Etude d'une classe de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie générées par les normes des espaces fonctionnels de Banach

Tao Pham Dinh

N° d'ordre :

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

« Mathématiques Appliquées »

par

PHAM DINH TAO

Etude d'une classe de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie générées par les normes des espaces fonctionnels de Banach. Applications.

Thèse soutenue le 14 Février 1972 devant la commission d'examen :

Monsieur	N. GASTINEL	Président
Messieurs	F. ROBERT	Examinateurs
	P.J. LAURENT	

A mes parents j'offre le fruit de mon travail en reconnaissance de tout ce qu'ils ont fait pour moi.

A mes frères et soeurs en témoignage de mon affection.

A tous ceux qui me sont chers.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie

	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARRA Jean	Mathématiques appliquées
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie

BEGUIN Claude	Chimie organique
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM. BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BOUCHET Yves	Anatomie
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
BRIERE Georges	Physique expérimentale
BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
BRUGEL Lucien	Energétique
BUISSON Roger	Physique
BUTEL Jean	Orthopédie
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michael	Mathématiques appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)

	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Que Monsieur le Professeur N. GASTINEL accepte ma plus profonde gratitude pour avoir bien voulu diriger cette thèse. Ses éminents conseils et et ses encouragements ont été pour moi un soutien très précieux.

Que Monsieur F. ROBERT, Maître de Conférences à l'Université Scientifique et Médicale de Lyon, reçoive mes plus sincères remerciements pour les quelques corrections qu'il a apportées à mon travail, ainsi que pour sa présence en ce jury.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur P.J. LAURENT qui a bien voulu prendre place au sein de ce même jury.

Je n'oublie pas non plus l'aide de Mesdames CARRE-PIERRAT et NEUMANN dans l'exécution de la frappe dans les délais les plus courts, de même que le service de tirage, tous ayant contribué à l'élaboration de cette thèse dans les conditions les meilleures.

- TABLE DES MATIERES -

- CHAPITRE II -

NORMES DE VECTEUR SUR $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN ESPACE METRIQUE COMPACT.

CHAPITRE VI

ETUDE DE LA CLASSE DE NORMES DUALES DES NORMES DANS $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE BANACH. CARACTERISATION DES ESPACES DE HILBERT.

CHAPITRE VII

NORMES DE MATRICES GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE BANACH.

TROISIEME PARTIE

Applications

RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE DU PROBLEME DU LIEU DES MEILLEURS APPROXIMANTS LINEAIRES DANS UN SOUS ESPACE DE DIMENSION FINIE D'UN ESPACE DE BANACH.

INTRODUCTION

Le but de cette thèse est d'étudier une classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ qui peuvent être définies à partir des normes des espaces de Banach E à l'aide d'un système fini de n vecteurs linéairement indépendants $(f_i)_{i=1-n}$ de E et sont indispensables à la résolution de certains problèmes de l'analyse numérique, en particulier les problèmes de l'approximation linéaire.

Dans un espace de Banach E de norme $||.||$, soient V_n un sous-espace de dimension finie n et f un élément n'appartenant pas à V_n. On considère alors le problème des meilleurs approximations linéaires de f dans V_n.

Soit $(f_i)_{i=1-n}$ une base de V_n. Un élément $g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$ de V_n est meilleur approximant de f dans V_n si et seulement si :

$$||f - g^*|| = \operatorname*{Inf}_{x \in V_n} ||f - g|| = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^n} ||f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i||$$

Soit maintenant l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme Ψ définie par :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n + x_{n+1} f|| \qquad (1)$$

pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ de composantes (x_i) dans la base canonique $(e_i)_{i=1-(n+1)}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors l'élément $g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$ de V_n est meilleur approximant de f dans V_n si et seulement si le vecteur $k = (k_i) \in \mathbb{R}^n$ est meilleur approximant de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$ au sens de la norme Ψ ainsi définie.

On peut donc transformer un problème d'approximation linéaire dans un espace de Banach E de dimension quelconque finie ou infinie en un problème équivalent dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni d'une norme convenable Ψ définie comme ci-dessus (1) à partir de la norme de l'espace E dont la résolution devient dans certains cas plus simple et facile. De cette façon CARASSO dans son exposé ([1]) a pu résoudre son problème. Grâce aussi à l'introduction de cette catégorie de normes ainsi définies (1) sur l'espace $\mathbb{R}^n$, j'ai pu résoudre le problème inverse du problème du lieu des meilleurs approximants linéaires dans un sous-espace de dimension finie n d'un espace de Banach.

Ce sont deux applications concrètes parmi d'autres de la théorie des normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par la norme d'un espace de Banach à laquelle on pourra avoir recours en analyse numérique.

Cette thèse se compose de trois parties :

. Dans la première on présente les définitions générales de la classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par la norme d'un espace de Banach quelconque E.

. Pour un espace de Banach quelconque E, il est impossible de dire si une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ est générée par sa norme, encore moins de caractériser la classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par la norme de E, car la structure d'une norme Ψ sur $\mathbb{R}^n$ générée par la norme de E dépend évidemment de celle de la norme E et qu'a priori on ne connaît rien sur sa structure. Dans la deuxième partie, on se bornera à l'étude de certaines classes de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces fonctionnels usuels de Banach en vue d'une étude plus commode et plus précise permise par la nature même de leurs éléments qui sont des fonctions et par de nombreuses propriétés connues s'appliquant à ces espaces.

. La troisième partie est consacrée à des applications de cette théorie de normes dont la plus importante sera la résolution du problème inverse du problème du lieu des meilleurs approximants linéaires dans un sous-espace de dimension finie n d'un espace de Banach.

Enfin sont donnés quelques exemples simples de construction de n éléments $(f_i)_{i=1-n}$ de l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ définissant une norme quelconque Ψ de $\mathbb{R}^n$.

Ces résultats permettent d'affirmer que la norme de la convergence uniforme sur $[a, b]$ de l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ génère toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ sans toutefois avoir recours à certains résultats de la topologie algébrique, en particulier le théorème de HAHN-MAZURKIEWICZ qui sont trop forts [Cf. DEUXIEME PARTIE, Chapitre II, §.7].

----

[1] CARASSO C.
Sur la convergence de l'algorithme de REMES-LAURENT en l'absence de condition de Haar.
Séminaire d'analyse numérique (1971-1972) - Institut de Mathématiques Appliquées - Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

PREMIERE PARTIE

GENERALITES

CLASSE DE NORMES DE VECTEUR SUR $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE BANACH

1 - Définitions et notations

Soient E un espace de Banach de norme φ et $(f_i)_{i=1-n}$ un système de n vecteurs linéairement indépendants de E. On a alors cette propriété :

Proposition

La fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$\Psi(x) = \Psi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \varphi(x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i)$$

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

où $(e_i)_{i=1-n}$ est une base canonique de $\mathbb{R}^n$, est une norme de $\mathbb{R}^n$.

Vérification

1) On a :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\Psi(\lambda x + \mu y) = \Psi(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) f_i)$$

$$= \varphi(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) f_i + \sum_{i=1}^{n} (\mu y_i) f_i)$$

$$\leq |\lambda| \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i) + |\mu| \varphi(\sum_{i=1}^{n} (y_i) f_i)$$

Par suite

$\Psi(\lambda x + \mu y) \leq |\lambda| \ \Psi(x) + |\mu| \ \Psi(y).$

2) $\Psi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1-n$

car les (f_i) sont linéairement indépendants ; d'où $x = 0$.

Ψ est donc bien une norme de $\mathbb{R}^n$.

<u>Définition</u>

Soient E un espace de Banach de norme φ et Ψ une norme de l'espace $\mathbb{R}^n$.

On dit que la norme Ψ est générée par la norme φ de E s'il existe dans E n vecteurs linéairement indépendants $(f_i)_{i=1-n}$ tels que :

$$\Psi(x) = \Psi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \varphi(x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i)$$

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Remarque</u>

Il est clair que dans la proposition précédente le fait d'être complet pour l'espace normé E n'intervient pas. Cependant on peut toujours supposer que E soit complet sans pour autant perdre de généralités quite à compléter E. D'ailleurs tous les espaces fonctionnels normés fréquemment rencontrés dans l'analyse fonctionnelle sont de Banach.

2 - Relations fonctionnelles entre une norme φ d'un espace de Banach E et une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par φ

La définition précédente est clairement équivalente à l'existence d'une injection linéaire α de $\mathbb{R}^n$ dans E définie par :

$$\alpha(e_i) = f_i \qquad \forall i = 1 - n$$

telle que :

$$\Psi(x) = \varphi(\alpha(x)) = (\varphi \circ \alpha)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & R^+ \\ & E \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \Psi = \varphi \circ \alpha$$

Par suite si $\mathcal{J}$ désigne l'ensemble des injections linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans E, alors la classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par la norme φ de E n'est autre que l'ensemble $\{\Psi = \varphi \circ \alpha,\ \alpha \in \mathcal{J}\}$.

Il en découle la

Proposition 2-1

Soient E un espace de Banach de norme φ et β une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors si la norme φ génère la norme Ψ de $\mathbb{R}^n$, elle génère aussi la norme $\Psi \circ \beta$.

Vérification

En effet on a :

$\Psi = \varphi \circ \alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{J}$

donc

$\Psi \circ \beta = \varphi \circ \alpha \circ \beta = \varphi \circ \gamma$ avec $\gamma = \alpha \circ \beta \in \mathcal{J}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\varphi \circ \gamma"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[drr, "\gamma"] & & \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\alpha"'] \arrow[urr, "\Psi"] & & E \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

En termes plus familiers à l'analyse numérique, la proposition 2-1 peut s'énoncer comme :

Proposition 2-2

Soient E un espace de Banach de norme φ et A une matrice carrée d'ordre n non singulière. Alors si la norme φ génère la norme Ψ de $\mathbb{R}^n$, elle génère aussi la norme Ψ_A définie par :

$$\Psi_A(x) = \Psi(Ax) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Vérification

En effet dans $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $(e_i)_{i=1-n}$, toute bijection linéaire β peut être représentée par une matrice carrée d'ordre n non singulière A. Par suite la norme $\Psi o \beta$ peut s'exprimer en notation matricielle par Ψ_A en identifiant chaque vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à une colonne matricielle formée par les composantes (x_i) de x dans la base canonique (e_i), que l'on note aussi x par abus de notation si aucune confusion ne se présente.

Enfin cette dernière propriété dont la vérification est immédiate

Proposition 2-3

Soient E et F deux espaces de Banach.
Si F est isométriquement isomorphe à E, c'est à dire s'il existe un isomorphisme γ de E sur F conservant la norme :

$$||\gamma(x)|| = ||x|| \qquad \forall x \in E$$

Alors les classes de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes de E et F sont les mêmes.

3 - Interprétation géométrique

Soit Ψ la norme de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme φ d'un espace de Banach E :

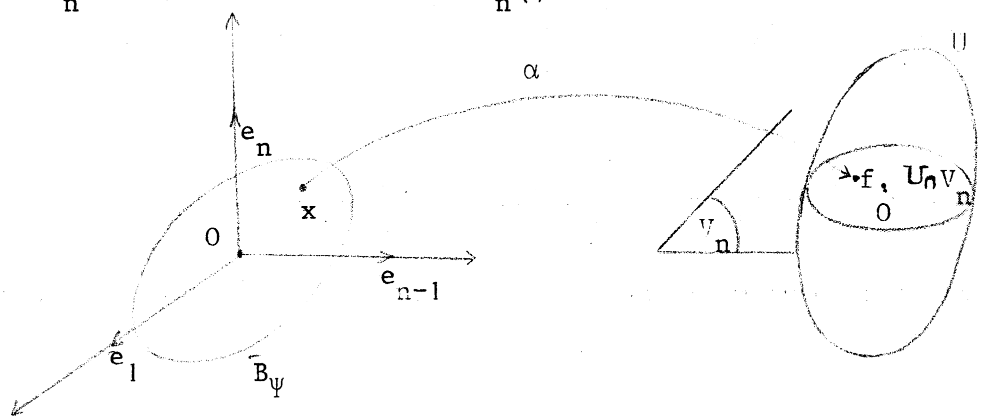
$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Soient V_n le sous espace de E engendré par les vecteurs $(f_i)_{i=1-n}$ et U la boule unité de l'espace E :

$$U = \{f \in E : \varphi(f) \leq 1\}$$

Alors l'isomorphisme canonique $(x_i)_{i=1-n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ de $\mathbb{R}^n$ sur V_n transforme la boule unité de la norme Ψ dans $\mathbb{R}^n$ en la boule unité $V_n \cap U$ de V_n et réciproquement.

Par suite, géométriquement dit, une norme Ψ sur $\mathbb{R}^n$ est générée par la norme φ d'un espace de Banach E si et seulement si elle est la jauge de la transformée dans $\mathbb{R}^n$, par l'isomorphisme canonique entre $\mathbb{R}^n$ et un sous espace V_n de E, de l'intersection $V_n \cap U$ de la boule unité de E avec V_n.



$$B_\Psi = \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x) \leq 1\}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow \alpha(x) = f = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

4 - Propriétés générales d'une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme φ d'un espace de Banach

Il est clair que la structure d'une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme φ d'un espace de Banach E dépend de celle de φ. C'est ainsi que si l'espace E a une structure hilbertienne, toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme de E sera de la forme :

$$\Psi(x) = (x^T A x)^{1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

avec A une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive.

[Voir DEUXIEME PARTIE - CHAPITRE VI]

On peut caractériser la stricte convexité de la norme φ d'un espace de Banach E par la

Proposition 4-1

La norme φ d'un espace de Banach E est strictement convexe si et seulement si toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par φ est strictement convexe.

Vérification

1) φ strictement convexe $\Rightarrow$ Ψ strictement convexe. En effet soient x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\Psi(x + y) = \Psi(x) + \Psi(y)$$

c'est à dire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i + \sum_{i=1}^{n} y_i f_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i\right)$$

par suite, puisque la norme φ est strictement convexe, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que :

$$y_i = \alpha x_i \qquad \forall i = 1 - n$$

Autrement dit $\quad y = \alpha x$

2) D'autre part si la norme φ n'est pas strictement convexe, alors il existe deux vecteurs f_1 et f_2 non colinéaires dans E tels que :

$$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$$

Formons un système de n vecteurs linéairement indépendants $(f_i)_{i=1-n}$ de E dont les deux premiers sont effectivement f_1 et f_2..

Soit Ψ la norme de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme φ par l'intermédiaire de ces (f_i) :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

On a :

$$\Psi(1, 1, 0, \ldots, 0) = \Psi(1, 0, \ldots, 0) + \Psi(0, 1, 0, \ldots, 0)$$

La norme Ψ n'est donc pas strictement convexe. D'où la proposition.

Toutefois, il se peut qu'une norme non strictement convexe d'un espace de Banach E génère des normes Ψ de $\mathbb{R}^n$ strictement convexe comme le montre cet exemple dans le cas où la dimension de E est finie. On considère E comme l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme φ relative à la base canonique $(e_i)_{i=1-(n+1)}$ définie par :

$$\varphi\,(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max\left[\rho(x_1, \ldots, x_n),\ |x_{n+1}|\right]$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

où ρ est une norme strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Il est facile de vérifier que la norme φ est non strictement convexe :

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\rho\,(x_1, \ldots, x_n) = \rho(y_1, \ldots, y_n)$$

Soit $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\left|x_{n+1}\right| \geq \rho(x_1, \ldots, x_n)$

On a :

$$\varphi\,(x + y,\ 2x_{n+1}) = \max\left[\rho(x + y),\ 2|x_{n+1}|\right]$$

$$= 2\left|x_{n+1}\right| = (x, x_{n+1}) + (y, x_{n+1})$$

Or les vecteurs (x, x_{n+1}) et (y, x_{n+1}) de $\mathbb{R}^{n+1}$ ne sont pas colinéaires, d'où la non stricte convexité de la norme .

D'autre part, la norme ρ de $\mathbb{R}^n$ est effectivement générée par la norme φ.

Dans la deuxième partie [Chapitre II, paragraphes 5. et 7.], on pourra voir des exemples d'un espace de Banach de dimension infinie dont la norme non strictement convexe génère des normes strictement convexes de $\mathbb{R}^n$.

<u>Proposition 4-2</u>

1) En général la norme φ d'un espace de Banach E ne peut pas générer toutes les normes Ψ de $\mathbb{R}^n$.

2) Pour toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ il existe au moins un espace de Banach dont la norme φ génère la norme Ψ.

Vérification

1) On démontre dans la deuxième partie [Chapitre I, §.6, Chapitre IV, §.2] que :

. La norme de l'espace $L^1(X, \mu)$ ne peut pas générer la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$ sauf si $n \leq 2$.

. Toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme d'un espace de Hilbert est donnée par :

$$\Psi(x) = (x^T A x)^{1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

avec A une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive.

2) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme Ψ peut être considéré comme un espace de Banach dont la norme génère la norme Ψ.

Mais un résultat non trivial, très important démontré dans le §.7 [Chapitre II] est que la norme de la convergence uniforme sur $[a, b]$ de l'espace fonctionnel de Banach $\mathcal{C}([a, b], R)$ génère toutes les normes Ψ de $\mathbb{R}^n$.

Evidemment pour certaines normes Ψ de $\mathbb{R}^n$, il se peut qu'il existe des autres espaces dont les normes génèrent les normes Ψ. Par exemple, on démontre dans la deuxième partie [Chapitre I, §.1 et §.5, Chapitre II, §.2 et §.5] que :

. La norme h_∞ peut être générée par les normes des espaces fonctionnels de Banach $L^\infty(X, \mu)$ et $\mathcal{C}(K, F)$.

. La norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ peut être générée par la norme de l'espace $L^1(X, \mu)$ comme par celle de l'espace $\mathcal{C}(K, F)$.

. La norme h_2 de $\mathbb{R}^n$ peut être générée par la norme de l'espace de Hilbert comme par celle de l'espace $\mathcal{C}(K, F)$ si l'espace F est de Hilbert.

On termine cette première partie par ce résultat :

Proposition 4-3

Si la dimension de l'espace de Banach E est finie et égale à n. Alors toute norme de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme Ψ de E est de la forme Ψ_A.

$$\Psi_A(x) = \Psi(A_x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où Ψ est une norme de $\mathbb{R}^n$ générée par φ et A une matrice carrée d'ordre n non singulière.

Vérification

La démonstration est immédiate en vertu des résultats du paragraphe 2.

Remarque

Pour une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme φ d'un espace de Banach E, l'unicité des $(f_i)_{i=1-n}$ linéairement indépendants de E tels que :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

n'est pas assurée en général comme on pourra le constater dans la suite.

REFERENCES

[1] BAUER F.L.

Theory of norms
Technical report n° CS 75 (August 1967)
Stanford University

[2] BOURBAKI N.

Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 et 2
Hermann - Paris (1965)

[3] GASTINEL N.

Analyse numérique linéaire
Hermann - Paris (1966)

[4] HOUSEHOLDER A.S

The theory of matrices in numerical analysis
Blaisdell, Nex York (1964)

[5] PHAM DINH TAO

Etude générale de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie.
Rapport D.E.A. (1970-1971)
Institut de mathématiques appliquées - Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

DEUXIEME PARTIE

CLASSE DE NORMES DE VECTEUR SUR $\mathbb{R}^n$
GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES
FONCTIONNELS USUELS DE BANACH

Dans la première partie on a présenté les définitions et propriétés générales de la classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par la norme d'un espace de Banach quelconque E.

Dans cette deuxième partie, on se bornera à l'étude de certaines classes de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces fonctionnels usuels de Banach en vue d'une étude plus commode et plus précise permise par la nature même de leurs éléments qui sont des fonctions et par de nombreuses propriétés connues s'appliquant à ces espaces.

CHAPITRE I

NORMES DE VECTEUR DANS $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES FONCTIONNELS DE BANACH $L^p(X,\mu)$.

1 - Les espaces fonctionnels $L^p(X,\mu)$. Définitions et propriétés générales

Dans tout ce chapitre, on suppose que X est un espace localement compact métrisable et séparable et μ une mesure borélienne positive ($\mu \neq o$). En général $X = \mathbb{R}^m$ et μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Soit $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ $(p \geq 1)$ l'espace des fonctions f μ-mesurables dont la $p^{\text{ième}}$ puissance de la valeur absolue $|f|^p$ est intégrable sur X.

Soit M_p la fonction définie sur $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$M_p(f) = \left|\int_X |f|^p d\mu\right|^{1/p} \qquad \forall f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$$

On montre que M_p est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ [Cf [1] et [4]]. Il lui manque l'axiôme de séparation

$$M_p(f) = 0 \implies f = 0 \text{ presque partout.}$$

La relation binaire sur $\mathcal{L}^p(X,\mu)$: $f \sim g \Longleftrightarrow f-g=0$ presque partout, est une relation d'équivalence. Il est facile de voir que la fonction $\| \ \|_p$ définie sur l'espace quotient $\mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$ est une norme :

$$\|\tilde{f}\|_p = M_p(f) \quad \text{si } \tilde{f} = C\ell\,(f).$$

Définition.

$L^p(X,\mu)$ est l'espace quotient $\mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$ muni de la norme $\| \ \|_p$.

On démontre que [Cf [1], [4] et [6]]:

Proposition 1.1.

1) - Les espaces normés $L^p(X,\mu)$, $(p\geq 1)$ sont complets.
2) - Les normes $\| \ \|_p$ de $L^p(X,\mu)$ sont strictement convexes sauf si $p = 1$.
3) - Les espaces $L^p(X,\mu)$ sont séparables.

• Cas où $p = +\infty$. Espace $L^\infty(X,\mu)$.

Définition.

Une fonction f μ-mesurable est dite bornée en mesure (ou essentiellement bornée) si $\text{Inf}\,\{a : |f|\leq a$ sauf peut être sur une partie de mesure nulle$\} <+\infty$.

On note $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ l'espace vectoriel des fonctions μ-mesurables essentiellement bornées.

Pour tout élément $f\in\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ soit $M_\infty(f)$ la borne inf ainsi définie. On démontre sans difficulté que [Cf [1] et [4]] M_∞ définit une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Comme les fonctions M_p $(p\geq 1)$, M_∞ ne vérifie pas l'axiôme de séparation :

$M_\infty(f)=0 \Rightarrow f=0$ presque partout.

Cependant la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ définie par

$f \sim g \Longleftrightarrow f-g=0$ presque partout.

permet de définir l'espace quotient $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\sim$ sur lequel M_∞ devient une norme notée $\| \ \|_\infty$:

$$\|\tilde{f}\|_\infty = M_\infty(f) \quad \text{si } \tilde{f} = C\ell(f)$$

Définition.

$L^\infty(X,\mu)$ est l'espace quotient $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\sim$ muni de la norme $\|\ \ \|_\infty$

On montre que [Cf [1] et [4]] :

Proposition 1.2.

1) - L'espace normé $L^\infty(X,\mu)$ est complet.

2) - La norme $\|\ \ \|_\infty$ de $L^\infty(X,\mu)$ n'est pas strictement convexe.

3) - L'espace $L^\infty(X,\mu)$ n'est pas séparable.

REMARQUE :

1) - Si f est une fonction mesurable bornée sur X, alors elle est essentiellement bornée et on a :

$$M_\infty(f) \leq \sup_{t \in X} |f(t)|$$

2) - L'espace des fonctions continues bornées sur X est contenu dans $L^\infty(X,\mu)$: $\mathcal{C}^\infty(X, R) \subset L^\infty(X,\mu)$.

• Dualité des espaces $L^p(X,\mu)$ $(1 \leq p \leq +\infty$

On démontre que [Cf [1] et [4]] :

Proposition 1.3.

Pour tout p $(1 \leq p\ +\infty)$ le dual topologique de l'espace $L^p(X,\mu)$ est l'espace $L^q(X,\mu)$ avec q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En particulier le dual topologique de l'espace $L^1(X,\mu)$ est l'espace $L^\infty(X,\mu)$.

et

Proposition 1.4

Le dual topologique de l'espace $L^{\infty}(X,\mu)$ contient mais n'égale pas l'espace $L^1(X,\mu)$ en général.

Il y aura identité entre $L^1(X,\mu)$ et le dual topologique de l'espace $L^{\infty}(X,\mu)$ si et seulement si le support de la mesure μ est fini.

De ces deux résultats, on déduit la :

Proposition 1.5

Les espaces $L^p(X,\mu)$ $(1<p<+\infty)$ sont réflexifs.

Les espaces $L^1(X,\mu)$ et $L^{\infty}(X,\mu)$ sont réflexifs si et seulement si le support de la mesure μ est fini.

Même dans le cas des espaces fonctionnels bien connus $L^p(X,\mu)$, le problème de caractérisation de la classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes de tels espaces reste encore impossible. On se contente alors d'étudier certaines normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, qui sont les normes de Hölder h_p $(1\leq p\leq+\infty)$:

$$h_p(x_1,\ldots,x_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} \qquad \text{pour } 1\leq p<+\infty$$

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

et

$$h_{\infty}(x_1,\ldots,x_n) = \max_{i=1-n} |x_i| \qquad \forall (x_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{R}^n$$

[Cf [9] et [10]], que les normes des espaces $L^p(X,\mu)$ peuvent générer. On distinguera plusieurs cas suivant que p=1,2 ou + ∞ dans lesquels certains résultats particuliers peuvent se présenter.

2. Normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme de l'espace $L^1(X,\mu)$.

L'analogie entre la norme $\|\cdot\|_1$ de $L^1(X,\mu)$ et la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$:

$$f \in L^1(X,\mu) \qquad \|f\|_1 = \int_X |f|\,d\mu$$

$$x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad h_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

nous ramène à poser le problème suivant : la norme h_1 peut-elle être générée par la norme $\|\ \|_1$?

Pour résoudre ce problème on va d'abord donner une caractérisation des $(f_i)_{i=1-n}$ de $L^1(X,\mu)$ qui définissent la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$:

$$h_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\| \qquad \forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ensuite on cherche à savoir s'il existe dans $L^1(X,\mu)$ de tels (f_i).

Pour simplifier le raisonnement, on se place tout d'abord dans $\mathbb{R}^2$

Proposition 2.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $f_1, f_2 \in L^1(X,\mu)$ vérifient :

(1) $h_1(x_1,x_2) = |x_1| + |x_2| = \|x_1 f_1 + x_2 f_2\|_1 = \int_X |x_1 f_1 + x_2 f_2|\,d\mu$
$\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

est que :

i) $\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = 1$

ii) Il existe deux parties μ- mesurables X_1 et X_2 de X telles que :

$$X = X_1 \cup X_2,\quad \mu(X_1 \cap X_2) = 0$$

$$f_1 = 0 \text{ sur } X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$$

$$f_2 = 0 \text{ sur } X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$$

Vérification

Condition nécessaire

Soient f_1, f_2 deux éléments de $L^1(X,\mu)$ vérifiant la relation (1).

En prenant $x = e_1$ et $x = e_2$ dans (1), on déduit que :

$$\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = 1$$

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\int_X |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu \leq \int_X [|x_1 f_1| + |x_2 f_2|] d\mu = |x_1| + |x_2|$$

Par suite pour qu'il y ait l'égalité, il faut que :

(2) $|x_1 f_1 + x_2 f_2| = |x_1 f_1| + |x_2 f_2|$ presque partout sur X

Posons :

$$Y_1 = \{t \in X : f_1(t) \neq 0\}$$
$$Y_2 = \{t \in X : f_2(t) \neq 0\}$$

Y_1 et Y_2 sont bien deux parties μ- mesurables de X puisque f_1 et f_2 sont des fonctions mesurables. En dehors de la partie $Y = Y_1 \cup Y_2$ f_1 et f_2 sont nulles, la condition (2) devient alors :

(2') $|x_1 f_1 + x_2 f_2| = |x_1 f_1| + |x_2 f_2|$ presque partout sur Y

On sait que :

$a,b \in \mathbb{R}$ $\quad |a+b| = |a| + |b| \implies ab \geq 0$

Par suite en prenant $x = (x_1, x_2)$ tel que $x_1 x_2 > 0$ on obtient $f_1(t) . f_2(t) \leq 0$ presque partout sur Y

De même avec un $x = (x_1, x_2)$ tel que $x_1 x_2 < 0$ On a :

$f_1(t).f_2(t) \leq 0$ presque partout sur Y.

En combinant ces deux conditions on obtient cette propriété :

$f_1 = 0$ presque partout sur Y_2

$f_2 = 0$ presque partout sur Y_1

Autrement dit $\mu(Y_1 \cap Y_2)=0$. On peut alors toujours trouver deux parties μ - mesurables X_1 et X_2 telles que $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ et vérifiant la condition ii) de la proposition 2.1. Par exemple en prenant :

$$X_1 = Y_1 \quad , \quad X_2 = Y_2 \cup [\complement(Y_1 \cup Y_2)]$$

<u>Condition suffisante</u>.

Soient maintenant f_1, f_2 deux éléments de $L^1(X,\mu)$ vérifiant les conditions i) et ii).

Puisque $\mu(X_1 \cap X_2)=0$ alors pour tout $x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$\int_X |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu = \int_{X_1} |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu + \int_{X_2} |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu$$

Or

$$\int_{X_1} |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu = \int_{X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)} |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu = \int_{X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)} |x_1 f_1| d\mu = ||x_1 f_1||_1 = |x_1|$$

et $$\int_{X_2} |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu = \int_{X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)} |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu = \int_{X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)} |x_2 f_2| d\mu = ||x_2 f_2||_1 = |x_2|$$

Par suite :

$$||x_1 f_1 + x_2 f_2||_1 = \int_X |x_1 f_1 + x_2 f_2| d\mu = |x_1| + |x_2| = h_1(x_1, x_2)$$

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

La dimension de l'espace $\mathbb{R}^n$ n'intervient pas dans le raisonnement qu'on vient de faire dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on peut croire donc à l'extension possible de ce résultat dans le cas général de l'espace $\mathbb{R}^n$ (n entier quelconque).

Proposition 2.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour que n éléments $(f_i)_{i=1-n}$ de $L^1(X,\mu)$ vérifient :

$$(1) - h_1(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n||_1 = \int_X |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

est que

i) $||f_1||_1 = \ldots = ||f_n||_1 = 1$

ii) Il existe un recouvrement de l'espace X par des parties μ - mesurables $(X_i)_{i=1-n}$ telles que :

- $\mu(X_i \cap X_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad (i,j=1-n)$
- $f_i = 0$ sur $X_j \setminus (X_i \cap X_j) \quad \forall i \neq j \quad (i,j=1-n)$.

Vérification

Condition nécessaire

Soient $(f_i)_{i=1-n}$, n éléments de $L^1(X,\mu)$ vérifiant la relation (1).

En prenant $x = e_i$ $(i=1-n)$ dans (1) on obtient :

$||f_i||_1 = 1 \qquad \forall i = 1-n.$

Posons :

$$Y_i=\{t\ X : f_i(t) \neq 0\} \qquad (i=1-n)$$

Les Y_i sont bien des parties μ - mesurables de l'espace X puisque les (f_i) sont des fonctions mesurables sur X.

Il est clair que pour tout couple (i,j) $i \neq j$:

$$h_1(\alpha,\beta) = \|\alpha f_i+\beta f_j\|_1 \qquad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Ce qui donne d'après la proposition 2.1 :

$$\mu(Y_i \cap Y_j) = 0$$

On a bien :

$$f_i=0 \quad \text{sur } Y_j \setminus (Y_i \cap Y_j) \quad \forall i \neq j \quad (i,j = 1 - n)$$

Il se peut que les $(Y_i)_{i=1-n}$ ne forment pas un recouvrement de X, mais ceci ne pose pas de problème puisque l'on peut toujours trouver n parties μ - mesurables $(X_i)_{i=1-n}$ à partir des $(Y_i)_{i=1-n}$ qui vérifient les conditions i) et ii).

Par exemple, on peut prendre ces n parties suivantes :

$$X_i = Y_i \quad \forall i = 1-(n-1)$$

$$X_n = Y_n \cup \left[\complement\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

Condition suffisante

Soient maintenant n éléments $(f_i)_{i=1-n}$ de $L^1(X,\mu)$ qui satisfont les conditions i) et ii).

