Points extrémaux, multi-applications et fonctionnelles intégrales

Mustapha Benamara

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
en MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Mustapha **BENAMARA**

POINTS EXTREMAUX, MULTI-APPLICATIONS ET FONCTIONNELLES INTEGRALES

Thèse soutenue le 26 juin 1975 devant la Commission d'Examen :

Président : Monsieur A. BERNARD

Examinateurs : Monsieur P.J. LAURENT
Monsieur M. VALADIER
Monsieur B. VAN CUTSEM

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF	Présidents	M. Louis NEEL
M. Gabriel CAU	Vice-Présidents	MM. Lucien BONNETAIN Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	ELectrochimie
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrométallurgie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	ELectronique
	COUMES André	Radioélectricité
	FELICI Noël	Electrostatique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	SANTON Lucien	Mécanique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DURAND Françis	Metallurgie
	MOREAU René	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	ELectrotechnique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	CHARTIER Germain	Electronique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
	LACOUME Jean Louis	Géophisique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIERE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan Doré	Automatique

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées

Fait à Saint Martin d'Hères JANVIER 1974

A mes Parents

Cette thèse a été entièrement préparée à l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

C'est le Professeur P.J. LAURENT qui, après m'avoir enseigné les bases de l'Analyse Convexe, m'a suggéré l'idée de cette recherche. Je lui exprime ici toute ma reconnaissance tant pour l'intérêt qu'il m'a porté que pour la sympathie qu'il m'a témoignée.

Ma reconnaissance va également à Monsieur M. VALADIER, de l'Université de Montpellier, qui n'a cessé de me prodiguer ses encouragements et ses connaissances. Ses seuls écrits ont été pour moi autant d'axes de recherche.

Je remercie, de la manière la plus expressive, le Professeur A. BERNARD pour l'honneur qu'il me fait en président ce jury, ainsi que Monsieur B. VAN CUTSEM, qui m'a initié à la théorie des multi-applications mesurables, bien avant le début de ce travail.

Je profite également de l'occasion pour adresser mes remerciements au Professeur R.T. ROCKAFELLAR, de l'Université de Washington (Seattle), pour toutes les discussions que nous avons eues lors de son séjour à Grenoble.

Enfin, comment ne pas remercier Madame MEYRIEUX, hier Mademoiselle PAYERNE, pour sa patience dans la frappe de ce manuscrit, et toutes les personnes du Service Reproduction qui auront contribué à son impression.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

En 1967, E.G. Gol'štein considère le problème de "globale" approximation suivant :

Soit E un espace Banach séparable et G une partie convexe de E. Soit K une partie borélienne de E, bornée, munie d'une mesure α finie. On pose pour tout $x \in E$:

$$d(x) = \int_{y \in K} \|y-x\| \, d\alpha$$

et on cherche un élément $\bar{x} \in G$, tel que :

$$d(\bar{x}) = \min_{x \in G} d(x) ,$$

Ce problème peut se généraliser de la manière suivante : Soit (T,τ,μ) un espace mesuré σ-finie. On définit l'espace de Banach L^1_E (cf. N. Dunford et J. Schwartz) des applications $X : T \to E$ μ-mesurables pour lesquelles la norme :

$$\|X\|_1 = \int_T \|X(t)\| \, \mu(dt)$$

est finie. On considère un ensemble $\mathbb{G}$ convexe de L^1_E et $X_o \in L^1_E \setminus \mathbb{G}$. Le problème est de trouver $\bar{X} \in \mathbb{G}$, tel que :

$$\|\bar{X}-X_o\|_1 = \min_{X \in \mathbb{G}} \|X-X_o\| .$$

Si, on fait :

$$T = K \quad , \mu = \alpha \ , \quad X_o(t) = t \quad \text{pour tout} \quad t \in T \quad \text{et} \quad \mathbb{G} = G \ ,$$

on retrouve le problème de E.G. Gol'štein. Le problème initial est donc ramené à un problème de meilleure approximation dans un espace normé.

On voudrait alors appliquer les théorèmes de caractérisation généraux des solutions (cf. I. Singer, P.J. Laurent, R.B. Holmes) à l'aide des éléments de la boule unité $\mathbb{B}'$ de l'espace dual. Sachant que cet espace est identifiable (cf. N. Dinculeanu ou A. et C. Ionescu Tulcea) à l'espace $L^{\infty}_{E'_s}$ des applications $Y : T \to E'_s$ μ-mesurables pour lesquelles la norme :

$$\|Y\|_{\infty} = \mu\text{-ess-}\sup_{T} \|Y(t)\|$$

est finie , on aura par suite :

$$\mathbb{B}' = \{Y \in L^{\infty}_{E'_s} \ , \ Y(t) \in \mathbb{B}_{E'} \quad \mu\text{ -p.p.}\}$$

où $\mathbb{B}_{E'}$ désigne la boule unité de l'espace normé E'.
Le théorème de caractérisation s'établira alors aisément et le résultat de E.G. Gol'štein en découlera comme un cas particulier.

Considérons maintenant le cas où le convexe $\mathbb{C}$ est un sous espace vectoriel V de dimension finie n .
Dans ce cas, on sait (cf. Les Auteurs cités plus haut) que les solutions du problème de meilleure approximation peuvent être caractérisées de manière plus fine à l'aide des éléments extrémaux de $\mathbb{B}'$. On trouve alors le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> : Un élément $\bar{X} \in V$ est solution du problème de meilleure approximation si et seulement s'il existe $Y_1,\dots,Y_k \in \xi(\mathbb{B}')$,

$$(1 \leq k \leq n+1), \ \rho_1,\dots,\rho_k > 0 \ , \ \sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1 \ , \text{ tels que :}$$

1°/ $Y_i \in \xi(\mathbb{B}')$, $i=1,\dots,k$

2°/ $\int_T < \bar{X}(t)-X_o(t), Y_i(t) > \mu(dt) = \int_T \|\bar{X}(t)-X_o(t)\| \mu(dt)$, $i=1,\dots,k$

3°/ $\sum_{i=1}^{k} \rho_i \, Y_i \in V^{\perp}$,

(où $\xi(\mathbb{B}')$ désigne l'ensemble des points extrémaux de $\mathbb{B}'$).

Mais le problème n'est pas résolu pour autant puisque deux questions restent en suspens :

<u>Question 1</u> : Quelle est la nature de l'ensemble $\xi(\mathbb{B}')$?
En caractériser les éléments.

<u>Question 2</u> : Que peut-on dire de l'entier k ? Le calculer, si possible.

C'est en essayant de répondre à ces deux questions que ce travail à vu le jour .

— Au chapitre I, on répond complètement à la question 1.

— Le chapitre III est consacré à la question 2. Là encore le problème est entièrement résolu, au moins dans le cas où la mesure μ est sans atome. On y donne en outre une extension du théorème de convexité de Lyapunov et certains autres résultats qui sont autant de curiosités mathématiques propres à la dimension infinie mais dont l'intérêt est certain.

— La raison d'être du chapitre II est la suivante :

Posons pour tout $t \in T$ et $x \in E$

$$f(t,x) = \|x-X_o(t)\|$$

Il est clair que pour tout $X \in L^1_E$, l'application $t \to f(t,X(t))$ est μ-intégrable. Aussi la fonctionnelle donnée par :

$$I_f(X) = \int_T f(t,X(t))\mu(dt) ,$$

est-elle bien définie sur L^1_E . On peut alors pour une fonctionnelle I_f du type précédent se poser le problème encore plus général suivant :

Trouver $\bar{X} \in V$ tel que :

$$I_f(\bar{X}) = \min_{X \in V} I_f(X) .$$

C'est ainsi qu'on a été amené à chercher des conditions d'existence, par suite des conditions d'inf-compacité pour ce genre de fonctionnelles, dans la direction tracée par R.T. Rockafellar (b), c), e), f), g)). Ces conditions sont primordiales pour illustrer les résultats du chapitre III.

— Enfin, au chapitre IV, on s'intéresse au problème de la minimisation de la fonctionnelle I_f , précédente, sur une variété affine fermée de codimension finie. On aboutit à un théorème de convexité et d'existence en l'absence d'hypothèses de convexité.

CHAPITRE 0

RAPPELS

(Tous les rappels qui sont faits ici sont tirés du livre de P.J. Laurent).

On note :

$$\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad .$$

On étend aisément à $\bar{\mathbb{R}}$ les lois d'addition, de multiplication et de multi-application par un scalaire sur $\mathbb{R}$, avec la convention importante que :

$$(-\infty) + (+\infty) = -\infty \quad .$$

Si X est un e.v.t., on désigne par $\bar{\mathbb{R}}^X$ l'espace de toutes les fonctionnelles définies sur X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Une fonctionnelle $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est dite <u>propre</u> si elle ne prend jamais la valeur $-\infty$ et si elle est finie en au moins un point.

L'<u>épigraphe</u> et le <u>domaine effectif</u> de $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, sont donnés respectivement par :

$$\text{épi } f = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}$$

et

$$\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \quad .$$

1 - <u>FONCTIONNELLES CONVEXES</u>.

1.1. <u>DEFINITION</u> : On dit que $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est <u>convexe</u> si pour tout $x_1, x_2 \in X$ et tout $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_1+\rho_2 = 1$, on a :

$$f(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2) \leq \rho_1 f(x_1) + \rho_2 f(x_2) \; .$$

On a alors le résultat :

1.2. PROPOSITION : Une fonctionnelle $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est convexe si et seulement si son épigraphe épi f est une partie convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

2 - FONCTIONNELLES SEMI-CONTINUE INFERIEUREMENT.

2.1. DEFINITION : On dit que $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est semi-continue inférieurement en $x_o \in X$ si pour tout $k \in \mathbb{R}$, vérifiant $k < f(x_o)$, il existe un voisinage Ω de x_o tel que pour tout $x \in \Omega$, on ait $k < f(x)$.
On dit que f est s.c.i. si f est s.c.i. en tout point $x_o \in X$.

2.2. PROPOSITION ET DEFINITION :
Pour une fonctionnelle $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, il existe une plus grande fonctionnelle s.c.i. qui la minore ; on la note $\bar{f}$.
On a alors :

$$\bar{f}(x) = \underline{\lim}_{y \to x} f(y) .$$

La proposition suivante établit le lien entre les ensembles épi f et épi $\bar{f}$:

2.3. PROPOSITION : Pour tout $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, on a :

$$\text{épi } \bar{f} = \overline{\text{épi } f} .$$

On caractérise alors ainsi les fonctionnelles s.c.i. :

2.4. PROPOSITION : Pour tout $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1°/ f est s.c.i.

2°/ $f = \bar{f}$

3°/ l'ensemble épi f est fermé dans $X \times \mathbb{R}$

4°/ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble
$$\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$$
est fermé dans X .

3 - FONCTIONNELLES SEMI-CONTINUE SUPERIEUREMENT ET FONCTIONNELLES CONTINUES.

3.1. DEFINITION : On dit que $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en $x_o \in X$ si l'application $-f$ est s.c.i. en x_o . On dit que $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est s.c.s. si f est s.c.s. en tout point $x_o \in X$.
On dit enfin que $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est continue en $x_o \in X$ (resp. continue) si f est à la fois s.c.i. et s.c.s. en x_o (resp. s.c.i. et s.c.s.).

Le théorème suivant est dû de manière indépendante à A. Brøndsted et à R.T. Rockafellar. On s'y réfèrera comme étant le critère de Brøndsted-Rockafellar.

3.2. THEOREME : Soit E un espace de Banach et $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$, convexe et s.c.i. Alors, f est continue en tout point $x_o \in \text{int}\,(\text{dom}\, f)$.

4 - FONCTIONNELLE POLAIRE.

Soit X et Y deux e.l.c.s. en dualité par rapport à une forme bilinéaire $< .,. >$.

Pour $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, on définit sa polaire f^* par :

$$f^*(y) = \sup \{<x,y> - f(x) \mid x \in X\} \text{ , pour tout } y \in Y .$$

La fonctionnelle polaire, ainsi définie appartient à $\bar{\mathbb{R}}^X$. Elle est de plus convexe et s.c.i.

La bipolaire f^{**}, de f est définie par $f^{**} = (f^*)^*$.

On a alors le théorème des bipolaires pour les fonctionnelles:

4.1. THEOREME (Fenchel-Moreau) :

Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ propre. Alors on a $f = f^{**}$ si et seulement si f est convexe et s.c.i.

5 - FONCTIONNELLES INF-COMPACTES.

5.1. DEFINITION : Une fonctionnelle $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est dite inf-compacte (resp. inf-compact pour la pente $y \in Y$) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$$

(resp. $\{x \in X \mid f(x) - < x,y > \leq \lambda\}$

est compact.

Cette définition conduit alors au théorème fondamental de la théorie de la dualité :

5.2. THEOREME ; (J.J. Moreau) :

Une fonctionnelle $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, convexe et s.c.i., est finie et $\tau(X,Y)$ continue en $x_o \in X$ si et seulement si sa fonctionnelle polaire f^* est $\sigma(Y,X)$ inf-compacte pour la pente x_o.

6 - SOUS DIFFERENTIEL.

Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ et $x_o \in X$. On définit le sous différentiel de f au point x_o et on note $\partial f(x_o)$, le sous ensemble (éventuellement vide) de Y, défini par :

$$\partial f(x_o) = \{y \mid f(x_o) + f^*(y) = < x_o, y >\} \quad .$$

Le théorème suivant découle du précédent :

6.1. <u>THEOREME</u> : Si la fonctionnelle convexe $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, est finie et continue en x_o , alors le sous différentiel de f en x_o est un convexe non vide Y , qui est compact pour la topologie $\sigma(Y,X)$.

CHAPITRE I

POINTS EXTREMAUX ET MULTI-APPLICATIONS

RESUME : Dans ce travail, on s'intéresse à tout ce qui est relatif à la notion de point extrémal dans la théorie des multi-applications, notamment à l'existence et à la caractérisation des sections extrémales.

1°) On considère d'abord le cas d'une multi-application scalairement mesurable, à valeurs convexes compactes et l'on montre en particulier que la multi-application $t \to \xi(\Gamma(t))$ (points extrémaux de $\Gamma(t)$) est de graphe mesurable, généralisant ainsi un résultat connu. On donne en même temps une caractérisation naturelle des sections extrémales scalairement mesurables.

2°) On considère ensuite dans le cadre des multi-applications de graphe mesurable, les classes de sections mesurables. On en caractérise les points extrémaux et on applique le résultat au cas d'espaces du type L^{∞}_{E} .

0 - DEFINITIONS, NOTATIONS ET REMARQUES PRELIMINAIRES.

On appelle espace mesurable (T,τ) un ensemble T muni d'une tribu τ .

Pour un espace topologique E, on notera $\beta(E)$ sa tribu borélienne (i.e. la tribu engendrée par les fermés de E).

Une multi-application $\Gamma : T \to E$ est une application de T dans $P(E)$, l'ensemble des parties de E.
On définit son graphe $G(\Gamma)$ par :

$$G(\Gamma) = \{(t,x) \in T \times E \mid x \in \Gamma(t)\} .$$

Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel (e.v.) X (réel). Pour tout $x \in X$, on pose :

$$S(A;x) = A \cap (2x-A) .$$

On a :

a) $S(A;x)$ est convexe et est une partie non vide si et seulement si x appartient à A.

b) Pour tout $x \in A$, $S(A;x)$ est la plus grande partie symétrique par rapport à x incluse dans A.

c) Si $\xi(A)$ représente l'ensemble des points extrémaux de A alors :
x appartient à $\xi(A)$ si et seulement si l'ensemble $S(A;x)$ est réduit à $\{x\}$.

Dans ce qui suit, pour une multi-application Γ de T dans X, à valeurs convexes et pour une application α de T dans X, on notera analogiquement par $\xi(\Gamma)$, la multi-application définie par :

$$\xi(\Gamma)(t) = \xi(\Gamma(t)) \qquad , \qquad t \in T$$

et :

$S(\Gamma;\alpha)$, la multi-application définie par :

$$S(\Gamma;\alpha)(t) = S(\Gamma(t);\alpha(t)) \qquad , \qquad t \in T \quad .$$

1 - SECTIONS EXTREMALES SCALAIREMENT MESURABLES.

Soit (T,τ) un espace mesurable, E un e.l.c.s. (espace localement convexe séparé) de dual E' et Γ une multi-application à valeurs convexes compactes de T dans E.

1.1. DEFINITION : Γ est dite scalairement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application
$t \to \varphi(\Gamma(t);x') = \sup \{< x,x' > \mid x \in \Gamma(t)\}$
est mesurable.

Cette définition a conduit aux propriétés fondamentales suivantes [cf. M. Valadier a) ou b)] :

A - Si Γ est scalairement mesurable, si $x' \in E'$ et $\rho : T \to \mathbb{R}$ mesurable, alors la multi-application
$t \to \Sigma(t) = \{x \in \Gamma(t) \mid < x,x' > = \rho(t)\}$
est scalairement mesurable.

B - Si $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de multi-application de T dans E à valeurs convexes compactes, scalairement mesurables, décroissante (i.e. pour tout n et t , $\Gamma_{n+1}(t) \subset \Gamma_n(t)$) alors la multi-application

$$t \to \bigcap_n \Gamma_n(t)$$

est scalairement mesurable.

C - S'il existe une suite e'_n dans E', séparant les points de E et si Γ est scalairement mesurable alors la suite des multi-applications définie par :

$$\Gamma_{-1}(t) = \Gamma(t) \qquad , \qquad t \in T$$

$$\Gamma_n(t) = \{\bar{x} \in \Gamma_{n-1}(t) \mid \langle \bar{x}, e'_n \rangle = \varphi(\Gamma_{n-1}(t), e'_n)\} \quad ,$$

$$n \in \mathbb{N} \ , \ t \in T \quad ,$$

définit de manière univoque une application :

$$t \to \bigcap_n \Gamma_n(t) = \{f(t)\}$$

scalairement mesurable telle que $f(t) \in \xi(\Gamma(t))$, $t \in T$.

1.2. <u>REMARQUE</u> : Si E_1, E_2 sont deux e.l.c.s. et Γ_1, Γ_2 deux multi-applications à valeurs convexes compactes scalairement mesurables de T dans E_1 et E_2 respectivement alors il en est de même de la multi-application $t \to \Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t)$ de T dans $E_1 \times E_2$, car :

$$\varphi(\Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t);(x'_1,x'_2)) = \varphi(\Gamma_1(t);x'_1) + \varphi(\Gamma_2(t);x'_2) \tag{1}$$

Cette remarque permet, avec ce qui précède, d'établir le lemme important suivant :

1.3. LEMME : S'il existe dans E', une suite e'_n séparant les points de E et si Γ_1 et Γ_2 sont deux multi-applications de T dans E à valeurs convexes compactes scalairement mesurables, alors la multi-application $t \to \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$ est scalairement mesurable.

DEMONSTRATION :

D'après la remarque précédente, la multi-application $t \to \Delta_{-1}(t) = \Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t)$, est scalairement mesurable de T dans $E \times E$. De la propriété (A), on déduit par récurrence que les multi-applications

$$t \to \Delta_n(t) = \{(x_1,x_2) \in \Delta_{n-1}(t) \mid \langle x_1,e'_n \rangle = \langle x_2,e'_n \rangle\}$$

sont scalairement mesurables. Comme la suite Δ_n est décroissante, d'après la propriété (B) la multi-application

$$\begin{aligned} t \to \Delta_\infty(t) &= \bigcap_n \Delta_n(t) \\ &= [\Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)]^2 \end{aligned}$$

est scalairement mesurable. Par suite en appliquant la relation (1) l'application

$$\begin{aligned} t \to \varphi(\Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t);x') &= \frac{1}{2}[\varphi(\Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t);x') + \varphi(\Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t);x')] \\ &= \frac{1}{2}\ \varphi([\Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)]^2\ ;\ (x',x')) \end{aligned}$$

est scalairement mesurable.

1.4. REMARQUE : S'il existe une suite e'_n dans E' séparant les points de E, alors l'ensemble

$$\{t \in T \mid \text{card}\,\{\Gamma(t)\} = 1\} = \bigcap_n \{t \in T : \varphi(\Gamma(t);e'_n) + \varphi(\Gamma(t);-e'_n) = 0\}$$

appartient à τ

Si de plus l'application $f : T \to E$ est scalairement mesurable, alors l'ensemble

$$\{t \in T \mid \Gamma(t) = \{f(t)\}\} = \bigcap_n \{t \in T \mid \varphi(\Gamma(t);e'_n) = \langle f(t),e'_n \rangle\}$$

appartient à τ .

Enfin, par souci de simplifier l'écriture du théorème qui suit, on notera par $s(\Delta)$ l'ensemble des sections scalairement mesurables d'une multi-application Δ de T dans E, i.e.

$$s(\Delta) = \{ \alpha \ : T \to E \text{ scalairement mesurables} | \alpha(t) \in \Delta(t), t \in T$$

1.5. <u>THEOREME</u> : Soit (T,τ) un espace mesurable et E un e.l.c.s. tel qu'il existe une suite (e'_n) dans E' séparant les points de E. Si la multi-application Γ de T dans E à valeurs convexes compactes est scalairement mesurable alors :

1°/ la multi-application $\xi(\Gamma)$ est de graphe dans $\tau \otimes \beta(E)$

2°/ $\xi(s(\Gamma)) = s(\xi(\Gamma))$.

<u>DEMONSTRATION</u> :

1) On a :

$$G(\xi(\Gamma)) = \{(t,x) \mid \text{card}\, \{S(\Gamma(t);x)\} = 1\} .$$

Les multi-applications $(t,x) \to \Gamma(t)$ et $(t,x) \to 2x - \Gamma(t)$ sont scalairement mesurables sur $T \times E$, muni de la tribu produit $\tau \otimes \beta(E)$. D'après le lemme 1.3, il en sera de même de leur intersection

$$(t,x) \to S(\Gamma(t);x) .$$

Le résultat découle alors de la remarque 1.4.

2) Grâce aux formules évidentes :

$$s(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = s(\Gamma_1) \cap s(\Gamma_2) \text{ et } s(2\alpha - \Gamma) = 2\alpha - s(\Gamma)$$

on établit la formule :

$$S(s(\Gamma);\alpha) = s(S(\Gamma;\alpha))$$

Si $\alpha \in \xi(s(\Gamma))$, alors $s(S(\Gamma;\alpha)) = \{\alpha\}$.

D'après (C), la multi-application $S(\Gamma;\alpha)$ admet une section extrémale α_o , scalairement mesurable.

Par suite, on a :

$$\alpha_o(t) = \alpha(t) \quad , \quad t \in T \quad \text{et donc}$$

$$\alpha(t) \in \xi(S(\Gamma(t);\alpha(t))) \quad , \quad t \in T$$

mais $S(\Gamma(t);\alpha(t))$ étant symétrique par rapport à $\alpha(t)$, on a alors nécessairement :

$$\{\alpha(t)\} = S(\Gamma(t);\alpha(t)) \quad , \quad t \in T$$

$$\text{i.e.} \quad \alpha(t) \in \xi(\Gamma(t)) \quad , \quad t \in T \ .$$

1.6. REMARQUE :

a) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et T une partie borélienne d'un espace polonais, le résultat 1°) est connu [V.I. Arkin et V.L. Levin, théorème 1.7] , [C. Castaing, thèse p. 63] , cf. aussi [C.J. Himmelberg et F.C. Van Vleck, théorème 4] .

b) Grâce à la propriété (C), on a bien sûr $\xi(s(\Gamma)) \neq \emptyset$, mais on peut aussi montrer que $\xi(\Gamma)$ admet une suite dense de sections mesurables. C'est un résultat presque explicite dans la démonstration de la proposition 1.7. de M. Valadier a).

2 - CLASSES DE SECTIONS EXTREMALES.

En pratique, les problèmes qui se rencontrent le plus souvent sont ceux qui ont trait aux espaces de Lebesgue habituels, L^p_E ($1 \leq p \leq \infty$ construitssur un espace mesuré (T,τ,μ) i.e. un espace mesurable (T,τ) muni d'une mesure positive μ .

Les mêmes considérations qui déterminent le passage des espaces $\mathcal{L}^p_E$ aux espaces de classes L^p_E se retrouvent dans le cas des multi-applications : Ainsi nous parlerons de classes de sections mesurables au lieu de sections mesurables. Le théorème de sections mesurable que nous aurons à utiliser sera celui de Von Neumann-Aumann-Sainte Beuve qui fait appel aux définitions suivantes :

2.1. <u>DEFINITION</u> : Soit (T,τ) un espace mesurable. On note τ_μ la μ-complétion de τ relative à une mesure μ sur (T,τ) et $\hat{\tau}$, l'intersection des τ_μ , pour toutes les mesures μ bornées.

2.2. <u>REMARQUE</u> : Si τ est déjà μ-complète par rapport à une mesure μ σ -finie, on a $\hat{\tau} = \tau$.

2.3. <u>DEFINITION</u> : On appelle espace souslinien X tout espace topologique séparé, pour lequel il existe un espace polonais P et une application continue de P sur X.

2.4. <u>EXEMPLES</u> :

1) Les espaces polonais, plus généralement les espaces lusiniens sont des sousliniens [cf. N. Bourbaki a)] .

2) Si X est le dual faible d'un espace de Fréchet séparable, X est souslinien [cf. M. Valadier c)] .

2.5. <u>REMARQUE</u> : Si E est un e.l.c. souslinien, les résultats du paragraphe précédent sont applicables car on sait alors que E' contient une suite (e'_n) séparant les points de E [cf. L. Schwartz] .

Avec ces définitions, on peut alors énoncer le théorème de section de J. Von Neumann, R.J. Aumann b) . L'extension aux sousliniens a été faite par M.F. Sainte Beuve.

2.6. <u>THEOREME</u> : Soient (T,τ) un espace mesurable, X un espace souslinien et $\Gamma : T \to X$ une multi-application à valeurs non vides et de graphe dans $\tau \otimes \beta(X)$, alors Γ admet une suite dense de sections $(\hat{\tau},\beta(X))$ mesurables.

On considère dans ce qui suit un espace mesuré (T,τ,μ) où μ est une mesure positive σ-finie, X un e.v.t. et Γ une multi-application de T dans X.

On note $\mathcal{M}(T,\mu;X)$, ou plus simplement $\mathcal{M}(X)$, l'espace vectoriel des applications μ-mesurables de T dans X, et on pose :

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \{\alpha \in \mathcal{M}(X) \mid \alpha(t) \in \Gamma(t) \quad , \quad \mu\text{-p.p}\} \ .$$

La notation n'a en fait rien d'ambigü puisque l'espace X peut être regardé comme une multi-application particulière.

On définira l'ensemble M(Γ) comme étant le quotient de $\mathcal{M}(\Gamma)$ par la relation d'équivalence

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \text{ si et seulement si } \alpha_1(t) = \alpha_2(t) \quad \mu\text{-p.p.}$$

On notera enfin $\tilde{\alpha}$, la classe d'équivalence de α . La relation d'équivalence est bien sûr compatible avec la structure linéaire de $\mathcal{M}(X)$. On pourra donc parler de convexité dans M(X), en particulier de points extrémaux.

On voit que si Γ est à valeurs convexes, $\mathcal{M}(\Gamma)$ et M(Γ) sont convexes.

2.7. REMARQUE : Même dans le cas où Γ est à valeurs ponctuelles on a $\xi(\mathcal{M}(\Gamma)) = \emptyset$
(Alors que dans ce cas $\mathcal{M}(\xi(\Gamma)) \neq \emptyset$).

Il n'en va pas de même quand on passe aux classes d'équivalence. C'est l'objet du théorème (de caractérisation) suivant :

2.8. THEOREME : Soit (T,τ,μ) un espace mesuré, où μ est une mesure positive et σ-finie, X un e.v. souslinien et $\Gamma : T \to X$ une multi-application à valeurs convexes telle que :

$$G(\Gamma) \in \tau \otimes \beta(X),$$

alors $$\xi(M(\Gamma)) = M(\xi(\Gamma)) .$$

DEMONSTRATION :

Grâce aux relations évidentes :

a) $\mathcal{M}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \mathcal{M}(\Gamma_1) \cap \mathcal{M}(\Gamma_2)$

b) $\mathcal{M}(\alpha + \Gamma) = \alpha + \mathcal{M}(\Gamma)$ et $\mathcal{M}(\lambda\Gamma) = \lambda\, \mathcal{M}(\Gamma)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $(\mathcal{M}(\Gamma_1) \cap \mathcal{M}(\Gamma_2))/\sim \;=\; (\mathcal{M}(\Gamma_1))/\sim \;\cap\; (\mathcal{M}(\Gamma_2))/\sim$

d) $(\alpha - \mathcal{M}(\Gamma))/\sim \;=\; \tilde{\alpha} - (\mathcal{M}(\Gamma))/\sim$

on établit aisément la formule clef :

$$S(M(\Gamma);\tilde{\alpha}) = M(S(\Gamma;\alpha)) .$$

Supposons que $\tilde{\alpha}$ appartienne à $\xi(M(\Gamma))$, alors $M(S(\Gamma;\alpha)) = \{\tilde{\alpha}\}$.
Comme Γ admet une section μ-mesurable et que α appartient à $\mathcal{M}$ (Γ), il existe une section α' de Γ , μ-mesurable et μ-équivalente à α .
Il suffit alors de montrer que :

$$\alpha'(t) \in \xi(\Gamma(t)) \quad , \quad \mu\text{-p.p.}$$

La multi-application $S(\Gamma;\alpha')$ est à valeurs non vides. Son graphe :

$$G(\Gamma) \cap \{(t,x) \in T \times X \,|\, (t,2\alpha'(t)-x) \in G(\Gamma)\}$$

est donc dans $\tau_\mu \otimes \beta(X)$; elle admet une suite dense de sections μ-mesurables α_n (On a $\hat{\tau}_\mu = \tau_\mu$). Par suite on a :
$S(\Gamma(t);\alpha'(t)) \neq \alpha'(t)$ si et seulement s'il existe n tel que $\alpha_n(t) \neq \alpha'(t)$
Si l'on note :

$$T_n = \{t \in T \mid \alpha_n(t) \neq \alpha'(t)\} \quad \text{et} \quad T_o = \bigcup_n T_n ,$$

On a :

$$T_o = \{t \in T \mid S(\Gamma(t);\alpha'(t)) \neq \alpha'(t)\} \quad .$$

Comme $\tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}'$, T_n est μ-négligeable pour tout n , T_o est donc μ-négligeable et par conséquent :

$$\alpha'(t) \in \xi(\Gamma(t)) \quad \mu\text{-p.p.}$$

La réciproque est plus facile : Si $\tilde{\alpha}$ appartient à $M(\xi(\Gamma))$, alors :

$$S(\Gamma(t);\alpha(t)) = \{\alpha(t)\} \qquad \mu\text{-p.p.}$$

et donc $M(S(\Gamma;\alpha)) = S(M(\Gamma);\alpha) = \{\tilde{\alpha}\}$ i.e. $\tilde{\alpha}$ est extrémal de $M(\Gamma)$.

2.9. <u>COROLLAIRE</u> : Si B est une partie convexe borélienne de X (en particulier compacte, fermée,...), la multi-application $\Gamma(t) = B$, $t \in T$ est de graphe mesurable et le théorème est applicable.

On considère maintenant le cas de l'intersection de $M(\Gamma)$ avec des sous-espaces L de $M(X)$, par exemple les espaces du type L^p_X, quand X est normé. On se propose de caractériser l'ensemble $\xi(M(\Gamma) \cap L)$.

Les deux seuls cas intéressants, semble-t-il, où on a une propriété d'invariance sont :

- D'une part, le cas où L est de codimension finie dans la variété affine engendrée par l'ensemble $M(\Gamma)$ et où la mesure μ est sans atome . Ce cas a fait l'objet d'une étude antérieure [cf. M. Benamara], et sera exposé en détails au chapitre III.
- D'autre part, le cas où L est décomposable : La définition introduite par R.T. Rockafellar permet, d'une manière efficace, la prise en compte de tous les espaces L_X^p $(1 \leq p \leq \infty)$. C'est ce cas-ci qui est exposé ci-dessous.

2.10. <u>DEFINITION</u> : On dit que L est un espace décomposable si pour tout α appartenant à L et tout ensemble mesurable T_o de mesure finie, l'application définie par :

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha_o(t) & \text{si} \quad t \in T_o \\ \alpha(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient aussi à L, pour toute application $\alpha_o : T_o \to X$ mesurable et bornée sur T_o .

On a avec cette définition la proposition importante suivante :

2.11. <u>PROPOSITION</u> : On suppose X normé et L décomposable, alors pour toute multi-application (mesurable ou non) , on a :

$$\xi(M(\Gamma) \cap L) = \xi(M(\Gamma)) \cap L \ .$$

<u>DEMONSTRATION</u> :

Soit α_o un élément de $\xi(M(\Gamma) \cap L)$. Si α_o n'appartient pas $\xi(M(\Gamma))$, il existe donc α_1, α_2 dans $M(\Gamma) \backslash L$ tels que

$\alpha_o = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

On peut toujours supposer que $\alpha_o = 0$, puisqu'on peut se ramener à ce cas pour translation. Comme $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et que μ est σ-finie, il existe T_o appartenant à τ, vérifiant $0 < \mu(T_o) < +\infty$ et tel que :

$$\alpha_1(t) \neq \alpha_2(t) \quad , \quad \text{pour tout } t \text{ dans } T_o .$$

On pose alors pour i = 1, 2

$$\bar{\alpha}_i(t) = \begin{cases} \alpha_i(t) & \text{si} \quad \|\alpha_i(t)\| \leq 1 \quad \text{et} \quad t \in T_o \\ \dfrac{\alpha_i(t)}{\|\alpha_i(t)\|} & \text{si} \quad \|\alpha_i(t)\| > 1 \quad \text{et} \quad t \in T_o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que ces deux applications appartiennent à $M(\Gamma) \cap L$, qu'elles sont distinctes et que :

$$0 = \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) .$$

$\alpha_o = 0$ n'est donc pas extrémal de $M(\Gamma) \cap L$.

Par application du théorème 2.8., on obtient le corollaire suivant, en posant :

$$M_L(\Delta) = M(\Delta) \cap L \quad , \quad \text{pour toute multi-application } \Delta .$$

2.12. <u>COROLLAIRE</u> : On suppose X de Banach séparable et L décomposable alors pour toute multi-application $\Gamma : T \to X$, de graphe dans $\tau \otimes \beta(X)$, on a :

$$\xi(M_L(\Gamma)) = M_L(\xi(\Gamma)) .$$

2.13. <u>REMARQUE</u> : Soit E un espace de Banach séparable de dual faible E'_s (faible référant à la topologie $\sigma(E',E)$) et L un sous-espace de $M(E'_s)$ vérifiant l'axiome de la définition précédente pour toute application $\alpha_o : T \to E'_s$ mesurable et bornée sur T_o. Dans ce cas aussi, on dira que L est décomposable et on aboutit également à la même conclusion, avec une démonstration identique.

3 - APPLICATIONS :

3.1. COROLLAIRE : Soit E un espace de Banach séparable, on pose

$$L^{\infty}(T,\tau,\mu;E) = \{v \in M(E) \mid \mu\text{-ess}\sup_{t\in T} \|v(t)\| < \infty\}$$

(On écrira aussi $L^{\infty}(T,E)$, plus simplement L^{∞}_E, si aucune confusion n'est à craindre). Muni de la norme

$$\|v\|_{\infty} = \mu\text{-ess}\sup_{t\in T} \|v(t)\| \quad ,$$

c'est un espace de Banach et sa boule unité est l'ensemble

$$\mathbb{B} = \{v \in L^{\infty}_E \mid v(t) \in \mathbb{B}_E \quad \mu\text{-p.p}\}$$

(où $\mathbb{B}_E$ représente la boule unité de E).
Par suite :

$$\xi(\mathbb{B}) = \{v \in L^{\infty}_E \mid v(t) \in \xi(\mathbb{B}_E) \quad \mu\text{-p.p}\}$$

3.2. COROLLAIRE : Si E est un espace de Banach séparable de dual faible E'_s, on définit l'espace des fonctions (classes de fonctions) Bochner intégrables :

$$L^1(T,\tau,\mu;E) = \{v \in M(E) \mid \int_T \|v(t)\|\mu(dt) < \infty\}$$

(On écrira aussi $L^1(T,E)$ ou L^1_E s'il n'y a pas confusion).
Muni de la norme :

$$\|v\|_1 = \int_T \|v(t)\| \ \mu(dt) \ .$$

C'est un espace de Banach. Du fait que la mesure est σ-finie, cet espace a pour dual [cf. N. Dinculeanu ou A. et C. Ionescu-Tulcea] l'espace :

$$L^{\infty}_{E'_s} = \{v \in M(E'_s) \mid \|v\|_{\infty} < \infty\}$$

de boule unité

$$\mathbb{B}' = \{v \in L^{\infty}_{E'_s} \mid v(t) \in \mathbb{B}_{E'} \quad \mu\text{-pp}\}$$

par suite

$$\xi(\mathbb{B}') = \{v \in L^{\infty}_{E'_s} \mid v(t) \in \xi(\mathbb{B}_{E'}) \quad \mu\text{-pp}\} \ .$$

3.3. EXEMPLE : L'espace $L^1C(T \times S,F)$.

Soit (T,τ,μ) un espace mesuré, où μ est une mesure positive finie. Soit S un espace métrique compact, et F un espace de Banach séparable.

On définit l'espace (noté $\mathbb{B}(T,\tau,\mu,S';F)$ par J. Warga).

$$L^1C(T \times S,F) = \left\{ \phi : T \times S \to F \;\middle|\; \begin{array}{ll} 1°/\ \phi(.,s)\ \mu\text{-mesurable} & , \forall s \in S \\ 2°/\ \phi(t,.)\ \text{continue} & , \forall t \in T \\ 3°/\ \int_T \max\limits_{s \in S} \|\phi(t,s)\| \mu(dt) < \infty & \end{array} \right\}$$

dans lequel deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont identifiées si l'on a :

$$\phi_1(t,.) = \phi_2(t,.) \quad \mu\text{-pp} .$$

a) Cet espace est bien défini car l'application

$$t \to \max_{s \in s} \|\phi(t,s)\| \quad \text{est} \quad \mu\text{-mesurable sur } T .$$

b) On sait que si ϕ vérifie les conditions 1°/ et 2°/ alors ϕ est $\tau_\mu \otimes \beta(S)$ mesurable. Par suite si $\sigma : T \to S$ est μ-mesurable, l'application $t \to \phi(t,\sigma(t))$ est alors μ-mesurable de T dans F.

c) D'autre part, la fonction :

$$\phi \in L^1C(T \times S,F) \to \|\phi\| = \int_T \max_{s \in s} \|\phi(t,s)\| \mu(dt)$$

est une norme sur cet espace. Si on pose $E = C(S,F)$, l'espace des fonctions continues de S dans F, E muni de sa norme habituelle $\|x\| = \max\limits_{s \in S} \|x(s)\|$ est un espace de Banach séparable. On sait que l'espace $L^1C(T \times S,F)$ muni de sa topologie d'espace normé est alors isomorphe isométriquement à l'espace $L^1_E = L^1(T,C(S\ ,F))$, des (classes de) fonctions Bochner-intégrables de T dans E.

L'isomorphisme est donné de manière naturelle par l'application :

$$\phi \in L^1C(T \times S,F) \to (t \to \phi(t,.)) \in L^1_E$$

On peut donc appliquer le résultat précédent pour caractériser les points extrémaux de la boule unité du dual fort de $L^1C(T \times S,F)$. On obtient :

3.4. <u>THEOREME</u> (Caractérisation)

Tout élément ρ extrémal de la boule unité $\mathbb{B}'$ du dual fort de $L^1C(T \times S,F)$ est représentable par un couple d'applications μ -mesurables σ et ε de T dans S et de T dans $\xi(B_{F'})$ muni de la topologie faible induite par F'_s , respectivement, de la manière suivante :

(2) $$< \phi,\rho > = \int_T < \phi(t,\sigma(t)),\varepsilon(t) > \mu(dt) \quad ,\phi \in L^1 C(T \times S,F)$$

Inversement, tout couple (σ,ε) du type précédent définit par la relation (2) un élément ρ extrémal de $\mathbb{B}'$.

<u>DEMONSTRATION</u> :

Tout d'abord la relation (2) a un sens car si ϕ appartient à $L^1C(T \times S,F)$ et $\sigma : T \to S$ est μ-mesurable, l'application $\phi(.,\sigma(.))$ est μ-mesurable (voir plus haut). Elle est de plus μ-intégrable de T dans F, car :

$$\|\phi(t,\sigma(t))\|_F \leq \|\phi(t,.)\|_E \quad , \quad t \in T$$

où l'application $t \to \|\phi(t,.)\|_E$ est μ-intégrable.
Par suite, l'intégrale (2) est bien définie pour tout ε appartenant à $L^\infty_{F'_s}$.

Connaissant le corollaire 3.2., il nous suffit de connaitre la forme des éléments de $\xi(\mathbb{B}_{E'})$. Ceux-ci sont connus [cf. Singer, aussi Brosowski-Deutsch] . On a :

$$\xi(B_{E'}) = \{\theta(s,\eta) \mid s \in S \ , \ \eta \in \xi(B_{F'})\}$$

où θ est l'application de $S \times \mathbb{B}_{F'}$ dans $\mathbb{B}_{E'}$ définit par :

$$< C,\theta(s,\eta) > = < C(s),\eta > \quad , \quad (c \in E \ , \ s \in S \ , \ \eta \in \mathbb{B}_{F'}).$$

On voit aisément que cette application est injective et continue pour les topologies faibles sur $\mathbb{B}_{E'}$ et $\mathbb{B}_{F'}$. De plus, elle applique l'ensemble $S \times \xi(\mathbb{B}_{F'})$ sur l'ensemble $\xi(\mathbb{B}_{E'})$. Aussi pour toute application $\nu \in L^{\infty}_{E'_s}$, telle que $\nu(t) \in \xi(\mathbb{B}_{F'})$ μ-pp , la multi-application :

$$t \to \{(s,\eta) \in S \times \xi(\mathbb{B}_{F'}) \mid \theta(s,\eta) = \nu(t)\}$$

de T dans $S \times \xi(\mathbb{B}_{F'})$ est de graphe mesurable, à valeurs ponctuelles μ-pp. Il existe donc un couple unique (σ,ε) (de classes) d'applications mesurables de T dans S et de T dans $\xi(\mathbb{B}_{F'})$, respectivement telles que :

$$\nu(t) = \theta(\sigma(t),\varepsilon(t)) \quad \mu\text{-pp} .$$

A ρ appartenant à $\xi(\mathbb{B}')$, correspond donc un tel ν et pour tout élément ϕ de $L^1C(T \times S,F)$,on a :

$$(4) \qquad < \phi,\rho > = \int_T < \phi(t,.),\nu(t) > \mu(dt)$$

$$= \int_T < \phi(t,\sigma(t)),\varepsilon(t) > \mu(dt) .$$

Inversement, pour deux telles applications σ et ε la relation (3) définit un élément ν de $\xi(\mathbb{B}_{E'})$ par suite un élément ρ de $\xi(\mathbb{B}')$ par (4).

4 - NOTES ET REFERENCES

En dimension finie, le résultat général (théorème 2.8.) a été prévu par R.J. Aumann b), mais celui-ci ne donne de démonstration que pour le cas particulier du corollaire 2.9. où B est compact, affinant ainsi le résultat de S. Karlin qui n'a obtenu que l'inclusion $\xi(M(B)) \subset M(\xi(B))$. Une autre démonstration correspondant à ce cas et due à I. Kito, peut être trouvée dans [S. Karlin et W.J. Studeen] .

Le corollaire 3.2. a été obtenu par K. Sundaresan [a) ou b)] [cf. aussi c)] en supposant E' fortement séparable. Sa démonstration utilise le théorème de sections de K. Kuratowski et C. Ryll-Nardzewski, du initialement à V.A. Rokhlin.

Enfin, J.A. Johnson arrive, indépendamment, à la même caractérisation générale mais ses hypothèses, trop fortes, ne sont pas applicables directement dans le cas du corollaire 3.2.

Dans le même ordre d'idées, citons également l'article de I. Kluvanek et G. Knowles, (cf. aussi G. Knowles).

Comme application directe de ces résultats, non mentionnée par ces auteurs, on peut envisager le problème de meilleure approximation dans L^1_E par un sous espace de dimension finie et obtenir un théorème de caractérisation raffiné des solutions, via les travaux de I. Singer - P.J. Laurent.

CHAPITRE II

INTEGRANDE MESURABLE NON NECESSAIREMENT NORMAL

INTRODUCTION

Soit (T,τ,μ) un espace mesuré complet relativement à une mesure positive μ σ-finie. Soit E un espace de Banach séparable et f une fonction définie sur $T \times E$ à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$. Sous certaines conditions, notamment celles, célèbres de Caratheodory, la fonction $t \to f(t,X(t))$ est mesurable pour toute application X mesurable de T dans E.

R.T. Rockafellar définit alors d'une manière standard les fonctionnelles du type $\int_T f(t,X(t))\mu(dt)$ et entreprend, dans une série d'articles (b) , e) , f) , g)) leur étude du point de vue de la dualité. Se servant de la correspondance qui existe entre une fonctionnelle et son épigraphe, il établit, comme point de départ, l'équivalence entre les conditions a) et b) et les conditions a') et b') suivantes :

a) f est $\tau \otimes \beta(E)$ mesurable sur $T \times E$

b) Pour tout $t \in T$, la fonction f_t est s.c.i. sur E non identiquement $+\infty$.

a') La multi-application $t \to$ épi f_t est de graphe dans $\tau \otimes \beta(E)$.

b') Pour tout $t \in T$, l'ensemble épi f_t est fermé et non vide.

Le théorème de sections, bien connu, de Debreu-Castaing, devient alors la clef de l'étude.

Or il existe un autre théorème de sections, celui que nous avons déjà utilisé (M.F. Saint-Beuve, ibid), qui porte sur des multi-applications à valeurs non nécessairement fermées. De plus les conditions a) et a'), aussi bien que b) et b'), se correspondent dans l'équivalence précédente.

L'idée de l'extension des résultats de R.T. Rockafellar trouve alors sa justification dans le fait qu'une fonction f obtenue comme infimum d'une suite de fonctions f_n vérifiant les hypothèses a) et b), si elle vérifie la première,peut cependant ne pas vérifier la seconde.

1 - PRELIMINAIRES :

Soit (T,τ,μ) un espace mesuré complet où μ est une mesure positive σ-finie.

Soit E un espace de Banach séparable et E'_s, son dual muni de la topologie faible $\sigma(E',E)$. Par raison de commodité, on définit l'espace F comme étant arbitrairement E ou E'_s et on pose :

$$G = \begin{cases} E & \text{si} \quad F = E'_s \\ E'_s & \text{si} \quad F = E \end{cases}$$

On considère dans ce qui suit une fonction f :

$T \times F \to]-\infty,+\infty]$

dite intégrande et on note par f_t la fonction $x \to f(t,x)$.

1.1. DEFINITION : On dira que l'intégrande f est :

a) mesurable si f est $\tau \otimes \beta(F)$ mesurable sur $T \times F$,
b) normale si f est mesurable et si de plus la fonction f_t est s.c.i. pour tout $t \in T$,
c) convexe si la fonction f_t est convexe pour tout $t \in T$.

Les résultats suivants, quoique élémentaires, associés au théorème de section cité plus haut seront à la base de toute la suite.

1.2. PROPOSITION : L'intégrande f est mesurable si et seulement si la multi-application $t \to$ épi f_t est de graphe dans $\tau \otimes \beta(F \times \mathbb{R})$.

DEMONSTRATION :

Contenue dans le lemme 4 de M. Valadier, c) .

1.3. PROPOSITION : Si f est mesurable, l'intégrande $\bar{f}$ sur $T \times F$, défini par :

$$\bar{f}(t,x) = \underline{\lim}_{y\to x} f(t,y) \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in T \times E$$

est aussi mesurable.
(C'est donc un intégrande normal).

DEMONSTRATION :

En effet on a épi $\bar{f}_t = \overline{\text{épi } f_t}$. Comme la multi-application $t \to$ épi f_t est de graphe mesurable, il en sera de même de la multi-application $t \to \overline{\text{épi } f_t}$. Cela découle de (C. Castaing et M. Valadier a), théorème 40), valable aussi bien dans le cas de E que de E'_s.

1.4. PROPOSITION : Si f est mesurable, son intégrande polaire défini par

$$f^*(t,y) = \sup \{< x,y > - f(t,x) | x \in E\} \text{ pour tout } (t,y) \in T \times G$$

est convexe normal sur $T \times G$.

DEMONSTRATION :

$\bar{f}$ est un intégrande normal sur $T \times F$ (proposition 1.3.). Son intégrande polaire $(\bar{f})^*$, égal à f^*, est alors mesurable (M. Valadier c), lemme 5), par suite convexe normal.

2 - DEFINITION DE LA FONCTIONNELLE INTEGRALE I_f ET CALCUL DE SA POLAIRE.

Soit défini sur $T \times F$, un intégrande mesurable f. Si $X : T \to F$ est une application mesurable, l'application $t \to (t,X(t))$ est alors mesurable de T dans $T \times F$ et il en sera de même de l'application $t \to f(t,X(t))$. On pose d'une manière standard :

$$I_f(X) = \int_T f(t,X(t))\mu(dt) .$$

Si l'application $t \to f(t,X(t))$ est majorée ou minorée par une fonction intégrable, l'intégrale précédente est bien définie et $I_f(X) \in [-\infty,+\infty]$. Sinon on convient de lui assigner la valeur $+\infty$.

Soit L_F (resp. L_G) un sous-espace de l'espace des (classes d') applications mesurablesde T dans F (resp. G). On suppose que quelque soit le couple (X,Y) appartenant à $L_F \times L_G$, l'application $t \to < X(t),Y(t) >$ est intégrable. Les espaces L_F et L_G sont alors en dualité par rapport à la forme bilinéaire

$$< X,Y > = \int_T < X(t),Y(t) > \mu(dt) .$$

On a donné au chapitre précédent la définition d'un espace décomposable (cf. définition 2.10 et remarque 2.13).

2.1. THEOREME : Si l'espace L_F est décomposable et si $I_f(X) < \infty$ pour au moins $X \in L_F$, alors :

$$(I_f)^*(Y) = I_{f^*}(Y) \quad , \quad \text{pour tout } Y \in L_G$$

Si de plus l'espace L_G est décomposable et si $I_{f^*}(Y) < \infty$ pour au moins $Y \in L_G$, alors :

$$(I_f)^{**}(X) = I_{f^{**}}(X) \quad , \quad \text{pour tout } X \in L_F \ .$$

En conséquence, si f est un intégrande convexe normal, alors sous les hypothèses précédentes, la fonctionnelle convexe I_f est semi-continue inférieurement sur L_F pour toute topologie localement convexe compatible avec la dualité.

DEMONSTRATION : (Pratiquement celle de R.T. Rockafellar, g)).

Soit $Y \in L_G$. Il s'agit de montrer la relation

(1) $$\sup_{X \in L_F} \int_T \{< X(t),Y(t) > - f(t,X(t))\}\mu(dt) =$$
$$= \int_T \sup_x \{< x,Y(t) > - f(t,x)\}\mu(dt).$$

En remarquant que l'intégrande $(t,x) \to f(t,x) - < x,y(t) >$ vérifie les mêmes hypothèses que f, on est ramené à montrer la relation (1) dans le cas où Y = 0. Cette relation devient :

$$\inf_{X \in L_F} \int_T f(t,X(t))\mu(dt) = \int_T \inf_x f(t,x)\mu(dt) \ .$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$, arbitraire. De l'inégalité triviale :

$$\int_T \inf_x f(t,x)\mu(dt) \leq \inf_{X \in L_F} \int_T f(t,X(t))\mu(dt)$$

et du fait qu'il existe $X_1 \in L_F$ tel que l'intégrale $\int_T f(t,X_1(t))\mu(dt)$ soit finie, l'inégalité inverse sera démontrée si l'on arrive à déduire l'existence d'un élément $\bar{X}$ de L vérifiant :

(2) $$\int_T f(t,\bar{X}(t))\mu(dt) < \beta$$

pourvu que l'on ait :

$$\int_T \inf_x f(t,x)\mu(dt) < \beta \ .$$

Sous cette dernière hypothèse et l'hypothèse faite sur l'espace de mesure, on peut trouver une fonction intégrable α_o vérifiant :

$$(3) \qquad \int_T \alpha_o(t)\mu(dt) < \beta \quad \text{et} \quad \inf_x f(t,x) < \alpha_o(t), t \in T$$

Soit Γ la multi-application de T dans F, définie par

$$\Gamma(t) = \{x \in F | f(t,x) \leq \alpha_o(t)\} .$$

Son graphe

$$G(\Gamma) = \{(t,x) \in T \times F | f(t,x) - \alpha_o(t) \leq 0\}$$

appartient à la tribu $\tau \otimes \beta(F)$, puisque l'application

$$(t,x) \to f(t,x) - \alpha_o(t)$$

est mesurable. Par le théorème de sections, il existe une application mesurable $X_o : T \to F$ telle que

$$f(t,X_o(t)) \leq \alpha_o(t) \quad , \quad t \in T$$

on aura donc, en tenant compte de (3)

$$\int_T f(t,X_o(t))\mu(dt) < \beta .$$

On peut alors trouver un ensemble $A \in \tau$, de mesure finie tel que

$$\int_A f(t,X_o(t))\mu(dt) + \int_{T \setminus A} f(t,X_1(t))\mu(dt) < \beta$$

et il est même possible de choisir A de manière que l'application X_o soit bornée sur A. Cela étant, l'élément de l'espace décomposable défini par :

$$\bar{X}(t) = \begin{cases} X_o(t) & \text{si} \quad t \in A \\ X_1(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifiera alors la relation (2), ce qui établit le premierement du théorème.

Le deuxième point du théorème s'en déduit de manière triviale puisque le couple (I_{f^*}, L_G) vérifie les mêmes hypothèses que le couple (I_f, L_F). On a donc :

$$(I_f)^{**}(X) = I_{f^{**}}(X) \quad \text{pour tout} \quad X \in L_F \quad .$$

En conséquence, si l'intégrande f est convexe normal, ce qui correspond au cas où

$$f_t = f_t^{**} \quad , \quad t \in T$$

il est bien clair qu'alors

$$(I_f)^{**}(X) = I_f(X) \quad , \quad X \in L_F \quad .$$

I_f est ainsi s.c.i. sur L_F. Comme elle est de plus convexe, elle est s.c.i. relativement à toute topologie localement convexe compatible avec la dualité entre les espaces L_F et L_G .

2.2. <u>COROLLAIRE</u> : Soit $\Gamma : T \to F$ une multi-application de graphe mesurable, à valeurs non vides, admettant au moins une section dans l'espace L_F . Si cet espace est décomposable, on a la relation

$$\overline{co}\, M_{L_F}(\Gamma) = M_{L_F}(\overline{co}\, \Gamma) \quad .$$

<u>DEMONSTRATION</u> :

En posant pour tout $t \in T$ et $x \in F$

$$f_1(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \Gamma(t) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

l'intégrande f_1 ainsi définie est mesurable puisque la multi-application $t \to \text{épi}\, f_t = \Gamma(t) \times \mathbb{R}_+$ est de graphe mesurable. Par hypothèse, la fonctionnelle I_{f_1} n'est donc pas identiquement $+\infty$ sur L_F . Comme de plus la fonctionnelle $I_{f_1^*}$ est telle que :

$$I_{f_1^*}(0) = 0 \quad ,$$

toutes les hypothèses du théorème précédent se trouvent alors vérifiées et on conclue donc que les fonctionnelles $(I_{f_1})^{**}$ et $I_{f_1^{**}}$ sont identiques sur L_F . Par suite les ensembles :

$$\{X \in L_F | (I_{f_1})^{**}(X) \leq 0\} \quad \text{et} \quad \{X \in L_F | I_{f_1^{**}}(X) \leq 0\}$$

qui ne sont autres que les ensembles $\overline{co}\, M_{L_F}(\Gamma)$ et $M_{L_F}(\overline{co}\,\Gamma)$, respectivement, sont égaux.

2.3. <u>COROLLAIRE</u> : Si l'espace L_F est décomposable et si $I_f(X) < +\infty$ pour au moins $X \in L_F$, le sous différentiel et le sous différentiel inverse de la fonctionnelle I_f sont donnés par les formules :

$$\partial I_f(X) = M_{L_G}(t \to \partial f_t(X(t))) \quad , \quad X \in L_F$$

$$(\partial I_f)^{-1}(Y) = M_{L_F}(t \to (\partial f_t)^{-1}(Y(t))) \ , \ Y \in L_G \ .$$

<u>DEMONSTRATION</u> :

Par application du théorème précédent, il découle qu'un élément Y de L_G n'appartient à l'ensemble $\partial I_f(X)$ que si l'on a :

(4) $$\int_T f(t,X(t))\mu(dt) + \int_T f^*(t,Y(t))\mu(dt) = \int_T < X(t),Y(t) > \mu(dt)$$

Comme par ailleurs, l'inégalité :

(5) $$f(t,X(t)) + f^*(t,Y(t)) \geq < X(t),Y(t) >$$

est toujours vérifiée pour tout $t \in T$, la relation (4) n'est donc vraie que si l'inégalité en (5) est en fait une égalité, et cela pour presque tout $t \in T$. Cette dernière condition n'est autre que la traduction de la relation

$$Y(t) \in \partial f_t(X(t)) \quad \text{p.p.}$$

Ceci établit la première formule du corollaire. Pour montrer la seconde formule, il suffit de reproduire la même démonstration en intervertissant simplement le rôle de X et de Y et en remplaçant tout sous différentiel que l'on rencontre par son inverse.

2.4. REMARQUE : Si l'intégrande f est normal dans le théorème 2.1., on retrouve le résultat donné par C. Castaing h) qui étend celui de R.T. Rockafellar g) , établi pour un espace E réflexif. Il est cependant possible, connaissant ces résultats de donner une seconde démonstration du théorème grâce à la proposition suivante qui est intéressante en elle même :

2.5. PROPOSITION : Si l'espace L_F est décomposable et si $I_f(X) < \infty$ pour au moins $X \in L_F$, alors les fonctionnelles I_f et $I_{\bar{f}}$ sont liées par la relation :

$$\bar{I}_f(X) \leq I_{\bar{f}}(X) \quad , \quad \text{pour tout} \quad X \in L_F$$

En effet, sachant que l'on a :

$$(I_{\bar{f}})^*(Y) = I_{f^*}(Y) \quad , \quad \text{pour tout } Y \in L_G$$

de la proposition 2.5., on tire aisément l'inégalité :

$$(I_{\bar{f}})^*(Y) \leq (I_f)^*(Y) \quad , \quad \text{pour tout } Y \in L_G$$

et comme on a trivialement :

$$(I_f)^* \leq I_{f^*}$$

on aura forcément l'égalité :

$$(I_f)^*(Y) = I_{f^*}(Y) \quad , \quad \text{pour tout} \quad y \in L_G \ .$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.5. :

Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $X_1 \in L_F$, arbitraires tels que

$$\int_T \bar{f}(t,X,(t))\mu(dt) < \beta .$$

La preuve sera faite si l'on montre que dans ces conditions, on a :

$$\bar{I}_f(X_1) < \beta$$

ou encore que tout voisinage V de X_1 contient un élément $\bar{X} \in L_F$ vérifiant :

$$I_f(\bar{X}) < \beta$$

Soient donc $Y_1,\ldots,Y_n$ appartenant à L_G et $\varepsilon > 0$, arbitraires. Il s'agit de trouver $\bar{X} \in L_F$ tel que :

$$\max_{i=1,\ldots,n} \left|\int_T < \bar{X}(t)-X_1(t),Y_i(t) > \mu(dt)\right| < \varepsilon$$

et

$$\int_T f(t,\bar{X}(t))\mu(dt) < \beta \quad .$$

De l'hypothèse faite sur l'espace de mesure, on peut trouver deux fonctions intégrables α_o et h de T dans $\mathbb{R}$ et de T dans $\mathbb{R}_{+*}$, respectivement, telles que :

(6) $$\bar{f}(t,X_1(t)) < \alpha_o(t) \quad , \quad t \in T$$

$$\int_T \alpha_o(t)\mu(dt) < \beta$$

et $$\int_T h(t)\mu(dt) < \varepsilon \quad .$$

Soit Δ la multi-application de T dans F , définie par :

$$\Delta(t) = \{x \in F | f(t,x) < \alpha_o(t) \quad \text{et} \quad f_1(t,x) < h(t)\} \quad ,$$

où

$$f_1(t,x) = \max_{i=1,\ldots,n} |< x-X_1(t),Y_i(t) >| \quad , \quad t \in T \text{ , } x \in F \text{ .}$$

Cette multi-application est de graphe mesurable, car les intégrandes f et f_1 sont mesurables, et à valeurs non vides ; ceci découle de la relation (6) et du fait que l'ensemble :

$$\{x \in F \mid f_1(t,x) < h(t)\}$$

est un voisinage de $X_1(t)$, pour tout $t \in T$. Elle admet donc une section X_o mesurable. On aura ainsi :

$$\int_T f(t,X_o(t))\mu(dt) < \beta$$

et

$$\int_T f_1(t,X_1(t))\mu(dt) < \varepsilon$$

On se donne maintenant un élément X de L_F tel que l'intégrale $\int_T f(t,X(t))\mu(dt)$ soit finie. Comme l'intégrale $\int_T f_1(t,X(t))\mu(dt)$ est également finie, on peut alors trouver un ensemble mesurable $A \in \tau$, de mesure finie, sur lequel X_o est borné et vérifiant les inégalités

$$\int_A f(t,X_o(t))\mu(dt) + \int_{T \setminus A} f(t,X(t))\mu(dt) < \beta$$

et

$$\int_A f_1(t,X_o(t))\mu(dt) + \int_{T \setminus A} f_1(t,X(t))\mu(dt) < \beta .$$

Pour l'élément $\bar{X}$ de l'espace décomposable L_F, défini par :

$$\bar{X}(t) = \begin{cases} X_o(t) & \text{si} \quad t \in A \\ X(t) & \text{sinon} \end{cases} ,$$

On aura d'une part :

$$\int_T f(t),\bar{X}(t))\mu(dt) < \beta$$

et d'autre part :

$$\max_{i=1,\dots,n} \left| \int < \bar{X}(t)-X_1(t),Y_i(t) > \mu(dt) \right| \leq$$
$$\leq \int_T f_1(t,\bar{X}(t))\mu(dt) < \varepsilon$$

l'élément $\bar{X}$ est celui que l'on cherchait et la proposition est démontrée.

3 - RESULTATS DE COMPACITE

Deux résultats de compacité sont donnés ci-dessous. Le premier concerne l'inf-compacité de la fonctionnelle I_f sur l'espace $L^\infty_{E'_s}$, est aisé à établir, car cet espace est identifiable au dual de l'espace de Banach L^1_E. Le second porte sur l'inf-compacité de la fonctionnelle précédente sur l'espace moins classique, $L^1_{E'_s}$ des fonctions Y mesurables de T dans E'_s pour lesquelles la norme :

$$\|Y\| = \int_T \|Y(t)\|\mu(dt)$$

est finie. Cet espace sera en dualité avec l'espace L^∞_E, par rapport à la forme bilinéaire définie par :

$$< X,Y > = \int_T < X(t),Y(t) > \mu(dt) \quad \text{pour tout } X \in L^\infty_E \text{ , } Y \in L^1_{E'_s}$$

On notera que tous ces espaces sont décomposables.

3.1. THEOREME : Soit f un intégrande convexe normal sur $T \times E'_s$. Si pour tout $X \in L^1_E$, l'application $t \to f^*(t,X(t))$ est intégrable, la fonctionnelle I_f est alors $\sigma(L^\infty_{E'_s},L^1_E)$ inf-compacte pour toute pente $X \in L^1_E$.

DEMONSTRATION :

Le cas où I_f est identiquement égal à $+\infty$ sur $L^\infty_{E'_s}$ étant trivial, on se ramène alors aux hypothèses du théorème 1 : Les fonctionnelles I_f et I_{f^*} sont convexes s.c.i. et polaires l'une de l'autre. La fonctionnelle I_{f^*} étant par hypothèse finie sur l'espace de Banach L^∞_E, y est alors continue (critère de Brondsted-Rockafellar). Ceci est suffisant pour conclure au résultat (th. 5.2., chap. 0).

3.2. COROLLAIRE [C. Castaing et M. Valadier]

Soit $\Gamma : T \to E'_s$, une multi-application à valeurs convexes fermées non vides et de graphe mesurable. Si Γ est à valeurs dans une partie bornée fixe de E', l'ensemble $M(\Gamma)$ est alors une partie $\sigma(L^\infty_{E'_s},L^1_E)$ compacte.

DEMONSTRATION :

L'intégrande particulier définie par :

$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Gamma(t) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{pour tout } t \in T \text{ et } x \in E$$

vérifie évidemment les hypothèses du théorème 3.1. . Comme on a :

$$M(\Gamma) = \{Y \in L^{\infty}_{E'_s} \mid I_f(X) \leq 0\} \quad ,$$

le résultat s'en suit.

3.3. REMARQUE : Ce corollaire aurait pu s'obtenir directement à partir du théorème 2.1. : En effet, sous les hypothèses, l'ensemble $M(\Gamma)$ est une partie bornée $\sigma(L^{\infty}_{E'_s}, L^1_E)$ fermée. Ceci est suffisant pour qu'elle soit $\sigma(L^{\infty}_{E'_s}, L^1_E)$ compacte.

Le second théorème de compacité est plus subtil. Si pour R.T. Rockafellar g), l'espace E est réflexif, l'hypothèse n'est cependant pas contraignante et la démonstration qu'on en donnera sera à peu de choses près la sienne. On utilisera le théorème de décomposition de l'espace $(L^{\infty}_E)'$:

Ce résultat, dû à K. Yosida et E. Hewitt (1952) dans le cas où $E = \mathbb{R}$, redécouvert par A. Ya. Dubovitskii et A.A. Milyutin (1968), a été étendu à un espace de Banach séparable par A.D. Ioffe et V.L. Levin [(1)] et depuis au cas non séparable par V.L. Levin [a), b) pour les détails] ainsi que par M. Valadier [e)] .

(1) Les Auteurs ont fait savoir que la démonstration présentée dans ce papier était incorrecte. On consultera donc l'article de V.L. Levin [b)] ou celui de M. Valadier [e)].

Une fonctionnelle $Z \in (L_E^\infty)'$ est dite absolument continue par rapport à μ s'il existe $Y \in L^1_{E'_s}$, tel que :

$$< X,Z > = \int_T < X(t),Y(t) > \mu(dt) \qquad \forall X \in L_E^\infty .$$

Une fonctionnelle $Z \in (L_E^\infty)'$ est dite singulière par rapport à μ s'il existe une suite d'ensembles $T_n \in \tau$ tels que :

(i) $T_{n+1} \subset T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\mu(T_n \cap T') \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $T' \in \tau$ tel que $\mu(T') < \infty$

(iii) $< X,Z > = 0$, pour tout $X \in L_E^\infty$ s'annullant sur un ensemble T_n .

3.4. THEOREME DE DECOMPOSITION :
Toute fonctionnelle $Z \in (L_E^\infty)'$ se décompose de manière unique sous la forme $Z = Z_a + Z_s$, où Z_a est absolument continue et Z_s singulière par rapport à μ . De plus :

$$\|Z\| = \|Z_a\| + \|Z_s\|$$

Dans la suite, on identifiera $L^1_{E'_s}$ au sous espace de $(L_E^\infty)'$ constitué par les fonctionnelles absolument continues par rapport à μ .

3.5. THEOREME : Si pour tout $X \in L_E^\infty$, l'application $t \to f^*(t,X(t))$ est intégrable, la fonctionnelle I_f est alors $\sigma(L^1_{E'_s}, L_E^\infty)$ compacte pour toute pente $X \in L_E^\infty$.

Le lemme suivant est fondamental pour la démonstration :

3.6. LEMME : Si $I_f(Y) < \infty$ pour au moins $Y \in L^1_{E'_s}$ et $I_{f^*}(X) < +\infty$ pour au moins $X \in L^\infty_E$, alors la fonctionnelle I^* sur $(L^\infty_E)'$ définie par :

$$I^*(Z) = \sup \{< X,Z > - I_{f^*}(X) \mid X \in L^\infty_E\} \quad \text{pour tout} \quad Z \in (L^\infty_E)'$$

peut se mettre sous la forme :

$$I^*(Z) = I_f(Z_a) + \sup \{< X,Z_s > \mid X \in D\} \quad \text{pour tout } Z \in (L^\infty_E)'$$

où $D = \{X \in L^\infty_E \mid I_{f^*}(X) < +\infty\}$.

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.5. :

En usant des mêmes arguments que pour le théorème 3.1., la fonctionnelle I_{f^*} est continue sur l'espace de Banach L^∞_E . Relativement au couple d'espaces $(L^\infty_E, (L^\infty_E)')$, sa fonctionnelle polaire, qui n'est autre que I^* est alors $\sigma((L^\infty_E)', L^\infty_E)$ compacte. Or pour tout $X \in L^\infty_E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\{Z \in (L^\infty_E)' \mid I^*(Z) - < X,Z > \leq \lambda\}$$

est inclus dans $L^1_{E'_s}$, car $D = L^\infty_E$. Mais sur $L^1_{E'_s}$, la topologie $\sigma(L^1_{E'_s}, L^\infty_E)$ coïncide avec celle induite par la topologie $\sigma((L^\infty_E)', L^\infty_E)$, tandis que les deux fonctionnelles I^* et I_f s'identifient. Pour tout $X \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{Y \in L^1_{E'_s} \mid I_f(Y) - < X,Y > \leq \lambda\}$$

est bien $\sigma(L^1_{E'_s}, L^\infty_E)$ compact.

DEMONSTRATION DU LEMME 3.6. :

Posons pour simplifier $g(t,x) = f^*(t,x)$. On a, trivialement, pour tout $Z \in (L^\infty_E)'$

$$\begin{aligned} I^*(Z) &= \sup \{< X,Z_a > + < X,Z_s > - I_g(X) \mid X \in D\} \\ &\leq \sup \{< X,Z_a > - I_g(X) \mid X \in D\} + \sup \{< X,Z_s > \mid X \in D\} \\ &= I_{g^*}(Z_a) + \sup \{< X,Z_s > \mid X \in D\} \quad . \end{aligned}$$

Il reste à montrer l'inégalité inverse. Il suffit pour cela de choisir deux éléments X et X_o de D, arbitraires, et de montrer que :

(7) $$< X,Z_a > - I_g(X) + < X_o,Z_s > \;\leq\; I^*(Z) \; .$$

La fonctionnelle Z_s étant singulière par rapport à μ , il existe par définition une suite T_n de τ , vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) précédentes. On aura d'une part :

$$< X\,\Psi_{T\setminus T_n} \, , \, Z_s > = 0$$

et d'autre part :

$$< X_o\,\Psi_{T_n} \, , \, Z_s > = < X_o,Z_s > .$$

Comme on a :

$$< X_o\,\Psi_{T_n} + X \;_{T\setminus T_n} , \, Z_a+Z_s > - \; I_g(X_o\Psi_{T_n} + X\,\Psi_{T\setminus T_n}) \leq I^*(Z)$$

il s'en suivra que :

$$< X_o\Psi_{T_n} + X\Psi_{T\setminus T_n},Z_a > - \; I_g(X_o\Psi_{T_n} + X\Psi_{T\setminus T_n}) + < X_o,Z_s > \leq I^*(Z) \; .$$

La relation (7) sera établie si l'on montre que les expressions $< X_o\Psi_{T_n} + X\Psi_{T\setminus T_n},Z_a >$ et $I_g(X_o\Psi_{T_n} + X\Psi_{T\setminus T_n})$ tendent respectivement vers $< X,Z_a >$ et $I_g(X)$ quand n augmente, ou encore que les expressions $< (X_o-X)\Psi_{T_n},Z_a >$ et $I_g((X_o-X)\Psi_{T_n})$ tendent vers 0 quand n augmente. Or celles-ci sont toutes deux de la forme $\int_T h(t)\mu(dt)$, où h est une fonction à valeurs réelles intégrable. Le résultat se déduit alors de (ii) et du fait que la mesure est σ-finie.

3.7. <u>COROLLAIRE</u> : Soit $\Gamma : T \to E'_s$ une multi-application de graphe mesurable à valeurs convexes fermées non vides. S'il existe une fonction intégrable $h : T \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\Gamma(t) \subset h(t)\mathbb{B}_{E'}$ pour tout $t \in T$, l'ensemble $M(\Gamma)$ est alors une partie $\sigma(L^1_{E'_s}, L^\infty_E)$ compacte.

DEMONSTRATION :

Semblable à celle du premier corollaire.

3.8. REMARQUE : Il est possible de déduire ce résultat du corollaire 3.2., en considérant la multi-application Δ définie par :

$$\Delta(t) = \frac{1}{h(t)} \Gamma(t) \quad , \quad t \in T .$$

L'ensemble $M(\Delta)$, inclus dans $L^{\infty}_{E'_s}$, est $\sigma(L^{\infty}_{E'_s} , L^1_E)$ compact. Comme l'application $Y \in L^{\infty}_{E'_s} \to h . Y \in L^1_{E'_s}$ est $(\sigma(L^{\infty}_{E'_s} , L^1_E),\sigma(L^1_{E'_s} , L^{\infty}_E))$ continue, on conclut au résultat en remarquant que $M(\Gamma)$ est l'image, par l'application précédente, de $M(\Delta)$.

3.9. NOTE BIBLIOGRAPHIQUE :

Dans le cas où T est un espace compact, et μ de Radon C. Castaing [g)] a donné un résultat de compacité dans L^1_E , sans hypothèse de séparabilité.

CHAPITRE III

THEOREME DE STRUCTURE LIE AUX MESURES SANS ATOME

Dans toute cette partie, le triplet (T,τ,μ) désignera un espace mesuré complet relativement à une mesure positive μ et X un e.v.t. (réel) non trivial.

Les notations du chapitre I seront reprises ici, sauf que l'on désignera une classe de fonctions mesurables par un de ses représentants.

1 - FORMULATION DU THEOREME :

1.1. DEFINITION : On dit qu'un ensemble $A \in \tau$ est un atome (pour la mesure μ) si $\mu(A) \neq 0$ et si pour toute partie $A' \in \tau$ incluse dans A, on a ou bien $\mu(A) = \mu(A')$ ou bien $\mu(A') = 0$.

La proposition suivante est issue de la définition :

1.2. PROPOSITION : Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1°) μ est sans atome

2°) Pour tout ensemble $A_o \in \tau$ de mesure positive, il existe une suite décroissante $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables inclus dans A_o telle que :

$$0 < \dots \mu(A_{n+1}) < \mu(A_n) < \dots \mu(A_o) \quad , \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

3°) Pour tout ensemble $A_o \in \tau$ de mesure positive, la variété linéaire engendrée par le système :

$$\{\Psi_A \mid A \in \tau \ , A \subset A_o\}$$

est de dimension infinie.

DEMONSTRATION :

On montre successivement :

a) l'implication 1) => 2) :

Supposons la mesure sans atome et soit $A_o \in \tau$, $\mu(A_o) > 0$.
Par définition, il existe forcément un ensemble mesurable A_1 inclus dans A_o et vérifiant :

$$0 < \mu(A_1) < \mu(A_o) \quad .$$

De même, l'ensemble A_1 n'étant pas un atome, on peut trouver un ensemble mesurable A_2 inclus dans A_1, tel que :

$$0 < \mu(A_2) < \mu(A_1) \quad .$$

En continuant ce processus indéfiniment, on établit donc l'existence d'une suite $\{A_n\}$ décroissante d'ensembles mesurables inclus dans A_o, vérifiant :

$$0 < \dots \mu(A_{n+1}) < \mu(A_n) < \dots \mu(A_o) \; .$$

b) L'implication 2) => 3) :
Soit un ensemble $A_o \in \tau$ de mesure positive.
Par hypothèse, on peut associer à cet ensemble une suite A_n de parties de τ vérifiant les conditions du deuxièmement. Il suffit alors de montrer que la variété linéaire engendrée par le système

$$\{\Psi_{A_n} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad .$$

est de dimension infinie. Pour ce faire, soit $n \in \mathbb{N}$, arbitraire et considérons une équation de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, \Psi_{A_i} = 0 \quad , \quad \lambda_o, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \; .$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $\Psi_{A_o \setminus A_1}$, on obtient :

$$\lambda_o \, \Psi_{A_o \setminus A_1} = 0 \quad ,$$

sachant que, d'une part :

$$\Psi_{A_i} \cdot \Psi_{A_o \setminus A_1} = 0 \quad , \quad \text{pour tout} \quad i=1,\dots,n$$

et d'autre part :

$$\Psi_{A_o} \cdot \Psi_{A_o \setminus A_1} = \Psi_{A_o \setminus A_1} \quad .$$

La fonction $\Psi_{A_o \setminus A_1}$, n'étant pas nulle, puisque l'ensemble $A_o \setminus A_1$ est de mesure positive, on conclut donc que $\lambda_o = 0$.

L'équation (1) se réduit alors à

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Psi_{A_i} = 0 \quad .$$

Par induction, tous les coefficients λ_i seront nuls .

c) 3) => 1) :

Soit un ensemble $A_o \in \tau$, arbitraire, de mesure positive. Il existe par hypothèse un ensemble $A_1 \in \tau$, inclus dans A_o tel que $\Psi_{A_1} \neq 0$ et tel que les vecteurs Ψ_{A_1} et Ψ_{A_o} soient non colinéaires. On a donc d'une part $\mu(A_1) > 0$ et d'autre part $\Psi_{A_o} \neq \Psi_{A_1}$. Dans ce cas, $\mu(A_1)$ est strictement inférieur à $\mu(A_o)$ et l'ensemble A_o n'est pas un atome.

——X—

On introduit maintenant ce que l'on entendra par τ-stabilité.

1.3. <u>DEFINITION</u> : Une partie K de M(X) sera dite τ-stable si pour tout α_1 et α_2 appartenant à K et A appartenant à τ , l'application $\alpha_1 \Psi_A + \alpha_2 \Psi_{T\setminus A}$ appartient aussi à K .

1.4. <u>REMARQUES</u> :

a) Pour toute multi-application Γ de T dans X, mesurable ou non, l'ensemble $M(\Gamma)$ est τ-stable.

b) Toute intersection de parties τ-stables est τ-stable.

c) Si K est une partie τ-stable, pour tout $\alpha \in K$, l'ensemble $S(K;\alpha)$ est également τ-stable : c'est l'intersection de l'ensemble τ-stable K et de l'ensemble $2\alpha - K$ qui est évidemment τ-stable.

Le théorème s'énonce alors ainsi :

1.5. THEOREME (de structure) :

Soit K une partie convexe, τ-stable, de M(X), et C une partie convexe dont toute facette est de dimension zéro ou de codimension finie dans Var {K} .

Si la mesure μ est sans atome , alors on a la relation

(2) $\xi(K \cap C) \setminus \xi(C) = (\xi(K) \cap C) \setminus \xi(C)$.

En conséquence on a

(3) $\xi(K \cap V) = \xi(K) \cap V$,

pour toute variété affine de codimension finie dans Var {K}.

On déduira ce résultat à partir des deux lemmes suivants :

1.6. LEMME : Si la mesure est sans atome et si K est une partie τ-stable de M(X), chacune de ses facettes est soit de dimension zéro, soit de dimension infinie.

DEMONSTRATION DU LEMME 1.6. :

Soit $\alpha_o \in K$. Il faut montrer que si l'ensemble $S(K;\alpha_o)$ n'est pas réduit à un seul élément, il est de dimension infinie. Sans restreindre la généralité on peut supposer que α_o est nul. Soit alors $\alpha_1 \in S(K,0)$, distinct de 0. D'après la proposition 1, le système

$$\{\Psi_A \mid A \in \tau \ , A \subset A_o\}$$

où

$$A_o = \{t \in T \mid \alpha_1(t) \neq 0\} \ ,$$

est de dimension infinie. Par suite le système :

$$\{\alpha_1 \, \Psi_A \mid A \in \tau \ , A \subset A_o\}$$

est de même de dimension infinie. Comme il est inclus dans l'ensemble S(K;0), le résultat s'en suit.

1.7. LEMME : Si B et C sont deux parties convexes d'un e.v. (réel) telles que :

1°) chacune des facettes de B est soit de dimension 0 soit de dimension infinie,

2°) chacune des facettes de C est soit de dimension 0 soit de codimension finie,

alors les points extrémaux de B, C, $B \cap C$ vérifient la relation :

$$\xi(B \cap C) \setminus \xi(C) = (\xi(B) \cap C) \setminus \xi(C) .$$

DEMONSTRATION DU LEMME 1.7. :

Comme on a :

$$\xi(B) \cap C \subset \xi(B \cap C)$$

trivialement, l'inclusion :

$$(\xi(B) \cap C) \setminus \xi(C) \subset \xi(B \cap C) \setminus \xi(C)$$

est établie. Soit alors $x \in \xi(B \cap C) \setminus \xi(C)$; on a donc :

$$F(B \cap C;x) = \{x\}.$$

D'après ce qu'on sait sur les facettes d'un ensemble convexe (cf. par exemple [P.J. Laurent b)]), on peut écrire :

$$\begin{aligned} F(B \cap C;x) &= F(B;x) \cap F(C;x) \\ &= \{x\} \quad . \end{aligned}$$

x n'étant pas extrémal de C, l'ensemble F(C;x) est alors de codimension finie. Comme on a aussi :

$$\mathrm{Var}\,\{F(B;x)\} \cap \mathrm{Var}\,\{F(C;x)\} = \{x\} ,$$

l'ensemble F(B;x) ne peut donc être que de dimension nulle : x est un point extrémal de B.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.5. :

D'après le lemme 1.6., l'ensemble B = K satisfait les hypothèses du lemme 1.7. et vérifie donc la relation (2). La relation (3) est alors triviale.

X

Les corollaires qu'on déduira du théorème proviendront exclusivement de la relation (3), suffisante pour les applications.

1.6. COROLLAIRE : Si l'espace X est souslinien et si Γ est une multi-application de T dans X, de graphe mesurable et à valeurs convexes non vides, alors sous l'hypothèse que la mesure μ soit σ-finie et sans atome , on a la relation :

(4) $\qquad \xi(M(\Gamma) \cap V) = M(\xi(\Gamma)) \cap V$,

pour toute variété affine fermée V de codimension finie dans Var $\{M(\Gamma)\}$.

DEMONSTRATION :

Le résultat est une conséquence directe du théorème de structure, puisque l'ensemble $M(\Gamma)$ est τ-stable, et du théorème de caractérisation général des points extrémaux de $M(\Gamma)$ (Théorème 2.8., I)

Dans le but de tenir compte de ce que l'on sait habituellement sur les points extrémaux, à savoir les résultats du genre de celui de Krein-Milman, on est naturellement amené à considérer les ensembles K précédents comme parties de certains espaces localement convexes de M(X). Ainsi on aura :

1.7. COROLLAIRE : Soit L un e.l.c.s. de M(X) et K une partie convexe compacte et τ-stable de L. Alors si la mesure μ est sans atome la relation :

$$\varphi(K) = \varphi(\xi(K))$$

est vraie pour toute application $\varphi : L \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ linéaire et continue.

DEMONSTRATION :

En effet, pour tout élément α_o de K, l'ensemble $K \cap V$, où

$V = \{\alpha \in L : \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_o)\}$

est une partie convexe compacte non vide de L. On a donc :

$$\xi(K \cap V) \neq \emptyset .$$

Du théorème de structure il découle que l'ensemble $\xi(K) \cap V$ est non vide. Ceci montre donc l'inclusion :

$$\varphi(K) \subset \varphi(\xi(K)) .$$

L'autre inclusion est triviale.

X

Dans tout ce qui suit, on suppose que X est un e.l.c.s. et que la mesure μ est σ-finie. On désignera par L un sous-espace de M(X), muni d'une topologie localement convexe séparée, sur lequel on définira l'hypothèse (H) suivante :

(H) : On dira que l'espace L vérifie (H) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) Pour tout $\alpha \in L$ et tout $\Psi \in L^\infty$, l'application produit $\alpha\ \Psi$ appartient à L .

b) Pour tout $\alpha \in L$, fixé, l'application $\Psi \to \alpha\Psi$ est continue de L^∞ muni de la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans L.

1.8. EXEMPLES : Soit E un espace de Banach, de dual faible E'_s. Alors :

- Tous les espaces L^p_E $(1 \leq p \leq \infty)$, munis de la topologie $\sigma(L^p_E, L^q_{E'_s})$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ correspondante, vérifient (H) .
- Tous les espaces $L^p_{E'_s}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, munis de la topologie $\sigma(L^p_{E'_s}, L^q_E)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ correspondante, vérifient (H).

1.9. LEMME : Si l'espace L vérifie (H), L est alors τ-stable et pout tout ensemble $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ d'éléments de L, définissant la multi-application

(5) $$\Gamma(t) = \mathrm{co}\,\{\alpha_1(t),\ldots,\alpha_n(t)\} \quad , \quad t \in T$$

de T dans X, l'ensemble $M(\Gamma)$ est une partie convexe compacte de L.

DEMONSTRATION :

Le fait que l'espace L soit τ-stable découle trivialement de ce que l'on a :

$$\alpha\Psi_A \in L \quad , \quad \forall\, \alpha \in L \quad \text{et} \quad \forall\, A \in \tau \quad .$$

Soit maintenant $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ appartenant à L et soit Γ la multi-application définie par la relation (5). Posons :

$$D = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\} \quad .$$

L'ensemble $M(D)$ est inclus dans l'espace $(L^\infty)^n$ et pour tout élément $(\Psi_1,\ldots,\Psi_n)$ de $M(D)$, l'application :

$$t \to \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(t)\alpha_i(t)$$

est une section mesurable de Γ . Réciproquement on va montrer que tout élément de l'ensemble $M(\Gamma)$ est de cette forme Soit $\alpha \in M(\Gamma)$.

La multi-application :

$$t \to \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in D \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i(t) = \alpha(t)\}$$

est visiblement de graphe dans $\tau \otimes \beta(\mathbb{R}^n)$, à valeurs non vides, sauf éventuellement sur un ensemble de mesure **nulle** . En dehors de cet ensemble négligeable, par le théorème de sections, on peut alors trouver $(\Psi_1,\dots,\Psi_n) \in M(D)$ tel que :

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(t)\alpha_i(t) \quad \text{p.p.}$$

On peut donc écrire :

$$M(\Gamma) = \{ \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \alpha_i \mid (\Psi_1,\dots,\Psi_n) \in M(D)\} \quad .$$

Or, de l'hypothèse faite sur l'espace L, il découle que l'application :

$$(\Psi_1,\dots,\Psi_n) \to \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \alpha_i \quad ,$$

définie sur $(L^\infty)^n$, est à valeurs dans L et qu'elle est $\sigma((L^\infty)^n,(L^1)^n)$ continue. Comme l'ensemble M(D) est une partie convexe, $\sigma((L^\infty)^n,(L^1)^n)$ compacte, par exemple d'après le corollaire 3.2., II, le résultat final s'en suit.

1.10. COROLLAIRE : On suppose que l'espace L vérifie (H) et que la mesure μ est sans atome, alors pour toute variété linéaire fermée V de codimension finie dans L et toute application α appartenant à L, il existe une application ε : $T \to \mathbb{R}$ mesurable telle que :

a) $\varepsilon(t) = \pm 1$ p.p.

b) l'application produit $\alpha . \varepsilon$ appartient à V.

DEMONSTRATION :

Soit Γ la multi-application de T dans X, définie par :

$$\Gamma(t) = [-\alpha(t),\alpha(t)] \quad , \quad t \in T \ .$$

L'ensemble $M(\Gamma)$, par le lemme 1.9. est une partie convexe compacte de L. Son intersection avec la variété linéaire fermée V, étant non vide, car $0 \in M(\Gamma) \cap V$, l'ensemble $\xi(M(\Gamma) \cap V)$ contient donc au moins un élément β. Du corollaire 1.6., relation (4), il découle que β est une section extrémale de la multi-application Γ. On conclut alors au résultat, en remarquant simplement qu'une telle section est nécessairement de la forme $\alpha \cdot (\Psi_A - \Psi_{T \setminus A})$ où $A \in \tau$: on prend

$$\varepsilon = \Psi_A - \Psi_{T \setminus A}$$

1.11. <u>COROLLAIRE</u> : On suppose que l'espace L vérifie (H) et que la mesure μ est sans atome. Soit G un e.l.c.s. et φ une application de L dans G, linéaire et continue. Alors, pour toute partie K τ-stable de L et toute variété affine fermée W, de codimension finie dans G, on a la relation :

$$\overline{W \cap \operatorname{co} \varphi(K)} = \overline{W \cap \varphi(K)}$$

au sens de la topologie faible sur G.

Si de plus G est de dimension finie, alors l'ensemble $\varphi(K)$, lui-même, est convexe.

<u>DEMONSTRATION</u> :

L'inclusion dans un sens étant triviale, il suffit alors de montrer que l'on a :

$$W \cap \operatorname{co} \varphi(K) \subset \overline{W \cap \varphi(K)} ,$$

ou encore que :

$$\varphi^{-1}(W) \cap \operatorname{co} K \subset \overline{\varphi^{-1}(W) \cap K} ,$$

l'adhérence étant prise au sens de la topologie faible sur L. Comme la variété affine $\varphi^{-1}(W)$ est de codimension finie dans L, on est ramené au cas où G = L et φ est l'identité sur L. Dans ce cas on va établir que si la variété W rencontre l'ensemble co K, elle rencontre de même l'ensemble K :

En effet, soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ appartenant à K tels que l'on ait :

$W \cap \mathrm{co}\,\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \neq \emptyset$.

Si Γ est la multi-application de T dans X, définie par :

$$\Gamma(t) = \mathrm{co}\,\{\alpha_1(t),\ldots,\alpha_n(t)\}$$

l'ensemble $M(\Gamma)$ est, d'après le lemme 1.9., une partie convexe compacte de L, qui rencontre donc la variété W. En utilisant la relation (4) du corollaire 1.6., on trouve que la multi-application Γ admet une section extrémale β dans W. Cette section extrémale est telle que :

$$\beta(t) \in \{\alpha_1(t),\ldots,\alpha_n(t)\} \quad \text{p.p.}$$

Elle appartient donc à K. On a bien $W \cap K \neq \emptyset$.

Ceci fait, soit maintenant $\alpha_o \in W \cap \mathrm{co}\,K$.
Il faut montrer que α_o est faiblement adhérent à l'ensemble $W \cap K$.
Soit donc Ω un ouvert faible de L contenant α_o. Dans cet ouvert Ω , il est possible de trouver une variété affine fermée V de codimension finie dans L, passant par α_o .
On a donc :

$$V \cap W \cap \mathrm{co}\,K \neq \emptyset \quad ,$$

et d'après ce qu'on a montré, plus haut, il vient :

$$V \cap W \cap K \neq \emptyset \quad ,$$

puisque la variété affine fermée $V \cap W$ est également de codimension finie dans L. Par suite, l'ensemble ouvert Ω rencontre l'ensemble $W \cap K$ et α_o est bien adhérent à l'ensemble $W \cap K$. La première relation est montrée.

Supposons maintenant que l'espace G est de dimension finie et soit r un élément de l'enveloppe convexe de $\varphi(K)$. L'ensemble $\varphi^{-1}(\{r\}) \cap \mathrm{co}\,K$ est donc non vide. D'après ce qu'on vient d'établir, on aura également :

$$\varphi^{-1}(\{r\}) \cap K \neq \emptyset \quad .$$

L'élément r appartient bien à $\varphi(K)$.

2 - APPLICATIONS

2.1. EXTENSION DU THEOREME DE CONVEXITE DE LYAPUNOV :

Soit (T,τ,μ) un espace mesuré complet relativement à une mesure μ positive, σ-finie et sans atome.

Soit E un espace de Banach séparable de dual faible E'_s et $\Gamma : T \to E'_s$ une multi-application de graphe mesurable, à valeurs convexes compactes non vides.

Soit enfin un ensemble fini $\{f_1,\ldots,f_n\}$ de fonction mesurables de T dans E .

2.1.1. THEOREME : S'il existe une fonction h mesurable sur T à valeurs positives telle que :

a) la fonction $t \to h(t)\|f_i(t)\|$ soit intégrable, pour tout $i=1,\ldots,n$.

b) $\Gamma(t) \subset h(t)\, \mathbb{B}_{E'}$, p.p. $t \in T$.

Alors, si on pose :

$$I(\alpha) = \{\int_T < f_1(t),\alpha(t) >\mu(dt),\ldots,\int_T < f_n(t),\alpha(t) >\mu(dt)\} ,$$

l'ensemble :

$$\{I(\alpha) \mid \alpha : T \to E'_s \text{ mesurable et } \alpha(t) \in \xi(\Gamma(t))\text{p.p.}\}$$

est une partie convexe compacte de $\mathbb{R}^n$ et est identique à l'ensemble :

$$\{I(\alpha) \mid \alpha : T \to E'_s \text{ mesurable et } \alpha(t) \in \Gamma(t) \text{ p.p.}\} .$$

DEMONSTRATION :

Il est facile de voir que l'ensemble :

$$\{I(\alpha) \mid \alpha \in M(\Gamma)\}$$

est identique à l'ensemble :

$$\{\int_T < h(t)f_1(t),\beta(t) > \mu(dt),\ldots, \int_T < h(t)f_n(t),\beta(t) > \mu(dt) \mid \beta \in M(\Delta)\}$$

où Δ est la multi-application définie par :

$$\Delta(t) = \frac{1}{h(t)}\,\Gamma(t) \quad , \quad t \in T .$$

Cet ensemble est convexe compact dans $\mathbb{R}^n$, puisque :

- d'une part , d'après le corollaire 3.2.(chapitre II), l'ensemble $M(\Delta)$ est convexe $\sigma(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$ compact dans $L^\infty_{E'_s}$;
- d'autre part, il est image de l'ensemble $M(\Delta)$ par l'application :

$$\beta \to \{\int_T < h(t)f_i(t),\beta(t) > \mu(dt)\}_{i=1,\ldots,n}$$

Laquelle est bien définie sur $L^\infty_{E'_s}$, linéaire et $\sigma(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$ continue.

Le résultat final découle alors du corollaire 1.7.

2.1.2. REMARQUES :

a) Si $E = \mathbb{R}$, $\Gamma(t) = [0,1]$, pour tout $t \in T$ et si la mesure μ est finie, on retrouve le théorème de A.A. Lyapunov (1940). Pour d'autres démonstrations de ce théorème cf. les articles de P.R. Halmos, J. Lindenstrauss, J.A. Yorke.

b) Si $E = \mathbb{R}^n$, on retrouve l'extension qu'en ont donnée C. Castaing (b) et c)) et M. Valadier c).

2.1.3. NOTES BIBLIOGRAPHIQUES :

Il existe un grand nombre d'articles dévolus à ce théorème de A.A. Lyapunov, tant du point de vue théorique que pratique. On consultera utilement à ce sujet les commentaires de V.I. Arkin et V.L. Levin (p. 31).

Beaucoup de ces résultats peuvent d'ailleurs être déduits de manière quasi directe a partir d'un des quatre corollaires qu'on a établis,voire du théorème 2.1.. Illustrons ce fait par un exemple simple :

EXEMPLE :

Soit Γ' : $T \to E$ une multi-application à valeurs non vides, alors l'ensemble défini par :

$$\int\Gamma' = \{\int_T \alpha(t)\mu(dt) \mid \alpha \in L^1_E \ , \ \alpha(t) \in \Gamma(t) \text{ p.p.}\}$$

est d'adhérence faible convexe dans E .

Si $E = \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\int\Gamma'$, lui-même est convexe.

Ce résultat implicite dans A.D. Ioffe et V.M. Tikhomirov et dont le second point est du à H. Richter (cf. aussi H.G. Kellerer , R.J. Aumann a)) découle trivialement du corollaire 1.11. .

Quoiqu'il en soit, on donnera en fin de document une bibliographie assez exhaustive, complétion de celle que V.I. Arkin et V.L. Levin ont donnée. On espère qu'elle sera profitable à tout lecteur intéressé.

2.2. APPLICATION DE LA THEORIE DE RIESZ SUR LES OPERATEURS COMPACTS :

Soit (T,τ,μ) un espace mesuré complet relativement à une mesure positive μ σ-finie et L un sous-espace de $M(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni d'une topologie d'espace localement convexe séparé.

Soit κ un opérateur linéaire compact dans L et $\alpha \in L$. Un des problèmes les plus cruciaux qui se pose dans cette théorie est de trouver un élément $\beta \in L$ tel que :

$$(1 + \kappa)(\beta)(t) = \alpha(t) \quad \text{p.p.} \ .$$

Il est bien connu qu'en général, ces seules hypothèses ne suffisent pas à résoudre l'équation posé. Or d'après ce que l'on sait (cf. par exemple A. Grothendieck) l'image de l'application $1 + \kappa$ est une variété linéaire fermée de codimension finie dans L. On peut alors, en vue d'appliquer les résultats précédents, "perturber" le problème et chercher pour $\alpha \in L$, fixé, un élément $\beta \in L$, tel que :

(6) $$|(1 + \kappa)\beta(t)| = |\alpha(t)| \quad \text{p.p.}$$

C'est l'objet du théorème d'existence suivant :

THEOREME : Si l'espace L vérifie (H) et si la mesure μ est sans atome, alors pour tout $\alpha \in L$, l'équation (6) admet une solution dans L .

DEMONSTRATION :

D'après ce que l'on a dit, plus haut, la variété linéaire $V = \mathrm{Im}\,(1 + \kappa)$ est fermée et de codimension finie dans L . Sous les hypothèses du théorème , on peut d'après le corollaire 1.10 trouver une application $\varepsilon : T \to \mathbb{R}$ mesurable telle que :

a) $\varepsilon(t) = \pm 1$ p.p.

b) $\varepsilon \,.\, \alpha \in V$

Il existe donc une application $\beta \in L$ telle que :

$$(1 + \kappa)(\beta)(t) = \varepsilon(t)\alpha(t) \quad \text{p.p.}$$

on aura donc :

$$|(1 + \kappa)(\beta)(t)| = |\alpha(t)| \quad \text{p.p.}$$

2.3. PROBLEME DE MEILLEURE APPROXIMATION DANS L^1_E :

Soit (T,τ,μ) un espace mesuré complet relativement à une mesure positive μ σ-finie et sans atome, et soit E un espace de Banach séparable.

Soit V un sous-espace de dimension finie dans l'espace L^1_E et $X_o \in L^1_E \setminus V$.

Le problème de meilleure approximation de X_o par les éléments de V au sens de la norme de L^1_E se pose ainsi :

(P) Trouver $\bar{X} \in V$ tel que :

$$\alpha = \min_{X\in V} \int_T \|X(t) - X_o(t)\|\mu(dt)$$
$$= \int_T \|\bar{X}(t) - X_o(t)\|\mu(dt) .$$

On propose le théorème de caractérisation suivant :

2.3.1. THEOREME (de caractérisation) :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{X} \in V$ soit solution du problème (P) est qu'il existe une application $Y : T \to E'_s$ mesurable, vérifiant les trois conditions suivantes :

1°/ $Y(t) \in \xi(\mathbb{B}_{E'})$ p.p.

2°/ $< \bar{X}(t) - X_o(t), Y(t) > = \|\bar{X}(t) - X_o(t)\|$ p.p.

3°/ $\int_T < X(t), Y(t) > \mu(dt) = 0$, pour tout $X \in V$.

De plus, on a :

$$\alpha = \max_{\substack{Y : T \to E'_s \\ \text{mesurable} \\ Y(t) \in \xi(\mathbb{B}_{E'}) \text{ p.p.} \\ Y \in V^{\perp}}} - \int_T < X_o(t), Y(t) > \mu(dt) \; .$$

DEMONSTRATION :

Soit $f : T \times E \to \mathbb{R}$, l'intégrande convexe normal défini par :

$$f(t,x) = \|x - X_o(t)\| \quad \text{pour tout} \quad t \in T \text{ et } x \in E \; .$$

Avec les notations du chapitre II, on doit chercher $\bar{X} \in V$ tel que :

$$I_f(\bar{X}) = \min_{X \in V} I_f(X) \; .$$

La fonctionnelle I_f étant continue sur l'espace L^1_E , on sait alors que (cf. P.J. Laurent b)) l'élément $\bar{X} \in V$ est solution du problème (P) si et seulement si l'on a :

$$\partial(I_f)(\bar{X}) \cap V^{\perp} \neq \emptyset \; .$$

Or l'ensemble $\partial(I_f)(\bar{X})$ est convexe $\sigma(L^{\infty}_{E'_s}, L^1_E)$ compact; le théorème de Krein-Milman permet donc d'écrire que :

(7) $$\xi(\partial I_f(\bar{X}) \cap V^{\perp}) \neq \emptyset \; .$$

Mais d'après le corollaire 2.3., II, l'ensemble $\partial I_f(\bar{X})$ est de la forme :

$$\partial I_f(\bar{X}) = M_{L^\infty_{E'_s}}(\Gamma) \quad ,$$

où Γ est la multi-application de T dans E', définie par :

$$\Gamma(t) = \partial f(t,\bar{X}(t))$$

$$= \{y \in \mathbb{B}_{E'} \mid \|\bar{X}(t)-X_o(t)\| = \langle \bar{X}(t)-X_o(t),y\rangle\} \ , \ t \in T \quad .$$

Il est bien clair que cette multi-application est de graphe mesurable et à valeurs non vides. Le corollaire 1.6., appliqué à la relation (7) donne alors :

$$M(\xi(\Gamma)) \cap V^\perp \neq \emptyset \quad .$$

Comme de plus, pour tout $t \in T$, $\Gamma(t)$ est une partie extrémale de l'ensemble $\mathbb{B}_{E'}$, on aura :

$$\xi(\Gamma(t)) = \{y \in \xi(\mathbb{B}_{E'}) \mid \|\bar{X}(t)-X_o(t)\| = \langle \bar{X}(t)-X_o(t),y\rangle\} \ , \ t \in T$$

Par suite, une condition nécessaire et suffisante pour que l'élément $\bar{X} \in V$ soit solution du problème (P) est qu'il existe une application $Y \in L^\infty_{E'_s}$ vérifiant les conditions 1/, 2/ et 3/ du théorème. Dans ce cas, on sait que (cf. P.J. Laurent, ibid, ou R.B. Holmes) :

$$\alpha = \mathrm{Max}\,\{-\int_T \langle X_o(t),Y(t)\rangle \mu(dt) \mid Y \in \mathbb{B}' \cap V^\perp\}$$

$$= \mathrm{Max}\,\{-\int_T \langle X_o(t),Y(t)\rangle \mu(dt) \mid Y \in \xi(\mathbb{B}' \cap V^\perp)\}$$

où $\mathbb{B}'$ est la boule unité de l'espace $L^\infty_{E'_s}$ ayant pour expression :

$$\mathbb{B}' = \{Y : T \to E'_s \mid Y \text{ mesurable et } Y(t) \in \mathbb{B}_{E'} \text{ p.p.}\} \quad .$$

Le corollaire 1.6., permet, là encore, d'écrire que :

$$\xi(\mathbb{B}' \cap V^{\perp}) = \{Y \in V^{\perp} \mid Y(t) \in \xi(\mathbb{B}_{E'}) \quad \text{p.p.}\} \quad ,$$

et on déduit immédiatement le second point du théorème.

2.3.2. <u>REMARQUE</u> : Contrairement à ce qui a été fait ailleurs dans le cas d'espaces de fonctions continues ou dérivables (cf. P.J. Laurent a P.J. Laurent et Pham-Dinh-Tuan, I. Singer), il a suffi d'une seule fonctionnelle extrémale pour caractériser toutes les solutions de problème.

2.3.3. <u>REMARQUE</u> : Si $E = \mathbb{R}$, on retrouve un résultat semblable à celui donné par B.R. Kripke et T.J. Rivlin (cf. aussi J.R. Rice).

Si $V \subset E$, on a un résultat plus fin que celui propos par E.G. Gol'štein (cf. aussi C. Carasso).

2.3.4. <u>REMARQUE</u> : Il n'y a pas en général unicité de la solution (cf. E. Rozema). Ce résultat est bien connu dans le cas où $E = \mathbb{R}$ (cf. les commentaires de I. Singer) ; une démonstration basé sur le théorème de A.A. Lyapunov a été donné par R.M. Moroney.

2.3.5. <u>EXEMPLE</u> (cf. chapitre I, exemple 3.3.) :

On suppose la mesure μ finie. Soit S un espace métrique compact, V un sous-espace de dimension finie de l'espace $L^1C(T \times S)$ et $\phi_o \in L^1C(T \times S) \setminus V$. On se pose le problème suivant :

(P') Trouver $\bar{\phi} \in V$, tel que :

$$\alpha' = \min_{\phi \in V} \int_T \max_{s \in S} |\phi(t,s) - \phi_o(t,s)| \, \mu(dt)$$

$$= \int_T \max_{s \in S} |\bar{\phi}(t,s) - \phi_o(t,s)| \, \mu(dt) \quad .$$

Du théorème précédent, il vient :

2.3.5. <u>COROLLAIRE</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{\phi} \in V$ soit solution de (P') est qu'il existe deux applications σ et ε mesurables de T dans S et de T dans $\mathbb{R}$, respectivement, vérifiant les conditions 1°/, 2°/ et 3°/ suivantes:

1°/ $\varepsilon(t) = \pm 1$ p.p.

2°/ $\varepsilon(t)(\bar{\phi}(t,\sigma(t)) - \phi_o(t,\sigma(t))) = \max\limits_{s \in S} |\bar{\phi}(t,s) - \phi_o(t,s)|$ p.p.

3°/ $\int_T \varepsilon(t)\phi(t,\sigma(t))\mu(dt) = 0$, pour tout $\phi \in L^1C(T \times S)$.

De plus on a :

$$\alpha = \underset{\substack{\sigma \,:\, T \to S \\ \varepsilon \,:\, T \to \mathbb{R} \\ \sigma \text{ et } \varepsilon \text{ mesurables} \\ \varepsilon(t) = \pm 1 \text{ p.p.}}}{\operatorname{Max}} - \int_T \varepsilon(t)\phi_o(t,\sigma(t))\mu(dt)$$

$\int_T \varepsilon(t)\phi(t,\sigma(t))\mu(dt) = 0$ pour tout $\phi \in L^1C(T \times S)$.

<u>DEMONSTRATION</u> : On pose $E = C(S)$.

Soit $\phi \to \hat{\phi}$ l'application qui réalise l'isomorphisme entre les espaces $L^1C(T \times S)$ et L^1_E . Par cette transformation, V est transformé en $\hat{V}$, ϕ_o en $\hat{\phi}_o$ et le problème P' en $(\hat{P}')$. De plus, un élément $\bar{\phi} \in V$ est solution du problème (P') si et seulement si $\hat{\bar{\phi}}$ est solution du problème $(\hat{P}')$. Or ce dernier a exactement la même forme que le problème (P) :

Un élément $\bar{\phi} \in V$ est donc solution du problème (P') si et seulement s'il existe une application ρ : $T \to E'_s$ mesurable telle que :

a) $\rho(t) \in \xi(\mathbb{B}_{E'})$ p.p.

b) $< \hat{\bar{\phi}}(t) - \hat{\phi}_o(t), \rho(t) > = \|\hat{\bar{\phi}}(t) - \hat{\phi}_o(t)\|$ p.p.

c) $\rho \in V^{\perp}$.

D'après le théorème 3.4., I, – voir sa démonstration – pour un tel ρ , il existe de manière unique une application σ : $T \to S$ mesurable et une application $\varepsilon : T \to \mathbb{R}$, mesurable, $\varepsilon(t) = \pm 1$ p.p. , telles que :

$$< \hat{\phi}(t),\rho(t) > = \varepsilon(t)\ \hat{\phi}(t,\sigma(t)) \text{ p.p. pour tout } \phi \in L^1C(T \times X)$$

Dans ce cas les conditions b) et c) peuvent s'écrire, respectivement :

$$\varepsilon(t)\ (\phi(t,\sigma(t)) - \phi_o(t,\sigma(t))) = \max_{s\in S} |\bar{\phi}(t,s) - \phi_o(t,s)|$$

et

$$\int_T \varepsilon(t)\phi(t,\sigma(t))\mu(dt) = 0 \quad , \quad \text{pour tout } \phi \in L^1C(T \times S) \ .$$

Le premier point du corollaire est établi. Pour montrer le second point, on écrit par application du théorème précédent, que :

$$\alpha = \max_{\substack{\rho\ :\ T \to E'_s \\ \text{mesurable} \\ \rho(t) \in \xi(\mathbb{B}_{E'}) \text{ p.p.} \\ \rho \in V^\perp}} - \int_T < \hat{\phi}_o(t),\rho(t) > \mu(dt)$$

D'après la représentation de ρ , qu'on vient de donner plus haut on déduit trivialement le résultat.

CHAPITRE IV

INTERSECTION D'ENSEMBLES CONVEXES ET NON CONVEXES AVEC DES VARIETES AFFINES FERMEES DE CODIMENSION FINIE

INTRODUCTION :

Au chapitre précédent, on a abouti (cf. corollaire 1.11) sous certaines hypothèses à l'égalité non triviale du type

$$\overline{V \cap \text{co}\, K} = \overline{\text{co}}\, (V \cap K) \ ,$$

on s'est aussitôt demandé si ces hypothèses ne conduisaient pas aussi à l'égalité :

$$\overline{V \cap \text{co}\, K} = V \cap \overline{\text{co}}\, K \ .$$

La réponse à cette question s'est avérée négative dans le cas général. Bien plus cette dernière relation n'a rien de commun avec la première. Elle porte sur l'intersection simple d'un ensemble convexe et d'une variété affine fermée de codimension finie. La notion essencielle qui a été dégagée à travers cette étude est celle de partie codimentionnellement fermée. C'est elle qui fournit les bonnes hypothèses (la terminologie a été choisie pour son caractère assez suggestif).

1 - PARTIES CODIMENSIONNELLEMENT FERMEES :

Soit X et Y deux e.l.c.s. en dualité par rapport à une forme bilinéaire notée $<.,.>$. Soit A une partie de X et $\{y_1,\dots,y_n\}$ un ensemble ordonné de n éléments de Y. On pose :

- $\Phi(A;y_1,\dots,y_n) = A$, si $n = 0$.
  (i.e. quand l'ensemble $\{y_i\}_{i=1,\dots,n}$ est vide)

- $\Phi(A;y_1,\dots,y_n) = \{\bar{x} \in \Phi(A;y_1,\dots,y_{n-1}) \mid <\bar{x},y_n> = \max\limits_{x \in \Phi(A;y_1,\dots,y_{n-1})} <x,y>\}$.

1.1. DEFINITION :

— A sera dite codimensionnellement fermée (en abrégé, on dira co-fermée) pour l'ensemble $\{y_1,\dots,y_n\}$ si :

$$\Phi(\overline{co}\ A;y_1,\dots,y_n) = \overline{co}\ \Phi(A;y_1,\dots,y_n)$$

— A sera dite codimensionnellement fermée d'ordre n (en abrégé on dira co_n-fermée) si A est co-fermée pour tout ensemble $\{y_1,\dots,y_n\}$ de n éléments de Y.

— A sera dite co-fermée si A est co_n-fermée pour tout n .

1.2. REMARQUES :

a) Si A est co-fermée pour $\{y_1,\dots,y_n\}$ (resp. co_n-fermée) (resp. co-fermée) alors toute partie A' telle que $A \subset A' \subset \overline{co}\ A$ est de même co-fermée pour $\{y_1,\dots,y_n\}$ (resp. co_n-fermée) (resp. co-fermée). En particulier,si A' = co A . Comme on a toujours :

(1) $\Phi(co\ A;y_1,\dots,y_n) = co\ \Phi(A;y_1,\dots,y_n)$

l'étude des parties co-fermées est donc ramenée à l'étude des parties convexes co-fermées. Elle ne dépend donc que de la dualité.

b) Il est aisé de constater à partir de l'égalité :

(2) $\Phi(A;y_1,\dots,y_n) = \Phi(\Phi(A;y_1,\dots,y_{n-1});y_n)$

que A est co-fermée pour $\{y_1,\dots,y_n\}$ (co_n-fermée) si et seulement si A est co-fermée pour $\{y_1,\dots,y_{n-1}\}$ (co_{n-1}-fermée) et $\Phi(A;y_1,\dots,y_{n-1})$ co-fermée pour y_n (co_1-fermée).

c) Si A est convexe, $\Phi(A;y_1,\dots,y_n)$ est convexe.

d) Si A est fermée , $\Phi(A;y_1,\dots,y_n)$ est fermée.

e) $\Phi(A;y_1,\dots,y_n)$ est une partie extrémale de A.

1.3. EXEMPLES :

0) Toute partie convexe fermée est co-fermée !

1) Toute partie compacte A telle que $\overline{co}$ A est compacte est co-fermée.

2) Toute partie A telle que co A est fermée est co-fermée (découle de la relation (1) et de Remarques 1, d)).
On verra grâce à la proposition 1.10 que dans $\mathbb{R}^n$, la réciproque est vraie.

1.4. DEFINITION : Soit $x_o, x_1, \ldots, x_n$, n+1 éléments d'un e.v. E.
On dira que le système $\{x_i \mid i=0,\ldots,n\}$ est minimal si la variété affine qu'il engendre est de dimension n .

1.5. DEFINITION : Soit V une variété affine fermée de codimension finie et A une aprtie convexe d'un e.v. E. telles que $A \cap V \neq \emptyset$.
On dira que V et A sont liés fortement si, m étant la codimension de V dans la variété affine engendrée par $V \cup A$, il existe m + 1 éléments $x_o, x_1, \ldots, x_m$ de A formant un système minimal tel que l'ensemble :

$$V \cap \text{ir co } \{x_i \mid i=0,\ldots,m\}$$

soit réduit à un seul point.
Dans le cas contraire, on dira que V et A sont liés simplement.

Ces deux dernières définitions conduisent aux deux lemmes suivants qui seront fondamentaux pour la proposition 1.10.

1.6. LEMME : Soit A une partie convexe et V une variété affine fermée de codimension finie dans X.Si $\bar{A}$ et V sont liés fortement alors :

$$\overline{A \cap V} = \bar{A} \cap V$$

DEMONSTRATION :

Soit n la codimension de V dans la variété affine engendrée par $V \cup A$ et $\{x_o,\ldots,x_n\}$ un système minimal de $\bar{A}$ tel que l'intersection $V \cap \text{ir co } \{x_i \mid i=0,\ldots,n\}$ soit réduite à un seul élément x .

Soit $\bar{x}$ appartenant à $\bar{A} \cap V$. Supposons que $\bar{x}$ n'appartienne pas à $\overline{A \cap V}$. Il existe dans ce cas un hyperplan fermé H séparant strictement $\bar{x}$ de $\overline{A \cap V}$. Cet hyperplan coupe donc le segment ouvert $]x,\bar{x}[$ en un point unique, soit z. On peut toujours supposer $z = 0$, puisque l'on peut se ramener à ce cas par translation. On pose $W = H \cap V$, et on définit la projection canonique,

$$p : \quad X \to X / W \quad .$$

L'espace X / W est isomorphe à la variété linéaire engendrée par le système $\{x_o,\ldots,x_n,\bar{x}\}$. Il est bien clair que p(x) appartient à ir $\overline{p(A)}$ puisque les trois ensembles ir p(A), ir $p(\bar{A})$ et ir $\overline{p(A)}$ sont identiques. D'autre part on a :

$$p(\bar{x}) \in \overline{p(A)} \quad \text{et} \quad 0 \in]p(x),p(\bar{x})[$$

On sait que 0 appartient alors à ir p(A), mais cela entraine que $W = p^{-1}\{0\}$ a une intersection non vide avec A, ce qui est impossible.

1.7. DEFINITION : Soit A une partie convexe de X et V une variété affine. On dit que V est d'appui de A si $V \cap A \neq \emptyset$ et si tout segmen ouvert contenu dans A, qui rencontre V, est contenu dans V.

En d'autres termes V est d'appui de A si et seulement si $V \cap A$ est une partie extrémale non vide de A.

1.8. LEMME : Sous les hypothèses du lemme 1.6., si V et $\bar{A}$ sont liés simplement, il existe un hyperplan fermé contenant V et d'appui de $\bar{A}$.

DEMONSTRATION :

Soit p la projection canonique de X dans X / V .
Avec les hypothèses faites, p(V) sera un élément de $p(\bar{A}) \setminus$ ir (p(A)). Il existera alors un hyperplan passant par p(V) et d'appui de $p(\bar{A})$ (cf. F.A. Valentine). Par transformation inverse on obtient un hyperplan contenant V et d'appui de $\bar{A}$.

Le lemme suivant établit le lien entre les variétés d'appui de codimension finie de A et les ensembles de type $\Phi(A;y_1,\dots,y_n)$.

1.9. LEMME : Soit A une partie convexe de X, alors pour toute variété affine fermée V, de codimension au plus égale à n, d'appui de A, on peut trouver $y_1,\dots,y_n \in Y$ tels que :

$$V \cap A = \Phi(A;y_1,\dots,y_n) \ ,$$

et :

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \{\bar{x} \in X \mid <\bar{x},y_i> = \max\{<x,y_i> \mid x \in \Phi(A;y_1,\dots,y_{n-1})\}\} \ . \tag{2'}$$

Réciproquement, pour tout $y_1,\dots,y_n \in Y$ tels que l'ensemble $\Phi(A;y_1,\dots,y_n)$ soit non vide, la variété affine V, définie par la relation (2'), est de codimension au plus égale à n, d'appui de A.

DEMONSTRATION :

On raisonne par récurrence sur n :

Si $n = 0$, tout est trivial.

Sinon, supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Soit donc V une variété affine fermée de codimension n, d'appui de A. V et A ne peuvent évidemment être liés que simplement. D'après le lemme 1.8., il existe un hyperplan H fermé contenant V et d'appui de A. On sait que dans ce cas on peut trouver un élément $y_1 \in Y$ tel que :

$$H = \{\bar{x} \in X \mid <\bar{x},y_1> = \max_{x \in A} <x,y_1>\}$$

On aura ainsi :

$$H \cap A = \Phi(A;y_1) \quad .$$

D'autre part V est de codimension $n - 1$ dans H . Aussi il découle de l'hypothèse de récurrence qu'il existe $n - 1$ forme linéaires $z_2,\dots,z_n$ continues sur H telles que :

$$V \cap A = \Phi(H \cap A;z_2,\dots,z_n)$$

et

$$V = \bigcap_{i=2}^{n} \{\bar{x} \in H \mid <\bar{x},z_i> = \max\{<x,z_i> \mid x \in \Phi(H \cap A;z_2,\dots,z_n)\}\}$$

Si pour tout $i=2,\dots,n$, $y_i \in Y$ est un prolongement de z_i , on aura alors :

$$V \cap A = \Phi(H \cap A; y_2,\dots,y_n)$$
$$= \Phi(\Phi(A;y_1);y_2,\dots,y_n)$$
$$= \Phi(A;y_1,\dots,y_n)$$

et aussi :

$$V = \bigcap_{i=2}^{n} \{\bar{x} \in H \mid \langle \bar{x},y_i \rangle = \max \{\langle x,y_i \rangle \mid x \in \Phi(H \cap A;y_2,\dots,y_n)\}\}$$

$$= \bigcap_{i=2}^{n} \{\bar{x} \in X \mid \langle \bar{x},y_i \rangle = \max \{\langle x,y_i \rangle \mid x \in \Phi(A;y_1,\dots,y_n)\}\} \quad .$$

———X—

On peut maintenant énoncer la proposition 1.10. suivante qui caractérise les parties A co_n-fermées.

1.10. PROPOSITION : Si A est une partie convexe de X, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1°/ A est co_n-fermée .

2°/ La relation :

(3) $\overline{A \cap V} = \bar{A} \cap V$,

est vraie pour toute variété affine fermée d'appui de $\bar{A}$ et de codimension au plus égale à n .

3°/ La relation (3) est vraie pour toute variété affine fermée V de codimension au plus égale à n .

DEMONSTRATION :

On montre d'abord l'équivalence des conditions 1°/ et 2°/.
(1°/ => 2°/): Soit une variété affine fermée de codimension au plus égale à n, d'appui de $\bar{A}$.

On peut, d'après le lemme 3, trouver $y_1,\dots,y_n \in Y$, tels que :

(4) $$V \cap \bar{A} = \Phi(\bar{A};y_1,\dots,y_n) \quad ,$$

et

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \{\bar{x} \in X \mid \langle \bar{x},y_i \rangle = \max \{\langle x,y_i \rangle \mid x \in \Phi(\bar{A};y_1,\dots,y_{i-1})\}$$

Par hypothèse, on peut écrire :

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \{\bar{x} \in X \mid \langle \bar{x},y_i \rangle = \max \{\langle x,y_i \rangle \mid x \in \Phi(A;y_1,\dots,y_{i-1})\}$$

puisque :

(5) $$\Phi(\bar{A};y_1,\dots,y_{i-1}) = \overline{\Phi(A;y_1,\dots,y_{i-1})} \quad , \quad i=1,\dots,n \quad .$$

Par suite :

$$V \cap A = \bigcap_{i=1}^{n} \{\bar{x} \in A \mid \langle \bar{x},y_i \rangle = \sup \{\langle x,y_i \rangle \mid x \in \Phi(A;y_1,\dots,y_{i-}$$

(6) $$= \Phi(A;y_1,\dots,y_n) \quad .$$

Les relations (4), (5), et (6) donnent alors la relation (3), cherchée.

(2°/ => 1°/): Réciproquement, soit $y_1,\dots,y_n \in Y$. Alors si l'ensemble $\Phi(\bar{A};y_1,\dots,y_n)$ est vide, il est bien évident que l'ensemble $\Phi(A;y_1,\dots,y_n)$ qu'il contient est également vide et le résultat est trivial. Dans le cas contraire, d'après le lemme 1.9., la variété V, définie par :

$$V = \{\bar{x} \in X \mid \langle \bar{x},y_i \rangle = \max \{\langle x,y_i \rangle \mid x \in \Phi(\bar{A};y_1,\dots,y_{i-1})\}\} \quad ,$$

est de codimension au plus égale à n , d'appui de $\bar{A}$ et telle que :

(7) $$V \cap \bar{A} = \Phi(\bar{A};y_1,\dots,y_n) \quad .$$

Par hypothèse, l'ensemble $V \cap A$ est non vide : on peut donc trouver un élément $\bar{x} \in A$, tel que :

$$< \bar{x},y_n > = \max \{< x,y_n >| \ x \in \Phi(\bar{A};y_1,\ldots,y_{n-1})\} \quad .$$

Par suite, on a :

$$\max \{< x,y_n >| \ x \in \Phi(\bar{A};y_1,\ldots,y_{n-1})\} =$$

$$= \max \{< x,y_n >| \ x \in \Phi(\bar{A};y_1,\ldots,y_n)\}$$

et donc :

$$A \cap V = \Phi(A;y_1,\ldots,y_n) \quad .$$

Cette dernière relation, la relation (7) et le fait que :

$$\overline{V \cap A} = V \cap \bar{A}$$

donnent immédiatement le résultat.

Il reste à montrer l'équivalence des conditions 2°/ et 3°/. L'implication 3°/ => 2°/ étant triviale, il ne reste plus qu'à montrer l'implication 2°/ => 3°/ :

Soit V une variété affine fermée de codimension au plus égale à n dans X. On procède par récurrence sur n.

- si $n = 0$, tout est trivial.
- Supposons maintenant le résultat vrai pour tout triplet (A',V',X') formé d'un convexe A', d'une variété affine fermée V' d'un e.l.c.s. X' tels que $\operatorname{codim}_{X'} V' \leq n-1$, $(n \geq 1)$.

Si $\bar{A}$ et V sont liés fortement, le résultat découle du lemme 1.6. Sinon, par le lemme 1.8, il existe un hyperplan fermé H contenant V et d'appui de $\bar{A}$. On a :

$$(8) \qquad H \cap \bar{A} = \overline{H \cap A} \quad .$$

Le triplet $(\overline{H \cap A}, V, H)$ vérifie l'hypothèse de récurrence puisque $\mathrm{codim}_H V \leq n-1$. On aura alors :

$$V \cap \overline{H \cap A} = \overline{V \cap H \cap A}$$
$$= \overline{V \cap A}$$

et, en tenant compte de (8), il vient :

$$V \cap \bar{A} = \overline{V \cap A} \quad .$$

X

1.11. <u>REMARQUE</u> :

a) Une partie A, quelconque de X, est co_n-fermé si et seulement si la relation, $\overline{co}\,(V \cap A) = V \cap \overline{co}\,A$, est vraie pour toute variété affine fermé V, de codimension au plus égale à n .

b) Si A est une partie co_n-fermée de X et φ une application linéaire et continue de X dans un e.l.c.s. X_1 telle que l'ensemble $\varphi(\overline{co}\,A)$ soit fermé alors $\varphi(A)$ est une partie co_n-fermée dans X_1 .

1.12. <u>COROLLAIRE</u> : Dans $\mathbb{R}^n$, une partie A est co-fermée, si et seulement si son enveloppe convexe, co A, est fermée.

<u>DEMONSTRATION</u> :

On a vu (1.3., exemple 2) que si co A est fermé, alors A est co-fermé. Réciproquement supposons que A soit co-fermé et soit $x \in \overline{co}\,A$. Comme conséquence immédiate de la proposition 1.10., on a :

$$\overline{\{x\} \cap co\,A} = \{x\} \cap \overline{co}\,A \; .$$

Par suite l'ensemble $\{x\} \cap co\,A$ est non vide, i.e. $x \in co\,A$.

1.13. <u>COROLLAIRE</u> : Soit $F \in \bar{\mathbb{R}}^X$, convexe, telle que F^* soit non identiquement égal à $+\infty$, et soit V une variété affine fermée de codimension finie. Si épi F est co_n-fermé, alors :

1°/ $\overline{F + \Psi_V} = \bar{F} + \Psi_V$,

pourvu que codim $V \leq n$.

2°/ En posant :

$$A(F) = \{\bar{x} \in V \mid F(\bar{x}) = \min_{x \in V} F(x)\}$$

et

$$A(\bar{F}) = \{\bar{x} \in V \mid \bar{F}(\bar{x}) = \min_{x \in V} \bar{F}(x)\} \quad ,$$

on a la relation :

$$A(\bar{F}) = \overline{A(F)} \ ,$$

pourvu que codim $V \leq n-1$.

<u>DEMONSTRATION</u> :

1°/ On a d'une manière générale :

$$\text{épi } \overline{(F + \Psi_V)} = \overline{\text{épi } (F + \Psi_V)}$$

$$= \overline{V \times \mathbb{R} \cap \text{épi } F} \ .$$

D'après la proposition 1.10., on aura :

$$\overline{V \times \mathbb{R} \cap \text{épi } F} = V \times \mathbb{R} \cap \overline{\text{épi } F}$$

$$= \text{épi } (\bar{F} + \Psi_V)$$

et donc, les fonctionnelles $\overline{F + \Psi_V}$ et $\bar{F} + \Psi_V$ sont identiques.

2°/ A partir de 1°/, on peut écrire que :

$$\alpha = \operatorname*{Inf}_{x \in V} F(x)$$

$$= \operatorname*{Inf}_{x \in V} \bar{F}(x) \ .$$

Par suite on a :

$$A(F) = \{\bar{x} \in X \mid (\bar{x},\alpha) \in V \times \{\alpha\} \cap \text{épi } F\}$$

et

$$A(\bar{F}) = \{\bar{x} \in X \mid (\bar{x},\alpha) \in V \times \{\alpha\} \cap \text{épi } \bar{F}\} \quad .$$

Comme :

$$V \times \{\alpha\} \cap \text{épi } \bar{F} = \overline{V \times \{\alpha\} \cap \text{épi } F} \quad ,$$

on a donc

$$A(\bar{F}) = \overline{A(F)} \quad .$$

2 - <u>CONDITION SUFFISANTE DE "CO-FERMETURE" POUR UN EPIGRAPHE</u>

Cette condition suffisante est donné par le théorème suivant :

2.1. <u>THEOREME</u> : Soit $F \in \bar{\mathbb{R}}^X$, s.c.i., telle que F^* soit partout finie sur Y et $\tau(Y,X)$ continue en au moins un point y_1 . Alors l'ensemble épi F est co-fermé.

Par démontrer ce théorème, on utilisera les résultats de trois lemmes.

2.2. <u>LEMME</u> : Soit $F \in \bar{\mathbb{R}}^X$, convexe et s.c.i., et soit $y_1 \in Y$.
Alors sous l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

a) F^* est finie et $\tau(Y,X)$ continue en y_1

b) F est $\sigma(X,Y)$ inf-compacte pour la pente y_1 ,

l'ensemble épi F est localement compact et ne contient pas de droite.

DEMONSTRATION :

(cf. J.L. Joly ou C. Castaing et M. Valadier b)).

2.3. LEMME (V. Klee) : Si A est une partie fermée d'un e.l.c.s. dont l'enveloppe convexe fermée est localement compacte et ne contient pas de droite, alors :

1°/ $\xi(\overline{co}\,(A)) \subset A$

2°/ l'ensemble $\overline{co}$ A est égal à l'enveloppe convexe fermée de la réunion de ses points extrémaux et de ses rayons extrémaux.

DEMONSTRATION :

On donne ci-dessous une **autre** démonstration du premier point, différente de celle de V. Klee.

Soit $x_o \in \xi(\overline{co}\,A)$. Par ce simple choix d'un élément extrémal de l'ensemble $C = \overline{co}\,A$, on élimine le cas trivial où $\xi(C)$ est vide et l'on suppose implicitement que l'ensemble localement compact C, ne contient pas de droite. Il existe donc $y \in Y$ (cf. N. Bourbaki c), exercice 21, p. 156), tel que l'ensemble :

$$\{x \in C \mid < x,y > \geq < x_o,y > - \varepsilon\}$$

soit compact ($\varepsilon > 0$, étant fixé). Posons :

$$H = \{x \in X \mid < x,y > = < x_o,y > - \varepsilon\}$$

et

$$H_+ = \{x \in X \mid < x,y > \geq < x_o,y > - \varepsilon\}$$

Par la proposition 2.4., qui suit, on a la relation :

$$H_+ \cap C = \overline{co}\,[H_+ \cap A) \cup (H \cap C)] \quad ,$$

et x_o est extrémal de l'ensemble compact $\overline{co}\,[(H_+ \cap A) \cup (H \cap C)]$. Comme $(H_+ \cap A) \cup (H \cap C)$ est de même compact, il contient donc x_o ; Or x_o n'est pas dans $H \cap C$, il est alors forcément dans $H_+ \cap A$, par suite dans A.

2.4. PROPOSITION : Soit A une partie non vide d'un e.l.c.s. X et H un hyperplan fermé. Si H_+ est l'un des demi-espaces fermés associés à H, on a la relation :

$$H_+ \cap \overline{co}\, A = \overline{co}\, [(H_+ \cap A) \cup (H \cap \overline{co}\, A)]$$

DEMONSTRATION :

Soit H_- , le second demi-espace fermé associé à H. On pose pour simplifier l'écriture :

$$C = \overline{co}\, A \ , \ C_+ = C \cap H_+ \ , \ A_+ = A \cap H_+$$

$$C_o = C \cap H \ , \ C_- = C \cap H_- \ , \ A_- = A \cap H_-$$

Il faut montrer que :

$$C_+ = \overline{co}\, (A_+ \cup C_o) \ .$$

a) Le fait que $\overline{co}\, (A_+ \cup C_o)$ soit contenu dans C_+ est trivial.

b) Montrons l'inclusion inverse. Soit $x_+ \in C_+$:
Si x_+ n'appartient pas à l'ensemble $\overline{co}\, (A_+ \cup C_o)$, il peut en être séparé strictement par un hyperplan fermé W. Dans ce cas W doit aussi séparer strictement x_+ de C_- : en effet, si un élément x_- de C_- est dans le même demi-espace fermé W_+ que x_+, il en sera de même pour tout l'intervalle $[x_-,x_+]$. Or l'intersection $[x_-,x_+] \cap C_o$ est non vide, donc W_+ rencontre C_o, ce qui est impossible. Par suite W sépare strictement x_+ de $C_- \cup A_+$. Finalement, W sépare x_+ de $\overline{co}\, (A_- \cup A_+) = \overline{co}\, A = C$, de plus strictement, car $x_+ \notin W$, ce qui est encore impossible.

2.5. LEMME : Soit $F \in \bar{\mathbb{R}}^X$, convexe, telle que F^* soit partout finie sur Y , alors l'ensemble épi F ne contient que des rayons extrémaux parallèles à $\{0\} \times \mathbb{R}$.

DEMONSTRATION :

En effet, si $(x_o,\lambda_o) \in$ épi F et $(x_1,\lambda_1) \in$ épi F sont tels que l'ensemble :

$$\{(x_o,\lambda_o) + \mu((x_1,\lambda_1) - (x_o,\lambda_1)) \mid \mu \geq 0\}$$

soit extrémal de épi F, on aura :

$$F(x_o + \mu(x_1-x_o)) = F(x_o) + \mu(F(x_1) - F(x_o)) \quad , \quad \text{pour tout } \mu \geq 0 .$$

Dans ce cas, si x_1 était différent de x_o, il existerait au moins $y \in Y$, tel que l'expression :

$$< x_1-x_o, y > - (F(x_1)-F(x_o))$$

soit strictement positive. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} F^*(y) &\geq \sup_{\mu\geq 0} (< x_o + \mu(x_1-x_o), y > - F(x_o + \mu(x_1-x_o))) \\ &= < x_o, y > - F(x_o) + \sup_{\mu\geq 0} \mu(< x_1-x_o, y > - (F(x_1)-F(x_o))) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

et donc $F^*(y) = +\infty$, ce qui contredirait le fait que F^* soit partout finie.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1. :

Soit V une variété affine fermée de codimension finie dans $X \times \mathbb{R}$, d'appui de $\overline{co}$ épi F . D'après la remarque 1.11., a), il suffit de montrer la relation :

$$V \cap \overline{co}\text{ épi } F \subset \overline{co}(V \cap \text{épi } F) .$$

Comme, d'après le lemme 2.2., l'ensemble épi F, par suite l'ensemble $V \cap$ épi F, vérifie les hypothèses du lemme 2.3., l'inclusion précédente sera établie si l'on montre que les points extrémaux et les rayons extrémaux de l'ensemble $V \cap \overline{co}$ épi F sont dans l'ensemble $V \cap$ épi F . Or, V étant d'appui de $\overline{co}$ épi F, toute partie extrémale de $V \cap \overline{co}$ épi F est donc extrémale de $V \cap \overline{co}$ épi F. Aussi est-on ramené à montrer simplement que les points extrémaux et les rayons extrémaux de $\overline{co}$ épi F sont dans épi F : En ce qui concerne les points extrémaux, on applique le lemme 2.3. D'autre part, d'après le lemme 2.5., tout rayon extrémal de l'ensemble $\overline{co}$ épi F est parallèle à $\{0\} \times \mathbb{R}$. Comme tout rayon extrémal a pour origine un point extrémal, qui se trouve donc dans épi F , le résultat final s'en suit.

2.6. COROLLAIRE : Soit E un espace de Banach, en dualité avec E'. Soit $F \in \overline{\mathbb{R}}^{E'}$, s.c.i., telle que F^* soit partout finie, alors épi F est co-fermé.

DEMONSTRATION :

E étant de Banach et F^* étant convexe, s.c.i., on sait (critère de Brondsted-Rockafellar) que F^* est alors continue si elle est partout finie sur E.

2.7. REMARQUE : Ainsi pour toute fonction $F : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, telle que F^* soit partout finie, l'enveloppe convexe de son épigraphe est fermée. On retrouve un résultat de M. Valadier a) .

2.8. REMARQUE : Soit $F \in \overline{\mathbb{R}}^X$, s.c.i. . Alors si F est $\sigma(X,Y)$ inf-compacte pour la pente y_1, les ensembles $\sigma(X,Y)$ compacts $(\partial F)^{-1}(y_2)$ et $\partial F^*(y_1)$ sont liés par la relation :

$$\partial F^*(y_1) = \overline{co}\ (\partial F)^{-1}(y_1) \quad .$$

En effet, tout point x extrémal de $\partial F^*(y)$ est tel que $(x,F^{**}(x)) \in \xi(\text{épi } F^{**})$, (cf. P.J. Laurent b)). Donc $(x,F^{**}(x)) \in$ épi F , d'après le lemme 2.3.. Par suite on a $F(x) = F^{**}(x)$ et donc $x \in (\partial F)^{-1}(y_1)$. Le résultat découle finalement du théorème de Krein-Milman.

3 - APPLICATION : MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE INTEGRALE NON CONVEXE.

Soit (T,τ,μ) un espace mesuré complet relativement à une mesure positive μ σ-finie et sans atome.

Soit E un espace de Banach séparable et f : $T \times E'_s \to]-\infty,+\infty]$, un intégrande normal.

Fixons un espace L comme étant ou bien l'espace $L^\infty_{E'_s}$, muni de la topologie $\sigma(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$, ou bien l'espace $L^1_{E'_s}$, muni de la topologie $\sigma(L^1_{E'_s}, L^\infty_E)$, et on considère alors une application $\phi : L \to \mathbb{R}^n$, linéaire et continue.

En posant, pour tout $r \in \mathbb{R}^n$:

$$I^\phi_f(r) = \inf \{\int_T f(t,Y(t))\mu(dt) \mid Y \in L \text{ et } \phi(Y) = r\} ,$$

et

$$A(I^\phi_f(r)) = \{Y \in L \mid \phi(Y) = r \text{ et } I^\phi_f(r) = I_f(Y)\} ,$$

et en définissant de manière analogue, la fonctionnelle $I^\phi_{f^{**}}$ et l'ensemble $A(I^\phi_{f^{**}}(r))$, on obtient le théorème suivant :

3.1. THEOREME : Si pour au moins $Y \in L$, l'application $t \to f(t,Y(t))$ est sommable et si pour tout $X \in L'$, l'application $t \to f^*(t,X(t))$ est sommable, alors :

1°/ les fonctionnelles I^ϕ_f et $I^\phi_{f^{**}}$ sont identiques, convexes, inf-compactes (pour toute pente) sur $\mathbb{R}^n$ et propres,

2°/ pour tout $r \in \mathbb{R}^n$, pour lequel la fonctionnelle I_f est finie, l'ensemble $A(I^\phi_f(r))$ est non vide, d'adhérence convexe compacte égale à l'ensemble $A(I^\phi_{f^{**}}(r))$.

DEMONSTRATION :

On procède par étapes :

a) <u>La fonctionnelle</u> $I^{\phi}_{f^{**}}$ <u>est s.c.i. sur L</u> :

D'après le théorème 3.1., II, (resp. 3.5., II) dans le cas où $L = L^{\infty}_{E'_s}$ (resp. $L^1_{E'_s}$), la fonctionnelle $I_{f^{**}}$ est inf-compacte. Pour tout $r \in \mathbb{R}^n$, tel que $I^{\phi}_{f^{**}}(r)$ soit fini, il existe donc $Y \in L$, vérifiant les relations :

$$\phi(Y) = r \quad \text{et} \quad I_{f^{**}}(Y) = I^{\phi}_{f^{**}}(r) .$$

Par suite, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, arbitraire, on a :

$$\begin{aligned}\{r \in \mathbb{R}^n \mid I^{\phi}_{f^{**}}(r) \leq \lambda\} &= \{r \in \mathbb{R}^n \mid \exists Y \in L : \phi(Y) = r \text{ et } I_{f^{**}}(Y) \leq \lambda\} \\ &= \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \{G(\phi) \cap (\mathbb{R}^n \times K_\lambda)\}\end{aligned}$$

où $G(\phi)$ représente le graphe de la fonction ϕ et K_λ, l'ensemble compact défini par :

$$K_\lambda = \{Y \in L \mid I_{f^{**}}(Y) \leq \lambda\} .$$

Comme l'ensemble $(G(\phi) \cap \mathbb{R}^n) \times K_\lambda$ est fermé dans $\mathbb{R}^n \times K_\lambda$, sa projection sur $\mathbb{R}^n$ est donc fermée. Ceci montre que la fonctionnelle $I^{\phi}_{f^{**}}$ est s.c.i. sur L .

b) <u>La fonctionnelle</u> $I^{\phi}_{f^{**}}$ <u>est convexe sur L</u> :

Il suffit de montrer que son épigraphe est convexe. Or, on a :

$$\begin{aligned}\text{épi } I^{\phi}_{f^{**}} &= \{(r,\lambda,X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times L \mid \phi(X) = r \text{ et } I_{f^{**}}(X) \leq \lambda\} \\ &= \text{proj}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \{(G(\phi) \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}^n \times \text{épi } I_{f^{**}})\}.\end{aligned}$$

L'ensemble $(G(\phi) \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}^n \times \text{épi } I_{f^{**}})$, étant convexe, sa projection sur l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est donc convexe.

c) <u>La fonctionnelle $I^{\phi}_{f^{**}}$ est inf-compacte sur L</u> :

On calcule sa fonctionnelle polaire. On a pour tout $r' \in \mathbb{R}^n$:

$$(I^{\phi}_{f^{**}})^{*}(r') = \sup \{< r,r' > - \inf \{I_{f^{**}}(Y) \mid Y \in L \text{ et } \phi(Y) = r\}$$

$$= \sup_{r} \sup_{Y \in L \,:\, \phi(Y) = r} \{< r,r' > - I_{f^{**}}(Y)\}$$

$$= \sup_{Y} \{<\phi(Y),r' > - I_{f^{**}}(Y)\}$$

$$= \sup_{Y} \{< Y,{}^{t}\phi(r') > - I_{f^{**}}(Y)\} \quad ,$$

et donc :

$$(I^{\phi}_{f^{**}})^{*}(r') = (I_{f^{**}})^{*}({}^{t}\phi(r'))$$

$$= I_{f^{*}}({}^{t}\phi(r')) \quad , \quad \text{pour tout } r' \in \mathbb{R}^n .$$

Ainsi, la fonctionnelle convexe, et s.c.i., $I^{\phi}_{f^{**}}$ est de polaire finie: on sait qu'elle est alors inf-compacte (critère de Brondsted-Rockafellar)

Elle ne prendra donc jamais la valeur $-\infty$, car sinon sa polaire serait identiquement égale à $+\infty$. Comme, d'une part, l'on a :

$$I^{\phi}_{f^{**}}(\phi(Y)) \leq I_{f^{**}}(Y) \leq I_{f}(Y) \quad , \quad \text{pour tout} \quad Y \in L ,$$

et que d'autre part, la fonctionnelle I_f est non identiquement égale à $+\infty$, sur L, le point e) suivant est établi :

e) <u>La fonctionnelle $I^{\phi}_{f^{**}}$ est propre sur L</u> .

f) <u>Les fonctionnelles I^{ϕ}_{f} et $I^{\phi}_{f^{**}}$ sont identiques sur L</u> :

Soit V une variété affine fermée de codimension finie dans L, arbitraire. Il est bien clair que cette identité sera établie si l'on montre la relation :

$$(9) \qquad \overline{I_f + \Psi_V}(Y) = I_{f^{**}}(Y) + \Psi_V(Y) \quad , \quad \text{pour tout} \quad Y \in L \quad ,$$

car alors, on aura :

$$\inf_{X \in V} I_f(X) = \inf_{X \in V} I_{f^{**}}(X) \quad ,$$

et on pourra donc écrire que :

$$I_f^{\phi}(r) = I_{f^{**}}^{\phi}(r) \quad , \quad \text{pour tout} \quad r \in \mathbb{R}^n \quad .$$

En termes d'épigraphes, la relation (9) se traduit par :

$$\text{(10)} \qquad \overline{(V \times \mathbb{R}) \cap \text{épi } I_f} = (V \times \mathbb{R}) \cap \overline{\text{co}} \text{ épi } I_f \ .$$

On concluera donc au résultat si l'on montre les deux relations :

$$\text{(11)} \qquad \overline{(V \times \mathbb{R}) \cap \text{épi } I_f} = \overline{(V \times \mathbb{R}) \cap \text{co épi } I_f}$$

$$\text{(12)} \qquad \overline{(V \times \mathbb{R}) \cap \text{co épi } I_f} = (V \times \mathbb{R}) \cap \overline{\text{co}} \text{ épi } I_f \ .$$

En remarquant que l'épigraphe de la fonctionnelle I_f s'écrit :

$$\text{épi } I_f = \{(X, \textstyle\int_T \Lambda(t)\mu(dt)) \mid (X,\Lambda) \in L \times L^1 \text{ et } (X(t),\Lambda(t)) \in \text{épi } f_t \text{ p.p.}\} \ .$$

On voit, de manière évidente que cet épigraphe est de la forme $\varphi(M_{L \times L^1}(\Gamma))$ où $\Gamma(t) = \text{épi } f_t$ $(t \in T)$ et φ l'application linéaire et continue de $L \times L^1$ dans $L \times \mathbb{R}$, définie par :

$$\varphi(X,\Lambda) = (X, \textstyle\int_T \Lambda(t)\mu(dt)) \quad , \quad (X \in L) \ , \ (\Lambda \in L^1) \ .$$

La relation (11) devient alors une simple application du corollaire 1.11, ch. III.

Quant à la relation (12), elle se déduirait de la remarque 1.11., a), si l'on savait que l'ensemble épi I_f était co-fermé dans l'espace $L \times \mathbb{R}$. D'après ce qui précède cet ensemble est l'image de l'ensemble $M_{L \times L^1}(\Gamma)$ par l'application linéaire et continue φ .
De manière semblable, l'ensemble épi $I_{f^{**}}$ est l'image par la même application de l'ensemble $M_{L \times L^1}(\overline{\text{co}}\ \Gamma)$.

Or, on a :

$$M_{L \times L^1}(\overline{co}\,\Gamma) = \overline{co}\, M_{L \times L^1}(\Gamma) \quad ,$$

et comme la fonctionnelle $I_{f^{**}}$ est s.c.i., son épigraphe est fermé. L'ensemble $\varphi(\overline{co}\, M_{L \times L^1}(\Gamma))$ est donc fermé. Ainsi, dansle but d'appliquer les résultats de la remarque 1.11b),il ne reste alors plus qu'à montrer que l'ensemble $M_{L \times L^1}(\Gamma)$ est co-fermé :

Comme la fonctionnelle I_{f^*} est partout finie, alors pour presque tout $t \in T$, la fonctionnelle f_t^* est de même finie, et donc d'après le théorème l'ensemble $\Gamma(t) = \text{épi } f_t$ est co-fermé. Le lemme suivant achève alors la démonstration :

3.2. <u>LEMME</u> : Soit Γ une multi-application de T dans un espace G du type E ou E'_s et soit L_G (resp. $L_{G'}$) un sous-espace de M(G) (resp. M(G')) décomposable tel que l'application mesurable $t \to \langle X(t), Y(t) \rangle$ soit intégrable pour tout $(X,Y) \in L_G \times L_{G'}$ et tel que l'ensemble $M_{L_G}(\Gamma)$ soit non vide.

Alors si Γ est de graphe mesurable à valeurs co-fermées et non vides p.p., l'ensemble $M_{L_G}(\Gamma)$ est co-fermé dans L_G.

<u>DEMONSTRATION</u> :

Remarquons tout d'abord que l'on ne restreindra pas la généralité si l'on suppose que Γ est à valeurs co-fermées non vides sur tout T, puisque l'on peut se ramener à ce cas en choisissant convenablement une multi-application équivalente à Γ .

Pour tout $Y \in L_G$, soit $\Phi(\Gamma;Y)$, la multi-application définie par :

$$\Phi(\Gamma;Y)(t) = \Phi(\Gamma(t);Y(t)) \quad , \quad t \in T \quad .$$

Il n'est pas difficile de voir que cette multi-application est de graphe mesurable.

Si f_1 est l'intégrande mesurable défini par :

$$f_1(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \Gamma(t) \\ +\infty & \text{sinon} \quad , \end{cases}$$

on aura, d'une part :

$$(\partial f_{1t})^{-1}(y) = \Phi(\Gamma(t);y) \quad , \quad t \in T \; , \; y \in G' \; ,$$

et d'autre part :

$$(\partial I_{f_1})^{-1}(Y) = \Phi(M_{L_G}(\Gamma);Y) \quad , \quad Y \in L_{G'} \quad .$$

Aussi, aurons-nous, d'après le corollaire 2.3., II, la formule :

(13) $$\Phi(M_{L_G}(\Gamma);Y) = M_{L_G}(\Phi(\Gamma;Y)) \; .$$

On peut donc écrire, en utilisant le corollaire 2.2.,II :

$$\begin{aligned} \overline{co}\; \Phi(M_{L_G}(\Gamma);Y) &= \overline{co}\; M_{L_G}(\Phi(\Gamma;Y)) \\ &= M_{L_G}(\overline{co}\; \Phi(\Gamma;Y)) \; . \end{aligned}$$

La multi-application Γ étant à valeurs co-fermées, on a donc :

$$\overline{co}\; \Phi(\Gamma;Y) = \Phi(\overline{co}\; \Gamma;Y) \; .$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \overline{co}\; \Phi(M_{L_G}(\Gamma);Y) &= M_{L_G}(\Phi(\overline{co}\; \Gamma;Y)) \\ &= \Phi(M_{L_G}(\overline{co}\; \Gamma);Y) \end{aligned}$$

car la formule (13) reste encore valable si l'on remplace Γ par $\overline{co}\; \Gamma$.

Finalement, en utilisant une deuxième fois le corollaire 2.2.,II, on obtient :

$$\overline{co}\ \Phi(M_{L_G}(\Gamma);Y) = \Phi(\overline{co}\ M_{L_G}(\Gamma);Y) \quad , \quad Y \in L_G \quad .$$

Ceci montre que l'ensemble $\Phi(M_{L_G}(\Gamma))$ est co_1-fermé.

On montre de la même manière qu'il est co_2-fermé, etc... .

2°/ Soit $r \in \mathbb{R}^n$, arbitraire tel que $I^{\phi}_{f^{**}}(r)$ soit fini.

Posons :

$$V = \{Y \in L \mid \phi(Y) = r\}$$

et

$$\alpha = \inf_{Y \in V} I_f(Y) \ .$$

Les ensembles $A(I^{\phi}_f(r))$ et $A(I^{\phi}_{f^{**}}(r))$, s'écrivent :

$$A(I^{\phi}_{f^{**}}(r)) = \{\bar{Y} \in L \mid (\bar{Y},\alpha) \in (V \times \{\alpha\}) \cap \text{épi } I_{f^{**}}\}$$

et

$$A(I^{\phi}_f(r)) = \{\bar{Y} \in L \mid (\bar{Y},\alpha) \in (V \times \{\alpha\}) \cap \text{épi } I_f\} \quad .$$

En utilisant les mêmes arguments que pour montrer la relation (10), on obtient :

$$\overline{(V \times \{\alpha\}) \cap \text{épi } I_f} = (V \times \{\alpha\}) \cap \text{ épi } I_{f^{**}}$$

et comme l'ensemble $A(I^{\phi}_{f^{**}}(r))$ est compact, on aura donc le résultat final :

$$\overline{A(I^{\phi}_f(r))} = A(I^{\phi}_{f^{**}}(r)) \ .$$

3.3. REMARQUE : Si $E = \mathbb{R}^n$, $L = L^1_n$ et $\phi(Y) = \int_T Y(t)\mu(dt)$ pour tout $Y \in L^1_n$ on sait (cf. R.T. Rockafellar, f)) que la condition

"$I_{f^*}(X)$ est finie pour tout $X \in L^\infty_n$ "

est équivalente à la condition que :

"$I_{f^*}(x)$ est finie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ " .

Le premièrement du théorème est donc l'extension d'un résultat de M. Valadier.

3.4. REMARQUE : Connaissant ce théorème, il est alors possible d'étendre le problème d'Aumann-Perles dans la direction Berliocchi-Lasry-Zvi Arstein.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES

Pour ce qui concerne le chapitre I, M. Valadier m'a signalé que dans le livre qu'il écrit avec C. Castaing, celui-ci prépare des résultats dans le sens des théorèmes 1.5. et 2.8. .

Au chapitre III, le théorème 1.5. a d'abord été donné dans le cadre des multi-applications (cf. M. Benamara) . Puis on s'est aperçu qu'il suffisait pour le généraliser de considérer certains ensembles de fonctions mesurables vérifiant l'hypothèse de τ-stabilité (cf. Définition 1.13.). Cette hypothèse n'est pas nouvelle puisqu'elle a déjà été considérée, sous une forme semblable, au moins par H. Halkin, d), et C. Olech, b). Celui-ci est même arrivé, dans certains cas, à montrer qu'une partie τ-stable pouvait être définie à partir d'une multi-application (cf. C. Olech, d), aussi M.F. Saint Beuve, b)).

Enfin, signalons qu'il est possible d'étendre les résultats de ce chapitre au cas de mesures vectorielles, ce qui aurait permis de tenir compte de certains autres résultats disons Lyapunoviens.

B I B L I O G R A P H I E

Le signe ★ précédant la référence exprime que le travail en question a un lien avec le théorème de convexité de Lyapunov.

Beaucoup de ces références n'ont pas été citées.

★ V.I. Arkin et V.L. Levin, Convexity of values of vector integrals, Theorems on measurable choice and variational problems, Russian Math. Surveys, 27, (3), (1972), 21-86.

★ Z. Arstein , On a variational Problem, J. Math. Anal. Appl., 45, (1974), 404-415.

★ R.J. Aumann, a) Integrals of set-valued functions, J. Math. Anal., 12, (1965), 1-12.

b) Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders, Econometrica, 34, (1966), 1-17.

★ R.J. Aumann and M. Perles, A variational problem arizing in economics, J. Math. Anal. Appl., 11, (1965), 488-503.

★ V. Baumann, The boundary of the range of a vector measure, Proc. Amer. Math. Soc., 17, (1966), 865-867.

★ M. Benamara, Sections mesurables extrémales d'une multi-application, C.R. Acad. Sci. (Paris), 278, (1974), 1249-1252.

★ H. Berliocchi et J.M. Lasry, Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations, Bull. Soc. Math. France, 101, (1973), 129-184.

* J.M. Bismuth, Analyse convexe et probabilités (Thèse, Paris VI, 1973) .

* D.H. Blackwell, a) The range of certain vector intégrals, Proc. Amer. Soc., 2, (1951), 390-395.

* b) On a theorem of Lyapunov, Ann. Math. Statistics, 22, 1, (1951), 112-114.

* R. Borges, Ecken des wertebereiches von vecktorintegralen. Math. Ann. 173, (1967), 53-58.

N. Bourbaki, a) Topologie générale chap. 5 à 10, Hermann, Paris, (1974).
b) Integration chap. 1 à 4, Hermann, Paris, (1965).
c) Espaces vectoriels topologiques, chap. 1 et 2, Hermann, Paris, (1966).

A. Brøndsted, Conjugate convex functions in topological vector spaces, Mat. - Fys. Medd. Danske Vid. Selsk., 34, (1964).

B. Brosowski et F. Deutsch, On some geometrical properties of suns, J. approx. Theory, 10, (1974), 245-247.

C. Carasso, L'algorithme d'échange en optimisation convexe. (Thèse, Grenoble, 1973).

* C. Castaing, a) Sur une extension du théorème de Lyapunov, C.R. Acad. Sci. (Paris), 260, (1965), 3838-3841.
* b) Sur les multi-applications mesurables, Thèse, Faculté des Sciences, Caen, (1967).
c) Sur les multi-applications mesurables, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle, 1, (1967), 91-126.
* d) Sur une nouvelle extension du théorème de Lyapunov, C.R. Acad. Sci. (Paris), 264, (1967), A 333 - A 336.
e) Sur la mesurabilité du profil d'un ensemble convexe compact variant de façon mesurable, C.S.U., Perpignan, (France), (1968).
f) Quelques résultats de compacité liés à l'intégration, C.R. Acad. Sc., Paris, 270, (1970), 1732-1735.
g) Intégrandes convexes duales, Séminaire d'Analyse Convexe. Secrétariat de Mathématiques, Université de Montpellier, (France), (1973).

C. Castaing et M. Valadier, a) Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle 16, (1969), 3-16.

b) à paraître.

* R. Datko, A general Bang-Bang principle and Bang-Bang approximations, J. Math. Anal. Appl., 10, (1965), 284-294.

J.P. Dauer et F.S. Van Vleck, Measurable selectors of multifunctions and applications, Math. Systems Theory, 7, (1973), 367-373.

* G.B. Dantzig and A. Wald, On the fundamental lemma of Neyman and Pearson, Ann. Mat. Statistics, 22, (1951), 87-93.

G. Debreu, Integration of correspondences, Proc. Fifth Berkeley symp. Mathematical Statistics and Probability, vol. II : 1, 351-372, University of California Press (1966).

* M. de Wilde, a) A note on the bang-bang principle, J. London Math. Soc., 1, (2), (1969), 753-759.

b) Sur un théorème de Lyapunov, Bull. Soc. Roy., Sci. Liège, 38, (1969), 96-100.

N. Dinculeanu, Vector measures, Pergamon Press, (New York), (1967).

* L.E. Dubins et E.H. Spanier, How to cut a cake fairly, Ann. Math. Monthly, 68, (1961), 1-17.

A.Ya. Dubovitskii et A.A. Milyutin, Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems with mixed constraints of inequality type, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., 8, (1968), 725-779.=USSR Comput. Mat. and Mat. Phys, 8, : (4), (1968), 24-98.

N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Vol. I, Interscience, New York-London, (1958).

* A. Dvoretzky, A. Wald et J. Wolfowitz,
a) Relations among certain ranges of vector measures, Pacific J. Math. 1, (1951), 59-74.
b) Elimination of randomization in certain statistical decision procedures and zero-person games, Ann. Math. Statistics, 22, (1951), 1-21.

* I. Ekeland et R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris, (1974).

* J. Etienne, Sur une démonstration du "bang-bang principle", Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 37, (1968), 551-556.

* A.F. Filipov, On some questions in the theory of optimal control, Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh. Astronom., 2, (1959), 25-32 = J. SIAM control Ser. A1, (1962), 76-84.

* W.G. Fleming, On a class of games over a function space and variationel problems connected with them (Russian), in the collection "Infinite antagonistic games", Izdot. Fizmatgiz, Moscov, (1963), 98-122 .

E.G. Gol'štein, a) Problems of best approximation by elements of a convex set and some properties of support functionals. Doklady Akad. Nauk SSSR, 173, (5), (1967), 995-998, = Soviet Math. Dokl. 8 (2), (1967), 504-507.
* b) Generalized duality relations in extremal problems, Ekonom. i Mat. Metody, 4, (1968), 597-610.

* W.C. Grimmell, The existence of piecewise-continuous fuel optimal controls, SIAM. J. Control, 5, (1967), 515-519

A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, Soa-Paulo, (1964).

* H. Halkin, a) Lyapunov's theorem on the range of a vector measure and Pontryagin's maximum principle. Arch. Rat. Mech. Anal., 10, (1962), 296-304.

* b) Some further generalizations of a theorem of Lyapunov, Arch. Ratinnal Mech. Anal., 17, (1964), 272-277.

* c) A generalization of LaSalle's "bang-bang" principle, J. SIAM control, 2, (1964), 199-202.

* d) On a generalization of a theorem of Lyapunov, J. Math. Anal. Appl., 10, (1965), 325-329.

* e) Mathematical foundations of system optimization, Topics in Optimization, Mathematical Foundations of system Optimization, (1967), 197-262.

* H. Halkin and E.C. Hendricks, Subintegrals of set-valued functions with semi-analytic graphs, Proc. Mat. Acad. Sci. USA, 59, (1968), 365-372.

* P.R. Halmos, The range of a vector measure, Bull. Amer; Math. Soc., 54, (1948), 416 - 421.

* H. Hermes, a) A note on the range of vector measure ; application to the theory of optimal control, J. Math. Anal. Appl. 8, (1964), 78-83.

* b) On the closure and convexity of attainable sets in finite and infinite dimensions, SIAM J. Control, 5, (1967), 409-417.

* c) Smoothing and approximating control problems, in Mathematical Theory of Control, (A.V. Balakrishnan and L.W. Neustadt Ed.), Academic Press, New York and London, (1967), 109-114.

C.J. Himmelberg and F.S. Van Vleck, Extreme points of multifunctions, Indiana University Math. J., 22, (1973) 719-729.

* R.B. Holmes, A course on optimization and best approximation (Lecture Notes in Mathematics, 257, Springer-Verlag, Berlin.Heidelberg New York, (1972)).

A.D. Ioffe et V.L. Levin, Subdifferentials of convex functions, Trudy Moskov. Mat. Obshch., 26, (1972), 3-74.
= Trans. Moscow Math. Soc., 26, (1972).

★ A.D. Ioffe et V.M. Tikhomirov, Duality of convex functions and extremal problems, Uspekhi Mat. Nauk, 23, (6),(1968), 51-116.
= Russian Math. Surveys, 23, : (6) ,(1968), 53-124.

A. et C. Ionescu Tulcea, Topics in the theory of liftings, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1969).

J.A. Johnson, Extreme measurable selections, Proc. Amer. Math. Soc., 44, (1974), 107-112.

J.L. Joly, Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes, (Thèse, Grenoble, 1970).

★ S. Karlin, Extreme points of vector functions, Proc. Amer. Math. Soc., 4, (1953), 603-610.

★ S. Karlin et W.G. Studden, Tchebycheff systems : with applications in analysis and statistics, Interscience publishers, John Wiley, (1966).

★ H.G. Kellerer, a) Zur konvexität des wertebereiches normaler Maße. Arch. der Math., 12, (1961), 301-306.
★ b) Bemerkung zie einem satz von H. Richter. Arch. der Math., 15, (1964), 204-207.

★ J.F.C. Kingman et A.P. Robertson, On a theorem of Lyapunov, J. London Math. Soc., 43, (1968), 347-351.

V. Klee, Extremal structure of convex sets, Arch. Math., 8, (1957), 234-240.

★ I. Kluvanek, The range of a vector-valued measure, Math. Systems Theory, 7, (1973), 44-54.

★ I. Kluvanek et G. Knowles, Attainable sets in infinite-dimensional spaces, Math. Systems theory, 7, (1973), 344-351.

★ I. Kluvanek et G. Knowles, Liapunov decomposition of a vector valued measure, Math. Ann., 210, (1974), 123-127.

★ G. Knowles, Lyapunov vector measures, SIAM J. Control, 13,(2) , (1975), 294-303.

★ S. Koshi, A remark on the Lyapunov-Halmos-Blackwell convexity theorem, Math. J. Okayama Univ., 14, (1969), 29-33.

★ B.R. Kripke et T.J. Rivlin, Approximation in the metric of $L^1(x,\mu)$, Am. Math. Soc. Trans., 119, (1965), 101-122.

P.J. Laurent, a) Théorèmes de caractérisation d'une meilleure approximation dans un espace normé et généralisation de l'algorithme de Rémès, Num. Math., 10, (1967), 190-208.
b) Approximation et optimisation, Hermann, Paris, (1972).

P.J. Laurent et Pham-Dinh-Tuan, Global approximation of a compact set by elements of a convex set in a normed space, Num. Math., 15 (1970), 137-150.

★ J.P. LaSalle, The time optimal control problem, contributions to the theory of non linear oscillations, 5, 1-24, Princeton, N.J., (1960),

★ E.H. Lemon, Testing of statistical hypotheses. (cité par V.I. Arkin et V.L. Levin).

V.L. Levin, a) Subdifferentials of convex integral functionals and liftings that are the identity on subspaces of $\mathcal{L}^{\infty}$, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 211, (5), (1973) = Soviet Math. Dokl; 14, (1973), 1163-1166.

b) Decomposition de Lebesgue pour des fonctionnelles sur l'espace des fonctions vecteurs L^{∞}_{*}, Funkcional. Anal. i prilozen, 8, (4), (1974), 48-53. (en russe).

* N. Levinson, Minimax, Lyapunov and "bang-bang", J. Differential Equations, 2, (1966), 218-241.

* A.V. Levitin, An optimal control problem with constraints on phase coordinates, Vestnik Moskov Univ. Mat. Mekh., 3 , (1971), 59-68.

* J.S. Lew, The range of a vector measure with values in a Montel space, Math. Systems Theory, 5, (1971), 145-147.

* J. Lindenstrauss, A short proof of Lyapunov's convexity theorem, J. Math. Mech., 15, (1966), 971-972.

* A.A. Lyapunov, a) Sur les fonctions-vecteurs complètement additives, Izv. Akad. Nauk. SSSR ser. Mat., 4, (1940), 465-478.

* b) B-functions, Uspekhi Mat. Nauk, 5, (5), (1950), 109-119.

J.J. Moreau, Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, (1967).

* R.M. Moroney, The Haar problem in L_1, Am. Math. Soc. Proc., 12, (1961), 793-795.

J. Von Neumann, On rings of operators Reduction theory, Ann. of Math., (1949), 401-485.

* L.W. Neustadt, The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions, J. Math. Anal. Appl., 7,(1963),110-117.

* C. Olech, a) Extremal solutions of a control system, J. Differential Equation, 2, (1966), 74-101.

* b) Lexicographical order, range of integrals and "bang-bang" principle, Mathematical theory of Control, Acad. Press, New York - London, (1967), 35-45.

* c) On the range of an unbounded vector-valued measure, Math. Systems Theory, 2, (1968), 251-256.

d) The characterisation of the weak closure of certain sets of integrable functions, SIAM J. Control., 12, (2), (1974).

* R.R. Phelps, Cebysev subspaces of finite dimension in L_1, Proc. Am. Math. Soc., 17, (3), (1966), 646-652.

B.N. Pshenichnyi, Necessary condition for an extremum, M. Dekker, Inc., New York, (1971).

J.R. Rice, Approximation des fonctions, Dunod, Paris, (1969).

* H. Richter, Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten satzes der Masstheorie, Math. Ann.,750, (1963), 85-90 ; and 440-441.

R.T. Rockafellar, a) Level sets and continuity of conjugate convex functions, Trans. Amer. Math. Soc., 123 ,(1966), 46-63.

b) Integrals which are convex functionals, Pacific J. Math., 24, (1968), 525-539.

c) Measurable dependence of convex sets and functions on parameters, J. Math. Anal. Appl.,28,(1969), 4-25.

d) Convex analysis, Princeton University Press,(1969).

* e) Weak compactness of level sets of integral functionals Proceedings of Troisième Colloque d'Analyse Fonctionnelle (CBRM), (Liège, sept. 1970), H.G. Garnir (ed.), Vender, Louvain-Belgium, (1971).

R.T. Rockafellar, f) Integrals which are convex functionals, II, Pacific, J. Math., 39, (2), (1971), 439-469.

g) Convex integral functionals and duality, Contributions to non-linear functional analysis, Zarantonello (ed.), Acad. Press, New York - London, (1971), 215-236.

h) Conjugate duality and optimization, CBRM lecture note series, N° 16, SIAM Publications, (1974).

V.A. Rokhlin, Selected topics from the metric theory of dynamical system, Uspekhi Mat. Nauk, 4, (2), (1949), 57-128 = Amer. Math. Soc. Transl., (2), 49, (1966), 171-240.

* E. Rozema, Almost Chebyshev subspaces of $L^1(\mu;E)$, Pac. J. Math., 53, (2), (1974), 585-604.

* E.O. Roxin, The existence of optimal controls, Michigan Math. J., 9, (1962), 109-119.

M.F. Sainte Beuve, a) Sur la généralisation d'un théorème de section mesurable de Von Neumann - Aumann, C.R. Acad. Sc. Paris, 276, (1973), 1297-1300.

b) Propriétés topologiques des mesures vectorielles et quelques applications, Séminaire d'Analyse Convexe, Secrétariat de Mathématiques, Université de Montpellier, (1975).

* J. Schmets, Sur une généralisation d'un théorème de Lyapounov, Bull. Soc. Royale, Liège, 35, (1966), 185-194.

* D. Schmeidler, Fatou's lemma in several dimensions, Proc. Am. Math. Soc., 24, (2), (1970), 300-306.

L. Schwartz, Cours oral sur la théorie de la mesure (1968).

* I. Singer, Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, Springer-verlag, Berlin-Heidelberg, (1970).

★ L.M. Sonneborn and F.S. Van Vleck, The "bang-bang" principle for linear control systems, J. SIAM control, 2, (1964), 151-159.

K. Sundaresan, a) Extreme points of the unit cell in Lebesgue-Bochner functions spaces, Colloq. Math. XXII, 1, (1970), 111-119.

b) Extreme points of convex sets and selections theorems (Lecture Notes in Math., 171, Springer-Verlag, (1970)).

c) Extreme points in Legesgue-Bochner function spaces I, Report 69-12, Depart. of Math., Carnegie-Mellon University, (1969).

★ I. Tweddle, The range of a vector valued measure, Glasgow Mathem. J. 13, (1), (1972), 64-68.

★ J.J. Uhl, The range of a vector-valued measure, Proc. Amer., Math. Soc., 23, (1969), 158-163.

★ M. Valadier, a) Integration de convexes fermés, notamment d'épigraphes, Inf-convolution continue, Rev. Franç. Inf. Rech. Op., 4, (1970), 57-73.

★ b) Contribution à l'analyse convexe (thèse, Paris, 1970).

c) Multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes, J. Math. Pures Appl., 50, (1971), 265-297.

d) Convex integrands on souslin locally convex spaces, Seminaire d'Analyse Convexe, Secrétariat de Mathématiques, (Université de Montpellier, 1973).

e) A natural supplement of L^1 in the dual of L^∞ , Séminaire d'Analyse Convexe, Secrétariat de Mathématiques, (Université de Montpellier, 1974).

F.A. Valentine, Convex sets, Mc Graw-Hill, New York, (1964).

★ P.P. Varaiya, On the trajectories of differential system, in Mathematical theory of Control, (A.V. Balakrishnan and L.W. Neustadt ed.), Academic Press, New York and London, (1967), 115-128.

J. Warga, Optimal control of differential and functional equation. Academic Press, New-York, (1972).

★ R. Wegmann, Der Wertebereich von Vektorintegralen, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 14, (1970), 203-238.

★ J.A. Yorke, Another proof of the Lyapunov convexity theorem, SIAM J. Control, 9, (1971), 351-353.

K. Yosida et E. Hewitt, Finitely additive measures, Trans. Amer., Math. Soc., 72, (1952), 46-66.