Monômes et fonctions en algèbre à p valeurs

Elisabeth Kergall-Kuntzmann

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
INFORMATIQUE

Elisabeth
KERGALL-KUNTZMANN

MONOMES ET FONCTIONS EN ALGEBRE A p VALEURS

Thèse soutenue le 19 décembre 1975 devant la Commission d'Examen :

Président : C. BENZAKEN

Examinateurs : E. PICHAT
G. SAUCIER

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF	Présidents	M. Louis NEEL
M. Gabriel CAU	Vice-Présidents	MM. Lucien BONNETAIN
		Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphi
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	ELectrochimie
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrométallurgie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	ELectronique
	COUMES André	Radioélectricité
	FELICI Noël	Electrostatique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	SANTON Lucien	Mécanique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DURAND Françis	Metallurgie
	MOREAU René	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	ELectrotechnique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	CHARTIER Germain	Electronique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
	LACOUME Jean Louis	Géophisique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIERE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan Doré	Automatique

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées

Fait à Saint Martin d'Hères JANVIER 1974

R E M E R C I E M E N T S

Je remercie Monsieur BENZAKEN, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, d'avoir accepté la présidence de ce Jury.

Je remercie Madame SAUCIER, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, dont les conseils m'ont été utiles tout au long de mon travail.

Je tiens aussi à remercier Monsieur PICHAT, Maître de Conférences au Conservatoire National des Arts et Métiers, de l'intérêt qu'il a témoigné à mon travail et d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Je remercie aussi J. SIFAKIS et A. VERDILLON dont la connaissance de la bibliographie du sujet m'a été fort utile.

Je tiens enfin à remercier Madame TREVISAN pour le soin et la rapidité apportés à la réalisation matérielle de cette thèse.

E.K.

INTRODUCTION

Cette thèse étudie la généralisation de l'algèbre de Boole à une algèbre à p valeurs.

Plus précisément au lieu d'étudier les fonctions de $(L_2)^k$ dans L_2 nous étudierons les fonctions de $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$ dans L_p.

Rappelons que les créateurs de la théorie sont Post et Lukasiewicz vers 1920.

On trouvera une bibliographie détaillée sur le sujet dans [15] et [21].

De telles fonctions ont de nombreuses applications par exemple :

- Diverses logiques non classiques [15]
- Le fonctionnement d'organes électroniques à trois valeurs.

Pour un organe à k entrées on a une application de $(L_3)^k$ dans L_3. D'ailleurs en algèbre de Boole les fonctions incomplètes avec l'ordre total :

0, Ø (valeur non spécifiée), 1

sont déjà des applications de $(L_2)^k$ dans L_3. De plus si l'on admet que les variables peuvent elles aussi être des valeurs non spécifiées on obtient des applications de $(L_3)^k$ dans L_3.

Dans le même ordre d'idées le tableau de Karnaugh pour une fonction booléenne de quatre variables revient à remplacer cette application de $(L_2)^4$ dans L_2 par une application de $(L_4)^2$ dans L_2.

- Les sondages d'opinion dans le cas où l'on a plus de deux choix possibles pour chaque question et dans le cas où l'on affecte à chaque patron une valeur représentant le nombre de personnes ayant donné ce patron comme réponse.

Soit par exemple la question :"aimez-vous les produits A,B,C" avec pour chacun les réponses possibles : beaucoup, modérément, indifférent, hostile. Et supposons que l'on ait partagé l'effectif total des personnes en dix tranches. Ceci correspondent à une application de $(L_3)^4$ dans L_{10}. Même dans le cas où l'on propose seulement les deux réponses Oui et Non, il est commode de prévoir la possibilité de non réponse, qu'il est normal d'interpréter comme une réponse à trois valeurs avec l'ordre total :

Oui, Non réponse, Non.

Il existe un certain nombre d'études sur l'algèbre à trois valeurs. Mais il semble que l'étude de cette algèbre à trois valeurs considérée comme un analogue un peu plus général de l'algèbre de Boole ne mène à rien à cause du trop grand nombre de fonctions à un petit nombre de variables. Par exemple, alors qu'il y a en algèbre de Boole deux fonctions dépendant nullement d'une variable, x et x' il y en a 24 en algèbre à 3 valeurs (3^3 moins les 3 constantes).

La méthode habituellement suivie pour l'étude l'algèbre à p valeurs est l'utilisation de monômes à deux valeurs [7], [12], [22].

On propose ici une nouvelle méthode d'étude basée sur une utilisation de monômes à p valeurs. Ces monômes sont comme en algèbre de Boole des fonctions de k variables produits de k fonctions d'une variable. Une écriture de ce genre a été utilisée dans l'article [6] sans étude théorique.

Après avoir rappelé au chapitre I les principaux résultats de l'algèbre à deux valeurs et au chapitre II les principaux résultats de l'étude de l'algèbre à p valeurs au moyen de monômes à deux valeurs, le chapitre III donne la définition proposée pour ces monômes à p valeurs et en étudie les premières propriétés.

Les chapitres IV et V explorent deux voies possibles pour l'extension de la notion de monômes premiers de l'algèbre de Boole :

- monômes premiers ou maximaux,
- monômes réguliers ou monômes obtenus par empilement de monômes maximaux des sections de niveau i.

Des algorithmes sont proposés pour la détermination de ces monômes et les programmes correspondants ont été écrits et utilisés pour traiter des fonctions.

La question de choix pratique entre ces deux théories est discutée à plusieurs points de vue.

Les quatre chapitres suivants sont consacrés à des questions particulières.

- Décompositions de fonctions à p valeurs en somme ou produit

- Représentation d'une hiérarchie en couches par une fonction à p valeurs

- Fonctions croissantes à p valeurs

- Fonctions régulières et déconnectées à p valeurs.

PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES NOTATIONS

Dans toute cette thèse on ne maniera que des ensembles non-vides. Lorsque l'on utilise un ensemble de p éléments, on le désigne par L_p et on note ses éléments $0,1,2,\dots,p-1$.

Un tel ensemble pourra être muni des structures suivantes :

- structure de treillis distributifs défini par les opérations d'addition notées + et de multiplication notée . ou sans signe.

  On notera alors l'ensemble $(L_p\ ;\ +,\ .)$.

- structure d'ordre total défini par la restriction à $0,1,\dots,p-1$ de la structure d'ordre total de N et par les 2 opérations induites :

  Max(a,b) noté a+b
  Min(a,b) noté a.b ou ab

  On notera alors l'ensemble $(L_p\ ;\ \geqslant)$ ou $(L_p\ ;\ \geqslant,\ +,\ .)$.

On utilisera très souvent le produit direct d'ensembles finis :

$$L_{n_1} \times L_{n_2} \times \dots \times L_{n_k}$$

Ce produit direct pourra être muni des structures d'ordre et d'opérations induites par les structures correspondantes sur les L_{n_i}. On notera ce produit direct muni de telles structures :

$$(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \dots \times L_{n_k}\ ;\ >,\ +,\ .)$$

Il convient de noter que la présence des structures d'ordre total et d'opérations dans l'ensemble d'arrivée joue un rôle fondamental dans toute la théorie alors que la présence de telles structures au niveau des variables n'est utilisée que dans quelques cas particuliers.

Ordre et opération sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions de

$$L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k} \quad \text{dans } (L_p \; ; \geqslant, +, .)$$

on définit :

- ordre entre deux fonctions :

$$f \geqslant g \Leftrightarrow \forall \; X \in L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k} \quad f(X) \geqslant g(X)$$

- somme de deux fonctions.

  f = g+h est définie par

  $$f(X) = \text{Max}((g(X),h(X)) \qquad \forall X$$

- produit de deux fonctions

  f = g.h est définie par

  $$f(X) = \text{Min}\;(g(X),h(X)) \qquad \forall X$$

L'ordre, la somme et le produit vérifient les propriétés habituelles de commutativité, d'associativité, d'idempotence et d'isotonie.

CHAPITRE I - FONCTIONS À 2 VALEURS SUR DES VARIABLES FINIES

Une première théorie développée par E. PICHAT et Y. MALGRANGE s'intéresse aux applications de $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$ dans $(L_2; +, .)$. On suppose les ensembles de valeurs pris par les variables non, non structurés. Il s'agit en somme de l'étude des fonctions caractéristiques de parties d'un produit direct d'ensembles finis quelconques.

On va essayer d'étendre les propriétés de l'algèbre de Boole à ces fonctions.

I - ÉTUDE DE CES FONCTIONS

Complément d'une fonction

Le complément d'une fonction f est la fonction $\overline{f}$ définie par :

$$\overline{f}(X) = 1 - f(X) \quad \text{pour tout } X$$

où le signe - désigne la soustraction arithmétique classique.

Propriétés

$$\overline{\overline{f}} = f$$

$$\overline{f+g} = \overline{f} \, . \, \overline{g}$$

$$\overline{f.g} = \overline{f} + \overline{g}$$

- La première propriété est vraie puisque pour tout X on a :

$$\overline{\overline{f}}(X) = 1 - (1-f(X)) = f(X)$$

- La deuxième propriété est vraie si pour tout X on a :

$$1 - (f(X) + g(X)) = (1-f(X) \, . \, (1-g(X))$$

Les deux membres de l'égalité sont égaux à 1 si et seulement si f(X) et g(X) sont nuls, sinon ils sont nuls.

- La troisième propriété est vraie si pour tout X on a :

$$1 - f(X) \,.\, g(X) = (1 - f(X)) + (1 - g(X))$$

  Les deux membres de l'égalité sont nuls si et seulement si f(X) et g(X) sont égaux à 1, sinon ils sont égaux à 1.

- La deuxième et la troisième propriétés se généralisent à un nombre quelconque de fonctions. En effet, elles sont vraies pour n = 2 et supposons que l'on ait :

$$\overline{\sum_{i=1}^{n-1} f_i} = \prod_{i=1}^{n-1} \overline{f_i}$$

alors :

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n} = \overline{\sum_{i=1}^{n-1} f_i} \,.\, \overline{f_n} = \prod_{i=1}^{n} \overline{f_i}$$

De même supposons que l'on ait :

$$\overline{\prod_{i=1}^{n-1} f_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{f_i}$$

alors :

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} f_i} = \overline{\prod_{i=1}^{n-1} f_i \,.\, f_n} = \overline{\prod_{i=1}^{n-1} f_i} + \overline{f_n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i}$$

Comme en algèbre de Boole le complément échange les opérations d'addition et de multiplication, donc ramène l'étude des sommes à celle des produits et inversement.

Monôme

Considérons d'abord le cas d'une variable.

Un monôme à une variable est une fonction quelconque de L_n dans $(L_2 \,;\, +, \,.)$.

Soit maintenant le cas général de $(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k})$ dans $(L_2 ; +, .)$. Un monôme m est une fonction définie à partir de fonctions à une variable

$$f_i \text{ définie de } L_{n_i} \text{ dans } (L_2 ; +, .)$$

par $m(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_i f_i(x_i)$

Les fonctions f_i sont appelées <u>composantes</u> du monome m

Remarque

Cette propriété passe un peu inaperçue en algèbre de Boole du fait que les seules fonctions d'une variable x sont : 0, 1, x, x'.

- On peut considérer f_i comme une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ définie par :

$$f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_i\,(x_i)$$

f_i est d'ailleurs un monôme défini par :

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left(\prod_{j \neq i} f_j(x_j)\right) . f_i(x_i)$$

avec $f_j(x) = 1$ pour tout x.

Notation d'un monôme $m = \prod_i f_i$

On a besoin pour cela d'un ordre total sur les L_{n_i}. On prendra l'ordre induit par l'ordre total de N. Les fonctions f_i sont représentées par la suite, mise entre parenthèses, de leurs valeurs pour les valeurs croissantes des variables.

$$f_i = (f_i(0), f_i(1), \ldots, f_i(n_i - 1))$$

Le monôme m est représenté par la suite des représentations des fonctions f_i, pour i croissant.

Exemple :

Soit m un monôme défini de $(L_3 \times L_2)$ dans $(L_2 ; +, .)$ et dont les composantes f_1 et f_2 sont définies par :

x_1	$f_1(x_1)$
0	1
1	0
2	1

x_2	$f_2(x_2)$
0	1
1	0

on écrira m = (101)(10)

Produit de monômes

Le produit de deux monômes est le monôme ayant comme composantes, le produit des composantes des monômes de départ :

$$m = \prod_i f_i \qquad n = \prod_i g_i \qquad m.n = \prod_i f_i . g_i$$

En effet :

$$m(x_1,x_2,\ldots,x_k).n(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \prod_i f_i(x_i).\prod_i g_i(x_i) = \prod_i f_i(x_i).\, g_i(x_i) =$$

$$= \prod_i (f_i . g_i)(x_i)$$

Exemple : m = (101)(11) n = (011)(01) m.n = (001)(01)

Complément d'un monôme

Le complément d'un monôme $m = \prod_i f_i$ est la fonction $f = \sum_i M_i$ où M_i est un monôme ayant toutes ses composantes constantes et égales à 1 sauf la ième qui est égale à $\overline{f_i}$.

Suivant la convention adoptée précédemment on peut donc écrire

$$\overline{m} = \sum_i \overline{f_i}$$

Le complément d'un monôme est donc la somme de monômes ne dépendant que d'une variable.

Démonstration

Soit $m = \prod_i f_i$

Par définition on a $\overline{m}(X) = 1 - m(X)$.

Il faut montrer que pour tout $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ on a :

$$1 - \prod_i f_i(x_i) = \sum_i (1-f_i(x_i))$$

Les deux membres de l'égalité sont nuls si et seulement si tous les $f_i(x_i)$ sont égaux à un, sinon ils sont égaux à un.

Expression d'une fonction comme somme de monômes - Forme de Lagrange

Toute fonction peut se représenter par une somme de monômes nuls sauf en un point.

Démonstration

A tout point $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, a_i appartenant à L_{n_i}, pour lequel la fonction n'est pas nulle, on associe le monôme :

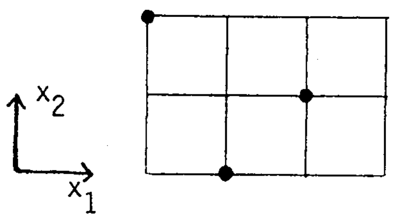
$$m = \prod_i f_i \quad \text{avec pour tout } i \quad \begin{array}{l} f_i(a_i) = 1 \\ f_i(x_i) = 0 \ \forall x_i \neq a_i \end{array}$$

On couvre ainsi la fonction point par point. On appelle ces monômes des monômes de Lagrange ou monôme canoniques.

Représentation géométrique d'une fonction

Soit H le k-pavé représentant $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$. Une fonction est représentée dans H en mettant une boule aux points où la fonction vaut 1.

Exemple :



Expression de f sous la forme de Lagrange :

$$f = (0100)(100) + (0010)(010) + (1000)(001)$$

Monômes premiers

Un monôme m est un monôme premier de f si et seulement si :

$$m \leqslant f \quad \text{et} \quad \nexists\, m' \quad \text{tel que} \quad m' \leqslant f \quad \text{et} \quad m' > m$$

Base première complète

On appelle base première complète d'une fonction, la somme de tous les monômes premiers de la fonction. En tant que fonction la base première complète d'une fonction est égale à la fonction.

Théorème de la base complète d'un produit de fonctions

La base complète du produit de deux fonctions est égale au produit des bases complètes des deux fonctions de départ dont on a enlevé les monômes plus petits qu'un autre.

Démonstration

Soit $f = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ la base complète de f

Soit $g = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$ la base complète de g.

Soit m un monôme premier de f.g

Donc $m \leqslant f.g$ donc $m \leqslant f$ et $m \leqslant g$.

$m \leqslant f$ donc il existe m_i monôme premier de f tel que $m_i \geqslant m$

$m \leqslant g$ donc il existe n_j monôme premier de g tel que $n_j \geqslant m$

Donc $m \leqslant m_i . n_j$ et puisque m est premier :

$$m = m_i \,.\, n_j$$

Ce théorème s'étend par récurrence au produit d'un nombre quelconque de fonctions.

Recherche des monômes premiers d'une fonction f par la méthode des consensus

Cette méthode est développée par E. PICHAT [18] et MALGRANGE [13].

Nous ne rappellerons que quelques définitions et résultats.

Consensus de deux monômes suivant la variable x_i

Soit $m = \prod_j f_j$ et $n = \prod_j g_j$

Le consensus de m et de n suivant la variable x_i est le monôme $\ell = \prod_j h_j$ défini par :

$$h_i = f_i + g_i$$

$$h_j = f_j \,.\, g_j \qquad \text{pour tout } j \neq i$$

- Etant donnée cette définition, on obtient les monômes premiers d'une fonction f en applicant l'un ou l'autre des algorithmes de consensus répété.

Recherche des monômes premiers d'une fonction f par double complémentation

Théorème :

Une fonction donnée sous la forme d'une somme de monômes ne dépendant que d'une variable, avec un seul monôme par variable, est donnée par sa base complète.

- En effet, en employant la méthode des consensus à une telle fonction, on voit que l'on ne formera aucun nouveau monôme.

<u>*Théorème*</u> :

On obtient la base complète d'une fonction f par double complémentation.

- Ceci découle directement du théorème précédent et du théorème de la base complète d'un produit de fonctions.

<u>Exemple</u> :

$$f = (110)(10)(10) + (111)(10)(11) + (110)(11)(11)$$

$$\overline{f} = [(001)x + (01)y + (01)z][\cancel{(100)x} + (01)y + \cancel{(00)z}]$$
$$[(001)x + \cancel{(00)y} + \cancel{(00)z}]$$

$$\overline{f} = (001)x\ (01)y$$

$$\overline{\overline{f}} = (110)x + (10)y = (110)(11)(11) + (111)(10)(11)$$

II - ÉTUDE DES FONCTIONS CROISSANTES

On travaille maintenant dans $(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k} ; \geqslant)$

<u>Fonction croissante</u>

Une fonction f est croissante si et seulement si :

$$X > Y \Rightarrow f(X) \geqslant f(Y) \qquad \forall X \text{ et } \forall Y$$

<u>Propriétés</u>

- La somme x + y et le produit x . y en tant que fonction de x et de y sont des fonctions croissantes.
- Une fonction de fonctions croissantes est croissante.
- La somme et le produit de fonctions croissantes sont des fonctions croissantes.

Ces trois propriétés sont évidentes.

Fonction décroissante

Une fonction décroissante est le complément d'une fonction croissante.

Théorème :

Si un produit de fonctions de variables distinctes non identiquement nul est croissant chaque fonction est croissante.

Démonstration

Soit $f = \prod_{i=1}^{\ell} f_i(x_i)$ une fonction croissante.

- Supposons que l'une des fonctions f_i ne soit pas croissante.

$\exists (x_i, y_i) \quad x_i < y_i$ tel que $f(x_i) = 1$ et $f(y_i) = 0$

f étant non identiquement nulle :

$$\forall\, j \neq i \quad \exists a_j \text{ tel que } f_j(a_j) = 1$$

Donc $f(a_1,a_2,\ldots,x_i,\ldots a_\ell) > f(a_1,a_2,\ldots,y_i,\ldots,a_\ell)$

Donc f n'est pas croissante.

Monôme croissant

C'est un monôme qui en tant que fonction est croissant.

Donc $X > Y \implies m(X) \geqslant m(Y) \quad \forall X$ et Y

Propriété

Les composantes d'un monôme croissant sont des fonctions croissantes.

Ceci est évident d'après le théorème précédent.

Point caractéristique d'un monôme croissant

Définition :

C'est un point X_0 tel que : $m(X_0) = 1$ et $m(X) = 0 \quad \forall X < X_0$

Existence

Soit $m = \prod_{i=1}^{k} f_i(x_i)$.

Les fonctions f_i étant croissantes et non nulles :

$\forall i \quad \exists a_i$ unique tel que $f_i(a_i) = 1$ et $f_i(x_i) = 0$ pour $x_i < a_i$

Le point caractéristique est le point $X_0 = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

Unicité

Par construction ce point est unique.

Monôme croissant associé à un point X_0

Etant donné un point X_0 on lui associe le monôme croissant m définit par :

$m(X) = 1$ pour $X > X_0$

$m(X) = 0$ sinon

Propriété

Le point caractéristique d'un monôme m associé à un point X_0 est ce point X_0.

En effet, pour ce monôme on a $m(X_0) = 1$ et $m(X) = 0 \; \forall X < X_0$

Monômes premiers d'une fonction croissante - Unicité de la base première

Points caractéristiques d'une fonction croissante f

Ce sont des points X_j tels que :

$$f(X_j) = 1 \quad \text{et} \quad f(X) = 0 \qquad \forall X < X_j$$

Existence

Soit f une fonction croissante non identiquement égale à un ou à zéro.

Supposons que f n'ait pas de points caractéristiques.

Donc : $\forall X$ tel que $f(X) = 1$ $\quad \exists Y < X$ tel que $f(Y) = 1$

Les ensembles L_{n_i} étant finis, on va donc avoir après un nombre fini de pas $f(0,0,\dots,0) = 1$. Or ceci est impossible puisque f est croissante et non identiquement égale à 1.

Propriété

Les points caractéristiques d'une fonction sont deux à deux incomparables.

Ceci est évident par définition des points caractéristiques.

Théorème

La base première complète d'une fonction croissante f est formée des N monômes associés aux N points caractéristiques de la fonction.

- Soit M_j le monôme associé au point caractéristique X_j :

  * $M_j \leqslant f$ sinon f ne serait pas croissante,
  * $\nexists M'$ tel que $M' > M_j$ et $M' \leqslant f$

Car M' couvrirait nécessairement un point inférieur à X_j.

Donc M_j est premier.

- Supposons qu'il existe un monôme M premier qui ne soit pas associé à un point caractéristique de f. Ce monôme doit nécessairement être croissant sinon il ne serait pas premier. Soit X son point caractéristique. Deux cas peuvent se présenter :

  - soit il existe un point caractéristique X_j de f tel que :

    $X > X_j$

    Dans ce cas M n'est pas premier.

  - soit il n'existe aucun point caractéristique de f tel que :

    $X > X_j$

    Dans ce cas M n'est pas inférieur à f.

Unicité de la base

Cette base complète première est irredondante, donc une fonction croissante a une base première unique.

En effet, les points caractéristiques d'une fonction étant incomparables, si on supprime un des monômes premiers le point caractéristique de ce monôme ne sera pas couvert.

Monômes premiers d'une somme de fonctions croissantes

Soient f et g deux fonctions croissantes et $A=\{X_i/i = 1,u\}$ et $B = \{Y_j/j = 1,v\}$ leurs points caractéristiques.

Les points caractéristiques de f+g sont les éléments minimaux de $A \cup B$.

La base première de f+g est donc formée des monômes associés à ces points caractéristiques, c'est-à-dire des monômes premiers de f et g qui ne sont pas inférieurs à un autre monôme premier.

CHAPITRE II - LA THÉORIE CLASSIQUE DES FONCTIONS À P VALEURS ET VARIABLES FINIES.

Cette théorie utilise des monômes à deux valeurs pour étudier des fonctions pouvant prendre p valeurs. Plus exactement, les monômes prennent les valeurs extrêmes 0 et p-1. On les multiplie par une valeur intermédiaire j, pour leur faire prendre les valeurs 0 et j.

Remarque préliminaire

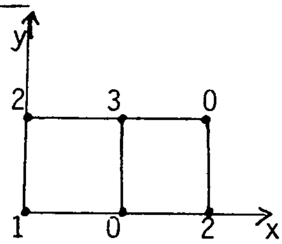
Une fonction f de H dans $(L_p;\geqslant)$ est équivalente à une fonction F de $\{H \times L_{p-1};\geqslant)\}$ dans L_2.

F étant définie de la manière suivante :

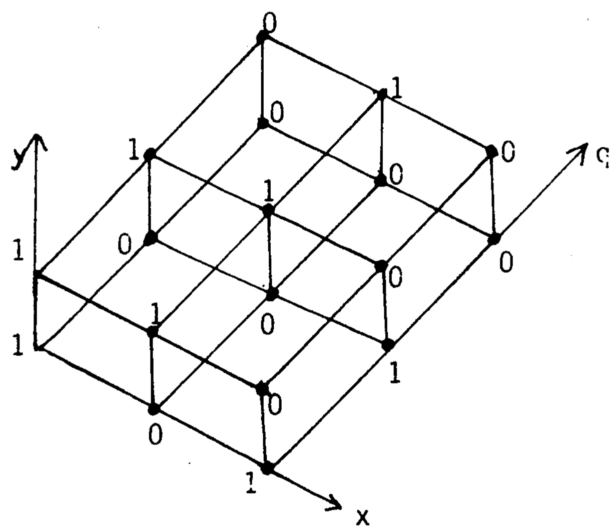
$$F(X,q) = 1 \quad \text{si et seulement si } f(X) \geqslant q+1$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$

Exemple

f =



F =



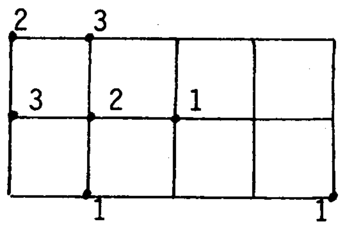
I - ETUDE DES FONCTIONS DANS LE CAS OU LES ENSEMBLES DE VALEURS PRIS PAR LES VARIABLES SONT NON STRUCTURÉS

Ce cas présente l'étude des fonctions de $(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k})$ dans $(L_p ; \geqslant, +, .)$

Représentation d'une fonction

Soit H le k-pavé représentant $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$. Une fonction est représentée dans H en indiquant en chaque point sa valeur. Si elle est nulle on peut ne pas la marquer.

Exemple



Complément d'une fonction

Le complément d'une fonction f, est la fonction $\overline{f}$ définie par :

$$\overline{f}(X) = (p-1) - f(X) \qquad \forall X$$

Cette soustraction étant faite au sens de $\mathbb{N}$

Propriétés

$$\overline{\overline{f}} = f$$

$$\overline{f + g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$$

$$\overline{f \cdot g} = \overline{f} + \overline{g}$$

La deuxième et la troisième propriété se généralisent à un nombre quelconque de fonctions.

Ces propriétés se démontrent de la même manière qu'au chapitre I.

Monôme

Un monôme est le produit de fonctions d'une variable f_i définies de L_{n_i} dans $(\{0,p-1\}; >, +, .)$ par un facteur de pondération j avec $0 \leq j \leq p-1$.

On note un tel monôme jm ou $j.m = j . \prod_i f_i$

$$\forall X \quad j . m(X) = \mathrm{Min}\,(j, m(X))$$

Il est clair que : $(p-1)m = m$.

Produit de deux monômes

Le produit de deux monômes $u.m = u . \prod_i f_i$ et $v.n = v . \prod_i g_i$ est le monôme défini par $(um)(vn) = u . v \prod_i f_i\, g_i$

Relation d'ordre entre monômes

La relation d'ordre entre deux monômes :

$j . m \leq \ell . m'$ se définit par $j \leq \ell$ et $m \leq m'$.

Complément d'un monôme

En tant que fonction le complément d'un monôme est défini par la fonction $\overline{j . m}(X) = (p-1) - j . m(X)$

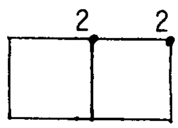
Propriété

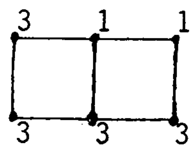
$$\overline{j.m} = \sum_i (p-1)\, \overline{f_i} + (p-1-j)\, M = (p-1)\overline{m} + (p-1-j)M$$

M étant le monôme constant égal à p-1 partout.

En effet le monôme j.m prenant les valeurs 0 et j, le monôme $\overline{jm}$ sera au minimum égal à (p-1-j) en tout point. Il prendra la valeur p-1 aux points où le monôme j.m prenait la valeur zéro.

Exemple





j.m = 2(033)(03) $\qquad$ $\overline{\text{j.m}}$ = 3(300)(33) + 3(333)(30) + 1(333)(33)

Expression d'une fonction comme somme de monômes. Forme de Lagrange

Toute fonction peut se représenter par une somme de monômes nuls sauf en un point.

On associe à tout point $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ où la fonction prend une valeur j non nulle.

Le monôme pondéré :

$$j.m = j \prod_i f_i \text{ avec pour tout } i \qquad \begin{array}{l} f_i(a_i) = p-1 \\ f_i(x_i) = 0 \ \forall x_i \neq a_i \end{array}$$

On couvre ainsi la fonction point par point. On appelle ces monômes, monômes de Lagrange ou monômes canoniques.

Monôme premier

Un monôme j.m est un monôme premier d'une fonction f, s'il est plus petit que la fonction et s'il n'existe pas de monôme plus grand ayant la même propriété.

Section de niveau i d'une fonction f

Nous noterons f^i la section de niveau i d'une fonction f, la fonction définie par :

$f^i(X) = i \qquad$ pour $f(X) \geqslant i$

$f^i(X) = 0 \qquad$ sinon

Monômes premiers d'une section de niveau i

f^i est une fonction de $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$ dans $(\{0,i\}; \geqslant, +, .)$ on peut donc appliquer les méthodes vues au chapitre précédent pour chercher ses monômes premiers, il suffit de remplacer 1 par i. On obtient une forme équivalente en remplaçant 1 par (p-1) et en mettant i comme facteur de pondération.

Théorème

Les monômes premiers d'une fonction f sont les monômes maximaux de l'union des monômes premiers des fonctions f^i pour $i = 1,\ldots,k$

- soit i.m un monôme premier de f^i ainsi calculé -

$$i.m \leqslant f^i \text{ donc } i.m \leqslant f$$

Et par construction il n'existe pas de monôme jm' tel que

$$jm' \leqslant f \quad \text{et} \quad j.m' > i.m$$

Donc i.m est premier.

Théorème de la base complète d'un produit de fonctions

L'énoncé et la démonstration de ce théorème sont les mêmes qu'au chapitre I.

Monômes premiers du complément d'un monôme

Théorème :

Les monômes premiers du complément du monôme $j.m = j.\prod_i \delta_i$ sont les éléments maximaux de l'ensemble :

$$\{(p-1-j)M,\ (p-1)\ \overline{\delta_i}\ /\ i = 1,k\}$$

M étant le monôme égal à p-1 partout.

Démonstration

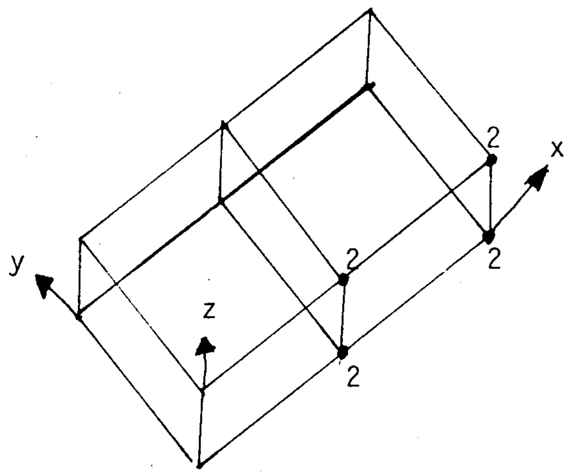
En effet, les monômes premiers d'une fonction sont les monômes maximaux de l'union des monômes premiers des fonctions f^i.

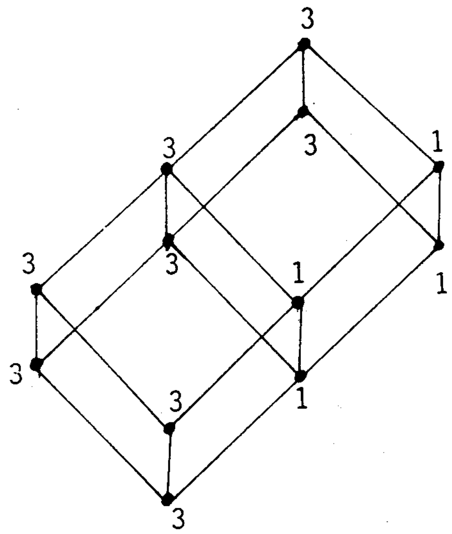
Ici, il y a f^{p-1} et f^{p-1-j}

Les monômes premiers de f^{p-1} sont les monômes de la forme $(p-1).\overline{f_i}$ qui sont non nuls.

f^{p-1-j} n'a qu'un monôme qui est le monôme égal à p-1-j partout.

Exemple





$j.m = 2(033)(30)(33) = 2.f_1 f_2 f_3$ $\qquad\qquad \overline{j.m}$

Les monômes premiers de $\overline{j.m}$ sont :

$(p-1-j)M = 1(333)(33)(33)$

$(p-1)\overline{f_1} = 3(300)(33)(33)$

$(p-1)\overline{f_2} = 3(333)(03)(33)$

Le monôme $(p-1)\ \overline{f_3}$ est nul.

Théorème

On obtient la base première complète d'une fonction par double complémentation.

- Ceci découle directement du théorème précédent et de celui de la base complète d'un produit de fonctions.

II - ETUDE DES FONCTIONS CROISSANTES

On travaille maintenant dans $(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k} ; \geqslant, +, .)$

Définition

f est une fonction croissante si et seulement si

$$X > Y \Rightarrow f(X) \geqslant f(Y).$$

Les propriétés suivantes vues au chapitre I sont toujours vraies.

- La somme et le produit en tant que fonction de x et de y sont des fonctions croissantes.
- Une fonction de fonctions croissantes est croissante
- La somme et le produit de fonctions croissantes sont des fonctions croissantes.
- Une fonction décroissante est le complément d'une fonction croissante.

Théorème

Si un produit de fonctions de variables distinctes, prenant la même valeur maximale M non nulle, est croissant chaque fonction est croissante.

- Soit $f = \prod_{i=1}^{\ell} f_i(x_i)$ une fonction croissante.

Supposons que f_i ne soit pas croissante alors :

$$\exists (x_i, y_i) \quad x_i \leqslant y_i \quad \text{tel que} \quad f_i(x_i) > f_i(y_i)$$

Soit a_j un des points où la fonction f_j prend la valeur M.
Alors

$$f(a_1,a_2,\ldots,x_i,\ldots,a_\ell) > f(a_1,a_2,\ldots,y_i,\ldots,a_\ell)$$

Donc f n'est pas croissante.

Monôme croissant

C'est un monôme qui en tant que fonction est croissant.

Propriété

Les composantes d'un monôme croissant non nul sont des fonctions croissantes.

Ceci est évident d'après le théorème précédent.

Point caractéristique d'un monôme croissant j.m

C'est un point X_0 tel que :

$$jm(X_0) = j \quad \text{et} \quad jm(X) = 0 \quad \forall\, X < X_0$$

On montrerait de la même manière que précédemment que ce point existe et est unique.

Monôme croissant associé à un point X_0 et à un nombre j

Etant donné un point X_0 et un nombre j on lui associe le monôme croissant jm défini par :

$$j.m(X) = j \quad \text{pour } X \geqslant X_0$$

$$jm(X) = 0 \quad \text{sinon}$$

Propriété

Le point caractéristique d'un monôme j.m associé à X_0 et j et ce point X_0.

En effet, pour ce monôme on a $jm(X_0) = j$ et $jm(X) = 0 \ \forall X < X_0$

Monômes premiers d'une fonction croissante

Points caractéristiques d'une fonction croissante

On appelle points caractéristiques de f les points $X_{i,j}$ tels que :

$$f(X_{i,j}) = i \quad \text{et} \quad f(X) < i \quad \forall X < X_{i,j}$$

Existence

Soit f une fonction croissante non constante.

Supposons que f n'ait pas de points caractéristiques.

Donc pour tout point $X_{i,j}$ tel que :

$$f(X_{i,j}) = i \quad \exists X < X_{i,j} \quad \text{tel que } f(X) \geqslant i$$

Soit Y un point où la fonction prend sa valeur maximale M. Il existe X Y tel que $f(X) = M$.

Après un nombre fini de pas on va trouver :

$$f(0,0,\dots,0) = M$$

Or ceci est impossible car soit X est le point $(n_1-1,\dots,n_k-1)$ dans ce cas la fonction serait constante.

Soit X est un centre point dans ce cas la fonction serait non croissante.

Théorème

La base première complète d'une fonction croissante f est formée des N monômes associés aux N points caractéristiques de la fonction

Soit i.m le monôme associé au point $X_{i,j}$.

$$i.m \leqslant f \quad \text{et} \quad \nexists\, \ell.m' \text{ tel que } \quad .m' > i.m \quad \text{et} \quad \ell.m' \leqslant f$$

Sinon le point $X_{i,j}$ ne serait pas un point caractéristique de f. Donc i.m est premier.

Supposons qu'il existe un monôme i.m premier qui ne soit pas associé à un point caractéristique de f. Ce monôme doit nécessairement être croissant sinon il ne serait pas premier. Soit X son point caractéristique. Deux cas peuvent se présenter.

- Soit il existe un point caractéristique $X_{i,j}$ de f tel que $X_{i,j} < X$. Dans ce cas im n'est pas premier.
- Soit il n'existe aucun point caractéristique de f tel que $X_{i,j} < X$ dans ce cas im n'est pas inférieur à f.

Unicité de la base

Cette base première est irredondante, donc une fonction croissante a une base unique.

La démonstration est identique à celle du chapitre I.

Monômes premiers d'une somme de fonctions croissantes h = f+g

Les monômes premiers de h sont les monômes premiers de f et de g qui ne sont pas inférieurs à un autre monôme.

CHAPITRE III - MONÔMES

Dans ce chapitre, on travaille dans $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \cdots \times L_{n_k} \to (L_p ; \geqslant, \cdot, +$
On va présenter une théorie où les monômes prennent effectivement plusieurs valeurs.

Critique des théories précédentes (monômes à deux valeurs)

1. Relativement petit nombre de monômes existants

Le nombre de monômes est de $p.2^{\Sigma n_i}$ et l'écriture utilise $1 + \Sigma n_i$ symboles à p valeurs. En réalité on pourrait écrire $p.p^{\Sigma n_i}$ combinaisons.

2. Nécessité d'un grand nombre de monômes pour représenter une fonction

1	2	3	4	5	
5		1	2	3	4
4	5		1	2	3
3	4	5		1	2
2	3	4	5		1
1	2	3	4	4	

Pour représenter la fonction ci-contre définie de $L_6 \times L_6 \to L_6$ il faut 30 monômes à 2 valeurs.

D'où l'idée d'enrichir la notion de monôme. La fonction ci-dessus peut s'écrire avec six monômes dans la théorie proposée.

Monôme

Un monôme m est une fonction définie par la donnée de k fonctions d'une variable $f_1(x_1),\dots,f_k(x_k)$ allant respectivement, de $L_{n_1},\dots,L_{n_k}$ dans L_p. Les fonctions f_i sont appelées composantes du monôme. On note $m = \prod_i f_i$.

Valeur d'un monôme en un point

Au point P de coordonnées $(a_1,a_2,\dots a_k)$ le monôme $m = \prod_i f_i$ a la valeur :

$$m(a_1,a_2,\dots,a_k) = \prod_i f_i(a_i)$$

Tout monôme au sens du chapitre II est un monôme au sens actuel.

Représentation d'un monôme

Un monôme m est représenté comme précédemment par la suite des représentations des f_i pour i croissant. Les f_i étant représentées par la suite des valeurs de la fonction, pour les valeurs croissantes de la variable.

Exemple

Dans $L_3 \times L_2$ soit m un monôme tel que :

$m(0,0) = 3 \quad m(1,0) = 2 \quad m(2,0) = 2$

$m(0,1) = 0 \quad m(1,1) = 0 \quad m(2,1) = 0$

m est défini par m_1 et m_2 avec :

$m_1(0) = 3 \quad m_1(1) = 2 \quad m_1(2) = 2$

$m_2(0) = 3 \quad m_2(1) = 0$

Alors on notera :

$$m = (322)(30).$$

Intérêt de cette définition

Le nombre de monôme est de $p^{\Sigma n_i}$ et l'écriture utilisé Σn_i symboles.

C'est-à-dire qu'on utilise avec pleine efficacité l'écriture employée.

Monôme de Lagrange ou monôme canonique

C'est un monôme nul partout sauf en un point $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ où il prend la valeur V.

Ce monôme est alors défini par les fonctions f_i avec :

$$\begin{cases} f_i(a_i) = V \\ f_i(x_i) = 0 \qquad \forall x_i \neq a_i \end{cases}$$

Monômes égaux

Deux monômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes composantes f_i.

Monômes équivalents

Deux monômes sont équivalents si et seulement si ils prennent les mêmes valeurs en tous points.

Les monômes (022)(31) et (033)(21) sont équivalents sans être égaux.

Maximum d'un monôme

Etant donné un monôme $m = \prod_i f_i$ son maximum est :

$$\text{Max } m = \underset{i}{\text{Min}} \, [\text{Max } f_i]$$

Monôme réduit

Un monôme m est <u>réduit</u> si et seulement si toutes ses composantes ont le même maximum.

Théorème

Tout monôme est équivalent à un monôme réduit.

Soit m un monôme non réduit.

En écrêtant à Max m toute valeur $m_i(x_i)$ qui est supérieure à Max m on obtient un monôme réduit équivalent à m.

Exemple

Pour p = 7   m = (325)(61)(24) est un monôme non réduit
m' = (324)(41)(24) est le monôme réduit équivalent à m.

Propriété

Soit un monôme $m = \prod_i f_i$ réduit.

$\forall i \ \exists (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k)$ tel que

$\forall x_i \ m(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) = f_i(x_i)$.

m est un monôme réduit donc les fonctions ont le même maximum, Max m, atteint pour au moins une valeur a_i de la variable x_i. Donc :

$\forall i \ \ m_i(a_i) = \text{Max } m$

et $\forall x_i \ m(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) = f_i(x_i)$.

Théorème :

Deux monômes réduits non égaux ne sont pas équivalents.

Soient $m = \prod_i f_i$ et $m' = \prod_i f'_i$ deux monômes réduits non égaux.

Donc $\exists j$ et a_j tel que $m_j(a_j) \neq m'_j(a_j)$ par exemple $m_j(a_j) > m'_j(a_j)$.

Le monôme m est réduit donc d'après le théorème précédent, on peut trouver des valeurs, b_1, b_2, b_{j-1}, $b_{j+1},\dots,b_k$ telles que :

$$m(b_1,b_2,\dots,b_{j-1},\ a_j,\ b_{j+1},\dots,b_k) = m_j(a_j)$$

$$\text{et} \quad m'(b_1,b_2,\dots,b_{j-1},\ a_j,\ b_{j+1},\dots,b_k) \leqslant m'_j(a_j) < m_j(a_j)$$

Donc en ce point X, $m(X) \neq m'(X)$.

Les deux monômes ne sont donc pas équivalents.

Corollaire

Tout monôme est équivalent à un monôme réduit unique.

Relations d'ordre entre monôme

On en distinguera plusieurs.

Relation R_1

C'est l'application aux monômes de la relation d'ordre entre fonctions.

$m \underset{R_1}{\leqslant} m'$ si et seulement si en chaque point du k-pavé la valeur prise par m est inférieure ou égale à celle prise par m'.

Relation d'ordre R_2 entre deux monômes

Soient les monômes $m = \prod_i f_i$ et $m' = \prod_i f'_i$

$$m \underset{R_2}{\leqslant} m' \iff \forall i \quad f_i \leqslant f'_i$$

Propriété

Pour deux monômes quelconques on a :

$R_2 \Rightarrow R_1$ mais $R_1 \not\Rightarrow R_2$

Démonstration

$$m \underset{R_2}{\leqslant} m' \Rightarrow \forall i \quad f_i \leqslant f'_i \qquad \text{donc} \qquad \forall (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

$$f_i(x_i) \leqslant f'_i(x_i) \quad \text{et} \quad \prod_i f_i(x_i) \leqslant \prod_i f'_i(x_i).$$

donc $m \underset{R_1}{\leqslant} m'$

Le contre exemple suivant montre que $R_1 \not\Rightarrow R_2$

Soient m = (240)(03) et m' = (431)(03)

$m \underset{R_1}{\leqslant} m'$ et m et m' sont incomparables pour R_2

Propriété

Pour deux monômes réduits les relations R_1 et R_2 sont équivalentes.

On sait que $R_2 \Rightarrow R_1$ puisque cette propriété est vraie pour deux monômes quelconques.

Soient $m = \prod_i f_i$ et $m' = \prod_i f'_i$ deux monômes réduits tels que :

$$m \underset{R_1}{\leqslant} m' \quad \text{donc} \quad \forall X \; m(X) \leqslant m'(X)$$

Le monôme m est réduit donc les fonctions f_i ont le même maximum qu'elles prennent pour au moins une valeur soit a_i.

$$\text{Donc} \quad \forall i \quad f_i(a_i) = \text{Max } m$$

De même m' est réduit, donc les fonctions f'_i ont le même maximum qu'elles prennent pour au moins une valeur soit a'_i

$$\text{Donc} \quad \forall i \quad f'_i(a'_i) = \text{Max } m'$$

Donc $\forall j$ et $\forall xj$:

$$(m(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}\; x_j, a_{j+1}, \ldots, a_k) = f_j(x_j) \leqslant m'(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_k) = f'_j(x_j$$

Donc $\quad m \underset{R_2}{\leqslant} m'$

Langage géométrique

On peut avoir intérêt à prendre un langage un peu différent.

Espace et section de niveau q d'un monôme

Soit m un monôme et q un élément de L_p.

On appellera espace de niveau q la partie de $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$ pour laquelle $m \geqslant q$. On la notera $E_q(m)$. C'est un produit direct de parties des L_{n_i}.

Il est clair que $E_1(m) \supseteq E_2(m) \ \ldots \supseteq E_{p-1}(m)$

(l'inclusion peut ne pas être stricte) -

On ne parlera jamais de E_0 qui est $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$ lui-même.

On appellera section de niveau q d'un monôme m, le monôme qui est égal à q sur $E_q(m)$ et nul ailleurs. On le notera m^q.

Il est clair que c'est un monôme au sens du chapitre II.

On dira que l'intersection de deux monômes m et m' est vide si $mm' = 0$.

Ce qui revient encore à $E_1 \cap E_1' = \emptyset$

Propriété

Si deux monômes ont une intersection vide, il existe une variable pour laquelle l'intersection est vide.

Soit $m = \prod_i f_i$ et $m' = \prod_i f_i'$ deux monômes tels que $m.m' = 0$. Les composantes du monôme mm' sont les fonctions $f_i.f_i'$. Ce monôme étant nul, au moins une de ces composantes est nulle.

Remarque sur l'intersection

En Algèbre de Boole si des monômes ont deux à deux une intersection non vide, l'intersection de tous les monômes est non vide, car aucune lettre figurant dans l'expression des divers monômes n'est utilisée sous ses deux formes.

Cette propriété reste vraie pour les monômes définis de $(L_2)^k$ dans $(L_p; \geqslant)$.

En effet, les monômes ayant deux à deux une intersection non vide, on ne peut avoir pour $m = \prod_i f_i$ et $m' = \prod_i f'_i$

$$f_i = (0,q) \quad \text{et} \quad f'_i = (r,0)$$

Mais cette propriété est fausse dès que l'un des n_i est supérieur à deux.

Exemple

Les monômes suivants sont définis de $L_3 \to L_2$

$$m_1 = (110) \qquad m_2 = (101) \qquad m_3 = (011)$$

Ces monômes ont deux à deux une intersection non vide, et l'intersection des trois monômes est vide.

Passage à des sous-ensembles des L_{n_i}

Pour tout i on remplace $L_{n_i} = \{0,1,\ldots,n_{i-1}\}$ par un sous-ensemble L'_{n_i} non vide (qui peut-être L_{n_i} lui-même).

Un monôme $m = \prod_i f_i$ donne encore une monôme dont les composantes sont les restrictions à L'_{n_i} des f_i. Par contre ce monôme peut ne pas être réduit.

Exemple

Soit m un monôme défini de $L_4 \times L_3 \to L_3$

$m = (2122)(012)$ et $L'_4 = \{1,3\}$ $L'_3 = \{0,1\}$

Alors $m' = (12)(01)$.

Transformation d'un monôme par une fonction φ croissante de L_p dans L_q

Soit $m = \prod_i f_i$ et soit $\varphi(m)$ la fonction définie par

$$(\varphi(m))(X) = \varphi(m(X)) \quad \forall X$$

Propriété

Si φ est une fonction croissante $\varphi(m)$ est un monôme dont les composantes sont $f'_i = \varphi(f_i)$.

En effet, la fonction φ étant croissante on a

$$\varphi(\prod_i m_i(x_i)) = \prod_i \varphi(m_i(x_i))$$

Propriété

Un monôme réduit donne un monôme réduit.

- Soit m un monôme réduit. Ses composantes ont donc le même maximum max m. La fonction φ étant croissante les composantes du monôme $m' = \varphi(m)$ auront le même maximum $\varphi(\max m)$.

- Dans cette théorie on peut rencontrer plusieurs cas.

a) $\varphi(L_p) = L_q$ et $p = q$

est alors une bijection et les deux monômes sont isomorphes.

b) $\varphi(L_p) = L_q$ et $p > q$

Il y aura des valeurs consécutives de L_p qui auront la même image dans L_q.

On appellera cette opération fusion de niveaux.

En particulier, l'application φ définie par

$$\varphi(i) = 0 \quad \text{pour} \quad i < q-1$$
$$\varphi(i) = q-1 \quad \text{pour} \quad i \geqslant q-1$$

donne un monôme identique à la section de niveau q-1.

c) $(L_p) \neq L_q$

Dans ce cas il pourra arriver que certaines valeurs ne soient pas prises par le monôme $\varphi(m)$.

Remarque

Les sections correspondantes n'en existent pas moins.

Si $\varphi(p-1) = h$. Les espaces de niveau $k > h$ sont vides.
Si $\varphi(i) = h_1$ et $\varphi(i+1) = h_2$ et $h_1 < h < h_2$

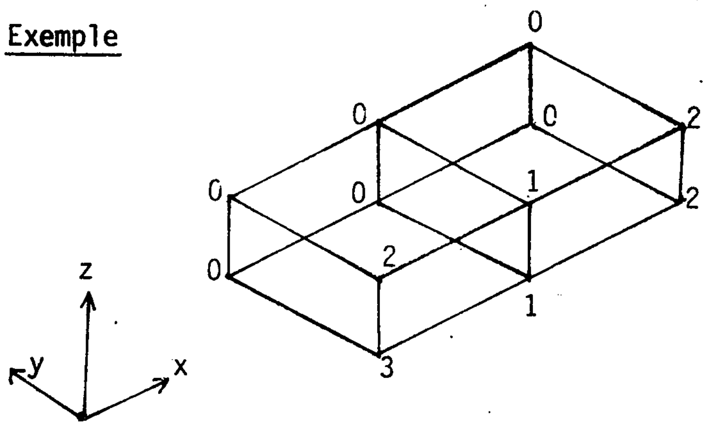
L'espace de niveau h est identique à celui de niveau h_1 et à celui de niveau i de l'ancien monôme.

Première condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit un monôme

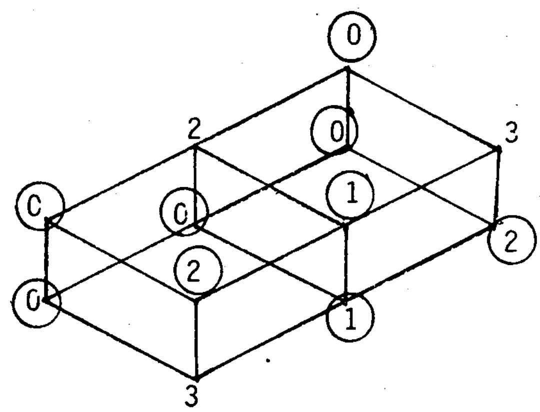
Appelons $H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ le k-pavé représentant $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \dots \times L_{n_k}$

- Pour qu'une fonction f soit un monôme il faut et il suffit que par tout point P de valeur V il passe au moins un k-1 pavé de valeur maximale V.

Exemple



Cette fonction est un monôme
m = (312)(30)(32)



Cette fonction n'est pas un monôme.
Les points entourés ne sont maximaux dans aucun 2-pavé.

Condition nécessaire

Soit un monôme $m = \prod_i f_i$. Au point $P(a_1,a_2,\dots,a_k)$ le monôme prend la valeur :

$$V = \underset{i=1,k}{\text{Min}} \; [f_i(a_i)]$$

Supposons que ce minimum soit atteint pour $i = i_0$

Alors :

$$\forall\; x_1,x_2,\dots,x_{i_0-1},\; x_{i_0+1},\dots,x_k$$

on a :

$$m(x_1,x_2,\dots,x_{i_0-1},\; a_{i_0},a_{i_0+1},\dots,x_k) \leqslant f_{i_0}(a_{i_0})$$
$$= V$$

Donc par P il passe au moins un (k-1)pavé, $(x_{i_0} = a_{i_0})$ ayant la propriété désirée.

Condition suffisante

On suppose que l'on a une fonction telle que par tout point $P(a_1,a_2,\dots,a_k)$ de valeur v il passe au moins un (k-1)pavé de valeur maximale v. Alors on peut trouver un monôme qui représente cet ensemble de points.

Prenons un (k-1) pavé par exemple $(x_i = a_i)$. Soit M sa valeur maximale alors on pose $f_i(a_i) = M$. On définit ainsi les k fonctions. Le monôme ainsi obtenu définit-il l'ensemble de départ. En un point $P(a_1,a_2,\dots,a_k)$ de valeur v, le monôme définit ci-dessus a la valeur :

$$m(a_1,a_2,\dots,a_k) = \prod_{i=1}^{k} v_i$$

$$v_i = (\text{Max du (k-1) pavé } x_i = a_i) \text{ donc } v_i \geqslant v$$

Par hypothèse $\exists\, i$ tel que $v_i = v$ donc $M(a_1,\, a_2,\dots,a_k) = v$.

Deuxième condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit un monôme

Quadrillage dans un k-pavé

Soit une partition de l'ensemble $[1,k]$ en trois ensembles A,B,C.

Soient r points $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ appartenant à $\prod_{i\in A} L_i$ et s points $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ appartenant à $\prod_{j\in B} L_j$ et un point γ appartenant à $\prod_{\ell\in C} L_\ell$

A condition de remettre les composantes dans l'ordre, $\alpha_p\beta_q\gamma$ définit un point du k-pavé, et les points $\alpha_p\beta_q\gamma$ forment ce que nous appellerons un quadrillage.

Remarque

On pourrait ne pas distinguer la partie C en reclassant ses éléments avec A ou B.

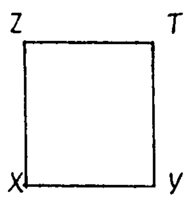
Parallélogramme

C'est un quadrillage pour lequel $r = s = 2$. C'est-à-dire un ensemble de 4 points :

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= X \\ \alpha\beta'\gamma &= Y \\ \alpha'\beta\gamma &= Z \\ \alpha'\beta'\gamma &= T \end{aligned}$$

Théorème

Si la fonction f est un monôme on a sur tout parallélogramme X,Y,Z,T :



$$m(X).m(T) = m(Y).m(Z)$$

- En effet $m(X) = m_A(\alpha) \,.\, m_B(\beta) \,.\, m_C(\gamma)$

$$m(T) = m_A(\alpha') \,.\, m_B(\beta') \,.\, m_C(\gamma)$$

et

$$m(Y) = m_A(\alpha) \,.\, m_B(\beta') \,.\, m_C(\gamma)$$

$$m(Z) = m_A(\alpha') \,.\, m_B(\beta) \,.\, m_C(\gamma)$$

En appelant m_A la restriction du monôme à $\prod_{i \in A} L_i$

<u>Corollaire 1</u>

Si la fonction f est un monôme sur tout parallélogramme, la plus petite valeur se présente plusieurs fois et en des points qui sont consécutifs.

<u>Corollaire 2</u>

Si la fonction f est un monôme, les deux parties du bi-déterminant

[3] $\begin{vmatrix} m(X) & m(Y) \\ m(Z) & m(T) \end{vmatrix}$ sont égaux.

On notera le bi-déterminant (Δ_1, Δ_2)

Δ_1 étant la somme des termes à permutation paire du déterminant
Δ_2 étant la somme des termes à permutation impaire du déterminant.

Il est clair que les deux corollaires sont équivalents au théorème.

<u>Etude de la réciproque</u>

On montrera d'abord la réciproque pour deux variables x et y.
Il s'agit de monter que si pour tout parallélogramme

$$a = (x_0, y_0), \quad b = (x_0', y_0), \quad c = (x_0, y_0'), \quad d = (x_0', y_0')$$

on a :

$$f(a) \,.\, f(d) = f(b) . f(c)$$

alors la fonction f est un monôme.

En effet, si x_0 et y_0 étant fixés on peut trouver x'_0 tel que $f(b) > f(a)$ et y'_0 tel que $f(c) > f(a)$, l'égalité n'aura pas lieu.

Donc on a soit $\forall b \quad f(b) \leqslant f(a)$
soit $\forall c \quad f(c) \leqslant f(a)$

C'est justement la première condition suffisante pour que f soit un monôme.

On va maintenant travailler par récurrence sur le nombre de variables.

On suppose la propriété vraie pour k-1 variables.

Soit x la première variable, et Y l'ensemble des k-1 autres variables.

En traitant Y comme une seule variable et en prenant comme partition x,Y pour les ensembles A et B (l'ensemble C n'existant pas dans ce cas) on a :

$$f(x,Y) = m(x) \,.\, M(Y)$$

Soit q la valeur maximale de la fonction f(x,Y) en prenant m(x) et M(Y) réduits on a :

$$\text{pour} \quad m(x_0) = q \qquad f(x_0,Y) = M(Y)$$

La fonction M(Y) étant égale à $f(x_0,Y)$ elle possède aussi la propriété du parallélogramme, et comme elle ne dépend que de k-1 variables on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Généralisation

Soit f une somme de q monômes. Le bidéterminant des valeurs aux sommets d'un quadrillage avec $r = s > q$ a ses deux termes égaux.

Démonstration

On peut toujours regrouper entre elles les variables de A, celles de B et ignorer celles de C. Il faut alors montrer que le bidéterminant à r lignes et r colonnes :

$$\left\| \sum_{i=1}^{q} m_i(a_j)\, m_i(b_k) \right\|$$

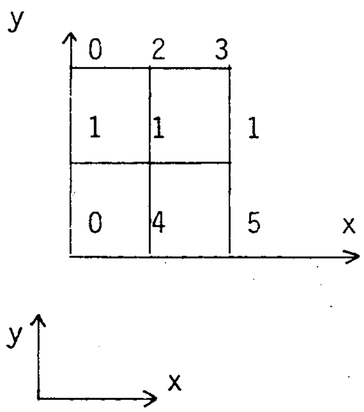
vérifie $\Delta_1 = \Delta_2$

On peut décomposer ce bidéterminant en une somme de q^r bidéterminants correspondant à un terme des sommes. Comme r est strictement plus grand que q on a obligatoirement dans chaque matrice ainsi obtenue deux colonnes correspondant à la même valeur de i. Ces deux colonnes sont proportionnelles ce qui entraîne pour chacun des bidéterminant l'égalité :

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

Remarque

La condition $\Delta_1 = \Delta_2$ dans un bidéterminant d'ordre trois n'est pas suffisante pour caractériser les sommes de deux monômes, comme le montre l'exemple:



Pour cette fonction il n'existe qu'un quadrilatère d'ordre 3 qui donne le bidéterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{pour lequel } \Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

Soit $f_1(x)\ f_2(y) + f'_1(x)(f'_2(y)$ la somme cherchée, et soit 0,1,2 les valeurs des variables.

On doit donc avoir :

$$f_1(0)f_2(0) = 0 \qquad f'_1(0)f'_2(0) = 0$$
$$f_1(0)f_2(2) = 0 \qquad f'_1(0)f'_2(2) = 0$$

$f_1(0)$ et $f'_1(0)$ ne sont pas nuls tous les deux sinon $f_1(0)\ f_2(1) + f'_1(0)\ f'_2(1)$ serait nul.

$f_1(0)$ et $f'_1(0)$ ne sont pas tous les deux différents de zéro sinon

$f_2(0) = f'_2(0) = f_2(2) = f'_2(2) = 0$

Par symétrie, on prendra :

Alors :

$$f_1(0) = 0 \qquad f_1'(0) \neq 0$$

$$f_2'(0) = 0 \qquad f_2'(2) = 0$$

Il reste :

$$f_1'(0)f_2'(1) = 1$$
$$f_1(1)f_2(0) = 4$$
$$f_1(2)f_2(0) = 5$$
$$f_1(1)f_2(2) = 2$$
$$f_1(2)f_2(2) = 3$$

D'où $f_1(1) \geqslant 4$ et $f_1(2) \geqslant 5$

Puis $f_2(2) = 2$ et $f_2(2) = 3$ ce qui est impossible.

Ordre lexicographique dans $(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \dots \times L_{n_k}, \geqslant)$

L'ordre induit dans $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \dots \times L_{n_k}$ par les ordres totaux sur les L_{n_i} n'est évidemment pas un ordre total. On peut cependant à partir de cet ordre partiel et de l'ordre total naturel sur les indices $1,2,\dots,k$ définir un ordre total (ordre lexicographique noté $\trianglerighteq$) de la manière suivante :

Soient $X = (x_1,x_2,\dots,x_k)$ et $Y = (y_1,y_2,\dots,y_k)$

$X \trianglerighteq Y$ si $X = Y$

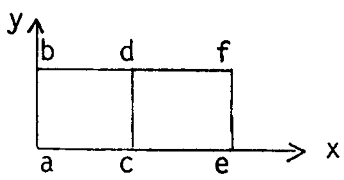
ou si q tel que $x_1 = y_1 \dots x_{q-1} = y_{q-1} \quad x_q > y_q$

On a évidemment $X > Y \Rightarrow X \trianglerighteq Y$

Remarque

C'est ce que l'on fait en Algèbre de Boole en définissant une fonction par sa table de vérité.

Exemple



L'ordre lexicographique est :

$$f \triangleright e \triangleright d \triangleright c \triangleright b \triangleright a$$

Ordre lexicographique sur les fonctions d'une variable

On peut définir un ordre total sur les fonctions d'une variable x (ordre lexicographique noté $\triangleright$) de la manière suivante :

$f(x) \triangleright f'(x)$ si $f(x) = f'(x)$
ou si $\exists q$ tel que $f(0) = f'(0) \ldots f(q-1) = f'(q-1)$
$f(q) > f'(q)$

On a évidemment :

$$f \geqslant f' \Rightarrow f \triangleright f'$$

Ordre lexicographique sur les fonctions de plusieurs variables

A partir de l'ordre lexicographique défini dans $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$ on peut définir un ordre total sur les fonctions de k variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (ordre lexicographique noté $\triangleright$) de la manière suivante :

Soit $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_r$ la suite totalement ordonnée croissante des points de $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$

$f \triangleright f'$ si $f = f'$
ou si $\exists q$ tel que $f(X_0) = f'(X_0) \ldots f(X_{q-1}) = f'(X_{q-1})$
et $f(X_q) > f'(X_q)$

Cela revient donc à considérer k variables comme une seule rangée par ordre lexicographique.

Ordre lexicographique sur les monômes

On peut définir à partir de l'ordre lexicographique sur les fonctions d'une variable et de l'ordre naturel sur les indices $1,2,\ldots,k$, un ordre total sur les monômes (ordre lexicographique noté $\rhd$) de la manière suivante :

Soient $m = f_i(x_i)$

$m' = f'_i(x_i)$

$m \rhd m'$ si $m = m'$

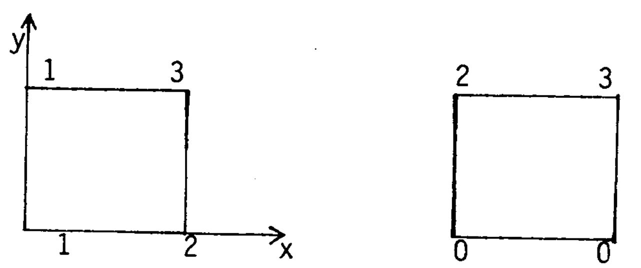
ou si q tel que $f_1(x_1) = f'_1(x_1) \ldots f_{q-1}(x_{q-1}) = f'_{q-1}(x_{q-1})$

$$\text{et } f_q(x_q) \rhd f'_q(x_q)$$

Cet ordre est le même que l'ordre lexicographique constitué à partir de l'ordre lexicographique sur les fonctions d'une variable et de la file des composantes d'un monôme.

On ne confondra pas l'ordre lexicographique sur les fonctions chacune écrite au moyen de $\prod_i n_i$ symboles avec l'ordre lexicographique sur les monômes chacun écrit au moyen de $\sum_i n_i$ symboles.

Exemple



$m_1 = (13)(23)$ $\qquad$ $m_2 = (23)(03)$

$m_2 \rhd m_1$ en tant que monômes - $m_1 \rhd m_2$ en tant que fonctions

Ordre lexicographique sur les sommes de monômes

On peut définir un ordre total sur les sommes de monômes (ordre lexicographique noté $\unrhd$) de la manière suivante :

Soient $S = \sum_{i=1}^{r} m_i$

$S' = \sum_{i=1}^{r'} m'_i$

$S \unrhd S'$ si $S = S'$

ou si $\exists q$ tel que $m_1 = m'_1 \ldots m_{q-1} = m'_{q-1}$

et $m_q \unrhd m'_q$

Cet ordre est le même que l'ordre lexicographique constitué à partir de l'ordre lexicographique sur les monômes et de la file des monômes.

Application

Ceci permet de définir entre plusieurs écritures comme sommes de monômes d'un certain type l'une d'entre elles, par exemple la première par ordre lexicographique. Ceci peut être utile pour faire des catalogue de fonctions.

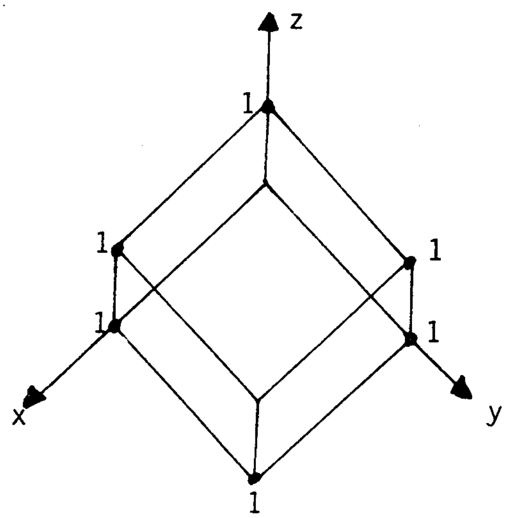
Par exemple, on pourra l'utiliser lors de l'étude des monômes premiers ou réguliers (chapitres IV et V) pour définir une base canonique.

Exemple

En Algèbre de Boole l'ordre pour les fonctions d'une variable est :

$(0,0) = 0 \quad (0,1) = x \quad (1,0) = x' \quad (1,1) = 1$

Si l'ordre des variables est x,y,z la fonction :



a pour première base première irredondante par ordre lexicographique

$$xy' + xz' + x'y + x'z$$

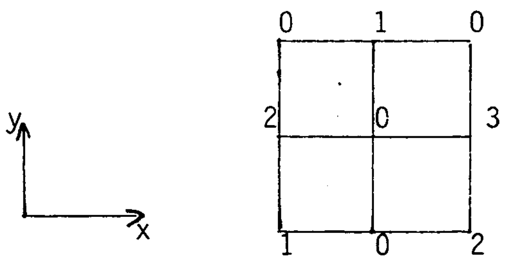
CHAPITRE IV - MONÔMES PREMIERS

I - DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS PRÉLIMINAIRES

Représentation d'une fonction f par la forme de Lagrange

Toute fonction f peut se représenter par la somme des monômes de Lagrange de ses divers points. Ceci est évident puisque l'on couvre la fonction point par point.

Exemple : Soit la fonction f :



Représentation de f par la forme de Lagrange :

$$f = (100)(100) + (002)(200) + (200)(020) + (003)(030) + (010)(001)$$

On va essayer d'écrire une fonction avec un nombre minimal de monômes. Il y a $\prod_i n_i$ monômes de Lagrange. En fait toute fonction peut s'écrire avec $\frac{\prod_i n_i}{[\max_i n_i]}$ monômes au plus.

En effet, toute fonction nulle partout sauf sur un 1-pavé est un monôme. Et la façon de décomposer H en un nombre minimal de 1-pavé donne $\frac{\prod_i n_i}{[\max_i n_i]}$ 1-pavés.

Les deux chapitres qui suivent vont être consacrés à l'étude des monômes "maximaux". C'est parmi les sommes de tels monômes que l'on peut espérer trouver celles qui auront le moins de termes.

Ce chapitre va être consacré aux monômes premiers, c'est-à-dire aux monômes maximaux au sens de la relation d'ordre R_1 entre monômes.

Le chapitre suivant sera consacré aux monômes réguliers qui possèdent une autre propriété de maximum.

Définition des monômes premiers ou implicants premiers

On appelle implicant de f tout monôme m inférieur à f pour R_1. Les éléments maximaux pour R_1 de l'ensemble des implicants de f, sont les implicants premiers ou monômes premiers de f. (Si les implicants de f sont réduits, les monômes premiers de f sont les éléments maximaux pour R_2 de l'ensemble des implicants de f).

Passage à des sous-ensembles des L_{n_i}

On remplace les L_{n_i} par $L'_{n_i} \subseteq L_{n_i}$. On notera f* la réduction d'une fonction f.

Propriété

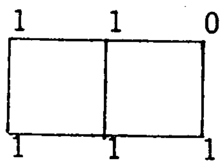
Tout monôme premier m' de f* est obtenu par réduction d'un monôme premier m de f.

En effet, le monôme premier m' est inférieur à f. Il est donc inférieur ou égal à un monôme m de f. La réduction de m soit $\hat{m}$ est supérieure ou égale à m', donc égale puisque m' est premier pour f*.

Remarque

Un monôme premier ne reste pas toujours un monôme premier.

Exemple



$f = (111)(10) + (110)(11)$

Prenons $L_1' = \{0,1\}$ alors f est réduite à

$f^* = (11)(11)$.

Le monôme $m = (111)(10)$ qui est un monôme premier de f est réduit à $m^* = (11)(10)$ qui n'est pas un monôme premier de f^*.

Application croissante de L_p dans L_q

Propriété

La fonction ϕ transforme un monôme inférieur à une fonction en un monôme inférieur à une fonction.

- Soit $m \leqslant f$ donc X $m(X) \leqslant f(X)$

  donc puisque ϕ est croissante on aura :

$$\phi(m(X)) \leqslant \phi(f(X) \quad \forall X$$

Propriété

Tout monôme premier de $\phi(f)$ est le transformé d'un monôme premier de f.

En effet, soit $m = \prod_i f_i$ un monôme premier de $\phi(f)$, et soit $m' = \prod_i f_i'$ un monôme défini par

$$f_i'(x_i) = \{\text{Min } \alpha_i / \ \phi(\alpha_i) = f_i(x_i)\}$$

on a :

$$\phi(m') = m \qquad \text{et} \qquad m' \leqslant f$$

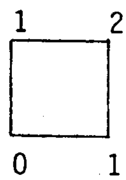
Il existe un monôme premier de f soit m" tel que :

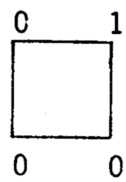
$$m'' \geqslant m' \quad \text{donc } \phi(m'') \geqslant \phi(m') = m$$

m est un monôme premier de $\phi(f)$ on a donc $(m'') = m$.

Remarques

a) plusieurs monômes premiers de f peuvent donner le même monôme premier de $\phi(f)$.

f = 

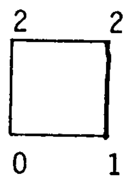
$\phi(f)$ = 

avec ϕ : $0 \to 0$
$1 \to 0$
$2 \to 1$

Les monômes premiers de f sont (12)(02) et (02)(12) tous deux donnent (01)(01)

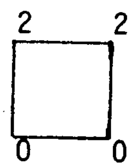
b) certains monômes premiers de f peuvent ne pas donner de monôme premier de $\phi(f)$.

Exemple

f = 

$\phi(0) = 0$
$\phi(1) = 0$
$\phi(2) = 2$

m = (02)(12) est un monôme premier de f
$\phi(m)$ = (02)(02) n'est pas un monôme premi
de $\phi(f)$.

$\phi(f)$ = 

II - OBTENTION DES MONÔMES PREMIERS D'UNE FONCTION F PAR LA MÉTHODE DES CONCENSUS GÉNÉRALISÉS

$f = m_1 + m_2 + \ldots + m_q$. Les monômes m_i étant éventuellement non réduits. On note $S_0 = \{m_1, m_2, \ldots, m_q\}$

Définition

On appelle tranche d'un monôme $m = \prod_i f_i$ pour la valeur a_i de la ième variable le monôme :

$$T(i,a_i) = f_1 \,.\, f_2 \,.\, \ldots \,.\, f_{i-1} \,.\, \phi_i \,.\, f_{i+1} \,.\, \ldots \,.\, f_k$$

avec

$$\phi_i(x_i) = 0 \qquad x_i \neq a_i$$

$$\phi_i(a_i) = f_i\,(a_i) = \alpha \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant p-1$$

Lemme 1

On n'augmente aucune des valeurs prises par la tranche $T(i,a_i)$ en remplaçant α par $\alpha' \leqslant \alpha$ et en remplaçant les $f_j(x_j) \geqslant \alpha'$, pour $j > i$, par la valeur maximale p-1.

Lemme 2

On ne change aucune des valeurs prises par la tranche $T(i,a_i)$ en l'écrivant :

$$T'(i,a_i) = f_1 \,.\, f_2 \,.\, \ldots \,.\, f_{i-1} \,.\, \phi'_i \,.\, f_{i+1} \,.\, \ldots \,.\, f_{k-1} \,.\, f'_k$$

avec $\phi'_i(a_i) = p-1$. La fonction f'_k étant la fonction f_k écrêtée à la valeur α.

Définition de $\mathcal{E}(T)$

A une tranche $T(i,a_i)$, on associe un ensemble de tranches inférieures ou égales à T que l'on note $\mathcal{E}(T)$ et qui est construit de la façon suivante :

- On applique sur T, $\alpha+1$ fois le lemme 1 en prenant pour α' successivement les valeurs α, $\alpha-1$, ..., 1, 0.

- On applique sur T une fois le lemme 2.

- Des $(\alpha+2)$ tranches ainsi obtenues on ne garde que celles qui sont maximales pour R_2.

Méthode

Travail sur la première variable x_1

Pour chaque monôme de S_0, on prend la tranche T pour $x_1 = 0$. On calcule $\mathcal{E}(T)$ et l'on range les monômes ainsi obtenus dans une 1ère colonne. On recommence pour $x_1 = 1,2,\ldots, n_1-1$ et l'on range les tranches obtenues respectivement dans une 2ème, 3ème, ...n1ème colonne. Dans chaque colonne on ne garde que les tranches maximales pour R_2.

On fait les consensus tels qu'ils sont définis en [18] suivant la première variable, en prenant de toutes les manières possibles une tranche dans chaque colonne (c'est-à-dire que l'on fait la somme des composantes en x_1 et le produit des autres composantes).

On ne garde de ces consensus que ceux qui sont maximaux pour R_2. Soit S_1 l'ensemble des monômes ainsi obtenus.

Travail sur la ième variable i = 2,3,...,k-1

On refait le même travail à partir des monômes de S_{i-1} et en prenant les tranches suivant la ième variable. Le travail sur la ième variable donne un ensemble de monômes S_i.

Travail sur la dernière variable

On fait simplement les consensus sur la dernière variable. Soit S_k l'ensemble obtenu.

Les monômes premiers de f sont les éléments maximaux pour R_2, de S_k.

Démonstration

Montrons que l'on obtient ainsi n'importe quel monôme premier de f : $m = \prod_i f_i$ réduit. Pour cela on fait une démonstration par récurrence sur le nombre de variables.

Travail sur la 1ère variable

Soit $(0, a_2, \ldots, a_k), (1, a_2,\ldots,a_k), \ldots, (n_1-1, a_2,\ldots,a_k)$ n_1 jeux de valeurs des variables où la première composante varie seule.

Pour tout $j \in [0, n_1-1]$ il existe un monôme $\mu \in S_0$ qui dépend de $j, a_2,\ldots,a_k$ que l'on note $\mu[j, a_2,\ldots,a_k] = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k$ tel que :

$$\mu(j, a_2, \ldots, a_k) \geqslant m(j, a_2,\ldots, a_k) \qquad (1)$$

Pour le monôme μ on prend seulement la tranche correspondant à $x_1 = j$, que l'on note toujours μ pour simplifier. Deux cas peuvent se présenter :

- $f_1(j)$ est le plus petit terme du 2ème membre de l'inégalité (1). Alors $\mu_1(j) \geqslant f_1(j)$.

  On diminue $\mu_1(j)$ jusqu'à $f_1(j)$ et on augmente $\mu_2(a_2),\ldots, \mu_k(a_k)$ qui sont tous supérieurs à $f_1(j)$, jusqu'à (p-1) (lemme 1).

  On a donc

$$\prod_{t=2}^{k} \mu_t(a_t) \geqslant \prod_{t=2}^{k} f_t(a_t).$$

- Le plus petit terme du 2ème membre de l'inégalité (1) n'est pas $f_1(j)$ mais $f_u(a_u)$. Il peut se produire 2 cas :

  * $\mu_1(j) \geqslant f_1(j)$ on a alors

$$\prod_{t=2}^{k} \mu_t(a_t) \geq \prod_{t=2}^{k} f_t(a_t).$$

* $\mu_1(j) < f_1(j)$.

Alors on remplace $\mu_1(j)$ par (p-1) et on écrête μ_k à $\mu_1(j)$ (lemme 2). On a donc encore dans ce cas :

$$\mu_1(j) \geq f_1(j)$$

$$\prod_{t=2}^{k} \mu_t(a_t) \geq \prod_{t=2}^{k} f_t(a_t).$$

En formant le consensus en x_1 des n_1 tranches obtenues ($j = 0,\dots, n_1-1$) on obtient un monôme, que l'on appelle encore μ pour simplifier, qui est fonction de $a_2, a_3,\dots,a_k$ que l'on note $\mu\,[a_2, a_3,\dots,a_k]$ tel que :

$$\mu_1 \geq f_1$$

et

$$\prod_{t=2}^{k} \mu_t(a_t) \geq \prod_{t=2}^{k} f_t(a_t)$$

Travail sur la ième variable $i < k$

Supposons que l'on ait obtenu au pas précédent pour tout $j \in [0, n_i-1]$ un monôme $\mu[j, a_{i+1},\dots,a_k]$ tel que :

$$\mu_1 \geq f_1,\dots,\mu_{i-1} \geq f_{i-1}$$

et

$$\mu_i(j) \prod_{t=i+1}^{k} \mu_t(a_t) \geq f_i(j) \prod_{t=i+1}^{k} f_t(a_t) \qquad (2)$$

Pour le monôme μ on prend seulement la tranche correspondant à $x_i = j$, que l'on note toujours μ pour simplifier.

On démontrerait de même que précédemment, en remplaçant 1 par i, que l'on obtient un monôme que l'on note encore μ qui est fonction de $a_{i+1},\ldots,a_k$ tel que :

$$\mu_1 \geqslant f_1,\ldots,\ \mu_i \geqslant f_i$$

et

$$\prod_{t=i+1}^{k} \mu_t(a_t) \geqslant \prod_{t=i+1}^{k} f_t(a_t).$$

Conclusion de la récurrence

Pour tout $a_k \in [0,\ n_k-1]$ il existe un monôme μ dépendant de a_k, que l'on note $\mu[a_k]$ tel que :

$$\mu_1 \geqslant f_1,\ldots,\ \mu_{k-1} \geqslant f_{k-1}$$

et

$$\mu_k(a_k) \geqslant f_k(a_k)$$

Travail sur la dernière variable

En faisant les consensus suivant x_k, des $\mu[a_k]$ pour tout $a_k \in [0,\ n_k-1]$, on obtient un monôme que l'on note encore μ tel que :

$$\mu_i \geqslant f_i \quad \forall\, i \in [1,k].$$

Exemple

$$f = (310)\ (30)\ (30) + (212)\ (20)\ (22) + (220)\ (12)\ (22)$$

Travail sur la première variable

Les tranches T encadrées sont telles qu'on les prend dans les monômes, les suivantes sont $\mathscr{C}(T)$

$\boxed{(300)(30)(30)}$
(300)(30)(30)
~~(000)(33)(33)~~
$\boxed{(200)(20)(22)}$
(200)(30)(33)
~~(000)(33)(33)~~
(300)(20)(22)
$\boxed{(200)(12)(22)}$
(200)(13)(33)
(100)(33)(33)
(300)(12)(22)

$\boxed{(010)(30)(30)}$
~~(010)(30)(30)~~
~~(000)(33)(33)~~
(030)(30)(10)
$\boxed{(010)(20)(22)}$
~~(010)(30)(33)~~
~~(000)(33)(33)~~
(030)(20)(11)
$\boxed{(020)(12)(22)}$
(020)(13)(33)
(010)(33)(33)
(030)(12)(22)

$\boxed{(000)(30)(30)}$
(000)(33)(33)
(003)(30)(00)
$\boxed{(002)(20)(22)}$
(002)(30)(33)
~~(000)(33)(33)~~
(003)(20)(22)
$\boxed{(000)(12)(22)}$
~~(000)(33)(33)~~
(003)(12)(00)

Consensus suivant la 1ère variable

S_1 = (322)(10)(30), (220)(13)(33), (110)(33)(33), (330)(12)(22), (333)(30)(00), (332)(30)(10), (312)(30)(30), (212)(30)(33), (222)(10)(33), (333)(20)(11), (313)(20)(22), (333)(10)(22), (333)(12)(00).

Travail sur la 2ème variable

(333)(10)(33)
(312)(30)(30)
(212)(30)(33)
(333)(30)(11)
(313)(20)(33)
(313)(30)(22)

(220)(03)(33)
(330)(02)(33)
(330)(03)(22)
(333)(00)(33)
(333)(03)(00)

S_2 = (210)(33)(33), (220)(13)(33), (330)(12)(33), (310)(32)(30), (310)(22)(33), (330)(13)(22), (330)(33)(11), (310)(33)(22), (333)(10)(33), (312)(30)(30), (212)(30)(33), (333)(30)(11), (313)(20)(33), (313)(30)(22), (333)(33)(00).

Travail sur la 3ème variable

On fait simplement le consensus sur S_2 :

S_3 = (220)(12)(22), (310)(32)(32), (312)(30)(32).

III - OBTENTION DES MONÔMES PREMIERS D'UNE FONCTION F PAR LA MÉTHODE DE LA PYRAMIDE

Soit $f = \sum_{i=1}^{q} m_i$ une fonction f donnée sous la forme d'une somme de monômes quelconques.

Espace et section de niveau q d'une fonction f

On généralise cette notion vue pour les monômes.

On appelle espace de niveau q d'une fonction f la partie de $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k}$ pour laquelle $f \geqslant q$. On la notera $E_q(f)$.

On appellera section de niveau q de f la fonction qui est égale à q sur E_q est nulle ailleurs, on la notera f^q.

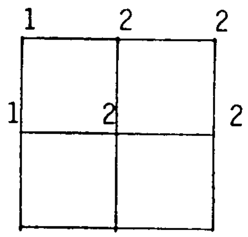
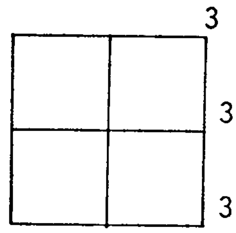
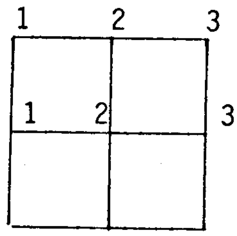
Définition

Soit $m = \prod_j f_j$ un monôme dont les composantes ne prennent que des valeurs inférieures ou égales à i-1, et $n = \prod_j g_j$ un monôme dont les composantes ne prennent que les valeurs 0 et i. On appelle monôme obtenu par empilement de m et de n le monôme $\ell = \prod_j h_j$ défini par :

$$\begin{cases} h_j(x_j) = i & \text{si } f_j(x_j) = i-1 \text{ et } g_j(x_j) = i \\ h_j(x_j) = f_j(x_j) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'empilement peut amener à couper le monôme n.

Exemple

m =  n =  ℓ = 

on dira qu'il y a empilement simple lorsqu'il n'y a aucun découpage

Algorithme

On cherche les monômes premiers de chaque section de niveau i de f. Ces fonctions sont des fonctions à deux valeurs, on peut employer les méthodes du chapitre I, il suffit de remplacer 1 par i.

On notera ces monômes premiers monômes de niveau i. On empile de toutes les manières possibles les monômes premiers trouvés en commençant par les niveaux inférieurs et en prenant un et un seul monôme dans chaque niveau.

Lorsque l'empilement d'un monôme de niveau i et d'un monôme de niveau i-1 donne un monôme ne prenant jamais la valeur i on peut s'arrêter à ce niveau puisque les empilements suivants ne donneront rien.

Les monômes réduits maximaux pour R_2, ainsi trouvés sont les monômes premiers de f.

Démonstration

Montrons que l'on obtient ainsi tout monôme premier m de f. Pour tout $i \in [1,p-1]$ on fait correspondre à m sa section de niveau i soint m^i. L'empilement de $m^1, m^2, \ldots, m^{p-1}$ redonne le monôme m et cela sans découpages.

Et tout monôme conservé est premier. En effet, un monôme non premier serait inférieur à un monôme premier, donc non conservé.

A chaque niveau i on a trouvé un monôme m_i' tel que :

$$m_i' > m^i$$

L'empilement des monômes m_i' donne un monôme compatible avec f et supérieur ou égal à m, donc égal à m, puisque m est maximal.

Exemple

$$f = (310)(30)(30) + (212)(20)(22) + (220)(12)(22)$$
$$f^1 = (110)(10)(10) + (111)(10)(11) + (110)(11)(11)$$
$$f^2 = (200)(20)(20) + (202)(20)(22) + (220)(02)(22)$$
$$f^3 = (300)(30)(30)$$

Les monômes premiers de f^1 sont :

I : (111)(10)(11)   II : (110)(11)(11)

Les monômes premiers de f^2 sont :

III : (202)(20)(22)   IV : (220)(02)(22)   V : (200)(22)(22)

Le monôme premier de f^3 est :

VI : (300)(30)(30).

L'empilement des monômes I III VI donne le monôme (312)(30)(32)

L'empilement des monômes I IV ne donne rien et I n'est pas premier puisqu'on peut l'empiler avec d'autres monômes.

L'empilement des monômes I V VI conduit à un découpage et donne un monôme non maximal (311)(30)(32)

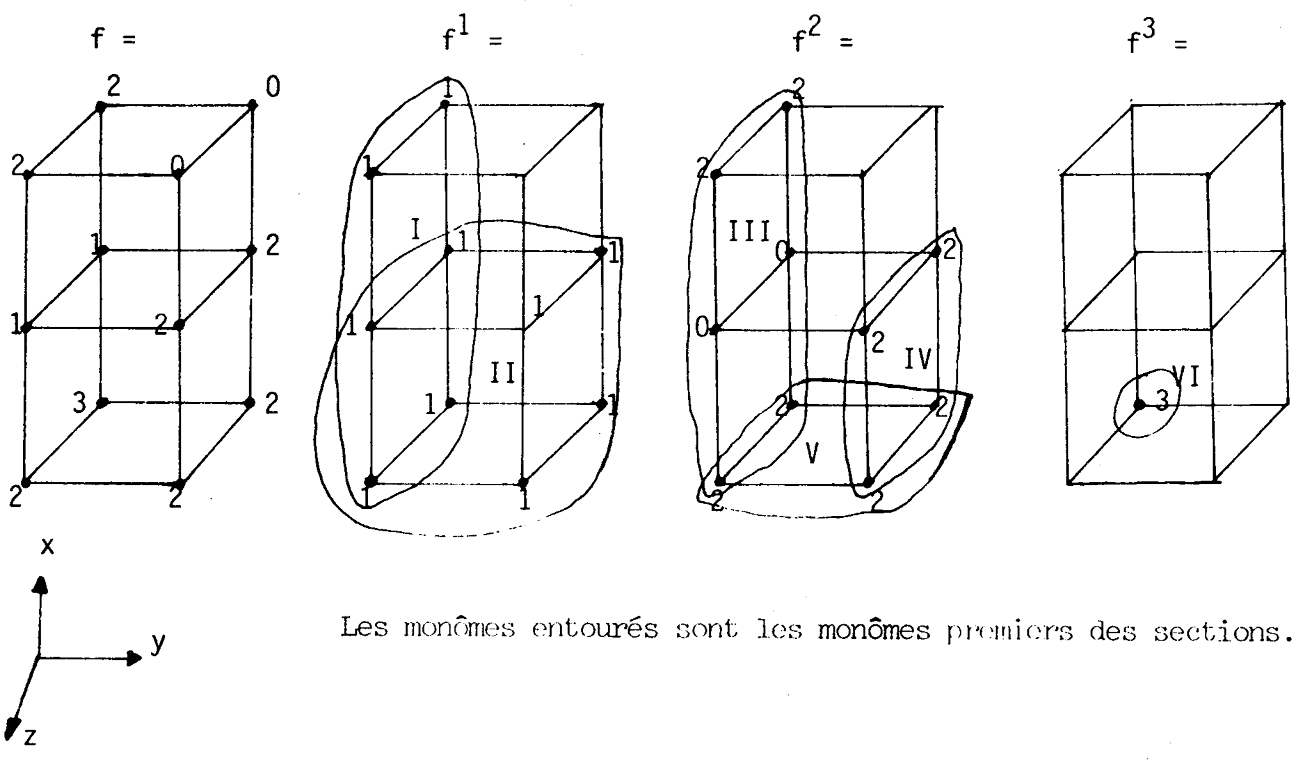
L'empilement des monômes II III VI donne un monôme non maximal (310)(31)(32)

L'empilement des monômes II IV VI ne donne rien au niveau 3, mais II IV = (220)(12)(22) est premier

L'empilement des monômes II V VI donne le monôme (310)(32)(32).

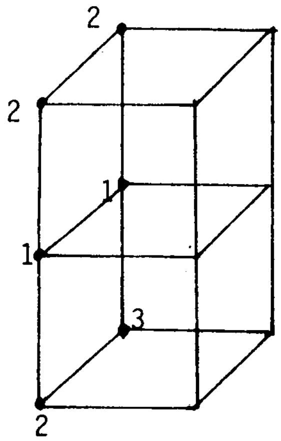
Les monômes premiers de f sont donc :

(312)(30)(32)
(220)(12)(22)
(310)(32)(32)

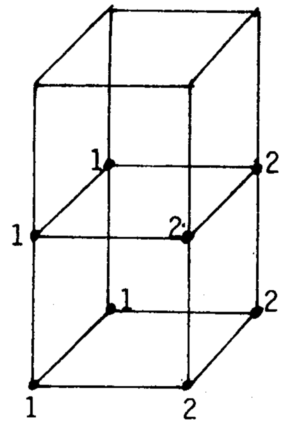


Les monômes entourés sont les monômes premiers des sections.

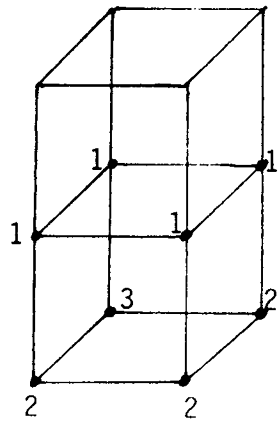
Les monômes premiers de f sont :



(312)(30)(32)



(220)(12)(22)



(310)(32)(32)

IV - OBTENTION DES MONÔMES PREMIERS D'UNE FONCTION F PAR DOUBLE COMPLÉMENTATION

On rappelle que le complément d'une fonction f est :

$$f(X) = (p-1) - f(X) \qquad \forall\ X$$

Le complément échangeant la somme et le produit, le complément d'une fonction écrite sous forme d'une somme de monômes :

$$f = \sum_{i=1}^{q} m_i \quad \text{est} \quad \overline{f} = \prod_{i=1}^{q} \overline{m_i}$$

Théorème de la base première complète d'un produit

La base première complète d'une fonction égale au produit de plusieurs fonctions, s'obtient en formant le produit des bases premières complètes des fonctions, puis en enlevant les monômes plus petits qu'un autre.

La démonstration de ce théorème vu au chapitre I reste la même.

Complément d'un monôme $m = \prod_i f_i$

Le complément de m est une fonction

$$f = \sum_i M_i$$

M_i est un monôme ayant toutes ses composantes constantes et égales à p-1, sauf la ième qui est égale à $\overline{f_i}$. On peut donc noter :

$$\overline{m} = \sum_i \overline{f_i}$$

Le complément d'un monôme est donc la somme de monômes ne dépendant que d'une variable.

Exemple

$$m = (320)(30)(13) \qquad \overline{m} = (013)_x + (03)_y + (20)_z$$

Base première complète du complément d'un monôme

Lorsque l'on complète un monôme $m = \prod_i f_i$ sa base première complète n'est pas $\sum_i \overline{f_i}$ comme au chapitre I.

Exemple

$$m = (013)(13)(33) \qquad \overline{m} = (320)_x + (20)_y$$

La base première complète de $\overline{m}$ est $(320)_x + (322)_x(30)_y$

Décomposition d'une fonction d'une variable en produit de fonctions ne prenant que deux valeurs

Soit f une fonction d'une variable définie de L_n dans L_p.

On écrit $f = \prod_{\alpha=0}^{n-1} f_\alpha$ avec $f_\alpha(x) = p-1$ si $x \neq \alpha$

$f_\alpha(\alpha) = f(\alpha)$

Exemple

$p = 5 \quad n = 4 \quad f = (3401)$

Alors $f = (3444)(4444)(4404)(4441)$

Remarque

Quand une des fonctions f_α est partout égale à p-1 on peut la supprimer.

Soit f la fonction complémentaire d'un monôme

$$f = \sum_i M_i \quad \text{avec} \quad M_i = \overline{f_i}$$

Les M_i sont des fonctions d'une seule variable x_i. En les décomposant on obtient :

$$f = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i-1} M_{ij}$$

Appliquons alors à f la 2ème distributivité.

$$f = \Pi(M_{1\alpha_1} + M_{2\alpha_2} + \ldots + M_{k\alpha_k}) \quad \alpha_i \in [1,n_i-1]$$

Il faut donc trouver les monômes premiers de fonctions de la forme :

$$g = M_{1\alpha_1} + M_{2\alpha_2} + \ldots + M_{k\alpha_k} \quad \alpha_i \in [1,n_i-1]$$

C'est-à-dire des fonctions égales à la somme de monômes ne dépendant que d'une variable et ne prenant que deux valeurs, la valeur maximale (p-1) et une autre valeur.

On note $$M = \operatorname*{Max}_i \; [\mathrm{Min}\,(M_{i\alpha_i})]$$

La fonction g ne prend donc pas de valeurs inférieures à M. On associe donc à chaque monôme $M_{i\alpha_i}$ le monôme $M'_{i\alpha'_i}$ défini par :

$$M'_{i\alpha_i}(x_i) = p-1 \qquad \text{si} \quad M_{i\alpha_i}(x_i) = p-1$$

$$M'_{i\alpha_i}(x_i) = M \quad \text{sinon}$$

g s'écrit alors comme une somme de monômes ne dépendant que d'une variable et ne prenant que deux valeurs. On a donc obtenu ainsi la base première complète de g.

Il reste à appliquer le théorème du produit pour avoir la base complète de $f = \Pi g$.

D'où le théorème

On obtient la base première complète d'une fonction f par double complémentation. Mais il y a ici une étape de plus que dans la méthode classique. Quand $\bar{f}$ est écrit comme produit de compléments de monômes, on doit chercher la base première complète de ces compléments avant de developper $\bar{f}$.

Exemple :

$$f = (310)(30)(30) + (212)20)(22) + (220)(12)(22)$$

$$\bar{f} = [(023)_x + (03)_y + (03)_z]\ [(121)_x + (13)_y + (11)_z]\ [(113)_x + (21)_y + (11)_z]$$

$$\bar{f} = (013)(13)(33) + (113)(03)(33) + (113)(13)(03) + (021)(21)(22) + (121)(21)(02)$$

$$f = \bar{\bar{f}}\ [(320)_x + (20)_y]\ [(220)_x + (30)_y]\ [(220)_x + (20)_y + (30)_z]\ [(312)_x + (12)_y]$$
$$[(212)_x + (12)_y + (31)_z]$$

Décomposition de $h_1 = (320)_x + (20)_y$

$$h_1 = (323)_x(330)_x + (23)_y(30)_y$$

$$h_1 = [(323)_x + (23)_y]\ [(323)_x + (30)_y][\ (330)_x + (23)_y]\ [(330)_x + (30)_y]$$

$$h_1 = [(323)_x + (23)_y]\ [(323)_x + (32)_y]\ [(332)_x + (23)_y]\ [(330)_x + (30)_y]$$

Décomposition de $h_2 = (220)_x + (30)_y$

$$h_2 = (233)_x(323)_x(330)_x + (30)_y$$

$$h_2 = [(233)_x + (32)_y]\ [(323)_x + (32)_y]\ [(330)_x + (30)_y]$$

Décomposition de $h_3 = (220)_x + (20)_y + (30)_z$

$$h_3 = (233)_x(323)_x(330)_x + (23)_y(30)_y + (30)_z$$

$$h_3 = [(233)_x + (23)_y + (32)_z]\ [(233)_x + (32)_y + (32)_z]\ [(323)_x + (23)_y + (32)_z]$$

$$[(323)_x + (32)_y + (32)_z]\ [(332)_x + (23)_y + (32)_z]\ [(330)_x + (30)_y + (30)_z]$$

Décomposition de $h_4 = (312)_x + (12)_y$

$$h_4 = (313)_x(332)_x + (13)_y(32)_y$$

$$h_4 = [(313)_x + (13)_y]\ [(323)_x + (32)_y]\ [(332)_x + (23)_y]\ [(332)_x + (32)_y]$$

Décomposition de $h_5 = (212)_x + (12)_y + (31)_z$

$$h_5 = (233)_x\,(313)_x\,(332)_x + (13)_y\,(32)_y + (31)_z$$

$$h_5 = [(233)_x + (23)_y + (32)_z]\,[(233)_x + (32)_y + (32)_z]\,[(313)_x + (13)_y + (31)_z]$$

$$[(323)_x + (32)_y + (32)_z]\,[(332)_x + (23)_y + (32)_z]\,[(332)_x + (32)_y + (32)_z]$$

La base première complète de f s'obtient en développant le produit $h_1 \times h_2 \times h_3 \times h_4 \times h_5$ et en simplifiant :

$$f = (310)(32)(32) + (220)(12)(22) + (312)(30)(32)$$

V - BASE PREMIÈRE IRREDONDANTE

C'est une somme de monômes premiers qui est égale à la fonction et qui est minimale en ce sens que la suppression d'un des monômes rend la somme strictement inférieur à la fonction.

Rappel de la méthode de couverture

Soit $f = \sum_{i=1}^{r} m_i$ L'expression de f sous la forme de Lagrange

et $f = \sum_{j=1}^{s} M_j$ La base première complète de f.

On cherche donc une base telle que tout m_i soit couvert, et telle que tout monôme soit nécessaire. On construit un tableau T où l'on marque en lignes les monômes m_i et en colonne les monômes M_j.

Avec :

$$T(i,j) = 1 \iff m_i \leqslant M_j$$
$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

Soit alors l'expression formelle :

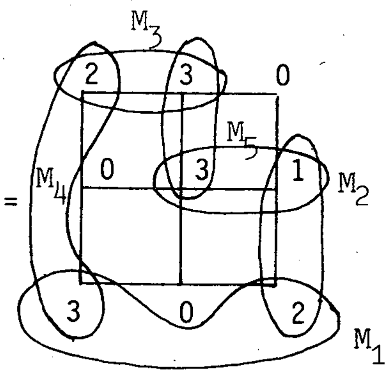
$$\prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{j \in S_i} M_j \right) \qquad \text{avec } S_i = \{j / T(i,j) = 1\}$$

où M_j est une variable booléenne représentant le monôme.

En développant ce produit de sommes on obtient une somme de monômes dont les éléments maximaux représentent des couvertures irredondantes de f.

<u>Exemple</u>

f =



- Les courbes représentent les monômes

- Les monômes sont égaux à la fonction aux points se trouvant à l'intérieur des courbes.

Expression de f sous la forme de Lagrange :

f = (300)(300) + (002)(200) + (030)(030) + (001)(010) + (200)(002) + (030)(003)

Expression de f par sa base première complète :

f = (302)(300) + (031)(030) + (230)(003) + (300)(302) + (030)(033) + (002)(210)

T	M_1 (302)(300)	M_2 (031)(030)	M_3 (230)(003)	M_4 (300)(302)	M_5 (030)(033)	M_6 (002)(210)
(300)(300)	1			1		
(002)(200)	1					1
(030)(030)		1			1	
(001)(010)		1				1
(200)(002)			1	1		
(030)(003)			1		1	

$$(M_1 + M_4)(M_1 + M_6)(M_2 + M_5)(M_2 + M_6)(M_3 + M_4)(M_3 + M_5) =$$

$$= M_1 M_2 M_3 + M_1 M_3 M_5 M_6 + M_2 M_3 M_4 M_6 + M_1 M_2 M_4 M_5 + M_4 M_5 M_6$$

Les bases premières irredondantes de f sont donc :

f = (302)(300) + (031)(030) + (230)(003)
f = (302)(300) + (230)(003) + (030)(033) + (002)(210)
f = (031)(030) + (230)(003) + (300)(302) + (002)(210)
f = (302)(300) + (031)(030) + (300)(302) + (030)(033)
f = (300)(302) + (030)(033) + (002)(210)

VI - PROGRAMMATION

La méthode de la pyramide a donné le programme EMPILP écrit en FORTRAN IV langage disponible sur le T 1600 de l'Université de Tours.

Ce programme est réalisé sous forme d'un programme principal et de sous-programmes dont certains sont réutilisés dans les programmes DUAL et EMPILR dont on parlera plus tard.

Exemples d'utilisation

Exemple 1

```
MONOMES DE DEPART
  (013)(124)
  (011)(044)
  (312)(041)
  (033)(103)


MONOMES REDUITS
  (013)(123)
  (011)(011)
  (312)(031)
  (033)(103)


MAXF = 3


FONCTION SIMPLIFIEE
  (013)(123)
  (312)(031)
  (033)(103)


MONOMES PREMIERS DE F1
  (011)(111)
  (111)(011)


MONOMES PREMIERS DE F2
  (002)(022)
  (202)(020)
  (022)(002)


MONOMES PREMIERS DE F3
  (300)(030)
  (033)(003)


MONOMES APRES EMPILEMENT ET SIMPLIFICATION= MONOMES PREMIERS DE F
  (013)(123)
  (033)(113)
  (113)(023)
  (312)(031)
  (133)(013)
```

Exemple 2

```
MONOMES DE DEPART
  (050)(54)(52)
  (220)(22)(02)
  (151)(50)(53)


MONOMES REDUITS
  (050)(54)(52)
  (220)(22)(02)
  (151)(50)(53)


MAXF = 5


FONCTION SIMPLIFIEE
  (050)(54)(52)
  (220)(22)(02)
  (151)(50)(53)


MONOMES PREMIERS DE F1
  (010)(11)(11)
  (110)(11)(01)
  (111)(10)(11)


MONOMES PREMIERS DE F2
  (020)(22)(22)
  (220)(22)(02)


MONOMES PREMIERS DE F3
  (030)(33)(30)
  (030)(30)(33)


MONOMES PREMIERS DE F4
  (040)(44)(40)


MONOMES PREMIERS DE F5
  (050)(50)(50)


MONOMES APRES EMPILEMENT ET SIMPLIFICATION= MONOMES PREMIERS DE F
                                            (050)(54)(52)
                                            (050)(52)(53)
                                            (230)(32)(03)
                                            (151)(50)(53)
                                            (231)(30)(13)
```

La méthode de la double complémentation a donné le programme DUAL écrit également en FORTRAN IV , est réalisé sous forme d'un programme principal et de sous-programmes.

Exemples d'utilisation

Exemple 1

```
MONOMES DE DEPART
   (013)(124)
   (011)(044)
   (312)(041)
   (033)(103)

MONOMES REDUITS
   (013)(123)
   (011)(011)
   (312)(031)
   (033)(103)

MAXF = 3

FONCTION SIMPLIFIEE
   (013)(123)
   (312)(031)
   (033)(103)

FONCTION COMPLEMENTAIRE DE F
   (300)(302)
   (020)(220)
   (021)(210)
   (222)(200)

MONOMES PREMIERS DE F
   (013)(123)
   (113)(023)
   (312)(031)
   (033)(113)
   (133)(013)
```

Exemple 2

```
MONOMES DE DEPART
   (050) (54) (52)
   (220) (22) (02)
   (151) (50) (53)

MONOMES REDUITS
   (050) (54) (52)
   (220) (22) (02)
   (151) (50) (53)

MAXF  =  5

FONCTION SIMPLIFIEE
   (050) (54) (52)
   (220) (22) (02)
   (151) (50) (53)

FONCTION COMPLEMENTAIRE DE F
   (304) (44) (44)
   (404) (44) (43)
   (305) (05) (55)
   (111) (01) (11)
   (333) (03) (03)
   (505) (05) (53)
   (222) (22) (02)

MONOMES PREMIERS DE F
   (230) (32) (03)
   (231) (30) (13)
   (050) (52) (53)
   (151) (50) (53)
   (050) (54) (52)
```

Comparaison des deux méthodes

Sur les exemples programmés la méthode de la pyramide est en moyenne deux fois plus rapide que la méthode de double complémentation.

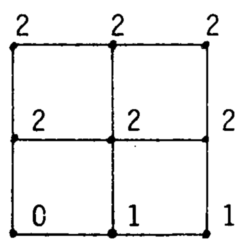
CHAPITRE V - MONÔMES RÉGULIERS

On va étudier dans ce chapitre une deuxième famille de monômes "maximaux".

On a déjà vu que toute section de niveau q d'un monôme premier de f n'est pas obligatoirement monôme premier de la section de niveau q de f puisque dans les empilements il y a des monômes qui sont découpés.

Exemple :

f =

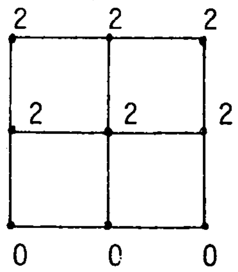


m = (022)(122) est un monôme premier de f.

La section de niveau 2 de ce monôme n'est pas un monôme premier de la section de niveau 2 de la fonction.

En effet, le monôme (022)(022) n'est pas un monôme premier de la fonction :

$f^2 =$

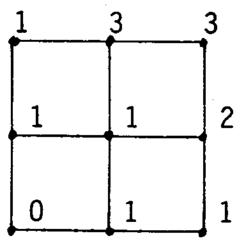


Monôme régulier d'une fonction f

C'est un monôme m dont chaque section m^i est un monôme premier de la section f^i pour $1 \leqslant i \leqslant$ Maxm, et qui est maximal pour cette propriété.

Exemple

$f =$



Le monôme m = (012)(122) est régulier, En effet m^2 = (002)(022) est un monôme premier de f^2 et m^1 = (011)(111) est un monôme premier de f^1.
De même le monôme m = (133)(013) est régulier.

Un monôme régulier n'est pas forcément premier, par contre il est le soubassement d'un monôme premier. Dans l'exemple ci-dessus le monôme (012)(122) est inférieur au monôme premier (013)(123).

Propriété

Un monôme m régulier est premier s'il prend la valeur maximale de la fonction.

En effet, supposons qu'il existe m' tel que :

$$m' > m \quad \text{et} \quad m' \leqslant f$$

Alors $\exists i$ tel que $m'^{i} > m^{i}$ $1 \leq i \leq \text{Max } f$

Ce qui est impossible puisque chaque section du monôme m est un monôme premier de la section de la fonction.

Propriété

Pour toute fonction il existe des monômes qui sont à la fois réguliers et premiers.

Soit f une fonction et $r = \text{Max } f$ son maximum.

Soit m_r un monôme premier de f^r.

Il existe nécessairement des monômes $m_{r-1}, m_{r-2}, \dots, m_1$ qui sont respectivement des monômes premiers de $f^{r-1}, f^{r-2}, \dots, f^1$ tels que :

$$E_r(m_r) \subseteq E_{r-1}(m_{r-1}) \subseteq \dots \subseteq E_1(m_1)$$

L'empilement des monômes $m_1, m_2, \dots, m_r$ qui se fait sans découpage donne un monôme m qui est à la fois premier et régulier.

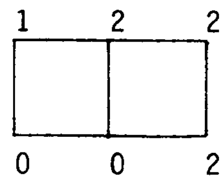
Exemple

Dans l'exemple précédent les monômes (033)(113) et (133)(013) sont réguliers et premiers.

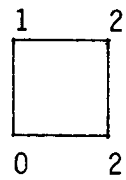
Monômes reguliers et restriction des L_{n_i} à des L'_{n_i}

La restriction de L_{n_i} à L'_{n_i} peut transformer un monôme régulier en un monôme qui ne l'est pas.

Exemple :



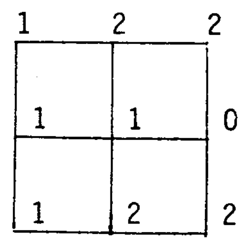
Le monôme (122)(02) est régulier (et premier).



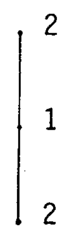
Si l'on supprime la valeur intermédiaire de la première variable on obtient le monôme (12)(02) qui n'est plus régulier (mais reste premier).

En sens inverse, une restriction peut avoir des monômes réguliers qui ne sont pas restrictions de monômes réguliers.

f =

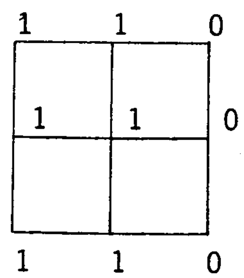


restriction de f =

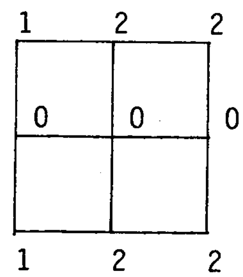


En ne gardant que la valeur intermédiaire de la première variable, la restriction de f est une fonction d'une variable, donc un monôme, qui est automatiquement régulier.

Les seuls monômes réguliers de la fonction de départ sont :



et



aucun n'a pour restriction le monôme ci-dessus.

Monômes réguliers et application croissante de L_p dans L_q

Une application croissante ϕ de L_p dans L_q ne transforme pas toujours un monôme régulier en un monôme régulier.

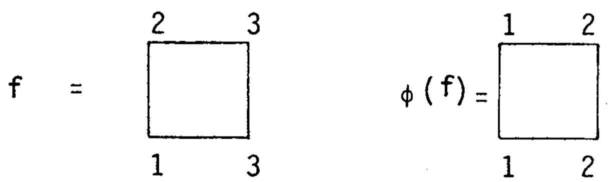
Les sections de la fonction $\phi(f)$ de niveau j où j n'est pas une image de L_p par ϕ sont identiques aux sections de niveau $\bar{j}$, $\bar{j}$ étant la première valeur inférieure à j qui soit image d'un élément de L_p.

Il n'y a donc qu'à s'occuper des sections dont le niveau est une image de L_p par ϕ.

Or les empilements de sections possibles avec f restent tous possibles avec $\phi(f)$.

Cependant ceci ne donne pas obligatoirement un monôme régulier.

Exemple



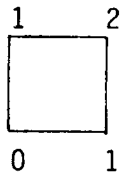
ϕ $0 \to 0$
$1 \to 1$
$2 \to 1$
$3 \to 2$

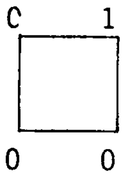
Le monôme (22)(12) était régulier. Il donne (11) (11) qui n'est plus régulier.

Remarques

- Le monôme obtenu est régulier si il prend la valeur maximale ou si il est un monôme premier de $\phi(f)$.

- Plusieurs monômes réguliers peuvent donner la même image.

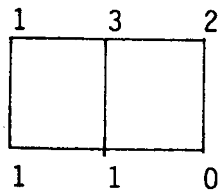
f = 

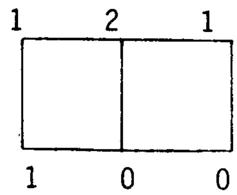
ϕ(f) = 

avec ϕ : $0 \to 0$
$1 \to 0$
$2 \to 1$

Les monômes réguliers (12)(02) et (02)(12) ont la même image (01)(01).

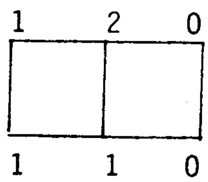
- Un monôme régulier de l'image peut ne pas provenir d'un monôme régulier de la fonction.

f = 

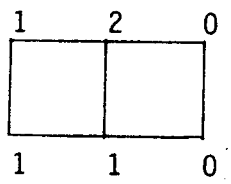
ϕ(f) = 

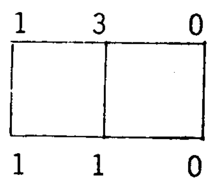
avec ϕ : $0 \to 0$
$1 \to 1$
$2 \to 1$
$3 \to 2$

Le monôme :



est un monôme régulier de ϕ(f) il provient d'un des deux monômes



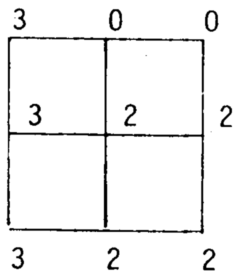


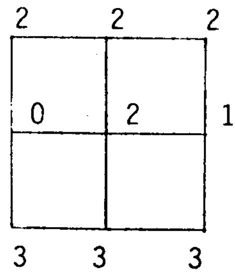
qui ne sont ni l'un ni l'autre des monômes réguliers de f.

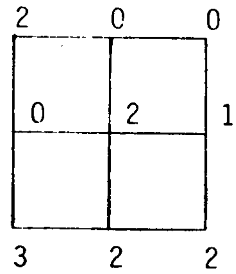
Monômes réguliers d'un produit

Il peut arriver qu'un monôme régulier d'un produit de deux fonctions ne soit pas le produit de deux monômes réguliers des facteurs.

Exemple

$f_1 =$ 

$f_2 =$ 

$f_1 f_2 =$ 

(322) (300) est régulier pour $f_1 f_2$ et n'est contenu dans aucun monôme régulier de f_1.

Recherche de tous les monômes réguliers d'une fonction

On emploie la méthode de la pyramide, mais ici l'empilement de deux monômes ne sera défini que s'il se fait sans découpage c'est-à-dire qu'un monôme m prenant des valeurs inférieures ou égales à i-1 et un monôme n prenant les valeurs 0 et i sont empilables si et seulement si

$$E_i(n) \subseteq E_{i-1}(m)$$

Algorithme

Pour trouver les monômes réguliers de f on empile de toutes les manières possibles les monômes premiers des sections f^i, en commençant par les niveaux inférieurs, sans sauter de niveaux et en continuant tant que cela est possible.

Les monômes ainsi trouvés sont réduits, incomparables entre eux, ce sont les monômes réguliers de f. Par construction même, on a tous les monômes réguliers de f.

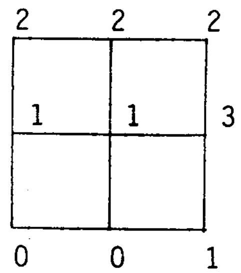
Graphe associé à la recherche des monômes réguliers

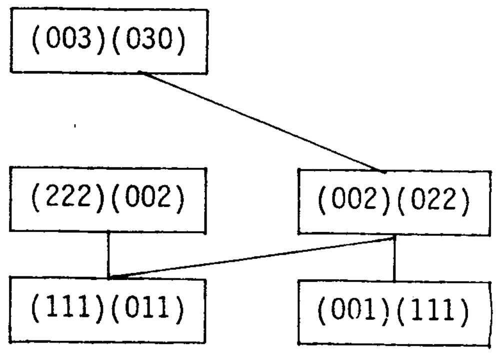
La structure d'ordre définie entre les monômes premiers des f^i peut se représenter par un graphe. On reliera un monôme premier de f^i et un monôme premier de f^{i+1} par un arc si et seulement si ils sont empilables.

Un monôme régulier correspond dans ce graphe à un chemin montant maximal (c'est-à-dire prolongeable ni vers le haut ni vers le bas).

Exemple 1

f =



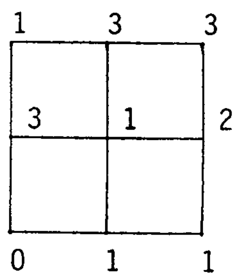


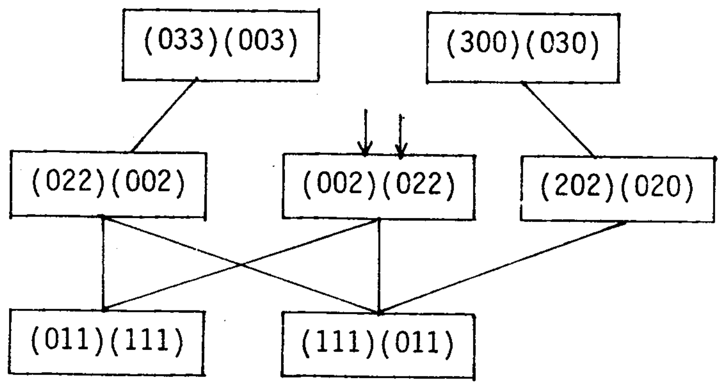
Remarque

Dans cet exemple les monômes premiers coïncident avec les monômes réguliers.

Exemple 2

f =





Les monômes réguliers de f sont :

I	(033)(113)
II	(133)(013)
III	(012)(122)
IV	(112)(022)
V	(312)(031)

Remarque

Cette fonction possède deux monômes réguliers non premiers :

- III monôme premier associé (013)(123)
- IV monôme premier associé (113)(023)

Sur les empilements, ils correspondent aux deux petites flèches.

Base régulière complète de f

On appelle base régulière complète l'ensemble de tous les monômes réguliers de f.

Propriétés de la base régulière complète

Tout monôme premier $m_{i,r}$ d'une section de niveau i est utilisé au moins une fois pour construire un monôme régulier.

Démonstration

Il existe nécessairement des monômes $m_{i-1,s}$, $m_{i-r,2}, \dots, m_{1,u}$ qui sont respectivement des monômes premiers de f^{i-1}, $f^{i-2}, \dots, f^1$ tels que :

$$E_i(m_{i,r}) \subseteq E_{i-1}(m_{i-1,s}) \subseteq \dots \subseteq E_1(m_{1,u})$$

L'empilement des monômes $m_{1,u},\ldots,m_{i,r}$ qui se fait sans découpage donne un soubassement de monôme régulier. On reprend ensuite l'empilement à partir du niveau i.

Il en résulte que :

- Toute section de niveau q de la base régulière complète est la base première complète de la section de niveau q.
- La fonction est égale à la somme des monômes de la base régulière complète.

<u>Comparaison des bases premières complètes et régulières complètes</u>

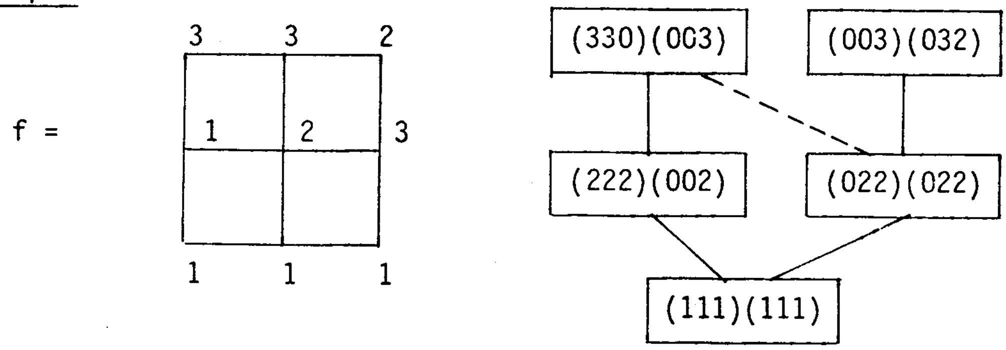
Les constatations de l'exemple 2 ci-dessus correspondent à un résultat général, c'est-à-dire qu'une fonction f a au moins autant de monômes premiers que de monômes réguliers.

En effet, considérons la correspondance entre monômes premiers et monômes réguliers définie par suppression du sommet de l'empilement ou au contraire prolongation de l'empilement.

A un monôme premier correspond soit un, soit aucun monôme régulier (le monôme tronqué peut-être prolongeable autrement qu'en monôme régulier).

A un monôme régulier correspond au moins un monôme premier :

<u>Exemple</u>



Les monômes (332)(113) et (123)(132) sont réguliers et premiers.

Le monôme (132)(123) est obtenu par un empilement avec découpage (représenté par la flèche en pointillé) il est premier mais non régulier. Le monôme (122)(122) obtenu par suppression du dernier niveau du monôme (132)(123) n'est pas régulier car il est plus petit que le monôme régulier (123)(132). Donc il ne correspond aucun monôme régulier au monôme premier (132)(123).

Base régulière irredondante de f

C'est un ensemble de monômes réguliers de f dont la somme est égale à f, et qui est minimal en ce sens que la suppression d'un monôme rend la somme strictement inférieure à la fonction.

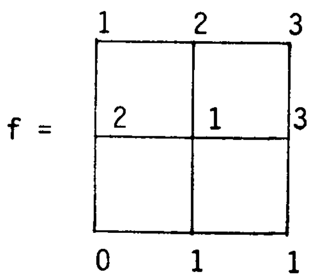
L'algorithme pour trouver toutes les bases régulières irredondantes de f est le même que celui vu pour les bases premières irredondantes.

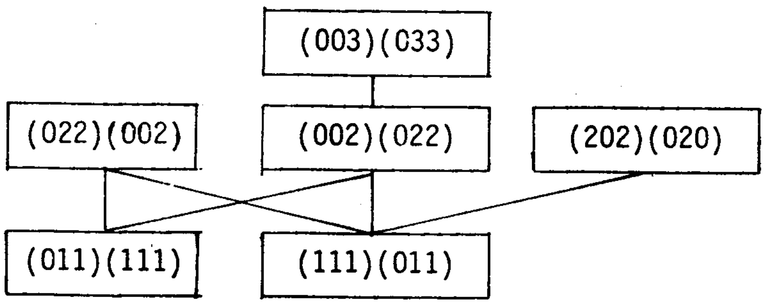
Sections d'une base régulière irredondante

On pourrait penser travailler au niveau des monômes premiers des sections. Mais cela serait assez difficile dans le cas général car la condition consisterait à exprimer que les monômes utilisés dans chaque section ont une somme égale à la fonction section.

Comme le montre l'exemple ci-dessous on ne peut même pas affirmer que la section d'une base régulière irredondante est une base première irredondante de la section.

Exemple





$$f = (022)(112) + (013)(133) + (212)(021)$$

est une des bases régulières irredondante de f

$$f^2 = (022)(002) + (002)(022) + (202)(020)$$

n'est pas une base première irredondante de f^2, c'est la base première complète de f^2.

Passage d'une base régulière irredondante à une base première irredondante

A partir d'une base régulière irredondante on peut obtenir une base première en complétant chaque monôme pour le rendre premier. Ceci est possible éventuellement de plusieurs manières et peut fournir une base redondante, donc éventuellement plusieurs bases irredondantes.

- Le nombre de monômes des bases premières obtenues est au plus égal au nombre de monômes de la base régulière de départ.

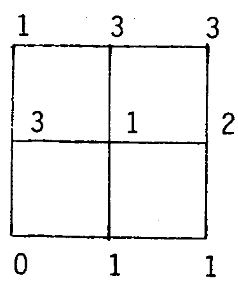
- En sens inverse, une base première irredondante donnera par écrêtage soit une base régulière irredondante, soit rien.

- Sans pouvoir démontrer de résultats rigoureux, on peut donc penser que pour une fonction il y aura plus de bases premières irredondantes que de bases régulières irredondante, et que les bases premières irredondantes auront plutôt moins de monômes que les bases régulières irredondantes.

Exemple

Revenons à l'exemple 2 de la page 83.

f =



Ses monômes premiers sont :

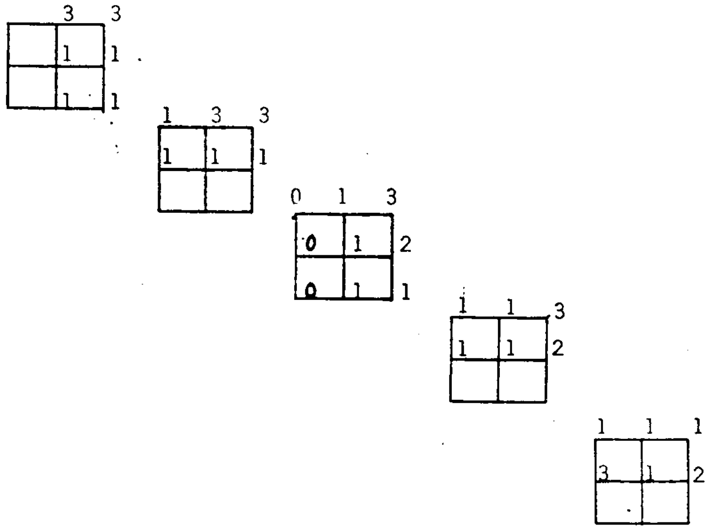
I (033)(113)

II (133)(013)

III (013)(123)

IV (113)(023)

V (312)(031)



Ses bases premières irredondantes sont :

I V et II III IV

Ses monômes réguliers sont :

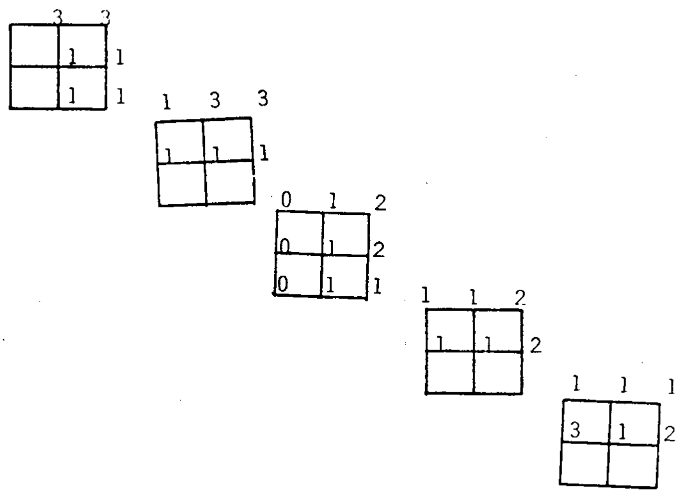
I (033)(113)

II (133)(013)

III'(012)(122)

IV' (112)(022)

V (312)(031)



Ses bases régulières irredondantes sont :

I V et II III' V

<u>Exemple</u>

Reprenons l'exemple de la page 86

Ses monômes premiers sont :

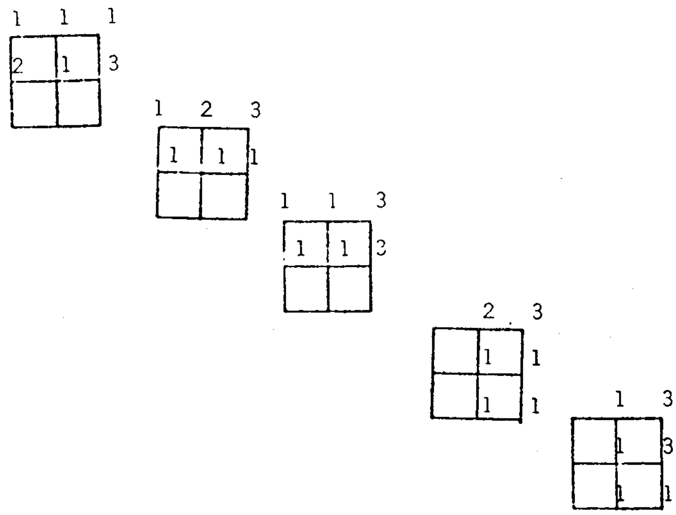
I (213)(031)

II (123)(013)

III (113)(033)

IV (023)(113)

V (013)(133)



Ses monômes réguliers sont :

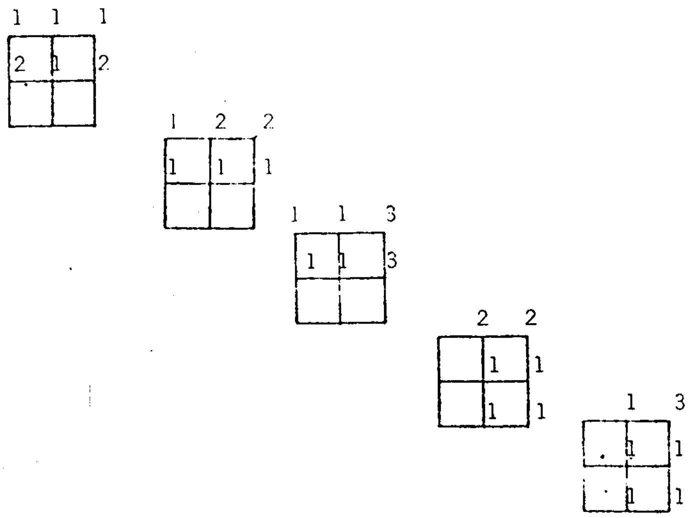
I' (212)(021)

II' (122)(012)

III (113)(033)

IV' (022)(112)

V (013)(133)



Ses bases premières irredondantes sont :

I IV, I II V

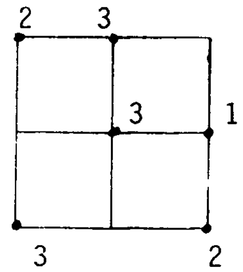
Ses bases régulières irredondantes sont :

I' II' V, I' III IV', I' IV' V

Exemple

Reprenons l'exemple de la fin du chapitre IV.

f =



Ses monômes premiers sont :

I (302)(300)

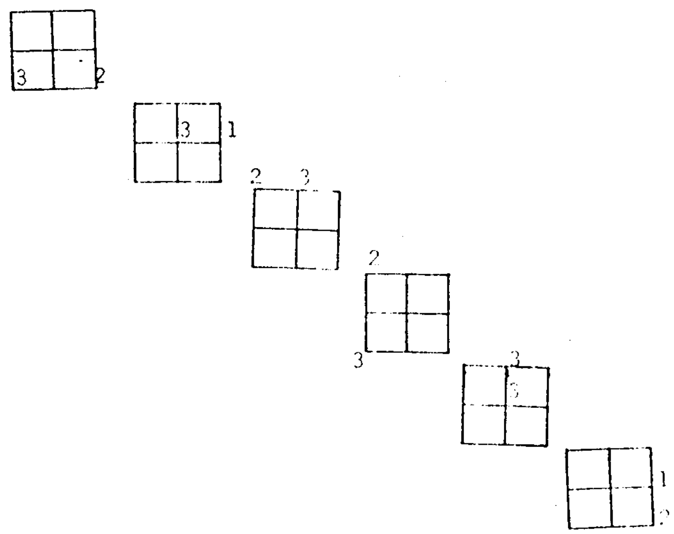
II (031)(030)

III (230)(003)

IV (300)(302)

V (030)(033)

VI (002)(210)



Ses monômes réguliers sont :

I (302)(300)

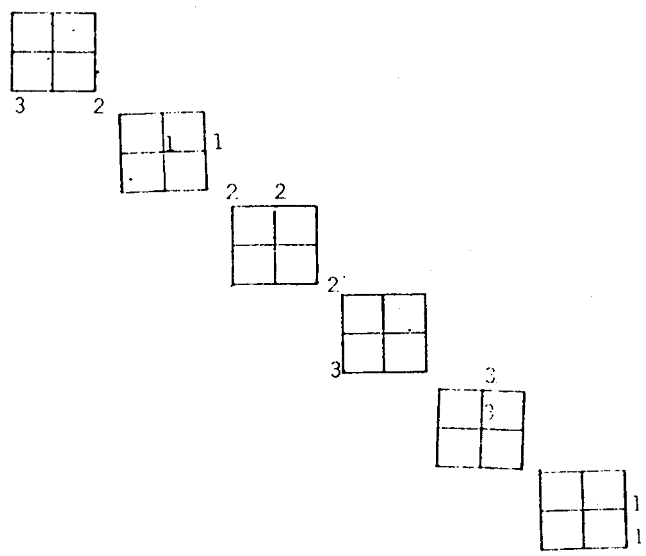
II' (011)(010)

III' (220)(002)

IV (300)(302)

V (030)(033)

VI' (001)(110)



Ses bases premières irredondantes sont :

I II III, I III V VI, II III IV VI, I II IV V,
IV V VI

Ses bases régulières irredondantes sont :

I II' III' V, I II' IV V, I III' V VI', I IV V VI'

Programmation

Le programme EMPILR donne les monômes réguliers d'une fonction f.

Le temps d'obtention des monômes réguliers par programme EMPILR, et des monômes premiers par le programme EMPILP sont du même ordre.

Exemples d'utilisation

Exemple 1

```
MONOMES DE DEPART
   (013)(124)
   (011)(044)
   (312)(041)
   (033)(103)


MONOMES REDUITS
   (013)(123)
   (011)(011)
   (312)(031)
   (033)(103)


MAXF = 3


FONCTION SIMPLIFIEE
   (013)(123)
   (312)(031)
   (033)(103)


MONOMES PREMIERS DE F1
   (011)(111)
   (111)(011)


MONOMES PREMIERS DE F2
   (002)(022)
   (202)(020)
   (022)(002)


MONOMES PREMIERS DE F3
   (300)(030)
   (033)(003)


MONOMES APRES EMPILEMENT SIMPLE ET SIMPLIFICATION = MONOMES REGULIERS DE F
   (012)(122)
   (033)(113)
   (112)(022)
   (312)(031)
   (133)(013)
```

Exemple 2

```
MONOMES DE DEPART
  (050)(54)(52)
  (220)(22)(02)
  (151)(50)(53)

MONOMES REDUITS
  (050)(54)(52)
  (220)(22)(02)
  (151)(50)(53)

MAXP = 5

FONCTION SIMPLIFIEE
  (050)(54)(52)
  (220)(22)(02)
  (151)(50)(53)

MONOMES PREMIERS DE F1
  (010)(11)(11)
  (110)(11)(01)
  (111)(10)(11)

MONOMES PREMIERS DE F2
  (020)(22)(22)
  (220)(22)(02)

MONOMES PREMIERS DE F3
  (030)(33)(30)
  (030)(30)(33)

MONOMES PREMIERS DE F4
  (040)(44)(40)

MONOMES PREMIERS DE F5
  (050)(50)(50)

MONOMES APRES EMPILEMENT SIMPLE ET SIMPLIFICATION = MONOMES REGULIERS DE F
  (050)(54)(52)
  (030)(32)(33)
  (220)(22)(02)
  (111)(10)(11)
```

Exemple 3 :

```
MONOMES DE DEPART
  (004)(380)(526)(391)
  (099)(500)(713)(164)
  (721)(003)(470)(317)
  (118)(073)(500)(726)
  (396)(142)(007)(830)
  (145)(372)(055)(600)


MONOMES REDUITS
  (004)(340)(424)(341)
  (055)(500)(513)(154)
  (321)(003)(330)(313)
  (115)(053)(500)(525)
  (344)(142)(004)(430)
  (145)(352)(055)(500)


MAXF = 5


FONCTION SIMPLIFIEE
  (004)(340)(424)(341)
  (055)(500)(513)(154)
  (321)(003)(330)(313)
  (115)(053)(500)(525)
  (344)(142)(004)(430)
  (145)(352)(055)(500)


MONOMES PREMIERS DE F1
  (001)(110)(111)(111)
  (011)(100)(111)(111)
  (111)(001)(110)(111)
  (111)(011)(100)(111)
  (111)(111)(001)(110)
  (111)(111)(011)(100)
  (001)(111)(110)(111)
  (011)(101)(110)(111)
  (011)(111)(100)(111)
  (111)(001)(111)(110)
  (111)(011)(101)(110)
  (111)(011)(111)(100)
  (001)(111)(111)(110)
  (011)(101)(111)(110)
  (011)(111)(101)(110)
  (011)(111)(111)(100)


MONOMES PREMIERS DE F2
  (002)(220)(222)(220)
  (022)(200)(202)(022)
  (220)(002)(220)(202)
  (222)(022)(002)(220)
  (022)(222)(022)(200)
```

```
     (002)(200)(202)(222)
     (022)(200)(002)(222)
     (222)(002)(200)(202)
     (002)(222)(200)(222)
     (022)(222)(002)(220)
     (002)(222)(222)(200)
     (002)(222)(202)(220)
     (022)(202)(200)(002)
     (222)(002)(222)(200)


   MONOMES PREMIERS DE F3
     (003)(330)(303)(330)
     (033)(300)(303)(033)
     (300)(003)(330)(303)
     (333)(030)(003)(330)
     (033)(330)(033)(300)
     (003)(300)(303)(333)
     (003)(330)(333)(300)
     (033)(300)(003)(333)
     (303)(003)(300)(303)
     (003)(333)(300)(303)
     (033)(330)(003)(330)
     (003)(330)(300)(333)


   MONOMES PREMIERS DE F4
     (044)(400)(400)(044)
     (044)(040)(044)(400)
     (004)(040)(400)(444)
     (004)(440)(400)(044)
     (004)(040)(444)(400)
     (004)(040)(404)(440)


   MONOMES PREMIERS DE F5
     (055)(500)(500)(050)
     (005)(050)(500)(505)
     (005)(050)(555)(500)


NOMES APRES EMPILEMENT SIMPLE ET SIMPLIFICATION = MONOMES REGULIERS DE F
     (004)(340)(424)(441)
     (005)(350)(555)(521)
     (003)(310)(313)(333)
     (055)(500)(513)(154)
     (013)(300)(313)(333)
     (033)(300)(113)(333)
     (321)(003)(330)(313)
     (323)(003)(310)(313)
     (323)(013)(300)(313)
     (333)(132)(003)(330)
     (133)(332)(003)(330)
     (144)(342)(044)(400)
     (003)(333)(310)(323)
     (005)(352)(510)(545)
     (004)(442)(410)(344)
```

```
(022)(202)(210)(112)
(013)(333)(300)(323)
(015)(352)(500)(545)
(014)(442)(400)(344)
(022)(212)(200)(112)
(222)(002)(222)(210)
(333)(032)(103)(330)
(222)(012)(222)(200)
(004)(341)(424)(440)
(005)(351)(555)(520)
(005)(352)(555)(510)
(004)(342)(414)(440)
(011)(101)(111)(110)
(033)(332)(103)(330)
(014)(342)(404)(440)
(044)(342)(144)(400)
(015)(352)(555)(500)
```

Exemple 4 :

```
MONOMES DE DEPART
   (3504)(409586323)(35246)(235)
   (5012)(563200355)(23566)(853)
   (8688)(030058503)(55368)(390)
   (8350)(509628131)(51112)(326)
   (8699)(618300012)(77715)(347)
   (7605)(567890513)(57019)(907)
   (5680)(000008341)(56009)(240)


MONOMES REDUITS
   (3504)(405555323)(35245)(235)
   (5012)(553200355)(23555)(553)
   (8688)(030058503)(55368)(380)
   (5350)(505525131)(51112)(325)
   (7677)(617300012)(77715)(347)
   (7605)(567770513)(57017)(707)
   (4440)(000004341)(44004)(240)


MAXF = 8


FONCTION SIMPLIFIEE
   (3504)(405555323)(35245)(235)
   (5012)(553200355)(23555)(553)
   (8688)(030058503)(55368)(380)
   (5350)(505525131)(51112)(325)
   (7677)(617300012)(77715)(347)
   (7605)(567770513)(57017)(707)
   (4440)(000004341)(44004)(240)


MONOMES PREMIERS DE F1
   (1111)(111111111)(11111)(111)


MONOMES PREMIERS DE F2
   (2202)(202222222)(22222)(222)
   (2222)(020022202)(22222)(220)
   (2222)(202200002)(22202)(222)
   (2002)(222222222)(22222)(222)
   (2202)(222222222)(22222)(222)
   (2222)(222222202)(22202)(220)
   (2222)(202222022)(20002)(222)
   (2222)(222222222)(22002)(220)
   (2202)(222222222)(22002)(222)


MONOMES PREMIERS DE F3
   (3303)(303333303)(33033)(033)
   (3333)(030033303)(33333)(330)
   (3333)(303300000)(33303)(333)
   (3303)(000033303)(33033)(333)
```

```
   (3303)(303300000)(33333)(033)
   (3333)(333333303)(33303)(330)
   (3303)(333333303)(33333)(030)
   (3330)(333333333)(33003)(030)
   (3333)(303303000)(30000)(333)
   (3303)(333333303)(33003)(333)
   (3330)(303303030)(30000)(333)
   (3000)(333333333)(33333)(030)
   (3330)(333333333)(30000)(330)
   (3000)(333333333)(33303)(330)
   (3000)(333033333)(33333)(330)
   (3300)(333333333)(30000)(333)
   (3000)(333333333)(33003)(333)
   (3000)(333300333)(33303)(333)
   (3000)(333333333)(33033)(033)
   (3000)(333033333)(33033)(333)
   (3000)(333300333)(33333)(033)
   (3000)(333000333)(33333)(333)
```

```
MONOMES PREMIERS DE F4
   (0404)(404444000)(04044)(004)
   (4000)(440000044)(00444)(440)
   (4444)(000444400)(44044)(040)
   (4040)(404404000)(40000)(004)
   (4444)(404000000)(44404)(044)
   (4404)(444440400)(44004)(404)
   (0404)(000044000)(04044)(044)
   (0404)(404000000)(44444)(004)
   (0404)(444444400)(04004)(004)
   (0404)(404440000)(44044)(004)
   (4000)(440044444)(00044)(040)
   (4000)(444000044)(00404)(040)
   (4000)(444440444)(00004)(400)
   (4000)(440000000)(44444)(400)
   (4444)(404044400)(44004)(040)
   (0404)(000040000)(44044)(044)
   (4000)(444044444)(00004)(040)
   (4444)(404400000)(40000)(004)
   (4000)(444444400)(40000)(004)
   (4040)(404004000)(40000)(044)
   (4000)(400000000)(44404)(444)
   (4000)(404000040)(44404)(040)
   (4440)(404044440)(44004)(040)
   (0404)(404044400)(04004)(044)
   (4404)(404040400)(44004)(444)
   (4000)(444040400)(00004)(444)
   (4000)(400000040)(44444)(040)
   (4000)(400044440)(44044)(040)
   (4000)(444040444)(00004)(440)
   (4000)(400000000)(44444)(440)
   (4000)(404044400)(40000)(044)
```

```
MONOMES PREMIERS DE F5
   (5000)(550000055)(00555)(550)
   (5555)(000555500)(55055)(050)
   (5050)(505505000)(50000)(005)
   (5555)(505000000)(55505)(005)
```

```
(5505)(555550500)(55005)(505)
(0500)(555555500)(05005)(005)
(5000)(550055555)(00055)(050)
(5000)(500000000)(00505)(555)
(5000)(555550555)(00005)(500)
(5000)(550000000)(55555)(500)
(5050)(000005000)(50000)(055)
(5505)(000050500)(55005)(555)
(0500)(000055500)(05005)(055)
(5555)(505500000)(50000)(005)
(5000)(555555500)(50000)(005)
(5000)(500000000)(55505)(505)
(5000)(550050500)(00005)(555)
(5000)(550050555)(00005)(550)
(5000)(000055500)(50000)(055)


MONOMES PREMIERS DE F6
  (6666)(000006000)(00066)(060)
  (6666)(606000000)(66600)(006)
  (6600)(066660000)(06006)(606)
  (6600)(666660000)(06000)(006)
  (6600)(006000000)(66606)(006)


MONOMES PREMIERS DE F7
  (7077)(000007000)(00007)(070)
  (7077)(007000000)(77700)(007)
  (7000)(007770000)(07007)(707)
  (7000)(007000000)(77707)(007)


MONOMES PREMIERS DE F8
  (8088)(000008000)(00008)(080)


MONOMES APRES EMPILEMENT SIMPLE ET SIMPLIFICATION = MONOMES REGULIERS DE F
  (8688)(131158513)(55368)(381)
  (7677)(617311112)(77715)(347)
  (7655)(517311112)(77717)(347)
  (5555)(515511112)(53313)(335)
  (5333)(513311112)(44515)(555)
  (5333)(513311112)(55515)(545)
  (5112)(553355555)(33355)(252)
  (4112)(444333344)(33434)(242)
  (4112)(444344444)(33334)(242)
  (4112)(434333343)(44434)(242)
  (4112)(433333343)(44444)(242)
  (4112)(433344443)(44344)(242)
  (4112)(444333344)(33424)(342)
  (5112)(555553555)(33325)(532)
  (4112)(444344444)(33324)(342)
  (4112)(434333343)(44424)(342)
  (5112)(554353555)(33325)(552)
  (5112)(553233355)(33555)(552)
  (5112)(553255555)(33355)(352)
  (4112)(444233344)(33434)(342)
```

(5112)(553233333)(55555)(532)
(4112)(444244444)(33334)(342)
(4112)(434233343)(44434)(342)
(4112)(433233343)(44444)(342)
(4112)(433244443)(44344)(342)
(5112)(554253555)(33335)(552)
(4112)(433233333)(44444)(442)
(5112)(555553555)(33225)(533)
(4112)(444344444)(33224)(343)
(5112)(555555533)(53223)(335)
(5112)(554353533)(33225)(555)
(5112)(554353555)(33225)(553)
(5112)(434355533)(53223)(355)
(4112)(444322344)(33424)(343)
(5112)(533322333)(44525)(555)
(5112)(533322333)(55525)(545)
(4112)(434322343)(44424)(343)
(5112)(553355555)(33255)(253)
(4112)(444344444)(33234)(243)
(5112)(555555533)(53233)(235)
(4112)(433344443)(44244)(243)
(5112)(434355533)(53233)(255)
(5112)(553255555)(33255)(353)
(4112)(444244444)(33234)(343)
(5112)(554253533)(33235)(555)
(4112)(433244443)(44244)(343)
(5112)(554253555)(33235)(553)
(5112)(434255533)(53233)(355)
(4112)(444322344)(33434)(243)
(4112)(434322343)(44434)(243)
(4112)(433322343)(44444)(243)
(5112)(553222355)(33555)(553)
(4112)(444222344)(33434)(343)
(5112)(553222333)(55555)(533)
(5112)(533222333)(44535)(555)
(5112)(533222333)(55535)(545)
(4112)(434222343)(44434)(343)
(4112)(433222343)(44444)(343)
(4112)(433222333)(44444)(443)
(3313)(333333323)(33333)(231)
(5212)(553355555)(33355)(251)
(4212)(444333344)(33434)(241)
(4212)(444344444)(33334)(241)
(4212)(434333343)(44434)(241)
(4212)(433333343)(44444)(241)
(4212)(433344443)(44344)(241)
(4212)(444333344)(33424)(341)
(5212)(555553555)(33325)(531)
(4212)(444344444)(33324)(341)
(4212)(434333343)(44424)(341)
(5212)(554353555)(33325)(551)
(5212)(553233355)(33555)(551)
(5212)(553255555)(33355)(351)
(4212)(444233344)(33434)(341)
(5212)(553233333)(55555)(531)
(4212)(444244444)(33334)(341)
(4212)(434233343)(44434)(341)
(4212)(433233343)(44444)(341)
(4212)(433244443)(44344)(341)
(5212)(554253555)(33335)(551)
(4212)(433233333)(44444)(441)

(4444)(434344413)(44314)(341)
(5353)(515525122)(51112)(335)
(5555)(515523122)(51112)(335)
(5353)(414325122)(51112)(355)
(5352)(515525132)(51112)(335)
(5352)(414325132)(51112)(355)
(4332)(444344444)(33114)(241)
(4442)(434344443)(44114)(241)
(3332)(333333333)(32112)(331)
(7615)(567773523)(57117)(737)
(6615)(666663523)(56115)(536)
(3514)(555555523)(35115)(335)
(5313)(555555523)(53113)(335)
(3514)(434355523)(35115)(355)
(5515)(434353523)(55115)(555)
(5313)(554353523)(33115)(555)
(5313)(434355523)(53113)(355)
(5312)(555555533)(52112)(335)
(5312)(434355533)(52112)(355)
(5212)(555553555)(33115)(533)
(4212)(444344444)(33114)(343)
(5212)(555555533)(53113)(335)
(5212)(554353533)(33115)(555)
(5212)(554353555)(33115)(553)
(5212)(434355533)(53113)(355)

CHAPITRE VI - DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS À P VALEURS

Les décompositions de fonctions sont traitées dans
Nous apporterons ici des méthodes relatives à quelques cas particuliers souvent liés à la notion de monôme. Nous étudierons seulement les décompositions disjointes.

I - DÉCOMPOSITION DISJOINTE SIMPLE

Soient A et B deux sous-ensembles qui partitionnent l'ensemble des variables $x_1,x_2,\dots,x_k$.

Les ensembles de valeurs prises par les variables appartenant à A, respectivement à B, sont les produits direct $\prod_{\substack{i \\ x_i \in A}} L_{n_i}$, respectivement $\prod_{\substack{i \\ i \in B}} L_{n_i}$

On appellera Y un élément du premier produit direct et Z un élément du 2ème produit direct.

On dira que f(X) possède une décomposition <u>disjointe simple</u>, si :

$$f(X) = g(h(Y),Z)$$

La fonction h(Y) prenant ses valeurs dans L_q

En algèbre à p valeurs on peut toujours trouver g,h et q quelle que soit la partition A,B de l'ensemble des variables.

Considérons les fonctions de Z obtenues en donnant à Y de toutes les manières possibles une valeur fixée Y_0. On obtient ainsi une nombre fini q de fonctions distinctes de la forme :

$$k(Z) = f(Y_0,Z) = g(h(Y_0),Z)$$

on a

$$q < \prod_{x_i \in A} n_i$$

Définissons une bijection quelconque qui associe à chacune des fonctions distinctes un élément de L_q. On peut poser :

$$h(Y) = q' \qquad q' \in L_q$$

et

$$f(X) = g(q',Z)$$

Le problème intéressant est en fait de trouver une partition A,B telles que le nombre q soit aussi petit que possible.

Pour une partition donnée, on peut trouver une borne inférieure de q.

On donne à Y un certain nombre de valeurs par exemple $Y_1,Y_2,\dots,Y_u$; on donne de même à Z un certain nombre de valeurs $Z_1,Z_2,\dots,Z_v$.

En les combinant on trouve des valeurs de X. On note $X_{i,j}$ la valeur de X donnée par Y_i et Z_j et $f_{ij} = f(X_{i,j})$.

On forme les u colonnes :

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ \vdots \\ f_{1,v} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ \vdots \\ f_{2,v} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} f_{u,1} \\ f_{u,2} \\ \vdots \\ f_{u,v} \end{pmatrix}$$

Le nombre de colonnes différentes est une borne inféieure de q. Il y a p^v colonnes possibles.

On choisira v de manière à avoir un nombre raisonnable de colonnes possibles (par exemple $v = 3$ et $p = 10$ donne 1000 colonnes possibles).

On choisira q en fonctions des valeurs acceptables pour q.

Par exemple si l'on veut aller jusqu'à $q = 3$ on pourra prendre $u = 10$, et voir si en 10 essais on trouve au plus trois résultats différents.

II - DÉCOMPOSITION EN PRODUIT

Ce paragraphe comprend deux parties.

La première partie permet de vérifier si une partition des variables donne bien une décomposition.

La deuxième partie permet de choisir rapidement les partitions des variables qui ont des chances de conduire à une décomposition.

Définition

Une fonction f(X) est décomposable en produit, si elle peut s'écrire avec les notations précédentes :

$$f(X) = h(Y) \, . \, k(Z)$$

Ceci est un cas particulier des décompositions disjointes simples.

Possibilité de deux décompositions en produit simultanées suivant des groupes de variables différents

Peut-on avoir :

$$f = g(Y,Z) \;.\; h(T,U) = k(Y,T) \quad (Z,U)$$

on prend T_0 et U_0 tels que $h(T_0,U_0)$ soit égal à p valeur maximale de f.

On a alors :

$$g(Y,Z) = k(Y,T_0) \;. \quad (Z,U_0)$$

On a donc une décomposition de g(Y,Z) en produit. De même pour les autres fonctions.

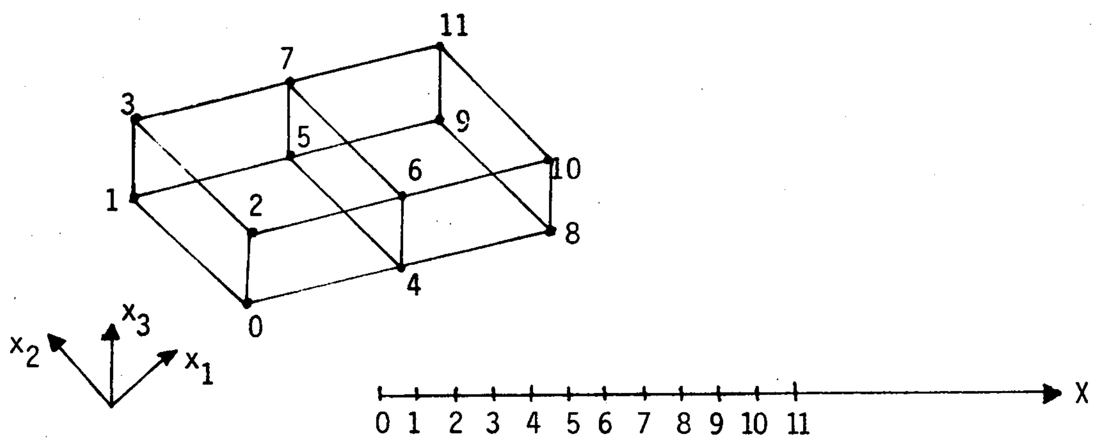
Donc f est décomposable en produit suivant X,Y,Z,T.

a 1 - Méthode des variables composées

Soit A un sous-ensemble ordonné de x_1, $x_2,\ldots,x_k$. On remplace les r variables de A par une seule variable Y prenant ses valeurs dans L_N où $N = \prod_{i \in A} n_i$. La correspondance entre les r-uplets de variables de A et les valeurs de X associe l'ordre total dans L_N à l'ordre lexicographique [voir chapitre III] sur les valeurs des r variables.

On note ϕ l'application définie de $L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_r}$ dans L_n et ψ l'application inverse.

Exemple



Etant donné une fonction $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ et A_1, $A_2,\ldots,A_\ell$ une partition en sous-ensembles ordonnés de l'ensemble des variables $x_1,x_2,\ldots,x_k$, on définit une fonction :

$$F(X_1,X_2,\ldots,X_\ell) = f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

avec $$X_i = \phi(\{x_j / j \in A_i\})$$

Théorème

Pour qu'une fonction $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ soit décomposable en produit suivant la partition A_1, $A_2,\ldots,A_\ell$ il faut et il suffit que la fonction $F(X_1,X_2,\ldots,X_\ell)$ soit un monôme.

La démonstration est évidente puisque l'on a alors :

$$F(X_1,X_2,\ldots,X_\ell) = \prod_{i=1}^{\ell} F_i(X_i)$$

Exemple :

$$f = (32)_x(31)_y(23)_z(31)_t + (03)_x(23)_y(03)_z(32)_t + (02)_x(22)_y(22)_z(20)_t$$

$$+ (22)_x (21)_y(12)_z(22)_t$$

Soit $A = (x,y) \quad B = (z,t)$

$$F(X,Y) = (3121)_a(2131)_b + (0023)_a(0032)_b + (0022)_a(2020)_b + (2121)_a(1122)_b$$

$$= (3123)_a(2132)_b$$

Cette fonction est donc décomposable en (x,y) et (z,t).

$$f = [(32)_x\ (31)_y + (13)_x(23)_y]\ \ [(23)_z(31)_t + (12)_z(22)_t]$$

Propriété

Comme pour un monôme la décomposition est unique à condition que les valeurs maximales des facteurs soient égales à la valeur maximale de leur produit.

a 2 - Méthode de la base première complète

Théorème

Pour qu'une fonction $f(X)$ soit décomposable en produit suivant la partition A,B il faut et il suffit que le produit des fonctions $h(Y)$ et $k(Z)$ obtenues en coupant chaque monôme de sa base première complète suivant la partition A,B en supprimant ceux qui sont inférieurs à un autre et en faisant la somme, redonne après simplification la base première complète de f.

Démonstration

La condition est évidemment suffisante.

Montrons qu'elle est nécessaire.

Soit $f(X) = g(Y)\ .\ h(Z)$

et $g(Y) = \sum\limits_j m_j(Y)$ la base première complète de g

$h(Z) = \sum\limits_\ell n_\ell(Z)$ la base première complète de h.

On suppose que les deux fonctions g et h ont la même valeur maximale p que la fonction f. Dans ces conditions on sait que la base complète de f(X) s'obtient en ne gardant des $m_j(Y)\ n_\ell(Z)$ que ceux qui ne sont pas inférieurs à un autre.

Montrons que la base complète de f(X) contient au moins un multiple de chaque monôme $m_j(Y)$. Montrons le pour $m_1(Y)$.

Soit q la valeur maximale de $m_1(Y)$

Prenons $n_1(Z)$ de valeur maximale au moins égale à q.
$m_1(Y)\ .\ n_1(Z)$ mis sous forme réduite contiendra bien le monôme $m_1(Y)$.

Regardons si ce produit peut-être absorbé par un autre :

$$m_2(Y)\ .\ n_2(Z) \geqslant m_1(Y)\ .\ n_1(Z)$$

Prenons Z_0 tel que $n_1(Z_0) \geqslant q$, alors :

$$m_2(Y)\ n_2(Z_0) \geqslant m_1(Y)$$

d'où $\quad m_2(Y) \geqslant m_1(Y)$

donc $\quad m_2(Y) = m_1(Y)$ puisque $m_1(Y)$ est premier.

Donc le monôme $m_1(Y)\ .\ n_1(Z)$ ne peut être absorbé que par un monôme $m_1(Y)\ .\ n_1'(Z)$.

Donc la base complète de f(X) contient au moins un multiple de $m_1(Y)$.

Exemple

$$f(x,y,z,t) = (001)(10)(001)(10) + (001)(10)(110)(01) + (110)(01)(001)(10)$$
$$+ (220)(02)(220)(02)$$

On essaye la décomposition $Y = (x,y) \quad Z = (z,t)$

g(Y) = (001)(10) + (001)(10) + (110)(01) + (220)(02)

g(Y) = (001)(10) + (220)(02)

h(Z) = (001)(10) + (110)(01) + (001)(10) + (220)(02)

h(Z) = (001)(10) + (220)(02)

En formant g(Y) k(Z) on retrouve bien les quatre monômes de départ. La fonction f est donc décomposable en produit suivant Y et Z.

b - Choix des partitions Y,Z

Nous allons exposer une méthode qui permet de choisir rapidement les partitions des variables qui sont susceptibles de donner une décomposition.

b.1. *Théorème*

Pour qu'une fonction soit décomposable en produit suivant la partition Y,Z il faut et il suffit qu'en tout point de H il existe un pavé Y ou Z où le point soit maximal.

En effet, pour que f(X) soit décomposable en Y et Z, il faut et il suffit qu'en passant aux variables composées, F(Y,Z) soit un monôme. On applique alors sur F(Y,Z) la première condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit un monôme.

Pour qu'un point soit maximal suivant Y il faut qu'il soit maximal pour toute variable y_i telle que $y_i \in Y$.

Cette condition est necessaire mais non suffisante.

Algorithme

On fait un tableau où l'on marque en lignes les points de H et en colonnes les variables x_i.

On met une croix à l'intersection d'une ligne et d'une colonne si le point est maximal suivant cette variable.

La fonction f n'est pas décomposable en Y,Z s'il existe un point de H où l'on n'a pas une croix soit pour toute variable y_i appartenant à Y, soit pour toute variable z_i appartenant à Z.

On s'arrête donc dès que l'on trouve un point qui ne satisfait pas la condition et on essaye pour une autre partition.

Si la condition est satisfaite pour tous les points essayés, il est possible que cette partition conduise à une décomposition.

Pour conclure on emploiera soit la méthode des variables composées, soit la méthode de la base première complète.

<u>Exemple</u>

$$f = (32)(31)(23)(31) + (03)(23)(03)(32) + (02)(22)(22)(20) + (22)(21)(12)(22)$$

		x	y	z	t
1	0000	×	×		×
2	0001	×	×		
3	0010	×	×	×	×
4	0011	×	×	×	
5	0100			×	×
6	0101	×	×	×	×
7	0110			×	×
8	0111			×	×
9	1000	×	×	×	×
10	1001	×	×		
11	1010			×	×
12	1011	×	×	×	×
13	1100	×	×		×
14	1101	×	×		
15	1110	×	×	×	×
16	1111	×	×	×	

La fonction est-elle décomposable suivant :

x,yzt : non à cause entre autres du point 5
y,xzt : - - - - 5
z,xyt : - - - - 2
t,xyz : - - - - 2

xy,zt : peut-être

xz,yt : non à cause entre autres du point 2
xt,yz : - - - - 2

Exemple : Fonction de trois variables

Soit A un point de H. Trois cas peuvent se produire :

A est un maximal suivant une variable, x par exemple. Alors la fonction peut-être décomposable en x et y z mais ne peut pas être décomposable en y et xz ni en z et xy.

A est maximal suivant deux variables x et y par exemple. Alors la fonction peut être décomposable suivant les trois partitions x,yz ou y,xz ou z,xy

A est maximal suivant trois variables. Alors la fonction peut être décomposable suivant les trois partitions.

On étudie ainsi successivement plusieurs points de l'hyperpavé.

Pour arriver à une conclusion rapide, il vaut mieux commencer à examiner les points de H où f est minimale.

b 3 - Utilisation de la propriété du parallélogramme

Considérons un parallélogramme portant sur deux variables y et z l'une appartenant à Y, l'autre appartenant à Z. Si la fonction est décomposable en X et Y alors la propriété du parallélogramme doit être vérifiée, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$f(y_1,z_1,A_0) \cdot f(y_2,z_2,A_0) = f(y_1,z_2,A_0) \cdot f(y_2,z_1,A_0)$$

A_0 étant un point du k-2 pavé défini par les variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} - \{y,z\}$

On en déduit le résultat suivant :

Si pour un parallélogramme portant sur deux variables la propriété n'est pas vraie les deux variables appartiennent l'une et l'autre à Y ou à Z.

Remarque :

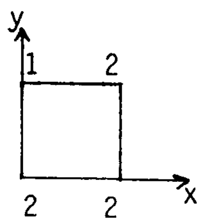
Si la propriété est vraie on ne peut pas conclure.

Exemple

Reprenons l'exemple de la page 110

Pour $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$ et $A_0 = (z = 0,\ t = 0)$

On a :



Donc x et y appartiennent à la même classe.

Pour $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases}$ et $A_0 = (x = 0,\ y = 0)$

On retrouve la même figure, donc z et t appartiennent à la même classe.

Donc s'il y a une décomposition elle est (x,y), (z,t)

III - DÉCOMPOSITION EN SOMME

On peut traiter la décomposition en somme de plusieurs manières :

- par passage au complément et emploi des méthodes du produit,
- par emploi de la base régulière complète.

a) - Passage au complément

Soit une fonction $f(X)$.

Théorème

$f(X)$ est décomposable en somme suivant Y,Z si et seulement si $\overline{f(X)}$ est décomposable en produit suivant Y,Z.

Cela est évident d'après les propriétés du complément.

On peut donc passer à $\overline{f(X)}$ et lui appliquer les méthodes vues pour le produit.

Dans certains cas les méthodes peuvent être modifiées et directement appliqués sans passer à $\overline{f(X)}$.

Par exemple pour le choix des partitions, le théorème du paragraphe b1 donne le théorème suivant :

Théorème

Pour qu'une fonction soit décomposable en somme suivant la partition Y,Z, il faut et il suffit qu'en tout point de H, il existe un pavé Y ou Z où le point soit minimal.

b) - Méthode de la base régulière complète

Théorème

$f(X)$ est décomposable en somme suivant Y et Z si et seulement si chaque monôme de la base régulière complète de $f(X)$ ne dépendent que de Y ou de Z.

- La condition suffisante est évidente,
- Condition nécessaire :

Soit une fonction f décomposable en somme

$$f(X) = g(Y) + h(Z)$$

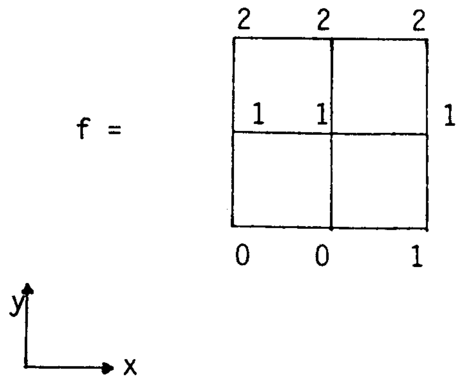
Les monômes premiers des différentes sections de niveau i de f sont des monômes ne dépendant que de Y ou de Z. Et les empilements ne sont possibles qu'entre monômes de même type. Donc tous les monômes de la base régulière complète sont des monômes ne dépendant que de Y ou de Z.

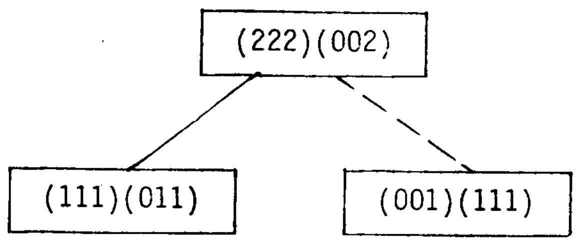
Remarque

Ce théorème est faux pour la base première complète, car les empilements sont possibles entre monômes de type différent.

Exemple

f =





La base régulière complète de f est f = (222)(012) + (001)(111) car seule la liaison pleine est possible.

La base première complète de f est f = (222)(012) + (002)(112) car on peut empiler les monômes reliés entre eux par le pointillé. Donc sur cette base première complète on ne voit pas que f est décomposable en somme en x,y.

c) - Impossibilité d'une décomposition simultanée en somme et en produit

Soit :

$$F(X) = F(Y,Z) = f(Y) + g(Z) = h(Y)\ k(Z)$$

Une telle fonction possède la particularité que sur un parallélogramme en Y,Z ou bien la fonction ne prend qu'une valeur ou bien elle prend deux valeurs chacune deux fois, les valeurs égales étant consécutives. Supposons F(Y,Z) non constant on peut trouver :

$$F(Y_0,Z_0) = a \qquad F(Y_0,Z_1) = b \qquad b \neq a$$

alors $$F(Y_1,Z_0) = a \text{ et } F(Y_1,Z_1) = b \qquad \forall Y_1$$

Soit Z_2 une autre valeur si elle existe telle que :

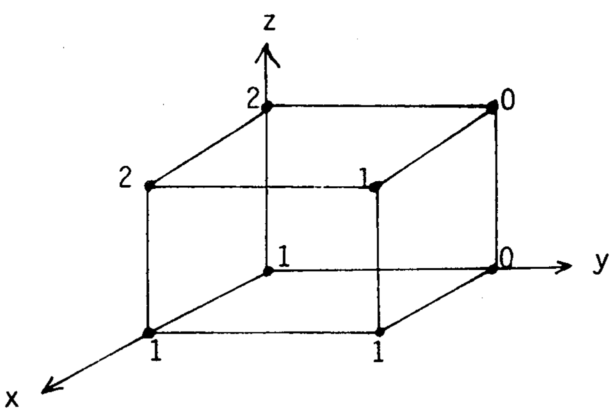
$$F(Y_0,Z_2) = c \qquad \text{avec} \quad c \neq a \quad \text{ou} \quad c \neq b$$

Il en résulte que $F(Y,Z_2) = c \qquad \forall Y$

Autrement dit la fonction est indépendante de Y et la décomposition est triviale.

$$F(X) = 0 + F(X) = (p-1)\ F(X)$$

- Si les deux décompositions ne portent pas sur les mêmes ensembles de variables, le résultat peut-être faux, comme le montre l'exemple suivant :



$$F(x,y,z) = f(x) + g(y,z)$$
$$= h(x,y)\ .\ k(z)$$

avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

$g(0,0) = 1$, $g(0,1) = 2$, $g(1,0) = 0$, $g(1,1) = 0$

$h(0,0) = 2$, $h(0,1) = 0$, $h(1,0) = 2$, $h(1,1) = 1$

$k(0) = 1$, $k(1) = 2$

IV – DÉCOMPOSITION EN SOMME DE PRODUITS

La méthode de passage aux monômes s'étend à des décompositions de la forme :

$$f(A)\ .\ h(B) + k(A)\ .\ \ell(B)$$

Une condition nécessaire pour qu'une telle décomposition soit possible est que pour tout quadrillage carré avec $r = 3$ relatif à la partition A,B le bidéterminant vérifie $\Delta_1 = \Delta_2$.

Ceci permet d'éliminer certaines combinaisons de variables.

Reprenons l'exemple déjà utilisé.

Comme chaque variable ne prend que deux valeurs et que nous voulons un quadrillage carré avec $r = 3$ nous devons grouper les variables par deux.

Essayons :

- xz et yt

Pour le quadrillage construit avec les points $A_1(x=0,z=0)$, $A_2(x=0,z=1)$, $A_3(x=1,z=0$ appartenant à A et les points $B_1(y=0,t=0)$, $B_2(y=0,t=1)$, $B_3(y=1,t=0)$ appartenant à B, on trouve le bidéterminant :

$$\begin{array}{c|ccc|} B_3 & 1 & 1 & 2 \\ B_2 & 1 & 2 & 1 \\ B_1 & 2 & 3 & 2 \\ \multicolumn{1}{c}{} & A_1 & A_2 & \multicolumn{1}{c}{A_3} \end{array} \qquad \text{pour lequel} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 2 \end{array}$$

Cette partition est donc exclue.

- xt et yz

Pour le quadrillage construit avec les points $A_1(x=0,t=0)$, $A_2(x=0,t=1)$, $A_3(x=1,t=$ appartenant à A et les points $B_1(y=0,\ z=0)$, $B_2(y=0,\ z=1)$, $B_3(y=1,\ z=0)$ appartenant à B on trouve le bidéterminant.

$$\begin{array}{c|ccc|} B_3 & 1 & 1 & 1 \\ B_2 & 3 & 2 & 2 \\ B_1 & 2 & 1 & 1 \\ \multicolumn{1}{c}{} & A_1 & A_2 & \multicolumn{1}{c}{A_3} \end{array} \qquad \text{pour lequel} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 1 \end{array}$$

On ne peut donc exclure cette partition à la suite de cet essai. Faisons un deuxième essai.

Pour le quadrillage construit avec les points $A_1(x=0, t=0)$ $A_2(x=0,t=1)$, $A_3(x=1,t=0)$ appartenant à A et les points $B_1(y=0,z=0)$, $B_2(y=0,z=1)$, $B_3(y=1,z=0)$ appartenant à B on trouve le bidéterminant :

$$\begin{array}{c|ccc|} B_3 & 1 & 1 & 2 \\ B_2 & 3 & 2 & 2 \\ B_1 & 2 & 1 & 2 \\ \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{A_1} & \multicolumn{1}{c}{A_2} & \multicolumn{1}{c}{A_3} \end{array} \qquad \text{pour lequel} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 1 \end{array}$$

On peut donc exclure cette partition.

Il reste donc xy et zt.

Pour le quadrillage construit avec les points $A_1(x=0,y=0)$, $A_2(x=0,y=1)$, $A_3(x=1,y=1)$ appartenant à A et les points $B_1(z=0,t=0)$, $B_2(z=0,t=1)$, $B_3(z=1,t=1)$ appartenant à B on trouve le bidéterminant :

$$\begin{array}{c|ccc|} B_3 & 2 & 1 & 2 \\ B_2 & 1 & 1 & 1 \\ B_1 & 2 & 1 & 2 \\ \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{A_1} & \multicolumn{1}{c}{A_2} & \multicolumn{1}{c}{A_3} \end{array} \qquad \text{pour lequel} \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

Il est inutile de continuer puisque nous savons que la fonction est un monôme en xy et zt.

(on vérifie d'ailleurs que tous les monômes d'ordre 2 du bidéterminant satisfont à $\Delta_1 = \Delta_2$).

CHAPITRE VII - HIÉRARCHIE EN COUCHES

Dans ce chapitre, on se propose de montrer :

- que toute hiérarchie en couches dont tout élément minimal appartient à la couche inférieure, est la hiérarchie des monômes réguliers d'une fonction convenable.

- accessoirement, que les monômes réguliers permettent un codage des hiérarchies en couches.

Etant donnée une hiérarchie en couches on va lui associer une fonction f dont le graphe représentant les empilements pour la recherche des monomes réguliers est justement cette hiérarchie en couches.

On appelle <u>longueur</u> d'une hiérarchie son nombre de couches, soit p.

On appelle <u>largeur</u> d'une couche i le nombre de points de cette couche soit n_i.

<u>*Théorème*</u> :

Une hiérarchie en couches dont tout élément minimal appartient à la couche inférieure, de longueur p et dont la $i^{ème}$ couche a une longueur n_i sera représentée par une fonction de

$$(L_2)^N \to L_{p+1} \quad \text{où } N = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

<u>Construction de cette fonction</u>

On suppose la hiérarchie représentée par son diagramme de Hasse lespoints d'une même couche étant sur une horizontale. On numérote les couches par ordre croissant à partir du niveau inférieur, et dans une couche on numérote les points par ordre croissant à partir de la droite.

Chaque point de la hiérarchie est représenté par un monôme de $(L_2)^N$ dans L_{p+1}, donc par N fonctions de L_2 dans L_{p+1}.

Les N fonctions sont classées en p groupes différents.

Le premier groupe comporte les n_1 premières fonctions,

le $i^{\text{ème}}$ groupe comporte les n_i fonctions suivantes,

le $p^{\text{ème}}$ groupe comporte les n_p dernières fonctions.

Dans ces fonctions seule la valeur en 1 a une signification, la valeur en 0 est toujours égale à j pour la $j^{\text{ème}}$ couche et permet seulement que le monôme ne soit pas nul si la valeur en 1 est nulle.

Représentation du $k^{\text{ème}}$ point de la $j^{\text{ème}}$ couche

On notera $m_{jk\ell}$, ℓ variant de 1 à N, les N fonctions qui sont les composantes du monôme cherché.

- Les (j-1) premiers groupes de fonctions n'ont aucune signification et serviront pour les niveaux inférieurs. On écrira :

$$\text{pour } \ell \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} n_i$$

$$m_{jk\ell}(0) = j$$

$$m_{jk\ell}(1) = 0$$

- Le $j^{\text{ème}}$ groupe de n_j fonctions caractérise le numéro du point dans la couche.

$$\text{pour } \ell = \ell' + \sum_{i=1}^{j-1} n_i \qquad \ell' \text{ variant de 1 à } n_j$$

on a :

$$m_{jk\ell}(0) = j$$

$$m_{jk\ell}(1) = j \text{ si } \ell = k$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

- Les (p-j) derniers groupes de fonctions caractérisent les liaisons du point étudié avec les couches supérieures.

On écrira donc pour $\ell > \sum_{i=1}^{j} n_i$

$$m_{jk\ell} = j \cdot \sum_{k'} m_{j+1\ k'\ell}$$

k' étant le numéro des points de la couche j+1, reliés au $k^{\text{ème}}$ point de la couche j.

Si le point n'est relié à aucun point de la couche supérieure on aura simplement :

$$m_{jk\ell}(0) = j$$

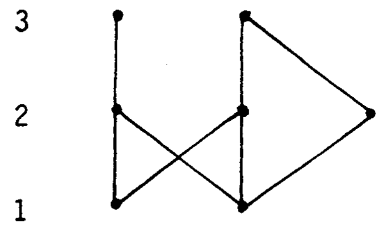
$$m_{jk\ell}(1) = 0$$

- On a donc associé un monôme à chaque point de la hiérarchie.

La fonction associée à la hiérarchie en couches est égale à la somme de ces monômes.

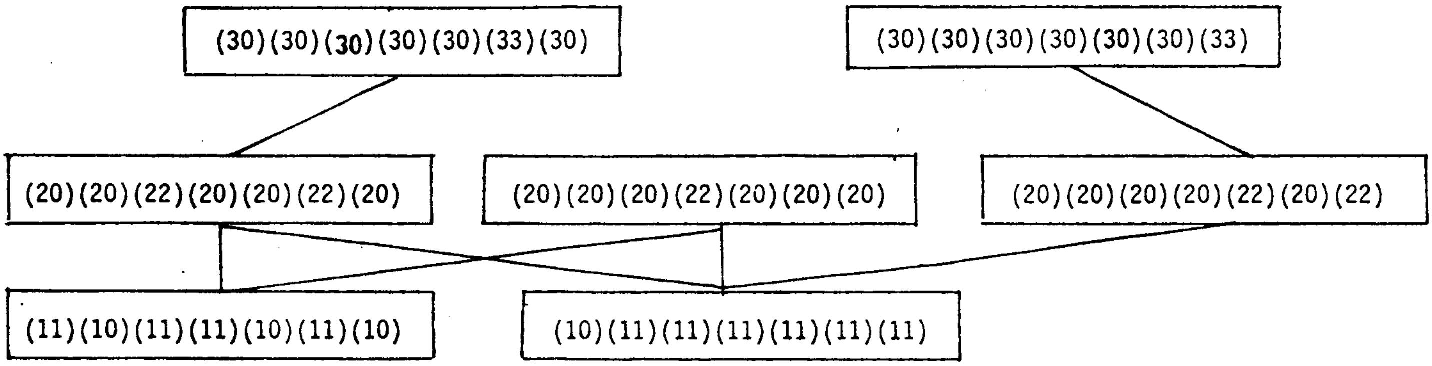
On peut évidemment obtenir une écriture plus réduite en empilant ces monômes, on est ramené alors au problème de la recherche des bases régulières irredondantes.

Exemple :



$p = 3$

$\Sigma n_i = 7$



La fonction associée à la hiérarchie en couche est :

$$f = (31)(30)(32)(31)(30)(32)(30) + (20)(21)(21)(22)(21)(21)(21)$$
$$+ (30)(31)(31)(31)(32)(31)(32)$$

Démonstration

Dans la hiérarchie que l'on vient de construire en mettant un monôme à chaque point de la hiérarchie de départ :

- on a bien exactement les mêmes liaisons que dans la hiérarchie de départ puisque dans la construction on a fait tout ce qu'il fallait pour cela.
- on n'a aucun consensus possible entre les monômes d'une même couche puisque ce sont des monômes booléens décroissants.

Donc la hiérarchie des monômes réguliers, de la fonction ainsi construite est bien la hiérarchie de départ.

CHAPITRE VIII - FONCTIONS CROISSANTES

Nous étudierons dans les chapitres qui suivent quelques types de fonctions particulières :

- les fonctions croissantes,
- les fonctions déconnectées,
- les fonctions régulières.

Nous laisserons de côté d'autres notions telles que celles de fonction paire et impaire que l'on pourrait définir en munissant les L_n de l'application involutive $i \to n-1-i$

Fonctions croissantes

Nous étudions donc les fonctions définies de

$$(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k} ; \geqslant) \to (L_p ; \geqslant, +, .)$$

L'ordre défini sur le produit direct est l'ordre induit par les ordres totaux sur les L_{n_i}.

Remarque

On pourrait munir les L_{n_i} d'autres structures d'ordre que des ordres totaux, par exemple des structures de treillis distributif. Mais cette étude traitée en [17] ne fait pas l'objet de cette thèse.

Premières propriétés

* Considérons la transformation qui à L_{n_i} associe

$$L'_{n_i} \subseteq L_{n_i}$$

Cette transformation associe à f une fonction f' qui est la restriction de f au produit direct :

$$L'_{n_1} \times L'_{n_2} \times \ldots \times L'_{n_k}$$

Propriété

Si f est croissante alors f' est croissante.

Ceci est évident car si f' n'était pas croissante f ne le serait pas non plus.

* Considérons une application croissante ϕ de L_p dans L_q, ce qui est équivalent à une fusion de niveaux lorsque ϕ n'est pas injective.

Cette transformation associe à une fonction f une fonction f' définie par $f'(X) = \phi[f(X)]$.

Propriété

Si f est croissante alors f' est croissante.

En effet : $X > X' \Rightarrow f(X) \geqslant f(X')$

$$\Rightarrow \phi[f(X)] \geqslant \phi[f(X')]$$

Monôme croissant

Un monôme croissant est un monôme qui en tant que fonction est croissant.

Toute section de niveau i d'un monôme croissant est un monôme croissant prenant les valeurs $\{0,i\}$. Cette section est donc définie par son point caractéristique. Ce point est le premier, dans l'ordre lexicographique, des points où la valeur de la section du monôme est différente de zéro.

La suite des points caractéristiques $X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}$ associés aux sections de niveaux $1,2,\ldots,p-1$ d'un monôme m croissant définit ce monôme.

Notation d'un monôme croissant

On peut noter un monôme croissant par la suite des coordonnées des points caractéristiques des sections de niveaux $1,2,\ldots,p-1$.

Cette notation utilise donc $k(p-1)$ symboles.

Ce qui n'est pas forcément plus condensé que la notation des monômes ordinaires qui exige $\sum_j n_j$ symboles.

Exemple

Pour une application de $(L_2)^6$ dans L_{10}, l'écriture ordinaire demande 12 symboles. L'écriture d'un monôme croissant demande 54 symboles.

Ordre bilexicographique sur les monômes croissants

On peut définir deux ordres totaux sur les monômes croissants (ordres bilexicographiques) de la manière suivante :

Soient m et m' deux monômes croissants définis par la suite de leurs points caractéristiques.

Le monôme m a comme points caractéristiques :

$$X_1(x_1,y_1,\ldots,z_1),\quad X_2(x_2,y_2,\ldots,z_2),\quad \ldots,\quad X_{p-1}\,(x_{p-1},\,y_{p-1},\ldots,z_{p-1})$$

Le monôme m' a comme points caractéristiques :

$$X'_1(x'_1, y'_1, \ldots, z'_1), X'_2(x'_2, y'_2, \ldots, z'_2), \ldots, X'_{p-1}(x'_{p-1}, y'_{p-1}, \ldots, z'_{p-1})$$

Le premier ordre est obtenu en travaillant sur les points caractéristiques point par point.

On définit alors les monômes par les coordonnées du premier point caractéristique, les coordonnées du 2ème point caractéristique, jusqu'au dernier point caractéristique.

On a donc :

$$m = x_1 y_1 \ldots z_1 \; x_2 y_2 \ldots z_2 \ldots \; x_{p-1} y_{p-1} \ldots \; z_{p-1}$$

$$m' = x'_1 \; y'_1 \ldots z'_1 \quad x'_2 \; y'_2 \ldots \; z'_2 \ldots x'_{p-1} \; y'_{p-1} \ldots z'_{p-1}$$

L'ordre lexicographique sur les monômes est l'ordre lexicographique sur les files ainsi définies. On le notera $\triangleright_1$

Le deuxième ordre est obtenu en travaillant sur les coordonnées prises les unes après les autres, des points caractéristiques.

On définit les monômes par la suite des abscisses des points caractéristiques pour la première variable, la deuxième variable, jusqu'à la dernière variable.

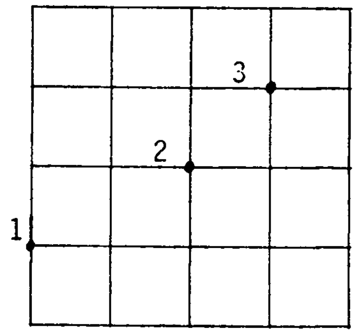
Ce qui donne :

$$m = x_1 x_2, \ldots, x_{p-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}, \ldots, z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$$

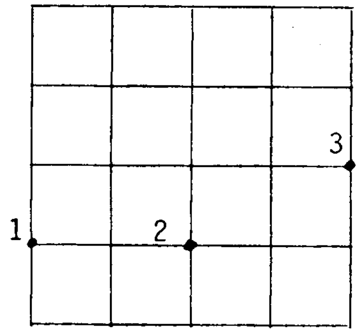
$$m' = x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p-1}, y'_1, y'_2, \ldots, y'_{p-1}, \ldots, z'_1, z'_2, \ldots, z_{p-1}$$

l'ordre lexicographique sur les monômes est l'ordre lexicographique sur les files ainsi définies. On le notera $\triangleright_2$

Exemple



m



m'

Par points les files associées à m et m' sont respectivement 012233 et 012142
on a donc $m \triangleright_1 m'$

Par coordonnées les files associées à m et m' sont respectivement 023123 et 024112
on a donc $m' \triangleright_2 m'$

Les deux écritures ont naturellement le même encombrement $k(p-1)$

Propriété

Le deuxième ordre bilexicographique ainsi défini est dual de l'ordre lexicographique défini sur les monômes au chapitre III.

Démonstration

Soient m et m' deux monômes croissants tels que :

$m \triangleright m'$ c'est-à-dire que :

$$m = m'$$

ou $\exists\, q$ tel que $f_1 = f'_1, \dots, f_{q-1} = f'_{q-1}$

et $f_q \triangleright f'_q$

$f_1 = f'_1$ donc $x_1 = x'_1, \ldots, x_{p-1} = x'_{p-1}$

$f_2 = f'_2$ donc $y_1 = y'_1, \ldots, y_{p-1} = y'_{p-1}$

Et ainsi de suite jusqu'à la (q-1)ème variable.

$f_q \rhd f'_q$ donc il existe r tel que :

$$f_q(0) = f'_q(0), \ldots, f_q(r-1) = f'_q(r-1)$$

$$\text{et} \quad f_q(r) > f'_q(r) = \theta$$

On a donc :

$$t_1 = t'_1,\ t_2 = t'_2, \ldots, t_{\theta-1} = t'_{\theta-1},\ \ t_\theta < t'_\theta$$

donc $m' \rhd_2 m$

Soient m et m' deux monômes croissants tels que $m \rhd_2 m'$, si l'on a $m \rhd m'$ on en déduit d'après ce que l'on vient de démontrer que $m' \rhd_2 m$ ce qui est impossible. L'ordre lexicographique étant un ordre total on a donc $m' \rhd m$.

Monôme croissant attaché à un monôme quelconque dans $(L_{n_1} \times L_{n_2} \times \ldots \times L_{n_k} ; >)$

On peut attacher à tout monôme un plus petit monôme croissant qui lui est supérieur. Son point caractéristique de la section de niveau i est le premier, dans l'ordre lexicographique, des points où le monôme prend une valeur supérieure ou égale à i.

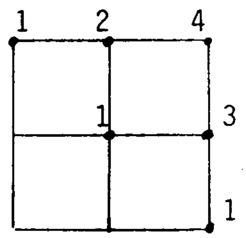
Monômes premiers d'une fonction croissante

Soit f une fonction croissante, m un monôme inférieur à f, m* le monôme croissant attaché à m. Il est clair que m* est compatible avec f.

Donc tout monôme premier d'une fonction croissante est un monôme croissant.

Non unicité de la base première et de la base régulière

Exemple :



Cette fonction croissante a deux bases premières :

$$f = (124)(004) + (024)(014) + (004)(134)$$

$$f = (124)(004) + (014)(034) + (004)(134)$$

Cette fonction a deux bases régulières :

$$f = (122)(002) + (022)(012) + (004)(134)$$

$$f = (122)(002) + (014)(034) + (004)(134)$$

Donc la propriété d'unicité de la base première d'une fonction croissante valable en algèbre de Boole et retrouvée au chapitre I pour l'algèbre à deux valeurs ne s'étend pas à l'algèbre à p valeurs par suite de la multiplicité des empilements possibles.

Monômes premiers obligatoires, facultatifs, inutiles

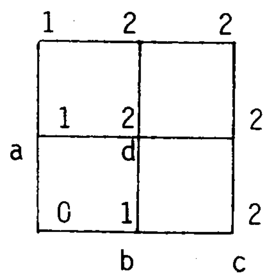
On avait trouvé en algèbre de Boole trois catégories de monômes premiers :

- les monômes premiers obligatoires qui figurent dans toute base première irredondante.
- les monômes premiers facultatifs qui figurent dans au moins une base première irredondante mais pas dans toutes.
- les monômes premiers inutiles qui ne figurent dans aucune base première irredondante.

En algèbre de Boole il n'y avait pour une fonction croissante que des monômes obligatoires. Pour les fonctions croissantes en algèbre à p valeurs on trouve ces trois sortes de monômes à la fois pour les bases premières et pour les bases régulières.

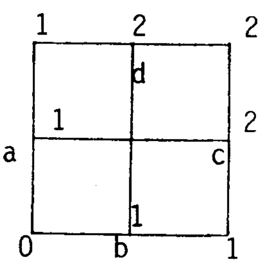
a) Pour une fonction réduite à un monôme croissant celui-ci est à la fois premier et régulier. Il est obligatoire dans les deux cas.

b) Voici l'exemple d'un monôme premier et régulier inutile :



Le monôme ayant pour suite caractéristique b,d est premier et **régulier**, il est inutile.

c) Voici un exemple de monômes premiers et réguliers facultatifs :



Les monômes premiers et réguliers ont pour suite caractéristique :

a,d	a,c
b,d	b,c

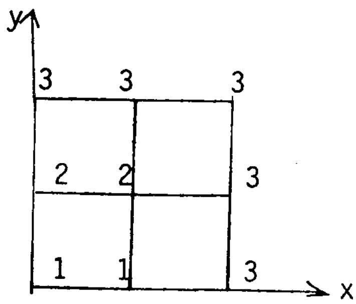
Les bases premières et régulières irredondantes sont (a,d), (b,c) et (a,c), (b,d).

Tous les monômes sont donc facultatifs.

Décomposition disjointe en somme ou en produit de fonctions croissantes

On peut trouver pour une fonction croissante une décomposition en somme comportant des fonctions non croissantes.

Exemple



Cette fonction peut s'écrire :

$$f = (103)(333) + (333)(123)$$

On peut cependant énoncer le résultat suivant : toute décomposition d'une fonction croissante en somme de fonctions à variables distinctes peut-être transformée en une décomposition où tous les termes de la somme sont croissants.

En effet, soit :

$$f(X,Y) = g(X) + h(Y)$$

On pose :

$$g^*(X) = \max_{X' \leq X} (g(X'))$$

$$h^*(Y) = \max_{Y' \leq Y} (h(Y'))$$

on a :

$$f(X,Y) \geqslant g^*(X) + h^*(Y) \geqslant g(X) + h(Y)$$

Donc $\quad g^*(X) + h^*(Y) = f(X,Y)$

D'autre part $g^*(X)$ et $h^*(Y)$ sont des fonctions croissantes.

La même propriété est évidemment exacte pour les décompositions en produit.

Décompositions de fonctions croissantes

Soit $f(X) = g(h(Y),Z)$ une décomposition disjointe simple d'une fonction croissante.

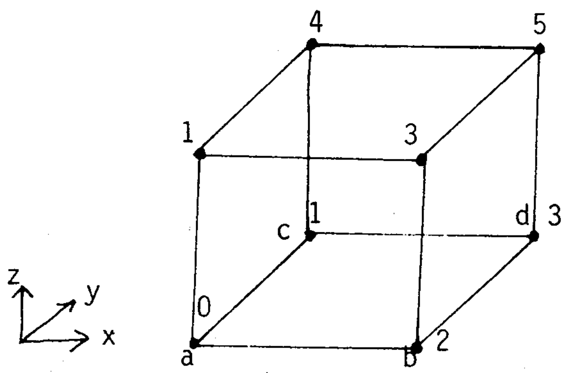
Il n'est pas toujours possible de s'arranger pour que $g(h,Z)$ soit croissante en h.

Exemple :

$X = x,y,z$

$Y = x,y$

$Z = z$



$f(a,Z) = 0,1$	$g(h(a),Z) = 0,1$
$f(b,Z) = 2,3$	$g(h(b),Z) = 2,3$
$f(c,Z) = 1,4$	$g(h(c),Z) = 1,4$
$f(d,Z) = 3,5$	$g(h(d),Z) = 3,5$

$h(Y)$ prend ses valeurs dans L_4. Si g était croissante en h, on pourrait classer dans le même ordre total les $g(h,0)$ et les $g(h,1)$ on voit que cela est impossible pour les points b et c puisque $1 < 2$ et $4 > 3$

Remarque

La propriété est vraie en algèbre de Boole et plus généralement pour les fonctions à 2 valeurs.

En effet soit :

$$f(Y,Z) = g(h(Y),Z)$$

f étant une fonction croissante non indépendante de Y on peut trouver une valeur Z_0 de Z telle que $f(Y,Z_0)$ prenne les valeurs 0 et 1

On posera $\quad h(Y) = 0 \quad$ si $\quad f(Y,Z_0) = 0$

$\qquad\qquad\quad h(Y) = 1 \quad$ si $\quad f(Y,Z_0) = 1$

La fonction h ainsi définie est croissante. D'autre part, la seule autre fonction h possible est la fonction complémentaire h'(Y), et on pourra toujours écrire g en fonction de h. g(h(Y,Z)) est croissant en Z, mais il est aussi croissant en h puisque augmenter h revient à augmenter Y et cela ne peut diminuer f.

CHAPITRE IX - FONCTIONS RÉGULIÈRES ET FONCTIONS DÉCONNECTÉÉES

I - PROPRIÉTÉS PRÉLIMINAIRES

1) Considérons les fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$f(\alpha_1) \geqslant a_1 \qquad f(\alpha_2) \geqslant a_2 \quad \ldots \quad f(\alpha_r) \geqslant a_r$$

$$f(\beta_1) \leqslant b_1 \qquad f(\beta_2) \leqslant b_2 \quad \ldots \quad f(\beta_s) \leqslant b_s$$

Les α_i, β_j, a_i, b_j étant quelconques mais donnés.

La famille des fonctions satisfaisant à ces conditions est fermée pour les opérations de somme et produit.

2) Considérons maintenant une partition des indices 1,2,...,k des variables en trois sous-ensembles A,B,C comme au chapitre VI.

Considérons la famille des fonctions satisfaisant pour tout parallélogramme a,b,c,d relatif à la partition A,B,C à la condition :

$$(\mathrm{I}) \qquad \left.\begin{array}{ll} & f(a) \geqslant a' \\ \text{et} & f(b) \geqslant b' \\ \text{et} & f(c) \geqslant c' \end{array}\right\} \Rightarrow f(d) > d'$$

où a',b',c',d' sont des valeurs données.

Cette famille est fermée pour le produit.

En effet soient g et h deux fonctions satisfaisant à ces conditions et $f = gh$.

$$f(a) \geqslant a' \Rightarrow g(a) \geqslant a' \quad \text{et} \quad h(a) \geqslant a'$$

De même en b et c. Donc $g(d) \geqslant d'$ et $h(d) \geqslant d'$ et $f(d) \geqslant d'$.

II - FONCTIONS RÉGULIÈRES

Définition

Une fonction est dite régulière si tout monôme premier de f est régulier.

Propriété

Pour une fonction régulière tout monôme régulier m est premier.

Donc pour une fonction régulière les notions de monômes premiers et de monômes réguliers coïncident.

Démonstration

Supposons qu'il existe un monôme m régulier non premier. Il existe donc un monôme m' premier tel que

$$m' > m$$

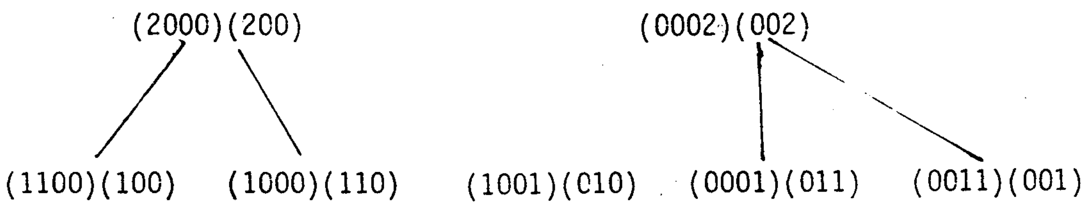
Mais par hypothèse ce monôme m' est régulier, donc il y a une contradiction car on ne peut pas avoir deux monômes réguliers comparables.

Exemples de fonctions régulières

a) Un monôme en tant que fonction est toujours une fonction régulière.

b) Soit la fonction :

$$f = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$



Il y a donc cinq monômes réguliers et premiers :
(2100)(200), (2000)(210), (1001)(010), (0002)(012), (0012)(002)

Propriété

Pour qu'une fonction f soit régulière, il faut et il suffit que, si l'espace $E_{i+1}(m)$ d'un monôme premier m de f^{i+1} a un point commun avec l'espace $E_i(m')$ d'un monôme premier m' de f^i, il existe un monôme premier m" de f^{i+1} tel que $E_{i+1}(m")$ soit contenu dans $E_i(m')$ et contienne $E_{i+1}(m) \cap E_i(m')$.

Condition nécessaire

Soit f une fonction.

Supposons qu'il existe m monôme premier de f^{i+1} et m' monôme premier de f^i tels que :

$$E_{i+1}(m) \quad E_i(m') \neq \emptyset$$

et qu'il n'existe pas m" monôme premier de f^{i+1}

$$E_{i+1}(m) \cap E_i(m') \subseteq E_{i+1}(m") \subseteq E_i(m')$$

En empilant les monômes m' et m on obtient un monôme qui est le tronçon d'un monôme premier M non-régulier. En effet M est non régulier puisque l'empilement au niveau i+1 a été fait avec un découpage et M est premier puisque pour l'ensemble des deux niveaux i et i+1 il n'existe pas de monômes plus grands que lui.

Donc la fonction f n'est pas régulière.

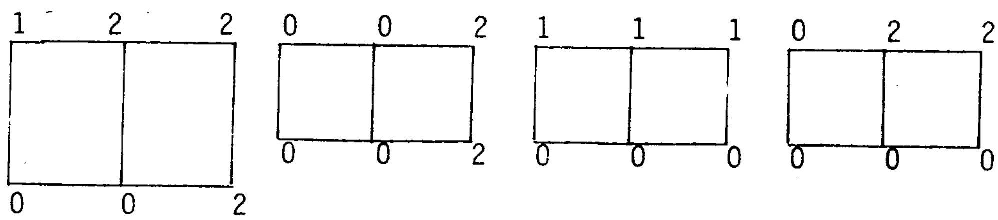
Condition suffisante

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses. Les empilements avec coupure donnent des monômes non premiers puisque l'on peut faire des empilements sans coupures donnant des monômes plus grands.

La fonction f est donc régulière.

Exemple 1

f =



m m' m"

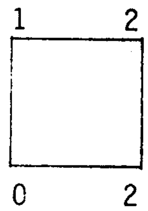
Les monômes m et m' sont des monômes premiers respectivement de f^2 et de f^1

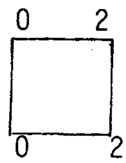
$$E_2(m) \cap E_1(m') \neq \emptyset$$

Mais il existe m", monôme premier de f^2 tel que :

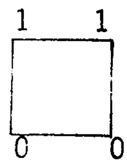
$$E_2(m) \cap E_1(m') \subseteq E_2(m'') \subseteq E_1(m')$$

Exemple 2

f = 



m



m'

Les monômes m et m' sont des monômes premiers respectivement de f^2 et de f^1

$$E_2(m) \cap E_1(m') \neq \emptyset$$

Mais il n'existe pas m", monôme premier de f^2 tel que :

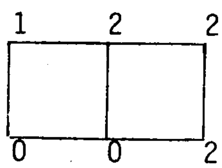
$$E_2(m) \cap E_1(m') \subseteq E_2(m'') \subseteq E_1(m')$$

La fonction f n'est donc pas régulière.

Propriété

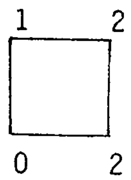
La propriété d'être régulière n'est pas conservée par le remplacement de certains L_{n_i} par $L'_{n_i} \subseteq L_{n_i}$

Exemple



Cette fonction est régulière.

Remplaçons $L_{n_1} = \{0,1,2\}$ par $L'_{n_1} = \{0,2\}$



Cette fonction n'est pas régulière car le monôme premier (12)(02) n'est pas régulier.

Propriété

La propriété d'être régulière est conservée par une application croissante ϕ de L_p dans L_q.

Démonstration

Soit f une fonction régulière, et soit M un monôme premier de $\phi(f)$. On sait que M est l'image d'un monôme premier m de f. La fonction f étant régulière m est aussi régulier. L'application ϕ transforme le monôme m en un monôme régulier, aucun nouvel empilement n'étant possible dans ce cas puisque $\phi(m)$ est un monôme premier de $\phi(f)$, $M = \phi(m)$ est donc régulier.

La fonction $\phi(f)$ est donc régulière.

III - FONCTIONS RÉGULIÈRES FORTES

On peut formuler une condition plus forte en exigeant que si l'espace $E_{i+1}(m)$ d'un monôme premier m de f^{i+1} a un point commun avec l'espace $E_i(m')$ d'un monôme premier m' de f^i alors $E_{i+1}(m) \subseteq E_i(m')$.

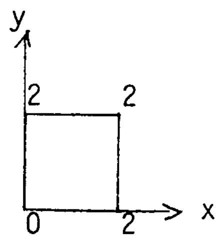
Si une fonction satisfait à cette condition elle est régulière, et sera dite régulière forte.

On peut exprimer ceci de la façon suivante :

$$m \cdot m'$$

ne peut prendre que les deux valeurs 0 et m.

<u>Exemple</u> de fonction régulière mais non régulière forte :



La monôme (01)(11) a une intersection non vide avec (22)(02) sans que le second soit inclus dans le premier. La fonction n'est donc pas régulière forte, par contre elle est régulière puisque l'intersection est contenue dans le monôme (02)(22) qui est lui-même contenu dans le monôme (01)(11).

<u>Propriété de parallélogramme pour les fonctions régulières fortes</u>

Soit $a = (x_0,Y_0)$, $b = (x_1,Y_0)$, $c = (x_0,Y_1)$, $d = (x_1,Y_1)$

un parallélogramme correspondant à une partition x,Y et tel que a et c appartiennent à un monôme premier m' de f^i, alors la condition :

$$f(a) \geqslant i+1 \quad \text{et} \quad f(b) \geqslant i+1 \implies f(d) \geqslant i$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit régulière forte.

<u>Condition nécessaire</u>

Soit f une fonction régulière forte.

Supposons que a et b appartiennent à m, monôme premier de f^{i+1}, a étant dans m', b doit y être aussi et par suite également d qui est le quatrième sommet du parallélogramme.

<u>Condition suffisante</u>

Soit m un monôme premier de f^{i+1} ayant un point commun a avec m' monôme premier de f^i. Soit b un point de m. On peut passer de a à b par une succession de changements portant sur une seule variable. On obtient les points $a = b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n = b$.

Supposons qu'il existe deux points $b_j = (x_0, Y_0)$ et $b_{j+1} = (x_1, Y_0)$ tels que :

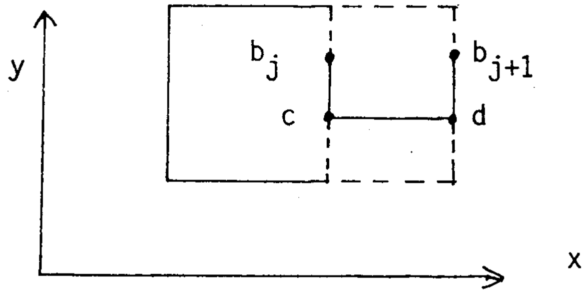
$$b_j \in m' \qquad b_j \in m$$

et

$$b_{j+1} \notin m' \qquad b_{j+1} \in m$$

Pour tout point $c = (x_0, Y_1)$ appartenant à m' on a par hypothèse $f(d) \geqslant i$ pour $d = (x_1, y_1)$. Donc b_{j+1} appartient à m', donc b aussi. f est donc régulière forte.

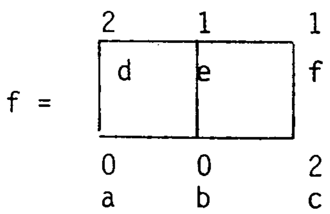
Exemple



Conséquence de la définition

Considérons les monômes premiers de la section de niveau i d'une fonction régulière forte. Ils définissent dans l'ensemble des valeurs des variables une partition définie par la relation appartenir aux mêmes monômes premiers de la section de niveau i. Tout monôme premier de la section de niveau i+1 est tout entier dans une de ces classes.

Exemple



f est une fonction régulière forte.

Les monômes premiers de la section de niveau 1 sont les monômes :

m = (111)(01) et m' = (001)(11)

La partition définie par m et m' est formée des ensembles :

- {a,b} a et b n'appartiennent ni à m ni à m'
- {c} c appartient à m' mais pas à m
- {d,e} d et e appartiennent à m mais pas m'
- {f} f appartient à m et à m'

Fonctions croissantes régulières fortes

Tous les monômes premiers de toutes les sections d'une fonction croissante ont un point commun, c'est le point dont chaque coordonnée à la valeur la plus grande possible.

Il en résulte qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu' une fonction croissante soit régulière forte est que toute section de niveau i+1 soit toute entière comprise dans l'intersection des monômes premiers de la section de niveau i.

Donc pour chaque coordonnée les abscisses des points caractéristiques des monômes premiers de f^1, $f^2,\dots,f^{p-1}$ forment des suites non imbriquées. (La réciproque est évidente).

Monômes premiers d'une fonction croissante régulière forte

Il résulte des propriétés précédentes que les monômes premiers d'une fonction croissante régulière forte s'obtiennent en empilant de manière arbitraire un monôme premier de chaque section.

Il en résulte que le nombre de monômes premiers est $\prod_i$(nombre de monômes premiers de la section de niveau i).

Le nombre de monômes premiers d'une base irredondante est :

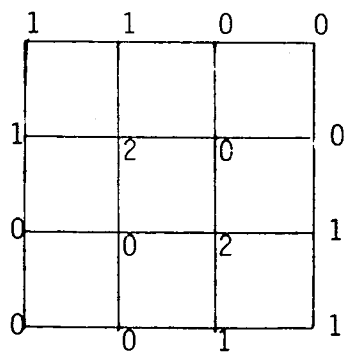
$$\max_i \text{ (nombre de monômes premiers de la section de niveau i)}$$

La hiérarchie définie pour la construction des monômes réguliers est complète.

Fonctions déconnectées

On dira qu'une fonction est déconnectée si elle satisfait à la condition (I) du début du chapitre en prenant de toutes les manières possibles A et B de dimension 1 et a' = b' = c' = d' ces valeurs étant quelconques.

Exemple



Ici on ne peut donc prendre que :

A = {x}   B = {y}

Propriétés des fonctions déconnectées

Une fonction déconnectée est régulière forte.

En effet, revenons aux notations employées dans l'étude de la propriété du parallélogramme pour les fonctions régulières fortes.

Supposons que $f(a) \geqslant i+1$ et $f(b) \geqslant i+1$, une seule coordonnée ayant variée pour passer de a à b. a et c appartiennent à m' qui est un monôme premier de f^i. On peut passer de a à c par une succession de changements portant sur une seule variable autre que x. On obtient ainsi les points $a = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n = c$

qui appartiennent aussi à m'.

On construit à chaque fois le quatrième sommet du parallélogramme et on trouve :

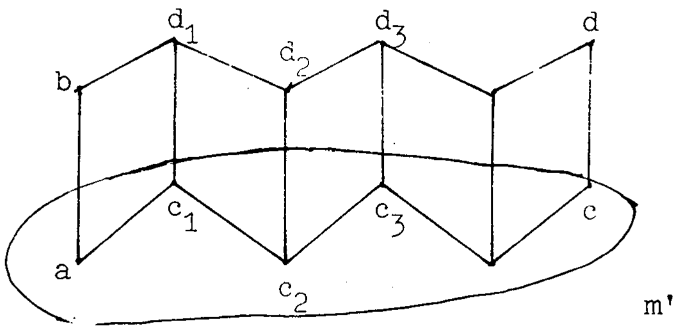
$$b = d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n = d$$

Puisque la fonction est déconnectée on a pour :

$$\alpha = 0,1,\ldots,n \quad f(c_\alpha) \geqslant i \quad \text{par suite} \quad f(d_\alpha) \geqslant i$$

$f(b) > i+1$

$f(a) > i+1$



Monômes premiers d'une fonction déconnectée

Soit m^i la section de niveau i d'un monôme premier m d'une fonction déconnectée.

Soit $a = (x_0, Y_0)$ appartenant à m^i. Supposons qu'il existe $b = (x_1, Y_0)$ n'appartenant pas à m^i, obtenu à partir de a en changeant une seule coordonnée x, et tel que $f(b) \geqslant i$.

En refaisant le raisonnement qui a été fait pour les fonctions régulières fortes on peut montrer que la fonction f est supérieure ou égale à i en tous les points de coordonnées (x_1, Y) pour Y tel que (x_0, Y) appartienne à m^i.

On obtient ainsi un monôme de la section de niveau i qui est plus grand que m^i.

Donc pour passer d'un monôme de la section de niveau i à un autre monôme de la section de niveau i on doit changer au moins deux variables.

Propriétés des monômes premiers des fonctions déconnectées

Considérons les sections de niveau i de deux monômes premiers m et m' d'une fonction déconnectée. Ces deux monômes ont une intersection vide.

En effet, s'ils ont un point commun en partant de ce point et en cheminant jusqu'à un point du premier monôme extérieur au deuxième, on retrouvera la situation ci-dessus.

Remarque

Il en résulte qu'une fonction déconnectée croissante est réduite à un seul monôme, puisque tous les monômes premiers d'une fonction croissante ont un point commun.

Deux monômes premiers de la section de niveau i n'ont jamais non plus de consensus car le consensus est un monôme qui a une intersection non vide avec les monômes de départ et il est aussi de niveau i.

Base complète d'une fonction déconnectée

Dans une fonction déconnectée tout point d'une section est couvert par un seul monôme premier de cette section.

D'autre part un monôme premier de la section i+1 est contenu dans un seul monôme premier de la section de niveau i.

Le graphe de la hiérarchie des empilements complété par un sommet au niveau 0 est donc une arborescence. Et la seule base irredondante est la base complète.

B I B L I O G R A P H I E

[1] BENZAKEN C. "Cours d'algèbre appliquée
Université de Grenoble, 1975

[2] BOUCHET A. "Etude combinatoire des ordonnés finis - Applications"
Thèse de Doctorat es Sciences Mathématiques,
Université de Grenoble, 1971

[3] CARVALLO M. "Logique à trois valeurs - Logique à seuil"
Gauthier-Villars, Paris, 1968

[4] CURTIS H.A. "A new approach to the design of switching circuits"
Van Nostrand, 1962

[5] EPSTEIN G. "Comments on the relationship between multivalued switching algebra and boolean algebra ander different definitions of complement"
I.E.E.E. Trans. on Comp., vol. C-22, n° 9, sept. 1973.
page 864

[6] IRVING T.A. and NAGLE H.T. "An approach to multi-valued sequential logic"
Conference record of the 1973, International Symposium on multivalued logic., Toronto, Canada, mai 24-25, 1975
pp 89-105

[7] JANCZEWSKI L.J. "Geometrical approach to multi-valued logic function synthesis"
Conference record of the 1973 International Symposium, on multi-valued Logic. Toronto, Canada, mai 24-25, 1975
pp 106-118

[8] KERGALL E. "Monômes premiers d'une fonction de plusieurs variables sur une algèbre à p valeurs. Trois méthodes de détermination"
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278, série A, pp 1483-1485

[9] KUNTZMANN J. "Algèbre de Boole"
Dunod, Paris, 1965

[10] KUNTZMANN J. "Théorie des réseaux"
Dunod, Paris, 1972

[11] LAPSCHER F. "Application de la notion de fermeture à l'étude des fonctions booléennes"
Thèse d'état soutenue à la Faculté des Sciences, Grenoble, Sept. 1968

[12] LEVY G. "Constructions et dénombrements en logique à p valeurs"
Thèse de Doctorat es sciences Mathématiques, Paris, 1971

[13] MALGRANGE Y. "Recherche des sous-matrices premières d'une matrice à coefficients binaires. Applications à certains problèmes de graphes"
Deuxième Congrès de l'AFCALTI, octobre 1961, pp. 231-242
Gauthier-Villars, Paris, 1962, 524 pages

[14] MOISIL G.R. "Théorie structurelle des automates finis"
Gauthier-Villars, Paris,1967

[15] MOISIL G.R. "Essais sur les logiques non chrysippiennes"
Edition de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucarest, 1972

[16] PICHAT E. "Décomposition des fonctions booléennes"
Thèse de 3ème cycle, Grenoble, 1966

[17] PICHAT E. "Contribution à l'algorithmique non numérique dans les ensembles ordonnés"
Thèse de Doctorat es sciences Mathématique, Grenoble, 1970

[18] PICHAT E. "Un algorithme donnant les pavés maximaux d'une partie d'un produit de treillis distributifs"
Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 5ème année, n° R-3, 1971, pp 29-38

[19] PICHAT E. "Journées d'étude sur les ensembles flous et les logiques multivalentes"
Paris, Université Dauphine, 22 et 23 novembre 1972

[20] POST E.L. "Introduction to a general theory of elementary propositions"
American Journ. of Math., vol. 43, 1921, pp 163-185

[21] RINE D.C. "Multiple-valued logic and Computer Science in the 20 th Century"
I.E.E.E. Computer, sept. 1974, pp 18-32

[22] WOJCIK A.S. "Multi-valued asynchronous circuits"
Conference Record of the 1973, Internation Symposium on multiple-valued logic, Toronto, Canada, mai 24-25, 1973 pp 217-228

TABLE DES MATIERES