Quelques aspects qualitatifs de la théorie de la commande

Claude Lobry

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Claude LOBRY

QUELQUES ASPECTS QUALITATIFS DE LA THEORIE DE LA COMMANDE

Soutenue le 19 mai 1972 devant la commission d'examen :

M.	KUNTZMANN	Président
MM.	BARRA MARKUS MARTINET	Examinateurs

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures

MM.	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques Appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale

MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale

MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	SHAN Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 16 Novembre 1971

Cette thèse a été préparée dans d'excellentes conditions matérielles à Grenoble, dans le cadre du Département de Mathématiques ; que Messieurs CHABAUTY et KUNTZMANN qui ont contribué de façon essentielle à sa création en soient remerciés.

Je suis également reconnaissant à Monsieur KUNTZMANN d'avoir accepté de présider mon jury.

Monsieur BARRA m'a proposé de travailler dans le domaine de la commande optimale et a dirigé mes premières recherches à l'occasion de ma thèse de troisième cycle ; je lui exprime ici mes sincères remerciements.

Je remercie Monsieur MARKUS qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et a accepté de le critiquer.

Monsieur REEB m'a encouragé à continuer dans cette voie et m'a donné de précieux conseils ; je lui en suis très reconnaissant.

Jean MARTINET m'a toujours enseigné avec une rare gentillesse les outils dont j'avais besoin, a suivi avec constance ce que je faisais et bien souvent m'a fourni l'idée qui m'a permis de progresser ; je lui exprime ici toute ma gratitude.

Ces remerciements ne seraient pas complets si je ne remerciais Madame HIRTZ, Bibliothécaire, et Madame COUBES qui a dactylographié ce texte, pour leurs extrêmes compétence et gentillesse ; je remercie également l'U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique de Bordeaux d'avoir effectué le tirage de ce texte dans ses services.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

La théorie de la commande optimale des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires est l'aspect le plus simple de la théorie générale des systèmes guidables, c'est-à-dire des systèmes dont on peu modifier certains paramètres au cours de l'évolution. Un modèle mathématique souvent plus réaliste pour étudier de tels problèmes est celui où l'évolution est régie par une équation aux dérivées partielles stochastique. Cependant, en raison de sa plus grande simplicité, (et aussi malgré tout de son utilité pratique dans de nombreux domaines !) la théorie des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires a connu un grand développement depuis près de trente ans.

En réalité ces problèmes sont très anciens ; le premier "appareil" servant à contrôler la marche d'un système qui ait fait l'objet d'études mathématiques semble être le "régulateur à boules" de Watt. (J. C. Maxwell (1868) ; Vishnegradskii (1867). Les développements plus récents ont été motivés par les progrès de la technologie en matière de servomécanismes d'abord, puis d'ordinateurs ensuite.

Dans ce travail je m'intéresse à quelques aspects qualitatifs de la théorie des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires ; pour pouvoir préciser de quoi il s'agit, je vais rappeler en quelques mots les objectifs de cette théorie.

L'état d'un système concret évoluant au cours du temps est représenté par le vecteur x de $\mathbb{R}^n$; l'évolution du système est régie par une équation du type :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t, \mathcal{U}(t)) \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n \, , \; \mathcal{U}(t) \in U \subset \mathbb{R}^p \, .$$

La fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)$, la commande, doit être entendue comme le "programme", la "succession d'ordres" que l'on effectue sur le système ; ces ordres se traduisent, à travers l'application f , par une modification des conditions d'évolution. Le problème de la commande optimale consiste à déterminer une commande :

.../...

$$t \longmapsto \mathcal{U}(t) \qquad\qquad t_0 \le t \le t_1$$

de manière à assurer le transfert du système d'un état initial x_0 à un état final x_1 le plus économiquement possible au regard d'un critère donné. Ce problème a un double aspect ; il relève à la fois de la théorie des équations différentielles et de l'optimisation.

Le premier aspect a été abondamment étudié avant 1960. Pour l'essentiel on peut dire que ces études consistaient à déterminer les paramètres d'un régulateur automatique (du type régulateur de Watt) ; par exemple :

"Déterminer, la matrice A étant donné, la matrice B, de manière à ce que le système :

$$\frac{dx}{dt} = (A+B)x$$

soit asymptotiquement stable à l'origine".

L'analyse de ce problème a donné lieu à d'innombrables publications basées sur la "seconde méthode de Liapunov" et des propriétés fines des matrices. Si on exige en plus que ce système soit le "plus stable" possible, c'est-à-dire tel que le retour soit le plus rapide possible, on a un problème de commande optimale : ici la commande à l'instant t est choisie en fonction de l'état $x(t)$; (on se ramène à un problème du type précédent en posant $\mathcal{U}(t) = Bx(t)$). Cependant ce problème de retour à l'origine en temps minimum est un problème mal posé dans le cadre de la théorie de Liapunov. En effet, quelle que soit la matrice B le retour à l'origine ne peut être qu'asymptotique (c'est une conséquence du théorème affirmant l'unicité des solutions d'une équation différentielle !) et partant il est difficile de comparer deux matrices B_1 et B_2 par rapport à ce critère.

Cette difficulté essentielle a été surmontée par l'utilisation d'équations différentielles dont le second membre n'est pas continu. Pour cela, on considère des fonctions de commande $\mathcal{U}$ non pas continues, mais simplement localement intégrables. A partir de cette idée la théorie de la commande a repris les grandes lignes du calcul des variations :

.../...

- Formulation de conditions nécessaires (principe du maximum de Pontriaguine) analogues aux conditions d'Euler et équations de Hamilton.

- Formulation de théorèmes d'existence par Filippov, Castaing, Cesari, etc...

Dans cette manière d'aborder les problèmes, on se place résolument dans le cadre de l'analyse fonctionnelle, les théorèmes d'existence ne sont pas sans rapport avec les théorèmes d'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles. De nombreuses publications sur ce sujet ont paru ces dix dernières années, par contre, il semble que l'aspect plus spécifiquement "équations différentielles" a été un peu abandonné, à de notables exceptions près que je mentionnerai plus loin.

C'est l'étude de la commande optimale dans le cadre de la théorie des équations différentielles que je reprends dans ce travail. Si on accepte de faire quelques hypothèses restrictives, le problème de la commande optimale est plus ou moins équivalent à la donnée d'une famille :

$$(X^i)_{i \in I}$$

de champs de vecteurs sur une variété M . Plus précisément, considérons l'ensemble $A(x_0)$ des points qui peuvent être joints à un point x_0 donné, par un arc obtenu en recollant continuement, mais non différentiablement, un nombre fini de courbes intégrales des champs X^i ; tout renseignement de nature topologique ou géométrique sur $A(x_0)$ s'interprète en termes de la théorie de la commande. Cette manière de voir les choses n'est pas absolument neuve et pour cela je me suis beaucoup inspiré d'idées de R. Hermann [10] [11], de Hermes [12] [13], de la conception très géométrique qu'a V.G. Boltyanskii [1] [2] [3] de la théorie de la commande et enfin du livre de E.B. Lee et L.W. Markus [15].

.../...

Cette manière d'aborder la question m'a permis de montrer que quelques propriétés intéressantes (pas toutes !) sont en général (<u>génériquement</u> *) vérifiées par les systèmes guidables ; ce sont Messieurs G. Reeb et J. Martinet qui ont attiré mon attention sur ce sujet en me faisant remarquer que les hypothèses du théorème de Chow (Th. III 1.1 de ce travail) étaient certainement génériques.

J'ai organisé les différents chapitres de la manière suivante :

<u>CHAPITRE I</u> : Je considère le problème le plus simple : le problème du retour à l'origine en temps minimum pour un système régi par l'équation :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x + V(t)\ U \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad U \in [-1,+1] \quad .$$

La conclusion du chapitre est que, "<u>génériquement</u>", <u>tous les théorèmes intéressants sont vrais dans ce cas.</u>

<u>CHAPITRE II</u> : Je définis les polysystèmes dynamiques sur une variété M (pour parler rapidement un polysystème dynamique est l'action d'un certain groupe sur M) et je montre en quoi la théorie des polysystèmes dynamiques a des liens étroits avec la théorie de la commande. Ce chapitre ne contient aucun résultat dont la démonstration ne soit triviale.

<u>CHAPITRE III</u> : J'étudie les trajectoires définies par un polysystème dynamique. Je montre à partir de résultats de Chow et de Hermann que, dans le cas analytique du moins, les trajectoires sont des sous variétés de M . De plus "génériquement" tous les polysystèmes dynamiques sont triviaux en ce sens qu'ils ne possèdent qu'une trajectoire : M toute entière !

<u>CHAPITRE IV</u> : En fait, seules les demi-trajectoires positives (ensemble des points qui peuvent être atteints sans jamais "remonter" le temps) ont une réalité concrète. A part le fait que génériquement elles sont <u>d'intérieur non vide</u> je ne sais rien dire d'important sur les trajectoires positives ; en particulier je ne sais pas caractériser les polysystèmes dynamiques pour lesquels les demi-trajectoires positives sont fermées ; c'est dommage car cette question est plus ou moins équivalente à la question de l'existence des commandes optimales !

.../...

---

* Sur un espace de Baire on dit qu'un ensemble est résiduel s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Une propriété vérifiée sur un ensemble résiduel est dite "générique"

CHAPITRE V : Je discute en conclusion deux problèmes qualitatifs importants de la commande optimale ; l'étude de ces problèmes semble passer par l'étude des champs de vecteurs discontinus.

On pourra constater que le chapitre I est extrêmement élémentaire ; il repose pour l'essentiel sur le théorème des fonctions inverses et une forme faible du théorème de Sard : "l'image différentiable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ $(q > p)$ est de mesure nulle". En fait, il en est de même des autres chapitres ; sous un aspect un peu plus technique ils ne sont, quant au fond, qu'une application de ces deux théorèmes. Quant aux résultats : ceux du chapitre III généralisent à des familles de champs de vecteurs quelconques des résultats de Hermann concernant des modules de champs de vecteurs ; les propositions sur la nature "générique" de certaines propriétés me semblent originales.

Chaque chapitre comporte une introduction dans laquelle j'essaie de situer les résultats obtenus par rapport à la littérature que je connais. Tous les théorèmes, propositions, définitions, remarques sont précédés du numéro du chapitre, du paragraphe, et du numéro d'ordre dans le chapitre. Lorsqu'à l'occasion d'un résultat je serai amené à faire mention de certains aspects de la théorie de la commande que je n'ai pas abordé ici, bien qu'en relation avec mon travail, je citerai sans autres références bibliographiques les noms de mathématiciens ayant travaillé dans ce domaine ; ces citations n'ont aucun caractère exhaustif ! . A part le théorème IV 4.6, tous les résultats présentés ici ont été publiés dans [18] - [22] .

I - CONTROLE EN TEMPS MINIMUM DES SYSTEMES LINEAIRES

INTRODUCTION -

A condition de ne pas considérer le cas le plus général, dans le but d'éviter quelques difficultés non essentielles, on peut très bien faire une théorie complète des systèmes guidables linéaires en très peu de pages. C'est ce que je vais faire en considérant le système :

$$(1) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + V(t)u \qquad ; \qquad x \in \mathbb{R}^n \;;\; u \in [-1,+1]$$

et en m'intéressant au problème classique du retour à l'origine en temps minimum. Les quatre questions suivantes sont très naturelles.

1) Le système est-il localement contrôlable à chaque instant ? Précisément, peut-on affirmer que pour chaque réel t_0 et chaque x_0 suffisamment voisin de l'origine, il existe une commande mesurable : $\mathcal{U}_{x_0,t_0} \in L_1([t_0,t_1],[-1,+1])$ dont la réponse satisfasse :

$$x(t_1, x_0, t_0, \mathcal{U}_{x_0,t_0}) = 0 \quad ?$$

Par définition, la réponse est l'unique solution du problème de Cauchy que l'on obtient en remplaçant u par $\mathcal{U}_{x_0,t_0}(t)$ dans (1) et en choisissant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

2) Existe-t-il une commande optimale ? C'est-à-dire existe-t-il une commande qui assure le retour à l'origine en temps minimum ?

3) Peut-on caractériser la commande optimale ? En particulier dans quelles conditions les conditions nécessaires de Pontriaguine sont-elles suffisantes ?

4) Quel est le degré de régularité de la commande optimale ? A priori une commande optimale est une fonction mesurable, dans quelles conditions est-elle constante par morceaux, bang-bang ?

.../...

Je vais montrer que, génériquement, toutes ces questions ont une réponse positive.

Précisément, je vais montrer que l'ensemble des applications $t \mapsto V(t)$ qui, pour une application $t \mapsto A(t)$ donnée, sont telles que le système (1) soit localement contrôlable, possède des solutions optimales bang-bang caractérisées par le principe du maximum de Pontriaguine, contient un ouvert dense dans $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Ce résultat peut s'interpréter pratiquement de la manière suivante :

Supposons que :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\ x(t)$$

représente l'équation d'évolution fondamentale du système, "l'équation à laquelle on ne peut pas toucher", et que le terme supplémentaire : $V(t)u$ qui conduit à l'équation complète :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\ x(t) + V(t)\ u \tag{1}$$

représente les "corrections" que l'on peut effectuer à chaque instant en agissant sur le paramètre u . On doit alors interpréter $t \to V(t)$ comme "l'appareil" permettant d'effectuer la correction. Cet "appareil" doit être construit et alors le résultat du 2ème paragraphe peut prendre le sens suivant :

i) <u>Stabilité</u> : Si "l'appareil" est conçu de manière à ce que la condition H.W. soit satisfaite une petite erreur de fabrication ne modifiera pas cet état de fait.

ii) <u>Densité</u> : Par rapport à une <u>prescription donnée</u> on peut toujours concevoir un "appareil", satisfaisant la condition H.W., arbitrairement proche de cette prescription.

Dans le cas des systèmes autonomes Kalman a remarqué dans [14] que la condition de contrôlabilité, qui est que le rang de la matrice

$$(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

soit égal à n , est une condition vraie sur un ouvert dense dans l'ensemble des couples de matrices (A, B) ; cette remarque est faite également par Lee et Markus dans [15] . Dans [1] Boltyanskii montre que cette dernière condition assure aussi que le principe du maximum est une condition suffisante d'optimalité ; il remarque également qu'elle est vraie sur un ouvert dense. Enfin, dans un article récent, on va voir que la réponse à ces questions est positive.

.../...

§ 1 - LA CONDITION H.W.

La condition H.W. (définition I.1.1) a été énoncée dans [10] par R. Hermann puis reprise dans L. Weiss [36] à propos du problème de contrôlabilité. Ici, je montre que non seulement le problème 1 mais les problèmes 3 et 4 ont une solution dès que la condition H.W. est réalisée. Les résultats de ce paragraphe sont classiques, mais leur dérivation systématique à partir de la condition H.W. me semble originale.

Le système (1) étant donné, on considère l'application $t \mapsto A(t)$ dont on suppose qu'elle est de classe C^∞ ; on lui associe l'opérateur D_A sur $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ qui à l'application φ, indéfiniment différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ associe $D_A\varphi$ définie par :

$$t \mapsto D_A\varphi(t) = -A(t)\varphi(t) + \varphi'(t) \quad .$$

I.1.1 <u>Définition</u> : <u>Condition H.W. On dit que le système (1) satisfait la condition H.W. si quel que soit t dans R le rang du système des n+1 vecteurs de $\mathbb{R}^n$</u> :

$$V(t)\ ,\ D_AV(t), \dots ,\ D_A^iV(t), \dots ,\ D_A^nV(t) \tag{2}$$

<u>est égal à n</u> .

<u>Systèmes en expansion</u>

On dit que le point x_0 est recallable à l'origine (c.f. [32]) "pendant le temps $[t_0,t_1]$" si il existe une commande $\mathcal{U}_{x_0,t_0} : [t_0,t_1] \to [-1,+1]$ telle que :

$$x(t_1,x_0,t_0,\mathcal{U}_{x_0,t_0}) = 0$$

On note $\mathcal{R}(t_0,t_1)$ l'ensemble des recallables à l'origine sur l'intervalle $[t_0,t_1]$, on note $\mathcal{R}(t_0)$ l'ensemble des recallables à l'origine à partir de l'instant t_0 ; par définition $\mathcal{R}(t_0) = \bigcup_{t_1 \geq t_0} \mathcal{R}(t_0,t_1)$.

I.1.2 <u>Définition</u> : <u>On dit que le système (1) est en "expansion" (c.f. Hermes [13]) si quels que soient</u> $t_0 \leq t_1 < t_2$ <u>on a l'inclusion</u> :

$$\mathcal{R}(t_0,t_1) \subset \mathrm{Int}(\mathcal{R}(t_0,t_2))$$

I.1.3 Théorème : Si le système (1) satisfait la condition H.W. il est en expansion.

Démonstration : On note $\phi(t,t_0)$ la matrice fondamentale du système (1). Comme on peut le constater immédiatement on a :

$$\mathcal{R}(t_0,t_2) = \{\int_{t_0}^{t_2} \phi^{-1}(t\ ,t_0)V(t)\mathcal{U}(t)dt \ ;\ \mathcal{U} \in L_1([t_0,t_2] \to [-1,+1])\}$$

Soit x un élément de $\mathcal{R}(t_0,t_1)$; comme x est égal à :

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi^{-1}(t,t_0)V(t)\mathcal{U}_{x,t_0}(t)dt$$

pour une certaine commande $\mathcal{U}_{x,t_0}$ on a alors :

$$x + \{\int_{t_1}^{t_2} \phi^{-1}(t,t_0)V(t)\mathcal{U}(t)dt \ ;\ \mathcal{U} \in L_1([t_1,t_2]\ ,\ [-1,+1])\} \subset \mathcal{R}(t_0 t_2)$$

L'ensemble défini par le crochet ci-dessus est égal à :

$$\phi^{-1}(t_1,t_0)\ \mathcal{R}(t_1,t_2) \quad .$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{R}(t_1,t_2)$ est un voisinage de l'origine. Soit θ compris entre t_1 et t_2 , strictement plus petit que t_2 , tel que :

$$\text{rang}(V(\theta), D_A V(\theta)\ ,\ldots,\ D_A^n V(\theta)) = n \quad .$$

Pour les mêmes raisons que précédemment $\phi^{-1}(\theta,t_1)\ \mathcal{R}(\theta,t_2)$ est inclus dans $\mathcal{R}(t_1,t_2)$, il reste donc à montrer que :

$$\mathcal{R}(\theta,t_2) = \{\int_{\theta}^{t_2} \phi^{-1}(t,\theta)V(t)\mathcal{U}(t)dt \ ;\ \mathcal{U} \in L_1([\theta,t_2]\ ,\ [-1,+1])\}$$

est un voisinage de O . Le rang de la famille de vecteurs :

$$\{\phi^{-1}(t,\theta)V(t) \ ;\ t \in [\theta,t_2[\}$$

est égal à n ; en effet soit W un vecteur de $\mathbb{R}^n$, supposons que :

$$t \in [\theta,t_2[\ \Rightarrow \langle W,\phi^{-1}(t,\theta)V(t)\rangle = 0 \quad ,$$

.../...

par dérivations successives en θ on obtient (après avoir remarqué que $\frac{d}{dt}(\phi^{-1}(t,\theta)) = -\phi^{-1}(t,\theta)A(t))$:

$$\langle W, V(\theta) \rangle = 0$$
$$\langle W, D_A V(\theta) \rangle = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\langle W, D_A^n V(\theta) \rangle = 0$$

ce qui en raison de l'hypothèse entraîne que W est nul. Il existe donc des réels :

$$\theta \leq \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < t_2$$

tels que les vecteurs :

$$\phi^{-1}(\theta_i, \theta)V(\theta_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

soient linéairement indépendants. Définissons la commande $\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ par :

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}(t) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } t \in [\theta_i, \theta_i + \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad |\lambda_i| \leq 1$$

On a évidemment l'inclusion :

$$\{\int_\theta^{t_2} \phi^{-1}(t,\theta)V(t)\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_n}(t)\,dt \;;\; |\lambda_i| \leq 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathcal{R}(\theta, t_2)$$

soit encore :

$$\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{\theta_i}^{\theta_i+\varepsilon} \phi^{-1}(t,\theta)V(\theta)\,d\theta \;;\; |\lambda_i| \leq 1 \;,\; i = 1\ldots n\} \subset \mathcal{R}(\theta, t_2)$$

Par continuité, pour ε assez petit les vecteurs $\int_{\theta_i}^{\theta_i+\varepsilon} \phi^{-1}(t,\theta)V(t)\,dt$ sont indépendants. Ceci achève la démonstration du théorème.

On déduit de ce théorème le

I.1.4 Corollaire : Si le système (1) satisfait la condition H.W., l'ensemble $\mathcal{R}(t_0)$ est un ouvert contenant l'origine.

Ce corollaire constitue la réponse à la première question qui était posée. Si le système (1) vérifie la condition H.W. et si $\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x$ est asymptotiquement stable, alors $\mathcal{R}(t_0)$ est $\mathbb{R}^n$ tout entier.

I.1.5 Remarque : On peut établir (c.f. L. Weiss [36]) qu'une condition nécessaire et suffisante d'expansion est que l'ensemble des t tels que :

$$\mathrm{rang}(V(t),\ D_A V(t), \ldots, D_A^{n-1} V(t)) = n$$

soit un ensemble partout dense dans $\mathbb{R}$. Nous appellerons désormais cette condition "condition H.W. faible". Cette dernière condition est évidemment plus faible que la condition H.W., mais ce n'est pas une condition ouverte comme on le montrera pour la condition H.W.. Prenons par exemple :

$$\frac{dx}{dt}(t) = V(t)\,\mathcal{U} \qquad x \in \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{U} \in [-1,+1] \quad ;$$

$$V(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \sin \frac{1}{t} \quad ;$$

il existe des fonctions $V_\varepsilon(t)$, arbitrairement proches de $V(t)$, (au sens de la convergence des fonctions ainsi que de toutes leurs dérivées), qui ne satisfont pas la condition ci-dessus. En effet, dans ce cas particulier, elle signifie que le support de $t \mapsto V_\varepsilon(t)$ doit être $\mathbb{R}$ tout entier. Il n'y a donc pas "stabilité" des systèmes en expansion.

Théorème d'existence et condition d'optimalité

C'est un exercice élémentaire de vérifier que l'ensemble $\mathcal{R}(t_0,t_1)$ est un convexe compact (car l'ensemble des applications mesurables de $[t_0,t_1]$ dans $[-1,+1]$ constitue la boule unité de $L_\infty([t_0,t_1])$ qui est faiblement compacte) et de s'assurer ensuite que l'application

$$t \mapsto \mathcal{R}(t_0,t)$$

est continue lorsqu'on munit l'ensemble des parties convexes compactes de $\mathbb{R}^n$ de la métrique de Hausdorf. De ces deux remarques on déduit immédiatement le

.../...

I.1.6 Théorème : Si x_0 appartient à $\mathcal{R}(t_0)$ il existe une commande $\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}$ assurant le retour de x_0 à l'origine en temps minimum.

Démonstration : Soit :

$$t_{min} = \mathrm{Inf}\{t\ ;\ x_0 \in \mathcal{R}(t_0,t)\}$$

par continuité le point x_0 appartient à l'adhérence de $\mathcal{R}(t_0,t_{min})$ qui est fermé. Ceci prouve le théorème.

L'existence d'une commande optimale étant assurée, nous pouvons envisager de caractériser cette dernière.

I.1.7 Théorème : Soit $\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0} : [t_0,t_1] \to [-1,+1]$ une commande assurant le retour de x_0 à l'origine. Si le système (1) est en expansion une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit optimale, c'est-à-dire que t_1 soit le temps minimum, est que le point x_0 appartienne à la frontière de $\mathcal{R}(t_0,t_1)$; en d'autres termes $\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}$ est optimale si et seulement si il n'existe pas de commandes de même durée permettant de ramener à l'origine tout un voisinage de x_0 .

Démonstration : S'il existait une commande de plus courte durée assurant le retour on aurait :

$$x_0 \in \mathcal{R}(t_0,t)$$

pour certain t strictement plus petit que t_1 ; le système étant en expansion ceci entraînerait que x_0 appartient à l'intérieur de $\mathcal{R}(t_0,t_1)$; la condition est donc suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire par l'absurde. Si x_0 appartient à l'intérieur de $\mathcal{R}(t_0 t_1)$ on peut trouver $n+1$ points de $\mathcal{R}(t_0,t_1)$ tels que x_0 appartienne à l'intérieur de leur enveloppe convexe ; soit $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$ une telle suite de points. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit x_0 appartient à l'intérieur de l'enveloppe convexe de toute famille $b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}$ telle que $\|a_i-b_i\| \leq \epsilon$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$. L'application $t \mapsto \mathcal{R}(t_0,t)$ étant continue, on peut affirmer qu'il existe un t strictement plus petit que t_1

.../...

pour lequel on puisse choisir les b_i dans l'ensemble $\mathcal{R}(t_0,t)$. Le point x_0 qui appartient à l'enveloppe convexe des b_i appartient aussi à $\mathcal{R}(t_0,t)$ puisque $\mathcal{R}(t_0,t)$ est convexe ; ceci infirme l'hypothèse de minimalité de $\tilde{\mathcal{U}}_{x_0-t_0}$ d'où la contradiction cherchée. Le théorème est démontré.

Une transformation élémentaire va permettre de passer au

I.1.8 <u>Théorème</u> : <u>Soit</u> $\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0} : [t_0,t_1] \to [-1,+1]$ <u>une commande assurant le retour de</u> x_0 <u>à l'origine. Si le système (1) est en expansion, une condition nécessaire et suffisante pour que cette commande soit optimale est qu'on puisse trouver un vecteur</u> ψ_0 <u>non nul tel que</u> :

$$(3) \quad \langle \psi(t)\ ,\ V(t)\,\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(t) \rangle = \max_{u\in[-1,+1]} \langle \psi(t)\ ,\ V(t)u \rangle \quad \text{p.p. } t\in[t_0,t_1]$$

<u>où</u> $\psi(t)$ <u>désigne la solution du problème de Cauchy</u> :

$$(4) \qquad \frac{d\psi}{dt}(t) = -{}^{t}A(t)\ \psi(t) \quad ; \quad \psi(t_0) = \psi_0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : La condition (3) est suffisante. Soit $\mathcal{U} : [t_0,t_1] \to [-1,+1]$ une commande quelconque. Par intégration on a immédiatement :

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), V(t)(\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(t) - \mathcal{U}(t)) \rangle\, dt \geq 0 \quad .$$

Par ailleurs, on a :

$$\psi(t) = {}^{t}\phi^{-1}(t,t_0)\psi_0$$

d'où on déduit que :

$$\langle \psi(t), V(t)(\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(t) - \mathcal{U}(t)) \rangle = \langle \psi_0\ ,\ \phi^{-1}(t,t_0)V(t)((\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(t)) - \mathcal{U}(t)) \rangle$$

ce qui entraîne :

$$(5) \quad \langle \psi_0\ ,\ \int_{t_0}^{t_1} \phi^{-1}(t,t_0)V(t)(\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(t) - \mathcal{U}(t))dt \rangle \geq 0 \quad .$$

.../...

Soit x un point de $\mathcal{R}(t_0, t_1)$, il existe $\mathcal{U} : [t_0, t_1] \to [-1, +1]$ tel

$$x = \int_{t_0}^{t_1} \phi^{-1}(t, t_0) V(t) \mathcal{U}(t) dt ,$$

la relation (5) entraîne donc que quel que soit x dans $\mathcal{R}(t_0 t_1)$

$$\langle \psi_0 , x_0 - x \rangle \geq 0$$

ce qui prouve, puisque ψ_0 n'est pas nul, que x_0 appartient à $\mathcal{R}(t_0 t_1)$. La condition est donc suffisante d'après le théorème I.1.7.

Pour montrer que la condition est nécessaire procédons ainsi.

Soit ψ_0 une normale sortante, non nulle, du convexe compact $\mathcal{R}(t_0, t_1)$ au point x_0 . Quel que soit $\mathcal{U} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, on a alors

$$(6) \quad \langle \psi_0 , \int_{t_0}^{t_1} \phi^{-1}(t, t_0) V(t) \tilde{\mathcal{U}}_{x_0, t_0}(t) \, dt - \int_{t_0}^{t_1} \phi^{-1}(t, t_0) V(t) \mathcal{U}(t) dt \rangle \geq 0 .$$

Soit θ $(\theta < t_1)$ un instant de dérivabilité de

$$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(t, t_0) V(t) \tilde{\mathcal{U}}_{x_0, t_0}(t) \, dt .$$

Particularisons la relation (5) pour la commande :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\epsilon,\theta,u} : [t_0 t_1] &\to [-1, +1] \\ t \longmapsto \mathcal{U}_{\epsilon,\theta,u}(t) &= \begin{cases} \tilde{\mathcal{U}}_{x_0, t_0}(t) & \text{si } t \in [t_0, \theta[\\ u & \text{si } t \in [\theta, \theta+\epsilon[\\ \tilde{\mathcal{U}}_{x_0, t_0}(t) & \text{si } t \in [\theta+\epsilon, t_1] \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $\varphi_u(\epsilon)$ le produit scalaire obtenu en reportant $\mathcal{U}_{\epsilon,\theta,u}$ dans (6) ; on a :

$$\varphi_u(\epsilon) = \langle \psi_0 , \int_{\theta}^{\theta+\epsilon} \phi^{-1}(t, t_0) V(t) (\tilde{\mathcal{U}}_{x_0, t_0}(t) - u) dt \rangle$$

Comme $\varphi_u(\epsilon)$ est positive, $\varphi_u(0)$ est nul, la dérivée en O (qui existe) est positive ou nulle. D'où la relation :

.../...

$$\forall u \in [-1,+1]\ \langle \psi_0\ ,\ \phi^{-1}(\theta,t_0)V(\theta)\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(\theta)\ \rangle \geq \langle \psi_0\ ,\ \phi^{-1}(\theta,t_0)V(\theta)u\ \rangle$$

soit encore :

$$\forall u \in [-1,+1]\ \langle \psi(\theta)\ ,\ V(\theta)\ \tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(\theta)\ \rangle \geq \langle \psi(\theta)\ ,\ V(\theta)u\ \rangle\ .$$

La relation qui vient d'être écrite est vraie en tout instant θ de dérivabilité de $t \mapsto \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(t_1 t_0)V(t)\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(t)\ dt$, c'est-à-dire presque partout. La condition nécessaire est donc prouvée.

La condition nécessaire du théorème I.1.8 est la classique condition nécessaire de Pontriaguine [34]. En fait nous venons de prouver un petit peu plus que la partie nécessaire du théorème (4) ; nous avons prouvé la

I.1.9 Proposition : Soit x_0 appartenant à $\mathcal{R}(t_0,t_1)$ et $\mathcal{U}_{x_0,t_0} : [t_0,t_1] \to [-1,+1]$ une commande assurant le retour de x_0 à l'origine. Pour toute normale sortante ψ_0 de $\mathcal{R}(t_0,t_1)$ au point x_0 la condition du maximum (3) est réalisée pour le vecteur $\psi(t)$ défini par le problème de Cauchy.

(7) $$\frac{d\psi}{dt}(t) = -{}^{t}A(t)\psi(t)\ \ ;\ \ \psi(t_0) = \psi_0\ .$$

Enfin, pour terminer, montrons que la commande optimale est unique, prend uniquement les valeurs +1 et -1, est constante par morceaux avec un nombre fini de discontinuités, et déterminée par la relation du maximum (3) dès que le système (1) satisfait la condition H.W.. En effet, soit x_0 un élément de $\mathcal{R}(t_0)$, et soient $\tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}$ et $\tilde{\mathcal{V}}_{x_0,t_0}$ deux commandes optimales ; soit ψ_0 une normale sortante à $\mathcal{R}(t_0,t_1)$ au point x_0, soit enfin $\psi(t)$ la solution (non triviale) du système (7) qu'elle définit. D'après la proposition précédente, nous avons :

$$\langle \psi(t)\ ,\ V(t)\ \tilde{\mathcal{U}}_{x_0,t_0}(t)\ \rangle = \max_{u\in[-1,+1]} \langle \psi(t)\ ,\ V(t)u \rangle \quad \text{p.p sur } [t_0,t_1]$$

$$\langle \psi(t)\ ,\ V(t)\ \tilde{\mathcal{V}}_{x_0,t_0}(t)\ \rangle = \max_{u\in[-1,+1]} \langle \psi(t)\ ,\ V(t)u \rangle \quad \text{p.p sur } [t_0,t_1]$$

.../...

Ces deux relations prouvent que, presque partout, sur l'ensemble S des t de $[t_0, t_1]$ pour lesquels :

$$\langle \psi(t) , V(t) \rangle \neq 0 ,$$

on a l'égalité :

$$\tilde{\mathcal{U}}_{x_0, t_0}(t) = \tilde{\mathcal{V}}_{x_0, t_0}(t) = \operatorname{sgn} (\langle \psi(t), V(t) \rangle) . \tag{8}$$

Ici sgn désigne la fonction qui vaut 1 si $\langle \psi(t), V(t) \rangle$ est strictement positif, -1 sinon. Supposons maintenant que le système (1) satisfasse la conditior H.W. ; on peut écrire :

$$\langle \psi(t), V(t) \rangle = \langle {}^t\phi^{-1}(t, t_0) \psi_0 , V(t) \rangle$$

soit encore en introduisant la valeur θ :

$$\varphi_\theta(t) = \langle \psi(t), V(t) \rangle = \langle {}^t\phi^{-1}(\theta, t_0) \psi_\theta , \phi^{-1}(t, \theta) V(t) \rangle .$$

La condition H.W. exprime précisément que l'un des nombres au moins

$$\varphi_\theta(\theta) , \varphi'_\theta(\theta) , \ldots , \varphi_\theta^{(p)}(\theta) , \ldots , \varphi_\theta^{(n)}(\theta)$$

est différent de 0 ; ceci prouve donc que les zéros de l'application $t \mapsto \langle \psi(t), V(t) \rangle$ sont isolés et par suite que la relation (8) ci-dessus est vraie presque partout sur $[t_0, t_1]$. Toutes les commandes optimales sont donc égales presque partout et de plus on peut choisir un représentant de cette classe d'équivalence, constant par morceaux défini par la relation

$$\tilde{\mathcal{U}}_{x_0, t_0}(t) = \operatorname{sgn} \langle \psi(t), V(t) \rangle .$$

I.1.10 <u>Remarque</u> : Ce dernier résultat demeure si on suppose simplement réalisée la condition H.W. faible.

Nous rassemblons maintenant tous les résultats du paragraphe sous la forme d'un unique théorème.

<u>Le théorème fondamental du problème du contrôle en temps minimum des systèmes linéaires</u>

Supposons que le système :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x + V(t)u \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in [-1, +1] \tag{1}$$

satisfasse la condition H.W.. Considérons le problème du retour à l'origine en temps minimum, alors :

I.1.11 Théorème : 1) L'ensemble $\mathcal{R}(t_0)$ des points recallables à l'origine à partir de l'instant t_0 est un ouvert contenant l'origine.

2) Le problème différentiel à conditions mixtes (problème de "tir") :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)\ x(t) + V(t)\ \text{sgn}(\psi(t), V(t))$$

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = -{}^tA(t)\ \psi(t)$$

t_0 donné. $\qquad t_1 \geq t_0$ inconnu

$x(t_0) = x_0 \in \mathcal{R}(t_0) \qquad x(t_1) = 0$

$\psi(t_0) \neq 0$

est un problème qui a un sens car la fonction $\text{sgn}(\psi(t))$ est une fonction constante par morceaux obtenue après intégration de la deuxième équation.

3) Le problème posé au 2) admet une solution.

4) Soit $(\tilde{x}, \tilde{\psi}) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ une solution du problème à conditions mixtes.

- L'application $t \mapsto \text{sgn}(\tilde{\psi}(t), V(t))$ est l'unique (au sens de L_1) commande optimale correspondant à x_0.
- L'application $t \mapsto \tilde{x}(t)$ est la trajectoire correspondante, t_1 est le temps minimum.

5) La commande optimale est unique, constante par morceaux, à valeur dans $\{-1;+1\}$.

Ce théorème ne nécessite pas de démonstration ; c'est une paraphrase des résultats précédents.

Ce théorème se généralise sans difficultés aux cas des systèmes du type :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u \qquad x \in R^n \;;\; u \in U \subset R^p \;;$$

où U est un polyèdre convexe de R^p et $t \to B(t)$ une application de classe C^∞ de R dans $\mathcal{L}(R^p, R^n)$. La condition H.W. prendra alors une forme un peu plus compliquée faisant intervenir les arêtes du polyèdre U.

§ 2 - LA CONDITION H.W. EST GENERIQUE.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le

I.2.1 Théorème : L'ensemble des applications $t \mapsto V(t)$ de $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles, l'application $t \mapsto A(t)$ étant donnée, le rang du système

$$V(t)\;,\; D_A V(t)\;, \ldots,\; D_A^n V(t)$$

est égal à n, est un ouvert dense de $C^n([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide des techniques standard en théorie de la transversabilité telles qu'on peut les trouver dans Levine [16]. On verra que ce résultat est "trivial" en ce sens qu'il n'exige qu'un théorème de Sard faible (si p est strictement plus petit que n l'image de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par une application différentiable est de mesure nulle). Introduisons quelques notations.

On note $E = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_k \times \ldots \times E_n$ le produit cartésien de $n+1$ copies de $\mathbb{R}^n$ $(E_k = \mathbb{R}^n)$; un élément de E est noté $V_0, V_1, \ldots, V_k, \ldots, V_n$.

Soit D l'application de $[t_0, t_1] \times E$ dans $[t_0, t_1] \times M_{n+1,n}$, où $M_{(n+1,n)}$ désigne les matrices à n lignes et $n+1$ colonnes, définie par :

$$(t_1, V_0, V_1, \ldots, V_k, \ldots V_n) \to D(t, V_0, V_1, \ldots, V_k, \ldots, V_n) = (t, M)$$

où M est la matrice dont les colonnes sont :

$$V_0 \;,\; -A(t)V_0 + V_1 \;,\; -A(t)(-A(t)V_0 + V_1) + V_2 \;,\; -A(t)(\ldots) + V_3 \;,\; \text{etc.}\ldots$$

L'application D est un difféomorphisme, car à t fixé c'est une application linéaire de rang maximum. Désignons par S l'image réciproque par D du produit cartésien de $[t_0, t_1]$ par l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à $(n-1)$.

.../...

On sait (Levine [16]) que le sous-ensemble de $M_{(n+1,n)}$ constitué par les matrices de rang p est une sous variété régulièrement plongée de codimension $(n+1-p\ ,\ n-p)$.

Ce qui précède prouve donc que l'ensemble S est la réunion d'un nombre fini de sous variétés régulièrement plongées de codimension supérieure ou égale à 2. De plus S est évidemment fermé.

Démonstration du théorème I.2.1

L'ensemble des applications $t \mapsto V(t)$ de $C^n([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ telles que l'image dans $[t_0,t_1] \times E$ de :

$$t \longmapsto (t, V(t), V^1(t), \ldots, V^{(k)}(t), \ldots, V^{(n)}(t))$$

ne rencontre pas S est évidemment un ouvert (pour la C^n topologie). D'autre part, par définition même de S , dire que le jet d'ordre n de $V(t)$ ne rencontre pas S équivaut à dire que l'application $t \mapsto V(t)$ satisfait la condition H.W.. Il reste donc à montrer la densité ; pour cela on montre que dans un C^n voisinage d'une application $t \mapsto \varphi(t)$ de $C^n([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ on peut trouver une application qui satisfait H.W.. Comme $C^{n+1}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ est C^n dense dans $C^n([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ on peut toujours supposer que φ est $n+1$ fois différentiable. Soit

$$F : [t_0,t_1] \times E \longrightarrow [t_0,t_1] \times E$$

l'application définie par la relation ci-dessous :

$$\begin{aligned} F(t,V_0,V_1,V_2,\ldots,V_k,\ldots,V_n) = (t,\ & \varphi(t)+V_0+tV_1+\frac{t^2}{2!}V_2+\ldots+\frac{t^k}{k!}V_k+\ldots+\frac{t^n}{n!}V_n\ , \\ & \varphi^1(t)+V_1+tV_2+\ldots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}V_k+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}V_n\ , \\ & \text{-----------------------------------} \\ & ,\ \varphi^{(p)}(t)+V_p+\ldots+\frac{t^{k-p}}{(k-p)!}V_k+\ldots+\frac{t^{n-p}}{(n-p)!}V_n\ , \\ & \text{-----------------------------------} \\ & ,\ \varphi^{(n)}+V_n\ )\ . \end{aligned}$$

.../...

Cette application est un difféomorphisme, l'ensemble

$$\Sigma = F^{-1}(S)$$

est donc la réunion d'un nombre fini de sous variétés régulièrement plongées de codimension supérieure à 2. Considérons l'élément de $C^n([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$\varphi_V(t) = \varphi(t) + V_0 + tV_1 + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} V_n .$$

Cet élément satisfait la condition H.W. si et seulement si quel que soit t, l'élément de $[t_0,t_1] \times E$:

$$t, \varphi_V^1(t), \ldots, \varphi_V^{(k)}(t), \ldots, \varphi_V^n(t)$$

ne rencontre pas S ; ceci revient à dire, par définition de F que le segment $[t_0,t_1] \times \{(V_0,V_1,\ldots,V_k,\ldots,V_n)\}$ ne rencontre pas Σ, soit encore, si on désigne par π la projection canonique de $[t_0,t_1] \times E$ sur E, que $(V_0,V_1,\ldots,V_k,\ldots V_n)$ n'appartient pas à $\pi(\Sigma)$. Comme la dimension de la plus grande des variétés constituant Σ est inférieure d'une unité à la dimension de E, d'après le théorème de Sard, l'ensemble $\pi(\Sigma)$ est de mesure nulle. Ceci prouve qu'on peut choisir $(V_0,V_1,\ldots,V_k,\ldots,V_n) = V$ arbitrairement proche de 0, de manière à ce que $[t_0,t_1] \times V$ ne rencontre pas Σ, donc de manière à ce que pour un tel V l'application

$$t \mapsto \varphi_V(t)$$

satisfasse la condition H.W.. Ceci prouve la densité et achève la démonstration du théorème I.2.1.

