



**HAL**  
open science

# Etude de la dynamique déterministe à court terme des modèles macroéconomiques : application au modèle STAR

Bruno A. Oudet

► **To cite this version:**

Bruno A. Oudet. Etude de la dynamique déterministe à court terme des modèles macroéconomiques : application au modèle STAR. Modélisation et simulation. Université Paris Dauphine - Paris IX, 1976. tel-00285862v3

**HAL Id: tel-00285862**

**<https://theses.hal.science/tel-00285862v3>**

Submitted on 10 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE PARIS IX

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES ECONOMIQUES

ETUDE DE LA DYNAMIQUE DETERMINISTE  
A COURT TERME DES MODELES MACROECONOMIQUES :  
APPLICATION AU MODELE STAR

Bruno A. OUDET



La Faculté n'entend donner ni  
approbation ni improbation aux  
opinions émises dans cette thèse.

Ces opinions doivent être considérées  
comme propres à l'auteur.





*Qu'il me soit permis de remercier*

Monsieur E. MALINVAUD, Directeur de l'I.N.S.E.E., qui a encouragé les premiers pas de notre équipe de recherche. Il m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur P.M. LARNAC, Professeur à l'Université Paris IX, qui m'a aidé à trouver une ligne directrice dans ces recherches empiriques. Par ses encouragements et ses preuves d'amitié, il m'a permis de mener à bien cette étude.

Messieurs A. BENSOUSSAN et B. PIGANIOL, Professeurs à l'Université Paris IX, qui ont bien voulu juger mon travail.

*J'ai bénéficié tout au long de cette recherche d'aides nombreuses.*

Messieurs B. ANDRIGHETTO, J.P. GUERIN, B. LAMRANI, P. MARQUIS ont participé avec moi à l'étude de l'apport de l'automatique en macroéconomie, menée dans le cadre de l'Action Thématique Programmée "Automatique" du Centre National de la Recherche Scientifique. J'ai eu la chance de bénéficier de leurs suggestions dans un domaine qui m'était étranger.

Messieurs J. BOULLE, R. BOYER, J. MAZIER, G. OLIVE, alors Membres du Groupe de Recherche Macroéconomique, m'ont fait connaître STAR ; ils ont toujours participé activement à nos discussions.

Messieurs M. DELEAU et P. MALGRANGE du C.E.P.R.E.M.A.P. m'ont fait partagé leur expérience d'étude de modèles. Ils sont mes maîtres en ce domaine.

Madame M.J. DOREL a su frayer son chemin dans mes notes, tout en gardant sa bonne humeur.

*Qu'ils trouvent chacun ici l'expression de ma gratitude. Je tiens enfin à remercier le Centre National de la Recherche Scientifique, l'U.E.R. Informatique et Mathématiques en Sciences Sociales et le Laboratoire d'Informatique de Grenoble qui ont financé cette recherche.*



... Que la recherche ... ne semble pas le fait d'un désir d'ingéniosité à tout prix, mais qu'il apparaisse que ce sont précisément les insuffisances des formes actuelles qui nous ont engagés à suivre cette méthode.

*Aristote, Politique II*

à Anne et Sophie,

à mes parents,







Introduction

TITRE I - ETUDE DE LA DYNAMIQUE DETERMINISTE A COURT TERME PAR LA  
COMMANDE OPTIMALE

Chapitre 1 - Limites et avantages des calculs d'optimisation sur les modèles macroéconomiques	
1 - Optimisation sur des modèles macroéconomiques objet de la politique économique quantitative -----	I.1.2
2 - Points faibles des modèles actuels pour les calculs de politique économique optimale -----	I.1.5
3 - Les difficultés de détermination de la fonction objectif -----	I.1.8
4 - La simulation de la commande outil d'analyse de la dynamique à court terme des modèles macroéconomiques	I.1.15
Chapitre 2 - Les représentations des modèles linéaires en Automatique et en Economie	
1 - Aperçu des développements des techniques de contrôle des systèmes -----	I.2.1
2 - Les différentes représentations des modèles économé- triques -----	I.2.10
3 - Liens et passages des modèles économétriques à la représentation d'état -----	I.2.14
Chapitre 3 - Les applications de commande des modèles macroéco- nomiques	
1 - Commandes calculées sur des modèles non-linéaires --	I.3.2
2 - Commandes calculées sur les modèles linéaires -----	I.3.6
Chapitre 4 - Le schéma de commande de STAR	
1 - Les éléments du schéma -----	I.4.2
2 - Le schéma de commande -----	I.4.11
3 - Trois enrichissements possibles du schéma -----	I.4.15



TITRE II - LE MODELE STAR ET SON APPROXIMATION LINEAIRE EN VARIABLES D'ETAT  
STARTER

Chapitre 1 - Le modèle STAR "Schéma Théorique d'Accumulation et de Répartition"

- 1 - Les hypothèses économiques retenues dans STAR ----- II.1.1
- 2 - La structure mathématique du modèle STAR ----- II.1.11
- 3 - Les variables d'état, de sortie et de commande du modèle STAR ----- II.1.21

Chapitre 2 - Détermination de l'approximation linéaire en variables d'état

- 1 - L'approche retenue : calcul des relations dynamiques implicites dans le modèle ----- II.2.2
- 2 - Etude du domaine de validité de l'approximation linéaire ----- II.2.7
- 3 - Détermination de STARTER par les moindres carrés --- II.2.17

TITRE III - ETUDE DE LA DYNAMIQUE DE STAR

Chapitre 1 - Etude des propriétés dynamiques de STAR à partir de STARTER

- 1 - Le constat et les origines de l'instabilité de STAR - III.1.2
- 2 - Classement des états initiaux divergents ----- III.1.15
- 3 - L'action des variables de commande sur l'évolution propre ----- III.1.20

Chapitre 2 - Etude de la commandabilité par des simulations contrôlées

- 1 - Trajectoire de croissance plus élevée ----- III.2.2
- 2 - Trajectoire avec une balance commerciale équilibrée - III.2.11
- 3 - Trajectoire de croissance plus élevée sans augmentation du déficit de la balance commerciale ----- III.2.20
- 4 - Trajectoire avec une croissance plus élevée et une balance commerciale équilibrée ----- III.2.25

Conclusion

Bibliographie

Annexe I

Annexe II





STAR - Schéma Théorique d'Accumulation et de Répartition - est le troisième modèle annuel, après ZOGOL et DECA, de la Direction de la Prévision du Ministère des Finances. Il est utilisé, lors de la préparation des budgets économiques, pour construire des scénarios, appelés variantes, d'évolutions possibles de l'économie française sur trois ans. C'est un modèle non-linéaire de taille déjà importante : son bloc central comprend près de quatre-vingts équations.

L'objet de cette thèse est de proposer, puis d'appliquer à STAR une démarche d'étude de la dynamique déterministe - les termes constants et les coefficients des équations sont supposés égaux à leurs espérances mathématiques - à court terme des modèles non-linéaires.

Par étude de la dynamique, nous entendons l'étude de la stabilité et de la commandabilité.

La propriété de stabilité, bien connue en économie, caractérise l'évolution propre du modèle qui résulte des conditions initiales pour des valeurs nulles des variables exogènes sur la période. Le modèle est dit instable, si un écart des conditions initiales de référence entraîne un écart croissant de la trajectoire ultérieure.

La propriété de commandabilité n'était envisagée, jusqu'à une date récente, que par les automaticiens - mis à part les ouvrages d'avant-garde de J. Tinbergen. Elle concerne la modification de l'évolution propre par l'action des instruments. Un modèle en automatique est dit commandable si par l'action des instruments, en un temps fini, il est possible de passer d'une solution initiale à une solution cible. L'étude de la commandabilité comprend dans cette thèse non seulement la vérification de la propriété ainsi définie, mais aussi le calcul des valeurs des instruments permettant d'approcher au mieux une trajectoire cible. Elle inclut en d'autres termes des résolutions inverses du modèle, les valeurs des variables instruments étant les inconnues, celles des variables objectifs les données. Ces résolutions doivent compléter le constat de commandabilité ; en effet, les actions nécessaires pour se rapprocher de la trajectoire cible peuvent être totalement irréalistes (dépenses de l'Etat négatives par exemple). Le

calcul de ces actions indique alors la non-commandabilité "pratique" du modèle et apporte des éléments de connaissance du comportement dynamique du modèle.

L'étude de ces deux propriétés directement sur le modèle non-linéaire est difficile. Les critères généraux font défaut ; les programmes d'optimisation pour modèles non-linéaires de grande taille sont encore peu répandus ; ils sont coûteux en temps d'ordinateur, ce qui limite le nombre de calcul de résolutions inverses. Les auteurs renoncent habituellement à une étude approfondie de la dynamique de ces modèles et se contentent de l'interprétation de quelques variantes et des évolutions des multiplicateurs dynamiques.

L'étude de la dynamique est, en revanche, facile localement autour d'une trajectoire de référence sur une version linéarisée du modèle ; les critères de stabilité et de commandabilité des modèles linéaires sont alors applicables. L'étude la plus connue sur un modèle linéarisé a été réalisée par A.S. Golberger sur le modèle Klein-Golberger dès 1959.

Notre démarche s'en différencie d'abord par les questions traitées : stabilité et commandabilité dans le court terme. L'étude de la propriété de stabilité dans le court terme oblige à aller plus loin que le simple calcul des valeurs propres. En effet, sur cet horizon l'évolution des solutions dépend à la fois des valeurs propres et des conditions initiales ; une valeur propre, source d'instabilité dans le long terme, peut, en raison des conditions initiales, n'avoir qu'une faible influence sur le comportement à court terme du modèle. Le calcul des valeurs propres doit donc être complété par une étude des conditions initiales susceptibles d'entraîner une divergence du modèle sur un horizon court. L'accent mis sur le court terme résulte de préoccupations des utilisateurs de STAR qui limitent à cet horizon, à l'heure actuelle, les prévisions ou les variantes établies à l'aide des modèles.

Notre démarche se distingue aussi par l'utilisation des apports de l'automatique en ce domaine. Le modèle linéarisé est un modèle en variables d'état qui a l'avantage d'isoler les relations dynamiques du modèle facilitant ainsi l'analyse de celles-ci. Les résolutions inverses sont obtenues par

application du schéma de commande linéaire quadratique : les solutions sont celles d'un problème d'optimisation avec contraintes linéaires et fonction objectif quadratique.

La démarche se décompose en cinq étapes :

- \* La liste des variables d'état, des instruments et des objectifs est d'abord établie par examen des équations du modèle linéaire.

- \* L'étendue du domaine de validité du modèle linéaire autour de la trajectoire centrale est ensuite appréciée. A cette étape, la constatation d'erreurs trop importantes dues à l'utilisation de l'approximation linéaire peut conduire à arrêter là l'étude, les conclusions tirées de l'analyse n'étant valables que très localement, et donc insuffisamment générales pour présenter de l'intérêt.

- \* La, ou les représentations d'état (une pour chaque point de la trajectoire) linéaires implicites dans le modèle non-linéaire sont estimées par les moindres carrés dans l'étape suivante. Ces étapes sont des préalables à l'étude de la dynamique.

- \* Dans la quatrième étape, les critères de stabilité et de commandabilité sont appliqués au modèle linéaire en variables d'état ; les résultats sont alors expliqués par l'examen d'une version simplifiée de ce modèle où seules sont conservées les relations dynamiques "importantes".

- \* Les résolutions inverses sont effectuées dans la dernière étape sur le modèle linéaire. Les valeurs des instruments sont dans ce schéma (modèle linéaire, fonction objectif quadratique) des fonctions linéaires des états. Ces fonctions servent alors à calculer les valeurs des instruments appliqués dans des simulations sur le modèle non-linéaire. Les résultats de ces simulations sont des trajectoires proches des trajectoires cibles. Elles sont appelées "simulations contrôlées" pour les différencier des trajectoires obtenues par un jeu de simulation d'essais et d'erreurs. Ce calcul en deux étapes des instruments a l'avantage d'être peu coûteux en temps d'ordinateur par rapport au calcul direct sur le modèle non-linéaire : les erreurs dues à l'approximation ne suffisent pas à l'invalider.

Les développements de cette thèse sont répartis en trois titres.

Le Titre I présente et justifie notre démarche.

Dans le premier chapitre, nous justifions l'emploi, pour l'étude de la dynamique des modèles, et non pour la détermination de la politique économique optimale, de calculs d'optimisation donnant la suite des solutions inverses.

Nous présentons dans le chapitre 2 les deux catégories de modèle utilisées pour le calcul de la commande en automatique : modèle entrées-sorties, modèle en variables d'état. Nous exposons le passage des formes des modèles économiques à la représentation d'état retenue dans cette étude.

Le chapitre 3 présente l'historique des calculs d'optimisation et des applications de la commande aux modèles macroéconomiques.

Le chapitre 4 décrit le schéma de commande résultant dans les solutions inverses et les simulations de ces solutions. Les questions de stabilité dans le court terme et commandabilité des modèles en variables d'état y sont exposées.

Le modèle STAR et la détermination de son approximation linéaire en variables d'état font l'objet du Titre II.

Le chapitre 1 de ce titre présente les principales hypothèses économiques ainsi que leurs traductions en équations de STAR, la structure mathématique du modèle (nombre d'équations, non-linéarités) et enfin la liste des variables d'état et de commande du modèle.

Le chapitre 2 décrit l'exploration du domaine de validité de l'approximation linéaire et la détermination du modèle linéaire par la méthode des moindres carrés.

Le Titre III contient l'analyse de la dynamique à court terme de STAR.

Par application des critères sur le modèle linéaire, nous constatons dans le chapitre 1 que STAR est instable mais "théoriquement" commandable. Par l'examen des coefficients importants du même modèle et par leur interprétation à partir des coefficients des équations de STAR, nous allons plus loin que le constat de ces deux propriétés : nous localisons les états susceptibles d'entraîner la divergence à court terme du modèle, ainsi que les variables de commande ayant une faible influence sur l'évolution propre.

Le chapitre 2 présente quatre scénarios d'évolution du modèle générés par le schéma de commande. Nous observons que les valeurs des instruments conduisant à une trajectoire avec plus de croissance et une balance commerciale équilibrée sont inapplicables dans la réalité ; le modèle est "pratiquement" non-commandable.

L'ensemble des résultats des calculs effectués sur STAR montre que son comportement autour d'une trajectoire sur une période de trois ans est remarquablement bien décrit par un modèle linéaire à coefficients constants. Or, ces conditions sont précisément celles de l'utilisation de STAR par l'administration dans l'élaboration des budgets économiques. L'application de notre démarche apporte donc aux utilisateurs du modèle des éléments intéressants sur sa dynamique ; de plus, le schéma de commande proposé est directement applicable pour générer les variantes.





T I T R E I

ETUDE DE LA DYNAMIQUE DETERMINISTE  
A COURT TERME PAR LA COMMANDE OPTIMALE



STAR a été construit pour être employé sur un horizon court. Son objectif est en effet "de construire sur deux ou trois ans une série d'équilibres dynamiques montrant les conséquences à terme des fluctuations immédiates" [7]<sup>1</sup>. Il ne se différencie pas en cela de la plupart des modèles macroéconomiques utilisés actuellement lors de l'élaboration des prévisions. L'étude de la dynamique à court terme correspond donc à l'usage qui est fait de ces modèles.

La démarche proposée pour l'étude de la dynamique fait un large emploi de techniques utilisées en automatique pour l'étude et le contrôle de systèmes dynamiques. Le mot commande optimale de l'intitulé de ce titre est emprunté à cette discipline. Il désigne ici l'ensemble des valeurs des variables instruments, ou de commandes, qui, appliquées au modèle, permettent d'obtenir la trajectoire la plus proche possible, au sens de minimisation des carrés des écarts, de la trajectoire cible. Dans le vocabulaire de J. Tinbergen [77],[78], le calcul des commandes correspond à des résolutions inverses du modèle : les valeurs des instruments sont les inconnues de la résolution (et non les données), les valeurs des objectifs les données (et non les inconnues). Dans des cas particuliers, les commandes permettent d'atteindre exactement la cible ; elles sont les solutions d'un système d'équation donné par le modèle. Mais le plus généralement, la trajectoire cible ne peut-être qu'approchée ; les commandes sont les solutions d'un problème d'optimisation pour une fonction objectif pénalisant tout écart entre la trajectoire réelle et la trajectoire cible.

Les expériences de résolutions de problèmes d'optimisation sur des modèles macroéconomiques se sont multipliées dans un passé récent. Elles poursuivent un but différent du nôtre : calcul et étude de politiques économiques optimales. Les raisons qui nous ont conduits à retenir pour objectif l'étude de la dynamique à court terme font l'objet du chapitre 1. Cet objectif guide notre choix, décrit dans le chapitre 2, pour le calcul des commandes, de l'approximation linéaire des relations d'état de préférence à celle des relations objectifs-instruments. Le chapitre 3 fait l'historique des expériences d'application de la commande aux modèles macroéconomiques. Le schéma de commande qui sert de base à l'étude de la dynamique est présenté dans le chapitre 4.

---

1. Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie de la fin de la thèse.



## CHAPITRE 1

### LIMITES ET AVANTAGES DES CALCULS D'OPTIMISATION SUR LES MODELES MACROECONOMIQUES

Dès les premiers travaux de modélisation en économie, Frisch et J. Tinbergen ont envisagé le calcul de politiques économiques optimales. Depuis, l'avancement des recherches, à la fois sur les modèles et la fonction objectif de l'Etat, ne justifie pas encore, selon nous, de considérer les calculs d'optimisation comme un moyen privilégié de détermination de la politique économique. L'apport original de la commande est autre : la connaissance du comportement à court terme du modèle. L'argumentation de ces idées fait l'objet de ce chapitre.

Le premier auteur à traiter complètement de l'optimisation sur les modèles économiques est J. Tinbergen. La section 1 présente sa contribution dans ce domaine et pose sur cette base la question de l'apport de l'optimisation. La section 2 traite des limites imposées par l'état actuel des modèles macroéconomiques de court terme<sup>1</sup>.

Ces modèles sont appréciés du point de vue du calcul de politiques économiques optimales. Trois points faibles sont mis en évidence : absence de modélisation de la relation entre les variables instruments dont dispose effectivement le décideur et les variables du modèle, modifications du modèle par l'utilisateur lors de l'élaboration des prévisions et enfin qualité de celles-ci. La section 3 envisage la détermination de la fonction objectif. Cette question complexe est étudiée dans le cas le plus simple d'un décideur unique. Trois niveaux sont distingués : détermination de la forme mathématique de la fonction, choix des variables de la fonction et évaluation des coefficients de pondération. La section 4 explicite l'apport de l'optimisation retenu dans cette thèse.

---

1. Le qualificatif de court terme est utilisé pour désigner des modèles qui, comme STAR, ont pour objet de décrire sur deux ou trois ans l'évolution de l'activité économique. Modèle de court terme s'oppose ainsi à modèle de croissance.

Section 1 - OPTIMISATION SUR DES MODELES MACROECONOMIQUES OBJET  
DE LA POLITIQUE ECONOMIQUE QUANTITATIVE

La première analyse complète de l'optimisation sur des modèles macro-économiques est attribuée le plus souvent à J. Tinbergen [77],[78]<sup>1</sup>. L'apport de J. Tinbergen ne se limite pas, comme on le croit généralement, à la définition de variables objectifs et instruments et aux conditions d'existence de solutions au problème d'optimisation statique. J. Tinbergen définit le contenu de la théorie de la politique économique quantitative et mentionne la plupart des obstacles rencontrés dans le calcul de la politique économique optimale.

1.1. Le vocabulaire de J. Tinbergen et sa correspondance avec celui de l'automatique

Les économètres distinguent deux catégories de variable dans les modèles statiques : variables exogènes et variables endogènes. Les variables exogènes sont les données et les variables endogènes les inconnues du système d'équation. Une autre catégorie de variables est introduite dans les modèles dynamiques : celle des variables prédéterminées qui regroupent, outre les variables exogènes et les variables exogènes décalées, les variables endogènes décalées. Le modèle dynamique écrit les inconnues, les variables endogènes non décalées, comme fonction des variables prédéterminées.

Parmi les variables exogènes, certaines sont des outils de la politique économique. J. Tinbergen les appelle *variables instruments*. Dans les variables endogènes, figurent les variables que la politique économique cherche à influencer. J. Tinbergen les nomme *variables objectifs*<sup>2</sup>. Ces variables correspondent aux entrées commandables et aux sorties du langage de l'automatique. Les *entrées*<sup>3</sup> sont les actions de l'extérieur sur le système. Elles sont constituées d'*entrées commandables*, les variables instruments,

- 
1. Voir sur ce point H. Theil [73] et D.A. Livesey [50] - Congrès économétrie.
  2. Le choix de ces variables est d'ailleurs difficile ; J. Tinbergen en fait une composante de la théorie de la politique économique quantitative.
  3. Les termes de l'automatique sont soulignés lorsqu'ils sont cités pour la première fois.

de perturbations mesurables, les variables exogènes non commandables, et de perturbations non mesurables, variables d'écart<sup>1</sup> ou résidus. Les sorties sont les actions mesurables du système sur l'extérieur qui intéressent le décideur. La Figure 1 résume la correspondance entre les vocabulaires de J. Tinbergen, de l'économétrie (écrite entre parenthèses) et de l'automatique. L'influence des variables endogènes décalées n'y figure pas : en effet, pour des valeurs initiales de ces variables, l'évolution est déterminée par les seules entrées.

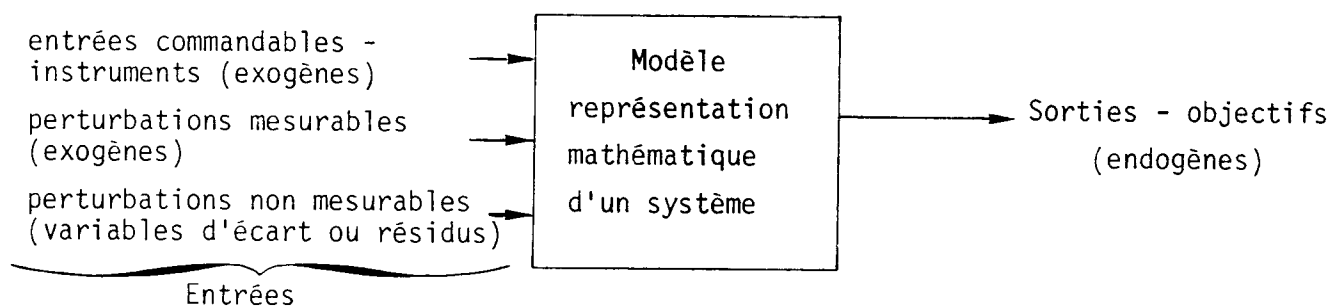


Figure 1 - Les variables d'un modèle économique

### 1.2. Théorie de la politique économique quantitative

Le calcul de la politique économique optimale consiste à résoudre le "problème inverse" : détermination des valeurs instruments qui permettent d'atteindre les valeurs cibles des variables objectifs ou *consignes*.

J. Tinbergen détermine les conditions d'existence de la solution ou *conditions de commandabilité* pour un modèle statique linéaire.

Le calcul en lui-même n'est qu'une partie de ce qu'il définit dans [77] comme la théorie de l'économie politique quantitative. Il doit être précédé de la détermination d'indicateurs de préférence de la collectivité, de la déduction de ces indicateurs de cibles de la politique économique, et enfin du choix des instruments de la politique économique. Le calcul, de plus, doit être complété par une appréciation de la validité des résultats.

---

1. Le terme variables d'écart est particulier à l'administration française. Il désigne les variables introduites dans les équations pour modifier leurs termes constants ; elles correspondent donc aux résidus.



J. Tinbergen présente donc une analyse complète de la détermination de la politique optimale à partir d'un modèle. Il souligne que son exemple de cible fixe n'est qu'une simplification. Dans le cas complet, la cible est "flexible" : elle est déterminée lors de la résolution du problème de maximisation de la fonction de bien-être. Ce n'est que l'incertitude sur cette fonction qui conduit J. Tinbergen à proposer l'adoption d'une fonction objectif donnée comme point de départ de la théorie de la politique économique quantitative.

J. Tinbergen voit trois avantages dans le calcul de politiques économiques sur des modèles. Le calcul met en évidence l'interdépendance des différentes composantes de la politique (par exemple, la politique fiscale ne peut être envisagée indépendamment de la politique monétaire). Il permet aussi de détecter les incohérences possibles des objectifs. C'est d'ailleurs pour attirer l'attention sur les incohérences des objectifs des hommes politiques des Pays Bas, au lendemain de la deuxième guerre, que J. Tinbergen avait été conduit à développer son analyse. Enfin, le calcul permet de déterminer la politique optimale pour se rapprocher ou atteindre les cibles désirées.

La fonction objectif retenue pour STAR correspond à la version dynamique<sup>1</sup> du problème de calcul de la politique économique une fois fixée la cible. La question se pose alors de la valeur du troisième avantage cité par cet auteur. En d'autres termes, la commande calculée est-elle optimale pour la trajectoire cible, c'est-à-dire est-il possible, appliquant cette commande sur le système économique réel, de se rapprocher au mieux de cette trajectoire ? Répondre à cette question implique une appréciation de la validité des modèles macroéconomiques actuels.

---

1. Il faut noter que J. Tinbergen mentionne que la détermination de la politique économique est un problème d'optimisation dynamique. Il se limite à l'optimisation statique uniquement en raison de l'état des connaissances de l'époque.

Section 2 - POINTS FAIBLES DES MODELES ACTUELS POUR LES CALCULS  
DE POLITIQUE ECONOMIQUE OPTIMALE

Il n'est pas possible de dresser une liste exhaustive des qualités que requièrent les modèles macroéconomiques pour les calculs de politique économique optimale. Ces conditions sont fonction à la fois de l'approche retenue et du cas particulier étudié<sup>1</sup>. Nous ne mentionnons ici que trois points importants.

**2.1. Les modèles décrivent mal la relation dynamique entre les instruments et les objectifs de la politique économique**

Le modèle doit d'abord contenir les variables instruments et objectifs de la politique économique. Si, par exemple, l'objectif est de réduire l'éventail des salaires, le modèle doit contenir une (ou plusieurs) variable endogène indicative de l'état de la distribution des revenus. Si l'instrument est la politique budgétaire, les différentes composantes du budget doivent être incluses comme variables exogènes. Ces deux exemples suffisent à montrer que les modèles macroéconomiques actuels ne remplissent pas cette condition<sup>2</sup>.

Même si l'on suppose ces variables incluses dans le modèle, il faut encore que la relation dynamique soit correctement spécifiée : délai, ou *retard pur*, entre le vote du budget et les dépenses effectives de l'administration, délai entre la fixation des taux d'imposition et les impôts perçus ...

- 
1. Ainsi par exemple dans le cas de STAR et du schéma de commande retenu, les variables devraient être en francs constants (voir sur ce point Chapitre 2 du Titre III).
  2. De nombreux autres exemples peuvent être cités : coefficients de réserve dans le cas de la politique monétaire, taux d'intérêt des caisses d'épargne, taux d'intervention de la Banque de France. Il faut noter les recherches actuelles pour incorporer ces variables dans les modèles. Ainsi, l'étude en cours du G.R.M. pour reformuler STAR en ajoutant les équations du modèle de A. Coutière [21] qui décrit précisément le lien entre ces instruments et la masse monétaire.

## 2.2. Les prévisions sont les solutions d'un modèle modifié

Les prévisions établies à partir des modèles ne sont pas, à l'heure actuelle, obtenues directement par solution du modèle original pour des valeurs prévues des variables exogènes. Le prévisionniste joue un rôle actif qui va plus loin que la formulation d'hypothèses sur l'évolution des variables exogènes. Il apprécie la vraisemblance des solutions données par le modèle, ce qui le conduit à calculer de nouvelles solutions après en avoir modifié les coefficients<sup>1</sup>. Ces étapes sont répétées jusqu'à l'obtention de résultats qu'il juge satisfaisants.

A cette pratique correspond un calcul itératif de la commande : calcul de la commande, appréciation des résultats, reformulation du modèle. L'avantage des calculs d'optimisation est alors moins évident car ils sont lourds. Il semble préférable de se limiter à la détermination des commandes par simulations : choix de séries de commande, calcul des solutions, formulation d'un autre choix de commandes.

## 2.3. Les erreurs des prévisions établies à partir de modèles sont importantes

Pour permettre le calcul de politiques économiques optimales, le modèle doit donner des prévisions "correctes". Ce qualificatif est laissé vague à dessein. Les erreurs de prévisions ne sont d'abord pas constantes ; elles varient suivant la situation envisagée. Un modèle peut bien prévoir une évolution, moins bien une autre. Le modèle peut de plus donner de mauvaises prévisions mais permettre un calcul de bonnes commandes<sup>2</sup>. Il est possible en effet d'élaborer une commande compensant les erreurs de modélisation et les perturbations non mesurables. C'est le cas de la commande en boucle fermée définie dans le chapitre suivant et retenue dans cette thèse : l'effet cumulatif des erreurs de prévision ne conduit pas à une détérioration progressive de la commande, celle-ci étant constamment recalculée en fonction de l'état réel de l'économie.

---

1. Ce point est bien souligné par P.J. Verdoon [80]. Les modifications portent le plus souvent sur les termes constants des équations, plus rarement sur les coefficients des variables.

2. Bonnes au sens de réduction de la valeur du critère à minimiser (par rapport à l'évolution libre sans commande).

S'il n'est pas possible de définir la précision nécessaire des prévisions, les résultats des études sur l'historique des erreurs des prévisions établies à partir de modèles laissent à penser que les calculs de politiques économiques optimales sont encore prématurés. L'étude la plus récente de Y. Haitovsky, G. Treyz et V. Su [36] compare les résultats des prévisions obtenues par les modèles de l' "Office of Business Economics", de la "Wharton School" et par les modèles "naïfs" de projection de tendance. Dans l'hypothèse la plus favorable d'utilisation<sup>1</sup>, les prévisions des deux modèles ne sont pas nettement supérieures à celles du modèle naïf "sans changement". Si le P.N.B. en volume et en valeur est mieux prévu par le modèle complet, ce n'est pas le cas du niveau de l'emploi. Les auteurs concluent ainsi leur étude : "De ces résultats, il nous est difficile de recommander aux hommes politiques de se baser sur les prévisions des modèles".

Ces trois remarques mettent en évidence les limites des modèles actuels pour le calcul d'une politique économique optimale. Les auteurs d'applications sont conscients de ces limites. R.S. Pindyck [62] par exemple réalise une étude de la sensibilité de la commande aux variations des paramètres du modèle. Il constate qu'une faible variation d'un coefficient résulte dans une grande variation de la commande et de l'évolution du modèle. Il en conclut que l'on peut douter de l'utilité de son modèle pour la détermination de la politique économique. R.S. Holbrook [38] souligne aussi la limite des modèles :

*"Lorsque les modèles sont utilisés pour des simulations en dehors de la période d'estimation, ils sortent de la "piste" rapidement ... Pour cette raison l'homme politique ne basera jamais sa décision uniquement sur la commande optimale d'un modèle. Il prendra plutôt le résultat du contrôle comme des indications, notant leur signe et leur ordre de grandeur ...".*

---

1. Elle tient compte des ajustements effectivement réalisés pour les prévisions passées (voir le paragraphe 2.2).

### Section 3 - LES DIFFICULTES DE DETERMINATION DE LA FONCTION OBJECTIF

L'interprétation des résultats du calcul d'optimisation doit donc tenir compte des limites actuelles des modèles macroéconomiques. La relation entre les objectifs et les instruments, implicite dans le modèle macroéconomique, ne constitue qu'une partie du modèle d'optimisation, l'autre étant la fonction objectif. La construction de ces deux éléments est indissociable : les variables de la fonction objectif doivent être incluses dans le modèle. Il est inutile de rechercher une grande précision dans ce dernier si la fonction n'est déterminée que très approximativement.

Les premières études de la fonction objectif sont dues à Frisch<sup>1</sup>. En France, des recherches sur la fonction de préférence de l'Etat sont dues à J. Bénard et G. Terny [5], J.P. Lafargue, A. Morineau, M. Trévoux [46], G. Terny [72], et R. Guesnerie et P. Malgrange [35].

Les efforts consacrés à ces recherches restent dans l'ensemble limités. L. Johansen dans son essai sur les travaux de Frisch fait la constatation suivante :

*"Beaucoup d'économistes travaillant sur la théorie et les méthodes de planifications sont en accord avec Frisch car ils mettent l'accent sur l'approche de l'optimisation. Il apparaît cependant qu'un petit nombre seulement se sont posés la question d'établir une fonction de préférence".*

La fonction de préférence reste encore la composante la plus problématique du modèle d'optimisation.

La présentation complète de l'état de la question dépasse le cadre de cette thèse. Nous nous limitons, ici, à l'hypothèse la plus simple du décideur unique ; nous nous bornons à donner quelques indications sur les questions à résoudre lors de l'établissement d'une fonction objectif : choix des variables, forme mathématique, pondération des variables. Le but poursuivi est de mettre en évidence la part d'arbitraire présente dans ces fonctions et ainsi justifier la conception de la fonction retenue dans cette thèse<sup>2</sup>.

- 
1. Voir L. Johansen [43] pour une bibliographie complète sur les travaux de Frisch et d'autres auteurs dans ce domaine.
  2. Elle est considérée comme une norme (voir Chapitre 4 de ce Titre).

### 3.1. Choix des variables

Soit  $Q(t)$  la valeur de la fonction objectif à l'instant  $t$ . La politique optimale est celle qui maximise  $J$

$$(3.1) \quad J = \sum_{t=0}^T Q(t)$$

avec  $T$  l'horizon de la commande. Trois catégories de variables interviennent dans  $Q(t)$ . La première regroupe les variables flux qui déterminent à chaque période le niveau de bien-être (ex : consommation, revenu des ménages). La deuxième comprend les variables stocks qui assurent le maintien de la capacité productive de l'économie à l'horizon  $T$  (ex : stock de capital, endettement vis-à-vis de l'extérieur). Les variables de la troisième catégorie n'interviennent pas explicitement dans la détermination du bien-être. Elles sont introduites dans la fonction objectif pour tenir compte de contraintes ou de relations qui n'ont pas été incorporées dans le modèle. L'exemple de la fonction choisie par C. Holt illustre cette utilisation [41].

$$(3.2) \quad Q(t) = (Y(t) - Y^D(t))^2 + g(G(t) - G^D(t))^2 + r(Y(t) - Y^D(t))(G(t) - G^D(t))$$

où  $Y(t)$  revenu réel nation net,  $Y^D(t)$  le revenu désiré  
 $G(t)$  dépenses gouvernementales.

C. Holt justifie ainsi le premier terme de  $Q(t)$  :

*"Le premier terme indique que la désutilité augmente si le revenu national (égal à la demande totale) est au-dessus ou au-dessous du niveau désiré. Une demande supérieure résulte dans une inflation non désirée alors qu'une demande inférieure résulte dans un chômage non désiré".*

Les variables taux d'inflation et taux de chômage et leurs relations avec le niveau de demande n'apparaissent pas dans le modèle. C. Holt formule alors une fonction objectif qui prend en compte ces relations et ces variables.

L'emploi de variables de cette catégorie est courant ; est-il justifié ? La fonction objectif étant utilisée avec un modèle, les variables de la fonction peuvent le compléter. Ce point de vue est soutenu par J. Bray [9] qui distingue les objectifs premiers (ex : consommation) et les objectifs secondaires (qui permettent de réaliser les objectifs premiers). La fonction objectif peut contenir des objectifs secondaires

---

1. Le premier chiffre entre parenthèses renvoie à la section, le second au numéro de l'équation à l'intérieur de la section.

dans la mesure où la relation les liant aux objectifs premiers n'est pas explicite dans le modèle.

D.A. Livesey [49] soutient l'opposé : il faut rendre explicite, dans le modèle la relation formulée par C. Holt et ne pas compliquer la fonction objectif. En effet, le choix des pondérations des objectifs de la fonction est suffisamment difficile pour ne pas poser celui de variables qui ne sont pas des objectifs véritables.

La question de l'inclusion de variables de la troisième catégorie n'est qu'un des aspects du choix de la fonction objectif. Dans les applications décrites dans le Chapitre 3, ce choix est généralement simple (le modèle est petit et les variables candidates peu nombreuses) ou est fait arbitrairement. R. Guesnerie et P. Malgrange [35] sont, semble-t-il, les seuls à envisager complètement ce choix. Parmi les 2000 variables du modèle, ils en retiennent une vingtaine sur la base de lectures de documents officiels et d'interviews d'experts. Ils concluent que certains objectifs ne peuvent pas être inclus dans la fonction parce qu'ils sont difficilement quantifiables ou parce qu'ils n'apparaissent pas dans le modèle. Ils remarquent, de plus, qu'il est souvent difficile de distinguer entre les objectifs et les moyens. Par exemple, la lutte contre l'inflation est-elle un moyen de lutte contre la détérioration de la compétitivité des exportations (objectif de catégorie 2) ou un objectif en soi (catégorie 1) ?

Ainsi, bien que la détermination des véritables objectifs de la politique économique soit possible par une analyse systématique, le choix des variables reste fonction en dernier ressort du modèle. Les variables sont alors souvent soit des approximations des véritables objectifs, soit des objectifs secondaires servant à compléter le modèle.

### 3.2. Forme mathématique

La forme mathématique de la fonction de préférence doit remplir deux conditions : être justifiée par l'analyse économique et être commode pour la résolution des calculs d'optimisation. Un survol des formes mathématiques retenues dans les études permet de distinguer deux catégories. Le choix entre ces deux catégories dépend du point de départ du calcul d'optimisation : cible flexible, ou cible fixe dans le vocabulaire de J. Tinbergen.

Dans le cas de la cible flexible, la fonction objectif a pour ambition de formaliser les objectifs premiers du décideur. L'objectif est par exemple de maximiser la consommation des ménages, la consommation collective. La fonction correspondante est le plus souvent logarithmique. Cette forme a l'avantage d'être simple et d'incorporer le concept d'utilité marginale décroissante (dérivée seconde négative). Cette catégorie est généralement retenue dans les calculs d'optimisation sur des modèles de long terme. Dans les applications sur le court terme, on peut citer D.A. Livesey [48], R. Guesnerie et P. Malgrange [35]<sup>1</sup>. Cette catégorie est la plus satisfaisante car la plus claire : elle n'introduit pas un modèle implicite dans la fonction objectif.

Dans l'autre cas, version dynamique de la cible fixe de J. Tinbergen, l'objectif est de se rapprocher d'une trajectoire choisie a priori. Celle-ci est le résultat d'une première optimisation implicite dans l'esprit du décideur ou du chercheur. Un taux d'inflation donné est recherché par exemple car on suppose que ce taux permet le maintien de la compétitivité des exportations et donc le maintien de l'emploi.

La fonction objectif est alors quadratique

$$(3.3) \quad Q(t) = (\underline{y}(t) - \underline{y}^D(t))^T Q(t) (\underline{y}(t) - \underline{y}^D(t)) + (\underline{u}(t) - \underline{u}^D(t))^T R(t) (\underline{u}(t) - \underline{u}^D(t))$$

avec  $Q(t)$  et  $R(t)$  de dimensions respectives  $(m \times m)$ ,  $(g \times g)$  où  $m$  le nombre d'objectifs et  $g$  le nombre d'instruments.

Cette fonction associée à un modèle linéaire conduit par des calculs simples à des règles de décision linéaires (les commandes sont des fonctions linéaires des variables du modèle). La forme quadratique se justifie de plus par des raisonnements économiques. Les dérivées secondes sont positives :

$$\frac{\partial^2 Q(t)}{\partial y_i^2(t)} = 2 q_{ii}(t)$$

une propriété correspondant à l'utilité marginale décroissante de la forme logarithmique.

---

1. Il faut noter qu'une approximation quadratique de cette fonction a été utilisée pour les calculs sur DECA linéarisé [24].



Les termes extradiagonaux permettent de tenir compte de l'interdépendance des objectifs<sup>1</sup>. Il est ainsi possible de pénaliser l'occurrence simultanée d'un écart sur le taux de croissance de la P.I.B. et sur le taux d'inflation.

La fonction objectif quadratique a cependant l'inconvénient de pénaliser d'un même montant l'écart positif et l'écart négatif. J. Bray [ 9 ] propose de pallier cet inconvénient en fixant des objectifs supérieurs impossibles à atteindre. Mais une telle solution supprime le caractère optimal des  $y^D(t)$  et il est alors difficile de donner une interprétation à la fonction.

B. Friedman [31] emploie une fonction quadratique discontinue (quadratique par morceaux). Il divise les valeurs des variables en trois régions ; les valeurs de la région centrale ne sont pas pénalisées, les valeurs des régions extrêmes le sont asymétriquement, un écart positif étant moins pénalisé qu'un écart négatif.

La solution proposée par B. Friedman sort du cas simple linéaire quadratique. Le gain retiré compense-t-il le coût de calculs plus compliqués ? Il ne le semble pas. La fonction objectif n'est utilisée que dans un certain domaine ; les objectifs en réalité ne sont pas (ou ne le sont que légèrement) dépassés, et l'inconvénient de la symétrie des pondérations possible en théorie ne se rencontre pas dans la pratique<sup>2</sup>.

L'inconvénient de cette forme de fonction reste qu'elle prend pour point de départ une trajectoire jugée optimale. Le calcul de la commande va dépendre étroitement du choix de cette trajectoire et il ne sera pas possible de la juger optimale dans un sens plus large que celui de la minimisation d'une norme.

---

1. Ceci évite l'hypothèse restrictive de séparabilité des objectifs de [35] ou de parfaite substituabilité de ceux-ci [48].

2. Voir H. Theil [75] sur ce sujet.

### 3.3. Détermination des coefficients de la fonction

Le choix des coefficients est l'étape la plus délicate de la détermination de la fonction. Différentes approches ont été proposées pour y parvenir ; elles ont toutes leurs faiblesses<sup>1</sup>.

Spécification directe de la fonction de préférence : elle consiste à demander au décideur d'écrire en terme mathématique sa fonction de préférence.

Méthode des interviews : l'interviewé répond à un ensemble systématique de questions. Cette méthode a été la plus étudiée par Frisch. Elle a l'inconvénient de ne pas assurer la cohérence des réponses.

Interview imaginaire : lorsque l'homme politique n'est pas disponible, l'interview est conduite auprès d'un expert ayant assisté aux délibérations. Cette approche ajoute au défaut de la précédente le risque de non objectivité de l'expert.

Préférences révélées : cette approche a été proposée dès 1938 par P. Samuelson pour la détermination des fonctions de préférence du consommateur. Elle part de l'axiome que les individus révèlent par leurs choix leurs préférences. Elle a été appliquée dans [35] par R. Guesnerie et P. Malgrange. Ils en soulignent les limites : l'approche n'est valide que sous trois conditions, et elle ne donne pas des résultats uniques. Ils concluent : "Il faut donc interpréter avec beaucoup de prudence la gamme des taux marginaux de substitution que l'on retient".

Cette section donne un bref aperçu des difficultés de la détermination de la fonction objectif. Dans le domaine qui nous concerne ici, le calcul d'optimisation, cette fonction doit réaliser la synthèse (pour ne pas dire le compromis) entre une expression simple des variables du modèle et une juste représentation des objectifs du décideur. Cette synthèse a été peu réalisée dans le passé : les recherches sur les fonctions sont développées sans référence à un modèle particulier, les calculs d'optimisation sur les modèles font peu de cas de la question difficile de la fonction objectif. Un des mérites de l'étude de R. Guesnerie et P. Malgrange est d'ouvrir la voix en France vers cette synthèse.

---

1. Nous nous basons ici sur la liste donnée par L. Johansen [43].

Les auteurs de calculs d'optimisation sont conscients du caractère arbitraire de la fonction objectif retenu dans leurs applications. Ils proposent, pour le compenser, de calculer les commandes correspondant à différentes pondérations de la fonction objectif. Mais ils oublient généralement que le calcul dépend aussi directement du choix de la trajectoire désirée. Ce point est souligné par D.A. Livesey [49] qui constate dans l'étude de R.S. Pindyck [62] un large écart entre la trajectoire résultat de la commande et la trajectoire désirée : "Sans aucun doute il faut pour gagner un maximum d'information de l'approche de R.S. Pindyck non seulement chercher les "meilleures" pondérations mais aussi la "meilleure" trajectoire désirée".

Section 4 - LA SIMULATION DE LA COMMANDE OUTIL D'ANALYSE DE LA  
DYNAMIQUE DE COURT TERME DES MODELES MACROECONOMIQUES

Nous avons développé dans les deux sections précédentes les arguments justifiant la proposition énoncée au début de ce chapitre : l'état actuel des modèles macroéconomiques et des études sur les fonctions objectifs rend prématuré tout espoir de calcul d'une politique économique optimale sur les modèles. Dans cette section, nous montrons que l'apport de la commande se situe au niveau de l'étude de la dynamique de court terme des modèles macroéconomiques : elle permet de recenser immédiatement les types de trajectoire que peut engendrer le modèle.

**4.1. Caractéristiques des modèles macroéconomiques de court terme : taille et non-linéarité**

Les premiers modèles macroéconomiques de court terme sont constitués de quelques équations linéaires. Ces deux caractéristiques sont imposées par les moyens et les techniques de calcul, ainsi que par les séries statistiques disponibles.

Les ordinateurs permettent à l'heure actuelle de résoudre de gros systèmes d'équations non-linéaires. L'algorithme de résolution utilisée couramment est celui de Gauss-Seidel, un algorithme de point fixe. La rapidité de convergence et la précision de la méthode dépendent du cas particulier envisagé. Mais ayant une connaissance déjà approchée de la solution et pouvant utiliser cette solution comme point de départ, les constructeurs de modèles n'ont guère de difficulté à résoudre leurs modèles rapidement.

Parallèlement au développement des ordinateurs et des algorithmes de calcul, l'information économique a permis l'établissement de séries statistiques de plus en plus désagrégées. Avec la disparition de ces deux contraintes, deux facteurs ont entraîné l'évolution vers des modèles de dimension de plus en plus grande : la demande de prévisions de plus en plus désagrégées et l'idée que la qualité de la prévision n'a rien à perdre (pour ne pas dire tout à gagner) d'une augmentation de la dimension des modèles.

Les modèles macroéconomiques actuels sont de grande dimension. Nous nous bornerons ici à mentionner l'évolution de la taille des modèles sans nous demander si cette évolution se justifie. Parmi les premiers modèles, celui de J. Tinbergen ne comprenait au total que 24 équations, et celui de Klein-Golberger 23. Le gigantisme des modèles actuels culminait en 1965 avec le modèle de Brookings (plus de 300 équations). On peut dire que le modèle macroéconomique de court terme actuel a couramment une centaine d'équations et que ce nombre peut être considérablement dépassé par les modèles sectoriels (voir par exemple le modèle U.S. de l'Université d'Ohio qui contient 2050 équations [71]).

Le modèle actuel est non-linéaire. Sans entrer dans le détail des non-linéarités de chaque modèle en particulier, il est possible de distinguer plusieurs classes de non-linéarités. L'analyse économique spécifie explicitement la non-linéarité de certaines relations. C'est le cas généralement de la relation entre taux de salaire et indice des heures de travail, la relation de Phillips qui se retrouve dans de nombreux modèles. C'est le cas aussi de la fonction de production. Les variables du modèle peuvent de plus être par définition non-linéaires : salaire réel, part des salaires dans la P.I.B. (variable de STAR), prix relatifs. Enfin, la non-linéarité peut résulter de ce que les relations sont établies en termes réels, alors que les identités comptables sont en termes nominaux. Le modèle qui en résulte est non-linéaire, les relations comptables étant composées de termes non-linéaires (prix que multiplie quantité).

#### 4.2. Simulation et commande, outils d'analyse de la dynamique des modèles macroéconomiques de court terme

La taille et la non-linéarité des modèles macroéconomiques de court terme empêchent toute étude analytique directe de la dynamique de ces modèles. L'étude analytique n'est possible qu'après simplification et linéarisation du modèle autour d'une trajectoire de référence. A.S. Goldberger [32] étudie ainsi le modèle Klein-Golberger : une fois linéarisé équation par équation, le modèle est simplifié pour n'inclure que les variables exogènes importantes<sup>1</sup>, puis décomposé en deux secteurs, secteur réel et monétaire.

---

1. Voir sur ce point le Chapitre 1 du Titre III.

A.S. Goldberger établit les équations caractéristiques de ces deux sous-secteurs ; il constate alors que les conditions initiales ont une part importante dans l'explication de la dynamique. E.P. Howrey [42] étudie les propriétés cycliques d'une version linéarisée et simplifiée du modèle de la Wharton School à partir de sa représentation spectrale. P. Malgrange [54] décompose en deux sous-systèmes sa version miniaturisée de DECA. Il calcule alors les valeurs propres de deux sous-systèmes linéaires obtenus par suppression de quelques interactions et étudie la sensibilité de ces valeurs aux coefficients du modèle. Enfin, il examine en quoi les résultats sont changés par la réintroduction des interactions entre les deux sous-systèmes.

L'étude de la dynamique à partir de versions linéarisées simplifiées n'est pas l'approche généralement employée. La dynamique du modèle est le plus souvent étudiée par un ensemble de simulations : simulations exposées pour vérifier la capacité du modèle à expliquer l'évolution du passé, simulations stochastiques pour apprécier la stabilité du modèle, calcul des multiplicateurs dynamiques des instruments.

La possibilité d'obtenir par le modèle une évolution spécifiée a priori<sup>1</sup> est étudiée par des simulations d'essais et d'erreurs. Partant de ses connaissances du modèle, le chercheur fixe un premier ensemble de commandes à appliquer aux modèles. Sur la base des résultats de la simulation, il modifie alors les commandes initiales puis recalcule leurs effets et ainsi de suite. L'obtention d'une trajectoire proche de la trajectoire cible par ces simulations est une tâche longue ; les différentes allures ou types<sup>2</sup> de trajectoires pouvant être générés par le modèle ne sont alors pas systématiquement recensés.

Le calcul de la commande et sa simulation permettent d'obtenir directement la trajectoire optimale (la plus proche possible de la trajectoire cible). La simulation de la commande est qualifiée dans cette thèse de contrôlée afin de l'opposer à la simulation essais et erreurs : le chercheur contrôle l'évolution du modèle. Le calcul d'optimisation est un outil d'étude de la dynamique. Il peut s'appliquer ainsi<sup>3</sup> :

- 
1. *En termes de l'automatique, l'étude de la commandabilité parfaite [2], reproductibilité.*
  2. *Un exemple d'allure ou de type serait une trajectoire avec croissance élevée et prix stables.*
  3. *Des exemples d'utilisation de cet outil pour l'étude de la dynamique de STAR sont donnés au Chapitre 2 du Titre III.*

- (1) Calcul des commandes pour la trajectoire désirée,
- (2) Simulation de la commande,
- (3) Explication des résultats et retour éventuel à (1) après spécification d'une nouvelle trajectoire pour valider cette explication.

L'approche retenue pour la résolution du problème d'optimisation, notre schéma de commande, présente un autre avantage pour l'étude de la dynamique. Les calculs d'optimisation sont réalisés sur l'approximation linéaire en variables d'état. Celle-ci isole les relations dynamiques du modèle. Le simple examen des coefficients de l'approximation et le calcul des valeurs propres permettent, avant tout calcul de la commande, une première exploration de la dynamique du modèle nonlinéaire.

#### CONCLUSION

Nous avons montré dans ce chapitre qu'il était vain de rechercher dans le calcul de la commande la détermination de la politique économique optimale. Les modèles conçus à l'heure actuelle ne réussissent pas à décrire avec une précision suffisante l'évolution de l'économie. Ils modélisent mal la relation entre les instruments et les objectifs de la politique économique. Enfin, les objectifs du décideur ne sont pas bien décrits par les fonctions objectifs.

La commande est, par contre, un outil puissant d'étude de la dynamique des modèles. Elle est supérieure à la simple simulation dans la mesure où elle permet de simuler des évolutions les plus proches d'évolutions spécifiées a priori. En d'autres termes, elle a l'avantage de permettre des simulations contrôlées. Il est ainsi facile de tester des hypothèses sur les conflits d'objectifs, les liens privilégiés entre tel outil et tel objectif, etc ....

Cet apport retenu pour la commande influence le schéma de contrôle proposé dans cette thèse : commande linéaire quadratique, modèle invariant dans le temps. Notre but en effet n'est pas de déterminer la meilleure commande, mais de gagner par la commande une plus grande compréhension de la dynamique du modèle. Le critère de choix n'est donc pas la précision mais la facilité de mise en oeuvre et l'information retirée du schéma.

## CHAPITRE 2

### LES REPRESENTATIONS DES MODELES LINEAIRES EN AUTOMATIQUE ET EN ECONOMIE

Une fois retenu le but recherché par les calculs d'optimisation, l'étude de la dynamique du modèle, se pose la question du choix de la forme ou *représentation* du modèle. Le modèle macroéconomique est le plus généralement de forme structurelle. Celle-ci a l'inconvénient de mêler les relations statiques (entre variables de la même période) et les relations dynamiques (entre une variable de la période et des variables avec retards). Nous lui préférons une forme utilisée aujourd'hui couramment en automatique : la représentation d'état. Celle-ci a l'avantage d'isoler les relations statiques et dynamiques du modèle, facilitant ainsi l'étude de la dynamique.

Un bref historique des développements de l'automatique est présenté dans la section 1. Il nous permet de justifier notre choix pour la représentation d'état de préférence à la représentation entrée-sortie plus ancienne. La section 2 rappelle les formes des modèles de l'économétrie. Les liens et les passages de celles-ci à la représentation d'états font l'objet de la dernière section.

#### Section 1 - APERCU DES DEVELOPPEMENTS DES TECHNIQUES DE CONTROLE DES SYSTEMES

Nous ne présentons pas dans cette section un aperçu des développements de l'ensemble des techniques de l'automatique ; notre objectif se limite à la description de l'évolution des techniques de contrôle déterministe.

Les développements du contrôle stochastique sont ignorés. Ceci n'implique pas une appréciation de l'intérêt de la commande stochastique en économie, mais découle de l'objectif fixé dans cette thèse à la commande. La commande stochastique des modèles économiques a été particulièrement étudié par G.C. Chow<sup>1</sup>.

