Plateaux d'idempotents dans un monoïde : partie génératrice et associativité dans un groupoïde

Yacoub El-Kari

N° d'ordre

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

le grade de Docteur de troisième cycle

"INFORMATIQUE"

PAR

Yacoub El-Kari

PLATEAUX D'IDEMPOTENTS DANS UN MONOIDE PARTIE GENERATRICE ET ASSOCIATIVITE DANS UN GROUPOIDE

Thèse soutenue le 21 octobre 1972 devant la commission d'examen

Monsieur J. KUNTZMANN Président

Monsieur C. BENZAKEN Examinateur

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE

ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
ARNAUD Paul	Chimie
AYANT Yves	Physique approfondie
Mme BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM. BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
BARBIER Reynold	Géologie appliquée
BARJON Robert	Physique nucléaire
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
BARRA Jean-René	Statistiques
BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BEZES Henri	Chirurgie générale
BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
BONNET Georges	Electrotechnique
BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
BRAVARD Yves	Géographie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
CALAS François	Anatomie
CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
CHATEAU Robert	Thérapeutique
CHENE Marcel	Chimie papetière
COEUR André	Pharmacie chimique
CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
CRAYA Antoine	Mécanique
Mme DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DESSAUX Georges	Physiologie animale
DODU Jacques	Mécanique appliquée
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
DUCROS Pierre	Cristallographie
DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
FELICI Noël	Electrostatique
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques Pures
GALVANI Octave	Mathématiques Pures

MM.	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	BIARES Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse

MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie

MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MATIRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 MARS 1972.

Je tiens :

A exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN pour avoir bien voulu diriger ce travail et m'avoir fait l'honneur de présider le Jury.

A remercier Monsieur C. BENZAKEN pour son aide efficace et ses conseils fructueux qui m'ont permis d'améliorer mon manuscrit.

A remercier Monsieur P. JULLIEN d'avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je remercie Madame NEUMANN pour avoir assuré la dactylographie et le personnel du service reproduction pour le tirage.

TABLE DES MATIERES

DEUXIEME PARTIE

PARTIE GENERATRICE ET ASSOCIATIVE DANS UN GROUPOIDE FINI

INTRODUCTION

La première partie de notre travail est une contribution à l'étude des plateaux d'idempotents dans un monoïde, c'est à dire un ensemble muni d'une opération binaire associative.

Dans un premier chapitre, nous rattachons la théorie des plateaux (d'idempotents) à la théorie de Green. Ceci nous permettra de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un plateau soit un quadrillage, et aussi de préciser l'ordre entre plateaux. Plus précisément nous montrerons l'existence, dans certains cas (monoïdes JP), d'un isomorphisme d'ordre entre l'ensemble des plateaux et l'ensemble des idéaux principaux engendrés par un idempotent.

L'existence de cet isomorphisme d'ordre entraîne que si l'ensemble de tous les idéaux principaux est totalement ordonné, l'ensemble des plateaux est totalement ordonné. Mais réciproquement, la structure d'ordre total entre les plateaux n'entraîne pas nécessairement une structure d'ordre total pour les idéaux principaux. Cette remarque nous conduira à préciser l'ordre entre les plateaux.

Dans un deuxième chapitre, nous essaierons en particulier de caractériser le plus possible les monoïdes -union de groupes, ...- pour lesquels l'ensemble des plateaux est un inf-demi-treillis ou plus particulièrement un ensemble totalement ordonné.

Le chapitre III traite des monoïdes symétriques finis où l'ensemble des plateaux est totalement ordonné. Dans de tels monoïdes, nous caractérisons complètement les plateaux d'idempotents. Cette étude nous permettra également de montrer l'existence de plateaux d'idempotents à circuits hexagonaux.

La deuxième partie de notre travail consiste à déterminer un algorithme permettant de tester l'associativité d'une opération binaire définie sur un ensemble fini G, le critère étant la minimisation du nombre de tests.

En principe on doit faire n^3 tests si n est cardinal de G. Toutefois la procédure de Light permet de réduire ce nombre à pn^2 tests si p est le cardinal d'un ensemble générateur du groupoïde.
Nous voyons donc que le test d'associativité, s'il veut être amélioré, est inséparable de la recherche d'un ensemble générateur.

Un premier chapitre étudie donc sur un plan mathématique les ensembles générateurs d'un groupoïde.

Dans un deuxième chapitre, nous proposons deux algorithmes :

- Le premier, testant à mesure que l'on bâtit un ensemble générateur de G, l'associativité des divers sous-groupoïdes successifs engendrés.

- Le deuxième détermine d'abord un ensemble générateur et se termine par la procédure de Light. Une variante à cet algorithme consiste, après avoir trouvé l'ensemble générateur, à le réduire à un sous-ensemble générateur minimal (et de manière annexe quoique fort lourde, à un ensemble générateur de cardinal minimum).

Les comparaisons sont données sur des exemples.

PREMIERE PARTIE

PLATEAUX D'IDEMPOTENTS DANS UN MONOIDE

RAPPELS

A - PREORDRES ET PLATEAUX DANS L'ENSEMBLE DES IDEMPOTENTS D'UN MONOIDE [7]

1 - Préordres d'absorption et isovalences

Dans un monoïde M on définit les deux préordres :

(i) absorption gauche :

$$a \underset{g}{\Delta} b \overset{\text{déf}}{=\!=} [a = b \text{ ou } ab = b]$$

(ii) absorption droite :

$$a \underset{d}{\Delta} b \overset{\text{déf}}{=\!=} [a = b \text{ ou } ba = b]$$

On dit alors que a est absorbé à gauche (respectivement à droite) de b ou que b absorbe sur sa gauche (sur sa droite) a.

Sur l'ensemble E des idempotents, on définit les deux équivalences : (a, b $\in$ E).

a) L'isovalence à gauche :

$$a \underset{g}{\equiv} b \overset{\text{déf}}{=\!=} \left[a \underset{g}{\Delta} b \text{ et } b \underset{g}{\Delta} a\right]$$

b) L'isovalence à droite :

$$a \underset{d}{\equiv} b \overset{\text{déf}}{=\!=} \left[a \underset{d}{\Delta} b \text{ et } b \underset{d}{\Delta} a\right]$$

Remarque : Une classe d'isovalence ayant plus d'un élément est formée uniquement d'idempotents.

2 - Ordre d'absorption

La relation produit des deux préordres d'absorption est une relation d'ordre. Elle s'écrit :

$$[a \geq b] = [a = b \quad \text{ou} \quad ab = ba = b]$$

3 - Plateaux d'idempotents

Sur l'ensemble E des idempotents, la fermeture transitive de la relation :

$$(a,\ b \in E)\ \left[a \underset{g}{\equiv} b \quad \text{ou} \quad a \underset{d}{\equiv} b\right]$$

est une relation d'équivalence.

Les classes de cette équivalence se nomment plateaux d'idempotents ou plateaux.

4 - Relation d'ordre entre plateaux

Dans un monoïde M la relation entre plateaux P_1 et P_2 définie par : $(a \in P_1,\ b \in P_2)$

$$P_1 \geq P_2 \overset{\text{déf}}{=\!=} (\exists a,\ \exists b)\ \left[a \underset{g}{\Delta} b \quad \text{ou} \quad a \underset{d}{\Delta} b\right]$$

qui peut s'écrire également :

$$P_1 \geq P_2 = (\forall a,\ \exists b)\ [a \geq b]$$

est un préordre.

Si le monoïde M est tel qu'il n'existe aucune suite infinie strictement décroissnate d'idempotents pour l'ordre d'absorption, alors la relation entre plateaux est <u>un ordre</u>.

5 - Quadrillage d'idempotents

On dit qu'un ensemble Q d'idempotents est un quadrillage si pour toute paire d'éléments a, b $\in$ Q, on a toujours la propriété suivante : $(x,\ y \in Q)$

$$\exists(x,\ y)\ \left[(a \underset{g}{\equiv} x \quad \text{et} \quad b \underset{g}{\equiv} y) \quad \text{et} \quad (a \underset{d}{\equiv} y \quad \text{et} \quad b \underset{d}{\equiv} x)\right]$$

Un quadrillage est contenu dans un plateau.

6 - Circuit d'idempotents

On appelle circuit d'idempotents toute suite finie d'idempotents ayant un nombre pair d'éléments : $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n}$ tels que les éléments successifs sont isovalents alternativement à droite et à gauche, a_{2n} étant isovalent dans le sens approprié à a_1.

Un circuit d'idempotents à six éléments sera appelé circuit hexagonal.

B - IDEAUX PRINCIPAUX ET RELATIONS DE GREEN [3, 2.1]

Dans la suite nous utilisons la notation suivante [3] :

$$M^1 = \begin{cases} M \text{ si } M \text{ possède un élément neutre} \\ M \cup \{1\} \text{ autrement, où 1 est l'élément neutre adjoint.} \end{cases}$$

Pour tout élément a d'un monoïde M on définit :

L'idéal principal gauche engendré par a :

$L(a) = M^1 a$

L'idéal principal droit engendré par a :

$R(a) = aM^1$

L'idéal principal bilatère engendré par a :

$J(a) = M^1 a M^1$

On définit alors les relations d'équivalence associées : $(a, b \in M)$

1) $a \mathcal{J} b \overset{\text{déf}}{=\!=} J(a) = J(b)$

2) $a \mathcal{L} b \overset{\text{déf}}{=\!=} L(a) = L(b)$

3) $a \mathcal{R} b \overset{\text{déf}}{=\!=} R(a) = R(b)$

4) $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$

5) $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

On note Ja, La, Ra, Ha, Da les $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$-classes d'équivalence respectives contenant l'élément a.

Quelques propriétés élémentaires pour les relations de Green seront supposées connues au cours de notre étude.

C - AUTRES DEFINITIONS [3]

Rappelons quelques définitions utilisées par la suite.

1) Un élément a de M est dit régulier si $a \in aMa$

2) M est dit un monoïde régulier si tout élément de M est régulier.

3) $(a, b \in M)$; a est dit inverse de b si $a = aba$ et $b = bab$.

4) M est dit un monoïde inversif si tout élément de M admet un inverse unique.

5) M est dit un monoïde simple s'il ne contient aucun idéal bilatère propre.

6) Un idempotent e non absorbant de M est dit primitif si :

$\forall f \in E$, $e \geqq f$ implique $f = e$ ou bien $f = 0$.

7) M est dit un monoïde complêtement simple si M est un monoïde simple contenant un idempotent primitif.

8) M est dit un monoïde intra-régulier si pour tout élément a de M on a : $a \in Ma^2M$, ce qui est équivalent à $J(a) = J(a^2)$.

9) Un élément a de M est dit de deuxième espèce si le sous-monoïde monogène qu'il engendre possède un indice l'entier $p \geq 0$ et une période l'entier $n \geq 0$ $(n+p \geq 1)$ [7].

- Lorsque $p = 0$, a est dit cyclique
- Lorsque $n = 1$, a est dit stable.

M est dit un monoïde de deuxième espèce, cyclique, stable si les éléments de M sont respectivement de deuxième espèce, cycliques, stables.

CHAPITRE I

PLATEAUX D'IDEMPOTENTS ET RELATIONS DE GREEN - MONOIDE JP

1 - IDEMPOTENTS ET PLATEAUX D'IDEMPOTENTS DANS UNE $\mathcal{D}$-CLASSE

1-1 - Idempotents $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$-équivalents

Propriété 1 : Si a et b sont deux idempotents d'un monoïde M, alors :

1) $a \, \mathcal{L} \, b \iff a \underset{d}{\equiv} b$

2) $a \, \mathcal{R} \, b \iff a \underset{g}{\equiv} b$

Deux idempotents a et b sont $\mathcal{L}$-équivalents si $M^1 a = M^1 b$. Donc il existe x et y dans M^1 tels que a = xb et b = ya. Alors, ab = xbb = xb = a et ba = yaa = ya = b. Ceci entraîne que a et b sont isovalents à droite.

Réciproquement, $a \underset{d}{\equiv} b \Longrightarrow [a = b \text{ ou } (ab = a \text{ et } ba = b)]$
or, (ab = a et ba = b) implique $(M^1 a \subseteq M^1 b$ et $M^1 b \subseteq M^1 a)$.
Donc $M^1 a = M^1 b$ et par suite a et b sont deux idempotents $\mathcal{L}$-équivalents.

On démontre de même : $a \, \mathcal{R} \, b \iff a \underset{g}{\equiv} b$

Propriété 2 : Soit a un élément régulier de M.
Si X_a désigne l'ensemble des éléments x de M tel que a = axa, alors :

$a.X_a$ (resp. $X_a.a$) est l'ensemble des idempotents $\mathcal{R}$-équivalents ($\mathcal{L}$-équivalents) à a.

Il est évident que X_a est non vide si et seulement si a est régulier.
L'ensemble $a.X_a$ (resp. $X_a.a$) est un monoïde dégénéré à gauche (resp. à droite) (Bruck [3, 1.1 Ex. 3]).

Donc pour tout élément x de X_a, ax (resp. xa) est un idempotent de M, et pour toute paire d'éléments x et y de X_a on a donc :

$$ax \underset{g}{\equiv} ay \text{ (resp. } xa \underset{d}{\equiv} ya) \text{ (pour } x = y \text{ on a toujours } ax \equiv ay)$$

De plus, $aM^1 = (axa)M^1 \subseteq (ax)M^1 \subseteq aM^1$. Ceci entraîne que $aM^1 = (ax)M^1$.

Donc tout élément de $a.X_a$ est $\mathcal{R}$-équivalent à a.

De même on montre que tout élément de $X_a.a$ est $\mathcal{L}$-équivalent à a.

D'autre part, soit e un idempotent $\mathcal{R}$-équivalent à a. Alors $eM^1 = AM^1$, il existe donc x et y dans M^1 tels que : $ex = a$ et $ay = e$.

Dans ce cas, $ea = eex = ex = a$ et $ea = aya = a$. Ceci entraîne que y appartient à X_a. Donc pour tout idempotent e de R_a il existe y de X_a tel que $e = ay$. Par suite e apparient à $a.X_a$.

De même on montre que tout idempotent $\mathcal{L}$-équivalent à a appartient à $X_a.a$.

<u>Remarque</u> : On déduit de cette propriété <u>une condition nécessaire et suffisante</u> pour qu'un idempotent e de M admette au moins un isovalent (différent de e), à gauche ou à droite :

$$|e.X_e| \geq 2 \quad \text{ou} \quad |X_e.e| \geq 2 \text{ .}$$

<u>Propriété 3</u> : <u>Deux idempotents a et b appartenant à deux $\mathcal{D}$-classes différentes ne peuvent être isovalents</u>.

S'ils sont isovalents à gauche, ils appartiennent à la même $\mathcal{R}$-classe. Alors $R_a = R_b \subsetneq D_a \cap D_b$; ce qui entraîne $D_a = D_b$, ce qui est contraire à l'hypothèse. De même s'ils sont isovalents à droite.

<u>1-2 - Idempotents dans les $\mathcal{D}$-classes</u>

<u>Propriété 4</u> : <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une $\mathcal{D}$-classe contienne un idempotent est que tout élément de la classe soit régulier</u>.

Cette propriété découle de [3, th. 2.11] en remarquant que tout idempotent est un élément régulier.

On en déduit <u>une borne du nombre des idempotents dans une $\mathcal{D}$-classe D</u> :

$$n \leq |E(D)| \leq N \quad \text{ou bien} \quad E(D) = \emptyset$$

en notant :

E(D) l'ensemble des idempotents contenus dans D.

N le nombre des $\mathcal{H}$-classes contenues dans D.

n le maximum du nombre des $\mathcal{L}$-classes et du nombre des $\mathcal{R}$-classes contenues dans D.

En effet si E(D) est non vide tout élément de D est régulier et chaque $\mathcal{R}$-classe et $\mathcal{L}$-classe de D contient au moins un idempotent.

On a donc :

$$n \leq |E(D)|$$

De plus D est union des $\mathcal{H}$-classes et chaque $\mathcal{H}$-classe contient au plus un idempotent d'où :

$$|E(D)| \leq N$$

On remarque de plus que dans un monoïde régulier, E(D) est non vide pour toute $\mathcal{D}$-classe D.

1-3 - Plateaux d'idempotents dans les $\mathcal{D}$-classes

Proposition 1 : Dans un monoïde M

1) Tout plateau P de M est contenu dans une $\mathcal{D}$-classe

2) Une $\mathcal{D}$-classe, non réduite à une $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{H}$-classe peut contenir plusieurs plateaux.

1) Soit E l'ensemble des idempotents de M, la propriété 1 nous donne l'équivalence suivante :

$$(a, b \quad E)(a \underset{d}{\equiv} b \text{ ou } a \underset{d}{\equiv} b) \Longleftrightarrow (a, b \quad E)(a \,\mathcal{L}\, b \text{ ou } a \,\mathcal{R}\, b).$$

Donc tout plateau P de M est une classe d'équivalence de la fermeture transitive de la relation :

$$(a, b \in E)(a \,\mathcal{L}\, b \text{ ou } a \,\mathcal{R}\, b).$$

Or, si une $\mathcal{R}$-classe R et une $\mathcal{L}$-classe L se rencontrent, alors R et L sont contenues dans la même $\mathcal{D}$-classe, une $\mathcal{D}$-classe étant union de $\mathcal{L}$-classes et aussi union de $\mathcal{R}$-classes.

Le plateau P est donc entièrement contenu dans une même $\mathcal{D}$-classe.

2) Dans un monoïde inversif, toute $\mathcal{D}$-classe non réduite à une $\mathcal{H}$-classe contient plusieurs plateaux:

Dans un monoïde inversif, chaque $\mathcal{L}$-classe et chaque $\mathcal{R}$-classe contient un idempotent et un seul [3, corollaire 2.19]. Puisque toute $\mathcal{R}$-classe de D rencontre toute $\mathcal{L}$-classe de D, chaque idempotent de D forme à lui seul un plateau. Si la $\mathcal{D}$-classe n'est pas réduite à une $\mathcal{H}$-classe, elle contient au moins deux idempotents et donc au moins deux plateaux.

Remarquons que dans une $\mathcal{D}$-classe D d'un monoïde inversif, l'ensemble des idempotents (= plateaux) de D, l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes dans D et l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes dans D ont même cardinalité.

Dans un monoïde quelconque si D est réduite à une $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{H}$-classe la propriété 1 entraîne que les idempotents de D forment une classe d'isovalence et par conséquent un seul plateau.

<u>Exemple</u> : <u>Monoïde bicyclique</u> [3, 2.1]

Soit le monoïde bicyclique $C(a, b) = \langle a, b \,;\, ab = 1\rangle$ où 1 est l'élément neutre.

1) Tout élément de $C(a, b)$ s'écrit uniquement sous la forme $b^m a^n$, avec m et n deux entiers non négatifs ($a^o = b^o = 1$) [3, lemme 1.31]

2) $C(a, b)$ est un monoïde bisimple, c'est à dire, il est formé d'une <u>seule $\mathcal{D}$-classe</u> :

- $ab = a^2 b^2 = \ldots = a^m b^m = \ldots = 1$; $(b^m a^m)^2 = b^m(a^m b^m) a^m = b^m a^m$ $(m \geq 0)$

- Soient i et j deux entiers non négatifs tels que $i > j \geq 0$, alors :

. $b^r a^i = b^r a^j(a^{i-j})$ et $b^r a^j = b^r a^j(a^i b^i) = b^r a^i(a^j b^i)$ nous donne que $b^r a^i$ et $b^r a^j$ sont $\mathcal{R}$-équivalents.

. $b^i a^r = (b^{i-j})\, b^j a^r$ et $b^j a^r = (a^i b^j)\, b^i a^r$ nous donne que $b^i a^r$ et $b^j a^r$ sont $\mathcal{L}$-équivalents.

On en déduit que tous les éléments de $C(a, b)$ sont $\mathcal{D}$-équivalents.

Nous pouvons alors écrire les éléments du monoïde $C(a, b)$ dans un tableau :

$\boxed{1}$	a	a^2	a^3	$\dots$
b	$\boxed{ba}$	ba^2	ba^3	$\dots$
b^2	b^2a	$\boxed{b^2a^2}$	b^3a^3	$\dots$
b^3	b^3a	b^3a^2	$\boxed{b^3a^3}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Les R- (resp. L-) classes de $C(a, b)$ sont les lignes (resp. colonnes) de ce tableau. Tout élément $b^j\ a^i$, $j \geq 0$ $i \geq 0$ est une H-classe.

Les idempotents $b^m\ a^m$ de $C(a, b)$ sont les H-classes de la première diagonale du tableau.

On en déduit que la D-classe de $C(a, b)$, qui est aussi inversif, contient une infinité de plateaux : $\{b^m\ a^m\}$ $m \geq 0$

<u>Remarque</u> : L'ensemble des plateaux du monoïde $C(a, b)$ est totalement ordonné : $(\forall\ k \geq 0)$ $(\forall\ m \geq 0)$ $(b^k\ a^k)\ (b^m\ a^m) = (b^k\ a^k)$.

La relation entre les D-classes et les plateaux peut être précisée dans le cas où les plateaux sont des quadrillages par la propositions suivante :

<u>Proposition 2</u> : <u>Dans un monoïde M admettant au moins un idempotent, un plateau P est un quadrillage si et seulement si l'union des H-classes contenant les idempotents de P est un sous-monoïde de M complétement simple</u>

Soit $\mathbf{S} = \bigcup_{e \in P} H_e$

<u>a) S est un sous-monoïde</u> :

Si P est un quadrillage, alors pour toute paire d'idempotents e et f de P il existe deux idempotents a et b dans P tels que :

$$e \underset{g}{\equiv} a \underset{d}{\equiv} f \underset{g}{\equiv} b \underset{d}{\equiv} e$$

$R_e \cap L_f$ contient donc l'idempotent a. Ceci entraîne [3, th. 2.17] que $fe \in R_f \cap L_e$ et $H_f \cdot H_e = H_{f_e} = R_f \cap L_e$.

Or $R_f = R_b$ et $L_e = L_b$ entraînent $R_f \cap L_e = R_b \cap L_b = H_b$. On démontre de même : $H_e \cdot H_f = H_a$.

Ceci montre que S est un sous-monoïde qui est union des groupes disjoints H_e.

<u>b) S est simple</u> :

Soit I un idéal bilatère contenu dans S. Remarquons d'abord que pour tout élément x dans I :

1) Le groupe H_x est inclus dans I:

Il suffit de démontrer que son élément neutre appartient à I. Or il existe un élément x' dans H_x tel que $x'x = xx' = e$ et $H_x \subseteq S$.

2) $R_x \cap S$ est inclus dans I.

Tout élément y appartenant à $R_x \cap S$ est R-équivalent à e.
Il existe donc un élément u dans M^1 tel que $y = e.u.$, d'où $ey = eeu = eu = y$.
L'élément y appartient donc à I.
(Ajoutons que $L_x \cap S$ est inclus aussi dans I).

Soit z un élément quelconque de S. P étant un quadrillage, la *H*-classe $L_z \cap R_e$ contient un idempotent f.

f appartient à I car il appartient à $R_e \cap S$ qui est inclus dans I.

D'autre part, f et z sont *L*-équivalents. On a donc $zf = z$ d'où z appartient à I. On a donc bien I = S.

<u>c) S est complétement simple</u> :

Plus particulèrement tous les idempotents de S sont primitifs car dans un quadrillage, d'un monoïde quelconque, deux idempotents ne peuvent être comparables pour l'ordre d'absorption.

<u>Réciproquement</u> : $S = \bigcup_{e \in P} H_e$ est un sous-monoïde de M tel que chaque H_e est un groupe dans M. S est donc l'union des groupes disjoints H_e.

Ceci revient à dire que :

- Chaque *H*-classe <u>de S</u> est un groupe [3, th. 4.3].

S étant complétement simple, S est donc une seule $\mathcal{D}$-classe de S [3, th. 2.51]. Il en résulte que :

- Toute $\mathcal{R}$-classe et toute $\mathcal{L}$-classe de S ont une intersection non vide. Alors soient e et f deux idempotents quelconques de P. Les $\mathcal{H}$-classes prises dans S :

$$R_e^{(S)} \cap L_f^{(S)} \text{ et } R_f^{(S)} \cap L_e^{(S)}$$

existent et sont des groupes.

Si a et b désignent leur élément neutre respectif on a :

$$e\ \mathcal{R}^{(S)}\ a\ \mathcal{L}^{(S)}\ f\ \mathcal{R}^{(S)}\ b\ \mathcal{L}^{(S)}\ e$$

qui peut s'écrire également :

$$e \underset{g}{\equiv} a \underset{d}{\equiv} f \underset{g}{\equiv} b \underset{d}{\equiv} e$$

Les idempotents de P forment ainsi un quadrillage.

2 - PLATEAUX D'IDEMPOTENTS ET IDEAUX PRINCIPAUX (BILATERES)

Les monoïdes considérés dans la suite sont supposés tels qu'il n'existe aucune suite infinie strictement décroissante d'idempotents pour l'ordre d'absorption, sauf mention explicite.

Les idéaux principaux vont nous permettre de préciser l'ordre entre les plateaux. D'une façon plus précise, nous avons montré précédemment que tout plateau P d'un monoïde est contenu dans une seule $\mathcal{D}$-classe. Puisque la relation $\mathcal{D}$ est plus fine que la relation $\mathcal{J}$, tout plateau P est contenu dans une seule $\mathcal{J}$-classe (qui sera notée J_p). Dans le cas où toute $\mathcal{J}$-classe contient au plus un plateau, nous montrerons l'existence d'un isomorphisme d'ordre entre les plateaux et les idéaux principaux engendrés par un idempotent au moins.

Soient :

$\mathcal{P}$ l'ensemble des plateaux d'un monoïde muni de l'ordre entre plateaux.

$\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux principaux engendrés par un idempotent au moins et muni de l'ordre d'inclusion ensembliste.

Notation : Il est facile de constater que tous les éléments d'un plateau engendrent le même idéal principal. Nous noterons J(P) cet idéal.

Proposition 3 : L'application J $:\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{J}$, qui fait correspondre à un plateau P l'idéal principal J(P) est telle que :

$$P_1 \leq P_2 \Longrightarrow J(P_1) \subseteq J(P_2)$$

Si $P_1 \leq P_2$, alors pour tout idempotent b de P_2 il existe un idempotent a de P_1 tel que $b \geq a$. Ceci entraîne que : a = b ou ba = ab = a.

$$a = b \text{ entraîne } J(a) = J(P_1) = J(b) = J(P_2)$$

$$ba = ab = a \text{ entraîne } M^1aM^1 = M^1abM^1 = M^1baM^1 \subseteq M^1bM^1$$

Donc $\quad J(P_1) = J(ab) = J(ba) = J(a) \subseteq J(b) = J(P_2)$

Etude de la réciproque

L'application J est surjective, mais elle n'est pas en général injective.

Nous allons montrer que J est injective dans un monoïde où il n'existe aucune $\mathcal{J}$-classe contenant plus d'un plateau.

Lemme 1 : Soient P_1 et P_2 deux plateaux dans un monoïde. Si $J(P_1) \subset J(P_2)$, alors il existe un plateau P' dans la même $\mathcal{J}$-classe de P_1 et tel que : $P' < P_2$

Si $J(P_1) \subset J(P_2)$, alors pour tout élément a de P_1 et pour tout élément b de P_2 on a : $M^1aM^1 \subset M^1bM^1$. Donc il existe x et y dans M^1 tel que a = xby. Soit a_1 = byaxb, alors :

- a_1 est idempotent : a_1^2 = bya (xbby) axb = byaaaxb = byaxb = a_1

- a_1 appartient à J_{P_1} : $M^1a_1M^1 = M^1byaxbM^1 \subseteq M^1aM^1$. Ceci entraîne que $J(a_1) \subseteq J(a)$. D'autre part, xa_1y = (xby) a (xby) = a.

Donc $M^1aM^1 = M^1xa_1yM^1 \subseteq M^1a_1M^1$. Ceci entraîne que $J(a) \subseteq J(a_1)$, par suite on a bien $J(a) = J(a_1)$.

Soit P' le plateau contenant l'idempotent a_1. Alors P' appartient à la même $\mathcal{J}$-classe de P_1, car $J(a) = J(a_1)$ et a est un élément de P_1.
Le plateau P' est différent de P_2 : sinon $J(P') = J(a) = J(P_1) = J(P_2) = J(b)$.
Ce qui est contraire à l'hypothèse ; $J(P_1)$ est inclus strictement dans $J(P_2)$.
D'autre part, $a_1 b = byaxbb = a_1$ et $ba_1 = bbyaxab = a_1$ entraînent que pour tout idempotent b de P_2 il existe l'idempotent a_1 de $P' \neq P_2$ tel que $b \geq a_1$.
Par suite $P' < P_2$.
(Les deux idempotents $\alpha = yaxb$ et $\beta = byax$ sont tels que :

$J(\alpha) = J(\beta) = J(a_1) = J(a)$, $\alpha \underset{d}{\equiv} a_1$ et $\beta \underset{g}{\equiv} a_1$).

<u>Proposition 4</u> : <u>Dans un monoïde M pour lequel il n'existe aucune $\mathcal{J}$-classe contenant plus d'un plateau</u> :

$$J(P_1) \subseteq J(P_2) \iff P_1 \leq P_2$$

a) Si $J(P_1) = J(P_2)$, alors P_1 et P_2 appartiennent à la même $\mathcal{J}$-classe qui contient un seul plateau. Ceci veut dire que $P_1 = P_2$.

b) Si $J(P_1) \subset J(P_2)$, alors il existe, d'après le lemme 1, un plateau P' dans la même $\mathcal{J}$-classe que P_1 avec $P' < P_2$.
Compte-tenu des hypothèses $P' = P_1$ et finalement $P_1 < P_2$.

La réciproque de la proposition 3 est alors démontrée.

<u>Isomorphisme d'ordre</u>

La proposition 4 peut être énoncée comme suit :

<u>Théorème 1</u> : <u>Dans un monoïde M pour lequel il n'existe aucune $\mathcal{J}$-classe contenant plus d'un plateau, il existe un isomorphisme d'ordre entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{J}$</u>.

<u>Définition</u> : <u>Monoïde JP</u>

Un monoïde M est dit un monoïde JP s'il n'existe aucune $\mathcal{J}$-classe dans M contenant plus d'un plateau.

CHAPITRE II

MONOIDES JP POUR LESQUELS L'ENSEMBLE DES PLATEAUX EST Λ-DEMI-TREILLIS

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux monoïdes JP, ces monoïdes présentant l'intérêt de l'isomorphisme d'ordre entre l'ensemble des plateaux et l'ensemble des idéaux principaux engendrés par idempotent.

Plus particulièrement, nous essaierons de caractériser, via cet isomorphisme, le plus possible de monoïdes JP tels que l'ensemble des plateaux soient un Λ-demi-treillis.

1 - RAPPELS SUR LES IDEAUX PRINCIPAUX (bilatères)

Propriété 1 : Si $J(a)$ et $J(b)$ sont deux idéaux principaux engendrés par les éléments a et b d'un monoïde, alors l'idéal $(J(a) \cup J(b))$ est principal si et seulement si :

$$J(a) \subseteq J(b) \text{ ou bien } J(b) \subseteq J(a)$$

Il est évident que $(J(a) \cup J(b))$ est un idéal de M. S'il est de plus principal engendré par un élément c de M tel que : $J(c) = J(a) \cup J(b)$, alors il existe x, y, u et v dans M^1 tels que : $c = xay$ ou $c = ubv$. Ceci entraîne que : $M^1cM^1 \subseteq M^1aM^1$ ou $M^1cM^1 \subseteq M^1bM^1$, c'est à dire, $J(a) \cup J(b) = J(a)$ ou $J(a) \cup J(b) = J(b)$.

Donc on a bien $J(a) \subseteq J(b)$ ou $J(b) \subseteq J(a)$.

La réciproque est évidente.

Corollaire 1 : L'ensemble des idéaux principaux est stable pour la réunion si et seulement s'il est totalement ordonné.

1-1 - Rappels sur les monoïdes intra-réguliers

Dans un monoïde M nous avons toujours, pour toute paire d'éléments a et b de M : $J(ab) \subseteq J(a) \cap J(b)$.

L'égalité ($J(ab) = J(a) \cap J(b)$) a été étudiée par O. Anderson dans sa thèse [3] et signalée indépendamment dans [4] et [5] :

<u>Propriété 2</u> : <u>Si a et b sont deux éléments d'un monoïde M, alors</u> :

$$(\forall a, \forall b)(J(ab) = J(a) \cap J(b)) \Longleftrightarrow (\forall a)(J(a) = J(a^2))$$

<u>Corollaire 2</u> : <u>Dans un monoïde intra-régulier l'ensemble des idéaux principaux est stable pour l'intersection.</u>

<u>1-2 - Rappels sur les monoïdes qui admettent une série principale d'idéaux</u>

<u>Définition</u> : [3]

On appelle série prinicpale d'idéaux dans un monoïde M, toute chaîne finie d'idéaux I_j de M telle que :

1) $M = I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \emptyset$.
2) Pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, il n'existe aucun idéal B tel que

$$I_j \supset B \supset I_{j+1}$$

<u>Propriété</u> 3 : |3|

<u>Si M est un monoïde admettant une série principale d'idéaux</u> :

$$M = I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \emptyset$$

<u>Alors</u> ($I_j - I_{j+1}$) <u>est une $\mathcal{J}$-classe de M, pour tout $j = 1, 2, \dots, n$</u> ($I_{n+1} = \emptyset$).

Nous redonnons une démonstration directe :

Pour tout élément a appartenant à ($I_j - I_{j+1}$) :

a) <u>$I_j = J(a) \cup I_{j+1}$</u>

a étant un élément de l'idéal bilatère I_j, implique que $M^1 a M^1 \subseteq M^1 I_j M^1 = I_j$, donc $J(a) \subseteq I_j$. Ceci entraîne que $J(a) \cup I_{j+1} \subseteq I_j$. D'autre part, l'idéal bilatère de M ($J(a) \cup I_{j+1}$) contient strictement l'idéal bilatère I_{j+1}, car a n'appartient pas à I_{j+1}. De plus, l'ensemble $\{I_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ est une série principale des idéaux bilatères de M, on a bien : $I_j = J(a) \cup I_{j+1}$

b) $J(a) \cap I_{j+1} = J(a) - J_a$

- Pour tout élément c de $J(a) \cap I_{j+1}$, J(c) est inclus dans $J(a) \cap I_{j+1}$. Puisque a n'appartient pas à I_{j+1}, alors : $J(c) \subset J(a)$ et par conséquent c et a ne sont pas $\mathcal{J}$-équivalents. Ceci entraîne que : $J(a) \cap I_{j+1} \subseteq J(a) - J_a$.

- Pour tout élément b de $J(a) - J_a$, J(b) est strictement inclus dans J(a). Il suffit de montrer que a appartient à I_{j+1} :
Supposons que b n'appartient pas à I_{j+1}, alors $J(b) \cup I_{j+1} = I_j = J(a) \cup I_{j+1}$, a étant un élément n'appartenant pas à I_{j+1}, il appartient donc à J(b). Ceci entraîne que J(a) est inclus dans J(b) et par conséquent J(a) = J(b), et b appartient à J_a. Ce qui est contraire à l'hypothèse.
On en déduit que $(J(a) - J_a) \subseteq I_{j+1}$. Donc $(J(a) - J_a) \subseteq I_{j+1} \cap J(a)$.

c) $I_j - I_{j+1} = J_a$

$I_j = J(a) \cup I_{j+1}$ et $J(a) \cap I_{j+1} = J(a) - J_a$ entraînent que :
$I_j - I_{j+1} = (J(a) \cup I_{j+1}) - I_{j+1} = J(a) - (J(a) \cap I_{j+1}) = J_a$.

2 - MONOIDES UNION DE GROUPES

Propriété 4 : Dans un monoïde intra-régulier, toute $\mathcal{J}$-classe est un sous-monoïde simple.

Nous rappelons une démonstration directe :

Soit J_a la $\mathcal{J}$-classe contenant un élément a d'un monoïde M intra-régulier :

J_a est un sous-monoïde de M

Pour toute paire d'éléments b et c de J_a on a : $J_b = J_c = J_a$.

Dans un monoïde intra-régulier on a : $J(bc) = J(b) \cap J(c) = J(a) \cap J(a) = J(a)$.

Donc (bc) appartient à J_a.

<u>J_a est simple</u>

Soit $I(a) = J(a) - J_a$; I(a) est un idéal de J(a) ou bien il est vide :

Soient b un élément de I(a) et c un élément de J(a). Alors bc appartient à J(a) car b appartient aussi à l'idéal bilatère J(a). D'autre part, $J(bc) \subseteq J(b) \subset J(a)$, (bc) appartient donc à I(a). De même on montre que (cb) est un élément de I(a).

Ainsi nous considérons le monoïde quotient de Rees [3, 1.5] :

I(a) étant un idéal bilatère de J(a), qui est évidemment un sous-monoïde, on définit J(a)/I(a) tel que :

$$b.c = \begin{cases} bc & \text{si } bc \in J(a) - I(a) = J_a \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Alors $J(a)/I(a) = J_a \cup 0$ est 0-simple ou bien nul [3, lemme 2.39].
Puisque J_a est un sous-monoïde non nul, il est donc simple.

<u>Lemme 1</u> : <u>Dans un monoïde JP intra-régulier, toute $\mathcal{J}$-classe J contenant un idempotent est telle que</u>

<u>1) J est union de groupes disjoints</u>

<u>2) J est une $\mathcal{D}$-classe</u>

<u>3) Les idempotents de J forment un quadrillage</u>.

1) J, étant une $\mathcal{J}$-classe d'un monoïde intra-régulier, elle est donc un sous-monoïde simple. De plus, deux idempotents de J ne peuvent être comparables pour l'ordre d'absorption, car J contient un seul plateau. Ceci entraîne que les idempotents de J sont primitifs. Puisque J contient au moins un idempotent primitif, elle est donc un sous-monoïde complètement simple. Ceci équivaut à dire que toute $\mathcal{H}$-classe du monoïde J est un groupe [3, 4.2]

2) Dans ce cas, toute $\mathcal{D}$-classe D de J, D étant union de $\mathcal{H}$-classes, contient au moins un idempotent. Or les idempotents de J forment un seul plateau, donc J ne peut contenir qu'une seule $\mathcal{D}$-classe ; car deux idempotents appartenant à deux $\mathcal{D}$-classes différentes ne peuvent être isovalents (propriété I.3).

3) J, étant union des H-classes contenant un idempotent et étant un monoïde complétement simple, les idempotents de J forment donc un quadrillage (proposition I.2).

Remarque : Si les plateaux d'un monoïde sont des quadrillages, alors la relation de préordre entre plateaux est une relation d'ordre même en l'absence de l'hypothèse :

Il n'existe aucune suite infinie strictement décroissante d'idempotents pour l'ordre d'absorption [7].

Théorème 1 : Dans un monoïde M les trois conditions suivantes sont équivalentes

C1 - M est un monoïde JP régulier dans lequel J est un congruence.

C2 - M est un monoïde intra-régulier pour lequel toute J-classe contient exactement un seul plateau.

C3 - M est un monoïde union de groupes.

C1 ⇒ C2 : Si M est un monoïde régulier, alors pour tout élément a de M, il existe un élément x de M tel que a = axa. Ceci entraîne que :

$M^1aM^1 = M^1(axa)M^1 \subseteq M^1(ax)M^1$ (ou $M^1(xa)M^1$).

De plus, il est évident que $M^1(ax)M^1 \subseteq M^1aM^1$. Par suite les deux élément ax et a sont J-équivalents. Ainsi la congruence de la relation J entraîne que $a^2 \; J$ axa = a. Ceci est équivalent à dire que M est intra-régulier.

D'autre part, dans un monoïde régulier toute D-classe contient au moins un idempotent (propriété I.4). Alors, sachant qu'aucune J-classe de M ne peut contenir plus d'un plateau, donc toute J-classe de M contient un seul plateau.

C2 ⇒ C3 : Si M est un monoïde intra-régulier dans lequel toute J-classe J contient un seul plateau, alors toute J-classe de M est une seule D-classe et qui est union de groupes disjoints (Lemme II.1).

C3 ⇒ C1 : Si M est un monoïde qui est union de groupes, alors toute H-classe de M est un groupe [3, th. 4.3]. Ceci entraîne que toute D-classe de M est régulière car elle contient au moins un idempotent. Par suite M est régulier (propriété I.4).

- <u>Si M est union de groupes alors $\mathcal{J} = \mathcal{D}$</u>

Dans un tel monoïde toute $\mathcal{H}$-classe est un groupe. Donc tout élément a de M est $\mathcal{H}$-équivalent à a^2. Donc M est intra-régulier car $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}$. La propriété II-4 nous montre alors que toute $\mathcal{J}$-classe J de M est un sous-monoïde simple. De plus J, étant union de $\mathcal{H}$-classes, il est union de groupe. Ceci entraîne que J est complétement simple [3, th. 4.6]. Dans ce cas J est une seule $\mathcal{D}$-classe [3, th. 2.51]. Par suite $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.

De plus, les idempotents contenus dans une $\mathcal{D}$-classe forment nécessairement un quadrillage. Ceci entraîne que toute $\mathcal{J}$-classe de M contient au plus un seul plateau car $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.

- Soient b et c deux éléments quelconques $\mathcal{J}$-équivalents dans M : $J(b) = J(c)$. M étant un monoïde union de groupes, il est alors intra-régulier. Ainsi pour tout élément x de M, la propriété II-2 nous donne :
$J(bx) = J(b) \cap J(x) = J(c) \cap J(x) = J(cx)$.
Donc (bx) et (cx) sont $\mathcal{J}$-équivalents. De même on montre que $J(xb) = J(xc)$. Par suite la relation d'équivalence $\mathcal{J}$ est une congruence.

<u>Remarque</u> : Dans un monoïde M qui vérifie l'une des trois conditions C1, C2 ou C3, toute $\mathcal{J}$-classe de M est un sous-monoïde complètement simple (C3 $\Rightarrow$ C1).

Dans un monoïde M la condition C4 est équivalente à la condition C3 : [3, th. 4.6].

C4 : M est union de sous-monoïdes complétement simples, disjoints et qui sont les $\mathcal{J}$-classes de M.

<u>Théorème 2</u> : <u>Dans un monoïde M qui vérifie l'une des trois conditions</u> : <u>C1, C2 ou C3</u>

1) <u>Tout plateau de M est un quadrillage</u>

2) <u>L'ensemble des plateaux de M est un Λ-demi-treillis pour l'ordre entre plateaux</u>.

Nous donnons la démonstration pour un monoïde qui vérifie la condition C2 :

1) Toute $\mathcal{J}$-classe de M contient un seul plateau P ; donc P est un quadrillage (Lemme II.1).

2) Soient P_1 et P_2 deux plateaux de M, alors pour toute paire d'éléments a et b appartenant respectivement à J_{P_1} et J_{P_2} on a : $J(ab) = J(a) \cap J(b)$, avec $J(a) = J(P_1)$ et $J(b) = J(P_2)$.

Puisque toute $\mathcal{J}$-classe de M contient un seul plateau, soit P' le plateau contenu dans la $\mathcal{J}$-classe J_{ab}.

- P' est un plateau minorant de deux plateaux P_1 et P_2 pour l'ordre entre plateaux ; car, d'après le théorème I.1 :

$$J(ab) \subseteq J(a) \iff P' \leq P_1$$

$$J(ab) \subseteq J(b) \iff P' \leq P_2$$

- P' est le plateau suprêmum des minorants de deux plateaux P_1 et P_2 ; supposons qu'il existe un plateau P" qui est un minorant de P_1 et P_2, alors :

$$P'' \leq P_1 \iff J(P'') \subseteq J(P_1)$$

$$P'' \leq P_2 \iff J(P'') \subseteq J(P_2)$$

Ceci entraîne que : $J(P'') \subseteq J(P_1) \cap J(P_2) = J(a) \cap J(b) = J(ab) = J(P')$.

Ceci est équivalent à dire que : $P'' \leq P'$.

<u>Remarque</u> : <u>Monoïde union de groupes et commutatif</u>

Dans un monoïde M qui est union de groupe, si M est commutatif ou bien si les idempotents de M commutent deux à deux, alors :

1) Pour tout élément a de M :

$$J_a = D_a = L_a = R_a = H_a$$

2) Tout idempotent de M forme à lui seul un plateau.

On en déduit que :

<u>L'ensemble des idempotents de M est un $\wedge$-demi-treillis pour l'ordre d'absorption</u>.

En effet, si deux idempotents a et b de M, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{R}$-équivalents, se commutent, alors nous avons nécessairement a = b. Ceci entraîne que, dans un monoïde M commutatif (ou bien ses idempotents commutent deux à deux), chaque L ou R-classe de M contient au plus un idempotent. De plus, si M est union de groupes toute H-classe est un groupe et par conséquent contient un seul idempotent. Par suite pour tout élément a de M :

$$D_a = L_a = R_a = H_a.$$

On endéduit que tout idempotent de M est à lui seul un seul plateau. D'autre part, M étant union de groupes, toute J-classe de M est une seule D-classe (C3 $\Rightarrow$ C1).

<u>Proposition 1</u> : <u>Dans un monoïde M de deuxième espèce</u>

1) <u>$J = D$ (Green)</u>

2) <u>M est cyclique si et seulement si chaque H-classe de M est un groupe</u>.

3) <u>M est stable si et seulement si tout groupe de M es trivial</u>.

Démontrons (2) et (3). (1) est démontré dans [1, ch. 7].

2)-Si M est cyclique, alors tout élément a de M est cyclique. Donc il existe un entier positif n tel que $a^n = a$, de plus $a^{n-1} = e_a$ est l'idempotent engendré par a. Montrons que H_a est un groupe :

Il suffit de montrer que H_a contient un idempotent

$a = a^n = aa^{n-1} = a^{n-1}a = ae_a = e_aa.$

Ceci entraîne que :

$M^1e_a = M^1a^{n-2}aM^1 \subseteq M^1a$ et $M^1a = M^1ae_aM^1 \subseteq M^1e_a$.

Par suite, $M^1a = M^1e_a$ qui est équivalent à dire que les éléments a et e_a sont L-équivalents. De même on montre que a et e_a sont R-équivalents. Par suite, la H-classe contient l'idempotent e_a.

- Réciproquement, pour tout élément a de M, la H-classe H_a est un groupe contenant un idempotent e qui est son élément neutre. Il existe alors un élément a' de H_a tel que : $a'a = aa' = e$. D'autre part, M étant de 2ème espèce, il existe deux entiers positifs n et p, avec p minimal, tel que $a^n = a^p$.

Montrons que P = 1 : Si P $\geq$ 1 alors :

$a'a^n = a'a^p = ea^{n-1} = ea^{p-1} = a^{n-1} = a^{p-1}$.

Or, P-1 $\leq$ P contredit l'hypothèse que P est minimal.

Par suite, pour tout élément a de M il existe un entier positif n tel que $a^n = a$, ceci est équivalent à dire que M est cyclique.

3)-Un monoïde M de 2ème espèce contient au moins un idempotent et par conséquent il contient au moins un groupe.

Soient G un groupe de M et e son élément neutre ; G est contenu dans la H-classe H_e : en effet, pour tout élément x de G, il existe un élément x' de G tel que x'x = x'x = e et xe = ex = x.

Ceci entraîne que :

$M^1x = M^1xe \subseteq M^1e$ et $M^1e = M^1x'x \subseteq M^1x$, donc $M^1x = M^1e$.

De même on montre que $eM^1 = xM^1$. Ceci entraîne que les éléments e et x sont H-équivalents, c'est à dire x appartient à H_e et par suite G est inclus dans H_e.

Dans un monoïde de 2ème espèce, toute H-classe H_e, contenant l'idempotent e, est l'ensemble des éléments cycliques qui engendrent e. Alors, tout élément a de $G \subseteq H_e$ est cyclique, donc il existe un entier positif n tel que $a^n = a$ et $a^{n-1} = e$. D'autre part, si M est stable il existe un entier positif p tel que $a^p = a^{p+1}$. Nous pouvons écrire alors, r étant un entier tel que $n^r \geqq p$:

$a = a^n = a^{n^2} = \ldots = a^{n^r} = a^p\, a^{n^r-p} = a^{p+1}.a^{n^r-p} = a^{n^r+1} = a \ldots a = a^2 = \ldots = a^{n-1} = e$

ce qui montre que le groupe G est trivial.

-Réciproquement, pour tout élément a de M il existe deux entiers positifs n et p tels que $a^p = a^n$. Or l'ensemble $G = \{a^p, a^{p+1}, \ldots, a^{n-1}\}$ est un groupe cyclique d'éléments neutres noté e_a. Puisque tout groupe de M est trivial alors $a^p = a^{p+1} = \ldots = a^{n-1} = e_a$. Par suite a est stable.

<u>Corollaire 3</u> : <u>Dans un monoïde M cyclique</u>

<u>1) Toute D-classe de M contient un seul plateau qui est un quadrillage</u>.

<u>2) L'ensemble des plateaux est un Λ-demi-treillis pour l'ordre entre plateaux</u>.

Si M est cyclique, alors toute H-classe de M est un groupe. Donc M est un monoïde union de groupes. D'après le théorème II.2 et la proposition II.1, ce corollaire est bien démontré.

Remarque : Dans un monoïde M cyclcique et commutatif, les idempotents de M forment un Λ-demi-treillis pour l'ordre d'absorption.

3 - MONOIDES JP POUR LESQUELS L'ENSEMBLE DE PLATEAUX EST TOTALEMENT ORDONNE

Dans un monoïde JP si l'ensemble des idéaux principaux est totalement ordonné pour l'inclusion ensembliste, alors l'ensemble de plateaux est totalement ordonné pour l'ordre entre plateaux.

La réciproque n'est pas vraie que pour les idéaux principaux engendrés par idempotent.

Nous allons donner quelques monoïdes pour lesquels l'ensemble des plateaux est totalement ordonné.