I.2.2 <u>Remarque</u> : En utilisant le théorème de Sard sous sa forme forte on peut montrer que l'ensemble des applications $t \mapsto V(t)$ qui satisfont H.W. faible (cf remarque I.1.5) contient un ouvert dense de $C^{n-1}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. Il suffit en effet, dans la démonstration précédente de s'arrêter à l'ordre $n-1$; dans ces conditions l'ensemble à éviter Σ est de codimension 1 et alors dire que

$$t \mapsto \varphi_V(t)$$

est transverse à Σ signifie que la condition :

.../...

$$\mathrm{rang}(\varphi_V(t), D_A\varphi_V(t), \dots, D_A^{n-1}\varphi_V(t)) = n$$

est satisfaite partout saut peut être en un nombre fini de points. Ceci est la condition H.W. faible.

Les théorèmes I.1.11 et I.2.1 conjointement aux deux remarques qui les suivent prouvent donc d'une part de façon assez élémentaire que :

"L'ensemble des applications $t \mapsto V(t)$ de $C^n(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles toutes les conclusions du théorème fondamental I.1.11 sont vraies contient un ouvert dense" ;

d'autre part, d'une manière moins élémentaire que dans la conclusion précédente de remplacer n par $n-1$.

Il est clair que les résultats de ce paragraphe peuvent se généraliser aux systèmes de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u \qquad x \in \mathbb{R} \ ; \ u \in U \subset \mathbb{R}^p \ ;$$

où U est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^p$.

I.2.3 Remarque : Je n'ai pas abordé la question de la "généricité" de l'hypothèse H.W. par rapport aux "variations" de $t \mapsto A(t)$ pour la raison suivante. Dans la pratique la matrice $A(t)$ est souvent de la forme :

$$A(t) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline B(t) & C(t) \end{array}\right) .$$

Une telle situation provient de la transformation d'un système du second ordre en un système du premier ordre ; dans ces conditions il n'est pas raisonnable d'envisager des "variations" du premier bloc de $A(t)$. Il me semble donc qu'une bonne approche systématique de la généricité pour les systèmes linéaires devrait être la suivante :

Soit le système :

$$(2) \quad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + A_\varepsilon(t)x(t) + B(t)u + B_\varepsilon(t)u \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in U \subset \mathbb{R}^p .$$

.../...

Les matrices $A_\varepsilon(t)$ et $B_\varepsilon(t)$ sont des matrices dont certains coefficients sont identiquement nuls. Avec des hypothèses convenables sur la position des termes identiquement nuls, on doit pouvoir montrer que : l'ensemble des $(A_\varepsilon(t), B_\varepsilon(t))$ qui sont tels que (2) satisfasse l'analogue de la condition H.W. est un ouvert dense.

II - POLYSYSTEMES DYNAMIQUES ET THEORIE DE LA COMMANDE

INTRODUCTION -

Un système dynamique est une "action" (différentiable dans le contexte qui nous intéresse) du groupe R sur une variété M . Un polysystème dynamique est en quelque sorte l'action simultanée de plusieurs systèmes dynamiques. Les polysystèmes dynamiques (P.S.D. en abrégé) dont il est question ici sont différents de ceux introduits par Bushaw [4] ; cependant comme l'expression semblait heureuse je l'ai conservée. Dans un premier paragraphe, je décris une "structure abstraite" et je montre ensuite (§ 2) en quoi cette structure recouvre assez bien certains aspects de la théorie de la commande.

Toutes les propositions énoncées dans ce chapitre sont des conséquences immédiates des définitions.

§ 1 - POLYSYSTEMES DYNAMIQUES

Un polysystème dynamique est l'action différentiable sur une variété M d'un groupe d'un type particulier (groupe de commande) qu'il convient de définir d'abord.

Groupes de commande

Soit I un ensemble ; on considère l'ensemble des séquences (suites finies) d'éléments de $\mathbb{R} \times I$. Etant donné une telle séquence, notée $((t_1,i_1);\dots(t_j,i_j),\dots,(t_p,i_p))$, on effectue les réductions suivantes :

a) on supprime les termes de la forme $(0,i_j)$

b) si $i_j = i_{j+1}$ on remplace les deux termes $(t_j,i_j)(t_{j+1},i_{j+1})$ par l'unique terme (t_j+t_{j+1},i_j) .

Après un nombre fini d'opérations, on obtient une séquence irréductible qui ne dépend que du choix de la séquence initiale ; il peut arriver que l'on supprime tous les termes, dans ce cas la séquence "vide" obtenue est notée O .

.../...

II.1.1 Définition : On appelle "groupe de commandes" associé à un ensemble I et on note $G(I)$ l'ensemble des séquences irréductibles (au sens défini ci-dessus) d'éléments de $\mathbb{R} \times I$; les éléments de $G(I)$ sont appelés "commandes".

L'expression "commande" est justifiée par les relations avec la théorie de la commande ; l'expression "groupe" est justifiée par la proposition suivante.

II.1.2 Proposition : L'application de $G(I) \times G(I)$ dans $G(I)$ qui à deux commandes s_1 et s_2 associe la séquence réduite obtenue après réduction de la séquence (s_1, s_2), définit sur $G(I)$ une structure de groupe non abélien. (La séquence (s_1, s_2) est celle que l'on obtient en juxtaposant les deux séquences s_1 et s_2).

On notera cette loi de composition $(s_1, s_2) \mapsto s_1 * s_2$ et l'inverse d'un élément s par $\bar{s}$.

II.1.3 Proposition : L'application de $\mathbb{R} \times G(I)$ dans $G(I)$ qui au réel λ et à la commande $s = ((t_1, i_1), \ldots, (t_j, i_j), \ldots, (t_p, i_p))$ associe la commande $\lambda . s$ définie par

$$\lambda . s = ((\lambda t_1, i_1), \ldots, (\lambda t_j, i_j), \ldots, (\lambda t_p, i_p)) \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

$$\lambda . s = 0 \quad \text{si } \lambda = 0$$

définit sur $G(I)$ une loi de composition externe possédant les propriétés suivantes :

$$1 . s = s$$
$$(\alpha \beta) . s = \alpha(\beta . s)$$
$$\alpha . (s_1 * s_2) = (\alpha . s_1) * (\alpha . s_2)$$

La relation suivante n'est pas vraie en général :

$$(\alpha + \beta) . s = (\alpha . s) * (\beta . s)$$

On peut enfin définir sur le groupe $G(I)$ un ordre partiel ; une commande $s = ((t_1, i_1) ; \ldots ; (t_j, i_j) ; \ldots ; (t_p, i_p))$ est dite positive si quelque soit l'indice j le réel t_j est positif ; la commande s_1 est supérieure ou égale à s_2 $(s_1 \geq s_2)$

.../...

lorsque la commande $\bar{s}_2 * s_1$ est positive ou nulle. On note $G^+(I)$ (resp. $G^-(I)$) l'ensemble des commandes positives ou nulles (resp. négatives ou nulles) ; remarquons que si s est une commande positive le segment $[0,s]$ a une infinité d'éléments, en particulier si $s = ((t,i))$ le segment $[0,s]$ est constitué par l'ensemble des commandes $\{((\theta,i))\ ;\ \theta \in [0,t]\}$.

Polysystèmes dynamiques

On désigne par M une variété différentiable que, dans la suite de ce travail, on supposera toujours connexe séparée et à base dénombrable de voisinages ; de plus "différentiable" signifie toujours de classe C^∞ . Soit $G(I)$ un groupe de commande.

II.1.4 Définition : Un polysystème dynamique (P.S.D.) est une application π de $G(I) \times M$ dans M possédant les propriétés suivantes :

1) $\pi(0,x) = x \quad x \in M$.

2) $\pi(s_1 * s_2, x) = \pi(s_1, \pi(s_2,x))$; $s_1 \in G(I)$; $s_2 \in G(I)$; $x \in M$.

3) Quelle que soit la suite $s_1, s_2, \ldots, s_p$ d'éléments de $G(I)$, l'application :

$$(t_1,t_2,\ldots,t_p,x) \to \pi(t_1 s_1 * t_2 s_2 * \ldots * t_p s_p, x)$$

de $\mathbb{R}^p \times M$ dans M est différentiable.

Remarquons que si I est réduit à un élément alors $G(I)$ est isomorphe à R et on retrouve la définition d'un système dynamique. De même qu'on définit la transformation infinitésimale d'un système dynamique pour un polysystème dynamique on a :

II.1.5 Définition : La famille $(X^i)_{i \in I}$ de champs de vecteurs de M définie par la relation

$$X^i(x) = \left(\frac{d\pi((t,i)x)}{dt}\right)_{t=0}$$

s'appelle transformation infinitésimale du P.S.D. défini par $\pi : G(I) \times M \to M$.

.../...

Réciproquement soit $(X^i)_{i\in I}$ une famille de champs de vecteurs sur M. Supposons ces champs complets ; ils définissent alors une famille $\pi_i : \mathbb{R} \times M \to M$ de systèmes dynamiques. Soit maintenant $G(I)$ le groupe de commande associé à I ; à un élément

$$s = (t_1, i_1)(t_2, i_2) \ldots, (t_p, i_p)$$

de $G(I)$ et à x de M associons $\pi(s,x)$ défini par :

$$\pi(s,x) = \pi_{i_1}(t_1, \ldots, \pi_{i_{p-1}}(t_{p-1}, \pi_{i_p}(t_p, x)) \ldots) \quad .$$

L'application π de $G(I) \times M$ dans M qui vient d'être définie satisfait de manière évidente les axiomes d'un P.S.D.. De plus $(X^i)_{i\in I}$ est sa transformation infinitésimale.

II.1.6 <u>Définition</u> : <u>Le p.s.d. qui vient d'être associé à la famille</u> $(X^i)_{i\in I}$ <u>s'appelle polysystème dynamique de transformation infinitésimale</u> $(X^i)_{i\in I}$.

<u>Remarque</u> : Lorsqu'un champ de vecteur n'est pas complet on ne peut pas lui associer un système dynamique mais seulement une action "locale" du groupe additif $\mathbb{R}$ sur M. On aurait pu définir facilement une notion de P.S.D. local ; ceci aurait compliqué les définitions sans pour autant fournir une généralisation intéressante. Tous les résultats des chapitres 3 et 4 se généralisent immédiatement à ce cas.

<u>Quelques notations</u>

Dans la suite, on considère toujours une famille $(X^i)_{i\in I}$ de champs de vecteurs complets, et le P.S.D. qui lui est canoniquement associé. Aucune confusion n'étant possible, on note $s.x$ l'action de $G(I)$ sur M. Pour rappeler que la transformation infinitésimale est $(X^i)_{i\in I}$ il arrivera que l'on note :

$$(t, i)x = X^i_t(x) \quad .$$

Les éléments de $G(I)$ de la forme $(1, i)$ sont notés e_i ; ces éléments constituent une "base" de $G(I)$ en ce sens que tout élément s de G peut se mettre sous la forme :

.../...

$$s = \prod_{i \in I} \lambda_i e_i$$

où seuls un nombre fini d'éléments de la suite λ_i sont non nuls. Si s est un élément de G l'application de M dans M

$$x \longmapsto s.x$$

est différentiable. On note s^*_x sa différentielle au point x ; le symbole s^*_x représente donc une application linéaire de T_xM dans $T_{s.x}M$. Les vecteurs tangents sont en général représentés par des lettres majuscules, on notera $s^*_x V$; $s^*_x X^i(x)$ etc... l'action de s^*x sur les éléments de T_xM .

La trajectoire d'un point sous l'action de $G(I)$ est notée

$$G(I).x ,$$

de même la trajectoire positive et négative sont désignées respectivement par :

$$G^+(I).x ,$$
$$G^-(I).x .$$

Il est important de remarquer ici que, contrairement aux systèmes dynamiques, <u>on n'a pas en général</u> l'égalité :

$$G(I).x = G^+(I).x \cup G^-(I).x$$

comme on le constate en prenant dans $\mathbb{R}^2$ le P.S.D. associé aux deux champs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$; on a dans ce cas :

$$G(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}).(0,0) = R^2$$

$$G^+(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}).(0,0) = \{(x,y) \ ; \ x \geq 0 \quad y \geq 0\}$$

$$G^-(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}).(0,0) = \{(x,y) \ ; \ x \leq 0 \quad y \leq 0\} .$$

Une formule de dérivation

Du théorème sur la différentielle d'une application composée, on déduit facilement la proposition suivante.

On considère n commandes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dont l'expression dans la "base" de $G(I)$ est :

$$p_j = \sum_{i \in I} \lambda_i^j e_i \ ;$$

On se donne par ailleurs n commandes $s_1, s_2, \ldots s_n$ et on considère l'application de $\mathbb{R}^n$ dans M, notée $\varphi_{s_j, p_j, x}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, définie par :

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto \varphi_{s_j, p_j, x}(t_1, t_2 \ldots t_n) = \left(\prod_{j=1}^{n} s_j * t_j p_j\right) x \qquad *$$

On définit par récurrence les points x_k $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ par :

$$x_1 = x$$
$$x_2 = s_1 x_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_k = s_{k-1} x_{k-1} \ ;$$

et de même les opérateurs T_k $(k = 1, \ldots, n)$ de $T_{x_k} M$ dans $T_{x_{n+1}} M$ par :

$$T_n = s_n^* \, x_{n-1}$$
$$T_{k-1} = T_k \circ s_k^* (x_{k-1}) \ .$$

II.1.7 <u>Proposition</u> : <u>Les dérivées partielles de $\varphi_{s_i, p_i, x}$ à l'origine s'expriment par la relation</u> :

$$\left(\frac{\partial \varphi_{s_i, p_i, x}(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial t_k} \right)_{t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0} = T_k \sum_{i \in I} \lambda_i^k X^i(x_k) \ .$$

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence des notations.

.../...

Le symbole $*$ s'interprétant comme la composition d'opérateurs sur M on convient que :

$$\prod_{k=1}^{n} s_k = s_k * s_{k-1} * \ldots * s_1 \ .$$

§ 2 - RELATIONS AVEC LA THEORIE DE LA COMMANDE

Systèmes guidables *

Un système guidable est défini par l'application :

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$
$$(x,t,u) \longmapsto f(x,t,u) \quad ;$$

et par l'application à valeur dans les parties de $\mathbb{R}^p$:

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$$
$$(x,t) \longmapsto \sigma(x,t) \quad .$$

Les "commandes admissibles" sont des applications intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ prenant leurs valeurs dans $\sigma(x)$; ceci veut dire que si $\mathcal{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est une telle commande, si :

$$t \longmapsto x(t,(x_0,t_0),\mathcal{U})$$

désigne l'unique solution du problème de Cauchy

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x,t,\mathcal{U}(t)) \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \quad ,$$

on doit avoir, quel que soit t :

$$\mathcal{U}(t) \in \sigma(x(t,x_0,t_0,\mathcal{U}),t) \quad .$$

La solution de (1) s'appelle "réponse". Le système guidable considéré est donc un système dans lequel il y a une "liaison" entre la commande et la réponse ; il est entendu que l'on fait des hypothèses de régularité suffisantes sur f pour que (1) admette, localement, une solution unique.

Le problème standard de la théorie de la commande optimale est alors, deux parties I et F de $\mathbb{R}^n$ étant données, de déterminer les commandes $\mathcal{U}$ qui sont telles que $x(t_f,(x_0,t_0),\mathcal{U})$ appartienne à F lorsque x_0 est dans I , et parmi celles-ci de choisir celles pour qui la quantité

.../...

* Le votable est emprunté à A. Bastiani.

$$\int_{t_0}^{t_f} f^0(x(t,(x_0,t_0),\mathcal{U}) \, , \, t \, , \, \mathcal{U}(t))\, dt$$

est la plus petite possible ; ici f^0 est une application de $\mathbb{R}^n \times R \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Un cas particulier intéressant est celui où I et F sont réduits à des points, x_0 pour I et x_f pour F ; c'est celui que je vais considérer.

Le système "augmenté"

Considérons maintenant l'application $x \mapsto \Gamma(x)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ qui à (x^0,x,t) associe :

$$\Gamma(x^0,x,x^{n+1}) = \{(f^0(x,x^{n+1},u), f(x,x^{n+1},u), 1) \;\; ; \;\; u \in \sigma(x,x^{n+1})\}$$

En d'autres termes, dans un espace "augmenté" comprenant le temps et le "critère" f^0, on considère en chaque point l'ensemble des "vitesses admissibles", compte tenu de la liaison entre l'état et la commande.

Si $\mathcal{U}$ est une commande admissible et $x(t,(x_0,t_0),\mathcal{U})$ une réponse à cette commande, il est immédiat de vérifier que l'application :

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x^0(t, x_0,t_0),\mathcal{U}) = \int_{t_0}^{t} f^0(x(\theta,(x_0,t_0),\mathcal{U}),\theta,\mathcal{U}(\theta)d\theta \\ x(t,(x_0,t_0),\mathcal{U}) \\ x^{n+1}(t) = t + t_0 \end{pmatrix} = \varkappa(t,\varkappa_0,\mathcal{U})$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ est une solution de l'équation :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varkappa}{dt}(t) \in \Gamma(\varkappa(t)) & \varkappa \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \;\; \text{p.p. } t \in [t_0,t_1] \; . \\ \varkappa(0) = \varkappa_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ t_0 \end{pmatrix} & \end{cases}$$

Réciproquement, étant donné une application $t \mapsto \varkappa(t)$ absolument continue, satisfaisant (2) presque partout, on peut montrer que, sous des hypothèses assez larges, il existe une commande admissible $t \mapsto \mathcal{U}(t)$ pour laquelle on a :

$$\varkappa(t) = \varkappa(t,\varkappa_0,\mathcal{U}) \; .$$

C'est le problème classique de l'existence d'une section mesurable pour une "multiapplication", problème étudié notamment par Castaing et Hermes.

Hypothèses restrictives

Je vais maintenant faire des hypothèses restrictives sur les données du problème concret qui vont me permettre d'introduire un P.S.D.

1) f^o et f sont de classe C^∞ par rapport à (x,t,u) .

2) l'application $u \mapsto f(x,t,u)$ est injective.

3) les seules "commandes admissibles" que nous considérerons sont C^∞ par morceaux.

Les deux premières restrictions ne sont pas très graves ; on peut s'arranger pour que la deuxième soit satisfaite en faisant un changement de "variable de contrôle" $v \mapsto u = \varphi(v)$. La troisième restriction est plus sérieuse car, diminuant la classe des commandes admissibles, elle entraîne la disparition de théorèmes classiques d'existence d'une commande optimale tels que celui de Filippov [7] (repris et généralisé par Cesari, Castaing, Valadier).

Cependant cette restriction ne me paraît pas très grave pour la raison suivante : même si on accepte de considérer des commandes mesurables, des contre-exemples montrent qu'il n'existe pas nécessairement de commande optimale ; en réalité, cette existence est liée à la convexité de $\Gamma(X)$ (c.f. [7]). Il me paraît plausible, que pour des systèmes réguliers (analytiques, en situation générique), l'hypothèse de convexité entraîne l'existence de commandes optimales différentiables par morceaux ; cet aspect de la question est repris dans la conclusion.

Désignons maintenant par :

$$(X^i)_{i \in I(\Gamma)}$$

la famille des champs de vecteurs sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui satisfont la relation :

$$X^i(x^o, x, x^{n+1}) \in \Gamma(x^o, x, x^{n+1}) \qquad (x^o, x, x^{n+1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ .$$

.../...

La dernière hypothèse s'énonce ainsi :

4) Pour toute application différentiable

$$t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ ; \ t \in]-\epsilon, +\epsilon[$$

telle que :

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) \in \Gamma(\alpha(t))$$

il existe un champ de vecteur X^i, $i \in I(\Gamma)$, tel que, pour t assez petit on ait

$$X^i(\alpha(t)) = \frac{d\alpha}{dt}(t)$$

Cette hypothèse signifie que tout champ de vitesse le long d'une courbe se prolonge, localement, s'il est compatible avec Γ, en un champ de vecteur compatible avec Γ. Ceci n'est pas automatiquement réalisé lorsque l'ensemble $\sigma(x,t)$ dépend effectivement de x et t. Il peut se faire par exemple que pour prendre en compte une contrainte sur l'état, l'application $\Gamma(x,y,z)$, $((x,y,z) \in \mathbb{R}^n)$, ait l'allure suivante :

$$z = 0 \Rightarrow \Gamma(x,y,z) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \\ \varphi \end{pmatrix} \ ; \ \psi \in \mathbb{R}, \ \eta \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

$$z > 0 \Rightarrow \Gamma(x,y,z) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ \psi \in \mathbb{R}, \ \eta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$z < 0 \Rightarrow \Gamma(x,y,z) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \\ +1 \end{pmatrix} \ ; \ \psi \in \mathbb{R}, \ \eta \in \mathbb{R} \right\} \ ;$$

il est alors clair qu'on ne peut pas prolonger le champ des vitesses de :

$$t \mapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

en un champ de vecteur compatible avec Γ.

Cette hypothèse est la seule qui, à ma connaissance, permette de démontrer un "principe du maximum" du type de celui de [34] ; c'est cette hypothèse que fait Boltyanskii dans [3] ; remarquons enfin qu'elle est toujours réalisée dans le cas, malgré tout important, où σ est constant.

.../...

Etats accessibles

Définissons l'ensemble des états accessibles du système augmenté comme l'ensemble A des points (x^o, x, x^{n+1}) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui satisfont :

$$(x^o, x, x^{n+1}) = (\int_{t_0}^{t_1} f^o(x(t_1(x_0, t_0), \mathcal{U}), t, \mathcal{U}(t) dt \ , \ x(t_1, (x_0, t_0), \mathcal{U}), t_1))$$

où $\mathcal{U} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$ est une quelconque commande admissible C^∞ par morceaux, l'instant t_1 n'étant pas fixé à l'avance. Le problème standard peut alors se formuler ainsi :

a) L'ensemble :

$$C = \{(x^o, x, x^{n+1}) \ \ x = x_f \ ; \ x^{n+1} \geq t_0\}$$

rencontre-t-il A ?

b) Lorsque l'intersection n'est pas vide déterminer l'élément de $C \cap A$ dont la coordonnée x^o est la plus petite possible.

Compte tenu des hypothèses 1, 2, 3, 4 qui viennent d'être faites, on vérifie aisément que si $G(I(\Gamma))$ désigne le P.S.D. associé à la famille $(X^i)_{i \in I(\Gamma)}$ on a l'égalité :

II.2.1 $$\boxed{A = G^+(I(\Gamma)) \circ (0, x_0, t_0)}$$

Les états accessibles d'un système guidable constituent donc une trajectoire positive d'un polysystème dynamique qui leur est canoniquement associé. Cette relation justifie donc l'étude qui est faite au chapitre IV des trajectoires positives d'un P.S.D.

Il faut remarquer que dans l'étude abstraite qui sera faite des trajectoires d'un P.S.D. nous n'utiliserons pas le fait que si le P.S.D. est construit à partir d'un problème de commande les champs $(X^i)_{i \in I(\Gamma)}$ de sa transformation infinitésimale sont particuliers ; leur dernière composante est toujours égale à 1.

J'ai présenté les problèmes de commande définis dans $\mathbb{R}^n$; le domaine naturel de certains systèmes étant une variété, il existe des problèmes de commande définis sur des variétés ; c'est la raison pour laquelle j'ai défini les P.S.D. sur des variétés.

III - STRUCTURE DES TRAJECTOIRES D'UN P.S.D.

INTRODUCTION -

Les résultats de ce chapitre décrivent complètement la structure des trajectoires d'un P.S.D. dans le cas analytique, et la situation générique dans le cas différentiable. Ces résultats reposent pour beaucoup sur un article de Chow [5]. En fait, je vais travailler dans un cadre un peu différent de celui de [5] et pour cela je serai obligé de redémontrer le théorème de Chow ; c'est l'objet du § 1 de ce chapitre.

L'idée d'utiliser le théorème de Chow en théorie de la commande est due à R. Hermann [10] [11] ; elle a été reprise par la suite par Hermes [12]. Les résultats des paragraphes 2 et 3 (en particulier le th. III.3.2) généralisent au cas d'une famille quelconque de champs de vecteurs des résultats démontrés dans [10] [11] pour un sous-module du module des champs de vecteurs d'une variété M. Le cas d'une famille quelconque est beaucoup plus réaliste du point de vue de la théorie de la commande ; il convient cependant de remarquer que cette généralisation se fait sans aucune difficulté.

Je montre enfin au § 4 que génériquement les P.S.D. agissent trivialement (en ce sens qu'ils n'ont qu'une trajectoire). Cette proposition me semble originale.

§ 1 - THEOREME DE CHOW

On considère dans ce paragraphe une famille $(X^i)_{i\in\Gamma}$ de champs de vecteurs de R^n et le P.S.D.d dont elle est la transformation infinitésimale.

Pour tout ensemble J ordonné, fini, d'indices de I

$$J = (J_0, J_1, J_2, \dots, J_p) \quad J_i \in I$$

on note $X^{[J]}$ le crochet des champs X^{j-i} pris dans cet ordre :

$$X^{[J]} = [X^{J_p}[X^{J_{p-1}}, \dots, [X^{J_1}, X^{J_0}] \dots]]$$

et par convention lorsque $J = (J_0)$ on pose :

$$X^{[J]} = X^{J_0} \quad .$$

Soit $\mathcal{F}_{(I)}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de I . Le théorème de Chow peut s'énoncer ainsi :

III.1.1 Théorème : Si le rang du système de vecteurs :

$$\left\{X^{[J]}(0) \quad ; \quad J \in \mathcal{F}_{(I)}\right\}$$

est égal à n alors la trajectoire du P.S.D. G(I) issue de l'origine est un voisinage de 0.

Démonstration : Soient $J^1 = (J_0^1, J_1^1, \dots, J_{p_1}^1)$, $J^2 = (J_0^2, J_1^2, \dots, J_{p_2})$ $J^n(J_0^n, J_1^n, \dots, J_{p_n}^n)$ n éléments de $\mathcal{F}_{(I)}$ tels que les vecteurs

$$X^{[J^i_{(0)}]} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

soient linéairement indépendants. Soient $e_i = (1, i)$ les éléments de base du groupe de commande G(I) . Pour t_i dans $\mathbb{R}$, $\lambda^i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{p_i}^i)$ dans $\mathbb{R}^{p_i}$ on définit les commandes $s(\lambda^i)$ par la relation :

$$s(\lambda^i) = \lambda_1^i e_{J_1^i} * \lambda_2^i e_{J_2^i} * \dots * \lambda_{p_i}^i e_{J_{p_i}^i}$$

et $r(t_1, \lambda^i)$ par :

.../...

$$r(t_i, \lambda^i) = \bar{s}(\lambda^i) * t_i e_{J_0^i} * s(\lambda^i)$$

Fixons $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. La relation ci-dessous définit une application de R^n dans $G(I)$:

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n) = r(t_n, \lambda^n) * \ldots r(t_2, \lambda^2) * r(t_1, \lambda^1)$$

et par suite :

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

définit une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (Chap II § 3). Par définition, on a :

$$r(0, \lambda^i).0 = 0$$

et par suite :

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n). = 0$$

Le théorème est donc une conséquence du théorème des fonctions inverses et du lemme III.1.2 ci-dessous car, par construction de φ, on a :

$$\varphi(\mathbb{R}^n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n) \subset G(I).0$$

Lemmes

III.1.2 Lemme : Il existe des valeurs des paramètres $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ pour lesquelles l'application :

$$(t_1, t_2, \ldots t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots t_n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

définie précédemment est de rang n à l'origine.

Le lemme III.1.2 est lui-même conséquence de deux lemmes.

III.1.3 Lemme : Soit $J = (J_0, J_1, \ldots, J_p)$ un ensemble ordonné d'indices de I. Soit pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ appartenant à $\mathbb{R}^p$ la commande

(1) $$s(\lambda) = (\lambda_1, J_1)(\lambda_2, J_2) \ldots (\lambda_p, J_p)$$

.../...

et pour t dans $\mathbb{R}$ la commande :

(2) $$r(t,\lambda) = \bar{s}(\lambda) * t\, e_{J_0} * s(\lambda)$$

On a alors quel que soit x dans $\mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{\partial\, r(t,\lambda).x}{\partial \lambda_p \ldots \partial\lambda_2 \partial\lambda_1 \partial t}\right)_{\substack{t=0\\ \lambda=0}} = X^{[J]}(x)$$

Démonstration : pour $p = 1$ on a :

$$r(t_1,\lambda_1) = (-\lambda_1, J_1)(t, J_0)(\lambda_1, J_1)$$

soit, en introduisant la notation plus classique (cf. Chap II § 1)

$$(x,t_1) \mapsto X^i_t(x) = (t,i).x$$

pour représenter l'action du groupe à un paramètre engendré par X^i :

$$r(t,\lambda_1).x = X^{J_1}_{-\lambda_1} \circ X^{J_0}_t \circ X^{J_1}_{\lambda_1}(x) \quad .$$

Par définition du crochet de X^{J_0} et X^{J_1} on a :

$$\left(\frac{\partial\, r(t,\lambda_1).x}{\partial\lambda_1\ \partial t}\right)_{\substack{t=0\\ \lambda_1=0}} = \left[X^{J_1}, X^{J_0}\right](x) \quad .$$

La conclusion du lemme s'obtient par récurrence à partir de là.

III.1.4 Lemme : Soient :

$$V_i = \mathbb{R}^{p_i} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad i = 1,2,\ldots,n$$
$$\lambda^i \longmapsto V(\lambda^i)$$

une famille de n applications différentiables à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Notons :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^i} = \frac{\partial}{\partial\lambda^i_{p_i} \ldots \partial\lambda^i_2\, \partial\lambda^i_1}$$

Si les n vecteurs :

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial\lambda^i}\right)_{\lambda^i=0} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

.../...

sont indépendants, pour $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ suffisamment petits les vecteurs

$$V_i(\lambda^i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

sont indépendants.

Démonstration : Soit $\Delta(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$ l'application de $\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{p_n}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $\Delta(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$ associe le déterminant des vecteurs $V_i(\lambda^i)$. Un déterminant étant une forme multilinéaire on voit immédiatement que :

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda^n \ldots \partial \lambda^2\, \partial \lambda^1}\right)_{\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0} = \det \left(\left(\frac{\partial V_i}{\partial \lambda^i}\right)_{\lambda^i = 0} \quad i = 1, 2, \ldots, n \right) \neq 0 .$$

Puisque la fonction Δ n'est pas infiniment plate en 0, c'est-à-dire nulle ainsi que toutes ses dérivées partielles en 0, dans tout voisinage de 0 on pourra trouver $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ tels que les vecteurs $V_i(\lambda^i)$; $i = 1, 2, \ldots, n$; soient linéairement indépendants.

Démonstration du lemme III.1.2

Calculons la jacobienne de :

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

à l'origine. On a : (cf. prop. II.1.7)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right)_{t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0} = \left(\frac{\partial\, r(t_i, \lambda^i).0}{\partial t_i}\right)_{t_i = 0} = V_i(\lambda^i) .$$

Le lemme 2 s'applique à la commande $r(t_i, \lambda^i)$.

On a donc :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i\, \partial t_i}\right)_{\substack{t_1 = t_2 = \ldots t_n = 0 \\ \lambda_i = 0}} = \frac{\partial V_i(\lambda^i)}{\partial \lambda^i} = X^{[J^i]}(0) .$$

D'après le lemme 3, il existe, dans tout voisinage de 0 des valeurs des paramètres $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^n$ pour lesquels les vecteurs :

.../...

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t_1, t_2, \ldots, t_n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)\right)_{t_1=t_2=\ldots t_n=0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad [J^i]$$

sont indépendants car, par hypothèse, les vecteurs $X(0)$ le sont. Ceci prouve donc le lemme 1.

III.1.5 <u>Remarques</u> : 1) On voit que l'on pourrait très bien choisir les λ^i, tels que

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

soit de rang n à l'origine, dans le premier quadrant, (i.e. $\lambda^i_j \geq 0$) car une fonction ne saurait être identiquement nulle dans le premier quadrant sans être infiniment plate en 0. Nous utiliserons cette remarque dans la démonstration de la proposition IV.2.2.

2) La démonstration du lemme 1 a été considérablement simplifiée par le fait que :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right)_{t_1=t_2=\ldots=t_n=0}$$

ne dépend que des paramètres λ^i. Ceci provient de ce que

$$r(t_i, \lambda^i) = \bar{s}(\lambda^i)(t_i, J_0^i)s(\lambda^i)$$

s'annule pour $t_i = 0$. Un tel résultat n'est pas possible si, comme au chapitre IV, on ne considère que des commandes positives ; ceci explique pourquoi la démonstration d'un résultat analogue au théorème de Chow, pour $G^+(I).0$ demandera beaucoup plus de calculs.

3) Toute commande s de $G(I)$ se met de manière unique sous la forme (chap. II § 1):

$$s = \mathop{\ast}_{i \in I} \lambda^i e_i$$

où λ^i est une suite de réels ayant au plus un nombre fini de termes non nuls. La démonstration du théorème prouve que tout un voisinage de 0 est constitué de points de la forme :

$$x = s.0$$

.../...

où s est une commande dont l'expression dans la base e_i admet au plus

$$\sum_{i=1}^{n} 2(P_i+1) \quad \text{composantes non nulles}$$

où $P_i + 1$ est le nombre d'éléments de l'ensemble J^i choisi de manière à ce que les

$$X^{[J^i]}(0)$$

soient indépendants.

En termes de contrôle classiques, cette remarque signifie que tous les points d'un voisinage de 0 peuvent être "atteints" par des commandes présentant au plus k discontinuités, k ne dépendant que du "jet du système" en 0. Cette remarque sera précisée au chapitre IV.

4) Considérons le cas particulier où la famille $(X^i)_{i\in I}$ est constituée par les vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$x \to Ax + V = X^1(x)$$
$$x \to Ax - V = X^2(x)$$

Un calcul immédiat montre que le rang du système de vecteurs :

$$\left\{ X^{[J]}(0) \ ; \ J \in \mathcal{F}(\{1,2\}) \right\}$$

est égal au rang de la matrice :

$$(V, AV, A^2V, \ldots, A^{n-1}V) \ .$$

On retrouve la condition H.W.(ici critère de Kalman [14]) .

§ 2 - STRUCTURE DES TRAJECTOIRES D'UN P.S.D.

Soit $G(I)$ un P.S.D. de transformation infinitésimale $(X^i)_{i\in I}$ défini sur une variété M connexe de dimension n .

III.2.1 Définition : On appelle rang du P.S.D. $G(I)$ au point x la dimension de l'espace vectoriel des valeurs en x de l'algèbre de Lie engendrée par les champs $(X^i)_{i\in I}$.

.../...

On déduit facilement de l'identité de Jacobi que tout élément de l'algèbre de Lie engendrée par les champs $(X^i)_{i \in I}$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans $C^\infty(M, R)$ des champs de vecteurs de la forme :

$$X^{[J]} \quad ; \quad J \in \mathcal{F}(I) \quad .$$

Le rang en x de $G(I)$ coïncide donc avec la dimension en x de la famille de vecteurs :

$$\left\{ X^{[J]} \quad ; \quad J \in \mathcal{F}(I) \right\}$$

III.2.2 Définition : On dit que le P.S.D. $G(I)$ est involutif si quels que soient i et j dans I le crochet $[X^i, X^j]$ appartient à la transformation infinitésimale de $G(I)$.

III.2.3 Proposition : Si en tout point de M le rang de $G(I)$ est n alors quel que soit x dans M la trajectoire $G(I).x$ est M tout entière.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème de Chow et de ce que M est connexe.

III.2.4 Proposition : Si $G(I)$ est involutif et si son rang est constant et égal à p pour tout x de M la trajectoire $G(I).x$ issue de x est une sous variété de M de dimension p .

Démonstration : C'est une conséquence triviale du classique théorème de Frobenius et de la proposition précédente.

III.2.5 Corollaire : Si le P.S.D. est de rang constant p quel que soit x dans M la trajectoire $G(I).x$ issue de x est une sous variété de M de dimension p .

Démonstration : Soit $\tilde{G}(I)$ le P.S.D. associé à l'algèbre de Lie engendrée par $(X^i)_{i \in I}$. Comme $\tilde{G}(I)$ est involutif et de rang constant on lui applique la proposition III.2.4. On a évidemment :

$$G(I).x \subset \tilde{G}(I).x$$

.../...

Il suffit d'appliquer la proposition III.2.3 à la restriction de G(I) à la variété $\tilde{G}(I).x$.

§ 3 - POLYSYSTEMES DYNAMIQUES ANALYTIQUES

III.3.1 Proposition : Soit G(I) un P.S.D. analytique, (i.e défini sur une variété analytique et tel que sa transformation infinitésimale soit constituée de champs analytiques) involutif. La trajectoire G(I).x issue de x est une sous variété de dimension égale au rang de G(I) au point x .

Démonstration : On démontre d'abord que le rang de G(I) est constant sur G(I).x ; cette propriété repose sur le fait que l'anneau des séries convergentes à n-indéterminées est noetherien. Ensuite, on définit les cartes de la structure de variété sur G(I).x de la manière suivante :

au point $y \in G(I).x$ on choisit p champs $X^{i_1}, \ldots, X^{i_p}$ de la transformation infinitésimale de G(I) , p étant le rang de G(I) au point x (ou y !) dont les valeurs en y sont indépendantes .

Soit $\varphi_y : \mathbb{R}^n \to M$ l'application définie par :

$$(t_1 t_2 \ldots, t_n) \mapsto \varphi_y(t_1 t_2 \ldots t_n) = (t_1, i_1)(t_2, i_2) \ldots (t_p i_p).y$$

ou avec des notations différentes :

$$\varphi_y(t_1 t_2 \ldots t_n) = X^{i_1}_{t_1} o X^{i_2}_{t_2} o \ldots o X^{i_p}_{t_p}(y) \quad .$$

La famille des φ_y définit une structure de variété sur G(I).x . Une démonstration détaillée est faite dans [19] .

III.3.2 Théorème : (Hermann [9]). Si G(I) est un P.S.D. analytique sur une variété analytique M alors pour tout x de M la trajectoire issue de x est une sous variété de dimension égale au rang de G(I) au point x .

Démonstration : On procède comme pour le collaire III.2.5 à partir de la proposition III.3.1 ; pour une démonstration détaillée voir [19] .

§ 4 - GENERIQUEMENT UN P.S.D. EST TRIVIAL

Dans ce paragraphe, nous supposerons que la variété M sur laquelle est défini $G(I)$ est connexe, de dimension n et à base dénombrable de voisinages. On suppose également que I a au moins deux éléments.

Dans le cas différentiable, le théorème III.3.2 est évidemment faux ; par exemple, si dans R^2 on considère les deux champs :

$$X^1(xy) = \binom{1}{0}$$

$$X^2(xy) = \binom{1}{0} \quad \text{si } x \leq 0 \qquad\qquad (x,y) \in R^2$$

$$X^2(xy) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \end{pmatrix} \quad \text{si } x > 0$$

On vérifie immédiatement que le P.S.D. qui leur est associé est de rang 1 à l'origine et que la trajectoire issue de l'origine est R^2 tout entier.

Je ne sais pas prouver que dans le cas différentiable les trajectoires de $G(I)$ peuvent être munies d'une structure de variété différentiable dont la dimension serait égale à la plus grande valeur que peut prendre le rang de $G(I)$ sur $G(I).x$. Par contre, on va montrer le

III.4.1 Théorème : Génériquement, un P.S.D. (différentiable) est trivial. Par trivial, on entend que ce P.S.D. définit une unique trajectoire : M toute entière.

Démonstration : On a vu, proposition III.2.3 que si le rang de $G(I)$ est n en tout point alors le P.S.D. est trivial. Le théorème sera donc une conséquence immédiate de la proposition III.4.3 ci-dessous. Cette proposition exprime que si on perturbe arbitrairement par deux champs de vecteurs on peut s'arranger pour qu'ils définissent un P.S.D. de rang n en tout point. Il suffit donc de choisir deux éléments de I et de perturber les champs qu'ils définissent.

III.4.2 Proposition : Soit k un entier supérieur ou égal à $2n$. L'ensemble des couples de champs de vecteurs sur M définissant un P.S.D. de rang n en tout point contient un ouvert dense pour la C^k-topologie de Whitney.

.../...

Démonstration : Je propose ici une démonstration plus simple que celle qui est publiée dans [20] . Plaçons-nous dans le fibré vectoriel des jets d'ordre k de sections de $TM \underset{M}{\times} TM \to M$, c'est-à-dire des k-jets de couples de champs de vecteurs sur M . Désignons par J^k ce fibré vectoriel et par $J_k(X_1, X_2)_{(x)}$ le k-jet en x d'un couple de champs représentés par X_1, X_2 . Représentons par $(\bar{X}^1, \bar{X}^2)$ les éléments de ce fibré vectoriel.

Introduisons également la notation :

$$[X^1, X^2]^{(p)} = [X]^{(J)} \quad ; \quad J = (2, \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{p \text{ fois}})$$
$$[X^2, X^1]^{(p)} = [X]^{(J)} \quad ; \quad J = (1, \overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{p \text{ fois}})$$

Ces opérations de crochet induisent de façon naturelle des opérations dans la fibre au-dessus de x de J^k . Employons le même symbole pour les représenter. Ainsi

$$[\bar{X}^1, \bar{X}^2]^{(p)}$$

représentera un vecteur de $\mathbb{R}^n$ obtenu en prenant la valeur au point x de $[X^1, X^2]^{(p)}$, où X^1 et X^2 sont deux champs admettant respectivement $\bar{X}^1$ et $\bar{X}^2$ pour p-jets en x .

Désignons par S l'ensemble des éléments $(\bar{X}^1, \bar{X}^2)$ du fibré vectoriel tels que aucune des deux matrices à n ligne et $2n$ colonnes :

$$M_1(\bar{X}^1, \bar{X}^2) = ([\bar{X}^2, \bar{X}^1]^{(1)}, [\bar{X}^2, \bar{X}^1]^{(2)}, \ldots, [\bar{X}^2, \bar{X}^1]^{(p)}, \ldots, [X^2, \bar{X}^1]^{(2n)})$$
$$M_2(\bar{X}^2, \bar{X}^1) = ([\bar{X}^1, \bar{X}^2]^{(1)}, [\bar{X}^1, \bar{X}^2]^{(2)}, \ldots, [\bar{X}^1, \bar{X}^2]^{(p)}, \ldots, [\bar{X}^1, \bar{X}^2]^{(2n)})$$

ne soit de rang n . L'assertion suivante est une conséquence immédiate des notations qui viennent d'être introduites : l'ensemble des couples de champs de vecteurs sur M qui sont la transformation infinitésimale d'un P.S.D. de rang n en tout point contient l'ensemble des couples de champs de vecteurs (X^1, X^2) dont le k-jet $J_k(X^1, X^2)_{(x)}$ ne rencontre jamais S . On sait d'après le théorème de transversabilité de Thom [35] (cf. Martinet [27]) que, si l'ensemble S est contenu dans une stratification (cf. [27]) de codimension supérieure ou égale à $n + 1$, alors

.../...

l'ensemble des couples (X^1, X^2) dont le k-jet évite S contient un ouvert dense pour la C^k-topologie de Whitney.

La proposition sera donc démontrée si on prouve que S est contenue dans une stratification de codimension $n+1$. Pour cela, il suffit de le vérifier dans chaque fibre. Notons E la fibre au-dessus de x et S_x la trace de S sur E.

$$E = \Delta \cup \Omega_1 , \cup \Omega_2$$

où Δ désigne l'ensemble des jets de couples de champs de vecteurs X^1, X^2 tous les deux nuls en x, où Ω_1 et Ω_2 désignent respectivement l'ensemble des jets de couples (X^1, X^2) tels que respectivement X^1 ou X^2 ne soient pas nuls en x. Les ensembles Ω_1 et Ω_2 sont ouverts. Considérons dans Ω_1 l'application M_1 dans l'ensemble $M_{n,2n}$ des matrices à n lignes et 2n colonnes définie précédemment. Puisque $\bar{X}^1$ n'est pas nul on peut toujours supposer que $\bar{X}^1$ est le jet de $\frac{\partial}{\partial x}$; dans une telle base on a donc, avec des notations évidentes :

$$M_1(\bar{X}^1, \bar{X}^2) = \left(\frac{\partial \bar{X}^2}{\partial x}, \frac{\partial^2 \bar{X}^2}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^p \bar{X}^2}{\partial x^p}, \ldots, \frac{\partial^{2n} \bar{X}^2}{\partial x^{2n}}\right) \quad ;$$

ceci prouve que M_1 est de rang maximum $2n^2$. On a l'inclusion

$$\Omega_1 \cap S_x \subset M_1^{-1}(\Sigma)$$

où Σ est l'ensemble des matrices $n \times 2n$, de rang inférieur ou égal à $n-1$ dont on sait qu'il est une stratification de codimension :

$$n(-(n-1)) \times (2n - (n-1)) = n + 1 \quad .$$

Puisque M_1 est de rang n l'ensemble $\Omega_1 \cap S$ est contenu dans une stratification de codimension $n+1$. Comme S est contenu dans la réunion de $\Omega_1 \cap S_x$ de $\Omega_2 \cap S_x$ et de Δ, comme par ailleurs Δ est une variété linéaire de codimension 2n, on a montré que S_x est contenu dans une stratification de codimension $n+1$. En fait un théorème de Whitney [37] sur la structure des variétés algébriques réelle permet d'affirmer que S_x est une stratification.

III.4.3 <u>Remarques</u> : 1) On voit que pour cette question de généricité la condition : rang(G(I)) = n en tout point, joue le même rôle que la condition H.W. dans le cas linéaire. Ceci peut-être rapproché de la remarque III.1.5 (4).

2) On peut considérer l'étude des "stratifications" définies sur une variété par l'action des P.S.D. comme complète. Dans le cas analytique par chaque point passe une "strate" de dimension déterminée par le jet du P.S.D. en ce point, dans le cas différentiable on ne sait pas répondre de manière aussi précise mais on peut affirmer que "génériquement" tous les P.S.D. sont triviaux !

3) Ces résultats relativement esthétiques ne doivent pas faire illusion ! Par rapport à la motivation de ce travail, la théorie de la commande optimale, les trajectoires d'un P.S.D. n'ont aucune réalité concrète, (on intègre les champs X^i en remontant et en descendant le temps), seules les trajectoires positives (ou négatives) ont un intérêt. On va voir au chapitre suivant que dans ce cas la situation est bien moins claire.

IV - STRUCTURE DES TRAJECTOIRES POSITIVES

INTRODUCTION -

Dire que la trajectoire positive d'un P.S.D. issue d'un point x est un voisinage de x s'interprète en théorie de la commande en disant que l'ensemble des états "accessibles" à partir de x est un voisinage de x. Au paragraphe 1 de ce chapitre, je transcris dans le langage des P.S.D. quelques propositions classiques en théorie de la commande.

Au § 2, je démontre une proposition analogue au théorème de Chow dans le cas où on s'impose de ne considérer que des commandes positives. Cette proposition sert, comme au chapitre précédent, de base pour la description de la situation générique. Le résultat essentiel exposé au § 3 est le suivant : "génériquement les trajectoires sont contenues dans l'adhérence de leur intérieur".

Enfin je démontre (§ 4) que sur une variété riemannienne compacte, les P.S.D. dont la transformation infinitésimale est constituée de champs conservatifs sont "génériquement" triviaux. Cet exercice est un peu académique dans la mesure où je ne connais pas d'exemple concret d'une telle situation.

Dans tout ce chapitre, on considère des P.S.D.d sur une variété M connexe à base dénombrable de voisinages, dimension n.

§ 1 - ETUDE DE $G^+(I).x$ AU VOISINAGE DE x

On dit que p vecteurs $V^1 V^2 \ldots V^p$ de $\mathbb{R}^n$ définissent une base positive si tout vecteur V de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls des V^i ; nécessairement p est supérieur à $n+1$ et l'expression de V dans la base positive n'est pas unique.

IV.1.1 Proposition : PETROV [33] Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ $p \geq n+1$ une application différentiable telle que $f(0) = 0$. Si les vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x=0}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ définissent une base positive de $\mathbb{R}^n$ alors $f(\mathbb{R}^{p+})$ est un voisinage de 0. L'ensemble $\mathbb{R}^{p+}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^p$ à coordonnées positives.

.../...

Démonstration : Cette proposition se déduit du théorème des fonctions implicites. Cf [33].

Le théorème IV.1.2 est une conséquence immédiate de cette proposition.

IV.1.2 Théorème : (PETROV [33]) Soit $G(I)$ un P.S.D.d sur M de transformation infinitésimale $(X^i)_{i\in I}$. Si les vecteurs $X^{i_1}(x)$, $X^{i_2}(x), \dots, X^{i_p}(x)$ définissent une base positive de T_xM alors $G^+(I).x$ est un voisinage de x.

Démonstration : On applique la proposition 1 à l'application :

$$(t_1, t_2, \dots, t_p) \longmapsto (t_1, i_1)(t_2, i_2)\dots(t_p, i_p).x$$

exprimée dans une carte contenant x.

La condition du théorème 1 est loin d'être nécessaire ; considérons par exemple la proposition suivante concernant des champs affines.

Soient $X^1(x) = Ax + V$ et $X^2(x) = Ax - V$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$; ici A est une matrice $n \times n$, et V un vecteur de $\mathbb{R}^n$; $G(1,2)$ désigne le P.S.D. de transformation infinitésimale X^1, X^2.

IV.1.3 Théorème : (KALMANN [14]). Si, et seulement si, le rang de $G(1,2)$ en 0 est égal à n, alors $G^+(1,2).0$ est un voisinage de 0.

Démonstration : Nous avons vu que le rang de $G(1,2)$ à l'origine est égal au rang de la matrice :

$$(V, AV, A^2V, \dots, A^{n-1}V) \ ;$$

(cf remarque III.1.5 (4)). Nous reconnaissons la condition H.W. "faible" (remarque I.1.5) qui équivant à la contrôlabilité au voisinage de 0 (Th. I.1.3).

IV.1.4 Remarques : 1) Je ne sais démontrer ce résultat sans faire appel à la théorie classique développée au chapitre I qu'en faisant des calculs (élémentaires) assez compliqués basés sur le développement en série de e^{tA} (cf [21]).

.../...

Lors de la rédaction de ce travail, je n'avais pas connaissance des articles de Petrov N.N., mentionné en A_1, A_2, A_3 de la bibliographie.

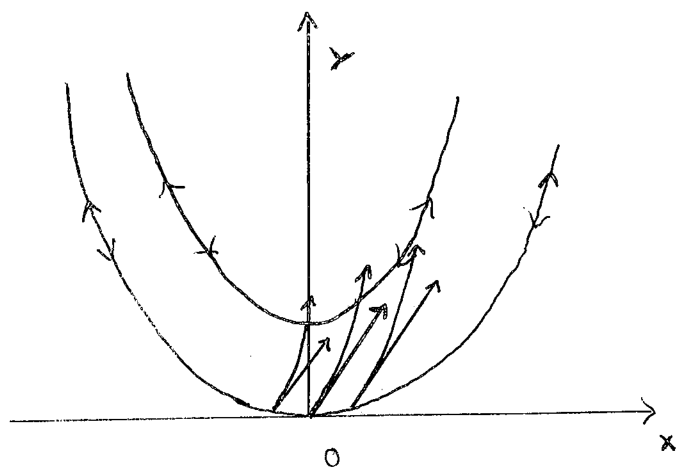
2) Les résultats du chapitre II sur les trajectoires d'un P.S.D. d'une part, le résultat de Petrov et la proposition précédente d'autre part, suggèrent la généralisation suivante :

"Soit $G(I)$ un P.S.D. sur M de transformation infinitésimale $(X^i)_{i \in I}$, tel que la plus petite famille, close sous l'opération du crochet, contenant $(X^i)_{i \in I}$ définisse une base positive de $T_x M$; alors $G^+(I)(x)$ est un voisinage de 0 ".

Cet énoncé est faux comme on peut le voir sur l'exemple :

$$X^1(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -x \end{pmatrix} \quad X^2(xy) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad X^3(xy) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \end{pmatrix}$$

$[X^1, X^3] = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}$; $[X^3, X^1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; X^1 et X^2 définissent bien une base positive en 0. Pourtant $G^+(1,2).0$ a l'allure indiquée sur la figure (au voisinage de 0) :



Pour terminer, signalons le théorème de Lee et Markus [15] sur la contrôlabilité B.B. des systèmes non linéaires. L'énoncé dans le cadre des P.S.D. en est peu naturel.

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ deux familles de champs de vecteurs $X^1(x,u)$, $X^2(x,u)$ de la forme :

$$X^1(x,u) = Ax + Vu + (\|x\| + |u|)\,\varepsilon_1(x,u) \quad u \in \mathbb{R} \;;\; \lim_{\substack{x \to 0 \\ u \to 0}} \varepsilon_1(x,u) = 0$$

.../...

$$X^2(x,u) = Ax - Vu + (\|x\| + |u|)\ \epsilon_2(x,u) \quad u \in \mathbb{R}\ ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ u \to 0}} \epsilon_2(x,u) = 0$$

IV.1.5 Théorème : (Lee et Markus [15]) . Si le rang de la matrice :

$$(V, AV, \dots, A^{n-1}V)$$

est égal à n il existe des valeurs arbitrairement petites de u pour lesquelles le P.S.D. de transformation infinitésimale $X^1(x,u)$, $X^2(x,u)$ est tel que $G^+(1,2).(0)$ soit un voisinage de 0 .

Toutes ces conditions font penser qu'il existe une condition générale s'exprimant à l'aide de l'algèbre de Lie engendrée par la transformation infinitésimale de $G(I)$. Je n'ai pas su trouver cette condition.

§ 2 - EXTENSION DU THEOREME DE CHOW AUX TRAJECTOIRES POSITIVES.

On a vu (Chap. III, § 1, remarque 2) que la démonstration du théorème de Chow était facilitée par le fait qu'on s'autorisait l'emploi de commandes non positives. Le paragraphe est consacré à démontrer la proposition IV.2.2 :

"Si le rang du P.S.D. $G(I)$ défini sur $\mathbb{R}^n$ est égal à n en 0 , il existe des points de l'intérieur de $G^+(I).0$ arbitrairement proches de 0 ".

Cette proposition est évidente lorsque les valeurs en 0 de la transformation infinitésimale $(X^i)_{i \in I}$ de $G(I)$ engendrent une variété linéaire de dimension n . La démonstration qui va suivre est élémentaire mais assez compliquée. La démonstration que j'ai proposé dans [18] est fausse ; (en fait l'erreur commise dans [18] n'est pas fondamentale, c'est une erreur dans le calcul de dérivées partielles, le principe reste le même).

A - Définitions préliminaires

On a vu que le rang en 0 de l'algèbre de Lie engendrée par une famille $(X^i)_{i \in I}$ de champs de vecteurs était égal, avec les notations du § 1 du chapitre III,

.../...

à la dimension de la variété linéaire engendrée par les valeurs en 0 de la famille de champs de vecteurs :

$$\Delta = \{ X^{[J]} \ ; J \in \mathcal{F}(I) \}$$

On a désigné par $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des suites finies à valeur dans I ; si on considère des suites de longueur inférieure à p on introduit la famille

$$\Delta_p = \{X^{[J]}_{(0)} \ ; J = \{J_0, J_1, \ldots, J_q\} ; J \in \mathcal{F}(I) \ ; q \leq p \} .$$

On a évidemment :

$$\Delta = \bigcup_{p \in N} \Delta_p .$$

On dira d'un champ Z de Δ qu'il est <u>d'ordre p</u> si p est le premier entier tel que :

$$Z \in \Delta_p \ ;$$

on note $\theta(Z)$ l'ordre d'un champ de Δ .

IV.2.1 <u>Définition</u> : <u>On dit qu'une famille</u> $Z^1, Z^2, \ldots, Z^r$ <u>de champs de</u> Δ <u>définit un système fondamental (sous entendu en 0) si quel que soit l'entier</u> p <u>l'ensemble</u> $\Delta_p(0)$ <u>des valeurs en</u> 0 <u>des champs de</u> Δ_p <u>est engendré par les valeurs en</u> 0 <u>des</u> Z^i <u>de rang inférieur ou égal à</u> p .

Il est clair qu'il existe toujours au moins un système fondamental en 0 . On vérifie aisément que la quantité :

$$\sum_{k=1}^{r} (\theta(Z^k)+1)$$

ne dépend que de la famille $(X^i)_{i \in I}$ et pas du choix d'un système fondamental $Z^1, Z^2, \ldots, Z^r$ en 0 . On appelle cet entier <u>l'ordre</u> de la famille au point 0 . L'ordre est donc supérieur ou égal au rang ; lorsque l'ordre est égal au rang, il n'est pas besoin de calculer de crochet pour faire apparaître de nouvelles "directions" en 0 ; plus la différence est grande plus il faut exprimer de crochets pour faire apparaître toutes les directions. Le rang exprime le "coût" de la manière la plus "économique" de générer les "directions" possibles dans l'ensemble des valeurs en 0 de $\mathcal{L}((X^i)_{i \in I})$.

.../...

B - Principe de la démonstration de la proposition IV.2.3

IV.2.3 Proposition : Si le rang du P.S.D. $G(I)$ sur $\mathbb{R}^n$ est égal à n en 0 il existe des points intérieurs de $G^+(I).0$ arbitrairement proches de 0.

Démonstration : Comme pour la démonstration du théorème III.1.1, la démonstration de cette proposition repose sur la construction d'une famille différentiable :

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \Lambda)$$

d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$; le paramètre Λ appartient à $\mathbb{R}^k$. Cette famille possède les propriétés suivantes :

i) Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ appartient au "premier quadrant" ainsi que Λ alors le point $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \Lambda)$ est un point de $G^+(I).0$, ceci par construction de φ. De plus $\varphi(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0$.

ii) Il existe des valeurs de Λ, dans le premier quadrant, arbitrairement petites pour lesquelles le rang de l'application :

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \Lambda)$$

est égal à n en 0.

Soit $\varepsilon > 0$ donné ; choisissons Λ tel qu'en ii) de manière à ce que la norme de $\varphi(0, 0, \ldots, 0, \Lambda)$ soit plus petite que $\varepsilon/2$. Pour $\|t_1, t_2, \ldots, t_n\| \leq \eta$ on aura alors $\|\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \Lambda\| \leq \varepsilon$. Comme de plus le rang de

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \Lambda)$$

est égal à n en 0 l'ensemble :

$$\varphi(\mathbb{R}^{n^+}, \Lambda)$$

où $\mathbb{R}^{n^+}$ désigne l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées toutes positives, est d'intérieur non vide d'après le théorème des fonctions inverses. La condition i) exprimant l'inclusion :

$$\varphi(\mathbb{R}^{n^+}, \Lambda) \subset G^+(I).0 \ ;$$

.../...

ce qui précède démontre donc la proposition. Il ne reste plus qu'à construire φ ; c'est l'objet de ce qui suit.

C - Construction de l'application φ

Soit :

$$S = \{Z^1, Z^2, \ldots Z^n\}$$

un système fondamental. Comme le P.S.D. est de rang n il comporte n champs. Les champs du système S peuvent être d'ordre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q$ avec :

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_q = 0$$

(Pour les notations ultérieures, il est plus commode de commencer par l'ordre le plus élevé). Soit p_i $(i = 1,2,\ldots,q)$ le nombre de champs de S d'ordre ρ_i ; finalement désignons par :

$$Z^{k,i} \quad k = 1,2,\ldots,p_i \;;\; i = 1,2,\ldots,q$$

le k-ième champ d'ordre ρ_i du système S. Par définition de l'ordre on a :

$$Z^{k,i} = X^{[J^{k,i}]}$$

avec :

$$J^{k,i} = \{J_0^{k,i}, J_1^{k,i}, \ldots, J_{\rho_i}^{k,i}\}$$

Introduisons encore quelques notations :

$$\lambda^{k,i} = (\lambda_0^{k,i}, \lambda_1^{k,i}, \ldots, \lambda_{\rho_i}^{k,i}) \in \mathbb{R}^{\rho_i+1}$$

$$\lambda^i = (\lambda^{1,i}, \lambda^{2,i}, \ldots, \lambda^{p_i,i}) \in \mathbb{R}^{p_i \times (\rho_i+1)}$$

$$\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^q) \in \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{q} p_i \times (\rho_i+i)}$$

Définissons les commandes $s(\lambda^{k,i})$; $s(\lambda^i)$; $s(\lambda)$ par les relations :

$$s(\lambda_0^{k,i}, J_0^{k,i})\,(\lambda_1^{k,i}, J_1^{k,i}) \ldots (\lambda_{p_i}^{k,i}, J_{\rho_i}^{k,i})$$

.../...

$$s(\lambda^i) = s(\lambda^{1,i}) * s(\lambda^{2,i}) * \ldots * s(\lambda^{p_i,i})$$

$$s(\lambda) = s(\lambda^1) * s(\lambda^2) * \ldots * s(\lambda^q)$$

L'application $\lambda \mapsto s(\lambda)$ de $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{q} p_i(\rho_i+1)}$ dans $G(I)$ qui vient d'être définie peut être considérée comme une famille à $\sum_{i=1}^{q} p_i\rho_i$ paramètres d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $G(I)$, le "point courant" dans $\mathbb{R}^n$ étant constitué par les $\lambda_0^{k,i}$; $k = 1,2,\ldots,p_i$; $i = 1,2,\ldots,q$, la famille des paramètres par les $\lambda_j^{k,i}$; $k = 1,2,\ldots,p_i$; $i = 1,2,\ldots,q$; $j \neq 0$. Si on désigne par un unique symbole Λ tous les $\lambda_j^{k,i}$ tels que j soit différent de 0 on écrira

$$((\lambda_0^{k,i}),\Lambda) \mapsto s((\lambda_0^{k,i}),\Lambda)$$

où $(\lambda_0^{k,i}) = \{\lambda_0^{k,i} \ ; \ k = 1,2,\ldots,p_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,q\}$.

Définissons maintenant l'application φ comme l'application qui à l'élément :

$$\lambda_0^{k,i} \ ; \ k = 1,2,\ldots,p_i \ ; \ j = 1,2,\ldots,q \ ;$$

de $\mathbb{R}^n$, et à la famille Λ de $\sum_{i=1}^{q} p_i\rho_i$ paramètres associe l'élément de $\mathbb{R}^n$ obtenu en faisant agir $s(\lambda_0^{k,i},\Lambda)$ sur le point origine ; on a donc :

$$\varphi((\lambda_0^{k,i}),\Lambda) = s((\lambda_0^{k,i}),\Lambda).0$$

L'application φ qui vient d'être construite satisfait le point i) réputé satisfait par l'application φ au numéro précédent. En effet :

a) $\varphi((\lambda_0^{k,i}),\Lambda)$ représente bien une famille différentiable à $\sum_{i=1}^{q} p_i\rho_i$ paramètres d'applications différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$; la différentiabilité est une conséquence immédiate de la définition d'un P.S.D. (Chap. II).

b) Si $\lambda_0^{k,i} = 0$ et $\Lambda = 0$ on a $s((\lambda_0^{k,i}),\Lambda) = 0$ soit $\varphi((\lambda_0^{k,i}),\Lambda) = 0$.

c) Si $\lambda_0^{k,i} \geq 0$ et si Λ appartient au "premier quadrant" la commande $s((\lambda_0^{k,i}),\Lambda)$ est positive et par suite $\varphi((\lambda_0^{k,i}),\Lambda)$ appartient à $G^+(I).0$.

.../...

<u>L'application φ satisfait bien la condition ii)</u>

Reprenons les notations précédentes :

$$\lambda^{k,i} = (\lambda_0^{k,i}, \lambda_1^{k,i}, \ldots, \lambda_{\rho_i}^{k,i}) \; ;$$

et posons :

$$\Lambda^{k,i} = (\lambda_1^{k,i}, \lambda_2^{k,i}, \ldots, \lambda_{\rho_i}^{k,i}) \; ; \; s(\Lambda^{k,i}) = (\lambda_1^{k,i}, j_1^{k,i})(\lambda_2^{k,i}, j_2^{k,i}) \ldots (\lambda_{\rho_i}^{k,i}, j_{\rho_i}^{k,i})$$

ainsi nous avons :

$$\lambda^{k,i} = (\lambda_0^{k,i}, \Lambda^{k,i}) \; ; \; s(\lambda^{k,i}) = (\lambda_0^{k,i}, j_0^{k,i}) * s(\Lambda^{k,i})$$

et de même qu'en C définissons :

$$\Lambda^i = (\Lambda^{1,i}, \Lambda^{2,i}, \ldots, \Lambda^{p_i,i}) \; ; \quad s(\Lambda^i) = s(\Lambda^{1,i}) * s(\Lambda^{2,i}) * \ldots * s(\Lambda^{p_i,i})$$

et

$$\Lambda = (\Lambda^1, \Lambda^2, \ldots, \Lambda^q) \quad .$$

(Remarquons qu'en fait $\Lambda^{k,q}$, compte tenu du fait que $\rho_q = 0$, est "vide").

Déterminons la jacobienne en 0 de l'application :

$$(\lambda_0^{k,i}) \mapsto \varphi((\lambda_0^{k,i}), \Lambda) \; ;$$

elle est déterminée par les dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial \, \varphi((\lambda_0^{k,i}), \Lambda)}{\partial \, \lambda_0^{k,i}} \right)_{(\lambda_0^{k,i}) = 0}$$

qui sont égales à (d'après les règles de calcul sur les P.S.D. chap II) :

(1) $$\left(\frac{\partial \, \varphi((\lambda_0^{k,i}), \Lambda)}{\partial \, \lambda_0^{k,i}} \right)_{(\lambda_0^{k,i}) = 0} =$$

$$\left(s(\Lambda^1) * s(\Lambda^2) * \ldots * s(\Lambda^{i-1}) * s(\Lambda^{1,i}) * s(\Lambda^{2,i}) * \ldots * s(\Lambda^{k-1,i})\right)^* . X^{J_0^{k,i}}_0 (x(k,i))$$

.../...

avec :

$$x(k,i) = \left(s(\Lambda^{k,i}) * s(\Lambda^{k+1,i}) * \ldots * s(\Lambda^{p_i,i}) * s(\Lambda^{i+1}) * \ldots * s(\Lambda^q)\right).0$$

Pour constater que les vecteurs définis par ces dérivées partielles sont indépendants on peut regarder si leurs images par un opérateur linéaire inversible sont indépendantes ; pour cela on choisit l'opérateur :

$$T(\Lambda) = \left(\left(s(\Lambda^1) * s(\Lambda^2) * \ldots * s(\Lambda^q)\right)^*_{(0)}\right)^{-1} \quad ;$$

On pose :

$$V_{k,i}(\Lambda) = T(\Lambda) . \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_0^{k,i}}((\lambda_0^{k,i}), \Lambda)\right)_{(\lambda_0^{k,i}) = 0}$$

De la relation (1) et des règles de calcul sur les P.S.D. du chap II on tire :

$$(2) \quad V_{k,i}(\Lambda) = \left(\left(s(\Lambda^{k,i}) * s(\Lambda^{k+1,i}) * \ldots * s(\Lambda^{p_i,i}) * s(\Lambda^{i+1}) * \ldots * s(\Lambda^q)\right)^*_{(0)}\right)^{-1} X^{J_0^{k,i}}(x(k,i))$$

<u>Posons</u> :

$$\Delta(\Lambda) = \det\left(V_{k,i}(\Lambda)\right) \quad k = 1,2,\ldots,p_i \ ; \ j = 1,2,\ldots,q)$$

Introduisons les opérateurs différentiels :

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda^{k,i}} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{p_i}^{k,i} \ldots \partial \lambda_2^{k,i} \, \partial \lambda_1^{k,i}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda^{i}} = \frac{\partial}{\partial \Lambda^{p_i,i} \ldots \partial \Lambda^{2,i} \, \partial \Lambda^{1,i}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} = \frac{\partial}{\partial \Lambda^{q} \ldots \partial \Lambda^{2} \partial \Lambda^{1}}$$

IV.2.3 <u>Lemme</u> : <u>Si la dérivée</u>

$$\left(\frac{\partial \Delta(\Lambda)}{\partial \Lambda}\right)_{\Lambda = 0}$$

de la fonction $\Delta(\Lambda)$ n'est pas nulle il existe des valeurs de Λ, dans le premier quadrant, arbitrairement petites, pour lesquelles le rang de l'application :

$$(\lambda_0^{k,i}) \mapsto \varphi((\lambda_0^{k,i}),\Lambda)$$

est de rang n à l'origine.

Démonstration : S'il n'en était pas ainsi la fonction $\Lambda \to \Delta(\Lambda)$ serait identiquement nulle sur l'intersection du premier quadrant de $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{q} \rho_i p_i}$ avec un voisinage de 0 ; il s'ensuivrait alors que toutes les dérivées partielles de Δ seraient nulles à l'origine, en particulier $\left(\frac{\partial \Delta(\Lambda)}{\partial \Lambda}\right)_{\Lambda=0}$ qui par hypothèse ne l'est pas.

La fonction φ définie en C de ce paragraphe, compte tenu de ce lemme, satisfait la condition ii) du numéro 2 si $\left(\frac{\partial \Delta(\Lambda)}{\partial \Lambda}\right)_{\Lambda=0}$ n'est pas nul.

La proposition sera donc complètement démontrée lorsque nous aurons prouvé le

IV.2.4 Lemme : La dérivée $\left(\frac{\partial \Delta(\Lambda)}{\partial \Lambda}\right)_{\Lambda=0}$ n'est pas nulle.

Démonstration : Eliminons pour commencer le cas trivial où $q = 1$; dans ce cas puisque $\rho_q = 0$ on peut affirmer que les vecteurs :

$$X^{J_0^{1,1}}(0) \;,\; X^{J_0^{2,1}}(0) \;,\; \ldots,\; X^{J_0^{n,1}}(0)$$

sont indépendants ; la proposition se démontre alors immédiatement à partir du théorème des fonctions inverses appliqué à :

$$(t_1,t_2,\ldots,t_n) \longmapsto (t_1,J_0^{1,1})(t_2,J_0^{2,1})\ldots(t_n,J_0^{n,1}).0$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas non trivial. Soit :

.../...

$$E = \{(j,k,i) \ ; \ j = 1,2,\ldots,\rho_i \ ; \ k = 1,2,\ldots,p_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,q\}$$

$$F = \{(k,i) \ ; \ k = 1,2,\ldots,p_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,q\}$$

Rappelons que le cardinal de E , soit $\sum_{i=1}^{q} p_i$ est égal à n . Désignons par : Θ l'ensemble des applications de E dans F . Si θ est un élément de Θ on pose :

$$(\Delta(\Lambda))_\theta = \det\left(\left(\frac{\partial V_{k,i}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(k,i)}\right)_{\Lambda=0} \ ; \ k = 1,2,\ldots,p_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,q\right)$$

où le symbole

$$\left(\frac{\partial V_{k,i}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(k,i)}\right)$$

représente les dérivées partielles successives de $V_{k,i}(\Lambda)$ (définies par la relation (2)) par rapport aux $\lambda_j^{k,i}$ tels que $\theta(j,k,i) = k,i$.

La fonction $\Delta(\Lambda) = \det(V_{k,i}(\Lambda) \ ; \ k = 1,2,\ldots,p_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,q)$ étant linéaire par rapport aux $V_{k,i}(\Lambda)$ on vérifie facilement que :

(3) $$\left(\frac{\partial \Delta(\Lambda)}{\partial \Lambda}\right)_{\Lambda=0} = \sum_{\theta \in \Theta} (\Delta(\Lambda))_\theta \ .$$

Soit θ_0 l'application :

$$(j,k,i) \to \theta_0(j,k,i) = (k,i) \ ,$$

calculons $(\Delta(\Lambda))_{\theta_0}$.

Précisément cela revient à déterminer les quantités :

$$\left(\frac{\partial V_{k,i}(\Lambda)}{\partial \lambda_{\rho_i}^{k,i} \, \partial \lambda_2^{k,i} \, \partial \lambda_1^{k,i}}\right)_{\Lambda=0}$$

Remarquons que pour :

$$\Lambda^{k+1,i} = \Lambda^{k+2,i} = \ldots = \Lambda^{p_i,i} = 0$$

$$\Lambda^{i+1} = \Lambda^{1+2} = \ldots = \Lambda^q = 0$$

.../...

l'expression de $V_{k,i}$ est donnée par (cf (2)) :

$$V_{k,i}(\Lambda) = \left(s(\Lambda^{k,i}{}^*_{(0)})\right)^{-1} X^{J_0^{k,i}} (s(\Lambda^{k,i})) \quad .$$

D'après (le lemme du chap II) nous pouvons alors affirmer que :

$$\left(\frac{\partial V_{k,i}(\Lambda)}{\partial \lambda^{k,i}_{\rho_i} \ldots \partial \lambda^{k,i}_2 \, \partial \lambda^{k,i}_1}\right)_{\Lambda=0} = X^{[J^{k,i}]}(0)$$

Comme par hypothèse les $X^{[J^{k,i}]}$ définissent un système fondamental ils sont indépendants en 0 . On a donc :

$$(\Delta(\Lambda))_{\theta_0} \neq 0$$

Nous allons voir maintenant <u>que si θ est différent de</u> θ_0 <u>alors</u> :

$$(\Delta(\Lambda))_{\theta} = 0 \quad ,$$

ce qui achèvera la démonstration du lemme en raison de la relation 3.

Nous allons examiner à <u>quelles conditions on a</u> :

$$\underline{(\Delta(\Lambda))_{\theta} \neq 0} \quad .$$

Le vecteur $V_{k,i}(\Lambda)$ défini par la relation (2) ne dépend pas des variables :

$$\Lambda^1 \, , \, \Lambda^2 \, , \ldots , \, \Lambda^{i-1} \, , \, \Lambda^{1,i} \, , \, \Lambda^{2,i} \, , \ldots , \, \Lambda^{k-1,i}$$

par conséquent, il est nécessaire que :

$$\theta^{-1}(k,i)$$

ne contienne aucune de ces valeurs car sinon, après dérivation on aurait nécessairement :

$$\left(\frac{\partial V_{k,i}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(k,i)}\right)_{\Lambda=0} = 0 \quad .$$

Ceci entraîne en particulier que :

.../...

$$\theta^{-1}(p_q, q) = \emptyset \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V_{p_{q,q}}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(p_{q,q})}\right)_{\Lambda=0}^{[\{J_0^{p_{q,q}}\}]} = V_{p_{q,q}}(0) = X(0)$$

$$\theta^{-1}(k, q) = \emptyset \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V_{k,q}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(k, q)}\right)^{[\{J_0^{k,q}\}]} = V_{k,q}(0) = X(0)$$

$$\theta^{-1}(1, q) = \emptyset \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V_{1,q}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(1, q)}\right)^{[\{J_0^{1,q}\}]} = V_{1,q}(0) = X(0)$$

Ces vecteurs constituent l'ensemble des vecteurs d'ordre 0 du système fondamental. Considérons maintenant $\theta^{-1}(p_{q-1}, q-1)$. On a nécessairement, puisque $V_{p_{q-1}, q-1}$ ne dépend que des variables :

$$\left(\lambda_1^{p_{q-1,q-1}}, \lambda_2^{p_{q-1,q-1}}, \ldots, \lambda_{\rho_q}^{p_{q-1,q-1}}\right),$$

$$\theta^{-1}(p_{q-1}, q-1) \subset \{J, p_{q-1}, q-1) \; ; \; J = 1, 2, \ldots, \rho_{q-1}\}$$

On a, avec des notations évidentes :

$$\left(\frac{\partial V_{p_{q-1}, q-1}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(p_{q-1}, q-1)}\right)_{\Lambda=0}^{[\theta^{-1}(p_{q-1}, q-1)]} = X(0) \quad .$$

Si l'inclusion est stricte, ce dernier vecteur est la valeur en 0 d'un champ d'ordre strictement plus petit que ρ_{q-1} donc par définition du système fondamental S, il est combinaison linéaire des valeurs en 0 des champs de S d'ordre inférieur, c'est-à-dire dans ce cas des champs d'ordre 0. Le déterminant :

$$\det\left(\left(\frac{\partial V_{k,i}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(k, i)}\right)_{\Lambda=0} \quad k = 1, 2, \ldots, p_i \; ; \; i = 1, 2, \ldots, q\right)$$

sera donc nul. On a donc :

.../...

(4) $\quad \theta^{-1}(p_{q-1}, q-1) = \{(j, p_{q-1}, q-1) \; ; \; j = 1,2,\ldots,\rho_{q-1}\}$

Soit maintenant le point $(k = p_{q-1}-1 \; ; \; i = q-1)$. D'après la relation (2) le vecteur $V_{p_{q-1}-1}(\Lambda)$ ne dépend que des variables :

$$\lambda_1^{p_{q-1}-1,q-1} , \lambda_2^{p_{q-1}-1,q-1} , \ldots , \lambda_{\rho_{q-1}}^{p_{q-1}-1,q-1} , \lambda_1^{p_{q-1},q-1} , \lambda_2^{p_{q-1},q-1} , \ldots , \lambda_{\rho_{q-1}}^{p_{q-1},q-1} \; ;$$

compte tenu de l'égalité (4) on doit donc avoir :

$$\theta^{-1}(p_{q-1}-1, q-1) \subset \{j, p_{q-1}-1, q-1) \; ; \; j = 1,2,\ldots,\rho_{q-1}\} \; .$$

Pour les mêmes raisons que précédemment on doit avoir l'égalité. De proche en proche on montre ainsi que :

$$\theta^{-1}(k, q-1) = \{(j, k, q-1) \; ; \; j = 1,2,\ldots,\rho_{q-1}\}$$

On a donc ainsi utilisé toutes les variables :

$$\lambda_j^{k,q-1} \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,p_{q-1} \; ; \; j = 1,2,\ldots,\rho_{q-1} \; ;$$

On ne pourra donc dériver le vecteur $V_{p_{q-2},q-2}(\Lambda)$ que par rapport aux seules variables :

$$\lambda_1^{p_{q-q},q-2} , \lambda_2^{p_{q-2},q-2} , \ldots , \lambda_{\rho_{q-2}}^{p_{q-2},q-2} \; ;$$

il convient de dériver par rapport à <u>toutes ces variables</u> car sinon le vecteur :

$$\left(\frac{\partial V_{p_{q-2},q-2}}{\partial \theta^{-1}(p_{q-2}, q-2)} \right)_{\Lambda = 0} = X^{[\theta^{-1}(p_{q-2}, q-2)]}$$

serait la valeur en 0 d'un champ d'ordre strictement plus petit que ρ_{q-2} , donc une combinaison linéaires des :

.../...

$$\left(\frac{\partial V_{k,i}(\Lambda)}{\partial \theta^{-1}(k,i)}\right)_{\Lambda=0} = \overset{[J^{k,i}]}{X}(0) \qquad k=1,2,\ldots,p_i \;;\; i=q,q-1$$

ce qui annulerait le déterminant.

On voit donc que grâce à la définition d'un système fondamental on montre de proche en proche que :

$$(\Delta(\Lambda))_\theta \neq 0 \Rightarrow \theta^{-1}(k,i) = \{j,k,i) \;;\; j=1,2,\ldots,\rho_i\} \quad \begin{matrix} k=1,2,\ldots,p_i \\ i=1,2,\ldots,q \end{matrix}$$

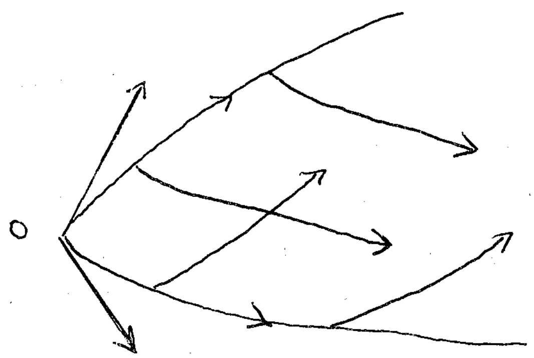
soit encore :

$$(\Delta(\Lambda))_\theta \neq 0 \Rightarrow \theta(j,k,i) = (k,i)$$

ce qui est la définition de θ_0 .

IV.2.5 Remarque :

La démonstration qui vient d'être faite est constructive (au théorème des fonctions inverses près) et elle montre que l'on peut atteindre des points intérieurs de $G^+(I).0$, arbitrairement proches de 0 , par des commandes combinaisons d'au plus $\sum_{i=1}^{q} p_i(\rho_i+1)$ commandes de base $e_i = (1,i)$. Ce nombre est l'ordre de la transformation infinitésimale du P.S.D. $G(I)$ en 0 : On voit qu'il est d'autant "plus facile" d'atteindre certains points que l'ordre du système est peu élevé ; le cas le plus simple est celui du polysystème d'ordre n et de rang n ; la trajectoire $G^+(I).0$ a alors l'allure :



§ 3 - NATURE DE $G^{+}(I).x$ EN SITUATION GENERIQUE.

De la proposition IV.2.2 nous déduisons immédiatement le théorème :

IV.3.1 Théorème : Soit $G(I)$ un P.S.D.d défini sur une variété M de dimension n. Si en tout point x de M le rang de $G(I)$ est égal à n alors, quel que soit x de M, la trajectoire positive :

$$G^{+}(I).x$$

est un ensemble d'intérieur non vide, contenu dans l'adhérence de son intérieur.

Démonstration : On a évidemment l'inclusion

$$\forall y \in G^{+}(I).x \qquad G^{+}(I).y \subset G^{+}(I).x \quad .$$

Comme d'après la proposition IV.1.2, il existe des points intérieurs de $G^{+}(I).y$ arbitrairement proches de y le théorème est démontré.

On a vu, (proposition III.4.2) que la condition :

" $G(I)$ est de rang n en tout point de M "

est une condition "générique". On peut donc affirmer que :

IV.3.2 Théorème : Au sens où cela a été défini (chap III § 3 déf 3), génériquement les trajectoires positives d'un P.S.D.d sont contenues dans l'adhérence de leur intérieur.

Nous avons vu (chap II) que sous des hypothèses assez larges, la trajectoire positive d'un P.S.D. peut être identifiée avec l'ensemble des états accessibles d'un système huidable,; on serait donc tenté d'affirmer que génériquement l'ensemble des états accessibles d'un système guidable est contenu dans l'adhérence de son intérieur ; en fait les résultats qui précèdent ne permettent pas d'être aussi précis ; pour le voir considérons l'exemple suivant :

Soit $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t,u) \qquad x \in \mathbb{R}^{n} \quad u \in U \subset \mathbb{R}^{p}$

.../...

un système guidable, le critère considéré étant le temps. Dans l'espace augmenté on écrira donc les équations (cf. chap II, §)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, x^{n+1}, u)$$

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1$$

et à ces équations on associera l'ensemble des champs de vecteurs $\binom{X}{X^{n+1}}$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ qui en tout point de $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfont

$$X(x, x^{n+1}) \in \{f(x, x^{n+1}, u) \; ; \; u \in U\}$$

$$X^{n+1}(x, x^{n+1}) = 1 \quad .$$

S'il est raisonnable d'envisager des petites perturbations des composantes différentes de X^{n+1} il l'est moins de le faire pour X^{n+1} car elle ne correspond pas à une "composante" du système réel. La composante $X^{n+1}(x, x^{n+1}) = 1$ a été introduite par un artifice de calcul, et une propriété de généricité qui "incluerait" cette composante "artificielle" ne serait pas satisfaisante.

Dans ce cas particulier, il faudrait donc s'appuyer sur le résultat :

"L'ensemble des couples de champs de vecteur (X^1, X^2) sur $\mathbb{R}^n$, tels que le P.S.D. sur $\mathbb{R}^{n+1}$ de transformation infinitésimale $\binom{X^1}{1}\binom{X^2}{1}$ soit de rang n en tout point, contient un ouvert dense pour la C^k-Topologie (k assez grand)".

Un tel résultat peut s'obtenir en faisant des modifications évidentes dans la démonstration de la proposition III.4.2.

Cependant, il y a d'autres cas que celui-ci, ceux, par exemple, où pour réduire l'ordre du système différentiel réglant l'évolution on introduit des variables supplémentaires et partant il serait préférable de reprendre la proposition III.4.2 sous des hypothèses mieux adaptées à l'application aux systèmes guidables. Pour déterminer ces hypothèses, il faudrait faire une revue assez complète de ce que signifie "physiquement" la généricité pour divers types de problèmes de commande (par exemple : mécanique céleste, électricité et électronique, chimie, économie, aéronautique, etc...). Je n'ai pas fait ce travail.

.../...

Le théorème IV.3.2 décrit une propriété générique ; réciproquement il est naturel de se demander si certaine propriété intéressante est générique. Dans le cadre de cette étude la propriété la plus intéressante est la suivante :

"La demi-trajectoire $G^+(I).x$ est fermée".

En effet, on déduit immédiatement de la formule II.4.1 et des remarques qui la précèdent la proposition :

IV.3.3 Proposition : Soit un problème de commande optimale satisfaisant les hypothèses 1, 2, 3, 4 du § 4 du chap II. Soit $G(I)$ le P.S.D. qui lui est associé. Décidons de ne considérer que les problèmes pour lesquels le temps du transfert est limité ; c'est-à-dire tel que toutes les commandes soient définies sur un intervalle contenu dans $[t_0, t_1]$ donné à l'avance. Si $G^+(I).x_0$ est fermé alors il existe une commande optimale assurant le transfert de x_0 à tout point accessible à partir de x_0 en un temps inférieur à t_1.

IV.3.4 Exemple : Cet exemple est dû à Filippov [7]. On considère :

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 + u^2 \qquad |u| = 1$$
$$\frac{dy}{dt} = u$$

On se pose la question du transfert du point $(0,0)$ au point $(1,1)$ en temps minimum. La transformation infinitésimale du P.S.D. associé à ce problème est définie par :

$$X^1(x,y,t) = \begin{pmatrix} -y^2+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^2(x,y,t) = \begin{pmatrix} -y^2+1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que :

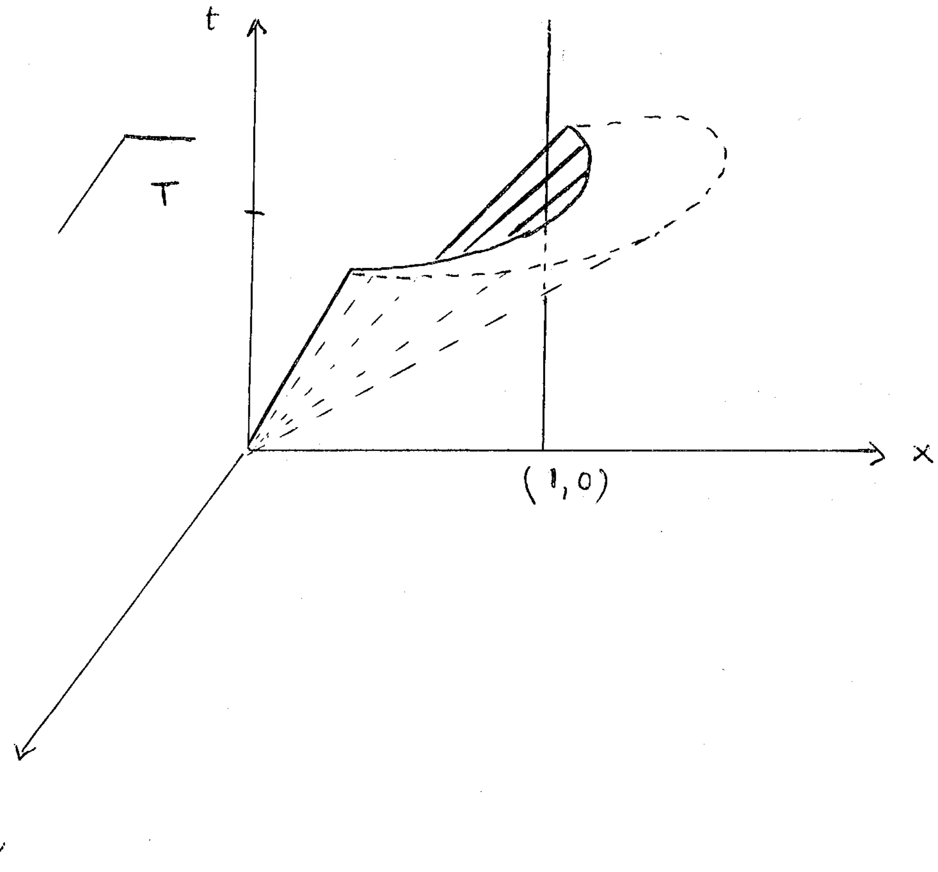
$$[X^1, X^2](x,y,t) = \begin{pmatrix} 4y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.../...

On a donc :

$$\det(X^1, X^2, [X^1, X^2]) = 0$$

le long de la droite $y = 0$. Ce fait est à rapprocher de ce que l'ensemble $G^+(I).(0,0)$ a l'allure de la figure ci-dessous :



On a représenté $G^+(I).(0,0) \cap \{(x,y,t) ; t \leq T\}$, c'est un volume limité supérieurement par une surface, mais "ouvert" vers le bas. Ceci entraîne l'existence d'un temps "maximum" pour atteindre le point $(1,0)$ mais non l'existence d'un temps minimum.

On peut par contre montrer la proposition :

IV.3.5 Proposition : Soient X^1, X^2 deux champs de $\mathbb{R}^3$ tels que le déterminant

$$\det(X^1(0), X^2(0), [X^1, X^2](0))$$

soit différent de 0 alors si $G(1,2)$ est le P.S.D. de transformation infinitésimale X^1, X^2 , pour tout $\mathcal{V}_0$ voisinage fermé de 0 suffisamment petit l'ensemble

$$\mathcal{V}_0 \cap G^+(1,2).0$$

est fermé.

.../...

<u>Démonstration</u> : Cette proposition n'est pas difficile à montrer, elle repose sur le fait que les vecteurs

$$X^1(0)\ ,\ X^2(0)\ [X^1,X^2](0)$$

étant indépendants, les applications :

$$(t_1,t_2) :\mapsto (t_1,1)(t_2,2).0 \qquad t_1 \geq 0 \quad t_2 \geq 0$$

$$(t_1,t_2) :\mapsto (t_1,2)(t_2,1).0 \qquad t_1 \geq 0 \quad t_2 \geq 0$$

définissent deux surfaces situées "l'une au dessus de l'autre" au voisinage de 0 . Elle est rédigée dans [22] .

- En plus de son caractère particulier cette proposition présente l'inconvénient de ne pas définir une propriété générique ; en effet sur l'ensemble des couples de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ la propriété :

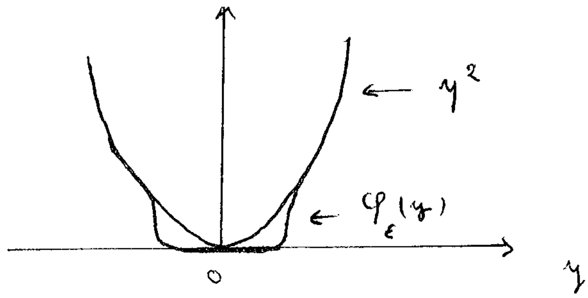
$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \det\left(X^1(x), X^2(x), [X^1,X^2](x)\right) \neq 0$$

n'est pas générique.

- Cependant, si dans l'exemple IV.3.4 on remplace X^1 et X^2 par X^1_ϵ et X^2_ϵ définis par :

$$X^1_\epsilon = \begin{pmatrix} -\varphi_\epsilon(y)+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X^2_\epsilon = \begin{pmatrix} -\varphi_\epsilon(y)+1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $\varphi_\epsilon(t)$ est une fonction ayant l'allure définie par le graphe :



le problème en temps minimum correspondant à X^1_ϵ et X^2_ϵ possède une solution optimale (en fait une infinité !).

En définitive, je ne réponds pas aux questions suivantes :

.../...

1) Le polysystème $G(I)$ étant donné, que peut-on dire des x pour lesquels $G^{+}(I).x$ est fermé ?

2) La propriété : "Pour tout x $G^{+}(I).x$ est fermée est-elle générique" ?

3) Dans l'hypothèse où la réponse à 2 est non, comment caractériser les P.S.D. possédant la propriété ?

IV.3.6 Remarque :

On sait, par divers moyens, "plonger" tout problème de contrôle optimal dans un problème plus "large" admettant toujours une solution : problèmes relaxes, solutions généralisées, régimes glissants, etc...* . Affirmer que $G^{+}(I).x$ est fermé, c'est affirmer plus que l'existence d'une solution, c'est affirmer l'existence d'une solution C^{∞} par morceaux, analytique par morceaux, constante par morceaux, selon le groupe de commande $G(I)$ associé au problème initial. Les réponses aux questions 1, 2, 3 doivent donc être considérées comme des théorèmes de régularité à rapprocher du th. de Halkin prouvant que pour un système linéaire à coefficients analytiques les commandes B.B. sont constantes par morceaux [9] .

§ 4 - UN THEOREME DE CONTROLABILITE SUR LES VARIETES COMPACTES -

On désigne par M une variété riemannienne compacte connexe de dimension n, par X^1 et X^2 deux champs conservatifs sur M, par $G(1,2)$ le P.S.D. dont ils sont la transformation infinitésimale. Les résultats de ce paragraphe m'ont été suggérés par L.W. Markus ; ils sont à rapprocher des résultats publiés dans [25] .[26] .

IV.4.1 Théorème : Si le P.S.D. $G(1,2)$ est de rang n en tout point de M on a, quel que soit x dans M

$$G^{+}(1,2).x = M \quad .$$

.../...

* Ces solutions sont en général des fonctions à valeur dans un espace de mesure, cf (Gamkrelidze, Young, Ghouila Houri, Castaing, Ekeland...).

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de Carathéodory-Poincarré (cf - [31] par exemple).

Soit X un champ de vecteur sur M,

$$(t,x) \to X_t(x)$$

le système dynamique défini par x, on dit qu'un point x de M est <u>stable au sens de Poisson</u> si pour tout réel $T > 0$ et tout voisinage $\mathcal{V}_x$ de x on peut trouver deux réels t_1 et t_2 tels que :

$$t_1 \leq -T \qquad X_{t_1}(x) \in \mathcal{V}_x$$

$$t_2 \geq T \qquad X_{t_2}(x) \in \mathcal{V}_x \quad .$$

IV.4.2 <u>Théorème</u> : <u>Carathéodory-Poincarré.</u> <u>Si X est conservatif, l'ensemble des points stables est partout dense dans M</u>.

<u>Démonstration du théorème IV.4.1</u> : Montrons pour commencer que $G^+(1,2).x_0$ est partout dense, quel que soit x_0. Pour cela, soient x_0 et y deux points de M. Puisque par hypothèse G(1,2) est de rang n en tout point nous savons que (prop III.2.3) $G(1,2).x_0 = M$, donc qu'il existe une commande :

$$s = (t_p, i_p)(t_{p-1}, i_{p-1})\ldots(t_1, i_1)$$

telle que :

$$s.x_0 = y \quad .$$

Nous allons associer à s une commande s_ϵ, <u>positive</u>, telle que

$$s_\epsilon x_0 \in \mathcal{V}_y$$

où $\mathcal{V}_y$ est un voisinage de y donné à l'avance. On construit s_ϵ de proche en proche, en p itérations ; on définit donc successivement $s_\epsilon^1, s_\epsilon^2, \ldots, s_\epsilon^p = s_\epsilon$ de la manière suivante :

i) <u>Définition de</u> s_ϵ^1 : Si t_1 est positif, on pose $s_\epsilon^1 = (t_1, i_1)$ sinon d'après : IV.3.1, il existe des points appartenant à l'intérieur de $G^+(1,2).x_0$ arbitrairement proches de x_0, on peut donc choisir un

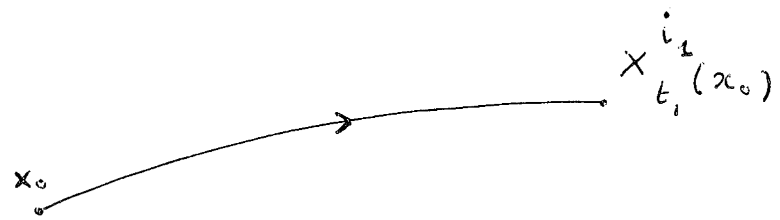
.../...

point z_0 , stable pour le champ, X^{i_1} aussi proche de x_0 qu'on le désire. Soit $\sigma(z_0)$ une commande positive telle que $\sigma(z_0)x_0 = z_0$. Comme z_0 est stable on peut choisir un réel θ_1 tellement grand que d'une part $\theta + t_1$ soit encore positif et que d'autre part le point $X_\theta^{i_1}(z_0)$ soit arbitrairement proche de $X_{t_1}^{i_1}(z_0)$; posons donc lorsque t_1 est négatif :

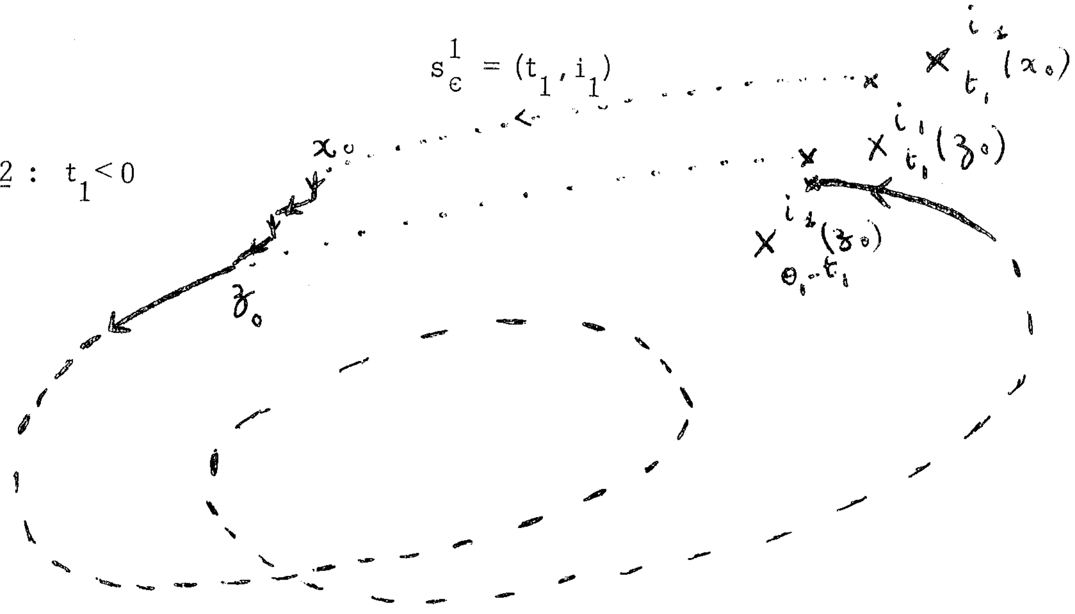
$$s_\epsilon^1 = (\theta_1, i_1) * \sigma(z_0)$$

On voit que dans les deux cas $(t_1 > 0 ; t_1 < 0)$ on a su construire une commande positive s_ϵ^1 telle que $s_\epsilon^1(x_0)$ soit aussi proche qu'on le désire du point : $(t_1, i_1)x_0$. (cf fig 1 et 2).

<u>fig. 1</u> : $t_1 > 0$



<u>Fig. 2</u> : $t_1 < 0$



$$z_0 = \sigma(z_0) . x_0$$

$$s_\epsilon^1 = (\theta_1 - t_1, i_1) * \sigma(z_0)$$

En traits pleins, on a la trajectoire correspondant à $\sigma(z_0)$.

ii) <u>Définition de</u> s_ϵ^k : On suppose s_ϵ^{k-1} définie, on pose $x_{k-1} = s_\epsilon^{k-1}.x_0$.

Si t_k est positif, on pose :

$$s_\epsilon^k = (t_k, i_k) * s_\epsilon^{k-1} \quad ;$$

si t_k est négatif on pose :

$$s_\epsilon^k = (\theta_k - t_k ; i_k) * \sigma(z_{k-1}) * s_\epsilon^{k-1}$$

où z_{k-1} , $\sigma(z_{k-1})$ et θ_k sont définis à partir du point x_{k-1} comme l'étaient au i) z_0 , $\sigma(z_0)$ et θ_1 à partir du point x_0 .

La commande $s_\epsilon = s_\epsilon^p$ que nous construisons ainsi est donc bien une commande positive et nous pouvons toujours la choisir telle que $s_\epsilon x_0$ soit aussi proche que l'on veut du point $s\, x_0$. Ceci prouve bien que $G^+(1,2).x_0$ est partout dense dans M .

Pour conclure, c'est-à-dire pour montrer que $G^+(1,2).x_0 = M$, il suffit de faire les remarques suivantes :

Le théorème IV.3.1 est vrai si on remplace $G^+(I)$ par $G^-(I)$.

Si z appartient à $G^-(1,2).y$ alors y appartient à $G^+(1,2).z$.

Soient x_0 et y deux points quelconques de M ; soit $\bar{y}$ un point intérieur de $G^-(1,2).y$, soit z un point de $G^+(1,2).x_0$ assez proche de $\bar{y}$ pour appartenir à $G^-(1,2).y$; le point y appartient donc à $G^+(1,2).x_0$.

L'exemple suivant montre que si les champs ne sont pas conservatifs, le système $(X^i ; i \in I)$ peut être de rang n sans être complètement contrôlable.

IV.4.3 <u>Exemple</u> : Considérons dans le plan $\mathbb{R}^2$ trois champs X^1 , X^2 , X^3 possédant les propriétés suivantes :

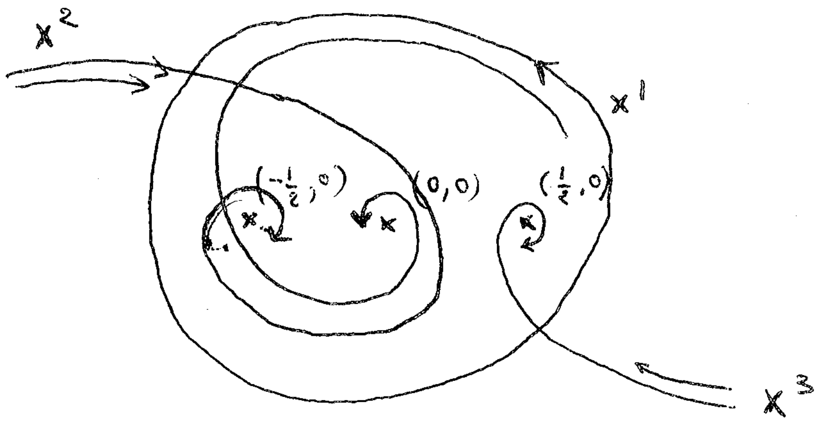
i) Le cercle unité, $\partial\Gamma_1 = \{x, y ; x^2+y^2 = 1\}$ est un cycle limite instable de X^1 , et toute trajectoire issue d'un point du disque unité Γ_1 tend vers $(0,0)$.

ii) Toute trajectoire de X^2 ou de X^3 issue d'un point de Γ_1 reste dans Γ_1 et tend respectivement vers $(-1/2, 0)$ où $(0, 1/2)$.

iii) En tout point, deux des vecteurs $X^1(x,y)$, $X^2(x,y)$, $X^3(x,y)$ sont indépendants.

.../...

Il est très facile de construire un système de trois champs sur la sphère $S^2 = \{x, y, z ; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ dont les images sur le plan des x, y par la projection à partir du point $(0, 0, 1)$, possède les propriétés i) ii) iii) . Il est clair que pour un tel système les points de "l'hémisphère nord" ne peuvent pas être atteints à partir de "l'hémisphère sud".



Les hypothèses du théorème IV.4.1 sont génériques.

Nous savons que l'ensemble des couples de champs de vecteurs d'une variété M de dimension n pour lesquels le P.S.D. associé est de rang n en tout point est un ensemble résiduel de l'ensemble des couples de champs de vecteurs sur M. Pour montrer ce théorème, on a utilisé précisément le théorème de transversalité suivant : (qui est une particularisation du théorème de [27]).

Soit le fibré vectoriel : $TM \times_M TM \to M$. Notons D^k l'espace des sections de classe C^k de $TM \times_M TM \to M$ muni de la C^k-topologie de Whitney ; ainsi que $J^p\, TM \times_M TM \to M$ le fibré des jets d'ordre p de sections de $TM \times_M TM \to M$.
Si (X^1, X^2) désigne un élément de D^k (donc un couple de champs de vecteurs de classe C^k) on note $J_k(X^1, X^2)$ son jet d'ordre k.

IV.4.4 Théorème : Soit S une stratification de $J^P\, TM \times_M TM$ de codimension strictement plus grande que n. Pour $k \geq p$ l'ensemble des éléments (X^1, X^2) de D^k dont le jet d'ordre p ne rencontre pas S est un ouvert dense de D^k.

.../...

Si maintenant M est une variété compacte et ω une forme volume sur M nous désignons par D^k_ω l'ensemble des sections de classe C^k de $TM \times_M TM \to M$ qui conservent ω, c'est-à-dire l'ensemble des couples de champs conservatifs de classe C^k.

IV.4.5 Théorème : Le théorème IV.4.1 reste vrai si on remplace D^k par D^k_ω.

Démonstration : On peut le voir de deux façons. Directement en reprenant la démonstration de IV.4.1 telle qu'elle est faite dans [27] après avoir montré que tout "jet de champ conservatif" est le jet d'un champ conservatif défini sur M toute entière, soit plus simplement en remarquant que la forme ω définit un isomorphisme entre les champs conservatifs et les $n-1$ formes fermées de M ; alors le théorème IV.4.2 n'est autre que le théorème énoncé p 176 de [27].

Grâce à ce théorème, il est possible maintenant de prouver que :

IV.4.6 Théorème : Sur une variété Riemannienne compacte M, l'ensemble des couples de champs de vecteurs conservatifs (X^1, X^2) dont le polysystème dynamique associé est trivial est un ensemble résiduel lorsqu'on munit l'ensemble des couples de champs conservatifs de la C^k-topologie, pourvu que $k \geq n^2+n$.

Démonstration : On procède exactement comme dans la démonstration de III.4.3 ; la seule différence étant que maintenant on travaille dans l'ensemble des jets de couples de champs de vecteurs conservatifs. Pour calculer la codimension de l'ensemble S il n'y a pas de difficultés supplémentaires et on peut reprendre la démonstration de III.1.3. Une fois qu'on a prouvé que la codimension de S est plus grande que n on applique le théorème IV.4.5.

V - CONCLUSION

Dans ce chapitre de conclusion, je vais parler de deux problèmes que je n'ai pas abordé ici : le problème des conditions nécessaires d'optimalité et le problème de la synthèse. Ces deux problèmes posent celui des "champs de vecteurs discontinus" que je vais d'abord discuter.

§ 1 - CHAMPS DE VECTEURS DISCONTINUS.

Sous réserve que l'application :

$$(x,t) \longmapsto f(x,t)$$

soit localement Lipschitzienne en x il n'y a pas de difficulté pour donner un sens au problème de Cauchy :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x,t) \; ; \; x(t_0) = x_0 \; ;$$

même lorsque l'application $t \to f(x,t)$ n'est que mesurable. (cf. Mac Shane [24], par exemple).

Il n'en est plus de même lorsqu'on désire étudier des équations différentielles qui présentent des discontinuités par rapport à x, donc, ce qui revient au même, des champs de vecteurs discontinus. Lorsqu'on désire donner un sens à

$$(2) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = X(x(t))$$

il est indispensable, si on souhaite représenter certains phénomènes concrets, qu'il y ait unicité ; c'est-à-dire :

si $\quad t \mapsto x_1(t)$
$\quad t \mapsto x_2(t)$

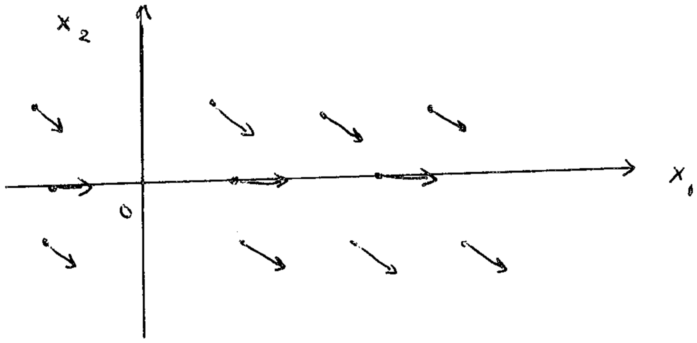
sont deux solutions de (2), si $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ alors :

$$t \geq t_0 \Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \quad .$$

.../...

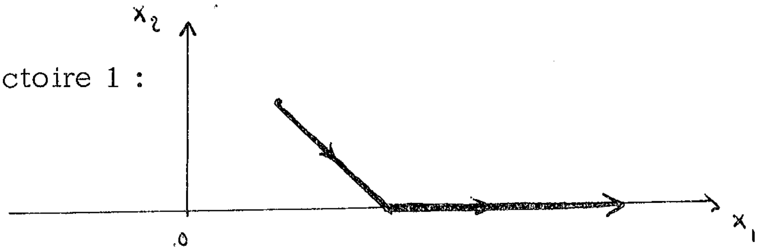
Admettons que l'on définisse une solution de (2) comme un arc absolument continu, donc dérivable p.p., qui réalise l'égalité (2) presque partout. Alors, même pour des discontinuités très simples il n'y a pas unicité.

V.1.1 Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ soit le champ discontinu défini par le dessin

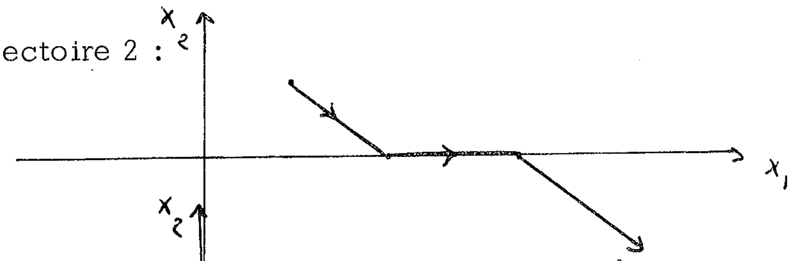


Partant du point (1,1) un tel champ admet, au sens qui vient d'être précisé, diverses trajectoires qui sont par exemple :

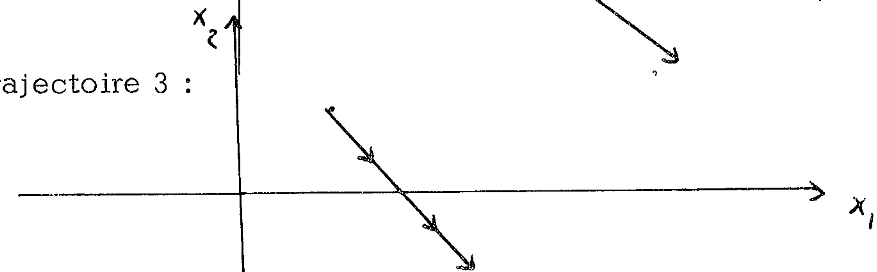
trajectoire 1 :



trajectoire 2 :



trajectoire 3 :



Admettons maintenant, pour éviter cette multiplicité, que l'on décide que les solutions de (2) sont des arcs absolument continus, admettant partout une dérivée à droite tels que :

$$x_d^1(t) = X(x(t))$$

où $x_d^1(t)$ désigne la dérivée à droite en t de $t \mapsto x(t)$. Dans ces conditions, seule la trajectoire 1 de l'exemple V.1.1 est une solution de (2). Avec une telle définition, il est intuitif que seuls des champs présentant suffisamment de régularité dans leurs discontinuités seront tels que le théorème d'existence suivant soit vrai :

.../...

V.1.2 Théorème : Quel que soit x il existe un réel $\epsilon > 0$ et une unique application absolument continue $t \to x(t)$ définie sur $[0, \epsilon[$ telle que :

$$\forall t \in [0, \epsilon[\qquad x_d^1(t) = X(x(t))$$

A ma connaissance, cette question des champs discontinus a été assez peu étudiée ; je connais un article de J. Andre et P. Seibert dans le Vol. V de Contribution to non linear oscillations, plus récemment des articles de Filippov et Hermès, et enfin un article de V.G. Boltyanskii [2].

Pour parler rapidement, un champ discontinu au sens de Boltyanskii sur une variété M est la donnée :

- d'une stratification S de M ;
- sur chaque strate S_i d'un champ X^i tangent à S_i ;
- de certaines conditions de "transversabilité" entre X^i et les strates adhérentes à S_i .

En fait, la définition précise est très longue et "grosso modo" destinée à prévenir les "accidents" possibles qui infirmeraient les résultats de l'article ; (je reparle de ces résultats au § 3).

V.1.3 - A partir de maintenant, j'appellerai un tel champ discontinu un B-champ discontinu.

Je vais proposer deux exemples où la notion de B-champ discontinu est essentielle.

§ 2 - PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRIAGUINE.

Soit le système guidable :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^n \;;\; u \in U \;;$$

considérons le problème du transfert en temps minimum (cf. chap I) d'un point x_0 au point x_1 . J'énonce le principe du maximum pour un tel problème (cf. Pontriaguine et al. [34]).

.../...

V.2.1 Théorème : Une condition nécessaire pour que :

$$t \mapsto \tilde{\mathcal{U}}(t) \qquad t \in [t_0, t_1]$$

soit une solution du problème en temps minimum est que :

i) $$x(t_1, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}) = x_1$$

ii) il existe une solution non triviale :

$$t \mapsto \psi(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}) \qquad t \in [t_0, t_1]$$

de :

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\,{}^t\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}) \ , \ \tilde{\mathcal{U}}(t))\psi(t) \tag{3}$$

telle que, presque partout sur $[t_0, t_1]$ on ait :

$$\langle \psi(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}), f(x(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}), \tilde{\mathcal{U}}(t)) \rangle = \max_{u \in U} \langle \psi(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}), f(x(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}(t)), u) \rangle \tag{4}$$

Introduisons maintenant l'application :

$$H : R^n \times R^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\psi, x, u) \longmapsto H(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle$$

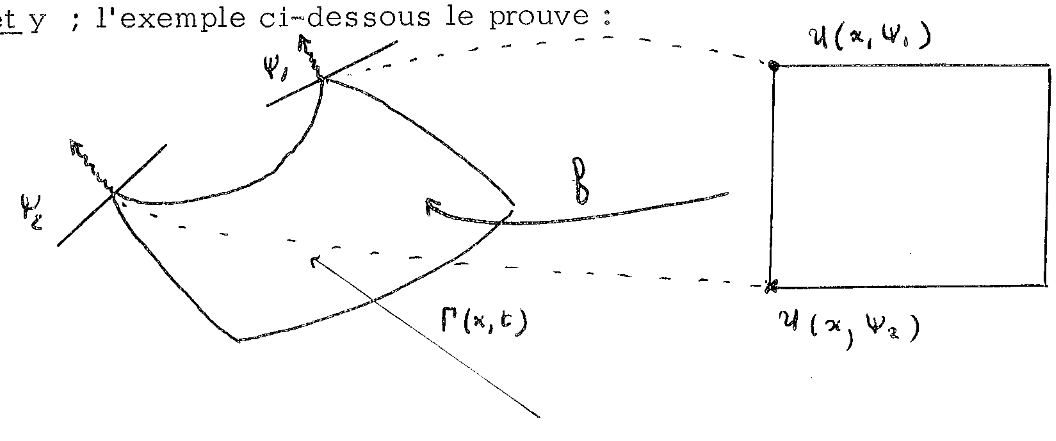
et notons $\mathcal{U}(x, \psi)$ une quelconque solution (solution qui existe toujours lorsque U est compact, ce que je suppose) de l'équation :

$$H(\psi, x, u) = \max_{u \in U} H(\psi, x, u)$$

Comme en général U est un polyèdre, l'ensemble :

$$\Gamma(x) = \{ f(x, u) \ ; \ u \in U \}$$

est un polyèdre "curviligne" et si on peut supposer qu'il est fonction continue de x, il n'est pas réaliste de supposer que $\mathcal{U}(x, \psi)$ est une fonction continue de x et y ; l'exemple ci-dessous le prouve :



..../...

Soit maintenant $\tilde{\mathcal{U}}$ une solution optimale du problème de transfert, soient

$$t \mapsto x(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}})$$
$$t \mapsto \psi(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}})$$

la réponse à cette commande optimale et la solution de l'équation adjointe (3). Le théorème V.2.1 affirme que l'arc à valeur dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto x(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}) = x(t)$$
$$t \mapsto \psi(t, x_0, t_0, \tilde{\mathcal{U}}) = \psi(t)$$

est tel que, presque partout sur $[t_0, t_1]$, on ait :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi(t), x(t), \mathcal{U}(x(t), \psi(t))) \quad ;$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\psi(t), x(t), \mathcal{U}(x(t), \psi(t))) \quad ;$$

comme le montre une vérification immédiate. Pour retrouver les équations classiques du calcul des variations on est tenté d'introduire le champ de Hamilton sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par :

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \psi}(x, \psi, \mathcal{U}(x, \psi)) \\ -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, \psi, \mathcal{U}(x, \psi)) \end{pmatrix}$$

et d'introduire les équations de Hamilton :

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}$$
$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

<u>La difficulté réside en ce que le champ de Hamilton défini par (5) n'est pas continu.</u>

Les équations du p.b différentiel mixte décrites au 2) du Th. I.1.11 sont les équations de Hamilton du problème de commande linéaire du chapitre I. On a montré alors que, <u>génériquement</u>, il y a équivalence entre ce problème et le problème différentiel.

.../...

Je pense que génériquement on peut énoncer :

1) Le champ de Hamilton est un B-champ discontinu.

2) Toute solution du système hamiltonien (6)

$$t \mapsto (x(t), \psi(t))$$

est telle que si on définit la commande

$$t \mapsto \tilde{\mathcal{U}}(t) = \mathcal{U}(x(t), \psi(t))$$

cette dernière a pour réponse :

$$x(t, \tilde{\mathcal{U}}) = x(t)$$

et de ce fait le couple $\tilde{\mathcal{U}}(t)$, $x(t, \tilde{\mathcal{U}}) = x(t)$ satisfait les conditions nécessaires de Pontriaguine.

L'étude des solutions stationnaires du problème de commande prend alors une forme analogue à l'étude des "géodésiques" en géométrie différentielle classique.

§ 3 - LE PROBLEME DE LA SYNTHESE.

Considérons le système guidable défini par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in U \subset \mathbb{R}^p$$

et posons-nous le problème du retour à l'origine en temps minimum. Boltyanskii montre dans [2] que si :

$$x \longmapsto \mathcal{U}(x)$$

est une application de $\mathbb{R}^n$ dans U telle que :

1) le champ :

$$x \longmapsto f(x, \mathcal{U}(x))$$

est un B-champ discontinu ;

.../...

2) quel que soit x_0 la solution de

(7) $$\frac{dx}{dt} = f(x, \mathcal{U}(x)) \quad ; \quad x(0) = x_0$$

passe par l'origine ;

3) quel que soit x_0 la solution (7) d'origine x_0 est la réponse à une commande qui satisfait les conditions nécessaires de Pontriaguine ;

alors :

V.3.1 Théorème : La solution de (7) d'origine x_0 est une solution du problème de retour à l'origine en temps minimum.

La démonstration de ce théorème est assez longue, remarquons simplement qu'une part non négligeable de cette dernière consiste à démontrer à partir du théorème de Sard des théorèmes de transversabilité que l'on peut obtenir directement à partir du théorème de Thom.

Il est clair que la détermination, sinon exacte, du moins numérique, d'une application $x \mapsto \mathcal{U}(x)$ satisfaisant les conditions 1,2,3 est d'un intérêt essentiel. Appelons une telle fonction Synthèse de Boltyanskii ou encore B.-Synthèse.

S. Mirica a montré dans [29] (voir également [28]) comment obtenir une B-Synthèse par une procédure algorithmique qu'il n'est pas exclu de voir fonctionner un jour sur un ordinateur, (encore que le problème ne soit pas simple et sorte du cadre de l'analyse numérique traditionnelle !). Dans ces conditions, il me paraît important d'aborder les deux questions suivantes :

Existence d'une synthèse : Sachant qu'il existe, pour chaque x_0, une commande optimale $t \mapsto \tilde{\mathcal{U}}(t)$ pour le problème du retour à l'origine en temps minimum (ou tout autre problème), existe-t-il une B-Synthèse ?

Stabilité : Un B-champ de vecteur discontinu, tel qu'il est défini par une B-synthèse, est-il stable ? Ceci pose le problème de la stabilité structurelle pour des B-champs discontinus (sous quelle forme ?).

Etant donné la complexité de la situation, il me semble exclu que de telles questions puissent avoir des réponses autres que génériques.

.../...

§ 4 - CONCLUSION.

Les deux exemples que j'ai donné me semblent prouver que des progrès dans l'étude qualitative des systèmes à commande passeront une meilleure compréhension des champs de vecteurs discontinus. De nombreux problèmes sont encore non résolus dans ce domaine tant du point de vue qualitatif que de l'analyse numérique.

[1] BOLTYANSKII V.G. "Mathematical Method of Optimal Control". Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1971).

[2] BOLTYANSKII V.G. "Sufficient Conditions for Optimality and the justification of Dynamic Programming Method". (en Russe) Izv. Akad. Nank SSSR Ser. Mat. 28 (1964), p. 481-514. Traduction anglaise dans : SIAM journal on Control 4 (1966) p. 326-361.

[3] BOLTYANSKII V.G. "The Method of Local cross sections in the theory of optimal processes". (en Russe) Differencial'nye Uravnenija 4 (1968), p. 2166-2183.

[4] BUSHAW D. "Dynamical Polysystems and Optimisation". Contrib, Differential equations 2, p. 351-365 (1963).

[5] CHOW W.L. "Uber Systeme von linearen partiellen differential gleshungen erster ordnung". Math. Ann., 117, (1939), p. 98-105.

[6] DAUER G.P. "Perturbations of Linear Control Systems". SIAM journal on Control Vol. 9 N° 3, Août 1971.

[7] FILIPPOV A.F. "On certain questions in the Theory of Optimal Control". Vestnick. Moscow. Univ. Ser. Mat., Mekh., Abstr., Fiz., Khim., 2-25-32 (1959) ; Traduction anglaise, SIAM journal on Control, 1, p. 76-84, (1962).

[8] FILIPPOV A.F. "Differential equations with multi-valued discontinuous right-hand side". Dokl-Akad. Nauk SSSR.ISI, (1963), p. 65-68.

.../...

[9] HALKIN H. "A generalization of La Salle's Bang-Bang Principle", SIAM journal on Control, 2, N° 2, p. 199-202 (1969).

[10] HERMANN R. "On the Accessibility Problem in Control Theory".
Internat. Symposium Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics.
Academic press. New York (1963).

[11] HERMANN R. "The differential geometry of foliations II".
J. Math. Mech. 11, (1962), p. 303-315.

[12] HERMES H. "Controlability and the Singular Problem".
SIAM journal on Control, 2, N° 2, p. 241-260 (1964).

[13] HERMES H. - LASSALLE J.P. "Functionnal analysis and time optimal control".
Academic press, 1969.

[14] KALMAN R.E. "Contribution to the Theory of Optimal Control".
Bol., Soc., Mat., Mex., 5, p. 102-119, (1960).

[15] LEE E.B. - MARKUS L.W. "Foundations of Optimal Control Theory".
John Wiley and Sons, Inc., New-York. London. Sydney. (1967).

[16] LEVINE H.I. "Singularities of Differentiable Mapping".
Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I. Springer Verlag-Lecture notes in Mathematics - N° 192 - (1971).

[17] LOBRY C. "Application d'un résultat de Chow à la théorie du contrôle optimal".
C.R.A.S. - 270 (1970) - p. 725-727.

.../...

[18] LOBRY C. "Une propriété de l'ensemble des états accessibles d'un système guidable". C.R.A.S. - 272 (1971) - p. 153-156.

[19] LOBRY C. "Contrôlabilité des systèmes non linéaires". SIAM journal on Control. 9 - N° 3, (1971).

[20] LOBRY C. "Une propriété générique des couples de champs de vecteurs". Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97), (1972), Praha.

[21] LOBRY C. "Contrôlabilité de Systèmes linéaires par des Commandes Bang-Bang". R.I.R.O. ; R.3 (1970) - p. 135-140.

[22] LOBRY C. "Etats accessibles d'un système de deux champs de vecteurs". Colloque d'analyse numérique - Super Besse - 1971 (multigraphié).

[23] LOBRY C. "Quelques propriétés "génériques" des Systèmes à Commande". Conference on Ordinary and Partial Differential Equations, Dundee - 1972. A paraître dans Springer Verlag Lecture Notes.

[24] MAC SHANE E.J. "Integration". Princeton University Press, Princeton, N.J., (1944).

[25] MARKUS L.W. "Control Dynamical Systems". Mathematical Systems Theory ; Vol. 3 N° 2.

[26] MARKUS L.W.-SELL G. "Capture and Control in Conservative Dynamical Systems". Arch. Rational Mech. Anal. p. 271-287 - Vol. 31 (1968).

.../...

[27] MARTINET J. "Sur les singularités des Formes Différentielles". Annales de l'Institut Fourier ; Tome XX, N° 1 (1970) p. 95-178.

[28] MIRICA S. "An admissible Synthesis for Control Systems on Differentiable Manifolds". R.I.R.O. - R.1 (1971) p. 73-104.

[29] MIRICA S. "An Algorithm for Optimal Synthesis in Control Problems". R.I.R.O. - R.2 (1972) p. 55-92.

[30] NAGANO T. "Linear Differential Systems with Singularities and an Application to Transitive Lie Algebras". Journal of the Mathematical Society of Japan. Vol. 18 - N° 14, (1966).

[31] NIEMYTSKI V.-STEPANOV V. "Qualitative Theory of Differential Equations". Princeton (1959).

[32] PALLU DE LA BARRIERE "Cours d'Automatique Théorique". Dunod 1966.

[33] PETROV N.N. "Local controlability of autonomous systems". Differencial'nye Uravnenija 4 (1968), p. 1218-1232.

[34] PONTRYAGIN L.S. - V.G. BOLTYANSKII - R.V. GAMKRELIDZE - E.F. MISCHENKO "The Mathematical Theory of Optimal Processes". Intersience Publishers , New-York, (1962).

[35] THOM R. "Les Singularités des Applications Différentiables". Annales de l'Institut Fourier, VI, 1956, p. 43-87.

[36] WEISS L. "Controlability and Observability". Notes de Lecture, Ecole d'été du C.I.M.E. - Juin 1968 - Bologne.

.../...

[37] WHITNEY "Elementary Structure of Real Algebraïc Varietes".
Annals of Mathematics 66 - p. 545-556, (1967).

A_1 PETROV N.N. " Certain Critical Cases in the Theory of Controlability".
(en Russe) Vestnik Leningrad Univ. 24 (1969) N° 19, p. 45-54 - M.R. 8786 Juin 1971.

A_2 PETROV N.N. "Solution of a Certain Problem of Control Theory".
(en Russe) Vestnik Leningrad Univ. 25 (1970) N° 1, p. 39-51 - M.R. 8787 Juin 1971.

A_3 PETROV N.N. "Plane Problem of the Theory of Controlability".
(en Russe) Vestnik Leningrad Univ. 24 (1969) N° 13, p. 69-78.

VU,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

Vu,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu, et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie
de Grenoble