



HAL
open science

Contribution à l'étude de la consolidation des sols

Jean-Louis Auriault

► **To cite this version:**

Jean-Louis Auriault. Contribution à l'étude de la consolidation des sols. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1973. tel-00284097

HAL Id: tel-00284097

<https://theses.hal.science/tel-00284097>

Submitted on 2 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean-Louis AURIAULT

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude de la consolidation des sols

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Sur une théorie de la thermodynamique des processus irréversibles dans les milieux continus

Soutenues le 4 Avril 1973 devant la Commission d'Examen

M. NÉEL
Membre de l'Institut

Président

M. KRAVTCHENKO

Rapporteur

M. CRAYA
M. GASTINEL

Examineurs

THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean-Louis AURIAULT

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude de la consolidation des sols

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Sur une théorie de la thermodynamique des processus irréversibles dans les milieux continus

Soutenues le 4 Avril 1973 devant la Commission d'Examen

M. NÉEL
Membre de l'Institut

Président

M. KRAVTCHENKO

Rapporteur

M. CRAYA
M. GASTINEL

Examineurs

AVANT - PROPOS

Monsieur le Professeur L. NEEL m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury. Je lui présente l'expression de ma respectueuse gratitude.

Je voudrais remercier ici tous mes maîtres et particulièrement Monsieur le Professeur J. KRAVTCHENKO qui m'a accueilli dans son laboratoire. Il a bien voulu assurer la direction de mes recherches et l'accueil chaleureux qu'il m'a toujours réservé a été pour moi un précieux soutien. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Précieux également ont été les conseils de Monsieur le Professeur N. GASTINEL ; je ne saurais trop l'en remercier.

J'adresse aussi tous mes remerciements à Monsieur le Professeur A. CRAYA qui a bien voulu, malgré ses lourdes responsabilités, prendre sur son temps pour être membre du Jury de cette thèse.

Qu'il me soit permis aussi de dire l'appui que m'ont apporté Messieurs P. GUELIN et J. LANIER, notamment pour la partie de ce mémoire qui fait appel à la thermodynamique.

J'ai enfin le plaisir de rendre hommage aux divers collaborateurs qui ont contribué à la présentation matérielle de ce mémoire et tout particulièrement Madame ELBERG qui a su déchiffrer mon manuscrit.

SOMMAIRE

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
Bibliographie	8
<u>CHAPITRE I</u> : Mécanique des déformations incrémentales en consolidation	11
A - Les accroissements de contraintes	12
B - Elasticité incrémentale	13
C - Les équations de l'équilibre indéfini - Les conditions aux frontières en contrainte	14
D - Les approximations en mécanique des sols	17
Bibliographie	18
<u>CHAPITRE II</u> : Loi de comportement du milieu biphasique ; interaction	
squelette-liquide interstitiel	19
Notations du chapitre II	21
A - Thermodynamique de la consolidation	23
B - Couplage de volume des lois de comportement	30
1. Squelette isotrope et élastique	31
a - Description du squelette et du liquide filtrant	31
b - Le couplage	33
2. Squelette non-isotrope et non élastique	35
C - Les approximations en mécanique des sols	38
Bibliographie	39
<u>CHAPITRE III</u> : Le problème aux limites de la consolidation	41
A - Les équations d'évolution de la consolidation	
1. Les équations	44
2. La nature analytique des équations de consolidation	46
B - Conditions aux frontières et conditions initiales	48
C - Relation entre les champs $\bar{\theta}$ et \bar{p} ou $\frac{n}{k_w} \bar{p} + \bar{\theta}$ et \bar{p}	50
D - Détermination des conditions initiales	55
1. Les équations déterminant les discontinuités du champ des pressions	56
2. Etude d'une solution explicite	58
3. Conclusion	59
Bibliographie	60

	Pages
<u>CHAPITRE IV</u> : La résolution numérique des problèmes de consolidation	61
A - La discrétisation	63
B - Détermination des conditions initiales	65
C - L'intégration du système évolutif	68
1. Etude de (9)	69
a - Construction de l'équation aux différences	70
b - Résolution des équations aux différences	71
2. Méthode explicite	74
3. Méthode implicite	75
Bibliographie	81
 <u>CHAPITRE V</u> : Résultats numériques	
A - Problèmes monodimensionnels	83
1. Influence de la variation des vides	87
2. Cas du squelette à comportement non-linéaire et perméabilité variable	90
a - Loi oedométrique	90
b - Résultats obtenus	90
3. Comparaison à l'expérience	91
B - Traitement de problèmes bidimensionnels	
1. Un problème à squelette linéairement élastique aux constantes de LAME invariables	93
2. Etude de stabilité sur un problème à squelette de caracté- ristiques variables	96
3. Squelette dont la loi rhéologique comporte une surface limite.	101
C - Conclusions	108
Bibliographie	109

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude de la consolidation des sols, c'est-à-dire de l'évolution que subit au cours du temps un milieu biphasique (squelette représentant le sol lui-même et liquide interstitiel) soumis à des sollicitations données.

A notre connaissance, les travaux théoriques antérieurs relatifs à notre sujet exploitent surtout le modèle d'un squelette élastique ou visco-élastique linéaire (par exemple BIOT : [1], [2], [3], DERSKI : [4], [5], [6], MANDEL [7], [8], [9], TERZAGHI : [13] et ZARETSKY : [15], [16]). Les équations du problème sont alors assez simples pour se prêter, dans les cas simples, à une étude analytique poussée des solutions et à leurs calculs numériques (YOKOO [14]). Mais les hypothèses de départ semblent trop restrictives. Les forces d'inertie sont négligées ; les déformations sont supposées petites et la loi de comportement du squelette est linéaire ; cette dernière restriction, si commode dans les calculs, semble trop s'écarter de la réalité physique. Enfin les conditions aux limites utilisées sont trop simples pour être réalistes.

C'est pourquoi il nous a paru utile de présenter une méthode adaptée aux corps doués de lois de comportement plus complexes et soumis aux conditions frontières aussi générales que possible.

A ce sujet, quelques remarques préliminaires nous permettrons de mieux situer notre contribution à la théorie de la consolidation et même à la rhéologie générale. Les innombrables travaux consacrés à la rhéologie des solides réels - qui constituent les squelettes des milieux polyphasiques - sont encore loin d'avoir abouti à une formulation définitive des lois de comportement de ces corps. La seule conclusion qu'on peut tirer actuellement de résultats disponibles dans la littérature

est que ces lois sont complexes et font intervenir, en toute rigueur, des facteurs difficiles à prendre analytiquement en compte comme, par exemple, les phénomènes héréditaires. Pour essayer de décrire le comportement de tels corps, les théoriciens font souvent appel à des modèles d'une grande généralité, qui ne semblent pas encore susceptibles d'exploitation numérique en raison de leur complication même. Il n'est d'ailleurs pas certain a priori que quelques-uns de ces schémas rhéologiques puissent un jour se révéler pratiquement utiles. En revanche, des modèles simples - comme celui des matériaux coulombiens - et, dès lors, si commodes à manier tant analytiquement que numériquement, n'ont qu'une portée pratique limitée, en raison de leur caractère seulement approché et du peu d'étendue de leur domaine de validité physique.

Une première voie pour faire avancer théoriquement la question est axiomatique. Exploitant les principes généraux de la thermodynamique et de la mécanique des milieux continus, on peut se proposer de définir un formalisme universel, permettant d'écrire, en quelque sorte analytiquement, les équations d'évolution d'un milieu donné. Les équations de Lagrange en mécanique des systèmes matériels à un nombre fini de degrés de liberté sont un modèle accompli en la matière. Les tentatives d'extension à la mécanique des milieux continus ont donné lieu, récemment, à un grand nombre de travaux. Ceux de M. PERZYNA ([10] , [11] , [12]), par exemple, fondés sur la thermodynamique de processus irréversibles ont abouti à la formulation d'une doctrine cohérente. La méthode de cet auteur permet, en particulier, de mettre les lois de comportement du milieu étudié sous une forme canonique (c'est-à-dire de réduire au minimum le nombre d'arguments dont dépendent les fonctions caractérisant le matériau, qu'il reste ensuite à déterminer expérimentalement) et d'imposer a priori à celles-ci des propriétés analytiques d'homogénéité, d'invariance (pour respecter le critère d'objectivité par exemple), etc... Ces restrictions sont fort utiles : elles guident l'expérimentateur lors de la détermination explicite des lois de comportement. Mais elles laissent encore à l'expérience un vaste domaine à explorer ; car les fonctions - ou les fonctionnelles - traduisant les lois de comportement dépendent, dans les cas les plus usuels, d'un nombre élevé de paramètres et leur détermination précise exigera de longs et minutieux travaux de laboratoire.

Une autre voie, plus pragmatique - et c'est celle que nous avons choisie - consiste à partir de la donnée a priori des lois de comportement, en s'inspirant autant que possible, des données expérimentales disponibles. Mais il importe alors de pousser jusqu'aux nombres la théorie d'une expérience susceptible d'être réalisée au laboratoire et disposer ainsi d'un moyen de contrôle des prévisions de calcul.

C'est pourquoi, nous avons cherché, à définir pour la rhéologie un cadre analytique assez général pour englober un ensemble étendu de matériaux et des classes assez vastes de formes possibles des lois de comportement et assez particulier, en même temps, pour se prêter aux traitements numériques de problèmes aux limites réalistes dont l'énoncé est inspiré soit par une expérience de laboratoire soit par une étude de Génie Civil.

A cet effet, nous avons postulé la validité du principe de la superposition des contraintes pendant chaque petit intervalle δt du temps. Dès lors, l'écriture incrémentale des lois de comportement, introduite par BIOT, s'impose presque naturellement : au point de vue mathématique, cela revient à utiliser l'appareil des formes de PFAFF. Leur emploi systématique dans l'analyse théorique et numérique des lois constitutives nous semble un des points nouveaux de ce travail.

L'inconvénient de ce procédé est évident. Les formes différentielles mises en jeu ne sont pas, en général, intégrables, en sorte qu'il est difficile de saisir d'emblée les traits essentiels de l'évolution d'un matériau d'après sa loi de comportement formulée au moyen de l'écriture incrémentale. En revanche, on verra que cette méthode offre l'avantage d'une grande souplesse dans le maniement des calculs numériques et permet, éventuellement, de prendre en compte les effets dits de seuil, enfin la forme incrémentale s'adapte aisément à la formulation de beaucoup de types usuels de lois de comportement, y compris du type héréditaire.

Le souci d'illustrer chaque cas par des applications numériques concrètes nous a conduit à limiter a priori le nombre de variables et de paramètres mis en jeu au cours de l'évolution du milieu ; en fait, nous nous bornons à prendre en compte seulement les effets dits purement mécaniques : contraintes, densités, déformations, etc ... C'est pourquoi notre travail intéresse surtout le problème de la consolidation des sols auquel se réfère le titre même de notre mémoire. Mais nous avons tout lieu de penser qu'au prix de l'accroissement du temps machine, les méthodes d'analyse numérique que nous avons mises au point s'appliquent à des cas beaucoup plus généraux que ceux abordés dans le cadre de nos études sur la consolidation.

Ceci étant, soient σ le tenseur des contraintes, D celui des déformations, ξ_m , $m = 1 \dots p$ les paramètres dont la variation suffisent, par hypothèse, avec D et le temps t à décrire l'évolution du système matériel considéré. La loi de comportement se note, sous forme incrémentale au moyen de $6 + p$ formes de PFAFF qui

s'écrivent : $d \sigma_{ij} = C_{ij}^{\mu\nu} dD_{\mu\nu} + M_{ij} dt$ et les p dernières : $d \xi_m = \alpha dt$

Les coefficients $C_{ij}^{\mu\nu}$ et M_{ij} , α de ces formes sont dans le cas général des fonctionnelles définies à partir des valeurs actuelles et antérieures de σ_{ij} , $D_{\mu\nu}$, ξ_m , des coordonnées spatiales et du temps, soit à déterminer expérimentalement soit à choisir a priori à partir de considérations plus ou moins théoriques.

Lorsque ces formes ne sont pas complètement intégrables, l'état actuel du matériau dépend du chemin décrit dans l'espace des paramètres à partir de l'instat initial, en sorte que les effets héréditaires sont susceptibles d'être décrits au moyen de notre formulation. Si par exemple, il s'agit de l'hysteresis représentée par les opérateurs de VOLTERRA, usuels en mécanique des sols, la loi de comportement complète s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{\mu\nu} D_{ij} + \int_0^t K_{ij}^{\mu\nu}(t, \tau) D_{\mu\nu} d\tau$$

et donne la relation incrémentale :

$$d \sigma_{ij} = C_{ij}^{\mu\nu} dD_{ij} + K_{ij}^{\mu\nu}(t, t) D_{\mu\nu}(t) dt + \left(\int_0^t \frac{\partial K_{ij}^{\mu\nu}(t, \tau)}{\partial t} D_{\mu\nu} d\tau \right) dt$$

En définitive, nous nous donnons a priori les formes de PFAFF ci-dessus, ce qui revient à supposer connues les lois de comportement du squelette - qui sera souvent la loi élastique linéaire - et de la phase liquide - qui conduira, en gros, à la loi de DARCY. Les types de lois retenues respectent les principes de la thermodynamique et le principe d'action locale ; c'est pourquoi le modèle mathématique auquel on aboutit se ramène toujours, au point de vue analytique et pour chaque pas temporel δt , à des systèmes d'équations aux dérivées partielles du second degré.

En second lieu, pour respecter le principe d'objectivité, il convient, en toute rigueur, d'écrire les équations en axes rhéologiques du squelette ; il est inutile de procéder ainsi pour la phase liquide en raison du fait que le tenseur des contraintes de celle-ci sera supposé sphérique. Toutefois, dans le cas où les déformations sont supposées petites, ainsi que les contraintes initiales, on peut opérer en axes fixes. En raison de l'importance pratique de la question, nous avons discuté la validité de ces deux hypothèses.

Pour simplifier notre analyse, nous avons systématiquement négligé les forces d'inertie ; cette manière de faire semble raisonnable dans les applications pratiques importantes - aux problèmes de consolidation notamment.

Ce n'est que pour donner à notre exposé une forme plus concrète, que nous le présentons exclusivement comme un chapitre de la théorie de la consolidation. Mais, encore une fois, les méthodes utilisées sont susceptibles d'application à des modèles analytiques de matériaux variés.

*

* *

Voici maintenant un plan sommaire de notre travail et une brève analyse des résultats obtenus.

Le premier chapitre est consacré à l'examen de la comptabilité entre les approximations tirées couramment de l'hypothèse des petites déformations avec celle de l'existence de l'état précontraint. Nous montrons que la prise en compte d'un état précontraint d'un corps quelconque soumis ensuite à de petites déformations soulève en général des difficultés analytiques analogues à celles rencontrées en théorie des grandes déformations. Nous indiquons à la fin de cette étude le cas où la compatibilité en cause peut exister. Il ne semble pas que ce dernier point ait été clairement aperçu jusqu'ici dans la théorie de la consolidation des sols.

Nous abordons au chapitre II la rhéologie du milieu biphasique constitué par un squelette et l'eau interstitielle. Les lois constitutives de chaque phase étant supposées connues, le problème revient à étudier les interactions entre les deux phases en présence. Les phénomènes de couplage sont, comme nous le montrons, de deux types. Ceux du premier type, d'origine purement phénoménologique, peuvent être négligés en première approximation ; c'est ce qui résulte de l'analyse générale de PRIGOGINE et MAZUR dont nous faisons ici une application et de quelques résultats expérimentaux connus qui semblent concluants. Il reste le couplage que nous qualifions "de volume" parce qu'il apparaît comme la conséquence de l'équation de continuité. A cet égard, notre théorie permet de retrouver les équations données antérieurement par Biot et DERSKI à titre de cas particulier.

Après ce travail préliminaire et le choix des arbitraires des formes de PFAFF, on peut écrire les équations complètes du problème de consolidation dont il convient ensuite d'étudier la nature analytique. C'est l'objet du chapitre III.

Dans beaucoup de cas, qui semblent réalistes, le système d'équations aux dérivées partielles linéaires que l'on obtient pour décrire l'évolution pendant un petit intervalle de temps est parabolique-elliptique. Cette circonstance n'est pas de nature à faciliter la résolution des problèmes aux limites concrets.

A ce sujet, nous observons que le problème se scinde en deux. La mise en charge instantanée du milieu a pour effet de provoquer une brusque modification de l'état du corps, qui est loin d'être négligeable - quoique souvent négligée jusqu'ici. C'est la détermination de cette discontinuité des données initiales qui fait l'objet de ce que nous appelons "problème des conditions initiales" et dont la formulation précise nous semble être un apport utile à la théorie de la consolidation. En particulier, le cas d'un squelette à grains incompressibles ainsi que le liquide interstitiel - hypothèse souvent admise par l'ingénieur - présente des difficultés spéciales ; nous donnons un algorithme qui permet le calcul numérique.

La deuxième partie du problème concerne l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions pour un petit intervalle de temps. Nous montrons que celles-ci sont acquises pour une vaste classe de conditions aux frontières réalistes et pour des lois de comportement du squelette qui présentent une certaine analogie avec une loi élastique.

Il reste ensuite à résoudre le problème d'évolution dans le temps du milieu, compte tenu des conditions aux limites et des conditions initiales qu'on vient de déterminer. C'est l'objet du chapitre IV. Les méthodes mises en oeuvre ici ne peuvent être, dans les cas généraux, que numériques. Nous croyons avoir apporté à cet égard quelques compléments efficaces aux procédés usuels de l'analyse numérique que nous ne pouvons songer à décrire en détail ici. Nous avons toujours - quand nous l'avons pu - justifié la stabilité et la convergence de nos procédés de calcul ; il y a là quelques résultats qui paraissent originaux, notamment dans l'inversion des matrices - obtenues par discrétisation des équations et des conditions initiales et aux limites - par la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL.

Enfin, dans le chapitre V sont présentées les solutions numériques de plusieurs problèmes de consolidation et ce pour plusieurs types de lois de comportement -

y compris des lois non-linéaires. Nous nous sommes bornés aux cas de corps unis et bidimensionnels. Mais l'extension au cas de l'espace ne ferait pas apparaître de difficultés de principe nouvelles. On notera, en particulier, le calcul d'un essai oedométrique. L'imprécision quant aux lois de comportement des sols réels nous a permis de choisir les constantes de la loi constitutive admise a priori, de manière à retrouver avec une bonne précision les résultats de l'essai étudié. Il est évidemment impossible de tirer de cette expérience isolée des conclusions générales relatives à la rhéologie du sol en question ; mais il est bon de noter qu'on dispose désormais de méthodes de calcul pour tester la réalité physique des lois proposées pour décrire une expérience.

*

* *

En résumé, notre travail n'apporte et ne peut apporter directement aucune information nouvelle quant à la rhéologie des sols. Mais il décrit une méthode générale de résolution numérique des problèmes aux limites posés pour les équations de la rhéologie des matériaux biphasiques - et ce, pour des types variés de lois incrémentales de comportement. A ce titre, nos résultats peuvent contribuer au progrès de la rhéologie fondamentale, en fournissant à l'expérimentateur le calcul d'un essai de laboratoire susceptible de servir de contrôle à la loi rhéologique. Ils permettent en tout cas à l'ingénieur de résoudre nombre de problèmes de consolidation.

REFERENCES

- [1] M.A. BIOT - "General theory of three-dimensional consolidation"
J. Appl. Physics 12 (1941) p.155-164
- [2] M.A. BIOT - "Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid"
J. Appl. Physics 26 (1955) p.182-185
- [3] M.A. BIOT - "Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid"
J. Appl. Physics 27 (1956) p. 459-467
- [4] W. DERSKI - "Some contributions to the theory of flow of fluids through porous deformable media"
ACTA MECHANICA IV/1 1967 p.13-26
- [5] W. DERSKI - "Consolidation displacements produced in elastic porous bodies by fluid sources"
Revue Roumaine de Math pures et appliquées XIV 1969 p.175-187
- [6] W. DERSKI - "Problèmes de la théorie de la consolidation"
Symposium Franco-Polonais "Problèmes de la rhéologie" 14-18 Sept. 71
Jablona - Sous presse
- [7] J. MANDEL - " Etude mathématique de la consolidation des sols"
Actes du colloque int. de Mec. Poitiers 4 - 1950
- [8] J. MANDEL - "Tassement d'une couche d'argile saturée d'eau sous l'effet d'une force concentrée à la surface du sol"
3ème IC SMFE 1 1953
- [9] J. MANDEL - "Consolidation des sols "
Géotechnique - vol. 3 (1953)
- [10] P. PERZYNA - "Thermodynamic Theory of Viscoplasticity"
Advances in applied mechanics - 11 - (1971) p.313-354
- [11] P. PERZYNA - "Thermodynamics of rheological materials with internal changes"
Journal de mécanique Vol.10 n°3 Sept. 71 p.391-408
- [12] P. PERZYNA - "Memory effects and internal changes of a material"
Int. J. Non-linear Mechanics vol.6 (1971) p.707-716
- [13] K. TERZAGHI - "Theoretical soil mechanics"
John Willey and Sons - New York (30 ed. 1962)
- [14] Y. YOKOO, K. YAMAGATA et H. NAGAOKA - "Finite element method applied to BIOT's consolidation theory"
Soils and foundations - vol. 11 - N°1 - Mars 71 - p.29-46

- [15] YU.K. ZARETSKY, L.V. GORELIK, B.M. NULLER - "Certain problems in the non-linear consolidation theory"
Proc's, 7th, Int'l Conf. on soil, Mech & Ground.,
Enge. Mexico 1969, N°2, p.261-269
- [16] N.A.TSYTOVICH et YU.K. ZARETSKY - "The development of the theory of soil consolidation in the U.S.S.R., 1917-1967"
Géotechnique 19, n°3, 357-375 - 1969

CHAPITRE I

MECANIQUE DES DEFORMATIONS INCREMENTALES EN CONSOLIDATION

L'ignorance où nous sommes de l'histoire des sols et la non-linéarité de leurs lois de comportement, incitent à exprimer celles-ci sous forme incrémentale par des lois linéaires à déterminer expérimentalement. Nous serons ainsi amenés à décrire la consolidation par un ensemble de systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires tangents au système non-linéaire global que nous ne savons pas écrire.

Dans la grande majorité des problèmes de consolidation des sols, l'hypothèse des petites transformations (déformations pures et rotation) constitue une bonne approximation. Nous adoptons ici cette hypothèse. Mais les simplifications qu'elle entraîne dans la théorie et dans les calculs pratiques, pour les milieux sans contraintes initiales, peuvent n'être pas réalistes dans le cas des sols initialement contraints. Les complications introduites alors sont du même type que celles rencontrées dans les grandes déformations. Nous nous proposons ici de mettre en évidence l'influence des contraintes initiales sur l'écriture des équations décrivant la consolidation afin de déterminer dans quelles conditions les simplifications sont possibles. La linéarité des formes incrémentales facilite cette étude.

Nous supposons que le tenseur des contraintes du liquide filtrant est sphérique. Cette approximation, communément admise permet de définir les axes rhéologiques du milieu biphasique comme étant ceux du squelette.

Dans un premier temps nous écrivons les accroissements de contraintes dans les axes rhéologiques du milieu. Les équations de l'équilibre et les conditions aux frontières pour les accroissements en découlent. Enfin, nous étudions les

approximations qui négligent les contraintes initiales. Aucune hypothèse n'est faite sur la loi de comportement du squelette si ce n'est qu'il est possible de l'écrire sous forme incrémentale.

A - LES ACCROISSEMENTS DE CONTRAINTES

Un corps monophasique est rapporté, à l'état initial, à des axes ortho-normés $Ox_1x_2x_3$. Les contraintes initiales sont notées S_{ij} . Une petite transformation est alors imposée, définie par un champ de déplacement, de composantes u_i ($i = 1, 2, 3$), auquel il correspond une déformation pure D de composantes :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

et une rotation R de composantes :

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

e_{ij} et ω_{ij} sont petits. $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

La contrainte est alors : $\sigma_{ij} = S_{ij} + \bar{S}_{ij}$ et nous supposons \bar{S}_{ij} petit par rapport à S_{ij} . Dans les axes rhéologiques, déduits en chaque point du milieu des axes $x_1x_2x_3$ par la rotation R , la contrainte a pour composantes $S_{ij} + s_{ij}$ et :

$$S_{ij} + \bar{S}_{ij} = R_{kj} (S_{lk} + s_{lk}) R_{il}^T \quad \text{où } R^T \text{ est la transposée de } R$$

$$\text{d'où} \quad S_{ij} = s_{ij} + S_{kj} \omega_{ik} + S_{ik} \omega_{jk} \quad (1)$$

Ainsi l'accroissement \bar{S}_{ij} est la somme de deux termes : le premier terme s_{ij} est d'origine rhéologique et le second $S_{kj} \omega_{ik} + S_{ik} \omega_{jk}$, purement géométrique, provient de la rotation du milieu. Si la contrainte initiale est nulle : $\bar{S}_{ij} = s_{ij}$. C'est aussi le cas pour une contrainte initiale sphérique $S_{ij} = S \delta_{ij}$, condition qui est vérifiée par le liquide interstitiel. Cela permet d'utiliser comme axes rhéologiques du milieu, squelette + liquide filtrant ceux du squelette.

La loi de comportement incrémentale s'exprime alors, pour le squelette et le liquide filtrant, par une relation linéaire entre les s_{ij} et e_{ij} correspondants.

Les contraintes sont ici rapportées à l'état déformé. Pour certains comportements comme l'élasticité incrémentale (cf. BIOT [1]), il convient d'explicitement le tenseur de BOUSSINESQ t_{ij} des accroissements de contrainte où les forces actuelles sont rapportées aux aires avant déformation. $S + t$ et le tenseur Eulerien $S + s$ sont liés par $S + t = J (S + s) D^{T-1}$ où J est le Jacobien de la petite transformation considérée privée de la rotation. Au deuxième ordre près :

$$J = 1 + e \quad \text{avec} \quad e = e_{ij} \delta_{ij} \quad \text{et} \quad (D^T)^{-1}_{ij} = \delta_{ij} - e_{ij}$$

L'équation devient :

$$t_{ij} = s_{ij} + S_{ij} e - S_{ik} e_{jk} \quad (2)$$

t et s sont ici rapportés aux axes rhéologiques. Remarquons que t n'est en général pas symétrique et que si $S = 0$, $t_{ij} = s_{ij}$.

B - ELASTICITE INCREMENTALE

La loi de comportement la plus utilisée jusqu'ici (en raison de sa simplicité) en mécanique des sols est l'élasticité infinitésimale. Dans le cas de sols précontraints, l'inexistence d'une forme neutre ne nous permet plus de l'utiliser. On peut définir avec BIOT [1] l'élasticité incrémentale par la propriété de réversibilité de la petite transformation, ce qui revient à admettre l'existence d'un potentiel interne pour celle-ci.

Le travail de déformation d'un élément s'écrit, classiquement, au 3ème ordre près :

$$dV = (S_{ij} + t_{ij}) d \epsilon_{ij}$$

où ϵ_{ij} mesure la déformation pure au 3ème ordre près :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} + \frac{\delta u_k}{\delta x_i} \frac{\delta u_k}{\delta x_j} \right)$$

Alors avec la même approximation :

$$dV = S_{ij} d \epsilon_{ij} + t_{ij} d e_{ij}$$

Du fait de la symétrie de e_{ij} , cette expression prend la forme :

$$dV = S_{ij} d e_{ij} + t'_{ij} d e_{ij}$$

avec :

$$t'_{ij} = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji}) = s_{ij} + S_{ij} e - \frac{1}{2} (S_{ik} e_{jk} + S_{jk} e_{ik}) \quad (3)$$

t' est symétrique, L'hypothèse du potentiel interne revient à dire que dV est une différentielle exacte :

$$\frac{\delta t'_{ij}}{\delta e_{kl}} = \frac{\delta t'_{kl}}{\delta e_{ij}} \quad (4)$$

Les relations, linéaires entre t'_{ij} et e_{ij} , peuvent s'écrire :

$$t'_{ij} = C_{ij}^{\mu\nu} e_{\mu\nu} \quad \text{avec :} \quad (5)$$

$$C_{ij}^{\mu\nu} = C_{\mu\nu}^{ij} \quad \text{en vertu de (4) et}$$

$$C_{ij}^{\mu\nu} = C_{ij}^{\nu\mu} = C_{ji}^{\mu\nu} \quad \text{du fait de la symétrie de } t'_{ij} \text{ et } e_{ij}.$$

C - LES EQUATIONS DE L'EQUILIBRE INDEFINI - LES CONDITIONS AUX FRONTIERES EN CONTRAINTE

Un milieu poreux contenant un liquide filtrant est rapporté aux axes $Ox_1x_2x_3$ orthonormés. Il est dans un état contraint et la contrainte totale est S_{ij} .

Les équations de l'équilibre indéfini, où nous négligeons l'accélération, s'écrivent :

$$S_{ij,j} - \rho F_i = 0 \quad (6)$$

où ρ est la densité du milieu et F_i les composantes de la force de volume. Comme au A) une petite transformation de rotation R et de déformation pure D est appliquée. Les contraintes deviennent $S_{ij} + S'_{ij}$ rapportées au milieu déformé. Un volume initial V du squelette limité par la surface S se transforme en V' limité par un point S' .

Un point de coordonnées x_i de S se déplace en un point de coordonnées ξ_i de S' et $\xi_i = x_i + u_i$. La force totale agissant sur S' admet pour composantes :

$$X'_i = \iint_{S'} (S_{ij} + \bar{S}_{ij}) n'_j dS' \quad (7)$$

où n est la normale unitaire de S prise vers l'extérieur de S' .

Transformons l'intégrale sur S' en une intégrale sur S :

$$n'_j dS' = d\xi_{j+1} d\xi_{j-1} = J_{k+1,k-1}^{j+1,j-1} dx_{k-1} dx_{k+1}$$

où nous posons : $\xi_0 = \xi_3$, $\xi_4 = \xi_1$ et où les Jacobiens partiels de la transformation de J s'écrivent en deuxième ordre près :

$$\begin{aligned} J_{kl}^{ij} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} & \frac{\partial \xi_j}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} & \delta_{i1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} & \delta_{j1} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{ik} \delta_{j1} - \delta_{jk} \delta_{i1} + \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \delta_{j1} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \delta_{i1} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Alors :

$$J_{k+1,k-1}^{j+1,j-1} = \delta_{jk} (1 + e) - e_{jk} + \omega_{jk}$$

En tenant compte de :

$$S_{ij} + \bar{S}_{ij} = S_{ij} + s_{ij} + \bar{S}_{kj} \omega_{ik} + S_{ik} \omega_{jk} ,$$

nous écrivons au deuxième ordre près, en utilisant $\omega_{jk} = -\omega_{kj}$

$$\begin{aligned} (S_{ij} + \bar{S}_{ij}) J_{k+1,k-1}^{j+1,j-1} &= S_{ik} + s_{ik} + S_{lk} \omega_{il} + S_{il} \omega_{kl} \\ &\quad + S_{ik} e + S_{ij} (\omega_{jk} - e_{jk}) \\ &= S_{ik} + s_{ik} + S_{lk} \omega_{il} + S_{ik} e - S_{ij} e_{jk} \end{aligned}$$

Transformons (7) en intégrale de volume. Il vient :

$$X'_1 = \iiint_V (S_{ik} + s_{ik} + S_{lk} \omega_{il} + S_{ik} e - S_{ij} e_{jk})_{,k} dV \quad (8)$$

D'autre part, les forces de volume ont pour résultante sur V' le vecteur de composantes :

$$\rho' F'_1 = \iiint_{V'} \rho' F_i dV'$$

où ρ' est la densité du milieu déformé. Nous supposons ici les forces de volume indépendantes de l'espace. Réalisant la même transformation que sur X'_1 , il vient :

$$F'_1 = \iiint_V \rho' F_i J dV$$

où J est le Jacobien de la transformation, $\rho' J$ est la masse après déformation d'un volume unité initial.

Donc $\rho' J = \rho + \delta \rho$ où $\delta \rho$ représente la masse de liquide filtrant entré dans un volume unité initial.

L'équilibre des forces sur V' s'écrit :

$$\iiint_V ((S_{ik} + s_{ik} + S_{lk} \omega_{il} + S_{ik} e - S_{ij} e_{jk})_{,k} - (\rho + \delta \rho) F_i) dV = 0$$

1 = 1, 2, 3

V étant arbitraire, et en tenant compte de (6) :

$$(s_{ik} + S_{lk} \omega_{il} + S_{ik} e - S_{ij} e_{jk})_{,k} - F_i \delta \rho = 0 \quad (9)$$

Ce sont les équations incrémentales de l'équilibre pour un milieu consolidant où nous avons négligé les forces d'inertie.

Avec les contraintes incrémentales de Boussinesq t'_{ij} (9) devient :

$$(t'_{ik} + \omega_{il} S_{lk} - \frac{1}{2} (S_{ij} e_{jk} - S_{kl} e_{il}))_{,k} - F_i \delta \rho = 0 \quad (10)$$

Les conditions aux limites en contrainte :

(7) peut s'écrire :

$$X'_i = \iint_S (S_{ij} + \bar{S}_{ij}) J_{k+1,k-1}^{j+1,j-1} n_k \, dS$$

où n est la normale unitaire extérieure à S . Un élément de surface unité initial, soumis à une force de composantes $T_i = S_{ik} n_k$, est transformé en un élément de surface soumis à la force de composantes T'_i .

D'après les calculs précédents :

$$T'_i = (S_{ik} + s_{ik} + S_{lk} \omega_{ik} + S_{ik} e - S_{ij} e_{jk}) n_k$$

L'accroissement de la force sur S admet pour composantes :

$$\bar{T}_i = (S_{ik} + S_{lk} \omega_{ik} + S_{ik} e - S_{ij} e_{jk}) n_k \quad (11)$$

(11) permet d'exprimer les accroissements de contrainte imposées à une frontière.

D - LES APPROXIMATIONS EN MECANIQUE DES SOLS

Les équations (1), (2), (9), (10) et (11) sont exactes au deuxième ordre près, avec S_{ij} fini et $s_{ij}, e_{ij}, \omega_{ij}$ petits. Cette précision est justifiée pour des termes en S ou Se du même ordre de grandeur que s . Dans la plupart des problèmes de fondation, le sol est effectivement précontraint avant consolidation mais les contraintes initiales sont plus fortes en profondeur qu'à la surface du sol. Pour les déformations pures et rotations, c'est l'inverse qui se produit, quand les charges sont appliquées à la surface. Dans ces problèmes les termes en S et Se sont négligeables devant les accroissements de contrainte en axes rhéologiques. Il en est de même du terme en $\delta \rho F_i$. Les équations de l'équilibre (9) prennent alors la forme classique (12) $s_{ik,k} = 0$

Dans le cas des charges enterrées ou dans les problèmes de tectonique, ces approximations ne sont plus valables. La prise en compte des termes en Se et $\delta \rho F_i$ entraîne alors de grosses difficultés dans la résolution pratique des problèmes aux limites. Toutefois la plus grande précision obtenue est souvent illusoire, particulièrement dans les problèmes de charges enterrées, par le fait que les lois de comportement des sols sont entachées d'erreurs dues principalement à leur hétérogénéité.

REFERENCES

- [1] M.A. BIOT - "Mechanics of Incremental Deformations"
p.56 - John Wiley & Sons - 1965

CHAPITRE II

LOI DE COMPORTEMENT DU MILIEU BIPHASIQUE ; INTERACTION SQUELETTE - LIQUIDE INTERSTITIEL

Le problème fondamental de l'étude rhéologique d'un milieu poreux à travers lequel circule un fluide filtrant est de déterminer la loi de comportement du milieu biphasique connaissant les lois de comportement de chaque phase et celle de leur interaction. Par comportement du squelette nous entendons comportement du squelette rempli de liquide interstitiel à pression nulle. Nous n'étudions pas l'influence du liquide adsorbé par les grains du squelette sur le comportement de celui-ci et nous éliminons l'éventualité de réactions chimiques à l'intérieur des phases et entre celles-ci.

La loi de comportement du milieu biphasique fait apparaître des couplages entre les lois de comportement de chaque phase. Ceux-ci peuvent être de deux types: couplages phénoménologiques entre les termes irréversibles des lois de comportement et couplage de volume, résultant du bilan massique. Nous n'étudions pas dans ce chapitre les couplages qui proviennent d'autres bilans ou de conditions aux limites. Ils apparaissent au niveau des équations décrivant l'évolution du milieu et sont indépendants de la loi de comportement du système biphasique.

La thermodynamique des processus irréversibles permet de préciser la nature des interactions et des couplages phénoménologiques entre les phases du milieu.

Prenant pour point de départ la théorie des mélanges polyphasiques de P. MAZUR et I. PRIGOGINE [1], que nous supposons connue du lecteur, nous commençons par écrire les équations fondamentales et classiques de la thermodynamique des pro-

cessus irréversibles.

Remarquons que cette théorie est basée sur la formule de GIBBS supposée valable en dehors de l'équilibre thermodynamique. Ce postulat peut être considéré - comme l'a montré B.D. COLEMAN [8] - comme un cas particulier - dans le cas ici retenu de processus lents et de successions d'états proches de l'équilibre - d'une théorie plus générale de la thermodynamique des processus irréversibles. Dans cette optique, il suffit d'admettre seulement l'existence de l'entropie et de la température hors de l'équilibre ainsi que l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM ; ces hypothèses sont d'ailleurs admises dans la théorie classique utilisée ici. Celle-ci apparaît aussi comme un cas particulier d'une autre approche plus générale des processus thermodynamiques ne postulant cette fois-ci que l'existence de la température hors de l'équilibre ; la relation de CLAUSIUS-DUHEM est remplacée alors par une inégalité ne faisant pas intervenir la notion d'entropie hors-équilibre (cf. S. MEIXNER [9]).

Puis nous faisons un usage systématique de quelques remarques de P. GUELIN [2] ; celles-ci permettent, au prix d'hypothèses physiquement plausibles, de comparer l'effet des couplages phénoménologiques - dont la contribution apparaît comme faible - aux phénomènes mécaniques essentiels dont le milieu biphasique est le siège. On retrouve alors théoriquement la loi généralisée de DARCY que tous les chercheurs s'accordent à reconnaître comme assez bien vérifiée par l'expérience pour être prise comme point de départ de tous les travaux consacrés à la théorie de la consolidation. Pour cette raison, nous avons cru raisonnable de négliger les effets de couplage phénoménologiques.

Les seuls effets de couplage à retenir pour formuler la loi de comportement ne résulte dès lors, que du bilan volumique. C'est cet effet que nous étudions dans la deuxième partie de ce chapitre. Le couplage est en général dissymétrique. Comme cas particulier, nous retrouvons les équations écrites par M. BIOT ([3] et [4]), utilisées aussi par W. DERSKI ([6] et [7]).

NOTATIONS DU CHAPITRE II

Les indices latins i, j, l, m , désignent des variances tensorielles, et l'indice grec α , désigne les fluides au sens de MAZUR et PRIGOGINE ($\alpha = 1$ représente le squelette, $\alpha = 2$ le liquide filtrant).

Alphabet latin

c	: Concentration massique
D	: Tenseur des déformations pures
e	: Energie totale par unité de masse du milieu biphasique
e_{α}	: Energie totale par unité de masse du fluide α
F	: Force extérieure par unité de masse
K_1	: Module de déformation volumique intergranulaire
K_g	: Coefficient de déformation volumique des grains
K_w	: Coefficient de déformation volumique du liquide interstitiel
n	: Porosité
P	: Pression totale
p	: Pression interstitielle
p_{α}	: Pression partielle du fluide α
s	: Entropie par unité de masse
s_{α}	: Entropie par unité de masse du fluide α
t	: Temps
T_{α}	: Température du fluide α
U	: Energie interne par unité de masse
U_{α}	: Energie interne par unité de masse du fluide α
\bar{u}	: Source d'énergie par unité de masse
v	: Vitesse barycentrique globale
v_{α}	: Vitesse barycentrique relative au fluide α
W	: Flux calorifique
W_{α}	: Flux calorifique relatif au fluide α

Alphabet grec

- β : Potentiel de GIBBS
 γ : Vecteur accélération
 δ_{ij} : Symbole de KRONECKER
 θ : Variation de volume
 η : Source de quantité de mouvement
 $\lambda \mu$: Coefficients de LAME
 ψ : Potentiel de F
 ρ : Masse présente dans l'élément de volume unité
 τ : Contrainte intergranulaire
 $\Delta \alpha$: Vecteurs de diffusion

A - THERMODYNAMIQUE DE LA CONSOLIDATION

La théorie classique de la thermodynamique des processus irréversibles est basée sur le postulat ci-après : la formule de GIBBS, établie pour un état d'équilibre, est toujours vraie au voisinage de celui-ci. Autrement dit, la variation d'entropie à l'équilibre et dans son voisinage dépend toujours des mêmes variables indépendantes. Nous admettrons dans tout ce qui suit la validité de ce postulat au cours des transformations thermodynamiques que nous aurons à étudier.

En l'absence de source de liquide filtrant dans la masse, le système biphasique évolue vers son équilibre thermodynamique ; le postulat adopté est alors justifié, si les perturbations initiales n'écartent pas trop le milieu de l'état d'équilibre. Si des sources existent dans le milieu, le système évolue d'un état stationnaire de non équilibre à un autre et nous admettons que ces états sont, eux aussi, suffisamment voisins de l'état d'équilibre pour que la théorie ci-dessus s'applique.

Nous supposons de plus - ce qui sera vérifié a posteriori - que le transfert de quantité de mouvement entre la phase solide et la phase liquide est faible en comparaison du transfert qui se produit pour chaque phase. Le système est alors composé de deux fluides au sens de P. MAZUR et I. PRIGOGINE [1] : le fluide liquide filtrant au sein du fluide squelette.

Il en résulte que l'équation de GIBBS s'applique au mouvement barycentrique de chaque fluide qui possède une température T_{α} et un vecteur vitesse propre V_{α} , les fluides $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ étant respectivement le squelette et le fluide filtrant.

Le mouvement de chaque fluide peut être considéré comme un phénomène irréversible. Nous supposons que les sources éventuelles sont distribuées uniquement le long des frontières du domaine envisagé occupé par le milieu biphasique, si bien qu'elles n'interviennent pas dans les équations d'évolution de la masse étudiée.

Les différents bilans s'établissent alors comme suit :

Le bilan de masse

Pour chaque fluide, il vient :

$$\frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} = - \operatorname{div} (\rho_{\alpha} v_{\alpha}) \quad (1)$$

où ρ_{α} est la masse du fluide α par unité de volume total ;

et pour l'ensemble des deux fluides :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} (\rho v) \quad (2)$$

avec $\rho v = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2$

Les équations du mouvement

La conservation des quantités de mouvement pour le mouvement barycentrique de chaque fluide, s'écrit vectoriellement :

$$\rho_{\alpha} \gamma_{\alpha} = \rho_{\alpha} F_{\alpha} - \operatorname{div} P_{\alpha} - \eta_{\alpha} \quad (3)$$

où $\gamma_{\alpha} = \frac{dv_{\alpha}}{dt}$ admet pour composantes :

$$\frac{dv_{\alpha i}}{dt} = \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial t} + (\operatorname{grad} v_{\alpha i}) v_{\alpha i} \quad i = 1, 2, 3$$

F_{α} est la force de volume

η_{α} est la source de quantité de mouvement due aux échanges avec l'autre fluide

$\operatorname{grad} v_{\alpha}$ est le tenseur des vitesses de déformation pure

P_{α} est le tenseur des contraintes partielles du fluide α

Rappelons que le tenseur P_{ij} des contraintes totales se décompose suivant :

$$P_{ij} = \sum_{\alpha} (P_{ij\alpha} + \rho_{\alpha} \Delta_{\alpha}^i \Delta_{\alpha}^j) \quad (4)$$

où $\Delta_{\alpha} = v_{\alpha} - v$ est le vecteur de diffusion.

Pour l'ensemble, le bilan s'écrit :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F - \text{div } P \quad (5)$$

Moyennant (1), (3), (4) et (5), il vient :

$$\sum_{\alpha} \eta_{\alpha} = 0 \quad (6)$$

Les bilans énergétiques

Multipliant (3) par v_{α} et utilisant l'équation de bilan de masse, on a le bilan d'énergie cinétique sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{2} (\rho_{\alpha} v_{\alpha}^2) v_{\alpha} \right) = \\ - v_{\alpha} \text{div } P_{\alpha} + \rho_{\alpha} F_{\alpha} v_{\alpha} - \eta_{\alpha} v_{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

Si nous supposons que les forces de volumes sont constantes dans le temps et dérivent d'un potentiel ψ indépendant du temps :

$$F_{\alpha} = - \text{grad } \psi_{\alpha} \quad \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial t} = 0$$

Posant $\rho \psi = \rho_1 \psi_1 + \rho_2 \psi_2$, et supposant les forces de volume réduites au champ gravitationnel uniforme, il vient pour le bilan d'énergie potentielle :

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} = - \text{div} (\rho \psi v) - \sum_{\alpha} F_{\alpha} \rho_{\alpha} v_{\alpha} \quad (8)$$

Le bilan de l'énergie totale e résulte de l'application du premier principe; il s'écrit sous la forme d'un flux :

$$\frac{\partial \rho e_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2) = - \text{div} \left(\sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha} + W_{\alpha} + P_{\alpha} v_{\alpha}) \right) \quad (9)$$

Le deuxième membre se compose d'un flux de convection $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha}$, d'un flux calorique $\sum W_{\alpha}$ et du flux lié au travail mécanique.

De (7), (8) et (9) on déduit le bilan d'énergie interne u définie par $e = \frac{1}{2} v^2 + \psi + u$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha} u_{\alpha} = - \text{div} (\rho_{\alpha} u_{\alpha} v_{\alpha} + W_{\alpha}) - P_{\alpha} \text{grad } v_{\alpha} + \eta_{\alpha} v_{\alpha} + \rho_{\alpha} \frac{d\bar{u}_{\alpha}}{dt}$$

où $\rho_{\alpha} \frac{d\bar{u}_{\alpha}}{dt}$ est l'apport d'énergie interne au fluide α par l'autre fluide.

Le bilan entropique

En raison de la forte inhibition des transferts de quantité de mouvement, nous écrivons l'équation de GIBBS pour chaque fluide

$$\frac{ds_{\alpha}}{dt} = \frac{1}{T_{\alpha}} \frac{de_{\alpha}}{dt} - p_{\alpha}^{eq} \frac{1}{T_{\alpha}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \right) - \frac{1}{T_{\alpha}} \beta_{\alpha} \frac{dc_{\alpha}}{dt} \quad (11)$$

s_{α} est l'entropie, β_{α} le potentiel thermodynamique du constituant α et $c_{\alpha} = \frac{\rho_{\alpha}}{\rho}$ sa concentration massique.

La définition du tenseur des contraintes à l'équilibre, noté P_{α}^{eq} dans (11) soulève des difficultés. À l'état actuel, le milieu n'est pas en équilibre ; mais on suppose qu'il existe un état d'équilibre correspondant aux sollicitations qui lui sont appliquées à l'instant considéré. On désigne alors par P_{α}^{eq} le tenseur des contraintes partielles dans cet état dont la définition univoque à partir des caractéristiques actuelles reste à trouver.

Rappelons que la théorie classique de la thermodynamique des processus irréversibles suppose que (11) est encore vrai au voisinage de l'équilibre, c'est-à-dire que s_{α} demeure une fonction des variables indépendantes e_{α} , $\frac{\rho_{\alpha}}{\rho}$ et c_{α} , qui peuvent donc prendre leurs valeurs hors de l'équilibre.

Dans le cas de l'élasticité, on a $P_{\alpha}^{eq} = P_{\alpha}$

En utilisant le bilan énergétique, (11) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\alpha} s_{\alpha}}{\partial t} = & - \operatorname{div} \left(\rho_{\alpha} s_{\alpha} v_{\alpha} + \frac{w_{\alpha}}{T_{\alpha}} - \rho_{\alpha} \frac{\beta_{\alpha}}{T_{\alpha}} \right) - \frac{w_{\alpha}}{T_{\alpha}^2} \operatorname{grad} T_{\alpha} + \frac{1}{T_{\alpha}} \rho_{\alpha} \frac{d\bar{u}_{\alpha}}{dt} \\ & + \frac{1}{T_{\alpha}} (P_{\alpha}^{eq} - P_{\alpha}) \operatorname{grad} v_{\alpha} + \rho_{\alpha} \Delta_{\alpha} \operatorname{grad} \frac{\beta_{\alpha}}{T_{\alpha}} + \frac{1}{T_{\alpha}} \eta_{\alpha} v_{\alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

d'où le bilan entropique global :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} s_{\alpha} = - \operatorname{div} \phi + \sigma$$

avec $\phi = \sum_{\alpha} \left(\rho_{\alpha} s_{\alpha} v_{\alpha} + \frac{w_{\alpha}}{T_{\alpha}} - \rho_{\alpha} \frac{\beta_{\alpha}}{T_{\alpha}} \right)$

et la source entropique σ

$$\begin{aligned} \sigma = & - \sum_{\alpha} \frac{W_{\alpha}}{T_{\alpha}} \text{grad } T_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \rho_{\alpha} \frac{d\bar{u}_{\alpha}}{dt} + \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} (P_{\alpha}^{\text{eq}} - P_{\alpha}) \text{grad } v_{\alpha} \\ & + \sum_{\alpha} \frac{\eta_{\alpha}}{T_{\alpha}} v_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \rho_{\alpha} \Delta_{\alpha} \text{grad } \frac{\beta_{\alpha}}{T_{\alpha}} \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Nous disposons ainsi du système ci-après de relations : deux équations aux dérivées partielles de bilan massique, deux équations vectorielles de bilan de quantité de mouvement, deux équations de bilan énergétique et deux équations de bilan entropique.

Jointes aux équations d'état qui peuvent être formulées sous la forme :

$$P_{\alpha}^{\text{eq}} = P_{\alpha}^{\text{eq}} \left(\frac{1}{P_{\alpha}}, C_{\alpha}, s_{\alpha} \right)$$

$$\mu_{\alpha} = \mu_{\alpha} \left(\frac{1}{P_{\alpha}}, C_{\alpha}, s_{\alpha} \right)$$

$$T_{\alpha} = T_{\alpha} \left(\frac{1}{P_{\alpha}}, C_{\alpha}, s_{\alpha} \right)$$

nous possédons 23 équations scalaires pour les 40 inconnues scalaires représentées par $\rho_1, \rho_2, P_1, P_2, P_1^{\text{eq}}, P_2^{\text{eq}}, T_1, T_2, v_1, v_2, \beta_1, \beta_2, u_1, u_2, s_1, s_2, \bar{u}_1, W_1, W_2, \eta_1$ où ρ_1, ρ_2, P_2 (tenseur isotrope) $T_1, T_2, \beta_1, \beta_2, u_1, u_2, s_1, s_2, \bar{u}_1$, sont des grandeurs scalaires ; P_1 est un tenseur symétrique d'ordre deux (six composantes scalaires) ; v_1, v_2, W_1 et W_2 sont des vecteurs.

Le système est alors fermé par les 17 relations phénoménologiques scalaires exprimant les flux $P_{\alpha}^{\text{eq}} - P_{\alpha}, \eta_1, W_{\alpha}$ et $\rho_1 \frac{d\bar{u}}{dt}$ en fonction de $v_{\alpha}, T_{\alpha}, \beta_{\alpha}$ et obtenues par la théorie des couplages thermodynamiques.

Relations phénoménologiques

Les relations ci-dessus sont, répétons-le, plus ou moins classiques. Nous allons les utiliser pour discuter de l'importance des éventuels effets de couplage phénoménologiques que des hypothèses physiquement plausibles nous permettrons de négliger.

La source entropique se présente sous la forme d'une somme de produits entre flux et forces généralisées de caractères tensoriels différents. Si nous

supposons les deux fluides isotropes et admettons le principe de Curie impose qu'il ne peut y avoir de couplage qu'entre processus de même caractère tensoriel.

La source σ peut alors être divisée en plusieurs sources non négatives groupant les grandeurs présentant le même caractère tensoriel. Dans le cas contraire tous les processus sont susceptibles de couplage. Toutefois le frottement mutuel entre les deux constituants a pour effet d'entraîner le fluide le plus lent par le fluide le plus rapide :

$$\eta_1 (v_1 - v_2) \geq 0$$

si bien que, avec : $\sum_{\alpha} \eta_{\alpha} = 0$ et $T_{\alpha} > 0$, il vient :

$$\sum_{\alpha} \frac{\eta_{\alpha}}{T_{\alpha}} v_{\alpha} \geq 0 \quad (14)$$

et ceci quelques soient les autres processus thermodynamiques dont le milieu peut être le siège. Le terme de filtration $\sum_{\alpha} \frac{\eta_{\alpha}}{T_{\alpha}} v_{\alpha}$ ne peut pas être couplé avec les autres processus. Pour une raison identique, il en est de même du terme :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \rho_{\alpha} \frac{d\bar{u}_{\alpha}}{dt}$$

D'après (14), il existe une relation fonctionnelle entre les η_{α} et les $\frac{v_{\alpha}}{T_{\alpha}}$:

$$\eta_1 = Z \left(\frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right) \quad (15)$$

où nous avons utilisé $\sum_{\alpha} \eta_{\alpha} = 0$

Les quantités η_1 et $\left(\frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right)$ s'annulent simultanément à l'équilibre. D'autre part, Z est une fonctionnelle impaire de son argument et (15) peut s'écrire en admettant que $\frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2}$ soit zéro simple :

$$\eta_1 = \left(\frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right) f \left(\left| \frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right| \right)$$

où f ne dépend que du module de $\left(\frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right)$. Supposons que f soit développable en série de Taylor, on a alors :

$$\eta_1 = \left(\frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right) \left(f_0 + f_1 \left| \frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right|^2 + \dots \right) \quad (16)$$

où f_0 , f_1 etc ... sont des tenseurs du deuxième ordre constant. Dans le cas linéaire, et en utilisant le bilan des quantités de mouvement (3) appliqué au fluide filtrant, (16) devient :

$$+ \rho_2 (\gamma_2 - F_2) + \text{Div } P_2 = f_0 \left(\frac{v_1}{T_1} - \frac{v_2}{T_2} \right) \quad (17)$$

Nous retrouvons ainsi la loi du type de Darcy qui résulte donc d'une relation phénoménologique et des équations de mouvement. D'après (14), la matrice des coordonnées de f_0 est définie positive. Dans la pratique la partie déviatoire de P_2 est négligeable, d'où : $P_{2ij} \sim P_2 \delta_{ij}$. En négligeant l'accélération et les différences de température (17) s'écrit :

$$\frac{\rho_2}{K} (v_2 - v_1) = \rho_2 F_2 - \text{grad } P_2 \quad (18)$$

où K est le tenseur de perméabilité . Il résulte alors des relations de ONSAGER qu'en l'absence de champ magnétique, le tenseur K est symétrique : $K_{ij} = K_{ji}$.

Ainsi l'hypothèse faite au départ d'une forte inhibition des transferts de quantité de mouvement se trouve justifiée par le fait qu'elle conduit à la loi de filtration de DARCY, bien vérifiée expérimentalement. Ce n'est pas une démonstration rigoureuse, mais une présomption ; notre hypothèse aboutit à des faits généralement admis. Le fait de considérer le système comme un seul fluide au sens de MAZUR et PRIGOGINE aurait abouti à des lois phénoménologiques totalement différentes et la distinction entre vitesse du squelette et vitesse du fluide filtrant n'aurait pas été possible.

Supposons maintenant la température uniforme et négligeons la diffusion qui est courant en théorie de la consolidation. La source entropique (13), avec (14) vérifie l'inégalité.

$$\sum_{\alpha} (P_{\alpha}^{\text{eq}} - P_{\alpha}) \text{grad } v_{\alpha} \geq 0 \quad (19)$$

qui conduit à la loi rhéologique partielle "hors équilibre" du système, sous forme de relations fonctionnelles :

$$\begin{aligned} P_1^{\text{eq}} - P_1 &= Z_1 (\text{grad } v_1, \text{grad } v_2) \\ P_2^{\text{eq}} - P_2 &= Z_2 (\text{grad } v_2, \text{grad } v_1) \end{aligned} \quad (20)$$

Du fait de la forte inhibition des transferts de quantité de mouvement, Z_1 et Z_2 sont au deuxième ordre près indépendants respectivement de grad v_2 et grad v_1 . Il n'y a donc pas de couplage sur les parties irréversibles des lois rhéologiques des deux fluides.

Conclusion : Ainsi, le deuxième principe de la thermodynamique (13), et l'hypothèse de validité des relations de GIBBS en dehors de l'équilibre (11) permettent de retrouver des lois de filtration connues (16). Celles-ci impliquent la décomposition du système en deux fluides au sens de MAZUR et PRIGOGINE - le squelette et le liquide filtrant - décomposition incompatible avec de forts transferts de quantité de mouvement entre les deux phases. On vient d'établir que les propriétés précédentes entraînent ce corollaire : les effets de couplage phénoménologique entre les lois de comportement de chaque phase sont pratiquement négligeables.

B - COUPLAGE DE VOLUME DES LOIS DE COMPORTEMENT

Nous attachant plus particulièrement ici à la consolidation des sols, nous introduisons quelques hypothèses complémentaires qui entraînent une conséquence fondamentale pour notre objet : le squelette est décrit par deux lois indépendantes. Il en résulte qu'en combinant celles-ci avec la loi de comportement du liquide, et la loi de filtration, on obtient un système fermé de quatre équations qui font intervenir trois tenseurs de déformation.

Utilisons donc le bilan de volume qui lie les parties isotropes des tenseurs de déformations ; les trois premières sont réduites à deux relations entre des paramètres indépendants et observables qui décrivent l'évolution du milieu biphasique et mettent en évidence l'effet de couplage.

Nous supposons que l'évolution du système est assez lente pour négliger la diffusion ($\Delta_{\alpha} v_{\alpha} - v \sim 0$) si bien que (4) s'écrit :

$$P_{ij} = P_{1ij} + P_2 \delta_{ij} \quad (21)$$

où la contrainte partielle P_2 du liquide est toujours supposée isotrope. P_{ij} désigne ici la contrainte totale alors que P_1 et P_2 sont les contraintes partielles de chaque phase.

Nous admettons que le liquide filtrant d'une part, les grains constituant le squelette d'autre part, forment séparément un milieu isotrope. Le fluide interstitiel est constitué, en effet, d'eau et de gaz dissous ou en bulles et on sait qu'une telle approximation est valable.

Ainsi notre étude se limite à des milieux granulaires constitués par des grains d'une même substance se comportant comme un corps isotrope. Il n'en résulte pas, comme on sait, que l'assemblage considéré se comporte nécessairement comme un corps doué des mêmes caractéristiques et du même type de loi de comportement que ses constituants élémentaires. Si on considère par exemple un empilement régulier de billes sphériques constituées d'un même matériau élastique linéaire isotrope, le milieu granulaire créé obéit à une loi élastique non linéaire.

Nous étudions d'abord, pour simplifier, le cas où le liquide, les grains et le squelette sont élastiques linéaires isotropes. L'extension au cas non élastique et au squelette non isotrope sera présentée ensuite.

1- Squelette isotrope et élastique

a - Description du squelette et du liquide filtrant

Un sable, un silt ou une argile sont représentés schématiquement comme un assemblage de grains d'une même substance, obéissant à la loi usuelle de LAME, en contact les uns avec les autres. Ainsi les déformations du squelette résultent d'une part des mouvements relatifs des grains et d'autre part des déformations des grains eux-mêmes. Cette vue schématique s'adapte moins bien au cas d'une roche poreuse. Toutefois, ce matériau peut encore être assimilé à un assemblage de grains reliés entre eux par des éléments matériels de plus faible résistance.

Pour les matériaux à structure granulaire qu'on vient de décrire, il convient d'appeler l'attention sur deux mécanismes différents de déformation du squelette suivant la façon dont sont engendrées les champs de contraintes.

Chaque grain est d'abord le siège d'un champ de contraintes provoquées par les contacts avec les particules voisines. Ces contraintes provoquent une déformation des grains eux-mêmes et les forces apparaissant aux points de contact de deux éléments voisins entraînent un déplacement relatif des petits corps.

Au contraire, l'action du fluide interstitiel sur chaque grain se manifeste, avec les hypothèses faites relativement au liquide filtrant, par l'application à chaque grain d'une pression normale à chaque élément de surface. Les diamètres des grains étant petits, on peut admettre, avec une bonne approximation, que chaque particule subit à sa surface une pression uniforme si nous négligeons les surfaces de contact. On sait que ces forces de pression forment un tenseur équivalent à zéro en sorte que ces efforts ne tendent pas à provoquer le déplacement des grains, mais contribuent à modifier le champ des tensions internes. C'est par l'intermédiaire de celles-ci que l'eau interstitielle peut provoquer un déplacement des éléments du squelette.

Pour décrire aisément ces deux aspects du champ de contraintes du squelette, nous employons au lieu de (21) la décomposition suivante pour la pression totale :

$$P_{ij} = \tau_{ij} + p \delta_{ij} \quad (22)$$

où p est la pression effective du liquide filtrant - ou pression interstitielle - et où τ_{ij} est le tenseur des contraintes intergranulaires et représente la contrainte moyenne exercée par les grains les uns sur les autres.

Ces contraintes sont reliées aux contraintes partielles de (21) par :

$$P_{1ij} = \tau_{ij} + (1 - n) p \delta_{ij} \quad (23)$$

$$P_2 = n p \quad (24)$$

où n est la porosité (volume non occupé par les grains du squelette dans l'unité de volume du squelette).

Le squelette supposé isotrope élastique linéaire, dont les pores sont remplis de liquide filtrant sous une pression interstitielle nulle, a une loi de comportement qui s'écrit classiquement :

$$\tau_{ij} = -\lambda_1 \theta_1 \delta_{ij} - 2\mu_1 D_{1ij} \quad (25)$$

où D_1 est le tenseur des déformations pures, $\theta_1 = D_{1ij} \delta_{ij}$ et λ_1 et μ_1 les constantes de LAME. Observons que dans cette écriture le tenseur des déformations D_{1ij}

englobe à la fois les effets de déplacement entre grains et les déformations propres de ceux-ci.

L'application d'une pression interstitielle p provoque une déformation isotrope des grains θ_2 donnée par :

$$p = - K_g \theta_2 \quad (26)$$

où K_g est le module de déformation volumique des grains .

D_1 et θ_2 sont des paramètres cachés ; nous entendons par là qu'ils sont indiscernables dans une évolution. La déformation totale observée est définie par le tenseur $D = D_1 + \theta_2 (1-n)$, si bien que (25) peut être remplacé par :

$$\tau_{ij} = -\lambda_1 \theta \delta_{ij} - 2\mu_1 D_{ij} + \left(\lambda_1 + \frac{2\mu_1}{3}\right) \theta_2 \delta_{ij} (1-n)$$

ou

$$\tau_{ij} = -\lambda_1 \theta \delta_{ij} - 2\mu_1 D_{ij} - \frac{K_1}{K_g} (1-n) p \delta_{ij} \quad (27)$$

où $\theta = D_{ij} \delta_{ij}$ et $K_1 = \lambda_1 + \frac{2\mu_1}{3}$ est le module de déformation volumique intergranulaire.

Enfin, le comportement du fluide interstitiel étant élastique,

$$p = - K_\omega e \quad (28)$$

où K_ω est le module de déformation volumique et e , déformation isotrope, est un paramètre caché.

b - Le couplage

Les équations (26), (27) et (28) ne sont pas indépendantes. L'espace est supposé complètement empli par les deux fluides. Considérons un volume initial unité de squelette. Le liquide entrant dans ce volume est donné d'une part, par :

$v = n (\theta - \epsilon)$ avec $\epsilon = u_{i,i}$, u vecteur déplacement du liquide, et par :

$$v = \theta - \theta_g + \frac{pn}{K_\omega}$$

qui traduit le bilan de volume de l'évolution en cours et où v est égal à la variation de volume du milieu diminuée de celle des grains et augmentée de celle du liquide.

La contrainte isotrope appliquée aux grains est $\frac{\tau_{ij}}{3} + p$, d'où :

$$\theta_g = -\frac{1-n}{K_g} \left[\frac{\tau_{ii}}{3} + p \right] = -\frac{1-n}{K_g} \left[-K_1 \theta + p \left(1 - \frac{K_1}{K_g} (1-n) \right) \right]$$

Egalant les deux valeurs de v , il vient :

$$n (\theta - \epsilon) = \left(1 - \frac{1-n}{K_g} K_1 \right) + p \left(\frac{n}{K_\omega} + \frac{1-n}{K_g} \left(1 - \frac{K_1}{K_g} (1-n) \right) \right)$$

Soit, en posant : $A = \frac{n}{K_\omega} + \frac{1-n}{K_g} \left(1 - \frac{K_1}{K_g} (1-n) \right)$

$$p = -\frac{\theta}{A} (1-n) \left(1 - \frac{K_1}{K_g} \right) - \frac{n\epsilon}{A} \quad (29)$$

(27) et (29) sont les équations qui décrivent le comportement du système total avec la loi de filtration (15).

Revenant aux pressions partielles, (27) et (29) s'écrivent à l'aide de (23) et (24) :

$$P_{1ij} = -\lambda \theta \delta_{ij} - 2 \mu D_{ij} - a \epsilon \quad (30)$$

$$P_2 = -b \epsilon - a \theta \quad (31)$$

où $\lambda = \lambda_1 + \frac{(1-n)^2}{A} \left(1 - \frac{K_1}{K_g} \right)^2$; $\mu = \mu_1$;

$$a = \frac{n}{A} (1-n) \left(1 - \frac{K_1}{K_g} \right) \quad ; \quad b = \frac{n^2}{A}$$

Ces équations ont été données par BIOT [3] et DERSKI [6] dans le cas particulier qui nous occupe du squelette et du liquide filtrant élastique ; mais nous les retrouvons par une voie plus directe.

Le coefficient de couplage, dans ce cas, est le même dans (30) et (31). Il peut être mesuré, par exemple, au moyen des expériences décrites par BIOT et WILLIS [5]. Dans la pratique, nous utiliserons (27) et (29) qui donnent la contrainte intergranulaire et la pression effective du fluide filtrant. Ces paramètres sont d'un emploi plus commode car ils interviennent directement dans les conditions aux limites.

c - Remarques sur les coefficients de couplage - approximation

K_1 est le coefficient de déformation volumique du squelette qui prend en compte les déplacements entre grains et les déformations des grains; K_g est le coefficient de déformation volumique du matériau composant les grains. Des hypothèses physiques plausibles permettent d'affirmer que K_1 et K_g sont astreints à vérifier l'inégalité : $0 \leq K_1 \leq K_g$. Il s'en suit que le coefficient de $p\delta_{ij}$ dans (27) est tel que :

$$-(1-n) \leq -\frac{K_1}{K_g}(1-n) \leq 0$$

ce qui donne les limites de l'influence de p sur τ .

Dans de nombreux problèmes les relations (27) et (29) peuvent être simplifiées. Pour les sols non fortement compactés $K_1 \ll K_g$ (27) et (29) se réduisent à :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -\lambda_1 \theta \delta_{ij} + 2\mu_1 D_{ij} \\ p &= -K_\omega \left(\theta \frac{1-n}{n} + \epsilon \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Enfin, pour un sol saturé (K_ω grand), (32) se réduit à :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -\lambda_1 \theta \delta_{ij} + 2\mu_1 D_{ij} \\ \theta(1-n) + n\epsilon &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Ainsi (27) et (29) ou (30) et (31) et dans certains cas (32) ou (33) décrivent - avec la loi de filtration (17) - le comportement du milieu. Supposant la température uniforme et la diffusion négligeable, nous disposons donc, avec l'équation de bilan de quantité de mouvement du milieu, de 13 équations scalaires avec 13 inconnues scalaires qui sont représentées par les déplacements du squelette, ceux du liquide, le tenseur τ , et la pression interstitielle p .

2- Squelette non isotrope et non élastique

Nous utilisons ici les notions de mécanique incrémentales décrites au chapitre I, et nous étudions le comportement du milieu biphasique pendant un

intervalle de temps petit pour que les relations qui relient les accroissements des grandeurs $\bar{\tau}$, \bar{p} , \bar{D} , $\bar{\epsilon}$, \bar{p}_1 et \bar{p}_2 - notées respectivement $\bar{\tau}$, \bar{p} , \bar{D} , $\bar{\epsilon}$, \bar{p}_1 et \bar{p}_2 - puissent être considérées comme linéaires ; ce sont ces quantités qui sont les nouvelles inconnues du problème à l'instant t considéré. Nous supposons ces relations écrites dans les axes rhéologiques. Les coefficients incrémentaux, eux aussi surmontés d'un tiret, sont fonction de l'état actuel, des états antérieurs, et de certains paramètres qui varient avec le temps et qui caractérisent, avec les paramètres déjà introduits l'évolution du milieu biphasique.

Les raisonnements faits plus haut pour le squelette élastique s'appliquent alors point par point.

Les accroissements de contrainte du squelette, avec une pression interstitielle nulle, peut s'écrire maintenant, toujours d'après le premier chapitre :

$$\bar{\tau}_{ij} = - \bar{C}_{1ij}^{LK} \bar{D}_{1LK} - \bar{M}_{1ij} dt$$

où \bar{M}_{1ij} représente un effet de mémoire et où le tenseur \bar{C}_1 , du fait des symétries de $\bar{\tau}_{ij}$ et \bar{D}_1 vérifie $\bar{C}_{1ij}^{LK} = \bar{C}_{1ji}^{LK} = \bar{C}_{1ij}^{KL}$

La loi incrémentale pour le matériau constituant les grains est :

$$\bar{p} = \bar{K}_g \bar{\theta}_2 .$$

La déformation observée pour un squelette soumis à une pression interstitielle non nulle admet pour composantes :

$$\bar{D}_{ij} = \bar{D}_{1ij} + (1 - n) \bar{\theta}_2 \delta_{ij}$$

La relation (27) est alors remplacée par :

$$\bar{\tau}_{ij} = - \bar{C}_{1ij}^{LK} \bar{D}_{1LK} - (1 - n) \bar{C}_{1ij}^{LK} \frac{\bar{p} \delta_{LK}}{\bar{K}_g} - \bar{M}_{1ij} dt \quad (34)$$

La variation de volume des grains, soumis à $\frac{\bar{p}}{3} + \bar{p}$, devient :

$$\bar{\theta}_g = - \frac{(1 - n)}{\bar{K}_g} \left(\bar{p} + \frac{1}{3} (-\bar{C}_{1ii}^{kl} \bar{D}_{kl} - \bar{M}_{1ii} dt - (1 - n) \bar{C}_{1ii}^{LK} \frac{\bar{p} \delta_{LK}}{\bar{K}_g}) \right)$$

et (29) s'écrit maintenant :

$$\bar{p} \bar{A} = (1 - n) \left(\frac{\bar{C}_{11i}}{3K_g} - \delta_{kl} \right) \bar{D}_{kl} + \frac{1 - n}{\bar{K}_g} \frac{\bar{M}_{11i}}{3} dt - n \bar{\epsilon} \quad (35)$$

$$\text{avec : } \bar{A} = \frac{n}{\bar{K}_w} + \frac{(1 - n)}{\bar{K}_g} (1 - (1 - n) \bar{C}_{11i} \frac{\delta_{LK}}{3 K_g})$$

Les équations (30) et (31) s'écrivent :

$$\bar{P}_{1ij} = - \bar{C}_{ij}^{LK} \bar{D}_{LK} - \frac{n}{A} (1 - n) (\delta_{ij} - \bar{C}_{11i} \frac{\delta_{LK}}{K_g}) - \bar{M}_{1ij} dt + \frac{(1-n)^2}{\bar{K}_g} \frac{\bar{M}_{11i}}{3 A} dt \delta_{ij}$$

$$\bar{P}_e = - \frac{n^2}{A} \bar{\epsilon} - \frac{n}{A} (1 - n) (\delta_{kl} - \frac{\bar{C}_{11i}}{3 K_g}) \bar{D}_{kl} + \frac{n(1 - n)}{A} \frac{\bar{M}_{11i}}{3 K_g} dt$$

$$\text{avec : } \bar{C}_{ij}^{LK} = \bar{C}_{11i}^{LK} + (\bar{C}_{11i}^{v\phi} \frac{\delta_{v\phi}}{K_g} - (1 - n) \delta_{ij}) \frac{1 - n}{A} (\frac{\bar{C}_{11i}}{3 K_g} - \delta_{LK})$$

ou sous une forme plus compacte :

$$\bar{P}_{1ij} = - \bar{C}_{ij}^{LK} \bar{D}_{LK} - \bar{Q}_{ij} \bar{\epsilon} - \bar{N}_{1ij} \quad (36)$$

$$\bar{P}_2 = - \frac{n^2}{A} \bar{\epsilon} - \bar{R}_{kl} \bar{D}_{kl} - \bar{N}_2 \quad (37)$$

Ces équations, avec (19), traduisent la loi de comportement mise sous forme incrémentale du système. L'effet de couplage entre les deux phases se traduit par la présence des termes \bar{Q}_{ij} , \bar{R}_{kl} et \bar{N}_{2ij} : en général, on a $\bar{Q}_{ij} \neq \bar{R}_{ij}$.

L'égalité n'est valable que si

$$\bar{C}_{11i}^{LL} = \bar{C}_{1Kk}^{ij} \quad (38)$$

ce qui est vrai en particulier dans le cas de l'élasticité incrémentale, à condition que les contraintes soient rapportées aux aires initiales (avant accroissement de déformation). Nous retrouvons à nouveau ici un résultat de BIOT [3].

Remarquons que la symétrie du couplage apparaît pour d'autres types de loi.

Ainsi, nous disposons, pour un accroissement dt donné du temps, des relations (36), (37) et (17) qui représentent avec l'équation de bilan de quantité

de mouvement, 13 équations scalaires pour déterminer les 13 inconnues scalaires représentées par les accroissements de déplacement du squelette, ceux du liquide filtrant, le tenseur P_1 et la pression interstitielle p .

C- LES APPROXIMATIONS EN MECANIQUE DES SOLS

En ce qui concerne les sols, les grains sont très peu déformables en comparaison du squelette : $\frac{1}{K_g} \sim 0$. (36) et (37) s'écrivent alors :

$$\bar{P}_{1ij} = - \bar{C}_{ij}^{LK} - \frac{n}{A} (1 - n) \bar{\epsilon} \delta_{ij} - \bar{M}_{1ij} \quad dt$$

$$\bar{P}_2 = - \frac{n^2}{A} \bar{\epsilon} - \frac{n}{A} (1 - n) \delta_{kl} \bar{D}_{kl}$$

avec : $\bar{A} = \frac{n}{K}$ et $\bar{C}_{ij}^{LK} = \bar{C}_{1ij}^{LK} + \frac{(1 - n)^2}{A} \delta_{ij} \delta_{LK}$

Les coefficients de couplage sont égaux, quelle que soit la loi de comportement. En contrainte intergranulaire et pression interstitielle ces équations deviennent :

$$\bar{\tau}_{ij} = - \bar{C}_{1ij}^{LK} \bar{D}_{LK} - \bar{M}_{1ij} \quad dt$$

$$\bar{p} \bar{A} = -(1 - n) \bar{D}_{kl} \delta_{kl} - n \bar{\epsilon}$$

Et si enfin le sol est saturé, nous avons :

$$\bar{\tau}_{ij} = - \bar{C}_{1ij}^{LK} \bar{D}_{LK} - \bar{M}_{1ij} \quad dt$$

$$(1 - n) \bar{\theta} + n \bar{\epsilon} = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{\theta} = \bar{D}_{kl} \delta_{kl}$$

REFERENCES

- [1] I. PRIGOGINE et P. MAZUR - "Sur deux formulations de l'hydrodynamique et le problème de l'hélium liquide II"
Physica XVII n°7 Juin 1951
- [2] P. GUELIN - "Thermodynamique des filtrations polyphasiques"
Deuxième Thèse de Doctorat ès-Sciences Physiques - 25 Février 1970
Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble
- [3] M.A. BIOT - "General Theory of Three-Dimensional Consolidation"
Journal of Applied Physics - 12 , février 1941
- [4] M.A. BIOT - "Theory of Elasticity and consolidation for a porous anisotropic Solid"
Journal of Applied Physics - 26-2 , février 1955
- [5] M.A. BIOT et D.G. WILLIS - "The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation"
J. Appl. Mech. 24 - 594-601 Dec. 57
- [6] W. DERSKI - "Some Contributions to the theory of flow of fluids through Porous Deformable Media"
Acta Mechanica IV/1 1967 p. 13-26
- [7] W. DERSKI - "Consolidation Displacements produced in elastic porous bodies by fluid sources"
Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées XIV/2 1969
p.175-187
- [8] B.D. COLEMAN - "Thermodynamics of material with memory"
Arch. Rat. Mech. Anal. - vol. 17 - 1964 p.1 - 46
- [9] J. MEIXNER - "Processes in simple thermodynamic materials"
Arch. Rat. Mech. Anal. 33 - 1969 - p.33-53.

CHAPITRE III

LE PROBLEME AUX LIMITES DE LA CONSOLIDATION

Les équations qui décrivent le processus de consolidation ont été obtenues, comme on l'a vu, à partir des lois de comportement du système squelette-liquide interstitiel, de la loi de filtration qui traduit l'interaction entre les phases en présence et des équations de l'équilibre indéfini. La nature analytique des équations aux dérivées partielles ainsi formées, dépend de la forme des lois de comportement et aussi de l'importance des déformations et des contraintes initiales, dont nous avons mis le rôle en évidence au chapitre I du présent travail.

Nous supposons, ici encore, l'évolution du système assez lente pour négliger la diffusion ($\Delta_{\alpha} = v_{\alpha} - v \sim 0$) et la température des deux phases est identique et uniforme. Ainsi les lois de comportement du système squelette-liquide interstitiel sont purement mécaniques et sont données au paragraphe B du chapitre précédent.

Pour étudier la consolidation des sols, nous adoptons l'hypothèse de la stabilité mécanique du squelette. Cela revient à éliminer a priori le flambement dont l'apparition entraînerait une dislocation du squelette et, par voie de conséquence, la destruction des ouvrages ; dans de telles conditions, l'étude de la consolidation serait dépourvue de sens.

Mises à part les conditions aux frontières étudiées dans la suite de ce chapitre, l'instabilité peut avoir plusieurs causes :

1/ Dans le cas des grandes déformations ou de contraintes initiales importantes, l'écriture des équations de l'équilibre indéfini fait intervenir des termes qui modifient la nature du système d'équations aux dérivées partielles, ou, sans changer sa nature, font que l'unicité de la solution du problème aux limites

posé n'est plus garantie. De plus, dans ce cas, les conditions aux frontières peuvent ne pas être conservatives.

2/ La forme quadratique associée au tenseur \bar{C}_1 peut cesser d'être définie positive.

3/ Les contraintes sont des fonctionnelles de l'histoire de la déformation.

Dans un cas aussi général, il est impossible, dans l'état actuel de l'analyse, d'énoncer un résultat concernant la régularité de la solution du problème posé.

En revanche, moyennant les hypothèses que nous adoptons : celles de la déformation petite - se réduisant à une déformation pure comparée avec une rotation - et des contraintes initiales négligeables, la stabilité découle de la forme du terme M_1 et de la nature de la forme quadratique $\bar{C}_{1ij}^{LK} e_{ij} e_{LK}$. Nous supposons celle-ci définie positive pour tous les points du milieu étudié. Nous montrons alors que le système aux dérivées partielles, valable pour un petit accroissement du temps, est parabolique-elliptique.

Nous étudions ensuite les conditions aux frontières et initiales. Nous montrons que la détermination de ces dernières se ramène à la résolution de systèmes de LAME. Le cas des sols saturés, courant dans la pratique, présente des difficultés particulières. Nous présentons un algorithme de calcul qui ramène - dans ce cas particulier - la détermination des conditions initiales à la résolution d'une suite de systèmes de LAME, et qui permet d'utiliser des méthodes itératives pour le calcul numérique de la solution de chaque système présenté au chapitre suivant.

Enfin, si le tenseur \bar{C}_1 présente les symétries d'un tenseur élastique, nous montrons, l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations aux dérivées partielles tangent pour une classe importante de problèmes aux limites, et pour des conditions aux frontières variées et réalistes. Rappelons, pour finir que les résultats d'existence et d'unicité ne valent que pour des domaines linéaires, plans ou spatiaux, simplement connexe, limités par des frontières assez régulières ; par exemple, dans le cas tridimensionnel, nous admettons que la surface-frontière se compose d'un nombre fini de morceaux pour chacun desquels le

plan tangent varie continuellement avec le point de contact. Dans le cas des données frontières - mixtes en particulier - plusieurs résultats d'existence et d'unicité pour le problème de LAME sur lesquels nous nous appuyons n'ont pas été justifiés en toute rigueur et en toute généralité - à notre connaissance tout au moins - sauf pour le problème classique de la théorie linéaire de l'élasticité isotrope à coefficients constants. Nous nous sommes alors contentés de vérifier que les applications numériques conduisent à des solutions stables.

L'existence, l'unicité ou la stabilité de solutions régulières pour le problème d'évolution non-linéaire de la consolidation n'est pas établie ici. Il est clair que la stabilité et la convergence des solutions numériques obtenues dans les chapitres suivants ne sauraient, tels quels, tenir lieu d'une démonstration rigoureuse de ces propriétés admises a priori pour faire le calcul.

Pour les types d'équations non-linéaires "voisines" de celles que nous étudions, on sait seulement affirmer l'existence des solutions dites "faibles" dont la définition précise varie d'un auteur à l'autre mais qui possèdent toutes ce trait commun : la continuité des dérivées d'ordre égal à celui des équations n'est pas garantie. Nous renvoyons pour ce point aux monographies de J.L. LIONS (par exemple [1]).

Par exemple, on utilise couramment l'appareil des dérivées généralisées, bien adapté à certaines techniques de démonstration des théorèmes d'existence. Toutefois, on sait que les dérivées généralisées d'une fonction définie sur un domaine ne coïncident pas avec les dérivées ordinaires pour les fonctions dérivables presque partout dans le domaine considéré ce qui pose quelques problèmes dans la pratique.

Par ailleurs, l'existence de solutions régulières pour les problèmes non-linéaires - au sens où nous l'entendons - n'a été établie que pour des types très particuliers d'équations et sous réserve d'imposer des conditions très strictes aux conditions aux frontières - à notre connaissance du moins.

C'est pourquoi, nous nous sommes placés à un point de vue à la fois utilitaire et élémentaire : préoccupés uniquement de trouver les solutions numériques de problèmes aux limites non linéaires, nous admettons dans les chapitres suivants l'existence d'unicité et la stabilité (par rapport aux conditions aux limites) de solutions régulières.

A - LES EQUATIONS D'EVOLUTION DE LA CONSOLIDATION

1- Les équations

Nous allons à présent former le système canonique d'équations aux dérivées partielles décrivant le processus de consolidation.

Les lois de comportement du milieu biphasique ont été écrites au chapitre précédent. Nous les prenons sous la forme II 34, II 35 et II 19 :

$$\bar{\tau}_{ij} = - \bar{C}_{1ij}^{\text{LK}} \bar{D}_{\text{LK}} - (1 - n) \bar{C}_{1ij}^{\text{LK}} \frac{\bar{p} \delta_{\text{LK}}}{\bar{K}_g} - \bar{M}_{1ij} \bar{t} \quad (1)$$

$$\bar{p} \bar{A} = (1 - n) \left[\frac{\bar{C}_{1ii}^{\text{kl}}}{3\bar{K}_g} - \delta_{\text{kl}} \right] \bar{D}_{\text{kl}} + \frac{1 - n}{\bar{K}_g} \frac{\bar{M}_{1ii}}{3} - n \bar{\epsilon} \quad (2)$$

$$\frac{k_{ij}}{\gamma_{\omega}} 2j = v_{2i} - v_{1i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

La relation (3) décrit les interactions entre les deux phases.

Les relations (1) et (2), valables sur un accroissement petit du temps, relient les accroissements de contrainte intergranulaire $\bar{\tau}$ et de pression interstitielle \bar{p} aux accroissements de déformation \bar{D} du squelette, à la déformation volumique $\bar{\epsilon}$ du liquide filtrant et à l'accroissement \bar{t} du temps. Les coefficients \bar{C}_1 , \bar{K}_g , \bar{A} , \bar{M}_1 , n sont des fonctions de paramètres ξ_i , de la déformation totale, de son histoire, des contraintes totales, etc... à l'exclusion des accroissements de ces grandeurs. Les paramètres ξ_i évoluent dans le temps et leurs accroissements sont décrits par les formes de PFAFF mentionnées dans l'introduction de ce travail; ces formes étant inutiles pour notre propos, nous ne les reproduisons pas ici.

Les équations de l'équilibre indéfini du milieu biphasique sont données par (cf I 12) :

$$\bar{\sigma}_{ik,k} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

où σ_{ik} est la contrainte totale, et pour le liquide filtrant seul :

$$\eta_{2i} = \rho_2 F_i - p, i \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Rappelons que l'accélération est négligée.

En utilisant $\bar{\sigma}_{ik} = \bar{\tau}_{ik} + \bar{p} \delta_{ik}$ et en faisant tendre \bar{t} vers zéro, (1) et (4) donnent, en supposant \bar{D} et \bar{p} dérivables par rapport au temps :

$$\left[-\bar{C}_{1ij}^{LK} \bar{D}_{LK,t} + (\delta_{ij} - (1-n) \bar{C}_{1ij}^{LK} \frac{\delta_{LK}}{\bar{K}_g} \bar{p},t - \bar{M}_{1ij} \right]_{,j} = 0 \quad (6)$$

$i = 1, 2, 3$

D'autre part, on tire de (3), après dérivation et sommation et eu égard à (5) :

$$\left[\frac{k_{ij}}{\gamma_w} (\rho_2 F_j - p, j) \right]_{,i} = v_{2i,i} - v_{1i,i} \quad (7)$$

Comme $v_{2i,i} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t}$ et $v_{1i,i} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}$, il vient :

$$\left[\frac{k_{ij}}{\gamma_w} (\rho_2 F_j - p, j) \right]_{,i} = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}$$

En éliminant $\bar{\epsilon}$ entre cette relation et (2), on trouve :

$$\left[\frac{k_{ij}}{\gamma_w} (\rho_2 F_j - p, j) \right]_{,i} = - \bar{\theta},t + \frac{1}{n} \times \left[-\bar{A} \bar{p},t + (1-n) \left(\frac{\bar{C}_{1ii}^{kl}}{3 \bar{K}_g} - \delta_{kl} \right) \bar{D}_{kl},t \right] \quad (8)$$

Le système (6) et (8) forme les quatre équations aux dérivées partielles incrémentales de la consolidation à quatre inconnues : \bar{p} et les trois composantes du déplacement du squelette \bar{u}_i , au travers de $\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$ et $\bar{\theta} = \bar{u}_{i,i}$. Il représente le système d'équations "tangentes" à l'instant t de l'évolution du système général des équations de consolidation ; il donne une approximation valable pour $t_n \leq t \leq t_n + \bar{t}$, \bar{t} étant supposé assez petit.

Remarquons que si les équations (6) ne font intervenir que les accroissements des grandeurs caractérisant l'état du milieu, (8) contient au premier membre p qui est la pression interstitielle à l'instant considéré (pression initiale à t_n , à laquelle on ajoute l'accroissement inconnu de la pression \bar{p}).

Comme nous l'avons souligné, une bonne approximation pour les sables, argiles et silts consiste à considérer les grains comme incompressibles. Les équations (6) et (8) se réduisent alors à :

$$\left[-\bar{c}_{1ij}^{\omega\kappa} \bar{D}_{\omega\kappa,t} + \delta_{ij} \bar{p}_{,t} - \bar{M}_{1,ij} \right]_{,j} = 0 \quad (9)$$

$$n \left[\frac{k_{ij}}{\gamma_{\omega}} (\rho_2 F_j - p_{,j}) \right]_{,i} = -\bar{\theta}_{,t} - \frac{n}{K_{\omega}} \bar{p}_{,t} \quad (10)$$

Enfin dans le cas d'un squelette à grains incompressibles, mais dont l'assemblage forme un corps élastique - linéaire, isotrope et homogène, et d'un liquide filtrant incompressible, (6) et (8) se réduisent aux équations classiques, écrites en déformation et pression interstitielle totales :

$$(\lambda + \mu) \theta_{,i} + \mu \Delta u_i - p_{,i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{k}{\gamma_{\omega}} \Delta p = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (12)$$

où λ et μ sont les coefficients de LAME; k le coefficient de perméabilité est constant et où le symbole Δ désigne l'opérateur de LAPLACE. Les dérivées par rapport au temps n'apparaissent plus dans (11).

Dans ce dernier cas, tirant Δp de (11) et le portant dans (12), nous obtenons :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{k}{\gamma_{\omega}} \Delta \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (13)$$

Cette équation n'est pas directement exploitable, les conditions aux frontières n'étant pas connues en θ dans le cas d'un problème aux limites concret.

2 - La nature analytique des équations de consolidation

Pour simplifier les écritures, introduisons les notations suivantes, d'ailleurs usuelles .

Soit $\phi(x_i, t) = 0$ une surface dans l'espace à quatre dimensions x_i, t . Nous notons ϕ_t sa dérivée partielle en t , ϕ_i sa dérivée en x_i . Le problème de CAUCHY relatif à (6), (8) consiste à donner sur la surface $\phi = 0$ les valeurs des inconnues \bar{u}_i et \bar{p} et, par exemple, la dérivée normale de ces inconnues. La surface $\phi = 0$ est caractéristique si les dérivées partielles annulent le déterminant caractéristique formé avec les coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé dans (6), (8). Nous obtenons en rangeant les inconnues dans l'ordre \bar{u}_i ($i = 1, 2, 3$), \bar{p} :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & \circ \\
 \hline
 & & & \circ \\
 \hline
 & & & \circ \\
 \hline
 \phi_1 \left[-\frac{\phi_1}{n} \right. & \phi_2 \left[-\frac{\phi_2}{n} \right. & \phi_3 \left[-\frac{\phi_3}{n} \right. & \frac{k_{\ell\kappa}}{\gamma_\omega} \phi_\ell \phi_\kappa \\
 \left. + \phi_\kappa \frac{1-n}{n} \frac{\bar{C}_{1\ell\ell}^{\kappa 1}}{3 K_g} \right] & \left. + \phi_\kappa \frac{1-n}{n} \frac{\bar{C}_{1\ell\ell}^{\kappa 2}}{3 K_g} \right] & \left. + \phi_\kappa \frac{1-n}{n} \frac{\bar{C}_{1\ell\ell}^{\kappa 3}}{3 K_g} \right] & \\
 \hline
 \end{array} \phi_1^{*3} A_{mn} = 0$$

où $\phi_t^{*3} A_{mn}$ est le déterminant caractéristique 3×3 de (6), qui ne contient pas de dérivées secondes en \bar{p} . $\phi_t^* = \phi_t$ si $M_{1ij} \neq 0$ et $\phi_t^* = 1$ si $M_{1ij} = 0$.

L'équation caractéristique s'obtient aisément en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$\frac{k_{ij}}{\gamma_\omega} \phi_i \phi_j \times \phi_t^{*3} A_{mn} = 0 \quad (14)$$

On voit que ϕ_t n'intervient que par le facteur ϕ_t^{*3} . Le système est donc simplement parabolique par rapport au temps.

Le premier membre de (14) apparait comme le produit de la forme caractéristique de la partie stationnaire de (8) par celle de (6). Nous avons vu au chapitre précédent que la matrice des coefficients k_{ij} est définie positive. Avec les hypothèses faites, il en est de même de la matrice $-\bar{C}_{1ij}$.

$\frac{k_{ij}}{\gamma_\omega} \phi_i \phi_j A_{mn}$ est une forme elliptique et le système (6), (8) est parabolique en t , elliptique en x_1 . Remarquons que ce résultat découle de la forme des lois de comportement utilisées. Par ce choix, nous avons éliminé en particulier les lois de plasticité parfaite pour le squelette. Dans ce cas il est courant de supposer la non variation de volume. Le problème de consolidation n'a alors plus de sens.

B - CONDITIONS AUX FRONTIERES ET CONDITIONS INITIALES

Le système (6), (8) est bien posé si nous lui adjoignons des conditions initiales et à la frontière "convenables". Il n'existe pas, pour ce type de système, de résultats généraux concernant l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites donné. La méthode consiste donc à se donner des conditions aux limites physiquement plausibles et à vérifier, par la suite, que les applications numériques conduisent à des solutions stables et réalistes. Toutefois, le système (6), (8) apparaît comme un couplage entre un système (6) à caractère elliptique et une équation (8) à caractère parabolique - ceci apparaissant plus nettement dans (14). Cette remarque va nous permettre de simplifier l'étude des conditions aux frontières.

Les conditions initiales "naturelles" pour le système (6), (8), supposé vrai pour $t_n \leq t \leq t_n + \bar{t}$ sont \bar{u}_{in} $i = 1, 2, 3$, \bar{p}_n et p_n au temps $t = t_n$. Par construction, nous avons : $\bar{u}_{in} \equiv 0$ et $\bar{p} \equiv 0$, si bien qu'il suffit de connaître la répartition p_n de pression interstitielle. Cela signifie que les déplacements à $t \leq t_n$ n'influent pas sur la solution pour $t > t_n$, si ce n'est qu'ils apparaissent sous forme additive :

$$u_{i \ t > 0} = u_{i \ t = 0} + \bar{u}_i$$

Pour étudier les conditions aux frontières, considérons (6), (8) sous sa forme simplifiée (11), (12) correspondant au cas du milieu homogène isotrope à squelette élastique linéaire, saturé de liquide incompressible :

$$(\lambda + \mu) \theta_{,i} + \mu \Delta u_i - p_{,i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta p = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (12)$$

Rappelons que, dans ce cas particulier, les inconnues ne sont plus les accroissements mais les déplacements et la pression interstitielle totaux.

Nous avons vu qu'en utilisant :

$$\Delta p = (\lambda + 2\mu) \Delta \theta \quad , \quad (15)$$

(12) peut se mettre sous la forme :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{k}{\gamma\omega} \Delta \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (13)$$

Ainsi θ vérifie alors l'équation de la chaleur. Malheureusement, dans les problèmes pratiques, (13) n'est pas exploitable telle quelle car les conditions aux frontières ne sont jamais données en variation de volume.

Le système (11) où p est donné est un système de LAME pour lequel les théorèmes d'existence et d'unicité sont connus, notamment avec des conditions aux frontières en déplacement ou en contrainte totale. Il est plausible de considérer aussi (11) comme bien posé avec des conditions aux frontières mixtes : déplacements sur une partie de la frontière, contraintes totales sur l'autre partie. Il est de même plausible de considérer (12), où θ est donné comme bien posé, si les conditions aux frontières, portant sur p , sont du type DIRICHLET ou POINCARÉ.

Le système (11), (12) apparaît alors bien posé avec les conditions aux frontières énoncées plus haut si, avec ces conditions, le système (11) fait correspondre un champ θ et un seul à un champ p donné et réciproquement. Il en sera de même pour le système (9), (10) si la relation bi-univoque porte, cette fois, sur les champs $\frac{n}{k\omega} \bar{p} + \bar{\theta}$ et \bar{p} . Ce résultat sera établi au paragraphe suivant (C) lorsque le tenseur C_1 présente les symétries d'un tenseur élastique.

L'extension du raisonnement ci-dessus au système (6), (8) n'est pas possible étant donné que le couplage de (6) et (8) se fait par l'intermédiaire des inconnues \bar{p} et \bar{D}_{kl} et non pas \bar{p} et $\bar{\theta}$. Nous admettrons néanmoins que les conditions aux frontières présentées ci-dessus garantissent l'existence et l'unicité de la solution de (6), (8).

Ces conditions sont d'un type courant dans la théorie de l'élasticité linéaire et pour l'équation de la chaleur.

Voici quelques exemples usuels de données à la frontière qu'on rencontre dans la pratique et qui se ramènent à celles ci-dessus mentionnées.

- Charges appliquées au milieu biphasique le long d'une surface imperméable au liquide filtrant : la contrainte totale $+ p$ est donnée ainsi que la dérivée normale de p : $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

- Charges appliquées par l'intermédiaire d'un drain : τ donné et $p = 0$.

- Contact avec une paroi rigide rugueuse imperméable : alors $u_i = 0$
 $i = 1, 2, 3$; $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

- Contact avec une paroi rigide lisse drainante (par exemple $x_1 = \text{cste}$)
 $u_1 = 0$ $\tau_{12} = \tau_{13} = 0$ $p = 0$

- Plan de symétrie (par exemple $x_1 = \text{cste}$)
 $u_1 = 0$ $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$

C - RELATION ENTRE LES CHAMPS $\bar{\theta}$ ET \bar{p} OU $\frac{n}{K_\omega} \bar{p} + \bar{\theta}$ ET \bar{p}

Le squelette est composé de grains incompressibles, si bien que l'évolution est décrite par le système (9), (10) ou le système (11), (12) dans le cas de l'élasticité linéaire. Nous supposons de plus que le tenseur \bar{C}_1 présente les symétries d'un tenseur élastique : $\bar{C}_{1ij}^{\kappa\lambda} = \bar{C}_{1ji}^{\lambda\kappa} = \bar{C}_{1ij}^{\lambda\kappa} = \bar{C}_{1\lambda\kappa}^{ij}$. Le milieu occupe un domaine Δ et les conditions aux frontières pour (9) - ou (11) - sont des conditions en contraintes, en déplacement ou mixtes, la contrainte normale étant donnée au moins en un point. Nous divisons alors la frontière F en deux parties : F_1 où les conditions font intervenir la contrainte normale ($F_1 \neq \emptyset$) et $F_2 = F - F_1$.

Nous allons montrer que, moyennant les hypothèses faites, il existe une relation bi-univoque entre les champs $\bar{\theta}$ et \bar{p} ou les champs $\frac{n}{K_\omega} \bar{p} + \bar{\theta}$ et \bar{p} .

Donnons nous a priori un champ de pression \bar{p} . Si on admet l'existence et l'unicité de la solution de (9) - ou (11) - avec les conditions aux frontières énoncées ci-dessus, les déplacements et par suite la variation de volume correspondante sont définis de façon unique. A un champ de pression \bar{p} , il correspond alors un champ $\bar{\theta}$ et un champ $\frac{n}{K_\omega} \bar{p} + \bar{\theta}$ uniques.

Montrons la réciproque. Pour simplifier, considérons d'abord le système (9) où le milieu est pris isotrope et le liquide incompressible et un champ $\bar{\theta} \equiv 0$ dans Δ . L'extension au cas $\bar{\theta} \neq 0$, au milieu anisotrope et au liquide filtrant incompressible sera traitée ensuite.

Nous nous proposons donc d'établir qu'à un champ $\bar{\theta} \equiv 0$ il correspond par (9) et ses conditions aux frontières un champ \bar{p} et un seul.

La méthode déjà présentée en [2] et [3] consiste à utiliser la compressibilité du squelette pour construire une suite discrète de problèmes aux limites bien posés relatifs à des systèmes d'équations aux dérivées partielles du type de LAME, qui convergent à la limite vers la solution cherchée.

A cet effet, partons d'un champ \bar{p}_1 ; calculons au moyen de (9) \bar{u}_{1i} correspondant ainsi que $\bar{\theta}_1$. En général $\bar{\theta}_1 \neq 0$. Or par hypothèse, le milieu se déforme à volume constant. La méthode consiste à modifier corrélativement \bar{p} pour respecter la condition $\bar{\theta} \equiv 0$.

Nous posons alors pour franchir le pas suivant : $\bar{p}_2 = \bar{p}_1 - K \bar{\theta}_1$ où $K > 0$ est une fonction des x_i à déterminer et calculons \bar{u}_{2i} et $\bar{\theta}_2$ ce qui définit $\bar{p}_3 = \bar{p}_2 - K \bar{\theta}_2$ et ainsi de suite.

Au niveau du $n^{\text{ème}}$ pas, nous connaissons \bar{p}_n et $\bar{\theta}_n$; les déplacements $\bar{u}_{i \ n+1}$ sont alors déterminés à partir du champ $\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n - K \bar{\theta}_n$.

Ecrivons l'équation (9) sous la forme :

$$T_1 \bar{u} - T_2 \bar{p} = 0$$

où \bar{u} est le vecteur déplacement de composantes \bar{u}_i $i = 1, 2, 3$ et où T_1 et T_2 sont des opérateurs qui tiennent compte des conditions aux frontières associées à (9).

L'itération s'écrit alors :

$$\bar{u}_{n+1} = T_1^{-1} \left[T_2 (\bar{p}_n - K \bar{\theta}_n) \right]$$

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n - K \bar{\theta}_n$$

$$\bar{\theta}_n = \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right)_n$$

En raison de la linéarité des équations (9), on passe de l'état n à l'état $n+1$ en superposant à l'état n un état E caractérisé par un champ de pression $\bar{p} = -K \bar{\theta}_n$ en chaque point du milieu et des conditions aux frontières $\bar{p} = K \bar{\theta}_n$ sur F_1 , les déplacements normaux à F_2 étant nuls. Le milieu a un comportement incrémental élastique.

L'énergie de déformation de l'état E peut être calculée à partir des efforts extérieurs :

$$2 W = \iiint_{\Delta} - \text{grad } \bar{p} \cdot \bar{u} \, d\Delta + \iint_{F_1} \bar{p} \, \bar{n} \cdot \bar{u} \, d F_1$$

où \vec{n} est la normale extérieure à F_1 .

Il vient avec $\vec{\text{grad}} \bar{p} \cdot \vec{u} = \text{div} \bar{p} \vec{u} - \bar{p} \text{div} \vec{u}$ et

$$\iint_{\Delta} \text{div} \bar{p} \vec{u} d\Delta = \iint_F \bar{p} \vec{n} \cdot \vec{u} dF_1 = \iint_{F_1} \bar{p} \vec{n} \cdot \vec{u} dF_1 \text{ car}$$

$\vec{n} \cdot \vec{u}$ est nul sur F_2 :

$$2W = \iint_{\Delta} \bar{p} \text{div} \vec{u} d\Delta = \iint_{\Delta} \bar{p} \bar{\theta} d\Delta$$

où $\bar{\theta}$ est la variation de volume de l'état E soit $\bar{\theta} = \bar{\theta}_{n+1} - \bar{\theta}_n$ si bien que :

$$2W = \iint_{\Delta} K \bar{\theta}_n^2 d\Delta - \iint_{\Delta} K \bar{\theta}_n \bar{\theta}_{n+1} d\Delta \quad (16)$$

D'autre part, l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} 2W &= \iint_{\Delta} -\bar{\tau}_{ij} \bar{D}_{ij} d\Delta = \iint_{\Delta} \bar{\lambda} \bar{\theta}^2 d\Delta + \iint_{\Delta} 2\bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta \\ &= \iint_{\Delta} \bar{\lambda} (\bar{\theta}_{n+1} + \bar{\theta}_n - 2\bar{\theta}_{n+1} \bar{\theta}_n) d\Delta + \iint_{\Delta} 2\bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta \end{aligned} \quad (17)$$

où \bar{D}_{ij} est la déformation caractérisant E.

Egalant les deux expressions (16) et (17) de $2W$, il vient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} (K - \bar{\lambda}) \bar{\theta}_n^2 d\Delta - \iint_{\Delta} \bar{\lambda} \bar{\theta}_{n+1}^2 d\Delta &= \iint_{\Delta} (K - 2\bar{\lambda}) \bar{\theta}_n \bar{\theta}_{n+1} d\Delta \\ &+ \iint_{\Delta} 2\bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta \end{aligned}$$

Nous fixons maintenant la fonction arbitraire K par :

$$K(x, y, z) = 2\bar{\lambda}(x, y, z)$$

Alors :

$$\iint_{\Delta} \bar{\lambda} \bar{\theta}_n^2 d\Delta - \iint_{\Delta} \bar{\lambda} \bar{\theta}_{n+1}^2 d\Delta = \iint_{\Delta} 2\bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta > 0$$

La suite des $\iint_{\Delta} \bar{\lambda} \bar{\theta}_n^2 d\Delta$ converge.

Choisissons maintenant K positif et posons :

$$K = 2 \bar{\lambda} (x, y, z) + \pi (x, y, z)$$

où π est à déterminer. Il vient alors :

$$\iint_{\Delta} \bar{\lambda} \bar{\theta}_n^2 d\Delta - \iint_{\Delta} \bar{\lambda} \bar{\theta}_{n+1}^2 d\Delta = \iint_{\Delta} 2 \bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta + \iint_{\Delta} \pi \bar{\theta}_n (\bar{\theta}_{n+1} - \bar{\theta}_n) d\Delta$$

(16) donne, puisque $2W$ est positif :

$$\iint_{\Delta} K \bar{\theta}_n (\bar{\theta}_{n+1} - \bar{\theta}_n) d\Delta < 0 \quad \forall K > 0$$

Alors, si :

$$\pi (x, y, z) < 0 \quad , \text{ la convergence est assurée.}$$

La suite des $\int \bar{\theta}_n$ converge donc pour :

$$0 < K < 2 \bar{\lambda} (x, y, z)$$

La convergence existe donc pour K appartenant à une plage.

Supposons la limite atteinte. (16) et (17) où nous avons fait :

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_{n+1} - \bar{\theta}_n = 0 \text{ donnent :}$$

$$\iint_{\Delta} 2 \bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta = 0, \quad \text{soit puisque } \bar{\mu} > 0 \quad \bar{D}_{ij} \equiv 0$$

L'état E est alors caractérisé par des déformations identiques nulles et des conditions aux frontières homogènes sauf sur F_1 où la contrainte normale vaut $K \bar{\theta}_n$. Ceci n'est possible que si $\bar{\theta}_n = 0$ sur F_1 . Comme (11) appliquée à (E) donne $\bar{p}_{,j} = 0$, soit $\bar{p} = -2 \bar{\lambda} \bar{\theta}_n = \text{cste}$, $\bar{\theta}_n$ est identiquement nulle dans Δ . Il y a convergence des $\bar{\theta}_n$ vers zéro.

La solution obtenue est unique. En effet, soient deux solutions \bar{u}_{1i}, \bar{p}_1 et \bar{u}_{2i}, \bar{p}_2 caractérisées par $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = 0$. La différence $\bar{u}_i = \bar{u}_{1i} - \bar{u}_{2i}$, $\bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ est la solution du problème avec des conditions aux limites homogènes sauf sur F_1 où la contrainte est $-\bar{p}$. Puisque $\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 \equiv 0$, (16) donne une énergie élastique correspondant à cette dernière transformation nulle. (17) donne alors $\bar{D}_{ij} \equiv 0$ d'où $\bar{u}_i \equiv 0$ et comme plus haut, il est alors nécessaire que $\bar{p} \equiv 0$.

Généralisations :

1/ L'extension du résultat à un champ $\bar{\theta} \neq 0$ est immédiate. Pour cela il suffit de remplacer partout $\bar{\theta}_n$ par $\bar{\theta}_n - \bar{\theta}$.

2/ Quand le liquide interstitiel est compressible (K_ω fini), il faut montrer qu'à un champ $\frac{n}{K_\omega} \bar{p} + \bar{\theta} = f_0$ donné, il correspond un champ \bar{p} et un seul. Remarquant que $\frac{n}{K_\omega}$, que nous notons α dans la suite, est une quantité positive, le raisonnement peut être conduit comme plus haut.

Le champ de pression à l'état n+1 est donné maintenant par :

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n - K (f_n - f_0) \quad K > 0$$

où $f_n = \alpha \bar{p}_n + \bar{\theta}_n$. L'état E est alors caractérisé par un champ de pression $\bar{p} = -K(f_n - f_0)$. De plus, $f_{n+1} - f_n = \alpha(\bar{p}_{n+1} - \bar{p}_n) + \bar{\theta}_{n+1} - \bar{\theta}_n$, si bien que $\bar{\theta}_{n+1} - \bar{\theta}_n = f_{n+1} - f_n + K \alpha (f_n - f_0)$. L'énergie de déformation s'écrit d'une part, en utilisant $\bar{\theta} = \bar{\theta}_{n+1} - \bar{\theta}_n$:

$$2W = \iint_{\Delta} \bar{p} \bar{\theta} d\Delta = \iint_{\Delta} -K \left[(f_{n+1} - f_0) + (K\alpha - 1)(f_n - f_0) \right] (f_n - f_0) d\Delta$$

et d'autre part :

$$2W = \iint_{\Delta} (\bar{\lambda} \bar{\theta} + 2 \bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2) d\Delta = \iint_{\Delta} \left[\bar{\lambda} (f_{n+1} - f_0)^2 + \bar{\lambda} (K\alpha - 1)^2 (f_n - f_0)^2 + 2 \bar{\lambda} (K\alpha - 1) (f_n - f_0) (f_{n+1} - f_0) \right] d\Delta + \iint_{\Delta} 2 \bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta} \left[(1 - \alpha K) (K + \bar{\lambda} (K\alpha - 1)) (f_n - f_0)^2 - \bar{\lambda} (f_{n+1} - f_0)^2 \right] d\Delta \\ & = \iint_{\Delta} (K + 2 \bar{\lambda} (K\alpha - 1) (f_{n+1} - f_0) (f_n - f_0)) d\Delta + \iint_{\Delta} 2 \bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta \end{aligned}$$

Choisissons K tel que $K + 2 \bar{\lambda} (K\alpha - 1) = 0$

soit $K = \frac{2 \bar{\lambda}}{1 + 2 \bar{\lambda} \alpha} > 0$, nous écrivons :

$$\iint_{\Delta} d\Delta \left[\frac{\bar{\lambda}}{(1 + 2 \bar{\lambda} \alpha)^2} (f_n - f_0)^2 - \bar{\lambda} (f_{n+1} - f_0)^2 \right] = \iint_{\Delta} 2 \bar{\mu} \bar{D}_{ij}^2 d\Delta > 0$$

Cette relation entraîne :

$$\iint_{\Delta} d\Delta (f_n - f_0)^2 - \iint_{\Delta} d\Delta (f_{n+1} - f_0)^2 > 0$$

puisque $0 < \frac{\bar{\lambda}}{(1 + 2\bar{\lambda}\alpha)^2} < \bar{\lambda}$ en raison de $\bar{\lambda} > 0$ et $\alpha > 0$

et $\iint_{\Delta} (f_n - f_0)^2 d\Delta$ converge.

La convergence de f_n vers f_0 et l'unicité sont ensuite acquises pour les mêmes raisons que plus haut.

3/ Pour un corps anisotrope, la densité d'énergie "élastique" - \bar{C}_1 a les symétries d'un tenseur élastique - est une forme quadratique définie positive. Elle s'écrit :

$$2W = \bar{C}_{ij}^{lk} \bar{D}_{lk} \bar{D}_{ij}$$

Prenons comme nouvelles variables $\bar{\theta} = \bar{D}_{ij} \delta_{ij}, \bar{D}_{12}, \bar{D}_{13}, \bar{D}_{22}, \bar{D}_{23}$ et \bar{D}_{33} .
2W peut être diagonalisée par une rotation des axes et donne :

$$2W = \lambda_1 \bar{\theta}^2 + \mu_1 \bar{D}_{12}^{*2} + \mu_2 \bar{D}_{13}^{*2} + \mu_3 \bar{D}_{22}^{*2} + \mu_4 \bar{D}_{23}^{*2} + \mu_5 \bar{D}_{33}^{*2}$$

où les \bar{D}_{ij}^* sont les transformées des \bar{D}_{ij} par la rotation, $\bar{\theta}$ restant invariant. λ_1 et les μ_i sont positifs. Un résultat analogue est obtenu en faisant dans l'expression de W le changement de variable. $\bar{D}_{22} \rightarrow \bar{\theta}$ ou $\bar{D}_{33} \rightarrow \bar{\theta}$ conduisant à des constantes λ_2 et λ_3 . Le raisonnement fait plus s'applique alors point par point en prenant pour champ K : $K = 2 \min (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Quand $\alpha \neq 0$, on a alors $K = 2 \min \left(\frac{2\lambda_i}{1 + 2\lambda_i\alpha} \right)$

Conclusion :

Du point de vue physique, la méthode consiste donc à convertir à chaque pas une partie de la pression intergranulaire moyenne du squelette en pression interstitielle.

La convergence existe pour des valeurs de la fonction K appartenant à une plage $[K_1, K_2]$ contenant $2\bar{\lambda}$ dans le cas isotrope. Cela permet d'utiliser la méthode pour la recherche de solutions numériques faisant appel aux calculateurs

électroniques. L'exemple traité au paragraphe suivant met en évidence le fait que la convergence n'est pas toujours obtenue pour la valeur : $K = \frac{2\bar{\lambda}}{1 + 2\lambda\alpha}$

D - DETERMINATION DES CONDITIONS INITIALES

Considérons un système squelette - liquide interstitiel à un instant noté $t = 0$. Le champ des pressions interstitielles à $t = +0$ dépend évidemment du champ à $t = -0$ et des variations instantanées éventuelles à $t = 0$, provoquées par un brusque changement des conditions aux limites.

On a déjà noté dans la littérature (par exemple à propos de la théorie dite élémentaire, de la consolidation de TERZAGHI cf [4]) que des contraintes données a priori et appliquées à l'instant $t = 0$ à la frontière d'un milieu polyphasique, provoquent une brusque variation du champ des contraintes dans le milieu, de sorte que la répartition initiale des contraintes dans le corps étudié passe instantanément d'un état donné a priori à un état inconnu, qu'il importe de déterminer. Nous nous proposons de faire une étude systématique de la question.

Nous supposons donc connu le champ à $t = -0$. Il est déterminé par (6), (8) si le système consolide à $t < 0$, sinon par le système stationnaire associé.

Nous proposons d'évaluer la discontinuité dans le temps du champ des pressions provoquée par l'application de contraintes à l'instant $t = 0$.

1- Les équations déterminant les discontinuités du champ des pressions

A l'instant $t = 0$, une brusque variation des conditions aux frontières est appliquée à un système de squelette - liquide interstitiel occupant un domaine Δ . Nous postulons, ce qui semble physiquement plausible, que ceci ne provoque pas de discontinuités du champ des vitesses. Par suite, il ne peut y avoir instantanément échange de matière à travers une surface quelconque liée au squelette. Les déformations du squelette et du liquide sont donc identiques en chaque point du domaine.

Si le squelette est indéformable instantanément, l'ensemble squelette - liquide l'est aussi et il n'y a pas de discontinuités dans le champ de pression. Dans le cas contraire, nous écrivons les lois instantanées sous une forme incrémentale analogue à II-36 et II-37, où nous supprimons le terme de mémoire M_{lij} .

$$\begin{aligned}\bar{P}_{1ij} &= -\bar{C}_{ij}^{1k} \bar{D}_{1k} - \bar{Q}_{ij} \bar{\epsilon} \\ \bar{P}_2 &= -n^2 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{A}} - \bar{R}_{k1} \bar{D}_{k1}\end{aligned}\quad (18)$$

Utilisant $\bar{\epsilon} = \bar{D}_{1k} \delta_{1k}$ et $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{P}_{1ij} + \bar{P}_2 \delta_{ij}$, il vient :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left[-\bar{C}_{ij}^{1k} - \bar{Q}_{ij} \delta_{1k} - \frac{n^2}{\bar{A}} \delta_{1k} \delta_{ij} - \bar{R}_{1k} \delta_{ij} \right] \bar{D}_{1k} \quad (19)$$

D'après cela, le milieu se transforme instantanément en se comportant comme un corps monophasique.

Dans l'hypothèse classique des grains incompressibles :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left(-\bar{C}_{ij}^{1k} - \frac{n(2-n)}{\bar{A}} \delta_{1k} \delta_{ij} \right) \bar{D}_{1k}, \quad \bar{A} = \frac{n}{K\omega}$$

ou

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left(-\bar{C}_{ij}^{1k} - \frac{K\omega}{n} \delta_{1k} \delta_{ij} \right) \bar{D}_{1k} \quad (20)$$

et enfin, si de plus le système est saturé par un liquide incompressible :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{C}_{ij}^{1k} \bar{D}_{1k} + \bar{p} \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad \bar{D}_{1k} \delta_{1k} = 0 \quad (21)$$

Les équations donnant la discontinuité du champ des déplacements s'obtiennent en portant $\bar{\sigma}_{ij}$ donné par (19), (20) ou (21) dans les équations de l'équilibre :

$$\bar{\sigma}_{ij}, j = 0 \quad (22)$$

Les discontinuités aux frontières étant décomposées en petits accroissements, nous sommes alors amenés à résoudre une suite de systèmes (22). En toute rigueur il y aurait lieu d'établir que le résultat final est indépendant du mode de décomposition. Dans le cas particulier d'un squelette linéairement élastique, nous sommes ramenés à une suite de problèmes de LAME. Ceux-ci sont bien posés, comme on sait avec des conditions aux frontières en déplacement ou en contraintes.

Il est évident ici que quelque soit le mode de décomposition des conditions initiales en petits accroissements, la superposition des solutions donne le même résultat que le problème de LAME posé pour les variations finies des données; cela résulte de ce que les équations sont linéaires, à coefficients constants.

Une fois déterminée la solution de (22) en déplacements, l'accroissement de pression interstitielle est donnée par II-16, soit :

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_2}{n} = - \left(\frac{n}{A} \delta_{kl} + \frac{\bar{R}_{kl}}{n} \right) \bar{D}_{kl}$$

Toutefois, dans le cas d'un squelette constitué de grains incompressibles et saturé par un liquide incompressible, le problème présente quelques difficultés résultant de ce que la déformation se fait à volume constant. Remarquons ici que si le squelette n'est pas susceptible de subir des déformations instantanées déviatoires les discontinuités seront nulles. Le système (22) de trois équations à trois inconnues \bar{u}_i $i = 1, 2, 3$ est remplacé par le système suivant à quatre équations et à quatre inconnues \bar{u}_i et \bar{p} :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{,j} + C_{ij}^{lk} \bar{D}_{lk} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\ \bar{D}_{lk} \delta_{lk} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Dans ce cas qui est une schématisation du problème de consolidation couramment utilisée en mécanique des sols, les méthodes habituelles utilisées pour résoudre (22) ne peuvent plus être employées.

Nous pouvons alors utiliser l'algorithme présenté au paragraphe C. Nous vérifions, sur l'exemple explicite ci-après, que la convergence est obtenue pour des valeurs de K appartenant à une plage, ce qui permet l'utilisation de la méthode pour le calcul numérique.

2- Etude d'une solution explicite

Dans le cas particulier de l'oedomètre, le sol occupe l'intérieur d'un cylindre rigide vertical limité par deux plans horizontaux. A l'instant $t = 0$, une charge Q est appliquée sur la face supérieure. Nous supposons l'échantillon élastique, à constantes de LAME λ et μ constantes. Le liquide est incompressible, la déformation est homogène.

Nous avons successivement, σ_i représentant la charge appliquée au squelette seul, au pas i , et en partant de $p_1 = 0$.

$$p_1 = 0 \quad \sigma_1 = Q = -(\lambda + 2\mu)\theta_1 \quad \lambda + 2\mu \text{ est le coefficient oedométrique}$$

$$p_2 = -K\theta_1 \quad \sigma_2 = \sigma_1 - p_2 = (K - (\lambda + 2\mu))\theta_1 = -(\lambda + 2\mu)\theta_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_{n+1} = -K\theta_n + p_n \quad \sigma_{n+1} = \sigma_n - p_{n+1} = (K - (\lambda + 2\mu))\theta_n = -(\lambda + 2\mu)\theta_{n+1}$$

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = 1 - \frac{K}{\lambda + 2\mu} \quad . \text{ La convergence est obtenue si } \left| \frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} \right| < 1, \text{ soit}$$

$0 < K < 2(\lambda + 2\mu)$; 2λ appartient évidemment à cette plage puisque λ et μ sont positifs. A la limite $p = Q$. La valeur optimum de K est ici $K = \lambda + 2\mu$ qui permet d'obtenir $\theta = 0$ dès le deuxième pas. Cette valeur est différente de 2λ .

3- Conclusions

La détermination des conditions initiales provoquées par des discontinuités dans les conditions aux frontières se ramène en général à la résolution d'un système d'équations en déplacement du type LAME. Dans le cas particulier, couramment utilisé en mécanique des sols, d'un milieu saturé, la solution peut être obtenue par la résolution d'une suite de systèmes d'équations du type LAME.

Remarquons que le champ de pression interstitielle initiale déterminé à partir de conditions aux frontières en déplacements, contraintes ou mixtes, peut ne pas vérifier les conditions aux frontières en écoulement données pour $t > 0$. Il pourra donc exister à $t = 0$ des discontinuités à la frontière sur p ou ses dérivées.

REFERENCES

- [1] J.L. LIONS - "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires" - Dunod 69
- [2] J.L. AURIAULT - "Détermination des conditions initiales des problèmes de consolidation dans les sols saturés" - CRAS - t 272 - P. 1659-61 - 21 Juin 71
- [3] J.L. AURIAULT - "Traitement des problèmes de consolidation " - Symposium Franco-Polonais "Problèmes de la rhéologie" - sous presse - 14-18 Sept.71
- [4] K. TERZAGHI et R.B. PECK - "Mécanique des sols appliquée" - Dunod - Paris 1961 - p.77

CHAPITRE IV

LA RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES DE CONSOLIDATION

Nous présentons ici deux méthodes - "explicite" et "implicite" - de résolution numérique des problèmes aux limites de la consolidation. Les principes de base sont classiques ; mais leur mise en oeuvre est nouvelle et présente quelques difficultés du fait du nombre d'équations aux dérivées partielles en jeu - 4 - et des conditions aux frontières spécifiques de la consolidation. Nous montrons, pour une classe de problèmes courants, comment lever ces difficultés : en particulier nous étudions la convergence des itérations, auxquelles font exclusivement appel les méthodes pour résoudre, à chaque pas de l'évolution, le système linéaire d'équations obtenu par la discrétisation.

Les itérations permettent de moduler la précision à volonté et sont d'un emploi moins onéreux que les méthodes directes dans les problèmes envisagés. Nous utiliserons principalement la méthode de GAUSS-SEIDEL avec surrelaxation qui s'adapte aux matrices non-symétriques auxquelles conduit nécessairement dans les problèmes de consolidation notre méthode de discrétisation.

Pour simplifier, nous traitons des problèmes plans. L'extension à trois dimensions ne présente aucune difficulté de principe.

Dans un premier temps, nous présentons une méthode particulière de discrétisation dite de la double grille qui repose sur l'emploi de dérivées centrées pour l'espace. La méthode donne de bons résultats dans les problèmes d'élasticité où elle a jusqu'à présent été utilisée. Elle présente, en particulier, l'avantage de traduire commodément les lois rhéologiques et les conditions aux frontières, ce qui est appréciable dans les problèmes aux limites de la théorie de consolidation.

Nous étudions ensuite la détermination des conditions initiales. Puis nous décrivons deux méthodes pour la résolution numérique du problème parabolique : la première dite "explicite" car elle consiste à traiter de façon explicite l'équation parabolique, le système elliptique couplé étant traité séparément de façon implicite ; la deuxième dite "implicite" traite l'équation parabolique de façon implicite, simultanément avec le système elliptique couplé.

Enfin, pour simplifier, nous étudions un problème modèle où le squelette est élastique homogène à caractéristiques constantes avec des grains incompressibles.

Les équations de la consolidation s'écrivent alors (cf III-11 et III-12)

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

III-11

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\text{III-12} \quad \frac{k}{\gamma_w} \Delta p = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{n}{K_w} \frac{\partial p}{\partial t}$$

où

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Le milieu considéré emplit le rectangle Δ à côtés parallèles aux axes Oxy. La frontière $F(\Delta)$ est soumise à des conditions constantes dans le temps en contrainte sur F_1 et en déplacement sur $F_2 = F - F_1$. Pour III-12 la condition aux frontières - constante elle aussi dans le temps - porte sur la pression interstitielle.

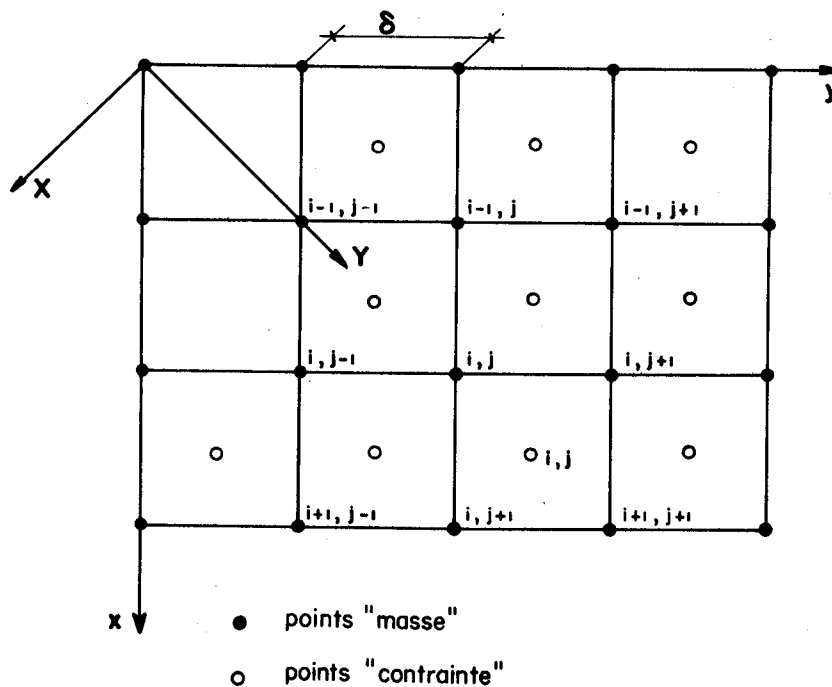
La généralisation à d'autres problèmes n'est pas toujours triviale, les principales difficultés d'application des méthodes utilisées, provenant de la non-symétrie des matrices à inverser dont l'importance commande ici la convergence de la méthode de GAUSS-SEIDEL. Remarquons que pour les lois rhéologiques utilisées en mécanique des sols, la non-symétrie est surtout une conséquence des conditions aux frontières : les méthodes à utiliser pour les traduire devront viser à en réduire les inconvénients.

A - LA DISCRETISATION

Nous supposons que les fonctions u et p admettent des dérivées jusqu'à l'ordre trois, les fonctions v des dérivées jusqu'à l'ordre quatre inclus.

L'espace est discrétisé par les sommets d'un réseau à mailles carrées de coordonnées $x = i \delta$, $y = j \delta$. δ représente la longueur de la maille. (i, j) repère ces sommets appelés "points masse" en lesquels sont définis les déplacements du squelette et le coefficient de perméabilité. La contrainte intergranulaire, la pression interstitielle, la déformation et les coefficients incrémentaux qui caractérisent le comportement du squelette sont donnés aux centres des mailles aux "points contrainte". La confusion étant impossible, les centres des mailles sont repérés par les mêmes indices que les sommets, la grille des centres étant obtenue à partir de celle des sommets par une translation $(\frac{\delta\sqrt{2}}{2}, \frac{\delta\sqrt{2}}{2})$.

Les équations à discrétiser sont écrites dans des axes XY déduits des axes xy par une rotation $-\frac{\pi}{4}$.



Nous écrivons les équations de l'équilibre sous la forme :

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} - F_x = 0$$

$$\sigma_{y,y} + \sigma_{xy,x} - F_y = 0$$

où σ_{lm} est la contrainte totale (contrainte intergranulaire accrue de la pression interstitielle : $\sigma_{lm} = \tau_{lm} + p \delta_{lm}$). F_x, F_y sont les composantes de la force de masse.

Nous remplaçons les équations de l'équilibre par les expressions suivantes écrites au point masse (i,j) :

$$(1) \quad \frac{\sigma_x(i, j-1) - \sigma_x(i-1, j)}{\delta \sqrt{2}} + \frac{\sigma_{xy}(i, j) - \sigma_{xy}(i-1, j-1)}{\delta \sqrt{2}} - F_x(i, j) = O(\delta^2)$$

$$\frac{\sigma_y(i, j) - \sigma_y(i-1, j-1)}{\delta \sqrt{2}} + \frac{\sigma_{xy}(i, j-1) - \sigma_{xy}(i-1, j)}{\delta \sqrt{2}} - F_y(i, j) = O(\delta^2)$$

où l'erreur de troncature $O(\delta^a)$, $a > 0$, est une quantité telle que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{O(\delta^a)}{\delta^a} = c$ constante.

Le tenseur des déformations D_{lm} est représenté au point contrainte (i,j) par :

$$(2) \quad \begin{aligned} D_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i+1, j) - u(i, j+1)}{\delta \sqrt{2}} + O(\delta^2) \\ D_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(i+1, j+1) - v(i, j)}{\delta \sqrt{2}} + O(\delta^2) \\ D_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u(i+1, j+1) - u(i, j) + v(i+1, j) - v(i, j+1)}{\delta \sqrt{2}} + O(\delta^2) \end{aligned}$$

Utilisant alors les relations définissant le comportement rhéologique du squelette qui relie linéairement τ_{lm} et D_{lm} et en portant dans (1), nous obtenons une expression aux différences finies du système III-11 en fonction des inconnues $u(i, j)$, $v(i, j)$ et $p(i, j)$. Ces équations sont écrites au point masse.

La méthode utilisée conduit à une expression simple des conditions aux frontières qu'elle traduit avec la même précision que les équations indéfinies. La frontière étant prise suivant la ligne $i = 0$ des points masse et le milieu occupant le domaine $i > 0$, les conditions en contrainte s'expriment au niveau de (1), les termes en $\sigma_{kl}(-1, j)$ étant remplacés par les efforts donnés s'appliquant au point masse (0, j). Ce procédé se révèle particulièrement pratique dans le cas où les conditions aux frontières sont données en contrainte totale, ce qui est fréquent dans ce type de problème. Les conditions en déplacement s'expriment au niveau de l'équation aux différences finies en $u(i, j)$, $v(i, j)$, $p(i, j)$. Il est

essentiel de noter que les conditions aux frontières en écoulement, portant sur la dérivée normale de p et sur sa grandeur ne sont pas à prendre en compte ici - pour III-11 - si bien que $p(i,j)$ étant donné le système obtenu est un système de LAME à inconnues $u(i,j)$ et $v(i,j)$ avec les conditions aux frontières habituelles.

Le système ainsi discrétisé est résolu par rapport à $u(i,j)$ et $v(i,j)$ permettant une itération par bloc dont on sait, d'une façon générale, que les valeurs propres de la matrice d'itération sont plus petites que celles associées à la méthode itérative point par point d'où une convergence plus rapide.

L'équation parabolique III-12 peut être représentée par un système aux différences finies en appliquant la même méthode pour les dérivées spatiales. L'équation est écrite en un point "contrainte" et la discrétisation ne fait intervenir que les valeurs des déplacements dans le domaine et à sa frontière. L'expression des conditions aux limites en est facilitée. Ici encore l'erreur de troncature est pour l'espace $O(\delta^2)$.

Le temps t est discrétisé par $t = \beta \Delta t$, $\beta = 0, 1, 2, \dots$, 1 pas de temps. ϕ_{ij}^β désigne la valeur d'une fonction ϕ de x_i et t au point (i,j) au temps $t = \beta \Delta t$.

La représentation de la dérivée par rapport au temps dépend du schéma utilisé. Dans la suite, nous utiliserons surtout la représentation de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ par :

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial t} = \frac{\phi_{ij}^{\beta+1} - \phi_{ij}^\beta}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

B - DETERMINATION DES CONDITIONS INITIALES

Nous étudions ici le comportement d'un milieu à la frontière duquel on impose, à un instant donné, une brusque discontinuité des conditions données. L'ensemble squelette-liquide se comporte instantanément comme un corps monophasique dont la loi de comportement dans le cas général est décrite incrémentalement par :

$$\text{III-16} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \left[-\bar{C}_{ij}^{LK} - \bar{Q}_{ij} \delta_{LK} - \frac{n^2}{A} \delta_{LK} \delta_{ij} - \bar{R}_{LK} \delta_{ij} \right] \bar{D}_{LK}$$

Portant III-16 dans les équations d'équilibre, nous obtenons un système de LAME de deux équations aux inconnues u et v qui est discrétisé comme en A. Les conditions aux frontières sont décomposées en petits accroissements. Nous sommes

alors ramenés à la résolution d'une suite de systèmes de LAME.

Dans le cas du modèle adopté, avec un squelette élastique linéaire, un seul système décrit le problème :

$$(3) \quad \begin{aligned} (\lambda' + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u &= 0 \\ (\lambda' + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v &= 0 \end{aligned}$$

où μ est une constante de LAME,

et où λ' est relié à λ , l'autre constante de LAME du squelette, par :

$$\lambda' = \lambda + \frac{Kw}{n}$$

Kw est le module de déformation volumique du liquide interstitiel et n , la porosité.

L'ensemble se comportant comme un milieu élastique linéaire, il existe une fonction énergie de déformation W dont l'expression se présente comme une forme quadratique de D_{ij} , définie positive, telle que $-\frac{\partial W}{\partial D_{LK}} = \sigma_{LK}$; les premiers membres de (3) s'écrivent alors :

$$(4) \quad - \left(\frac{\partial W}{\partial D_{ij}} \right)_{,j} \quad i = 1, 2$$

D'autre part, soit U le vecteur déplacement de composantes les déplacements u , v en chaque point de la grille :

$$U = (u(1,1), v(1,1), u(2,2) \dots \text{etc..})$$

Après discrétisation et introduction des conditions aux limites, les premiers membres de (3) sont représentés par :

$$(5) \quad AU - B$$

(5) fournit une représentation discrète de (4). A est ici une matrice et B un vecteur.

Pour étudier A , nous pouvons supposer les conditions aux frontières homogènes puisque leur modification en grandeur laisse la matrice A invariante.

Nous prenons donc pour la suite $u_i = 0$ sur F_2 et $\sigma_{ij} \nu_j = 0$ sur F_1 , où ν_j est la normale extérieure à F_1 . Alors $B = 0$.

Considérons $I = -\iint_{\Delta} u_i \left[\frac{\partial w}{\partial D_{ij}} \right]_{,j} d\Delta$ soit sous forme discrète :
 $I \sim U^T A U$.

Utilisons la transformation classique :

$$I = -\int_F u_i \frac{\partial w}{\partial D_{ij}} \nu_j dF + \iint_{\Delta} \frac{\partial w}{\partial D_{ij}} u_{i,j} d\Delta$$

L'intégrale sur F est nulle en raison des conditions aux limites utilisées. Il reste :

$$I = \iint_{\Delta} \frac{\partial w}{\partial D_{ij}} D_{ij} d\Delta = \iint_{\Delta} 2W d\Delta$$

puisque W est une forme quadratique homogène des D_{ij} .

$U^T A U$ apparaît comme la forme discrétisée de $\iint_{\Delta} 2W d\Delta$. A est donc positive définie.

Pour le problème modèle, et avec la discrétisation utilisée, il est aisé de constater que A est symétrique.

Pour résoudre $AU - B = 0$, nous utilisons la méthode de GAUSS-SEIDEL avec surrelaxation.

La convergence du processus est assurée d'après le théorème de REICH (cf [1] p.237), A étant positive définie symétrique.

Les valeurs u et v au point i,j sont calculées au cours d'un même balayage, ceci pour accélérer la convergence. La pression interstitielle initiale est ensuite donnée par $\bar{p} = - \left(\frac{n}{A} \delta_{kl} - \frac{R_{kl}}{n} \right) \bar{D}_{kl}$ (cf Ch. III) dans le cas général au moyen d'un simple balayage du champ.

Enfin, dans le cas du modèle et en présence d'un liquide filtrant incompressible, le milieu biphasique se comporte comme un milieu incompressible et le système de deux équations est remplacé par un système à trois équations.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

aux inconnues u, v, p .

Sa résolution est conduite comme indiqué en III-C-2 et se ramène à la résolution d'une suite convergente de systèmes de LAME que nous traitons suivant le schéma indiqué ci-dessus. La méthode de GAUSS-SEIDEL avec surelaxation appliquée à chaque système converge.

C - L'INTEGRATION DU SYSTEME EVOLUTIF

Le milieu est ici encore celui du modèle en présence d'un liquide interstitiel incompressible.

Au temps $t < 0$ il est en équilibre. A $t = 0$ les conditions aux limites en contrainte et déplacement éprouvent une brusque discontinuité. Il se produit alors un changement instantané du champ des contraintes, des déplacements et de la pression interstitielle qui devient p_0 . Ces grandeurs sont déterminées suivant la méthode décrite en B.

Les conditions aux limites sont supposées indépendantes du temps.

Le système évolutif III -11, 12 peut s'écrire :

$$(6) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(7) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w} \Delta (p_0 + p)$$

où u, v et p sont respectivement les accroissements des déplacements et de la pression interstitielle pour $t > 0$, λ et μ les coefficients de LAME du squelette, k la perméabilité et γ_w le poids spécifique du liquide interstitiel.

$$\text{Rappelons que } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

(6, 7, 8) satisfont aux conditions aux limites de $t = 0$ rendues homogènes et à une condition en écoulement portant sur $p + p_0$ que nous supposons homogène elle aussi.

Dans ce cas particulier, il y aura consolidation si p_0 ne vérifie pas la condition aux frontières en écoulement. En effet, d'après (6) et (7) :

$\Delta p_0 = (\lambda + 2\mu)\Delta\theta_0 \equiv 0$ puisque $\theta_0 \equiv 0$ et (8) donne $\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{t=0} \equiv 0$ partout (domaine et frontière) dans le cas où p_0 vérifie les conditions en écoulement.

Tirant $\Delta p = (\lambda + 2\mu)\Delta\theta$ de (6) et (7), (8) peut être remplacée par :

$$(9) \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\gamma_w} \Delta\theta$$

1- Etude de (9)

Nous rappelons quelques résultats concernant la résolution numérique de (9). On pourra sur ce sujet consulter par exemple V.K. SAUL'YEV [2].

L'équation (9) n'est pas exploitable directement en pratique car les problèmes usuels de consolidation ne font pas intervenir de conditions aux frontières sur θ . Remarquons d'ailleurs que (9) n'est établie que moyennant des hypothèses assez restrictives, concernant des squelettes isotropes à paramètres de LAME constants. Mais son étude - qui est classique - guide l'intégration numérique du système complet.

Posant : $\frac{k(\lambda + 2\mu)}{\gamma_w} t = \tau$, (9) devient :

$$(10) \quad \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \Delta\theta$$

L'équation elliptique associée à (10) est : (11) $\Delta\theta = 0$.

Le domaine Δ est ici un carré $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ et sur la frontière nous prenons $\theta = f$. Il est discrétisé suivant les sommets d'une grille de pas $h = \frac{1}{n}$. Le temps τ est représenté par $\tau = \beta l$, l étant le pas de temps et β étant entier > 0 . f est donné.

a - Construction de l'équation aux différences

(10) et (11) peuvent être remplacés par le système linéaire :

$$\chi \frac{\theta_{ij}^{\beta+1} - \theta_{ij}^{\beta}}{1} = a \Delta \theta^{\beta+1} + (1-a) \Delta \theta^{\beta} + O(1) + O(h^2)$$

$0 < a < 1$ $\chi = 1$ pour (10) et $\chi = 0$ pour (11)

$$\text{De plus, } \Delta \theta^{\beta} = \left[\theta_{i+1,j}^{\beta} + \theta_{i-1,j}^{\beta} + \theta_{i,j+1}^{\beta} + \theta_{i,j-1}^{\beta} - 4 \theta_{i,j}^{\beta} \right] \frac{1}{h^2}$$

soit :

$$(12) \quad \theta_{ij}^{\beta+1} - \frac{ar}{\chi + 4ar} (\theta_{i+1,j}^{\beta+1} + \theta_{i-1,j}^{\beta+1} + \theta_{i,j+1}^{\beta+1} + \theta_{i,j-1}^{\beta+1}) + F \chi_{ij}^{\beta} = 0$$

avec $r = \frac{1}{h^2}$ et

$$F \chi_{ij}^{\beta} = \frac{1}{\chi + 4ar} \left[r(1-a) (\theta_{i+1,j}^{\beta} + \theta_{i-1,j}^{\beta} + \theta_{i,j+1}^{\beta} + \theta_{i,j-1}^{\beta}) - (4r(1-a) - 1) \theta_{i,j}^{\beta} \right]$$

$a = 0$ correspond à une méthode explicite puisque (12) donne directement θ au niveau $\beta + 1$ à partir de θ au niveau β . $a \neq 0$ correspond à une méthode implicite et la résolution du système (12) peut alors être conduite par itération.

Le schéma (12) est stable pour :

$$(13) \quad \begin{aligned} r &\leq \frac{1}{4(1-2a)} && \text{si } 0 \leq a < \frac{1}{2} \\ r &< \infty && \text{si } \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \end{aligned}$$

Le problème étant bien posé et le schéma aux différences consistant, la condition (13) est, d'après le théorème de LAX, nécessaire et suffisante pour assurer la convergence (cf [3] p.45), les conditions aux frontières étant homogènes.

Nous voyons ainsi que la méthode explicite ($a = 0$), d'utilisation la plus aisée est astreinte à une condition de stabilité qui traduit - au regard de la propagation d'une perturbation - le caractère hyperbolique du schéma aux

différences. Au contraire, les schémas implicites avec $a \geq \frac{1}{2}$ ne sont soumis à aucune condition et présentent dans ce sens un caractère parabolique.

Notons enfin, que pour $a = \frac{1}{2}$, qui correspond au schéma de CRANK-NIKOLSON, l'erreur d'approximation devient $O(h^2 + h^2)$.

b - Résolution des équations aux différences

Nous étudions la résolution du système d'équations obtenues à chaque pas de temps par une méthode implicite.

Soit X le vecteur de composantes :

$$X = \left[\theta(1,1), \theta(1,2) \dots \theta(1, n-1), \theta(2,1) \dots \theta(1-n, 1-n) \right]$$

Le système (12) s'écrit :

$$(14) \quad A X + F = 0$$

où F est un vecteur donné et A une matrice carrée donnée, dont les éléments de la diagonale principale valent un.

La méthode itérative de JACOBI s'écrit :

$$(15) \quad X^{k+1} = X^k - [A X^k + F] \quad \text{ou} \quad X^{k+1} = B X^k - F$$

avec $B = I - A$, I matrice unité.

Soit, sous forme scalaire :

$$\theta_{ij}^{k+1} = \theta_{ij}^k - \left[\theta_{ij}^k - \frac{ar}{X + 4ar} (\theta_{i-1,j}^k + \theta_{i,j-1}^k + \theta_{i+1,j}^k + \theta_{i,j+1}^k) + F_{ij} \right]$$

où k indique le numéro de l'itération.

(15) permet d'écrire :

$$X^k = [I - A]^k X^0 - \sum_{m=0}^{k-1} (I - A)^m F$$

et la méthode converge quel que soit X^0 si, et si seulement,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (I - A)^k = 0$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_{pq} = 1 - \frac{2ar}{\chi + 4ar} (\cos p\pi h + \cos q\pi h)$$

$p, q = 1, 2 \dots n - 1$ et la condition de convergence ci-dessus :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \lambda_{pq})^k = 0 \quad \forall p, q$$

devient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{2ar}{\chi + 4ar} (\cos p\pi h + \cos q\pi h) \right]^k = 0 \quad \forall p, q$$

La vitesse de convergence peut être caractérisée par le nombre k d'itération nécessaire pour réduire une erreur initiale dans la proportion 10^{-s} .

Cela donne :

$$\left[\frac{4ar}{\chi + 4ar} \cos \pi h \right]^k \leq 10^{-s}$$

soit :

$$(16) \quad k \geq \frac{s \operatorname{Log} 10}{-\operatorname{Log} \frac{4ar}{\chi + 4ar} \cos \pi h} \sim \frac{s \operatorname{Log} 10}{\frac{\pi^2 h^2}{2} - \operatorname{Log} \frac{4ar}{\chi + 4ar}}$$

Voici quelques conséquences de cette formule, qui paraissent intéressantes.

Dans le problème elliptique, avec $\chi = 0$, $k \sim \frac{2s \operatorname{Log} 10}{h^2 \pi^2}$; le nombre d'itérations nécessaires est inversement proportionnel à $\frac{1}{h^2}$.

Dans le problème parabolique, cas où $\chi = 1$, on montre que, k est pratiquement indépendant de h si on prend $r = \frac{1}{h^2} = \text{constante}$; à ce point de vue la méthode itérative paraît mieux adaptée aux problèmes paraboliques qu'aux problèmes elliptiques. Remarquons que si r augmente, la convergence de l'itération devient moins bonne pour tendre à la limite vers celle du problème elliptique associé.

On voit aussi que les faibles valeurs de a donnent une meilleure convergence. A la limite - $a = 0$ - la méthode devient explicite et l'itération est alors sans objet. Comparant ce dernier résultat avec la condition de stabilité (13), on voit que la valeur optimale de a est $\frac{1}{2}$.

La méthode itérative de GAUSS-SEIDEL avec surrelaxation qui prend en compte - pour le calcul de la $i^{\text{ème}}$ composante de X - les composantes déjà calculées repose sur la relation :

$$\theta_{ij}^{k+1} = \theta_{ij}^k - \alpha \left[\theta_{ij}^k - \frac{ar}{\chi + 4ar} (\theta_{i-1,j}^{k+1} + \theta_{i,j-1}^{k+1} + \theta_{i+1,j}^k + \theta_{i,j+1}^k) + F_{ij} \right]$$

où α est un coefficient de surrelaxation à déterminer. Le processus d'itération est défini par :

$$X^{k+1} = G X^k + F_1$$

Les valeurs propres λ_g et λ_b des matrices G et B sont reliées par (cf [2]) :

$$\lambda_b = \frac{\lambda_g + \alpha - 1}{\alpha (\lambda_g)^{1/2}}$$

d'où il découle que pour $\alpha = 1$, $\lambda_g = \lambda_b^2$ et la méthode de GAUSS-SEIDEL converge deux fois plus vite que celle de JACOBI.

La valeur optimale de α est : $\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + (1 - \bar{\lambda}_b)^{1/2}}$ avec $\bar{\lambda}_b = \max |\lambda_b|$ et pour cette valeur, on a :

$$\bar{\lambda}_g = \max |\lambda_g| = \alpha_{\text{opt}} - 1 = \frac{1 - (1 - \bar{\lambda}_b)^{1/2}}{1 + (1 - \bar{\lambda}_b)^{1/2}}$$

Le gain de rapidité de la convergence est appréciable, particulièrement dans le cas de matrices mal conditionnées correspondant aux problèmes elliptiques. Dans le cas de (11) :

$$\bar{\lambda}_b = 1 - c_1 h^2$$

$$\bar{\lambda}_g = 1 - c_2 h$$

$c_1 = \text{constante}$, $c_2 = \text{constante}$.

Une précision donnée nécessite donc $O(\frac{1}{h^2})$ itérations par la méthode de JACOBI et $O(\frac{1}{h})$ itérations par la méthode GAUSS-SEIDEL avec surrelaxation optimale.

Cette dernière méthode possède, de plus, l'avantage de converger pour certains systèmes à matrices définies positives non symétriques, que nous rencontrons dans les problèmes de consolidation.

Les résultats de ce paragraphe sont plus ou moins classiques ; ceux qui suivent semblent en grande partie nouveaux.

2- Méthode explicite

Nous utilisons maintenant la méthode de discrétisation décrite en A. Avec les notations indiquées, (8) peut être remplacée par l'équation aux différences finies :

$$(17) \quad \frac{\theta_{ij}^{\beta+1} - \theta_{ij}^{\beta}}{1} = \frac{k}{2 \gamma \omega \delta^2} \left[(p_o + p)_{i+1,j}^{\beta} + (p_o + p)_{i-1,j}^{\beta} + (p_o + p)_{i,j-1}^{\beta} + (p_o + p)_{i,j+1}^{\beta} - 4 (p_o + p)_{i,j}^{\beta} \right] + O(1) + O(2\delta^2)$$

Ce schéma explicite et consistant permet de déterminer θ au pas de temps $\beta + 1$ connaissant $p_o + p$ et θ au temps β . Posant d'une façon générale :

$$\bar{\theta}_{ij} = \theta_{ij}^{\beta+1} - \theta_{ij}^{\beta}$$

le problème revient alors à trouver \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} qui vérifient :

$$(18) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0$$

$$(19) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

$$(20) \quad \bar{\theta} = f \quad \text{où } f \text{ est donné.}$$

Ce problème est semblable à celui traité en III-D pour la détermination des conditions initiales d'un milieu saturé, à cela près que dans le cas présent $\bar{\theta} \neq 0$. Le même algorithme peut être utilisé ici; au niveau du n ème pas \bar{p}_n et $\bar{\theta}_n$ sont connus et le champ de pression \bar{p}_{n+1} est donné par :

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n - K (\bar{\theta}_n - f) \quad (\text{cf III-B})$$

Ainsi la résolution numérique du problème de la consolidation se ramène à la résolution numérique d'un système de LAME avec des données aux frontières décrites ci-dessus. Car si la solution au pas β est connue, (18), (19) et (20) donnent \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} soit u , v , p au pas $\beta + 1$ d'où résulte par itération la solution approchée de III 11, 12.

La méthode revient donc, pour l'essentiel à l'inversion de matrices définies positives symétriques et les itérations correspondantes de GAUSS-SEIDEL convergent (cf théorème de REICH).

Toutefois, le schéma explicite (17) ne semble pas absolument stable et convergent. Le même schéma appliqué à (9) est stable si :

$$(21) \quad \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\gamma_{\omega}} \frac{1}{2\delta^2} \leq \frac{1}{4}$$

Les tests numériques tendent à montrer qu'une condition analogue assure aussi la stabilité de (17). En pratique, (21) impose un nombre de pas trop élevé pour décrire l'évolution complète du phénomène ($\frac{\partial p_0 + p}{\partial t} \sim 0$). Le temps de calcul limite donc à la phase initiale du processus de consolidation l'utilisation de cette méthode, d'autant que l'algorithme employé pour chaque pas de temps exige une itération à deux étages relativement onéreuse.

Dans le cas très particulier du modèle envisagé et pour des conditions aux frontières en déplacement, le traitement numérique peut être amélioré en portant dans (19) et (20) la valeur connue de $\bar{\theta}$. A chaque pas le problème revient alors à résoudre deux équations de POISSON aux inconnues respectives u et v . Les conditions aux frontières sont découplées. Nous n'avons toutefois pas utilisé ce procédé qui ne s'applique qu'au squelette isotrope caractérisé par des paramètres de LAME constants. Nous nous sommes attachés, au contraire, à présenter une méthode applicable au plus grand nombre de cas possibles.

3- Méthode "implicite"

L'équation (8) est maintenant représentée par :

$$(22) \quad \frac{\theta_{ij}^{\beta_{+1}} - \theta_{ij}^{\beta}}{1} = \frac{k}{\gamma_{\omega} 2 \delta^2} \left[a \left((p_0+p)_{i+1,j}^{\beta_{+1}} + (p_0+p)_{i-1,j}^{\beta_{+1}} + (p_0+p)_{i,j-1}^{\beta_{+1}} - 4(p_0+p)_{i,j}^{\beta_{+1}} \right) + (1-a) \left((p_0+p)_{i+1,j}^{\beta} + (p_0+p)_{i-1,j}^{\beta} + (p_0+p)_{i,j+1}^{\beta} + (p_0+p)_{i,j-1}^{\beta} - 4(p_0+p)_{i,j}^{\beta} \right) \right] + O(1) + O(2\delta^2)$$

$$0 < a \leq 1$$

Le cas $a = 0$ correspond à la méthode explicite traitée en 2.

Avec les notations du 2, (22) s'écrit :

$$(23) \quad \bar{\theta}_{ij} = \frac{k_1}{\gamma \omega^2 \delta^2} \left[(F_{ij})^\beta + a(\bar{p}_{i+1,j} + \bar{p}_{i-1,j} + \bar{p}_{i,j+1} + \bar{p}_{i,j-1} - 4\bar{p}_{i,j}) \right]$$

avec :

$$F_{ij}^\beta = (p_{o+p})_{i+1,j}^\beta + (p_{o+p})_{i-1,j}^\beta + (p_{o+p})_{i,j+1}^\beta + (p_{o+p})_{i,j-1}^\beta - 4(p_{o+p})_{i,j}^\beta$$

Le problème est alors, u , v et p étant connus au temps β , de trouver \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} satisfaisant (23) et aussi :

$$(24) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0$$

$$(25) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{v} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

discretisés suivant la même grille et au moyen de la même méthode.

Nous nous proposons ici de résoudre ce problème par la méthode de GAUSS-SEIDEL.

Soient les vecteurs :

$$X = [\bar{u}(1,1), \bar{v}(1,1), \bar{u}(1,2), \bar{v}(1,2) \dots \dots \bar{u}(n-1, m-1), \bar{v}(n-1, m-1)]$$

$$P = [\bar{p}(1,1), p(1,2) \dots \dots p(n-1, m-1)]$$

dont les composantes sont toutes inconnues, et le vecteur F :

$$F = [F^\beta(1,1), F^\beta(1,2) \dots \dots F^\beta(n-1, m-1)]$$

qui est connu.

(23) peut être représentée sous forme matricielle par :

$$(26) \quad A_2 P + \frac{\gamma \omega}{k_1} D_2 X = F$$

(24) et (25) par :

$$(27) \quad A_1 X + D_1 P = G$$

où D_2 est l'opérateur divergence appliqué aux points "masse" et D_1 l'opérateur gradient appliqué aux points "contrainte".

Comme nous l'avons vu, les matrices A_1 et A_2 sont symétriques définies, positives. (26) et (27) peuvent être représentées par l'équation unique :

$$(28) \quad A Z = K$$

On a posé ; avec $h = \delta\sqrt{2}$

$$A = \begin{vmatrix} h^2 A_2 & \frac{h^2 \gamma_{\omega}}{kl} D_2 \\ h^2 D_1 & h^2 A_1 \end{vmatrix} \quad K = \begin{vmatrix} Fh^2 & \\ & Gh^2 \end{vmatrix} \quad Z = \begin{vmatrix} P \\ X \end{vmatrix}$$

Considérons la matrice

$$\Omega = \begin{vmatrix} h^2 A_2 & 0 \\ 0 & h^2 A_1 \end{vmatrix}$$

Ses valeurs propres sont celles de $h^2 A_2$ et $h^2 A_1$. Ω est donc positive définie symétrique.

De plus, il est aisé de montrer (cf [4] p.57) que la valeur propre minimum de A_2 soit $\lambda_{\min}(A_2)$ est telle que

$$\lambda_{\min}(A_2) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{X^2} + \frac{\pi^2}{Y^2}$$

où X et Y mesurent les côtés du domaine rectangle Δ .

De même A_1 étant réelle symétrique, la valeur propre minimum de A_1 est donnée par $\lambda_{\min}(A_1) = \min_x (x, Ax)$ où x est un vecteur unitaire. Quand $h \rightarrow 0$, xAx reste strictement positif puisque cette forme quadratique représente l'énergie élastique associée au champ de déplacement $x \neq 0$. Il en résulte que :

$$\lambda_{\min}(\Omega) = 0 (h^2)$$

Or, les valeurs propres d'une matrice sont fonctions continues de ses éléments.

Pour l infini, $\lambda(\Omega) = \lambda(A)$. Pour $\frac{h^2}{l}$ suffisamment petit, A est positive définie.

Toutefois A n'est pas symétrique et le théorème de REICH ([1] p.237) sur la convergence de la méthode de GAUSS-SEIDEL ne s'applique plus.

Divisons chaque équation de (29) par l'élément diagonal correspondant de A qui est indépendant de h.

$$A \text{ devient : } \Gamma = E + I + F$$

où E et F sont respectivement les matrices triangulaires des éléments inférieurs et supérieurs à la diagonale principale et I la matrice unité. Nous allons montrer que Γ est faiblement non-symétrique au sens de STEIN [5] et que la méthode de GAUSS-SEIDEL converge.

Posons : $C = \frac{1}{2} (\Gamma + \Gamma^T) = I + \frac{1}{2} (E^T + F) + \frac{1}{2} (E + F^T)$
 et $\Pi = \frac{1}{2} (E - F^T)$. C est positive définie symétrique et Π caractérise l'antisymétrie de Γ .

Pour étudier la convergence de la méthode, il suffit de montrer que la méthode appliquée à un vecteur initial Z^0 quelconque, avec $K = 0$, donne

$$|Z|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

L'itération s'écrit : $Z^{n+1} = B Z^n$ avec :

$$B = - (I + E)^{-1} F$$

$$\text{Posons : } z^n = Z^n - Z^{n+1}$$

Alors :

$$Z^n = (I - B)^{-1} z^n \text{ et } Z^n + Z^{n+1} = (I + B) (I - B)^{-1} z^n$$

On vérifie que :

$$(I + B) (I - B) = (I - B) (I + B)$$

Ainsi, $I + B$ et $(I - B)^{-1}$ commutent et :

$$Z^n + Z^{n+1} = (I - B)^{-1} (I + B) z^n$$

De plus :

$$I + B = (I + E)^{-1} (I + E - F)$$

$$I - B = (I + E)^{-1} (I + E + F)$$

$$(I - B)^{-1} (I + B) = (I + E + F)^{-1} (I + E - F)$$

Puisque C est symétrique, on a d'autre part :

$$\begin{aligned} z^{nT} C z^n - z^{n+1 T} C z^{n+1} &= (z^n - z^{n+1})^T C (z^n + z^{n+1}) \\ (29) \quad &= z^{nT} C (I + E + F)^{-1} (I + E - F) z^n = z^{nT} Q z^n \end{aligned}$$

avec
$$Q = (I + E + F - \Pi + \Pi^T) (I + E + F)^{-1} (I + E - F)$$

La convergence est assurée si Q ou $M = \frac{1}{2} (Q^T + Q)$ sont définies positives, puisque $z^n = (I - B) z^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{Or :} \quad M &= \frac{1}{2} \left[I + E^T - F^T + I + E - F + (I + E - F)^T (I + E + F)^{-1 T} (\Pi^T - \Pi) \right. \\ &\quad \left. + (\Pi^T - \Pi) (I + E + F)^{-1} (I + E - F) \right] \\ &= I + \Pi + \Pi^T + \frac{1}{2} \left[(\Pi^T - \Pi) (I + E + F)^{-1} (I + E - F) \right. \\ &\quad \left. + (I + E^T - F^T) (I + E^T + F^T)^{-1} (\Pi^T - \Pi) \right] \end{aligned}$$

Posons $M = I + P$. La matrice M sera définie positive si, $N(P)$ désignant une norme de l'opérateur P, $N(P) < 1$.

$$\text{Or } N(P) < 2 N(\Pi) \left[1 + N(I + E + F)^{-1} N(I + E - F) \right]$$

Comme $N(I + E + F)^{-1} N(I + E - F) = O(1)$, il suffit de montrer que $N(\Pi)$ peut être pris petit pour que la condition soit remplie.

Pour cela prenons pour norme de Π :

$$\|\Pi\|_{\infty} = \max_j \sum_k |\Pi_{jk}|$$

Les matrices A_2 et A_1 étant symétriques, Π ne dépend que des matrices $h^2 D_1$ et $\frac{h^2}{l} D_2^T$.

$$\text{On a :} \quad \|\Pi\|_{\infty} = h^2 \|D_1\|_{\infty} + \frac{h^2}{l} \frac{\gamma_{\omega}}{k} \|D_2^T\|_{\infty}$$

D_1 représente l'opérateur gradient, appliqué à une fonction ; chaque ligne de D_1 comporte au maximum deux termes différents de zéro et égaux à $\frac{1}{h}$ en valeur absolue. D_2 représente l'opérateur divergence appliqué à un vecteur ; chaque colonne de D_2 comporte au maximum quatre termes différents de zéro et égaux à $\frac{1}{h}$

en valeur absolue.

$$\text{Alors } \|\Pi\|_{\infty} = 2h + \frac{4\gamma_{\omega}}{k} \frac{h}{l}$$

peut être rendu aussi petit que voulu en prenant h et $\frac{h}{l}$ suffisamment petits.

La méthode implicite de résolution du problème parabolique semble inconditionnellement stable. Il est donc a priori possible de satisfaire les conditions de convergence définies plus haut. Il faut toutefois remarquer qu'elles peuvent imposer un pas de temps grand conduisant à une mauvaise précision. En pratique, les conditions ont été satisfaites sans difficultés. Prenant h constant, nous avons constaté une convergence moins rapide pour les valeurs petites de l . Ceci est compensé en partie par le fait que le vecteur initial Z^0 qui est solution du pas de temps précédent est d'autant plus proche de la solution cherchée que l est petit ; alors le nombre d'itérations pour obtenir une précision donnée varie peu avec l . Pour le premier pas de temps, où ce dernier facteur ne joue pas, le nombre d'itérations nécessaires croît considérablement quand l décroît.

Les conditions pour assurer la convergence reviennent pratiquement à imposer au problème traité d'appartenir à un certain voisinage du problème statique associé. Nous avons vu au paragraphe C-1-b quels sont les avantages associés aux problèmes d'évolution en comparaison des problèmes statiques correspondants : en particulier, nous avons constaté l'invariance vis à vis du pas h du nombre d'itérations nécessaire pour une convergence donnée à $r = \frac{1}{h^2}$ constant. Il convient donc, pour cette raison, de donner à r la plus petite valeur compatible avec les conditions de convergence, r_{∞} correspondant au problème statique.

Remarquons enfin que les conditions décrites pour la convergence sont des conditions suffisantes et si elles permettent d'envisager des solutions possibles par la méthode de GAUSS-SEIDEL, la convergence de celle-ci peut exister pour des matrices plus fortement non-symétriques. Il faut toutefois noter que l'antisymétrie joue un grand rôle. Avec la méthode de discrétisation utilisée, celle-ci provient dans le cas général :

1. de l'ordre de balayage
2. des termes en $h^2 D_1$ et $\frac{h^2}{l} D_2$
3. de la façon d'exprimer les conditions aux limites.

REFERENCES

- [1] G.E. FORSYTHE et W.R. WASOW - "Finite-Difference methods for Partial Differential equations" - John Wiley & sons, inc. - 1967 p.237
- [2] V.K. SAUL'YEV - "Integration of equations of parabolic type by the method of nets" - Pergamon press - 1964
- [3] R.D. RICHTMYER et K.W. MORTON - "Difference methods for initial-value problems"- John Wiley & sons - 1967 - P.45
- [4] E.L. WACHSPRESS - "Iterative solution of elliptic systems" - Prentice-Hall, inc. - 1966 - p.57
- [5] P. STEIN - "The convergence of Seidel Iterants of Nearly Symmetric Matrices" Math. Aid Comput - vol.5 - 1951 - p. 237-240

CHAPITRE V

RESULTATS NUMERIQUES

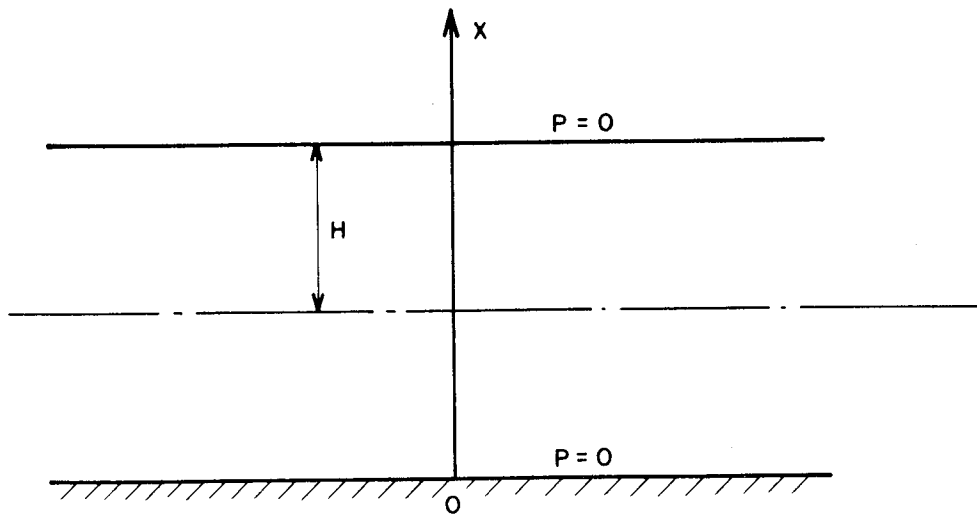
Ce chapitre est consacré aux applications des méthodes décrites auparavant, à la résolution numérique de quelques problèmes de consolidation.

Tout d'abord, pour le cas monodimensionnel, nous étudions l'influence de la variation de l'indice des vides et de la non-linéarité de la loi de comportement du squelette sur l'évolution du phénomène. Nous montrons sur un cas simple - une expérience oedométrique - l'importance de la prise en compte de lois non-linéaires. Les résultats sont comparés à ceux donnés par la théorie classique de TERZAGHI.

Nous traitons ensuite un problème bi-dimensionnel pour différents types de lois de comportement du squelette. Dans le cas d'un squelette isotrope élastique, doué de constantes de LAME invariables, à travers lequel filtre un liquide incompressible, nous testons l'algorithme de calcul des conditions initiales présenté au chapitre III ainsi que la méthode de calcul du phénomène évolutif. Puis, nous étudions deux problèmes avec squelette à comportement non-linéaire, en particulier lorsque la loi de comportement présente une surface limite. Les résultats montrent la stabilité de la méthode numérique et mettent - ici encore - en évidence l'influence de la non-linéarité du comportement du squelette.

A - PROBLEMES MONODIMENSIONNELS

Nous étudions l'évolution en cours du temps d'une couche horizontale de sol, d'épaisseur $2H$ suivant la verticale Ox , drainée par ses deux faces, lorsqu'on applique à l'instant $t = 0$ une surcharge S normale et uniforme à sa surface supérieure (fig. 1). S reste constante dans le temps pour $t \geq 0$.



. Figure 1 .

Le problème ainsi présenté est une bonne schématisation de l'essai oedométrique couramment pratiqué en laboratoire pour l'étude des caractéristiques mécaniques des sols.

Le sol étudié est isotrope, et composé d'un squelette solide et d'eau interstitielle incompressible. La déformation est monoaxiale. Le squelette est caractérisé par un seul coefficient incrémental \bar{E}' , module incrémental oedométrique, défini à partir des coefficients incrémentaux de LAME $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ ou des modules d'YOUNG \bar{E} et de POISSON $\bar{\nu}$, par :

$$\bar{E}' = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} = \frac{\bar{E} (1 - \bar{\nu})}{(1 + \bar{\nu}) (1 - 2\bar{\nu})}$$

La loi du squelette est alors représentée sous sa forme incrémentale, par :

$$(1) \quad \bar{\tau} = - \bar{E}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

où $\bar{\tau}$ est l'accroissement de contrainte intergranulaire
 \bar{u} l'accroissement de déplacement suivant Ox

D'autre part, le bilan hydraulique s'écrit :

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

où k est le coefficient de perméabilité
 γ_w le poids spécifique de l'eau
 p la surpression interstitielle de l'eau
 θ la dilatation cubique : $\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$

Enfin, l'équilibre s'écrit ici :

$$S = \bar{\tau} + p$$

et donc, eu égard au fait que S demeure constant :

$$(3) \quad \bar{\tau} = - p$$

Portant (1) et (3) dans (2) et en tenant compte de $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}$, nous obtenons l'équation écrite dans le domaine de validité de (1) - soit $t \in [t_n, t_{n+1}]$ - :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p_n + \bar{p}}{\partial x} \right) = \frac{1}{E'} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}$$

où p_n est le champ de pression interstitielle au temps t_n .

L'équation (4), avec les conditions aux frontières, $\bar{p}(0,t) = 0$; $\bar{p}(2H,t) = 0$ et une condition initiale $p_n(x, t_n) = f_n(x)$ donnée, décrit la consolidation. Comme nous l'avons vu au chapitre III, pour le problème étudié ici, la surpression interstitielle est, à l'instant $t = + 0$, égale à S : $f_0(x) = S$.

L'équation (4) montre que, pour les problèmes mono-dimensionnels, l'équation parabolique se découple du système elliptique associé. Celui-ci est d'ailleurs dégénéré et se réduit à :

$$(5) \quad E' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \bar{p}$$

Le champ \bar{p} étant déterminé à partir de (4) et des conditions aux limites associées, l'accroissement de déplacement \bar{u} s'obtient à partir de l'équation différentielle (5) avec la condition initiale $\bar{u}(2H, t) = 0$.

Rappelons que la théorie classique de TERZAGHI repose sur l'approximation $E'(x, t) = \text{cste}$, $k(x, t) = \text{cste}$; en sorte que l'équation (4) se ramène à l'équation linéaire :

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{E'} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Pour intégrer numériquement le système (4) et (5), nous utilisons la méthode explicite décrite au chapitre IV. En effet, le nombre d'opérations à effectuer à chaque pas de temps l est assez petit pour permettre d'utiliser un pas de temps satisfaisant la condition de stabilité :

$$(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{k}{\gamma_w} \frac{1}{h^2} < \frac{1}{2}$$

où h est le pas d'espace.

L'intégration est faite pour $x \in [0, H]$ avec comme conditions aux limites $\bar{p}(0,t) = 0$ et $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}(H,t) = 0$. En pratique, le pas de temps l correspond au domaine de validité de l'équation tangente (4) si bien que k et E' sont ajustés à chaque pas de temps.

1- Influence de la variation des vides (cf [1])

L'indice des vides e d'un sol est le rapport du volume des vides (c'est-à-dire l'ensemble du volume qui n'est pas rempli par des particules solides) au volume des particules solides. Sa variation est directement reliée à celle de $\bar{\theta}$ par :

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{e}}{1 + e}$$

Toutes choses égales par ailleurs, plus l'indice des vides est petit, plus l'écoulement est lent, donc k petit. Pour montrer l'influence de e sur la consolidation, le squelette est pris élastique-linéaire : $\bar{E}' = \text{constante}$; et nous avons adopté pour diagramme (k, e) une loi empirique qui semble conforme aux données expérimentales disponibles (cf CAQUOT et KERISEL [2])

$$(6) \quad \frac{k}{\gamma_w} = A \frac{e^3}{1+e}$$

où A est une constante à déterminer par l'expérience.

L'intégration numérique a été conduite dans le cas d'une surcharge $S = 3 \text{ kg/cm}^2$ d'une part pour un sable $E' = 600 \text{ kg/cm}^2$, $e(x, +0) = 0.8$, d'autre part pour une argile avec $E' = 3 \text{ kg/cm}^2$, $e(x, +0) = 1.8$.

Les résultats qui correspondent donc au cas E, ν constants, k variable - sont présentés sur les figures 2 et 3, conjointement avec ceux de TERZAGHI - cas E, ν et k constants et ceux du paragraphe 2 suivant - cas E, ν et k variables.

Nous avons porté en abscisse le facteur temps T défini par :

$$(7) \quad T = \frac{AE'}{H^2} \frac{e_0^2}{(1+e_0)^3} \frac{E'}{S^2} t$$

La figure 2 montre le pourcentage U de dissipation de la pression interstitielle au milieu de la couche, défini par :

$$U = \frac{P(H, t)}{S}$$

et la figure 3 le pourcentage U_v de consolidation défini par :

$$U_v = \frac{u(H, t)}{u(H, \infty)}$$

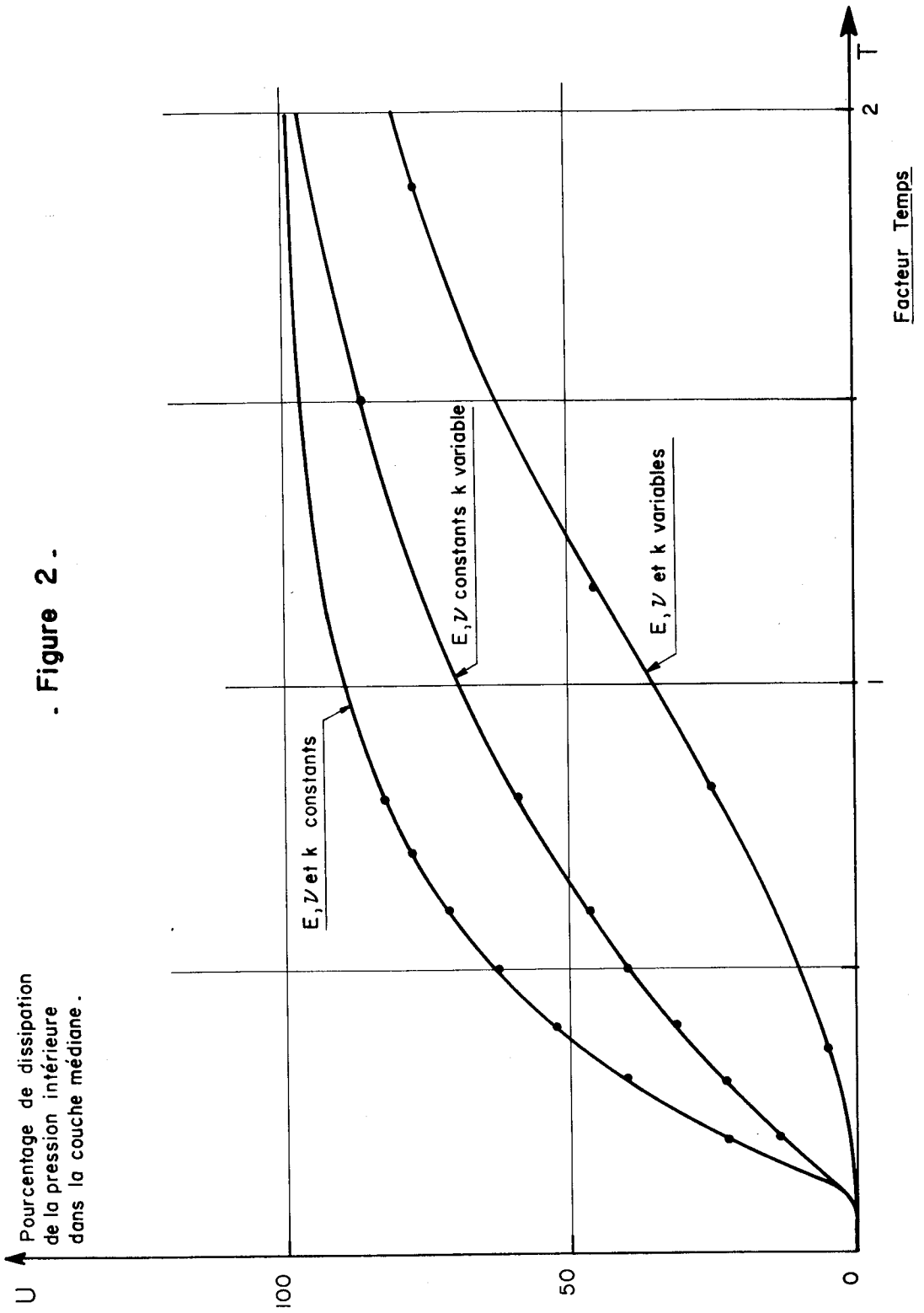
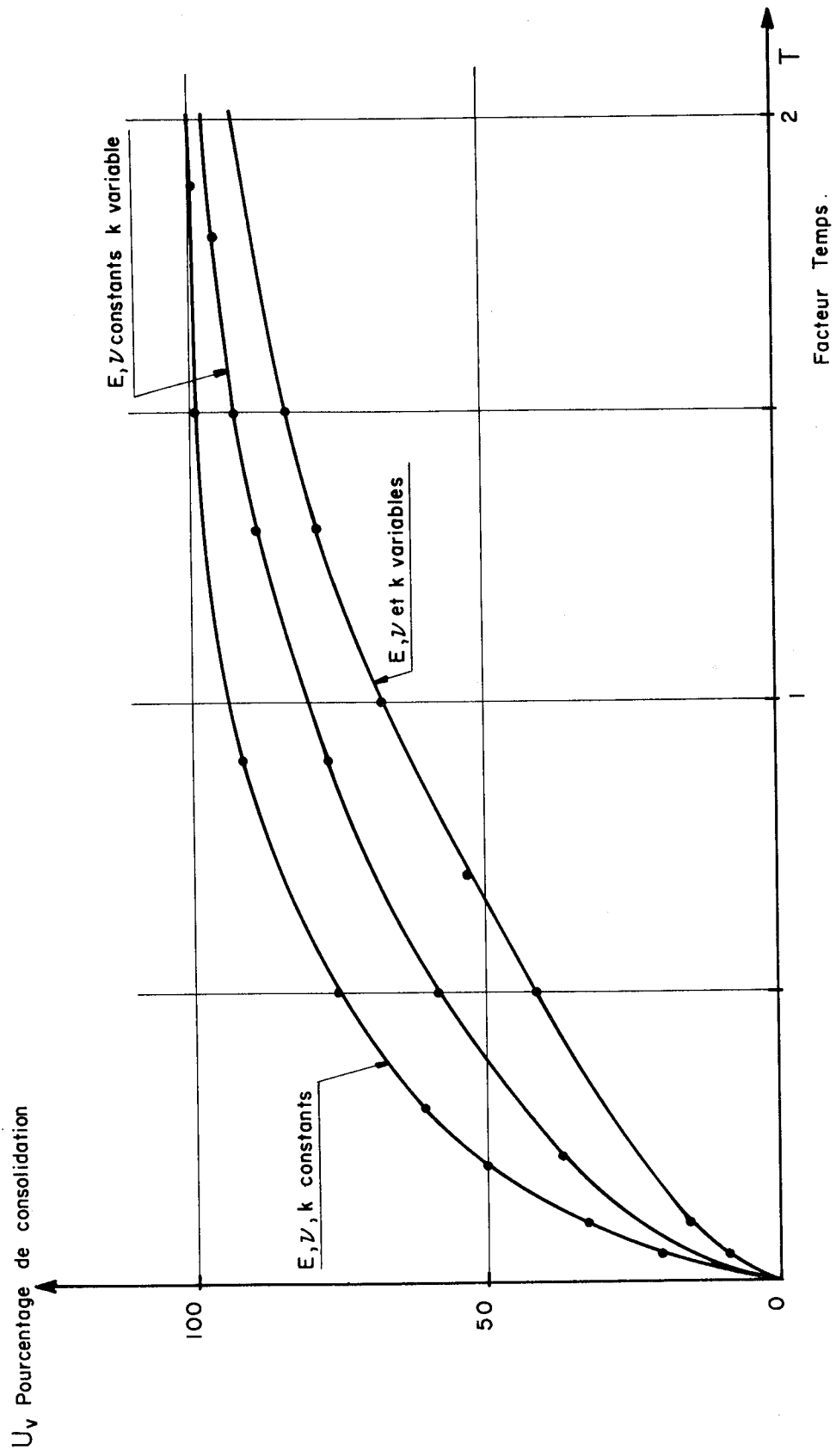


Figure 2.

- Figure 3 -



Nous constatons que l'approximation de TERZAGHI est très bonne dans le cas du sable, en raison de la forte valeur de E' . Les courbes sont alors confondues et nous n'avons porté, en conséquence, sur les figures 2 et 3 que les résultats concernant l'argile. Pour celle-ci les différences sont notables : le sol se consolide moins rapidement que le prévoient les calculs classiques de TERZAGHI basé sur des hypothèses trop restrictives.

2- Cas du squelette à comportement non-linéaire et perméabilité variable

a - Loi oedométrique

Nous avons fait au paragraphe précédent $\bar{E}' = \text{cste}$. Cette vue est peu réaliste. On a tenté de prendre en compte les variations de \bar{E}' à la fois en fonction de la contrainte intergranulaire τ et de l'indice des vides e d'autre part. L'essai oedométrique bien connu, permet de répondre de façon approchée à cette question. Il conduit à la loi empirique :

$$\frac{\bar{e}}{\log \tau} = C_c = \text{cste}$$

La constante du matériau C_c ainsi mesurée porte le nom de coefficient de consolidation. Un calcul élémentaire permet de justifier la relation classique :

$$(8) \quad \bar{E}' = \frac{2,3}{C_c} \tau (1+e)$$

Remarquons que la relation (8) suppose la loi de comportement du squelette est de la forme $\bar{\tau} = -\bar{E}' \frac{\partial u}{\partial x}$. Or on observe pour les argiles en particulier une consolidation "secondaire", c'est-à-dire des déformations après dissipation totale de la surpression interstitielle. La loi (8) ne suffit pas dans ce cas à décrire le squelette.

b - Résultats obtenus

Nous avons appliqué ces données à un cas concret permettant la comparaison avec les résultats du 1.

Le squelette est supposé obéir à (8). Comme en 1- le coefficient de perméabilité k est variable suivant (6).

Le sol étudié est une argile-vase formant une couche de -6 à -8 m sur le site de l'usine sidérurgique de Dunkerque. Au temps $t = -0$, la contrainte intergranulaire est $\tau = 1 \text{ kg/cm}^2$, la pression interstitielle $p = 0$, et l'indice des vides $e_0 = 1,8$. Le coefficient de consolidation du squelette est $C_c = 0,5$. Une surcharge $S = 9 \text{ kg/cm}^2$ est appliquée au temps $t = 0$.

Les résultats sont portés sur les figures 1 et 2. Le facteur temps T , donné par (7), est calculé ici à partir d'une valeur moyenne du module incrémental oedométrique : $\bar{E}' = 30 \text{ kg/cm}^2$.

On voit apparaître l'importance de la non linéarité des lois de comportement en consolidation. De plus, le tassement pour $t = +\infty$ est 20% plus important dans le cas non-linéaire.

3- Comparaison à l'expérience

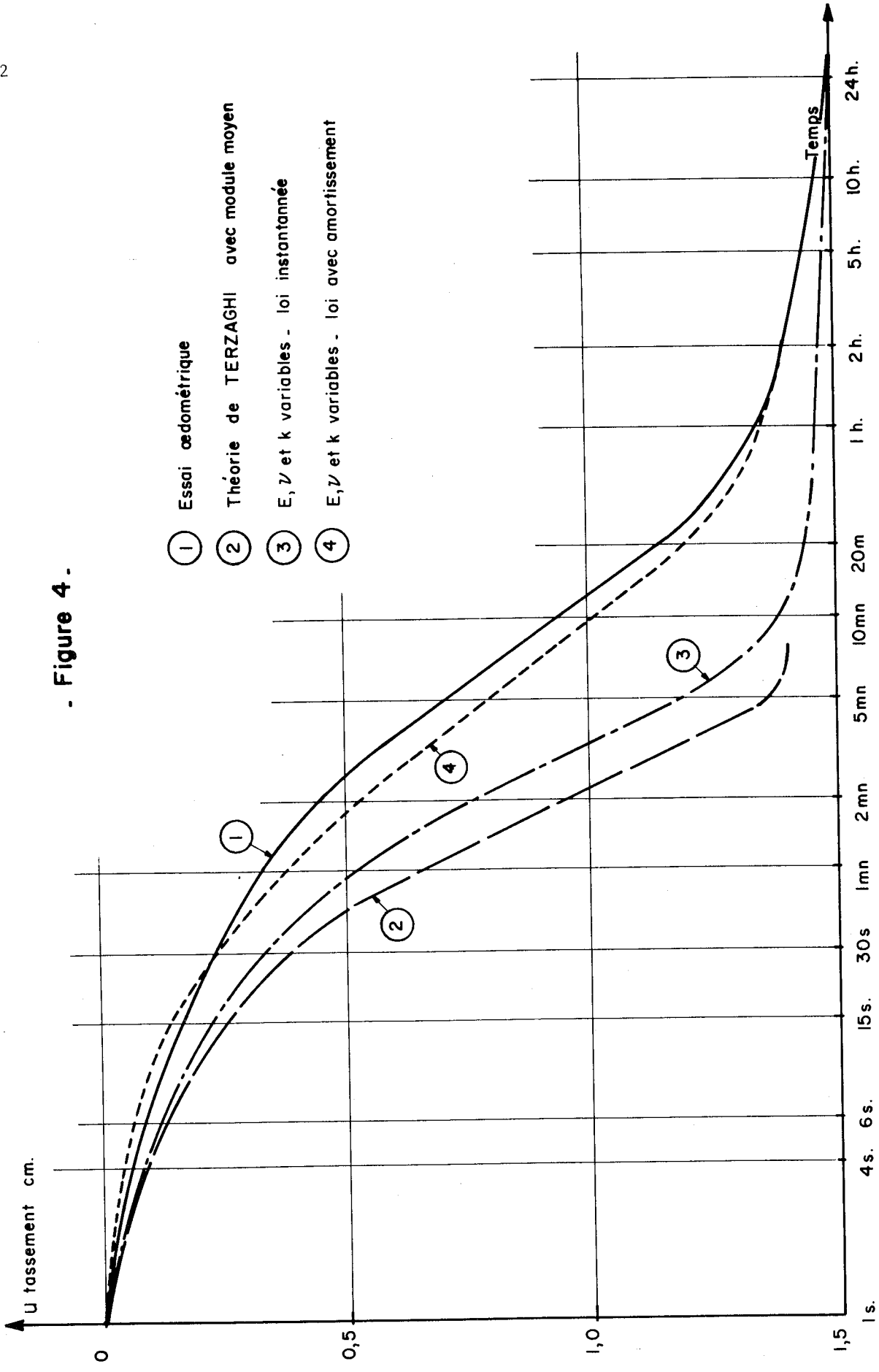
Nous avons utilisé un essai oedométrique réalisé au Laboratoires de Mécanique des sols de Grenoble. Nous insistons sur le fait que les résultats ne peuvent servir au contrôle expérimental d'une loi de comportement du sol. Les différentes expressions analytiques proposées renferment trop de paramètres - et même de fonctions arbitraires - pour qu'un essai aussi élémentaire permette de conclure. On peut seulement tester ainsi les lois les plus simples.

Le sol étudié est une argile tourbeuse de caractéristiques initiales : indice des vides 0,9, coefficient de perméabilité $8 \cdot 10^{-8} \text{ cm/s}$ et module oedométrique $20,9 \text{ kg/cm}^2$. Son coefficient de consolidation est $C_c = 0,55$. L'échantillon a été prélevé à 18 m de profondeur sur le site des Sablons à La Tronche (Isère).

Nous avons porté sur un même graphique (fig.4) :

1. Le résultat de l'essai oedométrique (tassement en fonction du temps) pour une charge initiale de $2,6 \text{ kg/cm}^2$ et une surcharge de $2,6 \text{ kg/cm}^2$.
2. La courbe de tassement-temps obtenue par la théorie de TERZAGHI avec un module oedométrique moyen donné par l'essai.
3. La même courbe avec une loi de comportement oedométrique du squelette donnée par l'essai et un coefficient de perméabilité variable suivant la loi indiquée plus haut.

- Figure 4 -



- ① Essai œdométrique
- ② Théorie de TERZAGHI avec module moyen
- ③ E, ν et k variables - loi instantanée
- ④ E, ν et k variables - loi avec amortissement

4. La même courbe avec une loi de comportement pour le squelette du type

$$\bar{\tau} = - \bar{E}' \frac{\bar{e}}{1+\bar{e}} + M \bar{t}$$

où \bar{E}' est le module incrémental oedométrique et $M\bar{t}$ un terme d'amortissement que nous avons évalué à partir de l'essai oedométrique, en étudiant la phase de consolidation secondaire.

Nous remarquons des différences importantes tant en ce qui concerne la durée du phénomène qu'en la grandeur du tassement final. Les résultats de la théorie linéaire de TERZAGHI sont les plus éloignés de la réalité : le tassement est sous évalué et la fin de la consolidation est obtenue en 10 mn alors que l'argile étudiée présente un tassement différé non terminé en 24 h. Les résultats théoriques les meilleurs sont obtenus avec la loi la plus complète : un module incrémental oedométrique variable et une viscosité.

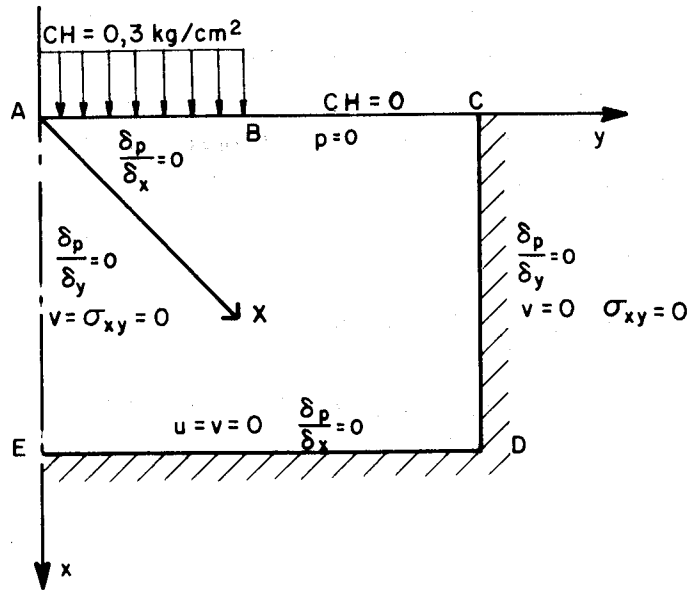
B - TRAITEMENT DE PROBLEMES BIDIMENSIONNELS

1- Un problème à squelette linéairement élastique aux constantes de LAME invariables

(cf [3])

Nous avons traité le problème plan schématisé sur la fig. 5 ci-dessous. Un sol occupe le domaine rectangle Δ : ACDE de 6,5 m sur 5 m. AE est axe de symétrie du problème. Une charge constante CH de 0.3 kg/cm^2 est appliquée au temps $t = 0$ par l'intermédiaire d'une membrane imperméable sur AB (3 m). Le reste de la surface du sol BC est libre. ED est une paroi rigide rugueuse et imperméable ; DC une paroi rigide lisse et imperméable. Lorsque BC est suffisamment grand devant AB cette dernière condition aux frontières donne une bonne simulation d'un domaine infini (cf WATISSEE [4]).

Le squelette supposé linéairement élastique est caractérisé par son module d'YOUNG E et son coefficient de POISSON ν ($E = 9.5 \text{ kg/cm}^2$; $\nu = 0.3$), il est saturé d'eau incompressible et son coefficient de perméabilité $k = 10^{-6} \text{ cm/s}$. Ces données sont de nature à permettre de tester la fiabilité du programme et la stabilité du calcul dans ce problème. En effet, les déplacements au temps infini doivent être égaux à ceux du problème élastique associé ($p(x, y, t) \equiv 0$). Ces derniers sont calculés lors du premier pas de l'algorithme au temps $t = 0$. La comparaison avec le champ obtenu pour t grand donne une bonne évaluation des erreurs de calcul au cours du phénomène évolutif.



- Figure 5 -

En définitive, nous traitons le problème décrit par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \mu \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta p = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

où λ et μ sont les coefficients de LAME.

Les conditions aux frontières sont :

- sur AB : $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ et contrainte totale normale ($\tau + p$) égale à 0.3 kg/cm^2

- sur BC : $p = 0$ et contrainte normale nulle

- sur CD : $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $v = 0$ et $\tau_{xy} = 0$

- sur DE : $u = v = 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

- sur EA : $v = \tau_{xy} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

Le champ des pressions interstitielles au temps $t = + 0$, qui constitue la condition initiale est déterminée par la méthode exposée au chapitre III.

L'intégration est conduite avec la méthode "implicite" décrite plus haut, avec un pas de temps constant $\Delta t = 2.10^6 \text{ s}$. Le calcul est arrêté pour $t = 4.8 \cdot 10^7 \text{ s}$ (24 pas de temps) pour lequel $\max(\Delta p) < 0.006 \text{ kg/cm}^2$. Le domaine Δ est discrétisé par 176 points conduisant à des matrices à inverser de rang 352 pour $t = 0$ et 528 pour $t > 0$. Le coefficient de surrelaxation est 1.4 pour les inversions au temps $t = 0$ et 1.45 pour $t > 0$. Les itérations d'inversion de matrices sont arrêtées lorsque les variations relatives des inconnues d'un pas au suivant toutes inférieures à 10^{-3} . Ceci conduit à un nombre d'itérations variant de 110 à 37 pour l'algorithme $t = 0$, de 171 à 62 pour $t > 0$, les itérations les plus coûteuses étant les premières dans les deux parties du calcul. Les itérations de l'algorithme au temps $t = 0$ sont arrêtées lorsque $\max(\tau_m) \leq 0.001 \text{ kg/cm}^2$ (τ_m , contrainte intergranulaire moyenne est nulle dans la solution exacte).

Le temps de calcul est de 6 mn sur l'IBM 360-65 de l'I.M.A.G. (Grenoble I).

Nous présentons sur les figures 6 et 7, le champ des pressions à différents instants. Notons une circonstance intéressante au point de vue physique : dans le voisinage du point D la pression interstitielle commence par croître au cours du temps avant de se dissiper. Le maximum de pression en un point n'est donc pas toujours atteint au temps $t = 0$.

La figure 8 montre les déformées au cours du temps de deux lignes horizontales.

Nous avons comparé le champ des accroissements totaux des déplacements durant le phénomène évolutif complet à celui donné par le problème élastique associé. Dans tout le domaine, la différence relative est inférieure à 5%, les plus forts pourcentages étant obtenus sur CD. Dans les zones intéressant plus particulièrement l'ingénieur, c'est-à-dire au voisinage de la fondation, elle était voisine de 2%. Le résultat du calcul peut être qualifié d'excellent compte tenu des remarques suivantes :

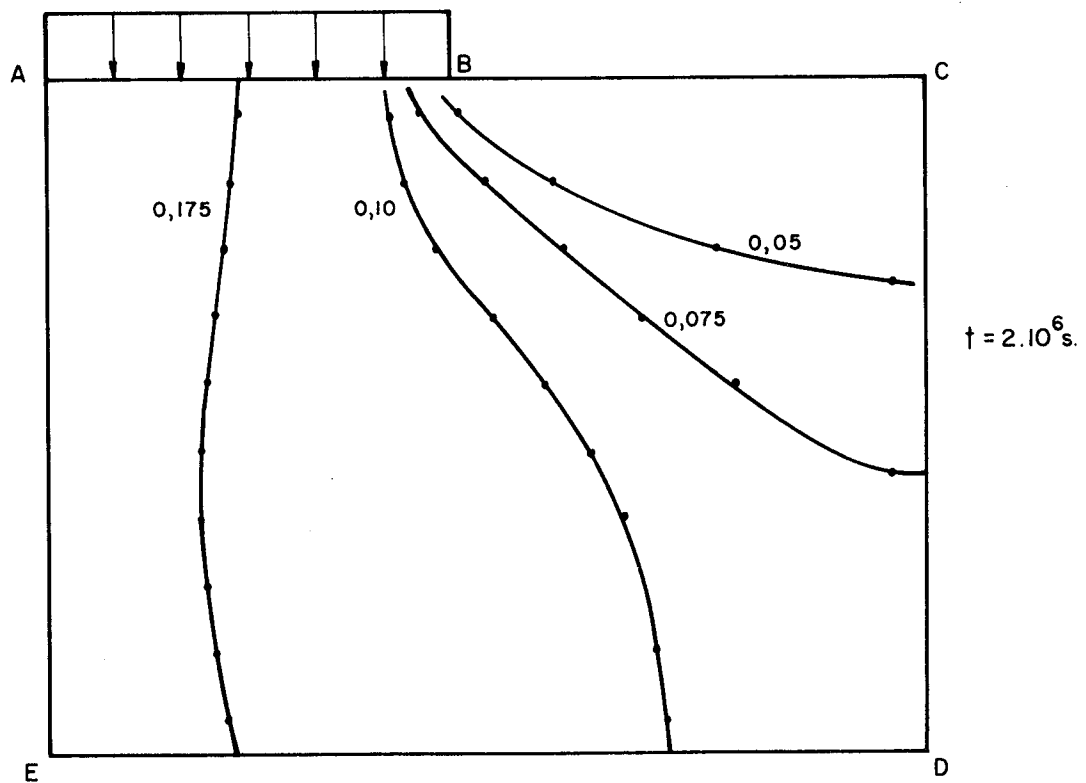
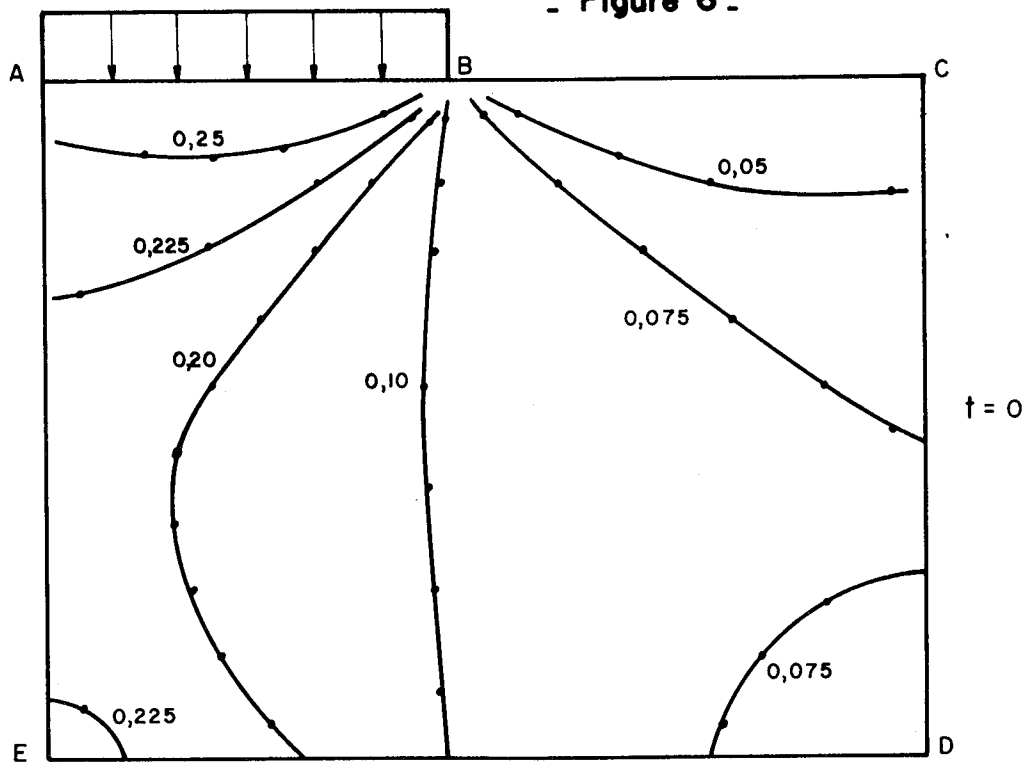
1. Le calcul est conduit seulement jusqu'au temps $t = 4.8 \cdot 10^7$ s où $\max p < 0.006 \text{ kg/cm}^2$
 Δ
2. Le champ de déplacement du problème élastique associé est lui-même obtenu par deux itérations indépendantes ; chacune de celles-ci est entachée d'erreurs qui peuvent dès lors s'ajouter.
3. Le champ des pressions interstitielles subit au temps $t = 0$ une discontinuité, notamment sur BC.

2- Etude de stabilité sur un problème à squelette de caractéristiques variables

Le sol occupe le domaine Δ défini sur la figure 5. Au temps $t < 0$, une charge d'eau constante et égale à 0.3 kg/cm^2 est appliquée le long du côté AB de Δ , BC étant drainé ($p = 0$) et nous supposons qu'au temps $t = 0$ le régime permanent d'écoulement est atteint. Au temps $t = 0$, AB est obturé par une membrane imperméable soumise à une pression de 0.3 kg/cm^2 . Le changement de la condition à la frontière sur AB déclenche le processus de consolidation.

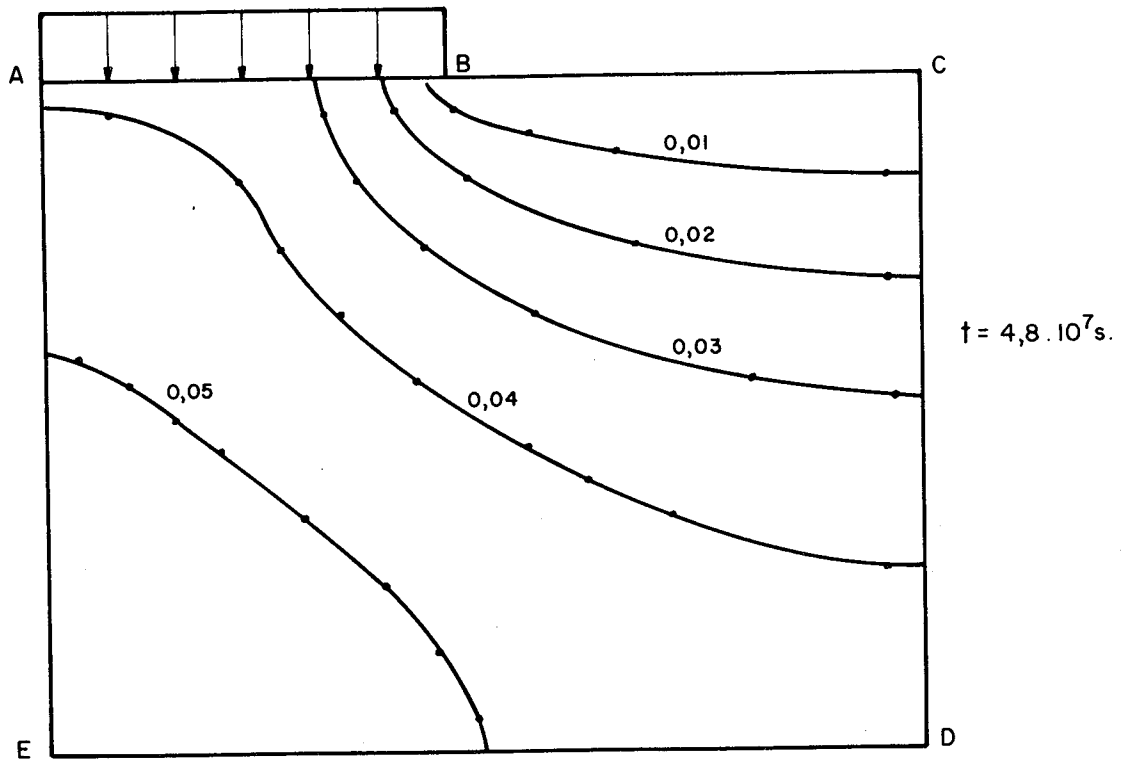
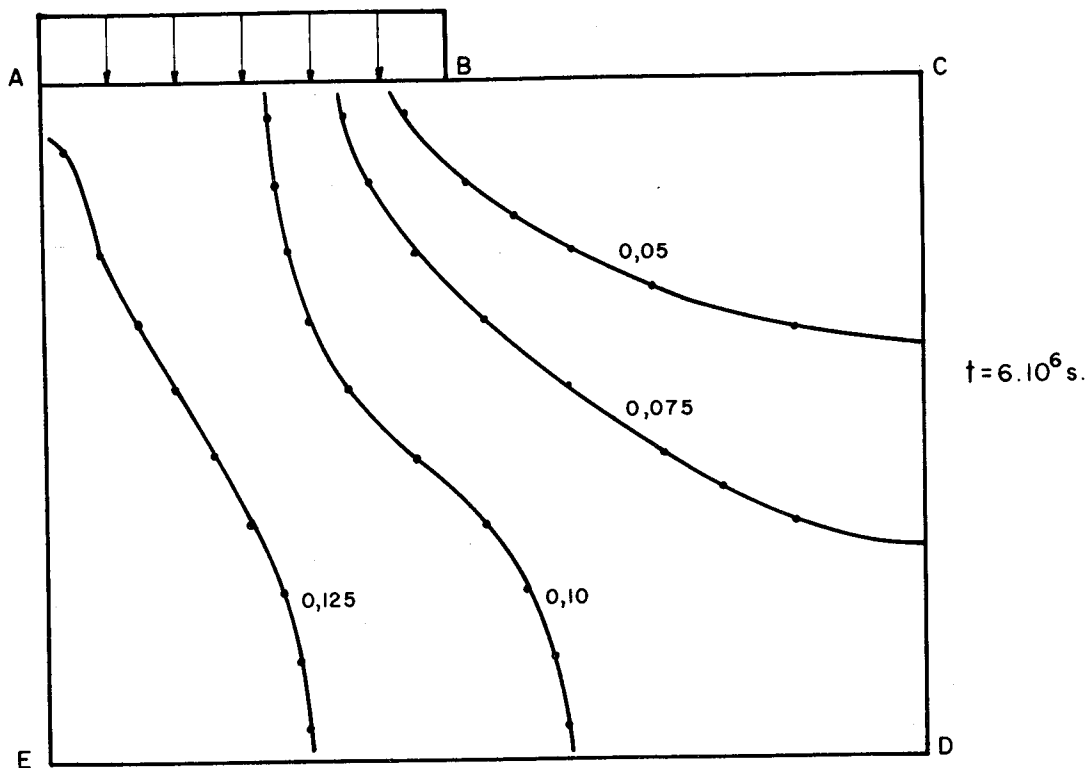
Relativement au matériau, nous ferons les hypothèses suivantes .

- Figure 6 -

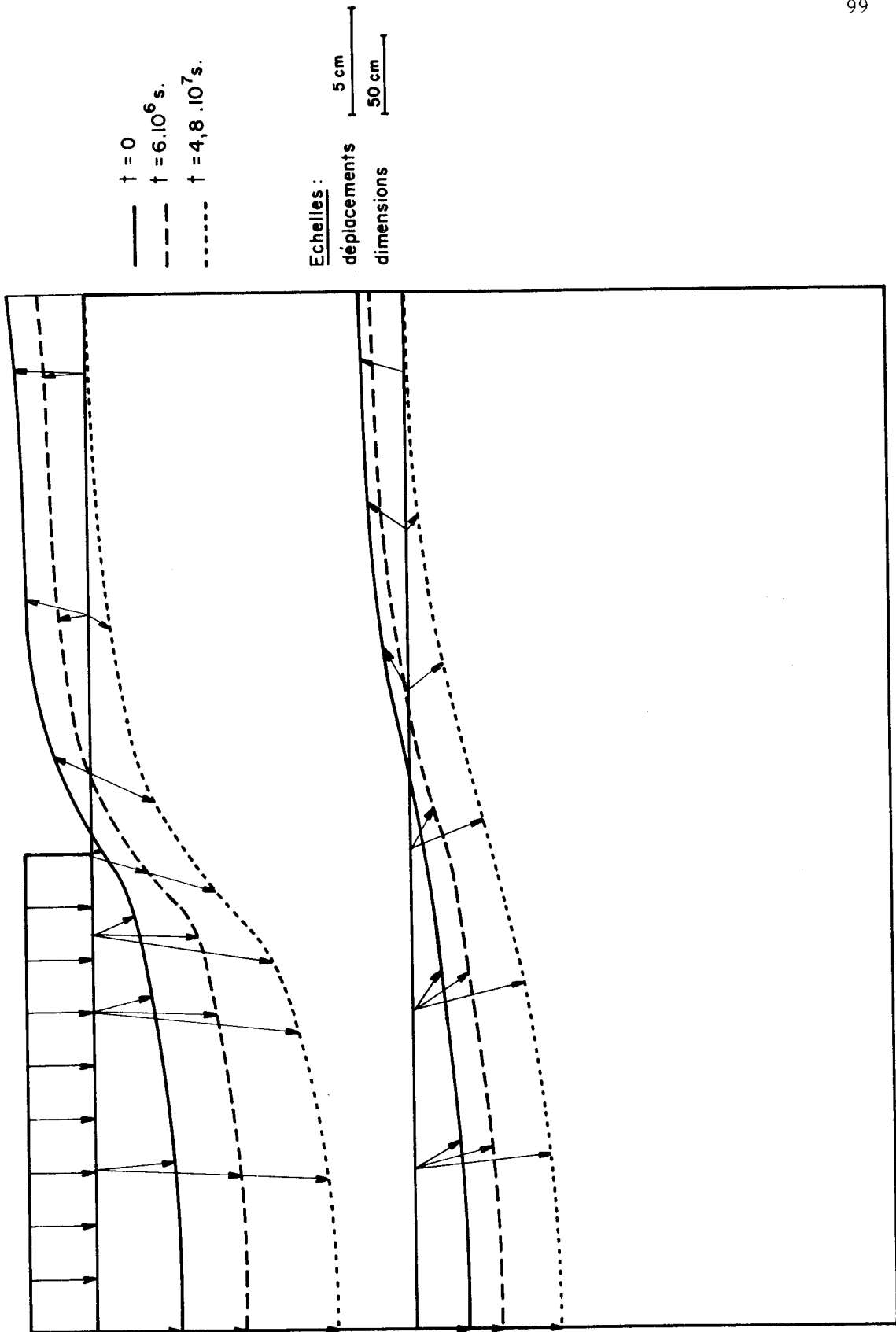


(Pressions intersticielles en kg/cm^2 E, ν et k constants)

- Figure 7.



(Pressions intersticielles en kg/cm^2 E, ν et k constants)



. Figure 8 . Déplacements E, ν, k constants .

Le squelette isotrope possède un module d'YOUNG incrémental \bar{E} variable suivant une loi de type oedométrique :

$$\bar{E} = E_0 + \frac{6.9 \bar{\tau}_m (1 + e_0) (1 + \bar{\theta})}{C_c (1 + \nu)}$$

- où $\bar{\tau}_m$ est l'accroissement de contrainte intergranulaire moyenne pour $t > 0$
 e_0 l'indice des vides initial
 $\bar{\theta}$ la dilatation cubique
 C_c le coefficient de consolidation ; ici $C_c = 0.5$
 ν le coefficient de POISSON supposé constant, quelque soit t : ici $\nu = 0.3$
 E_0 le module d'YOUNG au temps $t = 0$.

Au temps $t = 0$, $\bar{E} = E_0$ est donné constant dans le domaine.

La perméabilité k est variable suivant la loi (3) donnée au I, k étant constant dans Δ au temps $t = 0$. Ainsi la répartition de pression interstitielle initiale est donnée par $\Delta p = 0$ et il n'y a pas comme en 1- variation instantanée des champs de déplacement et de pression interstitielle. La consolidation est provoquée ici par des changements sur les seules conditions aux frontières en écoulement.

En définitive, nous avons à résoudre le problème aux limites ci-après.

Les équations aux dérivées partielles sont données sous la forme incrémentale valable pour $t \in (t_n, t_{n+1})$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) (\frac{\partial}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v})] + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \\ (9) \quad & \frac{\partial}{\partial y} [(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) (\frac{\partial}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v})] + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

où \bar{u} , \bar{v} et \bar{p} sont les accroissements pour $t > t_m$ des déplacements u , v et de la pression interstitielle. $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ sont les coefficients incrémentaux de LAME, reliés à \bar{E} et $\bar{\nu}$ par les relations classiques.

Les conditions aux frontières sont :

- sur AB : $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ et contrainte totale normale nulle

- sur BC : $p = 0$ et contrainte normale nulle

- sur CD : $\frac{\partial p}{\partial y} = v = \tau_{xy} = 0$

- sur DE : $u = v = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

- sur EA : $v = \tau_{xy} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

La condition initiale est déterminée - puisque $k(x, y, 0) = \text{cste}$ - par l'équation.

$\Delta p = 0$ avec les conditions aux frontières :

$p = 0.3 \text{ kg/cm}^2$ sur AB ; $p = 0 \text{ kg/cm}^2$ sur BC ;

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ sur CD et EA ; $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ sur DE

Le calcul pour $t > 0$, conduit comme en 1-, est réalisé avec différents pas de temps:

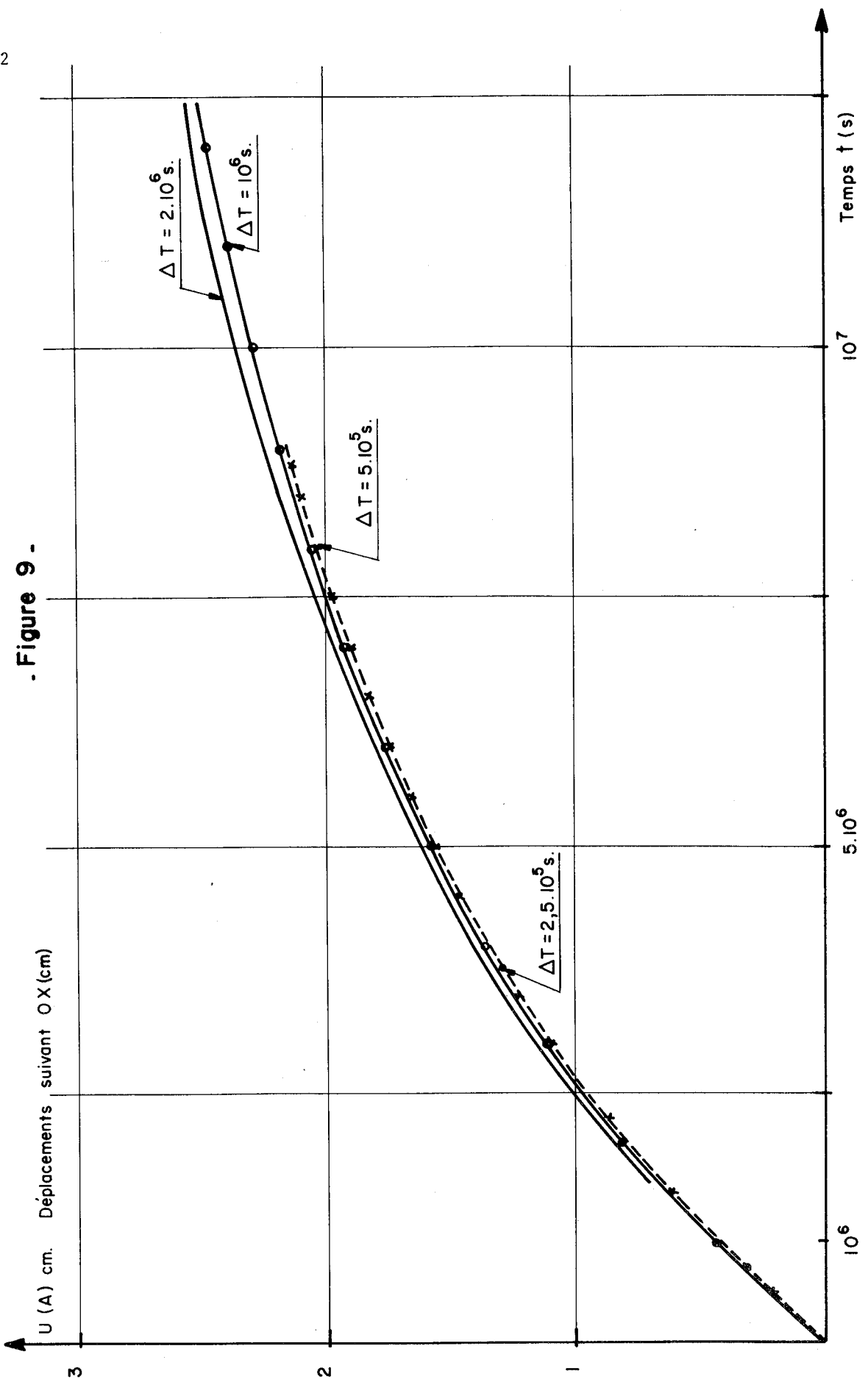
$1 = 2 \cdot 10^6$; 10^6 ; $5 \cdot 10^5$; $2.5 \cdot 10^5 \text{ s}$.

Les résultats obtenus montrent la stabilité du calcul. C'est ce qui résulte en particulier de l'examen des figures 9, 10 et 11 qui donnent les valeurs du déplacement U suivant Ox (cf fig 5), de la pression interstitielle p et du module \bar{E} au voisinage du point A en fonction du temps pour les différents pas de temps utilisés.

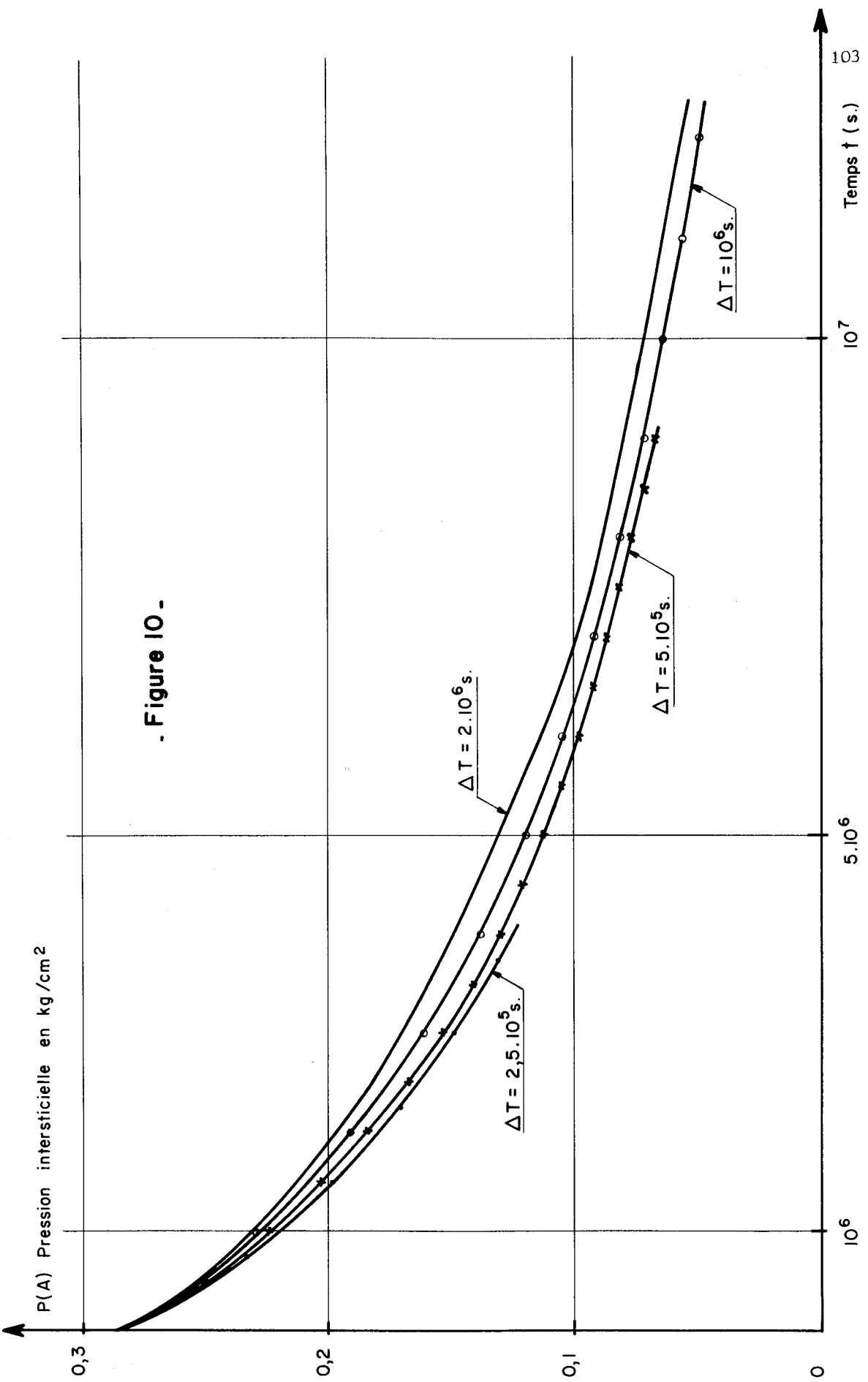
3- Squelette dont la loi rhéologique comporte une surface limite

Pour représenter le comportement du squelette donné isotrope, nous choisissons ici une loi à surface limite conique, avec une cohésion C et un angle de frottement interne ϕ . La surface limite est atteinte asymptotiquement.

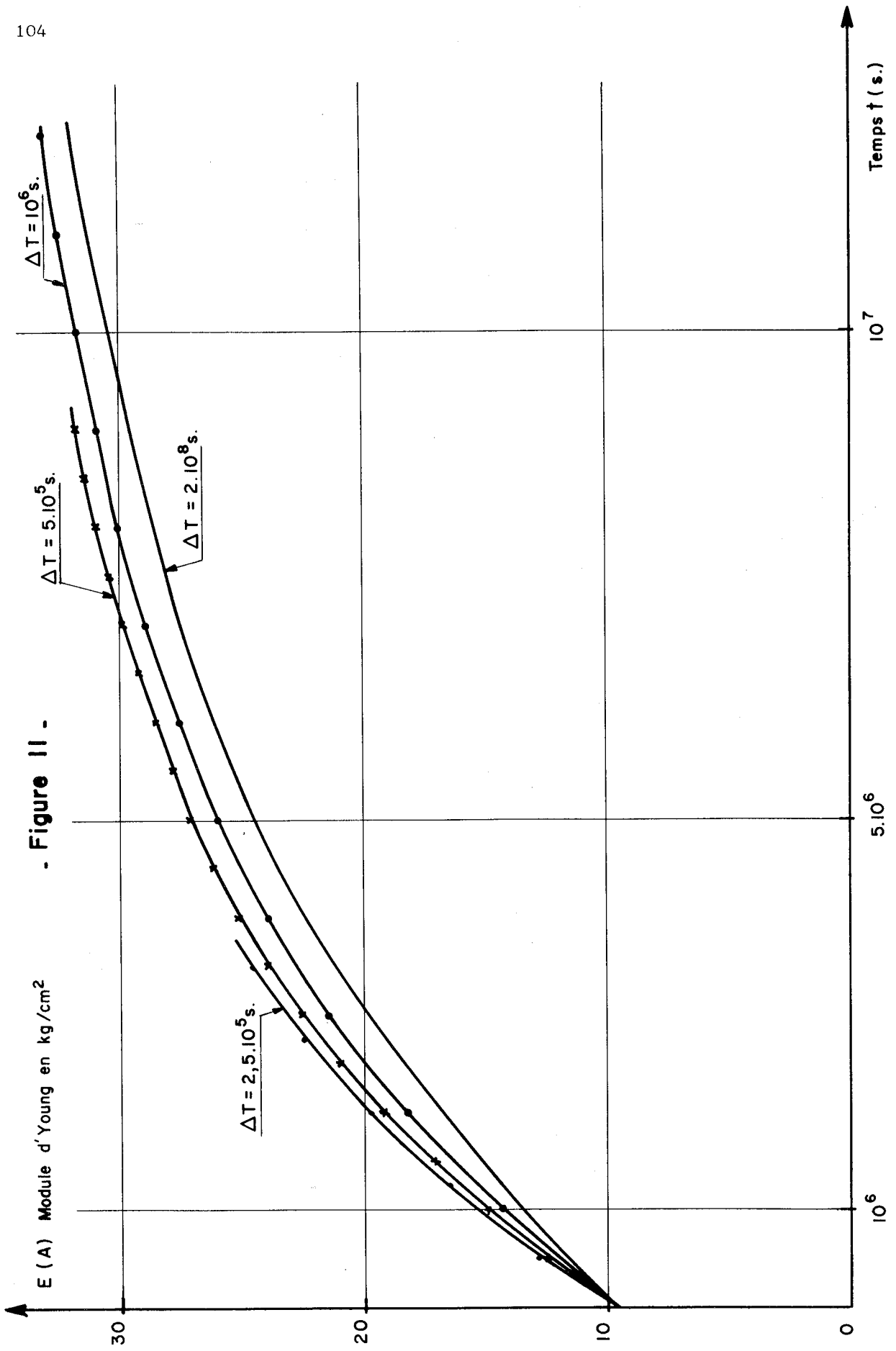
Pour une déformation isotrope, la loi incrémentale est la loi oedométrique utilisée en 2. La présence du déviateur modifie la valeur des coefficients incrémentaux de façon qu'au voisinage de la surface limite, le module d'YOUNG $\bar{E} \rightarrow 0$, le coefficient de POISSON $\nu \rightarrow 0.5$ et le module de volume $\bar{K} \rightarrow \infty$.



. Figure 9 -



. Figure 10 -



Les valeurs ci-après des modules, choisis a priori, répondent aux critères ci-dessus :

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2\nu_0)(1 - e)^3 \right] ; \quad \nu_0 = 0.3$$

$$\bar{E} = \frac{2.3 (1 + e) 3 \tau_m}{C_c} (1 - 2\nu_0)(1 - \rho)^{0.2}$$

où $\rho = \frac{\sqrt{2} J_s}{Y}$ caractérise le déviateur

avec
$$J_s = \frac{(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2 + (\tau_{12})^2 + (\tau_{13})^2 + (\tau_{23})^2}{6}$$

et
$$Y = \sqrt{2} \frac{\sin \phi}{\sqrt{9 \cos^2 \phi + 12 \sin^2 \phi}} (\tau_m + 3 C \cotg \phi)$$

ρ est nul pour un état de contrainte isotrope et vaut 1 pour un état limite.

Rappelons que τ_m est la contrainte moyenne intergranulaire, e l'indice des vides, et C_c le coefficient de consolidation. ν_0 est le coefficient de POISSON dans une déformation sous contrainte isotrope. Il est supposé constant.

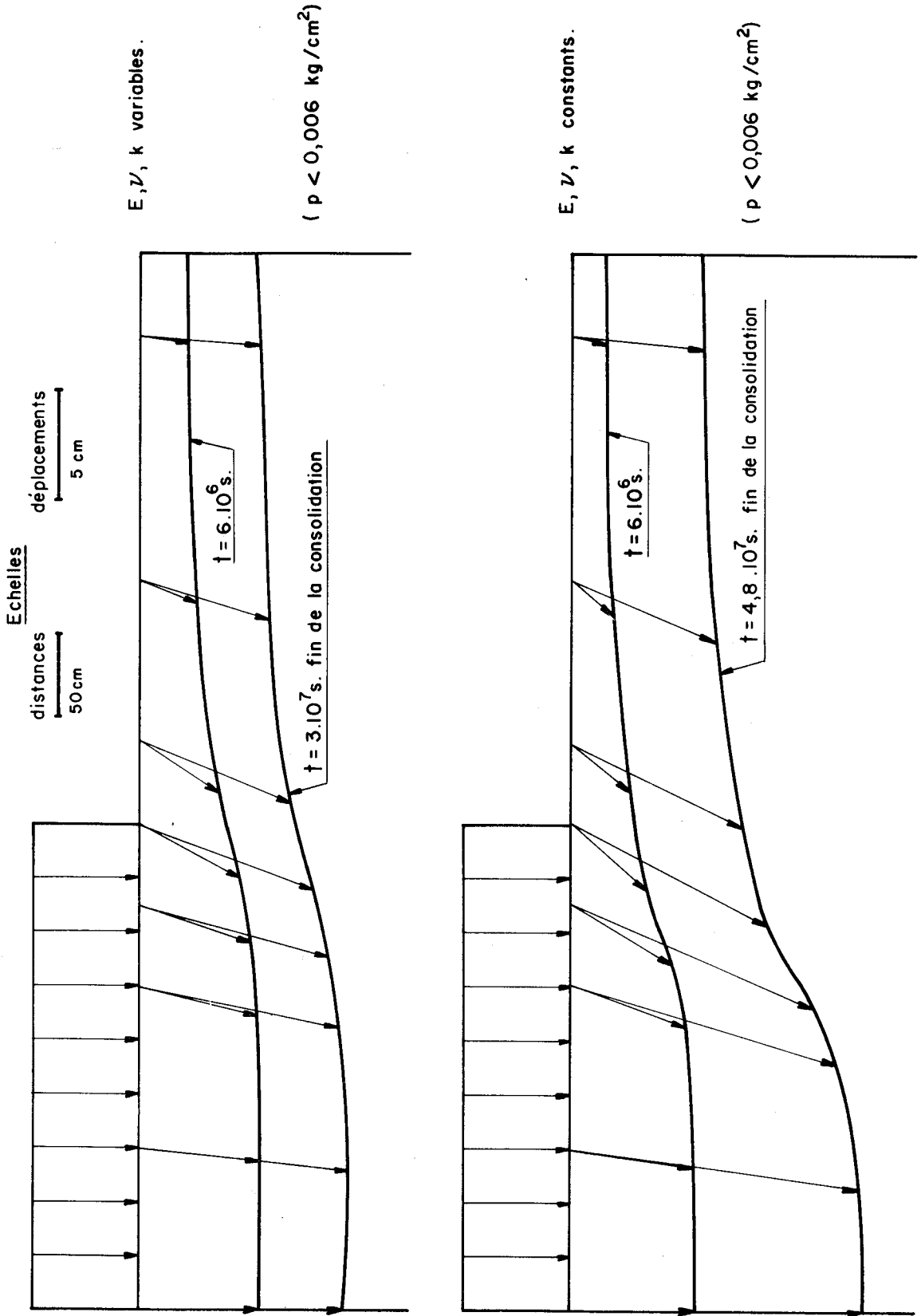
Le problème traité est celui présenté en 2- (équations (9) et conditions aux limites associées).

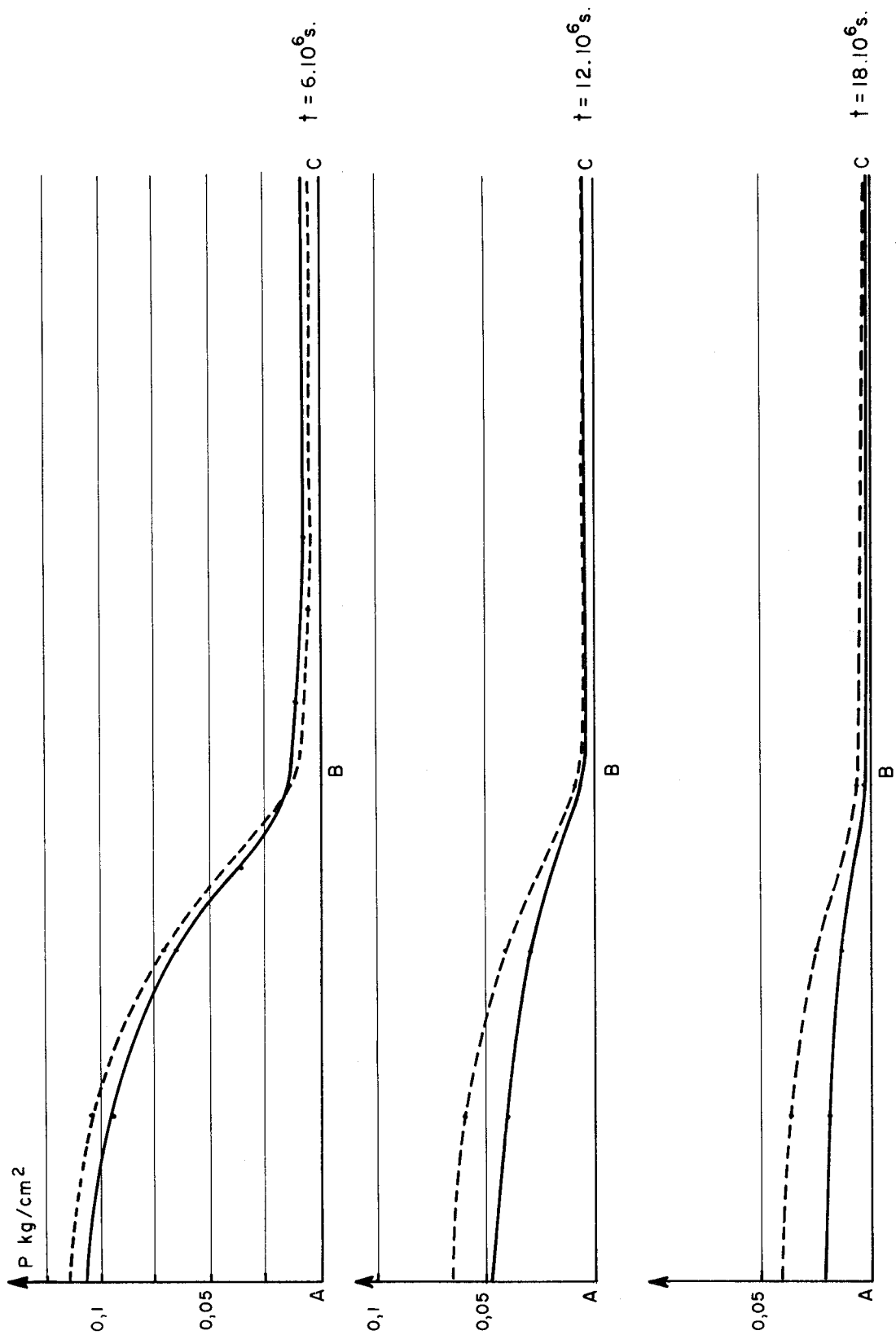
Le coefficient de perméabilité k varie suivant la même loi et les champs $\bar{E}(x,y)$, $\bar{\nu}(x,y)$ et $\bar{k}(x,y)$ sont pris constants à $t = 0$. Les résultats obtenus sont comparés à ceux du problème constant: $\bar{E}(t) = \bar{E}(0)$, $\bar{\nu}(t) = \bar{\nu}(0)$, $k(t) = k(0)$

Sur les figures (12) et (13) sont présentés les déformées de la surface et la pression interstitielle sous la surface à différentes valeurs du temps. Ces résultats traduisent encore l'importance d'un choix correct de la loi de comportement.

Dans le problème traité, \bar{E} varie très peu, $\bar{\nu}$ se rapprochant sensiblement de la valeur limite 0.5 dans les zones à fort déviateur de contrainte. Ceci explique qu'en fin de consolidation les déplacements soient inférieurs à ceux du problème constant.

. Figure 12 .





. Figure 13. Pression interstitielle sous la surface

C - CONCLUSION

Les calculs précédents semblent avoir été faits pour la première fois dans le cas de lois rhéologiques linéaires ou non. La comparaison avec les modèles linéaires met en évidence l'influence de la non-linéarité qui peut provoquer des écarts supérieurs à 20% dans les cas traités. Faute de connaître avec précision les lois de comportement du squelette, l'importance de la correction due à la non-linéarité est donnée ici seulement à titre conjectural.

Depuis nos premières publications sur ce sujet, signalons les calculs de consolidation de Y. YOKOO, K. YAMAGATA et H. NAGAOKA [5] concernant des sols à squelettes élastiques linéaires à caractéristiques constantes. La méthode utilisée est celle des éléments finis. Son avantage consiste en ce que la précision des calculs est modulable dans le champ mais le grave inconvénient est la grande complexité de sa mise en oeuvre. La précision obtenue nous semble illusoire dans la plupart des problèmes.

REFERENCES

- [1] J.L. AURIAULT - "Calcul de l'influence de la variation de l'indice des vides dans les problèmes de consolidation à une dimension d'un sol avec une loi élastique linéaire pour l'ossature solide" - CRAS - n° 270 - p.55-57 (5 janvier 1970)
- [2] A. CAQUOT et J. KERISEL - "Traité de mécanique des sols" - GAUTHIER-VILLARS - PARIS 1956 - p.62
- [3] J.L. AURIAULT - "Traitement des problèmes de consolidation" - Symposium Franco-Polonais "Problèmes de la rhéologie" - 14-18 sept.71 - Jablona - sous presse.
- [4] H. WATISSEE - "Problèmes bidimensionnels d'élasticité linéaire ou non-linéaire traités par le calcul numérique" - Thèse de spécialité (Troisième cycle de Mécanique des sols) - Grenoble - 14 Février 1969- p.33
- [5] Y. YOKOO , K. YAMAGATA et H. NAGAOKA - "Finite element method applied to BIOT's consolidation theory" - Soils and Foundations II , 1, Mars 1971, p.29-46.

