



HAL
open science

Sur quelques problèmes de couverture et de couplage en combinatoire

Charles Payan

► **To cite this version:**

Charles Payan. Sur quelques problèmes de couverture et de couplage en combinatoire. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1977. tel-00287312

HAL Id: tel-00287312

<https://theses.hal.science/tel-00287312>

Submitted on 11 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

023677
TL 808
G. 2. 1

thèse

présentée à

université scientifique et médicale
institut national polytechnique
de grenoble

pour obtenir le grade de
docteur ès sciences mathématiques

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE
150 AVENUE STANISLAS
38000 GRENOBLE CEDEX

charles payan

**sur quelques problèmes
de couverture et de couplage
en combinatoire**

soutenue le 18 mars 1977 devant la commission d'examen

président **j. kuntzmann**

examineurs **c. benzaken
a. bouchet
m. las vergnas
r. perret
m. sakarovitch**

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ARNAUD Paul	Chimie
AUBERT Guy	Physique
AYANT Yves	Physique approfondie
Mme BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM. BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale
BARBIER Reynold	Géologie appliquée
BARJON Robert	Physique nucléaire
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
BARRA Jean-René	Statistiques
BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM. BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
BONNET Georges	Electrotechnique
BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM. BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
BOUTET DE MONTVEL Louis	Mathématiques Pures
BRAVARD Yves	Géographie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
CALAS François	Anatomie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
CHARACHON Robert	Clinique Oto-rhino-laryngologique
CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
Mme DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie

MM. DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Métallurgie
DESSAUX Georges	Physiologie animale
DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT A)
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
DUCROS Pierre	Cristallographie
DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques Pures
GALVANI Octave	Mathématiques Pures
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electroradiologie
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
KAHANE André	Physique générale
KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
KRAVTCHEKNO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
LOUP Jean	Géographie
Mlle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM. MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (Néphrologie)
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REVOL Michel	Urologie
RINALDI Renaud	Physique
DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie

MM. SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT A)
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM. VERAIN André	Physique
VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CLARK Gilbert	Spectrométrie physique
CRABBE Pierre	CERMO
ENGLMAN Robert	Spectrométrie physique
HOLTZBERG Frédéric	Basses températures
DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
MATSUSHIMA Yozo	Mathématiques Pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle AGNIUS-DELORE Claudine	Physique pharmaceutique
ALARY Josette	Chimie analytique
MM. AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAÏEN Claude	Mathématiques Appliquées
BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
BILLET Jean	Géographie
BOUCHET Yves	Anatomie
BRUGEL Lucien	Energétique (IUT A)
BUISSON René	Physique (IUT A)
BUTEL Jean	Orthopédie
COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie
CONTE René	Physique (IUT A)
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAUTHIER Yves	Sciences Biologiques
GAUTRON René	Chimie
GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
GLENAT René	Chimie organique
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HACQUES Gérard	Calcul numérique
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme KAHANE Josette	Physique
MM. KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
KUHN Gérard	Physique (IUT A)
LE ROY Philippe	Mécanique (IUT A)
LUU DUC Cuong	Chimie organique

MM. MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme MINIER Colette	Physique (IUT A)
MM. PELMONT Jean	Biochimie
PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle PIERY Yvette	Physiologie animale
MM. RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROBERT André	Chimie papetière
SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM. STREGLITZ Paul	Anesthésiologie
VIALON Pierre	Géologie
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées

MATTRES DE CONFERENCES ET MATTRES DE CONFERENCES AGREGES

MM. AMBLARD Pierre	Dermatologie
ARMAND Gilbert	Géographie
ARMAND Yves	Chimie (IUT A)
BACHELOT Yvan	Endocrinologie
BARGE Michel	Neuro-chirurgie
BARJOLLE Michel	M.I.A.G.
BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM. BOST Michel	Pédiatrie
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
CHARDON Michel	Géographie
CHERADAME Hervé	Chimie papetière
CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
CORDONNIER Daniel	Néphrologie
COULOMB Max	Radiologie
CROUZET Guy	Radiologie
CYROT Michel	Physique du solide
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DENIS Bernard	Cardiologie
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
FAURE Gilbert	Urologie
GAUTIER Robert	Chirurgie générale
GENSAC Pierre	Botanique
GIDON Maurice	Géologie
GROS Yves	Physique (IUT A)

MM. GUITTON Jacques	Chimie
HICTER Pierre	Chimie
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
KOLODIE Lucien	Hématologie
LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
LEROY Philippe	IUT A
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
MARECHAL Jean	Mécanique (IUT A)
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
NEGRE Robert	Mécanique (IUT A)
NEMOZ Alain	Thermodynamique
NOUGARET Marcel	Automatique (IUT A)
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie (IUT A)
PERRET Jean	Neurologie
PERRIER Guy	Géophysique - Glaciologie
PHELIP Xavier	Rhumatologie
RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM. ROBERT Jean-Bernard	Chimie Physique
ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
SHOM Jean-Claude	Chimie générale
STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

M. COLE Antony

Sciences nucléaires

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, AVRIL 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Président : M. Pierre-Jean LAURENT

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BLOCH Daniel	Physique du solide
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
DURAND Francis	Métallurgie
FELICI Noël	Electrostatique
FOULARD Claude	Automatique
LESPINARD Georges	Mécanique
MOREAU René	Mécanique
PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
SILBER Robert	Mécanique des Fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. ROUXEL Roland Automatique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
COHEN Joseph	Electrotechnique
LACOUME Jean-Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Electronique
ROBERT François	Analyse numérique
VEILLON Gérard	Informatique Fondamentale et Appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MATRES DE CONFERENCES

MM. ANCEAU François	Mathématiques Appliquées
CHARTIER Germain	Electronique
GUYOT Pierre	Chimie Minérale
IVANES Marcel	Electrotechnique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
MORET Roger	Electrotechnique Nucléaire
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique Fondamentale et Appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique Fondamentale et Appliquée

MATRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan

Automatique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

MM. FRUCHART Robert

Directeur de Recherche

ANSARA Ibrahim

Maître de Recherche

CARRE René

Maître de Recherche

DRIOLE Jean

Maître de Recherche

MATHIEU Jean-Claude

Maître de Recherche

MUNIER Jacques

Maître de Recherche

*"Le royaume des idées peut se comparer
aux royaumes ordinaires".*

Bertolt BRECHT (Me-Ti)

*"Je n'irai pas au Québec. Je n'ai pas
entendu le vent sous la porte. Je me
pendrai dans ma cellule dans la prison
interminable de la vie".*

Gilles ELBAZ

Du négatif, il faut tirer le positif.

*d'après Mao-Tsé-Toung **

Le survol de la table des matières de cette thèse donnera sans doute au lecteur l'impression d'un travail hétérogène. En effet, si la plus grande partie a trait à la Théorie des Graphes, on trouve un chapitre qui devrait se rattacher à la Théorie des Automates et même, en annexe, quelques résultats d'Algèbre de Boole.

Pourtant, si les sujets traités apparaissent comme différents, les manières de raisonner sous-jacentes sont en fait très semblables. On retrouvera, en effet, les types de raisonnement que l'on rencontre habituellement dans ce que l'on appelle la combinatoire. Mais qu'est-ce que la combinatoire ? Ou plutôt qu'est ce que "faire de la combinatoire", car ce qui compte pour le chercheur, plus que les objets qu'il manipule, c'est la façon dont il les manipule, c'est à dire le rapport qu'il a avec ces objets.

Au delà de telle ou telle classification mathématique, faire de la combinatoire, n'est-ce pas, par exemple, aborder la Théorie des Graphes sans savoir ce qu'est une relation, travailler en Théorie des Automates en ignorant ce qu'est un langage, ou faire de la recherche en Algèbre de Boole sans connaître ce qu'est une algèbre⁽¹⁾.

Ayant une formation d'ingénieur plus que de mathématicien, c'est un peu ce que j'ai fait, sans doute plus par nécessité que par choix.

Certains aiment s'amuser avec des machines très compliquées, d'autres préfèrent utiliser des outils simples et en tirer le maximum. Le combinaticien me semble être de ces derniers.

Mais le degré de sophistication des outils ne suffit pas à déterminer les objets traités ou fabriqués. Ainsi le fait que je ne possède comme outils que quelques rudiments de Théorie des Ensembles (plus peut-être une certaine intuition due à l'étude de la mécanique, de la physique, etc ...) ne suffit pas à expliquer que je me sois tourné vers la Combinatoire. Il ne suffit pas, en particulier, à expliquer l'apparente contradiction qu'il y a entre la nature concrète de ma formation (et sans doute aussi de mon "caractère") et l'aspect considéré en général comme abstrait de la Combinatoire.

(1) Ni à plus forte raison qui était M. Boole (remarque de M. Nguyen Huy Xuong)

Or, si les résultats de la Combinatoire (même si elle s'est développée à partir de problèmes pratiques) sont actuellement principalement des résultats théoriques, la démarche du chercheur en Combinatoire me semble être au contraire très concrète. Beaucoup plus que celle, par exemple du chercheur en informatique traitant un problème dit réel⁽²⁾.

Voyons quels objets manipule le chercheur en Combinatoire. Des relations, des fonctions, des langages. Oui, bien sûr ... Mais, réellement ? Regardez ses brouillons (et non pas ses articles). Ce sont des graphes, des hypercubes, des "diagrammes de transition" ... C'est à dire des petits dessins ; donc des objets réels que l'on manipule directement, sur lesquels on fait des expériences. Des objets beaucoup plus proches du chercheur en Combinatoire que par exemple la pièce mécanique fabriquée-automatiquement-par-une-machine-commandée-par-un programme, ne l'est du chercheur en Informatique qui a élaboré un métalangage permettant de concevoir des systèmes de commande de machines outils.

Cette proximité des objets traités implique pour les gens qui font de la Combinatoire une manière de raisonner commune, manière de raisonner où initialement l'intuition (la naïveté) tient une place très importante.

Cette matérialisation des concepts par des petits dessins, en redonnant toute sa valeur à l'expérience pratique, à l'appréhension sensible, permet à l'intérieur même du raisonnement, de redonner vie à la dialectique théorie-pratique nécessaire à toute démarche créatrice.

Vue sous cet angle, la combinatoire peut apparaître ainsi comme un des instruments capables de réconcilier, dans une certaine mesure, l'ingénieur et le mathématicien et, peut-être, au delà, l'homme et le scientifique. (... applaudissements.)

Je vais arrêter là ce type de discours assez mystificateur sur le rapport du chercheur à sa recherche. Car ce qui compte c'est davantage le rapport de la recherche à la réalité sociale et en particulier le rapport de la pratique scientifique du chercheur à la première des réalités qui lui est accessible : son vécu. Et c'est là qu'interviennent, en particulier, les relations du chercheur avec les personnes avec qui (ou à côté de qui, ou contre qui) il travaille.

(2) sous-entendu "utile" ... mais à qui ?

Que l'on se rassure, je n'ai pas la prétention de vouloir analyser ici les relations sociales dans le milieu chercheur. Je voudrais simplement remercier un certain nombre de personnes, non pas pour m'avoir permis d'aborder telle ou telle discipline, ou tel ou tel problème, mais surtout pour m'avoir donné l'occasion de modifier ma façon de travailler, de vivre autrement mon métier⁽³⁾ de chercheur.

Je voudrais en particulier remercier André Bouchet, Michel Sakarovitch, Joseph Sifakis, et tous ceux de l'équipe Algèbre, Logique et Combinatoire, principalement François Jaeger, et Nguyen Huy Xuong, qui m'ont permis quelques temps de ne pas travailler complètement isolé, qui m'ont aidé à me débarrasser de l'angoisse de la compétition, de l'absurdité du "trouvera-trouvera-pas".

Ces différentes collaborations ont malheureusement été interrompues, ou tout au moins fortement perturbées, par la "nécessité" de réaliser une thèse, thèse que l'on ne sait pas concevoir autrement qu'individuelle.

Que l'on me pardonne de dévier des problèmes "scientifiques". Mais dans le développement même des sciences, les conditions économiques, politiques et surtout idéologiques dans lesquelles elles s'exercent ne sont-elles pas, tout au moins dans la phase actuelle, plus importantes que les "idées" strictement scientifiques.

Avant d'être algébriste, statisticien, normalien ou bourbakiste ... (ou rien de tout ça) un chercheur ne représente-t-il pas un certain type de rapport à la réalité, une certaine position sociale, un certain pouvoir (ou absence de pouvoir). Et c'est cet aspect de la réalité du chercheur qui détermine le type de rapport qu'il a avec les objets qu'il traite, et aussi, l'analyse qu'il fait de ces rapports. Ainsi, par exemple, un chercheur sans prise avec la réalité aura tendance à surévaluer l'aspect concret des objets qu'il traite (cf. 1ère partie de cet avant-propos).

J'espère que l'on voudra bien excuser la longueur de cet avant-propos. Mais les problèmes que j'effleure ici, de façon maladroite, sont peut-être plus importants que le fait de savoir s'il existe deux stables maximaux disjoints dans les graphes réguliers (cf. Chapitre IV) ou même que la résolution de tel ou tel problème célèbre⁽⁴⁾, résolution qui vaudrait à son auteur une gloire et une considération sociale telles qu'elles le dispenseraient sans

(3) pardon, j'aurais dû dire "vocation" : le métier de chercheur n'est pas encore reconnu.

(4) leur nombre vient semble-t-il de diminuer d'une unité.

doute de toute réflexion (et de toute action) sur le rôle de sa pratique scientifique dans la société⁽⁵⁾ et dans sa propre vie.

Je ne voudrais pas terminer cet avant-propos sans exprimer ma reconnaissance à

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Monsieur R. PERRET, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui a guidé mes premiers pas dans la recherche.

Monsieur C. BENZAKEN, Professeur à l'Université de Grenoble, pour l'animation cordiale de l'Equipe l'Algèbre, Logique et Combinatoire.

Monsieur A. BOUCHET, Maître de Conférences au Centre Universitaire du Mans.

Monsieur M. LAS VERGNAS, Chargé de recherches au C.N.R.S.

Monsieur M. SAKAROVITCH, Maître de Conférences à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

qui ont bien voulu accepter de faire partie de ce jury.

Je remercie également Mme DIAZ qui malgré une charge de travail importante a effectué avec compétence et amabilité la frappe de cette thèse - frappe à laquelle ont également participé Mmes NEUMANN et HERVET.

Je remercie enfin les membres du service tirage pour l'excellente qualité de leur travail et surtout pour leur accueil toujours chaleureux.

(5) C'est à dire d'abord la microsociété (groupe de travail, équipe, laboratoire) et ensuite la société globale.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I RAPPELS - UN PROBLEME DE COUVERTURE

1. Rappels 1.1.
 - 1.1. Couverture
 - 1.2. Couplage
 - 1.3. Hypergraphe
 - 1.4. Graphe=Multigraphe

2. Couverture des arêtes d'un graphe cubique par des couplages et des couplages forts. 1.6.

CHAPITRE II SUR LA NOTION D'ABSORPTION DANS LES GRAPHS ET HYPERGRAPHS

1. Nombre d'absorption d'un hypergraphe 2.1.
 - 1.1. Définitions
 - 1.2. Couvertures et absorbants
 - 1.3. Application au calcul de $\beta(H)$ et $\beta'(H)$

2. Application au cas des graphes. 2.4.
 - 2.1. Relations entre absorbants et couvertures
 - 2.2. Application
 - 2.3. Nombre d'absorption et carré d'un graphe

3. Quatre relations entre certains nombres de couverture et nombres de couplage dans l'étude des absorbants. 2.13.
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Quatre relations

4. Graphes β -parfaits 2.24.

5. Sur une conjecture de Vizing concernant le nombre d'absorption de la somme cartésienne de deux graphes. 2.26

5.1. Définition	
5.2. Borne supérieure de $\beta(G+H)$	
5.3. Borne inférieure de $\beta(G+H)$	
6. <u>Une inégalité du type Nordhaus. Gaddum</u> ($\beta(G) \cdot \beta(G) \leq n(G)$)	2.29
7. <u>Quelques bornes supérieures du nombre d'absorption</u>	2.30
8. <u>Quelques extensions de la notion d'absorption</u>	2.47

CHAPITRE III ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES ET GRAPHES CUBIQUES

1. <u>Ensembles cycliquement stables et absorbants transitifs dans les graphes réguliers.</u>	3.2
2. <u>Ensembles cycliquement stables et coarbres.</u>	3.5
3. <u>Borne supérieure de $\alpha_k(G)$</u>	3.5
4. <u>Valeur de $\alpha_1(G)$ dans le cas des graphes représentatifs des arêtes de graphes cubiques.</u>	3.6
5. <u>Borne inférieure de $\alpha_1(G)$ pour les multigraphes cubiques.</u>	3.8
6. <u>Ensemble cycliquement stable et coloration acyclique.</u>	3.19
7. <u>Remarque.</u>	3.19

CHAPITRE IV COUVERTURE PAR DES ENSEMBLES MINIMAUX

0. <u>Enoncé de conjectures</u>	4.1
1. <u>Couverture des arêtes d'un graphe par des couvertures minimales partielles</u> P - Couplages	4.8
2. <u>Couverture des arêtes d'un graphe par des couvertures minimales</u>	4.10
3. <u>Couverture par des transversaux minimaux partiels</u> <u>Couplage de stables maximaux partiels</u>	4.15

4. <u>Couverture par des transversaux minimaux</u>	4.17
4.1. Propriétés générales.	
4.2. Cas des "line-graphs"	
4.3. Cas des graphes complémentaires de "line-graphs"	
4.4. Cas des graphes de degré maximum inférieur ou égal à 3.	
4.5. Cas des graphes sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$	
4.6. Cas des graphes de degré élevé.	
4.7. Problèmes.	
5. <u>Couplages maximaux deux à deux disjoints</u>	4.58
5.1. Graphes réguliers	
5.2. Graphes polytopaux.	

CHAPITRE V SUR UNE CLASSE DE COUPLES D'HYPERGRAPHES

1. <u>Introduction</u>	5.1
1.1. Définition	
1.2. Une classe de couples d'hypergraphes	
2. <u>Formulation du problème en termes de Théorie des Graphes</u>	5.2
2.1. Réduction au cas uniforme	
2.2. Graphe associé G.	
3. <u>Calcul du nombre de stabilité de G</u>	5.4
3.1. Partition de G en stables	
3.2. Une famille de cliques de G.	
3.3. Détermination de $\alpha(G)$	
4. <u>Caractérisation des (h,k) couples de cardinal maximal</u>	5.6
5. <u>Applications</u>	5.8
5.1. Couverture supérieure d'un hypergraphe par un autre	
5.2. Couverture inférieure minimale d'un hypergraphe par un autre.	
5.3. Hypergraphe τ critique (conjecture d'ERDOS et GALLAI)	
5.4. Remarque.	

CHAPITRE VI. SEQUENCES PSEUDO-EULERIENNES UNIVERSELLES

(Un problème combinatoire rencontré lors de l'étude du test des systèmes logiques).

- 0. Introduction 6.1
- 1. Test universel non adaptatif 6.4
 - 1.1. Séquences (n,m) identifiantes
 - 1.2. Identification non adaptative par comparaison des sorties.
- 2. Pseudo-test universel non adaptatif 6.9
 - 2.1. Définitions
 - 2.2. Propriétés
 - 2.3. Bornes de la longueur d'un pseudo test.
 - 2.4. Construction de séquences particulières (n,m) visiteurs et (n,m) promeneurs.
 - 2.5. Calcul de la puissance d'un langage.
- 3. Conclusion 6.36

ANNEXE I. DEMONSTRATION DE $\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) \leq n$

ANNEXE II ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES DANS LES GRAPHS CUBIQUES CYCLIQUEMENT QUATRE ARETES CONNEXES.

- 1. Nombre de stabilité cyclique des graphes cubiques cycliquement quatre arêtes connexes.
- 2. Une propriété de la famille des ensembles cycliquement stables

ANNEXE III TYPE ET GRAPHE DES DISTANCES D'UNE FONCTION BOOLEENNE

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Les problèmes de couverture et de couplage constituent une part importante des études faites en Combinatoire. (Rappelons qu'une couverture d'un ensemble est une famille de parties dont l'union est cet ensemble, et un couplage un ensemble de parties deux à deux disjointes).

Naturellement, on a été d'abord amené à rechercher les plus petites couvertures et les plus grands couplages.

L'étude de situations critiques a amené les gens à s'intéresser aux couvertures minimales (pour l'inclusion) et aux couplages maximaux. Et l'on a vu ainsi apparaître des problèmes tels que la recherche d'une plus grande couverture minimale ou d'un plus petit couplage maximal.

Au lieu de s'intéresser à la couverture d'un ensemble par une sous-famille d'une famille donnée explicitement, on peut chercher une couverture d'un ensemble par des sous-ensembles possédant une certaine propriété P, par exemple héréditaire pour l'inclusion. On recherchera ainsi, soit la plus petite couverture par des ensembles ayant la propriété P, soit la plus grande couverture minimale par des ensembles maximaux pour la propriété P.

Si l'on considère maintenant des ensembles possédant une propriété P filtrante (pour l'inclusion), le problème de couverture n'a de sens que si l'on prend comme éléments de couverture des ensembles minimaux pour une telle propriété.

On est ainsi amené à distinguer deux catégories de problèmes. Un problème de couverture ou de couplage sera dit de *première catégorie* lorsque les notions de minimalité ou de maximalité de la couverture ou du couplage, ou des éléments de couverture ou de couplage n'interviennent pas dans le problème.

Un problème sera dit de *deuxième catégorie* dans le cas contraire.

Exemple :

- Rechercher une couverture de cardinal minimum est un problème de 1ère catégorie.
- Rechercher une couverture minimale de cardinal maximum est un problème de 2ème catégorie.

- Rechercher un couplage de cardinal maximum est un problème de 1ère catégorie.
- Rechercher un couplage maximal de cardinal minimum est un problème de 2ème catégorie.

(Voir en particulier ce problème pour le n-cube [14], [32]).

- Rechercher une couverture de cardinal minimum par des ensembles possédant une propriété héréditaire est un problème de 1ère catégorie.
- Rechercher une couverture de cardinal maximum par des ensembles minimaux pour une propriété filtrante est un problème de 2ème catégorie.
- Rechercher un couplage maximum d'ensembles possédant une propriété filtrante est un problème de 1ère catégorie.
- Rechercher un couplage maximum d'ensembles maximaux pour une propriété héréditaire est un problème de 2ème catégorie.

En Théorie des Graphes, seuls sont vraiment étudiés les problèmes de 1ère catégorie (nombre de stabilité, nombre d'absorption, nombre chromatique, ...).

Ces problèmes peuvent en général se définir par des propriétés locales. Ils sont très souvent plus faciles à résoudre que les problèmes de 2ème catégorie.

Aux chapitres II et III de cette thèse sont étudiés des problèmes de 1ère catégorie (nombre d'absorption, nombre de stabilité cyclique).

Les chapitres IV et V présentent certains problèmes de 2ème catégorie. On verra que ceux-ci n'ont été résolus que lorsqu'on a pu les ramener à des problèmes de 1ère catégorie.

On rencontre parfois d'autres types de problèmes plus complexes, où ce ne sont plus seulement les éléments de couverture ou de couplage qui possèdent certaines propriétés, mais la couverture elle-même ou le couplage lui-même. De tels problèmes que l'on peut informellement placer dans une 3ème catégorie se rencontrent principalement en Théorie des Automates. (Par exemple : recherche de partitions ou recouvrements stables sur un automate en vue de sa décomposition. Cf. Hartmanis [23]). Nous avons rencontré des problèmes de ce type lors de la minimisation des automates non déterministes [46]. On verra apparaître un tel problème au chapitre VI.

chapitre 1
rappels
un problème de couverture

Les définitions et notations utilisées dans cette thèse sont en général celles de C.BERGE [3]. Nous allons simplement ici rappeler les principales en essayant d'en donner une interprétation en terme de couverture ou de couplage.

Un problème particulier de couverture sera ensuite présenté.

1. RAPPELS

1.1. Couverture

Soit X un ensemble fini.

Une *couverture* de X est une famille de parties E dont l'union est X .

Une couverture E sera dite *minimale* si $\forall E_i \in E \quad E - E_i$ n'est pas une couverture.

Une couverture *partielle* de X est une couverture d'un sous-ensemble $Y \subset X$, c'est-à-dire une famille de parties dont l'union contient Y .

Une couverture *minimale partielle* de X est une couverture minimale de $Y \subset X$.

Pour un ensemble de parties, la propriété d'être une couverture minimale partielle est une propriété héréditaire pour l'inclusion.

1.2. Couplage

Soit X un ensemble fini et E une famille de parties de X .

Un *couplage* est un ensemble de parties $C \subset E$ deux à deux disjointes.

Un couplage sera dit *maximal* si $\forall F \subset E$ tel que $F \subset C$, F n'est pas un couplage.

Un ensemble de parties de X qui est à la fois une couverture et un couplage est appelé *partition*.

1.3. Hypergraphe

Un hypergraphe H est un couple (X, E) où E est une couverture de X .

les éléments de X sont appelés *sommets*,

les éléments de E sont appelés *arêtes*.

Si E est un ensemble, l'hypergraphe H est dit *simple*.

Si $\forall E_i, E_j \in E \quad E_i \subset E_j \Rightarrow E_i = E_j$ l'hypergraphe est dit *de Sperner*.

Le *rang* h d'un hypergraphe H est le cardinal de la plus grande arête.

Un hypergraphe où toutes les arêtes ont le même cardinal est dit *uniforme*.

L'*hypergraphe partiel* de $H=(X,E)$ engendré par $F \subset E$ est l'hypergraphe $H_F = (X_F, F)$ où $X_F = \bigcup_{E_i \in F} E_i$.

Le *sous-hypergraphe* de $H=(X,E)$ engendré par $Y \subset X$ est l'hypergraphe $H_Y=(Y, E_Y)$

où $E_Y = \{E_i \cap Y \mid E_i \in E ; E_i \cap Y \neq \emptyset\}$

L'*hypergraphe dual* d'un hypergraphe $H=(X,E)$

où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$

est l'hypergraphe $H^*=(Y,F)$

où $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

$F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$

dont les sommets y_1, y_2, \dots, y_m représentent les arêtes E_1, E_2, \dots, E_m de H et dont les arêtes F_1, F_2, \dots, F_n représentent les sommets x_1, x_2, \dots, x_n de H et tel que $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$F_j = \{y_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}, x_j \in E_i\}$.

Une couverture d'un hypergraphe est un ensemble d'arêtes dont l'union est X .

Un couplage d'un hypergraphe est un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes.

On voit qu'une couverture de l'hypergraphe H^* dual de H est un ensemble de sommets qui "traverse" toutes les arêtes: on dit que c'est un *transversal* de H ; le complémentaire d'un transversal est donc un ensemble de sommets qui ne contient aucune arête. Cet ensemble est appelé *stable*.

Un couplage de H^* est un ensemble de sommets de H tel que deux sommets distincts de cet ensemble n'appartiennent pas à la même arête. C'est un *stable fort* de H .

Comme pour les couvertures, on peut définir les *transversaux minimaux* et les *transversaux minimaux partiels* et ainsi, les *stables maximaux* et les *stables maximaux partiels*.

1.4. Graphe. Multigraphe

Un *multigraphe* $G = (X, E)$ est un hypergraphe de rang 2.

On étendra cette notion au cas où E n'est pas une couverture de X , les sommets non couverts seront dits *isolés*.

Un multigraphe peut ainsi se représenter comme un ensemble de points et un ensemble de lignes soit reliant deux points, soit formant une boucle sur un point.

Deux sommets appartenant à la même arête seront ainsi dits *reliés* ou *adjacents* ou *voisins* ; un sommet appartenant à une arête sera appelé *extrémité* de cette arête ; un ensemble d'arêtes égales (c'est-à-dire de mêmes extrémités) sera appelé *arête multiple*.

Dans toute cette thèse on ne s'intéressera qu'aux multigraphes sans boucle et, le plus souvent, sans arête multiple. Un multigraphe sans boucles ni arêtes multiples est appelé *graphe simple* ou plus simplement *graphe*.

Un graphe dont l'ensemble des sommets est union de deux stables est dit *biparti*.

A tout hypergraphe $H=(X, E)$ on peut associer un graphe biparti sans sommets isolés $G=(X \cup E, E)$ où $\{x, y\} \in E$ si et seulement si $x \in X$, $y \in E$ et $x \in y$. L'une des classes (stables) de sommets de G représente les sommets de l'hypergraphe, l'autre représente les arêtes. En échangeant le nom des classes des sommets de G on obtient le graphe biparti associé à l'hypergraphe dual H^* .

Réciproquement, tout graphe biparti sans sommets isolés représente soit un hypergraphe H , soit l'hypergraphe dual H^* suivant la signification que l'on donne à chacune des classes de sommets.

Ainsi la notion d'hypergraphe, plus générale que celle de graphe, peut en un certain sens apparaître comme plus particulière.

Cette représentation d'hypergraphe sous forme de graphe biparti met bien en évidence les dualités couverture-transversal, couplage-stable fort.

Pour un multigraphe sans boucles, les notions de stable et de stable fort se confondent. Ainsi rechercher un stable d'un multigraphe sans boucle G revient à rechercher un couplage de l'hypergraphe dual G^* .

Les problèmes de stabilité peuvent ainsi être vus soit comme des problèmes de couverture, soit comme des problèmes de couplage.

Remarque:

Un hypergraphe dual de multigraphe sans boucles est tel que le complémentaire d'un couplage est une couverture et le complémentaire d'une couverture un couplage. Cette propriété est fautive pour les hypergraphes en général.

On montre facilement le résultat suivant:

Proposition I.1.

Pour un hypergraphe H le complémentaire de tout couplage est une couverture et le complémentaire de toute couverture est un couplage si et seulement si son dual H^* est de la forme $(X, E \cup F)$ où E est l'ensemble des arêtes d'un multigraphe sans boucles $G=(X, E)$ et où F est un ensemble de cliques de G .

Pour un multigraphe $G=(X,E)$ on voit facilement qu'un stable maximal partiel est un ensemble $A \subset X$ tel que $\forall x \in X - a, \exists a \in A | \{a,x\} \in E$.

Un tel ensemble A est appelé *absorbant*.

La notion de stable maximal partiel est une manière de généraliser aux hypergraphes la notion d'absorbant. Ce n'est pas ce point de vue que nous adopterons au chapitre II où nous utiliserons la notion de *stable fort maximal partiel*.

Un absorbant d'un graphe $G=(X,E)$ est le transversal d'un certain hypergraphe associé à G .

$\forall x \in X$ soit x^* l'image complète de x , c'est-à-dire l'ensemble formé de x et de ses voisins.

Soit $I(G)$ l'hypergraphe des images complètes de G

$$I(G) = (X, F) \text{ où } F = \{x^* | x \in X\}$$

Un absorbant de G est un transversal de $I(G)$ et réciproquement.

A chacune des notions introduites, on peut associer des paramètres dont l'étude se présente comme des problèmes de première ou de deuxième catégorie.

Ainsi, pour un hypergraphe H on peut définir

$\rho(H)$ cardinal de la plus petite couverture (problème de 1° catégorie)

$\rho'(H)$ cardinal de la plus grande couverture minimale (problème de 2° catégorie)

$C(H)$ cardinal du plus grand couplage (1° catégorie)

$C'(H)$ cardinal du plus petit couplage maximal (2° catégorie)

$\tau(H)$ cardinal du plus petit transversal (1° catégorie)

$\tau'(H)$ cardinal du plus grand transversal minimal (1° catégorie)

$\alpha(H)$ cardinal du plus grand stable (1° catégorie)

$\alpha'(H)$ cardinal du plus petit stable maximal (2° catégorie)

- $\beta(H)$ cardinal du plus petit absorbant (1^o catégorie)
 $\beta'(H)$ cardinal du plus grand absorbant minimal (2^o catégorie)
 $\gamma(H)$ cardinal de la plus petite couverture des sommets de H
 par des stables (nombrechromatique) (1^o catégorie)
 $\gamma'(H)$ cardinal de la plus grande couverture minimale par des stables
maximaux (notion différente de celle du nombre achromatique)
 (2^o catégorie)
 etc...

On peut se rendre compte que parmi ces problèmes, seuls sont vraiment étudiés ceux de première catégorie.

Nous allons maintenant étudier un problème particulier de couverture, problème de première catégorie qui permettra de résoudre, on le verra au chapitre IV, un problème de deuxième catégorie.

2. COUVERTURE DES ARETES D'UN GRAPHE CUBIQUE PAR DES COUPLAGES ET DES COUPLAGES FORTS

Soit $G=(X,E)$ un graphe simple.

L'*indice chromatique* $q(G)$ est le cardinal de la plus petite couverture des arêtes de G par des couplages. Si $\Delta(G)$ désigne le degré maximum de G . VIZING a montré [69] que $q(G) \leq \Delta(G) + 1$. On a donc deux classes de graphes, ceux pour lesquels $q(G) = \Delta(G)$ et ceux pour lesquels $q(G) = \Delta(G) + 1$.

Peut-on améliorer ce résultat? Ne serait-il pas possible de couvrir les arêtes d'un graphe par $\Delta(G)$ couplage et un couplage qui aurait des propriétés particulières?

Nous appellerons *couplage fort* d'un graphe $G=(X,E)$ un ensemble d'arêtes disjointes deux à deux tel que le sous graphe engendré par les sommets de ces arêtes ne contienne aucune autre arête.

Peut-on couvrir les sommets d'un graphe G par $\Delta(G)$ couplage et un couplage fort?

Ceci est faux en général dès que $\Delta(G) \geq 4$ (par exemple pour les graphes complets K_{2p+1} pour $p \geq 2$). Nous allons démontrer que les graphes de degré maximum inférieur ou égal à 3 ont cette propriété [62].

Proposition II.2.

Soit $G=(X,E)$ un graphe de degré maximum $\Delta(G) \leq 3$. On peut colorier ses arêtes en 4 couleurs 1, 2, 3 et C de sorte que:

- . $\forall i \in \{1,2,3\}$, l'ensemble des arêtes de couleur i est un couplage,
- . l'ensemble des arêtes de couleur C est un couplage fort,
- . les sommets de degré inférieur ou égal à 2 n'appartiennent à aucune arête de couleur C.

Démonstration

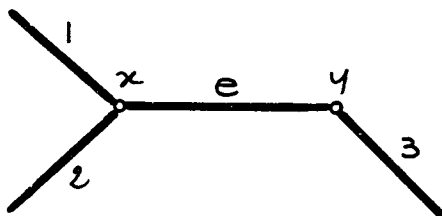
Soit $G=(X,E)$ tel que $\Delta(G) \leq 3$, qui ne possède pas cette propriété, et minimal (par inclusion sur les arêtes et les sommets).

1°/ Si G n'est pas cubique

Soit e une arête adjacente à un sommet de degré inférieur ou égal à 2. $G'=(X,E-\{e\})$ que nous noterons $G-e$ a la propriété (propriété que nous appellerons P).

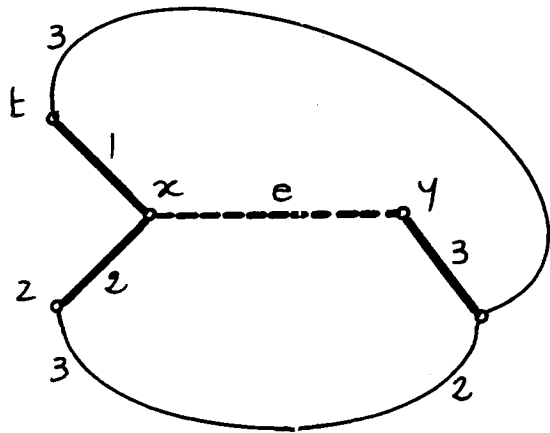
Soit une coloration de $G-e$ en 4 couleurs 1, 2, 3 et C avec un nombre minimum d'arêtes de couleur C.

Puisque G n'a pas la propriété P, l'arête e est adjacente à 3 arêtes colorées 1, 2, 3.



La chaîne formée par les arêtes de couleur 1 et 3 ayant pour extrémité x a y pour autre extrémité ; sinon une permutation des couleurs 1 et 3 le long de cette chaîne permettrait de colorier e en 1.

De même la chaîne formée par les arêtes de couleur 2 et 3 ayant x pour extrémité a y pour autre extrémité.



Supposons qu'aucune arête adjacente à z ne soit de couleur 1: la chaîne formée par les arêtes de couleur 1-3 d'extrémité z est distincte de la chaîne 1-3 d'extrémités x et y ($z \notin \{x, y\}$).

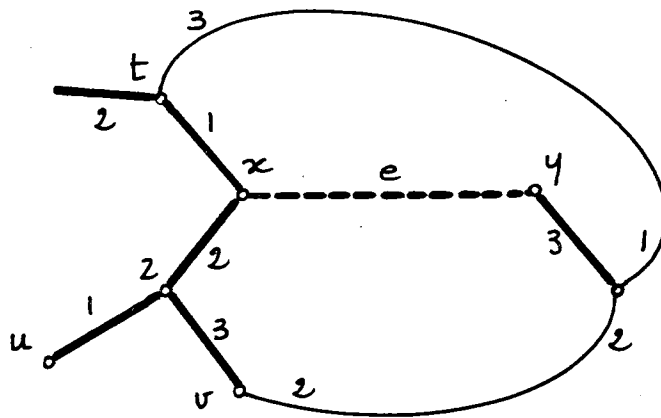
On peut donc en échangeant 1 et 3 le long de cette chaîne d'extrémité z colorier $\{xz\}$ en 3 et $\{zy\}$ en 2. On aboutit à une contradiction.

Le sommet z est donc un sommet de degré 3 dont les arêtes incidentes sont colorées 1, 2 et 3.

De même pour le sommet t , par raison de symétrie.

Soient u et v les voisins de z distincts de x .

1.9



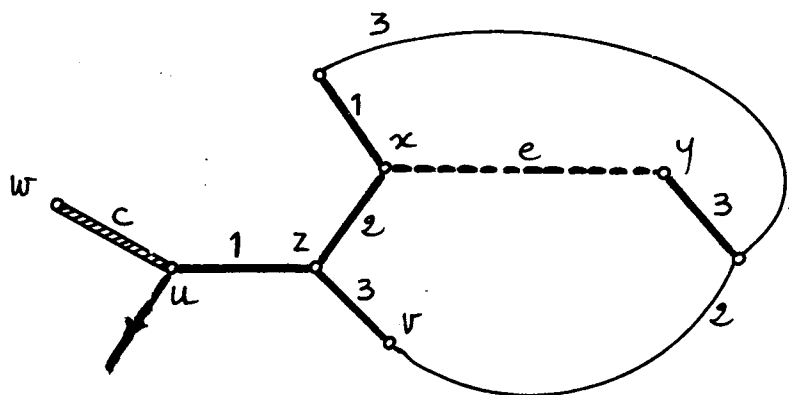
Si ni u , ni v n'ont d'arêtes incidentes de couleur c on peut colorier $\{x,z\}$ en c et $\{xy\}$ en 2 .

On arrive ainsi à une contradiction.

Donc, soit u , soit v appartient à une arête de couleur c .

1er cas: u est incident à une arête de couleur c

soit $\{u,w\}$ cette arête



u est donc un sommet de degré 3. Il existe donc une chaîne formée d'arêtes de couleur 2 et 3 d'extrémité u . Puisque $u \notin \{x,y\}$ cette chaîne est distincte de la chaîne 2-3 d'extrémités x et y .

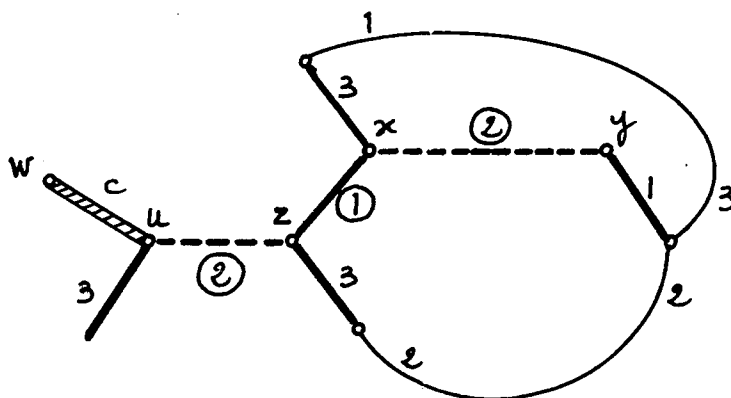
Un échange des couleurs 2 et 3 le long de cette chaîne d'extrémité u ne change pas la coloration des arêtes adjacentes à e . On peut donc supposer que u est adjacent à une arête de couleur 3.

On a vu que dans $G-e$ la chaîne formée par les arêtes de couleurs 1 et 3 d'extrémité x avait y pour autre extrémité. Dans $G-e-\{uz\}$, la chaîne formée par les arêtes de couleur 1 et 3 d'extrémité x a pour autre extrémité

- a/ soit y ,
- b/ soit u (et dans ce cas il existe une chaîne 1-3 d'extrémités z et y),
- c/ soit z (et dans ce cas il existe une chaîne 1-3 d'extrémités u et y).

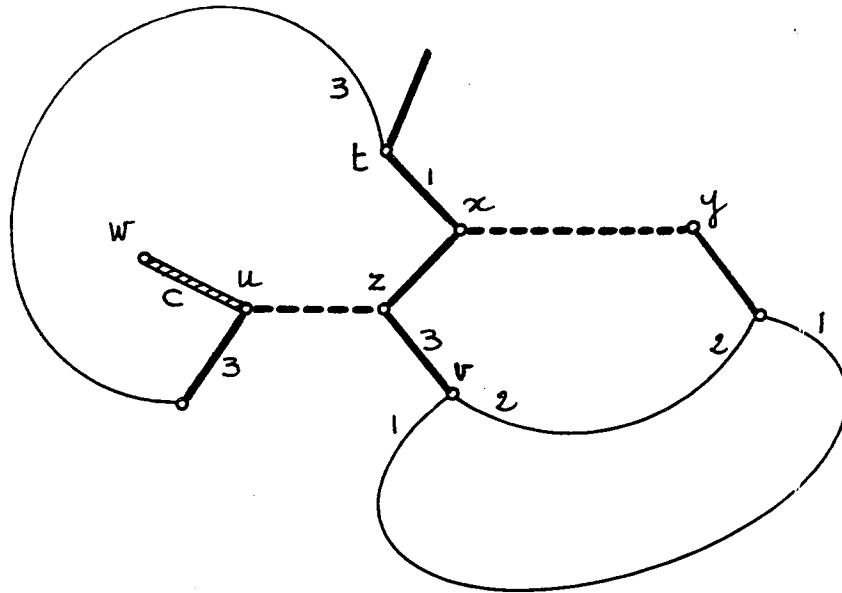
Dans ces deux derniers cas (b et c) le sommet v est incident à des arêtes de couleur 1, 2 et 3.

cas_a: chaîne 1-3 d'extrémités x et y dans $G-e-\{u,z\}$. Echangeons 1 et 3 le long de cette chaîne



On colorie $\{u,z\}$ en 2, $\{x,z\}$ en 1 et par suite e en 2.
On aboutit ainsi à une contradiction.

cas b: Dans $G-e-\{u,z\}$, chaînes 1-3 d'extrémités x, u et z, y .



Echangeons 1 et 3 le long de la chaîne $x u$.

On peut ainsi colorier $\{u,z\}$ en 2

$\{x,z\}$ en 1

et $\{x,y\}$ en 2

Et l'on arrive encore à une contradiction.

cas c : Dans $G-e-\{u,z\}$ chaînes 1-3 d'extrémités x,z et u,y .

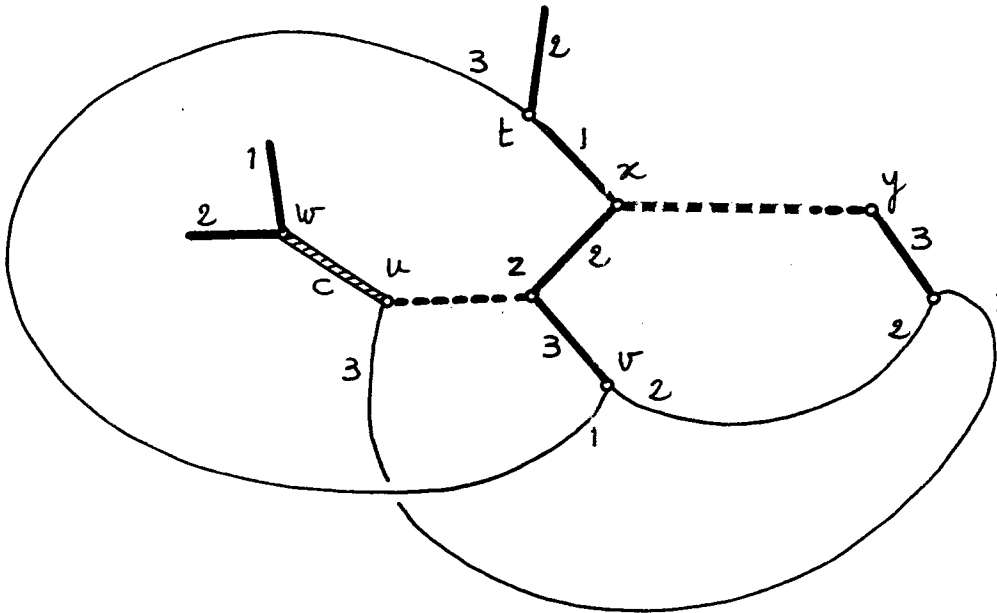
Puisque $G-e$ est coloré avec un nombre minimum d'arêtes c , le sommet w est incident à une arête de couleur 2 et à une arête de couleur 1 ou 3.

Il existe donc dans $G-e$ une chaîne de couleurs 1-3, d'extrémité w .

Cette chaîne est distincte de la chaîne 1-3 (dans $G-e$) d'extrémité x et y (puisque $w \notin \{x,y\}$).

Donc cette chaîne 1-3 d'extrémité w ne passe ni par u ni par z .

On peut donc supposer que w est adjacent à des arêtes de couleurs 1 et 2.



Dans $G - e - \{u, z\}$, échangeons 1 et 3 le long de la chaîne 1-3 d'extrémités u et y .

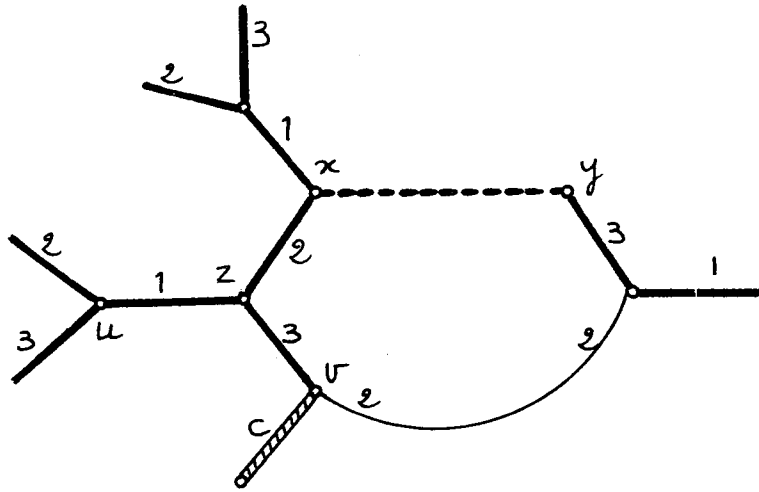
Colorions $\{u, w\}$ en 3

$\{u, z\}$ en c : ceci est possible car aucun des sommets voisins de u , ni de z ne sont adjacents à des arêtes de couleur c .

Colorions $\{x, z\}$ en 2 et par suite $\{x, y\}$ en 3. Dans ce cas aussi on arrive à une coloration de G , donc à une contradiction.

u n'est donc pas incident à une arête de couleur c .

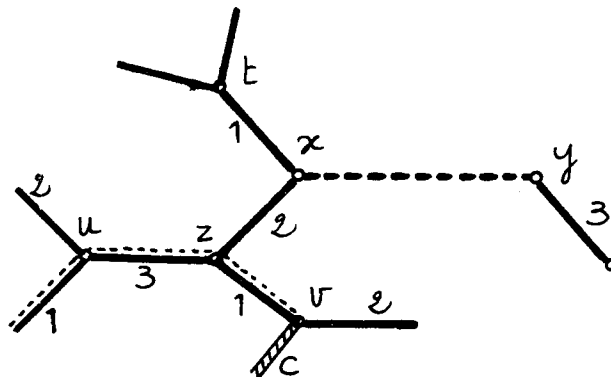
2ème cas: v est incident à une arête de couleur c



Puisqu'il existe une chaîne 2-3 d'extrémités x et y , le sommet v est adjacent à des arêtes de couleurs 2 et 3.

Il existe donc une chaîne formée d'arêtes de couleurs 1 et 3, d'extrémité v . Cette chaîne est distincte de la chaîne 1-3 d'extrémités x et y ($v \notin \{x, y\}$).

En échangeant les couleurs 1 et 3 le long de cette chaîne d'extrémité v on ne change pas la coloration des arêtes adjacentes à l'arête e . On est ainsi ramené au premier cas.



(le sommet v joue le rôle du sommet u).

Ceci achève la démonstration dans le cas des graphes non cubiques.

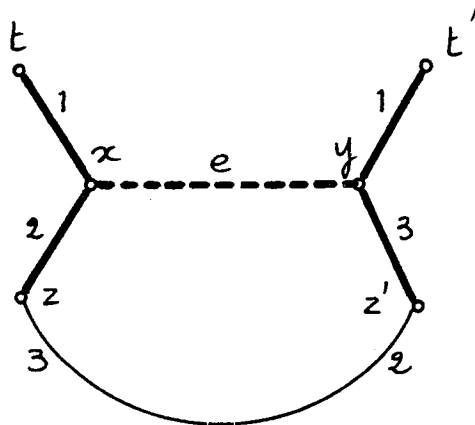
2°/ G est un graphe cubique

G ne peut pas être colorié en 1, 2, 3, c dans les conditions de la proposition.

$\forall e \in E$, $G-e$ est coloriable en 1, 2, 3, c de manière à ce que aucune arête adjacente à e ne soit de couleur c.

Soit une telle coloration de $G-e$ avec un nombre minimum d'arêtes de couleur c.

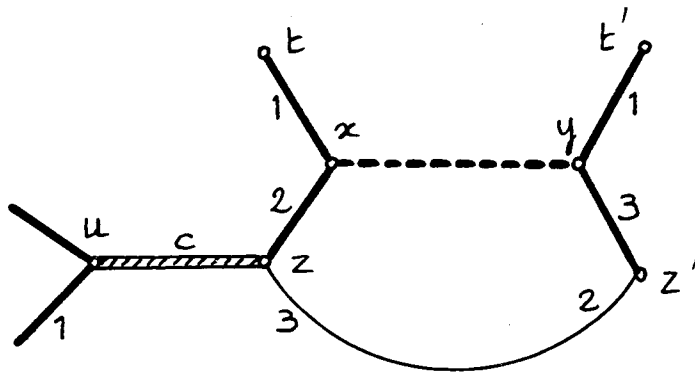
A une permutation près sur $\{1,2,3\}$ on a la coloration suivante:



La chaîne formée par les arêtes de couleur 2 et 3 d'extrémité x a pour autre extrémité y . (sinon une permutation des couleurs 2 et 3 le long de cette chaîne permettrait de colorier $\{x,y\}$ en 2.

Si aucun des sommets z, z', t, t' n'appartenait à une arête de couleur c, on pourrait colorier $\{x,y\}$ en c (contradiction).

1er cas: z appartient à une arête (u, z) de couleur c



Puisque le nombre d'arêtes de couleur c est minimum, u est adjacent à une arête de couleur 1.

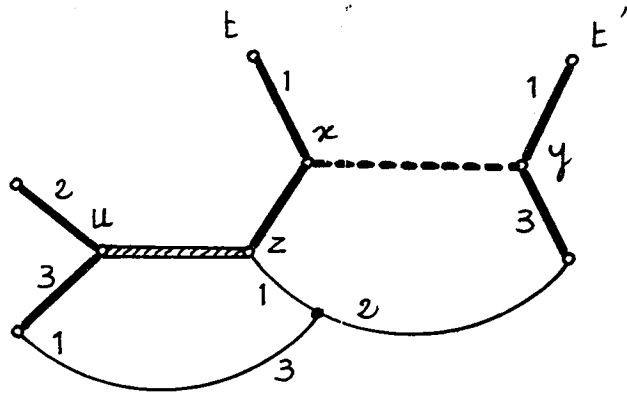
Il existe donc une chaîne de couleurs 2,3, d'extrémité u . Puisque $u \notin \{x, y\}$ cette chaîne est distincte de la chaîne 2-3 d'extrémités x et y . Un échange des couleurs 2 et 3 le long de cette chaîne d'extrémité u ne change donc pas les couleurs des arêtes incidentes à x , y et z .

On peut donc supposer que u appartient à des arêtes de couleurs 1 et 2.

Il existe une chaîne 1-3 d'extrémité z . Cette chaîne a pour autre extrémité u , sinon en échangeant 1 et 3 le long de cette chaîne on pourrait colorier l'arête $\{u, z\}$ en 3 et ainsi trouver une coloration de $G-e$ avec une arête de couleur c de moins, ce qui est impossible.

Echangeons 1 et 3 le long de la chaîne 1-3 d'extrémités z et u .

1.16



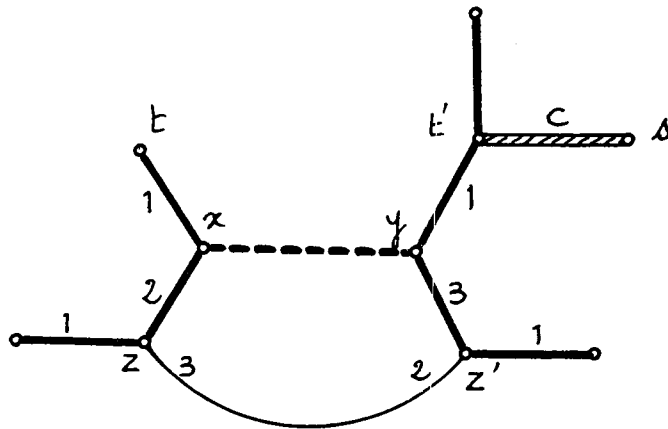
On peut ainsi colorier $\{x,z\}$ en 3 et $\{x,y\}$ en 2.

On obtient ainsi une coloration de G ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

On peut donc maintenant supposer que ni z , ni z' par raison de symétrie, ne sont incidents à des arêtes de couleur c .

2ème cas: t (ou t') appartient à une arête de couleur c

Soit $\{t',s\}$ cette arête.

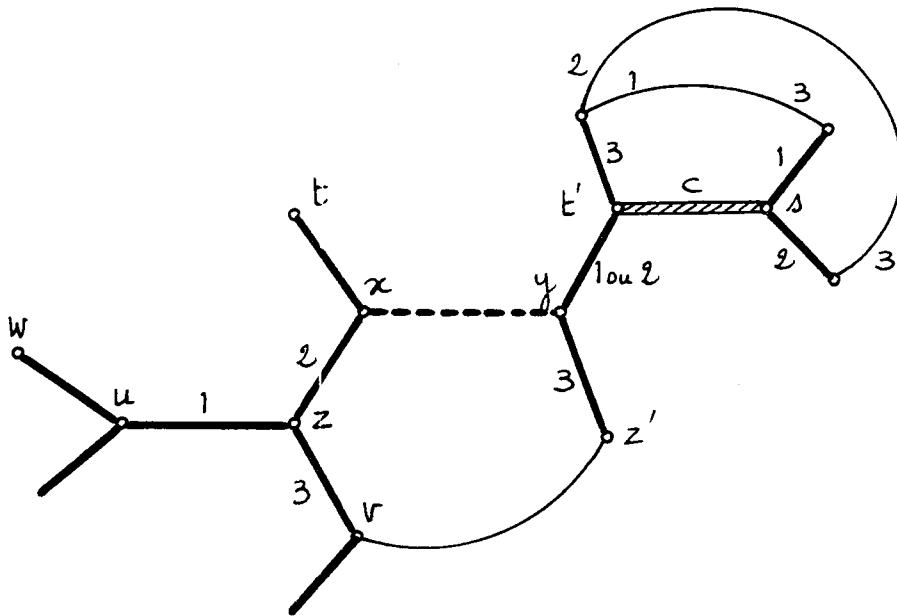


Il existe une chaîne 2-3 d'extrémité t' .

Cette chaîne est distincte de la chaîne 2-3 d'extrémités x et y ($t' \notin \{x,y\}$). L'échange de 2 et 3 le long de cette chaîne d'extrémité t' ne change pas les couleurs des arêtes adjacentes à l'arête e . On peut donc supposer que t' est adjacent à des arêtes de couleurs 1 et 3.

L'arête $\{y,t'\}$ pouvant ainsi être coloriée indifféremment en 1 ou en 2, on en déduit que s appartient à des arêtes de couleur 1 et 2. (minimalité du nombre d'arêtes de couleur c).

De plus, dans $G - \{x,y\} - \{y,t'\}$, les chaînes 1-3 et 2-3 d'extrémité t' ont s pour autre extrémité.



Si $s \notin \{x,y,z,u,v,w\}$

$t' \notin \{x,y,z,u,v,w\}$

les chaînes 1-3 (ou 2-3) de $G - \{x,y\} - \{y,t'\}$ d'extrémités appartenant à l'ensemble $\{x,y,z,u,v,w\}$ sont toutes distinctes des chaînes 1-3 (ou 2-3) d'extrémités s et t' .

On peut donc, en reprenant le raisonnement fait dans le cas des graphes non cubiques, par des permutations de couleur le long de ces chaînes, arriver à une coloration de $G - \{yt'\}$. Une permutation éventuelle le long de la chaîne 1-3 ou de la chaîne 2-3 d'extrémités s et t' permet ensuite de colorier l'arête $\{y, t'\}$.

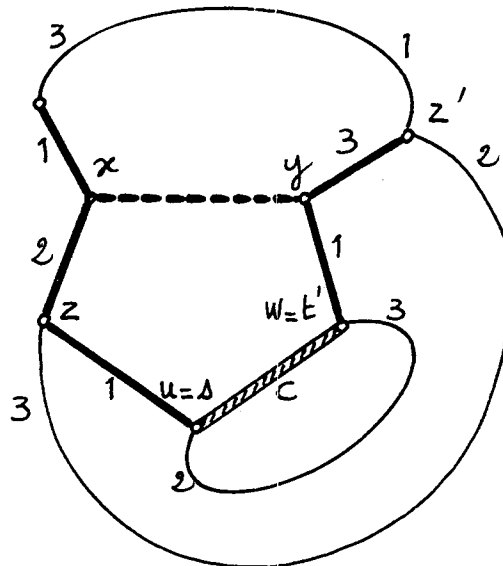
On aboutit donc à une contradiction.

On peut voir que $s, t' \notin \{x, y, z, v\}$ (x, y, z et v sont sur une chaîne 2-3 d'extrémité x et y contrairement à s et t').

Il reste donc à examiner le cas:

$$s = u \text{ et } w = t'.$$

On a la configuration suivante:



Il existe une chaîne 1-3 d'extrémité x et y dans $G - e - \{y, w\}$

Il existe une chaîne 2-3 d'extrémité x et y dans $G - e$

Il existe une chaîne 2-3 d'extrémité u et w dans $G - \{u, w\}$

(minimalité du nombre d'arêtes de couleur c dans $G - e$).

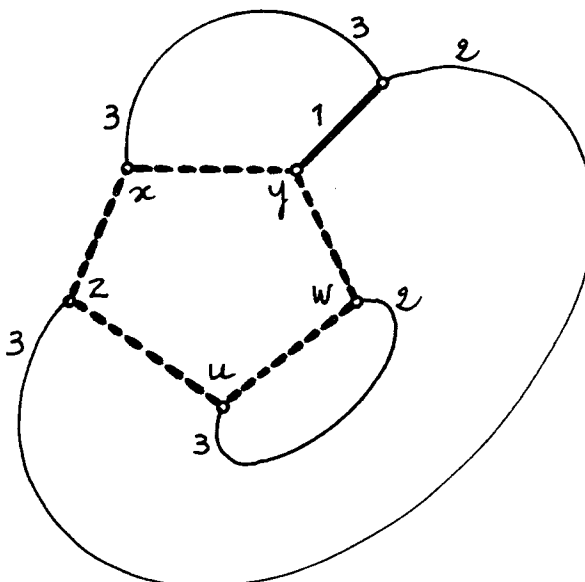
Ces chaînes sont distinctes.

Considérons le graphe partiel $G = \{ \{x,y\}, \{y,w\}, \{w,u\}, \{u,z\}, \{z,x\} \}$

Permutons 1 et 3 le long de la chaîne d'extrémités x et y .

Permutons 2 et 3 le long de la chaîne d'extrémités u et w .

On obtient ainsi:



Ce qui permet de colorier les arêtes $\{x,y\}, \{y,w\}, \{w,u\}, \{u,z\}, \{z,x\}$ respectivement en 2, 3, 1, 2, 1.

On arrive ainsi à une coloration du graphe G et donc à une contradiction.

Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Les premiers paragraphes de ce chapitre traitent de propriétés générales des absorbants dans les graphes et les hypergraphes, et relie la notion d'absorption à celle de couverture. La plupart des résultats sont le fruit d'une collaboration avec F. JAEGER [50][51].

Ensuite, nous donnons des résultats plus quantitatifs sur le nombre d'absorption. [54]

Enfin, quelques extensions de la notion d'absorbant sont présentées.

1.- NOMBRE D'ABSORPTION D'UN HYPERGRAPHE

1.1. Définition

Soit $H = (X;E)$ un hypergraphe. $A \subseteq X$ sera dit *absorbant* de H si, et seulement si, $\forall x \in X \exists a \in A, E \in E : x \in E$ et $a \in E$. Le *nombre d'absorption* de H , noté $\beta(H)$, est le cardinal minimum d'un absorbant de H .

Toute partie de X contenant un absorbant de H est un absorbant de H . On désignera par $\beta'(H)$ le cardinal maximum d'un absorbant de H , minimal par inclusion (appelé absorbant minimal).

Cette définition généralise la définition des absorbants d'un graphe simple sans sommets isolés.

1.2. Couvertures et absorbants

a) soit A un absorbant de l'hypergraphe $H = (X;E)$. Soit C l'ensemble des arêtes de H qui contiennent au moins un sommet de A .

$\forall x \in X \exists a \in A, E \in E : x \in E$ et $a \in E$. Donc $\forall x \in X, \exists E \in C : x \in E$.
 C est donc une couverture de H .

Soit l'hypergraphe $K = (X;C)$; $\forall E \in C, A \cap E \neq \emptyset$; donc A est un transversal de K .

2.2.

En résumé, étant donné un absorbant A de H , il existe une couverture C de H telle que A est transversal de l'hypergraphe $K = (X, C)$.

b) soit C une couverture de H , l'hypergraphe $K = (X; C)$ et A un transversal de K .

$$\forall x \in X \quad \exists E \in C \quad : \quad x \in E$$

En outre

$$\exists a \in A \quad : \quad a \in E$$

Donc $\forall x \in X \quad \exists a \in A, E \in C \quad : \quad x \in E$ et $a \in E$. A est donc un absorbant de H .

En résumé, étant donnée une couverture C de H , tout transversal de l'hypergraphe $K = (X; C)$ est un absorbant de H .

c) soit $A(H)$ l'ensemble des absorbants de $H = (X; E)$

soit $B(H) = \{Y \mid Y \subseteq X, \exists C \text{ couverture de } H:$

$Y \text{ est transversal de } K = (X, C)\}$

Nous venons de démontrer que $A(H) = B(H)$

soit $B'(H) = \{Y' \mid Y' \subseteq X, \exists C' \text{ couverture minimale de } H:$

$Y' \text{ est transversal de } K = (X; C')\}$

Il est clair que $B'(H) = B(H)$

Donc $A(H) = B'(H)$.

1.3. Application au calcul de $\beta(H)$ et de $\beta'(H)$

a) D'après l'inégalité précédente:

$\min |A| = \min |Y|$ tel que Y soit transversal de $(X; C)$

pour $A \in A(H)$ et pour C couverture minimale de H .

On a donc:

Proposition II.1

$\beta(H) = \min \tau(X; C)$ <p style="text-align: center;">pour C couverture minimale de H</p>

2.3

b) Etant donné un absorbant A de H , il existe une couverture minimale C de H telle que H est transversal minimal de l'hypergraphe $K = (X; C)$

On a donc:

$$\beta'(H) \leq \max_{\text{pour } C \text{ couverture minimale de } H} \tau'(X; C)$$

En général on n'a pas égalité puisqu'un transversal minimal d'une couverture minimale de H n'est pas nécessairement un absorbant minimal de H . (on peut le voir par exemple pour le cycle de longueur 5, c'est-à-dire pour $H = (\{1, 2, 3, 4, 5\} ; \{12, 23, 34, 45, 51\})$).

Dans toute la suite, nous nous limiterons au cas des hypergraphes *sans arêtes d'ordre 1*.

Soit $H = (X; E)$ un tel hypergraphe.

Soit C une couverture minimale de H .

$$\tau'(X; C) \leq |C|$$

Or toute arête E de C contient au moins un point x tel que $x \in E$ et $E' \in C, E' \neq E \Rightarrow x \notin E'$.

(sinon $C - \{E\}$ serait encore une couverture de H)

A chaque arête de E on peut ainsi associer un tel point que nous noterons x_E .

$$\text{soit } T = \{x_E : E \in C\}$$

T est un transversal minimal de $(X; C)$ de cardinal $|C|$. On en déduit que $\tau'(X; C) = |C|$

Donc $\beta'(H) \leq \max_{\text{pour } C \text{ couverture minimale de } H} |C|$

C'est-à-dire

$$\beta'(H) \leq \rho'(H)$$

D'autre part T est un stable de $(X;C)$ de cardinal $|C|$

Donc $|C| \leq \alpha(X;C)$

C'est-à-dire $\tau(X;C) \leq |X| - |C|$

Donc $\min \tau(X;C) \leq |X| - \max |C|$

pour C couverture minimale de H .

En posant $|X| = n(H)$ on a :

Proposition II.2

$$\beta(H) \leq n(H) - \rho'(H)$$

2.- APPLICATION AU CAS DES GRAPHS

Tout absorbant d'un graphe contenant nécessairement tous les sommets isolés, nous nous limiterons au cas des graphes sans sommets isolés, pour lesquels les résultats précédents peuvent s'appliquer.

2.1. Relations entre absorbants et couvertures

Toute couverture minimale C d'un graphe $G = (X;E)$ est un graphe simple sans sommets isolés dont toute arête contient un sommet de degré 1 ; ses composantes connexes sont donc de nombre de transversalité 1 (nous appellerons "étoiles" les graphes simples de ce type ; on peut les caractériser comme étant les arbres de diamètre 1 ou 2).

On voit que dans ce cas

$$\tau(X;C) = |X| - |C|$$

On a donc

$$\beta(G) = n(G) - \rho'(G)$$

Remarque 1 : Cette égalité est encore valable si G admet des sommets isolés.

Remarque 2 : Chaque sommet d'un absorbant est le transversal d'une "étoile" de C . Chaque étoile de C a au plus $\Delta(G)+1$ sommets ($\Delta(G)$ désigne le degré maximum de G). On a donc:

Proposition II.3

$$\beta(G) \leq \frac{n(G)}{\Delta(G) + 1}$$

On a ainsi ramené le calcul du nombre d'absorption d'un graphe simple au calcul du cardinal maximal d'une couverture minimale.

Or ceci est un problème de "deuxième catégorie".

Nous allons maintenant montrer que le cardinal maximal ρ' d'une couverture minimale est égal au cardinal maximal ρ'' d'une couverture minimale *partielle*, c'est-à-dire au cardinal maximal d'un ensemble d'arêtes tel que 3 arêtes quelconques de cet ensemble ne forment ni une chaîne élémentaire de longueur 3 ni un triangle. Calculer ρ'' est un problème de "première catégorie".

ρ'' est le nombre de stabilité $\alpha(H)$ de l'hypergraphe $H = (E;F)$ dont l'ensemble des sommets E est l'ensemble des arêtes du graphe $G = (X;E)$ et dont l'ensemble des arêtes F est l'ensemble des chaînes de longueur 3 et des triangles.

Démonstration de $\rho'(G) = \rho''(G)$

Une couverture minimale de G est une couverture minimale partielle de G ; donc $\rho''(G) \geq \rho'(G)$.

Nous allons montrer qu'étant donnée une couverture minimale partielle C de G couvrant un ensemble de sommets $S(C)$ tel que $S(C) \subset X$, il existe une couverture minimale partielle C' de G couvrant un ensemble de sommets $S(C')$ telle que

$$S(C) \subset S(C') \subset X \quad \text{avec} \quad |C| \leq |C'|$$

Soit donc C couverture minimale partielle de $G = (X;E)$ telle que $S(C) \subset X$. Soit $x \in X - S(C)$ et $e \in E$ avec $x \in e$ (donc $e \notin C$).

a) si $e \subseteq X - S(C)$, $C' = C \cup \{e\}$ est une couverture minimale partielle telle que $S(C') = S(C) \cup e$

b) sinon $e = \{x y\}$ avec $y \in S(C)$;
soit $z \in S(C)$ avec $\{yz\} \in C$.

α) si z appartient à une seule arête de C , cette arête est $\{y, z\}$
 $C' = C \cup \{e\}$ est une couverture minimale partielle avec
 $S(C') = S(C) \cup e = S(C) \cup \{x\}$

β) si z appartient à au moins deux arêtes de C , $C' = (C - \{x,y\}) \cup \{e\}$
est une couverture minimale partielle avec $S(C') = S(C) \cup e = S(C) \cup \{x\}$

Dans tous les cas, nous avons construit une couverture minimale partielle de G avec $S(C) \subset S(C')$ et $|C| \leq |C'|$

$$\text{Donc } \rho''(G) \leq \rho'(G)$$

et finalement $\rho''(G) = \rho'(G)$, ce qui donne:

Proposition II.4

$$\beta(G) = n(G) - \rho''(G)$$

Remarque:

Pour un hypergraphe H (sans arêtes d'ordre 1) on a simplement:

$$\beta(H) \leq n(H) - \rho''(H)$$

2.2. Application

On a $\rho(G) \leq \rho''(G)$.

Or on sait que [16] [38] : $n(G) - \rho(G) = c(G)$.

(Rappelons que $c(G)$ désigne le cardinal maximal d'un couplage de G supposé sans sommets isolés)

On a donc $\beta(G) \leq c(G)$ avec l'égalité si toutes les couvertures minimales de G ont le même cardinal ; (dans ce cas l'algorithme de recherche d'une couverture de cardinal minimum de G est trivial).

Ceci donne en particulier, puisque $c(G) \leq \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$

Proposition II.5

$$\beta(G) \leq \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$$

($\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x

$\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x)

Si $n(G)$ est pair, l'égalité est atteinte si, et seulement si, toutes les couvertures minimales de G sont des couplages parfaits.

Dans ce cas (G est supposé connexe),

- soit G est un cycle de longueur 4,
- soit G admet $\frac{n(G)}{2}$ arêtes contenant au moins un sommet de degré 1 (et formant un couplage parfait de G).

En effet:

1er cas $n(G) \geq 6$.

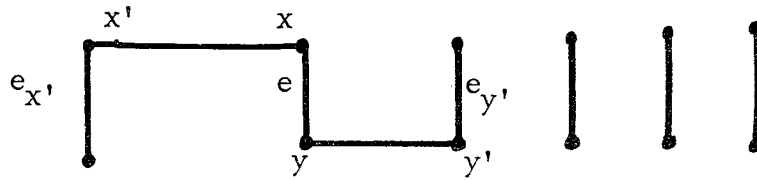
Une arête sera dite *pendante* si, et seulement si, elle contient un sommet de degré 1.

Soit C une couverture minimale (c'est un couplage parfait) et e une arête

de C non pendante ($e = \{x,y\}$)

x est adjacent à $x' \neq y$ et y est adjacent à $y' \neq x$
 $x' \in e_{x'}$, arête de C et $y' \in e_{y'}$, arête de C
 $e_{x'} \neq e$ et $e_{y'} \neq e$.

a) $e_{x'} \neq e_{y'}$



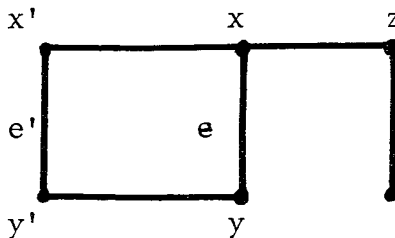
$(C - \{e\}) \cup \{x,x'\} \cup \{y,y'\}$ est une couverture minimale de G de cardinal $|C| + 1$. On aboutit à une contradiction.

b) $e_{x'} = e_{y'}$

Nous noterons e' cette arête. Supposons d'abord que $x' \neq y'$.

Puisque G est connexe et que $n(G) \geq 6$, il existe un point de $\{x,y,x',y'\}$, par exemple x qui est adjacent à un point z extérieur à cet ensemble.

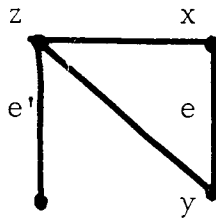
Soit $e_z \in C : z \in e_z$.



$(C - \{e\}) \cup \{yy'\} \cup \{x,z\}$ est une couverture minimale de G de cardinal $|C| + 1$: on aboutit à une contradiction.

2.8 bis

Supposons donc maintenant que $x' = z'$; nous noterons z ce sommet.



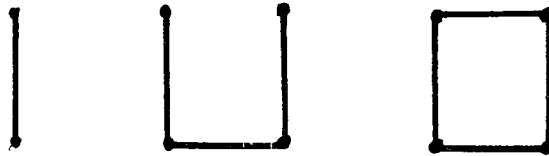
$(C - \{e\}) \cup \{z,x\} \cup \{z,y\}$ est une couverture minimale de G cardinal $|C| + 1$: on aboutit encore à une contradiction.

En résumé, (si $n(G) \geq 6$), étant donnée une couverture minimale C , toutes ses arêtes sont pendants ; réciproquement une arête pendante est dans toute couverture minimale.

Donc il existe une seule couverture minimale: c'est l'ensemble des arêtes pendants qui constituent un couplage parfait.

2ème cas $n(G) \leq 4$

On vérifie immédiatement que les seuls graphes connexes avec $n(G) \leq 4$, pair tels que $\beta(G) = \frac{n(G)}{2}$ sont:



Ils sont, sauf le dernier (cycle de longueur 4), du type des graphes caractérisé précédemment.

2.3. Nombre d'absorption et carré d'un graphe

2.3.1. définitions

Cycle d'un hypergraphe

Soit un hypergraphe $H = (X; E)$

$(x_1 E_1 x_2 E_2 x_3 \dots x_i E_i x_{i+1} \dots x_k E_k x_1)$

est un *cycle* de H si, et seulement si:

- les x_i ($i = 1, \dots, k$) sont des éléments distincts de X (sommets du cycle)
- les E_j ($j = 1, \dots, k$) sont des éléments distincts de E (arêtes du cycle)
- $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $x_i \in E_i$ et $x_{i+1} \in E_i$ (en posant $x_{k+1} = x_1$).

Hypergraphe équilibré

Un hypergraphe $H = (X; E)$ est dit *équilibré* si tout cycle impair $(x_1 E_1 x_2 E_2 \dots E_{2p+1} x_1)$ de H utilise une arête E_i contenant trois des sommets x_j de ce cycle.

Graphe parfait

Soit un $G = (X; E)$ un graphe simple, nous désignerons par

$\alpha(G)$ le cardinal minimum d'une couverture des sommets de G par des cliques (sous graphes complets)

$\gamma(G)$ le nombre chromatique

$\omega(G)$ le nombre maximum de sommets qui forment une clique.

Un graphe G est dit *parfait* si, et seulement si, pour tout sous graphe

$$\alpha(G_A) = \theta(G_A)$$

ou, ce qui est équivalent [L.LOVASZ 35]

$$\gamma(G_A) = \omega(G_A)$$

Graphe triangulé

Un graphe G est dit *triangulé* si et seulement si tout cycle élémentaire de longueur >3 admet une corde (c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle).

HAJNAL, SURANYI [21] et BERGE ont démontré qu'un graphe triangulé est parfait.

2.3.2. nombre d'absorption d'un graphe et nombre de stabilité de son carré

Soit $G = (X;E)$ un graphe simple et $I(G) = (X;F)$ l'hypergraphe des images complètes de G .

On a vu que (x_1, x_2, \dots, x_p) est un absorbant de G si et seulement si c'est un transversal de $I(G)$.

Donc $\beta(G) = \tau I[G]$.

On a vu aussi que $(x_1, x_2, \dots, x_\ell)$ est un stable de G^2 si et seulement si $(Ix_1, Ix_2, \dots, Ix_\ell)$ est un couplage de $I(G)$. Donc $\alpha(G^2) = \nu[I(G)]$. Puisque pour tout hypergraphe H , $\tau(H) \geq \nu(H)$ on a :

Proposition II.6 Pour tout graphe simple G , $\beta(G) \geq \alpha(G^2)$

Proposition II.6

Pour tout graphe simple G , $\beta(G) \geq \alpha(G^2)$

Remarque

Pour tout graphe simple $G = (X;E)$ on a:

$$\beta(G) \geq \theta(G^2) \geq \alpha(G^2)$$

En effet, soit un absorbant A de G de cardinal $\beta(G)$, transversal minimal d'une couverture minimale C de G . Chaque composante connexe du graphe $G_C = (X;C)$ est une clique de G^2 . On obtient ainsi une partition des sommets de G en $\beta(G)$ cliques de G^2 .

Théorème

(BERGE, LAS VERGNAS. [5])

Si H est un hypergraphe équilibré $\tau(H) = \nu(H)$

Corollaire

Tout graphe G dont l'hypergraphe $I(G)$ des images complètes est équilibré est tel que $\beta(G) = \alpha(G^2)$.

exemple:

Graphes de circonférence inférieure ou égale à 3. (la circonférence d'un graphe est la longueur maximum d'un cycle élémentaire).

Soit G un tel graphe.

Soit $(x_1 E_1 x_2 E_2 \dots x_k E_k x_1)$ un cycle impair l'hypergraphe $I(G)$ tel qu'il n'existe pas d'arêtes E_j de ce cycle contenant 3 sommets de ce cycle.

Il est clair qu'il lui correspond dans G un cycle élémentaire auquel appartiennent les sommets x_1, x_2, \dots, x_k , donc un cycle élémentaire de longueur supérieure ou égale à k .

Puisque G est de circonférence inférieure ou égale à 3, on a dans G un cycle élémentaire $x_1 x_2 x_3$ et dans $I(G)$ un cycle $(x_1 E_1 x_2 E_2 x_3 E_3 x_1)$.
Puisque $x_3 \notin E_1$, $E_1 = I(y)$ avec $y \notin \{x_1, x_2, x_3\}$.

Il existe donc dans G un cycle élémentaire $x_1 y x_2 x_3$ de longueur 4 ce qui est impossible.

L'hypergraphe des images complètes de G , graphe de circonférence ≤ 3 est donc *équilibré* et par suite on a dans ce cas $\alpha(G^2) = \beta(G)$.

Remarque

Dans ce cas on a évidemment $\alpha(G^2) = \theta(G^2)$ puisque $\beta(G) \geq \theta(G^2) \geq \alpha(G^2)$
 En fait, le carré d'un graphe de circonférence ≤ 5 est triangulé donc parfait.

En effet: soit $G = (X; E)$ un graphe de circonférence ≤ 5 .

Soit C un cycle élémentaire de G^2 de longueur supérieure ou égale à 4 et sans corde.

Partitionnons les arêtes de ce cycle en $A_1 =$ l'ensemble des arêtes du cycle qui appartiennent à G

et $A_2 =$ l'ensemble des arêtes du cycle qui appartiennent à G^2 mais pas à G .

Puisque C est sans cordes, il est clair que A_1 est un couplage.

Donc $|A_2| \geq \frac{|C|}{2}$.

A toute arête $a_j \in A_2$ on peut associer un sommet x_j associé aux deux extrémités de cette arête.

Puisque C est sans cordes, tous ces sommets x_j sont extérieurs au cycle et distincts. On obtient ainsi un cycle élémentaire C' de G de cardinal

$|C'| \geq |C| + \frac{|C|}{2} = \frac{3}{2} |C|$, donc de cardinal $|C'| \geq 6$. Il y a donc contradiction.

Ainsi tout cycle de G^2 de longueur ≥ 4 admet une corde et par suite G^2 est triangulé.

3.- QUATRE RELATIONS ENTRE CERTAINS NOMBRES DE COUVERTURE ET NOMBRE DE COUPLAGE dans l'étude des absorbants

3.1. Définitions

Graphe subdivisé d'un graphe simple

Soit $G = (X;E)$.

Le graphe *subdivisé* de G est le graphe

$$G_s = (X \cup E ; F)$$

avec $\{x,e\} \in F \Leftrightarrow x \in X, e \in E, x \in e$.

Autrement dit G_s est le graphe obtenu à partir de G en rajoutant un sommet sur chaque arête.

Graphe représentatif des arêtes (line graph)

Soit $G = (X;E)$

Le graphe *représentatif des arêtes* de G est le graphe

$$\tilde{G} = (E;K)$$

avec $\{e_1, e_2\} \in K \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$

Autrement dit, \tilde{G} est la 2-section de l'hypergraphe G^* dual de G , privée de ses arêtes d'ordre 1.

3.2. Quatre relations

On a vu qu'à un absorbant de G on pouvait faire correspondre une couverture de l'hypergraphe $I(G)$ des images complètes de G , et qu'à un stable de G^2 on pouvait faire correspondre un couplage de ce même hypergraphe $I(G)$.

De même aux absorbants de \tilde{G} , graphe représentatif des arêtes de G , et aux stables de \tilde{G}^2 on peut faire correspondre, respectivement, des couvertures et des couplages de l'hypergraphe des images complètes de \tilde{G} , $I(\tilde{G})$ que nous noterons $J(G)$.

On a donc

$$\begin{aligned}\beta(G) &= \rho[I(G)] \\ \alpha(G^2) &= c[I(G)] \\ \beta(\tilde{G}) &= \rho[J(G)] \\ \alpha(\tilde{G}^2) &= c[J(G)]\end{aligned}$$

Ainsi le nombre de stabilité d'un graphe apparaît comme un nombre de couverture et le nombre de stabilité de son carré comme un nombre de couplage.

Nous allons présenter quatre relations entre des nombres du premier type et des nombres du deuxième type.

Soit $G = (X;E)$ un graphe.

Nous noterons \tilde{G}_s^2 le graphe $((\tilde{G}_s))^2$.

(Les opérations de subdivision (s), passage au graphe représentatif des arêtes ($\tilde{}$), élévation au carré (2) seront toujours effectuées dans l'ordre (s) ($\tilde{}$) (2).

Proposition II.7

On a les relations suivantes:

1)	$\beta(G) + \alpha(\tilde{G}_s^2) = n(G)$	soit:	$\rho[I(G)] + c[J(G_s)] = n(G)$
2)	$\beta(\tilde{G}) + \alpha(G_s^2) = n(G)$	soit:	$\rho[J(G)] + c[I(G_s)] = n(G)$
3)	$\beta(G_s) + \alpha(\tilde{G}^2) = n(G)$	soit:	$\rho[I(G_s)] + c[J(G)] = n(G)$
4)	$\beta(\tilde{G}_s) + \alpha(G^2) = n(G)$	soit:	$\rho[J(G_s)] + c[I(G)] = n(G)$

Ce que l'on peut symboliquement écrire de la manière condensée suivante:

$$\rho[H(K)] + c[H'(K')] = n(G)$$

avec

$$\{H, H'\} = \{I, J\}$$

$$\{K, K'\} = \{G, G_s\}$$

la deuxième relation est due à GUPTA [20] .

Nous allons démontrer les trois autres.

3.2.1. démonstration de l'égalité $\beta(G) + \alpha(\tilde{G}_s^2) = n(G)$

Nous avons vu que $\beta(G) + \rho''(G) = n(G)$.

Il nous suffit donc de démontrer

$$(\tilde{G}_s^2) = \rho''(G)$$

Nous allons en fait démontrer cette égalité dans le cas plus général des hypergraphes.

Rappelons que le graphe subdivisé H_s d'un hypergraphe H est le graphe biparti d'incidence sommets-arêtes associé.

soit $H = (X; E)$ un hypergraphe et H_s son graphe subdivisé.

Soit $C \subseteq E$ une couverture minimale partielle de H . C couvre un ensemble de sommets $Y \subseteq X$.

$\forall E \in C, C - \{E\}$ n'est pas une couverture de Y . Donc $\forall E \in C, \exists x \in Y : E' \in C, x \in E' \Rightarrow E' = E$.

Nous pouvons donc associer de manière bijective à chaque arête $E \in C$ un sommet que nous noterons x_E de Y tel que E est la seule arête de C contenant x_E .

Soit $Z = \{x_E, E\} \mid E \in C$.

Z est un ensemble d'arêtes de H_s vérifiant les propriétés suivantes:

- deux arêtes quelconques de Z sont non incidentes,
- aucune arête de H_s n'est incidente à deux arêtes distinctes de Z .

Z est donc un stable du graphe $((\tilde{H}_S))^2$, que nous noterons \tilde{H}_S^2 .

Réciproquement, soit Z un stable de \tilde{H}_S^2 .

Soit $C = \{E \in \mathcal{E} \mid \exists x \in X : \{x, E\} \in Z\}$

$\forall E \in C$ soit x_E le sommet unique tel que $\{x_E, E\} \in Z$

$x_E \in E$ et $E' \in C, x_E \in E' \Rightarrow E = E'$ (car Z est un stable de \tilde{H}_S^2).

Posons $Y = \bigcup_{E \in C} E$. C couvre Y de façon minimale car $\forall E, x_E$

n'appartient à aucune arête de $C - \{E\}$.

Donc C est une couverture minimale partielle de H .

En conclusion à toute couverture minimale partielle de H on sait associer un stable de \tilde{H}_S^2 de même cardinal et réciproquement.

On a donc:

$$\rho''(H) = \alpha \tilde{H}_S^2$$

Ainsi le calcul de la plus grande couverture minimale partielle d'un hypergraphe se ramène au calcul du nombre de stabilité d'un graphe. Ceci nous a permis, avec F. JAEGER, de résoudre le problème du nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe \mathcal{C} critique de rang h . (cf. chapitre V)

Pour tout graphe simple G on a ainsi démontré:

$$\beta(G) + \alpha(\tilde{G}_S^2) = n(G)$$

Cette égalité ramène le calcul du nombre d'absorption d'un graphe au calcul du nombre de stabilité d'un certain graphe associé.

Application de cette égalité

On a vu que $\beta(G) \geq \alpha(G^2)$ (Proposition II.6)

Donc en particulier $\beta(\tilde{G}_S) \geq \alpha(\tilde{G}_S^2)$

On en déduit donc:

Proposition II.8

$$\beta(G) + \alpha(\tilde{G}_S) \geq n(G)$$

On vérifie que l'égalité est obtenue en particulier pour les couplages et les cycles de longueur 3.

On a vu précédemment que:

$$\beta(G) = n(G) - \rho''(G)$$

et que $\rho''(G) = \alpha[K(G)]$ où $K(G) = (E; F)$ est l'hypergraphe de chaînes de longueur 3 et des triangles de $G = (X; E)$

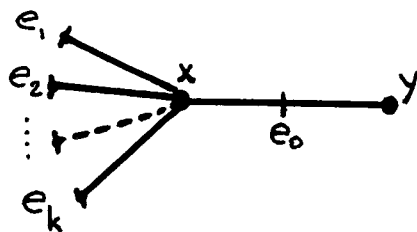
Autrement dit : $\beta(G) = n(G) - \alpha[K(G)]$

c'est-à-dire : $\beta(G) = n(G) - m(G) + \tau[K(G)]$

Ce qui donne, si $\nu[K(G)]$ désigne le cardinal maximal d'un couplage de $K(G)$:

$$\beta(G) \geq n(G) - m(G) + \nu[K(G)]$$

D'autre part, si G est un graphe sans arêtes pendantes $\alpha(\tilde{G}_S^2)$ est le cardinal d'un couplage maximum d'arêtes de G_S de la forme:



$$(e_0, e_1, \dots, e_k \in E; x, y \in X)$$

Or, à un tel couplage on peut faire correspondre un couplage de chaîne de longueur 3 de G_S . On a donc $\alpha(\tilde{G}_S^2) \leq \nu[K(G_S)]$

puisque G_S est un graphe sans triangle.

On a ainsi:

$$\beta(G_S) \geq n(G_S) - m(G_S) + \alpha(\tilde{G}_S^2)$$

puisque

$$\alpha(\tilde{G}_S^2) = n - \beta(G)$$

et sachant que:

$$n(G_S) = n(G) + m(G)$$

$$m(G_S) = 2 m(G)$$

On trouve :

Proposition II.9

$$\beta(G) = \beta(G_S) \geq 2 n(G) - m(G)$$

pour tout graphe simple G sans arêtes pendantes.

L'égalité est obtenue pour les cycles de longueur multiple de 3.

- Si δ désigne le degré minimum de G on a:

$$\alpha(\tilde{G}_S^2) \leq \frac{2 m(G)}{\delta+1}, \text{ d'où}$$

Proposition II.10

$$\beta(G) \geq n(G) - \frac{2 m(G)}{\delta+1}$$

3.2.2. démonstration de l'égalité $\beta(G_S) + \alpha(\tilde{G}_S^2) = n(G)$

a) couplages forts

Rappelons qu'un *couplage fort* d'un graphe simple G est un ensemble d'arêtes disjointes (c'est-à-dire un couplage) tel que deux sommets quelconques appartenant à deux arêtes différentes de cet ensemble sont non adjacents.

Proposition:

L'ensemble des stables de \tilde{G}^2 est égal à l'ensemble des couplages forts de G .

$\alpha(\tilde{G}^2)$ représente donc la cardinalité maximum d'un couplage fort de G .

b) pseudo déficience

$\forall A \subseteq X$ nous appellerons *pseudo déficience* de A la quantité:

$$d(A) = |S(E_A)| - |E_A|$$

Autrement dit, c'est la différence entre le nombre de sommets non isolés de G_A et le nombre d'arêtes de G_A .

Nous poserons $d(G) = \max_{A \subseteq X} d(A)$

c) lemme

$$\alpha(\tilde{G}^2) = d(G)$$

En effet:

$\alpha)$ soit $A \subseteq X$ avec $d(A) = d(G)$ et comportant un nombre minimum de sommets pour cette propriété.

- il est clair que G_A ne comporte pas de sommets isolés: $S(E_A) = A$

- supposons que $\exists a \in A$ de degré supérieur ou égal à 2 dans G_A .

Soit $a' \in A$ adjacent à a dans G_A .

Si a' est de degré 1 dans G_A posons $A' = A - \{a'\}$ d'où $E_{A'} = E_A - \{(a, a')\}$

$S(E_{A'}) = S(E_A) - \{a'\}$ puisque a est de degré supérieur ou égal à 2.

On a donc $d(A') = d(A) = d(G)$.

La minimalité de A pour la propriété $d(A) = d(G)$ entraîne une contradiction.

Donc tous les sommets adjacents à a dans G_A sont de degré supérieur ou égal à 2 dans G_A .

Posons alors $A' = A - \{a\}$

On a alors $|E_{A'}| \leq |E_A| - 2$ et $S(E_{A'}) = S(E_A) - \{a\}$

On en déduit que $d(A') > d(A) = d(G)$ ce qui est en contradiction avec la définition de $d(G)$.

Donc G_A n'admet ni sommets isolés, ni sommets de degré supérieur ou égal à 2. E_A est donc un couplage fort C et l'on a $|S(E_A)| - |E_A| = |C|$.

Il existe donc un couplage fort C de G tel que $|C| = d(G)$.

β) Réciproquement, soit C un couplage fort de G . Soit $A = S(C)$.

$$E_A = C ; S(E_A) = S(C) = A ; |A| = 2 |C|$$

$$\text{Donc } d(A) = |C|$$

$$\text{On a donc } |C| \leq d(G).$$

d) liaison avec la subdivision de $G = (X;E)$

α) Soit Z un stable maximal de G_S .

$$Z = A \cup F \text{ avec } A \subseteq X, F \subseteq E, A \cap S(F) = \emptyset$$

. si $\exists b \in [X - S(F)] - A$, $Z' = Z \cup \{b\}$ est un stable de G_S et l'on aboutit à une contradiction. On a donc $A = X - S(F)$.

. si $\exists e \in E_{S(F)} - F$, $Z' = Z \cup \{e\}$ est un stable de G_S et l'on aboutit à une contradiction. Donc $F = E_{S(F)}$.

$$\text{En conclusion } Z = [X - S(F)] \cup E_{S(F)}$$

$$\text{Posons } B = S(F)$$

$$\text{On a } Z = [X - S(E_B)] \cup E_B$$

β) Réciproquement soit $B \subseteq X$

$$\text{Posons } Z = [X - S(E_B)] \cup E_B$$

Z est un stable de G_S qui est évidemment maximal.

γ) Donc l'ensemble des stables maximaux de G_S est égal à l'ensemble des parties de la forme

$$[X - S(E_B)] \cup E_B \quad \text{où} \quad B \subseteq X .$$

δ) En particulier si $\alpha'(G_S)$ désigne le cardinal minimum d'un stable maximal de G_S :

$$\begin{aligned} \alpha'(G_S) &= \min_{B \subseteq X} (|X - S(E_B)| + |E_B|) \\ &= |X| - \max_{B \subseteq X} (|S(E_B)| - |E_B|) \\ &= |X| - d(G) \end{aligned}$$

On a donc finalement:

$$\alpha'(G_S) = n(G) - \alpha(\tilde{G}^2)$$

e) étude du nombre d'absorption de G_S

Soit $G = (X; E)$ un graphe simple et $G_S = (X \cup E; F)$ sa subdivision.

Supposons que $\beta(G_S) < \alpha'(G_S)$

Soit A l'ensemble des absorbants de G_S de cardinal minimum $\beta(G_S)$.

Soit $A_0 \in A$ tel que $|F_{A_0}| = \min_{A \in A} |F_A| = p$, c'est-à-dire tel que le graphe

$G_{S_{A_0}}$ engendré par A_0 comporte un nombre minimum d'arêtes.

Puisque $\beta(G_S) < \alpha'(G_S)$ on a $p \geq 1$. Soit donc $\{x, e\}$ ($x \in X, e \in E$) une arête de $G_{S_{A_0}}$.

Puisque A_0 est un absorbant minimal de G_S , $\exists y \in X$ absorbé uniquement par e .

Soit $A'_0 = A_0 - \{e\} \cup \{y\}$.

Il est clair que A'_0 est un absorbant de G_S de cardinal $\beta(G_S)$. Le graphe $G_{S_{A'_0}}$ engendré par A'_0 comporte $p-1$ arête. On aboutit ainsi à une contra-

diction. Donc pour tout graphe G : $\beta(G_S) = \alpha'(G_S)$

f) conclusion

On obtient finalement l'égalité

$$\beta(G_S) + \alpha(\tilde{G}^2) = n(G)$$

3.2.3. démonstration de l'égalité $\beta(\tilde{G}_S) + \alpha(G^2) = n(G)$

GUPTA a démontré (cité dans [22] page 97)

$$\beta(\tilde{G}) = \alpha'(\tilde{G})$$

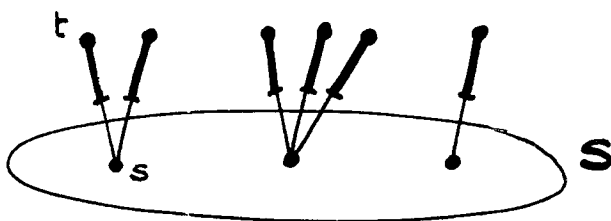
Il nous suffit donc de démontrer:

$$\alpha'(\tilde{G}_S) + \alpha(G^2) = n(G)$$

$\alpha'(\tilde{G}_S)$ est le cardinal minimum d'un stable maximal de \tilde{G}_S . C'est donc le cardinal minimum d'un couplage maximal de G_S .

a) Soit $S \subseteq X$ un stable de G^2 de cardinal maximum.
Soit C le couplage de G_S ainsi défini:

$$C = \{t, e\} \mid e = \{s, t\} \in E, s \in S$$



Ce couplage C est inclus dans un couplage maximal C' tel que $\forall c \in C', c \cap S = \emptyset$.

On a donc $|C'| \leq |X-S|$

D'où $\alpha'(\tilde{G}_S) + \alpha(G^2) \leq n(G)$.

b) Soit maintenant C un couplage maximal de G_S de cardinal minimum.

Soit $S = \{s \in X \mid \forall e \in E, \{s, e\} \notin C\}$

On a $|S| = |X| - |C| = n(G) - \alpha'(\tilde{G}_S)$

Or S est un stable de G^2 .

En effet, soit $s, t \in S$.

- $\{s, t\} = e \notin E$ sinon $C \cup \{s, e\}$ serait un couplage ce qui est impossible car C est un couplage maximal.

- $\nexists u \in X$ tel que $\{s, u\} = e \in E$

et $\{t, u\} = f \in E$

sinon soit $\{u, e\} \notin C$, soit $\{u, f\} \notin C$

par exemple $\{u, e\} \notin C$

Par suite $C \cup \{s, e\}$ serait un couplage, ce qui est impossible.

- S est donc un stable de G^2 ; et par suite

$$\alpha(G^2) \geq |S| = n(G) - \alpha'(\tilde{G}_S)$$

c) En conclusion $\alpha'(\tilde{G}_S) + \alpha(G^2) = n(G)$

soit

$$\beta(\tilde{G}_S) + \alpha(G^2) = n(G)$$

4.- GRAPHES β - PARFAIT

Nous avons vu que pour un graphe G , $\beta(G) \leq \alpha'(G)$.

D'autre part, nous avons trouvé deux classes de graphes (les graphes bipartites et les graphes subdivisés) pour lesquels le nombre d'absorption β est égal au cardinal minimal α' d'un ensemble d'absorption maximal.

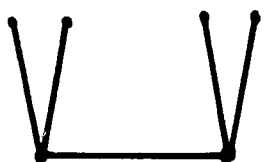
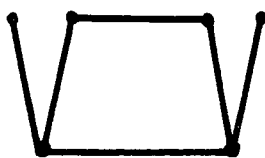
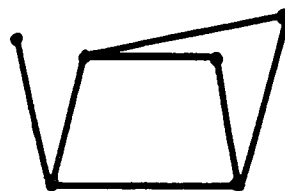
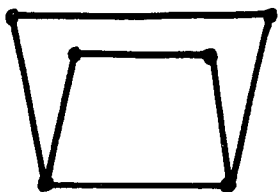
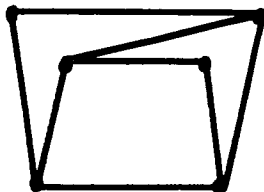
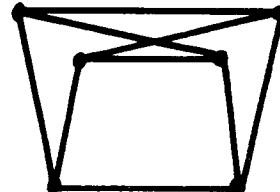
Par analogie avec les graphes α ou γ - parfait défini par (1) on peut définir les graphes β - parfait.

Définition

Un graphe $G = (X;E)$ sera dit β - *parfait* si et seulement si $\forall A \subseteq X$: $\beta(G_A) = \alpha'(G_A)$.

On peut démontrer le résultat suivant:

Soit les graphes $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$:

 G_1  G_2  G_3  G_4  G_5  G_6

Proposition II.11

- 1 - Si un graphe G n'a pas de sous-graphe isomorphe à $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ il est β -parfait.
- 2 - Si un graphe B est β -parfait il n'a pas de sous-graphe isomorphe à G_1, G_2, G_3, G_6 .

Corollaire:

Les graphes subdivisés et les graphes sans sous-graphe isomorphe à $K_{1,3} = (x, y, z, t ; xy, xz, xt)$ sont β -parfait.

[2]

BEINEKE ayant caractérisé les graphes représentatifs des arêtes de graphes par 9 sous-graphes exclus dont $K_{1,3}$, on peut en déduire que les graphes représentatifs des arêtes de graphes sont β -parfait.

Remarque:

Le résultat précédent peut être amélioré sensiblement mais pas, toutefois, de manière déterminante: il semble en effet que l'on ne puisse pas caractériser les graphes β -parfait par un nombre fini de sous-graphes exclus.

5.- SUR UNE CONJECTURE DE VIZING CONCERNANT LE NOMBRE D'ABSORPTION
DE LA SOMME CARTESIENNE DE DEUX GRAPHES

5.1. Définition

On appelle *somme cartésienne* de deux graphes $G = (X;E)$ et $H = (Y;F)$ le graphe $G + H$ dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien $X \times Y$ et où deux sommets xy et $x' y' \in X \times Y$ sont adjacents si et seulement si:

$$(x = x' \text{ et } \{y, y'\} \in F) \quad \text{ou} \quad (y = y' \text{ et } \{x, x'\} \in E).$$

5.2. Borne supérieure de $\beta(G + H)$

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ un absorbant minimum A de G , l'ensemble $\{x_i y_j \mid x_i \in A \text{ et } y_j \in Y\}$ est un absorbant de $G + H$.

On a donc [68]

$$\beta(G + H) \leq \beta(G) \cdot n(H)$$

et de même

$$\beta(G + H) \leq n(G) \cdot \beta(H)$$

5.3. Borne inférieure de $\beta(G + H)$

$$\beta(G + H) \geq \min (n(G), n(H))$$

En effet,

Soit $A = \{x_i y_j\}$ un absorbant de $G + H$

Supposons que $\{y_j \mid \exists x_k y_j \in A\} \neq Y$, c'est-à-dire que $\exists y_1 \in Y$ tel que $\nexists k : x_k y_1 \in A$. $\forall x \in X, xy_1 \in X \times Y$ ne peut être absorbé que par un sommet $x y_m \in A$ tel que $\{y_1 y_m\} \in F$.

Donc $\{x_i \mid \exists x_i y_j \in A\} = X$.

De plus, $\{y_i \mid \exists x_i y_j \in A\}$ est un absorbant de H et par suite:

Proposition II.12

$$\beta(G + H) \geq \min \{ \max(n(G), \beta(H)), \max(\beta(G), n(H)) \}$$

. VIZING a conjecturé [68]:

$$\beta(G + H) \geq \beta(G) \cdot \beta(H)$$

Nous avons vu précédemment (propositions II.3 et II.6) deux bornes inférieures pour le nombre d'absorption d'un graphe simple G:

$$\alpha(G^2) \text{ et } \frac{n(G)}{\Delta(G) + 1} \quad \text{où } \Delta(G) \text{ désigne le degré maximum du graphe G.}$$

On peut donc conjecturer:

$$\beta(G + H) \geq \alpha(G^2) \cdot \beta(H)$$

$$\beta(G + H) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G) + 1} \cdot \beta(H)$$

C'est ce que nous allons démontrer maintenant.

. Soit $A = \{x_i y_j\}$ un absorbant de $G + H$, de cardinal minimal.

Soit $x \in X$.

Soit $x^* = \{x' \in X \mid \{x x'\} \in E\} \cup \{x\}$ l'image complète de x ;

Soit $B_x = \{y_j \in Y \mid x_i y_j \in A \text{ et } x_i \in x^*\}$, B_x est un absorbant de H .

En effet,

$\forall y_i \in Y$, $x y_i \in X \times Y$ ne peut être absorbé dans $G + H$ que par $x y_j$ avec $\{y_i, y_j\} \in F$ ou $y_j = y_i$ ou par $x' y_i$ avec $\{x, x'\} \in E$ donc $x' \in x^*$.

Soit S un ensemble maximum d'images complètes disjointes (au sens des sommets) dans G .

On a $\beta(G + H) \geq |S| \cdot \beta(H)$, or, $|S| = \alpha(G^2)$.

On a donc: $\beta(G + H) \geq \alpha(G^2) \cdot \beta(H)$ et par

symétrie: $\beta(G + H) \geq \beta(G) \cdot \alpha(H^2)$

C'est-à-dire:

Proposition II.13

$$\beta(G+H) \geq \max \{ \alpha(G^2) \cdot \beta(H), \beta(G) \cdot \alpha(H^2) \}$$

Remarque

Si l'un des deux graphes, G ou H , est tel que son nombre d'absorption est égal au nombre de stabilité de son carré, la somme cartésienne $G + H$ vérifie la conjecture de VIZING.

C'est le cas, on l'a vu, des graphes de circonférence inférieure ou égale à 3.

. Soit $A = \{x_i, y_j\}$ un absorbant du graphe $G + H$ de cardinal minimal.

A chaque sommet $x \in X$ associons comme précédemment

$$B_x = \{y_j \mid x_i, y_j \in A \text{ et } x_i \in x^*\} \quad (|B_x| \geq \beta(H))$$

$\forall x \in X$, x appartient à $|x^*| = d_x + 1$ images complètes de G (d_x est le degré de x dans G), or, $d_x + 1 \leq \Delta(G) + 1$

On a donc:

$$|A| \geq \frac{\sum_{x \in X} |B_x|}{\Delta(G) + 1}$$

$$\beta(G + H) \geq \frac{n(G) \cdot \beta(H)}{\Delta(G) + 1}$$

et par symétrie:

$$\beta(G + H) \geq \frac{n(H) \cdot \beta(G)}{\Delta(H) + 1}$$

ce qui donne bien:

Proposition II.14

$$\beta(G + H) \geq \max \left[\frac{n(G)}{\Delta(G) + 1} \cdot \beta(H), \beta(G) \cdot \frac{n(H)}{\Delta(H) + 1} \right]$$

6.- UNE INEGALITE DU TYPE NORDHAUS-GADDUM

Soit $G = (X;E)$ un graphe simple.

Soit $\mathcal{P}_2(X)$ l'ensemble des parties de X de cardinal 2.

Nous appellerons graphe complémentaire de G le graphe simple $\bar{G} = (X;\bar{E})$ où $\bar{E} = \mathcal{P}_2(X) - E$.

Soit p un paramètre d'un graphe G : par exemple nombre de stabilité, nombre chromatique, diamètre, etc...

Une relation donnant des bornes de $p(G) + p(\bar{G})$ ou $p(G) \cdot p(\bar{G})$ sera dite du type NORDHAUS-GADDUM. (cf. [8] et [37])

Si la conjecture de VIZING est vérifiée on a:

$$\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) \leq \beta(G + \bar{G}) \text{ pour tout graphe simple } G.$$

Il est facile de vérifier que $\beta(G + \bar{G}) = n(G)$.

Il est donc logique de conjecturer:

$$\beta(G) \beta(\bar{G}) \leq n(G)$$

Avec F.JAEGER nous avons démontré une proposition plus forte [cf. Annexe 1]

Proposition II.15 [50]

"On peut partitionner les sommets d'un graphe simple G en $\beta(G)$ absorbants de \bar{G} . (Et donc en $\beta(\bar{G})$ absorbants de G)".

7. QUELQUES BORNES SUPERIEURES DU NOMBRE D'ABSORPTION [54]

Soit $G = (X; E)$ un graphe simple.

Nous noterons: $n = |X|$; $m = |E|$

$$\delta = \min_{x \in X} |\Gamma x| \quad ; \quad \Delta = \max_{x \in X} |\Gamma_x|$$

$c(G)$ désignera le cardinal maximal d'un couplage du graphe G .

On a pour $\beta(G)$ un certain nombre de bornes supérieures évidentes:

$$\beta(G) \leq \alpha'(G) \quad ; \quad \beta(G) \leq c(G)$$

VIZING a montré que [70]:

$$\beta(G) \leq n(G) + 1 - \sqrt{1 + 2m(G)}.$$

Mais cette dernière borne n'est atteinte, si $\beta(G) > 2$, que pour les graphes ayant des sommets isolés.

Elle est donc assez mauvaise pour des graphes réguliers ou presque réguliers.

Au paragraphe précédent, nous venons de voir que $\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) \leq n$ (proposition II.15).

Cette borne est atteinte $\forall n$ pour $\beta(G)$ (ou $\beta(\bar{G})$) = 1 ou 2. Mais l'est-elle si $\beta(G) > 2$ et $\beta(\bar{G}) > 2$?

On peut montrer que $\forall k$ et ℓ entiers, il existe un graphe G tel que $\beta(G) = k$ et $\beta(\bar{G}) = \ell$: G est formé d'un stable à $(\ell-1) \cdot k$ sommets, d'une clique à $\ell-1$ sommets. Chaque sommet de la clique étant relié aux $\ell-1$ sommets $(\ell-1) \cdot k$ d'une $(\ell-1)$ partie du stable.

Mais pour un tel graphe G le nombre de sommets est très grand devant $k \cdot \ell$.

L'objet de ce paragraphe est de donner en fonction de certains paramètres (n, δ, Δ, c) , des bornes supérieures pour $\beta(G)$, $\beta(\bar{G})$ et pour certaines fonctions de $\beta(G)$, $\beta(\bar{G})$.

L'étude de $\beta(G) \cdot \beta(\bar{G})$ et de $\min[\beta(G), \beta(\bar{G})]$ nous a été suggérée par ERDOS[11].

Proposition II.16

Soit $G = (X; E)$ un graphe simple tel que $\beta(G) \geq 2$. et $\beta(\bar{G}) \geq 2$. On a:

$$\beta(G) \leq c(\bar{G}).$$

Démonstration

Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\beta\}$ un absorbant minimum de G .

Soit une partition P de X en $\beta(G)$ absorbants de \bar{G}

$$P = \{B_1, B_2, \dots, B_\beta\} \text{ telle que}$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, \beta\}$ $\{a_i\}$ est un absorbant de G_{B_i} .

Une telle partition existe [cf. Annexe 1].

$$\forall B_i \in P \quad |B_i| \geq 2.$$

$\forall B_i, B_j \in P \mid B_i \neq B_j$, on a:

$$\forall x_i \in B_i \quad \exists x_j \in B_j \mid \{x_i, x_j\} \notin E$$

Donc, $\exists x_i, y_i \in B_i \mid x_j, y_j \in B_j \mid \{x_i, x_j\} \notin E$ et $\{y_i, y_j\} \notin E$.

En effet: soit $x_i \in B_i$ non adjacent (dans G) à $x_j \in B_j$. Soit $y_i \in B_i$.

Si x_j n'est pas le seul sommet de B_j non adjacent (dans G) à y_i , la propriété est démontrée.

Sinon, soit $y_j \in B_j$ ($y_j \neq x_j$) et soit $z_i \in B_i$ non adjacent (dans G) à y_j .

Si $z_i = y_i$, $\{x_i, x_j\}$ et $\{y_i, y_j\}$ constituent un couplage de \bar{G} .

Sinon, $\{y_i, x_j\}$ et $\{z_i, y_j\}$ constituent un couplage de \bar{G} .

Ceci permet de démontrer le théorème pour $\beta = 2$.

D'autre part, $\beta(G_X - \{B_i \cup B_j\}) = \beta(G) - 2$.

Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas $\beta(G) = 3$ pour le démontrer par récurrence dans le cas général.

Soit donc $G = (X; E)$ tel que X soit partitionné en trois absorbants de \bar{G} : B_1, B_2, B_3 . Deux blocs quelconques B_i et B_j étant reliés par deux arêtes disjointes de \bar{G} , si $c(\bar{G}) < 3$, on peut voir que \bar{G} est nécessairement formé de deux triangles disjoints. On a donc $\beta(G) = 2$ ce qui est impossible.

Remarque:

Cette borne est atteinte $\forall \beta(G)$ si $\beta(\bar{G}) = 2$, par exemple pour les graphes G formés de $\beta(G)$ arêtes disjointes).

Proposition II.17

Soit $G = (X; E)$ est un graphe tel que $\beta(\bar{G}) \geq 3$.

On a:

$$\beta(G) + \beta(\bar{G}) \leq \delta + 3$$

Démonstration:

Soit un sommet $x \in X$ de degré δ .

$\{x\} \cup \Gamma(x)$ est un absorbant de \bar{G} donc $\delta \geq \beta(\bar{G}) - 1$.

Soit $B \subset \Gamma(x) \mid |B| = \beta(\bar{G}) - 3$.

Soit $A = \Gamma(x) - B$.

$\forall z \in X$ soit $Z = \{x\} \cup \{z\} \cup B$.

$|Z| \leq \beta(\bar{G}) - 1$. Z n'est donc pas un absorbant de \bar{G} . Il existe un sommet

$a \notin Z$ tel que $\forall b \in Z : \{ab\} \in E$. Donc en particulier $\{ax\} \in E$ et par suite $a \in A$.

A est donc un absorbant de G .

D'où $\beta(G) \leq |A| = \delta + 3 - \beta(G)$.

Proposition II.18

Soit $G = (X; E)$ un graphe simple sans sommets isolés à n sommets, de degré minimum δ .

On a:

$$\beta(G) \leq \left\lceil \frac{n+1-\delta}{2} \right\rceil$$

Démonstration

Soit $x \in X$ de degré δ .

Soit $B' = X - (\{x\} \cup \Gamma(x))$.

Soit C l'ensemble des sommets isolés de $G_{B'}$.

$$(C = \{c \in X \mid \Gamma(c) = \Gamma(x)\})$$

Soit $B = B' - C$.

Soit A un absorbant minimum de G_B .

$$|A| \leq \frac{|B|}{2} \text{ puisque } G_B \text{ est sans sommets isolés.}$$

Soit $y \in \Gamma(x)$.

1°/ Si $C = \emptyset$

$A \cup \{x\}$ est un absorbant de G et l'on a:

$$\beta(G) \leq |A| + 1 \leq \frac{|B|}{2} + 1 = \frac{n-1-\delta}{2} + 1 = \frac{n+1-\delta}{2}$$

$$\beta(G) \leq \frac{n+1-\delta}{2} \leq \left\lceil \frac{n+1-\delta}{2} \right\rceil$$

2°/ Si $C \neq \emptyset$

$A \cup \{x\} \cup \{y\}$ est un absorbant de G .

$$\beta(G) \leq |A| + 2 \leq \frac{n-1-\delta-|C|}{2} + 2 = \frac{n+2-\delta}{2}$$

$$\beta(G) \leq \left\lceil \frac{n+2-\delta}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1-\delta}{2} \right\rceil$$

Remarque:

Un raisonnement plus précis permet de montrer que la borne n'est atteinte que pour les graphes G dont toutes les composantes connexes sont des 4-cycles ou tels que \bar{G} est un couplage.

Pour tous les autres graphes on a:

$$\beta(G) \leq \frac{n+1-\delta}{2}$$

Remarque:

Pour les graphes réguliers, cette borne est meilleure que celle donnée par la formule de VIZING et ceci d'autant plus que le degré est petit.

Proposition II.19

Soit G un graphe simple tel que $\beta(\bar{G}) \geq 3$.

On a:

$$\beta(G) + 2(\beta(\bar{G}) - 3) \leq \Delta.$$

Démonstration

Soit un graphe simple $G = (X; E)$.

Soit A, B, C définis comme à la proposition précédente.

On a: $|A| \geq \beta(G) - 2$.

Soit $D \subset A$ tel que $|D| = \beta(G) - 3$.

Soit \tilde{D} l'ensemble des sommets de G_B absorbés par D .

Soit $K = B - \tilde{D}$.

$K \cup C$ est un absorbant de \bar{G} sinon il existerait $t \in X$ relié à tous les sommets de $K \cup C$ et par suite $D \cup \{x\} \cup \{t\}$ serait un absorbant de G de cardinal inférieur ou égal à $\beta(G) - 1$ ce qui est impossible.

On a donc: $\beta(\bar{G}) \leq |K \cup C| = n-1-\delta-|\tilde{D}|$

Or $|\tilde{D}| \geq 2|D| = 2(\beta(G) - 3)$, d'où $\beta(\bar{G}) \geq n-1-\delta-2(\beta(G)-3)$

On a donc: $\beta(\bar{G}) + 2(\beta(G) - 3) \leq n-1-\delta$

C'est-à-dire en passant au graphe complémentaire:

$$\beta(G) + 2[\beta(\bar{G}) - 3] \leq \Delta$$

Remarque:

Un raisonnement plus précis permet de montrer que, si $\beta(\bar{G}) > 3$, on a:

$$\beta(G) + 2[\beta(\bar{G}) - 3] \leq \Delta - 1.$$

Proposition II.20

Soit $G = (X;E)$ un graphe simple.

On a:

$$\beta(\bar{G}) \leq \delta \left(\frac{\Delta-1}{n-1} \right) + 2$$

Démonstration

Soit $x \in X$ de degré minimum δ .

Soit $A = \{x\} \cup \Gamma\{x\}$.

$\forall t \in \Gamma(x), |\Gamma(t) \cap (X - A)| \leq \Delta - \beta(\bar{G}) + 1.$

En effet, $\{x\} \cup \{t\} \cup (\Gamma(x) \cap \Gamma(t))$ est un absorbant de \bar{G} .

$\forall y \in X - A, |\Gamma(y) \cap \Gamma(x)| \geq \beta(\bar{G}) - 2.$

En effet, $\{x\} \cup \{y\} \cup (\Gamma(x) \cap \Gamma(y))$ est un absorbant de \bar{G} .

On a donc:

$$(\Delta - \beta(\bar{G}) + 1) \cdot |\Gamma x| \geq (\beta(\bar{G}) - 2) \cdot |X - A|$$

$$(\Delta - \beta(\bar{G}) + 1) \cdot \delta \geq (\beta(\bar{G}) - 2) \cdot (n - \delta - 1)$$

$$\delta \cdot (\Delta - 1) \geq (\beta(\bar{G}) - 2) \cdot (n - 1)$$

Lemme

Soit $G = (X;E)$ un graphe simple à n sommets de degré minimum δ .

Soit $k = \frac{\delta+1}{n}$

$\forall Y \subseteq X, \exists x \in X$ qui permet d'absorber au moins $\lceil k \cdot |Y| \rceil$ sommets de Y .

Démonstration

Soit $Y \subseteq X ; |Y| = p$

Si la propriété est fautive: $\forall y \in Y |\Gamma(y) \cap Y| < pk - 1$

D'où $|\Gamma(y) \cap (X - Y)| > \delta + 1 - pk$

$\forall z \in X - Y |\Gamma(z) \cap Y| < pk$

On a donc: $p \cdot (\delta + 1 - pk) < (n - p) \cdot p \cdot k$

$\delta + 1 < k \cdot n$ ce qui est en contradiction avec la définition de k .

Proposition II.21

Soit $G = (X;E)$ un graphe simple à n sommets de degré minimum δ .

$$\text{Soit } k = \frac{\delta+1}{n}$$

On a:

$$\beta(G) \leq \frac{\log k n}{\log\left(\frac{1}{1-k}\right)} + \frac{1}{k}$$

Corollaire

$$\beta(G) \leq \frac{\log n}{\log\left(\frac{1}{1-k}\right)} + 1$$

Démonstration

On construit un absorbant de G de la façon suivante:

Soit x_1 un sommet quelconque

x_1 absorbe au moins $k.n$ sommets de G

$\exists x_2$ qui absorbe (au moins) $k.n(1-k)$ sommets des $n(1-k)$ sommets non absorbés par x_1

$\exists x_3$ qui absorbe (au moins) $k.n(1-k)$ sommets des $n(1-k)^2$ sommets non absorbés par x_1 et x_2

.....

$\exists x_{i+1}$ qui absorbe (au moins) 1 sommet des r sommets restants ($k.n(1-k)^i \leq 1$; $r \leq \frac{1}{k}$)

.....

$\exists x_{i+r}$ qui absorbe le dernier sommet restant.

Ceci donne le résultat.

Remarque 1

On peut évidemment améliorer ce résultat en choisissant pour x_1 un sommet de degré maximum Δ .

Remarque 2

Soit $G = (X; E)$ $\frac{\delta+1}{n} = k$.

$\forall Y \subseteq X \quad \exists x \in X$ qui permet d'absorber (au moins) $\max [(\beta(\bar{G})-1), k \cdot |Y|]$ sommets de Y .

Ceci donne:

$$\beta(G) \leq \frac{\log kn - \log(\beta(\bar{G}) - 1)}{\log\left(\frac{1}{1-k}\right)} + \frac{1}{k}$$

Remarque 3

Les deux remarques précédentes donnent immédiatement:

$$\beta(G) \leq \left\lceil \frac{n-\Delta-1}{\beta(\bar{G})-1} \right\rceil + 1$$

Ce qui donne en passant au graphe complémentaire:

$$\beta(\bar{G}) - 1 \leq \left\lceil \frac{\delta}{\beta(G) - 1} \right\rceil$$

ou, ce qui est équivalent:

$$\beta(G) - 1 \quad (\beta(\bar{G}) - 2) \leq \delta - 1$$

Comparaison de ces résultats avec la formule de VIZING

Les bornes données par les propositions II.18. et II.21. n'ont de valeur que lorsque le degré minimum est significatif, c'est-à-dire dans le cas des graphes pas trop irréguliers.

Nous allons comparer ces bornes avec la formule de VIZING dans le cas des graphes réguliers.

Voici à titre d'exemple les résultats pour $n = 100$ et pour différentes valeurs du degré d .

Bornes supérieures de $\beta(G)$ pour $n = 100$

d	borne prop. II. 18	borne prop. II.21	Min (bornes prop. II.18 & II.21)	borne de VIZING
1	50	84 (75)	50	90
2	50	70 (60)	50	86
4	48	51 (45)	48 (45)	80
9	46	32 (28)	32 (28)	70
19	41	18 (17)	18 (17)	57
39	31	10 (9)	10 (9)	38
79	11	4 (3)	4 (3)	12
99	1	1	1	1

Les chiffres entre parenthèses indiquent les résultats obtenus en tenant compte du fait que l'on travaille sur des entiers.

Etude de $\beta(G)$, $\beta(\bar{G})$ et de $\min[\beta(G), \beta(\bar{G})]$

Proposition II.22

Soit G un graphe à n sommets:

Si $\beta(\bar{G}) \geq 3$ alors $\beta(G) \leq \sqrt{n \ln n+1}$

($\ln n$ désigne le logarithme népérien de n).

Démonstration

Posons $\sqrt{n \ln n+1} = f(n)$ et supposons la proposition fautive.

On a $\beta(G) > f(n)$ et donc $\delta(G) > f(n)$ d'après la proposition II.17.

$$f(n) < \beta \leq \frac{\ln n}{-\ln(1 - \frac{\delta+1}{n})} + 1 \quad (\text{proposition II.21})$$

$$f(n) < \frac{n \ln n}{\delta+1} + 1 < \frac{n \ln n}{f(n)+1} + 1$$

$$f(n) \cdot (f(n) + 1) < n \ln n + f(n) + 1$$

$$[f(n)]^2 < n \ln n + 1$$

On aboutit ainsi à une contradiction. □

Corollaire

Si $\beta(G) = 3$ (ou $\beta(\bar{G}) = 3$) pour n suffisamment grand ($n > 30$) il n'existe pas de graphes G à n sommets tel que $\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) = n$.

Proposition II.23

$$\beta(G) \beta(\bar{G}) + (\beta(G) - 3) (\beta(\bar{G}) - 3) \leq n$$

Par suite il n'existe pas de graphes G à n sommets avec $\beta(G)$ et $\beta(\bar{G}) \geq 4$ tels que $\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) = n$.

Démonstration

On a vu que $(\beta(G) - 1) (\beta(\bar{G}) - 2) \leq \delta(G) - 1$ (proposition II.21, remarque 3)

Ce qui donne pour le graphe \bar{G} :

$$(\beta(\bar{G}) - 1) (\beta(G) - 2) \leq \delta(\bar{G}) - 1$$

On a donc:

$$\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) + (\beta(G) - 3) \cdot (\beta(\bar{G}) - 3) \leq \delta(G) + \delta(\bar{G}) + 3$$

Pour $\delta(G) + \delta(\bar{G}) \leq n(G) - 3$ la proposition est démontrée.

Des raisonnements particuliers pour les cas $\delta(G) + \delta(\bar{G}) = n-2$ et $\delta(G) + \delta(\bar{G}) = n-1$ permettent d'achever la démonstration.

Proposition II.24

Pour les graphes réguliers de degré d on a:

$$\text{Min } (\beta(G) , \beta(\bar{G})) \leq \frac{\log(d+1)}{\log 2} + 1$$

$$\text{Min } (\beta(G) , \beta(\bar{G})) \leq \frac{\log(n+1)}{\log 2}$$

Démonstration

Il suffit de considérer parmi G et \bar{G} le graphe, par exemple G , qui a le degré le plus faible.

On construit alors un absorbant $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ du graphe complémentaire \bar{G} de la façon suivante:

- soit x_1 un sommet quelconque qui absorbe $d(\bar{G})+1$ sommets
- $\exists x_2 \in X$ qui absorbe plus de la moitié des $d(G)$ sommets non absorbés par x_1 .
- $\exists x_3 \in X$ qui absorbe plus de la moitié des sommets non absorbés par x_1, x_2 .
- ...
- $\exists x_k \in X$ qui absorbe le ou les deux sommets non absorbés par x_1, x_2, \dots, x_{k-1} . □

Pour les graphes quelconques on utilise les remarques 1 et 2 de la proposition II.21.

On a vu que

$$\beta(G) \leq f(n, \delta, \beta(\bar{G})) = \frac{\log k n - \log(\beta(\bar{G}) - 1)}{\log\left(\frac{1}{1-k}\right)} + \frac{1}{k}$$

$$\text{avec } k = \frac{\delta+1}{n}$$

La fonction $f(n, \delta, \beta(\bar{G}))$ est décroissante en δ et en $\beta(\bar{G})$.

Ainsi il suffit de considérer les graphes G tels que

$$\delta(G) + \Delta(G) = n-1, \text{ et l'on obtient le résultat suivant:}$$

Proposition II.25

$$\text{Min}[\beta(G), \beta(\bar{G})] \leq \max_{1 \leq d \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left[\max_{x|X} \left(\frac{\log(d+1) + \log d - \log n - \log(x-1)}{1 - \frac{d+1}{n}} + \frac{n}{d+1} + 1 \right) \right]$$

Formule dont on peut donner l'approximation suivante:

$$\text{Min}[\beta(G), \beta(\bar{G})] \leq \lceil (1, 2 \sqrt{n}) \rceil + 1$$

Lemme

Soit un graphe $G = (X; E)$. $|X| = n$

$\forall Y \subseteq X, \exists x \in X$ qui peuvent absorber au moins $k|Y|$ sommets de Y ,

$$\text{avec } k = \frac{1}{n} \beta(\bar{G}) - 1.$$

Démonstration

Soit $Y \subseteq X$. Posons $|Y| = p$.

$\forall Z \subseteq Y, |Z| = \beta(\bar{G}) - 1, \exists x \in X$ relié à tous les sommets de Z (on dira que x domine Z).

Or Y contient $\binom{p}{\beta(\bar{G})-1}$ ensembles de cardinal $\beta(\bar{G})-1$.

Si tous les sommets de X sont reliés à moins de kp sommets de Y, tout sommet de X domine moins de $\binom{kp}{\beta(\bar{G})-1}$ parties de Y de cardinal $\beta(\bar{G})-1$.

On a donc $n \cdot \binom{kp}{\beta(\bar{G})-1} > \binom{p}{\beta(\bar{G})-1}$

Ce qui donne $k > \frac{1}{n} \beta(\bar{G})-1$

et l'on aboutit ainsi à une contradiction. □

On peut utiliser ce lemme pour donner de nouvelles bornes de $\text{Min}(\beta(G), \beta(\bar{G}))$ et de $\beta(G) \cdot \beta(\bar{G})$.

On obtient ainsi les deux propositions suivantes:

Proposition II.26

Pour tout graphe simple G on a:

$$\text{Min} (\beta(G), \beta(\bar{G})) < c \ln n + 1$$

avec $c = 1,763223$

Démonstration

Le résultat étant évident pour $n \leq 3$, nous supposons $n \geq 4$.

$$\text{On a: } \beta(G) \leq \frac{\log k n - \log (\beta(\bar{G}) - 1)}{\log \left(\frac{1}{1-k}\right)} + \frac{1}{k}$$

$$\text{avec } k = \frac{1}{n} \beta(\bar{G}) - 1$$

$$\beta(G) < \frac{\ln kn - \ln(\beta(\bar{G}) - 1)}{k} + \frac{1}{k}$$

On a donc, puisque cette fonction est décroissante en $\beta(\bar{G})$

$$b < \frac{\ln kn - \ln(b-1)}{k} + \frac{1}{k}$$

en posant $b = \text{Min}(\beta(G), \beta(\bar{G}))$

ce qui donne:

$$kb + \ln \frac{(b-1)}{k} - 1 < \ln n$$

Or $\ln \frac{b-1}{k} - 1 \geq 0$ pour $n \leq 4$

On a ainsi $kb < \ln n$

C'est-à-dire:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{b-1}} \cdot b < \ln n$$

et à fortiori:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{b-1}} (b-1) < \ln n$$

$$\ln(b-1) - \frac{1}{b-1} \ln n < \ln(\ln n)$$

C'est-à-dire, en posant $\ln n = a$:

$$\ln \frac{a}{b-1} + \frac{a}{b-1} > 0$$

Ce qui donne:

$$\frac{b-1}{a} < c \quad (c = 1,7632228\dots)$$

D'où $b < c \ln n + 1$

□

On peut remarquer que ce résultat est meilleur que celui de la proposition II.25 pour n suffisamment grand ($n \geq 10^3$).

Proposition II.27

Pour tout graphe G tel que $\beta(G) \geq 3$ et $\beta(\bar{G}) \geq 3$, on a:

$$\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) < 2\sqrt{n} (\ln n + r)$$

avec $r = 1 - \ln 2 < 0,307$.

Démonstration

On a comme précédemment:

$$\beta(G) < \frac{\ln kn - \ln (\beta(\bar{G}) - 1)}{k} + \frac{1}{k}$$

$$\text{avec } k = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta(\bar{G}) - 1}}$$

D'où, en posant $\beta(\bar{G}) = x$

$$\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) < n^{\frac{1}{x-1}} \left(\ln n \left(x - \frac{x}{x-1}\right) - x(\ln(x-1) - 1) \right)$$

ce qui donne si $\ln(x-1) - 1 \geq 0$ (ce qui est vrai en particulier si $x \geq 4$)

$$\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) < n^{\frac{1}{x-1}} \cdot (x-1) (\ln n + 1 - \ln(x-1))$$

Cette relation est encore valable pour $x = 3$ (cf. proposition II.22).

L'étude du comportement de cette fonction pour x variant de 3 à $\text{Min}(\beta(G), \beta(\bar{G}))$ montre qu'elle est maximale pour $x = 3$.

On a donc $\beta(G) \cdot \beta(\bar{G}) < n^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (\ln n + 1 - \ln 2)$. □

Proposition II.28

Pour tout graphe G à n sommets:

$$\beta(G) \beta(\overline{G}) = n \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{soit } \{\beta(G), \beta(\overline{G})\} &= \{1, n\} \\ \text{soit } \{\beta(G), \beta(\overline{G})\} &= \{2, \frac{n}{2}\} \\ \text{soit } \{\beta(G), \beta(\overline{G})\} &= \{3, 3\} \end{aligned}$$

Démonstration

a) Pour $p \geq 6$, il n'existe pas de graphe G à $3p$ sommets tel que $\{\beta(G), \beta(\overline{G})\} = \{3, p\}$.

Sinon, soit G tel que $\beta(G) = p$, $\beta(\overline{G}) = 3$, $n(G) = 3p$. Son degré minimum δ est supérieur ou égal à p .

- soit un sommet x , qui absorbe $p + 1$ sommets.

- $\exists x_2$ qui absorbe au moins $\left\lceil \frac{p+1}{3p} \cdot (2p - 1) \right\rceil$ sommets parmi les $2p - 1$ sommets non absorbés par x_1 .

Or $\left\lceil \frac{p+1}{3p} (2p-1) \right\rceil \geq 5$ pour $p \geq 6$.

Il reste donc au plus $2p - 1 - 5 = 2(p-3)$ sommets non absorbés par x_1 et x_2 . $p-3$ sommets suffisent à les absorber puisque deux sommets quelconques de G sont dominés ($\beta(\overline{G}) = 3$).

On arrive ainsi à une contradiction en construisant un absorbant de G de cardinal $p-1$.

b) Pour $p = 4$ et $p = 5$, il n'existe pas de graphe G à $3p$ sommets tel que $\{\beta(G), \beta(\overline{G})\} = \{3, p\}$.

Nous allons démontrer ceci pour $p = 5$.

La démonstration pour $p = 4$ utilise les mêmes idées mais est beaucoup plus compliquée. Nous ne la présenterons pas ici.

Soit donc $G = (X; E)$ un graphe à 15 sommets tel que $\beta(G) = 5$, $\beta(\overline{G}) = 3$. Son degré minimum δ est supérieur ou égal à 5 (proposition II.17).

Donc $\forall Y \subseteq X$, $\exists x \in X$ qui absorbe $\left\lceil \frac{6}{15} |Y| \right\rceil$ sommets de Y (lemme de la proposition II.21). Par suite, si le degré maximum $\Delta(G)$ est supérieur ou égal à 6, il existe deux sommets x_1 et x_2 qui absorbent au moins 11 sommets. Les quatre sommets restant pouvant être absorbés par 2 sommets (puisque 2 sommets quelconques de G sont dominés). On construit ainsi un absorbant de G de cardinal 4 (contradiction).

On a donc $\Delta(G) = \delta(G) = 5$

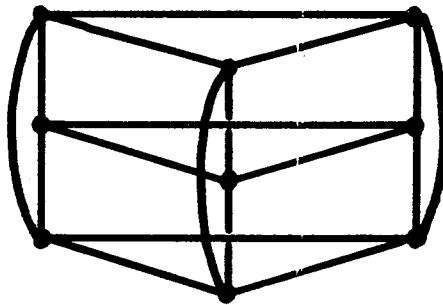
- . soit alors x_1 un sommet quelconque ; x_1 absorbe 6 sommets.
- . $\exists x_2 \in X$ qui absorbe $\left\lceil \frac{\delta+1}{n} \cdot 9 \right\rceil = \left\lceil \frac{6 \cdot 9}{15} \right\rceil = 4$ sommets parmi les 9 sommets non absorbés par x_1 . Il reste donc un ensemble (noté Y) de 5 sommets à absorber.
- . $\exists x_3$ qui absorbe 3 sommets de Y .
Sinon, chacune des 10 parties à deux éléments de Y ne serait dominée que par un sommet appartenant à $X - Y - \{x_1\}$, et chaque sommet de cet ensemble ne dominerait qu'une de ces 10 parties.
Or $|X - Y - \{x_1\}| = 9$. On arrive ainsi à une contradiction puisque toutes les 10 parties à 2 éléments de Y sont dominées ($\beta(\overline{G}) = 3$).

- $\exists x_4$ qui absorbe les deux sommets non éventuellement absorbés par x_1, x_2, x_3 .

On arrive ainsi à une contradiction en construisant un absorbant de G de cardinal 4.

□

- c) Il existe un graphe G à 9 sommets tel que $\beta(G) = 3$, $\beta(\overline{G}) = 3$. C'est le graphe suivant:



(Notons que ce graphe est isomorphe à son complémentaire).

8.- QUELQUES EXTENSIONS DE LA NOTION D'ABSORPTION

8.1. Notations

Soit $G = (X;E)$ un graphe.

$\forall Y \subseteq X$ posons:

$$\Gamma_k(Y) = \{x \in X \mid \exists y_1, y_2, \dots, y_k \in Y \text{ et } \{xy_1\}, \{xy_2\}, \dots, \{xy_k\} \in E\}$$

Γ_k définit une application de $P(X)$ dans $P(X)$.

Notons $\hat{\Gamma}_k$ la fermeture transitive faible de cette application

$$\hat{\Gamma}_k(Y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_k^i(Y) \quad \text{avec} \quad \Gamma_k^i(Y) = \Gamma_k[\Gamma_k^{i-1}(Y)]$$

Soit $\Gamma_k^*(Y) = \Gamma_k(Y) \cup Y$

Notons $\tilde{\Gamma}_k^*$ la fermeture transitive de l'application Γ_k^*

$$\tilde{\Gamma}_k^*(Y) = \hat{\Gamma}_k(Y) \cup Y$$

Posons $\Delta_k(G) = \max_{x_1, x_2, \dots, x_k \in X} (|\Gamma_1(x_1) \cap \Gamma(x_2) \dots \cap \Gamma_1(x_k)|)$

8.2.- Absorbant de puissance k

Soit un graphe $G = (X;E)$

On dira que $A \subseteq X$ est un *absorbant de puissance k* de G si et seulement si $\Gamma_k^*(A) = X$.

Pour $k = 1$ on retrouve la notion habituelle d'absorbant.

On désignera par $\beta_k(G)$ la cardinalité minimum d'un absorbant de puissance k de G .

On démontre immédiatement les résultats suivants:

Proposition II.29

$$\beta_k(G) \geq n - \frac{m}{k} \quad (\text{avec } n = |X|, m = |E|)$$

Ceci généralise la relation $\beta(G) \geq n - m$

Proposition II.30

$$\beta_k(G) \leq n - \Delta_k(G)$$

Ceci généralise la relation $\beta(G) \leq n - \Delta(G)$

Proposition II.31

$$\beta_k(G) \geq \frac{nk}{\Delta(G) + k}$$

Démonstration

Tout sommet d'un absorbant A de puissance k de G est relié à au plus Δ sommets de $X - A$.

Tout sommet de $X - A$ est relié à au moins k sommets de A.

Ceci généralise la relation $\beta(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$

8.3. Absorbant transitif de puissance k

Nous dirons que $A \subseteq X$ est un *absorbant transitif de puissance k* du graphe $G = (X; E)$ si et seulement si $\widetilde{\Gamma}_k^*(A) = X$.

On désignera par β_k la cardinalité minimum d'un tel absorbant.

On peut remarquer que $\beta_1(G)$ est égal au nombre de composantes connexes de G.

Au chapitre 3 on retrouvera cette notion d'absorbant transitif, en liaison avec la recherche d'ensembles cycliquement stables (c'est-à-dire tels que les graphes engendrés ne contiennent pas de cycles) dans les graphes réguliers.

8.4. Absorbant fort

Nous dirons que $A \subseteq X$ est un *absorbant fort* du graphe $G = (X; E)$, supposé sans sommets isolés, si et seulement si $\Gamma_1(A) = X$.

Autrement dit A est un absorbant fort si et seulement si $\forall x \in X$
 $\exists a \in A \mid \{ax\} \in E$.

Cette notion généralise la notion d'absorbant.

Un absorbant d'un graphe G est un absorbant fort du graphe G' obtenu à partir de G en rajoutant des boucles à chaque sommet (c'est-à-dire en rendant réflexive la relation binaire associée à G).

Nous utiliserons cette notion au chapitre IV lors de la recherche de couvertures des sommets d'un graphe par des transversaux minimaux.

On démontre facilement les résultats suivants:

Proposition II.32

A est un absorbant fort du graphe $G = (X; E)$ si et seulement si A est un transversal de l'hypergraphe $H = (X ; \{\Gamma(x) \mid x \in X\})$.

Proposition II.33

A est un absorbant fort de G si et seulement si c'est un absorbant "sans sommets isolés", c'est-à-dire tel que le graphe G_A soit sans sommets isolés.

Notons $\beta^+(G)$ la cardinalité minimum d'un absorbant fort de G .

Proposition II.34

On a les relations suivantes:

•	$\beta(G) \leq \beta^+(G) \leq 2 \beta(G)$
•	$\beta^+(G) \geq 2(n - m)$
•	$\beta^+(G) \leq n - \Delta(G) + 1$

et si G est connexe et tel que $\beta(G) \neq 1$:

$$\beta^+(G) \leq n - \Delta(G)$$

. $\beta^+(G) \geq 3$ si et seulement si le diamètre du graphe complémentaire \bar{G} est inférieur ou égal à 2.

On pourrait également définir et étudier les notions d'absorbant fort de puissance k : $(\Gamma_k(A) = X)$, et d'absorbant fort transitif de puissance k : $(\tilde{\Gamma}_k(A) = X)$.

Les notions que l'on vient de définir n'ont sans doute pas seulement un intérêt formel. Il semble qu'elles puissent être utiles à modéliser certains problèmes réels: problèmes d'observation, problèmes de circulation d'information dans un réseau...

Quelquefois, on illustre la notion habituelle d'absorption par le problème de l'implantation de casernes de sapeurs pompiers: "sachant quels sont les quartiers que pourrait secourir une caserne de sapeurs pompiers implantée dans tel quartier, on veut connaître le nombre minimum de casernes nécessaires à la protection d'une région donnée et leur implantation".

On peut désirer, pour plus de sécurité, que tout quartier puisse être secouru par plusieurs casernes de sapeurs pompiers. On arrive ainsi à la notion d'absorbant de puissance k .

D'autre part, on peut raisonnablement supposer que si le feu se déclare dans une caserne, celle-ci n'a plus la possibilité de se secourir elle-même et doit donc être secourue par une autre caserne (ou par k autres casernes). On aboutit ainsi à la notion d'absorbant fort (ou d'absorbant fort de puissance k).

Si l'on quitte maintenant les sapeurs pompiers pour s'intéresser à la circulation d'information dans un réseau, on arrive à la notion d'absorbant transitif.

Il semblerait intéressant d'étudier de manière plus complète ces différentes notions.

chapitre 3
ensembles cycliquement stables

Définition:

Soit $G = (X;E)$ un multigraphe.

$S \subseteq X$ sera dit cycliquement stable si G_S ne contient pas de cycle, c'est-à-dire si G_S est une forêt. Un ensemble cycliquement stable S sera dit maximum s'il est de cardinalité maximum. Nous appellerons nombre de stabilité cyclique $\alpha_1(G)$ cette cardinalité maximum.

Une étude des bornes inférieure et supérieure du paramètre $\alpha_1(G)$ montre que celles-ci sont le plus rapprochées si le graphe G est régulier et que c'est pour les graphes cubiques que ces bornes sont le plus voisines (si l'on exclut le cas trivial des cycles pour lesquels elles sont égales).

Ainsi, après avoir lié la notion d'ensemble cycliquement stable à celle d'absorbant transitif, puis à celle de coarbre, nous étudierons dans ce chapitre les bornes (inférieure et supérieure) du paramètre $\alpha_1(G)$ pour les graphes (et multigraphes) cubiques. (Cette étude peut aisément se généraliser aux graphes réguliers de degré quelconque). Nous présenterons ensuite (en Annexe II) le cas particulier des graphes cubiques cycliquement 4-arêtes connexes pour lesquels les bornes sont égales. Une partie de ce chapitre est le résultat d'un travail en commun avec M.SAKAROVITCH [55] et d'une collaboration avec F.JAEGER [26].

Les ensembles cycliquement stables ont été assez peu étudiés à notre connaissance. F.STERBOUL a étudié le nombre de stabilité faible de l'hypergraphe des cycles d'un graphe [66] mais son approche est très différente de celle qui est adoptée ici. F.JAEGER a relié la recherche d'ensembles cycliquement stables maximaux à des problèmes d'orientation et étudié le cas des graphes cubiques planaires [26].

1. ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES ET ABSORBANTS TRANSITIFS DANS LES GRAPHES REGULIERS

Ces deux notions apparamment très différentes peuvent être reliées très facilement par la proposition suivante:

Proposition III.1

Soit $G = (X;E)$ un graphe simple régulier de degré d . Le complémentaire d'un ensemble cycliquement stable est un absorbant transitif de puissance $d-1$, et réciproquement.

Démonstration

a) Soit $Y \subseteq X$ tel que G_Y ne contienne pas de cycle, alors $X-Y$ est un absorbant transitif de puissance $d-1$. Ceci est vrai pour $|Y| = 0, 1$; démontrons-le pour $|Y| = k$ sachant que c'est vrai pour $|Y| = k-1$.

† y est un sommet de Y de degré inférieur ou égal à $d-1$ dans G_Y . Ce sommet est relié à au moins $d-1$ sommets de $X-Y$.

Donc $y \in \Gamma_{d-1}^*(X-Y)$

C'est-à-dire: $\Gamma_{d-1}^*(X-Y) \supseteq X - (Y - \{y\})$

et par suite: $\Gamma_{d-1}^*(X-Y) = \Gamma_{d-1}^*(X - (Y - \{y\}))$

or par hypothèse de récurrence $\Gamma_{d-1}^*[X - (Y - \{y\})] = X$

(Puisque $G_{Y-\{y\}}$ est sans cycle et $|Y - \{y\}| = k - 1$, $X - (Y - \{y\})$ est un absorbant fort transitif de puissance $d-1$).

b) soit $(y_1, y_2, \dots, y_k, y_1)$ un cycle de G .

Posons $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

G_Y est un graphe de degré minimum supérieur ou égal à 2; donc tout sommet

y de Y est relié à au plus $d-2$ sommets de $X-Y$.

Par suite $\Gamma_{d-1}^*(X-Y) = X-Y$

$X-Y$ n'est donc pas un absorbant fort transitif de puissance $d-1$. \square

Corollaire:

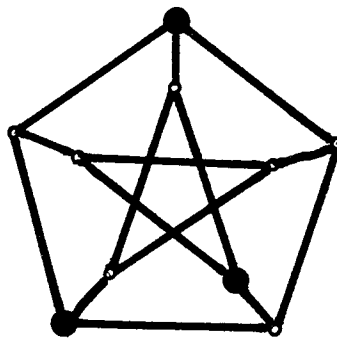
Soit G un graphe régulier de degré d .

On a:

$$\alpha_1(G) = n(G) - \tilde{\beta}_{d-1}(G)$$

Ce résultat peut avoir un intérêt algorithmique. Il semble en effet plus facile de rechercher un absorbant fort transitif de puissance $d-1$ de cardinal minimum qu'un ensemble cycliquement stable de cardinal maximum. C'est du moins ce qui nous est apparu lors de l'étude des graphes cubiques.

Voici à titre d'exemple, un absorbant transitif de puissance 2 du graphe de PETERSEN:



Remarque:

D.R. LICK et A.T. WHITE [34] ont défini les graphes k -dégénérés, notion qui généralise les notions de stable et de forêt.

Un graphe $G = (X; E)$ est dit k -dégénéré si et seulement si $\forall Y \subseteq X$, le degré minimum $\delta(G_Y)$ du graphe G_Y est inférieur ou égal à k .

Un stable est un graphe 0-dégénéré. Une forêt est un graphe 1-dégénéré.

Par extension, un sous-ensemble Y de X sera dit k -dégénéré s'il engendre un graphe G_Y k -dégénéré. (Un ensemble cycliquement stable est donc un ensemble 1 dégnéré).

On désignera par $\alpha_k(G)$ le cardinal maximum d'un ensemble k -dégénéré de X . Ainsi $\alpha_0(G)$ (ou plus simplement $\alpha(G)$) et $\alpha_1(G)$ représentent respectivement le nombre de stabilité et le nombre de stabilité cyclique de G .

On peut généraliser le résultat de la proposition III.1 aux ensembles k -dégénéré. On a ainsi:

"Pour un graphe régulier de degré d le complémentaire d'un ensemble k -dégénéré est un absorbant transitif de puissance $d-k$ et réciproquement".

ce qui donne:

$$\alpha_k(G) = n(G) - \tilde{\beta}_{d-k}(G)$$

pour un graphe G régulier de degré d .

Pour les graphes quelconques on a

$$n(G) - \tilde{\beta}_{\Delta-k}(G) \leq \alpha_k(G) \leq n(G) - \tilde{\beta}_{\delta-k}(G)$$

où δ et Δ désignent respectivement le degré minimum et le degré maximum de G .

2.- ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES ET COARBRES

Définition:

Soit $G = (X;E)$ un multigraphe sans boucles.

Soit $F_k \subseteq E$ un sous-ensemble des arêtes de G tel que le sous-graphe partiel engendré G_{F_k} soit k -dégénéré.

Le complémentaire $E - F_k$ de F_k sera appelé co- k dégénéré.

L'ensemble des arêtes E de G est un co.0.dégénéré. Un coarbre est un co.1 dégénéré.

Soit $G = (X;E)$ un multigraphe sans boucles. On voit facilement que $Y \subseteq X$ est un ensemble k -dégénéré si et seulement si son complémentaire $X-Y$ est le transversal d'un co- k -dégénéré.

En particulier, un ensemble est cycliquement stable si et seulement si son complémentaire est le transversal d'un coarbre.

3.- BORNE SUPERIEURE DE $\alpha_k(G)$

Proposition III.2.

Soit $G=(X,E)$ un multigraphe sans boucles à n sommets, m arêtes, de degré maximum Δ , de degré minimum δ

On a :

$$\alpha_k(G) \leq \frac{n\Delta - m - k}{\Delta - k}$$

Soit Y un ensemble k -dégénéré.

Soit $m(G_Y)$ le nombre d'arêtes de G_Y

On a : $m \leq m(G_Y) + \Delta(n - |Y|)$

Or on sait que $m(G_Y) \leq k(|Y| - 1)$

On a donc $m \leq k \alpha_k(G) - k + \Delta n - \Delta \alpha_k(G)$

Et par suite: $\alpha_k(G) \leq \frac{n\Delta - m - k}{\Delta - k}$ □

Corollaire 1

$$\alpha_k(G) \leq \frac{n(2\Delta - \delta) - 2k}{2(\Delta - k)}$$

En effet

$$m \geq \frac{n\delta}{2}$$

Pour $k=1$ on retrouve le résultat présenté par M.SAKAROVITCH [63].

Corollaire 2

Pour les graphes cubiques on a donc:

$$\alpha_1(G) \leq \frac{3n - 2}{4}$$

Dans la suite de ce chapitre on ne s'intéressera qu'aux graphes (et multi-graphes) de degré maximum inférieur ou égal à 3. Le cas le plus intéressant étant celui des graphes cubiques).

4.- VALEUR DE $\alpha_1(G)$ DANS LE CAS DES GRAPHES REPRESENTATIFS DES ARETES DE GRAPHES CUBIQUES

On sait que si \tilde{G} est un graphe cubique de plus de 4 sommets, représentatif des arêtes d'un graphe G , alors G est un graphe cubique subdivisé et l'on peut partitionner les sommets de \tilde{G} en triangles (le subdivisé d'un graphe H s'obtient en rajoutant un sommet sur chaque arête de H).

Rechercher un ensemble cycliquement stable de $\tilde{G} = (X;E)$ graphe cubique représentatif des arêtes d'un graphe cubique subdivisé $G = (Y;F)$ revient à chercher un ensemble d'arêtes $M \subset F$ engendrant un sous-graphe partiel de G sans cycle et de degré inférieur ou égal à 2.

Proposition III.3.

Soit \tilde{G} un graphe cubique à n sommets représentatif des arêtes d'un graphe cubique subdivisé $G = (Y;F)$.

Tout ensemble cycliquement stable maximal S de \tilde{G} est tel que $|S| = \frac{2n}{3}$.

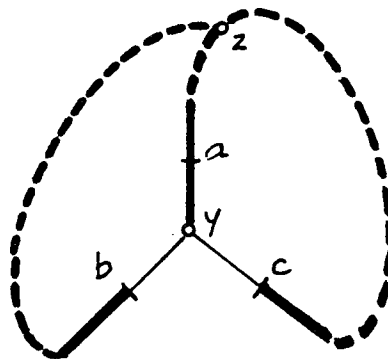
Démonstration

Soit $M \subset F$, engendrant un ensemble de chaînes et maximal pour cette propriété.

Tout sommet $y \in Y$ de degré 3 dans G appartient à exactement 2 arêtes de M .

En effet

- a/ Il est clair que tout sommet de degré 3 appartient à au moins une arête de M , sinon M ne serait pas maximal.
- b/ Supposons qu'il existe un sommet y de G , de degré 3 qui n'appartient qu'à une seule arête $\{ay\} \in M$.



Soient a, b, c les sommets adjacents à y . Il est clair que $M \cup \{by\}$ et $M \cup \{cy\}$ ne peuvent engendrer de sous-graphe partiel ayant des sommets de degré 3.

$M \cup \{by\}$ et $M \cup \{cy\}$ engendrent donc des sous-graphes partiels contenant chacun un cycle.

Soient C_1 et C_2 ces deux cycles.

Puisque $y \in C_1 \cap C_2$, $\exists z \neq y \mid z \in C_1 \cap C_2$ et tel que z soit de degré 3 dans le sous-graphe partiel engendré par M .

On aboutit ainsi à une contradiction.

Tout sommet de degré 3 dans G appartient donc à exactement 2 arêtes de M .
D'où $M = \frac{2 |F|}{3} = \frac{2n}{3}$. □

Remarque:

Pour un graphe régulier de degré d dont les sommets sont partitionnés en d -cliques, on a:

$$\alpha_1(G) = \frac{2n}{d}$$

5.- BORNE INFÉRIEURE DE $\alpha_1(G)$ POUR LES MULTIGRAPHES CUBIQUES

Définitions

a/ Soit $G = (X;E)$ un graphe simple.

Nous noterons $H(G)$ le multigraphe obtenu à partir de G en supprimant les sommets de degré 2, c'est-à-dire: $\forall x \in X \mid |\Gamma(x)| = 2$ (pour fixer les idées posons $\Gamma(x) = \{x_1, x_2\}$), $H(G)$ s'obtient en rajoutant l'arête $\{x_1, x_2\}$ à $G_{X-\{x\}}$.

b/ Soit $G = (X;E)$ un graphe simple cubique.

On définit $R_x(G) = H(G_{X-\{x\}})$.

Lemme 1

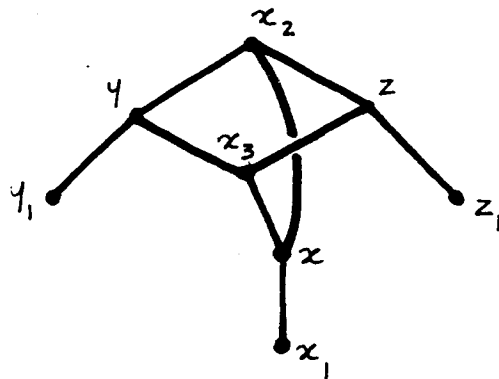
Si $G = (X;E)$ est un graphe cubique 3-connexe avec $|X| > 6$ et tel que $\forall x \in X, R_x(G)$ soit un multigraphe, alors, on peut partitionner les sommets de G en triangles.

Démonstration

Soit $G = (X;E)$ un tel graphe.

a/ $\forall x \in X, \exists z \in \{x\} \cup \Gamma(x) \mid z$ est dans un triangle.

Sinon, puisque $R_x(G)$ est un multigraphe, G admettrait nécessairement comme sous-graphe partiel le graphe suivant:



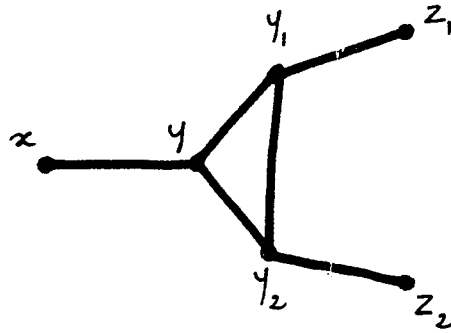
On voit immédiatement que $R_{x_2}(G)$ est un graphe.

On aboutit ainsi à une contradiction.

b/ $\forall x \in X, x$ est dans un triangle.

Sinon, soit x non dans un triangle et $y \in \Gamma(x), y$ dans un triangle $y y_1 y_2$.

Soit $z_1 \mid \{y_1 z_1\} \in E$ et $z_2 \mid \{y_2 z_2\} \in E$ et tels que $z_1, z_2 \notin \{y, y_1, y_2\}$.



G étant 3-connexe, on a :

- $z_1 \neq z_2$
- soit $\{xz_1\} \notin E$, soit $\{xz_2\} \notin E$.

Si $\{z_1 z_2\} \notin E$, on voit que $R_y(G)$ est un graphe.

On aboutit dans ce cas à une contradiction.

Sinon, si $\{z_1 z_2\} \in E$, G étant 3-connexe, on a :

- $\{x, z_1\} \notin E$ et $\{x, z_2\} \notin E$
- $\Gamma(z_1) \cap \Gamma(z_2) = \emptyset$

On voit ainsi que $R_{y_1}(G)$ est un graphe.

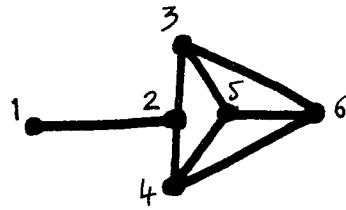
On aboutit ainsi à une contradiction.

c/ Ainsi, tout sommet de G est dans un triangle.

G étant cubique 3-connexe, ces triangles sont nécessairement disjoints deux à deux. \square

Notation

Nous appellerons G_0 le graphe



$$G_0 = (\{1,2,3,4,5,6\} ; \{\{12\}, \{23\}, \{24\}, \{35\}, \{36\}, \{45\}, \{46\}, \{56\}\}).$$

Proposition III.4.

Soit G un multigraphe connexe, sans boucle, de degré maximal $\Delta < 3$, à n sommets et k arêtes multiples, sans sous-graphe isomorphe à G_0 .

On a: $\alpha_1(G) \geq g(n,k)$

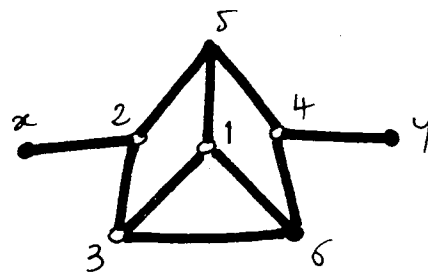
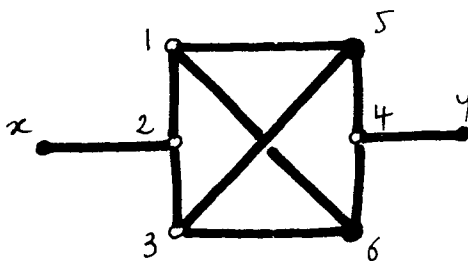
avec $g(n,k) = 2$ si G est un graphe cubique à 4 sommets,
 5 si G est un graphe cubique à 8 sommets,
 $\frac{2n-k}{3}$ dans les autres cas.

Démonstration

1/ La proposition est vraie pour $n \leq 4$.

Supposons la vraie jusqu'à $n-1$ et démontrons la pour n . (On peut remarquer qu'il suffit de la démontrer pour les multigraphes cubiques).

2/ Si $G = (X;E)$ contient l'un des deux sous-graphes partiels:



On a $\alpha_1(G) \geq g(n,k)$

En effet, soit G_1 le sous-multigraphe engendré par $X - \{1,2,3,4,5,6\}$
(auquel on rajoute l'arête $\{xy\}$ si 2 et 4 sont des sommets d'articulations).

Soit S_1 , un ensemble cycliquement stable maximum de G_1 .

Par hypothèse de récurrence on a :

$$|S_1| \geq \frac{2(n-6) - k}{3}$$

(Remarquons que les graphes cubiques de 4 ou 8 sommets sont 2-connexes).

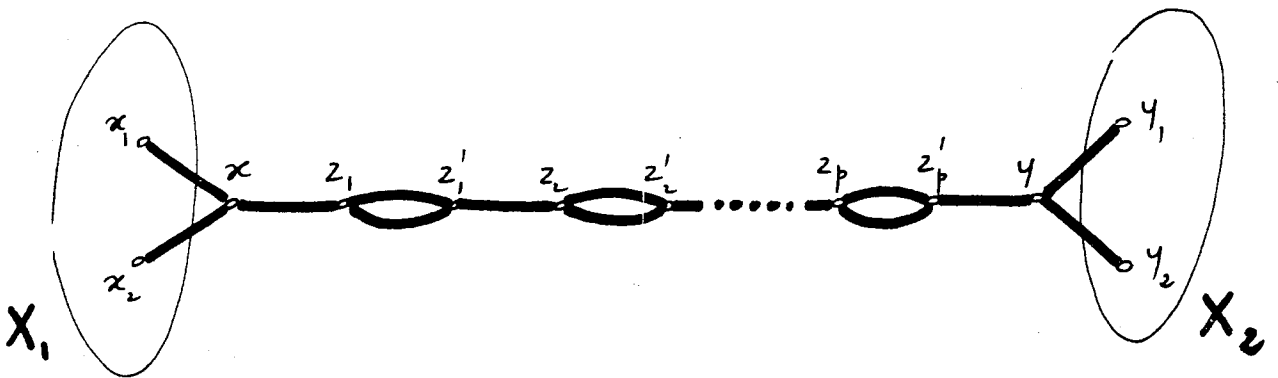
Or $S = S_1 \cup \{1,2,3,4\}$ est un ensemble cycliquement stable de G .

$$\text{D'où } |S| \geq \frac{2n - k}{3} .$$

Nous supposons donc maintenant dans la suite de la démonstration que G ne contient aucun de ces deux sous-graphes partiels.

3/ Si G est un graphe avec isthme, on a $\alpha_1(G) \geq g(n,k)$.

Soit x et y deux sommets d'articulations de G reliés par une chaîne $x, z_1, z'_1, z_2, z'_2, \dots, z_p, z'_p, y$ de la façon suivante:



Soient x_1 et x_2 les sommets adjacents à x et différents de z_1 .

Soient y_1 et y_2 les sommets adjacents à y et différents de z'_p .

On peut supposer $x_1 \neq x_2$ et $y_1 \neq y_2$.

Soit G_1 (respectivement G_2) le multigraphe obtenu en rajoutant l'arête $\{x_1x_2\}$ (respectivement $\{y_1y_2\}$) au sous-multigraphe engendré par X_1 (respectivement X_2).

G_1 et G_2 sont différents du graphe complet à 4 sommets puisque G ne contient pas de sous-graphe isomorphe à G_0 .

D'après 2/, G_1 et G_2 ne contiennent pas de sous-graphes isomorphes à G_0 .

Soit S_1 un ensemble cycliquement stable maximum de G_1 .

Soit S_2 un ensemble cycliquement stable maximum de G_2 .

$S = S_1 \cup S_2 \cup \{x, z_1, z_2, \dots, z_p, y\}$ est un ensemble cycliquement stable de G .

Soit k_1 (respectivement k_2) le nombre d'arêtes multiples de G_1 (respectivement G_2).

$$\text{On a: } |S_1| \geq g(|X_1|, k_1)$$

$$|S_2| \geq g(|X_2|, k_2)$$

$$k \geq k_1 + k_2 + p - 2$$

$$k \geq k_1 + k_2 + p - 1 \quad \text{si } G_1 \text{ (ou } G_2) \text{ est un graphe cubique,}$$

$$k = k_1 + k_2 + p = p \quad \text{si } G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont des graphes cubiques.}$$

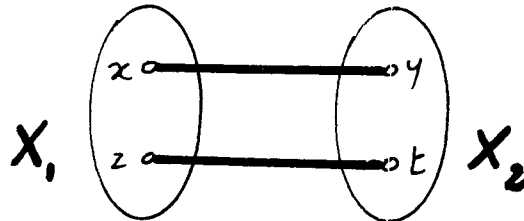
Un calcul simple montre que $\forall |X_1| > 4$ et $\forall |X_2| > 4$

$$|S| \geq g(n, k)$$

4/ G est un graphe 2-connexe (et non 3-connexe)

Trois cas sont à envisager:

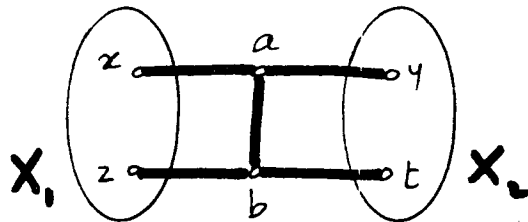
A/



$\{xy\}$ et $\{zt\}$ forment un cocycle de G .

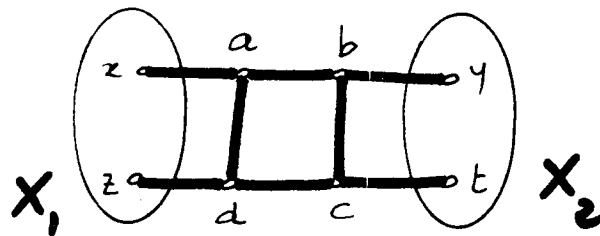
$\{xz\}$ et $\{yt\}$ ne sont pas des arêtes simples.

B/



$\{xz\}$ et $\{yt\}$ ne sont pas des arêtes simples.

C/



Cas A/

Soit G_1 le multigraphe obtenu en ajoutant l'arête $\{xz\}$ au sous-multigraphe engendré par X_1 .

Soit G_2 le sous-multigraphe engendré par X_2 .

On peut supposer que si G_1 est un graphe cubique à 4 ou 8 sommets, alors $|X_2| = 4$ ou 8.

Soit k_1 (respectivement k_2) le nombre d'arêtes multiples de G_1 (respectivement G_2).

Soit S_1 (respectivement S_2) un ensemble cycliquement stable maximum de G_1 (respectivement G_2).

$S = S_1 \cup S_2$ est un ensemble cycliquement stable de G .

Puisque d'après 2/ G_1 et G_2 n'ont pas de sous-graphe isomorphe à G_0 , par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} |S_1| &\geq g(|X_1|, k_1) \\ |S_2| &\geq \frac{2|X_2| - k_2}{3} \end{aligned}$$

$$k = k_1 + k_2.$$

On en déduit que

$$|S| = |S_1| + |S_2| \geq g(n, k).$$

Cas B/

Soit G_1 (respectivement G_2) le multigraphe obtenu en ajoutant l'arête $\{xz\}$ (respectivement $\{xt\}$) au sous-multigraphe engendré par X_1 (respectivement X_2).

Soit k_1 et k_2 les nombres d'arêtes multiples de G_1 et G_2 respectivement.

Soit S_1 (respectivement S_2) un ensemble cycliquement stable maximum de G_1 (respectivement G_2).

$S = S_1 \cup S_2 \cup \{a,b\}$ est un ensemble cycliquement stable de G .

Par hypothèse de récurrence (G_1 et G_2 n'ont pas de sous-graphe isomorphe à G_0) on a :

$$|S_1| \geq g(|X_1|, k_1)$$

$$|S_2| \geq g(|X_2|, k_2)$$

Si $\exists i \in \{1,2\}$, par exemple $i = 1$, tel que G_i n'est pas un graphe cubique à 4 ou 8 sommets, alors un calcul simple montre que $|S| \geq g(n,k)$.

Sinon soit G'_1 (respectivement G'_2) le sous multigraphe engendré par X_1 (respectivement X_2).

Soit S'_1 (respectivement S'_2) un ensemble cycliquement stable de G'_1 (respectivement G'_2).

$S = S'_1 \cup S'_2 \cup \{a\}$ est un ensemble cycliquement stable de G et l'on a $|S| \geq g(n,k)$.

Cas C/

Soit G' le multigraphe obtenu en rajoutant les arêtes $\{xy\}$ et $\{zt\}$ au sous multigraphe engendré par $X = \{a,b,c,d\}$.

Soit S' un ensemble cycliquement stable maximum de G' .

$S = S' \cup \{a,b,c\}$ ou bien $S = S' \cup \{a,b,d\}$ est un ensemble cycliquement stable de G .

Par hypothèse de récurrence on a $|S'| \geq g(n-4, k)$.

D'où $|S| \geq |S'| + 3 \geq g(n,k)$.

5/ $G = (X;E)$ est 3-connexe

G n'a évidemment aucune arête multiple ($k=0$).

a) Si $\exists x \in X \mid R_x(G)$ soit un graphe

$R_x(G)$ est 2-connexe. On a donc par hypothèse de récurrence $\alpha_1(R_x(G)) \geq g(n-4, 0)$.

Or $\alpha_1(G) \geq \alpha_1(R_x(G)) + 3$.

D'où $\alpha_1(G) \geq g(n, 0)$.

b) Sinon, $\forall x \in X \mid R_x(G)$ est un multigraphe.

D'après le lemme 1 les sommets de G sont partitionnés en triangles.

On a donc $\alpha_1(G) = \frac{2n}{3}$ d'après la proposition III.3.

Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

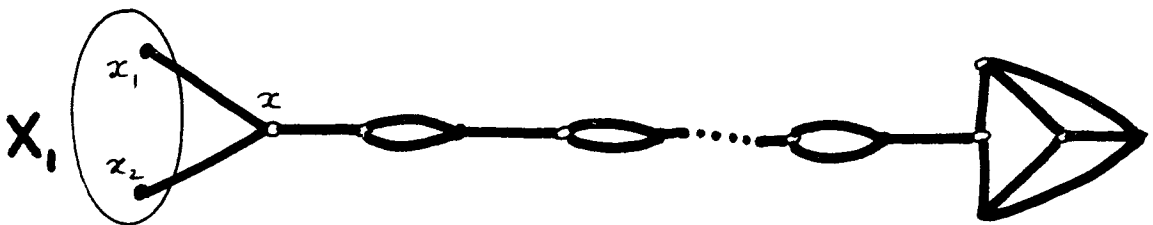
Proposition III.5

Soit G un multigraphe connexe, sans boucles, de degré maximal $\Delta < 3$, à n sommet et k arêtes multiples.

On a $\alpha_1(G) \geq \lceil \frac{5n-4-2k}{8} \rceil$ et cette borne est atteinte.

Démonstration

a) Puisque $g(n, k) \geq \frac{5n-4-2k}{8}$ il suffit de considérer les graphes G ayant un sous-graphe isomorphe à G_0 .



Soit G_1 le multigraphe cubique obtenu en rajoutant l'arête $\{x_1, x_2\}$ au sous-multigraphe engendré par X_1 ; $|X_1| = n-6-2p$.

Le nombre d'arêtes multiples de G_1 est $k_1 \leq k+1-p$.

Soit S_1 un ensemble cycliquement stable maximum de G_1 .

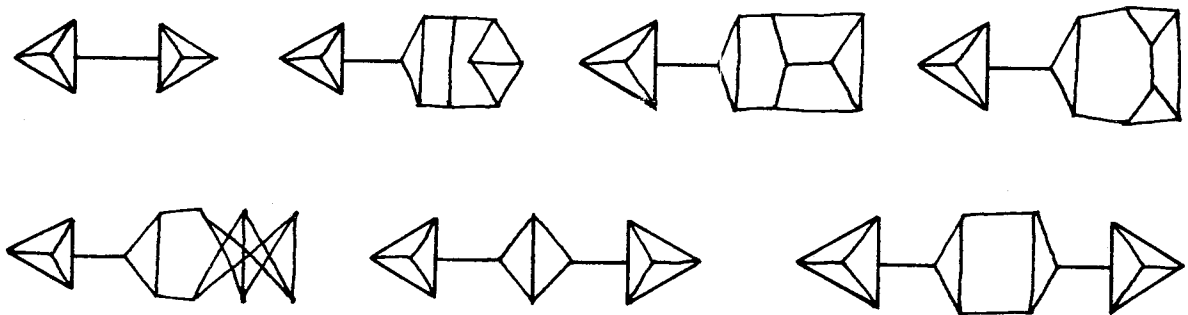
Par hypothèse de récurrence on a :

$$|S_1| \geq \frac{5(n-6-2p)-4-2(k+1-p)}{8}$$

$S = S_1 \cup \{x, z_1, z_2, \dots, z_p, a, b, c\}$ est un ensemble cycliquement stable de G .

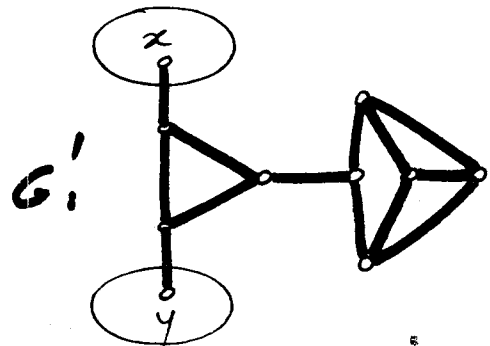
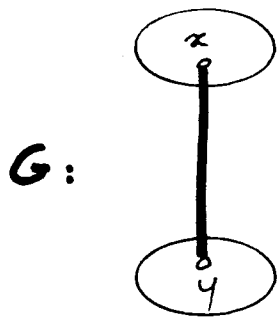
On a donc $|S| \geq |S_1| + p + 4 \geq \frac{5n-4-2k}{8}$

b) Soit F_0 l'ensemble des graphes suivants :



Soit F l'ensemble de graphes défini de la façon suivante :

- . F contient l'ensemble de graphes cubiques à n sommets avec $n \leq 8$.
- . $F \supset F_0$.
- . Si F contient le graphe G ayant un isthme xy , alors F contient le graphe G' construit à partir de G de la façon suivante :



On a construit ainsi une famille de F de graphes cubiques G tels que

$$\alpha_1(G) = \lceil \frac{5n-4}{8} \rceil$$

En rajoutant des arêtes multiples sur les isthmes, on peut construire une famille F' de multigraphes H' à n sommets et k arêtes multiples tels que

$$\alpha_1(H') = \lceil \frac{5n-4-2k}{8} \rceil. \quad \square$$

6.- ENSEMBLE CYCLIQUEMENT STABLE ET COLORATION ACYCLIQUE

B.GRUNBAUM a introduit la notion de coloration acyclique [18] d'un graphe G : on dit qu'un graphe G admet une (k_1, k_2, \dots, k_s) *coloration acyclique* si l'on peut colorier ses sommets en $k = k_1 + k_2 + \dots + k_s$ couleurs, cet ensemble de k couleurs étant partitionné en s sous-ensembles K_1, K_2, \dots, K_s , ($k_i = |K_i|$) de telle sorte que les sommets coloriés par deux couleurs quelconques d'un même ensemble K_i engendrent un sous-graphe sans cycle.

On démontre qu'un multigraphe cubique G possède un ensemble cycliquement stable maximum S tel que G_{X-S} soit un stable. (On pourra se reporter à la démonstration présentée par M. SAKAROVITCH dans sa thèse [63]).

Un multigraphe cubique admet donc une $(1, 2)$ coloration acyclique.

7.- REMARQUE

Rechercher le nombre de stabilité cyclique $\alpha_1(G)$ d'un graphe G , et plus généralement le cardinal maximal $\alpha_k(G)$ d'un ensemble k -dégénéré est un problème de "première catégorie".

On pourrait s'intéresser au cardinal minimal $\alpha'_1(G)$ d'un ensemble cycliquement stable maximal, et, plus généralement, au cardinal minimal $\alpha'_k(G)$ d'un ensemble k -dégéré maximal. Ces problèmes - que nous n'avons pas abordés - sont des problèmes de "deuxième catégorie".

chapitre 4
couverture par des ensembles minimaux

Ce chapitre présente un certain nombre de problèmes de "deuxième catégorie" - problèmes pour la plupart non résolus.

L'usage veut en général que l'on ne pose des problèmes sur un sujet qu'après avoir donné un certain nombre de résultats. Préférant le bon sens aux règles établies, nous allons formuler les questions avant de tenter d'y répondre. Autrement dit, nous allons présenter des "conjectures" dans l'ordre dans lequel nous les avons formulées. Seules des réponses partielles seront ensuite données à quelques unes d'entre elles [52].

Le point de départ de cette étude est la conjecture suivante:

Conjecture C1 (GRUNBAUM [17])

"On peut couvrir les arêtes d'un graphe 2-connexe de degré maximum Δ par Δ couvertures minimales (de ses sommets par des arêtes)".

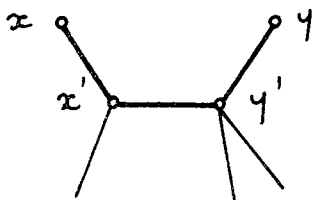
Pour pouvoir couvrir les arêtes d'un graphe (sans sommets isolés) par des couvertures minimales, il est nécessaire et suffisant que toute arête soit dans une couverture minimale.

Pour que toute arête soit dans une couverture minimale il est nécessaire et suffisant que la distance entre deux sommets quelconques de degré 1 soit différente de 3.

Démonstration

Soit $G = (X;E)$

a/ Si deux sommets pendants de G , x et y , sont à distance 3, les deux arêtes pendantes $x'x$ et $y'y$ sont dans toute couverture minimale.



L'arête $x'y'$ n'appartient donc à aucune couverture minimale. *

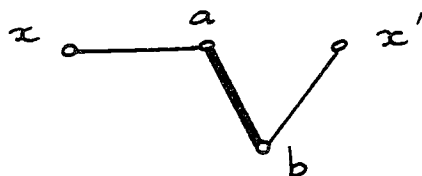
4.2

b/ Soit $\{a,b\}$ une arête de G n'appartenant à aucune couverture minimale.

Soit C une couverture minimale partielle de G telle que $\{a,b\} \in C$ et couvrant un nombre maximum de sommets de G .

Soit x un sommet non couvert par C . x est nécessairement relié soit à a , soit à b , sinon on construit immédiatement une couverture minimale C' contenant l'arête ab et couvrant un sommet de plus.

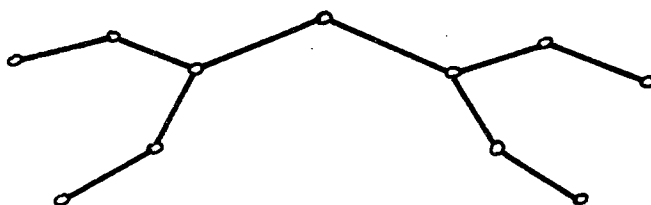
Le sommet (par exemple a) auquel est relié x n'est pas "centre" de "l'étoile" de C contenant l'arête $\{a,b\}$. Il existe donc (au moins) un sommet x' couvert par C et relié à b .



x' n'est relié qu'à b , sinon on peut construire une couverture minimale couvrant un sommet de plus et contenant $\{a,b\}$.

x et x' sont donc deux sommets pendants à distance 3. □

L'exemple suivant:



montre qu'il n'est pas suffisant qu'un graphe G de degré maximum Δ ne possède pas de sommets pendants distants de 3 pour avoir ses arêtes couvertes par Δ couvertures minimales.

Il semble que l'on puisse étendre la conjecture de GRUNBAUM au cas des graphes (et plus généralement des multigraphes) sans sommets pendants.

On peut énoncer:

Conjecture C2:

"On peut couvrir les arêtes d'un multigraphe G sans boucles ni sommets pendants, de degré maximum Δ , par Δ couvertures minimales".

Le dual G^* d'un multigraphe G sans boucles ni sommets pendants est un hypergraphe de SPERNER régulier de degré 2 et de rang $h = \Delta(G)$.

Réciproquement, le dual d'un hypergraphe de SPERNER, régulier de degré 2, de rang h est un multigraphe G sans boucles ni sommets pendants, de degré maximum $\Delta(G) = h$.

La conjecture C2 est donc équivalente à la conjecture suivante:

Conjecture C'2:

"On peut couvrir les sommets d'un hypergraphe de SPERNER régulier de degré 2, de rang h par h transversaux minimaux".

Par extension aux hypergraphes de degré quelconque, on obtient:

Conjecture C3:

"On peut couvrir les sommets d'un hypergraphe de SPERNER, régulier, de rang h , par h transversaux minimaux".

Ce qui donne, dans le cas particulier des graphes, la conjecture suivante:

Conjecture C4

"Si G est un graphe simple, régulier de degré $d \neq 0$, alors:

- on peut couvrir ses sommets par 2 transversaux minimaux,
- et donc, propriété équivalente, il existe 2 stables maximaux disjoints".

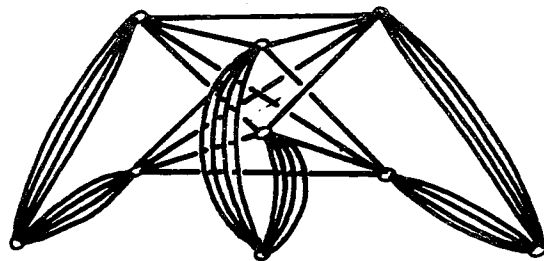
En passant au graphe complémentaire, on obtient naturellement la conjecture équivalente suivante:

Conjecture C'4:

"Tout graphe simple régulier à n sommets, différent du graphe complet K_n possède deux cliques maximales disjointes".

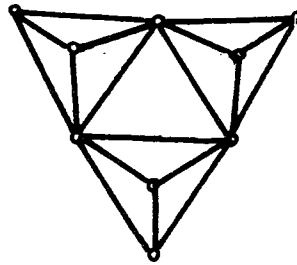
Remarque

Les conjectures C4 et C'4 ne s'étendent pas au cas des multigraphes réguliers comme le montrent les exemples suivants:

 G_1  G_2

G_1 ne possède pas deux cliques maximales disjointes.

G_2 ne possède pas deux stables maximaux disjoints, en effet le complémentaire du graphe simple associé à G_2 en remplaçant chaque arête multiple par une arête simple est le graphe suivant:



Ce graphe ne possède pas deux cliques maximales disjointes.

Le dual G^* d'un graphe simple G est un hypergraphe tel que $\forall E_i, E_j$ deux arêtes distinctes de cet hypergraphe $|E_i \cap E_j| \leq 1$.

Tout stable de G étant un couplage de G^* et réciproquement, la conjecture C4 est équivalente à la conjecture suivante:

Conjecture C'4:

"Tout hypergraphe $H=(X;E)$ uniforme, régulier de degré 2 et tel que $\forall E_i, E_j \in E: |E_i \cap E_j| \leq 1$, possède deux couplages maximaux disjoints".

Cette conjecture peut se généraliser aux hypergraphes uniformes réguliers de degré quelconque d . (Cette dernière conjecture est, on le verra plus loin, vérifiée dans le cas particulier des graphes simples).

Nous proposons une conjecture plus forte:

Conjecture C5:

"Tout hypergraphe $H=(X;E)$ uniforme, régulier de degré d et tel que $\forall E_i, E_j \in E: |E_i \cap E_j| \leq 1$, possède d couplages maximaux disjoints deux à deux".

Ce qui donne dans le cas des graphes, la conjecture suivante:

Conjecture C6:

"Tout graphe simple régulier de degré d possède d couplages maximaux disjoints deux à deux".

Cette dernière conjecture est, on le verra, vérifiée en particulier pour les graphes de degré $d \leq 3$.

La conjecture C4 nous amène à nous poser deux sortes de problèmes:

1/ Une généralisation dans un sens "plus fort" est la recherche de stables maximaux disjoints deux à deux, autrement dit la recherche de couplages de stables maximaux.

On peut ainsi introduire pour un graphe G , deux paramètres $\bar{b}(G)$ et $\underline{b}(G)$.

$\bar{b}(G)$ est le nombre maximum de stables maximaux disjoints deux à deux, autrement dit, c'est le cardinal maximum d'un couplage de stables maximaux.

Ce paramètre a été défini par HEDETNIEMI et COCKAYNE[9].

$\underline{b}(G)$ est le nombre minimum de stables maximaux disjoints deux à deux tel que tout autre stable maximal ait au moins un sommet commun avec l'un d'eux.

Autrement dit $\underline{b}(G)$ est le cardinal minimum d'un couplage maximal de stables maximaux.

On peut s'intéresser au cas particulier des graphes \tilde{G} représentatifs des arêtes de graphes G .

On est donc amené à rechercher des couplages maximaux disjoints deux à deux.

C'est ainsi que B.GRUNBAUM [19] a défini les paramètres $\bar{\Pi}(G)$ et $\underline{\Pi}(G)$ représentant respectivement les cardinaux maximum et minimum d'un couplage maximal de couplages maximaux d'un graphe G .

Ainsi la conjecture C_6 s'écrit:

"Pour tout graphe G régulier de degré d , $\bar{\Pi}(G) \geq d$ ".

B.GRUNBAUM a étudié les paramètres $\bar{\Pi}(G)$ et $\underline{\Pi}(G)$ pour des graphes particuliers [19] et présente à cette occasion des conjectures auxquelles nous donnons plus loin des contre-exemples [62].

2/ Une généralisation dans un sens "plus faible" est la recherche de couvertures par des transversaux terminaux.

Pour un graphe G on peut définir le paramètre $t(G)$ cardinal de la plus petite couverture par des transversaux minimaux.

On peut ainsi affaiblir la conjecture C_4 et se demander s'il existe un entier k tel que $\forall G$ graphe régulier on ait $t(G) < k$.

Nous amorçons dans ce chapitre l'étude du paramètre $t(G)$, paramètre non encore étudié à notre connaissance.

Nous montrons en particulier que pour des classes importantes de graphes, ce paramètre t est lié à l'*indice de régularité* $r(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \rceil$

Aparavant, nous allons donner quelques résultats partiels sur la conjecture initiale de B.GRUNBAUM (conjecture C_1).

1. COUVERTURE DES ARETES D'UN GRAPHE PAR DES COUVERTURES MINIMALES PARTIELLES - P-COUPLAGES

Rappelons qu'une couverture minimale partielle (des sommets par des arêtes) d'un graphe G est une couverture minimale d'un sous graphe.

Par extension de la notion de couplage et de couplage parfait, nous appellerons *p-couplage* d'un graphe G une couverture minimale partielle C engendrant un graphe G_C de degré maximum inférieur ou égal à p .

Nous appellerons *p-couplage parfait* un p -couplage couvrant tous les sommets de G , c'est-à-dire une couverture minimale de degré inférieur ou égal à p .

Pour un sous ensemble d'arêtes d'un graphe G , la propriété d'être une couverture minimale partielle des sommets de ce graphe est une propriété héréditaire pour l'inclusion.

Couvrir les arêtes d'un graphe par des couvertures minimales partielles est donc un problème de 1ère catégorie, problème on va le voir relativement facile.

Proposition IV 1

On peut couvrir les arêtes d'un multigraphe sans boucles de degré maximum Δ par Δ couvertures minimales partielles.

Démonstration immédiate par récurrence sur Δ .

Nous allons améliorer ce théorème à l'aide d'un résultat sur l'existence de p -couplages parfaits.

Proposition IV 2

Tout multigraphe G sans boucles, d'indice de régularité $r(G) \leq p$ (avec $p \geq 2$) admet un p -couplage parfait.

Démonstration

Soit G un multigraphe sans boucles tel que $\frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \leq p$ et soit D un p -couplage de G couvrant un nombre maximum de sommets.

S'il existe un sommet x_0 de G non recouvert par D il est clair que x_0 n'est relié qu'à des sommets x_1^i de G_D de degré p dans G_D .

Tous les sommets voisins dans G_D d'un sommet x_1^i ne sont eux-mêmes reliés qu'à des sommets x_2^i de G_D de degré p dans G_D ... etc.

Sinon il est facile de voir que l'on peut construire un p -couplage D' couvrant x_0 et tous les sommets couverts par D .

Soit k le nombre de sommets x_j^i de G_D de degré p dans G_D ainsi atteints à partir de x_0 . x_0 et les kp voisins de ces sommets x_j^i dans G_D ne sont reliés qu'à ces k sommets.

On a donc:

$$k \Delta(G) \geq (kp + 1)\delta(G)$$

$$\frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \geq \frac{kp + 1}{k} > p \quad \text{ce qui est impossible} \quad \square$$

Corollaire 1

Soit G un multigraphe sans boucles à n sommets, d'indice de régularité r .

On a

$$c(G) \leq \frac{n}{r+1} \quad (c(G) : \text{cardinal maximum d'un couplage})$$

$$\rho(G) \geq n \frac{r}{r+1} \quad (\rho(G) : \text{cardinal minimum d'une couverture})$$

Corollaire 2

Soit G un multigraphe sans boucles de degré maximum Δ .

Il existe un 2-couplage C couvrant tous les sommets de G de degré Δ .

Démonstration

G est sous multigraphe partiel d'un certain multigraphe G^+ régulier de degré Δ . G^+ admet un 2-couplage parfait C^+ . La restriction de C^+ , de G^+ à G est un 2-couplage C de G couvrant tous les sommets de G de degré Δ .

On obtient ainsi la proposition suivante:

Proposition IV.3

On peut couvrir les arêtes d'un multigraphe sans boucles de degré maximum Δ par Δ 2-couplages, c'est-à-dire par Δ couvertures minimales partielles de degré maximum inférieur ou égal à 2.

2. COUVERTURE DES ARETES D'UN GRAPHE PAR DES COUVERTURES MINIMALES

Nous abordons dans ce paragraphe la conjecture C1. Le fait de considérer comme éléments de couvertures seulement des couvertures minimales (et non pas des couvertures minimales partielles) rend le problème beaucoup plus difficile.

Nous allons limiter notre étude au cas des graphes sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$. (Cette classe de graphes qui englobe les graphes représentatifs des arêtes de multigraphes [2] possède des propriétés intéressantes: c'est la classe des graphes tels que tout sous-graphe d'ordre pair admet un couplage parfait [33] ; c'est aussi la classe des graphes "parfaitement stables-continus" [27] , c'est-à-dire tels que pour tout sous-graphe l'ensemble des cardinaux de ses stables maximaux forme un intervalle de \mathbb{N}).

Proposition IV.4

Soit $G=(X,E)$ un graphe sans sommet pendant et sans sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$.

Tout couplage de G est contenu dans un 3-couplage parfait.

Démonstration

Il suffit de démontrer le théorème pour un couplage maximal de G .

Nous allons d'abord montrer que C est contenu dans une couverture minimale de G .

Soit D une couverture minimale partielle contenant C et couvrant un nombre maximum de sommets de G .

Soit Z l'ensemble des sommets de G couverts par C : $G_C = (Z, C)$.

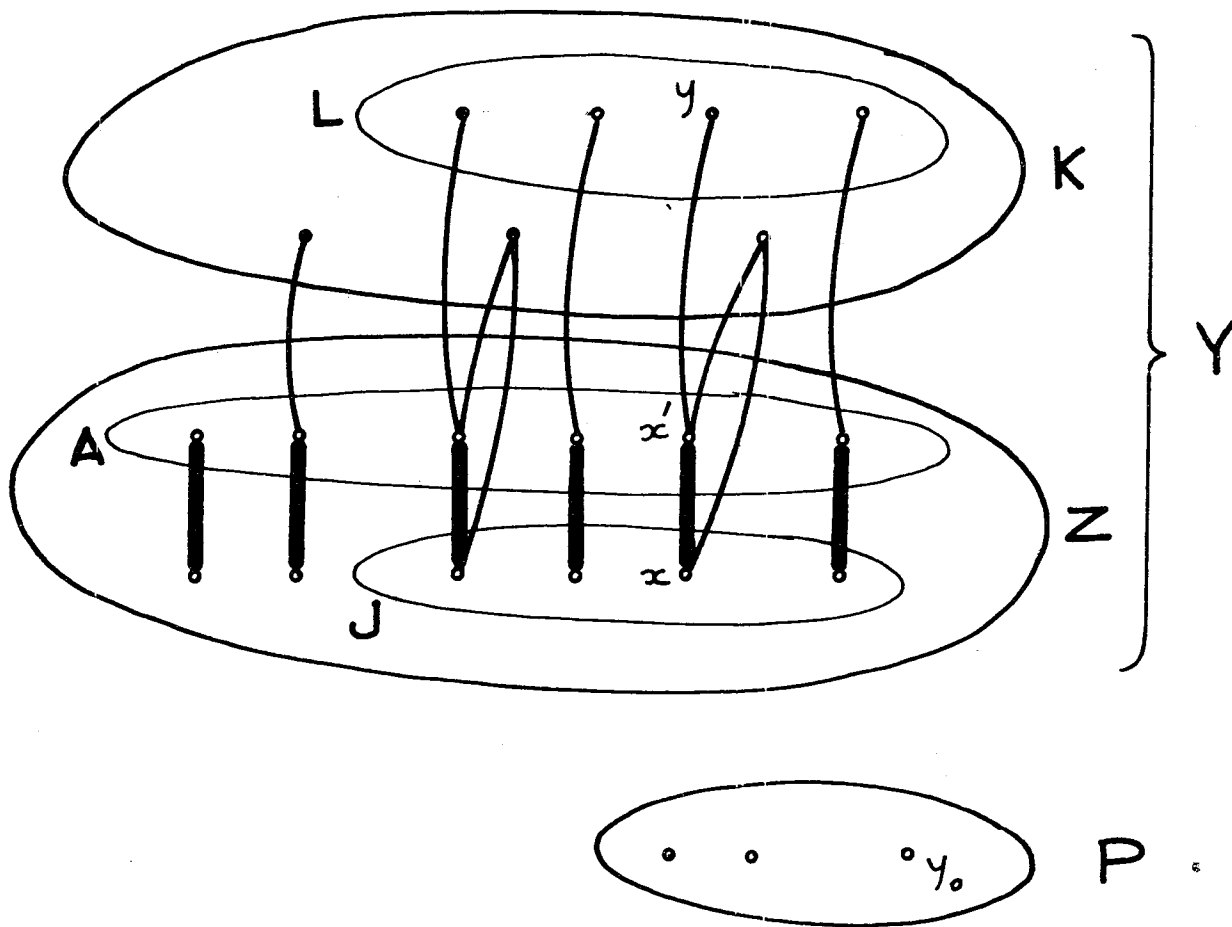
Soit Y l'ensemble des sommets de G couverts par D : $G_D = (Y, D)$.

Soit $P = X - Y$ l'ensemble des sommets non couverts par D .

Nous allons montrer que P est vide.

Soit K l'ensemble des sommets couverts par D et non par C .

$P \cup K$ est un stable puisque C est un couplage maximal.



Soit $A \subseteq Z$ un absorbant minimum de G_D . (A est ensemble de "centres" de D)

Quelque soit l'arête $\{x, x'\}$ de C telle que $x \in A, x' \in Z - A$ il existe au plus un sommet $y \in K$ tel que $\{x, y\} \in E$ et $\{x', y\} \notin E$ (sinon, s'il existait un autre sommet y' tel que $\{x, y'\} \in E$ et $\{x', y'\} \notin E$ le sous-graphe $G_{\{x, x', y, y'\}}$ serait isomorphe à $K_{1,3}$ puisque $\{y, y'\} \notin E$ (C est un couplage maximal).

Soit L l'ensemble de ces sommets.

Soit $J = \{x' \mid \{x, x'\} \in C, x \in A, \exists y \in L \mid \{x, y\} \in D\}$

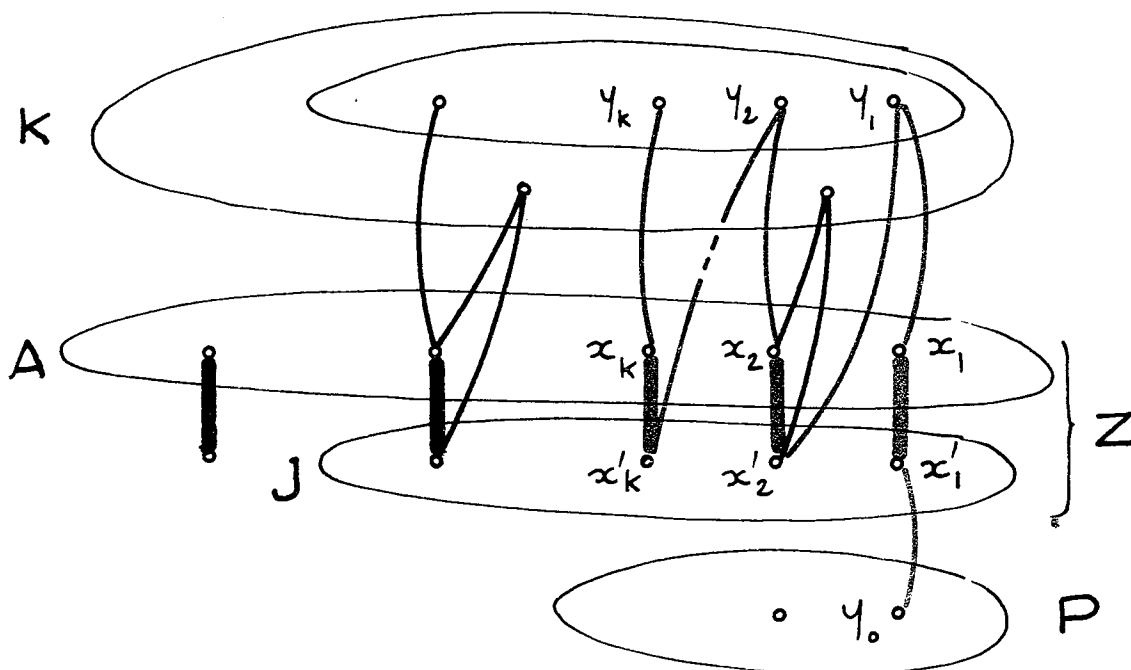
Supposons $P \neq \emptyset$; soit $y_0 \in P$

Soit $y_0 \overset{!}{x_1} x_1 y_1 \overset{!}{x_2} x_2 y_2 \dots \overset{!}{x_k} x_k y_k$ une suite de longueur minimum telle que:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad & x'_i \in J, x_i \in A \\ & \{x_i, x'_i\} \in C \\ & y_i \in L \quad (\{x'_i, y_i\} \notin E) \\ & \{x_i, y_i\} \in D \\ & \{y_{i-1}, x'_i\} \in E \\ & i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, y_i \neq y_j \end{aligned}$$

et $\exists z \in \bar{J} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \mid \{y_k, z\} \in E$.

Une telle suite existe nuiisque G n'a pas de sommets pendants.



$z \in Z$; soit $t \mid \{z, t\} \in C$

Soit $A' = A - \{x_1, x_2, \dots, x_k\} - \{t\} \cup \{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\} \cup \{z\}$

$\forall e \in C : |e \cap A'| = 1$

$\forall y \in Y \cup \{y_0\} \exists x \in A' \mid \{x, y\} \in E$

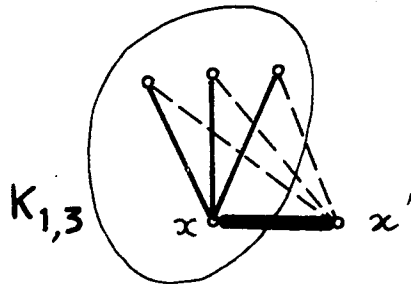
Il existe donc une couverture minimale partielle D' (ayant pour ensemble de centres A') contenant C et couvrant un sommet de plus que D .

On arrive ainsi à une contradiction.

Tout couplage maximal de G est donc contenu dans une couverture minimale D .

D est un 3-couplage (parfait).

En effet, si G_D admettait un sommet de degré 4, G aurait un sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$.

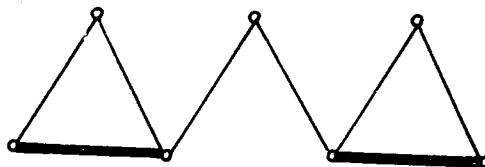


Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque 1

Pour un graphe G (sans sommets pendants, sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$) tout couplage n'est pas contenu dans un 2-couplage parfait.

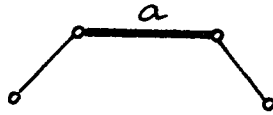
Exemple:



Remarque 2

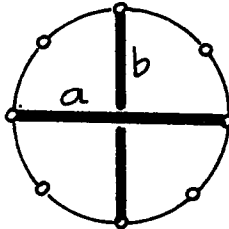
Pour un graphe G quelconque tout couplage C n'est pas contenu dans une couverture minimale.

exemple 1 : graphe sans sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, mais avec des sommets pendants:



$$C = \{a\}$$

exemple 2 : graphe sans sommets pendants (et même 2-connexe) mais avec des sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$.



$$C = \{a, b\}$$

Dans le cas général on a simplement la propriété suivante:

"Tout couplage maximum est contenu dans une couverture minimale".

Corollaire 1:

a) si G est un graphe sans sommets pendants et sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$ $c'(G) \geq \frac{n(G)}{4}$

($c'(G)$ désigne le cardinal minimum d'un couplage maximal).

b) $\beta(G) \leq c'(G)$
($\beta(G)$ désigne le nombre d'absorption de G)

On a donc en particulier:

c) Si G est un multigraphe dont toute arête est adjacente à au moins deux arêtes:

$$\beta(L(G)) \leq \beta(L(L(G))) \leq \dots \leq \beta(L(L \dots (L(G)) \dots))$$

($L(G)$ désigne le graphe représentatif des arêtes de G - "line-graph").

En effet $\beta(L(L(G))) = c'(L(G))$

Corollaire 2: Proposition IV.5.

On peut couvrir les arêtes de tout graphe G de degré maximum Δ , sans sommets pendants, sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$ par $\Delta+1$ 3-couplages parfaits.

Démonstration:

On peut en effet couvrir les sommets de G par $\Delta+1$ couplages [69].

Problème

Peut-on couvrir les arêtes de tout graphe G de degré Δ sans sommets pendants par une couverture minimale et $\Delta-1$ couplages?

3. COUVERTURE PAR DES TRANSVERSAUX MINIMAUX PARTIELS COUPLAGE DE STABLES MAXIMAUX PARTIELS

Rappelons que l'on appelle transversal minimal *partiel* et stable maximal *partiel* d'un graphe G , respectivement un transversal minimal et un stable maximal d'un graphe partiel de G .

Le fait de rajouter le terme "*partiel*" nous ramène, comme au paragraphe 1, à un problème de "première catégorie".

On a vu au chapitre I qu'un stable maximal partiel était un absorbant. Le problème est donc résolu au chapitre II (Proposition II.15) et l'on a:

"Tout graphe G possède $\beta(\bar{G})$ stables maximaux partiels disjoints deux à deux".

et par suite:

"On peut couvrir les sommets de tout graphe sans sommet isolés par deux transversaux minimaux partiels".

Dans [9] E.J. COCKAYNE et S.T. HEDETNIEMI ont introduit à ce sujet le paramètre $d(G)$ ("*domatic number*") qui est le cardinal maximum d'une partition en absorbants des sommets de G .

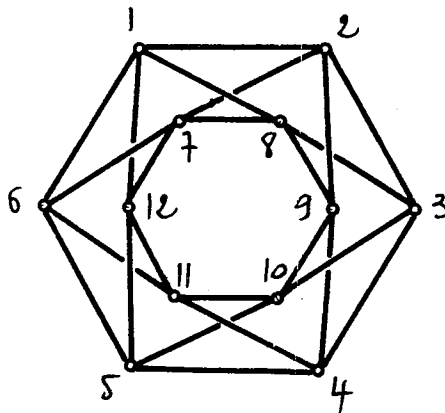
Il définissent d'autre part les graphes *indominables*: graphes dont les sommets peuvent être partitionnés en stables maximaux.

Pensant que le "domatic number" $d(G)$ est lié à l'arête connexité $\lambda(G)$, ils conjecturent:

"Si G est un graphe indominable $d(G) \geq \lambda(G)$ "

Nous donnons un contre exemple à cette conjecture:

Soit G le graphe suivant



L'ensemble des sommets de G peut être partitionné en deux stables maximaux $(1,3,5,7,9,11)$ $(2,4,6,8,10,12)$ et en trois stables maximaux $(1,4,7,10)$ $(2,5,8,11)$ $(3,6,9,12)$. G est donc bien indominable.

- Il est facile de voir que G est 4-arête connexe ($\lambda(G)$ est pair, $\lambda(G) > 2$).

$\beta(G) = 4$. Donc $d(G) \leq \frac{12}{4} = 3$

En fait $d(G) = 3$ puisqu'il existe une partition des sommets en 3 stables maximaux.

On a donc $d(G) < \lambda(G)$.

4. COUVERTURE PAR DES TRANSVERSAUX MINIMAUX

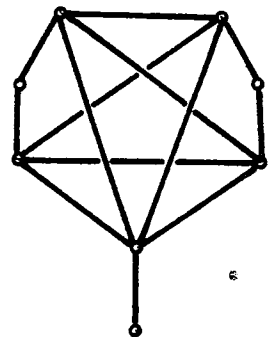
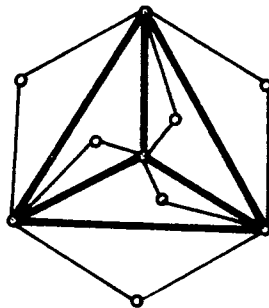
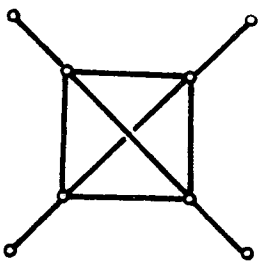
4.1. Propriétés générales

Pour que l'on puisse couvrir les sommets d'un graphe par des transversaux minimaux, il est nécessaire et suffisant que ce graphe n'ait pas de sommets isolés. Nous nous limiterons donc au cas des graphes sans sommets isolés.

Nous noterons $t(G)$ le cardinal minimum d'une couverture des sommets de G par des transversaux minimaux.

Nous allons maintenant démontrer un théorème très simple qui ramène partiellement le problème de la recherche de $t(G)$ à un problème de "première catégorie", à savoir la recherche du nombre chromatique d'un certain sous-graphe de G .

Ce théorème semble être un outil simple et très utile pour déterminer $t(G)$. Pour tenter d'en convaincre le lecteur, nous allons donner quelques exemples de graphes et lui demander de déterminer pour chacun d'eux le paramètre t , sans cet outil:



La définition d'absorbant fort a été donnée au chapitre II.

Par extension, nous dirons qu'un sous ensemble A de sommets d'un graphe $G = (X, E)$ *absorbe de manière forte* $Y \subseteq X$ si $\forall y \in Y \exists e \in A \mid \{a, y\} \in E$.

Proposition IV.6

On peut couvrir les sommets d'un multigraphe sans boucles G par p transversaux minimaux si et seulement si il existe un absorbant fort A de G tel que $\gamma(G_A) \leq p$.

autrement dit:

$$t(G) = \min \gamma(G_A) \quad \text{pour } A \text{ absorbant fort de } G.$$

Démonstration

Soit $G = (X; E)$ un multigraphe sans boucles.

1/ Soit p transversaux minimaux T_1, T_2, \dots, T_p tels que
 $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_p = X$ (remarquons que $p \geq 2$)

Soit $S_1 = X - T_1, S_2 = X - T_2, \dots, S_p = X - T_p$

S_1, S_2, \dots, S_p sont des stables maximaux tels que

$$S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_p = \emptyset$$

Soit $A = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_p$

A est un absorbant de G

G_A est un multigraphe sans sommets isolés

donc A est un absorbant fort

et $\gamma(G_A) \leq p$.

2/ Soit A un absorbant fort de G tel que $\gamma(G_A) = k \leq p$

On peut donc recouvrir A par k stables maximaux de G_A :

S_1, S_2, \dots, S_k tels que

$$S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k = \emptyset$$

puisque G_A est sans sommets isolés.

Soit S'_1 un stable maximal de G tel que $S_1 \subseteq S'_1$
 S'_2 un stable maximal de G tel que $S_2 \subseteq S'_2$
 \vdots
 S'_k un stable maximal de G tel que $S_k \subseteq S'_k$

On a $S'_1 \cap S'_2 \cap \dots \cap S'_k = \emptyset$

Sinon $\forall x \in S'_1 \cap S'_2 \cap \dots \cap S'_k$, x ne serait pas absorbé par A ce qui est impossible.

Soit $T_1 = X - S'_1$, $T_2 = X - S'_2$, ..., $T_k = X - S'_k$
 T_1, T_2, \dots, T_k sont des transversaux minimaux de G dont l'union est X .

On peut donc recouvrir X par k , donc à fortiori par p transversaux minimaux. □

Remarque:

Ce résultat permet non seulement de déterminer le paramètre t mais aussi de trouver effectivement une couverture par t transversaux maximaux.

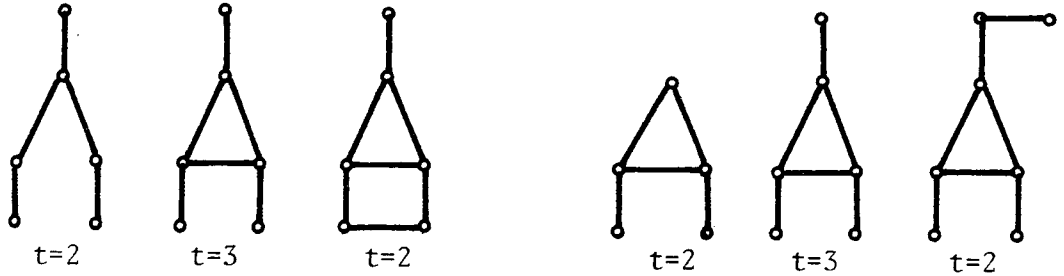
Pour les graphes G_1, G_2, G_3 donnés précédemment, on peut voir maintenant que le paramètre t vaut respectivement 4, 3, 3.

- Un absorbant fort de G_1 devant absorber de manière forte les sommets pendants, doit contenir l'ensemble des sommets non pendants ; cet ensemble de sommets est un absorbant fort de tout le graphe et engendre un graphe 4 chromatique ; on a donc $t(G_1) = 4$.

- Pour absorber de manière forte les sommets de degré 2 de G_2 , il est nécessaire d'avoir un transversal de K_4 , c'est-à-dire un triangle, triangle qui constitue un absorbant fort de G_2 ; on a donc $t(G_2) = 3$.

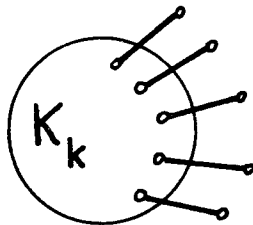
- on trouve de même $t(G_3) = 3$.

L'étude de quelques exemples permet de voir que le paramètre t n'est pas monotone pour l'inclusion sur les sommets, ni pour l'inclusion sur les arêtes.

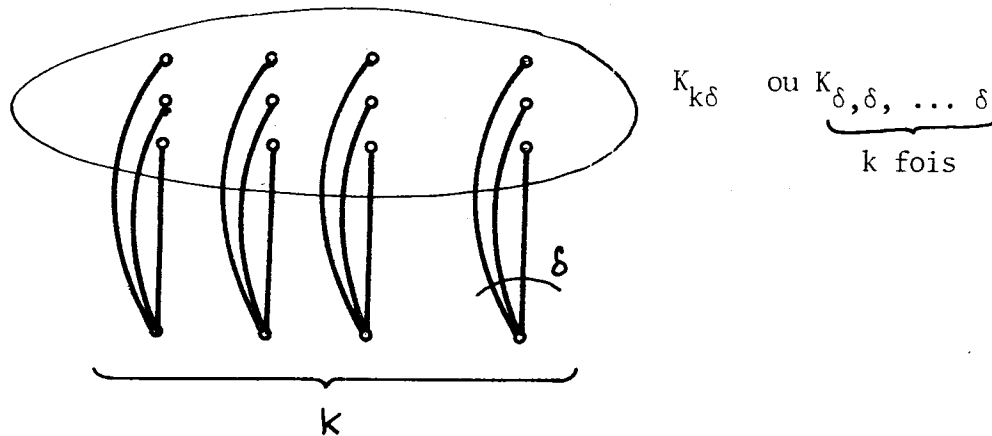


Expérimentalement "la plupart" des graphes G sont tels que $t(G) = 2$. Autrement dit, ils possèdent deux stables maximaux disjoints.

La proposition IV.6. permet de construire des graphes G avec $t(G)$ donné. On montre ainsi que le plus petit graphe ayant $t(G) = k \geq 3$ est le graphe formé en accrochant un sommet pendant à chacun des k sommets du graphe complet K_k .



On peut de même construire des graphes G de degré minimum δ quelconque avec $t(G) = k$ donné.



Tous les graphes G que l'on peut construire avec $t(G)$ élevé ont un indice de régularité $r(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \rceil$ élevé. En vue d'approcher la conjecture C_4 on peut se demander s'il existe une fonction $f(r(G))$ croissante en $r(G)$ telle que l'on ait $t(G) \leq f(r(G))$. On verra que pour une classe importante de graphes on a $t(G) \leq r(G)$, mais aussi que $\forall c \in \mathbb{N}$ on peut construire des graphes G tels que $t(G) > c r(G)$.

Donnons simplement pour l'instant quelques bornes supérieures générales de $t(G)$.

Proposition IV.7.

Soit $G = (X, E)$ un graphe (et plus généralement un multigraphe sans boucles) sans sommets isolés.

On a :

- a/ $t(G) \leq \gamma(G)$
- b/ $t(G) \leq \max \{2, \Delta(G)\}$
- c/ $t(G) \leq \max \{2, \beta(G)\}$

Ces bornes sont atteintes.

Démonstration :

- a/ L'ensemble des sommets X de G est évidemment un absorbant fort de G .
- b/ On a $\Delta(G) \leq \gamma(G)$ si G est différent d'un cycle impair ou d'une clique $[7]$. Or dans ces deux cas $t(G) = 2$.
- c/ Si $\beta(G) = 1$ on a évidemment $t(G) = 2$.
En effet si $\{x\}$ est l'absorbant $\{x, y\} \in E$ est un absorbant sans sommet isolé, donc un absorbant fort.
Supposons donc $\beta(G) \geq 2$.
Soit A un absorbant minimum de G .
Soit G_A le graphe engendré par A .

Soit I l'ensemble des sommets isolés de G_A .

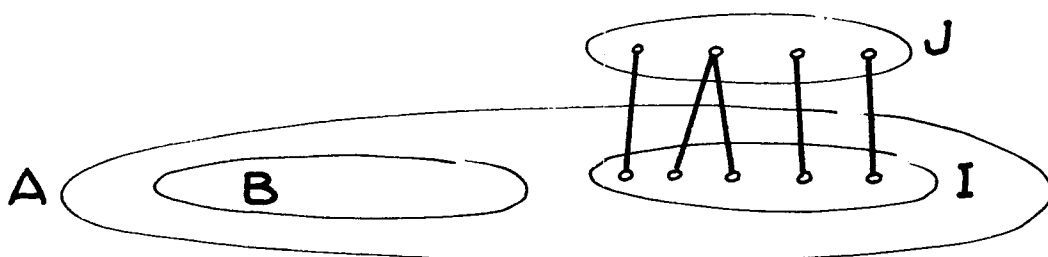
Soit $k = |I|$.

Si $k = 0$, A est un absorbant fort et

$$t(G) \leq \gamma_{G_A} \leq |A| = \beta(G)$$

Soit B l'ensemble des sommets non isolés de G_A .

$$|B| = \beta(G) - k$$



1er cas: B est non vide (A n'est pas un stable)

Soit $J \subseteq X-A$ un absorbant fort de I de cardinal minimum. $|J| \leq k$.

$A \cup J$ est un absorbant fort de G .

$$\gamma(G_B) \leq |B| \leq \beta(G) - k$$

$$\gamma(G_J) \leq |J| \leq k$$

Donc $t(G) \leq \gamma(G_{A \cup J}) \leq \beta(G)$ puisque l'on peut colorier le stable I avec l'une des couleurs servant à colorier B .

2ème cas: B est vide. $A = I$

Soit J un absorbant fort du stable A .

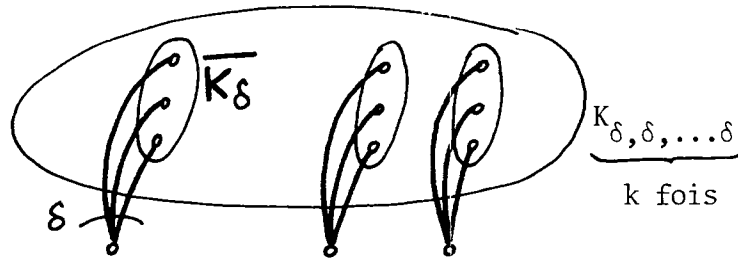
Si $\gamma(G_J) < \beta(G)$, $\gamma(G_{A \cup J}) \leq \beta(G)$

Sinon, G_J est un graphe complet à $\beta(G)$ sommets et dans ce cas

$$\gamma(G_{A \cup J}) = \beta(G) \text{ puisque } \beta(G) \geq 2.$$

Ces trois bornes sont atteintes pour les graphes obtenus en raccrochant un sommet pendant à chacun des sommets du graphe complet K_p .

Les deux bornes $t(G) \leq \gamma(G)$ et $t(G) \leq \max \{2, \beta(G)\}$ sont atteintes quelque soit le degré minimum $\delta(G)$.



$$t(G) = \beta(G) = \gamma(G) = k$$

Par contre la borne $t(G) \leq \max \{2, \Delta(G)\}$ peut être légèrement améliorée pour les graphes sans sommets pendants.

Proposition IV.8.

Pour tout graphe G sans sommets pendants, de degré maximum $\Delta(G) \geq 4$ on a:

$$t(G) \leq \Delta(G) - 1$$

Démonstration:

On peut supposer $\gamma(G) \geq \Delta(G)$, sinon le théorème est démontré.

Soit $Y \subseteq X$ tel que $\gamma(G_Y) = \Delta(G) - 2$ et maximal pour cette propriété.

Soit $Z \subset Y$ l'ensemble des sommets isolés de G_Y .

Puisque $\Delta(G) - 2 \geq 2$, $Y - Z$ n'est pas vide et constitue un absorbant fort de $X - Z$ (tout sommet de $X - Y$ est relié à au moins $\Delta(G) - 2$ sommets de $Y - Z$; tout sommet de $Y - Z$ est relié à au moins un sommet de $Y - Z$).

Tout sommet de Z est relié à au moins deux sommets de $X - Y$.

Soit B l'ensemble des sommets de X - Y reliés à au moins un sommet de Z .

$\Delta(G_{Z \cup B}) \leq 2$ puisque tout sommet de B est relié à au moins $\Delta(G)-2$ sommets de $Y-Z$.

Il existe un stable $S \subseteq B$ absorbant de Z : en effet $G_{Z \cup B}$ est un graphe formé de cycles et de chaînes ; tout stable ne contenant aucun sommet pendant peut être absorbé par un stable (obtenu à partir du premier par "rotation" sur les cycles et "translation" sur les chaînes).

$(Y-Z) \cup S$ est donc un absorbant fort de X tel que

$$\gamma(G_{Y-Z \cup S}) \leq \gamma(G_{Y-Z}) + \gamma(S) \leq \Delta(G) - 2 + 1$$

On a donc

$$t(G) \leq \Delta(G) - 1$$

Remarque

On verra plus loin que ce résultat est également valable pour les graphes de degré maximum égal à 3.

Cette borne n'est probablement atteinte que lorsque $\delta(G) = 2$. Il semble que l'on puisse conjecturer:

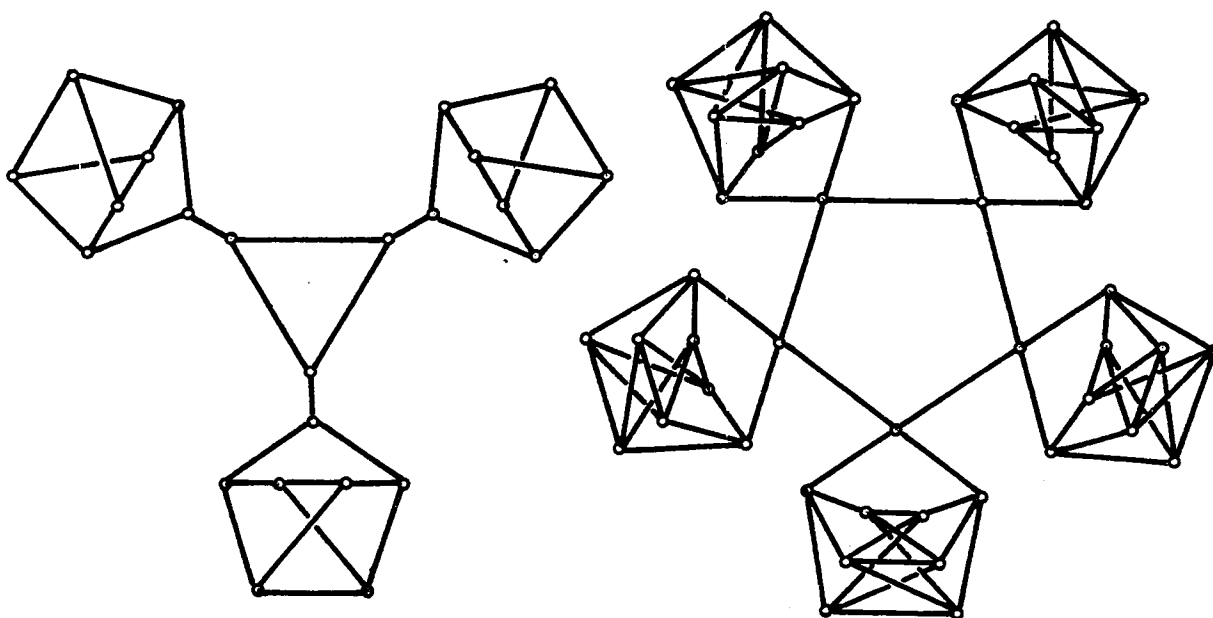
"Pour tout graphe G sans sommets isolés, $t(G) \leq \Delta(G) - \delta(G) + 2$ "

(Conjecture plus forte que la conjecture C_4)

Afin d'étudier de différentes manières le paramètre t , on peut regarder le sous-graphe engendré par un absorbant fort d'un point de vue autre que celui du nombre chromatique.

Par exemple, il semble que les graphes réguliers possèdent non seulement un absorbant fort biparti mais un absorbant fort sans cycle (propriété, on le verra, vérifiée pour les graphes cubiques, les graphes sans sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, etc...). Nous avons même longtemps pensé que

tout graphe régulier différent du cycle de longueur 5 possédait un absorbant fort de degré 1. Voici deux contre exemples permettant de générer d'autres contre-exemples de degré quelconque:



De manière générale, on peut étudier le degré maximum, le cardinal de la plus grande clique, ... du sous-graphe engendré par un absorbant fort et ainsi se demander par exemple si pour tout graphe régulier il existe un absorbant fort de degré maximum inférieur ou égal à 2, 3..., ou un absorbant fort sans triangle, sans chaîne de longueur 3 ... etc. propriétés toutes vérifiées pour les graphes sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$ et auxquelles on ne connaît aucun contre-exemple.

Dans cet ordre d'idée, on démontre le résultat suivant:

"Tout graphe G différent du cycle 5, de degré maximum $\Delta(G) > 2$ possède un absorbant fort A tel que $\Delta(G_A) \leq \Delta(G) - 1$ "

Ceci permettrait de retrouver d'une autre manière le résultat de la proposition IV.8.

Nous allons maintenant étudier le paramètre t pour des classes particulières de graphes.

4.2. Cas des graphes représentatifs des arêtes de graphes ou de multigraphes (line-graphs)

Ces graphes vérifient la conjecture C4.

Nous allons en fait démontrer un résultat plus fort.

Rappelons auparavant que le degré d'une arête d'un multigraphe est le nombre d'arêtes qui lui sont adjacentes. Nous noterons $\Delta_a(G) = \Delta(L(G))$ le degré maximum d'une arête de D et $\delta_a(G) = \delta(L(G))$ le degré minimum d'une arête de G

$r_a(G)$ désignera l'indice de régularité en arête de G: $r_a(G) = \left\lceil \frac{\Delta_a(G)}{\delta_a(G)} \right\rceil$

Un graphe est dit arête-régulier si $r_a(G) = 1$.

Proposition IV.9.

Soit G un multigraphe sans boucle, sans arête isolée arête régulier (de degré d_a)

Pour tout couplage (maximal) A, il existe un couplage maximal A' disjoint de A .

Démonstration

Soit A un couplage maximal de $G=(X,E)$.

Nous appellerons *chaîne alternée*:

- soit une chaîne élémentaire $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k$ ($\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}: e_i \in E$)
telle que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée:

1/ $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} e_i \in A \Leftrightarrow i$ est pair

2/ $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} e_i \in A \Leftrightarrow i$ est impair.

- soit deux arêtes e_1 et e_2 ayant mêmes extrémités et telle que $e_1 \in A$,
 $e_2 \notin A$.

Soit un ensemble $\mathcal{A} \subseteq E$ d'arêtes de G qui forment un ensemble de chaînes alternées $C = \{C_i\}$ disjointes au sens des sommets et qui est maximal pour cette propriété. C est l'ensemble de composants connexes de $G_{\mathcal{A}}$.

- $\mathcal{A} \supseteq A$

$\mathcal{A} - A$ est un couplage.

Nous dirons que l'ensemble \mathcal{A} est "*maximal alterné*". Nous allons démontrer qu'il existe un tel ensemble \mathcal{A} sans arêtes isolées (sans chaînes élémentaires de longueur 1), c'est-à-dire, propriété équivalente, qu'il existe un couplage maximal A' disjoint de A au sens des arêtes. (En effet, si \mathcal{A} est maximal alterné sans arête isolée, $\mathcal{A} - A$ est un couplage maximal).

Soit \mathcal{A} un ensemble d'arêtes de G maximal alterné.

Soit B l'ensemble des chaînes alternées de longueur 1 (arêtes isolées de $G_{\mathcal{A}}$).

On a $B \subseteq A$ puisque A est maximal.

Pour toute arête $b \in B$ soit la relation binaire R sur C définie de la façon suivante:

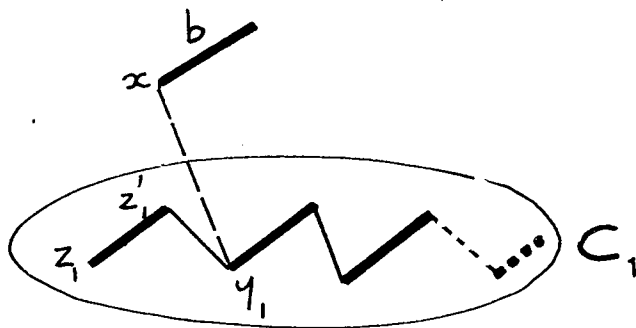
$b R C_1 \Leftrightarrow \exists x \in b$ et y_1 dans C_1 tels que $\{xy_1\} \in E$

et $[\{xy_1\} \in E \mid x \in b \text{ et } y_1 \text{ dans } C_1 \Rightarrow$

$\{z_1 \text{ extrémité de } C_1 \text{ et } z'_1 \text{ dans } C_1 \text{ tels que } \{z_1 z'_1\} \in A \text{ et } \{y_1 z'_1\} \text{ est une arête de } C_1]$

Le sommet y_1 sera appelé *cible* de C_1 .

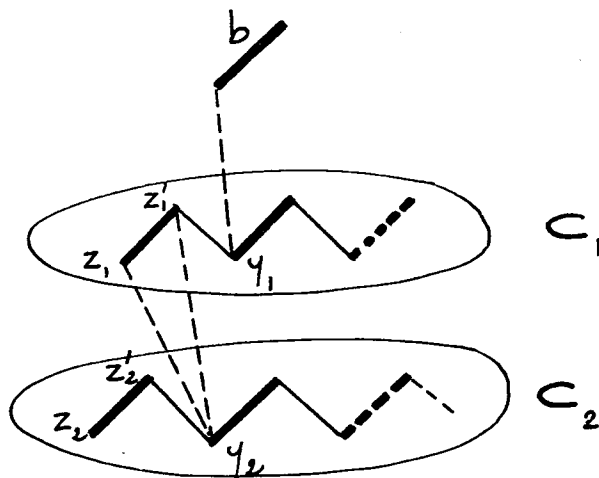
L'arête $\{z_1 z'_1\}$ sera appelée *base* de C_1 .



$C_1 R C_2 \Leftrightarrow \exists y_2 \text{ dans } C_2 \text{ tel que } \{z_1 y_2\} \in E \text{ ou } \{z'_1 y_2\} \in E \text{ et}$
 (et)
 $\{z_1 y_2\} \text{ ou } \{z'_1 y_2\} \in E \Rightarrow \exists z_2 \text{ extrémité de } C_2 \text{ et}$
 $z'_2 \text{ dans } C_2 \text{ tels que } \{z_2 z'_2\} \in A \text{ et } \{y_2 z'_2\} \text{ est une arête de } C_2.$

On dira que C_1 est en relation R avec C_2 par $\{z_1 z'_1\}$

y_2 est la cible de C_2 $\{z_2 z'_2\}$ est la base de C_2



On définit de la même manière $C_2RC_3, C_3RC_4, \dots, C_{k-1}RC_k$

Soit $C_b = \{C_i \in C \mid \exists p: bR^p C_i\}$

Soit $K_b =$ l'ensemble de cibles des C_i appartenant à C_b

Soit L_b l'ensemble des bases des C_i appartenant à C_b

On a $|L_b| = |K_b|$.

Soit une chaîne alternée $C_i \in C_b$ c'est-à-dire telle que l'on ait $bR^p C_i$

Soit la relation $\rho \subseteq C_b \times C$ définie par:

$$C_i \rho C \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1/ \text{ on n'a pas } C_i RC \\ 2/ \text{ soit } \{z_i, z_i'\} \text{ une base de } C_i \text{ } (\{z_i, z_i'\} \in C_i \cap L_b) \\ \quad \exists y \text{ dans } C \text{ tel que } \{y, z_i\} \in E \\ \quad \text{ou} \quad \{y, z_i'\} \in E \\ \quad \text{(et)} \end{array}$$

On dira que C_i est en relation ρ avec C par $\{z_i, z_i'\}$.

Soit maintenant un sommet quelconque $b \in B$

$\exists p$ fini, $C_i \in C_b, C \in C$ tels que l'on ait:

$$bR^p C_i \text{ et } C_i \rho C.$$

Sinon: soit $|K_b| = |L_b| = h$

Les points de K_b sont reliés à des points appartenant à des arêtes de $L_b \cup \{b\}$.

Les points appartenant à des arêtes de $L_b \cup \{b\}$ ne sont reliés qu'à des points de K_b .

Soit D le degré maximum d'un point de K_b . On a $D \leq d_a$.

Soit m le nombre d'arêtes de G reliant un point de K_b à un point appartenant à une arête de L_b .

On a :

$$h d_a \geq h D \geq m = (h+1)d_a$$

$$h d_a \geq (h+1)d_a$$

D'où $h \geq h+1$ puisque $d_a > 0$.

Ce qui est impossible.

Soit $b \in B$.

Soit $p_b = \min \{p \mid \exists C_i \in \mathcal{C}_b \text{ et } C \in \mathcal{C} : b R^p C_i \text{ et } C_i \rho C\}$

Soit \mathcal{C} un ensemble de chaînes alternées disjointes au sens des sommets tel que l'ensemble B des chaînes alternées de longueur 1 est non vide.

Soit $p_{\mathcal{C}} = \min_{b \in B} p_b$

Soit un ensemble maximal alterné \mathcal{A} d'arêtes de G qui forme un ensemble \mathcal{C} de chaînes alternées ayant un nombre minimum de chaînes alternées de longueur 1 et tel que $p_{\mathcal{C}}$ est minimum.

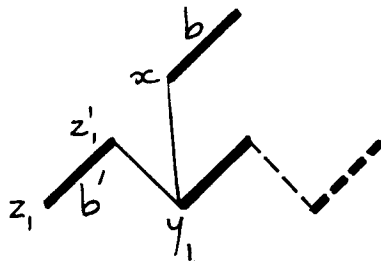
On a alors $p_{\mathcal{C}} = 0$

En effet, sinon, soit $b \in B$ tel que $p_b = p_{\mathcal{C}} = p \neq 0$.

Soit $C_1, C_2, \dots, C_p, C \in \mathcal{C}$ tel que l'on ait $b R C_1, C_1 R C_2, \dots, C_{p-1} R C_p, C_p \rho C$

C_1 est en relation R avec C_2 (ou en relation ρ avec C si $p = 1$) par

l'arête $b' = \{z_1, z'_1\}$



Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{xy_1\} - \{y_1 z'_1\}$. \mathcal{A}' est alterné.

On voit immédiatement que si \mathcal{A} est maximal alterné \mathcal{A}' forme un ensemble de chaînes alternées \mathcal{C}' tel que $B' = B \cup \{b'\} - b$ et tel que $p_{B'} = p_B - 1$

Donc $p_{\mathcal{C}'} < p_{\mathcal{C}}$ et $|B'| = |B|$

ce qui est impossible.

Si A' n'est pas maximal alterné, soit $\mathcal{A}' \supseteq A'$ maximal alterné et B'' l'ensemble des chaînes alternées de longueur 1 de \mathcal{A}' .

On a $B'' = B - \{b\}$ donc $|B''| < |B|$ ce qui est impossible.

Soit maintenant un ensemble maximal alterné \mathcal{A} d'arêtes de G qui forme un ensemble C de chaînes alternées ayant un nombre minimum de chaînes de longueur 1 et tel que $p_C = 0$ s'il existe des chaînes de longueur 1.

Nous allons démontrer qu'il n'existe aucune chaîne de longueur 1 ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Sinon, soit $b \in \mathcal{A}$ une arête isolée telle que $p_b = p_C = 0$

$\exists C \in \mathcal{C}$ tel que l'on ait $b \cap C$ c'est-à-dire:

$\exists x \in b$ et y dans C tel que $\{xy\} \in E$, tel que $\exists z'$ avec $\{yz'\} \in C \cap \bar{A}$ et tel que si $\exists \{zz'\} \in C \cap A$, z n'est pas extrémité de C .

Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{xy\} - \{yz'\}$. (On a $\mathcal{A}' \supseteq A$). \mathcal{A}' forme un ensemble de chaînes alternées C' avec un nombre de chaînes alternées de longueur 1 inférieur strictement au nombre de chaînes de longueur 1 de C .

Il en est de même pour $A'' \supseteq A'$, maximal alterné, ce qui est impossible. \square

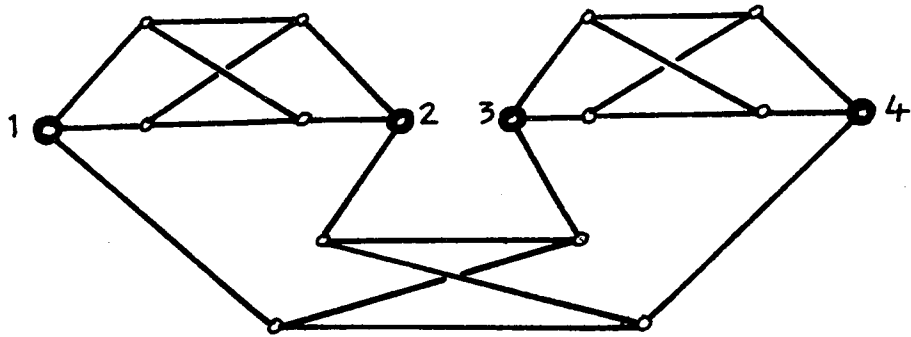
Corollaire

Soit $L(G)$ un graphe régulier représentatif des arêtes d'un graphe ou d'un multigraphe G .

Pour tout stable maximal S de $L(G)$, il existe un stable maximal S' disjoint de S .

Remarque:

Cette propriété est fautive pour les graphes réguliers en général, comme le montre l'exemple suivant:



Il n'existe pas de stable maximal disjoint du stable maximal

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

Nous venons de voir que $t(L(G)) = 2$ si $r(L(G)) = 1$. Nous allons maintenant montrer que plus généralement on a $t(L(G)) \leq r(L(G))$.

Pour cela nous allons étudier les absorbants forts de $L(G)$, c'est-à-dire les sous-ensembles d'arêtes $F \subseteq E$ de $G = (X, E)$, sans arêtes isolées et touchant toutes les autres arêtes.

On voit tout de suite qu'un absorbant fort minimal de $L(G)$ est nécessairement une forêt de G . (Si l'on considère que G peut être un multigraphe, il faut étendre le concept de forêt à celui de "graphe sans cycle de longueur supérieure à 2").

Etudier $t(L(G))$ revient donc à étudier les sous-graphes partiels de G qui sont des forêts sans arêtes isolées.

Lemme

Soit un entier $p \geq 2$.

Si $G = (X, E)$ est un multigraphe sans boucles, sans arêtes isolées

- d'indice de régularité $r(G) \leq p$

- ou d'indice de régularité en arêtes $r_a(G) \leq p$

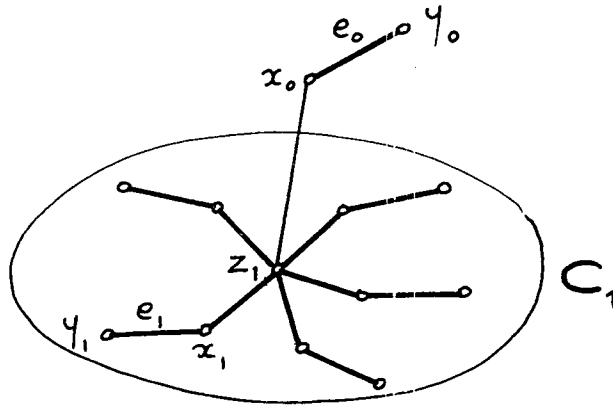
il existe un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que G_F est une forêt avec $\Delta(G_F) \leq p$ et $\Delta_a(G_F) \leq p$, maximal pour ces propriétés et sans arêtes isolées.

Démonstration

Soit $F \subseteq E$ tel que G_F est une forêt avec $\Delta(G_F) \leq p$ et $\Delta_a(G_F) \leq p$, maximal pour ces propriétés et tel que G_F possède un nombre minimum d'arêtes isolées.

Soit $e_0 = \{x_0, y_0\}$ une arête isolée de G_F .

Il est clair que e_0 n'est reliée qu'à des sommets z_1^i de G_F de degré p , appartenant à des composantes connexes C_1^i de G_F de la forme:



De même, pour toute arête telle que e_1, e_1 n'est relié qu'à des sommets z_2^j de G_F de degré p , appartenant à des composantes connexes C_2^j de G_F isomorphes à C_1^i , etc...

(les composantes C_1^i, C_2^j, \dots etc, ne sont pas forcément distinctes).

Soit $K = \{z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^i, \dots, z_2^1, z_2^2, \dots, z_1^1, z_1^2, \dots\}$

L'ensemble des sommets ainsi "atteints" à partir de e_0 .

Soit $|K| = k$.

Il y a donc kp arêtes telles que e_1 . Soit E l'ensemble de ces arêtes. Ces arêtes, ainsi que e_0 , ne sont reliées qu'à des sommets de K .

Soit D le degré maximum dans G d'un sommet de K . On a $D \leq \Delta$, $D \leq \Delta_a$.

(Pour simplifier nous représentons $\Delta(G), \Delta_a(G), \delta(G), \dots$ par $\Delta, \Delta_a, \delta, \dots$).

Soit d le degré minimum d'une arête de $E \cup \{e_0\}$. On a $d \geq \delta_a$; $d \geq 2(\delta-1)$.

Ce qui donne:

$$a/ \quad k \Delta_a \geq (kp+1) \delta_a$$

$$\frac{\Delta_a}{\delta_a} > p \quad \text{c'est-à-dire} \quad r_a(G) > p.$$

$$b/ \quad k \Delta \geq (kp+1) 2.(\delta-1)$$

$$\frac{\Delta}{\delta-1} > 2p \quad \text{c'est-à-dire si } \delta > 1$$

$$\frac{\Delta}{\delta} > p \quad (r(G) > p)$$

et si $\delta = 1$ $\frac{\Delta}{\delta} \leq p \Rightarrow \Delta \leq p$ et l'on voit immédiatement que dans ce cas l'ensemble des arêtes isolées de G_F est vide.

Dans tous les cas on aboutit à une contradiction. □

Cet ensemble d'arêtes F de G étant un absorbant fort de $L(G)$ on a ainsi démontré la proposition suivante:

Proposition IV.10

Si G est un graphe d'indice de régularité $r(G)$, représentatif des arêtes d'un graphe ou d'un multigraphe sans boucles,

il existe un absorbant fort A de G tel que

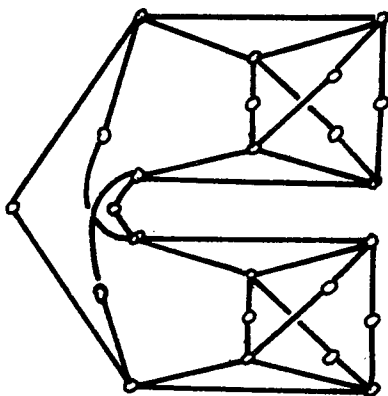
$$\gamma(G_A) \leq \max \{2, r(G)\}$$

$$\Delta(G_A) \leq \max \{2, r(G)\}$$

Donc en particulier $t(G) \leq \max \{2, r(G)\}$.

Remarque:

Cette propriété n'est pas vérifiée par les graphes quelconques:



Pour ce graphe G on a: $r(G) = 2$
 $t(G) = 3.$

(Tout absorbant fort contient au moins un triangle ; l'ensemble des triangles est un absorbant fort).

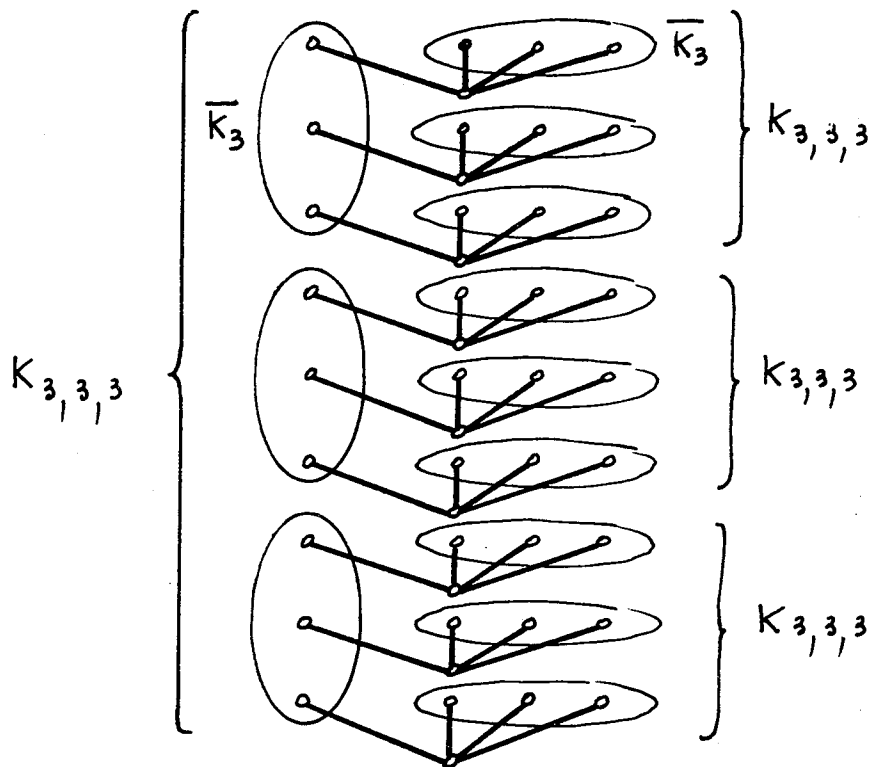
On peut développer cet exemple et obtenir des graphes G avec:

$$r(G) = 3 \cdot 2^{p-2} - 1$$

$$t(G) = 2^p - 1$$

mais tous avec $\delta(G) = 2.$

Donnons un exemple permettant de construire des graphes de degré minimum plus élevé:



$$\left. \begin{array}{l} \delta(G) = 4 \\ \Delta(G) = 7 \end{array} \right\} r(G)=2$$

$$t(G) = 3$$

Cet exemple se généralise et permet d'obtenir des graphes G ayant $t(G)$ donné et tel que $r(G) > t(G)$.

Nous allons maintenant montrer que $\forall c \in \mathbb{N}$, on peut construire des graphes G tels que $t(G) > c \cdot r(G)$.

Soit un entier $\delta > c$ (par exemple $\delta = c+1$).

Soit un ensemble L de cardinal l très grand devant δ .

Soit un ensemble V tel que $|V| = \binom{l}{\delta}$.

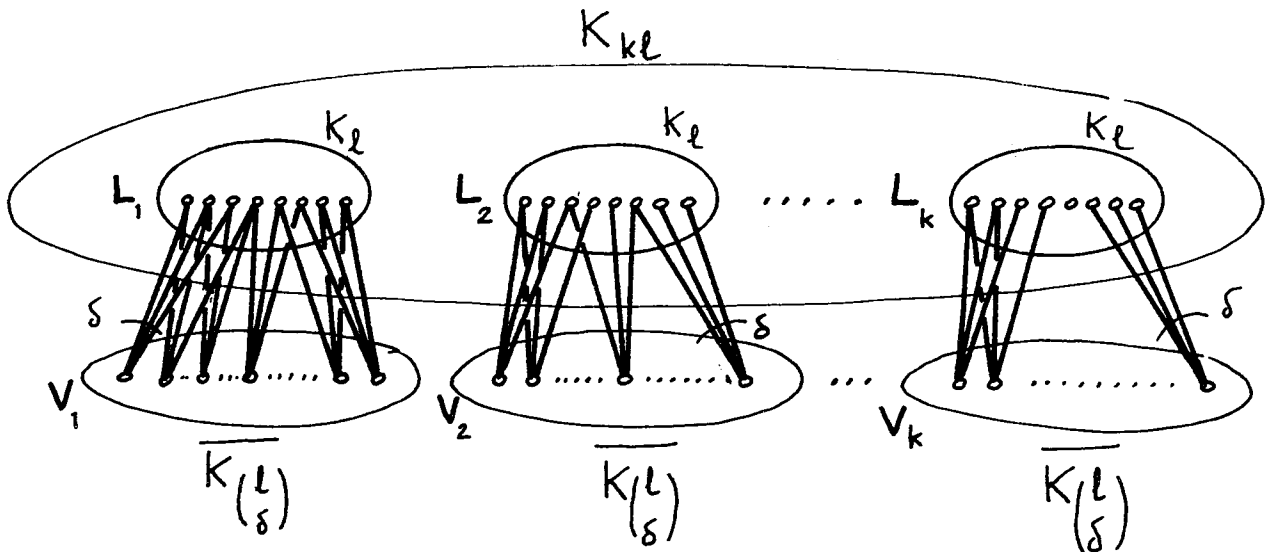
Soit G_0 le graphe obtenu en reliant chaque sommet $v \in V$ à δ sommets de L , chaque partie de L de cardinal δ étant l'image d'un sommet de V .

Tout sommet de L a un degré $d = \binom{l-1}{\delta-1}$.

Soit k très grand devant d .

Soit k graphes G_1, G_2, \dots, G_k isomorphes à G_0 .

Soit G le graphe obtenu en reliant deux à deux tous les sommets de $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$.



Tout absorbant fort A de G contient au moins $l - \delta + 1$ sommets de chacun des L_i .

G_A contient donc un sous-graphes isomorphe à $K_{k.(1-\delta+1)}$

On a donc $t(G) \geq k.(1-\delta+1)$

De plus $\Delta(G) = k1 - 1 + d$

D'où $\frac{t(G)}{r(G)} = \frac{k(1-\delta+1)}{k1-1+d} \delta$

En prenant 1 suffisamment grand devant δ et k suffisamment grand devant d , $\frac{t(G)}{r(G)}$ tend vers δ et l'on peut avoir

$$\frac{t(G)}{r(G)} > \delta - 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{t(G)}{r(G)} > c. \quad \square$$

Revenons maintenant au lemme précédant la proposition IV.10. Pour les graphes d'indice de régularité $r(G) \leq p$, on peut montrer une propriété un peu plus forte. On a:

Proposition IV.11

Si $G=(X,E)$ est un multigraphe sans boucles, sans arêtes isolées, d'indice de régularité $r(G) \leq p$, il existe une couverture de ses sommets par une forêt de degré maximum inférieur ou égal à p , sans arêtes isolées.

Démonstration:

Soit $G=(X;E)$.

Soit $F \subseteq E$ tel que G_F est une forêt avec $\Delta(G_F) \leq p$ maximal pour ces propriétés, sans arêtes isolées et couvrant un nombre maximum de sommets de G .

(F existe d'après le lemme précédant la proposition IV.10).

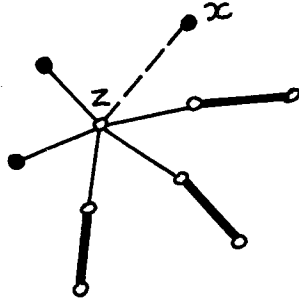
Nous allons démontrer que F couvre X .

Sinon, soit x un sommet de G non couvert par F , x n'est relié qu'à des sommets de G_F de degré p . Par suite si $\delta(G)=1$ et donc $\Delta(G)=p$ ceci est impossible. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

Supposons donc $\delta(G) \geq 2$.

Soit $z \mid \{xz\} \in E$.

z est relié à ses voisins dans G_F par des arêtes simples. Les p voisins de z dans G_F sont soit de degré 1 dans G_F , soit reliés dans G_F par une arête simple à un seul sommet de G_F de degré 1 dans G_F .



Les p arêtes ou sommets pendants reliés à z dans G_F ne sont eux-mêmes reliés qu'à des sommets de G_F analogues à z .

La démonstration se poursuit de manière analogue à celle du lemme précédant la proposition IV.10.

Soit K l'ensemble des sommets analogues à z ainsi "atteints" à partir de x . Soit $|K|=k$.

Il y a donc kp sommets ou arêtes pendants dans G_F reliés dans G_F à ces sommets. x et ces kp sommets ou arêtes ne sont reliés qu'à des sommets de K .

$$\delta \geq 2 \quad \text{d'où} \quad \delta_a \geq 2(\delta-1) \geq \delta$$

Par suite $k\Delta \geq (kp+1)\delta$

$$\frac{\Delta}{\delta} > p \quad \text{ce qui est impossible.} \quad \square$$

Corollaire:

Si G est un multigraphe sans boucles, sans arêtes isolées, d'indice de régularité $r(G) \leq 2$, il existe une couverture de ses sommets par deux couplages maximaux disjoints.

Remarque:

Si G est simplement tel que $r_a(G) \leq 2$, on a seulement l'existence de deux couplages maximaux disjoints (Proposition IV.9).

Exemple : $K_{1,p}$ ($p \geq 3$).

4.3. Cas des graphes complémentaires de graphes représentatifs des arêtes de multigraphes

Proposition IV.12

Soit $K = \overline{L(G)}$ un graphe sans sommets isolés complémentaire du graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe G .

Si $r(K) \leq 2$ alors $t(K) = 2$

Sinon $t(K) \leq 3$.

Démonstration

Soit $G = (X, E)$ un multigraphe.

Soit $S(G)$ le graphe obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête multiple par une arête simple.

Soit $K = \overline{L(G)}$ le complémentaire du graphe représentatif des arêtes de G .

1er cas

$\alpha(G) = 1$ c'est-à-dire $S(G)$ est un graphe complet:

a/ Si $|X| \geq 4$ pour tout ensemble d'arêtes passant par un sommet de $S(G)$ il existe 3 arêtes de $S(G)$ formant un triangle disjointes de cet ensemble.

$L(G)$ possède donc deux cliques maximales disjointes.

$K = \overline{L(G)}$ possède donc deux stables maximaux disjoints.

On a donc $t(K) = 2$.

b/ On ne peut avoir $|X| \leq 3$ car dans ce cas $L(G)$ serait un graphe complet et $\overline{L(G)}$ ne serait pas sans sommets isolés.

2ème cas

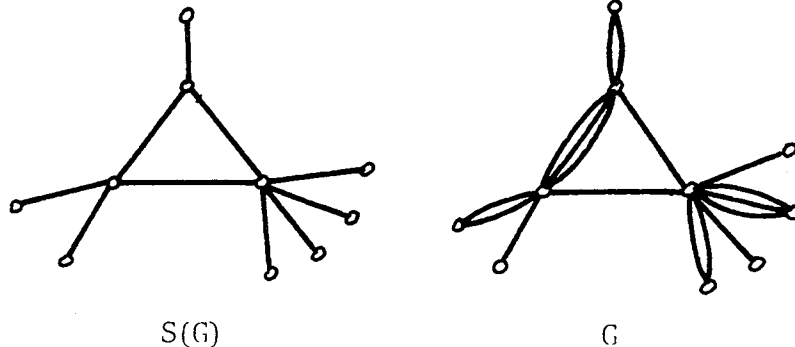
$$\alpha(G) \geq 2$$

a/ Si $\exists x, y \in X$ tels que $\{x, y\} \notin E$ et tels que les degrés de x et de y dans $S(G)$ sont strictement supérieurs à 1.

Alors, les deux ensembles d'arêtes passant par x et y sont disjoints et forment deux cliques maximales disjointes de $L(G)$.

b/ Sinon, les sommets de $S(G)$ de degré supérieur ou égal à 2 dans $S(G)$ forment une clique C .

- si $|C| \geq 4$, $L(G)$ possède deux cliques maximales disjointes,
- si $|C| = 1$ ou 2 , $\overline{L(G)}$ possède un sommet isolé ce qui est impossible,
- si $|C| = 3$, $S(G)$ est formé d'un triangle xyz et d'arêtes pendantes dont l'une des extrémités est soit x , soit y , soit z .



Dans ce cas on vérifie que $\frac{\Delta(\overline{L(G)})}{\delta(\overline{L(G)})} > 2$

autrement dit $r(K) \geq 3$.

L'intersection de trois ensembles d'arêtes de G passant respectivement par x , y et z est vide. On a donc $t(K) \leq 3$.

Corollaire:

Les graphes réguliers représentatifs des arêtes de multigraphes vérifient les conjectures C4 et C'4.

4.4. Cas des graphes de degré maximum inférieur ou égal à 3

Nous allons démontrer que de tels graphes G vérifient $t(G) \leq \max \{2, r(G)\}$

Donc en particulier que les graphes cubiques vérifient la conjecture C4.

M.SAKAROVITCH a montré que tout graphe cubique G cycliquement 4-arêtes connexe possédait un ensemble cycliquement stable S tel que G_S soit connexe [63] S est donc un absorbant fort de G tel que $\gamma(G_S)=2$. Tout graphe cubique cycliquement 4-arêtes connexe possède donc deux stables maximaux disjoints. Nous allons le montrer pour les graphes cubiques en général.

Lemme:

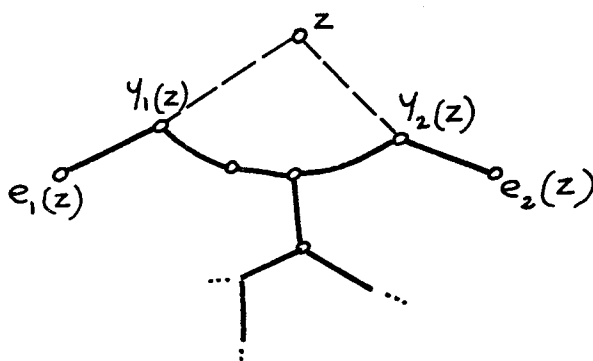
Si G est un graphe simple sans sommets pendants de degré maximum $\Delta(G) \leq 3$, il existe un absorbant fort A de G tel que G_A est une forêt.

Démonstration:

Soit $G=(X;E)$ tel que $\Delta(G)=3$ et $\delta(G) \geq 2$.

Soit $Y \subset X$ tel que G_Y est une forêt sans sommets isolés.

Soit $Z_Y \subset X \cap \bar{Y}$ l'ensemble des points (z) reliés à deux sommets $(y_1(z))$ et $(y_2(z))$ d'une même composante connexe de G_Y , ces deux sommets étant respectivement reliés à deux sommets $(e_1(z))$ et $(e_2(z))$ de degré 1 dans G_Y .



Soient les relations binaires ρ_Y et R_Y sur X définies ainsi:

- $\forall z, y \in X \quad z \rho_Y y \iff z \in Z_Y$
 $y = e_1(z) \text{ ou } e_2(z)$
- $\forall x, y \in X \quad x R_Y y \iff \{xy\}$ est une arête de G et non de G_Y

a/ Soit $Y \subseteq X$ tel que G_Y est une forêt sans sommets isolés, maximal pour cette propriété et absorbant un nombre maximum de sommets de G .

$\forall i \in X$ sommet non absorbé par Y

$\exists p$ fini et $x \in Z_Y$ tel que l'on ait $i R_Y (\rho_Y R_Y)^{p-1} x$

En effet $\delta(G) \geq 2$, $\Delta(G) = 3$, $|Z_Y|$ est fini.

$\forall i$ sommet non absorbé par Y soit

$$p(i) = \min \{p \mid i R_Y (\rho_Y R_Y)^{p-1} x \text{ et } x \in Z_Y\}$$

Pour Y soit $p(Y) = \min_i p(i)$ pour i non absorbé par Y .

b/ Soit maintenant $Y \subseteq X$ tel que G_Y est une forêt sans sommets isolés, maximal pour cette propriété, absorbant un nombre maximum de sommets de G et tel que $p(Y)$ est minimum.

Si Y n'est pas un absorbant on a $p(Y) = 0$.

En effet, soit i sommet non absorbé par Y tel que $p(i) = p(Y) \neq 0$.

Soit $x \in Z_Y$ tel que l'on ait $i R_Y (\rho_Y R_Y)^{p-1} x$.

$\exists z \in Z_Y$ tel que l'on ait $i R_Y z$ et tel qu'il existe e sommet de degré 1 de G_Y avec $z \rho_Y e$ et $e R_Y (\rho_Y R_Y)^{p-1} x$.

Soit y le sommet relié à e dans G_Y (et à z dans G).

$$\text{Soit } Y_1 = Y \cup \{i\} \cup \{z\} - \{e\} - \{y\}$$

G_{Y_1} est une forêt sans sommets isolés.

Y_1 absorbe tous les sommets de G absorbés par Y plus le sommet i et moins le sommet e .

En effet soit $u \neq e$ absorbé par Y et non par Y_1 $\{uv\} \in E$ et $v \in Y \Rightarrow v = e$

Donc $Y' = Y \cup \{u\}$ est tel que $G_{Y'}$ est une forêt sans sommet isolé ce qui est impossible puisque Y est maximal.

Soit $Y_2 \supseteq Y_1$ tel que G_{Y_2} est une forêt sans sommets isolés et maximal pour cette propriété.

On a $Y_2 = Y_1$.

En effet $\forall x \in Y_2 - Y_1$, $\{x\} \in E$ ou $x=e$.

Donc $Y_2 \neq Y_1 \Rightarrow Y_2$ absorbe tous les sommets absorbés par Y plus i ce qui est impossible puisque Y absorbe un nombre maximum de sommets.

On a: $e R_Y (\rho_Y R_Y)^{p_Y-1} x$

Soit $u_1, u_2, \dots, u_k \in X$ avec $k = 2(p_Y-1)$

tels que $e R_Y u_1, u_1 \rho_Y u_2, u_2 R_Y u_3, \dots, u_k R_Y x$.

Posons $e = u_0$ et $x = u_{k+1}$

$\alpha/$ Si $\forall i \in \{0, 2, 4, \dots, k\}$ $u_i R_Y u_{i+1} \Rightarrow u_i R_{Y_2} u_{i+1}$

et si $\forall i \in \{1, 3, 5, \dots, k-1\}$ $u_i \rho_Y u_{i+1} \Rightarrow u_i \rho_{Y_2} u_{i+1}$

On a $e R_{Y_2} (\rho_{Y_2} R_{Y_2})^{p_{Y_2}-1} x$

Or $x \notin Z_{Y_1}$ - Il est facile de voir que $x \notin Z_{Y_1} = Z_{Y_2}$.

D'où $p(e) \leq p_{Y_2} - 1$

Y_2 est donc tel que:

- G_{Y_2} est une forêt sans sommets isolés
- Y_2 est maximal pour cette propriété
- Y_2 absorbe le même nombre de sommets que Y
- $p_{Y_2} \leq p_e \leq p_Y$

Ce qui est impossible.

$\beta/$ Sinon

. s'il existe $i \in \{2, 4, \dots, k\}$ tel que l'on n'ait pas $u_i R_{Y_2} u_{i+1}$

alors $u_{i-1} \notin Z_{Y_2}$

. s'il existe $i \in \{1,3,5,\dots,k\}$ tel que l'on n'ait pas $u_i \rho_{Y_2} u_{i+1}$
alors $u_i \notin Z_{Y_2}$

On a donc dans ce cas

$e R_{Y_2} u_1, u_1 \rho_{Y_2} u_2, u_2 R_{Y_2} u_3, \dots, u_1 R_{Y_2} u_{1+1}$
avec
 $u_{1+1} \notin Z_{Y_2}$ et $1 < k$.

D'où $p(e) < p_{Y-1} < p_Y$

On arrive à la même impossibilité que précédemment.

c/ Soit donc maintenant $Y \subseteq X$ tel que G_Y est une forêt sans sommets isolés, maximal pour cette propriété, absorbant un nombre maximum de sommets de G et tel que $p_Y=0$ si Y n'est pas absorbant de G .

Nous allons montrer que Y est un absorbant de G ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Soit i sommet non absorbé par Y tel que $p(i)=0$

$$\exists x \notin Z_Y \mid i R_{Y^c} x$$

$x \notin Y$. $G_{Y \cup \{x\}}$ n'est pas une forêt.

x est donc relié à deux sommets y_1 et y_2 appartenant à une même composante connexe de G_Y .

L'un de ces sommets au moins, y_1 par exemple n'est pas relié à un sommet pendant de G_Y puisque $x \notin Z_Y$.

Soit $Y' = Y \cup \{i\} \cup \{x\} - \{y_1\}$

$G_{Y'}$ est une forêt sans sommets isolés. Y' absorbe tous les sommets absorbés par Y plus le sommet i . En effet, s'il existait un sommet u absorbé par Y et non par Y' on aurait: $\{uv\} \in E$ et $v \in Y \Rightarrow v=y_1$

donc $G_{Y \cup \{u\}}$ serait une forêt sans sommets isolés ce qui est impossible (Y est maximal).

Soit $Y'' \supseteq Y'$ tel que $G_{Y''}$ est une forêt sans sommets isolés et maximal pour cette propriété.

Y'' absorbe tous les sommets absorbés par Y plus le sommet i , ce qui est impossible. \square

Ce résultat peut être amélioré. On démontre la proposition suivante.

Proposition IV.13

Si G est un graphe simple sans sommets pendants de degré maximum $\Delta(G) \leq 3$, il existe un absorbant fort A de G tel que G_A est un ensemble de chaînes.

Démonstration

Soit $G=(X;E)$ tel que $\Delta(G)=3$ et $\delta(G) \geq 2$.

Soit $A \subseteq X$ un absorbant fort de G tel que G_A est une forêt ayant un nombre minimum de sommets de degré 3 et maximal pour cette propriété.

Supposons qu'il existe un sommet x de G_A de degré 3 dans G_A . Nous allons montrer que c'est impossible. En effet:

1/ Si $\forall y \in A$ relié à x dans G_A de degré y est différent de 1, $A - \{x\}$ est un absorbant fort de G tel que le nombre de sommets de degré 3 de $G_{A - \{x\}}$ est strictement inférieur au nombre de sommets de degré 3 de G_A ce qui est impossible.

2/ Si $\exists y \in A$ relié à x de degré 1 dans G_A , $A - \{y\}$ est un absorbant fort de G . En effet:

- $G_{A-\{y\}}$ est sans sommets isolés,
- s'il existait un sommet u de G absorbé uniquement par y , $G_{A\cup\{u\}}$ serait une forêt ayant le même nombre de sommets de degré 3 que G_A , ce qui est impossible.

Le nombre de sommets de degré 3 de $G_{A-\{y\}}$ est strictement inférieur au nombre de sommets de degré 3 de G_A . On arrive ainsi à une contradiction. \square

Proposition IV.14

Les graphes simples G de degré maximum inférieur ou égal à 3 sont tels que

$$t(G) \leq \max \{2, r(G)\}$$

Démonstration

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, que l'on peut supposer connexe, de degré maximum $\Delta(G)$.

a/ Si $\Delta(G)=1$ ou 2 la propriété est immédiate.

b/ $\Delta(G)=3$

1) $r(G)=1$ ou 2. On a donc $\delta(G) \geq 2$.

Il existe donc un absorbant fort A de G tel que $\gamma(G_A)=2$.

On a donc $t(G)=2$.

2) $r(G)=3$. On a donc $\delta(G)=1$

G est donc différent du graphe complet K_4 et l'on a $\gamma(G) \leq 3$

et donc $t(G) \leq 3$.

4.5. Cas des graphes sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$

Nous élargissons ici la classe des graphes étudiés au paragraphe 4.2.

Nous allons démontrer que tout graphe G sans sous graphe isomorphe à $K_{1,3}$ est tel que

$$t(G) \leq \max \{2, r(G)\}$$

Lemme

Si G est un graphe simple sans sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$ tout absorbant fort minimal A de G engendre un sous-graphe G_A triangulé, donc parfait.

On a donc $\gamma(G_A) = \omega(G_A)$.

Démonstration

Soit A absorbant fort minimal de $G=(X,E)$.

Soit $C \subset X$ un cycle quelconque de G_A : $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p, x_1)$
 $x_i \in A$ est nécessaire pour absorber un sommet y_i . Autrement dit $\{x_i, y_i\} \in E$ et
 $\forall j \neq i \quad x_j \in A \quad \{x_j, y_i\} \notin E$.

Puisque G n'a pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$ $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} \in E$.

Le cycle C a donc une corde $\{x_{i-1}, x_{i+1}\}$. (On peut même voir que $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p\}$ engendre une clique K_p).

Le sous-graphe G_A est donc triangulé, donc parfait. □

Proposition IV.15

Si G est un graphe simple sans sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$ tel que $r(G) \leq p$ ($p > 2$), il existe un absorbant fort A de G tel que $\gamma(G_A) = \omega(G_A) \leq p$

On a donc $t(G) \leq p$.

Démonstration

Soit $G=(X,E)$ sans sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$ et tel que $r(G) \leq p$.

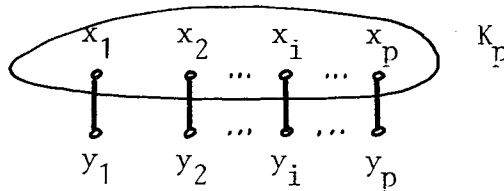
Soit δ le degré minimum de G et Δ son degré maximum.

Nous allons montrer qu'il existe un absorbant fort A de G tel que $\omega(G_A) \leq p$. Ainsi tout absorbant fort minimal $A' \subseteq A$ sera tel que $\gamma(G_{A'}) = \omega(G_{A'}) \leq \omega(G_A) \leq p$.

La démonstration étant analogue à celle du lemme précédant la proposition IV.13, nous n'en détaillerons pas tous les points.

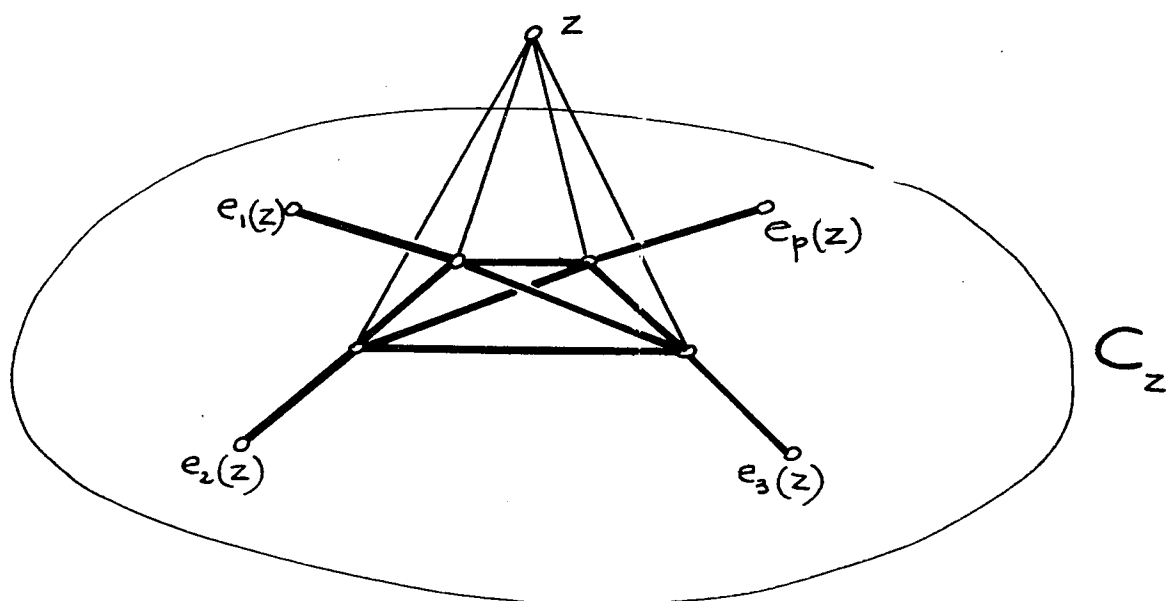
Soit $Y \subseteq X$ tel que G_Y est sans sommets isolés, sans $p+1$ clique.

Soit C_Y l'ensemble des composantes connexes C de G_Y formés d'une p -clique (x_1, x_2, \dots, x_p) , d'un p -stable (y_1, y_2, \dots, y_p) , chaque sommet x_i de la clique étant relié au sommet y_i du stable.



Les sommets y_i sont de degré 1 dans G_Y .

Soit $Z_Y \subseteq X \cap \bar{Y}$ l'ensemble des sommets (z) reliés à tous les sommets de degré p d'une composante connexe $(C_z \in C_Y)$ et non reliés aux sommets de degré 1 dans G_Y de C_z .



Les p sommets de degré 1 dans G_Y de C_z seront notés $e_1(z), e_2(z), \dots, e_p(z)$

Soient les relations binaires ρ_Y et R_Y sur X définies ainsi:

$$- \forall z, y \in X \quad z \rho_Y y \Leftrightarrow \begin{cases} z \in Z_Y \\ y = e_i(z) : e_i(z) \in \{e_1(z), e_2(z), \dots, e_p(z)\} \end{cases}$$

$$- \forall x, y \in X \quad x R_Y y \Leftrightarrow \{xy\} \text{ est une arête de } G \text{ et non de } G_Y$$

Soit $Y \subseteq X$ tel que G_A soit sans sommets isolés, sans $p+1$ clique et maximal pour ces propriétés.

$\forall i \in X$ sommet non absorbé par Y , $\exists q$ fini et $x \notin Z_Y$ tel que l'on ait:

$$i R_Y (\rho_Y R_Y)^q x$$

En effet:

Soit i sommet non absorbé par Y

Soit $Z = \{z \in Z_Y \mid \exists q: i R_Y (\rho_Y R_Y)^q z\}$

Soit $l = |Z|$

Soit $C_i = \{C_z \mid z \in Z\}$

Soit $k = |C_i|$

Soit $E = \{e \in Y \mid e \text{ est un sommet de degré } 1 \text{ dans } G_Y \text{ d'une composante connexe de } G_Y \text{ appartenant à } C_i \}$

On a: $|E| = p.k$

S'il n'existe pas $x \in Z_Y$ et q fini tel que l'on ait $i R_Y (\rho_Y R_Y)^q x$, alors:

- i n'est relié qu'à des sommets $z \in Z$
- $\forall e \in E, e R_Y t \Rightarrow t \in Z$
 e est donc relié à au moins $(\delta-1)$ sommets de Z .
- $\forall z \in Z, z$ est relié à un seul sommet de $\{E \cup i\}$ (pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$).

On a donc:

$$l > (\delta-1)p.k.$$

- pour tout $z \in Z$ il existe une et une seule composante connexe C_z (pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$).
- pour toute composante connexe C de $G_Y \mid C \in C_i$, il existe au plus $\Delta-p$ sommets z de Z tels que $C=C_z$.

On a donc:

$$(\Delta-p) k \geq l$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad (\Delta-p)k &> (\delta-1)p.k \\ \Delta &> \delta.p \quad (k > 0) \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque $r(G) \leq p$.

Vi sommet non absorbé par Y soit

$$q(i) = \min \{q \mid \exists x \in Z_Y : i R_Y (\rho_Y R_Y)^q x.\}$$

Pour Y soit $q(Y) = \min_i q(i)$ pour i sommet non absorbé par Y .

Soit maintenant $Y \subseteq X$ tel que G_Y est sans sommets isolés, sans $(p+1)$ -clique, maximal pour ces propriétés, absorbant un nombre maximum de sommets de G et tel que $q(Y)$ est minimum.

Si Y n'est pas un absorbant, alors $q(Y) = 0$.

Sinon, soit i non absorbé, relié à un sommet $z \in Z_Y$.

Il existe un sommet y de C_z relié à z , et e sommet pendant de C_z relié à y tels que:

$$Y' = Y \cup \{i, z\} - \{e, y\} \text{ est tel que } q(Y') < q(Y)$$

Y' absorbe autant de sommets de G que Y .

$G_{Y'}$ est sans $(p+1)$ -clique et sans sommets isolés.

On aboutit à une contradiction.

Soit donc maintenant $Y \subseteq C$ tel que G_Y est sans sommets isolés, sans $(p+1)$ -clique, maximal pour ces propriétés, absorbant un nombre maximum de sommets de G et tel que $q(Y) = 0$ si Y n'est pas un absorbant.

On démontre que Y est un absorbant.

En effet, sinon, soit i , sommet non absorbé par Y . i est relié à un sommet x tel que $x \notin Z_Y$. $G_{Y \cup \{x\}}$ possède une $(p+1)$ -clique.

x est relié à tous les sommets d'une p -clique de G_Y . L'un de ces sommets au moins n'est pas relié à un sommet pendant de G_Y (sinon on aurait $z \in Z_Y$).

Soit y ce sommet.

On construit facilement à partir de $Y_1 = Y \cup \{i, x\} - \{y\}$ un ensemble de sommets $Y_2 \supseteq Y_1$ tel que G_{Y_2} est sans sommets isolés, sans $(p+1)$ -clique, maximal pour ces propriétés, absorbant tous les sommets de G absorbés par Y plus le sommet i . On aboutit donc à une contradiction.

Ceci achève la démonstration du théorème.

4.6. Cas des graphes de degré élevé

Nous allons montrer que les graphes réguliers de degré "élevé" vérifient la conjecture C_4 .

Autrement dit, les graphes réguliers de degré "faible" vérifient la conjecture C_4 .

Proposition IV.16

Si G est un graphe simple régulier de degré d à n sommets tel que $\frac{(d+3)^2}{8} < n$, pour toute clique maximale C de G il existe une clique maximale C' disjointe de C .

Démonstration

Soit un graphe simple $G=(X;E)$ régulier de degré d à n sommets tel que $n > \frac{(d+3)^2}{8}$.

Soit une clique maximale C de dimension k ($k > 1$). Supposons que toute clique maximale C' soit telle que $C \cap C' \neq \emptyset$. On a en particulier: pour toute arête $\{xy\}$ du sous-graphe G_{X-C} engendré par les points n'appartenant pas à C , il existe un point z de C tel que $\{xz\} \in E$ et $\{yz\} \in E$.

S'il existe un sommet $x \in X-C$ relié à un seul sommet y de C , $\forall \{x,z\}$ arête de G_{X-C} , $\{y,z\} \in E$; x n'est donc relié qu'à y et aux sommets de $X-C$ reliés à y .

Or, tout sommet de C est relié à $d-k+1$ sommets de $X-C$.

On a donc:

degré de $x = d(x) \leq d-k+1 < d$ ce qui est impossible.

Donc, tout sommet de $X-C$ est relié à au moins deux sommets de C .

On a ainsi,

$$|C| (d-k+1) \geq |X-C|.2$$

$$k(d-k+1) \geq 2(n-k)$$

$$k^2 - k(d+3) + 2n \leq 0.$$

Pour que ceci soit possible, il est nécessaire que l'équation en k :

$$k^2 - k(d+3) + 2n = 0$$

ait des racines.

On doit donc avoir $(d+3)^2 - 8n \geq 0$ ce qui contredit $\frac{(d+3)^2}{8} < n$. \square

Remarque:

Ce résultat permet de vérifier, en examinant un nombre fini de cas, si tout graphe simple régulier de degré $d \leq k$ admet deux cliques maximales disjointes, c'est-à-dire vérifient la conjecture C'4.

On obtient ainsi la proposition suivante:

Proposition IV.17

Tout graphe régulier de degré $d \leq 9$ et différent de K_n admet deux cliques maximales disjointes.

Démonstration

a/ Soit G un graphe régulier de degré d à n sommets, n'ayant pas 2 cliques maximales disjointes.

D'après la proposition IV.16 on a:

$$(d+3)^2 \geq 8n$$

D'autre part, puisque \bar{G} n'a pas deux stables maximaux disjointes

$$n - 1 - d \geq 4 \quad \text{d'après la proposition IV.14.}$$

D'où

$$(d+3)^2 \geq 8(d+5)$$

$$d^2 - 2d \geq 31$$

$$d(d-2) \geq 31$$

D'où on tire $d \geq 7$.

b/ Si $d=7$ on a nécessairement $n=12$ sinon la proposition est démontrée.

Si $d=8$ on a nécessairement $n=13, 14, 15$

Si $d=9$ on a nécessairement $n=14, 16, 18$

On peut traiter ces différents cas en utilisant deux types de raisonnement: soit on montre que \bar{G} possède un absorbant fort sans cycle, soit on montre que G possède deux cliques maximales disjointes.

Nous allons, à titre d'exemple, le faire sur deux cas: $d=7, n=12$ et $d=9, n=18$.

1er cas: $d=7, n=12$

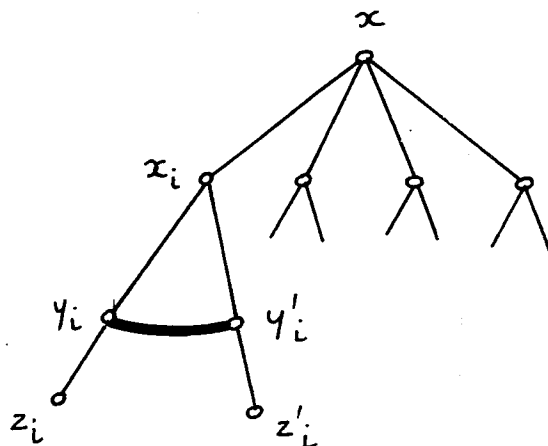
Le graphe complémentaire $\bar{G}=(X, \bar{E})$ est régulier de degré 4.

Soit $Y \subseteq X$ tel que \bar{G}_Y soit sans cycle, absorbant de manière forte un nombre maximum de sommets et minimal pour cette propriété.

Soit x un sommet non absorbé par Y .

$\forall x_i \mid \{x, x_i\} \in \bar{E}$, x_i est adjacent à au moins deux sommets y_i et y'_i de Y reliés par une chaîne dans \bar{G}_Y .

y_i et y'_i sont chacun nécessaires à absorber un sommet (z_i et z'_i respectivement) n'appartenant pas à Y (sinon on pourrait construire un ensemble Z absorbant de manière forte un sommet (x) de plus que Y).



Chaque sommet y_i et y'_i étant adjacent à au plus 2 sommets adjacents à x , il existe au moins 4 sommets tels que y_i (ou y'_i) et donc 4 sommets tels que z_i .

Le graphe a donc au moins 13 sommets. On arrive ainsi à une contradiction.

2ème cas:

$$d=9, n=18$$

Supposons que G n'ait pas 2 cliques maximales disjointes.

Si k est la dimension d'une clique maximale quelconque, on voit en se reportant à la démonstration de la proposition IV.16 que l'on doit avoir

$$k^2 - k(d+3) + 2n \leq 0$$

et donc dans ce cas

$$k^2 - 12k + 36 \leq 0$$

ce qui donne $k=6$.

Soit donc C une clique maximale de cardinal 6. Tout sommet de C est adjacent à $9-5=4$ sommets de $X-C$.

Comme tout sommet de $X-C$ est adjacent à au moins 2 sommets de C (cf. démonstration de la proposition IV.16), tout sommet de $X-C$ est adjacent à

exactement 2 sommets de C . G_{X-C} est donc un graphe régulier de degré $9-2=7$ à 12 sommets. Ce graphe possède 2 cliques maximales disjointes C_1 et C_2 (cas précédent). Pour que ces deux cliques soient incluses dans deux cliques maximales de G , C'_1 et C'_2 non disjointes, il est nécessaire qu'il existe un sommet $x \in C$ adjacent à tous les sommets de $C_1 \cup C_2$.

$$\text{Or, puisque } \alpha'(\overline{G}_{X-C}) \geq \beta(\overline{G}_{X-C}) \geq \frac{|X-C|}{\Delta(\overline{G}_{X-C}) + 1} \quad (\text{proposition II.3})$$

$$\geq \left\lceil \frac{12}{5} \right\rceil = 3$$

$$|C_1 \cup C_2| \geq 6$$

x devrait donc être adjacent à au moins 6 sommets de $X-C$, ce qui est impossible. □

4.7. Problèmes

Soit $G=(X,E)$ un graphe.

$\forall Y \subseteq X$ nous noterons t_Y le nombre chromatique minimum d'un absorbant fort de Y , c'est-à-dire le cardinal minimum d'une couverture de Y par des transversaux minimaux de G .

$\forall S \subseteq X$ stable de G , on a:

$$t(S) \leq t(G) \leq t(S) + 1$$

Si G est un graphe régulier l'hypergraphe dont les sommets sont $X-S$ et dont les arêtes sont les images des sommets de S est uniforme.

Ceci nous suggère d'étudier le problème suivant:

Soit $H=(X,F)$ un hypergraphe uniforme de rang h .

Soit $G=(X,E)$ un graphe simple.

Soit l'hypergraphe $K=(X,E \cup F)$.

Soit k le degré maximum d'un sommet de K .

Posons $f(h,k) = \max(\min \gamma(G_T))$ pour T transversal.

Etudier $f(h,k)$ revient à étudier t_S pour S stable d'un graphe G tel que tout sommet de S a un degré supérieur ou égal à h , tout sommet de $X-S$ a un degré inférieur ou égal à k .

$f(h,k)$ est une fonction décroissante en h et croissante en k .

$$f(h,1) = 1 \quad ; \quad f(h,2) = 1 \quad (h \geq 2)$$

$$f(1,k) = k$$

$$f(2,3) = 2 \quad ; \quad f(2,4) = 3 \quad ; \quad \dots \quad f(2,k) \leq k-1$$

$$f(h,k) \leq k-1 \quad (h \geq 2).$$

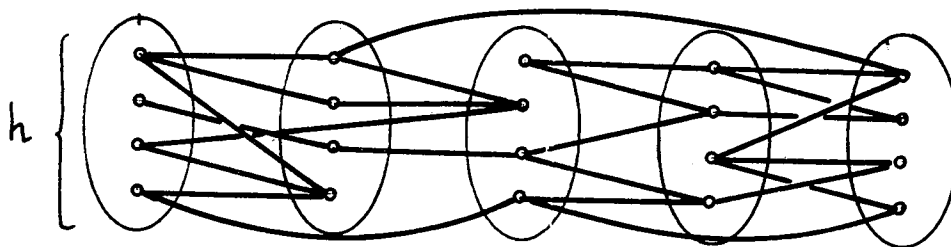
Conjecture:

$$f(h,k) \leq k - h + 2$$

(pour $h < k$)

Remarque:

On peut dans un premier temps s'intéresser au cas particulier où H est un hypergraphe de degré 1, c'est-à-dire un couplage.



$$\Delta(G) = k-1$$

Pour $k \leq h$ existe-t-il un transversal de H sans cycle, ou simplement biparti?

Une réponse négative (fort improbable) à cette question permettrait de construire un contre-exemple à la conjecture C4. Une réponse positive donnerait $t(S) \leq 2$ pour S stable de G^2 carré d'un graphe régulier de G mais ne donnerait aucune borne pour $t(G)$.

5. COUPLAGES MAXIMAUX DISJOINTS DEUX A DEUX

C'est sur les graphes représentatifs des arêtes de multigraphes que nous avons le plus facilement trouvé des résultats sur le paramètre t .

Ceci nous invite à commencer l'étude des stables maximaux disjoints deux à deux par cette catégorie de graphes. C'est ainsi que l'on est amené à étudier les couplages maximaux disjoints deux à deux.

5.1. Graphes réguliers

Rappelons la conjecture C6: "Tout graphe régulier de degré d possède d couplages maximaux disjoints deux à deux".

Cette conjecture est trivialement vraie pour $d \leq 2$ ainsi que pour les graphes dont l'indice chromatique est égal au degré.

Nous allons le démontrer pour $d=3$. [62]

Lemme:

Un graphe G possède k couplages maximaux disjoints deux à deux si et seulement si on peut colorier partiellement ses arêtes en k couleurs de sorte que:

- . 2 arêtes adjacentes portent des couleurs différentes,
- . toute arête soit adjacente à (au moins) $k-1$ arêtes de couleurs différentes.

Démonstration immédiate.

Proposition IV.18

Tout graphe G cubique possède 3 couplages maximaux disjoints deux à deux.

Démonstration

On a vu au chapitre I que l'on pouvait couvrir les arêtes de tout graphe cubique par 3 couplages et un couplage fort (rappelons qu'un couplage fort est un stable du graphe $(L(G))^2$).

Soit donc une couverture des arêtes de G par 3 couplages C_1, C_2, C_3 et un couplage fort C. Colorions les arêtes appartenant au couplage C_i par la couleur i ($i \in \{1,2,3\}$).

Toute arête étant adjacente à au plus une arête du couplage fort C, est adjacente à au moins deux arêtes de couleurs différentes.

Donc, d'après le lemme précédent, G admet trois couplages maximaux disjoints.

5.2. Graphes polytonaux

Définition:

Un graphe est dit *d-polytopal* s'il est isomorphe au graphe "sommets-arêtes" d'un polytope convexe dans R^d .

(Un graphe 2-polytopal est un cycle ; un graphe 3-polytopal est un graphe planaire 3-connexe [65]).

B.GRUNBAUM s'est intéressé aux couplages maximaux disjoints deux à deux dans les graphes polytopaux [19] . Il a défini les paramètres $\bar{\Pi}(G)$ et $\underline{\Pi}(G)$.

$\overline{\Pi}(G)$ est le nombre maximal de couplages maximaux de G disjoints deux à deux, c'est-à-dire le cardinal maximal d'un couplage de couplages maximaux. (Nous venons de démontrer que pour tout graphe G cubique, $\overline{\Pi}(G) \geq 3$).

$\underline{\Pi}(G)$ est le nombre minimal de couplages maximaux disjoints deux à deux tel que tout couplage maximal ait au moins une arête en commun avec l'un d'eux. Autrement dit, $\underline{\Pi}(G)$ est le cardinal minimal d'un couplage maximal (au sens de l'inclusion) de couplages maximaux.

Après avoir démontré que:

$$1/ \forall d \geq 2, \exists G \text{ d-polytopal} \mid \underline{\Pi}(G) < 2,$$

$$2/ \forall d \geq 2, \exists G \text{ d-polytopal} \mid \overline{\Pi}(G) < 3,$$

B.GRUNBAUM propose les conjectures suivantes:

1: tout graphe G d-polytopal avec $d \geq 2$ est tel que $\underline{\Pi}(G) \geq 2$

2: tout graphe G d-polytopal avec $d \geq 3$ est tel que $\overline{\Pi}(G) \geq 3$.

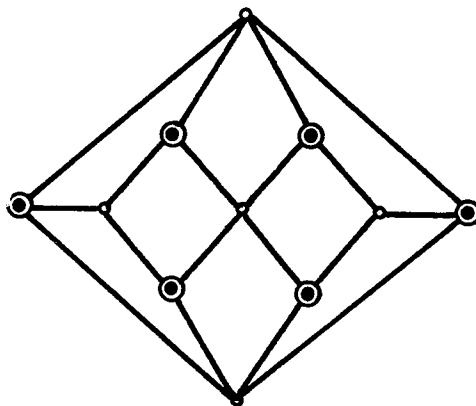
Nous allons donner des contre-exemples à ces deux conjectures pour $d=3$.

1er contre-exemple

La conjecture 1 peut s'écrire:

"Tout graphe G d-polytopal avec $d \geq 2$ est tel que pour tout couplage maximal de ce graphe, il existe un couplage maximal disjoint".

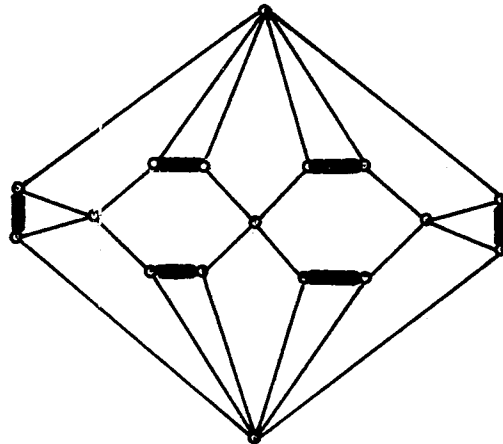
Soit le graphe planaire biparti maximal 3-connexe (donc 3-polytopal) suivant:



Tronquons les trièdres relatifs aux sommets entourés \odot de la façon suivante:



A chaque sommet entouré on fait ainsi correspondre une arête épaisse et on obtient le graphe 3-polytopal G_1 suivant:



(On peut vérifier que G_1 est 3-connexe).

L'ensemble des arêtes épaisses constitue un couplage maximal C . C est un couplage fort.

Soit Y l'ensemble des 5 sommets de G_1 n'appartenant pas à une arête épaisse. Y est un stable.

S'il existait un couplage C' maximal disjoint de C , toute arête de C serait adjacente à au moins une arête de C' ; toute arête de C' ne pouvant être adjacente qu'à une arête de C puisque C est un couplage fort, on aurait $|C'| \geq |C| = 6$.

D'autre part, tout sommet du stable Y ne pouvant appartenir qu'à une arête de C' on aurait $|C'| \leq |Y| = 5$, ce qui est impossible.

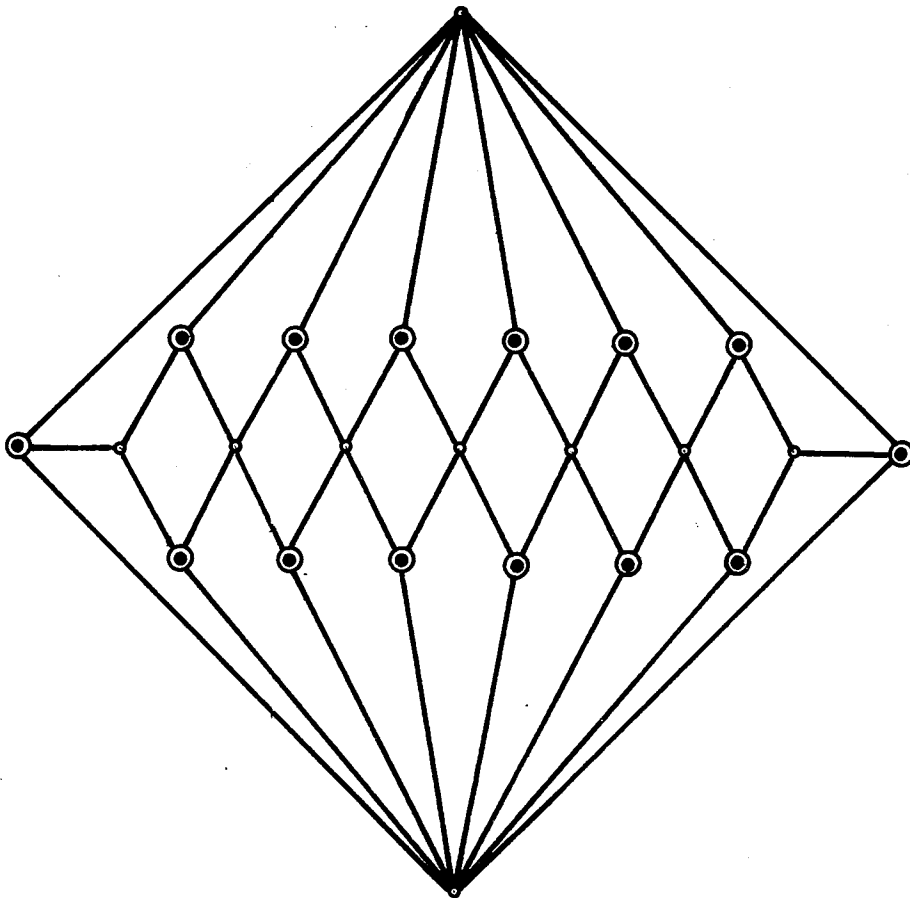
Il n'existe donc pas de couplage maximal disjoint du couplage maximal C , ce qui infirme la conjecture 1.

2ème contre-exemple

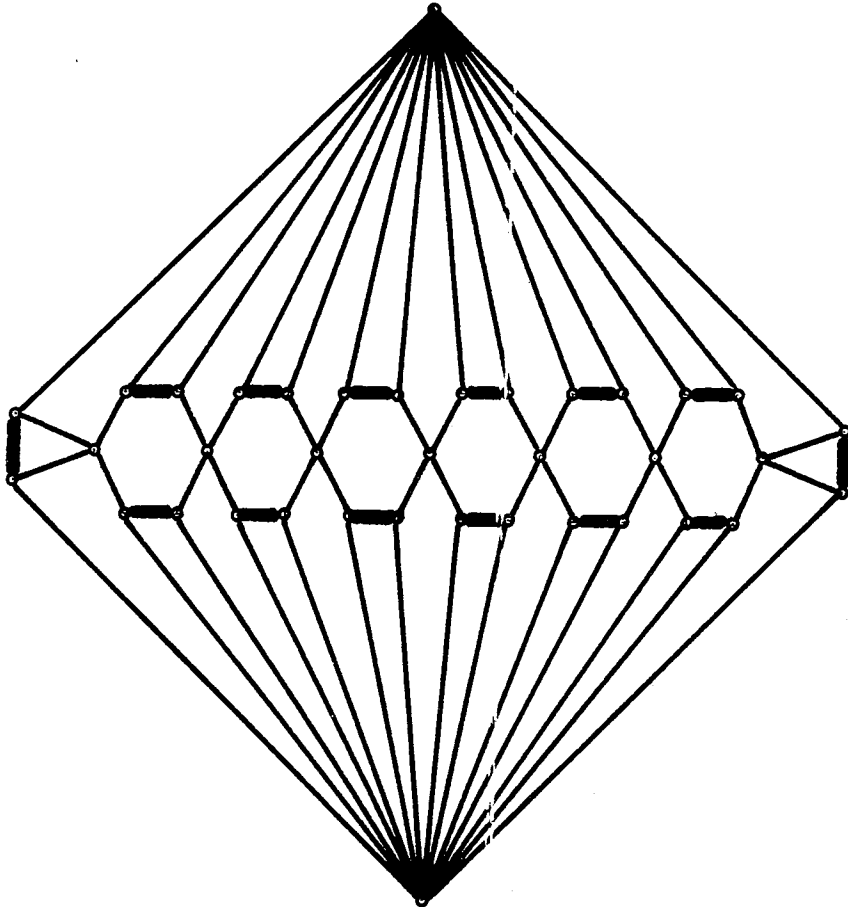
La conjecture 2 peut s'écrire:

"Tout graphe G d -polytopal avec $d \geq 3$ possède d -couplages maximaux disjoints deux à deux".

Soit le graphe planaire biparti maximal 3-connexe (donc 3-polytopal) suivant:



Transformons ce graphe comme précédemment pour obtenir le graphe 3-polytopal G_2 suivant:



Soit F l'ensemble des arêtes épaisses de G_2 . F est un couplage fort.

Soit Z l'ensemble des sommets G_2 n'appartenant pas à une arête épaisse. Z est un stable.

Supposons que G_2 possède 3 couplages maximaux disjoints. On peut donc colorier partiellement ses arêtes en 3 couleurs de sorte que:

- . deux arêtes adjacentes soient de couleur différente,
- . toute arête soit adjacente à au moins deux arêtes de couleur différente.

Soit L l'ensemble des arêtes colorées contenant un sommet de Z (et donc adjacentes à une arête épaisse).

Tout sommet de Z appartient à au plus 3 arêtes colorées.

D'où $|L| \leq 3x|Z| = 3x9 = 27$.

Toute arête épaisse est adjacente à au moins 2 arêtes colorées.

D'où $|L| \geq 2x|F| = 2x14 = 28$.

On aboutit ainsi à une contradiction.

Le graphe G_2 ne possède donc pas 3 couplages maximaux disjoints. Ceci infirme la conjecture 2.

Par contre, on montre que tout graphe G 3-polytopal possède deux couplages maximaux disjoints.

Proposition IV.19

Tout graphe G , d -connexe, de genre $g < \frac{d(2d-5)+1}{4}$ possède 2 couplages maximaux disjoints.

Démonstration

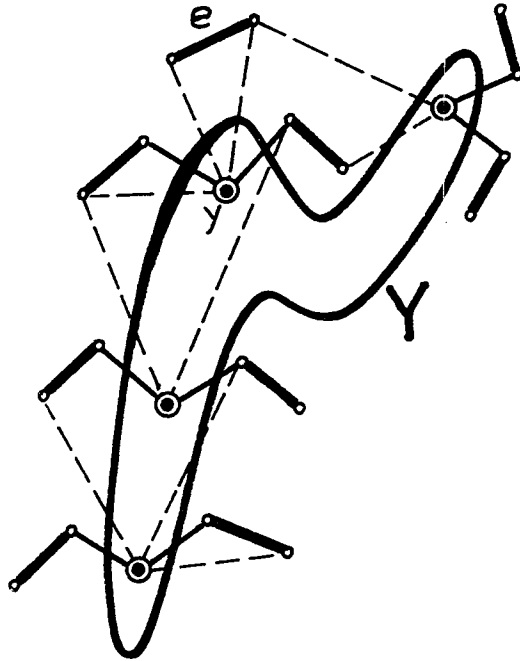
Nous allons montrer que $G=(X,E)$ possède un ensemble de chaînes maximal, sans arêtes isolées.

Sinon, soit $F \subset E$ tel que G_F est un ensemble de chaînes, maximal pour cette propriété et avec un nombre minimal d'arêtes isolées.

La démonstration est analogue à celle du lemme précédant la proposition IV.10.

Soit e une arête isolée.

e n'est relié qu'à des sommets y , centre de chaînes de longueur 4 de G_F .



Les arêtes pendantes de ces chaînes de longueur 4 ne sont elles-mêmes reliées qu'à des centres de chaînes de longueur 4.

Soit Y l'ensemble de ces sommets centres de chaînes de longueur 4 ainsi "atteints" à partir de l'arête e . Posons $k = |Y|$.

Soit K' l'ensemble des arêtes extrémités des chaînes de longueur 4 dont le centre appartient à Y .

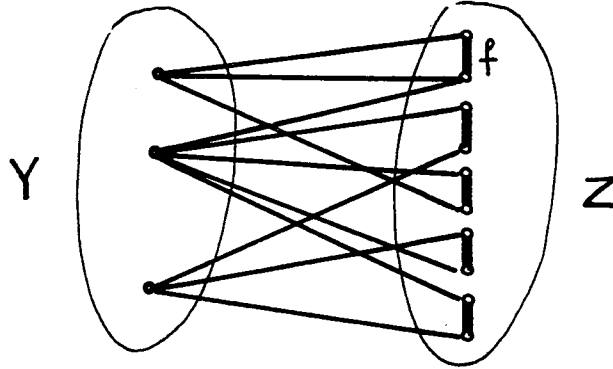
On a $|K'| = 2k$

Soit $K = K' \cup \{e\}$

Soit $Z = \bigcup_{f \in K} f$ l'ensemble des sommets appartenant à une arête de K

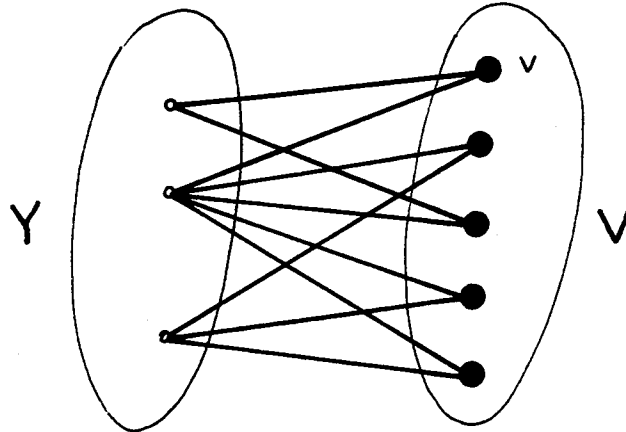
Soit $G' = (Y \cup Z, L)$ le sous graphe partiel de $G=(X,E)$ tel que $L = K \cup \{ \{y,z\} \in E \mid y \in Y, z \in Z \}$.

Le genre de G' est inférieur ou égal au genre g de G .



Comme G est d -connexe toute arête de K est reliées à au moins d sommets de Y .

Soit G'' le graphe obtenu à partir de G' en contractant chaque arête f de K en un sommet v .



On obtient ainsi un graphe biparti G'' à $3k+1$ sommet de genre inférieur ou égal au genre de G' donc à g .

Tout sommet v de V est relié à au moins d sommets de Y . On a donc en particulier $k \geq d$.

Soit m le nombre d'arêtes de G'' .

On a: $m \geq (2k+1)d$

Or, d'après la formule d'EULER, le nombre maximum d'arêtes d'un graphe biparti à n sommets, de genre g est $2n+4(g-1)$ (les faces sont de longueur ≥ 4).

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } \quad 2(3k+1) + 4g-4 &\geq (2k+1)d. \\ 4g &\geq 2kd+d - 6k+2 \end{aligned}$$

Ce qui donne puisque $k \geq d$ et $g \geq 0$:

$$4g \geq d(2d-5) + 2$$

On aboutit ainsi à une contradiction. □

Corollaire

Tout graphe G 3-connexe de genre $g \leq 1$ admet deux couplages maximaux disjoints.

Donc en particulier:

Tout graphe G 3-polytopal (c'est-à-dire planaire ($g=0$), 3-connexe) admet deux couplages maximaux disjoints.

chapitre 5
sur une classe
de couples d'hypergrânes.

Nous définissons ici une classe de couples d'hypergraphes qui peuvent être associés à certains problèmes de couverture minimale.

Avec F. JAEGER [47] nous avons déterminé le cardinal maximal de tels couples, les rangs des hypergraphes étant fixés.

Par la suite, ce problème a été reformulé par A. EHRENFUCHT et J. MYCIELSKI [10] et résolu à nouveau par G.O.H. KATONA [28].

Ce résultat permet, dans le cadre de la Théorie des Graphes de démontrer simplement une conjecture de P. ERDOS et T. GALLAI [12]. B. BOLLOBAS [6] avait donné une démonstration tout à fait différente de cette conjecture.

1.- INTRODUCTION

1.1. Définition

Soit $H = (X; E)$ et $H' = (X'; E')$ deux hypergraphes.

Nous dirons que H' *contient* H (noté $H \subseteq H'$) si et seulement si E est une sous famille de E' (ce qui implique $X \subseteq X'$).

Pour $H = (X; E_i, i \in I)$ nous noterons $H - E_i$ l'hypergraphe

$$H' = \left(\bigcup_{j \in I - \{i\}} E_j ; \{E_j \mid j \in I - \{i\}\} \right),$$

et nous noterons $m(H)$ le nombre d'arêtes de H : $m(H) = |I|$

1.2. Définition d'une classe de couples d'hypergraphes

Dans toute la suite h et k désignent des entiers strictement positifs.

Nous appellerons (h, k) -couple tout couple (H, K) où:

- $H = (X; E)$ est un hypergraphe de rang h ,
- $K = (Y; F)$ est un hypergraphe de rang k ,
- une arête quelconque de l'un des hypergraphes est disjointe d'une arête de l'autre hypergraphe et d'une seule.

Cette dernière condition impose que H et K aient le même nombre m d'arêtes ; cet entier non nul m sera appelé le cardinal du (h,k)-couple. Nous appellerons support de (H,K) l'ensemble $X \cup Y$. Enfin (H,K) sera dit uniforme si et seulement si H et K sont tous deux uniformes.

Nous démontrons le résultat suivant:

Proposition V.1.

Le cardinal maximal d'un (h,k)-couple est $\binom{h+k}{h}$.

2.- FORMULATION DU PROBLEME EN TERMES DE THEORIE DES GRAPHES

2.1. Réduction au cas uniforme

Lemme 1:

Le cardinal maximal d'un (h,k)-couple est égal au cardinal maximal d'un (h,k)-couple uniforme.

En effet, étant donné un (h,k)-couple quelconque de cardinal m, il existe un (h,k)-couple uniforme de cardinal m: on le construit à partir du premier en adjoignant à certaines arêtes des sommets extérieurs au support initial.

Soit alors X un ensemble fini et C(X) l'ensemble des (h,k)-couples uniformes de support inclus dans X.

Si $|X| < h+k$, $C(X) = \emptyset$. Il nous reste donc à démontrer:

$\forall X$ avec $|X| \geq h+k$, le cardinal maximal d'un élément de C(X) est $\binom{h+k}{h}$.

2.2. Graphe associé

Soit alors X donné, avec $|X| \geq h+k$.

Soit E l'ensemble des éléments de C(X) de cardinal 1:

$$E = \{(A,B) : A \subseteq X, |A| = h ; B \subseteq X, |B| = k ; A \cap B = \emptyset\}.$$

Soit R la relation binaire sur E définie par:

$$(A,B) R (A',B') \iff (A,B) \neq (A',B') \text{ et } \begin{cases} \text{soit } (A,B') \in E \\ \text{soit } (A',B) \in E \text{ (ou les deux)}. \end{cases}$$

Soit $G = (E;R)$ le graphe simple associé à cette relation symétrique et antiréflexive.

Lemme 2:

Le cardinal maximal d'un élément de $\mathcal{C}(X)$ est égal au nombre de stabilité $\alpha(G)$.

En effet:

a) soit S un ensemble stable de G , $S = \{(A_i, B_i), i = 1, \dots, m\}$.

Soient alors $H = (\bigcup_{i=1}^m A_i ; A_i, i = 1, \dots, m)$ et

$$K = (\bigcup_{i=1}^m B_i ; B_i, i = 1, \dots, m). \quad (H,K) \in \mathcal{C}(X) ; \text{ en effet:}$$

$i \neq j \Rightarrow A_i \cap B_j \neq \emptyset$, sinon $(A_i, B_j) \in E$ et $(A_i, B_j) R (A_j, B_j)$, ce qui est impossible ; et $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $A_i \cap B_i = \emptyset$. En outre le cardinal de (H,K) est $|S|$.

b) réciproquement soit (H,K) un élément de $\mathcal{C}(X)$; si

$$H = (X_1 ; A_i, i = 1, \dots, m) \text{ et } K = (X_2 ; B_i, i = 1, \dots, m)$$

avec $A_i \cap B_j = \emptyset \Rightarrow i = j$, il est clair que $S = \{(A_i, B_i), i = 1, \dots, m\}$ est un stable de G de cardinal m .

c) donc à tout stable de G on peut associer un élément de $\mathcal{C}(X)$ de même cardinal, et réciproquement. \square

3.- CALCUL DU NOMBRE DE STABILITE DE G

3.1. Partition de E en stables de G

Soit $Y \subseteq X$ avec $|Y| = h+k$

Soit $E_Y = \{(A,B) \in E : A \cup B = Y\}$

. E_Y est un stable de G. En effet, soient (A,B) et (A',B') deux éléments distincts de E_Y .

$A \cap B' \neq \emptyset$ car sinon $B' = Y - A = B$, d'où

$A = Y - B = Y - B' = A'$ et $(A,B) = (A',B')$, ce qui est impossible.

De même $A' \cap B \neq \emptyset$.

On en déduit que (A,B) et (A',B') ne sont pas liés par la relation R.

. L'ensemble des E_Y constitue évidemment une partition de E:

$(A,B) \in E_{A \cup B}$ et $(A,B) \notin E_Y$ pour $Y \neq A \cup B$.

. $\forall Y \subseteq X, |Y| = h+k : |E_Y| = \binom{h+k}{h}$

On en déduit en particulier que $\alpha(G) \geq \binom{h+k}{h}$.

3.2. Une famille particulière de cliques de G

Soit O un ordre total sur X.

Nous dirons que $(A,B) \in E$ est séparé par O si et seulement si $\forall a \in A, \forall b \in B, a \text{ O } b$.

Soit $C(O)$ l'ensemble des éléments de E séparés par O.

. $C(O)$ est une clique de G

Sinon soient (A,B) et (A',B') deux éléments distincts de $C(O)$ qui ne sont pas liés dans la relation R:

$A \cap B' \neq \emptyset$ et $A' \cap B \neq \emptyset$

Soient $\alpha \in A \cap B'$ et $\beta \in A' \cap B$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in A, \beta \in B \Rightarrow \alpha O \beta \\ \alpha \in B', \beta \in A' \Rightarrow \beta O \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha = \beta) \Rightarrow (\alpha \in A \cap B)$$

Il y a contradiction puisque $A \cap B = \emptyset$.

. $\forall Y \subseteq X$ avec $|Y| = h+k$, $C(O) \cap E_Y \neq \emptyset$.

En effet, $Y \subseteq X$ (avec $|Y| = h+k$) est totalement ordonné par O ; si l'on désigne par A l'ensemble des h premiers éléments de Y pour cet ordre, et par B l'ensemble des k derniers éléments de Y pour cet ordre :

- $A \cup B = Y$, donc $(A, B) \in E_Y$
- (A, B) est séparé par O .

. Soit $\Gamma = \{C(O) : O \text{ est un ordre total sur } X\}$.

$\forall (A, B) \in E$ soit $\Gamma_{(A, B)} = \{\Gamma_i \in \Gamma : (A, B) \in \Gamma_i\}$.

$\forall (A, B) \in E$, $\Gamma_{(A, B)} \neq \emptyset$; en effet, étant donné $(A, B) \in E$, si l'on numérote $1, 2, \dots, h$ les éléments de A ; $h+1, \dots, h+k$ les éléments de B et $h+k+1, \dots, |X|$ les éléments de $X - (A \cup B)$, on obtient un ordre total qui sépare (A, B) .

En outre $|\Gamma_{(A, B)}|$ est indépendant de (A, B) : G et Γ sont invariants par permutation des éléments de X .

Il existe donc un entier non nul d tel que :

$$\forall (A, B) \in E \quad |\Gamma_{(A, B)}| = d \quad (d \geq 1)$$

3.3. Détermination de $\alpha(G)$

$\forall F \subseteq E$ nous poserons $\Gamma_F = \bigcup_{(A, B) \in F} \Gamma_{(A, B)}$

Soit S un stable de G .

Pour (A,B) et (A',B') distincts dans S :

$$\Gamma_{(A,B)} \cap \Gamma_{(A',B')} = \emptyset \quad (\text{sinon } (A,B) R (A',B')).$$

$$\text{Donc } |\Gamma_S| = \sum_{(A,B) \in S} |\Gamma_{(A,B)}| = d \cdot |S|.$$

Pour $Y \subseteq X$, $|Y| = h+k$: E_Y est stable et $\Gamma_{E_Y} = \Gamma$

$$\text{Donc } |\Gamma| = |\Gamma_{E_Y}| = d \cdot |E_Y|.$$

Donc pour tout stable S de G , puisque $|\Gamma_S| \leq |\Gamma|$:

$$|\Gamma_S| = d \cdot |S| \leq d \cdot |E_Y| = |\Gamma|, \text{ soit } |S| \leq |E_Y|.$$

En conclusion pour tout stable S de G : $|S| \leq \binom{h+k}{h}$

$$\text{donc } \alpha(G) = \binom{h+k}{h}.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. □

4.- CARACTERISATION DES (h,k) COUPLES DE CARDINAL MAXIMAL

Proposition IV-2

Les seuls (h,k) -couples de cardinal maximal sont les couples d'hypergraphes (H,K) où $H = (X;E)$ et $K = (X;F)$ tels que $|X| = h+k$, E est l'ensemble des parties à h éléments de X et F est l'ensemble des parties à k éléments de X .

Démonstration:

Considérons le graphe G défini précédemment.

Nous allons montrer que les E_Y sont les seuls stables de cardinal maximum. Sinon, soit $S = (A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_p, B_p)$ un stable de cardinal maximum différent d'un E_Y .

Donc $\exists (A_R, B_R) \in S$ et $a_0 \in A_R, b_0 \in B_R$ tels que

$$(A_R - \{a_0\} \cup \{b_0\}, B_R - \{b_0\} \cup \{a_0\}) \notin S.$$

Notons a_0, a_1, \dots, a_{h-1} les éléments de A_R

b_0, b_1, \dots, b_{k-1} les éléments de B_R

x_0, x_1, \dots, x_q les éléments de $X - (A_R \cup B_R)$.

Soit O_1 l'ordre total sur X tel que:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{h-1} < b_0 < a_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1} < x_0 < \dots < x_q$$

Soit O_2 l'ordre total sur X tel que:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_q < a_1 < a_2 < \dots < a_{h-1} < b_0 < a_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1}$$

Puisque S est de cardinal maximum $\Gamma_S = \Gamma$

(Γ et Γ_S sont définis comme précédemment)

Donc $\forall O$ ordre total sur X , $\exists (A_i, B_i) \in S$ séparé par O

Soit $(A_j^1, B_j^1) \in S \cap C(O_1)$

$(A_j^1, B_j^1) \neq (A_R, B_R)$ puisque (A_R, B_R) n'est pas séparé par O_1

Donc $A_R \cap B_j^1 \neq \emptyset$

et par suite $A_R \cap B_j^1 = \{a_0\}$

et $A_j^1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{h-1}, b_0\}$ puisque (A_j^1, B_j^1) est séparé par O_1 .

Soit $(A_j^2, B_j^2) \in S \cap C(O_2)$

$(A_j^2, B_j^2) \neq (A_R, B_R)$

et donc $B_R \cap A_j^2 \neq \emptyset$

et par suite: $B_R \cap A_j^2 = \{b_0\}$

et $B_j^2 = \{a_0, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}$

puisque (A_j^2, B_j^2) est séparé par O_2 .

On voit donc que $A_j^1 \cap B_j^2 = \emptyset$.

Ce qui implique que:

$$(A_j^1, B_j^1) = (A_j^2, B_j^2) = (A_r - \{a_o\} \cup \{b_o\}, B_r - \{b_o\} \cup \{a_o\})$$

donc: $(A_r - \{a_o\} \cup \{b_o\}, B_r - \{b_o\} \cup \{a_o\}) \in S$.

On aboutit ainsi à une contradiction. □

5.- APPLICATIONS

5.1. Couverture supérieure d'un hypergraphe par un autre

Nous dirons que $H = (X; E)$ couvre supérieurement $K = (Y; F)$ si et seulement si tout élément de F est inclus dans un élément de E au moins ; nous écrirons alors $H \subset_s K$.

H est une couverture supérieure minimale de K si et seulement si:

- . $H \subset_s K$
- . $(H' \subseteq H, H' \subset_s K) \Rightarrow H' = H$.

Soient $H = (X ; E_i, i = 1, \dots, m)$ et $K = (Y ; F_i, i = 1, \dots, p)$ tels que H soit une couverture supérieure minimale de K .

Soit $\bar{H} = (X - \bigcap_{i=1}^m E_i ; (X - E_i), i = 1, \dots, m)$.

Toute arête de K est disjointe d'une arête de \bar{H} au moins, et \bar{H} est minimal pour cette propriété. Donc à toute arête $E_i^!$ de \bar{H} ($i \in \{1, \dots, m\}$) on peut associer une arête $F_i^!$ de K disjointe de $E_i^!$, qui intersecte $E_j^! \forall j \in \{1, \dots, m\} - \{i\}$.

Donc si l'on pose $K' = (\bigcup_{i=1}^m F_i^! ; F_i^!, i = 1, \dots, m)$, et si $r(\bar{H})$ est le rang de \bar{H} et $r(K')$ est le rang de K' :

(H, K') est un $[r(\bar{H}), r(K')]$ -couple.

On en déduit que $m \leq \binom{r(\bar{H}) + r(K')}{r(K')}$

$r(\bar{H}) = |X| - \min_{i=1, \dots, m} |E_i|$ et $r(K') \leq r(K)$ (rang de K).

En résumé, si $H = (X; E_i, i = 1, \dots, m)$ est une couverture supérieure minimale de K , hypergraphe de rang k :

$$m \leq \binom{|X| - \min_{i=1, \dots, m} |E_i| + k}{k}$$

Exemple:

Soit G un graphe simple à n sommets (sans sommets isolés).

Une famille C de cliques de G sera dite définition de G si toute arête de G est contenue dans une clique de C au moins, et si C est minimale pour cette propriété.

Toute définition de G par des cliques de cardinal $\geq C \geq 2$ contient une définition de G comportant moins de $\binom{n - C + 2}{2}$ cliques.

5.2. Couverture inférieure minimale d'un hypergraphe par un autre

. Nous dirons que $H = (X; E)$ couvre inférieurement $K = (Y; F)$ si et seulement si tout élément de F contient un élément de E .

Par un raisonnement analogue à celui de (5.1.) on obtient le résultat suivant:

Si $H = (X; E)$ est une couverture inférieure minimale de $K = (Y;)$ et si h est le rang de H :

$$|E| \leq \binom{|Y| - \min_{F_i \in F} |F_i| + h}{h}$$

. Appelons stable de $H = (X; E)$ toute partie de X qui ne contient pas d'arête de H . Le nombre de stabilité de H (noté $\alpha(H)$) est le cardinal

maximal d'un stable de H . H sera dit α -critique si et seulement si:

$$\forall E_i \in \mathcal{E} \quad \alpha(H - E_i) > \alpha(H).$$

Si l'on désigne par $X_{\alpha(H)+1}$ l'ensemble des parties de X de cardinal $\alpha(H)+1$, on voit que:

H est α -critique $\Rightarrow H$ est une couverture minimale inférieure de

$$K = (X ; X_{\alpha(H)+1})$$

Donc si H est un hypergraphe à n sommets, m arêtes, de rang h , α -critique avec $k = \alpha(H)+1$:

$$m \leq \binom{n - k + h}{h}$$

5.3. Hypergraphes τ -critiques

$H = (X ; E_i, i \in I)$ sera dit τ -critique [3] si et seulement si

$$\forall i \in I \quad \tau(H - E_i) < \tau(H) \quad (\text{donc } \tau(H - E_i) = \tau(H) - 1).$$

$\forall i \in I$ soit F_i un transversal de $H - E_i$ de cardinal

$$\tau(H) - 1 : F_i \cap E_j = \emptyset \iff i = j.$$

Soient donc h le rang de H et $K = (\bigcup_{i \in I} F_i ; F_i, i \in I)$.

(H, K) est un $(h, \tau(H) - 1)$ couple.

Soit $f(k, p)$ le nombre maximum d'arêtes d'un hypergraphe τ -critique de rang k avec $\tau(H) = p+1$. Le raisonnement précédent montre que

$$f(k, p) \leq \binom{k+p}{k}.$$

De plus, d'après la proposition IV.2., les seuls hypergraphes uniformes de rang k , τ -critiques ($\tau = p+1$) ayant ce nombre maximum d'arêtes sont les hypergraphes de la forme $H = (X; E)$ où $|X| = k+p$ et où E est l'ensemble des parties à k éléments de X .

Ce résultat faisait l'objet d'une conjecture d'ERDOS et GALLAI[12].

Il avait été démontré dans le cas $k = 2 \forall p \geq 1$ par ERDOS, HAJNAL et MOON [13], et enfin dans le cas général (problème uniforme) par BOLLOBAS [6]. Nous en avons donc donné une nouvelle démonstration utilisant la Théorie des Graphes.

5.4. Remarque

Ce problème du nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe τ -critique de rang k revient à rechercher une certaine couverture minimale de cardinal maximal. Il se présente donc comme un problème de "deuxième catégorie".

On peut remarquer que c'est en le ramenant à un problème de "première catégorie" (à savoir rechercher le nombre de stabilité d'un certain graphe) que nous l'avons résolu.

chapitre 6
séquences pseudo-euleriennes universelles
(un problème combinatoire rencontré
lors de l'étude du test des systèmes logiques.)

INTRODUCTION

Soit $G = (X;U)$ un multigraphe orienté.

Soit ϕ une application de l'ensemble des arcs U de G dans un *vocabulaire* I .

Pour $u \in U$ $\phi(u)$ sera noté *étiquette* de u .

Le multigraphe G et l'application ϕ sont tels que $\forall x \in X, \forall i \in I$ il existe un et un seul arc ayant x pour origine et étiqueté par i (c'est-à-dire/que $\phi(u) = i$).

Ainsi, - si l'on note I^* le monoïde libre engendré par I -, à toute séquence $J \in I^*$, pour $x \in X$ sommet de départ, on peut associer un et un seul chemin dans G .

Une séquence J sera dite *pseudo-eulérienne* sur G si quelque soit le sommet de départ $x \in X$ le chemin associé recouvre U .

On est ainsi amené à se poser deux problèmes:

1/ pour un entier positif, trouver des séquences $J \in I^*$ pseudo-eulériennes pour tout multigraphe $G = (X;U)$ orienté étiqueté (défini comme ci-dessus) fortement connexe avec $|X| \leq n$. De telles séquences seront dites *pseudo-eulériennes universelles*.

2/ inversement, étant donnée une séquence $J \in I^*$ trouver $p(J)$ [*puissance* de J] tel que $\forall G = (X;U)$ multigraphe orienté étiqueté fortement connexe avec $|X| \leq p(J)$, cette séquence J soit pseudo-eulérienne sur G .

Ces problèmes combinatoires trouvent leur origine dans l'étude du *test de systèmes logiques*, le multigraphe orienté étiqueté défini plus haut n'est rien d'autre qu'un automate d'état fini modélisant le fonctionnement d'un système logique, système logique dont on désire vérifier le bon fonctionnement.

L'étude qui va suivre est le fruit d'une collaboration avec J.SIFAKIS.[59][61] Elle est présentée dans le cadre de la Théorie des Automates à laquelle nous empruntons les définitions et notations utilisées dans ce chapitre.

Le problème du test des systèmes logiques n'a pas été jusqu'à présent résolu de façon satisfaisante même pour des systèmes de taille raisonnable. Les méthodes existantes, déterministes, présupposent une connaissance du système à tester (tableau d'états, systèmes d'équations booléennes, circuit), et nécessitent une analyse particulière à chaque système [24] [25] [36].

C'est pourquoi la tendance actuelle est de chercher des méthodes de test permettant de se débarrasser partiellement des modèles propres à chaque système, en n'en retenant que des paramètres caractéristiques. Le test effectué par ces méthodes risque évidemment de ne pas être complet, (exhaustif), mais on a l'avantage d'avoir des séquences prédéfinies dépendant peu du système à tester.

Dans cette optique des méthodes d'analyse probabilistique ont été étudiées pour tester des systèmes de taille importante. Par ces méthodes, on calcule la probabilité d'avoir "bien" testé un système en appliquant une séquence d'entrée aléatoire et en comparant ses sorties avec celle d'un système de référence (figure 6.1) [39] [40] [64][67].

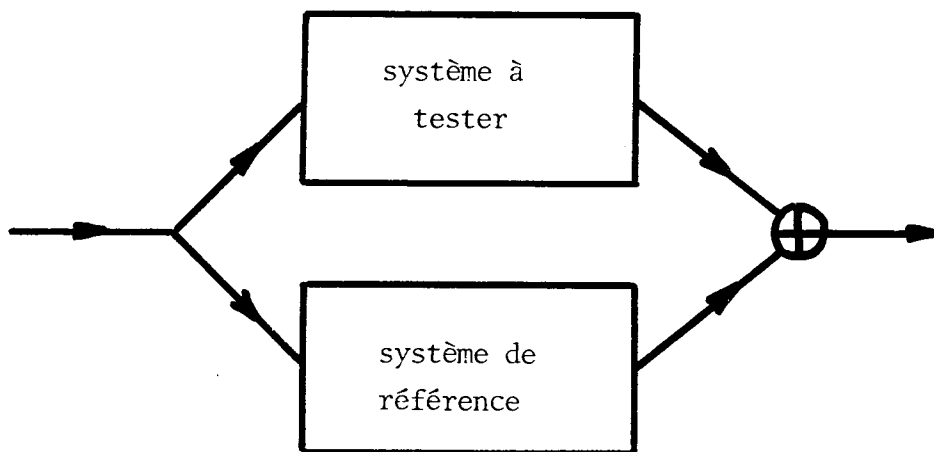


figure 6.1.

Cette probabilité est d'habitude exprimée en fonction de la longueur de la séquence appliquée et de paramètres caractéristiques du système, tels que le nombre d'entrées, le nombre d'états et des propriétés de son graphe de transition.

Dans les travaux sur le test aléatoire des systèmes séquentiels on considère que l'on a testé de façon "satisfaisante" à l'aide d'une séquence, si, en appliquant cette séquence, on a parcouru toutes les transitions du système, ce qui est une condition nécessaire mais pas suffisante pour l'avoir testé. On définit ainsi la probabilité d'avoir "testé" le système comme la probabilité d'avoir franchi toutes ses transitions.

Ce chapitre, inspiré des méthodes du test aléatoire, traite du problème du test d'un automate à l'aide de séquences prédéfinies ne dépendant que du nombre de ses entrées et de la borne supérieure du nombre de ses états.

Dans la première partie on examine rapidement le problème général du test universel non adaptatif. Après avoir défini une *séquence identifiante* pour une classe d'automates d'état fini fortement connexes, on donne une borne supérieure de sa longueur et on examine la possibilité de tester suivant le principe de la figure 6.1. (test non adaptatif - comparaison simple des sorties).

Dans la deuxième partie, un sous problème du problème général est traité: on cherche à déterminer et caractériser des séquences d'entrée permettant de passer par toutes les transitions de tout automate fortement connexe à n états au plus ; les séquences identifiantes sont évidemment de telles séquences. On introduit la notion de puissance d'une séquence, c'est-à-dire sa capacité de parcourir un nombre donné, au moins, de transitions ou d'états et nous démontrons des propriétés relatives à cette notion. Nous construisons ensuite des séquences particulières de puissance donnée. Enfin, nous fournissons un outil théorique pour calculer la puissance d'une séquence.

1.- TEST UNIVERSEL⁽¹⁾ NON ADAPTATIF

1/1.- SEQUENCES(n,m) - IDENTIFIANTES

Définition 1

Un automate d'état fini consistera en la donnée d'un quintuplet

$(A = (S, I, O, \delta, \lambda)$ où:

- S : ensemble fini d'états
- I : vocabulaire fini de symboles d'entrée
- O : vocabulaire fini de symboles de sortie
- $\delta : S \times I \rightarrow S$, fonction de transition
- $\lambda : S \times I \rightarrow O$, fonction de sortie.

Nous désignons par I^* le monoïde libre sur I et par e son élément neutre. Nous désignons également par δ et λ les extensions des fonctions de transition et de sortie définies par:

$$\delta : S \times I^* \rightarrow S; \forall i \in I, \forall J \in I^*, \forall s \in S: \begin{cases} \delta(s, iJ) = \delta(\delta(s, i), J) \\ \delta(s, e) = s \end{cases}$$

$$\lambda : S \times I^* \rightarrow O^*; \forall i \in I, \forall J \in I^*, \forall s \in S: \begin{cases} \lambda(s, iJ) = \lambda(s, i) \lambda(\delta(s, i), J) \\ \lambda(s, e) = e \end{cases}$$

Pour $A = (S, I, O, \delta, \lambda)$, $s_0 \in S$, nous représentons (A, s_0) l'automate avec état initial s_0 et par $A_{n,m}$ l'ensemble des automates fortement connexes:

$$A_{n,m} = \{A_i = (S_i, I, O, \delta_i, \lambda_i); |S_i| \leq n, |I| = m\}$$

(1) Le terme test universel est introduit pour différencier ce test du test habituel valable pour un seul système et non pour une classe de systèmes.

Définition 2:

Soit $f = \{f_1, f_2, \dots, f_q\}$ un ensemble de systèmes discrets ayant I comme vocabulaire d'entrée et représentons par $\{f_p(J)\}$ l'ensemble des séquences de sortie possibles quand la séquence $J, J \in I^*$ est appliquée à f_p . Alors la séquence J est une séquence identifiante pour f si

$$\forall f_i, f_j \in f, f_i \neq f_j \Rightarrow \{f_i(J)\} \cap \{f_j(J)\} = \emptyset$$

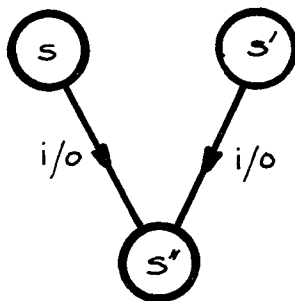
Proposition VI. 1

Soit $A_{n,m}^0$ l'ensemble des automates fortement connexes définis sur le même vocabulaire d'entrée/sortie, avec état initial, ayant n états au plus.

Alors il n'existe pas de séquence d'identification pour $A_{n,m}^0$.

Démonstration

S'il existe une telle séquence, elle serait de la forme $iJ, i \in I, J \in I^*$. Alors on peut trouver un automate $A = (S, I, O, \delta, \lambda)$ réduit fortement connexe ayant comme sous graphe partiel le graphe de la figure 6.2.



Ceci implique $(A,s) \neq (A,s')$ et $\lambda(s,iJ) = \lambda(s',iJ)$. Contradiction

figure 6.2.

Proposition VI.2.

Il existe une séquence identifiante, J , pour $A_{n,m}$ de longueur $|J| \leq 8n^2 m^{2n} \log n$. Une telle séquence sera appelée séquence (n,m)-identifiante.

Démonstration

L'existence d'une telle séquence est garantie par le fait que le cardinal de $A_{n,m}$ est fini et que l'on peut distinguer deux automates différents de $A_{n,m}$ par une séquence de longueur au plus $2n-1$.

On peut considérer $A_{n,m}$ comme l'automate qui est l'union des automates qu'il contient ; il a alors n^{2nm} états [15]. Donc le nombre des couples d'états de $A_{n,m}$ est au plus $n^{4mn} = N$.

Une séquence identifiante sur $A_{n,m}$ distinguera chaque couple d'états. Supposons que cette séquence identifiante J , ($J \in I^*$), est de la forme $J = J_1 J_2 \dots J_k J_{k+1}$. Il existe $p = m^{2n-1}$ séquences de longueur $2n-1$ sur I . Soit J_1 une de ces séquences distinguant le plus de couples d'états possibles parmi les N couples. En appliquant donc J_1 il reste au plus $N(\frac{p-1}{p})$ couples à distinguer. Soit J_2 une des séquences qui distingue le plus de couples d'états parmi les $N(\frac{p-1}{p})$ qui restent. Après avoir appliqué $J_1 J_2$ il reste au plus $N(\frac{p-1}{p})^2$ couples à distinguer.

Supposons que, après avoir appliqué $J_1 J_2 \dots J_k$, il reste un couple à distinguer et qu'en appliquant J_{k+1} , ($|J_{k+1}| \leq 2n-1$), on arrive à distinguer ce couple.

Calculons x tel que:

$$N\left(\frac{p-1}{p}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\log N}{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \Rightarrow x \leq p \log N \Rightarrow k \leq p \log N$$

Donc, $|J| \leq (2n - 1) (k + 1) \leq (2n - 1) (p \log N + 1) \Rightarrow$

$$|J| \leq (2n - 1) [m^{2n-1} 4mn \log n + 1] < 2n 4mn m^{2n-1} \log n \Rightarrow$$

$$|J| < 8n^2 m^{2n} \log n. \quad \square$$

1/2.- IDENTIFICATION NON-ADAPTATIVE PAR COMPARAISON DES SORTIES

L'existence d'une séquence identifiante de $A_{n,m}$ ne suggère pas de méthode pratique pour effectuer le test ; en particulier elle ne permet pas de déterminer le décideur de la figure 6.3.

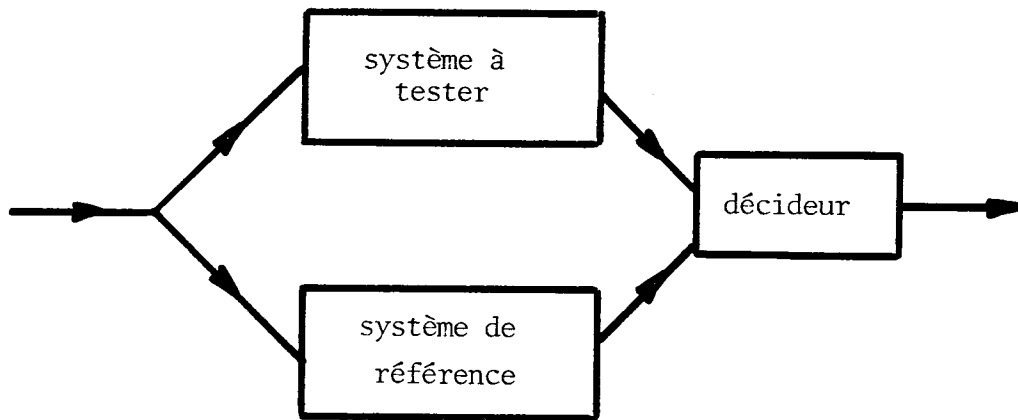


figure 6.3.

Ce décideur est un système logique à mémoire. En effet, pour décider si deux éléments de $A_{n,m}$ sont identiques, on doit mémoriser la partition définie sur l'ensemble des séquences de sortie produites quand une séquence identifiante est appliquée à $A_{n,m}$ (deux séquences de sortie

appartiennent à la même classe si elles sont des réponses d'un même automate).

Dans ce qui suit, on examine la possibilité de tester quand le décideur est remplacé par un comparateur simple (additionneur mod2 pour des signaux binaires).

Il est clair que dans le cas où les séquences de sortie du circuit référence et du circuit à tester sont identiques quand on applique une séquence identifiante, alors les deux systèmes sont identiques. Sinon, ou bien les systèmes sont les mêmes et leurs états de départ différents, ou bien les systèmes sont différents. Dans le premier cas il faut d'abord synchroniser (mettre dans le même état) les deux systèmes, si possible.

Définition 3:

Soit $A_{n,m}^S$ le sous-ensemble des automates de $A_{n,m}$ ayant une séquence de synchronisation. On appellera alors séquence de synchronisation (n,m)-universelle, une séquence qui est séquence de synchronisation pour tous les automates de $A_{n,m}^S$.

REMARQUE: Une telle séquence peut être obtenue par concaténation des séquences de synchronisation de tous les automates de $A_{m,n}^S$.

Proposition VI.3.

On peut identifier les éléments de $A_{m,n}^S$ par une expérience non adaptative en comparant simplement les sorties.

Démonstration:

Il suffit pour cela d'appliquer une séquence de synchronisation (n,m)-universelle suivie d'une séquence (n,m)-identifiante.

2.- PSEUDOTEST UNIVERSEL NON ADAPTATIF

Le terme pseudotest est introduit ici pour désigner l'expérience où on applique une séquence parcourant toutes les transitions d'un système. Le problème du pseudotest universel est un sous-problème de celui du test universel et on verra dans cette partie qu'un pseudotest sur une classe d'automates peut être un test sur une autre. Ce problème étant indépendant des sorties, on désignera également par "automate" un "automate sans sorties" $A = (S, I, \delta)$.

2/1.- DEFINITIONS

Définition 4

Pour un automate $A = (S, I, \delta)$ on définit les applications:

4a $\Delta : S \times I^* \rightarrow P(S)$ où $P(S)$ désigne l'ensemble des parties de S .

Pour $J \in I^*$, $J = i_1 i_2 i_3 \dots i_r$

$$\Delta(s, J) = \{s, \delta(s, i_1), \delta(s, i_1 i_2), \dots, \delta(s, i_1 i_2 \dots i_r)\}$$

i.e. $\Delta(s, J)$ est l'ensemble des états de l'automate qui sont visités lorsqu'on part de l'état s et qu'on applique la séquence J .

4b $T : S \times I^* \rightarrow P(S \times I)$, où $P(S \times I)$ désigne l'ensemble des parties de $S \times I$, tel que pour $J \in I^*$, $J = i_0 i_1 \dots i_r$ on a:

$$T(s, J) = \{(s, i_0), (\delta(s, i_0), i_1), \dots, (\delta(s, i_0 i_1 \dots i_{r-1}), i_r)\}$$

c'est-à-dire $T(s, J)$ est l'ensemble des transitions parcourues lorsque l'on applique la séquence J à partir de l'état s .

4c $\hat{\delta} : P(S) \times I \rightarrow P(S)$ tel que : si $S' \subseteq S$ alors

$$\hat{\delta}(S', i) = \bigcup_{s \in S'} \delta(s, i)$$

Définition 5:

Soit I un vocabulaire à m éléments. Alors un langage $L, L \subseteq I^*$, sera dit visiteur de puissance (n,m) ou (n,m) -visiteur si pour chaque automate A , fortement connexe à n états, $A = (S, I, \delta, s_0)$, il est tel que

$\bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J) = S$. En particulier, une séquence $J, J \in I^*$, sera dite (n,m) -visiteur si pour tout automate $A = (S, I, \delta, s_0)$ fortement connexe à n états $\Delta(s_0, J) = S$.

Définition 5':

Un langage L défini sur un vocabulaire I à m éléments, est dit promeneur de puissance (n,m) ou (n,m) -promeneur si pour chaque automate A ,

$A = (S, I, \delta, s_0)$, fortement connexe, à n états, il est tel que

$\bigcup_{J \in L} T(s_0, J) = S \times I$. En particulier une séquence $J, J \in I^*$ sera dite

(n,m) -promeneur si pour chaque automate $A, A = (S, I, \delta, s_0)$, fortement connexe, à n états, elle est telle que $T(s_0, J) = S \times I$.

Définition 6:

Un langage L , défini sur un vocabulaire I , à m éléments sera dit visiteur général de puissance (n,m) ou simplement (n,m) -visiteur général si pour chaque automate $A, A = (S, I, \delta, s_0)$, fortement connexe ayant

$|S| \geq n$ on a : $|\bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J)| \geq n$.

Définition 6':

Un langage L , défini sur un vocabulaire à m éléments sera dit promeneur général de puissance (λ, m) ou simplement (λ, m) -promeneur général si pour chaque automate $A, A = (S, I, \delta, s_0)$, fortement connexe, tel que

$|S| \times |I| \geq \lambda$ on a $|\bigcup_{J \in L} T(s_0, J)| \geq \lambda$.

Définition 7:

Un labyrinthe est un automate avec état final $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ où

S : ensemble d'états ; $s_0 \in S$, état initial

$\delta : \{S \cup \{f\}\} \times I \rightarrow S \cup \{f\}$

$f \notin S$, et tel que $\forall i \in I, \delta(f, i) = f$

Pour un labyrinthe, nous définissons, comme pour un automate, l'application $\hat{\delta} : P(S) \times I \rightarrow P(S)$.

Un labyrinthe $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ est dit labyrinthe sans piège si pour $\forall s \in S, \exists J \in I^* : \delta(s, J) = f$.

Un labyrinthe est dit fortement connexe si $\forall s_1, s_2 \in S, \exists J \in I^* : \delta(s_1, J) = s_2$

Un labyrinthe reconnaît un langage $L, L \subseteq I^*$, si $\forall J \in L : \delta(s_0, J) = f$.

On dira qu'un labyrinthe L enferme mieux qu'un labyrinthe L' (noté $L \triangleright L'$) si pour $\forall J \in I^* (J \text{ reconnu par } L \Rightarrow J \text{ reconnu par } L')$.

C'est-à-dire si L et L' sont respectivement les langages reconnus par L et L' on a : $L \triangleright L' \Leftrightarrow L \subseteq L'$.

2/2.- PROPRIETESProposition VI.4.

Si L est un langage (n,m) -visiteur alors L est (n',m) -visiteur $\forall n' \leq n$.

Démonstration

Supposons que L est (n,m) -visiteur et non (n',m) -visiteur $\forall n' \leq n$.

Alors, il existe un automate $A = (S, I, \delta, s_0)$ avec $|S| = n-p$, ($n > 0$), et $t_0 \in S$ tel que $t_0 \notin \bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J)$.

Soit alors $A' = (S', I, \delta', s'_0)$ tel que:

$$S' = S \cup \{t_1, \dots, t_p\}, (|S'| = n), s'_0 = s_0$$

$$\forall i \in I, \forall s \in \{S - t_0\} : \delta'(s, i) = \delta(s, i)$$

$$\forall i \in I, \delta'(t_0, i) = t_1, \delta'(t_1, i) = t_2, \dots, \delta'(t_p, i) = s_0$$

Alors A' est un automate fortement connexe à n états et

$$\forall j \in \{0, 1, 2, \dots, p\} : t_j \notin \bigcup_{J \in L} \Delta'(s'_0, J)$$

Donc L n'est pas (n,m) -visiteur. □

Proposition VI.4'

Si L est un langage (n,m) -promeneur alors, L est (n',m) -promeneur $\forall n' \leq n$.

Démonstration:

Analogue à la précédente. □

Proposition VI.5.

Pour un langage L , sur un vocabulaire I , $|I| = m$, les propositions suivantes sont équivalentes:

- L est (n,m) -visiteur
- L est (n,m) -visiteur général
- pour chaque labyrinthe sans piège L , $L = (S, I, \delta, s_0, f)$, $|S| = n-1$:
on a $f \in \bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J)$.

Démonstration

La propriété d'être (n,m) -visiteur général étant plus forte que la propriété d'être (n,m) -visiteur, il suffit de démontrer:

a/ L n'est pas (n,m) -visiteur général $\Rightarrow \exists L = (S, I, \delta, s_0, f)$
labyrinthe sans piège, $|S| = n-1$ tel que $f \notin \bigcup_{J \in L} \delta(s_0, J)$

b/ $\exists L = (S, I, \delta, s_0, f)$ labyrinthe sans piège, $|S| = n-1$, tel que
 $f \notin \bigcup_{J \in L} \delta(s_0, J) \Rightarrow L$ n'est pas (n,m) -visiteur.

(a) Soit $A' = (S', I, \delta', s'_0)$ un automate fortement connexe tel que

$$\bigcup_{J \in L} \Delta(s'_0, J) = Q \text{ où } |Q| = n-p, (p > 0).$$

On définit alors un labyrinthe $L = (S, I, \delta, s_0, f)$:

$$S = Q \cup \{t_1, t_2, \dots, t_{p-1}\}, (|S| = n-1), s'_0 = s_0,$$

$$\forall (s, i) \in \bigcup_{J \in L} T(s'_0, J), \text{ alors, } \delta(s, i) = \delta'(s, i),$$

$$\forall (s, i), s \in Q \text{ et } (s, i) \notin \bigcup_{J \in L} T(s'_0, J), \text{ alors, } \delta(s, i) = t_1,$$

$$\forall i \in I, \delta(t_1, i) = t_2, \delta(t_2, i) = t_3, \dots, \delta(t_{p-1}, i) = f$$

A' étant fortement connexe, L est sans piège et l'on a: $f \notin \bigcup_{J \in L} \delta(s_0, J)$. \square

(b) Soit $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ un labyrinthe sans piège à $n-1$ états tels que $f \notin \bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J)$

On définit alors l'automate $A' = (S', I, \delta', s'_0)$:

$$S' = S \cup \{f\}, s'_0 = s_0$$

$$\forall s \in S, \forall i \in I : \delta'(s, i) = \delta(s, i)$$

$$\forall i \in I : \delta'(f, i) = s'_0$$

A' est un automate fortement connexe à n états tel que $f \in S'$, et $f \notin \bigcup_{J \in L} \Delta'(s'_0, J)$. Donc L n'est pas (n, m) -visiteur. \square

Proposition VI.6.

Un langage $L, L \subseteq I^*, |I| = m$, est (n, m) -promeneur ssi pour tout labyrinthe

$$\underline{L = (S, I, \delta, s_0, f), |S| = n, f \in \bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J).}$$

Démonstration

Supposons que L n'est pas (n, m) -promeneur. Alors il existe un automate fortement connexe: $A' = (S', I, \delta', s'_0), |S'| = n, |I| = m$, tel que

$$|\bigcup_{J \in L} T'(s'_0, J)| < nm.$$

On peut alors définir un labyrinthe sans piège,

$$L = (S, I, \delta, s_0, f) \text{ tel que}$$

$$S = S' ; s_0 = s'_0$$

$$\forall (s, i) \in \bigcup_{J \in L} T'(s'_0, J) : \delta(s, i) = \delta'(s, i) ; \text{ sinon } \delta(s, i) = f.$$

Inversement, soit $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ un labyrinthe sans piège, $|S| = n$ tel que $f \notin \bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J)$.

On définit alors l'automate $A' = (S', I, \delta', s'_0)$ tel que:

$$S' = S, s'_0 = s_0,$$

$$\delta(s,i) \neq f \rightarrow \delta'(s,i) = \delta(s,i)$$

$$\delta(s,i) = f \rightarrow \delta'(s,i) = s'_0$$

Alors l'automate A' est fortement connexe à n états et $\left| \bigcup_{J \in L} T'(s'_0, J) \right| < nm$. \square

COROLLAIRE

Un langage $L \subseteq I$, $|I| = m$ est (n,m) -visiteur ssi il est $((n-1), m)$ -promeneur.

Proposition VI.7.

Un langage $L \subseteq I^*$, $|I| = m$ est (λ, m) -promeneur général ssi pour chaque labyrinthe sans piège $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ tel que

$$\left| \{(s,i) : s \in S, i \in I, \delta(s,i) \neq f\} \right| < \lambda, \text{ on a } f \in \bigcup_{J \in L} \Delta(s_0, J)$$

Démonstration

Analogue à la précédente. \square

Proposition VI.8.

Soit une séquence J définie sur un vocabulaire I , $|I| = m$.

- a/ Si J est (n,m) -visiteur et la séquence $JJJ\dots J\dots$ est (n',m) -visiteur, alors, $n' \leq n+1$.
- b/ Si J est (n,m) -promeneur, et la séquence $JJJ\dots J\dots$ est (n',m) -promeneur, alors, $n' \leq n+1$.
- c/ Si J est (λ, m) -promeneur général, et la séquence $JJJ\dots J\dots$ est (λ', m) -promeneur général, alors, $\lambda' \leq \lambda+2$.

Démonstration

Nous donnons la démonstration pour a/ ; les démonstrations de b/ et de c/ peuvent être faites de façon analogue.

Soit $A = (S, I, \delta, s_0)$ un automate fortement connexe, $|S| > n$ pour lequel J parcourt n états exactement et posons $\delta(s_0, J) = \bar{s}_1$.

Appliquons la séquence $JJJ\dots J\dots$ à partir de s_1 . Deux cas peuvent se produire:

- . Ou bien $\Delta(s_1, JJ\dots J\dots) \subseteq \Delta(s_0, J)$ et dans ce cas la puissance en visiteur de $JJ\dots J\dots$ est n ,
- . ou bien à partir d'un état s_q , $s_q \in \Delta(s_0, J)$, on atteint un état s_r , $s_r \notin \Delta(s_0, J)$ par un symbole i_u de la séquence J .
(On pose $J = i_1 i_2 \dots i_u \dots i_p$).

Soit alors le labyrinthe $L' = (S', I, \delta', s'_0, f')$:

$$S' = \Delta(s_0, J) \cup \{s_r\} ; s'_0 = s_0 \text{ tel que:}$$

$$\forall (s, i) \in T(s_0, J) \quad \delta(s, i) = \delta'(s, i)$$

$$\delta(s_0, i_1 i_2 \dots i_u i_{u+1}) = t \rightarrow \delta'(s_r, i_{u+1}) = t$$

$$\delta'(s_q, i_u) = \delta(s_q, i_u) = s_r$$

$$\forall (s, i) \notin T(s_0, J) \cup \{(s_q, i_u)\} \cup \{(s_r, i_{u+1})\} \rightarrow \delta'(s, i) = f'$$

Alors L' est sans piège, $|S'| = n+1$, et $f \notin \Delta(s_0, JJ\dots J\dots)$. Donc la puissance en visiteur de $JJ\dots J\dots$ est au plus $((n+1), m)$. \square

Définition 8:

Soit $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ un labyrinthe.

On dit alors qu'un sous ensemble de $P(P(S))$, $R = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_r)$ est un recouvrement partiel stable sortant sur L , si:

- $\forall P_j \in R, \forall i \in I, \exists P_k \in R / \hat{\delta}(P_j, i) \subseteq P_k$ (stable)
- Si $P_j \in R$ alors $\exists P_v, P_{v+1}, \dots, P_{v+q}$ et $i_0, i_1, \dots, i_{q+1} \in I$:
 $\hat{\delta}(P_j, i_0) \subseteq P_v, \hat{\delta}(P_v, i_1) \subseteq P_{v+1}, \hat{\delta}(P_{v+1}, i_2) \subseteq P_{v+2} \dots$
 $\dots \hat{\delta}(P_{v+q-1}, i_q) \subseteq P_{v+q}, \hat{\delta}(P_{v+q}, i_{q+1}) = \emptyset$ (sortant).

Proposition VI.9.

Une C.N.S. pour qu'il existe un labyrinthe $L, L = (S, I, \delta, s_0, f)$ qui enferme mieux qu'un labyrinthe $L', L' = (S', I, \delta', s'_0, f')$, est qu'il existe sur L' un recouvrement partiel stable sortant $R = (P_0, P_1, \dots, P_r)$ tel que: $s'_0 \in P_0$.

Démonstration

- Soit $L' = (S', I, \delta', s'_0, f')$ et $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ tel que $L \triangleright L'$.

Alors pour $\forall s \in S \cup \{f\}$, on définit l'ensemble de séquences

$$J_s = \{J \in I^* / \delta(s_0, J) = s\}$$

- Soit $P_s = \{s' \in S' / \exists K \in J_s : \delta'(s'_0, K) = s'\}$

(Il en découle $P_f = \emptyset$ et $s'_0 \in P_{s_0}$).

Alors le sous ensemble de $P[P(S')]$, $R = \{P_s / s \in S\}$, est un recouvrement de S' .

Il est stable: $\forall u \in P_s, \exists J \in I^* / \delta'(s'_0, J) = u$ et $\delta(s_0, J) = s$

$\Rightarrow \forall i \in I : \delta'(s'_0, Ji) = \delta'(u, i)$ et $\delta(s_0, Ji) = \delta(s, i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i \in I : \delta'(u, i) \in P_{\delta(s, i)}$. Donc pour $\forall i \in I$ on a: $\hat{\delta}'(P_s, i) \subseteq P_{\delta(s, i)}$

R est également sortant: en effet, $\forall s \in S, \exists J \in I^*$ tel que $\delta(s, J) = f$ et $P = \emptyset$. □

- Soit $R = (P_0, P_1, \dots, P_r)$ un recouvrement stable sortant sur un labyrinthe $L' = (S', I, \delta', s'_0, f')$ tel que $s'_0 \in P_0$. Nous définissons le labyrinthe L , $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ tel que:

$$S = R, s_0 = P_0$$

Pour chaque P_j le successeur de P_j par une entrée i , $\delta(P_j, i)$ est l'un des P_k tels que $\hat{\delta}'(P_j, i) \subseteq P_k$, si $\hat{\delta}'(P_j, i) \neq \emptyset$; sinon $\delta(P_j, i) = f$.

Alors L enferme mieux que L' . En effet:

$\forall J \in I^*; J$ reconnu par $L \rightarrow \delta(s_0, J) = f \rightarrow$

$\hat{\delta}'(P_0, J) = \emptyset \rightarrow \forall s' \in P_0, \delta'(s', J) = f' \rightarrow$

$\rightarrow \delta'(s'_0, J) = f' \rightarrow J$ reconnu par L' . □

REMARQUE:

Si L est un labyrinthe sans piège et $L \triangleright L'$ alors L' est également sans piège.

Exemple 1:

Soit le labyrinthe $L' = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a, b\}, \delta, 1, f')$ de la figure 6.4. a.

Le recouvrement $R = \{1, 3, 5; 2, 4, 6; 2; 3; 4\}$ est stable sortant sur L' . A R correspond le labyrinthe de la figure 6.4. b.

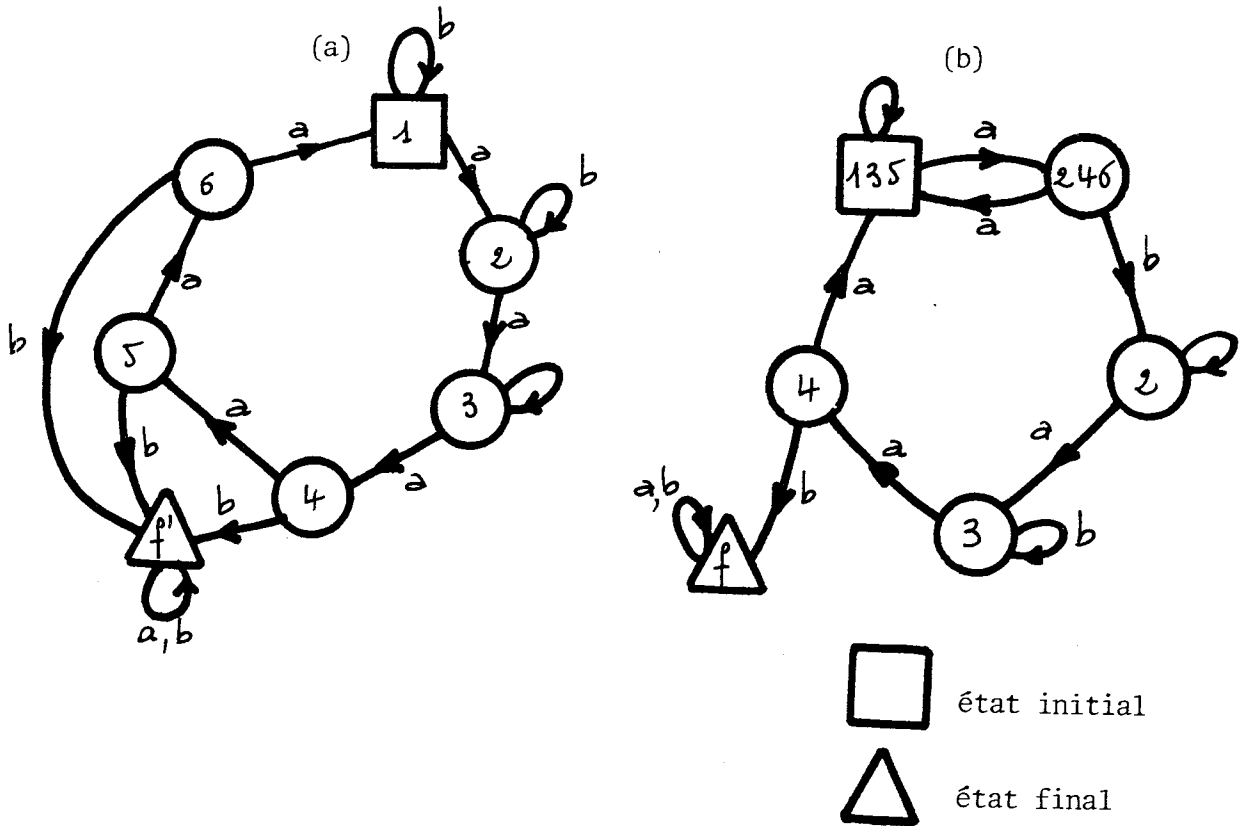


figure 6.4.

Lemme 1: Soit I un vocabulaire, $|I| = m$, et L, L' deux labyrinthes:

$L' = (S', I, \delta', s_0', f')$ tel que $|\{(s', i) : \delta'(s', i) \neq f'\}| < nm$ et $|S'| > n$

$L = (S, I, \delta, s_0, f)$ tel que $|S| = n$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- a) $\forall J \in I^* : J \text{ est } (n, m)\text{-promeneur} \rightarrow J \text{ est } (n, m)\text{-promeneur général.}$
- b) $\forall L', \forall J \in I^*, \exists L : J \text{ reconnu par } L \rightarrow J \text{ reconnu par } L'.$

Démonstration

Immédiate d'après les propositions 6 et 7. □

Lemme 2

Soit L et L' définis comme dans le lemme 1, L' étant cette fois fortement connexe. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- a) $\forall L', \forall J \in I^*, \exists L : J \text{ reconnu par } L \rightarrow J \text{ reconnu par } L'$
 b) $\forall L', \exists L/WJ : J \text{ reconnu par } L \rightarrow J \text{ reconnu par } L'.$

Démonstration

L'implication $b \rightarrow a$ est évidente. Supposons que l'implication $a \rightarrow b$ soit fautive et soit $\wedge = \{L_1, L_2, \dots, L_p\}$ l'ensemble des labyrinthes à n états, c'est-à-dire pour chaque $L_i \in \wedge$, $L_i = (S, I, \delta_i, s_{0_i}, f_i)$ il existe $J_i, J_i \in I^*$, reconnu par L_i mais non par L' .

Puisque L' est fortement connexe: $\exists K_i / \delta'(s'_0, J_i K_i) = s'_0$ et la séquence $M_i = J_i K_i$ est reconnue par L_i mais non par L' .

Nous allons construire par récurrence une séquence $M_p, M_p \in I^*$, qui est reconnue par tous les L_i et non par L' . Désignons par M_q une séquence reconnue par $L_1, L_2, \dots, L_{q-1}, L_q$ ($q \leq p$) et non par L' et telle que $\delta(s'_0, M_q) = s'_0$. Alors $M_1 = M_1$ est une séquence reconnue par L_1 et non par L' . Nous allons construire M_{q+1} à partir de M_q . Si M_q est reconnue par L_{q+1} alors $M_{q+1} = M_q$. Sinon, soit $t = \delta_{q+1}(s_{0_{q+1}}, M_q)$. Alors il existe un labyrinthe L_j :

$L_j = (S, I, \delta_j, s_{0_j}, f_j)$, $L_j \in \wedge$ tel que $\delta_j = \delta_{q+1}$, $s_{0_j} = t$, $f_j = f_{q+1}$.

Alors la séquence $M_{q+1} = M_q M_j$ est une séquence reconnue par L_1, L_2, \dots, L_{q+1} et non par L' et telle que $\delta'(s'_0, M_{q+1}) = s'_0$. Donc la séquence M_p est reconnue par tout labyrinthe à n états et non par L' : contradiction. \square

Proposition VI.10.

Si une séquence $J, J \in I^*$, $|I| = m$, est (n,m) -promeneur alors, J n'est pas nécessairement (n,m) -visiteur général.

Démonstration

L et L' étant définis comme dans le lemme 1, nous allons montrer qu'il existe L' , labyrinthe fortement connexe, tel que:

$\forall J, \exists J/J$ reconnu par L et non par L' (ce qui est équivalent à la proposition VI. 10 d'après les lemmes 1 et 2 précédents).

Soit le labyrinthe $L' = (S', I, \delta, s'_0, f')$ de la figure 6.5.a. Nous allons montrer qu'il n'existe pas de labyrinthe $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ avec $|S| < 7$ qui enferme mieux que L' .

En effet, supposons qu'il existe $L, L \triangleright L'$ et $|S| < 7$.

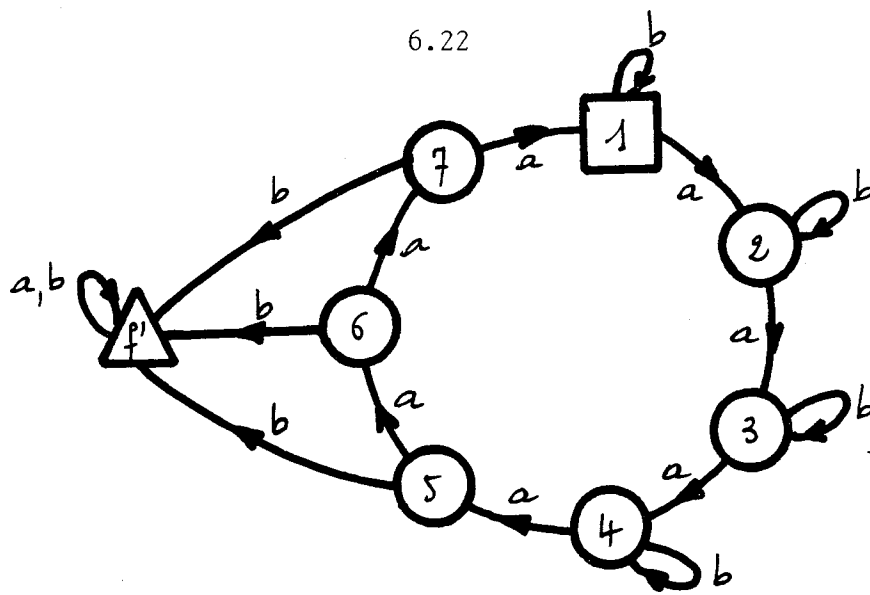
Puisque pour $\forall J \in a^*$, J n'est pas reconnu par L' et donc pas par L , par application de $aaa...a$ à L et en partant de s_0 on s'enferme dans un cycle $(s_k, s_{k+1} \dots s_{k+p} = s_k)$, $p < 7$, (figure 6.5.b)

Soit un état de ce cycle, par exemple s_k . Alors 7 étant un nombre premier $\forall s' \in S', \exists K \in a^*$ tel que $\delta(s'_0, K) = s'$ et $\delta(s_0, K) = s_k$. On a donc

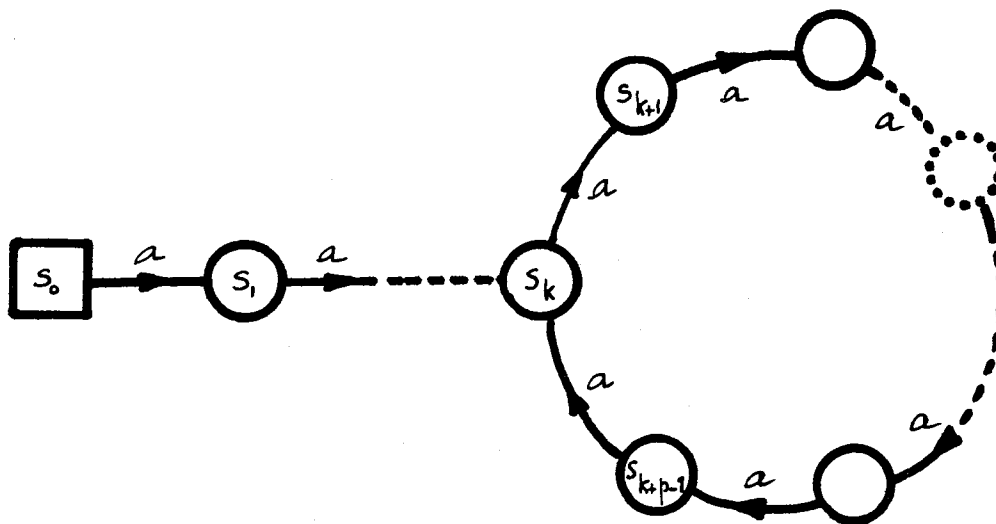
$P_{s_k} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Trouver un recouvrement stable sortant minimum, revient donc dans ce cas à trouver une séquence $J, J \in I^*$ telle que $\hat{\delta}'(S', J) = \emptyset$ et $|J| \leq 6$.

On peut vérifier facilement que ceci est impossible. □

6.22



(a)



(b)

figure 6.5.

Proposition VI.11.

Si une séquence J est (n^2, m) -promeneur alors elle est (n, m) -identifiante.

Démonstration

Si J est une séquence (n, m) -identifiante alors pour chaque couple d'éléments de $A_{n, m}$: $A = (S, I, O, \delta, \lambda)$

$A' = (S', I, O, \delta', \lambda')$, $A \neq A'$ on a vu: $\forall s_0 \in S$ et $s'_0 \in S'$,

$$\lambda(s_0, J) \neq \lambda'(s'_0, J)$$

Soit alors le labyrinthe sans piège $L = (S^1, I, \delta^1, f, s_0^1)$ où

$$- S^1 = \{(s, s') \in S \times S' \mid \exists K \in I^*, \delta(s_0, K) = s, \delta'(s'_0, K) = s'\}$$

$$- \delta^1 : S^1 \times I \rightarrow S^1 \mid \delta^1((s, s'), i) = \begin{cases} (\delta(s, i), \delta'(s', i)) & \text{si } \lambda(s, i) = \lambda'(s', i) \\ f & \text{sinon} \end{cases}$$

$$- s_0^1 = (s_0, s'_0)$$

Ce labyrinthe a n^2 états au plus. Une séquence J (n^2, m) -promeneur sort de ce labyrinthe et donc $\lambda(s_0, J) \neq \lambda'(s'_0, J)$.

2/3.- BORNES DE LA LONGUEUR D'UN PSEUDOTESTLemme 3

Soit un ensemble de N labyrinthes sur un vocabulaire I , $|I| = m$, à n états au plus. Alors il existe une séquence J reconnue par ces N labyrinthes de longueur $|J| \leq n(m^n \log N + 1)$.

Démonstration

Par récurrence sur N . Le lemme est vrai pour $N = 1$.

Soit K un mot de longueur n qui fait sortir d'un nombre maximum de labyrinthes. Alors K fait sortir d'au moins $\frac{N}{m^n}$ labyrinthes. Après application de K on n'est pas sorti de $N(1 - \frac{1}{m^n})$ labyrinthes au plus, d'où on sort avec un mot J de longueur inférieure ou égale à $n(m^n \log [N(1 - \frac{1}{m^n})] + 1)$ par hypothèse de récurrence.

Alors la séquence KJ fait sortir de N labyrinthes et on a :

$$|KJ| \leq n + n [m^n \log [N(1 - \frac{1}{m^n})] + 1].$$

Et puisque $\log (1 - \frac{1}{m^n}) \geq \frac{1}{n}$ on a :

$$|KJ| \leq n + n m^n = n(m^n \log N + 1). \quad \square$$

Proposition VI.12

Il existe une séquence J , (n,m) -visiteur, de longueur $|J|$:

$$\underline{m^{n-1} < |J| < m^n n^2 \log n.}$$

Démonstration

Une séquence (n,m) -visiteur sort de tous les labyrinthes à $(n-1)$ états et il existe $N = n^{(n-1)m}$ labyrinthes à $(n-1)$ états sur un vocabulaire à m symboles d'entrée. Par le lemme précédent:

$$|J| \leq (n-1) (m^{n-1} \log n^{(n-1)m} + 1) = (n-1) (m^n (n-1) \log n + 1) \Rightarrow$$

$$|J| < m^n n^2 \log n$$

D'autre part, un (n,m) -visiteur doit comporter tous les mots de longueur $(n-1)$ de l'alphabet. Parce que sinon, supposons que J ne contienne pas le mot $i_1 i_2 \dots i_{n-1}$, alors J s'enferme dans le labyrinthe de la figure 6.6. □

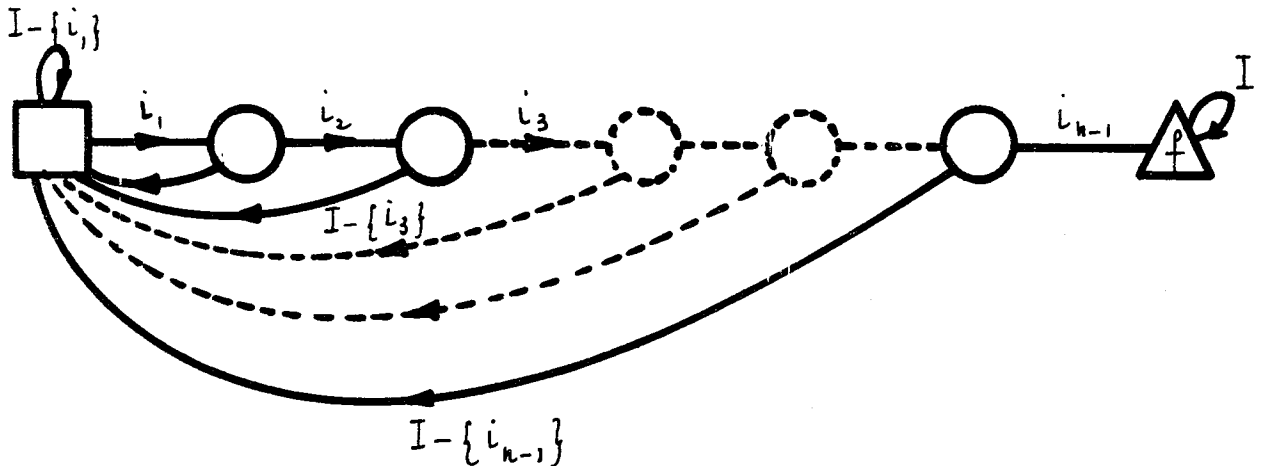


figure 6.6.

Proposition 12'

Il existe une séquence J , (n,m) -promeneur de longueur $|J|$:

$$\underline{m^n < |J| < m^{n+1} (n+1)^2 \log(n+1).}$$

Démonstration

Analogue à la précédente. □

2/4.- CONSTRUCTION DE SEQUENCES PARTICULIERES (n,m)-VISITEURS ET (n,m)-PROMENEURS

Lemme 4

Pour chaque labyrinthe, $L = (S, I, \delta, s_0, f)$, $|S| = n-1$, il existe une séquence de synchronisation [29], menant à l'état f de longueur inférieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

Nous allons démontrer que pour un labyrinthe (quelconque), $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ avec $|S| = n-1$ et pour $\forall P \subseteq S$, $|P| = p$ il existe $J, J \in I^*$, $|J| \leq n-p$, tel que $|\hat{\delta}(P, J)| \leq p-1$, ce qui donne immédiatement le résultat.

Soit donc P une partie de S , telle que $|P| = p$ et J une séquence de longueur l telle que $\delta(s, J) = f$. Supposons que s est tel que l soit minimum.

On a : $P \cap \Delta(s, J) = \{s\}$

Donc $|\Delta(s, J)| \leq n-p$, d'où $l \leq n-p$. □

Proposition VI.13

Soit $A = (S, I, \delta)$ un automate fortement connexe, $|S| = n$. On a :
 $\forall t \in S, \exists J \in I^*, |J| \leq \frac{n(n-1)}{2}$ telle que $\forall s \in S, t \in \Delta(s, J)$.

Démonstration

Passer par un état quelconque d'un automate à n états, revient à sortir d'un labyrinthe sans piège à $(n-1)$ états indépendamment de l'état initial. □

Proposition VI.13'.

Soit $A = (S, I, \delta)$ un automate fortement connexe, $|S| = n$.

On a: $\forall (t,i) \in S \times I, \exists J \in I^*, |J| \leq \frac{n(n+1)}{2}$ tel que $\forall s \in S,$

$(t,i) \in T(s,J).$

Démonstration

Analogue à la précédente.

Proposition VI.14.

Soit J une séquence comportant tous les mots de longueur $\frac{n(n-1)}{2}$ sur un vocabulaire I , $|I| = m$. Alors J est (n,m) -visiteur.

Démonstration

Immédiate par la proposition 13.

Proposition VI.14'.

Soit J une séquence comportant tous les mots de longueur $\frac{n(n+1)}{2}$ sur un vocabulaire I , $|I| = m$. Alors J est (n,m) -promeneur.

Démonstration

Immédiate par la proposition 13'.

REMARQUE

D'après les propositions 14 et 14', on peut construire une séquence J , (n,m) -visiteur (resp. (n,m) -promeneur) de longueur

$$m \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} - 1 \quad (\text{resp. } m \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - 1) \quad [3]$$

Par exemple, la séquence bbbabaaabb a une puissance de $(3,2)$ en visiteur et de $(2,2)$ en promeneur.

2/5.- CALCUL DE LA PUISSANCE D'UN LANGAGE2/5.1. Cas général

La puissance d'un langage L , sur un vocabulaire I , est la même que celle du langage L^+ , $L^+ = \{J / \exists K \in I^* : JK \in L\}$.

Soit un langage régulier L et, $A = (S, I, \delta, s_0, F)$ l'automate déterministe qui reconnaît L . F est l'ensemble d'états finals de A .

Alors l'automate $A^+ = (S, I, \delta, s_0, F^+)$, avec $F^+ = \{s \in S / \exists J \in I^* :$

$(s, J) \in F\}$ reconnaît le langage L^+ . Si $F^+ = S$, alors il est clair que $L^+ = I^*$ et L a donc la puissance de I^* , c'est-à-dire est (n, m) -visiteur et (n, m) -promeneur $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sinon, tous les états n'appartenant pas à F^+ sont équivalents. On peut donc mettre A^+ sous la forme d'un labyrinthe $L_L = (F^+, I, \delta', s_0, f)$

où $\forall s \in F^+, \forall i \in I : \delta(s, i) \in F^+ \rightarrow \delta'(s, i) = \delta(s, i)$

$$\delta(s, i) \notin F^+ \rightarrow \delta'(s, i) = f$$

$$\forall i \in I, \delta'(f, i) = f$$

Alors L^+ est le langage enfermé dans L_L et L_L sera appelé labyrinthe associé à L .

D'après les propositions VI.5 et VI.6 chercher la puissance en promeneur ou en visiteur d'un langage L , (donc de L^+), revient à chercher un des plus petits labyrinthes sans piège, L_L^* , qui enferme mieux que L_L ; ce qui revient à chercher un recouvrement partiel stable sortant minimum sur L_L . Si n est le cardinal d'un tel recouvrement (i.e. L_L^* a n états) alors L est (n, m) -visiteur et $((n-1), m)$ -promeneur. L

Exemple 2:

Soit $L = b^*aba^*b [b + aa^*b]^*$ le langage dont on veut calculer la puissance. L et L^+ sont reconnus respectivement par les automates A et A^+ (fig.67a et 67b).

Le labyrinthe associé à L est donné en figure 67c.

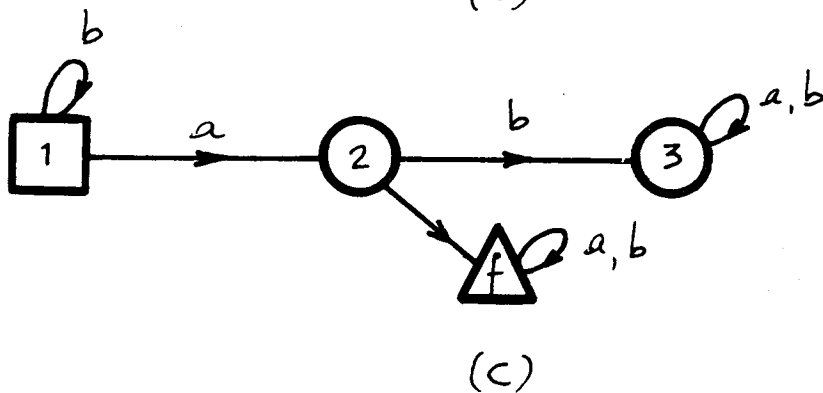
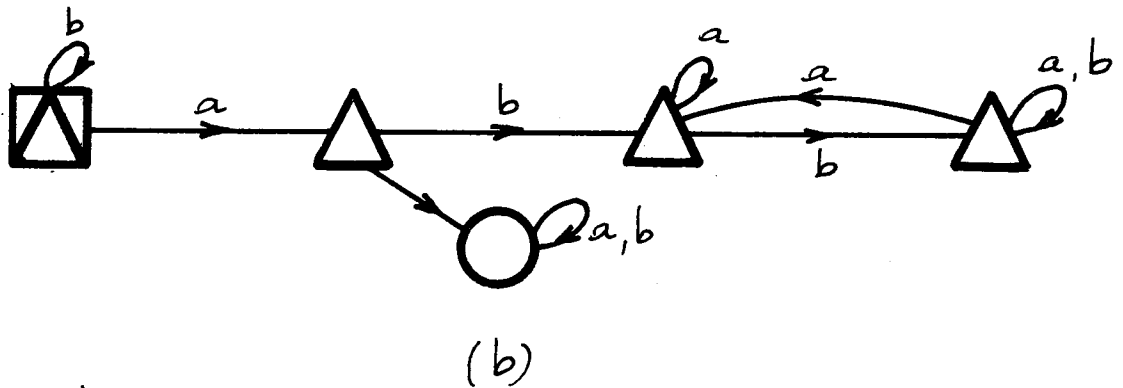
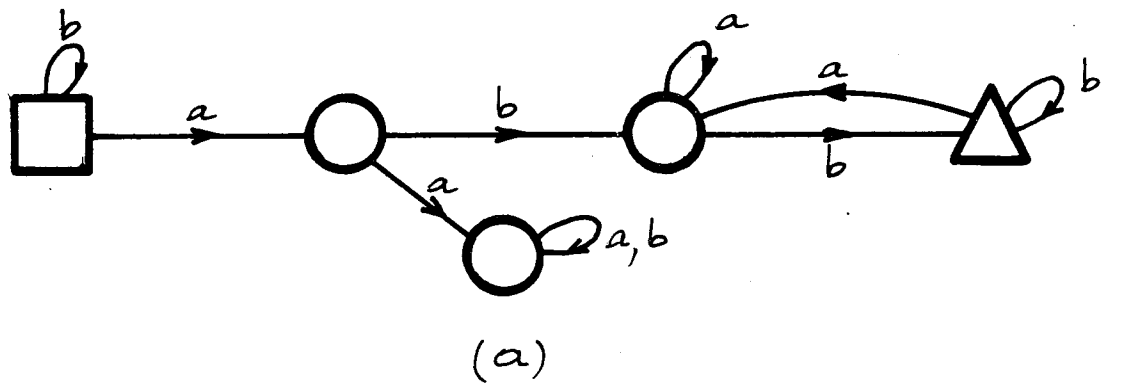
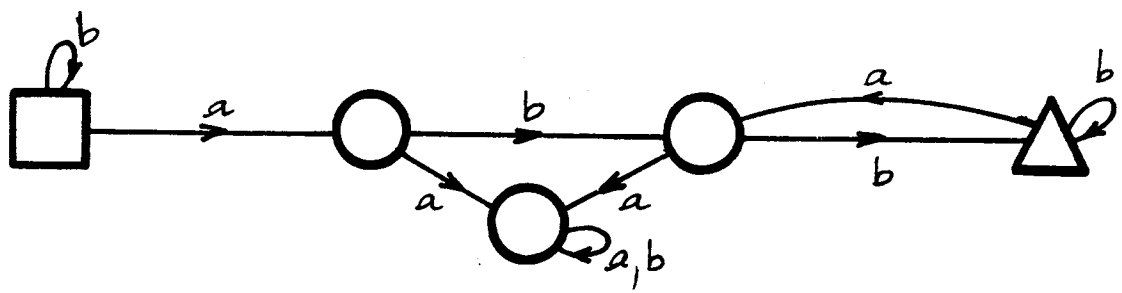


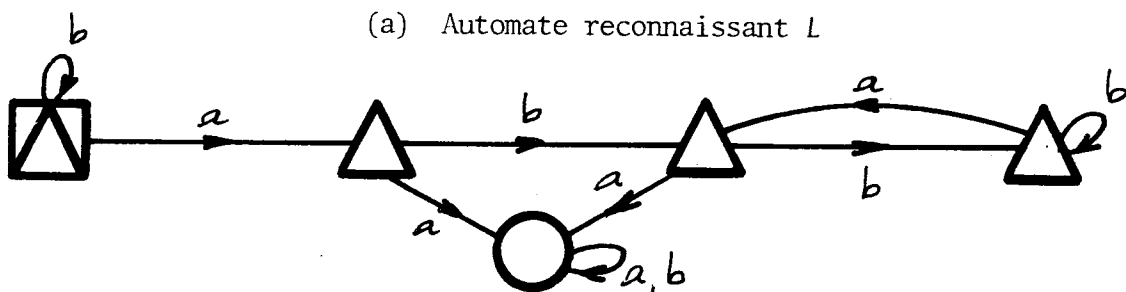
figure 6.7.

Pour L_L il n'existe pas de recouvrement stable sortant. En effet, si R est un recouvrement il ne peut pas être sortant parce que $\forall P \in R$, tel que $3 \in P$, $\nexists J \in I^* / \delta(P, J) = \emptyset$. Donc, $\forall n$ L est $(n, 2)$ -visiteur, $((n, 2)$ -promeneur). Ce que l'on aurait pu voir en remarquant que $L^+ \supseteq abI^*$.

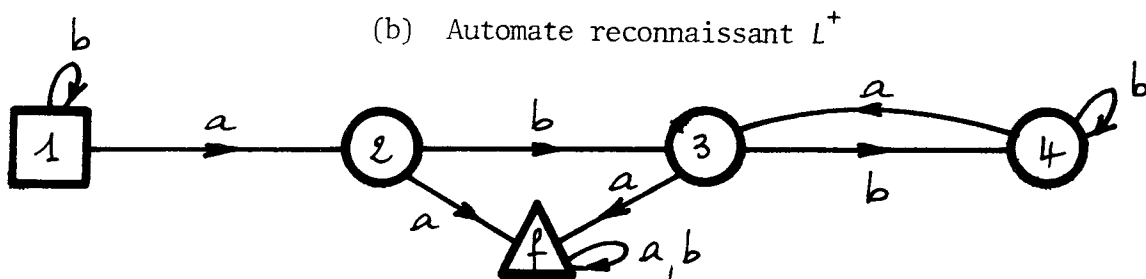
Exemple 3: Soit $L = b^* abb(b+ab)^*$ le langage dont on veut calculer la puissance. A et A^+ reconnaissent respectivement L et L^+ ; L_L est le labyrinthe associé à L . (fig6.8a, b, c).



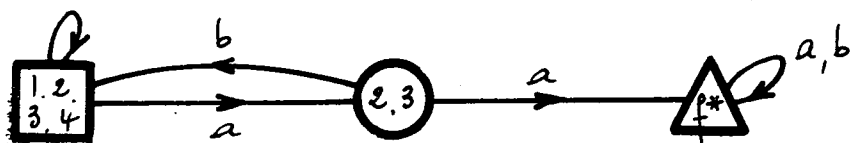
(a) Automate reconnaissant L



(b) Automate reconnaissant L^+



(c) L_L



(d)

figure 6.8

On peut vérifier que le recouvrement $(1, 2, 3, 4; 2, 3)$ est stable sortant sur L et a un nombre minimum de blocs (Tableau 1 - figure 6.8.d).

	a	b
1	2	1
2	-	3
3	-	4
4	3	4

 L_L

	a	b
1, 2, 3, 4	2, 3	1, (2), 3, 4
2, 3	-	(1,2), 3, 4

 L_L^*

tableau 1

L est donc $(2,2)$ -visiteur et $(1,2)$ -promeneur (par exemple, le langage $\{ab\}$ a la même puissance, en visiteur et en promeneur).

2/5.2. Calcul de la puissance d'une séquence

C'est un cas particulier du calcul de la puissance d'un langage. Le labyrinthe associé $L_J = \{S', I, \delta', s'_0, f'\}$ à une séquence $J = i_1 i_2 \dots i_q$ est donné en figure 6.9.

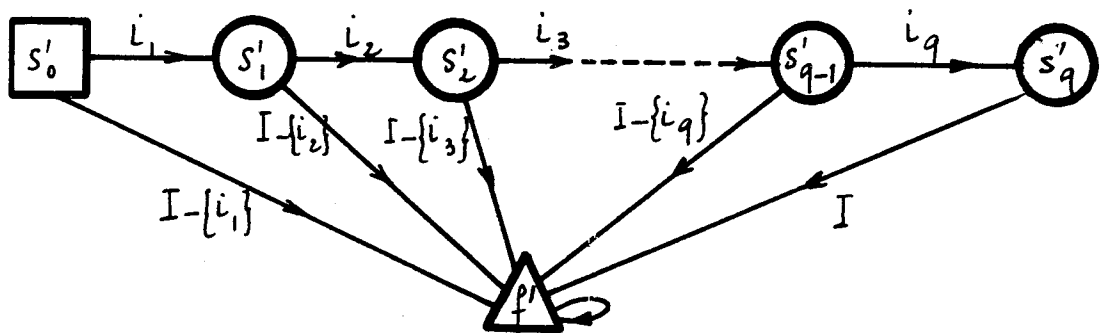


figure 6.9

Soit $L_J^* = (S, I, \delta, s_0, f)$ un des plus petits labyrinthes sans piège qui enferment mieux que L_J et $R = \{P_S/s \in S\}$ un recouvrement stable sortant sur L_J , défini comme à la proposition V.9 Alors R est une partition parce que pour chaque $s', s' \in S'$ il existe une séquence J et une seule telle que $\delta'(s'_0, J) = s'$.

Donc, trouver la puissance (en visiteur ou en promeneur), d'une séquence J revient à rechercher sur le labyrinthe associé une partition stable sortante de cardinal minimum.

Exemple 4:

Pour $J = aababb$ la partition $(1, 4, 6, 7; 2, 5; 3)$ est stable sortante sur le labyrinthe L_J (tableau 2) et on peut vérifier facilement qu'il n'existe pas de partition stable sortante de cardinal inférieur.

Donc J est $(3,2)$ -visiteur et $(2,2)$ -promeneur.

	a	b
1	2	f
2	3	f
3	f	4
4	5	f
5	f	6
6	f	7
7	f	f

tableau 2

Exemple 5:

Pour $J = a^3ba^2babab^2ab^3$ la partition $R = (1,2,3,4,6,7,9,11,14;5,8,10,12,15;13,16;17)$ est stable sortante sur L_J (tableau 3) et il n'existe pas de partition stable sortante de cardinal inférieur. Donc J est $(4,2)$ -visiteur et $(3,2)$ -promeneur.

	a	b
1	2	f
2	3	f
3	4	f
4	f	5
5	6	f
6	7	f
7	f	8
8	9	f
9	f	10
10	11	f
11	f	12
12	f	13
13	14	f
14	f	15
15	f	16
16	f	17
17	f	f

tableau 3

2/5.3. Calcul d'une borne supérieure de la puissance
d'un langage

Définition 9

Soit J une séquence $J \in I^*$. On définit le langage \tilde{J} comme l'ensemble des facteurs droits de J . Pour un langage L on désigne par \tilde{L} le langage:

$$\tilde{L} = \cup_{J \in L} \tilde{J}$$

Définition 10

Un S -recouvrement sortant sur un labyrinthe $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ sera tout recouvrement sortant dont un bloc est égal à S .

Proposition VI.15.

Soit $L = (S, I, \delta, s_0, f)$ un labyrinthe qui enferme un langage L
et \tilde{n} le cardinal minimum d'un S -recouvrement sortant, sur L .
Alors, \tilde{L} est (\tilde{n}, m) -visiteur.

Démonstration

Il suffit de remarquer que pour chaque mot $J, J \in \tilde{L}$, il existe un labyrinthe $L_i = (S, I, \delta, s_i, f), s_i \in S$, qui enferme J , et inversement, que pour chaque labyrinthe $L_i = (S, I, \delta, s_i, f), s_i \in S$, il existe un mot $J', J' \in \tilde{L}$, tel que L_i enferme J' . \square

Remarque:

Pour trouver facilement une borne supérieure de la puissance d'un langage L , il suffit de trouver sur le labyrinthe L un S -recouvrement de cardinal minimum. Ceci revient à rechercher pour L_L une des plus courtes séquences de synchronisation qui mène à f .

Exemple 6:

Pour $J_1 = aababb$ et $J_2 = a^3ba^2babab^2ab^3$, on peut trouver respectivement les S-recouvrements de cardinal minimum:

$$R_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 2, 3, 5; 3\}$$

$$R_2 = \{S; 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14; 3, 4, 7; 5, 8\}$$

Proposition VI.16

Soit L un langage (n,m) -visiteur. Alors \tilde{L} est (\tilde{n},m) -visiteur avec

$$\tilde{n} \leq \frac{n(n+1)}{2} .$$

Démonstration

Soit L un labyrinthe à n états qui enferme L . La longueur d'une séquence de synchronisation de L qui mène à f est inférieure ou égale à $\frac{n(n+1)}{2}$ (lemme 4). Donc $\tilde{n} \leq \frac{n(n+1)}{2}$. On peut démontrer que la borne est atteinte pour chaque n . □

Proposition VI.17

Soit J une séquence, alors $(\tilde{J}$ est (n,m) -visiteur) \Leftrightarrow (J contient tous les mots de longueur $n-1$).

Démonstration

Si J ne contient pas un mot μ de longueur $(n-1)$, alors il existe sur L_J un S-recouvrement à $(n-1)$ blocs. Donc \tilde{J} n'est pas (n,m) -visiteur. Inversement, si \tilde{J} n'est pas (n,m) -visiteur, alors, il existe sur $L_J = (S, I, \delta, s_0, f)$ un S-recouvrement à $(n-1)$ blocs, et par conséquent il existe un mot de longueur $(n-1)$ tel que $\hat{\delta}(S, \mu) = f$. Donc J ne contient pas ce mot μ . □

3.- CONCLUSION

Nous avons présenté quelques aspects du problème du test des systèmes logiques à l'aide de séquences définies à l'avance ne dépendant que du nombre d'états et du nombre d'entrées du système à tester.

Un des prolongements de cette étude serait, à l'aide des outils théoriques introduits ici, de rechercher des séquences (n,m) -identifiantes ou des séquences à puissance élevée. Ceci permettrait d'avoir une idée plus précise sur le type de séquences à appliquer lors du test des systèmes séquentiels.



annexes

ANNEXE I

DEMONSTRATION de $\beta(G) \beta(\overline{G}) \leq n$

THÉORIE DES GRAPHES. — *Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple.* Note (*) de MM. FRANÇOIS JAEGER et CHARLES PAYAN, présentée par M. André Lichnerowicz.

Nous déterminons les bornes inférieures et supérieures de $\beta(G) + \beta(\bar{G})$ et $\beta(G)\beta(\bar{G})$ quand G décrit l'ensemble des graphes simples à n sommets, pour tout entier non nul n ; \bar{G} désigne le graphe simple complémentaire de G et $\beta(G)$ désigne le nombre d'absorption de G (pour tout graphe simple G).

1. INTRODUCTION. — Les notations utilisées sont celles de C. Berge (1). V. G. Vizing a conjecturé (2) :

Étant donnés deux graphes simples G et H : $\beta(G + H) \geq \beta(G)\beta(H)$; $G + H$ désigne la somme cartésienne des graphes G et H .

Il est facile de vérifier que pour tout graphe simple G à n sommets ($n \geq 1$) : $\beta(G + \bar{G}) = n$.

Nous conjecturons donc que pour tout graphe simple G à n sommets ($n \geq 1$) :

$$(I) \quad \boxed{\beta(G)\beta(\bar{G}) \leq n.}$$

Si cette inégalité est vérifiée, elle ne peut être améliorée; en effet, si G est une clique à n sommets, $\beta(G) = 1$, $\beta(\bar{G}) = n$, donc $\beta(G)\beta(\bar{G}) = n$.

D'autre part, cette inégalité implique la suivante :

$$\beta(G) + \beta(\bar{G}) \leq n + 1 \quad (\text{pour tout graphe simple à } n \text{ sommets, } n \leq 1).$$

Là aussi l'égalité est obtenue si G est une clique à n sommets. Donc si nous démontrons l'inégalité (I) nous obtiendrons les bornes supérieures de $\beta(G) + \beta(\bar{G})$ et $\beta(G)\beta(\bar{G})$ quand G décrit l'ensemble des graphes simples à n sommets (pour tout entier non nul n).

Les bornes inférieures sont faciles à déterminer : $\forall n \geq 1$, pour tout graphe simple G à n sommets :

$$\beta(G) + \beta(\bar{G}) \geq \min \{ 3, n + 1 \},$$

$$\beta(G)\beta(\bar{G}) \geq \min \{ 2, n \}$$

et ces inégalités sont les meilleures possibles.

Démontrer l'inégalité (I), c'est donc résoudre le problème du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption, tel qu'il a été défini par G. Chartrand et J. Mitchem (2).

2. DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ $\beta(G) \beta(\bar{G}) \leq n$. — 1^o Introduction.
 — Soit $G(X; E)$ un graphe simple avec $|X| = n \geq 1$. $\forall A \subseteq X$ posons

$$D_e(A) = \{x \in X - A / \forall [a \in A, \{a, x\} \in E]\}; \quad d_e(A) = |D_e(A)|;$$

$$D_i(A) = \{a \in A / a \in D_e(A - \{a\})\}; \quad d_i(A) = |D_i(A)|.$$

On vérifie immédiatement que A est un absorbant de \bar{G} si et seulement si $d_e(A) = 0$; dans ce cas nous avons évidemment : $|A| \geq \beta(\bar{G})$.

Une partition $P = \{B_1, \dots, B_m\}$ de X et un absorbant $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ de G seront dits associés si et seulement si : $\forall j \in \{1, \dots, m\}, x_j \in D_i(B_j)$.

Tout absorbant de G admet au moins une partition associée; toute partition $P = \{B_1, \dots, B_m\}$ avec $d_i(B_j) \geq 1, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ admet un absorbant associé.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soit A un absorbant de G avec $|A| = \beta(G)$. Il existe une partition $P = \{B_1, \dots, B_m\}$ de X associée à A [donc $m = \beta(G)$] telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} \quad d_e(B_j) = 0.$$

Ce résultat implique qu'il existe une partition de X comportant $\beta(G)$ blocs, chaque bloc comportant au moins $\beta(\bar{G})$ sommets; donc

$$n \geq \beta(G) \beta(\bar{G}).$$

2^o Démonstration du théorème. — Soit donc A un absorbant de G avec $|A| = \beta(G)$. Soit $P = \{B_1, \dots, B_m\}$ [$m = \beta(G)$] une partition associée à A telle que pour toute autre partition $P' = \{B'_1, \dots, B'_m\}$ associée à A :

$$(II) \quad \sum_{i=1}^m d_i(B'_i) \leq \sum_{j=1}^m d_i(B_j).$$

Supposons que $\exists B_j \in P, d_e(B_j) \geq 1$.

Soit $x \in D_e(B_j)$; soit $B_k \in P$ tel que $x \in B_k : k \neq j$.

Soit $P' = \{B'_1, \dots, B'_m\}$ avec

$$l \neq j, \quad l \neq k \Rightarrow B'_l = B_l; \quad B'_j = B_j \cup \{x\}; \quad B'_k = B_k - \{x\}.$$

$x \notin D_i(B_k)$ car sinon $(A - [B_j \cup B_k]) \cup \{x\}$ serait un absorbant de G de cardinal $|A| - 1$; en outre, $x_j \in D_i(B_j) \Rightarrow x_j \in D_i(B'_j)$.

Donc P' est une partition de X associée à A .

En outre, $d_i(B'_k) \geq d_i(B_k)$ [puisque $x \notin D_i(B_k)$] et

$$d_i(B'_j) = d_i(B_j) + 1 \quad [\text{car } D_i(B'_j) = D_i(B_j) \cup \{x\}].$$

Il y a contradiction avec l'inégalité (II).

Donc $\forall B_j \in P, d. (B_j) = 0$ et le théorème est démontré.

3° Applications. — Tout graphe simple G admet une partition de l'ensemble de ses sommets en $\beta(\overline{G})$ absorbants de G .

Cela généralise le résultat suivant déjà connu :

Si G n'admet pas de sommets isolés, il existe une partition des sommets de G en deux absorbants de G .

Nous obtenons par exemple le résultat suivant :

Si toute arête de G est contenue dans un triangle de G et si le diamètre de G est inférieur ou égal à 2, il existe une partition des sommets de G en trois absorbants de G .

(*) Séance du 21 février 1972.

(¹) C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

(²) G. CHARTRAND et J. MITCHEM, *Graphical Theorems of the Nordhaus-Gaddum Class, Recent Trends in Graph Theory*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

(³) V. G. VIZING, *The Cartesian product of graphs (Vyč. Sis., 9, 1963, p. 30-43)*.

*Institut de Mathématiques appliquées
et Informatique,
Université de Grenoble,
Cedex 53,
38-Grenoble-Gare,
Isère.*

ANNEXE II

ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES DANS LES
GRAPHES CUBIQUES CYCLIQUEMENT QUATRE
ARETES CONNEXE

*Cette annexe reprend une partie d'une
publication réalisée en commun avec
A. SAKAROVITCH [55].*

1.- NOMBRE DE STABILITE CYCLIQUE DE GRAPHES CUBIQUES CYCLIQUEMENT
QUATRE ARETES CONNEXES

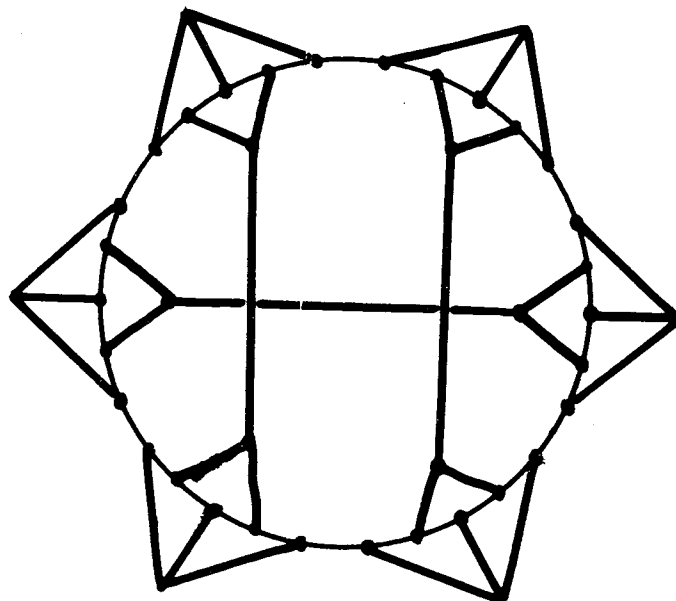
Définition:

Dans un graphe $G = (X;E)$ nous appellerons c-cocycle un cocycle $\omega(A)$ tel que G_A et G_{X-A} contiennent chacun un cycle. Un graphe est *cycliquement k arêtes connexe* (noté c.k.c. dans la suite) si k est inférieur ou égal à la cardinalité de tout c-cocycle.

Nous nous intéresserons dans cette partie aux graphes cubiques c.4.c. et nous montrerons en particulier (proposition AII 1) que pour un graphe cubique c.4c. $G, \alpha_1(G)$ est égal à sa plus grande valeur possible soit $\lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$. Ce résultat peut paraître surprenant car un graphe c.4c. est "mieux connecté" qu'un graphe qui n'a pas cette propriété.

Remarque:

La propriété annoncée ($\alpha_1(G) = \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$) est fautive pour les graphes cubiques sans triangle:



LEMME 1:

Soit $G = (X;E)$ un graphe cubique à n sommets, $G' = R_a(G)$ possède $n-4$ sommets.

Si $\alpha_1(G') = \lfloor \frac{3(n-4)-2}{4} \rfloor$ alors $\alpha_1(G) = \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$.

Démonstration:

Si S' est cycliquement stable dans G' et si b, c, d sont les 3 voisins de a dans G alors $S = S' \cup \{b,c,d\}$ est cycliquement stable dans G . □

D'après le lemme 1 ci-dessus, on voit qu'il suffit de démontrer le résultat pour G cubique c.4c. minimal, c'est-à-dire tel que $\forall a \in X$ $R_a(G)$ ne soit pas c.4c. D'autre part, un graphe c.4c. est certainement 2-connexe et d'après les résultats du chapitre III (propositions III.3 et III.4) on voit qu'il suffit de considérer les cas où le nombre de sommets est supérieur à 10 (en effet pour $n \leq 10$, $g(n,0) = \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$).

LEMME 2:

Soit $G = (X;E)$ un graphe cubique c.5c, alors $\forall x \in X, R_x(G)$ est c.4c.

Démonstration:

Si $\omega(A)$ est un c-cocycle de $R_x(G)$ de cardinal inférieur ou égal à 3, il existe $(xy) \in E$, tel que $\omega(A) \cup \{(xy)\}$ est c-cocycle de G de cardinal inférieur ou égal à 4.

LEMME 3:

Tout graphe $G = (X;E)$ cubique c.4c. minimal contient un cycle de longueur 4.

Démonstration:

- 1/ Toutes les arêtes d'un c-cocycle de G de cardinal 4 sont non adjacentes 2 à 2, sinon G ne serait pas c.4c.
- 2/ Soit $\omega(A) = \{(aa'), (bb'), (cc'), (dd')\}$ un c-cocycle de cardinal 4 (un tel c-cocycle existe d'après le lemme 2) tel que $A = \{a, b, c, d\} \subset A$ soit minimal pour cette propriété. Alors on a $A = \{a, b, c, d\}$.

En effet, sinon soit $z \in A - \{a, b, c, d\}$; il existe $t \in A$ $\{tz\} \in E$ tel que $\{tz\} \in \omega(A')$ c-cocycle de G de cardinal 4 puisque $R_z(G)$ n'est pas c.4c. Soit E_A l'ensemble des arêtes de G_A .

$$|\omega(A') \cap E_A| \geq 2$$

Sinon G ne serait pas c.4c.

Dans tous les cas ($|\omega(A') \cap E_A| = 2, 3$ ou 4) on voit que A n'est pas minimal et on a donc une contradiction. \square

Dans la suite (lemmes 4, 5, 6, 7, 8, 9), on considérera un graphe $G = (X; E)$ cubique sur $n > 10$ sommets c.4c. minimal admettant donc un sous-graphe G_A , qui est un cycle de longueur 4. Soit $A = \{x \in X \mid \exists x' \in A', (xx') \in E\}$; puisque G est c.4c. $|A| = 4$ et on pose: $A = \{x, y, u, v\}$. On pose également:

$$X' = X - A'$$

$$G' = G_{X'}$$

$$\forall C \subset X', \omega'(C) = \text{cocycle relatif à } C \text{ dans } G'.$$

et on a:

$$(1) \quad |\omega(C)| = |\omega'(C)| + |C \cap A|$$

LEMME 4:

$G(A)$ ne contient pas de sommet de degré 2.

Démonstration:

Supposons que x soit, disons, adjacent à u et v . Alors:

$$|\omega(A' \cup \{x,u,v\})| = 3 \Rightarrow |X' - \{x,u,v\}| = 1 \quad (\text{puisque } G \text{ est c.4c.}).$$

Ce qui contredit le fait que le nombre de sommets de G est supérieur à 10.

LEMME 5

Pour tout c-cocycle $\omega'(C)$ de G' on a:

$$(i) \quad |\omega'(C)| \geq 2$$

$$(ii) \quad |\omega'(C)| = 2 \Rightarrow |C \cap A| = |(X' - C) \cap A| = 2$$

$$(iii) \quad |\omega'(C)| = 2 \Rightarrow E(A) \cap \omega'(C) = \emptyset$$

$$(iv) \quad |\omega'(C)| = 3 \Rightarrow |C \cap A| \geq 1, \quad |(X' - C) \cap A| \geq 1$$

Démonstration:

(i), (ii) et (iv) sont des conséquences directes de (1) et du fait que G est c.4c.

Supposons que $x, y \in C$, $u, v \in X' - C$ $\{xu\} \in E$ alors on a:
 $|\omega(C - \{x\})| = 3$ qui implique $C = \{x,y\}$ puisque G est c.4c.
 Une contradiction avec le fait que $\omega'(C)$ est un c-cocycle.

LEMME 6

Soient deux c-cocycles $\omega'(C_1)$ et $\omega'(C_2)$ de G' tels que:

$$|\omega'(C_1)| = |\omega'(C_2)| = 2$$

alors

$$|C_1 \cap C_2 \cap A| = 0 \text{ ou } 2.$$

Démonstration:

Supposons $|C_1 \cap C_2 \cap A| = 1$ et posons:

$$H_1 = C_1 \cap C_2$$

$$H_2 = C_1 \cap (X' - C_2)$$

$$H_3 = (X' - C_1) \cap C_2$$

$$H_4 = (X' - C_1) \cap (X' - C_2)$$

D'après le lemme 5 (ii) on a:

$$|H_1 \cap A| = |H_2 \cap A| = |H_3 \cap A| = |H_4 \cap A| = 1$$

et par conséquent

$$|\omega'(H_i)| \geq 2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et comme d'autre part, par hypothèse:

$$|\omega'(H_1 \cup H_2)| = |\omega'(H_1 \cup H_3)| = 2$$

on a

$$|\omega'(H_i)| = 2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et donc que chaque H_i ne comporte qu'un sommet, ce qui est impossible puisque $\omega'(C_1)$ et $\omega'(C_2)$ sont des c -cocycles. \square

LEMME 7

Soient deux c -cocycles $\omega'(C)$ et $\omega'(D)$ de G' tels que $|\omega'(C)| = 2$, $|\omega'(D)| = 3$; alors:

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in C ; u, v \in X' - C \\ x \in D \quad |A \cap D| = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y \in D$$

Démonstration:

Supposons $x, u \in D$; $y, v \in X' - D$ et posons:

$$H_1 = C \cap D$$

$$H_2 = C \cap (X' - D)$$

$$H_3 = (X' - C) \cap D$$

$$H_4 = (X' - C) \cap (X' - D)$$

On a:

$$x \in H_1, y \in H_2, u \in H_3, v \in H_4$$

et donc:

$$|\omega'(H_i)| \geq 2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et comme $|\omega'(H_1 \cup H_2)| = 2$ et $|\omega'(H_1 \cup H_3)| = 3$ on trouve que soit C soit $X'-C$ ne comporte que 2 sommets, une contradiction avec le fait que $\omega'(C)$ est un c-cocycle. \square

LEMME 8

Soient 3 c-cocycles $\omega'(D_1)$, $\omega'(D_2)$, $\omega'(D_3)$ de G' tels que:

$$|\omega'(D_1)| = |\omega'(D_2)| = |\omega'(D_3)| = 3, \text{ alors:}$$

$$\left. \begin{array}{ll} x, y \in D_1 & u, v \in X'-D_1 \\ x, v \in D_2 & y, u \in X'-D_2 \\ x \in D_3 & |D_3 \cap A| = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow u \in X'-D_3$$

Démonstration:

Supposons $u \in D_3$ et posons:

$$H_1 = D_1 \cap D_2 \cap D_3$$

$$H_2 = D_1 \cap (X'-D_2) \cap (X'-D_3)$$

$$H_3 = (X'-D_1) \cap D_2 \cap (X'-D_3)$$

$$H_4 = (X'-D_1) \cap (X'-D_2) \cap D_3$$

$$H_5 = (X'-D_1) \cap D_2 \cap D_3$$

$$H_6 = D_1 \cap D_2 \cap (X'-D_3)$$

$$H_7 = D_1 \cap (X'-D_2) \cap D_3$$

$$H_8 = (X'-D_1) \cap (X'-D_2) \cap (X'-D_3)$$

on a:

$$x \in H_1, y \in H_2, u \in H_3, v \in H_4$$

$(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8)$ est une partition de X' .

Posons:

$$x_{ij} = |\{(ab) \in E \mid a \in H_i, b \in H_j\}| \quad i, j \in \{1, 2, \dots, 8\} \quad i < j$$

$$z_i = |H_i| \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

et comme G est cubique et cycliquement 4-connexe, on a:

$$(2) \ z_i = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_j x_{ij} = 2 & \text{si } i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \\ \sum_j x_{ij} = 3 & \text{si } i = 5, 6, 7 \text{ ou } 8 \end{cases}$$

$$(3) \ z_i > 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_j x_{ij} \geq 3 & \text{si } i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \\ \sum_j x_{ij} \geq 4 & \text{si } i = 5, 6, 7 \text{ ou } 8 \end{cases}$$

On posera donc:

$$f(z) = \begin{cases} 2 & \text{si } z = 1 \\ \geq 3 & \text{si } z > 1 \end{cases} \quad g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ 3 & \text{si } z = 1 \\ \geq 4 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

et les contraintes auxquelles doivent satisfaire les x_{ij} sont:

	12	13	14	15	16	17	18	23	24	25	26	27	28	34	35	36	37	38	45	46	47	48	56	57	58	67	68	78	
I		1	1	1			1	1	1	1			1		1	1			1	1		1	1			1	1		= 3
	1		1			1	1	1		1	1			1		1	1	1	1					1	1	1	1		= 3
	1	1			1		1		1	1		1		1	1		1			1		1	1		1	1		1	= 3
II		1	1	1	1	1	1	1																					= f(z ₁)
	1							1	1	1	1	1	1																= f(z ₂)
		1						1						1	1	1	1	1											= f(z ₃)
			1					1						1						1	1	1	1						= f(z ₄)
III				1					1					1					1			1	1	1					= g(z ₅)
					1				1					1					1			1		1	1				= g(z ₆)
						1			1					1					1			1		1	1	1			= g(z ₇)
							1			1				1					1			1		1	1	1			= g(z ₈)

Posons:

$$x_G = x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{67} + x_{68} + x_{78}$$

$$x_H = x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{35} + x_{36} + x_{38} + x_{45} + x_{47} + x_{48}$$

$$x_I = x_{18} + x_{25} + x_{37} + x_{46}$$

$$x_J = x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34}$$

Si on fait la somme des 3 équations I, des quatre inéquations II et des 4 inéquations III, il vient:

$$(I^*) \quad x_H + 2x_G + 2x_J + 3x_I = 9$$

$$(II^*) \quad x_H + 2x_5 + x_I \geq f(z_1) + f(z_2) + f(z_3) + f(z_4)$$

$$(III^*) \quad x_H + 2x_I \geq g(z_5) + g(z_6) + g(z_7) + g(z_8)$$

Comme $f(z_1) + f(z_2) + f(z_3) + f(z_4) \geq 8$ on tire de (I*) et (II*):

$$2x_G + 2x_I \leq 1 \Rightarrow x_G = x_I = 0$$

et par conséquent $f(z_1) + f(z_2) + f(z_3) + f(z_4) = 9$

c'est-à-dire $z_i > 1 \Rightarrow z_j = 1 \quad j \neq i \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

ou en d'autres termes 3 des ensembles H_1, H_2, H_3, H_4 sont réduits à un point.

(I*) et (III*) s'écrivent:

$$(I^*) \quad x_H + 2x_J = 9$$

$$(III^*) \quad x_H \geq g(z_5) + g(z_6) + g(z_7) + g(z_8)$$

5 cas sont à envisager:

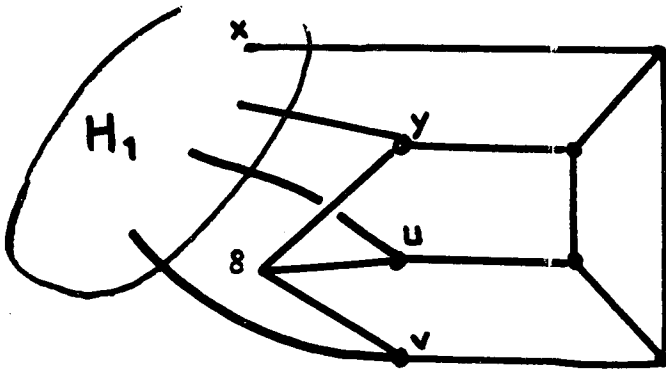
1°/ Les 4 ensembles H_5, H_6, H_7, H_8 sont vides alors (III*) et (I*) donnent:

$$x_H = 0, 2x_J = 9, \text{ une impossibilité.}$$

2°/ Un seul des 4 ensembles H_5, H_6, H_7, H_8 est non vide. En cherchant des valeurs de $f(z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) et $g(z_j)$ ($j = 5, 6, 7, 8$) pour lesquelles le système I, II, III a une solution dans N , on trouve quatre cas possibles:

- $z_1 > 1, z_2 = z_3 = z_4 = 1, z_5 = z_6 = z_7 = 0, z_8 = 1, x_j = 3$
- $z_1 = 1, z_2 > 1, z_3 = z_4 = 1, z_5 = 1, z_6 = z_7 = z_8 = 0, x_j = 3$
- $z_1 = z_2 = 1, z_3 > 1, z_4 = 1, z_5 = z_6 = z_8 = 0, z_7 = 1, x_j = 3$
- $z_1 = z_2 = z_3 = 1, z_4 > 1, z_6 > 1, z_5 = z_7 = z_8 = 0, x_j = 3$

Le premier de ces cas correspond à:

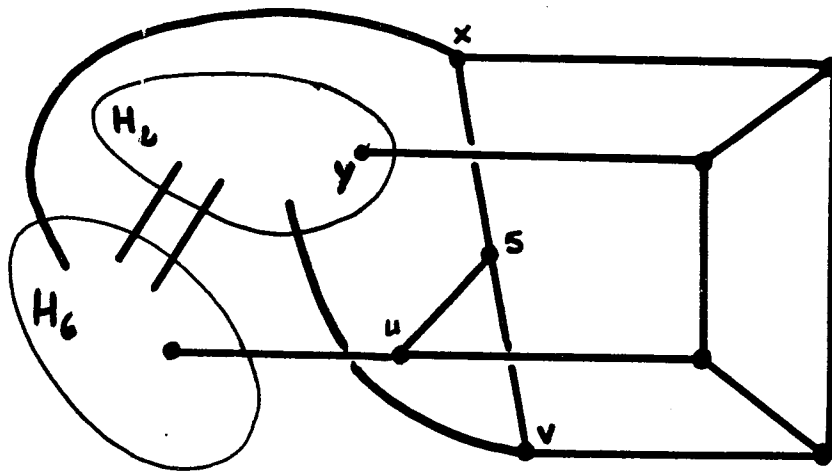


Si x était adjacent à un des sommets y, u ou v on aurait $z_1 = 2$, une contradiction avec le fait que G comporte plus de 10 sommets.

Si x n'est pas adjacent ni à u , ni à y , ni à v , alors $R_8(G)$ est c.4c., le graphe considéré n'était pas minimal, une contradiction.

Les autres cas se traitent de manière similaire car ils donnent lieu à des graphes isomorphes à celui de l'exemple ci-dessus.

3°/ Deux des 4 ensembles H_5, H_6, H_7, H_8 sont non vides. En raisonnant comme au 2°, on voit qu'alors $x_J = 2$ et par conséquent ((II*) et (III*)) l'un des ensembles H_5, H_6, H_7 ou H_8 est réduit à un seul sommet. La réduction du graphe par rapport à ce sommet donne un graphe c.4c. ainsi que l'illustre la figure ci-après:



$R_5(G)$ est encore un graphe c.4c. et le graphe considéré n'était pas minimal, une contradiction.

(Les autres cas possibles sont également isomorphes à l'exemple ci-dessus).

4°/ 3 des quatre ensembles H_5, H_6, H_7 et H_8 sont non vides.

Alors d'après (I*) et (III*) ces 4 ensembles sont réduits chacun à un sommet. Les seuls cas possibles sont :

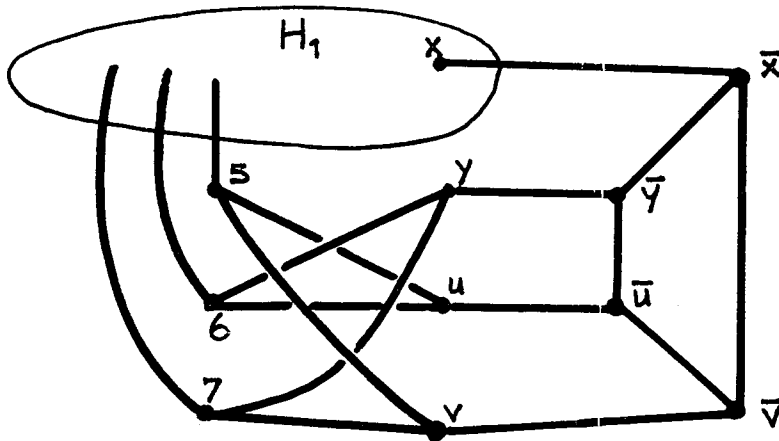
$$z_1 > 1, z_2 = z_3 = z_4 = 1, z_5 = z_6 = z_7 = 1, z_8 = 0$$

$$z_1 = 1, z_2 > 1, z_3 = z_4 = 1, z_5 = 0, z_6 = z_7 = z_8 = 1$$

$$z_1 = z_2 = 1, z_3 > 1, z_4 = 1, z_5 = z_6 = 1, z_7 = 0, z_8 = 1$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = 1, z_4 > 1, z_5 = z_6 = z_7 = 1, z_8 = 0$$

Les 4 graphes correspondant sont identiques (à une renumérotation près des sommets). Le premier d'entre eux est :



$R_{II}^-(G)$ est c.4c., une contradiction.

5°/ H_5, H_6, H_7, H_8 sont non vides, alors :

$$\chi_{II} \geq g(z_5) + g(z_6) + g(z_7) + g(z_8) \geq 12 \text{ contredit (I*)} \quad []$$

LEMME 9

On peut accoupler les sommets de $A = \{x, y, u, v\}$ (disons (xu) et (yv)) de sorte que $\hat{G}' = (X', E_{X'} \cup \{(xu), (yv)\})$ soit cubique et c.4c.

Démonstration:

Il est clair que \hat{G}' est cubique. Il faut montrer que \hat{G}' est c.4c. Pour $C \subset X'$ $\hat{\omega}(C)$ désigne le cocycle relatif à C dans \hat{G}' .

On distingue deux cas:

1°/ Il existe un c-cocycle $\omega'(C)$ dans G' tel que $|\omega'(C)| = 2$. Sans perte de généralité, on suppose $x, y \in C$; $u, v \in X' - C$.

- s'il existe un c-cocycle $\omega'(C')$ dans G' tel que $|\omega'(C')| = 2$ on a $|\hat{\omega}(C')| = 4$ d'après le lemme 6.

- s'il existe un c-cocycle $\omega'(D)$ dans G' tel que $|\omega'(D)| = 3$ on a $|\hat{\omega}(D)| \geq 4$ d'après le lemme 7.

2°/ Il n'existe pas, dans G' , de c-cocycle de cardinal 2. Supposons qu'il existe dans G' deux c-cocycles $\omega'(D_1), \omega'(D_2)$ tels que:

$$|\omega'(D_1)| = |\omega'(D_2)| = 3$$

$$|D_1 \cap A| = |D_2 \cap A| = 2$$

$$|D_1 \cap D_2 \cap A| = 1$$

On pose:

$$\{x\} = D_1 \cap D_2 \cap A$$

$$\{y\} = D_1 \cap A - \{x\}$$

$$\{v\} = D_2 \cap A - \{x\}$$

Alors, d'après le lemme 8, quelque soit le c-cocycle $\omega'(D)$ de cardinal 3 dans G' , on a $|\hat{\omega}(D)| \geq 4$. □

PROPOSITION A II.1.

Pour tout graphe $G = (X;E)$ sur n sommets cubique cycliquement 4 arêtes

$$\underline{\text{connexe } s(G) = \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor.}$$

Démonstration:

Supposons la propriété fausse et soit G un graphe cubique c.4c. minimal tel que $s(G) < \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$ et ayant un nombre de sommets n minimum pour cette propriété. Soit $A' \subset X$ tel que $G_{A'}$, soit un cycle de longueur 4 (lemme 3) et soit \hat{G}' le graphe cubique c.4c. construit à partir de $G_{X-A'}$, comme il est indiqué au lemme 9. Le nombre de sommets de \hat{G}' est $n-4$ et par conséquent si \hat{S}' est un ensemble cycliquement stable maximum de \hat{G}' on a:

$$|\hat{S}'| = \lfloor \frac{3(n-4)-2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor - 3$$

On considère les composantes connexes de $G'(\hat{S}')$ (et non de $\hat{G}'(\hat{S}')$). A cause de la présence des arêtes (xu) et (yv) dans \hat{G}' on a:

- x et u (resp. y et v) n'appartiennent pas à la même composante connexe de $G'(\hat{S}')$.

- si x et y (resp. u et v) appartiennent à la même composante de $G'(\hat{S}')$ alors u et v (resp. x et y) n'appartiennent pas à la même composante.

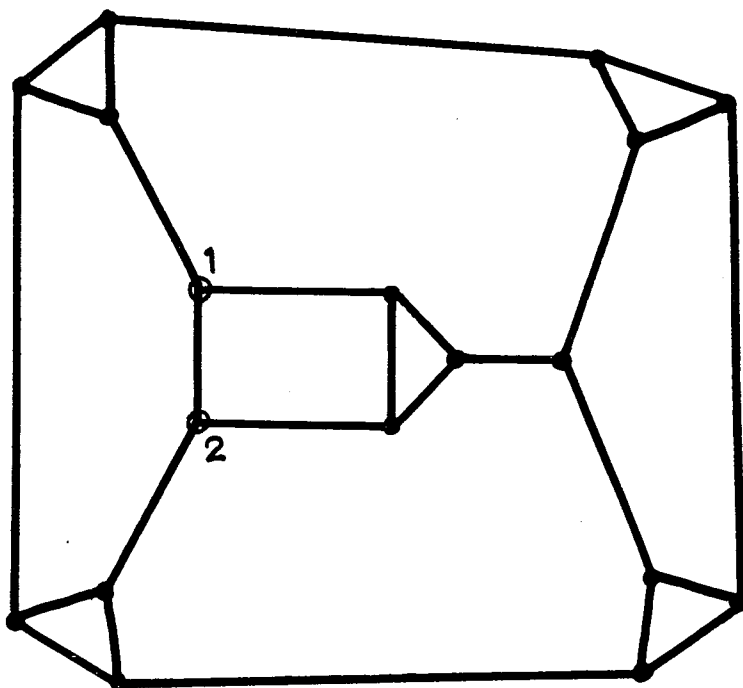
Supposons donc que x et y appartiennent à la même composante de $G'(\hat{S}')$; alors $S = \hat{S}' \cup \{\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}\}$ (où $\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}$ sont les sommets de A adjacents à y, u, v respectivement) est cycliquement stable dans G et on a:

$$|S| = |\hat{S}'| + 3 \quad \text{une contradiction.} \quad \square$$

2.- UNE PROPRIETE DE LA FAMILLE DES ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES

Soit S la famille des ensembles cycliquement stables de cardinalité maximum ; posons $\Sigma = \bigcap_{S \in S} S$. En général, ainsi que le montre l'exemple

ci-dessous, Σ n'est pas un stable de G , même si $\alpha_1(G) = \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$.



Les sommets 1 et 2 appartiennent à tout ensemble cycliquement stable maximum.

Cependant on a le résultat suivant.

PROPOSITION A II.2.

Dans un graphe cubique cycliquement quatre connexe $\bigcap_{S \in S} S = \emptyset$.

Pour démontrer cette proposition on va prouver que dans un graphe cycliquement quatre connexe, pour tout sommet x il existe un ensemble cycliquement stable maximum S_x tel que $x \notin S_x$. On aura besoin du résultat suivant:

LEMME 10

Soit G un graphe c.4c. qui n'est pas cycliquement 5 arête connexe, qui n'est pas la 4 clique et qui ne possède pas de cycle de longueur 4 ; alors il existe deux sommets a et b tels que:

- (i) $\Gamma(a) \cap \Gamma(b) = \emptyset$, $a \notin \Gamma(b)$
- (ii) $R_a(G)$ et $R_b(G)$ sont c.4c.

Démonstration:

Soit $\omega(A)$ un c-cocycle de G de cardinal 4 tel que A soit minimal par inclusion pour cette propriété. Comme, par hypothèse, G ne contient pas de cycle de longueur 4, il existe un sommet $a \in A$ qui n'est adjacent à aucun sommet de $X-A$, $R_a(G)$ est alors c.4c. (cf. lemme 3). De même, il existe $b \in X-A$ tel que $R_b(G)$ soit c.4c. et b n'est adjacent à aucun sommet de A .

Par construction a et b satisfont (i) et (ii). □

Démonstration de la proposition A II.2.

Soit G un graphe c.4c. tel que $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \emptyset$ et dont le nombre de sommets est minimum pour cette propriété.

1°/ Si G est cycliquement 5 arêtes connexe, on sait, d'après le lemme 2 que $\forall x \in X R_x(G)$ est c.4c. Soient S'_x un ensemble cycliquement stable dans $R_x(G)$ et x_1, x_2, x_3 les voisins de x . Alors

$$S_x = S'_x \cup \{x_1, x_2, x_3\}$$

est cycliquement stable maximum dans G . On a donc une contradiction.

2°/ Si G n'est pas cycliquement 5 arêtes connexe et ne contient pas de cycle de longueur 4, on peut appliquer le lemme 10 et soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 les voisins de a et b respectivement.

Pour tout sommet $x \in R_a(G)$ (resp. $y \in R_b(G)$) il existe, d'après l'hypothèse de minimalité de G , un ensemble cycliquement stable maximum S_x dans $R_a(G)$ (resp. S_y dans $R_b(G)$) tel que $x \notin S_x$ (resp. $y \notin S_y$). De plus d'après la proposition A.II.1.

$$S_a = S_x + \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$S_b = S_y + \{b_1, b_2, b_3\}$$

sont des ensembles cycliquement stables maximum. Comme tout sommet de G appartient nécessairement à $R_a(G)$ ou à $R_b(G)$ (puisque la condition (i) du lemme 10 est satisfaite) on a une contradiction.

3°/ Soit $A' = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}\}$ tel que $G_{A'}$ soit un cycle. On définit \hat{G}' à partir de $G(X-A')$ comme dans les énoncés du lemme 9. Puisque \hat{G}' a 4 sommets de moins que G , pour tout sommet $a \in X'$ il existe \hat{S}'_a cycliquement stable dans \hat{G}' tel que $a \notin \hat{S}'_a$.

Avec les notations définies dans la démonstration de la proposition A II.1 on a

$$S_{\bar{x}} = \hat{S}'_u \cup \{\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}\} \qquad S_{\bar{u}} = \hat{S}'_x \cup \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}\}$$

$$S_{\bar{y}} = \hat{S}'_y \cup \{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}\} \qquad S_{\bar{v}} = \hat{S}'_y \cup \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\}$$

$$\text{et pour } a \in X' \quad S_a = \begin{cases} \hat{S}'_a \cup \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\} & \text{si } u \text{ et } v \text{ appartiennent à la même} \\ & \text{composante connexe de } G'(S'_a) \\ \hat{S}'_a \cup \{\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et par conséquent on a une contradiction. \square

ANNEXE III

TYPE ET GRAPHE DES
DISTANCES D'UNE FONCTION BOOLEENNE

TYPE ET GRAPHE DES DISTANCES D'UNE FONCTION BOOLEENNE

par C. PAYAN (1)

Résumé. — On recherche dans cet article, les fonctions booléennes dont le type est caractérisé par le graphe des distances (graphe construit à partir de la fonction booléenne représentée sous forme normale disjonctive, à l'aide des distances de Hamming).

C'est le cas des fonctions booléennes connexes (Théorème 1).

Ce résultat s'étend aux fonctions booléennes dont l'enveloppe est connexe (Théorème 2).

(L'enveloppe d'une fonction F est la plus petite fonction supérieure à F dont toutes les composantes connexes sont des cubes.)

On démontre pour terminer que le type de toute fonction booléenne est caractérisé par le graphe des distances de cette fonction et celui de la fonction complémentaire (Théorème 3).

Les fonctions booléennes seront représentées sous forme normale disjonctive.

I. DEFINITIONS

1-1. Distance

On appelle *distance* entre deux monômes canoniques le nombre de variables différentes, c'est-à-dire non complémentées dans l'un et complémentées dans l'autre ou inversement.

C'est la distance de Hamming.

1-2. Graphe des distances d'une fonction booléenne

C'est le graphe complet étiqueté défini de la façon suivante :

A chaque monôme canonique, m_i , de la fonction on fait correspondre un sommet, (m_i) du graphe.

Deux sommets quelconques sont reliés par une arête qui porte la distance entre les deux monômes représentés par ces deux sommets.

(1) Mathématiques appliquées, Informatique, Université de Grenoble.

Notation : Le graphe des distances d'une fonction booléenne F sera noté (F) .

EXEMPLE : $F = x\bar{y}z + xyz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$ (\bar{x} désigne le complément de x).

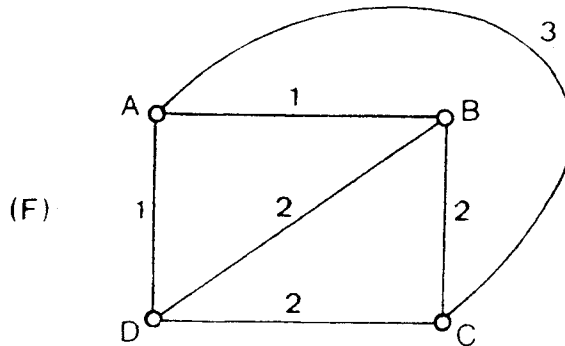


Figure 1

1-3. Graphe des distances k

C'est le graphe partiel obtenu en ne conservant que les arêtes qui portent la distance k .

1-4. Connexité

Une fonction booléenne est dite *connexe* si et seulement si son graphe des distances-1 est connexe.

1-5. Fonctions booléennes de même type

Deux fonctions booléennes sont dites de *même type* si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre par une bijection T de l'ensemble des variables et des variables complémentées de l'une sur l'ensemble des variables et des variables complémentées de l'autre, telle que $T(\bar{x}) = \overline{T(x)}$.

1-6. Fonctions booléennes de même type homogène (1)

Soient deux fonctions booléennes F_1 et F_2 ayant des graphes de distances (F_1) et (F_2) isomorphes.

Nous dirons que F_1 et F_2 sont de *même type homogène* si et seulement si à tout isomorphisme S de (F_1) sur (F_2) on peut associer une transformation T qui fait passer de F_1 à F_2 telle que

$$(m_2) = S[(m_1)] \Leftrightarrow m_2 = T[m_1]$$

(m_1 et m_2 sont des monômes canoniques. (m_1) et (m_2) les points associés du graphe).

(1) REMARQUE . Ceci est bien une *propriété du type*.
En effet, si à l'intérieur d'un type, 2 fonctions sont de « même type homogène », toutes les fonctions du type sont de « même type homogène »
La démonstration est immédiate

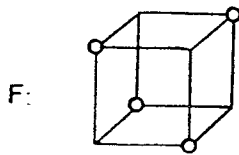
II. PROBLEME

On sait que deux fonctions booléennes de même type ont des graphes de distances isomorphes.

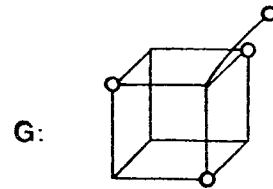
Réciproquement, deux fonctions booléennes ayant des graphes de distances isomorphes sont-elles de même type?

Cette propriété est fautive dans le cas général comme le montrent les deux exemples suivants :

1.



$$(xyz\bar{t} + xy\bar{z}t + x\bar{y}zt + x\bar{y}\bar{z}\bar{t})$$



$$(xyz\bar{t} + xy\bar{z}t + x\bar{y}zt + \bar{x}yzt)$$

2.

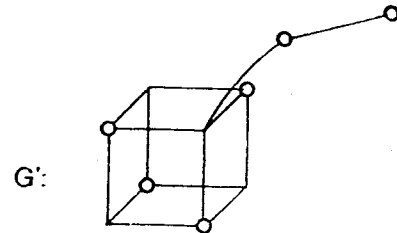
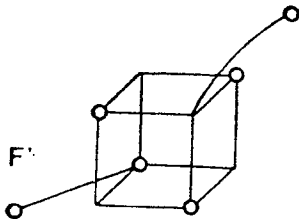


Figure 2

[Dans ce deuxième exemple les cubes circonscrits à F' et à G' sont de même dimension (5) — dimension minimum étant donnés les graphes de distances (F') et (G').]

Nous allons voir que *pour certaines classes de fonctions le graphe des distances caractérise le type.*

Nous ne considérerons dans ce qui suit que des fonctions ayant même nombre de variables.

III. THEOREME I

« Deux fonctions booléennes *connexes*, dont les graphes des distances sont isomorphes, sont de même type homogène. »

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre des monômes canoniques.

La propriété est vraie pour les fonctions ayant un monôme canonique.

Supposons la vraie pour toute fonction booléenne connexe ayant $n - 1$ monômes canoniques.

Soient F_1 et F_2 , 2 fonctions booléennes connexes de n monômes canoniques dont les graphes de distance sont isomorphes.

(Nous utiliserons dans la démonstration la même notation pour les monômes canoniques et les sommets correspondants du graphe des distances.) Il existe un monôme canonique $A_1 \in F_1$, tel que $f_1 = F_1 - A_1$ soit connexe.

Soit $A_2 \in F_2$, « isomorphe » de A_1 .

Soit $f_2 = F_2 - A_2$.

Les graphes des distances de f_1 et f_2 sont isomorphes.

f_2 est donc connexe

f_1 et f_2 ont $n - 1$ monômes canoniques.

$\exists B_1 \in f_1$ et $B_2 \in f_2$ tels que :

- distance $(A_1, B_1) = \text{distance}(A_2, B_2) = 1$
- B_1 et B_2 soient isomorphes.

Soit T_1 la transformation : $f_1 \rightarrow f_2$
telle que $B_2 = T_1(B_1)$

Soit $F'_1 = T_1(F_1)$.

Soit $A'_1 = T_1(A_1)$.

On a : distance $(A'_1, B_2) = \text{distance}(A_1, B_1) = 1$

F'_1 et F_2 ont $n - 1$ monômes canoniques communs (la fonction f_2).

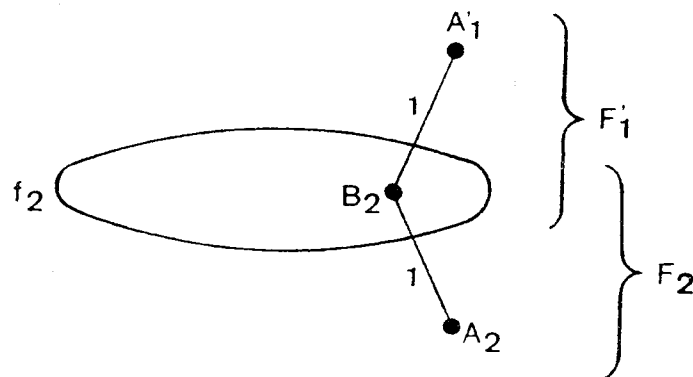


Figure 3

Distance $(A'_1, A_2) =$ soit 0 (dans ce cas le problème est résolu)
= soit 2

Soit, dans ce dernier cas, x_i et x_j les 2 variables qui sont différentes pour A'_1 et A_2 .

Les monômes A'_1 et A_2 , sont de la forme :

$$A'_1 : \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_p, \quad \tilde{x}_i, \tilde{x}_j$$

$$A_2 : \tilde{x}_1 \text{ ----- } \tilde{x}_p, \quad \bar{\tilde{x}}_i, \bar{\tilde{x}}_j$$

(\tilde{x}_k représente soit x_k soit \bar{x}_k)

Par exemple :

$$A'_1 : 0, 0, 0, \dots, 0, \quad 0, 0$$

$$A_2 : 0, 0, 0, \dots, 0, \quad 1, 1$$

Les $n - 1$ monômes de f_2 communs à F'_1 et F_2 sont de la forme :

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p, \quad \tilde{x}_i, \tilde{x}_j$$

ou

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p, \quad \bar{\tilde{x}}_i, \bar{\tilde{x}}_j$$

Par exemple :

$$\Phi, \Phi, \dots, \Phi, 0, 1$$

$$\Phi, \Phi, \dots, \Phi, 1, 0$$

(Ces points sont *équidistants* de A'_1 , et de A_2)

La transformation :

$$T_2 : \begin{cases} x_i \rightarrow \bar{x}_j \\ x_j \rightarrow \bar{x}_i \end{cases}$$

transforme A'_1 en A_2 et laisse les $n - 1$ points de f_2 invariants.

La transformation $T_2 \circ T_1$ transforme donc F_1 en F_2 et A_1 en son isomorphe A_2 .

Lemme 1

« Soient deux fonctions booléennes F et H ayant des graphes de distances isomorphes.

Si les fonctions (F) et (H) obtenues en prenant un point (monôme canonique) par composante connexe dans F et les points isomorphes dans H , sont de même type homogène

alors F et H sont de même type homogène. »

Démonstration analogue à celle du théorème 1 : récurrence sur le nombre de points des composantes connexes.

Corollaire 1

« Deux fonctions booléennes constituées de 1, 2 ou 3 composantes connexes et dont les graphes de distances sont isomorphes, sont de même type homogène. »

Démonstration : Il est facile de vérifier que deux fonctions booléennes réduites à 1, 2 ou 3 points et dont les graphes de distances sont isomorphes sont de même type homogène.

IV. EXTENSION DU THEOREME I

4-1. Définition

a) *Enveloppe d'une fonction booléenne F* (Notation \tilde{F}):

Soit une fonction F . Son enveloppe \tilde{F} est la fonction obtenue à partir de F par la transformation suivante :

— on remplace chaque composante connexe de F par son *cube circonscrit* (plus petit cube contenant cette composante) :

- on recommence la même opération sur la nouvelle fonction obtenue;
- on continue jusqu'à stabilisation.

Exemple :

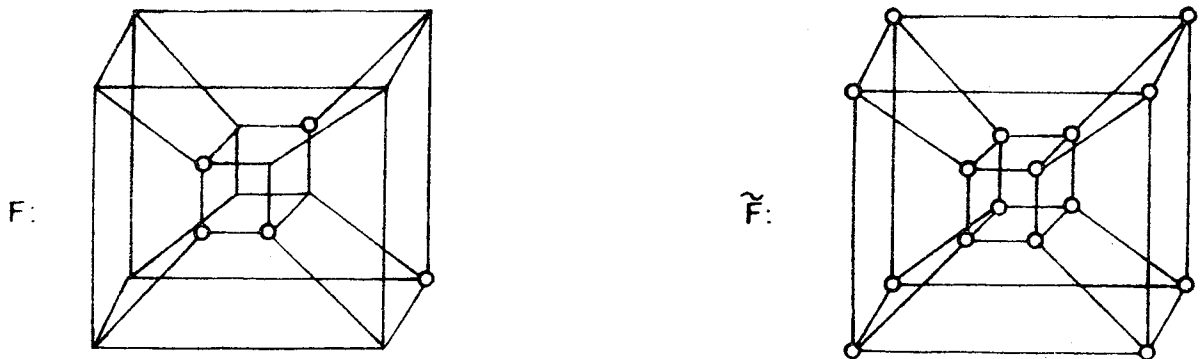


Figure 4

REMARQUE : L'enveloppe d'une fonction booléenne F est la plus petite fonction supérieure à F dont toutes les composantes connexes sont des cubes.

b) *Opération « o »*

Soit une fonction F .

F peut se mettre sous la forme : $F = C \cup P$.

C : Partie connexe de F .

$P = \{ A, B, \dots, C \}$ Ensemble de monômes canoniques

On définit : $F^o = \tilde{C} \cup P$

\tilde{C} : cube circonscrit à C .

REMARQUE : \tilde{F} , enveloppe de F peut être obtenue par itération de l'opération « \circ ».

4-2. Lemme 2

« Soient deux fonctions booléennes $F = C \cup P$ et $H = C' \cup P'$, ayant des graphes de distances isomorphes (isomorphisme : S ; $(C') = S[(C)]$. $(P') = S[(P)]$).

Les fonctions $F^0 = \tilde{C} \cup P$ et $H^0 = \tilde{C}' \cup P'$ ont des graphes de distances isomorphes.

(\exists un isomorphisme S^0 de (F^0) dans (H^0) dont S est une restriction.)

Démonstration

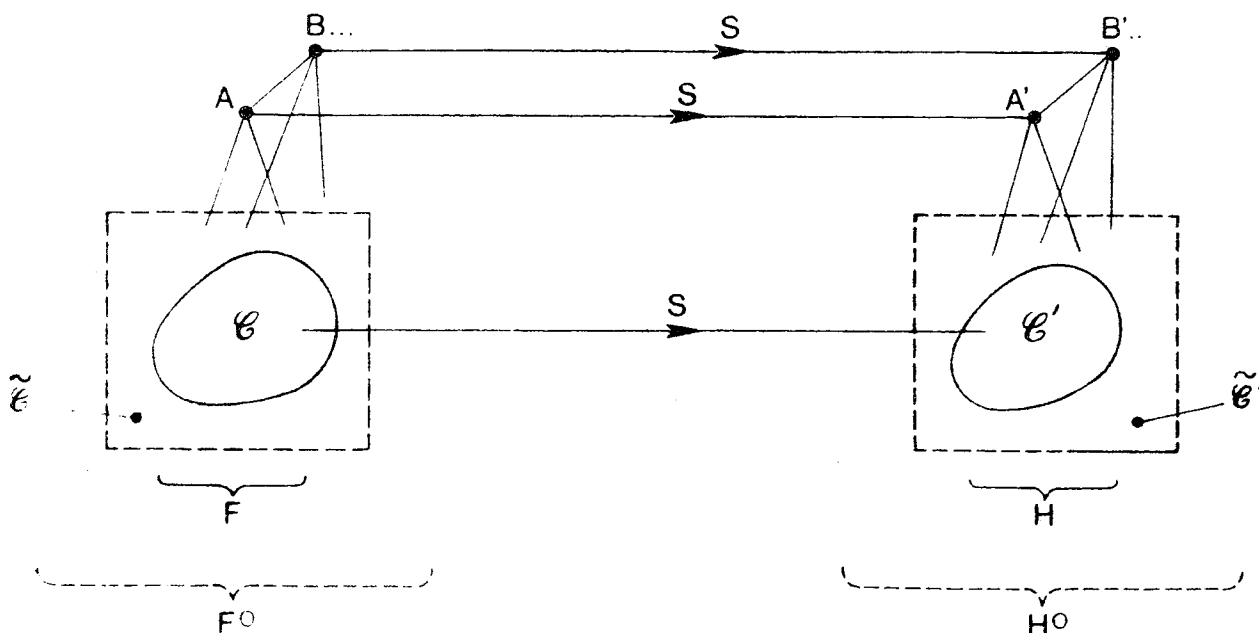


Figure 5

S : isomorphisme de (F) dans (H)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{S} & A' \\ \vdots & & \vdots \\ B & \xrightarrow{S} & B' \\ \vdots & & \vdots \\ C & \xrightarrow{S} & C' \end{array}$$

$\exists S_1$ isomorphisme de \tilde{C} dans \tilde{C}' tel que : [restriction de S à $C =$ restriction de S_1 à C .] (Théorème 1).

Soit S^0 application de (F^0) dans (H^0) définie par :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in S & S^0(x) = S(x) \\ \forall x \in \tilde{C} & S^0(x) = S_1(x) \end{array}$$

La restriction de S^0 à F est l'isomorphisme S .

Nous allons montrer que S^0 est un *isomorphisme* (c'est-à-dire une application bijective qui conserve les distances).

Conservation des distances

Notation : « Distance (x, y) » sera notée $[x, y]$.

1° $\forall x, y \in F$

$$[S^0(x), S^0(y)] = [S(x), S(y)] = [x, y]$$

2° $\forall x, y \in \tilde{C}$

$$[S^0(x), S^0(y)] = [S_1(x), S_1(y)] = [x, y]$$

3° — $x \in P$ (par exemple $x = A$)

— $y \in \tilde{C}$, $y \notin C$.

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de \tilde{C} .

La propriété est vraie pour \tilde{C} de dimension 0 (et 1) (dans ce cas $F^0 = F$ d'où $S^0 = S$).

Supposons la vraie pour \tilde{C} de dimension $n - 1$.

Soit $F = C \cup P$ et $H = C' \cup P'$.

(F) , (C) , (P) et (H) , (C') , (P') sont respectivement isomorphes.

\tilde{C} et \tilde{C}' de dimension n .

C étant *connexe* on a :

$$\left[\begin{array}{l} \cdot C = C_1 \cup x \cup \dots \mid \tilde{C}_1 \text{ soit de dimension } n - 1 \\ \cdot \exists x \in C_1 \mid [x, x_1] = 1 \end{array} \right.$$

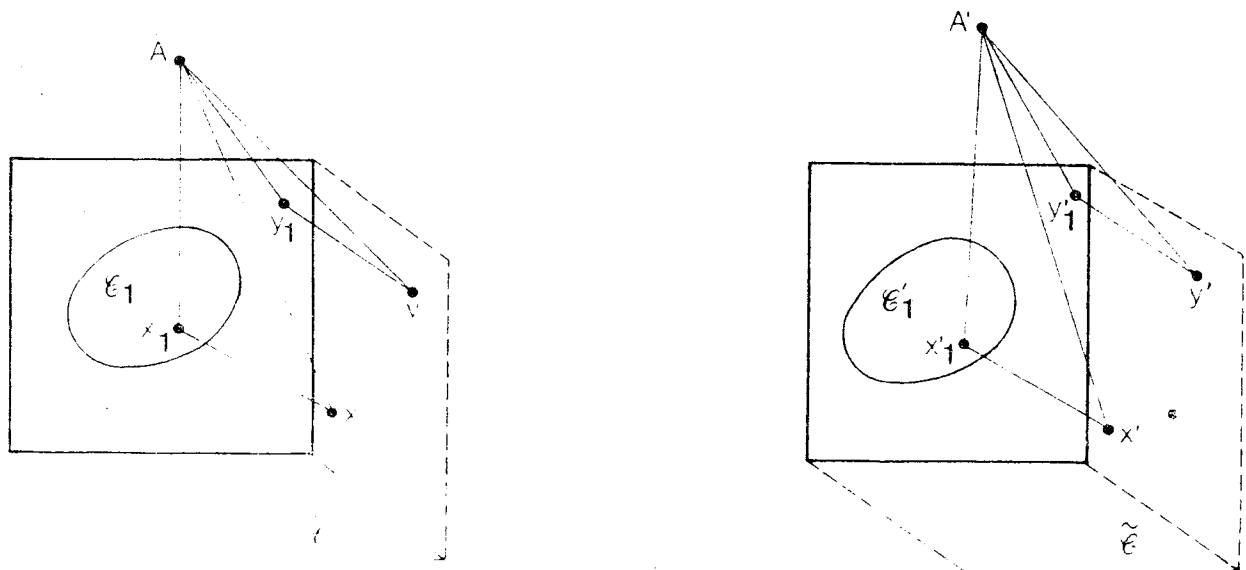


Figure 6

Soit

$$y_1 \in \tilde{C}_1$$

$$y \in \tilde{C} \mid y \notin \tilde{C}_1 \text{ et } [y, y_1] = 1.$$

(yy_1 parallèle à xx_1)

$$[A, x] = \text{soit } [A, x_1] + 1 \quad (1^{\text{er}} \text{ cas})$$

$$\text{soit } [A, x_1] - 1 \quad (2^{\text{e}} \text{ cas})$$

Dans le 1^{er} cas on a :

$$[A, y] = [A, y_1] + 1$$

$$[A', x'] = [A', x'_1] + 1 \quad ((F) \text{ et } (H) \text{ isomorphes})$$

$$\text{D'où } [A', y'] = [A', y'_1] + 1$$

$$\text{Or } [A, y_1] = [A', y'_1] \quad (\text{Hypothèse de récurrence})$$

$$\text{D'où } [A, y] = [A', y']$$

La démonstration est identique dans le 2^e cas.

S^0 conserve donc les distances.

C'est donc une application *injective*.

Un raisonnement dans l'autre sens (de H vers F) permettrait de définir une injection de H^0 dans F^0 .

S^0 est donc une application *bijective* qui conserve les *distances*, c'est-à-dire un isomorphisme. S est la restriction de S^0 à (F) .

4-3. Corollaire 2

« Si deux fonctions F et H ont des graphes de distances isomorphes (isomorphisme S), leurs enveloppes \tilde{F} et \tilde{H} ont des graphes de distances isomorphes. (\exists un isomorphisme \tilde{S} de (\tilde{F}) sur (\tilde{H}) dont S est une restriction). »

Démonstration

Ce résultat se déduit immédiatement du lemme 2 par itération de la transformation $F \rightarrow F^0$.

4-4. Théorème 2

« Deux fonctions booléennes :

— dont les enveloppes sont formées de 1, 2 ou 3 composantes connexes ⁽¹⁾.

(1) REMARQUE : Ceci est vrai pour la très grande majorité des fonctions. Exemple : 22 types de fonctions à 4 variables sur 402 au total, ne vérifient pas cette condition.

— et dont les graphes de distances sont isomorphes sont de même type homogène. »

Démonstration :

Corollaire 1 et 2.

V. CARACTERISATION DU TYPE D'UNE FONCTION QUELCONQUE

5-1. Lemme 3

« Toute fonction booléenne F de dimension n , ayant plus de 2^{n-1} monômes canoniques est telle que son enveloppe \tilde{F} est connexe. (\tilde{F} = le n -cube circonscrit à F). »

Démonstration par récurrence sur la dimension de F :

— la propriété est vraie pour F de dimension 1 ;

— supposons la vraie pour toute fonction de dimension $n - 1$.

Soit une fonction F de dimension n , ayant plus de 2^{n-1} monômes canoniques.

$$F = xf + \bar{x}g \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ est une variable quelconque} \\ f \text{ et } g \text{ sont des fonctions de dimension } n - 1 \end{array} \right.$$

xf (ou $\bar{x}g$) a plus de 2^{n-2} monômes canoniques

$\bar{x}g$ (ou xf) a au moins 1 monôme canonique

$\tilde{x}f$ (ou $\tilde{\bar{x}}g$) = le $(n - 1)$ cube circonscrit à xf (ou $\bar{x}g$) (par hypothèse de récurrence)

$\tilde{x}f + \bar{x}g$ (ou $xf + \tilde{\bar{x}}g$) est donc connexe, et par suite

$\tilde{x}f + \tilde{\bar{x}}g$ est connexe

$\tilde{F} = \overbrace{xf + \bar{x}g} = \overbrace{\tilde{x}f + \tilde{\bar{x}}g}$ est donc connexe.

D'où \tilde{F} = le n cube circonscrit à F .

REMARQUE : La propriété du lemme 3 s'étend aux fonctions booléennes dont l'enveloppe a plus de 2^{n-1} monômes canoniques. C'est le cas en particulier des fonctions ayant 2^{n-1} monômes canoniques et dont une composante connexe au moins, n'est pas un cube.

En effet $\tilde{F} = \tilde{\tilde{F}}$

5-2. Lemme 4

« Pour qu'une fonction booléenne F de x_1, x_2, \dots, x_n soit une fonction linéaire non triviale (c'est-à-dire F de la forme $a \oplus x_i \oplus \dots \oplus x_j$ avec $a = 0$

- ou 1; $\{i, \dots, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$; $\{i, \dots, j\} \neq \emptyset$) il est nécessaire et suffisant que
- F ait 2^{n-1} monômes canoniques
 - $F = \tilde{F}$ (c'est-à-dire que chaque composante connexe soit un cube).

Démonstration

- Condition nécessaire évidente.
- Condition suffisante : Récurrence sur la dimension de F .

$$F = x_1 f + \bar{x}_1 g$$

Puisque $F = \tilde{F}$, le nombre de monômes canoniques appartenant respectivement à $x_1 \cdot f$ et $\bar{x}_1 \cdot g$ est respectivement soit 0 et 2^{n-1} soit 2^{n-1} et 0, soit 2^{n-2} et 2^{n-2} (lemme 3).

Dans les deux premiers cas ($F = \bar{x}_1 = 1 \oplus x_1$; $F = x_1 = 0 \oplus x_1$) le lemme est démontré.

Par hypothèse de récurrence, on a dans le 3^e cas :

$$\begin{aligned} f &= a \oplus x_i \oplus \dots \oplus x_j & a &= 0 \text{ ou } 1 \\ g &= b \oplus x_k \oplus \dots \oplus x_l & b &= 0 \text{ ou } 1 \\ & & \{i \dots j\} &\subseteq \{2, \dots, n\} \\ & & \{k \dots l\} &\subseteq \{2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Soit $\underline{x}_i, \dots, \underline{x}_j$ des valeurs données aux variables x_i, \dots, x_j telles que $f = 1$.

On a alors $f = 1$ quelque soit la valeur de $x_m \notin \{x_i, \dots, x_j\}$. Et par suite, les composantes connexes de F étant des cubes, la valeur de la fonction g pour $x_i = \underline{x}_i, \dots, x_j = \underline{x}_j$ ne dépend pas de la valeur de $x_m, \forall x_m \notin \{x_i, \dots, x_j\}$. g étant une fonction linéaire ($g = b \oplus x_k \oplus \dots \oplus x_l$), g ne dépend pas de x_m .

On a donc $\{k \dots l\} \subseteq \{i \dots j\}$.

On montrerait de même que

$$\{i \dots j\} \subseteq \{k \dots l\}$$

D'où

$$\{i \dots j\} = \{k \dots l\}$$

On a donc $F = \alpha \oplus \beta x_1 \oplus x_i \oplus \dots \oplus x_j$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \text{ ou } 1 \\ \beta &= 0 \text{ ou } 1 \end{aligned} \quad \text{suivant les valeurs de } a \text{ et } b$$

5-3. Lemme 5

« Le graphe des distances (F) d'une fonction booléenne linéaire F et le graphe des distances (\bar{F}) de la fonction complémentaire \bar{F} caractérisent ensemble le type de cette fonction. »

Démonstration

Il suffit de remarquer que le type d'une fonction booléenne linéaire de n variables $F = a \oplus x_i \oplus \dots \oplus x_j$ est caractérisé par le couple $[n, p]$.

n : dimension de F

$p = |\{i, \dots, j\}| =$ nombre de variables dont dépend effectivement F .

$[(F), (\bar{F})]$ détermine n pour toute fonction booléenne,

(F) détermine p . ($n - p$ est la plus grande distance entre deux points d'une même composante connexe).

5-4. Théorème 3

« Le graphe de distances d'une fonction booléenne quelconque et le graphe des distances de la fonction complémentaire caractérisent ensemble le type de cette fonction. »

Démonstration (Théorème 2, Lemme 5).

En effet si F n'est pas une fonction linéaire, soit \tilde{F} soit $\bar{\tilde{F}}$ est connexe.

VI. CONCLUSION

La recherche de l'isomorphisme de graphes complets étiquetés semble plus facile que la recherche d'un grand nombre de permutations et complémentations.

Le problème de savoir si deux fonctions sont de même type (c'est-à-dire réalisables par le même circuit) peut donc être facilité par ces résultats.

D'autre part, le lien établi entre une notion géométrique (graphe des distances) et une notion algébrique (type) est peut-être intéressant sur le plan théorique.

Je tiens à remercier ici M. P. Liddell avec qui cette étude a été abordée et M. J. Kuntzmann pour ses nombreux conseils.

BIBLIOGRAPHIE

J. KUNTZMANN, *Algèbre de Boole*, éd. Dunod, 1968.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. AGRAWAL
"On Improving the Efficiency of Monte Carlo Test Generator"
5th Annual Int. Symposium on Fault. Tolerant Computing
pp 205.209 (1965)
- [2] L.W. BEINEKE
"On derived graphs and digraphs". Beiträge zur Graphentheorie (H. Sachs, H.J. Voss, H. Waßer, ed) Teubner, pp 17-23
(1968)
- [3] C. BERGE
"Graphes et Hypergraphes", Dunod, (1970) et (1973)
- [4] C. BERGE
"Perfect graphs" 6 papers on graph theorie. Indian Statistical Institute Calcutta (1963)
- [5] C. BERGE, M. LAS VERGNAS.
Sur un théorème du type König pour hypergraphes. Int. Conf. on combinatorial Mathematics (A. Gerwitz, L. Quintas, ed.) Annals New-York Ac. of Sc. 175, 32-40 (1970)
- [6] B. BOLLOBAS
On generalized graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 447-452
(1965)
- [7] R. L. BROOKS
On colouring the nodes of a network
Proc. Cambridge Phil. Soc. 37, 194-197 (1941)
- [8] G. CHARTRAND, J. MITCHEM
Graphical Theorems of the Nordhaus-Gaddum class, Recent trends in Graph Theory (lecture Notes in Mathematics, 186) Springer-Verlag (1971).

- [9] COCKAYNE, S.T. HEDETNIEMI
Disjoint independent dominating set in graphs. Discrete Math. (Juillet 1976)
- [10] A. EHRENFUCHT, J. MYCIELSKI (à paraître)
cite dans[28]
- [11] P. ERDOS
communication privée
- [12] P. ERDOS, T. GALLAI
On the minimal number of vertices representing the edges of a graph, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. (Mag. Tud. Akad) 6 181-203, (1961).
- [13] P. ERDOS, A. HAJNAL, J. MOON,
Mathematical Notes, Am. Math. Monthly 71, 1107-1110 (1964)
- [14] R. FORCADE
Smallest Maximal Matching in the graph of the d. dimensional cube. Journal of Combinatorial Theory (B) 14. 153-156 (1973)
- [15] A.D. FRIEDMAN, P.R. MENON
Fault Detection in Digital Circuits (p. 73) Prentice Hall Inc, N.J. 1971.
- [16] T. GALLAI
Über extreme Punkt. und Kantenmengen. Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math, 2 , 133-138 (1959)
- [17] B. GRUNBAUM
Communication privée
- [18] B. GRUNBAUM
Acyclic colorings of planar graphs. Israel Journal of Mathematics. Vol 14 n° 4 (1973)
- [19] B. GRUNBAUM
Matchings in Polytopal Graphs
Networks 4 175-190 (1974)

- [20] R.P. GUPTA
Independence and covering numbers of line graphs and total graphs. Proof Techniques in Graph Theory (F. Harary, ed.) Academic Press, New York (1969)
- [21] A. HAJNAL, J. SURANY
Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen. Ann. Univ. Sc. Budapestinensis, 1, 113. (1958)
- [22] F. HARARY
Graph Theory. Addison-Wesley. Reading. Massachusetts (1969)
- [23] J. HARIMANIS, R.E. STEARNS
Algebraic structure Theory of sequential Machines. Printice. Hall, Inc. (1966)
- [24] F.C. HENNIE
Finite-state Models for logical Machines, Wiley, New-York (1968)
- [25] E.P. HSIEH
Checking experiments for sequential Machines, IEEE Trans. on Comp. Vol C-20, n° 10, 1153-1166 (1971)
- [26] F. JAEGER
On vertex induced forest in cubic graphs.
5th southeasterne Conference on combinatorics graph Theory and computing. Boca Raton, 1974.
- [27] F. JAEGER
Etude de quelques invariants et problèmes d'existence en Théorie des graphes. Thèse Grenoble (1976)
- [28] G.O.H. KATONA
Solution of a Problem of A. Ehrenfeucht and J. Mycielski
J.C.T. (A) 17 265.266 (1974)
- [29] Z. KOHAVI
Switching and Finite Automata Theory Mc Graw Hill (1970)

- [30] J. KUNTZMANN
Algèbre de Boole. Dunod. Paris (1968)
- [31] J. KUNTZMANN
Théorie des réseaux, graphes. Dunod (1972)
- [32] J.M. LABORDE
Un développement algébrique de l'algorithme d'exclusion et
quelques problèmes géométriques en algèbre de Boole.
Thèse Grenoble (1977)
- [33] M. LAS VERGNAS
A note on matchings in graphs. Cahiers du C.E.R.O. volume 17
(1975)
- [34] D.R. LICK, A.T. WHITE
k-degenerate graphs
Canad Math. J.
- [35] L. LOVASZ
Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture.
Discrete Math. 2 (1972)
- [36] E.F. MOORE
Gedanken experiments on sequential machines, Automata Studies
n° 34, 129-153. Princeton University Press, Princeton, N.J.
(1956)
- [37] E.A. NORDHAUSS, J.W. GADDUM
On complementary graphs. Ann Math. Monthly. 63, 175-177, 1956
- [38] R.Z. NORMAN, M.O. RABIN
An algorithm for a minimum cover of a graph. Proc. Amer. Math.
Soc, 10, 315-319 (1959)
- [39] R.C. OGUS
The probability of a correct output from a combinatorial circuit.
4th Annual Int. Symposium on Fault-Tolerant Computing 13-19
(1974)

- [40] K.P. PARKER, E.J. Mc CLUSKEY
Analysis of Logic circuits with Faults Using Input signal Probabilities, 4th Annual Int. Symposium on Fault-Tolerant Computing, 8-12 (1974)
- [41] C. PAYAN avec A. BOUCHET
Synthèse des automates en fonctions croissantes
Immersion d'ordonnés. Séminaire de logique
Grenoble (1968)
- [42] C. PAYAN avec Y. HARRAND, F. ANCEAU, P. LIDDELL, J. MERMET
Cassandra. Conception assistée des ensembles logiques.
L'onde Electrique n° 502 (1969)
- [43] C. PAYAN
Description et synthèse des automates. Notion Dès que.
Colloque International Systemes logiques. Conception et Application Bruxelles (1969)
- [44] C. PAYAN avec F. ANCEAU, P. LIDDELL, J. MERMET
Cassandra. A language to describe digital systems. Application to logic design. 3rd. Int. Symposium on computer and Information Sciences. Miami (1969)
- [45] C. PAYAN avec F. ANCEAU, J. DOUSSY, P. LIDDELL, J. MERMET
Cassandra. Langage et Système. Institut de Math. Appli. Grenoble 1970
- [46] C. PAYAN
Algèbre séquentielle. Modèles non déterministes d'automates.
Journées nationales de Math. Appliquées à l'Informatique
AFCET Grenoble 21-24 Octobre 1970.
- [47] C. PAYAN avec F. JAEGER
Nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe τ -critique de rang h.
C.R. Acad. Sc. Paris t. 273 p 221-223. 26 Juillet 1971

- [48] C. PAYAN avec G. BOGO, A. GUYOT, A. LUX, J. MERMET
"Cassandra" and the computer aided logical systems design.
Congrès de l'IFIP 23-28 Août 1971
- [49] C. PAYAN
Type et graphe des distances d'une fonction booléenne
RAIRO RI 1972 3-14 janvier 1972
- [50] C. PAYAN avec F. JAEGER
Relations du type Nordhaus Gaddum pour le nombre d'absorption
d'un graphe simple
C.R. Acad. Sc. Paris T. 274 p. 728.730 28 février 1972.
- [51] C. PAYAN avec F. JAEGER
Relations entre certains nombres de couverture et nombres de
couplage dans l'étude des absorbants d'un graphe simple
Séminaire d'Algèbre Appliquée et Conception Grenoble 1972
- [52] C. PAYAN
Sur une classe de problèmes de couverture
C.R. Acad. Sc. Paris t 278 Série A 21 Janvier 1974
- [53] C. PAYAN
Problèmes de couvertures par des ensembles minimaux par une pro-
priété filtrante.
Journées de combinatoire. Toulouse 15-18 Mai 1974
- [54] C. PAYAN
Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple. Cahiers du
C.E.R.O. Vol. 17. n° 2.3.4. p 307 (1975)
- [55] C. PAYAN avec M. SAKAROVITCH
Ensembles cycliquement stables et graphes cubiques
Cahiers du C.E.R.O. Vol 17 n° 2.3.4. p 319 (1975)
- [56] C. PAYAN avec J. SIFAKIS
A Boolean Temporal Algebra and its Application to the simula-
tion of logical systems, Missouri Symposium on Advanced Auto-
mation. p. 11. 115 avril 1975

- [57] C. PAYAN avec J.M. AYACHE, J. SIFAKIS
 Models for the simulation of the Dynamic Functioning of
 Logic Systems, Simulation 75, Zurich. Juin 1975
- [58] C. PAYAN avec J. SIFAKIS
 A Problem of experimental Analysis of Finite State Automata.
 3rd International Seminar on the Applied Aspects of the Auto-
 mata Theory, Varna pp. 521. 535 Juin 1975
- [59] C. PAYAN avec J. SIFAKIS
 Sur les propriétés des séquences parcourant les arcs d'un gra-
 phe orienté. Etiqueté.
 Journées combinatoire et Informatique. Bordeaux Juin 1975
- [60] C. PAYAN avec J. SIFAKIS
 Sur les tests universels non adaptatifs des automates. Rapport
 Interne n° 17 ENSIMAG Octobre 1975
- [61] C. PAYAN avec J. SIFAKIS
 Universal preset tests of sequential circuits. 6th Int.
 Symposium on Fault Tolerant Computing
 Pittsburgh (USA) p. 75.79 1976
- [62] C. PAYAN
 Couplages maximaux disjoints
 Colloque International CNRS. Problèmes combinatoires et Thé-
 orie des Graphes. Orsay Juillet 1976
- [63] M. SAKAROVITCH
 Sur quelques problèmes d'optimisation combinatoire. Thèse
 Grenoble 1976
- [64] J.J. SHEDLETSKY
 A probabilistic Treatment of sequential circuits. Tech. Note.
 Stanford Univ. Digital System Lab, Février 1974.

- [65] E. STEINITZ
Polyeder und Raumeinteilungen.
Enzykl . Math. Wiss. Vol 3 (Geometrie) 1922
- [66] F. STERBOUL
L'hypergraphe des cycles d'un graphe.(communication privée)
- [67] R. TELLER-GIRON, R. DAVID.
Randon Fault Detection in Logical Networks. IFAC Symp. on Dis-
crete Systems, Vol. 2, 232-241 Riga 1974
- [68] V.G. VIZING
The cartesian product of graphs.
Vyc̃ Sis. 9 30.43 1963
- [69] V.G. VIZING
On an estimate of the chromatic class of a p. graph
Diskret. Analiz 25.30 1964
- [70] V.G. VIZING
A bound on the external stability number of a graph.
Doklady A.N. 164 729.731 1965