On peut écrire :

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \uplus (X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)) \uplus \ldots \uplus (X_i \setminus (X_i \cap (\bigcup_{j=1}^{i-1} X_j))) \ldots$$

$$\uplus (X_n \setminus (X_n \cap (\bigcup_{j=1}^{n-1} X_j))).$$

en remarquant que :

$$X_i \cap (\bigcup_{j=1}^{i-1} X_j) = \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \cap X_j) \qquad \forall i = 2\text{-}n$$

On a :

$$X = X_1 \uplus (X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)) \uplus \ldots \uplus (X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \cap X_j)) \uplus \ldots$$

$$\uplus (X_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} (X_n \cap X_j)$$

Par suite pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_X |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu = \int_{X_1} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu + \int_{X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu + \ldots$$

$$+ \int_{X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \cap X_j)} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu + \ldots + \int_{X_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} (X_n \cap X_j)} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu$$

Or d'après i) et ii) :

$$\int_{X_1} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu = \int_{X_1} |x_1 f_1| d\mu = ||x_1 f_1||_1 = |x_1|$$

et pour tout $i = 2\text{-}n$:

$$\int_{X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \cap X_j)} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n| d\mu = \int_{X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \; X_j)} |x_i f_i| d\mu = \int_{X_i} |x_i f_i| d\mu = ||x_i f_i||_1 = |x_i|$$

Par conséquent, on a :

$$||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| = h_1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La proposition 2.2 nous donne les caractérisations des éléments $(f_i)_{i=1-n}$ de l'espace fonctionnel de Banach $L^1(X,\mu)$ qui permettent de définir la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ à partir de la norme $|| \; ||_1$ de $L^1(X,\mu)$.

Il est facile de voir que l'existence de tels éléments (f_i) dans $L^1(X,\mu)$ est toujours assurée, d'où :

Proposition 2.3.

L'espace fonctionnel de Banach $L^1(X,\mu)$ formé des fonctions numériques intégrables sur X, muni de la norme $|| \; ||_1$:

$$f \in L^1(X,\mu) \qquad ||f||_1 = \int_X |f| d\mu$$

figure parmi les espaces fonctionnels de Banach dont les normes génèrent la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

3. Normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces $L^p(X,\mu)$ $(1<p<+\infty)$

L'analogie entre deux normes h_p de $\mathbb{R}^n$ et $|| \; ||_p$ de $L^p(X,\mu)$

$$h_p(x) = \Big| \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big|^{1/p} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad ; \qquad ||f||_p = \Big| \int_X |f|^p \Big|^{1/p} \quad \forall f \in L^p(X,\mu)$$

fait penser que h_p fait partie de la classe des normes de $\mathbb{R}^n$ générées par $|| \; ||_p$

Ce qui est d'ailleurs juste comme on pourra le constater dans la suite.

On va donner maintenant une caractérisation des n fonctions $(f_i)_{i=1-n}$ appartenant à $L^p(X,\mu)$ qui permettent de définir la norme h_p de $\mathbb{R}^n$ à partir de la norme $|| \ ||_p$ de $L^p(X,\mu)$.

<u>Proposition 3.1.</u>

Une condition suffisante pour que n fonctions $(f_i)_{i=1-n}$ appartenant à $L^p(X,\mu)$ vérifient :

$$h_p(x)=\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right|^{1/p}=||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_p=\left|\int_X |x_1f_1+\ldots+x_nf_n|^p d\mu\right|^{1/p}$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$$

est que :

i) $||f_i||_p = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) Il existe un recouvrement fini de l'espace X par les parties $(X_i)_{i=1-n}$ μ - mesurables telles que :

$f_i=0$ sur X_j $\forall i \neq j$ $(i,j = 1-n)$.

<u>Vérification.</u>

Soient $(f_i)_{i=1-n}$, n éléments de $L^p(X,\mu)$ vérifiant i) et ii).

Comme dans la proposition 2.2, on peut décomposer X en une union disjointe :

$$X = X_1 \uplus (X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)) \uplus \ldots \uplus (X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \cap X_j)) \ldots \uplus (X_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} (X_n \cap X_j))$$

D'où quelque soit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\int_X |x_1f_1+\ldots+x_nf_n|^p d\mu = \int_{X_1} |x_1f_1+\ldots+x_nf_n|^p d\mu+\ldots+\int_{X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1}(X_i\cap X_j)} |x_1f_1+\ldots+x_nf_n|^p d\mu$$

$$+ \ldots + \int_{X_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} (X_n \cap X_j)} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n|^p d\mu$$

D'après ii), on obtient pour tout i = 1-n :

$$\int_{X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \cap X_j)} |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n|^p d\mu = \int_{X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (X_i \cap X_j)} |x_i|^p |f_i|^p d\mu = |x_i|^p \int_{X_i} |f_i|^p d\mu = |x_i|^p$$

Par suite, en tenant compte de i) on arrive à :

$$h_p(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right]^{1/p} = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n||_p = \left[\int_X |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n|^p d\mu \right]^{1/p}$$

Il est facile de voir que l'on peut trouver n éléments (f_i) de $L^p(X,\mu)$ qui satisfont i) et ii). D'où :

<u>Proposition 3.2.</u>

La norme $|| \ ||_p$ de l'espace fonctionnel de Banach $L^p(X,\mu)$:

$$f \in L^p(X,\mu), \quad ||f||_p = \left[\int_X |f|^p d\mu \right]^{1/p}$$

génère la norme h_p de $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad h_p(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right]^{1/p}$$

<u>REMARQUE</u> :

La condition citée dans la proposition 3.1 est suffisante mais pas forcément nécessaire dans le cas général des espaces $L^p(X,\mu)$ $(p \geq 1)$. Pour p = 1, elle est aussi nécessaire [voir la proposition 2.2]. On a pu la démontrer en utilisant l'inégalité fonctionnelle suivante :

$$|f_1 + \ldots + f_n|^p \leq |f_1|^p + \ldots + |f_n|^p \qquad \text{si } p = 1$$

où $(f_i)_{i=1-n}$ sont n éléments quelconques de $L^1(X,\mu)$.

Pour p quelconque > 1, on ne peut pas obtenir de telle inégalité pour n éléments $(f_i)_{i=1-n}$ quelconques de $L^p(X,\mu)$.

Dans le cadre des espaces $L^p(X,\mu)$ on va étudier maintenant ces deux cas particuliers correspondants aux p = 2 et p = + ∞.

4 - Etude du cas où p = 2. Espace de Hilbert $L^2(X,\mu)$.

$L^2(X,\mu)$ est un espace fonctionnel de Hilbert ([1] et [4]).

Son produit scalaire étant :

$$(f,g) \in L^2(X,\mu) \times L^2(X,\mu) \to \langle f,g\rangle = \int_X f.g\, d\mu$$

qui donne la norme $||.||_2$:

$$f \quad L^2(X,\mu) \qquad ||f||_2 = \langle f,f\rangle^{1/2} = [\int_X f^2 d\mu]^{1/2}$$

D'après le résultat précédent du cas général, la norme $|| \ ||_2$ de $L^2(X,\mu)$ génère la norme euclidienne h_2 de $\mathbb{R}^n$. Mais de plus grâce à sa structure hilbertienne, on obtient un résultat plus complet que celui de la proposition 3.1 donnant les caractérisations des éléments $(f_i)_{i=1-n}$ de $L^2(X,\mu)$ qui permettent de définir la norme h_2, c'est à dire :

$$h_2(x) = [\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2]^{1/2} = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n||_2 = [\int_X |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n|^2 d\mu]^{1/2}$$

Proposition 4.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour que n éléments $(f_i)_{i=1-n}$ de $L^2(X,\mu)$ vérifient la relation suivante :

$$(1) \quad h_2(x) = [\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2]^{1/2} = [\int_X |x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n|^2 d\mu]^{1/2}$$

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

est que :

$$<f_i, f_j> = \delta_{ij} \qquad (i,j = 1-n)$$

Vérification

Condition nécessaire.

Considérons n éléments $(f_i)_{i=1-n}$ appartenant à $L^2(X,\mu)$ et vérifiant la relation (1). Il est facile de voir que (1) est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 <f_i, f_i> + 2 \sum_{1 \leq i \; j \leq n} x_i x_j <f_i, f_j>$$

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

En prenant $x = e_i$, on trouve :

$$<f_i, f_i> = 1$$

Ceci quelque soit $i = 1-n$.

Cela dit, pour que la relation (1) soit vraie on doit avoir :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j <f_i, f_j> = 0 \\ \forall x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} <f_i, f_j> = 0 \\ \forall i \neq j \quad (i,j = 1-n) \end{array}$$

Autrement dit la condition nécessaire est que :

$$<f_i, f_j> = \delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1-n$$

C'est à dire le système $(f_i)_{i=1-n}$ doit être orthonormé.

Condition suffisante.

Soit maintenant un système orthonormé $(f_i)_{i=1-n}$ d'éléments de $L^2(X,\mu)$: $<f_i,f_j> = \delta_{ij} \quad \forall i,j = 1-n$

Pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n)$, on a :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_2{}^2 = <x_1f_1+\ldots+x_nf_n,x_1f_1+\ldots+x_nf_n>$$

En développant le produit scalaire, on obtient :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_2{}^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2<f_i,f_i>+2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j<f_i,f_j>$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Par conséquent :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{1/2} = h_2(x)$$
$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

REMARQUE :

1) - D'après la proposition 4.1, la condition citée dans 3.1 pour les espaces $L^p(X,\mu)$ est suffisante mais non nécessaire dans le cas où $p = 2$. Citons un exemple :

$X = [0, 2\pi] \qquad \mu$ = mesure de Lebesgue.

Ce système de n fonctions trigonométriques $\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\cos(n-1)x}{\sqrt{\pi}}$ est bien orthonormé, mais ces n fonctions ne satisfont pas la condition ii) de la proposition 3.1.

2) L'espace $L^2(X,\mu)$ fait partie des espaces fonctionnels de Hilbert dont les normes génèrent une classe de normes de $\mathbb{R}^n$ bien déterminée. Une étude plus approfondie de la classe des normes de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes de tels espaces fera le sujet du chapitre IV.

5. Normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme de l'espace $L^\infty(X,\mu)$.

On va voir maintenant si le résultat de la proposition 3.2 reste encore valable pour $p = +\infty$, c'est à dire si la norme $||\ .||_\infty$ de l'espace $L^\infty(X,\mu)$ génère la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.1.

Si $(f_i)_{i=1-n}$ sont n éléments de l'espace $L^\infty(X,\mu)$ satisfaisant :

i) $||f_i||_\infty = \max\limits_{t\in X} |f_i(t)| = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) $\mu\ \{t\in X : |f_i(t)|=1\} > 0 \qquad \forall i = 1-n$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i| \leq 1$ presque partout sur l'espace X

Alors on a :

$$h_\infty(x) = \max_{i=1-n} |x_i| = ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_\infty$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Vérification

Soient $(f_i)_{i=1-n}$, n éléments de $L^1(X,\mu)$ vérifiant les conditions i), ii) et iii).

Pour tout élément $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|x_1f_1+\ldots+x_nf_n| \leq |x_1f_1|+\ldots+|x_nf_n| \leq \left[\max_{i=1-n} |x_i|\right] \times \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

Or d'après iii)

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i| \leq 1 \text{ presque partout sur } X$$

D'où : $|x_if_i+\ldots+x_nf_n| \leq h_\infty(x)$ presque partout

Par suite $||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_\infty \leq h_\infty(x)$

D'autre part, pour tout élément $x = (x_1,\dots,x_n)$, il existe une composante x_k de x telle que : $h_\infty(x) = \max\limits_{i=1-n} |x_i| = |x_k|$.

D'après ii) et iii) il existe une partie mesurable et de mesure non nulle Y_k telle que :

$$|x_1 f_1(t)+\dots+x_n f_n(t)| = |x_k f_k(t)| = |x_k|\,||f_k||_\infty = |x_k| \qquad \forall t \in Y_k$$

D'où : $||x_1 f_1+\dots+x_n f_n||_\infty \geq |x_k| = h_\infty(x)$

L'inégalité dans les deux sens, donc l'égalité :

$$||x_1 f_1+\dots+x_n f_n||_\infty = \max_{i=1-n} |x_i| = h_\infty(x)$$
$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

La proposition est bien prouvée.

<u>Problème</u> : Existe-t-il de tels éléments $(f_i)_{i=1-n}$ dans $L^\infty(X,\mu)$?

La réponse est positive. En effet, considérons n parties μ - mesurables $(X_i)_{i=1-n}$ telles que :

i) $\mu(X_i) \geqslant 0 \qquad \forall i = 1-n$

ii) $\mu(X_i \cap X_j) = 0 \qquad \forall i \neq j \qquad (i,j = 1-n)$

et n fonctions simples $(f_i)_{i=1-n}$ définies par :

$$f_i(t) = \varphi_{X_i}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in X_i \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

(φ_{X_i} = fonction caractéristique de la partie X_i)

Ces n fonctions $(f_i)_{i=1-n}$ appartenant à $L^\infty(X,\mu)$ vérifient les conditions i), ii) et iii). D'où :

Proposition 5.2.

La norme $|| \ ||_\infty$ de l'espace fonctionnel de Banach $L^\infty(X,\mu)$ génère la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$.

• Cas de la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

On va démontrer maintenant qu'en plus de la norme h_∞, la norme $|| \ ||_\infty$ génère la norme duale h_1 de h_∞. Pour cela on se place tout d'abord dans le cas de $\mathbb{R}^2$, ensuite on essaiera d'étendre le résultat obtenu au cas général de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.3.

Si f_1, f_2 sont deux éléments de $L^\infty(X,\mu)$ satisfaisant :

i) $||f_1||_\infty = \max\limits_{t \ X} |f_1(t)| = 1$; $||f_2||_\infty = \max\limits_{t \ X} |f_2(t)| = 1$

ii) $\mu(\{t \in X : f_1(t) = f_2(t) = \pm 1\}) > 0$

iii) $\mu(\{t \in X : f_1(t) = - f_2(t) = \pm 1\}) > 0$

Alors on a :

$$||x_1 f_1 + x_2 f_2||_\infty = |x_1| + |x_2| = h_1(x)$$
$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Vérification.

Soient f_1, f_2 deux éléments de $L^\infty(X,\mu)$ vérifiant i), ii) et iii).

Pour tout élément $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$||x_1 f_1 + x_2 f_2||_\infty \leq ||x_1 f_1||_\infty + ||x_2 f_2||_\infty = |x_1| \ ||f_1||_\infty + |x_2| \ ||f_2||_\infty = |x_1| + |x_2|$$

D'autre part on a aussi pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|x_1 f_1 + x_2 f_2\|_\infty \geq |x_1| + |x_2| = h_1(x)$$

En effet soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si x_1 et x_2 sont de même signe, alors :

$$|x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t)| = |x_1 f_1(t)| + |x_2 f_2(t)| = |x_1| + |x_2| = h_1(x)$$

$$\forall t\ X : f_1(t) = f_2(t) = \pm 1$$

D'après ii) on déduit que :

$$\|x_1 f_1 + x_2 f_2\|_\infty \geq |x_1| + |x_2| = h_1(x)$$

De même si x_1 et x_2 sont de signe contraire, alors

$$|x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t)| = |x_1 f_1(t)| + |x_2 f_2(t)| = |x_1| + |x_2| = h_1(x)$$

Ce qui donne, en tenant compte de iii) :

$$\|x_1 f_1 + x_2 f_2\|_\infty \geq |x_1| + |x_2| = h_1(x)$$

L'inégalité dans les deux sens, d'où l'égalité :

$$h_1(x) = |x_1| + |x_2| = \|x_1 f_1 + x_2 f_2\|_\infty$$

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

<u>Problème</u> : L'existence de tels f_1, f_2 dans $L^\infty(X, \mu)$.

Soient X_1, X_2 deux parties μ - mesurables de X telles que :

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad ; \quad \mu(X_1) > 0 \quad ; \quad \mu(X_2) > 0$$

Considérons les deux fonctions simples suivantes :

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ Si } t \in X_1 \cup X_2 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \iff f_1 = \varphi_{X_1 \cup X_2} = \varphi_{X_1} + \varphi_{X_2}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 \text{ Si } t \in X_1 \\ -1 \text{ Si } t \in X_2 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \iff f_2 = \varphi_{X_1} - \varphi_{X_2}$$

Il est clair que :

i) $\quad ||f_1||_\infty = \max\limits_{t\ X} |f_1(t)| = 1 \quad ; \quad ||f_2||_\infty = \max\limits_{t\ X} |f_2(t)| = 1$

ii) $\quad \mu(\{t \in X : f_1(t) = f_2(t) = 1\}) = \mu(X_1) > 0$

iii) $\quad \mu(\{t \in X : f_1(t) = -f_2(t) = 1\}) = \mu(X_2) > 0$

D'où

Proposition 5.4.

La norme $||\ \ ||_\infty$ de l'espace fonctionnel de Banach $L^\infty(X,\mu)$ génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^2$.

Il reste maintenant à étendre si c'est possible ce résultat au cas général de $\mathbb{R}^n$.

Le raisonnement qu'on vient de faire dans $\mathbb{R}^2$ est uniquement basé sur un jeu de signes des composantes x_i du vecteur x. Pour n = 2 il y a deux cas à distinguer suivant que x_1 et x_2 sont de même signe ou de signe contraire. Pour n quelconque il y aura 2^{n-1} cas en tenant compte de la symétrie à savoir :

$$x = (x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \delta = (\delta_1,\dots,\delta_n) \text{ avec } \delta_i = \text{sgn}\,(x_i)$$

La symétrie de ce jeu de signes se traduit par le fait que δ et $-\delta$ ne présente qu'un cas à considérer. (Au premier calcul il est clair que le nombre de cas étudiés est égal au nombre des éléments δ ainsi définis c'est à dire 2^n, la symétrie de ce jeu de signes réduit ce nombre à $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$). C'est cela l'esprit général du raisonnement, on va maintenant démontrer la :

Proposition 5.5.

Si $(f_i)_{i=1-n}$ sont n éléments de $L^{\infty}(X,\mu)$ satisfaisant :

i) $||f_i||_{\infty} = \max_{t \; X} |f_i(t)| = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) Pour tout élément $\delta^j=(\delta_1^j,\ldots, \delta_n^j)$:

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\left\{t\in X : f_i(t) = \delta_i^j\right\}\Big) > 0$$

Le nombre de ces conditions est égal au nombre de cas à étudier suivant le comportement des signes des composantes x_i, c'est à dire 2^{n-1}.

Alors $h_1(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_{\infty} \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Vérification.

Soient $(f_i)_{i=1-n}$ n éléments de l'espace $L^{\infty}(X,\mu)$ satisfaisant les conditions i) et ii).

Pour tout élément $x = (x_1,\ldots,x_n)$ il est clair que :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_{\infty} \leq ||x_1f_1||_{\infty} +\ldots+||x_nf_n||_{\infty}$$

$$\leq |x_1| \; ||f_1||_{\infty} +\ldots+ |x_n| \; ||f_n||_{\infty}$$

D'où d'après i) on a :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||_{\infty} \leq |x_1|+\ldots+|x_n| = h_1(x)$$

D'autre part soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$|x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)| = |x_1f_1(t)|+\ldots+|x_nf_n(t)| = |x_1|+\ldots+|x_n| = h_1(x)$$

$\forall t\in X : f_i(t) = \delta_i^j$ (δ^j est le vecteur de signes des composantes (x_i) de x)

Tenant compte de ii) on déduit que :

$$\|x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n\|_\infty \leq |x_1| + \ldots + |x_n| = h_1(x)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\|x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n\|_\infty = |x_1| + \ldots + |x_n| = h_1(x)$$

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

<u>Problème</u> : Peut-on trouver de tels $(f_i)_{i=1-n}$ dans $L^\infty(X,\mu)$?

Soient $(X_i)_{i=1-2^{n-1}}$, 2^{n-1} parties μ - mesurables de X

telles que :

i) $X_i \cap X_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ $(i,j = 1-2^{n-1})$

ii) $\mu(X_i) > 0$ $\forall i = 1-2^{n-1}$

Considérons maintenant n fonctions (f_i) $(i=1-n)$ définies sur X par :

$$f_i(t) = \begin{cases} \delta_i^j & \text{si } t \in X_j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \delta_i^j \varphi_{X_j}$$

Les $(\delta_i^j)_{i=1-n}$ sont les composantes du vecteur δ^j. Ces vecteurs, au nombre de 2^{n-1}, représentent tous les cas possibles du jeu de signes des composantes (x_i) du vecteur x de $\mathbb{R}^n$.

Ces fonctions (f_i) sont des fonctions simples sur X, donc appartiennent à $L^\infty(X,\mu)$. Il est clair que :

$$\|f_i\|_\infty = \max_{t \in X} |f_i(t)| = 1 \qquad \forall i = 1-n$$

D'autre part soit $x = (x_1,\dots,x_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe alors un vecteur δ^j tel que :

$$\mathrm{Sgn}(x_i) = \delta_i^j \qquad \forall i = 1-n$$

ou

$$\mathrm{Sgn}(x_i) = -\delta_i^j \qquad \forall i = 1-n$$

On a alors :

$$|x_1 f_1(t)+\dots+x_n f_n(t)| = |x_1 f_1(t)|+\dots+|x_n f_n(t)| = |x_1|+\dots+|x_n| = h_1(x)$$

$\forall t \in X_j$

Or $\mu(X_j) > 0$, d'où

$$||x_1 f_1+\dots+x_n f_n||_\infty \geq |x_1|+\dots+|x_n| = h_1(x)$$

L'inégalité dans l'autre sens est évidente si $||f_i||_\infty = 1$

$\forall i = 1-n$, ce qui est le cas. D'où l'énoncé :

<u>Proposition 5.6.</u>

La norme $||\ \ ||_\infty$ de l'espace fonctionnel de Banach $L^\infty(X,\mu)$ génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

6. Problème.

On a précédemment démontré que les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ des espaces $L^1(X,\mu)$ et $L^\infty(X,\mu)$ génèrent la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$, et que la norme $\|\ \|_\infty$ génère la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$. Vues la dualité entre les normes h_1 et h_∞ d'une part, la dualité entre les espaces $L^1(X,\mu)$ et $L^\infty(X,\mu)$ d'autre part, il sera alors intéressant de savoir si la norme $\|\ \|_1$ génère aussi la norme h_∞ ?

La réponse à ce problème est négative sauf si $n \leq 2$.
Pour prouver cette affirmation, on va tout d'abord citer ce résultat.

Proposition 6.1.

Entre les normes h_1 et h_∞ de $\mathbb{R}^2$, il existe cette relation :

$$h_\infty(x) = h_1(Ax) \qquad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Par suite si f_1 et f_2 sont deux éléments de $L^1(X,\mu)$ vérifiant :

$$h_1(x) = \int_X |x_1 f_1 + x_2 f_2|\, d\mu \qquad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Alors on a :

$$h_\infty(x) = \int_X |x_1 g_1 + x_2 g_2|\, d\mu \qquad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

avec $g_1 = (f_1+f_2)/_2$ et $g_2 = (f_1-f_2)/_2$

Vérification.

On va démontrer que :

$$\max(|x_1|,|x_2|) = \left|\frac{x_1+x_2}{2}\right| + \left|\frac{x_1-x_2}{2}\right| \qquad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Si $|x_1| \geq |x_2|$ alors :

$$|x_1+x_2| = \begin{cases} |x_1|+|x_2| & \text{Si } Sgn(x_1)=Sgn(x_2) \\ |x_1|-|x_2| & \text{Si } Sgn(x_1)=-Sgn(x_2) \end{cases}$$

et

$$|x_1-x_2| \quad \begin{matrix} |x_1|-|x_2| & \text{Si } Sgn(x_1)=Sgn(x_2) \\ |x_1|+|x_2| & \text{Si } Sgn(x_1)=-Sgn(x_2) \end{matrix}$$

D'où $\max(|x_1|,|x_2|) = |x_1| = \left|\frac{x_1+x_2}{2}\right| + \left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|$

Même raisonnement dans le cas où $|x_2| \geq |x_1|$

Par suite pour tout $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$h_\infty(x) = \left|\frac{x_1+x_2}{2}\right| + \left|\frac{x_1-x_2}{2}\right| = h_1(y)$$

$$\text{avec} \quad y = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot x.$$

Ceci démontre la première relation. La dernière n'en est qu'une déduction en tenant compte de la proposition 2.3 [§.2.]. On va citer maintenant la :

Proposition 6.2.

La norme $\|\ \|_1$ de l'espace $L^1(X,\mu)$ ne peut pas générer la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 3$.

Vérification.

Il suffit, pour cela, de montrer que la norme $\| \|_1$ ne peut pas générer la norme h_∞ de $\mathbb{R}^3$ puisque si la norme $\| \|$ d'un espace de Banach E génère la norme φ de $\mathbb{R}^n$ (pour un entier n donné), $\| \|$ génère forcément φ de $\mathbb{R}^m$ pour $m \leq n$.

Supposons qu'il existe g_1, g_2, g_3 appartenant à $L^1(X,\mu)$ tels que

$$(1)\quad h_\infty(x_1,x_2,x_3) = \int_X |x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3| d\mu \qquad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Les deux couples (g_1,g_2) et (g_1,g_3) peuvent donc définir la norme h_∞ de $\mathbb{R}^2$:

$$h_\infty(\alpha,\beta) = \int_X |\alpha g_1 + \beta g_2| d\mu = \int_X |\alpha g_1 + \beta g_2| d\mu \qquad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

D'après la proposition 5.1 il existe f_1, f_2, h_1, h_2 appartenant à $L^1(X,\mu)$ et vérifiant :

$$h_1(\alpha,\beta) = \int_X |\alpha f_1 + \beta f_2| d\mu = \int_X |\alpha h_1 + \beta h_2| d\mu \qquad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

pour lesquels on a les relations fonctionnelles suivantes :

$$g_1 = \frac{f_1+f_2}{2} \quad , \quad g_2 = \frac{f_1-f_2}{2}$$

$$g_1 = \frac{h_1+h_2}{2} \quad , \quad g_3 = \frac{h_1-h_2}{2}$$

On va trouver maintenant les relations entre (f_1,f_2) et (h_1,h_2).

En vertu de la proposition 2.1, il existe pour le couple (f_1,f_2) deux parties μ - mesurables X_1 et X_2 telles que :

$\mu(X_1 \cap X_2) = 0,$

$X = X_1 \cup X_2 \quad ; \quad f_1 = 0 \ \text{ sur } \ X_2 \setminus (X_1 \cap X_2).$

$f_2 = 0 \ \text{ sur } \ X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$

Au point de vue d'intégration, on ne compte pas le comportement de la fonction intégrable f sur une partie de mesure nulle :

$$f = g \text{ presque partout } \Rightarrow \int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

On peut donc supposer, sans pour autant changer le fond du problème étudié, que :

$$f_1 = 0 \text{ sur } X_2 \quad , \quad f_2 = 0 \text{ sur } X_1$$

Ceci dans le seul but de simplification du raisonnement.

De même pour le couple (h_1,h_2) il existera deux parties μ-mesurables de l'espace X telles que :

$$\mu(Y_1 \cap Y_2) = 0$$

$$X = Y_1 \cup Y_2$$

$$h_1 = 0 \text{ sur } Y_2$$

$$h_2 = 0 \text{ sur } Y_1$$

Posons :

$$Z_1 = X_1 \cap Y_1 \quad ; \quad Z_2 = X_1 \cap Y_2$$

$$Z_3 = X_2 \cap Y_1 \quad ; \quad Z_4 = X_2 \cap Y_2$$

Les quatre parties Z_i μ-mesurables forment bien un recouvrement de l'espace X. D'autre part il est facile de vérifier que :

$$X_1 = Z_1 \cup Z_2 \quad ; \quad X_2 = Z_3 \cup Z_4$$

$$Y_1 = Z_1 \cup Z_3 \quad ; \quad Y_2 = Z_2 \cup Z_4$$

On va traduire alors la relation $f_1+f_2=h_1+h_2$ sur X dans les parties Z_i :

$$h_1+h_2=f_1+f_2 \text{ sur } X \Rightarrow \begin{cases} h_1+h_2=f_1 \text{ sur } Z_1 \cup Z_2 \\ h_1+h_2=f_2 \text{ sur } Z_3 \cup Z_4 \end{cases}$$

$$h_1+h_2=f_1 \text{ sur } Z_1 \cup Z_2 \Rightarrow \begin{cases} h_1=f_1 \text{ sur } Z_1 \\ h_2=f_1 \text{ sur } Z_2 \end{cases}$$

$$h_1+h_2=f_2 \text{ sur } Z_3 \cup Z_4 \Rightarrow \begin{cases} h_1=f_2 \text{ sur } Z_3 \\ h_2=f_2 \text{ sur } Z_4 \end{cases}$$

Les fonctions h_1 et h_2 doivent donc être déterminées à partir de f_1, f_2 par :

$$h_1 = \begin{cases} f_1 \text{ sur } Z_1 \\ f_2 \text{ sur } Z_3 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{cases} f_1 \text{ sur } Z_2 \\ f_2 \text{ sur } Z_4 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

La relation (1) impose ces deux conditions $||g_1+g_2+g_3||_1=1$ et $||g_1-g_2+g_3||_1 = 1$ que l'on va expliciter maintenant :

<u>Condition $||g_1+g_2+g_3||_1 = 1$</u>

$$||g_1+g_2+g_3||_1 = \int_X |g_1+g_2+g_3| d\mu = \int_X \left| \left[\frac{f_1+f_2}{2} + \frac{f_1-f_2}{2} + \frac{h_1-h_2}{2}\right] \right| d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_X |2f_1+h_1-h_2| d\mu$$

Puisque $X = \bigcup_{i=1}^{4} Z_i$ et $\mu(Z_i \cap Z_j) = 0 \quad \forall i \neq j \ (i,j = 1\text{-}4)$

alors :

$$\int_X |2f_1+h_1-h_2| d\mu = \int_{Z_1} |2f_1+h_1-h_2| d\mu + \int_{Z_2} |2f_1+h_1-h_2| d\mu + \int_{Z_3} |2f_1+h_1-h_2| d\mu$$
$$+ \int_{Z_4} |2f_1+h_1-h_2| d\mu$$

En tenant compte des relations fonctionnelles entre (f_1,f_2) et (h_1,h_2) trouvées ci-dessus et les caractérisations de f_1 et f_2, on a :

$$\int_{Z_1} |2f_1+h_1-h_2|d\mu = \int_{Z_1} 3|f_1|d\mu \ ; \quad \int_{Z_2} |2f_1+h_1-h_2|d\mu = \int_{Z_2} |f_1|d\mu$$

$$\int_{Z_3} |2f_1+h_1-h_2|d\mu = \int_{Z_3} |f_2|d\mu \ ; \quad \int_{Z_4} |2f_1+h_1-h_2|d\mu = \int_{Z_4} |f_2|d\mu$$

Par suite :

$$\int_X |2f_1+h_1-h_2|d\mu = 3\int_{Z_1} |f_1|d\mu + \int_{Z_2} |f_1|d\mu + \int_{Z_3} |f_2|d\mu + \int_{Z_4} |f_2|d\mu$$

$$= \int_{Z_1 \cup Z_2 = X_1} |f_1|d\mu + \int_{Z_3 \cup Z_4 = X_2} |f_2|d\mu + 2\int_{Z_1} |f_1|d\mu$$

$$= ||f_1||_1 + ||f_2||_1 + 2\int_{Z_1} |f_1|d\mu$$

Or $||f_1||_1 = ||f_2||_1 = 1$ (caractérisation de f_1,f_2 définissant la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ d'après la proposition 2.1.).

D'où la condition $||g_1+g_2+g_3||_1 = 1$ est équivalente à :

$$\int_{Z_1} |f_1|d\mu = 0$$

Condition $||g_1-g_2+g_3||_1 = 1$

De même, en calculant $||g_1-g_2+g_3||_1$ on obtient :

$$||g_1-g_2+g_3||_1 = \frac{1}{2}\int_X |2f_2+h_1-h_2|d\mu = ||f_1||_1 + ||f_2||_1 + 2\int_{Z_3} |f_2|d\mu$$

Autrement dit la condition $||g_1-g_2+g_3||_1 = 1$ est équivalente à :

$$\int_{Z_3} |f_2| d\mu = 0$$

Par conséquent on a :

$$\int_{Z_1} |f_1| d\mu + \int_{Z_3} |f_2| d\mu = \int_{Z_1 \cup Z_3 = Y_1} |h_1| d\mu = ||h_1||_1 = 0$$

Ce qui est contradictoire avec le fait que $||h_1||_1 = 1$ (d'après la proposition 2.1).

- REFERENCES -

[1] - BOURBAKI N. : " Eléments de mathématique : Livre VI, Intégration "
Actual. Scient. Ind. Chap. I.IV, n° 1175 (2^{e} édit.), n° 1244 (2^{e} éd.) Chap. VII-VIII, n° 1306.
Hermann - Paris 1963-67.

[2] - CHOQUET G. : Cours d'analyse, Tome II. Topologie
Masson et C^{ie} - Paris 1964.

[3] - DIEUDONNE J.: Eléments d'analyse, Tome I : Fondements de l'analyse moderne.
Gauthier-Villars - Paris 1968.

[4] - DIEUDONNE J.: Eléments d'analyse, Tome II.
Gauthier-Villars - Paris 1968.

[5] - BANACH S. : Opérations linéaires (Théorie des)
Chelsea publishing company New-York 1955.

[6] - MAHLON M. DAY : Normed linear spaces
Springer-Verlag 1962.

[7] - KANTOROVITCH L.V ; AKILOV G.P : Functional analysis in normed spaces
Pergamon (1964)

[8] - L. LIUSTERNIK ; V. SOBOLEV : Elements of functional analysis
FREDERICK UNGAR PUBLISHING COMPANY - NEW-YORK (1961)

[9] - GASTINEL N. : Analyse numérique linéaire
Hermann - Paris 1966.

[10] - BASS J. : Exercices de mathématiques
Masson & Cie - Paris 1965.

CHAPITRE II

NORMES DE VECTEUR SUR $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN ESPACE METRIQUE COMPACT ET A VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH.

1.- Espaces $\mathcal{C}(K,F)$ des fonctions continues sur un espace métrique compact K et à valeurs dans un espace de Banach F. Définitions et propriétés générales.

Soient K un espace métrique compact et F un espace de Banach. On note $\mathcal{C}(K,F)$ l'espace vectoriel formé des fonctions continues de K dans F. La compacité de K permet de démontrer que la fonction $||.||$ définie sur $\mathcal{C}(K,F)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par : $||f|| = \sup_{t\in K} ||f(t)|| = \max_{t\in K} ||f(t)||$

$$\forall f\in \mathcal{C}(K,F)$$

est une norme de $\mathcal{C}(K,F)$ ([1] et [2]).

On démontre aussi que ([1], [2] et [17]) :

Proposition.

1) - L'espace normé $\mathcal{C}(K,F)$ est un Banach.

2) - La norme de l'espace $\mathcal{C}(K,F)$ n'est pas strictement convexe.

3) - L'espace $\mathcal{C}(K,F)$ n'est pas réflexif.

4) - Si $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$, le dual topologique de l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des classes des fonctions numériques à variation bornée sur $[a,b]$, $BV[a,b]/_{\sim}$, ([3], [16], et [18]).

Ces espaces viennent aussitôt après les espaces de Hilbert quant à leur importance en analyse fonctionnelle par leurs nombreuses propriétés remarquables, ceci permet d'élargir l'étude de la classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes de ces espaces.

2.- Cas général : F est un espace de Banach quelconque.

La définition de la norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme $||.||$ de $\mathcal{C}(K,F)$:

$$\Psi(x_1,\ldots,x_n) = ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{t\in K} ||x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)||, \ \forall x=(x_i)\in \mathbb{R}^n$$

où (f_i) est un système de n vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{C}(K,F)$, s'exprime d'une façon linéaire en $x_1,\dots,x_n$, ceci fait penser que la norme de l'espace de Banach $\mathcal{C}(K,F)$ peut générer les normes h_1 et h_∞ de $\mathbb{R}^n$.

2.1- Caractérisation des (f_i) définissant la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

On va donner maintenant la caractérisation de n éléments $(f_i)_{i=1-n}$, qui permettent de définir la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ à partir de la norme de $\mathcal{C}(K,F)$. Le problème d'existence de tels (f_i) dans $\mathcal{C}(K,F)$ sera étudié dans la suite.

Proposition 2.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions (f_i) de $\mathcal{C}(K,F)$ vérifient :

$$(1) \quad h_1(x) = |x_1|+\dots+|x_n| = ||x_1f_1+\dots+x_nf_n|| = \max_{t\in K}||x_1f_1(t)+\dots+x_nf_n(t)||$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n$$

est que :

i) $||f_i|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) Pour tout vecteur $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un élément $t_x\in K$ tel que :

a) $||f_i(t_x)||=||f_i||=1 \qquad \forall i = 1-n$

b) $||x_if_1(t_x)+\dots+x_nf_n(t_x)||=||x_1f_1(t_x)||+\dots+||x_nf_n(t_x)||$

Vérification.

Condition nécessaire.

Soient $(f_i)_{(i=1-n)}$, n éléments linéairement indépendants de l'espace $\mathcal{C}(K,F)$ et vérifiant la relation(1).

Il est clair, en prenant $x = e_i$, $(i=1-n)$, dans (1) que :

$$||f_i|| = 1 \qquad \forall i = 1-n.$$

D'autre part, soit $x=(x_1,\ldots,X_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$||x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)||\leq||x_1f_1(t)||+\ldots+||x_nf_n(t)||\leq||x_1f_1||+\ldots+||x_nf_n||=h_1(x)$$
$$\forall t\in K$$

D'où pour que la relation (1) soit vérifiée, il faut qu'il existe un élément $t_x \in K$ tel que :

$$||f_i(t_x)|| = ||f_i|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$$

$$||x_1f_1(t_x)+\ldots+x_nf_n(t_x)||=||x_1f_1(t_x)||+\ldots+||x_nf_n(t_x)||$$

Condition suffisante.

Soient maintenant n éléments (f_i) linéairement indépendants de $\mathcal{C}(K,F)$ et vérifiant les conditions i) et ii).

Soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On a :

$$||x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)||\leq||x_1f_1(t)||+\ldots+||x_nf_n(t)||\leq||x_1f_1||+\ldots+||x_nf_n||.$$
$$\forall t\in K$$

Par suite d'après i)

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||=\max_{t\in K}||x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)|| \leq |x_1|+\ldots+|x_n|= h_1(x)$$

L'inégalité dans l'autre sens se déduit aisément de la condition ii), d'où l'égalité :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||=|x_1|+\ldots+|x_n|= h_1(x)$$
$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2.2 - Problème d'existence de tels (f_i) dans $C(K,F)$ -

On se pose le problème suivant : Existe-t-il dans $C(K,F)$ des éléments (f_i) qui vérifient les conditions i) et ii). La réponse à cette question sera positive.

Pour cela, on va considérer tous les cas possibles du comportement des signes des composantes (x_i) du vecteur x. Comme dans le §.5 [DEUXIEME PARTIE, Chapitre I] on va introduire les éléments $\delta=(\delta_1,\ldots\delta_n)$:

$$\delta_i = \mathrm{Sgn}(x_i) \qquad \forall i=1-n$$

On a démontré qu'il y a au total 2^{n-1} éléments $\delta^j(j=1-2^{n-1})$ correspondants à tous les changements possibles des signes des (x_i) en faisant la convention, pour le compte du raisonnement, que :
Aux vecteurs x et (-x) ne correspond qu'un seul élément $=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ déterminé à partir de x par :

$$\delta_i=\mathrm{Sgn}(x_i) \qquad \forall i = 1-n$$
ou
$$\delta i=\mathrm{Sgn}(-x_i)=-\mathrm{Sgn}(x_i) \qquad \forall i =1-n$$

Ceci étant dit, on va choisir dans le compact K, 2^{n-1} points quelconques (t_j), $(j=1-2^{n-1})$, distincts.

D'après le théorème de prolongement des fonctions numériques continues bornées sur un espace métrique ([1]), il existe n fonctions φ_i de K dans $[-1,1]$ telles que :

$$\varphi_i(t_j)=\delta_i^j \quad \forall i=1-n \text{ et } \forall j=1-2^{n-1}$$

$$\delta_i^j = i^{\text{ème}} \text{ composante du vecteur } \delta^j.$$

Soient maintenant ε un vecteur quelconque de norme égale à 1 de l'espace F et γ isomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\varepsilon$:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\varepsilon$$
$$\lambda \to \lambda\varepsilon$$

Les applications f_i de K dans F définies par :

$$f_i = \gamma \circ \varphi_i$$

sont bien des applications continues et de normes égales à 1.
Soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe alors un vecteur $\delta^j=(\delta_1^j,\ldots,\delta_n^j)$ tel que :

$$\delta_i^j = \mathrm{Sgn}(x_i) \qquad \forall i = 1-n$$

ou

$$\delta_i^j = -\mathrm{Sgn}(x_i) \qquad \forall i = 1-n$$

Pour le point t_j de l'espace métrique compact K, on a

$$||f_i(t_j)||=||(\gamma\circ\varphi_i)(t_j)||= ||(\gamma(\varphi_i(t_j))||=||\delta_i^j.\varepsilon||=||\varepsilon||=1$$

$$\forall i = 1-n$$

De plus :

$$||x_1f_1(t_j)+\ldots+x_nf_n(t_j)||=||x_1\delta_1^j.\varepsilon+\ldots+x_n\delta_n^j\varepsilon||$$

mais d'après ce qui précède, on a soit $x_i \delta_i^j = |x_i| \quad \forall i=1-n$,

soit $x_i \delta_i^j = -|x_i| \quad \forall i=1-n$, par conséquent

$$||x_1 f_1(t_j)+\ldots+x_n f_n(t_j)|| = \left[|x_1|+\ldots+|x_n|\right] \times ||\varepsilon|| = |x_1|+\ldots+|x_n|$$

Ce qui prouve l'affirmation précédente, d'où :

Proposition 2.2.

La norme de l'espace fonctionnel de Banach $C(K,F)$ des applications continues d'un espace métrique compact dans un espace de Banach F génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

Pour la même raison que la norme h_1, on se demande si la norme duale h_∞ de h_1, elle-aussi, pourra être générée par la norme de $C(K,F)$.

2.3 - Caractérisation des (f_i) de $C(K,F)$ définissant la norme h_∞.

Dans le cas général on ne peut donner qu'une condition suffisante pour que n éléments (f_i) de $C(K,F)$ définissent la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$. On verra dans la suite que si $F = \mathbb{R}$ cette condition sera aussi nécessaire.

Proposition 2.3.

Une conditions suffisante pour que n éléments (f_i) de $C(K,F)$ vérifient :

$$h_\infty(x_1,\ldots,x_n) = \max_{i=1-n} |x_i| = ||x_1 f_1+\ldots+x_n f_n||$$

est que :

i) $||f_i||=1 \quad \forall i=1-n$

ii) $\sum_{i=1}^{n} ||f_i(t)|| \leq 1 \quad \forall t \in K \quad (\Longleftrightarrow \max_{t\in K}\left[\sum_{i=1}^{n} ||f_i(t)||\right] = 1)$

Vérification.

En effet, soient $(f_i)_{i=1-n}$ n éléments de $\mathcal{C}(K,F)$ vérifiant les conditions i) et ii), on a pour tout élément $x=(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$||x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)||\leq||x_1f_1(t)||+\ldots+||x_nf_n(t)||\leq\max_{i=1-n}|x_i|\times\sum_{i=1}^{n}||f_i(t)||$$

$\forall t\in K$

D'où d'après ii) :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||=\max_{t\in K}||x_if_i(t)+\ldots+x_nf_n(t)||\leq\max_{i=1-n}|x_i| = h_\infty(x)$$

D'autre part pour un vecteur $x=(x_1,\ldots,x_n)$ il existe x_k telle que

$$\max_{i=1-n}|x_i| = |x_k|$$

Soit t_k un élément de K tel que :

$$||f_k||=\max_{t\in K}||f_k(t)||=||f_k(t_k)||$$

Alors en vertu des conditions i) et ii), on a :

$$||x_1f_1(t_k)+\ldots+x_nf_n(t_k)||=||x_kf_k(t_k)||=|x_k|\ ||f_k||=|x_h|=h_\infty(x)$$

Par suite :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||\geq h_\infty(x)$$

L'inégalité dans les deux sens d'où l'égalité :

$$h_\infty(x) = \max_{i=1-n}|x_i| = ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n||$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

2.4 - Problème.

Peut-on trouver dans $C(K,F)$ des (f_i), $i=1-n$, vérifiant les conditions i) et ii) ?

La réponse à cette question sera aussi positive.

En effet on peut démontrer dans le cas où $F=\mathbb{R}$, que la condition citée dans la proposition 2.3 est aussi nécessaire et qu'il existe n éléments $(g_i)_{i=1-n}$ de $C(K,F)$ vérifiant cette condition :

$$\text{i) : } ||g_i|| = \max_{t\in K} |g_i(t)| = 1 \qquad \forall i = 1-n$$

$$\text{ii) : } \sum_{i=1}^{n} |g_i(t)| \leq 1 \qquad \forall t\in K$$

[Cf §.6., proposition 6.3 dans la suite]

Soient maintenant ε un vecteur de F, de norme égale à 1, et γ l'isomorphisme canonique de R sur $R\varepsilon$:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\varepsilon$$
$$\lambda \to \lambda\varepsilon$$

Considérons alors les n foncitons f_i, $(i=1-n)$, de K dans F définies par :

$$f_i = \gamma o\, g_i$$

Les (f_i) appartiennent bien à $C(K,F)$ et on a :

$$\text{i) } ||f_i|| = \max_{t\in K} ||f_i(t)|| = \max_{t\in K} ||(\gamma o g_i)(t)|| = \max_{t\in K} ||g_i(t).\varepsilon||$$

$$= \max_{t\in K} |g_i(t)| = 1 \qquad (\forall i=1-n)$$

et

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^{n} ||f_i(t)|| = \sum_{i=1}^{n} ||\gamma o g_i(t)|| = \sum_{i=1}^{n} ||g_i(t).\varepsilon|| = \sum_{i=1}^{n} |g_i(t)| \leq 1$$

$$\forall t\in K$$

Ces (f_i) permettent donc de définir la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$ à partir de la norme de $C(K,F)$. :

Proposition 2.4.

La norme de $C(K,F)$ des applications continues d'un espace compact K dans un espace de Banach F peut générer la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$.

3/- Cas où F est un espace de Banach dont la norme est strictement convexe.

Dans le cas où la norme de l'espace de Banach F est strictement convexe, on peut donner une caractérisation plus précise des éléments (f_i) de $C(K,F)$ définissant la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

Pour cela, on va tout d'abord prouver ce résultat.

LEMME.

Si la norme $||.||$ d'un espace G est strictement convexe, alors pour tout système fini $(y_i)_{i=1-n}$ d'éléments de G, la relation :

(2) $||y_1+\ldots+y_m|| = ||y_1||+\ldots+||y_m||$

entraîne :

$$y_i = \alpha_i^j\, y_j \qquad \forall i,j = 1-m$$

où les α_i^j sont des nombres positifs ou nuls. $(\alpha_i^j \geq 0)$

Vérification.

On a d'après l'inégalité triangulaire de la norme :

$$||y_1+\ldots+y_m|| \leq ||y_1|| + ||y_2+\ldots+y_m||$$

Ce qui donne, en tenant compte de la relation (2)

$$||y_1+\ldots+y_m|| = ||y_1|| + ||y_2+\ldots+y_m||$$

La stricte - convexité de la norme impose que :

$$y_2+\ldots+y_m = \lambda_1 y_1 \qquad \lambda_1 \geq 0$$

En raisonnant de la même façon, on obtient :

$$y_3+\ldots+y_m = \lambda_2 y_2 \qquad \lambda_2 \geq 0$$

Et ainsi de suite, enfin on obtient ce système :

$$y_2+\dots+y_i\dots+y_m = \lambda_1 y_i$$

$$y_3+.+y_i\dots+y_m = \lambda_2 y_2$$

$$y_i+..+y_m = \lambda_{i-1} y_{i-1}$$

$$y_{m-1}+y_m = \lambda_{m-2} y_{m-2}$$

$$y_m = \lambda_{m-1} y_{m-1}$$

où les (λ_i), $i=1-(m-1)$, sont des nombres positifs ou nuls.

En remontant de bas en haut dans le système, on peut calculer tous les y_i en fonction de y_m si $y_m \neq 0$, dans le cas où $y_m = 0$, l'élément y_p dont l'indice p est le plus grand tel que $y_p \neq 0$ jouera le rôle de y_m.

Par conséquent on a :

$$y_i = \alpha_i^j \, y_j \qquad \forall i,j = 1-m$$

Il est facile de voir, d'après le système, que ces nombres α_i^j sont positifs ou nuls.

Proposition 3.1.

Si F est un espace de Banach dont la norme est strictement convexe, alors les fonctions $(f_i)_{i=1-n}$ de $\mathcal{C}(K,F)$ vérifient :

$$h_1(x) = |x_1|+\dots+|x_n| = ||x_1 f_1+\dots+x_n f_n||$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

si et seulement si

i) $||f_i|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) Pour tout vecteur $\delta^j = (\delta_i^j,\ldots,\delta_n^j)$, $j = 1-2^{n-1}$, il existe un élément $t_j \in K$ tel que :

$\delta_i^j\ f_i(t_j) = y$ où y est un vecteur de F de norme égale à 1.

Vérification.

Il suffit d'expliciter la condition ii) de la proposition 2.1 dans le cas où la norme $\|\ \|$ de F est strictement convexe, en utilisant le lemme qui vient d'être montré. La relation b) de la condition ii) entraîne alors :

$$x_i f_i(t_x) = \alpha_i^j(x).x_j f_j(t_x) \qquad \forall i,j = 1-n$$

avec $\delta_i^j(x) > 0$. Soit, en introduisant le vecteur $\delta^j = (\delta_1^j,\ldots,\delta_n^j)$ tel que

$\delta_i^j = \mathrm{Sgn}(x_i) \quad \forall i = 1-n \quad$ ou $\quad \delta_i^j = -\mathrm{Sgn}(x_i)$

$\forall i = 1-n$, les vecteurs $\delta_i^j f_i(t_x)$, $i=1-n$, sont proportionnels aux coefficients positifs, or d'après la relation a) :

$$\|f_i(t_x)\| = \|f_i\| = 1 \qquad \forall i = 1-n$$

D'où on a :

$$\delta_i^j f_i(t_x) = y \quad , \quad y \in F \quad \|y\| = 1 \qquad (\forall i=1-n)$$

Il est facile de voir que dans ce cas l'élément t_x ne dépend que du comportement des signes des composantes (x_i) du vecteur x, autrement dit t_x dépend du vecteur δ^j. Enfin, on peut conclure dans le cas où la norme de l'espace F est strictement convexe, que la condition ii) devient :

ii) Pour tout vecteur $\delta^j=(\delta_1^j,\ldots,\delta_n^j)$, $j=1-2^{n-1}$, il existe un élément $t_j \in K$ tel que :

$$\delta_i^j f_i(t_j) = y \qquad \forall i = 1-n$$

où y est un vecteur de F de norme égale à 1.

L'exemple que l'on vient de donner pour montrer l'existence des (f_i) qui permettent de définir la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ à partir de celle de l'espace fonctionnel $\mathcal{C}(K,F)$, dans le cas général, est aussi admissible dans le cas où la norme de F est strictement convexe, d'où :

Proposition 3.2.

Soient K un espace compact, F un espace de Banach dont la norme est strictement convexe. Alors l'espace $\mathcal{C}(K,F)$ des applications continues de K dans F génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

4. Cas où la norme de l'espace F génère une norme φ de $\mathbb{R}^n$.

On se place maintenant dans le cas particulier intéressant où l'espace de Banach F génère une norme φ de $\mathbb{R}^n$. On obtient alors ce résultat :

Proposition.

Si la norme de l'espace de Banach F génère la norme φ de $\mathbb{R}^n$, alors la norme de l'espace $\mathcal{C}(K,F)$ génère aussi la norme φ.

Vérification.

Puisque la norme φ de $\mathbb{R}^n$ est générée par la norme de F, alors il existe n éléments $(\varepsilon_i)_{i=1-n}$ de F tels que :

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = ||x_1\varepsilon_1+\ldots+x_n\varepsilon_n||$$

$$\forall x = (x_1,\ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Soient α l'application continue de K dans $[-1, 1]$ dont la norme est égale à 1, et γ_i, $i = 1-n$, l'isomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\varepsilon_i$

$$\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\varepsilon_i$$
$$\lambda \to \lambda\varepsilon_i$$

Considérons ces n fonctions f_i de K dans F définies par :

$$f_i = \gamma_i o\alpha \qquad (\forall i = 1-n)$$

Ce sont bien n éléments de $\mathcal{C}(K,F)$; et on a pour tout vecteur $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$||x_1f_1+\dots+x_nf_n|| = \max_{t\in K} ||x_1f_1(t)+\dots+x_nf_n(t)||$$

$$= \max_{t\in K} ||x_1.\alpha(t).\varepsilon_1+\dots+x_n.\alpha(t).\varepsilon_n||$$

$$= \left[\max_{t\in K}|\alpha(t)|\right]\times||x_1\varepsilon_1+\dots+x_n\varepsilon_n||$$

$$= ||\alpha||.||x_1\varepsilon_1+\dots+x_n\varepsilon_n||=||x_1\varepsilon_1+\dots+x_n\varepsilon_n||$$

Soit :

$$||x_1f_1+\dots+x_nf_n|| = \varphi(x_1,\dots,x_n)$$
$$\forall x = (x_1,\dots,x_n)$$

Remarque.

Pour que cette propriété soit vraie quelque soit l'entier positif n, il faut supposer que la dimension de F est infinie. On va étudier maintenant le cas plus important où l'espace F est de Hilbert, on sait d'après le résultat précédent que la norme de l'espace $\mathcal{C}(K,F)$ génère la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$, mais en plus dans ce cas on peut donner une caractérisation des éléments (f_i) de $\mathcal{C}(K,F)$ définissant la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$.

5. Cas où F est un espace de Hilbert.

Proposition.

Soient K un espace compact métrique et F un espace de Hilbert.

Si $(f_i)_{i=1-n}$ sont n éléments de $\mathcal{C}(K,F)$ vérifiant :

i) Pour tout $i \neq j$ $(i,j=1-n)$

$$<f_i(t),f_j(t)>=0 \qquad \forall t\in K \quad (<.,> \text{ est le produit scalaire de } F)$$

ii) Il existe un élément $\tau \in K$ tel que :

$$||f_i|| = ||f_i(\tau)|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$$

Alors on a :

$$||x_1 f_1+\ldots+x_n f_n|| = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|2\right]^{1/2} = h_2(x)$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,) \in \mathbb{R}^n$$

<u>Vérification</u>.

Soient $(f_i)_{i=1-n}$ n éléments de $\mathcal{C}(K,F)$ vérifiant les conditions i) et ii).

On a pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$||x_1 f_1(t)+\ldots+x_n f_n(t)||^2 = <x_1 f_1(t)+\ldots+x_n f_n(t),x_1 f_1(t)+\ldots+x_n f_n(t)>$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 ||f_i(t)||^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j < f_i(t),f_j(t)>$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 ||f_i(t)||^2 \qquad \text{d'après i)}$$

Ceci quelque soit $t \in K$, par suite d'après ii) on obtient :

$$||x_1 f_1+\ldots+x_n f_n||= \max_{t\in K} ||x_1 f_1(t)+\ldots+x_n f_n(t)||= \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2} =h_2(x)$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n)\in \mathbb{R}^n$$

Ce résultat nous fournit un exemple du fait que la norme de l'espace fonctionnel $\mathcal{C}(K,F)$ qui n'a pas de structure hilbertienne, génère tout de même la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$.

Ceci répond au problème à savoir si seules les normes des espaces hilbertiens peuvent générer la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$ vue l'analogie entre ces deux normes ?

Enfin on se place dans le cas le plus utilisé dans l'analyse numérique où l'espace F n'est autre que l'espace $\mathbb{R}$.

6. Cas où $F = \mathbb{R}$.

La norme habituelle de $\mathbb{R}$, " valeur absolue ", est strictement convexe, en plus c'est un espace à une dimentsion ; on obtient dans ce cas une caractérisation plus simples des éléments (f_i) de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ définissant la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

6.1-Caractérisation des éléments (f_i) définissant la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 6.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour que n éléments (f_i) de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ vérifient la relation :

$$h_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n||$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

est que :

i) - $||f_i|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) - Pour tout vecteur $\delta^j = (\delta_i^j,\ldots,\delta_n^j)$, $j = 1-2^{n-1}$, il existe un élément $t_j \in K$ tel que :

$$f_i(t_j) = \delta_i^j \qquad \forall i = 1-n$$

Vérification.

Il suffit pour cela, d'expliciter la condition ii) de la proposition 3.1 dans le cas où $F = \mathbb{R}$. On a alors :

ii) - Pour tout vecteur $\delta^j = (\delta_1^j, \dots, \delta_n^j)$, $j = 1-2^{n-1}$, il existe un élément $t_j \in K$ tel que :

$$\delta_i^j f_i(t_j) = 1 \qquad \forall i = 1-n$$

Autrement dit : $f_i(t_j) = \delta_i^j$

D'où la proposition

6.2 - Caractérisation des éléments (f_i) définissant la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$.

La proposition 1.3 nous fournit une condition suffisante pour que n éléments de $\mathcal{C}(K,F)$, F est un Banach quelconque, définissent la norme h_∞ de R^n à partir de la norme de $\mathcal{C}(K,F)$. Cette condition n'étant pas nécessaire en général, l'est dans le cas où $F=\mathbb{R}$ comme le prouve :

Proposition 6.2.

Pour que n éléments (f_i) de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ vérifient la relation :

$$(1) \quad h_\infty(x) = \max_{i=1-n} |x_i| = ||x_1 f_1 + \dots + x_n f_n|| = \max_{t \in K} |x_1 f_2(t) + \dots + x_n f_n(t)|$$

il faut et il suffit que :

i) $||f_i|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)| \leq 1 \qquad \forall t \in K \qquad (\Longleftrightarrow \max_{t \in K} [\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|] = 1)$

Vérification.

Condition suffisante.

Soient $(f_i)_{i=1-n}$ n éléments de $C(K,\mathbb{R})$ vérifiant i) et ii)

Pour tout vecteur $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}|x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)| &\leq |x_1||f_1(t)|+\ldots+|x_n||f_n(t)|\\ &\leq \left[\max_{i=1-n}|x_i|\right]\times\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|\\ &\leq h_\infty(x)\times\max_{t\in K}\left|\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|\right|\end{aligned}$$

Par suite

$$\max_{t\in K}|x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)|\leq\Psi(x).\ \max_{t\in K}\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\right|$$

Alors si ii) est vérifié on aura

$$\max_{t\in K}|x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)|\leq\Psi(x)$$

D'autre part on a pour tout $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\Psi(x)=\max_{i=1-n}|x_i| = |x_k|$$

Soient $t_k\in K$ tel que $|f_k(t_k)|=||f_k||=1$ (d'après i)) alors

$$x_1f_1(t_k)+x_2f_2(t_k)+\ldots+x_nf_n(t_k) = x_kf_k(t_k)$$

car $f_i(t_k)=0$ si $i\neq k$ d'après ii)

Par conséquent

$$\max_{t\in K}|x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)|\geq\Psi(x)$$

D'où la relation (1).

CONDITION NECESSAIRE.

Pour tout $i=1-n$, on considère l'élément $x=(x_1,\dots x_n)$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{ème}$ x_i, la relation (1) nous donne alors

$$\max_{k=1-n} |x_k| = |x_i| = |x_i| \max_{t\in K} |f_i(t)| \quad \Longrightarrow \quad ||f_i|| = 1$$

Ce qui montre i)

On considère à nouveau l'inégalité précédente

$$\max_{t\in} |x_1 f_1(t)+\dots+x_n f_n(t)| \le \Psi(x) . \max_{t\in K} \left[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|\right]$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

La fonction : $t \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|$ étant continue sur K,

soit $t_o \in$ tel que $\max_{t\in} \left[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|\right] = \sum_{i=1}^{n} |f_i(t_o)|$

Soit $x = (x_1,\dots,x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que

a) $|x_1| = \dots = |x_n| = \alpha>0$

b) $x_i f_i(to) = |x_i f_i(to)| = |x_i||f_i(to)| = \alpha |f_i(to)| \quad \forall i=1-n$

Avec de tels éléments l'inégalité précédente devient

$$\max_{t\in} |x_1 f_1(t)+\dots+x_n f_n(t)| \le \alpha \sum_{i=1}^{n} |f_i(to)|$$

mais

$$|x_1 f_1(to)+\dots+x_n f_n(to)| = \alpha\sum_{i=1}^{n} |f_i(to)| \le \max_{t\in} |x_1 f_1(t)+\dots+x_n f_n(t)|$$

Ce qui montre que l'égalité peut être atteinte dans cette inégalité. D'autre part la relation(1) nous donne

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} |f_i(to)| = \alpha \quad \Longrightarrow \max_{t\in} \left[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)\right. = 1$$

D'où la condition ii) est nécessaire.

On va maintenant prouver qu'il existe bien de tels éléments (f_i) dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, autrement dit la norme de la convergence uniforme de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ génère bien la norme h de $\mathbb{R}^n$.

Pour cela on vérifie tout d'abord ce petit lemme.

Lemme 1.

Soient Y un espace topologique séparé et $(y_i)_{i=1-n}$ n points distincts de Y. Alors il existe n voisinages $V_i \in \mathcal{V}(y_i)$ $(i=1-n)$ tels que pour tout $i=1-n$

$$V_i \cap \left(\bigcup_{\substack{j\neq i\\ j=1-n}} V_j\right) = \emptyset$$

Vérification.

Puisque Y est séparé, pour tout couple (y_i, y_j) $i\neq j$ il existe $V_{ij} \in \mathcal{V}(y_i)$ et $V_{ji} \in \mathcal{V}(y_j)$ disjoints. Considérons maintenant pour tout $i = 1-n$

$$V_i = \bigcap_{j\neq i} V_{ij}$$

Les V_i restent encore voisinages de y_i car il s'agit d'une intersection finie de voisinages. D'autre part pour tout $i=1-n$, on a :

$$V_i \cap \left(\bigcup_{j\neq i} V_j\right) = \bigcup_{j\neq i} (V_i \cap V_j) = \emptyset$$

car si i et j sont différents

$$V_i \cap V_j \subset (V_{ij} \cap V_{ji}) = \emptyset$$

Proposition 6.3.

Soit $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ l'espace fonctionnel de Banach formé des fonctions numériques continues sur un compact métrique. Alors il existe n éléments f_i (i=1-n) de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ vérifiant :

i) $||f_i|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) $\max\limits_{x\in K} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i(x)|\right] = 1$

Autrement dit, en tenant compte de la proposition 6.2, la norme de la convergence uniforme de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ génère bien la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$.

Vérification.

Choisissons n points distincts quelconques x_i (i=1-n) de K. D'après le lemme précédent il existe n voisinages $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$ tels que

$$V_i \cap (\bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} V_j) = \emptyset$$

(Dans ce cas où K est métrique ceci revient à dire qu'il existe $\rho > 0$ tel que les boules ouvertes $B_0(x_i,\rho) \in \mathcal{V}(x_i)$ vérifient la propriété. On peut toujours supposer que ces V_i sont des voisinages ouverts.

Pour tout i = 1-n, posons $F_i = \complement V_i$

On a alors $(\bigcup\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} V_j) \subset F_i \qquad \forall i = 1-n$

F_i et $\{x_i\}$ sont deux fermés non vides et disjoints de ($\forall i=1-n$). D'après le théorème de prolongement (de fonctions continues) de Tietze-Urysohn ([1] et [8]) il existe une fonction continue f_i définie sur K à valeurs dans $[0, 1]$ telle que :

$f_i(x_i) = 1$

et

$f_i(x) = 0 \qquad \forall x \in F_i$

et ceci pour tout i=1-n.

Il est facile de voir que, quelque soit i=1-n, l'ensemble $\{ x \in K : f_i(x)>0 \}$ est bien contenu dans V_i.

Les f_i $(i=1-n)$ appartiennent à $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ et sont tous de normes égales à 1. D'autre part,

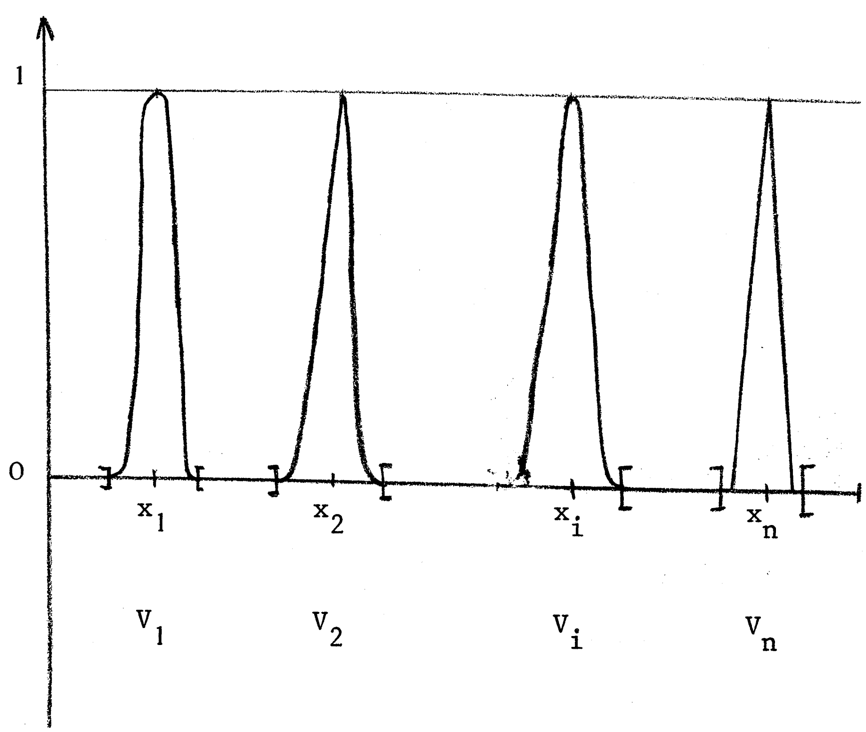
$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = f_i(x) \quad \text{si } x \in V_i$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(x)| = 0 \qquad \text{si } x \notin \bigcup_{k=1}^{n} V_k = \bigcup_{k=1}^{n} \complement F_k = \complement\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{n} F_k$$

Par suite on a bien la condition suivante :

$$\max_{x\in K} \left[\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|\right] = 1$$



7. Certaines propriétés particulières concernant la norme de la convergence uniforme de l'espace $C(K,\mathbb{R})$.

Dans §.4. [PREMIERE PARTIE] on a pu démontrer par un exemple qu'une norme φ non strictement convexe d'un espace de Banach peut générer des normes strictement convexe Ψ sur $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas particulier de l'espace $C(K,\mathbb{R})$ dont la norme est non strictement convexe, on va chercher à savoir si les normes usuelles h_p $(1<p<+\infty)$ sur $\mathbb{R}^n$ font partie de la classe des normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par la norme de $C(K,\mathbb{R})$.

Soit $(f_i)_{i=1-n}$ un système de n vecteurs linéairement indépendants de l'espace $C(K,\mathbb{R})$. On définit les fonctions θ^+ et θ^- de K dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$K \xrightarrow{\theta^+} R^n$$

$$t \longrightarrow \theta^+(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))$$

et

$$\theta^-(t) = -\theta^+(t) \qquad \forall t\in K$$

Puisque les f_i $(i=1-n)$ sont n fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, θ^+ et θ^- sont des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\Gamma=\theta^+(K)\cup\theta^-(K)$. Γ est une partie compacte symétrique par rapport à l'origine. [On remarque que θ^+ et θ^- représentent deux courbes paramétrées dans l'espace $\mathbb{R}^n$ symétriques par rapport à l'origine 0].

Ceci étant dit, on peut alors exprimer la norme de tout élément $x_1f_1+\dots+x_nf_n \in C(K,\mathbb{R})$ à l'aide du produit scalaire de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et de la partie Γ :

$$||x_1f_1+\dots+x_nf_n|| = \max_{t\in K}|x_1f_1(t)+\dots+x_nf_n(t)| = \max_{Z\in\Gamma} x^T Z$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Pour toute norme de Hölder d'ordre p, h_p, $(1<p<+\infty)$, on pose

$$U_p = \{x \in \mathbb{R}^n : h_p(x) \leq 1\}$$

et

$$S_p = \{x \in \mathbb{R}^n : h_p(x) = 1\}$$

On peut énoncer cette

Proposition

Si les (f_i) vérifient la relation :

$$(1) \quad ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{t\in K}|x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)| = h_p(x)$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

alors on a :

$$h_q[f_1(t),\ldots,f_n(t)] = \Big[\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|^q\Big]^{1/q} \leq 1 \qquad \forall t \in K$$

où q est le nombre conjugué de $p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Autrement dit la partie compacte Γ correspondante est contenue dans la boule unité U_q de la norme h_q (norme duale de h_p)

Vérification.

En effet supposons qu'il existe un élément $\alpha \in K$ tel que

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} |f_i(\alpha)|^q\Big]^{1/q} > 1 \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f_i(\alpha)|^q > 1$$

Considérons alors le vecteur $x=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x_i = |f_i(\alpha)|^{q-1} \operatorname{Sgn}(f_i(\alpha) \qquad \forall i=1-n$$

On a :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{t\in K}|x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)| \geq |x_1f_1(\alpha)+\ldots+x_nf_n(\alpha)|$$

Or

$$|x_1f_1(\alpha)+\ldots+x_nf_n(\alpha)| = \sum_{i=1}^{n}|f_i(\alpha)|^q > \left|\sum_{i=1}^{n}|f_i(\alpha)|^q\right|^{1/p} = h_p(x_1,\ldots,x_n)$$

d'où

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| > h_p(x_1,\ldots,x_n)$$

ce qui entraîne une contradiction.

7.1 - Caractérisation des éléments (f_i) de l'espace $C(K,\mathbb{R})$ définissant la norme h_p de $\mathbb{R}^n$ $(1<p<+\infty)$

On va donner maintenant une caractérisation des éléments (f_i) de l'espace $C(K,\mathbb{R})$ vérifiant la relation :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{z\in\Gamma} x^Tz = h_p(x)$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Il est clair que cette relation est équivalente à la suivante :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{z\in\Gamma} x^Tz = 1$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in S_p$$

On cite alors cette

Proposition 7.1.

Pour que n éléments (f_i) de l'espace $C(K,\mathbb{R})$ vérifient la relation :

$$(1)\quad ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{z\in\Gamma} x^Tz = 1$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in S_p$$

il faut et il suffit que Γ vérifie cette propriété :

$$S_q \subset \Gamma \subset U_q$$

Vérification.

La dualité entre les normes h_p et h_q de $\mathbb{R}^n$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ permet d'affirmer cette propriété :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \qquad \exists\, y\in S_q \ :\ h_p(x) = \max_{z\in S_q} x^Tz = x^Ty$$

En fait il y a unicité de l'élément y vérifiant cette relation puisque les normes h_p $(1<p<+\infty)$ sur $\mathbb{R}^n$ sont strictement convexes, plus précisément on peut donner les relations entre x et y :

$$y_i = \left[\frac{|x_i|}{h_p(x)}\right]^{p-1} \cdot \quad \mathrm{Sgn}\ (x_i) \qquad \forall i = 1-n$$

Si $x \in S_p$ on a :

$$y_i = |x_i|^{p-1} \cdot \mathrm{Sgn}\ (x_i) \qquad \forall i=1-n$$

Cette correspondance entre x et y définit donc une bijection de S_p sur S_q. D'autre part d'après la proposition ci-dessus,une condition nécessaire pour que les (f_i) vérifient la relation(1) est que $\Gamma \subset U_q$, par suite on a :

$$\max_{z\in\Gamma} x^T z \leq \max_{z\in U_q} x^T z = \max_{z\in S_q} x^T z$$

On en déduit alors que les (f_i) vérifient la relation (1) si et seulement si la partie Γ contient S_q.

7.2 - Problème d'existence de tels (f_i) dans l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

On a définir la partie Γ comme la réunion de $\theta^+(K)$ et $\theta^-(K)$ où θ^+ et θ^- sont deux fonctions de K dans $\mathbb{R}^n$ déterminées par :

$$\theta^+ : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow \theta^+(t) = (f_1(t),\ldots,f_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\theta^-(t) = -\theta^+(t) \qquad \forall t \in K$$

$\theta^+(K)$ et $\theta^-(K)$ sont deux parties compactes symétriques par rapport à l'origine O. Par suite la partie Γ contient la partie S_q si et seulement si $\theta^+(K)$ contient une intersection de S_q avec un demi-espace fermé déterminé par un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine , (c'est à dire la moitié de S_q). Le problème d'existence des éléments (f_i) de l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ vérifiant la relation (1) est donc équivalent au problème d'existence d'une fonction continue θ de K dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\theta(K)$ contient une moitié de la partie S_q tout en restant dans U_q. On va montrer qu'il existe des espaces métriques compacts K tels que les espaces $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ contiennent des (f_i) satisfaisant la relation (1). Avant tout, on énonce ces deux propirétés indispensables à la démonstration :

Proposition 7.2.1

Pour toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$, la frontière S_Ψ de la boule unité de Ψ : $S_\Psi = \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x) = 1\}$
est compact, connexe et localement connexe.

Vérification.

Il a été démontré dans ([7], [8] et [10]) que la sphère $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : h_2(x) = 1\}$ est compacte, connexe et localement connexe. D'autre part l'application de S_Ψ dans S_2 définie par :

$x \in S_\Psi \rightarrow \frac{1}{h_2(x)} \cdot x$ est une homéomorphie de S_Ψ sur S_2. Par suite S_Ψ est compact, connexe et localement connexe.

Proposition 7.2.2. (Théorème de HAHN-MAZURKIEWICZ) ([9]).

Pour qu'un espace métrique E soit l'image d'un intervalle $[a, b]$ $\mathbb{R}$ par une application continue il faut et il suffit que E soit compact, connexe et localement connexe.

Vérification.

Cette propriété est démontrée dans ([8], et [9]). Elle permet de caractériser les espaces métriques compacts connexes et localement connexes. Un tel espace est appelé espace de Péano.

Ceci étant dit, on peut citer la

Proposition 7.2.3.

Si K est un espace métrique compact tel qu'il existe une fonction numérique continue γ de K sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors la norme de l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ généère toutes les normes usuelles h_p de $\mathbb{R}^n$.

Vérification.

On a démontré que la norme de l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ génère les normes h_1 et h_∞ de $\mathbb{R}^n$ quelque soit l'espace métrique compact K [Proposition 2.2 et 2.4]. Il suffit donc de prouver que la norme de la convergence uniforme de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ génére les normes h_p $(1<p<+\infty)$ de $\mathbb{R}^n$.

D'après la proposition 7.2.1, S_p est un espace métrique compact, connexe et localement connexe, par suite, en vertu de la proposition 7.2. il existe une surjection continue ρ d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sur S_p. L'application $\theta = \rho_o\gamma$ de l'espace métrique compact K dans S_p est donc une surjection continue :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "\theta = \rho_o\gamma"'] & {[a,b]} \arrow[r, "\rho"] & S_p \end{tikzcd}$$

D'où l'assertion précédente.

Corollaire.

Si K est un espace métrique compact et connexe, alors la norme de l'espace $C(K,\mathbb{R})$ génére toutes les normes usuelles h_p de $\mathbb{R}^n$.

Vérification.

En effet d'après le théorème de prolongement des fonctions continues sur des espaces normaux ([1] et [8]) il existe une fonction numérique γ continue de K dans $[a,b]$ telle que a et b appartiennent à $\gamma(K)$, cette fonction numérique est forcément surjective puisque K est connexe. D'où ce résultat.

7.3.-Généralisation des résultats de 7.1 et 7.2.

Dans les parties 7.1 et 7.2 on a donné une caractérisation des éléments (f_i) de $C(K,\mathbb{R})$ qui permettent de définir les normes h_p de $\mathbb{R}^n$ $(1<p<+\infty)$ à partir de la norme de l'espace $C(K,\mathbb{R})$ et ensuite montré l'existence des espaces métriques compacts K tels que les espaces $C(K,\mathbb{R})$ contiennent effectivement de tels (f_i). On voit que la démonstration de la proposition 7.1 n'est basée que sur la stricte convexité des normes h_p $(1<p<+\infty)$ et jamais la structure particulière de h_p n'y intervient. D'où l'idée de généralisation de la proposition 7.1 aux normes strictement convexes de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 7.3.1.

Si la norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ est telle que sa norme duale Ψ^* soit strictement convexe, alors pour que n éléments (f_i) de l'espace $C(K,\mathbb{R})$ vérifient la relation :

(1) $||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{z\in\Gamma} x^Tz = 1 \qquad \forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in S_\Psi$

il faut et il suffit que la partie Γ vérifie :

$$S_{\Psi^*} \quad \Gamma \subset U_{\Psi^*} .$$

Pour la démonstration de cette proposition, la propriété suivante valable pour une norme φ quelconque de $\mathbb{R}^n$ est indispensable.

Proposition 7.3.2.

Soit ~~φ~~ une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Une condition nécessaire pour que n éléments (f_i) linéairement indépendants de l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ vérifient la relation :

$$(1) \quad \|x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n\| = \max_{z\in\Gamma} x^T z = 1 \qquad \forall x=(x_1,\ldots,x_n)\in S_\varphi$$

est que la boule unité $U_{\varphi^*} = \{x\in\mathbb{R}^n : \varphi^*(x) \leq 1\}$ ~~contient~~ Γ.

Vérification.

Supposons qu'il existe un élément $\alpha \in K$ tel que $\varphi^*[f_1(\alpha),\ldots,f_n(\alpha)] > 1$

La dualité entre les normes φ et φ^* assure l'existence d'un élément $x\in S_\varphi$ tel que :

$$x^T y = \varphi(x)\,\varphi^*(y) = \varphi^*(y) > 1$$

où $\quad y = (f_i(\alpha))$

Par suite

$$\max_{z\in\Gamma} x^T z \geq x^T y > 1$$

D'où la contradiction avec la relation (1). Par conséquent on a :

$$\varphi^*[f_1(t),\ldots,f_n(t)] \leq 1 \qquad \forall t\in K$$

c'est à dire $\Gamma\subset U_{\varphi^*}$

Ceci étant établi, on va montrer maintenant la proposition 7.3.1.

Vérification de la proposition 7.3.1.

On a en vertu de la dualité entre les normes Ψ et Ψ^* de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x\in S_\Psi \quad \exists\, y \quad S_{\Psi^*} \;:\; \Psi(x) = \max_{z\in S_{\Psi^*}} x^T z = x^T y$$

De plus si la norme Ψ^* est strictement convexe, il y aura l'unicité de l'élément y.

D'autre part puisque la partie Γ doit être nécessairement contenue dans U_{Ψ^*}, on a pour tout $x \in S_\Psi$:

$$\max_{z\in\Gamma} x^T z \leq \max_{z\in U_{\Psi^*}} x^T z = \max_{z\in S_{\Psi^*}} x^T z = \quad (x) = 1.$$

La condition suffisante est alors évidente. Quant à la condition nécessaire supposons qu'il existe $y \in S_{\Psi^*}$, $y \notin \Gamma$ il existerait alors un élément $x \in S_\Psi$ tel que :

$$\Psi(x) = \max_{z\in S_{\Psi^*}} x^T z = x^T y = 1$$

Par suite $\max_{z\in\Gamma} x^T z < x^T y = 1$ car la stricte convexité de la norme Ψ^* assure l'unicité de l'élément y.

Le problème d'existence de tels (f_i) dans l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ peut être traité de la même façon que dans le cas 7.2. Dans le contexte plus général du problème des normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ on va démontrer qu'il existe des espaces métriques compacts K tels que les normes de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ génèrent toutes les normes Ψ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 7.3.3.

Si l'espace métrique compact K vérifie l'une des conditions suivantes :

i) Il existe une surjection continue de K sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

ii) L'espace métrique compact K est connexe. Alors la norme de l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ génère toutes les normes Ψ de $\mathbb{R}^n$.

Vérification.

D'après la proposition 7.2.1, S_{Ψ^*} est un espace de Péano.par suite d'après le théorème de HAHN-MAZURKIEWICZ (proposition 7.2.2) S_{Ψ^*} est l'image continue d'une application γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$$

$$\gamma([a,b]) = S_{\Psi^*}$$

D'autre part l'une des conditions i) et ii) assure l'existence d'une surjection continue ρ de K sur $[a,b]$; par suite l'application $\theta = \gamma_0 \rho$ de K dans $\mathbb{R}^n$ est continue et telle que $\theta(K) = S_{\Psi^*}$.
Les fonctions (f_i), $i = 1\text{-}n$, fonctions coordonnées de θ :

$$f_i = \theta_0 prj_i \qquad \forall i = 1\text{-}n$$

où prj_i désigne la projection de l'espace $\mathbb{R}^n$ sur les espaces facteurs, définissent bien la norme Ψ à partir de la norme de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.
Il est clair que la proposition 7.3.3 permet d'affirmer la propriété suivante :

Proposition 7.3.4

Tout espace normé de dimension finie est isométriquement isomorphe à un sous espace de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
La démonstration de ce résultat faite ci-dessus est uniquement basée sur le fait que la dimension de l'espace normé est finie. Alors il y a réflexivité des normes Ψ, $\Psi^{**} = \Psi$, et que toute partie $S_\Psi = \{x \in \mathbb{R}^n, \Psi(x) = 1\}$ est un espace de Péano.

Cependant ce résultat pouvait être prévu grâce à la propriété de l'universalité de l'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ dont la démonstration est différente et plus compliquée.

8. Universalité de l'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Définition. Soit E un espace métrique séparable. E est dit universel si tout espace métrique séparable est isométrique à un sous espace de E.

Le mathématicien russe P.S. URYSON a démontré en 1925 qu'il existe des espaces universels. Plus tard les mathématiciens S. Banach et S. Mazur ont prouvé que l'espace $\mathcal{C}([0,1], R)$ est universel.

La démonstration du théorème de Banach et Mazur est basée sur la faible compacité des espaces duaux.

Pour arriver à ce résultat, on doit passer par plusieurs étapes sanctionnées par des théorèmes ([16]) et ([17]).

Théorème 1.

Tout espace de Banach séparable est isométriquement isomorphe à un sous espace de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Théorème 2. (FRECHET)

Tout espace métrique séparable X est isométrique à un sous espace d'un espace de Banach séparable.

Théorème 3. (BANACH-MAZUR)

Tout espace métrique séparable est isométrique à un sous espace de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Et enfin ce théorème de BANACH-STONE qui permet de conclure que tout espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, où $[a,b]$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, est universel.

Théorème (BANACH-STONE) ([17]).

Si S et S' sont deux espaces compacts, alors les espaces $\mathcal{C}(S,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(S',\mathbb{R})$ sont isométriquement isomorphes si et seulement S et S' sont homéomorphes.

Ce résultat est effectivement plus général, mais dans le cadre de cette théorie de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie générées par les normes des espaces de Banach, celui de §.7. est plus avantageux puisqu'il permet de caractériser les éléments (f_i) de l'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ tels que :

$$\Psi(x_1,\ldots,x_n) = ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \max_{t\in[a,b]} |x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)|$$

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

- REFERENCES -

[1] DIEUDONNE J :
Eléments d'Analyse, Tome I, Fondements de l'analyse moderne.
Gauthier-Villars PARIS 1968

[2] CHOQUET G :
Cours d'analyse. Tome II, Topologie.
Masson et Cie PARIS 1964

[3] BANACH S :
Théorie des opérations linéaires
Chelsea publishing company NEW-YORK 1955

[4] BOURBAKI N :
Eléments de mathématiques. Topologie générale
Chapitre 1 et 2.
Hermann PARIS 1965

[5] GASTINEL N :
Analyse numérique linéaire.
Hermann PARIS 1966

[6] BASS J :
Exercices de mathématiques.
Masson et Cie PARIS 1965

[7] DUGUNDJI JAMES :
Topology
Ablyn and Bacon, Inc. BOSTON (1966)

[8] HOCKING JOHN G and GAIL S YOUNG :
Topology
Addison-Wesley publishing company, Inc.

[9] HAUSDORFF FELIX :
Set theory.
Chelsea publishing company. NEW-YORK (1957)

[10] KOWALSKY H.J. :
Topological Spaces
Academic Press. NEW-YORK and LONDON (1964)

[11] EDWIN HEWITT and KARL STROMBERG :
Real and abstract analysis
Springer-Verlag Berlin Heidelberg NEW-YORK

[12] GODBILLON CLAUDE :
Eléments de topologie algébrique
Hermann PARIS 1971

[13] WAELBROECK LUCIEN :
Topological vector spaces and algebras
Berlin, Heidelberg. New-York Springer 1971

[14] VALENTINE F.A. :
Convex sets
Mc. Graw Hill Book Company NEW-YORK (1964)

[15] BOURBAKI N. :
Espaces vectoriels topologiques. Chapitre 1 et 2
Hermann PARIS (1966)

[16] LIUSTERNIK L and SOBOLEV V :
Elements of functional analysis
Frederick Ungar Publishing Company NEW-YORK (1961)

[17] DAY M.M. :
Normed linear spaces
Springer-Verlag (1962)

- CHAPITRE III -

NORMES DE VECTEUR SUR $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES D'UN ESPACE NORME DANS UN ESPACE DE BANACH.

1. - Espaces $L(F,G)$ des applications linéaires continues d'un espace normé F dans un espace de Banach G. Définitions et propriétés générales.

Soient F un espace normé et G un espace de Banach, alors l'ensemble des applications linéaires continues de F dans G possède une structure d'espace vectoriel. On note $L(F,G)$ cet espace vectoriel.
On démontre que la fonction $||.||$ définie sur $L(F,G)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$||f|| = \sup_{\substack{t\in F\\ ||f||=1}} ||f(t)|| \quad , \qquad \forall f\in L(F,G)$$

est une norme sur $L(F,G)$, ([2],[3] et [5]) et que l'espace $L(F,G)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

L'analogie entre la norme de $L(F,G)$ et celle de $C(K,F)$ fait penser que la norme de $L(F,G)$, elle aussi, peut générer les normes h_1 et h_∞ de $\mathbb{R}^n$. Mais il n'en est pas ainsi, dans le cas général, contrairement à ce que l'on pouvait attendre. Par exemple si F est un espace de Hilbert et G = $\mathbb{R}$, alors $L(F,G)$ est le dual topologique de F, F', qui est isométriquement isomorphe à F, ([2],[3] et [5]), et la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme de F' ne contient pas les normes h_1 et h_∞ de $\mathbb{R}^n$. [Cf. Ch. IV].
D'autre part si $F = L^\infty(X,\mu)$ et G = $\mathbb{R}$, alors l'espace $L(F,G)$ n'est autre que $L^1(X,\mu)$ dont la norme $||.||_1$ ne génère pas la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$ sauf si $n \leq 2$.

La structure de la norme de l'espace $L(F,G)$ est si liée à celle de F et de G qu'il est impossible de savoir, dans le cas général, si certaines normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ font partie de la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme de $L(F,G)$.

On va étudier maintenant les cas particuliers suivants :

2.- Cas où la norme de G génère une norme φ de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas particulier où la norme de G génère une norme de $\mathbb{R}^n$, on obtient ce résultat intéressant :

Proposition.

Si la norme de l'espace de Banach G génère la norme φ de $\mathbb{R}^n$, alors la norme de l'espace $L(F,G)$ des applications linéaires continues d'un espace normé F dans l'espace G génère aussi la norme .

Vérification.

Il suffit pour cela, de montrer l'existence des n éléments (f_i) de $L(F,G)$ tels que :

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \|x_1f_1+\dots+x_nf_n\|$$
$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Puisque la norme φ de $\mathbb{R}^n$ est générée par la norme de G, il existe n éléments g_i de G tels que :

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \|x_1g_1+\dots+x_ng_n\|$$
$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Soient α une application linéaire continue de F dans $\mathbb{R}$ dont la norme est égale à 1 :

$$\alpha : F \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \|\alpha\| = \sup_{\substack{t\in F \\ \|t\| = 1}} |\alpha(t)| = 1$$

et γ_i, (i=1-n), l'isomorphisme canonique de R sur $\mathbb{R}g_i$:

$$\begin{aligned} \gamma_i : R &\longrightarrow \mathbb{R}g_i \\ \lambda &\longrightarrow \lambda g_i \end{aligned} \qquad (\forall i = 1-n)$$

Considérons maintenant n applications linéaires continues (f_i) de l'espace F dans l'espace G définies par :

$$f_i = \gamma_i \circ \alpha \qquad (\forall i = 1-n)$$

Ce sont bien n éléments de l'espace $L(F,G)$, et on a pour tout vecteur $x = (x_1,\dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
||x_1 f_1+\dots+x_n f_n|| &= \sup_{\substack{t\in F\\ ||t||=1}} ||x_1 f_1(t)+\dots+x_n f_n(t)|| \\
&= \sup_{||t||=1} ||x_1.(\gamma_1 o\alpha)\ (t)+\dots+x_n.(\gamma_n o\alpha)\ (t)|| \\
&= \sup_{||t||=1} ||\alpha(t)|x_1 g_1+\dots+x_n g_n||| \\
&= [\sup_{||t||=1}|\alpha(t)|]\times||x_1 g_1+\dots+x_n g_n||=||x_1 g_1+\dots+x_n g_n||
\end{aligned}$$

D'où :

$$||x_1 f_1+\dots+x_n f_n|| = \varphi(x_1,\dots,x_n)$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n.$$

Dans le cas où G est un espace de Hilbert, la norme de $L(F,G)$ génère donc la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$. En plus dans ce cas on peut donner une caractérisation des éléments (f_i) de $L(F,G)$ permettant de définir la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$ à partir de la norme de $L(F,G)$.

3.- Cas où G est un espace de Hilbert.

• Caractérisation des éléments (f_i) de $L(F,G)$ définissant h_2.

Proposition.

Une condition suffisante pour que n éléments (f_i), $(i=1-n)$, de l'espace $L(F,G)$ vérifient la relation :

$$h_2(x) = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{1/2} = ||x_1 f_1+\dots+x_n f_n||$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n$$

est que :

i) Pour tout $i \neq j$, $(i,j = 1 - n)$, on a :

$\langle f_i(t), f_j(t)\rangle = 0$ $\forall t\in F$ ($\langle,\rangle$ étant le produit scalaire de G).

ii) Il existe un élément $\tau \in F$, de norme égale à 1 tel que :

$$||f_i|| = ||f_i(\tau)|| = 1 \qquad \forall i = 1-n$$

<u>Vérification.</u>

Soient $(f_i)_{i=1-n}$, n éléments de $\mathcal{L}(F,G)$ vérifiant les conditions i) et ii).

Pour tout vecteur $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}||x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)||^2 &= \langle x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t),\ x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2||f_i(t)||^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\langle f_i(t),f_j(t)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2||f_i(t)||^2 \quad \text{d'après i)}\end{aligned}$$

Ceci pour tout $t \in F$, donc en vertue de ii) on obtient :

$$||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \underset{\substack{t\in F\\ ||t||=1}}{\operatorname{Sup}} ||x_1f_1(t)+\ldots+x_nf_n(t)|| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2} = h_2(x)$$

D'où la proposition.

Comme dans le cas des espaces $\mathcal{C}(K,F)$, ce résultat nous fournit encore un exemple d'une norme d'un espace fonctionnel non hilbertien qui génère la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$.

4.- <u>Cas où $F = L^p(X,\mu)$ et $G = \mathbb{R}$.</u>

Alors on a :

$$\mathcal{L}(F,G) = F' = L^q(X,\mu) \qquad (p,q>1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

et la norme de l'espace $\mathcal{L}(F,G)$ génère la norme h_q de $\mathbb{R}^n$ [Ch. I, §.3.].

En particulier si $p = 1$, on a $\mathcal{L}(F,G) = L^\infty(X,\mu)$ dont la norme $||.||_\infty$ génère les deux normes h_1 et h_∞ de $\mathbb{R}^n$ [Ch. I, §.5].

5.- Cas où F est un espace de Hilbert et G = $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on obtient :
$L(F,G) = F'$, qui lui-aussi, est un espace de Hilbert dont la norme génère une classe de normes Ψ sur $\mathbb{R}^n$ bien déterminée :

$$\Psi(x) = (x^T A x)^{1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad [\text{Ch. IV}]$$

où A est une matrice symétrique définie positive.

Ces normes sont appelées normes ellipsoïdales puisque leur boule unité sont des ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$. Si A = I = matrice unité Ψ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

$$h_2(x) = (x^T x)^{1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- REFERENCES -

[1] : BANACH S :

Théorie des opérations linéaires
Chelsea publishing Company, New-York 1955

[2] : CHOQUET G :

Cours d'Analyse. Tome III - Topologie
Masson et Cie - Paris 1964

[3] : DIEUDONNE J :

Eléments d'Analyse. Tome 1. Fondements de l'analyse moderne. Gauthier-Villars Paris 1968

[4] : DIEUDONNE J :

Eléments d'Analyse. Tome 2.
Gauthier-Villars Paris 1968

[5] : BOURBAKI N :

Eléments de mathématique. Fascicule XV
Espaces vectoriels topologiques. Chapitre 1 et 2.
Hermann 1965

[6] : MAHLON M DAY :

Normed linear spaces
Springer-Verlag 1962

[7] : KANTOROVITCH L.V ; AKILOV G.P :

Functional analysis in normed spaces.
Pergamon 1964

- CHAPITRE IV -

NORMES DE VECTEUR SUR $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE HILBERT.

1.- Espaces de Hilbert. Définitions et propriétés générales.

Définition1.

Un produit scalaire $<.,.>$ sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire définies sur $E \times E$ qui possède les propriétés suivantes :

i) - $<f,g> = <g,f> \qquad \forall f, g \in E$

ii) - $<f,f> \geq 0 \qquad \forall f \in E$

iii) - $<f,f> = 0 \iff f = 0$

On démontre que si un espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $<.,.>$, alors la fonction $||.||$ définie sur E par :

$$||f|| = <f,f>^{1/2} \qquad \forall f \in E$$

est une norme de l'espace E ([2], [2], [3]).

Définition 2.

Un espace normé complet E dont la norme provient d'un produit scalaire sur E est appelé espace de Hilbert.

Les espaces de Hilbert constituent actuellement les exemples les plus importants d'espaces de Banach, non seulement parce qu'ils sont la généralisation la plus proche et la plus naturelle, dans le cadre des " dimensions infinies ", de notre géométrie euclidienne classique, mais surtout parce qu'ils ont été, jusqu'à présent les espaces les plus utiles dans les applications à l'analyse fonctionnelle.

Dans le cadre de cette étude, leur structure particulière permet de caractériser parfaitement la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par leurs normes.

Avant tout il est nécessaire de rappeler certaines propriétés importantes des espaces de Hilbert concernant cette étude :

Propriétés générales des espaces de Hilbert ([1], [2], [3] et [5]).

1) La norme hilbertienne est strictement convexe.

2) Tout espace de Hilbert est réflexif, E" = E.

3) Le dual topologique E' d'un espace de Hilbert E est isométriquement isomorphe à E.

4) Tout espace de Hilbert E admet une base orthonormale.

De ces propriétés et des résultats de la première partie [§.2. prop. 2.3 et §.4. prop. 4.1], on déduit la :

Proposition.

. Toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme d'un espace de Hilbert est strictement convexe.

. Les classes de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces de Hilbert E et de son dual topologique E' sont les mêmes.

2. Caractérisation de la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme hilbertienne.

Proposition.

Soit E un espace de Hilbert.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ soit générée par la norme $||.||$de E, est qu'elle vérifie :

$$\Psi^2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, \Psi^2(e_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \left[\Psi^2(e_i+e_j) - \Psi^2(e_i) - \Psi^2(e_j)\right]$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$(e_i)_{i=1-n}$ étant une base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Vérification.

Condition nécessaire.

Soit Ψ une norme de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme $||.||$ de E, alors il existe n vecteurs (f_i), $(i=1-n)$, linéairement indépendants de E tels que :

$$\Psi(x) = ||x_1 f_1+\ldots+x_n f_n|| = \langle x_1 f_1+\ldots+x_n f_n,\ x_1 f_1+\ldots+x_n f_n\rangle^{1/2},\ \forall x = (x_1,\ldots,x_n)\in \mathbb{R}^n$$

Par suite $\Psi^2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 <f_i,f_i> + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j <f_i,f_j>$

En prenant $x = e_i$, $i = 1\text{-}n$, on aura :

$$\Psi^2(e_i) = <f_i,f_i>, \qquad \forall i = 1\text{-}n.$$

D'autre part si $x = e_i+e_j$, $(i\neq j)$, alors :

$$\Psi^2(e_i+e_j) =< f_i,f_i>+<f_j,f_j>+ 2<f_i,f_j>=\Psi^2(e_i)+\Psi^2(e_j)+2<f_i,f_j>$$

D'où $2<f_i,f_j>= \Psi^2(e_i+e_j)-\Psi^2(e_i)-\Psi^2(e_j) \qquad \forall i \neq j \ (i,j = 1\text{-}n).$

Par conséquent, pour tout $x = (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\Psi^2(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Psi^2(e_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \left[\Psi^2(e_i+e_j)-\Psi^2(e_i)-\Psi^2(e_j)\right]$$

<u>Condition suffisante</u>.

Soit Ψ une norme de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\Psi^2(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Psi^2(e_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \left[\Psi^2(e_i+e_j)-\Psi^2(e_i)-\Psi^2(e_j)\right], \ \forall x=(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n.$$

$\Psi^2(x)$ est bien une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. La matrice symétrique définie positive A associée à $\Psi^2(x)$ est donnée par :

$$A = (a_{ij}) \text{ avec } a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2(\Psi^2(x))}{\delta x_i \ \delta x_j}$$

On a alors : $\Psi^2(x) = (x^T A x)^{1/2}, \qquad \forall x\in \mathbb{R}^n.$

D'autre part d'après la théorie de diagonalisation matricielle, il existe une matrice P non singulière telle que :

$$A = P^T P$$

D'où :

$$\Psi^2(x) = x^T A x = x^T P^T P x = (Px)^T\ Px = \left[h_2(Px)\right]^2, \quad \forall x\in \mathbb{R}^n$$

C'est à dire : $\Psi(x) = h_2(Px) \quad , \quad \forall x\in \mathbb{R}^n.$

Par ailleurs, comme ce qui a été fait au §.4 [Chap. I] pour prouver que la norme $||.||_2$ de l'espace fonctionnel hilbertien $L^2(X,\mu)$ génère la norme h_2 de $\mathbb{R}^n$; il est facile de montrer qu'un système de n éléments $(f_i)_{i=1-n}$ d'un espace de Hilbert E vérifie :

$$h_2(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2} = ||x_1f_1+\ldots+x_nf_n|| = \langle x_1f_1+\ldots+x_nf_n,\ x_1f_1+\ldots+x_nf_n\rangle^{1/2}$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Si et seulement si

$$\langle f_i,f_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1-n$$

autrement dit les (f_i) forment un système orthonormé de l'espace E. Par suite, en vertu de la proposition 2.2 [PREMIERE PARTIE, §.2.], la norme $||.||$ de l'espace hilbertien E génère la norme Ψ de $\mathbb{R}^n$.

REMARQUES

On appelle norme ellipsoïdale sur $\mathbb{R}^n$ toute norme Ψ définie par :

$$\Psi(x) = (x^TAx)^{1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où A est une matrice symétrique définie positive. Autrement dit

$$\Psi(x) = h_2(Px) \text{ où } A = P^TP$$

Cette terminologie est dûe au fait que la boule unité d'une telle norme est une ellipsoïde. Dans le cas où A = I = matrice unité, on a la norme euclidienne h_2 de $\mathbb{R}^n$:

$$\Psi(x) = (x^Tx)^{1/2} = h_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

On peut donc dire que la classe des normes de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme hilbertienne est effectivement celle des normes ellipsoïdales de $\mathbb{R}^n$.

Inversement on a la

Proposition 2.2.

Soit E un espace de Banach. Si toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme E est ellipsoïdale :

$$\Psi(x) = h_2(Px) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Alors E est de Hilbert.

Vérification.

D'après [5], il suffit de prouver, pour tout couple (f_1,f_2) d'éléments de E, que :

$$||f_1+f_2||^2 + ||f_1-f_2||^2 = 2[||f_1||^2+||f_2||^2]$$

Soit Ψ la norme de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Psi(x_1,x_2) = ||x_1f_1+x_2f_2|| \quad , \quad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Par suite d'après l'hypothèse, il existe une matrice P d'ordre 2, non singulière telle que : $\Psi(x) = h_2(Px)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

On a alors pour tout couple (x,y) de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$\Psi^2(x+y) + \Psi^2(x-y) = [h_2(Px+Py)]^2 + [h_2(Px-Py)]^2$$

$$=2[h_2(Px)]^2 + 2[h_2(Py)]^2 = 2[\Psi^2(x) + \Psi^2(y)]$$

En prenant $x = e_1$ et $y = e_2$, on obtient :

$$||f_1+f_2||^2 + ||f_1-f_2||^2 = 2[||f_1||^2 +||f_2||^2].$$

On peut donner alors une caractérisation des espaces de Hilbert par la

Proposition 2.3.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach E soit de Hilbert est que toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme E soit ellipsoïdale

$$\Psi(x) = h_2(Px), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Norme duale d'une norme de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme d'un espace de Hilbert.

On va montrer que la classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par une norme hilbertienne est stable par la dualité, c'est à dire si Ψ est une norme ellipsoïdale, sa norme duale Ψ^* l'est aussi.

LEMME

Soient Ψ une norme de $\mathbb{R}^n$ et A une matrice carrée d'ordre n, non singulière. Alors la fonction Ψ_A définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\Psi_A(x) = \Psi(Ax) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

est une norme de $\mathbb{R}^n$. D'autre part on a la relation suivante entre la norme duale Ψ^* de Ψ et la norme duale Ψ_A^* de Ψ_A :

$$\Psi_A^*(x) = \Psi^*\left[(A^{-1})^T x\right] = \Psi^*\left[(A^T)^{-1} x\right] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si de plus la matrice A est symétrique, alors :

$$\Psi_A^*(x) = \Psi^*(A^{-1}x) = (\Psi^*)_{A^{-1}}(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Vérification

Il est facile de vérifier que Ψ_A est une norme de $\mathbb{R}^n$ ([1] et [7]).

Quant à la relation entre les normes duales, on a :

$$\Psi_A^*(x) = \max_{y \neq 0} \frac{x^T y}{\Psi_A(y)} = \max_{y \neq 0} \frac{x^T y}{\Psi(Ay)} = \max_{y \neq 0} \frac{x^T A^{-1} y}{\Psi(y)}$$

$$= \max_{y \neq 0} \frac{\left[(A^{-1})^T x\right]^T y}{\Psi(y)} = \Psi^*\left[(A^{-1})^T x\right]$$

La relation suivante s'en déduit immédiatement.

De ce résultat on peut tirer la proposition suivante dont la vérification est immédiate :

Proposition :

Soient E un espace fonctionnel de Hilbert et Ψ une norme de $\mathbb{R}^n$.

Si la norme Ψ est générée par la norme de E, alors sa norme duale Ψ^* l'est aussi.

Autrement dit puisque le dual topologique E' de l'espace E, muni de la norme duale de celle de E est isomorphe à E, si l'on veut avoir une relation entre Ψ^* et la norme de E' :

Si la norme de E génère la norme Ψ de $\mathbb{R}^n$, alors la norme de E' génère la norme Ψ^* de $\mathbb{R}^n$.

Vérification : Soit Ψ une norme de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme de l'espace fonctionnel de Hilbert E. D'après la proposition 1., il existe une matrice symétrique définie positive $A = P^T P$ telle que :

$$\Psi(x) = (x^T A x)^{1/2} = h_2(Px) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

D'où en vertu du lemme précédent :

$$\Psi^*(x) = h_2(\,(P^{-1})^T x) = (x^T A^{-1} x)^{1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ce qui montre, en tenant compte de la proposition 1., que la norme Ψ^* est bien générée par la norme de l'espace E.

La dernière relation n'en est qu'une conséquence immédiate.

4. Problème.

On peut se poser le problème suivant :

Caractériser les espaces de Banach E qui vérifient cette propriété :

• Si la norme de E génère une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$, alors la norme duale de E' génère la norme duale Ψ^* de Ψ.

E' étant le dual topologique de l'espace E :

E' = $\mathcal{L}(E,R)$, sa norme étant :

$$\ell \in E' \qquad ||\ell|| = \sup_{||f|| = 1} \ell(f)$$

D'après les résultats précédents, tout espace de Hilbert vérifie cette propriété. Par ailleurs on pourra voir dans le chapitre VI [Etude de la classe de normes duales des normes dans $\mathbb{R}^n$ générées par les espaces de Banach. Caractérisation des espaces de Hilbert] que cette propriété peut être servi pour donner une caractérisation des espaces de Hilbert.

- REFERENCES -

[1] : BOURBAKI N :

Eléments de mathématiques. Fascicule XVIII. Livre V
Espaces vectoriels topologiques. Hermann Paris

[2] : CHOQUET G :

Cours d'analyse. Tome II Topologie
Masson et Cie Paris 1964

[3] : DIEUDONNE J :

Eléments d'analyse Tome I. Fondements de l'analyse moderne
Gauthier-Villars Paris 1968

[4] : GASTINEL N :

Analyse numérique linéaire
Hermann Paris 1966

[5] : MAHLON M. DAY
Normed linear spaces
Springer-Verlag 1962

[6] : KANTOROVITCH L.V. ; AKILOV G.P. : Functional analysis in normed spaces
Pergamon 1964

[7] : PHAM DINH TAO :

Etude générale de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie.
Rapport D.E.A. (1970-71)
Institut de Mathématiques Appliquées
Université Scientifique et Médicale de GRENOBLE.

- CHAPITRE V -

NORMES DE VECTEUR DANS $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LA NORME DE L'ESPACE DE BANACH DES FONCTIONS NUMERIQUES A VARIATION BORNEE SUR L'INTERVALLE $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Avant d'étudier la classe de normes sur $\mathbb{R}^n$ générés par la norme de cet espace fonctionnel de Banach, il est indispensable de rappeler ses structures algébriques et topologiques.

1. Définitions et notations.

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ $(a<b)$.

Soient $(t_i)_{i=0-m}$ une suite finie d'éléments de $[a,b]$ tels que :

$$a = t_o<t_1<\ldots<t_{m-1}<t_m=b$$

et V la quantité :

$$V = \sum_{i=0}^{m-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

On note $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ la borne supérieure des quantités V relatives aux suites finies (t_i) de $[a,b]$. Il est évident que $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ peut être finie ou infinie. On dit que la fonction f est à variation bornée si $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)< +\infty$.

On notera $BV[a,b]$ l'ensemble des fonctions numériques à variation bornée sur $[a,b]$.

2. Propriétés algébriques des fonctions numériques à variation bornée sur $[a,b]$. Structure algébrique de $BV[a,b]$.

Proposition 2.1. ([1])

1) Si $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$, alors f est bornée sur $[a,b]$

2) Si $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$ et $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < +\infty$, alors $\lambda\cdot f$ $(\lambda\in \mathbb{R})$,

$f + g$, $f\cdot g$ sont aussi à variation bornée sur $[a,b]$, et on a :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\lambda f) = |\lambda| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f.g) \leq \Big[\sup_{t\in[a,b]} |g(t)|\Big] \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \Big[\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\Big] \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

3) Soit f une fonction numérique définie sur $[a,b]$; alors on a :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \qquad \forall c \in [a,b]$$

4) Toute fonction numérique croissante sur $[a,b]$ y est à variation bornée, et :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(b) - f(a)$$

Inversement une fonction numérique définie $[a,b]$ y est à variation bornée si et seulement si elle est égale à la différence de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$.

Il est clair que la partie P de BV $[a,b]$ formée des fonctions numériques croissantes sur $[a,b]$ est un cône convexe de sommet 0.

$$P + P \subset P \qquad \lambda P \subset P \qquad \forall \lambda > 0$$

d'où :

<u>Proposition 2.2</u> ([1]) et ([2])

L'ensemble BV $[a,b]$ des fonctions numériques définies et à variation bornée sur $[a,b]$ a une structure d'espace vectoriel réel. De plus on a :

$$BV[a,b] = P - P$$

3. Propriétés topologiques des fonctions numériques à variation bornée sur $[a,b]$. Structure topologique de BV$[a,b]$.

<u>Proposition 3.1</u> - ([1]) et ([2]).

1°) Toute fonction numérique à variation bornée sur $[a,b]$ a une limite à gauche et à droite en tout point :

$$f(x_o+0) = \lim_{\substack{x \to x_o \\ x > x_o}} f(x)$$

et

$$f(x_o-0) = \lim_{\substack{x \to x_o \\ x < x_o}} f(x)$$

existent en tout point $x_o \in [a,b]$. Autrement dit toute fonction numérique à variation bornée sur $[a,b]$ est réglée. L'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

2°) Si f est à variation bornée sur $[a,b]$, alors sa dérivée f' existe presque partout (c'est à dire sauf peut être sur une partie de $[a,b]$ de mesure Lebesgue nulle). De plus f' est intégrable sur $[a,b]$.

3°) Si f est continûment dérivable sur $[a,b]$, alors f est à variation bornée sur $[a,b]$ et :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(t)|dt$$

4°) Toute fonction numérique continue à variation bornée sur $[a,b]$ est égale à la différence de deux fonctions continues croissantes.

De la propriété 2°) de la proposition 2.1 on déduit facilement que la fonction $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ est une semi-norme sur BV $[a,b]$.

La relation binaire sur BV$[a,b]$:

$f \sim g \iff f - g =$ constante sur $[a,b]$

est une relation d'équivalence ; d'où :

Proposition 3.2.

L'espace quotient $BV[a,b]/_\sim$ est un espace normé.

Sa norme étant définie comme :

$$\tilde{f} \in BV[a,b]/_\sim \qquad \tilde{f} = C\ell(f) \qquad ||\tilde{f}|| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

On démontre que ([6]) :

Proposition 3.3.

1) L'espace de Banach $BV[a,b]/_\sim$ n'est pas réflexif.

2) La norme de $BV[a,b]/_\sim$ n'est pas strictement convexe.

On va énoncer maintenant une propriété très importante de l'espace des fonctions numériques à variation bornée $BV[a,b]$:

Théorème (F. RIESZ) ([1]), ([3]), et ([4]).

Toute fonctionnelle linéaire continue ℓ sur l'espace des fonctions numériques continues sur $[a,b]$, $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale de Stieltjes par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \qquad \ell(f) = \int_a^b f(t)dg(t)$$

où $g \in BV[a,b]$. De plus

$$||\ell|| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

D'autre part on a :

Proposition 3.4. ([1]) et ([4]).

Toute fonctionnelle linéaire ℓ définie sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ par un élément g de $BV[a,b]$ à l'aide d'une intégrale de Stieltjes par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \qquad \ell(f) = \int_a^b f(t)dg(t)$$

est continue et

$$||\ell|| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

En combinant ces deux résultats, on obtient le troisième :

Proposition 3.5.

L'espace normé $BV[a,b]/_{\sim}$ est isométrique à l'espace dual de $C([a,b], \mathbb{R})$:

$$BV[a,b]/_{\sim} \equiv C([a,b], \mathbb{R})$$

4. Classe de normes de $\mathbb{R}^n$ générées par la norme de l'espace quotient $BV[a,b]/_{\sim}$

D'après la propriété 1) de la proposition 3.1, l'espace $BV[a,b]$ est contenu dans $L^1([a,b],\mu)$ du point de vue de structure algébrique, quant à la structure topologique la topologie semi-norme de $BV[a,b]$ n'est pas induite par celle $L^1([a,b],\mu)$, cependant il y a une analogie entre les semi-normes $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ et $\int_a^b |f|d\mu$. D'autre part l'espace $BV[a,b]/_{\sim}$ est le dual de $C([a,b], \mathbb{R})$, et puisque la norme $|| \ ||_1$ de l'espace $L^1([a,b],\mu)$ génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ mais non la norme h_∞ sauf si $n \leq 2$, et que la norme de la convergence uniforme de l'espace $C([a,b], \mathbb{R})$ génère les normes h_1 et h_∞ sur $\mathbb{R}^n$, on se demande si la norme de l'espace $BV[a,b]/_{\sim}$ génère les normes h_1 et h_∞ sur $\mathbb{R}^n$?

Pour la norme h_1 sur $\mathbb{R}^n$, on a le résultat suivant :

Proposition 4.1

Si $(f_i)_{i=1-n}$ sont n éléments de l'espace $BV[a,b]$ vérifiant :

i) $||f_i|| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f_i) = 1 \qquad \forall i = 1-n$

ii) Il existe n intervalles $[a_i,b_i]$ disjoints ou même ayant des extrémités communes dans $[a,b]$ tels que :

- f_i continue aux extrémités a_i et b_i

- f_i est constante dans $[a,a_i]$ et $[b_i,b]$

Alors on a :

$$h_1(x_1,\dots,x_n)=|x_1|+\dots+|x_n|=||x_1f_1+\dots+x_nf_n||=\overset{b}{\underset{a}{V}}(x_1f_1+\dots+x_nf_n)$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n.$$

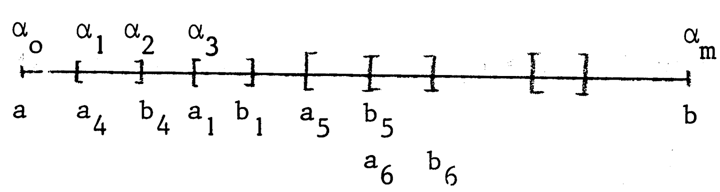
<u>Vérification.</u>

Soient $(f_i)_{i=1-n}$ n éléments de l'espace $BV[a,b]$ vérifiant les conditions i) et ii). Pour tout vecteur $x = (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n$, on a d'après la propriété 3) proposition 2.1

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(x_1f_1+\dots+x_nf_n) = \sum_{j=0}^{m} \overset{\alpha_{j+1}}{\underset{\alpha_j}{V}} (x_1f_1+\dots+x_nf_n)$$

où (α_j) est une suite finie croissante de $[a,b]$ formée par les points a, b et les extrémités a_i, b_i rangées dans l'ordre croissant :

$$\alpha_o = a < \alpha_1 <\dots <\alpha_m = b$$



En remarquant que dans les intervalles $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ où

$$\alpha_j = b_i \text{ et } \alpha_{j+1} = a_k$$

On a :

$$\overset{\alpha_{j+1}}{\underset{\alpha_j}{V}} (x_1f_1+\dots+x_nf_n) = 0$$

puisque la fonction $x_1f_1+\dots+x_nf_n$ y est constante.

Alors

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(x_1f_1+\dots+x_nf_n) = \sum_{i=1}^{n} \overset{b_i}{\underset{a_i}{V}}(x_1f_1+\dots+x_nf_n)$$

Or pour tout $i=1-n$:

$$\overset{b_i}{\underset{a_i}{V}}(x_1f_1+\dots+x_nf_n) = \overset{b_i}{\underset{a_i}{V}}(x_if_i) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(x_if_i)$$

Car les autres f_j $(j \neq i)$ sont constantes sur $[a_i, b_i]$

D'où

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(x_1f_1+\dots+x_nf_n) = \sum_{i=1}^{n} \overset{b}{\underset{a}{V}}(x_if_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f_i)$$

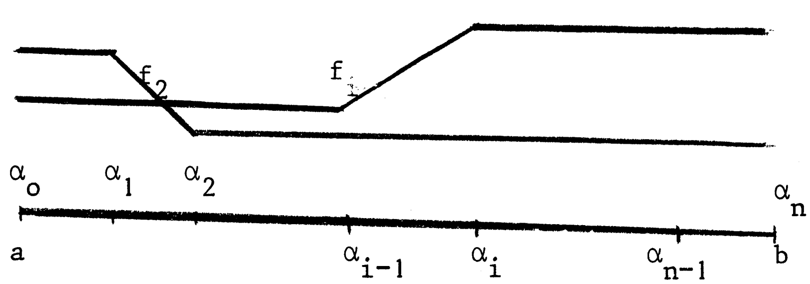
$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ d'après i)}$$

D'où la proposition précédente.

Existence de tels (f_i) dans $BV[a,b]$

Il est facile de voir qu'il existe bien des fonctions $(f_i)_{i=1-n}$ de l'espace $BV[a,b]$ vérifiant les conditions i) et ii) de la proposition 4.1. En voici un exemple simple. Soit $(\alpha_i)_{i=0-n}$ une suite finie croissante de $[a,b]$ telle que :

$$\alpha_o = a < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$$



Chaque intervalle $[a_i, b_i]$ de la proposition 4.1 est dans ce cas l'intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ (i=1-n), ces intervalles ont les extrémités communes.

Chaque fonction f_i sera prise strictement monotone dans $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, constante dans $[\alpha_o, \alpha_{i-1}]$ et $[\alpha_i, \alpha_n]$ de telle sorte que

$$\overset{\alpha_i}{\underset{\alpha_{i-1}}{V}} (f_i) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f_i) = |f(\alpha_i) - f(_{i-1})| = 1$$

On peut alors énoncer la

Proposition 4.2.

La norme de l'espace fonctionnel de Banach $BV[a,b]/_{\sim}$ génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$.

• Cas de la norme h_∞

Il est évident que la norme de l'espace $BV[a,b]/_{\sim}$ génère la norme h_∞ sur $\mathbb{R}^2$ puisque sur $\mathbb{R}^2$ on a cette relation entre les normes h_1 et h_∞ :

$$h_\infty(x) = h_1(Ax) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

où

$$A = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Cependant on ne peut rien répondre au problème à savoir si la norme de $BV[a,b]/_{\sim}$ génère la norme h_∞ sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) comme dans le cas de l'espace fonctionnel de Banach $L^1(X,\mu)$ [Ch.I, §.6.]

- REFERENCES -

[1] : NATANSON I.P. :
Theory of functions of a real variable
Volume I. Frederick Ungar publishing company
New-York 1964

[2] : CHOQUET G :
Cours d'analyse. Tome 2. Topologie
Masson et Cie - Paris 1964

[3] : BANACH S :
Théorie des opérations linéaires
Chelsea publishing company - New-York 1955

[4] : LIUSTERNIK L ; SOBOLEV V :
Elements of functional analysis
Frederick Ungar publishing company
New-York 1961

[5] : MARKOV A.A :
On mean values and exterior densitives
(English) Math. Sbornik 4 (1938) 165-191

[6] : DAY M.M :
Normed linear spaces
Springer Verlag 1962

CHAPITRE VI

ETUDE DE LA CLASSE DE NORMES DUALES DES NORMES DANS $\mathbb{R}^n$ GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE BANACH. CARACTERISATION DES ESPACES DE HILBERT.

1 - Position du problème.

Dans le premier chapitre, en étudiant les espaces fonctionnels de Banach $L^p(X,\mu)$ on a pu démontrer que les normes h_p sont dans la classe des normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par la norme $\|\ \|_p$ de $L^p(X,\mu)$.

Les dualités entre les normes h_p et h_q $(p,q\geq 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$

d'une part, et les espaces fonctionnels $L^p(X,\mu)$ et $L^q(X,\mu)$ d'autre part font penser que si une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ est générée par la norme $\|.\|$ d'un espace de Banach E, alors sa norme duale Ψ^* est générée par la norme $\|.\|'$ (duale de $\|.\|$) de l'espace dual E' de E. Ceci est tout à fait faux comme le montre cet exemple :

Dans le §.6 [Chap. I] on a démontré que la norme $\|.\|_\infty$ de l'espace $L^\infty(X,\mu)$ génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ mais que la norme $\|.\|_1$ de l'espace $L^1(X,\mu)$ ne génère pas la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$ sauf si $n\leq 2$. Pour une mesure positive μ quelconque, le dual topologique de l'espace $L^\infty(X,\mu)$ contient l'espace $L^1(X,\mu)$ et est en général différent de $L^1(X,\mu)$. Cependant il y aura identité entre l'espace $L^1(X,\mu)$ et le dual topologique de l'espace $L^\infty(X,\mu)$ si et seulement si le support de la mesure μ est fini ([8]). En prenant par exemple la mesure μ comme la somme finie des mesures de Dirac δ_{t_i} aux m points distincts t_i, (i=1-m) de l'espace X.

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \delta_{t_i}$$

Dès lors on voit que l'espace $L^1(X,\mu)$ est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de la norme h_1 et l'espace $L^\infty(X,\mu)$ à l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de la norme h_∞. De plus ces deux espaces sont réflexifs.

D'après les résultats de §.5 et §.6 [Chap. I.] en prenant $m = 2^{n-1}$ et $n\geq 3$, on obtient cette propriété :

La norme $\|.\|_\infty$ de l'espace $L^\infty(X,\mu)$ génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ sans que la norme $\|.\|_1$ (duale de la norme $\|.\|_\infty$) de l'espace $L^1(X,\mu)$, dual de l'espace $L^\infty(X,\mu)$ génère la norme h_∞ (duale de la norme h_1) de $\mathbb{R}^n$.

Soient E un espace de Banach de norme $||.||$ et Ψ une norme de $\mathbb{R}^n$ générée par la norme $||.||$; c'est à dire :

$$(1) \quad \Psi(x) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n|| \qquad \forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

où $(f_i)_{i=1-n}$ est un système de n vecteurs linéairement indépendants de E.

On note Ψ^* la norme duale de :

$$\Psi^*(x) = \max_{y \neq 0} \frac{\bar{x}^T y}{\Psi(y)}$$

Soient E' le dual topologique de E, muni de la norme duale de la norme $||.||$ de E, c'est à dire l'espace vectoriel des fonctionnelles linéaires continues sur E muni de la norme $||.||'$ définie par :

$$||\ell||' = \sup_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{\ell(f)}{||f||}$$

Il est très intéressant de pouvoir déterminer les espaces de Banach E pour lesquels la propriété suivante est vérifiée :

Si Ψ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ générée par la norme $||.||$ de E, alors sa norme duale Ψ^* est générée par la norme $||.||'$ de E'.

Autrement dit la relation (1) assure l'existence d'un système de n vecteurs linéairement indépendants $(\ell_i)_{i=1-n}$ de E' tels que :

$$\Psi^*(x) = ||x_1 \ell_1 + \ldots + x_n \ell_n||'$$

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le problème de caractérisation de tels espaces est trop général et très difficile à résoudre. Cependant avec une condition supplémentaire que l'on va imposer à ce problème, on pourra donner une solution très simple, celle-ci permet d'obtenir une caractérisation des espaces de Hilbert par cette théorie de normes sur $\mathbb{R}^n$.

Tout d'abord on va étudier certaines propriétés de la norme duale d'une norme Ψ générée par la norme d'un espace de Banach.

2. Propriétés générales de la norme duale d'une norme générée par la norme d'un espace de Banach E.

2.1 - Cas où la dimension de E est finie et égale à n.

Dans ce cas on peut démontrer que si la norme $||.||$ de E génère une norme Ψ de R^n, alors la norme duale $||.||'$ de E' génère la norme duale Ψ^* de . En effet soit Ψ une norme de R^n générée par la norme $||.||$ de E ; il existe alors une base $(f_i)_{i=1-n}$ de l'espace E telle que :

$$\Psi(x_1,\dots,x_n) = ||x_1 f_1+\dots+x_n f_n||$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

D'autre part, ([1] et [2]), il existe dans E' n vecteurs $(\ell_i)_{i=1-n}$ linéairement indépendants tels que : $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ $\forall i,j = 1-n$

Par suite, pour tout élément $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$||x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n||' = \max_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{(x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n)(f)}{||f||} = \max_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{x_1\ell_1(f)+\dots+x_n\ell_n(f)}{||f||}$$

$$= \max_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ y \neq 0}} \frac{x_1 y_1+\dots+x_n y_n}{\Psi(y_1,\dots,y_n)} = \max_{\substack{y \in R^n \\ y \neq 0}} \frac{x^T y}{\Psi(y)} = \Psi^*(x_1,\dots,x_n)$$

D'où la :

Proposition 2.1.

Soit E un espace de Banach de dimension finie n.

Si la norme de E génère une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$, alors la norme de E' génère la norme Ψ^*.

2.2 - Cas où la dimension de E est infinie.

Le résultat de la proposition n'est valable que dans le cas où la dimension de l'espace E est finie et égale à la dimension de l'espace

$\mathbb{R}^n$ sur lequel on étudie les normes. Autrement on n'obtient que ce résultat :

Proposition 2.2.

Si Ψ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ générée par la norme d'un espace de Banach E :

$$\Psi(x_1,\dots,x_n) = ||x_1f_1+\dots+x_nf_n|| \qquad \forall(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n$$

Alors il existe un système (ℓ_i), (i=1-n), de n vecteurs linéairement indépendants de E' tels que :

$$\Psi^*(x_1,\dots,x_n) \leq ||x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n||'$$

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n .$$

Vérification.

La démonstration est analogue à la précédente mais dans ce cas on obtient une inégalité au lieu d'une égalité. En effet il existe dans E' n vecteurs linéairement indépendants ℓ_i, (i=1-n), tels que :

$$\ell_i(f_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1-n$$

Par suite pour tout vecteur $x = (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n$, on a :

$$||x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n||' = \sup_{\substack{f\in E\\ f\neq 0}} \frac{x_1\ell_1(f)+\dots+x_n\ell_n(f)}{||f||}$$

$$\geq \max_{\substack{y\in \mathbb{R}^n\\ y\neq 0}} \frac{x_1y_1+\dots+x_ny_n}{||y_1f_1+\dots+y_nf_n||} = \max_{\substack{y\in \mathbb{R}^n\\ y\neq 0}} \frac{x^Ty}{\Psi(y)} = \Psi^*(x)$$

2.3 - Cas où l'espace E est un Hilbert.

On a démontré que tout espace de Hilbert E satisfait la propriété citée ci-dessus, c'est à dire que si la norme de E génère une norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ alors la norme de l'espace E' génère la norme Ψ^*. Plus précisément, on a la :

Proposition 2.3

Si E est un espace de Hilbert ; alors pour tout système de n vecteurs (f_i), i=1-n, linéairement indépendants de E, il existe un système de n vecteurs linéairement indépendants

(ℓ_i), i=1-n, de E' tels que :

$$\Psi^* (x) = ||x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n||'_E = ||x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n||'_{En} = ||x_1\overline{\ell}_1+\dots+x_n\overline{\ell}_n||'_{En}$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

où $E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}f_i$ et $\overline{\ell}_i = \ell_i|E_n$;

Si Ψ est la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Psi(x_1,\dots x_n) = ||x_1f_1+\dots+x_nf_n|| \qquad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Vérification.

Pour tout i=1-n, soit $V_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbb{R}\, f_j$

On a ([5], [6] et [7]) :

$$E_n = V_i + V_i^{\perp} \quad \text{où} \quad V_i^{\perp} = \mathbb{R}g_i$$

On peut toujours choisir g_i tel que $\langle g_i, f_i\rangle = 1$. Ainsi on obtient un système de n vecteur (g_i), i = 1-n, de E_n vérifiant

$$\langle g_i, f_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1-n$$

Pour tout i = 1-n, soit $\ell_i \in E'$ défini par :

$$\ell_i(f) = \langle g_i, f\rangle \qquad \forall f \in E$$

Alors pour tout $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$||x_1\ell_1+\ldots+x_n\ell_n||'_E = \underset{\substack{f \quad E\\ f\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \frac{x_1\ell_1(f)+\ldots+x_n\ell_n(f)}{||f||}$$

$$= \underset{\substack{f \quad E\\ f\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \frac{<x_1g_1+\ldots+x_ng_n,f>}{||f||}$$

$$= ||x_1g_1+\ldots+x_ng_n|| = \underset{\substack{f \quad E_n\\ f\neq 0}}{\max} \frac{<x_1g_1+\ldots+x_ng_n,f>}{||f||}$$

$$= ||x_1\ell_1+\ldots+x_n\ell_n||'_{E_n} = ||x_1\overline{\ell}_1+\ldots+x_n\overline{\ell}_n||'_{E_n}$$

$$= \Psi^*(x_1,\ldots,x_n)$$

D'où la proposition 2.3.

On va donner maintenant la réciproque de cette proposition qui sert à caractériser les espaces de Hilbert par cette théorie de normes sur R^n.

3.- Caractérisation des espaces de Hilbert.

Dans le cas où l'espace de Banach E est de dimension ≥ 3, on a la réciproque de la proposition 2.3.

Proposition 3.1.

Soit E un espace de Banach de dimension ≥ 3.

Si pour tout couple (f_1,f_2) de vecteurs linéairement indépendants de E il existe un couple de vecteurs (ℓ_1,ℓ_2) linéairement indépendants de E' tels que pour tout $(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2$:

$$(2)\quad \Psi^*(x_1,x_2) = ||x_1\ell_1+x_2\ell_2||'_E = \underset{\substack{f\in E\\ f\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \frac{x_1\ell_1(f) + x_2\ell_2(f)}{||f||}$$

$$= \underset{\substack{f\in E_2\\ f\neq 0}}{\max} \frac{x_1\ell_1(f)+x_2\ell_2(f)}{||f||} = ||x_1\ell_1+x_2\ell_2||'_{E_2} = ||x_1\overline{\ell}_1+x_2\overline{\ell}_2||'_{E_2}$$

où Ψ est une norme de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\Psi(x_1,x_2)=||x_1f_1+x_2f_2|| \quad \forall(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2$

et $E_2 = \mathbb{R}f_1 \oplus \mathbb{R}f_2$, $\overline{\ell}_1 = \ell_1|E_2$, $\overline{\ell}_2 = \ell_2|E_2$

Alors E est un espace de Hilbert.

Remarque.

La condition supplémentaire citée ci-dessus (§.1) figure dans (2) : elle exige que pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, la norme de la fonctionnelle linéaire $x_1\ell_1 + x_2\ell_2$ est atteinte dans E_2, c'est à dire :

$$||x_1\ell_1 + x_2\ell_2||'_E = ||x_1\ell_1 + x_2\ell_2||'_{E_2} = ||x_1\overline{\ell}_1 + x_2\overline{\ell}_2||'_{E_2}$$

Cette condition est très importante, elle seule permet la démonstration de cette proposition.

Vérification.

On sait que ([2]) E est un espace de Hilbert si et seulement si tout sous-espace E_3 à 3 dimensions de E est de Hilbert.

Soit E_2 un sous espace à 2 dimensions de E_3 $(E_2 \subset E_3 \subset E)$

Considérons le couple (f_1, f_2) formant une base de E_2 et la norme Ψ de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Psi(x_1, x_2) = ||x_1f_1 + x_2f_2|| \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

D'après l'hypothèse, il existe deux fonctionnelles linéaires continues sur E, ℓ_1 et ℓ_2 $(\ell_1 \in E', \ell_2 \in E')$ telles que :

$$\Psi^*(x_1, x_2) = ||x_1\ell_1 + x_2\ell_2||'_E = ||x_1\overline{\ell}_1 + x_2\overline{\ell}_2||'_{E_2}$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

où $\overline{\ell}_1 = \ell_1|E_2$ et $\overline{\ell}_2 = \ell_2|E$.

Soient $L_1 = \ell_1|E_3$ et $L_2 = \ell_2|E_3$, il est clair que :

$$\overline{\ell}_1 = L_1|E_2 \quad \text{et} \quad \overline{\ell}_2 = L_2|E_2$$

Alors on a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$||x_1\bar{\ell}_1 + x_2\bar{\ell}_2||'_{E_2} = ||x_1L_1 + x_2L_2||'_{E_3} \qquad (3)$$

Soit T l'application linéaire de E'_2 (dual topologique de E_2) dans E'_3 (dual topologique de E_3) définie par :

$$T(\bar{\ell}_1) = L_1 \text{ et } T(\bar{\ell}_2) = L_2$$

La relation (3) entraîne bien que T est isométrique, ce qui montre que E_3 est un espace de Hilbert ([3]).

Par conséquent l'espace E est un Hilbert.

Remarque.

La condition donnée dans la proposition 3.1 pour n = 2 est aussi équivalente à la suivante :

. Pour tout système de n vecteurs (f_i), i = 1-n, linéairement indépendants de E, il existe un système de n vecteurs (ℓ_i), i = 1-n, de E' tels que pour tout $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\Psi^*(x_1,\dots,x_n) = ||x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n||'_E = ||x_1\ell_1+\dots+x_n\ell_n||'_{E_n} = ||x_1\bar{\ell}_1+\dots+x_n\bar{\ell}_n||'_{E_n}$$

où $E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}f_i$ et $\bar{\ell}_i = \ell_i|E_n$ et Ψ est la norme de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Psi(x_1,\dots x_n) = ||x_1f_1+\dots+x_nf_n|| \qquad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.

En jumelant les propositions 2.3 et 3.1, on peut énoncer une caractération des espaces de Hilbert :

<u>Proposition 3.2.</u>

Soit E un espace de Banach de dimension ≥ 3.

Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit de Hilbert est que :

Pour tout couple (f_1, f_2) de vecteurs linéairement indépendants de E il existe un couple (ℓ_1, ℓ_2) de vecteurs linéairement indépendants de E' tels que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\Psi^*(x_1, x_2) = ||x_1\ell_1 + x_2\ell_2||'_E = ||x_1\ell_1 + x_2\ell_2||'_{E_2} = ||x_1\overline{\ell}_1 + x_2\overline{\ell}_2||'_{E_2}$$

où $E_2 = \mathbb{R}f_1 \oplus \mathbb{R}f_2$, $\overline{\ell}_1 = \ell_1|E_2$, $\overline{\ell}_2 = \ell_2|E_2$ et Ψ la norme de R^2 définie par :

$$\Psi(x_1, x_2) = ||x_1f_1 + x_2f_2|| \qquad \forall(x_1,x_2) \in R^2.$$

- REFERENCES -

[1] KANTOROVITCH L.V., AKILOV G.P. :

Functional analysis in normed spaces.

Pergamon (1964)

[2] DAY. MAHLON M :

Normed linear spaces

Springer-Verlag (1962)

- FRECHET M :

Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert.

Ann. Of Math (2), 36, 705-718 (1935)

[3] KAKUTANI S :

Some characterizations of Euclidean spaces

Jap. J. Math. Vol 16 (1939) pp 93-97.

[4] GASTINEL N :

Quelques caractérisations d'espaces de Hilbert

Séminaire d'analyse numérique. Grenoble (1966-67)

[5] BOURBAKI N :

Espaces vectoriels topologiques.

Chapitre V (Espaces hilbertiens)

Hermann. Paris 1967

[6] DIEUDONNE J :

Fondements de l'analyse moderne. Tome I

Gauthier-Villars - Paris 1968

[7] CHOQUET G :

Cours d'analyse. Tome II. Topologie.

Masson et Cie - Paris (1964)

[8] BOURBAKI N :

Eléments de mathématiques. Livre VI. Intégration
Chapitres 1, 2, 3, 4.
Hermann - Paris

Eléments de mathématiques.
Intégration. Chapitre 5
Hermann - Paris

- CHAPITRE VII -

NORMES DE MATRICES SUR $\mathcal{M}_{(m,\ n)}$ ($\mathbb{R}$) GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE BANACH.

1 - Définitions et propriétés générales.

Soit E un espace de Banach de norme $||.||$. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{(m,\ n)}$ ($\mathbb{R}$) formé des matrices réelles A à m lignes et n colonnes. Cet espace est à $m\times n$ dimensions et peut être identifié à $\mathbb{R}^{m\times n}$, on peut alors définir les normes de matrices sur $\mathcal{M}_{(m,\ n)}$($\mathbb{R}$) comme les normes de vecteurs de $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Définition.

Soit E un espace de Banach de norme $||.||$. Une norme Φ sur $\mathcal{M}_{(m,\ n)}$($\mathbb{R}$) est dite générée par la norme $||.||$ de E s'il existe un système de $m\times n$ vecteurs linéairement indépendants $(f_{ij})_{\substack{i=1-m\\ j=1-n}}$ de E tels que :

$$\Phi(A) = ||\sum_{\substack{i=1-m\\ j=1-n}} a_{ij}\ f_{ij}||$$

pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(m,\ n)}$.

Propriétés générales.

Tous les résultats obtenus précédemment pour les normes de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes de Banach E restent évidemment valables pour cette classe de normes de matrices sur $\mathcal{M}_{(m,\ n)}$ ($\mathbb{R}$).

2 - Cas de normes de matrices carrées. Normes sous-multiplicatives.

Si m = n, $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$($\mathbb{R}$) ademet alors une structure d'algèbre.

On se demande alors, pour un espace de Banach E donné, s'il existe des normes Φ de $_{(n,\ n)}$ générées par la norme $||.||$ de E qui sont compatibles avec la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$($\mathbb{R}$), c'est à dire :

$$\Phi(A\ B) \leq \Phi(A).\ \Phi(B) \qquad \forall A,B \in \mathcal{M}_{(n,n)}$$

Une telle norme Φ sera dite sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$.
Pour la réponse à cette question, on a :

<u>Proposition</u>.

Soient E un espace fonction .1 de Banach E de norme $||.||$, et $(f_{ij})_{i,j\ =\ 1-n}$ un système de n^2 vecteurs linéairement indépendants de E.

Alors il existe un système de n^2 vecteurs $(g_{ij})_{i,j\ =}$ proportionnels aux (f_{ij}) :

$$g_{ij} = \alpha f_{ij} \qquad \forall i,\ j = 1-n$$

tels que la norme Ψ de $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$ définie par :

$$\Psi(A) = ||\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ g_{ij}|| \qquad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}$$

est sous multiplicative. Plus précisément, ce nombre α est déterminé par :

$$|\alpha| \geq \mu_o = \sup_{\substack{A\neq 0\\ B\neq 0}} \frac{\Phi(A\ B)}{\Phi(A).\Phi(B)}$$

où Φ est la norme relative aux (f_{ij}) :

$$\Phi(A) = ||\sum_{i,j=1-n} a_{ij}\ f_{ij}||$$

<u>Vérification</u>.

On sait que pour toute norme Φ de $\mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{R})$ il existe un scalaire $\mu>0$ telle que la norme $\mu\Phi$ soit sous multiplicative ([6]). D'une façon plus précise si μ vérifie

$$\mu \geq \mu_o = \sup_{\substack{A\neq 0\\ B\neq 0}} \frac{\Phi(A\ B)}{\Phi(A).\Phi(B)}$$

alors $\mu\Phi$ est sous-multiplicative.

Soit Φ la norme de $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$ définie par :

$$\Phi(A) = \|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ f_{ij}\| \qquad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}.$$

Considérons alors la norme Ψ sur $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$ donnée par :

$$\Psi(A) = \Phi(\alpha A) \qquad \forall A \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}$$

α étant un scalaire tel que $|\alpha| \geq \mu_o$

Ce qui est équivalent à : $\Psi(A) = |\alpha|\Phi(A) \qquad \forall A \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}$

Ψ est bien une norme sous-multiplicative. En explicitant la norme Φ on a :

$$\Psi(A) = \Phi\ (\alpha A) = \|\sum_{i,j=1-n} (\alpha a_{ij})\ f_{ij}\| = \|\sum_{i,j=1-n} a_{ij} (\alpha f_{ij})\| = \|\sum_{i,j=1-n} a_{ij}\ g_{ij}\|$$

D'où l'assertion précédente.

3 - Caractérisation des éléments (f_{ij}) définissant les normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{R})$.

Soit $(f_{ij})_{i,j=1-n}$ un système de n^2 éléments linéairement indépendants de l'espace fonctionnel de Banach E. Soit Φ la norme de $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$ $(\mathbb{R})$ générée par la norme $\|\ \|$ de E :

$$\Phi(A) = \|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ f_{ij}\| \qquad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}\ (\mathbb{R})$$

Il est facile de voir que la norme Φ sera sous-multiplicative si et seulement si :

$$\mu_o = \sup_{\substack{A\neq 0\\ B\neq 0}} \frac{\Phi(A\ B)}{\Phi(A).\Phi(B)} \leq 1$$

Dans le cas général, ce nombre μ_0 est pratiquement incalculable, par suite le problème de caractérisation de la classe des éléments (f_{ij}) de E permettant de définir des normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_{(n,\,n)}(\mathbb{R})$ à partir de la norme E est insoluble à moins que l'on se place dans les espaces fonctionnels particuliers.

A titre d'exemples, on peut citer quelques cas particuliers des espaces fonctionnels de Banach E dans lesquels on connaît des (f_{ij}) qui peuvent définir des normes sous-multiplicatives Φ sur $\mathcal{M}_{(n,\,n)}(\mathbb{R})$.

3.1 - Cas des espaces fonctionnels $L^p(X,\mu)$

Dans la partie II (Normes de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces fonctionnels de Banach $L^p(X,\mu)$) on a démontré que les normes de types h_p (normes de Hölder d'ordre p) peuvent être générées par les normes $\| \ \|_p$ de l'espace $L^p(X,\mu)$.

Par suite les normes H_p définies sur $\mathcal{M}_{(n,\,n)}(\mathbb{R})$ par :

$$H_p(A) = \left[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right]^{1/p} \qquad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,\,n)}(\mathbb{R})$$

sont bien générées par les normes $\| \ \|_p$ de $L^p(X,\mu)$. Il existe alors n^2 éléments linéairement indépendants $(f_{ij})_{i,j=1-n}$ de $L^p(X,\mu)$ tels que :

$$H_p(A) = \Big\|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, f_{ij}\Big\|_p \qquad (1)$$

D'autre part on a démontré que le coefficient minimal μ_0^p des normes H_p est donné par ([6]) :

$$\mu_0^p = \sup_{\substack{A\neq 0\\ B\neq 0}} \frac{H_p(A.B)}{H_p(A).H_p(B)} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq p \leq 2 \\ n^{(1-2/p)} & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

D'où :

- Si $1 \leq p \leq 2$, les éléments (f_{ij}) de l'espace $L^p(X,\mu)$ définissent bien les normes sous-multiplicatives H_p sur $\mathcal{M}_{(n,\,n)}(\mathbb{R})$.

• Si $p > 2$, les normes H_p sur $\mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{R})$ définies par la relation (2) ne sont pas sous-multiplicatives. Mais les normes Φ_p de $\mathcal{M}_{(n,\ n)}$ définies par :

$$\Phi_p(A) = \|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ g_{ij}\|_p \qquad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{R})$$

où $\quad g_{ij} = \alpha f_{ij} \qquad \forall i,j = 1-n$

avec $\quad |\alpha| \geq \mu_o^p = n^{(1-2/p)}$

seront sous-multiplicatives.

3.2 - Cas des espaces des fonctions continues sur un compact $\mathcal{C}(K,F)$

En vertu des résultats obtenus dans II (Normes de vecteur de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces des fonctions continues sur un métrique compact $\mathcal{C}(K,F)$), il existe deux systèmes de n^2 éléments de $\mathcal{C}(K,F)$, (f_{ij}) et (g_{ij}) tels que :

$$H_1(A) = \|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ f_{ij}\| \qquad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{R})$$

$$H_\infty(A) = \|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ g_{ij}\| \qquad \forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{R})$$

$\|.\|$ étant la norme de $\mathcal{C}(K,F)$.

Les éléments (f_{ij}) définissent bien une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas le cas des (g_{ij}) : les éléments $(\alpha.g_{ij})$ peuvent définir une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{R})$ si et seulement si $|\alpha| \geq n$.

- REFERENCES -

[1] BAUER F.L. :

Theory of norms

Technical report n° CS 75 (August 1967)

Stanford University

[2] GASTINEL N. :

Analyse numérique linéaire

Hermann. Paris (1966)

[3] HOUSEHOLDER A.S. :

The theory of matrices in numerical analysis

Blaisdell - New York (1964)

[4] PHAM DINH TAO :

Etude générale de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie.

Rapport D. E. A. (1970-1971)

Institut de mathématiques appliquées

Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[5] MAITRE J.F. :

Norme composée et norme associée d'une matrice.

Numer. Math. 10, 132-141 (1967)

TROISIEME PARTIE

APPLICATIONS

RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE DU PROBLEME DU LIEU DES MEILLEURS APPROXIMANTS LINEAIRES DANS UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE D'UN ESPACE DE BANACH

CARACTERISATION DES PARTIES COMPACTES CONVEXES DE $\mathbb{R}^n$

La position du problème inverse que l'on va essayer de résoudre à l'aide de la théorie des normes de $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces de Banach, sera présentée dans partie II. Auparavant, il est indispensable d'exposer le problème d'approximation linéaire dans un sous-espace de dimension finie d'un espace de Banach.

I - APPROXIMATION LINÉAIRE DANS UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE D'UN ESPACE DE BANACH

1 - Définitions - Notations

Dans un espace de Banach E de norme $||.||$, soient V_n un sous-espace de dimension finie n et f un élément $\notin V_n$.

On appelle meilleur approximant de f dans V_n, s'il existe, l'élément $g^* \in V_n$ vérifiant cette relation :

$$||f - g^*|| = \min_{g \in V_n} ||f - g||$$

Autrement dit l'élément g^* réalise la distance de f à V_n :

$$||f - g^*|| = d(f \; ; \; V_n)$$

Du fait que la dimension de l'espace des approximants de f est finie on a :

Proposition

Tout élément $f \in V_n$ admet au moins un meilleur approximant dans V_n.

Vérification

. Soit le nombre

$$\rho = ||f|| = ||f - 0||$$

est strictement positif ($\rho > 0$) car $f \notin V_n$

Pour tout élément g de V_n, on a :

$$||f - g|| \geq \Big| \, ||f - 0|| - ||g - 0|| \, \Big|$$

ce qui fait que $||f - g|| > \rho$ si $||g|| = ||g - 0|| > 2\rho$

Par suite, le domaine des meilleurs approximants de f dans V_n est contenu dans l'intersection $V_n \cap B(0, 2\rho)$ où

$$B(0, 2\rho) = \{g \in E : ||g|| \leq 2\rho\}$$

Un élément $g^* \in V_n$, meilleur approximant de f dans V_n, sera alors défini par :

$$||f - g^*|| = \min_{g \in V_n} ||f - g|| = \min_{g \in [V_n \cap B(0,2\rho)]} ||f - g||$$

Puisque le sous-espace V_n est de dimension finie, $V_n \cap B(0, 2\rho)$ est une partie compacte, d'autre part la fonction numérique $g \to ||f - g||$ est continue, alors l'existence d'un meilleur approximant au moins de f dans V_n est assurée.

2 - Caractérisation des meilleurs approximants de f dans V_n

On cite toute de suite cette propriété importante dont la démonstration ne présente pas de difficulté :

Proposition 2-1 ([1])

L'élément $g^* \in V_n$ est meilleur approximant de f dans V_n si et seulement s'il existe un élément ℓ de l'espace dual E' tel que :

i) $\ell(g) = 0 \qquad \forall g \in V_n$

ii) $||\ell|| = 1$

iii) $\ell(e^*) = ||e^*|| \qquad$ où $e^* = f - g^*$

Si l'on utilise la notion d'orthogonalité de R.C. JAMES dans les espaces normés, à savoir :

$$g \perp h \iff ||g + \lambda h|| \geq ||g|| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad ([2])$$

On peut énoncer la :

Proposition 2-2 ([2])

L'élément $g^* \in V_n$ est meilleur approximant de f dans V_n si et seulement si l'élément $e^* = f - g^*$ est orthogonal à V_n.

Tout élément g^*, meilleur approximant de f dans V_n, est donc la projection orthogonale au sens défini par R.C. JAMES de f sur V_n.

Pour l'unicité du meilleur approximant, on a ce résultat :

Proposition 2-3

Si la norme de l'espace E est strictement convexe, alors tout élément f de E, $f \in V_n$, admet un meilleur approximant et un seul.

Vérification

Supposons que f admet deux meilleurs approximants g_1^* et g_2^* dans V_n : $(g_1^* \neq g_2^*)$

$$||f - g_1^*|| = ||f - g_2^*|| = \min_{g \in V_n} ||f - g||$$

On a d'une part :

$$||f - g_1^* + f - g_2^*|| \leq ||f - g_1^*|| + ||f - g_2^*||$$

D'autre part :

$$f - g_1^* + f - g_2^* = 2f - (g_1^* + g_2^*) = 2\left[f - \frac{g_1^* + g_2^*}{2}\right]$$

D'où :

$$||f - g_1^* + f - g_2^*|| = 2||f - (g_1^* + g_2^*)/2|| \geq 2||f - g_1^*||$$

On en déduit :

$$||(f - g_1^*) + (f - g_2^*)|| = ||f - g_1^*|| + ||f - g_2^*||$$

Ce qui est contradictoire avec le fait que la norme $||.||$ de E est strictement convexe car les deux vecteurs $f - g_1^*$ et $f - g_2^*$ ne sont pas proportionnels. D'où la proposition.

3 - Interprétation du meilleur approximant de f dans V_n à l'aide de la norme $\mathbb{R}^n$ générée par la norme $|| \ ||$ de E

Soient $(f_i)_{i=1-n}$ une base de V_n et φ la norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$ générée par la la norme $|| \ ||$ de E, relative au système $(f_i)_{i=1-(n+1)}$ avec $f_{n+1} = f$:

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n + x_{n+1} f||$$

$$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Alors le sous espace V_n est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow g = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \in V_n$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = ||\sum_{i=1}^{n} x_i f_i||$$

Par suite l'élément $g^* \in V_n$, meilleur approximant de f dans V_n, sera caractérisé à l'aide de ses composantes dans la base $(f_i)_{i=1-n}$, par :

$$g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$$

avec

$$\varphi(k_1, \ldots, k_n, -1) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \ldots, x_n - 1)$$

D'où :

<u>Proposition 3-1</u>

L'élément $g^* \in V_n$, $g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$, sera meilleur approximant de f dans V_n

si et seulement si l'élément $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ est meilleur approximant du vecteur e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$ au sens de la norme φ.

$(e_i)_{i=1-(n+1)}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soit la partie :

$$K_{(f_1,\ldots,f_n,f)} = \{k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n : \varphi(k_1, \ldots, k_n, -1)$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \ldots, x_n, -1)\}$$

On va maintenant étudier les propriétés de cette partie $\mathbb{R}^n$, qui est évidemment non vide d'après la proposition 1.

4 - Etude de la partie $K_{(f_1,\dots,f_n,f)}$

Les éléments de $K_{(f_1,\dots,f_n,f)}$ sont les composantes des meilleurs approximants g^* de f dans V_n par rapport à la base $(f_i)_{i=1-n}$, $K_{(f_1,\dots,f_n,f)}$ dépend donc de la base $(f_i)_{i=1-n}$ et l'élément f.

Soient $(g_i)_{i=1-n}$ une nouvelle base de V_n et P_n la matrice de changement de base :

$$(f_i)_{i=1-n} \xrightarrow{P_n} (g_i)_{i=1-n}$$

Alors on a :

$$K_{(f_i,f)} = P_n \cdot K_{(g_i,f)}$$

Cette relation n'est qu'une traduction de la formule du changement des coordonnées lors du changement de la base.

Soient P_{n+1} la matrice carrée d'ordre (n+1) :

$$P_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} P_n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

et Ψ la norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \varphi(P_{n+1} \cdot x) = \varphi_{P_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

c'est à dire

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 g_1 + \ldots + x_n g_n + x_{n+1}\, g_{n+1}||$$

avec $g_{n+1} = f$

Alors $K_{(g_i,\, f)}$ peut s'exprimer comme :

$$K_{(g_i, f)} = \{k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n : \Psi(k_1, \ldots, k_n, -1) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \Psi(x_1, \ldots, x_n, -1)\}$$

On va maintenant énoncer la :

Proposition 4-1

i) $K_{(f_i, f)}$ est une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^n$

ii) Si la norme φ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, générée par la norme $||.||$ de E à l'aide des éléments $f_1, \ldots, f_n, f$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n + x_{n+1}\, f||$$

$$\forall\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

est absolue, alors $K_{(f_i, f)}$ est symétrique et on a :

$$K_{(f_i, f)} = \{k = (k_1, \ldots, k_n) : \varphi(k_1, \ldots, k_n, -1) = (0, \ldots, 0, -1)\}$$

iii) $K_{(f_i, f)}$ sera réduit à un point si la norme φ est strictement convexe.

Vérification

On a

$$K_{(f_i, f)} = \{k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n : \varphi(k, -1) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, -1)\}$$

La fonction numérique $x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(x, -1)$ est continue, donc $K_{(f_i, f)}$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$. D'autre part

$$K_{(f_i,f)} \subset \{k \in \mathbb{R}^n \ ; \varphi(k) \leq \varphi(0, -1) + \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, -1)\}$$

Cette partie est alors bornée ; d'où elle est compacte.

La convexité de $K_{(f_i,f)}$ provient du fait que la norme φ est convexe.

La norme φ est absolue si

$$(x) = (|x|) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

où $|x| = (|x_1|), \ldots, |x_{n+1}|)$ si $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$

On montre que φ est absolue si et seulement si φ est monotone, c'est à dire

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \qquad ([3])$$

$$\left[\, |x| \leq |y| \Leftrightarrow |x_i| \leq |y_i| \qquad \forall\, i = 1 - n+1 \,\right]$$

Par suite la propriété ii). La propriété iii) n'est qu'une conséquence de la proposition 2-3.

II - PROBLEME INVERSE DU PROBLEME DU LIEU DES MEILLEURS APPROXIMANTS LINEAIRES DANS UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE D'UN ESPACE DE BANACH

1 - Position du problème

On peut résumer les résultats de la partie I comme suit :

Dans un espace de Banach E de norme $||.||$, soient V_n un sous-espace et f un élément, $f \notin V_n$

Soit $(f_i)_{i=1-n}$ une base de V_n, alors l'isomorphisme canonique entre $\mathbb{R}^n$ et V_n :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow g = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \in V_n$$

met en correspondance le lieu des meilleurs approximants de f dans V_n avec une partie compacte convexe $K_{(f_i,f)}$ de $\mathbb{R}^n$:

$g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$ est meilleur approximant de f dans V_n si et seulement si

$k = (k_1, \ldots, k_n) \in K_{(f_i,f)}$

Ceci étant dit, on peut poser le problème inverse suivant :

Soit K une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, existe-t-il un espace de Banach E dans lequel on peut trouver (n+1) éléments linéairement indépendants f_1, f_2, ..., f_n, f tels que :

$g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$ sera meilleur approximant de f dans V_n si et seulement si $k = (k_i) \in K$

(V_n étant le sous-espace de E engendré par (f_i))

Autrement dit $K = K_{(f_i, f)}$

Dans le cadre de la théorie des normes sur $\mathbb{R}^n$ générées par les normes des espaces fonctionnels de Banach, on va essayer de résoudre ce problème important.
Avant d'envisager le problème dans toute sa généralité, on va étudier certains cas particuliers :

<u>2 - Cas où la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ se réduit à un point</u> :
$K = \{k = (k_1, \ldots, k_n)\}$

Dans ce cas, on obtient le résultat suivant :

<u>Proposition</u>

Soient $k = (k_1, \ldots, k_n)$ un point quelconque de $\mathbb{R}^n$ et E un espace de Banach dont la norme est strictement convexe. Alors pour tout système $(f_i)_{i=1-n}$ de n éléments linéairement indépendants de E, il existe un élément f de E, $f \notin V_n$, V_n est le sous-espace engendré par (f_i), tel que :

$$K_{(f_i, f)} = \{k\}$$

<u>Vérification</u>

En effet, d'après la proposition 2-2 il existe un élément $h \neq 0$ de E orthogonal (au sens de R.C. JAMES) à V_n. Soit g^* l'élément de V_n dont les composantes sont (k_i) dans la base (f_i) :

$$g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$$

Tout élément $f = g^* + \lambda h$ avec $\lambda \neq 0$ n'appartient pas à V_n et admet g^* comme son meilleur approximant dans V_n car $(f - g^*) \perp V_n$. L'unicité de g^* résulte de la stricte convexité de la norme de l'espace E, d'où

$$K_{(f_i, f)} = \{k\}.$$

Passons maintenant à un autre cas très important :

3 - Cas où K est une partie compacte convexe symétrique admettant l'origine 0 comme point interne

On sait que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\varphi(x) = \operatorname{Inf} \{\alpha > 0 : x \in \alpha K\}$$

appelée jauge de la partie convexe K, est une norme de $\mathbb{R}^n$ ([4]) et que

$$K = \{x \quad R^n, \quad (x) \leq 1\}$$ ([4]) et ([5])

On obtient alors la

Proposition 3-1

Si K est une partie compacte convexe symétrique admettant l'origine 0 comme point interne, alors il existe un espace de Banach E dans lequel on peut trouver (n+1) éléments linéairement indépendants $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et f tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

Vérification

Soit φ la jauge de la partie convexe K. Considérons la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\Psi(x \;, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n), \left| x_{n+1} \right|\right]$$

Ψ est bien une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$$

On a alors :

$$K = \{k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n : \varphi(k) \leq 1\}$$

$$K = \{k = (k_1, \ldots, k_n) : \Psi(k_1, \ldots, k_n, -1) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \Psi(x_1, \ldots, x_n, -1)\}$$

Autrement dit dans l'espace de Banach $E = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme Ψ, les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$ de la base canonique peuvent bien jouer les rôles des éléments $f_1, f_2, \ldots, f_n, f$, d'où :

$$K = K_{(e_i)}$$

Ce qui montre la proposition précédente.

On en déduit le

Corollaire

Soient K une partie compacte convexe symétrique admettant l'origine 0 comme point interne, de jauge φ, et Ψ une norme de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max\left[\varphi(x_1, \ldots, x_n), |x_{n+1}|\right]$$

Si la norme d'un espace de Banach E génère la norme Ψ :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n + x_{n+1} f_{n+1}||$$

Alors on a :

$$K = K_{(f_i, f)}.$$

Applications

. Si K est la boule unité de la norme h_∞ dans $\mathbb{R}^n$, alors la norme Ψ associée n'est autre que la norme h_∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max\left[h_\infty(x_1, \ldots, x_n), \; x_{n+1}|\right]$$

$$= \max_{i=1-(n+1)} |x_i| = h_\infty(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$$

D'après la proposition 5-2 (Chapitre I) et la proposition 2-4 (Chapitre II) la norme de la convergence uniforme de $\mathcal{C}(K, F)$ et la norme $\| \ \|_\infty$ de $L^\infty(X, \mu)$ génèrent la norme h_∞ de $\mathbb{R}^n$, d'où :

Proposition 3-2

Si la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité de la norme h_∞ :

$$K = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n : h_\infty(k_1, \dots, k_n) \leq 1\}$$

Alors il existe dans l'espace $\mathcal{C}(K, F)$ des applications continues d'un espace métrique compact K dans un espace de Banach F (respectivement dans l'espace $L^\infty(X, \mu)$), (n+1) éléments linéairement indépendants $f_1, f_2, \dots, f_n$, f tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

Remarque : Il ne faut pas confondre la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ et l'espace métrique compact K de $\mathcal{C}(K, F)$.

. Si par contre la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ n'est autre que la boule unité de la norme h_1 :

$$K = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n = h_1(k_1, \dots, k_n) \leq 1\}$$

Alors on obtient ce résultat :

Proposition 3-3

Si la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité de la norme h_1, alors il existe dans l'espace des fonctions numériques continues sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, comme dans celui des fonctions mesurables essentiellement bornées $L^\infty(X, \mu)$, (n+1) éléments linéairement indépendants $f_1, \dots, f_n$, f tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

Vérification

Pour prouver cette proposition, il suffit de démontrer que les normes des espaces $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $L^\infty(X, \mu)$ génèrent la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, associée à la norme h_1 :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max \left| h_1(x_1, \ldots, x_n), \; |x_{n+1}| \right|$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

. <u>Cas de l'espace</u> $C(|a, b|, \mathbb{R})$

D'après la proprosition 2-4 (Chapitre II) la norme de la convergence uiforme de l'espace des fonctions continues d'un espace métrique compact K dans un espace de Banach F, $C(K, F)$, génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on a pu caractériser parfaitement des éléments $(f_i)_{i=1-n}$ permettant de définir la norme h_1 à partir de celle de $C(K, F)$:

$$h_1(x_1, \ldots, x_n) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n|| \qquad (1)$$

$$\forall \; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

De plus si l'espace métrique compact K est l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on peut prendre les (f_i) vérifiant (1) tels que :

$$\mathrm{Supp}\ (f_i) \subset [a, c] \qquad c \in]a, b[$$

$$\forall \; i = 1 - n$$

Soit maintenant une fonction f continue sur $[a, b|$, de norme égale à 1 et dont le support est contenu dans $[c, b|$:

$$||f|| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}\ (f) \subset [c, b]$$

On a pour tout élément $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\max_{t \in [a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t) + x_{n+1} f(t) \right| = \max \left[\max_{t \in [a,c]} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t) + x_{n+1} f(t) \right| \right.$$

$$\left. \max_{t \in [c,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t) + x_{n+1} f(t) \right| \right]$$

or

$$\max_{t \in [a,c|} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t) + x_{n+1} f(t) \right| = \max_{t \in [a,c]} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t) \right| = h_1(x_1, \ldots, x_n)$$

et

$$\max_{t\in[c,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t) + x_{n+1} f(t) \right| = |x_{n+1}| \max_{t\in[c,b]} |f(t)| = |x_{n+1}|$$

D'où :

$$||x_1 f_1 + \dots + x_n f_n + x_{n+1} f|| = \max_{t\in[a,b]} |x_1 f_1(t) + \dots + x_n f_n(t) + x_{n+1} f(t)|$$

$$= \Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

D'où :

Proposition 3-4

La norme de la convergence uniforme de l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ génère la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \max \left[h_1(x_1, \dots, x_n), |x_{n+1}|\right]$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

. Cas de l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées $L^\infty(X, \mu)$

D'après la proposition 5-5 (Chapitre I) la norme $|| \; ||_\infty$ de l'espace $L^\infty(X, \mu)$ génère la norme h_1 sur $\mathbb{R}^n$:

$$h_1(x_1, \dots, x_n) = ||x_1 f_1 + \dots + x_n f_n|| \qquad (1)$$

On peut toujours trouver n éléments (f_i) linéairement indépendants de $L^\infty(X, \mu)$ vérifiant (1) et tels que

$f_i = 0$ presque partout dans Y

$\forall i = 1 - n$

où Y est une partie mesurable de X avec $\mu(Y) > 0$.

Avec $f = \varphi_Y$ (fonction caractéristique de la partie Y) on vérifie aisément (comme dans le cas précédent) que

$$||x_1 f_1 + \dots + x_n f_n + x_{n+1} f||_\infty = \Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

Par suite :

Proposition 3-5

La norme $||.||_\infty$ de l'espace $L^\infty(X, \mu)$ génère la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \max\left[h_1(x_1, \dots, x_n), |x_{n+1}|\right]$$
$$\forall (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

On a étudié deux cas particuliers où la partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est, soit la boule unité U_1 de la norme h_1, soit la boule unité U_∞ de la norme h_∞ et prouvé qu'il existe dans les espaces fonctionnels de Banach $L^\infty(X, \mu)$ et $\mathcal{C}(K, F)$ ou $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ suivant le cas, des éléments $f_1, \dots, f_n$, f linéairement indépendants tels que :

$$(1)\quad K = K_{(f_i, f)}$$

De plus, d'après les résultats de §.2, §.6, [Chapitre II] et §.5 [Chapitre I] on peut expliciter facilement les éléments $f_1, \dots, f_n$, f vérifiant la relation (1).
Dans le cas général où la partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est la boule unité d'une norme φ quelconque, on sait que tout espace de Banach E dont la norme génère la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \max\left[h_1(x_1, \dots, x_n), |x_{n+1}|\right]$$
$$\forall (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

satisfait le problème inverse des meilleurs approximants linéaires relatif à la partie compacte convexe K, c'est à dire qu'il existe des éléments $f_1, \dots, f_n$, f dans E tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

En dehors du cas trivial où l'espace E n'est autre que l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme Ψ, on a ce résultat particulier très important d'après §.7 [Chapitre II, DEUXIEME PARTIE]

Proposition 3-6

Si la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité d'une norme , il existe dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ des éléments $f_1, \ldots, f_n$, f tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

4 - Généralisation des résultats précédents

Les résultats de §.3 |propositions 3-2 et 3-3| concernent seulement les parties compactes convexes qui sont les boules unités de la norme h_∞ et h_1, en fait on peut les généraliser aux parties compactes convexes de $\mathbb{R}^n$, de la forme $P_n \cdot K$ où P_n est une matrice carrée d'ordre n, non singulière et K la boule unité de la norme h_1 ou h_∞.

Pour cela on va prouver cette propriété qui est, en quelque sorte, une généralisation du corollaire de la proposition 3-1.

Proposition 4-1

Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte convexe symétrique admettant l'origine (comme point interne, de jauge φ et Ψ une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n), |x_{n+1}|\right]$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Alors si la norme $\| \; \|$ d'un espace de Banach E génère la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \|x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n + x_{n+1} f_{n+1}\|$$

elle génère aussi la norme ψ sur R^{n+1}

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max \left[\Phi(x_1, \ldots, x_n), |x_{n+1}|\right]$$

où Φ est une norme de $\mathbb{R}^n$ définie à partir de la norme φ par l'intermédiaire d'une matrice carré P_n d'ordre n, non singulière :

$$\Phi(x) = \varphi(P_n x) = \varphi_{P_n}(x) \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Par suite il existe (n+1) vecteurs linéairement indépendants $(g_i)_{i=1-(n+1)}$ dans E tels que :

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 g_1 + \ldots + x_n g_n + x_{n+1} g_{n+1}||$$

$$\forall\ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

et toute partie compacte convexe dans $\mathbb{R}^n$ de la forme P_n^{-1}. K vérifie :

$$P_n^{-1}\ K = P_n^{-1}\ K_{(f_i, f)} = K_{(g_i, f)}$$

<u>Vérification</u>

Si la norme $||.||$ de l'espace E génère la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, elle génère aussi la norme φ sur $\mathbb{R}^n$, et par conséquent la norme Φ [cf. Partie I, §.2, proposition 2.2]. On a alors un système $(g_i)_{i=1-n}$ de n vecteurs linéairement indépendants de E, qui n'est autre que le transformé du système $(f_i)_{i=1-n}$ par la matrice P_n :

$$(f_i)_{i=1-n} \xrightarrow{P_n} (g_i)_{i=1-n},$$

tel que :

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = ||x_1 g_1 + \ldots + x_n g_n||$$

$$\forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Soit maintenant la matrice carrée P_{n+1} d'ordre (n+1) définie par :

$$P_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} P_n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

elle est non signulière et on a :

$$\psi(x) = \Psi(P_{n+1}\ x) \qquad \forall\ x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

La norme ψ est donc générée par la norme $||.||$ de l'espace E, en fait on a :

$$\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 g_1 + \dots + x_n g_n + x_{n+1} f||$$

$$\forall\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

La dernière propriété s'en déduit immédiatement d'après les résultats du paragraphe 4.
On peut citer alors les résultats suivants qui découlent de la proposition 4-1 pour généraliser la proposition 3-3.

<u>Corollaire 1</u>

Soient A une matrice carrée d'ordre n, non singulière et φ une norme de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\varphi(x) = h_1(Ax) \qquad\qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

Alors la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \max \left[\varphi(x_1, \dots, x_n),\ |x_{n+1}|\right]$$

est générée par la norme de la convergence uniforme de l'espace fonctionnel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

<u>Vérification</u>

C'est la conséquence de la proposition 3-4 et la proposition 4-1.

D'où :

<u>Corollaire 2</u>

Pour toute partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$, de la forme $A . K_1$:

$$K = A . K_1$$

où A est une matrice carrée d'ordre n, non signulière et K_1 la boule unité de la norme h_1 dans $\mathbb{R}^n$, il existe (n+1) éléments linéairement indépendants f_1, f_2, f_1, f_2, ..., f_n, f dans l'espace fonctionnel de Banach $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ comme dans l'espace $L^\infty(X, \mu)$ tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}.$$

Vérification

C'est le résultat de la proposition 5-3-1 et du corollaire 1.

Dans le cas de la norme h_∞, une telle généralisation est évidente car la norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ associée à la norme h_∞ n'est autre que la norme h_∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$

Corollaire 3

Pour toute partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$, de la forme $A \cdot K_1$:

$$K = A \cdot K_1$$

où A est une matrice carrée d'ordre n, non singulière et K_1 la boule unité de la norme h_∞ dans $\mathbb{R}^n$, il existe dans l'espace des applications continues d'un espace métrique compact K dans un espace de Banach F, $\mathcal{C}(K, F)$, comme dans l'espace des fonctions mesurables μ-bornées sur l'espace X, $L^\infty(X, \mu)$, (n+1) éléments linéairement indépendants f , ..., f , f tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

Vérification

C'est une simple déduction des résultats du paragraphe 4 et de la proposition 3-2.

5 - Cas où la partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est le translaté de la boule unité d'une norme φ de $\mathbb{R}$

Soient E un espace de Banach, V_n son sous-espace de dimension finie n, et h un élément de E. Soit V_h le translaté de V_n :

$$V_h = V_n + h$$

Si $h \in V_n$, alors $V_h = V_n$

On a le résultat suivant :

Proposition 5-1

Soit f une élément de E ; $f \notin V_h = V_n + h$, alors

i) $f - h \notin V_n$

ii) Tout élément $g_h^* \in V_h$ est meilleur approximant de f dans V_h si et seulement si $g^* = g_h^* - h \in V_n$ est meilleur approximant de f - h dans V_n.

Vérification

Il est clair que :

$$f \notin V_h \iff f - h \notin V_n$$

D'autre part soit $g_h^* \in V_h$, un meilleur approximant de f dans V_h ; on a en posant $g_h^* = g + h$, $g^* \in V_n$:

$$||f - g_h^*|| = \min_{g_h \in V_h} ||f - g_h|| = \min_{g \in V_n} ||f - (g+h)||$$

$$||(f-h) - g^*|| = \min_{g \in V_n} ||(f-h) - g||$$

D'où la proposition.

Soient maintenant K_1 une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^n$ et a un point quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Soit K le translaté de K_1 : $K = a + K_1$

On peut alors citer la

Proposition 5-2

Si la partie compacte convexe K_1 de $\mathbb{R}^n$ représente les composantes des meilleurs approximants g^* de f dans V_n par rapport à la base (f_i) de V_n^* :

$$g^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i \iff k = (k_1, \ldots, k_n) \in K_1$$

Alors le translaté $K = a + K_1$ représente les composantes des meilleurs approximants g_h^* de $f + h - h = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$ - dans V_n par rapport à la même base (f_i) :

$$g_h^* = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i \iff k = (k_1, \ldots, k_n) \in K = a + K_1$$

Vérification

D'après la proposition 5-1, l'élément g_h^* sera meilleur approximant de $f + h$ dans V_n si et seulement si $g^* = g_h^* - h$ est meilleur approximant de f dans V_n. En traduisant cette propriété entre les éléments g_h^* et g^* par l'expression de leurs composantes dans la base (f_i) de V_n, on obtient le résultat de la proposition 5-4-2. D'où en tenant compte de la proposition 5-2-1 et de ce résultat, on déduit la :

Proposition 5-3

Pour toute partie compacte convexe symétrique K_1 de $\mathbb{R}^n$ admettant l'origine O comme point interne et tout élément $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un espace de Banach E dans lequel on peut trouver (n+1) éléments linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n$, f tels que :

$$K = a + K_1 = K_{(f_i, f)}.$$

En particulier l'espace fonctionnel de Banach $C([a, b], \mathbb{R})$ vérifie cette propriété d'après les résultats de §.7 [Chapitre II, DEUXIEME PARTIE] et la proposition 3-6. D'où :

Corollaire

Pour toute partie compacte convexe symétrique K_1 de $\mathbb{R}^n$ admettant l'origine O comme point interne et tout élément $a \in \mathbb{R}^n$, il existe dans l'espace fonctionnel de Banach $C([a, b], \mathbb{R})$ des éléments $f_1, \ldots, f_n$, f linéairement indépendants tels que :

$$K = a + K_1 = K_{(f_i, f)}.$$

Applications

Généralisation des corollaires 2 et 3 de §.4

On va étudier maintenant ces deux cas particuliers généralisant les corollaires 2 et 3 de §.4, dans lesquels on peut expliciter les éléments $f_1, \ldots, f_n$, f.

Proposition 5-4

Soient K_1 la boule unité de la norme h_1 dans $\mathbb{R}^n$, A une matrice carrée d'ordre n, non singulière, et a un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Alors pour toute partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ de la forme

$$K = a + A \cdot K_1,$$

il existe (n+1) éléments linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n$, f dans l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ comme dans $L^\infty(X, \mu)$ tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

De même, on peut citer la propriété suivante :

Proposition 5-5

Soient K_1 la boule unité de la norme h_∞ dans $\mathbb{R}^n$, A une matrice carrée d'ordre n, non singulière et a un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Alors pour toute partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ de la forme $K = a + A \cdot K_1$, il existe dans l'espace des applications continues d'un espace métrique compact K dans un espace de Banach F, $\mathcal{C}(K, F)$, comme dans l'espace des fonctions mesurables μ-bornées sur l'espace X, $L^\infty(X, \mu)$, (n+1) éléments linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n$, f tels que :

$$K = a + A \cdot K_1 = K_{(f_i, f)}$$

6 - Cas où la partie compacte convexe K est symétrique par rapport à l'un de ses points (K non réduit à un point)

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte convexe et symétrique par rapport à un point $a \in K$, c'est à dire :

$$K = 2a - K$$

Pour résoudre ce problème, on peut supposer que la partie compacte convexe K est symétrique par rapport à l'origine, en vertu des propositions 5-4-1 et 5-4-2.

On va maintenant introduire une norme Ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui nous servira à la résolution du problème.

6-1 - Etude de la norme introduite Ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$

Soit $(\varepsilon_i)_{i=1-(n+1)}$ une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\varepsilon_{n+1} = e_{n+1}$ et que $(\varepsilon_i)_{i=1-n}$ soit une base de $\mathbb{R}^n$, (les (e_i) désignant la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$).

On note V_m le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(\varepsilon_i)_{i=1-m}$, et V le supplémentai de V_m, engendré par $(\varepsilon_i)_{i=(m+1)-(n+1)}$.
Soient φ une norme de V_m et h une norme de V, strictement monotone ; c'est à dire qu'elle est monotone et de plus vérifie cette propriété :

$$|x| < |y| \Rightarrow h(x) < h(y)$$

$\left(\left[|x| < |y| \Longleftrightarrow |x| \leq |y| \text{ et } |x| \neq |y|\right], |x| = (|x_i|)\right.$ où x_i sont les composantes de x dans la base $(\varepsilon_i)_{i=(m+1)-(n+1)}$).

Considérons maintenant la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max\left[\varphi(x_1, \ldots, x_m), h(x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1})\right]$$

pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ de composantes $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}$ dans la base (ε_i).

Proposition 6-1

La fonction Ψ est une norme de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui est monotone par rapport aux (n+1)-m composantes $(x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1})$ du vecteur $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) \leq \Psi(x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n, y_{n+1})$$

Si $|x| \leq |y|$, $\quad x = (x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in V$

$\quad y = (y_{m+1}, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in V.$

Vérification

Cette propriété provient tout simplement de la définition de la norme Ψ et de la monotonie de la norme h de V. On remarque ici que la stricte monotonie de h n'est pas nécessaire dans cette assertion.

Citons enfin ce résultat important qui sera indispensable pour la suite :

Lemme ([5])

Dans un espace $\mathbb{R}^n$ tout ensemble convexe A de dimension n possède au moins un point interne.
(cf. [5] page 124 - Exercice 11).

On peut énoncer maintenant la :

Proposition 6-2

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est une partie compacte convexe et symétrique par rapport à l'un de ses points, alors il existe un espace de Banch E dans lequel on peut trouver (n+1) vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n$, f tels que :

$K = K_{(f_i, f)}$.

Vérification

Soit K une partie compacte convexe symétrique par rapport à l'origine O, ($K \subset \mathbb{R}^n$). On note V_m le sous-espace de $\mathbb{R}^n$, engendré par K. Soient $(\varepsilon_i)_{i=1-n}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que les m premiers vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ forment la base de V_m, et V le supplémentaire de V_m dans $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par les vecteurs $\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_n, e_{n+1}$.

Sur l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de cette base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, e_{n+1})$ on considère la norme Ψ définie ci-dessus :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max \left[\varphi(x_1, \ldots, x_m), h\,(x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1})\right]$$

où φ est la jauge de K dans V_m, qui est une norme de V_m d'après le lemme précédent, et h une norme de V, strictement monotone, qui sera prise comme une norme de type h_p (norme de Hölder d'ordre p, $1 \leq p < +\infty$) pour le besoin du raisonnement.

Ceci étant dit, on va montrer que l'ensemble des meilleurs approximants de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$ est la partie compacte convexe K ; c'est à dire :

$$\Psi(k_1, \ldots, k_m, k_{m+1}, \ldots, k_n, -1) = \min_{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \Psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, -1)$$

si et seulement si $k_i = 0 \quad \forall\, i = (m+1) - n$ et

$$\varphi(k_1, \ldots, k_m) \leq h(0, \ldots, 0, -1) = 1$$

Cette vérification est immédiate en vertu de la proposition 6-1 et la stricte monotonie de la norme h de V.

D'où la proposition 6-2.

Ce résultat est obtenu dans $\mathbb{R}^n$ muni de la base $(\varepsilon_i)_{i=1-n}$ qui peut être différente de la base canonique $(e_i)_{i=1-n}$, cependant on peut le transformer dans $\mathbb{R}^n$ avec la base canonique, pour cela il suffit de travailler avec une autre norme ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ déduite de la norme Ψ par l'intermédiaire de la matrice de passage P_n :

$$(e_i)_{i=1-n} \xrightarrow{P_n} (\varepsilon_i)_{i=1-n}$$

$$\psi(x) = \Psi(P_{n+1}^{-1}\, x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

où

$$P_{n+1} = \begin{array}{|c|c|} \hline P_n & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

ce qui est équivalent à :

$$\psi(x, x_{n+1}) = \Psi(P_n^{-1}\, x, x_{n+1})$$

(les composantes $x_1, \ldots, x_n$ sont prises par rapport à la base canonique $(e_i)_{i=1-n}$ de $\mathbb{R}^n$).

Si de plus la base $(\varepsilon_i)_{i=1-n}$ est choisie orthonormée, ce qui est toujours le cas, la matrice P_n est unitaire et :

$$P_n^{-1} = P_n^t$$

Par suite la norme ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ se calcule plus simplement

$$\psi(x, x_{n+1}) = \Psi(P_n^t x, x_{n+1}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Applications

1) . Soient a un point quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $(C_i)_{i\ I}$ une famille de boules unités de centre a relatives à la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de normes sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $C = \bigcap_{i\in I} C_i$, C est bien une partie compacte convexe et symétrique par rapport au point a, de plus si on considère la fonction φ définie sur R^n par :

$$\varphi(x) = \operatorname*{Sup}_{i\in I} \varphi_i(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

On a

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x - a) \leq 1\}$$

La fonction φ peut ne pas être partout définie sur $\mathbb{R}^n$ sauf si l'ensemble I est fini ; dans ce cas φ est une norme de $\mathbb{R}^n$ et C est une boule unité de centre a de la norme , par suite les résultats de §.3 s'y appliquent. Dans le cas général, en vertu de la proposition 6-2, on a la :

Proposition 6-3

Soient $(\varphi_i)_{i\ I}$ une famille de normes sur $\mathbb{R}^n$ et a un point de $\mathbb{R}^n$.

Soient $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi_i(x - a) \leq 1\} \quad \forall i \in I$$

et $\quad C = \bigcap_{i\in I} C_i$

Alors il existe un espace de Banach E dans lequel se trouvent (n+1) vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n$, f tels que :

$$C = K_{(f_i, f)}$$

2) . Dans le cas général, le problème inverse des meilleurs approximants linéaires est résolu avec un espace de Banach trivial, l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni d'une norme Ψ convenable, et par suite avec l'espace fonctionnel de Banach $C([a, b], \mathbb{R})$, [Cf DEUXIEME PARTIE, Chapitre II, §.7].

Pour une solution non triviale du problème inverse, c'est à dire que l'espace de Banach E en question est un espace de dimension infinie, il est difficile en général d'expliciter les $f_1, \ldots, f_n$, f tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

Dans ces deux cas suivants, du fait que la norme φ de V_m prend une structure particulière : φ est égale à la norme h_1 ou la norme h_∞ de V_m, on peut expliciter les éléments f_i, f grâce aux résultats obtenus dans la deuxième partie [Chapitre I et Chapitre II].

<u>Proposition 6-4</u>

Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte convexe et symétrique par rapport au point $a \in K$, V_m le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par la partie $K - a$ (le translaté de K) et φ la jauge de $K - a$, qui est une norme de V_m.

Si la norme φ est identique à la norme h_1 de V_m, alors il existe dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions numériques continues sur $[a, b]$ comme dans l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées $L^\infty(X, \mu)$, (n+1) vecteurs linéairement tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

<u>Vérification</u>

La démonstration sera analogue à celle de la proposition 3-3. D'après la proposition 6-2, il suffit de démontrer que la norme Ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max \left[h_1(x_1, \ldots, x_m), h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}\right.$$

est générée par la norme de la convergence uniforme de l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ et la norme $|| \ ||_\infty$ de l'espace $L^\infty(X, \mu)$.

On sait que la norme de l'espace $C(K, F)$ génère la norme h_1 de $\mathbb{R}^n$ [Cf II, §.2, proposition 2-2], de plus si l'espace métrique compact K est l'intervalle $[a, b]$ et l'espace normé complet F est $\mathbb{R}$, on peut choisir les $(f_i)_{i=1-(n+1)}$ tels que :

i) $(f_i)_{i=1-m}$ définissent la norme h_1 de V_m à partir de la norme de $C([a, b], \mathbb{R})$:

$$h_1(x_1, \ldots, x_m) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_m f_n||$$

$$\forall \ (x_1, \ldots, x_m) \in V_m$$

ii) $(f_i)_{i=(m+1)-(n+1)}$ définissent la norme h_1 de V, supplémentaire de V_m dans R^{n+1}.

iii) $\text{Supp}\ (f_i) \subset [a, c] \qquad \forall\ i = 1 - m$

et $\text{Supp}\ (f_i) \subset [c, b] \qquad \forall\ i = (m+1) - (n+1)$

où c est un point de $]a, b[$ choisi à l'avance.

Avec ces (f_i) ainsi définis, on aura :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_m f_m + \ldots + x_n f_n + x_{n+1} f_{n+1}||$$

$$\forall \ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

En tenant compte des résultats de [Chapitre II, §.5, proposition 5-6] et en faisant le même raisonnement, on peut prouver facilement que la norme Ψ est aussi générée par la norme $|| \ ||_\infty$ de l'espace $L^\infty(X, \mu)$. D'où la proposition 5-5-4.

La démonstration du cas où la norme φ est égale à la norme h_∞ sera strictement pareille ; on a la :

<u>Proposition 6-5</u>

Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte convexe et symétrique par rapport au point $a \in K$, V_m le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par la partie K - a (le translaté de K) et φ la jauge de K - a, qui est une norme de V_m.

Si la norme est identique à la norme h_∞ de V_m, alors il existe dans l'espace de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions numériques continues sur $[a, b]$ comme dans l'espace des fonctions mesurables μ-bornées $L^\infty(X, \mu)$, $(n+1)$ vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n, f$ tels que

$$K = K_{(f_i, f)}$$

<u>Vérification</u>

On sait que la norme de la convergence uniforme de l'espace $\mathcal{C}(K, F)$ génère la norme h_1 et h_∞ de R^n [Chapitre II, §.2, propositions 2-2 et 2-4]. Dans le cas où l'espace métrique compact K est l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et l'espace de Banach F est la droite réelle $\mathbb{R}$, on peut trouver $(n+1)$ éléments linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tels que :

i) Les m premiers éléments $f_1, \ldots, f_m$ définissent la norme h_∞ de V_m à partir de la norme de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

$$h_\infty(x_1, \ldots, x_m) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_m f_m||$$

ii) Les $(f_i)_{i=(m+1)-(n+1)}$ définissent la norme h_1 de l'espace V, supplémentaire de V_m dans $\mathbb{R}^{n+1}$

iii) $\mathrm{Supp}\,(f_i) \subset [a, c]$ $\qquad \forall\ i = 1 - m$

et

$\mathrm{Supp}\,(f_i) \subset [c, b]$ $\qquad \forall\ i = (m+1) - (n+1)$

où c est un point de $]a, b[$ choisi à l'avance.

Dans ces conditions, on vérifie aisément que la norme Ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfait :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ||x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n + x_{n+1} f_{n+1}||$$

On raisonne de la même façon pour l'espace $L^\infty(X, \mu)$ en tenant compte des résultats de [Chapitre II, §.5].

On remarque enfin que les deux propositions 6-4 et 6-5 constituent une extension des résultats des paragraphes 3, 4 et 5.

On va se placer maintenant dans le cas général du problème inverse des meilleurs approximants linéaires.

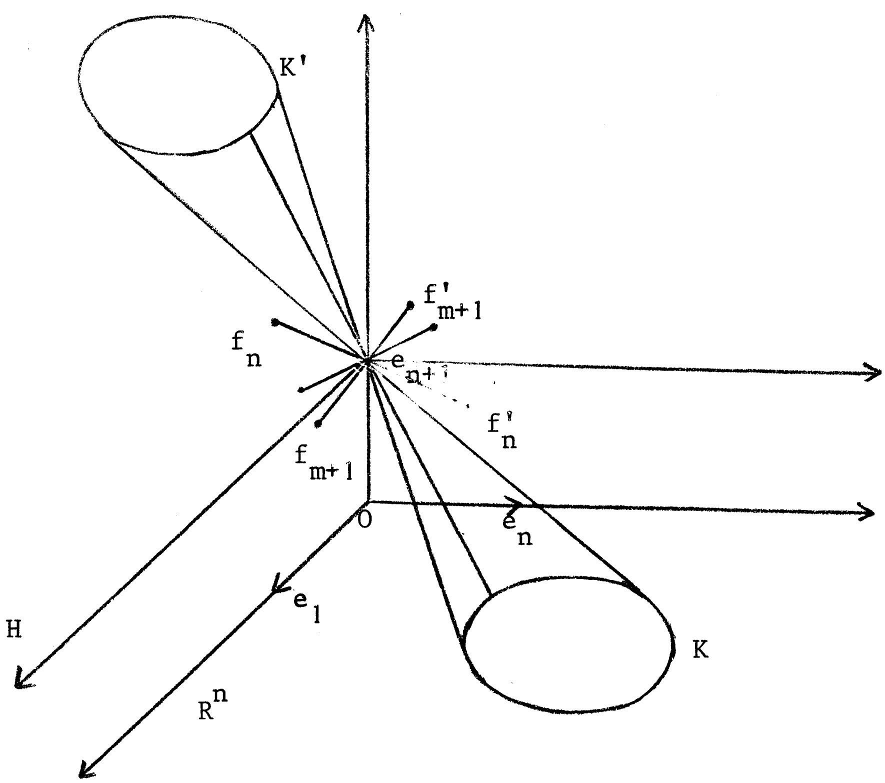
7 - Cas général où la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ est non vide et quelconque. Résolution du problème inverse des meilleurs approximants linéaires

Soient K une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et a un point de K ($a \in K$). On note V_m le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par la partie K - a (la translatée de K) dont la dimension est m ($m \leq n$), m est aussi la dimension de la partie convexe K). Soit $(\varepsilon_i)_{i=1-n}$ une base de $\mathbb{R}^n$ (en général prise orthonormée par raison de commodité) telle que les m premiers $(\varepsilon_i)_{1-m}$ forment la base de V_m.

Soient e_{n+1} le $(n+1)^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique $(e_i)_{i=1-(n+1)}$ de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ et K' la transformée de la partie K par la symétrie par rapport au point e_{n+1} :

$$K' = 2e_{n+1} - K$$

Il est clair que K' est une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$.



Dans l'hypercube $H = \mathbb{R}^n + e_{n+1}$, soit Γ la réunion des segments $[f_i, f_i']$, $(i = (m+1)-n)$, symétriques par rapport à e_{n+1} :

$$e_{n+1} = \frac{f_i + f_i'}{2} \qquad \forall\ i = (m+1) - n$$

et parallèles aux vecteurs $(\varepsilon_i)_{i=(m+1)-n}$ de la base (ε_i) :

$$f_i = e + \lambda_i \cdot \varepsilon_i \qquad \forall\ i = (m+1) - n$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \qquad \lambda_i \neq 0 \qquad \forall\ i = (m+1) - n$$

Γ est évidemment compact comme réunion finie de compacts $[f_i, f_i']$. On note C l'enveloppe convexe de la réunion $K \cup K' \cup \Gamma$.

Proposition 7-1

La partie convexe C ainsi construite possède les propriétés suivantes :

i) C est symétrique par rapport à e_{n+1}

ii) L'intérieur $\mathring{C}$ de C est non vide et $e_{n+1} \in \mathring{C}$

iii) L'hyperplan $H_o = \{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ qu'on peut identifier à $\mathbb{R}^n$, est d'appui de C et que :

$\mathbb{R}^n \cap C = K$.

iiii) C est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque : On suppose toujours l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ normé pour pouvoir parler des notions topologiques comme $\mathring{C}$, compacité de C.

Vérification

i) C est symétrique par rapport à e_{n+1} car la partie $K \cup K' \cup \Gamma$ l'est.

ii) L'intérieur de C est non vide car $\dim(C) = n + 1$ et $e_{n+1} \in \mathring{C}$ car e_{n+1} est un point de symétrie de C ([5]).

iii) Le demi-espace fermé défini par $\{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} \geq 0\}$ contient $K \cup K' \cup \Gamma$, donc contient son enveloppe convexe C. H_o est par suite un hyperplan d'appui de C.

$\mathbb{R}^n \cap C = K$

Soit Λ l'enveloppe convexe de la réunion $\Gamma \cup K'$. Λ est contenu dans le demi-espace fermé $\{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geq 1\}$ et que H est un hyperplan d'appui de Λ. Il est clair que C est aussi l'enveloppe convexe de $\Lambda \cup K$, par suite, puisque Λ et K sont deux parties convexes, on peut écrire :

$$C = \{x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \; ; \; \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \text{et} \quad x_1 \in \Lambda, \, x_2 \in K$$

$$= \bigcup_{(x_1, x_2) \; \Lambda \times K} [x_1, x_2]$$

$$\text{D'où } C \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{(x_1, x_2) \; \Lambda \times K} ([x_1, x_2] \cap \mathbb{R}^n)$$

Or pour tout couple $(x_1, x_2) \quad \Lambda \times K$, $[x_1, x_2] \cap \mathbb{R}^n = \{x_2\}$ car le sous-espace $\mathbb{R}^n$ ne rencontre pas le demi-espace fermé

$\{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geq 1\}$; alors :

$$C \cap \mathbb{R}^n = K$$

iiii) Quant à la compacité de C, elle provient du résultat suivant :

Lemmes ([5]) et ([7])

Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe d'une partie compacte est compacte.

Soit $C_o = C - e_{n+1}$. C_o est une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$, symétrique par rapport à l'origine 0 et admettant 0 comme point interne. Sa jauge Ψ définit bien une norme de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dans l'espace de Banach $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme Ψ, l'ensemble des meilleurs approximants de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$ est exactement la partie compacte convexe K. D'où :

Proposition 7-2

Si K est une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un espace de Banach dans lequel se trouvent (n+1) vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n$, f tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

D'autre part d'après §.7 [Chapitre II, DEUXIEME PARTIE] la norme de l'espace fonctionnel de Banach $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ génère toutes les normes de $\mathbb{R}^n$. Par suite on peut citer le résultat très important suivant :

Proposition 7-3

Si K est une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe dans l'espace fonctionnel de Banach $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (n+1) vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

Remarques :

1) Dans le raisonnement précédent, à la place du point e_{n+1}, on peut prendre un point 2 quelconque de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon \notin \mathbb{R}^n$.

2) La résolution générale de §.7 appliquée à §.2 donne des autres espaces de Banach tels que $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dont la norme n'est pas strictement convexe qui satisfont le problème inverse des meilleurs approximants linéaires relatif à la partie compacte convexe K réduite à un point.