---

1. Voir son ouvrage [16] qui fait la synthèse de ses articles déjà publiés et sa communication [17].



G.C. Chow se limite à des applications sur des petits modèles. Le petit nombre d'applications et la simplicité des modèles envisagés résultent de l'absence de théorie générale de cette commande en dehors du cas simple : système linéaire, bruits additifs gaussiens à valeur moyenne nulle. Dans ce cas, la commande optimale de la première période est calculée par l'algorithme de commande déterministe en prenant pour valeur des variables aléatoires leur espérance mathématique (théorème de l'équivalent certain de première période établi par H.A. Simon [70], H. Theil [74]). Pour les périodes suivantes, la commande est recalculée au début de chaque période en tenant compte de la totalité des informations disponibles à l'instant du calcul. Ce calcul complet à chaque période n'a pas d'inconvénient en économie dans la mesure où il n'y a pas urgence d'action. Le théorème de l'équivalent certain est cité dans la majorité des applications sur les modèles macroéconomiques de court terme pour justifier l'analyse déterministe.

Un autre domaine de l'automatique, *l'identification*, n'est pas envisagé ici. L'identification correspond à l'estimation de l'économétrie<sup>1</sup> ; elle utilise toutefois une approche différente. J.H. Westcott et K.D. Wall [81], K.D. Wall [82] ont montré son intérêt dans la détermination des modèles économiques.

Deux périodes sont traditionnellement distinguées dans l'histoire de l'automatique. La première, celle des servomécanismes, s'étend jusqu'à la fin des années 50 ; elle est suivie de la période dite de théorie moderne du contrôle.

## 1.1. L'ère des servomécanismes<sup>2</sup>

### 1.1.1. Définitions

Le servomécanisme est un système de contrôle conçu pour corriger par lui-même l'écart, appelé *erreur*, entre la valeur désirée, la *consigne*, et la valeur réelle des sorties (les objectifs). Pour ce faire, les entrées appliquées (les commandes) sont déterminées en fonction de l'erreur ; c'est un système *bouclé* ou en *boucle fermée*, la sortie étant "ramenée" à l'entrée. La Figure 1 présente le schéma le plus simplifié d'un servomécanisme utilisant les symboles de l'automatique (*schéma fonctionnel*).

- 
1. Pour certains auteurs, le terme *identification* englobe la caractérisation qui est la phase de définition de la structure du modèle.
  2. Sur les servomécanismes, voir la présentation simple de A. Fossard [28]. Pour une présentation plus complète, voir H. Chestnut et R.W. Mayer [14], F. de Carfort et C. Foulard [13].

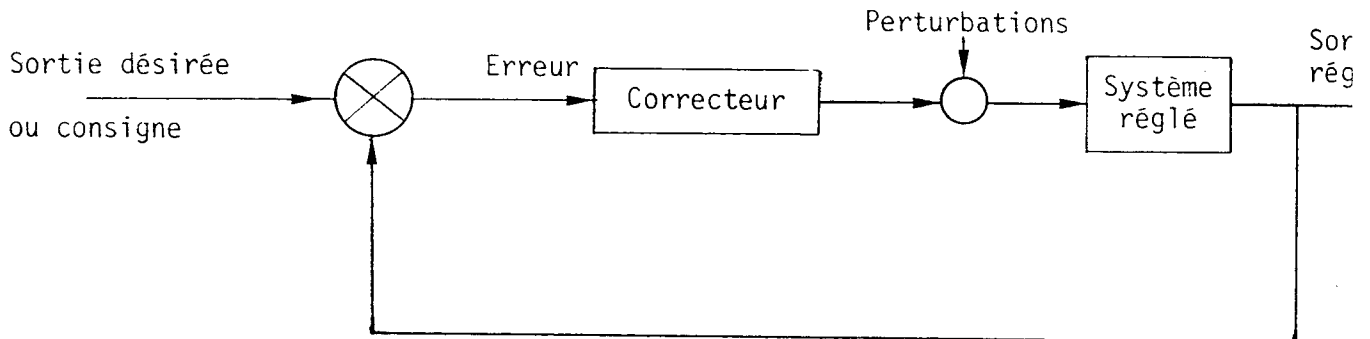


Figure 1 - Schéma fonctionnel simplifié d'un servomécanisme

Au début des années 50, on distingue deux catégories de système bouclé suivant le type de sortie désirée. Le *régulateur* a pour but de maintenir le système autour d'un point de fonctionnement constant en dépit des perturbations sur le système. Le but du *servomécanisme* est de faire suivre à la sortie la loi de variation, en fonction du temps, de l'entrée. Ce système réglé est connu aussi sous le nom de système de commande asservi ou asservissement. Progressivement, cette distinction s'est estompée en raison de la similitude des structures et de l'emploi des mêmes outils d'analyse. Aujourd'hui, les termes servomécanismes, régulateurs, systèmes asservis, asservissements sont utilisés indifféremment pour désigner un système bouclé.

### 1.1.2. Avantage de la boucle fermée

L'avantage se mesure par rapport à l'autre structure possible, *la boucle ouverte*. Le système en boucle ouverte (Figure 2) applique sur la période,  $0 \dots T$ , les entrées  $u(0), u(1) \dots u(T)$  calculées à  $t = 0$ . Celles-ci peuvent ne plus remplir leur rôle, si, en raison d'erreurs de modélisation ou de perturbations, l'évolution réelle du système s'écarte de l'évolution prévue. En revanche, l'entrée du système bouclé est calculée en fonction de l'évolution même du système ; elle peut ainsi compenser les effets des perturbations et des erreurs de modélisation.

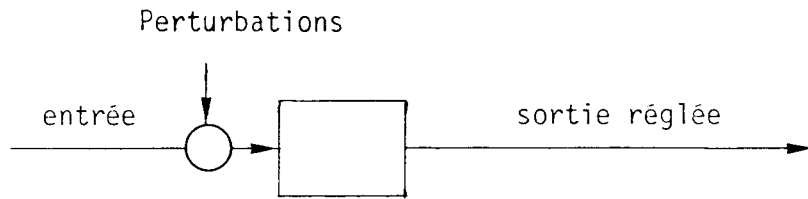


Figure 2 - Schéma d'un système en boucle ouverte

1.1.3. La performance recherchée

Le but du système asservi est de faire suivre aux sorties la loi de variation imposée aux entrées ; la performance du système peut se définir à partir de l'examen de la variation de l'évolution des sorties qui résulte de la variation des entrées. La sortie d'un système soumis à une variation de l'entrée prend après un certain laps de temps une allure de même type que l'entrée : le système a atteint son *régime permanent* (par opposition au *régime transitoire*).

Trois critères servent à apprécier la qualité du système de contrôle : la précision, la rapidité, l'amortissement. La précision est donnée par la grandeur de l'erreur en régime permanent. La rapidité est fonction de la durée du régime transitoire. Enfin, l'amortissement décrit la variation de l'amplitude des oscillations du régime transitoire.

La Figure 3 illustre ces trois critères pour une variation en échelon de l'entrée.

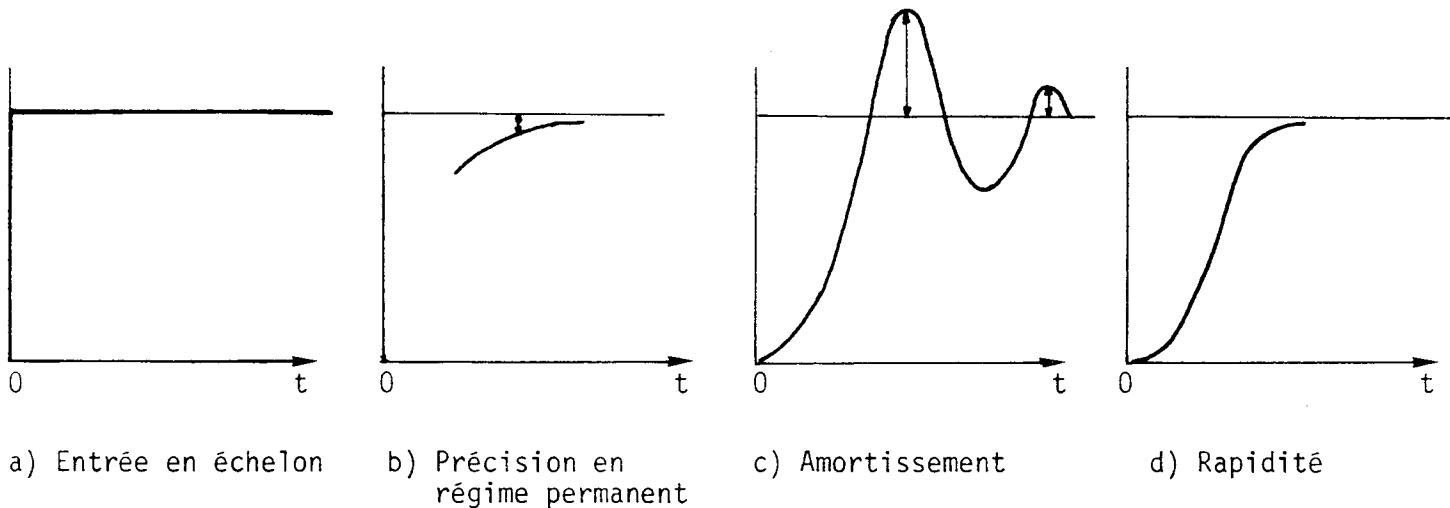


Figure 3 - Réponse du système à une entrée en échelon

Un "bon" système de contrôle doit être rapide, amorti, précis. En fait, ces qualités sont souvent incompatibles et le système de contrôle réalise un compromis entre elles, accentuant, suivant le cas, l'une aux dépens des autres.

#### 1.1.4. Outils d'analyses

Les premiers servomécanismes ont été conçus bien avant le développement d'outils d'analyses (le régulateur à boule de Watt est élaboré vers 1767). Les analyses restent plus souvent limitées à des modèles linéaires invariants dans le temps d'une entrée et d'une sortie. Elles sont faites au départ dans le domaine temporel sur les équations différentielles ; elles utilisent la *transformée de Laplace*.

La transformée de Laplace associe à toute fonction continue du temps  $f(t)$  une fonction de la variable complexe  $p$  que l'on note d'habitude

$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$  <sup>1</sup>. Elle est définie par

$$(1.1) \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Son intérêt tient en la transformation des dérivées en une fonction simple de la transformée de la fonction :

$$(1.2) \quad \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(+0) \quad \text{où } f(+0) \text{ est la valeur de la fonction à l'origine (du côté des valeurs positives).}$$

Elle transforme une équation différentielle d'ordre  $n$  en un produit de la fonction et d'un polynôme d'ordre  $n$ .

Le comportement dynamique d'un système est étudié, à partir de sa réponse à une entrée impulsion, dans le régime transitoire. L'équation décrivant la variation de la sortie à la suite d'une impulsion sur l'entrée est appelée réponse impulsionnelle. La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle est la fonction de transfert  $F(p)$  du système. Cette fonction est le rapport de deux polynômes en  $p$  ; les racines du polynôme du dénominateur ou *pôles* déterminent la stabilité ou l'instabilité du système.

---

1. Les automaticiens travaillent généralement sur des systèmes continus. L'équivalent de la transformée de Laplace pour les systèmes discrets est la transformée en  $z$ . Voir P.M. Larnac [47] pour utilisation de la transformée en  $z$  sur les modèles économiques.

L'analyse transitoire du système dans le domaine temporel a été supplantée par l'analyse en régime permanent dans le domaine fréquentiel à partir des travaux des ingénieurs en communication. La fonction de transfert  $F(j\omega)$  - pour  $p=j\omega$  où  $j$  est le nombre imaginaire pur - décrit la réponse en fréquence du système à une entrée sinusoïdale appliquée depuis  $t=-\infty$ . Elle est donc un filtre dont la sortie a même fréquence que l'entrée, mais une amplitude différente et qui est déphasée par rapport à l'entrée : le rapport d'amplitude et le déphasage sont égaux au module et à la phase de  $F(p)$ . Les méthodes conçues pour les études de réseaux par Bode, Bayard, Nyquist sont alors appliquées aux servomécanismes.

#### 1.1.5. Les correcteurs classiques

Le correcteur est un organe de commande qui associe à l'erreur une action (entrée). L'action peut être *proportionnelle* à l'erreur, ou à son *intégrale*, ou à sa *dérivée*. L'action proportionnelle augmente la rapidité du système, l'action intégrale sert à annuler l'erreur en régime permanent, l'action dérivée est en avance sur le signal original et évite ainsi les oscillations. Le correcteur peut combiner l'action proportionnelle et dérivée (correcteur P.D.), l'action proportionnelle différentielle, intégrale (P.I.D.).

#### 1.2. La Théorie moderne du contrôle<sup>1</sup>

Les outils mentionnés plus haut se prêtent bien à l'élaboration manuelle du contrôle de petits systèmes (une entrée, une sortie) linéaires et invariants dans le temps lorsque la performance recherchée est simple. Ils sont mal adaptés aux systèmes complexes multidimensionnels non-linéaires et variants dans le temps. Ils ne permettent pas la détermination d'une commande maximisant un critère. Les développements simultanés des mathématiques (principe du maximum de L.S. Pontriaguine (1958), programmation dynamique de R. Bellman (1957), et des calculateurs apportent des outils nouveaux à l'automatique. La théorie moderne du contrôle "peut être vue comme le confluent de trois courants différents : la théorie des servomécanismes, le calcul des variations et le développement des ordinateurs" (M. Athans et P.L. Falb [ 3 ]).

---

1. Pour un exposé de la théorie moderne du contrôle, voir C. Foulard, S. Gentil et J.P. Sandraz [30].

### 1.2.1. Modèle en variables d'état

L'état d'un système est constitué par l'ensemble des variables dont il faut connaître la valeur à un instant donné pour prévoir l'évolution future du système.

Cette "mémoire minimale du passé" comme la dénomme A. Fossart [29] constitue un intermédiaire entre les entrées (variables exogènes en économie) et les sorties (variables endogènes) ; de ce fait, la représentation d'état est souvent considérée comme une paramétrisation des relations entrées-sorties. Pour les systèmes linéaires discrets, cette représentation s'écrit :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \underline{x}(t) &= A(t)\underline{x}(t)+B(t)\underline{u}(t-1) \\ \underline{y}(t) &= C(t)\underline{x}(t)+D(t)\underline{u}(t) \end{aligned}$$

avec  $\underline{x}(t)$  vecteur d'état, appartenant à  $\mathbb{R}^n$   
 $\underline{y}(t)$  vecteur de sortie, appartenant à  $\mathbb{R}^m$   
 $\underline{u}(t)$  vecteur d'entrée, appartenant à  $\mathbb{R}^g$   
 $A(t)$  matrice de transition,  $n \times n$   
 $B(t)$  matrice de commande,  $n \times g$   
 $C(t)$  matrice de sortie,  $m \times n$   
 $D(t)$  matrice  $m \times g$ .

La "paramétrisation" entrée-sortie ainsi réalisée présente la particularité suivante :

. Tout le dynamisme du modèle est inclu dans la relation entrées-états (équation d'état)

. Les sorties sont liées d'une manière statique aux états (et aux entrées).

La représentation d'état a permis d'introduire les notions de commandabilité et d'observabilité d'un système. Grâce à ces concepts, ont pu être élucidées certaines anomalies constatées au cours de la mise en oeuvre d'une commande sur un modèle du type entrée-sortie. Nous ne développons pas ici longuement ces notions et nous nous bornons à en donner une définition aussi intuitive que possible<sup>1</sup> :

---

1. Les conditions de commandabilité et d'observabilité pour les modèles linéaires invariants dans le temps sont données au chapitre 4 de ce titre.

i) Commandabilité d'un système : un système est dit entièrement commandable si en agissant sur ses entrées on peut le faire passer d'un état arbitraire  $\underline{x}(t_0)$  à l'instant  $t_0$  à un autre état arbitraire  $\underline{x}(t_1)$  à l'instant  $t_1$ .

Il faut noter que, dans le cas général, un sous-espace seulement de l'espace d'état est commandable ; ce sous-espace est appelé sous-espace commandable du système ; son complémentaire est le sous-espace non commandable.

ii) Observabilité d'un système : un système est entièrement observable si, en observant ses sorties pendant un intervalle de temps suffisamment long  $[t_0, t_1]$ , on peut déterminer l'état initial  $\underline{x}(t_0)$  du système.

Là encore, l'espace d'état comporte une partie observable et une partie non observable.

Dès lors, un système se décompose en quatre parties (Décomposition de Kalman)

- $\Sigma_{O,C}$  - partie observable et commandable
- $\Sigma_{O,NC}$  - partie observable et non commandable
- $\Sigma_{NO,NC}$  - partie non observable et non commandable
- $\Sigma_{NO,C}$  - partie non observable et commandable

Ainsi, la représentation d'état permet une connaissance plus fine d'un système ; elle permet également d'étudier d'une manière systématique sa stabilité<sup>1</sup> ; enfin, elle a rendu possible la définition et le calcul d'un nouveau type de commande.

Le problème de la commande optimale. Le problème se formule<sup>2</sup> ainsi :  
étant donné

- (1) un modèle mathématique à commander (1.1),
  - (2) des sorties désirées du système,
  - (3) un ensemble d'entrées admissibles,
  - (4) un critère mesurant l'efficacité des entrées,
- déterminer la suite des entrées qui minimisent le critère.

---

1. Voir chapitre 4.

2. Cette formulation est empruntée à M. Athans et P.L. Falb.

La formulation du critère peut traduire différents objectifs :  
minimiser le temps de passage d'un état à l'autre - *commande en temps minimal* -,  
minimiser la consommation d'énergie - *commande d'énergie minimale* -  
pour passer d'un état à l'autre avec, ou sans contrainte de temps.

Le principe du maximum permet de résoudre ces problèmes pour des systèmes et des critères quelconques ; mais la solution est souvent obtenue difficilement. Les problèmes linéaires quadratiques - contrainte d'égalités linéaires, critère quadratique - ont l'avantage de donner des résultats analytiques simples. La commande optimale est une *fonction linéaire des états*. L'addition d'intégrateurs au modèle donne une commande contenant les trois composantes du correcteur classique P.I.D. (action proportionnelle, dérivée et intégrale). Cette formulation du problème de commande est pour cette raison la plus utilisée dans les applications pratiques<sup>1</sup>. Nous l'avons retenue pour STAR.

Aux deux périodes distinguées dans cette section correspondent deux représentations des modèles : la fonction (ou matrice) de transfert (transformée de Laplace ou en  $z$  de la relation entrées-sorties) et la représentation d'état. Cette dernière est la plus complète. Elle peut être obtenue sans difficulté en économie car les états sont directement observables. En automatique, la spécification et l'identification d'un modèle en variables d'état est souvent impossible à cause de la trop grande complexité du système ou du manque d'observations sur les phénomènes en jeu. L'observation des entrées et des sorties reste alors la seule approche possible ; seules les parties observables et commandables du système sont prises en compte. On s'efforce ensuite, en pratique, de revenir à la représentation en variables d'état qui est la plus appropriée au calcul de la commande<sup>2</sup>.

Dans la section suivante, nous présentons les représentations (ou formes) des modèles linéaires dynamiques utilisées en économétrie avant d'explicitier dans la section 4 les liens et les problèmes de passage entre ces formes familières aux économistes et la représentation d'état retenue pour l'approximation linéaire de STAR.

- 
1. Les calculs à effectuer en temps réel sont en effet réduits au minimum, les coefficients de la fonction linéaire étant calculés hors du champ d'application.
  2. Le passage de la relation entrées-sorties à la représentation d'état est connu sous le nom de *réalisation* (voir Section 3 de ce chapitre).



Section 2 - LES DIFFERENTES REPRESENTATIONS DES MODELES ECONOMETRIQUES

2.1. La forme structurelle

La forme structurelle est la forme généralement utilisée pour représenter les modèles microéconomiques.

En utilisant l'opérateur retard  $z^{-1}$  défini par

$$z^{-i} y(t) = y(t-i)$$

un modèle sous forme structurelle peut s'écrire sous la forme générale suivante

$$(2.1) \quad \underline{G}(z)\underline{y}(t) = \underline{H}(z)\underline{u}(t) + \underline{K}(z)\underline{e}(t)$$

où  $\underline{y}(t)$  est le  $l \times 1$  vecteur de variables endogènes,

$\underline{u}(t)$  le  $m \times 1$  vecteur des variables exogènes (contrôlables ou purement exogènes),

$\underline{e}(t)$  le  $l \times 1$  vecteur d'erreurs distribué avec  $N(0, \sigma)$ .

$\underline{G}(z)$ ,  $\underline{H}(z)$ ,  $\underline{K}(z)$  sont des matrices polynômiales, définies par

$$\underline{G}(z) = \sum_{i=0}^p \underline{G}_i z^i, \quad \underline{H}(z) = \sum_{i=0}^q \underline{H}_i z^i, \quad \underline{K}(z) = \sum_{i=0}^s \underline{K}_i z^i$$

$\underline{K}(z)$  est introduit dans cette représentation pour traduire l'autocorrélation des termes d'erreur. Avant d'aborder la discussion de cette forme, il paraît opportun de donner un exemple de représentation d'une forme structurelle de deux équations à l'aide des matrices polynômiales en  $z$ .

Soit le modèle suivant :

$$y_1(t) = g_{11}^1 y_1(t-1) + g_{12}^0 y_2(t) + h_{11}^0 x_1(t) + h_{12}^3 x_2(t-3) + e_1(t)$$

$$y_2(t) = g_{21}^3 y_1(t-3) + h_{21}^0 x_1(t) + e_2(t) + k_2^1 e_2(t-1)$$

L'indice supérieur des coefficients est un indice des retards. L'utilisation de l'opérateur retard et le passage des variables endogènes décalées du côté droit de l'équation permettent d'écrire :

---

1. La lettre  $z$  est utilisée ici au lieu du  $L$  habituel pour souligner la correspondance avec la transformée en  $z$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \cdot z^0 & -g_{11}^1 z^1 & -g_{12}^0 \cdot z^0 \\ -g_{21}^3 z^3 & & 1 \cdot z^0 \end{pmatrix}}_{G(z)} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_{11}^0 z^0 & h_{12}^3 z^3 \\ h_{21}^0 z^0 & 0 \end{pmatrix}}_{H(z)} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \cdot z^0 & 0 \\ k_{z^1}^1 & 1 \cdot z^0 \end{pmatrix}}_{K(z)} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}$$

G est donc de degré 3 (p=3), H de degré 3 (q=3), K de degré 1 (s=1).

La forme structurelle est donc un ensemble d'équations dont chacune décrit le comportement d'un élément du système économique. La variation de chaque variable endogène est décrite en fonction à la fois des variations des autres variables endogènes et des variables prédéterminées ou exogènes. Elle décrit bien une structure du système puisqu'elle envisage les différentes composantes du système ainsi que leurs interactions.

L'avantage de la forme structurelle réside dans sa traduction immédiate en équation des hypothèses économiques ; elle permet donc un test direct de ces hypothèses. Etant basée sur une connaissance de la structure, elle peut être modifiée facilement lors des changements de structure<sup>1</sup>. Une telle modification n'est pas possible à partir des modèles de forme réduite ou finale.

Les limites de la forme structurelle, abstraction faite des difficultés d'estimation statistique, viennent de l'analyse étendue de système qu'elle suppose. De toutes les représentations, la forme structurelle demande l'analyse la plus précise, donc multiplie les risques d'erreurs de spécification.

---

1. Par exemple, lors de l'augmentation du prix du pétrole, les modèles de forme structurelle ont pu être modifiés pour traduire ce changement (variation des termes constants et des coefficients des équations d'importation).

## 2.2. La forme réduite

La forme réduite ne considère pas explicitement l'interdépendance à la même période des variables endogènes. Elle ne décrit que la relation entre les variables endogènes et les variables exogènes et endogènes retardées, compte tenu, bien entendu, des relations d'interdépendance entre les variables endogènes. En utilisant les mêmes notations, la forme réduite s'écrit :

$$(2.2) \quad G'(z) \underline{y}(t) = H'(z) \underline{u}(t) + K'(z) \underline{e}(t)$$

où les éléments des matrices polynômiales sont définis par

$$(2.3) \quad G'_i = G_0^{-1} G_i \quad H'_i = G_0^{-1} H_i \quad K'_i = G_0^{-1} K_i$$

$G'_0$  est donc égal par définition à la matrice identité.

Les coefficients de la forme réduite sont ainsi des fonctions compliquées des coefficients de la forme structurelle. Ils mesurent l'effet total d'une variation d'une variable prédéterminée sur les variables endogènes après prise en compte des interactions entre ces variables. L'effet d'un changement de structure est difficilement appréciable à partir de la forme réduite. Cependant, les risques d'erreurs de spécifications sont dans ce cas beaucoup plus faibles.

## 2.3. La forme finale

Alors que la forme réduite décrivait les variations des variables endogènes en fonction des variations des variables exogènes et endogènes décalées, la forme finale décrit les mêmes variations en fonction uniquement des variables exogènes<sup>1</sup>.

Mathématiquement, cette relation s'obtient par éliminations répétées de toutes les variables endogènes décalées. En supposant que  $G'(z)$  est inversible, la forme finale s'écrit :

$$(2.4) \quad \underline{y}(t) = \Pi(z) \underline{u}(t) + \Gamma(z) \underline{e}(t)$$

où  $\Pi(z) = G'^{-1}(z) H'(z)$  et  $\Gamma(z) = G'^{-1}(z) K'(z)$

c'est-à-dire des matrices rationnelles en  $z$ .

---

1. La forme finale a été pour la première fois utilisée par H. Theil et J.C.G. Boot [76].

Les matrices  $\Pi_i$  sont les matrices de multiplicateurs.

$\Pi_0$  qui est égal à  $H_0$  est la matrice des multiplicateurs instantanés.

$\Pi_i$  est la matrice des multiplicateurs décalés de  $i$  périodes.

La forme finale demande une connaissance encore moins précise du phénomène modélisé. Les risques d'erreur de spécification y sont donc réduits à leur minimum.

Les formes des modèles économétriques diffèrent donc de celles des modèles de l'automatique. Cette différence s'explique d'abord par l'objectif fixé à la modélisation dans chaque discipline. Le but du modèle est en automatique de calculer et de simuler l'effet de la commande. Le modèle est, en économie, avant tout un outil de connaissance. Les données disponibles justifient aussi chaque représentation. L'automaticien n'a pas, contrairement à l'économiste qui peut mesurer directement les états, généralement accès à l' "intérieur" du système ; il doit se contenter d'observations sur les entrées et les sorties pour identifier le modèle. En revanche, il a, à ce niveau, un avantage sur l'économiste : il peut se livrer à des expériences et ainsi isoler les conséquences de la commande.

### Section 3 - LIENS ET PASSAGES DES MODELES ECONOMETRIQUES A LA REPRESENTATION D'ETAT

Nous avons opté pour la détermination d'une approximation linéaire de STAR en variables d'état. Ce choix s'est imposé tout d'abord en raison de la facilité des calculs de la commande et des avantages de celle-ci (commande en boucle fermée) dans le cas d'un critère quadratique.

Cette représentation a aussi été choisie pour les informations qu'elle donne sur la dynamique du modèle. La matrice A isole les relations dynamiques. Ses valeurs propres permettent de juger de la stabilité du modèle.

Enfin, la détermination directe<sup>1</sup> du modèle en variables d'état ne pose pas de difficultés dans notre recherche car nous avons directement accès aux états. Dans cette section, nous explicitons le lien et les passages des représentations des modèles économétriques à la représentation d'état.

#### 3.1. Liens avec la représentation d'état<sup>2</sup>

Rappelons l'écriture d'un modèle linéaire en variables d'état invariant dans le temps sans termes d'erreurs

$$(3.1) \quad \begin{array}{ll} 3.1.a & \underline{x}(t) = A\underline{x}(t-1) + B\underline{u}(t-1) \\ 3.1.b & \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{array}$$

A l'aide de l'opérateur de décalage z, et par substitution, 3.1.a s'écrit :

$$(3.2) \quad (I-zA)\underline{x}(t) = z.B\underline{u}(t) \text{ ou } \underline{x}_t = (I-z.A)^{-1} z.B\underline{u}(t)$$

En substituant ce résultat dans (3.1.b), nous obtenons :

$$(3.3) \quad \underline{y}(t) = (C(I-z.A)^{-1} z.B+D)\underline{u}(t)$$

A l'aide de cette relation et de (2.4), on déduit la relation entre les coefficients de la représentation d'état et ceux de la forme finale et réduite

$$(3.4) \quad \Pi(z) = D+C(I-z.A)^{-1} z.B = G^{-1}(z) H'(z)$$

- 
1. A l'opposé d'une identification entrée-sortie puis du passage dans un deuxième temps à la représentation d'état.
  2. Les développements sur les liens entre les différentes formes et la réalisation optimale sont très largement empruntés à A.J. Preston et K.D. Wall [66].

En développant en série de puissance  $[I-zA]^{-1}$  et  $\Pi(2)$  on obtient

$$(3.5) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i z^i = D + C \left[ \sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1} z^i \right] B$$

Egalisant les coefficients des opérateurs de même puissance, on obtient la succession d'égalités suivantes :

$$(3.6) \quad \Pi_0 = D \quad \Pi_1 = CB \quad \Pi_2 = CAB \quad \Pi_3 = CA^2B \quad \Pi_n = CA^{n-1}B$$

qui est la relation entre les coefficients de la forme finale et de la forme en variables d'état.

La relation avec les coefficients de la forme réduite peut aussi être explicitée. Les deux termes extrêmes de (3.4) s'écrivent :

$$(3.7) \quad G'(z) \Pi(z) = H'(z)$$

ou en développant

$$(3.8) \quad H'_0 + H'_1 z + \dots + H'_q \cdot z^q = [I + G'_1 \cdot z + \dots + G'_q \cdot z^q] [\Pi_0 + \Pi_1 \cdot z + \dots + \Pi_q \cdot z^q]^1$$

Egalisant les coefficients des opérateurs de même puissance, les relations entre les coefficients s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} H'_0 \\ H'_1 \\ \vdots \\ H'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & 0 \\ G'_1 & I & 0 \\ & & \vdots \\ G'_q & G'_{q-1} & G_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Pi_q \end{bmatrix}, \quad G'_q = \dots = G'_{p+1} = 0 \quad q > p$$

L'apport dans l'analyse dynamique de la représentation d'état peut être mis en évidence à partir de ces relations. Les propriétés dynamiques des modèles économétriques sont étudiées à partir des multiplicateurs instantanés et retardés. Les multiplicateurs instantanés sont donnés par

$$\Pi_C = D = H'_0$$

---

1.  $G'_0$  est par définition la matrice identité.

Ils sont donc explicites dans la forme réduite, finale et la forme en variables d'état. Les multiplicateurs décalés sont explicites dans la forme finale et ils peuvent être calculés facilement à partir de la représentation d'état (relation 3.6). Cette relation indique bien que la représentation d'état rend explicite le dynamisme du modèle : l'évolution des multiplicateurs décalés est complètement décrite par les matrices A, C, B. C, B sont des composantes fixes de ces multiplicateurs dont l'évolution dynamique est déterminée par A.

Dans le cas d'un modèle stable, l'effet final d'une variation en échelon d'une variable exogène peut être directement calculé à partir des coefficients de la représentation d'état. Il est égal à

$$\Pi^{\infty} = D + C[I-A]^{-1} B$$

### 3.2. Passage des différentes formes à la représentation d'état

Après avoir formulé le problème du passage ou réalisation des différentes représentations à la représentation en variables d'état, nous donnerons quelques exemples tirés d'études économiques. Dans un troisième paragraphe, nous exposerons plus en détail la réalisation proposée par A.J. Preston et K.D. Wall [65].

#### 3.2.1. Le problème général de la réalisation

Nous envisagerons successivement la réalisation de la forme finale, puis de la forme réduite. La réalisation de la forme structurelle n'est que légèrement plus complexe (en raison de la relation simultanée des variables endogènes) que celle de la forme réduite ; elle ne présente pas un problème de nature différente et elle ne sera donc pas abordée ici.

##### Réalisation de la forme finale

Dans les termes de la notation déjà utilisée, la réalisation consiste à déterminer le quadruple {A,B,C,D} de telle sorte que l'application définie par (2.4) soit entièrement décrite par (3.1).

Il existe plusieurs combinaisons de {A,B,C,D} réalisant cette condition. A l'opposé, une combinaison de {A,B,C,D} détermine uniquement  $\Pi(z)$ .

S'il existe plusieurs combinaisons de  $\{A,B,C,D\}$  décrivant l'application de  $\underline{u}(t)$  dans  $\underline{y}(t)$ , le problème de la réalisation revient à déterminer la combinaison la plus intéressante. La réalisation d'ordre minimal, c'est-à-dire celle dont la dimension de  $A$  est minimale, présente deux avantages évidents. La matrice de transition  $A$  isole le dynamisme du modèle ; elle est d'une interprétation économique plus facile qu'une matrice qui contiendrait des éléments non nécessaires à la représentation de l'évolution dynamique du modèle. Le deuxième avantage est encore plus déterminant. Les modèles de prévision décrivent l'évolution d'un grand nombre de variables endogènes et possèdent de plus une structure de retard d'ordre élevé. La dimension de leur vecteur de variables d'état est donc importante et il importe pour des raisons de calcul (taille de mémoire et erreurs de calcul) de réduire cette dimension au minimum.

De nombreux algorithmes ont été proposés par les automaticiens pour la réalisation minimale de la forme finale ; le lecteur intéressé est renvoyé à la littérature sur ce sujet<sup>1</sup>.

#### Réalisation de la forme réduite

Le problème de la réalisation de la forme réduite s'énonce ainsi : étant donné l'application  $\underline{u}(t) \rightarrow \underline{y}(t)$  définie par (2.2), déterminer le quadruple  $A,B,C,D$  de telle sorte que (3.1) décrive complètement cette application.

$A,B,C,D$ , comme au cas précédent, n'est pas déterminé uniquement par  $G'(z)$ ,  $H'(z)$ . De plus, un quadruple donné  $A,B,C,D$  ne détermine pas uniquement  $G'(z)$ ,  $H'(z)$ . En effet,  $\Pi(z)$  peut être factorisé de bien des façons différentes.

Il y a donc, à partir de la forme réduite, une infinité de réalisations en variables d'état. La réalisation minimale présente les mêmes avantages que ceux cités dans le paragraphe précédent.

#### 3.2.2. Les réalisations appliquées aux modèles économiques

Une revue rapide des réalisations appliquées aux modèles économiques permet de mieux comprendre le problème et l'intérêt de la réalisation minimale.

---

1. Voir A.J. Preston et K.D. Wall [65], ainsi que D.Q. Mayne [55] et P.E. Caines [12].



Réalisation proposée par G. Chow

G. Chow [15] écrit la forme réduite :

$$\underline{y}_t = A_{1t} \underline{y}_{t-1} \dots + A_{mt} \underline{y}_{t-m} + C_{0t} \underline{x}_t \dots + C_{nt} \underline{x}_{t-n} + \underline{B}_t + \underline{u}_t$$

sous la représentation d'état suivante<sup>1</sup> :

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_t \\ \vdots \\ \underline{y}_{t-m+1} \\ \underline{x}_t \\ \underline{x}_{t-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1t} & A_{mt} & C_{1t} & C_{nt} \\ & I & 0 & \\ & & & \\ & & & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_{t-1} \\ \underline{y}_{t-m} \\ \underline{x}_{t-1} \\ \underline{x}_{t-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{0t} \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \underline{x}_t + \begin{bmatrix} \underline{B}_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{u}_t \end{bmatrix}$$

Les variables situées au-dessous de la première ligne bloc sont, avec les variables endogènes, les variables d'état de la réalisation. Les lignes blocs au-dessous de la première ligne de A servent à définir ces nouvelles variables. Le nombre de variables d'état de la réalisation proposée par G. Chow est donc fonction du nombre de variables endogènes,  $\ell$ , du décalage maximum sur les variables endogènes  $m$ , du nombre de variables exogènes,  $g$ , et du décalage maximum sur ces variables,  $n$ . L'ordre du système est donc égal à  $\ell.m + g.n$ , un ordre rendant difficile le calcul de la commande sur tout modèle de grande taille. Rendons justice à G. Chow. Son but n'est pas de proposer une méthode de réalisation applicable aux modèles macroéconomiques actuels, mais de donner un exemple de calcul de commande sur un petit modèle simple. Sa méthode illustre cependant fort bien l'intérêt d'une réalisation minimale.

Réalisation proposée par R.S. Pindyck

R.S. Pindyck [62] passe de la forme structurelle à la représentation d'état en ajoutant au vecteur de variables endogènes une nouvelle variable d'état pour chaque variable du modèle décalée de plus d'une période. Partant d'un modèle

---

1. On remarque que la réalisation proposée par G. Chow est impropre (voir ci-dessous la réalisation de A.J. Preston et K.D. Wall) : il existe une relation instantanée entre les états et les variables de commande, alors que dans la représentation classique de l'automatique les états sont fonction uniquement des états passés et des commandes passées.

de 10 variables endogènes, il obtient une représentation d'état en 26 variables. La réalisation obtenue n'est pas minimale car il n'agrège aucune variable : il ne définit pas de variables d'état combinaison linéaire de variables endogènes décalées et exogènes décalées<sup>1</sup>.

Réalisation proposée par L.F. Buchanan et D.L. Erickson

Le modèle utilisé par ces deux auteurs, [10],[25], se décompose d'équations aux différences d'ordre 1. Les équations sont du type :

$$y(t) = ay(t-1)+bx(t-1)$$

ou du type identité. Les deux auteurs utilisent les identités pour obtenir par substitution la représentation d'état classique. Ils n'ont besoin, pour ce faire, de ne définir aucune nouvelle variable d'état : leur représentation est donc minimum.

La réalisation minimale de A.J. Preston et K.D. Wall

A.J. Preston et K.D. Wall sont à notre connaissance les chercheurs qui ont poussé le plus loin l'étude de la réalisation des modèles économiques. Avant de résumer brièvement les trois étapes de l'algorithme qu'ils ont utilisé avec succès pour le modèle U.K. du PREM, nous aborderons la question de la détermination de l'ordre de la représentation minimale.

La formule qui détermine l'ordre du système minimal est établie par A.J. Preston et K.D. Wall à l'aide des théorèmes de H. Rosenbrock [68].

Soit  $n_i$  le retard maximum présent dans l'équation  $i$   
& le nombre d'équations.

L'ordre du système minimal est donné par

$$n = \sum_{i=1}^{\ell} n_i$$

---

1. Cette définition a l'inconvénient de faire apparaître des variables sans contenu économique (voir le paragraphe suivant) et R.S. Pindyck a pu reculer devant cet inconvénient. La réalisation minimale de son modèle ne comprend que 20 variables d'état.

n est au plus égal au produit du retard maximum du modèle par le nombre de variables endogènes du modèle. Ce nombre est fonction de la structure des retards des variables endogènes et exogènes considérée dans son ensemble. L'introduction de variables décalées dans une équation n'augmente l'ordre du système que dans la mesure où il augmente le retard maximum présent dans l'équation.

Cette proposition peut paraître surprenante à première vue<sup>1</sup>. Elle est la conséquence de la définition des variables d'état de la forme minimale. Ces variables sont des combinaisons linéaires des variables endogènes et exogènes de la même période. Par exemple, la variable d'état  $x_{ij}$  est définie comme combinaison linéaire  $f_{ij}$

$$\begin{aligned}x_{ij}(t) &= f_{ij}[y_i(t-j), u_i(t-j)] & j &= 1 \dots n_i \\ & & i &= 1 \dots l \\ & & n_i &= \max(p_i, q_i)\end{aligned}$$

L'inconvénient de cette représentation minimale est évidente :

étant une combinaison linéaire de variables économiques, les variables d'état n'ont pas généralement de signification économique. Cet inconvénient ne devrait pas cependant interdire son utilisation, car il est toujours possible, au niveau de la simulation de l'effet de la commande, de présenter les résultats pour les variables économiques. Il suffit pour cela de faire la transformation inverse, c'est-à-dire de calculer la valeur des variables économiques en fonction de la valeur des variables d'état.

L'algorithme de réalisation proposé par A.J. Preston et K.D. Wall conduit à la représentation d'état canonique observable. Cette représentation minimale a la propriété d'être déterminée uniquement par la forme réduite et de permettre un passage inverse unique à cette forme<sup>2</sup>. Elle a d'autre part l'avantage de pouvoir être obtenue facilement. L'algorithme comprend trois étapes :

- 
1. La réalisation la plus simple consiste en effet à ajouter une nouvelle variable d'état pour chaque variable de retard supérieur à un (voir R.S. Pindyck par exemple).
  2. Cette correspondance unique entre les paramètres de la forme réduite et de la représentation en variables d'état a permis aux auteurs de définir les conditions d'identification de la représentation d'état.

- 1 - Séparation de la partie "propre" et "impropre" du système. Cette séparation est nécessaire s'il existe une relation instantanée (appelée partie impropre) entre les variables de commande et les variables endogènes. En effet, la matrice B de la représentation ne décrit que l'effet dynamique de la commande (partie propre) ; il importe d'isoler l'effet statique et de le traduire au niveau des équations de sortie. Il faut noter que cette étape est superflue lorsque la forme structurelle ne contient pas de partie propre. C'est le cas notamment du modèle de R.S. Pindyck. Celui-ci suppose qu'il existe un retard d'un trimestre entre la prise de décision et la réalisation de la commande. Les variables de commande n'apparaissent dans son modèle qu'avec au moins un retard pur d'une période.
- 2 - Réalisation proprement dite de la forme canonique observable à partir de la partie propre. Cette réalisation est obtenue par simple transposition des éléments des matrices de la forme réduite.
- 3 - Addition aux équations de sortie de la partie impropre du système.

La représentation obtenue peut être facilement interprétée. La matrice A ne contient en effet que des éléments de  $G^*$  (= G' modifié par soustraction de la partie impropre), les éléments de B provenant uniquement de  $H^*$  et  $K^*$ .

## CONCLUSION

Les deux principales représentations des modèles utilisées par les automaticiens pour l'élaboration de la commande ont été exposées dans ce chapitre. La représentation d'état est la plus complète ; elle modélise l'ensemble (commandable et non commandable) de la dynamique du système. Nous l'avons retenue pour le modèle de commande de STAR.

Les liens et le passage des formes des modèles économétriques à la représentation d'état ont aussi été explicités. Nous avons souligné l'intérêt de la représentation minimale.

Le problème de réalisation minimale ne s'est pas posé pour nous dans les mêmes termes. Il ne s'agissait pas à proprement parler d'une réalisation car le modèle original est non-linéaire. La question de l'ordre du système à identifier a été cependant une étape importante de la recherche.



### CHAPITRE 3

#### LES APPLICATIONS DE COMMANDE DE MODELES MACROECONOMIQUES

La distinction boucle ouverte et boucle fermée de la commande des processus industriels disparaît en macroéconomie. La fréquence des informations sur l'état du système permet de recalculer à chaque période l'ensemble des commandes sur un horizon donné. Seule la commande de première période est effectivement appliquée. Elle tient compte des informations connues lors du calcul ; sans être une fonction explicite des états du système, elle est donc par définition une commande en boucle fermée. Les commandes en boucle ouverte calculées pour les autres périodes ne sont que des prévisions des futures commandes, compte tenu des états actuels du système.

Nous distinguons dans ce chapitre les commandes calculées sur les modèles non-linéaires et sur les modèles linéaires<sup>1</sup>. Les premières ont l'avantage de ne pas modifier le modèle original, mais l'inconvénient de nécessiter de longs calculs itératifs. De ce fait, les expérimentations de différentes spécifications du critère et du modèle sont peu nombreuses.

Nous nous limitons à la présentation des exemples les plus connus. Le nombre d'applications s'est considérablement accru ces dernières années et une étude exhaustive alourdirait les développements<sup>2</sup>.

---

1. Soit construits linéaires, soit approximés par un modèle linéaire.

2. Les textes des communications au congrès IFAC/IFORS de Warwick, ainsi que les résumés des "NBER Workshop" publiés dans Annals of Economic and Social Measurement (v.I n.4, v.III n.1) donnent une bonne idée de l'étendue de ces travaux.

Section 1 - COMMANDES CALCULEES SUR DES MODELES NON-LINEAIRES

1.1. Application du correcteur proportionnel et dérivé (J.P. Cooper et S. Fischer [18])

La commande dérivée et proportionnelle aux erreurs sur le taux d'inflation et le taux de chômage est appliquée par les auteurs au modèle de Saint-Louis dans le but d'évaluer le pouvoir stabilisateur de la politique fiscale et monétaire. Ils calculent d'abord les valeurs désirées des consignes à partir d'une courbe de Phillips générée par simulations. Ils déterminent ensuite par une procédure de recherche heuristique les coefficients des correcteurs de la politique monétaire et fiscale qui minimisent l'écart type du taux d'inflation et de chômage. Ils appliquent enfin le correcteur sur des simulations "entièrement" stochastiques (chocs sur les coefficients du modèle et les termes additifs d'erreurs).

Ils constatent que la politique monétaire seule (pour des coefficients nuls du correcteur fiscal) réduit l'écart type du taux d'inflation et de chômage (de 55 % et 53 % respectivement) par rapport à une règle de croissance à un taux constant de la masse monétaire. La politique fiscale seule réduit les écarts types par rapport à une politique fiscale inactive de 20 % et 27 % respectivement. Enfin, entre les deux politiques (utilisation simultanée des deux correcteurs) menées conjointement et la politique monétaire seule, la différence est faible.

Ces travaux de J.P. Cooper et S. Fischer montrent qu'une politique stabilisatrice de type correcteur, sans être optimale - elle ne minimise pas une fonction objectif - peut déjà donner de bons résultats. Ils sont dans la lignée des premières applications des servomécanismes qui ont été appliqués avec succès avant le développement de la théorie et des outils d'analyse.

1.2. Les algorithmes de résolution de la commande optimale pour les modèles non-linéaires (R.C. Fair [27])

R.C. Fair propose une méthode de calcul de la commande sur les modèles non-linéaires. Soit le modèle

$$(1.1) \quad f_i(t) [y(t), z(t), x(t), \alpha_i(t)] = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, g \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

où  $y(t)$  : vecteur de  $g$  variables endogènes  
 $z(t)$  : vecteurs de variables prédéterminées  
 $x(t)$  : le vecteur des variables de contrôle

T : le nombre total de périodes considérées dans le problème de commande.

Posant la fonction objectif

$$(1.2) \quad W = h[\underline{y}(1), \dots, \underline{y}(T), \underline{z}(1), \dots, \underline{z}(T), \underline{x}(1), \dots, \underline{x}(T)]$$

le problème du calcul de la commande revient à déterminer les vecteurs  $\underline{x}(1) \dots \underline{x}(T)$  qui maximisent W. Si g est la dimension de  $\underline{x}$ , le nombre de valeurs à déterminer est g.T.

R.C. Fair propose de transformer ce problème de maximisation d'une fonction non-linéaire sous contrainte non-linéaire, en un problème classique de maximisation d'une fonction non-linéaire sans contrainte par substitution. L'équation (1.1) peut s'écrire comme une application de  $\underline{x}(t)$  dans  $\underline{y}(t)$ , en substituant les y dans (1.2) par leur fonction des x, (1.2) s'écrit

$$W = Q(\underline{x})$$

La résolution analytique de ce problème est bien entendu impossible. La démarche proposée consiste, à partir d'une suite de vecteurs  $\underline{x}$ , de résoudre le modèle par la méthode de Seidel, par exemple, pour obtenir la suite des vecteurs  $\underline{y}$ . Dans un deuxième temps, W est calculé en fonction des vecteurs  $\underline{z}$ ,  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ . Tout le problème revient à itérer de la meilleure façon possible sur  $\underline{x}$  pour converger rapidement vers le maximum de W. R.C. Fair teste la réalisation de ces calculs sur le modèle linéaire de G. Chow (9 équations) et sur son propre modèle non-linéaire (19 équations) en utilisant successivement l'algorithme de M. Powell [64], la méthode du gradient et l'algorithme "quadratique hill climbing" de S. Goldfeld, R.E. Quandt et H.F. Trotter [33]. Il constate que les algorithmes utilisent 75 % du temps de calcul pour évaluer les fonctions. Le temps de calcul limite donc le nombre d'inconnues qu'il est possible de déterminer ainsi que la taille du modèle. L'auteur donne comme ordre d'idée un modèle de 20 équations où il est possible de déterminer 100 inconnues ; ce nombre est de 60 pour un modèle de 200 équations. Ces chiffres ne sont d'ailleurs donnés qu'à titre indicatif, car ils sont fonction de la rapidité de convergence de l'algorithme de résolution du modèle.

R.C. Fair n'applique pas sa technique à des modèles de grande taille couramment utilisés pour la prévision. Son étude donne cependant une idée claire sur la réalisation d'un calcul de commande directement sur un modèle non-linéaire.



1.3. Commande optimale déterministe sur le modèle DECA (M. Deleau, R. Guesnerie, P. Malgrange [23],[24])

Cette commande fait partie de l'ensemble d'études connu sous le vocable "Opération Optimix". Le but de l'opération était d'étudier la possibilité de substituer à la planification française actuelle, dont les objectifs et les moyens sont exprimés en quantités relatives à l'année terminale, une planification dynamique et contraléatoire. Une autre composante de cette opération, la fonction objectif du plan de R. Guesnerie et P. Malgrange, a été citée dans le premier chapitre. Une version de cette fonction, modifiée afin de la rendre compatible avec le modèle DECA (le prédécesseur de STAR à la Directeur de la Prévision) est utilisée pour le calcul de la commande optimale. La fonction contient sept arguments annuels et un argument final, la P.I.B. de la dernière période. Les auteurs considèrent trois instruments de la politique économique : dépenses publiques, transferts aux entreprises, transferts aux ménages. Un sentier de référence est d'abord généré par le modèle pour une politique économique tendancielle et un environnement donné (ensemble des paramètres du modèle). La commande optimale déterministe est ensuite calculée pour le même environnement. Le sentier généré par le modèle en appliquant la commande optimale est comparé au sentier de référence. Des variantes de cette commande sont enfin calculées pour des modifications de l'environnement (sur une ou plusieurs périodes) et des coefficients de la fonction objectif. Ils concluent de ces calculs que la politique tendancielle est largement sous optimale. Une autre conclusion vaut d'être notée : elle va dans le sens de l'objectif retenu dans cette thèse.

*"Par ailleurs, elle permet paradoxalement une meilleure appréhension des propriétés du modèle. Bien qu'elle prenne en compte aveuglément les mécanismes, l'interprétation de ses résultats met en évidence le rôle crucial de certaines relations et hypothèses, et nous conduit à un approfondissement de leur compréhension plus que ne nous le permettraient des exercices de simulation. C'est là une de ses vertus". (1)*

---

1. Ils ajoutent la note suivante au bas de la page : "En particulier, cela a mis en évidence certaines singularités du modèle DECA".

#### 1.4. Introduction explicite des contraintes dans le calcul de la commande optimale (D.A. Livesey [51])<sup>1</sup>

Nous avons mentionné dans le chapitre 1 que les contraintes sont souvent introduites par l'intermédiaire de la fonction objectif. Par exemple, une contrainte sur l'équilibre de la balance des paiements s'inclut en pénalisant fortement, dans la fonction objectif, tout déficit de la balance des paiements.

D.A. Livesey est opposé à cette pratique. La fonction objectif doit être la plus simple car il n'est pas possible de déterminer de manière intuitive les pondérations relatives de ses variables. Il utilise la fonction

$$J = \int_0^T \log(C_t + G_t) dt$$

avec C la consommation des ménages et G les dépenses publiques. Il spécifie des contraintes explicites sur huit variables : taux de chômage, niveau des réserves, rapport production capital, taux de croissance des dépenses publiques, taux d'intérêt et trois taux d'imposition.

Il remplace ainsi le problème du choix des pondérations par celui du choix des valeurs des contraintes. Ce choix est pour lui plus simple à résoudre et se pose dans des termes compréhensibles. De plus, ces valeurs peuvent être variées de façon à obtenir une meilleure idée de la faisabilité de la politique économique.

Le modèle du Royaume-Uni utilisé dans l'application comporte 15 équations non-linéaires, 5 variables instruments. Le problème d'optimisation est résolu pour l'algorithme de G. Zoutendijk des directions faisables [83]. Cet algorithme a l'avantage de déterminer facilement les valeurs limites des contraintes assurant l'existence d'une solution. D.A. Livesey montre, par exemple, que si l'on exclut une variation des taux de change, le niveau minimum de chômage est de 2,45 %. Cet algorithme a aussi l'avantage de pouvoir être arrêté à une itération quelconque ; il donne alors une suite de décisions qui sont à la fois possibles et meilleures que les décisions de départ.

---

1. Sur les travaux de D.A. Livesey, voir aussi [48] et [52].

Les applications décrites ci-dessus indiquent que le calcul de la commande optimale directement sur le modèle non-linéaire est tout à fait réalisable à l'aide des ordinateurs et des algorithmes de calcul existants. La question de l'opportunité de réaliser des calculs sur ces modèles reste posée : leurs coûts sont-ils justifiés par leurs avantages ?

## Section 2 - COMMANDES CALCULEES SUR LES MODELES LINEAIRES

Les applications présentées dans cette section portent sur des modèles linéaires ; le modèle est linéaire par construction ou linéarisé. Dans le dernier cas, l'effet des commandes est simulé sur le modèle non-linéaire.

### 2.1. Une des premières applications du correcteur P.I.D. aux modèles macroéconomiques (A.W. Phillips [58],[59])

A. Tustin [79] envisage le premier la possibilité d'appliquer les correcteurs aux modèles économiques. L'application la plus connue de ceux-ci est cependant celle de A.W. Phillips [58],[59]. Dans [58], A.W. Phillips considère un modèle continu de deux équations. La première équation décrit l'ajustement de la production à la variation de la demande (équation différentielle d'ordre 1). La deuxième écrit la demande somme d'une composante fonction de la production de la même période et d'une composante autonome. Par substitution, le système se réduit à une relation entrée-sortie représentée par une fonction de transfert d'ordre 1. A.W. Phillips montre sur ce système et sur un système d'ordre 2 (enrichi par l'addition d'un accélérateur) l'intérêt d'une action proportionnelle, intégrale et dérivée. Dans [59], le modèle est compliqué par l'addition de retards supplémentaires. Il sert à illustrer le conflit rapidité-stabilité : la commande peut rendre instable et oscillant un système stable et non-oscillant. C'est le cas par exemple, lors d'un retard pur entre la mesure de l'erreur et l'action.

### 2.2. Commande optimale calculée sur les relations entrées-sorties

#### 2.2.1. Le schéma de H. Theil [75]

Le schéma de commande optimale de H. Theil a été appliqué par d'autres auteurs<sup>1</sup>. Il est présenté dans le premier paragraphe ; son application par

---

1. Notamment B.M. Friedman [31], M. Deleau, R. Guesnerie, P. Malgrange [24].

H. Theil aux modèles des Etats-Unis et des Pays-Bas fait l'objet du paragraphe 2.

Description du schéma de H. Theil

Le modèle dynamique est mis sous la forme

$$(2.1) \quad \underline{y} = R \underline{x} + \underline{s}$$

$\underline{y}$  est le vecteur de sorties ( $m \times T$  ;  $m$  de variables de sorties,  $T$  l'horizon de la commande)

$\underline{x}$  est le vecteur des instruments ( $g \times T$  ;  $g$  le nombre d'instruments)

$\underline{s}$  est le vecteur de constantes ( $m \times T$ ).

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}(T) \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{y}(T) \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R(1,1) & 0 & & & \\ R(2,1) & R(2,2) & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ R(T,1) & R(T,2) & & & R(T,T) \end{bmatrix}$$

La première colonne bloc de la matrice  $R$  décrit l'effet de  $\underline{x}(1)$  sur tout l'horizon de la commande.

La fonction à minimiser est quadratique

$$(2.2) \quad W(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{a}^T \underline{x} + \underline{b}^T \underline{y} + \frac{1}{2} (\underline{x}^T A \underline{x} + \underline{y}^T B \underline{y} + \underline{x}^T C \underline{y} + \underline{y}^T C^T \underline{x})$$

La matrice de pondération  $A$  est de dimension  $mT \times mT$

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & \dots & A(1,T) \\ \vdots & & \vdots \\ A(T,1) & \dots & A(T,T) \end{bmatrix}$$

La première colonne bloc de  $A$  pénalise les variations simultanées des sorties à la première période et des sorties sur les autres périodes de l'intervalle de la commande<sup>1</sup>.

---

1. La fonction objectif n'impose pas l'hypothèse restrictive de séparabilité dans le temps des objectifs. L'occurrence de l'inflation durant deux périodes consécutives peut par exemple être pénalisée plus fortement.

Le vecteur  $\hat{x}$  qui maximise  $W$  est donné simplement par

$$(2.3) \quad \hat{x} = -K^{-1} k$$

$$\text{avec } \underline{k} = \underline{a} + R^T \underline{b} + (C + R^T B) \underline{s}$$

$$K = A + R^T B R + C R + R^T C^T$$

H. Theil démontre sur ce schéma le théorème de l'équivalent certain de la première période.

Ce schéma a l'avantage d'être établi facilement pour un modèle linéaire ou non-linéaire :  $R$  est la matrice des multiplicateurs dynamiques des instruments. La commande optimale et la valeur du critère ont, de plus, une expression analytique simple. L'expression du coût de l'incertain (augmentation de la valeur du critère à la suite de variations aléatoires des termes constants par exemple), du coût des décisions sous optimales s'obtiennent alors facilement. Ce schéma a cependant l'inconvénient de considérer simultanément les effets des instruments sur l'intervalle entier de la commande. Le calcul de  $\hat{x}$  suppose l'inversion d'une matrice  $mT \times mT$ . Le schéma ne peut donc pas s'appliquer à un modèle trimestriel sur un horizon long.

#### Applications du schéma

Ce schéma est appliqué par H. Theil sur le modèle linéaire de L.R. Klein [45]. Ce modèle contient 3 équations de comportement et 3 équations de définition ; sa forme finale donne la matrice  $R$  de (2.1). Le critère est ramené à la forme classique de pénalisation des écarts par rapport à des valeurs jugées optimales à la suite d'un changement de variable

$$\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^D \quad \underline{y} = \underline{y} - \underline{y}^D$$

H. Theil compare les résultats de la politique optimale et de la politique passée ; il calcule les coûts de première période des variations aléatoires des termes constants de (2.1). Le coût est une fonction linéaire des variances et des covariances des erreurs sur les équations structurelles. L'erreur sur la fonction de consommation est responsable de 40 % de ce coût.

Il applique aussi ce schéma sur un modèle linéaire des Pays-Bas de 40 équations. (2.1) est obtenu par calcul des multiplicateurs. Il consacre de longs développements à la détermination de la fonction objectif.

### 2.2.2. Enrichissement du schéma Theilien par l'addition d'une structure d'information (M. Deleau, R. Guesnerie, P. Malgrange [24])

Cette commande fait elle aussi partie de l'opération Optimix. Le vecteur  $\underline{s}$  est le résultat de deux aléas : un aléa *externe* qui affecte le taux de croissance en volume du commerce extérieur, un aléa *interne* portant sur la variable résiduelle de la relation de A.W. Phillips définissant le taux de salaire<sup>1</sup>. (2.1) est le tableau des multiplicateurs de DECA ;  $W(\underline{x}, \underline{y})$  est l'approximation quadratique de la fonction objectif du plan.

La structure d'information est définie par une matrice  $F$  de 0 et de 1 de dimension  $g.T \times e.T$  avec  $g$  et  $e$  le nombre d'instruments et d'aléas. Ainsi, dans le cas d'un instrument et d'un aléa,  $F_{32} = 0$  implique que la décision de la période 3 ne tient pas compte de l'aléa de la période 2.

La structure d'information permet de calculer les commandes optimales pour des types de réaction à l'aléa correspondant à différents schémas de planification. Réaction à l'information connue uniquement en première période, ou planification rigide : la structure d'information est constituée de 0 à l'exception du premier bloc colonne correspondant aux aléas de première période. Réaction aux aléas perturbant la période en oubliant le passé, un cas de planification souple : seuls les blocs diagonaux de la structure d'information sont constitués de 1. On peut aussi envisager des schémas de planification à révision périodique, des délais de réaction, l'affectation d'un instrument à un aléa.

Malgré l'addition de la structure d'information, l'expression analytique de la commande et de la valeur du critère restent simples. Les auteurs sont en mesure de calculer la contribution des aléas, en l'absence de correction, aux variances des objectifs pour les différentes périodes et ainsi le coût de l'incertain. Ils comparent les réductions de variance et les réductions de coût obtenues par l'application des différents schémas de réaction à l'aléa.

---

1. Les auteurs font l'hypothèse que les aléas sont indépendants entre eux, de moyenne nulle et de variance constante.

2.2.3. Modification du schéma Theilien par une fonction quadratique par morceau et un horizon endogène de la commande (B.M. Friedman [31])

B.M. Friedman remplace la fonction quadratique de H. Theil par une fonction quadratique par morceau. Les coefficients de la matrice A sont définis ainsi

$$a_{ii} = \begin{cases} a_{ii}^u & \text{si } y_i \in U(y_i) = \{y_i | y_i > y_i^u\} \\ 0 & \text{si } y_i \in M(y_i) = \{y_i | y_i^l \leq y_i \leq y_i^u\} \\ a_{ii}^l & \text{si } y_i \in L(y_i) = \{y_i | y_i < y_i^l\} \end{cases}$$

L'avantage de cette fonction est sa flexibilité. Un taux d'inflation inférieur à un taux donné peut ne pas être pénalisé. Les contraintes sont introduites tout en restant dans le schéma Theilien :  $a_{ii}^u = \infty$  impose  $y_i \leq y_i^u$ .

B.M. Friedman introduit aussi un horizon "endogène" de la commande. Celle-ci est appliquée sur un "intervalle de politique économique". L'intervalle débute lorsqu'une (ou plusieurs) des variables dépasse un seuil jugé acceptable et se termine lors du retour au-dessous de ce seuil. L'horizon est bien endogène : il dépend de l'efficacité de la politique économique.

L'auteur propose l'algorithme de résolution suivant :

- 1) Choix d'un horizon T
- 2) Choix arbitraire des coefficients "actifs" de la fonction objectif
- 3) Résolution du schéma de Theil, puis retour à 2) ou à 1) jusqu'à l'obtention de la solution.

Le problème n'a donc plus de solution analytique ; l'avantage de la simplicité des calculs de H. Theil est perdu.

L'auteur applique ce schéma au modèle de Wharton ; il calcule sur ce modèle les multiplicateurs de deux instruments sur trois objectifs pour la période 57-58.

2.2.4. Estimation des relations entrées-sorties et contrôle stochastique (J.P. Cooper et S. Fischer [20])

La relation (2.1) ne permet pas de calculer l'effet des variations des instruments sur une période plus longue que celle considérée explicitement lors du calcul des multiplicateurs. J.P. Cooper et S. Fischer proposent l'identification à partir du modèle non-linéaire des relations liant les sorties aux entrées et aux sorties passées. Ces relations permettent

de calculer l'évolution des sorties sur un nombre quelconque de périodes.

La méthode qu'ils appliquent au modèle de Saint-Louis comporte cinq étapes :

- 1) Choix d'un sentier d'évolution des variables de commande
- 2) Génération par des simulations "entièrement" stochastiques (voir § 1.1) de données sur les réponses du modèle aux variations de ces variables
- 3) Estimation par régression des relations entrées-sorties
- 4) Calcul des règles de commandes
- 5) Application de ces règles dans des simulations stochastiques.

Cette méthode part de l'hypothèse que les matrices de variances-covariances des erreurs additives et des coefficients des équations permettent de donner, par des simulations stochastiques, des observations semblables à celles de la réalité. Les relations entrées-sorties estimées sont des moyennes mobiles autorégressives :

$$(2.4) \quad V(t) = \alpha(t) + \sum_{i=0}^h \beta_i(t) M(t-i) + \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i(t) E(t-i) + \sum_{i=1}^r \mu_i(t) V(t-i) \\ + \sum_{i=1}^p \zeta_i(t) \Pi(t-i) + \varepsilon(t)$$

où  $V(t)$ , le taux de chômage,  $\Pi(t)$ , le taux d'inflation sont les deux sorties ;  $M(t)$ , la masse monétaire,  $E(t)$ , les dépenses gouvernementales sont les deux entrées.

Les auteurs soulignent eux aussi l'intérêt de leurs travaux quant à la connaissance des modèles :

*"Un résultat fortuit mais important de ce genre d'étude est son rôle dans l'évaluation des modèles. Les propriétés des modèles, spécialement des gros modèles, sont largement découvertes par l'expérimentation. L'approximation par régression donne des informations sur la réaction du modèle aux instruments et sur ses propriétés de stabilité, deux caractéristiques qui sont importantes à la fois pour les constructeurs et pour les utilisateurs de modèles".*

La commande proposée pour STAR est proche des travaux de J.P. Cooper et S. Fischer. Elle s'en différencie par son objectif : "le résultat fortuit" en est l'objectif premier. Ceci nous a conduit à déterminer l'approximation linéaire en variables d'état. Nous pouvons ainsi ne pas nous contenter simplement de constats de stabilité ou d'instabilité, d'efficacité des instruments, mais aussi chercher leurs explications.



### 2.3. Construction de modèles en variables d'état

Plutôt que de calculer la commande sur l'approximation linéaire d'un modèle existant, d'autres auteurs ont proposé de construire spécialement pour la commande des modèles linéaires. La linéarité est obtenue au coût d'hypothèses simplificatrices. Nous présentons brièvement ces modèles ; à l'exception des travaux de D.L. Erickson, les calculs de commande réalisés sur ces modèles ne sont pas mentionnés<sup>1</sup>.

#### 2.3.1. L.F. Buchanan [10]

L.F. Buchanan met en variables d'état le modèle établi par le Pr. Norton. Ce modèle comprend 13 équations aux différences d'ordre 1, et 3 équations d'identité et de définition. La linéarité est obtenue en n'introduisant dans le modèle que des variables nominales : le rôle des prix  $y$  est entièrement ignoré et le modèle suppose une illusion monétaire parfaite.

#### 2.3.2. D.L. Erickson [25]

D.L. Erickson applique au modèle du Pr. Norton une commande optimale avec "contraintes de sensibilité". Cette commande minimise l'effet des erreurs des coefficients du modèle sur la trajectoire suivie

Soit la représentation d'état linéaire :

$$(2.5) \quad \underline{x}(t) = A\underline{x}(t-1) + B\underline{u}(t-1)$$

La dérivée de  $\underline{x}(t)$  par rapport à un paramètre  $\alpha$  du modèle est

$$(2.6) \quad \frac{\partial \underline{x}(t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} (\alpha_0) \underline{x}(t-1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\alpha_0) \underline{u}(t-1) + A(\alpha_0) \frac{\partial \underline{x}(t-1)}{\partial \alpha}$$

$\underline{\gamma}(t) = \frac{\partial \underline{x}(t)}{\partial \alpha}$  est un vecteur d'état qui indique la sensibilité de la trajectoire

à la valeur du coefficient  $\alpha$ . (2.6) est la relation liant ces états. L'introduction de  $\underline{\gamma}(t)$  dans le critère permet de minimiser la sensibilité aux erreurs sur les coefficients.

---

1. Ce sont des calculs classiques qui correspondent à ceux décrits dans le Titre III.

Dans l'application de cette commande, D.L. Erickson retrouve l'inconvénient connu des commandes avec contraintes de sensibilité : leur coût élevé. "Le coût de la réduction de plus de 5 ou 10 % de la sensibilité de la trajectoire des états aux coefficients à l'aide des instruments G et M apparaît prohibitif en terme de variations du critère original".

### CONCLUSION

De ces différentes applications, nous tirons les conclusions suivantes : il est techniquement possible aujourd'hui de calculer la commande optimale directement sur les modèles non-linéaires. Il faut à notre avis suivre cette approche si le but du calcul d'optimisation est la détermination de la meilleure politique économique. Le passage à un modèle linéaire est en effet superflu : le temps entre chaque décision est suffisamment long pour permettre le calcul de la commande à chaque période, en tenant compte de la totalité des informations disponibles.

Il n'est donc pas nécessaire de construire spécialement un modèle pour le calcul de la commande. Ceci évite une difficulté que nous n'avons pas encore mentionnée : le décideur est méfiant devant une commande calculée à partir d'un modèle autre que celui servant à établir ses prévisions<sup>1</sup>.

Dans la mesure où le but de la commande est d'évaluer le comportement dynamique du modèle, il est préférable de conduire les calculs sur un modèle linéaire et un critère quadratique. Les calculs sur les relations entrées-sorties de l'approche Theilienne ont l'avantage d'être de réalisation facile : les contraintes sont les multiplicateurs dynamiques du modèle, la commande est une expression analytique simple. L'avantage des relations entrées-sorties quant à la connaissance de la dynamique du modèle reste cependant limité car elle traite le modèle comme une boîte noire. La représentation d'état est sur ce point supérieure.

L'intérêt de la commande stochastique reste un débat ouvert : si J.P. Cooper et S. Fischer ne veulent retirer de la commande que des informations qualitatives, pourquoi se préoccuper de commande stochastique ?

---

1. On peut citer à ce sujet l'expérience du PREM qui, malgré le patronage du Trésor britannique, a des difficultés à faire accepter par les hauts fonctionnaires les commandes calculées sur leur "petit modèle".



## CHAPITRE 4

### LE SCHEMA DE COMMANDE DE STAR

Dans le chapitre 1 de ce Titre, nous avons justifié l'objectif que nous poursuivons lors du calcul de la commande de STAR : une meilleure connaissance de la dynamique du modèle. Ce but permet de spécifier deux critères pour le choix du schéma de contrôle : simplicité d'implémentation (plutôt que précision) et apport dans la connaissance de la dynamique du modèle. Le premier critère nous a conduits à adopter la démarche classique de calcul de la commande sur une approximation linéaire du modèle original. Le deuxième critère a guidé notre choix de la forme du modèle linéaire.

Deux formes de modèle linéaire se prêtent facilement au calcul de la commande : le modèle entrées-sorties, la représentation d'état. Le modèle entrées-sorties, s'il permet des calculs rapides, n'apporte par lui-même que peu d'informations sur la dynamique du modèle. Ses coefficients sont le résultat de l'ensemble des enchaînements dynamiques et ils ne permettent que l'observation de celle-ci et non son explication. A l'opposé, le modèle en variables d'état facilite l'étude de la dynamique du modèle. La matrice de transition,  $A$ , isole les relations dynamiques et détermine l'évolution des multiplicateurs dynamiques. Ses coefficients peuvent être interprétés à partir des équations du modèle original.

Ce choix du calcul de la commande sur un modèle linéaire en variables d'état conduit immédiatement à retenir une fonction objectif quadratique. Celle-ci se justifie d'abord par la facilité des calculs, et les caractéristiques de la commande qui en résulte : la commande est une fonction linéaire des états. Elle est de plus d'interprétation facile : elle pénalise les écarts entre les sorties réelles et désirées.

Le schéma est alors complet : calcul de la fonction linéaire des états sur le modèle d'optimisation linéaire-quadratique et application de celle-ci dans des simulations sur le modèle non-linéaire.

La section 1 présente les éléments du schéma : modèle en variables d'état, fonction objectif quadratique. Les notions de stabilité et commandabilité mentionnées au Chapitre 2 y sont explicitées. Le schéma complet est donné dans la section 2. La troisième section présente trois enrichissements de ce schéma empruntés à l'automatique qui sont susceptibles d'applications ultérieures : intégrateur, modèle de référence, compensation des perturbations mesurables.

## Section 1 - LES ELEMENTS DU SCHEMA

### 1.1. Le modèle

Soit  $\underline{x}(t)$  le vecteur des variables d'état du modèle non-linéaire,  $\underline{u}(t)$ ,  $\underline{w}(t)$  les vecteurs des variables exogènes commandables et non-commandables,  $\underline{y}(t)$  le vecteur des sorties<sup>1</sup>. Le modèle non-linéaire s'écrit :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \underline{x}(t) &= F(\underline{x}(t-1), \underline{u}(t-1), \underline{w}(t-1)) \\ \underline{y}(t) &= G(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{w}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \underline{x} &: (n \times 1) & \underline{u} &: (g \times 1) \\ \underline{y} &: (m \times 1) & \underline{w} &: (q \times 1) \end{aligned}$$

Etant donné le vecteur  $\underline{x}^*(t-1)$  et les vecteurs  $\underline{u}^*(t)$ ,  $\underline{w}^*(t)$  de  $t-1$  à  $t+n-1$ , le modèle non-linéaire donne les vecteurs solutions  $\underline{x}^*(t)$ ,  $\underline{y}^*(t)$  de  $t$  à  $t+n$ . Ces solutions du modèle constituent la trajectoire de référence. Pour faciliter le calcul de la commande, nous faisons l'hypothèse que le comportement du modèle non-linéaire autour de la trajectoire de référence peut être raisonnablement approximé par un modèle linéaire en variable d'état :

$$(1.2.a) \quad \Delta \underline{x}(t) = A(t) \Delta \underline{x}(t-1) + B(t) \Delta \underline{u}(t-1) + E(t) \Delta \underline{w}(t-1) \quad A(n \times n), B(n \times g), E(n \times q)$$

$$(1.2.b) \quad \Delta \underline{y}(t) = C(t) \Delta \underline{x}(t) + D(t) \Delta \underline{u}(t) + P(t) \Delta \underline{w}(t) \quad C(m \times n), D(m \times g), P(m \times q)$$

$$\Delta \underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}^*(t) \quad \Delta \underline{u}(t) = \underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)$$

$$\Delta \underline{y}(t) = \underline{y}(t) - \underline{y}^*(t) \quad \Delta \underline{w}(t) = \underline{w}(t) - \underline{w}^*(t)$$

---

1. La définition de ces variables est donnée dans le chapitre 2 de ce titre. Pour la définition et l'application des règles de détermination des états et des sorties, voir Chapitre 1 du Titre II.

(1.2) est l'approximation linéaire de (1.1) autour de la trajectoire de référence. Les matrices A, B, E, C, D, P varient dans le temps : elles sont en effet fonction du point de linéarisation correspondant à chaque période. Le domaine de validité de (1.2) dépend du rôle des non-linéarités dans le modèle. Nous supposons<sup>1</sup> que celles-ci ne sont pas suffisamment fortes pour invalider les résultats qualitatifs de la commande.

L'étude du comportement autour d'une trajectoire n'est pas trop restrictive dans le cas des modèles économiques. La commande de l'état ne porte en effet pas sur des valeurs centrales  $\underline{u}^*(t)$  mais plutôt sur des écarts par rapport à ces valeurs  $\underline{\Delta u}(t)$ .

## 1.2. Stabilité ou instabilité de l'évolution propre du modèle

### 1.2.1. Définition et démonstration

Nous avons souligné dans le chapitre 2 l'intérêt d'un modèle en variables d'état par rapport aux autres formes de modèle utilisées en économétrie : forme structurelle, réduite, finale. Les notions de commandabilité, d'observabilité ont été alors définies, sans souligner cependant leur importance pour le contrôle des systèmes économiques. Celle-ci est bien mise en évidence à partir des concepts de stabilité et d'instabilité de l'évolution propre ou évolution autonome.

L'évolution propre de (1.2) est celle qui résulte de l'état initial pour des écarts nuls des entrées commandables et non commandables. En supposant la matrice A constante :

$$A(t) = A \quad \forall t$$

les états à  $t+n$  sont donnés par

$$\underline{\Delta x}(t+n) = A^n \underline{\Delta x}(t)$$

Il existe plusieurs définitions de stabilité ; nous retenons ici les plus généralement admises : celles de Lyapunov.

---

1. La validité de cette hypothèse a été testée dès les premières étapes de notre recherche.

Définitions : Un système est *stable au sens de Lyapunov* si une faible perturbation dans les conditions initiales entraîne un faible écart de la trajectoire ultérieure.

Un système est *asymptotiquement stable au sens de Lyapunov* s'il est stable au sens de Lyapunov et s'il retourne asymptotiquement vers la trajectoire centrale.

Théorème : Le système  $x(t) = Ax(t-1)$  est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A ont un module strictement inférieur à l'unité.

Démonstration :

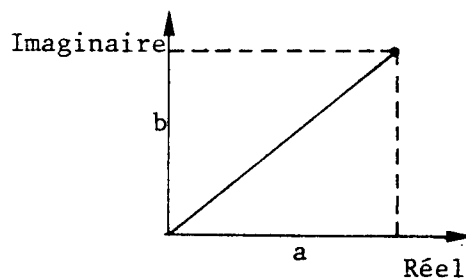
Les valeurs propres de la matrice A sont définies par

$$(1.3) \quad A \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$$

où  $\underline{v}_i$  est un vecteur non nul, appelé vecteur propre. Les valeurs propres sont réelles ou complexes. Soit  $\lambda_\ell$  une valeur propre complexe. Elle peut s'écrire sous plusieurs formes :

$$\lambda_\ell = a_\ell + i b_\ell$$

qui se représente graphiquement ainsi



$\lambda_\ell$  s'écrit alternativement :

$$\lambda_\ell = \rho_\ell (\cos \theta_\ell + i \sin \theta_\ell)$$

avec  $\theta_\ell = \text{Arctg} (b_\ell/a_\ell)$

$$\rho_\ell = \sqrt{a_\ell^2 + b_\ell^2} \quad (\text{appelé module})$$

ou enfin

$$\lambda_\ell = \rho_\ell e^{i\theta_\ell}$$

Aux valeurs propres complexes sont associés des vecteurs propres complexes ; l'ensemble des vecteurs  $\underline{v}_i$  forment une matrice complexe V. Soit  $\Lambda$  la matrice diagonale complexe des valeurs propres :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & & 0 \\ & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

L'évolution propre  $\Delta \underline{x}(t) = A \Delta \underline{x}(t-1)$  s'écrit par multiplication de V puis  $V^{-1}$

$$(1.4) \quad \Delta \underline{x}(t) = V \Lambda V^{-1} \Delta \underline{x}(t-1)$$

(1.4) permet d'écrire l'évolution de  $\Delta \underline{x}(t)$  en fonction de l'état initial, des valeurs propres et des vecteurs propres. En effet

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Delta \underline{x}(t+1) &= V \Lambda V^{-1} V \Lambda V^{-1} \Delta \underline{x}(t-1) = V \Lambda^2 V^{-1} \Delta \underline{x}(t-1) \\ \Delta \underline{x}(t+n) &= V \Lambda^n V^{-1} \Delta \underline{x}(t) \end{aligned}$$

Supposons un vecteur d'états initial  $\Delta \underline{x}(t)$  d'éléments nuls à l'exception du k-ième élément égal à 1. Le développement de  $V \Lambda^n V^{-1}$  en fonction des valeurs propres et des éléments des vecteurs propres donne pour ce vecteur initial<sup>1</sup>

$$(1.6) \quad \underline{x}_m(t+n) = \sum_{\ell} \lambda_{\ell}^N u_{m,k} v_{\ell,k} + \sum_{\ell} 2\rho_{\ell}^N \sqrt{P^2+Q^2} \cdot \cos(N\theta_{\ell} + \psi) \cdot \text{signe de } P$$

$$\text{avec } P = a_{m,\ell} \cdot \alpha_{\ell,k} - b_{m,\ell} \cdot \beta_{\ell,k}$$

$$Q = a_{m,\ell} \cdot \beta_{\ell,k} - b_{m,\ell} \cdot \alpha_{\ell,k}$$

$$\text{pour } u_{ij} \text{ élément } i,j \text{ de } V : u_{ij} = a_{ij} + i b_{ij}$$

$$v_{ij} \text{ élément } i,j \text{ de } V^{-1} : v_{ij} = \alpha_{ij} + i \beta_{ij}$$

La stabilité ou l'instabilité asymptotique dépend bien du module des valeurs propres de A :

$$\exists i \text{ pour } i = 1, n \text{ avec } \rho_i > 1$$

$$\Rightarrow \rho_i^n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{x}_m(t+n) \rightarrow \infty$$

$$n \rightarrow \infty \quad \quad \quad n \rightarrow \infty$$

1. Pour la démonstration, voir B. Andrighetto et J.P. Guérin [1] ; un programme calculant l'évolution propre à partir de (1.6) a été réalisé par B. Andrighetto



### 1.2.2. Intérêt du concept de stabilité pour les modèles économiques

Instabilité asymptotique. Si le système est asymptotiquement instable, toute perturbation  $\Delta x(t)$  entraîne en l'absence d'actions correctrices le non-retour du système (cas  $\max \rho_i > 1$ ) sur la trajectoire centrale lorsque  $n$  tend vers l'infini.

L'instabilité ou la stabilité asymptotique est en elle-même insuffisante pour les modèles macroéconomiques. L'infini pour les périodes d'observation de la macroéconomie (généralement l'année ou le trimestre) représente un horizon très éloigné ; le modèle bien qu'instable asymptotiquement peut être stable sur un horizon plus rapproché (ce qui correspond à la période d'utilisation du modèle) pour certaines perturbations.

La stabilité dans le court terme. Cette stabilité correspond à la première définition. Elle présente un intérêt pour l'économiste qui peut être préoccupé par la divergence du modèle sur un horizon court à la suite d'une perturbation ; une action correctrice peut être alors nécessaire.

La coexistence de stabilité dans le court terme et d'instabilité dans le long terme (ou asymptotique) s'explique par l'examen de (1.6). Le module de chaque valeur propre intervient multiplié par un coefficient qui est lui-même un produit des éléments des vecteurs propres et des états initiaux. Des coefficients de faible valeur absolue peuvent ainsi multiplier des modules élevés (supérieurs à un) ; ces valeurs propres, bien que de modules supérieurs à un n'ont alors guère d'influence dans le court terme pour la perturbation considérée.

La stabilité dans le court terme, contrairement à la stabilité asymptotique, ne peut pas être définie globalement indépendamment de la perturbation initiale sur les états. L'étude de la stabilité à court terme du modèle doit donc être conduite état par état pour chaque type de perturbations possibles.

### 1.3. La notion de commandabilité et son intérêt pour les modèles économiques

L'évolution d'un système peut être instable dans le court terme. Il importe alors de vérifier si la commande permet de stabiliser le système ou la commandabilité du système.

Définition : Un système est commandable s'il est possible de le transférer d'un état 0 à l'instant  $t_0$  à tout état  $X_p$  dans un intervalle de temps fini<sup>1</sup>.

L'existence de la commandabilité a été largement analysée par les automaticiens<sup>2</sup>. On peut résumer les résultats de ces études en deux critères strictement équivalents.

Critère 1 de commandabilité : Le système (1.2) est dit commandable si et seulement si la matrice  $Q$  de dimension  $(n \times ng)$

$$Q = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang  $n^3$ .

Critère 2 de commandabilité : La propriété de commandabilité est indépendante du système d'axe choisi. Le critère 2 est établi dans la base qui diagonalise  $A$ . Supposons que la matrice  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes<sup>4</sup>, soit  $V$  la matrice des vecteurs propres associés. La multiplication de (1.2.a) par  $V^{-1}$ <sup>5</sup> diagonalise  $A$  ; le système s'écrit

$$(1.2.a') \quad \zeta(t) = \Lambda \zeta(t-1) + \Pi u(t)$$

avec  $V^{-1}B = \Pi$  la matrice de commandabilité.

Les  $\zeta_i(t)$  états du système diagonalisé sont appelés modes. La commande de chaque  $\zeta_i(t)$  nécessite,  $\Lambda$  étant diagonale, l'existence d'un instrument sur la même ligne de l'équation matricielle diagonalisée. Le critère s'énonce donc ainsi : Un système dynamique est complètement commandable si la matrice de commandabilité  $\Pi$  ne présente aucune ligne nulle.

- 
1. Nous supposons dans cette définition qu'il n'existe pas de contraintes sur les commandes (par exemple d'impôts positifs). Cette hypothèse limite évidemment l'intérêt du critère pour les modèles économiques (voir Chapitre 2 du Titre III).
  2. Pour les références bibliographiques et une discussion plus complète, voir J.P. Guérin, B. Lamrani, B.A. Oudet [34].
  3. Dans le cas où la cible porte sur les sorties et non les états (commandabilité des sorties), la matrice  $Q$   
$$Q = (CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B)$$
 doit être de rang  $m$ .
  4. Pour une génération complète, voir B. Porter [63].
  5. Pour simplifier, nous ignorons ici l'action des entrées non-commandables.

Conséquence de la non-commandabilité d'un système : Les conséquences de la non-commandabilité d'un système se comprennent bien à partir de (1.2.a'). La non-commandabilité d'un mode  $\zeta_i$  (la  $i$ -ème ligne de la matrice de commandabilité est nulle) ne porte à conséquence dans le long terme que si le module de  $\lambda_i$  est égal ou supérieur à un. Dans le court terme, l'effet de la non-commandabilité dépend à la fois du module des valeurs propres et des coefficients qui leur sont associés. La non-commandabilité de modes instables mais "inactifs" est sans effet dans le court terme.

La commandabilité sur plusieurs périodes ou commandabilité parfaite :

J. Tinbergen (chapitre 1) fut le premier économiste à spécifier la condition nécessaire de commandabilité pour un modèle statique : un nombre d'instruments supérieur ou égal au nombre d'objectifs. A.J. Preston [67] a montré récemment que la condition de commandabilité (critères 1 et 2) pour les modèles dynamiques était moins restrictive. Ceci se comprend d'ailleurs bien intuitivement ; la définition de la commandabilité laisse un temps fini mais quelconque pour atteindre la cible à la différence de J. Tinbergen qui s'impose d'atteindre celle-ci en une période. Commentant l'article de A.J. Preston, M. Aoki [2] souligne que l'on retrouve les conditions de J. Tinbergen pour la commandabilité sur plusieurs périodes ou commandabilité parfaite (aussi connue sous le nom de reproductibilité). Celle-ci suppose que l'on cherche non seulement à atteindre la cible à  $T$  mais à suivre une trajectoire quelconque sur la période  $[T, T+\delta]$ . M. Aoki montre que dans ce cas le critère pour un modèle continu s'énonce ainsi :  
le système est parfaitement commandable en sortie si et seulement si la matrice  $M_n$  ( $m \times (2n-1)g$ )

$$M_n = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^{2n-2}B \\ 0 & & CA^{2n-3}B \\ & CB & CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

est de rang  $m \times n$ .

Le rang de  $M_n$  étant égal au plus au nombre de ces colonnes, la condition implique

$$m \times n \leq (2n-1)g \quad \text{ou} \quad m \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right)g$$

ce qui est vérifié pour un nombre d'instruments égal ou supérieur au nombre d'objectifs.

### Conséquences de la surdescription sur les résultats des tests de commandabilité

Les résultats du test de commandabilité doivent être interprétés avec précaution. Tout d'abord, les calculs de la matrice de commandabilité ou les tests de rang sont peu précis pour des modèles de grande dimension. Les modèles économiques posent de plus un problème particulier. Le passage de la forme structurelle à la représentation d'état peut résulter du fait des nombreuses identités comptables, en un modèle surdécrit (présence d'une ou plusieurs relations d'identités entre les états). L'application du critère donne alors un résultat négatif : le modèle est non-commandable. Ce résultat ne porte pas à conséquence car l'économiste ne cherche pas à atteindre des états quelconques, mais des états qui vérifient la ou les relation(s) d'identité.

#### 1.4. Le concept d'observabilité

Dans l'étude et la commande des processus physiques, l'automaticien doit souvent se contenter d'observations sur les entrées et les sorties du système. A partir d'observations sur les sorties, il reconstitue alors les états. La possibilité de reconstitution des états est connue sous le nom d'observabilité. Un système est complètement observable s'il existe un intervalle de temps fini tel que la connaissance des entrées et des sorties sur cet intervalle soit suffisante pour déterminer l'état initial. La non-observabilité des modes est là encore en elle-même insuffisante pour invalider la commande : la non-observabilité d'un mode stable ne porte guère à conséquence.

Le concept d'observabilité ne présente pas d'intérêt pour les modèles économiques. Les états des modèles sont directement accessibles : un modèle économique est toujours observable.

L'approximation linéaire en variable d'état (1.2) du modèle non-linéaire original (1.1) a permis de spécifier les critères de stabilité et de commandabilité des modèles économiques. Ces critères permettent de vérifier la stabilité et la commandabilité du modèle non-linéaire au voisinage de la trajectoire de référence. Nous avons vu que ces deux notions doivent être appréciées ensemble : une valeur propre de module supérieure à un peut être sans effet sur l'évolution à court terme du modèle. L'effet d'un mode instable, actif dans le court terme, peut être compensé par la commande. La non-commandabilité ne prête à conséquence pour les modèles macroéconomiques que si elle porte sur des modes instables et actifs dans le court terme.

## 1.5. La fonction objectif ou critère

### 1.5.1. Forme et composantes du critère

Le critère quadratique à minimiser est le deuxième élément du schéma

$$(1.7) \quad J = \sum_{t=1}^{T-1} \underline{e}_{-y}^T(t) Q \underline{e}_{-y}^T(t) + \underline{e}_{-y}^T(T) F \underline{e}_{-y}(T) + \sum_{t=0}^{T-1} \underline{e}_{-u}^T(t) R \underline{e}_{-u}(t)$$

$$\underline{e}_{-y}(t) = \Delta \underline{y}(t) - \Delta \underline{y}^D(t)$$

$$\underline{e}_{-u}(t) = \Delta \underline{u}(t) - \Delta \underline{u}^D(t)$$

$\Delta \underline{y}^D(t)$ ,  $\Delta \underline{u}^D(t)$  sont respectivement les écarts sur les entrées et les sorties désirées

T est l'année terminale de la commande.

F(m×m), Q(m×m), R(g×g) sont les matrices de pondération :  $Q \geq 0$ ,  $F \geq 0$ ,  $R > 0$ .

Les matrices de pondération sont prises constantes dans cette thèse afin d'éviter le choix de différentes pondérations. Les matrices variantes dans le temps n'alourdissent pas les calculs.

Le critère comprend trois termes à minimiser :

- 1)  $\underline{e}_{-y}^T(T) F \underline{e}_{-y}(T)$  minimise l'écart à l'année terminale entre les variations réelles et les variations désirées des sorties. Cette isolation de la variation du critère permet par exemple de pénaliser spécialement les variables qui sont les conditions initiales de l'après-horizon (voir Chapitre 1).
- 2)  $\sum_{t=1}^{T-1} \underline{e}_{-y}^T(t) Q \underline{e}_{-y}(t)$  assure une évolution des variations des sorties aussi proche que possible de celle désirée.
- 3)  $\sum_{t=1}^{T-1} \underline{e}_{-u}^T(t) R \underline{e}_{-u}(t)$  introduit la possibilité de fixer une trajectoire désirée aux variables de commande ; la minimisation du critère réalise alors un compromis entre les objectifs sur les sorties et sur les commandes. Dans notre thèse, cet élément n'est utilisé que pour garantir des commandes optimales d'amplitude "raisonnable" (éviter par exemple le triplement des impôts) : les vecteurs  $\Delta \underline{u}^D(t)$  sont nuls et les éléments de R faibles.

### 1.5.2. Interprétation du critère

Le critère est une mesure des écarts entre les variations réelles et désirées des sorties et des commandes. Il est dénué de toute signification en terme de bien-être ; il ne formalise en rien les objectifs de l'Etat. C'est un simple outil, qui, utilisé dans le schéma, va permettre la génération de trajectoires dans des directions spécifiées a priori : la minimisation du critère sous la contrainte du modèle détermine des commandes qui, appliquées au modèle linéaire, vont conduire à des solutions les plus proches possible des solutions désirées  $\Delta \underline{y}^D$ .

## Section 2 - LE SCHEMA DE COMMANDE

### 2.1. Calcul de règles de décision par résolution d'un problème d'optimisation

Le problème d'optimisation résolu dans le schéma est la minimisation de

$$(2.1) \quad J = \sum_{t=1}^{T-1} \underline{e}_y^T(t) Q \underline{e}_y(t) + \underline{e}_y^T(T) F \underline{e}_y(T) + \sum_{t=0}^{T-1} \underline{e}_u^T(t) R \underline{e}_u(t)$$

$$Q \geq 0, F \geq 0, R > 0$$

sous la contrainte<sup>1</sup>

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \underline{x}(t) &= A(t) \underline{x}(t-1) + B(t) \underline{u}(t-1) + \underline{f}(t-1) \\ \underline{y}(t) &= C(t) \underline{x}(t) + D(t) \underline{u}(t) \end{aligned}$$

La commande optimale<sup>2</sup> (la solution du problème d'optimisation) est donnée par

$$(2.3) \quad \Delta \underline{u}(t) = -L(t) \Delta \underline{x}(t) + \underline{g}(t)$$

avec la matrice de bouclage  $L(t)$  donné par

$$(2.4) \quad L(t) = [R + B^T(t)K(t+1)B(t) + D^T(t)QD(t)]^{-1} [B^T(t)K(t+1)A(t) + D^T(t)QC(t)]$$

1. Nous supposons ici, c'est le cas pour STAR, qu'il n'y a pas de relations entre  $w(t)$  et  $y(t)$  (la matrice  $P(t)$  est nulle). Le vecteur  $\underline{f}(t-1)$  est égal produit  $E(t) \cdot \Delta \underline{w}(t-1)$ .

2. Pour la démonstration, voir par exemple C. Foulard, S. Gentil et J.P. Sandraz [30].

et le vecteur d'anticipation,  $\underline{g}(t)$

$$(2.5) \quad \underline{g}(t) = [R+B^T(t)K(t+1)B(t)+D^T(t)QD(t)]^{-1} \{D^T(t)Q\underline{\Delta y}^D(t)+R\underline{\Delta u}^D(t) - B^T(t)[\underline{p}(t+1)+K(t+1)\underline{f}(t)]\}$$

Les matrices  $K(t)$  et les vecteurs  $\underline{p}(t)$  sont calculés récursivement à partir de l'année  $T$  horizon de la commande :

$$\begin{aligned} \text{si } D = 0 \\ K(T) &= C^T(T)F(T) \\ p(T) &= C^T(T)\underline{\Delta y}^D(T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } D \neq 0 \\ K(T) &= 0 \\ p(T) &= 0 \end{aligned}$$

pour  $t = T-1, T-2, T-3, \dots, 1$

$$(2.6) \quad K(t) = A^T(t)K(t+1)[A(t)-B(t)L(t)]-C^T(t)QD(t)L(t)+C^T(t)QC(t)$$

$$(2.7) \quad \underline{p}(t) = [A^T(t)-L^T(t)B^T(t)][\underline{p}(t+1)+K(t+1)\underline{f}(t)]+ [L^T(t)D^T(t)Q-C^T(t)Q]\underline{\Delta y}^D(t)+L^T(t)R\underline{\Delta u}^D(t)$$

La condition imposée à la matrice  $R$  ( $R>0$ ) assure que l'optimum (2.3) est unique.

On remarque que les vecteurs  $\underline{g}(t)$  sont nuls pour des vecteurs  $\underline{\Delta y}^D(t), \underline{\Delta u}^D(t)$  nuls.  $\underline{\Delta u}(t)$  est alors la commande de régulation : elle ramène le système sur la trajectoire de référence lorsqu'il tend à s'en écarter à la suite de perturbations.

La solution du problème d'optimisation se traduit donc par le calcul d'un ensemble de matrices  $L(t)$  et de vecteurs  $\underline{g}(t)$ . Ces matrices et vecteurs constituent des règles de décision ; elles sont conservées sur un fichier pour servir ensuite d'entrées aux simulations sur le modèle non-linéaire.

## 2.2. Application de ces règles dans des simulations sur le modèle non-linéaire

Les matrices  $L$  et les vecteurs  $g$  déterminent dans notre schéma les variations des commandes (par rapport à leurs niveaux de la trajectoire de référence) appliquées au modèle non-linéaire.

La commande simulée est la somme de la commande de la trajectoire centrale  $\underline{u}^*(t)$  et de la commande de correction  $\Delta \underline{u}(t)$  donnée par (2.3). Dans cette équation  $\Delta \underline{x}(t)$  est la différence entre les états de la trajectoire de référence et les états solution du modèle non-linéaire commandé.

Le schéma fonctionnel est donné dans la figure 1.  $\underline{x}^*(t)$  est le vecteur d'état de la trajectoire de référence calculé par le modèle non-linéaire pour des entrées  $\underline{u}^*(t-1)$ ,  $\underline{w}^*(t-1)$ ;  $\underline{x}(t)$  le vecteur d'état solution du modèle non-linéaire pour des entrées  $\underline{u}^*(t-1) + \Delta \underline{u}(t-1)$ ,  $\underline{w}^*(t-1)$ .

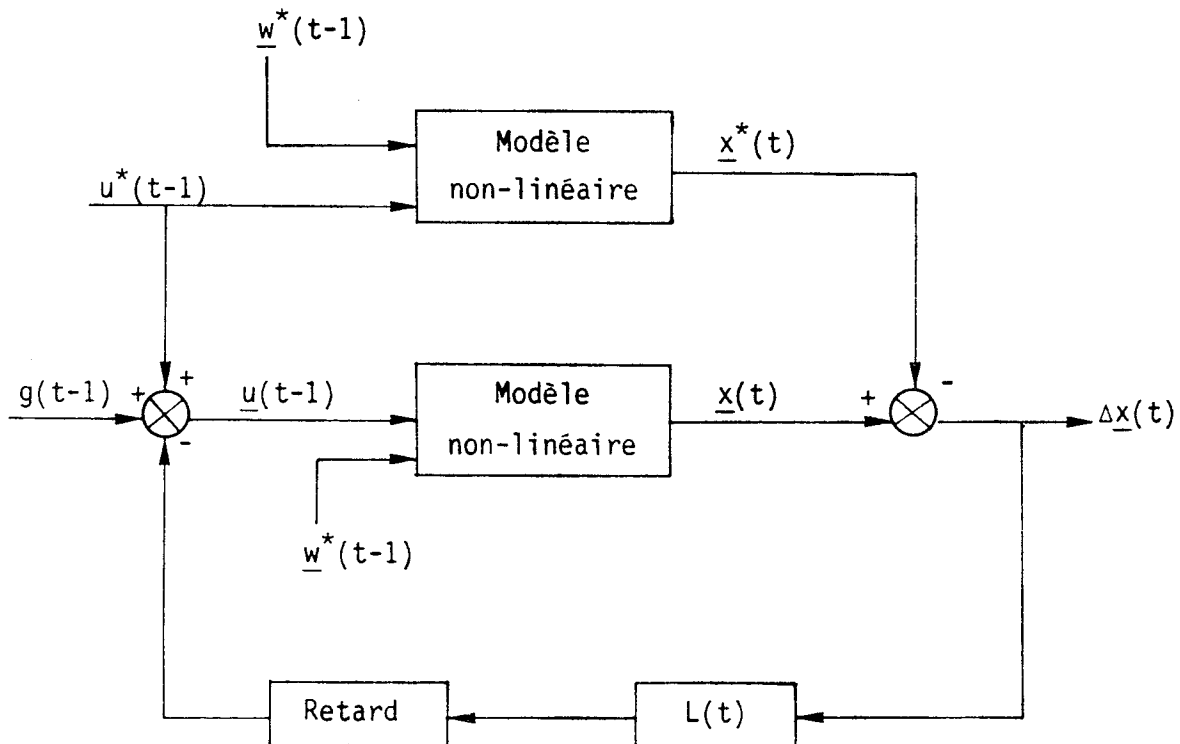


Figure 1 - LE SCHEMA DE COMMANDE



2.2.1. Comparaison avec le schéma proposé par M. Athans [4] et D. Kendrick [44]

M. Athans et D. Kendrick ont proposé un schéma de contrôle en deux niveaux pour la *commande stochastique* des modèles macroéconomiques non-linéaires. La commande est dans leur schéma la somme de deux composantes. La première est la commande déterministe en boucle ouverte calculée directement sur le modèle non-linéaire (par la méthode de R.C. Fair par exemple). La seconde est la commande stochastique de correction en boucle fermée qui, en cas de perturbations, ramène le système sur la trajectoire optimale donnée par application de la première commande. Les matrices de bouclage sont calculées sur un modèle en variables d'état obtenu par linéarisation autour de la trajectoire optimale. Dans les notations de ce chapitre, ce schéma se résume ainsi : les vecteurs  $\underline{u}^*(t)$  sont calculés par résolution d'un problème d'optimisation ; le modèle (1.2) est obtenu par linéarisation autour de la trajectoire optimale ; ce modèle inclut des erreurs (ou bruits) additifs de moyennes et de matrice de variances-covariances connue. Les matrices de bouclage  $L(t)$  sont calculées pour le critère (2.1) avec

$$\begin{aligned} \Delta \underline{y}^D(t) &= 0 \\ \Delta \underline{u}^D(t) &= 0 \end{aligned} \quad \forall(t)$$

Le schéma fonctionnel est celui de la figure 1 avec  $g(t) = 0$ . Ce schéma de contrôle en deux niveaux est bien entendu supérieur à celui que nous proposons pour la qualité de la commande du modèle non-linéaire. Cependant, pour le but fixé à la commande dans cette thèse, l'étude de la dynamique du modèle, la première étape du schéma est superflue. En spécifiant a priori des valeurs pour les vecteurs  $\underline{y}^D(t)$  et  $\underline{u}^D(t)$ , cette étape (la plus coûteuse en temps calcul) est évitée, mais elle entraîne des erreurs dues à l'approximation linéaire ; celles-ci ne sont probablement pas suffisantes pour invalider les résultats qualitatifs de la commande.

### 2.2.2. Les avantages du schéma

Rapidité de calcul de la commande et de la simulation. Le calcul des matrices de bouclage et des vecteurs d'anticipation se fait rapidement : il ne nécessite aucune itération. Ces formules étant tout à fait classiques en automatique, les programmes de calcul existants peuvent être utilisés.

La commande est en boucle fermée. La boucle fermée tient compte de l'évolution réelle du système non-linéaire ; elle tend à compenser ainsi les erreurs de linéarisation<sup>1</sup>.

## Section 3 - TROIS ENRICHISSEMENTS POSSIBLES DU SCHEMA<sup>2</sup>

Dans cette section, nous proposons trois enrichissements possibles du schéma. Pour des contraintes de temps, ceux-ci n'ont pas donné lieu à application dans cette thèse ; ils présentent un intérêt certain dans notre domaine d'étude. L'addition d'intégrateurs permet de calculer des commandes pour des objectifs portant sur l'évolution globale de la période. Moyennant des hypothèses simplificatrices, l'addition d'un modèle de référence et d'un modèle de perturbations mesurables augmente le nombre de simulations possibles tout en simplifiant les calculs de (2.4) et (2.5). Ces calculs sont de loin les plus lourds du schéma de commande ; il est intéressant de les simplifier et de ne pas avoir à les effectuer à chaque simulation. Les développements qui suivent portent sur le modèle (2.2) et le critère (2.1).

### 3.1. Addition d'intégrateurs

#### 3.1.1. Intérêt de l'addition d'intégrateurs dans la commande des modèles macroéconomiques

La minimisation du critère  $J$  conduit à un compromis entre l'amplitude des erreurs sur les sorties  $e_y(t)$  et sur les commandes  $e_u(t)$ . Ce compromis a l'inconvénient pour le contrôle industriel de ne pas assurer des erreurs

---

1. La comparaison (Chapitre 2, Titre III) de deux scénarios obtenus par une commande en boucle ouverte et une commande en boucle fermée permet de mesurer cette compensation. Celle-ci devient sensible dès la 3ème année de la simulation. Il est probable qu'elle le serait encore plus pour un horizon de commande supérieur à 5 ans.

2. Les développements de cette section sont largement empruntés à C. Foulard, S. Gentil et J.P. Sandraz [30].

stationnaires nulles<sup>1</sup> lorsque les consignes ne sont pas nulles. Ce problème peut être résolu par l'addition d'intégrateurs qui cumulent la somme des erreurs sur une ou plusieurs sorties

$$(3.1) \quad \underline{v}(t) = \underline{v}(t-1) + \underline{e}_y(t) \quad \underline{v} \text{ un vecteur de dimension } m$$

L'addition d'intégrateurs ne présente pas le même intérêt en macroéconomie. Le décideur dans le cas du calcul de politiques optimales ne cherche pas à atteindre la consigne avec la plus grande précision ; la précision n'a pas, a fortiori, d'intérêt dans nos scénarios. L'avantage de l'intégrateur dans notre domaine est autre : tout d'abord il permet d'assigner des objectifs aux variables stocks qui sont la somme cumulée des variables flux de la période. Par exemple, l'addition d'un intégrateur sur la sortie balance commerciale permet de fixer un objectif sur les déficits cumulés de la période. L'intégrateur permet ensuite de pénaliser plus fortement une suite d'erreurs (par exemple, l'inflation sur une longue période).

### 3.1.2. Calcul de la commande d'un modèle avec intégrateur

L'addition d'intégrateurs résulte dans l'augmentation de la dimension du système qui s'écrit maintenant<sup>2</sup>

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t-1) \\ \underline{v}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \underline{u}(t-1) + \begin{bmatrix} \underline{f}(t-1) \\ -\underline{y}^D(t-1) \end{bmatrix}$$

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} \underline{y}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

ou par définition appropriée des vecteurs et des matrices indicés 1

$$(3.4) \quad \underline{x}_1(t) = A_1 \underline{x}(t-1) + B_1 \underline{u}(t-1) + \underline{f}_1(t-1)$$

$$(3.5) \quad \underline{y}_1(t) = C_1 \underline{x}(t) + D_1 \underline{u}(t)$$

---

1. Voir la définition du Chapitre 2.

2. Pour ne pas alourdir les écritures, nous ne faisons pas apparaître dans le reste de cette section les  $\Delta$ .

Pour un critère

$$J_1 = \sum_{t=1}^{T-1} \underline{e}_1^T(t) Q_1 \underline{e}_1(t) + \underline{e}_1^T(T) F_1 \underline{e}_1(T) + \sum_{t=0}^{T-1} \underline{e}_u^T(t) R \underline{e}_u(t)$$

$$\text{où } Q_1 = \begin{bmatrix} Q & \\ & Q_v \end{bmatrix} \quad (2m \times 2m) \text{ et } \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \underline{e}_y \\ \underline{v} \end{bmatrix} \quad (2m \times 1)$$

on obtient la commande optimale :

$$(3.6) \quad \underline{\hat{u}}(t) = -L_1(t) \underline{x}_1(t) + \underline{g}_1(t)$$

ou en développant  $\underline{x}_1, L_1$

$$(3.7) \quad \underline{\hat{u}}(t) = -L(t) \underline{x}(t) - M_1 \underline{v}(t) + \underline{g}_1(t) \quad 1$$

### 3.2. Addition d'un modèle de référence

#### 3.2.1. Intérêt de l'addition d'un modèle de référence sur notre schéma

Notre schéma impose pour chaque trajectoire désirée (c'est-à-dire chaque ensemble de vecteurs  $\underline{y}^D(t)$ ,  $\underline{u}^D(t)$  ( $t=1\dots T$ )) le calcul de  $K(t)$ ,  $\underline{p}(t)$  ( $t=0\dots N-1$ ) suivant les formules (2.6) et (2.7). Ces calculs sont déjà relativement longs pour un système d'ordre 31 et un horizon de 5 périodes<sup>2</sup>.

Leur durée et donc leur coût peuvent, dans le cas d'un modèle trimestriel avec un horizon de commande de 20 périodes, limiter sérieusement le nombre de simulations contrôlées.

Pour réduire ces calculs, les automaticiens ont proposé des hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses se sont révélées dans les applications peu limitatives : on constate en effet, lors de simulations, que la qualité de la commande n'en est que faiblement diminuée. Elles sont susceptibles d'être appliquées au calcul de la commande des modèles économiques<sup>3</sup>. Nous en présentons deux ici.

- 
1. Il convient de noter que cette matrice  $L$  diffère de celle obtenue par un modèle sans intégrateur (2.4).
  2. Une minute et demie d'unité centrale d'un ordinateur I.B.M. 360/67.
  3. Soit lors de l'étude de la dynamique du modèle, soit lors du calcul de la politique économique optimale dans sa phase préliminaire d'étude de la spécification du critère.

Approximation des matrices  $L(t)$  par une matrice constante

Pour des matrices  $A, B, C, D, Q$  et  $R$  constantes, la matrice  $L(t)$  varie à chaque période car elle est fonction de la matrice  $K(t)$ .

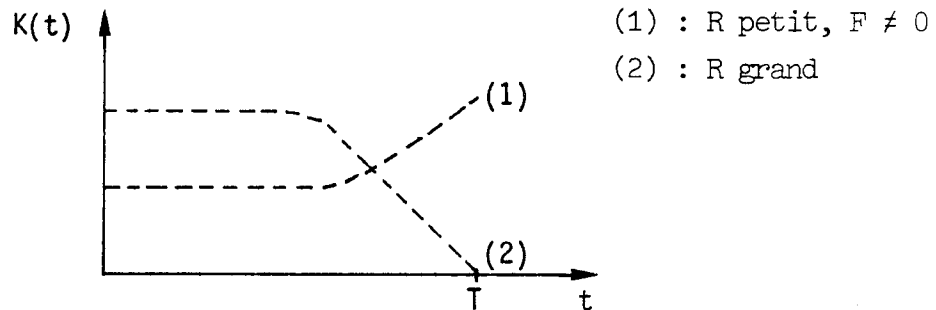


Figure 2 - VARIATION DE LA MATRICE  $K(t)$

La Figure 2 représente l'allure des variations de  $K$  dans le temps pour un horizon  $T$  fini et deux hypothèses sur les matrices  $R$  et  $F$ . En effet, on démontre que :

- . la durée du régime transitoire est d'autant plus faible que  $R$  est petit (par rapport à  $Q$ )
- . la valeur constante de  $K$  ne dépend pas de  $F$
- . l'équation en différence de Ricatti (2.6) converge vers une solution unique si le système initial est commandable (démonstration due à R. Kalman)

$$\begin{array}{l} K(N) \rightarrow K \\ T \rightarrow \infty \end{array} \quad \Longrightarrow \quad L(t) \Longrightarrow L$$

Au vue de ces résultats, il est justifié de supposer  $K$  constante lorsque :

1)  $N$  tend vers l'infini

ou

2) Lorsque seules les premières valeurs de la commande sont appliquées. Dans ce dernier cas, les calculs complets sont repris avant d'arriver à  $t = T$  (commande avec horizon fuyant).

Le calcul (pour A,B,C,D,Q,R constantes) de la commande de bouclage  $L(t)\Delta\underline{x}(t)$  est donc grandement simplifié par l'approximation de  $L(t)$  par une matrice constante  $\bar{L}$ .

Il reste alors à simplifier le calcul des vecteurs d'anticipation  $g(t)$ . Ces vecteurs peuvent être fabriqués à l'aide d'un processus générateur : c'est là le rôle du modèle de référence.

Rôle du modèle de référence : génération de vecteur  $\underline{y}^D$  à partir d'entrées en échelon

---

Une approximation semblable à celle de la matrice  $L$  s'applique à  $G$  pour une consigne constante ( $\underline{y}^D(t) = C^t$ ). Cette dernière hypothèse est très restrictive pour les modèles économiques pour lesquels les sorties sont généralement des exponentielles. L'introduction d'un modèle de référence permet de lever cette restriction. Les sorties désirées sont alors générées par un modèle de référence en variable d'état pour des entrées constantes. Ces sorties peuvent prendre alors soit la forme d'échelon, soit d'exponentielles, soit de combinaison linéaire de ces deux formes. Le modèle de référence s'écrit

$$(3.8) \quad \underline{s}(t) = A'\underline{s}(t-1) + B'\underline{z}$$

$$(3.9) \quad \underline{y}^D(t) = C'\underline{s}(t)$$

$\underline{s}(t)$  : vecteur d'état du processus générateur  
 $\underline{z}$  : l'entrée constante du processus.

### 3.2.2. Calcul de la commande sur le système agrandi

Reprenant (3.4) et (3.5) et y ajoutant (3.8) et (3.9), l'équation du système global s'écrit

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ C & I & -C' \\ 0 & 0 & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t-1) \\ \underline{v}(t-1) \\ \underline{s}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ D \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(t-1) + \begin{bmatrix} \underline{f}(t-1) \\ 0 \\ B'\underline{z} \end{bmatrix}$$

$$(3.11) \quad \begin{bmatrix} \underline{y}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{y}^D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{s}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

La forme du modèle ne change pas, seule sa dimension s'est agrandie. Les formules de la section 2 sont applicables après redéfinition appropriée des matrices et des vecteurs. Pour des matrices A, B, C, D, Q, R, A', B', C' constantes et un vecteur  $\underline{z}$  constant, la commande s'écrit

$$(3.12) \quad \hat{u}(t) = -L\underline{x}(t) - M\underline{v}(t) + P\underline{s}(t) + N\underline{z}$$

Les matrices constantes L, M sont celles du modèle avec intégrateurs : le retour d'état ne dépend donc pas du modèle de référence.

(3.12) est donc une fonction explicite du vecteur  $\underline{z}$ , le vecteur d'entrée du modèle de référence. Pour un même calcul de N, il va être possible de générer différentes trajectoires : trajectoire avec un taux de croissance de 5 %, puis de 6 %, un taux d'inflation de 2 %, 4 %, ... .

Au coût d'hypothèses simplificatrices portant principalement sur la constance des matrices du modèle et de pondération du critère, il est ainsi possible de simuler différentes trajectoires pour un même calcul des règles de décision. De plus, le calcul de ces règles est lui-même simplifié : les règles de décision variantes dans le temps sont approximées par des règles constantes.

### 3.3. Prise en compte des perturbations mesurables

Dans l'application à STAR de notre schéma, nous supposons que les perturbations sur le modèle sont nulles. Cette hypothèse restrictive n'est cependant pas impliquée par notre schéma. La commande est une fonction des états ; elle prend en compte les perturbations dans la mesure où celles-ci influent sur les états. Cette prise en compte se fait cependant avec retard. Une perturbation connue au début de l'année  $t$  entraîne une modification de la commande que pour l'année  $t+1$ . Il est possible, en agrandissant la dimension du système, de déterminer la commande qui compense les perturbations dès la connaissance de celles-ci. Le modèle de perturbations suivant est ajouté au modèle

$$(3.13) \quad \underline{v}(t) = A''\underline{v}(t-1) + B''\underline{\Pi}$$

$$(3.14) \quad \underline{y}_{\Pi}(t) = C''\underline{v}(t)$$

où  $\underline{y}_{\Pi}$  est l'influence des perturbations mesurables  $\underline{\Pi}$  sur les sorties  $\underline{y}$ . La commande calculée sur le modèle global (3.10, 3.11, 3.13, 3.14) est de la forme

$$(3.15) \quad \hat{u}(t) = -L(t)\underline{x}(t) - M(t).\underline{v}(t) + P(t).\underline{s}(t) + g(t) - T(t)\underline{v}(t) - \underline{g}''(t)$$

où  $L, M, P, g$  sont les matrices et les vecteurs déjà obtenus,  $T(t)$  et  $\underline{g}''(t)$  sont les matrices et les vecteurs d'anticipation dus au modèle de perturbation. Les simplifications décrites ci-dessus peuvent s'appliquer dans les mêmes conditions. La commande s'écrit alors

$$(3.16) \quad \hat{u}(t) = -L\underline{x}(t) - M(t).\underline{v}(t) + P(t)\underline{s}(t) + N\underline{z} - T\underline{v}(t) - W\underline{\Pi}$$

La Figure 2 donne le schéma fonctionnel de la commande du modèle linéaire (2.2) enrichi par l'addition d'intégrateurs, d'un modèle de référence et de perturbations dans le cas de matrices de bouclage constantes. Ce schéma permet bien de simuler différentes commandes pour des matrices de bouclage données. Pour cela, il suffit de varier les consignes d'entrées,  $\underline{z}$ , du modèle de référence et les entrées,  $\underline{\Pi}$ , du modèle de perturbations.



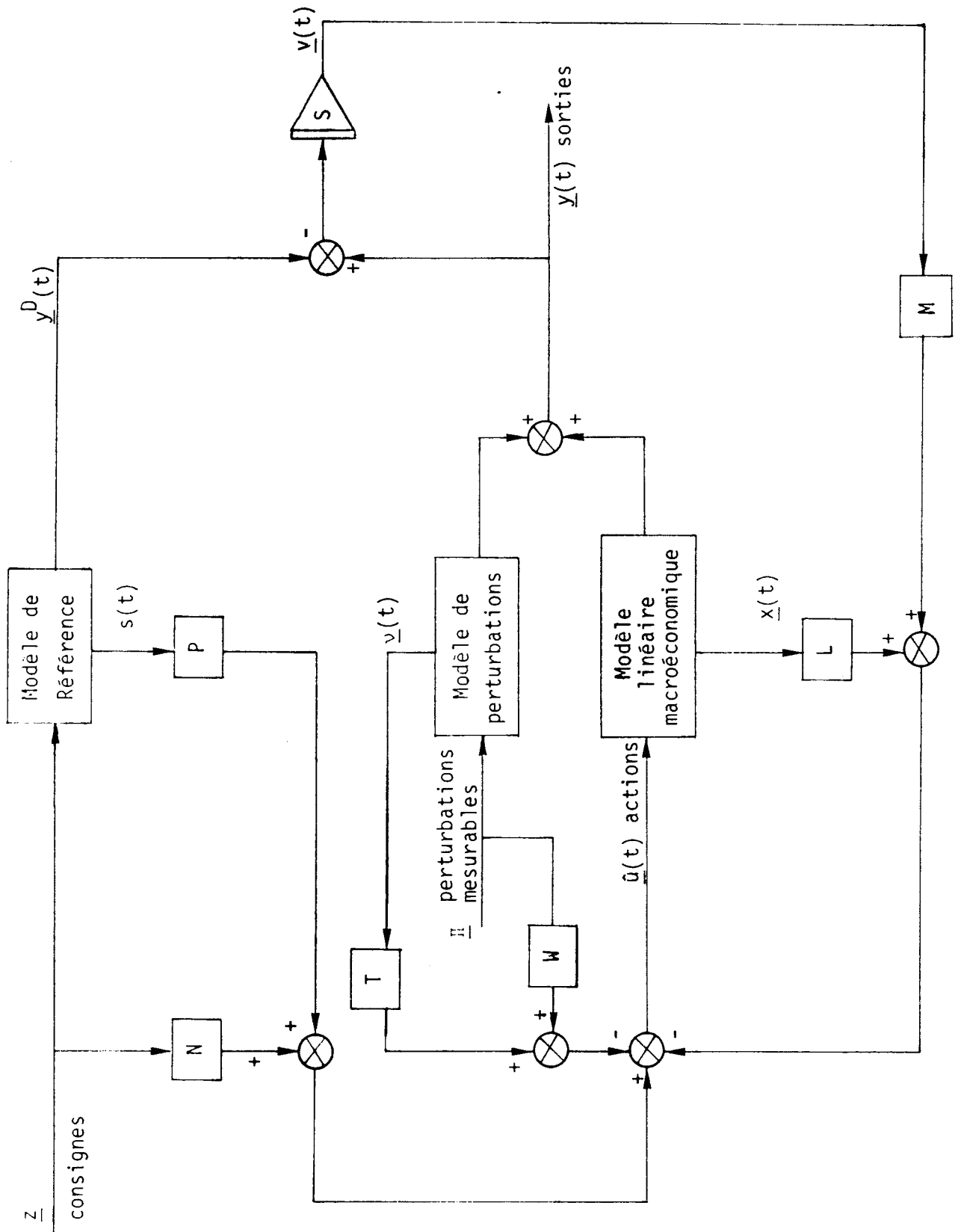


Figure 3 - SCHEMA DE COMMANDE D'UN MODELE LINEAIRE ENRICH

## CONCLUSION

Nous avons proposé un schéma de commande permettant de générer par le modèle non-linéaire des scénarios d'évolution dans un sens spécifié a priori par la définition du critère. Ce schéma a bien les qualités recherchées : les scénarios sont obtenus facilement par simulation d'une règle de commande déterminée sur une approximation linéaire. Celle-ci est en variable d'état ; elle permet de déterminer la stabilité locale (autour de la trajectoire) du modèle non-linéaire ; elle apporte donc par elle-même - en dehors de la commande - des informations sur la dynamique du modèle. L'application à STAR de ce schéma dans les chapitres suivants valide ces affirmations.

L'intérêt des trois enrichissements du schéma mérite d'être vérifié par une application à un modèle économique. Tout laisse, cependant, à penser à ce niveau de nos recherches que nous arriverons à la conclusion des automaticiens : l'avantage de la simplification compense de loin la baisse de la qualité de la commande.



## T I T R E II

LE MODELE STAR ET SON APPROXIMATION LINEAIRE  
EN VARIABLES D'ETAT STARTER<sup>1</sup>

1. *STARTER désigne une troisième version du modèle STAR ; elle s'ajoute à la version STAR<sub>0</sub> des équations du coeur du modèle et STAR<sub>1</sub> du modèle complet.*



Dans le titre précédent, nous avons justifié le rôle attribué dans cette thèse à la commande : un outil de simulations permettant d'explorer systématiquement la dynamique des modèles macroéconomiques non-linéaires. Pour une trajectoire quelconque spécifiée a priori, le calcul de la commande puis son application au modèle non-linéaire permettent de générer une trajectoire la plus proche possible de cette trajectoire désirée. Ceci est réalisé par un schéma de commande en deux niveaux : calcul des coefficients des règles de décision sur une approximation linéaire en variables d'état, puis application de ces règles en simulation sur le modèle linéaire. Ce schéma a deux avantages. Il ne nécessite que des calculs simples : en temps de calcul, le coût de génération d'une trajectoire est minime. De plus, un élément du schéma, le modèle en variables d'état, apporte des éléments d'information sur la dynamique du modèle.

Le Titre II est consacré à la première étape de l'application, la détermination d'une approximation linéaire en variables d'état pour le modèle STAR. Dans le chapitre 1, nous présentons le modèle STAR : les hypothèses économiques à la base du modèle, ses variables d'état et de commande. Le chapitre 2 décrit le passage du modèle non-linéaire STAR à son approximation linéaire STARIER : étude de la validité de l'approximation linéaire, approximation par la méthode des moindres carrés.



## CHAPITRE 1

### LE MODELE STAR

#### "Schéma Théorique d'Accumulation et de Répartition"

Avant d'exposer la structure même du modèle de STAR (nombre d'équations, non-linéarités) et la détermination des variables d'état et de commande, nous présenterons dans une première section les mécanismes économiques décrits dans STAR. Il n'est pas question ici de présenter une analyse économique détaillée du modèle. Celle-ci a déjà été amplement réalisée par les auteurs du modèle<sup>1</sup>. Nous nous contentons d'en rappeler les idées directrices.

#### Section 1 - LES HYPOTHESES ECONOMIQUES RETENUES DANS STAR

STAR est un modèle de prévision annuelle élaboré au sein de la Direction de la Prévision. Il fait suite aux travaux de modélisation menés dès les années 50 par les Services des Etudes Economiques et Financières, puis poursuivis par son successeur, la Direction de la Prévision. ZOGOL [84] est le premier modèle complet élaboré par la Direction ; modèle simple et très agrégé de demande de type Keynésien, il laissait encore inexplicée l'évolution de nombreuses variables. DECA [6] a prolongé les travaux de ZOGOL en y traduisant des innovations importantes. L'investissement est dans DECA un des facteurs clef de l'évolution dynamique du modèle et il devient une variable endogène dépendant entre autre du taux d'autofinancement désiré. Ce concept d'autofinancement désiré illustre une des hypothèses originales retenue par DECA pour expliquer les fluctuations de l'activité économique. Les entreprises cherchent à maintenir un certain taux d'autofinancement. Tout dépassement de ce taux entraîne l'année suivante un ralentissement de l'investissement pour ramener le taux au rapport désiré. Les prix sont considérés comme une autre variable permettant aux entreprises de réaliser leur équilibre financier.

---

1. Voir les articles des auteurs de STAR [7],[8] et la thèse de l'un deux [56].



Le modèle STAR reprend certaines des hypothèses de DECA et de ZOGOL. La fonction de consommation est de type Keynésien, les facteurs du financement restent un des déterminants de l'investissement. Mais STAR ne cherche plus à expliquer les fluctuations comme le résultat d'écart par rapport à une situation d'équilibre à moyen terme. L'évolution du système est considérée plutôt comme une suite d'ajustements annuels entre les différentes forces de l'économie.

Une originalité de STAR par rapport à ses prédécesseurs vient de la relation entre l'accumulation (l'investissement des entreprises) et le taux de profit qu'il place au centre de l'explication de l'ajustement. Une autre originalité de STAR vient de la détermination implicite de prix. Il n'y a pas dans STAR l'hypothèse classique de détermination des prix à partir des coûts salariaux. La variable prix résulte de l'ajustement entre une demande en valeur et une offre en volume. Cette formulation présente l'avantage de ne pas privilégier une explication moniste de l'inflation. Enfin, STAR représente l'un des premiers essais de modèle intégré français au sens restreint donné à ce mot par F. Modigliani [57]

*"Un modèle est dit dichotomique, par opposition à intégré, si l'ensemble des relations qui le composent peut être décomposé en deux sous-ensembles, dont l'un décrivant le fonctionnement de tous les marchés, excepté ceux de la monnaie et des titres, forme un sous-système indépendant, suffisant pour déterminer les variables réelles du système".*

L'intégration dans STAR est réalisée à partir de la fonction d'investissement et de la relation profit croissance dans lesquelles l'endettement des entreprises est une variable explicative. Cette intégration n'est encore qu'à l'état d'ébauche. Parmi les variables financières du modèle, seule l'évolution de l'endettement des entreprises est décrite par une équation du modèle. Cette tentative représente cependant un grand pas en avant par rapport à la démarche utilisée jusqu'alors. Le solde du compte capital était inséré dans le tableau d'opérations financières et les éléments de ce tableau n'intervenaient en rien dans la détermination des variables du tableau économique d'ensemble.

L'exposé du schéma d'analyse retenu dans STAR est présenté en deux étapes. Dans une première sous-section, nous passons en revue les principales équations des quatre blocs, puis dans une deuxième section nous montrons les interactions entre ces quatre blocs<sup>1</sup>.

### 1.1. Les quatre blocs de STAR

#### 1.1.1. Formation de la demande

Le taux d'accumulation (investissement brut sur stock de capital) est expliqué par le taux de profit, et par un indicateur de la structure financière de l'entreprise qui correspond à la durée de remboursement. L'équation estimée est la suivante :

$$(1.1) \quad \frac{WKENA_t}{WK_{t-1}} = 1,41 \frac{AUT_t}{WK_{t-1}} + 0,0164 \frac{GPAS_t}{AUT_t} + 0,26 \frac{AUT_{t-1}}{WK_{t-2}} - 0,127$$

WKENA = formation brute de capital fixe en valeur des Entreprises non agricoles.

WK = capital total (productif et logement) au premier Janvier de l'année t valorisé au prix de l'année t-1.

AUT = profit retenu = épargne brute des Entreprises non agricoles + financement de la formation de capital par les Entrepreneurs individuels non agricoles + indemnités d'assurance sur les biens de capital non agricole.

GPAS = encours de passif des Entreprises non agricoles au 31 Décembre de l'année t-1, c'est-à-dire recouvrant les actions, obligations et les crédits à court, moyen et long terme.

La dépense des ménages en valeur est une fonction de leurs revenus disponibles, de la part de ce revenu dans la P.I.B. et de la variation de leur passif net.

$$(1.2) \quad WDM_t = 1,67 RDSTAR_t - 1,05 (RDSTAR_t^2/WQ) + 0,6 VNP + 13500$$

---

1. Cette présentation est basée sur [7].

- WDM = dépenses des Ménages en valeur = consommation + investissement en logement.
- RDSTAR = revenu disponible des Ménages moins le financement de la formation de capital par les Entrepreneurs individuels.
- WQ = production en valeur.
- VNP = variation nette du passif des Ménages.

Le revenu disponible au carré permet d'inclure une propension marginale à dépenser décroissante : un accroissement de la part du revenu total des ménages entraîne un accroissement des fonds mis à la disposition des autres agents.

L'étude de la demande est complétée par une équation expliquant la variation des stocks en fonction de l'augmentation de la P.I.B. en volume. Les dépenses en logement des ménages sont écrites comme fonction de l'évolution de la population et les possibilités d'endettement des ménages.

La demande extérieure (exportations) est expliquée par le rythme de croissance chez les principaux partenaires et la pression de la demande intérieure, représentée par le taux de croissance de la consommation.

Les importations, enfin, sont écrites comme fonction de la croissance interne et l'indice des prix relatifs (prix intérieurs sur prix des importations).

### 1.1.2. Le bloc répartition des revenus

Le bloc répartition des revenus a pour objet principal la description des relations entre les salariés et les entreprises. Nous limitons nos développements à cette partie du bloc, renvoyant au modèle complet<sup>1</sup> pour la liste des équations concernant : la formation du revenu et le financement de la formation de capital fixe des entrepreneurs individuels, ainsi que celles décrivant le rôle de l'Etat dans la distribution des revenus (impôt, cotisations sociales et prestations sociales, salaires versés par les administrations).

La description des rapports entre les salariés et les entreprises est une des originalités de STAR. Elle conduit à la détermination de la part des salaires dans la production et à celle du niveau de l'emploi. La

---

1. La liste complète des équations ainsi que le lexique des variables sont donnés en annexe.

détermination du niveau de l'emploi dans STAR est à contraster avec celle des modèles classiques américains. L'emploi dans ces modèles est obtenu à partir de la relation technique de production. Dans STAR, le niveau de l'emploi comme la répartition des revenus résulte d'un compromis entre deux tendances contradictoires : celle des entrepreneurs qui visent, par le développement des techniques plus capitalistiques, à réduire la part du travail et celle des salariés qui cherchent à maintenir leur part des revenus.

La part des salaires dans la production est une fonction du taux de substitution capital-travail lissé sur trois ans et d'un indicateur du rapport de force entre salariés et employeurs.

$$(1.3) \quad \frac{\text{SENAET}_t}{\text{WPENA}_t} = 0,24 \left( \sum_{i=0}^2 \left( \frac{\text{WKENA}_{t-i}}{\text{WK}_{t-i-1}} - \text{XHNA}_{t-i} \right) + 3 \right) - 0,25 \text{ CONGRE} + 0,678$$

SENAET = salaires bruts versés par les Entreprises et corrigés de la salarisation croissante (c'est-à-dire incorporant une rémunération fictive des Entrepreneurs individuels à un taux égal au salaire moyen par tête), ceci afin d'éliminer la part de la tendance qui est uniquement due au développement du salariat.

WPENA = valeur ajoutée brute des Entreprises.

XHNA = taux de croissance des effectifs non agricoles.

CONGRE = effet des congés et grèves sur l'activité.

Le taux de croissance de l'emploi se détermine à partir du taux de croissance de la productivité non agricole, une fois connu le taux de croissance de la production. La variation de la productivité est expliquée par le taux de substitution lissé capital-travail, le rapport de force entre salariés et employeurs et l'accélération du taux de croissance de la production en volume. Cette dernière variable qui n'apparaît pas dans l'équation de répartition des revenus est introduite pour représenter les effets conjonctuels de reprise et de ralentissement<sup>1</sup>.

---

1. Cette équation cherche à incorporer dans le modèle un cycle d'emploi semblable à celui rencontré dans l'économie française au cours de ces vingt dernières années. Nous renvoyons à [ 7 ] et aux notes de travail du GRM pour une discussion de ce cycle et de l'équation. Notons cependant que les variables de cette équation ne donnent pour ses auteurs qu'"une formalisation encore imparfaite" de l'analyse du cycle.

$$(1.4) \quad XPROD_t = 1 + 0,27(XQNA_t - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 XQNA_{t-i}) + 0,6 \left( \left( \sum_{i=0}^2 \frac{YKENA_{t-i}}{WK_{t-i-1}} - XHNA_{t-i} \right) + 3 \right)$$

- 1,12 CONGRE

XPROD = taux de croissance de la productivité horaire du travail non agricole.

XQNA = taux de croissance de la production non agricole en volume.

VKENA = formation brute de capital fixe au prix de l'année précédente des Entreprises non agricoles.

### 1.1.3. Le bloc financier : l'équation retour financier

Le bloc financier dans STAR assure la cohérence entre la répartition des revenus et les dépenses. Il ne comprend dans la version de STAR étudiée qu'une équation, et on peut s'attendre à ce qu'il soit largement complété dans une version ultérieure. L'équation qui le constitue porte le nom de retour financier car elle explique le financement externe des entreprises en fonction des placements financiers des autres agents, placements qui découlent des revenus distribués par les entreprises.

$$(1.5) \quad \frac{PPAS_t}{GPAS_{t-1}} = 0,65 \left( \frac{CFM_t + VNP_t}{GPAS_{t-1}} \right) + 0,47 \frac{CFEX_t}{GPAS_{t-1}} + 1,0 \frac{CFA_t}{GPAS_{t-1}} + 0,056$$

PPAS = variation nette de passif des Entreprises non agricoles.

CFM = capacité de financement des Ménages.

CFEX = capacité de financement des l'Extérieur.

CFA = capacité de financement des Administrations.

### 1.1.4. Le bloc production : la relation profit-croissance

La relation profit-croissance a initialement été introduite dans le modèle afin d'expliquer la détermination du taux de profit. En fait, à la suite de diverses expériences menées sur le modèle, ses auteurs sont tentés de conclure que l'équation sert à déterminer le taux de croissance de la production en volume<sup>1</sup>.

---

1. Cette interprétation de l'équation profit-croissance illustre bien la part d'arbitraire qu'il y a dans la détermination du sens de causalité dans un modèle aux relations simultanées.

L'équation explique la variation du taux de profit par la variation du degré d'utilisation du capital, la structure d'endettement.

$$(1.6) \quad \frac{AUT_t}{WK_{t-1}} - \frac{AUT_{t-1}}{WK_{t-2}} = 0,24 \left( \frac{VQNA_t}{WK_{t-1}} - \frac{VQNA_{t-1}}{WK_{t-2}} \right) + 0,011 \frac{GPAS_{t-1}}{AUT_{t-1}} - 0,06$$

VQNA = production non agricole au prix de l'année précédente.

A partir de la description de ces quatre blocs, nous pouvons tenter d'exposer schématiquement le système économique STAR. Afin de ne pas trop compliquer l'explication, nous n'avons retenu que les interactions principales.

## 1.2. Le Système STAR

Le système STAR peut être présenté à l'aide de trois schémas de complexité croissante.

### 1.2.1. L'ensemble demande keynésienne en valeur

Pour une distribution de revenus donnée, et une demande autonome donnée (i.e. les éléments de la demande autres que les investissements et la demande des ménages), la production en valeur s'obtient par sommation. Le schéma est ainsi bouclé par la détermination du dénominateur de la variable part des salaires.

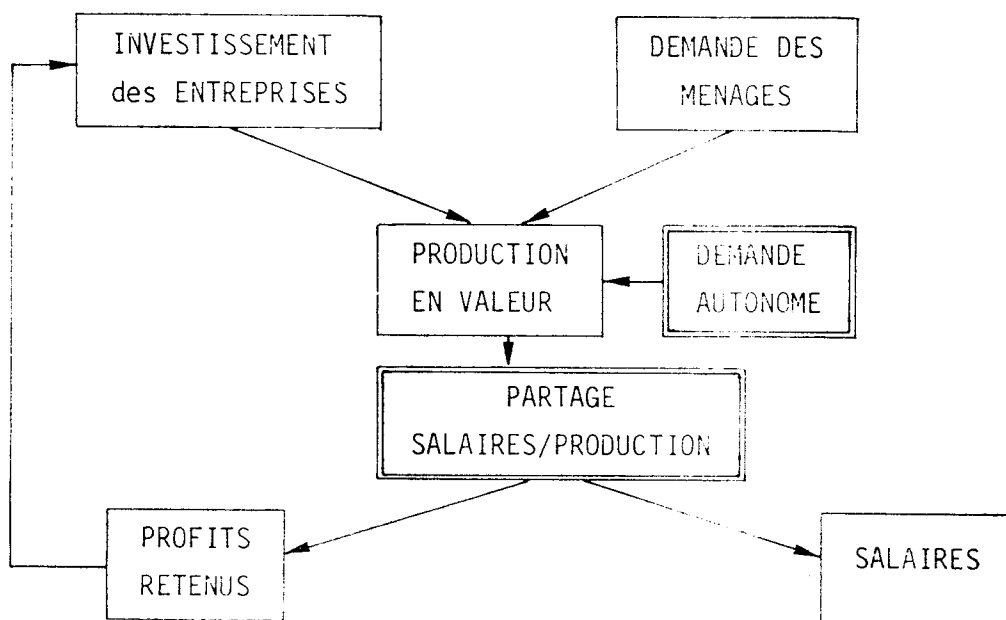


Figure 1 - SCHEMA DE DEMANDE KEYNESIEN

1. L'encadrement double indique la variable d'entrée du schéma.

1.2.2. L'ensemble du secteur réel

Pour une croissance en volume donnée, il est possible de déterminer les importations et la variation des stocks, deux éléments de la demande autonome du schéma précédent. La croissance en volume intervient aussi sur l'évolution de la substitution capital-travail et donc sur le partage salaire-production, qui était la donnée d'entrée du schéma précédent.

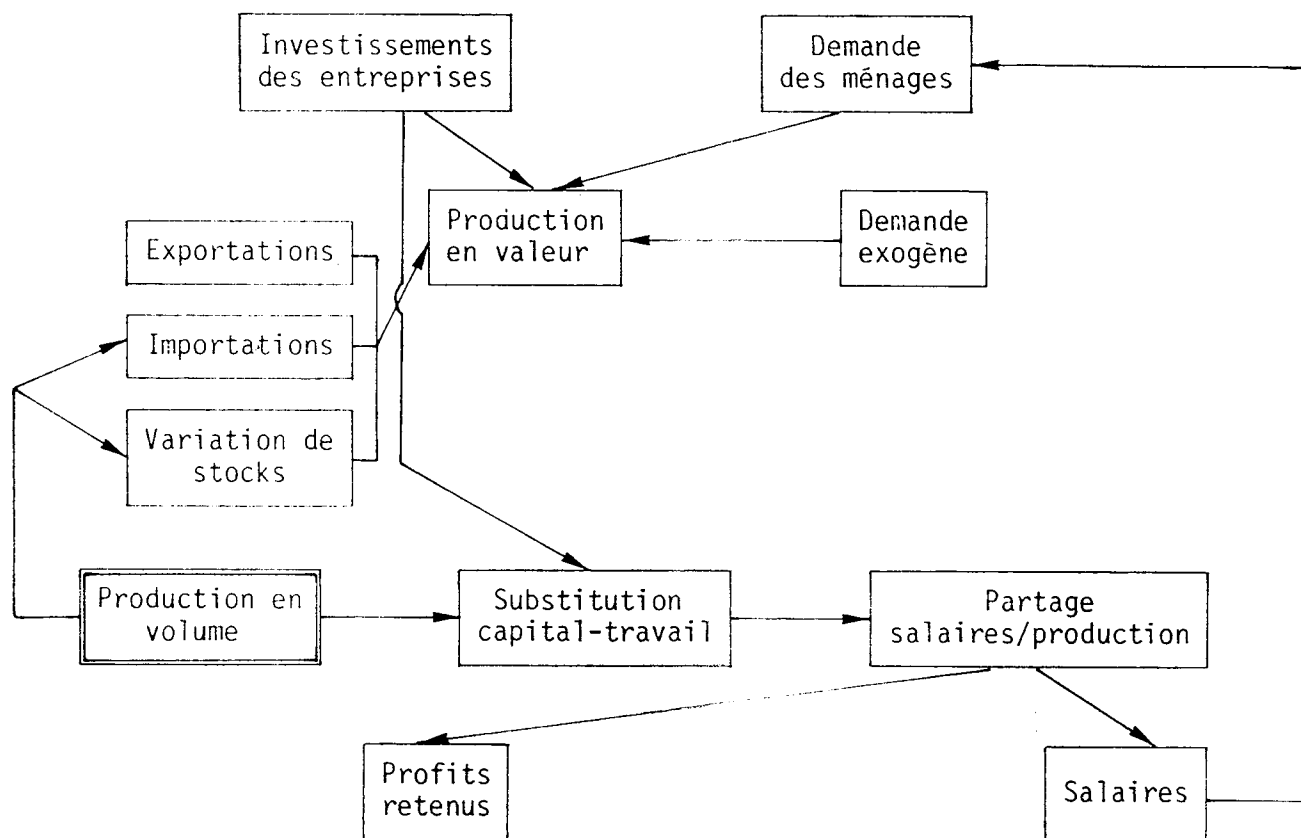


Figure 2 - SCHEMA DU SECTEUR REEL

A une production en volume correspond une production en valeur : les prix sont donc implicitement déterminés dans ce sous-système.

### 1.2.3. La représentation simplifiée de STAR

L'équation de retour financier permet de boucler le système : elle assure la cohérence entre l'approche revenu et l'approche dépense de la P.I.B.. La Figure 3 représente le schéma des interactions principales décrites par STAR.

Ce schéma n'est pas complet. Il ne fait pas apparaître la variable prix qui introduit dans le modèle complet des boucles supplémentaires notamment par les importations.



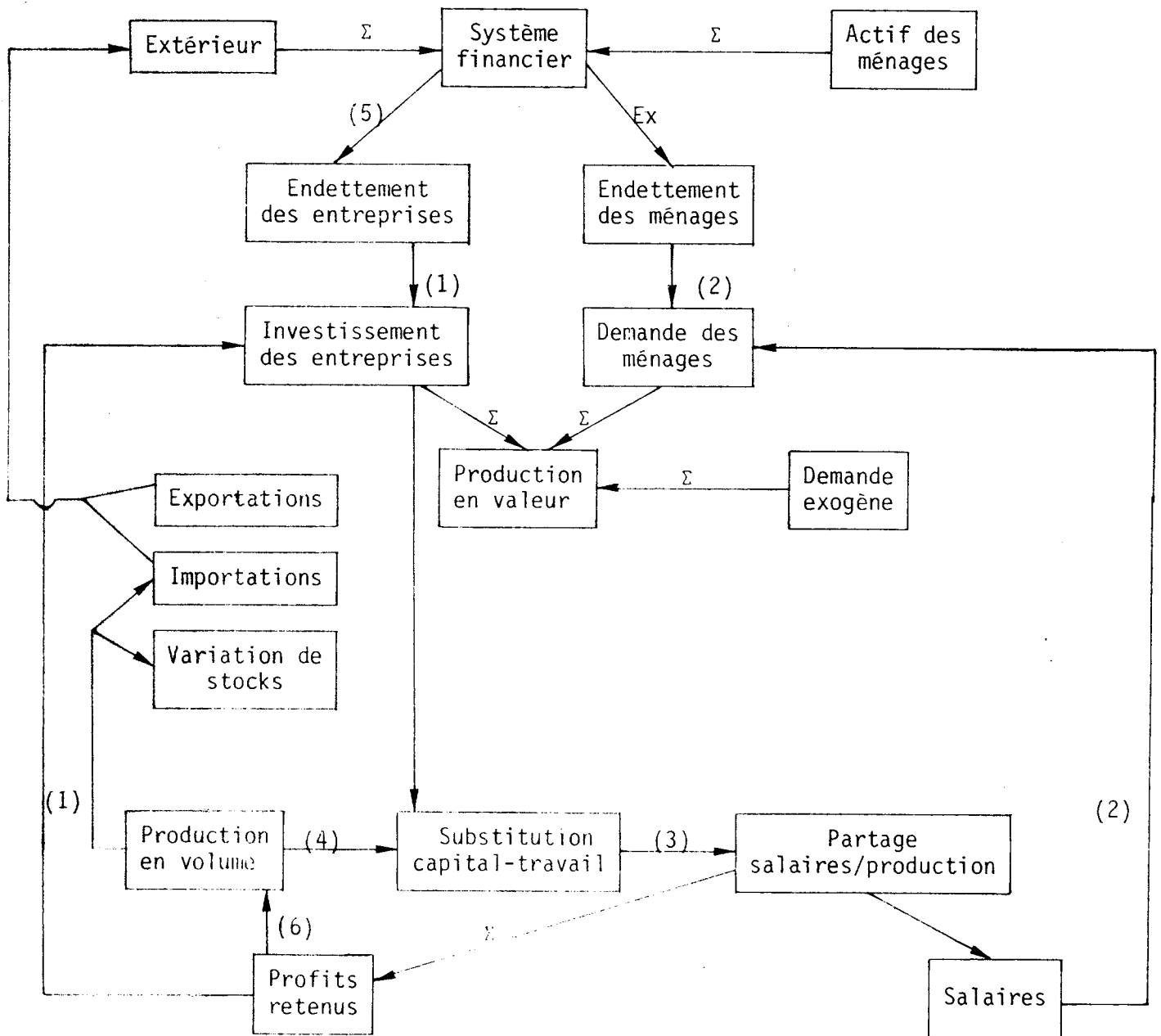


Figure 3 - REPRESENTATION SIMPLIFIEE DE STAR<sup>1</sup>

1. Les chiffres renvoient aux équations décrites dans la première sous-section.  
 $\Sigma$  indique une équation d'identité comptable.  
 $Ex$  indique une relation non spécifiée dans le modèle.  
 Le lien entre les exportations et la consommation n'y est pas explicitée.  
 Nous avons de plus ignoré le rôle de l'Etat dans la distribution des revenus ainsi que celui des entrepreneurs individuels. L'ensemble des variables exogènes (à l'exception des éléments de la demande) n'y est pas non plus représenté.

## Section 2 - LA STRUCTURE MATHEMATIQUE DU MODELE STAR

Après avoir décrit dans les grandes lignes les hypothèses économiques qui sont à la base de STAR, nous abordons ici des questions plus techniques et peut-être plus fastidieuses pour le lecteur : nombre d'équations, blocs d'équations, algorithme de résolution, non-linéarités. Celles-ci constituent une étape importante nécessaire avant toute simulation.

### 2.1. Les trois blocs d'équations du modèle

Le modèle STAR ne comprend que six variables purement exogènes :

- POP = population intérieure
- IMPET = volume des importations des principaux pays clients de la France
- VNP = variation nette du passif des Ménages
- CFIF = capacité de financement des Institutions Financières
- CONGRE = effet des congés et grèves sur l'activité
- XHA = taux de croissance des effectifs salariés des administrations.

Quarante-deux autres variables qui sont calculées dans le premier bloc, B1, peuvent être considérées comme pseudoexogènes. Ce sont les variables dites prédéterminées<sup>1</sup> dont la plupart sont calculées dans des équations récurrentes de trend<sup>2</sup>. Ainsi par exemple :

$$WCA_t = 1.08 WCA_{t-1}$$

WCA = consommation des Administrations.

L'introduction dans le modèle de lois d'évolution par tendance "ferme" considérablement le modèle. Seulement six valeurs doivent être spécifiées à chaque période lors de simulations pluriannuelles. Cette spécification de lois d'évolution ne modifie cependant pas le caractère véritablement exogène de ces variables. En effet, leur évolution n'est pas fonction d'autres variables du modèle : elles évoluent sur elles-mêmes.

---

1. Le sens donné au mot prédéterminé est celui de vocabulaire utilisé par les auteurs de STAR. Il diffère de celui généralement accepté en économétrie (voir Chapitre 2 du Titre I).

2. Trois variables prédéterminées sont des combinaisons d'autres variables prédéterminées.

Le deuxième bloc, B2, constitue le modèle STAR au sens strict. Il comprend soixante-dix-huit équations. Parmi celles-ci, vingt-quatre seulement ont été estimées par les moindres carrés. Neuf d'entre elles sont des identités comptables, le reste étant des équations de définition (ex. définition de taux de croissance, de variables en volume à partir de variables en valeur et d'indices de prix).

Le troisième bloc, B3, comprend trente-six équations. Ce sont des équations de définitions de nouvelles variables à partir des variables de B2. Ces variables peuvent être qualifiées de variables "d'édition" au sens donné à ce mot en informatique : elles aident l'utilisateur à mieux visualiser les résultats (taux de croissance de la consommation) ou à expliquer la solution du problème (taux de profit, taux d'accumulation). Ainsi, des trois blocs, seul le bloc B2 constitue à proprement parler le modèle STAR. C'est ce bloc de 78 équations qui a fait l'objet de notre étude.

## 2.2. L'algorithme de résolution du modèle STAR

### 2.2.1. Les méthodes de résolution classique des modèles non-linéaires : les méthodes de point fixe

La solution d'un ensemble d'équations non-linéaires est obtenue généralement par une méthode de point fixe. Soit le modèle de forme structurelle

$$(2.1) \quad \underline{y}(t) = f(\underline{y}_t, \underline{x}_t)$$

$\underline{y}_t$  vecteur de variables endogènes

$\underline{x}_t$  vecteur de variables exogènes.

La méthode de point fixe consiste pour des valeurs arbitraires  $\underline{y}_t^i$  (avec  $i = 1$ ) et des valeurs  $\underline{x}_t$  à calculer

$$(2.2) \quad \underline{y}^{i+1}(t) = f(\underline{y}_t^i, \underline{x}_t)$$

puis à itérer sur (2.2) pour  $i = 2, 3, \dots, n$ . L'itération prend fin lorsque la norme,  $\underline{y}^{i+1} - \underline{y}^i$ , est inférieure à un seuil  $\epsilon$ .

### 2.2.2. La méthode de résolution de STAR : une méthode proche des points fixes

L'algorithme de résolution de STAR utilisé dans notre étude nous a été fourni par le G.R.M.. Nous le présentons ici car il apporte des éléments de connaissance sur les interactions du modèle. Cette algorithme tire parti de la triangularité du modèle si l'on suppose connus les taux de croissance :

- 1) des prix de la P.I.B., YQHS
- 2) de la production non agricole, XQNA
- 3) des investissements des entreprises, XKE.

YQHS détermine, en effet, les différents indices de prix du modèle ; il en résulte pour XKE donné un investissement en valeur, WKENA<sup>1</sup>. De XQNA et YQHS résulte une production en volume et en valeur. La connaissance de l'ensemble de ces valeurs permet de déterminer successivement le niveau des importations, des stocks et des exportations ; il en résulte par solde une demande des ménages en volume VCM et en valeur WDM<sub>1</sub>. La connaissance de l'investissement et du taux croissance de la production permettent aussi le calcul du taux de croissance de l'emploi, et à partir de celui-ci le calcul des différents éléments de répartition : le profit AUT<sub>1</sub> est alors donné par solde. Ainsi, pour les trois valeurs initiales de YQHS, XKE, XQNA, les solutions de l'ensemble du modèle se déterminent successivement.

La spécification a priori de ces trois valeurs donne un modèle surdéterminé. En effet, à partir des solutions ci-dessus, la dépense des ménages WDM<sub>2</sub> est donnée par l'équation (1.2), l'investissement par (1.1) et AUT<sub>2</sub> par (1.6). L'algorithme compare alors les valeurs obtenues par solde et par définition (indiquées 1) aux valeurs qui résultent des équations de comportement (indiquées 2). Pour des écarts en valeur absolue supérieurs à un seuil, le système triangulaire est résolu à nouveau pour des valeurs initiales modifiées (Tableau I).

L'algorithme diffère donc des points fixes classiques d'abord par les valeurs attribuées aux variables d'amorçage. Ces valeurs initiales sont modifiées par l'addition d'une fraction de l'écart observé ; dans les points fixes, on donne à ces variables la valeur calculée à l'itération précédente.

---

1. L'indice 1 indique une valeur calculée par solde (cas de WDM<sub>1</sub> et AUT<sub>1</sub>) ou découlant directement des valeurs initiales des taux (cas de WKENA<sub>1</sub>).

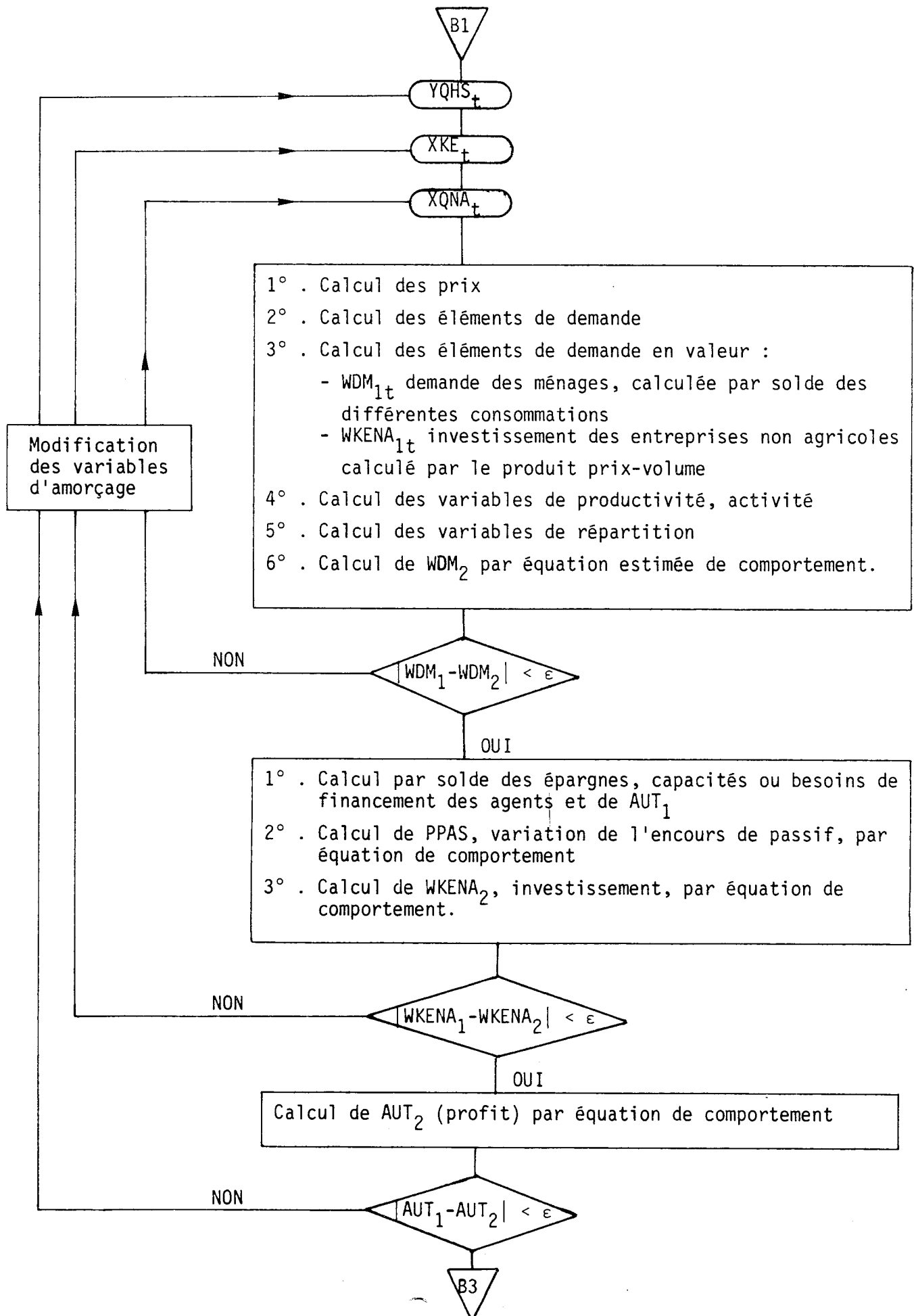


Tableau I - ALGORITHME DE RESOLUTION DU MODELE

Par exemple, en reprenant les notations de (2.2) XQNA est modifié dans l'algorithme ainsi :

$$XQNA_t^{i+1} = XQNA_t^i + UF1 \times (WDM_1^i - WDM_2^i) / WQNA_{t-1}$$

avec UF1 le coefficient de correction et  $XQNA_t^i$  la valeur arbitraire initiale.

Il diffère de plus par le nombre de valeurs modifiées à chaque bouclage : une valeur seule (XQNA par exemple) et non les trois valeurs simultanément.

Enfin, la norme testée ne porte que sur trois variables et non sur l'ensemble des variables de la solution.

### 2.3. Les non-linéarités du modèle

STAR est un modèle non-linéaire. Cette simple constatation n'est cependant pas suffisante, et il est nécessaire de recenser les non-linéarités du modèle ainsi que leur forme. En effet, seule cette étude permet d'apprécier a priori les erreurs qui résultent de la simplification par approximation linéaire.

#### 2.3.1. Recensement des non-linéarités

Les non-linéarités de STAR résultent de trois catégories de combinaison de variables : rapport, produit, multiplication de rapport par une variable. Elles peuvent être groupées en deux groupes suivant les catégories de variables (prédéterminée, endogène, endogène décalée) intervenant dans la combinaison.

Les non-linéarités du premier groupe (notées NL1) peuvent recevoir le qualificatif de dynamique. Elles sont "linéaires" pour des valeurs fixes des variables décalées. Elles résultent de combinaisons de variables décalées (équation de productivité, de taux de profit, de taux d'accumulation), ou de combinaisons d'une variable endogène de la période avec une (ou plusieurs) variable endogène ou prédéterminée décalée. Parmi celles-ci, on distingue :

. des produits

$$\text{ex : } VQNA_t = WQNA_{t-1} \cdot XQNA_t$$

- . des rapports  
ex :  $VKENA_t / WK_{t-1}$
- . des multiplications de rapports par une variable.  
ex :  $WEXET_{t-1} \cdot \frac{VCM_t}{WCM_{t-1}}$

Cette dernière classe de non-linéarités est de loin la plus importante du modèle. Elle est la conséquence de l'estimation économétrique d'équations avec variables en taux de croissance, puis de l'utilisation de ces équations dans le modèle pour décrire l'évolution de variables en niveau.

Ex : L'équation d'exportation est estimée en taux de croissance :

$$\frac{VEXET_t - WEXET_{t-1}}{WEXET_{t-1}} = 1,4 + 1,06 \text{ IMPET} - 1,3 \frac{VCM_t - WCM_{t-1}}{WCM_{t-1}}$$

Elle donne l'équation du modèle :

$$VEXET_t = WEXET_{t-1} \left( 2,4 + 1,06 \text{ IMPET} - 1,3 \left( \frac{VCM_t}{WCM_{t-1}} - 1 \right) \right)$$

Cette classe de non-linéarité est ainsi présente dans 8 équations<sup>1</sup>.

Les non-linéarités du deuxième groupe (notées NL2) peuvent recevoir le qualificatif de statique. Elles restent non-linéaires si l'on suppose constantes les variables retardées. Elles impliquent la combinaison d'une à trois variables endogènes de la période. On distingue des :

1) non-linéarités avec une variable endogène (notées NL2.a). Elles apparaissent dans des équations de définition de variables en volume (deux équations) ;

2) non-linéarités avec deux variables endogènes (notées NL2.b).

Ces non-linéarités prennent trois formes différentes :

- . des produits ou rapport dont une variable est un taux.  
Ils résultent de définition de variables en valeur (cinq équations) ou en volume (une équation) (notés NL2.b1)  
ex :  $WKE = VKE \cdot YKE$

---

1. Les équations déterminant VM, VEXET, CSEE, SCSA, CSEO, IIE, RNA, FNA.

- . d'une multiplication d'une variable par un rapport dont le dénominateur est une variable endogène décalée (notée NL2.b2)

$$\text{ex : } WPENA_t \cdot \frac{VKENA_t}{WK_{t-1}}$$

- . d'un rapport de deux variables endogènes (noté NL2.b3)

$$\text{ex : } GPAS/AUT$$

- 3) une non-linéarité de trois variables endogènes (notée NL2.c)

$$\text{ex : } RDSTAR_t/WQ_t \cdot RDSTAR_t$$

Le tableau II donne le nombre d'équations où est présente chacune des catégories de non-linéarités<sup>1</sup>.

	Non-linéarités "dynamiques"	Non-linéarités "statiques"		
		NL2.a	NL2.b	NL2.c
Nombre d'équations	15	2	8	1

Tableau II - LES NON-LINEARITES DE STAR

### 2.3.2. Erreurs introduites par l'approximation linéaire

Nous évaluons tout d'abord les erreurs dues à la linéarisation de non-linéarités de type produit, rapport, multiplication d'un rapport par une variable, les trois types de non-linéarité de STAR. A partir de leur expression analytique, nous tentons d'apprécier alors l'importance des erreurs résultant de l'approximation linéaire de STAR.

---

1. *Noter que plusieurs types de non-linéarités peuvent coexister dans la même équation.*



Expressions analytiques des erreurs de linéarisation

Non-linéarités produit de deux variables

Soit le produit :

$$(2.3) \quad a = b \times c$$

et  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$  la valeur des variables au point de linéarisation. L'approximation linéaire de (2.3) donne :

$$(2.4) \quad da = b^*dc + c^*db \quad \text{avec } da = a-a^* \\ db = b-b^* \\ dc = c-c$$

La relation vraie (2.3) donne pour une variation  $db$  et  $dc$  une variation  $da$

$$(2.5) \quad da = b^*dc + c^*db + db \cdot dc$$

L'erreur due à la linéarisation est donc égale au produit  $dbdc$ . Elle est d'autant plus faible que  $db$  ou (et)  $dc$  sont petits.

Non-linéarités rapport de deux variables

Soit le rapport

$$(2.6) \quad a = b/c$$

La linéarisation autour du point  $b^*$ ,  $c^*$  donne

$$(2.7) \quad da = \frac{db \cdot c^* - dc \cdot d^*}{c^{*2}}$$

alors que la relation vraie donne pour  $db, dc$  un écart

$$(2.8) \quad da = \frac{db \cdot c^* - dc \cdot d^*}{c^{*2} + c^*dc}$$

(2.8) diffère de (2.7) par l'addition de  $c^*dc$  au dénominateur

Non-linéarité : multiplication d'un rapport par une variable

a est ici égal à

$$(2.9) \quad a = \frac{b}{c} \times d$$

La linéarisation autour du point  $b^*$ ,  $d^*$ ,  $c^*$  donne

$$(2.10) \quad da = \frac{(db.d^* + dd.b^*)c^* - dc.b^*d^*}{c^{*2}}$$

alors que la variation  $da$ , qui résulte d'une variation  $db, dc, dd$ , est donnée par

$$(2.11) \quad da = \frac{(db.d^* + dd.b^*)c^* - dc.b^*d^* + c^*db.dd}{c^{*2} + c^*dc}$$

(2.11) et (2.10) diffèrent à la fois par le numérateur ( $c^*db.dd$ ) et par le dénominateur ( $c^*dc$ ).

Appréciation de l'importance des erreurs résultant de la linéarisation de STAR

Si l'on suppose connues les valeurs des variables endogènes décalées, les non-linéarités de STAR sont celles du deuxième groupe. L'examen des non-linéarités de ce groupe permet de conclure que trois non-linéarités seulement peuvent être la cause d'erreurs significatives.

Les deux non-linéarités NL2.a résultent de la division d'une variable prédéterminée par un indice de taux de croissance des prix.<sup>2</sup> Le terme  $c^*dc$ , pour  $c$  un indice de prix, est faible par rapport à  $c^{*2}$ . Ceci se voit bien par l'exemple d'un taux de croissance de prix de 10 % et d'une variation de ce taux de 5 %.

$$\begin{aligned} c^* &= 1,10 & dc &= 1,10 - 1,05 = 0,05 \\ c^{*2} &= 1,21 & c^*dc &= 0,055 \end{aligned}$$

L'erreur due à la linéarisation de ces rapports est donc faible. Il en est de même pour le rapport contenu dans le groupe NL2.b1. La même conclusion s'applique aux non-linéarités de type produit de ce groupe. Une des variables du produit étant un taux, l'erreur db.dc a toute chance d'être faible par rapport à la prise en compte de  $b^*dc$  et  $a^*db$ .

