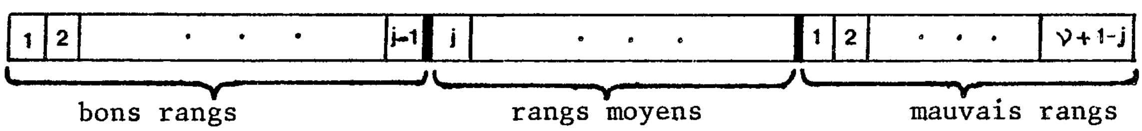
4.3.1. : ***Algorithme TRI :*** ou TRI (ν, j, R).

> Soient R = (r_1 ,..., r_n) un ordre de référence donné et ν et j deux entiers tels que $1 \leq \nu < |X|$, $1 \leq j \leq \nu + 1$.
>
> ① Classer les ν premiers objets de R.
>
> ② Prendre l'objet qui se trouve classé premier dans la restriction de R aux objets non encore classés.
> Classer cet objet soit dans un des (j - 1) premiers rangs, soit dans un des (ν + 1 - j) derniers rangs.



On a ν classements possibles

Nous allons appeler dans la suite, les (j - 1) premiers rangs "les bons rangs" les (ν + 1 - j) derniers, "les mauvais rangs" et les rangs intermédiaires sont appelés "les rangs moyens".



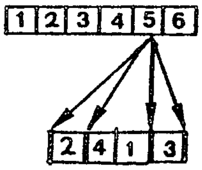
EXEMPLE

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $R = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ $\nu = 4$, $j = 3$

1) Un classement possible pour les 4 premiers objets de R est :

$$\boxed{2}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{3}$$

L'objet "5" peut occuper les rangs suivants :

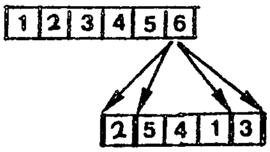


$j - 1 = 2$ premiers rangs

$\nu + 1 - j = 2$ derniers rangs.

d'où un classement possible : $\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{3}$

L'objet "6" peut occuper les rangs suivants :



Donc on peut par exemple, obtenir le classement suivant :

$$\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{6}\boxed{3}$$

Remarquons que dans cet exemple l'algorithme donne $4 ! \, 4 \cdot 4 = N_4$ classements différents.

Soient ν, j et R fixés.

Notons $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des ordres construits au moyen de l'algorithme TRI et $\mathcal{E}_{TRI}$ l'ensemble des ordres qui vérifient la condition TRI, c'est-à-dire REF(ν, $\nu + 1$, j, R).

4.3.2. : *PROPOSITION* $\boxed{\mathcal{E}_A \equiv \mathcal{E}_{TRI}}$

DEMONSTRATION

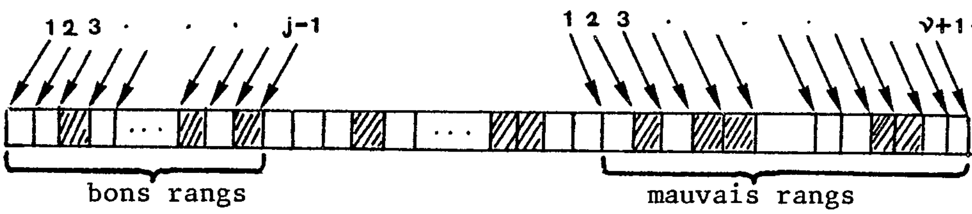
a) $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_{TRI}$:

Montrons qu'un ordre O construit avec l'algorithme vérifie la condition TRI, c'est-à-dire que si Y désigne un sous-ensemble quelconque de $(\nu + 1)$ objets de X, l'objet y classé au dernier rang de R(Y)

R(Y) : 

ne se trouve pas classé au rang j dans la restriction de cet ordre O aux objets de Y.

Lorsqu'on classe l'objet y en utilisant l'algorithme, tout objet de Y - y est déjà classé.



désigne un objet de Y - y

. Si y occupe <u>après</u> classement, un des "bons rangs", on ne peut pas avoir plus de (j - 2) objets de Y classés avant lui.

.. Si y occupe <u>après</u> classement, un des "mauvais rangs" on ne peut pas avoir plus de $(\nu - j)$ objets de Y classés après lui.

