



HAL
open science

Sur certaines normes et fonctionnelles dans les espaces de matrices et d'opérateurs

Jean-François Maitre

► **To cite this version:**

Jean-François Maitre. Sur certaines normes et fonctionnelles dans les espaces de matrices et d'opérateurs. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1974. tel-00284627

HAL Id: tel-00284627

<https://theses.hal.science/tel-00284627>

Submitted on 3 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Jean - François MAITRE

Docteur de 3ème cycle

**SUR CERTAINES NORMES ET
FONCTIONNELLES DANS LES ESPACES
DE MATRICES ET D'OPERATEURS.**

Thèse soutenue le 30 novembre 1974 devant la commission d'examen

JURY
Monsieur F.L. BAUER
Monsieur N. GASTINEL
Monsieur J.L. JOLY
Monsieur P.J. LAURENT
Monsieur F. ROBERT

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Jean - François MAITRE

Docteur de 3ème cycle

**SUR CERTAINES NORMES ET
FONCTIONNELLES DANS LES ESPACES
DE MATRICES ET D'OPERATEURS.**

Thèse soutenue le 30 novembre 1974 devant la commission d'examen

JURY
Monsieur F.L. BAUER
Monsieur N. GASTINEL
Monsieur J.L. JOLY
Monsieur P.J. LAURENT
Monsieur F. ROBERT

M. MICHEL SOUTIF
M. GABRIEL CAU

Présidents M. Louis NEEL
Vice-Présidents MM. Lucien BONNETAIN
Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'USMG

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ANGLES D'AURIAC	Mécanique des fluides
ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
ARNAUD Paul	Chimie
AUBERT Guy	Physique
AYANT Yves	Physique approfondie
Mme BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM. BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
BARBIER Reynold	Géologie appliquée
BARJON Robert	Physique nucléaire
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
BARRA Jean-René	Statistiques
BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
BEAUDOING André	Pédiatrie
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme BERTRANDIAS Fraçoise	Mathématiques Pures
MM. BEZES Henri	Chirurgie générale
BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
BONNET Georges	Electrotechnique
BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
BRAVARD Yves	Géographie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
CALAS François	Anatomie
CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
CHARACHON Robert	Oto- Rhino- Laryngologie
CHATEAU Robert	Thérapeutique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRAYA Antoine	Mécanique
Mme DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Métallurgie
DESSAUX Georges	Physiologie animale
DODU Jacques	Mécanique appliquée
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
DUCROS Pierre	Cristallographie
DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphilligraphie
FAU René	Clinique neuro-psychiatrique

MM. GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques Pures
GALVANI Octave	Mathématiques Pures
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electroradiologie
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
KAHANE André	Physique générale
KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
LOUP Jean	Géographie
Mlle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du solide
OZENDA Paul	Botanique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAÏN Alice	Pharmacie galénique
MM. VERAÏN André	Physique
VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. ASCARELLI Gianni	Physique
CHEEKE John	Thermodynamique
GILLESPIE John	I.S.N.
ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques Appliquées
WOHLFARTH Erich	Physique du solide

MM.	COHEN-ADDAD Jean Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DUSSAUD René	Mathématique (OUS)
Mme	ETEPRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean Marc	Mathématiques Pures
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	GUITTON Jacques	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématique Appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean Marie	Physique nucléaire
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	MICOUD Max	Maladie infectieuses
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAYNAUD Hervé	MI.A.G.
	RENAUD Maurice	Chimie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VIROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	CRABBEE Pierre	C.E.R.M.O.
	CABOT	Mathématiques Appliquées
	CURRIE Jan	Mathématiques Appliquées

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculai:
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	DENIS Bernard	Cardiologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrometallurgie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
FELICI Noël	Electrostatique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
SANTON Lucien	Mécanique
SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
----------------------	------------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
COHEN Joseph	Electrotechnique
DURAND François	Metallurgie
MOREAU René	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BOUVARD Maurice	Génie mécanique
CHARTIER Germain	Electronique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Chimie minérale
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
LACOUME Jean Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Physique atomique
LESPINARD Georges	Mécanique
MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIÈRE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Doré	Automatique
---------------------	-------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M. ANCEAU François	Mathématiques appliquées
--------------------	--------------------------

Messieurs les Professeurs BAUER et GASTINEL ont inspiré, par leurs travaux, mon intérêt pour les problèmes étudiés dans cette thèse. Aussi est-ce un honneur et une joie pour moi de les voir réunis dans ce Jury.

Monsieur le Professeur BAUER a bien voulu venir spécialement de Munich à Grenoble malgré ses multiples occupations. Ma dette envers lui en est encore élargie, et je lui exprime ici ma respectueuse gratitude pour tout ce qu'il a fait pour moi.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur GASTINEL, grâce à qui cette thèse a pu être menée à son terme. Sans l'appui de ses conseils et de ses encouragements répétés, le dernier obstacle aurait été bien difficile à franchir.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur LAURENT, et Monsieur JOLY, Maître de Conférences à Bordeaux, d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Que Monsieur ROBERT trouve ici un témoignage de ma reconnaissance, pour les moments enrichissants passés à Lyon sur des tâches communes, et pour le souci qu'il a toujours eu de voir mon travail aboutir.

Je tiens à remercier aussi les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation matérielle de cette thèse, notamment Madame HEVENQ, qui a assuré la frappe avec soin, célérité et gentillesse.

Enfin, qu'il me soit permis de remercier Monsieur COMPARAT, Directeur de l'Ecole Centrale de Lyon, pour ce qu'il a fait pour moi depuis mon arrivée à Ecully, ainsi que tous les membres du Laboratoire de Mathématiques et Informatique avec qui j'ai le plaisir de travailler actuellement.

Mon amicale reconnaissance va aussi à tous ceux avec qui j'ai travaillé à Besançon, Munich et Grenoble, et particulièrement à Monsieur NGUYEN HUU VINH qui a été mon premier équipier de recherche, et avec qui ont été élaborés les premiers résultats sur les valeurs singulières.

T A B L E D E S M A T I E R E S

INTRODUCTION.

PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE 1. PROPRIETES FONDAMENTALES DES NORMES DE MATRICES.

1.1. Quelques notations et rappels sur les normes.	2
1.1.1. Définitions de base.	2
1.1.2. Jauges et normes absolues.	3
1.1.3. Norme duale et jauge duale.	4
1.1.4. Le groupe des isométries relatif à une norme.	6
1.1.5. Un exemple : les normes de Hölder.	6
1.2. Espaces normés de matrices.	6
1.2.1. Notations.	6
1.2.2. Normes et dualité sur $\mathcal{M}(m,n)$	8
1.2.3. Normes d'applications.	9
1.2.4. Les c-normes.	11
1.3. Normes sur l'algèbre $\mathcal{M}(n)$	15
1.3.1. Normes multiplicatives.	15
1.3.2. Normes multiplicatives critiques.	16
1.3.3. Minimalité des normes S_ϕ dans \mathcal{N}	17
1.3.4. Propriétés particulières des normes multiplicatives unit.	18
1.4. Les normes de von Neumann.	21

CHAPITRE 2. LES C-NORMES SUR L'ESPACE $\mathcal{M}(m,n)$.

2.1. Les deux c-normes de base sur (ψ, ϕ^*)	24
2.1.1. La plus grande c-norme $\psi \otimes \phi^*$	24
2.1.2. Propriétés géométriques des boules.	27
2.1.3. Décompositions optimales relatives à $\psi \otimes \phi^*$ et cas d'égalité.	28
2.1.4. Uniformité de $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$	32

2.2. Normes ψ -uniformes ou ϕ -uniformes.	33
2.2.1. Propriétés fondamentales.	33
2.2.2. Normes uniformes et c-normes.	36
2.3. C-normes sur l'algèbre $\mathcal{M}(n)$	42
2.3.1. Multiplicativité des normes uniformes.	42
2.3.2. Multiplicativité des c-normes.	43
2.3.3. Caractérisation des c-normes multiplicatives critiques. ..	46
2.3.4. Décompositions optimales relatives à $\phi \otimes \phi^*$	50
2.3.5. Une propriété géométrique de la boule-unité.	54
2.3.6. Application du Théorème d'Auerbach à la comparaison des normes $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$	56

CHAPITRE 3. NORMES DE MATRICES CONSTRUITES A PARTIR D'AUTRES NORMES.

3.1. Normes sur $\mathcal{M}(m,n)$ obtenues par composition d'autres normes. ...	60
3.1.1. Introduction.	60
3.1.2. Propriétés des normes $[\cdot]_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_n)}$	61
3.1.3. Les c-normes composées $[\cdot]_{\theta(\psi)}$	63
3.1.4. Norme composée par plusieurs normes sur $\mathcal{M}(n)$	69
3.2. Normes associées.	72
3.2.1. Introduction. Définitions.	72
3.2.2. Propriétés des normes $G_{\psi\phi}$	73
3.2.3. Calcul de $G_{\psi\phi}$ pour $\Psi \in \Gamma(\psi_1, \psi_2^*)$ et $\Phi \in \Gamma(\phi_1, \phi_2^*)$	75
3.2.4. Les normes de type $G_{\psi\phi}$ sur $\mathcal{M}(n)$	79
3.3. Normes quotients.	82
3.3.1. Introduction. Définitions.	82
3.3.2. Propriétés générales de Φ_X	83
3.3.3. Etude de Φ_X pour X dans C^n	85
3.3.4. Propriétés de $\Phi_X(y)$ comme fonction de x.	88
3.3.5. Expression de Φ_X à l'aide de pseudo-inverses de X.	93
3.3.6. Majorations de Φ_X	97
3.3.7. Notion de norme de rang p sur $\mathcal{M}(m,n)$	98

CHAPITRE 4. VALEURS SINGULIERES GENERALISEES ET DISTANCE A CERTAINS ENSEMBLES D'APPLICATIONS.

4.1. Introduction.	106
4.1.1. Quelques relations de dualité.	106
4.1.2. Distance à l'ensemble des applications de noyau donné : formules générales.	108

4.1.3. Propriétés de la distance δ_r .	110
4.1.4. Cas de normes composées générales.	112
4.1.5. Normes de von Neumann. Valeurs singulières.	115
4.1.6. Propriétés de mini-max et maxi-min.	118
4.2. Valeurs singulières généralisées.	119
4.2.1. Définitions et propriétés fondamentales.	119
4.2.2. Cas particuliers ; exemples.	124
4.2.3. Inégalités du type de celles de Weyl.	127
4.2.4. Propriétés d'invariance.	134
4.2.5. Valeurs singulières généralisées et valeurs propres.	137
4.3. Valeurs singulières et distance à l'ensemble des applications de rang inférieur ou égal à r.	140
4.3.1. Cas général ; minoration des distances.	140
4.3.2. Encadrement des distances dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$.	142
4.3.3. Cas des normes de rang 1.	149
4.4. Liens entre fonctionnelles de A, A^*, \tilde{A} .	152
4.4.1. Introduction.	152
4.4.2. Expression des α_k par dualité.	154
4.4.3. Expression en termes de largeur d'ordre k.	155
4.4.4. Comparaison des valeurs singulières de A et A^* .	159
4.4.5. Conorme et valeurs singulières.	161
4.4.6. Comparaison des valeurs singulières de A et \tilde{A} .	165
4.5. Cas des opérateurs compacts.	171

CHAPITRE 5. SOLUTIONS ACCEPTABLES ET SOLUTIONS GENERALISEES D'UN PROBLEME.

5.1. Introduction et définitions.	174
5.2. Etude et caractérisation de certains sous-espaces d'applications.	176
5.2.1. Définitions et notations.	176
5.2.2. Semi-norme $\ \cdot\ _x$: propriétés simples et exemples.	177
5.2.3. Caractérisation de certains sous-espaces d'applications d'un espace normé dans un autre.	180
5.2.4. Résultats complémentaires et remarques.	185
5.3. Expression des critères d'acceptabilité.	189
5.3.1. Remarques générales.	189
5.3.2. Problèmes et perturbations linéaires.	191
5.3.3. Problèmes de valeurs propres.	196

5.4. Solution généralisée d'un problème linéaire.	200
5.4.1. Résultats généraux.	200
5.4.2. Solutions généralisées dans le cas hilbertien.	203
5.4.3. Exemple : approximation dans un espace de Hilbert.	208

<u>BIBLIOGRAPHIE (première partie).</u>	211
---	-----

DEUXIEME PARTIE.

CHAPITRE 6. SUR L'EQUIVALENCE ENTRE SEMI-NORMES ET OSCILLATIONS.

6-0. Introduction.	218
6-I; Remarques préliminaires.	221
6-II. Quelques propriétés des espaces vectoriels ordonnés.	223
6-III. Oscillation relative à un vecteur.	228
6-IV. Correspondance entre semi-normes et oscillations.	234

CHAPITRE 7. SEPARATION DES VALEURS PROPRES DE MATRICES POSITIVES ET GENERALISATION.

7-I. Introduction.	244
7-II. Rappel des principales bornes et des méthodes utilisées. ...	245
7-III. Une nouvelle borne.	248
7-IV. Comparaison des différents résultats.	250
7-V. Généralisation.	253

<u>BIBLIOGRAPHIE (deuxième partie).</u>	259
---	-----

- I N T R O D U C T I O N

Ce travail est une contribution à l'étude et l'utilisation des normes de matrices ou d'opérateurs plus généraux. Il se divise en deux parties :

La première (chapitres 1 à 5) consiste en l'étude et la caractérisation de divers espaces normés de matrices (ch. 1 à 3) ou d'applications linéaires (ch. 4 et 5). La famille des c -normes (en anglais : "cross-norms") joue un rôle central dans de nombreux résultats. L'utilisation de ces outils fait notamment l'objet des chapitres 4 et 5, où les notions de "valeur singulière généralisée" et de "solution généralisée d'un problème" sont introduites et étudiées.

La deuxième partie (chapitres 6 et 7) donne des résultats de localisation de valeurs propres, valables notamment pour les opérateurs positifs d'un espace ordonné. Ces résultats nouveaux sont systématiquement comparés à ceux déjà connus.

Le chapitre 1 précise un certain nombre de notions et de notations. Quelques propriétés connues des normes de matrices sont rappelées, les résultats originaux se limitant pratiquement aux Propositions 2 et 3. Pour diverses raisons, nous n'avons pas adopté le point de vue, attrayant à certains égards, consistant à considérer une norme comme une application définie sur l'ensemble de toutes les matrices (BAUER [4] , WIELANDT [54]).

L'étude des c-normes fait l'objet du chapitre 2. Ces normes sont d'un intérêt primordial dans diverses questions. De nombreux résultats publiés dans le domaine de l'approximation dans les espaces de matrices sont établis pour des normes particulières, qui se trouvent être des c-normes. Dans la quasi-totalité des cas, l'utilisation des propriétés des c-normes permet de généraliser et de clarifier de tels résultats, tout en simplifiant considérablement les démonstrations.

Les principales propriétés de ces normes sont exposées dans le mémoire de SCHATTEN [47], dans le cadre d'espaces de Banach. Nos principaux résultats se rapportent à l'uniformité (définition 2.2.1.) et la multiplicativité (dans le cas de l'algèbre $\mathcal{M}(n)$) des c-normes : Propositions 4 à 7. Les deux normes $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$ jouent évidemment un rôle privilégié. Soulignons l'intérêt du lemme 4, dû à Auerbach (existence d'un système bi-orthonormé), qui est à la base des Propositions 8 et 9, mais aussi des majorations pour la distance aux applications de rang r (chapitre 4).

Le chapitre 3 est consacré à une étude assez détaillée de trois classes de normes, que nous avons appelées respectivement : normes composées (3.1), normes associées (3.2) et normes quotients (3.3). La construction de ces normes repose sur l'identification des éléments de $\mathcal{M}(m,n)$ aux éléments d'un autre espace : espace produit, espace d'applications et espace quotient respectivement.

La classe des normes composées $[\cdot]_{\theta(\psi)}$ étant contenue dans celle des c-normes, leurs principales propriétés découlent des résultats du chapitre 2. La Proposition 5 donne une caractérisation des normes composées multiplicatives unitaires.

Les normes associées $G_{\psi\phi}$ étant des normes sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}(n,p))$, $\mathcal{M}(m,p)$ généralisent les normes de type $S_{\psi\phi}$; un certain nombre de

leurs propriétés sont de fait des extensions au cas $p > 1$ de propriétés des $S_{\psi\phi}$.

La norme "quotient" ϕ_X construite à partir de la norme ϕ par :

$$\phi_X(Y) := \inf_M \{ \phi(M) ; MX = Y \}$$

est, par construction, un outil permettant d'exprimer les solutions de différents problèmes d'approximation dans $\mathcal{M}(m,n)$. Dans le cas où X, Y sont des vecteurs colonnes ($p = 1$), on voit apparaître le rôle fondamental des c-normes de $\Gamma^*(\theta^*, \mu)$; ce rôle privilégié repose sur l'équivalence :

$$\phi \in \Gamma^*(\theta^*, \mu) \iff \phi(y) = \frac{\theta(y)}{\mu(x)},$$

qui permet de simplifier divers résultats des chapitres 4 et 5.

Dans ce chapitre est introduite la notion de norme de rang p (Propositions 3 et 6) ; les normes de type $G_{\psi\phi}$ (3.2.) et $S_{\psi\phi}$ jouant des rôles analogues dans les ensembles de normes de rang p et de rang 1 respectivement.

Le chapitre 4 définit et étudie les "valeurs singulières généralisées", introduites pour la première fois dans un travail antérieur [32]. Les définitions sont ici plus générales ; elles reposent sur la fonctionnelle $(A, x) \mapsto \phi_x(Ax)$ construite à partir d'un espace normé d'applications (\mathcal{A}, ϕ) . L'une des fonctionnelles s'écrit :

$$\tilde{\alpha}_{k+1}(A) := \inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim}(G) = k}} \sup_{x \in G} \phi_x(Ax).$$

Ces formules en "inf - sup" ou "sup - inf" généralisent celles des principes de mini-max ou maxi-min, la fonctionnelle $\phi_x(Ax)$ remplaçant le quotient de

Rayleigh. La plupart des propriétés des valeurs singulières classiques (valeurs propres de $(A^*A)^{1/2}$) s'étendent ici, en particulier les inégalités de WEYL.

Dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$, la distance δ_r à l'ensemble des applications de rang fini r vérifie les inégalités :

$$\tilde{\alpha}_{r+1}(A) \leq \delta_r(A) \leq r \tilde{\alpha}_{r+1}(A).$$

Divers résultats de ce type, concernant la distance à certains ensembles d'applications, sont obtenus ; ils complètent et généralisent les résultats obtenus par exemple par HOUSEHOLDER-YOUNG [25], FIEDLER-PTAK [13], FRANK [11], et MATHRE-NGUYEN HUU VINH [32], [33].

On précise les liens existant entre ces fonctionnelles, et d'autres notions telles que la conorme (R. DOUADY [10]), la largeur d'ordre k d'un ensemble (LORENTZ [30] ; Cf. AUBIN [1] pour l'utilisation dans l'approximation des problèmes aux limites).

Diverses inégalités obtenues se réduisent à des égalités lorsque les espaces sont de Hilbert ; ces propriétés doivent être autant de caractérisations de ces espaces.

Dans le chapitre 5, on introduit et étudie des notions de solutions - acceptables et de solutions généralisées, en considérant des perturbations du problème initial. Si le problème s'écrit $P(x) = 0$ ($x \in E$) et si \mathcal{P} est un espace normé de perturbations, on dit que x est solution ε -acceptable si elle vérifie

$$e(x) = \inf_{\delta P} \{ \|\delta P\| ; \delta P \in \mathcal{P}, (P+\delta P)(x)=0 \} < \varepsilon.$$

Lorsque $e(x)$ atteint son minimum dans E pour x_0 , x_0 est dite solution généralisée.

Les normes pour lesquelles $e(x)$ est égal à $\frac{\|P(x)\|}{\|x\|}$ sont caractérisées (généralisation de la classe Γ^* des c-normes) ; il apparaît clairement que, dans ce cas, le critère adopté conduit à la considération d'un "résidu relatif".

Pour les problèmes linéaires $Au = f$ dans un espace de Hilbert, la solution généralisée a l'expression suivante :

$$u_0 = (A^* \cdot A - \rho_0^2 I)^{-1} \cdot A^* \cdot f$$

où ρ_0^2 est valeur propre d'un opérateur dépendant du couple (A, f) .

Notre formulation, très générale, permet de retrouver facilement des résultats obtenus antérieurement dans le domaine "de l'analyse à postériori" (RIGAL - GACHES [43] , GASTINEL [20]).

Le chapitre 6 a pour but d'éclaircir les liens existant entre des résultats de localisation des valeurs propres d'un opérateur obtenus suivant plusieurs démarches (MAITRE [15] , DEUTSCH [6] , BAUER [1] , BIRKHOFF [4] ...). Nous montrons notamment qu'une semi-norme peut être considérée comme oscillation relativement à certains vecteurs, l'espace étant ordonné par un cône construit à partir du polaire de la boule-unité.

Dans le chapitre 7, on montre que, pour une matrice positive (≥ 0), vérifiant $A^t p = \rho p$ (p vecteur > 0 , ρ rayon spectral), les valeurs propres λ distinctes de ρ vérifient

$$|\lambda| \leq \min \{ \rho - m'', M'' - \rho \} \leq \rho \frac{M'' - m''}{M'' + m''},$$

avec

$$M = \sum_i (p_i \max_j \frac{a_{ij}}{p_j}) , \quad m = \sum_i (p_i \min_j \frac{a_{ij}}{p_j}) .$$

Ce résultat nouveau est comparé aux bornes déjà obtenues par différents auteurs (OSTROWSKI [21] , HOPF [10] , BAUER-STOER-DEUTSCH [2] , LYNN-TIMLAKE [14] , SCHAEFER [24]), et étendu au cas des opérateurs compacts positifs (7.5.2.).

Remarque. Chacune des deux parties comporte une bibliographie propre, les numéros en référence renvoyant à la bibliographie de la partie correspondante.

P R E M I E R E P A R T I E

C H A P I T R E 1

P R O P R I E T E S F O N D A M E N T A L E S

D E S N O R M E S D E M A T R I C E S

1.1 - QUELQUES NOTATIONS ET RAPPELS SUR LES NORMES.

1.1.1 - Définitions de base.

Nous n'utiliserons le terme de norme qu'au sens classique ; il s'agira donc toujours d'une application v de l'espace vectoriel considéré E dans \mathbb{R}^+ vérifiant :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \forall x, y \in E : v(x+y) \leq v(x) + v(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in K : v(\lambda x) = |\lambda| v(x) \end{array} \right.$$

où K sera en général le corps des complexes. Nous ne considérerons pas la notion de "norme positivement homogène" où le 3ème axiome est affaibli en remplaçant K par \mathbb{R}^+ .

La boule-unité de la norme v sera notée B_v :

$$(2) \quad B_v := \{x \in E ; v(x) \leq 1\}.$$

La première partie sera volontairement limitée aux espaces de dimension finie ; ainsi B_v sera un compact dans (E, v) . Tout espace E_n de dimension finie n sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} étant isomorphe à \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , la présentation sera faite sur ces derniers espaces. Remarquons que, une base $\{e_i\}_{i=1}^n$ étant choisie dans E_n , on peut associer à toute norme $\|\cdot\|$ définie sur E_n une norme v sur \mathbb{C}^n et réciproquement :

$$(3) \quad \|\cdot\| \mapsto v(\xi_1, \dots, \xi_n) := \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\|$$

$$(4) \quad v \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| := v(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

1.1.2 - Jauges et normes absolues.

Nous appellerons jauge toute application θ de $(\mathbb{R}^+)^n$ dans \mathbb{R}^+ , qui satisfait les axiomes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \theta(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \cdot \forall x, y \in (\mathbb{R}^+)^n : \theta(x+y) \leq \theta(x) + \theta(y) \\ \cdot \forall x \in (\mathbb{R}^+)^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : \theta(\alpha x) = \alpha \theta(x) \\ \cdot 0 \leq x \leq y \Rightarrow \theta(x) \leq \theta(y) \end{array} \right.$$

La relation d'ordre est définie par les composantes :

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall i : x_i \leq y_i .$$

On sera conduit par la suite à utiliser des jauges possédant des propriétés supplémentaires (symétrie, multiplicativité).

Une norme v est dite absolue, ou monotone [5] si elle satisfait les propriétés équivalentes dans \mathbb{C}^n :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \forall x \in \mathbb{C}^n : v(|x|) = v(x) \\ \cdot |x| \leq |y| \Rightarrow v(|x|) \leq v(|y|) \end{array} \right.$$

Le vecteur $|x|$ a par définition les composantes $|x_i|$, et la relation d'ordre dans $(\mathbb{R}^+)^n$, que nous noterons \mathbb{R}_+^n par commodité, est la même que précédemment.

A toute jauge θ sur \mathbb{R}_+^n , on peut associer une norme absolue $|\theta|$ sur \mathbb{C}^n par :

$$(7) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n : |\theta|(x) := \theta(|x|).$$

Réciproquement, la restriction de toute norme absolue sur \mathbb{C}^n à \mathbb{R}_+^n est une jauge. Dans le cas de \mathbb{R}^n , il suffit que la norme soit orthant-monotone [21] (seule la 2ème propriété de (6) est satisfaite, et seulement pour les couples appartenant au même orthant de \mathbb{R}^n).

Une norme obtenue par (3) n'est absolue que si la norme et la base de E_n sont convenables (la norme $\|\cdot\|$ est alors dite $\{e_i\}$ - absolue [27], [28]).

Si deux normes ψ et ϕ sur le même espace E vérifient la relation :

$$\forall x \in E : \psi(x) \leq \phi(x) ,$$

nous noterons simplement

$$(8) \quad \psi \leq \phi$$

sans signe spécial pour cette relation d'ordre.

Si α est un réel strictement positif, on notera

$$(9) \quad \alpha\phi$$

la norme définie par :

$$\forall x \in E : (\alpha\phi)(x) = \alpha\phi(x).$$

1.1.3 - Norme duale et jauge duale.

Nous considérons C^n en dualité avec lui-même par la forme bilinéaire :

$$(10) \quad \forall x, y \in C^n, \quad \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i ,$$

ce qui revient à identifier C^n avec son dual.

A toute norme ϕ sur C^n sera ainsi associée la norme duale ϕ^* sur le même espace :

$$(11) \quad \forall u \in C^n, \quad \phi^*(u) := \sup \left\{ \frac{|\langle u, x \rangle|}{\phi(x)} ; x \in C^n - \{0\} \right\}$$
$$= \sup \{ |\langle u, x \rangle| ; \phi(x) \leq 1 \} .$$

Les normes ϕ et ϕ^* sont évidemment liées par l'inégalité :

$$(12) \quad \forall u, x \in \mathbb{C}^n : \quad |\langle u, x \rangle| \leq \phi^*(u) \phi(x).$$

Deux vecteurs pour lesquels il y a égalité dans (12) sont dits duaux pour ϕ et notés $u \underset{\phi}{\parallel} x$; à tout $x \neq 0$ correspond un tel u et inversement.

Si ϕ est une norme absolue, il est facile de montrer que ϕ^* a la même propriété et qu'on a l'inégalité :

$$(13) \quad \langle |u|, |x| \rangle \leq \phi^*(u) \phi(x).$$

On peut définir de la même manière une jauge duale θ^* , si θ est une jauge définie sur \mathbb{R}_+^n :

$$(14) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+^n, \quad \theta^*(u) = \sup \left\{ \frac{u \cdot v}{\theta(v)} ; v \in \mathbb{R}_+^n - \{0\} \right\}.$$

La dualité est une opération idempotente sur l'ensemble des normes sur \mathbb{C}^n ou jauges sur \mathbb{R}_+^n , c'est-à-dire :

$$(15) \quad (\phi^*)^* = \phi, \quad (\theta^*)^* = \theta.$$

On a de plus les relations :

$$(16) \quad \alpha > 0 : (\alpha\phi)^* = \frac{1}{\alpha} \phi^*$$

$$(17) \quad \psi \leq \phi \Rightarrow \psi^* \geq \phi^*$$

Si θ et θ^* désignent une jauge sur \mathbb{R}_+^n et sa duale, les normes absolues associées par (7) vérifient :

$$(18) \quad |\theta^*| = |\theta|^*.$$

1.1.4 - Le groupe des isométries relatif à une norme.

Le groupe multiplicatif des matrices complexes $n \times n$ vérifiant :

$$(19) \quad \forall x \in C^n \quad : \quad \psi(Ax) = \psi(x)$$

est dit groupe des isométries relatives à la norme ψ , ou ψ -isométries. Si ψ est une norme sur C^n et A une matrice régulière, l'application

$$(20) \quad \psi_A : x \in C^n \mapsto \psi(Ax)$$

définit à nouveau une norme sur C^n . Il est simple de montrer que la duale de ψ_A est donnée par :

$$(21) \quad (\psi_A)^* = (\psi^*)_{A^{*-1}}$$

où A^* désigne la transposée de A .

Ainsi le groupe des ψ -isométries peut être caractérisé par :

$$(22) \quad \mathcal{G}_\psi = \{A ; \psi_A = \psi\},$$

ce qui permet de déduire \mathcal{G}_ψ^* , groupe relatif à la duale, par :

$$(23) \quad \mathcal{G}_\psi^* = \{A ; A^* \in \mathcal{G}_\psi\}.$$

1.1.5 - Un exemple : les normes de Hölder.

Les normes de Hölder, notées h_p quelle que soit la dimension de l'espace, sont définies sur C^n par :

$$(24) \quad p \geq 1 : x \in C^n \mapsto h_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

La norme, notée h_∞ est donnée par :

$$x \in C^n \mapsto h_\infty(x) = \max_{i=1 \text{ à } n} |x_i|.$$

Ces normes sont absolues, et leur restriction à \mathbb{R}_+^n définit les jauges correspondantes.

Les duales sont données par :

$$(25) \quad p \geq 1 \quad : \quad h_p^* = h_q \quad , \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

et

$$(26) \quad h_\infty^* = h_1 \quad .$$

Pour tout p , le groupe des isométries associées à h_p contient les permutations et les matrices diagonales à éléments diagonaux de module unité.

La norme h_2 , ou norme euclidienne, satisfait $h_2^* = h_2$ et a de nombreuses propriétés supplémentaires. Son groupe d'isométrie est celui des matrices unitaires. Si A est une matrice régulière, la norme $(h_2)_A$, définie comme en (20), est dite norme ellipsoïdale.

Les normes de Hölder ont d'autres propriétés qui ont permis leur caractérisation [51].

1.2 - ESPACES NORMES DE MATRICES.

1.2.1 - Notations

$\mathcal{M}(m,n)$ désignera l'espace vectoriel des matrices complexes à m lignes et n colonnes. Si A est dans $\mathcal{M}(m,n)$, on notera $A_{oj} \in \mathcal{M}(m,1)$ sa $j^{\text{ème}}$ colonne et $A_{io} \in \mathcal{M}(1,n)$ sa $i^{\text{ème}}$ ligne. La matrice $|A|$ sera la matrice d'élément général $|a_{ij}|$. La transposée de A sera notée A^* par commodité ; lorsqu'il s'agira de l'adjointe relative au produit scalaire, cela sera précisé.

Sur l'algèbre $\mathcal{M}(n) := \mathcal{M}(n,n)$ des matrices carrées d'ordre n , la trace, le déterminant et le rayon spectral seront notés respectivement :

$$\text{tr}(A), \det(A) \text{ et } \rho(A),$$

la matrice unité étant notée I .

En principe les minuscules $\phi, \psi, \theta \dots$ désigneront des normes sur C^n et les majuscules Φ, Ψ, \dots des normes sur $\mathcal{M}(m,n)$.

1.2.2 - Normes et dualité sur $\mathcal{M}(m,n)$.

En considérant l'isomorphisme avec C^{mn} , nous mettrons $\mathcal{M}(m,n)$ en dualité avec lui-même par la forme bilinéaire :

$$(1) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}(m,n) : \langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(A^*B).$$

Nous adopterons la notation matricielle pour (1), en utilisant la trace sur $\mathcal{M}(n)$; de même pour C^n (1.1.(8)) qui sera identifié à $\mathcal{M}(n,1)$. On a ainsi, pour les normes duales :

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \phi^*(A) = \sup \left\{ \frac{|\text{tr}(A^* X)|}{\phi(X)} ; X \in \mathcal{M}(m,n) - \{0\} \right\}$$

$$(3) \quad \forall u \in \mathbb{C}^n : \phi^*(u) = \sup \left\{ \frac{|u^* x|}{\phi(x)} ; x \in \mathbb{C}^n - \{0\} \right\} .$$

On notera H_p la norme de Hölder :

$$(4) \quad H_p(A) = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^p \right)^{1/p} .$$

La dualité de H_p est H_q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

1.2.3 - Normes d'applications (ou d'opérateurs).

On notera $S_{\psi\phi}$ [41] la norme de $A \in \mathcal{M}(m,n)$, considérée comme élément de $\mathcal{L}((\mathbb{C}^n, \phi), (\mathbb{C}^m, \psi))$:

$$(5) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : S_{\psi\phi}(A) := \sup \left\{ \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} ; x \in \mathbb{C}^n - \{0\} \right\}$$

L'inégalité suivante a évidemment lieu (par définition) :

$$(6) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) , \forall x \in \mathbb{C}^n : \psi(Ax) \leq S_{\psi\phi}(A) \phi(x) .$$

Remarquons que $S_{\psi\phi}$ peut être exprimée comme suit :

$$S_{\psi\phi}(A) = \sup \{ \psi(Ax) ; x \in B \}$$

où B est, soit la boule unité, soit la sphère unité, soit même l'ensemble des points extrémaux de la boule unité. Ce dernier cas correspond au théorème de Krein-Milman valable dans un cadre plus général. Une illustration simple est constituée par S_{ψ, h_1} , la boule de h_1 dans \mathbb{C}^n admettant $\{e_1, \dots, e_n\}$ comme points extrémaux :

$$(7) \quad S_{\psi h_1}(A) = \max \{ \psi(A_{oi}) ; i = 1 \text{ à } n \} .$$

L'égalité suivante sera utilisée par la suite :

$$(8) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : S_{\psi\phi}(A) = S_{\phi^* \psi^*}(A^*) .$$

Elle résulte de la suite des inégalités :

$$\forall u : \phi^*(A^*u) = \sup_{x \neq 0} \frac{|u^*Ax|}{\phi(x)} \leq \psi^*(u) \sup_{x \neq 0} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)}$$

qui prouve la relation $S_{\phi^* \psi^*}(A^*) \leq S_{\psi \phi}(A)$; l'inégalité inverse s'obtenant de la même façon.

Les normes particulières S_{h_1, h_1} et S_{h_∞, h_∞} ont les expressions simples :

$$\forall A \in \mathcal{M}(m, n) : \begin{aligned} - S_{11}(A) &:= S_{h_1, h_1}(A) = \max_{j=1, \dots, n} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) \\ - S_{\infty\infty}(A) &:= S_{h_\infty, h_\infty}(A) = \max_{i=1, \dots, m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

qui peuvent se déduire de (7) et (8).

Notons encore les inégalités suivantes :

- Pourvu que les opérations aient un sens, on a :

$$\forall A, B ; \forall \psi, \theta, \phi : S_{\psi \phi}(AB) \leq S_{\psi \theta}(A) S_{\theta \phi}(B).$$

- Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux normes sur C^n et A une matrice carrée régulière :

$$(9) \quad \forall x \in C^n : \frac{\phi_2(x)}{S_{\phi_2 \phi_1}(A^{-1})} \leq \phi_1(Ax) \leq S_{\phi_1 \phi_2}(A) \phi_2(x),$$

avec le cas particulier très utilisé

$$(10) \quad \forall x \in C^n : \frac{\phi_2(x)}{S_{\phi_2 \phi_1}(I)} \leq \phi_1(x) \leq S_{\phi_1 \phi_2}(I) \phi_2(x).$$

Remarquons que $S_{\psi \phi}$ est fonction croissante de ψ et décroissante de ϕ :

$$\psi_1 \geq \psi \quad \text{et} \quad \phi_1 \leq \phi \Rightarrow S_{\psi_1 \phi_1} \geq S_{\psi \phi}.$$

Signalons enfin les implications suivantes :

$$\begin{array}{l}
(S_{\psi\phi} \text{ absolue}) \stackrel{1}{\Rightarrow} (\psi \text{ et } \phi \text{ absolues}) \stackrel{2}{\Rightarrow} \\
\Rightarrow S_{\psi\phi} \text{ monotone sur } \mathcal{M}^+ = \{A \in \mathcal{M}(m,n) ; A \geq 0\} \stackrel{3}{\Rightarrow} \\
\Rightarrow \psi \text{ et } \phi \text{ monotones sur } \mathbb{R}_+^m \text{ et } \mathbb{R}_+^n \text{ respectivement.}
\end{array}$$

L'implication 2 est connue [5], et les autres peuvent être établies assez simplement.

1.2.4 - Les c-normes.

La notion de "cross-norm" a été introduite, dans un cadre différent dans [47] ; nous parlerons ici de c-norme :

DEFINITION. Si ψ et θ sont deux normes définies respectivement sur C^m et C^n , une norme ϕ sur $\mathcal{M}(m,n)$ est dite c-norme sur le couple (ψ, θ) si elle vérifie :

$$(11) \quad \forall x \in C^m, \forall y \in C^n, \quad \phi(xy^*) = \psi(x) \theta(y).$$

Pour une norme ϕ , cette propriété ne dépend que des valeurs prises sur l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à 1, donc de la forme xy^* .

Plus généralement, une norme ϕ sur le produit tensoriel $F \otimes E$ de deux espaces vectoriels normés, de normes respectives ϕ_F et ϕ_E , est une c-norme si elle satisfait :

$$\forall x \in F, \forall y \in E \quad : \quad \phi(x \otimes y) = \phi_F(x) \phi_E(y) .$$

Dans notre cas (espaces de dimension finie), on identifie $\mathcal{L}(E,F)$ avec $F \otimes E^*$ et $F \otimes E$; le tenseur élémentaire $x \otimes y$ est alors remplacé par la matrice xy^* .

Nous adopterons les notations suivantes pour ces ensembles de normes :

$$(12) \quad \Gamma(\psi, \theta) := \{ \phi ; \forall x \in C^m, \forall y \in C^n : \phi(xy^*) = \psi(x) \theta(y) \}$$

$$(13) \quad \Gamma^*(\psi, \theta) := \{ \phi ; \forall x \in C^m, \forall y \in C^n : \phi^*(xy^*) = \psi(x) \theta(y) \}.$$

Le résultat suivant est fondamental ; il montre le rôle privilégié des normes de type $S_{\psi\phi}$:

PROPOSITION 1. La norme d'application $S_{\psi\phi}$ sur $\mathcal{M}(m,n)$ appartient à l'ensemble $\Gamma(\psi, \phi^*) \cap \Gamma^*(\psi^*, \phi)$; c'est-à-dire qu'elle vérifie les relations :

$$(14) \quad \forall x \in C^m, \forall y \in C^n : S_{\psi\phi}(xy^*) = \psi(x) \phi^*(y)$$

$$(15) \quad \forall u \in C^m, \forall v \in C^n : S_{\psi\phi}^*(uv^*) = \psi^*(u) \phi(v).$$

DEMONSTRATION.

$$(i) \quad S_{\psi\phi}(xy^*) = \psi(x) \phi^*(y) .$$

En effet

$$\begin{aligned} S_{\psi\phi}(xy^*) &= \sup\{ \psi(xy^*z) ; \phi(z) \leq 1 \} \\ &= \sup\{ |y^*z| \psi(x) ; \phi(z) \leq 1 \} \\ &= \psi(x) \phi^*(y) \end{aligned}$$

$$(ii) \quad S_{\psi\phi}^*(xy^*) = \psi^*(x) \phi(y) .$$

On a

$$S_{\psi\phi}^*(xy^*) = \sup\{ |\text{tr}(yx^*M)| ; S_{\psi\phi}(M) \leq 1 \} ;$$

les inégalités

$$|\text{tr}(yx^*M)| = |x^*My| \leq \psi^*(x) S_{\psi\phi}(M) \phi(y)$$

impliquent :

$$S_{\psi\phi}^*(xy^*) \leq \psi^*(x)\phi(y) .$$

L'inégalité inverse s'obtient par :

$$\begin{aligned} S_{\psi\phi}^*(xy^*) &\geq \sup\{ |\operatorname{tr}(yx^*uv^*)| ; S_{\psi\phi}^*(uv^*) \leq 1 \} \\ &= \sup_{u,v} \frac{|x^*u| |v^*y|}{\psi(u)\phi^*(v)} = \psi^*(x)\phi(y) . \end{aligned}$$

De la démonstration de (ii), on peut déduire les formules (équivalentes) caractérisant les normes de type $S_{\psi\phi}$:

$$(16) \quad S_{\psi\phi}(A) = \sup_{x,y} \frac{|y^*Ax|}{\psi^*(y)\phi(x)}$$

$$(17) \quad S_{\psi\phi}(A) = \sup\{ |\operatorname{tr}(Axy^*)| ; S_{\psi\phi}^*(xy^*) \leq 1 \} .$$

La relation (17) montre que, dans le calcul de $S_{\psi\phi}$ par dualité (formule (2)), l'ensemble des matrices X peut être réduit à l'ensemble des matrices de rang 1. La relation (16) a été appelée "caractérisation bilinéaire" de $S_{\psi\phi}$ [3] ; elle signifie d'ailleurs que la forme bilinéaire définie par A sur $(C^n, \phi) \times (C^m, \psi^*)$ a pour norme $S_{\psi\phi}(A)$.

Les normes de Hölder H_p sont des c -normes. Comme

$$H_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

est la duale de H_p , on a même plus précisément :

$$H_p \in \Gamma(h_p, h_p) \cap \Gamma^*(h_q, h_q) .$$

Toutes les normes ne sont pas des c -normes. Par exemple, la norme définie sur $\mathcal{M}(n)$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}(n) : \phi(A) = \max_i |a_{ii}| + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |a_{ij}|$$

n'est pas une c-norme.

1.3 - NORMES SUR L'ALGÈBRE $\mathcal{M}(n)$.

1.3.1 - Normes multiplicatives.

Une norme ϕ sur l'algèbre $\mathcal{M}(n)$ est dite multiplicative (ou d'algèbre) si, en plus des trois axiomes des normes, elle satisfait :

(1) $\forall A, B \in \mathcal{M}(n) : \phi(A.B) \leq \phi(A)\phi(B)$.

Une conséquence immédiate de (1) est :

(2) $\forall A \in \mathcal{M}(n), \forall \phi \text{ mult.} : \phi(A) \geq \rho(A)$.

Il suffit d'écrire $Ax = \lambda x$ sous la forme $A(xa^*) = \lambda(xa^*)$, $a \neq 0$, et d'appliquer (1). En particulier :

(3) $A \text{ diagonale, } \phi \text{ mult.} \Rightarrow \phi(A) \geq \max_i |a_{ii}|$,

et pour la matrice unité I , on a $\phi(I) \geq 1$.

Une norme multiplicative est dite unitaire si $\phi(I) = 1$.

On notera \mathcal{N} et \mathcal{N}_1 ces deux ensembles de normes sur $\mathcal{M}(n)$:

(4) $\mathcal{N} := \{\phi \text{ sur } \mathcal{M}(n) ; \phi \text{ multiplicative}\}$

(5) $\mathcal{N}_1 := \{\phi \text{ sur } \mathcal{M}(n) ; \phi \text{ multiplicative unitaire}\}$

On a par exemple, en notant S_ϕ la norme $S_{\phi\phi}$:

(6)
$$\left[\begin{array}{l} S_\phi \in \mathcal{N}_1 \\ S_{\psi\phi} \in \mathcal{N} \iff \psi \geq \phi \\ S_{\psi\phi} \in \mathcal{N}_1 \iff \psi = \phi \end{array} \right.$$

Notons encore la propriété caractéristique des normes absolues :

$$(7) \quad \text{Un norme } \phi \text{ est absolue si et seulement si pour toute matrice diagonale } D, S_{\phi}(D) = \max_i |d_{ii}|.$$

(ϕ absolue \Rightarrow (7) est conséquence immédiate de 1.1.(6) et de (3)).

1.3.2 - Normes multiplicatives critiques.

Si ϕ est une norme sur $\mathcal{M}(n)$, on sait qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mu\phi$ soit une norme multiplicative [18].

Plus généralement, si ϕ est une norme quelconque sur une algèbre \mathcal{A} , alors la même propriété est valable si l'application bilinéaire

$$(8) \quad b_{\phi} : \begin{cases} (\mathcal{A}, \phi) \times (\mathcal{A}, \phi) \rightarrow (\mathcal{A}, \phi) \\ (X, Y) \mapsto XY \end{cases}$$

est continue.

Le meilleur coefficient μ est la norme μ_{ϕ} de l'application b_{ϕ} , à savoir :

$$(9) \quad \mu_{\phi} := \sup \left\{ \frac{\phi(AB)}{\phi(A)\phi(B)} ; A \text{ et } B \neq 0 \right\}$$

$$= \sup \{ \phi(AB) ; \phi(A) \text{ et } \phi(B) = 1 \}.$$

DEFINITION. [18]. Une norme ϕ de \mathcal{N} est dite critique si, pour tout μ strictement inférieur à 1, $\mu\phi$ est non multiplicative.

Si l'on note \mathcal{N}_c l'ensemble des normes critiques, les inclusions suivantes sont évidentes :

$$(10) \quad \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_c \subset \mathcal{N}.$$

L'ensemble \mathcal{N}_c peut être caractérisé par les deux équivalences :

$$(11) \quad \phi \in \mathcal{N}_c \iff \mu_\phi = 1$$

$$(12) \quad \phi \in \mathcal{N}_c \iff \exists A, B \in \mathcal{M}(n) \text{ t.q. } \phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$$

L'inégalité (2) permet de donner la relation :

$$(13) \quad \forall \phi : \mu_\phi \geq \sup \left\{ \frac{\rho(X)}{\phi(X)} ; X \neq 0 \right\}$$

qui résulte de l'implication :

$$\mu_\phi \in \mathcal{N} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{M}(n) : \mu_\phi(A) \geq \rho(A) .$$

$$\text{Si } \phi \in \mathcal{N} : (A \text{ t.q. } \phi(A) = \rho(A)) \Rightarrow \phi \in \mathcal{N}_c .$$

1.3.3 - Minimalité des normes S_ϕ dans \mathcal{N} . [18]

Les normes S_ϕ sont les éléments minimaux de \mathcal{N} , c'est-à-dire :

$$(14) \quad \phi \in \mathcal{N}, \phi \leq S_\phi \Rightarrow \phi = S_\phi .$$

Cette propriété repose en partie sur le fait que S_ϕ est une c-norme, ce qui implique

$$S_\psi \leq S_\phi \Rightarrow \psi = \alpha \phi, \alpha > 0 \quad (\Rightarrow S_\psi = S_\phi) .$$

En effet, en limitant l'inégalité à l'ensemble des matrices de rang 1 :

$$\forall x, y : \psi(x)\psi^*(y) \leq \phi(x)\phi^*(y) ,$$

d'où

$$S_{\psi\phi}(I) = \sup_x \frac{\psi(x)}{\phi(x)} \leq \inf_y \frac{\phi^*(y)}{\psi^*(y)} = \frac{1}{S_{\psi^*\phi^*}(I)} = \frac{1}{S_{\phi\psi}(I)}$$

et donc, le rapport :

$$\frac{\psi(x)}{\phi(x)}$$

est constant, d'après 1.2.(10).

1.3.4 - Propriétés particulières des normes multiplicatives unitaires.

Signalons d'abord deux caractérisations évidentes des normes multiplicatives unitaires :

$$(15) \quad \forall A \in \mathcal{M}(n) \quad ; \quad G_{\phi}(A) = \sup_{B \neq 0} \frac{\phi(AB)}{\phi(B)} = \phi(A)$$

$$(16) \quad \forall A \in \mathcal{M}(n) \quad , \quad \exists B \in \mathcal{M}(n) \text{ t.q. } \phi(AB) = \phi(A)\phi(B).$$

Le résultat suivant sera utilisé par la suite :

PROPOSITION 2. *Pour toute norme ϕ multiplicative unitaire sur $\mathcal{M}(n)$, la matrice unité I est un élément auto-dual ; autrement dit*

$$\phi^*(I) = n .$$

DEMONSTRATION. Nous avons plus précisément les deux implications :

$$(17) \quad \phi \in \mathcal{N} \Rightarrow \phi^*(I) \leq n$$

$$(18) \quad \phi(I) = 1 \Rightarrow \forall A \quad : \quad \phi^*(A) \geq |\text{tr}(A)| .$$

La seconde est évidente d'après la définition même de ϕ^* .

La première s'établit ainsi :

$$\phi^*(I) = \sup_{X \neq 0} \frac{|\text{tr}(X)|}{\phi(X)} \leq n \sup_{X \neq 0} \frac{\rho(X)}{\phi(X)} \leq n ,$$

car la trace de X satisfait :

$$|\text{tr}(X)| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i(X)| \leq n \rho(X)$$

et, pour $\phi \in \mathcal{N}$:

$$\sup_{X \neq 0} \frac{\rho(X)}{\phi(X)} \leq 1.$$

La Proposition est conséquence de (17) et (18).



Remarque.

La matrice unité est élément autodual puisque $\text{tr}(I^*I) = \phi^*(I)\phi(I)$. Ainsi, toute matrice X de trace nulle étant orthogonale à I dans la dualité, toute matrice I + X, avec $\text{tr}(X) = 0$, appartient à un hyperplan d'appui en I à \mathcal{B}_ϕ , soit :

$$(19) \quad \phi \in \mathcal{N}_1 : \quad X \text{ t.q. } \text{tr}(X) = 0 \Rightarrow \phi(I+X) \geq 1.$$

(En 2.3.4, d'autres éléments duaux de I seront précisés).

Le résultat qui suit donne une relation entre la multiplicativité de ϕ et ϕ^* :

PROPOSITION 3. Pour toute norme ϕ multiplicative unitaire, une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ^* soit aussi multiplicative est que $\phi^*(A^*)$ soit supérieure ou égale à $\phi(A)$, pour toute A de $\mathcal{M}(n)$.

DEMONSTRATION. On doit établir :

$$(20) \quad \phi \in \mathcal{N}_1 : \quad \phi^* \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{M}(n) , \phi^*(A^*) \geq \phi(A) ,$$

ce que nous ferons en montrant les deux implications :

$$(21) \quad \left. \begin{array}{l} \phi \in \mathcal{N} \\ \forall A : \phi^*(A^*) \geq \phi(A) \end{array} \right\} \Rightarrow \phi^* \in \mathcal{N}$$

$$(22) \quad \phi \in \mathcal{N}_1, \phi^* \in \mathcal{N} \Rightarrow \forall A : \phi^*(A^*) \geq \phi(A).$$

Pour $\phi \in \mathcal{N}$:

$$\phi^*(AB) = \sup_{X \neq 0} \frac{|\text{tr}(E^* A^* X)|}{\phi(X)} \leq \phi^*(E)\phi(A^*),$$

et donc, avec $\phi(A^*) \leq \phi^*(A)$, (21) est démontré.

Pour montrer (22), utilisons l'égalité :

$$\forall A \in \mathcal{M}(n) : \sup_X \frac{\phi(A^* X)}{\phi(X)} = \sup_Y \frac{\phi^*(A^* Y)}{\phi^*(Y)},$$

qui résulte de :

$$\sup_X \frac{\phi(A^* X)}{\phi(X)} = \sup_X \sup_Y \frac{|\text{tr}(X^* A^* Y)|}{\phi(X)\phi^*(Y)} \leq \sup_Y \frac{\phi^*(A^* Y)}{\phi^*(Y)}$$

et de l'idempotence de la dualité $\phi \mapsto \phi^*$.

En utilisant les prémices de (22) et (16) :

$$\phi(A) = \sup_X \frac{\phi(A^* X)}{\phi(X)} = \sup_Y \frac{\phi^*(A^* Y)}{\phi^*(Y)} \leq \phi^*(A^*),$$

ce qui établit le résultat.



1.4 - LES NORMES DE VON NEUMANN. [37], [39], [47].

Les valeurs singulières de A, élément de $\mathcal{M}(m,n)$, sont les n nombres positifs ou nuls σ_i , tels que σ_i^2 est valeur propre de A^*A . (A^* est la transposée-conjuguée ; σ_i est compté avec la multiplicité correspondante).

A toute jauge θ sur \mathbb{R}_+^n , invariante par permutation, et vérifiant $\theta(e_i) = 1$, $i = 1$ à n , on peut associer une norme ϕ_θ sur $\mathcal{M}(m,n)$:

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) \quad , \quad \phi_\theta(A) := \theta(\sigma_1(A), \dots, \sigma_n(A))$$

cù les valeurs singulières $\sigma_i(A)$ sont ordonnées par ordre décroissant. Une telle norme ϕ_θ est dite norme de von Neumann. Sa duale est donnée par :

$$(2) \quad \forall B \in \mathcal{M}(m,n) \quad , \quad \phi_\theta^*(B) := \theta^*(\sigma_1(B), \dots, \sigma_n(B)) ,$$

où θ^* est la jauge duale de θ .

Les normes de von Neumann constituent exactement l'ensemble des c-normes sur (h_2, h_2) "unitairement invariantes", c'est-à-dire qu'elles vérifient les deux propriétés caractéristiques suivantes :

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{C}^m, \forall y \in \mathbb{C}^n : \phi(xy^*) = h_2(x) h_2(y)$$

$$(4) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) \quad , \quad \forall U, V \text{ unitaires} \quad : \quad \phi(UAV) = \phi(A)$$

où l'on a utilisé la même notation h_2 pour les normes "euclidiennes" sur \mathbb{C}^m et \mathbb{C}^n , et où U et V sont respectivement dans $\mathcal{M}(m)$ et $\mathcal{M}(n)$.

Exemples.

Les normes suivantes sont des normes de von Neumann :

$$S_2(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{h_2(Ax)}{h_2(x)} = \max_i \sigma_i(A) ,$$

$$S_2^*(A) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(A),$$

$$H_2(A) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A) \right)^{1/2}.$$

Remarque.

Nous verrons plus loin (4.2) qu'il n'est pas possible de construire de telles normes à partir des "valeurs singulières généralisées". Ainsi, l'existence de cette famille de normes constitue une caractérisation de la norme h_2 .

CHAPITRE 2

LES C-NORMES SUR L'ESPACE

$\mathcal{M}(m, n)$

2.1 - LES DEUX C-NORMES DE BASE SUR (ψ, ϕ^*) .

Dans l'ensemble des c-normes sur (ψ, ϕ^*) , deux éléments jouent un rôle fondamental : la norme $S_{\psi\phi}$ et le "produit tensoriel" $\psi \otimes \phi^*$ [22] des normes ψ et ϕ^* .

2.1.1 - La plus grande c-norme $\psi \otimes \phi^*$.

Nous nous intéressons à l'ensemble $\Gamma(\psi, \phi^*)$ (Cf. 1.2. (12)) des c-normes sur (ψ, ϕ^*) , c'est-à-dire des normes définies sur $\mathcal{M}(m, n)$ et confondues avec $S_{\psi\phi}$ sur l'ensemble des matrices de rang 1. Cet ensemble n'a pas de plus petit élément et admet $\psi \otimes \phi^*$ comme plus grand élément [47]. On a plus précisément :

PROPOSITION 1. *La norme $\psi \otimes \phi^*$ définie par*

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n) \quad , \quad \psi \otimes \phi^*(A) := \inf_i \{ \sum \psi(x_i) \phi^*(y_i) \ ; \ \sum x_i y_i^* = A \}$$

est le plus grand élément de $\Gamma(\psi, \phi^)$, ou plus grande c-norme sur (ψ, ϕ^*) .*

DEMONSTRATION. Précisons que l'inf dans (1) est pris sur l'ensemble des décompositions de A en somme (finie) de matrices de rang 1. Avant de vérifier que $\psi \otimes \phi^*$ est bien une norme, montrons que tout élément de $\Gamma(\psi, \phi^*)$ est inférieur ou égal à $\psi \otimes \phi^*$ et que $\psi \otimes \phi^*$ vérifie l'égalité

$$\psi \otimes \phi^*(xy^*) = \psi(x) \phi^*(y) .$$

La première affirmation est évidente par la forme même de $\psi \otimes \phi^*$. On a donc en particulier :

$$\forall M, \quad S_{\psi\phi}(M) \leq \psi \otimes \phi^*(M) \quad ,$$

ce qui implique

$$\forall x \in C^m, \forall y \in C^n : \psi \otimes \phi^*(xy^*) \geq \psi(x)\phi^*(y).$$

Comme la définition (1) implique

$$\psi \otimes \phi^*(xy^*) \leq \psi(x)\phi^*(y),$$

$\psi \otimes \phi^*$ vérifie la propriété annoncée.

Pour montrer que $\psi \otimes \phi^*$ est une norme, il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire, puisque l'égalité $\psi \otimes \phi^*(\lambda M) = |\lambda| \psi \otimes \phi^*(M)$ est évidente, et $\phi(M)$ n'est nul que pour $M = 0$ d'après la relation $\phi \geq S_{\psi\phi}$. Si A et B sont deux matrices, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une décomposition

$$\sum_{i=1}^p x_i y_i^* \text{ de } A \text{ et } \sum_{j=1}^q u_j v_j^*$$

de B vérifiant :

$$\sum_{i=1}^p \psi(x_i)\phi^*(y_i) \leq \psi \otimes \phi^*(A) + \varepsilon$$

$$\sum_{j=1}^q \psi(u_j)\phi^*(v_j) \leq \psi \otimes \phi^*(B) + \varepsilon$$

D'où la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0, \psi \otimes \phi^*(A+B) \leq \psi \otimes \phi^*(A) + \psi \otimes \phi^*(B) + 2\varepsilon$$

qui implique l'inégalité triangulaire.



Donnons une propriété évidente de $\psi \otimes \phi^*$, homologue de 1.2.(8) pour $S_{\psi\phi}$:

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \psi \otimes \phi^*(A) = \phi^* \otimes \psi(A^*)$$

En 1.2.(14), (15), il a été montré que $S_{\psi\phi}$ appartenait à $\Gamma(\psi, \phi^*) \cap \Gamma^*(\psi^*, \phi)$; il en est de même pour $\psi \otimes \phi^*$:

PROPOSITION 2. La plus grande c-norme $\psi \otimes \phi^*$ est la duale de la norme $S_{\psi\phi}^{**}$. Une c-norme sur (ψ, ϕ^*) admet comme duale une c-norme sur (ψ^*, ϕ) si et seulement si elle est supérieure ou égale à la norme $S_{\psi\phi}$.

DEMONSTRATION. Il faut montrer :

$$(3) \quad \psi \otimes \phi^* = S_{\psi\phi}^{**}$$

$$(4) \quad \Gamma(\psi, \phi^*) \cap \Gamma^*(\psi^*, \phi) = \Gamma(\psi, \phi^*) \cap \{\phi; \phi \geq S_{\psi\phi}\}$$

On sait que $S_{\psi\phi}^{**}$ appartient à $\Gamma(\psi, \phi^*)$; pour montrer (3), il suffit d'établir que $S_{\psi\phi}^{**}$ est supérieure à tout élément ϕ de $\Gamma(\psi, \phi^*)$, ou que ϕ^* est supérieure à $S_{\psi\phi}^{**}$:

$$\begin{aligned} \phi^*(M) &\geq \sup_{u,v} \frac{|\text{tr}(M^* uv^*)|}{\psi(u)\phi^*(v)} = \sup_{u,v} \frac{|u^* M v|}{\psi(u)\phi^*(v)} \\ &= S_{\psi\phi}^{**}(M). \end{aligned}$$

L'application de cela aux matrices de rang 1 donne :

$$\phi^*(uv^*) \geq \psi^*(u)\phi(v).$$

Avec l'hypothèse, on a :

$$\phi \geq S_{\psi\phi} \Rightarrow \phi^* \leq S_{\psi\phi}^* \Rightarrow \phi^*(uv^*) \leq \psi^*(u)\phi(v).$$

Nous avons ainsi montré que dans (4), l'ensemble de droite est contenu dans celui de gauche ; l'inclusion inverse résulte de l'implication :

$$\phi^*(uv^*) = \psi^*(u)\phi(v) \Rightarrow \phi^* \leq S_{\psi\phi}^* = \psi^* \otimes \phi$$

qui entraîne l'inégalité

$$S_{\psi\phi} \subseteq S_{\psi^*\phi^*}.$$



Remarque.

$S_{\psi\phi}$ est le plus petit élément de $\Gamma^*(\psi^*, \phi)$, c'est-à-dire la plus petite norme dont la duale est dans $\Gamma(\psi^*, \phi)$, puisque $S_{\psi\phi}^*$ est le plus grand élément de $\Gamma(\psi^*, \phi)$.

2.1.2 - Propriétés géométriques des boules.

Les propriétés précédentes peuvent être interprétées géométriquement.

Si l'on note \mathcal{Y}_1 l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à 1 et $P(\psi, \phi^*)$ le sous-ensemble de \mathcal{Y}_1 ainsi défini

$$(5) \quad P(\psi, \phi^*) := \{xy^* ; \psi(x)\phi^*(y) \leq 1\},$$

alors la boule-unité de $\psi \otimes \phi^*$ est l'enveloppe convexe de $P(\psi, \phi^*)$ et celle de $S_{\psi\phi}$ le polaire de $P(\psi^*, \phi)$:

$$(6) \quad \mathcal{B}_{\psi \otimes \phi^*} = \text{co}(P(\psi, \phi^*)) = \text{co}(\mathcal{B}_{\psi \otimes \phi^*} \cap \mathcal{Y}_1)$$

$$(7) \quad \mathcal{B}_{S_{\psi\phi}} = [P(\psi^*, \phi)]^\circ$$

Les relations (6) expriment que $\psi \otimes \phi^*$ est la plus grande c-norme sur (ψ, ϕ^*) ; la relation (7) résulte de 1.2.(16). Le cas $\psi = \phi$ a été traité dans [50].

Nota :

Avec la dualité adoptée entre $\mathcal{M}(m, n)$ et lui-même, le polaire d'un ensemble \mathcal{D} de $\mathcal{M}(m, n)$ est l'ensemble \mathcal{D}° ainsi défini :

$$(8) \quad \mathcal{D}^\circ := \{M \in \mathcal{M}(m, n) ; \forall X \in \mathcal{D}, |\text{tr}(X^*M)| \leq 1\}.$$

2.1.3 - Décompositions optimales relatives à $\psi \otimes \phi^*$ et cas d'égalité entre $\mathcal{E}_{\psi \otimes \phi^*}(A)$ et $\psi \otimes \phi^*(A)$.

La boule $B_{\psi \otimes \phi^*}$ étant l'enveloppe convexe de $B_{\psi \otimes \phi^*} \cap \mathcal{S}_1$ (6), l'inf est atteint dans l'expression (1) de $\psi \otimes \phi^*(A)$. On a plus précisément :

PROPOSITION 1'.

(i) La norme $\phi = \psi \otimes \phi^*$ peut s'exprimer par un min :

$$(9) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n), \quad \psi \otimes \phi^*(A) = \min \left\{ \sum_i \psi(x_i) \phi^*(y_i) ; \sum_i x_i y_i^* = A \right\}.$$

(ii) Toute combinaison convexe d'éléments de $\phi(A) B_\phi \cap \mathcal{S}_1$ égale à A fournit une décomposition optimale de A dans (9), et réciproquement.

(iii) Toute décomposition optimale de A détermine une facette en A sur la boule $\phi(A) B_\phi$, dont la dimension est au moins égale à $r-1$ (r : rang de A).

DEMONSTRATION.

(i) et (ii) : D'après (6), toute matrice A peut s'écrire :

$$A = \sum_{i=1}^s \lambda_i M_i \quad \text{avec} \quad M_i \in \mathcal{S}_1, \quad \phi(M_i) \leq \phi(A), \quad \lambda_i > 0$$

pour chaque i et $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$.

La décomposition précédente est optimale ; en effet :

$$\phi(A) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i \phi(M_i) \leq \max_i \phi(M_i) \leq \phi(A) \Rightarrow \phi(A) = \sum_{i=1}^s \phi(\lambda_i M_i).$$

Réciproquement, si $\sum_{i=1}^s N_i$ est une décomposition optimale de A, alors on a :

$$A = \sum_{i=1}^s \lambda_i N_i', \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{\phi(N_i)}{\phi(A)} \quad \text{et} \quad N_i' = \frac{1}{\lambda_i} N_i.$$

(iii) : Les combinaisons que nous venons de décrire sont de la forme :

$$A = \sum_{i=1}^s \lambda_i M_i, \quad \text{avec } \phi(M_i) = \phi(A) \quad \text{et } \lambda_i > 0 \text{ pour chaque } i.$$

L'enveloppe convexe des M_i constitue donc une facette à laquelle appartient A , de dimension $s-1$, nécessairement supérieure ou égale à $r-1$. Pour prouver qu'il s'agit bien d'une facette, on peut raisonner par l'absurde : s'il existe une combinaison convexe

$$M = \sum_{i=1}^s \mu_i M_i \quad \text{avec } \phi(M) < 1,$$

alors on est conduit à la contradiction $\phi(A) < 1$. En effet, il suffit d'exprimer A comme combinaison de M et des M_i d'indice différent de i_0 ; i_0 étant choisi tel que l'on ait

$$\frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} > \frac{\mu_i}{\lambda_i}, \quad \text{pour tout } i.$$



Les normes $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$ sont confondues sur l'ensemble \mathcal{S}_1 des matrices de rang inférieur ou égal à 1 ; nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité n'ait lieu que pour les matrices de \mathcal{S}_1 :

COROLLAIRE. L'ensemble des matrices pour lesquelles $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$ prennent la même valeur est réduit à \mathcal{S}_1 si et seulement si ψ est strictement convexe (B_ψ est "rotund") ou ϕ est Gateaux-différentiable (B_ϕ est "smooth").

DEMONSTRATION. Montrons d'abord que la condition est suffisante. Soit donc $A \in \mathcal{M}(m,n)$ satisfaisant l'égalité :

$$(10) \quad S_{\psi\phi}(A) = \psi \otimes \phi^*(A).$$

D'après la caractérisation bilinéaire de $S_{\psi\phi}$ et l'expression (9) de $\psi \otimes \phi^*$, il existe $x \in C^n$, $y \in C^m$ non nuls et, pour $i = 1$ à s , $u_i \in C^m$, $v_i \in C^n$, tels que :

$$(11) \quad \frac{|y^* Ax|}{\psi^*(y)\phi(x)} = \sum_{i=1}^s \psi(u_i)\phi^*(v_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s u_i v_i^* = A$$

Cette égalité implique les relations suivantes :

$$\begin{aligned} |y^* Ax| &= \sum_{i=1}^s \psi(u_i)\psi^*(y)\phi(x)\phi^*(v_i) \geq \sum_{i=1}^s |v_i^* x| |y^* u_i| \geq \\ &\geq \left| \sum_{i=1}^s v_i^* x y^* u_i \right| = |y^* Ax|. \end{aligned}$$

Les signes \geq précédents peuvent donc être remplacés par $=$, et comme pour chaque i les inégalités $\phi(x)\phi^*(v_i) \geq |v_i^* x|$ et $\psi(u_i)\psi^*(y) \geq |y^* u_i|$ ont lieu, on a nécessairement les égalités :

$$(12) \quad i = 1 \text{ à } s \quad : \quad |v_i^* x| = \phi(x)\phi^*(v_i) \\ |y^* u_i| = \psi^*(y)\psi(u_i) .$$

Si B_ψ est "rotund", c'est-à-dire B_ψ^* "smooth", alors les u_i sont nécessairement proportionnels, et A , d'après (11), ne peut être que de rang inférieur ou égal à 1. De même si B_ϕ est "smooth", par proportionnalité des v_i .

Pour la réciproque, montrons que si B_ϕ n'est pas "smooth" et B_ψ n'est plus "rotund", alors il existe une matrice de rang strictement supérieur à 1 qui vérifie l'égalité (10).

Ces hypothèses entraînent l'existence de $x \in C^n - \{0\}$, $y \in C^m - \{0\}$ et de deux couples (v_1, v_2) , (u_1, u_2) de vecteurs linéairement indépendants, respectivement dans C^n et C^m , vérifiant les égalités :

$$\left| \begin{array}{l} v_1^* x = \phi(x) \phi^*(v_1) \\ v_2^* x = \phi(x) \phi^*(v_2) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} y^* u_1 = \psi^*(y) \psi(u_1) \\ y^* u_2 = \psi^*(y) \psi(u_2) \end{array} \right.$$

qui traduisent la non unicité des hyperplans d'appui en x à $\phi(x)B_\phi$ et en y à $\psi^*(y)B_{\psi^*}$. La matrice $A = u_1 v_1^* + u_2 v_2^*$ est de rang 2 et satisfait l'égalité (10) ; en effet :

$$S_{\psi\phi}(A) \geq \frac{y^* Ax}{\phi(x) \psi^*(y)} = \psi(u_1) \phi^*(v_1) + \psi(u_2) \phi^*(v_2) \geq \psi \otimes \phi^*(A).$$



Remarque.

Une forme particulière de ce résultat a été montrée dans [50].

Exemples.

- Pour $\psi = h_2$ et $\phi = h_2$, les conditions du corollaire sont remplies, et effectivement l'égalité entre $S_{\psi\phi} = \sigma_1(A)$ et $\psi \otimes \phi^* = \sigma_1(A) + \dots + \sigma_n(A)$ ne peut avoir lieu que si $\sigma_i(A)$ est nul pour $i = 2$ à n , c'est-à-dire pour A de rang 1.

- Pour $\psi = h_1$ et $\phi = h_\infty$, la propriété n'a pas lieu ; on vérifie en effet que $S_{\psi\phi}$ (ici $S_{1\infty}$) et $\psi \otimes \phi^*$ (ici H_1) sont aussi confondues sur l'ensemble des matrices A nonnégatives.

2.1.4 - Uniformité de $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$.

PROPOSITION 3. *La propriété suivante*

$$(13) \quad \forall X \in \mathcal{M}(m), \forall A \in \mathcal{M}(m, n), \forall Y \in \mathcal{M}(n) : \phi(XAY) \leq S_{\psi}(X)\phi(A)S_{\phi}(Y)$$

est vérifiée pour $\phi = S_{\psi\phi}$ et $\phi = \psi \otimes \phi^*$.

DEMONSTRATION. Pour $\phi = S_{\psi\phi}$, c'est une conséquence directe de l'inégalité

$$S_{\psi\phi}(XAY) \leq S_{\psi}(X)S_{\psi\phi}(A)S_{\phi}(Y).$$

Pour $\psi \otimes \phi^*$, considérons une décomposition de A :

$$A = \sum_i x_i y_i^*, \quad \text{alors :}$$

$$\psi \otimes \phi^*(XAY) \leq \sum_i \psi(Xx_i)\phi^*(Y^*y_i) \leq S_{\psi}(X)S_{\phi}(Y) \sum_i \psi(x_i)\phi^*(y_i)$$

$$\text{car } S_{\phi^*}(Y^*) = S_{\phi}(Y).$$

L'inégalité étant vraie pour toute décomposition de A, on obtient bien :

$$\psi \otimes \phi^*(XAY) \leq S_{\psi}(X)S_{\phi}(Y)\psi \otimes \phi^*(A).$$



Nous allons étudier de manière plus générale la propriété (13).

2.2 - NORMES ψ -UNIFORMES OU ϕ -UNIFORMES.

2.2.1 - Propriétés fondamentales.

Définition. ψ étant une norme sur C^m et ϕ une norme sur C^n , une norme Φ sur $\mathcal{M}(m,n)$ est dite

- ψ -uniforme (à gauche) si

$$(1) \quad \forall X \in \mathcal{M}(m), \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \Phi(XA) \leq S_{\psi}(X) \Phi(A)$$

- ϕ -uniforme (à droite) si

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n), \forall Y \in \mathcal{M}(n) : \Phi(A Y) \leq \Phi(A) S_{\phi}(Y).$$

Ainsi les normes $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$ sont ψ - et ϕ -uniformes (quelles que soient ψ et ϕ).

Signalons les équivalences suivantes :

$$(3) \quad (1) \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}(m), G_{\phi}(X) := \sup_A \frac{\Phi(XA)}{\Phi(A)} = S_{\psi}(X),$$

$$(4) \quad (2) \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}(n), D_{\phi}(Y) := \sup_A \frac{\Phi(A Y)}{\Phi(Y)} = S_{\phi}(Y),$$

qui sont conséquences de la minimalité de S_{ψ} et S_{ϕ} (G_{ϕ} et D_{ϕ} étant des normes multiplicatives sur $\mathcal{M}(m)$ et $\mathcal{M}(n)$ respectivement).

Remarquons que les propriétés précédentes impliquent les propriétés homologues pour la norme duale Φ^* . Les propositions (i) impliquent les (i') suivantes :

$$(1') \quad \forall X \in \mathcal{M}(m), \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \Phi^*(XA) \leq S_{\psi}^*(X) \Phi^*(A)$$

$$(2') \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n), \forall Y \in \mathcal{M}(n) : \Phi^*(AY) \leq \Phi^*(A) S_{\phi}^*(Y)$$

$$(3') \quad (1') \Leftrightarrow G_{\phi}^*(X) = S_{\psi}^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{M}(m)$$

$$(4') \quad (2') \Leftrightarrow D_{\phi}^*(Y) = S_{\phi}^*(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{M}(n).$$

Montrons par exemple (1) \Rightarrow (1') :

$$\begin{aligned} \phi^*(XA) &= \sup_E \frac{|\operatorname{tr}(B^*XA)|}{\phi(B)} = \sup_B \frac{|\operatorname{tr}(A^*X^*B)|}{\phi(B)} \\ &\leq \phi^*(A) \sup_B \frac{\phi(X^*B)}{\phi(B)} = \phi^*(A) S_{\psi}^*(X^*) \\ &= \phi^*(A) S_{\psi}^*(X). \end{aligned}$$

DEFINITIONS. Pour toute norme ϕ sur $\mathcal{M}(m,n)$, nous appellerons groupe (d'invariants) à gauche $\mathcal{G}_g(\phi)$ et groupe à droite $\mathcal{G}_d(\phi)$ les groupes multiplicatifs de $\mathcal{M}(m)$ et $\mathcal{M}(n)$ ainsi définis :

$$(5) \quad \mathcal{G}_g(\phi) := \{X \in \mathcal{M}(m) ; \forall A \in \mathcal{M}(m,n), \phi(XA) = \phi(A)\}$$

$$(6) \quad \mathcal{G}_d(\phi) := \{Y \in \mathcal{M}(n) ; \forall A \in \mathcal{M}(m,n), \phi(AY) = \phi(A)\}$$

Nous allons préciser, pour les normes uniformes, les liens entre ces groupes et les isométries de ψ ou ϕ .

Rappelons auparavant que toute isométrie de ψ (1.1.4) peut être caractérisée par :

$$X \in \mathcal{G}_{\psi} \Leftrightarrow S_{\psi}(X) = S_{\psi}(X^{-1}) = 1.$$

(toute isométrie est nécessairement régulière).

PROPOSITION 4. Si une norme ϕ sur $\mathcal{M}(m,n)$ est ψ -uniforme (resp. ϕ -uniforme), alors son groupe à gauche $\mathcal{G}_g(\phi)$ (resp. à droite $\mathcal{G}_d(\phi)$) est confondu avec le groupe des isométries de ψ (resp. de ϕ).

DEMONSTRATION. Montrons l'égalité $\mathcal{G}_g(\phi) = \mathcal{G}_\psi$; l'égalité $\mathcal{G}_d(\phi) = \mathcal{G}_\phi$ se montrerait de la même manière.

Avec la notation de (4), tout élément de \mathcal{G}_g est caractérisé par :

$$G_\phi(X) = G_\phi(X^{-1}) = 1.$$

En effet, on a l'équivalence :

$$\forall A, \phi(XA) = \phi(A) \iff \sup_{A \neq 0} \frac{\phi(XA)}{\phi(A)} = \inf_{A \neq 0} \frac{\phi(XA)}{\phi(A)} = 1,$$

et comme X est nécessairement régulière :

$$\inf_{A \neq 0} \frac{\phi(XA)}{\phi(A)} = \left[\sup_{B \neq 0} \frac{\phi(X^{-1}B)}{\phi(B)} \right]^{-1}.$$

Si ϕ est ψ -uniforme, on sait (3) que pour tout X, $G_\phi(X) = S_\psi(X)$. Ainsi, pour une norme ϕ ψ -uniforme, l'équivalence suivante a lieu :

$$G_\phi(X) = G_\phi(X^{-1}) = 1 \iff S_\psi(X) = S_\psi(X^{-1}) = 1,$$

ce qui démontre l'égalité $\mathcal{G}_g(\phi) = \mathcal{G}_\psi$.



Remarque.

En général, la réciproque n'est pas vraie : l'égalité entre $\mathcal{G}_g(\phi)$ et \mathcal{G}_ψ n'implique pas que ϕ soit ψ -uniforme. On peut déduire de [47] qu'une norme "unitairement invariante", c'est-à-dire telle que $\mathcal{G}_g(\phi)$ ainsi que $\mathcal{G}_d(\phi)$ sont confondus avec les groupes de matrices unitaires, est effectivement h_2 -uniforme, à gauche et à droite. Une norme ayant ces propriétés est d'ailleurs nécessairement proportionnelle à une norme de von Neumann (1.4), le coefficient de proportionnalité étant égal à la constante (indépendante de i) $\alpha = \phi(e_i e_i^*)$.

Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que toute norme uniforme est une c-norme.

2.2.2 - Normes uniformes et c-normes.

LEMME 1. *Considérons l'inégalité suivante :*

$$(7) \quad \phi(XA) \leq S_{\psi}(X)\phi(A)$$

où X appartient à $\mathcal{M}(m)$ et A à $\mathcal{M}(m,n)$.

(i) L'inégalité (7) est vérifiée pour toutes matrices X et A de rang 1, si et seulement si ϕ est c-norme sur (ψ, θ^*) , pour une certaine norme θ .

(ii) Si l'inégalité (7) est vérifiée pour toute matrice A de $\mathcal{M}(m,n)$ et toute matrice X de rang 1, alors ϕ est c-norme sur (ψ, θ^*) et ϕ^* c-norme sur (ψ^*, θ) pour une certaine norme θ (donc $\phi \geq S_{\psi, \theta}^{-1}$).

DEMONSTRATION.

(i) La vérification de (7) par tout couple de matrices $X = xy^*$ et $A = uv^*$ se traduit par :

$$\forall x, y, u \in C^m, v \in C^n : |y^*u| \phi(xv^*) \leq \psi(x)\psi^*(y)\phi(uv^*),$$

d'où

$$\forall x, u \in C^m, v \in C^n : \psi(u)\phi(xv^*) \leq \psi(x)\phi(uv^*).$$

L'échange de x et u conduisant à l'inégalité inverse, il y a égalité, et donc :

$$\forall x, u \in C^m - \{0\}, v \in C^n : \frac{\phi(uv^*)}{\psi(u)} = \frac{\phi(xv^*)}{\psi(x)}.$$

La valeur du rapport

$$\frac{\phi(xv^*)}{\psi(x)}$$

ne dépend donc que de v ; comme c'est évidemment une norme pour v , nous pouvons écrire :

$$(8) \quad \forall x \in C^m, v \in C^n : \phi(xv^*) = \psi(x)\theta^*(v).$$

Si l'on part de (8), il est facile de montrer que (7) est vérifié pour toute $X = xy^*$ et toute $A = uv^*$.

(ii) Si (7) est vérifiée pour toute A , et toute $X = xy^*$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}(m,n), \forall x \in C^m, y \in C^n : \phi(xy^*A) \leq S_{\psi}(xy^*)\phi(A)$$

qui implique, en utilisant (i) :

$$\psi(x)\theta^*(A^*y) \leq \psi(x)\psi^*(y)\phi(A)$$

et ainsi :

$$\forall A : S_{\psi\theta}(A) = S_{\theta^*\psi^*}(A^*) = \sup_{y \neq 0} \frac{\theta^*(A^*y)}{\psi^*(y)} \leq \phi(A).$$

Donc, d'après la Proposition 2, ϕ appartient bien à

$$\Gamma(\psi, \theta^*) \cap \Gamma^*(\psi^*, \theta).$$



Le lemme 1 est évidemment valable en remplaçant la relation (7), par la relation faisant intervenir le produit à droite :

$$\phi(Ay) \leq \phi(A)S_{\phi}(Y).$$

Enonçons brièvement les résultats homologues :

LEMME 1'.

(i) Pour une norme ϕ sur $\mathcal{M}(m,n)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(9) \quad \forall Y \text{ et } A \text{ de rang } 1, \phi(AY) \leq \phi(A)S_{\phi}(Y) ;$$

$$(10) \quad \exists v \text{ norme sur } C^m \text{ t.q. } \phi \in \Gamma(v, \phi^*).$$

(ii) Si (9) est vraie pour toute A de $\mathcal{M}(m,n)$, alors ϕ^* appartient à $\Gamma(v^*, \phi)$ ($\phi \geq S_{v\phi}$).

Remarques.

1° Une conséquence immédiate des lemmes précédents est que les sup dans (3) et (4) peuvent être limités à l'ensemble des matrices de rang 1 :

$$\phi \text{ } \psi\text{-uniforme} \Rightarrow \forall X, S_{\psi}(X) = \sup \left\{ \frac{\phi(XM)}{\phi(M)} ; M \in \mathcal{J}_1 \right\}$$

$$\phi \text{ } \phi\text{-uniforme} \Rightarrow \forall Y, S_{\phi}(Y) = \sup \left\{ \frac{\phi(MY)}{\phi(M)} ; M \in \mathcal{J}_1 \right\}.$$

2°/ Les lemmes permettent de déduire plus clairement l'implication de la Proposition 4, valable pour toute norme ϕ ψ -uniforme :

$$X \in \mathcal{G}_{\phi}(\phi) \Rightarrow X \in \mathcal{G}_{\psi}.$$

En effet, si X appartient à $\mathcal{G}_{\phi}(\phi)$, on a

$$\forall u, v, \phi(Xuv^*) = \phi(uv^*)$$

et, en appliquant le lemme 1, on obtient

$$\forall u, \psi(Xu) = \psi(u).$$

3°/ La démonstration de (ii) implique, pour ϕ élément de $\Gamma(\psi, \theta^*)$, l'équivalence :

$$\forall A \in \mathcal{M}(m,n), \forall X \text{ de rang } 1, \phi(XA) \leq S_{\psi}(X)\phi(A) \Leftrightarrow \phi \geq S_{\phi\theta}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer :

PROPOSITION 5. Si ϕ est une norme sur $\mathcal{M}(m, n)$, qui satisfait à la ψ -
et la ϕ -uniformité sous la forme affaiblie :

$$(11) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n), \forall X, Y \text{ de rang } 1 \text{ dans } \mathcal{M}(m) \text{ et } \mathcal{M}(n) \text{ resp. :}$$

$$\phi(XAY) \leq S_{\psi}(X) \phi(A) S_{\phi}(Y)$$

alors :

(i) il existe $\alpha > 0$ tel que ϕ appartienne à

$$\Gamma(\alpha\psi, \phi^*) \cap \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\psi^*, \phi\right)$$

(ii) ϕ est supérieure ou égale à $\alpha S_{\psi\phi}$, avec égalité sur l'ensemble des
matrices de rang 1, et la constante α est donnée par

$$\alpha = \inf_{M} \{ \phi(M) ; S_{\psi\phi}(M) = 1 \}.$$

DEMONSTRATION. Les lemmes 1 et 1' impliquent l'existence de deux normes
 θ, ν sur C^n et C^m respectivement, telles que

$$\forall x \in C^m, \forall y \in C^n : \psi(x)\theta^*(y) = \nu(x)\phi^*(y) = \phi(xy^*).$$

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \neq 0 : \frac{\nu(x)}{\psi(x)} = \frac{\theta^*(y)}{\phi^*(y)} = \alpha$$

et ainsi l'on a :

$$\phi(xy^*) = \alpha\psi(x)\theta^*(y).$$

Pour la duale, on a :

$$\phi^*(xy^*) = \psi^*(x)\theta(y) = \frac{1}{\alpha}\psi^*(x)\phi(y)$$

ce qui établit (i).

Pour (ii), il suffit d'utiliser à nouveau les lemmes, d'où :

$$\Phi \geq S_{\psi\phi} = \alpha S_{\psi\phi},$$

l'égalité ayant lieu sur les matrices de rang 1. ▽

Comme conséquence directe des résultats précédents, nous pouvons énoncer :

COROLLAIRE 1.

(i) Toute norme Φ sur $\mathcal{M}(m,n)$ qui est ψ - et ϕ -uniforme, est proportionnelle à une norme de $\Gamma(\psi, \phi^*)$; si α est le coefficient de proportionnalité, alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \Phi(A) \geq \alpha S_{\psi\phi}(A),$$

$$\forall M \text{ de rang } 1 : \Phi(M) = \alpha S_{\psi\phi}(M).$$

(ii) La norme $S_{\psi\phi}$ est dans $\Gamma(\psi, \phi^*)$ le plus petit élément de l'ensemble des normes ψ - ou ϕ -uniformes.

Notons enfin le résultat suivant, qui contient ceux de (3) et (4) :

COROLLAIRE 1'. Une condition nécessaire et suffisante pour que la norme Φ sur $\mathcal{M}(m,n)$ soit ψ - et ϕ -uniforme est :

$$(12) \quad \forall X \in \mathcal{M}(m), \forall Y \in \mathcal{M}(n) : \sup\{\Phi(XAY) ; \Phi(A) \leq 1\} = S_{\psi}(X)S_{\phi}(Y).$$

A

DEMONSTRATION. Si (12) est vérifié, Φ est évidemment ψ - et ϕ -uniforme ($X = I_m$ conduit à (4) et $Y = I_n$ à (3)). Réciproquement, si Φ est ψ - et ϕ -uniforme, alors

$$\sup_{A \neq 0} \frac{\Phi(XAY)}{\Phi(A)} \leq S_{\psi}(X)S_{\phi}(Y)$$

et l'utilisation des résultats de la proposition 5 conduit à la suite

d'inégalités :

$$\sup_{A \neq 0} \frac{\phi(XAY)}{\phi(A)} \geq \sup_{u, v \neq 0} \frac{\phi(Xuv^*Y)}{\phi(uv^*)} = \sup_u \frac{\psi(Xu)}{\psi(u)} \sup_v \frac{\phi^*(Y^*v)}{\phi^*(v)},$$

et la dernière expression est bien égale à $S_\psi(X)S_\phi(Y)$.



Remarque.

Si l'on considère l'application linéaire $A \mapsto XAY$ comme application de $C^m \otimes C^n$ dans lui-même, elle peut être représentée par $X \otimes Y^*$. La relation (12) s'exprime donc par l'égalité :

$$\forall X, Y : S_\phi(X \otimes Y^*) = S_\psi(X)S_\phi(Y),$$

qui montre que si la norme ϕ est ψ - et ϕ -uniforme, la norme S_ϕ a la propriété tensorielle relativement aux normes S_ψ et S_ϕ .

2.3 - C-NORMES SUR L'ALGÈBRE $\mathcal{M}(n)$.

Nous nous intéressons aux propriétés liées à la multiplicativité. Les matrices sont donc dans $\mathcal{M}(n)$, et les normes de matrices sont définies sur cet espace ; les normes de vecteurs qui apparaissent sont définies sur \mathbb{C}^n .

2.3.1 - Multiplicativité des normes uniformes.

Le résultat simple qui suit permet d'alléger les démonstrations :

LEMME 2.

(i) Une norme ψ -uniforme (à gauche) est multiplicative si et seulement si elle est supérieure ou égale à S_ψ .

(ii) Une norme ϕ -uniforme (à droite) est multiplicative si et seulement si elle est supérieure ou égale à S_ϕ .

DEMONSTRATION. Montrons (i), puisque (ii) est tout-à-fait symétrique.

Si ϕ est ψ -uniforme, avec $\phi \geq S_\psi$, on a :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}(n) : \phi(AB) \leq S_\psi(A)\phi(B) \leq \phi(A)\phi(B).$$

Si ϕ est ψ -uniforme et multiplicative, alors :

$$\forall A : G_\phi(A) = \sup_X \frac{\phi(AX)}{\phi(X)} \leq \phi(A)$$

par la multiplicativité et

$$G_\phi = S_\psi \quad (\text{Cf 2.2.(3)}),$$

donc $\phi \geq S_\psi$.

Remarque.

La norme S_ψ est la seule à être ψ -uniforme, multiplicative et unitaire.
En effet, on a :

$$\phi(X) \leq S_\psi(X) \phi(I),$$

qui, avec $\phi(I) = 1$, implique $\phi \leq S_\psi$ donc $\phi = S_\psi$.

2.3.2 - Multiplicativité des c-normes.

Enonçons maintenant des résultats caractérisant l'existence de normes multiplicatives dans $\Gamma(\psi, \phi^*)$.

PROPOSITION 6. *L'ensemble des c-normes sur (ψ, ϕ^*) multiplicatives est non vide si et seulement si ψ est supérieure ou égale à ϕ . Dans ce cas, il admet la norme $\max\{S_\psi, S_\phi\}$ comme minorant, et contient toutes les c-normes ψ -uniformes (ou ϕ -uniformes), en particulier les normes $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$.*

DEMONSTRATION.

1. S'il existe $\phi \in \Gamma(\psi, \phi^*)$ multiplicative, alors, en écrivant que ϕ est supérieure ou égale au rayon spectral pour toute matrice de rang 1, on obtient :

$$\forall x, y \in C^n \quad : \quad \psi(x)\phi^*(y) \geq |y^*x|,$$

ce qui implique l'inégalité $\psi \geq \phi$. D'autre part, la multiplicativité de ϕ conduit aux inégalités :

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{M}(n) ; \forall u, v \in C^n \quad : \quad \phi(Auv^*) \leq \phi(A)\phi(uv^*),$$

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{M}(n) ; \forall x, y \in C^n \quad : \quad \phi(xy^*A) \leq \phi(xy^*)\phi(A),$$

qui, avec l'appartenance de ϕ à $\Gamma(\psi, \phi^*)$, conduisent respectivement aux inégalités :

$$\psi(Au) \leq \phi(A)\psi(u) \text{ , d'où } \phi \geq S_\psi$$

$$\phi^*(A^*y) \leq \phi(A)\phi^*(y) \text{ , d'où } \phi \geq S_\phi$$

en tenant compte de l'égalité $S_\phi^*(A^*) = S_\phi(A)$.

2. Soit ϕ une norme appartenant à $\Gamma(\psi, \phi^*)$. Si ϕ est ψ -uniforme (ou ϕ -uniforme), elle vérifie (Corollaire 1) l'inégalité $\phi \geq S_{\psi\phi}$ qui, jointe à l'hypothèse $\psi \geq \phi$ entraîne les inégalités :

$$\phi \geq S_\phi \text{ et } \phi \geq S_\psi .$$

Ainsi, d'après le lemme 2, ϕ est multiplicative dès qu'elle est ϕ -uniforme, ou ψ -uniforme. ▽

Remarque.

Lorsque $\psi \geq \phi$ est vrai, les normes de $\Gamma(\psi, \phi^*)$ ne sont pas nécessairement toutes multiplicatives ; cependant elle vérifient la multiplicativité sur l'ensemble des matrices de rang 1. Il y a de fait équivalence entre la condition $\psi \geq \phi$ et la "multiplicativité sur les matrices de rang 1" de toutes les normes de $\Gamma(\psi, \phi^*)$:

$$(3) \quad \forall A, B \text{ de rang } 1 : \phi(AB) \leq \phi(A)\phi(B).$$

Pour les normes uniformes, cette condition est suffisante ; plus précisément :

COROLLAIRE 2. Toute norme ψ -uniforme (resp. ϕ -uniforme) est multiplicative dès qu'elle vérifie la condition (3), et appartient alors à $\Gamma(\psi, \theta^*)$ avec $\psi \geq \theta$ (resp. $\Gamma(v, \phi^*)$ avec $v \geq \phi$).

DEMONSTRATION. Traitons le cas relatif à ψ . Si ϕ satisfait (3), alors $\psi \geq \theta$ d'après la remarque précédente. On sait que cela entraîne la multiplicativité (Proposition 6). L'appartenance à un ensemble $\Gamma(\psi, \theta^*)$

a été montrée au lemme 1.



La proposition 6 permet de donner de nouvelles caractérisations des normes S_ϕ :

COROLLAIRE 3.

(i) La norme S_ϕ est la plus petite c-norme sur (ϕ, ϕ^*) multiplicative, c'est-à-dire :

(4) $\mathcal{N} \cap \Gamma(\phi, \phi^*)$ admet S_ϕ comme plus petit élément.

(ii) S'il existe une norme multiplicative appartenant à $\Gamma(\psi, \phi^*)$, telle que sa duale soit aussi multiplicative et appartienne à $\Gamma(\psi^*, \phi)$, alors les normes ψ et ϕ sont confondues. On a en bref l'équivalence :

(5) $\mathcal{N} \cap \Gamma(\psi, \phi^*) \cap \Gamma(\psi^*, \phi) \neq \emptyset \iff \psi = \phi$.

Remarque.

En particulier, les normes de type S_ϕ sont, dans l'ensemble des $S_{\psi\phi}$, les seules à être multiplicatives ainsi que leur duale $\phi^* \otimes \phi$.

DEMONSTRATION.

(i) Lorsque ψ et ϕ sont confondues, la norme S_ϕ est multiplicative et minore l'ensemble des c-normes multiplicatives ; c'est donc le plus petit élément de $\mathcal{N} \cap \Gamma(\phi, \psi^*)$.

(ii) La Proposition 6 montre que l'existence d'une telle norme implique les inégalités :

$$\psi \geq \phi \quad \text{et} \quad \psi^* \geq \phi^* ,$$

équivalentes à l'égalité $\psi = \phi$.



Exemples.

1/. On sait (2.2.1 Remarque) que toute norme unitairement invariante est

h_2 -uniforme à gauche et à droite ; de plus, pour une telle norme, $\phi(e_i e_i^*)$, $i = 1$ à n , est égal à un nombre α indépendant de i . D'après le Corollaire 2, les normes unitairement invariantes multiplicatives sont celles qui vérifient

$$\alpha = \phi(e_i e_i^*) \geq 1 \quad ;$$

ce sont donc les normes proportionnelles à une norme de von Neumann, avec un coefficient supérieur ou égal à 1. Les normes de von Neumann, en particulier, sont multiplicatives. Remarquons que pour ces normes, la multiplicativité peut être établie directement en utilisant les inégalités du type $\sigma_i(AB) \leq \sigma_1(A)\sigma_i(B)$, qui résultent de la caractérisation des valeurs singulières par minimax (Cf. Chapitre 4).

2/. L'étude des normes composées qui sera faite au Chapitre 3 utilisera les résultats précédents, et fournira divers exemples d'illustration.

2.3.3 - Caractérisation des c-normes multiplicatives critiques.

Commençons par donner un certain nombre de propositions équivalentes dans $\Gamma(\psi, \phi^*)$:

LEMME 3. Pour ϕ c-norme sur (ψ, ϕ^*) , les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(6) \quad \exists A \text{ et } B \text{ de rang } 1 \text{ tels que } \phi(AB) = \phi(A) \phi(B)$$

$$(7) \quad \exists A \text{ de rang } 1 \text{ tel que } \phi(A) = \rho(A)$$

et, pour $\psi \geq \phi$, elles sont aussi équivalentes aux suivantes :

$$(8) \quad \exists x \neq 0 \text{ tel que } \psi(x) = \phi(x)$$

$$(9) \quad \exists v \neq 0 \text{ tel que } \psi^*(v) = \phi^*(v)$$

$$(10) \quad S_{\phi\psi}(I) = 1.$$

DEMONSTRATION. Les trois dernières propositions sont équivalentes sous l'hypothèse $\psi \geq \phi$. En effet (10) implique évidemment (8) et (9) ; en utilisant l'hypothèse et remarquant que $S_{\phi\psi}(I) = S_{\psi\phi}^{**}(I)$, alors (8) implique (10), et (9) implique (10).

Montrons l'équivalence entre (6) et (7).

- Si (6) est vraie, on a :

$$\exists x, y, u, v \quad \text{avec} \quad \phi(uv^*xy^*) = \phi(uv^*)\phi(xy^*)$$

soit

$$|v^*x| = \phi^*(v)\psi(x)$$

et donc $\phi(xv^*) = o(xv^*)$, ce qui donne (7).

- Si (7) est vraie, on a :

$$\exists x, v \quad \text{avec} \quad \phi(xv^*) = o(xv^*) = |v^*x|,$$

d'où

$$\forall u, y : |v^*x|\psi(u)\phi^*(y) = \psi(x)\phi^*(v)\psi(u)\phi^*(y),$$

soit

$$\phi(uv^*xy^*) = \phi(uv^*)\phi(xy^*),$$

ce qui implique (6).

- Avec la condition $\psi \geq \phi$, montrons l'équivalence de (7) et (8) :

. si (7) est vérifié, on a :

$$\exists x, v \quad \text{avec} \quad |v^*x| = \phi^*(v)\psi(x)$$

d'où $|v^*x| \geq \phi^*(v)\phi(x)$, puisque $\psi \geq \phi$,

et donc $|v^*x| = \phi^*(v)\phi(x)$

et ainsi

$$\phi(x) = \psi(x), \text{ ce qui établit (8).}$$

(8) s'écrit : $\exists x \neq 0$ t.q. $\psi(x) = \phi(x)$
d'où, pour tout v :

$$\psi(x)\phi^*(v) = \phi(x)\phi^*(v).$$

Si v est choisi dual de x suivant ϕ , alors :

$$\psi(x)\phi^*(v) = |v^*x|$$

soit $\phi(xv^*) = \rho(xv^*)$ c.q.f.d. ▾

N. B. On peut noter que, sous l'hypothèse $\psi \geq \phi$, toute matrice A de rang 1 vérifiant $\phi(A) = \rho(A)$ est nécessairement de la forme xv^* , avec $v \underset{\phi}{\parallel} x$, c'est-à-dire

$$\phi^*(v)\phi(x) = |v^*x|.$$

Réciproquement, si x satisfait $\psi(x) = \phi(x)$, et si $v \underset{\phi}{\parallel} x$ est vérifié, alors la matrice xv^* convient.

On peut maintenant énoncer :

PROPOSITION 7. Les normes multiplicatives de $\Gamma(\psi, \phi^*)$ sont toutes critiques si et seulement si les normes ψ et ϕ vérifient l'égalité :

$$S_{\phi\psi}(I) = 1.$$

DEMONSTRATION. Remarquons d'abord que $S_{\phi\psi}(I) = 1$ est équivalent à :

$$(11) \quad \psi \geq \phi \text{ et il existe } x \neq 0 \text{ tel que } \psi(x) = \phi(x).$$

Le lemme 3 montre que cette propriété entraîne (6) pour toute norme ϕ de $\Gamma(\psi, \phi^*)$; donc a fortiori les normes multiplicatives, satisfaisant (6), sont critiques (la relation $\psi \geq \phi$ implique l'existence des normes multiplicatives).

Réciproquement, considérons la norme multiplicative ($\psi \geq \phi$) et critique $\phi = S_{\psi\phi}$ (on pourrait choisir toute autre norme ψ -uniforme). D'après 1.3.(11), on a :

$$\mu_{\phi} = \sup_{A, B} \frac{\phi(AB)}{\phi(A)\phi(B)} = 1$$

et, compte tenu de 2.2.(3), cela s'écrit

$$1 = \mu_{\phi} = \max_{A \neq 0} \frac{S_{\psi}(A)}{\phi(A)} .$$

Donc il existe A_0 vérifiant l'égalité :

$$(12) \quad S_{\psi}(A_0) = S_{\psi\phi}(A_0) .$$

L'inégalité (toujours vraie) :

$$S_{\psi}(AB) \leq S_{\psi\phi}(A) S_{\phi\psi}(B)$$

écrite avec $A = A_0$ et $B = I$ conduit à :

$$S_{\psi}(A_0) \leq S_{\psi\phi}(A_0) S_{\phi\psi}(I) ;$$

ce qui, avec (12), implique $S_{\phi\psi}(I) \geq 1$. L'égalité $S_{\phi\psi}(I) = 1$ résulte alors de $S_{\phi\psi}(I) \leq 1$, conséquence de $\psi \geq \phi$.



Remarques.

1) Le lemme permet de préciser que l'assertion

" $\exists A, B$ avec $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ ",

caractéristique des normes critiques, est vérifiée par un couple de matrices A, B de rang 1 dans le cas des c -normes.

2) Avec les notations précédemment définies, la Proposition 7 s'écrit :

$$(13) \quad S_{\phi\psi}(I) = 1 \Leftrightarrow \phi \neq \mathcal{N} \cap \Gamma(\psi, \phi^*) = \mathcal{N}_c \cap \Gamma(\psi, \phi^*)$$

3) Si $\psi \geq \phi$, avec $\psi \neq \phi$, il n'existe pas dans $\Gamma(\psi, \phi^*)$ de norme multiplicative unitaire supérieure ou égale à $S_{\psi\phi}$ puisqu'on a

$$\phi(I) \geq S_{\psi\phi}(I) > 1.$$

Application : Quelle que soit la norme ϕ sur C^n , toutes les normes multiplicatives appartenant à $\Gamma(\phi, \phi^*)$ sont critiques ; les normes de type S_ϕ ou $S_\phi^* = \phi^* \otimes \phi$, en particulier, sont multiplicatives critiques. Il en est de même des normes de von Neumann, puisqu'elles sont multiplicatives (Exemple 1 du Corollaire 3) et appartiennent à $\Gamma(\phi, \phi^*)$ avec $\phi = h_2$.

2.3.4 - Décompositions optimales relatives à $\phi \otimes \phi^*$.

Rappelons l'expression de $\psi \otimes \phi^*$:

$$(14) \quad \psi \otimes \phi^*(A) = \min \left\{ \sum_i \psi(x_i) \phi^*(y_i) ; \sum_i x_i y_i^* = A \right\}$$

et que, par décomposition optimale de A (Cf. 2.1.3), on entend tout ensemble de matrices de rang 1 $\{x_i y_i^*\}_{i=1 \text{ à } s}$ vérifiant

$$(15) \quad \sum_{i=1}^s x_i y_i^* = A \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s \psi(x_i) \phi^*(y_i) = \psi \otimes \phi^*(A).$$

Une telle décomposition est en général inaccessible, sauf dans des cas très particuliers dont nous allons donner deux exemples.

Exemple 1.

Si ψ et ϕ sont les normes h_2 sur C^m et C^n respectivement, on peut préciser certaines décompositions optimales pour A quelconque.

Si $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ sont les valeurs singulières de A , et $\{u_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n$ deux systèmes de vecteurs propres orthonormés pour A^*A et AA^* respectivement, la décomposition

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^*$$

est optimale. C'est une conséquence du fait que l'égalité précédente est bien vérifiée et de l'égalité :

$$h_2 \otimes h_2(A) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(A).$$

Exemple 2.

Si ψ et ϕ sont égales à la même norme absolue sur C^n , alors, pour toute matrice diagonale D , la décomposition

$$D = \sum_{i=1}^n d_i e_i e_i^*,$$

où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est la base canonique, est optimale. C'est une conséquence des propriétés suivantes, vérifiées par toute norme absolue ϕ [5] :

$$(16) \quad S_{\phi}^*(D) = \sum_{i=1}^n |d_i| \quad \text{et} \quad \forall i, \phi(e_i) \phi^*(e_i) = 1.$$

Nous allons établir un résultat de ce type valable pour $\phi \otimes \phi^*(I)$, quelle que soit la norme ϕ .

Auparavant, rappelons le résultat suivant, dû, d'après [2], à Auerbach.

LEMME 4. Dans tout espace vectoriel de dimension n normé par ϕ , il existe une base $\{u_1, \dots, u_n\}$ telle que

$$(17) \quad \forall i = 1 \text{ à } n \quad : \quad \phi(u_i + \sum_{k \neq i} \alpha_k u_k) \geq \phi(u_i), \quad \forall \{\alpha_k\}.$$

Ce résultat peut encore être traduit sous d'autres formes :

1) Il existe une base ϕ -normée $\{u_i\}_{i=1} \text{ à } n$ telle que :

$$(18) \quad x = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i \Rightarrow \phi(x) \geq \max_i |\xi_i|.$$

2) Il existe un système bi-orthogonal $\{u_i\}_{i=1} \text{ à } n$, $\{v_j\}_{j=1} \text{ à } n$, tel que tout u_i est ϕ -normé et tout v_j ϕ^* -normé, soit :

$$(19) \quad \forall i, j \quad : \quad v_j^* u_i = \delta_{ij}$$

$$\forall i \quad : \quad \phi(u_i) = 1, \quad \phi^*(v_i) = 1.$$

3) Il existe une matrice régulière M telle que les colonnes de M soient ϕ -normées et les lignes de M^{-1} ϕ^* -normées.

L'équivalence entre 2) et 3) est immédiate en établissant la correspondance $u_i \leftrightarrow$ colonne i de M et $v_j \leftrightarrow$ ligne j de M^{-1} .

Remarque.

Une élégante démonstration de ce lemme (sous la forme 2)) se trouve dans [46], avec une conséquence sur la norme d'une projection de rang fini que nous utiliserons par la suite. Une présentation plus géométrique est faite dans [52].

Nous pouvons dès lors énoncer la

PROPOSITION 8. Pour toute norme ϕ sur C^n , la norme $\phi \otimes \phi^*$, qui est égale à S_ϕ^* , vérifie l'égalité :

$$(20) \quad \phi \otimes \phi^*(I) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \phi(u_i) \phi^*(v_i) ; \sum_{i=1}^n u_i v_i^* = I \right\} = n ,$$

la matrice I admettant les décompositions optimales du type :

$$(21) \quad I = \sum_{i=1}^n u_i v_i^*$$

où $\{u_i\}_{i=1}^n, \{v_j\}_{j=1}^n$ est un système biorthogonal de vecteurs u_i ϕ -normés et v_j ϕ^* -normés.

DEMONSTRATION. On sait (1.3. PROPOSITION 2) que, pour toute norme ϕ , on a l'égalité $S_\phi^*(I) = n$ qui s'écrit (2.1 PROPOSITION 2) :

$$\phi \otimes \phi^*(I) = n .$$

Pour tout système biorthogonal du type (19), on a bien

$$\sum_{i=1}^n \phi(u_i) \phi^*(v_i) = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n u_i v_i^* = I .$$

En effet, si l'on considère les matrices U de colonnes u_1, u_2, \dots, u_n et V de colonnes v_1, v_2, \dots, v_n , les relations (19) se résument en

$$V^* U = I ,$$

et comme il s'agit de matrices carrées, on a aussi :

$U V^* = I$, qui s'écrit

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i^* = I .$$

Dans l'expression de $\phi \otimes \phi^*$, l'inf est donc atteint pour cette somme de n termes, ce qui légitime l'écriture sous la forme (20).

2.3.5 - Une propriété géométrique de la boule-unité d'une norme d'algèbre.

D'après la PROPOSITION 1' de 2.1.3 et les égalités (20), la boule unité de la norme $\phi \otimes \phi^*$ admet en I/n une facette de dimension supérieure ou égale à $n-1$. On peut préciser ici que les matrices $u_i v_i^*$ de la PROPOSITION 8 sont duales de I relativement à la norme S_ϕ^* , puisque l'on a :

$$\forall i = 1 \text{ à } n \quad : \quad v_i^* u_i = \langle I, u_i v_i^* \rangle = S_\phi^*(I) \cdot S_\phi^*(u_i v_i^*).$$

Cela montre, en échangeant les rôles de ϕ et ϕ^* , que le point I est un point anguleux sur la boule unité de toute norme de type S_ϕ ; la boule admet en effet en I au moins les n hyperplans d'appui définis par les $u_i v_i^*$.

Plus généralement, le point I est un point anguleux sur la boule-unité de toute norme multiplicative unitaire. Cette propriété est un cas particulier d'un résultat sur les algèbres de Banach (Cf. [6] par exemple) ; nous pouvons l'établir à partir de ce qui précède :

COROLLAIRE 4. *Le boule-unité de la duale d'une norme multiplicative unitaire sur $\mathcal{M}(n)$ admet en $\frac{1}{n} I$ une facette de dimension supérieure ou égale à $n-1$. La matrice I est un point anguleux sur la boule-unité de la norme elle-même.*

DEMONSTRATION. Soit ϕ une norme multiplicative unitaire sur $\mathcal{M}(n)$. Cette norme vérifie l'égalité $\phi^*(I) = n$ (1.3 PROPOSITION 2), ainsi que la relation

$$(22) \quad \phi \geq S_{\phi_a}$$

où a est un vecteur non nul quelconque qui définit la norme

$$\phi_a : x \mapsto \phi(xa^*).$$

Pour toute norme ϕ_a^* , le lemme 4 assure l'existence d'un système biorthogonal $\{x_i\}, \{y_i\}$ vérifiant :

$$\forall i = 1 \text{ à } n, \quad \phi_a^*(x_i) \phi_a(y_i) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i^* = I.$$

On a donc :

$$(23) \quad n = \phi^*(I) \leq \sum_i \phi^*(x_i y_i^*) \leq \sum_i \phi_a^*(x_i) \phi_a(y_i) = n,$$

où la deuxième inégalité est une conséquence de (22). D'après les extrêmes de (23), il y a égalité entre tous les termes, ce qui, joint aux inégalités

$$i = 1 \text{ à } n, \quad \phi^*(x_i y_i^*) \leq \phi_a^*(x_i) \phi_a(y_i) \quad (\text{conséquence de (22)})$$

implique les égalités :

$$i = 1 \text{ à } n, \quad \phi^*(x_i y_i^*) = 1.$$

Les n matrices $x_i y_i^*$ définissent donc une facette en $\frac{1}{n} I$ pour la boule-unité de ϕ^* ; de plus, elles sont duales de I pour la norme ϕ , ce qui prouve bien que I est point anguleux sur la boule-unité de ϕ .



2.3.6 - Application du théorème d'Auerbach à la comparaison des normes $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$.

On sait que la norme $\psi \otimes \phi^*$ est supérieure ou égale à la norme $S_{\psi\phi}$, quel que soit le couple (ψ, ϕ) , avec égalité sur l'ensemble des matrices de rang 1, et seulement sur cet ensemble pour certains couples (ψ, ϕ) (Cf. 2.1.3).

Le résultat suivant [46] complète ce qui précède :

PROPOSITION 9. Les propriétés suivantes sont vérifiées quel que soit le couple (ψ, ϕ) de normes définies sur C^m et C^n respectivement :

(i)

$$(24) \quad \forall X \in \mathcal{M}(n), \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : \psi \otimes \phi^*(XA) \leq \psi \otimes \phi^*(X) \cdot S_{\psi\phi}(A)$$

$$(25) \quad \forall Y \in \mathcal{M}(m), \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : \psi \otimes \phi^*(AY) \leq S_{\psi\phi}(A) \cdot \psi \otimes \phi^*(Y)$$

(ii) Si $r(A)$ désigne le rang de A , on a :

$$(26) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : S_{\psi\phi}(A) \leq \psi \otimes \phi^*(A) \leq r(A) \cdot S_{\psi\phi}(A).$$

DEMONSTRATION.

(i) Si

$$X = \sum_i x_i u_i^* \quad \text{et} \quad Y = \sum_i y_i v_i^*$$

sont des décompositions quelconques de X et Y , on peut écrire :

$$\psi \otimes \phi^*(XA) \leq \sum_i \psi(x_i) \phi^*(A^* u_i) \leq \left(\sum_i \psi(x_i) \psi^*(u_i) \right) \cdot S_{\psi\phi}(A)$$

$$\psi \otimes \phi^*(AY) \leq \sum_i \psi(Ay_i) \phi^*(v_i) \leq S_{\psi\phi}(A) \cdot \left(\sum_i \phi(y_i) \phi^*(v_i) \right).$$

Ces égalités impliquent respectivement (24) et (25), puisqu'elles sont vérifiées pour toute décomposition de X et Y.

(ii) Le Théorème d'Auerbach implique qu'il existe sur tout sous-espace de dimension r de C^n une projection P telle que $\psi \otimes \psi^*(P) = r$ [46]. Toute projection P sur Im A vérifie l'égalité PA = A ; en choisissant cette projection telle que $\psi \otimes \psi^*(P) = r(A)$, on obtient (26).

Remarques.

1) Dans (26), il y a égalité à gauche pour toute matrice de rang 1. Dans le cas $m = n$ et $\psi = \phi$, il y a égalité à droite pour la matrice unité I, puisque $\phi \otimes \phi^*(I)$ est égal à n.

2) Le rapport $\psi \otimes \phi^*(A) / S_{\psi\phi}(A)$ fournit une borne inférieure pour le rang de $A \neq 0$. Par exemple, si ψ et ϕ sont la norme du max sur C^m et C^n , on obtient :

$$(27) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) - \{0\} : \quad r(A) \geq \frac{\sum_{j=1}^n (\max_{i=1}^m |a_{ij}|)}{\max_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)}$$

3) Cette conséquence du Théorème d'Auerbach sera utilisée au Chapitre 4 (4.3.2) dans l'évaluation de la distance aux applications de rang r.

CHAPITRE 3

NORMES DE MATRICES CONSTRUITES
A PARTIR D'AUTRES NORMES

3.1 - NORMES SUR $\mathcal{M}(m,n)$ OBTENUES PAR COMPOSITION D'AUTRES NORMES.

3.1.1 - Introduction.

Si ϕ_1, \dots, ϕ_k sont k semi-normes sur $\mathcal{M}(m,n)$, et si θ est une jauge définie sur \mathbb{R}_+^k (1.1.(5)), alors l'application :

$$(1) \quad A \in \mathcal{M}(m,n) \mapsto \theta(\phi_1(A), \dots, \phi_k(A))$$

définit une semi-norme sur $\mathcal{M}(m,n)$. C'est une norme si et seulement si l'intersection des noyaux des ϕ_i est réduite à $\{0\}$.

Pour qu'une telle norme présente assez d'intérêt, il faudrait que l'application

$$A \in \mathcal{M}(m,n) \longmapsto (\phi_1(A), \dots, \phi_k(A))$$

définisse une norme vectorielle régulière (44) sur $\mathcal{M}(m,n)$. C'est le cas des normes auxquelles nous nous limiterons ; elles sont du type suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} k=n \\ j = 1 \text{ à } n : \phi_j(A) = \psi_j(A_{oj}), \quad \psi_j \text{ norme sur } \mathbb{C}^m. \end{cases}$$

La norme ainsi obtenue sera notée

$$(3) \quad \theta(\psi_1, \dots, \psi_n)^{(A)} := \theta(\psi_1(A_{o1}), \dots, \psi_n(A_{on})).$$

Considérer une telle norme revient à considérer $A \in \mathcal{M}(m,n)$ comme élément de $(\mathbb{C}^m, \psi_1) \times \dots \times (\mathbb{C}^m, \psi_n)$.

Naturellement, si A est identifié, par ses lignes, à un élément de

$(C^n, \psi_1) \times \dots \times (C^n, \psi_m)$, on construirait une norme du type (3) sur les lignes de A. Une telle norme s'obtenant à partir de (3) par transposition, nous nous limiterons à (3).

Remarquons qu'une généralisation de (3) pourrait être

$$(4) \quad \Phi(A) = \theta(\psi_1(Av_1), \dots, \psi_p(Av_p)),$$

le cas de (3) s'obtenant lorsque $p=n$ et $v_i = e_i$, $i = 1$ à n . L'expression (4) définit une norme si et seulement si la matrice $V = (v_1 \dots v_p) \in \mathcal{M}(n, p)$ définit une application surjective de C^p sur C^n , ce qui implique $p \geq n$. La matrice V ramène d'ailleurs (4) à (3) :

$$\Phi(A) = (AV)_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_p)}, \quad p \geq n.$$

3.1.2 - Propriétés des normes $(\cdot)_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_n)}$.

3.1.2.1 - Norme duale.

PROPOSITION 1. La duale de la norme composée de ψ_1, \dots, ψ_n par θ est la norme composée de $\psi_1^*, \dots, \psi_n^*$ par θ^* (jauge duale) :

$$A \in \mathcal{M}(m, n) : (A)_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_n)}^* = (A)_{\theta^*(\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)}.$$

DEMONSTRATION. Les inégalités successives suivantes sont évidentes :

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(A^*X)| &= \left| \sum_{k=1}^n (A_{ok}^*)^* X_{ok} \right| \leq \sum_{k=1}^n |(A_{ok}^*)^* X_{ok}| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \psi_k^*(A_{ok}^*) \psi_k(X_{ok}) \leq \theta^*(\psi_1^*(A_{o1}), \dots, \psi_n^*(A_{on})) \theta(\psi_1(X_{o1}), \dots, \psi_n(X_{on})), \end{aligned}$$

et pour toute A, il existe une matrice X réalisant l'égalité :

$$|\text{tr}(A^*X)| = (A)_{\theta^*(\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)} \cdot (X)_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_n)}.$$



3.1.2.2 - Autres propriétés de $(\cdot)_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_n)}$. Exemples.

Citons brièvement quelques propriétés et relations évidentes vérifiées par la norme $(\cdot)_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_n)}$:

P1. Cette norme est invariante dans le produit à droite par toute matrice diagonale D telle que $|d_{ii}| = 1, i=1 \text{ à } n$:

$$(2) \quad |D| = I \Rightarrow \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : (AD)_{\theta(\psi_1 \dots \psi_n)} = (A)_{\theta(\psi_1 \dots \psi_n)}$$

P2. Cette norme est absolue si et seulement si toutes les normes ψ_i sont absolues.

P3. Elle vérifie l'inégalité :

$$(3) \quad \forall X \in \mathcal{M}(n), \forall A \in \mathcal{M}(m, n) :$$

$$(XA)_{\theta(\psi_1 \dots \psi_n)} \leq \max_k S_{\psi_k}(X) \cdot (A)_{\theta(\psi_1 \dots \psi_n)}.$$

Remarquons que la norme $(\cdot)_{\theta(\psi_1 \dots \psi_n)}$ n'est pas en général une c-norme.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle en soit une, est que les normes ψ_i soient proportionnelles à une même norme. Il est facile de montrer que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de remarquer que l'on a

$$\forall i : (xe_i^*)_{\theta(\psi_1 \dots \psi_n)} = \psi_i(x)\theta(e_i) ;$$

ainsi, si la norme appartient à $\Gamma(\mu, \nu)$, les normes ψ_i doivent satisfaire :

$$\forall i : \psi_i(x) = \frac{v(e_i)}{\theta(e_i)} \mu(x).$$

Ces c-normes se ramènent donc aux normes du type :

$$(4) \quad (A)_{\theta(\psi)} := \theta(\psi(A_{o1}), \dots, \psi(A_{on}))$$

qui seront étudiées dans les paragraphes suivants.

EXEMPLES.

$$H_p(A) = (A)_{h_p(h_p)}$$

$$S_1(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{h_1(Ax)}{h_1(x)} = (A)_{h_\infty(h_1)}$$

$$S_{\phi,1}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\phi(Ax)}{h_1(x)} = (A)_{h_\infty(\phi)}$$

3.1.3 - Les c-normes composées $(\cdot)_{\theta(\psi)}$.

3.1.3.1 - Propriétés fondamentales.

On a essentiellement la relation caractéristique des c-normes :

$$(1) \quad (xy^*)_{\theta(\psi)} = \theta(|y_1| \psi(x), \dots, |y_n| \psi(x)) = \psi(x) \cdot |\theta|(y).$$

Pour simplifier les notations, nous remplacerons $|\theta|$ par θ , c'est-à-dire que nous considérons une norme absolue θ , dont la restriction à R_+^n est bien une jauge.

PROPOSITION 2. La norme $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ sur $\mathcal{M}(m,n)$, construite par composition de ψ , norme sur C^m , par une norme absolue θ sur C^n , est une c-norme sur (ψ, θ) qui est ψ -uniforme à gauche.

DEMONSTRATION. La norme appartient bien à $\Gamma(\psi, \theta)$ d'après (1). La ψ -uniformité

$$\forall X \in \mathcal{M}(n), \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : (XA)_{\theta(\psi)} \leq S_{\psi}(X) \cdot (A)_{\theta(\psi)}$$

est évidente, et équivaut à 3.1.2 (3). ▽

On peut aussi énoncer le :

COROLLAIRE 1. La norme $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ est supérieure ou égale à $S_{\psi\theta^*}$ et sa duale est la norme $(\cdot)_{\theta^*(\psi^*)}$.

DEMONSTRATION. La relation :

$$(2) \quad S_{\psi\theta^*} \leq (\cdot)_{\theta(\psi)} \quad (\theta \text{ absolue}),$$

est une simple conséquence de la ψ -uniformité (Cf. 2.2 Lemme 1). L'expression de la duale résulte de 3.1.2 (1). ▽

La duale est bien élément de $\Gamma(\psi^*, \theta^*)$, ce qui est en accord avec la théorie générale des c -normes (2.1 Proposition 2).

3.1.3.2 - Cas d'égalité de $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ avec $S_{\psi\theta^*}$ ou $\psi \otimes \theta$.

Comme $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ appartient à $\Gamma(\psi, \theta)$ et satisfait (2), on a :

$$(3) \quad S_{\psi\theta^*} \leq (\cdot)_{\theta(\psi)} \leq \psi \otimes \theta = S_{\psi^*\theta}$$

les restrictions aux matrices de rang 1 étant confondues.

Il est intéressant de connaître les cas où l'une ou l'autre des égalités a lieu dans (3). Les exemples considérés en 3.1.2.2 nous permettent de

vérifier que la première égalité a lieu pour $\theta = h_\infty$ et la seconde pour $\theta = h_1$. Plus exactement, on a les implications suivantes :

$$(4) \quad \theta = h_\infty \Rightarrow \forall \psi, (\cdot)_{\theta(\psi)} = S_{\psi\theta^*}$$

$$(5) \quad \theta = h_1 \Rightarrow \forall \psi, (\cdot)_{\theta(\psi)} = \psi \otimes \theta.$$

En effet, l'égalité (4) est la simple réécriture de

$$S_{\psi, h_1} = (\cdot)_{h_\infty(\psi)}, \quad \forall \psi,$$

et la seconde égalité s'obtient par dualité :

$$S_{\psi_1}^* = \psi^* \otimes h_1 \quad \text{et} \quad S_{\psi_1}^* = (\cdot)_{h_1(\psi^*)}; \text{ ce qui}$$

implique (5) en remplaçant par ψ^* par ψ .

Nous allons montrer, qu'à une transformation diagonale près, h_∞ (resp. h_1) est la seule norme à satisfaire (4) (resp. (5)).

Auparavant, énonçons le

LEMME 1. Les seules normes absolues θ sur C^n qui vérifient

$$(6) \quad (I)_{\theta(\theta^*)} = 1,$$

sont celles qui se déduisent de h_∞ par une transformation diagonale, c'est-à-dire de la forme

$$(7) \quad \theta(x) = h_\infty(Dx) = \max_i \{|x_i| \theta(e_i)\}.$$

DEMONSTRATION. Si θ est de la forme (7) : $(I)_{\theta(\theta^*)} = \max_i \{\theta^*(e_i)\theta(e_i)\} = 1,$

car, pour toute norme absolue : $\theta^*(e_i)\theta(e_i) = 1, \forall i$ (5)

Réciproquement, on a les inégalités :

$$\forall x \in C^n : \theta^*(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \theta^*(e_i) \leq \theta^*(|x|) \quad (I)_{\theta(\theta^*)}.$$

Comme θ est absolue et (6) vérifié :

$$\forall x \in C^n : \theta^*(x) = \sum_i^n |x_i| \theta^*(e_i),$$

$$\text{d'où } \theta(x) = \max_i \frac{|x_i|}{\theta^*(e_i)} = \max_i \{|x_i| \theta(e_i)\}.$$



REMARQUE. L'équivalence donnée dans ce lemme n'est vraie que dans l'ensemble des normes absolues. Par exemple, la norme θ de R^2 (non absolue) :

$$\theta(x) = \max \{|x_1|, |x_2|, |x_1 - x_2|\} \text{ dont la duale est}$$

$$\theta^*(x) = \max \{|x_1|, |x_2|, |x_1 + x_2|\}$$

satisfait (6), mais pas (7).

Donnons maintenant le résultat qui généralise (4) et (5) dans le cas de $\mathcal{M}(n)$:

PROPOSITION 3. Une condition nécessaire et suffisante pour que les normes $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ et $S_{\psi\theta^*}$ (resp. $\psi \otimes \theta$) sur $\mathcal{M}(n)$ soient égales quelle que soit la norme ψ sur C^n est que la norme absolue θ soit de la forme :
 $x \mapsto \max_i \{|x_i| \theta(e_i)\}$ (resp. $\sum_i |x_i| \theta(e_i)$).

DEMONSTRATION. Nous limitons la preuve au cas de $S_{\psi\theta^*}$. L'implication :

(7) $\implies (\cdot)_{\theta(\psi)} = S_{\psi\theta^*}$ (condition suffisante) est bien vérifiée, car pour $\theta(x) = \max_i (|x_i| \theta(e_i))$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{M}(n) : (A)_{\theta(\psi)} = \max_i \{ \psi(A_{oi}) \theta(e_i) \}$$

et, comme θ^* est donnée par $\theta^*(x) = \sum_i |x_i| \theta(e_i)$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{M}(n) : S_{\psi\theta^*}(A) = \max_i \left\{ \frac{\psi(A_{oi})}{\theta^*(e_i)} \right\} = \max_i \{ \psi(A_{oi}) \theta(e_i) \}.$$

Réciproquement, si l'égalité entre les normes est vraie, quelle que soit ψ , c'est aussi le cas pour $\psi = \theta^*$, donc :

$$(I)_{\theta(\theta^*)} = S_{\theta^*}(\theta^*) = 1,$$

et, d'après le lemme 1, $\theta(x) = \max_i \{ |x_i| \theta(e_i) \}$.

3.1.3.3 - Multiplicativité des normes $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ sur $\mathcal{M}(n)$.

PROPOSITION 4. Une norme composée $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ sur $\mathcal{M}(n)$ est multiplicative si et seulement si la norme absolue θ et la norme ψ sur C^n vérifient l'inégalité :

$$(8) \quad \psi \geq \theta^* ;$$

elle est critique si et seulement si

$$S_{\theta^*\psi}(\theta^*) = 1.$$

On a donc en résumé les équivalences :

$$(9) \quad \psi \geq \theta^* \iff (\cdot)_{\theta(\psi)} \in \mathcal{N}$$

et :

$$(10) \quad \psi \geq \theta^* \text{ et } \exists x \neq 0 \text{ t.q. } \psi(x) = \theta^*(x) \iff (\cdot)_{\theta(\psi)} \in \mathcal{N}_c.$$

DEMONSTRATION. La norme $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ appartenant à $\Gamma(\psi, \theta)$ et étant ψ -uniforme, une condition nécessaire et suffisante de multiplicativité est bien $\psi \geq \theta^*$ (2.3 Proposition 6). Elle est bien critique si et seulement si $S_{\theta^* \psi}(I) = 1$ (2.3 Proposition 7). ▼

REMARQUE. Dans le cas de $\Phi = (\cdot)_{\theta(\psi)}$, on a un résultat plus précis que pour une c-norme quelconque, à savoir :

$$(11) \quad \mu_{\Phi} = \sup_{A, B} \frac{\Phi(AB)}{\Phi(A)\Phi(B)} = S_{\theta^* \psi}(I).$$

EXEMPLE. Les normes de Hölder H_p sont de la forme $(\cdot)_{h_p(h_p)}$. Les normes H_p multiplicatives sont donc caractérisées par $h_p \geq h_p^* = h_q$, c'est-à-dire par $p \leq q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), donc par $p \leq 2$.

Les seules normes de Hölder multiplicatives sont donc celles dont le paramètre p appartient à $[1, 2]$; toutes ces normes sont critiques, puisque dans ce cas $S_{qp}(I)$ est égal à 1.

Nous allons montrer que les normes composées multiplicatives et unitaires se réduisent à une famille de normes très particulières :

PROPOSITION 5. Les seules normes multiplicatives unitaires du type $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ sur $\mathcal{M}(n)$ sont égales aux normes très particulières :

$$(12) \quad A \in \mathcal{M}(n) \mapsto S_1(DAD^{-1}) = \max_i \sum_j \frac{d_j}{d_i} |a_{ji}|$$

où S_1 désigne la norme S_{h_1} ($h_1 : x \mapsto \sum_i |x_i|$), et où D est une matrice diagonale positive ($\forall i, d_{ii} > 0$).

DEMONSTRATION. On sait que S_{ψ} est la seule norme à être ψ -uniforme, multiplicative unitaire (2.3.1 Remarque). Une c.n.s. pour que $(\cdot)_{\theta(\psi)}$ appartienne à \mathcal{N}_1 est constituée par l'égalité $\psi = \theta^*$. L'appartenance à \mathcal{N}_1 est alors équivalente à $(I)_{\theta(\theta^*)} = 1$; comme θ est absolue, on a donc

$$\theta(x) = \max_i \theta(e_i) |x_i| = h_\infty(Dx) \text{ d'après le lemme 1, ou}$$

$$\psi(x) = \theta^*(x) = h_1(D^{-1}x), \text{ soit } S_\psi = S_1(D^{-1} \bullet D). \quad \text{c.q.f.d.} \quad \nabla$$

NOTA. Les normes définies en (12) jouent un rôle intéressant dans l'étude des matrices positives. On a en effet :

$$(13) \quad \forall A \geq 0 : \rho(A) = \inf \{S_1(DAD^{-1}) ; D > 0\},$$

l'inf. étant atteint si et seulement s'il existe un vecteur $u > 0$ tel que $A^*u \leq \rho(A)u$, A^* désignant la transposée de A (44).

3.1.4 - Norme composée par plusieurs normes sur $\mathcal{M}(n)$.

On sait que, si ϕ_1, \dots, ϕ_k sont k normes sur $\mathcal{M}(n)$, et θ une jauge sur \mathbb{R}_+^k , l'application :

$$(1) \quad A \in \mathcal{M}(n) \mapsto \Phi(A) := \theta(\phi_1(A), \dots, \phi_k(A))$$

définit une nouvelle norme sur $\mathcal{M}(n)$.

Nous allons caractériser les normes de ce type qui sont multiplicatives unitaires.

Tout d'abord, si les normes ϕ_i , $i = 1$ à k , sont multiplicatives, la norme Φ le sera aussi si la jauge θ est "multiplicative" sur \mathbb{R}_+^k , c'est-à-dire satisfait : (36)

$$(2) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}_+^k : \theta(u_1 v_1, \dots, u_k v_k) \leq \theta(u_1, \dots, u_k) \theta(v_1, \dots, v_k).$$

Notons que (2) entraîne la propriété

$$(3) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+^k ; \theta(u) \geq \max_i (u_i),$$

qui implique l'inégalité :

$$(4) \quad \theta(1,1,\dots,1) \geq 1.$$

Cette inégalité conduit bien à : $\Phi(I) \geq 1$ (évidemment : $\forall i, \phi_i(I) \geq 1$).

Une condition nécessaire pour avoir $\Phi(I) = 1$ est que θ satisfasse l'égalité

$$(5) \quad \theta(1,1,\dots,1) = 1.$$

En effet, l'égalité $\Phi(I) = 1$, jointe à

$$\Phi(I) = \theta(\phi_1(I), \dots, \phi_k(I)) \geq \theta(1, \dots, 1)$$

entraîne (5), si l'on tient compte de (4).

Donnons maintenant une caractérisation des normes unitaires de type (1) :

PROPOSITION 6. Si ϕ_1, \dots, ϕ_k sont k normes multiplicatives sur $\mathcal{M}(n)$, la norme

$$(6) \quad \Phi(A) = \max_{i=1 \text{ à } k} \phi_i(A)$$

est multiplicative et unitaire si et seulement si toutes les normes ϕ_i sont unitaires. De plus, cette norme est la seule des normes de type (1) à avoir cette propriété.

DEMONSTRATION. Chaque norme ϕ_i , étant multiplicative, vérifie la relation $\phi_i(I) \geq 1$. Il est donc clair que $\max \phi_i(I) = 1$ est équivalent aux k égalités $\phi_i(I) = 1$.

Si $\theta(\phi_1(I), \dots, \phi_k(I)) = 1$ avec $\phi_i(I) \geq 1, i = 1 \text{ à } n$, montrons que la jauge θ est égale à $\max_{i=1 \text{ à } n} ()$. Par monotonie, θ est telle que $\theta(1,1,\dots,1) \leq 1$. Pour prouver l'égalité de θ et de \max , il suffit de

démontrer l'égalité des ensembles :

$$\{u \in \mathbb{R}_+^k ; \theta(u) \leq 1\} = \{u \in \mathbb{R}_+^k ; \forall i, u_i \leq 1\}$$

D'après (3), l'implication suivante a lieu :

$$\theta(u) \leq 1 \Rightarrow \forall i, u_i \leq 1.$$

L'implication inverse résulte de la monotonie de θ :

$$\forall i, u_i \leq 1 \Rightarrow \theta(u) \leq \theta(1, 1, \dots, 1) \leq 1.$$



EXEMPLE. En choisissant $\phi_i = S_{\psi_i}$, on obtient les normes multiplicatives unitaires du type $\phi = \max_i S_{\psi_i}$.

3.2 - NORMES ASSOCIEES.

3.2.1 - Introduction . Définitions.

Les normes composées sur $\mathcal{M}(m,n)$ ont été construites en identifiant tout élément de cet espace à son isomorphe dans $(\mathbb{C}^m)^n$.

La construction des normes associées (34) repose sur l'identification de tout élément de $\mathcal{M}(m,n)$ à son image dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}(n,p), \mathcal{M}(m,p))$ par l'application :

$$(1) \quad A \in \mathcal{M}(m,n) \mapsto L_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(n,p), \mathcal{M}(m,p))$$

$$\text{avec } L_A : X \in \mathcal{M}(n,p) \mapsto AX \in \mathcal{M}(m,p).$$

Dès que p est supérieur à 1, il ne s'agit pas d'un isomorphisme.

Si Ψ est une norme sur $\mathcal{M}(m,p)$ et Φ une norme sur $\mathcal{M}(n,p)$, la norme de l'application L_A induit une norme sur $\mathcal{M}(m,n)$:

DEFINITION. La norme, notée $G_{\Psi\Phi}$, associée aux normes Ψ sur $\mathcal{M}(m,p)$ et Φ sur $\mathcal{M}(n,p)$, est définie par :

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : G_{\Psi\Phi}(A) = \text{Sup} \left\{ \frac{\Psi(AX)}{\Phi(X)} ; X \in \mathcal{M}(n,p) - \{0\} \right\} .$$

- Ces normes généralisent les normes de type $S_{\Psi\Phi}$, qui correspondent au paramètre p égal à 1. Le choix du paramètre p permet de construire sur le même espace $\mathcal{M}(m,n)$, une suite de familles de normes généralisant les normes $S_{\Psi\Phi}$.

- La notation G rappelle que L_A est définie par le produit à gauche AX . Les normes construites sur l'application $Y \mapsto YA$, seront notées D . Nous

n'étudions pas ces normes ici, car leurs propriétés se déduisent simplement de celles des normes G , par transposition. Elles seront cependant utilisées par commodité dans le paragraphe 3.3.

- Signalons que des expressions du type (2) ont été considérées dans (14), (19), (23), (55), généralement dans le cas particulier $\Psi = \Phi$ (matrices carrées), mais aussi en limitant le sup à des sous-ensembles de $\mathcal{M}(n)$ dans le but d'obtenir des caractérisations de certaines classes de normes.

REMARQUE. Dans un cadre tensoriel défini ici par $\mathcal{L}(E, F) \simeq F \otimes E^*$, l'application associée à A par (1), considérée de $F \otimes E^*$ dans $G \otimes E^*$, serait représentée par $A \otimes I$ ($F = \mathbb{C}^n$, $G = \mathbb{C}^m$, $E = \mathbb{C}^p$). La norme associée consiste donc à associer à A la norme de $A \otimes I$.

3.2.2 - Propriétés des normes $G_{\Psi\Phi}$.

Énonçons d'abord les propriétés qui généralisent exactement celles des normes $S_{\Psi\Phi}$:

PROPOSITION 1. Toute norme $G_{\Psi\Phi}$ a les propriétés suivantes :

- (3) (i) $\forall A \in \mathcal{M}(m, n) : G_{\Psi\Phi}(A) = \text{Sup} \left\{ \frac{|\text{tr}(Y^*AX)|}{\Psi^*(Y)\Phi(X)} ; X \in \mathcal{M}(n, p), Y \in \mathcal{M}(m, p) \right\}$
 ("caractérisation bilinéaire")
- (4) (ii) $\forall A \in \mathcal{M}(m, n) : G_{\Psi\Phi}(A) = G_{\Phi^*\Psi^*}(A^*)$.

DEMONSTRATION. L'égalité (3) s'obtient simplement en écrivant $\Psi(Ax)$ par dualité :

$$G_{\Psi\Phi}(A) = \text{Sup}_X \frac{\Psi(Ax)}{\Phi(X)} = \text{Sup}_X \text{Sup}_Y \frac{|\text{tr}(Y^*AX)|}{\Psi^*(Y)\Phi(X)}.$$

L'égalité (4) se déduit de cette dernière expression en utilisant la majoration

$$|\text{tr}(Y^*AX)| \leq \Phi^*(A^*Y)\Phi(X) \text{ qui conduit à l'inégalité}$$

$$G_{\psi\phi}(A) \leq G_{\phi^*\psi^*}(A^*) ;$$

l'inégalité inverse s'obtient de la même manière. ▼

Donnons maintenant un résultat se rapportant aux c-normes :

PROPOSITION 2 :

(i) Si la norme Ψ appartient à $\Gamma(\psi, \nu^*)$, ψ étant une norme sur C^m et ν une norme sur C^p , alors $G_{\psi\phi}$ appartient à $\Gamma(\psi, \theta^*)$ où θ est la norme définie sur C^n par :

$$(5) \quad \forall v \in C^n : \theta^*(v) = \text{Sup} \left\{ \frac{\phi^*(vz^*)}{\nu(z)} ; z \in C^p \right\} .$$

(ii) Si, en plus, ϕ appartient à $\Gamma(\phi^*, \nu)$, ϕ étant une norme sur C^n , alors on a l'égalité

$$\theta = \phi .$$

DEMONSTRATION. Les hypothèses de (i) et (ii) se traduisent par les égalités :

$$(6) \quad \forall x \in C^m, \forall y \in C^p : \Psi(xy^*) = \psi(x)\nu^*(y)$$

$$(7) \quad \forall v \in C^n, \forall z \in C^p : \phi^*(vz^*) = \phi^*(v)\nu(z)$$

On a alors successivement :

$$G_{\psi\phi}(uv^*) = \text{Sup}_M \frac{\Psi(uv^*M)}{\phi(M)} = \psi(u) \text{Sup}_M \frac{\nu^*(M^*v)}{\phi(M)}$$

qui donne θ^* sous forme de norme associée. Montrons que cette forme est bien équivalente à (5) :

$$\text{Sup}_M \frac{\nu^*(M^*v)}{\phi(M)} = \text{Sup}_M \text{Sup}_z \frac{|z^*M^*v|}{\phi(M)\nu(z)}$$

$$\sup_M \frac{\nu^*(M^* \nu)}{\Phi(M)} = \sup_z \sup_M \frac{|\text{tr}(M^* \nu z^*)|}{\Phi(M) \nu(z)} = \sup_z \frac{\Phi^*(\nu z^*)}{\nu(z)}.$$

Si (7) est vraie, alors (5) implique l'égalité $\theta^* = \phi^*$, soit $\theta = \phi$. ▽

REMARQUE. Il est évident que si Ψ est ψ -uniforme pour une norme ψ de C^m , alors $G_{\Psi\Phi}$ a la même propriété.

3.2.3 - Calcul de $G_{\Psi\Phi}$ pour $\Psi \in \Gamma(\psi_1, \psi_2^*)$ et $\Phi \in \Gamma(\phi_1, \phi_2^*)$.

Lorsque Ψ et Φ ont certaines propriétés que nous allons préciser, la norme $G_{\Psi\Phi}$ peut être exprimée ; il se trouve que dans tous ces cas, $G_{\Psi\Phi}$ est de type $S_{\psi\phi}$.

LEMME 1. Si la norme Ψ appartient à $\Gamma(\psi_1, \psi_2^*)$ et Φ à $\Gamma(\phi_1, \phi_2^*)$, ψ_1 étant une norme sur C^m , ϕ_1 une norme sur C^n , et ψ_2, ϕ_2 deux normes sur C^p , les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(8) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : G_{\Psi\Phi}(A) = \sup \left\{ \frac{\Psi(AX)}{\Phi(X)} ; X \text{ de rang } 1 \right\}$$

$$(9) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n), \forall X \in \mathcal{M}(n, p) : \Psi(AX) \leq S_{\psi_1 \phi_1}(A) \Phi(X) S_{\phi_2 \psi_2}(I_p)$$

$$(10) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : G_{\Psi\Phi}(A) = S_{\psi_1 \phi_1}(A) S_{\phi_2 \psi_2}(I_p).$$

DEMONSTRATION. Evaluons le 2e membre de l'égalité (8) ; Ψ et Φ appartenant respectivement à $\Gamma(\psi_1, \psi_2^*)$ et $\Gamma(\phi_1, \phi_2^*)$, on a

$$\sup_{x, y} \frac{\Psi(Axy^*)}{\Phi(xy^*)} = \sup_x \frac{\psi_1(Ax)}{\phi_1(x)} \cdot \sup_y \frac{\psi_2^*(y)}{\phi_2^*(y)} = S_{\psi_1 \phi_1}(A) \cdot S_{\phi_2 \psi_2}(I)$$

en utilisant l'égalité $S_{\psi_2^* \phi_2^*}(I) = S_{\phi_2 \psi_2}(I)$.

Cela démontre l'équivalence entre (8) et (10), et fournit l'inégalité :

$$\forall A : G_{\Psi\Phi}(A) \geq S_{\psi_1\phi_1}(A) S_{\phi_2\psi_2}(I).$$

Comme (9) est équivalent à l'inégalité inverse, il y a bien équivalence de (9) et (10). ▽

PROPOSITION 3. Les égalités suivantes :

$$(11) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : G_{\Psi\Phi}(A) = \text{Sup} \left\{ \frac{\Psi(AX)}{\Phi(X)} ; X \text{ de rang } 1 \right\}$$

$$= S_{\psi_1\phi_1}(A) S_{\phi_2\psi_2}(I_P)$$

sont vraies :

- (i) pour toute norme Ψ de $\Gamma(\psi_1, \psi_2^*)$ si Φ est égale à $\phi_1 \otimes \phi_2^*$.
- (ii) pour toute norme Φ de $\Gamma(\phi_1, \phi_2^*) \cap \Gamma(\phi_1^*, \phi_2)$ si Ψ est égale à $S_{\psi_1\psi_2^*}$.
- (iii) pour $\Psi = (\cdot)_{\psi_2^*}^*(\psi_1)$ et $\Phi = (\cdot)_{\phi_2^*}^*(\phi_1)$ où ψ_2 et ϕ_2 sont 2 normes absolues.

DEMONSTRATION. D'après le lemme, il suffit d'établir l'inégalité (9) dans les cas indiqués. Considérons (i) ; (9) est conséquence des inégalités :

$$(12) \quad \Psi(AX) \leq \psi_1 \otimes \psi_2^*(AX) \leq S_{\psi_1\phi_1}(A) \phi_1 \otimes \phi_2^*(X) S_{\phi_2\psi_2}(I).$$

Pour montrer (12), il suffit d'appliquer la formulation (2.1.(1)) de la plus grande c-norme. Si $X = \sum_i u_i v_i^*$ est une décomposition de X, alors on a l'inégalité :

$$\sum_i \psi_1(Au_i) \psi_2^*(v_i) \leq S_{\psi_1\phi_1}(A) S_{\phi_2\psi_2}(I_P) \sum_i \phi_1(u_i) \phi_2^*(v_i)$$

en utilisant la relation $S_{\phi_2\psi_2}(I) = S_{\psi_2^*\phi_2^*}(I)$. Comme $\sum_i (Au_i) v_i^*$ est une décomposition de AX, (12) est bien établi.

Pour établir (ii), rappelons l'équivalence

$$\Phi \in \Gamma(\phi_1, \phi_2^*) \cap \Gamma^*(\phi_1^*, \phi_2) \iff \Phi \in \Gamma(\phi_1, \phi_2^*) \text{ et } \Phi \geq S_{\phi_1 \phi_2}.$$

Ainsi, de l'inégalité évidente

$$S_{\psi_1 \psi_2}(AX) \leq S_{\psi_1 \phi_1}(A) S_{\phi_1 \phi_2}(X) S_{\phi_2 \psi_2}(I),$$

on déduit bien (9), en utilisant l'inégalité $S_{\phi_1 \phi_2}(X) \leq \Phi(X)$.

Les normes composées de (iii) satisfont les inégalités :

$$\begin{aligned} (AX)_{\psi_2^*(\psi_1)} &\leq S_{\psi_1 \phi_1}(A) (X)_{\psi_2^*(\phi_1)} \\ &\leq S_{\psi_1 \phi_1}(A) S_{\psi_2^* \phi_2^*}^{(I_p)} (X)_{\phi_2^*(\phi_1)} \end{aligned}$$

et donc (9). ▾

REMARQUES :

- 1) Les propriétés (i) et (ii) pourraient être déduites l'une de l'autre par dualité en tenant compte de (4).
- 2) Il se trouve que $G_{\psi \phi}$ est de type $S_{\psi \phi}$ dans tous les cas de la proposition 3 ; mais cette propriété n'est pas générale. Il suffit de considérer par exemple, dans le cas où m, n, p sont égaux, une norme Φ de \mathcal{M}_1 qui n'est pas de type $S_{\psi \phi}$; comme, dans ce cas, il y a égalité entre G_{Φ} et Φ , G_{Φ} n'est pas de type $S_{\psi \phi}$.

EXEMPLES :

- (1) Si Ψ et Φ sont respectivement les normes de Hölder H_{p_1} sur $\mathcal{M}(m, p)$ et H_{p_2} sur $\mathcal{M}(n, p)$, l'application de (iii) conduit à :

$$G_{\Psi \Phi}(A) = S_{p_1 p_2}(A) \cdot S_{p_1 p_2}^{(I_p)}, \quad \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$$

où le coefficient $S_{p_1 p_2}^{(I_p)}$ est égal à 1 si $p_1 \geq p_2$ et à p

sinon.

(2) Dans le cas des normes de Von Neumann, (i) et (ii) conduisent à :

$$\sup_X \frac{\theta(\sigma_1(A), \dots, \sigma_p(A))}{\sigma_1(X) + \dots + \sigma_p(X)} = S_2(A) = \sigma_1(A)$$

$$\sup_X \frac{S_2(A)}{\theta(\sigma_1(X), \dots, \sigma_p(X))} = \sigma_1(A)$$

où θ est une jauge symétrique, les valeurs singulières de A étant numérotées en décroissant.

Résultats complémentaires. Si on limite Ψ et Φ aux 3 types de normes : $S_{\Psi\Phi}$, $\Psi \otimes \Phi^*$ et $(\cdot)_{\theta(\Psi)}$, la proposition 3 fournit une expression simple de $G_{\Psi\Phi}$ dans 6 cas sur 9. Pour les 3 autres cas, on a seulement les inégalités :

$$(13) \quad S_{\Psi\Phi_1}(A) S_{\Phi_2\Psi_2}(I_p) \leq \sup_X \frac{(AX)_{\Psi_2\Psi_1}}{S_{\Phi_1\Phi_2}(X)} \leq S_{\Psi_1\Phi_1}(A) \cdot (I_p)_{\Psi_2^*}(\Phi_2)$$

$$(14) \quad - \quad \text{id} \quad - \quad \leq \sup_X \frac{\Psi_1 \otimes \Psi_2^*(AX)}{S_{\Phi_1\Phi_2}(X)} \leq S_{\Psi_1\Phi_1}(A) \cdot \Phi_2 \otimes \Psi_2^*(I_p)$$

$$(15) \quad - \quad \text{id} \quad - \quad \leq \sup_X \frac{\Psi_1 \otimes \Psi_2^*(AX)}{(X)_{\Phi_2^*}(\Phi_1)} \leq S_{\Psi_1\Phi_1}(A) \cdot (I_p)_{\Phi_2^*}(\Psi_2^*)$$

DEMONSTRATION. Dans les 3 cas, l'inégalité de gauche est obtenue par limitation du sup à l'ensemble des matrices X de rang 1. Il suffit de démontrer les inégalités de droite.

Pour (13), il faut considérer les inégalités :

$$(AX)_{\Psi_2^*}(\Psi_1) \leq S_{\Psi_1\Phi_1}(A) (X)_{\Psi_2^*}(\Phi_1) \leq S_{\Psi_1\Phi_1}(A) S_{\Phi_1\Phi_2}(X) (I_p)_{\Psi_2^*}(\Phi_2),$$

et pour (14) :

$$\Psi_1 \otimes \Psi_2^*(AX) \leq S_{\Psi_1\Phi_1}(A) \Phi_1 \otimes \Psi_2^*(X) \leq S_{\Psi_1\Phi_1}(A) S_{\Phi_1\Phi_2}(X) \Phi_2 \otimes \Psi_2^*(I_p).$$

Pour (15), il suffit de compléter la 2e inégalité précédente avec :

$$\phi_1 \otimes \psi_2^*(X) \leq \sum_{i=1}^p \phi_1(X_{\circ i}) \psi_2^*(e_i) \leq \phi_2^*(\phi_1(X_{\circ 1}), \dots, \phi_1(X_{\circ p})) \phi_2(\psi_2^*(e_1), \dots, \psi_2^*(e_p))$$

où la première inégalité découle de la définition de $\phi_1 \otimes \psi_2^*$ ($\sum_i X_{\circ i} e_i^*$ étant une décomposition de X) et la seconde est simplement l'inégalité de Hölder relative à la norme ϕ_2 . ▽

REMARQUE. Montrons par des exemples simples qu'il n'y a pas égalité à gauche, en général, dans (13), (14), (15). Nous nous plaçons dans $\mathcal{M}(2)$. Pour (13), (14), le même exemple convient, à savoir

$\psi_1 = \psi_2 = \phi_1 = \phi_2 = h_\infty$: l'inégalité de gauche est stricte puisque pour $A = X = I$, on a $1 < 2 = (I)_{h_1}(h_\infty)$. pour (15), retenons le cas

$\psi_1 = \psi_2 = \phi_1 = \phi_2 = h_2$; l'inégalité est encore stricte puisque pour $A = X = I$, on obtient $1 < 2 = \sigma_1(I) + \sigma_2(I)$.

3.2.4 - Les normes de type $G_{\psi\phi}$ sur $\mathcal{M}(n)$.

3.2.4.1 - Norme G_ϕ dans le cas $m=n$.

La norme $G_\phi(A) = \sup_{X \in \mathcal{M}(n,p)} \frac{\phi(AX)}{\phi(X)}$ est évidemment une norme multiplicative unitaire.

Si ϕ appartient à $\Gamma(\psi, \phi^*)$, on sait que G_ϕ appartient à $\Gamma(\psi, \theta^*)$; ici ψ et θ sont nécessairement liées par la relation $\psi \geq \theta$, du fait de la multiplicativité (la relation (5) conduit bien à cette relation).

COROLLAIRE 1. Si ϕ appartient à $\Gamma(\psi, \phi^*) \cap \Gamma^*(\psi^*, \phi)$ alors G_ϕ appartient à $\Gamma(\psi, \psi^*)$.

DEMONSTRATION. En appliquant la proposition 2 au cas $\Psi = \phi$, on obtient $\theta = \psi$.

REMARQUE. On a ainsi un moyen de "construire" une c-norme multiplicative

unitaire : il suffit de considérer la norme G_ϕ associée à une c-norme quelconque.

Remarquons par ailleurs que si G_ϕ appartient à l'ensemble $\Gamma(\psi, \theta^*)$, où les normes ψ et θ sont différentes, alors G_ϕ ne peut appartenir à $\Gamma^*(\psi^*, \theta)$. En effet, la relation $G_\phi \geq S_{\psi\theta}$ ne peut avoir lieu, puisque $G_\phi(I)$ est égal à 1 et $S_{\psi\theta}(I)$ est strictement supérieur à 1 (c'est une conséquence des relations : $\psi \geq \theta$ et $\psi \neq \theta$).

Notons que si G_ϕ est égale à S_ψ , alors ϕ est ψ -uniforme ; on a même l'équivalence :

$$(16) \quad G_\phi = S_\psi \iff \phi \text{ est } \psi\text{-uniforme.}$$

3.2.4.2 - Multiplicativité de $G_{\psi\phi}$ (cas $m=n$).

Si Ψ et Φ sont deux normes sur $\mathcal{M}(n,p)$, une condition suffisante pour que la norme $G_{\Psi\Phi}$ de $\mathcal{M}(n)$ soit multiplicative est que Ψ soit supérieure ou égale à Φ . C'est une conséquence des inégalités évidentes :

$$(17) \quad G_{\Psi\Phi}(AB) \leq G_{\Psi\Phi}(A) \cdot G_\Phi(B) \leq G_{\Psi\Phi}(A) \cdot G_{\Psi\Phi}(B).$$

Si la condition est nécessaire dans le cas où p est égal à 1, ce n'est pas le cas pour p supérieur à 1. Considérons par exemple le cas (i) de la proposition 3 :

$$\Psi = S_{\psi_1\psi_2} \quad \text{et} \quad \Phi = \phi_1 \otimes \phi_2^* \implies G_{\Psi\Phi}(A) = S_{\psi_1\phi_1}(A) \cdot S_{\phi_2\psi_2}(I_p).$$

Dans le cas particulier où les normes ψ_i et ϕ_i sont égales ($i=1,2$), $G_{\Psi\Phi}$, qui est égale à S_{ϕ_1} , est multiplicative, sans que l'inégalité

$$S_{\phi_1\phi_2} \geq \phi_1 \otimes \phi_2^* \quad \text{soit vérifiée, puisque c'est l'inégalité inverse qui}$$

est vraie.

Les cas $p=1$ et $p>1$ sont ainsi très différents : pour $p=1$, les normes ψ et ϕ sont déterminées (à une constante près) dès qu'on connaît $S_{\psi\phi}$;

pour $p > 1$, des couples de normes (Ψ, Φ) assez variés peuvent conduire à la même norme $G_{\Psi\Phi}$.

3.2.4.3 - Norme G_{Φ} dans le cas $m=n=p$.

Dans ce cas particulier, Φ et G_{Φ} sont définies simultanément sur $\mathcal{M}(n)$.

Certaines propriétés de Φ , liées à la multiplicativité, peuvent être exprimées en utilisant G_{Φ} . On a par exemple les équivalences suivantes :

$$(18) \quad G_{\Phi} = \Phi \iff \Phi \in \mathcal{N}_1$$

$$(19) \quad G_{\Phi} \leq \Phi \iff \Phi \in \mathcal{N}$$

$$(20) \quad G_{\Phi} \leq \Phi \text{ avec égalité atteinte} \iff \Phi \in \mathcal{N}_c.$$

Les équivalences (19) et (20) expriment simplement que μ_{Φ} (cf. 1.3) est respectivement inférieur ou égal à 1, et égal à 1, puisque ce nombre peut s'écrire :

$$\mu_{\Phi} = \sup_M \frac{G_{\Phi}(M)}{\Phi(M)}.$$

3.3 - NORMES QUOTIENTS.

3.3.1 - Introduction . Définitions.

Nous allons à partir d'une norme ϕ sur $\mathcal{M}(m,n)$, construire une famille de normes sur $\mathcal{M}(m,p)$, quel que soit l'entier p inférieur ou égal à n . Le processus pourra être considéré en un sens comme "inverse" de celui utilisé pour la construction des normes associées.

Lorsque nous parlerons de noyau d'une matrice T de $\mathcal{M}(n_1, n_2)$, il s'agira du noyau de T , noté $\text{Ker}(T)$, considérée comme application linéaire de C^{n_2} dans C^{n_1} .

DEFINITION. Si ϕ est une norme sur $\mathcal{M}(m,n)$ et X un élément de $\mathcal{M}(n,p)$, l'application

$$(1) \quad \phi_X : Y \in \mathcal{M}(m,p) \mapsto \phi_X(Y) = \inf_M \{ \phi(M) ; MX = Y \}$$

est définie sur le sous-espace des Y dont le noyau contient celui de X .

C'est une conséquence d'un théorème d'algèbre qui dit que l'ensemble $\{M ; MX = Y\}$ est non vide si et seulement si l'inclusion $\text{Ker}(X) \subset \text{Ker}(Y)$ a lieu.

Par la suite, nous nous limiterons au cas où ϕ_X est définie sur l'espace $\mathcal{M}(m,p)$ entier ; cela revient à choisir X injective, soit :

$$(2) \quad \text{Ker}(X) = \{0\}.$$

Sous cette hypothèse, on aura nécessairement la relation :

$$(3) \quad p \leq n.$$

REMARQUE. Si p est égal à n , ϕ_X est définie pour toute Y si X est régulière et s'écrit simplement

$$\phi_X(Y) = \phi(YX^{-1}).$$

3.3.2 - Propriétés générales de ϕ_X .

Comme précédemment, on notera R_X l'application linéaire de $\mathcal{M}(m,n)$ dans $\mathcal{M}(m,p)$ ainsi définie :

$$(4) \quad R_X : M \in \mathcal{M}(m,n) \mapsto MX \in \mathcal{M}(m,p).$$

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 1. Si X est injective, alors R_X est surjective et l'application ϕ_X définit une norme sur $\mathcal{M}(m,p)$ dont la boule-unité est l'image par R_X de la boule unité de ϕ .

DEMONSTRATION. R_X est bien surjective puisque $\{M ; MX = Y\}$ est non vide quel que soit $Y \in \mathcal{M}(m,p)$. L'application ϕ_X est exactement la norme sur l'espace quotient $\mathcal{M}(m,n)/\text{Ker}(R_X)$. Comme R_X est surjective, il y a isomorphisme entre $\mathcal{M}(m,n)/\text{Ker}(R_X)$ et $\mathcal{M}(m,p)$, et ϕ_X définit bien une norme sur $\mathcal{M}(m,p)$. La correspondance entre les boules-unités résulte des équivalences :

$$\phi_X(Y) \leq 1 \iff \exists M \text{ t.q. } \phi(M) \leq 1 \quad \text{et } MX = Y$$

$$\iff Y \in R_X(\mathcal{B}_\phi).$$



La duale de ϕ_X s'exprime simplement en fonction de la norme duale ϕ^* :

COROLLAIRE 1. La norme duale ϕ_X^* est donnée par :

$$(5) \quad \forall Z \in \mathcal{M}(m,p) : \phi_X^*(Z) = \phi^*(ZX^*)$$

conduisant à la formulation duale de ϕ_X :

$$(6) \quad \forall Y \in \mathcal{M}(m, p) : \phi_X^*(Y) = \sup_{Z \neq 0} \frac{|\operatorname{tr}(Z^* Y)|}{\phi^*(ZX^*)}.$$

DEMONSTRATION. On a successivement, en appliquant les résultats de la proposition 1 :

$$\begin{aligned} \phi_X^*(Z) &= \sup \{ |\operatorname{tr}(Z^* V)| ; V \in \mathcal{B}_{\phi_X} \} \\ &= \sup \{ |\operatorname{tr}(Z^* M X)| ; M \in \mathcal{B}_{\phi} \} \\ &= \sup \{ |\operatorname{tr}(X Z^* M)| ; M \in \mathcal{B}_{\phi} \} \\ &= \phi^*(ZX^*). \end{aligned}$$



Si Ψ est une norme quelconque sur $\mathcal{M}(m, p)$, on notera $D_{\Psi\phi}(X)$ la norme de R_X , c'est-à-dire :

$$(7) \quad D_{\Psi\phi}(X) := \sup_M \frac{\Psi(MX)}{\phi(M)}.$$

Comme en 3.2.(4), on a la relation :

$$(8) \quad \forall X \in \mathcal{M}(n, p) : D_{\Psi\phi}(X) = D_{\phi^*\Psi^*}(X^*).$$

On peut alors énoncer :

COROLLAIRE 2. Pour toute norme Ψ sur $\mathcal{M}(m, p)$:

$$D_{\Psi, \phi}(X) = D_{\Psi, \phi_X}(I_p),$$

c'est-à-dire :

$$(9) \quad \forall X \in \mathcal{M}(n, p) : D_{\Psi\phi}(X) = \sup_Y \frac{\Psi(Y)}{\phi_X(Y)}.$$

DEMONSTRATION. De (5) et (8), on déduit :

$$D_{\psi\phi}(X) = D_{\phi^*\psi^*}(X^*) = \sup_Z \frac{\phi^*(ZX^*)}{\psi^*(Z)} = \sup_Z \frac{\phi_X^*(Z)}{\psi^*(Z)}$$

et (9) en résulte, en appliquant à nouveau (7) à I_p .

REMARQUE. Pour toute matrice \tilde{Z} réalisant le sup dans (6) et toute \tilde{M} réalisant l'inf dans (4), on a :

$$\tilde{\phi}(\tilde{M}) \tilde{\phi}^*(\tilde{Z}X^*) = |\text{tr}(\tilde{Z}^* \tilde{M} X)| = |\langle \tilde{M}, \tilde{Z}X^* \rangle|.$$

Pour ϕ différentiable, la matrice \tilde{Z} apparaît comme matrice des multiplicateurs de Lagrange relatifs aux $m \cdot p$ contraintes représentées par l'égalité $MX = Y$.

3.3.3 - Etude de ϕ_X pour X dans C^n ($p=1$).

Pour $p=1$, x et y sont des vecteurs et ϕ_X est définie dès que x est non nul. Ce qui précède s'applique ici ; dans ce cas les matrices du type ZX^* sont des matrices de rang 1 du type zx^* .

3.3.3.1 - Caractérisation de $\Gamma^*(\theta^*, \mu)$ et $S_{\theta\mu}$.

PROPOSITION 2. L'ensemble des normes ϕ de $\mathcal{M}(m,n)$ vérifiant :

$$(10) \quad \forall x \in C^n - \{0\}, \quad \forall y \in C^m : \phi_X(y) = \frac{\theta(y)}{\mu(x)},$$

où θ est une norme sur C^m et μ une norme sur C^n , est confondu avec l'ensemble $\Gamma^*(\theta^*, \mu)$ et admet donc $S_{\theta\mu}$ comme plus petit élément.

DEMONSTRATION. Par définition, l'équivalence suivante est vraie

$$\phi \in \Gamma^*(\theta^*, \mu) \iff \forall z, x \quad , \quad \phi^*(zx^*) = \theta^*(z) \mu(x)$$

et, (5) s'écrivant ici $\phi_X^*(z) = \phi^*(zx^*)$; on a bien

$$\forall y : \phi_X(y) = \frac{1}{\mu(x)} \theta(y).$$

On sait que $S_{\theta\mu}$ est le plus petit élément de $\Gamma^*(\theta^*, \mu)$; il serait trivial de rétablir cette propriété directement à partir de l'ensemble défini par (10). ▾

COROLLAIRE 3. Toute norme ϕ de $\Gamma^*(\theta^*, \mu)$ vérifie la proposition

$$\forall \psi, \text{ norme sur } C^m : \sup_M \frac{\psi(Mx)}{\phi(M)} = S_{\psi\theta} (I_m) \mu(x), \forall x.$$

DEMONSTRATION. C'est une conséquence de (9) et (10).

Remarquons que pour toute norme de $\Gamma(\theta^*, \mu)$, et en particulier pour $\phi = S_{\theta\mu}$, on peut écrire les "formules de réciprocité" :

$$\forall y \in C^m : \theta(y) = \inf \{ \phi(M) ; Mx = y \} \text{ quel que soit } x \text{ tel que } \mu(x) = 1.$$

$$\forall x \in C^n : \mu(x) = \sup \{ \theta(Mx) ; \phi(M) = 1 \}.$$

3.3.3.2 - Une famille de normes généralisant les $S_{\theta\mu}$.

Parmi les normes définies en (10), seule $S_{\theta\mu}$ est solution de "l'équation" en ϕ :

$$(12) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : \phi(A) = \sup_{x \neq 0} \phi_x(Ax)$$

qui s'écrit évidemment :

$$(12') \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : \phi(A) = \sup_{x \neq 0} \inf \{ \phi(M) ; Mx = Ax \}.$$

On peut caractériser l'ensemble des normes ayant cette propriété :

PROPOSITION 3. Si ϕ est une norme sur $\mathcal{M}(m, n)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(13) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \Phi(A) = \sup_{x \neq 0} \inf \{ \Phi(M) ; Mx = Ax \}$$

$$(14) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \Phi(A) = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|y^* Ax|}{\Phi^*(yx^*)}.$$

DEMONSTRATION. Les deux égalités (13) et (14) sont équivalentes à (12).
 Pour (13), cela résulte de la définition de Φ_x ; pour (14) c'est une
 conséquence de l'expression duale (6). ▽

- Evidemment, quel que soit le couple de normes (θ, μ) , la seule norme
 vérifiant (13) et appartenant à $\Gamma^*(\theta^*, \mu)$ est $S_{\theta\mu}$.

- La propriété (14) généralise la "caractérisation bilinéaire" des nor-
 mes $S_{\theta\mu}$ et s'écrit :

$$\Phi(A) = \sup_{\Phi^*(M)} \left\{ \frac{|\text{tr}(A^*(M))|}{\Phi^*(M)} ; M \text{ de rang } 1 \right\}.$$

Ce fait entraîne pour Φ^* des propriétés généralisant celles de $\theta^* \otimes \mu$:

COROLLAIRE 4. Si Φ vérifie (13), la boule-unité de Φ^* est confondue
 avec l'enveloppe convexe de son intersection avec \mathcal{L}_1 (ensemble des
 matrices de rang 1) ; la boule-unité de Φ étant le polaire de cet
 ensemble :

$$(15) \quad \mathcal{B}_{\Phi^*} = \text{co}(\mathcal{B}_{\Phi^*} \cap \mathcal{L}_1)$$

$$(16) \quad \mathcal{B}_{\Phi} = (\mathcal{B}_{\Phi^*} \cap \mathcal{L}_1)^\circ.$$

La norme Φ^* est caractérisée par la formulation :

$$\forall A : \Phi^*(A) = \inf_i \{ \sum_i \Phi^*(x_i y_i^*) ; \sum_i x_i y_i^* = A \}.$$

REMARQUES :

1. La norme donnée par (12) est l'élément le plus petit de l'ensemble des

normes admettant, pour tout x non nul, la même norme ϕ_x .

2. L'existence de normes vérifiant (13), sans être de type $S_{\theta\mu}$, est liée à l'existence de normes qui ne sont pas des c -normes.
3. Dans la généralisation qui sera faite en 3.3.7., les normes vérifiant les propriétés équivalentes (13), (14) apparaîtront comme "les normes de rang 1".

3.3.4 - Propriétés de $\phi_x(y)$ comme fonction de x .

3.3.4.1 - Résultats généraux.

Rappelons que la norme ϕ_x étant définie par

$$(17) \quad \forall y \in C^m : \phi_x(y) = \inf \{ \phi(M) ; Mx = y \},$$

sa duale ϕ_x^* peut être exprimée par :

$$(18) \quad \forall z \in C^m : \phi_x^*(z) = \phi^*(zx^*).$$

Dans le cas particulier où ϕ^* appartient à $\Gamma(\theta^*, \mu)$, $\phi_x(y)$ a l'expression simple :

$$(19) \quad \phi_x(y) = \frac{\theta(y)}{\mu(x)},$$

qui est symétrique par rapport à x, y . En effet, dans ce cas, l'application, à y fixé

$$(20) \quad x \in C^n \mapsto \phi^y(x) := \frac{1}{\phi_x(y)}$$

définit une norme.

En général ϕ^y n'est pas une norme ; nous allons étudier certaines conditions pour que ce soit une norme.

LEMME 1. Pour y non nul, $\phi^y(x)$ peut être exprimé par

$$(21) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n : \phi^y(x) = \inf \{ \phi^*(M) ; M^* \in \mathcal{Y}_1, M^*y = x \}.$$

L'application ϕ^y satisfait ainsi la relation :

$$(22) \quad \phi^y \geq \tilde{\phi}_y,$$

où $\tilde{\phi}_y$ est la norme définie par

$$(23) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n : \tilde{\phi}_y(x) = \inf \{ \phi^*(M) ; M^*y = x \}.$$

DEMONSTRATION. La relation (21) résulte de l'expression duale de ϕ_x :

$$\phi_x(y) = \sup_{z \neq 0} \frac{|z^* y|}{\phi^*(zx^*)}.$$

En effet, on a alors :

$$\phi^y(x) = \inf_{z \neq 0} \frac{\phi^*(zx^*)}{|z^* y|},$$

et comme toute matrice M de rang 1 satisfaisant $M^*y = x$ peut s'écrire

$$M = \frac{1}{|z^* y|} zx^*,$$

(21) est bien vérifiée.

Avec la définition (23) et (21), la relation (22) est évidente.

Remarquons que la duale de $\tilde{\phi}_y$ peut être donnée sous une forme du type (18) :

$$(24) \quad \forall v \in \mathbb{C}^n : (\tilde{\phi}_y)^*(v) = \phi(yv^*).$$

PROPOSITION 4. Si y est tel que, pour tout x non nul

$$(25) \quad \phi_x(y) = \inf \{ \phi(M) ; M \in \mathcal{J}_1, Mx = y \},$$

ϕ^y est confondue avec la norme $\tilde{\phi}_y$ qui vérifie alors, pour tout x non nul

$$(26) \quad \tilde{\phi}_y(x) = \inf \{ \phi^*(M) ; M^* \in \mathcal{J}_1, M^*y = x \}$$

DEMONSTRATION. Toute matrice M de rang 1 satisfaisant $Mx = y$ est de la forme

$$M = \frac{1}{u^*x} yu^*, \text{ avec } u \in \mathbb{C}^n - \{0\}.$$

L'hypothèse (25) conduit alors à

$$\phi_x(y) = \inf_{u \neq 0} \frac{\phi(yu^*)}{|u^*x|} ; \text{ d'où}$$

$$\phi^y(x) = \sup_{u \neq 0} \frac{|u^*x|}{\phi(yu^*)} = \tilde{\phi}_y(x) \text{ d'après (24).}$$

D'après (21), (26) est donc nécessairement vérifié. ▼

REMARQUE. Toute norme ϕ appartenant à $\Gamma(\theta, \mu^*) \cap \Gamma^*(\theta^*, \mu)$ satisfait (25) quel que soit y ; mais l'appartenance à $\Gamma^*(\theta^*, \mu)$ suffit pour que ϕ^y soit une norme, et alors ϕ^y et $\tilde{\phi}_y$ sont égales à $\frac{1}{\theta(y)}\mu$. Cependant, le fait pour ϕ d'appartenir de plus à $\Gamma(\theta, \mu^*)$ permet de préciser les matrices minimisantes de (25) qui ont la forme :

$$M = \frac{1}{u^*x} yu^*, \text{ avec } u \parallel_{\mu} x, \text{ c'est-à-dire que } u \text{ est lié à } x$$

par : $|u^*x| = \mu^*(u)\mu(x)$.

Nous allons illustrer ce qui précède par des exemples. Certaines normes exhibées seront telles que ϕ^y n'est une norme que pour certains y parti-

culiers. Ces exemples montreront aussi que Φ^y peut être une norme, sans être égale à $\tilde{\Phi}_y$.

3.3 4.2 - Exemples.

Le problème de minimum conduisant à Φ_x peut s'écrire :

$$(27) \quad \Phi_x(y) = \inf \{ \Phi(M) ; M_{i0} x = y_i, i = 1 \text{ à } m \}, \text{ où } M_{i0}$$

désigne la ligne i de M et y_i la composante i de y . C'est donc en construisant une norme $\Phi(M)$ à partir des lignes de M , que l'on pourra obtenir une expression accessible de $\Phi_x(y)$.

Nous considérons donc les normes composées Φ du type suivant :

$$(28) \quad \Phi(M) := \theta(\psi_1(M_{10}), \dots, \psi_m(M_{m0})) = (M^*)_{\theta(\psi_1 \dots \psi_m)}$$

où θ est une jauge sur R_+^m et $\psi_i, i = 1 \text{ à } m$, sont des normes sur C^n .

Dans ce cas, Φ_x peut se déduire directement de (27) (cf. 3.3.5 pour Φ_x) ; nous utilisons ici la connaissance de la duale :

$$\Phi_x(y) = \sup_{z \neq 0} \frac{|z^* x|}{\Phi^*(z x^*)} = \sup_{z \neq 0} \frac{|z^* y|}{\theta^*(|z_1| \psi_1^*(x), \dots, |z_m| \psi_m^*(x))},$$

car la norme Φ^* est de la forme (28) avec θ^*, ψ_i^* au lieu de θ, ψ_i .

La duale de la norme :

$$z \mapsto \theta^*(|z_1| \psi_1^*(x), \dots, |z_m| \psi_m^*(x))$$

s'obtient facilement et conduit à :

$$(29) \quad \Phi_x(y) = \theta \left(\frac{|y_1|}{\psi_1^*(x)}, \dots, \frac{|y_m|}{\psi_m^*(x)} \right).$$

La norme $\tilde{\Phi}_y$ est donnée par dualité :

$$(30) \quad \tilde{\Phi}_y(x) = \sup_{u \neq 0} \frac{|u^* x|}{\theta(|y_1| \psi_1(u), \dots, |y_m| \psi_m(u))}$$

mais n'a pas d'expression simple.

L'application Φ^y sera une norme si l'ensemble $\Sigma = \{x ; \Phi^y(x) = 1\}$ limite un convexe.

L'ensemble Σ peut être construit à partir des m ensembles

$\Sigma_i = \{x ; \psi_i^*(x) = |y_i|\}$ dans le cas réel. Toute direction rencontrant chaque Σ_i au point s_i , coupe Σ au point s défini par

$$(31) \quad os = \theta(os_1, \dots, os_m).$$

En suivant ce procédé, on peut résoudre pour $m=n=2$ et $\theta=h_1$, les cas particuliers suivants :

- (1) $\psi_1 = h_2, \psi_2 = h_0$: Φ^y est une norme sur R^2 si et seulement si y satisfait $|y_2| \leq |y_1|$.
- (2) $\psi_1 = h_1, \psi_2 = h_0$: Φ^y est une norme sur R^2 si et seulement si $y_1 = 0$ ou $y_2 = 0$.

Le cas (1) montre que Φ^y peut être une norme sans être égale à $\tilde{\Phi}_y$. Pour $y = (1,1)$, les boules-unités sont bien distinctes, car, au voisinage de $x = (2,0)$, les points obtenus par (31) sont sur une conchoïde bien intérieure au cercle de centre $(1,0)$, rayon 1, qui délimite la boule de $\tilde{\Phi}_y$ au voisinage du même point.

Plus généralement, pour $\theta=h_1$ sur R_+^n et $y_i = 1, i = 1$ à m , on vérifie bien l'inclusion au sens large des deux boules puisque la boule de $\tilde{\Phi}_y$ est la somme des convexes $B_i = \{x ; \psi_i^*(x) \leq 1\}$ alors que la boule de Φ^y s'obtient à partir de ces convexes par somme suivant chaque direction ($ob = \sum_1 ob_i$). Cela est dû au fait que la duale d'une somme de normes admet comme boule-unité la somme des boules-unités des différentes duales.

REMARQUES :

1. De manière générale, l'ensemble des y tels que ϕ^y soit une norme, est un cône époiné (ne contient pas 0) de \mathbb{R}^m . Si la norme ϕ est telle que l'inégalité $\phi(M) \geq \max_i \phi(e_i M_i)$ soit vérifiée pour toute M (ce qui est le cas pour ϕ absolue), alors le cône contient les vecteurs $\pm e_i$. En effet, l'hypothèse (25) est vérifiée pour ces vecteurs ; il suffit alors de considérer (27).
2. Notons f et g les fonctions de $C^n \times C^m$ dans \mathbb{R}^+ ainsi définies :

$$f(x,y) = \inf \{ \phi(M) ; M \in \mathcal{J}_1, Mx = y \}$$

$$g(x,y) = \inf \{ \phi(M) ; Mx = y \}.$$

Ce qui précède permet de dire que l'application $y \mapsto f(x,y)$ ne définit pas une norme en général, alors que l'application $x \mapsto 1/f(x,y)$ en définit bien une. Pour la fonction g , on a la situation inverse : $y \mapsto g(x,y)$ définit une norme, alors que ce n'est pas le cas en général pour l'application $x \mapsto 1/g(x,y)$.

3.3.5 - Expression de ϕ_X à l'aide de pseudo-inverses de X pour toute norme composée.

3.3.5.1 - Pseudo-solution et pseudo-inverse. (7)

DEFINITION. Si A est une application linéaire de (E, ψ) dans (F, ϕ) , espaces normés de dimension finie, une "pseudo-solution" x_0 de l'équation

$$Ax = y$$

relativement aux normes ψ et ϕ , est définie par les relations :

$$(32) \quad \forall x \in E : \phi(Ax_0 - y) < \phi(Ax - y) \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(Ax_0 - y) = \phi(Ax - y) \\ \text{et } \psi(x_0) \leq \psi(x). \end{array} \right.$$

Si ψ et ϕ sont strictement convexes, la pseudo-solution x_0 est unique quel que soit y de F . L'application (non linéaire en général) $y \mapsto x_0$ est dite (ϕ, ψ) -pseudo-inverse de A . Elle peut s'exprimer de la manière suivante :

$$(33) \quad B = (I - F_A^\psi) A^g E_A^\phi ;$$

F_A^ψ est la "projection" sur $\text{Ker}(A)$ au sens de ψ , E_A^ϕ est la "projection" sur $\text{Im}(A)$ au sens de ϕ et A^g est une application satisfaisant la relation $AA^gA = A$.

Cas particuliers. (A^+ désignera la pseudo-inverse classique).

1. $\psi = h_2 \Rightarrow B = A^+ E_A^\phi$, car la projection $F_A^{h_2}$ est égale à $I - A^+A$.
2. $\phi = h_2 \Rightarrow B = (I - F_A^\psi) A^+$, car la projection $E_A^{h_2}$ est égale à AA^+ .
3. $\psi = h_2$ et $\phi = h_2$ conduisent à la pseudo-inverse classique : $B = A^+$.
4. Si A est élément de $\mathcal{M}(m, n)$, avec $\text{rang}(A) = n \leq m$, alors $F_A^\psi = 0$ quel que soit ψ , et B est égal à $A^g E_A^\phi$.
5. Si A est dans $\mathcal{M}(m, n)$, avec $\text{rang}(A) = m \leq n$, alors $E_A^\phi = I$ quel que soit ϕ , et B est égal à $(I - F_A^\psi) A^g$.

3.3.5.2 - Expression de ϕ_X pour ϕ norme composée "en lignes".

Nous considérons ici les normes ϕ du type (28) qui sont composées en ligne. Pour utiliser les notations de 3.1, on s'intéresse donc aux normes :

$$(34) \quad \phi : M \in \mathcal{M}(m, n) \mapsto (M^*)_{\phi(\psi)},$$

où ψ est une norme sur C^n et θ une norme absolue sur C^m .

Le problème est le suivant :

$$\Phi_X(Y) = \inf_M \{ (M^*)_{\theta(\psi)} ; X^* M^* = Y^* \},$$

qui peut encore s'écrire :

$$(35) \quad \Phi_X(Y) = \inf_N \{ (N)_{\theta(\psi)} ; X^* N_{oi} = Y^*_{oi}, i = 1 \text{ à } n \}.$$

Comme θ est une fonction monotone, chaque colonne i sera obtenue par résolution du problème :

$$(36) \quad \inf_u \{ \psi(u) ; X^* u = (Y^*)_{oi} \}$$

dont la solution est

$$(37) \quad N_{oi} = B(Y^*)_{oi}$$

avec

$$(38) \quad B = (I - F_{X^*}^{\psi})V,$$

où $F_{X^*}^{\psi}$ est la projection au sens de ψ sur $\text{Ker}(X^*)$ et V une matrice quelconque satisfaisant

$$(39) \quad V^* X = I_p.$$

Si ψ n'est pas strictement convexe, toute N_{oi} égale à $w_i - V(Y^*)_{oi}$, où w_i est une des projections de $V(Y^*)_{oi}$, convient. La valeur de (36) est donnée par :

$$(40) \quad \sup_{z \neq 0} \frac{|z^*(Y^*)_{oi}|}{\psi^*(Xz)} = \sup_{w \in \text{Im}(X)} \frac{|w^* V(Y^*)_{oi}|}{\psi^*(w)}$$

ce qui est simple à montrer. C'est d'ailleurs l'expression, par dualité, de la distance de $V(Y^*)_{oi}$ à $\text{Ker}(X^*)$.

Finalement, l'inf. dans (35) est réalisé par

$$(41) \quad N = M^* = BY^*$$

et $\Phi_X(Y)$ est donné par :

$$(42) \quad \Phi_X(Y) = (BY^*)_{\theta(\psi)} = \theta\left(\dots, \sup_z \frac{|z^*(Y^*)_{oi}|}{\psi^*(Xz)}, \dots\right).$$

Si ψ est la norme euclidienne h_2 , alors B est égal à $(X^*)^+ = (X^+)^*$. Comme X est injective, X^+ est égal à $(X^*X)^{-1}X^*$. Ainsi pour la norme

$$M \mapsto \Phi(M) = (M^*)_{\theta(h_2)},$$

la norme Φ_X est donnée par :

$$(43) \quad \Phi_X(Y) = (X(X^*X)^{-1}Y^*)_{\theta(h_2)} = \Phi(YX^+).$$

REMARQUES :

1. Dans le cas $m=n=p$, X est carrée régulière, (42) conduit bien à $\Phi_X(Y) = \Phi(YX^{-1})$.
2. Dans le cas $p=1$, où X et Y sont des vecteurs x et y, il est facile de montrer que $B=v$, vérifiant :

$$1 = x^*v = \psi^*(x)\psi(v),$$

et $\Phi_x(y) = (vy^*)_{\theta(\psi)} = \psi(v)\theta(y) = \frac{\theta(y)}{\psi^*(v)}$. Cela est en accord avec

la proposition 2 de 3.3.

3.3.6 - Majorations de Φ_X .

Les résultats de 3.3.4 ne s'étendent pas au cas où p est supérieur à 1.
On peut seulement énoncer :

PROPOSITION 5. Si X est injective, Φ_X satisfait les inégalités :

$$(44) \quad \forall Y \in \mathcal{M}(m,p) : \Phi_X(Y) \leq \inf_M \{ \Phi(M) ; MX=Y \text{ et } \text{Im}(M) \subset \text{Im}(Y) \} \leq \\ \leq \inf_V \{ \Phi(YV^*) ; V^*X = I_p \}.$$

Les trois expressions sont égales si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{M}(n,p)$ vérifiant $V^*X = I_p$ et $Z \in \mathcal{M}(m,p) - \{0\}$ tels que l'égalité suivante ait lieu :

$$(45) \quad |\text{tr}(Z^*Y)| = \Phi(YV^*)\Phi^*(ZX^*).$$

DEMONSTRATION. Les inégalités (44) sont une conséquence des inclusions :

$$\{M ; MX = Y\} \supset \{M ; MX=Y \text{ et } \text{Im}(M) \subset \text{Im}(Y)\} \supset \{M = YV^* ; V^*X = I_p\}.$$

Rappelons l'expression duale (6) de $\Phi_X(Y)$:

$$\Phi_X(Y) = \sup_{Z \neq 0} \frac{|\text{tr}(Z^*Y)|}{\Phi^*(ZX^*)},$$

où le sup est atteint.

Si l'égalité a lieu entre les extrêmes dans (44), il existe V tel que $\Phi_X(Y) = \Phi(YV^*)$, car l'inf. est atteint, et donc (45) a lieu pour un $Z \neq 0$.

Réciproquement, comme l'on a

$$\forall Z, \forall V \text{ tels que } V^*X = I : \Phi(YV^*) \geq \Phi_X(Y) \geq \frac{|\text{tr}(Z^*Y)|}{\Phi^*(ZX^*)},$$

si un couple Z, V réalise l'égalité (45), il y aura nécessairement égalité dans (44). ▾

REMARQUE. L'égalité dans (44) généralise exactement l'égalité (25) du cas vectoriel.

Exemple. Il y a égalité en (44) quel que soit Y pour les normes $M \mapsto (M^*)_{\theta(h_2)}$. En effet, dans ce cas, $\Phi_X(Y)$ est égal à $(X(X^*X)^{-1}Y^*)_{\theta(h_2)}$. La matrice $V = X(X^*X)^{-1}$ vérifiant $V^*X = I_p$, on a :

$$\inf_V \{ \Phi(YV^*) ; V^*X = I_p \} \leq (X(X^*X)^{-1}Y^*)_{\theta(h_2)}$$

et il y a donc bien égalité dans (44).

3.3.7 - Notion de norme de rang p sur $\mathcal{M}(m, n)$.

Nous allons définir et étudier ici une famille de normes généralisant celle définie par les propriétés (13) et (14) de la proposition 3. La généralisation consiste à passer du cas $p=1$ au cas p quelconque ; la définition est fondée sur l'ensemble \mathcal{J}_p des matrices de $\mathcal{M}(m, n)$ ayant un rang inférieur ou égal à p ($p \leq \min \{m, n\}$).

DEFINITION. Si ϕ est une norme sur $\mathcal{M}(m, n)$, on définit son "rang" par

$$(46) \quad \text{rang}(\phi) = \min \{ p \in \mathbb{N} ; \mathcal{B}_\phi = (\mathcal{B}_{\phi^*} \cap \mathcal{J}_p)^\circ \}.$$

Cette définition est évidemment équivalente à la suivante

$$(47) \quad \text{rang}(\phi) = \min \{ p \in \mathbb{N} ; \mathcal{B}_{\phi^*} = \text{co}(\mathcal{B}_\phi \cap \mathcal{J}_p) \}$$

et les normes définies par la proposition 3 apparaissent comme les normes de rang 1. On peut affirmer, d'après ce qui a été montré précédemment, que les normes de type $S_{\epsilon, p}$ sont les seules c -normes de rang 1.

Enonçons maintenant quelques propriétés caractéristiques des normes de rang p , qui généralisent celles de la proposition 3 et du corollaire 4.

PROPOSITION 6. Les normes ϕ de rang inférieur ou égal à p sur $\mathcal{M}(m,n)$ sont caractérisées par les 3 propriétés équivalentes :

$$(48) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \phi(A) = \sup_{X \in \mathcal{M}(n,p)} \{ \inf_M \{ \phi(M) ; MX = AX \} \}$$

$$(49) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \phi(A) = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}(n,p) \\ Y \in \mathcal{M}(m,p)}} \{ |\text{tr}(Y^*AX)| ; \phi^*(YX^*) = 1 \}$$

$$(50) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : \phi^*(A) = \inf \{ \sum_i \phi^*(M_i) ; M_i \in \mathcal{I}_p, \sum_i M_i = A \}.$$

DEMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que (48) et (49) peuvent s'écrire respectivement :

$$(48') \quad \phi(A) = \sup_X \phi_X(A)$$

$$(49') \quad \phi(A) = \sup \{ |\text{tr}(M^*A)| ; M \in \mathcal{B}_{\phi}^* \cap \mathcal{I}_p \}.$$

La relation (48') est une simple réécriture de (48) en utilisant la définition (1) de ϕ_X . L'égalité (49') est bien équivalente à (49), puisque toute matrice de $\mathcal{M}(m,n)$, de rang inférieur ou égal à p peut s'écrire $M = YX^*$, $Y \in \mathcal{M}(m,p)$ et $X \in \mathcal{M}(n,p)$.

D'après la définition (46), la relation (49) caractérise bien les normes ϕ de rang inférieur ou égal à p .

La propriété (50) est une traduction de l'égalité

$$\mathcal{B}_{\phi}^* = \text{co}(\mathcal{B}_{\phi}^* \cap \mathcal{I}_p)$$

généralisant la formule donnant la plus grande c -norme. Les démonstrations faites en 2.1.1, proposition 1, et 2.1.3, proposition 1' peuvent être reprises en remplaçant \mathcal{I}_1 par \mathcal{I}_p et $\psi \otimes \phi^*$ par ϕ^* ; elles prouvent

de plus que l'inf dans (50) peut être remplacé par un min.



REMARQUE. La norme définie par

$$(51) \quad A \mapsto \sup_{X \in \mathcal{M}(n,p)} \Phi_X(A)$$

est le plus petit élément de l'ensemble des normes conduisant, pour chaque X, à la même norme Φ_X . L'application qui à Φ associe la norme (51) admet les normes de rang inférieur ou égal à p comme points fixes.

Nous allons donner un certain nombre de propriétés complémentaires concernant les normes du type $G_{\Psi_1 \Psi_2}$, définies en 3.2.(2). Ces propriétés généralisent celles des normes du type $S_{\Psi \Phi}$.

COROLLAIRE 5 :

- (i) La norme $G_{\Psi_1 \Psi_2}$, associée aux normes Ψ_1 et Ψ_2 , définies respectivement sur $\mathcal{M}(m,p)$ et $\mathcal{M}(n,p)$, est de rang inférieur ou égal à p.
- (ii) C'est le plus petit élément de l'ensemble des normes Φ sur $\mathcal{M}(m,n)$ dont la duale Φ^* a la propriété suivante :

$$(52) \quad \forall X \in \mathcal{M}(n,p), \forall Y \in \mathcal{M}(m,p) : \Phi^*(YX^*) \leq \Psi_1^*(Y) \Psi_2(X)$$

- (iii) Sa duale s'exprime ainsi :

$$(53) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m,n) : G_{\Psi_1 \Psi_2}^*(A) = \min \left\{ \sum_1 \Psi_1^*(Y_i) \Psi_2(X_i) ; \sum_1 Y_i X_i^* = A \right\}$$

où, pour tout i : $Y_i \in \mathcal{M}(m,p), X_i \in \mathcal{M}(n,p)$.

DEMONSTRATION. L'inégalité évidente :

$$\forall X, A, Y : |\text{tr}(Y^*AX)| \leq \Psi_1^*(Y) G_{\Psi_1 \Psi_2}(A) \Psi_2(X)$$

montre que la norme $G_{\Psi_1 \Psi_2}$ a bien la propriété (52). Pour toute norme Φ

ayant cette propriété, on a les inégalités :

$$(54) \quad \phi(A) \geq \sup_{X,Y} \frac{|\text{tr}(Y^*AX)|}{\phi^*(YX^*)} \geq \sup_{X,Y} \frac{|\text{tr}(Y^*AX)|}{\psi_1^*(Y)\psi_2(X)}.$$

Pour $\phi = G_{\psi_1 \psi_2}$, il y a égalité entre les extrêmes dans (54), d'après 3.2.2 (3) ; ainsi les 2 premières expressions sont égales, ce qui prouve, d'après (49), que $G_{\psi_1 \psi_2}$ est de rang inférieur ou égal à p. Cela prouve également l'assertion (ii).

L'expression

$$\inf \left\{ \sum_i \psi_1^*(Y_i) \psi_2(X_i) ; \sum_i Y_i X_i^* = A \right\}$$

définit une norme (démonstration identique à celle faite en 2.1.1). Cette norme est le plus grand élément de l'ensemble des ϕ^* vérifiant (52) ; sa duale est donc bien égale à $G_{\psi_1 \psi_2}$ d'après (ii). De plus l'inf. est un min. ; cela se déduit de (47) de la même manière que pour 2.1.3.(9).



REMARQUES :

1. Les relations (52) et (53) constituent respectivement des généralisations à p quelconque, de l'égalité $\phi^*(yx^*) = \psi_1^*(y)\psi_2(x)$ caractéristique des ϕ^* c-normes, et de l'égalité définissant la plus grande c-norme $\psi_1^* \otimes \psi_2$. Pour p supérieur à 1, il ne peut y avoir égalité dans (52). Seule la duale de $G_{\psi_1 \psi_2}$ vérifie une relation du type (52), alors que pour p=1, $S_{\psi_1 \psi_2}$ et $S_{\psi_1^* \psi_2}$ sont toutes deux des c-normes. Pour p supérieur à 1, la relation généralisant le fait que $S_{\psi_1 \psi_2}$ est une c-norme est en fait la suivante, vérifiée quelle que soit la norme θ sur $\mathcal{M}(p)$:

$$\forall Y \in \mathcal{M}(m,p), X \in \mathcal{M}(n,p) : G_{\psi_1 \psi_2}(YX^*) \leq G_{\psi_1 \psi_2}(Y) G_{\psi_2}(X^*).$$

2. La norme $G_{\Psi_1 \Psi_2}$ est de rang inférieur ou égal à p , sans être nécessairement de rang p . De fait, on a construit (proposition 3 en 3.2.3) des normes de ce type qui étaient de la forme $S_{\Psi\phi}$, c'est-à-dire de rang 1.
3. Dans le cas particulier où m, n, p sont égaux et Ψ est une norme multiplicative unitaire, on sait que G_{Ψ} et Ψ sont confondues. Donc, dans ce cas, la norme Ψ est l'élément minimal de l'ensemble des normes ϕ vérifiant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}(n) : \phi^*(YX^*) \leq \Psi^*(Y)\Psi(X).$$

4. L'inégalité suivante :

$$(55) \quad \phi_X(Y) \geq \frac{\Psi_1(Y)}{\Psi_2(X)}$$

constitue la généralisation de l'égalité (10) de la proposition 2. Cette proposition se généralise ainsi : toute norme ϕ vérifiant (52) pour toute X injective et toute Y , vérifie nécessairement l'inégalité (55). C'est une conséquence de l'expression duale (6) de ϕ_X .

5. A toute norme ϕ_p de rang p , on peut associer des normes ϕ_i , $i = 1$ à p , de rang inférieur ou égal à i , vérifiant

$$\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_p.$$

Chaque ϕ_i peut être déduite de $\phi = \phi_p$ à partir des 2 relations équivalentes :

$$(56) \quad \mathcal{B}_{\phi_i} = (\mathcal{B}_{\phi^*} \cap \mathcal{I}_i)^\circ$$

$$(57) \quad \forall A \in \mathcal{M}(m, n) : \phi_i(A) = \sup_{X \in \mathcal{M}(n, i)} \phi_X(AX) ;$$

l'équivalence entre (56) et (57) étant une conséquence de l'expres-

sion duale de Φ_i donnée en (49') et de l'égalité :

$$\text{co}(\mathcal{Y}_i \cap \mathcal{B}_{\Phi^*}) \cap \mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i \cap \mathcal{B}_{\Phi^*}.$$

Notons enfin le résultat suivant :

PROPOSITION 7. Si Φ est une norme de rang p sur $\mathcal{M}(n)$, alors Φ^* est multiplicative si et seulement si elle satisfait :

$$\forall M, N \in \mathcal{Y}_p : \Phi^*(MN) \leq \Phi^*(M)\Phi^*(N).$$

DEMONSTRATION. La multiplicativité de Φ^* entraîne évidemment la même propriété pour sa restriction à \mathcal{Y}_p (qui est d'ailleurs un ensemble stable pour la multiplication). La réciproque est conséquence de l'expression :

$$\Phi^*(M) = \inf \left\{ \sum_i \Phi^*(M_i) ; M_i \in \mathcal{Y}_p, \sum_i M_i = M \right\}.$$

En effet, soit un couple A, B de matrices et une décomposition quelconque de chacune :

$$A = \sum_i A_i, \quad A_i \in \mathcal{Y}_p$$

$$B = \sum_j B_j, \quad B_j \in \mathcal{Y}_p$$

qui donne l'expression $AB = \sum_{i,j} A_i B_j$. On a donc les inégalités successives :

$$\Phi^*(AB) \leq \sum_{i,j} \Phi^*(A_i B_j) \leq \sum_{i,j} \Phi^*(A_i) \Phi^*(B_j) = \left(\sum_i \Phi^*(A_i) \right) \left(\sum_j \Phi^*(B_j) \right)$$

valables quelles que soient les décompositions, ce qui prouve :

$$\Phi^*(AB) \leq \inf_i \{ \sum \Phi^*(A_i) ; \sum A_i = A \} \cdot \inf_j \{ \sum \Phi^*(B_j) ; \sum B_j = B \}$$

et donc

$$\Phi^*(AB) \leq \Phi^*(A)\Phi^*(B).$$



C H A P I T R E 4

VALEURS SINGULIÈRES GÉNÉRALISÉES

ET DISTANCE À CERTAINS ENSEMBLES D'APPLICATIONS

4.1 - INTRODUCTION.

4.1.1 - Quelques relations de dualité.

Si E est un espace vectoriel normé, son dual fort sera noté E' , et les normes respectives ϕ et ϕ^* .

A tout sous-espace V de E , on associe le sous-espace V^\perp , nécessairement fermé, de E' ainsi défini :

$$(1) \quad V^\perp = \{l \in E' ; x \in V \Rightarrow \langle x, l \rangle = 0\}.$$

De même, si W est un sous-espace de E' , W^\perp est le sous-espace, fermé, de E défini par :

$$(2) \quad W^\perp = \{x \in E ; l \in W \Rightarrow \langle x, l \rangle = 0\}.$$

Cette dualité peut être utilisée pour donner une expression de la distance à un sous-espace dans un espace vectoriel normé.

Nous utiliserons les deux expressions suivantes, valables quel que soit le sous-espace G de E [3I]:

$$(3) \quad \forall x_0 \in E, \quad d(x_0, G) = \sup_{l \in G^\perp - \{0\}} \frac{|\langle x_0, l \rangle|}{\phi^*(l)}$$

$$(4) \quad \forall l_0 \in E', \quad d(l_0, G^\perp) = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|\langle x, l_0 \rangle|}{\phi(x)}.$$

La seconde exprime que l'espace G' , dual de G , et l'espace quotient E'/G^\perp sont isométriques [3]. Dans la première, on peut préciser que le sup est un max (Th. de Hahn - Banach); dans la seconde, c'est la distance qui est atteinte.

Si (E, ϕ) et (F, ψ) sont deux espaces vectoriels normés, nous noterons $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F , dont la norme est définie par :

$$(5) \quad \forall A \in \mathcal{L}(E, F), \quad \|A\| := \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)}.$$

Toute application A de $\mathcal{L}(E, F)$ admet une application transposée, que nous noterons A^* ; c'est un élément de $\mathcal{L}(F', E')$ ainsi défini :

$$(6) \quad \forall x \in E, \forall \ell \in F' : \langle Ax, \ell \rangle = \langle x, A^* \ell \rangle.$$

On sait que A et A^* ont même norme :

$$(7) \quad \|A\| = \|A^*\| := \sup_{\ell \in F' - \{0\}} \frac{\phi^*(A^* \ell)}{\psi^*(\ell)}.$$

On utilisera les relations existant entre les images et noyaux des applications A et A^* :

$$(8) \quad \text{Im}^\perp(A) = \text{Ker}(A^*) \quad \overline{\text{Im}(A)} = \text{Ker}^\perp(A^*)$$

$$(9) \quad \text{Im}^\perp(A^*) = \text{Ker}(A) \quad \overline{\text{Im}(A^*)} \subset \text{Ker}^\perp(A)$$

Lorsque E et F sont des espaces de Banach, si $\text{Im } A$ est fermé, il en est de même de $\text{Im } A^*$, avec l'égalité $\text{Im}(A^*) = \text{Ker}^\perp(A)$.

4.1.2 - Distance à l'ensemble des applications de noyau donné :
formules générales.

Soit (\mathcal{A}, ϕ) un espace normé d'applications linéaires de E dans F. A tout sous-espace G de E, associons le sous-espace \mathcal{Y}_G de \mathcal{A} des applications qui annullent G, c'est-à-dire :

$$(10) \quad \mathcal{Y}_G := \{N \in \mathcal{A}; \text{Ker } (N) \supset G\} .$$

La distance de tout élément A de \mathcal{A} à \mathcal{Y}_G
est donnée par :

$$(11) \quad \phi_G(A) := \inf \{ \phi(M) ; M \in \mathcal{A}, \text{Ker}(A-M) \supset G \} .$$

La distance δ_r à l'ensemble des applications de rang inférieur ou égal à r, ainsi que la distance $\tilde{\delta}_s$ à l'ensemble des applications dont le noyau est de dimension supérieure ou égale à s peuvent s'exprimer comme suit :

$$(12) \quad \delta_r(A) = \inf_{\substack{G \\ \text{codim } G=r}} \phi_G(A)$$

$$(13) \quad \tilde{\delta}_s(A) = \inf_{\substack{G \\ \text{dim } G=s}} \phi_G(A) .$$

Le deuxième égalité est évidente ; la première est conséquence de l'isomorphisme entre $E/\text{Ker}(N)$ et $\text{Im } N$, qui implique l'égalité entre le rang r et la codimension du noyau dans E.

La notation utilisée en (11) correspond à celle des normes quotients (3.3.1). La correspondance exacte s'obtient en considérant le cas où E et F sont de dimension finie, soit respectivement C^n et C^m , avec pour espace \mathcal{A} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(m,n)$ muni d'une norme ϕ . Tout sous-espace G de dimension p peut être représenté par $\text{Im } X$, où X est une

matrice injective de $\mathcal{M}(n,p)$, et alors :

$$(14) \quad \mathcal{L}_G = \{N \in \mathcal{M}(m,n) \ ; \ NX = 0\}$$

$$(15) \quad d(A, \mathcal{L}_G) = \phi_X(A)$$

en utilisant les notations de 3.3.1.

Les égalités (12) et (13) peuvent s'écrire dans ce cas :

$$(16) \quad \delta_r(A) = \inf_{X \in \mathcal{M}(n, n-r)} \phi_X(A)$$

$$\text{Ker } X = \{0\}$$

$$(17) \quad \tilde{\delta}_s(A) = \inf_{X \in \mathcal{M}(n, s)} \phi_X(A)$$

$$\text{Ker } X = \{0\}$$

L'utilisation de la formule (6) de 3.3.1. conduit à l'expression duale :

$$(18) \quad d(A, \mathcal{L}_G) = \sup_{Z \in \mathcal{M}(m,p) - \{0\}} \frac{|\text{tr}(Z^*AX)|}{\phi^*(ZX^*)}$$

Il est intéressant de noter que c'est l'expression duale de $d(A, \mathcal{L}_G)$ correspondant à l'application de la formule (3) à $(\mathcal{M}(m,n), \phi)$ en dualité avec $(\mathcal{M}(m,n), \phi^*)$. Il est en effet facile de vérifier les relations suivantes :

$$(19) \quad \mathcal{L}_G^\perp = \{V \ ; \ NV^* = 0, \ \forall N \in \mathcal{L}_G\} = \{ZX^* \ ; \ Z \in \mathcal{M}(m,p)\}.$$

Cela permet d'écrire $\delta_r(A)$ sous les deux formes :

$$(20) \quad \delta_r(A) = \inf \{ \phi(A - UV^*) \ ; \ U \in \mathcal{M}(m,r) \ , \ V \in \mathcal{M}(n,r) \}$$

$$(21) \quad \delta_r(A) = \inf_{\substack{X \in \mathcal{M}(n, n-r) \\ \text{Ker } X = \{0\}}} \sup_{\substack{Z \in \mathcal{M}(m, n-r) \\ Z \neq 0}} \frac{|\text{tr}(Z^*AX)|}{\phi^*(ZX^*)}$$

Remarquons que ces expressions peuvent être écrites en n'utilisant que des vecteurs de C^m et C^n ; par exemple

$$UV^* = \sum_{k=1}^r u_k v_k^*$$

et

$$\text{tr}(Z^*AX) = \sum_{i=1}^{n-r} z_i^* Ax_i.$$

4.1.3 - Propriétés de la distance δ_r .

La distance δ_r à l'ensemble des applications de rang r , ou inférieur ou égal à r , satisfait certaines inégalités [54] :

PROPOSITION 1. *Si l'espace \mathcal{A} contient des applications de tout rang, la relation suivante est vérifiée :*

$$(22) \quad \forall A, B \in \mathcal{A} : \delta_{r_1+r_2}(A+B) \leq \delta_{r_1}(A) + \delta_{r_2}(B).$$

Si (\mathcal{A}, ϕ) est de plus une algèbre normée, alors la relation supplémentaire suivante est vraie :

$$(23) \quad \forall A, B \in \mathcal{A} : \delta_{r_1+r_2}(AB) \leq \delta_{r_1}(A)\delta_{r_2}(B).$$

DEMONSTRATION. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe X (resp. Y) de rang inférieur ou égal à r_1 (resp. r_2) avec :

$$\phi(A-X) < \delta_{r_1}(A) + \varepsilon, \quad \phi(B-Y) < \delta_{r_2}(B) + \varepsilon.$$

Pour $A+B$, on a donc :

$$\phi(A+B -X-Y) \leq \phi(A-X) + \phi(B-Y) < \delta_{r_1}(A) + \delta_{r_2}(B) + 2\varepsilon .$$

Comme le rang de $X+Y$ est inférieur ou égal à r_1+r_2 et que l'inégalité a lieu pour tout ε , l'inégalité (22) est bien vérifiée.

Le même raisonnement s'applique pour (23) ; en tenant compte de la multiplicativité de ϕ :

$$(\delta_{r_1}(A) + \varepsilon) (\delta_{r_2}(B) + \varepsilon) > \phi(A-X)\phi(B-Y) \geq \phi(AB-AY-X(B-Y)).$$

les inégalités

$$\text{rang}(AY) \leq r_2 \quad \text{et} \quad \text{rang}(X(B-Y)) \leq r_1$$

impliquent

$$\text{rang}(AY+X(B-Y)) \leq r_1+r_2 \quad ,$$

ce qui prouve (23).



COROLLAIRE 1. Si deux applications A et B de \mathcal{H} vérifient l'inégalité

$$\text{rang}(A-B) \leq r \quad ,$$

alors, pour tout q supérieur ou égal à r :

$$(24) \quad \delta_{q+r}(A) \leq \delta_q(B) \leq \delta_{q-r}(A) .$$

DEMONSTRATION. Il suffit d'appliquer (22) en tenant compte de l'égalité évidente $\delta_r(A-B) = 0$:

$$\delta_{q+r}(A) \leq \delta_r(A-B) + \delta_q(B) = \delta_q(B)$$

$$\delta_q(B) = \delta_{r+(q-r)}(B) \leq \delta_r(B-A) + \delta_{q-r}(A) = \delta_{q-r}(A).$$



4.1.4 - Cas de normes composées générales.

Nous nous intéressons ici à deux cas particuliers où \mathcal{A} est un espace d'applications de rang fini.

Le cas 1 est l'espace des applications linéaires de (E, ϕ) quelconque dans F_m de dimension m . Une base $\{f_1, \dots, f_m\}$ étant choisie dans F_m , l'espace est isomorphe à $(E')^m$; \mathcal{A} est normé par une norme "composée" construite sur l'espace produit $(E')^m$ à l'aide d'une norme absolue θ_1 sur R^m :

$$(25) \quad \left| \begin{array}{l} L : E \rightarrow F_m \\ \qquad \qquad \qquad m \\ \qquad \qquad \qquad x \mapsto \sum_{i=1}^m \langle x, \ell_i \rangle f_i \\ \phi_1(L) := \theta_1(\phi^*(\ell_1), \dots, \phi^*(\ell_m)). \end{array} \right.$$

Dans le cas 2, les rôles des espaces sont inversés. L'espace E est de dimension n , avec la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, et (F, ψ) est un espace de dimension quelconque. C'est par l'isomorphisme avec $(F)^n$ que \mathcal{A} est normé, en utilisant une norme absolue θ_2 sur R^n :

$$(26) \quad \left| \begin{array}{l} S : E_n \rightarrow F \\ \qquad \qquad \qquad n \qquad \qquad \qquad n \\ \qquad \qquad \qquad \sum_{i=1}^n \xi_i e_i = x \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i s_i \\ \phi_2(S) := \theta_2(\psi(s_1), \dots, \psi(s_n)). \end{array} \right.$$

Nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 2.

Dans le cas 1, la distance de A, défini par les fonctionnelles $\{a_i\}_{i=1}^m$, à l'ensemble des applications annulant un sous-espace G de E, est donnée par :

$$(27) \quad d(A, \{L ; \text{Ker } L \supset G\}) = \theta_1(d(a_1, G^\perp), \dots, d(a_m, G^\perp))$$

où chaque $d(a_i, G^\perp)$ est égale à $\sup_{x \in G} \frac{|\langle x, a_i \rangle|}{\phi(x)}$.

Dans le cas 2, la distance de B, défini par les vecteurs $\{b_i\}_{i=1}^n$, à l'ensemble des applications dont l'image est contenue dans le sous-espace H de F est donnée par :

$$(28) \quad d(B, \{S ; \text{Im } S \subset H\}) = \theta_2(d(b_1, H), \dots, d(b_n, H))$$

où chaque $d(b_i, H)$ est égale à $\sup_{l' \in H^\perp} \frac{|\langle b_i, l' \rangle|}{\psi^*(l')}$.

DEMONSTRATION. Toute application L dont le noyau contient G correspond à un élément de $(G^\perp)^m$. Ainsi

$$d(A, L) = \phi_1(A-L) = \theta_1(\phi^*(a_1 - l_1), \dots, \phi^*(a_m - l_m))$$

et, puisque θ_1 est fonction non décroissante de ses arguments :

$$\inf_{\text{Ker } L \supset G} d(A, L) = \theta_1(d(a_1, G^\perp), \dots, d(a_m, G^\perp))$$

avec l'expression duale possible de $d(a_i, G^\perp)$ par (4).

Dans le deuxième cas, toute application S, dont l'image est dans H, est

représentée par n vecteurs s_i de H . Ainsi, avec le même raisonnement que précédemment, on montre (28).



Remarque. Si tout élément de F a une meilleure approximation unique dans H , et si l'on note P_H l'opérateur correspondant, la distance (28) est égale à $\phi_2((I-P_H)B)$. Ainsi $S = P_H B$ est le meilleur approximant de B dans l'ensemble des applications à image dans H .

COROLLAIRE 2. Dans les cas 1 et 2, on a respectivement :

$$(29) \quad \forall r \leq m : \delta_r^{(1)}(A) = \inf_{\dim G'=r} \theta_1(d(a_1, G'), \dots, d(a_m, G'))$$

$$(30) \quad \forall r \leq n : \delta_r^{(2)}(B) = \inf_{\dim H=r} \theta_2(d(b_1, H), \dots, d(b_n, H)).$$

DEMONSTRATION. Dans le cas 2, la distance aux applications de rang inférieur ou égal à r est évidemment donnée par (30), conséquence de (28). Dans le cas 1, il suffit de prendre l'inf de (27) sur l'ensemble des G de codimension r . $\text{Ker } L$ étant fermé, comme intersection des $\ell_i^{-1}(0)$, $i = 1$ à m , on peut limiter l'inf aux sous-espaces G fermés ; dans ce cas $\text{codim } G = r$ est équivalent à $\dim G^\perp = r$, d'où (29).



Les résultats précédents s'appliquent au cas particulier de l'espace $\mathcal{M}(m, n)$ muni d'une norme composée, soit "en lignes", soit "en colonnes". Si G est égal à $\text{Im } X$, X matrice injective de $\mathcal{M}(n, p)$, alors (27) est égal à $\phi_X(AX)$ qui peut s'écrire, d'après 3.3.5.2 :

$$\phi_X(AX) = \phi_1(AXX^+)$$

lorsque ϕ est la norme euclidienne h_2 . On peut dans ce cas donner une autre expression pour δ_r :

$$(31) \quad \delta_r(A) = \inf_{\substack{X \in \mathcal{M}(n, n-r) \\ X^*X = I_{n-r}}} \phi_1(AXX^*).$$

Cela résulte de (16) et de l'égalité $X^+ = X^*$, conséquence de $X^*X = I_{n-r}$.

Dans le cas encore plus particulier où ϕ_1 est la norme H_2 , on a, si $X^*X = I_{n-r}$:

$$(32) \quad \phi_X(AX) = H_2(AXX^*) = H_2(AX)$$

et donc

$$(33) \quad \delta_r(A) = \inf \{ H_2(AX) \ ; \ X^*X = I_{n-r} \} .$$

Nous allons établir des résultats du même type sur l'ensemble des normes de von Neumann auquel appartient la norme H_2 .

4.1.5 - Normes de von Neumann - Valeurs singulières.

- Dans $\mathcal{M}(m, n)$, la distance de A à l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r , au sens d'une norme ϕ unitairement invariante est égale à $\phi(\text{diag}(0, \dots, 0, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n))$; les valeurs singulières de A étant numérotées dans l'ordre $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ [37] :

$$(34) \quad \delta_r(A) = \phi(\text{diag}(0, \dots, 0, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)).$$

- Si les vecteurs propres de A^*A et AA^* , relatifs à σ_i^2 , sont u_i et v_i respectivement, la meilleure approximation de rang r pour A est

$$A_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i v_i u_i^* .$$

On montre également l'égalité :

$$(35) \quad \delta_r(A) = \inf \{ \Phi(A X) ; X^* X = I_{n-r} \}$$

qui généralise la formule (33) établie directement pour la norme composée H_2 .

Pour H_2 , les égalités (33) et (34) conduisent à la relation suivante :

$$(36) \quad \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-r} \sigma_i^2(A X) ; X^* X = I_{n-r} \right\} = \sum_{i=r+1}^n \sigma_i^2(A) .$$

La formule (30) permet d'énoncer la propriété géométrique suivante :

le minimum de la somme des carrés des distances des colonnes de A à un sous-espace de dimension r est égal à δ_r^2 ; ce minimum est atteint pour le sous-espace engendré par $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$.

- Des propriétés de ce type peuvent être étendues à certaines normes composées.

- Le résultat (34) peut être étendu à des espaces d'opérateurs de dimension infinie. Si T est un opérateur compact sur un espace de Hilbert H , ses valeurs singulières sont, par définition, les valeurs propres de l'opérateur compact, autoadjoint, nonnégatif $(T^* T)^{1/2}$, numérotées dans l'ordre :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0 .$$

L'espace \mathcal{L}_p ($p \geq 1$) est défini comme l'ensemble des opérateurs compacts T tels que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^p(T) \text{ existe ;}$$

cet espace est normé par

$$\phi_p(T) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^p(T) \right)^{1/p} \quad [12]$$

On peut construire d'autres espaces généralisant les \mathcal{L}_p à l'aide d'une jauge θ quelconque. Un tel espace est défini par l'existence de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\sigma_1(T), \dots, \sigma_n(T), 0, 0, \dots) \quad [47]$$

L'espace \mathcal{L}_2 est la "classe de Hilbert-Schmidt" ; c'est un espace de Hilbert.

La formule (34) s'étend à ces espaces sous la forme :

$$(37) \quad \delta_r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(0, \dots, 0, \sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n, 0, 0, \dots).$$

Dans tous ces espaces, l'ensemble des opérateurs de rang fini est partout dense ; cela est par exemple une conséquence de (37).

Dans $\mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire \mathcal{L}_∞ , δ_r s'exprime simplement par

$$(38) \quad \delta_r(A) = \sigma_{r+1}(A).$$

Nous allons généraliser ce type de résultats en définissant sur tout espace normé d'applications linéaires des "valeurs singulières généralisées". Auparavant, nous rappelons les propriétés de mini-max et de maxi-min des valeurs propres et valeurs singulières.

4.1.6 - Propriétés de maxi-min et mini-max.

Si T est un opérateur compact d'un espace de Hilbert H, ses valeurs singulières rangées par ordre décroissant, avec répétition selon la multiplicité, ont les propriétés de mini-max et de maxi-min suivantes [12]:

$$(39) \quad \sigma_{k+1}(T) = \min_{x_1, \dots, x_k} \max_{\substack{x \neq 0 \\ (x, x_i) = 0 \\ i=1 \text{ à } k}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad k \geq 0$$

$$(40) \quad \sigma_k(T) = \max_{\substack{G \\ \dim G=k}} \min_{x \in G - \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad k \geq 1.$$

Pour d'autres classes d'opérateurs, de telles relations sont vérifiées avec inversion des conditions sur les sous-espaces.

Si A est un opérateur sur H, borné inférieurement, et tel que $(A^*A)^{1/2}$ admette des valeurs propres $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots$ isolées, de multiplicité finie, supposées inférieures à tous les éléments du spectre n'ayant pas ces propriétés, alors [53] :

$$(41) \quad \sigma_k(A) = \min_{\substack{G \\ \dim G=k}} \max_{x \in G - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$(42) \quad \sigma_{k+1}(A) = \max_{x_1, \dots, x_k} \min_{\substack{x \neq 0 \\ (x, x_i) = 0 \\ i=1 \text{ à } k}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

4.2 - VALEURS SINGULIERES GENERALISEES.

4.2.1 - Définitions et propriétés fondamentales.

On considère un espace vectoriel \mathcal{A} d'applications linéaires, sous-espace de l'espace de toutes les applications linéaires de E dans F ; E et F étant des espaces quelconques sur C.

L'espace \mathcal{A} est muni d'une norme ϕ , et nous nous intéressons à la fonctionnelle :

$$(1) \quad A \in \mathcal{A}, x \in E \rightarrow \phi_x(Ax) = \inf_M \{ \phi(M) ; M \in \mathcal{A}, Mx = Ax \}.$$

Cette application est bien définie sur $\mathcal{A} \times E$ puisque l'on a :

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall x \in E : \quad 0 \leq \phi_x(Ax) \leq \phi(A).$$

Remarquons que $\phi_x(Ax)$ est égal à 0 si x est le vecteur nul. Notons aussi la propriété évidente :

$$(3) \quad \forall \lambda \in C - \{0\} : \quad \phi_{\lambda x}(A\lambda x) = \phi_x(Ax), \quad \forall x, A,$$

qui montre que $\phi_x(Ax)$ ne dépend que de la "direction" de x.

Nous allons construire à partir de (1) quatre suites de fonctionnelles généralisant la notion de valeur singulière. Le fondement des définitions est une extension des égalités de minimax et de maximin (qui ne peuvent être a priori que des inf-sup ou sup-inf) :

DEFINITION. A toute application linéaire A de \mathcal{A} , on associe quatre suites de nombres réels positifs $\alpha_k(A)$, $\tilde{\alpha}_k(A)$, $\beta_k(A)$ et $\tilde{\beta}_k(A)$, ainsi

définis pour tout entier $k \geq 1$:

$$(4) \quad \alpha_k(A) := \inf_G \{ \sup_{x \in G} \phi_x(Ax) ; \dim G = k \}$$

$$(5) \quad \tilde{\alpha}_k(A) := \inf_G \{ \sup_{x \in G} \phi_x(Ax) ; \text{codim } G = k-1 \}$$

$$(6) \quad \beta_k(A) := \sup_G \{ \inf_{x \in G - \{0\}} \phi_x(Ax) ; \dim G = k \}$$

$$(7) \quad \tilde{\beta}_k(A) := \sup_G \{ \inf_{x \in G - \{0\}} \phi_x(Ax) ; \text{codim } G = k-1 \}$$

où G est évidemment un sous-espace de E .

Remarques.

1) Si E et F sont confondus en un espace de Hilbert H et si \mathcal{A} est égal à $\mathcal{L}(H)$, alors $\phi_x(Ax)$ s'écrit

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

D'après 4.1.6, pour un opérateur compact, $\tilde{\alpha}_k$ et β_k sont égales à la valeur singulière σ_k et il est facile de montrer que α_k et $\tilde{\beta}_k$ sont nulles quel que soit k . Pour un opérateur satisfaisant (41) et (42) de 4.1.6, ce sont les valeurs α_k et $\tilde{\beta}_k$ qui sont égales aux valeurs singulières ; ces fonctionnelles sont donc définies pour un tel opérateur, bien qu'il n'appartienne pas en général à $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$. Par contre, les suites $\tilde{\alpha}_k$ et $\tilde{\beta}_k$ ne sont pas en général définies dans ce cas.

2) L'exemple précédent montre que certaines des suites peuvent être définies sur un ensemble plus grand que \mathcal{A} . On pourrait supprimer dans la définition l'appartenance à \mathcal{A} , à condition d'admettre des valeurs infinies pour les valeurs singulières.

3) Les espaces normés \mathcal{A} intéressants sont ceux pour lesquels la fonctionnelle $\phi_x(Ax)$ est égale à

$$\frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} \quad ;$$

nous avons donné une caractérisation de ces espaces en 3.3.3. Dans [32], nous avons limité les définitions à ce cas sur des espaces de dimension finie, en ne considérant que les fonctionnelles α_k ~~β_k~~ (d'après (12) ci-dessous les autres s'en déduisent puisque l'espace E est de dimension finie).

PROPOSITION 1. Les quatre suites de fonctionnelles sont monotones, $\{\alpha_k\}$ et $\{\tilde{\beta}_k\}$ croissantes, $\{\tilde{\alpha}_k\}$ et $\{\beta_k\}$ décroissantes :

$$(8) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall k \geq 1 : \alpha_k(A) \leq \alpha_{k+1}(A) \quad , \quad \tilde{\beta}_k(A) \leq \tilde{\beta}_{k+1}(A)$$

$$(9) \quad \tilde{\alpha}_{k+1}(A) \leq \tilde{\alpha}_k(A) \quad , \quad \beta_{k+1}(A) \leq \beta_k(A).$$

Ces suites sont convergentes pour tout $A \in \mathcal{A}$ et prennent leurs valeurs dans le segment $[\inf_{x \neq 0} \phi_x(Ax), \sup_x \phi_x(Ax)]$, avec les relations :

$$(10) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall k \geq 1 : \alpha_k(A) \geq \tilde{\beta}_k(A) \quad \text{et} \quad \alpha_1(A) = \tilde{\beta}_1(A) = \inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(Ax)$$

$$(11) \quad \tilde{\alpha}_k(A) \geq \beta_k(A) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_1(A) = \beta_1(A) = \sup_{x \in E} \phi_x(Ax) .$$

DEMONSTRATION. Les relations (8) et (9) sont conséquences des définitions.

Pour tout G de dimension k+1, il existe G' de dimension k inclus dans G ; on a donc les relations :

$$\sup_{x \in G} \phi_x(Ax) \geq \sup_{x \in G'} \phi_x(Ax)$$

$$\inf_{x \in G} \phi_x(Ax) \leq \inf_{x \in G'} \phi_x(Ax)$$

qui impliquent respectivement :

$$\alpha_{k+1}(A) \geq \alpha_k(A) \quad \text{et} \quad \beta_{k+1}(A) \leq \beta_k(A).$$

Pour tout H de codimension k , il existe H' de codimension $k-1$ qui contient H ; on a donc successivement comme précédemment :

$$\sup_{x \in H} \phi_x(Ax) \leq \sup_{x \in H'} \phi_x(Ax)$$

qui implique

$$\tilde{\alpha}_{k+1}(A) \leq \tilde{\alpha}_k(A)$$

$$\text{et} \quad \inf_{x \in H} \phi_x(Ax) \geq \inf_{x \in H'} \phi_x(Ax)$$

qui implique

$$\tilde{\beta}_{k+1}(A) \geq \tilde{\beta}_k(A).$$

Pour la valeur particulière $k = 1$, les définitions (4) et (6) comportent des sous-espaces G de dimension 1, et d'après (3) se réduisent respectivement à $\inf_{x \neq 0} \phi_x(Ax)$ et $\sup_x \phi_x(Ax)$.

Les définitions (5) et (7) font intervenir uniquement $G = E$, puisque $\text{codim } G = 0$; elles se réduisent donc respectivement à

$$\sup_x \phi_x(Ax) \quad \text{et} \quad \inf_{x \neq 0} \phi_x(Ax).$$

La preuve des relations (10) et (11) repose sur le fait que pour tout couple (G, G') de sous-espaces satisfaisant $\dim G = k$ et $\text{codim } G' = k-1$, $G \cap G'$ est nécessairement différent de $\{0\}$, G ne pouvant être inclus dans un supplémentaire de G' . En choisissant $u \neq 0$ dans $G \cap G'$, on a donc les inégalités :

$$\inf_{x \in G - \{0\}} \phi_x(Ax) \leq \phi_u(Au) \leq \sup_{x \in G} \phi_x(Ax)$$

$$\inf_{x \in G' - \{0\}} \phi_x(Ax) \leq \phi_u(Au) \leq \sup_{x \in G'} \phi_x(Ax)$$

qui sont vérifiées quel que soit le couple (G, G') . Elles impliquent donc les inégalités prouvant (10) et (11) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(A) &= \sup_{\dim G=k} \inf_{x \in G - \{0\}} \phi_x(Ax) \leq \inf_{\text{codim } G'=k-1} \sup_{x \in G'} \phi_x(Ax) \\ &= \tilde{\alpha}_k(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_k(A) &= \sup_{\text{codim } G'=k-1} \inf_{x \in G' - \{0\}} \phi_x(Ax) \\ &\leq \inf_{\dim G=k} \sup_{x \in G} \phi_x(Ax) = \alpha_k(A) \end{aligned}$$



Remarques.

1) La monotonie des suites permet de remplacer dans les définitions (4), (6), la condition $\dim G = k$ par $\dim G \geq k$, et dans les définitions (5), (7), la condition $\text{codim } G = k-1$ par $\text{codim } G \leq k-1$. En effet, on a par exemple pour α_k :

$$\inf_{\dim G \geq k} \sup_{x \in G} \phi_x(Ax) = \inf_{i \geq k} \alpha_i(A) = \alpha_k(A).$$

2) Les fonctionnelles $\tilde{\alpha}_1$ et β_1 sont confondues avec l'application

$$\tilde{\phi} : A \mapsto \sup_{x \in E} \phi_x(Ax)$$

qui définit au moins une semi-norme inférieure ou égale à ϕ . Si l'ensemble $\{M \in \mathcal{A}; Mx = 0\}$ est fermé dans \mathcal{A} quel que soit x , $\tilde{\phi}$ est une norme.

3) Dans certains cas très spéciaux, toutes les fonctionnelles peuvent être confondues avec ϕ sur \mathcal{A} ; c'est le cas, lorsque E et F sont confondus, et qu'on considère l'espace $\mathcal{A} = C.I = \{\xi I; \xi \in C\}$ isomorphe à C . Dans d'autres cas, certaines fonctionnelles peuvent être nulles quel que soit l'entier k ; si l'on choisit $\mathcal{A} = F \otimes \ell$, avec ℓ élément fixé non nul du dual algébrique de E , toutes les fonctionnelles sont nulles à la seule exception de $\tilde{\alpha}_1$ et β_1 confondues avec ϕ .

Ce dernier exemple montre qu'en général la limite de la suite $\{\alpha_k(A)\}$ n'est pas égale à

$$\sup_{x \in E} \phi_x(Ax),$$

mais seulement inférieure ou égale. En effet, dans le cas considéré, la suite est identiquement nulle, et

$$\sup_{x \in E} \phi_x(Ax)$$

strictement positif en général.

4.2.2 - Cas particuliers ; exemples.

4.2.2.1 Espace E de dimension finie.

Si E est de dimension n , alors la condition $\text{codim } G = k-1$ est équivalente à $\dim G = n+1-k$, ce qui implique :

$$(12) \quad k = 1 \text{ à } n \quad : \quad \beta_k = \tilde{\beta}_{n+1-k} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \tilde{\alpha}_{n+1-k}.$$

Il ne reste donc que deux suites distinctes α_k et β_k , respectivement croissante et décroissante (au sens large) avec les relations suivantes :

$$(13) \quad \forall A \in \mathcal{A} : \begin{cases} \alpha_n(A) = \beta_1(A) = \sup_{x \in E} \phi_x(Ax) \\ \alpha_1(A) = \beta_n(A) = \inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(Ax) \end{cases}$$

$$(14) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall k \geq 1 : \alpha_k(A) \geq \beta_{n+1-k}(A) .$$

Toutes ces relations se déduisent directement de la Proposition et de (12).

4.2.2.2 - Espaces équivalents à $\mathcal{L}(E, F)$.

Si E et F sont des espaces normés respectivement par ϕ et ψ , et si l'on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{L}((E, \phi), (E, \psi))$, alors, pour tout x non nul, $\phi_x(Ax)$ est égal à

$$\frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} \quad (\text{voir chapitre 5}).$$

Dans le cas fini, $E = C^n$ et $F = C^m$, on a les mêmes fonctionnelles pour $\mathcal{A} = \mathcal{M}(m, n)$ quelle que soit la norme ϕ satisfaisant $\phi(xy^*) = \psi(x)\phi^*(y)$, puisque pour ces normes (3.3.(10)) :

$$\phi_x(Ax) = \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} .$$

En particulier, pour $\psi = h_2$ dans C^m et $\phi = h_2$ dans C^n , les deux suites de 4.2.2.1 se confondent en la seule suite des valeurs singulières de A (égalité dans (14) quel que soit k) :

$$(15) \quad \forall A, \forall k \geq 1 : \alpha_k(A) = \beta_{n+1-k}(A) = \sigma_k(A) .$$

Toute norme de von Neumann, satisfaisant la relation

$\phi^*(xy^*) = h_2(x)h_2(y)$, conduit à la suite (15) des valeurs singulières.

4.2.2.3 - Espaces équivalents à $\mathcal{L}(H)$, H espace de Hilbert.

Si \mathcal{A} est l'espace $\mathcal{L}(H)$, H étant un espace de Hilbert, ou un sous-espace équivalent (par exemple la classe de Hilbert-Schmidt), c'est-à-dire tel que :

$$(16) \quad \forall A, \quad \forall x \neq 0 \quad : \quad \phi_x(Ax) = \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

alors

$$(17) \quad \phi_x^2(Ax) = \frac{(A^*Ax, x)}{(x, x)}$$

qui est le quotient de Rayleigh relatif à A^*A et x . Si A^*A a des valeurs propres isolées σ_i^2 , certaines des suites peuvent être confondues avec la suite des σ_i ; c'est le cas des exemples introductifs de 4.1.6. Remarquons que dans (41), (42) par exemple, la multiplicité des σ_k ne joue pas de rôle spécial. Cependant, on peut associer à toutes les valeurs propres égales la même formule de maxi-min ou de mini-max, en écrivant :

$$(18) \quad \forall i \geq 1 \quad : \quad \sigma_i^2(A) = \alpha_k^2(A) \quad \text{avec} \quad k = \min \{j ; \sigma_j^2 = \sigma_i^2\}$$

$$\sigma_i^2(A) = \tilde{\beta}_k^2(A) \quad \text{avec} \quad k = \max \{j ; \sigma_j^2 = \sigma_i^2\}$$

en notant $\sigma_i^2(A)$ les valeurs propres de A^*A dans l'ordre croissant, comptées avec leur multiplicité.

Remarquons qu'un opérateur de $\mathcal{L}(H)$ n'ayant aucune valeur propre peut avoir des valeurs singulières $\alpha_k, \tilde{\alpha}_k, \beta_k, \tilde{\beta}_k$ bien déterminées. Comme exemple, considérons l'opérateur de décalage sur ℓ^2 , T défini par :

$$T : (x_1, x_3, \dots, x_n, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

et qui vérifie pour tout x , l'égalité $\|Tx\| = \|x\|$. Cet opérateur n'a aucune valeur propre, mais les quatre suites sont confondues en la suite stationnaire de valeur 1 (T satisfait $T^*T = I \neq TT^*$ et admet le disque unité comme spectre).

4.2.3 - Inégalités du type de celles de Weyl.

PROPOSITION 2.

(i) Les fonctionnelles α et $\tilde{\alpha}$ vérifient les inégalités suivantes, quels que soient A et B dans \mathcal{A} et l'entier $k \geq 1$:

$$(19) \quad \alpha_k(A+B) \leq \inf_{\substack{i,j \\ i-j=k-1}} \{ \alpha_i(A) + \tilde{\alpha}_j(B) \}$$

$$(20) \quad \tilde{\alpha}_k(A+B) \leq \min_{\substack{i,j \\ i+j=k+1}} \{ \tilde{\alpha}_i(A) + \tilde{\alpha}_j(B) \}.$$

(ii) Toutes les fonctionnelles α , $\tilde{\alpha}$, β et $\tilde{\beta}$ satisfont les inégalités suivantes, quels que soient A et B dans \mathcal{A} et l'entier $k \geq 1$:

$$(21) \quad |f_k(A) - f_k(B)| \leq \sup_{x \in E} \phi_x((A-B)x) \leq \phi(A-B),$$

f figurant l'un quelconque des symboles α , $\tilde{\alpha}$, β et $\tilde{\beta}$.

DEMONSTRATION.

(i) les inégalités (19) et (20) découlent de minoration possibles pour la dimension de l'intersection de sous-espaces. Pour (19), il suffit de remarquer que pour tout couple (G,H) de sous-espaces, avec $\dim G = i$

et $\text{codim } H = j-1$, la dimension de $G \cap H$ est supérieure ou égale à $i-j+1$.
 Pour (20), si G' et H' sont de codimensions respectives $i-1$ et $j-1$, alors
 $G' \cap H'$ est de codimension inférieure ou égale à $i+j-2$.

Partant de l'inégalité, vraie pour tout x :

$$\phi_x((A+B)x) \leq \phi_x(Ax) + \phi_x(Bx),$$

nous obtenons respectivement, avec les remarques précédentes :

$$\alpha_{i-j+1}(A+B) \leq \sup_{x \in G \cap H} \phi_x((A+B)x) \leq \sup_{x \in G} \phi_x(Ax) + \sup_{x \in H} \phi_x(Bx)$$

$$\tilde{\alpha}_{i+j-1}(A+B) \leq \sup_{x \in G' \cap H'} \phi_x((A+B)x) \leq \sup_{x \in G'} \phi_x(Ax) + \sup_{x \in H'} \phi_x(Bx).$$

Ces inégalités étant vraies quels que soient les couples (G, H) et
 (G', H') dans les ensembles précisés, elles impliquent les inégalités :

$$\alpha_{i-j+1}(A+B) \leq \inf_{\substack{G \\ \dim G=i}} \sup_{x \in G} \phi_x(Ax) + \inf_{\substack{H \\ \text{codim } H=j-1}} \sup_{x \in H} \phi_x(Bx)$$

$$\tilde{\alpha}_{i+j-1}(A+B) \leq \inf_{\substack{G' \\ \text{codim } G'=i-1}} \sup_{x \in G'} \phi_x(Ax) + \inf_{\substack{H' \\ \text{codim } H'=j-1}} \sup_{x \in H'} \phi_x(Bx)$$

c'est-à-dire (19) et (20).

(ii) Pour montrer (21), il suffit de partir de l'inégalité :

$$\phi_x(Ax) \leq \phi_x((A-B)x) + \phi_x(Bx)$$

et d'utiliser les inégalités

$$(22) \quad \sup(g+h)(\mathcal{E}) \leq \sup g(\mathcal{E}) + \sup h(\mathcal{E})$$

$$(23) \quad \inf(g+h) (\mathcal{E}) \leq \inf g(\mathcal{E}) + \sup h(\mathcal{E})$$

valables pour toutes fonctionnelles et tout ensemble \mathcal{E} . Pour α_k et $\tilde{\alpha}_k$, on applique d'abord (22) avec \mathcal{E} égal à G , puis (23) avec \mathcal{E} égal à l'ensemble des G , d'où successivement :

$$\sup_{x \in G} \phi_x(Ax) \leq \sup_{x \in G} \phi_x((A-B)x) + \sup_{x \in G} \phi_x(Bx)$$

$$\text{et} \quad \inf_G \sup_{x \in G} \phi_x(Ax) \leq \inf_G \sup_{x \in G} \phi_x(Bx) + \sup_G \sup_{x \in G} \phi_x((A-B)x)$$

c'est-à-dire

$$\alpha_k(A) \leq \alpha_k(B) + \sup_{x \in E} \phi_x((A-B)x)$$

et la même inégalité avec $\tilde{\alpha}_k$.

Pour β_k et $\tilde{\beta}_k$, on applique (23) puis (22), ce qui conduit à

$$\inf_{x \in G} \phi_x(Ax) \leq \inf_{x \in G} \phi_x(Bx) + \sup_{x \in G} \phi_x((A-B)x)$$

puis

$$\beta_k(A) \leq \beta_k(B) + \sup_{x \in E} \phi_x((A-B)x)$$

et la même inégalité pour $\tilde{\beta}_k$.

On obtient (21) en échangeant les rôles de A et B



COROLLAIRE 1. Toutes les applications α_k , $\tilde{\alpha}_k$, β_k et $\tilde{\beta}_k$ sont continues (lipschitziennes de rapport 1) sur l'espace (\mathcal{A}, ϕ) .

DEMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de (21). Il y a d'ailleurs continuité avec la topologie moins fine définie par la semi-norme

$$\phi : B \mapsto \sup_x \phi_x(Bx) .$$



Nous allons préciser les relations existant entre les fonctionnelles de certains couples d'applications :

PROPOSITION 3. Si le noyau de A-B a une dimension supérieure ou égale à s, les inégalités suivantes ont lieu

$$(24) \quad \inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(Bx) \leq \beta_s(A) \quad ; \quad \alpha_s(A) \leq \sup_{x \in E} \phi_x(Bx).$$

Si le rang de A-B est inférieur ou égal à r, alors :

$$(25) \quad \inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(Bx) \leq \tilde{\beta}_{r+1}(A) \quad ; \quad \tilde{\alpha}_{r+1}(A) \leq \sup_{x \in E} \phi_x(Bx).$$

En particulier, les implications suivantes sont vérifiées :

$$(26) \quad \dim \text{Ker} (S) \geq s \Rightarrow \forall k \leq s, \quad \alpha_k(S) = \tilde{\beta}_k(S) = 0$$

$$(27) \quad \text{rang}(S) \leq r \Rightarrow \forall k \geq r+1, \quad \tilde{\alpha}_k(S) = \beta_k(S) = 0.$$

DEMONSTRATION. (24) et (25) résultent du fait que A et B ont la même restriction sur $N = \text{Ker} (A-B)$. On a donc les inégalités :

$$\inf_x \phi_x(Bx) \leq \inf_{x \in N} \phi_x(Bx) = \inf_{x \in N} \phi_x(Ax) \leq \beta_s(A) \text{ ou } \tilde{\beta}_{r+1}(A)$$

et

$$\sup_x \phi_x(Bx) \geq \sup_{x \in N} \phi_x(Bx) = \sup_{x \in N} \phi_x(Ax) \geq \alpha_s(A) \text{ ou } \tilde{\alpha}_{r+1}(A).$$

Pour démontrer (26), (27), il suffit de remplacer B par 0 dans les

inégalités de droite de (24) et (25), et de tenir compte des relations (8) à (11).



Remarques.

Les implications inverses, dans (26) et (27), ne sont pas nécessairement vérifiées.

Si le noyau de S est de dimension infinie, alors $\alpha_k(S)$ et $\tilde{\beta}_k(S)$ sont nuls pour tout k ; si S est de rang fini r , avec E de dimension infinie, seules les valeurs $\tilde{\alpha}_1(S), \dots, \tilde{\alpha}_r(S)$ et $\beta_1(S), \dots, \beta_r(S)$ peuvent être non nulles (toutes les autres fonctionnelles sont nulles).

COROLLAIRE 2. Soient deux applications A et B telles que le rang de $A-B$, soit fini, égal à r .

Si E n'est pas de dimension finie, alors, dès que k est supérieur ou égal à $r+1$, $\alpha_k(A)$, $\tilde{\alpha}_k(A)$, $\beta_k(A)$ et $\tilde{\beta}_k(A)$ appartiennent à l'intersection des segments $[\inf \phi_x(Ax), \sup \phi_x(Ax)]$ et $[\inf \phi_x(Bx), \sup \phi_x(Bx)]$

Si E est de dimension finie n et si r satisfait l'inégalité $2r \leq n-1$ alors la même propriété est vraie pour k compris entre $r+1$ et $n-r$.

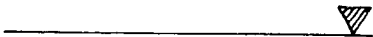
DEMONSTRATION. Dans le cas où E est de dimension infinie, $\text{Ker}(A-B)$ est aussi de dimension infinie, et (24) est satisfait pour tout entier s . Si E est de dimension n , alors (24) est satisfait pour $s \leq n-r$. L'hypothèse $2r \leq n-1$ exprime l'inégalité $n-r \geq r+1$. Ainsi, dans les deux cas, on peut raccorder les inégalités de (24) et de (25) en utilisant les relations de (8) à (11). Pour s supérieur ou égal à $r+1$, on a donc les deux suites d'inégalités :

$$(28) \quad \inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(Bx) \leq \beta_s(A) \leq \beta_{r+1}(A) \leq \tilde{\alpha}_{r+1}(A) \leq \sup_{x \in E} \phi_x(Bx)$$

$$(29) \quad \inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(Bx) \leq \tilde{\beta}_{r+1}(A) \leq \tilde{\beta}_s(A) \leq \alpha_s(A) \leq \sup_{x \in E} \phi_x(Bx).$$

La conclusion est évidente pour β et $\tilde{\beta}$. Pour $\tilde{\alpha}$ et α , elle est conséquence des inégalités :

$$\forall s : \tilde{\beta}_s(A) \leq \alpha_s(A) \quad \text{et} \quad \beta_s(A) \leq \tilde{\alpha}_s(A).$$



Remarques.

1) Les définitions (4) à (7) peuvent être étendues en utilisant, à la place de $\phi_x(Ax)$, une fonctionnelle $Q(A,x)$. Si c'est une fonctionnelle sur R de signe quelconque, alors les définitions (4) à (7) auront un sens si

$$\inf_{x \in E} Q(A,x) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E} Q(A,x)$$

sont définis pour l'ensemble des applications A considérées. Les quatre suites de fonctionnelles obtenues vérifient toutes les propriétés qui précèdent à deux exceptions près :

$$- \text{ les égalités } \alpha_1(A) = \tilde{\beta}_1(A) = \inf_x Q(A,x)$$

supposent la propriété (3), c'est-à-dire l'homogénéité traduite par $Q(A,\lambda x) = Q(A,x)$ pour tout $\lambda \neq 0$;

- les inégalités (19), (20) et (21) qui supposent la sous-additivité sur le premier argument, c'est-à-dire :

$$Q(A+B,x) \leq Q(A,x) + Q(B,x).$$

Le choix de la fonctionnelle $\phi_x(Ax)$ sera justifié par les applications,

notamment pour l'évaluation de la distance à l'ensemble des applications de rang fixé, par exemple.

2) Inégalités de Weyl.

Si l'on considère par exemple l'espace $\mathcal{M}(n)$ des matrices carrées, avec

$$\phi_x(Ax) = \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne, alors les $\alpha_k(A)$ sont les valeurs singulières de A ; les inégalités (19) et (20) s'écrivent :

$$(30) \quad \alpha_k(A+B) \leq \min_{j=k \text{ à } n} \{ \alpha_j(A) + \alpha_{n-j+k}(B) \}.$$

Cette inégalité concerne les valeurs singulières de A. Pour A hermitique, les valeurs singulières sont les modules des valeurs propres. Les inégalités de Weyl sur les valeurs propres (de signe quelconque) de A peuvent s'écrire :

$$(31) \quad \min_{j=1 \text{ à } k} \{ \lambda_j(A) + \lambda_{k+1-j}(B) \} \leq \lambda_k(A+B) \leq \min_{j=k \text{ à } n} \{ \lambda_j(A) + \lambda_{n-j+k}(B) \}.$$

Pour les obtenir, il suffit d'utiliser le quotient de Rayleigh comme fonctionnelle :

$$Q(A, x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

qui n'a pas un signe constant, mais satisfait $Q(-A, x) = -Q(A, x)$, ce qui permet d'obtenir une inégalité comme celle de gauche dans (31) ; cela est impossible avec les valeurs singulières généralisées (ou ordinaires...)

3) Les normes de von Neumann étant construites à partir des valeurs singulières, on pourrait penser généraliser ces classes de normes en partant des valeurs singulières généralisées. Cette possibilité est une caractérisation de plus de la norme euclidienne, et ne peut s'étendre à toute norme.

Considérons par exemple la somme des valeurs singulières généralisées ; montrons que ce n'est pas une norme en nous limitant à $\mathcal{M}(2)$ avec

$$\phi_x(Ax) = \frac{\phi(Ax)}{\phi(x)} \quad ;$$

$$A \mapsto f(A) := \sup_x \frac{\phi(Ax)}{\phi(x)} + \inf_x \frac{\phi(Ax)}{\phi(x)} \quad .$$

Avec la norme ϕ égale à h_∞ et les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite, car $f(A+B)$ est égal à 3 et $f(A) + f(B)$ à 2.

4.2.4 - Propriétés d'invariance.

PROPOSITION 4. Les fonctionnelles $\alpha_k, \tilde{\alpha}_k, \beta_k$ et $\tilde{\beta}_k$ associées à ϕ admettent les mêmes groupes d'invariance que ϕ :

$$(32) \quad \forall P \in \mathcal{G}_g(\phi), Q \in \mathcal{G}_d(\phi) \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} : f_k(PAQ) = f_k(A)$$

où f figure l'une quelconque des $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$.

DEMONSTRATION. La propriété de conservation de ϕ dans \mathcal{A} implique que P (resp. Q) sont tels que $P\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}Q \subset \mathcal{A}$) puisque \mathcal{A} n'est qu'un sous-espace. Nous devons prendre alors comme hypothèse que pour tout P (resp. Q), qui est nécessairement inversible, P^{-1} (resp. Q^{-1}) conserve aussi \mathcal{A} . Cela étant dit, nous utiliserons des expressions des fonctionnelles équivalentes à celles de la définition, qui seront encore utilisées par la suite ; nous écrirons α_k par exemple :

$$(33) \quad \alpha_k(A) = \inf_X \{ \sup_{u \in E} \phi_{Xu}(AXu) ; \text{rang}(X) = k \}$$

où X est évidemment une application linéaire de E dans E. Pour $\tilde{\beta}_k$, on a de même :

$$(34) \quad \tilde{\beta}_k(A) = \sup_{\substack{X \\ Xu \neq 0}} \{ \inf_{u \in E} \phi_{Xu}(AXu) ; \text{codim}(\text{Im}X) = k-1 \}$$

et des expressions homologues pour $\tilde{\alpha}_k$ et β_k .

Pour montrer (32), utilisons la propriété suivante : si $P \in \mathcal{G}_g(\Phi)$ et $Q \in \mathcal{G}_d(\Phi)$:

$$\forall u \in E, \phi_{Xu}(PAQXu) = \phi_{QXu}(AQXu)$$

et

$$Xu \neq 0 \Leftrightarrow u \neq 0.$$

Cette relation résulte de l'équivalence :

$$MXu = PAQXu \Leftrightarrow (P^{-1}MQ^{-1})QXu = AQXu$$

qui implique

$$\inf \{ \phi(M) ; MXu = PAQXu \} = \inf \{ \phi(N) ; NQXu = AQXu \},$$

qui est bien l'égalité annoncée.

Limitons la preuve de (32) à la fonctionnelle α_k par exemple :

$$\begin{aligned} \alpha_k(PAQ) &= \inf_X \{ \sup_{u \in E} \phi_{Xu}(PAQXu) ; \text{rang}(X) = k \} \\ &= \inf_Y \{ \sup_{u \in E} \phi_{Yu}(AYu) ; \text{rang}(Y) = k \} \end{aligned}$$

cela étant obtenu en posant $Y = QX$ après utilisation de l'égalité

précédemment prouvée, avec $\text{rang}(Y) = \text{rang}(X)$ puisque Q est un opérateur inversible. Finalement, il y a bien égalité avec $\alpha_k(A)$ d'après (33).



PROPOSITION 5. Si B est un opérateur linéaire sur F , laissant invariant \mathcal{A} et borné sur \mathcal{A} comme application de \mathcal{A} dans \mathcal{A} , c'est-à-dire que $G_\phi(B)$ existe :

$$G_\phi(B) = \sup_{A \in \mathcal{A} - \{0\}} \frac{\phi(BA)}{\phi(A)} < \infty,$$

alors toutes les fonctionnelles satisfont :

$$(35) \quad k \geq 1, \forall A \in \mathcal{A} : f_k(BA) \leq G_\phi(B) f_k(A).$$

Si l'opérateur B est inversible et que B^{-1} a les propriétés indiquées, alors on a :

$$(36) \quad k \geq 1, \forall A \in \mathcal{A} : f_k(BA) \geq \frac{1}{G_\phi(B^{-1})} f_k(A)$$

pour toutes les fonctionnelles.

DEMONSTRATION. La relation (35) découle de la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} \phi_x(BAx) &= \inf \{ \phi(M) ; Mx = BAx \} \\ &\leq \inf \{ \phi(BN) ; BNx = BAx \} \\ &\leq G_\phi(B) \inf \{ \phi(N) ; BNx = BAx \} \\ &\leq G_\phi(B) \inf \{ \phi(M) ; Mx = Ax \} \\ &= G_\phi(B) \cdot \phi_x(Ax). \end{aligned}$$

Pour (36), il suffit d'appliquer cela à B^{-1} :

$$\phi_x(B^{-1}BAx) \leq G_{\phi}(B^{-1})\phi_x(BAx)$$

qui implique :

$$\phi_x(BAx) \geq \frac{1}{G_{\phi}(B^{-1})} \phi_x(Ax).$$



Remarque.

On n'a pu montrer d'inégalité symétrique de (35) avec $f_k(AC)$, C opérateur sur E , ni établir d'inégalité plus fine. Pour les valeurs singulières classiques, l'inégalité plus fine suivante est vraie :

$$(37) \quad \sigma_k(AB) \leq \sigma_j(A) \sigma_i(B) \quad \text{avec} \quad i+j = k+n$$

et se confond avec (35) lorsque $j = n$ et $i = k$, car dans ce cas $G_{\phi} = S_2 = \sigma_n$ (les σ_i sont numérotés ici dans l'ordre croissant).

4.2.5. Valeurs singulières généralisées et valeurs propres.

Lorsque \mathcal{A} est un sous-espace d'opérateurs de E dans E , les fonctionnelles α et β peuvent fournir des bornes pour les valeurs propres :

PROPOSITION 6. Soit (\mathcal{A}, ϕ) , espace normé d'applications linéaires de E dans E , vérifiant l'égalité $\phi_x(x) = 1$, quel que soit x de E .

Toute valeur propre de A , de multiplicité finie s est encadrée en module par α_s et β_s :

$$(38) \quad \alpha_s(A) \leq |\lambda| \leq \beta_s(A).$$

Si E est de dimension infinie et λ de multiplicité infinie, les bornes dans (38) peuvent être remplacées par

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k.$$

Si le rang de $A - \lambda I$ est fini, égal à r , alors $|\lambda|$ est égal à toutes les fonctionnelles d'indice $k \leq r+1$:

$$(39) \quad |\lambda| = \alpha_k(A) = \beta_k(A) = \tilde{\alpha}_k(A) = \tilde{\beta}_k(A).$$

Si E est de dimension finie n , et λ de multiplicité

$$s \leq \frac{n+1}{2}$$

alors (39) est vérifié pour k tel que

$$n+1-s \leq k \leq s.$$

DEMONSTRATION. Toutes les fonctionnelles sont confondues en 1 pour l'application I . Ainsi (24) implique (38). Si la multiplicité est infinie, on peut évidemment remplacer les bornes par $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k$ dans (38). Les autres relations sont conséquences du Corollaire 2. Pour le cas de la dimension finie n , il suffit de remplacer r par $n-s$.



Remarques.

1) Si ϕ est une norme d'algèbre unitaire, elle satisfait la condition :

$$\forall x \neq 0, \phi_x(x) = 1.$$

En effet $Mx = x$ entraîne $\phi(I) \geq 1$ et $\phi(I) = 1$ implique $\phi_x(x) \leq 1$.

2) Si ϕ n'a pas la propriété énoncée, les résultats sont transformés en :

$$(38') \quad \frac{1}{\sup_{x \in E} \phi_x(x)} \alpha_s(A) \leq |\lambda| \leq \frac{1}{\inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(x)} \beta_s(A)$$

$$(39') \quad |\lambda| \inf_x \phi_x(x) \leq \alpha_i(A), \beta_i(A) \leq |\lambda| \sup_x \phi_x(x).$$

3) Dans le cas fini où \mathcal{A} est égal à $\mathcal{M}(n)$, la condition sur ϕ s'écrit :

$$\forall x \neq 0, \quad \sup_{z \neq 0} \frac{|z^* x|}{\phi^*(zx^*)} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\forall x, z, \quad \phi^*(zx^*) \geq |z^* x|$$

$$\text{et } \forall x, \exists z \text{ t.q. } \phi^*(zx^*) = |z^* x|.$$

4) L'emploi d'une autre fonctionnelle que $\phi_x(Ax)$ conduirait à d'autres types de localisation. Si cette fonctionnelle satisfait :

$$\forall x, Q(\lambda I, x) = q(\lambda),$$

alors les résultats (38), (39) sont valables avec les α, β correspondants, en changeant $|\lambda|$ en $q(\lambda)$.

4.3 - VALEURS SINGULIERES ET DISTANCE A L'ENSEMBLE DES APPLICATIONS DE

RANG INFERIEUR OU EGAL A r...

4.3.1 - Cas général ; minoration des distances.

Nous reprenons les notations de 4.1.2 ; δ_G , $\tilde{\delta}_s$ et δ_r désigneront respectivement les distances à \mathcal{J}_G (sous-espace des applications dont le noyau contient le sous-espace G de E), à l'ensemble des applications dont le noyau est de dimension supérieure ou égale à s, et à l'ensemble des applications de rang inférieur ou égal à r.

Ces distances sont évaluées dans un espace normé (\mathcal{A}, ϕ) d'applications. En toute généralité, cet espace peut ne pas contenir d'applications de rang fixé par exemple, mais il contient toujours des applications correspondant aux propriétés ci-dessus (l'application 0 a ces trois propriétés). Si \mathcal{A} est égal à $\mathcal{L}(E, F)$, alors il existe des applications de tout rang (compatible avec les dimensions de E et F).

Ces remarques étant faites, nous pouvons énoncer le premier résultat :

PROPOSITION 7. Pour toute application A de \mathcal{A} , les distances $\delta_G(A)$, $\tilde{\delta}_s(A)$ et $\delta_r(A)$, quels que soient G, sous-espace de E, et s, r, entiers, sont liées aux valeurs singulières de A par les inégalités :

$$(1) \quad \delta_G(A) \geq \sup_{x \in G} \phi_x(Ax)$$

$$(2) \quad \tilde{\delta}_s(A) \geq \tilde{\alpha}_s(A) \quad , \quad s \geq 1$$

$$(3) \quad \delta_r(A) \geq \tilde{\alpha}_{r+1}(A) \quad ; \quad r \geq 0 .$$

La distance $\tilde{\delta}_1(A)$ à l'ensemble des applications non injectives est donnée par

$$(4) \quad \tilde{\delta}_1(A) = \alpha_1(A) = \inf_{x \neq 0} \phi_x(Ax).$$

DEMONSTRATION. En notant Z_x l'ensemble $\{N \in \mathcal{N}; Nx = 0\}$, on a évidemment

$$d(A, Z_x) = \inf_M \{\phi(M); (A-M)x = 0\} = \phi_x(Ax).$$

L'ensemble \mathcal{Y}_G et l'ensemble \mathcal{F}_1 des applications non injectives s'écrivent respectivement

$$\mathcal{Y}_G = \bigcap_{x \in G} Z_x \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 = \bigcup_{x \in E - \{0\}} Z_x.$$

Ce qui implique donc :

$$(5) \quad \delta_G(A) \geq \sup_{x \in G} d(A, Z_x) = \sup_{x \in G} \phi_x(Ax)$$

et

$$\tilde{\delta}_1(A) = \inf_{x \in E - \{0\}} \phi_x(Ax)$$

ce qui prouve les relations (1) et (4).

Les ensembles $\tilde{\mathcal{F}}_s$ et \mathcal{Y}_r , des applications dont le noyau est de dimension $\geq s$ et de codimension inférieure ou égale à r (rang $\leq r$), s'écrivent :

$$\tilde{\mathcal{F}}_s = \bigcup_{\substack{G \\ \dim G \geq s}} \mathcal{Y}_G \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_r = \bigcup_{\substack{G \\ \text{codim } G \leq r}} \mathcal{Y}_G.$$

Nous obtenons donc les inégalités (2) et (3) en utilisant (5).



Remarques.

1) Si E est de dimension finie n, alors $\tilde{\delta}_{n-r}$ est égal à δ_r , mais alors (2) et (3) se confondent car on a l'égalité $\alpha_{n-r} = \tilde{\alpha}_{r+1}$ d'après 4.2.(12).

2) Nous remarquons que toutes les inégalités reposent sur la définition de $\phi_x(Ax)$. Toutes les normes conduisant à la même fonctionnelle $\phi_x(Ax)$ admettent donc exactement les mêmes bornes. Ces bornes seront évidemment mieux adaptées aux normes de rang 1, minimales dans l'ensemble de ces normes, qui vérifient $\phi(A) = \sup_{x \in E} \phi_x(Ax)$.

Ce sera le cas pour l'espace $\mathcal{L}(E, F)$, où nous pourrons donner de plus des majorations aux distances.

4.3.2 - Encadrement des distances dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$.

- Nous nous plaçons dans un espace $\mathcal{L}(E, F)$, d'applications linéaires continues de E normé par ϕ , dans F normé par ψ .

- En utilisant des projections dans l'espace (E, ϕ) , nous pourrons donner des majorations aux rapports

$$\frac{\tilde{\delta}_s(A)}{\alpha_s(A)} \text{ et } \frac{\delta_r(A)}{\tilde{\alpha}_{r+1}(A)} .$$

- Ici, une projection P est un opérateur de $\mathcal{L}(E)$, idempotent ($P^2 = I_E$). Pour tout x de Im P : $Px = x$; ainsi Im P est nécessairement un sous-espace fermé, comme noyau de l'opérateur continu $I - P$.

- La remarque précédente nécessite la considération de sous-espaces G fermés dans E. Cette propriété est vérifiée pour G de dimension finie ;

elle devra être imposée dans les autres cas.

- Comme il existe des projections de E sur G, lorsque G est de dimension finie ou fermé de codimension finie, nous utiliserons les nombres suivants :

$$(6) \quad M(G) = \inf_P \{S_\phi(P) ; P \text{ projection sur } G\}$$

$$(7) \quad M_S(\phi) = \sup_{\substack{G \\ \dim G=S}} M(G)$$

$$(8) \quad \tilde{M}_r(\phi) = \sup_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=r}} M(G).$$

Tous ces nombres sont supérieurs ou égaux à 1, puisque $S_\phi(P) \geq 1$ est pour toute projection ($P^2 = I \Rightarrow S_\phi(P) \geq 1$).

- Avant d'énoncer le premier résultat, précisons que nous utiliserons ici une définition différente pour $\tilde{\alpha}_k$, à savoir :

$$(9) \quad \tilde{\alpha}_k(A) = \inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=k-1}} \sup_{x \in G} \phi_x(Ax),$$

et que \mathcal{Y}_G et δ_G supposeront l'espace G fermé.
Rappelons enfin que dans $\mathcal{L}(E,F)$, on a :

$$\phi_x(Ax) = \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)}, \quad x \neq 0.$$

PROPOSITION 8. Dans $\mathcal{L}(E, F)$, les distances δ_G , $\tilde{\delta}_s$ et δ_r sont liées aux valeurs singulières par les inégalités suivantes, vérifiées par tout A de $\mathcal{L}(E, F)$:

$$(10) \quad \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} \leq \delta_G(A) \leq M(G) \cdot \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)}$$

$$(11) \quad \alpha_s(A) \leq \tilde{\delta}_s(A) \leq M_s(\phi) \cdot \alpha_s(A), \quad s \geq 1$$

$$(12) \quad \tilde{\alpha}_{r+1}(A) \leq \delta_r(A) \leq \tilde{M}_r(\phi) \cdot \tilde{\alpha}_{r+1}(A), \quad r \geq 0.$$

DEMONSTRATION. Les inégalités de gauche dans (10) et (11) ne sont qu'un rappel du résultat général. Celle de (12) diffère du cas général du fait de la définition différente (9) de $\tilde{\alpha}_{r+1}$. Cette inégalité se montre de la même manière que dans la Proposition 7, puisque toutes les applications de $\mathcal{L}(E, F)$ ayant un noyau fermé, on peut se limiter aux sous-espaces G fermés. Il reste à montrer la deuxième inégalité de (10), de laquelle seront déduites celles de (11) et (12).

Pour toute projection P sur G , $\text{Ker}(I-P)$ contient G , et $\text{Ker}(A(I-P))$ a la même propriété. On a donc :

$$(13) \quad \delta_G(A) \leq \inf_P \{S_{\psi\phi}(AP) ; P \text{ projection sur } G\}.$$

Pour tout P , la norme de AP peut être majorée comme suit :

$$(13') \quad S_{\psi\phi}(AP) \leq \sup_{\substack{x \in E \\ Px \neq 0}} \frac{\psi(APx)}{\phi(Px)} \cdot \frac{\phi(Px)}{\phi(x)} \leq \sup_{u \in G} \frac{\psi(Au)}{\phi(u)} \cdot S_\phi(P),$$

ce qui, avec (13), démontre (10).

Pour déduire (11) et (12), il suffit d'utiliser l'inégalité :

$$\inf (f.g)(\mathcal{E}) \leq \inf f(\mathcal{E}) \cdot \sup g(\mathcal{E})$$

f et g étant des fonctions réelles définies sur un ensemble quelconque \mathcal{E} . On a ainsi :

$$\tilde{\delta}_s(A) = \inf_{\substack{G \\ \dim G=s}} \delta_G(A) \leq \left(\inf_{\substack{G \\ \dim G=s}} \sup_{x \in G} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} \right) \cdot \sup_{\substack{G \\ \dim G=s}} M(G)$$

$$\delta_r(A) = \inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=r}} \delta_G(A) \leq \left(\inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=r}} \text{---} \right) \cdot \sup_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=r}} M(G)$$

ce qui prouve finalement (11) et (12).



Remarque.

Il est connu que, dans tout espace normé, il existe sur toute droite, une projection de norme unité. Cela signifie que pour toute norme ϕ , $M_1(\phi)$ est égal à 1. L'égalité (4) peut ainsi être déduite de (11) et s'écrit ici :

$$\tilde{\delta}_1(A) = \inf_{u \neq 0} \frac{\psi(Au)}{\phi(u)}$$

Nous donnons ci-dessous certains résultats concernant les nombres M :

LEMME 1. Quel que soit l'espace normé E, on a :

$$(14) \quad M_s \leq \min \left\{ s, \left\{ \frac{s^3}{\pi} \right\}^{1/2} \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \right\}$$

$$(15) \quad \tilde{M}_r \leq r+1.$$

Si E est un espace de Hilbert, alors pour tout G :

$$(16) \quad M(G) = 1.$$

Si E est de dimension finie n, alors pour tout G :

$$(17) \quad M(G) \leq \frac{1}{2} (\sqrt{n} + 1).$$

Nous ne donnons pas la démonstration de ces résultats dont on trouve un exposé dans [9] . Notons que les bornes s et r+1 de (14), (15) sont une conséquence du théorème d'Auerbach (2.3.4 lemme 4).

Si nous notons $\gamma(s)$ le 2ème nombre dans (14), on a

$$\gamma(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} s + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

et pour $s = 2$, la borne de (14) peut être prise égale à $3/2$.

Cela permet d'énoncer finalement :

COROLLAIRE 3. Pour des espaces E et F quelconques, on a, quel que soit A dans $\mathcal{L}(E, F)$:

$$(18) \quad \alpha_s(A) \leq \tilde{\delta}_s(A) \leq \min \{s, \gamma(s)\} \cdot \alpha_s(A)$$

$$(19) \quad \tilde{\alpha}_{r+1}(A) \leq \delta_r(A) \leq (r+1) \cdot \tilde{\alpha}_{r+1}(A).$$

Si E est un espace de Hilbert, alors, quel que soit l'espace F, on a pour tout A dans $\mathcal{L}(E, F)$:

$$(20) \quad \delta_G(A) = \sup_{x \in G} \frac{\psi(Ax)}{\|x\|}$$

$$(21) \quad \tilde{\delta}_s(A) = \alpha_s(A)$$

$$(22) \quad \delta_r(A) = \tilde{\alpha}_{r+1}(A).$$

Si E est de dimension finie n, alors, quel que soit l'espace F, et pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$(23) \quad \alpha_{n-r}(A) \leq \delta_r(A) \leq \min \{r+1, n-r, \frac{1}{2}(\sqrt{n+1})\} \alpha_{n-r}(A).$$

DEMONSTRATION. Tous les résultats sont une simple remise en forme de ceux qui précèdent. Pour (23), où E est de dimension n, il faut tenir compte des égalités :

$$\tilde{\delta}_{n-r} = \delta_r \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_{r+1} = \alpha_{n-r}.$$



Exemple.

Pour l'opérateur de décalage T vu en 4.2.2.3, $\delta_G(T)$, $\tilde{\delta}_s(T)$ et $\delta_r(T)$ sont égaux à 1 quels que soient G, s et r.

Remarques.

- Les égalités (20), (21), (22), vraies quels que soient G, s, et r sont caractéristiques d'un espace de Hilbert. On peut évidemment avoir ces égalités pour certains A, G, s ou r dans le cas d'autres espaces ; une condition suffisante pour cela est que $M(G)$, M_s ou \tilde{M}_r soit égal à 1. Si $M(G) = 1$ peut être vérifié, les égalités $M_s = 1$ ou $\tilde{M}_r = 1$ sont beaucoup plus exigeantes. De fait l'égalité $M_2 = 1$ semble impliquer que l'espace est préhilbertien. Si la valeur $\alpha_s(A)$ est atteinte pour un certain sous-espace G_s , alors il suffit d'avoir $M(G_s) = 1$ pour assurer l'égalité $\tilde{\delta}_s(A) = \alpha_s(A)$; dans ce cas, on peut en effet, se passer de la majoration uniforme qui a été faite en utilisant M_s .

- En général, pour ϕ quelconque, il n'y a effectivement pas égalité dans (10), (11), (12). Nous avons construit un tel exemple dans R^3 [32].

Nous pouvons préciser les remarques précédentes en énonçant :

COROLLAIRE 4. Dans $\mathcal{L}(E, F)$, on a les implications suivantes, valables pour tout A :

$$M(G) = 1 \Rightarrow \delta_G(A) = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} = \inf_{P} \{ \phi(AP) ; P \text{ proj. sur } G \}$$

$$M_s(\phi) = 1 \Rightarrow \tilde{\delta}_s(A) = \alpha_s(A) = \inf_{P} \{ \phi(AP) ; P \text{ proj. de rang } s \}$$

$$\tilde{M}_r(\phi) = 1 \Rightarrow \tilde{\xi}_r(A) = \tilde{\alpha}_{r+1}(A) = \inf_{P} \{ \phi(AP) ; P \text{ proj., dim Ker } (P) = r \}.$$

DEMONSTRATION. Nous avons noté ϕ la norme de $\mathcal{L}(E, F)$ pour alléger l'écriture. Les premières égalités se déduisent directement de (10), (11), (12). Les secondes sont une conséquence de la fin de la démonstration de la Proposition 8.



- Remarquons que la propriété correspondant aux secondes égalités est vérifiée par les normes de von Neumann ; il suffit de considérer l'égalité (35) de 4.1.5 pour s'en convaincre.

Pour $\mathcal{L}(E, F)$, M_1 est égal à 1 quel que soit ϕ ; donc, pour la distance aux applications non injectives, il suffit de minimiser $\phi(AP)$, P projection sur une droite.

- Nous allons étudier la possibilité d'extension des résultats qui précèdent au cas des normes de rang 1, qui vérifient par définition

$$\phi(A) = \sup_{x \in E} \phi_x(Ax).$$

4.3.3. - Cas des normes de rang 1.

Les minoration obtenues en 4.3.1 sont valables pour tout espace (\mathcal{A}, ϕ) . Les majorations obtenues pour $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E, F)$ reposent sur la forme de la norme qui s'écrit :

$$\phi(A) = \sup_{x \in E} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} = \sup_{x \in E} \phi_x(Ax).$$

Tout espace (\mathcal{A}, ϕ) ayant la même propriété, c'est-à-dire vérifiant :

$$(24) \quad \forall A \in \mathcal{A} : \phi(A) = \sup_{x \in E} \phi_x(Ax)$$

sera dit normé par une norme de rang 1 (extension du cas fini étudié en 3.3).

Dans ce cas, des majorations de même type que celles de $\mathcal{L}(E, F)$, peuvent être obtenues.

Cependant, l'expression des majorants sera moins explicite. La clef de la démonstration pour obtenir les majorations était constituée par les inégalités (13'). Le problème repose sur la construction d'un majorant $M_A(P)$ tel que :

$$(25) \quad \phi(AP) = \sup_{x \in E} \phi_x(APx) \leq M_A(P) \sup_{x \in E} \phi_{Px}(APx) = M_A(P) \sup_{u \in G} \phi_u(Au)$$

si P est une projection sur G.

Pour $\mathcal{L}(E, F)$, nous avons majoré $M_A(P)$ par le majorant uniforme $S_\phi(P)$. Dans le cas d'une norme de rang 1 plus générale, on peut donner le majorant uniforme ainsi défini :

$$(26) \quad M(P) = \sup_{x, y \in E} \frac{\phi_x(y)}{\phi_{Px}(y)}$$

valable si ϕ_x est défini sur E. Pour $\mathcal{L}(E,F)$, on a $S_\phi(P) = M(P)$, et la fonction entre parenthèses ne dépend pas de y.

En remplaçant $S_\phi(P)$ par $M(P)$, et

$$\frac{\phi(Ax)}{\phi(x)}$$

par $\phi_x(Ax)$, tous les résultats de la Proposition 8 peuvent être étendus au cas des normes de rang 1.

Bien que l'égalité entre $\tilde{\delta}_1$ et α_1 soit vraie pour toute norme, cela n'implique pas ici $M_1 = 1$, comme pour $\mathcal{L}(E,F)$. Nous pouvons donner une caractérisation des normes de rang 1 qui ont cette propriété, dans le cas de l'espace $\mathcal{M}(m,n)$. Mais le résultat qui suit peut être étendu à d'autres espaces .

PROPOSITION 9. Pour toute norme de rang 1 sur $\mathcal{M}(m,n)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(27) \quad \dim G = 1 \Rightarrow \inf_P \{M(P) ; P \text{ proj. sur } G\} = 1$$

$$(28) \quad \forall u \in C^n, \forall y \in C^m : \phi_u(y) = \inf_M \{\phi(M) ; M \in \mathcal{J}_1, Mu = y\}$$

$$(29) \quad \forall y \in C^m - \{0\}, x \mapsto \frac{1}{\phi_x(y)} \text{ est une norme } \phi^y \text{ et :}$$

$$\forall u \in C^n - \{0\}, \exists v \in C^m - \{0\} \text{ t.q. } (\phi^y)^*(v)\phi^y(u) = 1, \forall y \neq 0$$

DEMONSTRATION. Soit u un vecteur générateur de G ; toute projection sur G est de la forme

$$P = \frac{uv^*}{v^*u} .$$

Compte tenu de (26), la propriété (27) est équivalente à :

$$(30) \quad l = \inf_v \sup_x \frac{|v^* x| \phi_x(y)}{|v^* u| \phi_u(y)} = \inf_v \frac{l}{\phi_u(y)} \sup_x \phi_x \left(\frac{yv^*}{v^* u} x \right).$$

la norme ϕ étant de rang 1 :

$$\sup_x \phi_x \left(\frac{yv^*}{v^* u} x \right) = \phi \left(\frac{yv^*}{v^* u} \right)$$

et

$$\inf_v \phi \left(\frac{yv^*}{v^* u} \right) \quad \text{est égal à } \phi_u(y) \text{ si et seulement si}$$

(27) est vérifié, et est toujours égal à

$$\inf_M \{ \phi(M) ; M \in \mathcal{J}_1, Mu = y \}.$$

Ainsi l'équivalence entre (27) et (28) est établie.

On sait (Proposition 4 de 3.3) que ϕ^y est une norme si (28) est vérifiée. On peut écrire (30) sous la forme :

$$l = \inf_v \sup_x \frac{|v^* x| \phi^y(u)}{\phi^y(x) |v^* u|} = \inf_v \frac{\phi^{y^*}(v) \phi^y(u)}{|v^* u|};$$

l'inf étant atteint, la propriété (28) est équivalente à (29).



Remarque.

Les conditions (27) à (29) sont très restrictives ; en effet, la propriété (29) entraîne, au moins en supposant ϕ^y différentiable pour tout y , que toutes les normes ϕ^y sont proportionnelles.

4.4 - LIENS ENTRE FONCTIONNELLES DE A, A* et \tilde{A} .

4.4.1 - Introduction.

Dans toute cette partie, \mathcal{A} est l'espace $\mathcal{L}(E, F)$, avec la norme habituelle construite sur les normes ϕ , ψ de E et F.

On notera \tilde{A} la bijection associée à A dans la décomposition canonique :

$$(1) \quad E \xrightarrow{\tilde{\chi}_A} E/\text{Ker } A \xrightarrow{\tilde{A}} \text{Im } A .$$

On sait que la continuité de A entraîne celle de \tilde{A} , l'espace $E/\text{Ker } A$ étant normé par ϕ , norme du quotient (Ker A est fermé d'après la continuité de A).

Lorsque E et F sont des espaces de Banach, les relations suivantes sont vérifiées :

$$(2) \quad \tilde{A}^{-1} \text{ continue} \Leftrightarrow \text{Im } A \text{ fermé} \Leftrightarrow \text{Im } A^* \text{ fermé}$$

$$(3) \quad \text{Im } A \text{ fermé} \Rightarrow \text{Im } A^* = \text{Ker}^\perp A,$$

ce qui implique en particulier que $(A^*)^{-1}$ et \tilde{A}^{-1} sont continues, ou pas, simultanément. Dans ce cas, nous utiliserons la notion de conorme [10], [26] définie sur $\mathcal{L}(E, F)$ par

$$(4) \quad \begin{cases} q(A) = 0 & \text{si } \tilde{A}^{-1} \text{ non continue} \\ q(A) = \frac{1}{\|\tilde{A}^{-1}\|} & \text{si } \tilde{A}^{-1} \text{ continue.} \end{cases}$$

On a les égalités :

$$(5) \quad q(A) = q(\tilde{A}) = \inf_{\tilde{u} \neq 0} \frac{\psi(\tilde{A}\tilde{u})}{\phi(\tilde{u})} = \alpha_1(\tilde{A})$$

en notant \tilde{u} les éléments de $E/\text{Ker } A$, et l'expression utile équivalente :

$$(6) \quad q(A) = \inf_{x \notin \text{Ker } A} \frac{\psi(Ax)}{d(x; \text{Ker } A)} .$$

L'égalité suivante sera également utile :

$$(7) \quad q(A^*) = q(A) ,$$

de même que les deux égalités, dont la preuve est simple :

$$(8) \quad \forall y \in \text{Im } A : \inf \{ \phi(x) ; Ax = y \} = \| \tilde{A}^{-1} y \|$$

$$(9) \quad \forall \ell \in \text{Im } A^* : \inf \{ \psi^*(f) ; A^* f = \ell \} = \| \tilde{A}^{*-1} \ell \| .$$

Etablissons enfin le résultat suivant :

LEMME 2. Pour tout A de $\mathcal{L}(E, F)$, E et F espaces vectoriels normés, on a les inégalités :

$$(10) \quad d(A; \{M; \text{Im}(M) \subset H\}) \geq d(A^*; \{M^*; \text{Ker } M^* \supset H^\perp\})$$

$$(11) \quad d(A^*; \{M^*; \text{Im}(M^*) \subset G'\}) \geq d(A; \{M; \text{Ker } M \supset G'^\perp\})$$

où H et G' sont des sous-espaces de F et E' respectivement.

DEMONSTRATION. Elle repose sur les relations (8) et (9) de 4.1 et sur l'égalité $\|A-M\| = \|A^*-M^*\|$ quels que soient A et M . On a les implications :

$$\text{Im}(M) \subset H \Rightarrow \text{Im}^\perp(M) = \text{Ker } M^* \supset H^\perp$$

$$\text{Im}(M^*) \subset G' \Rightarrow \text{Im}^\perp(M^*) = \text{Ker } M \supset G'^\perp$$

qui conduisent aux inclusions :

$$\{M \in \mathcal{L}(E, F) ; \text{Im } M \subset H\} \subset \{M \in \mathcal{L}(E, F) ; \text{Ker } M^* \supset H^\perp\}$$

$$\{M \in \mathcal{L}(E, F) ; \text{Im } M^* \subset G'\} \subset \{M \in \mathcal{L}(E, F) ; \text{Ker } M \supset G'^\perp\}$$

les inégalités (10) et (11) résultent alors directement de l'égalité des normes de $A-M$ et A^*-M^* .



4.4.2 - Expressions des α_k par dualité.

PROPOSITION 10. Pour tout A appartenant à $\mathcal{L}(E, F)$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$(12) \quad k \geq 1 : \alpha_k(A) = \inf_{\substack{G \\ \dim G=k}} \sup_{\ell \in \text{Im } A^*} \frac{d(\ell, G^\perp)}{\|\tilde{A}^{*-1} \ell\|}$$

$$(13) \quad k \geq 1 : \tilde{\alpha}_k(A) = \inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=k-1}} \sup_{\ell \in \text{Im } A^*} \frac{d(\ell, G)}{\|\tilde{A}^{*-1} \ell\|}$$

DEMONSTRATION. L'expression de $\psi(Ax)$ par dualité

$$\psi(Ax) = \sup_{f \in F \setminus \{0\}} \frac{|\langle Ax, f \rangle|}{\psi^*(f)}$$

conduit à :

$$\sup_{x \in G} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} = \sup_{f \in F'} \frac{1}{\psi^*(f)} \sup_{x \in G} \frac{|\langle x, A^* f \rangle|}{\phi(x)},$$

qui peut encore s'écrire, d'après 4.1.(4) :

$$\sup_{x \in G} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} = \sup_{f \in F'} \frac{d(A^* f, G^\perp)}{\psi^*(f)}.$$

Cette dernière expression peut être mise sous la forme :

$$\sup_{\ell \in \text{Im } A^*} \frac{d(\ell, G^\perp)}{\inf_f \{\psi^*(f) ; A^* f = \ell\}}.$$

Les relations (12) et (13) résultent de (9) et des définitions des fonctionnelles α_k et $\tilde{\alpha}_k$.



Remarque.

Dans le cas où \mathcal{A} est égal à $\mathcal{L}(H)$, avec H espace de Hilbert, (12) peut s'écrire :

$$\alpha_k(A) = \inf_{\substack{G' \text{ fermé} \\ \text{codim } G'=k}} \sup_{v \in \text{Im } A^*} \frac{\|(I-P_{G'})v\|}{\|(A^+)^*v\|}$$

où A^* désigne l'adjoint de A , $P_{G'}$ la projection orthogonale sur G' et A^+ la pseudo-inverse de A .

4.4.3 - Expressions en termes de largeur et diamètre d'ordre fixé.

Si Q est un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E , la largeur d'ordre k de Q (k entier ≥ 0) est définie par [30],[49] :

$$(14) \quad d_k^E(Q) = \inf_{\substack{G \\ \text{dim } G=k}} \sup_{x \in Q} d^E(x,G)$$

où l'inf est pris sur l'ensemble des sous-espaces de dimension k et où $d^E(x,G)$ est la distance de x à G .

Le diamètre d'ordre k de Q est défini par la formule [49] :

$$(15) \quad \tilde{d}_k^E(Q) = \inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=k}} \sup_{x \in G \cap Q} \|x\|_E.$$

Ces notions étant précisées, nous pouvons énoncer :

COROLLAIRE 5.

(i) Si \mathcal{F}_A^* désigne l'ensemble $\{l \in \text{Im } A^* ; \|A^{*-1}l\| = 1\}$, sa largeur d'ordre k est égale à $\tilde{\alpha}_{k+1}(A)$:

$$(16) \quad k \geq 0 \quad : \quad \tilde{\alpha}_{k+1}(A) = d_k^{E'}(\mathcal{F}_A^*)$$

(ii) la fonctionnelle $\tilde{\beta}_{k+1}(A)$ vérifie l'égalité

$$(17) \quad k \geq 0 \quad : \quad \tilde{\beta}_{k+1}(A) = \frac{1}{d_k^{E'}(A^{-1}(B_F))}$$

où B_F est la boule unité de l'espace F .

Remarque : Précisons que (16), (17) sont valables si $\tilde{\alpha}_{k+1}$ et $\tilde{\beta}_{k+1}$ sont définies en limitant l'inf aux sous-espaces fermés.

DEMONSTRATION. Reprenant la formule (13), nous pouvons écrire :

$$\sup_{\ell \in \text{Im} A^*} \frac{d(\ell, G^\perp)}{\|A^{*-1}\ell\|} = \sup_{\ell \in \mathcal{F}_A^*} d(\ell, G^\perp)$$

et $\tilde{\alpha}_{k+1}(A)$ s'obtient en prenant l'inf pour G fermé de codimension k . Pour un tel sous-espace, on a :

$$\dim G^\perp = \dim (E/G)' = \dim (E/G) = k$$

d'après l'isométrie entre les espaces G^\perp et $(E/G)'$, et la définition de la codimension. Pour prouver (16), il reste à montrer que tout sous-espace G' de dimension finie k dans E' est de la forme G^\perp , avec G sous-espace fermé, de codimension k , dans E . Le sous-espace G' est engendré par $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$; on a donc

$$(G')^\perp = \bigcap_{i=1 \text{ à } k} \text{Ker } \ell_i .$$

En posant $G = (G')^\perp$, on a

$$\dim (E/G) = k ,$$

puisque'il y a isomorphisme entre E/G et C^k . Ainsi G est fermé, avec

codim $G = k$; d'après ce qui précède, G^\perp est de dimension k . Comme on a l'inclusion $(G'^\perp)^\perp \supset G'$, on en déduit l'égalité $G' = G^\perp$. L'égalité (16) est établie.

Pour (17), on a les égalités :

$$\tilde{\beta}_{k+1}(A) = \sup_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=k}} \inf_{x \in G} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} = \frac{1}{\inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=k}} \sup_{x \in G} \frac{\phi(x)}{\psi(Ax)}}$$

valables en admettant la valeur ∞ au dénominateur (sinon, il suffit d'écrire (17) pour $\tilde{\beta}_{k+1}(A) \neq 0$). Ce dénominateur s'écrit :

$$\inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=k}} \sup_{x \in G \cap A^{-1}(B_F)} \phi(x) = d_k^E(A^{-1}(B_F))$$



Avant d'énoncer le corollaire suivant, introduisons la notation :

$$(18) \quad G_1, G_2 \text{ sous-espaces de } E \rightarrow \sigma(G_1, G_2) = \sup_{x \in G_1 - \{0\}} \frac{d(x, G_2)}{\|x\|}$$

Notons la propriété suivante :

$$(19) \quad \sigma(G_1, G_2) = \sigma(G_2^\perp, G_1^\perp)$$

qui est une conséquence directe de 4.1.(3), (4).

COROLLAIRE 6. Pour toute application A de rang fini r , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(20) \quad \tilde{\alpha}_r(A) \geq q(A)$$

Si E, F sont des espaces de Banach et si Ker A est de dimension finie s, alors :

$$(21) \quad \alpha_{s+1}(A) \geq q(A) \quad .$$

DEMONSTRATION. Le point de départ est constitué par les inégalités :

$$(22) \quad q(A) \cdot \sigma(\text{Im } A^*, G^\perp) \leq \sup_{x \in G} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} \leq \sigma(\text{Im } A^*, G^\perp) \cdot \|\tilde{A}\|$$

qui résultent de la Proposition 10 et de la définition de $q(A)$, $\|\tilde{A}\|$. Seule l'inégalité de gauche va fournir un résultat non trivial. Elle conduit d'abord à :

$$\tilde{\alpha}_r(A) \geq \inf_{\dim G^\perp = r-1} \sigma(\text{Im } A^*, G^\perp) \cdot q(A).$$

Si A est de rang fini r, il en est de même de A^* et $\dim(\text{Im } A^*) = r$. En utilisant la propriété :

$$(23) \quad \dim G_1 = \dim G_2 + 1 \Rightarrow \sigma(G_1, G_2) = 1$$

conséquence, par exemple, du fait que la largeur d'ordre k de l'intersection de la boule unité avec un sous-espace de dimension k+1 est égale à 1 [49], on déduit (20).

Pour montrer (21), plaçons-nous dans le cas de deux espaces de Banach E et F. Si Im A n'est pas fermé, $q(A)$ est nul et (21) est vérifié. Si Im A est fermé, alors $\text{Im } A^* = \text{Ker}^\perp A$ d'après (3), d'où l'égalité :

$$\sigma(\text{Im } A^*, G^\perp) = \sigma(G, \text{Ker } A) ,$$

conséquence de (19). L'inégalité (21) se déduit en utilisant (23).



Remarque.

On peut déduire de la même manière d'autres inégalités, par exemple :

$$\tilde{\alpha}_k(A) \geq q(A) \cdot d_{k-1}^{E'}(\text{Im } A^* \cap B_{E,r}).$$

4.4.4 - Comparaison des valeurs singulières de A et A*.

PROPOSITION 11.

(i) Les distances de A et A* aux applications de rang inférieur ou égal à r, exprimées respectivement dans $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(F',E')$ sont égales :

$$(24) \quad \forall r \geq 0, \delta_r(A) = \delta_r(A^*).$$

(ii) Les valeurs singulières de A et A*, exprimées de la même manière, vérifient les propriétés :

$$E \text{ espace de Hilbert} \Rightarrow \tilde{\alpha}_k(A) \geq \tilde{\alpha}_k(A^*), \quad k \geq 1$$

$$F \text{ espace de Hilbert} \Rightarrow \tilde{\alpha}_k(A^*) \geq \tilde{\alpha}_k(A), \quad k \geq 1$$

$$E \text{ et } F \text{ de Hilbert} \Rightarrow \tilde{\alpha}_k(A^*) = \tilde{\alpha}_k(A) = \tilde{\alpha}_k(A'), \quad k \geq 1$$

où A' est l'adjointe de A ($A' \in \mathcal{L}(F,E)$).

DEMONSTRATION.

(i) On utilise les inégalités (10) et (11) du lemme 2. De (10), on déduit :

$$\delta_r(A) = \inf_{\dim H=r} d(A, \{M; \text{Im } M \subset H\}) \geq \inf_{\dim H=r} d(A^*, \{M^*; \text{Ker } M^* \supset H^\perp\})$$

L'isométrie de F'/H^\perp sur H' implique que H^\perp est la codimension r ,
d'où :

$$\delta_r(A) \geq \inf_{\substack{\text{codim } H_1=r \\ H_1 \text{ fermé}}} d(A^*, \{N ; \text{Ker } N \supset H_1\}) = \delta_r(A^*)$$

Pour montrer l'inégalité $\delta_r(A^*) \geq \delta_r(A)$, on procède de la même manière
à partir de (11) :

$$\delta_r(A^*) \geq \inf_{\text{dim } G'=r} d(A, \{M ; \text{Ker } M \supset (G')^\perp\}).$$

D'après ce qui a été montré lors de la démonstration du Corollaire 5,
 $\text{codim } (G')^\perp$ est égal à r ; donc :

$$\delta_r(A^*) \geq \inf_{\substack{G \text{ fermé} \\ \text{codim } G=r}} d(A, \{M ; \text{Ker } M \supset G\}) = \delta_r(A).$$

(ii) Les trois propriétés sont conséquences de (i) et de (19), (22)
de 4.3. En effet, si E est un espace de Hilbert, alors :

$$\forall r \geq 0, \delta_r(A) = \tilde{\alpha}_{r+1}(A)$$

et

$$\tilde{\alpha}_{r+1}(A) = \delta_r(A^*) \geq \tilde{\alpha}_{r+1}(A^*).$$

Pour la deuxième propriété, F' est isométrique à l'espace de Hilbert F ,
et donc la propriété (22) de 4.3 est vraie pour A^* .

Ces deux propriétés impliquent la première égalité de la troisième.
La seconde égalité résulte du fait que A' s'écrit :

$$A' = j_E A^* j_F^{-1}$$

où j_E et j_F sont les isométries de E' dans E et F' dans F respectivement. L'égalité entre $\tilde{\alpha}_k(A^*)$ et $\tilde{\alpha}_k(A')$ est une conséquence de :

$$\frac{\phi^*(A^*\ell)}{\psi^*(\ell)} = \frac{\|j_E(A^*\ell)\|_E}{\|j_F(\ell)\|_F} = \frac{\|A'(j_F \ell)\|_E}{\|(j_F \ell)\|_F}$$

et du fait qu'il y a correspondance bijective entre les sous-espaces de codimension k dans F' et dans F .



4.4.5 - Conorme et valeurs singulières.

Commençons par établir le résultat suivant qui se trouve dans [10] :

LEMME 3. Pour tout A appartenant à $\mathcal{L}(E, F) - \{0\}$, où E et F sont des espaces de Banach, la distance à l'ensemble des applications dont le noyau contient strictement $\text{Ker } A$ et la distance à l'ensemble des M telles que $\overline{\text{Im } M}$ est strictement contenue dans $\overline{\text{Im } A}$ sont égales à la conorme de A :

$$(25) \quad q(A) = d(A, \{M \in \mathcal{L}(E, F) ; \text{Ker } M \supset \text{Ker } A\})$$

strict

$$(26) \quad q(A) = d(A, \{M \in \mathcal{L}(E, F) ; \overline{\text{Im } M} \subset \overline{\text{Im } A}\})$$

strict

DEMONSTRATION. Appelons $\delta(A)$ et $\delta'(A)$ les seconds membres de (25) et (26). Montrons d'abord les inégalités :

$$\delta(A) \leq q(A^*) \quad , \quad \delta'(A) \leq q(A^*) \quad .$$

Pour cela, considérons les applications S construites à partir de A :

$$(27) \quad S : x \mapsto Ax - \frac{\langle Ax, \ell \rangle}{\langle Au, \ell \rangle} Au$$

où u et ℓ sont respectivement dans E et F' , avec $\langle Au, \ell \rangle \neq 0$. Chaque application S , qui peut s'écrire

$$S = A - A \frac{u \otimes \ell}{\langle Au, \ell \rangle} A,$$

est telle que son noyau contient strictement $\text{Ker } A$ ($\text{Ker } S = \text{Ker } A \oplus [u]$) et $\overline{\text{Im } S}$ est strictement contenue dans $\overline{\text{Im } A}$ ($\text{Im } S = \text{Im } A \cap \text{Ker } \ell$).

On a donc :

$$\delta(A), \delta'(A) \leq \inf_{u, \ell} \left\| A \frac{u \otimes \ell}{\langle Au, \ell \rangle} A \right\| = \inf_{u, \ell} \frac{\psi(Au) \phi^*(A^* \ell)}{|\langle Au, \ell \rangle|}$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} \inf_{u, \ell} \frac{\psi(Au) \phi^*(A^* \ell)}{|\langle Au, \ell \rangle|} &= \inf \frac{\phi^*(A^* \ell)}{\sup_u \frac{|\langle Au, \ell \rangle|}{\psi(Au)}} \\ \sup_u \frac{|\langle Au, \ell \rangle|}{\psi(Au)} &= \sup_{y \in \text{Im } A} \frac{|\langle y, \ell \rangle|}{\psi(y)} = d(\ell, \text{Ker } A^*) \end{aligned}$$

d'après 4.1.(4) et (8). Ainsi l'on a l'égalité :

$$\inf_{u, \ell} \left\| A \frac{u \otimes \ell}{\langle Au, \ell \rangle} A \right\| = \inf_{\ell \in \text{Ker } A^*} \frac{\phi^*(A^* \ell)}{d(\ell, \text{Ker } A^*)}$$

expression qui est bien égale à $q(A^*)$ d'après (6).

Pour montrer l'inégalité $\delta(A) \geq q(A)$, remarquons que $\delta(A)$ peut s'écrire :

$$\delta(A) = \inf_{u \notin \text{Ker } A} d(A; \{M; \text{Ker } M \supset \text{Ker } A \oplus [u]\}).$$

On a donc :

$$\delta(A) \geq \inf_{u \notin \text{Ker } A} \sup_{x \in \text{Ker } A \oplus [u]} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)}$$

où le sup est égal à :

$$\sup_{x' \in \text{Ker } A} \frac{\psi(Au)}{\phi(u+x')} = \frac{\psi(Au)}{\inf_{x' \in \text{Ker } A} \phi(u+x')} = \frac{\psi(Au)}{d(u, \text{Ker } A)} .$$

On a donc bien $\delta(A) \geq q(A)$.

Avec l'égalité de $q(A)$ et $q(A^*)$ (7), on conclut

$$\delta(A) = q(A) .$$

Pour $\delta'(A)$, on remarque, comme en (10) :

$$\delta'(A) \geq d(A^*, \{M^* ; \text{Ker } M^* \supset \text{Ker } A^*\})$$

strict

soit

$$\delta'(A) \geq \delta(A^*) .$$

L'inégalité $\delta(A^*) \geq q(A^*)$ s'établissant comme pour A , le lemme est démontré.



Remarques.

1) Les distances définies en (25), (26) sont donc égales à la distance à l'ensemble des applications S définies en (27). Remarquons que ce type d'applications dont le noyau a "une dimension de plus" que celui de A , et l'image "une dimension de moins" que celle de A , ont été souvent utilisées en calcul matriciel ; voir par exemple [17].

2) La distance d'une application injective à l'ensemble des applications non injectives est donnée par

$$q(A) = \inf_{x \neq 0} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} .$$

3) Si E et F sont des espaces de Hilbert, alors pour tout A tel que $q(A) \neq 0$, on a

$$q(A) = \frac{1}{\|A^+\|}$$

où A^+ est la pseudo-inverse ; voir par exemple [24].

Nous pouvons énoncer comme conséquence du lemme 3 les propriétés suivantes :

COROLLAIRE 7. Dans le même cadre que pour le lemme 3, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(28) \quad \dim (\text{Ker } A) = s \geq 0 \Rightarrow \tilde{\delta}_{s+1}(A) = \alpha_{s+1}(A) = q(A) = \alpha_1(\tilde{A})$$

$$(29) \quad \text{rang } (A) = r \geq 0 \Rightarrow \delta_{r-1}(A) = \tilde{\alpha}_r(A) = q(A) = \alpha_1(\tilde{A})$$

DEMONSTRATION. L'égalité $q(A) = \alpha_1(\tilde{A})$ a déjà été donnée en (5). Le lemme implique :

$$\tilde{\delta}_{s+1}(A) \leq q(A) \quad , \quad \delta_{r-1}(A) \leq q(A) .$$

De la Proposition 8 découle :

$$\alpha_{s+1}(A) \leq \tilde{\delta}_{s+1}(A) \quad , \quad \tilde{\alpha}_r(A) \leq \delta_{r-1}(A)$$

Enfin le Corollaire 6 permet de prouver (28) et (29), grâce aux

inégalités :

$$q(A) \leq \alpha_{s+1}(A) , q(A) \leq \tilde{\alpha}_r(A) .$$



Les égalités (28), (29) donnent des relations entre les valeurs singulières de A et celles de \tilde{A} , évaluées dans $\mathcal{L}(E/\text{Ker } A, \text{Im } A)$ avec la fonctionnelle

$$\frac{\psi(\tilde{A}u)}{\tilde{\phi}(u)} .$$

Nous allons établir des inégalités liant plus généralement les valeurs singulières de A et \tilde{A} .

4.4.6 - Comparaison des valeurs singulières de A et \tilde{A} .

4.4.6.1 - Cas des $\alpha, \tilde{\alpha}$.

Les résultats qui suivent sont en partie fondés sur la comparaison des dimensions de sous-espaces de $E/\text{Ker } A$ et de sous-espaces correspondants dans E.

Si H est un sous-espace supplémentaire quelconque de $\text{Ker } A$ dans E, il est isomorphe à $E/\text{Ker } A$:

$$H \oplus \text{Ker } A = E , H \leftrightarrow E/\text{Ker } (A) .$$

Ainsi, tout sous-espace G' de $E/\text{Ker } A$ est isomorphe à un sous-espace G de H ; ce sous-espace G aura donc même dimension ou même codimension dans H que G' dans $E/\text{Ker } A$:

$$G' \subset (E/\text{Ker } A) \rightarrow G \subset H$$

$$(30) \quad \text{avec } \dim G = \dim G' , \text{codim}_H G = \text{codim } G' .$$

Pour tout élément \dot{u} de G' , on a donc un élément de $G \oplus \text{Ker } A$.

Nous pouvons énoncer les relations annoncées :

PROPOSITION 12. Les valeurs singulières de A dans (E, F) et celles de la bijection \tilde{A} associée dans $\mathcal{L}(E/\text{Ker } A, \text{Im } A)$, sont liées par les relations suivantes, qui dépendent du noyau $\text{Ker } A$:

(i) pour $\text{Ker } A$ de dimension finie s :

$$(31) \quad \forall k \geq 1, \quad \alpha_k(\tilde{A}) \geq \alpha_{k+s}(A)$$

$$(32) \quad \forall k \geq 1, \quad \tilde{\alpha}_k(\tilde{A}) \geq \tilde{\alpha}_k(A)$$

(ii) pour A de rang fini r , on a les deux propriétés équivalentes :

$$(33) \quad 1 \leq k \leq r \Rightarrow \alpha_k(\tilde{A}) \geq \alpha_{r-k+1}(A)$$

$$(34) \quad 1 \leq k \leq r \Rightarrow \tilde{\alpha}_k(\tilde{A}) \geq \tilde{\alpha}_k(A)$$

DEMONSTRATION. D'après (30) et la remarque qui le suit, nous pouvons écrire :

$$(35) \quad \sup_{\dot{u} \in G'} \frac{\psi(A\dot{u})}{\tilde{\phi}(\dot{u})} = \sup_{u \in G \oplus \text{Ker } A} \frac{\psi(Au)}{d(u, \text{Ker } A)}$$

$$\geq \sup_{u \in G \oplus \text{Ker } A} \frac{\psi(Au)}{\phi(u)}$$

où la dernière inégalité est une simple conséquence de la relation $d(u, \text{Ker } A) \leq \phi(u)$.

Ainsi si l'on prend l'inf dans (35) pour G' de dimension ou codimension fixée k dans $E/\text{Ker } A$, on pourra déduire que $\alpha_k(\tilde{A})$ ou $\tilde{\alpha}_{k+1}(\tilde{A})$ est supérieur ou égal à $\alpha_\ell(A)$ ou $\tilde{\alpha}_{\ell+1}(A)$ selon que la dimension ou la codimension de $G \oplus \text{Ker } A$ est ℓ .

Nous résumons ci-dessous les dimensions obtenues dans les différents cas :

$$(36) \quad \begin{array}{l} \underline{\dim (\text{Ker } A) = s} : \\ \underline{\text{codim } (\text{Ker } A) = r} : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dim G' = k \Rightarrow \dim (G \oplus \text{Ker } A) = k+s \\ \text{codim } G' = k \Rightarrow \text{codim } (G \oplus \text{Ker } A) = k \\ \dim G' = k \Rightarrow \text{codim } (G \oplus \text{Ker } A) = r-k \\ \text{codim } G' = k \Rightarrow \text{codim } (G \oplus \text{Ker } A) = k \end{array} \right.$$

avec la relation $k \leq r$ dans ces deux derniers cas. Ces relations s'obtiennent en utilisant la propriété suivante :

$$(37) \quad G \subset H \subset E \Rightarrow \text{codim}_E G = \text{codim}_H G + \text{codim}_E H.$$

Les inégalités (31) à (34) s'obtiennent directement en considérant successivement les quatre cas de (36) et en appliquant les définitions des α , $\tilde{\alpha}$. Les égalités (33) et (34) sont en fait identiques puisque, \tilde{A} étant une application définie sur $E/\text{Ker } A$, de dimension finie r , on a :

$$\alpha_k(\tilde{A}) = \tilde{\alpha}_{r+1-k}(\tilde{A}).$$



Remarques.

- D'après (28), (29), il y a égalité dans (31) et (33) pour $k = 1$. Mais pour k supérieur à 1, il n'y a pas égalité en général, sauf dans des cas bien particuliers (par exemple pour A matrice diagonale sur C^n muni de la norme hilbertienne).

- Il n'y a pas de généralisation de (28), (29) au cas $k > 1$ qui s'exprime simplement. En appliquant récursivement le processus de construction d'une application dont le noyau contient celui de A , utilisé en (27),

on peut cependant définir une suite d'applications :

$$(38) \quad \begin{aligned} A_1 &= A \\ i \leq 1 : A_{i+1} &= A_i - A_i \frac{u_i \otimes \ell_i}{\langle Au_i, \ell_i \rangle} \quad \text{avec } \langle Au_i, \ell_i \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

où les éléments $\{u_i\}$ et $\{\ell_i\}$ forment des systèmes linéairement indépendants. Les A_i satisfont les inclusions :

$$\text{Ker}(A_{i+1}) \supset \text{Ker}(A_i) \quad , \quad \text{Im}(A_{i+1}) \subset \text{Im}(A_i)$$

avec "une dimension de différence".

Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(39) \quad \dim(\text{Ker } A) = s \Rightarrow \alpha_{s+k}(A) \leq \tilde{\delta}_{s+k}(A) \leq \|A - A_{k+1}\|$$

$$(40) \quad \text{rang}(A) = r \Rightarrow \tilde{\alpha}_{k+1}(A) \leq \delta_k(A) \leq \|A_{k+1}\|$$

et constituent une généralisation de (12), (13) ; mais les bornes supérieures n'ont pas de minimisation simple. L'inf de $\|A - A_{k+1}\|$ suivant toutes les décompositions possibles est majoré par

$$\sum_{i=1}^k \text{conorme}(A_i).$$

4.4.6.2 - Cas des $\beta, \tilde{\beta}$.

La relation (35) est bien vérifiée si l'on remplace les sup par des inf ; mais la méthode employée pour les α ne peut être appliquée ici où l'on obtiendrait l'inégalité

$$\sup_G \inf_{u \in G \oplus \text{Ker } A} \frac{\psi(Au)}{\phi(u)} \leq \sup_V \inf_{v \in V} \frac{\psi(Av)}{\phi(v)} \quad ,$$

$$\dim(V) = \dim(G \oplus \text{Ker } A)$$

inégalité à contresens ...

Nous reprenons l'inégalité (19) sous la forme :

$$(41) \quad \inf_{x \in G} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} \leq \inf_{\substack{x \in G \\ x \notin \text{Ker } A}} \frac{\psi(Ax)}{\phi(x)} \leq \inf_{\dot{x} \in \dot{G}} \frac{\psi(\tilde{A}\dot{x})}{\tilde{\phi}(\dot{x})} .$$

Si pour tout G de dimension (ou codimension fixée) k , la dimension de \dot{G} (image de G dans $E/\text{Ker } (A)$) est minorée (ou la codimension majorée) par ℓ , alors $\beta_k(A)$ (ou $\tilde{\beta}_{k+1}(A)$) sera bien majorée par $\beta_\ell(\tilde{A})$ (ou $\tilde{\beta}_{\ell+1}(\tilde{A})$).

L'évaluation de bornes pour la dimension ou codimension de \dot{G} sera fondée sur le fait que G et $G/(G \cap \text{Ker } A)$ sont isomorphes :

$$(42) \quad \dot{G} \leftrightarrow G/(G \cap \text{Ker } A) .$$

On peut ainsi obtenir un certain nombre de relations liant les $\beta, \tilde{\beta}$ de A et \tilde{A} :

PROPOSITION 13. Les valeurs singulières de A et \tilde{A} vérifient les inégalités qui suivent :

(i) pour $\dim(\text{Ker } A) = s$:

$$(43) \quad \forall k \geq 1, \tilde{\beta}_{k+s}(\tilde{A}) \geq \tilde{\beta}_k(A)$$

$$(44) \quad k > s \Rightarrow \beta_{k-s}(A) \geq \beta_k(\tilde{A})$$

(ii) pour A de rang r :

$$(45) \quad k < r \Rightarrow \beta_{r-k}(\tilde{A}) \geq \tilde{\beta}_{k+1}(A) .$$

LEMONSTRATION. Nous résumons ci-dessous les minoration de $\dim (\dot{G})$ et majorations de $\text{codim } (\dot{G})$ qui peuvent être obtenues dans les divers cas :

$$(46) \quad \underline{\dim (\text{Ker } A) = s} : \left\{ \begin{array}{l} \dim G = k \Rightarrow \dim (\dot{G}) \geq \max (0, k-s) \\ \text{codim } G = k \Rightarrow \text{codim } (\dot{G}) \leq k+s . \end{array} \right.$$

$$\underline{\text{codim } (\text{Ker } A) = r} : \left\{ \begin{array}{l} \dim G = k \Rightarrow \dim (\dot{G}) \geq 0 \\ \text{codim } G = k \Rightarrow \dim (\dot{G}) \geq \max (0, r-k) \end{array} \right.$$

Ces propriétés sont obtenues en utilisant notamment la relation (37). Le cas 1 de (36) conduit à (44), le cas 2 à (43), et le cas 4 implique (45). On remarque que le cas 3 n'apporte aucune information intéressante.



Remarque. Pour A injective, on peut donner des relations du type :

$$\alpha_k(A) = \alpha_k(\tilde{A}) = \frac{1}{\beta_k(\tilde{A}^{-1})} \quad \dots$$

4.5 - CAS DES OPERATEURS COMPACTS.

Nous terminons par quelques remarques concernant les opérateurs compacts :

PROPOSITION 14.

(i) Si A est une application compacte de E dans F, alors :

$$(47) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_k(A) = 0$$

(ii) Si A satisfait

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \tilde{\alpha}_k(A) = 0$$

alors A est limite, dans $\mathcal{L}(E, F)$, d'une suite d'applications de rang fini.

DEMONSTRATION.

(i) On sait que si A est compact de E dans F, alors A^* l'est de F' dans E' . De plus il est facile de montrer que si A est compact, alors \tilde{A} l'est. Ainsi, A compact implique \tilde{A}^* compact. On remarque que, d'après (16), on a :

$$k \geq 0, \tilde{\alpha}_{k+1}(A) = d_k^{E'}(\mathcal{F}_A^*)$$

où \mathcal{F}_A^* est donc relativement compact, comme image par \tilde{A}^* de la boule-unité de $F'/\text{Ker } A^*$. Il suffit donc d'appliquer les résultats connus [49]:

$$\Omega \text{ compact} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d_k(\Omega) = 0$$

$$d_k(\bar{\Omega}) = d_k(\Omega)$$

pour conclure.

(ii) est une conséquence immédiate de (19) dans le Corollaire (3).



Remarque.

- Si F est un espace de Banach, on sait que la limite d'une suite d'applications de rang fini est compacte, et qu'il n'y a pas de réponse générale pour la réciproque. Le point (ii) constitue une réponse partielle, mais assez exigeante. Avec le Corollaire 3, on retrouve que la réciproque est vraie dans les espaces de Hilbert.

CHAPITRE 5

SOLUTIONS ACCEPTABLES ET
SOLUTIONS GENERALISEES
D'UN PROBLEME

5.1 - INTRODUCTION ET DEFINITIONS.

Les notions de "solution acceptable" et de "solution généralisée" que nous allons étudier sont fondées sur le choix d'un espace de "perturbations" du problème considéré. En bref, une solution approchée sera acceptable pour le problème si elle est solution exacte d'un problème perturbé "assez voisin". Nous précisons maintenant ces notions :

Le problème considéré est supposé de la forme

$$(1) \quad P(x) = 0,$$

où P est une application d'un ensemble E_1 dans un espace vectoriel E_2 .

L'espace des perturbations est un espace vectoriel topologique \mathcal{P} d'applications de E_1 dans E_2 .

DEFINITION 1. V étant un voisinage de 0 dans \mathcal{P} , un élément x de E_1 sera dit *solution V -acceptable* pour le problème (1) s'il existe δP dans V vérifiant :

$$(2) \quad (P + \delta P)(x) = 0.$$

Pour toute la suite, nous limiterons l'étude au cas où \mathcal{P} est un espace vectoriel normé. La définition suivante se déduit alors de la définition 1, en utilisant le système de voisinages constitué par les boules ouvertes de centre 0 :

DEFINITION 1'. \mathcal{P} étant un espace vectoriel normé, x , élément de E_1 , sera dit *solution ε -acceptable* ($\varepsilon > 0$) pour le problème (1) s'il existe δP , de norme inférieure à ε , vérifiant (2) ; c'est-à-dire :

$$x \text{ est } \varepsilon\text{-acceptable} \Leftrightarrow e(x) < \varepsilon$$

où e est la fonctionnelle ainsi définie :

$$(4) \quad e(x) = \inf \{ \|\delta P\| ; \delta P \in \mathcal{P}, (P + \delta P)x = 0 \}.$$

DEFINITION 2. Dans l'hypothèse où la fonctionnelle e atteint son minimum dans E_1 , tout élément x_0 de E_1 vérifiant

$$(5) \quad e(x_0) = \min_{x \in E_1} e(x)$$

est dite solution généralisée du problème (1).

Remarques.

1) Si le problème (1) n'a pas de solution (problème mal posé), la définition 2 peut fournir une ou plusieurs solutions généralisées ; si l'hypothèse de la définition 2 n'est pas vérifiée, le problème n'admet pas de solution généralisée. Par contre, si (1) a des solutions, celles-ci sont confondues avec les solutions généralisées.

2) Nous n'utilisons qu'une topologie sur $\mathcal{P} \subset E_2^{E_1}$, sans introduire de topologie sur E_1 ou E_2 . Dans les exemples, la topologie de \mathcal{P} est souvent construite à partir de topologies sur E_1 et E_2 .

Avant d'exprimer les notions précédentes dans différents types d'applications, nous allons étudier la fonctionnelle $x \mapsto e(x)$ dans le paragraphe qui suit (certaines propriétés étudiées constituent une généralisation de celles obtenues en 3.3.3)

5.2 - ETUDE ET CARACTERISATION DE CERTAINS SOUS-ESPACES D'APPLICATIONS.

5.2.1 Définitions et notations.

Soit \mathcal{A} un espace vectoriel normé d'applications d'un ensemble E dans un espace vectoriel F .

A tout élément x de E est associée l'application linéaire \hat{x} de \mathcal{A} dans F ainsi définie :

$$(1) \quad \hat{x} : M \longmapsto Mx \in F.$$

A chaque x correspond ainsi un espace vectoriel $\text{Im } \hat{x} = \hat{x}(\mathcal{A})$ inclus dans F , sur lequel est définie la semi-norme :

$$(2) \quad y \in \text{Im } \hat{x} \longmapsto \|y\|_x := \inf_M \{ \|M\| ; M \in \mathcal{A}, Mx = y \}.$$

Cette semi-norme est définie sur F si et seulement si l'application \hat{x} est surjective.

La relation (2) définit bien une semi-norme ; en effet, $\| \cdot \|_x$ est exactement la semi-norme induite sur l'espace quotient $\mathcal{A}/\text{Ker } \hat{x}$ par l'espace normé $(\mathcal{A}, \| \cdot \|)$. L'espace $\text{Im } \hat{x}$ étant isomorphe à $\mathcal{A}/\text{Ker } \hat{x}$ par l'isomorphisme canonique \tilde{x}

$$(3) \quad \tilde{x} : \mathcal{A}/\text{Ker } \hat{x} \rightarrow \text{Im } \hat{x},$$

on peut écrire

$$(4) \quad \|y\|_x = \| \tilde{x}^{-1}(y) \|,$$

où le deuxième membre est la semi-norme de $\tilde{x}^{-1}(y)$ dans l'espace quotient $\mathcal{A}/\text{Ker } \hat{x}$.

Remarque :

L'espace normé $(\mathcal{A}, || \cdot ||)$ et l'ensemble E définissent dans F, lorsque \hat{x} est surjective pour tout x non nul, une famille de semi-normes indexée par E.

5.2.2 - Semi-norme $|| \cdot ||_x$: propriétés simples et exemples.

LEMME 1.

(i) la boule-unité ouverte de la semi-norme $|| \cdot ||_x$ dans $\text{Im } \hat{x}$ est égale à l'image par \hat{x} de la boule-unité ouverte de \mathcal{A} :

$$(5) \quad \{y \in \text{Im } \hat{x} ; ||y||_x < 1\} = \hat{x}(\{M \in \mathcal{A} ; ||M|| < 1\}) .$$

(ii) le noyau de la semi-norme $|| \cdot ||_x$ est égal à l'ensemble des y de $\text{Im } \hat{x}$ vérifiant les deux propriétés équivalentes :

$$(6) \quad \overline{\hat{x}^{-1}(y)} \ni 0$$

$$(7) \quad \hat{x}^{-1}(y) \cap \overline{\text{Ker } (\hat{x})} \neq \emptyset .$$

DEMONSTRATION. L'égalité (5) est une conséquence directe de l'équivalence :

$$||y||_x < 1 \Leftrightarrow \exists M \text{ t.q. } Mx = y \text{ et } ||M|| < 1 .$$

La relation (6) signifie que la distance de 0 à $\hat{x}^{-1}(y)$ est nulle, et donc, d'après (4), que $||y||_x$ est nul.

La relation (7) est équivalente à l'assertion :

$$\exists M \text{ t.q. } Mx = y \text{ et } d(M ; \text{Ker } \hat{x}) = 0 ,$$

qui est bien équivalente à $\|y\|_x = 0$ puisque l'on a l'égalité :

$$(8) \quad d(M ; \text{Ker } \hat{x}) = \|Mx\|_x .$$



Remarques.

1) On sait que $\| \cdot \|_x$ est une norme si et seulement si $\text{Ker } \hat{x}$ est fermé dans \mathcal{A} ; ce résultat classique se déduit facilement de (7).

2) L'égalité (5) ne peut être étendue au cas des boules fermées où l'on a seulement l'inclusion :

$$(9) \quad \hat{x}(\{M \in \mathcal{A}; \|M\| \leq 1\}) \subset \{y \in \text{Im } \hat{x}; \|y\|_x \leq 1\}.$$

Exemples.

1) Lorsque \mathcal{A} est un espace de dimension finie, $\| \cdot \|_x$ est une norme puisque $\text{Ker } \hat{x}$ est nécessairement fermé (on peut exclure le cas où $\text{Im } \hat{x}$ est réduit à $\{0\}$). En particulier, le cas d'un espace \mathcal{A} d'applications linéaires a été étudié dans le chapitre 3 (3.3) où divers exemples ont été donnés.

2) Limitons-nous à des exemples simples dans le cas où les éléments de \mathcal{A} ne sont pas des applications linéaires :

Si E et F sont confondus avec \mathbb{R} , et \mathcal{A} est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , muni de la norme :

$$p \mapsto \max_{t \in [a, b]} |p(t)| ,$$

alors on a :

$$||y||_x = \gamma(x) \cdot |y|,$$

où $\gamma(x)$ est égal à 1 si x appartient à $[a,b]$, et à

$$\frac{1}{|T_n(\frac{2x-(a+b)}{a-b})|}$$

sinon.

(T_n désigne le polynôme de Tchebychev de degré n).

Si l'on note F_x l'espace vectoriel topologique ($\text{Im } \hat{x}, || \cdot ||_x$), on peut énoncer :

PROPOSITION 1. Si une forme linéaire l est continue sur F_x alors $l \circ \hat{x}$ appartient au dual fort \mathcal{A}' de \mathcal{A} ; dans ce cas, la "semi-norme duale" est donnée par :

$$(10) \quad \forall l \in F'_x : ||l||_x^* = ||l \circ \hat{x}||_{\mathcal{A}'}$$

DEMONSTRATION. Pour montrer la continuité de $l \circ \hat{x}$, il suffit d'étudier l'expression :

$$||l \circ \hat{x}||_{\mathcal{A}'} = \sup\{|\langle \hat{x}(M), l \rangle| ; ||M|| \leq 1\}.$$

D'après (9), on a donc :

$$||l \circ \hat{x}||_{\mathcal{A}'} \leq \sup\{|\langle y, l \rangle| ; ||y||_x \leq 1\} = ||l||_x^*.$$

Ainsi la continuité de l sur F_x entraîne celle de $l \circ \hat{x}$ sur \mathcal{A} .

L'égalité (10) résulte de (5), en remarquant que pour des fonctionnelles continues le sup sur la boule-unité ouverte est égal au sup sur la boule-

unité fermée.



Remarque.

Dans le cas où $\|\cdot\|_x$ n'est pas une norme ($\text{Ker } \hat{x}$ non fermé), la forme bilinéaire $(y, \ell) \mapsto \langle y, \ell \rangle$ ne met pas les espaces F_x et F'_x en dualité au sens propre ($\|y\|_x = 0 \Rightarrow \langle y, \ell \rangle = 0$ pour tout ℓ de F'_x).

5.2.3 - Caractérisation de certains sous-espaces d'applications d'un espace normé dans un autre.

PROPOSITION 2. Si E et F sont deux espaces vectoriels normés et \mathcal{A} un espace vectoriel normé d'applications de E dans F, il y a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :

$$(11) \quad \forall x \in E - \{0\} : \forall y \in \text{Im } \hat{x}, \|y\|_x \geq \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

$$(12) \quad \forall x \in E : \|\hat{x}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)} \leq \|x\|$$

$$(13) \quad \forall M \in \mathcal{A} : \|M\|_{\mathcal{A}} \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

$$(14) \quad \forall x \in E, \forall \ell \in F' : \|\ell \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'} \leq \|\ell\|_{F'} \cdot \|x\|.$$

DEMONSTRATION.

- (11) \Rightarrow (12) : c'est une conséquence de l'égalité :

$$(15) \quad \|\hat{x}\| = \sup_{\substack{y \in \text{Im } \hat{x} \\ y \neq 0}} \frac{\|y\|}{\|y\|_x}$$

qui découle elle-même de la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| &= \sup_{M \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|M\|} = \sup_{y \in \text{Im } \hat{x}} \sup_M \left\{ \frac{\|y\|}{\|M\|} ; Mx = y \right\} \\ &= \sup_{\substack{y \in \text{Im } \hat{x} \\ y \neq 0}} \frac{\|y\|}{\inf\{\|M\| ; Mx=y\}} \end{aligned}$$

La propriété (12) résulte bien de (11) et (15).

- (12) => (13) : on peut écrire, par définition de $\|\hat{x}\|$:

$$\|\hat{x}(M)\| \leq \|\hat{x}\| \|M\|,$$

et donc, d'après (12) :

$$\|Mx\| \leq \|x\| \|M\|$$

ce qui implique directement (13).

- (13) => (14) : on peut écrire par définition de $\|\ell\|_F$:

$$|\langle M, \ell \circ \hat{x} \rangle| = |\langle Mx, \ell \rangle| \leq \|Mx\| \|\ell\|_F,$$

et donc, en utilisant (13) :

$$\|\ell \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'} \leq \|\ell\|_F \cdot \|x\|.$$

- (14) => (11) : soit $x \neq 0$ et $y \in \text{Im } \hat{x}$; pour tout $M \in \mathcal{A}$, on a :

$$\|M\| = \sup_{L \in \mathcal{A}'} \frac{|\langle M, L \rangle|}{\|L\|} \geq \sup_{\ell \in F'} \frac{|\langle Mx, \ell \rangle|}{\|\ell \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'}}$$

$$\geq \sup_{\ell \in F'} \frac{|\langle Mx, \ell \rangle|}{\|x\| \|\ell\|_{F'}} ,$$

cela en utilisant (14). On a donc :

$$\forall M \text{ t.q. } Mx = y : \|M\| \geq \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

ce qui implique (11). ▼

Dans le cas où \mathcal{A} est un espace d'applications linéaires, la propriété (13) fait apparaître le rôle particulier joué par l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F. On peut énoncer :

COROLLAIRE 1. *L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est le plus grand élément de l'ensemble des espaces \mathcal{A} d'applications linéaires qui vérifient les propriétés équivalentes (11) à (14).*

DEMONSTRATION. Si \mathcal{A} est un espace d'applications linéaires, alors (13) implique son inclusion dans $\mathcal{L}(E, F)$. L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est donc le plus grand élément de l'ensemble en question, puisqu'il fait partie lui-même de cet ensemble (il vérifie évidemment (13)). ▼

- Pour l'espace $\mathcal{L}(E, F)$, les relations dans (11) à (14) sont des égalités ; nous allons préciser les équivalences existant entre certaines de ces égalités en général.

- Les espaces E, F et \mathcal{A} ayant la même signification que pour la Proposition 2, nous pouvons énoncer :

LEMME 2. *Considérons, pour $x \in E - \{0\}$, les deux propriétés*

$$(16) \quad \forall y \in \text{Im } \hat{x} \quad : \quad \|y\|_x = \frac{\|y\|}{\|x\|},$$

$$(17) \quad \forall l \in F' \quad : \quad \|l \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'} = \|l\|_{F'} \cdot \|x\|.$$

- Si $\text{Im } \hat{x}$ est égal à F , alors (16) implique (17).

- Si \mathcal{A} et F sont des espaces de Banach et si $\text{Im } \hat{x}$ est fermé dans F , alors (17) implique (16).

DEMONSTRATION.

- (16) \Rightarrow (17) : Si $l \circ \hat{x}$ appartient à \mathcal{A}' , on a :

$$\|l \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'} = \sup_{M \neq 0} \frac{|\langle Mx, l \rangle|}{\|M\|} = \sup_{\substack{y \in \text{Im } \hat{x} \\ y \neq 0}} \frac{|\langle y, l \rangle|}{\inf \{ \|M\| ; Mx=y \}}.$$

Ainsi (16) implique :

$$\|l \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'} = \left(\sup_{\substack{y \in \text{Im } \hat{x} \\ y \neq 0}} \frac{|\langle y, l \rangle|}{\|y\|} \right) \cdot \|x\|,$$

d'où découle (17) en utilisant l'hypothèse $\text{Im } \hat{x} = F$.

- (17) \Rightarrow (16) : pour tout y dans $\text{Im } \hat{x}$, on a :

$$(18) \quad \|y\|_x = d(M_0, \text{Ker } \hat{x})$$

où M_0 est un élément de \mathcal{A} vérifiant $M_0 x = y$. L'expression duale de la distance dans \mathcal{A} (Cf. 4.1.(3)) s'écrit ici :

$$\|y\|_x = \sup_{L \in \text{Ker } \hat{x}^\perp} \frac{|\langle M_0, L \rangle|}{\|L\|_{\mathcal{A}'}}.$$

La propriété (17) implique que \hat{x} appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$, puisque (14) entraîne (12). Les hypothèses faites conduisent à l'égalité (Cf. 4.1.) :

$$\text{Ker } \hat{x}^\perp = \text{Im } \hat{x}^*$$

où \hat{x}^* est la transposée de $\hat{x} : \mathcal{A} \rightarrow F$. On a évidemment ici :

$$\text{Im } \hat{x}^* = \{l \circ \hat{x} ; l \in F'\}$$

et donc

$$\|y\|_x = \sup_{l \in F'} \frac{|\langle M_0 x, l \rangle|}{\|\ell \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'}} = \sup_{l \in F'} \frac{|\langle y, l \rangle|}{\|l\|_{F'} \cdot \|x\|}$$

en utilisant (17) ; on a donc finalement :

$$\|y\|_x = \frac{\|y\|}{\|x\|} .$$



PROPOSITION 3.

(i) L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est le plus grand élément de l'ensemble des espaces normés \mathcal{A} d'applications linéaires vérifiant l'une des propriétés :

$$(19) \quad \forall x \in E - \{0\}, \forall y \in F : \|y\|_x = \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

$$(20) \quad \forall x \in E, \forall l \in F' : \|\ell \circ \hat{x}\|_{\mathcal{A}'} = \|l\|_{F'} \cdot \|x\| .$$

(ii) Ces deux propriétés sont équivalentes si \mathcal{A} et F sont des espaces de Banach et si $\text{Im } \hat{x}$ est égal à F pour tout $x \neq 0$.

DEMONSTRATION.

(i) D'après la Proposition 2, $\mathcal{L}(E, F)$ vérifie les inégalités :

$$\|y\|_x \geq \frac{\|y\|}{\|x\|} \quad \text{et} \quad \|\ell \circ \hat{x}\| \leq \|\ell\| \|x\|.$$

Il suffit de limiter l'inf définissant $\|y\|_x$ et le sup définissant $\|\ell \circ \hat{x}\|$ à l'ensemble des applications de rang 1 pour obtenir une égalité dans chacune des relations.

Le fait que $\mathcal{L}(E, F)$ soit plus grand élément résulte du Corollaire 1.

(ii) est une simple reformulation du lemme 2.



5.2.4 - Résultats complémentaires et remarques.

1°/ Si \mathcal{A} et F sont des espaces de Banach, et si $\text{Im } \hat{x}$ est fermé dans F , l'expression duale de $\|\cdot\|_x$ peut s'exprimer ainsi :

$$(21) \quad \forall y \in \text{Im } \hat{x} : \|y\|_x = \max_{\substack{\ell \in F' \\ \ell \neq 0}} \frac{|\langle y, \ell \rangle|}{\|\hat{x}^*(\ell)\|}.$$

Cette expression est une réécriture de l'expression obtenue dans la démonstration du lemme 2, qui tient compte du fait que le sup est un max (Cf. 4.1.(3)). Cette forme duale du problème initial est utilisée en Théorie du Contrôle (problème de "l'effort" minimum". Cf. par exemple [31]).

2°/ La propriété (16) implique l'égalité

$$(22) \quad \|\hat{x}\| = \|x\|$$

où la norme de \hat{x} est celle de $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$. C'est une simple conséquence de (15).

3°/ La Proposition 3 constitue une généralisation de la Proposition 2 de 3.3.3. En effet si E et F sont respectivement les espaces C^n et C^m , munis des normes μ et θ , et si \mathcal{A} est égal à l'espace $\mathcal{M}(m,n)$ des matrices normé par ϕ , les propriétés (19) et (20) s'écrivent bien :

$$\forall x \in C^n - \{0\}, \forall y \in C^m : \phi_x(y) = \frac{\theta(y)}{\mu(x)}$$

$$\forall x \in C^n, \forall z \in C^m : \phi^*(zx^*) = \theta^*(z) \mu(x).$$

Cela résulte des identifications faites au chapitre 3 entre chaque espace et son dual ; la forme ℓ est identifiée à un vecteur z de C^m , et l'on a :

$$\ell \circ \hat{x}(M) = \text{tr}((zx^*)^* M).$$

4°/ L'application définie sur \mathcal{A} par

$$(23) \quad v : A \in \mathcal{A} \mapsto \sup_{x \in E} \|Ax\|_x$$

définit une semi-norme. Le noyau de cette semi-norme est égal à

$$\bigcap_{x \in E} \overline{\text{Ker } \hat{x}}$$

d'après (8). Ainsi, il s'agira d'une norme si $\text{Ker } \hat{x}$ est fermé, quel que soit x dans E.

L'application v est définie sur un espace \mathcal{A}_v , contenant \mathcal{A} ; tout élément A de \mathcal{A}_v vérifie nécessairement :

$$(24) \quad \forall x \in E : (A + \mathcal{A}) \cap \text{Ker } \hat{x} \neq \emptyset,$$

cela d'après (8).

Sur \mathcal{A} , la topologie définie par v est moins fine que la topologie initiale

à cause de l'inégalité évidente :

$$(25) \quad \forall M \in \mathcal{A} : \|M\| \geq \sup_{x \in E} \|Mx\|_x .$$

On sait d'ailleurs que si $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ et (\mathcal{A}, ν) sont des espaces de Banach, ils définissent nécessairement le même espace topologique (normes équivalentes).

L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est tel qu'il y a égalité entre $\|\cdot\|$ et ν . De plus, tout espace \mathcal{A} d'applications linéaires vérifiant (19) est tel que \mathcal{A}_ν est égal à $\mathcal{L}(E, F)$. Ces deux faits sont conséquences de la Proposition 3 (i).

Plus généralement, d'autres espaces \mathcal{A} vérifient l'égalité entre $\|\cdot\|$ et ν , c'est-à-dire :

$$(26) \quad \forall M \in \mathcal{A} : \|M\| = \sup_{x \in E} \|Mx\|_x .$$

Un exemple en est donné par les espaces de matrices munis d'une "norme de rang 1" (Cf. 3.3.3. Proposition 3).

5°/ Une famille particulière d'espaces vérifiant (19) est constituée par les espaces d'applications linéaires continues de norme supérieure ou égale à celle de $\mathcal{L}(E, F)$, avec égalité sur l'ensemble des applications de rang 1 :

$$(27) \quad \forall A \in \mathcal{A} : \|A\| \geq \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$(28) \quad \forall y \in F, \forall \ell \in E' : \|y \otimes \ell\| = \|y\| \|\ell\| .$$

On a en effet, d'après (27) :

$$\|y\|_x \geq \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

et l'inégalité inverse s'obtient en limitant les perturbations à l'ensemble des applications du type $y \otimes \ell$.

Par exemple, les espaces d'opérateurs compacts sur un espace de Hilbert définis par une norme de type Von Neumann vérifient (19) (en particulier la classe d'Hilbert-Schmidt). (Cf. 4.1.5).

5.3 - EXPRESSION DES CRITERES D'ACCEPTABILITE.

5.3.1 - Remarques générales.

Le critère énoncé en 5.1. (3), (4) s'écrit, compte tenu de la définition 5.2. (2) :

$$(1) \quad e(x) = |||P(x)|||_x < \varepsilon.$$

Ainsi, pour un espace normé de perturbations \mathcal{P} quelconque, x est ε -acceptable si le "résidu" $P(x)$ est, en norme (ou semi-norme) $||| \cdot |||_x$, inférieur à ε .

Dans le cas particulier où E_1 et E_2 sont des espaces normés, et où l'espace de perturbations \mathcal{P} est tel que la relation 5.2.(16) est vérifiée, alors le critère prend la forme plus explicite :

$$(2) \quad e(x) = \frac{|||P(x)|||}{|||x|||} < \varepsilon.$$

Le critère se ramène ainsi à la considération du "résidu relatif". On peut remarquer que ce critère est adopté implicitement lorsqu'on utilise un "test relatif" lors de la résolution d'un problème par une méthode itérative. En effet, le problème a la forme

$$P(x) = x - F(x) = 0 ,$$

et est résolu par l'itération

$$x_{k+1} = F(x_k).$$

Le "test relatif" :

$$\frac{|||x_{k+1} - x_k|||}{|||x_k|||} < \varepsilon$$

est équivalent à $e(x_k) < \varepsilon$, à cause des égalités :

$$\frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k\|} = \frac{\|F(x_k) - x_k\|}{\|x_k\|} = \frac{\|P(x_k)\|}{\|x_k\|} .$$

Toute solution généralisée x_0 de $P(x) = 0$, au sens de 5.1 (5), doit vérifier

$$(3) \quad \|P(x_0)\|_{x_0} = \min_{x \in E_1} \|P(x)\|_x ,$$

qui s'écrit, dans le cas particulier de 5.2.(16) :

$$\frac{\|P(x_0)\|}{\|x_0\|} = \min_{x \in E_1 - \{0\}} \frac{\|P(x)\|}{\|x\|} .$$

Exemple. Reprenons l'espace de perturbations polynômiales sur \mathbb{R} (exemple 2 de 5.2.2). Pour l'équation $P(x) = 0$, le critère correspondant s'écrit

$$\gamma(x) \cdot |P(x)| < \varepsilon ,$$

qui s'explique sous deux formes suivant que x appartient, ou non, au segment $[a, b]$:

$$x \in [a, b] : |P(x)| < \varepsilon$$

$$x \notin [a, b] : |P(x)| < \varepsilon \cdot \left| T_n \left(\frac{2x - (a+b)}{a-b} \right) \right| .$$

L'espace des perturbations et la norme choisie font jouer au segment $[a, b]$ un rôle privilégié. Avec ce même espace, on peut aussi évaluer les solutions généralisées d'une équation $P(x) = 0$, par exemple polynômiale.

5.3.2 - Problèmes et perturbations linéaires.

Tout problème linéaire de la forme

$$(4) \quad r(x) := Ax - b = 0$$

est défini par un couple (A, b) , où A est un élément de l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F , et b un élément de l'espace F .

Si l'on considère des perturbations quelconques du problème (4), les critères correspondants sont les critères généraux obtenus précédemment (de type (1) ou (2) suivant les propriétés des espaces \mathcal{P} , E , F).

Nous nous limitons ici à des perturbations "linéaires", ce qui permet d'étudier un certain nombre de questions de façon plus précise.

Tout espace de perturbations "linéaires" est de la forme $\mathcal{P} = \mathcal{A} \times \mathcal{F}$, où \mathcal{A} et \mathcal{F} sont des sous-espaces de $L(E, F)$ et de F respectivement. Un tel espace est isomorphe à un sous-espace de $L(E \times K, F)$, où K est le corps des réels ou des complexes.

Considérons successivement deux cas particuliers puis le cas général :

1°/ Cas $\mathcal{P} = \{0\} \times \mathcal{F}$.

On considère ici que la perturbation sur A est nulle ($\delta A = 0$) ; seule la perturbation δb est non nulle ($\delta b \in \mathcal{F}$). A la condition que $Ax - b$ appartienne à \mathcal{F} (ce qui est toujours le cas si \mathcal{F} est égal à F), on a simplement :

$$(5) \quad e(x) = ||r(x)||$$

où la norme est celle de \mathcal{F} . Dans ce cas, le critère consiste à considérer le résidu.

2°/ Cas $\mathcal{P} = \mathcal{A} \times \{0\}$.

Ici c'est la perturbation δb qui est réduite à 0. La norme de \mathcal{A} conduit à :

$$e(x) = \inf \{ \|\delta A\| : \delta A \cdot x = b - Ax \},$$

ce qui s'écrit :

$$(6) \quad e(x) = \|\|r(x)\|\|_x .$$

Si les espaces E, F sont normés et que \mathcal{A} vérifie (19), on a :

$$(7) \quad x \in E - \{0\} \Rightarrow e(x) = \frac{\|\|r(x)\|\|}{\|\|x\|\|} .$$

On considère donc dans ce cas le "résidu relatif".

L'espace de perturbations $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E, F)$ conduit à ce cas.

3°/ Cas général.

Chaque couple $(\delta A, \delta b)$ définit une application linéaire de $E \times K$ dans F :

$$(8) \quad (\delta A, \delta b) : (x, \xi) \in E \times K \mapsto \delta A \cdot x - \xi b \in F .$$

L'espace de ces perturbations étant normé, l'expression de $e(x)$ est :

$$e(x) = \inf \{ \|\|(\delta A, \delta b)\|\| ; \delta A \cdot x - \delta b = b - Ax \} ,$$

et s'écrit, compte tenu de (8) :

$$(9) \quad e(x) = \|\|b - Ax\|\|_{(x, 1)} .$$

Si les espaces $E \times K$ et F sont normés et que l'espace de perturbations vérifie (19) (en remplaçant E par $E \times K$), $e(x)$ prend la forme plus

explicite :

$$(10) \quad e(x) = \frac{\|r(x)\|}{\|(x, 1)\|}.$$

Cela est vrai en particulier si \mathcal{A} , E , F vérifient ^{5.2.}(19) et si $\mathcal{A} \times F$, espace des perturbations, est normé par $\theta(\|\delta A\|, \|\delta b\|)$; il faut alors poser :

$$\|(x, 1)\| := \theta^*(\|x\|, 1)$$

(θ^* : jauge duale) pour que (10) soit vérifié. C'est une conséquence du résultat suivant :

PROPOSITION 4. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et \mathcal{A} un espace normé d'applications linéaires de E dans F vérifiant

$$(11) \quad \forall x \in E - \{0\}, \forall y \in F : \inf_{M \in \mathcal{A}} \{\|M\| ; Mx = y\} = \frac{\|y\|}{\|x\|}.$$

Alors, quelle que soit la jauge θ définie sur \mathbb{R}_+^2 , la propriété suivante est vérifiée :

$$(12) \quad \forall (x, \xi) \in E \times \mathbb{C} - \{0, 0\},$$

$$\inf_{\substack{M \in \mathcal{A} \\ m \in F}} \{\theta(\|M\|, \|m\|) ; Mx + \xi m = y\} = \frac{\|y\|}{\theta^*(\|x\|, |\xi|)}.$$

DEMONSTRATION. La valeur de l'inf de (12) ne dépend évidemment que du module de ξ ; aussi supposons-nous que ξ est réel positif ou nul. Nous supposons ξ et x non nuls tout d'abord.

En tenant compte de (11) et de la monotonie de θ dans \mathbb{R}_+^2 , le problème (12) peut s'écrire :

$$(13) \quad \inf_{m \in F} \theta \left(\frac{\|y - \xi m\|}{\|x\|}, \|m\| \right).$$

La définition de la jauge duale θ^* et l'inégalité triangulaire conduisent aux inégalités :

$$\theta \left(\frac{\|y - \xi m\|}{\|x\|}, \|m\| \right) \geq \frac{\|y - \xi m\| + \|\xi m\|}{\theta^*(\|x\|, \xi)} \geq \frac{\|y\|}{\theta^*(\|x\|, \xi)}.$$

Pour montrer que (12) est inférieur ou égal à l'expression de droite, limitons l'inf à l'ensemble des m du segment $[0, \xi^{-1}]y$; on a donc successivement :

$$\begin{aligned} \inf_{m \in F} \theta(m) &\leq \|y\| \inf_{\lambda \in [0, \xi^{-1}]} \theta \left(\frac{1 - \lambda \xi}{\|x\|}, \lambda \right) \\ &= \|y\| \inf_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0}} \{ \theta(\alpha, \beta) ; \alpha \|x\| + \beta \xi = 1 \} \\ &= \frac{\|y\|}{\theta^*(\|x\|, \xi)}. \end{aligned}$$

Ainsi (12) est démontré pour $\xi x \neq 0$. Pour les deux couples $(0, \xi \neq 0)$ et $(x \neq 0, 0)$, l'inf prend les valeurs respectives évidentes :

$$\frac{\|y\|}{|\xi|} \theta(0, 1) \quad \text{et} \quad \frac{\|y\|}{\|x\|} \theta(1, 0)$$

qui vérifient bien (12), puisque pour toute jauge θ on a :

$$\theta(1, 0) \theta^*(1, 0) = \theta(0, 1) \theta^*(0, 1) = 1.$$



Remarques et exemples.

1°/ La proposition précédente généralise ce que nous avons établi dans [35] ; le critère s'exprime de la même manière qu'en (10) :

$$(14) \quad ||r(x)|| < \varepsilon \cdot \theta^*(||x||, 1) .$$

La forme d'un tel critère est assez attrayante, car on est conduit, approximativement, à considérer le "résidu relatif" si $||x||$ est grand devant 1 et le "résidu absolu" si $||x||$ est petit.

2°/ Dans les travaux [40], [43], le critère d'acceptabilité adopté dépend de deux seuils ε_1 et ε_2 ; x est dit acceptable s'il existe un couple $(\delta A, \delta b)$ vérifiant :

$$(15) \quad (A + \delta A)x = b + \delta b \quad , \quad ||\delta A|| < \varepsilon_1 \quad , \quad ||\delta b|| < \varepsilon_2 .$$

Les deux dernières conditions sont équivalentes à la suivante :

$$\max \left\{ \frac{||\delta A||}{\varepsilon_1} , \frac{||\delta b||}{\varepsilon_2} \right\} < 1 .$$

Ainsi, le problème rentre dans le cadre de la proposition en choisissant la jauge θ ainsi définie :

$$\theta : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \max \left(\frac{\xi_1}{\varepsilon_1} , \frac{\xi_2}{\varepsilon_2} \right) .$$

Sous l'hypothèse (11), une C.N.S. d'existence d'un couple $(\delta A, \delta b)$ vérifiant (15) s'écrit :

$$(16) \quad ||r(x)|| < \varepsilon_1 ||x|| + \varepsilon_2 ,$$

du fait de l'égalité $\theta^*(||x||, 1) = \varepsilon_1 ||x|| + \varepsilon_2$. On retrouve ainsi le résultat établi dans [43] dans le cadre des espaces de dimension finie

pour des normes particulières.

3°/ Dans [20], [11], un critère a été établi dans le cadre suivant :

$E = F = H$ espace de Hilbert

\mathcal{A} : classe de Hilbert-Schmidt (Cf. 4.1.5)

$$||(\delta A, \delta b)|| = (||\delta A||^2 + ||\delta b||^2)^{1/2}$$

Comme \mathcal{A} vérifie (11) et que la norme de la perturbation est du type $\theta(||\delta A||, ||\delta b||)$, θ étant la norme euclidienne, le critère se déduit directement de (14) :

$$(18) \quad r(x) < \varepsilon (||x||^2 + 1)^{1/2} .$$

Si l'on conserve la même jauge θ , il existe bien d'autres espaces de perturbations qui conduisent au même critère (18) ; c'est par exemple le cas des classes \mathcal{L}_p d'opérateurs compacts (Cf. 4.1.5), avec la classe maximale $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}(H)$. Cela résulte du fait que tous ces espaces vérifient (11).

5.3.3 - Problèmes de valeurs propres.

On peut appliquer la méthode des perturbations pour construire des critères d'acceptabilité d'une valeur ou d'un vecteur propre.

Un couple $(\lambda, x) \in K \times (E - \{0\})$ sera dit acceptable pour l'opérateur A sur E s'il est couple propre pour un opérateur suffisamment voisin. Si \mathcal{A} est un espace normé de perturbations, le critère sera fondé sur la fonction :

$$(19) \quad e(\lambda, x) = \inf_{\delta A \in \mathcal{A}} \{ ||\delta A|| ; (A + \delta A)x = \lambda x \} ,$$

qui peut s'écrire, d'après 5.2. (2) :

$$(20) \quad e(\lambda, x) = \frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|x\|}.$$

Si E est un espace normé et que \mathcal{A} et E vérifient (11), on a la forme plus explicite :

$$(21) \quad e(\lambda, x) = \frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|x\|}.$$

Pour construire des critères concernant uniquement une valeur λ , ou uniquement un vecteur x , on pourra utiliser les fonctions :

$$(22) \quad e(\lambda) = \inf_{x \neq 0} e(\lambda, x),$$

$$(23) \quad e(x) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} e(\lambda, x).$$

Ainsi, sous l'hypothèse (21), λ sera une valeur propre ε -acceptable si l'on a :

$$(24) \quad \inf_{x \neq 0} \frac{\|(A - \lambda I)x\|}{\|x\|} < \varepsilon,$$

et $x \neq 0$ sera un vecteur ε -acceptable si l'on a :

$$(25) \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|x\|} = \frac{d(Ax, [x])}{\|x\|} < \varepsilon,$$

où $d(Ax, [x])$ désigne la distance de Ax à la "droite" engendrée par x . Le critère (25) ne dépend évidemment que de la direction de x .

Si l'espace E est un espace de Hilbert réel, le premier membre de (25) est égal à

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

si (x, Ax) est nul, et à

$$\frac{|(x, Ax)|}{\|x\|^2} \operatorname{tg} \widehat{(x, Ax)}$$

si (x, Ax) est non nul. Ainsi, pour un opérateur positif A , le critère consiste à considérer le produit du quotient de Rayleigh par la tangente de l'angle entre x et Ax .

Dans le cas où A est une matrice hermitique et λ un réel, (24) implique l'inégalité

$$\min_i |\lambda - \lambda_i| < \varepsilon,$$

si les λ_i sont les valeurs propres exactes de A .

Remarques.

1°/ Le critère (24) a été établi dans [11] sous une forme moins explicite, à partir de la norme H_2 sur l'espace $\mathcal{M}(n)$ des matrices.

2°/ La fonction

$$e(\lambda) = \inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|x\|}$$

est exactement l'expression de la distance de A à l'ensemble des opérateurs admettant λ comme valeur propre ; de même

$$e(x) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|x\|}$$

est la distance de A à l'ensemble des opérateurs admettant $x \neq 0$ comme vecteur propre. Ces deux distances s'entendent au sens de "distance suivant les directions appartenant à l'espace \mathcal{A} des perturbations".

3°/ On peut également établir des critères pour les problèmes de valeurs propres du type $Ax = \lambda Bx$. Il faut pour cela considérer un espace normé de perturbations $(\delta A, \delta B)$.

5.4 - SOLUTION GENERALISEE D'UN PROBLEME LINEAIRE.

5.4.1 - Résultats généraux.

Nous nous intéressons aux solutions généralisées d'un problème linéaire, au sens de 5.1.(5), en nous limitant aux trois expressions de $e(x)$ données par 5.3.(5), (7) et (10). Nous adoptons, dans ces trois cas, les notations suivantes :

$$(1) \quad \rho = \inf_{x \in E} \|Ax - b\|$$

$$(2) \quad \rho_1 = \inf_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Ax - b\|}{\|x\|}$$

$$(3) \quad \rho_0 = \inf_{x \in E} \frac{\|Ax - b\|}{\|(x, 1)\|}$$

Nous admettons que le problème $Ax = b$ n'a pas de solution. Dans chacun des cas précédents, il existera une solution généralisée du problème si et seulement si l'inf est atteint pour un $x \in E$.

Le problème n'ayant pas de solution ($b \notin \text{Im } A$), la valeur ρ ne peut être 0 que si b est adhérent à $\text{Im } A$ dans F , ce qui est exclu si $\text{Im } A$ est fermé. Remarquons que si A n'est pas injectif, ρ_0 et ρ_1 sont nuls ; il n'y a donc pas de solution généralisée dans ce cas. Le fait que ρ_0 et ρ_1 sont nuls est une conséquence des inégalités :

$$\rho_1 \leq \frac{\|b\|}{\sup_{x \in \text{Ker } A} \|x\|}, \quad \rho_0 \leq \frac{\|b\|}{\sup_{x \in \text{Ker } A} \|(x, 1)\|}$$

Les trois valeurs ρ , ρ_1 et ρ_0 peuvent être interprétées en termes de

distances entre certains ensembles :

PROPOSITION 5.

- (i) La valeur ρ est égale à la distance de b à $\text{Im } A$ dans F .
- (ii) La valeur ρ_1 est égale à la distance dans F de la droite engendrée par b et de l'image par A de la sphère-unité de E .
- (iii) La valeur ρ_0 est égale à la distance dans $\mathcal{L}(E \times C, F)$ de l'application $(A, -b) : (x, \xi) \mapsto Ax - \xi b$ à l'ensemble des applications non injectives.

DEMONSTRATION.

- (i) est évident.
- (ii) se résume en l'égalité :

$$(4) \quad \rho_1 = \inf_u \inf_{\alpha \in \mathbb{C}} \left\| Au - \alpha b \right\|, \\ \left\| u \right\| = 1$$

qui est une conséquence des égalités :

$$\rho_1 = \inf_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} - \frac{1}{\|x\|} b \right\| \\ = \inf_u \inf_{\alpha > 0} \left\| Au - \alpha b \right\|, \\ \left\| u \right\| = 1$$

et du fait que dans (4), l'inf ne dépend que du module de α .

(iii) résulte de l'égalité

$$\inf_{(x, \xi) \in E \times C} \frac{\|Ax - \xi b\|}{\|(x, \xi)\|} = \inf_{\substack{x \in E \\ \xi \neq 0}} \frac{\|Ax - \xi b\|}{\|(x, \xi)\|}$$

due à la continuité par rapport à ξ du rapport. On peut donc limiter l'inf à $\xi = 1$, d'où

$$(5) \quad \rho_0 = \inf_{X \in E \times C} \frac{\|(A, -b)X\|}{\|X\|}$$

et, d'après 4.3.(4), c'est bien la distance aux applications non injectives.



Si l'on admet l'existence de solutions généralisées x , x_0 et x_1 , pour lesquelles les valeurs ρ , ρ_0 et ρ_1 sont respectivement atteintes, on peut établir les inégalités suivantes qui résultent des définitions (1), (2), (3) :

$$(6) \quad \|x\| \leq \rho/\rho_1 \leq \|x_1\|$$

$$(7) \quad \|(x, 1)\| \leq \rho/\rho_0 \leq \|(x_0, 1)\|$$

$$(8) \quad \frac{\|(x_1, 1)\|}{\|x_1\|} \leq \rho_1/\rho_0 \leq \frac{\|(x_0, 1)\|}{\|x_0\|} .$$

Les deux solutions x et x_1 sont toujours comparables en norme :

$$(9) \quad \|x\| \leq \|x_1\| ;$$

c'est une conséquence directe des définitions ou de (6).

Si les normes sur $E \times C$ et E sont telles que $\|(x, 1)\|$ et $\|x\|/\|(x, 1)\|$ sont fonctions croissantes de $\|x\|$, on déduit de (7), (8), (9) les inégalités :

$$(10) \quad \|x\| \leq \|x_0\| \leq \|x_1\| .$$

REMARQUE.

Ces inégalités sont vérifiées dans le cas où $E \times C$ est normé par $\theta(\|x\|, 1)$, puisque $\theta(\|x\|, 1)$ est fonction croissante de $\|x\|$ et

$$\frac{\theta(\|x\|, 1)}{\|x\|} = \theta\left(1, \frac{1}{\|x\|}\right)$$

est fonction décroissante de $\|x\|$, à cause de la monotonie de la jauge θ .

5.4.2 - Solutions généralisées dans le cas hilbertien.

Lorsque E et F sont des espaces de Hilbert, $E \times C$ étant muni de la structure d'espace-produit (norme : $(x, \xi) \rightarrow (\|x\|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$), on peut donner des expressions plus analytiques pour ρ , ρ_0 , ρ_1 , ou x , x_0 , x_1 lorsqu'elles existent. Les calculs sont fondés sur les opérateurs $A A^*$, et $(A, -b)^* (A, -b)$ de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(E \times C)$ respectivement.

Nous limitons les présentations des divers résultats à des espaces de dimension finie : $E = C^n$, $F = C^m$. On supposera le problème sans solution ($b \notin \text{Im } A$) et A injective, ce qui implique nécessairement la relation $m > n$. Les valeurs singulières de A seront notées :

$$(11) \quad 0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n.$$

5.4.2.1 - Calcul de ρ_0 , x_0 .

D'après (5), ρ_0 est égal à la plus petite valeur singulière de $(A, -b)$. Donc ρ_0^2 est la plus petite valeur propre de la matrice $(A, -b)^* (A, -b)$ que nous notons $H(A, b)$:

$$(12) \quad H(A,b) = \begin{bmatrix} A^*A & -A^*b \\ -b^*A & b^*b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(n+1).$$

Les valeurs propres de A^*A séparent celles de $H(a,b)$; en particulier, on a :

$$0 < \rho_0 \leq \sigma_1.$$

Le seul cas où il n'existe pas de solution généralisée est celui où ρ_0 est égal à σ_1 et où le sous-espace propre de $H(a,b)$ relatif à σ_1^2 est contenu dans $C^n \times \{0\}$.

Si l'on exclut ce cas, $H(A,b)$ admet un vecteur propre $(x_0, 1)$ relatif à ρ_0^2 ; cela s'écrit :

$$(13) \quad \begin{cases} A^*(Ax_0 - b) = \rho_0^2 x_0 \\ b^*(b - Ax_0) = \rho_0^2. \end{cases}$$

Si ρ_0 est différent de σ_1 , l'unique solution généralisée est donnée par :

$$(14) \quad x_0 = (A^*A - \rho_0^2 I)^{-1} A^*b.$$

Si ρ_0 est égal à σ_1 , la solution x_0 n'est déterminée que modulo le noyau de $(A^*A - \sigma_1^2 I)$.

5.4.2.2 - Calcul de ρ_1, x_1 .

Dans le cas hilbertien, l'expression (4) devient

$$(15) \quad \rho_1 = \inf_{\substack{u \\ \|u\|=1}} \left\| \left(I - \frac{bb^*}{\|b\|^2} \right) Au \right\|$$

puisque

$$\frac{bb^*}{\|b\|^2}$$

est l'opérateur de projection sur la droite engendrée par b . Comme

$$I - \frac{bb^*}{\|b\|^2}$$

est aussi une projection orthogonale, on a :

$$(16) \quad \rho_1 \leq \inf_{\substack{u \\ \|u\|=1}} \|Au\| = \sigma_1 .$$

Pour u fixé dans l'expression (4), le minimum de $\|Au - \alpha u\|$ est réalisé par la valeur

$$(17) \quad \alpha(u) = \frac{b^* Au}{\|b\|^2} .$$

D'après (15), ρ_1 est la plus petite valeur singulière de

$$\left(I - \frac{bb^*}{\|b\|^2} \right) A ;$$

ρ_1^2 est donc la plus petite valeur propre de

$$A^* \left(I - \frac{bb^*}{\|b\|^2} \right) A .$$

Si u_1 est un vecteur propre normé, le vecteur x_1 correspondant vérifie :

$$(18) \quad u_1 = \frac{b^* Au_1}{\|b\|^2} x_1 .$$

On ne peut donc déterminer x_1 si le sous-espace propre correspondant à ρ_1^2 est orthogonal à $A^* b$ (ce cas correspond à l'égalité de ρ_1 et σ_1).

Si ρ_1 est différent de σ_1 ($\rho_1 < \sigma_1$), alors l'unique solution x_1 est

donnée par :

$$(19) \quad x_1 = (A^*A - \rho_1^2 I)^{-1} A^*b .$$

Cette expression s'obtient, en utilisant (18) et l'équation en u_1 :

$$A^*(I - \frac{bb^*}{\|b\|^2}) Au_1 = \rho_1^2 u_1 .$$

5.4.2.3 - Comparaison des trois types de solution et remarques.

Sous les hypothèses indiquées, les solutions x_0 et x_1 sont données analytiquement par (14) et (19). La solution x , est évidemment donnée par

$$(20) \quad x = (A^*A)^{-1} A^*b ;$$

c'est bien l'expression de la solution du problème de moindres carrés pour A injectif.

Ainsi, les trois types de solution généralisée ont la même forme :

$$(21) \quad x(t) = (A^*A - tI)^{-1} A^*b ,$$

avec $x = x(0)$, $x_0 = x(\rho_0^2)$ et $x_1 = x(\rho_1^2)$.

D'après (8) et les hypothèses faites, on a les relations suivantes :

$$(22) \quad 0 < \rho_0^2 \leq \rho_1^2 < \sigma_1^2 .$$

Pour $t \in]-\sigma_1^2, \sigma_1^2[$, $x(t)$ admet le développement :

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k (A^*A)^{-k} \right) x .$$

La fonction $\|x(t)\|^2$ est fonction croissante de t dans $]-\infty, \sigma_1^2[$, puisque la dérivée peut s'écrire :

$$\frac{d||x(t)||^2}{dt} = 2b^*A(A^*A - tI)^{-3}A^*b.$$

C'est une autre manière d'établir les inégalités (10), valables dans un cadre un peu plus général.

Il est intéressant de résumer parallèlement les équations vérifiées par les résidus des trois types de solution :

$$(23) \quad \begin{cases} A^*(Ax-b) = 0 & , & b^*(b-Ax) = \rho^2 \\ A^*(Ax_0-b) = \rho_0^2 x_0 & , & b^*(b-Ax_0) = \rho_0^2 \\ A^*(Ax_1-b) = \rho_1^2 x_1 & , & b^*(b-Ax_1) = 0 . \end{cases}$$

On peut montrer, par dérivation, que $b^*(b-Ax(t))$ est fonction décroissante de t et que $||b-Ax(t)||$ est fonction croissante de t dans $[0, \sigma_1^2[$; l'angle entre b et $b-Ax(t)$ est donc croissant avec t .

En utilisant les expressions de x , x_0 , x_1 , il est facile de compléter les inégalités (6) à (8) par les suivantes :

$$\frac{\rho_0^2}{\sigma_n^2} \leq \frac{||x_0-x||}{||x_0||} \leq \frac{\rho_0^2}{\sigma_1^2} ,$$

$$\frac{\rho_1^2}{\sigma_n^2} \leq \frac{||x_1-x||}{||x_1||} \leq \frac{\rho_1^2}{\sigma_1^2} .$$

Remarques.

1°/ Si A vérifie l'égalité $A^*A = I$, alors si ρ_1 est inférieur à 1, les diverses solutions se réduisent à

$$x(t) = \frac{1}{1-t} A^*b$$

avec $t = 0, \rho_0^2$ et ρ_1^2 .

2°/ On sait qu'en général le système aux moindres carrés, de solution x , est mal conditionné ; dans ce cas, les systèmes donnant x_0 et x_1 ont un conditionnement encore plus mauvais, du fait de l'implication :

$$\sigma_1 < \sigma_n \text{ et } t > 0 \Rightarrow \frac{\sigma_1^{2-t}}{\sigma_n^{2-t}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2} .$$

3°/ Les problèmes de minimisation que nous avons considérés pour obtenir x_0 et x_1 , n'ont, semble-t-il, jamais été étudiés. Seuls des problèmes voisins se trouvent par exemple dans [15], [31], [42] et [45].

5.4.3 - Exemple : approximation dans un espace de Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert et G un sous-espace vectoriel fermé dans H .

L'approximation de $f \in H$ ($f \notin G$) par un élément de G peut être considérée comme la recherche d'une solution généralisée au problème (sans solution) :

$$(24) \quad u \in G \text{ avec } u = f .$$

Si G est muni de la structure d'espace de Hilbert induite par H , le problème s'écrit $iu = f$, avec $i \in \mathcal{L}(G, H)$ injection de G dans H . En se plaçant dans le cadre défini au début de 5.4.2, les trois types de solutions, quand elles existent, correspondent aux problèmes suivants :

$$(25) \quad \min_{g \in G} ||f-g|| ,$$

$$(26) \quad \min_{g \in G} \frac{||f-g||}{||g||} ,$$

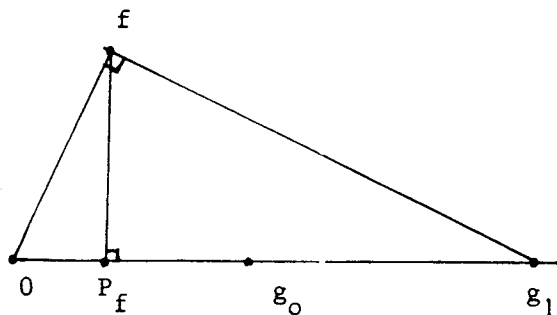
$$(27) \quad \min_{g \in G} \frac{||f-g||}{(1+||g||^2)^{1/2}} .$$

Le problème (25) correspond à l'approximation au sens classique, et a toujours une solution unique Pf , où P est la projection orthogonale de H sur G .

L'adjointe de l'injection i est précisément la projection P , et i vérifie l'égalité $i^*i = I_G$. D'après 5.4.2, les trois solutions $g = Pf$, g_0 et g_1 sont proportionnelles quand elles existent.

Si Pf est différent de 0, les solutions g_0 et g_1 existent et sont uniques. Si Pf est égal à 0 (f orthogonal à G), la solution g_1 n'existe pas et la solution g_0 n'existe que si $\|f\|$ est égal à 1, auquel cas l'ensemble des solutions g_0 est égal à G .

Le schéma suivant représente, dans le plan engendré par f et Pf , la position des trois solutions :



Les points Pf et g_1 ont une position bien caractérisée géométriquement, la solution g_0 appartient au segment $[Pf, g_1]$, et est donnée par

$$g_0 = \frac{1}{1-\rho_0^2} Pf,$$

où ρ_0^2 est la plus petite racine de l'équation en t

$$t^2 - (1+\|f\|^2)t + \|f\|^2 - \|Pf\|^2 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\rho_0^2 = \frac{1 + \|f\|^2 - ((\|f\|^2 - 1)^2 + 4\|Pf\|^2)^{1/2}}{2} .$$

La solution g_1 est donnée par

$$g_1 = \frac{1}{1 - \rho_1^2} Pf \quad , \quad \text{avec } \rho_1^2 = 1 - \frac{\|Pf\|^2}{\|f\|^2} .$$

Remarque.

Si G est de dimension finie n , les problèmes sont ramenés à \mathbb{R}^n en choisissant par exemple une base (g_1, \dots, g_n) orthonormée.

Si (g_1, \dots, g_n, \dots) est une base orthonormée de G de dimension infinie, on sait que la limite de la projection de f sur $[g_1, \dots, g_n]$ lorsque n croît est égale à f . Il en est de même pour les deux autres types d'approximation, du fait de l'implication :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Pf)_n = f \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_1)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_0)_n = 0 .$$

—

BIBLIOGRAPHIE

(première partie)

- 1 AUBIN J.P.
Approximation of elliptic boundary-value problems.
Wiley Interscience (1972).
- 2 BANACH S.
Théorie des opérations linéaires.
Warszawa (1932).
- 3 BAUER F.L.
On the Field of Values Subordinate to a Norm.
Numer.Math.4,103-113 (1962).
- 4 BAUER F.L.
Theory of Norms.
Techn.Report No CS75.Standford University (1967).
- 5 BAUER F.L.,J.STOER and C.WITZGALL.
Absolute and monotonic norms.
Numer.Math.3,257-264 (1961).
- 6 BOHNENBLUST H.F. and S.KARLIN.
Geometrical properties of Banach Algebras.
Annals of Math.62,No2,217-229 (1955).
- 7 BOULLION T.L. and P.L.ODELL.
Generalized inverse matrices.
Wiley Interscience (1971).
- 8 BOURBAKI N.
Espaces vectoriels topologiques.
Act.Sci. et Ind.No1229.Hermann (1967).
- 9 CHENEY E.W. and K.H.PRICE.
Minimal projections.
in Approximation Theory (A.Talbot ed.).Academic Press (1970).

- 10 DOUADY R.
Perturbations d'un morphisme d'espaces de Banach.
Séminaire de Nice.Exposés Nos 11,12 (1966).
- 11 DUCCROCCQ Y.
Méthode d'estimation a posteriori d'erreurs.
Thèse 3° Cycle.Grenoble (1968).
- 12 DUNFORD N. and J.SCHWARTZ.
Linear Operators.
Interscience Publishers.Vol.I (1958).Vol.II (1963).
- 13 FIEDLER M. et V.PTAK.
Sur la meilleure approximation des transformations linéaires
par des transformations de rang prescrit.
C.R.Acad.SC.Paris.t.254,3805-3807 (1962).
- 14 FOCKE J.
..
Über die Multiplikatitivität von Matrizen-Normen.
Numer.Math.7,251-254 (1965).
- 15 FORSYTHE G.E. and G.H.GOLUB.
On the stationary values of a second-degree polynomial
on the unit sphere.
S.I.A.M.J.13, No4,1050-1068 (1965).
- 16 FRANCK P.
Sur la plus courte distance d'une matrice donnée à l'ensemble
des matrices singulières.
C.R.Acad.Sc.Paris.t.256,3799-3801 (1963).
- 17 FUNDERLIC R.E.
Norms and Semi-Inverses.
Dissertation.university of Tennessee (1970).
- 18 GASTINEL N.
Matrices du second degré et normes générales en Analyse
Numérique Linéaire.
Thèse.Grenoble (1960).
- 19 GASTINEL N.
Propriétés de certains ensembles normés de matrices.
Numer.Math.7,255-260 (1965).

- 20 GASTINEL N.
Estimations a posteriori des erreurs dans les problèmes
linéaires pour des espaces de Hilbert.
Séminaire de Grenoble. (1967).
- 21 GRIES D.
Characterization of certain classes of norms.
Numer.Math.10,30-41 (1967).
- 22 GROTHENDIECK A.
Produits tensoriels d'espaces topologiques et espaces
nucléaires.
Memoirs of the Amer. Math. Soc. No 16 (1955).
- 23 HADELER K.P.
Submultiplikative Normen auf Algebren.
Linear Algebra and Its Applications 2,173-189 (1969).
- 24 HOLMES R.B.
A Course on Optimization and Best Approximation.
Lecture Notes in Mathematics No 257.Springer Verlag (1972);
- 25 HOUSEHOLLER A.S. and G.YOUNG.
Matrix approximation and latent roots.
Amer.Math.Monthly XLV,165-171 (1938).
- 26 JOLY J.L.
Conditionnement de suites dans un espace de Banach.
Séminaire de Grenoble. (1968).
- 27 LANCASTER P.
A Note on Sub-Multiplicative Norms.
Numer.Math.19,206-208 (1972).
- 28 LANCASTER P. and H.K.FARAHAT.
Norms on Direct Sums and Tensor Products.
Math. of Comp. 26,No 118,401-414 (1972).
- 29 LAURENT P.J.
Approximation et optimisation.
Enseignement des Sciences 13.Hermann (1972).
- 30 LORENTZ G.G.
Metric entropy , widths , and superpositions of functions.
Amer.Math.Monthly 69,469-485 (1962).

- 31 LUENBERGER D.G.
Optimization by Vector Space Methods.
John Wiley. (1969).
- 32 MAITRE J.F. et NGUYEN HUU VINH.
Valeurs singulières généralisées et meilleure approximation
de rang r d'un opérateur linéaire.
C.R.Acad.Sc.Paris.t.262,502-504 et 910-912 (1966).
- 33 MAITRE J.F. et NGUYEN HUU VINH.
Distance à certains ensembles dans les espaces d'applications
linéaires.
Congrès A.F.I.R.O. Nancy.I,163-167 (1967).
- 34 MAITRE J.F.
Norme composée et norme associée généralisée d'une matrice.
Numer.Math.10,132-141 (1967).
- 35 MAITRE J.F.
Sur une classe de normes et l'analyse a posteriori d'un
système linéaire.
Numer.Math.12,106-110 (1968).
- 36 MAITRE J.F.
Propriétés de certaines normes de matrices (cross-normes,
normes multiplicatives et unitaires).
Séminaire de Grenoble. (1970).
- 37 MIRSKY L.
Symmetric gauge functions and Unitarily Invariant Norms.
Quart.J.Math.Oxford(2),11,50-59 (1960).
- 38 MIRSKY L.
Inequalities and Existence Theorems in the Theory of Matrices.
J. of Math.Anal. and Appl.9,99-118 (1964).
- 39 NEUMANN J. von.
Some matrix-inequalities and metrization of matrix-space.
Tomsk.Univ.Review,1,286-299 (1937).
(ou: Collected Works,Vol.4,Pergamon Press Inc (1961)).

- 40 OETTLI W. and W.PRAGER.
Compatibility of approximate solution of linear equations
with given error bounds for coefficients and right-hand
sides.
Numer.Math.6,405-409 (1964).
- 41 OSTROWSKI A.
..
Über Normen von Matrizen.
Math.Zeitschr.Bd.63,2-18 (1955).
- 42 PORTER W.A.
Modern foundations of systems engineering.
The Macmillan Company (1966).
- 43 RIGAL J.L. and J.GACHES.
On the compatibility of a given solution with the data
of a linear system.
J. of the A.C.M.14,543-548 (1967).
- 44 ROBERT F.
Matrices nonnégatives et normes vectorielles.
Cours de D.E.A. Lyon (1973) et Grenoble (1974).
- 45 ROSENBLUM M.
Some Hilbert space extremal problems.
Proc.Amer.Math.Soc.16,687-691 (1965).
- 46 RUSTON A.F.
Auerbach's theorem and tensor products of Banach spaces.
Proc.Cambridge Phil.Soc.58,476-480 (1964).
- 47 SCHATTEN R.
A Theory of Cross-Spaces.
Ann. of Math.Studies No 26,Princeton Univ. Press,MR12 (1950).
- 48 SCHNEIDER H.
Bound Norms.
Linear Algebra and Its Applications 3,11-21 (1970).
- 49 SINGER I.
Best Approximat-on in Normed Linear Spaces.
Springer Verlag. (1970).

- 50 STOER J.
On the Characterization of Least Upper Bound Norms
in Matrix Space.
Numer.Math.6,302-314 (1964).
- 51 STOER J.
A Characterization of Hölder Norms.
S.I.A.M.J.12,No9,634-648 (1964).
- 52 TAYLOR A.E.
A Geometric Theorem and Its Application to Biorthogonal
Systems.
Bull.Amer.Math.Soc.53,614-616 (1947).
- 53 WEINSTEIN A. and W.STENGER.
Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues; Theory
and Ramifications.
Academic Press. (1972).
- 54 WIELANDT H.
Topics in the Analytic Theory of Matrices.
Lecture Notes,University of Madison,Wisconsin (1967).
- 55 ZENGER C.
Verallgemeinerte Wertevorräte von Matrizen.
Dissertation.München (1967).

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE 6

SUR L'EQUIVALENCE ENTRE
SEMI-NORME ET OSCILLATION

6-0 - INTRODUCTION

Dans un travail précédent, nous avons obtenu des résultats de localisation de valeurs propres en utilisant des semi-normes [15] ; en particulier, pour la semi-norme de \mathbb{C}^n , $x \mapsto \max_i |x_i - x_j|$, les résultats étaient analogues à ceux obtenus par Deutsch [6] pour des opérateurs positifs en considérant certaines sections de cônes. Ces derniers résultats ont été complétés et réexprimés en utilisant la notion d'oscillation dans un espace ordonné (Bauer, Deutsch, Stoer [2]). Bauer [1] avait étudié cette notion pour donner des démonstrations algébriques de travaux de Hofp [10] et Birkhoff [4], dont Ostrowski [21] avait fait une intéressante présentation.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude détaillée de la notion d'oscillation étendue à un espace préordonné (§ 3) et montrons que toute semi-norme est une oscillation relative à certains éléments, expliquant ainsi les résultats de localisation communs aux travaux [15] et [6], [2], que nous résumons auparavant.

6-0-1 - LOCALISATION DE VALEURS PROPRES A PARTIR D'UNE SEMI-NORME [15].

Un espace vectoriel E étant muni d'une semi-norme φ , les opérateurs linéaires bornés sont ceux qui laissent le noyau \mathcal{N} de φ invariant. On peut munir l'espace de ces opérateurs de la semi-norme :

$$A \in \mathcal{L}_{\varphi}(E) \mapsto S_{\varphi}(A) = \sup_x \{ \varphi(Ax) ; \varphi(x) = 1 \}$$

dont le noyau est $\{M ; \text{Im}(M) \subset \mathcal{L}\}$.

Ces opérateurs constituent une algèbre, avec : $S_{\varphi}(AB) \leq S_{\varphi}(A)S_{\varphi}(B)$.

Pour la localisation des valeurs propres, on obtient les résultats suivants :

- 1) Si $A(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$, alors $|\lambda| \leq S_{\varphi}(A)$ pour l'ensemble des valeurs propres de A dont le sous-espace propre n'est pas inclus dans \mathcal{L} .
- 2) Si A est quelconque, alors, pour toute bijection T telle que $T(\mathcal{L})$ soit sous-espace invariant de A : $|\lambda| \leq S_{\varphi}(T^{-1}AT)$ pour toute valeur propre dont le sous-espace propre n'est pas inclus dans $T(\mathcal{L})$.

Dans le cas de \mathbb{C}^n muni de la semi-norme : $x \mapsto \max_{i,j} |x_i - x_j|$, ces résultats s'écrivent, avec $e = (1, 1, \dots, 1)$:

- 1') A étant une matrice complexe telle que $Ae = se$, les valeurs propres admettant un vecteur propre autre que e satisfont :

$$|\lambda| \leq K \cdot \max_{i,j} \sum_{k=1}^n |a_{ik} - a_{jk}|,$$

avec en général $k = 1/\sqrt{3}$, et $k = 1/2$ pour A réelle par exemple.

- 2') A étant une matrice admettant un vecteur propre u, avec $\forall i : u_i \neq 0$, les valeurs propres ayant un vecteur propre autre que u satisfont :

$$|\lambda| \leq K \cdot \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| u_k \left(\frac{a_{ik}}{u_i} - \frac{a_{jk}}{u_j} \right) \right|$$

0-0-2 - LOCALISATION A PARTIR DE L'OSCILLATION POUR DES OPERATEURS POSITIFS [2]

E étant un espace réel ordonné par un cône C, on considère les opérateurs positifs ($AC \subset C$) et continus pour une topologie d'e.l.c.. On définit l'oscillation par rapport à un vecteur p de C (cf. § 3 pour la définition), et on l'étend à la complexification V de E :

$$z = x+iy \in E \otimes iE \mapsto \text{osc}(z/p) = \sup_{\theta} \text{osc}(\text{Re}(e^{i\theta} z)/p).$$

On a alors le résultat :

- Tout opérateur A linéaire, positif et continu admet un vecteur propre $p \in C$, avec $Ap = \pi(A).p$, et pour $\lambda \neq \pi(A)$, on a :

$$|\lambda| \leq r(A) = \sup_x \{ \text{osc}(Ax/p) ; \text{osc}(x/p) \leq 1 \} \leq \pi(A).$$

Pour $E = \mathbb{R}^n$ avec $C = \{x ; x_i \geq 0, \forall i\}$ et $p = (1, 1, \dots, 1)$, on retrouve 2') de 0.1, mais seulement pour des matrices positives.

6-1 - REMARQUES PRELIMINAIRES (fermeture algébrique ...).

Dans un espace vectoriel réel E , nous considérons des segments de droite du type $[x, y[$, $[x, y]$ définis ainsi :

$$(1.1) \quad [x, y[= \{u \in E : u = (1-\alpha)x + \alpha y, \alpha \in [0, 1[\}$$

$$[x, y] = \{u \in E : u = (1-\alpha)x + \alpha y, \alpha \in [0, 1] \},$$

en remarquant que :

$$(1.2) \quad [x, x[= [x, x] = \{x\}.$$

A un ensemble C de E , nous associerons son enveloppe algébrique C^a et son noyau algébrique C^i [12] ainsi définis :

$$(1.3) \quad C^a = \{u \in E ; \exists x \in C : [x, u[\subset C\}$$

$$(1.4) \quad C^i = \{u \in E ; \forall y \in E, \exists \alpha(y) > 0 : u + \alpha(y)[0, y-u] \subset C\}$$

qui satisfont les inclusions

$$(1.5) \quad C^i \subset C \subset C^a,$$

conséquences des définitions et de (1.2).

Les éléments de C^i sont dits points intérieurs algébriques et peuvent être caractérisés de manière équivalente par

$$(1.6) \quad C^i = \{u \in E ; C-u \text{ absorbant}\}.$$

Un ensemble est dit algébriquement ouvert ou fermé, si $C^i = C$ ou $C^a = C$.
On n'a pas en général l'égalité $C^{aa} = C^a$ lorsque E n'est pas de dimension finie.

Dans tout espace vectoriel topologique, la frontière algébrique $C^a - C^i$ est incluse dans la frontière topologique.

- Si C est un ensemble convexe, C^o et C^a sont convexes ; de plus C possède une fermeture algébrique C^{α} et l'on a $C^{ii} = C^i$.
- Si C est convexe, avec $0 \in C^i$ ($\neq \emptyset$), et si l'on note q sa fonctionnelle de Minkowski :

$$(1.7) \quad x \mapsto q(x) = \inf \{ \alpha \geq 0 ; x \in \alpha C \}, \text{ on a}$$

$$(1.8) \quad C^i = \{ x ; q(x) < 1 \}$$

$$(1.9) \quad C^a = \{ x ; q(x) \leq 1 \} ;$$

dans un espace vectoriel topologique, C est d'intérieur non vide si et seulement si q est continue, et alors $\overset{\circ}{C} = C^i$, $\bar{C} = C^a$, et la frontière algébrique est évidemment égale à la frontière topologique.

- Si C est un cône convexe, il en est de même pour C^a et C^i (ce dernier étant en général non pointé) ; dans un espace vectoriel topologique, \bar{C} est aussi un cône convexe, et $C^i = \overset{\circ}{C}$ si C^i est d'intérieur non vide.
- Si C est une variété linéaire, on a évidemment $C^a = C$ (C algébriquement fermé), et $C^i = \emptyset$ si $C \neq E$.

6-11 - QUELQUES PROPRIETES DES ESPACES VECTORIELS PREORDONNES

6-11-1 - Rappels

Soit E un espace vectoriel réel muni d'une relation de préordre (notée \leq) compatible avec la structure d'espace vectoriel. Rappelons les axiomes correspondants :

(11-1) $\forall x : x \leq x$

(11-2) $\forall x, y, z : x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(11-3) $\forall x, y, z : x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

(11-4) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ : x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y.$

On sait qu'il est équivalent de donner le cône C des éléments positifs ($0 \leq x$) :

$$x \leq y \Leftrightarrow y-x \in C,$$

cet ensemble C satisfaisant :

(11-5) $C+C \subset C$ (cône convexe)

(11-6) $\alpha C \subset C, \forall \alpha \geq 0.$

Pour une relation d'ordre, il faut ajouter l'axiome :

$$x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y,$$

équivalent à :

$$C \cap -C = \{0\} \text{ (cône propre).}$$

Le préordre définit une relation d'équivalence (égalité pour un ordre) :

$$(II.7) \quad x \sim y \Leftrightarrow x \leq y \text{ et } y \leq x \Leftrightarrow x-y \in C \cap -C$$

qui permet de passer à une relation d'ordre sur l'espace quotient E/\bar{O} , si l'on note $\bar{O} = C \cap -C$ la classe d'équivalence de 0, qui est un sous-espace (conséquence de (II.3) et (II.4)).

En notant :

$$(II.8) \quad \llbracket x, y \rrbracket = \{u \in E ; x \leq u \leq y\},$$

on remarque que $\bar{O} = \llbracket 0, 0 \rrbracket = C \cap -C$, et plus généralement

$$\bar{x} = \llbracket x, x \rrbracket = (x+C) \cap (x-C).$$

6-II-2 - Caractérisation des préordres archimédiens et des unités

Un espace ordonné est dit archimédien [3] si

$$(II.9) \quad \mu a \leq b, \quad \forall \mu \geq 0 \Rightarrow a \leq 0,$$

et presque archimédien [23] si

$$(II.10) \quad \mu a \leq b, \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 0.$$

Nous dirons qu'un préordre a ces propriétés si elles sont satisfaites par l'ordre sur l'espace quotient E/\bar{O} ; l'axiome (II.9) peut être conservé sous la même forme, et l'axiome (II.10) doit être écrit :

$$(II.10 \text{ bis}) \quad \mu a \leq b, \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in \bar{O}.$$

La propriété (II.9) entraîne évidemment (II.10 bis).

Pour simplifier, on parlera aussi de cône archimédien. On peut alors traduire géométriquement les notions précédentes :

- C archimédien : pour toute demi-droite de C, la parallèle menée en 0 est encore dans C.
- C presque archimédien : les seules droites de C sont les parallèles à $\bar{0} = C \cap -C$.

Ces propriétés dépendent de la fermeture algébrique de C; on a plus précisément :

PROPOSITION II-1

C est archimédien si et seulement s'il est algébriquement fermé, c'est-à-dire si $C^3 = C$. [2].

Démonstration :

On a les équivalences :

$$[\forall \mu \geq 0 : x + \mu y \in C] \Leftrightarrow [\forall \mu \geq 0 : \frac{x + \mu y}{1 + \mu} \in C] \Leftrightarrow [[x, y[\subset C]$$

donc :

$$\text{archimédien} \Leftrightarrow [[x, y[\subset C \Rightarrow y \in C],$$

or :

$$C^3 = C \Leftrightarrow C^3 \subset C \Leftrightarrow [[x, y[\subset C \Rightarrow y \in C],$$

d'où le résultat.

PROPOSITION II-2

C est presque archimédien si et seulement si $C^a - C^a = C \cap -C$.

Démonstration :

On a :

$$[\forall \mu : x + \mu y \in C] \Leftrightarrow [[x, y[\subset C \text{ et } [x, -y[\subset C] ;$$

or $C^a - C^a = \{y ; \exists x_1, x_2 \in C : [x_1, y[\subset C \text{ et } [x_2, -y[\subset C\}$

mais, C étant convexe, on peut choisir un même x pour y et $-y$

$$((1-\alpha)x_1 + \alpha y \in C, x_2 \in C \Rightarrow (1-\alpha)(x_1 + x_2) + \alpha y \in C) ;$$

et donc : presque archimédien $\Leftrightarrow C^a - C^a \subset C \cap -C$,

d'où le résultat puisque $C^a \supset C$.

Remarque : $C^a - C^a$ et $C \cap -C$ sont des sous-espaces; en général, on a seulement

$$C \cap -C = (C \cap -C)^a \subset C^a - C^a.$$

Notons enfin des propriétés liées à C^i , en rappelant que e (nécessairement ≥ 0) est dit élément unité d'un préordre si :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_x \geq 0 : -\alpha_x e \leq x \leq \alpha_x e$$

c'est-à-dire: $[-e, e]$ est absorbant.

PROPOSITION II-3

L'ensemble des unités du préordre est égal à C^i .

Démonstration :

$$[-e, e] = (C-e) \cap (-C+e)$$

comme : $C-e$ absorb. $\Leftrightarrow e \in C^i$

et $C-e$ absorb. $\Leftrightarrow (C-e) \cap (-C+e)$ absorb.,

le résultat est démontré.

Corollaire II-3

$$C^i \neq \emptyset \Rightarrow C-C = E.$$

Démonstration :

$C^i \neq \emptyset \Rightarrow \exists e$ unité, soit

$$\forall x \in E, \exists \alpha > 0 : -\alpha e \leq x \leq \alpha e$$

et l'on a :

$$x = \frac{x+\alpha e}{2} - \frac{\alpha e-x}{2}$$

$$= x_1 - x_2 \text{ avec } x_1 \text{ et } x_2 \in C$$

et donc $E = C-C.$

Exemples :

Dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), l'ordre lexicographique n'est pas presque archimédien car $C_n^a - C^a = \{x ; x_1 = 0\}$ et $C_n^a - C = \{0\}$, par contre l'ordre "composante à composante" est archimédien (cône : $(\mathbb{R}^+)^n$).

6-III - OSCILLATION RELATIVE A UN VECTEUR DANS UN ESPACE PREORDONNE

6-III-1 - Etude de certaines fonctionnelles

L'espace réel E étant préordonné (cône positif C), et p étant un élément quelconque de E, considérons les applications :

$$(III-1) \quad x \mapsto S(x/p) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} ; x \leq \lambda p \}$$

$$(III-2) \quad x \mapsto s(x/p) = \sup \{ \mu \in \mathbb{R} ; \mu p \leq x \}$$

de E dans $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On adopte les conventions habituelles d'extension des opérations à $\tilde{\mathbb{R}}$, ainsi que : $\inf(\emptyset) = \infty$, $\sup(\emptyset) = -\infty$.

Les propriétés suivantes résultent des définitions :

PROPOSITION III-1

$$(III-3) \quad \forall x : s(x) = -S(-x)$$

$$(III-4) \quad \forall x, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : S(\alpha x) = \alpha S(x), s(\alpha x) = \alpha s(x)$$

$$(III-5) \quad \forall x, \forall \alpha \in \mathbb{R} : S(x+\alpha p) = S(x)+\alpha, s(x+\alpha p) = s(x)+\alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{x ; S(x) \begin{matrix} \leq \\ < \end{matrix} \alpha\} = \alpha p - \begin{matrix} C^a \\ C^i \end{matrix}, \{x ; s(x) \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} \alpha\} = \alpha p + \begin{matrix} C^a \\ C^i \end{matrix}$$

Démonstration :

- (III-3) : résulte de $\sup(A) = -\inf(-A)$.

- (III-4) : est conséquence de l'axiome (II-4) de préordre et du fait que $S(0) = s(0) = 0$.

- (III-5) résulte de l'axiome (II.3).
- (III-6) : $\{x ; S(x) > 0\} = \{x ; S(x) > 1\}$ -p
 mais alors $S(x) = \inf \{ \lambda \geq 0 ; x \in \lambda(p-C) \}$
 $= q(x, p-C)$ (fonctionnelle de Minkowski de $p-C$),
 d'où, d'après (I.9)

$$\{x ; S(x) \leq 0\} = -C^a$$

et (III-6) s'en déduit à l'aide de (III.5).

De même pour les inégalités strictes avec C^i , en application de (I.8).

PROPOSITION III-2

Si $p \in C$ et $\notin C \cap -C$, on a :

$$(III.7) \quad \forall x \quad : S(x) \geq s(x)$$

$$(III.8) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \{x ; S(x) = s(x) = \alpha\} = \alpha p + (C \cap -C^a).$$

Démonstration :

- Si $S > -\infty$ et $s < \infty$, alors
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R} : \mu p \leq x \leq \lambda p \Rightarrow (\lambda - \mu)p \in C$
 et comme $p \in C$, $\notin -C$, $\lambda - \mu \geq 0$ et donc $S \geq s$.
- Si $S = \infty$: $S \geq s$ dans tous les cas.
- Si $S = -\infty$: $\exists x \text{ tq. } \forall \mu : x \leq \mu p$
 et donc $\nexists \lambda \text{ tq. } \lambda p \leq x$, c'est-à-dire $s = -\infty$.
- Si $s = \infty$: $\exists x \text{ tq. } \forall \lambda : \lambda p \leq x$,
 et comme précédemment, cela entraîne $S = \infty$.

L'inégalité (III.7) est donc démontrée.

Quant à (III.8), c'est une conséquence de (III.6) et (III.7).

Remarque :

(III.3) et (III.7) entraînent : $\forall x, S(x)+S(-x) \geq 0$ et
 $s(x)+s(-x) \leq 0$.

Corollaire III.2

$$\text{SI } C \neq E : C_{\cap}^i - C^a = \emptyset$$

Démonstration :

$$\forall p : \{x ; S \leq 0 < s\} = C_{\cap}^i - C^a$$

d'après le proposition III.1. Or, si $C \neq -C$, $\exists p$ tq. cet ensemble est vide à cause de (III.7), et si $C = -C$ (sous-espace) alors $C^i = \emptyset$ lorsque $C \neq E$.

PROPOSITION III-3

On a $S(x) > -\infty$ et $s(x) < \infty$, pour tout x , si et seulement si
 $p \notin C_{\cap}^a - C^a$.

Démonstration :

D'après (III.3), il suffit de considérer S .

Or : $\{p ; \exists x \text{ tq. } \forall \lambda : x \leq \lambda p\} = C_{\cap}^a - C^a$ (Prop. II.2),
ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION III-4

Si $p \notin C_{\cap}^a - C^a$, alors S et $-s$ sont sous-additives :

(III.9) $\forall x, y \in E : S(x+y) \leq S(x)+S(y)$

(III.10) $s(x+y) \geq s(x)+s(y)$

Démonstration :

Il suffit de montrer (III.9). D'après la Prop. III.3, on ne peut avoir d'indétermination à droite ($\infty - \infty$ ou $-\infty + \infty$), et si $S(x)$ ou $S(y) = \infty$, l'inégalité est vérifiée.

Si $S(x)$ et $S(y)$ sont finis :

$\forall \lambda_1, \lambda_2 : x \leq \lambda_1 p, y \leq \lambda_2 p.$

$\Rightarrow x+y \leq (\lambda_1 + \lambda_2)p$ et donc :

$S(x+y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$, soit $S(x+y) \leq S(x)+S(y)$.

6-III-2 - Oscillation ; propriétés

Définition

On appelle oscillation de x par rapport à p l'application

(III.11) $x \mapsto \text{osc}(x/p) = S(x/p) - s(x/p)$

qui est définie si $p \notin C_{\cap}^a - C^a$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ si $p \in C$; elle satisfait :

$$(III.12) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \text{osc}(\alpha x) = |\alpha| \text{osc}(x),$$

$$(III.13) \quad \forall x, y \in E : \text{osc}(x+y) \leq \text{osc}(x) + \text{osc}(y).$$

Le fait d'être définie est conséquence de la Proposition III.3.
 Les propriétés résultent directement de (III.3), (III.4), (III.9), (III.10).
 Elle est positive d'après (III.7).

PROPOSITION III.5

Si $p \in C^1$, alors $p \notin C^a - C^a$
 et $\text{osc}(\cdot/p)$ est une semi-norme de noyau $N = \mathbb{R}p + C^a - C^a$
 et de boule unité $[-p/2, p/2]_{C^a + \mathbb{R}p}$.

Démonstration :

$p \notin C^a - C^a$ d'après le corollaire III.3

$p \in C^1 \Leftrightarrow C-p$ absorbant $\Rightarrow S < \infty$ et $s > -\infty$,

ce qui avec (III.12) et (III.13) montre que osc est une semi-norme.

La composition du noyau résulte de (III.8). Pour la boule unité, on a successivement :

$$\forall \varepsilon > 0 : (s-\varepsilon)p \leq x \leq (S+\varepsilon)p$$

et, avec $o = (S+s)/2$:

$$\left(\frac{-\text{osc}(x)}{2} - \varepsilon\right)p \leq x - op \leq \left(\frac{\text{osc}(x)}{2} + \varepsilon\right)p$$

et $\text{osc}(x) \leq 1$ est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0 : -p/2 - \varepsilon p \leq x - op \leq p/2 + \varepsilon p$$

soit

$$x - op - p/2 \in -C^a$$

$$x - op + p/2 \in C^a$$

et donc

$$x \in \mathbb{R}p + (p/2 - C^a) \cap (-p/2 + C^a).$$

Remarque :

$$\dim(N) = \dim(C_0^a - C^a) + 1.$$

PROPOSITION III-6

Si $p \in C^1$ et $C = C^a$ (archimédien) alors on a :

$$s(x/p) = \min \{ \lambda ; x \leq \lambda p \}$$

$$s(x/p) = \max \{ \mu ; \mu p \leq x \}$$

et

$$\text{osc}(x/p) = \min \{ \lambda ; x \leq \lambda p \} - \max \{ \mu ; \mu p \leq x \}.$$

Remarques et exemples

(1) La semi-norme osc est identiquement nulle si et seulement si $C_0^a - C^a$ est un hyperplan. En effet, avec $p \notin C^a - C^a$ on a $N = E$. C'est le cas pour l'ordre lexicographique dans \mathbb{R}^n .

(2) Pour l'ordre de \mathbb{R}^n "composante à composante" et $p = (p_1, \dots, p_n)$ avec $\forall j : p_j > 0$ ($p \in C^1$), on a :

$$\text{osc}(x/p) = \max_j \frac{x_j}{p_j} - \min_k \frac{x_k}{p_k}.$$

(3) Si osc se déduit de manière unique de la donnée de C et p , la réciproque n'est évidemment pas vraie.

Si l'on fixe par exemple p , tous les cônes tels que $[-p/2, p/2] \subset C_0 + \mathbb{R}p = B$ (boule de osc) conviennent.

6-IV - CORRESPONDANCE ENTRE SEMI-NORMES ET OSCILLATIONS

6-IV-1 - Oscillation par rapport à un sous-ensemble dans un espace vectoriel

6-IV-1-1 - Définition

Si f est une application d'un ensemble E dans un espace métrique F , son oscillation relative à un sous-ensemble A de E est habituellement définie par [7] :

$$(IV.1) \quad \text{osc}(f ; A) = \text{diam} (f(A)),$$

où diam désigne le diamètre.

C'est une application de F^E dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Dans le cas particulier d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans un espace normé F , l'oscillation devient :

$$(IV.2) \quad \text{osc}(f ; A) = \sup_{x,y \in A} \|f(x)-f(y)\| = \sup_{u \in A-A} \|f(u)\|.$$

On peut ainsi définir une oscillation sur un espace vectoriel E , relativement à un ensemble M du dual E^* , en considérant l'oscillation, au sens (IV-2), de l'élément correspondant du bidual :

Définition

Si $M \subset E^*$, l'oscillation relative à M est définie dans E par :

$$(IV.3) \quad x \in E \mapsto \text{osc}(x ; M) = \sup_{\ell \in M-M} |\ell(x)|.$$

Remarque :

L'ensemble $M-M$ est symétrique et contient 0, mais tout ensemble ayant ces propriétés n'est pas nécessairement de cette forme ; remarquons de plus que l'application $M \mapsto M-M$ n'est pas injective.

6-IV-1-2 - Rappels et propriétés

Dans la dualité (E, E^*) , nous noterons S° le polaire (absolu sauf indication contraire), et S^\perp l'orthogonal d'un ensemble S de E ou E^* . Résumons quelques propriétés résultant de ces définitions.

$\forall S : S^\perp$ est un sous-espace vectoriel ; S° est convexe équilibré.

$S^\perp \subset S^\circ$ et $S^\perp = S^\circ$ si S est un cône, et en particulier un sous-espace.

$S \subset U \Rightarrow S^\circ \supset U^\circ$ et $S^\perp \supset U^\perp$

$S^{\perp\perp} \supset S^{\circ\circ} \supset S$

S sous-espace de $E \Rightarrow S^{\perp\perp} = S$

S ensemble fini de $E^* \Rightarrow S^{\perp\perp}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant S .

Si $S \subset E^*$, l'application w_S définie par

$$x \mapsto w_S(x) = \sup_{\ell \in S} |\ell(x)|$$

est du type semi-norme généralisée (valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$), et l'on a :

(IV.4) $\{x ; w_S(x) = 0\} = S^\perp$

(IV.5) $\{x ; w_S(x) \leq 1\} = S^\circ.$

pour $\text{osc}(x; M)$, $S = M-M$ et l'on a :

$$(IV-6) \quad M^\perp \subset (M-M)^\perp$$

$$(IV-7) \quad M \ni 0 \Rightarrow (M-M)^\perp = M^\perp$$

$$(IV-8) \quad \frac{1}{2} M^\circ \subset (M-M)^\circ, \quad 2M^{\circ\circ} \supset (M-M)^{\circ\circ}$$

((IV.7) résulte de (IV.6) et de : $M \ni 0 \Rightarrow M \subset M-M$).

6-IV-2 - Comparaison des deux types d'oscillations.

On considère l'espace E réel dans ce qui suit.

6-IV-2-1 - Préordre associé à $M \subset E^*$

A l'ensemble M de E^* , associons le cône de E ainsi défini :

$$(IV.9) \quad C_M = \{x \in E; \ell(x) \geq 0, \forall \ell \in M\}.$$

PROPOSITION IV.1

Le cône convexe C_M a les propriétés suivantes :

$$(IV.10) \quad C_M \cap -C_M = M^\perp$$

$$(IV.11) \quad C_M^a = C_M \text{ (archimédien)}$$

$$(IV.12) \quad C_M^i = \{x; \inf_{\ell \in M} \ell(x) > 0\} \quad \text{si } M \neq \{0\}.$$

Démonstration

(IV.10) est évident.

(IV.11) équivaut à : $(\forall \alpha \in [0, 1[: (1-\alpha)\ell(x) + \alpha\ell(y) \geq 0, \forall \ell \in M)$
 $\Rightarrow \ell(y) \geq 0, \forall \ell \in M$, qui résulte de la continuité
 de : $\alpha \mapsto (1-\alpha)\ell(x) + \alpha\ell(y)$.

Pour (IV.12) : $x \in C_M^i \Leftrightarrow \forall u, \exists \lambda_0 > 0 \text{ t.q. } \forall |\lambda| \leq |\lambda_0| : \ell(x+\lambda u) \geq 0, \forall \ell \in M$
 soit $\ell(x) \geq |\lambda|\ell(u)$, d'où :

$$\inf_{\ell \in M} \ell(x) \geq |\lambda| \sup_{\ell \in M} \ell(u) > 0 \text{ si } \exists u \notin M^\perp$$

Notons que C_M est le polaire (non absolu) du cône engendré par M

$$C_M = (\mathbb{R}^+ M)^\circ \text{ si } \Lambda^\circ = \{x \in E ; \ell(x) \geq -1, \forall \ell \in \Lambda\}.$$

Nous utiliserons aussi l'ensemble :

$$(IV.13) \quad P_M = \{x \in E ; \ell(x) = 1, \forall \ell \in M\}.$$

Signalons sans démonstration un certain nombre de relations entre divers ensembles :

$$(IV.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} M^\perp \subset C_M \subset (M_n - M)^\perp \\ C_M + M^\perp = C_M \\ P_M = p + M^\perp \text{ si } p \in P_M \neq \emptyset \\ P_M \subset (M - M)^\perp \\ P_M \subset C_M \\ (M - M)^\perp \cap C_M = \mathbb{R}^+ P_M \text{ si } P_M \neq \emptyset. \\ (M - M)^\perp = M^\perp + \mathbb{R} P_M = M^\perp + \mathbb{R} p. (p \in P_M \neq \emptyset). \end{array} \right.$$

PROPOSITION IV-2

Une condition nécessaire et suffisante pour que C_M et P_M ne soient pas réduits respectivement à M^\perp et \emptyset est que $(M-M)^\perp$ et M^\perp soient distincts.

Démonstration :

$$(M-M)^\perp \neq M^\perp \Leftrightarrow \exists x : \ell(x) = \alpha \neq 0, \forall \ell \in M$$

d'où la proposition.

En particulier :

$$(M-M)^\perp = \{0\} \Rightarrow C_M = M^\perp = \{0\} \text{ et } P_M = \emptyset,$$

ce qui est le cas lorsque $\text{osc}(\cdot ; M)$ est une norme.

5-IV-2-2 - Relation entre $\text{osc}(\cdot/p)$ et $\text{osc}(\cdot ; M)$.

PROPOSITION IV-3

L'oscillation, suivant le cône C_M , par rapport à $p \in C_M^i$ est la semi-norme (de noyau $M^\perp + \mathbb{R}p$) d'expression :

$$\text{osc}(x/p) = S(x/p) - s(x/p)$$

avec

$$S(x/p) = \sup_{\ell \in M} \frac{\ell(x)}{\ell(p)}, \quad s(x/p) = \inf_{\ell \in M} \frac{\ell(x)}{\ell(p)}.$$

Démonstration :

C'est une application de la Proposition III.5 et des résultats du § précédent. L'expression résulte de la définition (IV.9) du cône C_M ; pour S :

$$\inf \{ \lambda ; \ell(\lambda p - x) \geq 0, \forall \ell \in M \}$$

$$= \inf \{ \lambda ; \lambda \geq \frac{\ell(x)}{\ell(p)} \} = \sup_{\ell \in M} \frac{\ell(x)}{\ell(p)}$$

Corollaire IV-3

Si $(M-M)^\perp \neq M^\perp$, $\text{osc}(\cdot ; M)$ est égale à l'oscillation par rapport à un vecteur quelconque p de P_M suivant le cône C_M , avec $S(x/m) = \sup_{\ell \in M} \ell(x)$, $s(x/p) = \inf_{\ell \in M} \ell(x)$.
Soit :

IV.15)
$$\sup_{\ell \in M-M} |\ell(x)| = \text{osc}_{C_M}(x/p), \quad \forall p \in P_M.$$

Démonstration :

$P_M \neq \emptyset$ d'après la Proposition IV.2 et $P_M \subset C_M^i$ d'après (IV.12).

Donc la Proposition IV.3 donne :

$$\text{osc}(x/p) = \sup_{\ell \in M} \ell(x) - \inf_{\ell \in M} \ell(x) = \sup_{\ell \in M-M} |\ell(x)|$$

puisque E est réel.

Exemple :

Le cas de l'exemple (2) du paragraphe III.2 correspond à $M = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ avec $e_i^* : x \mapsto x_i$; il permet d'illustrer simplement ce qui précède.

On peut étendre le résultat (IV.15) au cas où la condition $(M-M)^\perp \neq M^\perp$ n'est plus remplie.

PROPOSITION IV-4

Si $(M-M)^\perp \neq \{0\}$, c'est-à-dire lorsque $\text{osc}(\cdot; M)$ est bien une semi-norme (et non une norme), il existe $l_0 \in E^*$ tel que $\text{osc}(\cdot; M)$ soit l'oscillation par rapport à un vecteur quelconque de P_{M+l_0} suivant le cône C_{M+l_0} .

Démonstration :

Si $M^\perp \neq (M-M)^\perp$, on est dans le cas du corollaire IV.3, et $l_0 = 0$ convient.

Si $M^\perp = (M-M)^\perp (\neq \{0\})$: $\exists x_0 \in M^\perp$ avec $x_0 \neq 0 \Rightarrow \exists l_0 \in E^*$ tq. $l_0(x_0) = 1$.

Si $M_0 = M+l_0$, on a $M_0-M_0 = M-M$ donc $\text{osc}(\cdot; M) = \text{osc}(\cdot; M_0)$ et

$M_0^\perp \neq (M_0-M_0)^\perp$ puisque $x_0 \in (M_0-M_0)^\perp$ mais $x_0 \notin M_0^\perp$ car :
 $\forall l \in M, (l+l_0)x_0 = 1$.

Il reste donc à appliquer le corollaire IV.3 avec M_0 pour avoir le résultat.

Remarque :

Pour le cas particulier où $M^\perp = \{0\} \neq (M-M)^\perp$, P_M est réduit à un seul élément et C_M est propre ; $(M-M)^\perp$ étant une droite (noyau de la semi-norme). C'est le cas de l'exemple cité plus haut.

§-IV-3 - Semi-norme et oscillation

Nous allons montrer que toute semi-norme sur un espace E réel peut être considérée comme oscillation relativement à certains vecteur et cône.

Lemme IV.5

Pour toute semi-norme v de boule unité B définie dans un espace vectoriel E , on a :

$$(IV.16) \quad v(x) = \sup_{\ell \in B^\circ} |\ell(x)| = \text{osc}(x; \frac{1}{2} B^\circ),$$

où B° désigne le polaire absolu dans la dualité (E, E^*) .

Démonstration

La deuxième égalité est simple conséquence de $B^\circ = \frac{1}{2} B^\circ + \frac{1}{2} B^\circ$, qui traduit que B° est convexe et équilibré.

La première est équivalente à l'égalité $B^{\circ\circ} = B$, qui peut se déduire des deux résultats connus: [9].

- 1) Pour les parties convexes d'un espace localement convexe, il y a équivalence entre "fermé" et "faiblement fermé".
- 2) Si A est une partie convexe contenant 0 , d'un espace topologique E , faiblement fermée dans la dualité (E, E') , alors $A^{\circ\circ} = A$.

Si l'on considère E muni de la topologie d'e.l.c. définie par la semi-norme v , alors B° dans (E, E') est confondu avec B° dans (E, E^*) ; de plus B est fermée, et donc, d'après 1) et 2), on a bien $B^{\circ\circ} = B$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal.

THEOREME IV. 6

Toute semi-norme v définie sur l'espace réel E , de boule unité B et de noyau $N \neq \{0\}$, est égale à l'oscillation par rapport à un vecteur p , suivant un cône C . Il suffit de choisir $p \in N$ et $\ell_0 \in E^*$ liés par $\ell_0(p) = 1$, pour avoir

$$v = \text{osc}(\cdot/p),$$

le cône étant

$$C = \{x \in E ; \frac{1}{2} \ell(x) + \ell_0(x) \geq 0, \forall \ell \in B^0\}.$$

Démonstration :

Montrons d'abord l'égalité $(B^0)^\perp = N$. D'après les rappels faits en IV.1.2, on a successivement :

$$N \subset B \Rightarrow N^0 = N^\perp \supset B^0 \Rightarrow N^{\perp\perp} \subset (B^0)^\perp$$

et donc :

$$B^{00} = B \supset (B^0)^\perp \supset N (= N^{\perp\perp}).$$

On aura $(B^0)^\perp = N$ si l'on montre que N est le plus grand sous-espace inclus dans B :

$$H \text{ sous-espace } \subset B \Rightarrow \forall x \in H : v(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in H, \forall \lambda \neq 0 : v(x) \leq \frac{1}{|\lambda|} \Rightarrow v(x) = 0$$

et on a bien $H \subset N$.

D'après le lemme, $v = \text{osc}(\cdot ; M)$ avec $M = \frac{1}{2} B^0$, et donc $M^\perp = (M-M)^\perp = N \neq \{0\}$.

Le théorème découle alors de la Proposition IV.4.

CHAPITRE 7

SEPARATION DES VALEURS PROPRES

DE MATRICES POSITIVES

ET GENERALISATION

7 - I - INTRODUCTION

Ce travail donne un nouveau résultat sur la localisation des valeurs propres d'une matrice positive distinctes de la racine de Perron ; la borne obtenue est meilleure que celle donnée par Schaefer dans l'article [24] qui a inspiré cette étude. Ce résultat fait l'objet du paragraphe 3 et est généralisé dans le paragraphe 5 au cas de matrices non nécessairement positives et d'opérateurs plus généraux.

Nous avons jugé utile de comparer, le plus précisément possible, ce résultat et ceux obtenus par Ostrowski [20], [21], Hopf [10], Bauer-Stoer-Deutsch [2], [6] et Lynn-Timlake [14]. Le paragraphe 2 est consacré au rappel de ces résultats, et le paragraphe 4 précise les différentes relations existant entre eux.

Les principaux articles concernant les matrices ou opérateurs positifs sont rappelés dans la bibliographie : travaux de référence de Frobenius [8] et Perron [22] sur les matrices positives, généralisations de Krein-Rutman [13], Karlin [14], ainsi que les résultats de Collatz [5] et les extensions dues à Mewborn [18]. Nous citons aussi les livres de Varga [25], Marcus-Minc [17] comportant un exposé assez complet des propriétés des matrices positives, et celui de Schaefer [23] qui étudie les opérateurs positifs dans les espaces topologiques.

7-II - RAPPEL DES PRINCIPALES BORNES ET DES METHODES UTILISEES

Avant d'énumérer les différents résultats (dans l'ordre chronologique), donnons quelques précisions de vocabulaire et de notation.

Un vecteur x ou une matrice A sont dits positifs ($x \geq 0$, $A \geq 0$) si toutes leurs composantes sont positives, et strictement positifs ($x > 0$, $A > 0$) si ces composantes sont strictement positives. On notera $|x|$ le vecteur de composantes $|x_i|$, $\rho(A)$ ou ρ le rayon spectral de A .

On sait qu'une matrice positive A admet ρ comme valeur propre avec un vecteur propre positif, on notera p le vecteur correspondant à A^t :

$$(1) \quad A^t p = \rho p.$$

Dans 2.1 à 2.4, A est supposée strictement positive et donc $\rho > 0$. Dans 2.5 on suppose p strictement positif, avec A seulement positive.

Les bornes données pour les valeurs propres λ ($\lambda \neq \rho$) sont soit du type μ ($|\lambda| \leq \mu$), soit du type σ ($|\lambda|/\rho \leq \sigma$) :

$$(2) \quad \forall \lambda(A) \neq \rho(A) : |\lambda| \leq \mu = \rho \cdot \sigma.$$

Nous utiliserons enfin les notations suivantes :

$$(3) \quad M_i = \max_j a_{ij} \quad m_i = \min_j a_{ij} \quad M = \max_i M_i \quad m = \min_i m_i$$

$$(4) \quad M'_i = \max_j \frac{a_{ij}}{p_j} \quad m'_i = \min_j \frac{a_{ij}}{p_j} \quad M' = \max_i M'_i \quad m' = \min_i m'_i$$

$$(5) \quad M'' = \sum_i p_i M'_i \quad m'' = \sum_i p_i m'_i.$$

7.2.1 . Ostrowski a fondé ses résultats sur la considération du nombre

$$(6) \quad \sup_{x \neq 0} \inf \{ \alpha ; |Ax| \leq \alpha A|x| \}$$

qui est égal à

$$(7) \quad \sigma_1 = \frac{\max_i \left(\frac{M'_i}{m'_i} \right) - 1}{\max_i \left(\frac{M'_i}{m'_i} \right) + 1}.$$

Il a déduit de ce résultat des bornes plus larges, mais ne faisant pas intervenir le vecteur p, d'abord

$$(8) \quad \sigma_2 = \frac{\frac{M}{m} \max_i \left(\frac{M_i}{m_i} \right) - 1}{\frac{M}{m} \max_i \left(\frac{M_i}{m_i} \right) + 1}$$

puis la borne simple mais encore plus large

$$(8 \text{ bis}) \quad \sigma_3 = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}.$$

7.2.2 Hopf a établi ses résultats pour des opérateurs intégraux positifs, en considérant le nombre

$$(9) \quad \sup_{g > 0, f} \frac{\text{osc}(Af/Ag)}{\text{osc}(f/g)}$$

où $\text{osc}(x/y)$ désigne l'oscillation de x par rapport à y, notion qui peut être étudiée dans le cadre général des espaces ordonnés [1]. Dans le cas de l'espace R^n et des matrices, on a

$$(10) \quad \text{osc}(x/y) = \max_{i,j} \left| \frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j} \right|, \quad y > 0,$$

et les résultats de Hopf s'écrivent

$$(11) \quad \sigma_4 = \frac{k-1}{k+1} \text{ avec } k^2 = \max_{i,j,k,\ell} \frac{a_{ik} a_{j\ell}}{a_{i\ell} a_{jk}}$$

et

$$(12) \quad \sigma_5 = \frac{M-m}{M+m},$$

qui est une borne évidemment plus large.

7.2.3 - Deutsch s'est placé dans le cadre général des espaces ordonnés localement convexes. Sa majoration a été obtenue en considérant la norme de la restriction à un sous-espace invariant de l'opérateur A ; la boule unité dans ce sous-espace étant construite à partir d'une section parallèle du cône positif [6]. Il a été heureusement montré par la suite [2] que cela revenait à considérer le nombre

$$(13) \quad \sup_x \frac{\text{osc}(A^t x/p)}{\text{osc}(x/p)} \quad (p \text{ défini par (1)}),$$

qui, dans le cas fini des matrices, donne la borne

$$(14) \quad \mu_6 = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_k \left| p_k \left(\frac{a_{ki}}{p_i} - \frac{a_{kj}}{p_j} \right) \right|.$$

Nous avons obtenu indépendamment le même résultat pour une classe plus large de matrices en étudiant des semi-normes [15], et avons ensuite montré l'équivalence existant avec l'oscillation (Cf. Chapitre 6).

7.2.4 - Lynn et Timlake, en utilisant le fait que les valeurs propres λ ($\neq \rho$) de A sont aussi valeurs propres de $A-xp^t$, pour tout x, ont donné la borne

$$(15) \quad \mu_7 = \rho - m \cdot \frac{\sum_k p_k}{\max_i p_i},$$

dont ils ont déduit la forme indépendante de p mais plus large

$$(16) \quad \mu_8 = \rho - m \frac{\rho - s + nm}{\rho - s + m}$$

où n est l'ordre de la matrice et s désigne $\min \sum_{i,j} a_{ij}$. On peut remarquer que la quantité $\sigma - \sum_i p_i m_i'$, qui est un élément de notre résultat (20), apparaît comme intermédiaire dans leur démonstration. Signalons enfin que nous n'avons pas retenu une borne plus compliquée et pas beaucoup plus fine que μ_8 .

7.2.5 - Schaefer a également considéré des perturbations de rang 1, mais en se limitant à la seule direction ep^t , avec $e^t = (1,1,\dots,1)$. L'encadrement le plus fin du type $\alpha ep^t \leq A \leq \beta ep^t$, qui correspond à $\alpha = m'$, $\beta = M'$ et le lemme du § 3 ont donné la borne

$$(17) \quad \mu_g = \min \left\{ \rho - m' \cdot \sum_k p_k, M' \cdot \sum_k p_k - \rho \right\}$$

ainsi que la majoration plus large correspondant à

$$(18) \quad \sigma_{10} = \frac{M' - m'}{M' + m'}$$

7 - III - UNE NOUVELLE BORNE

Comme Schaefer, nous utiliserons la propriété suivante :

Lemme - Si A est une matrice positive (≥ 0) admettant un vecteur propre p strictement positif (> 0), alors :

$$(19) \quad Ap = \rho(A)p.$$

Démonstration - Supposons $Ap = \lambda p$ avec $\lambda \neq \rho$. Or on a

$$A^t \geq 0 \Rightarrow \exists u \geq 0 \text{ t.q. } A^t u = \rho u, \text{ et}$$

$$\lambda \neq \rho \Rightarrow \langle u, p \rangle = \sum_1 u_1 p_1 = 0, \text{ ce qui est impossible avec } u \geq 0 \text{ et } p > 0.$$

THEOREME

Pour une matrice A positive (≥ 0), telle que $A^t p = \rho p$ avec $p > 0$, les valeurs propres différentes de ρ satisfont

$$(20) \quad |\lambda| \leq \min \{ \rho - m'', M'' - \rho \} = \mu_{11} \quad (\text{cf. (5)})$$

Démonstration - Les valeurs propres de A différentes de ρ sont aussi valeurs propres des matrices

$$(21) \quad \begin{aligned} B &= A - \beta x p^t \text{ et } C = \gamma x p^t - A, \text{ et} \\ B^t p &= (\rho - \beta x^t p) p, \quad C^t p = (\gamma x^t p - \rho) p. \end{aligned}$$

Si les matrices B, C sont positives, les valeurs apparaissant dans (21) sont leurs rayons spectraux et donc :

$$(22) \quad \lambda \neq \rho \Rightarrow |\lambda| \leq \min \{ \rho - \beta x^t p, \gamma x^t p - \rho \};$$

cela sera possible pour des valeurs finies β, γ si $x > 0$, et, pour x fixé, la meilleure majoration sera obtenue pour :

$$(23) \quad \begin{aligned} \beta_x &= \sup \{ \beta ; A - \beta x p^t \geq 0 \} = \min_{i,j} \frac{a_{ij}}{x_i p_j} = \min_i \frac{m'_i}{x_i} \\ \gamma_x &= \inf \{ \gamma ; \gamma x p^t - A \geq 0 \} = \max_{i,j} \frac{a_{ij}}{x_i p_j} = \max_i \frac{M'_i}{x_i}. \end{aligned}$$

Il reste à optimiser par rapport à x que l'on peut normaliser en imposant $x^t p = 1$; les valeurs optimales sont

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \sup \{ \beta_x ; x > 0 \text{ et } x^t p = 1 \} = \sum_i p_i m'_i, \\ \gamma_0 &= \inf \{ \gamma_x ; x > 0 \text{ et } x^t p = 1 \} = \sum_i p_i M'_i. \end{aligned}$$

Les dernières égalités résultent des relations :

$$\min_k \frac{m'_k}{x_k} \leq \frac{\sum_i p_i m'_i}{\sum_i p_i x_i} \text{ et } \max_k \frac{M'_k}{x_k} \geq \frac{\sum_i p_i M'_i}{\sum_i p_i x_i},$$

les égalités pouvant être atteintes respectivement pour $x = (m'_j / \sum_i p_i m'_i)$ et $x = (M'_j / \sum_i p_i M'_i)$.

Corollaire

Dans les mêmes hypothèses, on a la borne suivante, toujours plus large que (20) :

$$(24) \quad |\lambda|/\rho \leq \frac{M''-m''}{M''+m''} = \sigma_{12} .$$

Démonstration - c'est une simple conséquence de l'inégalité :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ et } r \in \mathbb{R} : \min \{r-a, b-r\} \leq \frac{b-a}{b+a} \cdot r .$$

Remarques

On aurait pu limiter la démonstration au cas des matrices stochastiques en colonnes ($p = e$), puisque pour $A \geq 0$ avec $A^t p = \rho p$, $p > 0$, la matrice

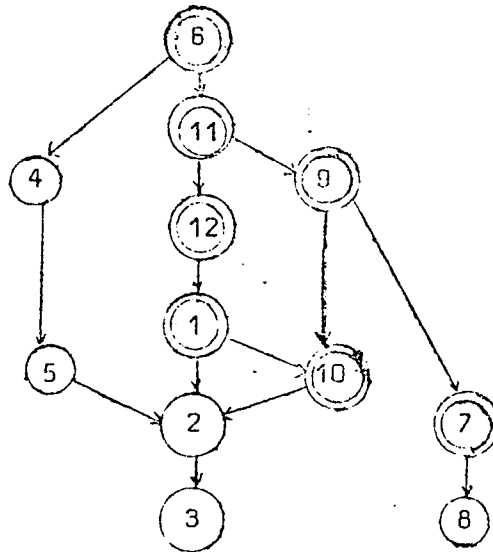
$$(25) \quad A' = \frac{1}{\rho(A)} \cdot D_p A D_p^{-1} \quad (D_p \text{ diagonale avec } (D_p^{-1})_{ii} = p_i)$$

est stochastique en colonnes.

On peut d'ailleurs obtenir d'autres bornes en appliquant certains résultats du paragraphe 2 à A' .

7-IV - COMPARAISON DES DIFFERENTS RESULTATS

Nous ne comparerons deux bornes que sur l'ensemble de toutes les matrices positives, et nous noterons $\textcircled{i} \longrightarrow \textcircled{j}$ si la borne μ_i est toujours au moins aussi bonne que la borne μ_j ($\mu_j = \rho \sigma_j$ pour les bornes données par σ). Nous pouvons ainsi résumer les relations existant entre les diverses bornes par le graphe :



N.B. Nous avons mis en évidence par un cercle doublé les formules nécessitant, dans le cas général, la connaissance du vecteur p . Dans le cas des matrices stochastiques ($p = e$), on a $\mu_5 = \mu_{10}$ et $\mu_7 = \mu_9$ si $\rho \leq \frac{n}{2} (M+m)$.

Les relations (1,2), (2,3), (4,5), (7,8), (9,10), (11,12) sont évidentes, la deuxième borne étant toujours une forme affaiblie de la première.

La relation (6,4) résulte de (9) et (13), le sup dans (9) étant pris sur un ensemble plus vaste ; de même pour (11,9), puisque μ_{11} a été obtenue par optimisation suivant un vecteur x , qui a été imposé égal à e pour obtenir μ_9 .

Les relations (5,2), (12,1), (1,10) et (10,2) résultent de la croissance de $x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}$ sur R^+ et des inégalités :

$$\frac{M}{m} \leq \frac{M}{m} \max_i \left(\frac{m_i}{m} \right), \quad (5,2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_i p_i M'_i}{\sum_i p_i m'_i} &\leq \max_i \left(\frac{M'_i}{m'_i} \right) \leq \frac{\max_i M'_i}{\min_i m'_i} \quad (12,1) \text{ et } (1,10) \\ &\leq \frac{(\max_{i,j} a_{ij}) \max_k \left(\frac{1}{p_k} \right)}{(\min_{i,j} a_{ij}) \min_l \left(\frac{1}{p_l} \right)} = \frac{M}{m} \max_{k,l} \left(\frac{p_l}{p_k} \right) = \frac{M}{m} \max_{k,l} \frac{\sum_i a_{il} p_i}{\sum_i a_{ik} p_i} \\ &\leq (1) \frac{M}{m} \max_{i,k,l} \frac{a_{il}}{a_{ik}} = \frac{M}{m} \max_i \left(\frac{M_i}{m_i} \right). \end{aligned}$$

La relation (9,7) est simple conséquence de

$$\frac{m}{\max_k p_k} \leq \min_{i,j} \left(\frac{a_{ij}}{p_j} \right).$$

Pour la relation (6,11), on peut limiter la démonstration à la matrice A' (25).

Considérons deux colonnes x et y de A' ; on a $\sum_i x_i = \sum_i y_i = 1$ et

$$\frac{1}{2} \sum_k |x_k - y_k| = \sum_{k \in K} (x_k - y_k), \text{ où } K = \{k ; x_k \geq y_k\},$$

puisque $\sum_k (x_k - y_k) = 0$. Or :

$$\sum_i \max_j a'_{ij} \geq \sum_k \max(x_k, y_k) = \sum_{k \in K} x_k + \sum_{l \notin K} y_l$$

et

$$\sum_i \max_j a'_{ij} - 1 \geq \sum_{k \in K} x_k + \sum_{l \notin K} y_l - \sum_i y_i = \sum_{k \in K} (x_k - y_k)$$

et de même pour $1 - \sum_i \min_j a'_{ij}$. Ces relations étant vraies pour tout couple de colonnes, on a bien la relation (6,11).

N.B. On peut même préciser que $\mu_6 = \mu_{11}$ lorsque les maxima M_i ou les minima m_i , peuvent être localisés dans deux colonnes au plus (la valeur commune étant respectivement $M''-\rho$ et $\rho-m''$).

Exemples

Nous terminons par des exemples d'illustration, en nous limitant à des matrices strictement positives ; en effet, seules les bornes $\mu_6, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}$ et μ_{12} donnent un résultat non trivial lorsqu'un élément de la matrice est nul.

Exemples :

Ex1 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\rho = 10 \quad p = e$
 $\lambda = \pm 4,123\dots$

Ex2 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\rho = 6 \quad p = e$
 $\lambda = \pm 1$

Ex3 $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

$\rho = 11 \quad p^t = (3,2,1)$
 $\lambda = 1$ double

Borne μ_i $\rightarrow i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<u>Ex1</u>	7.14	9.45	9.45	5...	7.14	5	7	8	7	7.14	6	6.36
<u>Ex2</u>	2	4.67	5.3	2	3.6	2	3	4.33	3	3.6	2	2
<u>Ex3</u>	1.57	9.86	10.7	1.57	8.8	1	9	9.6	5	6.6	1	1.43

7-5 - GENERALISATIONS

7.5.1 - Matrices non positives

Dans le paragraphe 3, la positivité de Λ ne constitue pas une hypothèse indispensable ; le résultat peut être démontré en supposant seulement que A^t admet un vecteur propre strictement positif. On a plus précisément :

Proposition

Si une matrice A admet un vecteur propre à gauche p strictement positif, avec

$$A^t p = \lambda p,$$

toute valeur propre distincte de λ est bornée en module par

$$\mu'_{11} = \min \left\{ \lambda - \sum_i (p_i \min_j \frac{a_{ij}}{p_j}), \sum_i (p_i \max_j \frac{a_{ij}}{p_j}) - \lambda \right\}.$$

La démonstration est la même que précédemment. En prenant $p = e$ (cf. (24)), on a successivement :

$$A - x e^t \geq 0 \Rightarrow \rho(A - x e^t) = \lambda - e^t x \quad (\text{lemme}),$$

$$A - x e^t \geq 0 \Leftrightarrow \forall i : x_i \leq m_i = \min_j a_{ij};$$

d'où :

$$\inf_x (\lambda - e^t x) = \lambda - \sum_i m_i.$$

Comme au paragraphe 4, on peut montrer que cette borne est moins bonne que celle obtenue dans [45] (borne μ_6 étendue au cas des matrices quelconques) avec les mêmes hypothèses. Si μ_6 est toujours inférieur à S_∞ (par exemple) il n'en est pas de même pour μ'_{11} .

Exemples : (on se limite au cas $p = e$).

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 9 \\ -5 & -7 & -15 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3, 3, 2$$

$$\mu_6 = \mu'_{11} = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 5, \pm\sqrt{5}$$

$$\mu_6 = 3 \quad \mu'_{11} = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1, \pm 6i$$

$$\mu_6 = S_\infty = 8 \quad \mu'_{11} = 10.$$

Remarque

Comme dans [15], on peut affaiblir l'hypothèse en supposant seulement $|p_i| > 0$ ($\forall i : p_i \neq 0$). En effet, le résultat s'applique alors à OAD^{-1} , où D est la matrice diagonale définie par $d_{ii} = \text{signe}(p_i)$.

7.5.2 - Opérateurs compacts dans un espace de Banach

Pour généraliser le lemme du paragraphe 3, il faut avoir l'assurance que pour A positif, $\rho(A)$ est valeur propre avec vecteur propre positif. Cela est vrai ([13]), si A est un opérateur compact positif d'un espace de Banach E ordonné par un cône fermé K tel que K-K est dense dans E.

Soit donc A un opérateur compact (non nécessairement positif), tel que :

$$A^t f = \lambda f$$

avec $f \in E^*$, vérifiant $\langle x, f \rangle > 0, \forall x \in K - \{0\}$. Pour $x \in E$, considérons le produit tensoriel $f \otimes x$ qui définit l'opérateur compact :

$$u \in E \mapsto \langle u, f \rangle x.$$

L'opérateur $A-f \otimes x$ est compact et partage avec A les valeurs propres distinctes de λ . Si x est tel que

$$A-f \otimes x \geq 0,$$

alors, puisque

$$(A-f \otimes x)^t f = (\lambda - \langle x, f \rangle) f,$$

la généralisation du lemme conduit à :

$$\rho(A-f \otimes x) = \lambda - \langle x, f \rangle$$

et donc, les valeurs propres de A différentes de λ sont en module bornées par

$$\alpha = \lambda - \sup\{\langle x, f \rangle ; f \otimes x \leq A\}.$$

Une deuxième borne serait obtenue de la même manière en considérant $f \otimes x - A \geq 0$, à savoir

$$\beta = \inf\{\langle x, f \rangle ; f \otimes x \geq A\} - \lambda.$$

Avec une hypothèse supplémentaire, on peut exprimer ce résultat sous une forme plus proche de celle du cas fini, à savoir :

Proposition

En posant $K_f = \{\xi \in K ; \langle \xi, f \rangle = 1\}$, la borne peut se mettre sous la forme

$$\mu''_{11} = \min\{\lambda - \langle \inf(AK_f), f \rangle, \langle \sup(AK_f), f \rangle - \lambda\}$$

si AK_f admet une borne sup. et une borne inf.

En effet :

$$f \otimes x \leq A \iff \forall \xi \in K : \langle \xi, f \rangle x \leq A\xi \text{ ou } \forall \xi \in K_f : x \leq A\xi$$

et donc

$$\sup\{\langle x, f \rangle ; f \otimes x \leq A\} = \inf_{\xi \in K_f} \langle A\xi, f \rangle.$$

Comparaison à la borne généralisant μ_6

La borne μ_6 généralisée est égale [6] à la norme de la restriction de A à $\text{Ker}(f)$ relativement à la boule $K_f - K_f$, soit :

Posons
$$\mu''_6 = \sup_{x, y \in K_f} \|A(x-y)\|_{K_f - K_f}.$$

$$B_f = \{x \in E ; \langle |x|, f \rangle \leq 1\}$$

en supposant E réticulé (existence de $|x|$).

L'ensemble B_f est la boule unité d'une norme et l'on a la relation

$$K_f - K_f = 2B_f \cap \text{Ker } f$$

qui permet d'écrire

$$\|A\|_{K_f - K_f} = \frac{1}{2} \sup_{x, y \in K_f} \|A(x-y)\|_{B_f}$$

puisque $A \text{ Ker } f \subset \text{Ker } f$ ($A^t f = \lambda f$).

Nous allons montrer que l'on a encore

$$\mu_6'' \leq \mu_{11}''.$$

On a successivement :

$$\frac{1}{2} \|A(x-y)\|_{B_f} = \frac{1}{2} \langle |Ax-Ay|, f \rangle = \langle (Ax-Ay)^-, f \rangle$$

puisque

$$\langle Ax-Ay, f \rangle = 0 ;$$

$$\forall x, y \in K_f : \lambda \langle \inf AK_f, f \rangle \geq \lambda \langle \inf\{Ax, Ay\}, f \rangle$$

Or,

$$\inf\{Ax, Ay\} = Ax - (Ay - Ax)^-,$$

et donc, puisque $\langle Ax, f \rangle = \lambda$,

$$\begin{aligned} \lambda \langle \inf\{Ax, Ay\}, f \rangle &= \langle Ax - \inf\{Ax, Ay\}, f \rangle \\ &= \langle (Ay - Ax)^-, f \rangle. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall x, y \in K_f : \lambda \langle \inf AK_f, f \rangle \geq \frac{1}{2} \|A(x-y)\|_{B_f}$$

soit,

$$\lambda \langle \inf AK_f, f \rangle \geq \mu_6''.$$

Comme la démonstration pour $\langle \sup AK_f, f \rangle$ est identique, on a bien

$$\mu_6'' \leq \mu_{11}''.$$

BIBLIOGRAPHIE

(deuxième partie)

- 1 BAUER F.L.
An elementary proof of the Hopf inequality for positive operators.
Numer.Math.7,331-337 (1965).
- 2 BAUER F.L.,E.DEUTSCH und J.STOER.
Abschätzungen für die Eigenwerte positiver linearer Operatoren.
Linear Algebra and Its Applications 2,275-301 (1969).
- 3 BIRKHOFF G.
Lattice theory.
Amer.Math.Soc.Colloq.Publ.Vol.XXV,New-York (1961).
- 4 BIRKHOFF G.
Extensions of Jentzsch's Theorem.
Trans.Amer.Math.Soc.85,219-227 (1957).
- 5 COLLATZ L.
Einschliessungensatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen.
Math.Zeitschr.48,221-226 (1942).
- 6 DEUTSCH E.
Zum Perron-Eigenwert positiver linearer Abbildungen.
Dissertation.München (1967).
- 7 DIEUDONNE J.
Foundations of Modern Analysis.
Academic Press. (1960).
- 8 FROBENIUS G.
Über Matrizen aus positiven Elementen.
Akad.Wiss.Berlin,I,514-518 (1908);II,456-477 (1912).
- 9 GROTHENDIECK A.
Espaces vectoriels topologiques.
Publ.Soc.Math. de Sao Paulo (1964).

- 10 HOPF E.
An Inequality for positive linear integral operators.
J. of Math. and Mech. 12,683-692 (1963).
- 11 KARLIN S.
Positive Operators.
J. of Math. and Mech. 8,907-937 (1959).
- 12 KÖTHE G.
Topologische lineare Räume I.
Springer Verlag. (1966).
- 13 KREIN M.G. and M.A.RUTMAN.
Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space;
Amer.Math.Soc.Transl.ser 1,10,199-325 (1950).
- 14 LYNN M.S. and W.P.TIMLAKE.
Bounds for Perron eigenvectors and subdominant eigenvalues
of positive matrices.
Linear Algebra and Its Applications 2,143-152 (1969).
- 15 MAITRE J.F.
Semi-normes et localisation des valeurs propres d'un
opérateur.
Séminaire de Grenoble. (1967).
- 16 MAITRE J.F.
Sur la séparation des valeurs propres d'une matrice positive;
R.I.R.O.,R3,118-124 (1970).
- 17 MARCUS M. and MINC H.
A survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.
Allyn and Bacon Inc.,Boston (1964).
- 18 MEWBORN A.C.
Generalizations of some theorems on positive matrices to
completely continuous linear transformations on a normed
linear space.
Duke Math.J. 27,273-281 (1960).
- 19 MINC H.
On the maximal eigenvector of a positive matrix.
S.I.A.M. J. Numer.Anal.7,424-427 (1970).

- 20 OSTROWSKI A.M.
On positive matrices.
Math. Annal. 150, 276-284 (1963).
- 21 OSTROWSKI A.M.
Positive Matrices and Functional Analysis.
in Recent advances in Matrix Theory (H. Schneider ed.).
Madison University of Wisconsin Press (1964).
- 22 PERRON O.
Zur Theorie der Matrizen.
Math. Annal. 64, 248-263 (1908).
- 23 SCHAEFER H.H.
Topological Vector Spaces.
Mac Millan Co., New-York (1966).
- 24 SCHAEFER H.H.
Eine Abschätzung der nichttrivialen Eigenwerte stochastischer
Matrizen.
Numer. Math. 15, 219-223 (1970).
- 25 VARGA R.S.
Matrix Iterative Analysis.
Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1962).
- 26 WIELANDT H.
Unzerlegbare nicht negative Matrizen.
Math. Zeitschr. 52, 642-648 (1950).