Quelques questions d'analyse numérique traitées du point de vue de la calculabilité

Marcel Bouhier

N° d'ordre

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

« analyse numérique »

par

Marcel BOUHIER

— o —

QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE NUMERIQUE TRAITEES DU POINT DE VUE DE LA CALCULABILITE

— o —

Thèse soutenue le 28 février 1974 devant la commission d'examen :

Président :	N. GASTINEL
Examinateurs :	B. VAUQUOIS
	P.J. LAURENT
	F. ROBERT

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physilogie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physilogie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Je remercie très sincèrement Monsieur N. GASTINEL, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble de m'avoir orienté vers l'analyse calculable puis de m'avoir guidé et encouragé dans ce travail.

Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance et mon admiration pour son talent d'animateur.

Je remercie très vivement Messieurs B. VAUQUOIS, P.J. LAURENT et F. ROBERT pour leur participation au Jury.

J'assure mes Collègues Enseignants de Mathématiques à l'I.U.T. de ma sympathie.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail et en particulier Mademoiselle Cl. PAYERNE.

Ce travail développe la théorie de l'analyse calculable. Cette branche des mathématiques, ancienne par sa logique, récente dans ses développements d'analyse est particulièrement méconnue.

L'objet de l'analyse calculable est de donner un support théorique "réaliste" au calcul numérique sur ordinateur.

L'analyse mathématique classique, dont le mérite est la simplicité ,est très mal adaptée au calcul automatique. Les êtres mathématiques : nombres réels, suites, fonctions,..., ne sont pas construits dans l'optique de la programmation. La définition classique d'une suite de nombres rationnels : "une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$" n'apporte aucun renseignement sur la construction d'une telle application. Le fait de savoir qu'une suite de nombres rationnels est une suite de Cauchy ne permet pas, en général, d'avoir la moindre idée de la valeur numérique de la limite de cette suite. L'information : "telle fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$" apporte des théorèmes d'existence de $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, de $x^* \in [a,b]$ tel que $f(x^*) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, etc, ..., mais ne donne aucune construction numérique de tels nombres. Enfin, nous verrons au paragraphe IV, un exemple de méthode numérique, construite selon les principes de l'analyse mathématique, qui, en général, ne se programme pas.

Ici, la machine, et la programmation vont jouer un rôle essentiel. Malheureusement, la topologie d'un ensemble fini est particulièrement pauvre. Par suite, la machine ne sera pas l'ordinateur tel que nous le connaissons, où seule une partie finie de $\mathbb{Q}$ peut être entrée en mémoire. Nous supposerons que la machine est capable de mémoriser $\mathbb{Q}$ tout entier. Si l'on préfère, l'unité centrale de notre machine serait à capacité variable. J'entends par là que cette capacité, fixée au début du calcul, serait susceptible d'évoluer selon le gré de l'utilisateur, dans des bornes dépendant de la difficulté (nombres rationnels traités) et de la précision des calculs effectués.

On distinguera les parties suivantes :

I - Présentation de la machine
Applications programmables
Les possibilités de la machine
(théorèmes de TURING et de DAVIS)

II - Présentation du corps des nombres calculables : seule une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ nous est accessible

La topologie calculable de ce corps
(théorème de CEÏTIN)

Utilisation à des fins calculables de certains résultats de l'analyse classique concernant les suites
(théorèmes de MAZUR)

III - Fonctions calculables : définitions et exemples
Suites calculables de fonctions calculables : exemples plus élaborés de fonctions calculables.

IV - Méthodes effectives de calcul numérique :

- de l'impossibilité de résoudre numériquement certains problèmes.
(théorème de la proposition vraie à la limite et exemples)
- une méthode "usuelle" de calcul numérique qui n'est pas, en général, une méthode effective,
(critique et remède)
- méthodes de points fixes pour des fonctions contractantes.

V - Propriété des fonctions calculables définies sur des intervalles :

* continuité classique (théorème de MAZUR) et continuité calculable (définitions de ABERTH).

* utilisation des définitions de ABERTH pour savoir :

- dans quels cas $\sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ est-il un nombre calculable ?

- dans quels cas x^* tel que $f(x^*) = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ est-il un nombre calculable ?

- quand peut-on espérer calculer $\int_0^1 f(x)dx$?

(Quelques résultats et méthodes effectives originales).

VI - Etude de deux espaces fonctionnels : la notion d'espace vectoriel normé complet en analyse calculable.

VII - Références.

En raison de l'originalité du sujet, j'ai dû rappeler une partie des résultats des travaux de ABERTH. Ces rappels concernent : la définition de la machine, l'introduction du corps $\mathcal{C}$ des nombres calculables le théorème de la proposition vraie à la limite et la définition de la continuité pour des fonctions calculables. Le lecteur, s'il désire des précisions concernant le calcul des entiers descriptifs de programme et quelques démonstrations devra s'y reporter (références à la fin). J'ai jugé indispensable d'y apporter certains résultats de S. MAZUR, exposés par lui selon la tradition des fonctions récursives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: comparaison de la convergence dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathcal{C}$, continuité au sens usuel des fonctions calculables. Cet apport a nécessité la refonte des démonstrations de S. MAZUR, en particulier, la démonstration de $a_n \to \ell \Rightarrow f(a_n) \underset{\mathbb{R}}{\to} f(\ell)$ est inédite (à ma connaissance).

Le reste du travail est personnel avec l'introduction et l'utilisation des suites calculables de fonctions calculables , ainsi que les exemples de méthodes effectives. Enfin, je pense que les deux dernières parties sont originales dans leur quasi-totalité.

En ce qui concerne la terminologie, j'utilise le symbole $\exists$ avec sa signification habituelle. Je dirai : " $\exists x \in \mathcal{C}$, P(x) vrai " si on a pu démontrer qu'il est impossible que " $\forall x \in \mathcal{C}$, P(x) faux " . Le renseignement apporté par " $\exists x \in \mathcal{C}$, P(x) vrai " est illusoire si l'on a besoin de la construction d'un tel x. Aussi, j'emploie également les termes "on connait" (ou "on peut construire") $x \in \mathcal{C}$, P(x) vrai avec la signification : je connais (ou je peux fabriquer) un programme calculant des approximations rationnelles $\alpha(\varepsilon)$ de x .

I - CONCEPTS DE BASE

(Cf. [1] N. GASTINEL)
(Cf. [2] O. ABERTH)

1 - MACHINE :

La machine est définie par l'ensemble de ses programmes.
Un programme P est une liste comportant :

* un nombre fini (dépendant de P) de noms de mémoires.

Toute mémoire est susceptible de contenir n'importe quel nombre rationnel.
(Un nombre rationnel est représenté en mémoire par son signe et par un couple de deux nombres entiers).

* un nombre fini (dépendant de P) de noms d'instructions.

Il y a sept types d'instructions :

- Instructions arithmétiques :

(somme, différence, produit, quotient).

Exemple :

$$S_4 : \quad V_3 := V_2 + V_6 \quad ; \quad +1$$

S_4 est le nom de l'instruction (quatrième instruction d'un programme).

$V_3 := V_2 + V_6$ signifie que les contenus des mémoires de noms V_2 et V_6 vont être ajoutés et que le résultat de l'addition va être placé dans la mémoire de nom V_3 .

(Les contenus de V_2 et V_6 ne sont pas altérés par cette instruction mais le contenu initial de V_3 est perdu).
+1 est un indicateur (qui sera toujours un entier relatif non nul) : il faut maintenant exécuter l'instruction de nom S_{4+1} soit S_5 .

- Test du signe du contenu d'une mémoire :

Exemple :

$$S_8 \quad : \quad V_4 \ ; \ -3 \ , \ +2$$

S_8 est le nom de cette instruction (huitième instruction d'un programme).

V_4 ; -3 , +2 signifie que nous testons le signe du contenu de la mémoire V_4 si ce nombre est strictement positif il faudra exécuter l'instruction de numéro 8-3 soit S_5
si ce nombre est négatif ou nul il faudra exécuter l'instruction de numéro 8+2 soit S_{10}.

Le contenu de V_4 n'est pas altéré par cette instruction.

- Affectation dans une mémoire d'un rationnel quelconque :

Exemple :

$$S_6 \quad : \quad V_1 := -\frac{5}{3} \ ; \ -2$$

S_6 est le nom de cette instruction

$V_1 := -\frac{5}{3}$ signifie que le contenu de V_1 sera désormais $-\frac{5}{3}$
(le contenu initial de V_1 est perdu)

-2 est un indicateur (entier relatif non nul) : il faut maintenant exécuter S_{6-2} soit S_4 .

- Arrêt de la machine :

Exemple :

S_5 : Arrêt.

Si au cours du déroulement d'un programme on vient sur une telle instruction alors aucune autre instruction n'est exécutée (et les contenus des mémoires ne sont donc plus modifiés).

Exemples de programme :

$$P \begin{cases} S_1 : & V_1 \ ; +3 \ , +1 \\ S_2 : & V_2 := -1 \ ; +1 \\ S_3 : & V_1 := V_2 \times V_1 \ ; +1 \\ S_4 : & \underline{\text{Arrêt}}. \end{cases}$$

Pour toutes valeurs initiales des contenus des mémoires V_1 et V_2 ce programme s'arrête et si $q \in \mathbb{Q}$ est le contenu initial de V_1, le contenu de V_1 à l'arrêt est $|q|$.

On peut écrire des programmes qui ne s'arrêtent jamais, ou bien qui s'arrêtent seulement pour certaines valeurs initiales des contenus des mémoires utilisées :

Dans le programme P, remplaçons l'instruction S_2 par l'instruction S'_2 : $V_2 := -1 \ ; -1$ Nous obtenons un programme Q qui s'arrête si le contenu initial de V_1 est positif strictement, qui tourne sans fin sinon.

2 - APPLICATIONS PROGRAMMABLES.

Reprenons les exemples précédents.

Les programmes P et Q utilisent deux noms de mémoires V_1 et V_2. La mémoire V_2 est une mémoire de calcul et l'examen des valeurs initiale et finale de cette mémoire n'offre aucun intérêt. Pour mettre cela en évidence on aurait pu dire :

contenu initial de $V_1 = q \in \mathbb{Q}$
contenu initial de $V_2 = 0$

P réalise alors l'application : $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$q \to \underbrace{P(q)}_{\text{contenu de } V_1 \text{ à l'arrêt}} = |q|$$

Q réalise : $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$

$$q > 0 \to \begin{cases} Q(q) = q \\ \text{contenu de } V_1 \text{ à l'arrêt} \end{cases}$$

Si le contenu initial de V_1 est négatif ou nul, la machine ne s'arrête pas et nous ne pouvons pas parler de contenu de V_1 à l'arrêt. Nous dirons que Q(q) n'est pas défini.

D'où les <u>définitions</u> suivantes :

Soit P un programme utilisant k mémoires de noms $V_1, V_2, \ldots, V_k$ et soit $n \leq k$

Appelons $a_1 = c(V_1)$; $a_2 = c(V_2)$;...;$a_n = c(V_n)$ les contenus des mémoires $V_1, V_2, \ldots, V_n$ à l'état initial

et fixons :

$$c(V_{n+1}) = 0 = \ldots = c(V_k) = 0 \quad \text{à l'état initial}$$

On désignera par $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ le <u>contenu final</u> de la <u>mémoire V_1</u> si <u>la machine s'arrête</u> (c'est-à-dire, si, après avoir exécuté un nombre <u>fini</u> d'instructions du programme P, on vient sur une instruction d'arrêt). $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n'est pas défini dans le cas contraire.

Soit f une application :

$$f : \Omega \subset \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$$

Nous dirons que <u>f est une application programmable dans Ω</u> si on sait construire un programme P tel que :

$$\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega \ , \ P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ est défini et}$$

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ .$$

<u>Exemples</u> :

$x \to |x|$ est programmable dans $\mathbb{Q}$: il suffit d'utiliser le programme donné en exemple.

$(x,y) \to (x+y)$ est programmable dans $\mathbb{Q}^2$. C'est immédiat.

$x \to \frac{1}{x}$ est programmable dans $\mathbb{Q} - \{0\}$.

Nous pouvons générer une multitude d'autres exemples à l'aide du :

THEOREME DE COMPOSITION :

Soient g_i $(1 \leq i \leq p)$ p applications

$$g_i : \Omega_i \subset \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q} \text{ programmable dans } \Omega_i$$

Soit f une application :

$$f : \Omega \subset \mathbb{Q}^p \to \mathbb{Q} \text{ programmable dans } \Omega .$$

Alors l'application composée :

$$x \in \mathbb{Q}^n \to f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x))$$

est programmable dans l'ensemble :

$$\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{Q}^n \mid x \in \bigcap_{1 \leq i \leq p} \Omega_i \text{ et } (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x)) \in \Omega\}.$$

(Ce théorème est énoncé et démontré dans [1] et dans [2]).

En conséquence :

Si f et g sont deux applications de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ programmables dans $\Omega \subset \mathbb{Q}$:

* $f + g$; $f - g$; $f \times g$
* $|f|$
* $\text{Min } (f,g) = \frac{1}{2} (f+g-|f-g|)$

  $\text{Max } (f,g) = \frac{1}{2} (f+g+|f-g|)$

sont programmables dans Ω

* $\frac{f}{g}$ est programmable dans $\{x \in \Omega \mid g(x) \neq 0\}$.

3 - POSSIBILITES DE LA MACHINE :

(Les résultats rappelés ici sont dans [1] et [2]).

a) Tout programme P est caractérisé par un nombre entier noté N_P que nous appellerons <u>entier descriptif</u> du programme P.
Cela prouve que l'ensemble des programmes est dénombrable.

b) <u>THEOREME DE TURING</u> :

On peut construire un programme universel U tel que pour tout programme P d'entier descriptif N_P et pour tout nombre rationnel a :

$$U(N_P,a) = P(a) \quad \text{si} \quad P(a) \quad \text{est défini}$$

(c'est-à-dire si, partant de l'état initial :

$$c(V_1) = a \quad ; \quad c(V_2) = 0 = \ldots$$

Le déroulement du programme P nous amène, après exécution d'un nombre fini d'instructions sur une instruction d'arrêt).

c) En modifiant légèrement le programme universel on peut construire un programme $\bar{U}$ tel que pour tous nombres entiers m et n $(m \geq 1, n \geq 1)$ et pour tout rationnel a :

$\bar{U}(n,m,a) = 1$ si n est l'entier descriptif d'un certain programme P

et si, partant de l'état initial $c(V_1) = a$; $c(V_2) = 0 = \ldots$ le déroulement du programme P nous amène, après exécution de au plus m instructions, sur une instruction d'arrêt.

$\bar{U}(n,m,a) = 0$ si n n'est pas un entier descriptif de programme ou bien
si $n = N_Q$ et si, partant de l'état initial $c(V_1) = a$; $c(V_2) = 0 = \ldots$, le déroulement du programme Q, après exécution de m instructions ne permet pas encore de rencontrer une instruction d'arrêt.

d) La donnée du nombre maximum m d'instructions au bout duquel on désire un arrêt nous a permis de conclure.
Par contre, en l'absence de cette précision on notera :

THEOREME DE DAVIS :

Il est impossible de construire une application :

$F : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ programmable dans $\mathbb{N}$

telle que :

$F(n) = 1$ si n est l'entier descriptif d'un certain programme P et si $P(N_P)$ est défini.

$F(n) = 0$ si n n'est pas un entier descriptif de programme ou bien si $n = N_Q$ et si $Q(N_Q)$ n'est pas défini,

(c'est-à-dire, si, partant de l'état initial : $c(V_1) = N_Q$, $c(V_2) = 0 = \ldots$, le déroulement du programme Q ne permet pas de rencontrer une instruction d'arrêt après exécution d'un nombre fini d'instructions de Q).

Ce théorème joue un rôle important en analyse calculable.

II - CORPS $\mathcal{C}$ DES NOMBRES CALCULABLES

(Cf. [1] N. GASTINEL, [2] O. ABERTH, [3] S. MAZUR)

Intuitivement, la valeur numérique d'un nombre est "bien définie" si l'on est capable d'en fournir des approximations rationnelles pour des précisions rationnelles aussi fines que l'on veut .

Soit x la valeur numérique du nombre cherché et $\alpha(\varepsilon)$ un approximant de x pour la précision ε .
On obtient :

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \quad (\varepsilon > 0) \quad , \quad |\alpha(\varepsilon)-x| \leq \varepsilon$$

et par suite :

$$\forall\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}^+ \ , \ \forall\varepsilon_2 \in \mathbb{Q}^+ \ , \ |\alpha(\varepsilon_1)-\alpha(\varepsilon_2)| \leq \varepsilon_1+\varepsilon_2$$

Si $\beta(\varepsilon)$ est un autre approximant de x pour la précision ε :

$$|\alpha(\varepsilon)-\beta(\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \qquad \forall\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$$

d'où les définitions suivantes :

1 - ENSEMBLE Γ DES PROCESSUS CALCULABLES :

a) DEFINITIONS :

On dira que $\alpha : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$
$\varepsilon > 0 \to \alpha(\varepsilon)$

est un processus calculable (en abrégé : p.c.)
si :

* α est programmable dans $\mathbb{Q}^+$

* $\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}^+ , \forall \varepsilon_2 \in \mathbb{Q}^+ \quad |\alpha(\varepsilon_1)-\alpha(\varepsilon_2)| \leq \varepsilon_1+\varepsilon_2$

On dira que α et β sont deux processus calculables équivalents (en abrégé : $\alpha \sim \beta$)

si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \quad |\alpha(\varepsilon)-\beta(\varepsilon)| \leq 2\varepsilon$.

$\sim$ est une relation d'équivalence dans Γ .

Appelons $\Gamma/\sim$ ensemble des nombres calculables.

Un nombre calculable est une classe de processus calculables. En fait, nous nous autoriserons à parler d'une telle classe que si l'on en connait au moins un représentant.

L'application : $i : \begin{cases} \Gamma/\sim \to \mathbb{R} \\ \{\alpha\} \to \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha(\varepsilon) \end{cases}$ est une injection.

Nous pouvons donc assimiler $\Gamma/\sim$ à une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}$.

* $\mathcal{C}$ est dénombrable car l'ensemble des programmes est dénombrable.

* $\mathcal{C} \supset \mathbb{Q}$ car l'application : $\begin{cases} \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q} \\ \varepsilon \to q \end{cases}$ est un processus calculable.

b) THEOREME :

$a \in \mathbb{R}$ est un nombre calculable, si et seulement si on connait un processus calculable α tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+} : \quad |a-\alpha(\varepsilon)| \leq \varepsilon$$

(c'est ce qu'on avait pensé intuitivement).

Tous les nombres algébriques sont calculables (Cf. [1] N. GASTINEL).

Voici un nombre réel qui n'est pas un nombre calculable :

Soit $\ell = \lim_{n \to \infty} a_n$

avec $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3\bar{U}(i,n,i)}{10^i}$

($\bar{U}$ désigne le programme de I-3,c))

Le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ℓ est :

3 si $n = N_P$ et si $P(N_P)$ est défini

0 dans le cas contraire.

Si on sait construire un p.c. α tel que :

$$|\alpha(\varepsilon)-\ell| \leq \varepsilon \qquad \forall\ \varepsilon \in Q^{+}$$

Alors on sait écrire un programme qui détermine le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ℓ .

Pour cela il suffit de regarder le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de $\alpha(\frac{1}{10^{n+1}})$ qui ne peut être que 2,3,0 ou 9 puisque : $|\alpha(\frac{1}{10^{n+1}}) - \ell| \leq \frac{1}{10^{n+1}}$

(C'est réalisable puisque α est programmable et $\alpha(\frac{1}{10^{n+1}}) \in \mathbb{Q}$)

- si le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de $\alpha(\frac{1}{10^{n+1}})$ est 2 ou 3, c'est que le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ℓ est 3.

- si le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de $\alpha(\frac{1}{10^{n+1}})$ est 0 ou 9, c'est que le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ℓ est 0.

On saurait donc écrire le programme du théorème de DAVIS, ce qui est impossible.

2 - OPERATIONS SUR LES NOMBRES CALCULABLES

$\mathcal{C}$ est un corps totalement ordonné.

Dans [1] et [2] on définit dans Γ les opérations suivantes : (les démonstrations, assez longues, n'ont pas leur place ici).

a) $$(\alpha \pm \beta)(\varepsilon) = \alpha(\tfrac{\varepsilon}{2}) \pm \beta(\tfrac{\varepsilon}{2})$$

ces opérations sont compatibles avec $\sim$ et se conservent par l'injection de $\Gamma/\sim$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}$ ainsi muni, admet une structure de groupe additif dont l'élément neutre est $0 \in \mathbb{Q}$

(Dans $\Gamma/\sim$: $0 = \{$classe des p.c. α tels que : $|\alpha(\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \quad \forall\varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$).

b) * $$(\alpha.\beta)(\varepsilon) = \alpha(\tfrac{\varepsilon}{N(\varepsilon)}) \cdot \beta(\tfrac{\varepsilon}{N(\varepsilon)})$$

où l'application $\varepsilon \to N(\varepsilon)$ (programmable dans $\mathbb{Q}^+$) est définie par :

" $N(\varepsilon)$ est le plus petit entier tel que :

$$\frac{2\varepsilon}{N(\varepsilon)}\left(\frac{2\varepsilon}{N(\varepsilon)} + \left|\alpha(\tfrac{\varepsilon}{N(\varepsilon)})\right| + \left|\beta(\tfrac{\varepsilon}{N(\varepsilon)})\right|\right) \leq \varepsilon \text{ "}$$

$$* \quad \frac{\alpha}{\beta}(\varepsilon) = \frac{\alpha(\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon)})}{\beta(\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon)})}$$

définie, si $\beta \notin 0$ de $\Gamma/\sim$ ($\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ : |\alpha(\varepsilon)| > 2\varepsilon$) par :

" $M(\varepsilon)$ est le plus petit entier tel que :

1) $\quad |\beta(\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon)})| > \frac{2\varepsilon}{M(\varepsilon)}$

2) $\quad \frac{2\varepsilon}{M(\varepsilon)} (|\alpha(\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon)})| + |\beta(\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon)})|) \leq \varepsilon(|\beta(\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon)})| - \frac{2\varepsilon}{M(\varepsilon)})|\beta(\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon)})|$ "

Ces opérations sont compatibles avec $\sim$ et se conservent par l'injection de $\Gamma/\sim$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C} - \{0\}$ ainsi muni admet une structure de groupe multiplicatif dont l'élément neutre est $1 \in \mathbb{Q}$.

c) Outre l'avantage de munir $\mathcal{C}$ d'une structure de corps, ces formules présentent un intérêt certain pour le calcul numérique.

Connaissant des approximants $\alpha(\varepsilon)$ et $\beta(\varepsilon)$ de a et b, elles permettent de calculer des approximants de a+b, a-b, a.b, $\frac{a}{b}$.

Elles permettent également de faire un calcul d'erreurs :

si $|\alpha(\varepsilon)-a| \leq \varepsilon$ et $|\beta(\varepsilon)-b| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$,

Alors :

$$|(\alpha(\varepsilon) \pm \beta(\varepsilon)) - (a \pm b)| \leq 2\varepsilon$$

$$|\alpha(\varepsilon) . \beta(\varepsilon) - ab| \leq N(\varepsilon) . \varepsilon$$

et si $b \neq 0$:

$$\left|\frac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)} - \frac{a}{b}\right| \leq M(\varepsilon) . \varepsilon$$

où $M(\varepsilon)$ et $N(\varepsilon)$ sont calculés comme il est dit plus haut.

d) Il reste à munir $\mathcal{C}$ d'une structure d'ordre .
Si $\alpha \notin 0$ de $\Gamma/\sim$. Alors :

$$\exists\ \varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^+ \text{ tel que : } |\alpha(\varepsilon_0)| > 2\varepsilon_0$$

Donc $\exists\ n_0 \neq 0$, entier tel que $|\alpha(\frac{1}{n_0})| > \frac{2}{n_0}$

sinon : $\forall n, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ : |\alpha(\varepsilon)| \leq |\alpha(\frac{1}{n})| + \frac{1}{n} + \varepsilon \leq \varepsilon + \frac{3}{n}$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ : |\alpha(\varepsilon)| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon \Rightarrow \alpha \in 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

* si $|\alpha(\frac{1}{n_0})| > \frac{2}{n_0}$

nous dirons que $a = \{\alpha\}$ est un nombre calculable strictement positif ($a \in \mathcal{C}^+$).

* si $|\alpha(\frac{1}{n_0})| < -\frac{2}{n_0}$

nous dirons que $a = \{\alpha\}$ est un nombre calculable strictement négatif.

(On laisse au lecteur le soin de vérifier que cela est compatible avec $\sim$ et se transporte par l'injection de $\Gamma/\sim$ dans $\mathbb{R}$).

e) Enfin, si $x = \{\alpha\} \in \mathcal{C}$

$|x|$ définie par : $|x| = \{\varepsilon \to |\alpha(\varepsilon)|\}$

est telle que : $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$

3 - SUITE CALCULABLE DE NOMBRES CALCULABLES

a) DEFINITIONS :

Soit α une application :

$$\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$$

$$(n,\varepsilon) \to \alpha(n,\varepsilon)$$

* programmable dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+$
* telle que $\forall n : \varepsilon \to \alpha(n,\varepsilon)$ est un p.c.

Alors : $a_n = \{\alpha_n\} = \{\varepsilon \to \alpha(n,\varepsilon)\}$ est une suite calculable (de nombres calculables).

Soit $\ell \in \mathcal{C}$, nous dirons que (a_n), suite calculable converge vers ℓ (au sens calculable).
Si l'on connait une application programmable :

$$h : \{\frac{1}{p},\ p \geq 1,\ p \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{Q}^+$$

$$\frac{1}{p} \longrightarrow h(\frac{1}{p}) > 0$$

telle que :

$$\forall p,\ n \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \frac{1}{p}$$

Un tel ℓ est unique (c'est évident).

b) THEOREME : (CEÏTIN)

La condition de CAUCHY (calculable) :

" On connait $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p})$ programmable telle que :

$$\forall p,\ {}_{n}^{m} \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \frac{1}{p} \quad "$$

est une condition nécessaire et suffisante de convergence calculable.

La condition suffisante de ce théorème est particulièrement intéressante.
Elle se démontre ([1] et [2]) à l'aide des constructions suivantes :

Soit $\alpha(n,\varepsilon)$ définissant la suite calculable (a_n)

$n(\varepsilon)$ le plus petit entier $\geq \frac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q}^+)$

$k(\varepsilon)$ le plus petit entier $\geq h(\frac{1}{n(\varepsilon)})$

Par le théorème de composition des applications programmables $\varepsilon \to k(\varepsilon)$ est programmable dans $\mathbb{Q}^+$

$$\text{Soit } \alpha : \varepsilon \to \alpha(\varepsilon) = \alpha(k(\tfrac{\varepsilon}{2}), \tfrac{\varepsilon}{2})$$

α est un processus calculable ([1] ou [2])

Soit ℓ le nombre calculable défini par α

$$|a_n-\ell| \leq |a_n-a_{k(\frac{1}{p})}| + |a_{k(\frac{1}{p})}-\alpha(k(\tfrac{1}{p}),\tfrac{1}{p})| + |\alpha(k(\tfrac{1}{p}),\tfrac{1}{p}) -\ell|$$

Par le théorème de caractérisation d'un nombre calculable :

$$|a_n-\ell| \leq |a_n-a_{k(\frac{1}{p})}| + \frac{1}{p} + \frac{2}{p}$$

Donc, par la condition de CAUCHY :

$$n \geq h(\tfrac{1}{p}) \Rightarrow |a_n-\ell| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{2}{p}$$

ce qui entraîne :

$$n \geq h(\tfrac{1}{4p}) \Rightarrow |a_n-\ell| \leq \frac{1}{p}$$

$\frac{1}{p} \to h(\frac{1}{4p})$ est programmable. Nous venons de démontrer la convergence (calculable) de (a_n) vers ℓ .

c) On déduit de ce théorème que :

Si $x \in \mathbb{R}$ possède la propriété :

" On connait une suite calculable (a_n) et une application $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p})$ programmable, telles que :

$\forall p \ , \ n \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow |a_n - x| \leq \frac{1}{p}$ "

Alors $x \in \mathcal{C}$ (c'est-à-dire que l'on sait construire un p.c. α tel que : $|x-\alpha(\varepsilon)| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$) .

En effet :

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - x| + |x - a_m|$$

Donc : $\forall p \ , \ {}^{m}_{n} \geq h(\frac{1}{2p}) \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \frac{1}{p}$

Une limite étant unique on a :

$x = \{\alpha\}$ où α est le p.c. construit au théorème de CEÏTIN.

4 - COMPARAISON DE LA CONVERGENCE CALCULABLE ET DE LA CONVERGENCE DANS $\mathbb{R}$.

Les résultats suivants sont formulés par S. MAZUR dans [3]. Ils nous serons très utiles par la suite.
On notera désormais :

$a_n \to \ell$ la convergence calculable

et $a_n \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell$ la convergence au sens de l'analyse classique.

Les suites (a_n) et (b_n) seront <u>toujours</u> des suites calculables.

a) Si $a_n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0$

Si (a_n) est décroissante au sens large.

Alors $a_n \to 0$

Preuve :

Soit $\alpha(n,\varepsilon)$ définissant la suite calculable décroissante (a_n)

$\forall n$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ $\qquad |a_n - \alpha(n,\varepsilon)| \leq \varepsilon$

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$

* $\exists\, n_o$ tel que $|\alpha(n_o, \frac{1}{3p})| \leq \frac{2}{3p}$

sinon $\forall n$ $|\alpha(n,\frac{1}{3p})| > \frac{2}{3p}$

et alors : $\forall n$ $\quad |a_n| \geq |\alpha(n,\frac{1}{3p})| - \frac{1}{3p} > \frac{2}{3p} - \frac{1}{3p}$

$\Rightarrow \forall n,\ |a_n| > \frac{1}{3p}$

ce qui est impossible puisque $a_n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0$

* Soit n_p le plus petit entier tel que :

$|\alpha(n_p,\frac{1}{3p})| \leq \frac{2}{3p}$

l'application $p \to n_p$ est programmable ($p \geq 1$, entier).

En effet, d'après le théorème de composition des applications programmables

$(n,p) \to (|\alpha(n,\frac{1}{3p})| - \frac{2}{3p})$ est programmable pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$.

Soit P un programme réalisant ce calcul, utilisant $V_1, V_2, \ldots, V_k$ pour noms de mémoires.

Si les contenus initiaux de V_1 et V_2 sont :

$c(V_1) = n \quad , \quad c(V_2) = p$

le contenu de la mémoire V_1, quand on arrive sur une instruction d'arrêt au cours du déroulement de P, est

$$c(V_1) = (|\alpha(n,\tfrac{1}{3p})| - \tfrac{2}{3p})$$

Introduisons les mémoires supplémentaires : $V_{k+1}, V_{k+2}, V_{k+3}$ et V_{k+4}
Partons de l'état initial :

$$c(V_1) = p \quad ; \quad c(V_2) = 0 = \ldots = c(V_{k+4}) = 0$$

et écrivons le programme suivant :

S_1 : $V_{k+1} := 0$; 1

S_2 : $V_{k+2} := 1$; 1

S_3 : $V_{k+3} := 0$; 1

S_4 : $V_{k+4} := V_1 + V_{k+3}$; 1 $\qquad (c(V_{k+4})=p)$

S_5 : $V_2 := V_{k+4} + V_{k+3}$; 1 $\qquad (c(V_2)=p)$

S_6 : $V_1 := V_{k+1} + V_{k+3}$; 1 $\qquad$ (Appelons n le contenu de V_1)

S_7 : Première instruction de P

S_8 : Deuxième instruction de P
sauf si Arrêt

$\vdots \qquad \vdots$

etc....

On rencontre en S_j la première instruction Arrêt du programme P.
Nous n'écrirons pas cette instruction mais le sous programme :

S_j : $V_1;3,1$ $\qquad$ (teste si $(|\alpha(n,\tfrac{1}{3p})| - \tfrac{2}{3p}) \leq 0$)

S_{j+1} : $V_1:=V_{k+1}+V_{k+3};1$ $\qquad$ (si oui on rentre la valeur n dans V_1)

S_{j+2} : Arrêt $\qquad$ (et on s'arrête)

S_{j+3} : $V_{k+1}:=V_{k+1}+V_{k+2};5-j-3$ $\qquad$ (si non on augmente n d'une unité et on repart en S_5)

On continue :

S_{j+4} : instruction suivante du programme P sauf si c'est encore un arrêt

Si en $S_{j+3+\ell}$ on rencontre une instruction Arrêt de P on remplace cette instruction par :

$$S_{j+3+\ell} \quad : V_{k+3} := V_{k+3} + V_{k+3} ; -3-\ell$$

qui renvoie au sous programme

etc...

L'écriture du programme est terminée quand on a épuisé les instructions de P.

Partant de $n = 0$, ce programme teste successivement :

$$\left(\left|\alpha\left(n,\frac{1}{3p}\right)\right| - \frac{2}{3p}\right) \leq 0$$

et s'arrête dès que la condition est réalisée ce qui arrive forcément après l'exécution d'un nombre fini d'instructions puisque :

$$\exists\ n_o \text{ tel que } \left(\left|\alpha\left(n_o,\frac{1}{3p}\right)\right| - \frac{2}{3p}\right) \leq 0 \ .$$

Ce programme réalise $p \to n_p$.

Par suite : $\frac{1}{p} \to n_p = h(\frac{1}{p})$ est programmable et, puisque (a_n) est décroissante, il vient :

$$n \geq n_p \Rightarrow a_n \leq a_{n_p} \leq \left|\alpha\left(n_p,\frac{1}{3p}\right)\right| + \frac{1}{3p} \leq \frac{2}{3p} + \frac{1}{3p}$$

Donc :

$$\forall p \ , \ n \geq h\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow a_n \leq \frac{1}{p}$$

b) Si $a_o \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_o$

et si $b_n - a_n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0$

Alors $x \in \mathbb{R}$, limite au sens usuel de la suite calculable (a_n), est un nombre calculable tel que $a_n \to x$ (et $b_n \to x$).

$(b_n - a_n)$ est une suite calculable décroissante et $b_n - a_n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0$

Donc, d'après la proposition précédente, on peut construire $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p})$ programmable telle que :

$$\forall p,\ n \geq h(\tfrac{1}{p}) \Rightarrow b_n - a_n \leq \tfrac{1}{p}$$

par suite, comme $x - a_n \leq b_n - a_n$

$$n \geq h(\tfrac{1}{p}) \Rightarrow x - a_n \leq \tfrac{1}{p}$$

D'après II, 3, c) on a bien $x \in \mathcal{C}$ et $a_n \to x$.

c) Si (a_n) suite calculable converge vers 0 au sens de l'analyse classique alors, on peut construire $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \to k(n)$

programmable, strictement croissante, telle que :

$$a_{k(n)} \to 0$$

($a_{k(n)}$ est une suite calculable extraite de la suite calculable (a_n)).

Preuve :

Soit $\alpha(n,\varepsilon)$ définissant (a_n)

et soit $p \in \mathbb{N}$

$*$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists\ n_o > m$ tel que : $|\alpha(n_o,\frac{1}{3p})| \leq \frac{2}{3p}$

Sinon, $\exists$ m tel que : $\forall n > m$, $|\alpha(n,\frac{1}{3p})| > \frac{2}{3p}$

et alors : $|a_n| \geq |\alpha(n,\frac{1}{3p})| - \frac{1}{3p} > \frac{2}{3p} - \frac{1}{3p}$, $\forall n > m$

$\Rightarrow$ $\forall n > m$, $|a_n| > \frac{1}{3p}$ ce qui est impossible puisque $|a_n| \underset{\mathbb{R}}{\rightarrow} 0$.

$*$ Soit k l'application strictement croissante de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$k(0) = 1$

k(n) plus petit entier strictement supérieur à k(n-1) tel que :

$|\alpha(k(n),\frac{1}{3n})| \leq \frac{2}{3n}$

k est programmable dans $\mathbb{N}$, le programme à écrire s'inspire du programme écrit au a). Nous allons le détailler.

Soit P un programme calculant $|\alpha(\ell,\frac{1}{3m})| - \frac{2}{m}$ et supposons que P utilise $V_1,V_2,\ldots,V_k$ pour noms de mémoires. On introduit les mémoires supplémentaires : $V_{k+1},V_{k+2},V_{k+3},V_{k+4},V_{k+5}$ et on part de l'état initial :

$$c(V_1) = n \quad ; \quad c(V_2) = c(V_3) = \ldots = c(V_{k+5}) = 0$$

écrivons le programme :

S_1 : $V_{k+1}:=2;1$

S_2 : $V_{k+2}:=1;1$

S_3 : $V_{k+3}:=0;1$

S_4 : $V_{k+4}:=1;1$

S_5 : $V_{k+5}:=V_1+V_{k+3};1$ $\quad$ $(c(V_{k+5})=n)$

S_6 : $V_2:=V_{k+4}+V_{k+3};1$ $\quad$ $(c(V_2)=m)$

S_7 : $V_1:=V_{k+1}+V_{k+3};1$ $\quad$ $(c(V_1)=\ell)$

comme au a) si on rencontre en S_j un Arrêt de P :

S_j : $V_1;1,2$	(teste si $\|\alpha(\ell,\frac{1}{3m})\| - \frac{2}{3m} \leq 0$)
S_{j+1} : $V_{k+1}:=V_{k+1}+V_{k+2};6-j-1$	(si non augmenter ℓ d'une unité et partir en S_6)
S_{j+2} : $V_2:=V_{k+5}-V_{k+4};1$	(si oui mettre n-m dans V_2)
S_{j+3} : $V_2;1,3$	(teste si $n-m \leq 0$)
S_{j+4} : $V_{k+4}:=V_{k+4}+V_{k+2};1$	(si non augmenter m d'une unité)
S_{j+5} : $V_{k+1}:=V_{k+1}+V_{k+2};6-j-5$	(augmenter ℓ d'une unité et partir en S_6)
S_{j+6} : $V_1:=V_{k+1}+V_{k+3};1$	(si oui rentrer ℓ dans V_1)
S_{j+7} : Arrêt	(et s'arrêter).

Puis on continue comme au a).

Partant de $\ell = 2$ ($> k(0) = 1$) et $m = 1$ ce programme teste si : $|\alpha(\ell,\frac{1}{3m})| - \frac{2}{3m} \leq 0$, pour des valeurs de ℓ strictement supérieures à $k(m-1)$. Il s'arrête dès que l'on a trouvé $\ell > k(n-1)$ tel que : $|\alpha(\ell,\frac{1}{3n})| - \frac{2}{3n} \leq 0$, ce qui arrive forcément après l'exécution d'un nombre fini d'instructions puisque :

$$\forall p \text{ et } \forall m \text{ , } \exists\, n_o > m \text{ tel que : } |\alpha(n_o,\tfrac{1}{3p})| \leq \frac{2}{3p} \quad .$$

* On obtient alors :

$$|a_{k(n)}| \leq |\alpha(k(n),\tfrac{1}{3n})| + \frac{1}{3n} \leq \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\forall p,\ k(n) \geq \frac{1}{p} \Rightarrow |a_{k(n)}| \leq \frac{1}{p}$$

ce qui prouve que $a_{k(n)} \to 0$, puisque $p \to \frac{1}{p}$ est programmable (p entier supérieur ou égal à 1).

d) Soient (a_n) et (b_n) suites calculables et $x \in \mathbb{R}$, tels que :

$$a_n \leq x \qquad \forall n$$

$$b_n \geq x \qquad \forall n$$

$$a_n \underset{\mathbb{R}}{\to} x$$

$$b_n \underset{\mathbb{R}}{\to} x$$

Alors $x \in \mathcal{C}$ car on peut construire $k(n)$ programmable strictement croissante telle que $a_{k(n)} \to x$ (et $b_{k(n)} \to x$).

Ce résultat présente l'intérêt pratique suivant : des considérations relativement simples, d'analyse classique, permettent de trouver le processus calculable définissant x.
La démonstration est évidente :

$$b_n - a_n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0 ,$$

donc d'après c) on peut construire $k(n)$ programmable strictement croissante telle que :

$$k(n) \geq \frac{1}{p} \Rightarrow b_{k(n)} - a_{k(n)} \leq \frac{1}{p}$$

Or : $$x - a_{k(n)} \leq b_{k(n)} - a_{k(n)}$$

Donc : $$k(n) \geq \frac{1}{p} \Rightarrow x - a_{k(n)} \leq \frac{1}{p}$$

Donc d'après II, 3, c) on peut déterminer un p.c. α tel que $x = \{\alpha\}$.

III - FONCTIONS CALCULABLES
SUITES CALCULABLES DE FONCTIONS CALCULABLES

Intuitivement, la valeur numérique d'une fonction est "bien définie", si pour tout x, on peut calculer des approximants rationnels $F(x,\varepsilon)$ de $f(x)$ tels que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \quad (\varepsilon > 0) \;, \quad |F(x,\varepsilon) - f(x)| \leq \varepsilon \;.$$

L'ennui, est que, sauf si on travaille dans $\mathbb{Q}$, x n'est connu que par des approximants : $|\alpha(\varepsilon) - x| \leq \varepsilon \quad \forall\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$.
On ne peut pas rentrer x en données, il faut donc rentrer globalement α .
La façon la plus générale de caractériser α est de le caractériser par l'entier descriptif N_α d'un programme réalisant le p.c. α .

D'où les définitions suivantes données dans [1] et [2].

1 - FONCTION CALCULABLE :

Soient $I = (a,b)$ un intervalle de $\mathcal{C}$
F une application programmable : $F : \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$

$$(n,\varepsilon) \to F(n,\varepsilon)$$

Soit $x = \{\alpha\} \in I$ et N_α l'entier descriptif d'un programme réalisant α .

On suppose

* $\forall x \in I \quad \varepsilon \to F(N_\alpha,\varepsilon)$ est un p.c.

* $\alpha \sim \beta \Rightarrow (\varepsilon \to F(N_\alpha,\varepsilon)) \sim (\varepsilon \to F(N_\beta,\varepsilon))$

Posons $f : I \to \mathcal{C}$

$x = \{\alpha\} \to f(x) = \{\varepsilon \to F(N_\alpha,\varepsilon)\}$

f est une <u>fonction calculable</u> définie dans I .

Cette définition s'étend aux fonctions calculables de plusieurs variables en posant :

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \{\varepsilon \to F(N_{\alpha_1},N_{\alpha_2},\dots,N_{\alpha_n},\varepsilon)\}$$

Dans [1] et [2] on établit facilement les <u>propriétés</u> suivantes :

* Si f et g sont deux fonctions calculables définies dans I ,

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$

sont des fonctions calculables définies dans I.

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est une fonction calculable définie dans I

si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.

* Si f et g sont deux fonctions calculables :

$g : I \to I_1$

$f : I_1 \to \mathcal{C}$

Alors : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ est une fonction calculable définie dans I .

Voici quelques exemples de fonctions calculables :

* $x \to x$ est définie dans $\mathcal{C}$ par $U(N_\alpha,\varepsilon)$ où U désigne le programme universel de TURING.

* $x \to a \in \mathcal{C}$ est définie dans $\mathcal{C}$ par $U(N_\gamma,\varepsilon)$ avec $a = \{\gamma\}$.

* Un polynôme à coefficients calculables est donc une fonction calculable définie dans $\mathcal{C}$.

* Connaissant un programme P réalisant α , il est facile de construire un programme réalisant $|\alpha|$: $\varepsilon \to |\alpha(\varepsilon)|$, il suffit pour cela d'introduire dans le déroulement de P, et à la place des instructions d'Arrêt, le programme décrit au début réalisant $q \to |q|$.

Les auteurs de [1] et [2] décrivent un procédé automatique pour coder P, on a donc un programme Q tel que :

$$Q(N_\alpha) = N_{|\alpha|}$$

(il suffit de remplacer les codes des instructions Arrêt de P par le code du programme réalisant $q \to |q|$) .

$x \to |x|$ est donc définie dans $\mathcal{C}$ par $U(Q(N_\alpha),\varepsilon) = U(N_{|\alpha|},\varepsilon)$.

Attention :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

mais il serait faux de penser que la donnée de :

$$\begin{cases} x \to x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x \to -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

définit la fonction calculable $x \to |x|$ car il est impossible de savoir si un nombre calculable quelconque est nul ou non ! (voir pourquoi au paragraphe IV).

* Par suite :

$$(x,y) \to \text{Max}\,(x,y) = \frac{1}{2}\,(x+y+|x-y|)$$

$$(x,y) \to \text{Min}\,(x,y) = \frac{1}{2}\,(x+y-|x-y|)$$

sont des fonctions calculables définies dans $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$.

* et si f est définie dans I par $F(N_\alpha,\varepsilon)$ alors $|f|$ est définie dans I par $|F(N_\alpha,\varepsilon)|$.

<u>THEOREME</u> :

> Si f est une fonction calculable définie dans I.
> Si (a_n) est une suite calculable telle que $a_n \in I \quad \forall n$
> Alors $(f(a_n))$ est une suite calculable.

Soit $\alpha(n,\varepsilon)$ définissant (a_n) et P un programme réalisant : $\varepsilon \to \alpha(n,\varepsilon)$

Soient $V_1,V_2,\ldots,V_k$ les noms des mémoires utilisées par P. Partons de l'état initial :

$$c(V_1) = \varepsilon \quad , \quad c(V_2) = \ldots = c(V_k) = 0$$

et appelons P_n le programme suivant :

S_1 : $V_2{:=}V_1;1$ $\qquad$ (V_2 contient ε)

S_2 : $V_1{:=}n;1$ $\qquad$ (V_1 contient n)

S_3 : première instruction de P

S_4 : deuxième instruction de P

etc...

P_n réalise : $\varepsilon \to \alpha(n,\varepsilon)$ (qui est un p.c.).

L'entier descriptif N_{P_n} s'obtient automatiquement à partir de N_P (il suffit d'insérer dans le code de P, les codes de S_1 et S_2) (voir [1] ou [2]) .

On a donc un programme G tel que :

$$G(n) = N_{P_n}$$

Soit $F(N_\alpha,\varepsilon)$ définissant f.

L'application : $(n,\varepsilon) \to F(G(n),\varepsilon) = F(N_{P_n},\varepsilon)$ est donc programmable et pour tout n fixé, $\varepsilon \to F(N_{P_n},\varepsilon)$ est un processus calculable.

Donc $F(N_{P_n},\varepsilon)$ réalise une suite calculable.

Et, puisque N_{P_n} est l'entier descriptif d'un programme calculant $\varepsilon \to \alpha(n,\varepsilon)$:

$$f(a_n) = \{\varepsilon \to F(N_{P_n},\varepsilon)\}$$

c.q.f.d.

2 - SUITE CALCULABLE DE FONCTIONS CALCULABLES :

Par analogie avec les suites calculables de nombres calculables je définis une suite calculable de fonctions calculables définies dans un intervalle I par :

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$$

$$(n,m,\varepsilon) \longrightarrow F(n,m,\varepsilon)$$

* programmable dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+$
* $x = \{\alpha\} \in I \to f_n(x) = \{\varepsilon \to F(n,N_\alpha,\varepsilon)\}$ est une fonction calculable définie dans I pour tout $n \in \mathbb{N}$.
* $(n,\varepsilon) \to F(n,N_\alpha,\varepsilon)$ définit une suite calculable de nombres calculables pour tout $x = \{\alpha\}$ fixé dans I .

Nous dirons que la suite (f_n) est une suite calculable de fonctions définies dans I.

Soit f une fonction calculable définie dans I.

Nous dirons que (f_n) <u>converge simplement sur I vers f</u> si l'on connait h :

$$h : (\frac{1}{p},x) \to h(\frac{1}{p},x) \in \mathcal{C}^+$$

(ensemble des nombres calculables strictement positifs)

(définie pour p entier ≥ 1 par $H(\frac{1}{p},N_\alpha,\varepsilon)$ programmable telle que pour tout p fixé : $x \in I \to h(\frac{1}{p},x)$ est une fonction calculable dans I), telle que :

$$\forall x \in I, \forall p \text{ entier } \geq 1,\ n \geq h(\frac{1}{p},x) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{p}$$

<u>THEOREME</u> :

La condition de CAUCHY dans I :

" On connait h : $(\frac{1}{p},x) \to h(\frac{1}{p},x) \in \mathcal{C}^+$ (définie comme précédemment) telle que :

$$\forall x \in I, \forall p \text{ entier } \geq 1,\ {}^m_n \geq h(\frac{1}{p},x) \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)| \leq \frac{1}{p} \text{ "}$$

est une condition nécessaire et suffisante de convergence simple sur I.

Plus précisément :

Si (f_n) est de CAUCHY dans I, alors, on peut construire $F(N_\alpha,\varepsilon)$ programmable définissant f(x) fonction calculable dans I telle que :

$$\forall x \in I, \forall p \text{ entier } \geq 1,\ n \geq h(\frac{1}{4p},x) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{p}$$

La condition est nécessaire : c'est évident.

La condition est suffisante.

Soient $F(n,m,\varepsilon)$ définissant (f_n) et $H(\frac{1}{p},m,\varepsilon)$ définissant h $x = \{\alpha\} \in I$, N_α l'entier descriptif d'un programme calculant α.

* Soient $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ $(\varepsilon > 0)$ et $n(\varepsilon)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$.

$k(\varepsilon,\alpha)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\varepsilon + |H(\frac{1}{n(\varepsilon)},N_\alpha,\varepsilon)|$

$\varepsilon \to k(\varepsilon,\alpha)$ est programmable

donc, G définie par :

$G(N_\alpha,\varepsilon) = F(k(\frac{\varepsilon}{2},\alpha),N_\alpha,\frac{\varepsilon}{2})$ est programmable.

Nous allons montrer que G définit une fonction calculable

* $\varepsilon \to G(N_\alpha,\varepsilon)$ est un p.c. car :

$$|G(N_\alpha,2\varepsilon_1)-G(N_\alpha,2\varepsilon_2)| \leq |F(k(\varepsilon_1,\alpha),N_\alpha,\varepsilon_1) - f_{k(\varepsilon_1,\alpha)}(x)|$$
$$+ |f_{k(\varepsilon_1,\alpha)}(x) - f_{k(\varepsilon_2,\alpha)}(x)| + |f_{k(\varepsilon_2,\alpha)}(x) - F(k(\varepsilon_2,\alpha),N_\alpha,\varepsilon_2)$$

puisque $f_n(x) = \{\varepsilon \to F(n,N_\alpha,\varepsilon)\}$:

$$|G(N_\alpha,2\varepsilon_1) - G(N_\alpha,2\varepsilon_2)| \leq \varepsilon_1 + |f_{k(\varepsilon_1,\alpha)}(x) - f_{k(\varepsilon_2,\alpha)}(x)| + \varepsilon_2$$

$$k(\varepsilon,\alpha) \geq \varepsilon + |H(\frac{1}{n(\varepsilon)},N_\alpha,\varepsilon)| \geq h(\frac{1}{n(\varepsilon)},x)$$

Donc, avec i = 1 ou 2 :

$$k(\varepsilon_i,\alpha) \geq \mathrm{Min}\ (h(\frac{1}{n(\varepsilon_1)},x)\ ;\ h(\frac{1}{n(\varepsilon_2)},x))$$

et d'après la condition de CAUCHY :

$$|f_{k(\varepsilon_1,\alpha)}(x) - f_{k(\varepsilon_2,\alpha)}(x)| \leq \mathrm{Max}\ (\frac{1}{n(\varepsilon_1)}\ ;\ \frac{1}{n(\varepsilon_2)}) \leq \mathrm{Max}\ (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

Donc : $|G(N_\alpha,2\varepsilon_1) - G(N_\alpha,2\varepsilon_2)| \leq \varepsilon_1 + \mathrm{Max}\ (\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \varepsilon_2 \leq 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ ce qui prouve que $\varepsilon \to G(N_\alpha,\varepsilon)$ est un p.c.

* Soit β un p.c. équivalent à α montrons que les p.c : $\varepsilon \to G(N_\alpha,\varepsilon)$ et $\varepsilon \to G(N_\beta,\varepsilon)$ sont équivalents :

$$|G(N_\beta,2\varepsilon) - G(N_\alpha,2\varepsilon)| \leq |F(k(\varepsilon,\beta),N_\beta,\varepsilon) - f_{k(\varepsilon,\beta)}(x)|$$

$$+ |f_{k(\varepsilon,\beta)}(x) - f_{k(\varepsilon,\alpha)}(x)| + |f_{k(\varepsilon,\alpha)}(x) - F(k(\varepsilon,\alpha),N_\alpha,\varepsilon)|$$

$$\alpha \sim \beta \quad \Rightarrow x = \{\alpha\} = \{\beta\} \Rightarrow \{\varepsilon \to H(\tfrac{1}{p},N_\alpha,\varepsilon)\} \sim \{\varepsilon \to H(\tfrac{1}{p},N_\beta,\varepsilon)\}$$

Donc :

$$k(\varepsilon,\alpha) \geq \varepsilon + |H(\tfrac{1}{n(\varepsilon)},N_\alpha,\varepsilon)| \geq h(\tfrac{1}{n(\varepsilon)},x)$$

$$k(\varepsilon,\beta) \geq \varepsilon + |H(\tfrac{1}{n(\varepsilon)},N_\beta,\varepsilon)| \geq h(\tfrac{1}{n(\varepsilon)},x)$$

et alors par la condition de CAUCHY :

$$|G(N_\beta,2\varepsilon) - G(N_\alpha,2\varepsilon)| \leq \varepsilon + \frac{1}{n(\varepsilon)} + \varepsilon \leq 3\varepsilon \leq 4\varepsilon$$

* Donc f : $x = \{\alpha\} \in I \to f(x) = \{\varepsilon \to G(N_\alpha,\varepsilon)\}$

est une fonction calculable dans I.

Montrons la convergence calculable de (f_n) vers f sur I :

Soit p entier ≥ 1 :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{k(\frac{1}{4p},\alpha)}(x)| + |f_{k(\frac{1}{4p},\alpha)}(x) - G(N_\alpha,\tfrac{1}{2p})|$$

$$+ |G(N_\alpha,\tfrac{1}{2p}) - f(x)|$$

$$G(N_\alpha,\tfrac{1}{2p}) = F(k(\tfrac{1}{4p},\alpha),N_\alpha,\tfrac{1}{4p}) .$$

D'où, d'après les propriétés des p.c. :

$$|f_n(x)-f(x)| \leq |f_n(x)-f_{k(\frac{1}{4p},\alpha)}(x)| + \frac{1}{4p} + \frac{1}{2p}$$

Puisque $k(\frac{1}{4p},\alpha) \geq h(\frac{1}{4p},x)$, il vient en utilisant la condition de CAUCHY :

$$\forall x \in I,\ \forall p \text{ entier} \geq 1,\ n \geq h(\tfrac{1}{4p},x) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{4p} + \frac{1}{4p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p} .$$

c.q.f.d.

Je définis de même la <u>convergence uniforme</u> sur I de la suite calculable de fonctions (f_n) définies dans I, vers f fonction calculable définie dans I par :

" On connait $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p}) \in \mathbb{Q}^+$ programmable telle que :

$\forall x \in I, \forall p$ entier ≥ 1, $n \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{p}$ "

et comme précédemment :

si on connait : $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p}) \in \mathbb{Q}^+$ programmable telle que :

$\forall x \in I, \forall p$ entier ≥ 1, ${m \atop n} \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)| \leq \frac{1}{p}$

Alors on peut construire une fonction calculable f(x) telle que :

$\forall x \in I, \forall p$ entier ≥ 1, $n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{p}$.

Plus généralement :

Une suite calculable de fonctions calculables de p variables $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ définies sur I^P est définie par $F(n,N_{\alpha_1},N_{\alpha_2},\dots,N_{\alpha_p},\varepsilon)$ programmable dans $\mathbb{N}^{P+1}\times\mathbb{Q}^+$.
Les résultats précédents s'étendent de la même façon.

3 - APPLICATION : FONCTIONS CALCULABLES ANALYTIQUES

THEOREME :

Soit (a_n) une suite calculable de nombres calculables.
Si l'on connait $M \in \mathcal{C}^+$ $(M > 0)$ et $x_o \in \mathcal{C}^+$ $(x_o > 0)$ tels que :

$$|a_n x_o^n| \leq M \qquad \forall n$$

Alors, la suite calculable de polynômes $\sum_{p=1}^{n} a_p x^p$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[-kx_o, kx_o]$, $k \in \mathcal{C}^+$, $0 < k < 1$.

Et par conséquent, la fonction $f(x) = \sum_{1}^{\infty} a_p x^p$ est une fonction calculable définie dans cet intervalle.

Preuve :

Soient $x \in [-kx_o, +kx_o]$, $m \geq n$ entiers

$$\left|\sum_{p=n}^{m} a_p x^p\right| \leq \sum_{p=n}^{m} |a_p x_o^p| \left|\frac{x}{x_o}\right|^p \leq M \sum_{p=n}^{m} k^p \leq \frac{M}{1-k} k^n$$

k est un nombre calculable donc : $(\frac{M}{1-k} k^n)$ est une suite calculable,

$0 < k < 1$ => cette suite converge vers 0 au sens de l'analyse classique, en décroissant.

Par conséquent, on peut construire $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p})$ programmable telle que :

$$n \geq h(\tfrac{1}{p}) \Rightarrow \frac{M}{1-k} k^n \leq \frac{1}{p} \qquad \text{(II,4,a))}$$

Donc :

$\forall x \in [-kx_o ; +kx_o]$ et $\forall p$ entier ≥ 1 :

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \geq h(\tfrac{1}{p}) \Rightarrow \left|\sum_{i=n}^{m} a_i x^i\right| \leq \frac{1}{p} \quad .$$

c.q.f.d.

Utilisons ce résultat pour montrer que :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

est une fonction calculable dans $\mathcal{C}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{k^n}{n!} \times \frac{(n+1)!}{k^{n+1}} = \frac{n+1}{k} \quad \begin{cases} < 1 & \text{si} \quad n+1 < k \\ \geq 1 & \text{si} \quad n+1 \geq k \end{cases}$$

Prenons $x_o = k$, $M = \frac{k^k}{k!}$.

Nous sommes dans les conditions du théorème précédent donc e^x est une fonction calculable dans $[-k+1;k-1]$.

Un raisonnement analogue montre que les fonctions classiques sin x, cos x, Log x ... sont des fonctions calculables sur des intervalles de $\mathcal{C}$ correctement choisis.

IV - METHODES EFFECTIVES DE CALCUL NUMERIQUE

Soit $\mathcal{P}$ une proposition : $\mathcal{P}(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Je suppose que l'on désire une valeur numérique d'un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie.

Nous dirons qu'une méthode numérique pour trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie est une méthode effective de calcul numérique si elle permet de construire un processus calculable α tel que $x = \{\alpha\} \Rightarrow \mathcal{P}(x)$ vraie.

Par suite, si une méthode numérique n'est pas programmable (avec la machine à capacité variable définie au début), elle n'a aucune chance d'être une méthode effective (un exemple est donné en IV,2).

Je suppose maintenant que l'on désire la valeur logique de $\mathcal{P}$ pour tous les $x \in E \subset \mathcal{C}$.

Nous dirons qu'une méthode numérique pour savoir $\forall x \in E$, si $\mathcal{P}(x)$ est vraie ou fausse est une méthode effective si elle permet de construire $F(N_\alpha,\varepsilon)$ définissant dans E une fonction calculable f :

$$f : E \to \{0,1\}$$

telle que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}(x)$ fausse

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{P}(x)$ vraie .

Ces notions introduites dans [1], [2] et [4] me semblent bien adaptées à la réalité du calcul numérique sur ordinateur. Il faudra prendre garde à ne pas faire jouer un rôle particulier à $\mathbb{Q}$ dans la dernière définition

1 - THEOREME DE LA PROPOSITION VRAIE A LA LIMITE :

ENONCE :

Soient (a_n) suite calculable et $\ell = \{\alpha\}$ nombre calculable tels que $a_n \to \ell$ (sens calculable).

Soit $\mathcal{P}$ une proposition telle que :

$\mathcal{P}(a_n)$ fausse $\forall n$

$\mathcal{P}(\ell)$ vraie

Soit $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \ell\}$

Il n'y a pas de méthode effective pour savoir $\forall x \in E$ si $\mathcal{P}(x)$ est vraie ou fausse.

La démonstration, donnée dans [1] et [2] utilise le théorème de DAVIS (I, 3, d) et la propriété des fonctions calculables :

$\alpha \sim \beta \Rightarrow \{\varepsilon \to F(N_\alpha, \varepsilon)\} \sim \{\varepsilon \to F(N_\beta, \varepsilon)\}$.

Applications : (Cf. [1] ou [2]) .

a) On ne peut savoir, $\forall x \in \mathcal{C}$, si $x < 0$, $x \leq 0$, $x = 0$, $x \geq 0$, $x > 0$.

(prendre $a_n = \frac{1}{n}$)

Par contre, $\forall x \neq 0$, $x \in \mathcal{C}$, on peut savoir si $x > 0$ ou si $x < 0$

En effet : soit $x = \{\alpha\}$, $x \neq 0$

$$\Rightarrow \exists\ n(\alpha) \text{ tel que } \left|\alpha\left(\frac{1}{n(\alpha)}\right)\right| > \frac{2}{n(\alpha)}$$

Appelons $n(\alpha)$ le plus petit entier possédant cette propriété. Connaissant un programme calculant $\alpha(\varepsilon)$, il est aisé de construire un programme calculant $n(\alpha)$.

Par suite, on construit facilement un programme déterminant le signe de $\alpha(\frac{1}{n(\alpha)})$. (0 si $\alpha(\frac{1}{n(\alpha)}) < 0$; +1 si $\alpha(\frac{1}{n(\alpha)}) > 0$)

$$\text{Soit } f : x \neq 0 , x = \{\alpha\} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha(\frac{1}{n(\alpha)}) < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha(\frac{1}{n(\alpha)}) > 0 \end{cases}$$

f est une fonction calculable définie dans $\mathcal{C} - \{0\}$ car :

- les opérations décrites sont programmables.
- si $x = \{\alpha\} = \{\beta\}$ alors $\alpha(\frac{1}{n(\alpha)})$ et $\beta(\frac{1}{n(\beta)})$ ont le même signe.

Sinon :

$$\left|\alpha\left(\frac{1}{n(\alpha)}\right) - \beta\left(\frac{1}{n(\beta)}\right)\right| > \frac{2}{n(\alpha)} + \frac{2}{n(\beta)}$$

et alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(\alpha)} + \frac{1}{n(\beta)}\right)$

on aurait :

$$\left|\alpha(\tfrac{\varepsilon}{2})-\beta(\tfrac{\varepsilon}{2})\right| \geq \left|\alpha\left(\frac{1}{n(\alpha)}\right)-\beta\left(\frac{1}{n(\beta)}\right)\right| - \left|\alpha(\tfrac{\varepsilon}{2})-\alpha\left(\frac{1}{n(\alpha)}\right)\right| - \left|\beta(\tfrac{\varepsilon}{2})-\beta\left(\frac{1}{n(\beta)}\right)\right|$$

D'où :

$$\left|\alpha(\tfrac{\varepsilon}{2})-\beta(\tfrac{\varepsilon}{2})\right| \geq \frac{2}{n(\alpha)} + \frac{2}{n(\beta)} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{n(\alpha)} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{n(\beta)}$$

$$\Rightarrow \left|\alpha(\tfrac{\varepsilon}{2})-\beta(\tfrac{\varepsilon}{2})\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(\alpha)} + \frac{1}{n(\beta)}\right) \geq 2\varepsilon$$

ce qui est impossible puisque α et β sont des p.c. équivalents.

La fonction $x \to$ signe de x est donc une fonction calculable définie dans $\mathcal{C} - \{0\}$.

c.q.f.d.

b) Nous utiliserons ce même théorème pour établir une propriété importante et inattendue des fonctions calculables. Cette propriété est énoncée par S. MAZUR dans [3], la démonstration donnée ici est originale.

Si f est une fonction calculable définie sur $[a,b]$
Si (a_n) est une suite calculable de points de $[a,b]$
Si $a_n \to \ell \in [a,b]$

Alors $f(a_n) \underset{\mathbb{R}}{\to} f(\ell)$.

Preuve :

$(f(a_n)-f(\ell))$ est une suite calculable (III,1)

* Posons $x_n = f(a_n)-f(\ell)$ et $\alpha(n,\varepsilon)$ définissant la suite (x_n)

Soit $r \in \mathbb{Q}^+$ $(r > 0)$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists\, n \geq N \text{ tel que } |f(a_n)-f(\ell)| > 2r .$$

Soit $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application programmable strictement croissante
$n \to h(n)$
définie par :

$h(1)$ le plus petit entier tel que : $|\alpha(h(1),\frac{r}{2})| > \frac{3r}{2}$

$h(n+1)$ le plus petit entier strictement supérieur à $h(n)$ tel que

$|\alpha(h(n+1),\frac{r}{2})| > \frac{3r}{2}$.

De tels entiers existent : supposons que h(1) n'existe pas.

Alors : $|\alpha(n,\frac{r}{2})| \leq \frac{3r}{2} \quad \forall n$

$$\Rightarrow |x_n| \leq |\alpha(n,\frac{r}{2})| + \frac{r}{2} \leq \frac{3r}{2} + \frac{r}{2} = 2r \qquad \forall n$$

c'est impossible car $\exists$ $n \geq 1$ tel que $|x_n| = |f(a_n)-f(\ell)| > 2r$

$x_{h(n)} = f(a_{h(n)}) - f(\ell)$ est une suite calculable possédant la propriété :

$$|x_{h(n)}| > r \qquad \forall n$$

(car : $|\alpha(h(n),\frac{r}{2})| > \frac{3r}{2} \Rightarrow |x_{h(n)}| \geq |\alpha(h(n),\frac{r}{2})| - \frac{r}{2}$

$\Rightarrow |x_{h(n)}| > \frac{3r}{2} - \frac{r}{2} = r$)

* Posons $a_{h(n)} = b_n$

(b_n) est une suite calculable qui possède la propriété :

$$\begin{cases} b_n \to \ell \\ |f(b_n)-f(\ell)| > r \qquad \forall n \end{cases}$$

Soit $E = \{b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots,\ell\}$

et R la proposition :

$$R(x) \text{ vraie si } |f(x)-f(\ell)| - \frac{r}{2} < 0$$

$R(b_n)$ est fausse $\quad \forall n$

$R(\ell)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de la proposition vraie à la limite, il n'y a pas de méthode effective pour savoir $\forall x \in E$ si $R(x)$ est vraie ou fausse.

Mais : $\forall x \in E$, $|f(x)-f(\ell)| - \frac{r}{2} \neq 0$ donc, d'après le a) on connait une méthode effective pour savoir $\forall x \in E$ si $R(x)$ est vraie ou fausse.

C'est contradictoire donc (b_n) ne peut exister, donc un tel r $r \in Q^+$ ne peut exister donc :

$$\forall r \in Q^+ , \exists N \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |f(a_n)-f(\ell)| \leq r$$

c.q.f.d.

c) Si f est une fonction calculable définie sur $[a,b]$ telle que

$f(a) > 0$; $f(b) < 0$

Alors $\exists$ $c \in [a,b]$, nombre calculable, tel que $f(c) = 0$.

Preuve :

Si $f(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $x \in \mathcal{C}$.

Alors, d'après le a) on connait une méthode effective pour savoir $\forall x \in [a,b]$ si $f(x) > 0$ ou bien $f(x) < 0$.

Donc les suites :

$$a_o = a \qquad\qquad b_o = b$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ b_n & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \end{cases}$$

sont deux suites calculables

$\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ est croissante} \\ (b_n) \text{ est décroissante}\end{array}\right\}$ $b_n - a_n \underset{\mathbb{R}}{\rightarrow} 0$ et d'après II,4,b), on peut construire $\ell \in \mathcal{C}$ tel que $\begin{array}{l} a_n \rightarrow \ell \\ b_n \rightarrow \ell \end{array}$

$f(\ell) \neq 0$ puisque $\ell \in [a,b]$.

$$\text{Mais} \quad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(a_n) > 0 \\ a_n \to \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(\ell) \geq 0 \\ \\ \left.\begin{array}{l} f(b_n) < 0 \\ b_n \to \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(\ell) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\ell) = 0$$

c'est contradictoire

donc la proposition : "$\forall x \in [a,b]$, $f(x) \neq 0$" est fausse.

c.q.f.d.

d) Mais, en général, il n'y a pas de méthode effective pour déterminer c tel que $f(c) = 0$.

$(c \in [a,b]\ ,\ f(a) > 0\ ,\ f(b) < 0)$

(cf. [1] ou [2])

e) Par contre, $\forall\ e \in \mathcal{C}^+$ $(e > 0)$ et $\forall f$ fonction calculable définie sur $[a,b]$ tel que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ on connait une méthode effective pour trouver $x_e \in [a,b]$, nombre calculable, tel que :

$$|f(x_e)| \leq e$$

Preuve :

Soit $e = \{\alpha\} \in \mathcal{C}^+$

Déterminons le plus petit entier n_α tel que $\alpha(\frac{1}{n_\alpha}) > \frac{1}{n_\alpha}$

et soit $\varepsilon = \alpha(\frac{1}{n_\alpha}) - \frac{1}{n_\alpha}$ $\quad (\varepsilon > 0\ ;\ \varepsilon \leq e)$

Posons $a_o = a$; $b_o = b$.

Soit α_o un p.c. tel que $f(\frac{a_o+b_o}{2}) = \{\alpha_o\}$

Soit T_o le test : $|\alpha_o(\frac{\varepsilon}{2})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

* Si T_o est vrai : alors :

$$|f(\frac{a_o+b_o}{2})| \leq |\alpha_o(\frac{\varepsilon}{2})| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq e$$

et $x_e = \frac{a_o+b_o}{2}$

* Si T_o est faux : alors

$$|f(\frac{a_o+b_o}{2})| \geq |\alpha_o(\frac{\varepsilon}{2})| - \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

Donc $f(\frac{a_o+b_o}{2}) \neq 0$ et on connait d'après a) une méthode effective pour déterminer le signe de $f(\frac{a_o+b_o}{2})$.

Posons :

$$a_1 = \begin{cases} a_o & \text{si } f(\frac{a_o+b_o}{2}) < 0 \\ \frac{a_o+b_o}{2} & \text{si } f(\frac{a_o+b_o}{2}) > 0 \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} \frac{a_o+b_o}{2} & \text{si } f(\frac{a_o+b_o}{2}) < 0 \\ b_o & \text{si } f(\frac{a_o+b_o}{2}) > 0 \end{cases}$$

Soit α_1 un p.c. tel que $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = \{\alpha_1\}$

et soit T_1 le test : $|\alpha_1(\frac{\varepsilon}{2})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

* Si T_1 est vrai alors :

$$x_e = \frac{a_1+b_1}{2}$$

* Si T_1 est faux on déterminera a_2 et b_2 comme il est indiqué précédemment et l'on fera le test T_2 .

Il est impossible que T_n soit faux $\forall n$, sinon on serait dans les conditions de c) et c'est impossible.

On prendra $x_e = \frac{a_{n_o}+b_{n_o}}{2}$ où n_o est le plus petit entier tel que T_{n_o} soit vrai.

2 - UNE METHODE "USUELLE" DE CALCUL NUMERIQUE QUI N'EST PAS, EN GENERAL, UNE METHODE EFFECTIVE :

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie, continue (au sens usuel) et strictement convexe dans $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

On se propose de déterminer x^* tel que :

$$f(x^*) = \min_{0 \leq x \leq 1} f(x)$$

Des ouvrages décrivent la méthode suivante :
(J. CEA "Optimisation. Théorie et algorithmes". Dunod 1971).

$x_o = 0$; $y_o = 1$

* Prendre a_o et b_o tels que $x_o < a_o < b_o < y_o$
* comparer $f(a_o)$ et $f(b_o)$
  - si $f(a_o) > f(b_o)$ prendre $x_1 = a_o$; $y_1 = y_o$
  - si $f(a_o) = f(b_o)$ prendre $x_1 = a_o$; $y_1 = b_o$
  - si $f(a_o) < f(b_o)$ prendre $x_1 = x_o$; $y_1 = b_o$
* Poursuivre de la même façon en prenant a_1 et b_1 tels que :

$x_1 < a_1 < b_1 < y_1$

On construit ainsi deux suites x_n et y_n et il est certain que

$x_n \underset{\mathbb{R}}{\to} x^*$ et que $y_n \underset{\mathbb{R}}{\to} x^*$

Mais les tests indiqués sont irréalisables puisqu'il est impossible, en général, de savoir si $f(a_n) > f(b_n)$; $f(a_n) = f(b_n)$; $f(a_n) < f(b_n)$.

Exemple :

$f(x) = x^2 - 1{,}5\sqrt{0{,}1x}$ est une fonction définie pour $x \geq 0$, continue au sens usuel et strictement convexe. Elle atteint son minimum dans $[0,\frac{1}{2}]$ en $x^* = 0{,}1 \sqrt[3]{\frac{225}{16}}$

Soit r un rationnel de $[0,\frac{1}{2}]$

Pour calculer $\sqrt{0{,}1r}$ je suppose que l'on utilise la méthode de NEWTON :

$$\begin{cases} u_o = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{0{,}1r}{2u_n} \end{cases}$$

$\forall r \in [0,\frac{1}{2}]$, la suite ainsi définie est strictement décroissante et converge vers $\sqrt{0{,}1r}$ avec une erreur : $u_n - \sqrt{0{,}1r} \leq \frac{1}{2^n}$

(En effet : posons $\ell = \sqrt{0{,}1r}$; il vient : $u_o - \ell \leq 1$ et

$$u_n - \ell = \frac{u_{n-1}-\ell}{2}\left(1 - \frac{\ell}{u_{n-1}}\right) \leq \frac{u_{n-1}-\ell}{2})$$

$f(r)$ est donc défini par les approximants rationnels :

$v_n(r) = r^2 - 1{,}5u_n(r)$ et par le majorant de l'erreur : $f(r) - v_n(r) \leq \frac{3}{2^{n+1}}$

Dans ces conditions, je dis que la méthode exposée précédemment n'est pas programmable, si l'on part des points : $a_o = 0{,}1$ et $b_o = 0{,}4$.
En effet :

$f(0{,}1) = f(0{,}4) = -0{,}14$

* Par conséquent, la suite calculable $v_n(0,4)-v_n(0,1)$ converge au sens calculable vers 0.

* Mais, $\forall n$, $v_n(0,4)-v_n(0,1) > 0$
ceci est moins évident :

$$v_{n+1}(0,4)-v_{n+1}(0,1) = 0,16-1,5u_{n+1}(0,4)-0,01+1,5u_{n+1}(0,1)$$

$$= 1,5\left[(u_{n+1}(0,1)-0,1)-(u_{n+1}(0,4)-0,2)\right]$$

$$= \frac{1,5}{2}\left(\frac{(u_n(0,1)-0,1)^2}{u_n(0,1)} - \frac{(u_n(0,4)-0,2)^2}{u_n(0,4)}\right)$$

Le dernier membre devient :

$$\frac{1,5}{2u_n(0,1)u_n(0,4)}\,(u_n(0,4))\left[(u_n(0,1)-0,1)^2-(u_n(0,4)-0,2)^2\right]+ (u_n(0,4)-0,2)^2\cdot(u_n(0,4)-u_n(0,1))$$

Or : $u_n(0,4) \geq u_n(0,1)$ $\forall n$ car $u_o(0,4) = u_o(0,1)$ et car $\sqrt{0,01} < \sqrt{0,04}$ (géométriquement, c'est évident !).

De plus :

$$(u_n(0,1)-0,1)^2-(u_n(0,4)-0,2)^2 = \left[(u_n(0,1)-0,1)-(u_n(0,4)-0,2)\right]\cdot\left[u_n(0,1)+u_n(0,4)-0,1-0,2\right]$$

Or :

$$u_n(0,1) > 0,1\ \forall n \quad \text{et} \quad u_n(0,4) > 0,2\ \forall n$$

Donc :

$$u_n(0,1) + u_n(0,4) - 0,1 - 0,2 > 0 \quad \forall n$$

et par suite ; si :

$$(u_n(0,1) - 0,1) - (u_n(0,4) - 0,2)$$

est strictement positif, alors :

$$(u_{n+1}(0,1) - 0,1) - (u_{n+1}(0,4) - 0,2)$$

est strictement positif.

Comme $(u_o(0,1)-0,1) - (u_o(0,4)-0,2) = 1-0,1-1+0,2 = 0,1 > 0$ on déduit pas récurrence que $(u_n(0,1)-0,1) - (u_n(0,4)-0,2)$ est strictement positif et par suite que $v_{n+1}(0,4) - v_{n+1}(0,1) > 0 \quad \forall n$

* Nous sommes alors dans les conditions du théorème de la proposition vraie à la limite : il est impossible, quoi que l'on fasse, de savoir si $f(0,1) > f(0,4)$ ou bien $f(0,1) < f(0,4)$ ou bien $f(0,1) = f(0,4)$.

Nous allons nous inspirer de cette méthode pour en construire une qui soit effective.

Une fonction calculable définie dans $[0,1]$ est strictement convexe si :

$\forall x$ et $\forall y$ nombres calculables de $[0,1]$

$\forall \lambda$ nombre calculable, $0 < \lambda < 1$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

THEOREME :

f est une fonction calculable définie sur $[0,1]$

f est strictement convexe

Alors on peut construire $x^* \in \mathcal{C}$ tel que :

$$f(x^*) = \min_{0 \leq x \leq 1} f(x)$$

Méthode : Prendre trois points au lieu de deux :

Soit $x_o = 0 \quad ; \quad y_o = 1$

Soient a_o, b_o, c_o : $x_o < a_o < b_o < c_o < y_o$

Avec $\quad a_o = \dfrac{3x_o+y_o}{4} \quad ; \quad b_o = \dfrac{x_o+y_o}{2} \quad ; \quad c_o = \dfrac{x_o+3y_o}{4}$.

Posons $f(a_o) = \{\alpha_o\}$; $f(b_o) = \{\beta_o\}$; $f(c_o) = \{\gamma_o\}$

. Soit S_o^n $(n \geq 1)$ le test :

$$S_o^n \text{ vrai si } |\alpha_o(\tfrac{1}{2n})-\beta_o(\tfrac{1}{2n})| > \tfrac{1}{n}$$

. Soit T_o^n $(n \geq 1)$ le test :

$$T_o^n \text{ vrai si } |\beta_o(\tfrac{1}{2n})-\gamma_o(\tfrac{1}{2n})| > \tfrac{1}{n}$$

Puisque f est strictement convexe $f(a_o) \neq f(b_o)$ ou bien $f(b_o) \neq f(c_o)$, donc $\exists$ n tel que S_o^n vrai ou bien T_o^n vrai.

Soit n_o le plus petit entier tel que :

$$\begin{cases} S_o^{n_o} \text{ vrai} \\ n < n_o \Rightarrow T_o^n \text{ faux} \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} T_o^{n_o} \text{ vrai} \\ n \leq n_o \Rightarrow S_o^n \text{ faux} \end{cases}$$

Si $S_o^{n_o}$ est vrai on posera :

* $x_1 = a_o$, $y_1 = y_o$ si $\alpha_o(\frac{1}{2n_o})-\beta_o(\frac{1}{2n_o}) > 0$

$(f(a_o) > f(b_o))$

* $x_1 = x_o$, $y_1 = b_o$ si $\alpha_o(\frac{1}{2n_o})-\beta_o(\frac{1}{2n_o}) < 0$

$(f(a_o) < f(b_o))$

Si $T_o^{n_o}$ est vrai on posera :

* $x_1 = b_o$, $y_1 = y_o$ si $\beta_o(\frac{1}{2n_o})-\gamma_o(\frac{1}{2n_o}) > 0$

$(f(b_o) > f(c_o))$

* $x_1 = x_o$, $y_1 = c_o$ si $\beta_o(\frac{1}{2n_o}) - \gamma_o(\frac{1}{2n_o}) < 0$

$(f(b_o) < f(c_o))$

x_1 et y_1 étant déterminés, on poursuit de la même façon avec :

$$a_1 = \frac{3x_1+y_1}{4} \quad , \quad b_1 = \frac{x_1+y_1}{2} \quad , \quad c_1 = \frac{x_1+3y_1}{4}$$

Nous avons alors construit deux suites calculables (x_n) et (y_n)

$$0 = x_o \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y_n \leq \ldots \leq y_1 \leq y_o = 1$$

telles que $y_n - x_n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0$ (car $y_{n+1}-x_{n+1} \leq \frac{3}{4}(y_n-x_n)$)

Donc on peut construire $x^* \in [0,1]$, nombre calculable tel que :

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x^* \\ y_n \to x^* \end{array}\right. \qquad (II,4,b)$$

D'après la convexité de f et le choix de x_n et de y_n :

$x \in [y_n,1] \Rightarrow f(y_n) \leq f(x)$

$x \in [0,x_n] \Rightarrow f(x_n) \leq f(x)$

$y_n \to x^* \Rightarrow f(y_n) \underset{\mathbb{R}}{\to} f(x^*)$ (IV,1,b)

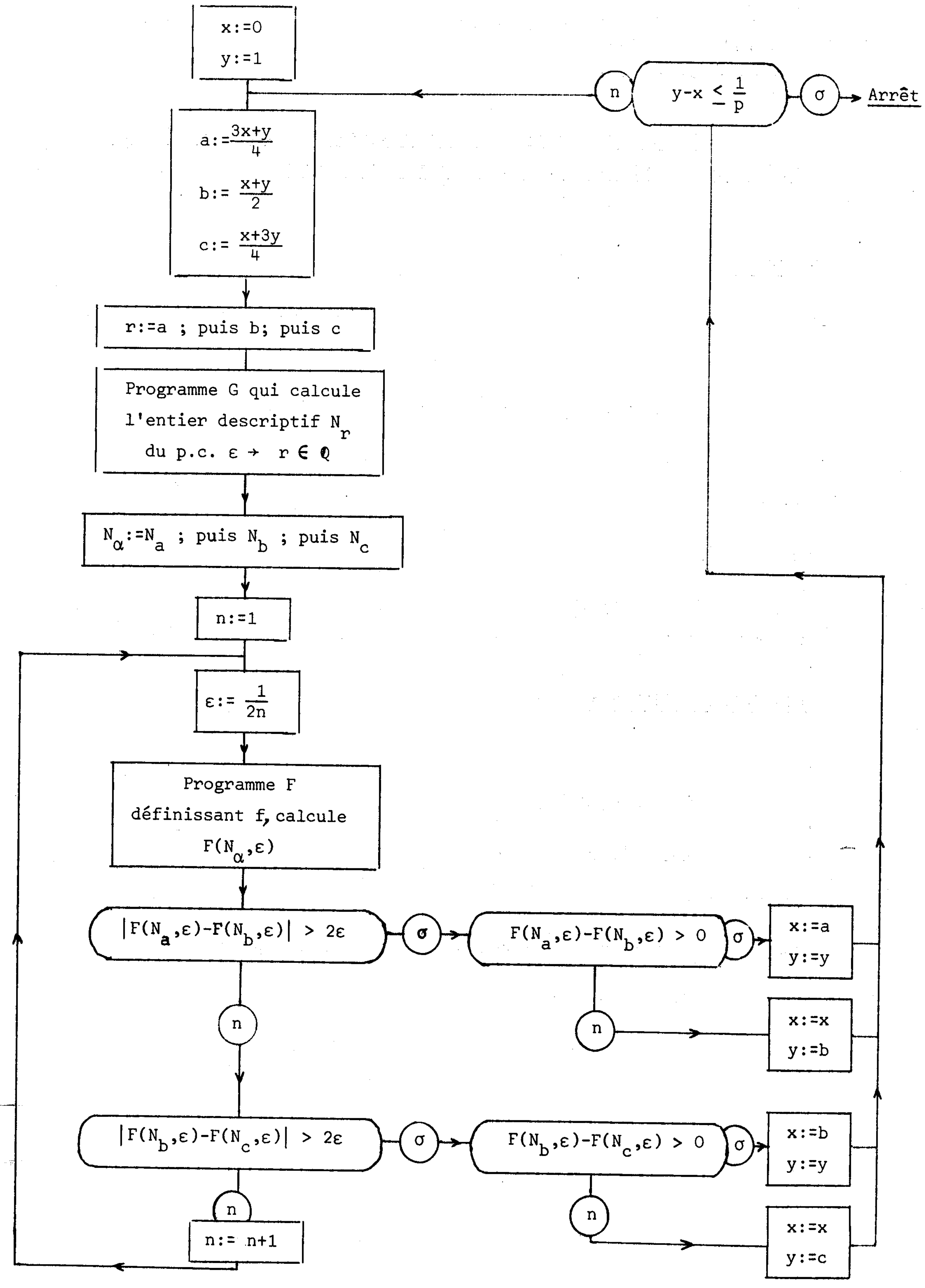
Donc $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in [x^*,1]$

$x_n \to x^* \Rightarrow f(x_n) \underset{\mathbb{R}}{\to} f(x^*)$

Donc $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in [0,x^*]$

ce qui prouve que $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in [0,1]$.

Ici 0, 1 sont rationnels => a_n, b_n, c_n, x_n, y_n sont rationnels. Le détail de l'algorithme est le suivant :


x:=0
y:=1
y-x ≤ 1/p
n
σ
Arrêt
a:=(3x+y)/4
b:= (x+y)/2
c:= (x+3y)/4
r:=a ; puis b; puis c
Programme G qui calcule
l'entier descriptif N_r
du p.c. ε → r ∈ ℚ
N_α:=N_a ; puis N_b ; puis N_c
n:=1
ε:= 1/2n
Programme F
définissant f, calcule
F(N_α,ε)
|F(N_a,ε)-F(N_b,ε)| > 2ε
σ
n
F(N_a,ε)-F(N_b,ε) > 0
σ
n
x:=a
y:=y
x:=x
y:=b
|F(N_b,ε)-F(N_c,ε)| > 2ε
σ
n
F(N_b,ε)-F(N_c,ε) > 0
σ
n
x:=b
y:=y
x:=x
y:=c
n:= n+1

3 - METHODES DE POINTS FIXES

Les méthodes de point fixe pour des fonctions calculables contractantes sur $[a,b]$ sont des méthodes effectives.

HYPOTHESE :

f est une fonction calculable définie sur $[a,b]$

On connait $K \in \mathscr{C}$, $0 < K < 1$ tel que

$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y| \quad \forall x$ et $\forall y$ de $[a,b]$

$f(a) - a > 0 \quad , \quad f(b) - b < 0$

$f(x) - x$ est une fonction calculable, donc les conditions :

$$f(a) - a > 0 \quad \text{et} \quad f(b) - b < 0$$

assurent l'existence d'un nombre calculable $\ell \in [a,b]$ tel que $f(\ell) = \ell$ (1,c).

REDUCTION DE L'INTERVALLE $[a,b]$:

On peut construire ω et r tels que :

$[\omega-r,\omega+r] \subset [a,b]$

Avec $|\omega-f(\omega)| \leq (1-K)r$

Nous allons commencer par trouver x_o, $a < x_o < b$ tel que :

$$f(x_o) - x_o > 0$$

$$f(x_o) - x_o = (f(x_o) - f(a)) + (f(a) - a) + (a - x_o)$$

Puisque $f(a) - a > 0$:

$$f(x_o)-x_o \geq (f(a)-a) - |f(x_o)-f(a)| - (x_o-a) \geq (f(a)-a) - (1+K)(x_o-a)$$

Nous aurons $f(x_o)-x_o > 0$ dès que : $\frac{f(a)-a}{1+K} > x_o-a$

Il faut encore s'assurer que $x_o < b$

Soit ℓ le point fixe (il existe) :

$$f(a)-a = f(a)-f(\ell)+\ell-a$$

et puisque $\ell > a$: $f(a)-a \leq (\ell-a)+(\ell-a)K < (b-a)(1+K)$

Donc $\frac{f(a)-a}{1+K} < (b-a)$

Nous pouvons prendre, par exemple : $x_o = a + \frac{1}{2}\frac{f(a)-a}{1+K}$

De même :

Si $x_1 = b - \frac{1}{2}\frac{b-f(b)}{1+K}$

x_1 vérifie : $x_o < x_1 < b$ et : $f(x_1)-x_1 < 0$

Soit $e = (1-K)\mathrm{Min}((x_o-a) ; (b-x_1))$

D'après 1,e) nous pouvons construire $\omega \in [x_o,x_1]$

tel que $|f(\omega)-\omega| \leq e$

Prenons $r = \mathrm{Min}(x_o-a ; b-x_1)$

puisque $\omega \in [x_o,x_1]$, $[\omega-r,\omega+r] \subset [a,b]$

et on a : $|f(\omega)-\omega| \leq (1-K)r$

CONVERGENCE :

> Soit $x_o \in [\omega-r,\omega+r]$
>
> La suite calculable $x_1 = f(x_o);\ldots;x_{n+1} = f(x_n);\ldots$
>
> converge au sens calculable dans $[\omega-r,\omega+r]$ et sa limite vérifie : $\ell = f(\ell)$.

(x_n) est une suite calculable car elle est définie par récurrence et f est une fonction calculable.

$$x_o \in [\omega-r,\omega+r] \Rightarrow x_n \in [\omega-r,\omega+r] \quad \forall n \text{ en effet :}$$

$$|x_1-\omega| \leq |f(x_o)-f(\omega)| + |f(\omega)-\omega| \leq rK+(1-K)r = r .$$

Montrons que (x_n) est une suite de CAUCHY au sens calculable :

$$|x_m-x_n| \leq |x_m-x_{m-1}| + |x_{m-1}-x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1}-x_n|$$

$$\leq |x_1-x_o| \ (K^{m-1}+\ldots+K^n) \leq \frac{2r}{1-K} K^n$$

puisque $K \in \mathcal{C}$ et $0 < K < 1$

La suite calculable décroissante $\frac{2r}{1-K} . K^n$ converge au sens calculable vers 0.

Soit $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p})$ programmable

telle que : $n \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow \frac{2r}{1-K} K^n \leq \frac{1}{p}$

Alors :

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow |x_m-x_n| \leq \frac{1}{p}$$

c'est la condition de CAUCHY calculable :
Soit ℓ la limite de (x_n).

Alors : $|\ell-f(\ell)| \leq |\ell-x_{n+1}| + |f(x_n)-f(\ell)| \leq |\ell-x_{n+1}| + K|x_n-\ell|$

$\Rightarrow \ell = f(\ell)$.

V - PROPRIETES DES FONCTIONS CALCULABLES DEFINIES SUR UN INTERVALLE APPLICATIONS

1 - CONTINUITE DES FONCTIONS CALCULABLES.

(Cf. [3] S. MAZUR).

THEOREME :

> f est une fonction calculable définie en tout point de $[0,1]$.
> $\forall x_o \in [0,1]$, $\forall e \in \mathcal{C}^+$, $\exists \eta \in \mathcal{C}^+$ tel que :
>
> $\forall x \in [0,1] \cap [x_o-\eta \; ; \; x_o+\eta]$ $\quad |f(x)-f(x_o)| \leq e$

Preuve :

Nous allons démontrer ce théorème par l'absurde :
Supposons que $x_o \in [0,1]$ et $e \in \mathcal{C}^+$ sont tels que :

$\forall \eta \in \mathcal{C}^+$ $\exists$ $x \in [0,1]$: $|x-x_o| \leq \eta$ et $|f(x)-f(x_o)| > e$

Prenons $e = 2r \in \mathbb{Q}^+$ et $\eta = \frac{1}{2p}$ (p entier ≥ 1)

LEMME 1 :

> Si $\exists$ $x \in \mathcal{C} \cap [0,1]$: $|x-x_o| \leq \frac{1}{2p}$ et $|f(x)-f(x_o)| > 2r$
> Alors $\exists$ $y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$: $|y-x_o| \leq \frac{1}{p}$ et $|f(y)-f(x_o)| > r$

Preuve :

$$x \in \mathscr{C} \Rightarrow x = \{\alpha\}$$

* $|x-x_o| \leq \frac{1}{2p}$

$$\Rightarrow |\alpha(\tfrac{1}{n})-x_o| \leq |\alpha(\tfrac{1}{n})-x| + |x-x_o| \leq \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{2p}$$

$$n \geq 2p \Rightarrow |\alpha(\tfrac{1}{n})-x_o| \leq \tfrac{1}{p}$$

* $|f(x)-f(x_o)| > 2r$

$$\Rightarrow |f(\alpha(\tfrac{1}{n}))-f(x_o)| \geq |f(x_o)-f(x)| - |f(x)-f(\alpha(\tfrac{1}{n}))|$$

Mais $(\alpha(\frac{1}{n}))$ est une suite calculable

et $\alpha(\frac{1}{n}) \to x$ donc $f(\alpha(\frac{1}{n})) \underset{\mathbb{R}}{\to} f(x)$ (IV,1,b)

Donc $\exists\ n_o$ tel que : $n \geq n_o \Rightarrow |f(\alpha(\frac{1}{n}))-f(x)| \leq r$

et $n \geq n_o \Rightarrow |f(\alpha(\frac{1}{n}))-f(x_o)| > 2r-r = r$

* Si $x = 0$ ou si $x = 1$ alors $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $y = x$

Si $0 < x < 1$ alors $\exists\ n_1$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow 0 < \alpha(\frac{1}{n}) < 1$

Prenons $y = \alpha(\frac{1}{n_2})$ avec $n_2 = \mathrm{Max}\ (n_1, n_o, 2p)$

LEMME 2 :

On peut construire une application programmable dans $\mathbb{N}$

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$$
$$k \to u_k$$

telle que :

- $\forall y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\exists\ k : y = u_k$
- $\forall k_o \in \mathbb{N}$, $\exists\ k > k_o : u_k = u_{k_o}$

Preuve :

Soient g et h les applications programmables dans $\mathbb{N}$ définies par les relations de récurrence :

$$g(0) = 0 \quad ; \quad h(0) = 1$$

$$g(k+1) = \begin{cases} 1+g(k) & \text{si} \quad g(k) < h(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(k+1) = \begin{cases} 1+h(k) & \text{si} \quad g(k) \geq h(k) \\ h(k) & \text{sinon} \end{cases}$$

$u_k = \frac{g(k)}{h(k)}$ numérote tous les rationnels de $[0,1]$ de la façon suivante :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1} \; ; \; \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \; ; \; \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \; ; \; \text{etc} \ldots$$

FIN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME :

D'après les lemmes x_o et r sont donc tels que :

$$\forall p \geq 1, \forall k_o, \exists\, k > k_o \; : \; |u_k - x_o| \leq \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad |f(u_k)-f(x_o)| > r$$

Soit α_o un p.c. définissant x_o

$F(N_\alpha,\varepsilon)$ définissant f

G un programme de codage : $G(k) = N_{u_k}$ entier descriptif de $\varepsilon \to u_k$

$\ast$ $|u_k - x_o| \leq \frac{1}{p} \Rightarrow |u_k - \alpha_o(\frac{1}{k})| \leq |u_k - x_o| + |x_o - \alpha_o(\frac{1}{k})| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{k}$

$\ast$ $|f(u_k)-f(x_o)| > r$

$$\Rightarrow |F(G(k),\tfrac{1}{k}) - F(N_{\alpha_o},\tfrac{1}{k})| > |f(x_o)-f(u_k)| - |f(x_o)-F(N_{\alpha_o},\tfrac{1}{k})|$$

$$- |f(u_k)-F(G(k),\tfrac{1}{k})| > r - \frac{2}{k}$$

Donc :

$$\forall p \geq 1,\ \forall k_o,\ \exists\ k > k_o\ :\ |u_k - \alpha_o(\tfrac{1}{k})| \leq \tfrac{2}{p}$$

$$\text{et } |F(G(k),\tfrac{1}{k}) - F(N_{\alpha_o},\tfrac{1}{k})| > \tfrac{r}{2}.$$

Soit h l'application programmable strictement croissante suivante :

h(1) est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que :

$$|u_k - \alpha_o(\tfrac{1}{k})| \leq 2 \quad \text{et} \quad |F(G(k),\tfrac{1}{k}) - F(N_{\alpha_o},\tfrac{1}{k})| > \tfrac{r}{2}$$

h(p) est le plus petit entier k strictement supérieur à h(p-1) tel que :

$$|u_k - \alpha_o(\tfrac{1}{k})| \leq \tfrac{2}{p} \quad \text{et} \quad |F(G(k),\tfrac{1}{k}) - F(N_{\alpha_o},\tfrac{1}{k})| > \tfrac{r}{2}$$

$(u_{h(p)})$ est une suite calculable telle que :

$$* \qquad |u_{h(p)} - \alpha_o(\tfrac{1}{h(p)})| \leq \tfrac{2}{p} \qquad \forall p$$

$$\Rightarrow |u_{h(p)} - x_o| \leq |u_{h(p)} - \alpha_o(\tfrac{1}{h(p)})| + |\alpha_o(\tfrac{1}{h(p)}) - x_o| \leq \tfrac{2}{p} + \tfrac{1}{h(p)} \leq \tfrac{3}{p}.$$

Donc $u_{h(p)} \to x_o$ donc $f(u_{h(p)}) \underset{\mathbb{R}}{\to} f(x_o)$ (IV, 1 ,b)

$$* \qquad |F(G(h(p),\tfrac{1}{h(p)}) - F(N_{\alpha_o},\tfrac{1}{h(p)})| > \tfrac{r}{2}$$

$$\Rightarrow |f(u_{h(p)}) - f(x_o)| > \tfrac{r}{2} - \tfrac{2}{h(p)} \qquad \forall p$$

et il est impossible que $(f(u_{h(p)}))$ converge au sens réel vers $f(x_o)$.
Il y a contradiction
$\Rightarrow x_o$ et e ne peuvent exister.

c.q.f.d.

2 - CONTINUITE ET UNIFORME CONTINUITE CALCULABLE :

f est une fonction calculable définie sur [0,1]

DEFINITIONS :

a) f est continue au sens calculable sur [0,1] si on connait une "fonction distance" $d : (\frac{1}{n},x) \to d(\frac{1}{n},x) \in \mathcal{C}^+$

(définie par $D(\frac{1}{n},N_\alpha,\varepsilon)$ programmable telle que $\forall n \geq 1$ fixé :

$x = \{\alpha\} \to d(\frac{1}{n},x) = \{\varepsilon \to D(\frac{1}{n},N_\alpha,\varepsilon)\}$ est une fonction calculable sur [0,1].)

Telle que :

$$\forall x_o \in [0,1] \ ; \ \begin{cases} |x-x_o| \leq d(\frac{1}{n},x_o) \\ x \in [0,1] \end{cases} \Rightarrow |f(x)-f(x_o)| \leq \frac{1}{n}$$

b) f est uniformément continue au sens calculable sur [0,1] si on connait une application programmable $d : \frac{1}{n} \to d(\frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}^+$ telle que :

$$\left.\begin{array}{l} |x-y| \leq d(\frac{1}{n}) \\ x \in [0,1] \\ y \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{n}$$

Nous dirons que f, fonction continue (ou uniformément continue) a pour "fonction distance" d.

c) REMARQUE :

Dans [1] ou [2] on trouvera un exemple de fonction calculable continue sur [0,1] mais non bornée sur [0,1] (donc non uniformément continue sur [0,1]).

Exemples :

a) $x \to x$

$x \to a \in \mathcal{C}$

sont uniformément continues sur $\mathcal{C}$

$(d(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n})$

b) Si f et g sont continues sur $[0,1]$ et ont pour fonctions distances $d_1(\frac{1}{n},x)$ et $d_2(\frac{1}{n},x)$. Alors :

* $|(f \pm g)(x)-(f \pm g)(x_o)| \leq |f(x)-f(x_o)| + |g(x)-g(x_o)| \leq \frac{1}{n}$

dès que $|x-x_o| \leq \text{Min } (d_1(\frac{1}{2n},x_o) \; ; \; d_2(\frac{1}{2n},x_o))$

* $||f(x)| - |f(x_o)|| \leq |f(x)-f(x_o)| \leq \frac{1}{n}$ pour $|x-x_o| \leq d_1(\frac{1}{n},x_o)$

* $\forall a \in \mathcal{C} \quad ; \quad a = \{\alpha\}$

$|af(x)-af(x_o)| \leq |a||f(x)-f(x_o)| \leq \frac{1}{n}$ pour $|x-x_o| \leq d_1(\frac{1}{nA},x_o)$

où A désigne le plus petit entier supérieur ou égal à $1 + |\alpha(1)|$

Par conséquent : Max (f,g) et Min (f,g) sont continues sur $[0,1]$.

c) Si f et g sont continues sur $[0,1]$ et ont pour fonctions distances $d_1(\frac{1}{n},x)$ et $d_2(\frac{1}{n},x)$

Si on connait $M \in \mathcal{C}^+$ tel que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$

Alors :

$$|f(x).g(x)-f(x_o).g(x_o)| \leq |f(x)||g(x)-g(x_o)| + |g(x_o)||f(x)-f(x_o)|$$

soit $M = \{\alpha\}$ et $g(x_o) = \{\beta\}$

A le plus petit entier supérieur ou égal à $1 + |\alpha(1)| \geq M$

B le plus petit entier supérieur ou égal à $1 + |\beta(1)| \geq |g(x_o)|$

$$|x-x_o| \leq \text{Min } (d_2(\frac{1}{2nA},x_o) \quad ; \quad d_1(\frac{1}{2nB},x_o))$$

$\Rightarrow |f(x).g(x)-f(x_o).g(x_o)| \leq \frac{1}{n}$.

d) Les exemples b) et c) sont encore valables pour des fonctions uniformément continues sur $[0,1]$

=> tout polynôme à coefficients calculables est uniformément continu sur $[0,1]$

et plus généralement :

* si l'on connait $K \in \mathcal{C}^+$ tel que

$$\forall x, \forall y \text{ de } [0,1] \qquad |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$$

Alors f est uniformément continue sur $[0,1]$.

* si l'on connait $x_o \in \mathcal{C}$, $x_o > 0$ et $M \in \mathcal{C}$, $M > 0$

tels que : $|a_n x_o^n| \leq M \quad \forall n$

Alors $f(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$ qui est une fonction calculable sur $[-kx_o;+kx_o]$ $(0 < k < 1,\ k \in \mathcal{C})$ (III,3) est uniformément continue sur cet intervalle.

<u>Preuve</u> :

$$f(y)-f(x) = \sum_1^\infty (a_n y^n - a_n x^n) = \sum_1^\infty a_n x_o^n\left(\left(\frac{y}{x_o}\right)^n - \left(\frac{x}{x_o}\right)^n\right)$$

$$f(y)-f(x) = \sum_1^\infty a_n x_o^n\left(\frac{y}{x_o} - \frac{x}{x_o}\right)\left[\left(\frac{y}{x_o}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{x_o}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{x}{x_o}\right) + \ldots + \left(\frac{x}{x_o}\right)^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow |f(y)-f(x)| \leq \frac{M}{x_o} \quad |y-x| \sum_1^\infty n.k^{n-1}$$

$$|f(y)-f(x)| \leq \frac{M}{x_o} \frac{1}{(1-k)^2} |y-x| \qquad \forall y,\forall x \text{ de } [-kx_o,+kx_o]$$

Si $\{\alpha\} = \dfrac{M}{|x_o|(1-k)^2}$ et si A est le plus petit entier supérieur ou égal à $1 + |\alpha(1)|$

Alors : $|y-x| \leq \frac{1}{An} \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

c.q.f.d.

3 - EXISTENCE ET CALCUL DE $\sup\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ et de $\inf\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x)$:

Soit f une fonction calculable et bornée sur [0,1]

$\exists\, M \in \mathbb{R}$, $\quad M = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x)$

$\exists\, m \in \mathbb{R}$, $\quad m = \inf\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x)$

Le problème est le suivant :

Sous quelles conditions a-t-on des méthodes effectives pour trouver M et m (il est alors indispensable que $M \in \mathcal{C}$ et $m \in \mathcal{C}$).

a) Si f est uniformément continue sur [0,1] et a pour fonction distance d alors :

$$\varphi(y,z) = \sup_{\mathrm{Min}(y,z) \leq x \leq \mathrm{Max}(y,z)} f(x) \quad \text{et} \quad \Psi(y,z) = \inf_{\mathrm{Min}(y,z) \leq x \leq \mathrm{Max}(y,z)} f(x)$$

sont des fonctions calculables dans [0,1] × [0,1]

<u>Preuve</u> :

Soit K_n le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{d(\frac{1}{n})}$

$n \to K_n$ est une application programmable.
Soient y et z de [0,1]

$$a_n(y,z) = \frac{1}{n} + \max_{0 \leq j \leq K_n} f\left(\mathrm{Min}(y,z) + \frac{j|y-z|}{K_n}\right)$$

$(a_n(y,z))$ est une suite calculable de fonctions calculables définies dans [0,1] × [0,1].

* Soit $x \in [y,z]$

$\exists$ j tel que : $\left|x-(\mathrm{Min}(y,z) + \frac{j|y-z|}{K_n})\right| \leq \frac{1}{K_n} \leq d(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \left|f(x)-f(\mathrm{Min}(y,z) + \frac{j|y-z|}{K_n})\right| \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \quad f(x) \leq a_n(y,z) \qquad \forall n,\ \forall x \in [y,z]$

* $\varphi(y,z) \in \mathbb{R}$ est tel que :

$|\varphi(y,z)-a_n(y,z)| \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n$ (par définition du sup)

$\Rightarrow \ |a_m(y,z)-a_n(y,z)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$

Donc :

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \geq \frac{1}{2p} \Rightarrow |a_m(y,z)-a_n(y,z)| \leq \frac{1}{p} \quad , \quad \forall y,\ \forall z \in [0,1]$$

d'après III, 2

$\varphi(y,z) \in \mathcal{C}$

et $\quad (y,z) \to \varphi(y,z)$ est une fonction calculable dans $[0,1] \times [0,1]$.

Pour Ψ on procède de même avec la suite calculable

$$b_n(y,z) = -\frac{1}{n} + \underset{0 \leq j \leq K_n}{\mathrm{Min}} \ f(\mathrm{Min}(y,z) + \frac{j|y-z|}{K_n})$$

b) Si f, fonction calculable définie dans $[0,1]$ possède la propriété de "semi-continuité supérieure uniforme" :

On connait d : $\frac{1}{n} \to d(\frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}^+$ programmable telle que :

$$\left.\begin{matrix} |x-y| \leq d(\frac{1}{n}) \\ \\ x \in [0,1] \\ \\ y \in [0,1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \forall z \in [x,y] \quad , \quad f(z) \leq \mathrm{Max}(f(x) + \frac{1}{n} ; f(y) + \frac{1}{n})$$

Alors :

$$\varphi(y,z) = \sup_{\mathrm{Min}(y,z) \leq x \leq \mathrm{Max}(y,z)} f(x)$$

est une fonction calculable définie dans $[0,1] \times [0,1]$.

c) Sous la condition de "semi-continuité inférieure uniforme" :

On connait $d : \frac{1}{n} \to d(\frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}^+$ programmable telle que :

$$\left.\begin{array}{l} |x-y| \leq d(\frac{1}{n}) \\ x,y \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow \forall z \in [x,y] \ , \ f(z) \geq \mathrm{Min}(f(x) - \frac{1}{n} \ ; \ f(y) - \frac{1}{n})$$

Alors :

$$\Psi(y,z) = \inf_{\mathrm{Min}(y,z) \leq x \leq \mathrm{Max}(y,z)} f(x)$$

est une fonction calculable définie dans $[0,1] \times [0,1]$.

(b) et c) se démontrent comme le a))

d) Si f est continue sur $[0,1]$ de fonction distance $d(\frac{1}{n},x)$ telle que :

$\forall n \geq 1$, $\exists\ K_n > 0$, $K_n \in \mathbb{Q}$ indépendant de x tel que

$d(\frac{1}{n},x) \geq K_n$, $\forall x \in [0,1]$

Alors :

$$\varphi(z) = \sup_{0 \leq x \leq z} f(x) \qquad \text{et} \qquad \Psi(z) = \inf_{0 \leq x \leq z} f(x)$$

sont des fonctions calculables définies sur $[r,1]$, $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$.

<u>Preuve</u> :

Soit z : $0 < r \leq z \leq 1$ et n , entier ≥ 1

Posons :

$$\begin{cases} x_o^n(z) = 0 \\ x_{p+1}^n(z) = \mathrm{Min}(z \ ; \ x_p^n(z) + d(\frac{1}{n}, x_p^n(z))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_o^n(z) = z \\ y_{p+1}^n(z) = \mathrm{Max}(0 \ ; \ y_p^n(z) - d(\frac{1}{n}, y_p^n(z))) \end{cases}$$

pour n fixé, $(x_p^n(z))$ et $(y_p^n(z))$ sont deux suites calculables de fonctions calculables définies pour $z \in [r,1]$.

Or : $\forall x \in [0,1] \ : d(\frac{1}{n}, x) \geq K_n > 0$.

$(x_p^n(z))$ suite croissante, converge au sens réel vers z pour $p \to \infty$

$(y_p^n(z))$ suite décroissante, converge au sens réel vers 0 pour $p \to \infty$

Donc : $y_p^n(z) - x_p^n(z) \underset{\mathbb{R}}{\to} -z$ (pour $p \to \infty$).

Soit α un p.c. tel que $z = \{\alpha\}$

Appelons $H(n,p,N_\alpha,\varepsilon)$ l'application programmable calculant $y_p^n(z) - x_p^n(z)$.

Soit $p(n,\alpha)$ le plus petit entier p tel que :

$$H(n,p,N_\alpha,\frac{r}{4}) + \frac{r}{4} \leq -\frac{r}{4}$$

* un tel entier existe nécessairement sinon :

$$\forall p : \quad H(n,p,N_\alpha,\frac{r}{4}) + \frac{r}{4} > -\frac{r}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y_p^n(z) - x_p^n(z) \geq H(n,p,N_\alpha,\frac{r}{4}) - \frac{r}{4} > -\frac{3r}{4}$$

ce qui est impossible puisque $y_p^n(z) - x_p^n(z) \underset{\mathbb{R}}{\to} -z$.

Il est donc possible d'écrire un programme qui calcule un tel entier :

Alors : $H(n,p(n,\alpha),N_\alpha,\frac{r}{4}) + \frac{r}{4} \leq - \frac{r}{4}$

$$\Rightarrow y^n_{p(n,\alpha)}(z) - x^n_{p(n,\alpha)}(z) \leq - \frac{r}{4} < 0$$

Donc : $y^n_{p(n,\alpha)}(z) < x^n_{p(n,\alpha)}(z)$.

Posons pour $r \leq z \leq 1$:

$$M(n,\alpha,z) = \frac{1}{n} + \underset{0 \leq p \leq p(n,\alpha)}{\mathrm{Max}} (f(x^n_p(z));f(y^n_p(z)))$$

$$m(n,\alpha,z) = - \frac{1}{n} + \underset{0 \leq p \leq p(n,\alpha)}{\mathrm{Min}} (f(x^n_p(z));f(y^n_p(z))$$

α étant fixé, $M(n,\alpha,z)$ et $m(n,\alpha,z)$ sont deux suites calculables de fonctions calculables définies dans $[r,1]$.

Soit $x \in [0,z]$

$\exists$ p : $1 \leq p \leq p(n,\alpha)$ tel que :

$$x \in [x^n_{p-1}(z),x^n_p(z)] \quad \text{ou bien} \quad x \in [y^n_p(z),y^n_{p-1}(z)]$$

car :

$$0 = x^n_o(z) < x^n_1(z) < \ldots$$

$$\ldots < y^n_1(z) < y^n_o(z) = z$$

et $y^n_{p(n,\alpha)}(z) < x^n_{p(n,\alpha)}(z)$

Si $x \in [x^n_{p-1}(z),x^n_p(z)]$

Alors :

$$|x-x^n_{p-1}(z)| \leq d(\tfrac{1}{n},x^n_{p-1}(z))$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{n} + f(x^n_{p-1}(z))$$

et de même, si $x \in [y^n_p(z),y^n_{p-1}(z)]$

$$f(x) \leq \frac{1}{n} + f(y^n_{p-1}(z))$$

Donc : $\forall n,\ \forall x \in [0,z]$

$$M(n,\alpha,z) \geq f(x) \geq m(n,\alpha,z)$$

De plus, et par définition de Sup et de Inf :

$\forall z \in [r,1]$ et $\forall n$:

$$\left.\begin{array}{l} |M(n,\alpha,z)-\varphi(z)| \leq \frac{1}{n} \\[2ex] |m(n,\alpha,z)-\Psi(z)| \leq \frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |M(n,\alpha,z)-M(m,\alpha,z)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\[2ex] |m(n,\alpha,z)-M(m,\alpha,z)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \end{array}\right.$$

Supposons maintenant que l'on ait choisi un autre représentant β de z. On déterminerait comme il est dit plus haut $p(n,\beta)$ puis $M(n,\beta,z)$ et $m(n,\beta,z)$ et on aurait :

$$|M(n,\beta,z)-\varphi(z)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |m(n,\beta,z)-\Psi(z)| \leq \frac{1}{n}$$

$\varphi(z)$ et $\Psi(z)$ ne dépendent pas du représentant α de z et en utilisant III,2, φ et Ψ sont bien deux fonctions calculables définies dans $[r,1]$ avec $r > 0$.

e) Nous allons encore généraliser en supposant qu'il existe des suites (dans son sens usuel) de nombres calculables x_p telles que :

$$p \to \infty \Rightarrow d(\tfrac{1}{n},x_p) \underset{\mathbb{R}}{\to} 0 \qquad \text{(n fixé).}$$

Plus précisément, nous supposnns qu'il existe des nombres réels y ($y \notin \mathcal{C}$) et des suites (au sens usuel) de nombres calculables (x_p) tels que :

$$x_p \underset{\mathbb{R}}{\to} y \Rightarrow d(\tfrac{1}{n},x_p) \underset{\mathbb{R}}{\to} 0 \quad (n \text{ fixé}).$$

Par abus de langage nous dirons que de tels y sont les "zéros" de la fonction calculable $x \to d(\frac{1}{n},x)$ (n fixé).

Nous allons établir la proposition suivante :

> Si f est continue sur $[0,1]$ de fonction distance $d(\frac{1}{n},x)$.
> Si on sait que pour tout n fixé, la fonction calculable $d(\frac{1}{n},x)$ admet au plus un nombre fini de "zéros" dans l'intervalle réel $[0,1]$.
>
> Alors f admet une borne supérieure M et une borne inférieure m sur tout intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, $a \neq b$. Et, M et m, peuvent être effectivement déterminés.

LEMME :

Soit n fixé dans $\mathbb{N}$.

Si la fonction calculable d_n : $d_n(x) = d(\frac{1}{n},x)$ admet au plus un "zéro" unique dans $[a,b]$, $a < b, a \in \mathcal{C}$, $b \in \mathcal{C}$.

Alors, en prenant comme au d) :

$$\begin{cases} x_o^n = a \\ x_{p+1}^n = \mathrm{Min}(b;x_p^n+d(\frac{1}{n},x_p^n)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_o^n = b \\ y_{p+1}^n = \mathrm{Max}(a;y_p^n-d(\frac{1}{n},y_p^n)) \end{cases}$$

$\exists$ p(n) entier tel que $y_{p(n)}^n < x_{p(n)}^n$.

<u>Preuve</u> :

n étant fixé,

(x_p^n) est une suite calculable croissante majorée par b.

(y_p^n) est une suite calculable décroissante minorée par a.

Donc elles admettent une limite au sens usuel dans $\mathbb{R} \cap [a,b]$.

$$\left.\begin{array}{l} * \quad \text{si } x_p^n \underset{\mathbb{R}}{\to} b \\ \text{ou bien si } y_p^n \underset{\mathbb{R}}{\to} a \end{array}\right. \qquad \text{quand } p \to \infty$$

Alors la conclusion du lemme est vraie.

* Supposons :

$$\left.\begin{array}{lll} x_p^n \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell & , \ \ell \in \mathbb{R} & , \ \ell < b \\ y_p^n \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell' & , \ \ell' \in \mathbb{R} & ; \ \ell' > a \end{array}\right. \qquad \text{quand } p \to \infty$$

Alors, $\forall p$, $x_p^n < b$ et $y_p^n > a$

Donc :

$$x_{p+1}^n = x_p^n + d(\tfrac{1}{n}, x_p^n) \quad ; \quad x_o^n = a$$

$$y_{p+1}^n = y_p^n - d(\tfrac{1}{n}, y_p^n) \quad ; \quad y_o^n = b$$

définissent les suites calculables (x_p^n) et (y_p^n)

$$x_{p+1}^n - x_p^n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0 \Rightarrow d(\tfrac{1}{n}, x_p^n) \underset{\mathbb{R}}{\to} 0 \quad \text{pour } p \to +\infty \ .$$

Donc ℓ est un "zéro" de $d_n(x) = d(\frac{1}{n}, x)$.

De même, ℓ' est un "zéro" de $d_n(x)$.

Ce "zéro" étant unique, on aurait : $\ell = \ell'$

Mais alors : $x_p^n \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell$ en croissant

$y_p^n \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell$ en décroissant

quand $p \to \infty$

D'après II,b), $\ell \in \mathcal{C}$

On aurait donc : $d(\frac{1}{n},\ell) = 0$

ce qui est impossible puisque $\forall n, \forall x \in \mathcal{C}$, $d(\frac{1}{n},x) > 0$.

* Nécessairement, on aura toujours $\ell = b$ ou bien $\ell' = a$.

c.q.f.d.

DEMONSTRATION DU THEOREME :

Nous allons construire une suite calculable (M_n) telle que :

$$\begin{cases} f(x) \leq M_n & \forall n, \forall x \in [a,b] \cap \mathcal{C} \\ \exists\, x \in [a,b] \cap \mathcal{C} & : M_n - f(x) \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

ce qui donnera le calcul de $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

car alors : $|M_n - M| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n$ (II,3,c).

Pour ne pas alourdir les notations, nous allons fixer n et donner la construction de M_n .

d_n admet un nombre fini de "zéros" dans $[a,b]$ réel. Il existe donc une partition de $[a,b]$ du type $a + \frac{j(b-a)}{2^k}$ $(0 \leq j \leq 2^k)$ qui isole chacun de ces "zéros" et à partir de laquelle, les suites construites comme il est indiqué dans le lemme vont se recouvrir.

Nous allons chercher ce recouvrement :

Posons :

$$a_{k,j} = a + \frac{j(b-a)}{2^k} \qquad (0 \leq j \leq 2^k)$$

$$x^o_{kj} = a_{kj}, \ldots, x^{p+1}_{kj} = \mathrm{Min}(b; x^p_{kj} + d(\tfrac{1}{n}, x^p_{kj}))$$

$$y^o_{kj} = a_{kj}, \ldots, y^{p+1}_{kj} = \mathrm{Max}(a; y^p_{kj} - d(\tfrac{1}{n}, y^p_{kj}))$$

Soit α^k_{qj} un p.c. définissant $y^{2^k}_{qj} - x^{2^k}_{q,j-1}$

$$(0 \leq q \leq k \quad ; \quad 1 \leq j \leq 2^q)$$

et soit r un rationnel (constructible puisque $b \neq a$) tel que

$$0 < r \leq (b-a)$$

Soit T_{qk} le test suivant $(0 \leq q \leq k)$: T_{qk} vrai si :

$$\alpha^k_{qj}(\frac{r}{4 \cdot 2^k}) + \frac{r}{4 \cdot 2^k} \leq \frac{-r}{4 \cdot 2^k} \quad \forall j \ , \ 1 \leq j \leq 2^q$$

* $\exists$ k et $\exists$ $q \leq k$ tel que T_{qk} soit vrai

sinon : $\forall k, \forall q \leq k$

$$\exists \ j \text{ tel que : } \alpha^k_{qj}(\frac{r}{4 \cdot 2^k}) + \frac{r}{4 \cdot 2^k} > - \frac{r}{4 \cdot 2^k}$$

$$\Rightarrow \forall k, \ \forall q \leq k$$

$$\exists \ j \text{ tel que : } y^{2^k}_{qj} - x^{2^k}_{q,j-1} > - \frac{3r}{4 \cdot 2^k} \quad .$$

Mais il existe q fini tel que la partition $a + \frac{j(b-a)}{2^q}$ $(0 \leq j \leq 2^q)$ isole les "zéros" de d_n ;

et il existerait alors j, $1 \leq j \leq 2^q$ tel que :

$$\forall k \quad : \quad y_{qj}^{2^k} - x_{q,j-1}^{2^k} > \frac{-3r}{4 \cdot 2^k}$$

$$\Rightarrow (\lim_{\substack{\mathbb{R} \\ k \to \infty}} (y_{qj}^{2^k} - x_{q,j-1}^{2^k})) \geq 0$$

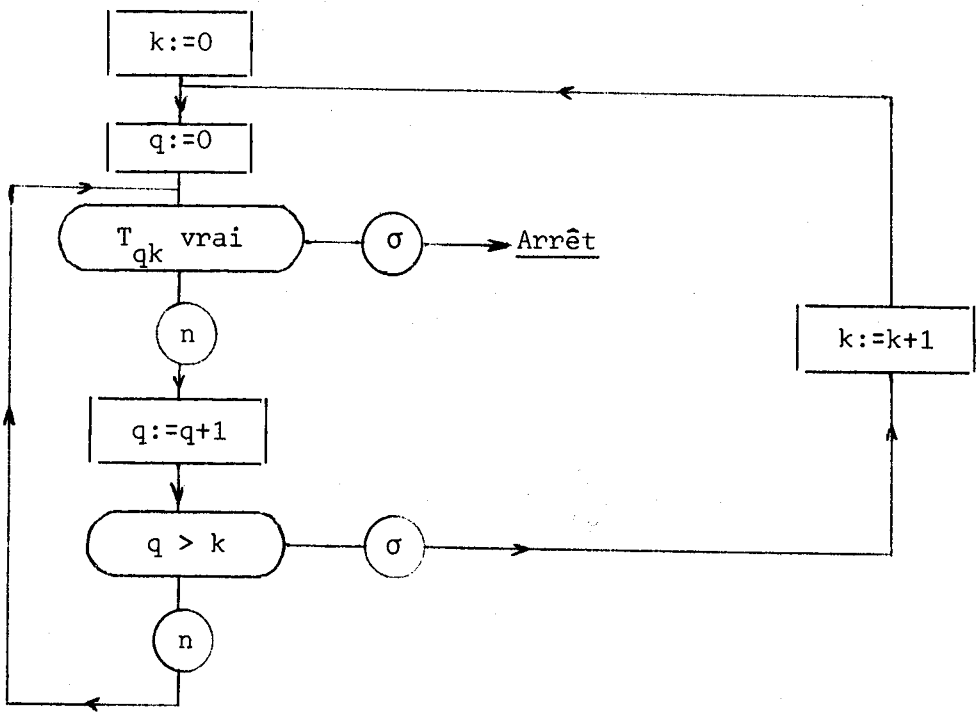
ce qui est impossible d'après le lemme.

* Si T_{qk} est vrai, alors :

$$\forall j \quad : \quad 0 \leq j \leq 2^q \quad : \quad y_{q,j}^{2^k} - x_{q,j-1}^{2^k} < 0$$

=> on a trouvé le recouvrement cherché.

Nous effectuons les tests dans l'ordre suivant :



Si T_{qk} est le premier test vrai nous prendrons :

$$M_n = \frac{1}{n} + \underset{\substack{0 \leq p \leq 2^k \\ 1 \leq j \leq 2^q}}{\mathrm{Max}} \left(f(x^p_{q,j-1}) \ ; \ f(y^p_{q,j}) \right)$$

M_n est tel que :

* $\exists\, x \in [a,b]$, x nombre calculable, tel que $M_n - f(x) \leq \frac{1}{n}$

c'est évident .

* Soit $x \in [a,b]$, x nombre calculable,

$\exists\, j$, $1 \leq j \leq 2^q$ tel que : $a_{q,j-1} \leq x \leq a_{q,j}$

et, puisque T_{qk} est vrai :

$\exists\, p$: $1 \leq p \leq 2^k$ tel que :

$x \in [x^{p-1}_{q,j-1} ; x^p_{q,j}]$ ou bien $x \in [y^p_{q,j} ; y^{p-1}_{q,j}]$

Or :

$$|x - x^{p-1}_{q,j-1}| \leq d(\tfrac{1}{n}, x^{p-1}_{q,j-1})$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{n} + f(x^{p-1}_{q,j-1})$$

Donc, $f(x) \leq M_n$. $\forall x \in \mathcal{C} \cap [a,b]$

* (M_n) est une suite calculable, en effet :

$d(\frac{1}{n},x)$ est définie par l'application programmable $D(\frac{1}{n},N_\alpha,\varepsilon)$ et la recherche de M_n ne fait intervenir que des opérations programmables (les tests d'arrêt indiqués sont effectifs puisque : pour tout n fixé, $d(\frac{1}{n},x)$ admet au plus un nombre fini de "zéros").

(M_n) remplit toutes les conditions cherchées et la suite calculable M_n converge au sens calculable vers $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} f(x)$.

M est caractérisé par : $|M_n - M| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$.

De même, pour trouver $m = \operatorname*{Inf}_{x\in[a,b]} f(x)$

On prendrait : $m_n = -\frac{1}{n} + \operatorname*{Min}_{\substack{0\leq p\leq 2^k \\ 1\leq j\leq 2^q}} (f(x^p_{q,j-1}) ; f(y^p_{q,j}))$

3 - EXISTENCE ET CALCUL DE x^* TEL QUE $f(x^*) = \operatorname*{Sup}_{0 \leq x \leq 1} f(x)$

Soit f une fonction calculable définie dans $[0,1]$

Supposons que l'on sache que $M = \operatorname*{Sup}_{0\leq x\leq 1} f(x)$ est un nombre calculable (les propositions précédentes donnent de tels cas).

Il se peut que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) < M$.
Je vais donner l'idée de la construction d'un tel exemple.

Soit f une fonction calculable définie sur $[0,1]$, continue sur $[0,1]$ pour la fonction distance $d(\frac{1}{n},x)$ et non bornée.
De telles fonctions peuvent être effectivement construites (voir [1] et [2] : fonction de ZASLAVSKI).

Je dis que $x \to d(1,x)$, fonction calculable définie sur $[0,1]$ admet pour borne inférieure 0 et n'atteint jamais 0.

Puisque d est une fonction distance : $d(1,x) > 0$ pour tout x nombre calculable de $[0,1]$.

Supposons $\inf\limits_{0 \leq x \leq 1} d(1,x) \neq 0$

Alors $\exists \ \frac{1}{p} \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\forall x$, $d(1,x) \geq \frac{1}{p} > 0$ (p entier)

Soit x nombre calculable de $[0,1]$

$$\exists \ j \ , \ 0 \leq j \leq p \quad \text{tel que} \quad \left|x - \frac{j}{p}\right| \leq \frac{1}{p}$$

$$\left|x - \frac{j}{p}\right| \leq \frac{1}{p} \leq d(1,\frac{j}{p}) \Rightarrow \left|f(x)-f(\frac{j}{p})\right| \leq 1$$

et par conséquent : $\forall x \in [0,1]$ on aurait :

$$|f(x)| \leq 1 + \max_{0 \leq j \leq p} \left|f(\frac{j}{p})\right|$$

ce qui est impossible puisque f n'est pas bornée.

Donc :

$$d(1,x) > 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \text{et} \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} d(1,x) = 0$$

* On se propose maintenant d'essayer de construire, si c'est possible, x^* tel que : $f(x^*) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x)$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

<u>THEOREME</u> :

Si f est une fonction calculable définie et croissante dans $[0,1]$

$(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$

Alors f est uniformément continue (au sens calculable) sur $[0,1]$.

LEMME 1 :

Une fonction calculable définie et croissante dans $[0,1]$ de se prolonge par continuité (au sens usuel) dans l'intervalle réel $[0,1]$, et, par conséquent possède la propriété :

$\forall x$ et $\forall y$ nombres calculables de $[0,1]$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$

$\exists \eta \in \mathbb{Q}^+$ tel que : $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

Preuve :

Soit x un nombre réel quelconque de l'intervalle réel $[0,1]$

Posons :

$$M(x) = \sup_{\substack{0 \leq y \leq x \\ y \in \mathcal{C}}} f(y)$$

et :

$$m(x) = \inf_{\substack{x \leq y \leq 1 \\ y \in \mathcal{C}}} f(y)$$

$M(x)$ et $m(x)$ définissent parfaitement, au sens de l'analyse classique, des fonctions réelles d'une variable réelle. Et, d'après la monotonie de f :

$$\forall x \in \mathcal{C} \quad , \; f(x) = m(x) = M(x)$$

M et m possèdent les propriétés :

$$\forall x_o \in \mathbb{R} \; , \; 0 \leq x_o \leq 1 \quad , \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad \exists \; \eta \in \mathbb{R}^+$$

tel que :

$$x_o - \eta \leq x \leq x_o \quad \Rightarrow M(x_o)-M(x) \leq \varepsilon$$

$$x_o \leq x \leq x_o + \eta \Rightarrow m(x)-m(x_o) \leq \varepsilon \quad .$$

Pour établir la continuité au sens classique de M et m il suffit donc de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 1$, $M(x) = m(x)$.

Supposons que $M(x_o) \neq m(x_o)$, $x_o \notin \mathcal{C}$.

Par définition de M et de m :

$$\exists\ x_1 \in \mathcal{C} \quad , x_1 < x_o \text{ tel que : } \quad M(x_o) \geq f(x_1) \geq M(x_o) - \left|\frac{M(x_o)-m(x_o)}{4}\right|$$

$$\exists\ x_2 \in \mathcal{C} \quad , x_2 > x_o \text{ tel que : } \quad m(x_o) \leq f(x_2) \leq m(x_o) + \left|\frac{M(x_o)-m(x_o)}{4}\right|$$

. Si $m(x_o) < M(x_o)$

Alors $f(x_2) < f(x_1)$, ce qui est impossible puisque f est croissante.

. Si $m(x_o) > M(x_o)$

Alors : $f(1) > m(x_o) > M(x_o) > f(0)$

et d'après IV, 1,c)

$$\forall y \in \mathcal{C} \ , \ y \in [f(0),f(1)] \ , \ \exists\ x \in \mathcal{C} \ , \ 0 \leq x \leq 1 \text{ tel que } f(x) = y$$

ce qui serait impossible puisque :

$$x \leq x_o \Rightarrow f(x) \leq M(x_o) < m(x_o)$$

et $\quad x \geq x_o \Rightarrow f(x) \geq m(x_o)$.

Donc $m(x) = M(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 1$

=> M est une fonction continue au sens usuel sur le compact $[0,1]$ elle est donc uniformément continue au sens usuel :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists\ \eta \in \mathbb{Q}^+ \text{ tel que : } \forall x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \ x \text{ et } y \in [0,1]$$

$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |M(x)-M(y)| \leq \varepsilon$$

et en particulier :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists\ \eta \in \mathbb{Q}^+ \text{ tel que : } x \in \mathcal{C} \ , \ y \in \mathcal{C} \ ,$$

$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

LEMME 2 :

Si f est une fonction calculable définie sur $[0,1]$ telle que :

$$\varphi(z,y) = \sup_{\mathrm{Min}(y,z) \leq x \leq \mathrm{Max}(y,z)} f(x)$$

et

$$\Psi(y,z) = \inf_{\mathrm{Min}(y,z) \leq x \leq \mathrm{Max}(y,z)} f(x)$$

sont des fonctions calculables définies pour $(y,z) \in [0,1] \times [0,1]$

Si $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, $\exists\ \eta \in \mathbb{Q}^+$ tel que $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{C}$, x et $y \in [0,1]$

$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Alors f est uniformément continue au sens calculable sur $[0,1]$.

Preuve :

Considérons les subdivisions de $[0,1]$ du type $\frac{j}{2^n}$ $(0 \leq j \leq 2^n)$

et posons :

$$u_n = \max_{1 \leq j \leq 2^n} \left(\varphi\left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) - \Psi\left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)$$

* (u_n) est une suite calculable car φ et Ψ sont des fonctions calculables

* (u_n) est une suite décroissante
  (intervalles emboîtés)

* $(u_n) \underset{\mathbb{R}}{\to} 0$

sinon $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tel que $u_n > \varepsilon \quad \forall n$

$$\Rightarrow \forall n, \exists\ j : \quad \varphi\left(\frac{j-1}{2^n} ; \frac{j}{2^n}\right) - \Psi\left(\frac{j-1}{2^n} ; \frac{j}{2^n}\right) > \varepsilon$$

Mais par définition de φ et Ψ (sup et inf),

$\exists\ x_n \in \mathcal{C} \cap [\frac{j-1}{2^n} ; \frac{j}{2^n}]$ tel que $f(x_n) \geq \varphi(\frac{j-1}{2^n} ; \frac{j}{2^n}) - \frac{\varepsilon}{4}$

$\exists\ y_n \in \mathcal{C} \cap [\frac{j-1}{2^n} ; \frac{j}{2^n}]$ tel que $f(y_n) \leq \Psi(\frac{j-1}{2^n} ; \frac{j}{2^n}) + \frac{\varepsilon}{4}$

Donc :

$\forall n\ \exists\ x_n$ et $\exists\ y_n$ calculables tels que :

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad |f(x_n)-f(y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est impossible.

Donc $u_n \to 0$ II, 4, a)

On peut construire $d : \frac{1}{p} \to d(\frac{1}{p})$ programmable telle que :

$$n \geq d(\frac{1}{p}) \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{p}$$

* Soient maintenant x et y de $[0,1]$

Supposons $|x-y| \leq \frac{1}{2^n}$

$\exists$ j tel que : $x \in [\frac{j}{2^n} , \frac{j+2}{2^n}]$ et $y \in [\frac{j}{2^n} , \frac{j+2}{2^n}]$

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f(\frac{j+1}{2^n})| + |f(x)-f(\frac{j+1}{2^n})|$$

$$x \in [\frac{j}{2^n} , \frac{j+1}{2^n}] \Rightarrow |f(x)-f(\frac{j+1}{2^n})| \leq \varphi(\frac{j}{2^n} , \frac{j+1}{2^n}) - \Psi(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$$

$$x \in [\frac{j+1}{2^n} , \frac{j+2}{2^n}] \Rightarrow |f(x)-f(\frac{j+1}{2^n})| \leq \varphi(\frac{j+1}{2^n} , \frac{j+2}{2^n}) - \Psi(\frac{j+1}{2^n} , \frac{j+2}{2^n})$$

Donc :

$$|f(y)-f(x)| \leq 2u_n$$

d'où :

$$\left.\begin{array}{l} |x-y| \leq \frac{1}{2^n} \\ n \geq d(\frac{1}{2p}) \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{p}$$

c.q.f.d.

FIN DE DEMONSTRATION DU THEOREME :

Puisque f est croissante, nous sommes dans les conditions du lemme 2 avec :

$$\varphi(z,y) = f(\mathrm{Max}(y,z))$$

$$\Psi(y,z) = f(\mathrm{Min}(y,z))$$

a) Existence et calcul de x^* dans le cas de l'unicité.

PROPOSITION :

Soit f une fonction calculable définie sur $[0,1]$

Si $\varphi_0(z) = \sup\limits_{0 \leq x \leq z} f(x)$ et $\varphi_1(z) = \sup\limits_{z \leq x \leq 1} f(x)$

sont deux fonctions calculables définies pour $z \in [0,1]$ de $\mathcal{C}$

Si $f(0) < \varphi_0(1) = \varphi_1(0) = M$

Si $f(1) < \varphi_0(1) = \varphi_1(0) = M$

S'il y a unicité de $x^* \in \mathbb{R}$, $0 \leq x^* \leq 1$ tel que : $\forall I$, intervalle ouvert réel contenant x^*, $I \subset [0,1]$ réel : $\sup\limits_{x \in \mathcal{C} \cap I} f(x) = M$.

Alors $x^* \in \mathcal{C}$ tel que $f(x^*) = M$ peut être effectivement déterminé.

Preuve :

* φ_0 est une suite calculable croissante définie sur $[0,1]$. Elle est donc uniformément continue au sens calculable et l'on sait construire une fonction distance $d_0 : \frac{1}{p} \to d_0(\frac{1}{p})$ pour φ_0 .

On sait que $f(0) < M$.

Soit α_0 le p.c. définissant $M - f(0)$.

On peut écrire un programme qui calcule le plus petit entier n_o tel que : $\alpha_o(\frac{1}{n_o}) > \frac{2}{n_o}$ (car $M - f(0) > 0$) .

Soit $x_o = 0$

$$x_1 = x_o + d_o(\frac{1}{n_o})$$

Il vient :

$$M-f(0) \geq \alpha_o(\frac{1}{n_o}) - \frac{1}{n_o} > \frac{1}{n_o}$$

. Je dis que $x_1 < 1$

sinon : $|\varphi_o(1) - \varphi_o(0)| \leq \frac{1}{n_o}$

Donc : $\varphi_o(1) = M \leq \frac{1}{n_o} + \varphi_o(0)$

$\Rightarrow$ $M < M-f(0) + f(0)$

. De plus : $\varphi_o(x_1) < M$

(mêmes arguments).

Si l'on a construit x_p tel que $\varphi_o(x_p) < M$, en posant $\{\alpha_p\} = M - \varphi_o(x_p)$ on peut écrire un programme qui calcule le plus petit entier n_p tel que : $\alpha_p(\frac{1}{n_p}) > \frac{2}{n_p}$

On prendra $x_{p+1} = x_p + d_o(\frac{1}{n_p})$.

Comme précédemment :

. $x_{p+1} < 1$

. $x_{p+1}-x_p = d_o(\frac{1}{n_p}) \Rightarrow \varphi_o(x_{p+1}) - \varphi_o(x_p) \leq \frac{1}{n_p} < M - \varphi_o(x_p)$

soit $\varphi_o(x_{p+1}) < M$.

On vient de construire une suite calculable (x_p) strictement croissante, majorée par 1 et telle que : $\varphi_o(x_p) < M \quad \forall p$.

Donc $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$, $0 < \ell \leq 1$ tel que $x_p \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell$.

Soit $\widehat{\varphi}_o$ le prolongement par continuité au sens usuel de φ_o dans $\mathbb{R}$.

$$x_p \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell \Rightarrow \varphi_o(x_p) = \widehat{\varphi}_o(x_p) \underset{\mathbb{R}}{\to} \widehat{\varphi}_o(\ell) \leq M .$$

. Supposons $\widehat{\varphi}_o(\ell) < M$

Alors, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que : $M - \widehat{\varphi}_o(\ell) > \frac{3}{n}$

Donc : $\forall p$, $M - \varphi_o(x_p) \geq M - \widehat{\varphi}_o(\ell) > \frac{3}{n}$

Donc : $\forall p$, $\alpha_p(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \geq M - \varphi_o(x_p) > \frac{3}{n}$

$\Rightarrow \forall p : \alpha_p(\frac{1}{n}) > \frac{2}{n}$

Donc $n_p \leq n$ $\forall p$.

D'où : $\forall p$: $d_o(\frac{1}{n_p}) \geq \underset{1 \leq j \leq n}{\mathrm{Min}} \; d_o(\frac{1}{n}) > 0$

et (x_p) ne serait pas convergente au sens usuel, ce qui est impossible.

Donc : $\widehat{\varphi}_o(\ell) = M$.

. Soit $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < \ell$

$$x_p \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell \Rightarrow \exists\, x_p \text{ tel que } x \leq x_p$$

$\widehat{\varphi}_o$ est croissante, donc $\widehat{\varphi}_o(x) \leq \varphi_o(x_p) < M$.

Donc : $\forall I$ intervalle ouvert réel inclus dans $[0,1]$ réel et contenant ℓ ;

$\underset{x \in \mathcal{C} \cap I}{\mathrm{Sup}} f(x) = M$.

* De même : φ_1 est une fonction calculable décroissante .

Soit $d_1(\frac{1}{p})$ une fonction distance pour φ_1 et soit (y_p) la suite calculable strictement décroissante, minorée par 0 :

$$y_o = 1$$

$$y_{p+1} = y_p - d_1(\frac{1}{m_p})$$

où :

si $\{\beta_p\} = M - \varphi_1(y_p)$, m_p est le plus petit entier tel que :

$$\beta_p(\frac{1}{m_p}) > \frac{2}{m_p}$$

Comme précédemment :

puisque $f(1) = \varphi_1(1) < M$ il vient : $\varphi_1(y_p) < M \quad \forall p$

et $(y_p) \underset{\mathbb{R}}{\to} \ell'$ tel que :

$$\hat{\varphi}_1(\ell') = M \text{ et } \ell' \leq x \leq 1 \Rightarrow \hat{\varphi}_1(x) < M .$$

Donc, $\forall I$ intervalle ouvert réel contenant ℓ' : $\sup\limits_{x \in \mathcal{C} \cap I} f(x) = M$.

* D'après la condition d'unicité : $\ell = \ell' = x^*$.
Nous avons construit deux suites calculables (x_p) et (y_p)

$$x_p \underset{\mathbb{R}}{\to} x^* \text{ en croissant}$$

$$y_p \underset{\mathbb{R}}{\to} x^* \text{ en décroissant}$$

D'après II, 4, b) on peut déterminer un p.c. α tel que $x^* = \{\alpha\}$ et l'on a $f(x^*) = M$. (D'après V,1 : continuité des fonctions calculables).

c.q.f.d.

Exemple : Construction de la suite (x_p) pour une fonction calculable f uniformément continue sur $[0,1]$ au sens calculable, pour la fonction distance d.

On sait, dans ce cas que φ_o (et φ_1) sont des fonctions calculables.

On va simplifier notablement la description de l'algorithme en remarquant que si f est uniformément continue relativement à la fonction distance d, φ_o et φ_1 sont a fortiori uniformément continues relativement au même d (celui de f).

Soit K_n le plus petit entier supérieur à $\frac{1}{d(\frac{1}{n})}$ et $\alpha(n,\varepsilon)$ définissant la suite calculable :

$$M_n = \frac{1}{n} + \underset{0 \leq j \leq K_n}{\mathrm{Max}} \quad f\left(\frac{j}{K_n}\right)$$

On sait :

$$M \leq M_n \leq M + \frac{1}{n} \qquad \forall n \text{ entier} \geq 1.$$

Supposons que l'on a déterminé x_p $\quad (\varphi_o(x_p) < M)$

Soit H_n^p le plus petit entier supérieur à $\frac{x_p}{d(\frac{1}{n})}$ et $\beta_p(n,\varepsilon)$ définissant la suite calculable :

$$M_n^p = \frac{1}{n} + \underset{0 \leq j \leq H_n^p}{\mathrm{Max}} \quad f\left(\frac{j\ x_p}{H_n^p}\right)$$

On sait : $\varphi_o(x_p) \leq M_n^p \leq \varphi_o(x_p) + \frac{1}{n}$

Il vient :

$$\left|\alpha(2n,\tfrac{1}{2n}) - M\right| \leq \frac{1}{n}$$

et : $$\left|\beta_p(2n,\tfrac{1}{2n}) - \varphi_o(x_p)\right| \leq \frac{1}{n}$$

Donc :

$$|(M - \varphi_o(x_p)) - (\alpha(4n,\frac{1}{4n}) - \beta_p(4n,\frac{1}{4n}))| \leq \frac{1}{n}$$

et on est ramené au cas général.

n_p est donc le plus petit entier tel que :

$$\alpha(4n_p,\frac{1}{4n_p}) - \beta_p(4n_p,\frac{1}{4n_p}) > \frac{2}{n_p}$$

$$x_{p+1} = x_p + d(\frac{1}{n_p})$$

et $\varphi_o(x_{p+1})$ sera défini par la suite calculable :

$$M_n^{p+1} = \frac{1}{n} + \underset{0\leq j\leq H_n^{p+1}}{\mathrm{Max}} \; f(\frac{j\; x_{p+1}}{H_n^{p+1}})$$

où H_n^{p+1} désigne le plus petit entier supérieur à $\dfrac{x_{p+1}}{d(\frac{1}{n})}$.

<u>REMARQUE</u> :

Si f est définie à l'aide de fonctions usuelles, il est en général assez simple de trouver une fonction distance d pour f (il faut pour cela appliquer les règles de V 2)

<u>Exemple</u> :

$$f(x) = x + e^x \,|\sin 4 \sqrt{|x - \tfrac{1}{3}|}\,|$$

$x \to x$ a pour fonction distance $d_1(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

$x \to e^x$ a pour fonction distance $d_2(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3n}$ sur $[0,1]$

$$(\text{car } |e^x - e^y| \leq (\underset{0\leq x\leq 1}{\mathrm{Sup}}\; e^x)\,|x-y|\;)$$

$x \to \sin 4x$ a pour fonction distance $d_3(\frac{1}{n}) = \frac{1}{4n}$

Donc $x \to |\sin 4x|$ a la même

$x \to \sqrt{|x - \frac{1}{3}|}$ a pour fonction distance $d_4(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$

car $|\sqrt{|x - \frac{1}{3}|} - \sqrt{|y - \frac{1}{3}|}\,| \leq \sqrt{|x-y|}$

Donc $x \to |\sin 4\sqrt{|x - \frac{1}{3}|}|$ a pour fonction distance $d_3(d_4(\frac{1}{n})) = \frac{1}{4n^2}$

$$\left.\begin{array}{l} e^x \text{ est majoré par } 3 \\ |\sin 4\sqrt{|x - \frac{1}{3}|}| \text{ est majoré par } 1 \end{array}\right\} \quad \text{sur } [0,1]$$

Donc : $x \to e^x|\sin 4\sqrt{|x - \frac{1}{3}|}|$ a pour fonction distance :

$$d_5(\frac{1}{n}) = \text{Min } (\frac{1}{6n}, \frac{1}{24n^2}) = \frac{1}{24n^2}$$

On peut prendre pour fonction distance de $f(x)$ sur $[0,1]$:

$$d(\frac{1}{n}) = \text{Min } (\frac{1}{48n^2}, \frac{1}{2n}) = \frac{1}{48n^2}$$

De plus :

$$f(0) \leq 1$$

$$f(0,5) = 0,5 + \sqrt{e}\,|\sin \frac{4\sqrt{6}}{6}| \Rightarrow f(0,5) \geq 2$$

$$f(1) = 1 + e\,|\sin \frac{4\sqrt{6}}{3}| \Rightarrow f(1) \leq 1,6$$

Donc :

$$f(0) < M$$

$$f(1) < M$$

et il y a nécessairement unicité.
Nous pouvons appliquer la méthode précédente.

b) Cas d'une fonction calculable convexe sur $[0,1]$.

Soit f une fonction calculable définie sur $[0,1]$ et convexe sur $[0,1]$.

$f(\lambda x+\mu y) \leq \lambda f(x)+\mu f(y)$, $\forall x$ et $\forall y$ de $[0,1]$; $\forall \lambda$ et $\forall \mu$

$(\lambda \in \mathcal{C}$; $\mu \in \mathcal{C}$; $1 \geq \lambda \geq 0$; $\lambda + \mu = 1)$

Si $\Psi(z) = \operatorname*{Inf}_{0\leq x\leq z} f(x)$ est une fonction calculable définie pour $z \in [0,1]$.

Si $f(0) > m = \Psi(1)$

Alors, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, fixé on peut trouver un nombre calculable x_p tel que : $0 < f(x_p) - m \leq \frac{1}{p}$.

Méthode :

$$f(0) - m > 0$$

Si $\{\alpha\} = f(0) - m$, on peut donc trouver n_o le plus petit entier tel que :

$$\alpha(\frac{1}{n_o}) > \frac{2}{n_o}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_o} < \alpha(\frac{1}{n_o}) - \frac{1}{n_o} \leq f(0) - m$$

Soit $\{\beta\}$ un p.c. calculant $m = \operatorname*{Inf}_{0\leq x\leq 1} f(x)$ et p un entier fixé.

Posons $z = \beta(\frac{1}{m_o}) + \frac{2}{m_o}$ Avec $m_o = \operatorname{Max}(3n_o, 6_p)$.

$$* \quad m < z \leq m + \frac{3}{m_o}$$

puisque $m_o \geq 3n_o$

$$z \leq m + \frac{3}{m_o} \leq m + \frac{1}{n_o} < f(0)$$

puisque $m_o \geq 6p$

$$z \leq m + \frac{3}{m_o} \leq m + \frac{1}{2p} .$$

On a donc construit z tel que :

$$m < z < f(0)$$

$$m < z \leq m + \frac{1}{2p}$$

f est convexe et $f(0) > m$ donc Ψ est strictement décroissante sur $\{x | \Psi(x) > m\}$.

$$\Psi 0) = f(0) \quad \text{et} \quad \Psi(1) = m \Rightarrow \exists\, x \in \mathcal{C} \quad \text{tel que } \Psi(x) = z$$

et cet x est unique.

Posons $x_o = 0$; $y_o = 1$

$$a_o = \frac{2x_o + y_o}{3} \quad ; \quad b_o = \frac{x_o + 2y_o}{3}$$

x tel que $\Psi(x) = z$ étant unique : $\Psi(a_o) \neq z$ ou bien $\Psi(b_o) \neq z$.

Il est donc possible de déterminer lequel des deux est différent de z et, par suite de savoir si :

$$\Psi(a_o) > z \quad \text{ou bien} \quad \Psi(b_o) > z$$

ou bien $\Psi(a_o) < z$ ou bien $\Psi(b_o) < z$

Nous prendrons alors :

$$\left.\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l} x_1 = a_o \\ y_1 = y_o \end{array}\right\} & \text{si } \Psi(a_o) > z \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} x_1 = x_o \\ y_1 = a_o \end{array}\right\} & \text{si } \Psi(a_o) < z \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} x_1 = b_o \\ y_1 = y_o \end{array}\right\} & \text{si } \Psi(b_o) > z \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} x_1 = x_o \\ y_1 = b_o \end{array}\right\} & \text{si } \Psi(b_o) < z
\end{array}\right\} \quad \text{puis } a_1 = \frac{2x_1 + y_1}{3} \; ; \; b_1 = \frac{x_1 + 2y_1}{3}$$

et l'algorithme se poursuit de la même façon.

Nous avons donc construit deux suites calculables (tous les tests indiqués sont effectifs) telles que :

(x_n) croissante $z < \Psi(x_n), \forall n$

(y_n) décroissante $z > \Psi(y_n), \forall n$

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{2}{3}(y_n - x_n) \Rightarrow y_n - x_n \underset{\mathbb{R}}{\to} 0$$

Par suite, $x_n \to x$ (et $y_n \to x$) où x est ce nombre calculable tel que :

$$\Psi(x) = z$$

et on peut construire $h : \frac{1}{p} \to h(\frac{1}{p})$ programmable telle que :

$$n \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow \Psi(x_n) - z \leq \frac{1}{p}$$

(Ψ est uniformément continue).

Prenons n_p le plus petit entier supérieur ou égal à $h(\frac{1}{2p})$

Il vient :

$$\Psi(x_{n_p}) > z > m \Rightarrow f(x_{n_p}) = \Psi(x_{n_p})$$

(convexité de Ψ)

$$f(x_{n_p}) - m = f(x_{n_p}) - z + z - m$$

$$\Rightarrow \quad f(x_{n_p}) - m \leq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}$$

c.q.f.d.

c) Cas général :

Si f est une fonction calculable définie sur $[0,1]$.

Si $\varphi(z) = \operatorname*{Sup}_{0\leq x\leq z} f(x)$ est une fonction calculable définie sur $[0,1]$

Si $f(0) < \varphi(1) = M$

Alors $\forall p \geq 1$ entier fixé on peut construire un intervalle $[a,b]$ tel que :

$$M - \frac{1}{p} \leq \varphi(a) < \varphi(b) < M$$

Et, par suite, $\exists$ x nombre calculable de $[a,b]$ tel que :

$$M - \frac{1}{p} \leq f(x) < M$$

(sans précision supplémentaire je ne sais pas déterminer effectivement un tel x).

Preuve :

Considérons comme au a) la suite calculable :

$$x_o = 0$$

$$x_{p+1} = x_p + d(\frac{1}{n_p})$$

où d désigne la fonction distance que l'on a construit pour φ.

On a déjà vu que :

$x_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{} \ell$ où ℓ est un nombre réel possédant la propriété :

$$\hat{\varphi}(\ell) = M$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad 0 \leq x < \ell \quad , \quad \hat{\varphi}(x) < M \ .$$

$\varphi(x_n)$ est une suite calculable croissante (au sens large) et, par continuité (dans $\mathbb{R}$) de $\hat{\varphi}$: $\varphi(x_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{} M$.

Donc $\varphi(x_n) \to M$ (d'après II, 4, a) et parce que $M - \varphi(x_n)$ est une suite calculable).

p étant fixé, il est donc possible de trouver n_o tel que :

$$M - \varphi(x_{n_o}) \leq \frac{1}{p}$$

Nous prendrons $a = x_{n_o}$.

Déterminons maintenant b tel que $M > \varphi(b) > \varphi(a)$.

On ne peut pas prendre $b = x_{n_o+1}$ car φ n'est pas nécessairement strictement croissante.

Soit $\{\alpha_{n_o}\} = M - \varphi(x_{n_o})$

et p_o le plus petit entier tel que $\alpha_{n_o}(\frac{1}{p_o}) > \frac{2}{p_o}$

Alors : par construction (voir a) :

$$x_{n_o+1} = x_{n_o} + d(\frac{1}{p_o})$$

Supposons $\varphi(x_{n_o+1}) = \varphi(x_{n_o})$

Alors : $M - \varphi(x_{n_o+1}) = M - \varphi(x_{n_o})$

$\Rightarrow$ $\{\alpha_{n_o}\} = M - \varphi(x_{n_o})$ et $\{\alpha_{n_o+1}\} = M - \varphi(x_{n_o+1})$

sont deux p.c. équivalents.

Donc : $|\alpha_{n_o+1}(\frac{1}{3p_o}) - \alpha_{n_o}(\frac{1}{p_o})| \leq \frac{1}{3p_o} + \frac{1}{p_o}$

D'où :

$$\alpha_{n_o+1}(\frac{1}{3p_o}) \geq \alpha_{n_o}(\frac{1}{p_o}) - \frac{1}{p_o} - \frac{1}{3p_o} > \frac{2}{p_o} - \frac{1}{p_o} - \frac{1}{3p_o}$$

Soit : $\alpha_{n_o+1}(\frac{1}{3p_o}) > \frac{2}{3p_o}$.

Donc, dans ce cas, p_1, plus petit entier tel que :

$$\alpha_{n_o+1}\left(\frac{1}{p_1}\right) > \frac{2}{p_1}$$

est inférieur ou égal à $3p_o$

et, de même, si :

$$\varphi(x_{n_o+k}) = \varphi(x_{n_o})$$

Alors, $p_k \leq 3p_o$

$$\Rightarrow \quad x_{n_o+k+1} = x_{n_o} + \sum_{i=0}^{k} d\left(\frac{1}{p_k}\right) \geq x_{n_o} + (k+1) \underset{1 \leq j \leq 3p_o}{\mathrm{Min}} d\left(\frac{1}{j}\right)$$

Soit n_1 le plus petit entier tel que :

$$\frac{1}{n_1} \leq \underset{1 \leq j \leq 3p_o}{\mathrm{Min}} d\left(\frac{1}{j}\right)$$

Si $\varphi(x_{n_o+n_1})$ était encore égal à $\varphi(x_{n_o})$ il viendrait :

$$x_{n_o+n_1} \geq x_{n_o} + n_1 \cdot \underset{1 \leq j \leq 3p_o}{\mathrm{Min}} d\left(\frac{1}{j}\right) \geq x_{n_o} + 1 > 1$$

ce qui est impossible puisque $x_n < 1 \quad \forall n$.

Donc, nécessairement $\varphi(x_{n_o+n_1}) > \varphi(x_{n_o})$

Prenons $\quad b = x_{n_o+n_1}$

On a : $\quad M - \frac{1}{p} < \varphi(a) < \varphi(b) < M$

et nécessairement l'intervalle $[a,b]$ contient au moins un nombre calculable x tel que $\varphi(a) \leq f(x) \leq \varphi(b)$.

5 - EXISTENCE ET CALCUL DE $I = \int_0^1 f(x)dx$:

a) f, fonction calculable définie sur [0,1] se prolonge par continuité au sens usuel en une fonction réelle d'une variable réelle $\hat{f}$ si et seulement si f possède la propriété :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, $\exists\ \eta \in \mathbb{Q}^+$ tel que : $\forall x$, $\forall y$ nombres calculables de [0,1],

$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

En particulier, c'est le cas :

- pour f uniformément continue au sens calculable
- pour f continue au sens calculable et dont la fonction distance $d(\frac{1}{p},x)$ possède la propriété :

  $\forall p$, $\exists\ K_p > 0$, $K_p \in \mathbb{Q}^+$, K_p indépendant de x tel que :
  $\forall x \in [0,1]$, $d(\frac{1}{p},x) > K_p$.

Alors on peut parler de $I = \int_0^1 \hat{f}(x)dx$ que nous identifierons à $\int_0^1 f(x)dx$.

Je vais donner, dans ce cas particulier un théorème et un exemple de calcul effectif de I.

THEOREME :

Si f, fonction calculable définie sur [0,1] se prolonge par continuité en une fonction réelle d'une variable réelle $\hat{f}$.

Si $\forall n$ fixé, et pour tout intervalle [a,b] de [0,1] on peut déterminer effectivement M_n et $m_n \in \mathcal{C}$ tels que :

* $f(x) \leq M_n \quad \forall x \in [a,b]$
* $\exists x \in [a,b]$ tel que $M_n - f(x) \leq \frac{1}{n}$
* $f(x) \geq m_n \quad \forall x \in [a,b]$
* $\exists y \in [a,b]$ tel que $f(y) - m_n \leq \frac{1}{n}$

Alors $I = \int_0^1 \hat{f}(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ est un nombre calculable qui peut être effectivement déterminé.

Preuve :

On considère des subdivisions de $[0,1]$ du type $[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$ $(1 \leq j \leq n)$ et soient M_n^j et m_n^j comme il est dit dans l'énoncé du théorème avec $[a,b] = [\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} M_n^j \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} m_n^j$$

sont deux suites calculables.

* $u_n \geq I$ et $v_n \leq I \quad \forall n$
* $u_n \underset{\mathbb{R}}{\to} I$ car, f fonction calculable et bornée est telle que :

  $\forall \varepsilon$, $\exists$ η : $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ fixé, prenons $\frac{1}{n} < \eta$

  Alors, $\forall x \in [\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$: $f(x) \geq M_n^j - \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{2}$

  (car $\exists$ $j \in [\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$ tel que : $M_n^j - f(y) \leq \frac{1}{n}$)

  Donc :

  $\frac{1}{n} < \eta \Rightarrow u_n - I \leq ((\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}) \cdot \frac{1}{n}) \cdot n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}$

  $\frac{1}{n} \leq \text{Min}(\eta, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow u_n - I \leq \varepsilon$
* De même $v_n \underset{\mathbb{R}}{\to} I$
* Par suite : on sait construire $h : n \to h(n)$ programmable strictement croissante telle que :

$$\left.\begin{array}{l} u_{h(n)} \to I \\ v_{h(n)} \to I \end{array}\right. \qquad (II,4,d)$$

c.q.f.d.

Application : Méthode effective de calcul d'intégrales pour des fonctions calculables uniformément continues sur $[0,1]$ (au sens calculable).

Appelons d une fonction distance pour f

Prenons des subdivisions de pas $\delta_n = d(\frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}^+$

Soient :

$$0 = x_o^n < x_1^n = x_o^n + \delta_n < \dots < x_{k_n}^n = 1$$

$$M_n^j = \frac{1}{n} + \text{Max}\ (f(x_{j-1}^n)\ ;\ f(x_j^n))$$

$$m_n^j = -\frac{1}{n} + \text{Min}\ (f(x_{j-1}^n)\ ;\ f(x_j^n))$$

D'après le choix de δ_n : si $x \in [x_{j-1}^n, x_j^n]$

$$f(x_j^n) - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq f(x_j^n) + \frac{1}{n}$$

$$f(x_{j-1}^n) - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq f(x_{j-1}^n) + \frac{1}{n}$$

D'où :

$$M_n^j - \frac{2}{n} \leq f(x) \leq M_n^j$$

$$m_n^j \leq f(x) \leq m_n^j + \frac{2}{n}$$

Donc, si $u_n = \sum_{1 \leq j \leq k_n} M_n^j\ (x_j^n - x_{j-1}^n)$

et si $v_n = \sum_{1 \leq j \leq k_n} m_n^j\ (x_j^n - x_{j-1}^n)$

Alors $\forall n$:

$$u_n - \frac{2}{n} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq u_n$$

$$v_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq v_n + \frac{2}{n}\ .$$

<u>En particulier</u> :

La fonction $f(x) = x + e^x|\sin 4\sqrt{|x - \frac{1}{3}|}|$ citée au V, 3, a) a pour fonction distance $d(\frac{1}{n}) = \frac{1}{48n^2}$ sur $[0,1]$. Elle s'intègre donc par cette méthode.

b) Soit f une fonction calculable définie et bornée sur $[0,1]$. Je vais définir $\int_0^1 f(x)\,dx$ à l'aide de fonctions en escalier.

J'appelle fonction en escalier une fonction réelle d'une variable réelle : φ ayant un nombre fini de points de discontinuité : $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < 1$ $(x_i \in \mathcal{C})$ et telle que :

$$x \in \mathbb{R} \cap [x_i, x_{i+1}[\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x_i) \in \mathcal{C} \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

$$x \in \mathbb{R} \cap [0, x_1[\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(0) \in \mathcal{C}$$

$$x \in \mathbb{R} \cap [x_k, 1] \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x_k) \in \mathcal{C}$$

$\int_0^1 \varphi(x)dx$ est donc un nombre calculable.

Si on est capable de trouver deux suites (au sens usuel) de fonctions en escalier φ_n et Ψ_n telles que :

* $\varphi_n(x) \geq f(x)$, $\forall n$, $\forall x \in \mathcal{C}$, $0 \leq x \leq 1$
* $\Psi_n(x) \leq f(x)$, $\forall n$, $\forall x \in \mathcal{C}$, $0 \leq x \leq 1$
* $\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ et $\int_0^1 \Psi_n(x)dx$ sont deux suites calculables de nombres calculables.
* $(\int_0^1 \varphi_n(x)dx - \int_0^1 \Psi_n(x)dx) \to 0$ (au sens calculable).

Alors :

1) $\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ est convergente au sens calculable.

car :

$$\forall n \text{ et } \forall p : \int_0^1 \varphi_n(x)dx \geq \int_0^1 \Psi_p(x)dx \quad \text{(c'est évident).}$$

$$\left|\int_0^1 \varphi_n(x)dx - \int_0^1 \varphi_m(x)dx\right| \leq \left|\int_0^1 \varphi_n(x)dx - \mathrm{Max}\left(\int_0^1 \Psi_n(x)dx \ ; \int_0^1 \Psi_m(x)dx\right)\right|$$

$$+ \left|\mathrm{Max}\left(\int_0^1 \Psi_n(x)dx \ ; \int_0^1 \Psi_m(x)dx\right) - \int_0^1 \varphi_m(x)dx\right|$$

Soit h programmable telle que :

$$n \geq h(\tfrac{1}{p}) \Rightarrow \int_0^1 \varphi_n(x)dx - \int_0^1 \Psi_n(x)dx \leq \frac{1}{p}$$

$$m,n \geq h(\tfrac{1}{2p}) \Rightarrow \left|\int_0^1 \varphi_n(x)dx - \int_0^1 \varphi_m(x)dx\right| \leq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$$

c.q.f.d.

Appelons I cette limite (au sens calculable).

$$\left(\int_0^1 \Psi_n(x)dx\right) \to I \quad \text{(c'est évident).}$$

2) Soit g(x) une fonction en escalier telle que :

$$g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{C} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Alors :

$$g(x) \geq \Psi_n(x) \quad \forall n, \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Donc :

$$\int_0^1 g(x)dx \geq I .$$

3) De même si $\ell(x)$ est une fonction en escalier telle que :

$$\ell(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{C} \quad , \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Alors :

$$\ell(x) \leq \varphi_n(x) \qquad \forall n, \forall x \in \mathbb{R} , \qquad 0 \leq x \leq 1 .$$

Donc :

$$\int_0^1 \ell(x)dx \leq I .$$

4) Supposons que l'on a trouvé deux autres suites (au sens usuel) de fonctions en escalier $g_n(x)$ et $\ell_n(x)$ possédant respectivement les propriétés de $\varphi_n(x)$ et de $\Psi_n(x)$.

Alors en utilisant 1) : $\int_0^1 g_n(x)dx \to I'$ et $\int_0^1 \ell_n(x)dx \to I'$

en utilisant 2) : $I' \geq I$

en utilisant 3) : $I' \leq I$

Donc :

$$I' = I .$$

Ce nombre calculable I ne dépend pas des fonctions en escalier utilisées. Nous poserons $I = \int_0^1 f(x)dx$ et nous dirons que f est intégrable.

Nous allons établir deux théorèmes d'intégration des fonctions calculables définies sur $[0,1]$, continues sur $[0,1]$ relativement à la fonction distance $d(\frac{1}{n},x)$ et bornées sur $[0,1]$.

Comme au V, 3, e, j'appelle "zéro" de la fonction calculable $x \to d(\frac{1}{n},x)$ (n fixé) un nombre réel y, $(y \notin \mathcal{C})$ tel que :

$\exists\ (x_p)$ suite au sens usuel telle que :

$$x_p \underset{\mathbb{R}}{\to} y \Rightarrow d(\tfrac{1}{n},x_p) \underset{\mathbb{R}}{\to} 0 .$$

PROPOSITION 1 :

> Soit f une fonction calculable définie sur $[0,1]$, continue sur $[0,1]$ pour la fonction distance $d(\frac{1}{n},x)$.
>
> Si, $\forall n$ fixé, $x \to d(\frac{1}{n},x)$ admet au plus un nombre fini de "zéros" dans l'intervalle réel $[0,1]$.
>
> Alors f (qui est nécessairement bornée, V, 3, e) est intégrable (et $\int_0^1 f(x)dx$ peut être effectivement déterminé).

Comme au V, 3, e) avec $a = 0$, $b = 1$ et n fixé déterminons le premier test $T_{qk}(n)$ vrai.

q(n) et k(n) étant ainsi déterminés

Calculons :

$$\delta_j = \underset{0 \le p \le 2^k - 1}{\text{Min}} \left(d(\tfrac{1}{n},x^p_{q,j-1}) \; ; \; d(\tfrac{1}{n},y^p_{q,j})\right)$$

pour j variant de 1 à 2^q.

$$\delta_j \in \mathbb{Q}^+$$

soit n_j le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{\delta_j}$.

Appelons :

$$z^o_{j-1} = \frac{j-1}{2^q} \; ; \; z^1_{j-1} = z^o_{j-1} + \frac{1}{n_j 2^q} \; ; \; \ldots \; ; \; z^i_{j-1} = z^o_{j-1} + \frac{i}{n_j 2^q} \; ; \; \ldots$$

$$z^{n_j}_{j-1} = \frac{j}{2^q} = z^o_j \quad .$$

L'ensemble des points z_{j-1}^{i} , $0 \leq i \leq n_j$; $1 \leq j \leq 2^q$ forme une partition de $[0,1]$ et, de par le choix de n_j :

$$x,y \in [z_{j-1}^{i-1}, z_{j-1}^{i}] \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{3}{n} \qquad (1 \leq i \leq n_j)$$

Donc :

$$x \in [z_{j-1}^{i-1}, z_{j-1}^{i}] \qquad 1 \leq i \leq n_j \ , \ 1 \leq j \leq 2^q$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{n} + \mathrm{Max}(f(z_{j-1}^{i-1}) \ ; \ f(z_{j-1}^{i})) \leq f(x) \leq \frac{3}{n} + \mathrm{Max}(f(z_{j-1}^{i-1}) \ ; \ f(z_{j-1}^{i}))$$

Posons :

$$M_{j-1}^{i} = \frac{3}{n} + \mathrm{Max}\ (f(z_{j-1}^{i-1}) \ ; \ f(z_{j-1}^{i})$$

Alors :

$$x \in [z_{j-1}^{i-1}, z_{j-1}^{i}] \qquad 1 \leq i \leq n_j \qquad 1 \leq j \leq 2^q$$

$$\Rightarrow \quad M_{j-1}^{i} - \frac{6}{n} \leq f(x) \leq M_{j-1}^{i}$$

Prenons pour fonctions en escalier :

$$\varphi_n(x) = M_{j-1}^{i} \quad \text{pour} \quad x \in [z_{j-1}^{i-1}, z_{j-1}^{i}[$$

$$\Psi_n(x) = M_{j-1}^{i} \quad \text{pour} \quad x \in [z_{j-1}^{i-1}, z_{j-1}^{i}[$$

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = u_n = \sum_{j=1}^{2^{q(n)}} \left(\frac{1}{n_j\ 2^{q(n)}} \sum_{i=1}^{n_j} M_{j-1}^{i}\right) \quad \text{est une}$$

suite calculable.

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx - \int_0^1 \Psi_n(x)dx = \frac{6}{n}$$

Donc f est intégrable et l'on a :

$$u_n - \frac{6}{n} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq u_n \ .$$

(On pourrait établir un résultat analogue en utilisant :

$$m_{j-1}^{i} = -\frac{3}{n} + \mathrm{Min}(f(z_{j-1}^{i-1}) \ ; \ f(z_{j-1}^{i})) \ ).$$

PROPOSITION 2 :

* f est une fonction calculable continue sur $[0,1]$, de fonction distance $d(\frac{1}{n},x)$.

* On connait B et b nombres calculables tels que :

$$b \leq f(x) \leq B \qquad \forall x \in [0,1]$$

* $\forall n$ fixé, l'ensemble des "zéros" de $x \to d(\frac{1}{n},x)$ admet au plus un nombre fini de points d'accumulation dans $[0,1]$ réel.

Alors : f est intégrable sur $[0,1]$ (et $\int_0^1 f(x)dx$ peut-être effectivement déterminé).

Soit n fixé.

Comme au V, 3, e) posons $a_{kj} = \frac{j}{2^k}$ $(0 \leq j \leq 2^k)$

$$x_{kj}^{o} = a_{kj} \;;\ldots;\; x_{kj}^{p+1} = \text{Min}\ (1;\ x_{kj}^{p} + d(\frac{1}{n},x_{kj}^{p}))\ ;\ldots$$

$$y_{kj}^{o} = a_{kj} \;;\ldots;\; y_{kj}^{p+1} = \text{Max}\ (0;\ y_{kj}^{p} - d(\frac{1}{n},y_{kj}^{p}))\ ;\ldots$$

Soit α_{qj}^{k} un p.c. définissant $y_{q,j}^{2^k} - x_{q,j-1}^{2^k}$

avec $(0 \leq q \leq k \;;\; 1 \leq j \leq 2^q)$

et soit T_{qj}^{k} le test suivant :

$$T_{qj}^{k} \text{ vrai si } \alpha_{qj}^{k}(\frac{1}{4.2^k}) + \frac{1}{4.2^k} \leq -\frac{1}{4.2^k}$$

Soit ℓ , $0 \leq \ell \leq q$ et $T_{q\ell}^{k}$ l'ensemble des indices i tels que :

$T_{\ell i}^{k}$ soit faux <u>et</u> $\nexists$ j : $\frac{i-1}{2^\ell} \leq \frac{j-1}{2^q}$ et $\frac{j}{2^q} \leq \frac{i}{2^\ell}$ tel que T_{qj}^{k} soit encore faux.

Si on préfère :

$$i \notin I^k_q \quad (1 \leq i \leq 2^\ell) \text{ signifie que :}$$

- ou bien l'intervalle $[\frac{i-1}{2^\ell},\frac{i}{2^\ell}]$ est "recouvert" par les points $(x^p_{\ell,i-1} ; y^p_{\ell,i} \ (0 \leq p \leq 2^k))$ ($T^k_{\ell i}$ vrai)

- ou bien a réussi à trouver un "recouvrement" de ce même intervalle à l'aide de points intermédiaires.

(On a trouvé $q \geq \ell$ tel que : $\forall j$: $\frac{i-1}{2^\ell} \leq \frac{j-1}{2^q}$ et $\frac{j}{2^q} \leq \frac{i}{2^\ell}$ T^k_{qj} est vrai).

Soit alors $S^k_{q\ell}$ le test suivant : $(0 \leq \ell \leq q)$

$S^k_{q\ell}$ est vrai si $\sum_{i \in I^k_{q\ell}} (\frac{i}{2^\ell} - \frac{i-1}{2^\ell}) \leq \frac{1}{n}$

Je dis que $S^k_{q\ell}$ ne peut être faux $\forall k$, $\forall q \leq k$ et $\forall \ell \leq q$.

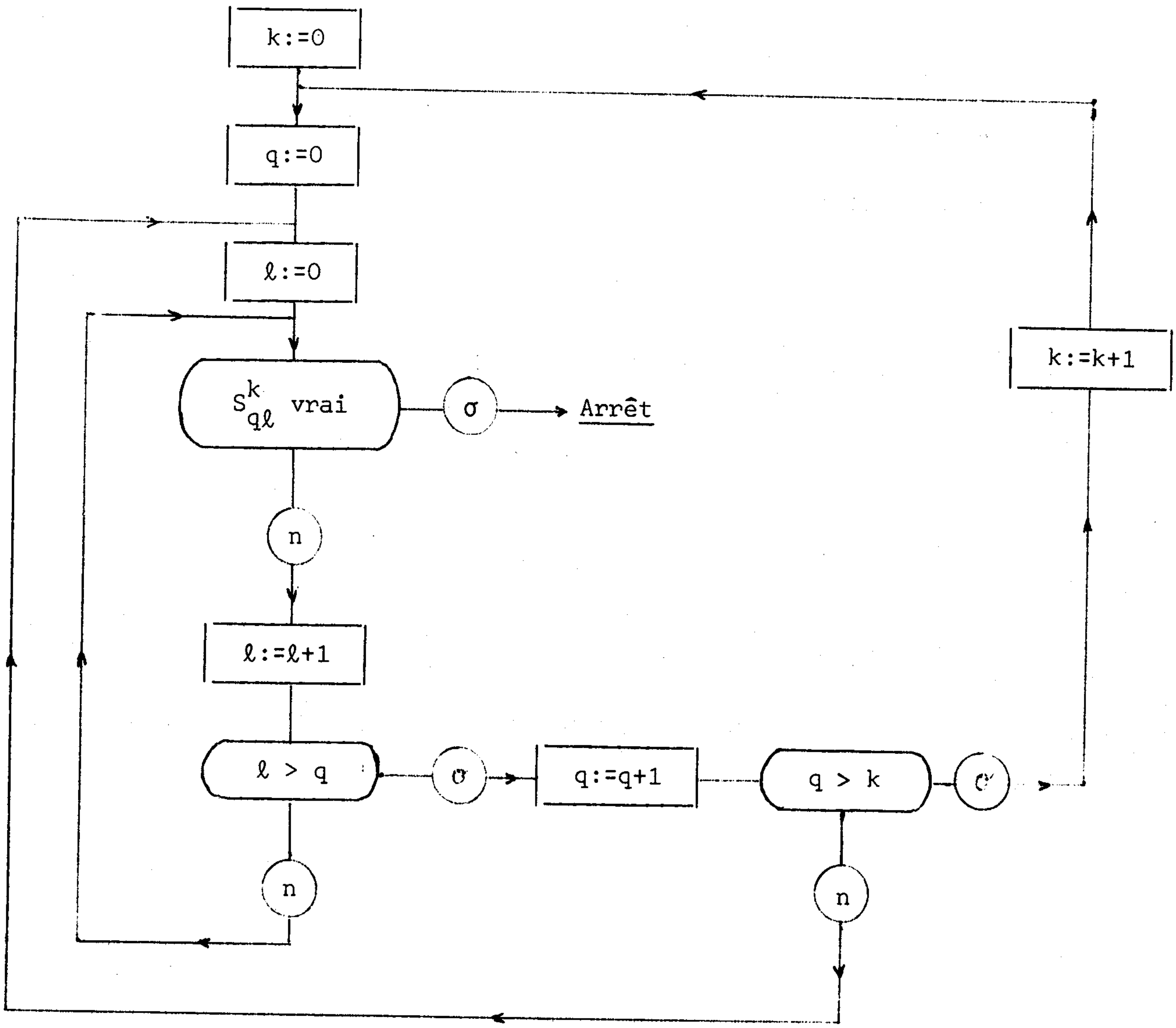
En effet, supposons que l'ensemble des "zéros" de $x \to d(\frac{1}{n},x)$ admet N (dépendant de n) points d'accumulation.

Dès que $\frac{N}{2^\ell} \leq \frac{1}{n}$ la partition de $[0,1]$: $[\frac{i-1}{2^\ell},\frac{i}{2^\ell}]$ range ces points d'accumulation dans au plus N intervalles dont la longueur totale est inférieure à $\frac{1}{n}$.

Dans les intervalles ne contenant pas de points d'accumulation, il ne reste, forcément, qu'un nombre fini de "zéros" de $x \to d(\frac{1}{n},x)$. En coupant chacun de ces intervalles comme en V, 3, e), on trouve forcément un $q \geq \ell$ et un $k \geq q$ tel que T^k_{qj} soient tous vrais (pour $[\frac{j-1}{2^q},\frac{j}{2^q}]$ en dehors des intervalles $[\frac{i-1}{2^\ell},\frac{i}{2^\ell}]$ contenant les N points d'accumulation).

$\Rightarrow$ $S^k_{q\ell}$ vrai

Tous ces test seront effectués selon le schéma suivant :



Soit $S^k_{q\ell}$ le premier test vrai

* pour $i \notin I^k_{q\ell}$ nous déterminons comme précédemment :

$$\delta_j = \min_{0 \leq p \leq 2^k - 1} \left(d\left(\frac{1}{n}, x^p_{q,j-1}\right) ; d\left(\frac{1}{n}, y^p_{qj}\right)\right)$$

puis n_j entier $\geq \frac{1}{\delta_j}$ puis z^t_{j-1} $(0 \leq t \leq n_j)$

puis M^t_{j-1} .

et les fonctions en escalier φ_n et Ψ_n sont définies sur ces intervalles ($i \notin I^k_{q\ell}$) comme précédemment.

* pour $i \in I^k_{q\ell}$ nous prendrons :

$$\varphi_n(x) = B(\geq f(x))$$

et $$\Psi_n(x) = b(\leq f(x)))$$

Il vient alors :

$$u_n = \int_0^1 \varphi_n(x)dx = B \sum_{i \in I^k_{q\ell}} \left(\frac{i}{2^\ell} - \frac{i-1}{2^\ell}\right) + \sum_{\substack{1+2^{q-\ell}(i-1) \leq j \leq i2^{q-\ell} \\ i \notin I^k_{q\ell}}} \left(\frac{1}{n_j 2^q}\left(\sum_{t=1}^{n_j} M^t_{j-1}\right)\right)$$

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx - \int_0^1 \Psi_n(x)dx \leq \frac{6}{n} + \frac{B-b}{n}$$

Donc f est intégrable et l'on a :

$$u_n - \frac{6}{n} - \frac{B-b}{n} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq u_n$$

c.q.f.d.

VI - ESPACES VECTORIELS NORMES COMPLETS DE FONCTIONS CALCULABLES

Cette notion a quelque difficulté à passer en analyse calculable, nous allons le voir sur deux exemples.

1 - ESPACE VECTORIEL SUR $\mathcal{C}$ DES FONCTIONS CALCULABLES UNIFORMEMENT CONTINUES SUR [0,1].

* Je rappelle qu'une fonction calculable f est uniformément continue au sens calculable sur [0,1] si l'on est capable de trouver une fonction distance d : $\frac{1}{p} \longrightarrow d(\frac{1}{p})$ programmable telle que :

$$|x-y| \leq d(\frac{1}{p}) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{p}$$

On a déjà vu, alors que :

$f+g$; $\lambda f(\lambda \in \mathcal{C})$; $|f|$ sont des fonctions calculables uniformément continues au sens calculable sur [0,1].

Soit X l'espace vectoriel sur $\mathcal{C}$ de ces fonctions.

* Les données de f et de sa fonction distance d suffisent à écrire un programme calculant :

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

a) THEOREME :

> Soit (f_n) une suite calculable de fonctions calculables définies sur $[0,1]$.
>
> Soit $d : (n, \frac{1}{p}) \longrightarrow d(n, \frac{1}{p}) \in \mathbb{Q}^+$ programmable.
>
> Si f_n et d sont telles que :
>
> $\forall x, \forall y$ de $[0,1] \in \mathcal{C}$, $|x-y| \leq d(n,\frac{1}{p}) \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)| \leq \frac{1}{p}$
>
> Alors $(\|f_n\|)$ est une suite calculable de nombres calculables.

PREUVE :

Soit $(n,p) \longrightarrow K(n,p)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{1}{d(n,\frac{1}{p})}$

$(n,p) \longrightarrow K(n,p)$ est une application programmable.

Donc $a_{np} = \frac{1}{p} + \underset{0 \leq j \leq K(n,p)}{\operatorname{Max}} \left| f_n \left(\frac{j}{K(n,p)}\right)\right|$

est une suite double calculable (c'est-à-dire que l'on peut trouver $\alpha(n,p,\varepsilon)$ programme tel que : $\forall p$ et $\forall n$ fixés : $\varepsilon \to \alpha(n,p,\varepsilon)$ est un p.c. et $a_{np} = \{\varepsilon \to \alpha(n,p,\varepsilon)\}$).

Or :

$\frac{p}{q} \geq \frac{1}{2k} \Rightarrow |a_{np} - a_{nq}| \leq \frac{1}{k}$ (comme en V,3,a)).

Ce qui est la condition de CAUCHY de la convergence uniforme de III,2 pour la suite calculable : $\{n \longrightarrow a_p(n) = a_{np}\}$ de "fonctions" calculables définies dans $\mathbb{N}$. On peut donc construire une "fonction" calculable définie dans $\mathbb{N}$ (ici une suite calculable)

$$\{n \to a_\infty(n)\}$$

Or, n étant fixé $\quad a_p(n) \underset{p \to \infty}{\to} \|f_n\|$

$$\Rightarrow a_\infty(n) = \|f_n\|$$

Donc $(\|f_n\|)$ est une suite calculable.

b) <u>THEOREME</u> :

Si (f_n) et $d(n,\frac{1}{p})$ sont définies comme au a).

Si on connaît une application programmable h telle que :

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow \|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{p}$$

Alors on peut construire - une fonction calculable f définie dans [0,1]

- une application programmable $d : \frac{1}{p} \to d(\frac{1}{p})$

telles que :

* f est uniformément continue sur [0,1] relativement à d
* $n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \frac{1}{p}$

D'après III,2, on sait construire f fonction calculable définie sur [0,1] telle que :

$$n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{p} \qquad \forall x \in [0,1]$$

* Soient x et y de [0,1]

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)|$$

$p \longrightarrow n(p)$ plus petit entier supérieur ou égal à $h(\frac{1}{12p})$ est une application programmable.

Donc : $p \longrightarrow d(n(p)\ ;\ \frac{1}{3p})$ est programmable.

$$|x-y| \leq d(n(p)\ ;\ \frac{1}{3p}) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p} = \frac{1}{p}$$

$\Rightarrow$ d définie par $\frac{1}{p} \longrightarrow d(n(p)\ ;\ \frac{1}{3p})$ est une fonction distance pour f.

Par suite $\|f\| \in \mathcal{C}$

et $n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \frac{1}{p}$

cqfd

c) THEOREME :

Si (f_n) est une suite calculable de fonctions uniformément continues sur $[0,1]$ ((d_n) suite calculable)

Alors $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ est une suite calculable.

PREUVE :

Soit $K(n,p)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{d(n,\frac{1}{p})}$

et $M_{np}^j = \frac{1}{p} + \text{Max}\left(f_n\left(\frac{j-1}{K(n,p)}\right) ; f_n\left(\frac{j}{K(n,p)}\right)\right)$

comme en V, a)

si $u_{n,p} = \frac{1}{K(n,p)} \sum_{j=1}^{K(n,p)} M_{np}^j$

Alors $u_{np} - \frac{2}{p} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq u_{np}$

Comme au a) u_{np} est une suite double calculable

et $\frac{p}{q} \geq \frac{1}{4k} \Rightarrow |u_{np} - u_{nq}| \leq \frac{1}{k}$

et la démonstration se termine comme au a).

d) THEOREME :

Soit (f_n) une suite calculable de fonctions uniformément continues sur $[0,1]$

f une fonction uniformément continue sur $[0,1]$

h programmable telle que :

$$n \geq h\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \frac{1}{p}$$

Alors : $n \geq h\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow \left|\int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{p}$

C'est évident, mais on obtient ainsi des méthodes affectives de calcul d'intégrales si $\int_0^1 f_n(x)dx$ sont connus (polynômes par exemple).

e) THEOREME DE WEÏERSTRASS :

1) Si f est une fonction calculable uniformément continue sur [0,1] pour la fonction distance d. On peut trouver une suite calculable de polynômes qui converge uniformément vers f sur [0,1].

PREUVE :

Elle est donnée par les polynômes de BERNSTEIN :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\ C_n^k\ x^k\ (1-x)^{n-k}$$

Soient $p \geq 1$, $x \in [0,1]$ et n fixés.

$$E_1 = \{k \mid |\frac{k}{n} - x| \leq d(\frac{1}{2p})\}\ ;\ E_2 = \{k \mid |\frac{k}{n} - x| > d(\frac{1}{2p})\}$$

$$|P_n(x)-f(x)| = \sum_{k=0}^{n} |f(\frac{k}{n})-f(x)|\ C_n^k\ x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\sum_{k\in E_1} |f(\frac{k}{n})-f(x)|\ C_n^k\ x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{2p}$$

si $k \in E_2$: $|f(\frac{k}{n})-f(x)| \leq 2\|f\| = \frac{2\|f\|}{(\frac{k}{n}-x)^2}(\frac{k}{n}-x)^2$

$$k \in E_2 \Rightarrow |f(\frac{k}{n})-f(x)| \leq \frac{2\|f\|}{(d(\frac{1}{2p}))^2}\ \frac{1}{n^2}\ (k-nx)^2$$

Donc :

$$\sum_{k\in E_2} |f(\frac{k}{n})-f(x)|\ C_n^k\ x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{2\|f\|}{(d(\frac{1}{2p}))^2}\ \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k(k-nx)^2\ x^k(1-x)^{n-k}$$

$$(k-nx)^2 = k(k-1)+k(1-2nx)+n^2x^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\ C_n^k\ x^{k-1}\ (1-x)^{n-k} = n$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\ C_n^k\ x^{k-2}(1-x)^{n-k} = n(n-1)$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \,(k-nx)^2\, x^k(1-x)^{n-k} = n^2x^2+nx(1-2nx) + n(n-1)x^2 = nx(1-x)$$

$$x \in [0,1] \Rightarrow x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Donc :

$$|P_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{2p} + \frac{1}{n} \; \frac{\|f\|}{2(d(\frac{1}{2p}))^2} \qquad \forall n,\ \forall x \in [0,1]$$

Soit $K(1)$ le plus petit entier supérieur à $\frac{1}{d(1)}$

et $M = 1 + \underset{0\leq j\leq K(1)}{\mathrm{Max}} \left|f(\frac{j}{K(1)})\right|$

soit $\{\alpha\} = M$ et $r = \alpha(1)+1$

$r \in \mathbb{Q}^+$ et $r \geq M \geq \|f\|$

$$n \geq \frac{p.r}{(d(\frac{1}{2p}))^2} \Rightarrow |P_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{p} \qquad \forall x \in [0,1]$$

cqfd

2) En utilisant d, il vient :

$$n \geq \frac{pr}{(d(\frac{1}{2p}))^2} \Rightarrow \left|\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 P_n(x)dx\right| \leq \frac{1}{p}$$

Or : $\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$

$$n \geq \frac{pr}{(d(\frac{1}{2p}))^2} \Rightarrow \left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\right| \leq \frac{1}{p}$$

2 - FONCTIONS CALCULABLES ADMETTANT UNE BORNE SUPERIEURE SUR [0,1]

Soit X l'espace vectoriel sur $\mathcal{C}$ des fonctions calculables définies sur [0,1] telles que :

* $f \in X \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} f(x) \in \mathcal{C}$

* $f \in X,\ g \in X \Rightarrow f+g \in X$

* $\lambda f \in X \quad \forall\lambda \in \mathcal{C}$

* On connaît une méthode effective (dépendant de f) pour trouver $\sup_{x\in[0,1]} f(x)$

Posons :

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \mathrm{Max}\,(\sup_{x\in[0,1]} f(x)\ ;\ \sup_{x\in[0,1]} -f(x))$$

<u>THEOREME</u> :

Si (f_n) est une suite calculable de fonctions de X

Si $(\|f_n\|)$ est une suite calculable

Si on connaît une application programmable $h : \frac{1}{p} \longrightarrow h(\frac{1}{p}) \in \mathbb{Q}^+$ telle que :

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \geq h(\tfrac{1}{p}) \Rightarrow \|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{p}$$

Alors on peut construire une fonction calculable $f \in X$ telle que :

$$n \geq h(\tfrac{1}{4p}) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \frac{1}{p}$$

PREUVE :

D'après III,2, on sait construire f fonction calculable définie dans [0,1] telle que :

$$n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{p} \quad \forall x \in [0,1]$$

* Posons $M_n = \|f_n\|$

$$|M_n-M_m| \leq \|f_n-f_m\|$$

on peut donc construire M tel que :

$$n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow |M_n-M| \leq \frac{1}{p}$$

* Soit $n \geq h(\frac{1}{4p})$ et $x \in [0,1]$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{p} + |f_n(x)| \leq \frac{1}{p} + M_n \leq \frac{1}{p} + M + \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathcal{C} .$$

* Soit $A \in \mathcal{C}$ tel que :

$$|f(x)| \leq A \quad \forall x \in [0,1]$$

$$n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow A \geq |f(x)| \geq |f_n(x)| - \frac{1}{p}$$

Donc : $|f_n(x)| \leq A + \frac{1}{p} \quad \forall x \in [0,1]$

$A + \frac{1}{p}$ est un majorant de $\{|f_n(x)| \mid x \in [0,1]\}$ donc :

$$M_n \leq A + \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow M \leq M_n + \frac{1}{p} \leq A + \frac{2}{p}$$

$$\forall p \quad M \leq A + \frac{2}{p} \Rightarrow M \leq A$$

Donc : $\begin{cases} |f(x)| \leq M & \forall x \in [0,1] \\ |f(x)| \leq A & \forall x \in [0,1] \Rightarrow A \geq M \end{cases}$

D'où $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

* M est constructible puisque $M_n \to M$.

* Si $g \in X$

Alors : $\frac{m}{n} \geq h(\frac{1}{p}) \Rightarrow \|(f_n+g)-(f_m+g)\| \leq \frac{1}{p}$

donc, d'après ce qui précède :

(f+g) admet une borne supérieure dans $\mathcal{C}$.

* Si $\lambda \in \mathcal{C}$, $\lambda = \{\alpha\}$

Soit ℓ_o le plus petit entier supérieur ou égal à $|\alpha(1)|+1$ ($\geq |\lambda|$)

Alors :

$\frac{m}{n} \geq h(\frac{1}{p.\ell_o}) \Rightarrow \|\lambda f_n - \lambda f_m\| \leq \frac{1}{p}$

Donc, de même, λf admet une borne supérieure dans $\mathcal{C}$
ce qui prouve que $f \in X$
et l'on a :

$n \geq h(\frac{1}{4p}) \Rightarrow |f_n(n)-f(x)| \leq \frac{1}{p} \; \forall x \in [0,1] \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \frac{1}{p}$

3 - CONCLUSIONS

Soit X un espace vectoriel sur $\mathcal{C}$ de fonctions calculables.

Pour normer X, on a le choix entre les deux solutions suivantes :

1 - Supposer que l'on connaît une application

$N : \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ programmable
$(n,\varepsilon) \longrightarrow N(n,\varepsilon)$

telle que :

- $\varepsilon \to N(n,\varepsilon)$ est un p.c. $\forall n \in \mathbb{N}$

et si $f(x) = \{\varepsilon \to F(N_\alpha,\varepsilon)\}$ est une fonction de X.

- $N(f) = \{\varepsilon \to N(N_F,\varepsilon)\}$ possède les propriétés de la norme.

(N_F est l'entier descriptif d'un programme calculant $(p,\varepsilon) \longrightarrow F(p,\varepsilon)$).

Mais alors, quelles sont les normes que l'on peut mettre sur un espace fonctionnel donné ?

Et réciproquement, une norme usuelle étant donnée (par exemple $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$), sur quels espaces vectoriels de fonctions calculables s'adapte-t-elle ?

On notera à ce sujet que l'on peut écrire un programme universel calculant $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} |P(x)|$, si P est un polynôme à coefficients calculables de degré quelconque. En effet, la donnée de P suffit à trouver une fonction distance d pour P.

2 - Admettre que pour chaque $f \in X$ on est capable de trouver $\|f\|$, mais que la méthode effective utilisée dépend de f et (ou) éventuellement d'autres facteurs connus, liés à f (fonction distance par exemple).

Mais alors, (f_n) suite calculable de fonctions calculables appartenant à X, ne pourra être considérée comme suite calculable dans X que si $(\|f_n\|)$ est une suite calculable de nombres calculables.

VII - REFERENCES

[1] N. GASTINEL

DEA Analyse Numérique
Grenoble (1972-1973).

[2] O. ABERTH

"Analysis in the computable number field"
Journal of the association for computing machinery
Avril 1968 volume 15 n° 2.

[3] S. MAZUR

"Computable Analysis"
Rozprawy Matematyczne XXXIII
Varsovie 1963.

[4] O. ABERTH

"The concept of effective method applied to computational problems"
Journal of Computing System Sciences 1971 (5).