Dans les deux cas, y ne peut occuper la j-ème position dans la restriction de cet ordre aux objets de Y.

b) Montrons que $\left|\mathcal{E}_A\right| = \left|\mathcal{E}_{TRI}\right|$

Au pas 1 de l'algorithme, on a ν ! classements possibles pour les ν premiers objets de R. A chaque pas suivant de l'algorithme on a ν classements possibles et ceci pour $(n - \nu)$ pas semblables.

Donc $\left|\mathcal{E}_A\right| = \nu ! \cdot \nu^{n-\nu}$

D'après 2.2.5., 4.1.4. et 4.1.5. on a $\mathcal{E}_{TRI} = \nu ! \cdot \nu^{n-\nu}$

d'où $\mathcal{E}_A \equiv \mathcal{E}_{TRI}$ ∎

Examinons maintenant les propriétés d'un état de l'opinion E vérifiant la condition TRI (pour ν , j et R fixés).

Soit $Y \subseteq X$ et notons **BM(Y)** l'ensemble des objets de Y qui, dans E(Y), ne se trouvent jamais aux rangs moyens.
Autrement dit, si y désigne un objet de BM(Y) alors dans tout ordre O(Y) de E(Y) l'objet se trouve :

- soit dans un des bons rangs (les $j - 1$ premiers)
- soit dans un des mauvais rangs (les $\nu + 1 - j$ derniers)

EXEMPLE

Soit $j = 2$, $\nu = 4$ et $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

E(Y) :

bon		mauvais
(1,	2, 3, 4, 5,	6, 7, 8)
(8,	2, 5, 6, 7,	4, 1, 3)
(1,	4, 3, 7, 2,	6, 5, 8)
(2,	7, 6, 4, 5,	8, 3, 1)

On a $BM(Y) = \{1, 8\}$

4.3.3. *PROPOSITION*

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1 E vérifie la condition TRI par rapport à l'ordre de référence $R = (r_1, \dots, r_n)$

2 Pour tout k de n jusqu'à 1, on a :

$$r_k \in BM(X_k)$$

où $X_k = \{r_1, \dots, r_k\}$

DEMONSTRATION

$1 \longrightarrow 2$:

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$

D'après l'algorithme TRI, dans tout ordre $O \in E$ l'objet r_k se trouve placé :

$$\left.\begin{array}{l}\text{- soit dans un des bons rangs}\\ \text{- soit dans un des mauvais rangs}\end{array}\right\} \text{de } O(X_k)$$

donc $r_k \in BM(X_k)$.

$1 \longleftarrow 2$.

Soit O un ordre de E vérifiant la condition 2.

Dans ces conditions; O se laisse construire au moyen de l'algorithme TRI.

En effet, TRI permet de classer :

- r_n puisque r_n appartient par hypothèse à $BM(X)$
- r_{n-1} puisque r_{n-1} appartient par hypothèse à $BM(X_{n-1})$, etc...

Le théorème précédent nous permet de résoudre le problème suivant :

P1

Soit E un état de l'opinion donné.
E, vérifie-t-il la condition TRI (ν, j, R) ?
ν, j et R étant donnés.

Pour résoudre ce problème, nous proposons l'algorithme 1 :

4.3.4. *ALGORITHME 1*

Soit $R = (r_1, \ldots, r_n)$ et posons $X_k = (r_1, \ldots, r_k)$, $k \leq n$

Si $\boxed{r_k \in BM(X_k)}$ pour tout k de n jusqu'à 1, alors E vérifie la condition TRI (ν, j, R), sinon E ne vérifie pas la condition TRI (ν, j, R).

EXEMPLE

Soient $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\nu = 3$, $j = 2$

et E :

bon					mauvais		
4	5	6	3	7	1	2	O_1
1	7	5	4	6	3	2	O_2
1	3	5	6	7	2	4	.
2	4	6	7	3	5	1	.
1	7	6	4	5	2	3	.
2	5	7	6	3	4	1	O_6

1°) Soit R = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

On a $BM(X_7) = \{1,2\}$ donc l'objet $r_7 = 1$ appartient à $BM(X_7)$

$E(X_6) = E(X_7 - \{1\}) =$

4	5	6	3	7	2	$O_1(X_6)$
7	5	4	6	3	2	.
3	5	6	7	2	4	.
2	4	6	7	3	5	.
7	6	4	5	2	3	
2	5	7	6	3	4	$O_6(X_6)$

On a $BM(X_6) = \{2\}$ donc l'objet $r_{n-1} = r_6 = 2$ appartient à $BM(X_6)$

Finalement, on voit le résutlat que E vérifie la condition TRI(3, 2, R) où R = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).

2°) Soit R = (3, 1, 2, 4, 5, 6, 7)

E ne vérifie pas la condition TRI (3, 2, R) où R = (3, 1, 2, 4, 5, 6, 7) puisque l'objet $r_n = r_7 = 3$ n'appartient pas à $BM(X_7) = \{1,2\}$

Nous nous proposons maintenant de résoudre le problème suivant :

P2

> Soit E un état de l'opinion donné, ν et j fixés.
> Existe-t-il un ordre de référence R tel que E vérifie le condition TRI par rapport à cet ordre de référence ?

La proposition 4.3.3. justifie l'algorithme suivant :

4.3.5. *ALGORITHME 2*

Les objets sont dits non classés. Soit $i = 1$ et posons $X_1 = X$

ETAPE (i) Déterminer l'ensemble $BM(X_i)$

Si $BM(X_i)$ est vide : STOP il n'existe pas d'ordre de référence satisfaisant.

Sinon, classer l'ensemble $BM(X_i)$ avant les objets de X déjà classés.

Pour $i = i + 1$

et $X_i = X_{i-1} - BM(X_i)$

Réitérer l'étape (i) jusqu'à ce que X_i soit vide.

On obtient ainsi le pré-ordre $(BM(X_i), BM(X_{i-1}), \ldots BM(X_1))$

E vérifie la condition TRI (ν, j, R) où R est un des ordres totaux contenus dans ce pré-ordre.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent ($\nu = 3$, $j = 2$)

On obtient le pré-ordre suivant :

$(\{5, 6, 7\}, 4, 3, \{1, 2\})$

Donc un ordre de référence satisfaisant est par exemple :

$R = (7, 5, 6, 4, 3, 1, 2)$.

REMARQUES

1°) Considérons les problèmes 1 et 2. Supposons ν et j inconnus. On souhaite déterminer le plus petit entier ν tel qu'il existe un entier j(et un ordre de référence R pour le problème 2)pour lesquels E vérifie la condition TRI (ν, j, R).

Autrement dit, on cherche les plus petits entiers ν tels que E vérifie la condition TRI.
Il suffit l'explorer tous les cas possibles.

On commence par : $\nu = 1$ et $j = 1, 2$
puis : $\nu = 2$ et $j = 1, 2, 3$
puis : $\nu = 3$ et $j = 1, 2, 3, 4,$ etc...

Supposons que ν^* soit le plus petit entier recherché, alors ce procédé consiste à appliquer l'algorithme A1 (ou A2) $\frac{\nu^*}{2} \cdot (\nu^* + 1)$ fois.

2°) Etant donné un état de l'opinion E, deux entiers ν et j, et un ordre de référence R, E vérifie-t-il la condition montagneuse B(ν, i, R) ?

Nous pouvons répondre à cette question en appliquant l'algorithme A1 sur l'état de l'opinion dual E^R de E (cf. 4.1.5.).

4 La boucle se ferme

Dans ce dernier paragraphe, nous allons éclaircir la structure d'un état de l'opinion vérifiant la condition REF. Entre autre, nous allons répondre à la question "combien d'ordres différents un état de l'opinion vérifiant REF peut-il contenir ?".

Dans les trois paragraphes précédents, nous avons présenté les conditions REF-PRIMAL, RANG et TRI. Le théorème suivant va montrer la relation -inattendue- qui existe entre ces conditions.

4.4.1. *THEOREME* : $\boxed{TRI \equiv \text{REF-PRIMAL} \equiv RANG}$

DEMONSTRATION

D'après les résultats précédents, on sait que si un état de l'opinion E donné vérifie une condition TRI, il vérifie également une condition REF-PRIMAL et qu'il en est de même entre REF-PRIMAL et RANG.

$$TRI \subseteq \text{REF-PRIMAL} \subseteq RANG$$

Nous allons montrer que si un état de l'opinion vérifie RANG, il vérifie également TRI.

Donc TRI $\Rightarrow$ RANG. Ceci s'obtient simplement en reprenant la proposition 4.3.3.

D'après ce théorème, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un état de l'opinion E vérifie la condition TRI est :

Pour tout k de n jusqu'à 1, on a :

$r_k \in BM(X_k)$ où $X_k = \{r_1, \dots, r_k\}$

Ceci revient à dire que pour tout sous-ensemble Y de X il existe un objet $y \in Y$ qui se trouve classé :

- soit dans les $(j - 1)$ premiers rangs,
- soit dans les $(\nu + 1 = j)$ derniers rangs

dans tout ordre de E.

Si on pose $p = j - 1$ et $q = \nu + 1 - j$, ceci est une condition RANG. $\blacksquare$

CONCLUSION :

Si un état de l'opinion vérifie la condition RANG, il vérifie également les conditions REF-PRIMAL et TRI.

4.4.2. *PROPOSITION*

Si E vérifie la condition REF, alors :

$N(E) \leq \nu ! \cdot \nu^{n-\nu} = N_\nu$

où $n = |X|$

DEMONSTRATION

On sait que si E vérifie la condition TRI, alors $N(E) \leq N_\nu$.

Puisque tout état de l'opinion E vérifiant REF-PRIMAL vérifie, d'après le théorèm précédent, la condition TRI, si E vérifie REF-PRIMAL $N(E) \leq N_\nu$.

Supposons que E vérifie REF-DUAL.
L'état de l'opinion dual E^R de E vérifie d'après la proposition 4.1.7. la condition REF-PRIMAL.

D'après 4.1.4., on a : $N(E) = N(E^R)$ d'où le résultat. ∎

Remarquons que tout état de l'opinion E maximal sous la contrainte de vérifier REF, vérifie $N(E) = N_\nu$.

Soit E un état de l'opinion donné vérifiant la condition TRI (ν, j, R), ν, j et R étant fixés.

E vérifie également la condition REF-PRIMAL (ν, i, j, R_1) où i vérifie :

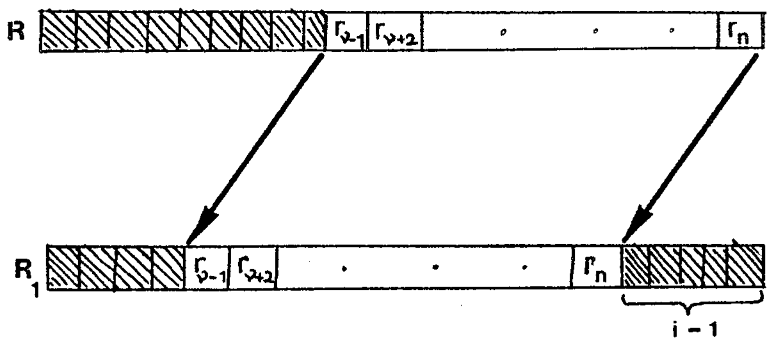
cas 1) : $i + j \geq \nu + 2$ et $i \geq j$

cas 2) : $i + j \geq \nu + 2$ et $i \leq j$

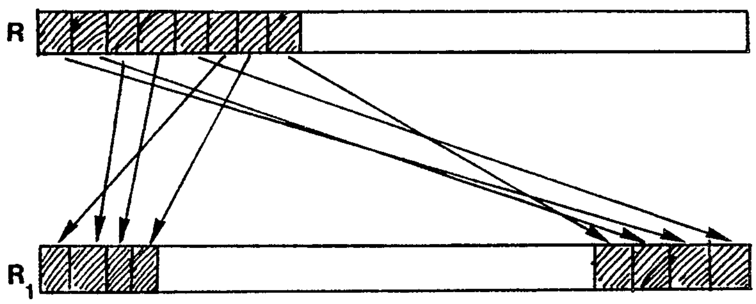
On peut montrer que l'ordre de référence R_1, en général différent de R, s'obtient de la façon suivante (cf. 4.1.8. et 4.2.3.) :

<u>1er cas</u> :

Soit $R = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$
Les objets occupant dans R les rangs $\nu + 1$, $\nu + 2, \ldots$, n se trouvent dans R_1 dans le même ordre aux rangs $(\nu + 1)-(i - 1)$, $(\nu + 2)-(i-1), \ldots, n-(i-1)$, c'est-à-dire que ces objets sont "décalés" de (i - 1) rangs (cf. figure ci-après).



ν premiers objets de R sont classés sans contrainte aux ν rangs restants de R_1.



2ème cas :

L'ordre de référence recherché est R_4^{-1}

Ainsi toutes les procédures de reconnaissance définies au paragraphe 3 sont donc aussi utilisables pour la condition REF-PRIMAL, sous réserve d'effectuer les modifications indiquées précédemment.

Conclusion

Au cours de la lecture de ce travail, on a pu distinguer quatre axes de recherche principaux :

- Tout d'abord, l'étude des propriétés du graphe de surclassement et des procédures à seuil qui sont actuellement des outils fondamentaux du choix multicritère (ex. : Méthode Electre [16])

- Puis, l'étude de différentes conditions empêchant l'apparition d'effet de Condorcet dans un état de l'opinion et les rapports entre celles-ci.

- La construction de modèles explicatifs des mécanismes de choix individuel.

- Enfin, et ceci nous semble important, la mise au point d'algorithmes permettant de reconnaitre si un état de l'opinion donné vérifie l'une des conditions présentées précédemment. Nous touchons ici au domaine de l'analyse des données ordinales.

Outre ces voies qui sont loin d'être totalement exploitées, d'autres directions nous semblent intéressantes à suivre.

Citons par exemple, l'examen de la généralisation de la condition de WARD ; la définition d'une "distance" d'un état de l'opinion donné et les conditions présentées auparavant.

Une autre idée qui vient à l'esprit, est d'étudier ces conditions d'une manière probabiliste.

.../...

A notre connaissance, rien n'a encore été fait dans ce sens. Peut-on par exemple, estimer l'apparition d'un effet de Condorcet à partir d'un échantillon d'état d'opinions ?

Une autre voie, certainement passionnante, est la recherche des possibilités d'une manipulation d'une assemblée par différentes méthodes d'agrégation.

Concluons enfin, en exprimant l'espoir que les sujets que nous avons abordés ici ont suffisamment passionné le lecteur pour que celui-ci ait lu ce travail jusqu'ic

° °
°

B I B L I O G R A P H I E

1 - ARROW K.J. : "Social choice and individual values"
Wiley - 2ème Edition 1962

2 - BARBUT M.
FREY L. : "Techniques ordinales en analyse des données, Algèbre et Combinatoire"
Hachette Université - Paris 1971

3 - BLACK D. : "The theory of committees and elections"
Cambridge University Press 1958

4 - BLIN J.M. : "The general concept of multidimensional consistency - Some algebric aspects of the agregation problem"
Northwestern University

5 - BORDA J.C. : "Mémoire sur les élections au scrutin"
Mémoires de l'Académie Royale des Sciences 1871

6 - CONDORCET
(Marquis de) : "Essais sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendue à la pluralité des choix"
Paris 1785

7 - DRIDI T. : "Sur la caractérisation des fonctions majoritaires"
Séminaire d'Algèbre et Combinatoire Grenoble
Avril 1978

8 - GUILBAUDG.T. &
ROSENSTIEL P. : "Analyse algébrique d'un scrutin"
Mathématiques et sciences humaines n° 4 - 1963

9 - INADA K. : "A note on the simple Majority Decision Rule"
Econometrica 32 - 1964

10 - JACQUET-LAGREZE : "Le problème de l'agrégation des préférences - une classe de procédures à seuil"
Mathématiques et Sciences Humaines n° 43 - 1973

11 - KÖHLER G. : "La prévention de l'effet de Condorcet et quelques propriétés du graphe de surclassement pour des seuils de 0 à 100 %"
Mémoire du D.E.A. en Recherche Opérationnelle
Grenoble - Sept. 1976

12 - KÖHLER G. : "Procédures à seuil"
Séminaire d'Algèbre et Combinatoire -
Grenoble - Fev. 1977

.../...

13 - KÖHLER G. : "Généralisation des conditions de BLACK et INADA - Etude de la cardinalité des états de l'opinion qui satisfont ces conditions"
Séminaire d'Algèbre et Combinatoire - Grenoble - Dec. 1977

14 - MONJARDET B. : "Tournoi et ordres médians pour une opinion"
Mathématiques et Sciences Humaines n° 4 - 1963

15 - ROMERO D. : "La prévention de l'effet de Condorcet. Quelques remarques et procédures"
Mémoire du D.E.A. en Recherche Opérationnelle - Grenoble - Sept. 1975

16 - ROY B. : "Critères multiples et modélisation des préférences L'apport des relations de surclassement"
SEMA (Metra International) n° 79 - 1973

17 - SEN A.K. : "A possibility theorem on majority decisions"
Econometrica 34 n° 2 - 1966

18 - TERRIER E. : "Sur quelques problèmes d'agrégation de préférences
Mémoire du D.E.A. en Recherche Opérationnelle - Grenoble - Sept. 1976

19 - WARD W. : "Majority rule and allocation"
Journal of Conflict Resolution - Vol. 15 - n° 4 - Dec. 1961.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 13 Juin 1978

Le Président de la thèse

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 13 Juin 1978

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale