La Notion de demi-bande : étude algébrique et applications aux automates asynchrones

Heinrich C. Mayr

▶ To cite this version:

Heinrich C. Mayr. La Notion de demi-bande : étude algébrique et applications aux automates asynchrones. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1974. Français. NNT : . tel-00286220

HAL Id: tel-00286220

https://theses.hal.science/tel-00286220

Submitted on 9 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

Docteur 3ème cycle

spécialité Mathématiques Appliquées

H.C. MAYR

LA NOTION DE DEMI-BANDE.
ETUDE ALGEBRIQUE ET APPLICATIONS
AUX AUTOMATES ASYNCHRONES

Soutenue le 9 octobre 1975 devant la Commission d'Examen

Président : J. KUNTZMANN

Examinateurs
- C. BENZAKEN
- J.R. JOLY
- G. SAUCIER

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF : Président
M. Gabriel CAU : Vice-président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neurologique

MM.	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique
	ZISMAN Michel	Mathématiques pures

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BALMSKI Michel	Mathématiques appliquées
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DUTTON Guy	CERMAV
	GILLESPIE John	I.S.N.
	SAMPSON Joseph	Mathématiques pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd.Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie Organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BARJOLLE Michel	M.I.A.G.
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Héléne	Pharmacodynamique

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Gilbert	Urologie
	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MALLION Jean Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIER Guy	Géophysique
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine Interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean Bernard	Chimie-Physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FARELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M.	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, AVRIL 1975

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	ELectrochimie
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrométallurgie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	ELectronique
	COUMES André	Radioélectricité
	FELICI Noël	Electrostatique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	SANTON Lucien	Mécanique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DURAND Françis	Metallurgie
	MOREAU René	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	ELectrotechnique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique .

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	CHARTIER Germain	Electronique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
	LACOUME Jean Louis	Géophisique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIERE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan Doré	Automatique

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées

Je tiens à exprimer ma respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN pour m'avoir accueilli à Grenoble et avoir accepté la présidence du Jury de cette thèse.

Que Monsieur le Professeur C. BENZAKEN trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour ses conseils éminents qui ont grandement amélioré le fond et la forme de mon travail.

Je remercie également Monsieur J.R. JOLY et Madame G. SAUCIER professeurs à Grenoble, de l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail en participant à ce jury.

Je tiens également à remercier Mesdames C. NEUMANN et I. KACHELE pour s'être acquittées du travail de dactylographie sans oublier le personnel du service de reproduction pour la réalisation matérielle de cette thèse.

H.C. MAYR

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Notre travail est une contribution à l'étude des demi-groupes ayant une partie génératrice idempotente. La notion de demi-bande - c'est ainsi que nous appelons ces demi-groupes - joue, à la fois sur un plan algébrique pur comme sur un plan informatique, un rôle intéressant.

Dans un premier chapitre, nous énoncons quelques propriétés élémentaires des demi-bandes et nous montrerons après une serie de rappels de la théorie des demi-groupes qu'une demi-bande non idempotente possède au moins quatre éléments.

Le deuxième chapitre est consacré à une étude relativement complète des demi-bandes engendrées par deux générateurs idempotents ("demi-bandes de type deux"). Une étude de l'ensemble d'idempotents de ces demi-bandes nous conduit à une classification de toutes les demi-bandes de type deux. L'essentiel de ce chapitre est paru dans SEMIGROUP FORUM [3] .

Le troisième chapitre traîte des propriétés des demi-bandes de type deux quelconques en considération des outils classiques de la théorie des demi-groupes. Une attention particulière est consacré au préordre et à l'ordre d'absorption ainsi qu'à une demi-bande engendrée par un circuit alterné de quatre idempotents.

Dans un quatrième chapitre la théorie de Green nous aide à mettre en évidence la structure de l'ensemble d'idempotents d'une demi-bande. En particulier nous montrerons que toute $\mathcal{D}$-classe d'une demi-bande régulière contient un et un seul plateau d'idempotents et qu'une telle demi-bande est union de groupes.

Le cinquième chapitre étudie l'aspect informatique des demi-bandes. Nous partons des automates asynchrones finis, pour lesquels, pour chaque entrée x et chaque état interne q, l'état successeur (qu'on note $(q)\delta_x$) vérifie $((q)\delta_x)\delta_x = (q)\delta_x$. Cela signifie que le monoide de transition d'un tel automate est une demi-bande finie. Nous montrerons que toute machine sequentielle finie peut être simulée par une machine asynchrone. Enfin nous montrerons que la mise en parallèle et en série des machines asynchrones définit de nouveau des machines asynchrones.

CHAPITRE I

LA NOTION DE DEMI-BANDE ET RAPPELS GENERAUX

I - DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES DES DEMI-BANDES

Définition 1 :

- On appelle demi-bande tout demi-groupe ayant un système générateur constitué d'idempotents.

- Si n désigne un cardinal non nul, on parlera de demi-bande de type n, lorsqu'un système générateur idempotent a pour cardinal n.

Nous noterons P_T un système générateur idempotent d'une demi-bande T.

Remarques et propriétés élémentaires

1) Une bande (demi-groupe idempotent) est en particulier une demi-bande.

2) Une demi-bande de type un n'est autre qu'un monoide trivial à un élément, à la fois groupe et bande.

3) Par adjonction d'élément neutre ou absorbant, une demi-bande reste une demi-bande.

4) Par quotient (ou image homomorphe) d'une demi-bande, on obtient une demi-bande.

5) Le produit direct d'une famille finie de demi-bandes est une demi-bande. (Si P_i est une partie génératrice idempotente de la demi-bande T_i $(i \in I)$ alors $\prod_i P_i$ engendre $\prod_i T_i$ et est idempotente).

6) Sauf dans le cas trivial, un groupe n'est pas une demi-bande.

7) Un sous demi-groupe d'une demi-bande n'est pas en général une demi-bande.

Cette dernière propriété apparemment négative n'est pas gênante car tout demi-groupe est plongeable dans une demi-bande comme nous le verrons au chapitre V.

II - RAPPELS GENERAUX ET RESULTATS PRELIMINAIRES

Nous noterons E_M l'ensemble des idempotents d'un demi-groupe M. La structure interne de E_M peut être mise en relief par les outils suivants [7].

- Le préordre d'absorption à droite (à gauche) sur E_M défini par

$$e \underset{d}{\triangleleft} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} [fe = e] \qquad (e \underset{g}{\triangleleft} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} [ef = e])$$

dont l'équivalence associée est notée $\underset{g}{\equiv}$ $(\underset{d}{\equiv})$ et appelée isovalence gauche (droite).

- L'intersection de ces deux préordres est un ordre appelé ordre d'absorption et noté

$$e \leqslant f \overset{def}{\Longleftrightarrow} [ef = fe = e] \qquad (e \text{ "absorbe" } f).$$

Par suite l'intersection des deux équivalences $\underset{g}{\equiv}$ et $\underset{d}{\equiv}$ est l'égalité et donc une classe gauche coupe une classe droite en un élément au plus. Il en résulte que si 4 idempotents e_1, e_2, e_3, e_4, distincts ou non, vérifient les isovalences selon la figure :

$$\begin{tikzcd}
e_1 \arrow[r, dash, "\underset{g}{\equiv}"] \arrow[d, dash, "\underset{d}{\equiv}"'] & e_2 \arrow[d, dash, "\underset{d}{\equiv}"] \\
e_4 \arrow[r, dash, "\underset{g}{\equiv}"'] & e_3
\end{tikzcd}$$

alors $e_1 = e_2 \Longleftrightarrow e_4 = e_3$ et de même $e_1 = e_4 \Longleftrightarrow e_2 = e_3$.
Enfin $e_1 = e_3 \Longleftrightarrow e_2 = e_4 \Longleftrightarrow e_1 = e_2 = e_3 = e_4$.
Une telle structure sera désignée sous le vocable de rectangle (e_1, e_2, e_3, e_4).

- Les classes de la fermeture transitive de la relation $\left[e \underset{g}{\equiv} f \text{ ou } e \underset{d}{\equiv} f\right]$ se nomment plateaux d'idempotents ou plateaux [6

- Un ensemble $Q \subseteq E_M$ est appelé quadrillage, lorsque pour toute paire e,f de Q, il existe deux idempotents e_1 et f_1, tels que (e, e_1, f, f_1) soit un rectangle.

A part cela nous utilisons dans la suite les notations suivantes [4,8] pour la recherche des propriétés algébriques des demi-bandes :

- Un élément m d'un demi-groupe M est dit régulier si $m \in mMm$. M est dit un demi-groupe régulier si tout élément de M est régulier. On démontre alors que pour tout élément a de M il existe b de M tel que aba = a et bab = b; b s'appelle un inverse de a.

- M est appelé un demi-groupe intra-régulier si on a pour tout élément m de M : $m \in Mm^2M$.

- Un élément m d'un demi-groupe M est dit de torsion si le sous demi-groupe qu'il engendre est fini ce qui est équivalent à : m engendre un (unique) idempotent e_m ($e_m = m^k$, $k \geq 1$). Dans ce cas, le sous demi-groupe monogène engendré par m possède un indice $i > 0$ et une période $p > 0$ [8], tels que $m^r = m^{r+p}$ pour tout $r \geq i$; m est dit cyclique, si $i = 1$, stable si $p = 1$. Un élément cyclique et stable est alors idempotent.

- Nous dirons qu'un demi-groupe M est de torsion, cyclique, stable si tout élément de M est respectivement de torsion, cyclique, stable.

Un demi-groupe M est dit nul si $MM = \{0\}$, 0 étant absorbant.

- Soit M un demi-groupe. Le monoïde M^1 est défini par :

$$M^1 := \begin{cases} M & \text{si } M \text{ est déjà un monoïde} \\ M \cup \{1\} & \text{autrement, où 1 est l'élément neutre adjoint à } M. \end{cases}$$

- Soient ℓ et m éléments d'un monoïde M. ℓ est dit inverse à gauche, inverse à droite, inverse (bilatère) de m si l'on a respectivement $\ell m = 1$, $m\ell = 1$, $m\ell = \ell m = 1$.

- Un élément m d'un monoïde M est appelé unité gauche, unité droite, unité (bilatère) s'il possède respectivement un inverse à gauche, à droite, bilatère dans M.

- Un élément m d'un demi-groupe M est appelé <u>zéroide gauche</u>, <u>zéroide droit</u> si pour tout ℓ de M respectivement $m \in M\ell$, $m \in \ell M$. m est dit zéroide, si m est zéroide gauche et droit.

- Un demi-groupe M est dit <u>dégénéré gauche</u> (<u>dégénéré droit</u>) s'il est idempotent et si pour tout ℓ et m de M respectivement $m \underset{g}{\lhd} \ell$, $m \underset{d}{<} \ell$.

- Pour tout élément m d'un demi-groupe M on définit [4, 2.1] :

<u>l'idéal principal gauche engendré par m</u> : $L(m) := M^1 m$
<u>l'idéal principal droit engendré par m</u> : $R(m) := mM^1$
<u>l'idéal principal bilatère engendré par m</u> : $J(m) := M^1 m M^1$.

- Sur la base de ces idéaux, on définit les relations d'équivalences associées (<u>relations de Green</u>) : $(\ell, m \in M)$

$$\ell \mathcal{J} m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} J(\ell) = J(m)$$

$$\ell \mathcal{L} m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} L(\ell) = L(m)$$

$$\ell \mathcal{R} m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} R(\ell) = R(m)$$

$$\mathcal{H} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$$

$$\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L} o \mathcal{R} = \mathcal{R} o \mathcal{L} \qquad (\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J})$$

On note $\mathcal{J}_m$, $\mathcal{L}_m$, $\mathcal{R}_m$, $\mathcal{H}_m$, et $\mathcal{D}_m$ les $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$-classes d'équivalence respectives contenant l'élément m.

- Un demi-groupe M est dit <u>simple à gauche</u>, <u>simple à droite</u>, <u>simple</u>, <u>bisimple</u> s'il vérifie pour tout élément m respectivement: $\mathcal{L}_m = M$, $\mathcal{R}_m = M$, $\mathcal{J}_m = M$, $\mathcal{D}_m = M$.

- Un sous-ensemble I d'un demi-groupe M est dit <u>idéal à gauche</u>, <u>idéal à droite</u>, <u>idéal (bilatère)</u> s'il est non vide et s'il vérifie respectivement $MI \subseteq I$, $IM \subseteq I$, $MIM \subseteq I$.

- Un idéal I (à gauche, à droite, bilatère) d'un demi-groupe avec absorbant O sera appelé <u>O-minimal</u>, si $I \neq \{O\}$ et $\{O\}$ est le seu idéal (à gauche, à droite, bilatère) de M contenu proprement dans I.

- Un idéal minimal bilatère d'un demi-groupe M sans élément absorbant est minimum pour l'inclusion et est nommé <u>noyau</u>.

- M est dit <u>demi-groupe</u> $\mathcal{J}$P [6] si toute $\mathcal{J}$-classe de M contient au maximum un seul plateau d'idempotents. Il est clair que $a \underset{g}{\equiv} b \Longleftrightarrow \mathcal{L}_a = \mathcal{L}_b$ et que $a \underset{d}{\equiv} b \Longleftrightarrow \mathcal{R}_a = \mathcal{R}_b$. Ce qui prouve qu'un plateau est dans une $\mathcal{D}$-classe.

- Un demi-groupe M est dit <u>plat</u> s'il contient un et un seul plateau d'idempotents.

- Nous dirons enfin qu'un demi-groupe M est <u>artinien</u> lorsqu'il n'existe aucune suite infinie d'idempotents strictement décroissante pour l'ordre d'absorption.

<u>Proposition 1</u> : <u>Si</u> T <u>est une demi-bande, non idempotente, de torsion alors</u> E_T <u>a au moins trois éléments.</u>

En dehors du cas absurde trivial $|E_T| = 1$, la seule possibilité pour contredire ce fait viendrait du cas $E_T = \{a,b\}$, $a \neq b$. L'idempotent attaché à ab, e_{ab} vaut alors a (ou b) ce qui entraîne ab = a (ou b) ; de même ba vaut a ou b. Comme T est engendré par E_T, il en résulterait $T = E_T$ contredisant le fait que T est non idempotent.

<u>Conséquence</u> : <u>Une demi-bande, non idempotente a au moins quatre éléments distincts.</u>

Nous pouvons même préciser :

<u>Proposition 2</u> : <u>Il existe, à un isomorphisme près, une et une seule demi-bande non idempotente à quatre éléments. Elle est du type deux</u>.

L'existence est assurée par la demi-bande T_4 (engendrée par a,b) de table :

	a	b	c	d
a	a	d	c	d
b	c	b	c	c
c	c	c	c	c
d	c	d	c	c

(L'associativité est vérifiable par un test de Light [4]).

Montrons l'unicité. Soit T une demi-bande non idempotente d'ordre 4 (donc de torsion).

Alors d'après la proposition 1 : $|E_T| \geqslant 3$. Cela impose $|E_T| = 3$.

Posons $E_T = \{a,b,c\}$ et soit d le seul élément non idempotent de T; l'un au moins des produits xy $(x, y \in E_T)$ vaut d, sinon E_T n'engendre que E_T et non T. Supposons (ce qui ne change pas la généralité) que ab = d. Nous avons alors ba = c.

(En effet $ba = d \Longrightarrow dd = (ba)(ab) = b(ab) = b(ba) = ba = d$;
$ba = a \Longrightarrow dd = abab = aab = d$;
$ba = b \Longrightarrow dd = abab = abb = d$).

De même dd = c car dd = a entraîne abab = a d'où ababb = ab, soit $d^2 = d$ et de même dd = b entraîne $d^2 = d$. L'égalité c = dd s'écrit ba = abab d'où aba = bab = ba = c.

La table de T ne peut donc être complétée qu'en T_4.

CHAPITRE II

LES DEMI-BANDES DE TYPE DEUX

I - DEMI-BANDE LIBRE DE TYPE DEUX

Nous désignerons par L la demi-bande libre (de type deux) engendrée par $D = \{d_1,d_2\}$, $(d_1 \neq d_2)$. L peut être définie (à isomorphisme près) comme quotient du demi-groupe libre D^+ (sans neutre) par la congruence engendrée par les relations

$$d_1d_1 \sim d_1 \quad \text{et} \quad d_2d_2 \sim d_2 .$$

L est en fait le produit libre de deux demi-groupes à un élément. Les éléments de L peuvent canoniquement être considérés comme des mots sur d_1 et d_2. Donc

$$L = \{d_1,d_2,d_1d_2,d_2d_1,d_1d_2d_1,d_2d_1d_2,\ldots\ldots\}$$

avec comme règle du produit

$$(\xi d_i)\cdot(d_j\eta) = \begin{cases} \xi d_id_j\eta & \text{si } i \neq j \\ \xi d_i\eta & \text{si } i = j \end{cases} .$$

Nous parlerons de la longueur d'un mot π de L (notée $|\pi|$) comme le nombre de lettres de π.

Il est évident que

- toute demi-bande de type deux est isomorphe à un quotient de L
- $E_L = D$
- L est union disjointe de 6 sous demi-groupes

$$L_1,\ L_2,\ L_{11},L_{12},\ L_{21},\ L_{22}$$

où $L_i = \{d_i\}$ et L_{ij} est l'ensemble des mots de L commencant à d_i, terminant à d_j et de longueur supérieure à un. Ces 6 sous demi-groupes sont monogènes et les 4 derniers sont librement engendrés respectivement par $d_1d_2d_1, d_1d_2, d_2d_1, d_2d_1d_2$.

- tout élément π de L peut être écrit sous la forme

$$\pi = d_1^{i_1}(d_2d_1)^{i_2}d_2^{i_3}$$

avec $i_1,i_3 \in \{0,1\}$, $i_2 \in \mathbb{N}$, $i_1+i_2+i_3 > 0$ et avec la convention que d_i^0 est le mot vide .

Définition 1 : Soit π un élément de L^1 (1 étant le mot vide).

(1) Nous appelons mot dual de π l'image de π sous l'application bijective $\psi : L^1 \to L^1$ avec :

$$(\pi)\psi := \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = 1 \\ d_j \ (i \neq j) & \text{si } \pi = d_i \in D \\ d_j(\pi')\psi \quad (i \neq j) & \text{si } \pi \in L \setminus D \text{ et } \pi = d_i\pi' \end{cases}$$

Le mot dual de π sera designé plus simplement par $\bar{\pi}$. Par exemple

$$\overline{d_2d_1d_2d_1d_2} = d_1d_2d_1d_2d_1 \ .$$

(2) Les projections p et d : $L^1 \to D \cup \{1\}$ sont définies par

$$(\pi)p := \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = 1 \\ d_i & \text{si } \pi = d_i\pi' \ , \ d_i \in D, \ \pi' \in L^1 \end{cases}$$

$$(\pi)d := \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = 1 \\ d_j & \text{si } \pi = \pi'd_j \ , \ d_j \in D, \ \pi' \in L^1 \end{cases} .$$

Il est évident que $\bar{\bar{\pi}} = \pi$, $\overline{(\pi)p} = (\bar{\pi})p$ et $\overline{(\pi)d} = (\pi)d$.

Lemme 1 : Soient π, π_1 et π_2 des éléments de L.

(1) Pour tout π' de L avec $|\pi'| > |\pi|$ il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ dans L^1 tels que $\pi' = \alpha_1\pi\beta_1$ et $\pi' = \alpha_2\bar{\pi}\beta_2$.

(2) Si $(\pi_1)d \neq (\pi_2)p$ alors $|\pi_1\pi_2| = |\pi_1| + |\pi_2|$ sinon $|\pi_1\pi_2| = |\pi_1| + |\pi_2| - 1$.

(3) Si $|\pi_1| < |\pi_2|$ alors $|\alpha\pi_1| \leq |\alpha\pi_2|$ et $|\pi_1\alpha| \leq |\pi_2\alpha|$ pour tout α de L^1.

(4) Si $|\pi_1| < |\pi_2|$ alors $\alpha\pi_1\beta \neq \alpha\pi_2\beta$ pour tout α,β de L avec $(\alpha)d \neq (\pi_2)p$ et $(\beta)p \neq (\pi_2)d$.

(5) Si $\alpha\pi = \beta\pi$ ou $\pi\alpha = \pi\beta$ pour certains α,β de L^1 alors nous avons respectivement $\alpha(\pi)p = \beta(\pi)p$ ou $(\pi)d\alpha = (\pi)d\beta$.

Preuve :

(1) De $|\pi'| > |\pi|$ suit $|\pi'| > |\bar{\pi}|$ et il est évident que π et $\bar{\pi}$ sont contenus dans le mot π'.

(2) Evident avec la définition du produit dans L et de la longueur des éléments de L.

(3) De (2) et $|\pi_1| \leq |\pi_2| -1$ on déduit $|\alpha\pi_1| \leq |\alpha| + |\pi_1| \leq |\alpha| + |\pi_2| -1 \leq |\alpha\pi_2|$ ($|\pi_1\alpha| \leq |\pi_1| + |\alpha| \leq |\pi_2| + |\alpha| - 1 \leq |\pi_2\alpha|$).

(4) de (2) nous savons $|\alpha\pi_2\beta| = |\alpha| + |\pi_2| + |\beta|$ et $|\alpha\pi_1\beta| \leq |\alpha| + |\pi_1| + |\beta|$. Comme $|\pi_1| < |\pi_2|$: $|\alpha\pi_1\beta| < |\alpha\pi_2\beta|$ ce qui entraîne $\alpha\pi_1\beta \neq \alpha\pi_2\beta$.

(5) Supposons $\alpha\pi = \beta\pi$. Il est évident que $\alpha \in \{1,(\pi)p\}$ est équivalent à $\beta \in \{1,(\pi)p\}$ et que dans ce cas $\alpha(\pi)p = \beta(\pi)p$. Supposons alors $\alpha, \beta \in L$, $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq (\pi)p \neq \beta$ ce qui entraîne $(\alpha)p = (\beta)p$.

Les inégalités $|\alpha| + |\pi| -1 \leq |\alpha\pi| \leq |\alpha| + |\pi|$ et $|\beta| + |\pi| -1 \leq |\beta\pi| \leq |\beta| + |\pi|$ jointes à $|\alpha\pi| = |\beta\pi|$ conduisent à $\delta := \big||\alpha| - |\beta|\big| \leq 1$.

Si $\delta = 0$ alors $\alpha = \beta$ et comme conséquence $\alpha(\pi)p = \beta(\pi)p$.

Si $\delta = 1$ alors $(\beta)d = (\bar{\alpha})d$. Supposons $\beta = \alpha(\bar{\alpha})d$ ce qui ne change pas la généralité.

Si $(\beta)d = (\bar{\pi})p$ alors $|\beta\pi| = |\beta| + |\pi| > |\alpha| + |\pi| \geqslant |\alpha\pi|$ ce qui est une contradiction à $|\beta\pi| = |\alpha\pi|$. Donc $(\beta)d = (\pi)p$, mais dans ce cas $\beta(\pi)p = \alpha(\pi)p(\pi)p = \alpha(\pi)p$.

La démonstration du cas $\pi\alpha = \pi\beta \Rightarrow (\pi)d\alpha = (\pi)d\beta$ est analogue.

Le théorème suivant met en évidence l'importance particulière de la demi-bande libre L.

Théorème 1

(1) La seule demi-bande infinie de type deux (à isomorphisme près) est la demi-bande L.

(2) Toute demi-bande T, non idempotente avec $|E_T| = 2$ est isomorphe à L .

Preuve:

(1) Toute demi-bande de type deux est isomorphe à un quotient de L (c.a.d. à L si les classes sont à un seul élément). Imaginons

qu'une classe identifie deux mots distincts π_1, π_2 de L et supposons $|\pi_1| = p_1 \leq p_2 = |\pi_2|$.

Tout mot π_3 de longueur p_3 supérieure à p_2 contient d'après Lemme 1 π_2 comme facteur (i.e.: $\pi_3 = \alpha\pi_2\beta$, $\alpha,\beta \in L^1$). π_3 est donc équivalent à $\pi_3' = \alpha\pi_1\beta$ de longueur strictement plus petite que p_3 dans le cas $p_1 < p_2$. Si $p_1 = p_2$, π_1 et π_2 ont même longueur, donc $\pi_2 = \bar{\pi}_1$ et l'évaluation de $\pi_3' = \alpha\pi_1\beta$ amène donc un raccourcissement d'une ou deux unités sur la longueur de π_3. Par ce phénomène de réduction de longueur, le quotient est alors fini.

(2) Une demi-bande vérifiant les hypothèses de (2) ne peut être de torsion d'après la proposition 1 ch(I); elle est donc infinie de type deux, donc isomorphe à L d'après (1).

Nous nous intéressons désormais aux demi-bandes finies de type deux.

II - STRUCTURE DES DEMI-BANDES FINIES DE TYPE DEUX

Le théorème 1 nous à montré que toute demi-bande de type deux différente de L est finie et donc de torsion. Nous savons en outre qu'elle possède plus de deux éléments idempotents (i.e. les idempotents attachés aux générateurs des quatre sous demi-groupes monogènes images des L_{ij}). La structure de ces demi-bandes et la structure d'absorption de leurs idempotents est mise en évidence par le théorème suivant :

Théorème 2 : Soit T une demi-bande finie engendrée par les deux idempotents distincts f et g.

(1) T est union des deux sous demi-groupes triviaux {f} et {g} et des quatre sous demi-groupes monogènes engendrés respectivement par fg, gf, fgf et gfg . Ces quatre éléments ont même période et les jeux possibles de valeurs prises par leurs indices sont donnés par le table

	I	II	III	IV	V	VI
fg	i	i+1	i	i+1	i+1	i+1
gf	i	i	i+1	i+1	i+1	i+1
fgf	i	i	i	i	i+1	i
gfg	i	i	i	i	i	i+1

(Les jeux II et III, V et VI correspondent chaque fois à une situation symétrique par échange de f et g).

(2) L ensemble E_T est la réunion de $\{f,g\}$ et du rectangle $Q_T = \{e_{fgf}, e_{gf}, e_{gfg}, e_{fg}\}$ éventuellement aplati ou réduit à un point. En outre

$$e_{fgf} \leq f \qquad \text{et} \qquad e_{gfg} \leq g \ .$$

Nous visualisons le resultat (2) par le schema général (fig 1) :

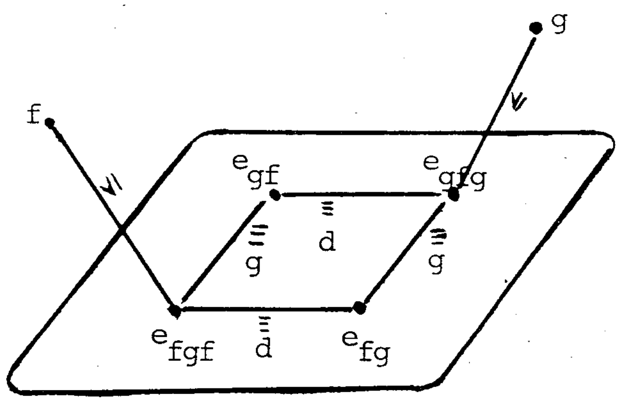


fig. (1)

Ce schéma pouvant donner lieu à des dégénérescenses.

Preuve :

(1) Considérons la demi-bande libre L (engendrée par $\{d_1,d_2\}$). T est image de L par un morphisme ϕ avec $(d_1)\phi = f$ et $(d_2)\phi = g$.

L'image $(L_{ij})\phi$ du sous demi-groupe monogène L_{ij} est un sous demi-groupe monogène de T et contient donc exactement un idempotent. Donc nous avons $|E_T| \leq 6$.

Nous avons les deux séries de relations évidentes (à n'utiliser qu'avec des exposants strictement positifs):
$(a,b \in \{f,g\}, a \neq b)$

$$(ab)^p = a(ba)^{p-1}b = (aba)^{p-1}b = a(bab)^{p-1}$$

$$(aba)^p = (ab)^p a = a(ba)^p = a(bab)^{p-1}b\ .$$

Soient $(i_1,n_1),(i_2,n_2),(i_3,n_3)$ et (i_4,n_4) les indices et périodes de fg, gf, fgf et gfg respectivement.

De $(fg)^{i_1+n_1} = (fg)^{i_1}$ nous déduisons (par la deuxième série de relations) $(fgf)^{i_1+n_1} = (fgf)^{i_1}$ d'où résulte

$i_1 \geqslant i_3$ et $n_1 \equiv 0 \pmod{n_3}$.

Nous tirons de même $(gf)^{i_1+n_1+1} = (gf)^{i_1+1}$ d'où résulte $i_1+1 \geqslant i_2$ et $n_1 \equiv 0 \pmod{n_2}$. Enfin de la même manière: $i_1 \geqslant i_4$ et $n_1 \equiv 0 \pmod{n_4}$.

En procédant ainsi à partir de $(gf)^{i_2+n_2} = (gf)^{i_2}$, puis de $(fgf)^{i_3+n_3} = (fgf)^{i_3}$ et enfin de $(gfg)^{i_4+n_4} = (gfg)^{i_4}$ nous arrivons à

$$\begin{array}{llll}
i_2+1 \geqslant i_1 & \text{et} & n_2 \equiv 0 & \pmod{n_1} \\
i_2 \geqslant i_3 & \text{et} & n_2 \equiv 0 & \pmod{n_3} \\
i_2 \geqslant i_4 & \text{et} & n_2 \equiv 0 & \pmod{n_4} \\
i_3+1 \geqslant i_j & \text{et} & n_3 \equiv 0 & \pmod{n_j},\ j \in \{1,2,4\} \\
i_4+1 \geqslant i_j & \text{et} & n_4 \equiv 0 & \pmod{n_j},\ j \in \{1,2,3\}
\end{array}$$

Les conclusions énoncées en (1) sont alors facilement déduites.

(2) E_T comporte d'après (1) au plus six éléments: $f, g, e_{fg}, e_{gf}, e_{fgf}$ et e_{gfg}. Nous avons

$$e_{fg} = (fg)^{i_1 n},\ e_{gf} = (gf)^{i_2 n},\ e_{fgf} = (fgf)^{i_3 n} \text{ et } e_{gfg} = (gfg)^{i_4 n}\ .$$

Il est alors évident qu'on a :

$$e_{ab} \trianglelefteq_g b,\ e_{ab} \trianglelefteq_d a \quad \text{et} \quad e_{aba} \leqslant a \qquad (a,b \in \{f,g\},\ a \neq b).$$

On déduit également

$$e_{fg}e_{fgf} = (fg)^{i_1 n}(fgf)^{i_3 n} = (fgf)^{(i_1+i_3)n} = (fgf)^{i_3 n} = e_{fgf}$$

et de même

$e_{fgf}e_{fg} = e_{fg}$ d'où résulte $e_{fgf} \bar{\bar{d}}\ e_{fg}$.
On complète de même la démonstration de (2).

Lemme 2 : Soit T une demi-bande finie engendrée par les deux générateurs distincts f et g. Soient i_1, i_2, i_3, i_4 les indices des sous demi-groupes monogènes $<fg>, <gf>, <fgf>$ et $<gfg>$ de T, p leur période commune et i un parametre entier, non nul.

Alors le jeu d'indices (i_1, i_2, i_3, i_4) est inférieur ou égal à

(1) (i,i,i,i) si et seulement si $\begin{cases} (fg)^{i+p} = (fg)^i \\ \text{et} \\ (gf)^{i+p} = (gf)^i \end{cases}$

(2) $(i+1,i,i,i)$ si et seulement si $(gf)^{i+p} = (gf)^i$

(3) $(i+1,i+1,i,i)$ si et seulement si $\begin{cases} (fgf)^{i+p} = (fgf)^i \\ \text{et} \\ (gfg)^{i+p} = (gfg)^i \end{cases}$

(4) $(i+1,i+1,i+1,i)$ si et seulement si $(gfg)^{i+p} = (gfg)^i$

L'implication ($\Rightarrow$) étant évident pour tous les quatre cas il nous suffit à démontrer chaque fois la reciproque.

(1) De $(fg)^{i+p} = (fg)^i$ nous déduisons $(fgf)^{i+p} = (fg)^{i+p}f = (fg)^i f = (fgf)^i$ et $(gfg)^{i+p} = g(fg)^{i+p} = g(fg)^i = (gfg)^i$. Le jeu d'indices est donc majoré par (i,i,i,i).

(2) La démonstration est analogue à celui de (1) en mentionnant qu'il n'y a pas moyen de déduire de $(gf)^{i+p} = (gf)^i$ que $(fg)^{i+p} = (fg)^i$. On examine , pour cela, le problème du mot dans la présentation $f^2 \sim f$ $g^2 \sim g$ $(gf)^{i+p} \sim (gf)^i$.

On procède d'une manière analogue pour les cas (3) et (4).

Proposition 2 : Soit T une demi-bande finie engendrée par les deux générateurs f et g. Alors (avec les notations du théorème 2) :

(1) T possède un élément absorbant si et seulement si $e_{fg} = e_{gf} = e_{fgf} = e_{gfg}$.

(2) Soit $|T| \geq 4$; alors T est un demi-groupe simple si et seulement $|E_T| = 4$ et $e_{aba} = a$; $a,b \in \{f,g\}$, $a \neq b$.

Preuve :

(1) ($\Longleftarrow$) étant évident il suffit à démontrer ($\Longrightarrow$) : Soit $a \in T$ élément absorbant. Si $a \in \{f,g\}$ alors trivial. Sinon nous avons pour tout paire x,y de T : $xay = a$ et par suite $a \in \langle fg\rangle, \langle gf\rangle, \langle fgf\rangle, \langle gfg\rangle$ ce qui permet de conclure.

(2) ($\Longrightarrow$) : T simple implique $f,g \in TxT$ pour tout élément x de T. Il existe donc par exemple $a,b \in T$ tels que $f = ae_{fgf}b$. Donc $f = fae_{fgf}bf$ ce qui entraîne $f \in \langle fgf\rangle$. Par conséquence $f = e_{fgf}$.

Si maintenant $e_{fgf} = e_{fg}$ alors nous avons d'après le théorème 2 $e_{gf} = e_{gfg}$ donc $fg = f$ et $gf = g$ ce qui contredit $|T| \geq 4$. En procédant ainsi avec $e_{gfg} = e_{fg}$ ou $e_{gfg} = e_{fgf}$ ($\Longrightarrow$) est démontré.

($\Longleftarrow$) : Les relations (2) du théorème 2 montrent en particulier que $e_{ab}a = a = ae_{ba}$ pour tout $a,b \in \{f,g\}$, $a \neq b$.

T est l'union des 4 sous demi-groupes $\langle ab\rangle$ et $\langle aba\rangle$ qui sont même des sous groupes (bâtis sur e_{ab} , $e_{aba} = a$) car e_{ab} (a) est neutre pour $\langle ab\rangle$ ($\langle aba\rangle$) et $x \in \langle ab\rangle(\langle aba\rangle)$ implique $x = ayb$ (aya) et $e_{ab}x = xe_{ab} = x$ ($ax = xa = x$). Par ailleurs il existe un k tel que $x^k = e_{ab}$ (a), $k \geq 1$ et x manifestement admet un inverse pour e_{ab} (a).

Les idempotents e_{ab} (a) sont dans une même $\mathcal{D}$-classe parce qu'ils forment un plateau d'idempotents. D'après [6,prop. 1.1] un plateau est complètement contenu dans une $\mathcal{D}$-classe. T est alors union des $\mathcal{H}$-classes correspondantes et donc simple.

II - UNE CLASSIFICATION DES DEMI-BANDES DE TYPE DEUX

Les résultats précédents nous mettent en mesure d'exhiber toutes les classes d'isomorphisme de demi-bandes de type deux. Nous utiliserons la technique de la présentation par générateurs et relations guidée le th. 2. A la fin de ce paragraphe nous verrons encore une méthode qui nous permettra de identifier toute demi-bande de type deux comme quotient de la demi-bande libre L, par une ou deux relations particulières entre deux éléments de L.

Nous constatons d'abord que l'ensemble d'idempotents E_T d'une demi-bande finie T de type deux peut avoir une des structures énumerées dans la figure 2. C'est une conséquence immédiate du théorème 2 par l'application d'une ou plusieurs des dégénérescenses suivantes ($P_T = \{f,g\}$) :

D_1: $f = e_{fgf}$

D_2: $g = e_{gfg}$

D_3: $e_{fg} = e_{fgf}$ ce qui est équivalent à $e_{gf} = e_{gfg}$

D_4: $e_{fg} = e_{gfg}$ ce qui est équivalent à $e_{gf} = e_{fgf}$.

Ces dégénérescenses réduisent donc le nombre d'éléments de E_T. Nous signalons explicitement que la dégénérescense D_3 ne provoque pas une situation isomorphe au résultat de la dégénérescense D_4 alors que la dénérescense D_1 produit un résultat isomorphe à la dégénérescense D_2.

Discussion des cas

cas c_1: S'il n'y a aucune dégénérescense dans E_T alors $|E_T| = 6$. Dans ce cas se présentent d'après le théorème 2 quatre situations non isomorphes avec une periode p et un paramètre i pour le jeu d'indices (i_1,i_2,i_3,i_4) des sous demi-groupes monogènes $\langle fg\rangle, \langle gf\rangle, \langle fgf\rangle$, et $\langle gfg\rangle$ de T :

- (i,i,i,i) ce qui (d'après le lemme 2) conduit à la présentation par 2 relations $(fg)^{i+p} = (fg)^i$ et $(gf)^{i+p} = (gf)^i$

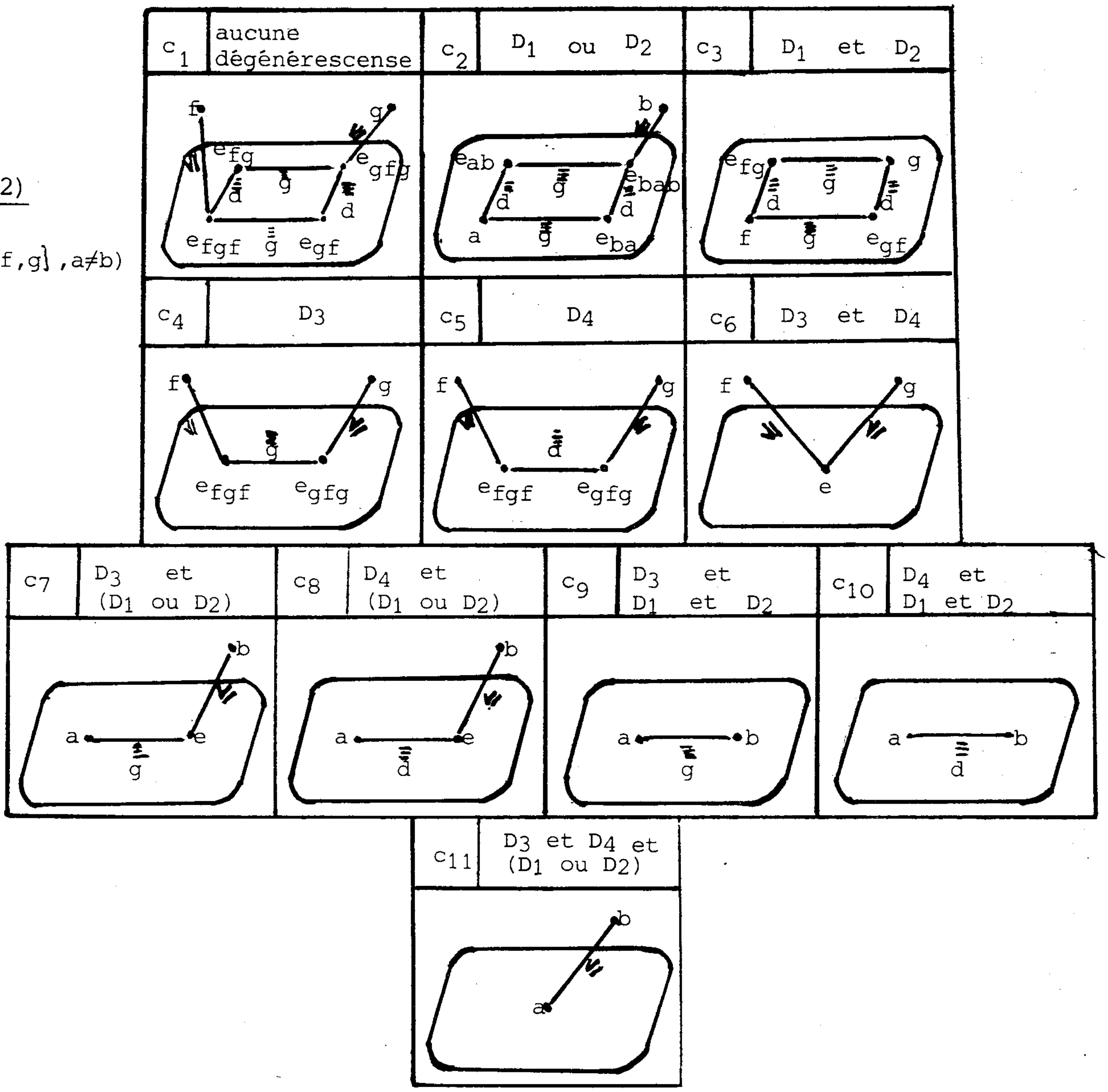
- $(i+1,i,i,i)$ ce qui conduit à la présentation par une relation $(gf)^{i+p} = (gf)^i$

- $(i+1,i+1,i,i)$ ce qui conduit à la présentation par 2 relations $(fgf)^{i+p} = (fgf)^i$ et $(gfg)^{i+p} = (gfg)^i$

- $(i+1,i+1,i+1,i)$ ce qui conduit à la présentation par une relation $(gfg)^{i+p} = (gfg)^i$.

fig (2)

(a,b ∈ {f,g}, a≠b)



cas c_2, c_3: Une dégénérescense du type D_1 ou D_2 implique pour un certain $n \in \mathbb{N}$: $a = (aba)^n$. Donc

$$aba(aba)^n = (aba)^n aba = aba$$

$$ab(ab)^n = (ab)^n ab = (aba)^n b = ab$$

$$ba(ba)^n = (ba)^n ba = b(aba)^n = ba$$

$$bab(bab)^n = (bab)^n bab = b(aba)^n b = bab \ .$$

Le jeu d'indices est donc (1,1,1,1) la demi-bande résultante T est cyclique et n = p . Au cas c_3, T est simple d'après la proposition 2 et présentable par deux relations $a = (aba)^p$, $b = (bab)^p$.

<u>cas c_4, c_5, c_6</u>: La dégénérescense D_3 implique $e_{fg} = e_{fgf} = (fg)^{kp} = (fgf)^{kp}$ pour un certain k. D'où:

$$fge_{fg} = e_{fg}fg = e_{fgf}g = e_{fg}g = e_{fg}$$

$$gfe_{gf} = e_{gf}gf = e_{gfg}f = e_{gf}f = e_{gf}$$

$$fgfe_{fgf} = e_{fgf}fgf = e_{fgf}gf = e_{fg}f = e_{fg}$$

$$gfge_{gfg} = e_{gfg}gfg = e_{gfg}fg = e_{gf}g = e_{gf}$$

La période p de la demi-bande résultante T est donc égale à 1. En ce qui concerne les indices nous avons quatre situations non isomorphes :

- <u>(i,i,i,i)</u> présentable par les deux relations: $(fgf)^i = (fg)^i$ et $(gfg)^i = (gf)^i$. En effet puisque p = 1 $(fg)^i = e_{fg}$ et $(gf)^i = e_{gf}$ et $(fgf)^i = e_{fgf}$ et $(gfg)^i = e_{gfg}$.

- <u>(i+1,i,i,i)</u> présentable par une seule relation: $(gfg)^i = (gf)^i$.

- <u>(i+1,i+1,i,i)</u> présentable par les deux relations: $(fgf)^i = (fg)^{i+1}$ et $(gfg)^i = (gf)^{i+1}$.

- <u>(i+1,i+1,i+1,i)</u> présentable par une seule relation: $(gfg)^i = (gf)^{i+1}$.

Les considérations pour le cas c_5 sont analogues.Le cas c_6 combine les deux dégénérescenses D_3 et D_4 (donc p = 1) mais peut être présenté par la relation unique

$$e_{fg} = e_{gf} \quad (\Longleftrightarrow e_{fgf} = e_{gfg} \Longleftrightarrow e_{fg} = e_{gf} = e_{fgf} = e_{gfg})$$

Les quatre jeux possibles d'indices conduisent aux présentations respectives suivantes

- <u>(i,i,i,i)</u> par une relation $(fg)^i = (gf)^i$

- <u>(i+1,i,i,i)</u> par une relation $(fg)^{i+1} = (gf)^i$

- <u>(i+1,i+1,i,i)</u> par une relation $(fgf)^i = (gfg)^i$

- <u>(i+1,i+1,i+1,i)</u> par une relation $(fgf)^{i+1} = (gfg)^i$

cas c_7 à c_{11}: Ces cas représentent les combinaisons possibles entre les dégénérescenses D_1, D_2, D_3 et D_4. Comme dans tous ces cas la période p et l'indice i vérifient:

$$p = i = 1$$

il résulte de toute combinaison une et une seule demi-bande idempotente (à un isomorphisme près). Chacune d'elle est aisément présentable par une ou deux relations.

Nous pouvons formuler comme résumé de ces considérations les deux théorèmes suivants:

Théorème 3 : Toute demi-bande finie T engendrée par deux générateurs idempotents f et g est définie à isomorphisme près par la donnée

- d'une période p et d'un jeu d'indices (i_1, i_2, i_3, i_4) vérifiant le table du théorème 2 pour les sous demi-groupes mogènes $\langle fg\rangle, \langle gf\rangle, \langle fgf\rangle$ et $\langle gfg\rangle$ de T et
- de zéro, d'une ou plusieurs dégénérescenses différents du type D_1, D_2, D_3, D_4.

Si une dégénérescense du type $\left\{\begin{matrix} D_1 \text{ ou } D_2 \\ D_3 \text{ ou } D_4 \end{matrix}\right\}$ est donnée, alors la déclaration $\left\{\begin{matrix} \text{du jeu d'indices} \\ \text{de la période} \end{matrix}\right\}$ est superflue et vaut $\left\{\begin{matrix} (1,1,1,1) \\ 1 \end{matrix}\right\}$.

Théorème 4 : Toute demi-bande finie de type deux (engendrée par les idempotents f et g) peut être présentée par une ou deux relations supplémentaires (en plus de $f^2 = f$ et $g^2 = g$) et dans le cas de deux relations sous la forme:

$$\mu = \pi \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \bar{\pi} \qquad (\mu, \pi \in L).$$

L'ensemble des éléments d'une demi-bande finie T de type deux se compose des deux générateurs f et g et des éléments des quatre sous demi-groupes monogènes $\langle fg\rangle, \langle gf\rangle, \langle fgf\rangle$ et $\langle gfg\rangle$. Pour le cardinal d'un tel sous demi-groupe monogène S nous avons $|S| = i_S + p - 1$, si i_S est l'indice du générateur de S. Une dégénérescense du type D_1 ou D_2 diminue le cardinal de E_T (et par conséquence celui de T) de 1 (à part le fait qu'elle réduit le jeu d'indices à (1,1,1,1)). La diminution induite par une seule dégénérescense D_3 ou D_4 se monte à 2 (à part du fait que la période est réduite à 1). Si D_3 et D_4 sont vérifiées, alors la diminution est égale à 3. Nous sommes donc en mesure de donner une formule pour l'ordre de T:

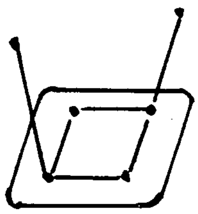
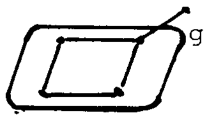
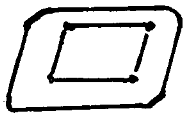
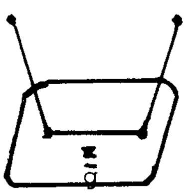
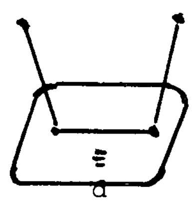
Soient p la période et i_1, i_2, i_3, i_4 les indices de fg,gf, fgf et gfg respectivement. Pour $l \in \{1,2,3,4\}$ soit $\chi(D_l)$ défini par

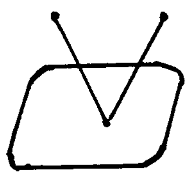
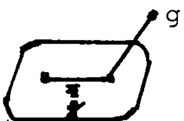
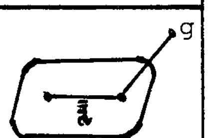
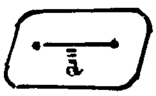
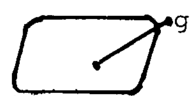
$$\chi(D_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_l \text{ vérifiée dans T} \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases}$$

Alors nous avons

$$|T| = \sum_{k=1}^{4} i_k + 4p - 4 - \sum_{l=1}^{4} \chi(D_l) - \begin{cases} 1 & \text{si } \chi(D_3) + \chi(D_4) > 0 \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases}$$

Les tables suivantes donnent toutes les classes d'isomorphisme et montrent la situation des idempotents, la présentation standard et l'ordre de la demi-bande dans chaque classe. On peut en déduire aisément le nombre de demi-bandes de types deux ayant un ordre donné.

<table>
<tr><th rowspan="2">E_T
STRUCTURE ET
ORDRE</th><th rowspan="2">PERIODE</th><th colspan="5">PRESENTATIONS $(f^2=f, g^2=g)$</th><th rowspan="2">$|T|$</th><th rowspan="2" colspan="2">REMARQUES</th></tr>
<tr><th>RELATION(S)
SUPPLEMENT.</th><th>i_{fg}</th><th>i_{gf}</th><th>i_{fgf}</th><th>i_{gfg}</th></tr>
<tr><td rowspan="4">
6 idempotents</td><td rowspan="4">p</td><td>$(fg)^{i+p}=(fg)^i$
$(gf)^{i+p}=(gf)^i$</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>4p+4i-2</td><td colspan="2">union disjointe</td></tr>
<tr><td>$(gf)^{i+p}=(gf)^i$</td><td>i+1</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>4p+4i-1</td><td>f $\rightleftarrows$ g
isomorphe</td><td>de 6</td></tr>
<tr><td>$(gfg)^{i+p}=(gfg)^i$
$(fgf)^{i+p}=(fgf)^i$</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i</td><td>i</td><td>4p+4i</td><td colspan="2">sous demi-groupes</td></tr>
<tr><td>$(gfg)^{i+p}=(gfg)^i$</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i</td><td>4p+4i+1</td><td>f $\rightleftarrows$ g
isomorphe</td><td></td></tr>
<tr><td>
5 idempotents</td><td>p</td><td>$(fgf)^p = f$</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4p+1</td><td>f $\rightleftarrows$ g
isomorphe</td><td>union disjointe de 4 groupes cycl. et 1 groupe triv</td></tr>
<tr><td>
4 idempotents</td><td>p</td><td>$(fgf)^p = f$
$(gfg)^p = g$</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4p</td><td colspan="2">demi-bande simple union de 4 groupes cycliques</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
4 idempotents</td><td rowspan="4">1</td><td>$(fgf)^i=(fg)^i$
$(gfg)^i=(gf)^i$</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>4i</td><td>I</td><td rowspan="4">demi-groupe combinatoire avec une $\mathcal{L}$-classe pour idéal minimal</td></tr>
<tr><td>$(gfg)^i=(gf)^i$</td><td>i+1</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>4i+1</td><td>f $\rightleftarrows$ g II
isomorphe</td></tr>
<tr><td>$(fgf)^i=(fg)^{i+1}$
$(gfg)^i=(gf)^{i+1}$</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i</td><td>i</td><td>4i+2</td><td>III</td></tr>
<tr><td>$(gfg)^i=(gf)^{i+1}$</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i</td><td>4i+3</td><td>f $\rightleftarrows$ g IV
isomorphe</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
4 idempotents</td><td rowspan="4">1</td><td>$(gfg)^i=(fg)^i$
$(fgf)^i=(gf)^i$</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>4i</td><td>opposé de I</td><td rowspan="4">demi-groupe combinatoire avec une $\mathcal{R}$-classe pour idéal minimal</td></tr>
<tr><td>$(fgf)^i=(gf)^i$</td><td>i+1</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>4i+1</td><td>opposé de II</td></tr>
<tr><td>$(fgf)^i=(gf)^{i+1}$
$(gfg)^i=(fg)^{i+1}$</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i</td><td>i</td><td>4i+2</td><td>opposé de III</td></tr>
<tr><td>$(gfg)^i=(fg)^{i+1}$</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i+1</td><td>i</td><td>4i+3</td><td>opposé de IV</td></tr>
</table>

E_T STRUCTURE ET ORDRE	PERIODE	PRESENTATIONS $(f^2=f, g^2=g)$ RELATION(S) SUPPLEMENT.	i_{fg}	i_{gf}	i_{fgf}	i_{gfg}	$\lvert T \rvert$	REMARQUES	
 3 idempotents	1	$(fg)^i=(gf)^i$	i	i	i	i	4i-1	commutative si i = 1	demi-bande avec absorbant
		$(fg)^{i+1}=(gf)^i$	i+1	i	i	i	4i	$f \rightleftarrows g$ isomorphe	
		$(fgf)^i=(gfg)^i$	i+1	i+1	i	i	4i+1		
		$(fgf)^{i+1}=(gfg)^i$	i+1	i+1	i+1	i	4i+2	$f \rightleftarrows g$ isomorphe	
 3 idempotents	1	f = fg	1	1	1	1	3	A $f \rightleftarrows g$ isomorphe	demi-bande idempotente
 3 idempotents		f = gf	1	1	1	1		$f \rightleftarrows g$ isomorphe	demi-bande opposée de A
 2 idempotents	1	f = fg g = gf	1	1	1	1	2	demi-groupe zéro à gauche à deux élements	
 2 idempotents		f = gf g = fg	1	1	1	1		demi-groupe zéro à droite à deux éléments	
 2 idempotents	1	f = gfg	1	1	1	1	2	$f \rightleftarrows g$ isomorhe	demi-bande commutative à 2 éléments
 1 idempotent	1	f = g	1	1	1	1	1	groupe trivial	

CHAPITRE III

LES ELEMENTS IDEMPOTENTS D'UNE DEMI-BANDE

Nous quittons dorénavant le domaine des demi-bandes de type deux pour obtenir des résultats plus généraux. L'intérêt principal de ce chapitre est de mettre en évidence quelques propriétés des demi-bandes de type (fini) n en considération des outils classiques de la théorie des demi-groupes rappelés dans le chapitre I.

I - LES ELEMENTS NEUTRES D'UNE DEMI-BANDE

Lemme 1 : La seule unité (gauche, droite, bilatère) d'une demi-bande T^1 est l'élément neutre 1.

Supposons par exemple que $t \in T^1$ soit unité gauche. Donc il existe ($t' \in T^1$) inverse à gauche de t, c'est à dire $t't = 1$. Si t est idempotent, alors $1 = t't = t'tt = 1t = t$. Autrement il existe $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dans P_T avec $t_1t_2\ldots t_n = t$. Dans ce cas, nous avons $1 = t't = t'tt_n = 1t_n = t_n$; en poursuivant on a $t_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ donc $t = 1$. Comme 1 est évidemment unité (gauche, droite et bilatère) et comme les cas où t est unité droite ou bilatère sont analogues, la démonstration est complète.

Proposition 1 : Soit T une demi-bande, x et y des éléments de T.

(1) $xT = T$ $(Tx = T) \Longleftrightarrow$ x est neutre à gauche (à droite)
(2) $xTy = T \Longleftrightarrow x = y$ et x (comme y) est le neutre de T
(3) T^1 avec $|T^1| > 1$ n'est pas simple.

Ce dernier fait est déjà mentionné dans [5], mais démontré d'une façon trop circonstanciée.

Preuve : "$\Longleftarrow$" de (1) et (2) évident.

(1) Supposons, sans changer la généralité, que $xT = T$ avec $x = t_1\ldots t_k$ $(t_i \in P_T)$. Il existe donc pour tout t de T un t' de T tel que $t = xt'$ et par conséquent $t_1t = t$ pour tout t de T; d'où $t_1t_i = t_i$ pour tout générateur t_i de P_T. t_1 est donc neutre à gauche ce qui entraîne que $x = t_2\ldots t_k$. De même $t_2, \ldots, t_k$ sont neutres à gauche et $x = t_k$ est neutre à gauche.

(2) Soient x et y tels que $xTy = T$. On peut poser
$x = t_1 t_2 \ldots t_k \qquad y = s_1 s_2 \ldots s_\ell \qquad (t_i \in P_T,\ s_j \in P_T)$
Pour tout $t \in T$ il existe $t' \in T$ avec $t = xt'y$. D'où $t_1 t s_\ell = t$ pour tout t. En particulier $t_1 t_1 s_\ell = t_1$ et $t_1 s_\ell s_\ell = s_\ell$. Les deux termes valent $t_1 s_\ell$. D'où $t_1 = s_\ell$ et par suite pour tout t : $t_1 t = t t_1 = t$. Donc t_1 est l'élément neutre 1 de T. En continuant on obtiendra finalement:

$$1 = t_1 = t_2 = \ldots = t_k = s_1 = s_2 = \ldots = s_\ell = x = y$$

(3) Supposons que T^1 avec $|T^1| > 1$ soit simple. Alors nous avons pour tout t, t' de T : $T^1 t T^1 = T^1 t' T^1 = T^1$. Il existe donc pour tout t de T des éléments t_1 et t_2 tels que $t_1 t t_2 = 1$ ce qui entraîne d'après le lemme que $t_1 = t = t_2 = 1$, donc $|T^1| = 1$ contredisant notre hypothèse.

Nous pouvons déduire de cette proposition une condition nécessaire pour qu'une demi-bande T ne soit pas idempotente c'est:
$\{t \mid t \in T \text{ et } tT \neq T\} \neq \emptyset$ et $\{t' \mid t' \in T \text{ et } Tt' \neq T\} \neq \emptyset$.

Il est évident qu'un demi-groupe dégénéré est idempotent et muni d'une structure assez triviale. Le Lemme suivant compose quelques propriétés équivalentes à celle-ci :

<u>Lemme 2</u> : <u>Soit T une demi-bande. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(1) T <u>est bisimple et admet un élément neutre à gauche (à droite)</u>.
(2) T <u>est dégénérée droite (gauche)</u>.
(3) T <u>est simple à droite (à gauche)</u>.
(4) $P_T \subseteq t_i T$ (Tt_i) <u>pour tout</u> t_i <u>de</u> P_T

<u>Preuve</u> :

(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit g un élément neutre à gauche. Comme T est bisimple, il existe pour tout $e \in E_T$ un $x \in T$ tel que $g\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{L}e$

$g\mathcal{R}x$ implique $gT = xT^1 = T$. En particulier $g = x$ ou $g = xy$ $(y \in T)$ qui entraîne que $x = gx = xyx$ et donc $xT^1 = xT$. x est donc neutre à gauche (proposition 1).
De $x\mathcal{L}e$, on déduit $x \underset{g}{\equiv} e$ (d'après [6, propriété 1.1]), donc $xe = x = e$. Donc tous les éléments de E_T sont neutres à gauche et T est dégénérée droite.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) : évident par application de la définition.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : évidemment $t_iT = T$ pour tout $t_i \in P_T$ car t_iT est un sous demi-groupe contenant P_T.
Les t_i sont donc neutres à gauche (proposition 1), T est simple à droite et comme conséquence immédiate bisimple.

Nous ferons enfin une dernière constatation : une demi-bande commutative est une bande qui n'est autre qu'un demi-treillis (pour l'ordre d'absorption).

II - ELEMENTS IDEMPOTENTS ENGENDRES PAR DES IDEMPOTENTS D'UN DEMI-GROUPE

Nous allons établir une série de conséquences résultant de la génération d'un idempotent à partir d'autres idempotents.

Définition : Etant donné dans un demi-groupe M, un produit $t_1t_2t_3\ldots t_k$ de k éléments $(k > 1)$, on définit pour chaque entier $i \in \{1,2,\ldots,k\}$

- le ième préfixe du produit par

  $t_1t_2\ldots t_{i-1}$ si $i > 1$

  $t_1t_2\ldots t_k$ si $i = 1$

- le ième suffixe du produit par

  $t_it_{i+1}\ldots t_k$

Si l'on désigne par α_i et β_k respectivement le ième préfixe et ième suffixe du produit noté Π, nous avons:

$$\begin{array}{rl} i > 1 & \alpha_i\beta_i = \Pi \\ i = 1 & \alpha_1\beta_1 = \Pi^2 \\ i < k & t_i\beta_{i+1} = \beta_i \\ k > i > 1 & \alpha_i t_i = \alpha_{i+1} \end{array}$$

<u>Lemme 3</u> : <u>Soit</u> M <u>un demi-groupe et</u> $t_1, t_2, \ldots, t_k$ <u>une suite de</u> k <u>éléments</u> ($k > 1$) <u>de</u> E_M <u>telle que</u> $e_1 = t_1t_2\ldots t_k$ <u>appartienne à</u> E_M. <u>Alors en désignant par</u> α_i <u>et</u> β_i ($1 \leqslant i \leqslant k$) <u>les préfixes et suffixes du produit</u> $t_1t_2\ldots t_k$, <u>nous avons pour tout</u> $i \in \{1,2,\ldots,k\}$:

(1) $e_i \stackrel{\text{def}}{=} \beta_i e_1 \alpha_i$ <u>appartient à</u> E_M

(2) $f_i \stackrel{\text{def}}{=} e_i t_i$ <u>appartient à</u> E_M

(3) $t_i e_{i+1} = f_i$ <u>si</u> $i < k$ <u>et</u> $t_k e_1 = f_k$

(4) <u>Si</u> $i \leqslant j \leqslant k$

$f_i f_{i+1}\ldots f_j = e_i t_i t_{i+1}\ldots t_j$ <u>en particulier</u> $f_1 f_2 \ldots f_k = e_1$

(5) <u>Si l'on désigne par</u> σ_i <u>et</u> Π_i <u>les ièmes suffixes et</u> préfixes du produit $f_1f_2f_3\ldots f_k$ <u>alors</u>

$$\sigma_i\Pi_j = e_i\beta_i\alpha_j \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,k\}$$

$$\sigma_i\Pi_i = e_i$$

(6) <u>Si</u> S_i <u>et</u> P_i <u>désignent respectivement les ensembles de suffixes, puis de préfixes du produit</u>

$t_i t_{i+1} t_{i+2}\ldots t_k\, t_1 t_2 \ldots t_{i-1}$ $\quad$ ($i > 1$) <u>alors</u>

$$\begin{aligned} S_i e_i P_i &= \{\beta_s e_1 \alpha_\ell \ ;\ s,\ \ell \in \{1,2,\ldots,k\}\} \\ &= S_1 e_1 P_1 \end{aligned}$$

(7) $\sigma_i\Pi_j$ <u>et</u> $\sigma_j\Pi_i$ <u>sont inverses</u>.

Preuve :

(1) En effet pour $i = 1$ $\beta_1 = e_1$ et $\alpha_1 = e_1$ et l'on obtient e_1. Dans le cas général :

$$e_i e_i = \beta_i e_1 \alpha_i \beta_i e_1 \alpha_i = \beta_i e_1 e_1 e_1 \alpha_i = \beta_i e_1 \alpha_i = e_i.$$

(2) Il est clair que $t_i \beta_i = \beta_i$ d'où $t_i e_i = e_i$ et $f_i f_i = e_i t_i e_i t_i = e_i e_i t_i = e_i t_i = f_i$.

(3) Si $i < k$ $t_i e_{i+1} = t_i \beta_{i+1} e_1 \alpha_{i+1} = \beta_i e_1 \alpha_i t_i = e_i t_i = f_i$ et $t_k e_1 = \beta_k e_1 e_1 = \beta_k e_1 \alpha_k t_k = e_k t_k = f_k$.

(4) Par récurrence sur j à partir de $j = i$ (vérification évidente d'après la définition). Nous avons alors $f_i f_{i+1} \dots f_j = e_i t_i e_{i+1} t_{i+1} \dots t_{j-1} e_j t_j$; en utilisant (3) on obtient : $e_i f_i f_{i+1} \dots f_{j-1} t_j$. L'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire $e_i e_i t_i t_{i+1} \dots t_{j-1} t_j$.

(5) Il est clair d'après (4) que

$$\Pi_i = e_1 \alpha_i \qquad \sigma_i = e_i \beta_i$$

D'où :

$$\sigma_i \Pi_j = e_i \beta_i e_1 \alpha_j = e_i \beta_i e_1 e_1 \alpha_j = e_i \beta_i e_1 \alpha_i \beta_i \alpha_j = e_i e_i \beta_i \alpha_j = e_i \beta_i \alpha_j$$

En particulier $\sigma_i \Pi_i = e_i \beta_i \alpha_i = \beta_i e_1 \alpha_i \beta_i \alpha_i = \beta_i e_1 e_1 \alpha_i = \beta_i e_1 \alpha_i = e_i$.

(6) Un élément de S_i a soit la forme $\beta_u \alpha_i$ avec $u \geqslant i$, soit la forme $t_s t_{s+1} \dots t_{i-1}$ $(s < i)$. De même un élément de P_i a la forme $\beta_i \alpha_v$ $(v \leqslant i)$ ou $t_i t_{i+1} \dots t_\ell$ $(i \leqslant \ell \leqslant k)$

Les éléments de $S_i e_i P_i$ ont donc les 4 formations suivantes :

- $\beta_u \alpha_i e_i \beta_i \alpha_v$ $\qquad (v \leqslant i \leqslant u)$

$$= \beta_u \alpha_i \beta_i e_1 \alpha_i \beta_i \alpha_v = \beta_u e_1 e_1 e_1 \alpha_v = \beta_u e_1 \alpha_v$$

- $\beta_u\alpha_i e_i t_i t_{i+1}\dots t_\ell$ $\quad (i \leqslant u,\ i \leqslant \ell \leqslant k)$

$$= \beta_u\alpha_i\beta_i e_1\alpha_i t_i t_{i+1}\dots t_\ell = \beta_u e_1 e_1\alpha_\ell t_\ell = \begin{cases} \beta_u e_1\alpha_{\ell+1} & \text{si } \ell< k \\ \beta_u e_1\alpha_1 & \text{si } \ell= k \end{cases}$$

- $t_s t_{s+1}\dots t_{i-1}e_i\beta_i\alpha_v$ $\quad (v \leqslant i,\ s < i)$

$$= t_s t_{s+1}\dots t_{i-1}\beta_i e_1\alpha_i\beta_i\alpha_v = \beta_s e_1 e_1\alpha_v = \beta_s e_1\alpha_v$$

- $t_s t_{s+1}\dots t_{i-1}e_i t_i t_{i+1}\dots t_\ell$ $\quad (i \leqslant \ell \leqslant k,\ s < i)$

$$= t_s t_{s+1}\dots t_{i-1}\beta_i e_1\alpha_i t_i\dots t_\ell = \beta_s e_1\alpha_{\ell+1} \quad \text{si } \ell<k$$

$$= \beta_s e_1\alpha_1 \quad \text{si } \ell=k$$

(7) Nous avons

$$\sigma_i\Pi_j\sigma_j\Pi_i\sigma_i\Pi_j = \sigma_i e_1 e_1\Pi j = \sigma_i e_1\Pi_j$$

car $\Pi_j\sigma_j = \Pi_i\sigma_i = f_1f_2\dots f_k = e_1$ (par (4)).

Or $\Pi_j = e_1\alpha_j$ (d'après (4)) et $e_1\Pi_j = \Pi_j$ d'où

$$\sigma_i e_1\Pi_j = \sigma_i\Pi_j$$

Démonstration analogue en changeant j et i.

Remarques :

(1) Le lemme permet d'affirmer qu'à partir d'une k-génération d'un idempotent e_1 à partir des idempotents t_1, t_2, ..., t_k, on obtient en fait (au plus) 2k idempotent e_1, e_2, ..., e_k, f_1, f_2, ..., f_k (au niveau plus bas), les k idempotent f_i pouvant générer également les e_i.

(2) Les éléments de $S_ie_iP_i$ sont les éléments $\beta_s e_1\alpha_\ell$. On peut supposer s et $\ell \neq 1$ car $\beta_1 = e_1 = \alpha_1$. Ces éléments sont donc exprimés comme produit de 3k-2 (au plus) éléments t_j.

Si l'on suppose que pour un certain indice i_o, α_{i_o} et β_{i_o} sont inverses alors pour tout i :

$$e_i = \beta_i\alpha_i.$$

En effet, si $i > i_o$ $\alpha_i = \alpha_{i_o} t_{i_o} t_{i_o+1} \dots t_{i-1}$ et

$e_i = \beta_i e_1 \alpha_i = \beta_i \alpha_{i_o} \beta_{i_o} \alpha_{i_o} t_{i_o} \dots t_{i-1} = \beta_i \alpha_{i_o} t_{i_o} \dots t_{i-1} = \beta_i \alpha_i$

De même si $i < i_o$ $\beta_i = t_i \dots t_{i_o -1} \beta_{i_o}$ et

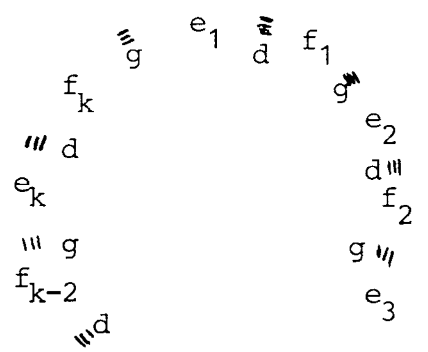
$\beta_i e_1 \alpha_i = t_i \dots \beta_{i_o} \alpha_{i_o} \beta_{i_o} \alpha_i = t_i \dots \beta_{i_o} \alpha_i = \beta_i \alpha_i$

Si $i = i_o$ $e_{i_o} = \beta_{i_o} \alpha_{i_o} \beta_{i_o} \alpha_{i_o} = \beta_{i_o} \alpha_{i_o}$.

Il est facile de voir qu'alors les éléments $\beta_s e_1 \alpha_\ell$ peuvent se réduire à $\beta_s \alpha_\ell$ si $s \leqslant i_o$ ou si $\ell \geqslant i_o$ et dans tous les cas comme produits de 2k-1 (au plus) éléments t_j.

Nous allons préciser la structure d'absorption sur la famille $\{e_i, f_i\}$ par le lemme :

Lemme 4 : <u>Conservant les notations du lemme précédent, les éléments e_i et f_i ($i \in \{1,2,\dots,k\}$) sont dans un même plateau et répondent à la structure d'absorption définie par le schéma ci-dessous</u>



En effet $e_i f_i = e_i e_i t_i = e_i t_i = f_i$ et $f_i e_i = e_i t_i e_i = e_i$ (car $t_i e_i = e_i$).

D'où $e_i \underset{d}{\equiv} f_i$.

De même si $i < k$

$f_i e_{i+1} = e_i t_i e_{i+1} = e_i f_i = f_i$ (d'après ce qui précède)

$e_{i+1} f_i = e_{i+1} t_i e_{i+1} = e_{i+1} e_{i+1} = e_{i+1}$ (car $e_{i+1} t_i = e_{i+1}$).

Soit $e_{i+1} \underset{g}{\equiv} f_i$.

Si $i = k$

$f_k e_1 = t_k e_1 e_1 = t_k e_1 = f_k$

$e_1 f_k = f_1 f_2 \ldots f_k f_k = f_1 f_2 \ldots f_k = e_1$

Donc $e_1 \underset{g}{\equiv} f_k$.

Résultat complémentaire

(a) Si $f_i f_{i-1} = e_i$ $(i > 1)$ [ou $f_1 f_k = e_1$] alors $(f_{i-1}, e_i, f_i, f_{i-1} t_i)$ forme un rectangle [respectivement $(f_k, e_1, f_1, f_k t_1)$] qui est une sous-bande du demi-groupe M.

(b) De même si $e_i e_{i+1} = f_i$ $(i < k)$ [respectivement $e_k e_1 = f_k$] alors $(e_i, f_i, e_{i+1}, e_{i+1} e_i)$ [respectivement $(e_k, f_k, e_1, e_k e_1)$] forme un rectangle qui est une sous-bande de M.

En effet pour (a)

$f_{i-1} t_i f_i = f_{i-1} f_i = e_{i-1} t_{i-1} t_i = f_{i-1} t_i$

et

$f_i f_{i-1} t_i = e_i t_i = f_i$

d'où

$f_{i-1} t_i \underset{g}{\equiv} f_i$

De même

$f_{i-1} t_i f_{i-1} = f_{i-1} f_i f_{i-1} = f_{i-1} e_i = f_{i-1}$

et

$f_{i-1} f_{i-1} t_i = f_{i-1} t_i$

d'où

$f_{i-1} t_i \underset{d}{\equiv} f_{i-1}$

Démonstration analogue pour (b).

III - LES ELEMENTS IDEMPOTENTS SOUS LES PREORDRES ET SOUS L'ORDRE D'ABSORPTION

Il est évident qu'une demi-bande T est un demi-treillis si l'ordre d'absorption est total dans P_T (dans ce cas : $P_T = T$).
Dans la proposition suivante, nous étudions le cas où un préordre d'absorption est total dans P_T.

Proposition 2 : Soit T une demi-bande engendrée par $P_T \subseteq E_T$ avec $|P_T| = n$. Si le préordre d'absorption à gauche [droite] est total dans P_T, alors

(1) T est une bande finie avec $|T| \leqslant 2^n - 1$.

(2) T possède au maximum n classes d'isovalence gauche [droite].

Nous donnons la démonstration pour $\underset{d}{\triangleleft}$:

(1) La totalité de $\underset{d}{\triangleleft}$ dans P_T implique que $t_i \underset{d}{\triangleleft} t_j$ ou $t_j \underset{d}{\triangleleft} t_i$ pour toute paire t_i, t_j de P_T et nous pouvons numéroter les éléments de P_T de facon que :

$$t_1 \underset{d}{\triangleleft} t_2 \underset{d}{\triangleleft} \dots \underset{d}{\triangleleft} t_n \qquad (n = |P_T|)$$

Il s'ensuit que tout produit des éléments de P_T, dont l'indice du facteur le plus droit minore les indices de tous les autres facteurs, est égal à ce dernier facteur. Tout élément t de T peut alors s'écrire sous une forme

$$t = t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$$

où la suite des indices i_j est strictement croissante.
Donc $tt = t_{i_1} \dots t_{i_k} t_{i_1} \dots t_{i_k} = t_{i_1} \dots t_{i_k} = t$. T est alors une bande.

La borne pour le cardinal de T vient d'un fait assez simple de la combinatoire.

(2) Soit P_T préordonnée comme dans (1). Posons $G_i := \{g_i \in T \mid g_i = t_i t_{i_1} \dots t_{i_k}$ avec $i < i_1 < \dots < i_k$ et $t_i, t_{i_j} \in P_T\}$. Il est évident que nous avons : $\forall g_i (g_i \in G_i): g_i \underset{d}{\equiv} t_i$. Comme il y a exactement n ensembles G_i et comme évidemment

$$\bigcup_i G_i = T$$

alors il existe au maximum n classes d'isovalence droite.

Ce nombre maximum est atteint, si P_T est libre d'isovalence droite. Dans ce cas, nous avons pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$:

$$|G_i| = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} = 2^{n-i}$$

Cette proposition nous permet de mettre en évidence la structure (d'absorption droite) de T de la facon suivante :

$$G_1 : t_1 \underset{d}{\equiv} t_1t_2 \underset{d}{\equiv} t_1t_3 \underset{d}{\equiv} \dots \underset{d}{\equiv} t_1t_n \underset{d}{\equiv} t_1t_2t_3 \underset{d}{\equiv} \dots \underset{d}{\equiv} t_1t_2t_n \underset{d}{\equiv} \dots \underset{d}{\equiv} t_1\dots t_n \underset{d}{\lhd}$$

$$G_2 : t_2 \underset{d}{\equiv} t_2t_3 \underset{d}{\equiv} t_2t_4 \underset{d}{\equiv} \dots \underset{d}{\equiv} t_2t_n \underset{d}{\equiv} t_2t_3t_4 \underset{d}{\equiv} \dots \underset{d}{\equiv} t_2t_3t_n \underset{d}{\equiv} \dots \underset{d}{\equiv} t_2\dots t_n \underset{d}{\lhd}$$

$\vdots$

$$G_i : t_i \underset{d}{\equiv} t_it_{i+1} \dots \underset{d}{\lhd}$$

$\vdots$

$G_n : t_n$.

Il est clair que $G_i \cup G_{i+1} \cup \dots \cup G_j$ est une seule classe d'isovalence droite dans T, si les deux éléments t_i et t_j $(i < j)$ sont isovalents à droite.

<u>Corollaire</u> : <u>Si (sous les hypothèses de la proposition 2) les préordres $\underset{g}{\lhd}$ et $\underset{d}{\lhd}$ sont totaux dans P_T, alors l'ordre d'absorption l'est aussi.</u>

Nous pouvons numéroter les éléments de P_T

$t_1 \underset{d}{\lhd} t_2 \underset{d}{\lhd} t_3 \dots \underset{d}{\lhd} t_n$

Mais il existe une bijection $r : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ telle que

$t_{r_1} \underset{g}{\lhd} t_{r_2} \underset{g}{\lhd} t_{r_3} \dots \underset{g}{\lhd} t_{r_n}$

r est croissante (donc l'identité) ; en effet si $i < j$ et $r_i > r_j$, on déduit $t_{r_i} \underset{g}{\lhd} t_{r_j}$ et $t_{r_j} \underset{d}{\lhd} t_{r_i}$ d'où $t_{r_i} = t_{r_j}$ (une contradiction).

L'ordre d'absorption est donc total.

IV - DEMI-BANDE DE TYPE QUATRE ENGENDREE PAR UN CIRCUIT D'IDEMPOTENTS

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des demi-bandes librement engendrées par les 4 idempotents $\{s_1,s_2,t_1,t_2\}$ avec les seules contraintes

$s_1\rho_1 t_1\rho_2 s_2\rho_1 t_2\rho_2 s_1$; ρ_1, $\rho_2 \in \{\underset{g}{\lhd},\underset{d}{\lhd}\}$ et $\rho_1 \neq \rho_2$

Nous désignerons une telle demi-bande par R après avoir supposé sans restreindre la généralité que $\rho_1 = \underset{d}{\lhd}$ et $\rho_2 = \underset{g}{\lhd}$.

Les relations (autres que $s_i^2 = s_i$ et $t_i^2 = t_i$) s'écrivent alors:

$t_1s_1 = s_1 \qquad t_2s_2 = s_2$

$t_1s_2 = t_1 \qquad t_2s_1 = t_2$

soit t_is_j := si $i \neq j$ alors t_i sinon s_j.

Désignons par S, T les demi-bandes libres de type deux respectivement engendrées par $\{s_1,s_2\}$ et $\{t_1,t_2\}$ et dont les éléments sont représentés par des mots "alternés" σ (respectivement τ) sur $\{s_1,s_2\}$ (resp. $\{t_1,t_2\}$).

Soit ST l'ensemble des mots $\sigma\tau$ ($\sigma \in S$, $\tau \in T$). Nous utiliserons les projections p et d définies dans le Chapitre II.

<u>Lemme 5</u> : <u>Tout élément de</u> R <u>peut être représenté par un mot de</u> $S \cup T \cup ST$.

Un élément de R est la classe de congruence d'un certain mot ξ (alterné sur $\{s_1,s_2,t_1,t_2\}$).

Si $|\xi| = 1$ alors $\xi \in S \cup T$.

Si $|\xi| > 1$ et $\xi \notin S \cup T \cup ST$ c'est que ξ contient un sous-mot (segment) de longueur deux de la forme $t_i s_j$. Utilisant alors la relation correspondante ξ peut être raccourci d'au moins une unité. En rejetant éventuellement le processus sur ce nouveau mot, il aboutira donc à un mot Θ avec $\xi \equiv \Theta$ et $\Theta \in S \cup T \cup ST$.

Il reste à prouver que $S \cup T \cup ST$ est un système exact de représentants de R et donc à ériger $S \cup T \cup ST$ en demi-bande. Nous utiliserons un procédé (de type classique).

<u>Définition</u> : Considérons dans le demi-groupe libre X^+ engendré par $X = \{s_1,s_2,t_1,t_2\}$ l'application $\Pi : X^+ \to X^+$ définie récursivement par :

(1) $s_i\Pi := s_i \qquad t_j\Pi := t_j$

(2) Si $\alpha \in X^+$ et sous l'une des deux seules hypothèses

$$\left.\begin{array}{ll}(A) & \alpha\Pi = \xi s_i \\ (B) & \alpha\Pi = \xi t_j\end{array}\right\} \quad (\xi \in X^*)$$

nous définissons $(y \in X)$

<u>Cas A</u> : $(\alpha y)\Pi := \begin{cases} (\alpha\Pi)y & \text{si } y \neq s_i \\ \alpha\Pi & \text{si } y = s_i \end{cases}$

<u>Cas B</u> : $(\alpha y)\Pi := \begin{cases} (\alpha\Pi)y & \text{si } y = t_k \text{ et } k \neq j \\ \alpha\Pi & \text{si } y = t_j \text{ ou } y = s_k \neq s_j \\ \xi s_j & \text{si } y = s_j \text{ et si } [\xi \text{ mot vide ou } \xi d = s_k \neq s_j] \\ \xi & \text{si } y = s_j \text{ et si } [\xi d \in \{t_1,t_2,s_j\}] \end{cases}$

Remarques :

1) Si α désignant un mot, on note $\alpha\downarrow$ le mot duquel on supprime la dernière lettre ; on constate alors que $(\alpha y)\Pi$ est égal soit à $(\alpha\Pi)y$, soit à $(\alpha\Pi)$, soit à $(\alpha\Pi)\downarrow y$, soit à $(\alpha\Pi)\downarrow$.

2) Si $y = t_i$ alors $(\alpha y)\Pi d = t_i$.

Lemme 6 : L'application Π précédemment définie possède les propriétés suivantes.

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \alpha\Pi \in S \cup T \cup ST \\ (2) & \alpha \in S \cup T \cup ST \Longrightarrow \alpha\Pi = \alpha\end{array}\right\} \quad \forall\alpha \in X^+$$

(3) $(\alpha\beta)\Pi = (\alpha\Pi\beta)\Pi \qquad \forall\alpha \in X^+ \quad \forall\beta \in X^+$

(4) $(\xi t_i s_j)\Pi =$ si $i \neq j$ alors $(\xi t_i)\Pi$ sinon $(\xi s_j)\Pi \qquad \forall\xi \in X^*$

(5) $(\alpha\beta)\Pi = (\alpha(\alpha\Pi))\Pi \qquad \forall\alpha \in X^+ \quad \forall\beta \in X^+$.

Démonstration : (1) et (2) : Nous ne détaillerons pas la preuve qui se fait simplement par récurrence sur la longueur de α.

(3) : Par récurrence sur la longueur de β.
Quand $|\beta| = 1$, c'est à dire $\beta = y$, le calcul de $(\alpha\Pi y)\Pi$ donne les résultats possibles $(\alpha\Pi\Pi)y$, $\alpha\Pi\Pi$, $(\alpha\Pi\Pi)\downarrow y$ ou $(\alpha\Pi\Pi)\downarrow$ selon les cas de figures correspondantes à l'examen de la dernière lettre de $\alpha\Pi\Pi$ et de la lettre y. Or de (1) et (2), il résulte que $\alpha\Pi\Pi = \alpha\Pi$. On obtient donc dans les mêmes cas de figure $(\alpha\Pi)y$ ou $\alpha\Pi$ ou $(\alpha\Pi)\downarrow y$ ou $(\alpha\Pi)\downarrow$ c'est à dire le même résultat que $(\alpha y)\Pi$. Cela prouve le résultat quand $|\beta| = 1$.

On suppose la propriété vraie si $|\beta| < n$ et on suppose maintenant $\beta = \beta' y$ avec $|\beta| = n, |\beta'| = n-1$. On a

$(\alpha\beta)\Pi = (\alpha\beta' y)\Pi = ((\alpha\beta')\Pi y)\Pi$	en utilisant la récurrence car $\lvert y\rvert=1$
$= ((\alpha\Pi\beta')\Pi y)\Pi$	en utilisant la récurrence ($\lvert\beta'\rvert < n$)
$= (\alpha\Pi\beta' y)\Pi$	en utilisant la récurrence ($\lvert y\rvert = 1$)
$= (\alpha\Pi\beta)\Pi$	ce qui démontre la propriété quand $\lvert\beta\rvert = n$.

(4) : Cela est évident si ξ est le mot vide.
Si $i \neq j$, il est facile de voir puisque, $(\xi t_i)\Pi d = t_i$, que $(\xi t_i s_j)\Pi = (\xi t_i)\Pi$ (par définition de Π).

Supposons $i = j$. Nous détaillons le calcul de $(\xi t_j s_j)\Pi$ et $(\xi s_j)\Pi$ à partir des différentes hypothèses sur $\xi\Pi$. Ce détail figure dans le tableau suivant :

$\xi\Pi$	$(\xi t_j)\Pi$	$(\xi t_j s_j)\Pi$	$(\xi s_j)\Pi$
αs_k $k \neq j$	$\alpha s_k t_j$	$\alpha s_k s_j$	$\alpha s_k s_j$
αs_j	$\alpha s_j t_j$	αs_j	αs_j
αt_k $k \neq j$	$\alpha t_k t_j$	αt_k	αt_k
αt_j α est vide $\alpha d = s_k \neq s_j$	αt_j	αs_j	αs_j
αt_j $\alpha d \in \{t_1, t_2, s_j\}$	αt_j	α	α

La conclusion est donc établie.

(5) Nous ferons une démonstration par récurrence sur la longueur de β. Le résultat est immédiat si $|\beta| = 1$ $(\beta\Pi = \beta)$.
Supposons la propriété vraie tant que $|\beta| \leqslant n-1$ et soit $\beta = \beta' y$ $(|\beta'| = n-1 \quad y \in X)$.

$(\alpha\beta)\Pi = (\alpha\beta' y)\Pi = ((\alpha\beta')\Pi y)\Pi$ d'après (3)

... $= ((\alpha(\beta'\Pi))\Pi y)\Pi$ par hypothèse de récurrence

... $= (\alpha(\beta'\Pi)y)\Pi$ d'après (3).

a) Si $|\beta'\Pi| < |\beta'|$ alors $|(\beta'\Pi)y| \leqslant n-1$ et par récurrence

... $(\alpha((\beta'\Pi)y)\Pi)\Pi = (\alpha(\beta' y)\Pi)\Pi$ d'après (3)

$= (\alpha(\beta\Pi))\Pi$

b) Si $|\beta'\Pi| = |\beta'|$ alors $\beta'\Pi = \beta'$ et donc $\beta' \in S \cup T \cup ST$.
On peut supposer tout de suite que $|\beta\Pi| < |\beta|$ (sans quoi $\beta\Pi = \beta$ et la propriété est triviale). Cela entraîne que $\beta' \in T \cup ST$ et $y = s_j$. Nous pouvons écrire alors :

$(\alpha\beta)\Pi = (\alpha\beta' s_j)\Pi = (\alpha\xi t_i s_j)\Pi$ en posant $\beta' = \xi t_i$.

D'après (4) si $i \neq j$ on obtient :

$(\alpha\beta)\Pi = (\alpha\xi t_i)\Pi = (\alpha\beta')\Pi$

mais $(\beta)\Pi = (\xi t_i s_j)\Pi = (\xi t_i)\Pi = \beta'\Pi = \beta'$

d'où $(\alpha\beta)\Pi = (\alpha(\beta\Pi))\Pi$

Si $i = j$, on obtient d'après (4) :

$$(\alpha\beta)\Pi = (\alpha\xi s_j)\Pi \text{ mais } |\xi s_j| \leqslant n-1$$

et par récurrence

$$= (\alpha(\xi s_j)\Pi)\Pi = (\alpha(\xi t_i s_j)\Pi)\Pi$$
$$= (\alpha(\beta\Pi))\Pi$$

<u>Proposition 3</u> : <u>La demi-bande</u> R <u>est isomorphe à</u> $S \cup T \cup ST$ <u>avec pour produit</u> α, $\beta \in S \cup T \cup ST$

$$\alpha * \beta \stackrel{def}{=\!=} (\alpha\beta)\Pi$$

Ce produit est en effet associatif.

$(\alpha*\beta)*\gamma = ((\alpha\beta)\Pi\gamma)\Pi = (\alpha\beta\gamma)\Pi$ d'après (3) du lemme

$\alpha*(\beta*\gamma) = (\alpha((\beta\gamma)\Pi))\Pi = (\alpha\beta\gamma)\Pi$ d'après (5) du lemme.

Il est clair que s_1, s_2, t_1, t_2 engendrent le demi-groupe $(S \cup T \cup ST, *)$ que $s_i * s_i = s_i$ et $t_j * t_j = t_j$ et que $t_i * s_j =$ si $i \neq j$ alors t_i sinon s_j.

Tout élément de R est la classe de congruence d'un mot de $S \cup T \cup ST$. Par propriété d'universalité de R, deux mots distincts de $S \cup T \cup ST$ ne sont pas congrus puisque la demi-bande $(S \cup T \cup ST, *)$ entre dans la catégorie de R (et en est donc un quotient trivial).

<u>Remarque</u> :

Il est clair que R contient les sous demi-bandes libres de type deux S et T qui n'ont pas d'autres idempotents que les générateurs.

<u>Notations</u> : Soient $i, j \in \{1,2\}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous noterons :

- R_k l'ensemble des mots de longueur k dans R (assimilé à $S \cup T \cup ST$).
- S_{ij} les 4 sous-ensembles de S formés de mots commencant à s_i et terminant à s_j.
- T_{ij} les 4 sous-ensembles de T formés des mots commencant à t_i et terminant à t_j.
- $(ST)_{ij}$ les 4 sous-ensembles de ST formés des mots commencant à s_i et terminant à t_j.

<u>Lemme 7</u> : <u>S'il existe un idempotent</u> e <u>dans</u> R_k <u>alors</u> :

(a) <u>Si</u> $e \in (ST)_{11}$ (<u>resp</u>. $(ST)_{22}$), <u>alors</u> $s_2 * e$ (<u>resp</u>. $s_1 * e$) <u>est un idempotent (dans</u> R_{k+1}) <u>de</u> $(ST)_{21}$ (<u>resp</u>. $(ST)_{12}$).

(b) <u>Si</u> $e \in (ST)_{12}$ (<u>resp</u>. $(ST)_{21}$) <u>alors</u> $e * t_1$ (<u>resp</u>. $e * t_2$) <u>est un idempotent (dans</u> R_{k+1}) <u>de</u> $(ST)_{11}$ (<u>resp</u>. $(ST)_{22}$).

Démontrons (a). (La démonstration est analogue pour b). e est de la forme $e = s_1e't_1$ d'où $s_2 * e = s_2s_1e't_1 = s_2e$ (est bien de longueur k+1).

$$(s_2*e) * (s_2*e) = s_2s_1e't_1 * s_2s_1e't_1$$
$$= (s_2s_1e') * t_1 * s_2 * s_2 * (s_1e't_1) \text{ mais } t_1 * s_2 = t_1$$
$$= (s_2s_1e') * t_1 * (s_1e't_1) = s_2e * e = s_2 * e * e = s_2 * e$$

Ce qui prouve l'idempotence de $s_2 * e$.

<u>Théorème</u> : (α) <u>La demi-bande</u> R <u>est réunion disjointe des 12 sous demi-groupes</u> S_{ij}, T_{ij}, $(ST)_{ij}$.

(β) R_k <u>a pour cardinal</u> 4k <u>et contient exactement 4 idempotents (un exactement par</u> $(ST)_{ij}$) <u>pour tout entier</u> $k \geq 1$.

(γ) R <u>possède 4 plateaux d'idempotents</u> Σ_1, Σ_2, Θ_1, Θ_2 <u>contenant respectivement les générateurs</u> s_1, s_2, t_1, t_2.

(δ) E_R <u>est réunion de 4 suites infinies disjointes décroissantes (pour l'ordre d'absorption) de maxima respectifs</u> s_1, s_2, t_1, t_2.

(α) Il est clair que S_{ij} (resp. T_{ij}) sont des sous demi-groupes de la sous demi-bande libre S (resp. T) de R. $(ST)_{ij}$ est un sous demi-groupe de R.

En effet si $s_i\alpha t_j$ et $s_i\beta t_j$ sont deux éléments de $(ST)_{ij}$ alors $s_i\alpha t_j * s_i\beta t_j = (s_i\alpha t_j\ s_i\beta t_j)\Pi$. Nous savons (remarque 2, définition de Π) que ce dernier mot se termine à t_j. Il commence à s_i par une propriété analogue : $(s_i\xi)\Pi$ commence par s_i (propriété qu'on voit par récurrence sur la longueur de ξ).

(β) Nous avons deux mots de longueur k dans S et deux de longueur k dans T. Quant aux mots de longueur k dans ST ils sont de la forme $\sigma_m\tau_{k-m}$ avec :

$\sigma_m \in S \cap R_m$ et $\tau_{k-m} \in T \cap R_{k-m}$ et $0 < m < k$

Pour un m donné, il y en a 4. D'où $4(k-1)$.

Au total, il y a donc 4 k éléments dans R_k.

Il est clair que les 4 éléments de R_1 sont idempotents (ce sont les 4 générateurs de R).

Pour $k \geqslant 2$ il n'y a pas d'idempotents dans S, T (qui sont des demi-bandes libres de type deux). Les idempotents ne peuvent donc faire partie que de $(ST)_{ij}$.

Pour $k = 2$ on vérifie de manière évidente que les 4 éléments s_it_j sont idempotents. D'après le lemme précédent, à partir de chaque idempotent de longueur k, dans $(ST)_{ij}$ $(i \neq j)$ [resp. $(ST)_{ii}$] on peut obtenir deux idempotents de longueur k+1 l'un dans $(ST)_{ii}$ et l'autre dans $(ST)_{jj}$ [resp. dans $(ST)_{ij}$ et $(ST)_{ji}$].

Donc on a au moins 4 idempotents de longueur k+1.

Soit e un idempotent de longueur k+1. Supposons qu'il soit dans $(ST)_{ij}$ $(i \neq j)$. Nous avons alors nécessairement $e = s_is_j\alpha t_j$ car l'hypothèse $e = s_it_k\alpha t_j$ $(\alpha \in S^1)$ est contradictoire (pour des raisons de longueur) avec la propriété d'idempotence de e. Soit $e' = t_j{*}e$. Alors e' est idempotent. En effet

$t_j * e * t_j * e = t_j * (e * t_j) * e = t_j * e * e = t_j * e.$
Mais le calcul donne $e' = s_j \alpha t_j$ et donc $e' \in R_k \cap (ST)_{jj}$ et comme $e = s_i * e'$ c'est que e a bien été obtenu à partir de e' par le procédé du lemme précédent.

Une démonstration analogue peut être établie lorsque $e \in (ST)_{ii}$.

(γ) Notons e^n_{ij} ($n \geqslant 2$) l'idempotent de longueur n de $(ST)_{ij}$. Compte-tenu de (β) nous avons ($n \geqslant 3$):

$i \neq j$	$e^n_{ij} = s_i * e^{n-1}_{jj}$	$t_j * e^n_{ij} = e^{n-1}_{jj}$
	$e^n_{ii} = e^{n-1}_{ij} * t_i$	$e^n_{ii} * s_i = e^{n-1}_{ij}$

avec en outre $e^n_{kj} * s_i = e^n_{kj}$ si $i \neq j$

$t_i * e^n_{ik} = e^n_{ik}$ si $i = j$

On en déduit :

$$e^n_{ij} * e^{n-1}_{jj} = e^n_{ij} \quad \text{et} \quad e^{n-1}_{jj} * e^n_{ij} = e^{n-1}_{jj} * s_i * e^{n-1}_{jj} = e^{n-1}_{jj}$$

Soit $e^n_{ij} \underset{g}{\equiv} e^{n-1}_{jj}$ ($i \neq j$)

De même $e^{n-1}_{ij} \underset{d}{\equiv} e^n_{ii}$.

On conclue immédiatement que :

$$s_1 \underset{d}{\equiv} e^2_{11} \underset{g}{\equiv} e^3_{21} \underset{d}{\equiv} e^4_{22} \underset{g}{\equiv} e^5_{12} \underset{d}{\equiv} e^6_{11} \cdots$$

$$s_2 \underset{d}{\equiv} e^2_{22} \underset{g}{\equiv} e^3_{12} \underset{d}{\equiv} e^4_{11} \underset{g}{\equiv} e^5_{21} \underset{d}{\equiv} e^6_{22} \cdots$$

$$t_1 \underset{g}{\equiv} e^2_{21} \underset{d}{\equiv} e^3_{22} \underset{g}{\equiv} e^4_{12} \underset{d}{\equiv} e^5_{11} \underset{g}{\equiv} e^6_{21} \cdots$$

$$t_2 \underset{g}{\equiv} e^2_{12} \underset{d}{\equiv} e^3_{11} \underset{g}{\equiv} e^4_{21} \underset{d}{\equiv} e^5_{22} \underset{g}{\equiv} e^6_{12} \cdots$$

(δ) Une vérification (sans problème) conduit aux relations d'absorption :

$$s_1 \geqslant e^2_{12} \geqslant e^3_{12}$$

$$s_2 \geqslant e^2_{21} \geqslant e^3_{21}$$

$$t_1 \geqslant e^2_{11} \geqslant e^3_{11}$$

$$t_2 \geqslant e^2_{22} \geqslant e^3_{22}$$

De là on prouve par récurrence que

$$e^n_{ij} \geqslant e^{n+1}_{ij} \quad \text{et} \quad e^n_{ii} \geqslant e^{n+1}_{ii} \qquad (i \neq j)$$

En effet (compte tenu des relations établies dans (γ)) :

$$e^{n+1}_{ij} * e^n_{ij} = s_i * e^n_{jj} * s_i * e^{n-1}_{jj} = s_i * e^n_{jj} * e^{n-1}_{jj} = s_i * e^n_{jj} \text{ (par récurrence)}$$

$$= e^{n+1}_{jj}.$$

De même :

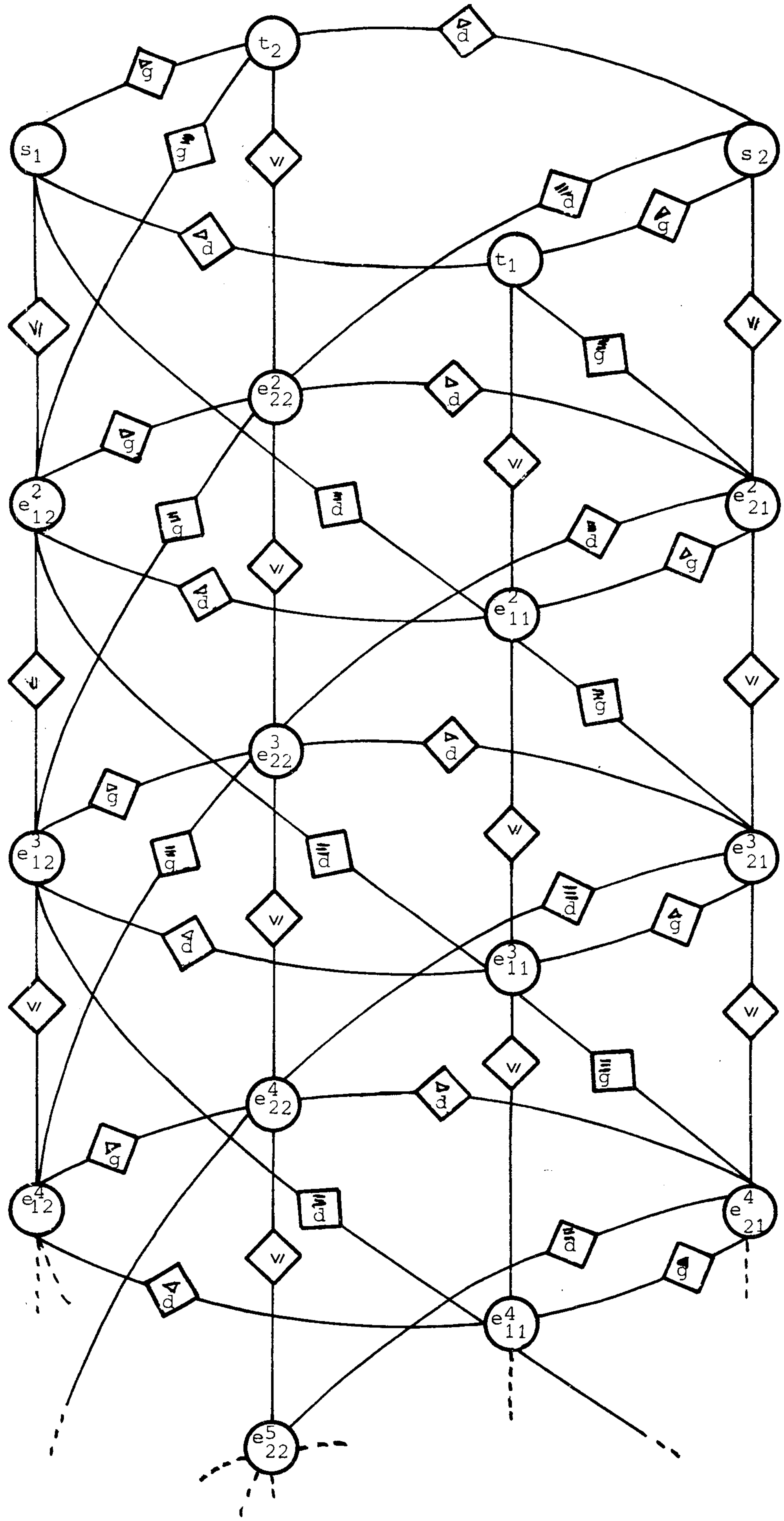
$$e^n_{ij} * e^{n+1}_{ij} = s_i * e^{n-1}_{jj} * s_i * e^n_{jj} = s_i * e^{n-1}_{jj} * e^n_{jj} = s_i * e^n_{jj} = e^{n+1}_{ij}$$

La démonstration est analogue pour $e^n_{ii} \geqslant e^{n+1}_{ii}$.

Corollaire : Pour tout $n \geqslant 1$:

$$e^n_{12} \underset{d}{\lhd} e^n_{11} \underset{g}{\lhd} e^n_{21} \underset{d}{\lhd} e^n_{22} \underset{g}{\lhd} e^n_{12}$$

Nous pouvons dès lors visualiser la structure d'absorption de E_R dans le schéma de la figure.



t_2
s_1
s_2
t_1
e^2_{22}
e^2_{12}
e^2_{21}
e^2_{11}
e^3_{22}
e^3_{12}
e^3_{21}
e^3_{11}
e^4_{22}
e^4_{12}
e^4_{21}
e^4_{11}
e^5_{22}

CHAPITRE IV

LES RELATIONS DE GREEN DANS LES DEMI-BANDES

Ce chapitre est consacré à quelques propriétés des demi-bandes de type fini n qui découlent d'une étude des relations de Green. Les demi-bandes qui sont union de groupes auront une attention particulière.

Tout d'abord, nous constations que pour tout élément t d'une demi-bande T, on a $tT^1 = tT$ et $T^1t = Tt$.

I - LES PLATEAUX D'IDEMPOTENTS D'UNE DEMI-BANDE

Lemme 1 : Soit T une demi-bande. Alors nous avons :

$$T^2 = T$$

Comme il est évident que $T^2 \subseteq T$, il nous reste à démontrer que $T \subseteq T^2$.

Soit donc t un élément quelconque de T. Si $t \in P_T$, où P_T est une partie génératrice idempotente de T, alors évidemment $t \in T^2$. Autrement, nous pouvons écrire t comme produit $t = t_1 \ldots t_k$, $k \geqslant 2$, $t_i \in P_T$. Comme $t_1 \ldots t_{k-1} \in T$ et $t_K \in T$ nous avons donc $t \in T^2$.

c.q.f.d.

Proposition 1 : Soit T une demi-bande, t un élément régulier de T et $s \in T$ un des éléments qui vérifient $t = tst$. Alors les deux idempotents st et ts appartiennent au même plateau d'idempotents contenu dans D_t.

Ecrivons t et s comme produits d'éléments de P_T $t = t_1 t_2 \ldots t_{i-1}$, $s = t_i t_{i+1} \ldots t_k$ $(k \geqslant i \geqslant 2)$. Utilisant les notations du lemme 3 et 4 (chapitre III) on constate que $ts = e_1$ et $st = e_i$ et donc ces éléments sont dans un même plateau. Ce plateau est évidemment complètement contenu dans la $\mathcal{D}$-classe D_t car

$$\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_{ts}.$$

Théorème 1 : Si une $\mathcal{D}$-classe D d'une demi-bande T contient un élément régulier alors D contient un et un seul plateau d'idempotents.

Nous savons que si t est régulier, tout élément de D_t est régulier et D_t contient des idempotents (2.11.[4]).

Soit s tel que tst = t; alors l'idempotent ts $\in D_t$ ($\mathcal{R}_{ts} = \mathcal{R}_t$).

Soit e un autre idempotent de D_t. Il existe x $\in D_t$ tel que e$\mathcal{L}$x et x$\mathcal{R}$ts. Mais x est régulier. Donc il existe y $\in$ T (x = xyx) avec xy, yx $\in E_T$ et x$\mathcal{L}$yx, x$\mathcal{R}$xy. D'où e$\mathcal{L}$yx et xy$\mathcal{R}$ts. S'agissant d'idempotents, il en résulte :

$$e \equiv_g yx \quad \text{et} \quad xy \equiv_d ts$$

D'après la proposition 1, xy et yx sont dans un même plateau. Il en est de même de e et ts.

Ce théorème peut être déduit du lemme 2.2 de [5].

Conséquences immédiates

(1) Toute $\mathcal{D}$-classe d'une demi-bande régulière contient un et un seul plateau d'idempotents.

(2) Une demi-bande est bisimple si et seulement si elle est plate et régulière.

Proposition 2 : Les 3 propriétés suivantes d'une demi-bande T sont équivalentes.

(i) T est bisimple.

(ii) L'ensemble E_T des éléments idempotents de T est un quadrillage.

(iii) Pour tout produit $t = t_1 t_2 \dots t_k$ d'éléments de P_T, on a $t \mathcal{R} t_1$ et $t_k \mathcal{L} t$.

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Soit T bisimple. Donc T est plat d'après les conséquences du théorème 1 et donc demi-groupe $\mathcal{J}P$. L'application du théorème 1.2 de [6] confirme qu'alors l'ensemble E_T (qui est le plateau de T) est un quadrillage.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Soit $t = t_1 t_2 \ldots t_k$. Comme E_T est un quadrillage, il existe, pour tout $j \in \{2,3,\ldots,k\}$, un élément e_j de E_T tel que

$$t_j \underset{d}{\equiv} e_j \quad \text{et} \quad e_j \underset{g}{\equiv} t_{j-1}$$

Donc $t_1 \ldots t_k e_k e_{k-1} \ldots e_2 = t_1$. C'est à dire qu'il existe un élément $\bar{t}$ dans T tel que $t\bar{t} = t_1$. Comme $t_1 t = t$, il en résulte que $t_1 \mathcal{R} t$. La démonstration de $t \mathcal{L} t_k$ est analogue.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : Soient $t, s \in T$ quelconques ; nous les générons par des produits $t = t_1 t_2 \ldots t_k$ et $s = t_{k+1} t_{k+2} \ldots t_\ell$ d'éléments de P_T. Nous avons d'après (ii) :

$t \mathcal{R} t_1 \mathcal{R} t_1 t_\ell \mathcal{L} t_\ell \mathcal{L} s$ et donc $t \mathcal{D} s$.

c.q.f.d.

Nous constations même qu'une demi-bande est bisimple dès qu'une de ses parties génératrices est un quadrillage.

<u>Exemple 1</u> : La demi-bande de table suivante possède les 3 propriétés mentionnées dans la proposition 2 :

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
t_1	t_1	t_3	t_3	t_5	t_5	t_7	t_7	t_1
t_2	t_4	t_2	t_6	t_4	t_8	t_6	t_2	t_8
t_3	t_5	t_3	t_7	t_5	t_1	t_7	t_3	t_1
t_4	t_4	t_6	t_6	t_8	t_8	t_2	t_2	t_4
t_5	t_5	t_7	t_7	t_1	t_1	t_3	t_3	t_5
t_6	t_8	t_6	t_2	t_8	t_4	t_2	t_6	t_4
t_7	t_1	t_7	t_3	t_1	t_5	t_3	t_7	t_5
t_8	t_8	t_2	t_2	t_4	t_4	t_6	t_6	t_8

C'est par ailleurs la demi-bande minimale (relativement au cardinal) de type 2 qui est simple et non-idempotente. Ses idempotents forment le quadrillage $t_1 \underset{d}{\equiv} t_7 \underset{g}{\equiv} t_2 \underset{d}{\equiv} t_8 \underset{g}{\equiv} t_1$ et nous pouvons donc dessiner la "boite aux oeufs" de sa (seule) $\mathcal{D}$-classe.

	L_{t_1}	L_{t_2}
R_{t_1}	t_1 t_5	t_3 t_7
R_{t_2}	t_4 t_8	t_2 t_6

II - <u>DEMI-BANDES ET UNIONS DE GROUPES</u>

<u>Proposition 3</u> : <u>Une demi-bande est union de groupes si et seulement si elle est régulière et si tous ses plateaux d'idempotents sont des quadrillages.</u>

($\Longrightarrow$) : Ce fait est complètement démontré par les théorèmes 1 et 2 de [6], cette implication étant vraie pour tous les demi-groupes.

($\Longleftarrow$) : Soit T une demi-bande régulière dont tous les plateaux sont des quadrillages. Soit D une $\mathcal{D}$-classe de T et $H_{s\cap t} = L_s \cap R_t$ une $\mathcal{H}$-classe de D ($s, t \in D$). Soit maintenant $x \in H_{s\cap t}$ quelconque, c'est à dire $s\mathcal{L}x$ et $x\mathcal{R}t$; les éléments x, s, t étant réguliers, on leur associe $\bar{x}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$ et l'on a :

$$\bar{s}s\mathcal{L}s\mathcal{L}x\mathcal{L}\bar{x}x \quad \text{et} \quad x\bar{x}\mathcal{R}x\mathcal{R}t\mathcal{R}t\bar{t}$$

$x\bar{x}$ et $\bar{x}x$ sont des idempotents de D et appartiennent donc à un même quadrillage Q. Il existe alors un élément $e \in Q$ avec $\bar{x}x \underset{g}{\equiv} e \underset{d}{\equiv} x\bar{x}$. Donc $s\mathcal{L}e$ et $e\mathcal{R}t$ et par suite $e \in H_{s\cap t}$. D'après le théorème 2.16 de [4] $H_{s\cap t}$ est un groupe, ce qui entraîne que D et donc T, sont unions de groupes.

c.q.f.d.

Lemme 2 : *Soit* M *un demi-groupe et* D *une* $\mathcal{D}$-*classe de* M. *Alors les propriétés suivantes de* D *sont équivalentes* :

(i) D *est union de groupes*.

(ii) D *est sous demi-groupe plat de* M.

(iii) D *est sous demi-groupe régulier de* M.

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Si D est union de groupes, il est bien connu que toute $\mathcal{H}$-classe contenue dans D est un groupe.

Soient maintenant s et t des éléments quelconques de D. Par définition de la relation $\mathcal{D}$, il existe un $x \in D$ avec $s\mathcal{L}x\mathcal{R}t$. Comme $H_{s \cap t}$ est un groupe, nous pouvons même poser x = e (e le neutre de $H_{s \cap t}$). Par suite nous avons ($\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ étant régulières, respectivement à droite et à gauche) :

$$sx\mathcal{L}xx = x \quad \text{et} \quad sx\mathcal{R}st \quad \text{et par suite} \quad st \in D \ (\text{car } st\mathcal{D}x).$$

D est donc un demi-groupe et évidemment plat, le plateau étant un quadrillage.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : évident.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : D est bisimple d'après [4 , page 62, ex. 6] et donc simple. Par suite $D^1tD^1 = D^1t^2D^1 = D$ et $t \in D^1t^2D^1$ pour tout $t \in D$. Comme $1t^21 = t^2$ nous pouvons même dire que $t \in Dt^2 \cup t^2D \cup Dt^2D$ (y compris le cas $t = t^2$).

La régularité de D implique alors $t \in Dt^2D$ parce que si par exemple $t \in Dt^2$ ($t = xt^2$, $x \in D$) alors $t = xt^2\bar{t}t$ (en prenant $\bar{t}$ un inverse local de t appartenant nécessairement à D).

D est donc intra-régulière. D'après le lemme 2.1 de [6], D est union de groupes.

c.q.f.d.

Nous rappelons maintenant deux propriétés des demi-groupes réguliers publiées et démontrées dans [5] en redonnant une démonstration directe de la deuxième :

<u>Propriété 1</u> : <u>Soit</u> M <u>un demi-groupe régulier</u>, $n \in \mathbb{N}$ <u>avec</u> $n > 1$, $t \in M$ <u>et</u> D_t <u>la</u> $\mathcal{D}$-<u>classe de</u> t. <u>Alors</u> :

(1) t <u>est produit de</u> n <u>facteurs idempotents si et seulement s'il possède un inverse local dans</u> M <u>produit de</u> n-1 <u>facteurs idempotents</u>.

(2) <u>Si</u> t <u>est produit de</u> n <u>facteurs idempotents de</u> M, <u>alors</u> t <u>est aussi un produit de</u> n <u>facteurs idempotents de</u> D_t.

Preuve de (2) :

Posons $t = t_n$ (t étant produit de n facteurs idempotents). On peut, d'après (1), construire alors une suite t_i ($i := n-1, n-2, \ldots, 1$) d'éléments, inverses locaux respectifs de t_{i+1}, et produit de i idempotents. Nous avons donc :

$$t_i t_{i+1} t_i = t_i \quad \text{et} \quad t_{i+1} t_i t_{i+1} = t_{i+1}$$

D'après la proposition 1, il est clair que les idempotents $t_i t_{i+1}$ et $t_{i+1} t_i$ appartiennent à D_t.

Nous avons :

$$t = t_n = t_n t_{n-1} \ldots t_2 t_1 t_2 \ldots t_{n-1} t_n \quad \text{avec} \quad t_1 \in E_M$$

En groupant les facteurs deux par deux et en dédoublant éventuellement t_1, on arrive au résultat.

Nous pouvons alors énoncer :

<u>Théorème 2</u> : <u>Une demi-bande</u> T <u>est union de groupes si et seulement si elle est régulière. Dans ce cas, toute</u> $\mathcal{D}$-<u>classe de</u> T <u>est une sous demi-bande bisimple de</u> T.

Cela résulte de la proposition 3, du lemme 2 et de la propriété 1 (2).

Nous avons même, compte-tenu de [6] (Théorème 2.1) :

<u>Théorème 3</u> : <u>Une demi-bande</u> T <u>est union de groupes si et seulement si elle est intra-régulière</u>.

Nous complèterons cette étude par l'examen du cas des demi-bandes de torsion.

Théorème 4 : Une demi-bande T est régulière, de torsion si et seulement si elle est cyclique.

La régularité de T entraîne que T est union de groupe. L'hypothèse supplémentaire de torsion implique que tout élément engendre un sous demi-groupe fini (d'un groupe) donc un sous-groupe fini. T est donc cyclique.

La réciproque est évidente (tout demi-groupe cyclique est régulier, de torsion).

Lemme 3 : Soit T une demi-bande de torsion et s_1 un élément de T exprimé par le produit $s_1 = t_1 t_2 \ldots t_k$ d'éléments de P_T. Si l'on désigne par s_i les produits $t_i t_{i+1} \ldots t_k t_1 t_2 \ldots t_{i-1}$ ($i \leq k$) et par ε_i les idempotents respectifs engendrés par ces éléments s_i alors ces idempotents sont dans un même plateau et $\forall i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

$$\varepsilon_i s_i = \varepsilon_i t_i \varepsilon_{i+1} t_{i+1} \ldots \varepsilon_k t_k \varepsilon_1 t_1 \varepsilon_2 t_2 \ldots \varepsilon_{i-1} t_{i-1}$$

Preuve :

Désignons par α_i et β_i les i-èmes préfixes et suffixes de $t_1 t_2 t_3 \ldots t_k$. Alors $s_i = \beta_i \alpha_i$ et nous savons [8] que $\beta_i \alpha_i$ a même période que $\alpha_i \beta_i = s_1$. Donc les s_i ont même période. Par suite il existe un entier n (multiple convenable de la période commune) tel que

$$\varepsilon_i = s_i^n = (t_i t_{i+1} \ldots t_k t_1 t_2 \ldots t_{i-1})^n$$

De là résulte que pour tout $i \in \{1,2,\ldots,k\}$

$$t_i \varepsilon_i = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i t_{i-1} = \varepsilon_i \quad (i \neq 1) \quad \varepsilon_1 t_k = \varepsilon_1$$

$$t_{i-1} \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} t_{i-1} \quad (i \neq 1) \text{ et } t_k \varepsilon_1 = \varepsilon_k t_k$$

D'où l'on déduit :

$$\varepsilon_i \underset{d}{\equiv} \varepsilon_i t_i \qquad \varepsilon_i t_i \underset{g}{\equiv} \varepsilon_{i+1} \qquad \varepsilon_k t_k \underset{g}{\equiv} \varepsilon_1$$

Les ε_i sont donc dans un même plateau.

Nous avons enfin (par les associations indiquées) :

$\varepsilon_i t_i \varepsilon_{i+1} t_{i+1} \ldots \varepsilon_k t_k \varepsilon_1 t_1 \varepsilon_2 t_2 \ldots \varepsilon_{i-1} t_{i-1} =$

$\varepsilon_i \varepsilon_i t_i \varepsilon_{i+1} t_{i+1} \quad t_{k-1} \varepsilon_k t_k \varepsilon_1 t_1 \quad \varepsilon_{i-2} t_{i-2} t_{i-1} =$

$\varepsilon_i t_i \varepsilon_{i+1} t_{i+1} \varepsilon_{i+2} \ldots t_{k-1} \varepsilon_k t_k \varepsilon_1 \ldots t_{i-3} \varepsilon_{i-2} t_{i-2} t_{i-1} =$

$\varepsilon_i \varepsilon_i t_i \varepsilon_{i+1} t_{i+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon_{i-3} t_{i-3} t_{i-2} t_{i-1} =$

etc.......

d'où

$= \varepsilon_i t_i t_{i+1} \ldots t_k t_1 t_2 \ldots t_{i-1} = \varepsilon_i s_i$

Corollaire : Avec les notations du Lemme 3, si T est une demi-bande cyclique alors les éléments s_i sont dans une même $\mathcal{D}$-classe et

$\varepsilon_i t_i \varepsilon_{i+1} t_{i+1} \ldots \varepsilon_k t_k \varepsilon_1 t_1 \ldots \varepsilon_{i-1} t_{i-1} = s_i.$

En effet les ε_i sont dans une même $\mathcal{D}$-classe et s_i dans la $\mathcal{H}$-classe de ε_i ; par ailleurs ε_i est neutre pour s_i donc $\varepsilon_i s_i = s_i$.

Proposition 4 : Une demi-bande T de torsion est cyclique si et seulement si pour toute génération $t = t_1 t_2 \ldots t_k$ d'un élément t de T (par un produit d'éléments de P_T) on a également

$$t = \varepsilon_1 t_1 \varepsilon_2 t_2 \ldots \varepsilon_k t_k$$

où ε_i est l'idempotent engendré par $(t_i t_{i+1} \ldots t_k t_1 \ldots t_{i-1})$.

Cela résulte du Lemme 3 et de son corollaire.

III - QUELQUES RESULTATS COMPLEMENTAIRES

Les propriétés mises en évidence dans la dernière section nous permettent de démontrer facilement que la demi-bande simple présentée dans l'exemple 1 est vraiment minimale relativement au cardinal.

Proposition 5 : Une demi-bande non idempotente et simple possède au moins 8 éléments.

En effet, si T est une telle demi-bande alors $|E_T| \geqslant 4$, car :

- $|E_T| = 2$ entraînerait que $T \cong L_2$ (voir chapitre II) qui n'est pas simple.
- $|E_T| = 3$ est impossible, parce que E_T forme d'après la proposition 2 un quadrillage (les relations $\mathcal{J}$ et $\mathcal{D}$ sont identiques dans les demi-groupes finis). T est donc union d'au moins 4 $\mathcal{H}$-classes qui sont des groupes isomorphes non triviaux si T n'est pas idempotente. Par suite T contient au moins 4 éléments non idempotents, ce qui entraîne que $|M| \geqslant 8$.

c.q.f.d.

Comme $T^2 = T$ pour toute demi-bande T (Lemme 1), il n'existe pas de demi-bande nulle (c'est à dire TT = O) exception faite de la demi-bande triviale. Nous pouvons donc reformuler le Lemme 2.26 de [4] pour les demi-bandes :

Propriété 2 : Une demi-bande avec zéro O, dont $\{O\}$ est le seul idéal propre, est O-simple.

Lemme 4 : Si un demi-groupe de torsion M possède un noyau N, alors N est une $\mathcal{D}$-classe de M.

Par le corollaire 2.30 de [4], nous savons que N est un sous demi-groupe simple de M. Par suite $NxN = N$ pour tout $x \in N$. De plus, nous avons $M^1xM^1 = N$ pour tout $x \in N$ parce qu'évidemment $N \subseteq M^1xM^1$ et $M^1xM^1 \subseteq N$ (N étant un idéal de M). Donc $x\mathcal{J}y$ pour tout $x, y \in N$. Mais $\mathcal{J} = \mathcal{D}$ dans un demi-groupe de torsion.

Soit maintenant $z \in M$ quelconque avec $z\mathcal{D}x$, $x \in N$. Alors nous avons $M^1zM^1 = M^1xM^1 = N$ et comme conséquence $z \in N$. N est donc une $\mathcal{D}$-classe de M.

c.q.f.d.

Ca nous permet de formuler le :

Théorème 5 :

(1) Le noyau d'une demi-bande de torsion T est - s'il existe - une sous demi-bande simple de T.

(2) Toute demi-bande finie contient au moins une $\mathcal{D}$-classe qui est sous demi-bande (simple).

(3) Si l'intersection de tous les idéaux bilatères d'une demi-bande T est un groupe G, alors $|G| = 1$ et l'élément de G est absorbant dans T.

Preuve :

(1) et (2) sont évidents d'après le Lemme 4.

(3) : Comme G est noyau, alors G est une sous demi-bande de T. Donc $|G| = 1$. De plus nous avons $TGT = G$ ce qui démontre que l'élément de G est absorbant dans T.

c.q.f.d.

Il est évident que l'existence d'un zéroide Z dans un demi-groupe M assure l'existence d'un noyau N et que $Z \in N$. N est dans ce cas (d'après [4, § 2.5]) l'ensemble de tous les zéroides de M et de plus un groupe. Il en résulte qu'une demi-bande finie contient au plus un zéroide Z qui est alors élément absorbant.

CHAPITRE V

APPLICATION AUX AUTOMATES ASYNCHRONES

Dans ce chapitre nous abordons l'étude des automates asynchrones finis, basée sur la théorie des automates de MOORE. Cette base est suffisante car l'on peut trouver pour toute automate fini de MEALY un automate de MOORE ayant un fonctionnement externe équivalent [2] .Notre but sera de montrer qu'il existe pour tout automate monogène (d'un état générateur q_o) un automate monogène et asynchrone qui le simule. Au cours de cette étude nous remarquons quelques propriétés supplementaires des demi-bandes, qui complètent les résultats exposés dans les chapitres précédents.

I - RAPPELS ET RESULTATS PRELIMINAIRES

Un automate (fini de MOORE) est un quintouplet (X,Y,Q,δ,λ) où X,Y,Q sont des ensembles finis (d'entrées, de sorties et d'états) et où $\delta : Q \times X \rightarrow Q$ et $\lambda : Q \rightarrow Y$ sont des applications (fonction de transition, de sortie respectivement).

Un tel automate est appelé monogène d'un état générateur q_o s'il existe pour tout état q de Q une chaine d'entrées ξ du monoide libre X^* telle que

$$(q_o,\xi)\delta^* = q$$

où $(x \in X, \xi \in X^*)$:

$$(q,x)\delta^* \underset{\text{def}}{=} (q,x)\delta$$

$$(q,\xi x)\delta^* \underset{\text{def}}{=} ((q,\xi)\delta^*,x)\delta \ .$$

Le fonctionnement externe d'un automate est défini comme l'ensemble (fini)

$$F = \{m_q \mid q \in Q\}$$

où $m_q : X^* \rightarrow Y$ est l'application de travail définie par

$$(\xi)m_q \underset{\text{def}}{=} ((q,\xi)\delta^*)\lambda \ .$$

Un automate est appelé réduit s'il vérifie pour toute paire $q,q' \in Q$:

$$m_q = m_{q'} \Longrightarrow q = q' \ .$$

Deux automates sont dits <u>équivalents</u> lorsqu'ils travaillent sur les mêmes entrées et sorties X et Y et lorsqu'ils ont même fontionnement externe.

Une <u>translation de préfixe</u> σ ($\sigma \in X^*$) est l'application

$$\tau_\sigma : X^* \to X^*$$

définie par

$$(\xi)\tau_\sigma \underset{\text{def}}{=} \sigma\xi .$$

Nous avons donc $\tau_\sigma \tau_{\sigma'} = \tau_{\sigma\sigma'}$.

De [2] nous tirons les deux résultats suivants:

(1) <u>L'ensemble F définissant le fonctionnement externe d'un automate est stable par composition à gauche avec les translations de préfixe de X . En outre si l'automate est monogène (d'état générateur q_o) alors</u> $F = \{\tau_\sigma m_{q_o} \mid \sigma \in X^*\}$.

(2) <u>Réciproquement si l'application</u> $f: X^* \to Y$ <u>vérifie la condition de finitude</u>

(CF) $\quad F = \{\tau_\sigma f \mid \sigma \in X^*\}$ fini

<u>alors il existe un automate réduit et monogène (d'un certain état générateur q_o) ayant F pour fonctionnement externe.</u>

Chaque "programme" ξ ($\xi \in X^*$) pour un automate A donné définit une application $\delta_\xi : Q \to Q$ par

$$(q)\delta_\xi \underset{\text{def}}{=} (q,\xi)\delta^* .$$

L'ensemble $M_A := \{\delta_\xi \mid \xi \in X^*\}$ est fini car Q est fini.C'est de plus un monoide (de neutre $\delta_\varepsilon = i_Q$) pour la composition car $\delta_\xi \delta_{\xi'} = \delta_{\xi\xi'}$. Ce monoide est appelé <u>monoide de transition de l'automate</u> A.

Dans le pratique tout automate possède un certain état initial dans lequel il se trouve lorsqu'il n'a pas encore reçu un symbol d'entrée. Le moins qu'on puisse donc supposer d'un tel automate est qu'il soit monogène de cet état initial. Autrement il possêderait des états inaccessibles et donc superflus. Dans la suite un automate monogène d'un état q_o sera appelé une <u>machine</u> f où f est son application de travail m_{q_o}.

<u>Définition 1</u> : <u>Soit</u> $A = (X,Y,Q,\delta,\lambda)$ <u>un automate fini.</u>

(1) <u>Un état</u> $q \in Q$ <u>est dit stable lorsque pour tout</u> $x \in X$

$$(q)\delta_x = (q)\delta_{xx} .$$

(2) A <u>est appelé asynchrone si tous ses états sont stables.</u>

(3) A <u>est appelé stable de sortie lorsqu'il vérifie</u>

$$\forall x(x \in X)\ \forall \xi(\xi \in X^*)\ \forall q(q \in Q):\ (\xi x)m_q = (\xi xx)m_q .$$

En particulier pour une machine, stable de sortie, $f: X^* \to Y$:

$$\forall x(x \in X)\ \forall(\xi \in X^*):\ (\xi x)f = (\xi xx)f$$ ce qui est équivalent à

$$\forall x(x \in X)\ \forall(q(q \in Q):\ ((q)\delta_x)\lambda = ((q)\delta_{xx})\lambda .$$

<u>Lemme 1</u> : <u>Un automate asynchrone est stable de sortie.</u>

Pour la démonstration soit $A = (X,Y,Q,\delta,\lambda)$ un automate asynchrone, $x \in X, \xi \in X^*$ et $q \in Q$ quelconques. Per définitionem nous avons

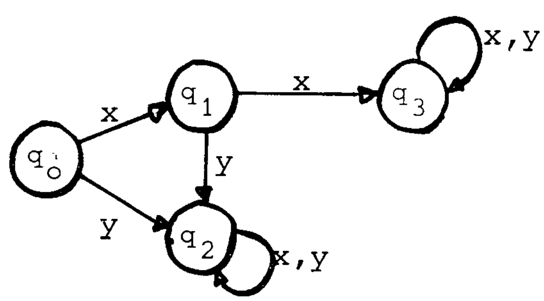
$$(\xi xx)m_q = ((q,\xi xx)\delta^*)\lambda = (((q,\xi)\delta^*,xx)\delta^*)\lambda .$$

Puisque A est asynchrone cela implique

$$(\xi xx)m_q = (((q,\xi)\delta^*,x)\delta)\lambda = (\xi x)m_q$$

ce qui permet de conclure.

Le réciproque de ce lemme n'est en général pas vraie: Regardons par exemple la machine $f = (\{x,y\},\{a,b\},\{q_o,q_1,q_2,q_3\},\delta,\lambda)$ avec le graph de transition (définissant δ)



et $\lambda: \begin{cases} q_o \to a \\ q_1 \to a \\ q_2 \to b \\ q_3 \to a \end{cases}$

f n'est pas asynchrone parce que $(q_o)\delta_x \neq (q_o)\delta_{xx}$. Il vaut

$$(\xi)f = \begin{cases} a & \text{si } \xi \in \{\varepsilon, x\} \cup xxX^* \\ b & \text{autrement} \end{cases}$$

et par conséquence évidente f est stable de sortie. Regardons encore les images de x,y et xy sous les applications de travail m_{q_i} $(0 \leq i \leq 3)$:

	x	y	xy
m_{q_o}	a	b	b
m_{q_1}	a	b	a
m_{q_2}	b	b	b
m_{q_3}	a	a	a

Les fontions m_{q_i} étant différents l'une de l'autre f est même réduite.

A une application $f: X^* \to Y$ (X,Y ensembles finis) on peut associer une congruence binaire $\underset{f}{\equiv}$ sur X^* par

$$\xi \underset{f}{\equiv} \xi' \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\alpha(\alpha \in X^*)\ \forall\beta(\beta \in X^*) : (\alpha\xi\beta)f = (\alpha\xi'\beta)f \ .$$

$\underset{f}{\equiv}$ est d'index fini (ayant un nombre fini de classes) lorsque f vérifie la condition de finitude CF. Notons la classe d'un élément $\xi \in X^*$ par $\tilde{\xi}$ .L' ensemble quotient $X^*/\underset{f}{\equiv}$ est donc un monoide par rapport au produit des classes défini par

$$\tilde{\xi}\tilde{\xi}' \underset{\text{def}}{=} \widetilde{\xi\xi'} \ .$$

De [2,th. III.1] nous savons que le monoide de transition M_f d'une machine réduite f est isomorphe au monoide quotient $X^*/\underset{f}{\equiv}$. Cela nous permet de formuler

Lemme 2 : Soit $f: X^* \to Y$ une machine.

(1) Si f est asynchrone alors le monoide de transition M_f de f est une demi-bande.

(2) <u>Si</u> f <u>est asynchrone alors pour tout</u> $x \in X$: $x \underset{f}{\equiv} xx$

(3) <u>Le réciproque de (2) est vérifié si</u> f <u>est réduite.</u>

Preuve:

(1) D'après la définition du monoide de transition l'ensemble $P_f := \{\delta_x \mid x \in X\}$ forme une partie génératrice de M_f. f étant asynchrone P_f est partie génératrice idempotente ce qui permet de conclure.

(2) f étant asynchrone nous avons

$$\forall q (q \in Q) \ \forall x (x \in X): \ (q)\delta_x = (q)\delta_{xx}.$$

Puisque $(q)\delta_x \in Q$ cela implique

$$\forall \alpha (\alpha \in X^*): \quad (q)\delta_{\alpha x} = (q)\delta_{\alpha xx} \quad \text{et en plus}$$
$$\forall \beta (\beta \in X^*): \quad (q)\delta_{\alpha x\beta} = (q)\delta_{\alpha xx\beta} .$$

Cela permet de conclure.

(3) Soit f réduite et $x \underset{f}{\equiv} xx$ pour tout $x \in X$. Supposons f non asynchrone. Alors il existe au moins un $x \in X$ et un $q \in Q$ tels que

$$q_1 = (q)\delta_x \neq (q)\delta_{xx} = q_2 \quad ; \ q = (q_o)\delta_\xi, \xi \in X^* .$$

Puisque $(\xi x\beta)f = (\xi xx\beta)f$ pour tout $\beta \in X^*$ nous avons

$$((q_1)\delta_\beta)\lambda = ((q_2)\delta_\beta)\lambda$$

pour tout $x \in X^*$ et donc $m_{q_1} = m_{q_2}$ ce qui est une contradiction permettant de conclure.

La démonstration de la clause (1) de ce lemme nous permet de formuler un corollaire par généralisation triviale:

<u>Corollaire</u> : <u>Le monoïde de transition d'un automate asynchrone est une demi-bande.</u>

En outre nous pouvons constater:

<u>Remarque</u> : Pour toute machine $f: X^* \to Y$ il existe une partie génératrice de son monoide de transition ayant un cardinal plus petit ou égal à celui de X. L'égalité vaut lorsqu'il existe pour tout $x \in X$ un ξ dans X^* contenant x tel que $(\xi)f \notin ((X \setminus \{x\})^*)f$.

Soit $(M,\circ)$ un monoide; on lui associe l'application définie par (ε désignera le mot vide de M^*) :

$$(\mu)t_M \ \stackrel{=}{\text{def}} \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \varepsilon \\ m_1\circ\ldots\ldots\circ m_r & \text{si } \mu = m_1\ldots\ldots m_r \ , \ (m_i \in M). \end{cases}$$

t_M est un épimorphisme vérifiant la condition de finitude CF ([2 ,th III.2]). Il existe donc une machine réduite ayant t_M pour application de travail. Cette machine t_M est appelée <u>totalisateur de</u> M . Le monoide de transition M_{t_M} de t_M est évidemment isomorphe à M.

t_M n'est stable de sortie que si M est une bande. Un totalisateur stable de sortie est donc asynchrone.D'autre part cela nous montre que la condition d'avoir une demi-bande pour monoide de transition n'est pas suffisante pour une machine d'être stable de sortie ou asynchrone. Le réciproque du corollaire n'est donc pas vraie en général.

II - <u>LA SIMULATION D'UNE MACHINE QUELCONQUE PAR UNE MACHINE ASYNCHRONE</u>

On dit qu'<u>une machine</u> $g: C^* \to D$ <u>réalise une machine</u> $f: A^* \to B$ $(f \underset{r}{\mid} g)$ s'il existe des applications $\phi: A \to C$ et $\theta: D \to B$ telles que

$$f = \phi^* g \theta$$

où $\phi^*: A^* \to C^*$ est le morphisme engendré par ϕ:

$$(x_1 \ldots\ldots x_n)\phi^* = (x_1)\phi \ldots\ldots (x_n)\phi \ .$$

Il est clair que toute machine se réalise elle même et que pour tout triplet f,g,h de machines

$$f \underset{r}{\mid} g \ \text{ et } \ g \underset{r}{\mid} h \implies f \underset{r}{\mid} h \ .$$

$\underset{r}{\mid}$ peut donc être interprété comme préordre ("être réalisable") dans l'univers des machines.

<u>Rappel 1</u> : <u>([2 ,th IV])Toute machine</u> f <u>est réalisable par le totalisateur de son monoide de transition.</u>

Parallèlement on dit qu'un monoïde M est réalisable par un monoide M' ($M|M'$) lorsqu'il est isomorphe à un quotient d'un sous monoïde de M'. Cela encore représente une "relation" réflexive et transitive dans l'univers des monoïdes.

Rappel 2 : ([2 ,th V.2]) Soient M,M' des monoïdes, t_M et $t_{M'}$ leurs totalisateurs. Alors $M|M' \Rightarrow t_M \mid_r t_{M'}$.

Nous nous intéressons maintenant à la question de savoir si pour une machine quelconque donnée on puisse toujours trouver une machine asynchrone qui la réalise. Le concept de totalisateur introduit n'est pas applicable dans cette recherche puisque (d'après le paragraphe précédent) un totalisateur n'est asynchrone que lorsque son monoide de transition est idempotent. Nous proposons donc la définition suivante:

Définition 2 : Soit $(M,\circ)$ un monoide, P_M une partie génératrice de M. La machine $t_{P_M} : P_M^* \rightarrow M$ définie par (ε désignera le mot vide)

$$(\sigma)t_{P_M} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \varepsilon \\ s_1\circ\ldots\circ s_r & \text{si } \sigma = s_1\ldots s_r \quad (s_i \in P_M) \end{cases}$$

est appelée totalisateur générateur de M (relatif à la partie génératrice P_M).

Comme $(P_M^*)t_{P_M} = M$ il est facile à voir que

$t_{P_M} = (P_M, M, M, \delta, \lambda)$ avec

$\delta : M \times P_M \Rightarrow M$ où $(m,s)\delta = m\circ s$ et $\lambda = id_M$.

t_{P_M} est réduite: Soient $q,q' \in M$ tels que $(\sigma)m_q = (\sigma)m_{q'}$ et donc $(q)\delta_\sigma = (q')\delta_\sigma$ pour tout $\sigma \in P_M^*$. Alors en particulier $(q)\delta_\varepsilon = (q')\delta_\phi$ ce qui veut dire que $q = q'$. Cela permet de conclure.

t_{P_M} <u>est monogène d'état générateur</u> $1 \in M$: (évident)

$t_{P_M} : P_M^* \to M$ <u>est un épimorphisme</u> :

- évidemment t_{P_M} est surjective.
- Soient $\sigma, \sigma' \in P_M^*$ quelconques. Alors

$$(\sigma)t_{P_M} \circ (\sigma')t_{P_M} = s_1 \circ \ldots \circ s_r \circ s'_1 \circ \ldots \circ s'_t = (s_1 \ldots s_r s'_1 \ldots s'_t)t_{P_M} = (\sigma\sigma')t_{P_M} .$$

Donc t_{P_M} est un morphisme ce qui permet de conclure.

Lemme 3 : <u>Soit</u> M <u>un monoide</u>, P <u>une partie génératrice de</u> M. <u>Alors le monoide de transition</u> M_P <u>du totalisateur générateur</u> t_P <u>(relativ à</u> P) <u>est isomorphe à</u> M.

t_P étant réduit M_P est isomorphe au quotient $P^*/\underset{t_P}{\equiv}$. Le fait que $\underset{t_P}{\equiv}$ n'est autre que $t_P t_P^{-1}$ (congruence associe à un épimorphisme) permet de conclure.

Cela nous permet d'énoncer

Lemme 4 : <u>Pour toute demi-bande</u> T <u>il existe un totalisateur générateur asynchrone de</u> T <u>avec</u> T <u>pour monoide de transition</u>.

En ce qui concerne la réalisation nous pouvons dire :

Lemme 5 : <u>Toute machine</u> $f : X^* \to Y$ <u>peut être réalisé par une machine</u> g <u>ayant un ensemble d'entrées de cardinal plus petit où égal à celui de</u> X.

D'après la remarque du paragraphe précédent nous pouvons trouver une partie génératrice P du monoide de transition M_f avec $|P| \leq |X|$, à savoir l'ensemble $\{\delta_x , x \in X\}$. Considérons donc le totalisateur générateur t_P (relativ à P) et définissons

$$\phi : X \to P \qquad \text{par} \quad (x)\phi := \delta_x$$

$$\text{et} \quad \Theta : M_f \to Y \qquad \text{par} \quad (\delta_\xi)\Theta = (\xi)f$$

nous avons évidemment $f = \phi^* t_P \Theta$ ce qui permet de conclure.

Mais :

<u>Lemme 6</u> : (1) <u>Une machine non stable de sortie n'est pas réalisable par une machine stable de sortie</u>.

(2) <u>Une machine réduite et non asynchrone n'est pas réalisable par une machine asynchrone</u>.

Preuve :

(1) Soit $f : A^* \to B$ non stable de sortie. Il existe donc un $a \in A$ et un $\alpha \in A^*$ tels que $(\alpha a)f \neq (\alpha aa)f$. Supposons $g : C^* \to D$ stable de sortie avec $f \underset{r}{|} g$. Alors il existe des applications $\phi : A \to C$ et $\Theta : D \to B$ telles que

$$\forall \mu (\mu \in x^*) \ : \ (\mu)f = (\mu)\phi^* g\Theta \quad \text{et en particulier}$$

$$(\alpha a)\phi^* g\Theta = (\alpha a)f \neq (\alpha aa)f = (\alpha aa)\phi^* g\Theta .$$

Avec $(\alpha a)\phi^* = (\alpha)\phi^* \ (a)\phi$ et $(\alpha aa)\phi^* = (\alpha)\phi^* \ (a)\phi(a)\phi$ c'est une contradiction à g stable de sortie et permet donc de conclure.

(2) Supposons $f : A^* \to B$ non asynchrone. Il existe donc un $a \in A$ et un $\alpha \in A^*$ tels que $q_1 := (q_o)\delta_{\alpha a} \neq (q_o)\delta_{\alpha aa} =: q_2$. f réduite implique $m_{q_1} \neq m_{q_2}$. Par conséquence il existe un $\alpha' \in A^*$ tel que $(\alpha')m_{q_1} \neq (\alpha')m_{q_2}$ et donc

$$(\alpha a\alpha')f \neq (\alpha aa\alpha')f .$$

Pour une machine asynchrone $g : C^* \to D$ avec $f \underset{r}{|} g$ cela impliquerait la contradiction $(\alpha a\alpha')\phi \ g \neq (\alpha aa\alpha')\phi^* g$ permettant de conclure.

Il nous faut donc un concept de réalisation moins fort :

<u>Définition 2</u> : <u>Une machine</u> $g : C^* \to D$ <u>simule une machine</u> $f : A^* \to B$ $(f \underset{s}{|} g)$ <u>s'il existe une application</u> $\Pi : A \to C^*$ <u>et une application</u> $\Theta : D \to B$ <u>telles que</u>

$$f = \Pi^* g\Theta$$

<u>où</u> $\Pi^* : A^* \to C^*$ <u>est le morphisme engendré par</u> Π.

"$\underset{s}{|}$" représente encore un "préordre" dans l'univers de machines.

Evidemment $f \underset{r}{|} g$ implique $f \underset{s}{|} g$ et par conséquent (d'après la démonstration du lemme 5) nous avons

$$f \underset{s}{|} t_{P_{M_f}} \qquad \text{(si f est réduite)}$$

avec $P_{M_f} := \{\tilde{x} \in X/\underset{f}{\equiv} \mid x \in X\}$. En outre nous pouvons démontrer :

<u>Lemme 7</u> : <u>Tout totalisateur générateur relatif à une partie génératrice quelconque du monoide de transition d'une machine f simule f</u>.

Soit $f : X^* \to Y$ une machine, M son monoide de transition et P une partie génératrice de M quelconque. M étant fini et isomorphe au monoide quotient $P^*/_{t_p}\equiv$ nous pouvons associer (par T) à tout $m \in M$ un mot unique (résultant d'un choix) $\mu \in P^*$ tel que $(\mu)t_p = m$. $[\mu = (m)T]$

Cela nous permet de définir l'application $\Pi : X \to P^*$ par $(x)\Pi \underset{\text{def}}{=\!=} (\delta_x)T$. Considérons l'application $\Theta : M \to Y$ définie par $(\delta_\xi)\Theta \underset{\text{def}}{=\!=} (\xi)f$. On verifie alors : $f = \Pi^* t_p \Theta$ ce qui permet de conclure.

<u>Lemme 8</u> : <u>Soient</u> M <u>et</u> S <u>deux monoides</u>, P_M <u>et</u> P_S <u>des parties génératrices quelconques de</u> M <u>et</u> S <u>respectivement. Alors</u> $S | M$ <u>implique</u> $t_{P_S} \underset{s}{|} t_{P_M}$.

Evidemment $t_{P_S} \underset{r}{|} t_S$. D'après le rappel 2 nous savons que $t_S \underset{r}{|} t_M$. D'après le lemme 7 tout totalisateur générateur relatif à une partie génératrice de M simule t_M (M étant isomorphe au monoide de transition de t_M). Par conséquence $t_M \underset{s}{|} t_{P_M}$. Alors $t_{P_S} \underset{r}{|} t_S \underset{r}{|} t_M \underset{s}{|} t_{P_M}$ ce qui permet de conclure.

Si nous parvenons à plonger un monoide M dans une demi-bande T alors d'après le lemme 8 nous pouvons trouver une machine asynchrone simulant le totalisateur de M. Le théorème suivant nous fournit un tel algorithme de plongement.

Indiquons d'abord qu'un monoide M opère fidèlement à droite dans un ensemble X, si ses éléments peuvent être considerés comme des applications $m : X \to X$ avec

$$\forall m,m' (m,m' \in M)\ \forall x (x \in X) : (x)[mm'] = ((x)m)m' \quad \text{et}$$
$$\forall m,m' (m,m' \in M) : m \neq m' \Rightarrow \exists x (x \in X) : (x)m \neq (x)m'.$$

Théorème 1 : ([3]) Tout demi-groupe M est isomorphe à un sous demi-groupe d'une demi-bande T.

Soit $P_M := \{m_i \mid i \in I\}$ une partie génératrice de M. Faisons opérer fidèlement à droite M dans un ensemble X (cela est toujours possible avec $X = M^1$ et le produit ordinaire). Soit X' un ensemble en bijection avec X disjoint de X (la bijection est notée $x \to x'$). Posons $Z = X \cup X'$.

Dans Z les applications

$\varepsilon : Z \to Z$ définie par $(z)\varepsilon = x$, si $z = x \in X$ ou $z = x' \in X'$

$(i \in I)$ $\quad \phi_i : Z \to Z$ définie par

$$(z)\phi_i = \begin{cases} x', & \text{si } z = x' \in X' \\ (xm_i)', & \text{si } z = x \in X \end{cases}$$

sont idempotents et engendrent une demi-bande T qui contient le sous demi-groupe $\mathcal{M}$ engendré par

$$\{\mu_i := \varepsilon\phi_i\varepsilon \mid i \in I\}.$$

Or le calcul donne

$$(x)\mu_i = (x')\mu_i = xm_i \text{ pour tout } x \in X$$

d'où l'on tire aisement l'isomorphisme entre M et $\mathcal{M}$ (μ_i étant le prolongement par "symétrie" de m_i).

Nous pouvons donc formuler le théorème final.

Théorème 2 : Pour toute machine f il existe une machine asynchrone f_a qui la simule.

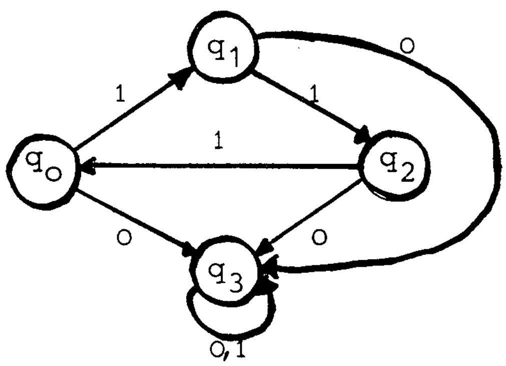
Si f est déjà asynchrone c'est trivial. Sinon nous pouvons trouver (d'après le théorème 1) une demi-bande T_f avec $M_f \mid T_f$. Soient P une partie génératrice idempotente de T_f et t_{M_f} le totalisateur de M_f alors il vaut d'après le lemme 6

$$t_{M_f} \underset{s}{\mid} t_P \ .$$

Evidemment t_P est asynchrone. D'après le rappel 1 nous avons $f \underset{r}{\mid} t_{M_f}$ et par conséquence $f \underset{s}{\mid} t_P$ ce qui était à démontrer.

Un exemple

Soit $A = \{0,1\} \subsetneq \mathbb{N}$. Regardons la machine $f = (A,A,\{q_o,q_1,q_2,q_3\},\delta,\lambda)$ avec le graphe de transition



et $\lambda : \begin{cases} q_o \to 0 \\ q_1 \to 1 \\ q_2 \to 0 \\ q_3 \to 0 \end{cases}$

f est réduite et peut être décrite par l'application $f = m_{q_o} : A^* \to A$ avec

$$(a_1 \dots a_n)f = \begin{cases} 1, & \text{si } \forall a_i (1 \leqslant i \leqslant n) : a_i = 1 \text{ et } \sum\limits_{mod_3} a_i = 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On verifie donc :

$$\forall \alpha (\alpha \in A^* \setminus \{1\}^*) : \qquad \alpha \underset{f}{\equiv} 0$$

$$\forall \alpha (\alpha \in \{1\}^*) : \qquad \left\{ \begin{matrix} \alpha \underset{f}{\equiv} 1 \\ \alpha \underset{f}{\equiv} 11 \\ \alpha \underset{f}{\equiv} 111 \end{matrix} \right\} \text{ si } \sum_{mod_3} a_i = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \right\} .$$

Le monoide de transition $M_f := A^*/\underset{f}{\equiv}$, engendré par $\tilde{0}$ et $\tilde{1}$, peut donc être donné par la table :

	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\widetilde{11}$	$\widetilde{111}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
$\tilde{1}$	$\tilde{0}$	$\widetilde{11}$	$\widetilde{111}$	$\tilde{1}$
$\widetilde{11}$	$\tilde{0}$	$\widetilde{111}$	$\tilde{1}$	$\widetilde{11}$
$\widetilde{111}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\widetilde{11}$	$\widetilde{111}$

Evidemment M_f n'est pas une demi-bande. Posons $B = \{b_o, b_1, b_2, b_3\}$ en bijection avec $B' = \{b'_o, b'_1, b'_2, b'_3\}$. Faisons opérer fidèlement à droite M_f dans B par $\tilde{0}, \tilde{1} : B \to B$ avec $\tilde{0} \underset{\text{const}}{\equiv} b_o$ et

$$\tilde{1} : \begin{cases} b_o \to b_o \\ b_1 \to b_2 \\ b_2 \to b_3 \\ b_3 \to b_1 \end{cases}$$

Les applications ε, ϕ_o, ϕ_1 : $(B \vee B') \to (B \vee B')$ sont donc de table :

	b_o	b_1	b_2	b_3	b'_o	b'_1	b'_2	b'_3
ε	b_o	b_1	b_2	b_3	b_o	b_1	b_2	b_3
ϕ_o	b'_o	b'_o	b'_o	b'_o	b'_o	b'_1	b'_2	b'_3
ϕ_1	b'_o	b'_2	b'_3	b'_1	b'_o	b'_1	b'_2	b'_3

Les applications sont idempotentes et forment donc une partie génératrice idempotente P_T d'une demi-bande T dont le totalisateur générateur t_{P_T} est asynchrone.

Dans T on a :

$$\forall\phi,\phi'(\phi,\phi'\in T)\ \forall b(b\in B\cup B') : (b)\phi\varepsilon\phi_o\varepsilon\phi' = \begin{cases} b_o, \text{si } \phi'=\phi''\varepsilon_1\phi''\in T \\ b'_o, \text{ sinon} \end{cases}$$

et par table

	b_o	b_1	b_2	b_3	b'_o	b'_1	b'_2	b'_3
$\varepsilon\phi_1\varepsilon$	b_o	b_2	b_3	b_1	b_o	b_2	b_3	b_1
$(\varepsilon\phi_1\varepsilon)^2$	b_o	b_3	b_1	b_2	b_o	b_3	b_1	b_2
$(\varepsilon\phi_1\varepsilon)^3$	b_o	b_1	b_2	b_3	b_o	b_1	b_2	b_3
$(\varepsilon\phi_1\varepsilon)^4$	b_o	b_2	b_3	b_1	b_o	b_2	b_3	b_1

et donc $(\varepsilon\phi_1\varepsilon)^n = (\varepsilon\phi_1\varepsilon)^{1+(n-1)\bmod_3}$.

Posons $\Pi : A \rightarrow P_T^*$ avec $\begin{cases} (o)\Pi = \varepsilon\phi_o\varepsilon \\ (1)\Pi = \varepsilon\phi_1\varepsilon \end{cases}$ et $\Theta : T \rightarrow A$ avec $(t)\Theta = \begin{cases} 1, \text{si } t=\varepsilon\phi_1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

alors nous avons $\quad f \mid_s \Pi^* t_{P_T} \Theta$.

Prenons par exemple le "programme" 1111111 A^* :

$$1111111 \xrightarrow{\Pi^*} \underbrace{\varepsilon\phi_1\varepsilon\ldots\ldots\varepsilon\phi_1\varepsilon}_{7 \text{ fois}} \xrightarrow{t_{P_T}} \varepsilon\phi_1\varepsilon \xrightarrow{\Theta} 1 \ .$$

III - LA MISE EN PARALLELE ET EN SERIE DE MACHINES ASYNCHRONES

La mise en parallele de deux machines $f : A^* \to B$ et $g : C^* \to D$ est définie par l'application :

$$f \times g : (A \times C)^* \to B \times D$$

avec

$$(\ )f \times g \underset{def}{\equiv} ((\ )f,\ (\ )g)$$

et avec

$$((a_1,c_1),\ldots,(a_n,c_n))f{\times}g \underset{def}{\equiv} ((a_1\ldots a_n)f,\ (c_1\ldots c_n)g).$$

Nous noterons un mot $\xi \in (A{\times}C)^*$ par (α,γ) où $\alpha \in A^*$, $\gamma \in C^*$ et où α et γ sont de même longueur.

Evidemment $\tau_{(\alpha,\gamma)} f{\times}g = \tau_\alpha f \times \tau_\gamma g$. Par suite l'ensemble $F_{f\times g} \underset{def}{\equiv} \{\tau_{(\alpha,\gamma)} f{\times}g \mid (\alpha,\gamma) \in (A{\times}C)^*\}$ est contenu dans $F_f \times F_g$ et donc fini. Il existe donc une machine réduite finie ayant $F_{f\times g}$ pour fonctionnement externe. Désignons cette machine encore par $f{\times}g$. D'après le théorème V.6 de [2] son monoide de transition $M_{f\times g}$ est réalisable par le produit direct $M_f \times M_g$.

Lemme 9 : La mise en parallele de deux machines asynchrones $f : A^* \to B$ et $g : C^* \to D$ définit une machine asynchrone $f \times g$.

$f \times g$ étant réduite il suffit d'après le lemme 2 à démontrer que $\forall (a,c)\ ((a,c) \in (A{\times}C)) : (a,c) \underset{f\times g}{\equiv} (a,c)(a,c)$.

Soient alors $(\alpha,\gamma),(\alpha',\gamma') \in (A{\times}C)^*$ quelconques. Alors $(\alpha,\gamma)(a,c)(a,c)(\alpha',\gamma')\ f{\times}g = (\alpha a a \alpha', \gamma c c \gamma')\ f{\times}g = ((\alpha a a \alpha')f,$ $(\gamma c c \gamma')g) = ((\alpha a \alpha')f,\ (\gamma c \gamma')g) = ((\alpha,\gamma)(a,c)(\alpha',\gamma'))f{\times}g$ ce qui permet de conclure.

Regardons pour des machines $f : A^* \to B$ et $g : C^* \to D$ quelconques la relation $\rho \subseteq (A \times C)^* \times (A \times C)^*$ définie par

$$(\alpha,\gamma)\ \rho\ (\alpha',\gamma') \underset{\text{def}}{\iff} (\alpha \underset{f}{\equiv} \alpha' \text{ et } \gamma \underset{g}{\equiv} \gamma').$$

$\underset{f}{\equiv}$ et $\underset{g}{\equiv}$ étant des congruences ρ est évidemment une congruence et nous avons

<u>Lemme 10</u> : <u>Soient</u> $f : A^* \to B$ <u>et</u> $g : C^* \to D$ <u>des machines quelconques. Alors les relations</u> ρ <u>et</u> $\underset{f \times g}{\equiv}$ <u>sont identiques</u>.

D'après les définitions de ρ et $\underset{f \times g}{\equiv}$ nous avons évidemment $\rho \subseteq \underset{f \times g}{\equiv}$. Pour la démonstration réciproque soient $(\alpha,\gamma), (\alpha',\gamma') \in (A \times C)^*$ quelconques avec $(\alpha,\gamma) \underset{f \times g}{\equiv} (\alpha',\gamma')$. Supposons $(\alpha,\gamma)\ \not\rho\ (\alpha',\gamma')$ ce qui implique $\alpha \underset{f}{\not\equiv} \alpha'$ ou $\gamma \underset{g}{\not\equiv} \gamma'$. Posons sans restriction de la généralité $\alpha \underset{f}{\not\equiv} \alpha'$. Il existe donc $\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}} \in A^*$ tels que $(\bar{\alpha}\alpha\bar{\bar{\alpha}})f \neq (\bar{\alpha}\alpha'\bar{\bar{\alpha}})f$. Par conséquence il vaut pour $\bar{\gamma}, \bar{\bar{\gamma}} \in C^*$ quelconques ayant la même longueur que $\bar{a}$ et $\bar{\bar{a}}$ respectivement

$$((\bar{\alpha},\bar{\gamma})(\alpha,\gamma)(\bar{\bar{\alpha}},\bar{\bar{\gamma}}))f\times g = ((\bar{\alpha}\alpha\bar{\bar{\alpha}})f, (\bar{\gamma}\gamma\bar{\bar{\gamma}})g) \neq ((\bar{\alpha}\alpha'\bar{\bar{\alpha}})f, (\bar{\gamma}\gamma'\bar{\bar{\gamma}})g) = ((\bar{\alpha},\bar{\gamma})(\alpha',\gamma')(\bar{\bar{\alpha}},\bar{\bar{\gamma}}))f\times g$$

ce qui est une contradiction permettant de conclure.

<u>Lemme 11</u> : <u>Si</u> $f : A^* \to B$ <u>et</u> $g : C^* \to D$ <u>sont des machines asynchrones alors le quotient</u> $(A \times C)^+/\rho$ <u>est isomorphe au produit direct</u> $A^+/\underset{f}{\equiv} \times C^+/\underset{g}{\equiv}$ (X^+ <u>étant le demi-groupe libre (sans mot vide) de l'ensemble</u> X).

Soit $\phi : (A\times C)^{+}/\rho \to A^{+}/\underset{f}{\equiv} \times C^{+}/\underset{g}{\equiv}$ une application définie par $(\tilde{\xi})\phi \underset{\text{def}}{=} (\tilde{\alpha},\tilde{\gamma})$ où $(\alpha,\gamma) \in \tilde{\xi}$.

ϕ <u>est bien définie</u> parce que $(\alpha',\gamma') \in \tilde{\xi} \in (A\times C)^{+}/\rho$ implique $(\alpha',\gamma')\rho(\alpha,\gamma)$ ce qui est équivalent à $\alpha \underset{f}{\equiv} \alpha'$ et $\gamma \underset{g}{\equiv} \gamma'$. Donc $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}$ et $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}$ et par conséquent

$$(\widetilde{(\alpha',\gamma')})\phi = (\tilde{\alpha}',\tilde{\gamma}') = (\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}) = (\widetilde{(\alpha,\gamma)})\phi .$$

ϕ <u>est un morphisme</u> parce que pour $(\alpha,\gamma),(\alpha',\gamma') \in (A\times C)^{+}$ quelconques :

$$(\widetilde{(\alpha,\gamma)}\,\widetilde{(\alpha',\gamma')})\phi = (\widetilde{(\alpha,\gamma)(\alpha',\gamma')})\phi = (\widetilde{(\alpha\alpha',\gamma\gamma')})\phi = (\widetilde{\alpha\alpha'},\widetilde{\gamma\gamma'}) = (\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}',\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}') =$$
$$= (\tilde{\alpha},\tilde{\gamma})(\tilde{\alpha}',\tilde{\gamma}') = (\widetilde{(\alpha,\gamma)})\phi\ (\widetilde{(\alpha',\gamma')})\phi .$$

ϕ <u>est injective</u> : Si $\tilde{\xi} \neq \tilde{\xi}'$ alors il existe $(\alpha,\gamma) \in \tilde{\xi}$ et $(\alpha',\gamma') \in \tilde{\xi}'$ avec $(\alpha,\gamma) \not\rho (\alpha',\gamma')$ ce qui est équivalent à $\alpha \underset{f}{\not\equiv} \alpha'$ ou $\gamma \underset{g}{\not\equiv} \gamma'$ d'où $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\alpha}'$ ou $\tilde{\gamma} \neq \tilde{\gamma}'$ et donc

$$(\tilde{\xi})\phi = (\widetilde{(\alpha,\gamma)})\phi \neq (\widetilde{(\alpha',\gamma')})\phi = (\tilde{\xi}')\phi .$$

ϕ <u>est surjective</u> : Soit $(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}) \in A^{+}/\underset{f}{\equiv} \times C^{+}/\underset{g}{\equiv}$ quelconque avec $\alpha \in \tilde{\alpha}$ et $\gamma \in \tilde{\gamma}$. Si α et γ ont même longueur, alors évidemment $(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}) = (\widetilde{(\alpha,\gamma)})\phi$. Sinon supposons sans restriction de la généralité que $\ell(\alpha) < \ell(\gamma)$ et posons $\Delta := \ell(\gamma) - \ell(\alpha)$.

f étant asynchrone nous savons que si $\alpha = \alpha' a$ avec $\alpha' \in A^{*}$ et $a \in A$ alors $\bar{\alpha} := \alpha\underbrace{a\ldots a}_{\Delta\text{ fois}} \underset{f}{\equiv} \alpha$. $(\bar{\alpha},\gamma)$ est donc un élément de $(A\times C)^{+}$ tel que $(\widetilde{(\bar{\alpha},\gamma)})\phi = (\tilde{\alpha},\tilde{\gamma})$.

En résumé ϕ est un isomorphisme ce qui permet de conclure.

Evidemment $A^+/\underset{f}{\equiv}$ (f : $A^* \to B$ machine quelconque) est isomorphe à $A^*/\underset{f}{\equiv}$ lorsqu'il existe un mot "neutre" $\alpha \in A^+$ tel que pour tout état $q \in Q_f$ $(q)\delta_\alpha = q$. Il est clair que le monoïde de transition $M_{f\times g}$ de la mise en parallele de deux machines réduites f et g qui possèdent chacune une sequence d'entrée non vide comme mot neutre est isomorphe au produit direct $M_f \times M_g$. En ce qui concerne les machines asynchrones il suffit déjà une condition moins forte :

<u>Théorème 3</u> : <u>Soient</u> $f : A^* \to B$ <u>et</u> $g : C^* \to D$ <u>des machines asynchrones réduites avec</u> $A^*/\underset{f}{\equiv} = A^+/\underset{f}{\equiv}$ <u>et</u> $C^*/\underset{g}{\equiv} = C^+/\underset{g}{\equiv}$. <u>Alors le monoïde de transition</u> $M_{f\times g}$ <u>de</u> $f\times g$ <u>est isomorphe au produit direct</u> $M_f \times M_g$.

Le lemme 11 et le fait que $M_f = A^*/\underset{f}{\equiv}$, $M_g = C^*/\underset{f}{\equiv}$ permettent de conclure immédiatement.

Soient M_1 et M_2 deux monoïdes. Associant à chaque élément $m_1 \in M_1$ un morphisme (une <u>déformation</u>) $m_1 : M_2 \to M_2$ on définit dans l'ensemble $M_1 \times M_2$ une opération $\underset{1/2}{\cdot}$ par

$$(m_1, m_2) \underset{1/2}{\cdot} (m_1', m_2') \underset{\text{def}}{=\!=} (m_1 m_1',\ m_2{}^{m_1}(m_2')).$$

$(M_1 \times M_2, \underset{1/2}{\cdot})$ est un monoïde qu'on nomme le <u>produit semidirect de M_1 et M_2</u> $(M_1 \underset{1/2}{\times} M_2)$. Le produit semidirect $T_1 \underset{1/2}{\times} T_2$ de deux demi-bandes T_1 et T_2 n'est pas necessairement un demi-bande.

<u>Exemple</u> : Soient T_1 la demi-bande de table

	t_1	t_2
t_1	t_1	t_1
t_2	t_2	t_2

et T_4 la demi-bande non-idempotente à quatre éléments introduite dans le chap. I. Les déformations $t_1, t_2 : T_4 \to T_4$ soient définies par $t_1 \underset{\text{const}}{\equiv} a$, $t_2 \underset{\text{const}}{\equiv} b$. Ce sont évidemment des endomorphismes. Le produit semidirect. $T_1 \underset{1/2}{\times} T_4$ est donc de table

$T_1 \underset{1/2}{\times} T_4$	$T_1 \times T_4$
(t_1,a)	(t_1,a)
(t_2,a)	(t_2,d)
(t_1,b)	(t_1,c)
(t_2,b)	(t_2,b)
(t_1,c)	(t_1,c)
(t_2,c)	(t_2,c)
(t_1,d)	(t_1,c)
(t_2,d)	(t_2,d)

Donc $(t_1,a),(t_2,b),(t_1,c)$, (t_2,c) et (t_2,d) sont idempotents dans $T_1 \underset{1/2}{\times} T_4$ mais il n'existe pas un produit d'eux engendrant $(t_2,a),(t_1,b)$ ou (t_1,d).

Soient M_1 et M_2 deux monoides, $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications de M_1 dans M_2. Alors $\mathcal{M}$ est un monoide pour la loi d'opération (notée $*$) définie par

$$f*g : M_1 \to M_2 \qquad \text{avec} \qquad (m)f*g \underset{\text{def}}{=\!=} (m)f(m)g$$

Si on associe à tout $m \in M$ une déformation $m : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ avec $(f)m := {}^m f$ où $(x)^m f \underset{\text{def}}{=\!=} (xm)f$ alors le produit semidirect $M \underset{1/2}{\times} \mathcal{M}$ est un monoïde avec comme élément neutre $(1_{M_1}, \varepsilon)$ où $\varepsilon \underset{\text{const}}{\equiv} 1_{M_2}$. Le monoide est appelé le <u>produit en couronne</u>

(<u>wreath product</u>) $M_1 \omega M_2$ de M_1 et M_2.

La <u>mise en serie</u> $f^T g : A^* \to C$ de deux machines $f : A^* \to B$ et $g : B^* \to C$ où $f^T : A^* \to B^*$ est la <u>transduction associée à f</u> définie par (ε désignera le mot vide de A^* et B^*)

$$(\varepsilon) f^T = \varepsilon$$

$$(a_1 \ldots a_n) f^T = (a_1) f (a_1 a_2) f \ldots\ldots (a_1 \ldots a_n) f$$

est une machine finie dont le monoide de transition H est réalisable par le produit en couronne $M_f \omega M_g$ ([2 , th.7.2])

<u>Lemme 13</u> : <u>Si</u> $f : A^* \to B$ <u>et</u> $g : B^* \to C$ <u>sont des machines asynchrones alors pour tout</u> $a \in A$: $a \underset{f^T g}{\equiv} aa$.

Soient $\alpha, \beta \in A^*$ quelconques, $\beta = \beta_1 \ldots \beta_n$ $(\beta_i \in A)$.
Alors $(\alpha a a \beta) f^T g = ((\alpha) f^T (\alpha a) f \ (\alpha a a) f \ (\alpha a a \beta_1) f \ldots (\alpha a a \beta) f) g$.
f étant asynchrone c'est égal à $((\alpha) f^T (\alpha a) f (\alpha a) f (\alpha a \beta_1) f \ldots (\alpha a \beta) f) g$. g étant asynchrone c'est égal à $((\alpha) f^T (\alpha a) f (\alpha a \beta_1) f \ldots \ldots (\alpha a \beta) f) g$ et donc à $(\alpha a \beta) f^T g$ ce qui permet de conclure.

La machine réduite h qui a pour fonctionnement externe l'ensemble $\{\tau_\alpha f^T g \mid \alpha \in A^*\}$ est donc asynchrone si f et g sont asynchrones.

B I B L I O G R A P H I E

[1] ARBIB, M. ALGEBRAIC THEORY OF MACHINES, LANGUAGES AND SEMI GROUPS , Acad. Press 1968

[2] BENZAKEN, C. cours d' ALGEBRE APPLIQUEE Université de Grenoble, I.R.M.A. 1975

[3] BENZAKEN, C. et MAYR, H.C. NOTION DE DEMI-BANDE,DEMI-BANDE DE TYPE DEUX Semigroup Forum Vol 10 (1975), 115-128

[4] CLIFFORD, A.H. PRESTON, G.B. THE ALGEBRAIC THEORY OF SEMI GROUPS A.M.S. 1(1961), 1-224

[5] EBERHART, C. WILLIAMS, W. and KINCH, L. IDEMPOTENT-GENERATED REGULAR SEMI GROUPS Journal of the Australian Math. Soc. 15 part 1 (Feb. 1973), 27-34

[6] EL-KARI, Y. PLATEAUX D'IDEMPOTENTS DANS UN MONOIDE Thèse présentée à l'université scientifique et medicale de Grenoble, 1972

[7] KUNTZMANN, J. SUR LES IDEMPOTENTS D'UN MONOIDE Bull. Math. de la soc. Math. de la Rep. de Roumanie, T. 14, N 2 (1970), 181-188

[8] KUNTZMANN, J. et BENZAKEN, C. MONOIDE - ETUDE MORPHOLOGIQUE Université de Grenoble, Mathématiques Appliquées, 1970-1971

[9] LALLEMENT, G.J. Communication personelle (1974)