



HAL
open science

Le signal complexe de la diffusion collective de la lumière et les écoulements turbulents

Cyrille Honoré

► **To cite this version:**

Cyrille Honoré. Le signal complexe de la diffusion collective de la lumière et les écoulements turbulents. Physique [physics]. Ecole Polytechnique X, 1996. Français. NNT: . tel-00287591

HAL Id: tel-00287591

<https://pastel.hal.science/tel-00287591>

Submitted on 13 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité:

Physique: fluides, plasmas et décharges électriques

Par:

Cyrille HONORÉ

Titre: **Les signaux complexes
de la diffusion collective de la lumière
et les écoulements turbulents**

Soutenu(e) le **mercredi 5 juin 1996** ,

Devant le jury composé de:

- M. Jean-Paul BONNET** , président du jury (LÉA, Poitiers)
Jean-Paul DUSSAUGE , rapporteur (IRPHE, Marseille)
Xavier GARBET (DRFC, Cadarache)
Dominique GRÉSILLON , directeur de thèse (LPMI, Palaiseau)
Guy LAVAL (CPTH, Palaiseau)
Pierre MOSCHETTI (DRET, Paris)
Patrick TABELING , rapporteur (LPS, Paris)

Le signal complexe
de la diffusion collective de la lumière
et les écoulements turbulents

C. Honoré

*à ma tante Jacquotte,
à mon grand-père Pierre,
et à tous ceux qui les ont aimés.*

Doubt thou the stars are fire
Doubt that the sun doth move
Doubt truth to be a liar
But never doubt I love

Hamlet, W. Shakespeare

Doute qu'étoile soit feu
Doute que le soleil se meuve
Doute que le vrai soit vrai
Je t'aime, n'en doute pas

Merci...

Je tiens tout d'abord à remercier la DRET d'avoir bien voulu soutenir financièrement mes travaux pendant trois ans.

J'exprime ma reconnaissance à Dominique Grésillon, de m'avoir encadré pendant ces trois années. Les échanges que nous avons eus ont souvent été riches en idées nouvelles.

Je remercie Jean-Max Buzzi de m'avoir accueilli au sein du laboratoire de Physique des Milieux Ionisés.

J'exprime toute ma gratitude aux membres du jury pour l'attention qu'ils ont portée à mes résultats, Jean-Paul Bonnet, Xavier Garbet, Guy Laval, Pierre Moschetti, et plus particulièrement Jean-Paul Dussauge et Patrick Tabeling d'avoir accepté la tâche de rapporteur.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des chercheurs qui s'intéressent à la diffusion collective au laboratoire PMI : Ghassan Antar, pour les discussions animées que nous avons eues, ainsi que André Truc, pour l'apport de son expérience du montage d'ALTAIR, Pascale Hennequin, Françoise Gervais, Agnès Quemeneur et Nourredine Maafa, pour les échanges autour de l'application aux plasmas de la diffusion de la lumière.

Pour les expériences menées autour des souffleries de Poitiers et Marseille, outre Jean-Paul Bonnet et Jean-Paul Dussauge, je remercie Tewfik Ouzaa, Stéphane Barre, Pierre Dupont et toutes les autres personnes qui nous ont aidés à mettre en place les expériences.

Je remercie Stéphane Giron, qui pendant toute une année m'a aidé dans le montage de l'expérience. Je remercie Bernard Chapey pour son aide technique au jour le jour, Jean-Paul Stéphan, pour l'élaboration de l'électronique, Daniel Catherine, pour la fabrication des éléments mécaniques du banc bidiffusif, Marc et Bruno Dufour, pour les nombreuses pièces mises au point.

Ma gratitude va aussi à Arlette Millard, Annie Stéphan, Catherine Peinturier et Marie-Françoise Lecomte pour les mille services rendus.

Enfin, mes pensées vont aussi à toutes les personnes que j'ai pu côtoyer au laboratoire et qui ont rendu le séjour en ces lieux encore plus agréable.

Résumé

La diffusion collective de la lumière est un moyen d'observation des gaz turbulents. Un laser éclaire le volume étudié. Le champ diffusé par les molécules du gaz est détecté, sous un angle proche de la direction de propagation avant. L'information recueillie est proportionnelle à la transformée de Fourier spatiale de la densité du gaz, sur le volume d'observation, suivant le vecteur d'onde de diffusion. La détection hétérodyne permet d'avoir accès au module et à la phase de ce signal complexe.

L'effet Doppler implique qu'il est possible de mesurer la vitesse de l'écoulement : À travers le spectre du signal, on retrouve, sous certaines conditions, la distribution de probabilité de la vitesse moyenne sur le volume observé. De manière instantanée, on a étudié la dérivée de la phase du signal pour déterminer sous quelles conditions, cette dérivée approche la vitesse instantanée moyenne sur le volume. L'évolution temporelle de la vitesse moyenne sur le volume est alors connue. Son spectre peut être calculé. Un coefficient de diffusion turbulente peut être établi. Les expériences liées à cette étude, ont été faites sur une couche de mélange supersonique, dans la soufflerie S150 du LÉA de Poitiers.

La diffusion a aussi la propriété de sélectionner une longueur d'onde, donc une échelle du milieu observé. Cette information est présente dans le module du signal. Un dispositif permettant d'observer simultanément deux diffusions à des échelles différentes a été monté. L'expérience a porté sur un jet à symétrie axiale. L'étude des auto- et intercorrélations entre signaux à échelles différentes laisse apparaître deux échelles de temps distinctes : un temps court, visible uniquement sur l'autocorrélation, propre à l'échelle observée, et un temps plus long, observable dans tous les cas. Ce dernier ne dépend que de l'échelle de production et de la vitesse moyenne. On a montré que ce temps long est propre aux grandes structures de la turbulence.

Mots-clés :

- Diffusion collective
- Diffusion électromagnétique
- Turbulence dans les gaz
- Couche de mélange supersonique
- Vélocimétrie
- Diffusion turbulente
- Transferts entre échelles
- Information mutuelle

Abstract

Collective light scattering is an observation device for turbulent gas. A laser lights the observed zone, and the gas molecules scattered field is detected at a small angle from the forward propagation direction. The collected information is proportional to the spatial Fourier transform of the gas density, inside the observation zone, at the scattering wavevector. Heterodyne detection allows to measure the modulus and phase of the complex signal.

The Doppler effect implies that the flow velocity can be measured : The signal spectrum, under some conditions, is proportional to spatial mean velocity distribution. We show that instantaneously, under the same kind of conditions, the signal phase derivative is proportional to the spatial mean velocity. The velocity evolution is then known. The velocity frequency spectrum can be calculated. We also compute the turbulent diffusion coefficient from the phase derivative. Experimental results were obtained in a supersonic mixing layer inside windtunnel at the LEA, Poitiers.

Scattering selects a specific wavevector. Information about a fixed lengthscale of the turbulent flow is present inside the signal modulus. A special device was built to observe simultaneously two scatterings at different wavevectors. The experience is an axisymmetric air jet. Correlation between those signals shows two different timescales : The shorter one appears only on selfcorrelation. Its value depends on the observation wavelength. The longer one also appears on crosscorrelation. Its value only depends on the production lengthscale and on the mean velocity. This timescale is peculiar to large structures inside the turbulence.

Keywords :

- Collective scattering
- Electromagnetic scattering
- Gas turbulence
- Supersonic mixing layer
- Velocimetry
- Turbulent diffusion
- Transfer between scales
- Mutual information

Introduction

L'originalité de l'approche de la turbulence au laboratoire de Physique des Milieux Ionisés, est l'instrument de mesure utilisé. Il s'agit de la diffusion collective de la lumière par le gaz, et de sa détection hétérodyne. L'information obtenue sur l'écoulement est en volume, instantanée, accordée à une échelle déterminée.

La question est alors de savoir quelles informations sur la turbulence en général, et l'écoulement en particulier, on peut extraire de ces mesures de diffusion.

Des études antérieures ont montré que deux types d'informations sont accessibles : D'une part, par effet Doppler sur l'écoulement, on avait accès à des informations de vélocimétrie. De plus, la diffusion sélectionne une échelle. Cette notion est importante pour l'étude la turbulence. Par exemple, l'intensité du signal en fonction de l'échelle, suit une loi de Kolmogorov.

L'objet de cette thèse reprend ces deux axes d'approche. L'acquisition et le traitement de signaux de diffusion ont été développés. Une étude plus approfondie de l'évolution temporelle du signal est alors possible.

Concernant la vélocimétrie (chapitre 2), l'effet Doppler est étudié de manière instantanée : Dans quelle mesure a-t-on accès à la vitesse instantanée de convection ? La connaissance de l'évolution temporelle de la vitesse ouvre de nouveaux horizons : On peut avoir accès au spectre de cette vitesse, etc.

Pour les informations propres à l'échelle (chapitre 3), on s'est attaché à l'étude des propriétés temporelles des transferts d'information entre échelles : Peut-on observer des transferts entre échelles ? De quelle nature sont-ils ? Sont-ils orientés dans le temps, comme le laisserait supposer la phénoménologie de Kolmogorov ? Une étude antérieure a montré qu'il existait bien une information commune entre signaux à différentes échelles, sans pouvoir répondre aux autres questions.

Principales notations

Sigles

DCL : Diffusion Collective de la Lumière
OL : Oscillateur Local
ADL : Anémométrie Doppler Laser

Diffusion collective de la lumière

Principe physique

$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_{iO}(\vec{r})e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}$: Champ électrique incident
 λ_i : Longueur d'onde du champ incident
 $C\mu_o\varepsilon_o$: Vitesse de la lumière, perméabilité et permittivité du vide
 N : Indice optique moyen du milieu
 \vec{r}' : Position du détecteur, \vec{r} : Position observée
 \vec{n}' : Direction du détecteur
 $\vec{k}_s = k_i\vec{n}'$: Vecteur d'onde du champ diffusé
 $\vec{E}_s(\vec{r}', t)$: Champ électrique diffusé total
 $\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$: Vecteur d'onde de diffusion
 V : Volume d'observation
 $n(\vec{r}, t)$: Champ de densité du gaz
 α : Polarisabilité moyenne du gaz
 $F_k^o(t) = \int_V n(\vec{r}, t)e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$: Signal de diffusion (forme simplifiée)

Détection hétérodyne

$\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t) = E_{olO}(\vec{r}')e^{i(\vec{k}_{ol} \cdot \vec{r}' - (\omega_i + \Delta\omega_{ol})t)}$: Champ électrique de l'oscillateur local
 $\Delta\omega_{ol}$: Pulsation de décalage de l'oscillateur local
 $P(t)$: Puissance électromagnétique reçue par le détecteur
 $u_{ol}(\vec{r}) u_i(\vec{r})$: Profils des faisceaux oscillateur local (ol) et primaire (i)
 $C(t) S(t)$: Parties réelle et imaginaire du signal de diffusion

Montage expérimental

w : rayon des faisceaux dans la zone de mesure
 $u(\vec{r})$: profil du volume de mesure

$F_{\vec{k}}(t) = \int n(\vec{r}, t) u(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$: Signal de diffusion (exprimé sur le profil)
 Δk : Largeur à mi-hauteur du profil en vecteur d'onde du volume

Phase du signal et vitesse de convection

Moyens expérimentaux

Mc : Nombre de Mach convectif de la couche de mélange

M_{sup} M_{sub} : Nombre de Mach des écoulements supersonique (sup) et subsonique (sub)

Spectre du signal DCL

$C_F(\tau) = \langle F_{\vec{k}}^{o*}(t) F_{\vec{k}}^o(t + \tau) \rangle$: Autocorrélation du signal de diffusion collective

\vec{v}_o : Vitesse moyenne spatiale sur le volume

$S(\vec{k})$: Facteur de forme du milieu

$P_{\vec{v}_o}(v_{o||})$: Distribution de probabilité de la vitesse \vec{v}_o projetée sur l'axe

Vitesse instantanée de convection

$\rho \phi$: Module et phase du signal

t_a : période d'acquisition du signal

$Sp[A(t)]$: spectre fréquentiel de la fonction entre crochet

Phase du signal et diffusion turbulente

$\psi_\tau(t) = \int_t^{t+\tau} \phi(t') dt' = \phi(t + \tau) - \phi(t)$: déphasage entre deux instants

σ_{ψ_τ} : Écart type du déphasage

$C_{\delta\phi}$: Autocorrélation de la dérivée de la phase centrée ($\phi - \langle \phi \rangle$)

D_{uu} : Coefficient de diffusion de la vitesse projetée sur \vec{k}

Spectre du signal et histogramme de la dérivée de la phase

$Sp_{\rho e^{i\phi}}$ $Sp_{e^{i\phi}}$ Sp_ρ : Spectre du signal de diffusion collective, et de ces composantes

$C_{e^{i\phi}}$: Autocorrélation de l'exponentielle de la phase

P_ϕ : Distribution de probabilité de la dérivée de la phase

$G_{\psi_\tau}(k) = \langle e^{ik\psi_\tau(t)} \rangle$: fonction caractéristique de la variable aléatoire ψ_τ

$\Gamma_{\psi_\tau 1} = \langle \psi_\tau \rangle$, $\Gamma_{\psi_\tau 2} = \sigma_{\psi_\tau}^2$, $\Gamma_{\psi_\tau 3} \dots$: Cumulants de la variable aléatoire ψ_τ

τ_ϕ : Temps caractéristique de l'autocorrélation de la dérivée de la phase

Relations entre échelles de la turbulence

Banc bidiffusif

\vec{k}_1 \vec{k}_2 : vecteur d'onde de diffusion pour chacun des faisceaux

Information mutuelle

- p_{ij} : Loi de probabilité conjointe de deux variables
- p_i, p_j : Lois de probabilité des variables sèparemment
- S_{IJ}, S_I, S_J : Entropies conjointe et sèparées des variables
- $I_{IJ} = S_I + S_J - S_{IJ}$: Information mutuelle entre les variables
- B : Nombre d'intervalles de dicrètisation des variables
- N : Longueur d'acquisition pour l'estimation
- $\tilde{p}_{ij}, \tilde{S}_{IJ}, \tilde{I}_{IJ}$: Probabilité, entropie et information mutuelle estimées
- σ_a, σ_b : Écarts type de variables gaussienne
- ρ_{ab} : Taux d'intercorrèlation entre deux variables gaussiennes
- $C_{IJ}(\tau), I_{IJ}(\tau)$: Intercorrèlation et information mutuelle, fonction du temps

Corrèlation du signal

- τ_c, τ_l : Temps caractèristiques court (c) et long (l) des corrèlations
- $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$: Échelles d'observation
- $\langle v_o \rangle$: Vitesse moyenne observée sur le volume
- L : Échelle intègrale

Chapitre 1

La diffusion collective de la lumière (DCL)

L'idée d'étudier un fluide par la diffusion d'une onde électromagnétique est ancienne : Elle date de Rayleigh. Mais son application en laboratoire n'a pu se concrétiser que dans les années 1960. En effet, ce principe requiert une source d'onde électromagnétique monochromatique très stable, et ceci n'a été acquis qu'avec la découverte des lasers, à la fin des années 50. La mise au point de la détection hétérodyne a aussi été nécessaire pour mener à bien certaines expériences.

Les premières mesures obtenues grâce à ce principe, l'ont été par H.Z. Cummins et al. [1, 2], en 1964. Leur objet d'étude était une solution de macromolécules. Ils ont pu observer la diffusion Rayleigh dans ce fluide. L'étape suivante a été franchie par T.J. Greytak et G.B. Benedek [3], peu après. Leur étude a porté sur les gaz. Ils ont pu montrer des spectres liés aux fluctuations cinétiques, pour certains cas, et hydrodynamiques, pour d'autres.

R.J. Goldstein et W.F. Hagen [4] appliquèrent le principe aux écoulements turbulents, en 1967. Mais l'observation ne portait pas sur le gaz lui-même, mais sur de fines particules qui y étaient ensemencées. Ce type d'approche est celui le plus couramment utilisé, pour étudier l'écoulement (cf., par exemple, W.K. George et al. [5]).

Les premières expériences de diffusion directement sur le gaz turbulent datent de 1980, par J.C. Lelièvre et J. Picard [6]. Pourtant la pertinence d'un tel procédé était déjà établie à la fin des années 60. La première idée d'étudier la turbulence par diffusion électromagnétique était de P. Gilles de Gennes [7]. Elle fut développée par H.L. Frisch [8] et G.B. Benedek [9].

C'est donc le travail initié par J.C. Lelièvre qui a été repris au laboratoire de Physique des Milieux Ionisés, par l'équipe de D. Grésillon [10, 11, 12, 13].

Dans un premier temps est exposé le principe physique de la diffusion collective. On verra ensuite quel bénéfice apporte la détection hétérodyne. La deuxième partie porte sur le montage optique et électronique, conçu pour observer un écoulement aérodynamique en laboratoire.

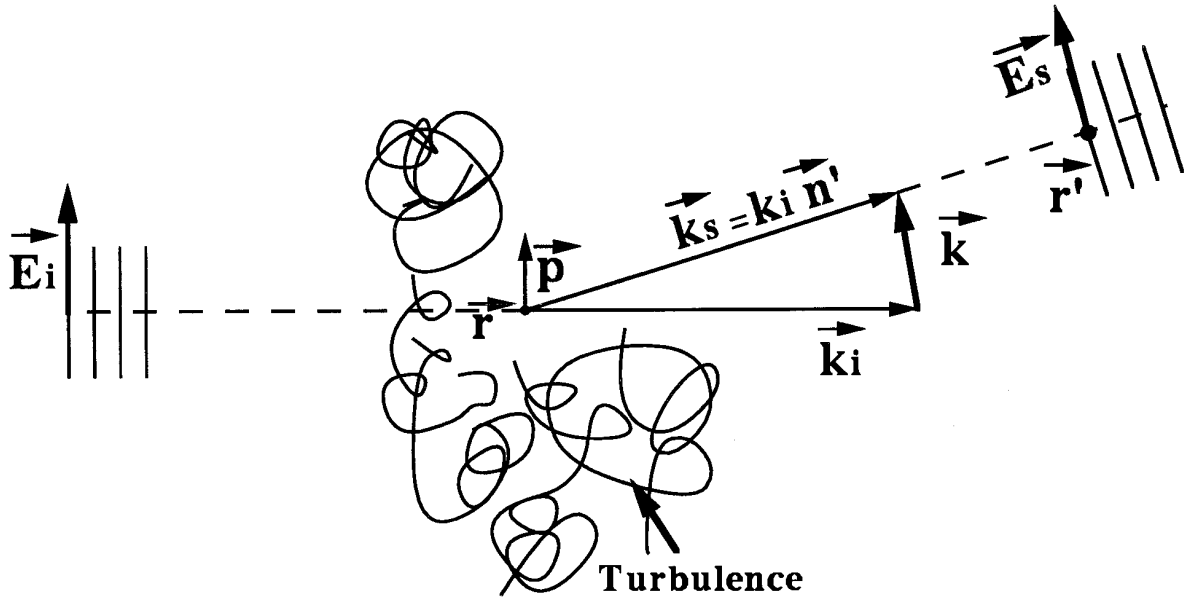


FIG. 1.1 – Diffusion d'un faisceau de lumière plan par les molécules d'un gaz

1.1 Le principe physique

1.1.1 La diffusion collective

L'observation de l'écoulement se fait par la diffusion de la lumière sur les molécules du gaz : Chaque molécule du gaz est polarisée par le champ électrique qu'elle reçoit, et réémet une onde sphérique, dans toutes les directions (voir figure 1.1). La somme de tous les champs réémis donne une information sur les fluctuations de densité du gaz à la longueur d'onde de diffusion (cf. J.D. Jackson [15], H.Z. Cummins [17], pour le principe, D. Grésillon et al. [16], pour la mise en œuvre).

Diffusion par une molécule

On utilise une onde électromagnétique monochromatique, polarisée rectilignement. ω_i est sa pulsation, \vec{k}_i est son vecteur d'onde, λ_i , sa longueur d'onde et $\vec{E}_o(\vec{r})$, son amplitude. L'amplitude dépend de la position. En effet, tout d'abord, les sources électromagnétiques utilisées créent des faisceaux gaussiens. La section des faisceaux n'est donc pas uniforme. De plus, la loi de la diffraction de Kirchhoff-Sommerfeld, impose que l'amplitude du faisceau varie au cours de sa propagation.

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{i0}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} \quad (1.1)$$

Chaque molécule (indice j) du gaz réagit comme un dipôle. \vec{r}_j est sa position. Les temps caractéristiques de déplacement du gaz sont suffisamment courts par rapport à

la propagation de l'onde électromagnétique pour considérer que chaque molécule du gaz est observée au même instant. α_j est la polarisabilité de la molécule (ε_o est la constante diélectrique du vide).

$$\vec{p}_j(t) = \varepsilon_o \alpha_j \vec{E}_i(\vec{r}_j, t) \quad (1.2)$$

La résolution des équations de Maxwell-Boltzmann montre que le dipôle ainsi créé réémet une onde sphérique, \vec{E}_{sj} . Cette diffusion est élastique, car la molécule n'absorbe, ni n'émet de l'énergie lors du processus. Le champ réémis a donc la même longueur d'onde que le champ incident.

Le rayon de Rayleigh de la molécule est :

$$r_{Rj} = \frac{\pi \alpha_j}{N^2 \lambda_i^2} \quad (1.3)$$

N est l'indice optique moyen du milieu.

On observe le champ diffusé à une position \vec{r}' , qui sera celle du détecteur. \vec{n}_j est le vecteur unitaire qui relie \vec{r}_j à \vec{r}' .

$$\vec{E}_{sj}(\vec{r}', t) = \frac{\pi \alpha_j}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{ik_i |\vec{r}' - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|} \vec{n}_j \wedge [\vec{n}_j \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r}_j)] e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j - \omega_i t)} \quad (1.4)$$

Champ lointain

Le point de mesure est placé loin de la zone de mesure. L'angle d'ouverture de détection est faible. Ces conditions justifient l'approximation de champ lointain.

On considère alors que le vecteur \vec{n}_j , définissant la direction de l'observation, sera le même pour toutes les molécules : \vec{n}' .

La distance $|\vec{r}' - \vec{r}_j|$, développée au premier ordre, est égale à $r' - \vec{r}_j \cdot \vec{n}'$ (l'origine du repère est choisie au milieu du volume d'observation). L'approximation permet alors de simplifier l'écriture du facteur exprimant la propagation de l'onde diffusée :

$$\frac{e^{ik_i |\vec{r}' - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|} = \frac{e^{ik_i r'}}{r'} e^{-ik_i \vec{n}' \cdot \vec{r}_j} \quad (1.5)$$

Pour le détecteur, le champ diffusé par chaque molécule peut donc être considéré comme une onde plane. Son vecteur d'onde, \vec{k}_s , est le même pour chaque molécule :

$$\vec{k}_s = k_i \vec{n}' \quad (1.6)$$

Le champ diffusé par une molécule, dans la limite de champ lointain, s'écrit alors :

$$\vec{E}_{sj}(\vec{r}', t) = \frac{\pi \alpha_j}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{ik_s r'}}{r'} \vec{n}' \wedge [\vec{n}' \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r}_j)] e^{-i\omega_i t} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}_j} \quad (1.7)$$

Diffusion multiple et limite collective

On forme alors le champ réémis par l'ensemble des molécules.

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{ik_s r'}}{r'} e^{-i\omega_i t} \sum_j \alpha_j \vec{n}' \wedge [\vec{n}' \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r}_j)] e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}_j} \quad (1.8)$$

Trois facteurs dépendent de la molécule : sa polarisabilité, l'amplitude du champ incident dans le volume de diffusion, et l'exponentielle, $e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}_j}$.

Cette dernière contient l'information de différence de marche entre les ondes issues des différentes molécules. Le vecteur d'onde qui va intervenir est la différence entre le vecteur d'onde diffusé et celui de l'onde initiale. Par la suite, c'est ce vecteur que nous désignerons comme le vecteur d'onde de diffusion.

$$\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i \quad (1.9)$$

On choisit de se placer dans la limite dite collective : Les longueurs d'onde de diffusion, associées à \vec{k} , que l'on considèrera dans la suite, seront grandes par rapport aux distances interatomiques. Dans ces conditions, on peut remplacer la somme discrète sur les molécules par une intégrale sur la densité du gaz.

De plus, on intègre sur des temps longs par rapport au temps moyen entre deux collisions moléculaires, et le libre parcours moyen est aussi plus court que les longueurs d'onde de diffusion observées. Les molécules subissent alors suffisamment de chocs pour qu'un mouvement microscopique soit négligeable. On observe le mouvement d'ensemble, et non celui propre à chaque molécule.

Ces deux conditions sont nécessaires pour pouvoir parler de diffusion collective.

L'intervention de la polarisabilité des molécules peut être simplifiée : Le gaz étudié peut contenir plusieurs types de molécules de polarisabilité, α_j , différentes (c'est le cas de l'air). Mais le fait que l'on se place dans la limite collective rend le problème plus simple : Dans chaque élément de fluide que l'on considère, les proportions de chaque type de molécule sont les mêmes. Comme le champ diffusé dépend linéairement de la polarisabilité, on peut remplacer ces valeurs par une moyenne sur les polarisabilités des types de molécules, pondérée par la proportion molaire de chaque molécule dans le gaz : α .

Le champ diffusé total au niveau du détecteur est alors :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi \alpha}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{ik_s r'}}{r'} e^{-i\omega_i t} \int_V \vec{n}' \wedge [\vec{n}' \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r})] n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \quad (1.10)$$

L'intégration porte sur le volume d'observation V , défini comme le croisement du faisceau incident et du faisceau antenne du détecteur. On affinera cette définition plus loin.

Transformée de Fourier de la densité

Si le champ incident est homogène, $E_{iO}(\vec{r}) = E_{iO}$, le champ diffusé est proportionnel à la transformée de Fourier de la densité du gaz sur le volume V , et pour le vecteur

d'onde \vec{k} . C'est cette information, $F_{\vec{k}}^o(t)$, qui servira de formule de base simplifiée pour l'analyse ultérieure du signal.

$$F_{\vec{k}}^o(t) = \int_V n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \quad (1.11)$$

Néanmoins, pour la suite de ce calcul, nous reprendrons la forme plus complète de l'expression du champ diffusé :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi\alpha}{N^2\lambda_i^2} \frac{e^{ik_s r'}}{r'} e^{-i\omega_i t} \int_V \vec{n}' \wedge [\vec{n}' \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r})] n(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \quad (1.12)$$

1.1.2 Détection hétérodyne

Comme l'information à recueillir est complexe, une simple détection, sensible à la puissance électromagnétique, n'est pas suffisante. On perdrait l'information sur la phase du signal $F_{\vec{k}}^o(t)$. On a alors recours à une détection hétérodyne.

Celle-ci consiste à faire interférer le champ réémis avec une onde de référence, décalée en fréquence par rapport à l'onde incidente (voir figure 1.2). La puissance reçue, formée alors par le battement de ces deux champs est proportionnelle au signal $F_{\vec{k}}^o(t)$, décalé en fréquence. Il devra être ensuite démodulé électroniquement, de manière à reconstruire le signal complexe qui nous intéresse.

Oscillateur local (OL)

Le champ de référence, appelé aussi oscillateur local (OL) est une onde plane, de la pulsation $\omega_i + \Delta\omega_{ol}$ et de vecteur d'onde \vec{k}_{ol} , parallèle à \vec{k}_s . Son amplitude est plus grande que celle du champ diffusé, afin qu'il serve aussi d'amplificateur optique.

$$\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t) = E_{olO}(\vec{r}') e^{i(\vec{k}_{ol} \cdot \vec{r}' - (\omega_i + \Delta\omega_{ol})t)} \quad (1.13)$$

Puissance optique

La puissance reçue par le détecteur est l'intégrale du flux du vecteur de Poyting à travers sa surface S .

$$P(t) = \frac{1}{\mu_o} \int_S (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot d^2\vec{r}' \quad (1.14)$$

Compte tenu que dans notre cas, on a affaire à une onde quasimonochromatique, la puissance s'exprime par :

$$P(t) = \frac{1}{\mu_o C} \int_S |\vec{E}(\vec{r}', t)|^2 d^2\vec{r}' = \frac{1}{\mu_o C} \int_S |\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t) + \vec{E}_s(\vec{r}', t)|^2 d^2\vec{r}' \quad (1.15)$$

La puissance reçue se décompose alors en trois termes :

$$P(t) = \frac{1}{\mu_o C} \int_S |\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t)|^2 + |\vec{E}_s(\vec{r}', t)|^2 + 2\Re\{\vec{E}_{ol}^*(\vec{r}', t) \cdot \vec{E}_s(\vec{r}', t)\} d^2\vec{r}' \quad (1.16)$$

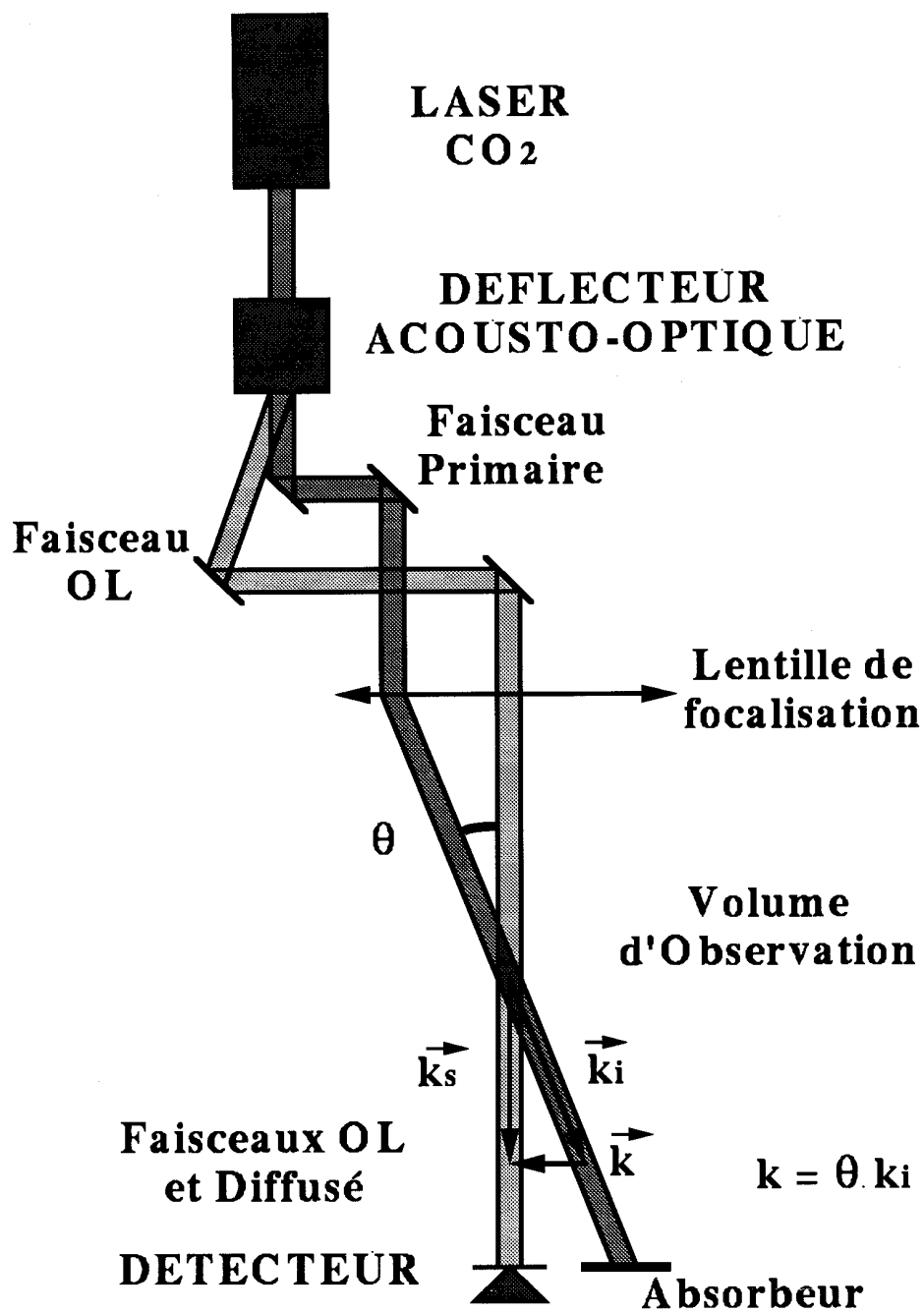


FIG. 1.2 – Détection hétérodyne : schéma de principe

On y trouve la puissance de l'OL, qui est constante. La puissance du champ diffusé intervient aussi, mais elle est très faible, car l'amplitude du champ diffusé est très inférieure à celle de l'OL. Sa fréquence caractéristique est proche de zéro.

Le plus intéressant est le terme de battement entre les deux champs. Sa puissance est intermédiaire entre les deux termes précédents. Sa bande de fréquence caractéristique est autour de $\Delta\omega_{ol}$. Cette propriété permet de séparer ce battement des deux premiers termes, au moyen d'un filtre.

La puissance correspondante au terme de battement entre l'onde diffusée et l'oscillateur local, $P_b(t)$, s'écrit :

$$P_b(t) = \frac{1}{\mu_o C} \int_S 2\Re\{E_{ol}^*(\vec{r}', t) \cdot \vec{E}_s(\vec{r}', t)\} d^2\vec{r}' \quad (1.17)$$

Battement et croisement des faisceaux

Le champ diffusé est celui calculé dans la première partie. On utilise la formulation équation 1.12 :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi\alpha}{N^2\lambda_i^2} \frac{e^{ik_s r'}}{r'} e^{-i\omega_i t} \int_V \vec{n}' \wedge [\vec{n}' \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r})] e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \quad (1.18)$$

La puissance s'écrit alors, après réarrangement des facteurs et des intégrations :

$$P_b(t) = 2\Re\left\{i \frac{\pi\alpha e^{i\Delta\omega_{ol}t}}{\mu_o C N^2 \lambda_i} \int_V \left\{ \frac{1}{i\lambda_i} \int_S \frac{e^{ik_s r'}}{r'} \vec{E}_{olO}(\vec{r}') e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} d^2\vec{r}' \right\} e^{-i\vec{k}_s \cdot \vec{r}} \cdot \left\{ \vec{n}' \wedge [\vec{n}' \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r})] \right\} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right\} \quad (1.19)$$

Le premier facteur entre accolades a une signification physique : Il s'agit du champ OL sur la surface du détecteur, auquel on a appliqué la loi de Kirchoff-Sommerfeld entre le détecteur et la position \vec{r}' . Cette loi décrit la propagation du champ électrique, à partir de sa distribution sur la surface S du détecteur. Or la tâche du faisceau OL sur le détecteur est choisie pour que son rayon soit plus petit que celui du détecteur. Le résultat est alors la valeur du champ OL au point \vec{r}' .

De plus, comme la polarisation du champ incident sera choisie perpendiculaire au plan de diffusion, le facteur $\vec{n}' \wedge [\vec{n}' \wedge \vec{E}_{iO}(\vec{r})]$ sera égal à $\vec{E}_{iO}(\vec{r})$.

$$P_b(t) = 2\Re\left\{i \frac{\pi\alpha}{\mu_o C N^2 \lambda_i} e^{i\Delta\omega_{ol}t} \int_V \vec{E}_{olO}(\vec{r}') e^{-i\vec{k}_s \cdot \vec{r}'} \cdot \vec{E}_{iO}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right\} \quad (1.20)$$

De plus, on définit l'optique pour que le champ incident et le champ OL aient la même polarisation.

$$P_b(t) = 2\Re\left\{i \frac{\pi\alpha}{\mu_o C N^2 \lambda_i} e^{i\Delta\omega_{ol}t} \int_V n(\vec{r}, t) E_{olO}(\vec{r}') E_{iO}(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \right\} \quad (1.21)$$

Ce battement entre les deux ondes a donc aussi pour effet de redéfinir le volume V d'intégration de la zone de mesure : Il apparaît ici que la transformée de Fourier

$n(\vec{r}, t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ est pondérée par le facteur $E_{ol}^*(\vec{r})E_{iO}(\vec{r})$, produit des profils des deux faisceaux. C'est donc le croisement des deux faisceaux qui en définitive délimite le volume d'intégration de la transformée de Fourier.

La formulation complète du signal $F_{\vec{k}}(t)$, est alors :

$$F_{\vec{k}}(t) = \int n(\vec{r}, t)u_{ol}(\vec{r})u_i(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r} \quad (1.22)$$

Les profils u_{ol} et u_i , sont définis par :

$$u_{ol}(\vec{r}) = \frac{E_{olO}(\vec{r})}{\max\{E_{olO}(\vec{r})\}} \quad u_i(\vec{r}) = \frac{E_{iO}(\vec{r})}{\max\{E_{iO}(\vec{r})\}} \quad (1.23)$$

Courant du détecteur et signal de diffusion

Le détecteur transforme cette puissance lumineuse en courant $I(t)$, avec une certaine efficacité quantique η , qui mesure la probabilité pour qu'un électron soit émis par un photon incident. q_e est la charge de l'électron. \hbar est la constante de Dirac. h est la constante de Planck.

$$I(t) = \eta \frac{q_e}{\hbar\omega_i} P_b(t) = 2\Re\left\{\frac{i\pi\epsilon_o q_e \eta \alpha}{hN} e^{i\Delta\omega_{ol}t} \int_V n(\vec{r}, t)E_{olO}(\vec{r})E_{iO}(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r}\right\} \quad (1.24)$$

Le courant est donc la partie réelle du signal $F_{\vec{k}}(t)$ décalé en fréquence :

$$I(t) \propto \Re\{e^{i\Delta\omega_{ol}t} F_{\vec{k}}(t)\} \quad (1.25)$$

On peut, par exemple, retrouver à travers ce courant le spectre du signal qui nous intéresse, il est simplement décalé en fréquence.

Démodulation du courant

Pour pouvoir traiter numériquement les données, il faut démoduler le courant venant du détecteur. Celui-ci va être mélangé avec deux signaux à la fréquence $\Delta\omega_{ol}$ et en quadrature de phase (cf C. Baudet [19]).

$$C_{ol}(t) = \cos(\Delta\omega_{ol}t) \quad S_{ol}(t) = \sin(\Delta\omega_{ol}t) \quad (1.26)$$

Le produit de ces signaux par celui venant du détecteur crée pour chacun deux termes. L'un autour de deux fois la fréquence de référence, $2\Delta\omega_{ol}$, que l'on éliminera grâce à un filtre. L'autre se situe autour de la fréquence nulle, et permet de démoduler le signal :

$$C(t) = \Re\{F_{\vec{k}}(t)\} \quad S(t) = \Im\{F_{\vec{k}}(t)\} \quad (1.27)$$

L'acquisition numérique de ces deux signaux permettra donc de traiter à volonté le signal qui nous intéresse :

$$F_{\vec{k}}(t) = C(t) + i S(t) \quad (1.28)$$

1.2 Montage expérimental

1.2.1 Éléments techniques

L'application de ce principe peut prendre des formes très diverses en fonction du milieu étudié, et des longueurs d'ondes que l'on veut observer.

Les milieux peuvent être des plasmas ionosphériques, la stratosphère (gaz neutre), sondés par radar VHF. Le principe est utilisé aussi pour les plasmas chauds pour la fusion thermonucléaire en laboratoire, pour les écoulements de gaz en soufflerie. L'observation se fait alors par laser. D'autres milieux sont envisagés, comme des milieux réactifs ou combustifs, des milieux liquides.

Formation des faisceaux incident et OL

Dans le cas que l'on développera, l'écoulement est aérodynamique et turbulent. La source est un laser infrarouge à dioxyde de carbone de longueur d'onde $10,6 \mu m$. Sa puissance est de quelques watts. Il est monomode. Son fonctionnement est continu. Le faisceau est de forme gaussienne. On peut aussi utiliser une lumière laser visible pour ces écoulements [18], pour observer des longueurs d'onde plus courtes.

Pour former le faisceau oscillateur local, on utilise un défecteur acousto-optique, alimenté par un oscillateur à quartz à $40 MHz$. Le défecteur a pour propriété de faire interférer dans un cristal, l'onde électromagnétique avec une onde sonore à la fréquence d'alimentation. Une partie du faisceau sera déviée. Elle aura pour fréquence, la somme des fréquences, et pour vecteur d'onde, la somme des deux vecteurs d'onde.

Rotation et translation des faisceaux

Un système mécanique permet de modifier le vecteur d'onde de diffusion \vec{k} comme on l'entend, en déplaçant les faisceaux les uns par rapport aux autres (voir la figure 1.3) :

Le faisceau de référence suit l'axe d'une lentille, jusqu'au détecteur placé sur ce même axe. Le faisceau principal, qui va diffuser, est lui-même envoyé sur cette lentille, parallèlement au faisceau de référence. Ils vont donc se croiser au point focal de cette lentille, où sera donc la zone de mesure. Le vecteur d'onde de diffusion est proportionnel à l'angle θ entre les deux faisceaux (car ces angles sont faibles) : $k = \theta k_i$. En éloignant ou rapprochant le faisceau primaire de l'axe, on change donc le nombre d'onde de diffusion. De plus en faisant tourner ce faisceau autour de l'axe de la lentille, on change la direction du vecteur d'onde de diffusion. Ce dispositif ne change pas les polarisations des faisceaux.

Un dispositif de rotation-translation, en amont sur le faisceau primaire, permet d'effectuer séparément ces deux modifications : Le translateur, pour l'écart entre les faisceaux, le rotateur, pour la direction.

Le montage permet d'avoir des angles θ de l'ordre de quelques dizaine de milliradians. Les longueurs de diffusion que l'on peut observer sont de l'ordre du millimètre. Toutes les directions d'observation, perpendiculaires à celles des faisceaux sont possibles.

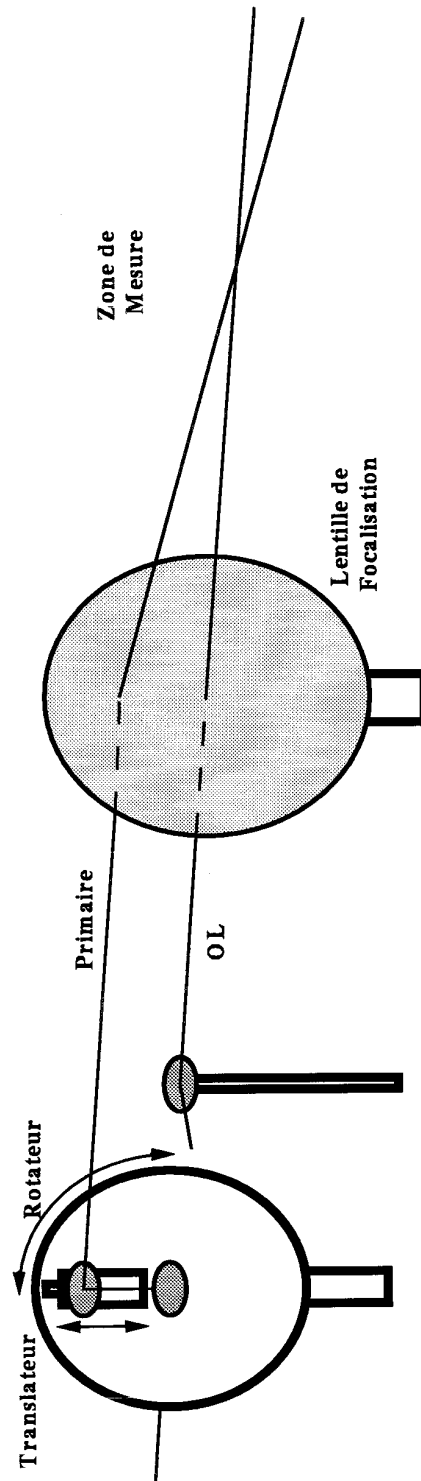


FIG. 1.3 – Montage expérimental : Dispositif pour modifier le vecteur d'onde de diffusion.

Détection et électronique

Le détecteur est une diode photoconductrice et semiconductrice de Hg-Cd-Te. Son efficacité quantique η est de l'ordre de 40 %. Sa bande passante supérieure à 100 MHz, est largement suffisante pour restituer le signal de diffusion, sans altération. En effet, ce signal décalé en fréquence a son spectre dans la gamme de 35 à 45 MHz. Pour fonctionner, la diode doit être refroidie à la température de l'azote liquide.

Le schéma électronique analogique pour reconstruire les signaux suivant le principe vu plus haut (section 1.1.2), est donné à la figure 1.4.

Acquisition des signaux

Les parties réelle et imaginaire des signaux DCL sont numérisées par un oscilloscope numérique. Les fréquences d'acquisition utilisées vont de 2 à 10 MHz. La discrétisation se fait sur 8 bits. La profondeur des mémoires est de 1 Mo.

1.2.2 Le volume de mesure

Le volume de mesure est défini par le produit des profils des deux faisceaux, incident et oscillateur local.

Profil du volume de mesure

Les faisceaux sont gaussiens. La zone de mesure n'est pas un volume bien délimité, mais a elle-même une forme gaussienne tridimensionnelle (voir figure 1.5). Comme les deux faisceaux diffèrent d'un angle très faible, la forme est allongée dans une direction.

On appelle \vec{x} , la direction bissectrice entre les deux faisceaux. \vec{y} est la direction perpendiculaire dans le plan de croisement des faisceaux, et \vec{z} est la direction orthogonale à ce plan. L'origine est choisie au point de croisement. On appelle w , le rayon commun aux deux faisceaux (en fait le rayon pour lequel le champ électrique est divisé par le nombre e).

On se place dans le cas où le rayon des faisceaux est suffisant pour que sur la distance d'intersection, la divergence des faisceaux est négligeable.

L'équation décrivant le profil du faisceau incident s'écrit alors :

$$u_i(x, y, z) = e^{-[(y \cos \frac{\theta}{2} + x \sin \frac{\theta}{2})^2 - z^2]/w^2} \quad (1.29)$$

Celui de l'OL a la forme :

$$u_{ol}(x, y, z) = e^{-[(y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2})^2 - z^2]/w^2} \quad (1.30)$$

Le produit normalisé de ces deux fonctions définit la forme du volume de mesure. On se place dans la limite des petits angles θ .

$$u(x, y, z) = e^{-\frac{2(y^2+z^2)}{w^2} - \frac{x^2\theta^2}{2w^2}} \quad (1.31)$$

L'écart type transversal du volume de mesure est donc $w/2$. La longueur est w/θ .

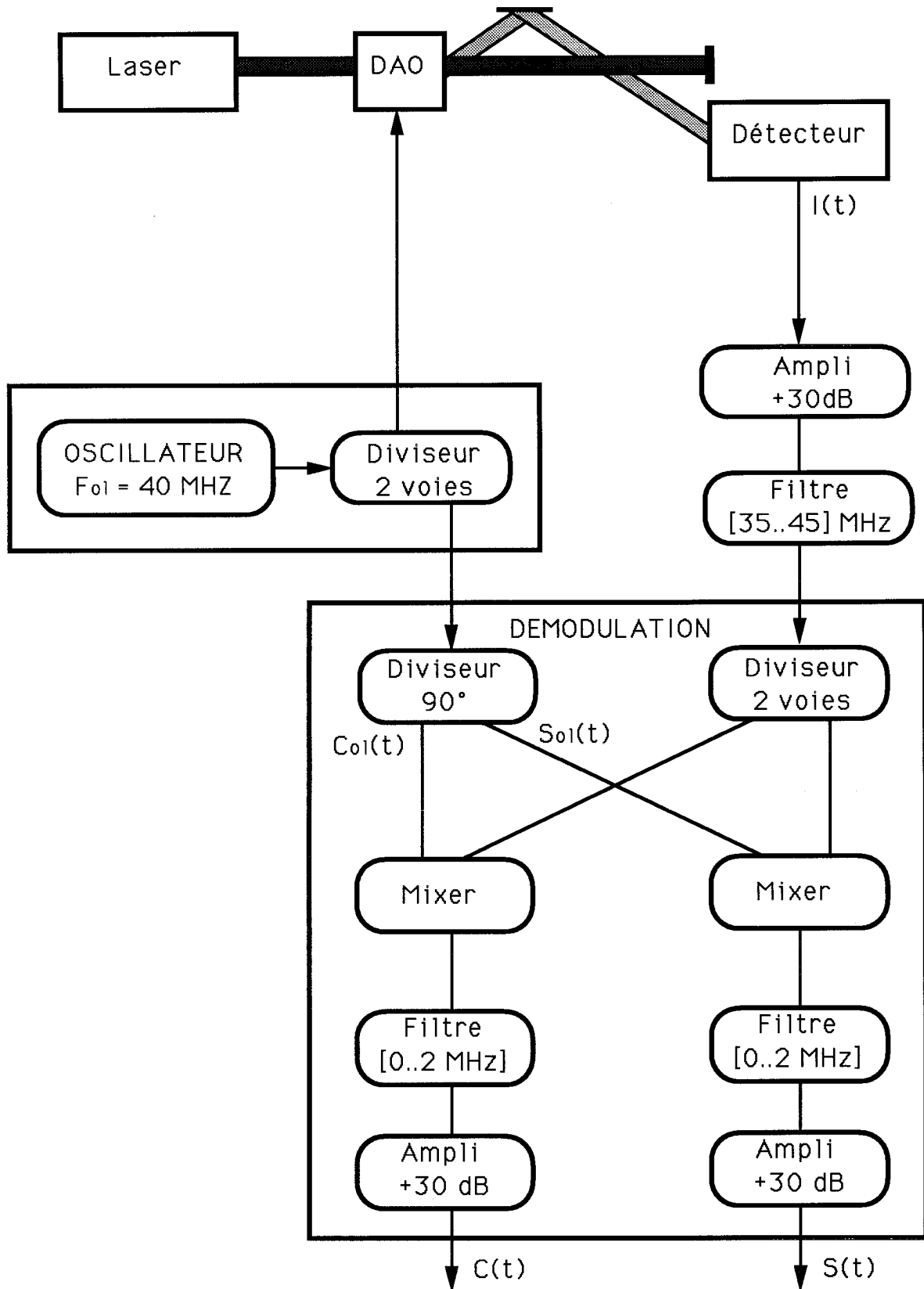


FIG. 1.4 – Montage électronique : Eléments nécessaires pour moduler puis démoduler le signal.

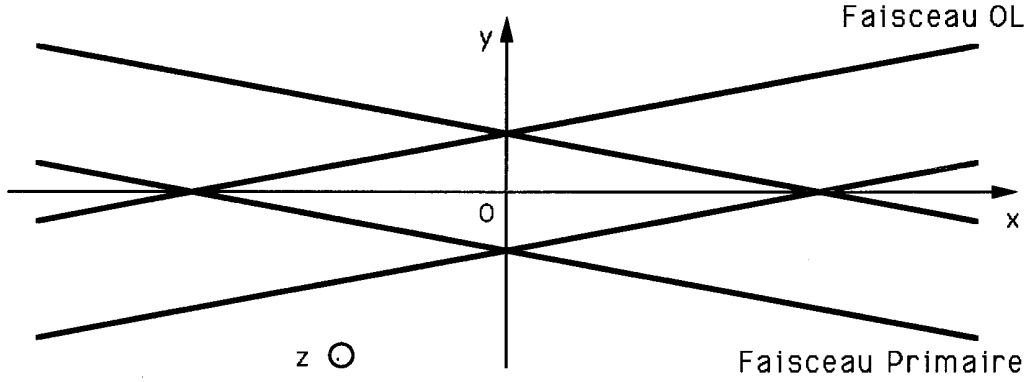


FIG. 1.5 – Zone de mesure : Le croisement des deux faisceaux a une forme gaussienne très allongée.

Plus l'angle sera petit plus le volume sera long. Dans la suite, le rayon w des faisceaux sera de l'ordre de quelques millimètres dans la zone de mesure. La longueur de la zone de mesure est alors de l'ordre de la dizaine de centimètres. Pour tous les milieux que l'on étudiera par la suite, la zone de mesure traverse tout l'écoulement.

Le signal issu de l'instrument de mesure s'écrit alors :

$$F_{\vec{k}}(t) = \int n(\vec{r}, t) u(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \quad (1.32)$$

Dans la suite, on utilisera soit cette écriture, $F_{\vec{k}}(t)$, en fonction des profils (équation 1.32), soit celle simplifiée, $F_{\vec{k}}^g(t)$, portant sur le volume de croisement (équation 1.11).

Résolution en nombre d'onde

Le fait que l'intégration porte sur un volume fini limite la définition en nombre d'onde de la transformée spatiale de Fourier.

L'expression du signal dépendant du profil du volume de mesure (équation 1.32), peut se réécrire comme un produit de convolution :

$$F_{\vec{k}}(t) = n(\vec{k}, t) \star \tilde{u}(\vec{k}) \quad (1.33)$$

où $\tilde{u}(\vec{k})$ est la transformée de Fourier du profil du volume de mesure :

$$\tilde{u}(\vec{k}) = \int u(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \propto e^{-(k_y^2 + (k_x \frac{2}{\theta})^2 + k_z^2) \frac{w^2}{8}} \quad (1.34)$$

La définition transversale en k est donc de $2/w$, en écart type. La largeur à mi-hauteur correspondante est :

$$\Delta k = 2\sqrt{2 \ln 2}/w \quad (1.35)$$

La définition en k dans la direction des faisceaux est plus étroite : $\theta\sqrt{2 \ln 2}/w$.

En cherchant à rendre la mesure plus locale, on perd en définition de nombre d'onde : Il faut donc trouver un compromis entre les deux critères.

Si la définition absolue est indépendante du nombre d'onde, la définition relative, $\Delta k/k$, sera d'autant plus fine que le nombre d'onde est grand.

1.2.3 Corrections à l'expérience

Le signal $F_{\vec{k}}(t)$ est la réponse idéale de l'appareil de mesure. L'information acquise a une forme plus complexe que celle-ci. Nous allons donc aborder certaines questions que le traitement peut soulever.

Diffusion dans le déflecteur

Tout d'abord, le déflecteur est à l'origine d'un parasite sur le signal acquis : Dans la direction du faisceau oscillateur local, on trouve aussi une partie du faisceau primaire, diffusé par le cristal du déflecteur. Ce faisceau secondaire va subir une diffusion vers l'avant dans la zone turbulente. Sur le détecteur, il va interférer avec l'oscillateur local. Le signal issu de ce battement a le même décalage en fréquence, $\Delta\omega_{ol}$, que le signal que l'on recherche. Il va donc venir polluer ce signal.

Comme ce faisceau a la même direction que l'oscillateur local, l'information recueillie porte sur la diffusion avant de la turbulence ($\vec{k} = \vec{O}$). Ce signal porte donc une information de fréquence proche de la porteuse. L'intensité de ce faisceau étant beaucoup plus faible que le faisceau principale, le signal qu'il engendre est faible. Néanmoins, quand on s'intéresse à des diffusion pour des angles relativement grand, pour lesquels le signal attendu est faible, ce signal secondaire peut alors avoir le même ordre de grandeur que la diffusion principale. Il faut alors filtrer une partie du signal autour de la fréquence de modulation.

Corrections électroniques

Le traitement électronique du signal est aussi à l'origine de biais sur le résultat.

On a vu que grâce à la démodulation, on pouvait retrouver les parties réelle et imaginaire de notre signal :

$$C(t) = \Re\{F_{\vec{k}}(t)\} \quad S(t) = \Im\{F_{\vec{k}}(t)\} \quad (1.36)$$

L'obtention de ce résultat dépend de la qualité de la séparation en quadrature de phase du signal oscillateur local et du bon appariement des amplis en bout de chaîne. Si ces conditions sont mal respectées, le résultat n'est plus valable : Il apparaît un déphasage et un écart d'amplitude parasite entre les deux voies.

Le signal reconstruit a alors la forme :

$$C'(t) = \Re\{F_{\vec{k}}(t)\} \quad S'(t) = (1 + a_o)\Im\{F_{\vec{k}}(t)e^{i\phi_o}\} \quad (1.37)$$

Cependant, il peut être corrigé numériquement : On envoie un signal idéal simple dans l'électronique, $F_{\vec{k}}(t) = e^{i\omega_o t}$. L'étude des signaux en sortie, $C'(t)$ et $S'(t)$ résultant, permet de retrouver les erreurs a_o et ϕ_o . Une correction numérique permet alors de

retrouver $C(t)$ et $S(t)$ à partir de $C'(t)$ et $S'(t)$. Les erreurs résiduelles a_o et ϕ_o , après correction, sont de l'ordre de 2 à 3 %.

1.3 La turbulence dans les gaz et les plasmas

Le milieu étudié par la suite, sera soit un écoulement aérodynamique turbulent, soit un plasma.

On profite du caractère turbulent car le dispositif n'est pas assez sensible pour pouvoir observer les fluctuations de densité de l'équilibre thermodynamique. Ces variations sont en effet de plusieurs ordres de grandeurs en dessous des fluctuations turbulentes.

Néanmoins, il n'est pas nécessaire, comme l'a fait remarquer G.B. Benedek [9], que l'écoulement soit compressible, stricto sensu. L'hypothèse d'incompressibilité utilisé en turbulence n'est qu'une approximation. Elle se justifie pour l'analyse par les équations de Navier-Stokes, mais les fluctuations de densité sont toujours suffisantes, pour observer l'écoulement par diffusion collective.

Pour les plasmas, la densité est beaucoup plus faible, mais la diffusion est alors une diffusion Thomson, dont la section efficace est bien plus grande que la section efficace Rayleigh en infra-rouge.

Chapitre 2

Phase du signal et vitesse de convection

On connaît bien l'effet Doppler, phénomène couplé d'une onde et d'un corps en mouvement. La transcription de cet effet à la diffusion de la lumière par le gaz en mouvement non uniforme, est beaucoup moins familière. C'est le sujet de ce chapitre.

La première manifestation d'effets analogues à l'effet Doppler, dans les gaz se traduit par le spectre fréquentiel : On étudiera donc dans quelle mesure ce spectre reproduit la distribution des vitesses dans le fluide.

On peut obtenir beaucoup plus d'informations à partir de la dérivée de la phase du signal. On verra dans quelle limite cette dérivée peut être liée à la vitesse de convection de l'écoulement. Si c'est le cas, on connaît aussi l'évolution temporelle de la vitesse.

Dans les cas où ces deux propriétés s'appliquent, on voit alors que la distribution des vitesses se retrouve, à la fois par le spectre du signal DCL et par l'histogramme de la dérivée de la phase de ce même signal. On étudiera quels sont les signaux pour lesquels ces deux courbes ont la même forme.

La connaissance de l'évolution temporelle de la vitesse permet diverses applications nouvelles, comme le calcul du spectre de la vitesse, et une mesure de coefficient de diffusion turbulent, que l'on va présenter.

La qualification de ces concepts sera faite à partir de mesures DCL dans une couche de mélange supersonique.

2.1 Moyens expérimentaux

On a choisi d'étudier une couche de mélange supersonique plane. Ce milieu, en effet, présente deux avantages : D'une part, les taux de turbulence y sont élevés, ce qui permet d'attendre des variances de vitesse assez large et facilement observables. D'autre part, les caractéristiques statistiques du champ turbulent y sont bidimensionnelles, et, en particulier, elles sont uniformes dans la direction qui traverse la couche (perpendiculairement à l'écoulement et au gradient de vitesse). C'est dans cette direction que seront orientés les faisceaux optiques. Ainsi le défaut de localisation de l'observation DCL est compensé en partie par le fait que dans la région observée, la statistique est

uniforme. De plus la couche de mélange est un objet suffisamment étudié, pour pouvoir se référer à des résultats bien établis.

Les collaborations qui ont été développées au laboratoire, ont permis d'avoir accès à deux souffleries différentes, l'une située à Poitiers, l'autre à Marseille. La comparaison des résultats des deux souffleries est d'autant plus intéressante, qu'elles ont des caractéristiques techniques propres très différentes.

2.1.1 La soufflerie S150 du CEAT de Poitiers

Le schéma de cette soufflerie est donné en figure 2.1 [22, 23].

Cette soufflerie fonctionne par rafales d'une durée de l'ordre de la dizaine de secondes. Elle est alimentée par une arrivée d'air sous pression (entre 4 et 12 *bar*, à des températures de l'ordre de 260 à 270 °K). L'écoulement supérieur traverse une chambre de tranquillisation, puis passe par une tuyère supersonique. Le flux subsonique est obtenu en prélevant une partie de l'air sous pression. Le débit est contrôlé par un col sonique ajustable. Il est dirigé vers la partie basse de la couche, où il traverse lui-aussi une chambre de tranquillisation. La plaque séparatrice est assez longue pour que les couches limites, au niveau du bord de fuite aient une épaisseur suffisante.

La veine d'essai a pour section $150 \times 150 \text{ mm}^2$. La plaque séparatrice est située à mi-hauteur.

Les conditions d'écoulement seront repérées par leurs Mach convectifs, Mc . Cette notion a été introduite par D. Papamoschou [20, 21] pour décrire la compressibilité d'une couche de mélange. Elle est définie par :

$$Mc = \frac{U_{sup} - U_{sub}}{C_{sup} + C_{sub}} \quad (2.1)$$

U_{sup} et U_{sub} sont les vitesses moyennes des écoulements extérieurs, respectivement supersoniques et subsoniques. C_{sup} et C_{sub} sont les célérités du son dans les mêmes couches.

Plusieurs conditions d'écoulement différentes ont été étudiées :

Mc	0,525	0,64	1,05
M_{sup}	1,48	2,03	3,2
M_{sub}	0,28	0,41	0,2
n_{sup}/n_{sub}	0,7	0,57	0,35

La zone de mesure est située 240 *mm* en aval du bord de fuite. Le volume de mesure est disposé transversalement à la couche de mélange. Les observations ont été effectuées à différentes hauteurs de la couche.

Les nombres de Reynolds de l'écoulement, au point de mesure, sont de l'ordre de 10 millions.

2.1.2 La soufflerie S7 de l'IRPHE de Marseille

Le schéma descriptif de cette soufflerie est donné en figure 2.2 [24].

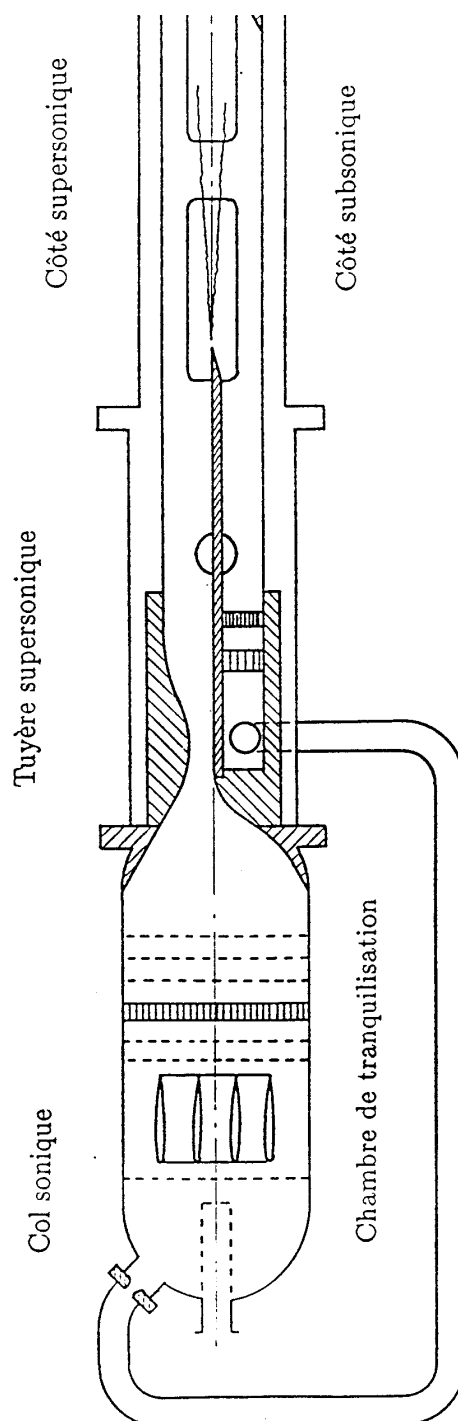


FIG. 2.1 – Soufflerie S150 du CEAT de Poitiers : De l'air sous pression arrive par la gauche. Il est séparé en deux : une partie va s'écouler dans la moitié haute pour former la couche supersonique. Une autre partie est prélevée par une canalisation, pour former un écoulement basse vitesse, dans la moitié inférieure de la veine de mesure

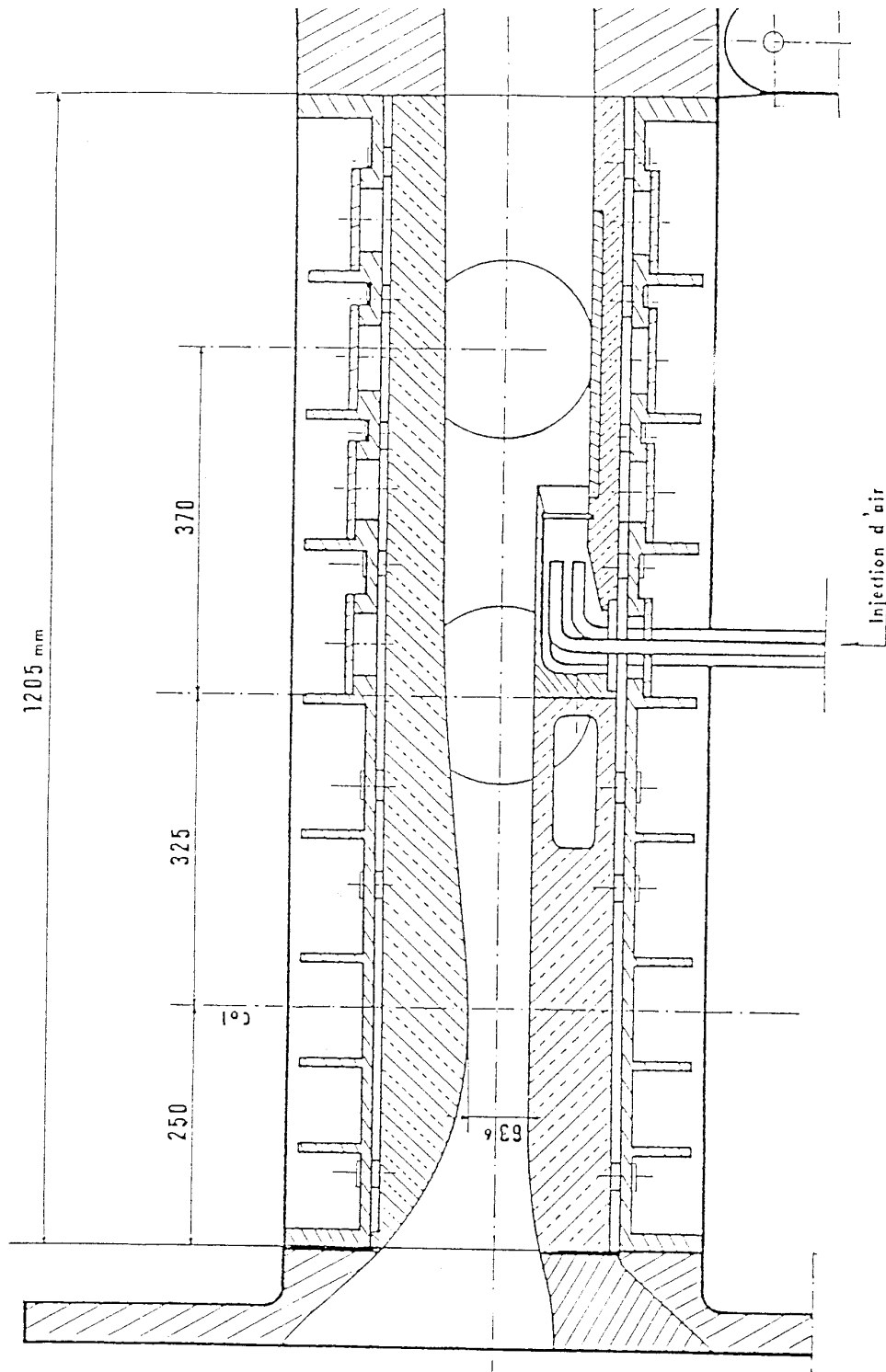


FIG. 2.2 – Soufflerie S7 : l'écoulement supersonique est situé au dessus. Après le passage par la chambre de tranquillisation (non représentée), il suit la tuyère supersonique. L'écoulement subsonique est obtenu par simple aspiration à travers une plaque de bronze poreux.

À la différence de la soufflerie de Poitiers, celle de Marseille est en circuit fermée, et son fonctionnement est continu.

La pression génératrice est de 0,6 bar pour l'écoulement supersonique. La température est la température ambiante. La dérive de cette température est faible au cours du temps. Le flux subsonique est obtenu par simple aspiration de l'air ambiant, à pression atmosphérique.

La chambre de tranquillisation pour l'écoulement supérieur a été particulièrement soignée, pour atteindre des taux de turbulence résiduels très faible. Le rapport de l'écart type sur la moyenne de la vitesse est de l'ordre de 0,2 %. En revanche, comme le montre la figure 2.2, le manque de place a interdit la mise en place d'une chambre de tranquillisation pour l'écoulement subsonique. Une plaque de bronze poreux permet néanmoins de limiter les fluctuations.

La veine d'essai a sensiblement la même section que celle de Poitiers : $H \times L$: $150 \times 120 \text{ mm}^2$.

Les mesures ont été effectuées dans les conditions d'écoulement suivantes :

$$\begin{array}{ll} M_c & 0,62 \\ M_{sup} & 1,79 \\ M_{sub} & 0,30 \\ n_{sup}/n_{sub} & 1,6 \end{array}$$

La zone de mesure est située à 130 mm en aval du bord de fuite. On a utilisé le même banc optique DCL, positionné de la même manière sur les deux souffleries.

2.1.3 Le banc de mesure DFL01

Le banc optique de mesure par diffusion collective, "DFL01" (pour Densitométrie de Fourier par Laser), [25] a été spécialement construit pour l'application aux écoulements supersoniques. Il a été conçu pour s'adapter facilement autour des installations, avec possibilité de réglage de la hauteur du volume de mesure, comme de pouvoir changer le module et l'orientation du vecteur d'onde d'analyse.

Les caractéristiques techniques ont été exposées dans le chapitre d'introduction, avec les précisions suivantes.

Les angles de diffusion accessibles vont de $\theta = 8$ à 32 mrad . Les longueurs d'onde associées sont 1,3 et 0,3 mm.

Le rayon du faisceau au niveau de la zone de mesure est 2,4 mm. La localisation de la mesure est alors assez limitée, mais elle est mieux résolue en nombre d'onde : La résolution absolue du profil du volume de mesure, Δk , est $0,94 \text{ mm}^{-1}$ (voir l'équation 1.35). La résolution relative en vecteur d'onde, $\Delta k/k$, varie alors de 5 % (pour $\lambda = 0,3 \text{ mm}$) à 20 % (pour $\lambda = 1,3 \text{ mm}$).

La longueur du volume d'observation varie alors de 150 mm à 600 mm. Dans l'ensemble des mesures que nous présenterons par la suite, la longueur de la zone d'observation est plus grande que la largeur de la veine.

2.2 Spectre du signal DCL

Le spectre fréquentiel est l'analyse la plus naturelle que l'on puisse faire du signal DCL. L'effet Doppler permet d'envisager une relation entre le spectre et les caractéristiques du mouvement observé.

Une première étude a porté sur la question de savoir quelle propriété du mouvement est observée. Cette étude dépend, d'une part, du temps de corrélation du signal et d'autre part de la longueur de corrélation de la vitesse. L'application de cette étude à la couche de mélange supersonique a permis d'en vérifier les prévisions.

2.2.1 Vitesse de convection de l'écoulement

Cette étude a été développée par D. Grésillon et B. Cabrit [12, 26].

Corrélations du signal

Pour cette étude, il est plus aisé de s'intéresser à la corrélation du signal $C_F(\tau)$, plutôt qu'au spectre.

$$C_F(\tau) = \langle F_{\vec{k}}^{o*}(t) F_{\vec{k}}^o(t + \tau) \rangle \quad (2.2)$$

En utilisant l'expression du signal $F_{\vec{k}}^o(t)$, en fonction du volume (équation 1.11) :

$$C_F(\tau) = \langle \int_V n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \int_V n(\vec{r}', t + \tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' \rangle \quad (2.3)$$

Mouvement du fluide

Tout d'abord, on utilise la propriété de conservation de la masse : C'est à dire que l'intégration sur le volume de la densité est équivalente à une somme sur les particules. Les variations de densité entre les temps t et $t + \tau$ peuvent être alors décrites à travers les déplacements de ces particules.

$$\int_V n(\vec{r}', t + \tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' = \sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t+\tau)} = \sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\Delta}_j(t, t+\tau)} \quad (2.4)$$

où $\vec{\Delta}_j(t, t + \tau)$ est le déplacement de la particule indiquée j : $\vec{r}_j(t + \tau) - \vec{r}_j(t)$. Si on ramène ce résultat à un fluide continu, il résulte :

$$\int_V n(\vec{r}', t + \tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' = \int_V n(\vec{r}^{\vec{v}}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}^{\vec{v}}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\Delta}_{\vec{r}^{\vec{v}}, t, t+\tau}} d^3\vec{r}^{\vec{v}} \quad (2.5)$$

où, cette fois-ci $\vec{\Delta}_{\vec{r}^{\vec{v}}, t, t+\tau}$ est le déplacement sur un temps τ , de l'élément de fluide situé initialement en $\vec{r}^{\vec{v}}$ à l'instant t : $\vec{r}^{\vec{v}}(t + \tau) - \vec{r}^{\vec{v}}(t)$.

Cette transformation utilise une hypothèse sur l'écoulement observé : Le temps de corrélation de la fonction C_F , τ_{C_F} est suffisamment court pour que, dans cet intervalle de temps, le volume d'intégration varie peu.

La corrélation s'écrit alors :

$$C_F(\tau) = \left\langle \int_V n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \int_V n(\vec{r}', t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\Delta}_{\vec{r}, t, t+\tau}} d^3\vec{r}' \right\rangle \quad (2.6)$$

On utilise ensuite l'hypothèse de Taylor : Sur des échelles de temps courts, ici celles inférieures au temps de corrélation du signal, le mouvement principal est la convection du fluide à la vitesse, \vec{v}_o , vitesse moyenne sur le volume observé :

$$\vec{\Delta}_{\vec{r}, t, t+\tau} = \vec{v}_o \tau \quad (2.7)$$

Cette hypothèse néglige l'effet de variations spatiales de la vitesse. Elle se justifie si ces variations sont faibles par rapport à la vitesse moyenne sur le volume.

La corrélation est alors fonction de la densité et de cette vitesse :

$$C_F(\tau) = \left\langle \left| \int_V n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \right|^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}_o \tau} \right\rangle \quad (2.8)$$

Hypothèse d'indépendance

Il faut alors poser une hypothèse restrictive : On suppose que le module au carré du signal $\left| \int_V n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \right|^2$ est statistiquement indépendant de la phase $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}_o \tau}$.

D'un point de vue des variables aérodynamiques, cette indépendance entre la vitesse de convection \vec{v}_o et les fluctuations de densité $n(\vec{r}, t)$ s'oppose à l'analogie forte de Reynolds, qui suppose une corrélation complète entre les valeurs au même point et au même instant du champ de vitesse, $\vec{v}(\vec{r}, t)$, et du champ de densité $n(\vec{r}, t)$. Mais ici ces variables n'apparaissent pas directement : D'une part, la densité n'intervient que par le module de la transformée de Fourier (qui est aussi le module du signal DCL). D'autre part, la vitesse n'intervient que par sa valeur moyenne, et à travers un terme de phase.

On verra plus loin, avec l'observation séparée du module et de la phase du signal DCL (section 2.5.1), une réponse sur la pertinence de cette hypothèse d'indépendance.

On peut alors séparer les deux facteurs intervenants :

$$C_F(\tau) = \left\langle \left| \int_V n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \right|^2 \right\rangle \langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}_o \tau} \rangle \quad (2.9)$$

Le premier facteur ne dépend pas de τ . C'est en fait le facteur de forme du milieu, $S(\vec{k})$:

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{n_o V} \left\langle \left| \int_V n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \right|^2 \right\rangle \quad (2.10)$$

La forme du spectre n'est donc fonction que du second facteur.

$$C_F(\tau) = n_o V S(\vec{k}) \langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}_o \tau} \rangle \quad (2.11)$$

Distribution des vitesses

Le facteur de phase peut se réécrire :

$$\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}_o \tau} \rangle = \int d^3\vec{v}_o e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}_o \tau} P_{\vec{v}_o}(\vec{v}_o) \quad (2.12)$$

où $P_{\vec{v}_o}$ est la distribution de probabilité de la vitesse moyenne sur le volume. Il s'agit donc de la fonction caractéristique de cette loi de probabilité.

Si on utilise cette expression pour le calcul du spectre $S_F(\omega)$, transformée de Fourier des corrélations, on obtient :

$$S_F(\omega) = \int C_F(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \pi n_o V S(\vec{k}) \int d^3 v_o \delta(\omega + \vec{v}_o \cdot \vec{k}) P_{\vec{v}_o}(\vec{v}_o) \quad (2.13)$$

Le spectre est donc la projection de la distribution de probabilité de la vitesse suivant l'axe du vecteur de diffusion \vec{k} :

$$S_F(\omega) \propto P_{v_{o\parallel}}(v = -\frac{\omega}{k}) \quad (2.14)$$

$P_{v_{o\parallel}}$ est la distribution à une dimension de la vitesse, celle où les probabilités de toutes les vitesses ayant la même projection sur le vecteur d'onde de diffusion sont additionnées.

$$P_{v_{o\parallel}}(v_{o\parallel}) = \int d^2 v_{\perp} P_{\vec{v}_o}(v_{o\parallel} \frac{\vec{k}}{k} + v_{\perp}) \quad (2.15)$$

2.2.2 Effet de volume

Le fait que le volume soit très allongé en travers de l'écoulement, induit que le raisonnement qui précède peut paraître très limité. Cet obstacle n'est pas insurmontable.

Le volume V est partagé dans sa longueur, en volumes V_n plus petits :

$$V = \sum_n V_n \quad (2.16)$$

Le signal DCL propre à chaque volume est :

$$F_{\vec{k}}^{(n)}(t) = \int_{V_n} n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \quad (2.17)$$

Le signal sur le volume V , est la somme des réponses sur chaque volume V_n :

$$F_{\vec{k}}^o(t) = \int_V n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} = \sum_n \int_{V_n} n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} = \sum_n F_{\vec{k}}^{(n)}(t) \quad (2.18)$$

On suppose alors que les signaux pour deux volumes V_n distincts, sont décorrélés (pas de corrélation à grande échelle, transversalement à la couche de mélange). La corrélation du signal sur l'ensemble du volume V donne alors :

$$\begin{aligned} C_F(\tau) &= \langle F_{\vec{k}}^{o*}(t) F_{\vec{k}}^o(t + \tau) \rangle \\ &= \sum_m \sum_n \langle F_{\vec{k}}^{(m)*}(t) F_{\vec{k}}^{(n)}(t + \tau) \rangle \\ &= \sum_n \langle F_{\vec{k}}^{(n)*}(t) F_{\vec{k}}^{(n)}(t + \tau) \rangle \\ &= \sum_n C_{F^{(n)}}(\tau) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour le spectre sur V , on retrouve donc la somme des spectres sur chaque volume V_n .

$$S_F(\omega) = \sum_n S_{F^{(n)}}(\omega) \quad (2.20)$$

Donc si les propriétés spectrales sont les mêmes sur chaque volume V_n , ces propriétés se retrouvent dans le spectre global, sur V .

Dans notre cas, le spectre est lié essentiellement à la distribution des vitesses. Donc si cette distribution est la même sur toute la longueur du volume V , le spectre sur chaque volume V_n est le même. Le spectre du signal sur V a alors cette même forme, et représente donc cette même distribution de vitesse.

2.2.3 Propagation des ondes sonores

L'analyse qui précède utilise donc l'hypothèse que les fluctuations de densité sont convectées par la vitesse du fluide. C'est le phénomène principal qui est présent dans l'écoulement. Néanmoins, il peut apparaître, dans des proportions moindres, des fluctuations associées à d'autres modes de fluctuations.

Comme l'ont décrite B.T. Chu et L.S.J. Kovásznyai, [28], (ou cf. A.S. Monin & A.M. Yaglom [29], J.P. Boon & S. Yip [30]), la linéarisation des équations de Navier Stokes, fait apparaître trois types de modes de fluctuations dans l'écoulement :

- Un mode de vorticité, ne faisant intervenir que la partie rotationnelle du champ de vitesse.

Un mode entropique, qui inclut la partie uniquement dissipative de l'entropie et des fluctuations de densité et de vitesse associées.

- Un mode acoustique, qui diffère du précédent par le fait qu'il est à la fois propagatif et dissipatif. Il décrit les ondes sonores. Des fluctuations de pression, d'entropie, de vitesse et de densité y sont associées.

Les modes entropique et de vorticité, sont non propagatifs dans le référentiel du fluide.

Cette décomposition ne peut être utilis e qu'avec prudence, pour la turbulence, où les couplages non-linéaires sont très importants. Cependant si l'écoulement n'est pas trop compressible, le couplage entre les mode acoustique et les deux autres n'est pas très fort.

Notre appareil de mesure ne permet pas d'observer directement le mode de vorticité, car ce mode n'a pas de fluctuations de densité associées. La diffusion collective n'observe que les deux autres modes.

L'illustration de l'existence de ces modes dans la turbulence, est fournie par l'observation du spectre DCL. On voit en effet plusieurs raies s par es dans le spectre. Chacune de ces raies correspond à des modes différents, qui n'ont pas la même vitesse : Le mode entropique se déplace à la vitesse de l'écoulement. Les modes acoustiques, propagatifs, ont une vitesse d cal e de la célérité du son dans le milieu, en plus ou en moins, par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement.

Le spectre du signal DCL peut donc faire apparaître jusqu'à trois raies, une raie entropique à la vitesse $\vec{k} \cdot \vec{v}_o$, et deux acoustiques à $\vec{k} \cdot \vec{v}_o + C$ et $\vec{k} \cdot \vec{v}_o - C$.

Les hypothèses utilis es au paragraphe précédent se rapportent au mode convectif entropique.

2.2.4 Spectres du signal dans la couche de mélange

Pour vérifier si l'hypothèse de similitude entre le spectre DCL et l'histogramme projeté de la vitesse, des mesures ont été effectuées par Anémométrie Doppler Laser (ADL) [31]. En effet, cette mesure a la même particularité de projeter aussi les vitesses sur un axe de diffusion.

Cette mesure utilise la diffusion d'une lumière laser par de fines particules (taille de l'ordre du micron) ensemencées dans l'écoulement. Leur densité est très faible. On n'observe alors qu'une seule particule simultanément dans le volume de mesure. L'effet Doppler sur la lumière diffusée par cette particule permet de connaître la projection de sa vitesse sur l'axe du vecteur d'onde de diffusion. En observant le passage d'un grand nombre de particules, on peut reconstituer la statistique de cette vitesse.

Ces comparaisons donnent un excellent accord, pour les mesures effectuées à l'intérieur de la couche (cf. figure 2.3). L'axe horizontal est directement établi en terme de vitesse. Le Mach convectif de ces mesures est 0,525.

Pour toutes les positions observées, l'ajustement entre les courbes issues de la mesure ADL, et la raie correspondant au mode entropique des spectres DCL, est excellent.

En revanche, en dehors de la couche, la correspondance n'est plus du tout valable : Les spectres DCL ont une raie convectée qui a la bonne valeur moyenne, mais la largeur est beaucoup plus importante que celle prévue par la mesure ADL (cf. figure 2.4).

Cet élargissement s'explique, pour une faible part par un effet d'appareil : la résolution non nulle en nombre d'onde. Le spectre mesuré est la convolution entre le spectre correspondant à un vecteur d'onde déterminé, et la distribution gaussienne des nombres d'ondes. Une largeur, toujours la même, s'ajoute alors à celle prévue. Cet effet intervient à toutes les positions de la couche, mais est proportionnellement plus sensible pour celles où la largeur prévue est plus faible, soit à l'extérieur de la couche. Mais cette explication ne suffit pas.

Les résultats obtenus à l'intérieur de la couche prouvent que l'analyse développée ci-dessus est valable. Néanmoins les conditions d'écoulement qui la justifie ne sont pas encore correctement établies.

Une étude du spectre du signal a aussi été entreprise sur la soufflerie de Marseille, mais sans comparaison systématique directe avec les mesures ADL.

La différence première entre les deux souffleries, pour la diffusion collective, est le niveau de signal : En effet, il existe un rapport 10 entre les densités des deux souffleries, pour des taux relatifs de fluctuation de la densité de même ordre. Les puissances spectrales diffèrent donc de 20 *dB* entre deux mesures à des longueurs d'ondes comparables. La dynamique reste néanmoins largement suffisante.

L'analyse de ces mesures a confirmé les remarques faites pour l'autre soufflerie : Les largeurs des spectres, pour les mesures extérieur à la couches, sont surestimées. Celles à l'intérieur de la couche sont correctes.

2.3 Vitesse instantanée de convection

Dans le cas où le spectre est semblable à la distribution de vitesse ADL, on peut être tenté de penser que le correspondance entre la vitesse de convection et la fréquence

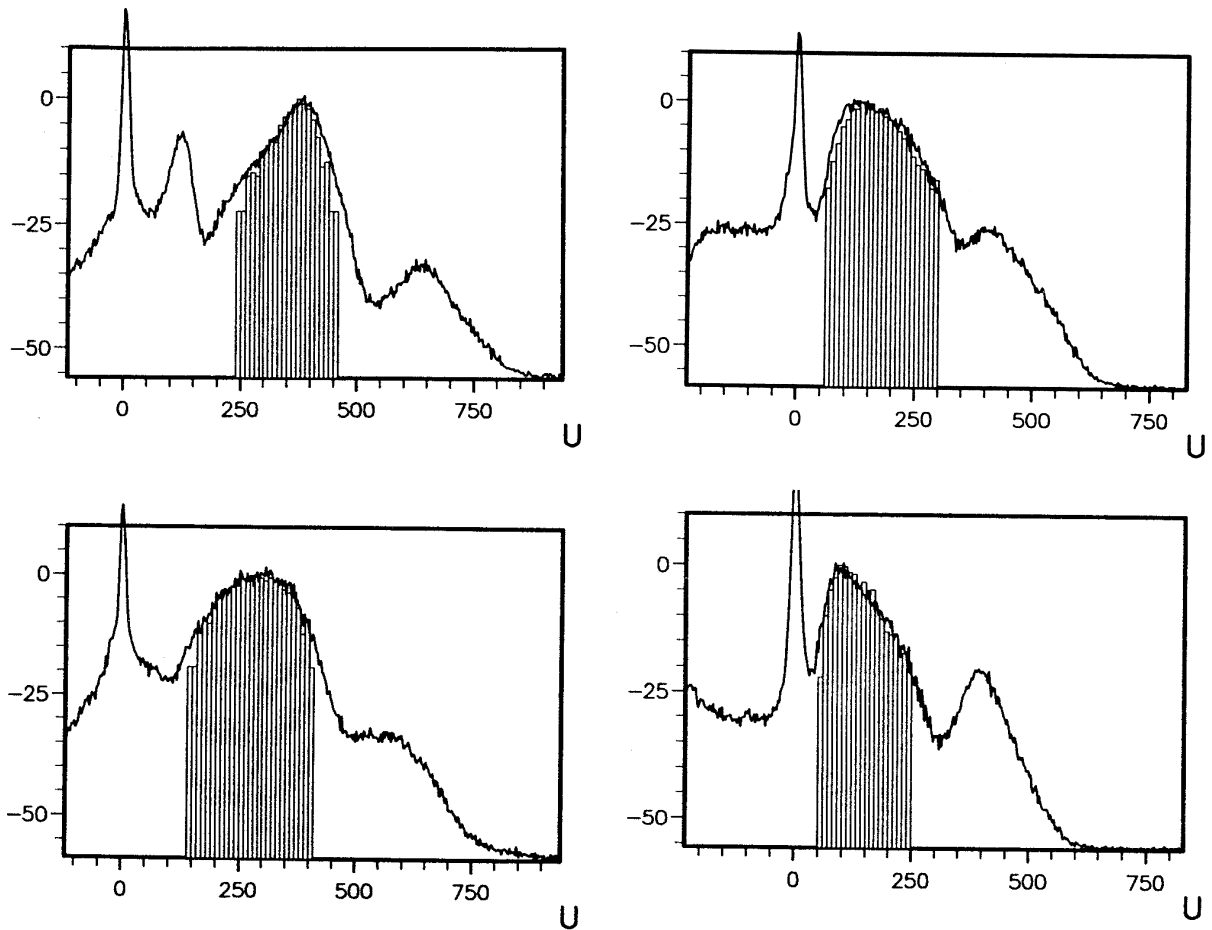


FIG. 2.3 – Distribution des vitesses suivant l'écoulement : Spectre du signal de la diffusion collective (trait continu), comparé aux mesures ADL (Histogramme). Quatre positions dans la couche sont montrées : classées des positions hautes vers les positions basses de la couche, où la distribution est gaussienne. La vitesse est en m/s , l'échelle en ordonnée est logarithmique. l'unité est le décibel. La normalisation des distributions est arbitraire. Pour les trois positions les plus hautes dans la couche, l'ensemencement de l'écoulement pour la mesure ADL est fait de particules de silice (SiO_2), dans l'écoulement supersonique, en amont du bord de fuite. Pour la dernière position, l'ensemencement a été fait dans l'écoulement subsonique, avec des gouttelettes d'huile. La taille des particules dans les deux cas est de l'ordre du micron.

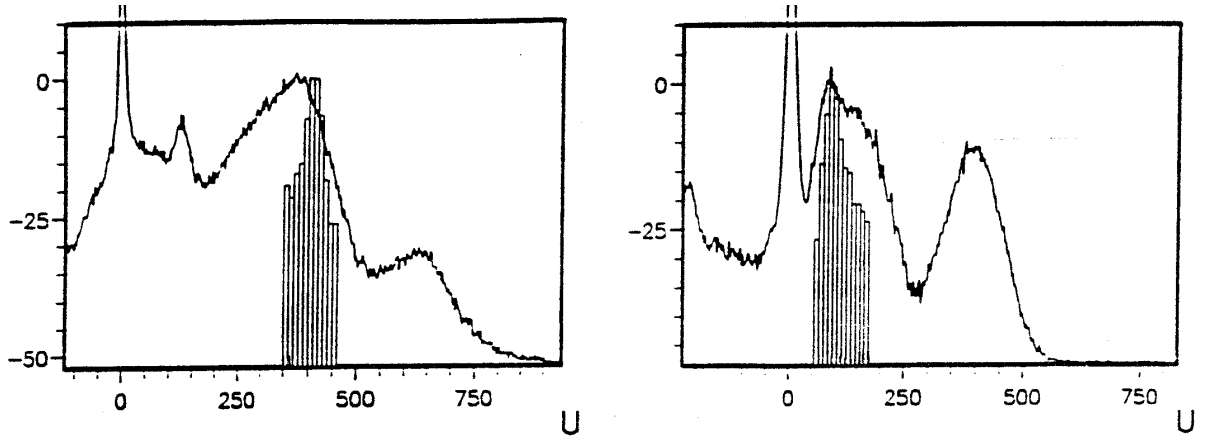


FIG. 2.4 – Graphes de même nature que la figure 2.3, mais pour des positions extérieures à la couche. L'une, dans l'écoulement supersonique (à gauche), l'autre, dans l'écoulement subsonique (à droite). L'ensemencement est fait dans l'écoulement supersonique (silice) à gauche, et dans l'écoulement subsonique (huile) à droite.

du signal peut s'appliquer de manière instantanée, par la dérivée de la phase du signal.

2.3.1 Phase et module du signal DCL et vitesse de convection

Pour vérifier cette interprétation, on va chercher à exprimer la dérivée du signal, en fonction des paramètres de l'écoulement.

Dérivée du signal

La forme que l'on choisit pour l'expression du signal est celle qui tient compte du profil de la zone de mesure (équation 1.32).

$$\frac{d}{dt}F_{\vec{k}}(t) = \int \frac{\partial}{\partial t}n(\vec{r}, t)u(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r} \quad (2.21)$$

Dans la suite, on omettra de mentionner les variables appliquées à n , \vec{v} et u (\vec{r} et t), pour simplifier les expressions.

La conservation de la masse ($\frac{\partial}{\partial t}n = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{v})$) permet d'introduire la vitesse :

$$\frac{d}{dt}F_{\vec{k}}(t) = - \int \vec{\nabla}\cdot(n\vec{v})ue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r} \quad (2.22)$$

Comme pour l'étude du spectre, on utilise l'hypothèse de Taylor. On néglige les variations spatiales de la vitesse. L'origine principale des variations du signal est la convection.

$$\vec{\nabla}\cdot(n\vec{v}) = \vec{v}_o\cdot\vec{\nabla}n \quad (2.23)$$

où \vec{v}_o est la vitesse de convection, vitesse moyenne sur le volume de mesure. Ceci se traduit pour la dérivée du signal :

$$\frac{d}{dt}F_{\vec{k}}(t) = -\vec{v}_o \cdot \int \vec{\nabla}(n)ue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r} \quad (2.24)$$

On voudrait alors intégrer par partie le résultat précédent, de manière à déplacer la divergence ($\vec{\nabla}$), de la densité $n(\vec{r}, t)$ sur le facteur $u(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

L'intégration par parties n'ayant pas de règles pour les intégrales impropres, il faut se ramener à un calcul sur une sphère finie, dont on fera tendre le rayon vers l'infini.

$$\int_{Sph(\vec{0}, R)} \vec{\nabla}(n)ue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r} = \int_{\delta Sph(\vec{0}, R)} nue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^2\vec{r} - \int_{Sph(\vec{0}, R)} n\vec{\nabla}(ue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}})d^3\vec{r} \quad (2.25)$$

Le terme tout intégré portant sur la surface de la sphère va tendre vers 0, quand R tendra vers l'infini. Car, même si la surface d'intégration de la sphère augmente avec son rayon, la décroissance exponentielle due au profil $u(\vec{r})$ prédomine. Il ne va donc rester que le second terme de l'intégration par parties, celui où la dérivation a été transposée sur l'autre facteur. Sa valeur limite, quand on fait tendre le rayon de la sphère vers l'infini, est :

$$\frac{d}{dt}F_{\vec{k}}(t) = \vec{v}_o \cdot \int n\vec{\nabla}(ue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}})d^3\vec{r} \quad (2.26)$$

Le developpement du gradient fait apparaître deux termes :

$$\vec{\nabla}(ue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \vec{\nabla}(u)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + u\vec{\nabla}(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \vec{\nabla}(u)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - i\vec{k}ue^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.27)$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}F_{\vec{k}}(t) = \vec{v}_o \cdot \int ne^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}(u)d^3\vec{r} - i\vec{k}\cdot\vec{v}_o F_{\vec{k}}(t) \quad (2.28)$$

Si on avait utilisé comme forme pour le signal, celle écrite en fonction du volume de mesure V , le premier terme serait une intégrale de flux de surface ($\int \vec{\nabla}ud^3\vec{r}... = -\int_{\delta V} d^2\vec{s}...$). Ce premier terme exprime donc les variations du signal dues aux entrées-sorties de molécules du gaz dans la zone de mesure.

Le second terme est dû à l'effet Doppler avec la vitesse de convection moyenne \vec{v}_o , projetée sur le vecteur d'onde de diffusion, \vec{k} .

Phase et module

Pour séparer les effets sur la phase et le module, on applique la décomposition eikonale du signal, en module et phase :

$$F_{\vec{k}}(t) = \rho(t)e^{i\phi(t)} \quad (2.29)$$

La dérivée logarithmique de cette expression est :

$$\frac{1}{F_{\vec{k}}(t)} \frac{d}{dt}F_{\vec{k}}(t) = \frac{d}{dt} \ln(\rho) + i \frac{d}{dt} \phi \quad (2.30)$$

Par identification des parties réelle et imaginaire de cette équation et de l'équation 2.28, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \ln(\rho) = \Re \left\{ \frac{1}{F_{\vec{k}}(t)} \vec{v}_o \cdot \int n e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\nabla}(u) d^3 r \right\} \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \Im \left\{ \frac{1}{F_{\vec{k}}(t)} \vec{v}_o \cdot \int n e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\nabla}(u) d^3 r \right\} - \vec{k} \cdot \vec{v}_o \quad (2.32)$$

Le terme de flux apparaît donc dans les deux composantes, module et phase. En revanche, l'effet Doppler n'apparaît que dans la dérivée de la phase.

Il faut maintenant étudier les conditions pour lesquelles le terme de flux peut être séparé de l'effet Doppler. Pour cela, l'étude spectrale est utile, on l'effectuera plus loin.

Mais d'abord, la question du calcul numérique des dérivées est abordée.

2.3.2 Calcul numérique des dérivées

Le développement venant des équations 2.31 et 2.32 permet d'espérer obtenir la vitesse Doppler instantanée, à condition de disposer des dérivées temporelles du module et de la phase du signal DCL. On examine ici comment il est possible d'obtenir les valeurs numériques de ces dérivées.

Expression numérique

Le signal DCL est échantillonné sous la forme de deux signaux $C(t)$ et $S(t)$ (cf. équation 1.28) :

$$F_{\vec{k}}(t) = C(t) + i S(t) \quad (2.33)$$

La manière la plus simple d'exprimer la dérivée de la phase et du logarithme du module en fonction de C et S est la suivante :

$$\frac{d}{dt} \ln(\rho) = \frac{C \frac{d}{dt} C + S \frac{d}{dt} S}{C^2 + S^2} \quad (2.34)$$

et

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{C \frac{d}{dt} S - S \frac{d}{dt} C}{C^2 + S^2} \quad (2.35)$$

Cette écriture évite l'utilisation de l'arctangente, qui introduirait un bruit de calcul numérique très important.

Néanmoins, la forme choisie pose quand même problème. On va voir que le calcul numérique de ces dérivées peut faire apparaître une erreur systématique.

Pour calculer numériquement une dérivée, on utilise des différences finies :

$$\frac{d}{dt} C(t)_{num} = \frac{C(t + t_a) - C(t - t_a)}{2t_a} \quad (2.36)$$

où t_a est la période d'acquisition du signal.

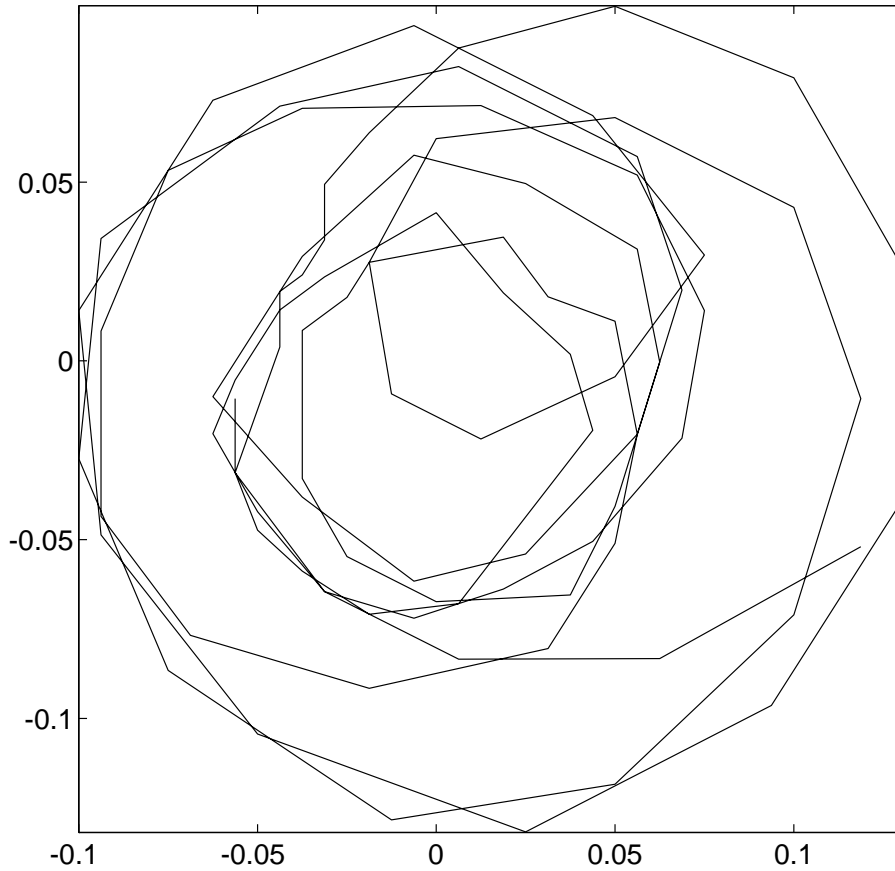


FIG. 2.5 – Représentation du signal complexe DCL en fonction du temps, dans le plan complexe. Les unités sont arbitraires. On remarque que l'évolution principale traduit une rotation de phase du signal. La durée affichée est de l'ordre d'une dizaine de microsecondes.

Les signaux que l'on acquiert, ont une forme déterminée. La figure 2.5 représente l'évolution dans le plan complexe du signal au cours du temps. On observe que la principale évolution dans le temps est due à une rotation de phase.

Le signal peut alors être approché au premier ordre, par une pulsation ω_s et une dérivée logarithmique du module a_s , constantes, sur des temps de l'ordre de t_a :

$$F_{\vec{k}}(t) = e^{(a_s + i\omega_s)t} \quad (2.37)$$

On applique le calcul par différence finie à la dérivée logarithmique de ce signal :

$$\frac{1}{F_{\vec{k}}(t)} \frac{d}{dt} F_{\vec{k}}(t)_{num} = \frac{F_{\vec{k}}(t + t_a) - F_{\vec{k}}(t - t_a)}{2t_a F_{\vec{k}}(t)} = \frac{e^{(a_s + i\omega_s)(t+t_a)} - e^{(a_s + i\omega_s)(t-t_a)}}{2t_a e^{(a_s + i\omega_s)t}} \quad (2.38)$$

Cette expression se simplifie pour donner :

$$\frac{1}{F_{\vec{k}}(t)} \frac{d}{dt} F_{\vec{k}}(t)_{num} = \frac{e^{(a_s + i\omega_s)t_a} - e^{-(a_s + i\omega_s)t_a}}{2t_a} = \frac{\sinh((a_s + i\omega_s)t_a)}{t_a} \quad (2.39)$$

les valeurs numériques des dérivées du logarithme du module et de la phase, respectivement notées a_{num} et ω_{num} , calculées par les formules (2.34 et 2.35), sont les parties réelle et imaginaire du résultat qui précède :

$$a_{num} + i\omega_{num} = \frac{1}{F_{\vec{k}}(t)} \frac{d}{dt} F_{\vec{k}}(t)_{num} = \frac{\sinh((a_s + i\omega_s)t_a)}{t_a} \quad (2.40)$$

Donc pour retrouver les valeurs "théoriques" à partir de celles calculées, il faut inverser la transformation précédente :

$$a_s + i\omega_s = \frac{\operatorname{argsinh}((a_{num} + i\omega_{num})t_a)}{t_a} \quad (2.41)$$

On appliquera alors systématiquement cette formule pour corriger les valeurs numériques brutes.

Pour avoir un ordre d'idée de la correction, on suppose que le terme dominant est celui de la dérivée de la phase, et on limite le développement au premier ordre non nul :

$$\omega_s = \omega_{num} \left(1 + \frac{1}{6} t_a^2 \omega_{num}^2\right) \quad (2.42)$$

La valeur numérique sous-évalue donc le résultat. L'erreur est de l'ordre de 6 % dans le cas où la fréquence d'acquisition $1/t_a$ est dix fois supérieure à celle de rotation du signal $\omega_s/2\pi$.

2.3.3 Spectre de la vitesse de convection

Élimination du terme de flux

Le terme de flux qui apparait dans la dérivée de la phase (équation 2.32), se rapproche beaucoup de l'expression de la dérivée logarithmique du module du signal (équation 2.31).

Il faut alors faire deux hypothèses, pour dissocier les deux effets sur la phase :

(1) On suppose que le terme de flux et la vitesse Doppler sont décorrélés. Cette hypothèse est voisine de celle qui a été posée dans l'analyse du spectre du signal DCL, sur les relations entre les fluctuations de densité, $n(\vec{k}, t)$ et la vitesse Doppler, $\vec{v}_o(t)$. Les précautions à prendre sont donc les mêmes. On verra plus loin (section 2.3.5) une justification de cette hypothèse.

(2) On suppose que les spectres des parties réelle et imaginaire du terme de flux, apparaissant dans chacune des deux dérivées du signal, sont identiques. Cette hypothèse se justifie par le fait que la phase de la transformée de Fourier est complètement aléatoire.

L'expression des spectres est alors, en utilisant les équations 2.31 and 2.32 :

$$Sp\left[\frac{d}{dt}\ln(\rho)\right] = Sp\left[\Re\left\{-\frac{1}{F_k(t)}\vec{v}_o \cdot \int_{\delta V} ne^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}(u)d^3\vec{r}\right\}\right] \quad (2.43)$$

$$Sp\left[\frac{d}{dt}\phi\right] = Sp\left[\Im\left\{-\frac{1}{F_k(t)}\vec{v}_o \cdot \int_{\delta V} ne^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}(u)d^3\vec{r}\right\}\right] + Sp[\vec{k}\cdot\vec{v}_o] \quad (2.44)$$

En soustrayant l'expression 2.43 de 2.44, il résulte :

$$Sp[\vec{k}\cdot\vec{v}_o] = Sp\left[\frac{d}{dt}\phi\right] - Sp\left[\frac{d}{dt}\ln(\rho)\right] \quad (2.45)$$

Il est ainsi possible de déterminer le spectre malgré l'existence dans la dérivée du signal DCL d'un terme de flux.

Application expérimentale

La figure 2.6 montre les spectres de la dérivée de la phase et du logarithme du module, obtenus par les signaux DCL au centre de la couche de mélange de la soufflerie de Poitiers, pour un Mach convectif de 1,05.

Cette figure apporte une première justification des hypothèses posées : Pour que la différence entre ces deux spectres soit le spectre de la vitesse (équation 2.45), il est nécessaire que le spectre de la dérivée de la phase soit toujours supérieur à celui pour du module. La figure montre que c'est le cas, si ce n'est dans le bruit.

La figure 2.7 représente la différence entre les deux spectres de la figure précédente, qui par l'équation 2.45 coïncide avec le spectre fréquentiel de la vitesse moyenne sur le volume observé.

Évolution à travers la couche de mélange

Il est intéressant de comparer le spectre de vitesse à celui que l'on pourrait obtenir avec d'autres diagnostics. Cette comparaison ne peut se faire avec des mesures ADL, car la cadence d'acquisition de la vitesse dans la méthode ADL, n'est pas assez grande pour pouvoir construire un spectre.

Les seules références possibles sont les spectres du module de la vitesse, obtenus par les mesures de fils chauds. Le fil chaud mesure donc la composante de la vitesse perpendiculaire au fil (2D), quand le spectre que l'on obtient par notre méthode est celui d'une composante unidimensionnelle de la vitesse. La figure 2.8 montre la forme des spectres fil chaud obtenus pour différentes positions de la couche. Les mesures correspondent à un Mach convectif de 0,64.

La figure 2.9 montre les résultats obtenus pour la diffusion collective (soufflerie de Poitiers, $Mc = 1,05$).

La forme des spectres est assez différente : Le spectre pour les mesures DCL décroît surtout autour de la centaine de kilohertz. Pour les spectres fil chaud, la décroissance finale se situe plutôt aux alentours du kilohertz.

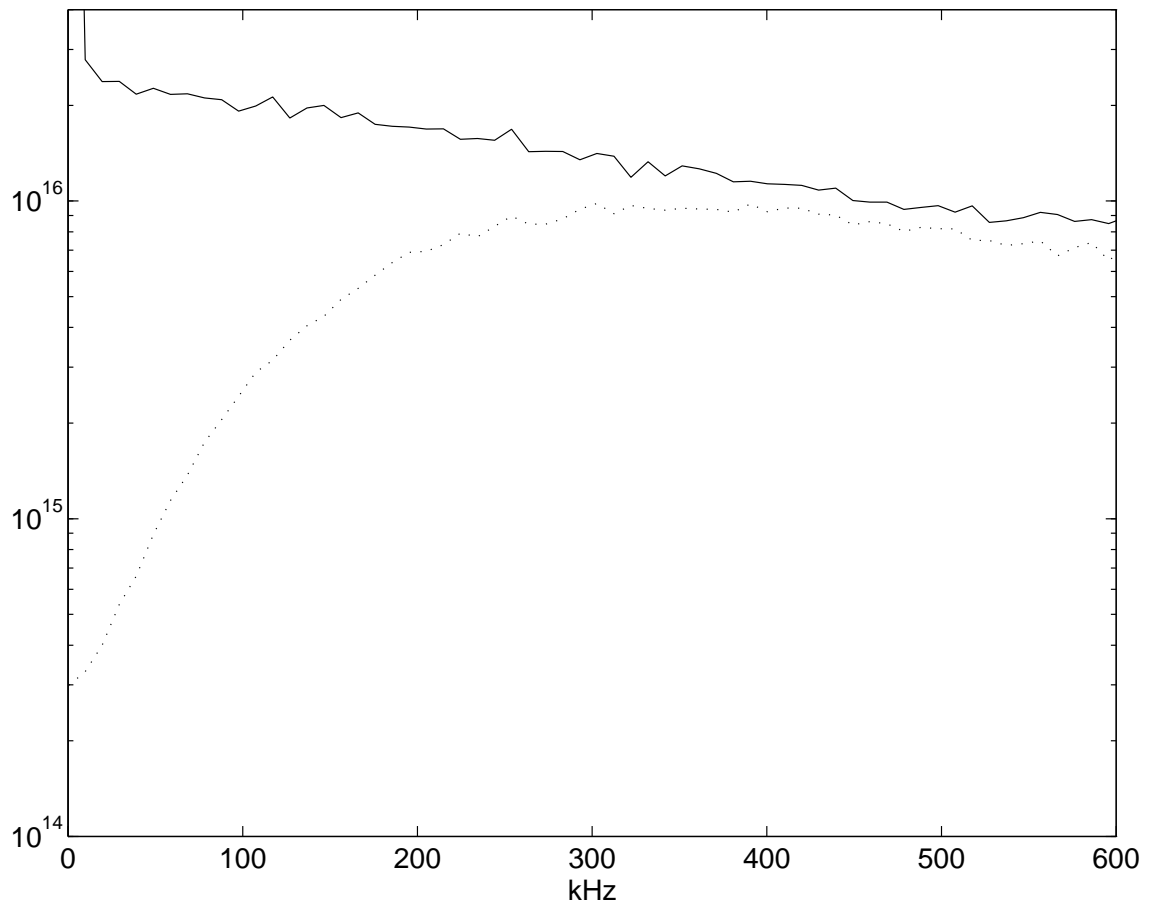


FIG. 2.6 – Spectres des dérivées de la phase (trait plein) et du logarithme du module (pointillés), au centre de la couche de mélange. L'unité en abscisse est le kHz. L'échelle en ordonnée est logarithmique. La normalisation est arbitraire, mais identique pour les deux courbes.

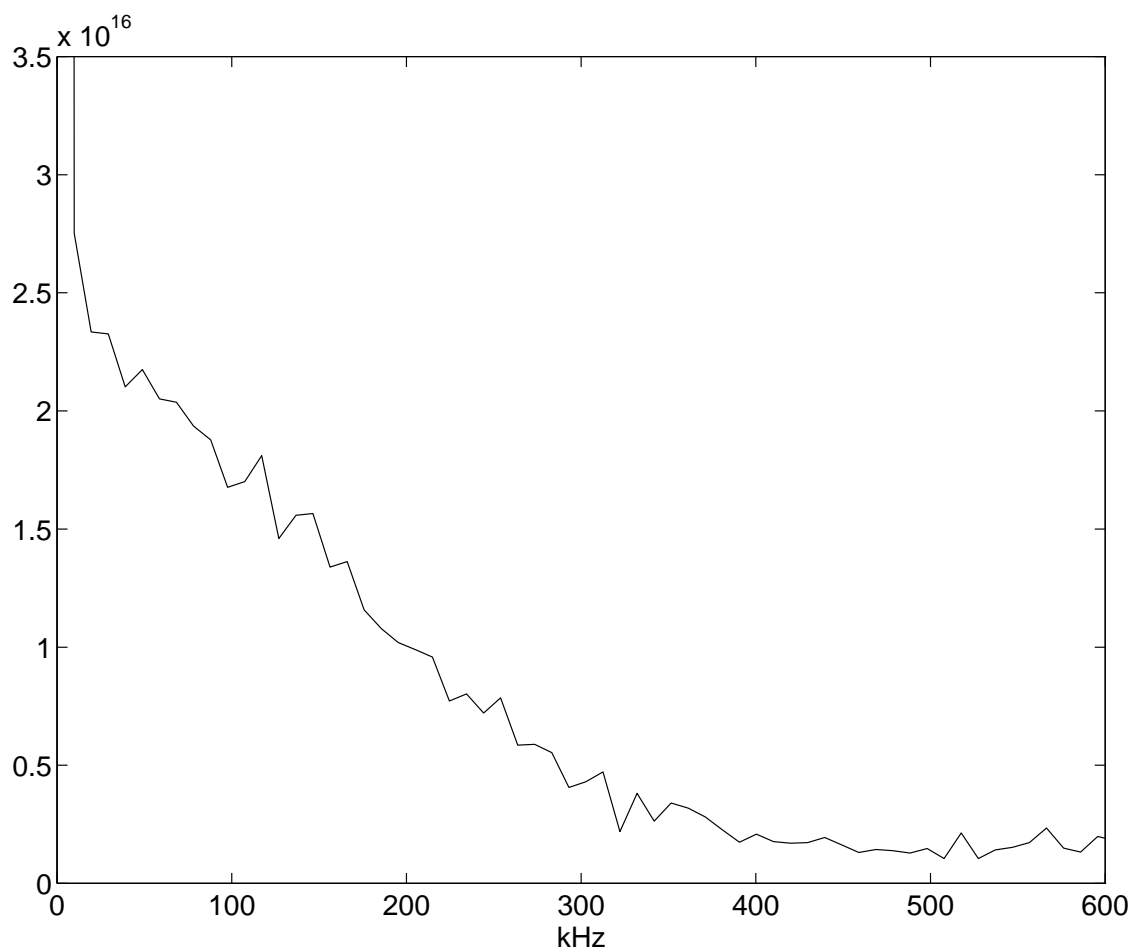


FIG. 2.7 – Spectre de la vitesse résultant de la figure précédente. L'unité de fréquence est le kHz. L'échelle verticale est linéaire, la normalisation, arbitraire. La valeur très élevée en zero est due à la moyenne temporelle non nulle de la vitesse. Elle n'est pas représentée sur la figure.

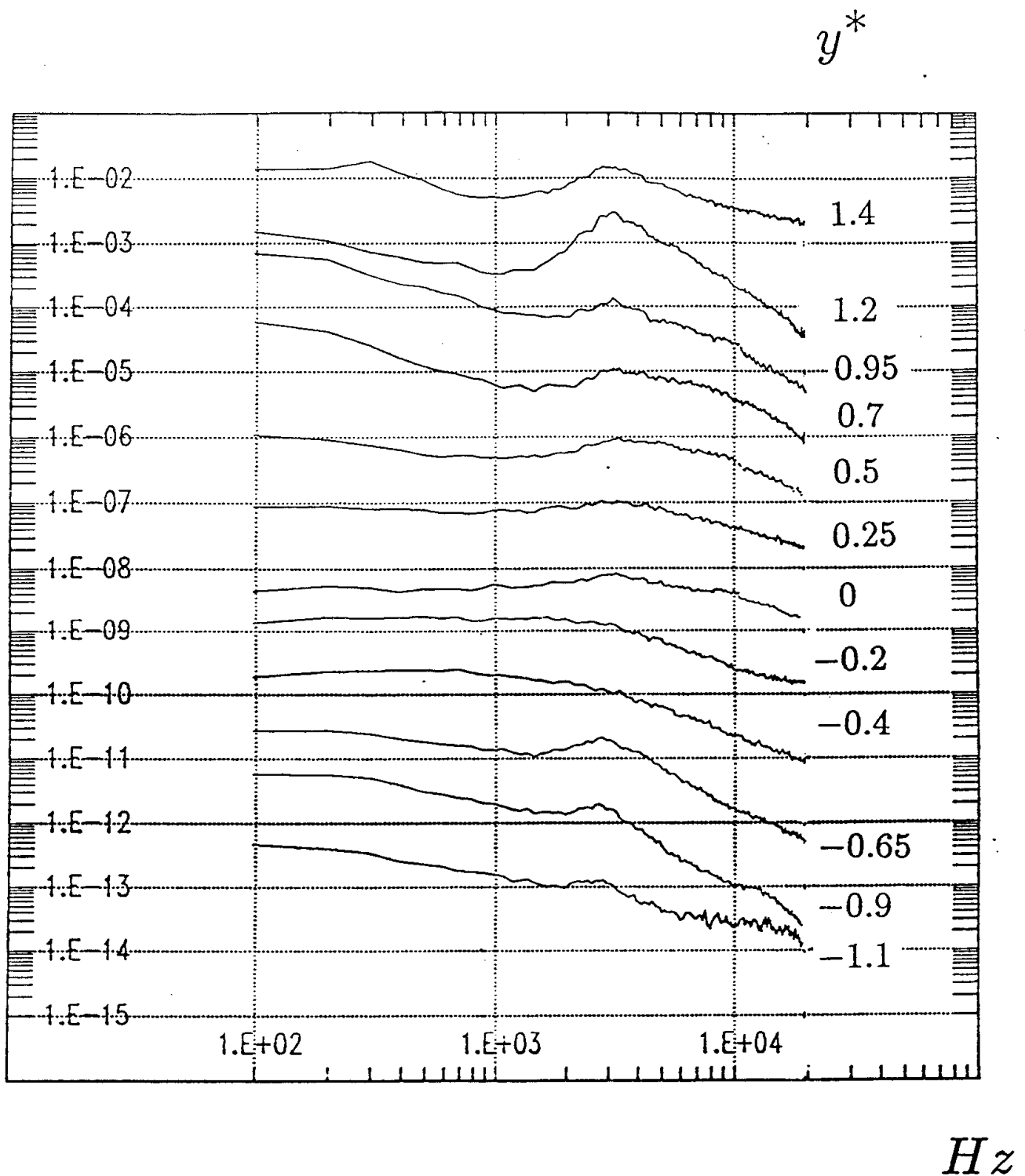


FIG. 2.8 – Spectres du module de la vitesse issus des mesures par fil chaud. Les échelles sont logarithmiques. Plusieurs positions de la couche sont montrées, allant de haut en bas de la couche.

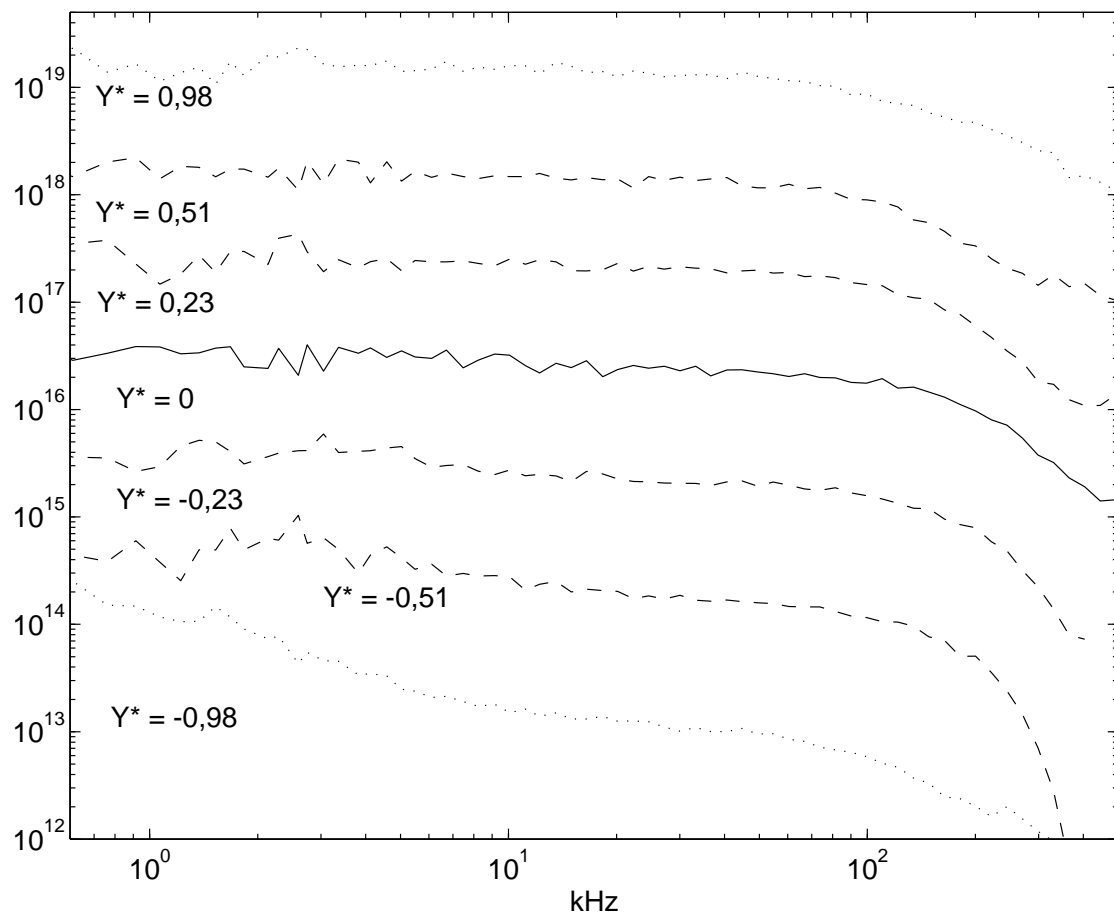


FIG. 2.9 – Figure en échelle logarithmique de la différence des spectres des dérivées logarithmiques, pour différentes hauteurs dans la couche. De haut en bas, les positions sont $y = +20, +11, +5, 0, -5, -11, -20$ mm. La courbe en trait plein correspond au centre de la couche. L'unité en abscisse est le kHz. L'unité verticale est arbitraire et différente pour chaque courbe.

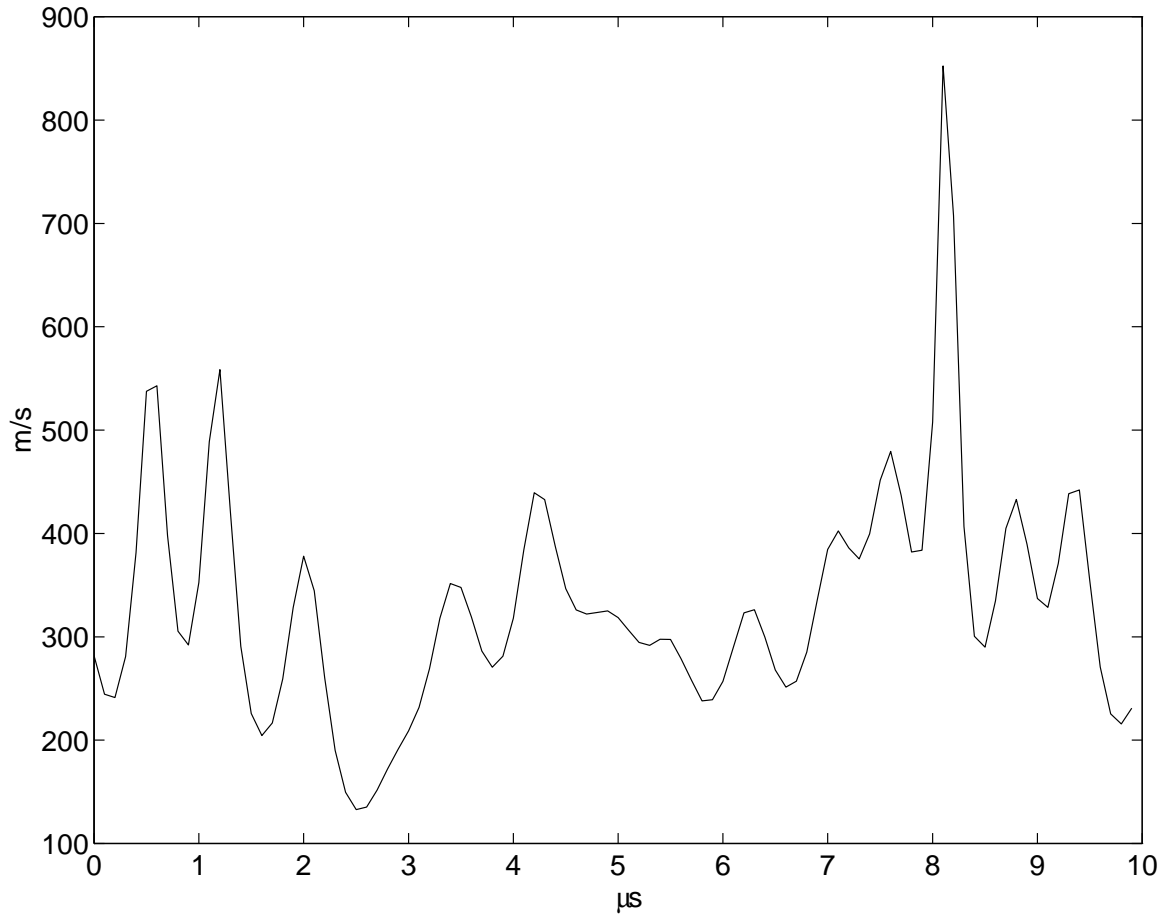


FIG. 2.10 – Vitesse instantanée en fonction du temps. La position est le centre de la couche. L'unité de temps est la microseconde. La vitesse est en m/s .

2.3.4 Vitesse instantanée

Les figures 2.6, représentant les spectres des deux dérivées, et 2.7, celui de la vitesse, apportent d'autres informations. On voit que le spectre de la vitesse est inclus à 80 % dans les composantes de fréquence inférieure à 200 kHz . Dans le même domaine fréquentiel, la dérivée logarithmique du module est très inférieure à celle de la phase.

On en déduit alors que, pour cette gamme de fréquence, le terme de flux dans l'expression de la dérivée de la phase (équation 2.32) est négligeable, et que cette gamme de fréquence suffit pour décrire les variations de la vitesse.

La valeur instantanée de la vitesse moyenne sur le volume observé peut donc être obtenue en première limite en filtrant le signal de la dérivée de la phase pour les fréquences supérieures à 200 kHz .

$$\left(\frac{d}{dt}\phi\right)_{\text{filtre}} = -\vec{k}\cdot\vec{v}_o \quad (2.46)$$

La figure 2.10 montre une séquence de l'évolution de cette vitesse au cours du temps.

Vérification par l'histogramme

Pour justifier ce calcul, on peut comparer la distribution de la vitesse, fruit du spectre du signal DCL, avec celle reconstruite par l'histogramme de la dérivée de la phase. Le résultat pour un Mach convectif de 1,05, au centre de la couche, est présenté sur la figure 2.11. Ces deux courbes sont de plus comparées à la mesure ADL. On voit que l'accord entre les trois résultats est remarquable, dans une dynamique d'un facteur 50 environ.

Les deux procédures associées à la diffusion collective sont pourtant très différentes : Le spectre est une transformation linéaire du signal, alors que l'histogramme de la dérivée de la phase est un calcul plus complexe, nonlinéaire. On analysera plus loin quelles propriétés du signal peut être à l'origine de ce lien entre ces deux courbes dérivées du signal DCL.

2.3.5 Indépendance des dérivées

On peut vérifier à posteriori l'hypothèse de non corrélation entre le terme de flux et celui de la vitesse, faite dans l'étude spectrale des dérivées logarithmiques, pour aboutir à l'expression 2.45.

En effet le terme de flux se retrouve dans la dérivée logarithmique du module (expression 2.31). Celui de la vitesse dans les basses fréquences de la dérivée de la phase (équation 2.46).

L'étude de l'interspectre des dérivées de la phase et du logarithme du module, permet donc de contrôler l'hypothèse utilisée.

La figure 2.12 montre cet interspectre pour deux positions de la couche, comparé à la moyenne quadratique des spectres des deux dérivées. Elle montre que l'écart entre cet interspectre et la moyenne des deux spectres, dans le domaine de fréquence correspondant au spectre de vitesse (fréquences inférieures à 200 kHz), est plus faible au centre de l'écoulement que dans l'écoulement supersonique.

On peut calculer, en intégrant ces courbes, un coefficient d'intercorrélation. Il vaut 10 % au centre de la couche, et 20 %, dans l'écoulement supersonique.

L'hypothèse d'indépendance est donc partiellement justifiée au centre, et plus discuttable à l'extérieur de la couche de mélange. Cet écart pourrait être une des causes du désaccord entre les histogrammes ADL et les spectres DCL à l'extérieur de la couche de mélange.

2.4 Phase du signal et diffusion turbulente

L'une des informations originales que l'on peut tirer de la vitesse est un coefficient de diffusion turbulente.

On va tout d'abord exposer le principe qui permet d'y aboutir. Puis on verra l'application à la couche de mélange, et à un tout autre milieu : un plasma de Tokamak.

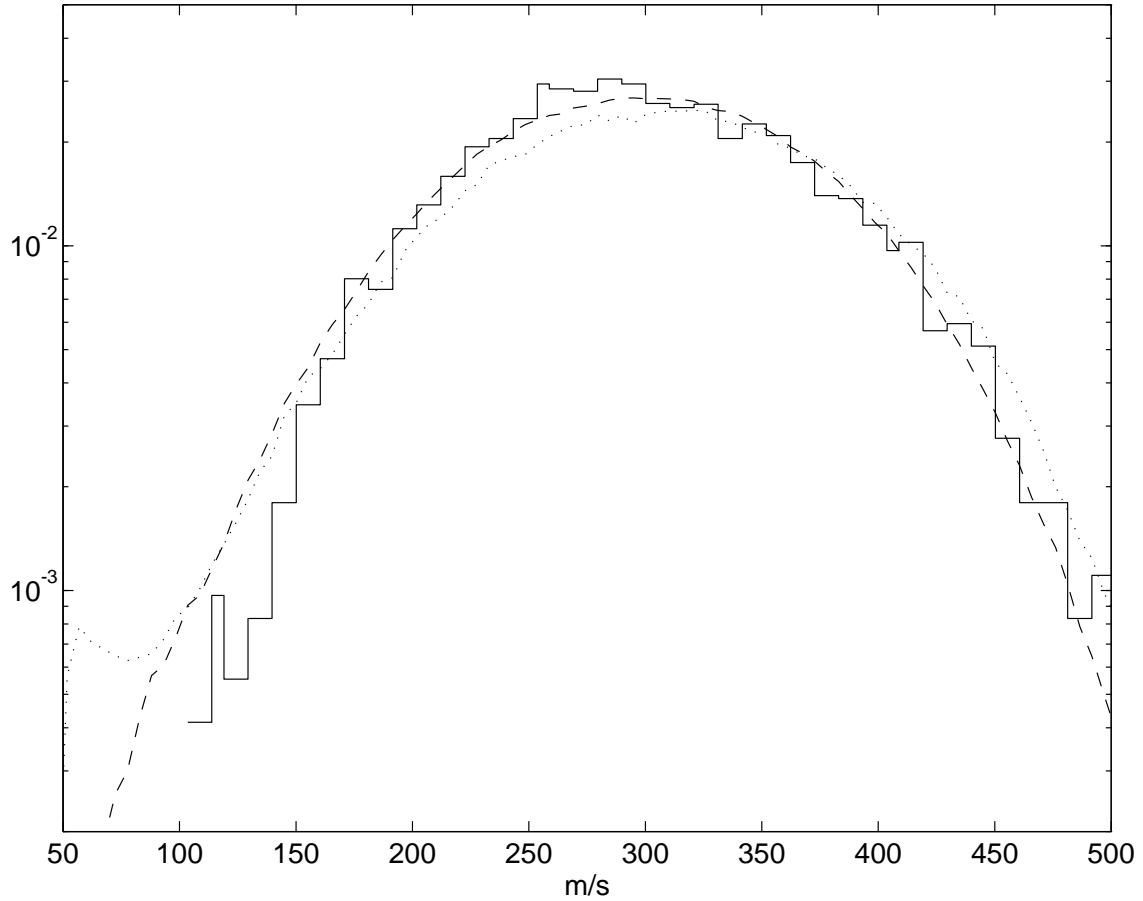


FIG. 2.11 – Distribution de la vitesse reconstruite par la dérivée de la phase (tiretés), le spectre du signal DCL (pointillés) et l'anémométrie Doppler laser (histogramme), pour le milieu de la couche de mélange. La vitesse est exprimée en m/s . Les distributions sont normalisées. L'échelle verticale est logarithmique. La concordance de ces trois résultats constitue une condition nécessaire pour valider la méthode de l'obtention de la vitesse Doppler par la dérivée de la phase. Pour la mesure ADL, l'ensemencement est double, silice dans l'écoulement supersonique et huile dans l'écoulement subsonique.

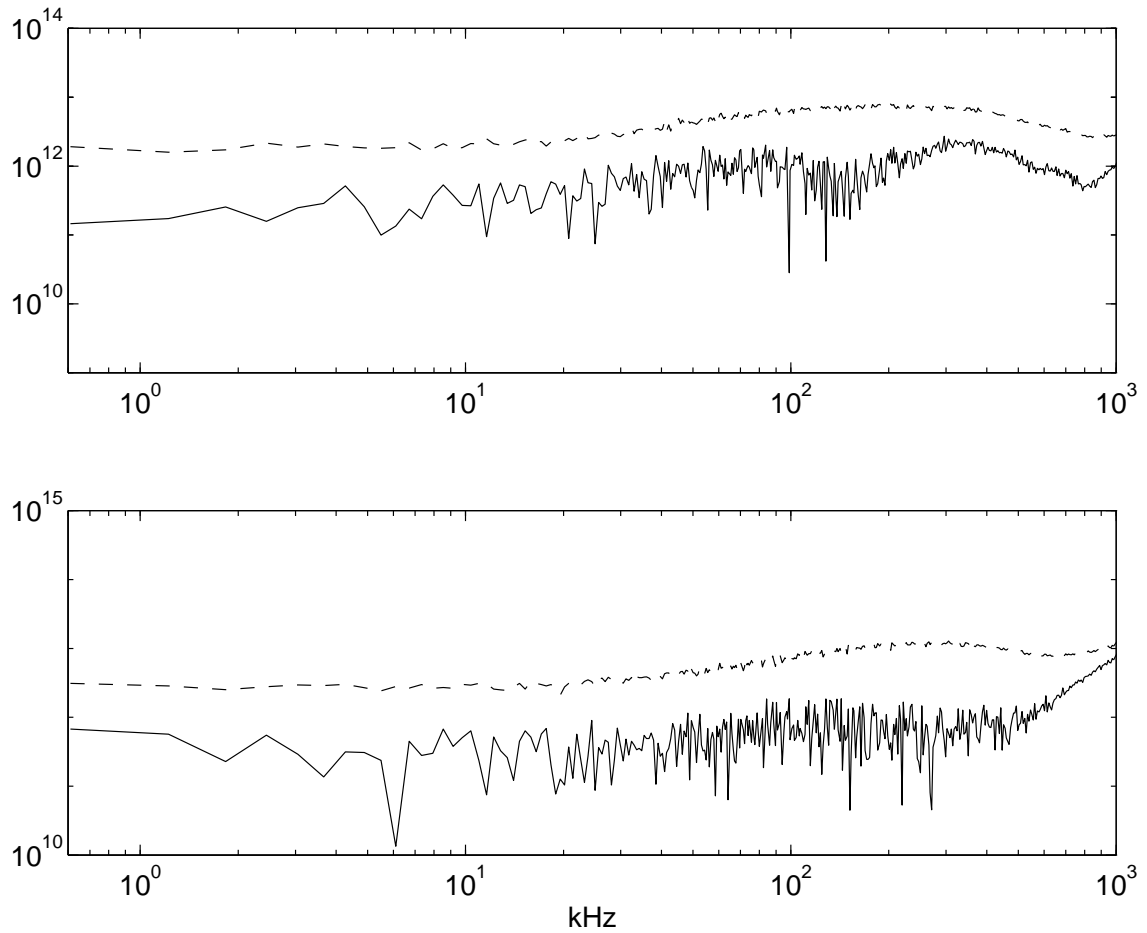


FIG. 2.12 – Interspectre des dérivées de la phase et du logarithme du module (Trait plein), comparé à la moyenne géométrique des deux spectres de ces mêmes dérivées (trait pointillé). L'unité en abscisse est le kHz. L'unité verticale est arbitraire mais commune aux deux courbes. Le graphe du haut correspond à la position $y = +20 \text{ mm}$, le second, au centre de la couche.

2.4.1 Corrélration de la phase et diffusion

Pour extraire un coefficient de diffusion à partir de l'évolution temporelle de la vitesse, on reprend un raisonnement classique (cf; J.O. Hinze [33]).

Desormais, dans le but d'alléger les expressions, on notera les dérivées temporelles, par un point au dessus de la notation de la fonction :

$$\frac{d}{dt}\phi = \dot{\phi}(t) \quad (2.47)$$

Variance du déplacement

On définit la fonction ψ_τ , "déplacement" sur un temps τ , associé à la phase ϕ . Comme la dérivée de la phase est liée à la vitesse moyenne sur le volume observé, ce déplacement correspond à la projection du mouvement suivant l'axe du vecteur de diffusion, \vec{k} .

$$\psi_\tau(t) = \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t') dt' = \phi(t+\tau) - \phi(t) \quad (2.48)$$

La variance de la fluctuation de ce déplacement $\sigma_{\psi_\tau}^2$ peut être liée à la corrélation de $\dot{\phi}$. $\langle \dot{\phi} \rangle$ est la valeur moyenne de $\dot{\phi}$. $\delta\dot{\phi}$ est l'écart à cette valeur moyenne : ($\delta\dot{\phi} = \dot{\phi} - \langle \dot{\phi} \rangle$) :

$$\sigma_{\psi_\tau}^2 = \langle \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t+\tau} dt'' \dot{\phi}(t') \dot{\phi}(t'') \rangle - \langle \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t') dt' \rangle^2 \quad (2.49)$$

Cette formule peut se simplifier en utilisant la variable $\delta\dot{\phi}$:

$$\sigma_{\psi_\tau}^2 = \langle \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t+\tau} dt'' \delta\dot{\phi}(t') \delta\dot{\phi}(t'') \rangle \quad (2.50)$$

$$= \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt'' \langle \delta\dot{\phi}(t+t') \delta\dot{\phi}(t+t'') \rangle \quad (2.51)$$

$$= \int_0^\tau dt' \int_{-t'}^{\tau-t'} d\tau' \langle \delta\dot{\phi}(t+t') \delta\dot{\phi}(t+t'+\tau') \rangle \quad \tau' = t'' - t' \quad (2.52)$$

En utilisant les propriétés de symétrie de l'autocorrélation, et après permutation des intégrales, il est possible d'écrire :

$$\sigma_{\psi_\tau}^2 = 2 \int_0^\tau d\tau' (\tau - \tau') C_{\delta\dot{\phi}}(\tau') \quad (2.53)$$

où $C_{\delta\dot{\phi}}(\tau)$ est la corrélation de $\delta\dot{\phi}$: $\langle \delta\dot{\phi}(t) \delta\dot{\phi}(t+\tau) \rangle$.

Cette intégrale admet un équivalent simple dans la limite des délais τ longs, plus longs que les temps pour lesquels on a $C_{\delta\dot{\phi}}(\tau)$ proche de 0. Dans cette situation, pour le second facteur de l'intégrale $C_{\delta\dot{\phi}}$, seuls les temps $\tau' \ll \tau$ importent, et alors, le premier facteur de l'intégrale se simplifie en $\tau - \tau' \sim \tau$. Donc :

$$\sigma_{\psi_\tau}^2 = 2 \tau \int_0^\infty C_{\delta\dot{\phi}}(\tau') d\tau' \quad (2.54)$$

Cette analyse suppose que l'intégrale impropre sur la corrélation converge vers une valeur finie. Dans le cas contraire, le comportement n'est plus diffusif.

L'équation 2.54 montre que la variance du déplacement ψ_τ est proportionnelle au temps, lorsque les délais sont suffisamment longs. La variable $\phi(t)$ a donc un comportement diffusif, avec pour constante de diffusion :

$$D_\phi = \int_0^\infty C_{\delta\phi}(\tau') d\tau' \quad (2.55)$$

Diffusion turbulente

Sous certaines conditions, la dérivée de la phase du signal était proportionnelle à $v_{o\parallel}$, la composante de la vitesse, moyennée sur le volume d'observation, suivant le vecteur d'onde de diffusion. Pour la plupart des mesures que nous avons étudiées, ce vecteur d'onde était parallèle à l'écoulement. Pour ces conditions de mesure :

$$v_{o\parallel} = \vec{v}_o \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{k} \phi \quad (2.56)$$

La composante du déplacement suivant cette direction suit alors le même comportement de diffusion, avec pour coefficient de diffusion, D_{uu} (u est la direction de l'écoulement) :

$$D_{uu} = \frac{1}{k^2} D_\phi = \frac{1}{k^2} \int_0^\infty C_{\delta\phi}(\tau') d\tau' \quad (2.57)$$

ou exprimée par rapport à la vitesse $v_{o\parallel}$:

$$D_{uu} = \int_0^\infty C_{v_{o\parallel}}(\tau') d\tau' \quad (2.58)$$

2.4.2 Application à la couche de mélange

Pour la couche de mélange (soufflerie de Poitiers, $Mc = 1,05$), par un calcul numérique à partir des données expérimentales, les résultats sont les suivants ($y = 0$ est le centre de la couche) :

$$y = -20 \text{ mm} \quad D_{uu} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.59)$$

$$y = -10 \text{ mm} \quad D_{uu} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.60)$$

$$y = -5 \text{ mm} \quad D_{uu} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.61)$$

$$y = 0 \quad D_{uu} = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.62)$$

$$y = 5 \text{ mm} \quad D_{uu} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.63)$$

$$y = 10 \text{ mm} \quad D_{uu} = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.64)$$

$$y = 20 \text{ mm} \quad D_{uu} = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (2.65)$$

Par comparaison, pour l'air à 0° C , la viscosité cinématique est : $D = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

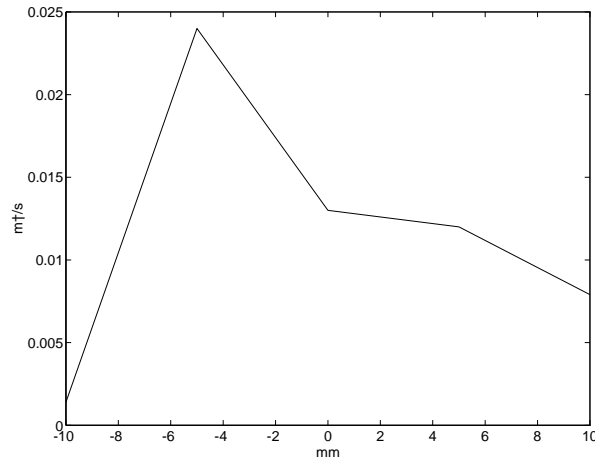


FIG. 2.13 – Coefficient de diffusion en fonction de la position y dans la couche.

La figure correspondante est donnée en figure 2.13. On a omis les points extérieurs à la couche. Les données montrent que la diffusion est plus forte au centre que sur le bord de la couche.

La surestimation des valeurs en dehors de la couche de mélange ($y = -20 \text{ mm}$), doit avoir les mêmes origines que les problèmes d'élargissement du spectre du signal.

2.4.3 Comparaison avec d'autres mesures de diffusion

La comparaison avec d'autres mesures de diffusion est délicate, du fait de la nature de la diffusion observée.

Le comportement mis en évidence est assurément diffusif : La variance d'une variable intégrée entre deux instants croît linéairement avec le délai entre ces deux instants :

$$\sigma_{\int_t^{t+\tau} \phi(t') dt'}^2 = 2 \tau \int_0^\infty C_{\delta\phi}(\tau') d\tau' \quad (2.66)$$

Néanmoins, la nature de cette diffusion n'est pas celle habituellement envisagée : La diffusion d'une particule fluide par la turbulence. Pour cela, il faudrait que la vitesse prise en compte soit la vitesse lagrangienne de cette particule fluide (cf. H. Tennekes & J.L. Lumley [34]). Or la vitesse observée est une vitesse moyenne sur un volume fixe.

De plus, cette mesure ne concerne qu'une seule composante de la vitesse. Le lien avec un coefficient tridimensionnel n'est pas immédiat : Comme l'écoulement est supersonique, il est anisotrope [35, 36].

Cependant, on peut dire que le comportement est du même type : la diffusion est plus forte au centre. La valeur obtenue par la théorie de Prandtl est $7,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. En prenant en compte que le passage d'une à trois dimensions va augmenter la diffusion, l'ordre de grandeur est comparable.

2.4.4 Confinement dans le Tokamak

Comme on l'a vu, la diffusion collective peut aussi s'appliquer pour observer les plasmas de Tokamak. Un dispositif optique comparable à celui utilisé sur les couches de mélange est installé sur le Tokamak Tore Supra à Cadarache. Le dispositif de Tore Supra est accordé à l'observation de longueurs d'onde beaucoup plus grandes, de l'ordre du centimètre.

La figure 2.14 montre un spectre typique du signal DCL obtenu dans le Tokamak. On voit apparaître deux raies.

Comme le montre le graphe du bas, la raie de gauche a une forme plutôt lorentzienne. Elle est interprétée comme étant la visualisation de mouvements sur le bord du plasma. Comme les mouvements ont une échelle plus courte que celle observée, la largeur de cette lorentzienne mesure directement un coefficient de diffusion propre à ce mouvement proche du bord.

La seconde raie, de forme gaussienne, est beaucoup plus intense : Elle provient de région plus centrales du plasma. Les conditions sont différentes : Le mouvement a cette fois-ci une échelle plus longue que celle observée. Le spectre ne permet alors pas de déterminer un coefficient de diffusion. La situation est analogue à celle observée dans les fluides. L'ensemble du raisonnement précédent sur la dérivée de la phase peut s'appliquer à ce phénomène. La raie gaussienne étant prépondérante sur le signal, on négligera les effets du bord du plasma, pour l'étude de la dérivée de la phase. La méthode de calcul a été reprise par N. Maafa [38]. On peut alors déterminer un coefficient de diffusion propre à la turbulence dans la région plus centrale du plasma.

Dans le cas du Tokamak, le coefficient de diffusion est particulièrement significatif, puisqu'il mesure le confinement du plasma. La figure 2.15 montre les résultats de ces mesures sur des plasmas obtenus par chauffage ohmique, où seule la valeur moyenne de la densité a été utilisée en abscisse pour ordonner les mesures. On a représenté les coefficients de diffusion obtenus par les deux types de mesures, le coefficient propre au bord du plasma (par les profils lorentziens, représentés par des cercles sur la figure), et le coefficient propre à la région plus centrale (obtenus par la méthode de la dérivée de la phase, représentés par des carrés sur la figure). On remarque que le coefficient diminue quand la densité moyenne augmente.

La comparaison avec d'autres mesures nécessite des précautions comme pour les fluides : Ainsi la mesure DCL est unidimensionnelle. Il n'existe pas d'autres diagnostics de mesure directe du coefficient de diffusion. La mesure n'est comparable qu'à des mesures obtenues à partir de paramètres globaux et de l'équilibre du système. Les mesures par la méthode globale sont indiquées par des triangles sur la figure 2.15.

On observe que, de même que lors des comparaisons dans les fluides, les ordres de grandeurs sont respectés, en accord pour toutes les mesures. Le sens de variation en fonction de la densité est respecté.

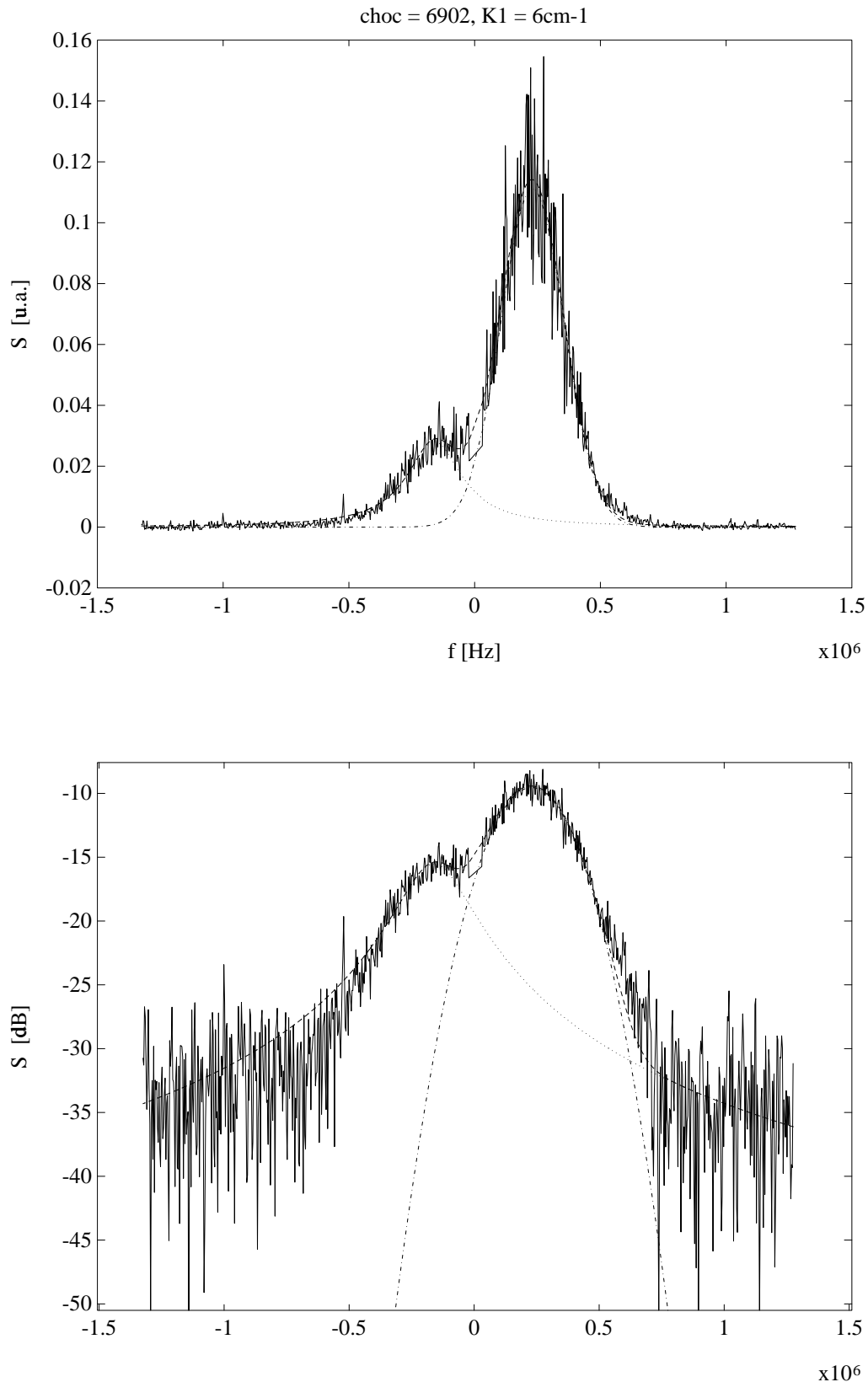


FIG. 2.14 – Spectre du signal de la diffusion collective dans le Tokamak Tore Supra. Les fréquences sont exprimées en kHz . L'axe vertical de la figure du bas est en échelle logarithmique. La raie de gauche, de forme lorentzienne, comme le montre le second graphe, provient du bord du plasma. La raie de droite, de forme gaussienne provient pour sa part de la région centrale du plasma.

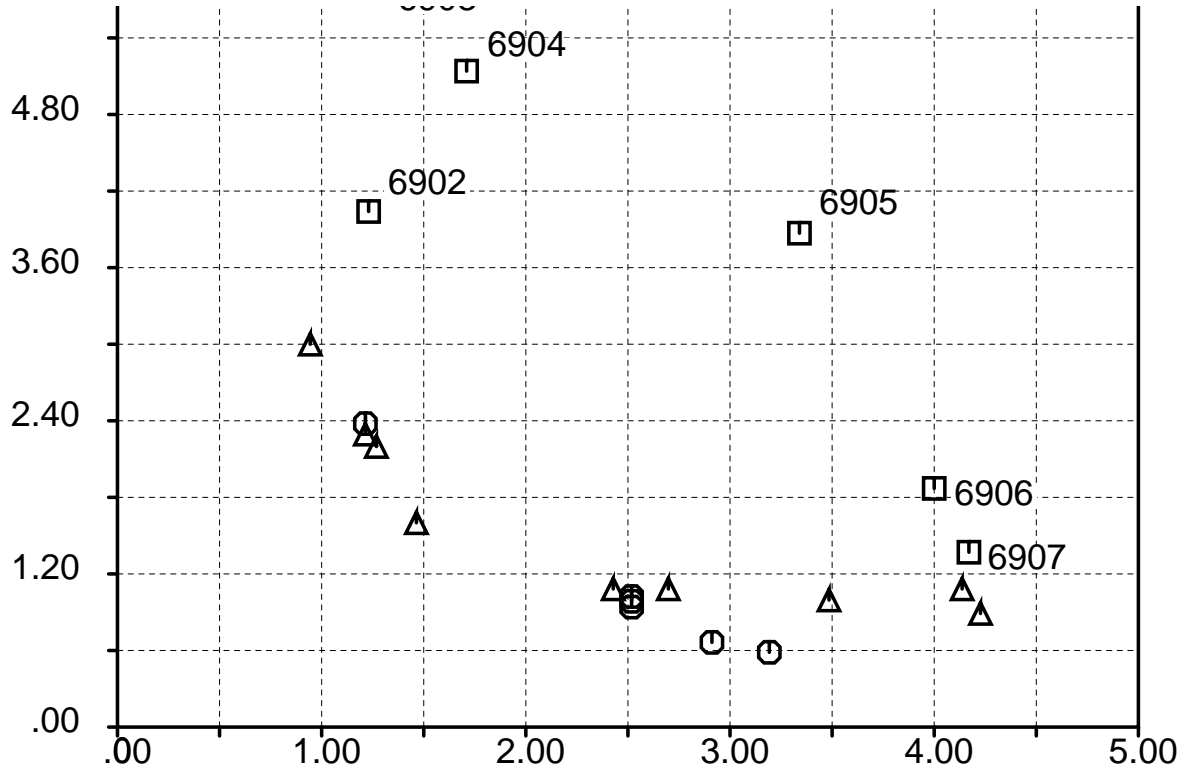


FIG. 2.15 – Coefficient de diffusion dans le plasma (m^2/s), en fonction de la densité moyenne ($10^{19}/m^3$) : Les carrés représentent les mesures par corrélation de la dérivée de la phase (les numéros sont ceux des chocs de Tore Supra étudiés), associées au mouvement dans la zone proche du centre du plasma. Les cercles sont les mesures obtenues grâce à la raie lorentzienne du spectre du signal, associée au mouvement au bord du plasma. Les triangles sont des mesures obtenues par profils de température et bilan d'énergie, et rapportées au bord du plasma.

2.5 Spectre du signal et histogramme de la dérivée de la phase

On a pu remarquer que les spectres du signal et l'histogramme de la dérivée de la phase avaient la même forme (figure 2.11). Cette remarque est intéressante indépendamment du fait que l'information commune soit la distribution de la vitesse Doppler.

On peut en effet se demander quelles conditions doit remplir un signal complexe pour que ces deux courbes se superposent.

La première remarque qui peut être faite lorsque l'on compare l'histogramme et le spectre est que le module du signal est présent dans le spectre du signal, alors qu'il n'intervient pas dans l'histogramme de la dérivée de la phase. On va donc voir quel est son rôle dans cette étude.

Dans un second temps, on s'intéressera aux propriétés propres à la phase.

2.5.1 Propriétés spectrales du module et de la phase

On factorise le signal de diffusion $F_{\vec{k}}(t)$ en deux facteurs, pour séparer module et phase : $\rho(t)$ et $e^{i\phi(t)}$. La question se pose de savoir s'ils sont décorrélés ou pas. Car, s'ils le sont, on peut séparer les deux contributions :

$$\langle \rho(t)e^{i\phi(t)}\rho(t+\tau)e^{i\phi(t+\tau)} \rangle = \langle \rho(t)\rho(t+\tau) \rangle \langle e^{i\phi(t)}e^{i\phi(t+\tau)} \rangle \quad (2.67)$$

Ceci implique pour les spectres :

$$Sp_{\rho e^{i\phi}} = Sp_{\rho} \star Sp_{e^{i\phi}} \quad (2.68)$$

Ceci permettrait donc de séparer les deux contributions.

La figure 2.16 montre les spectres séparés du module et de la phase, au centre de la couche. Elle apporte le résultat inattendu suivant : le puissance spectrale du module est au trois quart incluse dans le pic très étroit centré en zero. Pour l'étude spectrale, le module peut donc être considéré comme constant. Du coup cette analyse se simplifie énormément : Le spectre du signal s'identifie à celui de l'exponentielle de la phase, à un facteur près.

$$Sp_{\rho e^{i\phi}} \propto Sp_{e^{i\phi}} \quad (2.69)$$

Ce résultat est confirmé expérimentalement sur la figure 2.17, pour le centre de la couche de mélange. Cette remarque se généralise à l'ensemble des positions observées. On peut alors admettre au premier ordre, la validité de l'hypothèse d'indépendance, exprimée par l'équation 2.67.

2.5.2 Les conditions d'équivalence entre le spectre du signal et l'histogramme de la dérivée de la phase

On a déjà remarqué que la variance du module du signal était beaucoup plus faible que le carré de la moyenne du module. De ce fait, le spectre du signal se retrouve dans

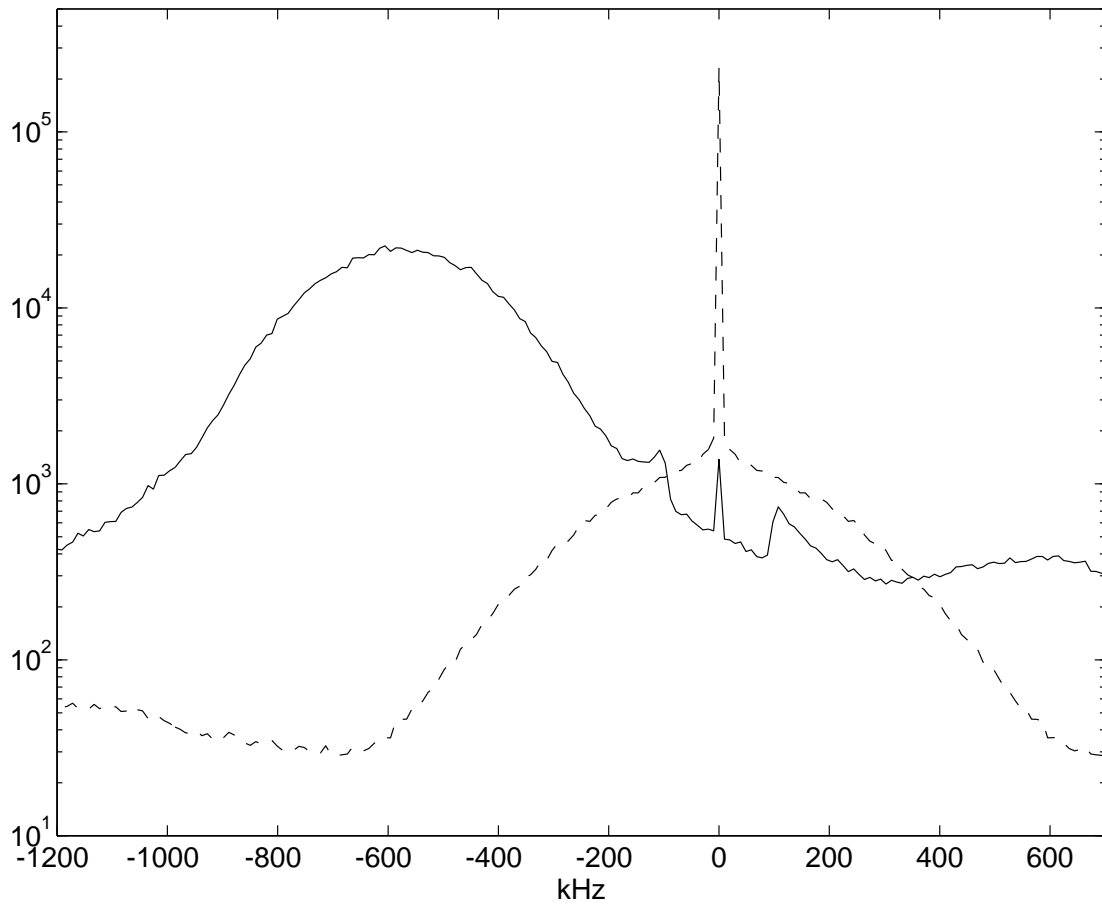


FIG. 2.16 – Spectre du module (tiretés) et de l'exponentielle de la phase (trait continu), au centre de la couche. Abscisses : fréquences en kHz , échelle logarithmique en ordonnée. Unité arbitraire.

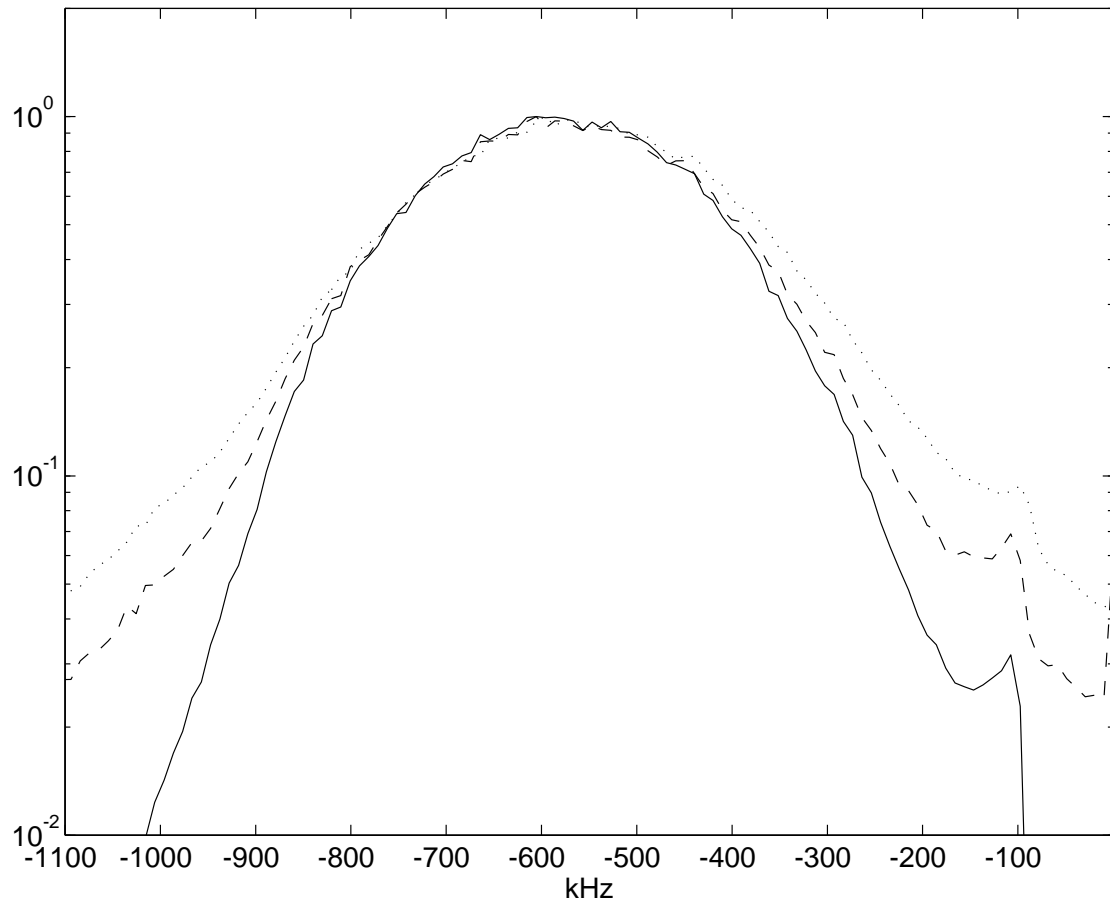


FIG. 2.17 – Spectre de l'exponentielle de la phase (tiretés), comparé à celui du signal (trait continu) et au produit de convolution des spectres du module et de l'exponentielle de la phase (pointillés), au centre de la couche. Abscisses : fréquences en kHz , tracé semilog, échelle logarithmique en ordonnée. Les courbes sont normalisées sur leur maximum.

celui de l'exponentielle de la phase.

La similitude entre spectre du signal et histogramme de la dérivée de la phase, se reporte donc sur la similitude entre le spectre de l'exponentielle de la phase, $Sp_{e^{i\phi}}$, et de la distribution de probabilité de la dérivée de la phase, $P_{\dot{\phi}}$.

On va déterminer les conditions pour que cette similitude existe.

Pour mener à bien cette étude, on va s'intéresser plutôt à la corrélation de l'exponentielle de la phase.

$$C_{e^{i\phi}}(\tau) = \langle e^{i\phi(t+\tau)} e^{-i\phi(t)} \rangle = \langle e^{i \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t') dt'} \rangle = \langle e^{i\psi_\tau(t)} \rangle \quad (2.70)$$

où le déplacement $\psi_\tau(t)$, a déjà été introduit lors de l'étude sur la diffusion turbulente au paragraphe précédent (section 2.48) :

$$\psi_\tau(t) = \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t') dt' \quad (2.71)$$

Étude qualitative

Il existe une réponse succincte au problème posé, peut déjà être donnée. En effet, dans l'hypothèse où la fonction $\dot{\phi}$, "varie plus lentement" que le temps de corrélation de $C_{e^{i\phi}}$, on peut écrire :

$$\psi_\tau(t) = \tau \dot{\phi}(t) \quad (2.72)$$

Alors, pour la corrélation de $e^{i\phi}$:

$$C_{e^{i\phi}}(\tau) = \langle e^{i\tau \dot{\phi}(t)} \rangle \quad (2.73)$$

La transformée de Fourier de cette expression conduit au spectre attendu :

$$Sp_{e^{i\phi}}(\omega) \propto \langle \delta(\omega - \dot{\phi}(t)) \rangle \propto P_{\dot{\phi}}(\omega) \quad (2.74)$$

Ce raisonnement ne donne qu'une idée de l'origine du rapprochement entre le spectre de l'exponentielle de la phase et l'histogramme de la dérivée de la phase. Son inconvénient est de ne donner aucun critère quantitatif pour estimer cette approximation.

Pour le faire, il faut estimer les variations de la dérivée de la phase durant le temps caractéristique de la fonction de corrélation $C_{e^{i\phi}}$. En effet, si $\dot{\phi}$ varie sur un temps plus court que le temps caractéristique de la corrélation $C_{e^{i\phi}}$, le raisonnement fait ci-dessus n'est plus valable, et il n'y aura plus de similitude entre le spectre de l'exponentielle de la phase et l'histogramme de la dérivée de la phase.

Nous allons exprimer la corrélation $C_{e^{i\phi}}$, en fonction des cumulants de ψ_τ . Cela permet de déterminer un temps caractéristique de cette corrélation. Enfin on établira un critère sur les variations sur les temps courts de la dérivée de la phase $\dot{\phi}$, pour que ces variations soient négligeables, ce qui mène au résultat de l'étude qualitative précédente.

On se limitera, dans un premier temps, à un comportement gaussien pour la variable ψ_τ .

Les cumulants de ψ_τ

L'équation 2.70, montre que la fonction de corrélation de $e^{i\phi}$ peut être écrite comme la valeur de la fonction caractéristique de ψ_τ , $G_{\psi_\tau}(k)$:

$$G_{\psi_\tau}(k) = \langle e^{ik\psi_\tau(t)} \rangle \quad (2.75)$$

pour la valeur k égale à 1.

Or le logarithme de la fonction caractéristique est la fonction génératrice des cumulants de ψ_τ : $\Gamma_{\psi_\tau 1}$ et $\Gamma_{\psi_\tau 2}$.

$$G_{\psi_\tau}(k) = e^{ik\Gamma_{\psi_\tau 1} + \frac{(ik)^2}{2!}\Gamma_{\psi_\tau 2}} \quad (2.76)$$

Donc, en prenant $k = 1$:

$$C_{e^{i\phi}}(\tau) = G_{\psi_\tau}(1) = e^{i\Gamma_{\psi_\tau 1} - \frac{1}{2!}\Gamma_{\psi_\tau 2}} \quad (2.77)$$

Le premier cumulant est la moyenne de la fonction ψ_τ :

$$\Gamma_{\psi_\tau 1} = \langle \psi_\tau \rangle = \langle \phi \cdot \rangle \tau \quad (2.78)$$

Le second cumulant, $\Gamma_{\psi_\tau 2}$, est la variance de la fonction ψ_τ . Lors de l'étude de la diffusion, on l'a exprimé en fonction des variations de $\phi \cdot$:

$$\Gamma_{\psi_\tau 2} = \sigma_{\psi_\tau}^2 = 2 \int_0^\tau d\tau' (\tau - \tau') C_{\delta\phi \cdot}(\tau') \quad (2.79)$$

La fonction de corrélation $C_{e^{i\phi}}$ prend alors la forme suivante :

$$C_{e^{i\phi}}(\tau) = e^{i\langle \phi \cdot \rangle \tau - \int_0^\tau d\tau' (\tau - \tau') C_{\delta\phi \cdot}(\tau')} \quad (2.80)$$

Temps caractéristique de la corrélation $C_{e^{i\phi}}$

Pour évaluer le temps caractéristique, on se replace dans les conditions les plus simples où on suppose la dérivée de la phase constante sur les temps courts :

$$\psi_\tau(t) = \tau \phi \cdot(t) \quad (2.81)$$

Alors, la fonction de corrélation de $\phi \cdot$ est approchée pour les temps courts par :

$$C_{\delta\phi \cdot}(\tau) \sim \sigma_\phi^2 \quad (2.82)$$

Dans ces conditions le second terme de l'exponentielle dans l'équation 2.80 se réécrit :

$$\int_0^\tau d\tau' (\tau - \tau') C_{\delta\phi \cdot}(\tau') \sim \tau^2 \sigma_\phi^2 \quad (2.83)$$

Le module de la corrélation de $e^{i\phi}$ varie alors comme :

$$| C_{e^{i\phi}}(\tau) | = e^{-\tau^2 \sigma_\phi^2} \quad (2.84)$$

Donc, la corrélation $C_{e^{i\phi}}$, prend des valeurs non négligeables, tant que τ est inférieur à :

$$\tau_{C_{e^{i\phi}}} = 2/\sigma_{\phi}. \quad (2.85)$$

$\tau_{C_{e^{i\phi}}}$ est le temps caractéristique de la corrélation $C_{e^{i\phi}}$

Critère quantitatif

Pour l'étude qualitative, on avait supposée constante la dérivée de la phase ϕ sur les temps courts (pour pouvoir écrire le déplacement comme $\psi_{\tau} = \phi\tau$). C'est donc l'évolution de ϕ au cours du temps qui va invalider la concordance entre spectre et histogramme. Pour introduire un critère limite de validité, il faut voir quel est le premier terme non constant dans le développement de la corrélation $C_{\delta\phi}$, autour de $\tau = 0$.

En utilisant $C_{\delta\phi}(0) = \sigma_{\phi}^2$ (développement à l'ordre 0), on peut écrire $C_{\delta\phi}$ sous la forme d'un développement de puissances de τ :

$$C_{\delta\phi}(\tau) = C_{\delta\phi}(0) + \frac{1}{n!} \frac{d^n C_{\delta\phi}}{d\tau^n}(0) \tau^n = \sigma_{\phi}^2 \left(1 - \frac{\tau^n}{\tau_{\phi}^n}\right) \quad (2.86)$$

n est le degré de la première dérivée non nulle de $C_{\delta\phi}$. τ_{ϕ} est l'échelle temporelle des variations de la dérivée de la phase.

Normalement, les propriétés de symétrie de la corrélation devraient impliquer que la dérivée première soit nulle (donc $n = 2$). Néanmoins, certains auteurs (dont J.O. Hinze [33], Chap. 1) envisagent tout de même la forme exponentielle pour la corrélation de vitesse, qui semble souvent être en concordance avec l'expérience (ce qui implique $n = 1$). τ_{ϕ} est le paramètre qui caractérise la pente de cette dérivée.

On déduit la forme de $\Gamma_{\psi_{\tau 2}}$, par l'équation 2.79 :

$$\Gamma_{\psi_{\tau 2}} = 2 \int_0^{\tau} d\tau' (\tau - \tau') C_{\delta\phi}(\tau') = \sigma_{\phi}^2 \tau^2 \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{\tau^n}{\tau_{\phi}^n}\right) \quad (2.87)$$

Le premier terme est celui qui correspond au résultat de l'étude qualitative. En effet, en se limitant à ce terme pour le cumulatif $\Gamma_{\psi_{\tau 2}}$, on obtient pour la corrélation $C_{e^{i\phi}}$:

$$C_{e^{i\phi}}(\tau) = e^{i\langle\phi\rangle\tau - \frac{1}{2}\sigma_{\phi}^2\tau^2} \quad (2.88)$$

On en déduit pour le spectre par transformée de Fourier temporelle :

$$Sp_{e^{i\phi}}(\omega) \propto e^{-\frac{(\omega - \langle\phi\rangle)^2}{2\sigma_{\phi}^2}} \propto P_{\phi}(\omega) \quad (2.89)$$

On retrouve donc bien la concordance entre le spectre et l'histogramme. On voit de plus que la forme gaussienne pour la fonction ψ_{τ} , à laquelle se limite ce raisonnement, correspond à une forme gaussienne aussi pour le spectre de l'exponentielle de la phase, $Sp_{e^{i\phi}}$ lui-même.

Pour valider de cette étude qualitative, il faut donc estimer le second terme du développement du cumulatif (équation 2.87).

On remplace donc τ par le temps caractéristique $\tau_{C_{e^{i\phi}}}$, c'est à dire, $2/\sigma_{\phi}$, dans le second terme. Dans ces conditions, le second terme du développement de $\Gamma_{\psi_{\tau 2}}$ est négligeable si, (dans le cas $n = 1$) :

$$\frac{3}{2}\sigma_{\phi}\tau_{\phi} \gg 1 \quad (2.90)$$

et pour le cas $n = 2$:

$$\frac{3}{2}\sigma_{\phi}^2\tau_{\phi}^2 \gg 1 \quad (2.91)$$

Si ces conditions sont respectées, le second terme du développement de $\Gamma_{\psi_{\tau 2}}$ peut être négligé dans la corrélation $C_{e^{i\phi}}$, et on retrouve la correspondance cherchée entre le spectre et l'histogramme.

Application au centre de la couche de mélange

Le cas gaussien semble bien s'appliquer à la figure 2.11, qui correspond au signal DCL obtenu au milieu de la couche de mélange. Pour cette position, la corrélation $C_{\delta\phi}$ a une forme quasiment gaussienne. On le voit par le spectre fréquentiel associé présenté sur la figure 2.18 (le spectre est lui-même gaussien). Dans ces conditions, les paramètres introduits ci-dessus valent :

$$\sigma_{\phi} = 880 \text{ kHz} \quad \tau_{\phi} = 1,6 \text{ } \mu\text{s} \quad (2.92)$$

Le critère défini est alors assez bien satisfait car :

$$\frac{3}{2}\sigma_{\phi}^2\tau_{\phi}^2 \sim 3 > 1 \quad (2.93)$$

Cas général

Dans le cas général, où ψ_{τ} n'est pas gaussien, on peut chercher les conditions pour que l'histogramme et le spectre du signal soient de même forme :

$$P_{\phi}(\omega) \propto Sp_{e^{i\phi}}(\omega) \quad (2.94)$$

Par transformée de Fourier des 2 membres de cette équation, cela équivaut à trouver les conditions pour lesquelles la fonction caractéristique, G_{ϕ} , soit proportionnelle à la corrélation $C_{e^{i\phi}}$.

Or la fonction caractéristique de ϕ , par définition des cumulants, peut s'écrire sous la forme du développement :

$$G_{\phi}(\tau) = \langle e^{i\tau\phi(t)} \rangle = e^{i\tau\Gamma_{\phi 1} + \frac{(i\tau)^2}{2!}\Gamma_{\phi 2} + \frac{(i\tau)^3}{3!}\Gamma_{\phi 3} + \dots} \quad (2.95)$$

Tandis que la corrélation $C_{e^{i\phi}}$, d'après l'équation 2.77 généralisée, peut s'écrire :

$$C_{e^{i\phi}}(\tau) = e^{i\Gamma_{\psi_{\tau 1}} - \frac{1}{2!}\Gamma_{\psi_{\tau 2}} - i\frac{1}{3!}\Gamma_{\psi_{\tau 3}} + \dots} \quad (2.96)$$

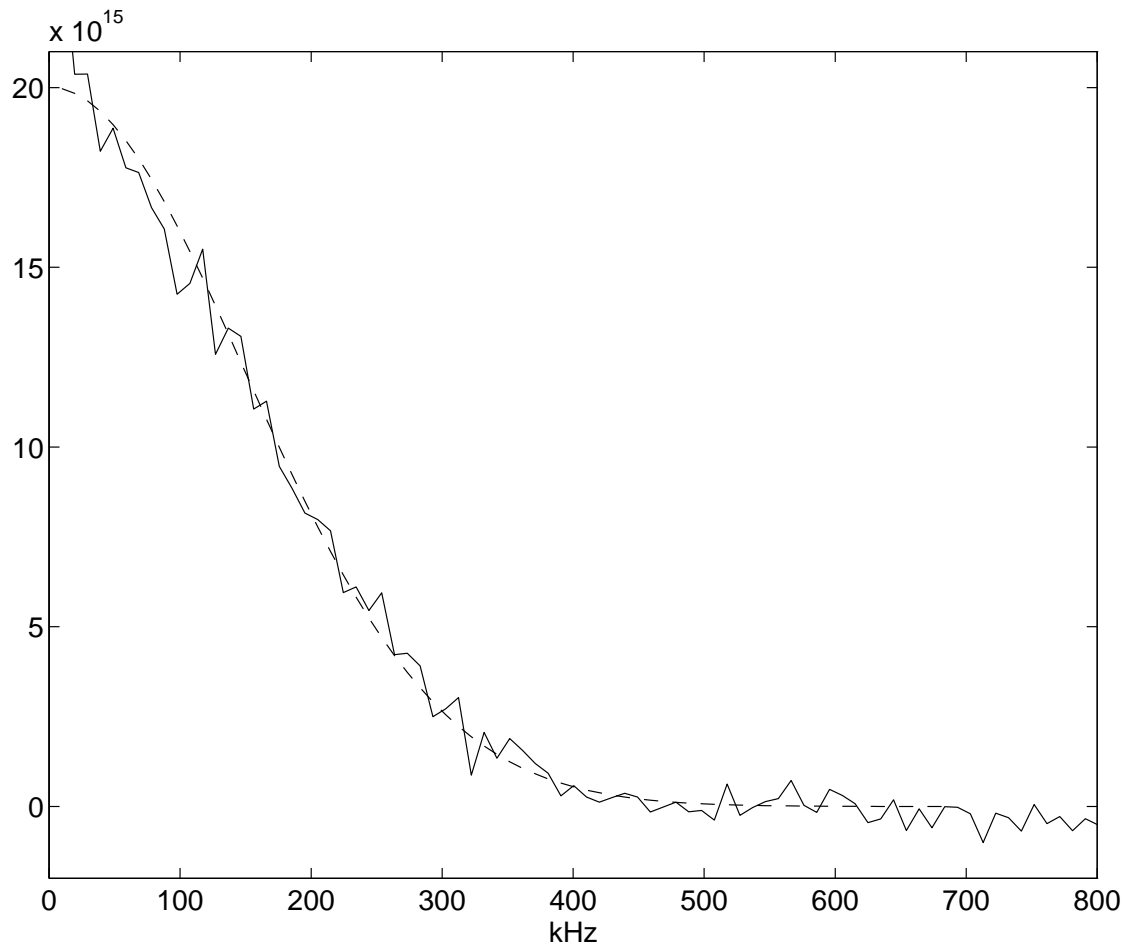


FIG. 2.18 – Spectre de la dérivée de la phase (trait continu) interpolé par une gaussienne (tiretés), au centre de la couche de mélange. Abscisses : fréquence, en kHz , tracé linéaire. Ordonnées arbitraires. Cette figure correspond alors au cas $n = 2$, et $\tau_{\phi} = 1,6 \mu s$

Une condition suffisante pour obtenir l'égalité, serait d'établir, pour des temps courts (c'est à dire, tant que la corrélation $C_{e^{i\phi}}(\tau)$ prend des valeurs non négligeables) :

$$\forall n \geq 1 \quad \Gamma_{\psi_{\tau n}} \sim \tau^n \Gamma_{\phi \cdot n} \quad (2.97)$$

Cette relation, d'après l'équation 2.78 est vraie à l'ordre 1. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu les conditions pour que l'équation 2.97 soit une bonne approximation à l'ordre 2.

Pour chaque ordre suivant, il faudrait faire une analyse identique à celle développée à l'ordre 2. Le critère de validité porterait donc sur la comparaison entre la décroissance de la fonction de corrélation à l'ordre n de ϕ , $C_{\phi}^{(n)}$ autour de l'origine, et une puissance de σ_{ϕ} .

Les conditions pour chaque ordre ne semblent pas intrinsèquement liées les unes aux autres.

La figure 2.19 montre néanmoins que dans ces conditions de forme non gaussienne, il est tout de même possible de trouver des cas où il y a bien superposition. Pour cette position le critère à l'ordre 2 est bien vérifié.

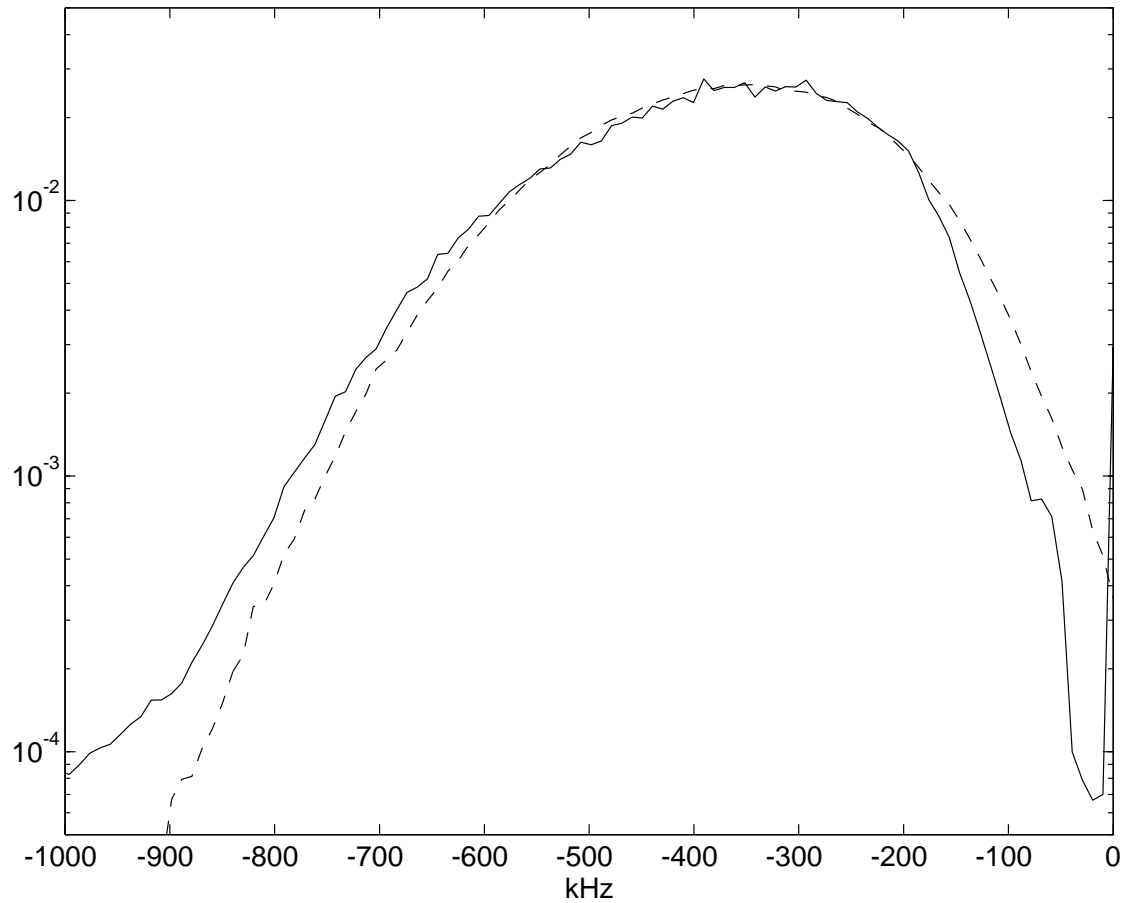


FIG. 2.19 – Histogramme de la dérivée de la phase (tiretés), spectre du signal CLS (trait continu), dans la couche de mélange, pour une position proche de l'écoulement lent. Abscisses : fréquence, en kHz , Echelle verticale logarithmique.

Chapitre 3

Relations entre échelles de la turbulence

L'originalité de la diffusion collective, est de fournir une information associée à une longueur d'onde, donc une échelle bien déterminée de la turbulence. Or, la notion d'échelle joue un rôle de premier plan dans la compréhension des processus qui forment la turbulence. L'étude qui suit a pour but d'observer l'information commune entre deux signaux de la diffusion collective à différentes échelles de la turbulence.

Deux outils différents de traitement du signal ont été utilisés : L'information mutuelle et la corrélation. On comparera les deux mesures.

Tout d'abord, ces études ont nécessité le montage d'un banc optique capable d'observer deux échelles simultanément.

3.1 Banc bidiffusif

Le premier banc construit sur ce principe, ALTAIR, a été mis au point par A. Truc & al. [39]. Il sert à observer le plasma du tokamak Tore-Supra situé au CEA à Cadarache.

Le banc bidiffusif mis au point pour cette thèse, a été conçu pour pouvoir acquérir des signaux issus de deux vecteurs d'onde de diffusion indépendants. On a voulu en particulier conserver le maximum de degrés de liberté sur le choix des vecteurs d'onde de diffusion.

3.1.1 Conception

Le schéma de principe est donné en figure 3.1.

Pour conserver la souplesse dans le choix des vecteurs d'onde, le principe est de former trois faisceaux : Un faisceau qui servira d'oscillateur local et deux faisceaux qui convergent sur lui, dans la zone d'observation, qui serviront de faisceaux primaires. Ce choix permet de n'utiliser qu'un seul détecteur.

Les faisceaux sont créés les uns à partir des autres grâce à des défecteurs acousto-optiques. Chacun est alors décalé d'une fréquence différente par rapport à celle du laser. Les interférences entre les ondes diffusées par chacun des deux primaires et l'oscillateur

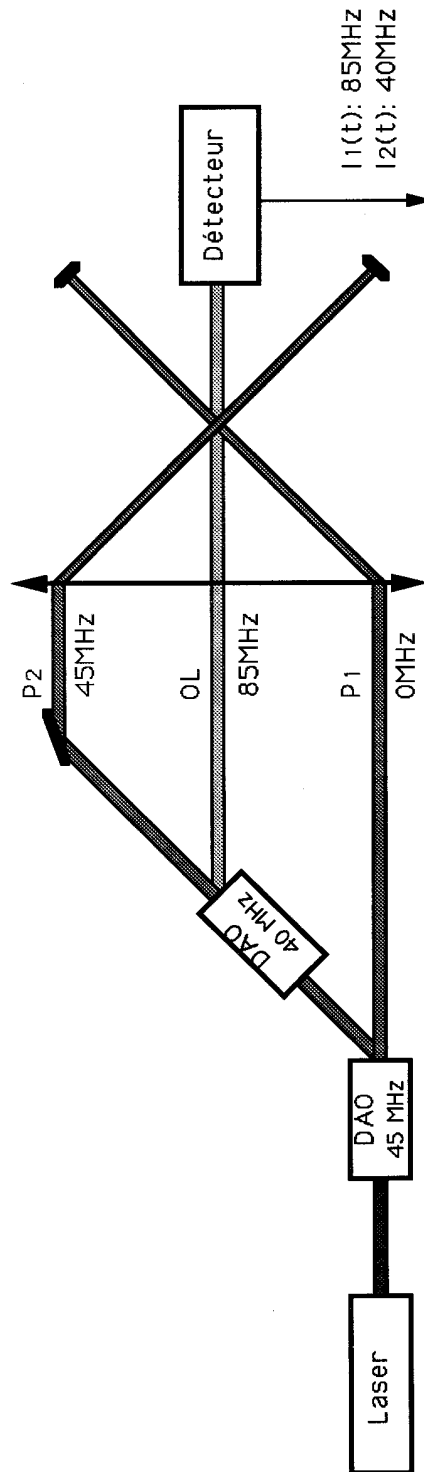


FIG. 3.1 – Principe du montage pour observer deux diffusions simultanément avec un seul détecteur. On utilise trois faisceaux : un faisceau OL et deux faisceaux primaires, initiant la diffusion. Les décalages fréquentiels sont différents, de manière à pouvoir séparer les signaux propres à chaque diffusion à la sortie du détecteur.

local sur le détecteur, ont alors des décalages fréquentiels distincts. On peut alors séparer grâce à des filtres, les informations propres à chaque diffusion, dans le signal émanant du détecteur.

Le système de focalisation par une lentille des faisceaux vers la zone de mesure est identique à celui vu au chapitre 1. Le faisceau OL est fixe. Il passe toujours par le centre de la lentille. Les deux primaires peuvent balayer une partie de la surface de la lentille, pour modifier les vecteurs d'onde de diffusion.

Pour l'un des primaires, un système de rotation-translation permet de modifier sa position à volonté, en conservant son orientation à l'entrée de la lentille de focalisation. Le faisceau qui sort de ce rotateur-translateur ne doit pas rencontrer d'obstacle pour atteindre la lentille. Cette contrainte rend plus difficile le montage du second primaire. Le support du miroir qui oriente ce second faisceau doit entourer la zone où se propage le premier faisceau.

3.1.2 Caractéristiques techniques

Le banc optique bidiffusif mis au point pour cette étude utilise lui aussi un laser infrarouge à CO_2 , monomode, continu de puissance 5 *Watt*.

Électronique

Deux défecteurs acousto-optiques (DAO) sont utilisés. L'un fonctionne à 45 *MHz*, l'autre à 40 *MHz*. Le premier est alimenté à haute puissance (de l'ordre de 30 *Watt*), pour séparer le faisceau laser en deux primaires de puissance comparable. Le premier faisceau primaire a la même fréquence que le laser. Le second est décalé de 45 *MHz*. Le faisceau OL est créé en sortie du second défecteur. Il a pour décalage fréquentiel, 85 *MHz*.

Les battements entre les deux champs diffusés et le faisceau OL, ont comme décalage fréquentiel, pour le premier, 85 *MHz*, et le second 40 *MHz*.

En ce qui concerne la démodulation, pour le premier signal, il faudra multiplier le signal provenant du détecteur par un battement entre les deux oscillateurs source des défecteurs, formant ainsi un signal de référence à la fréquence (40+45) *MHz*. Le second signal est multiplié par un signal harmonique à la fréquence oscillateur (40 *MHz*).

On utilise la double démodulation en quadrature de phase, comme au chapitre 1, pour récupérer l'information complexe de la diffusion.

Le schéma électronique qui permet d'aboutir à ce résultat est donné en figure 3.2

Optique

Concernant la partie optique, l'alignement des faisceaux en entrée de la lentille de focalisation sur la zone de mesure est délicat. Un dispositif de rotation translation dirige comme on le désire ce faisceau du premier primaire. L'alignement du second primaire est plus complexe, car il peut gêner l'autre faisceau. On s'est donc limité à un simple dispositif de translation. En conséquence, le vecteur de diffusion pour ce faisceau, ne peut être qu'horizontal.

CIRCUIT ELECTRIQUE

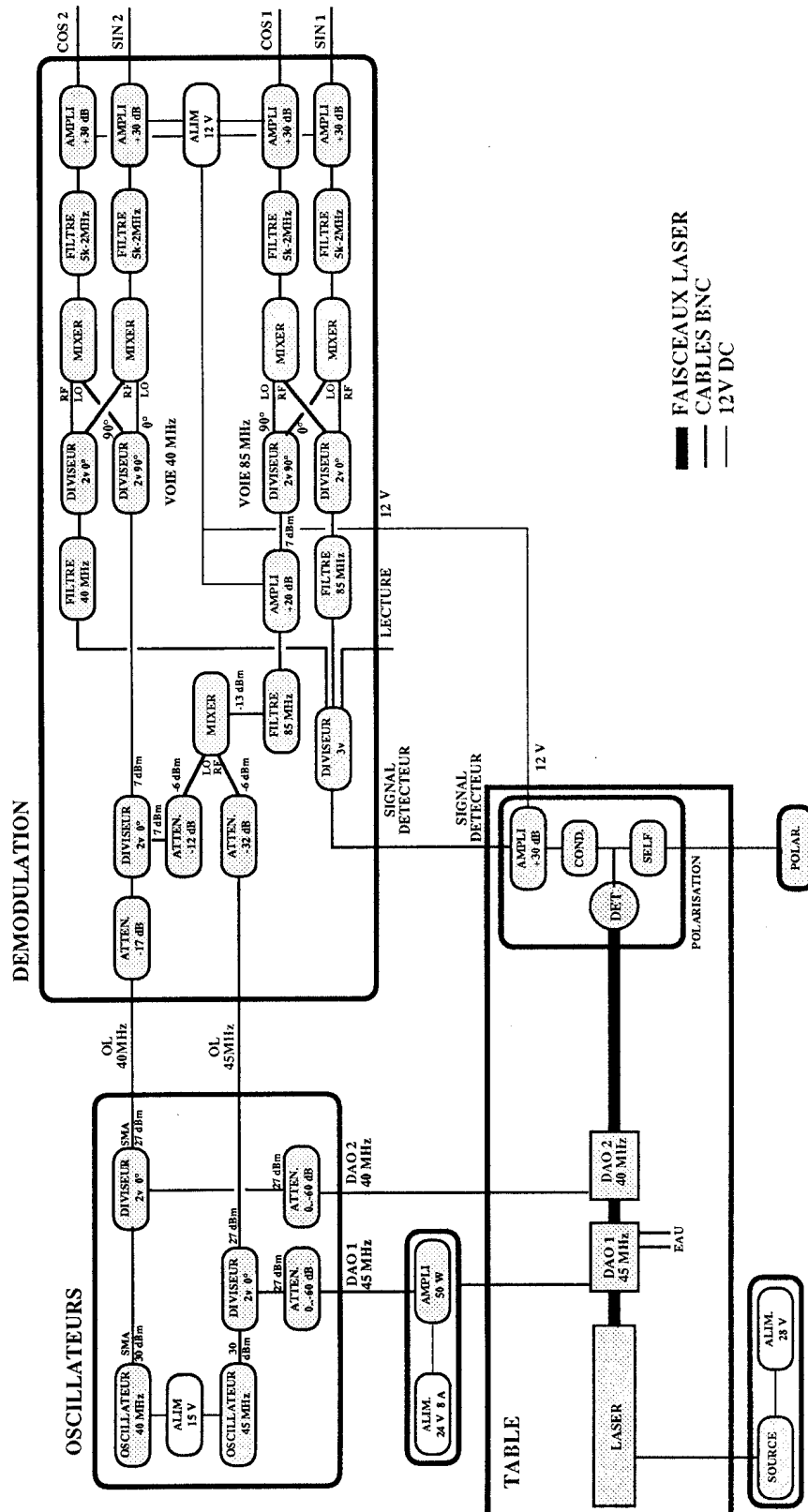


FIG. 3.2 – Éléments électroniques nécessaires pour moduler les faisceaux, puis séparer et démoduler les signaux propres à chaque diffusion à la sortie du détecteur.

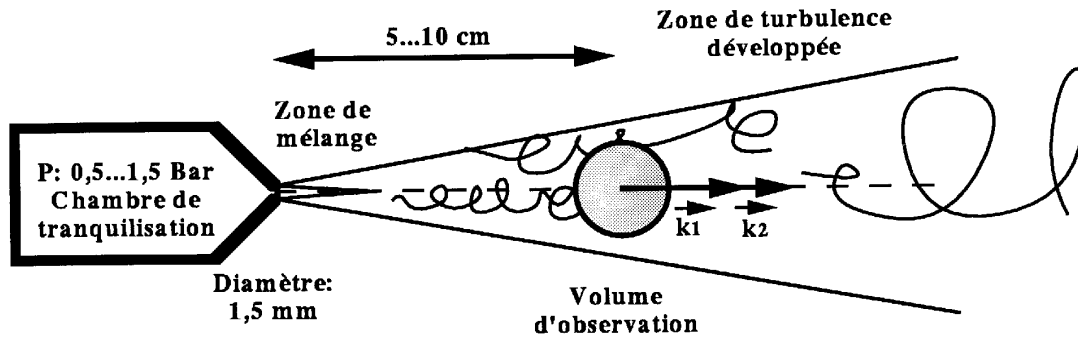


FIG. 3.4 – Jet d'air : L'observation est faite dans la zone de turbulence développée. Dans les mesures présentées, les vecteurs d'onde d'observation seront toujours parallèles à l'écoulement.

Le dispositif permet d'atteindre des angles de 8 à 40 *mrad* pour les deux voies, c'est à dire des longueurs d'onde comprises entre 0,25 et 1,25 *mm*. De manière à conserver une bonne définition en nombre d'onde, les faisceaux ont un rayon w de 6 *mm* dans la zone de mesure.

La figure 3.3 montre le schéma du montage optique du banc.

3.2 Jet d'air

L'objet étudié pour cette analyse est un jet d'air axi-symétrique. Le schéma est donné en figure 3.4.

De l'air sous une pression de 3 *bar* est régulée par un détendeur qui permet d'atteindre des pressions génératrices de 0 à 1,5 *bar*, au dessus de la pression atmosphérique. Cet air arrive dans une chambre, munie d'une mousse de polystyrène poreux, pour tranquiliser l'air avant l'éjection. Le trou d'éjection est situé à l'apex d'un cône circulaire. Le diamètre de ce trou d'éjection est de 1,5 *mm*.

La zone de mesure est située entre 5 et 10 *cm* en aval, sur l'axe du jet. Ces distances, supérieures à trente fois le diamètre du jet, assurent que la turbulence est développée dans la zone de mesure. Pour ces positions, le diamètre du jet est de 1 et 2 *cm*, respectivement.

Les vecteurs d'onde de diffusion seront parallèles à l'axe du jet.

Comme la zone de mesure traverse tout le jet, l'inconvénient de cet écoulement est de ne pas être homogène dans le volume de mesure. L'observation intègre le signal issu de zones de caractéristiques différentes. Cependant, les zones où les fluctuations de densité sont les plus fortes auront le plus de poids. Elles correspondent au centre du jet.

Des essais ont été effectués sur une turbulence plus homogène : On a utilisé une soufflerie à basse vitesse avec écoulement à travers une grille. Malheureusement, il apparaissait deux problèmes importants : La turbulence n'était pas suffisamment forte pour avoir un bon rapport signal sur bruit, à toutes les échelles. De plus, cet écoulement

transporte des poussières qui compliquent l'analyse des signaux, car ces poussières donne de la lumière diffusée simultanément à toutes les échelles.

3.3 Information mutuelle

On va maintenant présenter les outils utilisés pour traiter les relations entre les signaux pour deux échelles distinctes.

Deux méthodes ont été mises en œuvre : l'intercorrélacion et l'information mutuelle.

La seconde méthode étant moins répandue que la première, on va l'exposer plus en détail.

3.3.1 Théorie de l'information

La notion d'information mutuelle a été développée dans le cadre de la théorie de la communication, née au milieu du siècle. Les précurseurs en sont W. Weaver & C.E. Shannon [41]. Leurs concepts ont été repris et développés par la suite [42, 43, 44, 45]. Cette théorie part du concept de l'entropie statistique.

On va exposer quelques idées propres à W. Weaver & C.E. Shannon, car elles apportent un éclairage original sur l'entropie.

Entropie et information

Weaver et Shannon s'intéressent à la transmission du langage : Une langue est composée de caractères ($A, B, C, D\dots$). On veut transmettre ces caractères par un canal. Pour cela, un message composé de caractères, est codé sous forme de bits (0, 1). Le but de l'étude est de déterminer comment optimiser la transmission de ces bits : Quel minimum de longueur de message codé en bit peut-on atteindre, en choisissant correctement le codage des caractères ?

Pour cette étude, ils définissent le langage, de la manière la plus simple, par la loi de probabilité des caractères qui le composent :

$$p_i \quad i = A, B, C, D \dots \quad (3.1)$$

Ils définissent l'information de ce langage, comme l'entropie de cette loi de probabilité.

$$S_I = - \sum_i p_i \ln(p_i) \quad (3.2)$$

La juxtaposition de la notion d'information et celle d'entropie peut paraître étrange, car on associe généralement la notion d'entropie à celle de désordre. En fait, ici, l'entropie permet de quantifier quelle liberté de choix, donc quelle quantité d'information, on peut avoir pour chaque caractère utilisé.

En effet, le nombre de caractères ne suffit pas à déterminer la quantité de choix que l'on a par caractère. Pour un même nombre de caractères présents dans le langage, une langue où ceux-ci sont équiprobables, laisse beaucoup plus de choix à l'écriture :

$$A : p_A = 0.5 \quad B : p_B = 0.5 \quad (3.3)$$

Un message type dans ce langage est :

$$ABBABABBAABBAABABBABBAA \dots \quad (3.4)$$

Une langue où certains caractères sont beaucoup plus utilisés que d'autres, laisse beaucoup moins de liberté :

$$A : p_A = 0.9 \quad B : p_B = 0.1 \quad (3.5)$$

Message type :

$$AAAAAAAAAABAAAAAAAAABAAAA \dots \quad (3.6)$$

L'entropie prend en compte ce phénomène : Dans le premier cas celle-ci vaut 0,69, dans le second, 0,37.

Le problème de la transmission permet d'approfondir cette idée. L'entropie y intervient aussi. Le code le plus court pour transmettre un message utilisera une longueur proportionnelle à l'entropie de la loi de probabilité du langage :

Dans le premier exemple, celui des caractères équiprobables, le code optimal utilise un bit par caractère :

$$A : 0 \quad B : 1 \quad (3.7)$$

Pour le second exemple, certains codes sont plus efficaces que ce code simple : $A : 0 \quad B : 1$. On peut choisir un code sur trois lettres :

$$\begin{array}{llll} AAA : 0 & AAB : 100 & ABA : 101 & BAA : 110 \\ ABB : 11100 & BAB : 11101 & BBA : 11110 & BBB : 11111 \end{array} \quad (3.8)$$

Ce code est bien sans équivoque : À un code ne correspond qu'un seul message.

En prenant en compte la probabilité de chaque caractère, le nombre moyen de bit utilisé par caractère est 0,54. Ce code s'approche du code optimal. Le rapport des nombres de bits utilisés par caractère, entre ces deux exemples (0,54/1), est bien à peu près le même que celui des entropies (0,37/0,69).

Cette approche permet de se faire une idée plus précise de ce que mesure l'entropie d'une distribution de probabilité.

Information mutuelle

La notion d'information mutuelle est définie à partir d'une loi de probabilité croisée de deux variables i, j :

$$p_{ij} \quad i, j = 1 \dots B \quad (3.9)$$

Les lois de chaque variable considérée séparément, sont :

$$p_{i.} = \sum_j p_{ij} \quad p_{.j} = \sum_i p_{ij} \quad (3.10)$$

On peut donc définir à partir de là, trois informations (ou entropie) différentes. Celle de la loi globale :

$$S_{IJ} = - \sum_{ij} p_{ij} \ln(p_{ij}) \quad (3.11)$$

et celle de chacune des deux variables séparées :

$$S_I = - \sum_i p_{i.} \ln(p_{i.}) \quad (3.12)$$

$$S_J = - \sum_j p_{.j} \ln(p_{.j}) \quad (3.13)$$

On peut alors montrer quelques relations entre ces quantités. Elles sont des conséquences de la convexité de la fonction logarithmique. Tout d'abord, l'information pour une variable est toujours inférieure à l'information globale :

$$S_I \leq S_{IJ} \quad (3.14)$$

Mais aussi la loi globale ne peut contenir plus d'information que n'en contient la somme de chacune de ses composantes.

$$S_{IJ} \leq S_I + S_J \quad (3.15)$$

De plus, on montre qu'il y a égalité pour cette relation si et seulement si les deux variables sont statistiquement indépendantes :

$$S_{IJ} = S_I + S_J \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j \quad p_{ij} = p_{i.} p_{.j} \quad (3.16)$$

On définit alors l'information mutuelle comme la différence entre les membres de l'inégalité 3.15.

$$I_{IJ} = S_I + S_J - S_{IJ} \quad (3.17)$$

D'après les deux propriétés que l'on vient de voir (3.14 et 3.15), on peut établir que :

$$0 \leq I_{IJ} \leq \min(S_I, S_J) \quad (3.18)$$

De plus, l'information mutuelle est nulle si et seulement si les variables sont indépendantes. Enfin, elle est égale à l'information de l'une ou l'autre des variables si celles-ci sont totalement liées ($\forall i \neq j \quad p_{ij} = 0$).

3.3.2 Biais et variance

Cette notion d'information mutuelle va donc être appliquée à deux signaux issus de la diffusion collective.

Estimateur

Les lois de probabilité vont être approchées par les histogrammes construits à partir des données, en quantité finie, sur un nombre fini de cases.

Initialement, on possède donc N données :

$$(a_n, b_n) \quad n = 1 \cdots N \quad (3.19)$$

On construit l'histogramme des variables, séparément et conjointement, en rangeant les valeurs prises par chacune sur B intervalles : $[a_0 a_1[$, $[a_1 a_2[$, ..., $[a_{B-1} a_B[$, et, $[b_0 b_1[$, $[b_1 b_2[$, ..., $[b_{B-1} b_B[$.

n_{ij} est le nombre de fois que où les conditions $a_{i-1} \leq a_n < a_i$ et $b_{j-1} \leq b_n < b_j$ sont conjointement vérifiées.

$n_{i.}$ et $n_{.j}$ sont les histogrammes de chaque variable séparée : $n_{i.}$ est le nombre de fois que où a_n est dans l'intervalle $[a_{i-1} a_i[$. $n_{.j}$ est le nombre de fois que où b_n est dans l'intervalle $[b_{j-1} b_j[$. Donc :

$$n_{i.} = \sum_j n_{ij} \quad n_{.j} = \sum_i n_{ij} \quad i, j = 1 \cdots B \quad (3.20)$$

On a bien sûr :

$$\sum_{ij} n_{ij} = \sum_i n_{i.} = \sum_j n_{.j} = N \quad (3.21)$$

Les lois de probabilité approchées sont alors estimées par :

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{N} \quad \tilde{p}_{i.} = \frac{n_{i.}}{N} \quad \tilde{p}_{.j} = \frac{n_{.j}}{N} \quad (3.22)$$

L'entropie ainsi estimée vaut alors :

$$\tilde{S}_I = - \sum_i \frac{n_{i.}}{N} \ln \frac{n_{i.}}{N} \quad (3.23)$$

Pour l'information mutuelle, le résultat est :

$$\tilde{I}_{IJ} = - \sum_i \frac{n_{i.}}{N} \ln \frac{n_{i.}}{N} - \sum_j \frac{n_{.j}}{N} \ln \frac{n_{.j}}{N} + \sum_{ij} \frac{n_{ij}}{N} \ln \frac{n_{ij}}{N} \quad (3.24)$$

Cette estimation des lois de probabilité, par un échantillon de taille finie, va introduire un biais et une variance dans la mesure de l'information mutuelle.

Le calcul de ces corrections a été obtenu par R. Moddemeijer [45], et par S. Carpentier [46]. On va seulement exposer les principales étapes de ces raisonnements, et les résultats obtenus.

Biais

Le biais est la différence entre l'espérance de l'information mutuelle établie à partir d'un nombre fini de points, et sa valeur théorique.

On se donne une loi de probabilité quelconque, pour une variable :

$$p_i \quad i = 1 \cdots B \quad (3.25)$$

On cherche alors la valeur moyenne, en probabilité, de l'entropie que l'on va trouver en approchant la loi de probabilité par un tirage aléatoire de N valeurs de cette variable. On va faire ce calcul en se plaçant dans la limite où N est grand pour pouvoir appliquer la loi des grands nombres.

La probabilité de trouver la valeur n pour la case i de l'histogramme de la variable est alors donnée par :

$$P_i(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(1-p_i)p_i}} e^{-\frac{1}{2p_i(1-p_i)}(\frac{n}{N}-p_i)^2 N} \quad (3.26)$$

L'entropie approchée a alors pour valeur moyenne :

$$\langle \tilde{S}_I \rangle = \sum_{\{n_i\}} P_1(n_1) \cdots P_B(n_B) \left[- \sum_i \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} \right] \quad (3.27)$$

$\sum_{\{n_i\}}$ est une somme qui porte sur toutes les distributions d'entiers $\{n_i\}$ qui vérifient $\sum_i n_i = N$. Cette expression peut se simplifier, si N est suffisamment grand :

$$\langle \tilde{S}_I \rangle = - \sum_i \sum_{n_i} P_i(n_i) \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} \quad (3.28)$$

En effectuant un développement limité (pour N tendant vers l'infini), autour de la valeur la plus probable de n_i/N , c'est à dire p_i , on trouve :

$$\langle \tilde{S}_I \rangle = S_I - \frac{B-1}{2N} \quad (3.29)$$

Ce calcul s'applique aussi à l'entropie conjointe des deux variables. La seule différence est que le nombre de cases n'est plus B mais B^2 .

$$\langle \tilde{S}_{IJ} \rangle = S_{IJ} - \frac{B^2-1}{2N} \quad (3.30)$$

On peut alors en déduire le biais pour l'information mutuelle.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}_{IJ} \rangle &= \langle \tilde{S}_I \rangle + \langle \tilde{S}_J \rangle - \langle \tilde{S}_{IJ} \rangle \\ &= S_I - \frac{B-1}{2N} + S_J - \frac{B-1}{2N} - S_{IJ} + \frac{B^2-1}{2N} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le biais du calcul donne alors :

$$\langle \tilde{I}_{IJ} \rangle - I_{IJ} = \frac{(B-1)^2}{2N} \quad (3.32)$$

Ce biais, bien sûr, diminue quand la statistique, N , augmente. Mais plus étrangement, ce biais augmente avec le nombre de cases choisi pour faire les histogrammes. Il n'est donc pas toujours intéressant de choisir une résolution maximale.

Le biais n'est pas gênant une fois qu'il est connu, puisqu'il ne dépend pas de la loi de probabilité des variables. Il ne fait qu'induire un décalage dans la mesure. Sans le connaître, on peut même le déterminer empiriquement, en calculant l'information

mutuelle à partir de deux séries de données aléatoires indépendantes. Il suffit de définir une fois pour toute la longueur N et le nombre d'intervalles B , que l'on utilisera par la suite. Il suffit par la suite de soustraire cette valeur, pour éliminer ce biais.

Variance

Le calcul de la variance est plus difficile. Il est aussi plus important, car la variance ne peut être éliminée, puisqu'elle délimite un intervalle de confiance de la mesure.

En partant des mêmes considérations que le calcul précédent, et en considérant pareillement la limite des grandes valeurs de N , le premier ordre du développement du calcul de la variance de l'entropie donne :

$$\langle \tilde{S}_I^2 \rangle - \langle \tilde{S}_I \rangle^2 = \frac{\sum_i p_i \ln^2 p_i - S_I^2}{N} \quad (3.33)$$

Pour l'information mutuelle, le résultat au premier ordre du développement autour de $N \sim \infty$, est :

$$\langle \tilde{I}_{IJ}^2 \rangle - \langle \tilde{I}_{IJ} \rangle^2 = \frac{\sum_{ij} p_{ij} \ln^2 p_{ij} - \sum_i p_i \ln^2 p_i - \sum_j p_j \ln^2 p_j - I_{IJ}^2}{N} \quad (3.34)$$

Le résultat dépend donc de la distribution de probabilité de la variable, contrairement au biais.

Pour une loi équiprobable, par exemple, ce résultat, limité au premier ordre est nul. Il faudrait alors calculer le second ordre du calcul, laissant augurer que la variance est faible.

Distribution gaussienne

Les résultats pour le cas gaussien vont être exposés plus en détail.

On définit une distribution de probabilité gaussienne : Sa variance est σ .

$$p(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (3.35)$$

La largeur de l'intervalle d'intégration pour la discrétisation est ε .

$$p_i = \int_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} da \quad (3.36)$$

On se placera toujours dans la limite où ε est suffisamment faible pour pouvoir considérer la distribution de probabilité constante sur cet intervalle. On suppose aussi que le nombre de cases N est suffisant pour qu'il n'y est pas d'effet de bord sur les distributions.

L'entropie théorique, vaut :

$$S_I = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{2\pi}\right) \quad (3.37)$$

La variance de la mesure de cette entropie vaut, d'après l'équation 3.33 :

$$\langle \tilde{S}_I^2 \rangle - \langle \tilde{S}_I \rangle^2 = \frac{\sum_i p_i \ln^2 p_i - S_I^2}{N} = \frac{1}{2N} \quad (3.38)$$

Gaussiennes intercorrélées

Le cas de distributions gaussiennes intercorrélées a été étudié par S. Kullback [43].

On considère donc une distribution de probabilité croisée de deux variables, qui soit gaussienne. La distribution continue est :

$$p(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b\sqrt{1-\rho_{ab}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{ab}^2)}\left(\frac{a^2}{\sigma_a^2} - 2\rho_{ab}\frac{ab}{\sigma_a\sigma_b} + \frac{b^2}{\sigma_b^2}\right)} \quad (3.39)$$

σ_a et σ_b sont les variances de chaque variable individuellement. ρ_{ab} est le taux d'intercorrélacion entre les deux variables. On discrétise cette distribution, avec un pas ε :

$$p_{i,j} = \int_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} da \int_{(j-1)\varepsilon}^{j\varepsilon} db \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b\sqrt{1-\rho_{ab}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{ab}^2)}\left(\frac{a^2}{\sigma_a^2} - 2\rho_{ab}\frac{ab}{\sigma_a\sigma_b} + \frac{b^2}{\sigma_b^2}\right)} \quad (3.40)$$

Pour les variables séparément, les lois de probabilité sont :

$$p_{i,\cdot} = \int_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} da \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}} \quad p_{\cdot,j} = \int_{(j-1)\varepsilon}^{j\varepsilon} db \frac{1}{\sigma_b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2\sigma_b^2}} \quad (3.41)$$

L'information mutuelle (équation 3.17), appliquée à cette loi de probabilité ne dépend que de l'intercorrélacion ρ_{ab} :

$$I_{IJ} = -\frac{1}{2} \ln(1 - \rho_{ab}^2) \quad (3.42)$$

La variance de la mesure de cette information mutuelle est calculée depuis l'équation 3.34 :

$$\langle \tilde{I}_{IJ}^2 \rangle - \langle \tilde{I}_{IJ} \rangle^2 = \frac{\rho_{ab}^2}{N} \quad (3.43)$$

Comme l'a remarqué R. Moddemeijer, il est important de constater que dans ce cas, la mesure du coefficient d'intercorrélacion ρ_{ab} , a la même variance si on l'évalue à partir de l'information mutuelle ou par un calcul direct de l'intercorrélacion des signaux. Dans les deux cas :

$$\langle \tilde{\rho}_{ab}^2 \rangle - \langle \tilde{\rho}_{ab} \rangle^2 = \frac{(1 - \rho_{ab}^2)^2}{N} \quad (3.44)$$

3.3.3 Information mutuelle et corrélation

On va donc appliquer cette notion d'information mutuelle ainsi que la corrélation pour étudier les signaux DCL à des échelles différentes.

Variations temporelles de l'information mutuelle et de la corrélation

Il est particulièrement intéressant de connaître l'évolution temporelle de la corrélation et de l'information mutuelle : Ces quantités sont-elles orientées dans le temps, et sur quelle échelle de temps prennent-elles des valeurs non nulles ? On va donc introduire un retard entre les deux signaux étudiés.

Pour la corrélation, cette notion est classique :

$$C_{IJ}(\tau) = \langle \check{a}(t)\check{b}(t+\tau) \rangle \quad (3.45)$$

$\check{a}(t)$ est la valeur normalisée de $a(t)$:

$$\check{a}(t) = \frac{a(t) - \langle a(t) \rangle}{\sigma_a} \quad (3.46)$$

On applique donc la même idée à l'information mutuelle :

$$I_{IJ}(\tau) = I_{a(t),b(t+\tau)} \quad (3.47)$$

L'estimation de l'information mutuelle dépendante du temps, en fonction des séries de données, est obtenue en appliquant le schéma vu plus haut, pour chaque retard τ désiré :

On a accès à deux signaux temporels numérisés, de période d'acquisition t_a :

$$(a_n, b_n) \quad n = 1 \cdots N \quad (3.48)$$

Pour chaque τ , $n_{ij}(\tau)$ est le nombre de fois que où les conditions $a_{i-1} \leq a_n < a_i$ et $b_{j-1} \leq b_{n+\tau/t_a} < b_j$ sont conjointement vérifiées.

$n_{i.}$ et $n_{.j}$ sont les histogrammes de chaque variable séparée. Ils ne dépendent pas de τ . $n_{i.}$ est le nombre de fois où a_n est dans l'intervalle $[a_{i-1}, a_i[$. $n_{.j}$ est le nombre de fois où b_n est dans l'intervalle $[b_{j-1}, b_j[$.

Les lois de probabilité approchées sont estimées par :

$$\tilde{p}_{ij}(\tau) = \frac{n_{ij}(\tau)}{N} \quad \tilde{p}_{i.} = \frac{n_{i.}}{N} \quad \tilde{p}_{.j} = \frac{n_{.j}}{N} \quad (3.49)$$

L'information mutuelle est alors estimée par :

$$\tilde{I}_{IJ}(\tau) = - \sum_i \frac{n_{i.}}{N} \ln \frac{n_{i.}}{N} - \sum_j \frac{n_{.j}}{N} \ln \frac{n_{.j}}{N} + \sum_{ij} \frac{n_{ij}(\tau)}{N} \ln \frac{n_{ij}(\tau)}{N} \quad (3.50)$$

Partie réelle du signal

Une première étude a été effectuée par B. Cabrit [47], en prenant la partie réelle de chacun des signaux acquis, comme statistique pour $a(t)$ et $b(t)$.

Les conditions de cette expérience étaient légèrement différentes de celles que nous avons présentées en début de chapitre. Le schéma est donné en figure 3.5. La turbulence est aussi celle d'un jet axi-symétrique. Mais le système d'observation est différent : Il peut observer trois diffusions simultanées, mais pour une disposition fixe des trois

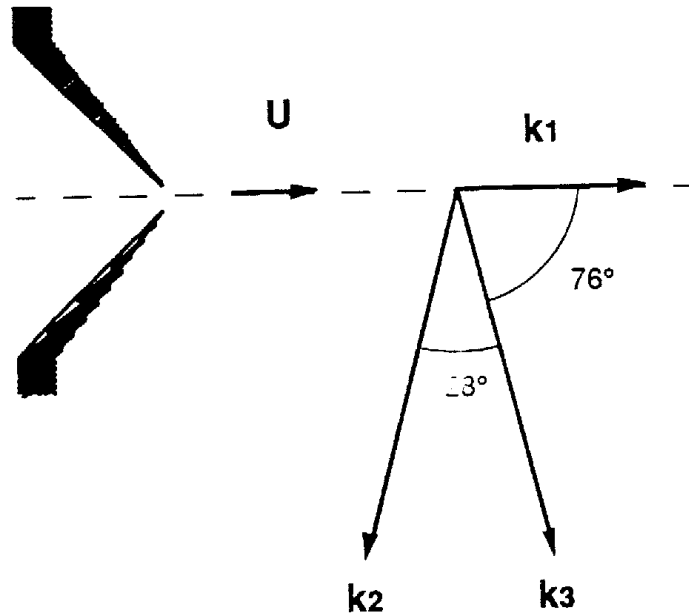


FIG. 3.5 – La zone d’observation est sur l’axe du jet, suffisamment loin pour assurer que la turbulence y soit développée. Les trois vecteurs d’onde d’observation forment les angles indiqués sur la figure. Les nombres d’onde sont les suivants : $k_1 = 11 \text{ rad/mm}$, $k_2 = k_3 = 23 \text{ rad/mm}$.

vecteurs d’onde, indiquée sur la figure. L’expérience a donc permis d’étudier les informations mutuelles et intercorrélations entre chacun des couples que l’on peut former à partir des signaux des trois diffusions : $(F_{k_1}^-, F_{k_2}^-)$, $(F_{k_1}^-, F_{k_3}^-)$, $(F_{k_2}^-, F_{k_3}^-)$.

Les résultats de l’intercorrélacion sont donnés en figure 3.6. On n’observe donc aucune intercorrélacion supérieure à l’écart type de la mesure. Pour l’information mutuelle, le résultat est tout autre (figure 3.7). La figure montre que l’on arrive à détecter une information commune aux deux signaux.

En fait, le résultat sur l’intercorrélacion s’explique par les propriétés de la phase du signal. Comme on l’a vu dans la partie précédente, la fréquence du signal complexe DCL est due aux effets Doppler. Cette fréquence Doppler se retrouve dans la partie réelle. Elle est le produit du nombre d’onde par la vitesse du fluide. Quand on compare deux signaux à deux échelles différentes, les fréquences caractéristiques des deux signaux diffèrent : L’intercorrélacion est donc nulle. Comme le calcul de l’information mutuelle est nonlinéaire, il n’est pas directement sensible à ce phénomène.

La figure montre aussi que la forme de la courbe de l’information mutuelle est sensiblement la même pour les trois couples de longueur d’onde observées : Même amplitude et même largeur.

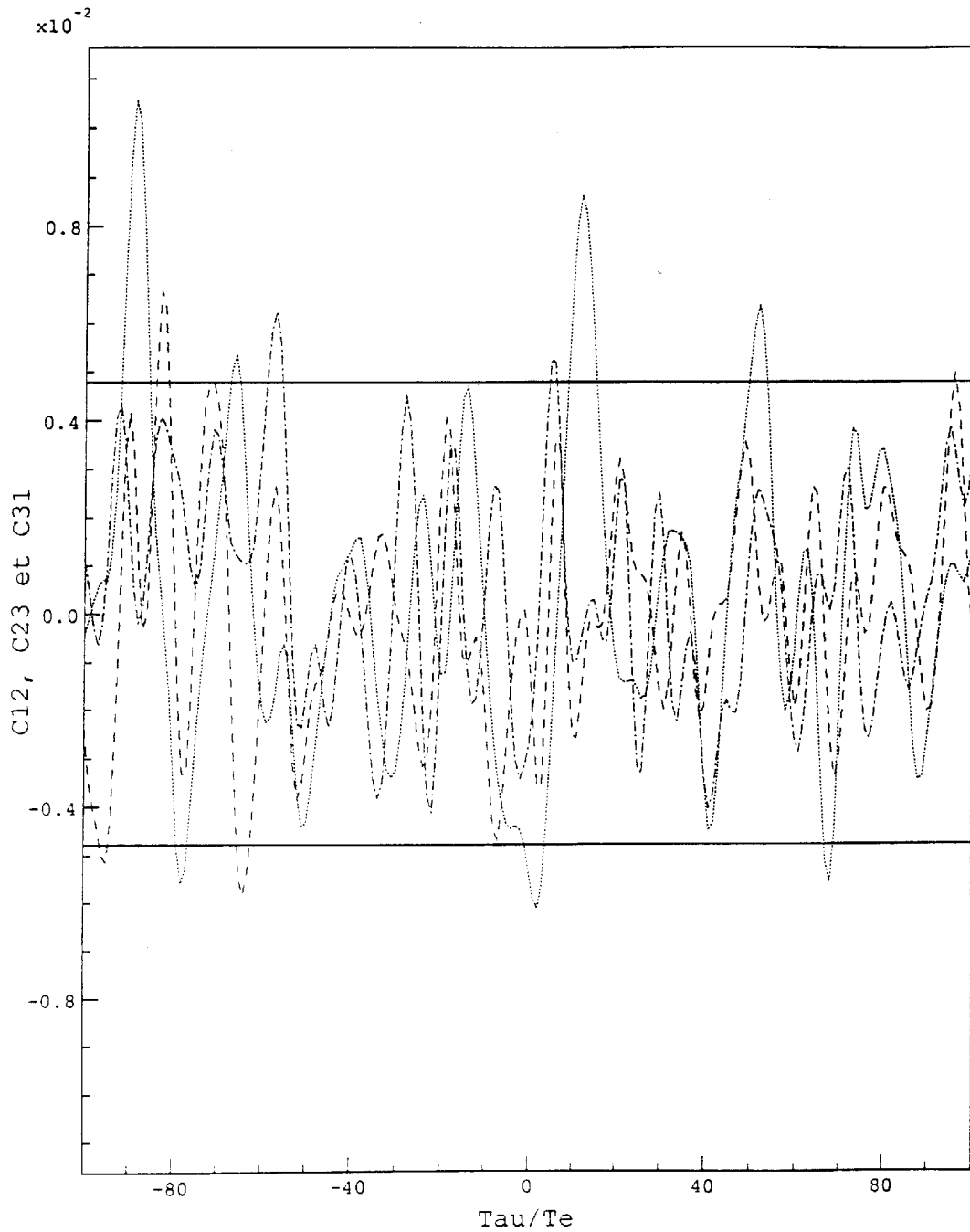


FIG. 3.6 – Taux d'intercorrélation entre parties réelles des signaux DCL. La période d'échantillonnage (ici notée Te) est de $0,64 \mu s$. 400 000 données ont été traitées. Les trois intercorrélations que l'on peut former à partir des trois diffusions mesurées sont montrées : C_{12} (tiretés), C_{23} (pointillés) et C_{31} (tirets-points). Les deux droites d'ordonnée $\pm 5,5 \cdot 10^{-3}$ marquent les bornes de l'intervalle de confiance à 90 % de la variance statistique de l'intercorrélation de deux variables indépendantes.

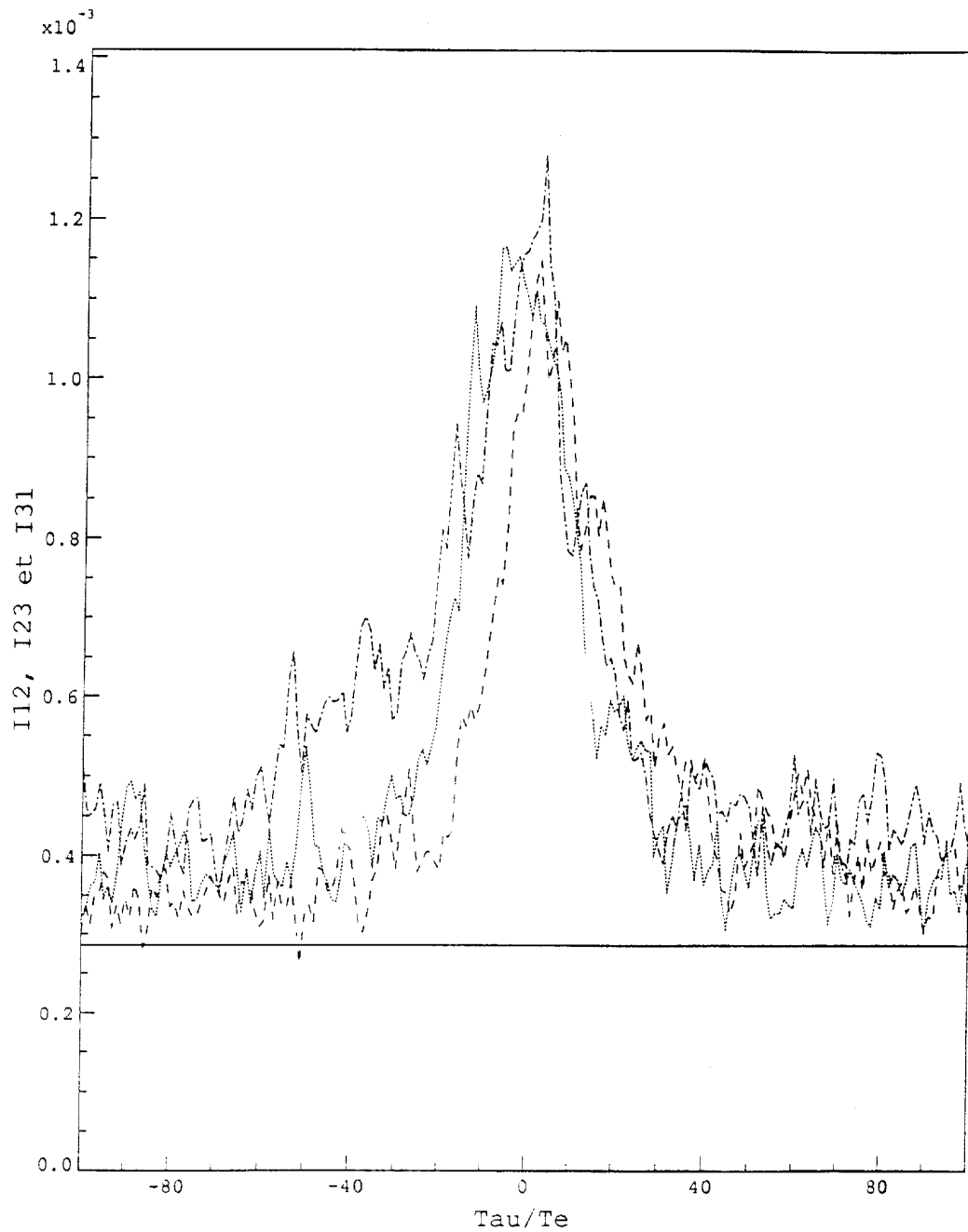


FIG. 3.7 – Information mutuelle entre parties réelles des signaux DCL. Les conditions sont les mêmes que pour la figure 3.6. Les trois courbes correspondantes aux intercorrélations sont représentées : I_{12} (tiretés), I_{23} (pointillés) et I_{31} (tirets-points).

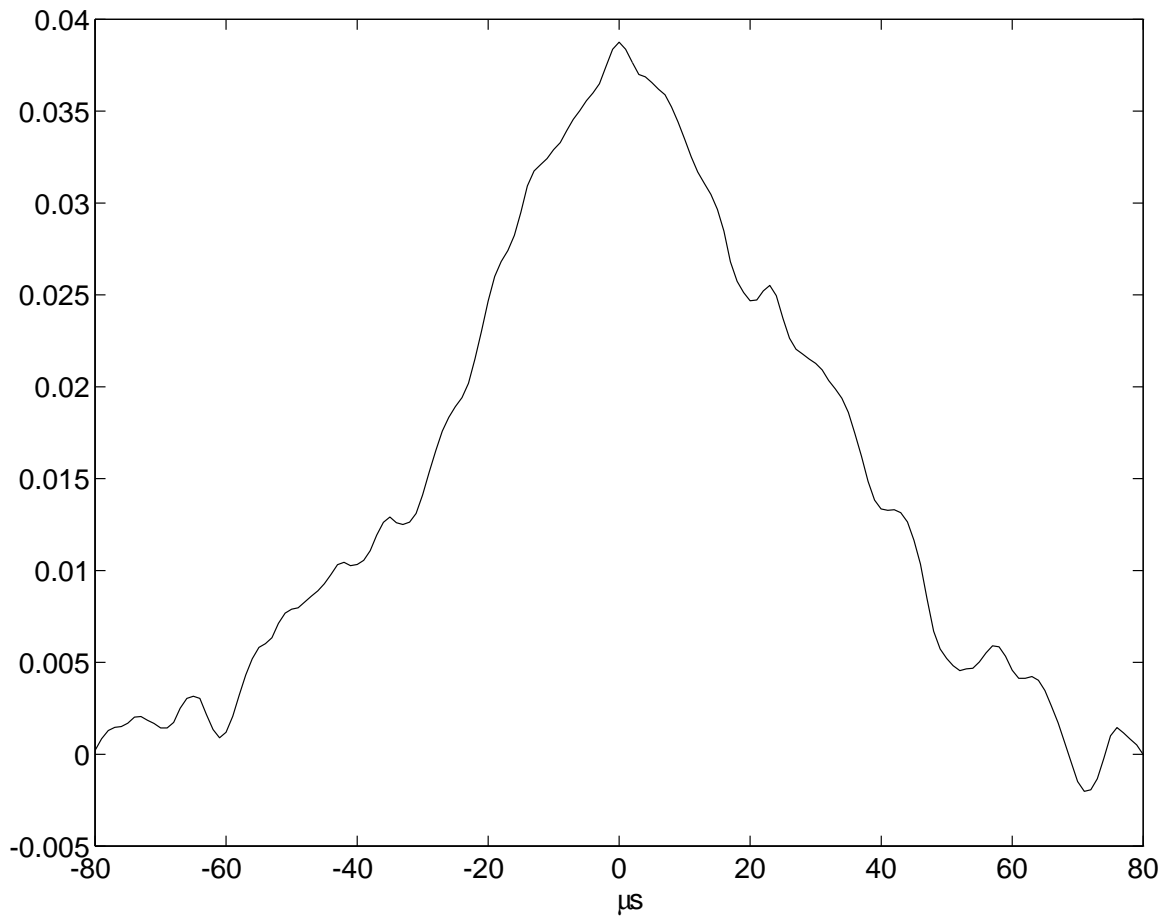


FIG. 3.8 – Taux d'intercorrélacion entre modules. La pression génératrice du jet est de 2 bar. L'observation est faite à 50 mm en aval de la buse. La vitesse moyenne observée dans la zone de mesure est de l'ordre de 90 m/s. Les longueurs d'onde sur chacune des voies sont 0,66 et 1,05 mm. La fréquence d'acquisition est 1 MHz. 1 million de données a été utilisé. L'unité temporelle est la microseconde.

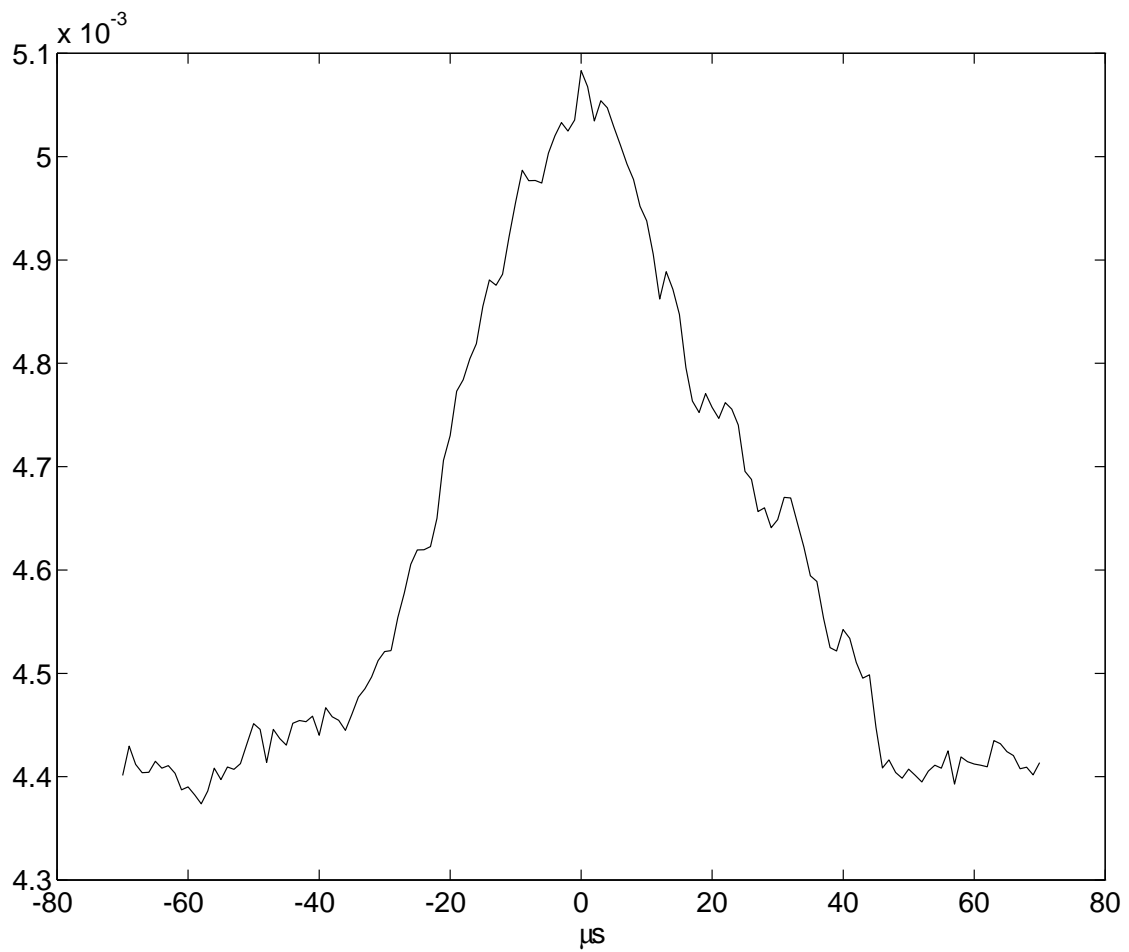


FIG. 3.9 – Information mutuelle entre modules du signal DCL. Les conditions sont les mêmes que pour la figure 3.8. Les signaux ont été discrétisés sur 4 *bits* (16 intervalles).

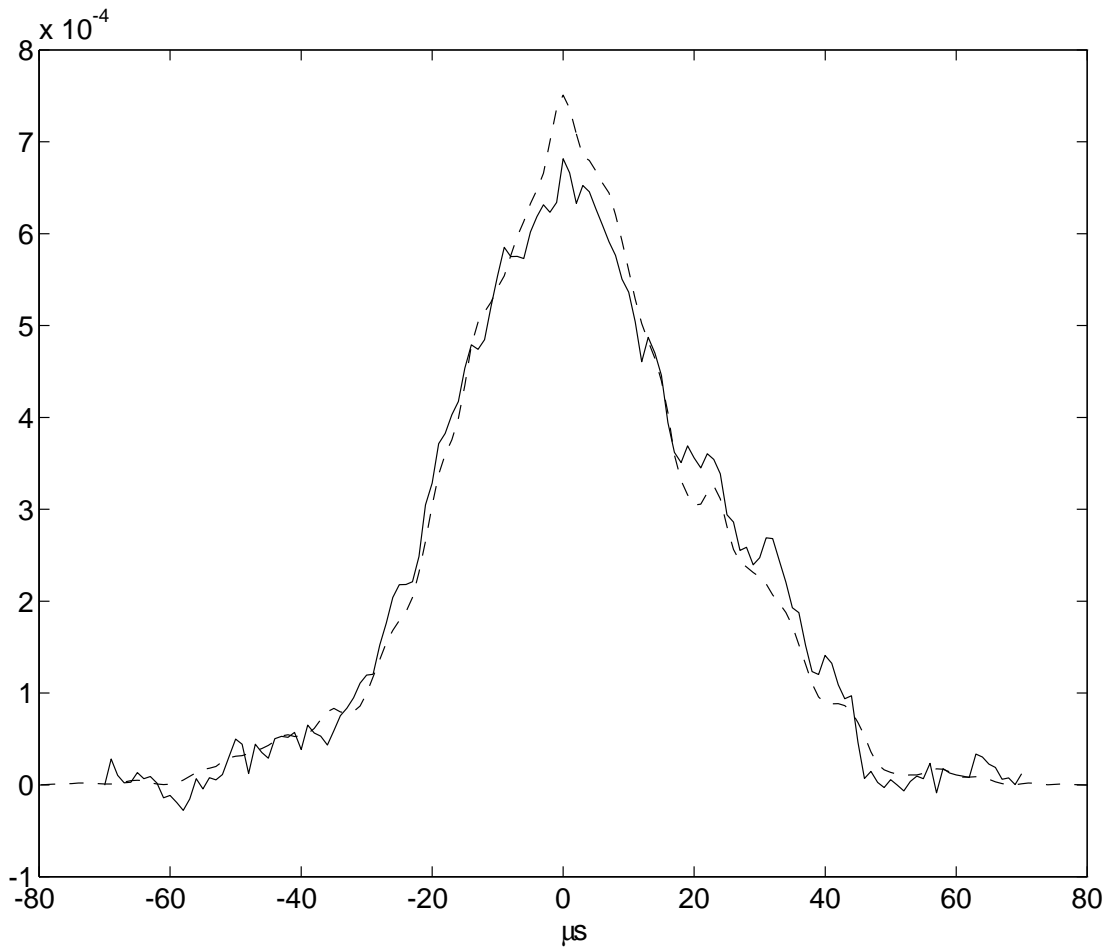


FIG. 3.10 – Cette figure regroupe les deux précédentes (3.8 et 3.9). Le biais a été soustrait sur l'information mutuelle (trait plein). La transformation 3.42 a été appliquée à l'intercorrélacion (trait pointillé).

Module du signal

Ces remarques faites sur l'expérience de B. Cabrit ont amenées à étudier différemment le problème.

Les mesures faites avec le nouveau montage, exposé en début de chapitre, ont utilisé le module du signal, et non plus uniquement sa partie réelle. Cela permet d'éviter l'incidence sur les signaux de la fréquence Doppler, absente dans le module. De plus, comme on l'a vu dans la partie précédente, la phase ne contient pas d'informations propres à l'échelle, si ce n'est par la relation Doppler ($\omega = -\vec{k} \cdot \vec{v}$).

Avec le nouveau dispositif optique, on obtient des résultats différents : figure 3.8 pour l'intercorrélacion de l'amplitude et 3.9 pour l'information mutuelle. Pour l'amplitude, cette fois-ci l'intercorrélacion est détectable, et, elle présente la même forme que l'information mutuelle.

On peut alors se demander si la relation entre l'intercorrélacion et l'information mutuelle n'est pas celle prévue pour des variables gaussiennes (équation 3.42). La figure 3.10 montre la comparaison entre l'information mutuelle à laquelle on a soustrait les biais, et l'intercorrélacion à laquelle on a appliqué la transformation 3.42. La superposition des deux courbes montre que cette hypothèse de corrélation gaussienne est tout à fait plausible.

L'information mutuelle ne semble donc pas apporter de nouveaux résultats par rapport à la corrélation, pour l'analyse du module. Par la suite, on se limitera à un calcul de corrélation, beaucoup plus économe en temps de calcul.

3.4 Corrélation du signal

On va donc s'intéresser de manière plus approfondie à la forme des intercorrélacions entre modules du signal. L'autocorrélacion sera conjointement étudiée.

Dans toute la suite, sauf indication contraire, la fréquence d'acquisition est de 5 MHz. Chaque calcul utilise 4 millions de points d'acquisition (parties réelle et imaginaire).

3.4.1 Forme générale des courbes

Toutes les courbes que nous avons pu observer avaient les formes typiques des courbes suivantes.

La figure 3.11 montre celle de l'autocorrélacion du module. Il apparaît deux échelles de temps distinctes. La corrélation décroît tout d'abord sur une échelle de temps court τ_c , de l'ordre de quelques microsecondes. Cela concerne environ 95 % de l'amplitude de l'autocorrélacion. Le reste est corrélé sur une échelle plus longue τ_l , de l'ordre de quelques dizaines de microsecondes.

L'intercorrélacion (figure 3.12), montre que seule l'échelle de temps longue subsiste, avec le même ordre de grandeur de taux de corrélation (environ 5 %). Il faut préciser que ce taux d'intercorrélacion est, par définition, relatif : Il est exprimé en proportion de l'écart type des modules, puisque les variables ont été normalisées.

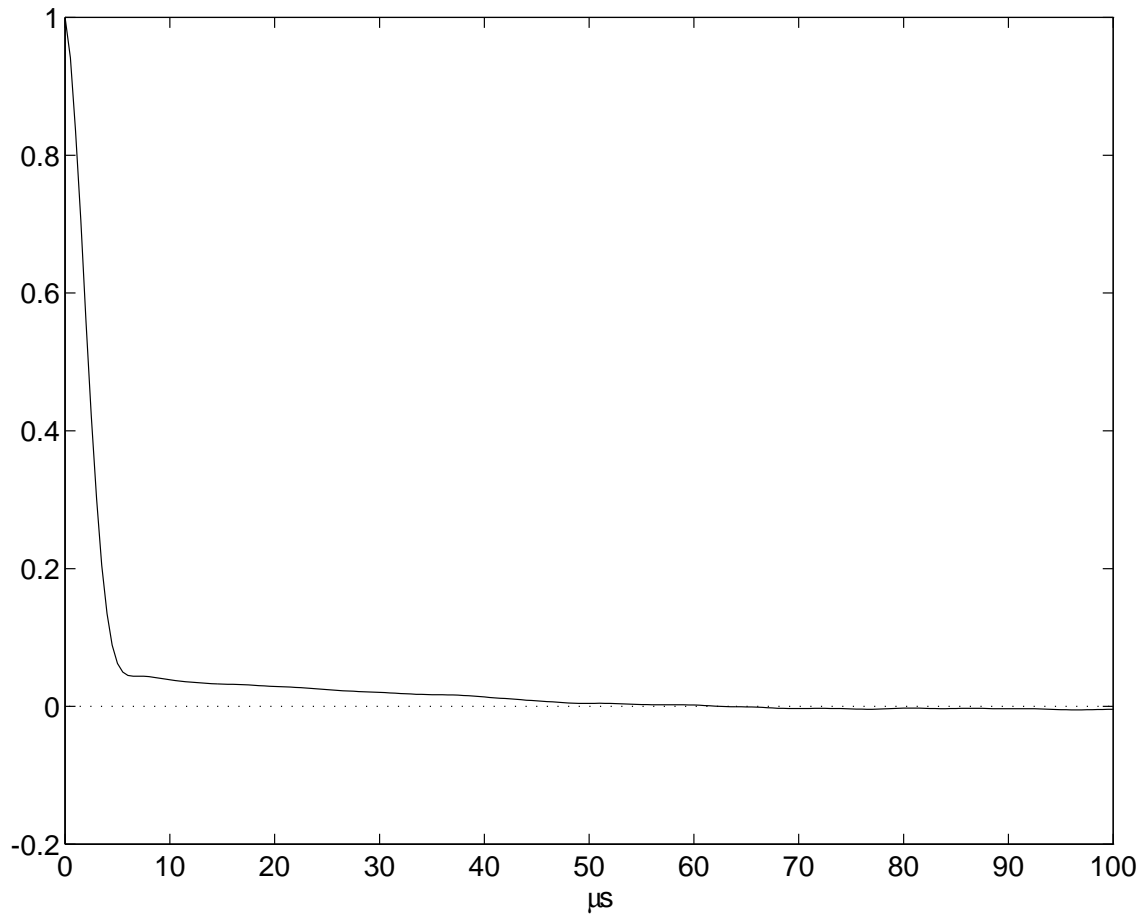


FIG. 3.11 – Autocorrélation typique du module du signal DCL. La pression génératrice est 1,5 *bar*. La position est 50 *mm* en aval de la buse. La longueur d'onde d'observation est 0,66 *mm*. Il apparaît clairement deux échelles de temps : une échelle courte de l'ordre de quelques microsecondes, suivie d'une trainée de quelques dizaines de microsecondes.

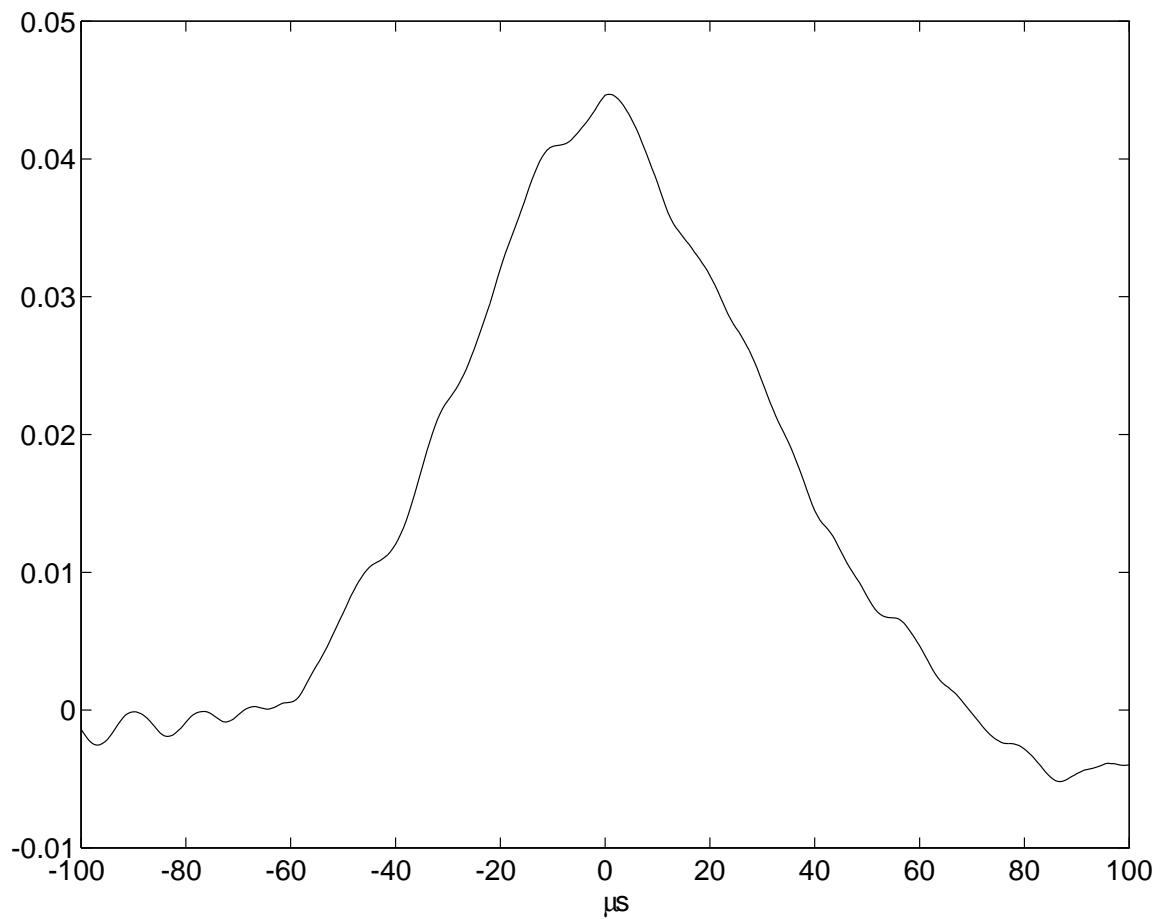


FIG. 3.12 – Intercorrélation typique du module du signal DCL. Conditions identiques à la figure 3.11. Les longueurs d'onde comparées sont 0,66 et 1,32 *mm*.

On n'observe aucun décalage temporel de la courbe, qui pourrait indiquer une orientation temporelle de la corrélation. Le transfert entre échelle n'est donc pas orienté dans le temps. De quelle nature est cette information commune? Est-ce des petites structures observées à toutes les échelles? Est-ce des variations sur des périodes de temps relativement longues qui touchent toutes les échelles en même temps?

Pour apporter une réponse à ces questions, on va déterminer comment varient ces échelles de temps, en fonction des grands paramètres de la turbulence : la vitesse caractéristique (c.a.d., celle de l'écoulement au centre du jet, à la position de l'observation), et l'échelle intégrale (le diamètre du jet à la même position). On cherchera quelle loi de puissance approche le mieux les variations observées : le but étant simplement de voir si ces corrélations peuvent résulter d'une analyse simplifiée de l'écoulement.

3.4.2 Temps court et autocorrélation

Trois types d'expériences ont été menées. Soit l'échelle d'observation était modifiée, soit la pression génératrice du jet était modifiée, pour faire varier la vitesse moyenne, ou enfin, la buse du jet était déplacée par rapport au point d'observation, pour faire varier l'échelle intégrale de la turbulence.

Les mesures de temps caractéristiques sont obtenues en approchant la courbe par une gaussienne (forme assez proche des courbes observées, sauf pour les petites échelles, où on se rapproche d'une exponentielle). Le temps caractéristique pris en compte est alors l'écart type de cette gaussienne.

On a déjà remarqué que l'autocorrélation du module décroît sur un temps caractéristique de l'ordre de quelques microsecondes. On va maintenant en étudier les variations en fonction des paramètres de la turbulence.

Échelle observée λ

Lors de la première série d'observation, on a fait varier le nombre d'onde de diffusion. L'observation se situait à 50 mm de la buse. A cette position, l'échelle intégrale, choisie comme étant le diamètre du jet, vaut 10,8 mm (la limite du jet est fixée par la condition que la vitesse moyenne est supérieure à 1 % de celle sur l'axe du jet). La pression génératrice est de 1 bar. La vitesse moyenne observée est de l'ordre de 50 m/s. La figure 3.13 montre les courbes de corrélation pour des longueurs d'onde de diffusion différentes. Le tableau suivant donne les valeurs des temps caractéristiques en fonction de la longueur d'onde :

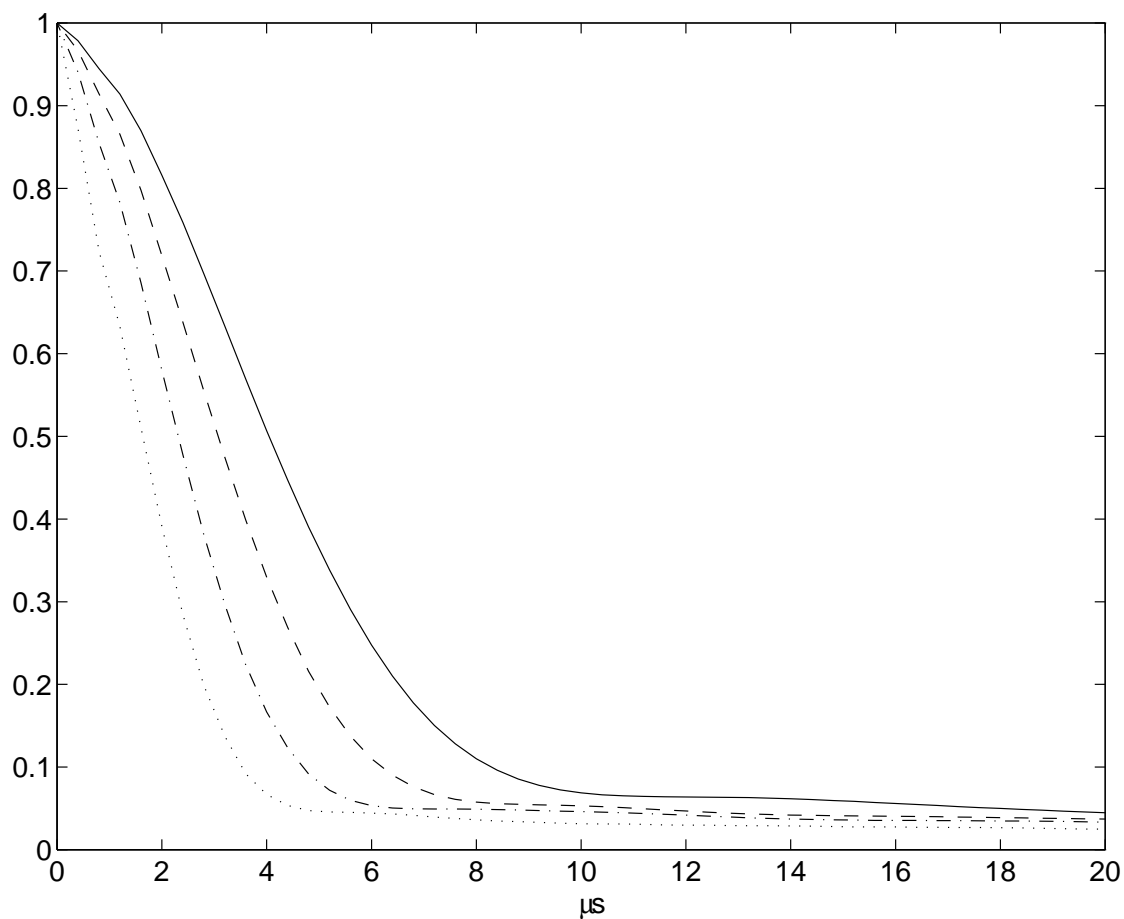
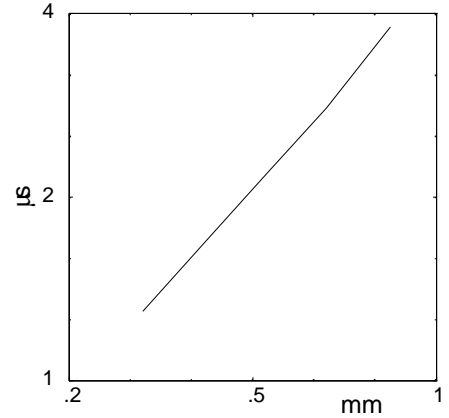


FIG. 3.13 – Autocorrélations pour différentes échelles observées : Les longueurs d'onde correspondant à chaque courbe sont : 0,84 mm (trait plein), 0,67 mm (tiretets), 0,53 mm (tirets-points) et 0,42 mm (pointillés).

λ (mm)	$\langle v_o \rangle$ (m/s)	L (mm)	τ_c (μs)
0,33	50	10,8	1,3
0,42			1,7
0,53			2,2
0,67			2,8
0,84			3,8



Le graphe ci-dessus représente les données en échelle logarithmique. Le temps caractéristique semble donc quasiment proportionnel à l'échelle observée :

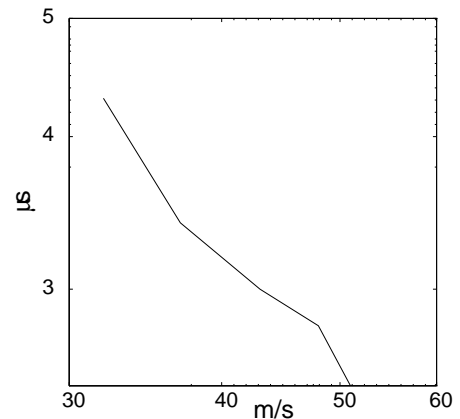
$$\tau_c \propto \lambda^{+1,15 \pm 0,2} \quad (3.51)$$

Vitesse moyenne $\langle v_o \rangle$

La figure 3.14 et le tableau ci-dessous montrent les résultats, lorsque l'on fait varier la pression du jet, de 0,5 à 1,3 bar. La vitesse présentée est calculée à partir de la fréquence Doppler moyenne du spectre du signal DCL. Comme le signal est plus intense au centre du jet, cette vitesse correspond à peu près à celle de la position sur l'axe.

La position est toujours 50 mm en aval de la buse. La longueur d'onde observée est 0,66 mm.

λ (mm)	P (bar)	$\langle v_o \rangle$ (m/s)	L (mm)	τ_c (μs)
0,66	0,5	32	10,8	4,3
	0,7	37		3,4
	0,9	43		3,0
	1,1	48		2,8
	1,3	51		2,5



Ces résultats, représentés en échelle logarithmique sur le graphe, montrent donc que le temps caractéristique varie à peu près comme l'inverse de la vitesse moyenne :

$$\tau_c \propto \langle v_o \rangle^{-1,15 \pm 0,3} \quad (3.52)$$

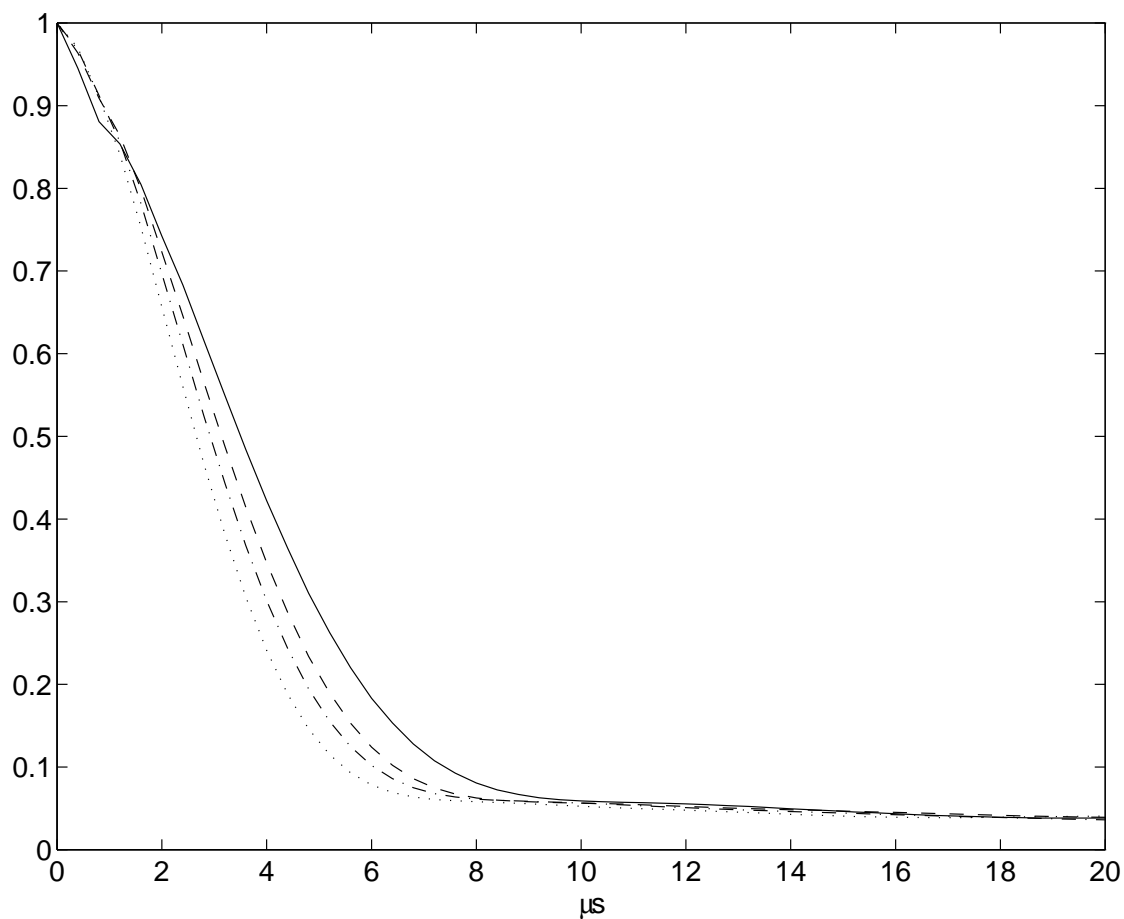


FIG. 3.14 – Autocorrélations pour différentes vitesses moyennes : Les vitesses correspondant à chaque courbe sont : 37 m/s (trait plein), 43 m/s (tiretets), 48 m/s (tirets-points) et 51 m/s (pointillés). L'échelle d'observation est $\lambda = 0,66 \text{ mm}$.

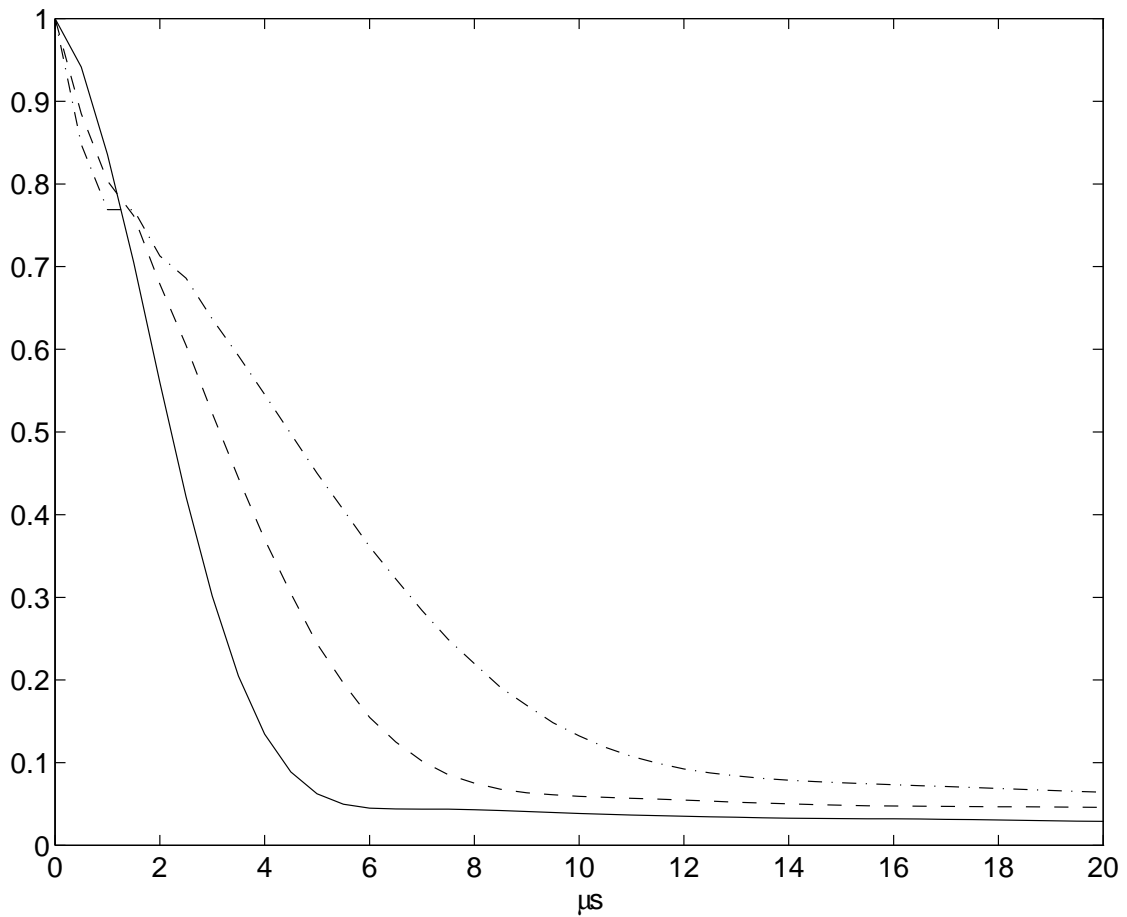


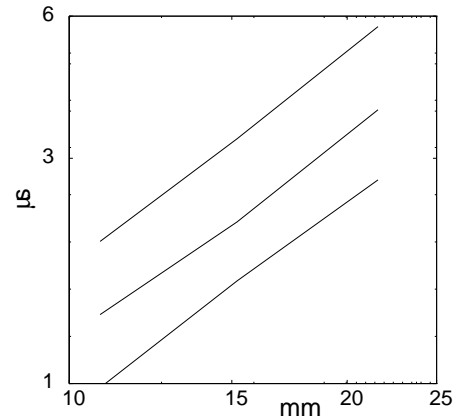
FIG. 3.15 – Autocorrélations pour différentes échelles intégrales : Les échelles correspondant à chaque courbe sont : $10,8 \text{ mm}$ (trait plein), $15,2 \text{ mm}$ (tiretets) et $21,6 \text{ mm}$ (tirets-points). La longueur d'onde de diffusion est $0,66 \text{ mm}$. Pour les grandes échelles intégrales, la forme pour les temps courts change : elle se rapproche d'une exponentielle.

Échelle intégrale L

Pour l'étude en fonction de l'échelle intégrale, la mesure est plus complexe car lorsque l'on déplace le point de mesure, pour changer l'échelle intégrale L , la vitesse $\langle v_o \rangle$ est modifiée dans les proportions inverses (le produit $\langle v_o \rangle L$ est constant). On pourrait alors changer la pression génératrice du jet pour essayer de retrouver la même vitesse à chaque position. Néanmoins, on a choisi de ne pas modifier la pression, car dans ce cas, on sait exactement comment a variée la vitesse moyenne. On a aussi fait varier l'échelle observée, pour s'assurer qu'il n'y avait pas de liens entre les deux types de variations. La pression génératrice est $1,5 \text{ bar}$. La vitesse moyenne observée est de l'ordre de 70 m/s , pour la position la plus proche du jet.

Une partie des courbes est donnée en figure 3.15. Le tableau suivant donne l'ensemble des résultats :

$\lambda \text{ (mm)}$	$\langle v_o \rangle \text{ (m/s)}$	$L \text{ (mm)}$	$\tau_c \text{ (}\mu\text{s)}$
0,66	70	10,8	2,0
0,47			1,4
0,33			0,98
0,66	50	15,2	3,3
0,47			2,2
0,33			1,65
0,66	35	21,6	5,7
0,47			3,8
0,33			2,7



Il en résulte pour la loi de variation en fonction de l'échelle intégrale, une fois prise en compte les variations fonction de la vitesse :

$$\tau_c \propto L^{0,4 \pm 0,3} \langle v_o \rangle^{-1,15 \pm 0,3} \quad (3.53)$$

3.4.3 Structures observées

La relation trouvée entre le temps τ_c et les paramètres de la turbulence est :

$$\tau_c \propto \lambda^{+1,15 \pm 0,2} L^{+0,4 \pm 0,3} \langle v_o \rangle^{-1,15 \pm 0,3} \quad (3.54)$$

Aucune loi compatible avec ce résultat n'est homogène pour les dimensions : Il faudrait que la somme des exposants des deux longueurs puissent être égale à un. Ceci implique que d'autres paramètres doivent intervenir. L'un de ceux-ci pourrait être le diamètre du volume de mesure, w .

Néanmoins, on voit que pour ce temps caractéristique, l'échelle observée joue un rôle : Le phénomène en cause doit donc être propre à cette échelle. La loi se rapproche d'ailleurs de celle pour le temps d'inversion des tourbillons, à part pour l'exposant de l'échelle observée :

$$\tau_{inv} \propto \lambda^{+0,66} L^{+0,33} \langle v_o \rangle^{-1} \quad (3.55)$$

3.4.4 Temps long et intercorrélation

On a remarqué sur les figures 3.11 et 3.12 qu'une échelle de temps longue apparaît aussi bien dans l'autocorrélation que dans l'intercorrélation.

Tous les phénomènes propres à cette échelle de temps, que l'on a pu observer, apparaissaient de la même manière sur l'auto- et l'intercorrélation. Dans la suite, ne seront présentés les résultats que sur l'intercorrélation. Ils sont plus faciles à observer, car le phénomène aux temps courts n'interfère pas.

On a donc étudié, comme pour le phénomène aux temps courts, les variations de cette échelle de temps, ainsi que de taux d'intercorrélation associé, en fonction des grands paramètres de l'écoulement et de l'échelle observée.

Taux d'intercorrélation

Le taux d'intercorrélation (le maximum des courbes) reste toujours aux alentours de 5%. Il est très stable dans le cas des expériences où l'on a fait varier la vitesse du jet ou l'échelle observée. Dans ces situations, le taux reste compris entre 4 % et 6 %. Dans le cas où l'on fait varier aussi l'échelle intégrale, il y a plus de variations : Ainsi, quand on s'éloigne de la buse, le taux diminue avec l'échelle observée. Cependant, cette variation est en grande partie due à la détérioration du rapport signal sur bruit lorsque l'on s'éloigne de la buse et que l'on observe les petites échelles. On peut considérer que le taux d'intercorrélation est constant pour toutes les positions, les vitesses et les échelles observées considérées.

Échelles observées

Les figures 3.16 et 3.17 montrent les résultats des variations de τ_l en fonction des échelles observées. Deux séries d'expériences ont été menées. Dans l'une, sur une des voies, l'échelle restait fixe, la seconde variait. La pression génératrice était alors de 1 bar (vitesse caractéristique de l'ordre de 50 m/s). La distance à la buse était de 50 mm. Dans l'autre cas, le rapport entre les deux échelles restait le même (égal à 2). Les conditions d'écoulement étaient différentes : La pression génératrice était alors de 1,5 bar (vitesse caractéristique de l'ordre de 70 m/s). La distance à la buse était la même. Les temps caractéristiques sont reportés dans le tableau ci dessous :

λ_1	λ_2 (mm)	$\langle v_o \rangle$ (m/s)	L (mm)	τ_l (μs)
0,84	1,06	50	10,8	34
0,66				38
0,53				41
0,42				38
0,33				36
0,66	1,32	70	10,8	27
0,47	0,94			27
0,33	0,66			28

Ces résultats ne présentent pas de variation significative du temps caractéristique en fonction de l'échelle observée.

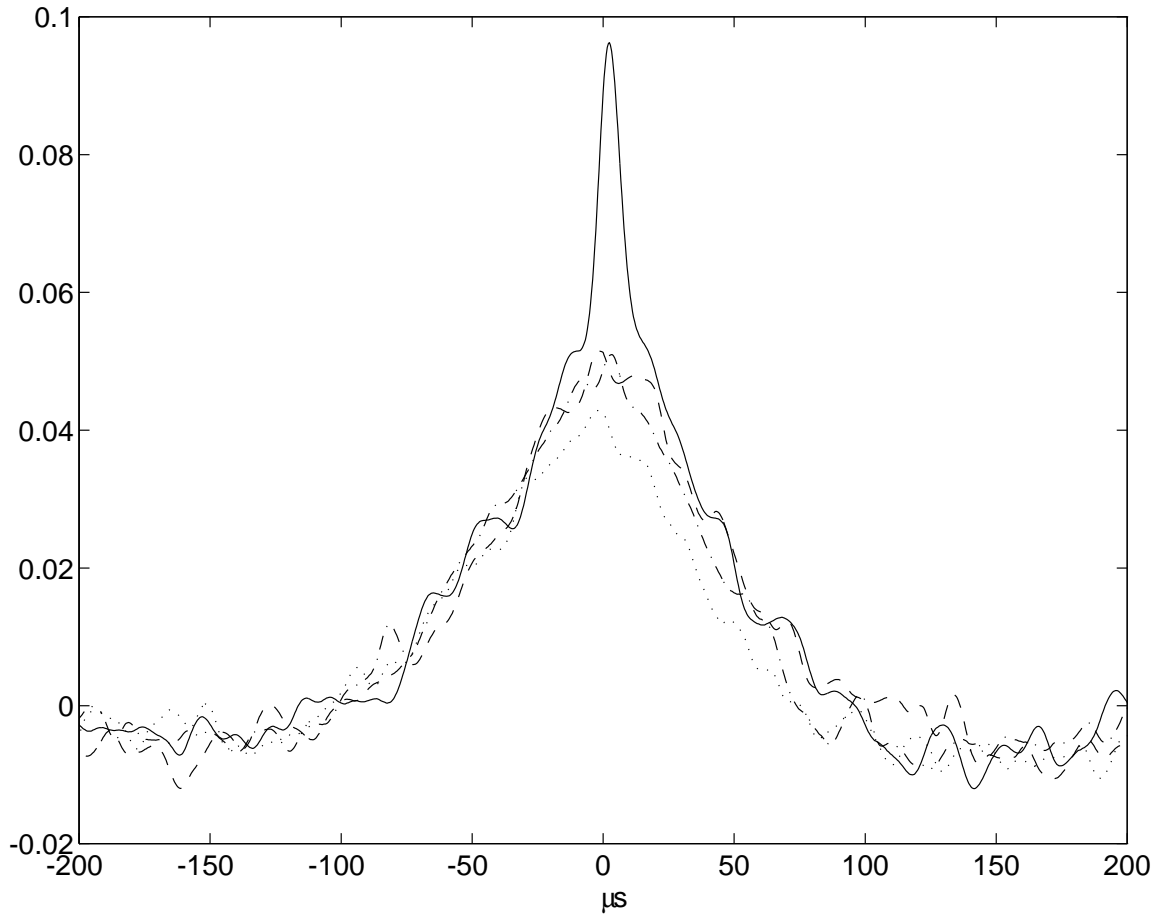


FIG. 3.16 – Intercorrélations pour différents rapports d'échelles observées : Les couples de longueurs d'onde ($\lambda_1; \lambda_2$) correspondant à chaque courbe, sont : $(0,84; 1,06 \text{ mm})$ (trait plein), $(0,66; 1,06 \text{ mm})$ (tiretets), $(0,53; 1,06 \text{ mm})$ (tirets-points) et $(0,42; 1,06 \text{ mm})$ (pointillés). Pour tous les vecteurs d'onde, on observe le même temps caractéristique sans dissymétrie. la courbe en trait plein présente aussi un temps caractéristique court de l'ordre de ceux observés sur l'autocorrélation. Ce phénomène ne va pas en fait à l'encontre des remarques faites jusqu'ici : les vecteurs d'onde, dans ce cas, ont été choisis très voisins. La résolution en nombre d'onde de l'appareil étant moins grande que cet écart, les diffusions ont une partie de leurs vecteurs d'onde d'observation en commun. L'intercorrélation est alors en partie de l'autocorrélation sur ces vecteurs d'onde communs.

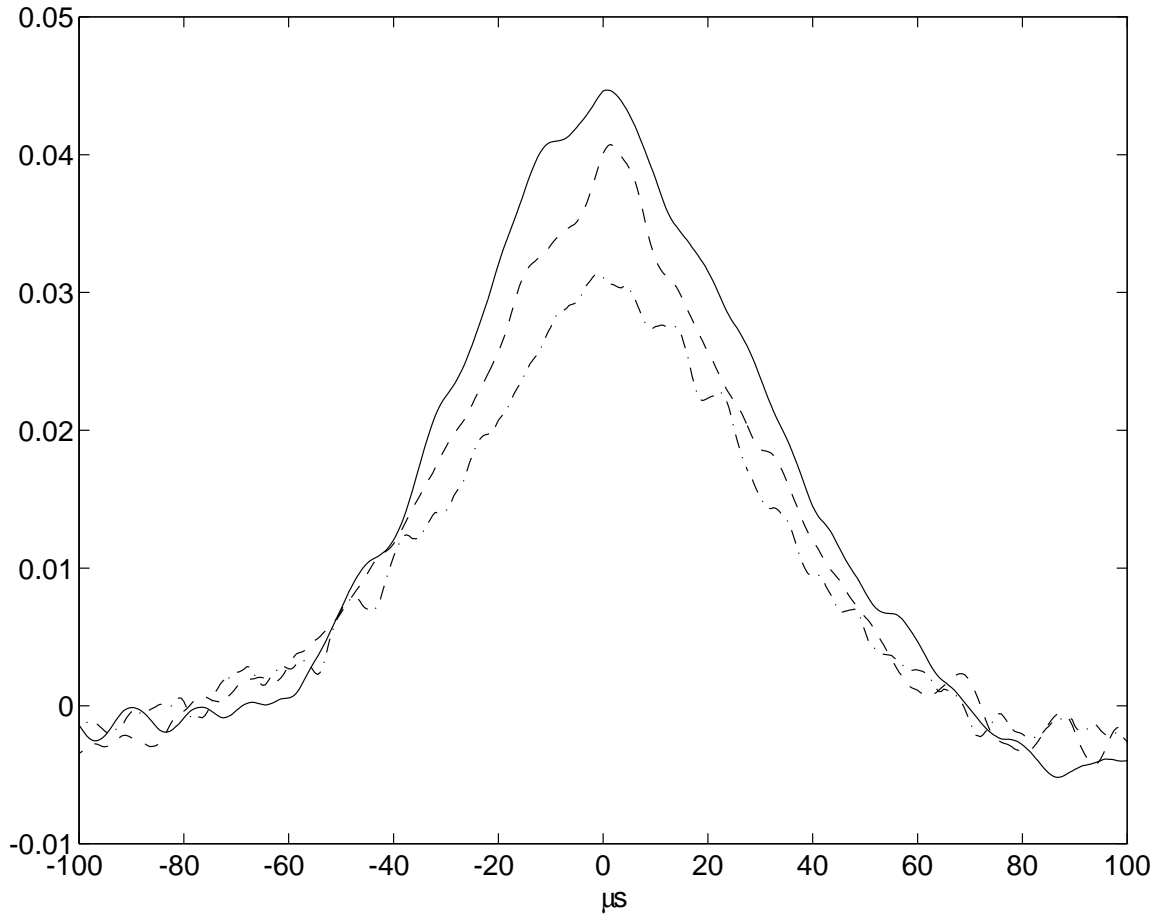


FIG. 3.17 – Intercorrélations pour différentes échelles, en maintenant constant le rapport entre échelles observées : Les couples de longueurs d'onde $(\lambda_1; \lambda_2)$ correspondant à chaque courbe, sont : $(0,66; 1,32 mm)$ (trait plein), $(0,47; 0,94 mm)$ (tiretets) et $(0,33; 0,66 mm)$ (tirets-points). Ces intercorrélations présentent toujours le même temps caractéristique, sans dissymétrie, et la même amplitude. L'atténuation sur le couple à petite échelle est due à la détérioration du rapport signal sur bruit de la mesure.

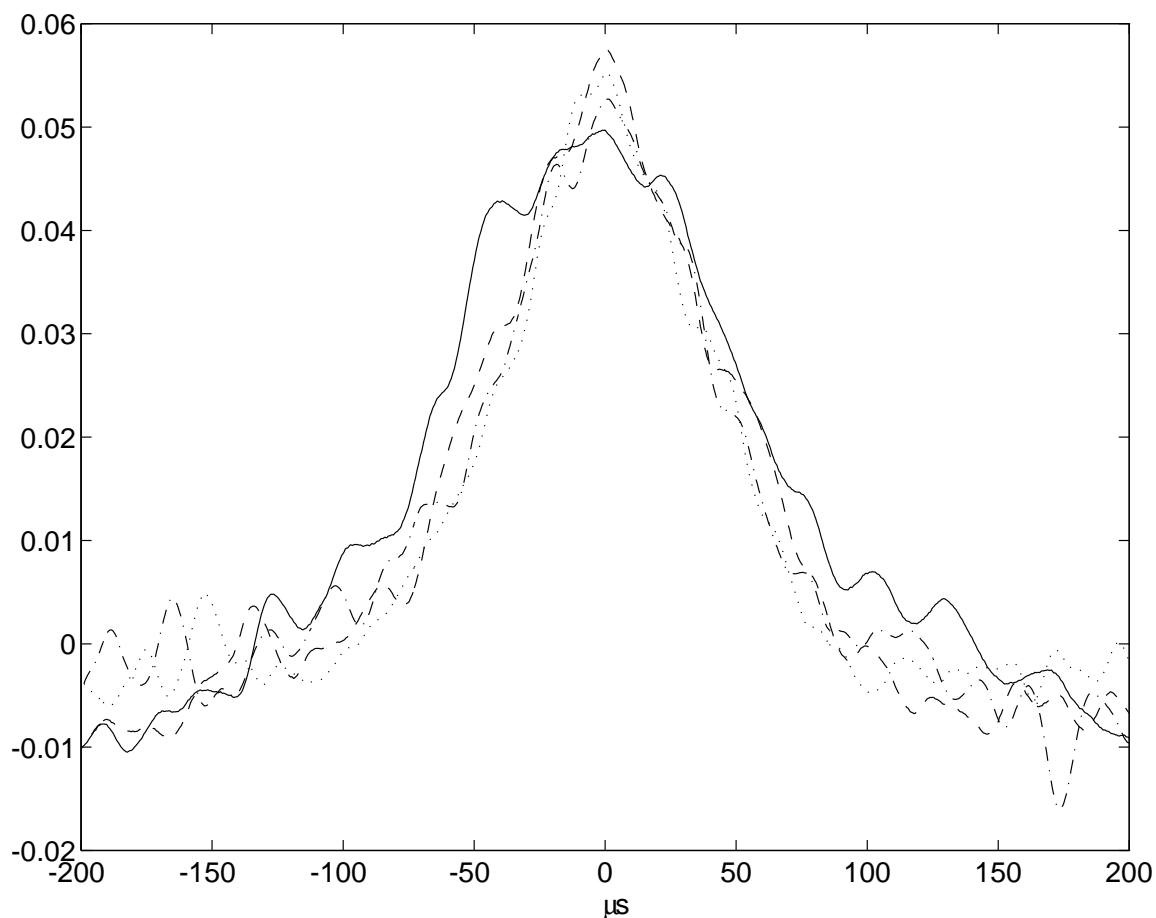
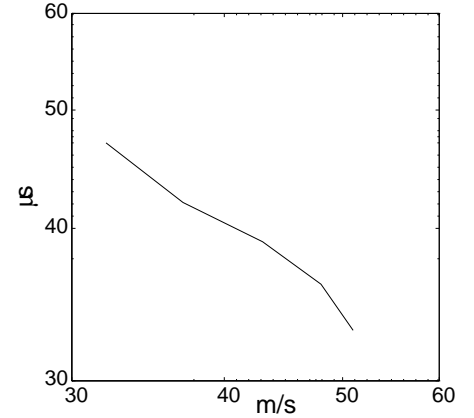


FIG. 3.18 – Intercorrélations pour différentes vitesses moyennes : Les vitesses correspondant à chaque courbe, sont : 32 m/s (trait plein), 37 m/s (tiretets), 43 m/s (tirets-points) et 48 m/s (pointillés).

Vitesse moyenne

Pour l'étude des variations en fonction de la vitesse, Les conditions sont les mêmes que précédemment : L'observation est 50 mm en aval de la buse. Les longueurs d'onde sur chacune des voies sont 0,66 et 1,32 mm sur chacune des voies. La figure 3.18 montre les courbes, les résultats chiffrés sont les suivants :

λ_1	λ_2 (mm)	$\langle v_o \rangle$ (m/s)	L (mm)	τ_l (μs)
0,66	1,32	32	10,8	47
		37		42
		43		39
		48		36
		51		33



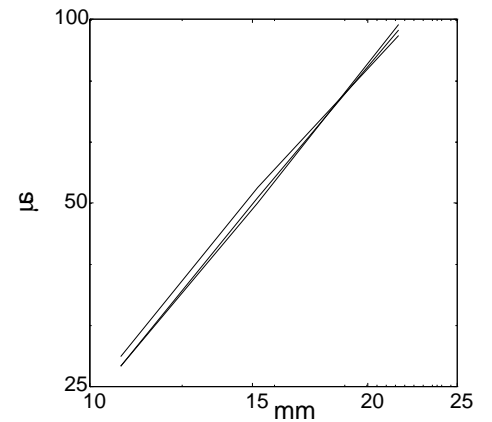
La courbe d'interpolation des données en échelle logarithmique, montre que le temps caractéristique varie quasiment comme l'inverse de la vitesse moyenne observée :

$$\tau_l \propto \langle v_o \rangle^{-0,8 \pm 0,3} \quad (3.56)$$

Échelle intégrale

Enfin, la troisième série d'expérience apporte les informations concernant les variations en fonction de l'échelle intégrale. Les conditions expérimentales sont les mêmes que pour l'étude de l'autocorrélation. La figure 3.19 montre quelques courbes. Les valeurs des temps caractéristiques sont les suivantes :

λ_1	λ_2 (mm)	$\langle v_o \rangle$ (m/s)	L (mm)	τ_l (μs)
0,66	1,32	70	10,8	27
0,47	0,94			27
0,33	0,66			28
0,66	1,32	50	15,2	50
0,47	0,94			51
0,33	0,66			53
0,66	1,32	35	21,6	98
0,47	0,94			96
0,33	0,66			94



Le graphe représentant les variations en fonction de l'échelle montre que le temps caractéristique est quasiment proportionnel à l'échelle intégrale :

$$\tau_l \propto L^{1,0 \pm 0,3} \langle v_o \rangle^{-0,8 \pm 0,3} \quad (3.57)$$

3.4.5 Intercorrélation et traces de poussières

Il importe de s'assurer d'abord si l'intercorrélation est due à des poussières traversant la zone de mesure. Une poussière, en effet, est mesurée simultanément à toutes les échelles. Plusieurs faits cependant le contredisent.

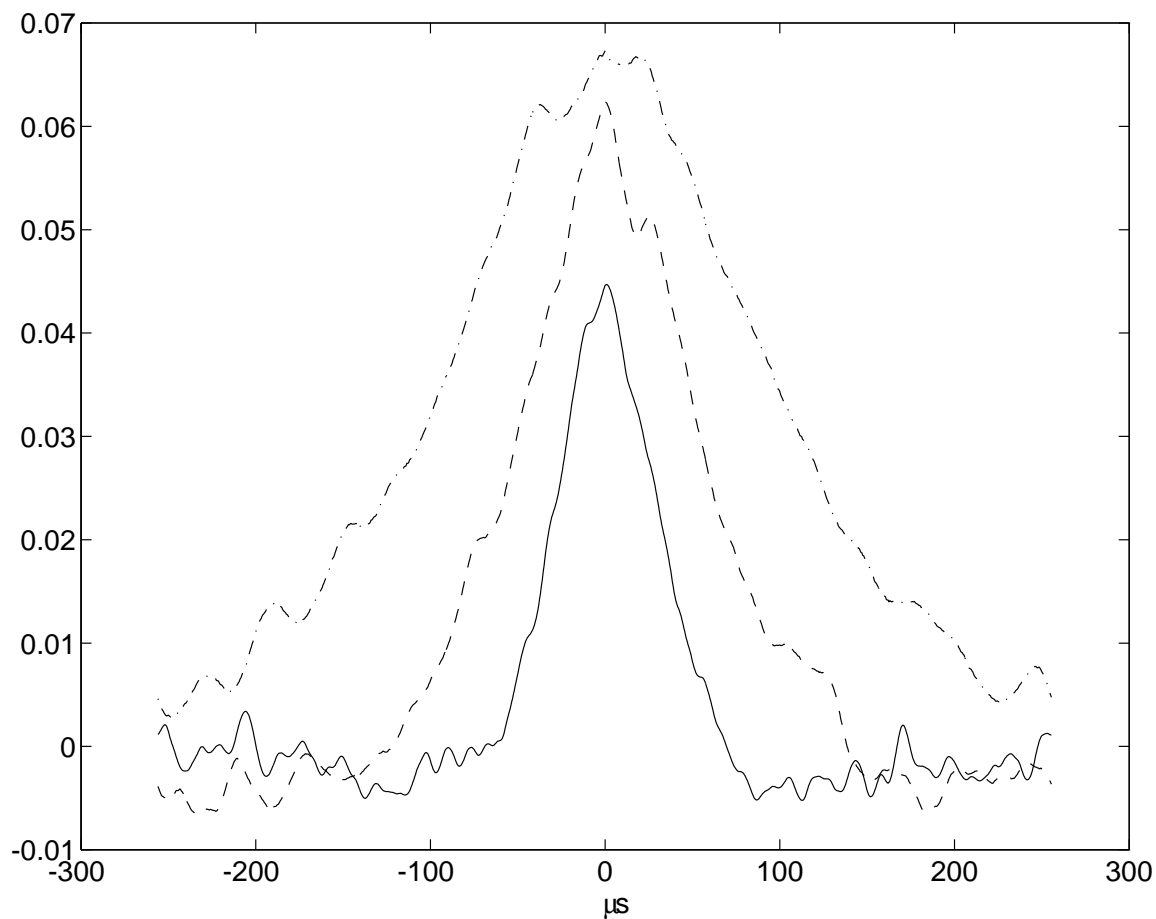


FIG. 3.19 – Intercorrélations pour différentes échelles intégrales : Les échelles correspondant à chaque courbe, sont : 10,8 mm (trait plein), 15,2 mm (tiretets) et 21,6 mm (tirets-points). les longueurs d'onde sur chaque voie sont 0,66 mm et 1,32 mm.

Tout d'abord, le temps caractéristique τ_l devrait être indépendant de l'échelle intégrale. Il ne devrait dépendre que du diamètre de la zone de mesure et de la vitesse moyenne.

En effet, le passage d'une poussière à la vitesse de l'écoulement $\langle v_o \rangle$, à travers le volume de mesure, donnerait un signal de pulsation Doppler $\omega = k_1 \langle v_o \rangle$ et d'enveloppe gaussienne, du fait du profil du volume de mesure :

$$F_{k_1}^-(t) \propto e^{ik_1 \langle v_o \rangle t} e^{-\frac{2\langle v_o \rangle^2 t^2}{w^2}} \quad (3.58)$$

Le calcul de l'intercorrélation du module de deux signaux à des échelles distinctes donne :

$$\langle |F_{k_1}^-(t)| |F_{k_2}^-(t + \tau)| \rangle \propto e^{-\frac{\langle v_o \rangle^2 \tau^2}{w^2}} \quad (3.59)$$

Le temps caractéristique, écart type de la gaussienne, vaut :

$$\tau_{pous} = \frac{w}{\langle v_o \rangle \sqrt{2}} \quad (3.60)$$

Les valeurs numériques pour les conditions que l'on a vues sont :

$\langle v_o \rangle$ (m/s)	τ_{pous} (μ s)
70	60
50	85
35	121

Les temps caractéristiques des poussières sont donc plus longs que ceux observés.

De plus, le niveau d'intercorrélation absolu, pour des poussières assez petites (taille inférieure au micron), ne devrait dépendre que faiblement de l'échelle, car la section efficace différentielle varie peu avec l'angle de diffusion. Or, dans notre cas, c'est le niveau d'intercorrélation relatif qui varie peu. Le niveau absolu, décroît suivant la loi de Kolmogorov (loi de puissance en $-11/3$ en fonction de l'échelle). Resterait le cas de grosses poussières de taille supérieure au micron, pour lesquelles la section efficace différentielle diminue quand l'angle augmente. Le signal engendré serait supérieur à celui de la diffusion collective, donc aisément détectable. De plus, on ne voit pas pourquoi la diffusion par ces particules suivrait la loi de Kolmogorov, en $\theta^{-11/3}$ (θ est l'angle de diffusion).

Tout porte à croire, donc, que le phénomène est bien produit par le signal de la diffusion collective (sur le gaz lui-même).

3.4.6 Structures à grande échelle

Pour le temps caractéristique long, τ_l , la loi de variation obtenue est :

$$\tau_l \propto \langle v_o \rangle^{-0,8 \pm 0,3} L^{1,0 \pm 0,3} \quad (3.61)$$

Si on se limite aux paramètres évoqués (λ , $\langle v_o \rangle$ et L), on ne peut trouver qu'une seule loi simple, homogène pour les dimensions, et compatible avec les résultats obtenus :

$$\tau_l \sim \frac{1}{5} \frac{L}{v_o} \quad (3.62)$$

De plus, le taux d'intercorrélation ne varie quasiment pas.

Comme seule l'échelle intégrale intervient, et non celle observée, cette intercorrélation pourrait alors être due à la convection des structures à grande échelle (bouffées de turbulence) à travers le volume de mesure. Le niveau global de turbulence varierait lors du passage de ces bouffées, tandis que l'amplitude relative entre les échelles internes à cette structure continue d'obéir à la loi de Kolmogorov : Le niveau de turbulence varierait de la même manière à toutes les échelles.

Dans cette hypothèse, la taille des structures, qui est alors de l'ordre de deux fois l'écart type en longueur, serait donc de l'ordre de :

$$L_o = 2\langle v_o \rangle \tau_l \sim \frac{2}{5} L \quad (3.63)$$

Cette longueur correspond bien à l'ordre de grandeur prévisible des plus grandes structures du milieu.

Conclusion

Le traitement plus approfondi du signal temporel issu de la diffusion collective a permis de mieux connaître les principaux phénomènes régissant l'évolution du signal :

L'évolution de la phase est liée aux fluctuations de la vitesse moyenne sur le volume. Notre étude a permis de prendre en compte également le flux à travers le volume de mesure. Il peut interférer avec l'effet Doppler. La contribution de ce terme de flux est cependant minoritaire. C'est ce qui nous a permis de montrer plusieurs caractéristiques singulières du signal de diffusion collective : En effet ce signal temporel complexe est tel que son spectre fréquentiel est proportionnel à la distribution de la dérivée temporelle de la phase du signal. Cette propriété implique en outre que la dérivée temporelle de la phase fournit une mesure instantanée de la vitesse en moyenne sur le volume observée. On a également montré que contrairement à l'hypothèse d'indépendance entre les fluctuations de densité à l'échelle observée et la vitesse moyenne sur le volume, il existait bien une corrélation entre ces quantités, notamment à l'extérieur de la couche de mélange. Cette observation peut expliquer le fait que, dans cette même région, le spectre du signal DCL et l'histogramme des vitesses obtenues par Anémométrie Doppler Laser, ne sont plus concordants. On a vu qu'à partir de la vitesse déterminée depuis la dérivée de la phase du signal, on pouvait établir un coefficient de diffusion turbulent. Cette application est particulièrement importante dans les plasmas, puisque ce coefficient qualifie le confinement du plasma. Or la mesure de ce paramètre est difficile à obtenir par d'autres diagnostics.

Le module du signal de diffusion est lié à la structure de la turbulence. C'est donc cette composante du signal qui a été utilisée pour l'étude des transferts entre échelles. Les expériences menées ont confirmé qu'il existait bien un transfert. Mais contrairement à ce qu'on imaginait, ce transfert n'est pas orienté dans le temps. Son amplitude et son temps caractéristique ne dépendent pas de l'échelle observée. On assiste plutôt au passage de bouffées de turbulence, qui modifient l'intensité du signal diffusé, à toutes les échelles. Les phénomènes propres à l'échelle ne sont accessibles que sur l'autocorrélation des signaux.

Un même phénomène optique, la diffusion collective, nous a donc permis d'obtenir deux types d'informations très différentes sur la turbulence aérodynamique. Ce sont des informations qui ont été possibles grâce à la détection et à l'exploitation du signal complexe. La variété des informations disponibles n'est sans doute pas épuisée.

Bibliographie

- [1] H.Z. Cummins, N. Knable & Y. Yeh, *Observation of Diffusion Broadening of Rayleigh Scattered Light*, Phys. Rev. Lett., **12** (1964), p150-153.
- [2] Y. Yeh & H.Z. Cummins, *Localized Fluid Flow Measurements With an He-Ne Laser Spectrometer*, Appl. Phys. Lett., **4** (1964), p176-178.
- [3] T.J. Greytak & G.B. Benedek, *Spectrum of Light Scattered From Thermal Fluctuations In Gases*, Phys. Rev. Lett., **17** **4** (1966), p179-182.
- [4] R.J. Goldstein & W.F. Hagen, *Turbulent Flow Measurements Utilizing the Doppler Shift of Scattered Laser Radiation*, Phys. Fluid, **10** (1967), p1349-1352.
- [5] W.K. George & J.L. Lumley, *The Laser Doppler velocimeter and its application to the measurement turbulence*, J. Fl. Mech., **60** (1973), p321-362.
- [6] J.C. Lelièvre & J. Picard, *Observation d'une Lumière Laser Diffusée Par un Gaz En Mouvement Turbulent*, C. R. Acad. Sc. Paris, **290** (1980), p473-476.
- [7] P. Gilles de Gennes, *L'Observation des corrélations de Vitesse et de Pression dans un Ecoulement Turbulent*, C. R. Acad. Sc. Paris, **262** (1966), p74-77.
- [8] H.L. Frisch, *Study of Turbulence by Spectral Fine Structure of Scattered Light*, Phys. Rev. Lett., **19** **22** (1967), p1278-1279.
- [9] G.B. Benedek, *Optical Mixing Spectroscopy, with Application to Problems in Physics, Chemistry and Engineering*, in **Polarisation, Matière et Rayonnement**, Ed. S.F.P., P.U.F., Paris (1964), p49-84.
- [10] C. Stern & D. Grésillon, *Fluctuations de Densité dans la Turbulence d'un Jet, Observation par Diffusion Rayleigh et Détection Hétérodyne*, J. Physique, **44** (1983), p1325-1335.
- [11] D. Grésillon, C. Stern, A. Hémon, A. Truc, T. Lehner, J. Olivain, A. Quemeneur, F. Gervais & Y. Lapierre, *Density Fluctuations Measurement by Far Infrared Light Scattering*, Physica Scripta, **T2/2** (1982), p459-466.
- [12] D. Grésillon & B. Cabrit, *Collective Scattering and Fluid Velocity Fluctuations, A Variety of Plasmas*, Proceed. of the Internat. Conf. on Plasma Physics, New Delhi 1989, A. Sen and P.K. Kaw Ed., Pramana Bangalore, India (1991) p173-187.
- [13] D. Grésillon & C. Honoré, *Collective Light Scattering : An Introduction*, in **Optical Diagnostics for Flow Processes**, L. Lading et al. Ed., Plenum Press, New York (1994), p229-243.
- [14] L. Lading & R.V. Edwards, *Laser velocimeters : lower limits to uncertainty*, Appl. Opt., **32** no 21 (1993), p3855-66.

- [15] J.D. Jackson, **Classical Electrodynamics**, Chap. 9, J. Wiley and sons Ed., New York (1975).
- [16] D. Grésillon, B. Cabrit, J.P. Bonnet & G. Gémeaux, **Réaélisation d'un Densitomètre de Fourier par Laser (DFL) Infrarouge, et Premiers Essais en Soufflerie**, Rapport final, contrat DRET 86-095 (1990).
- [17] H.Z. Cummins, & H.L. Swinney, *Light Beating Spectroscopy*, Progress in Optics, **VIII** E. Wolf Ed., North Holland Pub. Co., Amsterdam (1970), p133-200.
- [18] G. Antar, D. Grésillon & Z.C. Deng *Vélocimétrie par diffusion collective en lumière visible* Actes du Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser (1994).
- [19] C. Baudet, **Séparation Numérique des Spectres des Modes de Fluctuations de Densité, de Vitesses de Phase Opposées dans une Expérience de Fourier Densitométrie par Diffusion Laser** , Rapport PMI 1481 (1984).
- [20] D. Papamoschou, *The Compressible Turbulent Shear Layer : an Experimental Study*, J. Fluid Mech., **197** (1988), p453-477.
- [21] D. Papamoschou, *Structure of the Compressible Turbulent Shear Layer*, AIAA Journal, **29, 5** (1991), p680-681.
- [22] J.P. Bonnet & J.R. Debisschop, **Etude expérimentale de Couches de Mélange Supersoniques**, Rapport final, convention DREt 90-068 (1992).
- [23] J.P. Bonnet, O. Chambres, M. Lammari, S. Barre & P. Braud, **Couches de Mélange Turbulentes, Supersoniques** , Rapport final, convention DREt 91-172 (1994).
- [24] S. Barre, **Action de la Compressibilité sur la Structure des Couches de Mélange Turbulentes, supersoniques**, These de doctorat de l'ENSAE (1993).
- [25] D. Grésillon, B. Cabrit, M. Dufour & B. Chapey, **Banc de Densitométrie de Fourier par Laser** Rapport PMI 1967 (1988).
- [26] D. Grésillon, B. Cabrit, J.P. Villain, C. Hanuise, A. Truc, C. Laviron, P. Hennequin, F. Gervais, A. Quemeneur, X. Garbet, J. Payan & P. Devynck, *Collective Scattering of Electromagnetic Waves and Crossed-B Plasma Diffusion*, Plasma Phys. & Controlled Fusion, **34 / 12** (1992), p1985-91.
- [27] B. Cabrit, **Diffusion collective de la lumière par un gaz turbulent : Dispersion moléculaire et turbulente**, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, (1992).
- [28] B.T. Chu & L.S.J. Kovátsznay, *Non-linear Interactions in a Viscous Heat-conducting Compressible Gas*, J. of Fl. Mech., **3** (1957), p494-514.
- [29] A.S. Monin & A.M. Yaglom, **Statistical Fluid Dynamics : Mechanics of Turbulence, volume 1**, L. Lumley Ed., MIT Press, Cambridge (1971), chap. I.7, p64-71
- [30] J.P. Boon & S. Yip, **Molecular Hydrodynamics**, Dover Pub., New York (1991), chap. 5, p237-254.
- [31] J.P. Bonnet, D. Grésillon, B. Cabrit & V. Frolov, *Collective Light Scattering : a Non Particle Laser Velocimetry*, Meas. Sci. Technol., **6** (1995), p620-636.

- [32] C. Honoré, J.P. Bonnet, D. Grésillon & T. Ouzaa, *Collective Light Scattering and Instantaneous Fluid Velocity Measurement*, Proceed. of the Internat. Conf. on Electromagnetic Scattering of Gases and Plasmas, Aussois 1994, J. of Atm. and Ter. Phys., **Vol.58, No8/9** (1996), p1025-32.
- [33] J.O. Hinze, **Turbulence**, 2nd Ed., McGraw-Hill, New-York (1975).
- [34] H. Tennekes & J.L. Lumley, **A First Course in Turbulence**, 2nd Ed., The MIT Press, Cambridge Ma (1972).
- [35] S.G. Goebel & J.C. Dutton, *Experimental Study of Compressible Turbulent Mixing Layers*, AIAA Journal, **29, 4** (1991), p538-546.
- [36] M.R. Gruber, N.L. Messersmith & J.C. Dutton, *Three-dimensional Velocity Field in a Compressible Mixing Layer*, AIAA Journal, **31, 11** (1993), p2061-2067.
- [37] D. Grésillon, B. Cabrit, A. Truc, C. Laviron, P. Hennequin, F. Gervais, A. Quemeneur, X. Garbet, J. Payan & P. Devynck, *Direct Cross-B Plasma Transport Measurement by Collective Light Scattering*, in **Magnetic Turbulence and Transport**, P. Hennequin & M. Dubois Ed., Editions de Physique, Orsay (1993), p117-126.
- [38] N. Maafa, **Diffusion Collective dans les Plasmas Magnétisés Macroscopiquement Agités**, Thèse de doctorat de l'Université Paris XI (1995).
- [39] A. Truc, A. Quemeneur, P. Hennequin, D. Grésillon, F. Gervais, C. Lavron & J. Olivain, **ALTAIR**, Rapport PMI 2389 (1990).
- [40] J.P. Bonnet & L. Perrault, **Turbulence**, cours de l'université de Poitiers (1994).
- [41] W. Weaver & C.E. Shannon, **Théorie Mathématique de la Communication**, Retz, CEPL, Paris (1975).
- [42] R.G. Gallager, *Information Theory*, in **The Mathematics of Physics and Chemistry**, H. Margenau & G.M. Murphy Ed., D. van Nostrand Co., Princeton NJ (1964), p190-248.
- [43] S. Kullback, **Information Theory and Statistics**, J. Wiley & Sons, New York NY (1959), Chap. 1.
- [44] Y. Tomita, S. Ohmatsu & T. Soeda, *On Application of the Information Theory to Estimation Problems*, Information and Control, **32** (1976), p101-111.
- [45] R. Moddemeijer, *On Estimation of Entropy and Mutual Information of continuous Distributions*, Signal Processing, **16** (1989), p233-248.
- [46] S. Carpentier, **Entropie et Dynamique Non-linéaire**, Rapport PMI 2191 (1989).
- [47] D. Grésillon, B. Cabrit & N. Iwama, *Nonlinear Signal Analysis in a Fluid Turbulence : A Comparison between Bispectrum and Mutual Information*, Proceed. of workshop on Wave Phenomena in Solar-Terrestrial Plasmas, Oslo (1993).

Table des figures

1.1	Diffusion de la lumière	14
1.2	Détection hétérodyne	18
1.3	Montage expérimental	22
1.4	Montage électronique	24
1.5	Zone de mesure	25
2.1	Soufflerie S150 du CEAT de Poitiers	31
2.2	Soufflerie S7 de l'IRPHE de Marseille	32
2.3	Histogramme des vitesses dans la couche	39
2.4	Histogramme des vitesses extérieur à la couche	40
2.5	Signal, fonction du temps	43
2.6	Spectres des dérivées de la phase et du logarithme du volume	46
2.7	Spectre de la vitesse	47
2.8	Spectres de vitesse mesurés par fil chaud	48
2.9	Spectres de vitesse mesurés par diffusion collective	49
2.10	Vitesse instantanée	50
2.11	Distribution de la vitesse	52
2.12	Interspectre des dérivées	53
2.13	Diffusion dans la couche de mélange	56
2.14	Spectres DCL dans le Tokamak	58
2.15	Diffusion dans le Tokamak	59
2.16	Spectre du module et de l'exponentielle de la phase.	61
2.17	Spectre de l'exponentielle de la phase, comparé à celui du signal.	62
2.18	Spectre de la dérivée de la phase	67
2.19	Histogramme de la dérivée de la phase	69
3.1	Principe du banc bidiffusif	72
3.2	Schéma électronique du banc bidiffusif	74
3.3	Schéma optique du banc bidiffusif	75
3.4	Jet d'air	76
3.5	Jet d'air observé par 3 diffusions simultanées	85
3.6	Intercorrélations entre parties réelles	86
3.7	Information mutuelle entre parties réelles	87
3.8	Intercorrélation entre modules	88
3.9	Information mutuelle entre modules	89
3.10	Information mutuelle et corrélation du module	90

3.11	Autocorrélation typique	92
3.12	Intercorrélation typique	93
3.13	Autocorrélation et échelle d'observation	95
3.14	Autocorrélation et vitesse moyenne	97
3.15	Autocorrélation et échelle intégrale	98
3.16	Intercorrélation et rapport d'échelles	101
3.17	Intercorrélation et valeur d'échelles	102
3.18	Intercorrélation et vitesse	103
3.19	Intercorrélation et échelle intégrale	105

Table des matières

1	La diffusion collective de la lumière (DCL)	13
1.1	Le principe physique	14
1.1.1	La diffusion collective	14
1.1.2	Détection hétérodyne	17
1.2	Montage expérimental	21
1.2.1	Éléments techniques	21
1.2.2	Le volume de mesure	23
1.2.3	Corrections à l'expérience	26
1.3	La turbulence dans les gaz et les plasmas	27
2	Phase du signal et vitesse de convection	29
2.1	Moyens expérimentaux	29
2.1.1	La soufflerie S150 du CEAT de Poitiers	30
2.1.2	La soufflerie S7 de l'IRPHE de Marseille	30
2.1.3	Le banc de mesure DFL01	33
2.2	Spectre du signal DCL	34
2.2.1	Vitesse de convection de l'écoulement	34
2.2.2	Effet de volume	36
2.2.3	Propagation des ondes sonores	37
2.2.4	Spectres du signal dans la couche de mélange	38
2.3	Vitesse instantanée de convection	38
2.3.1	Phase et module du signal DCL et vitesse de convection	40
2.3.2	Calcul numérique des dérivées	42
2.3.3	Spectre de la vitesse de convection	44
2.3.4	Vitesse instantanée	50
2.3.5	Indépendance des dérivées	51
2.4	Phase du signal et diffusion turbulente	51
2.4.1	Corrélation de la phase et diffusion	54
2.4.2	Application à la couche de mélange	55
2.4.3	Comparaison avec d'autres mesures de diffusion	56
2.4.4	Confinement dans le Tokamak	57
2.5	Spectre et histogramme	60
2.5.1	Propriétés spectrales du module et de la phase	60
2.5.2	Les conditions d'équivalence entre le spectre du signal et l'histogramme de la dérivée de la phase	60

3 Relations entre échelles de la turbulence	71
3.1 Banc bidiffusif	71
3.1.1 Conception	71
3.1.2 Caractéristiques techniques	73
3.2 Jet d'air	76
3.3 Information mutuelle	77
3.3.1 Théorie de l'information	77
3.3.2 Biais et variance	79
3.3.3 Information mutuelle et corrélation	83
3.4 Corrélation du signal	91
3.4.1 Forme générale des courbes	91
3.4.2 Temps court et autocorrélation	94
3.4.3 Structures observées	99
3.4.4 Temps long et intercorrélation	100
3.4.5 Intercorrélation et traces de poussières	104
3.4.6 Structures à grande échelle	106
 Biblio	 111

Lesignalcomplexedeladiffusioncollectivedelalumière etlesécouementsturbulents

Ladiffusioncollectivedelalumièreestunmoyend'observationdesgazturbulents.Unlaseréclairere volume étudié. Le champ diffusé par les molécules du gaz est détecté, sous un angle proche de la direction de propagation avant. L'information recueillie est proportionnelle à la transformée de Fourier spatiale de la densité du gaz, sur le volume d'observation, suivant le vecteur d'onde de diffusion. La détection hétérodyne permet d'avoir accès au module et à la phase de ce signal complexe.

L'effet Doppler implique qu'il est possible de mesurer la vitesse de l'écouement: à travers le spectre du signal, on retrouve, sous certaines conditions, la distribution de probabilité de la vitesse moyenne sur le volume observé. De manière instantanée, on a étudié la dérivée de la phase du signal pour déterminer sous quelles conditions, cette dérivée approche la vitesse instantanée moyenne sur le volume. L'évolution temporelle de la vitesse moyenne sur le volume est alors connue. Son spectre peut être calculé. Un coefficient de diffusion turbulent peut être établi. Les expériences liées à cette étude, ont été faites sur un écouement de mélange supersonique, dans la soufflerie S150 du LÉA de Poitiers.

Ladiffusiona aussi la propriété de sélectionner une longueur d'onde, donc une échelle de milieu observé. Cette information est présentée dans le module du signal. Un dispositif permettant d'observer simultanément deux diffusions à des échelles différentes a été monté. L'expérience a porté sur un jet à symétrie axiale. L'étude des auto- et intercorrélations est intéressante aux échelles différentes. Elle fait apparaître deux échelles de temps distinctes: un temps court, visible uniquement sur l'autocorrélation, propre à l'échelle observée, et un temps plus long, observable dans tous les cas. Ce dernier dépend de l'échelle de production et de la vitesse moyenne. On a montré que ce temps long est propre aux grandes structures de la turbulence.

Mots-clés: Diffusion collective, Diffusion électromagnétique, Turbulence dans les gaz, Couche de mélange supersonique, Vélocimétrie, Diffusion turbulente, Transfert entre échelles, Information mutuelle

The complex signal of collective light scattering and the turbulent flows

Collective light scattering is an observation device for turbulent gas. A laser light is observed in a zone, and the gas molecules scattered field is detected at a small angle from the forward propagation direction. The collected information is proportional to the spatial Fourier transform of the gas density, inside the observation zone, at the scattering wave vector. Heterodyne detection allows to measure the modulus and phase of the complex signal.

The Doppler effect implies that the flow velocity can be measured: The signal spectrum, under some conditions, is proportional to the spatial mean velocity distribution. We show that instantaneously, under the same kind of conditions, the signal phase derivative is proportional to the spatial mean velocity. The velocity evolution is then known. The velocity frequency spectrum can be calculated. We also compute the turbulent diffusion coefficient from the phase derivative. Experimental results were obtained in a supersonic mixing layer inside a wind tunnel at the LEA, Poitiers.

Scattering selects a specific wave vector. Information about a fixed length scale of the turbulent flow is present inside the signal modulus. A special device was built to observe simultaneously two scatterings at different wave vectors. The experience is an axisymmetric air jet. Correlation between those signals shows two different time scales: The shorter one appears only on self-correlation. Its value depends on the observation wavelength. The longer one also appears on cross-correlation. Its value only depends on the production length scale and on the mean velocity. This time scale is peculiar to large structures inside the turbulence.

Keywords: Collective scattering, Electromagnetic scattering, Gas turbulence, Supersonic mixing layer, Velocimetry, Turbulent diffusion, Transfer between scales, Mutual information