L'importance des erreurs dues aux linéarisations de  $WPENA \cdot \frac{VKENA}{WK_{t-1}}$ ,  $\frac{RDSTAR_t^2}{GPAS/AUT \cdot WQ}$  peut être difficilement évaluée a priori. Elles peuvent être faibles si "l'effet retour" est faible. La notion de l'effet retour peut être illustrée sur  $WPENA_t \cdot VKENA_t / WK_{t-1}$ . Supposons une variable initiale  $dVKENA_{1t}$ , résultant par exemple, tout chose égale par ailleurs, de l'effet d'une variation du terme constant de l'équation expliquant VKENA. Il en résulte une variation immédiate de SENAET

$$dSENAET_{1t} = dVKENA_{1t} \cdot \frac{WPENA}{WK_{t-1}}$$

qui s'étend au reste du modèle. L'effet retour est la variation  $dWPENA_t$  qui en résulte ; il est nul si une équation spécifie  $WPENA_t$  comme une constante, faible si  $dSENAET$  n'influe que faiblement sur le reste du modèle.

De cette étude des non-linéarités, on peut conclure qu'il y a tout lieu de penser qu'en "statique" STAR peut être valablement approximé par un modèle linéaire. Trois non-linéarités seulement peuvent être source d'erreurs significatives. Les erreurs risquent par contre d'être plus importantes en dynamique, lors d'un passage de la solution de  $t$  à la solution à  $t+n$ .

Section 3 - LES VARIABLES D'ETAT, DE SORTIE ET DE COMMANDE DU MODELE  
STAR

Les variables d'état d'un modèle sont par définition celles dont il faut connaître les valeurs à  $t$  pour résoudre le modèle de  $t$  à  $t+n$  pour des valeurs données des variables exogènes sur la période. Elles sont donc comprises dans l'ensemble des variables décalées du modèle. Le recensement des variables décalées, puis la détermination des états et des sorties du modèle complet et de sa partie centrale sont présentés avant d'aborder le problème du choix des variables de commande.

**3.1. Les variables décalées du modèle**

Nous avons distingué dans la section 1 trois types de variables : exogènes, prédéterminées, endogènes. Des variables de chaque type apparaissent avec retard dans STAR. Le tableau donne une vue globale des variables décalées du modèle.

Type de variables	Exogènes	Prédéterminées	Endogènes
Nombre de variables présentes avec retard	2	30	25
Ordre du retard maximum	3	1	3

Tableau III - RESUME DE LA STRUCTURE DYNAMIQUE

Les colonnes de ce tableau sont détaillées dans les tableaux IV, V, VI où sont indiquées les variables dépendantes expliquées par chaque variable décalée. Le tableau VI décrit la structure dynamique du bloc B2 du modèle ; il sera l'élément central de l'interprétation des coefficients de la matrice A (Chapitre 1 du Titre III).

	Variable explicative	Variable expliquée	Variable explicative	Variable expliquée
1	VNP <sub>t-1</sub>	WKM	3 POP <sub>t-2</sub>	WKM
2	POP <sub>t-1</sub>	WKM	4 POP <sub>t-3</sub>	WKM

Tableau IV - LES VARIABLES EXOGENES DECALEES

	Variables explicatives	Variables expliquées	Variables explicatives	Variables expliquées
1	WKEA <sub>t-1</sub>	WKEA	16 IVA <sub>t-1</sub>	IVA
2	WCA <sub>t-1</sub>	WCA	17 IIF <sub>t-1</sub>	IIF
3	WDIF <sub>t-1</sub>	WDIF	18 OIFK <sub>t-1</sub>	OIFK
4	WSUS <sub>t-1</sub>	WSUS	19 OEXP <sub>t-1</sub>	OEXPL
5	WKM <sub>t-1</sub>	WKM	20 OEAFF <sub>t-1</sub>	OEAFF
6	WQA <sub>t-1</sub>	WQA	21 OEK <sub>t-1</sub>	OEK
7	WPEA <sub>t-1</sub>	WPEA	22 OMK <sub>t-1</sub>	OMK
8	WPM <sub>t-1</sub>	WPM	23 OAFF <sub>t-1</sub>	OAFF
9	WEXPM <sub>t-1</sub>	WEXPM	24 FA <sub>t-1</sub>	FA
10	SEA <sub>t-1</sub>	SEA	25 WTER <sub>t-1</sub>	WTET
11	SCSM <sub>t-1</sub>	SCSM	26 AS <sub>t-1</sub>	AS
12	SCSI <sub>t-1</sub>	SCSI	27 WDT <sub>t-1</sub>	WDT
13	PSEX <sub>t-1</sub>	PSEX	28 TOSAL <sub>t-1</sub>	TOSAL
14	PSE <sub>t-1</sub>	PSE	29 WKA <sub>t-1</sub>	WKA
15	PSIF <sub>t-1</sub>	PSIF	30 RVMRS <sub>t-1</sub>	RVMRS

Tableau V - LES VARIABLES PREDETERMINEES DECALEES

Variables explicatives		Variables expliquées	Variables explicatives		Variables expliquées
1	AUT <sub>t-1</sub>	AUT, WKENA	19	SM <sub>t-1</sub>	IM
2	VKENA <sub>t-1</sub>	XPROD, SENAET	20	SM <sub>t-2</sub>	IM
3	VKENA <sub>t-2</sub>	XPROD, SENAET	21	IM <sub>t-1</sub>	IM
4	WEXET <sub>t-1</sub>	VEXET, RNA	22	IDE <sub>t-1</sub>	IDE
5	WM <sub>t-1</sub>	VM	23	WQNA <sub>t-1</sub>	VQNA, VST
6	VQNA <sub>t-1</sub>	AUT	24	WCM <sub>t-1</sub>	VEXET, IIE
7	XHNA <sub>t-1</sub>	XPROD, SENAET	25	SE <sub>t-1</sub>	CSEE
8	XHNA <sub>t-2</sub>	XPROD, SENAET	26	CSEE <sub>t-1</sub>	CSEE, SCSA
9	XQNA <sub>t-1</sub>	XPROD	27	CSEO <sub>t-1</sub>	CSEO
10	XQNA <sub>t-2</sub>	XPROD	28	PSA <sub>t-1</sub>	PSA
11	XQNA <sub>t-3</sub>	XPROD	29	IIE <sub>t-1</sub>	IIE
12	GPAS <sub>t-1</sub>	AUT, GPAS	30	RBENA <sub>t-1</sub>	RNA
13	WK <sub>t-1</sub>	WKENA, AUT, XPROD, SENAET	31	RNA <sub>t-1</sub>	RNA, FNA
14	WK <sub>t-2</sub>	AUT, XPROD, SENAET	32	FNA <sub>t-1</sub>	FNA
15	WK <sub>t-3</sub>	XPROD, SENAET	33	SCSA <sub>t-1</sub>	SCSA, CSEO
16	WKE <sub>t</sub>	WKE, YKE, FNA			
17	RBES <sub>t-1</sub>	IDE			
18	RBES <sub>t-2</sub>	IDE			

Tableau VI - LES VARIABLES ENDOGENES DECALEES

### 3.2. Les variables d'état et de sortie de STAR

Dans le chapitre 2, nous avons cité deux réalisations extrêmes (passage de la forme structurelle à la représentation d'état). La première proposée par G. Chow résulte en un vecteur d'état de grande dimension<sup>1</sup>, la seconde proposée par A.J. Preston et K.D. Wall donne un vecteur de dimension minimum<sup>2</sup>. La première a pour avantage sa simplicité, mais la taille du modèle qui en résulte lui interdit toute application aux modèles macroéconomiques déjà de grande taille. La deuxième réalisation a l'inconvénient d'impliquer la définition d'états, combinaisons linéaires de variables de la même période : ceci empêche toute interprétation directe des coefficients des matrices A et B.

Nous avons retenu pour STAR une réalisation "intermédiaire". Les règles de cette réalisation sont tout d'abord présentées avant d'être appliquées au modèle complet et à sa partie centrale.

#### 3.2.1. Les règles suivies dans le choix des variables d'état et de sortie

Notre but est de définir les variables du vecteur d'état  $\underline{x}_t$  et du vecteur de sortie  $\underline{y}_t$  telles que les relations non-linéaires implicites dans STAR

$$(3.1) \quad \underline{x}_t = f(\underline{x}_{t-1}, \underline{w}_t)$$

$$(3.2) \quad \underline{y}_t = h(\underline{x}_t, \underline{w}_t)$$

soient suffisantes pour décrire l'évolution des variables objectifs du modèle.

(3.1) n'est pas la représentation traditionnelle de l'automatique puisqu'elle inclut les relations simultanées entre les états  $\underline{x}_t$  et les variables exogènes  $\underline{w}_t$ . L'écriture sous la forme traditionnelle

---

1. Le système est d'ordre  $\lambda.m+n.g$  avec  $\lambda$  le décalage maximum sur les  $m$  variables endogènes,  $n$  le décalage maximum sur les  $g$  variables exogènes.

2. Le système est d'ordre  $\sum_{i=1}^m \lambda_i$  avec  $m$  le nombre d'équation et  $\lambda_i$  l'ordre du retard maximum dans la  $i^{\text{ème}}$  équation.

$$(3.3) \quad \underline{x}'_t = f(\underline{x}'_{t-1}, \underline{w}_{t-1})$$

implique de redéfinir les états par soustraction de la partie expliquée par les variables exogènes de la même période. Par exemple dans l'équation de STAR

$$(3.4) \quad \text{WKM}_t = \text{WKM}_{t-1} + 4,0(\text{POP}_t - \text{POP}_{t-3}) + 0,3(\text{VNP}_t - \text{VNP}_{t-1})$$

l'état  $x'_{1t}$  correspondant à la variable endogène calculée  $\text{WKM}_{t-1}$  est défini par la soustraction

$$x'_{1t} = \text{WKM}_t - 4,0 \text{ POP}_t - 0,3 \text{ VNP}_t$$

Nous avons retenu la forme (3.1) plutôt que (3.3), pour éviter d'avoir à définir des états différents des variables originales du modèle. Ceci aurait en effet alourdi les développements<sup>1</sup> inutilement car les relations statiques entre les états et les variables exogènes n'interviennent pas dans notre application<sup>2</sup>. L'écriture sous la forme (3.1) impose cependant des états supplémentaires : par exemple dans l'équation (3.4) le vecteur d'état  $\underline{x}_t$  est composé de  $\text{WKM}_{t-1}$ ,  $\text{POP}_{t-1}$ ,  $\text{POP}_{t-2}$ ,  $\text{POP}_{t-3}$ ,  $\text{VNP}_{t-1}$ , alors que  $\underline{x}'_t$  ne comprend que  $x'_{1t}$ ,  $\text{POP}_{t-2}$ ,  $\text{POP}_{t-3}$ .

La détermination des états et des sorties de STAR se fait par l'application des règles suivantes :

1. Prendre comme état toute variable endogène et exogène décalée d'une période et définir un nouvel état pour chaque retard d'une variable exogène et endogène de plus d'une période.

2. Prendre comme sortie les variables objectifs non comprises dans cette première liste d'états et déterminées à  $t$  par des états et des variables exogènes à  $t$ .

---

1. L'écriture sous la forme (3.3) implique le recensement des relations statiques entre les états et les variables exogènes.

2. Nous supposons en effet que les valeurs des variables exogènes de STAR sont égales aux valeurs de la trajectoire centrale ; les écarts par rapport à celle-ci - variables de STARTER - sont nulles.



3. Ajouter un état pour chaque variable objectif non comprise parmi les sorties.

L'exemple suivant, de choix des variables d'état et de sortie d'un modèle structurel linéaire, illustre ces règles. Soit le modèle initial de quatre équations

$$(3.5) \quad x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 z_{t-1} + a_3 y_t$$

$$(3.6) \quad y_t = a_4 x_{t-2} + a_5 z_{t-1}$$

$$(3.7) \quad z_t = a_6 x_{t-1} + a_7 z_{t-1}$$

$$(3.8) \quad w_t = x_t + z_t$$

avec  $w_t$ ,  $z_t$ ,  $y_t$  les trois variables objectifs de l'équation. La règle 1 donne une première liste d'états  $x_{t-1}$ ,  $x_{t-2}$ ,  $z_{t-1}$ .  $w_t$ , selon la règle 2, est une sortie. La règle 3 conduit à ajouter  $y_t$  au vecteur d'état<sup>1</sup>.

Le modèle en variable d'état s'écrit

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ z_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 a_4 & a_2 + a_3 a_5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & a_7 & 0 \\ 0 & a_4 & a_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ z_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$(3.10) \quad [w_t] = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

### 3.2.2. Les variables d'état et de sortie du modèle STAR complet

L'application de la première règle donne une liste d'états composée des variables :  $POP_{t-1}$ ,  $POP_{t-2}$ ,  $POP_{t-3}$ ,  $VNP_{t-1}$  du tableau IV, et de la totalité des variables des tableaux V et VI.

---

1. Il faut noter que  $y_t$  est une sortie si la matrice formée par les trois premières lignes et colonnes de la matrice de passage (3.9) est inversible. Dans ce cas  $x_{t-2}$ ,  $z_{t-1}$  s'expriment en fonction des états  $x_t$ ,  $x_{t-1}$ ,  $z_t$ ; la substitution de l'expression ainsi obtenue dans (3.5) donne  $y_t$  fonction de  $x_t$  et  $z_t$  (la condition de sortie).

Notons qu'aucun effort n'est fait ici pour réduire la dimension du vecteur d'états. Cette réduction est possible : certains états sont des combinaisons linéaires d'autres états et peuvent être ignorés ; d'autres états intervenant toujours ensemble et dans les mêmes équations peuvent être regroupés.

Deux variables objectives ne sont pas incluses dans cette liste d'états : RDSTAR, le revenu disponible des ménages et YQ, le taux d'augmentation des prix de la P.I.B. Ces deux variables sont déterminées par des états de la même période :

$$RDSTAR_t = SM_t + PSA_t + PSE_t + PSIF_t - PSEX_t + RA_t + RNA_t + WPM_t + OMC_t - SCSM_t - IM_t - FA_t - FNA_t$$

$$YQ = \frac{WQNA + WQA}{VQNA + VQA}^1$$

De l'application des règles de la première étape, il résulte donc un vecteur d'état de dimension 67 et un vecteur de sortie de dimension 2.

### 3.2.3. Les variables d'état et de sortie de la partie centrale (bloc B2)

La dynamique du Bloc B2 (ensemble des équations déterminant les variables endogènes) peut s'étudier indépendamment de la dynamique du bloc B1 (ensemble des équations donnant les variables prédéterminées). Le bloc B1 évolue en effet sur lui-même. Il affecte l'évolution du bloc B2, mais n'est pas influencé par celle-ci.

Les variables exogènes décalées interviennent uniquement dans le bloc des prédéterminées. Le vecteur d'état de la partie centrale du modèle - considérée isolément - ne regroupe donc que les variables du Tableau VI soit un total de 33 états.

La dimension de ce vecteur est ramenée à 31 sans appauvrir la dynamique de B2. L'état  $RBES_t$  est ignoré ; étant égal à la différence de deux autres états ajoutée à une variable prédéterminée, il peut être remplacé dans l'équation déterminant IDE par cette combinaison. Les deux états  $VKENA_{t-1}$  et  $WK_{t-2}$  sont remplacés par l'état  $VKENA_{t-2}/WK_{t-3}$ . En effet, ils n'interviennent qu'ensemble et sous cette forme dans les équations du modèle. La nouvelle

---

1. *VQA est déterminé dans le bloc B1 par division de WQA par un indice de prix constant.*

variable a de plus une signification économique - la contrainte que nous imposons à toute simplification - puisqu'elle représente le taux d'accumulation.

La dynamique de la partie centrale de STAR, celle qui fait l'objet de notre étude, est ainsi complètement décrite par un vecteur d'état de 31 composantes. Nous avons retenu ce vecteur pour l'approximation linéaire de STAR. La liste des états ainsi que leur signification est donnée dans le Tableau VI.

### 3.3. Les variables de commande de STAR

Le modèle STAR a été construit pour générer des scénarios d'évolution possibles de l'économie française, les variantes, et non pour décrire les relations entre les instruments de politique économique de l'Etat et les principaux agrégats. Ces instruments ne sont pas inclus comme variable dans le modèle. Nous avons été ainsi conduits à choisir comme variable de commande les variables les plus proches de ces instruments. Ce choix a été réalisé en deux étapes : recensement des variables traduisant le mieux l'action de l'Etat sur l'économie, définition à partir de celles-ci de nouvelles variables pour exprimer l'action de l'Etat.

#### 3.3.1. Les variables du modèle indicatives de l'action de l'Etat

Dix variables du modèle représentent les principaux domaines d'action de l'Etat :

- 1 IDE = impôts directs versés par les Entreprises
- 2 IIE = impôts indirects versés par les Entreprises
- 3 IM = impôts des Ménages
- 4 CA = consommation des Administrations
- 5 KA = investissement des Administrations
- 6 XHA = taux de croissance des effectifs des Administrations
- 7 PSA = prestations sociales versées par les Administrations
- 8 SCSA = salaire et cotisations sociales des Administrations
- 9 WKM = investissement des Ménages
- 10 VNP = variation nette du passif des Ménages.

Les huit premières variables représentent l'action directe de l'Etat sur les revenus, les dépenses, l'emploi. WKM et VNP traduisent l'effet de la politique de crédit de l'Etat sur les dépenses des ménages en logement et leurs endettements. Par rapport aux variables précédentes, ces dernières sont encore plus proches du résultat que des actions mêmes de l'Etat.

$AUT_t$  = autofinancement  
 $VKENA_t$  = investissement des Entreprises non agricoles (prix de l'année précédente)<sup>1</sup>  
 $WEXET_t$  = exportations  
 $WM_t$  = importations  
 $VQNA_t$  = P.I.B. des branches non agricoles (prix de l'année précédente)  
 $XHNA_t, XHNA_{t-1}$  = taux de croissance des effectifs totaux non agricoles  
 $GPAS_t$  = en cours de passif des ENA  
 $WK_t, WK_{t-1}$  = stock de capital  
 $XQNA_t, XQNA_{t-1}, XQNA_{t-2}$  = taux de croissance de la P.I.B. des branches non agricoles  
 $VKENA_{t-1}/WK_{t-2}$  = taux d'accumulation du capital  
 $WKE_t$  = investissement des Entreprises  
 $RBES_{t-1}$  = résultat brut d'exploitation des sociétés  
 $SM_t, SM_{t-1}$  = salaires reçus par les Ménages  
 $IM_t$  = impôts des Ménages  
 $IDE_t$  = impôts directs versés par les Entreprises  
 $IIE_t$  = impôts indirects versés par les Entreprises  
 $WQNA_t$  = P.I.B. des branches non agricoles  
 $WCM_t$  = consommation des Ménages  
 $SE_t$  = salaires bruts versés par les Entreprises  
 $CSEE_t$  = cotisations sociales employeurs des Entreprises  
 $SCSA_t$  = salaires cotisations sociales versées par les Administrations  
 $CSEO_t$  = cotisations sociales employeurs des autres agents  
 $PSA_t$  = prestations sociales versées par les Administrations  
 $RBENA_t$  = résultat brut d'exploitation des ENF non agricoles  
 $RNA_t$  = résultat brut des EINA  
 $FNA_t$  = FFCEI non agricole.

Tableau VI - LISTE DES VARIABLES D'ETAT DE LA PARTIE CENTRALE DE STAR

---

1. Sauf mention du cas contraire, les variables sont évaluées aux prix de l'année.

### 3.3.2. Addition de variables de commande aux variables du modèle

A l'exception de VNP et XHA, variables exogènes, les variables de la liste ci-dessus sont toutes déterminées par des équations du modèle : CA, KA, WKM sont des prédéterminées IM, IIE, IDE, PSA, SCSCA des endogènes.

Par exemple,  $IM_t$  est calculé par l'équation :

$$(3.11) \quad IM_t = IM_{t-1} + 0,20(SM_{t-1} - SM_{t-2})$$

Afin de traduire l'action de l'Etat sur  $IM_t$ , nous avons tout d'abord pensé ajouter la variable  $CIM_t$ , l'équation devenant

$$(3.12) \quad IM_t = IM_{t-1} + 0,20(SM_{t-1} - SM_{t-2}) + CIM_t$$

Cette solution a l'inconvénient de spécifier une commande "dynamique".  $CIM_t$  détermine  $IM_t$  qui, à son tour, détermine  $IM_{t+1}$ , etc .... En d'autres termes, l'action de l'Etat sur les impôts versés par les ménages n'est pas ponctuelle mais s'étend sur toute la période de simulation<sup>1</sup>. Pour introduire une action ponctuelle de l'Etat, nous avons été conduits à apporter une légère modification à cette équation. (3.11) ne détermine que la composante endogène  $IM_{1t}$  des impôts des ménages, la totalité des impôts étant déterminée par les deux équations

$$(3.13) \quad IM_{1t} = IM_{1t-1} + 0,20(SM_{t-1} - SM_{t-2})$$

$$(3.14) \quad IM_t = IM_{1t} + CIM_{t-1}$$

La variable CIM est la commande de l'Etat ; son indice t-1 indique qu'elle est déterminée au début de la période (au 1er janvier).

De la même façon, nous avons défini les variables CIIE, CIDE, CPSA, CSCSA, CCA, CKA, CWKM comme ajoutant une composante exogène de commande aux variables correspondantes du modèle.

---

1. Une action ponctuelle n'est possible qu'indirectement, en spécifiant  $CIM_{t+1} = -CIM_t$ , c'est-à-dire par une commande en "dents de scie".

Ce problème d'action ponctuelle se pose pour une des deux variables exogènes, VNP puisque celle-ci intervient avec retard dans l'équation  $WKM_t$ . Le même principe a été appliqué dans cette équation : c'est la composante  $VNP_1$  déterminée par "trend" qui intervient avec retard dans le calcul de  $WKM$ .

La spécification des variables de commande nous a donc conduits à ajouter au modèle original neuf variables. Ces variables sont des écarts par rapport aux évolutions des variables déterminées par le modèle, ou par "trend" (cas de VNP). La dixième variable de commande CXHA figure parmi les variables du modèle original<sup>1</sup>. Cette spécification nécessite de reconsidérer la liste des états et des sorties.  $RDSTAR_t$ , suivant les règles retenues, n'est plus une sortie mais un état ; en effet, il dépend, outre des états de la même période, des commandes de la période précédente :  $CIM_{t-1}$ ,  $CPSA_{t-1}$ ,  $CSCSA_{t-1}$ . Le modèle STAR ainsi modifié ne comporte plus qu'une sortie  $YQ_t$ .

## CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre le modèle STAR qui nous a servi à l'application du schéma de commande. La lecture des sections 2 et 3 consacrées à la structure des équations peut sembler fastidieuse au lecteur. Nous ne soulignerons pas assez l'importance de cette étape dans notre recherche. L'oubli d'une variable décalée, même si elle semble a priori peu importante au chercheur, peut conduire à ignorer une partie cruciale de la dynamique du modèle ; l'étude des non-linéarités peut indiquer, dès le départ, si l'approximation linéaire est ou n'est pas justifiée.

---

1. Elle est écrite CXHA dans les chapitres suivants pour souligner son rôle de variable de commande de STAR.



CHAPITRE 2

DETERMINATION DE L'APPROXIMATION LINEAIRE  
EN VARIABLES D'ETAT

Dans le chapitre précédent, nous avons dressé la liste des états,  $x$ , des sorties,  $y$ , et des commandes,  $u$ , de STAR. La partie centrale du modèle, objet de notre application, comprend 32 états, 1 sortie et 10 variables de commande. Notant  $z$ , les 52 variables endogènes non comprises parmi les états et les sorties, et  $w$ , les 48 variables exogènes (dont les prédéterminées de B1), les équations de la partie centrale s'écrivent :

$$(1) \quad e_{it} = F_i(e_{-t}, w_{-t}, x_{t-1}, u_{t-1}) \quad i = 1, \dots, 84$$

$$(2) \quad y_{jt} = G_j(x_{-t}, w_{-t}) \quad j = 1$$

avec  $e_{-t} = [x_{-t}, z_{-t}]$

Nous décrivons dans ce chapitre le passage de (1), (2) à un modèle linéaire d'écart en variables d'état :

$$(3) \quad \Delta x_{-t} = A \Delta x_{-t-1} + B \Delta u_{-t-1} + D \Delta w_{-t}$$

$$(4) \quad \Delta y_{-t} = C \Delta x_{-t} + G \Delta w_{-t}$$

où la lettre  $\Delta$  indique un écart par rapport à une trajectoire de référence.

Nous présentons d'abord l'approche retenue, calcul des relations linéaires implicites dans (1), puis les différents calculs effectués pour délimiter le domaine de validité de l'approximation linéaire. Enfin, nous proposons et appliquons à STAR une méthode de détermination de la meilleure approximation linéaire par les moindres carrés.



Section 1 - L'APPROCHE RETENUE : CALCUL DES RELATIONS DYNAMIQUES  
IMPLICITES DANS LE MODELE

Pour déterminer l'approximation linéaire en variables d'état de (1), (2), nous avons le choix entre deux approches. La première n'a pas été retenue car trop lourde. Elle comporte deux étapes : linéarisation, équation par équation, des équations du modèle structurel, puis passage à la représentation d'état par multiplication d'une matrice inverse. La deuxième approche consiste en un ensemble de calculs de multiplicateurs dynamiques d'une période.

1.1. Linéarisation de la forme structurelle puis passage à la représentation d'Etat

Les équations (1) et (2) associent à des vecteurs  $\underline{w}_t^*$ ,  $\underline{x}_{t-1}^*$ ,  $\underline{u}_{t-1}^*$  des vecteurs  $\underline{x}_t^*$ ,  $\underline{z}_t^*$ . Notons  $c^*$  le complexe  $(\underline{w}_t^*, \underline{x}_{t-1}^*, \underline{u}_{t-1}^*, \underline{x}_t^*, \underline{z}_t^*)$ . L'approximation linéaire d'une équation de (1) au voisinage de  $c^*$  s'écrit<sup>1</sup> :

$$(1.1) \quad e_{it} = \sum_{j=1}^{84} \left( \frac{\partial F_i}{\partial e_{jt}} \right)_{c^*} (e_{jt} - e_{jt}^*) + \sum_{k=1}^{48} \left( \frac{\partial F_i}{\partial w_{kt}} \right)_{c^*} (w_{kt} - w_{kt}^*) \\ + \sum_{\ell=1}^{32} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_{\ell t-1}} \right)_{c^*} (x_{\ell t-1} - x_{\ell t-1}^*) + \sum_{m=1}^{10} \left( \frac{\partial F_i}{\partial u_{m t-1}} \right)_{c^*} (u_{m, t-1} - u_{m, t-1}^*)$$

$\left( \frac{\partial \cdot}{\partial \cdot} \right)_{c^*}$  indique une dérivée évaluée en  $c^*$ .

Sous forme matricielle, le système (1) s'écrit

$$(1.2) \quad \partial \underline{e}_t = A' \partial \underline{e}_t + D' \partial \underline{w}_t + A'' \partial \underline{x}_{t-1} + B' \partial \underline{u}_{t-1}$$

avec  $A(84 \times 84)$ ,  $D'(84 \times 48)$ ,  $A''(84 \times 32)$ ,  $B(84 \times 10)$   
pour les éléments suivants des matrices :

---

1. Dans ce qui suit, nous nous limitons à la linéarisation de (1). La linéarisation de (2) est obtenue directement car la relation entre les états et la sortie est explicite dans le modèle.

$$a'_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial e_{jt}} \right) c^* \quad d'_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial w_{jt}} \right) c^* \quad a''_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_{jt-1}} \right) c^* \quad b'_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial u_{jt-1}} \right) c^*$$

$$\text{et } \underline{\partial e}_t = \underline{e}_t - \underline{e}_t^* \quad \underline{\partial x}_{t-1} = \underline{x}_{t-1} - \underline{x}_{t-1}^* \\ \underline{\partial w}_t = \underline{w}_t - \underline{w}_t^* \quad \underline{\partial u}_{t-1} = \underline{u}_{t-1} - \underline{u}_{t-1}^*$$

Après mise en facteur  $\underline{\partial e}_t$  et multiplication les deux membres par  $(I-A')^{-1}$ , (1.2) s'écrit :

$$(1.3) \quad \underline{\partial e}_t = (I-A')^{-1} A'' \underline{\partial x}_{t-1} + (I-A')^{-1} D' \underline{\partial w}_t + (I-A')^{-1} B' \underline{\partial u}_{t-1}$$

Par définition appropriée des matrices A, B, D, (1.3) s'écrit :

$$(1.4) \quad \underline{\partial e}_t = A \underline{\partial x}_{t-1} + B \underline{\partial u}_{t-1} + D \underline{\partial w}_t$$

En partitionnant les matrices A, B, D, et le vecteur  $\underline{\partial e}_t$ , (1.4) devient :

$$(1.5) \quad \begin{bmatrix} \underline{\partial x}_t \\ \underline{\partial e}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \underline{\partial x}_{t-1} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \underline{\partial u}_{t-1} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \underline{\partial w}_t$$

(1.5) contient (3).

Cette démarche s'applique bien à un modèle de petite taille. Elle a alors l'avantage d'exprimer les coefficients des matrices en fonction des coefficients de la forme structurelle linéaire. Un autre avantage de cette démarche est de permettre la détermination de la commande stochastique : pour un point de linéarisation donné, à une matrice de variances-covariances des erreurs de la forme structurelle correspond une matrice de variances-covariances de la représentation d'état<sup>1</sup>.

Mais cette démarche est lourde pour le contrôle déterministe des modèles de grande taille. En effet, la linéarisation (1.2) oblige à prendre en compte l'ensemble des équations du modèle ; le passage à (1.3) nécessite l'inversion d'une matrice de 84 lignes et colonnes.

---

1. G. Chow propose à partir de cette linéarisation, le contrôle stochastique d'un modèle non-linéaire [17].

### 1.2. Calcul des relations implicites dans le modèle

Il y a dans (1) des relations implicites entre les éléments de  $\underline{x}_{t-1}$ ,  $\underline{u}_{t-1}$ ,  $\underline{w}_t$  d'une part et  $\underline{x}_t$ .

$$(1.6) \quad x_{it} = H_i(\underline{x}_{t-1}, \underline{u}_{t-1}, \underline{w}_t)$$

Ces relations peuvent être calculées directement par simple résolution du modèle. Ce calcul correspond à des calculs de multiplicateurs qui sont largement utilisés dans les études de comportement des modèles macroéconomiques. L'élément  $a_{ij}$  de A de (3) est donné par :

$$(1.7) \quad a_{ij} = \frac{x_{it} - x_{it}^*}{x_{jt-1} - x_{jt-1}^*} = \frac{\Delta x_{it}}{\Delta x_{jt-1}}$$

où  $x_{it}$  est calculé par résolution des équations (1) pour les conditions initiales  $(\underline{w}_t^*, x_{t-1}^*, u_{t-1}^*)$  à l'exception de  $x_{jt-1}$  donné par :

$$x_{jt-1} = x_{jt-1}^* + \Delta x_{jt-1}$$

$\Delta x_{jt-1}$  est l'écart, ou choc, par rapport aux conditions initiales qui résulte en un écart de la solution, par rapport à la solution de la trajectoire de référence.

(1.7) est donc l'approximation par un rapport d'accroissements finis de la dérivée  $(\partial H_i / \partial x_{jt-1})_c^*$  de l'équation (1.6).

Les valeurs des éléments des matrices dépendent du point de référence  $c^*$  et également de l'amplitude des chocs  $\Delta x_{jt-1}$ . L'approximation de la dérivée est d'autant meilleure que  $\Delta x_{jt-1}$  est petit.  $\Delta x_{jt-1}$  doit être suffisamment grand pour que  $\Delta x_{it}$  soit significatif, compte tenu de la précision de l'algorithme de résolution du modèle, et suffisamment petit pour être situé dans le domaine de l'approximation linéaire.

L'avantage de cette approche est sa facilité de réalisation. Les matrices A, B, D sont déterminées, colonne par colonne ; le calcul d'une colonne nécessitant une résolution du modèle<sup>1</sup>. Par exemple, le calcul de la j-ème colonne  $\underline{a}_j$  de A est donné par

$$(1.8) \quad \underline{a}_j = \frac{x_t^j - x_t}{x_{jt-1} - x_{jt-1}} = \frac{\Delta x_t^j}{\Delta x_{jt-1}}$$

avec  $\underline{x}_t^j$  le vecteur solution du modèle pour les conditions initiales de (1.7).

Son inconvénient tient de ce qu'elle traite le modèle comme une boîte noire : elle se préoccupe de la mesure des relations dynamiques, mais non de leurs explications, et il peut être difficile de retrouver le lien entre les coefficients des matrices A, B, D et de la forme structurelle originale.

Cet inconvénient n'a pas été ignoré dans notre choix de l'approche. Notre but final est une première exploration de la dynamique du modèle et non pas une étude aussi précise que celle de P. Malgrange [54] par exemple. Ce but peut être atteint, comme nous verrons dans le chapitre suivant par un examen minutieux des coefficients de la matrice A.

### 1.3. Deux approches, deux démarches d'analyse de la dynamique

Il importe de bien situer ces deux approches l'une par rapport à l'autre. En effet, elles conduisent à deux démarches différentes d'analyse de la dynamique. Nous avons déjà mentionné ces deux démarches dans le Chapitre 1 du Titre I, et dans le paragraphe ci-dessus. Il importe d'y revenir ici, sur la base des développements précédents. En effet, mise à part la commande, c'est à ce niveau que se situe notre originalité par rapport aux autres travaux conduits en France sur l'analyse des modèles par M. Deleau et P. Malgrange [22],[54].

---

1. Un total de 91 solutions pour STAR (32+10+48+1), le calcul du compte central  $c^*$  nécessitant une solution (d'où le +1).

Ces deux auteurs appliquent la première approche. Celle-ci a l'avantage, nous l'avons vu, d'exprimer les coefficients de (3) en fonction des coefficients de la forme structurelle. Mais il n'est possible de donner une expression analytique de ces coefficients (et non un simple résultat numérique de multiplication d'une matrice par une matrice inverse) que pour des modèles de taille réduite. L'application de cette approche nécessite donc au préalable de longs travaux d' "élagage" et de simplifications du modèle initial : suppressions d'équations (les variables expliquées devenant exogènes), agrégations. Le modèle est ensuite décomposé en plusieurs blocs par suppression des interactions entre les équations. La représentation d'état pour chaque bloc peut être alors écrite explicitement à partir des coefficients du modèle initial. La dynamique d'un bloc est étudiée isolément, puis simultanément avec un ou plusieurs autres blocs, après réintroduction des interactions, ce qui permet d'évaluer l'influence de celles-ci. La démarche d'analyse est longue, mais elle est fine et précise : le chercheur est en mesure, à chaque étape, d'interpréter les résultats en fonction des équations du modèle initial.

En revanche, notre approche nécessite un "investissement intellectuel" peu élevé. Les coefficients des matrices sont obtenus directement à partir du modèle initial ; l'examen de ces coefficients permet alors de dégager une esquisse "grossière" de la dynamique. Cette esquisse est ensuite validée, par simulations, sur le modèle initial.

Ces deux approches et ces deux démarches d'analyse ne doivent pas être opposées. Elles sont à notre avis complémentaires et non substituables. La deuxième approche, appliquée dès les premières étapes de la construction du modèle, permet de détecter des particularités de la dynamique susceptibles d'amener le modélisateur à reformuler son modèle. La deuxième approche pousse plus loin l'analyse ; elle permet d'expliquer certains des résultats de la dynamique qui n'avaient pu l'être par l'approche précédente.

## Section 2 - ETUDE DU DOMAINE DE VALIDITE DE L'APPROXIMATION LINEAIRE

Bien qu'il soit en boucle fermée, et donc en mesure de compenser les erreurs de linéarisation, notre schéma de commande suppose que l'approximation linéaire décrive correctement le comportement du modèle autour de la trajectoire de référence. Cette hypothèse n'a pas été infirmée lors de l'examen des non-linéarités du modèle : il n'y a que trois non-linéarités dans les relations, états-variables de commande ou exogènes, susceptibles d'entraîner des erreurs appréciables lors de la linéarisation. La majorité des non-linéarités résultent des variables endogènes décalées : elles interviennent donc dans les relations entre les états à  $t$  et les états à  $t-1$ . Ces non-linéarités sont-elles susceptibles d'invalider notre schéma de commande ? La réponse définitive à cette question ne peut être donnée définitivement que par la comparaison entre les résultats des simulations de commande sur le modèle linéaire et non-linéaire. Un premier élément de réponse résulte cependant de l'étude du domaine de validité, autour de la trajectoire de référence, de l'approximation linéaire de la relation entre les états. Nous présentons la trajectoire de référence retenue dans cette application ; nous étudions alors la zone de validité de la linéarisation autour de chaque point de la trajectoire, ainsi que la variation de l'approximation, en fonction du point de linéarisation. Nous mesurons, enfin, l'habilité du modèle linéaire à décrire l'évolution autonome du modèle non-linéaire. De cette étude, nous concluons que le comportement de STAR autour de la trajectoire 1972-1976 peut être valablement approximé par un modèle linéaire à coefficients constants.

### 2.1. Génération de la trajectoire de référence

La trajectoire, définie ici, sert à la fois à l'étude du domaine de validité de l'approximation linéaire et à la commande. Elle est générée par cheminement du modèle - le vecteur solution calculée par le modèle sert de condition initiale pour la résolution suivante - sur la période 72-76 dans les conditions :

. valeurs de l'état initial  $x_{1971}^*$  et des prédéterminées  $w_{1971}^{1*}$  (sous-ensembles de  $w$ ) égales à celles de la comptabilité nationale

. valeurs des variables purement exogènes  $w_{1972}^{2*}$  égales à celles de la comptabilité nationale puis extrapolation de ces valeurs  $w_{1973}^{2*} \dots w_{1976}^{2*}$

. valeurs des vecteurs  $\underline{u}^*$  nuls sur toute la période<sup>1</sup>.

Les règles d'extrapolation des variables purement exogènes  $\underline{w}_t^2$

$$\text{POP}_t = 1,01 \cdot \text{POP}_{t-1}$$

$$\text{IMPET}_t = 1,10 \cdot \text{IMPET}_{t-1}$$

$$\text{VNP}_t = \text{VNP}_{t-1} + 2000$$

$$\text{CFIF}_t = \text{CFIF}_{t-1} + 1000$$

$$\text{CONGRE}_t = 0$$

$$\text{XHA}_t = 1,025.$$

Les valeurs des états et de la sortie sur la trajectoire de référence sont données dans le tableau I.

---

1. Les commandes introduites dans STAR sont des variables qui s'ajoutent à des variables endogènes, ou prédéterminées ; elles peuvent être donc supposées nulles sur la période.

	1972	1973	1974	1975	1976
AUT	135401.	152510.	173581.	201503.	231558.
VKENA	162245.	189197.	216926.	251261.	290198.
HEXET	117942.	135560.	156833.	182339.	214592.
AM	144839.	161562.	186333.	216101.	250798.
VQNA	807451.	907675.	1012802.	1138957.	1276925.
XHNA	2.59	0.96	1.24	0.94	0.58
GPAS	747613.	863584.	997389.	1149838.	1324897.
WK	1729497.	1951612.	2211565.	2513447.	2868541.
RDSTAR	666403.	730048.	812161.	898671.	1001826.
YQ	5.94	4.46	5.05	4.84	5.38
XQNA	8.18	5.55	6.76	6.96	6.87
XQNA <sub>t-1</sub>	6.03	8.18	5.95	6.76	6.96
XQNA <sub>t-2</sub>	6.02	6.03	8.18	5.95	6.76
WK <sub>t-1</sub>	1470000.	1676539.	1892043.	2144494.	2436952.
VKENA <sub>t-1</sub> /WK <sub>t-2</sub>	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12
XHNA <sub>t-1</sub>	1.02	2.59	0.96	1.24	0.94
WKE	183384.	210415.	241149.	278460.	321436.
KDCST <sub>t-1</sub>	116197.	131860.	147153.	165598.	190086.
SM <sub>t-1</sub>	299869.	343669.	377728.	423281.	470547.
IM	47526.	56286.	63098.	72209.	81662.
IDE	16366.	18559.	20700.	23283.	26711.
WQNA	856700.	948692.	1064854.	1194880.	1346913.
WCM	588023.	648587.	725189.	809941.	909298.
SE	288899.	317130.	355766.	395330.	444867.
CSEE	87470.	98076.	111787.	126502.	144526.
SCSA	80687.	89130.	100423.	112399.	127983.
CSEJ	14588.	16419.	18925.	21642.	25262.
PSA	152990.	171597.	193883.	218344.	246502.
IIE	142555.	155704.	173036.	192102.	214732.
RBENA	257308.	283981.	315230.	354508.	396470.
RINA	127152.	138635.	151547.	166452.	181691.
FNA	21338.	24764.	28852.	34079.	39797.
SM	343669.	377728.	423281.	470547.	529508.

Tableau I - LA TRAJECTOIRE DE REFERENCE<sup>1</sup>

1. Les variables en niveau sont en millions de francs. Les taux de croissance sont en pourcentage.



## 2.2. Domaine de validité de l'approximation linéaire autour des cinq points de la trajectoire

L'approximation linéaire est d'autant plus exacte que les écarts des points de linéarisation sont faibles. Il importe de vérifier si la qualité de l'approximation ne se dégrade pas trop rapidement lorsque l'on s'écarte des points de linéarisation.

Cette vérification est facile à partir de l'approche adoptée pour obtenir la forme linéaire. L'élément  $a_{ij}$  (1.7) est donné par le rapport d'accroissements finis ; ce rapport tend vers la dérivée correspondante de la fonction implicite H, lorsque le dénominateur tend vers zéro

$$a_{ij} = \frac{\Delta x_{it}}{\Delta x_{jt-1}} \rightarrow \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_{jt-1}} \right) c^*$$
$$\Delta x_{jt-1} \rightarrow 0$$

L'examen de la variation de  $a_{ij}$  à la suite de l'augmentation de  $\Delta x_{jt-1}$  permet de mesurer l'étendue du domaine de validité de la linéarisation : si  $a_{ij}$  reste sensiblement constant, on peut admettre que  $\Delta x_{jt-1}$  se situe encore dans la zone admissible.

Nous avons calculé des matrices A autour des différents points de la trajectoire avec des chocs variants de 1000 à 10000 (1000, 2000, 5000, 10000) pour les variables en niveau, et de 2 à 7 % pour les variables en taux (taux de croissance ou taux d'accumulation). Pour des chocs jusqu'à 5000 des variables en niveau, et pour toutes les valeurs des chocs des variables en taux<sup>1</sup>, les variations des coefficients restent inférieures à 10 % de leur valeur.

Cette conclusion sur l'examen des coefficients d'un domaine de validité assez large est confirmée par l'examen des valeurs propres des différentes matrices : elles ne varient que très faiblement d'une matrice à l'autre.

---

1. Cette faible sensibilité aux valeurs des chocs en taux confirme nos développements du chapitre précédent : les erreurs dues aux linéarisations de produits de variables en taux et de variables en niveau sont faibles, par rapport aux variations prises en compte lors de la linéarisation.

### 2.3. Variation de l'approximation suivant le point de linéarisation

Le coefficient  $a_{ij}$  est l'approximation de la dérivée évaluée au point  $c^*$  : il dépend donc également du point de linéarisation. L'examen de la variation de ces coefficients apporte une information supplémentaire sur le rôle des non-linéarités.

Les matrices ont été calculées pour chaque point de la trajectoire pour des chocs de 5000 sur les variables en niveau et 2 % sur les variables taux. Elles sont notées  $A_{1972}$ ,  $A_{1973}$ ,  $A_{1976}$ , l'indice indiquant l'année du point de linéarisation. Un examen rapide des coefficients des différentes matrices fait ressortir, à l'exception des colonnes des variables taux, une très grande invariance.

Une vue plus globale de la variation des matrices est fournie par l'examen de leurs valeurs propres<sup>1</sup> (tableau II) : elles diffèrent peu (mises à part trois valeurs propres de faible module) d'une année à l'autre. Cet examen est complété par celui du tableau des normes des colonnes de chaque matrice (tableau III). La norme retenue ici est la somme des valeurs absolues des éléments de la colonne. On constate que les normes des colonnes des variables en niveau varient peu suivant le point de linéarisation. Par contre, les normes des variables en taux augmentent dans le temps. Cette croissance n'a rien de surprenant : du fait de l'augmentation, chaque année, des variables en niveau, un choc d'une unité sur les états taux correspond à un choc de valeur croissante sur la variable du numérateur. La croissance de la norme ne reflète donc que l'augmentation de la valeur des chocs.

A la suite de ces constatations, il nous semble justifié de formuler l'assertion suivante : la dynamique propre de STAR - celle qui résulte de l'état initial pour des variables de commande et exogènes nulles - autour de la trajectoire de référence peut être valablement approximée par un modèle linéaire, variant dans le temps (c'est-à-dire dépendant du point de linéarisation, lui-même correspondant à une période déterminée) ; cette variation des matrices est limitée aux colonnes taux.

---

1. Ces valeurs propres ont été calculées à l'aide des sous-routines S.S.P. d'I.B.M. après avoir, dans un premier temps, transformé les matrices  $A$  en matrices quasitriangulaires (sous-programme HSBG). Les valeurs propres sont alors calculées sur ces matrices transformées (sous-programme ATEIG).

A <sub>1972</sub>	A <sub>1973</sub>	A <sub>1974</sub>	A <sub>1975</sub>	A <sub>1976</sub>	A <sub>1972</sub>	A <sub>1973</sub>	A <sub>1974</sub>	A <sub>1975</sub>	A <sub>1976</sub>
-1.0194	1.0039	1.0152	1.0090	1.0168	0.1701	0.1597	0.1676	0.1749	0.1311
-1.0194	1.0039	1.0152	1.0090	1.0168	-0.1701	-0.1597	-0.1676	-0.1749	-0.1311
1.2119	1.1776	1.1983	1.1825	1.1751	0.0299	0.0074	0.0	0.0234	0.0073
-1.2119	1.1776	1.1692	1.1825	1.1751	-0.0299	-0.0074	0.0	-0.0234	-0.0073
1.1805	1.1262	1.1504	1.1475	1.1658	0.0	0.0078	0.0	0.0	0.0
-1.1674	1.1262	1.1374	1.1392	1.1562	0.0	-0.0078	0.0	0.0	0.0
1.1560	1.1240	1.1350	1.1344	1.1469	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.1330	1.1204	1.1279	1.1265	1.1257	0.0	0.0	0.0007	0.0	0.0020
-1.1218	1.1025	1.1279	1.1203	1.1257	0.0	0.0	-0.0007	0.0	-0.0020
1.1146	1.0965	1.0990	1.0996	1.0930	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0796	0.9999	1.0693	1.0672	1.0837	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0001	1.0541	1.0002	1.0000	1.0000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.9999	1.0001	0.9999	0.9998	0.9999	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5338	0.5418	0.5021	0.5092	0.5015	-0.6470	-0.6704	0.5520	0.6525	-0.7192
-0.5338	0.5418	0.5021	0.5092	0.5015	0.6470	0.6704	-0.5520	-0.6525	0.7192
0.3312	0.3004	0.3164	0.3018	0.3161	-0.4619	-0.4575	0.4650	0.4583	-0.4665
-0.3312	0.3004	0.3164	0.3018	0.3161	0.4619	0.4575	-0.4650	-0.4583	0.4665
0.4955	0.4317	0.4692	0.2173	0.4620	0.0	0.0	0.0	0.3443	0.0
0.2029	0.2310	0.2097	0.2173	0.2005	-0.3544	-0.3408	0.3248	0.3443	0.3564
-0.2029	0.2310	0.2097	0.4733	0.2005	0.3544	0.3408	-0.3248	0.0	-0.3564
0.3210	0.3164	0.3134	0.3683	0.3332	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0438	0.0767	0.1225	0.1052	0.0894	-0.0542	0.0452	0.0507	0.0	0.0469
-0.0933	0.0767	0.1225	0.0194	0.0894	0.0542	-0.0452	-0.0507	0.0925	-0.0469
0.0455	0.0396	0.0575	0.0194	0.0207	0.0	0.0	0.0	0.0925	0.0149
-0.0113	0.0231	0.0177	0.0190	0.0207	0.0027	0.0	0.0	0.0	-0.0149
0.0113	0.0229	0.0164	0.0166	0.0216	-0.0027	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0093	0.0008	0.0101	0.0134	0.0016	0.0013	0.0061	0.0	0.0	0.0034
0.0093	0.0008	0.0068	0.0122	0.0016	-0.0013	-0.0061	0.0	0.0	-0.0034
0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0015	0.0000	0.0	0.0	0.0	0.0
-0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	-0.0000	0.0	0.0000	0.0	0.0
0.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0	0.0	-0.0000	0.0	0.0

Partie réelle

Partie imaginaire

Tableau II - VALEURS PROPRES DES MATRICES  $A_{1972} \rightarrow A_{1976}$

	A <sub>1972</sub>	A <sub>1973</sub>	A <sub>1974</sub>	A <sub>1975</sub>	A <sub>1976</sub>
AUT	7.46	7.49	7.07	6.75	7.03
VKENA	2.24	2.30	2.27	2.33	2.53
WEXET	12.37	12.22	11.84	11.65	11.41
WH	11.62	9.77	10.08	9.85	9.56
VQNA	3.27	3.29	3.21	3.26	3.59
XHNA	292.0	340.00	406.4	441.0	515.9
PPAS	4.89	4.91	4.80	4.58	4.49
WK	2.24	2.20	2.19	2.18	2.18
RDSTAR	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
YQ	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
XQNA	25.26	29.09	32.45	38.24	43.93
XQNA <sub>t-1</sub>	25.26	29.09	32.45	38.24	43.93
XQNA <sub>t-2</sub>	24.26	28.09	31.45	37.24	42.93
WK <sub>t-1</sub>	0.66	0.71	0.91	0.68	0.69
VKENA <sub>t-1</sub> / WK <sub>t-2</sub>	291.6	336.8	379.8	439.5	524.9
XHNA <sub>t-1</sub>	291.0	339.0	405.4	440.0	514.9
WKE	2.55	2.45	2.51	2.47	2.46
RBES <sub>t-1</sub>	1.61	1.63	1.63	1.66	1.71
SM <sub>t-1</sub>	0.65	0.66	0.66	0.68	0.70
IM	3.27	3.33	3.35	3.44	3.52
IDE	11.69	11.82	12.16	12.01	12.19
WQNA	2.79	2.78	2.83	2.88	2.88
WCM	3.93	3.66	3.62	3.62	3.57
SF	3.44	3.40	3.51	3.60	3.92
CSEE	11.24	11.09	11.53	11.43	11.79
SCSA	4.42	4.31	4.56	4.46	4.63
CSED	4.58	4.41	4.54	4.59	4.76
PSA	3.65	3.69	3.87	3.81	3.93
ITF	11.11	10.87	11.27	11.24	11.55
RBENA	2.49	2.42	2.32	2.29	2.14
RVA	14.34	14.43	14.75	14.74	14.90
FNA	16.05	15.79	15.53	16.30	16.27
SM	1.65	1.66	1.67	1.68	1.69

Tableau III

NORMES DES COLONNES A<sub>1972</sub>,  
A<sub>1973</sub>, A<sub>1974</sub>, A<sub>1975</sub>, A<sub>1976</sub>

1. Le nom de la variable de la colonne.

#### 2.4. Habilité de l'approximation linéaire à décrire la dynamique propre de STAR autour de la trajectoire sur plusieurs périodes

Les différents calculs effectués jusqu'ici nous ont seulement permis d'évaluer la validité de l'approximation linéaire pour décrire la relation (1.6) implicite dans STAR, c'est-à-dire la dynamique sur une période. Dans ce paragraphe, nous tentons d'apprécier la validité du modèle linéaire pour décrire la dynamique sur un horizon de cinq ans, l'horizon de la commande.

La dynamique autonome du modèle linéaire est obtenue par multiplication de la matrice A. L'effet d'une variation d'une unité de l'état initial  $i$  à  $t$  sur les états à  $t+n$  est donnée par  $\underline{a}_i^n$ , la  $i$ -ème colonne de la matrice  $A^n$ . Cet effet doit être comparé au résultat donné par le modèle non-linéaire :

$$(2.1) \quad \Delta x_{t+n}^i = x_{t+n}^i - x_{t+n}^* = \hat{a}_{t+n}^i$$

avec  $x_{t+n}^i$  obtenue par cheminement du modèle pour les conditions initiales  $(\underline{w}_t^*, x_{t-1}^*, u_{t-1}^*)$  à l'exception de  $x_{i,t-1}$  donné par

$$x_{i,t-1} = x_{i,t-1}^* + 1$$

et pour les valeurs des vecteurs  $\underline{u}$  et  $\underline{w}$  égales à celles de la trajectoire de référence sur toute la période.

Nous avons comparé successivement (Tableau IV) :

- les résultats du cheminement avec le produit des matrices  $A_{1972}, A_{1973} \dots A_{1976}$
- les résultats du cheminement avec le produit des matrices  $A'_{1972}, A'_{1973} \dots A'_{1976}$  de colonnes constantes et égales à celles de  $A_{1972}$  à l'exception des colonnes de variables taux, égales aux colonnes correspondantes de  $A_{1972}, A_{1973} \dots A_{1976}$
- les résultats du cheminement avec les puissances successives de  $A_{1972}$ .

La première comparaison permet de juger de l'habilité d'un modèle linéaire, variant dans le temps, à retracer la dynamique autonome de STAR autour de la trajectoire ; les deux autres comparaisons mesurent les erreurs introduites en spécifiant un modèle plus simple, invariant ou très légèrement variant dans le temps.

Tableau IV - COMPARAISON DES ECARTS OBTENUS  
PAR LE MODELE LINEAIRE ET NON-LINEAIRE

Colonnes	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5
AUT	0.07*	0.19	0.15	0.34	0.02	0.07	0.17	0.17	0.02	0.12	0.01	0.55
VQNA	0.00	0.00	0.19	0.22	0.05	0.07	0.21	0.03	0.05	0.05	0.13	0.30
WNA	0.12	0.14	0.11	0.17	0.08	0.03	0.08	0.11	0.08	0.14	0.22	0.29
W4	0.15	0.19	0.14	0.22	0.04	0.11	0.25	0.39	0.04	0.09	0.07	0.09
V4V4	0.10	0.11	0.08	0.10	0.09	0.21	0.16	0.02	0.09	0.26	0.94	0.65
X1V4	0.15	0.08	0.10	0.11	0.14	0.12	0.22	0.08	0.06	0.03	0.05	0.16
PP45	0.05	0.12	0.20	0.10	0.01	0.04	0.05	0.12	0.01	0.05	0.08	0.15
W4	0.04	0.20	0.19	0.15	0.15	0.25	0.25	0.19	0.15	0.20	0.20	0.15
XQNA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
YQ	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
XQNA	0.07	0.04	0.05	0.00	0.07	0.06	0.11	0.21	0.07	0.15	0.16	0.18
XQNA t-1	0.05	0.05	0.05	0.07	0.03	0.05	0.15	0.28	0.09	0.12	0.14	0.13
XQNA t-2	0.14	0.10	0.10	0.11	0.14	0.12	0.21	0.47	0.06	0.09	0.03	0.07
WK t-1	0.10	0.05	0.05	0.09	0.08	0.12	0.30	1.25	0.08	0.12	0.34	0.82
VKENA t-1 /WK t-2	0.06	0.07	0.05	0.11	0.20	0.40	1.18	2.31	0.09	0.17	0.49	0.82
XHNA t-1	0.22	0.00	0.00	0.22	0.22	0.39	0.05	1.79	0.05	0.12	0.27	0.54
WKE	0.04	0.08	0.10	0.09	0.03	0.04	0.12	0.21	0.05	0.11	0.53	0.85
RBES t-1	0.10	0.12	0.25	0.19	0.35	0.09	0.15	0.15	0.05	0.13	0.24	0.31
SM t-1	0.02	0.04	0.06	0.05	0.01	0.03	0.03	0.08	0.01	0.02	0.06	0.09
IM	0.02	0.04	0.07	0.05	0.02	0.05	0.09	0.08	0.02	0.04	0.07	0.05
I9L	0.03	0.09	0.10	0.12	0.05	0.05	0.06	0.12	0.05	0.09	0.17	0.27
W4V4	0.19	0.20	0.43	0.45	0.14	0.20	0.28	0.30	0.14	0.22	0.29	0.31
W4	0.25	0.27	0.26	0.27	0.13	0.16	0.23	0.27	0.15	0.27	0.45	0.59
SE	0.08	0.12	0.20	0.12	0.00	0.09	0.14	0.17	0.06	0.14	0.25	0.33
CS45	0.08	0.09	0.14	0.08	0.07	0.07	0.09	0.15	0.07	0.12	0.20	0.21
SUSA	0.02	0.02	0.02	0.02	0.05	0.07	0.11	0.14	0.05	0.07	0.11	0.13
CS4J	0.02	0.05	0.04	0.02	0.04	0.07	0.12	0.14	0.04	0.07	0.11	0.14
PSA	0.03	0.05	0.01	0.02	0.04	0.05	0.10	0.10	0.04	0.04	0.08	0.11
LI4	0.08	0.07	0.14	0.09	0.07	0.08	0.11	0.19	0.07	0.15	0.25	0.35
XQNA	0.00	0.07	0.05	0.10	0.04	0.03	0.05	0.05	0.04	0.07	0.11	0.15
RV4	0.00	0.09	0.13	0.09	0.04	0.04	0.05	0.05	0.04	0.07	0.11	0.15
F4A	0.03	0.10	0.15	0.11	0.09	0.12	0.05	0.11	0.04	0.09	0.17	0.28
S4	0.15	0.11	0.05	0.09	0.05	0.07	0.00	0.15	0.09	0.17	0.28	0.51
												0.05

Matrices constantes

Matrices constantes à l'exception des colonnes taux et rapport

Matrices variantes

\* 0.07 s'interprète ainsi : dans le cas des matrices variantes, le rapport de la somme des valeurs absolues des erreurs sur les écarts résultant d'un choc initial sur AUT et de la somme des valeurs absolues de ces écarts est 0,07.

Les éléments de chaque colonne du tableau sont calculés ainsi :

$$(2.2) \quad e_{j,n} = \frac{\sum_{i=1}^{33} |a_{i,j}^n - \hat{a}_{i,t+n}^j|}{\sum_{i=1}^{33} |\hat{a}_{i,t+n}^j|} \quad \text{avec } i \neq 8, 14, 15^2$$

avec  $\hat{a}_{i,t+n}^j$  i-ème élément du vecteur  $\Delta x_{t+n}^j$  (2.1) et  $a_{i,j}^n$  l'élément  $a_{ij}$  de  $A^n$ .

On constate que les erreurs varient fortement suivant les colonnes. Le calcul par le modèle linéaire des effets des écarts initiaux donne des résultats satisfaisants sur une période de trois ans : la quasi-totalité des erreurs sur cette période est inférieure à 30 %. Enfin, il ne semble pas qu'un gain appréciable résulte de la prise en compte de la variation dans le temps des colonnes taux.

Sur la base de ce tableau et des constatations faites dans les paragraphes précédents, nous avons opté pour l'approximation linéaire des relations entre états implicites dans STAR (1.6) par une matrice constante. Celle-ci est le résultat d'une linéarisation autour du point de l'année 1972 de la trajectoire centrale. L'adoption d'une matrice constante facilite, en effet, l'étude de la dynamique du modèle, l'application de cette thèse, et il ne semble pas que cette simplification augmente notablement les erreurs de linéarisation.

Les raisons qui nous ont conduits à adopter une matrice A constante s'appliquent a fortiori à la matrice B. En effet, nous avons vu que les non-linéarités les plus nombreuses n'interviennent pas dans les relations états-variables de commande.

- 
1. La matrice A utilisée dans cette section est de dimension 33x33. La ligne supplémentaire décrit les variations de la sortie  $YQ_t$  à la suite des variations des états à t-1. La colonne correspondant à cette sortie est nulle. Cette matrice a été utilisée dans une phase initiale de notre étude à l'époque où nous n'avions pas le souci d'isoler l'équation de sortie.
  2. Les coefficients des variables concernant le stock de capital ont été exclus de la comparaison dans un souci d'homogénéité. Le stock de capital est réévalué à partir de l'évolution des prix des biens d'investissement ; il est donc susceptible de variations beaucoup plus fortes que l'ensemble des autres variables.

### Section 3 - DETERMINATION DE STARTER PAR LES MOINDRES CARRÉS

Dans la section précédente, nous avons apprécié la validité d'une approximation linéaire pour décrire l'évolution propre de STAR autour d'une trajectoire de référence. L'approximation linéaire était celle qui résultait d'une simple linéarisation numérique de STAR. Celle-ci a l'avantage d'être calculée facilement ; elle ne nécessite que  $n+1$  résolutions du modèle ( $n$  étant le nombre de variables indépendantes, dans notre cas particulier les 32 états). Elle permet ainsi d'apprécier rapidement l'intérêt de l'approximation linéaire dans l'étude de la dynamique d'un modèle non-linéaire.

Dans cette section, nous proposons, puis appliquons à STAR une détermination des matrices A et B par les moindres carrés. Les avantages de l'estimation sur la linéarisation numérique classique sont exposés avant de présenter les deux étapes qui conduisent à la détermination de STARTER : la génération des échantillons d'observation et l'estimation à partir de ces échantillons. L'habilité de STARTER à décrire la dynamique propre est évaluée dans le dernier paragraphe.

#### 3.1. Avantages de l'estimation par les moindres carrés

Les avantages de l'estimation sur la linéarisation numérique classique se montrent bien à partir d'une reformulation des calculs de la linéarisation. La matrice A est calculée colonne par colonne (1.8) :

$$\underline{a}_j = \frac{1}{\Delta x_{jt-1}} \cdot \Delta x_t^j$$

Soit  $\Delta X_{t-1}$  la matrice diagonale des chocs (32x32)

$$\Delta X_{t-1} = \begin{bmatrix} \Delta x_{1t-1}^0 & & & \\ 0 & \Delta x_{2t-1} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \Delta x_{31t-1} \end{bmatrix}$$



Soit  $\Delta X_t$  la matrice des effets de ces chocs à t

$$\Delta X_t = \begin{bmatrix} \Delta x_{1t}^1 & \Delta x_{1t}^{32} \\ \Delta x_{2t}^1 & \Delta x_{2t}^{32} \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_{32t}^1 & \Delta x_{32t}^{32} \end{bmatrix}$$

Avec cette notation, le calcul de l'ensemble des coefficients de la matrice A s'écrit :

$$(3.1) \quad A = \Delta X_t \cdot \Delta X_{t-1}^{-1}$$

(3.1) correspond à la formule de détermination de A par la méthode des moindres carrés simples. En effet, celle-ci s'écrit :

$$(3.2) \quad A^T = (\Delta X_{t-1} X_{t-1}^T)^{-1} \Delta X_{t-1} \Delta X_t^T$$

avec  $A^T$  = transposée de A.

Prenant la transposée de  $A^T$ , (3.2) se simplifie ( $\Delta X_{t-1}$  est une matrice symétrique)

$$(3.3) \quad A = (\Delta X_{t-1} \Delta X_t^T)^T (\Delta X_{t-1}^2)^{-1} = \Delta X_t \Delta X_{t-1}^{-1}$$

La linéarisation de A, (3.1), correspond à l'estimation des coefficients de A par les moindres carrés à partir d'observations en nombre juste suffisant pour déterminer chacun des coefficients.

L'estimation par les moindres carrés à partir d'un grand nombre d'observations est supérieure à la linéarisation numérique, dans la mesure où la relation linéaire n'est pas exacte. En effet, elle ne privilégie pas un vecteur de chocs  $\Delta x_{t-1}$  particulier (dont les éléments auraient pour valeur 5000, par exemple) mais elle effectue les moyennes des approximations des dérivées pour de nombreux vecteurs  $\Delta x_{t-1}$ . La matrice A ainsi déterminée est celle

---

1. La transposition de l'ensemble de ces matrices, par rapport à la formule habituelle, résulte du fait que A est déterminée, ligne par ligne, par les moindres carrés.

qui donne la meilleure approximation de la relation non-linéaire entre les états, au sens de minimisation de la somme des carrés des erreurs, pour un échantillon donné de chocs.

Notre estimation est aussi supérieure à la linéarisation numérique dans le choix de la matrice d'observations  $\Delta X_{t-1}$ . Dans le cas de la linéarisation, cette matrice est diagonale : seul un écart dans chaque observation est différent de zéro. Les observations ne sont donc pas représentatives des écarts susceptibles d'être rencontrés dans une situation réelle. A l'inverse, aucune contrainte n'est imposée, a priori, sur l'échantillon d'observations servant à l'estimation. La matrice A peut très bien être estimée à partir d'un échantillon représentatif des écarts rencontrés lors de l'application réelle de la commande.

L'estimation a enfin l'avantage de fournir des statistiques qui aident à l'explication du comportement dynamique du modèle. Le coefficient de corrélation multiple permet d'apprécier la qualité de l'approximation linéaire ; la part de variation des variables dépendantes, expliquée par chaque variable indépendante, conduit au classement des états de  $t-1$  suivant leur importance dans la détermination des états de  $t$ . Indépendamment de l'estimation, la constitution d'échantillons d'observations sur les variables dépendantes et indépendantes fait disposer d'un nombre important de réponses du modèle à des perturbations. Enfin, à partir du tableau des coefficients de corrélation entre les réponses de chaque variable, il est possible de mener différentes études sur le modèle : construction de modèles simplifiés, vérification de l'existence du cycle de l'emploi ....

Les deux premiers avantages relèvent de la qualité de l'approximation linéaire ; ils ne sont pas exploités dans cette thèse. En effet, pour faciliter l'étude de la dynamique de STAR, application de cette thèse, nous avons choisi d'estimer un modèle à coefficients constants autour du point de fonctionnement de l'année 1972. Or, pour tirer parti de ces avantages, il aurait été nécessaire de réaliser des estimations autour de chaque point de la trajectoire. Nous avons utilisé, en revanche, les statistiques données par le programme d'estimation ; elles nous ont permis de déterminer les causes de la divergence de STAR.

### 3.2. Génération des échantillons d'observations sur les variables indépendantes

La détermination des échantillons d'observations sur les variables indépendantes est une étape importante de l'application, lorsque la qualité de la commande, et donc de l'approximation linéaire, est la préoccupation principale (dans le schéma de M. Athans et D. Kendrick par exemple).

L'estimation détermine, en effet, la meilleure approximation dans le domaine couvert par les observations de l'échantillon ; il est donc important de bien délimiter le domaine réel d'utilisation du modèle.

La définition de la zone d'utilisation du modèle autour de la trajectoire est moins importante pour l'objet de notre étude. Nous avons néanmoins estimé STARTER avec des échantillons d'écarts "réalistes" autour de la trajectoire. Les écarts ont été déterminés à partir des séries de la comptabilité nationale. Ces séries étant trop courtes, notre démarche a consisté à déterminer les échantillons en deux temps :

- . Calcul des moyennes et des variances des écarts observés sur le passé
- . Génération d'observations de mêmes moyennes et variances mais de covariances nulles.

Dans le cas des variables d'état et des variables de commande ayant une composante endogène, les écarts sur le passé sont les différences entre les valeurs réelles et les valeurs prévues par le modèle ; les écarts des commandes exogènes sont les différences entre les valeurs réelles et les valeurs obtenues par lissage des séries de valeurs réelles. Les observations ont été générées à partir de séquences binaires pseudo-aléatoires<sup>1</sup>, transformées par les calculs proposés par M. Mc Carthy [53] afin d'obtenir des vecteurs aléatoires de moyenne et de matrice de variances-covariances données.

### 3.3. Estimation de STARTER

Notre étude de la dynamique de STAR se limite à son évolution autonome déterministe et à la modification de cette évolution par la commande. Nous ignorons l'effet des variations des variables exogènes : durant toutes les simulations, les valeurs données à ces variables sont celles de la trajectoire centrale. Le modèle STARTER s'écrit donc :

---

1. Les séquences binaires pseudoaléatoires ont l'avantage d'être obtenues facilement. Elles donnent, de plus, des vecteurs non corrélés entre eux, ce qui ne peut être obtenu par des sous-routines classiques de calcul de nombres aléatoires. Pour un exposé sur ces séquences, voir par exemple C. Foulard, S. Gentil et J.P. Sandraz [30].

$$(3.4) \quad \Delta \underline{x}_t = A \Delta \underline{x}_{t-1} + B \Delta \underline{u}_{t-1}$$

$$(3.5) \quad \Delta \underline{y}_t = C \Delta \underline{x}_t$$

Par application de la démarche décrite ci-dessus, nous avons généré deux échantillons,  $\{\Delta X_{t-1}\}$ ,  $\{\Delta U_{t-1}\}$  de 255 observations. Les matrices A et B étant estimées séparément<sup>1</sup>, nous avons calculé par STAR deux échantillons de variables dépendantes, l'un étant le résultat des chocs  $\{\Delta X_{t-1}\}$ , l'autre celui des chocs  $\{\Delta U_{t-1}\}$ . Par exemple une observation  $\Delta x_t^l$  du premier échantillon est calculé ainsi :

$$(3.6) \quad \underline{x}_t^l = H(\underline{x}_{t-1}^* + \Delta \underline{x}_{t-1}^l, u_{t-1}^*, w_t^*)$$

$$(3.7) \quad \Delta \underline{x}_t^l = \underline{x}_t^l - \underline{x}_t^*$$

Les matrices A et B sont estimées, ligne par ligne, par régression par pas sur les échantillons correspondants. La première ligne de A,  $\underline{a}^1$  est calculée par

$$(3.8) \quad \underline{a}^1 = (\Delta X_{t-1}^T \cdot \Delta X_{t-1}) \Delta X_{t-1} \cdot \Delta \underline{x}_t^1$$

$$\Delta X_{t-1} = (255 \times 32)$$

$$\Delta \underline{x}_t^1 = (255 \times 1)$$

Les matrices A et B sont données dans les tableaux V et VI<sup>2</sup>.

- 
1. A et B peuvent très bien être estimées ensemble à partir d'un échantillon  $\{\Delta x_{t-1}, \Delta u_{t-1}\}$  tout en donnant les mêmes résultats en raison de la contrainte de diagonalité imposée à la matrice de variances-covariances. L'estimation séparée a été retenue afin de classer séparément les états importants de la dynamique propre, et les commandes.
  2. Les coefficients des lignes dont la valeur de la statistique t est inférieure à 2 sont égalisés à 0.

t	t-1	AUT	VKENA	WEXET	WM	VQNA	XHNA	GPAS	WK	RDSTAR	XQNA	XQNA <sub>t-1</sub>
AUT		0.347	0.070	0.356	-0.394	-0.104	-0.904	0.174	-0.040	0.0	-0.001	-0.001
VKENA		0.272	0.075	0.156	-0.174	0.024	-0.901	0.193	-0.018	0.0	-0.077	-0.077
WEXET		0.0	-0.063	0.855	0.286	-0.037	0.897	-0.026	0.0	0.0	0.077	0.077
WM		0.102	0.131	0.965	0.163	0.137	-1.722	0.126	-0.005	0.0	-0.147	-0.147
VQNA		0.0	0.294	1.485	-1.642	0.354	-4.001	0.142	0.0	0.0	-0.337	-0.337
XHNA		-0.000	0.006	0.127	-0.141	0.031	-0.074	0.009	0.002	0.0	0.004	0.004
GPAS		0.100	0.0	0.467	-0.517	0.130	0.0	1.108	0.006	0.0	0.0	0.0
WK		2.017	-0.304	0.879	-0.976	-0.001	4.305	0.996	0.928	0.0	0.408	0.408
RDSTAR		0.483	-0.217	0.998	-1.103	-0.191	2.936	0.217	-0.016	0.0	0.204	0.204
XQNA		0.0	0.035	0.196	-0.217	0.047	-0.014	0.019	0.0	0.0	-0.043	-0.043
XQNA <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000	1.000
XQNA <sub>t-2</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
WK <sub>t-1</sub>		0.0	0.075	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
VKENA <sub>t-1</sub> /WK <sub>t-2</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
XHNA <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
WKE <sub>t-1</sub>		0.461	0.038	0.236	-0.263	-0.036	-0.474	0.262	-0.030	0.0	0.0	0.0
RBES <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
SM <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
IM <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
IDE		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
WQNA		0.975	-0.176	1.898	-2.096	-0.382	2.306	0.482	-0.061	0.0	0.200	0.200
WCM		0.605	-0.134	1.195	-1.318	-0.239	1.717	0.300	-0.036	0.0	0.144	0.144
SE		0.307	-0.189	0.872	-0.964	-0.066	2.464	0.167	-0.004	0.0	0.223	0.223
CSEE		0.071	-0.044	0.202	-0.223	-0.020	0.372	0.039	0.0	0.0	0.032	0.032
SCSA		0.094	-0.058	0.141	-0.155	-0.032	0.781	0.040	-0.003	0.0	0.0	0.0
CSEU		0.020	-0.012	0.030	-0.033	-0.011	0.167	0.009	-0.001	0.0	0.0	0.0
PSA		0.079	-0.038	0.027	-0.030	-0.030	0.507	0.027	-0.005	0.0	0.043	0.043
IIE		0.182	-0.041	0.361	-0.397	-0.072	0.517	0.090	-0.011	0.0	0.043	0.043
RBENA		0.413	0.097	0.463	-0.512	-0.202	-1.245	0.189	-0.045	0.0	-0.112	-0.112
RNA		0.139	0.042	0.180	-0.201	-0.032	-0.037	0.035	-0.011	0.0	-0.047	-0.047
FNA		0.071	0.015	0.073	-0.082	-0.014	-0.236	0.040	-0.006	0.0	-0.017	-0.017
SM		0.335	-0.206	0.865	-0.955	-0.114	2.707	0.175	-0.005	0.0	0.107	0.107

Tableau V - MATRICE A 1

1. L'unité des lignes et des colonnes des variables en niveau est le franc. Par exemple, un écart de 1F de AUT à t-1 donne un écart de 0,27 F de VKENA à t. L'unité des lignes et des colonnes des variables taux, ou rapport, est le cent millièmes. Les coefficients non différents de zéro au seuil de 95 % (t < 2) sont égalisés à zéro.

t	t-	XQNA <sub>t-2</sub>	WK <sub>t-1</sub>	VKENA <sub>t-1</sub> / WK <sub>t-2</sub>	XHNA <sub>t-1</sub>	WKE	RBES <sub>t-1</sub>	SM <sub>t-1</sub>	IM	IDE	WQNA	WCM
AUT		0.001	0.013	0.883	-0.964	0.0	0.000	0.0	0.0	-0.433	0.120	0.000
VKENA		-0.077	-0.040	0.855	-0.961	0.104	0.051	-0.029	0.081	-0.522	0.071	0.000
WEXET		0.077	0.031	-0.838	0.897	0.000	-0.009	0.033	0.0	0.489	-0.119	0.000
WM		-0.149	-0.064	1.610	-1.722	0.0	0.108	0.0	0.0	-0.902	-0.332	0.000
WQNA		-0.339	-0.136	3.636	-4.001	0.0	0.240	0.0	0.0	-2.017	0.623	0.000
XHNA		0.004	-0.009	0.060	-0.074	-0.000	0.021	0.0	0.0	-0.168	-0.042	0.000
GPAS		0.0	-0.048	0.0	0.0	0.0	-0.038	-0.066	0.391	0.130	-0.104	0.000
WK		0.000	0.091	-4.636	4.365	-1.578	-0.302	0.0	0.0	2.033	-0.214	-0.000
RDS TAB		0.204	0.039	-2.920	2.936	0.100	-0.077	0.239	-1.082	0.528	0.009	0.000
XQNA		-0.042	-0.018	0.459	-0.514	0.0	0.002	0.0	0.0	-0.266	-0.001	0.000
XQNA <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
XQNA <sub>t-2</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
WK <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
VKENA <sub>t-1</sub> /WK <sub>t-2</sub>		0.0	-0.008	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
XHNA <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
WKE		0.0	-0.029	0.357	-0.474	0.0	0.0	-0.028	0.080	-0.324	0.047	0.000
RBES <sub>t-1</sub>		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
SM		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
IM		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.200	1.000	0.0	0.0	0.000
IDE		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.140	0.0	0.0	1.000	0.0	0.000
WQNA		0.200	0.044	-2.416	2.308	0.100	-0.142	0.082	-0.120	0.857	0.276	0.000
WCM		0.144	0.030	-1.758	1.717	0.114	-0.089	0.077	-0.228	0.575	0.162	0.000
SE		0.223	0.018	-2.526	2.464	0.000	0.0	0.029	0.0	0.0	0.021	0.000
CSEE		0.052	0.004	-0.588	0.572	0.007	0.0	0.007	0.0	0.0	0.000	0.000
SCSA		0.0	0.013	-0.781	0.781	0.014	-0.024	0.009	-0.017	0.180	0.042	-0.000
CSEU		0.0	0.003	-0.167	0.167	0.002	-0.000	0.002	0.0	0.038	0.009	-0.000
PSA		0.045	0.015	-0.502	0.507	0.016	-0.000	0.006	-0.016	0.255	-0.030	-0.000
IIE		0.043	0.009	-0.531	0.517	0.034	-0.027	0.048	-0.069	0.173	0.049	-0.000
RBENA		-0.112	0.013	1.229	-1.245	0.094	-0.088	0.0	0.0	0.600	0.201	0.000
RNA		-0.047	-0.004	0.530	-0.537	0.009	-0.009	0.0	0.0	0.076	0.080	0.000
FVA		-0.017	-0.004	0.184	-0.256	-0.094	0.0	0.0	0.0	0.0	0.029	0.000
SM		0.169	0.025	-2.763	2.709	0.037	-0.000	0.032	0.0	0.182	0.048	0.000

Tableau V - MATRICE A (suite)

t	t-1	SE	CSEE	SCSA	CSEO	PSA	IIE	RBENA	RNA	FNA	SM
AUT		0.090	-0.405	0.0	0.0	0.0	-0.394	0.032	-0.425	0.560	0.0
VKENA		0.094	-0.337	-0.076	0.0	-0.034	-0.028	0.045	-0.443	0.581	0.029
WEXET		-0.089	0.407	0.0	0.0	-0.024	0.097	-0.025	0.385	-0.511	-0.033
WM		0.173	-0.741	0.0	0.0	0.0	-0.723	0.056	-0.769	0.998	0.0
VQNA		0.097	-1.675	0.0	0.0	0.0	-1.036	0.132	-1.766	2.329	0.0
XHNA		0.033	-0.141	0.0	0.0	0.0	-0.137	0.011	-0.147	0.187	0.0
GPAS		0.0	0.346	-0.392	0.401	-0.434	0.340	0.066	-0.163	0.172	0.000
WK		-0.477	2.092	0.0	0.0	0.0	2.033	-0.126	2.066	-2.405	0.0
RDSTAR		-0.318	0.298	1.095	-1.138	1.214	0.292	-0.255	1.722	-1.945	-0.239
XQNA		0.052	-0.221	0.0	0.0	0.0	-0.216	0.017	-0.233	0.297	0.0
XQNA t-1		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
XQNA t-2		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
WK		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
VKENA t-1/WK t-2		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
XHNA t-1		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
WKE		0.042	-0.113	-0.076	0.0	-0.003	-0.108	0.031	-0.217	0.307	0.028
RRES t-1		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000	-1.000	0.0	0.0
SM		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000
IM		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.200
IDE		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.140	-0.140	0.0	0.0
WQNA		-0.250	0.958	0.124	0.0	0.138	0.942	-0.088	1.127	-1.325	-0.082
WCM		-0.185	0.574	0.230	-0.242	0.254	0.565	-0.089	0.876	-1.026	-0.077
SE		-0.045	0.145	0.047	0.0	0.033	0.144	-0.018	0.206	-0.228	-0.029
CSEE		-0.250	1.206	0.0	0.0	0.012	0.033	-0.004	0.048	-0.053	-0.007
SCSA		-0.377	0.166	1.177	0.0	0.018	0.161	-0.015	0.187	-0.232	-0.009
CSEO		-0.030	0.035	0.006	1.190	0.004	0.034	-0.003	0.040	-0.030	-0.002
PSA		-0.053	0.217	0.014	0.0	1.143	0.212	-0.018	0.238	-0.290	-0.006
IIE		-0.050	0.173	0.069	0.0	0.076	1.016	-0.027	0.264	-0.310	-0.048
RBENA		0.131	-0.566	0.0	0.0	0.0	-0.032	-0.039	0.608	-0.732	0.0
RNA		0.055	-0.244	0.0	0.0	0.0	-0.236	-0.297	1.175	-0.075	0.0
FNA		0.020	-0.083	0.0	0.0	0.0	-0.081	-0.086	0.0	1.218	0.0
SM		-0.300	0.243	1.072	-1.106	0.039	0.238	-0.026	0.311	-0.362	-0.032

Tableau V - MATRICE A (fin)

t	t-1	CVNP	CXHA	CCA	CKA	CKKM	CSCSA	CPSA	CIIE	CIDE	CIM
AUT		0.170	0.170	0.170	0.170	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
VKENA		-0.048	-0.042	-0.042	-0.042	0.002	-0.001	-0.070	-0.283	-0.000	0.077
WEXET		-0.096	-0.106	-0.096	-0.106	0.179	-0.000	-0.019	0.332	0.406	0.012
WM		0.578	0.599	0.578	0.599	0.230	-0.023	-0.012	-0.643	-0.791	0.010
VQNA		0.710	0.750	0.710	0.750	0.424	-0.000	-0.042	-1.399	-1.727	0.002
XHNA		0.064	0.067	0.064	0.067	0.000	0.000	-0.000	-0.119	-0.147	0.004
GPAS		-0.118	-0.132	-0.118	-0.132	0.102	-0.272	-0.039	0.304	0.269	0.000
WK		1.011	0.983	1.011	0.983	0.000	-0.057	-0.069	1.766	2.145	0.000
RDSTAR		0.869	0.911	0.869	0.911	0.109	0.717	1.060	0.256	0.563	-1.093
XQNA		0.095	0.101	0.095	0.101	0.000	-0.000	-0.006	-0.187	-0.231	0.000
XQNA t-1		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
XQNA t-2		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
WK t-1		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
VKENA t-1 / MK t-2		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
XHNA t-1		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
WKE		0.055	0.057	0.055	0.057	0.000	-0.054	-0.074	-0.093	-0.134	0.070
RBES t-1		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
SM t-1		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
IM		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
IDE		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
XQNA		1.751	1.755	1.751	1.755	0.314	0.000	0.087	0.829	1.041	-0.127
WCM		1.106	1.110	1.106	1.110	-0.812	0.109	0.187	0.504	0.655	-0.206
SE		0.735	0.742	0.735	0.742	0.165	0.000	0.035	0.133	0.173	-0.047
CSEE		0.170	0.172	0.170	0.172	0.038	0.000	0.008	0.031	0.040	-0.011
SCSA		0.149	0.159	0.149	0.159	0.000	0.000	0.000	0.135	0.178	-0.020
CSEO		0.032	0.034	0.032	0.034	0.000	0.216	0.000	0.029	0.038	-0.006
PSA		0.068	0.078	0.068	0.078	-0.030	0.000	0.000	0.176	0.230	-0.020
IIE		0.626	0.614	0.626	0.614	0.000	0.028	0.048	0.000	0.194	0.000
RBENA		0.220	0.228	0.220	0.228	0.000	-0.008	0.000	-0.481	0.634	0.000
RNA		0.080	0.084	0.080	0.084	0.000	0.000	0.000	-0.205	0.067	0.000
FNA		0.028	0.029	0.028	0.029	-0.002	-0.004	-0.005	-0.067	0.009	0.000
SM		0.750	0.762	0.750	0.762	0.146	0.706	0.000	0.210	0.275	-0.009

Tableau VI - MATRICE B <sup>1</sup>

1. Pour les unités, voir la note du tableau V.



#### 3.4. Qualité de l'approximation linéaire

L'habilité de STARTER à retracer la dynamique propre de STAR peut être mesurée par les coefficients de corrélation entre les séries d'écart obtenus par cheminement de STAR (équation 2.1) pour les chocs initiaux  $\{\Delta X_{t-1}\}$ , et les séries obtenues par multiplication de ces chocs par des puissances successives de la matrice A. Ces coefficients ont été calculés (Tableau VII) pour une période de quatre ans. Les coefficients de corrélation pour l'année 1 sont les coefficients de corrélation multiple des équations correspondant aux lignes de A. On observe que, sur un an, l'approximation linéaire explique très bien la transmission des écarts : les coefficients de corrélation sont de l'ordre de 0,99. Sur une durée de deux, trois et quatre ans, l'approximation linéaire reste bonne : sur quatre ans, le coefficient le plus faible est 0,74, tandis que la plupart des autres sont de l'ordre de 0,90.

La précision de l'approximation linéaire des relations commandes-états est, elle aussi, excellente : les coefficients de corrélation multiple des équations des lignes de B sont tous de l'ordre de 0,99.

Année Variables	Année			
	1	2	3	4
AUT	0.99	0.98	0.95	0.92
VKENA	0.99	0.98	0.97	0.95
WEXET	0.99	0.98	0.98	0.97
WM	0.99	0.97	0.98	0.99
VQNA	0.99	0.99	0.95	0.93
XHNA	0.99	0.89	0.85	0.69
GPAS	1.00	1.00	0.98	0.97
WK	0.99	0.97	0.96	0.93
XQNA	0.99	0.94	0.70	0.82
WK <sub>t-1</sub>	1.00	0.99	0.97	0.96
VKENA <sub>t-1</sub> /WK <sub>t-2</sub>	1.00	0.99	0.98	0.98
WKE	0.99	0.99	0.97	0.95
RBES	0.99	0.92	0.90	0.82
SM	0.99	0.90	0.89	0.88
IM	1.00	0.96	0.93	0.91
IDE	0.99	0.98	0.92	0.90
WQNA	0.99	0.96	0.93	0.88
WCM	0.99	0.96	0.93	0.88
SE	0.99	0.88	0.86	0.84
CSEE	0.99	0.96	0.94	0.93
SCSA	0.99	0.97	0.97	0.96
CSEO	0.99	0.97	0.97	0.96
PSA	0.99	0.98	0.97	0.95
IIE	1.00	0.98	0.97	0.95
RBENA	0.99	0.98	0.95	0.84
RNA	1.00	0.97	0.89	0.74
FNA	0.99	0.97	0.89	0.77
YQ	0.99	0.94	0.87	0.79
RDSTAR	0.99	0.95	0.92	0.84

Tableau VII - COEFFICIENTS DE CORRELATION ENTRE LES SERIES DE TRANSMISSIONS  
DES CHOCS INITIAUX PAR A ET PAR STAR

### CONCLUSION

Tous ces calculs pour apprécier la validité de l'approximation linéaire mettent en évidence le comportement quasi linéaire de STAR autour d'une trajectoire de référence, pour un cheminement de trois ans. Or, ces deux conditions sont précisément celles de l'utilisation de STAR pour la détermination des budgets économiques. On peut alors poser la question suivante : pourquoi ne pas s'imposer de construire directement un modèle linéaire ? Les non-linéarités constituent un obstacle à la compréhension de la dynamique du modèle ; elles peuvent conduire à des évolutions non recherchées a priori. Nous soulèverons à nouveau cette question lors de la conclusion de cette thèse.

T I T R E   I I I

ETUDE DE LA DYNAMIQUE DE STAR



Dans le titre précédent, nous avons décrit le passage de STAR à STARTER, son approximation linéaire en variables d'état estimée par les moindres carrés autour du point de 1972. Dans ce titre, avant de donner des exemples d'application du schéma de commande, nous nous attachons dans un premier chapitre à dégager, par un examen détaillé des coefficients de STARTER, des informations sur la dynamique de STAR : instabilité, équations à l'origine de l'instabilité, états initiaux entraînant à court terme la divergence du modèle. Cet examen se limite aux coefficients jugés importants dans la dynamique à un an. La sélection de ces coefficients découle du classement, lors des régressions par pas, des variables indépendantes suivant leur contribution dans l'explication de la variation de la variable dépendante. Les informations déduites dans ce chapitre sur la dynamique de STAR illustrent une des conclusions de notre thèse : la représentation d'état, un des éléments de notre schéma, est en elle-même un outil de connaissance de la dynamique des modèles macroéconomiques.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons le schéma de commande pour générer quatre scénarios d'évolution de STAR. Ces scénarios mettent en évidence la difficulté de combiner, dans STAR, un objectif de croissance élevée avec une balance commerciale équilibrée ; ces objectifs ne peuvent être simultanément atteints que par une baisse "irréaliste" du niveau de la consommation et de l'indice des prix. La comparaison de ces scénarios avec ceux calculés par simulation de la commande sur STARTER permettent de mesurer les erreurs dues à l'approximation linéaire : celles-ci sont faibles au moins sur les trois premières années. Notre schéma de commande donne donc de bons résultats sur la période d'utilisation de STAR pour l'élaboration des budgets économiques : c'est là une autre conclusion de notre thèse.



CHAPITRE 1

ETUDE DES PROPRIETES DYNAMIQUES DE STAR  
A PARTIR DE STARTER

Les propriétés dynamiques de STAR autour de la trajectoire de référence sont établies facilement par application à STARTER des critères de stabilité et de commandabilité des modèles linéaires en variables d'état. Ces propriétés sont cependant insuffisantes pour décrire la dynamique du modèle. En effet, les modes instables ou les variables de commande peuvent être sans grande influence sur un horizon court.

Dans ce chapitre, nous allons plus loin que le constat d'instabilité et de commandabilité de STAR. Nous isolons les écarts initiaux sur les états susceptibles d'entraîner, sur un horizon de cinq ans, la divergence de l'ensemble des états du modèle. Cette sélection résulte d'un examen minutieux des coefficients "importants" de la matrice A déterminés par les régressions par pas, et de leur interprétation à partir des équations du modèle. Par une étude similaire de la matrice B, nous déterminons les variables de commande ayant une forte influence dans le court terme sur la dynamique propre de STAR.

La première section porte sur l'instabilité de l'évolution propre de STAR : établissement de l'instabilité par le calcul des valeurs propres de STARTER, détermination des coefficients de A et des équations de STAR causant l'instabilité. Dans la deuxième section, les états initiaux sont classés suivant leur contribution à la divergence de l'évolution propre dans le court terme. La troisième section traite de la modification de l'évolution propre par l'action des commandes : commandabilité, groupement de variables de commande suivant leur influence sur l'évolution du modèle.



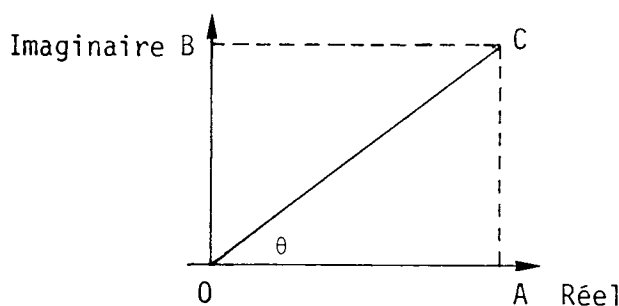
Section 1 - LE CONSTAT ET LES ORIGINES DE L'INSTABILITE DE STAR

1.1. Constat de l'instabilité de STAR

Le Tableau I donne la liste des parties réelles et imaginaires des modules, et les périodes des cycles résultant des valeurs propres complexes. Les périodes sont calculées pour chaque valeur propre de partie imaginaire positive de la façon suivante : soit un nombre complexe :

$$C = A + iB$$

Il se présente dans le système d'axe des réels et des imaginaires par



$\theta$  est l'angle de la droite OC avec l'axe des réels, il est donné par

$$(1.1) \quad \theta = \text{Arctg} (B/A)$$

$\theta$  n'est déterminé par cette formule qu'à un angle  $\Pi$  près. Pour éviter cette indétermination, nous avons réalisé la suite de calculs :

$$(1.2) \quad \alpha = \text{Arctg} (|B/A|)$$

$$(1.3) \quad \theta = \alpha \quad \text{si} \quad A > 0$$

$$(1.4) \quad \theta = \Pi - \alpha \quad \text{si} \quad A < 0$$

La période résultant de C est donnée par le rapport  $2\Pi/\theta$ .

<u>Partie Réelle</u>	<u>Partie Imaginaire</u>	<u>Module</u>	<u>Période</u> <sup>1</sup>
1,03	± 0,19	1,05	0,0
1,20	± 0,03	1,20	0,0
1,19	0,0	1,19	0,0
1,17	0,0	1,17	0,0
1,15	0,0	1,15	0,0
1,14	± 0,01	1,14	0,0
1,11	0,0	1,11	0,0
1,07	0,0	1,07	0,0
1,00	0,0	1,00	0,0
1,00	0,0	1,00	0,0
0,50	± 0,69	0,86	6,65
-0,34	± 0,48	0,59	1,53
-0,50	0,0	0,50	0,0
0,18	± 0,36	0,41	5,69
-0,37	0,0	0,37	0,0
0,15	± 0,15	0,21	7,89
-0,10	± 0,05	0,11	1,76
0,11	0,0	0,11	0,0
0,04	0,0	0,04	0,0
-0,03	0,0	0,03	0,0
0,00	± 0,0	0,00	5,21
0,00	0,0	0,00	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0

Tableau I - VALEURS PROPRES DE LA MATRICE<sup>2</sup>

- 
1. L'unité est l'année ; les cycles de période supérieure à 25 ans sont ignorés (leur période est égalisée à zéro).
  2. Sur les programmes utilisés pour le calcul des valeurs propres, voir note 1 p. II.2.11.

Treize des modules sont supérieurs ou égaux à un : STARTER est donc un modèle instable. Ce résultat est à rapprocher de l'étude de A.S. Golberger [32] sur le modèle Klein-Golberger et E.P. Howrey [42] sur le modèle de Wharton. Les modules des valeurs propres du premier modèle sont inférieurs ou égaux à un. Le module le plus élevé du modèle de Wharton est 1,005. Les taux de croissances résultant des valeurs propres de STAR sont donc beaucoup plus élevés que ceux des autres modèles : 20,0 % pour le module le plus élevé de STAR contre 1,9 % et 0,0 % pour le module le plus élevé du modèle de Wharton et Klein-Golberger respectivement<sup>1</sup>.

Le calcul des valeurs propres apporte une autre information sur la dynamique de STAR. STAR est un modèle susceptible d'engendrer des cycles. Un de ceux-ci semble particulièrement intéressant : celui de six-sept ans qui correspond au module de 0,86<sup>2</sup>. Sur ce point, STAR se différencie aussi des deux autres modèles qui sont incapables de générer des cycles "soutenus" de période voisine (5-7 ans est la durée moyenne des cycles observés sur les séries économiques des Etats-Unis).

L'instabilité de STAR, mise en évidence par les valeurs propres de STARTER, est confirmée par simulation sur le modèle non-linéaire. La simulation consiste à calculer pour chaque état initial les multiplicateurs dynamiques sur tous les états de 1972 à 1976. L'évolution, pour chaque état initial, de la somme des valeurs absolues des multiplicateurs des états "flux" est donnée dans le Tableau II<sup>3</sup>. Ces sommes peuvent être vues comme des normes des multiplicateurs ; seize d'entre elles divergent sur cinq ans.

- 
1. Le modèle de Wharton étant trimestriel, le taux de croissance annuel s'obtient en élevant à la puissance quatre le module calculé sur le modèle trimestriel.
  2. Ce cycle apparaît aussi dans le coeur de STAR (voir Tableau V).
  3. Nous avons exclu de cette somme les états  $GPAS_t$ ,  $WK_t$ ,  $WK_{t-1}$  qui sont des variables stocks. En effet, un écart croissant de ces variables par rapport à la trajectoire centrale n'est pas obligatoirement le résultat d'un écart croissant de la variable flux correspondante.

Variables sur  
lesquelles a  
été effectué  
le choc

	71-72	71-73	71-74	71-75	71-76
AUT	5.25	5.37	3.76	2.07	2.55
VKENA	1.90	3.57	5.04	4.11	2.54
WEXET	11.07	10.10	11.32	12.37	12.46
WM	10.25	9.15	10.11	10.65	10.36
VQNA	2.35	4.30	3.13	1.50	1.89
XHNA	247.99	466.56	686.01	605.43	369.84
PPAS	2.74	4.15	4.97	4.01	4.16
WK	0.31	0.77	1.50	2.61	3.59
RDSTAR	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
YD	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
XQNA	21.03	59.15	127.75	219.53	263.87
XQNA	21.03	59.15	115.06	171.72	171.47
XQNA <sup>t-1</sup>	20.08	38.87	70.85	87.32	70.21
WK <sup>t-2</sup>	0.53	1.17	1.22	0.67	0.32
VKENA <sup>t-1</sup> /WK <sup>t-2</sup>	247.59	325.38	209.00	175.41	96.05
XHNA <sup>t-1</sup>	246.99	336.60	308.05	206.53	112.61
WKF <sup>t-1</sup>	0.99	2.10	3.70	2.76	1.87
RBES <sup>t-1</sup>	1.26	2.69	4.29	4.69	4.64
SM <sup>t-1</sup>	0.56	0.61	0.69	0.90	1.08
IM <sup>t-1</sup>	2.85	3.09	3.42	3.90	5.39
IDF	9.14	19.58	31.93	35.89	34.22
WQNA	2.49	3.06	3.42	4.69	5.24
WCM	3.43	4.57	6.97	8.60	9.65
SF	2.93	4.09	7.33	8.63	9.54
CSEF	9.73	16.90	28.61	35.50	39.19
SCSA	3.97	5.50	6.44	7.78	9.79
CSEF	4.14	5.79	6.90	8.43	10.79
PSA	3.15	3.81	4.63	5.94	7.95
IIE	9.63	16.60	27.81	33.73	36.24
RRENA	2.32	2.88	4.60	5.87	6.19
RNA	12.05	21.44	33.20	38.82	39.10
FNA	13.30	26.44	43.20	52.97	58.53
SM	1.57	0.13	0.16	0.32	0.39

Tableau II - EVOLUTION DES NORMES DES MULTIPLICATEURS  
DES ETATS INITIAUX

## 1.2. Les relations de STAR à l'origine de l'instabilité

### 1.2.1. Simplification des matrices A et B

L'étude de la dynamique de STARTER à partir de l'examen des coefficients des matrices n'est possible qu'après la sélection des coefficients importants dans la dynamique à un an. L'estimation des matrices, par régressions par pas, conduit naturellement à cette sélection. Les variables indépendantes sont "entrées" dans l'équation dans l'ordre de leur contribution à l'explication des variations des variables dépendantes. L'emploi de l'ordre d'entrée pour la sélection des variables est injustifié dans le cas de régressions sur des données économiques réelles ; cet ordre, de part la multicollinéarité des variables indépendantes, est, en effet, très sensible à de légères modifications de l'échantillon. Il est, par contre, tout à fait justifié dans notre application en raison de la contrainte d'orthogonalité imposée sur l'échantillon des variables indépendantes.

Pour être introduite dans l'équation, chaque variable indépendante,  $j$ , doit expliquer un pourcentage,  $r_{ij}$ , supérieur à un seuil fixé a priori, de variation de la variable dépendante,  $i$ . La fixation de ce seuil à 1 % (il était de 0 % lors de l'estimation de la matrice A et B complète) a entraîné l'inclusion de dix variables en moyenne dans chaque équation pour la détermination de  $A^1$ , et cinq variables pour la détermination de B. Les Tableaux III et IV donnent pour chaque coefficient des lignes de A et B le pourcentage d'explication de la variable dépendante ainsi que l'ordre d'introduction.

Cette méthode de simplification de STARTER est proche de celle utilisée par A.S. Golberger [32] pour éliminer les variables peu importantes des équations. A.S. Golberger réalise cette élimination à partir de la comparaison, pour chaque variable prédéterminée,  $pr_j$ , du coefficient

$$\mu_{ij} = \Pi_{ij} \sum_{t=2}^n |p_{r_{jt}} - p_{r_{jt-1}}|$$

avec  $t=1, n$ , la période d'estimation du modèle et  $\Pi_{ij}$  le coefficient de la variable  $pr_j$  dans la  $i$ -ème équation :  $\mu_{ij}$  représente donc la somme des valeurs absolues des variations de la  $i$ -ème variable expliquée dans le passé par les variations de  $pr_j$ .

---

1. Cette moyenne est réduite à 6 pour un seuil de 3 %.





	CVNP	CXHA	CCA	GKA	GKMM	CSCSA	GPSA	CIE	CIIE	CSIE				
AJT	0.95(4)	0.0	(0)	0.08(2)	0.04(5)	0.01(6)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.07(3)	0.0	(0)	
VNENH	0.90(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.01(6)	0.07(3)	0.0	0.74(1)	0.08(2)	0.03(5)	
REXAL	0.95(2)	0.0	(0)	0.03(5)	0.01(6)	0.05(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.73(1)	0.07(3)	0.0	(0)
MA	0.91(3)	0.0	(0)	0.20(2)	0.09(4)	0.02(6)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.75(1)	0.05(5)	0.0	(0)
VNA	0.92(4)	0.0	(0)	0.09(2)	0.04(5)	0.01(6)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.73(1)	0.07(3)	0.0	(0)
AVN	0.95(4)	0.0	(0)	0.10(2)	0.04(5)	0.01(6)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.72(1)	0.07(3)	0.0	(0)
GPS	0.43(1)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.05(5)	0.25(2)	0.0	0.12(4)	0.0	(0)	0.13(3)
WK	0.10(3)	0.0	(0)	0.10(2)	0.05(5)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.68(1)	0.06(4)	0.0	(0)
RDSFAR	0.04(6)	0.0	(0)	0.11(3)	0.05(5)	0.0	(0)	0.08(4)	0.44(1)	0.0	0.02(7)	0.0	(0)	0.24(2)
YQ	0.02(5)	0.0	(0)	0.07(3)	0.03(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.79(1)	0.08(2)	0.0	(0)
XQNA	0.05(4)	0.0	(0)	0.09(2)	0.04(5)	0.01(6)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.73(1)	0.07(3)	0.0	(0)
XQNA <sub>L-1</sub>	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
XQNA <sub>L-2</sub>	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
AN <sub>L-1</sub>	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
VREN <sub>L-1</sub> / WK <sub>L-1</sub>	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
XHN <sub>L-1</sub>	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
WKE <sub>L-1</sub>	0.45(1)	0.0	(0)	0.03(5)	0.01(9)	0.02(8)	0.0	0.03(6)	0.16(3)	0.0	0.18(2)	0.02(7)	0.0	0.04(4)
RSES <sub>L-1</sub>	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
SM <sub>L-1</sub>	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
IM	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
IDE	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.0	0.0	(0)
MJNA	0.17(4)	0.0	(0)	0.41(1)	0.19(3)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.21(2)	0.02(5)	0.0	(0)
WCM	0.25(2)	0.0	(0)	0.31(1)	0.15(4)	0.08(5)	0.0	(0)	0.03(6)	0.0	0.15(3)	0.02(7)	0.0	0.01(5)
SE	0.20(3)	0.0	(0)	0.50(1)	0.23(2)	0.02(5)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.04(4)	0.0	(0)	0.0
CSEE	0.20(3)	0.0	(0)	0.50(1)	0.23(2)	0.02(5)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.04(4)	0.0	(0)	0.0
GPSA	0.05(5)	0.49(1)	0.13(3)	0.06(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.23(2)	0.02(6)	0.0	(0)
CSEU	0.0	(0)	0.07(2)	0.02(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.86(1)	0.0	0.03(3)	0.0	0.0	(0)
PSA	0.02(5)	0.0	(0)	0.07(3)	0.03(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.79(1)	0.08(2)	0.0	(0)
IEE	0.19(3)	0.0	(0)	0.49(1)	0.22(2)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.01(4)	0.0	0.0	0.0	(0)
RBEVA	0.04(4)	0.0	(0)	0.07(3)	0.03(5)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.76(1)	0.08(2)	0.0	(0)
RVA	0.06(2)	0.0	(0)	0.06(3)	0.03(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.84(1)	0.0	0.0	(0)
FNA	0.13(2)	0.0	(0)	0.06(3)	0.03(4)	0.0	(0)	0.0	(0)	0.0	0.77(1)	0.0	0.0	(0)
SY	0.12(4)	0.03(6)	0.32(2)	0.14(3)	0.0	(0)	0.31(1)	0.0	(0)	0.06(5)	0.0	0.0	0.0	(0)

Tableau IV - IMPORTANCE DES VARIABLES DE COMMANDE DANS LA DYNAMIQUE A UN AN



A.S. Golberger simplifie donc le modèle à partir d'un petit nombre d'observations sur le comportement ex-post du modèle ; notre simplification est réalisée à partir d'un grand nombre d'observations sur le comportement du modèle autour d'une trajectoire du futur.

### 1.2.2. Hypothèses sur les causes de la divergence

L'examen des éléments diagonaux  $a_{ii}$  de A et de leurs indices  $r_{ii}$  ainsi que du bloc diagonal importations-exportations permet de déceler des causes de divergence. Dix éléments diagonaux de A aux indices  $r_{ii}$  élevés sont égaux ou supérieurs à un. La table suivante donne la liste des variables correspondant à ces éléments ainsi que les valeurs des  $a_{ii}$ ,  $r_{ii}$ .

Variable	GPAS	IM	IDE	CSEE	SCSA	CSEO	PSA	IIE	RNA	FNA
$a_{ii}$	1,17	1,0	1,0	1,21	1,18	1,19	1,14	1,32	1,18	1,22
$r_{ii}$	0,83	0,81	0,28	0,37	0,37	0,46	0,73	0,52	0,73	0,60

GPAS = en cours du passif des E.N.A.

IM = impôts des Ménages

IDE = impôts indirects des Entreprises

CSEE = cotisations sociales employeurs des Entreprises

SCSA = salaires, cotisations sociales versées par les Administrations

CSEO = cotisations sociales employeurs des autres agents

PSA = prestations sociales

IIE = impôts indirects versés par les Entreprises

RNA = revenu brut des E.I.N.A.

FNA = financement formation capital par les E.I. non agricoles.

Les chiffres du tableau s'interprètent ainsi pour GPAS : une variation  $\Delta GPAS_{t-1}$  entraîne à la période suivante une variation

$$\Delta GPAS_t = 1,17 \Delta GPAS_{t-1}$$

De plus, les variations de  $GPAS_{t-1}$  déterminent en moyenne 83 % des variations de  $GPAS_t$ .

Sur la base de ces chiffres, il y a lieu de penser que les variations initiales de GPAS, IM, PSA, FNA, RNA sont entretenues dans le temps. L'examen simultané des lignes et des colonnes correspondant aux autres variables conduit à la même conclusion : les effets indirects à travers les variations des autres variables sont faibles par rapport à l'effet propre :

$$a_{ii}^2 > \sum_{j=1}^{32} a_{ji} \cdot a_{ij} \quad j \neq i$$

Les valeurs des éléments du bloc diagonal de la colonne (3) exportations, WEXET, et (4) importations, WM, montrent une autre source de divergence. L'effet total sur  $\Delta WEXET_{t+1}$  de  $\Delta WEXET_{t-1}$  si l'on tient compte à la fois de  $\Delta WEXET_t$  et  $\Delta WM_t$  est voisin de 1,0

$$\Delta WEXET_{t+1} = (a_{33}^2 + a_{43} \cdot a_{34}) \Delta WEXET_{t-1} \approx 1,0 \Delta WEXET_{t-1}$$

L'examen des coefficients  $a_{ij}$  et des pourcentages  $r_{ij}$  nous a permis de déceler les états initiaux, qualifiés ci-dessous de "divergents", susceptibles d'entraîner la divergence de STARER dans le court terme. L'étude des équations de STAR, qui décrivent l'évolution de ces états, révèle immédiatement une caractéristique commune à ces équations : les variables de ces équations, lors de l'estimation, sont soit des taux d'accroissement, soit des différences premières. Par exemple, l'état  $IM_t$  est déterminé par l'équation

$$(1.5) \quad IM_t = IM_{t-1} + 0,20 (SM_{t-1} - SM_{t-2})$$

estimé sous la forme

$$IM_t - IM_{t-1} = a \cdot (SM_{t-1} - SM_{t-2})$$

On peut penser avec raison que la forte divergence de STAR, que nous avons mise en évidence, résulte de la spécification des variables au stade de l'estimation des coefficients du modèle. Quatre types de spécification coexistent : différences premières, taux d'accroissement, rapports de deux variables en niveau, variables en niveau. Les deux premières sont à l'origine de la divergence.

### 1.2.3. Validation des hypothèses

Ces hypothèses ont été validées à partir de STARTER et par simulation sur le modèle STAR. Le premier test sur STARTER porte sur l'influence des éléments diagonaux égaux ou supérieurs à un sur les modules des valeurs propres. Il consiste à recalculer les valeurs propres de A après avoir annulé ces éléments diagonaux<sup>1</sup>. Il est positif : le nombre de valeurs propres de modules supérieurs à un passe de treize à trois.

Le deuxième test a pour but de valider l'hypothèse sur la cause principale de divergence de ces variables : la spécification lors de l'estimation d'équations en taux ou en différences premières. Il en résulte une dynamique beaucoup plus "forte" que celle introduite par les auteurs de STAR dans les équations en niveau ou en rapport de deux variables. Cette dernière dynamique découle d'hypothèses économiques explicitement formulées : influence du taux de substitution capital-travail passé sur la répartition des revenus et la productivité, influence de l'autofinancement passé sur le profit ....

Afin d'isoler cette dynamique, appelée dynamique du coeur de STAR, de celle résultant de la formulation d'équations en taux de croissance ou en différence première, nous avons considéré ci-dessous les variables WEXET, WM, SCSA, CSEO, PSA, IIE, RBENA, RNA, FNA, CSEE comme exogènes. Ces variables sont, en effet, toutes déterminées par des équations en taux de croissance ; de plus, il n'y a pas, dans ces équations, de taux de croissance décalé. Nous avons ensuite reformulé en niveau les équations déterminant IDE et IM qui sont dans STAR en différence première. Par exemple, l'équation du coeur du modèle déterminant  $IM_t$  devient :

$$IM_t = 0,20 \cdot SM_{t-1} + EIM_t$$

au lieu de :

$$IM_t - IM_{t-1} = 0,20(SM_{t-1} - SM_{t-2}) + EIM_t$$

---

1. Le bloc diagonal WEXET, WM est laissé inchangé ici.

La dynamique du coeur de STAR n'est plus décrite que par quatorze états ; la matrice A correspondante est obtenue par suppression des lignes et des colonnes correspondant aux dix-huit états. Une seule valeur propre de cette matrice réduite a un module supérieur à un<sup>1</sup> (Tableau V).

Partie Réelle	Partie Imaginaire	Module	Période
1,2	0,0	1,2	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0
0,6	± 0,8	0,9	6,7
0,4	± 0,4	0,6	7,5
- 0,1	± 0,5	0,5	1,4
- 0,4	± 0,1	0,4	1,9
0,0	± 0,1	0,1	7,0
- 0,1	0,0	0,1	0,0
- 0,0	0,0	0,0	0,0

Tableau V - LES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE DU COEUR DE STAR

L'hypothèse de la prépondérance des dix éléments diagonaux, dans la détermination des modules supérieurs à un, est aussi testée par simulations sur le modèle STAR. Ces simulations correspondent à des évolutions de STARTER obtenues par multiplication d'une matrice A après annulation des dix éléments diagonaux. Elles consistent en des cheminements "contraints" de STAR : après chaque solution, on impose aux dix variables "divergentes" leurs valeurs sur la trajectoire centrale. Les normes des multiplicateurs obtenues par ces cheminements "contraints" (Tableau VI) sont à comparer à celles du Tableau II. Le nombre de séries de normes divergentes est réduit à deux (il y en avait seize dans le Tableau II). Il est intéressant de remarquer que la série correspondant à XQNA ne diverge pas, alors qu'elle est la plus divergente du Tableau II (la valeur des normes y est décuplée).

---

1. Il y en avait treize dans la matrice initiale ; la suppression de la ligne et de la colonne correspondant à GPAS, variable stock, fait rentrer la totalité des valeurs propres dans le cercle unité.

AUT	5.25	5.17	4.32	5.57	4.59
VKENA	1.90	3.19	4.06	2.43	2.35
WEXET	11.07	9.36	6.02	6.51	7.65
WM	10.25	8.10	5.34	6.31	6.95
VQNA	2.35	4.04	3.90	4.32	4.17
XHNA	247.99	415.76	546.72	315.43	307.79
PPAS	2.74	2.19	1.64	1.76	1.29
WK	0.31	0.85	1.75	2.56	2.35
RDSTAP	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
YQ	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
XQNA	21.08	52.33	104.49	145.81	120.93
XQNA <sub>t-1</sub>	21.08	51.33	93.84	108.46	60.32
XQNA <sub>t-2</sub>	20.08	36.82	53.11	50.00	27.34
WK <sub>t-1</sub>	0.53	1.19	1.20	0.87	1.09
VKENA <sub>t-1</sub> /WK <sub>t-2</sub>	247.59	309.33	209.14	181.02	214.58
XHNA <sub>t-1</sub>	246.99	323.58	212.62	161.02	188.13
WKE	0.99	1.52	2.38	3.60	4.56
RBES <sub>t-1</sub>	1.26	1.76	1.78	2.12	2.05
SM <sub>t-1</sub>	0.56	0.15	0.12	0.15	0.10
IM	2.85	0.77	0.63	0.83	0.60
IDE	9.14	13.55	12.60	12.83	13.00
WQNA	2.49	3.13	4.94	7.05	4.38
WCM	3.43	3.69	3.94	4.49	5.43
SE	2.98	3.04	2.50	2.99	2.89
CSEF	8.73	13.43	11.50	11.31	12.20
SCSA	3.97	2.27	0.80	0.37	0.24
CSE0	4.14	2.34	0.93	0.69	0.50
PSA	3.15	0.90	0.75	0.91	0.64
ITE	8.63	13.27	11.35	11.19	12.06
RBENA	2.32	1.44	1.58	1.44	1.63
RNA	12.05	13.74	11.79	11.55	11.45
FNA	13.30	15.94	15.61	13.39	17.22
SM	1.57	0.69	0.22	0.16	0.16

Tableau VI - NORMES DES COLONNES DANS LA SIMULATION AVEC RECALAGE  
SUR LA TRAJECTOIRE CENTRALE POUR LES 10 VARIABLES

## Section 2 - CLASSEMENT DES ETATS INITIAUX "DIVERGENTS"

La détermination des écarts sur les états qui font diverger le modèle dans le court terme est insuffisante. En effet, la divergence peut rester limitée sur plusieurs années à l'une ou l'autre variable et ne se propager aux autres variables du modèle que dans le long terme. Il est donc important de mesurer l'effet de ces écarts dans le court terme. Cette évaluation nous conduit à un classement des états initiaux divergents suivant leur influence sur l'évolution des autres états dans le court terme.

### 2.1. Formulation d'un classement

#### 2.1.1. La faible importance de CSEO, PSA, IM, SCSEA, composantes du revenu disponible

Ces variables ont en commun la propriété de modifier directement leur propre évolution et d'être des composantes du revenu disponible des ménages et des administrations ; il en découle un effet dynamique semblable que l'on constate par l'examen des colonnes correspondantes de la matrice A. L'effet dynamique des écarts sur ces variables porte principalement sur leur évolution propre : elles ne modifient que faiblement l'évolution de deux autres états du modèle : la consommation des ménages et l'encours du passif des entreprises. Cet enchaînement dynamique est expliqué ici pour SCSEA.

SCSEA est déterminé par l'équation

$$SCSEA_t = (1,0 + \frac{SCSEU_t - SCSEU_{t-1}}{SCSEU_{t-1}} - 0,018) SCSEA_{t-1}$$

SCSEU = salaires cotisations sociales versés par les Entreprises et les Salariés.

$\Delta SCSEA_{t-1}$  entraîne dans un premier temps - pour SCSEU<sub>t</sub> constant - la variation

$$\Delta SCSEA_t = 0,98 \Delta SCSEA_{t-1}$$

L'ampleur de cette variation résulte de la formulation en taux de croissance des variables de l'équation estimée.

$\Delta\text{SCSA}_t$  modifie ensuite le revenu disponible des ménages,  $\text{RDSTAR}_t$ , d'un même montant. La perturbation est alors transmise à la demande des ménages,  $\text{WDM}$ , mais avec une amplitude beaucoup plus réduite. En effet, pour une valeur constante de la P.I.B., (notée  $\text{WQ}$ ), et un rapport  $\text{RDSTAR}/\text{WQ}$  égal à  $0,67^1$ , la dérivée  $\frac{\partial\text{WDM}}{\partial\text{RDSTAR}}$  (équation (1.2) du Chapitre 1, Titre II) est égale à  $0,31$ .

Parallèlement à la modification du revenu des ménages,  $\Delta\text{SCSA}_t$  entraîne une variation du revenu des administrations de sens opposé. Celle-ci modifie alors l'épargne,  $\text{EPA}$ , puis la capacité de financement,  $\text{CFA}$ , des administrations, et enfin l'encours du passif des entreprises mais avec une plus faible amplitude. En effet, dans la relation déterminant l'encours du passif, l'influence de la variation de la capacité de financement des administrations est partiellement compensée par la variation, de signe opposé, de la capacité de financement des ménages.

L'effet principal de  $\Delta\text{SCSA}_{t-1}$  est donc sur  $\Delta\text{SCSA}_t$ ,  $\Delta\text{RDSTAR}_t$ ,  $\text{CFA}_t$ .  $\text{RDSTAR}$ ,  $\text{CFA}$  n'apparaissant pas avec retard dans le modèle, seul  $\Delta\text{SCSA}_t$  va avoir une influence importante sur les variables à  $t+1^2$ .

### 2.1.2. IIE, IDE, CSEE, composantes de l'autofinancement

Les valeurs initiales de ces variables modifient beaucoup plus profondément l'évolution du modèle dans le court terme. Les enchaînements dynamiques à la suite des variations de ces variables sont à quelques exceptions près les mêmes<sup>3</sup>.

Une variation  $\Delta\text{IDE}_{t-1}$  entraîne, par exemple, une variation de même montant  $\Delta\text{IDE}_t$  ( $\text{IDE}_t$  est déterminé par une équation estimée en différences premières). Il en découle par solde une variation de l'autofinancement,  $\text{AUT}$ , de signe contraire. Cette dernière variation entraîne une baisse beaucoup plus élevée de l'offre en volume par la relation profit croissance ( $\frac{\partial\text{VQNA}}{\partial\text{AUT}} \approx 4$ ). L'ensemble

- 
1. Ce rapport correspond aux valeurs de ces variables sur la trajectoire en 1972.
  2. Pour ne pas alourdir les développements, nous ignorons ici l'effet sur  $\text{CSEE}$  (propre à cette variable du groupe) qui contribue à diminuer l'effet de  $\Delta\text{SCSA}_{t-1}$  sur  $\Delta\text{RDSTAR}_t$ .
  3.  $\Delta\text{IIE}_t$  et  $\Delta\text{CSEE}_t$ , à la différence de  $\Delta\text{IDE}_t$  entraînent une variation de même montant de  $\text{RBEA}_t$  et à travers cette variation modifient  $\text{RNA}_t$ .

des états du modèle est alors modifié. La baisse de l'offre entraîne une diminution des importations (la tendance à la hausse de celles-ci, à la suite de la hausse des prix, ne compense qu'en partie la forte baisse qui résulte du coefficient d'élasticité égal à quatre entre l'offre et les importations) et une hausse des exportations (du fait de la baisse de la consommation en volume). Ces variations des importations et des exportations compensent alors en partie la baisse initiale de l'offre en volume : on observe dans la solution finale

$$\Delta VQNA_t = -2,05 \Delta IDE_{t-1}$$

Ces trois variables ont donc un rôle important dans la dynamique à court terme de STAR : elles modifient fortement non seulement leur évolution propre mais celle de l'ensemble des autres états du modèle principalement à travers la variation de l'autofinancement et de l'offre en volume qui en résulte.

#### 2.1.3. RNA, FNA, composantes de l'autofinancement et du revenu disponible

Les deux types d'enchaînements dynamiques décrits plus haut se cumulent pour ces deux variables. RNA, FNA sont déterminés par des équations en taux : les variations  $\Delta RNA_{t-1}$  et  $\Delta FNA_{t-1}$  sont transmises largement à  $RNA_t$ ,  $FNA_t$ . Une augmentation de  $RNA_t$  entraîne une augmentation du revenu disponible et une baisse de l'autofinancement. Il en résulte une diminution de l'offre en volume et une augmentation de la demande en valeur. Un même enchaînement, mais avec des signes contraires, résulte de  $\Delta FNA_{t-1}$ .

#### 2.1.4. Le cas particulier de WEXET

WEXET fait partie de la liste des variables susceptibles d'expliquer la divergence de STAR ; l'examen des indices  $r_{ij}$  de sa colonne indique qu'elle a une très forte influence sur la dynamique à une période.

Cette influence ne s'étend cependant pas aux autres périodes.

L'effet direct de  $\Delta WEXET_{t-1}$  sur  $\Delta WEXET_t$  est

$$\Delta WEXET_t = 1,12 \Delta WEXET_{t-1}$$



Il en résulte une augmentation de l'équilibre en valeur et en volume. La hausse de l'offre en volume conduit alors à une forte augmentation des importations, tandis que la croissance de la consommation des ménages entraîne une réduction du niveau initial des exportations. A l'équilibre, la hausse des importations est sensiblement égale à celle des exportations :

$$\Delta WM_t = 0,96 \Delta WEXET_{t-1}$$

$$\Delta WEXET_t = 0,85 \Delta WEXET_{t-1}$$

Cette variation d'un montant voisin et de même signe de  $\Delta WM_t$  et  $\Delta WEXET_t$  a une conséquence importante sur les états à  $t+1$  : l'effet de  $\Delta WM_t$  compense alors celui de  $\Delta WEXET_t$ <sup>1</sup>. Ainsi, bien que  $\Delta WEXET_t$  résultant de  $\Delta WEXET_{t-1}$  soit élevé, il n'a que peu d'influence sur les états à  $t+1$ . Cette compensation de  $\Delta WEXET_t$  par  $\Delta WM_t$  pour un état initial  $\Delta WEXET_{t-1}$  ne joue pas, bien au contraire, pour les états des deux groupes précédents ;  $\Delta IIE_{t-1}$ ,  $\Delta IDE_{t-1}$ ,  $\Delta CSEE_{t-1}$ ,  $\Delta RNA_{t-1}$ ,  $\Delta FNA_{t-1}$  modifient dans un sens opposé  $\Delta WM_t$  et  $\Delta WEXET_t$ . La dynamique à un an joue alors, et cet enchaînement est pour beaucoup dans l'importance de ces variables sur la dynamique de courte période.

#### 2.1.5. Le faible rôle de GPAS, encours de passif des E.N.F.

La divergence de GPAS s'explique par sa propriété de variable stock : GPAS est déterminé principalement par sa valeur à l'année précédente. L'effet de cette divergence est cependant limité. GPAS ne modifie directement que l'investissement des entreprises ; la dérivée partielle de l'investissement par rapport à l'encours du passif est faible.

#### 2.2. Validation du classement

Les normes calculées dans le Tableau II - la somme des valeurs absolues des multiplicateurs sur chacun des états du modèle - traduisent bien l'importance des états initiaux sur la dynamique de court terme. L'évolution des normes des états "divergents" est reprise dans le Tableau VI.

---

1. Les éléments des colonnes correspondantes ont même valeur mais sont de signe contraire à l'exception de ceux correspondant à  $WM_t$ ,  $WEXET_t$ .

On retrouve bien dans ce Tableau la hiérarchie que nous avons établie à partir de l'examen des coefficients de A et de la liste des équations de STAR. L'influence des états initiaux de IM, PSA, SCSA, CSEO est beaucoup plus faible que celle des états IDE, CSEE, IIE, RNA, FNA. La norme de GPAS augmente la deuxième année pour stagner ensuite : elle reste peu élevée sur toute la période. L'état initial de WEXET a une forte influence dès la première année, mais celle-ci reste constante sur toute la période.

Etats à t-1	GPAS	IM	PSA	SCSA	CSEO	IDE	CSEE	IIE	RNA	FNA	WEXET
Année 1972	2,74	2,85	3,15	3,97	4,14	9,14	8,73	8,63	12,05	13,30	11,07
1973	4,15	3,09	3,81	5,50	5,79	19,58	16,90	16,60	21,44	26,44	10,10
1974	4,97	3,42	4,63	6,64	6,90	31,98	28,61	27,81	33,20	43,20	11,32
1975	4,91	3,99	5,94	7,78	8,43	35,89	35,50	33,73	38,82	52,97	12,37
1976	4,16	5,39	7,95	9,79	10,79	34,22	39,19	36,24	39,10	58,58	12,46

Tableau VI - EVOLUTION DES NORMES DES MULTIPLICATEURS DES ETATS "DIVERGENTS"

### Section 3 - L'ACTION DES VARIABLES DE COMMANDE SUR L'EVOLUTION PROPRE

L'approche suivie dans l'étude de l'action des variables de commande est voisine de celle suivie dans les deux sections précédentes pour l'instabilité. Nous appliquons d'abord au modèle STARTEER un critère de commandabilité, ce qui nous permet d'établir la commandabilité du modèle. Puis, par le prolongement à la matrice B de l'étude des coefficients de la matrice A, nous déterminons plusieurs groupes de variables de commande en fonction de leur influence sur l'évolution propre.

#### 3.1. La commandabilité de STAR

La commandabilité de STAR autour de la trajectoire de référence est déterminée par application du critère 2 de commandabilité (Chapitre 4, section 1) : le système est commandable si la matrice  $\Pi$  de commandabilité définie par :

$$\Pi = V^{-1}B \quad \text{où } V \text{ est la matrice des vecteurs propres}$$

ne présente aucune ligne nulle.

La matrice  $V$  étant complexe, la matrice  $\Pi$  est une matrice complexe. Un élément non nul d'une ligne de la partie réelle ou complexe de  $\Pi$  suffit à rendre le mode correspondant commandable. Le Tableau VII donne l'élément le plus élevé en valeur absolue de chaque ligne de la partie réelle ou complexe. Les lignes de la matrice  $\Pi$  correspondant à des valeurs propres rangées par module décroissant<sup>1</sup> les treize premiers éléments du tableau contribuent donc à la commandabilité des valeurs propres de module supérieur ou égal à un.

Les plus faibles éléments du tableau sont voisins de quatre dix millièmes. Faut-il les considérer comme nuls ? Il est impossible de répondre. Nous rencontrons ici la difficulté d'application du critère 2 sur un système de grande dimension<sup>2</sup>. Il est important de noter, au cas où ces éléments ne seraient pas différents de zéro, que la non-commandabilité ne porte pas sur les modes les plus instables du modèle : les valeurs propres correspondant à ces lignes

---

1. Le programme de calcul de la matrice de commandabilité est dû à B. Andrighett

2. L'application du critère 1 soulève la même difficulté ; deux lignes ou colonnes d'une matrice peuvent être "presque" proportionnelles sans l'être exactement. Faut-il alors conclure que la matrice n'est pas de rang plein ?

1) 1,6	17) 1,0
2) 3,5	18) 0,5
3) 6,5	19) 3,3
4) 0,8	20) 3,3
5) 3,7	21) 7,3
6) 4,5	22) 5,0
7) 4,5	23) 5,0
8) 37,2	24) 5,8
9) 2,8	25) 5,8
10) 0,9	26) 6,0
11) 0,9	27) 13,1
12) 0,0004	28) 11,2
13) 0,0004	29) 4,8
14) 1,9	30) 6,44
15) 1,9	31) 6,4
16) 1,0	32) -1,0

Tableau VII - LES ELEMENTS LES PLUS ELEVES EN VALEUR ABSOLUE  
DE LA MATRICE DE COMMANDABILITE

ont un module voisin de un, et résultent donc dans des taux de croissances nuls. En d'autres termes, la non-commandabilité ne serait alors pas trop gênante.

La non-commandabilité de STAR n'est donc pas démontrée par l'application du critère. De plus, les coefficients du Tableau VII indiquent que tous les modes divergents de STAR sont commandables. Sur la base de ces résultats, nous retenons l'hypothèse de commandabilité de STAR.

Bien que STAR soit commandable, le temps de passage des états actuels aux états désirés peut nécessiter un temps très long. STAR étant un modèle annuel de 32 états et 10 variables de commande, la commandabilité n'implique que la possibilité de passer de l'état initial à l'état cible en un temps égal ou inférieur à 22 ans<sup>1</sup>, une durée bien supérieure à l'horizon d'utilisation

---

1.  $p \leq n-g$  avec  $p$  = le nombre de périodes pour atteindre les cibles,  $n$  et  $g$  respectivement le nombre d'états et de variables de commande.

du modèle. Le nombre de période minimum pour atteindre les états (ou sorties) cibles est obtenu par des calculs de rang sur des partitions de la matrice Q (matrice du critère 1 de commandabilité : voir [34] pour ce calcul). Le temps nécessaire dépend évidemment du nombre d'états et de sorties inclus dans la cible. Si l'objectif porte uniquement sur le taux de croissance des prix (ex : le décideur cherche à ramener le taux d'inflation à 2 %, indépendamment des conséquences sur les états), celui-ci peut être atteint en une période. Si l'objectif concerne l'ensemble des états du modèle, le temps minimum pour atteindre la cible est de quatre ans<sup>1</sup>.

### 3.2. L'action des variables de commande

Si, du fait du nombre élevé de variables de commande retenues pour STAR, la cible peut être atteinte rapidement, il est possible que ce résultat ne soit obtenu qu'au prix de très grandes variations des variables de commande. L'amplitude des actions nécessaires peut alors rendre la commande politiquement inapplicable dans la réalité (ex : impôts négatifs pour les ménages). La propriété de commandabilité n'a alors en elle-même guère de signification.

Il n'existe pas à notre connaissance de critères permettant de tester la commandabilité d'un modèle pour des actions contraintes à des variations à l'intérieur de limites (ex : variation des impôts des ménages de  $\pm 10\%$  autour de la trajectoire de référence). Cette commandabilité ne peut être appréciée qu'au niveau du calcul et de la simulation de la commande. Il est alors facile de limiter par définition du critère les plages de variation de la commande. Les résultats du chapitre suivant peuvent être interprétés comme une exploration d'une telle commandabilité de STAR : est-il possible de déterminer une commande, politiquement applicable, qui conduise à la cible "équilibre de la balance commerciale et croissance plus élevée de la P.I.B. ?"

Par l'examen des coefficients de la matrice B et leur interprétation à partir des équations du modèle non-linéaire, dans cette sous-section nous faisons plus qu'un simple constat de commandabilité. Les variables de commande sont classées suivant leur influence sur l'évolution propre. Les résultats

---

1. On retrouve, lors du calcul de ce résultat, la difficulté d'évaluer le rang d'une matrice de grande dimension. Ce chiffre, tout comme le résultat de commandabilité de STAR, doit être retenu avec prudence.

déjà obtenus pour les états initiaux facilitent ce classement.

3.2.1. Les variables agissant par la modification de la demande finale :  
CCA, CKA, CWKM, CVNP

A l'intérieur de ce groupe, la consommation, CCA, et l'investissement des administrations, CKA, forment un sous-groupe.

CCA, CKA - Ces variables modifient directement la demande en valeur. Prenons le cas de commandes positives. La hausse de la demande en valeur entraîne une hausse des revenus des agents, et pour une offre constante une hausse des prix. L'augmentation des profits conduit à une augmentation de l'offre en volume, celle du revenu disponible des ménages une hausse de la consommation. Cette dernière résulte dans une diminution des exportations, tandis que l'augmentation des prix et de l'offre entraîne une augmentation des importations. La diminution des exportations et la hausse des importations compensent alors l'effet premier de la hausse de la demande finale. La quasi totalité des solutions s'établissent néanmoins à un niveau plus élevé<sup>1</sup>.

Une augmentation de la demande des administrations conduit aussi à une baisse de la capacité de financement ; cette baisse initiale est cependant compensée par une hausse des revenus (impôts indirects) ; l'effet total négatif sur l'encours du passif est encore plus limité du fait de l'augmentation de la capacité de financement de l'extérieur.

CWKM - Cette variable modifie directement une des composantes de la demande finale, l'investissement des ménages. L'action de cette variable est cependant beaucoup moins forte que celle du sous-groupe précédent. Ceci résulte de la détermination par solde de la consommation en valeur des ménages, WCM. WDM, la dépense totale des ménages, est calculée par une équation de comportement et pour WKM donné :

$$WCM = WDM - WKM$$

---

1. L'investissement en volume reste inchangé (l'effet de la hausse du profit est compensé par la baisse de l'encours du passif), les exportations baissent (voir ci-dessus), l'encours du passif baisse (voir ci-dessous).

Une augmentation de la demande d'investissement conduit à une diminution de la consommation des ménages, il en résulte une faible variation de la demande finale totale.

L'action principale de cette variable se fait à travers l'augmentation des exportations. Les enchaînements décrits dans la section précédente pour l'état initial WEXET s'appliquent ici, à l'exception de l'effet dû à la baisse de la consommation, qui résulte en une légère baisse des prix.

CVNP - L'action de VNP est proche de celle de CCA et CKA. Une augmentation du passif des ménages conduit à une augmentation de WDM, élément de la demande finale. Les enchaînements décrits plus haut dans le cas de CCA et CKA rentrent alors en jeu à l'exception de ceux liés à la baisse de la capacité de financement des administrations : celle-ci augmente du fait de la hausse des prix. Il en est de même de la capacité de financement de l'extérieur à la suite de l'augmentation des importations et la baisse des exportations. Par l'équation de retour financier, il en résulte une hausse de l'encours de passif des entreprises et donc une hausse des investissements. L'effet total de CVNP est cependant plus faible que celui de CCA ou CKA, car l'accroissement initial de la composante de la demande finale est plus faible.

$$\Delta WCA_t = 1 CCA_t$$

$$\Delta WDM_t = 0,6 CVNP$$

### 3.2.2. Les variables agissant par modification de l'autofinancement : CIIE, CIDE

Les enchaînements décrits dans le cas des états initiaux, IIE, IDE, s'appliquent presque à la lettre ici. Ces variables modifient directement l'autofinancement ; la baisse des importations et la hausse des exportations compensent en partie la baisse initiale de l'offre qui résulte, par la relation profit-croissance, de la baisse de l'autofinancement. A la différence de  $IIE_{t-1}$  et  $IDE_{t-1}$ ,  $CIIE_{t-1}$  et  $CIDE_{t-1}$  n'ont cependant pas d'effet sur  $IIE_t$  et  $IDE_t$  : ces effets ont été supprimés par la spécification des variables de commande.

3.2.3. Variables agissant par modification du revenu disponible : CSCSA, CPSA, CIM, CXHA

Un premier sous-groupe est formé par les variables CSCSA, CPSA, CIM. Les états initiaux correspondants sont SCSA, PSA, IM. Ces états initiaux ne modifient, nous l'avons vu, que faiblement les solutions du modèle, en raison de la spécification de l'équation de dépenses des ménages. Ici encore, la différence avec ces états initiaux tient au fait que CSCSA, CPSA, CIM ne modifient pas l'évolution des états correspondants.

CXHA appartient à ce groupe.  $CXHA_{t-1}$  modifie directement l'état  $SCSA_t$  et a ainsi les mêmes effets que  $CSCSA_{t-1}$ . Il a un effet dynamique supplémentaire il modifie l'état  $SCSA_t$  et par là  $SCSA_{t+1}$ .

Les variables de commande peuvent donc être réparties en trois groupes suivant leur action sur l'évolution propre. Seules, les variables des deux premiers groupes ont une forte influence. Dans le premier groupe, CWKM a un effet réduit du fait de l'hypothèse incluse dans le modèle de substitution entre la demande de consommation et d'investissement des ménages. Ce classement se vérifie par le calcul (Tableau VIII) des normes des multiplicateurs sur les états (somme des valeurs absolues des multiplicateurs).

CCA = 9,65	CIDE = 11,08	CPSA = 2,18
CKA = 9,80	CIIE = 8,80	CSCSA = 2,33
CVNP = 8,56		CIM = 2,36
CWKM = 3,05		CXHA = 2,46

Tableau VIII - NORME DES MULTIPLICATEURS DES VARIABLES DE COMMANDE



## CONCLUSION

Nous avons retiré de l'étude de STARTER des informations intéressantes sur la dynamique de STAR : instabilité et commandabilité, liste des états initiaux entraînant la divergence du modèle sur le court terme, action des variables de commande sur l'évolution propre. Au-delà de ces constatations sur la dynamique, ce chapitre nous a permis de mettre en évidence le rôle particulier joué par certaines relations. La formulation d'équations en taux de croissance ou en différence première explique l'instabilité de STAR ; la dynamique résultant de ces équations cache la dynamique plus intéressante introduite par les constructeurs du modèle dans les équations en niveau ou en rapport de deux variables. L'équation de dépense des ménages freine abusivement l'effet de la variation du revenu. L'équation des importations entraîne un effet de retour probablement trop élevé sur l'offre en volume (élasticité de 4 entre importations et offre). Enfin, la substitution entre dépense de consommation et d'investissement des ménages amoindrit l'effet de la commande CWKM. A côté de ces observations qui peuvent aider éventuellement à une reformulation du modèle, le comportement linéaire de STAR autour de la trajectoire de référence a été vérifié à nouveau : aucune simulation effectuée sur le modèle non-linéaire n'a infirmé les hypothèses établies à partir de l'approximation linéaire.

## CHAPITRE 2

### ETUDE DE LA COMMANDABILITE PAR DES SIMULATIONS CONTROLEES

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'application du schéma de commande proposé dans le chapitre 4 du Titre I. Ce schéma suppose, dans un premier temps, le calcul des actions qui font suivre, aux variables objectifs du modèle linéaire, une évolution aussi proche que possible de l'évolution désirée. Les actions sont des fonctions linéaires explicites des états du modèle. Celles-ci sont alors couplées, dans un deuxième temps, au modèle non-linéaire pour déterminer les commandes appliquées à ce modèle dans les simulations.

L'évolution ainsi générée par le modèle non-linéaire peut différer de l'évolution désirée pour deux raisons. Bien que commandable, il n'est pas possible, en raison de la structure du modèle, d'atteindre la trajectoire désirée en une période et de s'y maintenir ; la commande calculée par les fonctions linéaires ne donne pas les résultats escomptés en raison des erreurs de l'approximation linéaire. Dans nos exemples de simulations contrôlées, seule cette deuxième cause conduit à des écarts entre l'évolution obtenue et l'évolution désirée. En ne spécifiant qu'une ou deux variables objectifs, alors que nous disposons de dix variables de commande, nous nous donnons la possibilité d'atteindre en une période la trajectoire désirée puis de s'y maintenir.

Le but recherché par ces exemples est double : mesurer la baisse de performance résultant de la linéarisation, illustrer l'apport des simulations contrôlées quant à la connaissance des types d'évolutions susceptibles d'être générées par STAR. Quatre exemples sont donnés et commentés successivement. Deux exemples concernent des évolutions avec une seule variable objectif : croissance, déficit de la balance commerciale. Deux variables objectifs, balance commerciale et taux de croissance, sont spécifiées dans les deux autres exemples ; on cherche à atteindre une trajectoire avec plus de croissance tout en gardant constant le déficit de la balance commerciale, et une trajectoire avec plus de croissance et suppression du déficit de la balance commerciale.

Section 1 - TRAJECTOIRE DE CROISSANCE PLUS ELEVEE

2.1. Spécifications du critère

La commande porte sur cinq ans. Le critère quadratique s'écrit

$$(1.1) \quad J = \sum_{t=1}^4 \underline{e}_y^T(t) Q \underline{e}_y(t) + \underline{e}_y^T(5) F \underline{e}_y(5) + \sum_{t=0}^4 \underline{e}_r^T(t) R \underline{e}_r(t)$$

$$\text{avec } \underline{e}_y(t) = \Delta \underline{y}(t) - \Delta \underline{y}^D(t) \quad , \quad \Delta \underline{y}(t) = \underline{y}(t) - \underline{y}^*(t), \quad \Delta \underline{y}^D(t) = \underline{y}^D(t) - \underline{y}^*(t)$$

$$\underline{e}_u(t) = \Delta \underline{u}(t) - \Delta \underline{u}^D(t) \quad , \quad \Delta \underline{u}(t) = \underline{u}(t) - \underline{u}^*(t), \quad \Delta \underline{u}^D(t) = \underline{u}^D(t) - \underline{u}^*(t)$$

$$Q \geq 0 \quad , \quad R > 0$$

$\underline{y}^*$ ,  $\underline{u}^*$  étant les valeurs des variables de sortie et de commande sur la trajectoire centrale,  $\underline{y}^D$ ,  $\underline{u}^D$ , les valeurs désirées de ces variables.

Dans les exemples de ce chapitre, nous retenons comme objectif la balance commerciale, que nous intitulos BACO, et le taux de croissance de la P.I.B. non agricole XQNA. La spécification du critère (1.1) suppose donc un agrandissement du vecteur des sorties de STAR par l'addition des variables XQNA et BACO.

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} YQ(t) \\ XQNA(t) \\ BACO(t) \end{bmatrix}$$

Ceci implique une redéfinition de la matrice C, qui prend la dimension  $3 \times 32$ , par l'addition de deux lignes. La deuxième ligne de cette matrice contient des zéros à l'exception de l'élément de la onzième colonne égal à 1 ; la troisième ligne, des zéros à l'exception du troisième élément +1 et du quatrième -1. Cette dernière ligne définit BACO(t)

$$BACO(t) = WEXET(t) - WM(t)$$

Dans cet exemple, nous spécifions un objectif unique d'un taux de croissance supérieur de 1,5 % à celui de la trajectoire de référence. Les trajectoires désirées des variables du critère sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta u_i^D(t) &= 0 & i &= 1, \dots, 10 \\ & & t &= 1, \dots, 5 \\ \Delta y_1^D(t) &= \Delta y_3^D(t) = 0 & t &= 1, \dots, 5 \\ \Delta y_2^D(t) &= 1500 & t &= 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Dans la matrice Q et F, seuls les éléments diagonaux correspondant à XQNA sont différents de zéro

$$q_{ij} = f_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 3$$

sauf pour  $q_{22} = f_{22} = 10000$  <sup>2</sup>

Nous n'imposons aucun coût à l'utilisation des commandes. La matrice R doit cependant être positive définie :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= 0 & i \neq j & & i &= 1, \dots, 10 \\ & & & & j &= 1, \dots, 10 \\ r_{ii} &= 0,1 & i &= 1, \dots, 10 \end{aligned}$$

Il faut noter que cette spécification du critère est obtenue dans l'application très facilement : seuls sont spécifiés les éléments non-nuls, les autres étant "initialisés" à zéro dans le programme.

## 1.2. La trajectoire des états et des sorties

La trajectoire, obtenue par application du schéma de commande pour le critère ci-dessus, est donnée dans le Tableau I-A. Les chiffres entre parenthèses sont les résultats obtenus par simulation de la commande sur le modèle linéaire. L'examen de ce tableau conduit aux observations suivantes.

- 
1. L'unité des variables taux de la matrice est le 1/100000. Dans cette unité 0,015 (1,5 %) est égal à 1500.
  2. Cette forte pondération des écarts sur XQNA s'explique en partie par la différence d'ordre de grandeur des variables en niveau et en taux.

Etats et Sorties<sup>1,2</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
$\Delta$ AUT	2.660 (2.822)	-3.836 (-3.013)	-10.691 (-10.559)	-11.541 (-11.280)	-17.846 (-20.735)
$\Delta$ VKENA	6.295 (6.195)	5.864 (5.721)	1.811 (2.229)	-1.811 (-874)	-19.603 (-19.237)
$\Delta$ RDSTAR	-30.238 (-29.315)	-32.637 (-32.432)	-58.861 (-64.607)	-86.024 (-95.978)	-55.712 (-56.382)
$\Delta$ YQ	-4,6 (-4,5)	-5,8 (-6,7)	-3,9 (-5,9)	-4,9 (-8,5)	4,5 (7,6)
$\Delta$ XQNA	1,5 (1,5)	1,22 (1,5)	1,22 (1,5)	0,3 (1,5)	0,8 (1,5)
$\Delta$ WCM	-13.864 (-12.261)	-51.969 (-54.166)	-45.116 (-45.251)	-125.759 (-141.557)	-87.324 (-87.327)
BACO	-22.352 (-22.424)	-23.068 (-22.633)	-42.982 (-42.933)	-36.339 (-39.385)	-61.517 (-64.855)
$\Delta$ WEXET	-4.410 (-4.332)	-6.038 (-4.845)	-18.921 (-18.844)	-12.593 (-10.538)	-19.915 (-16.877)
$\Delta$ WM	2.767 (2.916)	3.385 (4.144)	6.756 (6.783)	2.422 (7.521)	18.084 (24.465)

Tableau I-A - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
(comparaison de variables en francs courants)

1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta$ YQ,  $\Delta$ XQNA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.
2. Les chiffres entre parenthèses sont les résultats de la simulation de la commande sur le modèle STARTER.

Commandes<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
CVNP	9.196	-11.542	12.349	-15.872	811
CXHA	-4,26	-0,6	-3,2	0,5	0
CWCA	-7.431	-6.956	-11.477	-14.189	969
CWKA	-6.467	-7.525	-10.111	-14.862	1.059
CWKM	-2.944	5.270	-24.493	16.153	612
CSCSA	-6.235	152	-1.350	-1.615	-77
CPSA	-4.135	469	-1.519	-3.243	-65
CIIE	-2.921	-13.492	-1.984	-17.255	-2.114
CIDE	-7.203	-1.031	-15.853	-4.408	-2.650
CIM	5.706	-557	3.398	2.883	101

Tableau I-A - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
(comparaison de variables en francs courants) (suite)

---

1. Les écarts, à l'exception de CXHA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.

### 1.2.1. Qualité de la commande

La comparaison des résultats de simulation de la commande, sur le modèle non-linéaire et linéaire, montre que la qualité de la commande est satisfaisante au moins sur les trois premières années. Celle-ci est cependant la moins bonne des qualités que nous avons eu l'occasion de constater dans de nombreuses autres simulations contrôlées non décrites dans cette thèse. La variable objectif, dans cet exemple, est une variable en taux de croissance ; les coefficients attachés à ce type de variable sont certainement les moins précis de l'approximation linéaire, en raison des erreurs d'arrondi. Les simulations contrôlées portant sur des variables objectifs en niveau dénotent une commande de bonne qualité tout au long des cinq années de la simulation.

### 1.2.2. Comparaison de variables en valeur de deux niveaux de prix différents

L'interprétation, au niveau économique, des résultats de la trajectoire du Tableau I-A est difficile pour les variables en niveau. En effet, les écarts, entre les résultats de la trajectoire simulée et ceux de la trajectoire de référence, portent sur des variables évaluées à des niveaux de prix différents. Par exemple, l'écart sur la consommation des ménages, WCM, est la première année de -13.864 M. Cela permet-il de dire qu'un taux de croissance plus élevé implique une diminution de la consommation ? Oui en francs courants (une information qui n'a guère d'intérêt), non en francs constants ; en francs constants, la consommation augmente de 11.800 M.

Cette difficulté d'interprétation des résultats augmente avec la grandeur de l'écart entre le niveau des prix des deux trajectoires (la différence est de 21 % la quatrième année). Pour permettre l'interprétation des résultats, nous avons fourni, pour chaque exemple, les écarts pour les états entre les valeurs évaluées en francs constants 1971 de la trajectoire de référence et de la simulation contrôlée<sup>1</sup>. Le Tableau I-B donne ces écarts pour la trajectoire de croissance plus élevée.

---

1. *Les indices des prix des importations et des exportations étant des variables exogènes, la comparaison des balances commerciales des deux trajectoires ne soulève pas ces difficultés ; l'évolution de ces états n'est donc pas donnée dans les tableaux.*

Etats et Sorties<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
AUT	8.494	11.063	12.077	23.056	12.482
VKENA	6.295	13.988	23.013	31.019	30.249
RDSTAR	-964	38.670	47.755	68.566	73.397
YQ <sup>2</sup>	-4,6	-10,8	-15,3	-21,0	-17,5
WCM	11.800	11.352	50.013	13.970	33.467

Tableau I-B - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
(comparaison de variables en francs constants)

- 
1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta YQ$ , sont ceux des deux trajectoires évaluées en francs constants 1971. L'unité est le million de francs.
  2. Taux d'inflation cumulé sur la période en pourcentage.



### 1.2.3. Explications des résultats à partir des équations du modèle

#### La forte déflation accompagnant la croissance

L'évolution la plus frappante de cette simulation est la forte réduction du taux de croissance des prix qui accompagne la croissance sur les quatre premières années, puis leur brusque augmentation la dernière année. Ce phénomène s'explique bien à partir des observations faites dans le chapitre précédent. Toute augmentation de la P.I.B. en volume entraîne une forte augmentation des importations qui compense alors la hausse initiale. A l'opposé, une diminution du taux de croissance des prix entraîne une baisse des importations et rend plus facile une augmentation de la P.I.B.. C'est bien ce que nous observons sur les quatre premières années : une augmentation du taux de croissance de la P.I.B., une augmentation modérée des importations et une forte déflation.

Le renversement de la tendance d'évolution des prix s'explique, à notre avis, par la formulation en taux de croissance des importations. Une augmentation des importations entraîne, nous l'avons vu, une forte réduction de la P.I.B. l'année suivante. Cette relation dynamique implique le maintien des importations, à un niveau voisin de la trajectoire de référence les quatre premières années (2767 M, 3885 M, 6756 M, 2422 M). Cette contrainte ne joue pas pour la cinquième année, car l'influence dynamique du niveau des importations a un effet sur la P.I.B. de la sixième année, donc en dehors de l'horizon de la commande<sup>1</sup> : les importations sont libres d'augmenter (elles passent à 18084 M) et par conséquent les prix.

#### L'investissement des entreprises augmente relativement plus vite que la consommation des ménages

L'investissement des entreprises en volume augmente sur toute la période de 104000 M, alors que la consommation des ménages n'augmente que de 120000 M.

---

1. Cette explication a été validée par le calcul de la commande pour les mêmes objectifs, mais sur un horizon de six ans. La simulation de la commande donne alors une baisse des prix de 2,9 % en 1976.

Les entreprises dans STAR semblent donc relativement plus favorisées que les ménages par une augmentation de la production<sup>1</sup>.

Cette forte augmentation des investissements des entreprises est rendue possible par une augmentation des profits, et une forte augmentation de l'endettement des entreprises (l'augmentation de l'endettement est de 115587 M de francs constants).

L'augmentation de la croissance est accompagnée d'un accroissement du déficit de la balance commerciale

Les équations d'importations et d'exportations souvent mentionnées expliquent cette évolution. L'augmentation de l'offre, bien que compensée par une forte déflation des prix, entraîne une augmentation des importations ; la croissance de la consommation résulte dans une baisse plus prononcée des exportations. Il est intéressant de noter qu'en raison de la forte déflation sur les quatre premières années, cette baisse est la cause principale du déficit.

### 1.3. Les commandes de la trajectoire

Par l'examen de la trajectoire des commandes, il est facile d'expliquer les raisons de l'évolution des états et des sorties.

La forte déflation est obtenue par réduction des dépenses de l'Etat

Les dépenses, en capital et en investissement des administrations, baissent fortement les quatre premières années (de l'ordre de 25 %).

Par son action sur les revenus, l'Etat favorise les entreprises

La totalité des impôts directs et indirects (composante endogène + composante de commande) versés par les entreprises baissent sur la totalité de la période. A l'opposé, les impôts totaux versés par les ménages (y compris la composante endogène) augmentent les quatre premières années.

---

1. La nécessité de limiter la hausse de la consommation résulte, à notre avis, de l'effet de cette hausse sur les exportations. Une augmentation du taux de croissance conduit à une baisse des exportations et donc de l'offre de la période et de la période suivante (effet dynamique de WEXET décrit dans le chapitre précédent).

Confirmation du groupement des variables de commande

Les commandes ont été classées, dans la dernière section du chapitre précédent, en trois groupes traduisant l'action de l'Etat sur :

- 1) la demande finale,
- 2) les revenus des ménages,
- 3) les profits des entreprises.

On retrouve bien dans les commandes du tableau ces trois groupes. L'Etat agit pour réduire la demande finale (CCA et CKA sont négatifs), le revenu disponible (CSCSA, CPSA, CXHA négatifs ou voisins de zéro, CIM positif ou voisin de zéro) et pour augmenter le profit (CIIE, CIDE négatifs). CVNP et CWKM jouent bien un rôle particulier dans le premier groupe<sup>1</sup>. On peut faire l'hypothèse que ces commandes sont utilisées pour moduler l'évolution de la consommation des ménages. L'explication serait la suivante : la progression de la consommation entraîne, l'année 1, une diminution des exportations transmise l'année suivante par l'équation d'exportation. A cette diminution s'ajouterait, l'année 2, l'effet d'une nouvelle hausse de la consommation ; pour éviter la baisse additionnelle des exportations qui rendrait encore plus difficile la croissance, il est nécessaire de freiner la consommation par CVNP négatif et CWKM positif. L'examen du Tableau I-A ne contredit pas cette hypothèse : le niveau des exportations diminue par à coup ; les commandes CVNP et CWKM sont de signe opposé ; leur signe change de période à période ; enfin, la consommation évolue elle-même par à coup.

---

1. A la différence de CCA et CKA, CVNP modifie fortement l'encours du passif des entreprises, CWKM entraîne une variation de signe opposé de la consommation des ménages. CVNP agit aussi directement sur la consommation des ménages.

Section 2 - TRAJECTOIRE AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE

2.1. Spécifications du critère

La balance commerciale de la trajectoire de référence est négative sur toute la période :

	1972	1973	1974	1975	1976
BACO	-15.174	-13.644	-17.305	-21.325	-23.513

Notre but, dans cet exemple, est de générer une trajectoire dont la balance commerciale est équilibrée chaque année. Les spécifications des trajectoires désirées sont les suivantes :

$$y_3^D(t) = 0 \quad t = 1, \dots, 5$$

$$\Rightarrow \Delta y_3^D(1) = +15.174 \quad \Delta y_3^D(2) = +13.644 \quad \Delta y_3^D(3) = +17.305 \quad \Delta y_3^D(4) = +21.325$$

$$\Delta y_3^D(5) = +23.513$$

$$\Delta y_i^D(t) = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ t = 1, \dots, 5 \end{array}$$

$$u_i^D(t) = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, 10 \\ t = 1, \dots, 5 \end{array}$$

Dans la matrice Q et F, seuls les éléments diagonaux correspondant à BACO sont différents de zéro

$$q_{ij} = f_{ij} \quad i = 1, \dots, 3 \quad j = 1, \dots, 3$$

sauf pour  $q_{33} = f_{33} = 100$

Aucun coût n'est affecté à l'utilisation des variables de commande

$$r_{ij} = 0 \quad \begin{array}{l} i \neq j \\ i = 1, \dots, 10 \\ j = 1, \dots, 10 \end{array}$$

$$r_{ii} = 0,5 \quad i = 1, \dots, 10$$

## 2.2. La trajectoire des états et des sorties

### 2.2.1. Qualité de la commande

Le déficit est pratiquement supprimé sur la trajectoire générée par le modèle non-linéaire (Tableaux II-A) ; il apparaît certes à nouveau en 75 et 76, mais il reste faible : son niveau le plus élevé ne dépasse pas 7 % du déficit de la trajectoire de référence. Cet exemple montre que, malgré la détérioration de la qualité de la commande, les deux dernières années, celle-ci reste bonne sur l'horizon considéré.

Nous avons pour cet exemple mesuré le gain résultant d'une commande en boucle fermée au lieu d'une commande en boucle ouverte. Nous limitant au cas déterministe - nous n'introduisons pas de perturbations - l'avantage de la boucle fermée est la prise en compte des erreurs de modélisation (dans notre cas, les erreurs dues à l'approximation linéaire). Les résultats d'une commande en boucle ouverte sont obtenus par simulation sur STAR des commandes appliquées au modèle linéaire<sup>1</sup>. Les deux séries de BACO, correspondant à la commande en boucle ouverte et boucle fermée, sont reproduites ci-dessous

	1972	1973	1974	1975	1976
BACO (boucle ouverte)	-249,3	550,2	1.871,2	2.793,8	3.709,3
BACO (boucle fermée)	-249,3	-182,0	-341,5	1.080,7	1.694,8

Bien que la commande porte sur un horizon court (les erreurs dues à la linéarisation restent limitées), ces résultats illustrent bien l'avantage de la boucle fermée. L'écart en valeur absolue<sup>2</sup> de la troisième année dans le cas de la commande en boucle ouverte, est supérieur à celui de la cinquième année pour la boucle fermée.

- 
1. En l'absence de perturbations, la commande appliquée au modèle linéaire est la commande en boucle ouverte.
  2. C'est bien cette mesure qui nous intéresse puisque la fonction objectif a pour but de minimiser le carré des écarts par rapport à zéro.

Etats et Sortie<sup>1,2</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
$\Delta$ AUT	-4.326 (-4.416)	5.020 (4.714)	4.240 (3.953)	1.943 (1.864)	3.338 (3.683)
$\Delta$ VKENA	-5.208 (-5.271)	-3.577 (-3.685)	-458 (-635)	61 (-359)	3.375 (3.249)
$\Delta$ RDSTAR	12.680 (11.932)	21.910 (21.614)	22.494 (22.990)	28.190 (28.395)	25.648 (24.454)
$\Delta$ YQ	3,7 (3,5)	2,1 (2,5)	0,8 (1,2)	0,6 (0,9)	-0,8 (-1,5)
$\Delta$ XQNA	-2,4 (-2,4)	0,2 (0,2)	-0,4 (-0,5)	-0,2 (-0,3)	0,2 (0,4)
$\Delta$ WCM	-2.251 (-3.160)	12.515 (14.582)	21.509 (23.311)	30.637 (32.473)	31.649 (32.615)
BACO	-249 (-72)	-182 (-47)	-341 (-41)	-1.080 (-38)	-1.694 (-28)
$\Delta$ WEXET	6.801 (6.844)	8.020 (6.891)	9.074 (7.414)	10.414 (8.128)	10.706 (7.176)
$\Delta$ WM	8.124 (-8.258)	-5.442 (-6.706)	-7.888 (-9.850)	-9.827 (-13.159)	-11.116 (-16.309)

Tableau II-A - SCENARIO AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE  
(comparaison de variables en francs courants)

1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta$ YQ,  $\Delta$ XQNA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.
2. Les chiffres entre parenthèses sont les résultats de la simulation de la commande sur le modèle STARTER.

Commandes<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
CVNP	-9.350	-6.083	-3.639	-2.029	-2.170
CXHA	2,03	1,01	0,3	0,0	0
CWCA	2.374	1.870	1.107	417	-2.422
CWKA	1.843	1.479	818	230	-2.534
CWKM	7.675	5.754	3.337	1.681	-293
CSCSA	1.796	991	504	154	50
CPSA	1.845	1.128	675	352	-25
CIIE	2.167	563	2.114	3.471	3.512
CIDE	9.073	5.570	5.621	6.002	4.318
CIM	-2.663	-1.663	-1.011	-541	-20

Tableau II-A - SCENARIO AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE  
(comparaison de variables en francs courants) (suite)

---

1. Les écarts, à l'exception de CXHA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.

Etats et Sortie<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
$\Delta$ AUT	-8.285	-3.111	-5.698	-9.486	-8.232
$\Delta$ VKENA	-5.208	-9.326	-10.922	-13.155	-13.221
$\Delta$ RDSTAR	-9.805	-16.707	-24.518	-27.356	-27.412
$\Delta$ YQ <sup>2</sup>	3,7	6,2	7,5	8,6	8,1
$\Delta$ WCM	-20.905	-20.785	-20.743	-20.649	-18.750

Tableau II-B - SCENARIO AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE

(comparaison de variables en francs constants)

- 
1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta$ YQ, sont ceux des deux trajectoires évaluées en francs constants 1971. L'unité est le million de francs.
  2. Taux d'inflation cumulé sur la période en pourcentage.



2.2.1. L'annulation du déficit est obtenue par une forte réduction du taux de croissance la première année

Le taux de croissance de la P.I.B. non agricole baisse de 2,4 % la première année, puis se stabilise à un niveau légèrement inférieur à celui de la trajectoire centrale. La même évolution se retrouve dans le taux de croissance de la consommation : celle-ci en francs constants reste, sur toute la trajectoire, inférieure de 20000 M au niveau de la trajectoire de référence ; cette évolution correspond à une forte diminution du taux de croissance la première année, puis à un écart positif et voisin de zéro de ce taux sur le reste de la période. La consommation ne baisse que de 2200 M en valeur la première année. Sa forte baisse en volume s'explique donc par la hausse des prix.

L'évolution des taux de croissances de la P.I.B. et de la consommation peut s'expliquer par la formulation des équations d'importations et d'exportations en taux de croissance. En effet, cette évolution entraîne la première année une hausse du taux de croissance des exportations et une baisse de celui des importations. Si l'on suppose nul l'écart du taux de croissance de la consommation sur le reste de la période, l'augmentation des exportations obtenues la première année est transmise, légèrement amplifiée, dans le futur (toute chose égale par ailleurs  $WEXET_t = 1,12.WEXET_{t-1}$ ). La diminution des importations, si l'on suppose nul l'écart du taux de croissance de la P.I.B. et du taux d'inflation, est transmise, mais avec une amplitude plus réduite, aux périodes suivantes (toute chose égale par ailleurs  $WM_t = 0,85.WM_{t-1}$ ). L'augmentation dans le futur de l'écart en valeur absolue des importations nécessite donc un taux de croissance de la P.I.B., ou de l'indice des prix, inférieur au taux de la trajectoire de référence.

**2.3. Les commandes de la trajectoire**

Le sens de variation des variables de commande reste inchangé (à l'exception de CPSA, CWCA, CWKA qui deviennent négatifs en 1976) sur toute la période : l'amplitude des actions diminue progressivement, ce qui correspond bien à un ajustement dont la plus grande partie est réalisée dès la première année.

La baisse de la consommation en valeur est obtenue par CVNP négatif et CWKM positif. La hausse des prix résulte de l'augmentation de la demande des administrations CWCA, CKA. La diminution du profit, qui conduit à la baisse du taux de croissance, est le résultat de CIIE, CIDE positifs. CPSA, CSCSA,

CXHA, CIM entraînent un transfert des revenus en faveur des ménages. Le rôle de ces commandes semble moins évident. Il peut être de diminuer la capacité de financement des administrations et donc de réduire l'encours du passif des entreprises. Sur la base des raisonnements du chapitre 1, on peut supposer que ces quatre commandes n'ont pas un rôle crucial dans l'annulation du déficit ; en leur attachant une pondération plus élevée, il doit être possible de supprimer leur utilisation sans augmenter sensiblement le déficit.

Cette hypothèse a été vérifiée en simulant (Tableau II-C) les commandes obtenues par les spécifications du critère du § 2.1, à l'exception de

$$r_{2,2} = r_{6,6} = r_{7,7} = r_{10,10} = 10000$$

les éléments diagonaux de R correspondant aux variables CXHA, CSCSA, CPSA, CIM. La comparaison des Tableaux II-B, II-C montre clairement le faible rôle de ces variables dans la modification de l'évolution propre : les trajectoires des états et des commandes avec ou sans utilisation de ces quatre variables sont très voisines.

Etats et Sortie<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
$\Delta$ AUT	-4.246	5.111	5.340	3.443	5.330
$\Delta$ VKENA	-4.749	-2.945	893	2.102	6.081
$\Delta$ RDSTAR	5.548	17.835	19.978	26.868	25.410
$\Delta$ YQ	3,6	2,4	0,9	0,7	0,8
$\Delta$ XQNA	-2,4	0,2	-0,4	-0,2	0,2
$\Delta$ WCM	-3.379	12.798	22.099	32.200	33.918
BACO	-247	-156	-241	-1.028	-1.783
$\Delta$ WEXET	6.932	8.167	9.389	10.757	11.034
$\Delta$ WM	-7.995	-5.321	-7.673	-9.537	-10.699

Tableau II-C - SCENARIO AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE  
EQUILIBREE SANS UTILISATION DES COMMANDES

CXHA, CSCSA, CPSA, CIM

(comparaison de variables en francs courants)

---

1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta$ YQ,  $\Delta$ XQNA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.

Commandes

	1972	1973	1974	1975	1976
CVNP	-9.414	-5.992	-3.836	-2.226	-2.381
CXHA	0	0	0	0	0
CWCA	2.480	2.068	1.109	320	-2.656
CWKA	1.940	1.671	816	129	-2.777
CWKM	7.631	5.506	3.585	1.710	-320
CSCSA	0	0	0	0	0
CPSA	0	0	0	0	0
CIIE	2.106	861	2.168	3.796	3.847
CIDE	9.200	5.888	5.859	6.296	4.727
CIM	0	0	0	0	0

Tableau II-C - SCENARIO AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE  
EQUILIBREE SANS UTILISATION DES COMMANDES  
CXHA, CSCSA, CPSA, CIM  
(comparaison de variables en francs courants) (suite)

Section 3 - TRAJECTOIRE DE CROISSANCE PLUS ELEVEE SANS AUGMENTATION  
DU DEFICIT DE LA BALANCE COMMERCIALE

Les deux derniers exemples de ce chapitre résultent de la spécification de deux objectifs : taux de croissance et balance commerciale.

3.1. Spécifications du critère

Nous nous contentons ici, et dans la prochaine section, de donner les spécifications sans les commenter.

$$\begin{aligned} \Delta u_i^D(t) &= 0 & i &= 1, \dots, 10 \\ & & t &= 1, \dots, 5 \\ \Delta y_1^D(t) &= \Delta y_3^D(t) = 0 & t &= 1, \dots, 5 \\ \Delta y_2^D(t) &= 1500 & t &= 1, \dots, 5 \\ q_{ij} &= f_{ij} = 0 & i &= 1, \dots, 3 \\ & & j &= 1, \dots, 3 \\ \text{sauf } q_{22} &= f_{22} = 10000 \\ & q_{33} = f_{33} = 500 \\ r_{ij} &= 0 & i \neq j & \quad i = 1, \dots, 10 \\ & & & \quad j = 1, \dots, 10 \\ r_{ii} &= 1,0 \end{aligned}$$

### 3.2. La trajectoire des états et des sorties

Les résultats sont donnés dans les tableaux III-A et III-B. Les résultats de simulation de la commande sur le modèle linéaire indiquent qu'il n'est pas possible, pour cet ensemble de pondérations<sup>1</sup>, d'atteindre les deux objectifs, dès la première année. Ceci indique bien les difficultés d'obtenir simultanément la réalisation de ces deux objectifs.

#### La baisse des importations compense la baisse des exportations

Les exportations, comme dans l'exemple de la section 1, baissent sur toute la période, toutefois avec une amplitude plus faible. La stabilité du déficit est obtenue par la baisse des importations.

#### La baisse des prix est l'élément moteur qui permet de se rapprocher des deux objectifs

La hausse de la production en volume a tendance à entraîner une hausse des importations ; l'ajustement est alors réalisé par une forte baisse du niveau des prix (le taux de croissance des prix sur la trajectoire simulée est négatif !). L'ampleur de cette baisse fait plus que compenser l'effet à la hausse due à la production ; le niveau des importations baisse. Cette explication suggère un autre scénario pour se rapprocher de ces deux objectifs, où le rôle moteur serait à la fois joué par les prix et la consommation, la baisse de la consommation stimulant les exportations.

#### La hausse de la production ne conduit pas à un relèvement de la consommation

Nous constatons une évolution plus marquée que dans la section 1 en faveur de l'utilisation de la production additionnelle pour l'accroissement des investissements des entreprises. Ceux-ci augmentent en volume sur toute la période (et avec une amplitude croissante) ; à l'inverse, la consommation des ménages baisse en moyenne sur la période. Nous retrouvons ici encore la conséquence de la spécification de l'équation des exportations : l'augmentation du taux de croissance de la consommation entraîne une baisse du niveau des exportations qui est ensuite transmise amplifiée dans le temps, toute chose égale par ailleurs. Pour compenser cette tendance à la baisse, le taux de croissance de la consommation doit diminuer. C'est ce que nous observons, particulièrement en 1976 où la consommation en volume baisse de 26859 M.

---

1. Les fonctions linéaires calculées pour des pondérations plus élevées sur les sorties conduisent à des commandes qui, appliquées au modèle non-linéaire, nous ont empêchés d'obtenir la convergence de l'algorithme de résolution.

Etats et Sortie<sup>1,2</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
ΔAUT	1.995 (2.453)	(23.197) (-23.125)	-18.832 (-20.361)	-50.337 (-44.591)	-36.272 (-42.693)
ΔVKENA	6.142 (5.655)	-13.386 (-14.931)	-17.126 (-22.412)	-47.356 (-46.540)	-53.751 (-58.730)
ΔRDSTAR	-36.398 (-33.631)	-24.282 (-25.128)	-100.706 (-78.355)	-94.931 (-93.197)	-163.031 (-140.423)
ΔYQ	-12,3 (-12,0)	-2,5 (-3,4)	-13,9 (-12,0)	-1,7 (-2,0)	-6,6 (-6,7)
ΔXQNA	1,1 (1,2)	1,3 (1,3)	0,7 (1,3)	1,5 (1,4)	0,8 (1,4)
ΔWCM	-58.031 (-54.567)	-90.318 (-83.342)	-183.650 (-146.999)	-194.107 (-185.485)	-286.208 (-249.884)
BACO	-14.342 (-15.141)	-14.382 (-13.571)	-9.033 (-17.236)	-24.251 (-21.268)	-15.837 (-22.968)
ΔWEXET	-5.840 (-5.597)	-3.387 (-4,426)	-7.954 (-10.032)	-8.768 (-7.296)	-3.243 (-7.182)
ΔWM	-6.672 (-5.564)	-2.650 (-4.355)	-16.225 (-9.963)	-5.850 (-7.139)	-10.924 (-6.837)

Tableau III-A - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
SANS AUGMENTATION DU DEFICIT DE LA BALANCE COMMERCIALE  
(comparaison de variables en francs courants)

1. Les écarts, à l'exception de ΔYQ, ΔXQNA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.
2. Les chiffres entre parenthèses sont les résultats de la simulation de la commande sur le modèle STARTER.

Commandes<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
CVNP	-22.698	-28.844	-33.666	-26.189	-32.425
CXHA	10,5	5,4	-1,7	-3,9	-3,3
CWCA	-11.180	-4.844	-22.423	-11.901	-23.491
CWKA	-10.234	-4.835	-22.308	-12.350	-23.626
CWKM	-8.589	2.898	3.216	15.593	48.541
CSCSA	-9.782	-1.529	-540	-2.106	-4.883
CPSA	5.864	7.364	3.595	1.451	-7.801
CIIE	-10.029	-2.090	-19.587	-6.626	-22.077
CIDE	-15.933	1.894	-23.431	-2.189	-28.416
CIM	-6.150	-8.066	-3.164	-1.459	8.263

Tableau III-A - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
SANS AUGMENTATION DU DEFICIT DE LA BALANCE COMMERCIALE  
(comparaison de variables en francs courants) (suite)

1. Les écarts, à l'exception de CXHA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.



Etats et Sortie<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
$\Delta$ AUT	19.003	-2.259	28.631	-2.124	33.174
$\Delta$ VKENA	6.142	9.274	13.418	18.336	17.175
$\Delta$ RDSTAR	44.154	80.118	119.480	130.402	136.859
$\Delta$ YQ <sup>2</sup>	-12,3	-15,3	-29,3	-29,3	-36,7
$\Delta$ WCM	11.276	-875	-1.079	340	-26.859

Tableau III-B - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
SANS AUGMENTATION DU DEFICIT DE LA BALANCE COMMERCIALE  
(comparaison de variables en francs constants)

1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta$ YQ, sont ceux des deux trajectoires évaluées en francs constants 1971. L'unité est le million de francs.
2. Taux d'inflation cumulé sur la période en pourcentage.

### 3.3. Les commandes de la trajectoire

La trajectoire des états et des sorties est donc caractérisée par une forte diminution des prix et une diminution de la consommation en valeur. La déflation est obtenue par des commandes CWKA, CCA négatives, et la réduction de la consommation, à partir de la seconde période, par CVNP négatif et CWKM positif. La hausse des profits, qui rend possible la croissance plus élevée, résulte d'une diminution des impôts indirects, CIIE, et des impôts directs, CIDE, des entreprises. L'action de l'Etat sur le revenu disponible des ménages est plus difficile à interpréter<sup>1</sup> : les commandes CIM et CPSA, CXHA résultent en une augmentation du revenu disponible, CSCSA, à l'opposé, diminue le revenu disponible. CPSA, CIM ont-ils pour rôle de contrebalancer l'accroissement de l'encours du passif des entreprises en termes réels ? Nous ne pouvons pas l'affirmer. Nous rencontrons là une des limites des exercices d'interprétation des résultats lorsque les évolutions des commandes deviennent trop compliquées.

## Section 4 - TRAJECTOIRE AVEC UNE CROISSANCE PLUS ELEVEE ET UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE

### 4.1. Spécifications du critère

Ces spécifications sont une combinaison des spécifications de celles des deux premiers exemples avec des pondérations des sorties et des commandes différentes et une spécification d'un taux de croissance de 1 % au lieu de 1,5 %.

$$\Delta u_1^D(t) = 0 \quad i = 1, \dots, 10$$

$$t = 1, \dots, 5$$

$$\Delta y_1^D(t) = 0 \quad t = 1, \dots, 5$$

$$\Delta y_2^D(t) = 1000 \quad t = 1, \dots, 5$$

$$\Delta y_3^D(1) = 15.174 \quad \Delta y_3^D(2) = 13.644 \quad \Delta y_3^D(3) = 17.305 \quad \Delta y_3^D(4) = 21.325$$

$$\Delta y_3^D(5) = 23.513$$

$$q_{ij} = f_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, 3$$

$$j = 1, \dots, 3$$

1. Il est possible, comme dans le cas précédent, que la pénalisation de l'utilisation de ces quatre variables ne modifie que très légèrement l'évolution des scénarios.

sauf pour  $q_{22} = f_{22} = 5000$

$q_{33} = f_{33} = 500$

$r_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad i = 1, \dots, 10$

$r_{ii} = 1 \quad j = 1, \dots, 10$

#### 4.2. La trajectoire des états et des sorties

Les résultats d'application du schéma de commande pour les définitions du critère ci-dessus sont donnés dans les Tableaux IV-A et IV-B. Les écarts sur le modèle linéaire et non-linéaire indiquent, comme dans le cas précédent, que les deux objectifs ne peuvent pas être simultanément atteints. Il y a bien, dans le modèle STAR, un conflit entre l'objectif de croissance élevée et celui de balance commerciale équilibrée. Ces deux objectifs ne peuvent être atteints simultanément qu'au coût de commandes inapplicables dans la réalité en raison de leurs trop grandes amplitudes. La commandabilité vérifiée par application du critère, dans le chapitre précédent, na donc guère de signification économique.

#### La réduction du déficit est obtenue principalement par une diminution des importations

La réduction des importations est beaucoup plus forte que l'augmentation des exportations. Ces dernières diminuent, d'ailleurs, en 1973.

#### L'élément moteur est la réduction du niveau des prix

La déflation est très élevée la première année (-15,3 %) et atteint un total cumulé de -34 % sur toute la période. Ce total est légèrement inférieur à celui de l'exemple précédent. Cela tient à l'objectif de croissance, plus faible ici : l'écart sur VQNA en francs constants en 1976 est 27.804 M au lieu de 45.144 M. On peut penser avec raison que pour un objectif de croissance plus élevée, la déflation serait encore plus forte.

#### La consommation en francs constants baisse sur toute la période

La hausse de la production ne profite pas à la consommation, bien au contraire. Celle-ci est inférieure en francs constants à son niveau sur la trajectoire de référence. Nous retrouvons là une des constantes de ces exemples : l'atteinte des objectifs suppose que l'investissement des entreprises soit privilégié par rapport à la consommation.

Etats et Sortie<sup>1,2</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
ΔAUT	406 (873)	-31.168 (-32.532)	-21.884 (-25.200)	-36.675 (-25.366)	-46.271 (-40.923)
ΔVKENA	5.529 (5.014)	-18.092 (-22.132)	-31.890 (-38.301)	-47.458 (-43.421)	-59.625 (-54.563)
ΔRDSTAR	-50.843 (-48.356)	-39.528 (-41.820)	-72.616 (-43.636)	-98.951 (-69.219)	-156.617 (-109.368)
ΔYQ	-15,3 (-15,0)	-1,8 (-2,4)	-5,1 (-0,7)	-2,4 (-2,5)	-6,1 (-6,3)
ΔXQNA	0,2 (0,3)	1,3 (0,5)	0,3 (0,6)	1,0 (0,7)	0,9 (0,8)
ΔWCM	-106.315 (-102.605)	-113.986 (-102.696)	-182.719 (-122.932)	-213.849 (-159.558)	-280.532 (-202.407)
BACO	1.267 (-183)	-3.977 (-76)	6.077 (-141)	-252 (-289)	1.673 (-321)
ΔWEXET	2.597 (2.205)	-962 (-2.604)	6.719 (1.310)	5.675 (3.301)	4.833 (406)
ΔWM	-13.845 (-12.786)	-10.629 (-16.172)	-16.662 (-15.854)	-15.395 (-17.735)	-20.358 (-22.786)

Tableau IV-A - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE  
(comparaison de variables en francs courants)

1. Les écarts, à l'exception de ΔYQ, ΔXQNA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.
2. Les chiffres entre parenthèses sont les résultats de la simulation de la commande sur le modèle STARTER.

Commandes<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
CVNP	-43.273	-32.773	-47.576	-38.296	-34.959
CXHA	11,6	3,1	-3,8	-5,6	-3,4
CWCA	-14.813	-10.929	-13.284	-16.698	-26.120
CWKA	-14.506	-11.276	-14.079	-17.302	-26.326
CWKM	13.126	-357	27.736	34.007	48.996
CSCSA	-9.917	-2.775	-2.435	-3.782	-4.907
CPSA	6.137	7.132	5.043	-421	-7.941
CIIE	-13.289	-395	-15.385	-14.798	-19.071
CIDE	-14.183	2.712	-6.589	-9.944	-24.729
CIM	-7.190	-7.895	-5.655	386	8.360

Tableau IV-A - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE  
(comparaison de variables en francs courants) (suite)

---

1. Les écarts, à l'exception de CXHA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.

Etats et Sortie<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
$\Delta$ AUT	22.051	-7.297	13.997	7.865	15.915
$\Delta$ VKENA	5.529	10.226	3.001	3.275	4.176
$\Delta$ RDSTAR	50.232	83.016	97.549	102.970	114.992
$\Delta$ YQ <sup>2</sup>	-15,3	-17,7	-23,3	-26,7	-34,0
$\Delta$ WCM	-23.472	-11.067	-39.786	-38.184	-42.137

Tableau IV-B - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE  
(comparaison de variables en francs constants)

- 
1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta$ YQ, sont ceux des deux trajectoires évaluées en francs constants 1971. L'unité est le million de francs.
  2. Taux d'inflation cumulé sur la période en pourcentage.

Les évolutions de cette trajectoire ne sont pas très différentes de celles de la trajectoire précédente. On peut imaginer alors une trajectoire avec une croissance encore plus élevée et un excédent du commerce extérieur ; il suffirait de prolonger les tendances indiquées ci-dessus : baisse encore plus prononcée des prix et de la consommation des ménages.

#### 4.3. Les commandes de la trajectoire

Ces commandes ont, à quelques exceptions près, (CWKM est positif en 72, CPSA et CIM changent de signe en 75 au lieu de 76) les mêmes signes, et des amplitudes plus élevées que celles de l'exemple précédent. Nous ne répétons pas ici les commentaires faits alors. Nous nous contentons de donner d'autres résultats qui confirment notre analyse menée à partir de la matrice B sur l'influence de CXHA.

CXHA atteint sur cette trajectoire, comme sur la précédente, des amplitudes très élevées : 14,3 % la première année (à comparer au 2,7 % sur la trajectoire centrale à cette période). Du fait de la spécification du critère qui n'impose aucun coût à l'utilisation des variables de commande, il est possible que l'amplitude de cette action soit grande bien que sa contribution soit relativement mineure. Pour tester cette hypothèse, nous avons recalculé la commande (Tableau IV-C) pour les mêmes spécifications du critère et pour une matrice B de neuf colonnes, après suppression de la colonne correspondant à CXHA. Cette dernière spécification supprime l'utilisation de la commande CXHA<sup>1</sup>.

La comparaison des résultats du Tableau IV-C et ceux du Tableau IV-A montre que la non-utilisation de CXHA ne modifie que très faiblement la trajectoire des états et des commandes. Ces calculs confirment une nouvelle fois une des conclusions importantes retirées de l'examen de la matrice B.

---

1. Nous aurions pu alternativement, comme pour le scénario du Tableau II-C, garder une matrice B(32x10) et pondérer fortement  $r_{22}$  l'élément diagonal de R correspondant à CXHA.

Etats et Sortie<sup>1</sup>

	1972	1973	1974	1975	1976
$\Delta$ AUT	549	-30.696	-21.068	-43.526	-48.443
$\Delta$ VKENA	5.654	-18.034	-28.047	-47.565	-62.995
$\Delta$ RDSTAR	-54.398	-42.352	-92.204	-116.786	-161.040
$\Delta$ YQ	-15,3	-1,5	-8,6	-2,7	-4,0
$\Delta$ XQNA	0,3	1,4	0,3	1,0	0,8
$\Delta$ WCM	-105.656	-113.770	-198.351	-228.706	-288.616
BACO	736	-4.841	6.886	-223	2.620
$\Delta$ WEXET	2.521	-270	5.023	2.022	4.114
WM	-13.389	-9.074	-19.167	-19.076	-22.023

Tableau IV-C - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE SANS UTILISATION DE LA COMMANDE CXHA  
(comparaison de variables en francs courants)

---

1. Les écarts, à l'exception de  $\Delta$ YQ,  $\Delta$ XQNA, en pourcentage, sont en millions de francs courants.



Commandes

	1972	1973	1974	1975	1976
CVNP	-44.128	-34.411	-48.584	-37.403	-35.979
CXHA	0	0	0	0	0
CWCA	-14.266	-9.655	-18.348	-21.712	-27.390
CWKA	-13.950	-9.881	-18.891	-22.200	-27.690
CWKM	12.820	1.886	25.028	27.294	48.184
CSCSA	-10.150	-2.753	-2.087	-3.638	-4.811
CPSA	6.741	7.722	4.602	-701	-7.861
CIIE	-13.793	-1.588	-17.806	-12.217	-16.514
CIDE	-13.752	4.032	-13.154	-11.589	-21.546
CIM	-7.811	-8.427	-4.783	919	8.239

Tableau IV-C - SCENARIO DE CROISSANCE PLUS ELEVEE  
AVEC UNE BALANCE COMMERCIALE EQUILIBREE SANS UTILISATION DE LA COMMANDE CXHA

(comparaison de variables en francs courants) (suite)

### CONCLUSION

Les quatre simulations contrôlées montrent que l'application du schéma de commande est justifiée. Les erreurs dues à l'approximation linéaire ne détériorent que très légèrement, au moins sur les trois premières années, les résultats de la commande. Le schéma peut donc être appliqué avec succès dans l'opération variante, qui limite l'utilisation de STAR à cet horizon. Le schéma dans le cadre de cette opération sert à déterminer, non les variables de commande, mais les écarts sur les termes constants des équations pour générer une évolution de STAR la plus proche possible d'une évolution spécifiée a priori. Ce succès confirme ainsi un des résultats importants de cette recherche : STAR se comporte autour d'une trajectoire comme un modèle linéaire.

Ces exemples apportent aussi des informations sur les catégories d'évolution de STAR possibles dans le court terme. Une trajectoire de croissance plus élevée entraîne un déficit accru du commerce extérieur. La réduction du déficit conduit à une baisse du taux de croissance. Le rapprochement d'une cible, avec à la fois plus de croissance et moins de déficit, n'est possible qu'à travers une évolution irréaliste des prix (baisse importante du niveau général des prix) et une pénalisation de la consommation difficilement acceptable sur le plan politique. Ce conflit croissance-commerce extérieur est la conséquence directe des spécifications des équations d'importations et d'exportations. Celles-ci impliquent aussi, pour obtenir les deux objectifs (simultanément ou séparément) que l'investissement des entreprises soit favorisé par rapport à la consommation.

Enfin, il faut noter que, dans ces exemples, nous n'avons pas cherché à obtenir des évolutions réalistes des variables de commande. Les objectifs ont été limités aux sorties ; ceci, afin d'obtenir des évolutions, peut-être irréalistes, mais faciles d'interprétation. Cet "irréalisme" ne remet cependant pas en cause le bien fondé du schéma : des commandes plus faibles peuvent être obtenues facilement en assignant dans le critère des coûts à leur utilisation.



CONCLUSION



L'application de la démarche à STAR nous a permis d'illustrer son intérêt pour l'étude de la dynamique à court terme d'un modèle macroéconomique. Nous avons montré que STAR était un modèle instable et nous avons localisé les variables dont les écarts initiaux font diverger les solutions du modèle sur un horizon court. STAR est aussi un modèle commandable au sens très large de la définition classique ; cependant, il ne l'est pas si on se limite, pour atteindre la cible, à des évolutions politiquement acceptables des états et des commandes.

Cette démarche est d'application facile ; elle n'utilise que des programmes de calculs existants et largement diffusés. Employée dès le stade de la mise au point finale des modèles, elle a l'avantage de détecter des déficiences du modèle. Celles de STAR sont pour nous les suivantes : mélange de différentes catégories de variables (taux de croissance, différences premières, niveaux), spécification des équations de dépenses des ménages et d'importations. Ces déficiences ont été mises en évidence à partir de l'examen des coefficients de l'approximation linéaire et des résultats des simulations contrôlées. Il est facile d'y porter remède car elles n'exigent que de légères reformulations et laissent inchangées les relations du coeur du modèle. Ces corrections méritent, selon nous, d'être apportées aux éventuelles versions ultérieures de STAR ; elles devraient permettre d'obtenir une dynamique plus conforme aux vues des modélisateurs.

En plus des suggestions de reformulations, formellement mineures mais importantes pour la dynamique, cette recherche apporte une information intéressante : le comportement linéaire de STAR autour de la trajectoire de référence. Il importe cependant de noter que ce comportement linéaire ne s'est vérifié qu'en variantes (autour des comptes centraux) : il est possible que, par multiplication des matrices par les états initiaux et les commandes de la trajectoire de référence, on ne retrouve pas l'évolution donnée par le modèle non-linéaire.

Le modèle de la Direction de la Prévision étant utilisé en variantes, est-il alors justifié de construire pour l'élaboration des budgets économiques un modèle non-linéaire ? Nous ne voyons d'avantages ni au niveau de sa résolution (la tâche de l'élaboration des variantes n'en est que plus compliquée), ni au niveau de son analyse.

Cette observation du comportement linéaire d'un modèle macroéconomique non-linéaire n'est pas propre à STAR. A.S. Golberger l'avait déjà faite sur le modèle Klein-Golberger. Il est vraisemblable que l'application de notre démarche permette d'étendre cette conclusion à bien d'autres modèles existants.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDRIGHETTO, B., et GUERIN, J.P.  
"Analyse Spectrale", note ronéotypée,  
Laboratoire d'Automatique de Grenoble, Mai 1975.
- [2] AOKI, M.  
"On a Generalization of Tinbergen's Condition in the Theory  
of Policy to Dynamic Model", Review of Economic Studies,  
Vol. 42, Avril 1975.
- [3] ATHANS, M., et FALB, P.L.  
Optimal Control, Mc Graw Hill, New York, 1966.
- [4] ATHANS, M.  
"The Discrete Time Linear-Quadratic Gaussian Stochastic Control  
Problem", Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1,  
Octobre 1972.
- [5] BENARD, J., et TERNY, G.  
"Premières Réflexions sur le Projet de Recherche Relatif  
à l'Etablissement d'une Fonction de Préférence Etatique en  
Matière de Politique Economique", note ronéotypée,  
C.E.P.R.E.L., Mars 1968.
- [6] BILLAUDOT, B.  
"Le Modèle Deca", Statistiques et Etudes Financières, N.1,  
1971.
- [7] BOULLE, J., BOYER, R., MAZIER, J., et OLIVE, G.  
"Le Modèle STAR", Statistiques et Etudes Financières, N.15,  
1974.



- [8] BOYER, R., MAZIER, J., et OLIVE G.  
"Un Nouveau Modèle de Prédiction Macroéconomique : STAR",  
Economie et Statistiques, N.61, Novembre 1974.
- [9] BRAY, J.  
"Model PREM 1. Proposed Structure for a Simple Control Model  
of the U.K. Economy", Discussion Paper N.1, P.R.E.M.,  
Université de Londres, Novembre 1971.
- [10] BUCHANAN, L.F.  
Optimal Control of Macroeconomic Systems, PhD Thesis, University  
of California, 1968.
- [11] BUCHANAN, L.F., et NORTON, F.E.  
"Optimal Control Applications in Economics", dans Control and  
Dynamic Systems, Leondes, T.C., ed., Vol. 8, Academic Press,  
New York 1972.
- [12] CAINES, P.E.  
"The Minimal Realization of Transfer Function Matrices",  
International Journal of Control, Vol. 13, Mars 1971.
- [13] de CARFORT, F., et FOULARD, Cl.  
Asservissements Linéaires Continus, Dunod, Paris, 1966.
- [14] CHESTNUT, H., et MAYER, R.W.  
Servomécanismes et Régulation, Dunod, Paris, 1957.
- [15] CHOW, G.C.  
"Problems of Economic Policy from the View Point of Optimal  
Control", American Economic Review, Vol. 53, Décembre 1973.
- [16] CHOW, G.C.  
Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, John Wiley,  
New York, 1975.

- [17] CHOW, G.C.  
"On the Control of Nonlinear Econometric Systems with Unknown Parameters", Fourth N.B.E.R. Stochastic Control Conference, Cambridge, Mai 1975.
- [18] COOPER, J.P., et FISCHER, S.  
"Simulation of Monetary Rules in the F.R.B.-M.I.T. Model", Journal of Money Credit and Banking, Vol. 4, Mai 1972.
- [19] COOPER, J.P., et FISCHER, S.  
"Monetary and Fiscal Policy in the Full Stochastic St Louis Econometric Model", Journal of Money Credit and Banking, Vol. 6, Février 1974.
- [20] COOPER, J.P., et FISCHER, S.  
"A Method for Stochastic Control of Nonlinear Econometric Models and an Application, Econometrica, Vol. 43, Janvier 1975.
- [21] COUTIERE, A.  
"Un Modèle du Système Monétaire Français", Statistiques et Etudes Financières, N.17, 1975.
- [22] DELEAU, M., et MALGRANGE, P.  
"Une Analyse des Mécanismes Dynamiques du Modèle STAR", Annales de l'I.N.S.E.E. (à paraître).
- [23] DELEAU, M., GUESNERIE, R., et MALGRANGE, P.  
"Planification Incertitude et Politique Economique. L'Opération Optimix (1)", Revue Economique, Vol. 24, Septembre 1973.
- [24] DELEAU, M., GUESNERIE, R., et MALGRANGE, P.  
"Planification Incertitude et Politique Economique. L'Opération Optimix (2)", Revue Economique, Vol. 24, Novembre 1973.
- [25] ERICKSON, D.L.  
Sensitivity Constrained Optimal Control Policies for a Dynamic Model of the U.S. National Economy, PhD Thesis, University of California, 1971.

- [26] ERICKSON, D.L., et NORTON, F.E.  
"Application of Sensitivity Constrained Optimal Control to National Economic Policy", dans Control and Dynamic Systems, Leondes, T.C., ed., Vol. 9, Academic Press, New York, 1972.
- [27] FAIR, R.C.  
"On the Solution of Optimal Control Problems as Maximization Problems", Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, Janvier 1974.
- [28] FOSSART, A.  
Servomécanismes et Régulateurs, P.U.F., Paris, 1973.
- [29] FOSSART, A.  
Commande des Systèmes Multidimensionnels, Dunod, Paris, 1972.
- [30] FOULARD, Cl., GENTIL, S., et SANDRAZ, J.P.  
Commande et Régulation par Calculateur Numérique de la Théorie aux Applications (à paraître).
- [31] FRIEDMAN, B.M.  
"Optimal Economic Stabilization Policy : An Extended Framework", Journal of Political Economy, Vol. 80, Septembre 1972.
- [32] GOLBERGER, A.S.  
Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein-Golberger Model, North Holland, Amsterdam, 1959.
- [33] GOLDFELD, S.M., QUANDT, R.E., et TROTTER, H.F.  
"Maximization by Quadratic Hill-Climbing", Econometrica, Vol. 34, Juillet 1966.
- [34] GUERIN, J.P., LAMRANI, B., et OUDET, B.A.  
"Commandabilité d'un Système Dynamique Linéaire", Revue Economique, Vol. 26, Septembre 1975.

- [35] GUESNERIE, R., et MALGRANGE, P.  
"Formalisation des Objectifs à Moyen Terme. Application au VIème Plan", Revue Economique, Vol. 23, Mai 1972.
- [36] HAITOVSKY, Y., TREYZ, G., et SU, V.  
Forecast with Quarterly Macroeconometric Models, Columbia University Press, New York, 1974.
- [37] HICKMAN, B.G., ed.  
Econometric Models of Cyclical Behavior, Vol. 1, 2, Columbia University Press, New York, 1972.
- [38] HOLBROOK, R.S.  
"An Approach to the Choice of Optimal Policy Using Large Econometric Models", Bank of Canada Staff Research Studies, N.8, 1973.
- [39] HOLBROOK, R.S.  
"A Practical Method for Controlling a Large Nonlinear Stochastic System", Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, Janvier 1974.
- [40] HOLBROOK, R.S.  
"Optimal Policy Choice Under a Nonlinear Constraint : An Iterative Application of Linear Techniques", Journal of Money Credit and Banking, Vol. 7, Février 1975.
- [41] HOLT, C.  
"Linear Decision Rules for Economic Stabilization and Growth", Quarterly Journal of Economic, Vol. 76, Janvier 1962.
- [42] HOWREY, E.P.  
"Dynamic Properties of a Condensed Version of the Wharton Model" dans Econometric Models of Cyclical Behavior, Hickman, B.G., ed., Vol. 2, Columbia University Press, New York, 1972.

- [43] JOHANSEN, L.  
"Establishing Preference Function for Macroeconomic Decision Models : Some Observations on Ragnar Frisch's Contributions", European Economic Review, Vol. 5, Juin 1974.
- [44] KENDRICK, D.  
"Stochastic Control in Macroeconomic Models", Proceedings of the IFAC/IFORS Int'l Conference on Dynamic Modelling and Control of National Economies, Warwick, Angleterre, Juillet 1973.
- [45] KLEIN, L.R.  
Economic Fluctuations in the U.S. 1921-1941, John Wiley, New York 1950.
- [46] LAFARGUE, J.P., MORINEAU, A., et TREVoux, M.  
"Recherche d'une Fonction de Préférence Etatique. Application au Vème Plan", Bulletin du CEPREMAP, Janvier 1969.
- [47] LARNAC, P.M.  
"Retards Moyens et Multiplicateurs Dynamiques", Revue Economique, Vol. 24, Juillet 1973.
- [48] LIVESEY, D.A.  
"Optimising Short Term Policy", Economic Journal, Vol. 81, Septembre 1971.
- [49] LIVESEY, D.A.  
"Can Macroeconomic Problems Ever be Created as a Quadratic Regulator Problem ?", Proceedings of the IFAC/IFORS Int'l Conference on Dynamic Modelling and Control of National Economies Warwick, Angleterre, Juillet 1973.
- [50] LIVESEY, D.A.  
"Some Aspects of the Theory of Economic Policy", Congrès Européen de la Société d'Econométrie, Grenoble, Septembre 1974.

- [51] LIVESEY, D.A.  
"Feasible Directions in Short-Term Economic Policy",  
Proceeding of the Meeting on Optimization Problems in  
Engineering and Economics, C.S.E.I. et Rice University,  
Naples, Décembre 1974.
- [52] LIVESEY, D.A.  
Optimal Control and Economic Models : Methods of Optimizing  
Short Term Economic Policy Applied to an Econometric Model  
of the U.K. Economy (à paraître).
- [53] Mc CARTHY, M.D.  
"Some Notes on the Generation of Pseudo Structural Errors  
For Use in Stochastic Simulations Studies", dans Models of  
Cyclical Behavior, Hickman B.B., ed., Vol. 1, Columbia  
University Press, New York 1972.
- [54] MALGRANGE, P.  
"Etude Analytique du Modèle Deca", Annales de l'I.N.S.E.E.,  
N.11, Septembre-Décembre 1972.
- [55] MAYNE, D.Q.  
"Computational Procedure for the Minimal Realization of Transfer-  
Function Matrices", Proceedings I.E.E., Vol. 115, 1968.
- [56] MAZIER, J.  
Modèles Macroéconomiques de Court-Moyen Terme : Un Schéma  
Théorique d'Accumulation et de Répartition, Thèse d'Etat,  
Université Paris I, 1974.
- [57] MODIGLIANI, F.  
"The Monetary Mechanism and its Interaction with Real Phenomena",  
Review of Economics and Statistics, Vol. 45, Février 1963.
- [58] PHILLIPS, A.W.  
"Stabilization Policy in a Closed Economy", Economic Journal,  
Vol. 64, Juin 1954.

- [59] PHILLIPS, A.W.  
"Stabilization Policy and the Time Form of Lagged Responses",  
Economic Journal, Vol. 67, Juin 1957.
- [60] PINDYCK, R.S.  
"An Application of the Linear Quadratic Tracking Problem to  
Economic Stabilization Policy", I.E.E.E. Trans., Automatic  
Control, Vol. AC. 17, Juin 1972.
- [61] PINDYCK, R.S.  
"Optimal Stabilization Policies via Deterministic Control",  
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1, Octobre 1972.
- [62] PINDYCK, R.S.  
Optimal Planning for Economic Stabilization, North Holland,  
Amsterdam, 1973.
- [63] PORTER, B.  
Modal Control Theory, Taylor and Francis, Londres, 1972.
- [64] POWELL, M.J.  
"An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function  
of Several Variables without Calculating Derivatives",  
Computer Journal, Vol. 7, Juillet 1964.
- [65] PRESTON, A.J., et WALL, K.D.  
"An Extended Identification Problem for State Space Representation  
of Econometric Models", Discussion Paper N.6, P.R.E.M.,  
Université de Londres, Juin 1973.
- [66] PRESTON, A.J., et WALL, K.D.  
"Some Aspects of the Use of State Space Models in Econometrics",  
Proceedings of the IFAC/IFORS Int'l Conference on Dynamic  
Modelling and Control of National Economies, Warwick, Angleterre,  
Juillet 1973.

- [67] PRESTON, A.J.  
"A Dynamic Generalization of Tinbergen's Theory of Policy",  
Review of Economic Studies, Vol. 41, Janvier 1974.
- [68] ROSENBROCK, H.H.  
State Space and Multivariable Theory, Nelson 1970.
- [69] SANDRAZ, J.P.  
Identification et Commande Multidimensionnelle d'une Unité  
Pilote de Fabrication de Papier, Thèse de Docteur-Ingénieur,  
Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1973.
- [70] SIMON, H.A.  
"Dynamic Programming Under Uncertainty with a Quadratic  
Criterion Function", Econometrica, Vol. 24, Janvier 1956.
- [71] SIMONCK, V., et WOUDEBERG, H.  
"The Econometric Model of the U.S. Economy", Conférence Inter-  
nationale d'Econométrie Appliquée, Clermont Ferrand, Février 1974.
- [72] TEINY, G.  
"D'une Rationalisation des Décisions Economiques de l'Etat à  
la Fonction de Préférence Etatique", Analyse et Prévision,  
Juillet-Août, 1970.
- [73] THEIL, H.  
"On the Theory of Economic Policy", American Economic Review,  
Vol. 46, Mai 1956.
- [74] THEIL, H.  
"A Note on Certainty Equivalence in Dynamic Planning",  
Econometrica, Avril 1957.
- [75] THEIL, H.  
Optimal Decision Rules for Government and Industry, North  
Holland, Amsterdam, 1964.



- [76] THEIL, H., et BOOT, J.C.G.  
"The Final Form of Econometric Equation Systems", Review of the International Statistical Institute, Vol. 30, N.2, 1962.
- [77] TINBERGEN, J.  
On the Theory of Economic Policy, North Holland, Amsterdam, 1955.
- [78] TINBERGEN, J.  
Economic Policy, Principles and Design, North Holland, Amsterdam, 1966.
- [79] TUSTIN, A.  
The Mechanism of Economic Systems, Harward University Press, Cambridge, 1953.
- [80] VERDOON, J.P.  
"The Feasibility of Long Term Multisector Forecasts of Manpower Requirements by Econometric Models", O.C.D.E. Conference on Forecasting Manpower Requirements, Mai 1970.
- [81] WALL, K.D., et WESTCOTT, J.H.  
"Macro Economic Modelling for Control",  
Discussion Paper N.7, P.R.E.M., Université de Londres, Janvier 1974.
- [82] WALL, K.D.  
"An Application of Simultaneous Estimation to the Determination of Causality Between Money and Income", Discussion Paper N.8, P.R.E.M., Université de Londres, Avril 1974.
- [83] ZOUTENDIJK, G.  
Method of Feasible Directions, Elsevier, Amsterdam, 1960.
- [84] "Le Modèle de Projection à Court Terme Zogol I", note ronéotypée, I.N.S.E.E., D.P., Mai 1966.

ANNEXE I

NOTATIONS DE STAR

Cette annexe est une copie de la note N.294 datée du 16 Août 1973 du Groupe de Recherche Macroéconomique de la Direction de la Prévision.

INDICATIFS.-

Ces signes précèdent ou suivent le nom d'une variable. Ils indiquent une grandeur rattachée à cette dernière, ou la date à laquelle elle est mesurée.

X indice de croissance en volume par rapport à l'année antérieure.

Y indice de croissance en prix.

Z indice de croissance en valeur. On a :  $Z = X \times Y$

N.B. : X, Y, Z sont de l'ordre de 1.

V = valeur aux prix de l'année précédente.

W = valeur aux prix courants.

N.B. : X, Y, V, W sont affectés aux opérations sur biens et services.

E ou F désignent une variable d'écart.

N.B. : X, Y, Z, V, W, E, F précèdent le nom des variables.

0 (zéro) : la grandeur est mesurée l'année de base (c-à-d l'année avant l'année projetée).

00 (ou 1) = repère l'année avant l'année de base.

000 (ou 2) : repère l'avant dernière année avant l'année de base.

N.B. : Les indicatifs de date suivent immédiatement les précédents, ou sont rejetés après le nom de la variable.

Exemples : XOPIB : indice de croissance du volume de la PIB l'année de base.

PSMO : prestations sociales reçues par les ménages l'année de base.

Les problèmes relatifs à la détermination du volume de la production, à l'écriture des comptes d'agents, à la prise en compte des stocks, à la détermination des prix relatifs exigent la définition de plusieurs productions (resp. production des branches, des secteurs, avec ou sans appréciation sur stocks, PIB hors stocks) et les éléments de passage de l'une à l'autre.

Le tableau suivant donne les définitions de ces différents agrégats.

1°- Concepts liés aux comptes de secteurs.

Production intérieure brute (dont appréciation sur stocks) PIB

dont ( PIB des ménages	<u>PM</u>	
(		
( PIB des entreprises	<u>PE</u> , dont :	
	( - droits et taxes/importations	<u>DT</u>
	( - V.A. des entrepreneurs individuels	
	( agricoles.	<u>PEA</u>
	( - autre valeur ajoutée	<u>PENA</u>

2°- Concepts liés aux équilibres de biens et services.

Production intérieure brute hors appréciation sur stocks Q

dont ( Stocks (hors appréciation)	<u>ST</u>
( PIB hors stocks	<u>QHS</u>
ou dont ( V.A. de la branche 010	<u>QA</u>
( PIB des autres branches	<u>QNA</u>

3°- Elément de passage : appréciation sur stocks AS

$$PIB = Q + AS$$

DICTIONNAIRE

- ACT : activité
- AS : appréciation sur stocks
- AUT : autofinancement (Epargne des sociétés + indemnités d'assurance/capital des entreprises + FFCEI non agricole).
- BFE : besoin de financement des entreprises.
- CA : consommation des administrations.
- CFA : capacité de financement des administrations.
- CFEX : " " de l'extérieur.
- CFIF : " " des I.F.
- CFM : " " des ménages.
- CM : consommation des ménages.
- CØNGRE: effet des congés et des grèves sur l'activité.
- CSEE : cotisations sociales employeurs des entreprises.
- CSEØ : " " " des autres agents.
- CSØ : autres cotisations sociales.
- DHT : durée hebdomadaire du travail.
- DIF : dépense des I.F. (consommation + investissement)
- DM : dépense des ménages.
- DT : droits et taxes sur importations.
- EPA : épargne des administrations.
- EPE : " des entreprises.
- EPM : " des ménages.
- ETAX : emplois taxables à la T.V.A.
- EX : exportations.
- FA : financement de la formation de capital par les E.I. agricoles.
- FNA : - id - E.I. non agricoles.
- HA : effectifs salariés des administrations.
- HNA : effectifs totaux non agricoles.
- HSNA : effectifs salariés non agricoles.
- K : stock de capital (WOK désigne ce stock au 1.1. de l'année considérée).
- KA : investissement des administrations.
- KE : " des entreprises.
- KEA : " des entreprises agricoles.

KENA : investissement des entreprises non agricoles.  
KM : " des ménages.  
IA : impôts reçus par les administrations.  
IDE : " directs versés par les entreprises.  
IIE : " indirects " " "  
IIF : " des I.F.  
IM : " des ménages.  
IVA : " versés par les administrations.  
M : importations.  
ØAAFF : solde des "autres opérations de répartition", compte d'affectation des administrations.  
ØEAFF : " d'affectation des entreprises.  
ØEEXP : " d'exploitation des entreprises.  
ØEX : " courant de l'extérieur.  
ØIFAFF : " affectation des IF.  
ØIFK : " de capital des IF.  
ØMC : compte courant des ménages.  
ØMK : " capital des ménages.  
PPAS : variation nette de passif des ENA.  
GPAS : encours de passif des ENA.  
PIB : PIB dont appréciation/stocks.  
PE : PIB des ENF (dont droits et taxes et AS).  
PEA : V.A. des E.I. agricoles (hors droits et taxes).  
PEN A : V.A. autres ENF (hors D et T), dont AS.  
PM : PIB des ménages.  
PØPLI : population intérieure, moyenne mobile sur trois ans.  
PRØD : productivité (non agricole)  
PSA : prestations sociales versées par les administrations.  
PSE : " " " entreprises.  
PSEX : " " reçues par l'extérieur.  
PSIF : " " versées par les I.F.  
PSM : prestations sociales reçues par les ménages.  
Q : PIB hors AS.  
QHS : PIB hors stocks.  
QNA : PIB hors AS hors V.A. branche 010.  
QA : V.A. branche 010.  
RBE : résultat brut d'exploitation des ENF.

RBEIA : RBE des E.I. agricoles.  
RA : revenu brut des EIA.  
RNA : revenu brut des EINA  
RBES : résultat brut d'exploitation des sociétés.  
RDSTAR: revenu disponible des ménages - FFCEI  
RVMRS : revenu brut des E.I. moins résultat brut d'exploitation des  
E.I.  
SCSA : salaires cotisations sociales versés par les administrations.  
SCSZ : " " " " I.F.  
SCSM : " " " " ménages.  
SCMAI : " " " " administrations,  
I.F., ménages.  
SCSEU : " " " " entreprises, par  
salarié.  
SE : salaires bruts versés par les entreprises.  
SEA : " " " agricoles.  
SENA : " " " non agricoles.  
SENAET: salaires bruts versés par les entreprises non agricoles,  
corrigés de la salarisation croissante.  
SM : salaires reçus par les ménages (nets).  
SØRT : sorties de capital.  
ST : stocks (variations).  
STIA : stocks des E.I. agricoles (variations).  
STNA : autres stocks (variations).  
SUS : solde des utilisations de service.  
TØSAL : taux de salarisation.  
TER : vente de terrains.  
QA : valeur ajoutée de la branche agriculture.  
VNP : variation nette de passif des ménages.

ANNEXE II

LES EQUATIONS DE STAR

Les équations 1 à 47 sont celles du bloc B1 décrivant l'évolution des variables prédéterminées. Les équations 48 à 109 constituent la première boucle de la partie centrale de STAR ; la deuxième boucle comprend les équations 110 à 120, la troisième l'équation 121.



```
1  POPLI=(POP+POPO+POPOO)/3.
2  WKEA=(1.09+EZKEA)*WKEA
3  WCA=(1.08+EZCA)*WCA
4  WKA=(1.11+EZKA)*WKA
5  WDIF=(1.13+EZDIF)*WDIF
6  WSUS=(1.05+EZSUS)*WSUS
7  WKM=WUKM+4.*(POPLI-POPLIO)+0.3*(VNP-VNPO)+EWKM
8  VQA=(1.02+EXQA)*WQQA
9  WQA=(1.035+EYQA)*VQA
10 WPEA=(1.06+EZPEA)*WPEA
11 WPM=(1.13+EZPM)*WOPM
12 VSTIA=EVSTIA
13 VEEXPM=WOEXPM+EVEEXPM
14 YEX=1.02+EYEX
15 YM=1.02+EYM
16 YSUS=1.02+EYSUS
17 VSUS=WSUS/YSUS
18 YST=1.05+EYST
19 SEA=(1.055+EZSEA)*SEAG
20 SCSM=(1.12+EZSCSM)*SCSMO
21 SCSI=(1.13+EZSCSI)*SCSIO
22 PSEX=(1.10+EZPSEX)*PSEXO
23 PSE=(1.09+EZPSE)*PSEO
24 PSIF=(1.10+EZPSIF)*PSIFO
25 IVA=(1.05+EZIVA)*IVA0
26 IIF=(1.13+EZIIF)*IIFO
27 IDE=IDE0+0.14*(RBESO-RBES00)+EIDE
28 IM=IMO+0.2*(SMO-SMOO)+EIM
29 CFIF=ECFIF
30 UIFK=1.13*UIFKO+EOIFK
31 OIFAFF=CFIF+SCSI+PSIF+IIF+WCIF-CIFK
32 DEXPL=1.15*OEXPL0+EOEXPL
33 UEAFF=JEAFF0+EOEAFF
34 DEK=1.15*DEKO+EOEK
35 UMK=1.13*UMKO+EOMK
36 DAAFF=1.07*UAAFF0+EOAAFF
37 DEX=7500.+EOEX
38 UMC=-1.*(OIFAFF+DEXPL+OEAFF+CEK+CMK+DAAFF+OIFK+OEX)
39 RBEIA=0.78*WPEA+ERBEIA
40 KA=RBEIA+1500.+ERA
41 FA=(1.10+EZFA)*FA0
42 RVMRS=1.06*RVMRS0+ERVMS
43 WTER=WOTER+EWTER
44 AS=AS0+EAS
45 WDT=1.07*WOUT+EWDT
46 TOSAL=TOSAL0+0.0045+ETOSAL
47 XHA=EXHA
48 YKM=1.18*(YQHS-1.)+EYKM+1.
49 YKE=1.+0.6*(YQHS-1.)+0.2*(XKE-1.)+EYKE
50 YCA=YQHS-0.009+EYCA
```

51 YKA=1.+0.9\*(YQHS-1.)+EYKA  
52 YDIF=YQHS+EYDIF  
53 VKM=WKM/YKM  
54 VKE=WQKE\*XKE  
55 VCA=WCA/YCA  
56 VKA=WKA/YKA  
57 VDIF=WDIF/YDIF  
58 VQNA=WQNA\*XQNA  
59 VM=WOM\*(1.+4.\*(XQNA-1.)+0.8\*(YQHS-1.)-0.6\*(YM-1.)-0.168+EXM)  
60 VQ=VQNA+VQA  
61 VST=0.37\*(VQNA-WQNA)+2136.+VSTIA+EVSTNA  
62 VEXET=WOEXET\*(2.4+1.06\*IMPET+EXEXET-1.3\*(VQ+VM-VCA-VKE-VDIF-VKM-VK  
1A-VST-VEXPM-VSUS)/WOCM)/(1.-1.3\*WOEXET/WOCM)  
63 VCM=VQ+VM-VCA-VDIF-VKM-VKE-VKA-VST-VEXET-VEXPM-VSUS  
64 VEX=VEXET+VEXPM  
65 VQHS=VQ-VST  
66 WQHS=VQHS\*YQHS  
67 WM=VM\*YM  
68 WST=VST\*YST  
69 WKE=VKE\*YKE  
70 WEX=VEX\*YEX  
71 WCM=WQHS+WM-WCA-WDIF-WKM-WKE-WKA-WEX-WUS  
72 WKENA=WKE-WKEA  
73 VKENA=WKENA/YKE  
74 WQ=WQHS+WST  
75 XDHT=1.+0.2\*(XQNA-1.)-0.0164+EXDHT  
76 XPROD=(1.2+0.27\*(XQNA-(XCCNA+X1CNA+X2QNA)/3.)+0.2\*(VKENA/WOK+VQKE  
1NA/WOOK+V1KENA/WOOCK-(XOHNA-1.)-(XOOHNA-1))-1.12\*CONGRE+EXPROD  
2-0.2\*(XQNA-XDHT-CONGRE+2.))/0.8  
77 XACT=XQNA-XPROD+1.  
78 XHNA=XACT-XDHT-CONGRE+1.  
79 WPIB=WQ+AS  
80 WPENA=WPIB-WDT-WPM-WPEA  
81 SENAET=WPENA\*(0.478-0.25\*CCNGRE+FSAET-0.24\*(VKENA/WOK+VOKENA/WOOCK  
1+V1KENA/WOOCK-XHNA-XOHNA-XOOHNA+3.))  
82 SENA=SENAET\*TOSAL+ESENA  
83 SE=SEA+SENA  
84 ZSE=SE/SEO  
85 CSEE=(1.+0.77\*(ZSE-1.)+0.046+EZCSEE)\*CSEE0  
86 XHSNA=(TOSAL/TOSALO)\*XHNA  
87 ZSCEU=((SE+CSEE)/(SEO+CSEE0))/XHSNA  
88 SC SA=(1.+1.1\*(ZSCEU-1.)-0.018+EZSCSA)\*XHA\*SCSA0  
89 ZSCMAI=(SCSA+SCSM+SCSI)/(SCSA0+SCSM0+SCSI0)  
90 CSED=(1.+1.7\*(ZSCMAI-1.)-0.062+EZCSED)\*CSEE0  
91 CSU=0.12\*(SE+SCSM+SCSA+SCSI-CSEG)-4130.+ECSO  
92 CSA=CSEE+CSEU+CSU  
93 SM=SE+SCSA+SCSM+SCSI-CSO-CSED  
94 PSA=(1.102+0.5\*(YQHS-1)+EZPSA)\*PSA0  
95 PSM=PSA+PSE+PSIF-PSEX  
96 WDM=WCM+WKM  
97 ZETAX=(WDM+WCA+WKA+WDIF)/(WOCM+WOCA+WOKA+WODIF+WOKM)  
98 IIE=(1.+1.5\*(ZETAX-1.)-0.056+EZIIIE)\*IIE0  
99 IA=IIE+IDE+IM+IVA+IIF  
100 WPE=WPIB-WPM

```
101 RBE=WPE-SE-CSEE-PSE-IIE+OEXPL
102 RBENA=RBE-RBEIA
103 XEX=VEX/WOEX
104 ZRBENA=RBENA/RBENA0
105 RNA=RNA0*(1.+0.52*(ZRBENA-1.)-0.25*(XEX-1.)+0.066+EZRNA)
106 FNA=(1.+1.92*(RNA/RNA0-1.)+0.7*(WKE/WOKE-1.)-0.116+EZFNA)*FNA0
107 F=FA+FNA
108 RDSTAR=SM+PSM+RA+RNA+WPM+CMC-SCSM-IM-F
109 WDMI=1.67*RDSTAR-1.05*(RDSTAR**2)/WQ +0.6*VNP+13500.+FDM
    IF(ABS(WDM-WDMI).LT.U1) GC TO 110
    XQNA=XQNA+UF1*(WDMI-WDM)/WQNA
    GO TO 48
110 EPE=RBE+DEAFF-IDE-RA-RNA
111 EPM=WPM+SM+PSM+OMC+RA+RNA-SCSM-WCM-IM
112 EPA=CSA+IA+DAFF-SCSA-PSA-WCA-IVA
113 CFM=EPM+OMK-F-WKM+WTER
114 CFA=EPA-WTER-WKA
115 CFEX=WM-WEX-WSUS+PSEX+DEX
116 AUT=EPE+FNA+DEK
117 PPAS=0.65*(CFM+VNP)+0.47*CFEX+CFA+0.056*GPAS0+EPPAS
118 GPAS=GPAS0+PPAS
119 WKENA=WKE-WKEA
120 WKENAI=WOK*(1.41*AUT/WOK+0.0164*GPAS/AUT+0.26*AUTO/WOK-0.127+FKEN
    1A)
    IF(ABS(WKENA-WKENAI).LT.U2) GC TO 121
    XKE=UF2*(WKENA-WKENAI)/WCKE+XKE
    GO TO 48
121 AUTI=WOK*(0.24*(VQNA/WCK-VQNA/WOK)+0.011*GPAS0/AUT-0.06+AUTO/WO
    1OK+FAUTSK)
    IF(ABS(AUT-AUTI).LT.U3) GC TO 150
    YQHS=UF3*(AUT-AUTI)/WOK+YQHS
    IF(L.GE.10) RETURN
    L=L+1
    GO TO 48
150 CONTINUE
```