



HAL
open science

Recherche d'une permutation optimale des variables dans la méthode itérative de Gauss-Seidel

Abdenour Abtroun

► **To cite this version:**

Abdenour Abtroun. Recherche d'une permutation optimale des variables dans la méthode itérative de Gauss-Seidel. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1977. Français. NNT: . tel-00287544

HAL Id: tel-00287544

<https://theses.hal.science/tel-00287544>

Submitted on 12 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de 3ème CYCLE
en Mathématiques Appliquées

par

Abdenour ABTROUN



RECHERCHE D'UNE PERMUTATION OPTIMALE
DES VARIABLES DANS LA METHODE ITERATIVE
DE GAUSS-SEIDEL



Thèse soutenue le 26 mai 1977 devant la Commission d'Examen

Président : N. GASTINEL
Examineurs { F. CHATELIN
 J.C. MIELLOU
 F. ROBERT

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

| | | |
|------|------------------------|---|
| MM. | AMBLARD Pierre | Clinique de dermatologie |
| | ARNAUD Paul | Chimie |
| | ARVIEU Robert | I.S.N. |
| | AUBERT Guy | Physique |
| | AYANT Yves | Physique approfondie |
| Mme. | BARBIER Marie-Jeanne | Electrochimie |
| MM. | BARBIER Jean-Claude | Physique expérimentale |
| | BARBIER Reynold | Géologie appliquée |
| | BARJON Robert | Physique nucléaire |
| | BARNOU Fernand | Biosynthèse de la cellulose |
| | BARRA Jean-René | Statistiques |
| | BARRIE Joseph | Clinique chirurgicale |
| | BEAUDOING André | Clinique de pédiatrie et puériculture |
| | BELORIZKY Elie | Physique |
| | BERNARD Alain | Mathématiques pures |
| Mme. | BERTRANDIAS Françoise | Mathématiques pures |
| MM. | BERTRANDIAS Jean-Paul | Mathématiques pures |
| | BEZEZ Henri | Pathologie chirurgicale |
| | BLAMBERT Maurice | Mathématiques pures |
| | BOLLINET Louis | Informatique (IUT B) |
| | BONNET Jean-Louis | Clinique ophtalmologique |
| | BONNET-EYMARD Joseph | Clinique gastro-entérologique |
| Mme. | BONNIER Marie-Jeanne | Chimie générale |
| MM. | BOUCHERLE André | Chimie et toxicologie |
| | BOUCHEZ Robert | Physique nucléaire |
| | BOUSSARD Jean-Claude | Mathématiques appliquées |
| | BOUTET DE MONVEL Louis | Mathématiques pures |
| | BRAVARD Yves | Géographie |
| | CABANEL Guy | Clinique rhumatologique et hydrologique |
| | CALAS François | Anatomie |
| | CARLIER Georges | Biologie végétale |
| | CARRAZ Gilbert | Biologie animale et pharmacodynamie |
| | CAU Gabriel | Médecine légale et toxicologie |
| | CAUQUIS Georges | Chimie organique |
| | CHABAUTY Claude | Mathématiques pures |
| | CHARACHON Robert | Clinique oto-rhino-laryngologique |
| | CHATEAU Robert | Clinique de neurologie |
| | CHIBON Pierre | Biologie animale |
| | COEUR André | Pharmacie chimique et chimie analytique |
| | CONTAMTIN Robert | Clinique gynécologique |
| | COUDERC Pierre | Anatomie pathologique |

| | | |
|-------|----------------------------|-----------------------------------|
| Mme. | DEBELMAS Anne-Marie | Matière médicale |
| MM. | DEBELMAS Jacques | Géologie générale |
| | DEGRANGE Charles | Zoologie |
| | DELORMAS Pierre | Pneumophtisiologie |
| | DEPORTES Charles | Chimie minérale |
| | DESRE Pierre | Métallurgie |
| | DESSAUX Georges | Physiologie animale |
| | DODU Jacques | Mécanique appliquée (IUT I) |
| | DOLIQUE Jean-Michel | Physique des plasmas |
| | DREYFUS Bernard | Thermodynamique |
| | DUCROS Pierre | Cristallographie |
| | GAGNAIRE Didier | Chimie physique |
| | GALVANI Octave | Mathématiques pures |
| | GASTINEL Noël | Analyse numérique |
| | GAVEND Michel | Pharmacologie |
| | GEINDRE Michel | Electroradiologie |
| | GERBER Robert | Mathématiques pures |
| | GERMAIN Jean-Pierre | Mécanique |
| | GIRAUD Pierre | Géologie |
| | JANIN Bernard | Géographie |
| | KAHANE André | Physique générale |
| | KOSZUL Jean-Louis | Mathématiques pures |
| | KLEIN Joseph | Mathématiques pures |
| | KRAVTCHENKO Julien | Mécanique |
| | KUNTZMANN Jean | Mathématiques appliquées |
| | LACAZE Albert | Thermodynamique |
| | LACHARME Jean | Biologie végétale |
| Mme. | LAJZEROWICZ Janine | Physique |
| MM. | LAJZEROWICZ Joseph | Physique |
| | LATREILLE René | Chirurgie générale |
| | LATURAZE Jean | Biochimie pharmaceutique |
| | LAURENT Pierre-Jean | Mathématiques Appliquées |
| | LEDRU Jean | Clinique médicale B |
| | LE ROY Philippe | Mécanique (IUT I) |
| | LLIBOUTRY Louis | Géophysique |
| | LOISEAUX Pierre | Sciences nucléaires |
| | LONGEQUEUE Jean-Pierre | Physique nucléaire |
| | LOUP Jean | Géographie |
| Melle | LUTZ Elisabeth | Mathématiques pures |
| MM. | MALINAS Yves | Clinique obstétricale |
| | MARTIN-NOEL Pierre | Clinique cardiologique |
| | MAZARE Yves | Clinique médicale A |
| | MICHEL Robert | Minéralogie et pétrographie |
| | MICOUD Max | Clinique maladies infectieuses |
| | MOURIQUAND Claude | Histologie |
| | MOUSSA André | Chimie nucléaire |
| | NOZIERES Philippe | Spectrométrie physique |
| | OZENDA Paul | Botanique |
| | PAYAN Jean-Jacques | Mathématiques pures |
| | PEBAY-PEYROULA Jean-Claude | Physique |
| | PERRET Jean | Semeiologie médicale (Neurologie) |
| | RASSAT André | Chimie systématique |
| | RENARD Michel | Thermodynamique |
| | REVOL Michel | Urologie |
| | RINALDI Renaud | Physique |
| | DE ROUGEMONT Jacques | Neuro-chirurgie |
| | SEIGNEURIN Raymond | Microbiologie et Hygiène |
| | SENGEL Philippe | Zoologie |
| | SIBILLE Robert | Construction mécanique (IUT I) |

| | | |
|------|-------------------|---------------------|
| MM. | SOUTIF Michel | Physique générale |
| | TANCHE Maurice | Physiologie |
| | TRAYNARD Philippe | Chimie générale |
| | VAILLANT François | Zoologie |
| | VALENTIN Jacques | Physique nucléaire |
| | VAUQUOIS Bernard | Calcul électronique |
| Mme. | VERAIN Alice | Pharmacie galénique |
| MM. | VERAIN André | Physique |
| | VEYRET Paul | Géographie |
| | VIGNAIS Pierre | Biochimie médicale |

PROFESSEURS ASSOCIES

| | | |
|-----|-------------------|--------------------------|
| MM. | CRABBE Pierre | CERMO |
| | DEMBICKI Eugéniuz | Mécanique |
| | JOHNSON Thomas | Mathématiques appliquées |
| | PENNEY Thomas | Physique |

PROFESSEURS SANS CHAIRE

| | | |
|-------|------------------------|--------------------------------|
| Melle | AGNIUS-DELORD Claudine | Physique pharmaceutique |
| | ALARY Josette | Chimie analytique |
| MM. | AMBROISE-THOMAS Pierre | Parasitologie |
| | ARMAND Gilbert | Géographie |
| | BENZAKEN Claude | Mathématiques appliquées |
| | BIAREZ Jean-Pierre | Mécanique |
| | BILLET Jean | Géographie |
| | BOUCHET Yves | Anatomie |
| | BRUGEL Lucien | Energétique (IUT I) |
| | BUISSON René | Physique (IUT I) |
| | BUTEL Jean | Orthopédie |
| | COHEN ADDAD Pierre | Spectrométrie physique |
| | COLOMB Maurice | Biochimie |
| | CONTE René | Physique (IUT I) |
| | DELOBEL Claude | M.I.A.G. |
| | DEPASSEL Roger | Mécanique des fluides |
| | FONTAINE Jean-Marc | Mathématiques pures |
| | GAUTRON René | Chimie |
| | GIDON Paul | Géologie et minéralogie |
| | GLENAT René | Chimie organique |
| | GROULADE Joseph | Biologie médicale |
| | HACQUES Gérard | Calcul numérique |
| | HOLLARD Daniel | Hématologie |
| | HUGONOT Robert | Hygiène et médecine préventive |
| | IDELMAN Simon | Physiologie animale |
| | JOLY Jean-René | Mathématiques pures |
| | JULLIEN Pierre | Mathématiques appliquées |
| Mme. | KAHANE Josette | Physique |
| MM. | KRAKOWIACK Sacha | Mathématiques appliquées |
| | KUHN Gérard | Physique (IUT I) |
| | LUU DUC Cuong | Chimie organique |
| | MAYNARD Roger | Physique du solide |
| Mme. | MINIER Colette | Physique (IUT I) |
| MM. | PELMONT Jean | Biochimie |
| | PERRIAUX Jean-Jacques | Géologie et minéralogie |
| | PFISTER Jean-Claude | Physique du solide |
| Melle | PIERY Yvette | Physiologie animale |

| | | |
|------|----------------------|--------------------------|
| MM. | RAYNAUD Hervé | M.I.A.G. |
| | REBECQ Jacques | Biologie (CUS) |
| | REYMOND Jean-Charles | Chirurgie générale |
| | RICHARD Lucien | Biologie végétale |
| Mme. | RINAUDO Marguerite | Chimie macromoléculaire |
| MM. | ROBERT André | Chimie papetière |
| | SARRAZIN Roger | Anatomie et chirurgie |
| | SARROT-REYNAULD Jean | Géologie |
| | SIROT Louis | Chirurgie générale |
| Mme. | SOUTIF Jeanne | Physique générale |
| MM. | STIEGLITZ Paul | Anesthésiologie |
| | VIALON Pierre | Géologie |
| | VAN CUTSEM Bernard | Mathématiques appliquées |

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

| | | |
|------|---------------------------|--|
| MM. | ARMAND Yves | Chimie (IUT I) |
| | BACHELOT Yvan | Endocrinologie |
| | BARGE Michel | Neuro-chirurgie |
| | BEGUIN Claude | Chimie organique |
| Mme | BERTEL Hélène | Pharmacodynamie |
| MM. | BOST Michel | Pédiatrie |
| | BOUCHARLAT Jacques | Psychiatrie adultes |
| Mme. | BOUCHE Liane | Mathématiques (CUS) |
| MM. | BRODEAU François | Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse) |
| | CHAMBAZ Edmond | Biochimie médicale |
| | CHAMPETIER Jean | Anatomie et organogénèse |
| | CHARDON Michel | Géographie |
| | CHERADAME Hervé | Chimie papetière |
| | CHIAVERINA Jean | Biologie appliquée (EFP) |
| | CONTAMIN Charles | Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire |
| | CORDONNIER Daniel | Néphrologie |
| | COULOMB Max | Radiologie |
| | CROUZET Guy | Radiologie |
| | CYROT Michel | Physique du solide |
| | DENIS Bernard | Cardiologie |
| | DOUCE Roland | Physiologie végétale |
| | DUSSAUD René | Mathématiques (CUS) |
| Mme. | ETERRADOSSI Jacqueline | Physiologie |
| MM. | FAURE Jacques | Médecine légale |
| | FAURE Gilbert | Urologie |
| | GAUTIER Robert | Chirurgie générale |
| | GIDON Maurice | Géologie |
| | GROS Yves | Physique (IUT I) |
| | GUIGNIER Michel | Thérapeutique |
| | GUITTON Jacques | Chimie |
| | HICTER Pierre | Chimie |
| | JALBERT Pierre | Histologie |
| | JULIEN-LAVILLAVROY Claude | O.R.L. |
| | KOLODIE Lucien | Hématologie |
| | LE NOC Pierre | Bactériologie-virologie |
| | MACHE Régis | Physiologie végétale |
| | MAGNIN Robert | Hygiène et médecine préventive |
| | MALLION Jean-Michel | Médecine du travail |
| | MARECHAL Jean | Mécanique (IUT I) |
| | MARTIN-BOUYER Michel | Chimie (CUS) |
| | MICHOULIER Jean | Physique (IUT I) |

| | | |
|------|---------------------|---|
| MM. | NEGRE Robert | Mécanique (IUT I) |
| | NEMOZ Alain | Thermodynamique |
| | NOUGARET Marcel | Automatique (IUT I) |
| | PARAMELLE Bernard | Pneumologie |
| | PECCOUD François | Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse) |
| | PEFFEN René | Métallurgie (IUT I) |
| | PERRIER Guy | Géophysique-Glaciologie |
| | PHELIP Xavier | Rhumatologie |
| | RACHAIL Michel | Médecine interne |
| | RACINET Claude | Gynécologie et obstétrique |
| | RAMBAUD André | Hygiène et hydrologie (Pharmacie) |
| | RAMBAUD Pierre | Pédiatrie |
| | RAPHAEL Bernard | Stomatologie |
| Mme. | RENAUDET Jacqueline | Bactériologie (Pharmacie) |
| MM. | ROBERT Jean-Bernard | Chimie physique |
| | Romier Guy | Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse) |
| | SCHAERER René | Cancérologie |
| | SHOM Jean-Claude | Chimie générale |
| | STOEBNER Pierre | Anatomie pathologie |
| | VROUSOS Constantin | Radiologie |

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

| | | |
|-----|--------------------|----------------------|
| MM. | DEVINE Roderick | Spectro physique |
| | HODGES Christopher | Transition de phases |

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président

Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

PROFESSEURS TITULAIRES

| | | |
|-----|----------------------|-------------------------------------|
| MM. | BENOIT Jean | Radioélectricité |
| | BESSON Jean | Electrochimie |
| | BLOCH Daniel | Physique du solide |
| | BONNETAIN Lucien | Chimie minérale |
| | BONNIER Etienne | Electrochimie et électrometallurgie |
| | BOUDOURIS Georges | Radioélectricité |
| | BRISSONNEAU Pierre | Physique du solide |
| | BUYLE-BODIN Maurice | Electronique |
| | COUMES André | Radioélectricité |
| | DURAND Francis | Métallurgie |
| | FELICI Noël | Electrostatique |
| | FOULARD Claude | Automatique |
| | LESPINARD Georges | Mécanique |
| | MOREAU René | Mécanique |
| | PARIAUD Jean-Charles | Chimie-Physique |
| | PAUTHENET René | Physique du solide |
| | PERRET René | Servomécanismes |
| | POLOUJADOFF Michel | Electrotechnique |
| | SILBER Robert | Mécanique des fluides |

PROFESSEUR ASSOCIE

| | | |
|----|---------------|-------------|
| M. | ROUXEL Roland | Automatique |
|----|---------------|-------------|

PROFESSEURS SANS CHAIRE

| | | |
|-----|--------------------|--|
| MM. | BLIMAN Samuel | Electronique |
| | BOUVARD Maurice | Génie mécanique |
| | COHEN Joseph | Electrotechnique |
| | LACOUME Jean-Louis | Géophysique |
| | LANCIA Roland | Electronique |
| | ROBERT François | Analyse Numérique |
| | VEILLON Gérard | Informatique fondamentale et appliquée |
| | ZADWORNY François | Electronique |

MAITRES DE CONFERENCES

| | | |
|------|--------------------------|--|
| MM. | ANCEAU François | Mathématiques appliquées |
| | CHARTIER Germain | Electronique |
| | GUYOT Pierre | Chimie minérale |
| | IVANES Marcel | Electrotechnique |
| | JOUBERT Jean-Claude | Physique du solide |
| | MORET Roger | Electrotechnique nucléaire |
| | PIERRARD Jean-Marie | Mécanique |
| | SABONNADIÈRE Jean-Claude | Informatique fondamentale et appliquée |
| Mme. | SAUCIER Gabrièle | Informatique fondamentale et appliquée |

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

| | | |
|----|-------------|-------------|
| M. | LANDAU Ioan | Automatique |
|----|-------------|-------------|

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

| | | |
|-----|---------------------|------------------------|
| MM. | FRUCHART Robert | Directeur de Recherche |
| | ANSARA Ibrahim | Maître de Recherche |
| | CARRE René | Maître de Recherche |
| | DRIOLE Jean | Maître de Recherche |
| | MATHIEU Jean-Claude | Maître de Recherche |
| | MUNIER Jacques | Maître de Recherche |

A mes Parents

Cette thèse a été entièrement préparée à l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

C'est le Professeur F. ROBERT qui, après m'avoir enseigné la théorie de matrices nonnégative, m'a suggéré l'idée de cette recherche.

Je lui exprime ici toute ma reconnaissance pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Je remercie, de la manière la plus expressive, le Professeur N. GASTINEL pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce Jury.

Mes remerciements vont également au Professeur J.C. MIELLOU pour l'intérêt qu'il porte à ce travail en se déplaçant de Besançon.

Je remercie le Professeur F. CHATELIN qui a bien voulu accepté de faire partie de ce Jury.

Enfin, je remercie Madame Meyrieux pour sa gentillesse et l'efficacité avec laquelle elle a assuré la frappe de ce manuscrit.

Je remercie également toutes les personnes du Service Reproduction qui ont contribué à son impression.

TABLE DES MATIERES

| | page |
|---|------|
| <u>INTRODUCTION</u> | 1 |
| | |
| <u>CHAPITRE I</u> : APPROCHE : UNE ATTAQUE PAR $\rho(\alpha L+U)$ ET SES RETOMBEES..... | 8 |
| § 1 Une série de résultats..... | 10 |
| § 2 Matrices nonnégatives..... | 14 |
| § 3 A propos du théorème de Stein-Rosenberg.. | 26 |
| | |
| <u>CHAPITRE II</u> : PRESENTATION ET LIMITATION DES METHODES CHAOTIQUES..... | 35 |
| § 1 Itérations chaotiques..... | 37 |
| § 2 Itérations chaotiques - Définition - Vitesse..... | 39 |
| § 3 Limitation..... | 43 |
| § 4 Les permutées de Gauss-Seidel..... | 53 |
| | |
| <u>CHAPITRE III</u> : APPROCHE : CALCUL EXPLICITE DE $[(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}]^m$ | 62 |

.../...

| | | |
|----------------------|-------------------------------|-----|
| <u>CHAPITRE IV</u> : | RESOLUTION PARTIELLE..... | 84 |
| § 1 | Résultats connus..... | 86 |
| § 2 | Résolution partielle..... | 90 |
| § 3 | Expériences numériques..... | 104 |
| § 4 | Maximisation de la trace..... | 115 |

| | | |
|---------------------|--|-----|
| <u>ANNEXE</u> | | 133 |
|---------------------|--|-----|

| | | |
|-------------------------|--|-----|
| <u>CONCLUSION</u> | | 142 |
|-------------------------|--|-----|

BIBLIOGRAPHIE

| | | |
|------------------------|--|-----|
| de l'Introduction..... | | 144 |
| du Chapitre I | | 145 |
| du Chapitre II | | 148 |
| du Chapitre III | | 150 |
| du Chapitre IV | | 151 |

INTRODUCTION

Considérons, pour commencer, un système d'équations linéaires :

$$Ax = b \quad (1)$$

avec $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Aux méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées à la résolution de ce système linéaire correspondent les matrices bien connues [2] :

$$J = I - D^{-1}A \quad \text{Matrice de Jacobi}$$

$$G = (I - L)^{-1}U \quad \text{Matrice de Gauss-Seidel}$$

avec :

D diagonale (supposée non singulière de A)

L et U matrices de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ respectivement triangulaire inférieure stricte, et triangulaire supérieure de J .

Ces méthodes itératives convergent si et seulement si les rayons spectraux $\rho(J)$ et $\rho(G)$ des matrices associées sont strictement inférieurs à 1 . De plus, leurs vitesses de convergence augmentent avec la petitesse de ces rayons.

En effectuant une permutation des lignes de la matrice A , on considère le système équivalent :

$$QAx = Qb \quad (2)$$

Q étant une matrice de permutation de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Ce système est équivalent à (1) mais la matrice de Jacobi J_Q ainsi définie n'aura pas forcément même rayon spectral que la précédente.

A titre indicatif, pour $n=2$ considérons le système :

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases} \quad (1')$$

alors

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -c/d & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(J_1) = \sqrt{\left| \frac{cb}{ad} \right|}$$

En faisant une permutation sur (1') nous obtenons

$$\begin{cases} cx + dy = b_2 \\ ax + by = b_1 \end{cases} \quad (2')$$

avec

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -d/c \\ -a/b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(J_2) = \sqrt{\left| \frac{ad}{bc} \right|}$$

Dans ce cas limite (n=2) on en conclut que :

$$\rho(J_1) < 1 \Rightarrow \rho(J_2) > 1$$

$$\rho(J_1) = 1 \Rightarrow \rho(J_2) = 1 \text{ mais la matrice } A \text{ est singulière.}$$

$$\rho(J_1) > 1 \Rightarrow \rho(J_2) < 1 .$$

Donc, pour n=2, lorsque A est inversible, une permutation de lignes effectuée sur un système linéaire rend convergente la méthode de Jacobi qui ne l'était pas auparavant.

Peut-on ainsi, dans le cas général, par un choix astucieux de Q rendre $\rho(J_Q)$ inférieur strictement à 1 et même le plus petit possible ?

Ce problème paraît n'avoir jamais été abordé et semble d'ailleurs difficile à formaliser.

Par contre, plaçons nous dans le cas où la matrice de Jacobi J associée à (1) est nonnégative et de rayon spectral strictement inférieur à 1 (c'est en fait le cas où A est une M matrice [3]).

Une permutation simultanée de lignes et de colonnes correspondantes effectuée sur la matrice A (de manière à conserver les éléments diagonaux) nous amène à considérer le système :

$$P^T A P (P^T x) = P^T b \tag{3}$$

avec P matrice de permutation de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Les matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel associées à ce système équivalent à (1) seront alors :

$$J_P = P^T J P$$

$$G_P = (I - L_P)^{-1} U_P$$

avec L_P et U_P matrices respectivement triangulaire inférieure stricte et triangulaire supérieure de J_P .

La méthode de Jacobi appliquée à la résolution de (1) où (3) aura même vitesse de convergence car $\rho(J_P) = \rho(P^T J P) = \rho(J)$.

Mais il n'en est pas nécessairement de même pour la méthode de Gauss-Seidel : on sait seulement qu'elle sera convergente (théorème de Stein-Rosenberg).

Peut-on, alors, par une permutation de lignes et colonnes sur le système linéaire (1), trouver une stratégie itérative de Gauss-Seidel convergeant le plus rapidement possible ?

Cette question posée par Stein et Rosenberg en 1948 [4] est à la base de notre travail.

Notre première démarche a été d'en justifier l'importance pratique. Pour ce faire, on donnera des exemples où le choix d'une bonne permutation permet de multiplier d'une manière spectaculaire (dans certains cas par un facteur 13 et même 16) la vitesse de convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

En abordant de plusieurs manières le problème du choix de la stratégie optimale notre but a été d'abord de mieux l'explicitier.

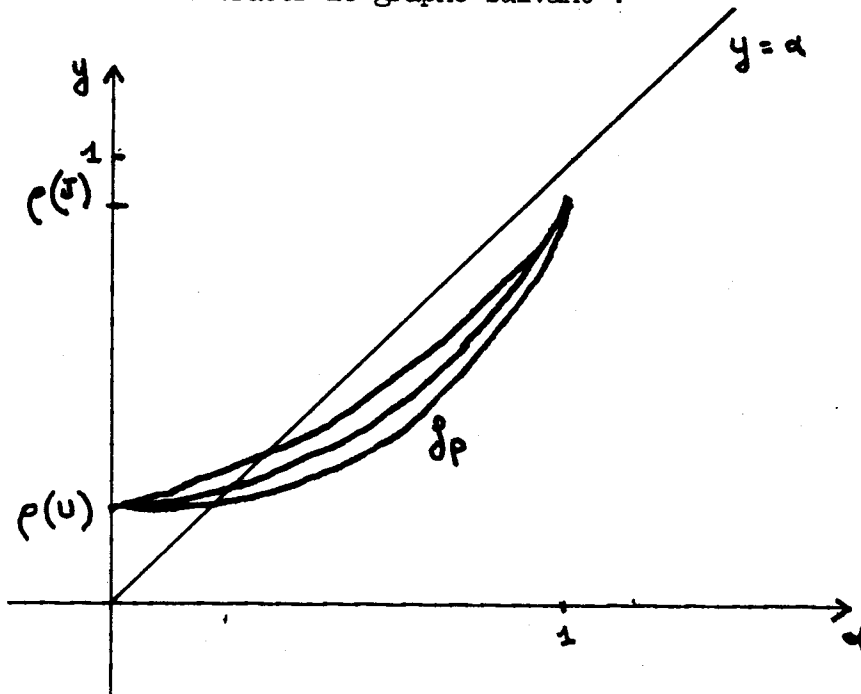
Une approche possible de ce problème consiste à remarquer que $\rho((I-L_P)^{-1}U_P)$ est point fixe de l'application monotone :

$$f_P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\alpha \rightarrow \rho(\alpha L_P + U_P)$$

Car $P^T J P$ est non négative, L_P et U_P en sont respectivement la triangulaire inférieure stricte et la triangulaire supérieure.

Pour chaque permutation P considérée l'étude de l'application f_P permet alors de tracer le graphe suivant :



La permutation π recherchée est celle pour laquelle le graphe de l'application f_π coupe la première bissectrice le plus bas possible.

Bien que le problème de base n'ait pu être résolu par cette méthode, celle-ci a impliqué l'étude des relations qui lient $\rho(A+B)$ à $\rho(A)$ et

$\rho(B)$ lorsque A et B sont deux matrices nonnégatives de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, et ce faisant, nous permet de proposer un tour d'horizon et une synthèse des résultats connus dans ce domaine, complétée par deux résultats personnels (chapitre I).

La notion de contraction en norme vectorielle permet de considérer le problème initial comme un cas particulier de recherche de la stratégie chaotique optimale pour la résolution d'équations non-linéaires de point fixe sur \mathbb{R}^n : c'est dans ce contexte que nous nous placerons.

Tout d'abord, nous limiterons dans certains cas l'emploi de ces stratégies chaotiques en proposant de nouvelles bornes aux rayons spectraux des matrices qui leurs sont associées (chapitre II).

Une seconde approche permet de donner une formule de calcul explicite des éléments de $[(I-L_P)^{-1}U_P]^m$ pour $m \in \mathbb{N}$. On posera alors le problème initial sous une forme combinatoire dont le lien avec des problèmes connus (surtout pour leur difficulté : problème du voyageur de commerce) en illustrera la complexité (chapitre III).

L'introduction d'une hypothèse notée H généralement vérifiée numériquement simplifie le problème de base en le ramenant à la maximisation de la trace de $(I-L_P)^{-1}U_P$ par le choix d'une matrice de permutation P (chapitre IV).

Maximiser numériquement la trace de $(I-L_P)^{-1}U_P$ par le choix d'une bonne permutation serait réalisable numériquement par un algorithme

fini qui (sous l'hypothèse H) résoudrait donc le problème. Malheureusement, cet algorithme serait beaucoup trop onéreux.

C'est pourquoi on a cherché une voie différente, qui nous a conduit à la construction de *la matrice d'incidence du problème* ; pour un problème de taille n donné, chaque élément de cette matrice d'incidence représente le nombre de fois que l'élément correspondant de la matrice A est appelé dans le calcul de la trace. Cette matrice d'incidence est très simple à construire (chapitre IV).

La trace de $(I-L_p)^{-1}U_p$ étant une fonction croissante des éléments de A , on va alors rechercher une permutation qui maximise le nombre d'appels des "grands" éléments de A (et par conséquent qui minimise celui des "petits" éléments de A) : il s'agit donc d'une idée simple permettant l'approche de la stratégie optimale.

De fait, cette idée se confirme tout à fait sur des exemples bien choisis construits à partir de la matrice d'incidence du problème où la vitesse de convergence peut être augmentée de façon spectaculaire (au facteur 13 voir 16) : cette notion de matrice d'incidence apporte donc, nous semble-t-il, une compréhension plus approfondie du problème.

A titre indicatif, on a d'ailleurs expérimenté un algorithme heuristique élémentaire de Aspinall [1] mettant en oeuvre l'idée exposée ci-dessus.

Sur différents exemples, cet algorithme parvient déjà à multiplier la vitesse de convergence par un facteur de l'ordre de 2 . Malheureusement, le coût de calcul de la stratégie efficace trouvée reste encore trop élevé pour la résolution d'un seul problème de point fixe (à noter que la stratégie optimale cherchée est la même pour tous les problèmes de même matrice A).

CHAPITRE I

APPROCHE : UNE ATTAQUE PAR $\rho(\alpha L+U)$
ET SES RETOMBÉES

L'étude faite par Stein et Rosenberg du rayon spectral de la matrice $G = (I-L)^{-1}U$ de Gauss-Seidel associée à la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ a donné lieu au théorème classique de comparaison des méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi appliquées à la résolution de ce système.

L'idée de base de la démonstration originale [19] consiste à montrer que le rayon spectral de $(I-L)^{-1}U$ est point fixe de l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(L, U \geq 0)$$

$$\alpha \rightarrow f(\alpha) = \rho(\alpha L + U)$$

Il est naturel de penser qu'une tentative de minimisation de $\rho((I-L)^{-1}U)$ à partir de permutations sur le système $Ax = b$ peut être éclairée par l'étude de l'application f .

Deux matrices A et B nonnégatives étant données, il s'agit donc d'étudier les relations qui lient le rayon spectral de $A + B$ à ceux de A et de B . Plus généralement, nous retrouvons le problème de l'étude du spectre de $A + B$ en fonction de celui de A et de B . Une littérature abondante traite de ce sujet et on peut citer en particulier les travaux de Frobenius (1896) puis plus tard ceux de McCoy (1938) et Taussky (1952).

Dans ce chapitre, nous proposons un tour d'horizon de résultats choisis dans ce domaine, complétés par des résultats personnels [1].

Quoique notre démarche n'ait pas abouti au résultat escompté, elle nous a permis d'unifier et de compléter un ensemble de résultats épars dans la littérature.

§ 1 - UNE SERIE DE RESULTATS

Frobénius en 1896 a montré que tout polynome $f(A,B)$ de deux matrices commutatives A et B d'ordre n , dont les valeurs propres sont $\lambda_i(A)$ et $\lambda_i(B)$ pour $i=1$ à n , a pour valeurs propres $f(\lambda_i(A), \lambda_i(B))$ (l'ordre dans lequel on prend les valeurs propres étant bien choisi). Cette propriété est connue sous le nom de P propriété ; plus tard McCoy en 1938 [10] a montré que la condition suffisante de commutativité de A et B n'était pas nécessaire. Williamson [23] donne des caractérisations de la P propriété. Plus récemment Motzkin et Taussky [13] considèrent une propriété plus restreinte, le fait que $\lambda A + \mu B$ ait pour valeurs propres $\lambda \lambda_i(A) + \mu \lambda_i(B)$ pour $i=1$ à n , qu'ils appellent L propriété, et recherchent des classes de matrices vérifiant cette L propriété et où éventuellement la L propriété entraînerait la P propriété.

Les théorèmes les plus généraux sont :

THEOREME

Soient A et B deux matrices normales (i.e. : $AA^T = A^T A$) (vrai en particulier pour les matrices symétriques) alors :

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

Preuve

A normale est de la forme $A = Q^T D Q$
avec $Q^T = Q^{-1}$ et D diagonale [4] ,

$$D'où \quad A^T A = Q^T D Q Q^T D Q = Q^T D^2 Q = Q^{-1} D^2 Q$$

$$\text{et} \quad \lambda_i(A^T A) = (\lambda_i(A))^2 \quad \text{pour } i=1 \text{ à } n$$

alors en utilisant la norme $S_{\varphi_2\varphi_2}$ [4]

$$S_{\varphi_2\varphi_2}(A) = \sqrt{\rho(A^T A)} = \rho(A)$$

Mais $\rho(A+B) \leq S_{\varphi_2\varphi_2}(A+B) \leq S_{\varphi_2\varphi_2}(A) + S_{\varphi_2\varphi_2}(B) = \rho(A) + \rho(B)$.

C.Q.F.D.

Plus généralement, φ étant une norme sur \mathbb{R}^n , tout couple de matrices A et B satisfaisant à $S_{\varphi\varphi}(A) = \rho(A)$ et $S_{\varphi\varphi}(B) = \rho(B)$ satisfait à ce théorème que Householder **énonce** en appelant cette catégorie de matrices les M matrices [7] .

THEOREME

Soient A et B deux matrices qui commutent alors :

$$\lambda_i(A+B) = \lambda_i(A) + \lambda_i(B) \text{ pour } i=1 \text{ à } n$$

et donc $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

Preuve

Si deux matrices A et B commutent, dans la base de Jordan de A, B se met sous forme triangulaire supérieure, une démonstration dans le cas où A et B sont diagonalisables est faite dans [22] .

Pour simplifier la démonstration dans le cas général, considérons seulement le cas où A est unicellulaire [6] .

Dans la base de Jordan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'opérateur associé à A se met sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une base de $\text{Ker}(A - \lambda I)^n$ qui est invariant par B car $(A - \lambda I)^n$ et B commutent.

Donc soit
$$B x_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \quad (1)$$

$$A x_1 = \lambda x_1 \quad \text{d'où} \quad ABx_1 = BAx_1 = \lambda Bx_1$$

en remplaçant $B x_1$ à l'aide de (1) dans $A(Bx_1) = \lambda Bx_1$ nous avons :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j A x_j = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$$

Mais $A x_j = \lambda x_j + x_{j-1}$ pour $j=1$ à n avec $x_0 = 0$

$$\text{d'où} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j A x_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\lambda x_j + x_{j-1}) = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \quad \text{d'après (1)}$$

soit donc :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_{j-1} = 0$$

Mais $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ étant une famille libre cela implique que $\alpha_i = 0$ pour $i=2$ à n et donc $B x_1 = \alpha_1 x_1$.

Le même raisonnement sur $B x_1 = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j$ montrera que $\gamma_\ell = \alpha_1$ et $\gamma_i = 0$ pour $i=3$ à n ,

et finalement $B x_n = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_{n-1} x_{n-1} + \alpha_1 x_n$.

Donc dans la base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'opérateur associé à B est représenté par

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Par suite on voit que si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ s'écrit dans $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$A' = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_p \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_\ell \end{pmatrix}$$

pour $\ell=1$ à p

Alors B dans $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s'écrira :

$$B' = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_p \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta_\ell = \begin{pmatrix} \alpha_\ell & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_\ell \end{pmatrix}$$

pour $\ell=1$ à p

et on en déduit immédiatement le théorème.

C.Q.F.D.

THEOREME (KAHAN)

Toute matrice A de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ à spectre réel vérifie

$$\rho(A-A^*) \leq \rho(A+A^*) (\log_2 n + 0,038) .$$

La démonstration [8] s'appuie sur la décomposition de Schur $T^*AT = Z$ triangulaire supérieure avec $T^* = T^{-1}$, cette décomposition laissant invariant $S_{\varphi_2\varphi_2}(A-A^*)$ on fait une estimation de

$\beta_n = \max S_{\varphi_2\varphi_2}(Z-Z^*)$ sur les Z triangulaires supérieures aux diagonales réelles telles que $S_{\varphi_2\varphi_2}(Z+Z^*) = 1$.

Les deux principaux outils d'étude sont, comme le montrent ces démonstrations, les normes et les propriétés des sous-espaces invariants. Une approche du problème semble être l'étude du tenseur $\lambda A + \mu B$ en particulier le calcul de son rang ce qui dans le cas général est un problème ouvert [5].

§ 2 - MATRICES NONNEGATIVES

Le cas particulier des matrices nonnégatives a été étudié récemment par Levinger, Fiedler, Friedland, Karlin et on trouve une application de ces recherches à des problèmes d'état d'équilibre dans des systèmes physiques et biologiques [3].

2. THEOREME de LEVINGER-FIEDLER

Soit A une matrice nonnégative et f l'application suivante :

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\alpha \rightarrow f(\alpha) = \rho((1-\alpha)A + \alpha A^T)$$

alors f est croissante dans $[0, \frac{1}{2}]$.

Dans le cas où A est irréductible :

$$f(\alpha) = f(0)$$

si et seulement si A et A^T ont le même vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre $\rho(A)$.

Ce théorème est donné sans démonstration dans [11] [9].

Marek l'étend au cas d'un opérateur linéaire conservant le cône positif, démarche analogue à celle de Vandergraft [20] [18] concernant le théorème de Stein-Rosenberg.

On peut montrer assez simplement un résultat plus faible [1].

3. PROPOSITION

Soit A une matrice nonnégative

$$\rho(\alpha A + (1-\alpha)A^T) \geq \rho(A) \quad \text{pour} \quad \alpha \in [0, 1]$$

PREUVE

La démonstration se fait à partir d'une propriété du rayon spectral d'une matrice nonnégative, dite théorème de Birkhoff. Varga (1958) [21] dans le cas irréductible et qui s'étend au cas quelconque [6]. Ce théorème est le suivant :

$$(1) \quad \rho(A) = \inf_{y > 0} \sup_{x > 0} \frac{y^T A x}{y^T x} \quad (2) \quad \rho(A) = \sup_{x > 0} \inf_{y > 0} \frac{y^T A x}{y^T x}$$

La borne inférieure pour (1) est atteinte pour y vecteur propre de A
La borne supérieure pour (2) est atteinte pour y vecteur propre de A^T .

Soit $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha A + (1-\alpha)A^T$ est nonnégative et donc en appliquant cette proposition on a :

$$\begin{aligned} \rho(\alpha A + (1-\alpha)A^T) &= \sup_{\underline{x} > 0} \inf_{\underline{y} > 0} \frac{\underline{y}^T (\alpha A + (1-\alpha)A^T) \underline{x}}{\underline{y}^T \underline{x}} \\ &= \sup_{\underline{x} > 0} \inf_{\underline{y} > 0} \left(\alpha \frac{\underline{y}^T A \underline{x}}{\underline{y}^T \underline{x}} + (1-\alpha) \frac{\underline{y}^T A^T \underline{x}}{\underline{y}^T \underline{x}} \right) \end{aligned}$$

Pour u vecteur de Perron de A soit $u \geq 0$ tel que $Au = \rho(A)u$ on aura :

$$\rho(\alpha A + (1-\alpha)A^T) \geq \alpha \rho(A) + \inf_{\underline{y} > 0} (1-\alpha) \frac{\underline{y}^T A^T u}{\underline{y}^T u} \quad (3)$$

Mais $\rho(A^T) = \sup_{\underline{x} > 0} \inf_{\underline{y} > 0} \frac{\underline{y}^T A^T \underline{x}}{\underline{y}^T \underline{x}}$ et cette inégalité est atteinte pour u

vecteur propre de $(A^T)^T = A$ et donc :

$$\rho(A^T) = \inf_{\underline{y} > 0} \frac{\underline{y}^T A^T u}{\underline{y}^T u}$$

par suite (3) devient :

$$\rho(\alpha A + (1-\alpha)A^T) \geq \alpha \rho(A) + (1-\alpha) \rho(A^T) = \rho(A) .$$

C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement :

4. COROLLAIRE

Soient M une matrice nonnégative et $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ alors

$$\rho(\alpha M + \beta M^T) \geq (\alpha + \beta)\rho(M).$$

PREUVE

avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ en supposant $\alpha + \beta \neq 0$.

$$\begin{aligned}\rho(\alpha M + \beta M^T) &= (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} M + \frac{\beta}{\alpha + \beta} M^T \right) \\ &= (\alpha + \beta) \rho \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} M + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) M^T \right)\end{aligned}$$

Soit en posant $k = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ nous aurons $k \in [0, 1]$ et :

$$\rho(\alpha M + \beta M^T) = (\alpha + \beta) \rho(kM + (1-k)M^T) \geq (\alpha + \beta)\rho(M).$$

C.Q.F.D.

De plus, si M et M^T commutent on a vu que (§ 1) :

$$\rho(\alpha M + \beta M^T) \leq (\alpha + \beta)\rho(M)$$

d'où la proposition suivante :

5. COROLLAIRE

Soit M une matrice normale nonnégative

$$\rho(\alpha M + \beta M^T) = (\alpha + \beta)\rho(M)$$

Le théorème de Levinger-Fiedler est à rapprocher du résultat suivant :

6. THEOREME [24]

Soient A une matrice nonnégative et f l'application suivante :

$$f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\alpha \rightarrow f(\alpha) = \rho\left(\alpha A + \frac{1}{\alpha} A^T\right)$$

alors f est décroissante et :

$$\rho(A + A^T) \leq \rho\left(\alpha A + \frac{1}{\alpha} A^T\right) \leq \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \rho(A + A^T)$$

7. PROPOSITION [1]

Soit A une matrice nonnégative et soit D une matrice diagonale nonnégative alors :

$$\rho(A + D) \leq \rho(A) + \rho(D)$$

PREUVE $A + D \leq A + \rho(D) I$

$A + D$ et $A + \rho(D)I$ sont des matrices nonnégatives donc d'après le théorème de Perron-Frobénius

$$\rho(A + D) \leq \rho(A + \rho(D)I) = \rho(A) + \rho(D).$$

C.Q.F.D.

L'étude de $\rho(AD)$ avec A nonnégative et D nonnégative diagonale est plus complexe. Ce problème est traité en particulier par Friedland et Karlin et donne lieu à un certain nombre de résultats [3].

8. PROPOSITION [1]

Soit A une matrice diagonalisable à valeurs propres nonnégatives. Si représenté dans la base des vecteurs propres de A l'opérateur associé à B est nonnégatif on aura :

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B) .$$

PREUVE

Par hypothèse il existe $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = \text{diag} (\lambda_i(A)) \geq 0 \quad \text{avec} \quad P^{-1}BP \geq 0$$

donc :

$$\rho(A+B) = \rho(P^{-1}(A+B)P) = \rho(P^{-1}AP + P^{-1}BP) = \rho(\text{Diag}(\lambda_i(A)) + P^{-1}BP)$$

et nous avons vu précédemment (proposition 6) que cette quantité est inférieure à :

$$\rho(\text{Diag}(\lambda_i(A)) + \rho(P^{-1}BP)) = \rho(A) + \rho(B) .$$

C.Q.F.D.

Le fait de donner des conditions pour qu'un opérateur \mathcal{A} sur \mathbb{R}^n soit représentable dans une certaine base par une matrice nonnégative est très intéressant car on pourrait appliquer à \mathcal{A} les résultats de la théorie des matrices nonnégatives, on peut citer à ce propos les travaux de Ciarlet [2].

Les fortes conditions imposées à A et B sont dues au fait que l'on ne sait rien en général de $\rho(A+D)$ avec D diagonale et $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ce qui rejoint le problème inverse de valeur propre [12].

En s'appuyant sur le théorème de Perron-Frobenius et les résultats connus sur les M matrices [17] on peut donner les résultats théoriques suivants [1].

9. PROPOSITION

Soient A,B deux matrices nonnégatives et u,v,t les vecteurs de Perron de A,B et A+B notés

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \text{et} \quad t^T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Soient α_i et β_i tels que $u_i = \alpha_i t_i$ et $v_i = \beta_i t_i$ pour $i=1$ à n

Si il existe k tel que $\alpha_k = \beta_k = 1$ on a :

1/ Si $\alpha_j \leq \alpha_k$ et $\beta_j \leq \beta_k$ pour tout i et j appartenant à $\{1, \dots, n\}$

$$\rho(A+B) \geq \rho(A) + \rho(B) .$$

2/ Si $\alpha_j \geq \alpha_k$ et $\beta_j \geq \beta_k$ pour tout i et j appartenant à $\{1, \dots, n\}$

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B) .$$

PREUVE

$$Au = \rho(A)u \quad , \quad Bu = \rho(B)u \quad , \quad (A+B)t = \rho(A+B)t .$$

$$\text{Soit} \quad \sum_{j=1}^n a_j u_j = \rho(A)u_i \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n b_j v_j = \rho(B)v_i \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)t_j = t_i$$

remplaçons u_j par $\alpha_j t_j$ et v_j par $\beta_j t_j$ nous aurons :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j t_j = \rho(A) \alpha_i t_i \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \beta_j b_j t_j = \rho(B) \beta_i t_i .$$

En écrivant le rapport de ces quantités on obtient :

$$\frac{\sum_{j=1}^n (\alpha_j a_j + \beta_j b_j) t_j}{\sum_{j=1}^n (a_j + b_j) t_j} = \frac{\alpha_i \rho(A) + \beta_i \rho(B)}{\rho(A+B)} \quad \text{pour } i=1 \text{ à } n ,$$

et en particulier pour $i=k$

$$\frac{\rho(A) + \rho(B)}{\rho(A+B)} = \frac{\sum_{j=1}^n (\alpha_j a_j + \beta_j b_j) t_j}{\sum_{j=1}^n (a_j + b_j) t_j}$$

L'étude de ce rapport en fonction des α_j et β_j nous donne la proposition.

C.Q.F.D.

Remarquons que lorsque A et B sont irréductibles il existe toujours k tel que $\alpha_k = \beta_k = 1$.

Il existe deux théorèmes permettant de comparer le rayon spectral d'une matrice nonnégative A avec un nombre α positif fixé [17].

10. THEOREME

Soient A une matrice nonnégative et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ nonnégative et nonnul tel que $Ax \geq \alpha x$ alors $\rho(A) \geq \alpha$.

11. THEOREME

Soient A une matrice nonnégative et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ strictement positif tel que $Ax \leq \alpha x$ alors $\rho(A) \leq \alpha$.

C'est le théorème 10 que nous généralisons de la manière suivante :

12. THEOREME [1]

Soient A une matrice nonnégative et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ avec au moins une composante négative tel que $Ax \leq \alpha x$ alors $\alpha \leq \rho(A)$.

Cela généralise bien le théorème 10 car si il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul et nonnégatif, x a au moins une composante strictement positif et est tel que $Ax \geq \alpha x$. En prenant $y = -x$ nous aurons y avec au moins une composante négative tel que $A(-x) \leq \alpha(-x)$ soit $Ay \leq \alpha y$ et donc $\alpha \leq \rho(A)$.

DEMONSTRATION

Par l'absurde :

Si $\alpha > \rho(A)$ alors $\frac{\rho(A)}{\alpha} < 1$ (le cas où $\alpha = 0$ est trivial car $0 \leq \rho(A)$)

et donc $(I - \frac{A}{\alpha})$ admettrait une inverse nonnégative qui s'écrirait :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^r = \left(I - \frac{A}{\alpha}\right)^{-1}$$

On sait que $Ax \leq \alpha x$ soit donc $\alpha x - Ax \geq 0$ et par suite $(I - \frac{A}{\alpha})x \geq 0$

et par prémultiplication par $(I - \frac{A}{\alpha})^{-1}$ nous aurons $x \geq 0$ ce qui est

absurde car x a un moins une composante négative.

C.Q.F.D.

C'est la même technique de démonstration que celle du théorème 10 [17].

13. PROPOSITION

Soient A et B deux matrices nonnégatives, si il existe $x \in \mathbb{R}^n$ avec au moins une composante négative tel que $(A+B)x \leq (\rho(A)+\rho(B))x$ alors $\rho(A+B) \geq \rho(A) + \rho(B)$.

PREUVE

Il suffit d'appliquer le théorème 12 en posant

$$\alpha = \rho(A) + \rho(B) \geq 0 .$$

Stein et Rosenberg en étudiant l'application $\alpha \rightarrow \rho(\alpha L+U)$ ont su comparer dans le cas nonnégatif la méthode de Gauss-Seidel et de Jacobi de la manière suivante :

THEOREME DE STEIN-ROSENBERG [19] [17]

Soient L et U deux matrices nonnégatives (n,n)

1°/ Si $\rho(L+U) = 0$ alors $(I-L)^{-1}U$ existe, est nonnégative et $\rho((I-L)^{-1}U) = 0$

2°/ Si $0 < \rho(L+U) < 1$ alors $(I-L)^{-1}U$ existe, est nonnégative et $0 \leq \rho((I-L)^{-1}U) \leq \rho(L+U) < 1$.

3°/ Si $\rho(L+U) = 1$ et si $\rho(L) < 1$, alors $(I-L)^{-1}U$ existe, est nonnégative et $\rho((I-L)^{-1}U) = 1$.

4°/ Si $\rho(L+U) > 1$ et si $\rho(L) < 1$, alors $(I-L)^{-1}U$ existe, est nonnégative et $1 < \rho(L+U) \leq \rho((I-L)^{-1}U)$.

Young [24] de la même manière arrive à raffiner la comparaison pour une certaine classe de matrices.

Nous terminons ce paragraphe en citant quelques uns de ces principaux résultats.

D'après Stein et Rosenberg on sait que si A est une M matrice les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ sont convergentes, la seconde convergeant au moins aussi vite que la première.

Si de plus A est une M matrice symétrique (matrice de Stieljes) on peut énoncer le résultat suivant [17].

14. THEOREME

Soit A une matrice de Stieljes. Alors $J = L+U$ et $G = (I-L)^{-1}U$ étant les matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel associées on a :

$$\rho(L+U)^2 \leq \rho((I-L)^{-1}U) \leq \frac{\rho(L+U)}{2-\rho(L+U)}$$

Young dégage des classes de matrices où la méthode de Gauss-Seidel va deux fois plus vite que celle de Jacobi, nous retrouvons les matrices triples diagonales.

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$; $A = (a_{ij})$ les entiers i et j seront dits associés relativement à A si $a_{ij} \neq 0$ ou $a_{ji} \neq 0$.

DEFINITION

$A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est "consistently ordered" (logiquement ordonné) si pour $t \in \mathbb{N}$ il existe des sous-ensembles disjoints S_1, S_2, \dots, S_t de $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que

$$\sum_{k=1}^t S_k = \{1, 2, \dots, n\} \text{ et tels que } j \in S_{k+1} \text{ si } j > i \text{ et } j \in S_{k-1}$$

si $j < i$ lorsque S_k est le sous-ensemble contenant i .

Il existe un programme reconnaissant le fait que A est où n'est pas logiquement ordonné. Une classe importante de telles matrices est la suivante :

Soit A une matrice bloc tri-diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & H_2 & 0 & \dots & 0 \\ K_1 & D_2 & H_2 & & \vdots \\ 0 & K_2 & D_3 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & & H_{n-1} \\ 0 & \dots & K_{n-1} & & D_n \end{pmatrix}$$

Si les D_i ($i=1 \text{ à } n$) sont des matrices carrées diagonales

A est une matrice logiquement ordonnée.

15. THEOREME

Soit A une matrice logiquement ordonnée alors

$$\rho(\alpha L + U) = \alpha \frac{1}{2} \rho(L + U)$$

et $\rho((I-L)^{-1}U) = \rho(L+U)^2$.

Ainsi donc pour toute matrice logiquement ordonnée si la méthode de Jacobi converge, la méthode de Gauss-Seidel convergera deux fois plus vite.

§ 3 - A PROPOS DU THEOREME DE STEIN-ROSENBERG

Le théorème de Stein-Rosenberg règle, dans le cas nonnégatif la comparaison des rayons spectraux des matrices associées aux méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour la résolution d'un système linéaire. Robert [18] présente un "théorème de Stein-Rosenberg tronqué" et une application concernant les méthodes itératives tronquées pour des équations non-linéaires de point fixe dans \mathcal{O}^n . Dans ce paragraphe est présentée une généralisation du théorème de Stein-Rosenberg tronqué [15].

Soient L et U deux matrices de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ à éléments non négatifs. La condition $\rho(L) < 1$ est alors nécessaire et suffisante pour que la matrice $(I-L)^{-1}$ existe et soit aussi à éléments nonnégatifs (d'où l'existence et la nonnégativité de $(I-L)^{-1}U$). On a alors :

THEOREME DE STEIN-ROSENBERG TRONQUE

Soient L et U deux matrices carrées à éléments nonnégatifs, on considère la récurrence suivante :

$$T_{k+1} = L T_k + U \quad \text{avec } T_0 = I$$

de sorte que :

$$T_1 = L + U \quad \text{et} \quad T_k = [I+L+\dots+L^{k-1}]U+L^k \quad (k=1,2,\dots)$$

et l'on pose $\rho_k = \rho(T_k)$ alors :

- * Si $\rho_1 = 0$ alors $\forall k \geq 1$ $\rho_k = 0$
- * Si $0 < \rho_1 < 1$ alors $\forall k \geq 1$ $0 < \rho_1^k \leq \rho_k \leq \rho_1 < 1$
- * Si $\rho_1 = 1$ alors $\forall k$ $\rho_k = 1$
- * Si $\rho_1 > 1$ alors $\forall k \geq 1$ $1 < \rho_1 \leq \rho_k \leq \rho_1^k$

Ainsi le théorème de Stein-Rosenberg classique peut être obtenu par passage à la limite dans ce théorème. En effet $T = L+U$ et lorsque k tend vers l'infini, à condition que $\rho(L) < 1$, T_k converge vers $(I-L)^{-1}U$.

Par continuité du rayon spectral on obtient la comparaison cherchée entre $\rho(L+U)$ et $\rho((I-L)^{-1}U)$.

Dans ce théorème on compare le rayon spectral des T_k au rayon spectral de T_1 ; il se pose donc le problème de l'étude des rayons spectraux des T_k les uns par rapport aux autres.

On peut compléter ainsi le résultat précédent en utilisant la même technique de démonstration.

THEOREME

En utilisant les mêmes notations que ci-dessus,

Soit n un entier quelconque

- * Si $\rho_n = 0$ alors $\forall k \geq 1$ $\rho_{nk} = 0$
- * Si $0 < \rho_n < 1$ alors $\forall k \geq 1$ $0 < \rho_n^k \leq \rho_{nk} \leq \rho_n < 1$
- * Si $\rho_n = 1$ alors $\forall k$ $\rho_{nk} = 1$
- * Si $\rho_n > 1$ alors $\forall k \geq 1$ $1 < \rho_n \leq \rho_{nk} \leq \rho_n^k$

On retrouve le théorème précédent pour $n=1$.

DEMONSTRATION

Soit n un entier fixé et soit :

$$T_n = (I+L+\dots+L^{n-1})U + L^n = S$$

Considérons la sous-suite suivante de $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$S_k = L^n S_{k-1} + (I+L+\dots+L^{n-1})U$$

alors $S_k = T_{nk}$

En effet ceci est vrai pour $k=1$; $S_1 = T_n$. Supposons que cela soit vrai pour $k-1$, $S_{k-1} = T_{n(k-1)}$ alors :

$$\begin{aligned} S_k &= L^n T_{n(k-1)} + (I+L+\dots+L^{n-1})U \\ &= L^n((I+L+\dots+L^{n(k-1)-1})U + L^{nk}) + (I+L+\dots+L^{n-1})U \\ &= (L^n + L^{n+1} + \dots + L^{nk-1})U + L^{nk} + (I+L+\dots+L^{n-1})U \end{aligned}$$

donc $\rho(S_k) = \rho_{nk}$ et $\rho(S_1) = \rho_n$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe puisque S_1 est nonnégatif $u_\varepsilon > 0$ dans \mathbb{R}^n tel que :

$$S_1 u_\varepsilon \leq (\rho_n + \varepsilon) u_\varepsilon$$

d'autre part soit $\varepsilon > 0$ un vecteur propre de S_1 attaché à la valeur propre ρ_n . $S_1 \omega = \rho_n \omega$.

1/ Si $\rho_n = 0$. Limitons ε dans $]0, 1]$ et montrons que

$$\forall k \quad \forall \varepsilon \in]0, 1] \quad S_k u_\varepsilon \leq \varepsilon u_\varepsilon$$

Ce résultat est vrai pour $k=1$, supposons le vrai pour k il vient :

$$\begin{aligned} S_{k+1} u_\varepsilon &= L^n S_k u_\varepsilon + (I+L+\dots+L^{n-1})Uu_\varepsilon \leq \varepsilon L^n u_\varepsilon + (I+L+\dots+L^{n-1})Uu_\varepsilon \\ &\leq (L^n + (I+L+\dots+L^{n-1})U)u_\varepsilon = S_1 u_\varepsilon \leq \varepsilon u_\varepsilon \end{aligned}$$

et par récurrence le résultat est établi. Il en résulte que

$$0 \leq \rho(S_k) = \rho_{nk} \leq \tau_{S_k}(u_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

avec [17] pour une matrice nonnégative A

$$\tau_A(u) = \inf \{ \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq 0 / Au \leq \beta u \}$$

$$\text{et } \mu_A(u) = \sup \{ \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq 0 / Au \geq \beta u \}$$

ainsi pour tout k et tout $\varepsilon \in]0, 1[$ $0 \leq \rho_{nk} \leq \varepsilon$ d'où il résulte que $\forall k \quad \rho_{nk} = 0$.

2/ Si $0 < \rho_n < 1$.

Limitons ε à être tel que $\rho_n + \varepsilon < 1$. Montrons alors que pour tout k

$$S_k u_\varepsilon \leq (\rho_n + \varepsilon) u_\varepsilon$$

Ce résultat est vrai pour $k=1$. Il se démontre par récurrence pour tout k de la même manière que précédemment grâce aux inégalités

$$\begin{aligned} S_{k+1} u_\varepsilon &= L^n S_k u_\varepsilon + (I+L+\dots+L^{n-1})Uu_\varepsilon \leq (\rho_n + \varepsilon) L^n u_\varepsilon + (I+L+\dots+L^{n-1})Uu_\varepsilon \\ &\leq (L^n + (I+L+\dots+L^{n-1})U)u_\varepsilon = S_1 u_\varepsilon \leq (\rho_n + \varepsilon) u_\varepsilon \end{aligned}$$

Montrons d'autre par que pour tout k

$$\rho_n^k \leq S_k \omega$$

Ce résultat est vrai pour $k=1$, le supposant vrai pour k il vient :

$$\begin{aligned} S_{k+1} \omega &\geq L^n S_k \omega + (I+L+\dots+L^{n-1})U\omega \geq \rho_n^k L^n \omega + (I+L+\dots+L^{n-1})U\omega \\ &\geq \rho_n^k (L^n + (I+L+\dots+L^{n-1})U)\omega = \rho_n^k S_1 \omega \geq \rho_n^{k+1} \omega \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout k et tout $\varepsilon > 0$ assez petit

$$\rho_n^k \leq \mu_{S_k}(\omega) \leq \rho_{nk} \leq \tau_{S_k}(\omega) \leq \rho_n + \varepsilon$$

d'où $\rho_n^k \leq \rho_{nk} \leq \rho_n$ et le résultat est établi.

3/ Si $\rho_n = 1$

Montrons que pour tout k et tout $\varepsilon > 0$

$$S_k u_\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^k u_\varepsilon$$

vrai pour $k=1$. Ce résultat se démontre par récurrence grâce aux inégalités

$$\begin{aligned} S_{k+1} u_\varepsilon &= L^n S_k u_\varepsilon + (I+L+\dots+L^{n-1})U u_\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^k L^n u_\varepsilon + (I+L+\dots+L^{n-1})U u_\varepsilon \\ &\leq (1+\varepsilon)^k (L^n + (I+L+\dots+L^{n-1})U) u_\varepsilon = (1+\varepsilon)^k S_1 u_\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^{k+1} u_\varepsilon \end{aligned}$$

Montrons aussi que pour tout k , $S_k \omega = \omega$.

Ceci est vrai pour $k=0$. Ce résultat se démontre par récurrence grâce aux inégalités :

$$\begin{aligned} S_{k+1} \omega &= L^n S_k \omega + (I+L+\dots+L^{n-1})U\omega = (L^n + (I+L+\dots+L^{n-1})U)\omega \\ &= S_1 \omega = \omega \end{aligned}$$

ω est donc le vecteur propre commun à tous les S_k attaché à la valeur propre commune 1.

Il en résulte que pour tout k et tout $\varepsilon > 0$

$$1 \leq \mu_{S_k}(\omega) \leq \rho_{nk} \leq \tau_{S_k}(\omega) \leq (1+\varepsilon)^k$$

et donc pour tout k $\rho_{nk} = 1$.

4/ Si $\rho_n > 1$.

Montrons que pour tout k et tout $\varepsilon > 0$

$$S_k u_\varepsilon \leq (\rho_n + \varepsilon)^k u_\varepsilon$$

Ce résultat vrai pour $k=1$ se démontre par récurrence grâce aux inégalités.

$$\begin{aligned} S_{k+1} u_\varepsilon &= L^n S_k u_\varepsilon + (I+L+\dots+L^{n-1})U u_\varepsilon - (\rho_n + \varepsilon)^k (L^n + (I+L+\dots+L^{n-1})U) u_\varepsilon \\ &\leq (\rho_n + \varepsilon)^k S_1 u_\varepsilon \leq (\rho_n + \varepsilon)^{k+1} u_\varepsilon \end{aligned}$$

Montrons de plus que pour tout k , $\rho_n \omega \leq S_k \omega$.

Ceci est vrai pour $k=1$ et se démontre par récurrence grâce aux inégalités.

$$\begin{aligned} S_{k+1} \omega &= L^n S_k \omega + (I+L+\dots+L^{n-1})U \omega \geq \rho_n L^n \omega + (I+L+\dots+L^{n-1})U \omega \\ &\geq (L^n + (I+L+\dots+L^{n-1})U) \omega = S_1 \omega \geq \rho_n \omega \end{aligned}$$

et donc pour tout k .

$$1 < \rho_n < \rho_{nk} \leq \rho_n^k \quad \text{et le point 4 est montré.}$$

C.Q.F.D.

On peut représenter par une matrice A les ρ_k que l'on peut comparer en donnant à a_{ij} la valeur 1 lorsque l'on sait comparer ρ_i et ρ_j par les résultats précédents et la valeur 0 lorsque l'on ne le sait pas. La matrice A sera évidemment symétrique.

Pour $n=20$ par exemple nous aurons (en représentant seulement la triangulaire supérieure stricte de A)

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |

$a_{ij} = 1$

On est sur que (avec $i > j$) :

$\rho_i < \rho_j$ si $\rho_1 < 1$ et $\rho_i > \rho_j$ si $\rho_1 > 1$

$a_{ij} = 0$

On ne sait pas comparer ρ_i et ρ_j

Dans le cas où $\rho_1 = 0$ on a $\rho_i = \rho_j = 0 \quad \forall i \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}$

Le problème qui se pose est de "remplir de 1" cette matrice soit de pouvoir comparer entre eux tous les rayons spectraux. On n'a pas trouvé d'exemples numériques prouvant que la suite ρ_k n'est pas monotone. Le problème est ouvert. Toutefois on peut y répondre en imposant des conditions supplémentaires sur $L+U$.

PROPOSITION

Avec les notations précédentes

* Si $\rho(L+U) > 1$ et $\text{Diag}(L+U) \geq 1$

alors $\forall k \geq 1 \quad \rho_{k+1} \geq \rho_k$ car $T_{k+1} \geq T_k$

* Si $\rho(L+U) > 1$ et si de plus T_{k+1} a un vecteur propre x strictement positif tel que $(U+L-I)x \geq 0$ alors

$\forall k \geq 1 \quad \rho_{k+1} \geq \rho_k$

* Si $\rho(L+U) < 1$ et si pour x vecteur propre de T_k $(L+U)x \leq x$ alors

$\forall k \geq 1 \quad \rho_{k+1} \leq \rho_k$

PREUVE

$$T_k = (I+L+\dots+L^{k-1})U + L^k$$

$$T_{k+1} = (I+L+\dots+L^k)U + L^{k+1}$$

$$T_{k+1} = (T_k - L^k + L^{k+1} + L^k U)$$

$$T_{k+1} = T_k + L^k(U+L-I) \tag{1}$$

1 / Si $\rho(L+U) \geq 1$ et $\text{Diag}(L+U) \geq 1$.

Alors $(L+U-I) \geq 0$ soit donc $L^k(U+L-I) \geq 0$ d'où d'après (1) $T_{k+1} \geq T_k$ et T_k et T_{k+1} étant nonnégatives d'après le théorème de Perron-Frobenius on en conclut que $\rho_{k+1} \geq \rho_k$.

2 / Soit $x > 0$ vecteur propre de T_{k+1} alors

$$T_{k+1}x = \rho_{k+1}x = T_kx + L^k(U+L-I)x \text{ d'après (1)}$$

Mais $(U+L-I) \geq 0$ par hypothèse donc

$L^k(U+L-I)x \geq 0$ alors pour $x > 0$

$\rho_{k+1}x \geq T_kx$ donc $\rho_k \leq \rho_{k+1}$ d'après (11,2)

3 / Pour $x \geq 0$ vecteur propre de T_k

$$\begin{aligned} T_{k+1}x &= T_kx + L^k(U+L-I)x \text{ d'après (1)} \\ &= \rho_kx + L^k(U+L-I)x \end{aligned}$$

Mais $(U+L-I)x \leq 0$ donc L^k étant nonnégative

$L^k(U+L-I)x \leq 0$ soit donc

$T_{k+1}x \leq \rho_kx$ avec $x \geq 0$

On en déduit d'après (10,2)

$$\rho_{k+1} \leq \rho_k$$

C.Q.F.D.

Signalons pour terminer ce tour d'horizon un théorème de Stein Rosenberg booléen utilisé pour l'étude de la convergence de processus itératifs à plusieurs variables sur des ensembles finis [16] et un théorème de Stein Rosenberg "chaotique" que nous utiliserons plus tard ; ce dernier résultat du à Charnay et Musy [14] donne des bornes au rayon spectral de la matrice associée à une itération chaotique pour la résolution d'une équation de point fixe à plusieurs variables.

CHAPITRE II

PRESENTATION ET LIMITATION DES METHODES CHAOTIQUES

Le problème posé en 1948 par Stein et Rosenberg [15] rentre dans la catégorie de ceux posés ultérieurement par le choix des stratégies chaotiques *efficaces* (sinon optimales) pour la résolution d'un système d'équations de point fixe à plusieurs variables.

Une présentation de ces méthodes sera faite dans ce chapitre. Elles ont été principalement étudiées par Ostrowski [10] , Chazan et Miranker [4] , Robert [11] , Charnay [2] , Miellou [9] , Luong [7] , Jacquemard [5] , Mahjoub [8] .

La notion de contraction en norme vectorielle (i.e. : une norme à valeur dans un espace vectoriel ordonné) qui est de base pour cette étude [11] permet la construction d'une matrice nonnégative dont le rayon spectral est représentatif de la vitesse de convergence de la stratégie d'itération choisie [2] .

Un théorème de Stein-Rosenberg chaotique, dû à Charnay et Musy [3] donne des bornes à ce rayon spectral. Il sera proposé de nouvelles bornes [1] dont l'intérêt consistera en l'élimination directe de toute une catégorie de stratégies n'apportant à priori aucune amélioration sensible de la vitesse de convergence de l'itération.

Une utilisation de ces bornes sera montrée sur un exemple pratique.

L'examen d'une catégorie particulière de ces stratégies qui seront appelées "Stratégies permutées de Gauss-Seidel" permettra de retrouver le problème posé par Stein et Rosenberg auquel il sera possible de donner plusieurs formulations équivalentes.

§ 1 - ITERATIONS CHAOTIQUES

L'utilisation de la notion de contraction en norme vectorielle (due à Kantorovitch [6]) permet de donner pour un opérateur F sur un produit d'espaces de Banach, un théorème de point fixe.

1. Norme vectorielle - Contraction [11]

Soient k espaces de Banach X_i (par exemple $X_i = \mathbb{R}$ pour $i=1$ à k) de norme notée $\| \cdot \|_i$ ($i=1$ à k).

Considérons le produit topologique $X = \prod_{i=1}^k X_i$. Ainsi tout $x \in X$ s'écrit comme k -uple $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ avec $x_i \in X_i$ pour $i=1$ à k .

Soit p l'application suivante :

$$p : X \rightarrow \mathbb{R}^k$$
$$x \rightarrow p(x) = (\|x_1\|_1, \|x_2\|_2, \dots, \|x_k\|_k)^T$$

p sera appelée *norme vectorielle canonique* sur X .

EXEMPLE

La norme vectorielle type sur \mathbb{R}^n

$$x \rightarrow |x| = p(x)$$

où $|x|$ désigne le vecteur de \mathbb{R}^n obtenu en remplaçant dans x toutes les composantes par leur valeur absolue : C'est une norme vectorielle de taille n sur \mathbb{R}^n .

Soit F un opérateur sur $X = \prod_{i=1}^k X_i$

$$F : X \rightarrow X$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

avec en détaillant F :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \vdots \\ y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{array} \right. \quad y_i \in X_i \quad \text{et} \quad x_i \in X_i$$

DEFINITION

F sera dit p -Lipchitzien si il existe une matrice nonnégative $A \in \mathcal{M}_{kk}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x, y \in X$

$$p(F(x) - F(y)) \leq Ap(x - y)$$

A sera appelée matrice de Lipchitz pour F (elle n'est pas unique).

Si F est p -Lipchitzien sur X de matrice A telle que $\rho(A) < 1$, alors F sera dit p -contractant sur X et A sera appelée matrice de contraction pour F (elle n'est pas unique).

Le théorème classique dans ce contexte (on remplace la constante de Lipchitz par une matrice non négative) est le suivant :

1. THEOREME

Si F est p -contractant sur X , de matrice de contraction A , alors :

1) F admet un point fixe unique $\xi = F(\xi)$ dans X .

2) $\forall x^0 \in X$, la méthode des approximations successives

$$x^{r+1} = F(x^r) \quad r=0,1,2,\dots$$

converge vers ξ .

3) On a alors l'estimation suivante sur l'approximation de ξ par x^r :

$$p(\xi - x^r) \leq A^r(I-A)^{-1}p(x^1 - x^0)$$

§ 2 ITERATIONS CHAOTIQUES - DEFINITION - VITESSE

Soit F un opérateur p -contractant sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ de matrice de contraction A et d'unique point fixe ξ dans X . Pour approcher ξ par un procédé itératif, divers raisons (théoriques et pratiques) amènent à considérer la classe des méthodes d'itérations chaotiques.

Soient $K = \{1,2,\dots,n\}$ et J une partie non-vide de K .

A partir de F et de J définissons l'opérateur F_J sur X par $y = F_J(x)$ avec

$$\begin{cases} y_i = x_i & \text{si } i \notin J \\ y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } i \in J \end{cases}$$

On a $F_K = F$. D'autre part F étant p -contractant de matrice de contraction A , F_J sera p -Lipchitzien de matrice de Lipchitz A_J définie par :

A_J a même $i^{\text{ème}}$ ligne que l'unité si $i \notin J$

A_J a même $i^{\text{ème}}$ ligne que A si $i \in J$

EXEMPLE

$n = 4$, $X = \mathbb{R}^4$, p la norme vectorielle type sur \mathbb{R}^4 .

Soient F p -contractant de matrice de contraction $A = (a_{ij})$ et $J = \{1,3\}$ alors :

$$F_J : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$
$$x \rightarrow y = F_J(x)$$

avec $y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$y_2 = x_2$$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$y_4 = x_4$$

F_J sera p -Lipchitzien de matrice de Lipchitz

$$A_J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Notons que le rayon spectral de A_J est égal à 1 pour J strictement inclus dans $\{1,2,\dots,n\}$ (si $J = \{1,2,\dots,n\}$, $F_J = F$ et $A_J = A$).

Ces définitions étant posées, une itération chaotique (pour calculer ξ) est alors définie par :

- 1) Un vecteur de départ x^0 dans X .
- 2) Une suite $S = J_1, J_2, \dots, J_r, \dots$ de parties non vides de $\{1, 2, \dots, n\}$

D'où l'algorithme

$$x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r) \quad r=0,1,2,\dots$$

Robert, Charnay et Musy en généralisant un résultat dû à Ostrowski [10] donnent des conditions suffisantes de convergence de ces itérations [13], l'idée étant de ne jamais abandonner une composante au cours de l'itération.

L'étude de la vitesse de convergence sera faite dans le cas où F est un opérateur dont on approche le point fixe ξ par une itération chaotique *cyclique* définie par :

- 1) Un vecteur x^0 dans X .
- 2) Une suite $s = J_1, J_2, \dots, J_r$ de parties non-vides de $\{1, 2, \dots, n\}$.

D'où l'algorithme :

$$x^{\ell+1} = F_{J_{\ell+1}}(x^\ell) \quad \ell=0,1,2,\dots$$

$$\text{et } J_{\ell+1} = J_{s(\text{modulo } r)}$$

$$\text{avec } s \in \{1, 2, \dots, n\}$$

La condition suffisante de convergence (dite du résiduel maximal [13]) devient dans ce cas :

1. THEOREME

Soit F un opérateur p -contractant, toute itération chaotique cyclique définie par une suite $s = J_1, J_2, \dots, J_r$ de parties non-vides de $S = \{1, 2, \dots, n\}$ dont l'union redonne S converge, quelque soit x^0 , vers l'unique point fixe ξ de F dans X .

Un algorithme défini initialement par Schroeder [14] dans le cas de la norme vectorielle type sur \mathbb{R}^n et repris [13] dans le contexte d'itérations chaotiques permet le contrôle de leurs convergences.

2. THEOREME [13]

Soit F un opérateur p -contractant de matrice de contraction A . L'itération chaotique cyclique définie par une suite $s = J_1, J_2, \dots, J_r$ de parties non vides de $\{1, 2, \dots, n\}$ dont l'union redonne $\{1, 2, \dots, n\}$ converge, quelque soit x^0 , vers l'unique point fixe ξ de F dans X ; de plus soient :

$$K = A_{J_r} \times A_{J_{r-1}} \times \dots \times A_{J_1}$$

et $z_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $z_0 = (I-K)^{-1}p(x^r - x^0)$

alors $\forall k > 1$ $p(\xi - x^{kr}) \leq K^k z_0$.

Un résultat donné par Varga [16] dans le cas linéaire et repris dans le cadre plus général des itérations chaotiques [2] montre que la stratégie d'itération efficace définie par une suite $s = J_1, J_2, \dots, J_r$ est celle qui minimise

$$\left(\sum_{i=1}^n \text{Card } J_i \right) \times \rho(A_{J_r} \times A_{J_{r-1}} \times \dots \times A_{J_1})$$

§ 3 - LIMITATION

Donner des bornes à $\rho(A_{J_r} \times A_{J_{r-1}} \times \dots \times A_{J_1})$ nous permet

d'évaluer de combien on peut améliorer la vitesse d'une itération .
Charnay et Musy ont donné les bornes suivantes :

1. THEOREME [3]

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ matrice de contraction avec $\rho(A) < 1$.

Soit J_1, J_2, \dots, J_r une séquence de parties non-vides de $\{1, 2, \dots, n\}$
dont l'union redonne $\{1, 2, \dots, n\}$. On pose $K = A_{J_r} A_{J_{r-1}} \dots A_{J_1}$,

alors on a :

$$0 \leq \rho(A)^r \leq \rho(K) \leq \rho(A) < 1 .$$

Ceci est une extension "chaotique" du théorème de Stein-Rosenberg car une étude des stratégies particulières qui sera faite plus loin montrera que σ étant une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ce théorème appliqué à la suite $s = J_1, J_2, \dots, J_n$ telle que $J_i = \{\sigma(i)\}$ pour $i=1$ à n redonne le théorème de Stein-Rosenberg classique (I , § 2).

Il apparait immédiatement que les bornes données par ce théorème en fonction de la stratégie choisie dépendent uniquement du nombre de parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ considérées. De nouvelles bornes tenant compte de la composition de ces parties dépendront plus de la stratégie choisie.

2. THEOREME [1]

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ avec $\rho(A) < 1$. Soit J_1, J_2, \dots, J_r une séquence de parties non-vides de $\{1, 2, \dots, n\}$ dont l'union redonne $\{1, 2, \dots, n\}$ alors :

$$0 \leq \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}^{r_i} \leq \rho(A_{J_r} \times A_{J_{r-1}} \times \dots \times A_{J_1}) \leq \rho(A) < 1 .$$

avec a_{ii} (pour $i=1$ à n) éléments diagonaux de $A = (a_{ij})$ et r_i nombre de fois que l'on trouve i dans la séquence J_1, J_2, \dots, J_r .

DEMONSTRATION

Soit $s = J_1, J_2, \dots, J_r$ considérons $s' = S_1, S_2, \dots, S_k$ construite à partir de s de la manière suivante :

$$\text{Card}(S_i) = 1 \text{ pour } i=1 \text{ à } k \text{ et } J_j = \sum_{k=l}^{l+\text{Card}J_j} S_k \text{ pour } j=1 \text{ à } r$$

EXEMPLE

$$n = 5 \quad s = \{1, 2\} \{2, 3, 5\} \{4, 5\}$$

$$\text{alors } s' = \{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}$$

s' étant plus fine que s on a [5]

$$\rho(A_{S_k} \times A_{S_{k-1}} \times \dots \times A_{S_1}) \leq \rho(A_{J_r} \times \dots \times A_{J_1})$$

Le nombre de fois où l'indice i apparaît dans s étant le même que celui où il apparaît dans s' la démonstration est à faire pour une suite $s = S_1, S_2, \dots, S_k$ de parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ où $\text{Card } S_i = 1$ pour tout i .

Par définition :

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

en notant e_j le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n on a

$$A_i^T e_j = e_j \quad \text{pour } i \neq j \tag{1}$$

Notons S_i le premier élément de s tel que $S_i = \{i\}$

alors $A_{S_{i+1}}^T \times \dots \times A_{S_K}^T e_i = e_i$ d'après (1) et les A_i étant

nonnégatives on a :

$$A_{S_i}^T A_{S_{i+1}}^T \times \dots \times A_{S_K}^T e_i = A_{S_i}^T e_i = \begin{vmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{vmatrix} \geq a_{ii} e_i$$

Soit S_{i-r} l'élément suivant dans S tel que $S_{i-r} = \{i\}$ alors de la même manière :

$$A_{S_{i-r+1}}^T \times \dots \times A_{S_{i-1}}^T A_{S_i}^T \times \dots \times A_{S_K}^T e_i \geq a_{ii} A_{S_{i-r+1}}^T \times \dots \times A_{S_{i-1}}^T e_i = a_{ii} e_i$$

et

$$A_{S_{i-r}}^T A_{S_{i-r+1}}^T \times \dots \times A_{S_K}^T e_i \geq a_{ii} A_{S_{i-r}}^T e_i = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{i1} \\ \vdots & \\ a_{ii} & \\ \vdots & \\ a_{ii} & a_{in} \end{vmatrix} \geq a_{ii}^2 e_i$$

En réitérant le processus les r_i fois que i apparait dans s nous

$$\text{aurons } A_{S_1}^T \times \dots \times A_{S_K}^T e_i \geq a_{ii}^{r_i} e_i \quad (2)$$

Les A_i étant nonnégatives et e_i étant un vecteur nonnégatif le théorème (10, § 2, I) appliqué à (2) donne :

$$a_{ii}^{r_i} \leq \rho(A_{S_1}^T \times \dots \times A_{S_K}^T) = \rho(A_{S_K} \times \dots \times A_{S_1})$$

La démonstration restant vraie pour tout i appartenant à $\{1,2,\dots,n\}$ on a :

$$\max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}^{r_i} \leq \rho(A_{S_K} \times \dots \times A_{S_1}) \leq \rho(A_{J_r} \times \dots \times A_{J_1}) .$$

C.Q.F.D.

On va donner un moyen théorique de comparaison de ces deux bornes en utilisant le théorème (12, § 2, I) .

Sur un exemple pratique sera illustré l'intérêt de la seconde borne qui consistera en l'élimination directe de toute une catégorie de stratégie n'apportant à priori aucune amélioration sensible de la vitesse de convergence de l'itération.

PROPOSITION

Avec les notations que précédemment, si il existe un vecteur y de \mathbb{R}^n avec au moins une composante négative tel que :

$$A^r y \leq \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}^{r_i} \times y$$

alors $\max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}^{r_i} \leq \rho(A)^r$

PREUVE

Il suffit de poser $\max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}^{r_i} = \alpha$ et d'appliquer le théorème (12, §2, I) pour A^r .

EXEMPLE PRATIQUE

Soit à résoudre le système affine de point fixe $x^* = F(x^*)$ avec $F(x) = Ax+b$ tel que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ donné par :

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{0,8}{i} x_i + \frac{1,2}{n} \left(\sum_{i < j} \frac{2i-j}{2i+j} x_j + \sum_{i > j} \frac{2j-i}{2i+j} x_j \right) + i$$

pour $i=1$ à n .

p étant le norme vectorielle type sur \mathbb{R}^n . F est p Lipchitzien de matrice de Lipchitz $K = (k_{ij})$ suivante

$$k_{ij} = \begin{cases} \frac{0,8}{i} & \text{pour } i=j \\ \frac{1,2}{n} \frac{|2i-j|}{2i+j} & \text{pour } i < j \\ \frac{1,2}{n} \frac{|2j-i|}{2i+j} & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons que $n=30$ alors $\rho(K) = 0,824173 < 1$

Alors, pour $n=30$, F est p -contractant de matrice de contraction K .

Considérons l'ensemble des stratégies chaotiques s donné par

$s = \{S \in s / S = \{\sigma_1\}, \dots, \{\sigma_{30}\}\}$ avec $\sigma \in S_n$ permutation de $\{1, 2, \dots, 30\}$

notée $\sigma(i) = \sigma_i$ pour $i=1$ à 30 .

Nous avons $\{\sigma_1\} \cup \{\sigma_2\} \cup \dots \cup \{\sigma_{30}\} = \{1, 2, \dots, 30\}$ et donc d'après le théorème (§2,1) toutes ces stratégies convergent vers x^* point fixe de F . De plus leur vitesse de convergence est liée à

$$\rho(K_{\sigma_{30}} \times K_{\sigma_{29}} \times \dots \times K_{\sigma_1}) .$$

D'après l'inégalité de Charnay-Musy nous avons

$$\rho(K)^{30} \leq \rho(K_{\sigma_{30}} \times \dots \times K_{\sigma_1}) \leq \rho(K)$$

$$\text{soit } 0,003 \leq \rho(K_{\sigma_{30}} \times \dots \times K_{\sigma_1}) \leq 0,82 \quad (1)$$

La deuxième inégalité nous donne puisque $r_i = 1$ pour tout S de s et tout i de $\{1,2,\dots,n\}$

$$\max_{i=1 \text{ à } n} k_{ii} \leq \rho(K_{\sigma_{30}} \times \dots \times K_{\sigma_1}) \leq \rho(K)$$

$$\text{soit } 0,8 \leq \rho(K_{\sigma_{30}} \times \dots \times K_{\sigma_1}) \leq 0,82 \quad (2)$$

Donc quelque soit la stratégie S prise dans l'ensemble s Contrairement à ce que (1) pouvait nous faire espérer on ne peut avoir d'après (2) un rayon spectral de $K_{\sigma_{30}} \times \dots \times K_{\sigma_1}$ inférieur à 0,8 .

Donc à la simple vue des éléments diagonaux de la matrice de contraction K nous concluons directement à l'inutilité de rechercher dans s , que nous appellerons ensemble des stratégies permutées de Gauss-Seidel, une méthode itérative efficace.

Considérons maintenant une itération chaotique engendrée par une suite $S = J_1, J_2, \dots, J_r$ avec $r > n$

$$\begin{array}{l} \text{Supposons que } J_1 = \{1\} \\ J_2 = \{2\} \\ J_3 = \{2\} \\ \vdots \\ J_{2+r_1} = \{2\} \\ J_{2+r_1+1} = \{3\} \\ \vdots \\ J_r = \{30\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{avec } r_i > 1 \\ \text{pour } i=1 \text{ à } 29 . \end{array}$$

Ainsi nous itérons une fois sur la première composante, r_1 fois sur la seconde, r_2 fois sur la troisième et comme cela r_{29} fois sur la trentième .

L'inégalité de Charnay-Musy nous donne en supposant que $r = 50$.

$$0,00004 \leq \rho(K_{J_r} \times \dots \times K_{J_1}) \leq 0,82 \quad (3)$$

La deuxième inégalité nous donne :

$$0,8 \leq \rho(K_{J_r} \times \dots \times K_{J_1}) \leq 0,82 \quad (4)$$

Car $\max_{i=1 \text{ à } n} k_{ii}^{r_i} = 0,8$ puisque la composante 1 n'apparaît qu'une seule fois dans la suite S et que $k_{11} = 0,8$.

Alors que (3) peut faire espérer un rayon spectral assez petit, on déduit de (4) que toutes les stratégies ne touchant qu'une seule fois la première composante à chaque cycle ne peuvent donner un rayon spectral inférieur à 0,8 et sont donc à éliminer au même titre que les stratégies données par les permutations de $\{1,2,\dots,30\}$.

Il nous reste donc à considérer toutes les stratégies touchant la première composante plus d'une fois.

Nous obtenons le tableau suivant pour différentes tailles de n en appliquant les stratégies

$$S = \{1\} \{1\} \{1\} \{1\} \{1\} \{1\} \{2\} \{3\} \dots \{n\}$$

où nous avons d'après la deuxième inégalité

$$0,4 \leq \rho(K_n \times \dots \times K_1^6) \leq 0,8$$

Nous notons $K_J = K_n \times \dots \times K_1^6$, $p = NS$ le nombre d'éléments dans la suite S et V le gain en vitesse par rapport à l'itération de Gauss-Seidel. Par exemple $V = 2$: la nouvelle stratégie va deux fois plus vite que celle de Gauss-Seidel.

| N | ϵ | NS | Séquence | Nombre d'opérations | $\rho(K_J)$ | gain en opération | V | $\rho(K_J)^{\frac{n}{p}}$ |
|----|------------|----|------------|---------------------|-------------|-------------------|------|---------------------------|
| 10 | 10^{-6} | 10 | 1 - 10 | 640 | 0,825 | 325 | 2,03 | 0,576 |
| | | 15 | 1^6 - 10 | 315 | 0,432 | | | |
| 15 | / | 15 | 1 - 15 | 960 | 0,824 | 560 | 2,4 | 0,542 |
| | | 20 | 1^6 - 15 | 400 | 0,442 | | | |
| 20 | / | 20 | 1 - 20 | 1280 | 0,822 | 805 | 2,7 | 0,519 |
| | | 25 | 1^6 - 20 | 475 | 0,440 | | | |
| 25 | / | 25 | 1 - 25 | 1600 | 0,820 | 1030 | 2,8 | 0,502 |
| | | 30 | 1^6 - 25 | 570 | 0,437 | | | |
| 30 | / | 30 | 1 - 30 | 1890 | 0,819 | 1225 | 2,84 | 0,489 |
| | | 35 | 1^6 - 30 | 665 | 0,434 | | | |
| 40 | / | 40 | 1 - 40 | 2600 | 0,816 | 1790 | 3,20 | 0,471 |
| | | 45 | 1^6 - 40 | 810 | 0,429 | | | |
| 50 | / | 50 | 1 - 50 | 3150 | 0,814 | 2160 | 3,18 | 0,458 |
| | | 55 | 1^6 - 50 | 990 | 0,424 | | | |

Le tableau de comparaison des deux bornes pour différentes tailles de n est le suivant :

Pour $S = \{\sigma_1\}\{\sigma_2\} \dots \{\sigma_n\}$ avec $\sigma_i = i$ pour $i=1$ à n

Soit la méthode d'itération de Gauss-Seidel

| N | CM | [2] | $\rho(K_n - K_1)$ | $\rho(K)$ |
|----|---------|-----|-------------------|-----------|
| 10 | 0,157 | 0,8 | 0,82 | 0,83 |
| 15 | 0,66 | 0,8 | 0,82 | 0,83 |
| 20 | 0,02 | 0,8 | 0,81 | 0,82 |
| 25 | 0,008 | 0,8 | 0,81 | 0,82 |
| 30 | 0,003 | 0,8 | 0,81 | 0,82 |
| 40 | 0,0003 | 0,8 | 0,81 | 0,82 |
| 50 | 0,00004 | 0,8 | 0,81 | 0,81 |

Pour $S = \{1\} \{1\} \{1\} \{1\} \{1\} \{1\} \{2\} \{3\} \dots \{n\}$ nous obtenons

| N | CM | [2] | $\rho(K_J)$ | $\rho(K)$ |
|----|--------|-----|-------------|-----------|
| 10 | 0,062 | 0,4 | 0,43 | 0,83 |
| 15 | 0,024 | 0,4 | 0,44 | 0,83 |
| 20 | 0,009 | 0,4 | 0,44 | 0,82 |
| 25 | 0,003 | 0,4 | 0,43 | 0,82 |
| 30 | 0,001 | 0,4 | 0,43 | 0,82 |
| 40 | 0,001 | 0,4 | 0,43 | 0,82 |
| 50 | 0,0001 | 0,4 | 0,42 | 0,81 |

On constate donc l'imprécision dans l'approximation du rayon spectral par l'inégalité de Charnay-Musy dans ce cas.

Cette imprécision augmente avec n et cela est dû au fait que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(K)^n = 0 \quad \text{car} \quad 0,8 \leq \rho(K) < 1$$

Nous venons de voir sur un exemple pratique l'intérêt de cette nouvelle borne qui se déduit directement des éléments diagonaux.

Elle indique (lorsqu'elle est meilleure que celle de Charnay-Musy) dans quelle catégorie se trouve la stratégie la plus efficace mais ne la donne pas explicitement.

Les différentes manières de poser le problème du choix de la stratégie chaotique optimale d'itération en particulier pour les stratégies permutoées de Gauss-Seidel permettent de faire le lien avec le problème initial de Stein-Rosenberg.

§ 4 - LES PERMUTEES DE GAUSS-SEIDEL

Les paragraphes 1, 2, 3. montrent que le problème du choix de la stratégie optimale d'itération de point fixe se ramène au problème matriciel suivant :

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}^+)$ une matrice nonnégative de rayon spectral strictement inférieure à 1 (A est une matrice de contraction).

Il s'agit de trouver la suite J_1, J_2, \dots, J_r de parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ dont l'union redonne $\{1, 2, \dots, n\}$ qui minimise

$$\left(\sum_{i=1}^n \text{Card } J_i \right) \times \rho(A_{J_r} \ A_{J_{r-1}} \ \dots \ A_{J_1})$$

Une proposition due à Charnay-Musy permet de mettre sous certaines conditions sur la suite J_1, J_2, \dots, J_r la matrice $A_{J_r} \times \dots \times A_{J_1}$ sous une forme rappelant celle de la matrice de Gauss-Seidel associée à la résolution d'un système linéaire $Bx = d$.

1. PROPOSITION [3]

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}^+)$ une matrice nonnégative.

Soit J_1, J_2, \dots, J_r une séquence de parties non vides de $\{1, 2, \dots, n\}$ formant une partition de $\{1, 2, \dots, n\}$.

$$\bigcup_{i=1}^r J_i = \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{et} \quad J_i \cap J_j = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

Soit $K = A_{J_r} \times \dots \times A_{J_1}$. On peut alors construire deux matrices

$L \geq 0$ et $U \geq 0$ telles que :

$$A = L + U$$

$$(I-L)K = U$$

et comme $\rho(L) = 0$

$$K = (I-L)^{-1}U \geq 0$$

Une application dans le cadre des stratégies permutées de Gauss Seidel permet une construction très simple des matrices L et U .

DEFINITION

Soit $\sigma \in S_n$ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$. On appellera stratégie permutée de Gauss-Seidel la stratégie associée à la suite $s = J_1, J_2, \dots, J_r$ telle que $J_i = \{\sigma_i\}$ pour $i=1$ à n .

A la permutation σ seront associées deux matrices L_σ et U_σ ainsi définies.

DEFINITION

Soit $\sigma \in S_n$ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ σ définit une découpe de $A = (a_{ij})$ en L_σ et U_σ de la manière suivante

$$A = L_\sigma + U_\sigma \quad \text{avec} \quad L_\sigma \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+) \quad \text{et} \quad U_\sigma \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$$

$$\text{et} \quad (L_\sigma)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & j = \sigma_s \quad i = \sigma_{s+1}, \dots, \sigma_n \quad s=1 \text{ à } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXEMPLES

$$n = 4 \quad A = (a_{ij})$$

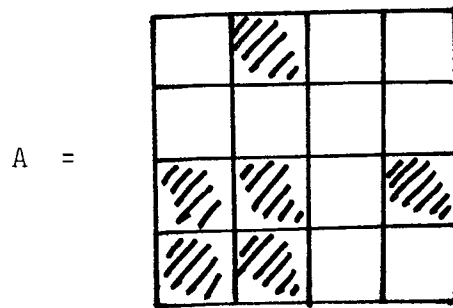
$$\sigma_1 : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$$

A =

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

$$L_{\sigma_1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad U_{\sigma_1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_2 = \{1,2,3,4\} \rightarrow \{2,1,3,4\}$$



$$L_{\sigma_2} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad U_{\sigma_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

La proposition 1 devient

2. PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$. σ étant une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ soient $\{\sigma_1\}, \dots, \{\sigma_n\}$ la stratégie permutée de Gauss-Seidel associée et L_σ et U_σ la découpe de A correspondante. On a :

$$(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma = A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1}$$

Une matrice nonnégative de rayon spectral inférieur strictement à 1 étant donnée le problème du choix de la stratégie optimale d'itération J_1, J_2, \dots, J_r ne consiste pas uniquement en la minimisation de $\rho(A_{J_r} \times \dots \times A_{J_1})$ car dans ce cas le minimum est atteint de manière triviale par la suite $s = J_1, \dots, J_n$ telle que $J_i = \{1,2,\dots,n\}$ pour $i=1$ à n . En effet $A_{J_i} = A \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ par définition, ainsi $\rho(A_{J_n} \times \dots \times A_{J_1}) = \rho(A^n) = \rho(A)^n$ et la borne inférieure de Charnay-Musy pour $\rho(A_{J_n}, \dots, A_{J_1})$ est atteinte. Il faut donc tenir compte du nombre d'activation à chaque cycle soit $\sum_{i=1}^n \text{Card } J_i$.

Dans le cas du choix de la stratégie optimale parmi les stratégies permutées de Gauss-Seidel $\sum_{i=1}^n \text{Card } J_i = n$ est constant et ainsi le problème devient

Trouver la permutation σ qui minimise $\rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1})$

ou bien en appliquant la proposition 2

Trouver la permutation σ qui minimise $\rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma)$

Le lien avec le problème posé par Stein et Rosenberg se fait de la manière suivante :

3. PROPOSITION

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\sigma \in S_n$, L_σ et U_σ la découpe de A associée à σ alors il existe une matrice de permutation P_σ correspondante à σ telle que :

$$P_\sigma^T L_\sigma P_\sigma = L \text{ triangulaire inférieure stricte}$$

$$P_\sigma^T U_\sigma P_\sigma = U \text{ triangulaire supérieure}$$

et de plus :

1. $\rho((I \cdot L_\sigma)^{-1} U_\sigma) = \rho((I-L)^{-1} U)$
2. Pour σ et σ' appartenant à S_n . Les éléments diagonaux de U_σ sont les mêmes que ceux de $U_{\sigma'}$ et A .
3. $\rho(U_\sigma) = \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}$ et $\rho(L_\sigma) = 0$

PREUVE

On vérifie aisément que la matrice P_σ ainsi définie

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=\sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est telle que $P_\sigma^T L_\sigma P_\sigma = L$ et $P_\sigma^T U_\sigma P_\sigma = U$ avec L triangulaire inférieure stricte et U triangulaire supérieure.

$$1. \quad (I-L)^{-1}U = (P_{\sigma}^T P_{\sigma} - P_{\sigma}^T L P_{\sigma})^{-1} P_{\sigma}^T U P_{\sigma}$$

$P_{\sigma}^T = P_{\sigma}^{-1}$ car P_{σ} est une matrice de permutation donc

$$\begin{aligned} (I-L)^{-1}U &= (P_{\sigma}^{-1}(I-L_{\sigma})P_{\sigma})^{-1} P_{\sigma}^{-1} U P_{\sigma} \\ &= P_{\sigma}^{-1}(I-L_{\sigma})^{-1} U P_{\sigma} \quad \text{d'où} \quad \rho((I-L)^{-1}U) = \rho((I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}) \end{aligned}$$

2.3. Par définition U_{σ} a mêmes éléments diagonaux que ceux de A , P_{σ} conservant la diagonale à un réarrangement près les éléments diagonaux de U seront ceux de U_{σ} , de plus L et U étant des matrices triangulaires

$$\rho(U_{\sigma}) = \rho(U) = \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}$$

$$\rho(L_{\sigma}) = \rho(L) = 0$$

C.Q.F.D.

Ainsi donc soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}^+)$ la matrice de contraction d'un opérateur linéaire F sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ espace de Banach muni d'une norme vectorielle p . Le problème du choix de la stratégie optimale parmi les permutées de Gauss-Seidel est celui du choix de la matrice de permutation P_{σ} telle que la matrice de Gauss-Seidel associée à la découpe de $P_{\sigma}^T A P_{\sigma}$ en L triangulaire supérieure stricte et U triangulaire inférieure ait un rayon spectral $\rho((I-L)^{-1}U)$ minimum.

Dans le cas où A est la matrice de Jacobi associée à la résolution d'un système linéaire $Bx = d$, on retrouve le problème posé par Stein et Rosenberg du choix de la permutation P qui donnerait le $\rho((I-L)^{-1}U)$ minimum avec $(I-L)^{-1}U$ matrice de Gauss-Seidel associée à $P^T J P$.

En résumé, A étant une matrice nonnégative de rayon spectral strictement inférieur à 1, il s'agit de trouver la permutation σ de S_n qui vérifie ces trois propositions équivalentes :

$$1/ \quad \rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \min_{\sigma' \in S_n} \rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'})$$

$$2/ \quad \rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1}) = \min_{\sigma' \in S_n} (A_{\sigma'_n} A_{\sigma'_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma'_1})$$

3/ La matrice de permutation P_σ associée à σ est celle pour laquelle le rayon spectral $\rho((I-L)^{-1}U)$ de la matrice de Gauss-Seidel associée à $P_\sigma^T A P_\sigma$ est minimum.

Dans le cadre de ces stratégies permutées de Gauss-Seidel les bornes données par Charnay-Musy deviennent :

4. THEOREME

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\rho(A) < 1$. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ on a :

$$\rho(A)^n \leq \rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1}) \leq \rho(A) .$$

Ainsi on peut voir dans la borne donnée par Charnay et Musy une extension chaotique du théorème de Stein-Rosenberg. En effet à $\sigma \in S_n$ correspond une matrice de permutation P_σ telle que la découpe de Gauss-Seidel de $P_\sigma^T A P_\sigma$ en L et U vérifie $A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1} = (I-L)^{-1}U$

L étant triangulaire inférieure stricte, $L^n = 0$. Par suite

$$(I-L)^{-1}U = (I+L+\dots+L^{n-1})U + L^n = A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \dots A_{\sigma_1}$$

En posant avec les notations du théorème de Stein-Rosenberg tronqué

(I, § 3)

$$(I+L+\dots+L^{n-1})U + L^n = T_n$$

Nous avons d'après ce théorème puisque $\rho(L+U) = \rho(P_\sigma^T A P_\sigma) = \rho(A) < 1$

$$\rho(L+U)^n \leq \rho(T_n) \leq \rho(L+U)$$

et ainsi

$$\rho(A)^n \leq \rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1}) \leq \rho(A) < 1 .$$

De la borne (3,2) on tire le corollaire suivant :

5. COROLLAIRE

Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ et σ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$
alors si $\rho(A) < 1$

$$\max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii} \leq \rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) \leq \rho(A) .$$

REMARQUE

Cela peut aussi se montrer facilement du théorème de Perron en remarquant que $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ est supérieure à U_σ et que d'après (4,3)

$$\rho(U_\sigma) = \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii} .$$

Cette borne inférieure est atteinte lorsque σ est telle que $L_\sigma = 0$

Car alors $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma = U_\sigma$ mais dans ce cas nous aurons :

6. PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ avec $\rho(A) < 1$ alors si il existe $\sigma \in S_n$ telle que $L_\sigma = 0$, $\rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}$ et de plus pour tout $\sigma' \in S_n$

$$\rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}) = \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}$$

Donc toutes les découpes se valent et il est inutile d'étudier ce cas puisque toutes les découpes auront même vitesse de convergence.

PREUVE

Considérons $\sigma' \in S_n$ alors

$$\max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii} \leq \rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}) \leq \rho(A) \quad (1)$$

mais il existe une matrice de permutation P_σ associée à σ telle que $P_\sigma^T A P_\sigma = L_\sigma + U_\sigma = U_\sigma$ d'où

$$\rho(A) = \rho(P_\sigma^T A P_\sigma) = \rho(U_\sigma) = \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}$$

et (1) devient $\rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}) = \max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}$.

C.Q.F.D.

CHAPITRE III

APPROCHE : CALCUL EXPLICITE DE $[(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}]^m$

A étant une matrice nonnégative de rayon spectral inférieur strictement à 1 il s'agit donc de choisir la permutation σ de $\{1,2,\dots,n\}$ qui minimise le rayon spectral de $A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1} = (I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}$, matrices définies dans le chapitre II.

A ce propos, il sera donné dans ce chapitre une formule explicite des éléments de $[(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}]^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ dans le but d'approcher (cf. chapitre IV) les quantités $\rho((I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma})$ et $\text{Trace} [(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}]$.

On pourra alors donner une condition suffisante de comparaison de deux découpages différent d'une substitution.

I - CALCUL EXPLICITE DE $[(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}]^k$

1. DEFINITION

On notera de manière classique $E_{ij} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ avec $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ la matrice $E_{ij} = e_i e_j^T$

et on a $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

avec δ_{jk} symbole de Kronecker

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

2. DEFINITION

Soit A une famille de parties de \mathbb{N} , par exemple

$A = \{a\}\{b\}\{c,d\}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ et soit $e \in \mathbb{N}$

on notera $\{e \times A\}$ l'ensemble $B = \{e,a\}\{e,b\}\{e,c,d\}$.

EXEMPLE

$$C = \{2\}\{3,4,5\}\{2,4,3\}$$

alors $\{10 \times C\} = \{10,2\}\{10,3,4,5\}\{10,2,4,3\}$

3. DEFINITION

A une permutation σ de $\{1,2,\dots,n\}$

$$\sigma : \{1,2,\dots,n\} \rightarrow \{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n\}$$

il sera associé une suite $\mathcal{L}_{\sigma_1}, \mathcal{L}_{\sigma_2}, \dots, \mathcal{L}_{\sigma_n}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{L}_{\sigma_j} : \{\sigma_j \times \mathcal{L}_{\sigma_{j-1}}\} \{ \sigma_j \times \mathcal{L}_{\sigma_{j-2}} \} \dots \{ \sigma_j \times \mathcal{L}_{\sigma_1} \} \{ \sigma_j \}$$

pour $j=2$ à n et $\mathcal{L}_{\sigma_1} = \{ \sigma_1 \}$.

La formule de calcul explicite de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ qui sera donnée repose essentiellement sur la construction de cette suite.

EXEMPLE

$n=4$ $\sigma : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$

alors :

$$\mathcal{E}_{\sigma_1} = \{\sigma_1\}$$

$$\mathcal{E}_{\sigma_2} = \{\sigma_2 \times \mathcal{E}_{\sigma_1}\{\sigma_2\} = \{\sigma_2, \sigma_1\} \{\sigma_2\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\sigma_3} &= \{\sigma_3 \times \mathcal{E}_{\sigma_2}\{\sigma_3 \times \mathcal{E}_{\sigma_1}\}\{\sigma_3\} \\ &= \{\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1\}\{\sigma_3, \sigma_2\}\{\sigma_3, \sigma_1\}\{\sigma_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\sigma_4} &= \{\sigma_4 \times \mathcal{E}_{\sigma_3}\{\sigma_4 \times \mathcal{E}_{\sigma_2}\}\{\sigma_4 \times \mathcal{E}_{\sigma_1}\}\{\sigma_4\} \\ &= \{\sigma_4, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1\}\{\sigma_4, \sigma_3, \sigma_2\}\{\sigma_4, \sigma_3, \sigma_1\}\{\sigma_4, \sigma_3\}\{\sigma_4, \sigma_2, \sigma_1\}\{\sigma_4, \sigma_2\} \\ &\quad \{\sigma_4, \sigma_1\}\{\sigma_4\} \end{aligned}$$

La suite \mathcal{E}_{σ_n} pour $k=1$ à n se construit donc sans difficulté et d'une manière tout à fait automatique.

4. DEFINITION

Soit C une partie de $\{1, 2, \dots, n\}$ par exemple $C = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $b_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour $1 \leq i \leq r$.

Soit $K \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ notée $K = (k_{ij})$, on définit :

$$\prod_C^j k = k_{b_1 b_2} \times k_{b_2 b_3} \times \dots \times k_{b_{r-1} b_r} \times k_{b_r j} \text{ pour } j \in \{1, \dots, n\}.$$

EXEMPLE

En reprenant l'exemple donné pour illustrer la définition 3 on a :

$$C_{\sigma_3} = \{\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1\} \in \mathcal{E}_{\sigma_3}$$

Soit $K = (k_{ij}) \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ on aura :

$$C_{\sigma_3}^2 \prod k = k_{\sigma_3 \sigma_2} \times k_{\sigma_2 \sigma_1} \times k_{\sigma_1}^2$$

et ainsi en considérant tout \mathcal{E}_{σ_3} nous aurons :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_3 \in \mathcal{E}_{\sigma_3}} C_{\sigma_3}^2 \prod k &= \sum_{\{\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1\}} C_{\sigma_3}^2 \prod k + \sum_{\{\sigma_3, \sigma_2\}} C_{\sigma_3}^2 \prod k + \sum_{\{\sigma_3, \sigma_1\}} C_{\sigma_3}^2 \prod k + \sum_{\{\sigma_3\}} C_{\sigma_3}^2 \prod k \\ &= k_{\sigma_3 \sigma_2} k_{\sigma_2 \sigma_1} k_{\sigma_1}^2 + k_{\sigma_3 \sigma_2} k_{\sigma_2}^2 + k_{\sigma_3 \sigma_1} k_{\sigma_1}^2 + k_{\sigma_3}^2 \end{aligned}$$

Ces définitions étant posées, Soit A une matrice nonnégative de taille n et σ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$; une formule explicite de calcul de $(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}$ est la suivante [1] :

1. THEOREME

Soient A une matrice nonnégative de taille n et σ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$. Soient $U_{\sigma}, L_{\sigma}, A_{\sigma_i}$ pour $i=1$ à n les matrices associées (II,2).

Posons $K = A - I$ avec les définitions et notations précédentes on a :

$$\begin{aligned} (I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma} &= I + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_n} \in \mathcal{E}_{\sigma_n}} C_{\sigma_n}^j \prod k \right) E_{\sigma_n^j} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_{n-1}} \in \mathcal{E}_{\sigma_{n-1}}} C_{\sigma_{n-1}}^j \prod k \right) E_{\sigma_{n-1}^j} \\ &+ \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{E}_{\sigma_l}} C_{\sigma_l}^j \prod k \right) E_{\sigma_l^j} + \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{E}_{\sigma_1}} C_{\sigma_1}^j \prod k \right) E_{\sigma_1^j} \end{aligned}$$

DEMONSTRATION

Elle se fait par récurrence sur $A_{\sigma_n}, A_{\sigma_{n-1}}, \dots, A_{\sigma_1} = (I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}$.

Par définition de A_{σ_i} et K_{σ_i} pour $i=1$ à n

$$A_{\sigma_i} = I + \sum_{j=1}^n k_{\sigma_i j} E_{\sigma_i j}$$

et ainsi pour $i=1$

$$A_{\sigma_1} = I + \sum_{j=1}^n k_{\sigma_1 j} E_{\sigma_1 j} \quad (1)$$

Par définition $\mathcal{L}_{\sigma_1} = \{\sigma_1\}$ et (1) est donc bien égal à

$$I + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} \prod_{C_{\sigma_1}}^j k \right) = I + \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\{\sigma_1\}}^j k \right) E_{\sigma_1 j}$$

La formule est donc vraie pour 1, supposons la vraie pour $n-1$
Soit donc :

$$\begin{aligned} A_{\sigma_{n-1}} A_{\sigma_{n-2}} \times \dots \times A_{\sigma_1} &= I + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_{n-1}} \in \mathcal{L}_{\sigma_{n-1}}} \prod_{C_{\sigma_{n-1}}}^j k \right) E_{\sigma_{n-1} j} + \dots \\ \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_\ell} \in \mathcal{L}_{\sigma_\ell}} \prod_{C_{\sigma_\ell}}^j k \right) E_{\sigma_\ell j} &+ \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} \prod_{C_{\sigma_1}}^j k \right) E_{\sigma_1 j} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \times \dots \times A_{\sigma_1} &= \left(I + \sum_{j=1}^n k_{\sigma_n j} E_{\sigma_n j} \right) A_{\sigma_{n-1}} A_{\sigma_{n-2}} \times \dots \times A_{\sigma_1} \\ &= A_{\sigma_{n-1}} A_{\sigma_{n-2}} \times \dots \times A_{\sigma_1} + \left(\sum_{j=1}^n k_{\sigma_n j} E_{\sigma_n j} \right) A_{\sigma_{n-1}} A_{\sigma_{n-2}} \times \dots \times A_{\sigma_1} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Calculons } \left(\sum_{j=1}^n k_{\sigma_n j} E_{\sigma_n j} \right) (A_{\sigma_{n-1}} A_{\sigma_{n-2}} \times \dots \times A_{\sigma_1}) \quad (3)$$

En remplaçant $A_{\sigma_{n-1}} A_{\sigma_{n-2}} \times \dots \times A_{\sigma_1}$ par sa valeur donnée par hypothèse de récurrence (3) devient :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n k_{\sigma_n^j} E_{\sigma_n^j} \right) \left[I + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_{n-1}} \in \mathcal{L}_{\sigma_{n-1}}} \prod_{k=1}^j k \right) E_{\sigma_{n-1}^j} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{L}_{\sigma_l}} \prod_{k=1}^j k \right) E_{\sigma_l^j} + \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} \prod_{k=1}^j k \right) E_{\sigma_1^j} \right] \end{aligned}$$

Evaluons pour $l=1,2,\dots,n-1$ l'expression

$$\left(\sum_{j=1}^n k_{\sigma_n^j} E_{\sigma_n^j} \right) \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{L}_{\sigma_l}} \prod_{k=1}^j k \right) E_{\sigma_l^j} \right]$$

elle est égale à

$$\sum_{j=1}^n k_{\sigma_n^j} \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{L}_{\sigma_l}} \prod_{k=1}^j k \right) E_{\sigma_n^j} E_{\sigma_l^m} \right] \quad (4)$$

par définition des E_{ij} chaque terme de cette somme est nul sauf pour $j=l$ et nous aurons

$$\begin{aligned} (4) &= k_{\sigma_n^{\sigma_l}} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{L}_{\sigma_l}} \prod_{k=1}^j k \right) E_{\sigma_l^j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{L}_{\sigma_l}} k_{\sigma_n^{\sigma_l}} \prod_{k=1}^j k \right) E_{\sigma_l^j} \end{aligned}$$

Ainsi

$$(3) = \sum_{j=1}^n k_{\sigma_n^j} E_{\sigma_n^j} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_{n-1}}} \in \mathcal{L}_{\sigma_n} k_{\sigma_n \sigma_{n-1}} \prod_{C_{\sigma_{n-1}}}^j k \right) E_{\sigma_{n-1}^j} + \dots$$

$$\dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{L}_{\sigma_l}} k_{\sigma_n \sigma_l} \prod_{C_{\sigma_l}}^j k \right) E_{\sigma_l^j} + \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} k_{\sigma_n \sigma_1} \prod_{C_{\sigma_1}}^j k \right) E_{\sigma_1^j}$$

Par définition nous avons $k_{\sigma_n \sigma_l} \prod_{C_{\sigma_l}}^j k = \prod_{\{\sigma_n \times \mathcal{L}_{\sigma_l}\}}^j k$ et si de plus nous

posons $\sum_{j=1}^n k_{\sigma_n^j} E_{\sigma_n^j} = \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\{\sigma_n\}}^j k \right) E_{\sigma_n^j}$, (3) devient :

$$\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\{\sigma_n\}}^j k \right) E_{\sigma_n^j} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_{n-1}} \in \mathcal{L}_{\sigma_{n-1}}} \prod_{\{\sigma_n \times C_{\sigma_{n-1}}\}}^j k \right) E_{\sigma_{n-1}^j} + \dots$$

$$\dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_l} \in \mathcal{L}_{\sigma_l}} \prod_{\{\sigma_n \times C_{\sigma_l}\}}^j k \right) E_{\sigma_l^j} + \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} \prod_{\{\sigma_n \times C_{\sigma_1}\}}^j k \right) E_{\sigma_1^j}$$

Ce qui revient en regroupant la sommation sur les j à :

$$\sum_{j=1}^n \left[\left(\prod_{\{\sigma_n\}}^j k \right) E_{\sigma_n^j} + \sum_{C_{\sigma_{n-1}} \in \mathcal{L}_{\sigma_{n-1}}} \left(\prod_{\{\sigma_n \times C_{\sigma_{n-1}}\}}^j k \right) E_{\sigma_{n-1}^j} + \dots + \sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} \left(\prod_{\{\sigma_n \times C_{\sigma_1}\}}^j k \right) E_{\sigma_1^j} \right] \quad (5)$$

Par définition $\mathcal{L}_{\sigma_n} = \{\sigma_n \times \mathcal{L}_{\sigma_{n-1}}\} \{\sigma_n \times \mathcal{L}_{\sigma_{n-2}}\} \dots \{\sigma_n \times \mathcal{L}_{\sigma_1}\} \{\sigma_n\}$

et ainsi l'expression (5) devient :

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{\sigma_n} \in \mathcal{L}_{\sigma_n}} \left(\prod_{C_{\sigma_n}}^j k \right) E_{\sigma_n^j} \right)$$

En remplaçant ceci dans (2) on obtient la formule cherchée.

C.Q.F.D.

Malgré sa complexité apparente, cette formule de calcul explicite de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ est en fait très simple car elle fait uniquement appel à la génération de la suite $(\mathcal{C}_{\sigma_k})_{k=1,2,\dots,n}$.

EXEMPLE

$n=4$, $A \in \mathcal{M}_{44}(\mathbb{R}^+)$ notée a_{ij} et $K = A - I = (k_{ij})$

Soit $\sigma : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{4,2,1,3\}$

Ainsi $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 3$

Générons la suite $\mathcal{C}_{\sigma_1} = \mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_{\sigma_2} = \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_{\sigma_3} = \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{\sigma_4} = \mathcal{C}_3$.

Nous aurons par définition :

$$\mathcal{C}_4 = \{4\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{2 \times \mathcal{C}_4\} \cup \{2\} = \{2,4\} \cup \{2\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{1 \times \mathcal{C}_2\} \cup \{1 \times \mathcal{C}_4\} \cup \{1\} \\ &= \{1,2,4\} \cup \{1,2\} \cup \{1,4\} \cup \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 &= \{3 \times \mathcal{C}_1\} \cup \{3 \times \mathcal{C}_2\} \cup \{3 \times \mathcal{C}_4\} \cup \{3\} \\ &= \{3,1,2,4\} \cup \{3,1,2\} \cup \{3,1,4\} \cup \{3,1\} \cup \{3,2,4\} \cup \{3,2\} \cup \{3,4\} \cup \{3\} \end{aligned}$$

Calculons par exemple l'élément en position (1,1) de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ noté $(lu)_{11}$. D'après le théorème :

$$\begin{aligned}
 (\ell u)_{11} &= 1 + \sum_{C_1 \in \mathcal{C}_1} \frac{1}{\prod k} \\
 &= 1 + \frac{1}{\prod_{\{1,2,4\}} k} + \frac{1}{\prod_{\{1,2\}} k} + \frac{1}{\prod_{\{1,4\}} k} + \frac{1}{\prod_{\{1\}} k} \\
 &= 1 + k_{12} k_{24} k_{41} + k_{12} k_{21} + k_{14} k_{41} + k_{11}
 \end{aligned}$$

En remplaçant k_{ij} lorsque $i \neq j$ et par $a_{ii} - 1$ lorsque $i=j$ puisque $K = A - I$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\ell u)_{11} &= 1 + a_{12} a_{24} a_{41} + a_{12} a_{21} + a_{14} a_{41} + a_{11} - 1 \\
 &= a_{11} + a_{12} a_{21} + a_{14} a_{41} + a_{12} a_{24} a_{41}
 \end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat qu'on obtient en calculant $A_3 A_1 A_2 A_4$ directement.

Avec la même technique de démonstration que celle du théorème 1, le résultat peut s'étendre à un produit quelconque de matrices

$$A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1} \text{ où } r \in \mathbb{N} \text{ et } b_i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ pour } 1 \leq i \leq r,$$

les A_{b_i} étant définies à partir d'une matrice nonnégative A de taille n :

5. DEFINITION

$\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ étant un ensemble d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ avec $r \in \mathbb{N}$ il lui sera associé une suite $\mathcal{C}_{b_1}, \mathcal{C}_{b_2}, \dots, \mathcal{C}_{b_r}$ définie

comme suit :

$$\mathcal{C}_{b_j} = \{b_j \times \mathcal{C}_{b_{j-1}}\} \{b_j \times \mathcal{C}_{b_{j-2}}\} \dots \{b_j \times \mathcal{C}_{b_1}\} \{b_j\}$$

avec $\mathcal{C}_{b_1} = \{b_1\}$

Avec les notations et définitions précédentes on a :

2. THEOREME

Soit A une matrice nonnégative de taille n et soit $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ un ensemble d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ avec $r \in \mathbb{N}$.

En posant $K = A - I$ on a :

$$A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1} = I + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_r} \in \mathcal{C}_{b_r}} \prod_{k=1}^j C_{b_r} \right) E_{b_r}^j + \dots$$

$$\dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_\ell} \in \mathcal{C}_{b_\ell}} \prod_{k=1}^j C_{b_\ell} \right) E_{b_\ell}^j + \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_1} \in \mathcal{C}_{b_1}} \prod_{k=1}^j C_{b_1} \right) E_{b_1}^j$$

DEMONSTRATION

Elle se fait de la même manière que précédemment. Supposons en effet que :

$$A_{b_{r-1}} A_{b_{r-2}} \times \dots \times A_{b_1} = I + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_{r-1}} \in \mathcal{C}_{b_{r-1}}} \prod_{k=1}^j C_{b_{r-1}} \right) E_{b_{r-1}}^j + \dots$$

$$\dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_1} \in \mathcal{C}_{b_1}} \prod_{k=1}^j C_{b_1} \right) E_{b_1}^j$$

alors :

$$A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1} = \left(I + \sum_{j=1}^n k_{b_r}^j E_{b_r}^j \right) (A_{b_{r-1}} A_{b_{r-2}} \times \dots \times A_{b_1})$$

et il s'agit d'évaluer :

$$\left(\sum_{j=1}^n k_{b_r}^j E_{b_r}^j \right) \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_\ell} \in \mathcal{C}_{b_\ell}} \prod_{k=1}^j C_{b_\ell} \right) E_{b_\ell}^j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n k_{b_r}^j \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_\ell} \in \mathcal{C}_{b_\ell}} \prod_{k=1}^j C_{b_\ell} \right) E_{b_r}^j E_{b_\ell}^j \right) .$$

Ceci est égal de la même manière que dans le théorème 1 à :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_\ell} \in \mathcal{E}_{b_\ell}} k_{b_r b_\ell} \prod_{k=1}^j k \right) E_{b_r^j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C_{b_\ell} \in \mathcal{E}_{b_\ell}} \{b_r \times C_{b_\ell}\} \prod_{k=1}^j k \right) E_{b_r^j} \end{aligned}$$

en regroupant tous les termes $\{b_r \times \mathcal{E}_{b_\ell}\}$ de par la définition de \mathcal{E}_{b_r} nous trouvons la formule cherchée.

C.Q.F.D.

La similitude dans la démonstration est possible car dans celle du théorème 1 nous n'avons pas utilisé le fait que σ est une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ à savoir que $\text{Card}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} = n$

et $\sigma_i \neq \sigma_j$ pour $i \neq j$ avec i et $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Soit m un entier fixé, grâce à l'extension du théorème 1 à une suite quelconque d'entier pris dans $\{1,2,\dots,n\}$ il est possible de donner, σ étant une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$, une formule explicite de $[(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m$.

6. DEFINITION

Soit σ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$

$$\sigma : \{1,2,\dots,n\} \rightarrow \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$$

Soit k un entier quelconque alors σ_k sera défini ainsi

$$\sigma_k = \sigma_j \text{ pour } 1 \leq j \leq n \Leftrightarrow k = j \quad (n) \quad (k \text{ congru à } j \text{ modulo } n)$$

par exemple $\sigma_{n+1} = \sigma_1$ $\sigma_{n+2} = \sigma_2$ etc...

7. DEFINITION

Soit m un entier quelconque non nul, σ étant une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ et σ_j pour $1 \leq j \leq mn$ défini comme précédemment. Au couple (m,n) sera associée une suite définie comme suit :

$$\mathcal{L}_{\sigma_j} = \{\sigma_j \times \mathcal{L}_{\sigma_{j-1}}\} \{\sigma_j \times \mathcal{L}_{\sigma_{j-2}}\} \dots \{\sigma_j \times \mathcal{L}_{\sigma_1}\} \{\sigma_j\}$$

pour $j = 2$ à mn avec $\mathcal{L}_{\sigma_1} = \{\sigma_1\}$

Il vient :

3. THEOREME

Soient A une matrice nonnégative de taille n et σ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$. Soient U_σ, L_σ et A_{σ_i} pour $i=1$ à n les matrices associées. m étant un entier quelconque différent de zéro, en posant $K = A - I$ on a :

$$\begin{aligned} [(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m = I + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C \in \mathcal{L}_{\sigma_{mn}}} \prod_{k=1}^j C \right) E_{\sigma_{mn}j} + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C \in \mathcal{L}_{\sigma_{mn-1}}} \prod_{k=1}^j C \right) E_{\sigma_{mn-1}j} + \dots \\ \dots + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{C \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} \prod_{k=1}^j C \right) E_{\sigma_1j} \end{aligned}$$

En posant $m=1$ on retrouve évidemment le résultat du théorème 1.

DEMONSTRATION

Elle se déduit directement du théorème 2 en considérant que la suite $\{b_r, \dots, b_1\}$ est la suite $\{\sigma_{mn}, \sigma_{mn-1}, \sigma_{mn-2}, \dots, \sigma_1\}$ et ainsi nous avons $mn = r$ et $\sigma_j \in \{1, \dots, n\}$ pour $1 \leq j \leq mn$ de par la définition de σ_j .

Comme pour le calcul de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ celui de $[(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m$ ne nécessite

que la génération de la suite \mathcal{L}_σ qui se fait de manière automatique.
En effet :

EXEMPLE :

$$n = 3 \quad , \quad m = 2 \quad A = (a_{ij})$$

$$\sigma : \{1,2,3\} \rightarrow \{2,1,3\}$$

Soit donc $\sigma_1 = 2 \quad \sigma_2 = 1 \quad \sigma_3 = 3$

générons la suite $\mathcal{L}_{\sigma_1}, \mathcal{L}_{\sigma_2}, \dots, \mathcal{L}_{\sigma_6}$

$$\mathcal{L}_{\sigma_1} = \mathcal{L}_2 = \{2\}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma_2} = \mathcal{L}_1 = \{1,2\}\{1\}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma_3} = \mathcal{L}_3 = \{3,1,2\}\{3,1\}\{3,2\}\{3\}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma_4} = \mathcal{L}_{\sigma_1}^1 = \mathcal{L}_2^1 = \{2,3,1,2\}\{2,3,1\}\{2,3,2\}\{2,3\}\{2,1,2\}\{2,1\}\{2,2\}\{2\}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma_5} = \mathcal{L}_{\sigma_2}^1 = \mathcal{L}_1^1 = \{1,2,3,1,2\}\{1,2,3,1\}\{1,2,3,2\}\{1,2,3\}\{1,2,1,2\}\{1,2,1\}$$

$$\{1,2,2\}\{1,2\}\{1,3,1,2\}\{1,3,1\}\{1,3,2\}\{1,3\}\{1,1,2\}\{1,1\}$$

$$\{1,2\}\{1\}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma_6} = \mathcal{L}_{\sigma_3}^1 = \mathcal{L}_3^1 = \{3,1,2,3,1,2\}\{3,1,2,3,1\}\{3,1,2,3,2\}\{3,1,2,3\}\{3,1,2,1,2\}$$

$$\{3,1,2,1\}\{3,1,2,2\}\{3,1,2\}\{3,1,3,1,2\}\{3,1,3,1\}\{3,1,3,2\}$$

$$\{3,1,3\}\{3,1,1,2\}\{3,1,1\}\{3,1,2\}\{3,2,3,1,2\}\{3,2,3,1\}$$

$$\{3,2,3,2\}\{3,2,3\}\{3,2,1,2\}\{3,2,1\}\{3,2,2\}\{3,2\}\{3,3,1,2\}$$

$$\{3,3,1\}\{3,3,2\}\{3,3\}\{3,1,2\}\{3,1\}\{3,2\}\{3\}$$

Ainsi supposons avoir à évaluer l'élément en position (2,1) de $[[I-L_\sigma]^{-1}U_\sigma]^2$ que nous noterons lu_{21}^2

Par définition puisque $\mathcal{C}_{\sigma_4} = \mathcal{C}_2^1$ nous aurons :

$$\begin{aligned}
 lu_{21}^2 &= \sum_{C \in \mathcal{C}_{\sigma_4}} \frac{1}{C} k + \sum_{C \in \mathcal{C}_{\sigma_1}} \frac{1}{C} k \\
 &= \frac{1}{\{2,3,1,2\}} k + \frac{1}{\{2,3,1\}} k + \frac{1}{\{2,3,2\}} k + \frac{1}{\{2,3\}} k + \frac{1}{\{2,1,2\}} k + \frac{1}{\{2,1\}} k + \\
 &\quad + \frac{1}{\{2,2\}} k + \frac{1}{\{2\}} k + \frac{1}{\{2\}} k \\
 &= k_{23} k_{31} k_{12} k_{21} + k_{23} k_{31} k_{11} + k_{23} k_{32} k_{21} + k_{23} k_{31} + k_{21} k_{12} k_{21} + \\
 &\quad + k_{21} k_{12} + k_{21} k_{11} + k_{22} k_{21} + k_{21} + k_{21}
 \end{aligned}$$

En remplaçant k_{ij} par a_{ij} si $i \neq j$ et $a_{ii}-1$ si $i=j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 lu_{21}^2 &= a_{23} a_{31} a_{12} a_{21} + a_{23} a_{31} (a_{11}-1) + a_{23} a_{32} a_{21} + a_{23} a_{31} + \\
 &\quad + a_{21} a_{12} a_{21} + a_{21} (a_{11}-1) + (a_{22}-1) a_{21} + 2a_{21} = \\
 &= a_{23} a_{31} a_{12} a_{21} + a_{23} a_{31} a_{11} + a_{23} a_{32} a_{21} + a_{21} a_{12} a_{21} \\
 &\quad + a_{21} a_{11} + a_{22} a_{21} .
 \end{aligned}$$

Ce qui est bien le même résultat que l'on obtient en calculant $(A_3 A_1 A_2)^2$ et en explicitant l'élément en position (2,1) .

Dans ces formules de calcul, l'introduction de la matrice $K = A \sim I$ introduit des termes diagonaux éventuellement négatifs mais en fait ceux-ci s'éliminent automatiquement comme le montre par exemple une seconde démonstration du théorème (II ,2).

4. THEOREME

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nonnégative et soit $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ un ensemble d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ avec $r \in \mathbb{N}$. Alors

$$\max_{i=1 \text{ à } n} a_{ii}^{\alpha_i} \leq \rho(A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1})$$

avec

α_i : nombre de fois qu'apparaît la composante i dans $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$.

PREUVE

Cela revient à montrer pour a_{11} par exemple en notant pour simplifier $\alpha_1 = m$ que :

$$a_{11}^m \leq \rho(A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1})$$

Notons aussi pour simplifier l'écriture d_1, d_2, \dots, d_m (par ordre d'apparition) les b_j pour $j=1$ à r tels que $b_j = \{1\}$. Ainsi d'après le théorème 2 nous aurons :

$$(A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1})_{11} = \sum_{C \in \mathcal{C}_{d_m}} \prod_{k=1}^m C_{kk} + \sum_{C \in \mathcal{C}_{d_{m-1}}} \prod_{k=1}^{m-1} C_{kk} + \dots + \sum_{C \in \mathcal{C}_{d_1}} \prod_{k=1}^1 C_{kk}$$

La matrice $A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1}$ produit de matrices nonnégatives est

nonnégative, d'après le théorème de Perron en montrant que

$a_{11}^m \leq (A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1})_{11}$ nous aurons le résultat cherché.

Evaluons les termes qui s'écrivent comme puissance de k_{11} dans

$$(A_{b_r} A_{b_{r-1}} \times \dots \times A_{b_1})_{11}$$

Ceux sont tous les termes de la forme $\{1, 1, \dots, 1\}$ dans $\mathcal{C}_{d_1}, \mathcal{C}_{d_2}, \dots, \mathcal{C}_{d_m}$.

Par construction de la suite \mathcal{C} cela revient à évaluer tous les termes

de la forme $\{1,1,\dots,1\}$ dans une suite $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ construite ainsi :

$$\mathcal{C}_1 = \{1\}$$

et
$$\mathcal{C}_j = \{\{1\} \times \mathcal{C}_{j-1}\} \{1 \times \mathcal{C}_{j-2}\}, \dots, \{1 \times \mathcal{C}_1\} \{1\}$$

pour $j=2$ à m .

En effet pour cela nous avons éliminé tous les singletons différents de $\{1\}$ intervenant dans le passage de \mathcal{C}_{d_i} à $\mathcal{C}_{d_{i+1}}$ pour $i=1$ à $m-1$

et qui ne donnent pas les termes cherchés.

Montrons par récurrence sur m que le nombre d'éléments de la forme $\{1,1,\dots,1\}$ p fois est $\binom{p}{m}$.

Ceci est vrai pour $m=1$ en effet il n'y a que $\{1\}$.

Supposons le vrai pour $m-1$.

Alors le nombre d'éléments de la forme $\{1,\dots,1\}$ p fois dans $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ sera le nombre d'éléments à p termes dans $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{m-1}$ auquel on ajoute le nombre d'éléments à $p-1$ termes de $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{m-1}$ puisque par construction de \mathcal{C}_m ils se transformeront en éléments à p termes.

Ainsi nous aurons :

$$\binom{p-1}{m-1} + \binom{p}{m-1} = \binom{p}{m} \quad [2]$$

or :

$$1 + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_1} \frac{1}{\prod k} + \dots + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_m} \frac{1}{\prod k} \leq 1 + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{d_1}} \frac{1}{\prod k} + \dots + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{d_m}} \frac{1}{\prod k}$$

Notons qu'à $\{1,\dots,1\}$ p fois = T correspond $\frac{1}{\prod k} = k_{11}^p$ et ainsi :

$$1 + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_1} \frac{1}{\prod k} + \dots + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_m} \frac{1}{\prod k} = \sum_{p=0}^m \binom{p}{m} k_{11}^p = (1 + k_{11})^m$$

Mais $k_{11} = a_{11} - 1$ et donc $(1 + k_{11})^m = a_{11}^m$

et nous avons bien :

$$a_{11}^m \leq [(A_{b_r} \times \dots \times A_{b_1})]_{11}^m$$

Cette démonstration montre bien que les éléments k_{11} négatifs lorsque $a_{11} < 1$ s'éliminent dans la formule de $[(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m$.

C.Q.F.D.

Cette manière de construire $[(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m$ pour $m \in \mathbb{N}$ a été motivée par les théorèmes suivants :

5. THEOREME [2]

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice nonnégative et irréductible, en notant $a_{ij}^{(m)}$ le terme en position (i,j) de A^m il vient :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_{ij}^{(m)})^{\frac{1}{m}} = \rho(A)$$

Dans le cas où A n'est pas irréductible il est possible d'établir le lien entre les termes de A^m et $\rho(A)$ de la manière suivante :

6. THEOREME [4]

Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice nonnégative et ε une constante positive quelconque :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\text{Tr}(A + \varepsilon I)]^{\frac{1}{m}} = \rho(A) + \varepsilon$$

DEMONSTRATION

Soit $\lambda_1 = \rho(M+\epsilon I) = \rho(M) + \epsilon$ valeur propre de $A + \epsilon I$ d'après le théorème de Perron.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A + \epsilon I$ nous aurons

$$\text{Tr}(A+\epsilon I)^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m = \lambda_1^m \left[k + \sum_{\lambda_1 \neq \lambda_i} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \right]$$

k étant l'ordre de multiplicité de λ_1 .

Or $\lambda_1 > \lambda_i$ pour $i=2$ à n car λ_1 est rayon spectral d'où :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_1^m \left[k + \sum_{\lambda_i \neq \lambda_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \right] \right\}^{\frac{1}{m}} = \lambda_1 = \rho(A) + \epsilon$$

C.Q.F.D.

Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ le théorème 3 permet le calcul explicite du terme en position $(n, 1)$ de $((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma)^m$ pour tout m de \mathbb{N} . En effet :

7. PROPOSITION

Soient A une matrice nonnégative et σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ alors :

$$\left([(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m \right)_{n,1} = \sum_{C \in \mathcal{B}_{\sigma, mn}} \prod_{k \in C} 1 + \sum_{C \in \mathcal{B}_{\sigma, (m-1)n}} \prod_{k \in C} 1 + \dots + \sum_{C \in \mathcal{B}_{\sigma, n}} \prod_{k \in C} 1$$

Notons $f(\mathcal{B}_{mn}^\sigma, \mathcal{B}_{(m-1)n}^\sigma, \dots, \mathcal{B}_n^\sigma)$ cette expression.

PREUVE

Il suffit d'appliquer le théorème 3.

Supposons que pour toute permutation σ de S_n , $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ soit irréductible (par exemple dans le cas où $A > 0$) alors en appliquant le théorème 4 nous obtenons la :

8. PROPOSITION

Avec les notations précédentes

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [f(\mathcal{E}_{mn}^\sigma, \mathcal{E}_{(m-1)n}^\sigma, \dots, \mathcal{E}_n^\sigma)]^{\frac{1}{m}} = \rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) .$$

Ainsi le choix de la meilleure stratégie chaotique parmi les permutées de Gauss-Seidel se ramène au problème combinatoire suivant :

Parmi toutes les permutations σ de $\{1,2,\dots,n\}$ trouver celle qui minimise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [f(\mathcal{E}_{mn}^\sigma, \mathcal{E}_{(m-1)n}^\sigma, \dots, \mathcal{E}_n^\sigma)]^{\frac{1}{m}}$$

Pour situer la difficulté de ce problème, on peut le comparer à celui, bien connu, du voyageur de commerce [3] qui se pose comme suit :

A σ permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ est associée une fonction

$$F(P_\sigma) = \sum_{j=1}^n d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) + d(\sigma_n, \sigma_1)$$

où $d(\sigma_j, \sigma_{j+1})$ est la distance entre les points σ_j et σ_{j+1} pour $j=1$ à $n-1$.

Ainsi en supposant que σ_j est une ville et $d(\sigma_j, \sigma_{j+1})$ est la distance entre deux villes, $F(P_\sigma)$ représente le trajet parcouru par un voyageur de commerce qui passe par toutes les villes. Il s'agit de trouver le trajet le plus court soit :

Trouver σ permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ qui minimise $F(P_\sigma)$.

En dehors du cas à huit ou neuf éléments, aucune réponse totale n'a été donnée à ce problème et l'approche de la permutation optimale ne peut se faire que par l'emploi d'algorithmes heuristiques.

Notons que le problème combinatoire issu du choix de la meilleure stratégie itérative de résolution d'un problème de point fixe il s'agit de minimiser une fonction qui est elle-même limite d'autres fonctions ce qui augmente encore la difficulté du problème.

La résolution partielle que nous proposerons ultérieurement consistera en fait en une simplification de ce problème combinatoire que nous ramènerons à un problème bien connu auquel il est possible d'appliquer des algorithmes heuristiques permettant l'approche de la solution (c'est-à-dire l'obtention d'une stratégie efficace sinon optimale).

Dans le cas où σ_2 est définie à partir d'une substitution de σ_1 soit :

$$\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n\}$$

$$\sigma_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n-1}\}$$

On peut donner une condition suffisante de comparaison de ces deux découpes.

PROPOSITION

Soit A une matrice nonnégative de rayon spectral inférieur strictement à 1 .

σ_1 et σ_2 étant les deux découpes précédentes, une condition suffisante pour que

$$\rho((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) \leq \rho((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2})$$

est que $f(C_{\sigma_n, \sigma_{n-1}}^1) \leq f(C_{\sigma_{n-1}, \sigma_n}^2)$

en notant $C_{\sigma_n, \sigma_{n-1}}^1$ tous les termes de la suite \mathcal{C}_{m+1}^1 pour $m=1,2,\dots$ contenant σ_n et σ_{n-1} .

PREUVE

Considérons le terme (1,2) de $[(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m$.

Son calcul se fait en évaluant $f(\mathcal{C}_{m+1}^\sigma, \dots, \mathcal{C}_1^\sigma)$.

Les résultats différents donnés par σ_1 et σ_2 viennent de tous les

$C_{\sigma_n, \sigma_{n-1}}^{\sigma_1}$ contenant σ_n, σ_{n-1} et à chaque $C_{\sigma_n, \sigma_{n-1}}^{\sigma_1}$ correspond un $C_{\sigma_{n-1}, \sigma_n}^{\sigma_2}$ où l'on remplace σ_n par σ_{n-1} et σ_{n-1} par σ_n les autres

termes demeurant les mêmes.

Alors $f(C_{\sigma_n, \sigma_{n-1}}^{\sigma_1}) \leq f(C_{\sigma_{n-1}, \sigma_n}^{\sigma_2})$ impliquera que

$f(\mathcal{C}_{m+1}^1, \dots, \mathcal{C}_1^1) \leq f(\mathcal{C}_{m+1}^2, \dots, \mathcal{C}_1^2)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et d'après la proposition 8 nous obtenons le résultat cherché.

CHAPITRE IV

RESOLUTION PARTIELLE

Soit A une matrice nonnégative de rayon spectral inférieur strictement à 1. S_n étant l'ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ il s'agit donc de trouver la permutation σ de S_n qui vérifie l'une de ces trois conditions équivalentes :

$$.1. \quad \rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \min_{\sigma' \in S_n} \rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'})$$

$$.2. \quad \rho(A_{\sigma_n} \ A_{\sigma_{n-1}} \ \dots \ A_{\sigma_1}) = \min_{\sigma' \in S_n} \rho(A_{\sigma'_n} \ A_{\sigma'_{n-1}} \ \dots \ A_{\sigma'_1})$$

.3. La matrice de Gauss-Seidel G_σ associée à la matrice $P_\sigma^T A P_\sigma$ est telle que

$$\rho(G_\sigma) = \min_{\sigma' \in S_n} \rho(G_{\sigma'})$$

L'intérêt théorique de ce problème et surtout son intérêt pratique mis en évidence par Stein et Rosenberg [14] en 1947 dans le cas de la résolution d'un système linéaire et repris plus tard dans le contexte d'équations non-linéaires de point fixe à plusieurs variables a suscité de nombreuses approches.

Il sera donné un résumé des différents résultats obtenus [3] [6] [9] dans ce domaine ; cependant cette question n'a (à notre connaissance) pas encore reçu de réponse totale.

Le résultat principal de ce travail consiste, à partir des différentes formulations du problème, à donner une réponse partielle à la question de caractérisation de la découpe optimale.

Cette réponse, totale dans le cas limite de matrices (3,3), est vraie dans le cas général sous une hypothèse H dont on donnera des conditions de réalisation qui semblent être généralement vérifiées du point de vue pratique comme en témoignent les résultats numériques qui seront donnés.

Cette caractérisation permet de poser le problème sous un angle plus aisé à aborder, celui de la maximisation d'une trace par permutation.

Il sera donné une première approche de ce nouveau problème basée sur le calcul explicite de $(I-L_G)^{-1}U_G$ et sur la notion de matrice d'incidence qui en découle. L'abord de ce problème sous une forme combinatoire bien connue [7] [10] permettra de reprendre des algorithmes heuristiques [2] dans ce nouveau contexte.

§ 1 - RESULTATS CONNUS

Stein et Rosenberg [14] en posant le problème de la meilleure découpe dans le cadre de la résolution du système linéaire $Cx = d$ (1) ont donné un résultat qui permet sous d'assez fortes conditions sur la matrice de Jacobi A associée à (1) de comparer deux permutations particulières de S_n . En effet :

THEOREME

Soit $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R}^+)$ avec $\rho(A) < 1$ telle que :

$a_{ij} > a_{ji}$ pour quelques i et j tels que $i > j$

$a_{ij} = a_{ji} = 0$ pour les autres

Soit P (respectivement Q) le plus petit (respectivement : le plus grand)

des rapports $\frac{a_{ij}}{a_{ji}}$ avec :

$$P > \left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}(m-1)} \quad \text{pour } m \text{ impair}$$

$$P > \left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}(m-2)} \quad \text{pour } m \text{ pair}$$

Alors en notant :

$\sigma_1 : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ la découpe de Gauss-Seidel

$\sigma_2 : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{n, n-1, \dots, 1\}$ la découpe inverse

On a :

$$\rho((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) \leq \rho((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2})$$

La démonstration est basée sur le fait que $\alpha = \rho((I-L)^{-1}U)$ est point fixe de l'application $f : \alpha \rightarrow f(\alpha) = \rho(\alpha L + U)$ lorsque $L+U = A$ est nonnégative. Les fortes conditions imposées à A assurent que pour les découpes $U_{\sigma_1} + L_{\sigma_1} = U_{\sigma_2} + L_{\sigma_2} = A$ on a :

$$\text{Tr}(\alpha L_{\sigma_1} + U_{\sigma_1})^m \leq \text{Tr}(\alpha L_{\sigma_2} + U_{\sigma_2})^m \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}$$

Pour conclure les auteurs utilisent le fait déjà cité (III, 6) que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\text{Tr}(\alpha L_{\sigma_1} + U_{\sigma_1})^m]^{\frac{1}{m}} = \rho(\alpha L_{\sigma_1} + U_{\sigma_1})$$

lorsque $\alpha L_{\sigma_1} + U_{\sigma_1}$ est irréductible.

Le prolongement à $\alpha L_{\sigma_1} + U_{\sigma_1}$ nonnégative quelconque se fait par continuité.

Ce problème de comparaison de rayons spectraux se repose dans le cadre des itérations chaotiques sur un produit d'espaces métriques.

Charnay [3] aborde le problème de la manière suivante :

Soit A une matrice de contraction de taille n . Considérons l'ensemble des stratégies à r éléments

$$s = \{S / S = s(1), s(2), \dots, s(r)\}$$

où les $s(i)$ pour $i=1$ à r sont des parties de $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\text{Soit } A_r = A_{s(r)} A_{s(r-1)} \dots A_{s(1)} \quad (\text{II}, 2)$$

Charnay et Musy montrent que (II, 3)

$$\rho(A^r) \leq \rho(A_r) \leq \rho(A)$$

Le problème posé est de chercher la stratégie s de S qui, assurent $\rho(A_r) = \rho(A^r)$ soit la meilleure des stratégies à r éléments. Dans le cas des permutées de Gauss-Seidel il faudrait trouver $\sigma \in S_n$ telle que $\rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \rho(A)^n$.

Charnay propose un résultat d'un intérêt purement théorique mais qui éclaire la difficulté du problème.

THEOREME [3]

Soit A une matrice de taille (n, n) positive telle que $\rho(A) < 1$. Soit A_r la matrice (positive) engendrée par les parties $s(1), s(2), \dots, s(r)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$

$$A_r = A_{s(r)} A_{s(r-1)} \dots A_{s(1)}$$

Soient ω et ω^* les vecteurs propres (positifs) de A et A_r associés respectivement à $\rho(A)$ et $\rho(A_r)$. On a alors le résultat suivant

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\rho(A_r) = \rho(A)^r$ est que les deux conditions suivantes soient réalisées

$$1^\circ / \quad \omega^* = \theta \omega$$

$$2^\circ / \quad \rho(A^r)\omega = A_r \omega = (A^r \omega)$$

En utilisant la notion de "suite plus fine" introduite par Robert [12] dans le cadre des automates cellulaires, Jacquemard [6] arrive à comparer deux stratégies, l'une étant plus fine que l'autre, ceci en appliquant le théorème de Stein-Rosenberg chaotique de Charnay-Musy [3].

Ce résultat a été utilisé (II, 3) pour donner de nouvelles bornes à $\rho(A_r)$ et Jacquemard en l'appliquant sur un exemple précis dégage une stratégie d'itération allant 12 fois plus vite que la stratégie de Gauss-Seidel. Mais le problème du choix de la découpe optimale reste toujours ouvert.

En s'inspirant de la technique de travail introduite par Southwell en 1946 dont la méthode itérative bien connue [13] est en fait une méthode itérative non-cyclique, Mahjoub [9] met à profit les moyens informatiques dont nous disposons (système visuel et conversationnel) pour proposer une série d'algorithmes où la stratégie de résolution est induite par l'évolution de l'itération et l'expérience numérique.

En particulier, les gains obtenus en itérations et en temps par le choix de telles stratégies prouvent leur intérêt pratique.

§ 2 - RESOLUTION PARTIELLE

Pour une matrice de contraction (n,n) une partie de la complexité du problème vient du fait qu'il y a un grand nombre de découpages à comparer.

1. PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\rho(A) < 1$, il y a $(n-1)!$ découpages différentes de A en L et U au sens de $\rho((I-L)^{-1}U)$.

PREUVE

Il y a en fait $n!$ permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ mais à toute permutation σ' qui est une rotation de σ il correspond un $\rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'})$ égal à $\rho((I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma})$ ce qui permet de réduire le nombre de découpages à comparer à $(n-1)!$. En effet :

$$(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma} = A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \dots A_{\sigma_1} \text{ et grâce au fait que } A \text{ et } B \text{ étant}$$

deux matrices données $\rho(AB) = \rho(BA)$ [8] une suite de rotations sur

$A_{\sigma'_n} A_{\sigma'_{n-1}} \dots A_{\sigma'_1}$ ne changeant rien au rayon spectral la mettra sous

la forme $A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \dots A_{\sigma_1}$.

C.Q.F.D.

EXEMPLE

$$A \in \mathcal{M}_{44}(\mathbb{R}^+)$$

$$\sigma_1 : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$$

$$\sigma_2 : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{3,4,1,2\}$$

alors :

$$\rho((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) = \rho(A_{\sigma_2} A_{\sigma_1} A_{\sigma_1} A_{\sigma_2}) = \rho(A_{\sigma_1} A_{\sigma_2} A_{\sigma_2} A_{\sigma_1}) = \rho(A_{\sigma_1} A_{\sigma_1} A_{\sigma_2} A_{\sigma_2}) = \rho((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) .$$

1. Cas où $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}^+)$

Le cas où $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}^+)$ est donc le plus simple à étudier car il n'y a que deux découpes particulières à comparer.

$$\sigma : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$$

$$\sigma' : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,3,2\}$$

et on a :

1. THEOREME

Soit $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\rho(A) < 1$ on a avec les deux découpes σ et σ' précédentes :

$$\rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}) \geq \rho((I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}) \Leftrightarrow a_{\sigma_3\sigma_2} a_{\sigma_2\sigma_1} a_{\sigma_1\sigma_3} \leq a_{\sigma_3\sigma_2} a_{\sigma_2\sigma_1} a_{\sigma_1\sigma_3}$$

PREUVE

Calculons $f_{\sigma}(\lambda) = \det((I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma} - \lambda I)$ et

et $f_{\sigma'}(\lambda) = \det((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'} - \lambda I)$

d'après les définitions de II,4 on a :

$$L_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{\sigma} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$L_{\sigma'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{\sigma'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Par suite

$$f_{\sigma}(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - \lambda(a_{11}-\lambda)a_{23}a_{32} - \lambda(a_{33}-\lambda)a_{12}a_{21} \\ + \lambda a_{12}a_{23}a_{31} + \lambda^2 a_{13}a_{32}a_{21} - \lambda(a_{22}-1)a_{13}a_{31}$$

$$f_{\sigma'}(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - \lambda(a_{11}-\lambda)a_{23}a_{32} - \lambda(a_{33}-\lambda)a_{12}a_{21} \\ + \lambda^2 a_{12}a_{23}a_{21} + \lambda a_{13}a_{32}a_{21} - \lambda(a_{22}-1)a_{13}a_{31}$$

Soit donc :

$$f_{\sigma}(\lambda) = P(\lambda) + \lambda a_{12}a_{23}a_{31} + \lambda^2 a_{13}a_{32}a_{21}$$

$$f_{\sigma'}(\lambda) = P(\lambda) + \lambda^2 a_{12}a_{23}a_{31} + \lambda a_{13}a_{21}a_{32}$$

en notant

$$P(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - \lambda(a_{11}-\lambda)a_{23}a_{32} - \lambda(a_{33}-\lambda)a_{12}a_{21} \\ - \lambda(a_{22}-1)a_{13}a_{31}$$

On voit donc que $f_{\sigma}(0) = f_{\sigma'}(0)$ et $f_{\sigma}(1) = f_{\sigma'}(1)$

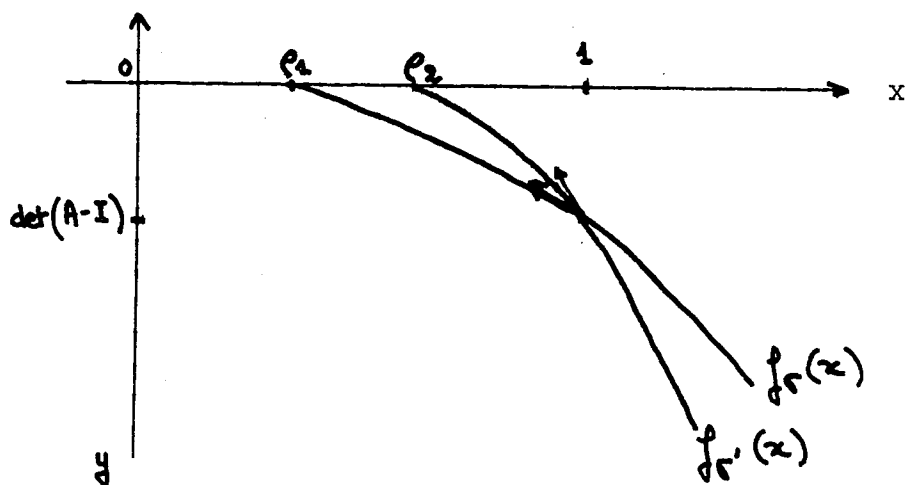
Notons $\rho_1 = \rho((I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma})$ et $\rho_2 = \rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'})$

D'après le théorème de Perron-Frobenius [11] $(I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}$ et $(I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}$ étant nonnégatives $f_{\sigma}(\lambda)$ et $f_{\sigma'}(\lambda)$ ont leurs plus grandes racines en modules réelles et positives et à droite de ces racines ils gardent un signe constant qui est celui de $f_{\sigma}(1)$ et $f_{\sigma'}(1) = \det(A-I)$ puisque d'après le théorème de Stein-Rosenberg (I, 3)

$\rho_1 \leq \rho(A) < 1$ et $\rho_2 \leq \rho(A) < 1$ d'autre part le signe de $\det(A-I)$ étant celui de $(-1)^n$ donc négatif $f_{\sigma}(x)$ et $f_{\sigma'}(x)$ sont négatives à droites de ρ_1 et ρ_2 .

De plus $f_{\sigma}(x) - f_{\sigma'}(x)$ étant au plus de degré deux il ne peut admettre d'autres racines que 0 et 1.

Toutes ces remarques nous permettent de tracer le graphe de $f_{\sigma}(\lambda)$ et $f_{\sigma'}(\lambda)$



Une propriété des polynômes permet de dire en examinant les pentes en 1 de $f_{\sigma}(x)$ et $f_{\sigma'}(x)$ que :

$$\rho_1 \leq \rho_2 \iff f_{\sigma'}(1) \leq f_{\sigma}(1)$$

Soit donc en reprenant les expressions de $f_{\sigma}(\lambda)$ et $f_{\sigma'}(\lambda)$

$$P'(1) + 2a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \leq P'(1) + a_{12}a_{23}a_{31} + 2a_{13}a_{32}a_{21}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \leq a_{13}a_{32}a_{21}$$

C.Q.F.D.

La comparaison de deux rayons spectraux est donc ramenée à l'étude de deux produits, voici donc un moyen rapide de caractériser dans un problème de taille 3 la meilleure découpe (bien entendu ce cas est "limite" !).

L'extension de cette méthode d'étude au problème de taille n est quasi impossible car il s'agirait de calculer $(n-1)!$ déterminants de taille n .

Néanmoins l'examen des courbes $f_\sigma(\lambda)$ ainsi que des racines de $f_\sigma(\lambda) - f_{\sigma'}(\lambda)$ sera de base dans la résolution partielle qui sera proposée [1].

2. Résolution partielle

Soient σ et σ' appartenant à S_n deux permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ on notera $P_\sigma(x)$ (respectivement $P_{\sigma'}(x)$) le polynôme caractéristique de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ (respectivement $(I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}$) soit donc :

$$P_\sigma(x) = \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma - xI) .$$

1. DEFINITION

On dira que σ et σ' vérifient l'hypothèse H si $P_\sigma(x) \neq P_{\sigma'}(x)$ pour tout x positif sauf pour $x = 0$ et $x = 1$. (où P_σ et $P_{\sigma'}$ prennent la même valeur).

Le fait que deux permutations vérifient l'hypothèse H va nous permettre de donner une caractérisation de la meilleure découpe, ce qui est le résultat principal de ce travail.

2. THEOREME

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\rho(A) < 1$. Soient σ et σ' deux permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ vérifiant l'hypothèse H alors :

$$\rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) \leq \rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}) \Leftrightarrow \text{Tr}((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) \geq \text{Tr}((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'})$$

De plus, pour $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}^+)$ avec $\rho(A) < 1$ quelles que soient $\sigma, \sigma' \in S_n$

$$\rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) \leq \rho((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}) \Leftrightarrow \text{Tr}((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) \geq \text{Tr}((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'})$$

DEMONSTRATION

$$\text{Soit } P_\sigma(x) = (-1)^n x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma, xI)$$

$$\text{alors } a_n = \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = P(0)$$

$$\text{et } (-1)^n + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma - I) = P_\sigma(1)$$

d'après II, 4 il existe une matrice de permutation $P_\sigma \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ telle que $P_\sigma^T L_\sigma P_\sigma$ soit triangulaire inférieure stricte d'où :

$$\det(I-L_\sigma) = \det(I-P_\sigma^T L_\sigma P_\sigma) = 1.$$

$$\text{Alors } a_n = \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \det(I-L_\sigma) \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma)$$

$$\text{d'où } a_n = \det U_\sigma = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\text{Car } \det U_\sigma = \det P_\sigma^T U_\sigma P_\sigma \text{ d'après II, 4 et } P_\sigma^T U_\sigma P_\sigma = U$$

U triangulaire supérieure a pour éléments diagonaux ceux de A .

Nous aurons de même :

$$\begin{aligned} \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma - I) &= \det(I-L_\sigma) \det((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma - I) \\ &= \det(U_\sigma + L_\sigma - I) = \det(A-I) \end{aligned}$$

et par suite

$$(-1)^n + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \det(A-I)$$

On sait d'après le théorème de Perron-Frobenius appliqué à la matrice nonnégative $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ que $P_\sigma(x)$ a sa plus grande racine en module réelle et positive.

Soit λ_1 (respectivement μ_1) cette racine pour $P_\sigma(x)$ (respectivement $P_{\sigma'}(x)$). Donc :

$$P_\sigma(x) = (-1)^n x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

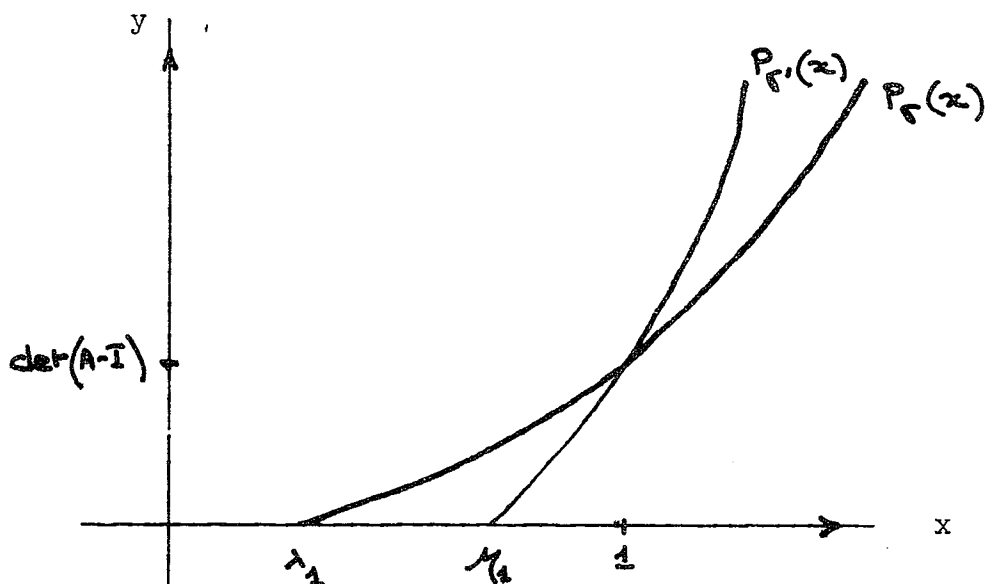
et
$$P_{\sigma'}(x) = (-1)^n x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

sont tels que $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ et $a_n = b_n$ avec leurs plus grandes

racines en module réelles et positives.

Nous supposons sans nuire à la généralité que $n = 2p$ (la démonstration est la même pour $n = 2p+1$).

$P_\sigma(x)$ et $P_{\sigma'}(x)$ étant positifs à droite de leur plus grande racine λ_1 et μ_1 car du signe de $(-1)^n = (-1)^{2p} > 0$ et de plus $P_\sigma(x)$ et $P_{\sigma'}(x)$ ne se recoupent d'après H qu'en zéro et un pour les x positifs leur graphes est le suivant :



et il apparait que :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \leq \mu_1 &\Leftrightarrow P_\sigma(\lambda_1) \geq P_\sigma(\mu_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow P_\sigma(x) \geq P_{\sigma'}(x) \text{ pour } x \in [0, 1] \end{aligned}$$

car les courbes de $P_\sigma(x)$ et $P_{\sigma'}(x)$ ne se recoupent pas entre zéro et un

$$\Leftrightarrow P_\sigma(x) - P_{\sigma'}(x) \geq 0 \text{ pour } x \in [0, 1] \quad (1)$$

Le signe de $P_\sigma(x) - P_{\sigma'}(x)$ entre zéro et un est opposé à celui de $P_\sigma(x) - P_{\sigma'}(x)$ pour $x > 1$ car ce polynôme a une seule racine strictement positive qui est un.

$$P_\sigma(x) - P_{\sigma'}(x) = (a_1 - b_1)x^{n-1} + (a_2 - b_2)x^{n-2} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x$$

$$\text{donc } \text{sgn}(P_\sigma(x) - P_{\sigma'}(x)) = \text{sgn}(a_1 - b_1) \text{ pour } x > 1,$$

et par suite

$$\text{sgn}(P_\sigma(x) - P_{\sigma'}(x)) = \text{sgn}(b_1 - a_1) \text{ pour } 0 < x < 1$$

et d'après (1)

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \Leftrightarrow \text{sgn}(b_1 - a_1) \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \geq a_1 \quad (2)$$

D'après les formules de Newton [5] qui donnent les coefficients du polynôme caractéristique soient :

$$S_1 = \text{Tr}((I - L_\sigma)^{-1} U_\sigma) \quad \text{et} \quad S'_1 = \text{Tr}((I - L_{\sigma'})^{-1} U_{\sigma'})$$

$$\text{alors } a_1 + S_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -S_1$$

$$b_1 + S'_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -S'_1$$

d'où d'après (2)

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \Leftrightarrow -S_1 \leq -S'_1 \Leftrightarrow S_1 \geq S'_1.$$

Soit avec $\lambda_1 = \rho((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma)$ et $\mu_1 = \rho(I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}$ le théorème

Dans le cas où $n = 3$ l'hypothèse H est vérifiée pour tout couple de permutations σ et σ' car $P_\sigma(x) - P_{\sigma'}(x)$ est un polynôme au plus de degré 2 qui admet deux racines zéro et un et ne peut donc en avoir d'autres.

C.Q.F.D.

Cette caractérisation de la meilleure découpe comme étant celle qui maximise la trace nécessite la véracité de l'hypothèse H .

Cette hypothèse semble être réaliste comme nous allons le montrer sur des exemples numériques. On va donner des conditions entraînant sa véracité.

Soient $P_\sigma(x)$ et $P_{\sigma'}(x)$ les polynômes caractéristiques associés à σ et σ' . H signifie que $(P_\sigma(x)-P_{\sigma'}(x)) / x(x-1)$ n'a aucune racine réelle strictement positive.

D'après le procédé de Horner et sous les notations précédentes

$$Q(x) = (P_\sigma(x)-P_{\sigma'}(x)) / x(x-1) = (a_1-b_1)x^{n-3} + (a_1+a_2-b_1-b_2)x^{n-4} + \dots \\ \dots + \sum_{i=1}^{n-2} (a_i-b_i) .$$

Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que les racines d'une équation algébrique se trouvent dans le demi plan gauche a une grande signification dans les problèmes de stabilité des systèmes mécaniques et électriques dont l'étude commence avec Maxwell en 1818. Le théorème de Routh-Hurwitz [4] donne une condition nécessaire et suffisante de vérification de H qui est la suivante :

Soit $f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots$ avec $a_0 \neq 0$

Considérons $H \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ telle que :

$$H = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \end{vmatrix}$$

avec $a_k = 0$ pour $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$b_k = 0$ pour $k > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

Notons Δ_i les déterminants des mineurs principaux successifs de H (déterminants de Hurwitz) et $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le nombre de changements de signe dans la suite x_1, x_2, \dots, x_n .

Théorème de Routh-Hurwitz

Avec les notations précédentes une condition nécessaire et suffisante pour que $f(Z)$ n'admette pas de racine strictement positive est que :

$$V(a_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots) = 0$$

On a donc ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $Q(x)$ vérifie l'hypothèse H, mais cela impose le calcul d'une quantité impressionnante de déterminants.

Une condition suffisante plus simple s'obtient en appliquant la règle de Descartes.

THEOREME

Soient $P_{\sigma}(x) = \det ((I-L_{\sigma})^{-1}U_{\sigma}-xI) = (-1)^n x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

et $P_{\sigma'}(x) = \det ((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'}-xI) = (-1)^n x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$

Une condition suffisante pour que σ et σ' vérifient l'hypothèse H est que :

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^k b_i \right| \geq |a_{k+1} - b_{k+1}| \quad k=1,2,\dots,n-3$$

PREUVE

Une condition suffisante pour que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{avec les } a_i \in \mathbb{R} \text{ et } a_n \neq 0$$

n'ait aucun zéro strictement positif est que $\text{sgn}(a_i) = \text{Constant}$ pour $i=1$ à n .

En effet, supposons qu'il existe un $\xi > 0$ tel que $f(\xi) = 0$ alors puisque le signe des a_i est constant (supposons le positif sans nuire à la généralité) et ξ étant strictement positif $f(\xi) = a_n \xi^n + \dots + a_0$ sera strictement positif ce qui est absurde.

Appliquons cela au polynôme

$$Q(x) = (a_1 - b_1)x^{n-3} + \dots + \sum_{i=1}^{n-2} (a_i - b_i)$$
 il faudrait donc que

$$\text{sign} \left(\sum_{i=1}^j a_i - \sum_{i=1}^j b_i \right) = \text{constante pour } j = 1 \text{ jusqu'à } n-2 \text{ d'où le}$$

théorème.

C.Q.F.D.

D'après les formules de Newton et en notant

$$S_i = \text{Tr}((I - L_\sigma)^{-1} U_\sigma)^i \text{ pour } i=1 \text{ à } n \text{ on a d'après [5]}$$

$$a_1 + a_0 S_1 = 0 \text{ avec } a_0 = (-1)^n$$

$$2a_2 + a_1 S_1 + a_0 S_2 = 0$$

et ainsi jusqu'à :

$$na_n + a_{n-1} S_1 + \dots + a_0 S_n = 0$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^k a_i = S_1 \left[a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{k-1}}{k} \right] + S_2 \left[\frac{a_0}{2} + \dots + \frac{a_{k-2}}{2} \right] + \dots + \frac{a_0}{k} S_k$$

$$\text{et } a_{k+1} = -\frac{1}{k+1} [a_k S_1 + a_{k-1} S_2 + \dots + a_0 S_{k-1}]$$

Ce qui donne une condition suffisante pour que σ et σ' vérifient l'hypothèse H :

$$\begin{aligned}
 & |S_1(a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{K-1}}{k}) + S_2(\frac{a_0}{2} + \dots + \frac{a_{K-2}}{k}) + \dots + \frac{a_0}{k} - \\
 & S_1'(b_0 + \frac{b_1}{2} + \dots + \frac{b_{K-1}}{k}) - S_2'(\frac{b_0}{2} + \dots + \frac{b_{K-2}}{k}) - \dots - \frac{b_0}{k} S_k'| \\
 & \geq \frac{1}{k+1} |a_k S_1 + \dots + a_0 S_{k+1} - b_k S_1' - \dots - b_0 S_{k+1}'| \text{ pour } k=1 \text{ jusqu'à } n-3
 \end{aligned}$$

On n'a pas pu dégager des conditions plus simples sur les S_i ni trouver des classes de matrices A vérifiant automatiquement l'hypothèse H .

Un problème ouvert est donc le suivant : Trouver des classes de matrices $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}^+)$ telles que σ et σ' étant deux permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\det(\alpha L_\sigma + U_\sigma - \alpha I) \neq \det(\alpha L_{\sigma'} + U_{\sigma'} - \alpha I)$$

pour $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$

Le théorème 15 (I, 2) du à Young sur les matrices "logiquement ordonnées" (consistently ordered) s'appuie sur un résultat du même type.

THEOREME [15]

Soit A une matrice logiquement ordonnée en notant D la diagonale de A .

C_L : la triangulaire inférieure stricte de A

C_U : la triangulaire supérieure stricte de A

On a :

$$\det(\alpha C_L + \alpha^{-1} C_U - kD)$$

est indépendant de α pour $\alpha \neq 0$ et de k .

La démonstration se fait en calculant explicitement le terme général du déterminant qui grâce à la propriété de la matrice d'être logiquement ordonnée est indépendant de α et de k .

3. Retombée sur le cas (3,3)

Nous avons vu que dans le cas où $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}^+)$, σ_1 et σ_2 étant les deux découpes particulières de A on a :

$$\rho((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) \leq \rho((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) \Leftrightarrow \text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) \geq \text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2})$$

Ceci est bien équivalent au résultat (1,1) car :

PROPOSITION

$$\sigma_1 : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$$

$$\sigma_2 : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,3,2\}$$

étant les deux découpes différentes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\rho(A) < 1$ on a :

$$\text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}) \geq \text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) \Leftrightarrow a_{32}a_{21}a_{13} \geq a_{23}a_{31}a_{12}$$

PREUVE

Il suffit de calculer les traces par la formule indiquée dans III

Pour $\sigma_1 : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$ on aura

$$\mathcal{C}_1 = \{1\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{21\} \{2\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{321\} \{32\} \{31\} \{3\}$$

d'où en notant $\text{Tr}_1 = \text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1})$ on aura :

$$\text{Tr}_1 = a_{32}a_{21}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{31}a_{13} + a_{33} + a_{21}a_{12} + a_{22} + a_{11} \quad (1)$$

Pour $\sigma_2 : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,3,2\}$

$$\mathcal{L}_1 = \{1\}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{31\} \{3\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{2,3,1\} \{23\} \{21\} \{2\}$$

d'où en notant $\text{Tr}_2 = \text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2})$

$$\text{Tr}_2 = a_{23}a_{31}a_{12} + a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12} + a_{22} + a_{31}a_{13} + a_{33} + a_{11} \quad (2)$$

d'où d'après (1) et (2)

$$\text{Tr}_2 \geq \text{Tr}_1 \Leftrightarrow a_{32}a_{21}a_{13} \geq a_{23}a_{31}a_{12}$$

C.Q.F.D.

§ 3 - EXPERIENCES NUMERIQUES

Tous les calculs ont été effectués en double précision sur IBM 360/67 du C.I.C.G.

-1- La première partie illustre le fait que le rayon spectral évolue d'une manière inverse à celle de la trace (théorème IV,2,2).

La colonne des "rapports de vitesse" indique la vitesse d'une itération σ_j par rapport à σ_{13} (Gauss-Seidel).

Ceci est en fait un rapport de vitesse théorique (très proche du rapport de vitesse réel comme le montrent les autres expériences) qui se calcule

de la manière suivante :

σ_j va x fois plus vite que σ_{13} avec :

$$x = \frac{\text{Log } \rho_j}{\text{Log } \rho_{13}}$$

où ρ_j est le rayon spectral de $(I - L_{\sigma_j})^{-1} U_{\sigma_j}$

a) L'expérience est faite sur $A' \in \mathcal{M}_{20,20}(\mathbb{R})$ construite de la manière suivante :

$$A' = A / \rho(A) \times 1,2 \quad \text{ainsi} \quad \rho(A') = 0,833$$

avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{20,20}(\mathbb{R})$ telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{2(i+j-1)} & \text{si } i < j \\ \frac{J}{i+j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

Les découpes étudiées sont :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= |20|19|18|17|16|15|14|13|12|11|10|9|8|7|6|5|4|3|2|1| \\ \sigma_2 &= |19|20|17|18|16|15|13|14|12|10|11|9|7|8|5|6|4|3|2|1| \\ \sigma_3 &= |20|17|16|18|19|13|15|14|12|11|9|10|8|6|7|5|3|1|2|4| \\ \sigma_4 &= |5|6|4|7|3|8|2|9|1|10|19|20|18|17|16|15|14|13|12|11| \\ \sigma_5 &= |10|1|20|2|19|3|18|4|17|5|16|6|15|7|14|8|13|9|12|11| \\ \sigma_6 &= |1|2|4|3|6|5|7|9|8|10|20|19|17|18|15|16|14|13|12|11| \\ \sigma_7 &= |1|2|3|4|5|6|7|8|10|9|20|19|18|17|16|15|14|13|12|11| \\ \sigma_8 &= |20|19|18|16|17|1|2|3|4|15|14|5|6|7|8|9|10|11|12|13| \\ \sigma_9 &= |20|19|18|16|17|1|2|3|4|15|14|5|6|7|8|9|10|11|12|13| \\ \sigma_{10} &= |4|1|3|2|6|5|8|7|11|10|12|9|13|14|15|19|18|17|16|20| \\ \sigma_{11} &= |1|4|2|3|6|5|7|8|11|10|12|9|13|14|15|19|18|17|16|20| \\ \sigma_{12} &= |1|2|4|3|5|6|7|8|10|11|12|9|14|13|19|15|17|18|20|16| \\ \sigma_{13} &= |1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20| \end{aligned}$$

Tableau a

| σ | Rayon | Trace | Rapport des vitesses |
|---------------|------------|-----------|----------------------|
| σ_1 | 0,5889163 | 0,5377679 | 1,97 |
| σ_2 | 0,6212799 | 0,4884609 | 1,77 |
| σ_3 | 0,6432414 | 0,4531301 | 1,64 |
| σ_4 | 0,6647855 | 0,4167899 | 1,52 |
| σ_5 | 0,7047781 | 0,3423210 | 1,3 |
| σ_6 | 0,7100452 | 0,3361295 | 1,27 |
| σ_7 | 0,7122409 | 0,3343530 | 1,26 |
| σ_8 | 0,7212406 | 0,3153018 | 1,21 |
| σ_9 | 0,7381967 | 0,2871063 | 1,13 |
| σ_{10} | 0,73884371 | 0,2883557 | 1,13 |
| σ_{11} | 0,7470027 | 0,2738576 | 1,08 |
| σ_{12} | 0,748940 | 0,2694050 | 1,07 |
| σ_{13} | 0,7646607 | 0,2465621 | 1 |

b) On considère la matrice A' définie en a .

Pour différentes tailles de A' on résoud le système affine de point fixe

$$F(x^*) = x^* \quad \text{avec} \quad F(x) = A'x + h$$

$$h \in \mathbb{R}^n \quad \text{est tel que} \quad h^T = n \times (1,1,\dots,1)$$

Le vecteur de départ x_0 de l'itération est tel que $x_0^T = (1,1,\dots,1)$

En notant x_{r+1} et x_r deux itérés successifs le test d'arrêt de

$$\text{l'algorithme est } \left| \frac{x_{r+1} - x_r}{x_r} \right| \leq \varepsilon .$$

On mène l'itération de point fixe avec deux découpes extrêmes dont on compare les traces, les rayons spectraux. On donne le rapport de vitesse en temps et en itération ainsi que le rapport de vitesse théorique. On entend par itérations le nombre de pas de l'algorithme.

COMMENTAIRE

On constate que la découpe qui maximise la trace minimise le rayon spectral.

Les rapports de vitesse en temps et en itérations sont voisins du rapport de vitesse théorique défini à partir des rayons spectraux.

Dans le cas $n = 40$ un bon choix de la stratégie multiplie par 2,5 la vitesse de l'itération.

Tableau b

| N | ϵ | Découpe | Rayon | Trace | Temps en mcrs | nombre d'itérations | Rapports du nbre d'itérations des temps de calcul | Rapport des vitesses |
|----|------------|----------------------|-----------|-----------|---------------|---------------------|---|----------------------|
| 10 | 10^{-11} | 1 2 G.S. | 0,7481334 | 0,3331297 | 699959 | 85 | I = 1,57 | 1,59 |
| | | 10 9 ... 1 | 0,6292436 | 0,5607238 | 446888 | 54 | T = 1,56 | |
| 20 | / | 1 2 3 ... 20 G.S. | 0,7646607 | 0,2465621 | 2800369 | 92 | I = 1,91 | 1,97 |
| | | 20 19 18 ... 1 | 0,5889163 | 0,5377679 | 1452334 | 48 | T = 1,92 | |
| 30 | / | 1 2 3 ... 30 G.S. | 0,7725429 | 0,2037492 | 6350153 | 96 | I = 2,18 | 2,22 |
| | | 30 29 28 ... 1 | 0,5630636 | 0,5222518 | 2881853 | 44 | T = 2,2 | |
| 40 | / | 1 2 3 ... 40 G.S. | 0,7808103 | 0,1575025 | 18022498 | 100 | I = 2,5 | 2,57 |
| | | 40 39 ... 1 | 0,5291346 | 0,4997031 | 7212517 | 40 | T = 2,49 | |

mcrs : micro-secondes

c) On fait une expérience du même type que celle du tableau a) avec une matrice $B' \in \mathcal{M}_{10,10}(\mathbb{R})$, telle que :

$$B' = B / 1,2 \times \rho(B)$$

de manière à ce que $\rho(B') < 1$. $\rho(B') = 0,833$

$B \in \mathcal{M}_{10,10}(\mathbb{R})$ est telle que :

$$b_{ij} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i=j \\ \frac{1}{i+j} & \text{si } i>j \\ i+j & \text{si } i<j \end{array} \right.$$

Les découpes comparées sont :

$$\sigma_1 = |10|9|8|7|6|5|4|3|2|1|$$

$$\sigma_2 = |5|2|4|3|1|8|7|6|10|9|$$

$$\sigma_3 = |10|1|9|2|8|3|7|4|6|5|$$

$$\sigma_4 = |1|5|3|6|7|2|1|8|9|10|$$

$$\sigma_5 = |1|7|2|8|3|9|4|5|6|10|$$

$$\sigma_6 = |1|2|4|3|5|7|6|8|9|10|$$

$$\sigma_7 = |1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|$$

G.S.

Tableau c

| Découpe | Rayon | Trace | Rapport des vitesses |
|------------|-----------|-----------|----------------------|
| σ_1 | 0,5067015 | 0,4963025 | 2,78 |
| σ_2 | 0,6602845 | 0,2417910 | 1,7 |
| σ_3 | 0,6767452 | 0,2412170 | 1,6 |
| σ_4 | 0,7404950 | 0,1596646 | 1,23 |
| σ_5 | 0,7410420 | 0,1563659 | 1,22 |
| σ_6 | 0,7650234 | 0,1266855 | 1,09 |
| σ_7 | 0,7835117 | 0,1079534 | 1 |

d) Avec la matrice B' considérée en c dont ont fait varier la taille on résoud le système affine de point fixe $F(x^*) = x^*$ avec :

$$F(x) = B'x + h$$

$$h \in \mathbb{R}^n \text{ 'est tel que } h = (1,1,\dots,1) \times n$$

Le vecteur de départ de l'itération est $x_0 = (1,1,\dots,1)$

Le test d'arrêt est $\left| \frac{x_{r+1} - x_r}{x_r} \right| \leq \varepsilon$ lorsque x_{r+1} et x_r désignent

le r_{i+1} ^{ème} et le r ^{ème} itéré.

Le tableau d donne les mêmes renseignements que le tableau b.

Tableau d

| N | ϵ | Découpe | Rayon | Trace | Temps en mcrs | nombre d'itérations | Rapports du nbre d'itérations des temps de calcul | Rapport des vitesses |
|----|------------|--------------------|-----------|----------|---------------|---------------------|---|----------------------|
| 20 | 10^{-11} | 1 2 ... 20 G.S. | 0,7988371 | 0,040065 | 3447405 | 110 | I = 3,79 | 4 |
| | | 20 19 ... 21 | 0,4065620 | 0,406562 | 890591 | 29 | T = 3,8 | |
| 30 | / | 1 2 ... 30 G.S. | 0,8054702 | 0,021583 | 7556887 | 114 | I = 4,56 | 4,79 |
| | | 30 29 ... 21 | 0,3524873 | 0,350362 | 1667497 | 25 | T = 4,53 | |
| 40 | / | 1 2 ... 40 G.S. | 0,807687 | 0,013757 | 13161954 | 116 | I = 5,04 | 5,37 |
| | | 40 39 ... 21 | 0,3175337 | 0,361995 | 2735083 | 13 | T = 4,8 | |

COMMENTAIRE

Les traces étant plus séparées les rayons spectraux le sont aussi et on peut trouver une stratégie permutée allant dans le cas $n = 40$, cinq fois plus vite que l'algorithme de Gauss-Seidel.

e) On va illustrer le fait que l'hypothèse H est vérifiée, ceci sur une matrice de taille 5 .

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0,176869 & 0,1179127 & 0,8843451 & 0,07074761 \\ 0,4716507 & 0 & 0,08843451 & 0,07074761 & 0,05895634 \\ 0,5306071 & 0,4244857 & 0 & 0,5895634 & 0,05053401 \\ 0,5659809 & 0,4716507 & 0,4042721 & 0 & 0,04421726 \\ 0,5895634 & 0,5053401 & 0,4421726 & 0,3930423 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_1 = 1,2,3,4,5$$

$$\sigma_2 = 1,3,2,4,5$$

$$\sigma_3 = 1,4,2,3,5$$

$$\sigma_4 = 5,4,3,2,1$$

$$\sigma_5 = 5,3,4,1,2$$

$$\sigma_6 = 4,3,2,5,1$$

Rappelons que si :

$$P_{\sigma}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{et} \quad P_{\sigma'}(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

σ et σ' vérifient l'hypothèse H si :

$$\left| \sum_{i=1}^k (a_i - b_i) \right| \geq |a_{k+1} - b_{k+1}| \quad \text{pour } k=1 \text{ à } n-3 \quad (1)$$

Ces calculs ont été fait pour comparer les différentes découpes entre elle et on obtient : (le signe \geq est entendu avec les valeurs absolues)

σ_1, σ_2

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 0,0483664 \geq -0,0446762 = a_2 - b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 &= 0,00369378 \geq -0,003625559 = a_3 - b_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2 - b_3 &= 0,000068221 \geq -6,821234 \cdot 10^{-5} = a_4 - b_4 \end{aligned}$$

σ_2, σ_3

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 0,0154221 \geq -0,013973614 = a_2 - b_2 \\ a_1 + a_2 + b_1 - b_2 &= 0,00144846 \geq -0,001430779 = a_3 - b_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2 - b_3 &= 0,000017681 \geq -1,75832 \cdot 10^{-5} = a_4 - b_4 \end{aligned}$$

σ_3, σ_4

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 0,0812558 \geq -0,0557108 = a_2 - b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 &= 0,025545 \geq -0,023404307 = a_3 - b_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 + b_1 - b_2 - b_3 &= 0,002140693 \geq -0,00151701 = a_4 - b_4 \end{aligned}$$

σ_4, σ_5

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= -0,0803082 \geq 0,0561289 = a_2 - b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 &= -0,0241793 \geq 0,022081633 = a_3 - b_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2 - b_3 &= -0,0803082 \geq 0,0020867980 = a_4 - b_4 \end{aligned}$$

σ_5, σ_6

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 0,0398131 \geq -0,030199 = a_2 - b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 &= 0,0096141 \geq -0,009209013 = a_3 - b_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2 - b_3 &= 0,000405087 \geq -0,000373643 = a_4 - b_4 \end{aligned}$$

On obtient le tableau suivant :

| σ | Rayon | Trace | Vitesse / σ_4 |
|------------|--------|--------|-------------------------|
| σ_1 | 0,6628 | 0,587 | 1,3 |
| σ_2 | 0,6850 | 0,539 | 1,18 |
| σ_3 | 0,6914 | 0,5236 | 1,16 |
| σ_5 | 0,6925 | 0,5226 | 1,15 |
| σ_6 | 0,7099 | 0,4828 | 1,07 |
| σ_4 | 0,7275 | 0,4433 | 1 |

On voit donc que la condition (1), par conséquent l'hypothèse H est réalisée.

On vérifie que la condition (1) est plus restrictive d'un point de vue numérique que l'hypothèse H qu'elle entraîne.

§ 4 - MAXIMISATION DE LA TRACE

L'hypothèse H supposée vraie pour tout couple de permutation de $\{1,2,\dots,n\}$, le problème du choix de la stratégie permutée de Gauss Seidel optimale se repose donc comme suit :

Il s'agit de trouver $\sigma \in S_n$ telle que :

$$\text{Tr}((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \max_{\sigma' \in S_n} \text{Tr}((I-L_{\sigma'})^{-1}U_{\sigma'})$$

En adoptant les notations du chapitre III, une application du théorème 1 nous donne une formule de calcul explicite de cette trace :

1. THEOREME

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ telle que $\rho(A) < 1$ et σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ alors :

$$\text{Tr}((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \sum_{C_{\sigma_n} \in \mathcal{C}_{\sigma_n}} \prod_{C_{\sigma_n}}^{a_{\sigma_n}} + \sum_{C_{\sigma_{n-1}} \in \mathcal{C}_{\sigma_{n-1}}} \prod_{C_{\sigma_{n-1}}}^{a_{\sigma_{n-1}}} + \dots + \sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{C}_{\sigma_1}} \prod_{C_{\sigma_1}}^{a_{\sigma_1}}$$

PREUVE

En sommant les éléments diagonaux dans la formule explicite de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ donnée par (III,1) il vient :

$$\text{Tr}((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma) = \text{Tr}I + \sum_{C_{\sigma_n} \in \mathcal{C}_{\sigma_n}} \prod_{C_{\sigma_n}}^{k_{\sigma_n}} + \sum_{C_{\sigma_{n-1}} \in \mathcal{C}_{\sigma_{n-1}}} \prod_{C_{\sigma_{n-1}}}^{k_{\sigma_{n-1}}} + \dots + \sum_{C_{\sigma_1} \in \mathcal{C}_{\sigma_1}} \prod_{C_{\sigma_1}}^{k_{\sigma_1}}$$

Les éléments k_{ij} de $A-I$ peuvent être remplacés dans cette formule par ceux de A car $k_{ii} = a_{ii} - 1$ n'intervient que dans \mathcal{C}_i et plus précisément dans $C_i = \{i\} \in \mathcal{C}_i$ et ainsi dans la somme nous aurons $\sum_{i=1}^n a_{ii} - n$ le $(-n)$ disparaît car $\text{Tr}I - n = 0$ d'où la formule.

C.Q.F.D.

EXEMPLE

$n = 4$, soit à calculer $\text{Tr}((I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma)$ pour

$$\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$$

On génère la suite \mathcal{C}_{σ_i} pour $i=1$ à 4

$$\mathcal{C}_{\sigma_1} = \{\sigma_1\}$$

$$\mathcal{C}_{\sigma_2} = \{\sigma_2\} \{ \sigma_2, \sigma_1 \}$$

$$\mathcal{C}_{\sigma_3} = \{\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1\} \{ \sigma_3, \sigma_2 \} \{ \sigma_3, \sigma_1 \} \{ \sigma_3 \}$$

$$\mathcal{C}_{\sigma_4} = \{\sigma_4, \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1\} \{ \sigma_4, \sigma_3, \sigma_2 \} \{ \sigma_4, \sigma_3, \sigma_1 \} \{ \sigma_4, \sigma_3 \} \{ \sigma_4, \sigma_2 \} \{ \sigma_4, \sigma_2, \sigma_1 \} \{ \sigma_4, \sigma_1 \} \{ \sigma_4 \}$$

On voit donc que $k_{\sigma_i \sigma_i}$ pour $i=1$ à 4 n'intervient qu'une seule fois par l'intermédiaire des singletons $\{\sigma_i\}$ et le calcul de la trace se fait comme indiqué dans la formule avec par exemple :

$$\sum_{C_{\sigma_3} \in \mathcal{C}_{\sigma_3}} \prod_{C_{\sigma_3}} a = a_{\sigma_3 \sigma_2} a_{\sigma_2 \sigma_1} a_{\sigma_1 \sigma_3} + a_{\sigma_3 \sigma_2} a_{\sigma_2 \sigma_3} + a_{\sigma_3 \sigma_1} a_{\sigma_1 \sigma_3} + a_{\sigma_3 \sigma_3}$$

Il s'agit donc de maximiser, par le choix d'une permutation σ , une expression contenant des sommes et des produits d'éléments a_{ij} de la matrice nonnégative A .

Une approche de ce problème consiste à remarquer qu'un élément a_{ij} étant fixé, le nombre de fois qu'il intervient dans l'expression de la trace de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ n'est pas fixe et dépend de la permutation σ considérée. Ce nombre, que nous appellerons nombre d'incidences noté $N(a_{ij})$ est le suivant :

2. PROPOSITION

Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ et $\sigma \in S_n$ on aura :

$$N(a_{\sigma_j \sigma_i}) = \begin{cases} 2^{n+i-j-1} & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ 2^{i-j-1} & \text{si } i > j \end{cases}$$

PREUVE

On va d'abord évaluer le cardinal de \mathcal{C}_{σ_j} pour $j=1$ à n .

(On entend par $\text{Card } \mathcal{C}_{\sigma_j}$ le nombre de parties C_{σ_j} qu'il y a dans \mathcal{C}_{σ_j})

Par définition

$$\mathcal{C}_{\sigma_j} = \{\sigma_j \times \mathcal{C}_{\sigma_{j-1}}\} \{\sigma_j \times \mathcal{C}_{\sigma_{j-2}}\} \dots \{\sigma_j \times \mathcal{C}_{\sigma_1}\} \{\sigma_j\}$$

d'où :

$$\text{Card } \mathcal{L}_{\sigma_j} = \text{Card } \mathcal{L}_{\sigma_{j-1}} + \text{Card } \mathcal{L}_{\sigma_{j-2}} + \dots + \text{Card } \mathcal{L}_{\sigma_1} + 1$$

pour $j=2$ à n .

Soit à évaluer la suite $p_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i + 1$ avec $p_1 = 1$.

On montre par récurrence que $p_j = 2^{j-1}$. En effet :

$$p_2 = 2^1 = 2 \text{ car } \mathcal{L}_{\sigma_2} = \{\sigma_2, \sigma_1\} \{\sigma_2\}$$

Supposons que $p_n = 2^{n-1}$

$$\text{alors } p_{n+1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 + 1$$

$$\text{mais } p_n = 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 + 1$$

$$\text{d'où } 2p_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1 + 1$$

$$\text{et ainsi } 2p_n - p_{n+1} = 0 \text{ soit } p_{n+1} = 2^n .$$

a/ $\underline{i=j}$: Le terme $a_{\sigma_i \sigma_i}$ vient de \mathcal{L}_{σ_i} et correspond au singleton $\{\sigma_i\}$. Il n'intervient donc qu'une seule fois . $N(a_{\sigma_i \sigma_i}) = 1$.

b/ $\underline{i < j}$: Le terme $a_{\sigma_j \sigma_i}$ n'apparaît pas dans $\mathcal{L}_{\sigma_1} \mathcal{L}_{\sigma_2} \dots \mathcal{L}_{\sigma_{j-1}}$.
Car il n'y a aucun élément contenant σ_j .

Il apparaît dans \mathcal{L}_{σ_j} avec $\{\sigma_j \times \mathcal{L}_{\sigma_i}\} = A_1$ puis dans $\mathcal{L}_{\sigma_{j+1}}$ avec $\{\sigma_{j+1} \times A_1\} = A_2$ dans $\mathcal{L}_{\sigma_{j+2}}$ avec $\{\sigma_{j+2} \times A_2\} \{\sigma_{j+2} \times A_1\} = A_3$

et enfin dans \mathcal{C}_{σ_n} avec $\{\sigma_n \times A_{n-j}\} \{\sigma_n \times A_{n-j-1}\} \dots \{\sigma_n \times A_1\} = A_{n-j+1}$

$$\text{donc } N(a_{\sigma_j \sigma_i}) = \sum_{k=1}^{n-j+1} \text{Card } A_k$$

Cette somme se calcule de la même manière que celle des \mathcal{C}_j avec cette fois comme terme de départ $\text{Card } A_1 = \text{Card } C_i = 2^{i-1}$ et on obtient :

$$N(a_{\sigma_j \sigma_i}) = 2^{i-1}(2^{n-j}) = 2^{n+i-j-1}$$

c/ $i > j$: Ce sont tous les termes se terminant par σ_j dans \mathcal{C}_{σ_i} .

Il faut donc tous les ensembles se terminant par σ_j dans \mathcal{C}_{σ_k} pour k variant de j à i ; soit :

$$\mathcal{C}'_{\sigma_j} = \{\sigma_j\}$$

$$\mathcal{C}'_{\sigma_{j+1}} = \{\sigma_{j+1}, \sigma_j\}$$

$$\mathcal{C}'_{\sigma_{j+2}} = \{\sigma_{j+2}, \mathcal{C}'_{\sigma_{j+1}}\} \{\sigma_{j+2}, \mathcal{C}'_{\sigma_j}\}$$

⋮

$$\mathcal{C}'_{\sigma_i} = \{\sigma_i, \mathcal{C}'_{\sigma_{i-1}}\} \dots \{\sigma_i, \mathcal{C}'_{\sigma_j}\}$$

et de la même manière qu'en b/ nous aurons :

$$N(a_{\sigma_j \sigma_i}) = 2^{i-j-1}$$

C.Q.F.D.

Un problème de taille n étant donné. On peut lui faire correspondre une matrice, que l'on appellera matrice d'incidence notée N_n , qui donne les nombres d'incidences des éléments a_{ij} de la matrice de contraction A associée au problème considéré.

EXEMPLES

$n=6$

$N_6 =$

| | σ_1 | σ_2 | σ_3 | σ_4 | σ_5 | σ_6 |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| σ_1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 8 | 16 |
| σ_2 | 16 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| σ_3 | 8 | 16 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| σ_4 | 4 | 8 | 16 | 1 | 1 | 2 |
| σ_5 | 2 | 4 | 8 | 16 | 1 | 1 |
| σ_6 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 1 |

Soit $\sigma : \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow \{6,4,3,1,2,5\}$

$$\sigma_1 = 6 \quad \sigma_2 = 4 \quad \sigma_3 = 3 \quad \sigma_4 = 1 \quad \sigma_5 = 2 \quad \sigma_6 = 5$$

On lit immédiatement sur N_6 le nombre d'incidence d'un élément quelconque a_{ij} de A . Par exemple :

$$N(a_{64}) = N(a_{\sigma_1\sigma_2}) = 1$$

$$N(a_{65}) = N(a_{\sigma_1\sigma_6}) = 16$$

$$N(a_{14}) = N(a_{\sigma_4\sigma_5}) = 8$$

$$N(a_{23}) = N(a_{\sigma_5\sigma_3}) = 8$$

Pour différentes tailles de n la matrice d'incidence $N(A)$ sera :

$n=10$

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| 256 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
| 128 | 256 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| 64 | 128 | 256 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| 32 | 64 | 128 | 156 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 1 |

Ainsi donc en prenant la permutation $\sigma = \text{id}$ (soit la méthode de Gauss Seidel) le terme a_{110} intervient 256 fois tandis que a_{12} intervient une seule fois.

$n=20$
avec $2^{18} = 262144$, $2^{17} = 131072$, $2^{16} = 65536$ etc...

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ |
| 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ |
| 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ |
| 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ |
| 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ |
| 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ |
| 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² |
| 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ |
| 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ |
| 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ |
| 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ |
| 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ |
| 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ |
| 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ |
| 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ |
| 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ |
| 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 | 2 ² |
| 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵ | 2 ⁶ | 2 ⁷ | 2 ⁸ | 2 ⁹ | 2 ¹⁰ | 2 ¹¹ | 2 ¹² | 2 ¹³ | 2 ¹⁴ | 2 ¹⁵ | 2 ¹⁶ | 2 ¹⁷ | 2 ¹⁸ | 1 |

De cette manière, à chaque problème de taille n on sait associer une matrice d'incidence N_n . Une permutation σ de $\{1,2,\dots,n\}$ étant donnée, en notant σ_i la $i^{\text{ème}}$ ligne et σ_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de N_n , $N_{\sigma_i\sigma_j}$ sera le nombre de fois qu'intervient a_{ij} dans l'expression de la trace de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ (avec $A = L_\sigma + U_\sigma$).

REMARQUE

Au vu du grand nombre d'appels des éléments de A nécessaires à l'évaluation de $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ on conclut qu'un programme calculant trace $(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma$ à partir de la formule explicite qui a été donnée (chapitre III) sera plus coûteux que celui qui effectue les produits des matrices K_{σ_i} pour $i=1$ à n . La formule de calcul de $[(I-L_\sigma)^{-1}U_\sigma]^m$ pour $m \in \mathbb{N}$ n'a d'ailleurs pas été donnée dans ce but.

Une méthode empirique de maximisation de cette trace par permutation peut consister à chercher une permutation σ qui aux éléments a_{ij} les plus grands (respectivement : les plus petits) de A associe les $N_{\sigma_i\sigma_j}$ les plus grands (respectivement : les plus petits).

Un cas limite illustrant cette approche du problème est le suivant :

3. Expériences faites sur la matrices d'incidence

a) Considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ construite ainsi :

$$A = N_n / \rho(N_n) \times 1,2$$

avec N_n matrices d'incidence définie plus haut.

A sera donc une matrice nonnégative, de rayon spectral inférieur strictement à 1 ($\rho(A) = 0,833\dots$).

Considérons la découpe de Gauss-Seidel de A donnée par la permutation $\sigma_1 = \{1, 2, \dots, n\}$.

Chaque élément a_{ij} de A interviendra N_{ij} fois dans l'expression de la trace de $(I - L_{\sigma_1})^{-1} U_{\sigma_1}$, or a_{ij} étant égal à $N_{ij} / \rho(N_n) \times 1,2$

tous les éléments de A interviendront de la manière souhaitée pour maximiser la trace.

Par contre la découpe inverse $\sigma_2 : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{n, n-1, \dots, 1\}$

pour les mêmes raisons fera intervenir les a_{ij} de A d'une manière défavorable à la maximisation de la trace.

L'expérience a été faite pour $n = 6$ et $n = 30$

| N | Permutation | Trace | Rayon | Rapport de vitesse |
|----|-------------|----------------------|--------|--------------------|
| 6 | σ_2 | 0,1765701 | 0,77 | 2,21 |
| | σ_1 | 0,5511695 | 0,56 | |
| 30 | σ_2 | $2,8 \times 10^{-7}$ | 0,822 | 13,31 |
| | σ_1 | 0,073 | 0,0735 | |

On constate donc pour les deux découpes un grand écart entre les traces des deux matrices qui entraîne une diminution très sensible du rayon spectral par le choix de la permutation σ_1 .

Ainsi la stratégie issue de σ_1 employée à la résolution d'un système de point fixe de taille 30 ira 13 fois plus vite que celle issue de σ_2 .

Avec la même matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}^+)$

b) Considérons le système affine de point fixe $F(x^*) = x^*$

avec $F(x) = A x + h$ où $h^T = (1, 1, \dots, 1)$

On résoud ce système pour différentes tailles de A avec les deux découpes σ_1 et σ_2 précédemment définies.

Le vecteur de départ sera $(x^0)^T = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ avec $x_i^0 = i$.

Le test d'arrêt de l'algorithme sera $\left| \frac{x_{r+1} - x_r}{x_r} \right| \leq \varepsilon$ en notant x_i

le $i^{\text{ème}}$ itéré.

Dans le tableau suivant on compare le nombre d'itérations ainsi que le temps d'exécution des deux méthodes.

| N | ε | Dé- coupe | Temps en mcs | Nombre d'itérations | rapports des nbres d'itéra- tions temps de calcul | rapport des vitesses |
|----|---------------|--------------|-----------------|------------------------|--|----------------------------|
| 30 | 10^{-8} | σ_2 | 5883990 | 2670 | I = 8,9 | 8,5 |
| | | σ_1 | 678600 | 300 | T = 8,6 | |
| 50 | / | σ_2 | 17617275 | 4800 | I = 13,7 | 13,5 |
| | | σ_1 | 1321060 | 450 | T = 13,3 | |
| 60 | / | σ_2 | 26429039 | 5940 | I = 16,5 | 16 |
| | | σ_1 | 1617928 | 360 | T = 16,3 | |

Ce tableau confirme l'expérience a) : le choix de la découpe σ_1 qui associe les a_{ij} les plus grands (respectivement : les plus petits) maximise la trace et diminue le rayon spectral ce qui diminue le temps d'exécution et le nombre d'itération de l'algorithme de résolution du problème de point fixe. *Le gain augmente avec la taille du problème.*

Pour un problème de taille 60 l'algorithme mené avec la permutation σ_1 va 16 fois plus vite que celui mené avec σ_2

Des expériences du même type ont été faites avec une matrice très voisine de la matrice d'incidence.

c) Soit $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$b_{ij} = \begin{cases} 2^{i-1} \times (n-j+1) & \text{si } i < j \\ 2^{i-j-1} & \text{si } i > j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ainsi pour $n=6$; B s'écrira :

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 1 \end{vmatrix}$$

Considérons les systèmes affine de point fixe $F(x^*) = x^*$ avec

$$F(x) = (B / \rho(B) \times 1,2)x + h$$

ainsi $(B / \rho(B) \times 1,2) = 0,833 < 1$.

$$h^T = (1,1,\dots,1)$$

Pour différents n :

Avec le vecteur de départ et le test d'arrêt précédent on mène l'algorithme de résolution avec les deux découpes σ_2 et σ_1 .

Dans un premier tableau nous comparons les traces et les rayons spectraux associés aux deux méthodes

| N | Découpe | Trace | Rayon | Vitesse |
|----|------------|----------------------|--------|---------|
| 20 | σ_2 | 0,00157 | 0,8051 | 5,12 |
| | σ_1 | 0,329 | 0,3289 | |
| 30 | σ_2 | $1,33 \cdot 10^{-5}$ | 0,8118 | 6,8 |
| | σ_1 | 0,2414017 | 0,2414 | |
| 40 | σ_2 | $7,69 \cdot 10^{-8}$ | 0,8154 | 8,19 |
| | σ_1 | 0,1877 | 0,1877 | |

Le deuxième tableau concerne le temps d'exécution et le nombre d'itérations des deux algorithmes :

| N | ϵ | Découpe | Temps en mcrs | Nombre d'itérations | Vitesse t, i | Vitesse |
|----|------------|------------|---------------|---------------------|----------------|---------|
| 30 | 10^{-6} | σ_2 | 12044929 | 5310 | I = 6,32 | 6 |
| | | σ_1 | 1900028 | 840 | T = 6,33 | |
| 40 | 10^{-11} | σ_2 | 14722084 | 5160 | I = 7,16 | 7 |
| | | σ_1 | 2022094 | 720 | T = 7,28 | |

Cette nouvelle expérience confirme l'intérêt qu'il y a à choisir une permutation σ qui fait intervenir un maximum (respectivement : un minimum) de fois les grands (respectivement : les petits) éléments de la matrice de contraction.

Considérons, à ce propos, deux permutations différant d'une substitution

$$\sigma_1 = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$$

$$\sigma_2 = \{1, 2, \dots, n, n-1\}$$

PROPOSITION

Une condition suffisante pour que

$$\text{tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) \geq \text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1})$$

est $a_{n-1 \ n} \geq a_{n \ n-1}$

et $\forall j = 1 \text{ à } n-2 \quad a_{j \ n-1} \geq a_{j \ n}$

$$a_{n \ j} \geq a_{n-1 \ j}$$

PREUVE

D'après la formule explicite de la trace, on a :

$$\text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) = \sum_{C \in \mathcal{L}_n^1} \prod_C^n a + \dots + \sum_{C \in \mathcal{L}_1^1} \prod_C^1 a$$

Dans les deux formules $\mathcal{L}_{\sigma_j}^1$ et $\mathcal{L}_{\sigma_j}^2$ sont identiques pour $j=1 \text{ à } n-2$.

La différence des traces viendra donc de $\mathcal{L}_{\sigma_{n-1}}$ et \mathcal{L}_{σ_n} qui sont :

$$\mathcal{C}_{n-1}^1 = \{n-1, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots \{n-1, \mathcal{C}_1\} \{n-1\}$$

$$\mathcal{C}_n^1 = \{n, n-1, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots \{n, n-1, \mathcal{C}_1\} \{n, n-1\}$$

$$\{n, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots \{n, \mathcal{C}_1\} \{n\}$$

$$\mathcal{C}_n^2 = \{n, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots \{n, \mathcal{C}_1\} \{n\}$$

$$\mathcal{C}_{n-1}^2 = \{n-1, n, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots \{n-1, n, \mathcal{C}_1\} \{n-1, n\}$$

$$\{n-1, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots \{n-1, \mathcal{C}_1\}$$

alors

$$\text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) - \text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) = \{n-1, n, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots \{n-1, n, \mathcal{C}_1\}$$

$$\{n-1, n\} - \{n, n-1, \mathcal{C}_{n-2}\} \dots - \{n, n-1, \mathcal{C}_1\} - \{n, n-1\}$$

Développons cette expression en notant \mathcal{C}_j les produits communs

$$= a_{n-1 n} a_{n n-2} \mathcal{C}'_{n-2} a_{n-2 n-1} + \dots + a_{n-1 n} a_{n 1} a_{1 n-1}$$

$$- a_{n n-1} a_{n-1 n-2} \mathcal{C}'_{n-2} a_{n-2 n} - \dots - a_{n n-1} a_{n-1 1} a_{1 n}$$

et ainsi $a_{n-1 n} \geq a_{n n-1}$

$$a_{j n-1} \geq a_{j n} \quad \text{pour } j=1 \text{ à } n-2$$

$$a_{n j} \geq a_{n-1 j} \quad \text{pour } j=1 \text{ à } n-2$$

impliquent

$$\text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) - \text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) \geq 0$$

C.Q.F.D.

Supposons que σ_2 fait intervenir un maximum (respectivement : un minimum) de fois les grands (respectivement : les petits) éléments de A alors

$$\text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) \geq \text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) .$$

PREUVE

Dans l'expression de la $\text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2})$,

$a_{n-1 n}$, $a_{j n-1}$, $a_{n n}$ interviennent un plus grand nombre de fois que $a_{n n-1}$, $a_{j n}$ et $a_{n-1 j}$, par conséquent à cause de la propriété vérifiée par σ_2 nous aurons

$$a_{n-1 n} \geq a_{n n-1}$$

$$a_{j n-1} \geq a_{j n} \quad \text{pour } j=1 \text{ à } n-2$$

$$a_{n j} \geq a_{n-1 j}$$

Ce qui d'après la proposition précédente implique

$$\text{Tr}((I-L_{\sigma_2})^{-1}U_{\sigma_2}) \geq \text{Tr}((I-L_{\sigma_1})^{-1}U_{\sigma_1}) .$$

C.Q.F.D.

Nous avons donc pu, dans le cas de substitutions, montrer la validité du critère employé.

Dans le cas général nous avons à maximiser :

$$f(\sigma) = \sum_{C \in \mathcal{L}_{\sigma_n}} \prod_C^{\sigma_n} a + \sum_{C \in \mathcal{L}_{\sigma_{n-1}}} \prod_C^{\sigma_{n-1}} a + \dots + \sum_{C \in \mathcal{L}_{\sigma_1}} \prod_C^{\sigma_1} a$$

Les a_{ij} étant des nombres positifs, en remplaçant dans cette expression

les produits par des sommes $(\prod_C^{\sigma_j} \text{ par } \sum_C^{\sigma_j})$ une approche de la solution

consiste alors à chercher la permutation qui maximise :

$$f'(\sigma) = \sum_{C \in \mathcal{C}_{\sigma_n}} \sum_{C'} a + \sum_{C \in \mathcal{C}_{\sigma_{n-1}}} \sum_{C'} a + \dots + \sum_{C \in \mathcal{C}_{\sigma_1}} \sum_{C'} a$$

Nous retrouvons le même critère que précédemment que nous pouvons formaliser de la manière suivante :

Un système d'équations de matrice de contraction $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}^+)$ étant donné, on construit la matrice d'incidence. Une approche de la permutation optimale consiste alors à :

Chercher la permutation σ de $\{1,2,\dots,n\}$ qui réalise :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} N_{\sigma_i \sigma_j} = \max_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} N_{\sigma_i \sigma_j}$$

Nous sommes donc en définitive ramenés à un problème classique d'affectation ([2][7][10]) .

Ce problème a été largement étudié, par exemple en informatique dans le cas d'une affectation de données à des disques magnétiques (Cylinder Allocation Problem [2]).

Pour ce type de problèmes, il existe de nombreux algorithmes heuristiques, dont l'efficacité dépend essentiellement des prix qu'on accepte d'investir (à la limite le problème est entièrement résolu en balayant toutes les $(n-1)!$ permutations !!).

L'idée générale de ces méthodes consiste à chercher la permutation optimale sur un sous-ensemble de l'ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ (par exemple : l'ensemble des substitutions). Cette permutation peut alors constituer finalement une stratégie efficace.

A titre indicatif nous proposons en annexe l'expérimentation de deux de ces algorithmes connus (Aspinall [2]) sur différents exemples.

Notons, en conclusion de ce chapitre, que la résolution partielle du problème initial s'étend sans difficulté aux méthodes d'itérations chaotiques issues d'une suite $s = J_1, \dots, J_r$ tel que $\bigcap_{i=1}^r J_i = \emptyset$.

Les matrices L et U construites de manière à ce que

$(I-L)^{-1}U = K_{J_r} \times \dots \times K_{J_1}$ [3] vérifient les mêmes propriétés que celles

de L_σ et U_σ considérées dans ce chapitre.

ANNEXE

Dans le premier algorithme on considère le sous-ensemble des substitutions de $\{1,2,\dots,n\}$.

Le second considère le sous-ensemble des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ généré à partir de permutations de trois éléments successifs.

Les programmes (en algol W) de calcul d'une découpe efficace pour la résolution d'un système de point fixe à plusieurs variables sont alors les suivants :

Procédure I :

```
IN COMMENT RESOUD LE SYSTEME LINEAIRE DE POINT
  FIXE AX+H POUR DEUX DECOUPES DONT L'UNE
  MAXIMISE LA TRACE ;
PROCEDURE CHOIX(INTEGER VALUE N,K ; LONG REAL ARRAY A,M1(*,*) ;
  INTEGER ARRAY D,W(*) ) ;
BEGIN LONG REAL S,S1,S2 ;
  S:=0L ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO
  BEGIN
  S:=S+A(K,I)*M1(D(K),D(I))+A(I,K)*M1(D(I),D(K)) ;
  S:=S+A(K+1,I)*M1(D(K+1),D(I))+A(I,K+1)*
  M1(D(I),D(K+1)) ;
  END ;
  S1:=S ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO W(I):=D(I) ;
  W(K):=D(K+1) ;
  W(K+1):=D(K) ;
  S:=0L ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO
  BEGIN
  S:=S+A(K,I)*M1(W(K),W(I))+A(I,K)*M1(W(I),W(K)) ;
  S:=S+A(K+1,I)*M1(W(K+1),W(I))+A(I,K+1)*
  M1(W(I),W(K+1)) ;
  END ;
  S2:=S ;
  IF S1<S2 THEN
  BEGIN
  FOR I:=1 UNTIL N DO F(I):=W(I) ;
  END ;
  IF K=N-1 THEN
  BEGIN
  FOR I:=1 UNTIL N DO W(I):=F(I) ;
  W(1):=D(N) ;
  W(N):=D(1) ;
  S:=0L ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO
  BEGIN S:=S+A(1,I)*M1(D(1),D(I))+A(I,1)*M1(D(I),D(1)) ;
  S:=S+A(N,I)*M1(D(N),D(I))+A(I,N)*M1(D(I),D(N)) ;
  END ;
  S1:= S ;
  S:=0L ;
  FOR I:=1 UNTIL N DO
  BEGIN S:=S+A(1,I)*M1(W(1),W(I))+A(I,1)*M1(W(I),W(1)) ;
  S:=S+A(N,I)*M1(W(N),W(I))+A(I,N)*M1(W(I),W(N)) ;
  END ;
  S2:=S ;
  IF S1<S2 THEN
  BEGIN
  FOR I:=1 UNTIL N DO F(I):=W(I) ;
  END ;
  END ;
END ;
```

Procédure II :

```
PROCEDURE CHOIX(INTEGER VALUE N,K ; LONG REAL ARRAY A,NI(*,*) ;
                INTEGER ARRAY D,W(*) ) ;
    BEGIN LONG REAL S,S1,S2 ;
          S:=0L ;
    FOR J:=K STEP 2 UNTIL K+2 DO
      FOR I:=1 UNTIL N DO
        BEGIN
          S:=S+A(J,I)*NI(D(J),D(I)) ;
          S:=S+A(I,J)*NI(D(I),D(J)) ;
        END ;
      S1:=S ;
      FOR I:=1 UNTIL N DO W(I):=D(I) ;
      W(K):=D(K+2) ;
      W(K+2):=D(K) ;
      S:=0L ;
      FOR J:=K STEP 2 UNTIL K+2 DO
        FOR I:=1 UNTIL N DO
          BEGIN
            S:=S+A(J,I)*NI(W(J),W(I)) ;
            S:=S+A(I,J)*NI(W(I),W(J)) ;
          END ;
        S2:=S ;
        IF S1<S2 THEN
          BEGIN
            FOR I:=1 UNTIL N DO D(I):=W(I) ;
          END ;
        END ;
    END ;
```

N : Taille du système
A : Matrice de contraction
NI : Matrice d'incidence
D : Découpe initiale
W : Découpe choisie.

Activation : I FOR K:=1 UNTIL N-1 DO
 CHOIX(N,K,A,N₁,D,W) ;

II FOR K:=1 UNTIL N-2 DO
 CHOIX(N,K,A,N₁,D,W) ;

Voici quelques expérimentations de ces algorithmes sur différents problèmes linéaires :

1°) Résolution du système affine de point fixe $F(x^*) = x^*$ avec $F(x) = Ax + h$.

$$A = A' / \rho(A') \times 1,2$$

avec :

$$(A')_{ji} = \begin{cases} 1/2 \times (i+j-1) & \text{pour } j > i \\ 0 & \text{pour } i = j \\ j/i+j & \text{pour } j < i \end{cases}$$

$h \in \mathbb{R}^n$ est tel que $h^T = (1,1,\dots,1)$

Le vecteur de départ de l'itération est :

$$(x^0)^T = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \text{ avec } x_i^0 = i \text{ pour } i=1 \text{ à } n.$$

Le test d'arrêt de l'itération est :

$$\left| \frac{x_{r+1} - x_r}{x_r} \right| \leq \epsilon$$

L'algorithme I est appelé trois fois à partir de la découpe $D_1 = \{n, n-1, \dots, 1\}$, l'algorithme II une fois.

Les découpes choisies seront notées respectivement σ_1 et σ_2 .

Le gain en itération par le choix de ces stratégies par rapport à D_1 sont pour différentes tailles de n .

| N | ϵ | gain en itération I | gain en itération II |
|----|------------|---------------------|----------------------|
| 20 | 10^{-8} | 10 % | 12 % |
| 30 | 10^{-8} | 5 % | 8 % |
| 40 | 10^{-8} | 4 % | 6 % |

Les découpes choisies sont :

Pour n=20 :

$$\sigma_1 = |17|16|15|14|13|12|11|10|9|8|7|6|5|18|19|20|1|2|3|4|$$

$$\sigma_2 = |18|17|16|15|14|19|12|11|10|9|8|7|6|5|4|13|20|1|2|3|$$

Pour n=30 :

$$\sigma_1 = |27|26|25|24|23|22|21|20|19|18|17|16|15|14|13|12|11|10|$$

$$|9|8|7|6|28|29|30|2|1|3|4|5|$$

$$\sigma_2 = |28|27|26|25|24|29|22|21|21|20|19|18|17|16|15|14|13|12|11|$$

$$|10|9|8|7|6|5|30|3|2|1|4|23|$$

Pour n=40 :

$$\sigma_1 = |37|36|35|34|33|32|31|30|29|28|27|26|25|24|23|22|$$

$$|21|20|19|18|17|16|15|14|13|12|11|10|9|8|7|38|39|40|3|2|1|4|5|6|$$

$$\sigma_2 = |38|37|36|35|34|39|32|31|30|29|28|27|26|25|24|23|22|21|20|19|18|$$

$$|17|16|15|14|13|12|11|10|9|8|7|6|33|4|3|40|1|2|5|$$

2°) Expérience semblable avec la matrice :

$$(A')_{ji} = \begin{cases} 1/2^{i+j} & \text{pour } j > i \\ 0 & \text{pour } i = j \\ i+j & \text{pour } j < i \end{cases}$$

La découpe initiale est $D_1 = \{1,2,\dots,n\}$, découpe de Gauss-Seidel.

Les gains en itérations sont alors :

| N | ϵ | gain en itération algorithme I | gain en itération algorithme II |
|----|------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 10 | 10^{-8} | 45 % | 40 % |
| 20 | 10^{-8} | 27 % | 31 % |
| 30 | 10^{-8} | 18 % | 14 % |

Les découpes choisies sont :

Pour n=10 :

$$\sigma_1 = |4|5|6|7|3|2|1|10|9|8|$$

$$\sigma_2 = |3|4|5|2|7|8|1|10|9|6|$$

Pour n=20 :

$$\sigma_1 = |4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|3|2|1|19|20|18|17|16|$$

$$\sigma_2 = |3|4|5|2|7|8|9|10|11|12|13|14|15|16|17|6|1|20|19|18|$$

Pour n=30 :

$$\sigma_1 = |4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|21|22|23|24|25|$$

$$|3|2|1|29|30|28|27|26|$$

$$\sigma_2 = |3|4|5|2|7|8|9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|21|22|23|24|$$

$$|25|6|27|28|1|30|29|26|$$

3°) Même expérience avec la matrice d'incidence

$$(A')_{ji} = \begin{cases} 2^{n+i-j-1} & \text{pour } i < j \\ 1 & \text{pour } i = j \\ 2^{i-j-1} & \text{pour } i > j \end{cases}$$

La découpe initiale est $\{n, n-1, \dots, 1\}$.

Pour différentes tailles de n les gains en itérations sont :

| N | ϵ | gain en itération algorithme I | gain en itération algorithme II |
|----|------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 10 | 10^{-8} | 100 % | 27 % |
| 30 | 10^{-10} | 100 % | 23 % |
| 40 | 10^{-12} | 100 % | 31 % |

Les découpes choisies sont :

Pour n=10 :

$$\sigma_1 = |4|3|2|1|8|7|6|10|9|$$

$$\sigma_2 = |8|9|6|7|4|2|3|10|1|$$

Pour n=30 :

$$\sigma_1 = |4|3|2|1|8|7|6|5|12|11|10|9|16|15|14|13|20|19|18|17|24|$$
$$|23|22|21|28|27|26|25|30|29|$$

$$\sigma_2 = |28|29|26|27|24|25|22|23|20|21|18|19|16|17|14|15|13|10|$$
$$|11|8|9|6|7|4|5|2|3|30|1|$$

Pour n=40 :

$$\sigma_1 = |4|3|2|1|8|7|6|5|12|11|10|9|16|15|14|13|20|19|18|17|24|23|22|21|$$
$$|28|27|26|25|32|31|30|29|36|35|34|33|40|39|38|37|$$

$$\sigma_2 = |38|39|36|37|34|35|32|33|30|31|28|29|26|27|24|25|22|23|20|21|18|$$
$$|19|16|17|14|15|12|13|10|11|8|9|6|7|4|5|2|3|40|1|$$

COMMENTAIRE

Sur les exemples numériques testés on constate toujours un gain en nombre d'itérations mais pas nécessairement en temps. A ce propos l'algorithme I qui donne de meilleurs résultats que II (cf. expérience 3) est plus coûteux en temps.

Le gain augmente avec la disproportion qui peut exister entre les éléments de la matrice de contraction.

Pour un problème non-linéaire de point fixe le gain d'une itération représente un gain important en temps. Ceci est dû au fait que l'évaluation de fonctions non-linéaires nécessite un grand nombre d'opérations élémentaires (cf. expériences numériques faites par Z. Mahjoub [9]).

De plus, le temps mis à calculer une découpe efficace peut être compensé en appliquant cette découpe à la résolution d'un grand nombre de systèmes de point fixe ayant même matrice de contraction.

En ce sens, les gains en itération obtenus en appliquant ces algorithmes heuristiques justifient les diverses simplifications apportées au problème de base au cours de ce travail.

CONCLUSION

Nous sommes donc partis du problème de la détermination de la meilleure méthode de Gauss-Seidel que l'on peut obtenir par permutation des lignes et des colonnes d'un système linéaire ; l'étude faite s'applique en fait à des systèmes d'équations non-linéaires de point fixe contractants en norme vectorielle.

Notre contribution personnelle nous paraît reposer sur les points suivants :

- 1°) Evaluation d'une nouvelle borne permettant éventuellement de limiter à priori une telle recherche.
- 2°) Calcul formel explicite des éléments de la matrice $[(I-L_P)^{-1}U_P]^m$ pour $m \in \mathbb{N}$ à partir de ceux de L_P+U_P et par la même formule explicite pour la trace de $(I-L_P)^{-1}U_P$.
- 3°) Mise en évidence du fait que sous une hypothèse H (largement vérifiée numériquement) minimiser le rayon spectral de la matrice de Gauss-Seidel revient à maximiser sa trace.
- 4°) Introduction de la notion de matrice d'incidence du problème de point fixe considéré, très simple à construire, ce qui permet alors d'établir le critère final suivant :

(C) *Une approche de la permutation optimale cherchée consiste à rechercher la permutation qui dans l'expression de la trace, maximise le nombre d'appels des grands éléments de la matrice de contraction (cf. matrice d'incidence du problème).*

Ainsi, la trace de la matrice de Gauss-Seidel apparaît dans cette étude comme un indicateur utile pour la recherche de la stratégie optimale.

Des exemples probants montrent effectivement l'intérêt de cette analyse.

Toutefois, nous sommes ramenés par la démarche précédente à la résolution d'un problème d'affectation bien connu et bien étudié pour lequel n'existe que des algorithmes heuristiques. Nous en avons expérimentés quelques-uns.

En conclusion, voici les recommandations que l'on pourrait faire si l'on essaye d'améliorer la convergence de Gauss-Seidel par permutation de lignes et de colonnes du système :

- 1°) Au vu des éléments diagonaux de la matrice de contraction du système, essayer de voir si l'on peut espérer une amélioration (cf. chapitre II).
- 2°) Si oui, observer la variation en ordre de grandeur des éléments de cette matrice. Une grande disproportion des éléments entraîne une variation importante des traces et par conséquent des rayons spectraux des matrices de Gauss-Seidel.
- 3°) Appliquer un des algorithmes heuristiques de résolution de (C) .

L'intérêt serait évidemment d'autant plus grand si :

- Nous avons à résoudre plusieurs systèmes de point fixe ayant même matrice de contraction. La stratégie efficace de résolution est alors commune à tous ces systèmes.
- Nous avons à résoudre un système non-linéaire de point fixe : le gain en nombre d'itérations représente alors un gain élevé en temps d'exécution à cause du temps pris par l'évaluation de fonctions non-linéaires des composantes des itérés successifs.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE DE L'INTRODUCTION

- [1] ASPINALL :
"Data-Base reorganisation algorithms".
IBM-UKSC-0029 (février 1972).
- [2] N. GASTINEL :
"Analyse numérique linéaire". Hermann.
- [3] F. ROBERT :
"Matrices nonnégatives et normes vectorielles".
Cours de D.E.A., Grenoble (1973-1974).
- [4] P. STEIN et R.L. ROSENBERG :
"On the solution of linear simultaneous equations by iteration".
J. London, Math. Soc. 23, (1948) pp.111-118.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

- [1] A. ABTROUN :
"Inégalités sur le rayon spectral de la somme de deux matrices".
Séminaire n° 255, Grenoble (1975).
- [2] P.G. CIARLET :
"Some results in the theory of nonnegative matrices".
Linear algebra and its applications 1, (1968).
- [3] S. FRIEDLAND, S. KARLIN :
"Some inequalities for the spectral radius of nonnegative matrices
and applications".
DUKE, Math. Journ. Vol.42, n° 3 (1975).
- [4] N. GASTINEL :
"Analyse numérique linéaire". Hermann.
- [5] N. GASTINEL :
"Le problème de l'extension minimale diagonale d'un opérateur
linéaire". Séminaire N° 235, Grenoble (1975).
- [6] J. GLAZMANN, Y. LUBITCH :
"Analyse linéaire dans les espaces de dimensions finies".
Edition MIR, Moscou, (1974).
- [7] A.S. HOUSEHOLDER :
"The theory of matrices in numerical analysis".
Baisdell, Boston (1964).
- [8] W. KAHAN :
"Every $n \times n$ matrice Z with real spectrum satisfies
 $\|Z - Z^*$ $\| \leq \|Z + Z^*\| (\log_2 n + 0,038)$ ".
Proc. of the Amer. Math. Soci. Vol.38 (1973).

- [9] B.W. LEVINGER :
"An inequality for non~~negat~~ives matrices".
Notice of the A.M.S., Vol.17, Bo 119 (1970).
- [10] McCOY :
"Bul of Amer. Math. Society, Vol. 41, (1935).
- [11] I. MAREK :
"Perron roots of convex combinations of cone preserving operators
and their adjoint". Mathematicks, Fyzikální Faculta. Praha.
- [12] P. MOREL :
"Sur le problème inverse de valeurs propres".
Num. Math. 23, (1974).
- [13] MOTZKIN et TAUSSKY :
"Pairs of matrices with propriety L".
Trans. Amer. Math. Soc. 1 et 2, (1952).
- [14] F. MUSY et M. CHARNAY :
"Sur le théorème de Stein-Rosenberg". RAIRO, R2, (1974).
- [15] F. ROBERT :
"Algorithmes tronqués de découpe linéaire".
RAIRO, Revue de l'AFCEP, (1974).
- [16] F. ROBERT :
" Théorème de Perron-Frobenius et Stein-Rosenberg booléens".
Rapport de Recherche n° 1, Mathématiques Appliquées et Infor-
matique, Grenoble (1975).
- [17] F. ROBERT :
"Matrices non négatives et normes vectorielles".
Cours de D.E.A., Grenoble, (1973-1974).

- [18] F. ROBERT :
"Autour du théorème de Stein-Rosenberg".
Numer. Math. 27, (1976).
- [19] P. STEIN et R.L. ROSENBERG :
"On the solution of linear simultaneous equations by iterations".
J. London, Math. Soc. 23, (1948).
- [20] J.S. VANDERGRAFT :
"Generalisation of diagonal dominance and matrix theory to linear operators on finite dimensional partially ordered linear spaces".
(to appear).
- [21] R.S. VARGA :
"Matrix iterative analysis". Prentice Hall, (1962).
- [22] J.H. WILKINSON :
"The algebraic eigenvalue problem". Clarendon Press, Oxford.
- [23] WILLIAMSON :
"The simultaneous reduction of two matrices to triangle form".
(1935).
- [24] D.M. YOUNG :
"Iterative solution of large linear systems". Academic Press (1971).

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

- [1] A. ABTROUN
"Autour des permutées de Gauss-Seidel".
Séminaire n° 264, Grenoble (1977).
- [2] M. CHARNAY
"Itérations chaotiques sur un produit d'espaces métriques".
Thèse de Troisième Cycle, Lyon (1975).
- [3] M. CHARNAY et F. MUSY
"Sur le théorème de Stein-Rosenberg". RAIRO, R2, (1974).
- [4] D. CHAZAN et W. MIRANKER
"Chaotic relaxation".
Linear Algebra and its Appl., 2, (1969).
- [5] C. JACQUEMARD
"Comparaison entre algorithme de relaxation".
Colloque d'Analyse Numérique de Port-Bail, (1976).
- [6] L.V. KANTOROVITCH, B.Z. VULICH, A.G. PINSKER
"Analyse fonctionnelle dans les espaces ordonnés". Moscou (1950).
- [7] N.X. LUONG
"Algorithme de relaxation contrôlé par un algorithme secondaire".
Thèse de Troisième Cycle, Besançon (1975).
- [8] Z. MAHJOUB
"Expérimentation de stratégies itératives chaotiques sur des
problèmes de point fixe à grand nombre de variables".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, (mai 1977).

- [9] J.C. MIELLOU
"Algorithmes de relaxation chaotique à retard".
(A paraître dans RAIRO, revue rouge, AFCET).
- [10] A.M. OSTROWSKI
" Déterminanten mit überwiegender Dauptdiagonale und dis
absolute Konvergen von linearen iterationsprozessen.
Commentari Mathematici Helvici vol.30, fas.3 (1956).
- [11] F. ROBERT
"Contraction en norme vectorielle : convergence d'itérations
chaotiques pour des équations de point fixe à plusieurs variables"
Gatlinbourg VI. Symposium on Numerical Algebra (1975).
- [12] F. ROBERT
"Matrices nonnégatives et normes vectorielles".
Cours de D.E.A., Grenoble (1973).
- [13] F. ROBERT, M. CHARNAY, F. MUSY
"Itérations chaotiques série parallèle pour des équations non
linéaires de point fixe".
A paraître dans Aplikce Mathematicky (Tchécoslovaquie).
- [14] J. SCHROEDER
"Computing error-bounds in solving linear systems".
MRC Tech. Report 242. University of Wisconsin (1961).
- [15] P. STEIN et R.L. ROSENBERG
"On the solution of linear simultaneous equations by iterations".
J. London, Math. Soc. 23, (1948).
- [16] R.S. VARGA
"Matrix Iterative Analysis".
PrenticeHall (1962).

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III

- [1] A. ABTROUN
"Autour des permutées de Gauss-Seidel".
Séminaire n° 264, Grenoble (1977).
- [2] MINC and MARCUS
"A survey of matrix theory and matrix inequalities".
Volume fourteen, Prindle, Weber (1964).
- [3] T.A.J. NICHOLSON
"Combinatorial mathematics and its applications".
(Ed. D.J.A. Welsh), Academic Press, (1971) pp 201-218.
- [4] D.M. YOUNG
"Iterative solution of large linear systems".
Academic Press (1971).

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IV

- [1] A. ABTROUN
"Recherche de la stratégie optimale d'itération pour la résolution d'un problème de point fixe".
Rapport de Recherche, Grenoble, (à paraître).
- [2] ASPINALL
"Data-base reorganisation algorithms".
IBM-UKSC-0029 (février 1972).
- [3] M. CHARNAY
"Itérations chaotiques sur un produit d'espaces métriques".
Thèse de Troisième Cycle, Lyon (1975).
- [4] F.R. GANTINACHER
"Théorie des matrices". Dunod (1966).
- [5] N. GASTINEL
"Analyse numérique linéaire". Hermann
- [6] C. JACQUEMARD
"Sur les algorithmes de relaxation".
Méthodes numériques AFCET (1976).
- [7] B. LACOLLE
"Quelques problèmes de restructuration dans un environnement paginé". Thèse de Troisième Cycle, Grenoble (1976).
- [8] MARCUS - MINK
"A survey of matrix theory and matrix inequalities".
Volume fourteen - Prindle Weber (1964).
- [9] Z. MAHJOUB
"Expérimentation de stratégies itératives chaotiques sur des problèmes de point fixe à grand nombre de variables".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble (mai 1977).

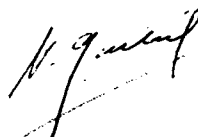
- [10] T.A.J. NICHOLSON
"Combinatorial mathematics and its applications".
(Ed. D.J.A. Welsh) pp. 201-218, Academic Press (1971).
- [11] F. ROBERT
"Matrices nonnégatives et normes vectorielles".
Cours de D.E.A., Grenoble (1973-1974).
- [12] F. ROBERT
"Comparaison des modes opératoires d'un automate cellulaire fini".
Colloque d'Analyse Numérique, Port-Bail (1976).
- [13] R.V. SOUTHWELL
"Relaxation methods in theoretical physics".
Clarendon-Press Oxford, (1946) p. 248.
- [14] P. STEIN - R.L. ROSENBERG
"On the solution of linear simultaneous equations by iteration".
J. London, Math. Soc., 23 (1948) p. 111-118.
- [15] D.M. YOUNG
"Iterative solution of large linear systems".
Academic Press (1971).

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 22 Mars 1977

Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