3-1 - Cas des monoïdes JP qui admettent une série principale d'idéaux principaux

Proposition 2 : Dans un monoïde JP qui admet une série principale d'idéaux principaux,
L'ensemble des plateaux est totalement ordonné pour l'ordre entre plateaux.

Soit M un monoïde JP qui admet la série principale des idéaux principaux, suivante :

$$M = J(a_1) \supset J(a_2) \supset \dots \supset J(a_n) \supset \emptyset.$$

Pour tout indice i, l'élément a_i ne peut pas appartenir à $J(a_{i+1})$ car $J(a_i) \supset J(a_{i+1})$. Ceci entraîne que a_i doit appartenir à $(J(a_i) - J(a_{i+1}))$ qui est la J-classe contenant a_i : J_{a_i} (propriété II.3) $(J(a_n) = J_{a_n})$.

Dans ce cas le monoïde M est union de $\mathcal{J}$-classes J_{a_i}, $i = 1, 2, \dots, n$:

Nous pouvons écrire alors : $M = \bigcup_{i=1}^{n-1} (J(a_i) - J(a_{i+1})) \cup J(a_n) = \bigcup_{i=1}^{n} J_{a_i}$

Soient P_r et P_s deux plateaux différents de M, alors ils appartiennent respectivement à deux $\mathcal{J}$-classes différentes, soient J_{a_r} et J_{a_s} avec s > r. Alors :

$$J(P_s) = J(a_s) \subset J(a_r) = J(P_r)$$

Ceci est équivalent à dire que $P_s < P_r$ (théorème I.1).

3-2 - Cas des monoïdes dont toute partie est un sous-monoïde

Les monoïdes M pour lesquels toute partie est un sous-monoïde ont été complétement déterminés dans [2], d'où il ressort que :

1) Les plateaux de M, non réduit à un élément, sont des classes d'isovalences à droite ou bien à gauche.

2) L'ensemble des plateaux de M est totalement ordonné pour l'ordre entre plateaux.

On en déduit que :

L'ensemble des idéaux principaux de M est totalement ordonné par inclusion ensembliste.

De tels monoïdes n'admettent pas nécessairement une série principale idéaux d'idéaux principaux.

Exemple : Soit I = [a, b] un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel nous prenons la la loi : xy = Max(x, y) (le plus grand de x ou de y) [2].

Dans ce cas I est un monoïde idempotent commutatif dans lequel pour tout élément x, J(x) = [x, b]. Ceci entraîne donc que, $\mathbb{Q}$ étant dense sur $\mathbb{R}$, le monoïde I ne peut pas admettre une série principale d'idéaux principaux.

CHAPITRE III

PLATEAUX D'IDEMPOTENTS DANS LES MONOIDES SYMETRIQUES (FINIS)

1 - RAPPELS

1-1 - Monoïde symétrique

Soit X un ensemble non vide. L'ensemble des applications de X dans lui-même, noté T_X, est alors un monoïde pour l'opération de composition des applications :

$$\forall\ \alpha,\ \beta \in T_X,\ \forall\ x \in X :\ (x)\ (\alpha \circ \beta) = ((x)\alpha)\beta.$$

T_X est appelé le monoïde symétrique sur l'ensemble X.

L'application identité est l'élément neutre de X.

Soient deux ensembles finis non vides X et Y ayant même nombre d'éléments distincts. Les deux monoïdes symétriques T_X et T_Y sont isomorphes.

Ainsi si X admet n éléments distincts, nous pou vons considérer le monoïde symétrique sur l'ensemble $X = X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ et nous notons T_n le monoïde symétrique sur l'ensemble X ($|X| = n$).

1-2 - Rang d'une application [3]

Pour tout élément α d'un monoïde symétrique T_X nous associons :

a) L'image X_α de α.

b) La partition $\Pi_\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}$ de X, c'est à dire la relation d'équivalence définie par : $(x, y \in X)$

$$x\ \Pi_\alpha\ y \overset{\text{déf}}{=\!=} (x)\alpha = (y)\alpha$$

X/Π_α et X_α ont même cardinalité que nous appelons le rang de l'application α.

Les L, R et D-classes d'équivalence de Green dans T_n sont l'ensemble des applications qui admettent respectivement la même image $Y \subseteq X$, la même partition Π de X et le même rang $r \leq |X|$ [3, 2.2].

Dans ces cas, les classes d'équivalences L_α, R_α et D_α seront notées respectivement L_Y, R_Π et D_r et seront dites de rang r si $|Y| = |X/\Pi| = r$ ($X_\alpha = Y$ et $\Pi = \Pi\alpha$).

Quelques propriétés du monoïde symétrique T_X sont données dans [3, 2.2].

1-3 - Dénombrement des idempotents dans un monoïde symétrique

- Nombre d'idempotents contenus dans une L-classe

Pour qu'une application α de T_X soit idempotente il faut et il suffit que la restriction de α sur son image X_α soit l'application identique [9 et 3, 1.1].

Ainsi tout sous-ensemble Y de X peut être considéré comme un ensemble image des applications idempotentes α de T_X tel que $X_\alpha = Y$ et pour tout élément y de Y, $(y)\alpha = y$.

Alors le nombre des applications α de T_X, ayant la même image Y, est le nombre des applications de (X-Y) dans Y.

Par conséquent une L-classe de T_n de rang $r \leq n$, correspondante à un sous-ensemble Y de X tel que $|Y| = r$ ($|X-Y| = n-r$), contient r^{n-r} idempotents [9 et 3, 2.2].

- Nombre d'idempotents contenus dans une R-classe

Le nombre d'idempotents dans une R-classe R est le nombre des H-classes de R contenant un idempotent. Une H-classe H de T_X est l'ensemble des applications qui admettent la même partition Π et la même image Y.
Or, H contient un idempotent si et seulement si pour tout élément β de H, l'image $X_\beta = Y$ rencontre toute classe d'équivalence mod Π en un seul élément [3, th. 2.10].

Ainsi, toute partition Π de X peut être considérée comme la partition des applications idempotentes β de T_X telles que $\Pi_\beta = \Pi$ et l'ensemble image X_β rencontre toute classe d'équivalence mod Π en un seul élément.

Soient $\Pi_\beta = \Pi$ une partition de rang r dans T_n, $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,r}$ les r classes d'équivalence mod Π_β et $n_i = |X_i|$ le nombre d'éléments distincts dans chaque classe X_i, $i = 1, 2, \dots, r$. ($X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$, $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$).

Alors le nombre des applications idempotentes dans la R-classe R de T_n de rang r, correspondante à la partition Π, est le nombre des sous-ensembles Y de X contenant un seul élément de chaque X_i ($|X_i| = n_i$), $i = 1, 2, \dots, r$.

Par conséquent la R-classe R contient $\prod_{i=1}^{r} n_i$ idempotents [9 et 3, 2.2].

- Nombre d'idempotents contenus dans une D-classe

Une D-classe D de T_n de rang $r \leq n$, étant l'ensemble des applications de rang r, est l'union de $\binom{n}{r}$ L-classes L_Y disjointes où Y est un sous-ensemble de X contenant r éléments distincts de X. Donc le nombre d'idempotents dans la D-classe D est :

$$\binom{n}{r} r^{n-r}$$

Par suite, le monoïde symétrique T_n étant union de n D-classes disjointes de rang $r = 1, 2, \dots, n$, le nombre des idempotents E_n contenus dans T_n est :

$$E = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} r^{n-r} \qquad [6 \text{ et } 9].$$

1-4 - Nombre d'éléments contenus dans une D-classe

Le nombre des R-classes contenues dans une D-classe de rang $r \leq |X|$, ou le nombre des H-classes contenues dans une L-classe de rang r, est le nombre des possibilités de partitionner un ensemble de $n = |X|$ éléments distincts en r parties non vides. Ce nombre est le nombre de Stirling S_r^n de 2ème espèce (n entier positif).

Remarquons que pour tout entier positif n : $S_1^n = S_n^n = 1$ et $S_r^{n+1} = S_{r-1}^n + r\,S_r^n$.

Les $\mathcal{H}$-classes contenues dans une $\mathcal{D}$-classe D de rang r, étant isomorphes, contiennent le même nombre d'éléments. Or, le nombre d'éléments dans une $\mathcal{H}$-classe contenant un idempotent est le nombre des permutations de l'ensemble image [9 et 3]. Ceci entraîne que chaque $\mathcal{H}$-classe de D contient r! éléments.

Par conséquent le nombre d'éléments contenus dans une $\mathcal{D}$-classe de T_n de rang r est $\underline{\binom{n}{r} S_r^n\, r!}$

On en déduit que : $\underline{n^n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} S_r^n\, r!}$ [9]

Un exemple vérifiant les relations ci-dessus est donné pages (39, 40).

Le tableau suivant nous donne pour n = 1, 2, ..., 7 :

a) Le nombre des éléments de T_n.

b) Le nombre E_n des idempotents de T_n.

c) Le nombre des éléments de chaque $\mathcal{D}$-classe D_r de rang r = 1, 2, ..., n.

d) Le nombre I_r des idempotents contenus dans chaque $\mathcal{D}$-classe D_r de rang r = 1, 2, ..., n.

n	E_n	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
	$\lvert T_n \rvert$	$\lvert D_1 \rvert$	$\lvert D_2 \rvert$	$\lvert D_3 \rvert$	$\lvert D_4 \rvert$	$\lvert D_5 \rvert$	$\lvert D_6 \rvert$	$\lvert D_7 \rvert$
n=1	1	1						
	1	1						
n=2	3	2	1					
	4	2	2					
n=3	10	3	6	1				
	27	3	18	6				
n=4	41	4	24	12	1			
	256	4	84	144	24			
n=5	196	5	80	90	20	1		
	3125	5	300	1500	1200	120		
n=6	1057	6	240	540	240	30	1	
	46656	6	930	10800	23400	10800	720	
n=7	6322	7	672	2835	2240	525	42	1
	823543	7	2646	63210	294000	352800	105840	5040

-=-=-=-=-=-=-=-

Nous donnons le tableau du nombre de Stirling S_r^n de deuxième espèce pour n = 1, 2, ..., 9.

S_r^n	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7	r=8	r=9
n=1	1								
n=2	1	1							
n=3	1	3	1						
n=4	1	7	6	1					
n=5	1	15	25	10	1				
n=6	1	31	90	65	15	1			
n=7	1	63	301	350	140	21	1		
n=8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
n=9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

2 - ETUDE DE L'ORDRE ENTRE PLATEAUX DANS UN MONOIDE SYMETRIQUE

Pour tout monoïde M il existe un ensemble X tel que M soit isomorphe à un sous-monoïde de T_X. [8]

Nous allons donc étudier l'ordre entre plateaux dans un monoïde symétrique T_X pour lequel nous montrerons que l'ensemble des plateaux est totalement ordonné pour l'ordre entre plateaux.

De plus, étant donné deux plateaux P_1 et P_2 dans un monoïde symétrique T_n tel que $P_1 \geq P_2$, nous allons préciser le nombre d'idempotents β de P_2 qui absorbent sur leur droite ou sur leur gauche un indempotent α de P_1.

2-1 - Préordres et isovalence dans l'ensemble des idempotents de T_X

Propriété 1 : Si α et β sont deux idempotents dans T_X, alors :

1) $X_\alpha \supseteq X_\beta \iff \alpha \underset{d}{\Delta} \beta$

$X_\alpha = X_\beta \iff \alpha \underset{d}{\equiv} \beta$

2) $\Pi_\alpha \subseteq \Pi_\beta \Longleftrightarrow \alpha \underset{g}{\Delta} \beta$

$\Pi_\alpha = \Pi_\beta \Longleftrightarrow \alpha \underset{g}{\equiv} \beta$

Deux idempotents α et β de T_X admettent deux images X_α et X_β telles que $X_\alpha \supseteq X_\beta$ (resp. deux partitions $\Pi_\alpha \subseteq \Pi_\beta$) si et seulement si il existe un élément y de T_X tel que $y\alpha = \beta$ (resp. $\alpha y = \beta$). Ce qui entraîne que α et β sont L-|resp. R-| équivalents si et seulement si ils ont même image (resp. même partion) [3, 2.2].

Cette propriété est ainsi démontrée d'après la propriétéI-1.

Nous en déduisons que :

Dans un monoïde symétrique T_n, tout idempotent α de T_n de rang r avec $1 < r < n$ admet :

- $(r^{n-r} - 1)$ idempotents, différents de α, qui sont isovalents à droite de α.
- $(\prod_{i=1}^{r} n_i - 1)$ idempotents, différents de α, qui sont isovalents à gauche de α

avec $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ où n_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, est le nombre d'éléments dans chaque classe d'équivalence mod Π_α.

Remarquons que :

- $(r^{n-r} - 1) \geq 1$ et $(\prod_{i=1}^{r} n_i - 1) \geq 1$ pour tout entier r tel que $1 < r < n$.

- Dans le cas où $r = 1$, il est évident que $n_1 = n$ et $n_2 = n_3 = \ldots = n_r = 0$. Ceci entraîne que $r^{n-r} - 1 = 1 - 1 = 0$ et $\prod_{i=1}^{r} n_i - 1 = n - 1$.

Alors la D-classe D_1 est formée d'une seule R-classe et qui contient n H-classes ou n idemotents isovalents à gauche :

- Dans le cas où $r = n$, il est évident que $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 1$. Alors, $r^{n-r} - 1 = 0$ et $\prod_{i=1}^{r} n_i - 1 = 1 \times 1 \times \ldots \times 1 - 1 = 0$.

La $\mathcal{D}$-classe D_n est une seule $\mathcal{H}$-classe qui est le groupe de toutes les permutations sur l'ensemble X de n éléments. Il contient donc un seul idempotent.

Notations utilisées

Nous savons que le nombre de partitions d'index q de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$, (avec $q < p$), est S_q^p.

Soit j un indice parcourant $\{1, 2, \ldots, S_q^p\}$. A un tel indice

Nous notons :

$$\sigma_j = \{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}, \ldots, I_q^{(j)}\}$$

la partition d'index q de $\{1, 2, \ldots, p\}$.

Soit $\{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ une partition d'index p de l'ensemble X avec $|X| = n$ $(n \geq p)$. Nous définissons alors les entiers $n_{r,j}$ pour $r \in \{1,2,\ldots,q\}$, $j \in \{1,2,\ldots,S_q^p\}$ par :

$$n_{r,j} = \sum_{i \in I_r^{(j)}} |X_i|$$

Nous avons avec ces notations le résultat suivant :

Proposition 1 : Soient les deux $\mathcal{D}$-classes D_p et D_q de rang différent dans le monoïde symétrique T_n $(q < p \leq n)$, α un idempotent de D_p et $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots,p}$ la partition correspondante à α, alors :

1) α est absorbé à droite par :

$\binom{p}{q} q^{n-q}$ idempotents de D_q

2) α est absorbé à gauche par :

$$\sum_{j=1}^{S_q^p} \left(\prod_{r=1}^{q} n_{r,j} \right)$$ idempotents de D_q

où $n_{r,j}$ est défini dans les notations précédentes.

3) α est absorbé à droite et à gauche par :

$\binom{p}{q} q^{p-q}$ idempotents de D_q

Soit $X_\alpha = \{x_1, \ldots, x_p\}$ l'image de l'application α de rang r.

1) α est absorbé à droite par un idempotent β si et seulement si $X_\alpha \supset X_\beta$ (propriété III-1). Si β est de rang $q < p$, alors X_β est un sous-ensemble de X_α de q éléments. Or il existe exactement $\binom{p}{q}$ sous-ensembles de X_α de q éléments distincts : soient $\{Y_i\}_{i=1,2,\ldots,\binom{p}{q}}$. Chaque L-classe LY_i contient q^{n-q} idempotents : $\{\gamma_{ij}\}_{j=1,2,\ldots,q^{n-q}}$ avec $X_{\gamma_{ij}} = Y_i$ et $X_\alpha \supset X_{ij}$ pour tout i de $\left[1, 2, \ldots, \binom{p}{q}\right]$ et pour tout j de $\left[1, 2, \ldots, q^{n-q}\right]$. Une D-classe étant l'ensemble des applications de même rang, α est absorbé donc à droite par $\binom{p}{q} q^{n-q}$ idempotents de D_q.

2) α est absorbé à gauche par un idempotent β si et seulement si $\Pi_\alpha \subseteq \Pi_\beta$. Pour obtenir toutes les partitions, de rang q, moins fines que celles de α $(q < p)$ il suffit de partitionner l'ensemble $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots,p}$ en q parties non vides. Donc il existe S_q^p partitions différentes d'index q : soient $\{\Pi_{(j)}\}_{j=1,2,\ldots,S_q^p}$ (j est un indice).

Notons pour chaque partition $\Pi_{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, S_q^p$:

- $\{Y_r^{(j)}\}_{r=1,2,\ldots,q}$ la partition de X d'index q.

- Que tout indice r de $[1, 2, \ldots, q]$, $I_r^{(j)}$ l'ensemble des indices i tels que $X_i \subseteq Y_r^{(j)}$.

Alors le nombre d'éléments dans chaque sous-ensemble $Y_r^{(j)}$ est :

$$\left|Y_r^{(j)}\right| = \sum_{i \in I_r^{(j)}} \left|X_i\right| = n_{r,j}$$

Pour tout $j = 1, 2, \ldots, S_q^p$, la R-classe $R_{\Pi_{(j)}}$, correspondante à la partition $\Pi_{(j)}$, contient $\prod_{r=1}^{q} n_{r,j}$ idempotents γ tels que :

$$\Pi_\alpha \subset \Pi_{(j)} = \Pi_\gamma \quad \text{et} \quad \left|X/\Pi_\gamma\right| = q < p = \left|X/\Pi_\alpha\right|$$

Ceci entraîne que α est absorbé à gauche par : $\sum_{j=1}^{S_q^p} \left(\prod_{r=1}^{q} n_{r,j} \right)$ idempotents de D_q.

3) L'ensemble des idempotents β de D_q qui absorbent α sur leur gauche et sur leur droite est tel que :

$$|X_\beta| = |X/\Pi_\beta| = q, \quad X_\beta \subset X_\alpha, \ \Pi_\beta \supset \Pi_\alpha$$

et toute classe d'équivalence mod Π_β doit rencontrer X_β en un seul élément.

Notons $X_\beta = \{y_1, \ldots, y_q\} \subset X_\alpha = \{x_1, \ldots, x_p\}$ $(p > q)$ et $X_\alpha - X_\beta = \{t_1, t_2, \ldots, t_{(p-q)}\}$

Toute classe Y_j mod Π_β contenant y_j doit contenir la classe mod Π_α contenant y_j, car $\Pi_\beta \supset \Pi_\alpha$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, q$.

Donc les $(p-q)$ classes mod Π_α contenant respectivement $t_1, t_2, \ldots, t_{(p-q)}$ doivent être incluses dans les q classes mod Π_β : $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$.
Or le nombre de façons de ranger $(p-q)$ objets dans q cases est q^{p-q}.
Donc pour tout sous-ensemble, de q éléments, de X_α il existe q^{p-q} idempotents de D_q qui absorbent α sur leur gauche et sur leur droite.
Par suite α est absorbé à gauche et à droite par : $\binom{p}{q} q^{p-q}$ idempotents de D_q.

2-2 - Plateaux d'idempotents dans le monoïde symétrique T_n

Théorème 1 : Dans un monoïde symétrique T_n, les idempotents de même rang $r \leq n$ forment un seul plateau

Si α_1 et α_2 sont deux idempotents de même rang, alors ils appartiennent à une même $\mathcal{D}$-classe D_r de rang $r \leq |X|$.

Soient $X_{\alpha_1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, $X_{\alpha_2} = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$, $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ et $Y = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i$ où les X_i (resp. Y_i) $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sont les classes d'équivalences mod Π_{α_1} (resp. mod Π_{α_2}).

- Si $X_{\alpha_1} = X_{\alpha_2}$ ou $\Pi_{\alpha_1} = \Pi_{\alpha_2}$, alors α_1 et α_2 sont isovalents à droite ou à gauche. Donc ils appartiennent au même plateau.

- Supposons que $X_{\alpha_1} \neq X_{\alpha_2}$ et $\Pi_{\alpha_1} \neq \Pi_{\alpha_2}$. Dans ce cas $1 < r < n$.

Nous pouvons toujours construire une partition de X d'index r :

$\{Z_k\}_{K=1,2,\dots,r}$, telle que pour tout K de $[1, 2, \dots, r]$ le sous-ensemble Z_K rencontre X_{α_1} (resp. X_{α_2}) en un seul élément.

Pour cela supposons que :

$$\left| X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} \right| = p \qquad (0 \leq p \leq r)$$

On peut alors adopter la notation suivante :

$$X_{\alpha_1} = \{t_1, t_2, \dots, t_p, x_{p+1}, \dots, x_r\}$$

$$X_{\alpha_2} = \{t_1, t_2, \dots, t_p, y_{p+1}, \dots, y_r\}$$

Il suffira d'imposer pour cette partition :

si $K \leq p$ alors $t_K \in Z_K$; si $K > p$ alors x_K et $y_K \in Z_K$. Ce qui est toujours possible.

Nous considérons alors les deux applications β_1 et β_2 de T_X telles que

- si $K \leq p$ alors $Z_K\beta_1 = Z_K\beta_2 = \{t_K\}$

- si $K > p$ alors $Z_K\beta_1 = \{x_K\}$ et $Z_K\beta_2 = \{y_K\}$

β_1 et β_2 sont évidemment deux applications idempotentes.

Les partitions Π_{β_1} et Π_{β_2} correspondantes à β_1 et β_2 sont identiques, par conséquent, β_1 et β_2 sont isovalents à gauche (propriété III-1).

De plus, la construction de $\{Z_K\}_{K=1,2,\dots,r}$ nour montre que :

$X_{\beta_1} = X_{\alpha_1} = \{t_1, \dots, t_p, x_{p+1}, \dots, x_r\}$ et $X_{\beta_2} = X_{\alpha_2} = \{t_1, \dots, t_p, y_{p+1}, \dots, y_r\}$.

Cela signifie que α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) sont isovalents à droite.

Par suite pour toute paire d'idempotents α_1 et α_2 de D_r il existe deux idempotents β_1 et β_2 de même rang r tels que : $\alpha_1 \underset{d}{\equiv} \beta_1 \underset{g}{\equiv} \beta_2 \underset{d}{\equiv} \alpha_2$

Donc les idempotents de D_r forment un seul plateau.

Notons que si $\beta_1 = \alpha_1$ (resp. $\beta_2 = \alpha_2$) alors $\beta_2 \neq \alpha_2$ (resp. $\beta_1 \neq \alpha_1$).

Théorème 2 : Un monoïde symétrique T_n, contient n plateaux totalement ordonnés pour l'ordre entre plateaux.

Dans un monoïde symétrique T_n, une $\mathcal{D}$-classe D_r est l'ensemble des applications ayant le rang r. T_n contient donc n $\mathcal{D}$-classes $D_1, D_2, \ldots, D_n$ où D_r contient exactement $\binom{n}{r} r^{n-r}$ idempotents qui forment un seul plateau : P_r, $r = 1, 2, \ldots, n$ (proposition 7).

D'après la proposition III-1, pour tout entier r de $[1, 2, \ldots, n]$ et pour tout idempotent α de P_r, α est absorbé à droite et à gauche par $\binom{q}{r} q^{r-q}$ idempotents de tout autre plateau P_q tel que $q < p$.

Par conséquent, le monoïde symétrique T_n contient n plateaux totalement ordonnés tels que :

$$P_1 < P_2 < \ldots < P_{n-1} < P_n.$$

Remarques :

1 - Le monoïde symétrique T_n est un monoïde JP qui admet une série principale unique d'idéaux principaux :

$$\emptyset \subset J(1) \subset J(2) \subset \ldots \subset J(n-1) \subset J(n) = T_n$$

où $J(r)$ est l'ensemble des éléments de T_n de rang $\leq r \leq n$ [3, 2.6].

- Dans un monoïde symétrique T_X, d'après [3, th. 2.9], il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux principaux et l'ensemble des entiers positifs $r \leq |X|$. Donc l'ensemble des idéaux principaux de T_n est totalement ordonné par inclusion ensembliste. Alors tout idéal I de T_n, I étant en général union des idéaux principaux, est un idéal principal. Donc la série principale est unique.

- Dans un monoïde symétrique $\mathcal{D} = \mathcal{J}[\beta]$, et puisque toute $\mathcal{D}$-classe contient un seul plateau, alors T_n est un monoïde JP.

2 - Dans un monoïde symétrique T_n, tout plateau $P_r (r \leq n)$ est une partie libre pour l'ordre d'absorption

Soient α et β deux idempotents de P_r ; alors $\alpha \underset{d}{\Delta} \beta$ (resp. $\alpha \underset{g}{\Delta} \beta$) est équivalent à dire que $X_\alpha \supseteq X_\beta$ (resp. $\Pi_\alpha \subseteq \Pi_\beta$).

D'autre part α et β, appartenant au même plateau, admettent le même rang r. Donc $|X_\alpha| = |X_\beta| = |X/\Pi_\alpha| = |X/\Pi_\beta| = r$. Or X_α et X_β (X/Π_α et X/Π_β) étant deux ensembles finis, alors $X_\alpha = X_\beta$ (resp. $\Pi_\alpha = \Pi_\beta$).

Par suite $\alpha \underset{d}{\equiv} \beta$ (resp. $\alpha \underset{g}{\equiv} \beta$).

Exemple : **Éléments, idempotents et plateaux dans le monoïde symétrique T_3**

Nous représentons les $\mathcal{D}$-classes d'un monoïde symétrique T_n ($|X| = n$) suivant la notation de [3, 2.2].

Soit $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Nous notons (i j k...) l'image d'une application de T_n telle que : $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$, ... etc.

Nous représentons une $\mathcal{D}$-classe D_r de T_n de rang r par un tableau tel que :

La ligne (resp. la colonne) de tête représente les sous-ensembles de X contenant r éléments distincts (resp. les partitions de X en r parties non vides). Chaque ligne (colonne, case) correspond à une $\mathcal{R}$-($\mathcal{L}$-, $\mathcal{H}$-) classe de D_r. Nous marquons les idempotents par *.

Tableaux des $\mathcal{D}$-classes

D_3	{1 2 3}
{1}{2}{3}	$\xrightarrow{a_1}$ (1 2 3)* $\xrightarrow{a_4}$ (2 3 1) $\xrightarrow{a_2}$ (1 3 2) $\xrightarrow{a_5}$ (3 2 1) $\xrightarrow{a_3}$ (2 1 3) $\xrightarrow{a_6}$ (3 1 2)

Nombre d'éléments

$$\binom{3}{3} S_3^3 \, 3! = 1 \times 1 \times 3! = 6$$

D_2	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$
$\{1\}\ \{23\}$	$\xrightarrow{b_1}$ $(122)^*$ $\xrightarrow{b_2}$ (211)	$\xrightarrow{c_1}$ $(133)^*$ $\xrightarrow{c_2}$ (311)	$\xrightarrow{e_1}$ (233) $\xrightarrow{e_2}$ (322)
$\{2\}\ \{13\}$	$\xrightarrow{b_3}$ $(121)^*$ $\xrightarrow{b_4}$ (212)	$\xrightarrow{c_3}$ (313) $\xrightarrow{c_4}$ (131)	$\xrightarrow{e_3}$ $(323)^*$ $\xrightarrow{e_4}$ (232)
$\{3\}\ \{12\}$	$\xrightarrow{b_5}$ (221) $\xrightarrow{b_6}$ (112)	$\xrightarrow{c_5}$ (331) $\xrightarrow{c_6}$ $(113)^*$	$\xrightarrow{e_5}$ (332) $\xrightarrow{e_6}$ $(233)^*$

$\binom{3}{2}\ S_2^3\ 2! = 3 \times 3 \times 2! = 18$

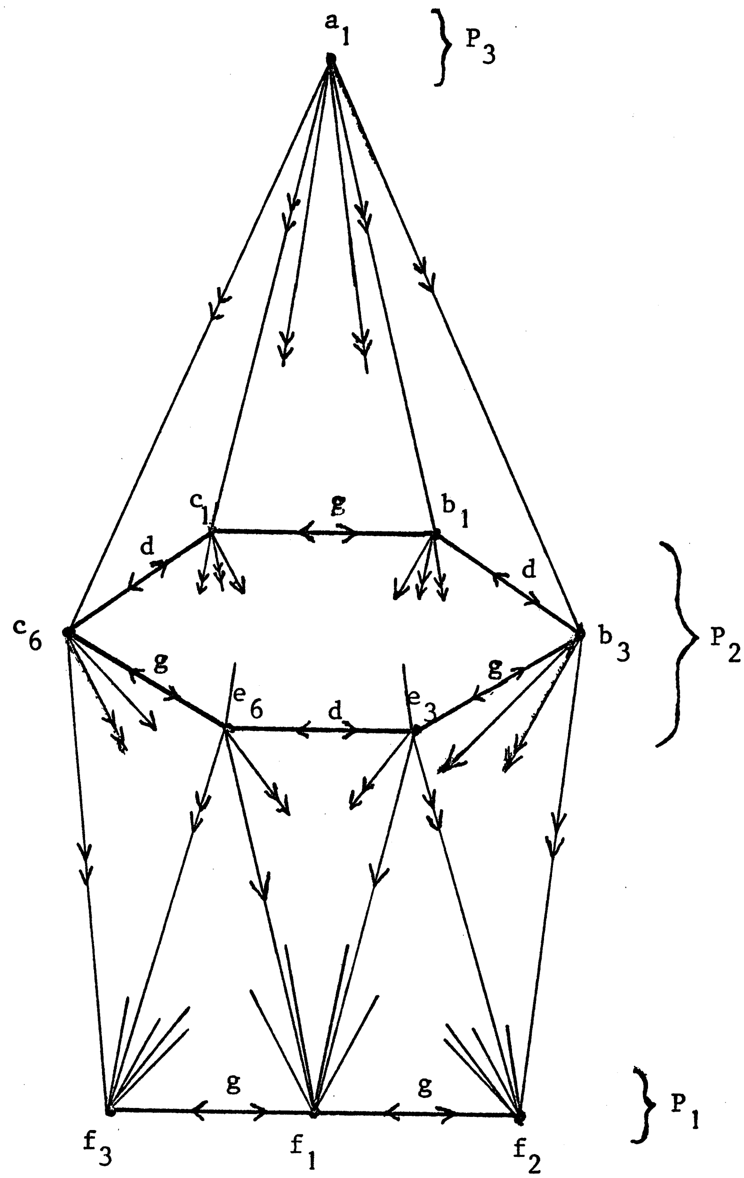
D_1	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\{123\}$	$\xrightarrow{f_1}$ $(111)^*$	$\xrightarrow{f_2}$ $(222)^*$	$\xrightarrow{f_3}$ $(333)^*$

$\binom{3}{1}\ S_1^3\ 1! = 3 \times 1 \times 1 = 3$

Total $3^3 = 27$

Remarque : Tout idempotent e d'un monoïde est un élément neutre à droite dans L_e, un élément neutre à gauche dans R_e et un élément neutre bilatère dans H_e [3, lemme 2.14].

Plateaux ordonnés de T_3



3 - PLATEAU A CIRCUITS HEXAGONAUX DANS UN MONOIDE SYMETRIQUE T_n ($|X| = n$)

Dans un monoïde M quelconque, contenant des idempotents, l'ensemble des plateaux, muni de l'ordre entre plateaux, admet un plateau infimum qui est un quadrillage [7].

Dans le cas d'un monoïde symétrique T_n, le plateau infimum P_1 est un quadrillage particulier : il est formé de n idempotents isovalents à gauche. De plus c'est le seul plateau de T_n qui soit un quadrillage. Les autres plateaux ont la structure suivante :

- Le plateau P_n est formé d'un seul idempotent.
- Tout plateau P_r de T_n, $1 < r < n-1$, n'est pas un quadrillage mais il contient des circuits de quatre idempotents.
- Le plateau P_{n-1} est un plateau à circuits hexagonaux défini comme suit :

<u>Définition</u> : <u>Plateau à circuits hexagonaux</u>

C'est un plateau P tel que :

1) P ne contient aucun circuit de quatre idempotents.

2) Tout idempotent de P admet un isovalent à gauche et un isovalent à droite, ces trois idempotents étant distincts et appartenant à un même circuit hexagonal.

<u>Proposition 2</u> : <u>Dans un monoïde symétrique</u> T_n, $n \geqq 3$, <u>le plateau</u> P_{n-1} <u>est un plateau à circuits hexagonaux</u>.

<u>De plus tout idempotent de</u> P_{n-1} <u>appartient à (n-2) circuits hexagonaux</u>.

Pour tout idempotent α de P_{n-1} nous avons $|X_\alpha| = |X/\Pi_\alpha| = n-1$ avec $|X| = n$. Ceci entraîne qu'il existe nécessairement une seule classe d'équivalence mod Π_α contenant deux éléments et toutes les autres classes mod Π_α contiennent chacune un seul élément. Donc toute R-classe de D_{n-1} contient $1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times 2 = 2$ idempotents qui sont isovalents à gauche ($n \geqq 3$).

Soient $\{X_j\}_{j=1,2,\ldots,n-1}$ les (n-1) classes d'équivalences mod Π_α, alors nous notons $X_j = \{x_j\}$ pour tout $j \neq i$ et $X_i = \{x_i, x_n\}$.
Dans ce cas $X_\alpha = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} = X - \{x_n\}$, et le deuxième idempotent α', R-équivalent à α, doit admettre l'image $X_{\alpha'} = X - \{x_i\}$.

La L-classe L_α contient (n-1) idempotents isovalents à droite. Ceci entraîne que tout idempotent α de P_{n-1} admet un isovalent à gauche $\alpha' \neq \alpha$ et (n-2) isovalents à droite différents de α : $\{\beta_i\}_{i=1,2,\dots,n-2}$. pour tout i de $[1, 2, \dots, n-2]$, il existe une classe Y_j mod Π_{β_i} de telle façon que $Y_j = \{x_n, x_j\}$ avec $x_j \neq x_i$ (sinon $\beta_i = \alpha$).

De plus il existe un idempotent β' R-équivalent à β_i tel que : $X_{\beta_i} = X - \{x_n\}$ et $X_{\beta_i'} = X - \{x_j\}$. L'idempotent β_i' ne peut pas appartenir à $L_{\alpha'}$, sinon nous avons nécessairement $X - \{x_i\} = X - \{x_j\}$, c'est à dire, $x_i = x_j$ qui sont différents par hypothèse. Par suite tout idempotent α de P_{n-1} ne peut pas appartenir à un circuit de quatre idempotents.

Maintenant, soit la partition de X en (n-1) sous-ensembles Z_k de telle façon que : $Z_k = \{x_k\}$ pour tout $k \neq j$ et $k \neq i$, et $Z_i = Z_j = \{x_i, x_j\}$ $(X = \bigcup_{r=1}^{n} Z_r)$. Cette partition d'index (n-1) rencontre $(X - \{x_j\})$ et $(X - \{x_i\})$ en un seul élément pour chaque Z_k. On définit alors les deux applications γ_k et γ_k' telles que :

$$(x_r)\,\gamma_k = x_r \qquad \text{pour tout } r \neq j \qquad \text{et} \qquad (x_j)\,\gamma_k = x_i$$
$$(x_r)\,\gamma_k' = x_r \qquad \text{pour tout } r \neq i \qquad \text{et} \qquad (x_i)\,\gamma_k' = x_j$$

Alors $X_{\gamma_k} = X_{\beta_i'}$, $X_{\gamma_k'} = X_{\alpha'}$ et $\Pi_{\gamma_k} = \Pi_{\gamma_k'}$.

Donc pour tout idempotent β_i, i = 1, 2, ..., n-2, il existe β_i', γ_k, et γ_k' de telle façon que α, β_i, β_i', γ_k, γ_k' et α' forment un circuit hexagonal.

Par suite P_{n-1} est un plateau à circuits hexagonaux d'idempotents et dans lequel tout idempotent α appartient à (n-2) circuits hexagonaux.

Dans le cas où n = 2 le plateau $P_{n-1} = P_1$ contient exactement deux idempotents isovalents à gauche.

Nous notons de plus :

Toute classe d'isovalence à gauche, de P_{n-1}, contient deux idempotents et toute classe d'isovalence à droite contient (n-1) idempotents.

<u>Remarque</u> : Le plateau P_1 de T_n est une classe d'isovalence contenant n idempotents De plus P_1 est la $\mathcal{D}$-classe D_1 contenant une seule $\mathcal{R}$-classe. Tout idempotent e de P_1 est un élément absorbant à droite car pour tout élément α de T_n nous avons toujours $\Pi_\alpha \subseteq \Pi_e = X$.

La $\mathcal{D}$-classe D_n est le groupe des permutations de n éléments distincts. Donc P_n est formé d'un seul idempotent.

<u>Proposition 3</u> : <u>Soit α un idempotent de T_n de rang r, alors α appartient à un circuit de quatre idempotents si et seulement si</u> $(n-r) \geq 2$.

Si α appartient à un circuit de quatre idempotents α, α_2, β_1, β_2 ; de telle façon que : $\alpha \underset{d}{\equiv} \beta_1 \underset{g}{\equiv} \beta_2 \underset{d}{\equiv} \alpha_2 \underset{g}{\equiv} \alpha$.

Soient alors $X_\alpha = X_{\beta_1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \neq X_{\alpha_2} = X_{\beta_2} = \{y_1, \ldots, y_r\}$,

$\Pi_\alpha = \Pi_{\alpha_2} \neq \Pi_{\beta_1} = \Pi_{\beta_2}$, $\{X_i\}_{i:1,2,\ldots,r}$ les r-classes d'équivalence mod $\Pi_\alpha = \Pi_{\alpha_2}$ et $\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots,r}$ les r-classes d'équivalenc mod $\Pi_{\beta_1} = \Pi_{\beta_2}$.

Or pour tout indice i, $X_\alpha \cap X_i$ (resp. $X_{\alpha_2} \cap Y_i$) contient un seul élément de X. Puisque $X_\alpha \neq X_{\alpha_2}$ il existe (i, j) tels que $x_i \neq y_j$. Par conséquent il existe au moins un i (resp. un j) tel que :

La classe X_i (resp. Y_j) contient au moins deux éléments différents de X.

a) Si X_i (resp. Y_j) contient trois éléments au moins alors $n-r \geq 2$

b) Si X_i (resp. Y_j) contient deux éléments mais il n'est pas unique alors $n-r \geq 2$.

c) Si X_i (resp. Y_j) est la seule classe mod Π_α (resp. mod Π_{β_1}) contenant deux éléments distincts, alors $r = n-1$ et par conséquent α, α_2, β_1 et β_2 sont des idempotents de P_{n-1} qui est un plateau à circuits hexagonaux d'idempotents. Par suite le cas (c) est impossible. Donc $r \neq n-1$ et $r \leq n-2$.

Réciproquement : Si $n-r \geq 2$, alors toute partition Π de rang r admet :

A) Une classe mod Π à trois éléments au moins ou bien

B) Deux classes au moins mod Π à deux éléments.

Dans ces deux cas :

<u>Lemme 1</u> : <u>Tout idempotent de</u> T_n, <u>correspondant à une partition</u> Π <u>d'index</u> $r \leq n-2$, <u>appartient à un circuit de quatre idempotents</u>.

<u>Cas A</u> : Soient $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots,r}$ les r-classes d'équivalence mod Π. Il existe une classe X_j contenant trois éléments distincts au moins : soient $x_{j_s} \neq x_{j_i} \neq x_{j_k} \neq \ldots$

La R_Π-classe contient donc trois idempotents au moins, $\alpha_i \neq \alpha_k \neq \alpha_s \neq \ldots$, tels que :

$X_{\alpha_i} \cap X_j = \{x_{j_i}\}$, $X_{\alpha_k} \cap X_j = \{x_{j_k}\}$, $X_{\alpha_s} \cap X_j = \{x_{j_s}\},\ldots$

Soit la partition Π' de X, en r sous-ensembles Y_j, $j = 1, 2, \ldots, r$ définis comme suit : $Y_i = X_i$ pour tout $i \neq j$ et $i \neq k$, $Y_k = X_k \cup \{x_{j_s}\}$ et $Y_j = X_j - \{x_{j_s}\}$. Dans ce cas $X_{\alpha_k} \cap Y_t$ (resp. $X_{\alpha_i} \cap Y_t$) contient un seul élément pour tout $t = 1, 2, \ldots, r$. Nous pouvons considérer alors les deux applications idempotentes β_k et β_i de T_n telles que :

$\Pi' = \Pi_{\beta_k} = \Pi_{\beta_i}$, $X_{\alpha_k} = X_{\beta_k}$ et $X_{\alpha_i} = X_{\beta_i}$.

Or α_k et α_i appartiennent à la même R-classe R_Π et par conséquent pour tout idempotent α_i de R_Π il existe β_i, β_k et α_k qui font un circuit de quatre idempotents.

<u>Cas B</u> : Soient $X_k = \{x_{k_1}, x_{k_2}\}$ et $X_j = \{x_{j_1}, x_{j_2}\}$ les deux classes mod Π contenant chacune deux éléments distincts. Dans ce cas la R_Π-classe contient au moins quatre idempotents.

Soit la partion Π' de X, en r sous-ensembles de X, Y_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ définis comme suit : $Y_i = X_i$ pour tout $i \neq k$ et $i \neq s$, $Y_s = X_s \cup \{x_{k_2}\}$ et $Y_k = X_k - \{x_{k_2}\}$. Alors nous pouvons considérer les quatre applications idempotentes α_1, α_2, β_1, β_2 telles que :

$\Pi_{\alpha_1} = \Pi_{\alpha_2} = \Pi$, $\Pi_{\beta_1} = \Pi_{\beta_2} = \Pi'$, $X_{\alpha_1} = X_{\beta_1} = \{x_1, \ldots, x_{k_1}, \ldots, x_{j_1}, \ldots, x_r\}$ et $X_{\alpha_2} = X_{\beta_2} = \{x_1, \ldots, x_{k_1}, \ldots, x_{j_2}, \ldots, x_r\}$. Ceci entraîne que :

$\alpha_1 \underset{g}{\equiv} \alpha_2 \underset{d}{\equiv} \beta_2 \underset{g}{\equiv} \beta_1 \underset{d}{\equiv} \alpha_1$. Par suite, tout idempotent α_1 de la $\mathcal{R}_{\Pi}$-classe appartient à un circuit de quatre idempotents.

Ce lemme achève la démonstration de la proposition 3, car tout idempotent α, de rang r, appartient à la $\mathcal{D}$-classe D_r qui est union des $\mathcal{R}$-classes.

<u>Proposition 4</u> : <u>Tout plateau</u> P_r <u>de</u> T_n <u>où</u> $n-r \geq 2$ <u>n'est pas un quadrillage</u>.

Tout revient à montrer qu'il existe deux idempotents dans P_r, α et β, tels que $L_\alpha \cap R_\beta$ où $R_\alpha \cap L_\beta$ ne contient pas un idempotent.
Soient α un idempotent de $P_r \leq n-2$, $X_\alpha = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots,r}$ la partition correspondante à α telles que X_i contient x_i pour tout i.
Puisque $r \leq n-2$, il existe une classe d'équivalence X_k, mod Π_α, qui contient au moins deux éléments distincts x_k, $x_{k'}$, ...
Soit β un idempotent de même rang r, qui a l'image $X_\beta = \{x_1, \ldots, x_{k'}, \ldots, x_r\}$ et ses r classes d'équivalence mod Π_β : $\{Y_i\}_{i=1,2,\ldots,r}$ de telle manière que $Y_i = X_i$ pour tout $i \neq k$ et $i \neq t$, $Y_k = X_k - \{x_k\}$ et $Y_t = X_t \cup \{x_k\}$. Alors la $\mathcal{H}$-classe correspondante au couple (Π_β, X_α) ne contient pas un idempotent car la classe d'équivalence Y_k ne contient aucun élément de X_α.

<u>Exemples des plateaux à circuits hexagonaux d'idempotents</u>

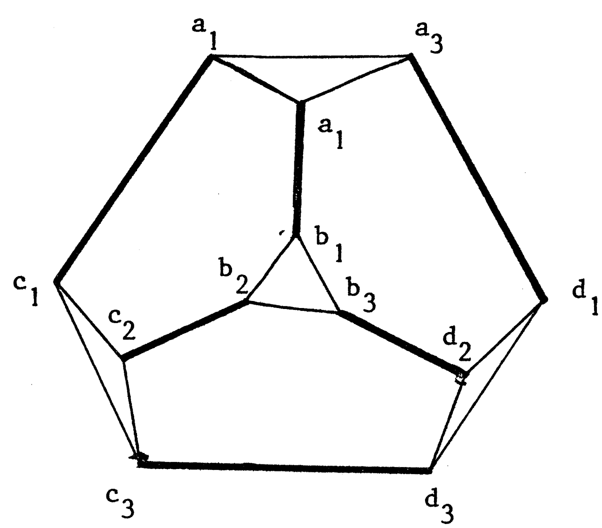
Nous représentons les éléments des plateaux P_{n-1} de T_n $(|X| = n)$ par un tableau en utilisant les notations précédentes (page 39).

Nous schématisons P_{n-1}, pour n = 4 et 5, en utilisant un trait fin pour l'isovalence à droite (épais pour l'isovalence à gauche).
Cahque idempotent de P_{n-1} appartient à (n-2) circuits hexagonaux.

1) Plateau P_3 dans T_4 $(X = \{1, 2, 3, 4\})$

P_3	$\{123\}$	$\{124\}$	$\{134\}$	$\{234\}$
$\{1\}\{2\}\{34\}$	$\xrightarrow{a_1}$ 1233)*	$\xrightarrow{b_1}$ (1244)*		
$\{1\}\{3\}\{24\}$	$\xrightarrow{a_2}$ (1232)*		$\xrightarrow{c_1}$ (1434)*	
$\{2\}\{3\}\{14\}$	$\xrightarrow{a_3}$ (1231)*			$\xrightarrow{d_1}$ (4234)*
$\{1\}\{4\}\{23\}$		$\xrightarrow{b_2}$ (1224)	$\xrightarrow{c_2}$ (1334)*	
$\{2\}\{4\}\{13\}$		$\xrightarrow{b_3}$ (1214)*		$\xrightarrow{d_2}$ (3234)*
$\{3\}\{4\}\{12\}$			$\xrightarrow{c_3}$ (1134)*	$\xrightarrow{d_3}$ (2234)*

Les douze idempotents de P_3 dans T_4 peuvent être schématisés comme suit :

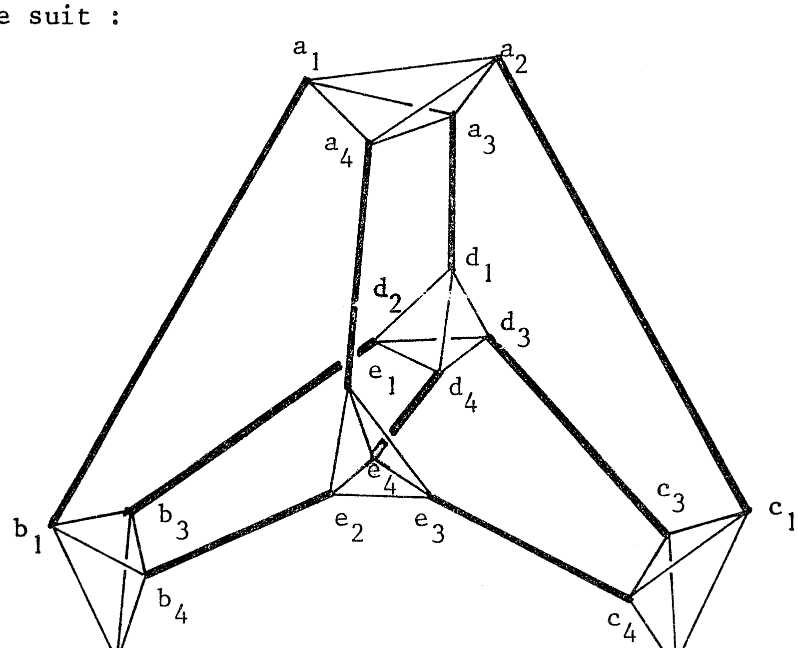


Les six idempotents de P_2 dans T_3 sont schématisés dans la page 41.

2) Plateau P_4 dans T_5 ($X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

P_4	{1234}	{1235}	{1245}	{1345}	{2345}
{1}{2}{3}{45}	$\xrightarrow{a_1}$ (12344)*	$\xrightarrow{b_1}$ (12355)*			
{1}{2}{4}{35}	$\xrightarrow{a_2}$ (12343)*		$\xrightarrow{c_1}$ (12545)*		
{1}{3}{4}{25}	$\xrightarrow{a_3}$ (12342)*			$\xrightarrow{d_1}$ (15345)*	
{2}{3}{4}{15}	$\xrightarrow{a_4}$ (12341)*				$\xrightarrow{e_1}$ (52345)*
{1}{2}{5}{34}		$\xrightarrow{b_2}$ (12335)*	$\xrightarrow{c_2}$ (12445)*		
{1}{3}{5}{24}		$\xrightarrow{b_3}$ (12325)*		$\xrightarrow{d_2}$ (14345)*	
{2}{3}{5}{14}		$\xrightarrow{b_4}$ (12315)*			$\xrightarrow{e_2}$ (42345)*
{1}{4}{5}{23}			$\xrightarrow{c_3}$ (12245)*	$\xrightarrow{d_3}$ (13345)*	
{2}{4}{5}{13}			$\xrightarrow{c_4}$ (12145)*		$\xrightarrow{e_3}$ (32345)*
{3}{4}{5}{12}				$\xrightarrow{d_4}$ (11345)*	$\xrightarrow{e_4}$ (22345)*

Les vingt idempotents de P_4 dans T_5 peuvent être schématisés comme suit :



DEUXIEME PARTIE

PARTIE GENERATRICE ET ASSOCIATIVITE

DANS UN GROUPOÏDE

CHAPITRE I

ETUDE DE L'ASSOCIATIVITE D'UN GROUPOÏDE FINI A PARTIR DES GENERATEURS

1 - RAPPELS

1-1 - Définitions

A - Groupoïde : On appelle groupoïde un ensemble G muni d'une opération binaire, notée multiplicativement.

On note alors (a.b) ou ab l'élément de G produit de a par b.

B - Expression d'une partie

Etant donnée une partie non vide A de G

a) Syntaxe

On appelle expression de A toute suite finie sur l'ensemble $A \cup \{(,)\}$ définie par les règles syntaxiques suivantes :

R_1 : Si $a \in A$, alors a est un terme de A

R_2 : Si $a \in A$, alors a est une expression de A

R_3 : Si α et β sont des termes de A, alors $\alpha\beta$ est une expression de A

R_4 : Si α et β sont des termes de A, alors $(\alpha\beta)$ est un terme de A.

A toute expression on associe son mot : c'est la suite des éléments de cette expression appartenant à A.

Exemple : A l'expression a((bc)(ab)) on associe son mot (a, b, c, a, b) qu'on écrit aussi abcab.

La longueur d'une expression est le nombre d'éléments de son mot.

A tout mot de longueur n il y a $\binom{2(n-1)}{(n-1)}/n$ expressions [10].

b) Sémantique

Une expression de longueur n représente une formule calculable sans ambiguité dans le groupoïde G.

On appelle valeur d'une expression l'élément obtenu par évaluation des différentes opérations parenthésées.

Remarque : Deux expressions peuvent avoir la même valeur.

C - Groupoïde associatif, élément associant

Un groupoïde est associatif (ou encore un monoïde) lorque les valeurs des expressions de tout mot de longueur trois sont égales et l'on démontre que les valeurs des expressions de tout mot de longueur quelconque sont égales.

Un élément a d'un groupoïde G est dit associant si :
$(x.a).y = x.(a.y)$ pour tout x et tout y de G [7].

Remarque : Un groupoïde est associatif si et seulement si tout élément de G est associant.

D - Sous-groupoïde engendré par une partie

Soit $\{V_i\}_{i\in I}$ la famille des sous-groupoïdes de G contenant une partie non vide A de G, alors $\bigcap\limits_{i\in I} V_i$ est le plus petit sous-groupoïde de G contenant A.

Dans ces conditions, on dit que $\bigcap\limits_{i\in I} V_i$ est le sous groupoïde de G engendré par A et on note :

$$\langle A\rangle = \bigcap_{i\in I} V_i$$

On peut vérifier aisément que le sous-groupoïde engendré par une partie non vide A est l'ensemble des valeurs des expressions de A.

E - Partie génératrice d'un groupoïde

Une partie A, non vide, de G est dite une partie génératrice (ou encore ensemble générateur) d'un groupoïde G si : $\langle A\rangle = G$.
Ceci équivaut à dire que tout élément de G réprésente la valeur d'au moins une expression de A.
Un élément d'une partie génératrice est dit élément générateur.

F - Partie génératrice d'ordre minimum

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties génératrices d'un groupoïde G :

$\mathcal{A} = \{A \subseteq G \; ; \; \langle A \rangle = G\}$ $(G \in A)$

Une partie génératrice A de $\mathcal{A}$ est d'ordre minimum si pour toute partie B appartenant à $\mathcal{A}$ on a : $|A| \leq |B|$.

Remarque : Une partie génératrice d'ordre minimum :

(i) - est minimale (la réciproque n'est pas vraie).

(ii) - n'est pas obligatoirement unique.

Exemple : Soit le monoïde suivant donné par sa table de multiplication

.	a	b	c
a	a	c	b
b	c	a	a
c	b	a	a

{b} et {c} sont deux parties génératrices d'ordre minimum :

- $a = b.b$, $c = b.(b.b)$
- $a = c.c$, $b = c.(c.c)$

1-2 - Associativité d'un groupoïde

Propriété 1 : Un groupoïde G est associatif si et seulement si tout élément, d'une génératrice de G, est associant

a) Si G est un groupoïde (monoïde), alors tout élément est associant en particulier ceux d'une partie génératrice.

b) Montrons d'abord que l'ensemble des éléments associants de G est un sous-monoïde de G [3, 1.2].

Soit M l'ensemble des éléments associants dans G :

- Si a et b sont deux éléments de M, alors pour tout couple d'éléments x et y de G on a : $x.((a.b).y) = x.(a.(b.y)) = ((x.a)(b.y)) = ((x.a).b).y = (x.(a.b)).y$. Donc le produit de deux éléments associants est un élément associant. M est donc un sous-groupoïde de G.

- Pour tout triplet d'éléments (a, b, c) de M on a évidemment : $(a.b).c = a.(b.c)$. Par suite M est un sous-monoïde de G.

Soit A une partie génératrice quelconque de G telle que tout élément de A est associant. Cela signifie que A est une partie du sous-monoïde M. Ceci entraîne que l'ensemble des valeurs des expression de A est inclus dans M. Ceci revient à dire que $\langle A \rangle = G \subseteq M$. Par suite M = G est un monoïde.

1-3 - Test de l'associativité d'un groupoïde fini à partir des générateurs

Pour tester l'associativité d'un groupoïde G, muni d'une opération binaire (complète), il suffit de vérifier, a priori, pour tous les x, y et z de G les identités notées :

$$x.(y.z) = (x.y).z$$

La propriété 1 nous permet de limiter ce test, connaissant une partie génératrice A de G, aux identités suivantes :

$$x.(a.y) = (x.a).y$$

pour tout a de A et pour toute paire x et y de G. Il suffit donc de vérifier $|A|n^2$, au lieu de n^3, identités ($|G| = n$).

Test de Light : [3, 1, 2]

Le test de Light est un procédé rapide pour vérifier l'associativité de l'opération (.) sur un groupoïde fini G donné par sa table de multiplication On considère, pour chaque élément générateur a de G, les deux opérations binaires définies sur G comme suit :

$$x \star y = x.(a.y) \quad \text{et} \quad x \circ y = (x.a).y$$

Alors l'associativité de l'opération (.) est vérifiée si et seulement si les deux opérations ($\star$) et (o) se coïncident ; c'est à dire que leurs tables correspondantes sont identiques.

Les deux tables ($\star$) et (o) sont obtenues de la table (.) comme suit :

- La colonne de la table ($\star$) ayant pour tête l'élément y de G est la colonne de la table (.) ayant pour tête l'élément (a.y).
- La ligne de la table (o) ayant pour tête l'élément x de G est la ligne de la table (.) ayant pour tête l'élément (x.a).

Exemples :

1 - Soit G_1 le groupoïde donné par la table suivante :

.	x	y	z
x	y	z	z
y	z	y	x
z	x	z	y

{x} est une partie génératrice de G_1 car : $y = (x.x)$ et $z = (x.x).x = x.(x.x)$.

a : = x

	y	z	z
(*)	x	y	z
x	z	z	z
y	y	x	x
z	z	y	y

(o)	x	y	z
y ← x	z	y	x
z ← y	x	z	y
x ← z	y	z	z

Les deux tables (*) et (o) ne sont pas identitques et par conséquent l'opération (.) sur G_1 n'est pas associative.

2 - Soit G_2 le groupoïde donné par la table suivante :

(.)	x	y	z	t	u
x	x	x	x	t	t
y	x	y	z	t	t
z	x	z	y	t	t
t	t	t	t	x	x
u	t	u	u	x	x

{z, u} est une partie génératrice de G_2 car : $x = (u.u)$, $y = (z.z)$ et $t = (z.u)$.

a := z

	x	z	y	t	t
	↑	↑	↑	↑	↑
(*)	x	y	z	t	u
x	x	x	x	t	t
y	x	z	y	t	t
z	x	y	z	t	t
t	t	t	t	x	x
u	t	u	u	x	x

(o)	x	y	z	t	u
x ← x	x	x	x	t	t
z ← y	x	z	y	t	t
y ← z	x	y	z	t	t
t ← t	t	t	t	x	x
u ← u	t	u	u	x	x

a := u

	t	u	u	x	x
	↑	↑	↑	↑	↑
(*)	x	y	z	t	u
x	t	t	t	x	x
y	t	t	t	x	x
z	t	t	t	x	x
t	x	x	x	t	t
u	x	x	x	t	t

(o)	x	y	z	t	u
t ← x	t	t	t	x	x
u ← y	t	t	t	x	x
u ← z	t	t	t	x	x
x ← t	x	x	x	t	t
x ← u	x	x	x	t	t

Ces deux tests sont vérifiés : la loi (.) sur le groupoïde G_2 est associative.

Pour la bonne exécution de ce procédé on peut considérer pour tout élément générateur a de G, une seule table correspondante (a) comme suit :

- La colonne (resp. la ligne) de tête de la table (a) est la colonne (la ligne) qui a pour tête l'élément a de la table (.)
- Chaque colonne de la table (a) est la colonne de la table (.) qui a le même élément de tête.
- L'associativité de l'opération (.) sur G est vérifiée si et seulement si les lignes de même tête se coïncident dans les deux tables (.) et (a), pour tout élément générateur a de G.

Reprenons l'exemple du groupoïde G_2 donné plus haut :

(z)	x	z	y	t	t
x	x	x	x	t	t
z	x	z	y	t	t
y	x	y	z	t	t
t	t	t	t	x	x
u	t	u	u	x	x

(u)	t	u	u	x	x
t	t	t	t	x	x
t	t	t	t	x	x
t	t	t	t	x	x
x	x	x	x	t	t
x	x	x	x	t	t

2 - ETUDE DES PARTIES GENERATRICES DANS UN GROUPOIDE FINI

Les résultats précédents montrent l'intérêt d'étudier les parties génératrices d'un groupoïde G.

2-1 - Définitions

a - Soit A une partie ayant au moins deux éléments d'un groupoïde G. Pour tout élément $a \in A$, on définit :

$$\text{(i)} - R_a(A) = \{(x, y) \ ; \ x, y \in (A-\{a\}) \text{ et } x.y = a\}$$

$$\text{(ii)} - \tilde{R}_a(A) = \{(x, y) \ ; \ x, y \in \langle(A-\{a\})\rangle \text{ et } x.y = a\}$$

$$\text{(iii)} - X(A) = \{a \in A \ ; \ R_a(A) \neq \emptyset\}$$

X(A) n'est autre que l'ensemble des éléments a de A qui sont le produit de deux éléments de A différents de a.

On note $E = G - X(G)$, l'ensemble des éléments u de G qui ne sont pas le produit de deux éléments différents de u. On les appellera irréductibles.

b - Eléments déductibles

Etant donné un groupoïde fini G dont on a ordonné les éléments

$G = \{a_1, \ldots, a_n\}$

on définit les deux suites de parties emboitées de G :

$\{P^*_i\}_{i=0,1,\ldots,r}$ et $\{\overline{P}_i\}_{i=0,1,\ldots,r}$ $r \leq n$

tels que :

$P^*_o = \overline{P}_o = \emptyset$

Pour tout i de $[1, 2, \ldots, r]$, on considère le premier élément a_j de $(G - P^*_{i-1})$ et on définit :

a) $P^*_i = P^*_{i-1} \cup \langle a_j\rangle$

b) $\overline{P}_i = \overline{P}_{i-1} \cup (\langle a_j\rangle - \{a_j\})$

r est le premier entier tel que $P^*_r = G$.

L'ensemble $P = \overline{P}_r$ sera appelé ensemble des éléments déductibles

Remarque : (G - P) est non vide car : $a_r \in P^* = G$ et $a_r \notin \overline{P}_r = P$.

Exemple : Soit G le groupoïde suivant :

G	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_1	a_2	a_1
a_2	a_2	a_3	a_1	a_2
a_3	a_1	a_2	a_3	a_3
a_4	a_1	a_2	a_3	a_4

$P_o^* = \emptyset$, $\overline{P}_o = \emptyset$

$P_1^* = \langle a_1\rangle = \{a_1\}$, $\overline{P}_1 = (\langle a_1\rangle - \{a_1\}) = \{\emptyset\}$

$P_2^* = \{a_1\} \cup \langle a_2\rangle = \{a_1\} \cup \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\overline{P}_2 = (\langle a_2\rangle - \{a_2\}) = \{a_1, a_2, a_3\} - \{a_2\} = \{a_1, a_3\}$

$P_3^* = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_4\} = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_4\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = G$, $\overline{P}_3 = \{a_1, a_3\} \cup (\langle a_4\rangle - \{a_4\}) = \{a_1, a_3\}$

Alors l'ensemble $P = \{a_1, a_3\}$ est l'ensemble des éléments déductibles de G.

2-2 - Propriétés des éléments déductibles

Propriété 1 : Tout élément déductible est la valeur d'une expression d'un singleton, l'élément du singleton n'étant pas déductible.

Soit P l'ensemble des éléments déductibles dans un groupoïde G.
Montrons que pour tout élément a de P, il existe un élément b de (G - P) tel que a soit un élément de $(\langle b\rangle - \{b\})$:

Nous pouvons écrire : $P = \overline{P}_r = \bigcup_{j=1}^{r} (\langle a_j\rangle - \{a_j\})$ avec $P_r^* = \bigcup_{j=1}^{r} \langle a_j\rangle = G$.

Soit t le plus grand entier tel que a appartienne à $\langle a_t\rangle$. Supposons que a_t appartienne à P, comme a_t n'appartient pas à $\overline{P}_t$, il existerait un entier $q > t$ tel que a_t appartiennent à $\overline{P_q}$ c'est à dire a_t appartienne à $\langle a_q\rangle$, ce qui entraînerait que $<a_t> \subseteq <a_q>$. a appartenant à $<a_t>$ il appartiendrait aussi à $<a_q>$ et t ne serait pas le plus grand entier. L'élément a_t n'appartient donc pas à P. Il en résulte que a est différent de a_t et a appartient à $(<a_t> - \{a_t\})$.

Remarque : On déduit de cette propriété :

Le groupoïde G est monogène si et seulement si $|P| = |G| - 1$

Propriété 2 : Tout élément déductible est le produit de deux éléments différents de lui.

Soit a un élément déductible d'un groupoïde G.
a est alors la valeur d'une expression d'un singleton $\{b\}$ où b est un élément de $(G - P)$.

Considérons alors une expression de $\{b\}$ de longueur minimum $p \geq 2$ et de valeur a. Cette expression est de la forme $\alpha\beta$ où α et β sont deux expressions de $\{b\}$ de longueur inférieure à p et par conséquent de valeur différente de a. On en déduit que $P \subseteq X(G)$.

2-3 - Réduction d'une partie génératrice

Proposition 1 : Soit A une partie, ayant au moins deux éléments, d'un groupoïde G, alors :

$$R_b(A) \neq \emptyset \Rightarrow <A - \{b\}> = <A>$$

$$\tilde{R}_b(A) \neq \emptyset \Rightarrow <A - \{b\}> = <A>$$

Si $R_b(A)$ (resp. $\tilde{R}_b(A)$) n'est pas vide, alors il existe x et y de $(A - \{b\})$ (resp. $<A - \{b\}>$) tels que $x.y = b$.

Ainsi pour tout expression de A des occurences de b, on peut définir (sans changer sa valeur) une expression de $(A - \{b\})$ en remplaçant b par $(x.y)$.
Ceci entraîne que $<A> \subseteq <A - \{b\}>$.
D'autre part, pour tout élément b de A, il est évident que
$<A - \{b\}> \subseteq <A>$.

Lemme 1 : Soit A une partie, ayant au moins deux éléments, d'un groupoïde G, alors :

$$(<A> - A) \subseteq X(<A>)$$

Si $(\langle A\rangle - A)$ est non vide, alors tout élément z de $(\langle A\rangle - A)$ est la valeur d'au moins une expression de A de longueur $p \geq 2$.

Considérons alors une expression de valeur z et de longueur minimum $m \geq 2$. Cette expression peut être mise sous la forme $\alpha\beta$ où α et β sont des expressions de longueur inférieure à m.

Les valeurs de α et β sont différentes de z et appartiennent à $(\langle A\rangle - \{z\})$. Donc z appartient à $X(\langle A\rangle)$ et on a bien $(\langle A\rangle - A) \subseteq X(\langle A\rangle)$.

<u>Proposition 2</u> : <u>L'ensemble E des éléments irréductibles est l'intersection de toutes les parties génératrices d'un groupoïde G</u>

- Pour toute partie génératrice A de G on a : $(\langle A\rangle - A) \subseteq (G - A) \subseteq X(\langle A\rangle) = X(G)$ (Lemme 1). Ceci entraîne que : $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} (G-A) \subseteq X(G)$.

cela signifie que : $(G - \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) \subseteq X(G)$ et $E = (G - X(G)) \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$.

- Montrons que $(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) \cap X(G) = \emptyset$:

S'il existe un élément z de $(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) \cap X(G))$, alors z appartient à X(G). Ceci entraîne que $R_z(G)$ est non vide et par conséquent $\langle(G - \{z\})\rangle = \langle G\rangle = G$ (proposition 1). Puisque z n'appartient pas à $(G - \{z\})$ qui est une partie génératrice de G, alors z ne peut pas appartenir à $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$. Ce qui contredit que z est un élément de $(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) \cap X(G)$. Donc on a bien $(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) \cap X(G) = \emptyset$.

Par suite $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq (G - X(G)) = E$.

<u>Proposition 3</u> : <u>Soit A une partie génératrice d'un groupoïde G</u>. <u>Il existe alors une partie génératrice B de G telle que</u> :

$|B| \leq |A|$ <u>et B ne contient aucun élément déductible</u>.

Supposons que A contienne des éléments déductibles : $a_1, \ldots, a_r$, c'est à dire $A \cap P = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Pour tout i l'élément a_i est la valeur d'une expression d'un singleton $\{b_j\}$, où b_j n'est pas déductible, telle que $a_i \in (\langle b_j\rangle - \{b_j\})$ (proposition 1). Donc il existe k éléments $b_1, \ldots, b_k$, $k \leq r$, non déductibles et tels que :

$$\bigcup_{i=1}^{r} \{a_i\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} (<b_j> - \{b_j\})$$

soit alors la partie B définie comme suit :

$$B = (A - \bigcup_{i=1}^{r} \{a_j\}) \cup (\bigcup_{j=1}^{k} \{b_j\})$$

puisque $k \leq r$, alors $|B| \leq |A|$.

De plus il est évident que : $G = <A> \subseteq <B>$

Car les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont les valeurs des expressions de singletons $\{b_j\}_{j=1,\ldots,k}$. Par suite $<B> = G$, B est une partie génratrice de G qui ne contient aucun élément déductible .

2-4 - Parties génératrices minimales

Proposition 4 : Soit A une partie génératrice d'un groupoïde G

1) Si A est minimale, alors X(A) est vide

2) A est minimale si et seulement si pour tout élément b de A, $\tilde{R}_b(A)$ est vide.

1) Si A est minimale, alors pour tout élément b de A, $R_b(A)$ (resp. $\tilde{R}_b(A)$) est vide :

En effet, s'il existe un élément b de A tel que $R_b(A)$ (resp. $\tilde{R}_b(A)$) n'est pas vide, alors $<A - \{b\}> = <A>$. (Proposition 1).

Ainsi, b étant un élément de A, la partie génératrice $(A - \{b\})$ est strictement incluse dans A. Ceci contredit l'hypothèse que A soit minimale.

2) Si, pour tout élément b de A, $\tilde{R}_b(A)$ est vide, alors A est minimale :

En effet, s'il existe une partie génératrice $B \subset A$, alors tout élément b de $(A - B)$ doit appartenir à $(<B> - B)$, c'est à dire b est la valeur d'au moins une expression de B de longueur supérieure à deux.

b étant un élément n'appartenant pas à B, donc il existe x et y dans le groupoïde $G = <B> = <A - \{b\}> = <A>$, tels que $x.y = b$.

Ceci entraîne que $\tilde{R}_b(A)$ n'est pas vide. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par suite $B = A$.

<u>Proposition 5</u> : <u>Soit M l'ensemble des parties génératrices minimales d'un groupoïde G. Alors,</u>

$$\bigcup_{A\in M} A \subseteq (G - \langle E\rangle) \cup E$$

Montrons que : $\langle E\rangle \cap X(G) \subseteq (G - \bigcup_{A\in M} A)$:

que/pour tout élément x de $\langle E\rangle \cap X(G)$, $x \in \langle E\rangle$ et $x \in X(G) = (G - E)$.

Ceci entraîne que $x \in (\langle E\rangle - E) \subseteq X(\langle E\rangle)$ (Lemme 1). Donc il existe u et v de $\langle E\rangle$ tels que : $u \neq x$, $v \neq x$ et $u.v = x$.

Supposons qu'il existe une partie génératrice A minimale, de G, contenant l'élément x, alors u et v appartiennent à $\langle E\rangle \subseteq \langle A - \{x\}\rangle$ car E est inclus dans toute partie génératrice (proposition 2) et x n'appartient pas à E. Ceci entraîne que $\widetilde{R}_x(A)$ n'est pas vide et par conséquent $(A - \{x\})$ est une partie génératrice de G strictement incluse dans A. Ceci contredit que A soit minimale.

Par suite pour tout x de $(\langle E\rangle \cap X(G))$, x ne peut pas appartenir à une partie génératrice minimale. Donc on a :

$$\langle E\rangle \cap X(G) \subseteq \bigcap_{A\in M} (G - A) = \left(G - \bigcup_{A\in M} A\right)$$

Ceci revient à dire que : $\bigcup_{A\in M} A \subseteq G - (\langle E\rangle \cap X(G)) = (G - \langle E\rangle) \cup E$

2-5 - Parties génératrices d'ordre minimum

<u>Proposition 6</u> : <u>Dans un groupoïde, l'ensemble des éléments, qui ne sont pas déductibles, contient une partie génératrice d'ordre minimum.</u>

Soit A une partie génératrice d'ordre minimum d'un groupoïde G.
Si A contient des éléments déductibles; alors nous pouvons construire une partie génératrice B de G d'ordre minimum ne contenant aucun élément déductible :

En effet, G étant fini, nous pouvons noter $A \cap P = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Ainsi pour tout élément a_i de $A \cap P$, il existe un élément b_j qui n'est pas déductible tel que a_i est un élément de $(\langle b_j\rangle - \{b_j\})$ (propriété 1).

- b_j ne peut pas appartenir à A, sinon $\tilde{R}_{a_i}(A)$ n'est pas vide (propriété 2). Dans ce cas $(A - \{a_i\})$ est une partie génératrice (proposition 1). Ceci contredit que A est minimale.

- Il n'existe aucun élément $a_k \neq a_i$ de $A \cap P$ tel que a_k soit un élément de $(<b_j> - \{b_j\})$, sinon il existe une partie génératrice $B = (A - \{a_i, a_k\}) \cup \{b_j\}$ telle que $|B| < |A|$ et A ne serait pas d'ordre minimum.

Ainsi la partie $C = (A - \{a_1, \ldots, a_r\}) \cup \{b_1, \ldots, b_r\}$ est une partie génératrice de G telle que : $|C| = |A|$ et C ne contient aucun élément déductible.

Remarque : Dans un groupoïde G qui vérifie la propriété suivante : $x, y \in G$ $(\forall x, \forall y)$ $(xy = x$ ou $xy = y)$
G lui-même est l'unique partie génératrice de G, car toute partie de G est un sous-groupoïde. Dans ce cas G est une partie génératrice d'ordre minimum du groupoïde G.

Corollaire 1 : Dans un groupoïde G, une partie génératrice A d'ordre minimum est telle que :

$$E \subseteq A \subseteq E \cup (G - (P \cup <E>))$$

L'ensemble des éléments d'un groupoïde qui ne sont pas déductibles contient toujours une partie génératrice d'ordre minimum (proposition 6). Soit donc $A \subseteq (G - P)$. D'après la propriété 5, A est incluse dans $(G - <E>) \cup E$. Donc on peut écrire : $A \subseteq (G - P) \cap ((G - <E>) \cup E)$.

P étant incluse dans X(G) (propriété 2) on en déduit aisément que :

$$A \subseteq (G - (P \cup <E>)) \cup E$$

D'autre part, l'ensemble E est inclus dans toute partie génératrice de G (proposition 2).

2-6 - Bornes de la cardinalité d'une partie génératrice d'ordre minimum

Définitions : Soit A une partie ayant au moins deux éléments d'un groupoïde G fini. On définit : $a, b \in X(A)$, $(a \neq b)$.

1 - On dit que b est un <u>facteur essentiel</u> de a si :

$$\left[(\forall (x, y) \in R_a(A)) \Rightarrow x = b \text{ ou } y = b\right] \overset{\text{déf}}{=\!=} bFa$$

2 - Ensemble des facteurs essentiels de a :

$$G_a(A) = \{b \in X(A) \ ; \ bFa\}$$

3 - Ensemble d'éléments qui admettent b comme facteur essentiel :

$$D_b(A) = \{a \in X(A) \ ; \ bFa\}$$

<u>Lemme 2</u> :

1 - <u>Si a est un élément de X(A), alors</u> $|G_a(A)| \leq 2$

2 - <u>Un des trois cas suivants est possible</u> :

α) Il existe un élément b de X(A) tel que $|D_b(A)| = 0$

β) Il existe un élément b de X(A) tel que $|D_b(A)| = 1$

γ) Pour tout élément b de X(A), $|D_b(A)| = 2$.

1) Est évident.

2) Si (α) et (β) ne sont pas vérifiés, alors pour tout élément b de X(A) on a : $|D_b(A)| \geq 2$. Soit c un élément de X(A) tel que $|D_c(A)| = r \geq 2$
Alors nous pouvons écrire : $\sum_{b \in X(A)} |D_b(A)| \geq 2(p-1) + r$ avec $|X(A)| = p$.

Or pour toute paire d'éléments a et b de X(A) tels que bFa, nous pouvons écrire : $b \in G_a(A) \Longleftrightarrow bFa \Longleftrightarrow a \in D_b(A)$.

Cela signifie que :

- D'une part, l'ensemble des couples (a, b) de $(X(A) \times \{b\})$ tels que bFa et l'ensemble $D_b(A)$ ont même cardinalité.

- D'autre part, l'ensemble des couples (a, b) de $(\{a\} \times X(A)$ tels que bFa et l'ensemble $G_a(A)$ ont même cardinalité.

Ceci entraîne que :

$\sum_{a \in X(A)} |G_a(A)| = \sum_{b \in X(A)} |D_b(A)|$ = le nombre des couples (a, b) de $(X(A) \times X(A))$ tels que bFa.

On en déduit que :

$$2(p-1) + r \leq \sum_{b \in X(A)} |D_b(A)| = \sum_{a \in X(A)} |G_a(A)| \leq 2p$$

Par conséquent $r \leq 2$ pour tout élément c de X(A). Par suite le cas (γ) est vérifié.

<u>Proposition 7</u> : <u>Soit A une partie ayant au moins deux éléments d'un groupoïde G.</u>

1) <u>Si b est un élément de X(A), alors</u>

$$X(A - \{b\}) = X(A) - (\{b\} \cup D_b(A))$$

2) <u>Si X(A) contient q éléments, alors il existe un ensemble H dans X(A) tel que</u> :

a) $\langle A - H \rangle = \langle A \rangle$

b) $\frac{q}{3} \leq |H| \leq q$

1) α - $X(A - \{b\}) \subseteq (X(A) - (\{b\} \cup D_b(A)))$:

Supposons que X(A) et X(A - {b}) ne sont pas vides, sinon (1) est vérifié.

- Pour tout élément c de X(A - {b}), $R_c(A - \{b\})$ n'est pas vide. Il existe donc x et y de $(A - \{b, c\}) \subset (A - \{c\})$ tels que $x.y = c$. Donc $R_c(A)$ n'est pas vide et c appartient à X(A). c, étant différent de b, appartient donc à X(A) - {b}). Par suite $X(A - \{b\}) \subseteq (X(A) - \{b\})$.

- Pour tout élément a de $D_b(A)$, on a bFa. Cela signifie que $R_a(A)$ n'est pas vide ($a \in X(A)$) et pour tout couple (x, y) de $R_a(A)$, x = b ou y = b. Ceci montre qu'il n'existe aucun couple (x, y) de (A - {b}) tel que $x.y = a$. Donc a n'appartient pas à X(A - {b}). Par suite $D_b(A) \subseteq X(A) - X(A - \{b\})$. Finalement on a bien $X(A - \{b\}) \subseteq X(A) - (\{b\} \cup D_b(A))$.

β - $X(A) - (\{b\} \cup D_b(A)) \subseteq X(A - \{b\})$

Soit d un élément de $(X(A) - \{b\} \cup D_b(A)))$, alors $R_d(A)$ n'est pas vide car d appartient à X(A). Il existe donc x et y de (A - {d}) tels que $x.y = d$.

Puisque d n'appartient pas à $D_b(A)$, alors $x \neq b$ et $y \neq b$. Ceci entraîne que $R_d(A - \{b\})$ n'est pas vide et par conséquent d appartient à $X(A - \{b\})$.

2) Si $q = 0$, alors H est l'ensemble vide et (2) sera vérifié.

Si $q > 0$, alors il existe un élément b_1 dans $X(A)$ tel que $0 \leq D_{b_1}(A) \leq 2$ (Lemme 2). De plus $(X(A) - \{b_1\}) = X(A) - (b_1 \cup D_{b_1}(A))$ entraîne que :

$$\mathrm{Max}(0, q-3) \leq |X(A - \{b\})| \leq q-1$$

b_1 étant un élément de $X(A)$, alors $\langle A - \{b_1\}\rangle = \langle A \rangle$.

On construit successivement l'ensemble $H = \{b_1, \ldots, b_r\}$ de telle manière :

a) - Pour tout $k = 2, \ldots, r$; on considère un élément b_k de $X(A - \{b_1, \ldots, b_{k-1}\})$, qui n'est pas vide, tel que $0 \leq D_{b_k}(A - \{b_1, \ldots, b_{k-1}\}) \leq 2$

b) - Lorsque $X(A - \{b_1, \ldots, b_r\} = \emptyset$, alors on a, d'après la proposition 1

$$\langle A \rangle = \langle A - \{b_1\}\rangle = \langle A - \{b_1, b_2\}\rangle = \ldots = \langle A - H \rangle$$

Dans ce cas on a :

$$\mathrm{Max}(0, q-3) \leq |X(A - H)| \leq q-r$$

puisque $|X(A - H)| = 0$, alors $q-r \geq 0$ et $q-3 \leq 0$. Ceci entraîne que $\frac{q}{3} \leq r \leq q$.

<u>Remarques</u> :

1 - La cardinalité de H dépend du choix successif de ses éléments.

2 - $|H|$ peut atteindre ses bornes :

a - Si $\left|D_{b_k}(A - \{b_1, \ldots, b_{k-1}\})\right| = 0$; $k = 1, 2, \ldots, r$, alors $|H| = q$

b - Si $\left|D_{b_k}(A - \{b_1, \ldots, b_{k-1}\})\right| = 2$; $k = 1, 2, \ldots, r$, et q est un entier multiple de trois, alors $H = \frac{q}{3}$.

<u>Corollaire 2</u> : <u>La cardinalité d'une partie génératrice A d'ordre minimum,</u> d'un groupoïde G, est bornée par :

où B = E U (G - (PU<E>)), H étant construit à partir de X(B) d'après la proposition précédente.

- B contient une partie génératrice A d'ordre minimum (corollaire 1).

- E est inclus dans toute partie génératrice (proposition 2).

- Pour tout choix d'éléments de H, on a toujours (B - H) est une partie génératrice (proposition 7) du groupoïde G telle que :

$$|A| \leq |B - H| \text{ et } |X(B)/3| \leq |H| \leq |X(B)|$$

<u>Exemple</u> : Soit le groupoïde suivant :

G	a	b	c	d
a	a	b	d	b
b	b	b	d	a
c	d	b	c	d
d	a	a	d	d

On vérifie que : $P = \emptyset$, $X(G) = \{a, b, d\}$, $E = \{c\}$ et $\langle E \rangle = \{c\}$.

Alors $B = E \cup (G - P\cup\langle E\rangle) = \{a, b, c, d\} = G$, donc $X(B) = \{a, b, d\}$.

Les produits suivants :

$db = bd = a$, $ad = b$ et $ac = bc = c.a = d$ nous donne que :

$D_a(B) = \{b\}$, $D_b(B) = \{a\}$, $D_d(B) = \{a, b\}$

1 - $X(B - \{a\}) = \{a, b, d\} - \{a, b\} = \{d\}$, alors $\langle\{b, c, d\}\rangle = \langle B\rangle$

Ainsi, $D_a\{d\} = \emptyset$ et $X(B - \{a, d\}) = X(B - \{a\}) - \{b\} = \emptyset$.

Par suite $\langle\{b, c\}\rangle = \langle\{b, c, d\}\rangle = \langle B\rangle$ et $H = \{a, d\}$

2 - $X(B - \{b\}) = \{a, b, d\} - \{b,a\} = \{d\}$, c'est le cas précédent.

3 - $X(B - \{d\}) = \{a, b, d\} - \{d, a, b\} = \emptyset$

Par suite $\langle\{a, b, c\}\rangle = \langle B\rangle$ et $H = \{d\}$

Cet exemple nous montre que la construction de H dépend du choix de l'ordre de ses éléments.

CHAPITRE II

ALGORITHMES

Introduction

Le but poursuivi est de tester l'associativité dans un groupoïde fini G en minimisant le nombre de tests. Nous proposons deux algorithmes, le deuxième étant assorti d'une variante.
Nous expliquons alors brièvement chacun des algorithmes que nous avons programmés en mettant en évidence dans les organigrammes correspondants les tests utilisés.

Pour éviter l'encombrement dans les organigrammes, certaines procédures intermédiaires sont expliquées de façon indépendante
Nous donnons ensuite des exemples afin de comparer les résultats de chacun des algorithmes.

Représentation d'un groupoïde

On représente un groupoïde fini G, dont on a ordonné ses éléments : $a_1, a_2, \ldots, a_n$, par une table de multiplication TAB telle que :
$TAB(i, j) = k$ si $(a_i . a_j) = a_k$
où i, j et k sont des entiers compris entre 1 et n.

1 - Premier algorithme

Algorithme simultané (générateur et associativité)

L'associaitivité dans un groupoïde fini G étant une propriété négative par l'absence d'éléments non associants, elle peut être faite par les vérifications de l'associativité successivement :

- pour le groupoïde monogène engendré par un élément a_i de G ;
- pour le groupoïde engendré par deux éléments a_i et a_j de G ;
- etc.

Dans ce but nous considérons l'ensemble des parties de G, $\{W_i\}_{i=1,2,\dots,p}$ $(p \leq n)$ tel que :

$$W_1 = \{a_1\},\ W_{i+1} = W_i \cup \{a_{k_i}\} \quad \text{où } a_{k_i} \in G - \langle W_i \rangle$$

Alors nous procédons comme suit :

(1) Chercher un élément a_{k_i} de $(G - \langle W_i \rangle)$

(2) Chercher le sous-groupoïde $\langle W_{i+1} \rangle$ connaissant $\langle W_i \rangle$

(3) Tester l'associativité de $\langle W_{i+1} \rangle$ sachant que $\langle W_i \rangle$ est associatif :

a - S'il existe un élément de $\langle W_{i+1} \rangle$ non associant, alors le groupoïde G n'est pas associatif et on s'arrête.

b - $\langle W_{i+1} \rangle$ est alors associatif :

- Si $\langle W_{i+1} \rangle \neq G$ on réitère pour i+1
- Sinon
  G est un groupoïde associatif et est engendré par $W_{i+1} = \{a_1, \dots, a_{k_i}\}$.

Explicitons les deux dernières étapes de l'algorithme.

<u>1-1 - Recherche du sous-groupoïde $V = \langle W \cup A \rangle$ connaissant le sous-groupoïde $V_o = \langle W \rangle$ où $A \cap V_o = \emptyset$</u>

<u>Les données</u> :

- Un tableau V_o unidimensionnel qui contient les éléments dans l'ordre induit (de G) du sous-groupoïde de $\langle W \rangle$.

- Un tableau A unidimensionnel qui contient dans l'ordre induit les éléments nouveaux.

<u>Les espaces de travail auxiliaire</u> :

- X est un tableau unidimensionnel qui concatène initialement A à V_o. Il est muni d'un index frontière entre V_o et A.

- Un tableau T unidimensionnel destiné à contenir successivement les nouveaux éléments créés dans $\langle W \cup A \rangle$

- Un tableau booléen S unidimensionnel, à n registres, qui indique dans le registre S[i] si l'élément i fait partie ou non de X.

L'algorithme procède alors de la manière suivante :

(1) Faire les produits (x.y) pour tout x et tout y éléments du tableau X mais non du tableau V_o.

Chaque produit est testé par rapport à S :

- s'il n'est pas nouveau, on continue pour un produit suivant (éventuellement on passe à (2) si c'est épuisé).

- s'il est nouveau, on le met en T, on met à jour S.

(2) Si T n'est pas vide, après (1), on concatène T à X dans X.
On change l'index frontière de X et on examine S.

- Si S est plein on s'arrête, sinon on reprend (1)

- Si T est vide on s'arrête.

A la fin on a le sous-groupoïde V en X.

L'organigramme 2 correspond à cette étape.

Nombre de produits à faire :

Si $|V_o| = q$ et $|X| = q+r$ $(|X - V_o| = r)$, alors il est facile de vérifier que : $|X \times X - V_o \times V_o| = (q+r)^2 - q^2 = r^2 + 2qr$

C'est le nombre minimum de tests pour connaître entièrement la table de multiplication de X connaissant celle de V_o.

Remarque : La position du test "S plein" en (2) permet d'éviter les tests inutiles dans le cas où X = G sans le faire pour chaque élément nouveau, ce qui aurait été le cas si on l'avait placé en (1).
Le nombre de tests évités est : $2nr - r^2$ $(q = n-r)$ où $2n-1 \leq 2nr - n^2 \leq n^2-1$ et $(n > 1$ et $1 \leq r \leq n-1)$.

1-2 - Test de l'associativité du sous-groupoïde <W U {a}> sachant que le sous-groupoïde <W> est associatif.

Le sous-groupoïde $V_o = \langle W \rangle$ étant associatif, les tests suivants ont été vérifiés :

α) $(x.b).y = x.(b.y)$ pour tout élément b de W et pour toute paire d'éléments x et y de <W> (propriété 1).

Il suffit alors de vérifier :

β) $(x.a).y = x.(a.y)$ pour toute paire d'éléments x et y de V.

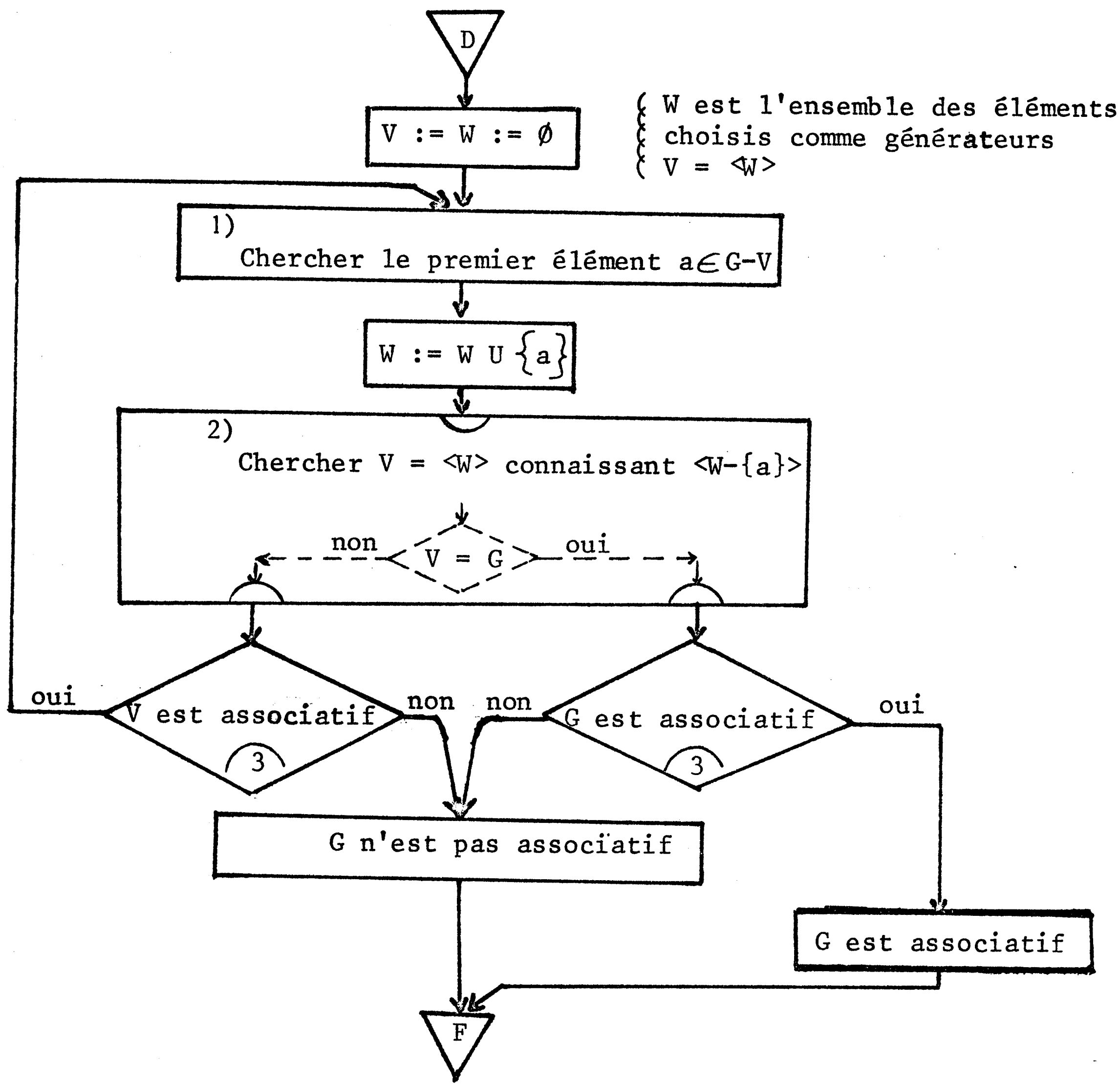
γ) $(x.b).y = x.(b.y)$ pour tout élément b de W et pour toute paire d'éléments x et y tels que $\left[(x \in V,\ y \in (V - V_o))\ \text{et}\ (x \in (V - V_o),\ y \in V_o)\right]$.

Nombre de tests :

Le nombre N de tests pour vérifier l'associativité de $V = \langle W \cup \{a\} \rangle$ est $N = |W \cup \{a\}|.|V|^2$. Ce nombre est minimum d'après la propriété 1.

Organigramme de l'algorithme simultané

Organigramme 1



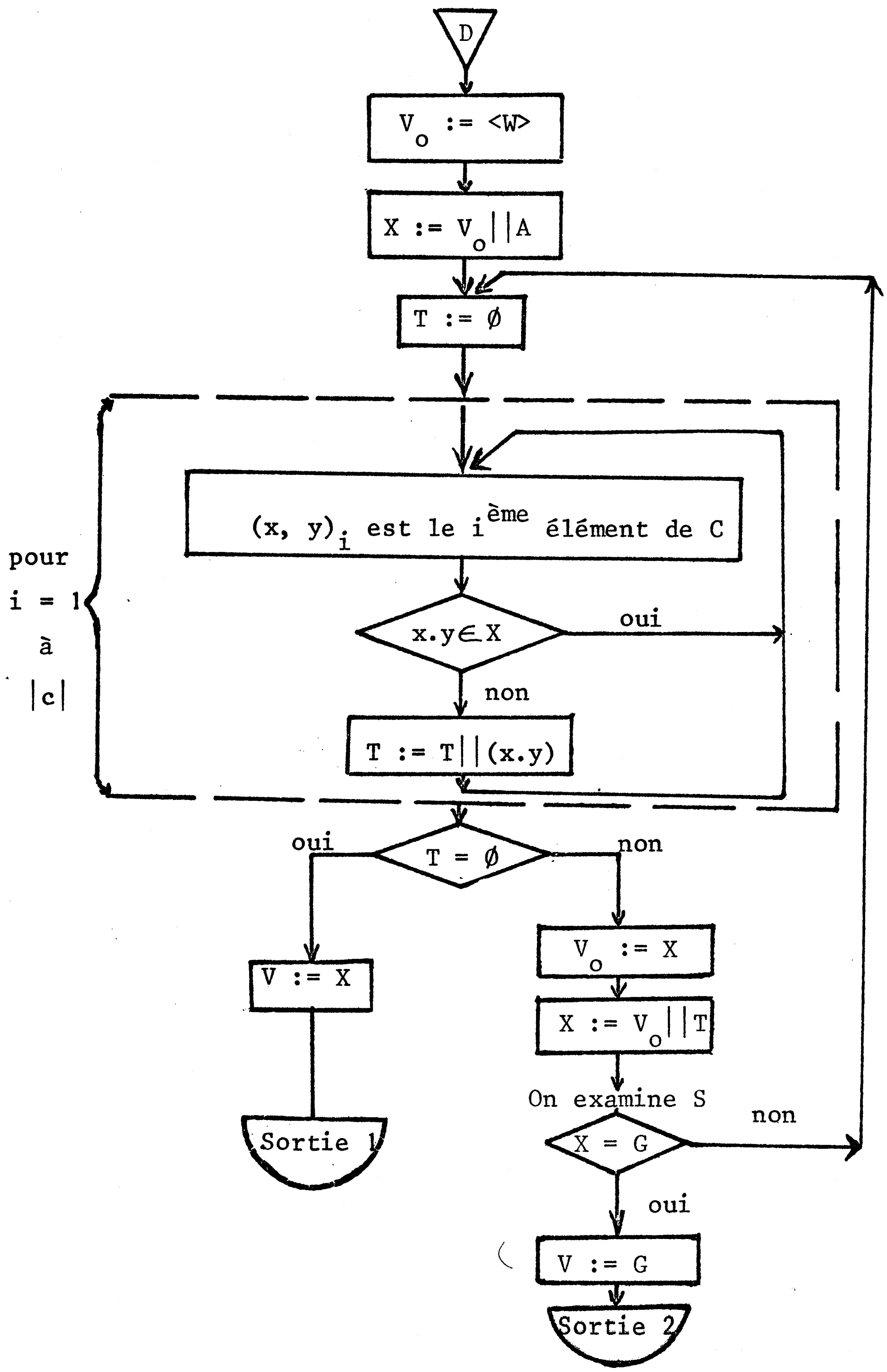
1 - Nous ne faisons pas le test pour chercher le premier élément a_1, ni pour l'élément a_2 si a_1 est un idempotent.

2 - Ce bloc correspond à l'organigramme 2 où W désigne (W - {a}) et A = {a}

3 - C'est le sous-programme qui teste l'associativité du sous-groupoïde <WU{a}> sachant que le sous-groupoïde <W> est associatif.
(Nous ne détaillons pas l'organigramme correspondant).

Organigramme 2 (organigramme intermédiaire)

Recherche du sous-groupoïde ⟨WUA⟩ connaissant ⟨W⟩



Nota : - Le symbole || est celui de la concaténation

- C représente tous les couples (x, y) d'éléments appartenant à X mais non à V_o.

2 - DEUXIEME ALGORITHME

Algorithme série (Générateur puis associativité)

Cet algorithme consiste à tester l'associativité dans un groupoïde G fini en deux étapes :

A - Chercher une partie génératrice A de G.

B - Tester l'associativité dans G connaissant la partie génératrice A de G.

Le nombre de tests nécessaires pour cette deuxième étape est $|A|n^2$ où $n = |G|$ (propriété 1).

Dans cet algorithme le nombre N de tests nécessaires pour vérifier l'associativité dans G est : $N = q + |A|n^2$
où q est le nombre de tests nécessaires pour la recherche de la partie génératrice A de G.

Il faut remarquer que :

- L'entier q dépend de $|A|$, n et de la configuration des éléments dans la table de multiplication de G. Par conséquent la minimisation de $|A|$, A minimale ou d'ordre minimum, n'entraîne pas nécessairement celle de N. Mais
- $|A|$ étant un entier coefficient de n^2, la minimisation de $|A|$ est un facteur important pour celle de N, surtout si n est grand.

D'autre part, d'après l'étude des parties génératrices (ch. 1) nous connaissons une partie génératrice qui en contient une d'ordre minimum : $B = E \cup (G - (P \cup \langle E \rangle))$.

Les deux remarques précédentes nous amènent alors à considérer deux cas :

(A_1) - Réduire la partie génératrice B à une partie génératrice $A \subseteq B$ en éliminant les éléments de B non indispensables et exigeant un nombre restreint de tests pour les trouver.

(A_2) - Réduire la partie génératrice B à une partie génératrice A minimale.

D'où les deux variantes de l'algorithme :

- Chercher l'ensemble B et le réduire suivant (A_1)

Remarques :

- Le cas $N = n^3$ correspond à $|A| = n$ et $q = 0$

- La recherche d'une partie génératrice d'ordre minimum augmente beaucoup la valeur de q et N dépasse en général n^3. Nous donnerons cependant en annexe un algorithme permettant de trouver une partie génératrice d'ordre minimum.

2-1 - Recherche de la partie génératrice B

L'algorithme se déduit de l'étude faite au chapitre 1. Il procède comme suit :

étape 1 : chercher l'ensemble P des éléments déductibles.

étape 2 : chercher l'ensemble X(G) des éléments irréductibles sachant que $P \subsetneq X(G)$. (Corollaire 1).

- Si X(G) = G alors B = G - P (proposition 6).
- Si $X(G) = \emptyset$ alors G est l'unique partie génératrice de G (remarque 2.5).

étape 3 : chercher l'ensemble E = G - X(G) qui est l'intersection de toutes les parties génératrices de G (proposition 2).

étape 4 : chercher le sous-groupoïde <E> engendré par E.

- Si <E> = G alors E est l'unique partie génératrice (proposition 2).

Explicitons les étapes 1, 2 et 4 :

Etape 1

On définit un tableau unidimensionnel P, initialement vide, qui contient les éléments déductibles au fur et à mesure de leur découverte. (Pour chercher le sous-groupoïde monogène engendré par un élément a, on utilise l'algorithme décrit en 1.1 en éliminant l'examen de S s'il est plein après T non vide, c'est à dire si T n'est pas vide on concatène T à X et on reprend (1)).

On procède suivant la manière constructive définie au chapitre I-2-1.
A chaque pas, lors du remplissage du tableau P, on teste si le tableau P contient n-1 éléments. Si oui le groupoïde G est monogène, engendré par (G-P) en vertu du lemme 1 et l'ensemble B est alors déterminé : B = G - P.

Etape 2

La donnée est le tableau défini à l'étape 1. On définit deux tableaux auxiliaires :

- un tableau Y unidimensionnnel destiné à contenir successivement les éléments irréductibles. Initialement il contient donc les éléments de P.

- un tableau booléen S unidimensionnel, à n registres, qui indique dans le registre S[i] si l'élément i fait partie ou non de Y.

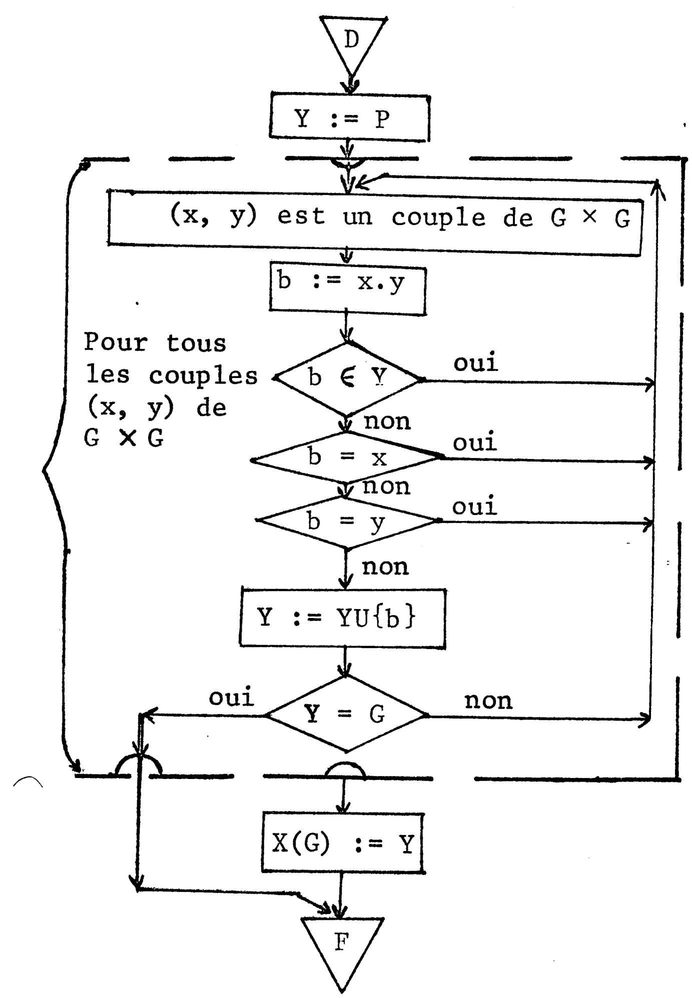
L'algorithme procède alors de la manière suivante :

Pour tous les couples (x, y) de G × G on teste, par rapport à S si le produit b = x.y n'appartient pas à Y et est différent de x et de y. Si oui on concatène b à Y. Si Y contient tous les éléments de G on s'arrête.

A la fin le tableau Y contient tous les éléments irréductibles.

On remarque facilement sur l'organigramme ci-contre que le nombre de tests effectués dans cette étape dépend de la distribution des éléments de P et de la configuration des éléments dans la table de multiplication de G. Les bornes de ce nombre de tests sont :

borne inférieure : $4(n-p)$
borne supérieure : $4n^2$
où
$n = |G|$, $p = |P|$



Etape 4

Cette étape correspond à l'algorithme défini en 1.1 avec :

$W = \emptyset \quad V_o = \emptyset$ et $A = E$

L'organigramme général est donné à la page suivante.

Remarque : Cet algorithme nous permet de reconnaître si un monoïde M est tel que toute partie de M est un sous-monoïde. Ceci résulte des deux propriétés suivantes :

- Dans un monoïde M où toute partie est un sous-monoïde, M est l'unique partie génératrice.

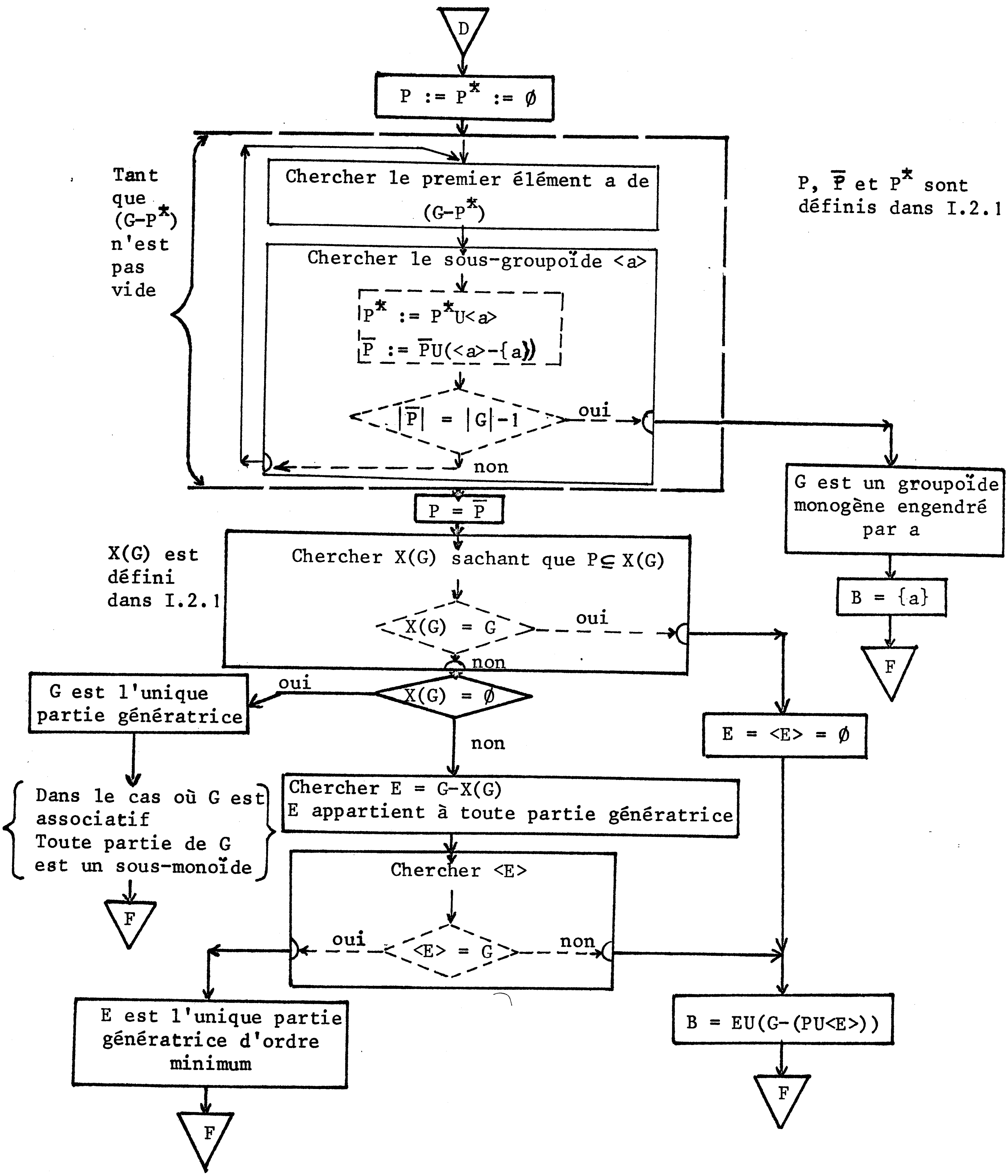
- Si un monoïde M est tel que : $(x, y \in M)$

$$(\forall x, \forall y)(xy = x \text{ ou } xy = y) \Longleftrightarrow X(M) = \emptyset$$

alors toute partie de M est un sous monoïde [2].

Organigramme 3

Recherche de la partie génératrice B



2-2 - Réduction de la partie génératrice B

Il s'agit de réduire la partie génératrice B suivant les deux critères cités précédemment A_1 et A_2.

Cette réduction est toujours possible car :

- La partie génératrice B contenant une partie génératrice d'ordre minimum, elle ne peut être minimale sans être d'ordre minimum.

- Le cas où B est d'ordre minimum a été détecté lors de la construction de cet ensemble.

Critère A_1 : Recherche d'une partie génératrice par élimination

L'algorithme est construit à partir de la propriété suivante :

Soit A une partie génératrice de G, s'il existe un élément a non irréductible dans A, alors la partie A-{a} engendre le groupoïde G (proposition 1).

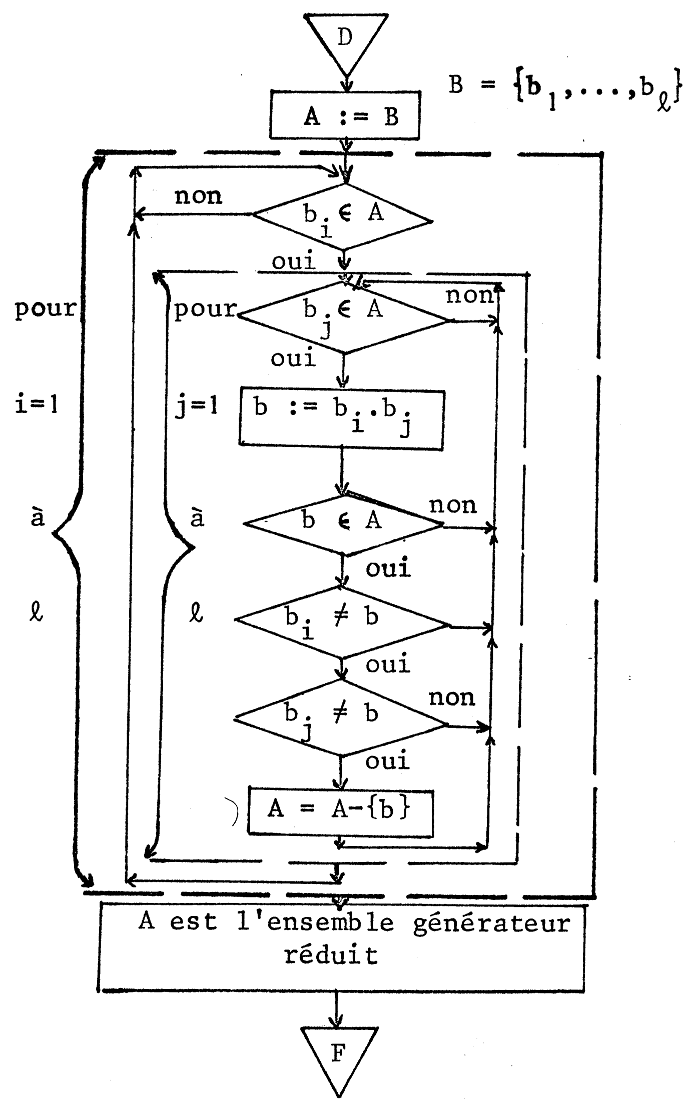
Il utilise deux tableaux unidimensionnels :

- le tableau des éléments de la partie génératrice B;
- un tableau auxiliaire A contenant initialement les éléments de $B = \{b_1,\dots, b_\ell\}$ et destiné à contenir la partie génératrice réduite.

On procède alors de la manière suivante :

Pour tous les couples (b_i,b_j) d'éléments du tableau A :

- si le produit $(b_i.b_j)$ appartient à A et est différent de b_i et b_j on le supprime dans le tableau.



A la fin le tableau A contient la partie génératrice réduite.
Cette dernière ne contient aucun élément non irréductible dans A ($X(A) = \emptyset$) mais n'est pas nécessairement minimale.

Nombre de tests

Si q est le nombre d'éléments non irréductibles dans B, alors le nombre d'éléments éliminés par cet algorithme est supérieur ou égal à $\frac{q}{3}$ (proposition 7), ce qui justifie la méthode.

Le nombre de tests de cet algorithme dépend de l'ordre d'examen des couples. Le cas le plus défavorable est celui où $q = 0$ et où les éléments de B figurent dans les (ℓ^2-1) cases de la table de multiplication de B (n^2 cases si $B = G$). Le nombre K de tests est alors :

$$K = (5 + 4(\ell-1))\,\ell - 2 = 4\ell^2 + \ell - 2 \qquad \text{si } B \neq G$$

$$= (5 + 4(n-1))\,n = 4n^2 + n \qquad \text{si } B = G$$

Critère A_2 : Recherche d'une partie génératrice minimale

La recherche d'une partie génératrice minimale permet de minimiser, dans certains cas, le nombre total de tests : $N = q + |A|\,n^2$.

Elle présente aussi un intérêt indépendamment du test de l'associativité.

Cet algorithme est construit sur la propriété :
Une partie génératrice A est minimale si et seulement si tout élément b de A vérifie :

$$\tilde{R}_b(A) = \emptyset \text{ (proposition 4).}$$

Les données

Les éléments de la partie génératrice B sont rangés dans un tableau à une dimension, les premiers éléments du tableau étant les éléments irréductibles de G (ce qui est fait lors de la construction de B). Un index permet de repérer la frontière entre ces éléments.

Les espaces de travail auxiliaires

- Un tableau A unidimensionnel contenant initialement les éléments de B et destiné à contenir les éléments de la partie génératrice minimale.
On note W l'ensemble des éléments du tableau A.

- Un tableau V_o unidimensionnel, initialement vide, destiné à contenir les éléments du sous-groupoïde engendré par $W - \{b\}$.

- Un tableau T unidimensionnel destiné à contenir les nouveaux éléments dans le sous-groupoïde $\langle W - \{b\} \rangle$.

- Un tableau X qui concatène T à V_o. Il est muni d'un index frontière entre T et V_o.

<u>L'algorithme</u> procède alors comme suit :

(1) Au départ on contrôle le nombre d'éléments de B. Si $|B| \leq 2$, on s'arrête car la partie génératrice B est alors d'ordre minimum (sinon le groupoïde serait monogène et on l'aurait détecté par l'algorithme de construction de B).

(2) Pour chaque élément b non irréductible de W :

(2a) Faire le produit (x.y) pour tout x et tout y, éléments de $W - \{b\}$ mais non de V_o.

- si $(x.y) = b$ alors on supprime l'élément b dans le tableau A (proposition 1) et on revient en (2).
- si $(x.y) \neq b$ alors on examine :

si (x.y) appartient à X ou continue pour un produit suivant (on passe en (2b) si c'est épuisé).

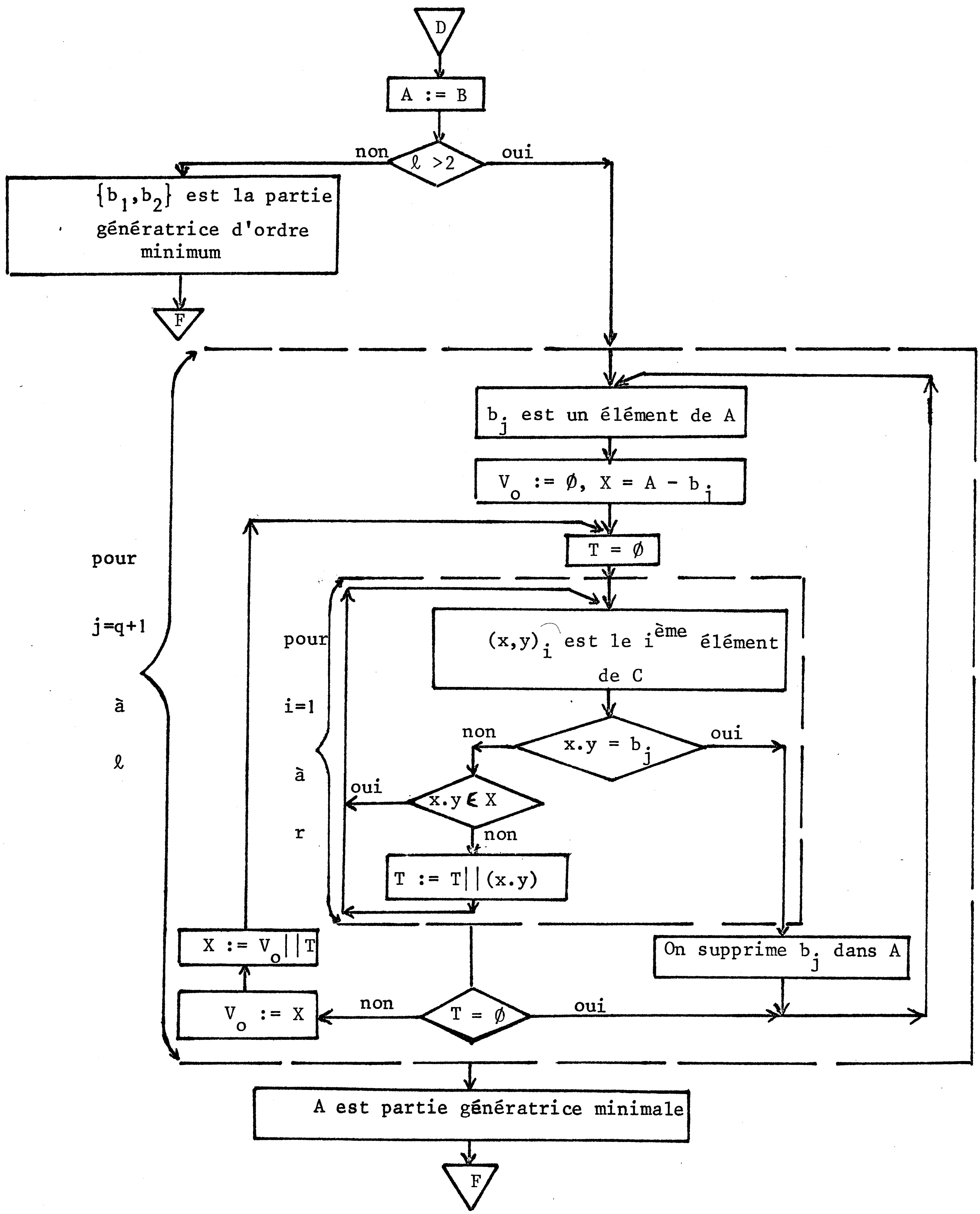
sinon on le concatène au tableau T et on revient en (2a).

(2b) Si T n'est pas vide après (2a) on concatène T à X dans X, on change l'index frontière dans X, on réinitialise T et on revient en (2a).

Si T est vide on revient en (2).

L'algorithme s'arrête lorsqu'il n'existe aucun élément b irréductible de W.

Organigramme de recherche d'une partie génératrice minimale



C représente tous les couples (x, y) d'éléments appartenant à X mais non à V_o.

$\ell = |B|$, $q = |E|$, $r = |C|$

COMPLEMENT

1 - Recherche d'une partie génératrice d'ordre minimum

a - L'ensemble $B = E \cup (G-(P \cup \langle E \rangle))$ contient au moins une partie génératrice d'ordre minimum. Donc nous cherchons B comme dans l'algorithme 2.

Soient $r = |B|$, q le cardinal de l'ensemble $E' = (B - X(B))$ de l'ensemble des éléments irréductibles dans B $(q \geq |E|)$ et $\left\{(A_i)_p\right\}_{i=1,2,\ldots,\binom{r-q}{p}}$ les sous-ensembles de $(B - E')$ à p éléments.

Nous procédons alors comme suit :

(1) Pour l'indice p allant de 1 à r-q,

(2) Pour l'indice i allant de 1 à $\binom{r-q}{p}$,

- Nous cherchons un sous-ensemble $(A_i)_p$ de $(B - E')$
- Nous cherchons le sous-groupoïde de V engendré par $(A_i)_p \cup E'$
- Si $V = G$, alors A_i est une partie génératrice d'ordre minimum à p éléments et on s'arrête.
- Si $V \subset G$, alors on passe au suivant $(A_{i+1})_p$ en (2) et éventuellement si i est épuisé on passe en (1).

L'algorithme se termine au bout d'un certain nombre de pas car B contient une partie génératrice d'ordre minimum.

Remarque : Pour rechercher toutes les parties génératrices d'ordre minimum, il suffit de considérer l'ensemble $D = E \cup (G-\langle E \rangle)$, qui contient toutes parties génératrices minimales, au lieu de B.

2 - Amélioration de l'algorithme 1

Pour éviter le choix non convenable de W_p, défini en II.1, où le cas $W_p = \langle W_p \rangle$ pour tout p, nous pouvons procéder comme suit :

a - Chercher l'ensemble B suivant l'algorithme 2 qui caractérise trois cas particuliers des groupoïdes (y compris le cas $W_p = \langle W_p \rangle$ pour tout p) b - Nous testons l'associativité de G au cours du choix des éléments générateurs de l'ensemble B en utilisant l'algorithme 1 réduit à B.

Notons que cette amélioration élimine la caractéristique de l'algorithme 1. En effet, nous ne nous occupons pas de la minimisation du nombre de tests pour la recherche des éléments générateurs, même si G n'est pas associatif.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

RESULTATS ET COMPARAISON

Dans chacun des deux algorithmes étudiés précédemment, le nombre de tests, dont la minimisation est le critère choisi, dépend des particularités du groupoïde considéré.

Chacun des deux algorithmes peut être avantageux par rapport à l'autre suivant la catégorie du groupoïde.

Les comparaisons sont faites sur divers exemples résumés dans le tableau suivant :

Exemples	Algorithme simultané (1)		Algorithme série (2)						Types
			Variante 1			Variante 2			
	Tests	Durée	Tests	Durée	r	Tests	Durée	m	
n= 7	402	1.27	472	0.68	7	472	0.68	7	Toute partie est un sous-monoïde
n=15	3626	5.51	3856	1.98	15	3856	1.98	15	
n= 5	83	0.67	56	0.52	1	56	0.52	1	Monoïde monogène
n= 4	84	0.66	84	0.47	2	84	0.47	2	Monoïde admettant une partie génératrice d'ordre minimum
n= 8	156	0.76	128	0.52	2	128	0.52	2	
n= 5	106	0.68	161	0.39	2	151	0.36	2	Monoïdes quelconques
n=21	3508	4.07	2622	2.37	5	3466	2.82	3	
n=21	2414	3.63	2616	2.29	5	3460	2.74	3	
n= 9	84	0.93	186	0.43	2	260	0.60	2	Groupoïdes non associatifs
n=18	71	2.18	754	1.50	1	754	1.50	1	

— La durée est donnée en secondes, r (resp. m) est le nombre des éléments d'une partie génératrice réduite par élimination (resp. minimale).

— L'ordinateur utilisé est IBM 360/67 de l'I.M.A.G.

Afin de montrer les caractéristiques de deux algorithmes nous choisissons les exemples types suivants :

1 - Un monoïde dont toute partie est un sous-monoïde.

2 - Un monoïde monogène.

3 - Un monoïde admettant une partie génératrice unique d'ordre minimum.

4 - Un groupoïde non associatif dont tous ses éléments sont des idempotents.

5 - Un monoïde quelconque.

Comparaison du nombre de tests

On compte les tests à partir des différents organigrammes. Nous nous plaçons d'abord dans le cas le plus défavorable pour les deux algorithmes. C'est le cas en particulier d'un monoïde où toute partie est un sous-monoïde.

a - Nombre de tests pour l'algorithme 1 :

Dans un tel monoïde nous avons $W_r = \langle W_r \rangle$ pour tout r.

Alors le nombre de tests est :

α - (n-2) tests pour choisir $a_3, \ldots, a_n$ $(|G| = n)$

β - Pour vérifier l'associativité de $\langle W_r \rangle$:

(i) - (2r - 1) tests pour chercher les nouveaux éléments de $\langle W_r \rangle$

(ii) - Un test pour vérifier que $\langle W_r \rangle$ est un sous-groupoïde $(T = \emptyset\ ?)$
Ce test est omis pour $\langle a_1 \rangle$.

(iii) - $r^3 - (r-1)^3$ tests pour vérifier l'associativité de $\langle W_r \rangle$ sachant que $\langle W_{r-1} \rangle$ est associatif. (Sauf pour $\langle a_1 \rangle$ car $\langle a_1 \rangle = \{a_1\}$ est évidemment associatif).

Par suite le nombre total de tests de l'algorithme 1 est :

$$q = (n-r) + \sum_{r=1}^{n} (2r - 1) + (n-1) + \sum_{r=1}^{n} (r^3 - (r-1)^3) =$$

$$= n - r + n^2 + n - 1 + (n^3-1) = n^3 + n^2 + 2n - 4 \text{ tests.}$$

b - Nombre de tests pour l'algorithme 2 :

Dans un tel monoïde G, l'algorithme 2 s'arrête au cours de la recherche de la partie génératrice B. Les tests qui sont effectués :

- $2n$ tests pour chercher P.

- Pour chercher X(G), nous allons considérer les deux cas extrêmes :

(i) On fait $2n^2$ tests dans le cas où $xy = x$ pour tout x et pour tout y de G.

(ii) On fait $2n + 3(n^2-n) = 3n^2 - n$ tests dans le cas où $xy = y$.

- Un test pour vérifier $X(G) = \emptyset$.

- n^3 tests pour vérifier l'associativité.

Par suite le nombre total de tests pour l'algorithme 2 est :

$n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \leq q \leq n^3 + 3n^2 + n + 1.$

Nous remarquons dans ce cas que l'algorithme 1 est plus avantageux que l'algorithme 2, au point de vue nombre de tests. Mais l'algorithme 2 permet en outre de reconnaître si un groupoïde associatif possède cette propriété.

EXEMPLE

EX 3	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A 1	A 6	A 1
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7
A 3	A 3	A 3	A 3	A 4	A 3	A 6	A 3
A 4	A 4	A 4	A 4	A 4	A 4	A 6	A 4
A 5	A 5	A 5	A 5	A 4	A 5	A 6	A 5
A 6	A 6	A 6	A 6	A 4	A 6	A 6	A 6
A 7	A 7	A 7	A 7	A 4	A 7	A 6	A 7

RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
SUIVIE DU TEST DE L'ASSOCIATIVITE
=================================

L'ENSEMBLE GENERATEUR D'ORDRE MINIMUM DE L'EX 3
EST FORME PAR LES ELEMENTS SUIVANTS :
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5 A 6 A 7
C'EST LE GROUPOIDE 3 TOUT ENTIER

****
* LE GROUPOIDE DONNE 3 EST ASSOCIATIF *
* DONT TOUTE PARTIE EST UN SOUS-MONOIDE *
****

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES GENERATEURS: 129
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE: 343
NOMBRE TOTAL DE TESTS: 472

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS: N*N*N= 343

TEST DE L'ASSOCIATIVITE AU COURS
DE LA RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
==

LE SOUS GROUPOIDE MONOGENE SUIVANT EST LE SEUL ELEMENT
IDEMPOTENT A1 ,DONC ON NE TESTE PAS L'ASSOCIATIVITE

EX 3	A 1
A 1	A 1

EX 3	A 1	A 2
A 1	A 1	A 1
A 2	A 1	A 2

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 3
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3

EX 3	A 1	A 2	A 3
A 1	A 1	A 1	A 1
A 2	A 1	A 2	A 3
A 3	A 3	A 3	A 3

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 5
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4

EX 3	A 1	A 2	A 3	A 4
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4
A 3	A 3	A 3	A 3	A 4
A 4	A 4	A 4	A 4	A 4

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 7
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5

EX 3	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A 1
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
A 3	A 3	A 3	A 3	A 4	A 3
A 4	A 4	A 4	A 4	A 4	A 4
A 5	A 5	A 5	A 5	A 4	A 5

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5 A 6

EX 3	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A 1	A 6
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6
A 3	A 3	A 3	A 3	A 4	A 3	A 6
A 4	A 4	A 4	A 4	A 4	A 4	A 6
A 5	A 5	A 5	A 5	A 4	A 5	A 6
A 6	A 6	A 6	A 6	A 4	A 6	A 6

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 11
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5 A 6 A 7

EX 3	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A 1	A 6	A 1
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7
A 3	A 3	A 3	A 3	A 4	A 3	A 6	A 3
A 4	A 4	A 4	A 4	A 4	A 4	A 6	A 4
A 5	A 5	A 5	A 5	A 4	A 5	A 6	A 5
A 6	A 6	A 6	A 6	A 4	A 6	A 6	A 6
A 7	A 7	A 7	A 7	A 4	A 7	A 6	A 7

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 13
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES SOUS GROUPOIDES : 55
NOMBRE DE TESTS POUR CONTROLER LES TESTS INUTILES : 0
NOMBRE DE TESTS POUR CHOISIR LES GENERATEURS : 5
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE : 342
NOMBRE TOTAL DE TESTS : 402

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS:N*N*N = 343

| LE GROUPOIDE DONNE 3 EST ASSOCIATIF |

EX 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
A 1	A 4	A 5	A 2	A 2	A 4
A 2	A 5	A 2	A 4	A 4	A 5
A 3	A 2	A 4	A 1	A 5	A 2
A 4	A 2	A 4	A 5	A 5	A 2
A 5	A 4	A 5	A 2	A 2	A 4

RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
SUIVIE DU TEST DE L'ASSOCIATIVITE
=================================

LE GROUPOIDE 2 EST MONOGENE,ENGENDRE PAR: A 3

****
* LE GROUPOIDE DONNE 2 EST ASSOCIATIF *
****

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES GENERATEURS: 31
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE: 25
NOMBRE TOTAL DE TESTS: 56

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS: N*N*N= 125

TEST DE L'ASSOCIATIVITE AU COURS
DE LA RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
==

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LE NOUVEAU ELEMENT (A1.A1) EST = 1

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1

EX 2	A 1	A 4	A 2	A 5
A 1	A 4	A 2	A 5	A 4
A 4	A 2	A 5	A 4	A 2
A 2	A 5	A 4	A 2	A 5
A 5	A 4	A 2	A 5	A 4

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS

EX 2	A 1	A 4	A 2	A 5	A 3
A 1	A 4	A 2	A 5	A 4	A 2
A 4	A 2	A 5	A 4	A 2	A 5
A 2	A 5	A 4	A 2	A 5	A 4
A 5	A 4	A 2	A 5	A 4	A 2
A 3	A 2	A 5	A 4	A 2	A 1

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 9
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES SOUS GROUPOIDES : 28
NOMBRE DE TESTS POUR CONTROLER LES TESTS INUTILES : 1
NOMBRE DE TESTS POUR CHOISIR LES GENERATEURS : 4
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE : 50
NOMBRE TOTAL DE TESTS : 83

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS:N*N*N = 125

| LE GROUPOIDE DONNE 2 EST ASSOCIATIF |

EX 8	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A 4
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 4
A 3	A 1	A 3	A 2	A 4	A 4
A 4	A 4	A 4	A 4	A 1	A 1
A 5	A 4	A 5	A 5	A 1	A 1

RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
SUIVIE DU TEST DE L'ASSOCIATIVITE
==================================

LES ELEMENTS APPARTENANT A TOUT ENSEMBLE GENERATEUR SONT:

A 3 A 5

L'ENSEMBLE GENERATEUR D'ORDRE MINIMUM DE 8
EST UNIQUE ET IL EST FORME DE:

A 3 A 5

****

```
NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES GENERATEURS:          78
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE:          50
NOMBRE TOTAL DE TESTS:                                 128

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS: N*N*N=                        125
```

```
   TEST  DE L'ASSOCIATIVITE AU COURS
DE LA RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
========================================
```

```
LE SOUS GROUPOIDE MONOGENE SUIVANT EST LE SEUL ELEMENT
IDEMPOTENT  A1 ,DONC ON NE TESTE PAS L'ASSOCIATIVITE
EX 8 |A 1 |
  ---|----|
 A 1 |A 1 |
  ---|----|

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER L'ELEMENT ENGENDRE =  1
```

```
LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
  A 1  A 2

EX 8 |A 1 |A 2 |
  ---|----|----|
 A 1 |A 1 |A 1 |
  ---|----|----|
 A 2 |A 1 |A 2 |
  ---|----|----|

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS  ENGENDRES =    3
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS   =              1
```

```
LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
  A 1  A 2  A 3

EX 8 |A 1 |A 2 |A 3 |
  ---|----|----|----|
 A 1 |A 1 |A 1 |A 1 |
  ---|----|----|----|
 A 2 |A 1 |A 2 |A 3 |
  ---|----|----|----|
 A 3 |A 1 |A 3 |A 2 |
  ---|----|----|----|

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS  ENGENDRES =    5
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS   =              1
```

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4

EX 8	A 1	A 2	A 3	A 4
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4
A 3	A 1	A 3	A 2	A 4
A 4	A 4	A 4	A 4	A 1

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 7
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5

EX 8	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A 4
A 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 4
A 3	A 1	A 3	A 2	A 4	A 4
A 4	A 4	A 4	A 4	A 1	A 1
A 5	A 4	A 5	A 5	A 1	A 1

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 9
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES SOUS GROUPOIDES : 29
NOMBRE DE TESTS POUR CONTROLER LES TESTS INUTILES : 0
NOMBRE DE TESTS POUR CHOISIR LES GENERATEURS : 3
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE : 124
NOMBRE TOTAL DE TESTS : 156

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS:N*N*N = 125

| LE GROUPOIDE DONNE 8 EST ASSOCIATIF |

```
EX 5 |A 1 |A 2 |A 3 |
  ---|----|----|----|
 A 1 |A 1 |A 3 |A 2 |
  ---|----|----|----|
 A 2 |A 3 |A 2 |A 1 |
  ---|----|----|----|
 A 3 |A 2 |A 1 |A 3 |
  ---|----|----|----|
```

```
RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
 SUIVIE DU TEST DE L'ASSOCIATIVITE
==================================


L'ENSEMBLE CONTENANT UN ENSEMBLE GENERATEUR D'ORDRE
MINIMUM EST FORME PAR :   A 1  A 2  A 3
-------------------------------------------------------


NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER L'ENSEMBLE CONTENANT
UN ENSEMBLE GENERATEUR D'ORDRE MINIMUM EST =         25
------------------------------------------------------


RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR PAR ELIMINATION
==================================================

UN ENSEMBLE GENERATEUR,REDUIT PAR ELIMINATION,DE L'EX    5
EST FORME PAR LES ELEMENTS SUIVANTS  :
  A 1  A 2

**************************************************
*  LE GROUPOIDE DONNE  5  N'EST PAS ASSOCIATIF   *
**************************************************


NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES GENERATEURS:       45
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE:        2
NOMBRE TOTAL DE TESTS:                               47


NOMBRE TRIVIAL DE TESTS: N*N*N=                      27


RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR MINIMAL
==========================================

UN ENSEMBLE GENERATEUR MINIMAL DE L'EX   5
EST FORME PAR LES ELEMENTS SUIVANTS  :
  A 2  A 3

**************************************************
*  LE GROUPOIDE DONNE  5  N'EST PAS ASSOCIATIF   *
**************************************************
```

```
NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES GENERATEURS:          41
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE:           2
NOMBRE TOTAL DE TESTS:                                  43


NOMBRE TRIVIAL DE TESTS: N*N*N=                         27
```

```
   TEST  DE L'ASSOCIATIVITE AU COURS
DE LA RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
========================================
```

```
LE SOUS GROUPOIDE MONOGENE SUIVANT EST LE SEUL ELEMENT
IDEMPOTENT  A1 ,DONC ON NE TESTE PAS L'ASSOCIATIVITE
EX 5 |A 1 |
  ---|----|
 A 1 |A 1 |
  ---|----|

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER L'ELEMENT ENGENDRE =  1
```

```
LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
  A 1  A 2

EX 5 |A 1 |A 2 |A 3 |
  ---|----|----|----|
 A 1 |A 1 |A 3 |A 2 |
  ---|----|----|----|
 A 2 |A 3 |A 2 |A 1 |
  ---|----|----|----|
 A 3 |A 2 |A 1 |A 3 |
  ---|----|----|----|

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS  ENGENDRES =   3
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS   =             1


NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES SOUS GROUPOIDES :        5
NOMBRE DE TESTS POUR CONTROLER LES TESTS INUTILES :        1
NOMBRE DE TESTS POUR CHOISIR LES GENERATEURS :             0
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE :            1
NOMBRE TOTAL DE TESTS :                                    7

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS:N*N*N =                           27
```

```
------------------------------------------
| LE GROUPOIDE DONNE  5  N'EST PAS ASSOCIATIF |
------------------------------------------
```

EX 1	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A10	A 1	A 1	A 1	A 4	A10	A10	A 4	A 4	A10	A 1	A 4	A10	A10	A10	A 4	A 4
A 2	A 1	A 2	A 2	A 4	A10	A 1	A 8	A 8	A 9	A10	A10	A16	A 9	A14	A 1	A16	A17	A17	A14	A 4	A 4
A 3	A 1	A 3	A 3	A 4	A10	A 1	A 7	A 7	A13	A10	A10	A12	A13	A19	A 1	A12	A16	A18	A19	A 4	A 4
A 4	A 1	A10	A 1	A 4	A 4	A 4	A 1	A 4	A10	A10	A 1	A 4	A 4	A 4	A10	A 1	A 1	A10	A10	A10	A 1
A 5	A 1	A10	A11	A 4	A 5	A 6	A21	A 4	A10	A10	A11	A 6	A 5	A 4	A 5	A 1	A 1	A15	A20	A20	A21
A 6	A 1	A15	A 1	A 4	A 5	A 6	A 1	A 6	A20	A10	A11	A 4	A 4	A 5	A15	A21	A11	A10	A10	A20	A21
A 7	A 1	A 3	A 1	A 4	A19	A 7	A 1	A 7	A13	A10	A18	A 4	A 4	A19	A 3	A12	A18	A10	A10	A13	A12
A 8	A 1	A 2	A 1	A 4	A14	A 8	A 1	A 8	A 9	A10	A17	A 4	A 4	A14	A 2	A16	A17	A10	A10	A 9	A16
A 9	A 1	A10	A 2	A 4	A 9	A16	A 8	A 4	A10	A10	A 2	A16	A 9	A 4	A17	A 1	A 1	A17	A14	A14	A 8
A10	A 1	A10	A10	A 4	A10	A 1	A 4	A 4	A10	A10	A10	A 1	A10	A 4	A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A 4	A 4
A11	A 1	A11	A11	A 4	A10	A 1	A21	A21	A 5	A10	A10	A 6	A 5	A20	A 1	A 6	A15	A15	A20	A 4	A 4
A12	A 1	A18	A 1	A 4	A13	A12	A 1	A12	A19	A10	A 3	A 4	A 4	A13	A18	A 7	A 3	A10	A10	A19	A 7
A13	A 1	A10	A 3	A 4	A13	A12	A 7	A 4	A10	A10	A 3	A12	A13	A 4	A18	A 1	A 1	A18	A19	A19	A 7
A14	A 1	A10	A17	A 4	A14	A 8	A16	A 4	A10	A10	A17	A 8	A14	A 4	A 2	A 1	A 1	A 2	A 9	A 9	A16
A15	A 1	A15	A15	A 4	A10	A 1	A 6	A 6	A20	A10	A10	A21	A20	A 5	A 1	A21	A11	A11	A 5	A 4	A 4
A16	A 1	A17	A 1	A 4	A 9	A16	A 1	A16	A14	A10	A 2	A 4	A 4	A 9	A17	A 8	A 2	A10	A10	A14	A 8
A17	A 1	A17	A17	A 4	A10	A 1	A16	A16	A14	A10	A10	A 8	A14	A 9	A 1	A 8	A 2	A 2	A 9	A 4	A 4
A18	A 1	A18	A18	A 4	A10	A 1	A12	A12	A19	A10	A10	A 7	A19	A13	A 1	A 7	A 3	A 3	A13	A 4	A 4
A19	A 1	A10	A18	A 4	A19	A 7	A12	A 4	A10	A10	A18	A 7	A19	A 4	A 3	A 1	A 1	A 3	A13	A13	A12
A20	A 1	A10	A15	A 4	A20	A21	A 6	A 4	A10	A10	A15	A21	A20	A 4	A11	A 1	A 1	A11	A 5	A 5	A 6
A21	A 1	A11	A 1	A 4	A20	A21	A 1	A21	A 5	A10	A15	A 4	A 4	A20	A11	A 6	A15	A10	A10	A 5	A 6

RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
SUIVIE DU TEST DE L'ASSOCIATIVITE

L'ENSEMBLE CONTENANT UN ENSEMBLE GENERATEUR D'ORDRE
MINIMUM EST FORME PAR : A 7 A 9 A11 A12 A14 A15 A16 A17 A18 A19 A20 A21

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER L'ENSEMBLE CONTENANT

```
UN ENSEMBLE GENERATEUR D'ORDRE MINIMUM EST =        285
--------------------------------------------------------

RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR PAR ELIMINATION
==================================================

UN ENSEMBLE GENERATEUR,REDUIT PAR ELIMINATION,DE L'EX    1
EST FORME PAR LES ELEMENTS SUIVANTS  :
  A 7  A 9  A11  A15  A16

****************************************
*  LE GROUPOIDE DONNE  1  EST ASSOCIATIF  *
****************************************


NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES GENERATEURS:     417
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE:    2205
NOMBRE TOTAL DE TESTS:                            2622


NOMBRE TRIVIAL DE TESTS: N*N*N=                   9261


RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR MINIMAL
==========================================

UN ENSEMBLE GENERATEUR MINIMAL DE L'EX    1
EST FORME PAR LES ELEMENTS SUIVANTS  :
  A17  A19  A21

****************************************
*  LE GROUPOIDE DONNE  1  EST ASSOCIATIF  *
****************************************


NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES GENERATEURS:    2143
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE:    1323
NOMBRE TOTAL DE TESTS:                            3466

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS: N*N*N=                   9261
```

TEST DE L'ASSOCIATIVITE AU COURS
LA RECHERCHE D'UN ENSEMBLE GENERATEUR
==

SOUS GROUPOIDE MONOGENE SUIVANT EST LE SEUL ELEMENT
ENPOTENT A1 ,DONC ON NE TESTE PAS L'ASSOCIATIVITE

1	A 1
1	A 1

MBRE DE TESTS POUR CHERCHER L'ELEMENT ENGENDRE = 1

S GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2

1	A 1	A 2
1	A 1	A 1
2	A 1	A 2

BRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 3
BRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
1 A 2 A 3

1	A 1	A 2	A 3
1	A 1	A 1	A 1
2	A 1	A 2	A 2
3	A 1	A 3	A 3

BRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 5
BRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 1

GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
1 A 2 A 3 A 4

	A 1	A 2	A 3	A 4	A10
	A 1	A 1	A 1	A 4	A10
	A 1	A 2	A 2	A 4	A10
	A 1	A 3	A 3	A 4	A10
A10	A 1	A10	A10	A 4	A10

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 16
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 2

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5

EX 1	A 1	A 2	A 3	A 4	A10	A 5	A11
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A10	A10	A10
A 2	A 1	A 2	A 2	A 4	A10	A10	A10
A 3	A 1	A 3	A 3	A 4	A10	A10	A10
A 4	A 1	A10	A 1	A 4	A10	A 4	A 1
A10	A 1	A10	A10	A 4	A10	A10	A10
A 5	A 1	A10	A11	A 4	A10	A 5	A11
A11	A 1	A11	A11	A 4	A10	A10	A10

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 24
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 2

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5 A 6

EX 1	A 1	A 2	A 3	A 4	A10	A 5	A11	A 6	A15
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1
A 2	A 1	A 2	A 2	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1
A 3	A 1	A 3	A 3	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1
A 4	A 1	A10	A 1	A 4	A10	A 4	A 1	A 4	A10
A10	A 1	A10	A10	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1
A 5	A 1	A10	A11	A 4	A10	A 5	A11	A 6	A15
A11	A 1	A11	A11	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1
A 6	A 1	A15	A 1	A 4	A10	A 5	A11	A 6	A15
A15	A 1	A15	A15	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES ...

LES GENERATEURS DU SOUS GROUPOIDE SUIVANT SONT:
A 1 A 2 A 3 A 4 A 5 A 6 A 7

EX 1	A 1	A 2	A 3	A 4	A10	A 5	A11	A 6	A15	A 7	A 8	A21	A19	A18	A14	A17	A20	A12	A16	A13	A 9
A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A 1	A 1	A 4	A10	A10	A10	A10	A 4	A 4	A 4	A 4	A 4
A 2	A 1	A 2	A 2	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A 8	A 8	A 4	A14	A17	A14	A17	A 4	A16	A16	A 9	A 9
A 3	A 1	A 3	A 3	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A 7	A 7	A 4	A19	A18	A19	A18	A 4	A12	A12	A13	A13
A 4	A 1	A10	A 1	A 4	A10	A 4	A 1	A 4	A10	A 1	A 4	A 1	A10	A10	A 4	A 1	A10	A 4	A 1	A 4	A10
A10	A 1	A10	A10	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A 4	A 4	A 4	A 4	A 1	A 4	A 1	A 4	A 1	A 1	A10	A10
A 5	A 1	A10	A11	A 4	A10	A 5	A11	A 6	A15	A21	A 4	A21	A20	A15	A 4	A 1	A20	A 6	A 1	A 5	A10
A11	A 1	A11	A11	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A21	A21	A 4	A20	A15	A20	A15	A 4	A 6	A 6	A 5	A 5
A 6	A 1	A15	A 1	A 4	A10	A 5	A11	A 6	A15	A 1	A 6	A21	A10	A10	A 5	A11	A20	A 4	A21	A 4	A20
A15	A 1	A15	A15	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A 6	A 6	A 4	A 5	A11	A 5	A11	A 4	A21	A21	A20	A20
A 7	A 1	A 3	A 1	A 4	A10	A19	A18	A 7	A 3	A 1	A 7	A12	A10	A10	A19	A18	A13	A 4	A12	A 4	A13
A 8	A 1	A 2	A 1	A 4	A10	A14	A17	A 8	A 2	A 1	A 8	A16	A10	A10	A14	A17	A 9	A 4	A16.	A 4	A 9
A21	A 1	A11	A 1	A 4	A10	A20	A15	A21	A11	A 1	A21	A 6	A10	A10	A20	A15	A 5	A 4	A 6	A 4	A 5
A19	A 1	A10	A18	A 4	A10	A19	A18	A 7	A 3	A12	A 4	A12	A13	A 3	A 4	A 1	A13	A 7	A 1	A19	A10
A18	A 1	A18	A18	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A12	A12	A 4	A13	A 3	A13	A 3	A 4	A 7	A 7	A19	A19
A14	A 1	A10	A17	A 4	A10	A14	A17	A 8	A 2	A16	A 4	A16	A 9	A 2	A 4	A 1	A 9	A 8	A 1	A14	A10
A17	A 1	A17	A17	A 4	A10	A10	A10	A 1	A 1	A16	A16	A 4	A 9	A 2	A 9	A 2	A 4	A 8	A 8	A14	A14
A20	A 1	A10	A15	A 4	A10	A20	A15	A21	A11	A 6	A 4	A 6	A 5	A11	A 4	A 1	A 5	A21	A 1	A20	A10
A12	A 1	A18	A 1	A 4	A10	A13	A 3	A12	A18	A 1	A12	A 7	A10	A10	A13	A 3	A19	A 4	A 7	A 4	A19
A16	A 1	A17	A 1	A 4	A10	A 9	A 2	A16	A17	A 1	A16	A 8	A10	A10	A 9	A 2	A14	A 4	A 8	A 4	A14
A13	A 1	A10	A 3	A 4	A10	A13	A 3	A12	A18	A 7	A 4	A 7	A19	A18	A 4	A 1	A19	A12	A 1	A13	A10
A 9	A 1	A10	A 2	A 4	A10	A 9	A 2	A16	A17	A 8	A 4	A 8	A14	A17	A 4	A 1	A14	A16	A 1	A 9	A10

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES NOUVEAUX ELEMENTS ENGENDRES = 319
NOMBRE DE TESTS POUR AJOUTER LES NOUVEAUX ELEMENTS = 3

NOMBRE DE TESTS POUR CHERCHER LES SOUS GROUPOIDES : 411
NOMBRE DE TESTS POUR CONTROLER LES TESTS INUTILES : 6
NOMBRE DE TESTS POUR CHOISIR LES GENERATEURS : 5
NOMBRE DE TESTS POUR VERIFIER L'ASSOCIATIVITE : 3086
NOMBRE TOTAL DE TESTS : 3508

NOMBRE TRIVIAL DE TESTS:N*N*N = 9261

| LE GROUPOIDE DONNE 1 EST ASSOCIATIF |

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARBIB

"Algebraic theory of machines, languages and semi groups".
Acad. Press. (1968).

[2] C. BENZAKEN et P. JULLIEN

"Caractérisation des monoïdes dont toute partie est un sous-monoïde".
M. S. H. (7ème année, n° 28, 1969, p. 53-57).

[3] A.H. CLIFFORD and G.R. PRESTON

"The algebraic theory of semi groups"
Vol. I, Amer. Math. Society, Providence, R.I., 1961.

[4] A.H. CLIFFORD

"Semigroups admetting relatives inverses".
Annals of math. 42 (1941), 1037-1049.

[5] R. CROISOT

"Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples".
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 70 (1953), 361-379.

[6] B. HARRIS and L. SCHOENFELD

"The number of idempotents elements in symmetric semi groups".
J. Comb. theory 3, 122-135 (1967).

[7] J. KUNTZMANN et C. BENZAKEN

"Monoïde - Etude morphologique".
Université de Grenoble, Faculté des Sciences, Mathématiques Appliquées, 1970-1971.

[8] G. PAPY

"Groupoïdes".
Labor, Bruxelles, 1964.

[9] M. TANITER

"A characterization of idempotents in semi groups".
J. Comb. theory, 5 (1968), 370-373.

[10] J. DOV TAMARI

"Problèmes d'associativité des monoïdes et problèmes des mots pour les groupes".
Séminaire DUBREIL-PISOT (Algèbre et théorie des nombres)
16ème année, 1962-1963, n°7.