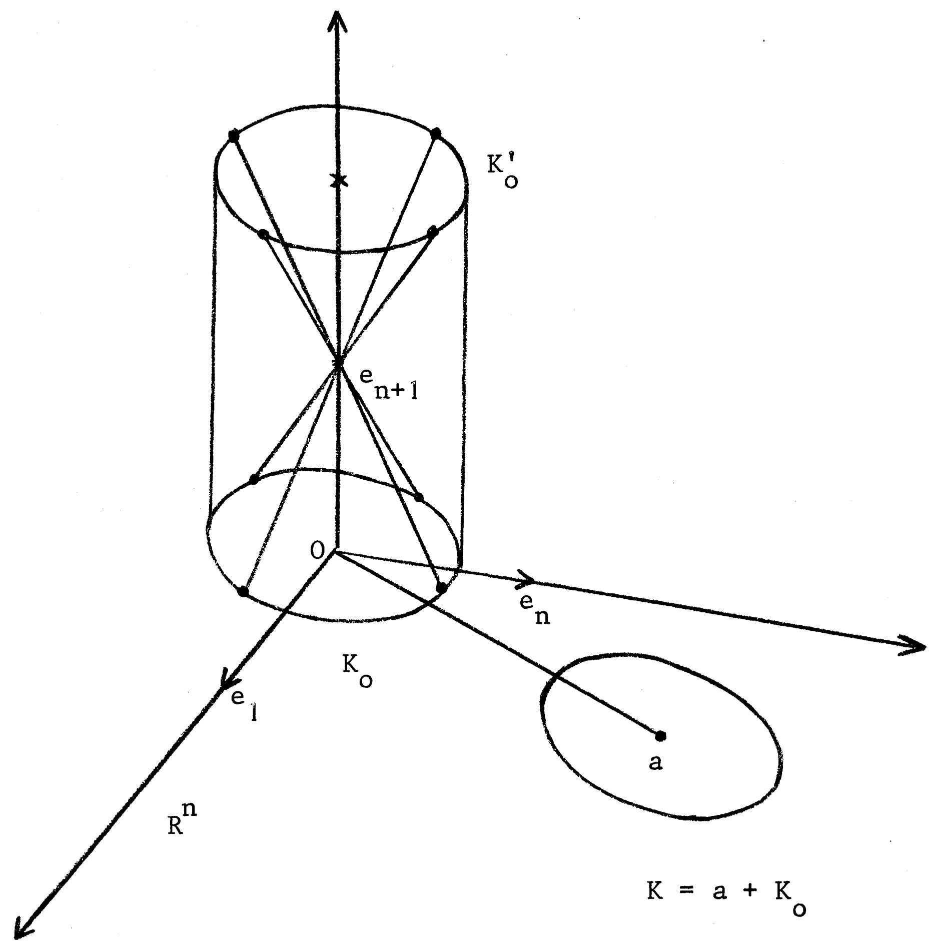
3) Si la partie compacte convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est d'intérieur non vide, $\mathring{K} \neq \emptyset$, c'est à dire dim(K) = n, la partie Γ peut être supprimée. On considère l'enveloppe convexe C de la réunion $K \cup K'$ seulement.
De plus si K est symétrique par rapport à un point $a \in K$, soit $K_o = K - a$; on note φ la jauge de K_o, qui est une norme de $\mathbb{R}^n$ et Ψ la norme de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \max\left[\varphi(x_1, \ldots, x_n), |x_{n+1}|\right]$$

D'après les résultats de §.3, dans l'espace de Banach $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme Ψ, l'ensemble des meilleurs approximants de e_{n+1} dans $\mathbb{R}^n$ est la partie compacte convexe K_o (pour la partie compacte K il suffit de faire une translation de vecteur a, [cf. §.5]).

D'autre part dans la résolution du problème général (§.7) la partie C, l'enveloppe convexe de $K_o \cup K'_o$ permet de définir une norme de $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfaisant le problème étudié. En fait, dans ce cas, la partie C n'est autre que le cylindre de base K_o dont les génératrices sont parallèles à e_{n+1} et qui est justement la boule unité de la norme Ψ définie ci-dessus, translatée de vecteur e_{n+1}, c'est à dire :

$C_o = C - e_{n+1} = B_\Psi(0,\ 1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \Psi(x) \leq 1\}$



On voit donc que la démonstration générale (§.7) coïncide avec la démonstration faite dans le §.3 au cas particulier où la partie compacte convexe K de $\mathbb{R}^n$ est d'intérieur non vide et symétrique par rapport à l'un de ses points.

4) De même dans le §.6, pour résoudre le problème inverse des meilleurs approximants linéaires relatif à la partie compacte convexe K ayant une symétrie par rapport à l'un de ses points, on est conduit à construire une norme Ψ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que la boule $B_\Psi(e_{n+1},\ 1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \Psi(x-e_{n+1}) \leq 1\}$ admet $\mathbb{R}^n$ comme son hyperplan d'appui sur la partie $K_o = K - a$ (a étant le point de symétrie de la partie K, c'est à dire K = 2a - K) : $\mathbb{R}^n \cap B_\Psi(e_{n+1},\ 1) = K_o$. La méthode de résolution dans le §.6 n'est donc qu'un cas particulier de la méthode générale présentée dans le §.7.

5) On peut donc dire qu'il n'existe qu'une seule méthode de résolution du problème inverse du problème du lieu des meilleurs approximants linéaires dans un sous-espace de dimension finie n d'un espace de Banach, elle consiste à construire dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ une norme Ψ convenable de telle sorte que la boule $B_\Psi(\varepsilon, 1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \Psi(x - \varepsilon) \leq 1\}$, où ε est un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon \notin \mathbb{R}^n$ (en général $\varepsilon = e_{n+1}$), admet $\mathbb{R}^n$ comme son hyperplan d'appui sur la partie compacte convexe donnée K de $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n \cap B_\Psi(\varepsilon, 1) = K$.
Ensuite il reste à chercher les espaces de Banach autres que l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme Ψ dont les normes génèrent la norme Ψ de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour pouvoir obtenir une solution non triviale

8 - Application : Carctérisation des parties compactes convexes de l'espace $\mathbb{R}^n$

Des résultats obtenus dans les parties I et II, on peut caractériser les parties compactes convexes de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de la théorie de l'approximation comme suit :

Proposition 8-1

Une partie non vide K de $\mathbb{R}^n$ est compacte convexe si et seulement s'il existe un espace de Banach E dans lequel se trouvent (n+1) vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n, f$ tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

Plus précisément, puisque la norme de l'espace fonctionnel de Banach $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ génère toutes les normes de $\mathbb{R}^n$, on peut énoncer la :

Proposition 8-2

Une partie non vide K de $\mathbb{R}^n$ est compacte convexe si et seulement s'il existe dans l'espace fonctionnel de Banach $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, (n+1) vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n, f$ tels que :

$$K = K_{(f_i, f)}$$

III - EXEMPLES SIMPLES DE CONSTRUCTION DE n ELEMENTS (f_i), $i = 1-n$, DE L'ESPACE $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ DEFINISSANT UNE NORME Ψ DE $\mathbb{R}^n$

Dans la deuxième partie [Chapitre II, §.7] on a démontré que la norme de la convergence uniforme sur $[a, b]$ de l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ génère toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$, on a même pu caractériser les (f_i), $i = 1-n$, de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ définissant toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ dont la norme duale est strictement convexe, en partilier les normes usuelles h_p $(1 < p < +\infty)$.

On rappelle ici le résultat obtenu dans §.7 [DEUXIEME PARTIE, Chapitre II], à savoir :

Une condition suffisante pour que les (f_i), $i = 1-n$, de l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ vérifient la relation :

$$\Psi(x) = ||x_1 f_1 + \dots + x_n f_n|| = \max_{t \in [a,b]} |x_1 f_1(t) + \dots + x_n f_n(t)| = \max_{Z \in \Gamma} x^T Z$$

$$\forall\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

est que :

$$(1) \quad S_{\Psi^*} \subset \Gamma \subset U_{\Psi^*}$$

$\Gamma = \theta^+ ([a, b]) \cup \theta^- ([a, b])$ où θ^+ et θ^- sont des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$\theta^+ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longrightarrow \theta^+(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]$$

et

$$\theta^-(t) = -\theta^+(t) \qquad \forall\ t \in [a, b]$$

Cette condition suffisante est aussi nécessaire si la norme Ψ est telle que sa norme duale Ψ^* soit strictement convexe.

Sauf les cas où $\Psi = h_1$ ou h_∞ de $\mathbb{R}^n$ dans lesquels on peut expliciter facilement les éléments (f_i) de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ définissant la norme Ψ [Cf. DEUXIEME PARTIE, Chapitre II, §.2 et §.6], on n'est pas encore arrivé à trouver d'une façon simple des (f_i) de l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ qui permettent de définir une norme Ψ

quelconque de $\mathbb{R}^n$ à partir de la norme de $C([a, b], \mathbb{R})$.

La méthode de construction suivante qui consiste à définir d'une façon assez simple une fonction θ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\theta([a, b]) = S_{\Psi^*} = \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi^*(x) = 1\}$$

dont les fonctions coordonnées (f_i) satisfont bien la relation (1), résoud ainsi ce problème.

Puisque tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $[0, 1]$:

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (b - a)\, t + a$$

est une homéomorphie de $[0, 1]$ sur $[a, b]$, et que S_{Ψ^*} est homéomorphe à $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : h_2(x) = 1\}$

pour toute norme Ψ de $\mathbb{R}^n$ (Ψ^* étant sa norme duale) :

$$\beta : S_2 \longrightarrow S_{\Psi^*}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{\Psi^*(x)} \cdot x$$

est une homéomorphie de S_2 sur S_{Ψ^*},

il suffit de construire une fonction θ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

(2) $\theta([0, 1]) = S_2$.

Ce résultat correpsond au cas où $a = 0$, $b = 1$ et $\Psi = h_2$, pour les autres cas, a, b et Ψ quelconques, la fonction cherchée n'est autre que $\beta \circ \theta \circ \alpha^{-1}$.

1 - PREMIER EXEMPLE

La construction de la fonction θ vérifiant (2) nécessite certains résultats de la théorie des nombres [Cf. [10], [11]] que l'on va présenter ci-dessous.

<u>Ensemble triadique de Cantor</u>

C'est l'ensemble C des nombres $t \in [0, 1]$ qui peuvent se mettre sous cette forme :

$$t = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i} \qquad \text{où } a_i = 0, 2 \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots$$

Géométriquement, l'ensemble C peut être obtenu à partir de $[0, 1]$ en y enlevant une infinité dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
Ces intervalles ouverts enlevés de $[0, 1]$ sont les suivants :

Dans la première étape, on divise $[0, 1]$ en trois intervalles égaux et on enlève l'intervalle ouvert au milieu $]1/3, 2/3[$, il reste alors deux intervalles fermés $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$ dans lesquels on va refaire l'opération précédente et ainsi de suite. [Cf. [10] et [11]].
L'ensemble C est donc fermé dans $[0, 1]$ et par suite est un compact.

<u>Proposition 1-1</u>

L'intervalle fermé $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ est une image continue de l'ensemble triadique de Cantor C.

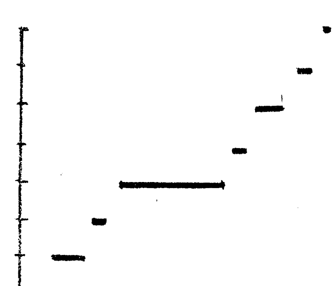
<u>Vérification</u>

Soit g l'application de C dans $[0, 1]$ définie par :

$$t = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i} \longrightarrow g(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{2^i} \qquad \text{où } b_i = \frac{a_i}{2} \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots$$

Il est facile de constater en utilisant la représentation en système binaire des nombres de l'intervalle $[0, 1]$, [Cf. [10] et [11]], que la fonction g prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0, 1]$ et qu'elle continue [Cf. [11]].

La fonction g prend les mêmes valeurs aux extrémités de chaque intervalle enlevé. En définissant alors la fonction h comme étant égale à cette valeur sur tout intervalle, et en posant ailleurs $h(t) = g(t) \quad \forall\, t \in C$, on obtient une fonction continue définie sur l'intervalle entier $[0, 1]$ dont le graphe est donné par cette figure :



<u>Proposition 1-2</u>

L'ensemble triadique de Cantor C est homéomorphe à la puissance infinie de l'ensemble constitué de deux éléments A = {0, 2} :

$$C \simeq \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \qquad A_n = A = \{0, 2\}, \quad \forall\, n$$

<u>Vérification</u> Cf. [11]

Ainsi, on peut identifier les points de C avec les suites de zéros et de deux ; en d'autres termes on identifie un nombre appartenant à C avec la suite de chiffres qui le représente dans le système ternaire de numération. On en déduit alors la

<u>Proposition 1-3</u>

L'espace produit $C^n = C \times C \times \ldots \times C$ (n facteurs est homéomorphe à l'espace C.

<u>Vérification</u>

En effet tout point $p \in C^n$ peut être représenté sous la forme

$$p = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$$

où $x^{(i)}$, $\forall\, i = 1 - n$, est une suite de zéros et de deux. De ces n suites on en forme une seule :

$$x_1^{(1)} \; x_1^{(2)} \ldots x_1^{(n)} \; x_2^{(1)} \; x_2^{(2)} \ldots x_2^{(n)} \ldots\ldots$$

que l'on note f(p). Il est facile de vérifier que f est un homéomorphisme de C^n sur C [Cf. [11]].

<u>Proposition 1-4</u>

L'espace produit $I^n = I \times I \times \ldots \times I$ (n facteurs) est l'image continue de l'espace C. (I = [0, 1]).

<u>Vérification</u>

Soit $\prod_1^n g$ l'application de C^n dans I^n définie par :

$$\prod_1^n g : C^n \longrightarrow I^n$$

$$p = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \longrightarrow (\prod_1^n g)\;(p) = \left[g(x^{(1)}, \ldots, g\,(x^{(n)})\right]$$

où g est la fonction surjective continue de C sur I donnée dans la proposition 1-1. L'application $\prod_1^n g$ est bien une surjection continue.

Soit maintenant l'intervalle fermé $J = [-\Pi/1, \Pi/2]$ de $\mathbb{R}$. On note J^n le produit cartésien de n intervalles identiques à J.

Soit α l'homéomorphie de I sur J :

$$\alpha : I \longrightarrow J$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = \frac{\Pi}{2}(2t - 1)$$

Il est clair que l'application $\prod_1^n \alpha$ définie sur I^n est à valeurs dans J^n par :

$$\prod_1^n \alpha : I^n \longrightarrow J^n$$

$$\tau = (t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow (\prod_1^n \alpha)(\tau) = [\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)]$$

est une homéomorphie de I^n sur J^n.

Par suite on a la

<u>Proposition 1-5</u>

L'espace produit J^n est l'image continue de l'espace C.

<u>Vérification</u>

En effet on a :

$$J^n = h(C)$$

avec $h = (\prod_1^n \alpha) \circ (\prod_1^n g) \circ \rho$ où $\rho = f^{-1}$

Soient h_i ($i = 1-n$) les n fonctions coordonnées de h, ce sont des fonctions continues de C sur J :

$$h_i : C \longrightarrow J \qquad h_i(C) = J, \qquad \forall\, i = 1 - n$$

Or puisque l'ensemble C est obtenu à partir de l'intervalle I en y enlevant une infinité dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, on peut prolonger chaque h_i en une fonction continue β_i sur l'intervalle I tout entier en la prenant linéaire dans chaque intervalle enlevé. De cette façon, la fonction $\beta = (\beta_i)$ de I dans J^n est continue et surjective.

$$\beta = (\beta_i) : I \longrightarrow J^n \; ; \; \beta(I) = J^n \; ; \; \beta|C = h.$$

D'où :

Proposition 1-6

Le produit J^n est l'image continue de l'intervalle I.

Considérons maintenant l'application γ de J^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\gamma : J^n \longrightarrow R^{n+1}$$

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \longrightarrow \gamma(u) = v = (v_1, \ldots, v_{n+1}) \text{ tel que}$$

$$v_1 = \sin u_1$$

$$v_m = \left(\prod_{i=1}^{m-1} \cos u_i\right) . \sin u_m \qquad \text{pour } 2 \leq m \leq n-1$$

$$v_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \cos u_i\right) . \sin 2u_n$$

$$v_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \cos u_i\right) . \cos 2u_n$$

Il est facile de vérifier que γ est continue et que l'image de J^n par cette application est effectivement $S_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$. [Cf. [12]].

$$\gamma(J^n) = S_2 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : h_2(x) = 1\}$$

Moyennant ce résultat, on peut affirmer alors la

Proposition 1-7

1) La spère $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : h_2(x) = 1\}$ est l'image continue de l'ensemble triadique de Cantor C.

2) La sphère S_2 est l'image continue de l'intervalle I.

Vérification

En effet on a : $S_2 = \ell(C)$ où $\ell = \gamma \circ h$

De même : $S_2 = \theta(I)$ où $\theta = \gamma \circ \beta$

On a pu ainsi construire deux fonctions continues ℓ et θ respectivement du compact C sur S_2 et de l'intervalle $I = [0, 1]$ sur S_2. Cette construction permet d'affirmer sans toutefois avoir recours à certains résultats de la topologie algébrique, en particulier le théorème de HAHN-MAZURKIEWICZ [Cf. DEUXIEME PARTIE, Chapitre II, §.7] qu'il existe des espaces métriques compacts K tels que la norme de la convergence uniforme sur K de l'espace $C(K, \mathbb{R})$ génère toutes les normes Ψ de $\mathbb{R}^n$.

On va maintenant expliciter les fonctions coordonnées ℓ_i $(i = 1 - n+1)$ et f_i $(i = 1 - n+1)$ respectivement de ℓ et θ.

Expressions des ℓ_i $(i = 1 - n+1)$

On a le schéma suivant de l'application

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\rho"] \arrow[rrr, bend right, "h"'] \arrow[rrrr, bend right=60, "\ell"'] & C^n \arrow[r, "\prod_1^n g"] & I^n \arrow[r, "\prod_1^n"] & J^n \arrow[r, "\gamma"] & S_2 \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$

$$h = \left(\prod_1^n \alpha\right) \circ \left(\prod_1^n g\right) \circ \rho, \qquad \ell = \gamma \circ h$$

D'après la proposition 1-3, la fonction $f^{-1} = \rho = (\rho_i)$ est définie par :

$$\rho : C \longrightarrow C^n$$

$$x = (x_i) \longrightarrow f(x) = p = \left[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right]$$

où les $x^{(j)}$ sont donnés par :

$$x_i^{(j)} = x_{(i-1)n+j} \qquad \begin{cases} \forall\, j = 1\text{-}n \\ \forall\, i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Par suite on a :

$$\rho_j\,(x) = x^{(j)} \qquad \forall\, j = 1\text{-}n$$

C'est à dire :

$$\rho_j : C \longrightarrow C$$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} \longrightarrow \rho_j\,(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{(k-1)n+j}}{3^k}$$

D'autre part d'après les définitions des fonctions $\prod_1^n \alpha$ et $\prod_1^n g$, on obtient l'expression suivante de la fonction h :

$$h = (h_j) : C \longrightarrow J^n$$

$$x \longrightarrow h(x) = \left[\alpha(g(\rho_1(x))), \ldots, \alpha(g(\ _n(x)))\right]$$

On en déduit alors les expression suivantes des fonctions h_j (j = 1-n) :

$$h_j : C \longrightarrow J$$

$$\forall\, j = 1 - n)$$

$$x \longrightarrow h_j(x) = \alpha(g(\rho_j(x)))$$

C'est à dire, en tenant compte des définitions de α et g :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} \longrightarrow h_j(x) = \frac{\Pi}{2}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{(k-1)n+j}}{2^{k+1}} - 1\right]$$

Enfin en composant les fonctions γ et h on obtient la fonction ℓ dont les fonctions coordonnées ℓ_i (i = 1 - (n+1)) sont données par :

$$\ell = (\ell_i) : C \longrightarrow S_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x \longrightarrow \ell(x) = \gamma\left[h_1(x), \ldots, h_n(x)\right]$$

où les fonctions ℓ_i $(i = 1 - (n+1))$ de C dans $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$\ell_1(x) = \sin\left[h_1(x)\right]$$

$$\ell_m(x) = \left(\prod_1^{m-1} \cos\left[h_i(x)\right]\right) . \sin\left[h_m(x)\right] \qquad \text{pour } 2 \leq m \leq n-1$$

et

$$\ell_n(x) = \left(\prod_1^{n-1} \cos\left[h_i(x)\right]\right) . \sin\left[2h_n(x)\right]$$

$$\ell_{n+1}(x) = \left(\prod_1^{n-1} \cos\left[h_i(x)\right]\right) . \cos\left[2h_n(x)\right]$$

En tenant compte des expressions de h_j précédemment obtenues, on arrive à ces résultats :

Pour tout $x = (x_k) \in C$, $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k}$:

$$\ell_1(x) = -\cos\left[\frac{\Pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{(k-1)n+1}}{2^{k+1}}\right]$$

$$\ell_m(x) = -\left(\prod_1^{m-1} \sin\left|\frac{\Pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{(k-1)n+i}}{2^{k+1}}\right|\right) . \cos\left|\frac{\Pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{(k-1)n+m}}{2^{k+1}}\right| \qquad \text{pour } 2 \leq m \leq n-1$$

$$\ell_n(x) = -\left(\prod_1^{n-1} \sin\left|\frac{\Pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{(k-1)n+i}}{2^{k+1}}\right|\right) . \sin\left|\Pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{nk}}{2^{k+1}}\right|$$

$$\ell_{n+1}(x) = -\left(\prod_1^{n-1} \sin\left|\frac{\Pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{(k-1)n+i}}{2^{k+1}}\right|\right) . \cos\left|\Pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{nk}}{2^{k+1}}\right|$$

<u>Expressions des f_i $(i = 1 - n+1)$</u>

D'après les résultats précédents on obtient le schéma suivant de la fonction θ :

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\theta = \gamma \circ \beta"'] & J^n \arrow[r, "\gamma"] & S_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}
\end{tikzcd}
$$

où β est la fonction prolongée de la fonction h par ce procédé :

$\beta = (\beta_i)$

avec β_i définie par :

$\beta_i = h_i$ dans C et β_i linéaire dans chaque intervalle enlevé [Cf. Proposition 1-5].

En composant les fonctions γ et β, on obtient la fonction θ dont les coordonnées (f_i) ont des expressions analogues à celles de ℓ_i précédemment obtenues.

2 - DEUXIEME EXEMPLE

Cette deuxième méthode, qui paraît plus simple que la première, consiste à construire directement une fonction $\omega = (\omega_i)$, $(i = 1 - n)$, continue de I dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\omega(I) = I^n$ (sans passer par l'ensemble triadique de Cantor C). Elle est basée sur un résultat de KIYOSHI ISEKI [Cf. [13] et [15]], à savoir :

Proposition

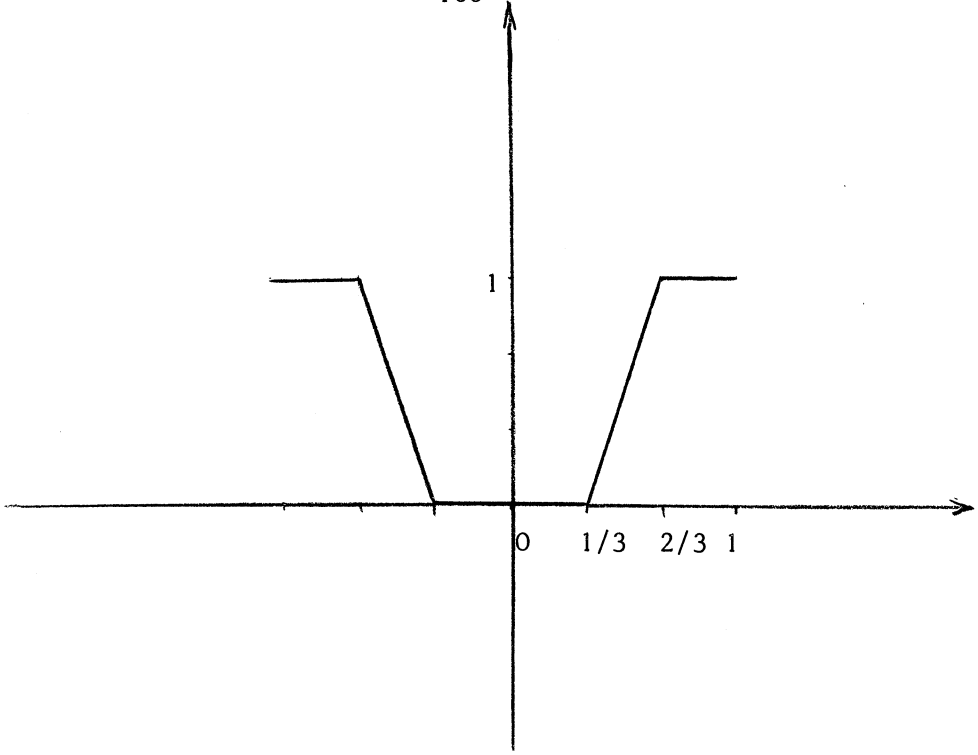
Le cube de Hilbert $I^\infty = \prod_1^{+\infty} I$ est l'image continue de l'intervalle I.

Vérification [Cf. [13] et [15]]

La démonstration de ce résultat est basée sur les développements binaires et ternaires des nombres de [0, 1]. KIYOSHI ISEKI a introduit la fonction ℓ définie sur R et périodique, sa période étant égale à 2 :

$$\ell(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } & t \in [0, 1/3] \\ 1 \text{ si } & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

ℓ étant linéaire dans $[1/3, 2/3]$ et $\ell(-t) = \ell(t) \quad \forall\, t \in [0, 1]$



et a ensuite définie une suite de fonctions ω_n continues de I sur I à partir de la fonction ℓ de cette façon :

$$\omega_n(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} f\left[\frac{2^{n-1}(2k-1)-1}{3} t\right] \qquad \forall\, t \in I$$

Moyennant ces fonctions ω_n, il a démontré que la fonction ω de I dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$) définie par

$$\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$$
$$t \longrightarrow \omega(t) = (\omega_n(t))$$

est continue et que $\omega(I) = I^{\infty}$

Ce résultat est évidemment valable dans le cas du produit fini I^n de I. Les n fonctions coordonnées ω_i de la fonction continue ω de I sur I^n sont données par les formules ci-dessus.

Dès lors en opérant de la même façon que la première méthode, on obtient les expressions des fonctions coordonnées (f_i) de la fonction continue θ de I sur $S_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

REFERENCES

[1] LAUREN T J.P.
Cours de théorie de l'approximation. Fascicule 3.
Université de Grenoble. Institut de Mathématiques Appliquées.

[2] JAMES R.C.
Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces.
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 61 (1947), pp 265-292.

" Orthogonality in normed linear spaces.
Duke. Math. J. Vol. 12 (1945), pp 291-302.

" Inner products in normed linear spaces.
Trans. Amer. Math. Soc. (1947), pp 559-566.

[3] BAUER F.L.
Theory of norms.
Technical report n° CS 75 (August 1967), Stanford University.

BAUER F.L., J. STOER and C. WITZGALL
Absolute and monotonic norms.
Numer. Math. 3, 257-264, (1961)

[4] HOUSEHOLDER A.S.
The theory of matrices in numerical analysis.
Blaisdelle. New York, 1964.

[5] BOURBAKI N.
Eléments de mathématiques. Fascicule XV.
Espaces vectoriels topologiques. Chapitre 1 et 2.
Hermann - Paris (1967).

[6] EGGLESTON H.G.
Convexity
Cambridge University Press (1963)

[7] VALENTINE F.A.
Convex sets
Mc Graw - Hill Book Company - New York (1964).

[8] PHAM DINH TAO
Etude générale de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie
Rapport D.E.A. (1970-1971)
Institut de Mathématiques Appliquées - Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[9] GASTINEL N.
Analyse numérique linéaire.
Hermann - Paris 1966.

[10] NATANSON, J.P.
Theory of functions of a real variable. Volum I.
Fredenick Ungar publishing Company. New York (1964).

[11] KURATOWSKI K.
Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie.
Dunod (1966).

[12] BOURBAKI N.
Eléments de mathématiques. Livre III.
Topologie Générale. Chapitres 5 - 8.
Hermann - Paris (1963).

[13] SIERPINSKI W.
Cardinal and ordinal numbers
WARSAWA (1958).

[14] SCHONBERG I.J.
On the Peanon curve of Lebesgue.
Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 519.

[15] KIYOSHI, ISEKI
Journ. Osaka Inst. Sc. Technol. 2 (1950) p. 109.

BIBLIOGRAPHIE GENERALE

[1] BANACH S.
Théorie des opérations linéaires.
Chelsea publishing Company. New York, 1955

[2] BAUER F.L.
Theory of norms
Technical report n° CS 75 (August 1967), Stanford University.

BAUER F.L., STOER J. and WITZGALL C.
Absolute and monotonic norms.
Numer. Math. 3, 257-284 (1961).

[3] BOURBAKI N.
Eléments de mathématiques. Topologie générale. Chapitres 1 et 2.
Hermann - Paris 1965.

" Eléments de mathématiques. Fascicule XVIII. Livre V.
Espaces vectoriels topologiques. Chapitre 3, 4, 5.
Hermann - Paris 1967.

" Eléments de mathématiques. Livre VI. Intégration. Chapitres 1, 2, 3, 4.
Hermann - Paris

" Eléments de mathématiques
Intégration. Chapitre 5.
Hermann - Paris.

[4] CHOQUET G.
Cours d'analyse. Tome II. Topologie.
Masson et Cie. Paris 1964.

[5] DAY M.M.
Normed linear spaces.
Springer - Verlag 1962.

[6] DIEUDONNE J.
Eléments d'analyse. Tome I. Fondements de l'analyse moderne.
Gauthier-Villars. Paris 1968.

" Eléments d'analyse. Tome II.
Gauthier Villars - Paris 1968.

[7] DUGUNDJI, JAMES
Topology
Allyn and Bacon. Inc. Boston (1966).

[8] EGGLESTON H.G.
Convexity
Cambridge University Press (1963).

[9] FRECHET M.
Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert.
Ann. of Math. (2), 36, 705-718 (1935).

[10] GASTINEL N.
Analyse numérique linéaire.
Hermann - Paris (1966).

[11] GODBILLON C.
Eléments de topologie algébrique.
Hermann - Paris 1971.

[12] HAUSDORFF F.
Set theory
Chelsea publishing company. New York (1957).

[13] HEWITT E. and STROMBERG K.
Real and abstract analysis.
Springer - Verlag. Berlin Heidelberg - New York.

[14] HOCKING J.G. and YOUNG G.S.
Topology
Addison - Wesley Publishing Company, Inc.

[15] HOUSEHOLDER A.S.
The theory of matrices in numerical analysis.
Blaisdell, New York (1964).

[16] JAMES R.C.
Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces.
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 61 (1947), pp 265-292.

" Orthogonality in normed linear spaces.
Duke. Math. J. Vol. 12 (1945), pp 291-302.

" Inner products in normed linear spaces.
Trans. Amer. Math. Soc. (1947), pp 559-566.

[17] KAKUTANI S.
Some characterizations of Euclidean spaces.
Jap. J. Math. Vol. 16 (1939), pp. 93-97.

[18] KANTOROVITCH H.J., AKILOV G.P.
Functional analysis in normed spaces.
Pergamon (1964).

[19] KOWALSKY H.J.
Topological spaces.
Academic Press. New York and London (1957)

[20] LAURENT J.P.
Cours de théorie de l'approximation. Fascicule 3.
Université de Grenoble. Institut de Mathématiques Appliquées.

[21] LIUSTERNIK L., SOBOLEV V.
Elements of functional analysis.
FREDERICK UNGAR PUBLISHING C. - New York (1961).

[22] MARKOV A.A.
On mean values and exterior densities.
(English) Math. Sbornik 4 (1938), 165-191.

[23] MAITRE J.F.
Norme composée et norme associée d'une matrice.
Numer. Math. 10, 132-141 (1967).

[24] NATANSON I.P.
Theory of functions of a real variable. Volume I.
Frederick Ungar Publishing Company - New York - 1964.

[25] PHAM DINH TAO
Etude générale de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie.
Rapport D.E.A. (1970-1971).
Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

[26] VALENTINE F.A.
Convex sets.
Mc. Graw Hill Book Company - New York (1964).

[27] WAELBROECK L.
Topological vector spaces and algebras.
Berlin, Heidelberg - New York - Springer 1971.

[28] KURATOWSKI K.
Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie.
Dunod (1966)

[29] BOURBAKI N.
Eléments de mathématiques. Livre III
Topologie Générale. Chapitre 5 - 8.
Hermann - Paris (1963).

[30] SIERPINSKI W.
Cardinal and ordinal numbers.
WARSAWA (1958).

[31] SCHONBERG I.J.
On the Peano curve of Lebesgue.
Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 519.

[32] KIYOSHI ISEKI
Journ. Osaka Inst. Sc. Technol. 2 (1950), p. 109.

Vu,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

Vu, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale.