



**HAL**  
open science

## Evaluation des dérivés climatiques sur degrés-jours

Hélène Hamisultane

► **To cite this version:**

Hélène Hamisultane. Evaluation des dérivés climatiques sur degrés-jours. Economies et finances. Université de Nanterre - Paris X, 2007. Français. NNT: . tel-00283848

**HAL Id: tel-00283848**

**<https://theses.hal.science/tel-00283848>**

Submitted on 30 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE  
U.F.R. SCIENCES ECONOMIQUES**

**THESE**

En vue d'obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université de Paris X**  
**Discipline : Sciences Economiques**

présentée et soutenue publiquement par

**Hélène HAMISULTANE**

14 décembre 2007

**EVALUATION DES DERIVES CLIMATIQUES  
SUR DEGRES-JOURS**

DIRECTEUR DE THESE :

Mme Sandrine Lardic , Maître de Conférences-HDR à l'Université Paris X-Nanterre

JURY :

- M. Jean-Claude Augros, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1
- M. Michel Boutillier, Professeur à l'Université de Paris X-Nanterre
- M. Gunther Capelle-Blancard, rapporteur, Professeur à l'Université de Paris 1
- M. André Lapied, rapporteur, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille 3
- Mme Sandrine Lardic, Maître de Conférences-HDR à l'Université de Paris X-Nanterre

L'UNIVERSITE de PARIS X – Nanterre n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses ; ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

*A ma grand-mère*

## Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Madame Sandrine Lardic pour avoir accepté de diriger ma thèse. Je lui suis aussi très reconnaissante pour son soutien et ses précieux conseils.

Je remercie Messieurs Jean-Claude Augros, Michel Boutillier, Gunther Capelle-Blancard et André Lapied, qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury.

Je tiens à remercier les membres du laboratoire EconomiX de l'Université de Paris X-Nanterre pour leur accueil et leur appui. J'ai pu ainsi bénéficier d'un excellent environnement de travail. Mes années de recherche au sein du laboratoire resteront inoubliables.

Je remercie enfin mes parents et mes soeurs pour leur soutien et leurs encouragements.

## Résumé

L'introduction sur le marché financier du premier dérivé climatique portant sur les degrés-jours en 1997 aux Etats-Unis, a donné lieu à un nombre important de travaux sur la valorisation des instruments climatiques et sur la modélisation de la température moyenne journalière. Cependant, aucune étude conjointe de l'ensemble des approches d'évaluation et des représentations de la température suggérées dans la littérature n'avait été menée jusqu'à présent sur le plan empirique. Nous nous sommes donc proposés dans la présente thèse de calculer les prix des contrats à terme et des options d'achat climatiques à partir des méthodes en l'absence d'arbitrage, actuarielle et fondée sur la consommation. Nous nous sommes particulièrement intéressés au calcul des prix des contrats sur les degrés-jours des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York pour lesquelles nous avons constaté des transactions fréquentes sur le Chicago Mercantile Exchange. L'analyse conjointe des cours estimés des contrats à terme climatiques à partir des différentes méthodologies d'évaluation a montré que le calibrage des modèles d'évaluation était nécessaire pour obtenir des prévisions de prix proches des cotations et plus particulièrement de la réalisation réelle de l'indice des degrés-jours à l'échéance.

*Mots-clés : dérivés climatiques, méthode d'évaluation en l'absence d'arbitrage, méthode actuarielle, modèle d'évaluation des actifs financiers fondé sur la consommation, distribution risque-neutre, prix de marché du risque, simulation de Monte-Carlo, méthode des différences finies, méthode des moments généralisés, méthode des moments simulés, modèles de variance périodique, processus à sauts, processus à mémoire longue.*

## Abstract

The introduction of the first weather derivative based upon the degree-days in the United-States in 1997 has led to a great number of work dedicated to the valuation of this product and to the modelling of the daily average temperature. However until now, no empirical study has compared all together the pricing approaches and the temperature models which were suggested in the literature. Therefore in the present thesis, we set out to compute the prices of the weather futures and call options from the free-arbitrage, actuarial and consumption-based methods. We were particularly interested in the pricing of the contracts on the degree-days of Chicago, Cincinnati and New York for which frequent transactions were observed. The linked analysis of the estimated prices of the weather futures from the different pricing methodologies has shown that the calibration of the pricing models was necessary to obtain predictions of the prices which were closed to the quotations and more particularly to the real realization of the index on degree-days at the expiration date.

*Key-words : weather derivatives, free-arbitrage pricing method, actuarial method, consumption-capital asset pricing model, risk-neutral distribution, market price of risk, Monte-Carlo simulation, finite difference method, generalized method of moments, simulated method of moments, periodic variance models, jump process, long memory processes.*

## INTRODUCTION GENERALE

Le département du commerce américain a estimé qu'en 1997, le climat avait eu un impact sur l'activité de 70% des entreprises sur le territoire et sur 22% du PIB américain. Le coût des événements climatiques aux Etats-Unis, toutes causes confondues, a été évalué à 200 milliards de dollars en 2005. Les dérèglements météorologiques qui ont eu lieu au cours de ces dernières années ont fait prendre conscience aux entreprises et aux autorités de l'influence du climat sur l'économie et de la nécessité de se couvrir contre le risque climatique.

Les dérivés climatiques sont nés de ce constat. Il s'agit de produits financiers sur un sous-jacent qui est un indice météorologique lié à la température, aux précipitations ou à toute autre variable climatique. L'acheteur du dérivé climatique reçoit un paiement (ou "payoff") lorsque l'indice franchit à la hausse ou à la baisse une limite (prix d'exercice ou "strike level") convenue à l'avance avec le vendeur pour une période de temps considérée. La rétribution est égale au différentiel positif entre le niveau atteint par l'indice à la fin de la période (à la date d'échéance ou de maturité) et le niveau limite pré-établi avec le vendeur. A la différence des contrats d'assurance, les dérivés climatiques n'obligent pas leur détenteur à prouver qu'il a effectivement subi une perte pour percevoir un montant.

Il existe deux principaux types de dérivés climatiques : les options et les contrats à terme ("futures" et "forward"). L'option permet à son acheteur de limiter le montant de sa perte en cas de mauvaises anticipations de sa part. Il peut renoncer à son opération lorsque le différentiel obtenu est négatif à l'échéance et ceci contre le versement d'une prime (ou prix de l'option) au moment de la conclusion du contrat. La transaction ne pouvant avoir lieu qu'à la date de maturité, l'option climatique est dite à l'européenne. Le contrat à terme qui ne donne pas la possibilité à son acquéreur d'abandonner la transaction à la date de maturité ne requière le paiement d'aucune prime. Le contrat dit "futures" est négocié sur le marché à terme réglementé et fait l'objet d'une cotation ce qui n'est pas le cas du contrat dit "forward" transigeant sur le marché de gré à gré ou marché non réglementé.

## I. MARCHE CLIMATIQUE

Initiés en 1997 par deux compagnies énergétiques, les produits dérivés climatiques connaissent un fort engouement. En 1999, le Chicago Mercantile Exchange (CME) leur dédie une plate-forme électronique d'échange (Globex). Le London International Financial Futures and Options Exchange (LIFFE) emboîte le pas en juillet 2001 en créant I-Wex et en lançant sur le marché trois contrats basés sur la température pour Londres, Paris et Berlin ainsi qu'en janvier 2002, une gamme d'indices baptisée NextWeather en collaboration avec Météo France et suite à la fusion avec Euronext. Malgré l'intérêt suscité par les dérivés climatiques, leur développement ne se fait pas de manière aussi rapide et importante que l'on avait espéré. En outre, ils sont beaucoup moins liquides que les contrats reposant, par exemple, sur l'indice S&P. On peut apporter à cela plusieurs raisons. Le départ du marché des acteurs principaux tels qu'Enron, Aquila et El Paso a fait baisser le nombre des transactions. Enron, leader mondial du négoce d'énergie, qui a mis au point le premier contrat climatique pour Koch Energy, a fait faillite en décembre 2001 suite à des pertes liées à des opérations spéculatives sur le marché de l'électricité. Son fiasco retentissant a entraîné une baisse de 70% du volume de commercialisation des autres sociétés de courtage en énergie (Aquila et El Paso) ainsi qu'une dégradation de leurs notations financières par Moody's et Standard & Poor's. Elles ont été contraintes à liquider leurs actifs pour couvrir leurs pertes et à abandonner leur activité de trading.

De plus, le nombre de participants encore réduit et trop limité aux compagnies énergétiques ne favorise pas la liquidité du marché. Les dérivés climatiques n'attirent pas encore suffisamment d'autres "end-users" dont le résultat dépend des aléas climatiques tels que les entreprises agricoles, de construction ou de transport. Ceci peut provenir de leur méconnaissance de ce produit. Ils ne séduisent pas non plus encore la majorité des investisseurs à la recherche d'une diversification de leur portefeuille bien que le prix des dérivés climatiques soit très peu corrélé aux prix des autres actifs du marché financier. L'explication peut venir du fait que les agents ne se sont pas encore bien familiarisés avec ce type de produit qui peut leur paraître complexe et très risqué surtout après la banqueroute d'Enron. Sur le marché financier, on a eu coutume jusqu'à présent de chercher à prédire le cours d'un actif et non pas l'évolution d'un indice météorologique. Il y a peut-être à mettre en place une formation à la pratique des dérivés climatiques. A cela, vient s'ajouter la difficulté à évaluer ces instruments.



## II. MODELES D'EVALUATION DES DERIVES CLIMATIQUES

La valorisation d'un produit dérivé standard du type d'une option européenne donnant le droit et non l'obligation à son acheteur d'effectuer une opération à échéance, consiste à déterminer le prix du produit dérivé à l'instant présent ou à tout instant avant l'échéance sachant qu'il procurera un paiement variable à la date de maturité, le montant du paiement étant lié à l'évolution de l'actif sous-jacent. Il est d'usage de déterminer sa valeur (ou prime payée au moment de la conclusion du contrat) en utilisant l'hypothèse d'absence d'arbitrage (il est impossible de faire des profits sans risque sur le marché financier) et en créant une stratégie de portefeuille autofinancée constituée des quantités de l'actif sous-jacent et d'un titre procurant un revenu sans risque de telle sorte que la valeur du portefeuille à l'échéance soit identique au paiement de l'option que l'on cherche à évaluer. La stratégie est dite autofinancée lorsqu'il n'y a ni apport de fonds ni retrait d'argent au cours de la gestion du portefeuille entre le moment de sa création et la date d'échéance. La valeur du portefeuille est réajustée à chaque instant par l'agent uniquement en modifiant la répartition des titres dans le portefeuille. Comme sa valeur terminale est égale au revenu de l'option, en l'absence d'opportunités d'arbitrage, la valeur de l'option à l'instant présent doit être égale au coût du portefeuille de duplication, autrement un profit sans risque pourra être réalisé en vendant l'instrument qui a la valeur la plus élevée pour acheter celui dont le prix est le plus faible. Elle ne peut être égale qu'au coût initial du portefeuille puisqu'il n'y a eu ni ajout ni retrait de fonds du portefeuille au cours du temps. Le portefeuille de duplication est appelé aussi portefeuille de couverture car il est possible pour le vendeur de l'option de se couvrir contre une perte (montant qu'il devra acquitter à l'acheteur en cas de mauvaises anticipations) en se constituant une stratégie d'investissement autofinancée à partir de la prime obtenue et ensuite en vendant le portefeuille à échéance.

Dans un cadre simplifié qui ne comporte qu'une seule période et aucune contrainte sur le marché financier et où le comportement de l'actif sous-jacent, seule variable aléatoire du modèle, suit une loi binomiale, Cox, Ross et Rubinstein (1979) montrent qu'en partant de l'égalité entre la valeur du portefeuille et le paiement de l'option à la fin de la période observée et qu'en rétrogradant dans le temps, le prix de l'option à l'instant présent est déterminé de manière unique et correspond au calcul de l'espérance du paiement de l'option (à l'échéance), actualisée au taux sans risque et définie à l'aide des probabilités modifiées du sous-jacent dites neutres au risque. Il n'apparaît pas dans cette formulation la probabilité

réelle ou objective de hausse ou de baisse de l'actif sous-jacent. Ces probabilités sont dénommées neutres au risque car elles sont identiques à celles prévalant dans une économie où les individus choisiraient de manière indifférente l'actif risqué ou le titre sans risque, car l'actif risqué rapporte en moyenne autant que le titre sans risque. Dans l'économie neutre au risque, les agents n'exigent aucune rémunération pour le risque qu'ils supportent. Leur attitude vis-à-vis du risque n'intervient pas dans l'évaluation des options. La limite de la formule binomiale du prix de l'option lorsque le nombre de périodes considérées devient infiniment grand coïncide avec la formule d'évaluation des options en temps continu de Black et Scholes (1973). Dans la pratique, les intervenants du marché utilisent la formule de Black et Scholes au lieu de la formule binomiale pour déterminer le prix des options européennes car à l'exception de la volatilité du prix du sous-jacent, elle ne dépend que des variables observables ce qui la rend plus simple à manipuler. Les probabilités neutres au risque sont aussi appelées mesures martingales car sous ces probabilités le processus de prix actualisé au taux sans risque de l'option constitue une martingale, c'est à dire que l'espérance de ses accroissements entre les dates,  $t$  et  $T$  (où  $t \leq T$ ), compte tenu de l'information disponible en  $t$  est toujours nulle quel que soit  $t$ . Cela revient à dire que la valeur de l'option en  $t$  est égale à l'espérance, actualisée au taux sans risque et définie sous la mesure martingale, de la valeur (ou paiement) de l'option en  $T$ .

Dans le cas des options climatiques, il n'est pas possible de constituer un portefeuille de duplication puisque l'indice météorologique n'est pas échangé sur le marché financier. Le marché est dit incomplet pour les contrats climatiques et la formule de Black et Scholes ne peut pas être utilisée pour leur évaluation. Le marché sera dit complet si le résultat de l'option est atteignable par le portefeuille de réplcation. Pour résoudre ce type de problème, on a souvent recours à un actif de substitution qui possède les caractéristiques recherchées et dont le prix est fortement corrélé à celui de l'actif défaillant. Geman (1999) propose de former le portefeuille de couverture pour l'option climatique sur la température en supplant l'indice météorologique par un instrument dérivé sur l'électricité ou le gaz qui est négocié sur le marché à terme. Aux Etats-Unis, les contrats sur l'énergie sont apparus en 1998 suite à la dérégulation du marché énergétique. Cependant, Brix, Jewson et Ziehmman (2002) font remarquer que le prix du gaz est très corrélé à la demande et non pas à l'indice de température. Ils suggèrent plutôt le contrat à terme climatique comme actif de substitution car ce contrat, qui est négocié sur le marché, évolue fortement avec l'indice météorologique. Comme il a été précisé ci-dessus, la majorité des produits dérivés climatiques manque encore

de liquidité. Par conséquent, la constitution d'un portefeuille qui duplique parfaitement le payoff de l'option climatique à la date de maturité à l'aide des contrats à terme climatiques n'est pas pour l'instant envisageable.

Face à l'impossibilité de créer un parfait portefeuille de duplication, plusieurs approches alternatives ont été suggérées pour évaluer les options. L'une d'elles porte sur la maximisation de la fonction d'utilité de l'agent. Le prix de l'option est alors déterminé en cherchant les quantités de l'actif sous-jacent et du titre sans risque non pas de manière à répliquer parfaitement le payoff de l'option mais à maximiser l'utilité espérée de la richesse de l'investisseur à l'échéance. Des auteurs comme Frittelli (2000) ont montré que cette opération dans le cas d'une fonction d'utilité de type exponentiel donnait lieu à une mesure de probabilité du sous-jacent ayant la particularité de minimiser l'entropie relative ou distance de Kullback-Leibler d'une probabilité par rapport à une autre définie a priori. Cette mesure est communément appelée "minimal entropy martingale measure". Une autre façon de déterminer le prix de l'option est de chercher la composition de l'actif sous-jacent et du titre sans risque dans le portefeuille de sorte à réduire la variance du risque résiduel qui se définit comme étant la différence entre la valeur du portefeuille et le résultat de l'option à la fin de la période considérée. La mesure martingale du sous-jacent issue de cette stratégie est nommée "variance optimal martingale measure" (Heath, Platen et Schweizer (2001) et Schweizer (1999)).

Le prix de l'option à une date quelconque avant l'échéance se calcule alors comme étant l'espérance conditionnelle du paiement de l'option à l'échéance, actualisée au taux sans risque et définie à l'aide d'une de ces mesures de probabilité. Le contrat à terme qui ne permet pas à son acheteur d'abandonner sa transaction à échéance lorsque celle-ci lui est défavorable a une prime qui est nulle. Le terme de prix associé souvent au contrat à terme correspond en fait au prix d'exercice fixé lors de la conclusion du contrat et qui sera comparé au niveau réellement atteint par le sous-jacent à la date de maturité pour déterminer le gain ou la perte pour l'acheteur du contrat. Sa valeur est égale à l'espérance conditionnelle du prix du sous-jacent à l'échéance, calculée à partir d'une des mesures martingales citées précédemment. Les prix de l'option et du contrat à terme sont corrigés de toute rémunération pour le risque. Rappelons que les mesures martingales sont également des probabilités neutres au risque et que de ce fait, les prix qui en résultent sont analogues à ceux donnés par un agent neutre au risque qui ne réclame aucune compensation pour le risque endossé.

Par ailleurs, en situation de marché incomplet, le prix de marché du risque est non nul. Il se définit comme étant l'écart entre l'espérance du taux de rendement du sous-jacent et le taux sans risque, rapporté à la quantité de risque mesurée par la volatilité. Le prix de marché du risque dépend de la stratégie de portefeuille adoptée pour limiter le risque et donc de la mesure martingale choisie par l'agent pour évaluer les contrats. Dans ce contexte, l'attitude des individus vis-à-vis du risque joue un rôle dans la valorisation des produits dérivés. On observe qu'il existe autant de prix qu'il y a de mesures de probabilité lorsque le marché est incomplet. Quand le marché est complet, la valeur de l'option est déterminée par une seule mesure qui provient de la technique de duplication parfaite, les autres mesures se confondant avec cette mesure. Il a été montré qu'en temps continu, l'existence d'une mesure martingale entraînait toujours l'absence d'occasions d'arbitrage mais que la réciproque était fautive sans conditions supplémentaires (voir Delbaen et Schachermayer (1994)).

Une méthode moins arbitraire et plus simple à mettre en place est utilisée dans la pratique pour valoriser les produits dérivés climatiques. Il s'agit de la méthode actuarielle qui n'est fondée ni sur l'hypothèse d'absence d'arbitrage, ni sur la réalisation d'un portefeuille de couverture et par conséquent, ne fait appel à aucune mesure martingale. Elle calcule le prix de l'option climatique à une date quelconque avant l'échéance comme étant l'espérance conditionnelle du payoff de l'option à la date d'expiration, définie par les probabilités historiques ou réelles du sous-jacent et à laquelle s'ajoute une prime de risque à la charge de l'acheteur du produit dérivé, le tout actualisé au taux sans risque. La valeur du contrat à terme est, quant à elle, égale à l'espérance conditionnelle du prix du sous-jacent à la date de maturité, déterminée par les probabilités historiques du sous-jacent et augmentée de la prime de risque. Dans un souci de simplification du calcul de ces prix, l'estimation du chargement pour le risque n'est pas considérée par les auteurs (Dischel (1999), Augros et Moréno (2002), West (2002), Platen et West (2004), Jewson (2004)). Il est supposé soit nul, soit égal à une valeur arbitraire. Platen et West (2004) expliquent que la concurrence entre les compagnies d'assurance et la présence d'une réassurance tendent à le faire diminuer.

L'espérance conditionnelle est estimée à partir de simulations de Monte-Carlo car il est souvent difficile voire impossible de lui trouver une expression exacte. Ceci s'explique par l'emploi pour les phénomènes climatiques de modèles plus complexes que ceux utilisés pour les actifs financiers et aussi par la manière dont l'indice météorologique est construit. Pour la température, l'indice ne représente pas le niveau de cette variable à un moment donné, mais

l'accumulation de cette grandeur (exprimée en moyenne journalière ou en degré-jour qui correspond à l'écart de la température moyenne journalière par rapport à une valeur de référence) depuis une date considérée. La technique de simulation consiste à générer un ensemble de trajectoires pour le facteur climatique sur une période de temps donnée. Pour chacun de ces tirs, on détermine la valeur de l'indice météorologique et le paiement de l'option à l'échéance. Le coût de l'option climatique équivaut alors à la moyenne des payoffs actualisée au taux sans risque. De la même manière, le prix du contrat à terme climatique est égal à la moyenne des valeurs de l'indice météorologique à la date de maturité.

Un autre moyen pour valoriser les dérivés climatiques sans recourir à une mesure martingale a été proposé par Cao et Wei (2004). Il s'agit du modèle d'évaluation des actifs financiers fondé sur la consommation ("Consumption-Capital Asset Pricing Model" ou C-CAPM) de Lucas (1978). Il repose sur une économie d'échange pur où les effets monétaires ne sont pas pris en compte et dans laquelle un agent représentatif cherche à déterminer son niveau de consommation ainsi que le montant (réel) à investir dans les titres financiers de façon à maximiser l'espérance de son utilité intertemporelle tout en respectant une contrainte budgétaire. La condition du premier ordre issue de ce programme d'optimisation et par rapport à la quantité du titre boursier détenu par l'agent, est appelée condition d'Euler. Elle relie le prix du titre à une date quelconque avant l'échéance à l'espérance conditionnelle du cours futur du titre qui est pondéré par le taux marginal de substitution intertemporelle de la consommation. Le taux marginal de substitution intertemporelle de la consommation est défini comme le rapport de l'utilité marginale de la consommation à la date  $T$  à l'utilité marginale de la consommation à la date  $t$  (où  $t \neq T$ ). Il est égal au ratio des consommations aux instants  $T$  et  $t$  avec pour exposant un paramètre appelé coefficient constant d'aversion relative pour le risque. Ce résultat découle de l'hypothèse d'une fonction d'utilité puissance afin de modéliser les préférences de l'agent type.

A partir de l'équation d'Euler, Cao et Wei (2004) établissent le prix des dérivés climatiques. Ils montrent qu'il existe une relation significative entre la moyenne des températures de certaines villes américaines et la consommation totale des biens et services aux Etats-Unis. En comparant le prix calculé de l'option climatique pour une mesure estimée du coefficient de corrélation (entre la température et la consommation) et pour un niveau donné du coefficient d'aversion au prix obtenu de l'option lorsque le coefficient de corrélation est supposé nul (ce qui implique un paramètre d'aversion égal à zéro), il déduisent que la prime

de risque occupe une part non négligeable dans la valeur des options climatiques. Richards, Manfredo et Sanders (2004) parviennent à la même conclusion que Cao et Wei (2004) en utilisant des données relatives à la ville de Fresno en Californie.

### **III. MODELISATION DU COMPORTEMENT DE LA TEMPERATURE**

Pour l'ensemble de ces méthodes d'évaluation des dérivés climatiques, la modélisation de la variable météorologique est indispensable. Les travaux ont pour la plupart porté sur la spécification d'un modèle pour la température qui concerne la majorité des dérivés climatiques structurés sur le marché. En 2005, 70% des contrats négociés reposaient sur ce facteur du climat. Plusieurs types de processus ont été suggérés dans la littérature pour modéliser cette variable pour laquelle on relève un mouvement régulier souvent formalisé par une fonction sinusoïdale. Ses variations ne s'écartant jamais d'une courbe moyenne, on parle d'un effet de retour à la moyenne pour la température. A ce mouvement régulier vient parfois s'adjoindre une légère tendance à la hausse qui s'explique par le réchauffement de la planète ou l'urbanisation dans les grandes villes. Une évolution cyclique est également à noter dans la volatilité de la température avec une variabilité plus grande en hiver qu'en été selon Cao et Wei (2004).

Pour tenir compte de la propriété de retour à la moyenne des températures, Alaton, Djehiche et Stillberger (2002), Benth et Šaltytė-Benth (2005) et Brody, Syroka et Zervos (2002) suggèrent un processus en temps continu d'Ornstein-Uhlenbeck qui est équivalent au processus autorégressif d'ordre un en temps discret. Les modèles en temps continu sont construits à partir d'un mouvement brownien standard (ou processus de Wiener) qui est un processus gaussien à accroissements indépendants et stationnaires. Ils sont très utilisés en finance afin de reproduire le flux intra-journalier des échanges.

Cependant, des auteurs tels que Roustant (2002), Cao et Wei (2004) et Campbell et Diebold (2004) montrent en faisant appel aux processus ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) que les modèles autorégressifs d'un ordre supérieur à 1 traduisent mieux la structure de la température. Parmi ces auteurs, seuls Cao et Wei (2004) emploient une forme non paramétrique à la place de la fonction sinusoïdale pour représenter la périodicité de la variable climatique. Celle-ci est constituée d'une série de moyennes d'échantillonnage.

Concernant la modélisation de la volatilité de la température, Richards, Manfredo et Sanders (2004) utilisent un processus ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) tandis que Roustant (2002) et Cao et Wei (2004) préconisent plutôt une fonction circulaire pour saisir le comportement saisonnier de la volatilité. De leur côté, Campbell et Diebold (2004) font valoir un modèle combinant effet GARCH (Generalized ARCH) et somme de sinusoides. Une forme non paramétrique similaire à celle de Cao et Wei (2004) a été également suggérée par Benth et Šaltytė-Benth (2005) pour représenter la variance périodique.

D'autres aspects de la température ont été également traités dans la littérature. Les changements brutaux (par exemple un hiver plus rude qu'à l'accoutumé) ont été pris en compte par Richards, Manfredo et Sanders (2004) à travers l'estimation d'un processus à sauts qui présente des trajectoires discontinues. La présence d'une mémoire longue a été mise en évidence par Caballero, Jewson et Brix (2002) et Brody, Syroka et Zervos (2002) dans la série de températures journalières enregistrées dans le centre du Royaume-Uni pour la période 1772-1991. Caballero, Jewson et Brix (2002) modélisent ce phénomène en utilisant le processus ARFIMA (AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average) caractérisé par un paramètre d'intégration fractionnaire pouvant prendre des valeurs réelles. Un processus en temps continu a également été considéré pour modéliser la mémoire longue dans la température. Brody, Syroka et Zervos (2002) et Benth (2003) ont retenu un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec un mouvement brownien fractionnaire. La mémoire de long terme peut aussi se manifester dans la volatilité d'une série. Moréno (2003) a considéré cet aspect en estimant un processus ARFIMA-FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH).

#### **IV. PROBLEMATIQUE ET APPORTS DE LA THESE**

La présentation succincte des travaux sur les dérivés climatiques nous montre qu'une question importante n'a pas encore été traitée : les méthodes d'évaluation en l'absence d'arbitrage, actuarielle et fondée sur la consommation conduisent-elles à des résultats divergents ? (Si oui, quelle méthode adopter ?). L'objet de la présente thèse est de répondre à cette question.

En vue de cela, nous effectuerons un rapprochement, sur le plan empirique, des prix issus des différentes méthodes d'évaluation. Nous chercherons à valoriser les contrats climatiques sur la température (plus précisément sur les degrés-jours) des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York pour lesquels nous observons des échanges importants.

Pour le calcul des prix des dérivés climatiques selon la méthode en l'absence d'arbitrage, nous suggérons la technique d'étalonnage (ou le "mark-to-market") pour nous soustraire au choix d'une mesure martingale parmi plusieurs. Une densité neutre au risque sera induite à partir des prix observés des contrats climatiques en utilisant le programme d'optimisation de Jackwerth et Rubinstein (1996). Nous mettons en avant le procédé de Jackwerth et Rubinstein (1996) pour l'extraction d'une distribution risque-neutre dans le cas des dérivés climatiques car il présente le mérite de ne pas nécessiter une expression fermée pour le prix théorique des contrats. Rappelons qu'il est difficile voire impossible d'obtenir une formulation exacte pour le prix des dérivés climatiques. Le procédé consiste à déterminer les probabilités de manière à minimiser la somme des écarts au carré entre la valeur théorique et la valeur observée des contrats. Dans leur article, les deux auteurs font appel à une arborescence binomiale pour déterminer les cours du titre sous-jacent à l'échéance. Ils en déduisent ensuite les valeurs théoriques de l'option d'achat sur ce sous-jacent. Nous proposons ici de recourir aux simulations de Monte-Carlo pour obtenir les niveaux de l'indice météorologique à la date de maturité et ceci dans le but d'envisager des processus plus complexes pour le comportement de la température.

Pirrong et Jermakyan (2001) ont suggéré de calculer la valeur des options climatiques par la méthode en l'absence d'arbitrage en utilisant les prix de marché du risque estimés à partir des cotations des contrats à terme climatiques. Ils n'ont, toutefois, pas mis en application leur suggestion. Nous nous proposons dans la présente thèse d'implémenter leur méthode d'évaluation. Le principe de base de leur approche est de rechercher les prix de marché du risque de façon à réduire la somme des écarts au carré entre la valeur hypothétique et la valeur observée des contrats. La valeur hypothétique est ici obtenue en résolvant une équation aux dérivées partielles (pour une condition terminale donnée et sous une mesure martingale) car selon le théorème de Feynman-Kac, le prix d'un produit dérivé constitue l'unique solution de cette équation. La résolution de l'équation aux dérivées partielles sera menée de manière numérique à l'aide de la méthode des différences finies.



Concernant le calcul des prix par la méthode fondée sur la consommation, nous apportons une amélioration au modèle de Cao et Wei (2004) en suggérant l'estimation du coefficient constant d'aversion relative pour le risque par la méthode des moments simulés ("simulated method of moments" ou SMM) étudiée par Lee et Ingram (1991). Ce point n'ayant pas encore été abordé par Cao et Wei (2004) et par Richards, Manfredo et Sanders (2004) qui ont déterminé les prix des dérivés climatiques en présupposant plusieurs valeurs possibles pour le coefficient d'aversion pour le risque. La méthode des moments simulés souvent présentée dans le cadre du modèle d'équilibre général de Lucas (1978) réside dans la recherche des valeurs pour les paramètres figurant dans le prix théorique (ici la condition d'Euler) qui est calculé au moyen des simulations de Monte-Carlo de sorte à minimiser la somme des écarts au carré entre ce prix simulé et le prix observé des contrats. Elle est différente de la méthode des moments généralisés ("generalized method of moments" ou GMM) qui est couramment employée pour estimer les coefficients du modèle d'équilibre général dans le sens où elle calcule l'espérance de la condition d'Euler à l'aide de simulations tandis que l'approche GMM estime l'espérance par la moyenne des observations. Il est possible d'utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes pour estimer les paramètres du prix des dérivés climatiques. Nous pensons toutefois que la procédure SMM fournira des résultats meilleurs à ceux de la démarche GMM dans le cas des dérivés climatiques car les valeurs des paramètres issues de la première méthode répondent à une exigence de calibrage qui tient compte du caractère simulé des prix (on souhaite des valeurs de sorte à ce que le prix simulé soit le plus proche possible du prix observé) tandis que celles provenant de la seconde méthode répondent davantage à une exigence d'estimation (on souhaite des valeurs telles que le prix calculé à l'aide de la moyenne d'échantillonnage soit le plus près possible du prix observé). Pour confirmer notre intuition, nous estimerons le coefficient d'aversion pour le risque également à l'aide de l'approche GMM et rapprocherons les prix donnés par ce coefficient à ceux résultant du paramètre estimé par le procédé SMM.

Enfin, nous nous interrogerons sur les conséquences de l'usage des cotations d'un dérivé de substitution pour mener le calibrage et l'évaluation des dérivés climatiques pour lesquels nous ne disposerions pas de données de prix. Nous envisagerons la valorisation d'un contrat climatique en faisant appel à un autre contrat climatique basé également sur la température et dont le sous-jacent serait fortement lié à l'indice météorologique du contrat que nous chercherons à valoriser.

## V. PLAN DE LA THESE

Pour traiter ces points, nous avons choisi d'articuler notre thèse autour de quatre chapitres.

Le chapitre 1 débutera par une présentation générale des instruments dérivés et du marché à terme. Il décrira ensuite de manière détaillée les produits dérivés climatiques et leur marché.

Le chapitre 2 sera consacré à la présentation des méthodes d'évaluation en l'absence d'arbitrage, actuarielle et fondée sur la consommation. Nous préciserons d'abord certaines notions de base de la théorie financière avant de venir en détail à la méthode d'évaluation des options en l'absence d'arbitrage lorsque le marché est complet. Elle sera traitée en temps discret (modèle de Cox, Ross et Rubinstein (1979)) et en temps continu (modèle de Black et Scholes (1973)). L'étude du modèle en temps discret nous permettra d'aborder le principe du portefeuille de duplication ainsi que les notions de mesure martingale et de probabilité neutre au risque. L'analyse du modèle en temps continu nous permettra de montrer que l'évaluation des options en l'absence d'arbitrage peut être menée également par la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Suite à la présentation des deux modèles, nous soulignerons les difficultés à mettre en œuvre la méthode en l'absence d'arbitrage dans le cas des dérivés climatiques. Nous aboutirons à la suggestion de la technique d'étalonnage pour évaluer ces produits. Sa description sera faite pour l'inférence d'une distribution neutre au risque et d'un prix de marché du risque lié à la température. Le modèle en l'absence d'arbitrage ayant ses limites, nous aborderons les méthodes d'évaluation actuarielle et fondée sur la consommation.

Le chapitre 3 aura trait à la modélisation de la température. Après une brève description des caractéristiques de la température moyenne journalière, nous passerons en revue les modèles qui ont été suggérés jusqu'à présent pour rendre compte du comportement de cette variable. Nous estimerons à la fois les processus en temps continu et en temps discret pour la température des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York. Nous sélectionnerons ensuite le "meilleur" processus en temps continu et en temps discret par le biais des critères de comparaison. Le premier nous permettra de déterminer les valeurs des dérivés climatiques par la méthode en l'absence d'arbitrage au cours du chapitre 4 puisque ses principaux résultats ont été établis en temps continu. Le second nous permettra de mettre en place les

méthodologies d'évaluation actuarielle et fondée sur la consommation. Le processus en temps continu pourra également servir au calcul des prix par les deux dernières approches qui peuvent être traitées indifféremment en temps discret et en temps continu.

Le chapitre 4 mettra en application les modèles d'évaluation. En premier lieu, nous exposerons de manière détaillée les procédés numériques de calcul tels que la technique de simulation de Monte-Carlo pour approcher les espérances et la méthode des différences finies pour résoudre les équations aux dérivées partielles ainsi que les approches des moments généralisés et simulés pour estimer les paramètres de l'équation d'Euler. En dernier lieu, nous calculerons les prix des contrats à terme et des options climatiques des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York en recourant à la densité risque-neutre inférée, aux prix de marché du risque induits et au coefficient estimé d'aversion relative pour le risque à partir des cotations des contrats à terme climatiques. Nous déterminerons également les valeurs du contrat à terme de Cincinnati à l'aide des cours observés pour le dérivé de New York.

La conclusion résumera les principaux résultats de la présente thèse, annoncera ses limites et suggèrera des extensions qui feront l'objet des travaux futurs.

# **CHAPITRE 1**

## **PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES ET MARCHE**

Le chapitre débute par une présentation générale des produits dérivés et de leur marché dans la section 1.1. Il traite ensuite plus précisément des produits dérivés climatiques au cours de la section 1.2 et de leur marché lors de la section 1.3. La section 1.4 conclut le chapitre qui a pour vocation de montrer la particularité des instruments climatiques et de rendre compte du dynamisme actuel du marché des dérivés climatiques.

### **1.1 PRELIMINAIRES**

Le principe des dérivés climatiques est similaire à celui des instruments classiques. Il en va de même pour l'organisation du marché des contrats climatiques. Pour le mettre en évidence, nous commençons par présenter, dans cette partie, l'idée de base des produits dérivés. Son exposé est indispensable pour comprendre par la suite le fonctionnement des dérivés climatiques. Il sera suivi de la description du marché des produits dérivés.

#### **1.1.1 Qu'est ce qu'un produit dérivé ?**

Un produit dérivé ou dérivé est un instrument qui permet de différer une transaction (achat ou vente d'un actif) dont les modalités (prix et quantité de l'actif) ont été conclues à la date d'aujourd'hui entre les parties. Il constitue un instrument de couverture contre les risques qui résultent des fluctuations des taux d'intérêt, des taux de change ou encore du prix d'un titre en permettant à l'acheteur du dérivé de fixer à la date d'aujourd'hui le cours de l'actif auquel il l'achètera ou le vendra demain. On peut distinguer parmi les produits dérivés les instruments conditionnels (les options) et les instruments non conditionnels ou à terme ferme (les contrats à terme et d'échange). L'instrument non conditionnel ne permet pas à l'acquéreur d'annuler la vente ou l'achat de l'actif à la date de maturité tandis que l'instrument conditionnel l'autorise à ne pas réaliser la transaction si celle-ci lui est défavorable.

L'actif sur lequel porte la transaction est appelé sous-jacent (ou "underlying"). Le sous-jacent peut être une action, une obligation, un indice, une monnaie ou un contrat à terme<sup>(1)</sup>. Il peut donc s'agir d'un instrument au comptant (action, obligation, indice, monnaie,...) ou d'un instrument à terme (contrat à terme). L'instrument au comptant est livrable dès la conclusion du contrat et après paiement alors que l'instrument à terme est livrable à une date ultérieure à celle de la conclusion du contrat et pour certains d'entre eux, il n'y a pas de livraison physique à la date prévue de la transaction. C'est le cas des options sur indice pour lesquelles il n'y a pas une livraison de l'indice mais plutôt la perception d'un montant correspondant à la différence entre le prix d'exercice (valeur négociée à la date d'aujourd'hui pour la transaction future) et le prix de l'indice réellement atteint à la date de la transaction. On appelle ce type d'opération un "cash settlement".

#### **1.1.1.1 Instrument conditionnel : l'option**

"Une option (appelée aussi réclamation contingente ou actif contingent ou "contingent claim") est un contrat qui lie deux opérateurs ayant des anticipations opposées. Ainsi, chaque opérateur peut décider d'acheter ou de vendre des options" (Ramage (2002)). Il existe deux types d'option : l'option d'achat (ou "call option") et l'option de vente (ou "put option").

##### ***L'option d'achat***

L'option d'achat permet à son acheteur d'acquérir une quantité déterminée de l'actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (prix d'exercice ou "strike price") et ceci soit à une date déterminée (date d'échéance ou de maturité), soit à n'importe quel moment avant la date d'échéance. Lorsque l'acheteur n'est autorisé à exercer l'option, c'est à dire à acheter la quantité de l'actif au prix d'exercice, qu'à la date d'échéance, l'option est dite européenne. Dans le cas contraire où il peut l'exercer à tout moment jusqu'à la date d'échéance, elle est dite américaine. Le souscripteur de l'option paie une prime (ou "premium") qui lui donne la possibilité d'annuler son contrat s'il s'est trompé dans ses anticipations. Le vendeur de l'option devra alors se soumettre à la décision de l'acheteur. Dans le cas de l'option, le

---

<sup>(1)</sup> Les marchandises, les métaux précieux ou encore les matières premières peuvent être utilisés comme sous-jacents.

montant des pertes que peut subir l'acheteur est limité au montant de la prime versée au moment de la conclusion du contrat. La prime ou le prix de l'option est comme nous le verrons dans la section sur la valorisation des options déterminée par la formule de Black et Scholes (1973) dans un cadre bien précis.

Pour fixer les idées, prenons le cas d'un spéculateur qui prévoit la hausse du prix d'une action dans les mois à venir. Il décide alors d'acheter une option d'achat européenne sur cette action dont l'échéance est à la date  $t_m$  et le prix d'exercice fixé au niveau  $K$ . Soit  $S_t$  le prix de l'action à la date  $t$ , si on a  $S_{t_m} > K$  à l'échéance  $t_m$ , le spéculateur va exercer son option en achetant l'action au prix  $K$  et il la vendra au prix  $S_{t_m}$  pour dégager un gain immédiat de  $S_{t_m} - K$ . Si on a  $S_{t_m} \leq K$ , il n'exercera pas son option. Le paiement (ou "payoff" <sup>(2)</sup>) que peut recevoir l'acheteur du call à la date d'échéance  $t_m$  est donné par <sup>(3)</sup>

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{call}} = \max[ S_{t_m} - K, 0 ] \quad (1)$$

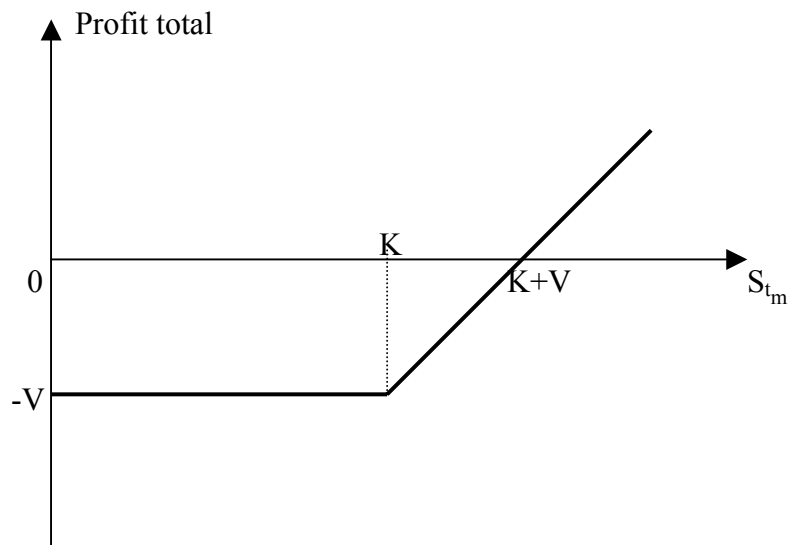
où  $S_{t_m}$  est le cours de l'action à la date  $t_m$  et  $K$  représente le prix d'exercice. En tenant compte de la prime payée par l'acheteur au moment de la conclusion du contrat et qui est définitivement acquise par le vendeur, nous représentons sur la figure 1 ci-dessous le profit total obtenu par l'acheteur de l'option d'achat européenne selon les valeurs prises par le prix  $S_{t_m}$  de l'actif sous-jacent à la date d'échéance :

---

<sup>(2)</sup> On peut également nommer ce paiement "payout" pour désigner ce que le vendeur doit verser à l'acheteur.

<sup>(3)</sup> Nous verrons dans le chapitre 2 sur la valorisation des produits dérivés que ce montant représente également la valeur de l'option en  $t_m$ .

**Figure 1** : Profit total procuré a l'échéance  $t_m$  par l'option d'achat européenne .  
 $S_{t_m}$  désigne le cours de l'action à l'échéance,  $V$  représente la prime et  
 $K$  correspond au prix d'exercice.



On observe que le profit est négatif pour  $S_{t_m} \leq K$  ainsi que pour  $K < S_{t_m} < K+V$  où  $V$  représente la prime payée par l'acquéreur du call. Il est néanmoins supérieur à  $-V$  dans le second cas si le spéculateur exerce son option. S'il laissait expirer son contrat, il perdrait le montant  $V$ . Lorsque  $S_{t_m} > K+V$ , le profit est positif. On voit à travers la figure 1 que le gain de l'acheteur de l'option d'achat est illimité tandis que sa perte est limitée au montant de la prime car le détenteur de l'option a la possibilité de ne pas l'exercer si  $S_{t_m} \leq K$ . La situation du vendeur de l'option d'achat est inversée par rapport à celle de l'acheteur. Elle est beaucoup plus risquée que celle de l'acheteur puisque les gains illimités de l'acquéreur correspondent aux pertes illimitées que subit le vendeur qui ne réalisera ce genre d'opération que s'il est convaincu de la baisse du prix de l'actif pour toucher la prime.

### ***L'option de vente***

Une option de vente est un contrat qui confère à l'acheteur le droit de vendre une certaine quantité de l'actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance et ceci avant ou à la date d'échéance. Lorsque l'exercice de l'option, c'est à dire la vente de la quantité de l'actif au prix d'exercice, ne peut être réalisé qu'à la date d'échéance, l'option de vente est dénommée

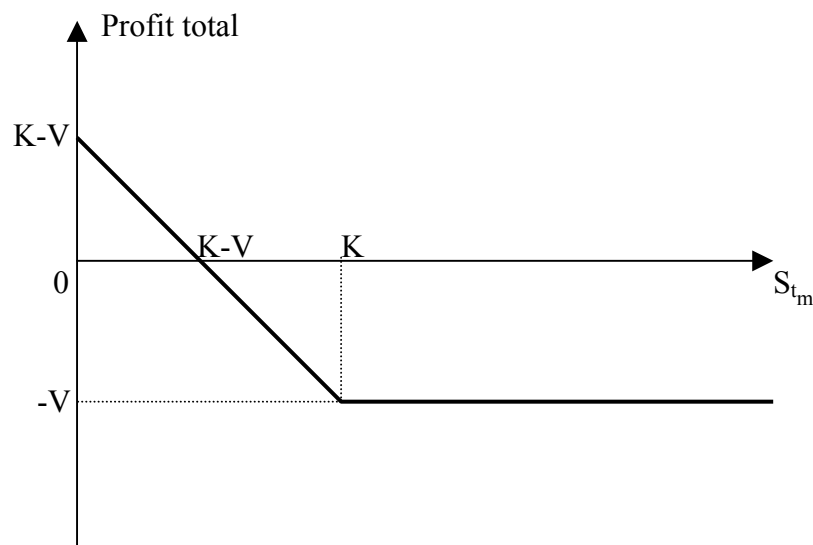
européenne. Dans le cas où il peut être effectué à tout moment jusqu'à la date d'expiration du contrat, elle est dite américaine. Comme dans le cas de l'option d'achat, l'acheteur paie une prime pour avoir la possibilité de ne pas exercer son option si la situation ne tourne pas à son avantage.

Prenons l'exemple du spéculateur qui envisage la baisse du prix d'une action dans les prochains mois. Il va alors acheter une option de vente sur cette action avec pour prix d'exercice  $K$ . A l'échéance  $t_m$  de l'option européenne, si le prix  $S_{t_m}$  de l'action est inférieur à  $K$  il achètera l'action au prix  $S_{t_m}$  et exercera son option pour la vendre au prix  $K$  afin de réaliser un gain de  $K - S_{t_m}$ . Si les anticipations du spéculateur ne se confirment pas à la date  $t_m$ , c'est à dire si  $S_{t_m} > K$ , il pourra ne pas exercer son option. Le payoff que procure le put s'exprime de la manière suivante à la date  $t_m$  :

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{put}} = \max[ K - S_{t_m}, 0 ]. \quad (2)$$

En intégrant à ce payoff la prime versée  $V$  au vendeur du put, nous illustrons sur la figure 2 le profit total que réalise l'acheteur du contrat.

**Figure 2 :** Profit total procuré à l'échéance  $t_m$  par l'option de vente européenne.  
 $S_{t_m}$  désigne le cours de l'action à l'échéance,  $V$  représente la prime et  
 $K$  correspond au prix d'exercice.





Le profit que peut obtenir l'acquéreur de l'option de vente européenne à l'échéance atteint un maximum qui est  $K-V$  lorsque le cours  $S_{t_m}$  de l'action est nul. Il atteint un minimum qui est  $-V$  lorsque  $S_{t_m}$  est supérieur ou égal à  $K$  car l'investisseur a la possibilité de ne pas exercer son option dans ce cas là. Il ne perd donc que le montant de la prime versée. Il peut réduire cette perte en exerçant son option lorsque  $S_{t_m} < K$ . La situation du vendeur de l'option de vente est inversée par rapport à celle de l'acheteur, il a un gain correspondant au montant de la prime  $V$  et une perte limitée à  $K-V$ .

Les options d'achat et de vente peuvent être négociées sur le marché de gré à gré ou sur le marché à terme réglementé (ou marché organisé). L'option émise sur le marché réglementé est dite négociable. L'acheteur de l'option peut à tout moment annuler sa position initiale en revendant son contrat (il en est de même pour le vendeur en rachetant le contrat). Nous aborderons plus en détail ce point et définirons ces deux marchés au cours de la prochaine section portant sur l'organisation du marché des produits dérivés.

En résumé nous pouvons dire que l'acheteur de l'option d'achat ou de vente a trois solutions pour dénouer son opération : il peut exercer son option (il achète ou vend l'actif au prix d'exercice), il peut choisir de ne pas l'exercer si la situation lui est défavorable et enfin il peut vendre son option si celle-ci est négociable.

### **1.1.1.2 Instruments à terme ferme**

A la différence des instruments conditionnels, les instruments à terme ferme ne permettent pas de renoncer à la transaction qui a été conclue antérieurement entre l'acheteur et le vendeur du sous-jacent. Ils regroupent le contrat à terme et le contrat d'échange que nous allons définir.

#### ***Le contrat à terme***

Le contrat à terme permet d'acheter ou de vendre une quantité de l'actif sous-jacent à une date ultérieure et pour un prix déterminé à l'avance. A la différence de l'option, le contrat

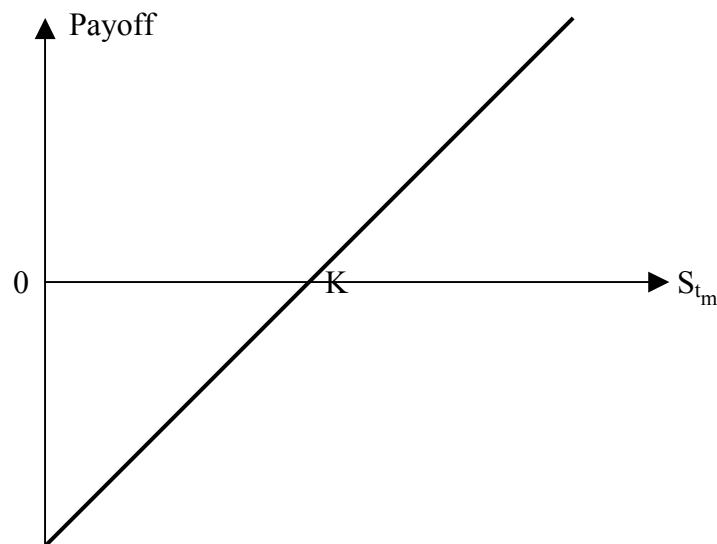
à terme oblige les parties à acheter et à vendre à la date de maturité. Il n'exige le paiement d'aucune prime pour l'acheteur du contrat puisqu'il ne lui offre pas la possibilité de renoncer à la transaction si celle-ci lui est défavorable. L'acquéreur peut toutefois se libérer de son obligation en revendant son contrat avant la date d'échéance. Nous verrons que cette possibilité est difficilement réalisable pour les contrats négociés sur le marché de gré à gré. Le payoff du contrat à terme lorsqu'il y a achat d'une quantité de l'actif à la date d'échéance  $t_m$  sur la base du prix pré-défini  $K$  s'écrit

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{CT}} = (S_{t_m} - K) \quad (3)$$

où  $S_{t_m} \geq K$ . Il constitue une perte dans le cas où  $S_{t_m} < K$ .

Graphiquement, il apparaît de la manière suivante :

**Figure 3 :** Paiement du contrat à terme dans le cas d'une obligation d'achat à la date d'échéance  $t_m$ .  $S_{t_m}$  désigne le cours de l'actif à l'échéance et  $K$  correspond au prix d'exercice.



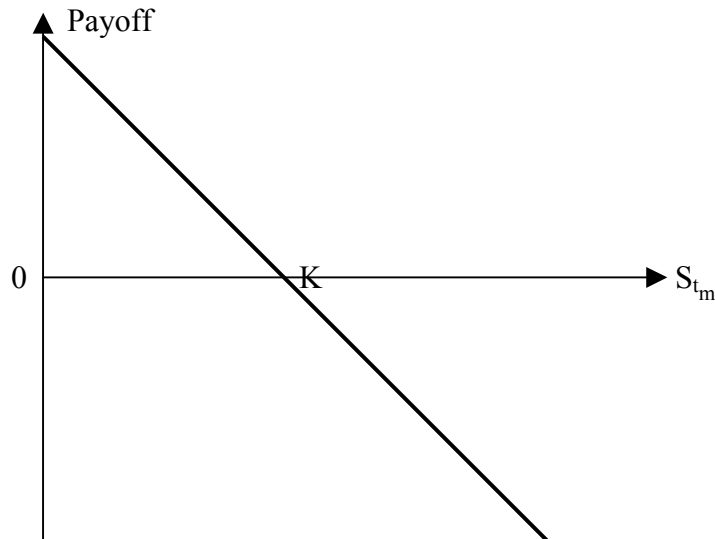
Le payoff du contrat à terme lorsqu'il y a vente d'une quantité de l'actif à la date d'expiration  $t_m$  sur la base d'un prix déterminé à l'avance  $K$  entre les parties est défini de la façon suivante

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{CT}} = (K - S_{t_m}) \quad (4)$$

où  $K \geq S_{t_m}$ . Il représente une perte dans le cas où  $K < S_{t_m}$ .

La représentation graphique du payoff dans ce cas précis est présentée sur la figure 4.

**Figure 4 :** Paiement du contrat à terme dans le cas d'une obligation de vente à la date d'échéance  $t_m$ .  $S_{t_m}$  désigne le cours de l'actif à l'échéance et  $K$  correspond au prix d'exercice.



On constate que les pertes que peut subir l'investisseur sont beaucoup plus importantes s'il souscrit à un contrat à terme qu'à une option. Elles peuvent être illimitées s'il a l'obligation de vendre à terme. Toutefois, l'avantage des contrats à terme est qu'ils ne requièrent pas le paiement d'une prime à la conclusion du contrat. La prime représente en général un coût très important pour le souscripteur.

Comme pour l'option, le contrat à terme peut être négocié sur le marché de gré à gré ou sur le marché réglementé. Lorsqu'il est émis sur le marché réglementé, il est appelé "futures" et dans le cas du marché de gré à gré, il est appelé "forward". D'autres distinctions sont aussi à souligner entre ces deux instruments. Les contrats sur les marchés organisés font l'objet d'une standardisation. A la différence des forwards, leurs caractéristiques (échéance, prix

d'exercice,...) sont pré-établies par le marché. Ils ne peuvent être faits sur mesure pour permettre la couverture contre un risque spécifique. Par conséquent, la protection offerte par les futures n'est pas parfaite. En revanche, ce caractère non unique des contrats favorise leur liquidité. Il est facile d'acheter ou de vendre ces contrats homogènes sur le marché. De ce fait, il est possible à tout moment de mettre fin à une position initiale en prenant une position inverse. L'acheteur et le vendeur du futures peuvent l'un et l'autre revendre (pour l'acheteur) ou racheter (pour le vendeur) sur le marché le contrat initialement conclu. La présence d'une chambre de compensation sur le marché réglementé s'interposant entre les acheteurs et les vendeurs et par laquelle sont enregistrées les transactions contribue également à la négociabilité des contrats. De plus, les futures ne comportent pas de risque de contrepartie, c'est à dire le risque concernant le non engagement (livraison, paiement,...) de la partie avec laquelle on a conclu le contrat, puisque qu'un système de marges (ou "marginning") oblige chaque partie à constituer un dépôt initial (ou "deposit") dès qu'une transaction a été conclue. Ce dépôt est quotidiennement crédité ou débité selon le gain ou la perte réalisé par l'intervenant à la clôture du marché. Nous y reviendrons plus en détail dans la partie qui suit sur l'organisation du marché des produits dérivés. Autre différence aussi, le prix du futures est coté sur le marché ce qui n'est pas le cas pour le prix des forwards. Il s'établit chaque jour au niveau du cours de compensation (ou "settlement price") déterminé par la chambre de compensation à la fin de chaque séance boursière. Contrairement au prix coté de l'option qui représente la prime, le prix coté du futures correspond au prix d'exercice qui sera appliqué au moment de la transaction.

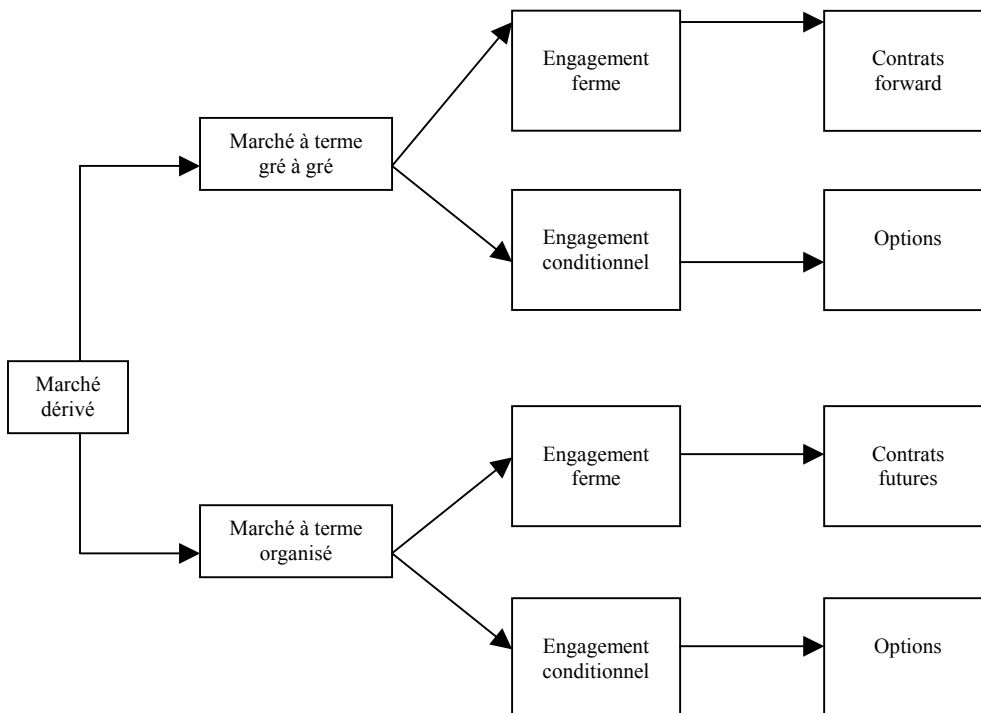
### ***Le contrat d'échange***

Le contrat d'échange (ou "swap") est un contrat de gré à gré entre deux parties qui s'échangent des flux financiers à des dates précises. Il peut s'agir de paiements basés sur un taux d'intérêt fixe contre des montants sur un taux d'intérêt variable pour les swaps de taux d'intérêt ou de dettes dans des devises différentes pour les swaps de devises. Pour le swap de taux d'intérêt, les intérêts correspondent à deux dettes de même montant, libellées en la même devise, l'une à taux fixe et l'autre à taux variable. Les swaps permettent aux cocontractants de modifier le taux ou la monnaie dans lequel s'exprime leurs paiements périodiques. Ils n'entraînent pas le versement d'une prime lors de la conclusion du contrat.

### 1.1.2 Organisation du marché des produits dérivés

Les transactions qui prévoient une livraison et un paiement immédiats des actifs sont négociées sur le marché au comptant ou à règlement immédiat (appelé aussi "spot market") tandis que celles portant sur des opérations différées sont centralisées sur le marché dit dérivé ou marché à terme. C'est sur ce marché dérivé que sont négociés les options, les contrats à terme ("futures" et "forwards") et les swaps. On peut distinguer au sein du marché à terme, un marché réglementé que nous décrivons dans la première partie et un marché de gré à gré (ou dit aussi OTC pour "over-the-counter") qui est introduit au cours de la seconde partie. La structure du marché dérivé avec ses différents contrats est reproduite sur la figure 5 ci-dessous.

**Figure 5 :** Structure du marche dérivé et typologie des contrats



### 1.1.2.1 Marché réglementé ou organisé

Le marché réglementé se compose du marché primaire et du marché secondaire. Sur le marché primaire, les demandeurs de fonds émettent des titres auxquels souscrivent les investisseurs. Ces derniers peuvent à tout moment céder leurs valeurs mobilières en les vendant sur le marché secondaire. La spécificité du marché organisé est de reposer sur des mesures destinées à assurer la sécurité, la liquidité et la transparence du marché. Il comporte une chambre de compensation qui s'interpose entre tout acheteur et tout vendeur de contrats. Elle permet de garantir la bonne fin des opérations en astreignant les agents à respecter un ensemble de règles pour lesquelles nous nous contenterons de citer les principales. L'une d'elles oblige les participants à constituer un dépôt de garantie (sous forme d'espèces ou de titres de créance) lorsqu'une transaction a été conclue afin de couvrir une partie des pertes en cas de défaillance de l'intervenant. En effet, entre la date de conclusion du contrat et celle de la livraison du sous-jacent, l'une des parties peut par exemple faire faillite et ne pas honorer son contrat à l'échéance. Pour éliminer ce risque de contrepartie, en plus du dépôt initial qui ne représente qu'une fraction des montants en jeu, les agents doivent également répondre chaque jour à des appels de marge (ou "call margin") lorsqu'ils subissent des pertes potentielles à la clôture du marché. Quotidiennement, à la fin de chaque séance boursière, on détermine le gain ou la perte de l'intervenant en simulant la clôture de l'opération à la présente date sur la base d'un cours de compensation calculé par la chambre. Ce cours correspond à la moyenne des cours traités dans la dernière demi-heure. Si la position de l'agent se solde par un gain, le compte de celui-ci est crédité. Si elle dégage une perte, l'intervenant devra répondre à un appel de marge en effectuant un règlement avant l'ouverture de la séance du lendemain. Faute d'exécution de la part du débiteur, sa position sera liquidée. Ces mesures visent à assurer la sécurité du marché. Quant à la liquidité, elle est favorisée par la standardisation des contrats. Les prix d'exercice, les échéances ainsi que la taille des contrats (par exemple le nombre d'actions qu'une option permet d'acheter ou de vendre) sont pré-définis par le marché. La transparence du marché est pour sa part garantie par une cotation des prix en permanence et accessible à tous. Les contrats transigeant sur ce marché sont dits négociables. L'acheteur et le vendeur du contrat peuvent l'un et l'autre, et indépendamment l'un de l'autre, annuler leur position initiale en effectuant une opération en sens inverse. L'acheteur peut avant l'échéance revendre son dérivé et le vendeur peut décider de racheter le produit. La négociabilité des contrats est facilitée lorsque les conditions suivantes sont remplies : les contrats sont cotés et standardisés et une chambre de compensation s'immisce

entre les acheteurs et les vendeurs permettant ainsi à chacun de dénouer sa position sans rechercher sa contrepartie initiale et sans avoir besoin d'obtenir son accord. La cotation des prix permet la concentration des ordres et la standardisation permet de racheter et de revendre les produits financiers avec les mêmes termes (échéance, prix d'exercice) que lors de leur émission.

### **1.1.2.2 Marché de gré à gré**

Tout comme le marché réglementé, le marché de gré à gré comprend un marché primaire et un marché secondaire. La différence réside dans le fait que les acteurs sur le marché de gré à gré ne traitent pas avec un organisme de compensation. Les négociations se font directement entre les intervenants. Dès qu'une transaction a été conclue, elle ne fait pas l'objet d'un enregistrement auprès de la chambre de compensation. Les contrats sur ce marché ne sont pas standardisés ce qui permet aux investisseurs de trouver une couverture plus adaptée à leurs besoins. Mais du fait que ces contrats soient taillés sur mesure et négociés à titre privé, ils ne sont pas cotés et sont moins liquides que les contrats standardisés. Ils sont aussi difficilement négociables. L'absence d'une chambre de compensation et le caractère sur mesure de ces contrats ne permettent pas de trouver à tout moment une contrepartie intéressée pour clore la position de l'intervenant. De plus, il existe un risque de contrepartie sur ce marché. En effet, aucun mécanisme n'est présent pour contrôler la bonne fin des opérations. Un intervenant peut ne pas recevoir son paiement ou sa livraison à la date d'échéance du contrat suite à la défaillance de la contrepartie.

Nous allons à présent voir que le marché à terme climatique, ainsi que les contrats qui le composent, ont des structures proches de celles que nous venons de présenter.

## **1.2 TYPOLOGIE DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES**

Les produits dérivés climatiques sont des contrats qui ont pour sous-jacent un indice météorologique qui peut reposer sur la température, l'ensoleillement, les précipitations ou encore le gel. Ils permettent aux entreprises dont l'activité dépend du climat (compagnies d'énergie, exploitants agricoles,...) de se prémunir contre les variations climatiques qui

pourraient entraîner un manque à gagner pour celles-ci. Similairement aux contrats dits classiques que nous venons de présenter, les dérivés climatiques comprennent les options, les contrats à terme et les swaps. Nous allons dans cette partie développer les différents types de contrat climatique négociés sur le marché.

### **1.2.1 Options climatiques**

L'option climatique permet à son détenteur de percevoir un paiement lorsque l'indice météorologique franchit à la hausse (pour un contrat cap) ou à la baisse (pour un contrat floor) une limite convenue à l'avance entre l'acheteur et le vendeur. Ce sont des contrats "cash settlement" qui se dénouent par un versement en espèces plutôt que par une livraison physique de l'indice à l'une des parties. Comme dans le cas de l'option classique mentionnée ci-dessus, le souscripteur de l'instrument dérivé climatique paie une prime pour bénéficier du droit de ne pas exercer l'option lorsque la transaction lui est défavorable. Les options climatiques sont des contrats de type européen ne permettant leur exercice qu'à la date d'expiration.

Il existe quatre principaux contrats pour les options climatiques qui sont le cap, le floor, le call spread et le put spread. Les contrats cap et floor sont des instruments de base du marché des taux. Un cap est un contrat qui permet à son acheteur de se couvrir contre une hausse du taux d'intérêt au delà d'un niveau fixé à l'avance (taux plafond ou taux d'exercice) pour une série de périodes précises dans le futur et ceci moyennant le paiement immédiat d'une prime. Un floor est un contrat qui permet à son acheteur de se protéger contre une baisse du taux d'intérêt en deçà d'un certain seuil (taux plancher ou taux d'exercice) pour une série de périodes prédéterminées dans le futur et ceci contre le paiement immédiat d'une prime. Les contrats cap et floor climatiques qui ne portent que sur une seule période sont respectivement équivalents aux options d'achat et aux options de vente.

#### **1.2.1.1 Le cap ou option d'achat**

Le cap permet de fixer une limite au-dessus de laquelle l'indice météorologique ne doit pas franchir au cours d'une période de temps considérée sous peine de versement d'un paiement pour l'acheteur de l'option climatique. Par exemple, un ostréiculteur qui risque de



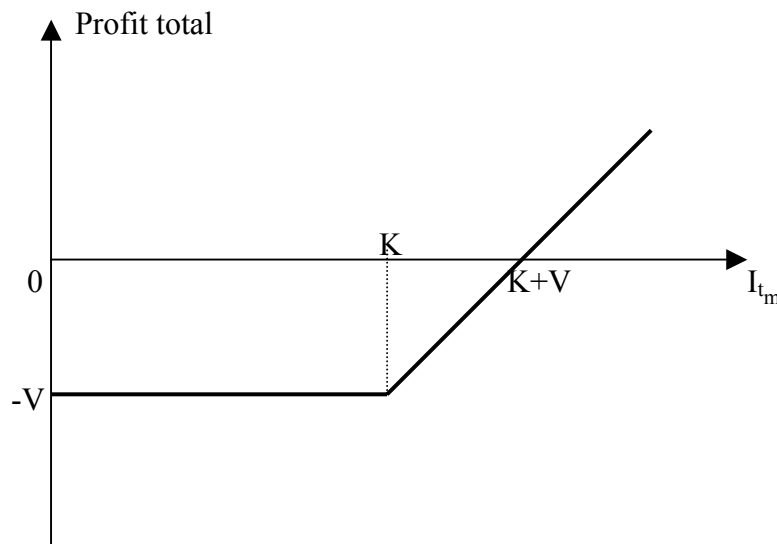
perdre une partie de sa production d’huîtres lorsque les températures sont trop élevées peut opter pour un cap qui lui permettra d’obtenir un dédommagement dès que l’indice météorologique basé sur la température augmente au-delà d’un certain seuil convenu à l’avance avec le vendeur de l’option. La structure de paiement terminal du cap se présente alors de la manière suivante :

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{cap}} = \delta \max[ I_{t_m} - K, 0 ] \quad (5)$$

où  $t_m$  correspond à la date de maturité,  $I_{t_m}$  est l’indice météorologique,  $\delta$  est la valeur associée à une unité de la mesure utilisée pour l’indice (elle est appelée aussi "tick size") et  $K$  est le seuil de paiement.

Graphiquement, le profit total en considérant la prime payée par l’acheteur du cap apparaît de la sorte :

**Figure 6 :** Profit total procuré à l’échéance  $t_m$  par le cap.  
 $I_{t_m}$  désigne la réalisation de l’indice météorologique en  $t_m$ ,  $V$  représente la prime et  $K$  correspond au niveau d’exercice.



Ce profil de paiement est similaire à celui de l'option d'achat. Il équivaut à l'achat de l'indice météorologique au prix d'exercice  $K$  en exerçant l'option d'achat sur cet indice et ensuite à sa revente au prix  $I_{t_m}$  à la date  $t_m$  lorsque  $I_{t_m} > K$ .

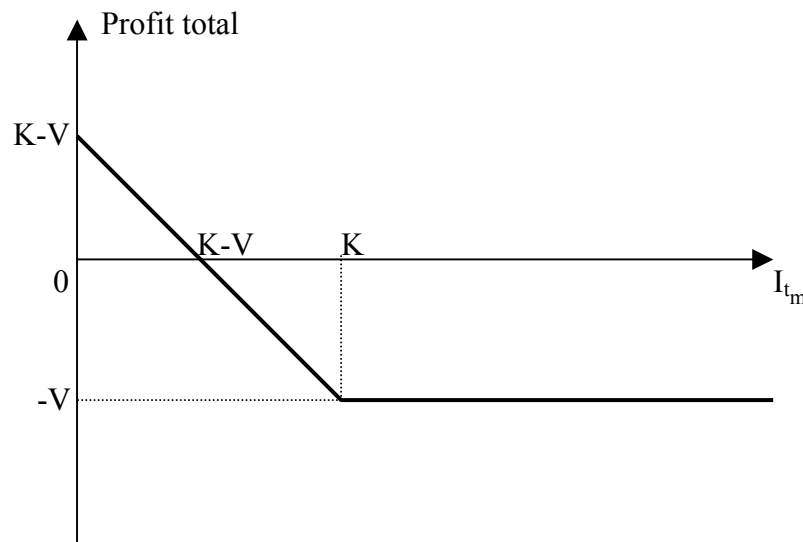
### 1.2.1.2 Le floor ou option de vente

Le floor permet de fixer une limite en-dessous de laquelle l'indice météorologique ne doit pas franchir durant une période de temps donnée sous peine de versement d'un paiement pour l'acheteur du dérivé climatique. Ce contrat pourrait intéresser par exemple le responsable d'une station balnéaire dont le chiffre d'affaire diminuerait s'il ne faisait pas assez chaud pendant la période estivale. Il serait alors dédommagé lorsque l'indice météorologique basé sur la température se trouverait en-dessous d'un seuil convenu à l'avance entre les parties. Le payoff du floor apparaît de la manière suivante à la date de maturité  $t_m$  :

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{floor}} = \delta \max[ K - I_{t_m}, 0 ]. \quad (6)$$

Nous représentons sur la figure 7 le profit total de l'acheteur du floor en tenant compte de la prime rétribuée.

**Figure 7 :** Profit total procuré à l'échéance  $t_m$  par le floor.  
 $I_{t_m}$  désigne la réalisation de l'indice météorologique en  $t_m$ ,  $V$  représente la prime et  $K$  correspond au niveau d'exercice.



On constate que le profil de paiement du floor s'apparente à celui de l'option de vente. Il peut être reproduit en achetant à la date  $t_m$  l'indice au niveau  $I_{t_m}$  et en le revendant au prix d'exercice  $K$  en exerçant l'option de vente sur cet indice lorsque  $I_{t_m} < K$ .

Il existe des contrats climatiques appelés "call spreads" et "put spreads" <sup>(4)</sup> qui, à la différence des contrats que nous venons de présenter, comportent une limitation des risques de la part des vendeurs (en l'occurrence les assureurs). Ces derniers déterminent un montant maximum des pertes qui seront dédommangées pour l'acheteur de l'option climatique.

### 1.2.1.3 Le call spread

Un call spread est une stratégie d'écart qui consiste à combiner des options d'achat de prix d'exercice différents ou de dates d'échéance différentes. On parlera d'un écart vertical lorsque simultanément l'on achète une option d'achat de prix d'exercice  $K_1$  et l'on vend une option d'achat sur le même actif avec un prix d'exercice  $K_2$  tel que  $K_2 > K_1$ , les deux options ayant la même date de maturité. On parlera d'un écart horizontal dans le cas où les prix d'exercice sont identiques mais les dates d'échéance diffèrent. On s'intéressera ici seulement à l'écart vertical qui est la structure la plus communément employée pour les options climatiques.

Reprenons l'indice sous-jacent  $I$  de l'option climatique avec  $I_{inf} = K_1$  et  $I_{sup} = K_2$  où  $I_{inf}$  et  $I_{sup}$  sont respectivement la limite inférieure et supérieure du call spread sur l'indice  $I$ , les différents cas de réalisation de paiement à l'échéance  $t_m$  pour l'acheteur du call spread sont : si l'indice  $I_{t_m}$  à la date  $t_m$  est inférieur ou égal à  $I_{inf}$ , l'acheteur ne reçoit aucun paiement et il perd le montant de la prime versée ; si  $I_{inf} < I_{t_m} \leq I_{sup}$ , il reçoit un paiement se situant dans l'intervalle  $[I_{t_m} - I_{inf}; I_{sup} - I_{t_m}]$  et si  $I_{sup} < I_{t_m}$ , il perçoit la somme maximale de  $(I_{sup} - I_{inf})$  quel que

---

<sup>(4)</sup> Le spread est une combinaison d'options. D'autres combinaisons d'options sont également possibles dans le cas des options climatiques telles que le collar, le straddle et le strangle.

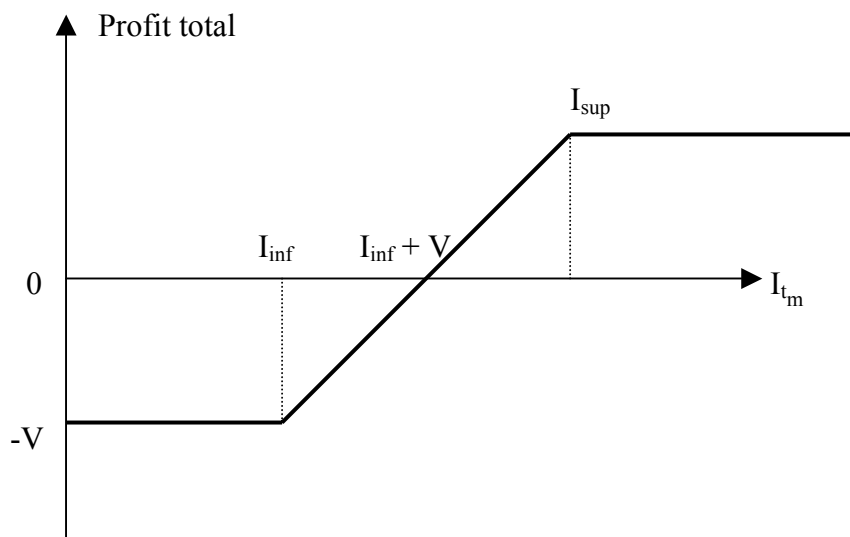
- Collar : correspond à l'achat d'une option (call ou put) associé à la vente d'une option de sens contraire (call ou put). Il permet de se couvrir à moindre coût car l'achat d'une option est financé par la vente d'une autre option.
- Straddle : correspond à l'achat simultané d'un call et d'un put sur le même sous-jacent et ayant le même prix d'exercice et la même échéance. L'acheteur du straddle anticipe une forte variation de cours sans savoir exactement dans quel sens elle aura lieu.
- Strangle : correspond à l'achat simultané d'un call et d'un put de même échéance mais à des prix d'exercice différents. La perte, si le cours du sous-jacent reste dans les valeurs centrales, est inférieure à celle du straddle.

soit l'écart au-dessus de  $I_{sup}$ . Contrairement aux call options, les gains ne sont pas ici illimités pour l'acheteur. Il y a une limite supérieure  $I_{sup}$  au delà de laquelle le détenteur du call spread ne gagnera pas plus du montant maximal ( $I_{sup}-I_{inf}$ ). Le payoff du call spread à la date  $t_m$  est défini par la formule suivante :

$$\text{payoff}_{t_m}^{CS} = \delta \max[ \min(I_{t_m}-I_{inf}, I_{sup}-I_{inf}), 0 ]. \quad (7)$$

Graphiquement, la structure de profit total pour l'acquéreur du call spread est de la forme suivante :

**Figure 8 :** Profit total procuré à l'échéance  $t_m$  par le call spread.  
 $I_{t_m}$  désigne la réalisation de l'indice météorologique en  $t_m$ ,  $V$  représente la prime et  $K$  correspond au niveau d'exercice.



#### 1.2.1.4 Le put spread

Un put spread est une stratégie d'écart qui consiste à combiner des options de vente de prix d'exercice différents ou de dates d'échéance différentes. On utilisera le terme d'écart vertical lorsque simultanément l'on achète une option de vente de prix d'exercice  $K_1$  et l'on vend une option de vente sur le même actif avec un prix d'exercice  $K_2$  tel que  $K_2 < K_1$ . Dans le cas où ce sont les dates d'échéance qui diffèrent, on emploiera le terme d'écart horizontal.

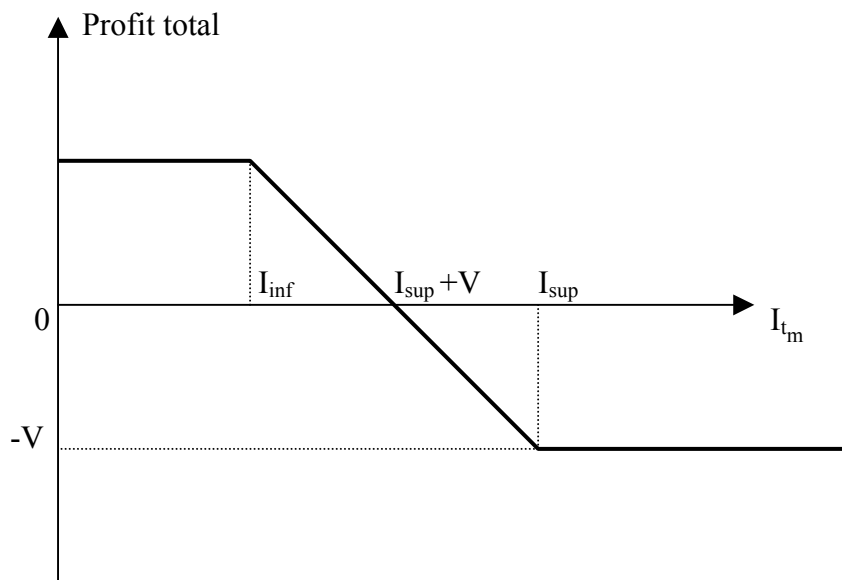
Comme nous l'avons précisé précédemment, nous limiterons notre analyse au cas de l'écart vertical.

Soit le put spread sur l'indice météorologique  $I$  dont les prix d'exercice sont  $I_{inf}$  et  $I_{sup}$  tels que  $I_{sup} > I_{inf}$ , il ne procure aucun paiement si l'indice  $I_{t_m}$  à la date de maturité  $t_m$  est supérieur ou égal à  $I_{sup}$ . Si  $I_{t_m}$  est inférieur à  $I_{sup}$ , il donne droit à un paiement qui atteint un maximum égal à  $(I_{sup} - I_{inf})$  lorsque  $I_{t_m}$  est en deçà de  $I_{inf}$ . Le payoff du put spread à la date  $t_m$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{PS}} = \delta \max[ \min(I_{sup} - I_{t_m}, I_{sup} - I_{inf}), 0 ]. \quad (8)$$

En incluant à ce payoff la prime investie  $V$ , il en ressort la représentation graphique suivante pour le profit total de l'acquéreur du put spread à la date d'expiration  $t_m$ .

**Figure 9 :** Profit total procuré à l'échéance  $t_m$  par le put spread.  
 $I_{t_m}$  désigne la réalisation de l'indice météorologique en  $t_m$ ,  $V$  représente la prime et  $K$  correspond au niveau d'exercice.



Dans un souci de clarté et de simplification des calculs, nous avons fait le choix de ne pas considérer ces contrats dont le profil de paiement est un peu plus complexe que ceux des

types cap et floor. Cependant, les calculs et les techniques qui seront utilisés tout au long de notre travail pourront être transposés aux call et put spreads.

### 1.2.2 Contrat à terme et swap climatique

Les contrats à terme ("futures" et "forwards") et les swaps climatiques permettent également aux entreprises de se protéger contre les aléas liés au climat. Ils donnent lieu à un règlement lorsque l'indice météorologique franchit un seuil convenu à l'avance entre les parties. A l'inverse des options, ils ne font l'objet d'aucun paiement à l'avance lors de leur conclusion. Les parties doivent alors exécuter leur transaction à l'échéance.

Dans le cas de l'ostréiculteur qui craint un été caniculaire, il peut souscrire à un contrat à terme climatique avec obligation d'achat de l'indice météorologique à un niveau d'exercice  $K$ . Ainsi à la date d'expiration  $t_m$ , il pourra percevoir le montant  $(I_{t_m} - K)$  si  $I_{t_m} > K$ . Ce montant correspond à l'achat de l'indice au prix  $K$  et à sa revente au prix  $I_{t_m}$ . Si  $I_{t_m} < K$ , son engagement lui fera perdre la somme de  $(K - I_{t_m})$  puisqu'il sera obligé d'acheter l'indice au prix fort qui est  $K$  pour le revendre au prix faible de  $I_{t_m}$ . A l'inverse, le responsable de la station balnéaire qui appréhende des températures trop basses pour la saison estivale va entrer en possession d'un contrat à terme avec obligation de vente de l'indice météorologique à un niveau  $K$ . Il percevra alors à la date de maturité  $t_m$  le montant  $(K - I_{t_m})$  si  $I_{t_m} < K$  autrement il perdra  $(I_{t_m} - K)$ . Les pertes encourues ici peuvent être illimitées.

Le swap climatique permet aux entreprises qui ont des intérêts divergents d'échanger leur couverture de risque sur une période de temps prédéterminée. Par exemple, l'éleveur d'huîtres et le responsable de la station balnéaire peuvent s'accorder pour conclure un contrat d'échange dans lequel l'ostréiculteur s'engagerait à verser un montant au responsable si les températures ont été en deçà d'une limite convenue à l'avance car l'éleveur qui n'aura pas perdu sa production pourra la vendre dans les délais impartis et de son côté, le gérant de la station accepterait de dédommager le producteur d'huîtres si les températures ont été au delà de cette limite ce qui lui aura permis de conserver et d'attirer de la clientèle. De même, une station de ski qui souhaite qu'il neige beaucoup pour faire le plein de réservations peut négocier un contrat d'échange avec les autorités de son département qui préfèrent qu'il ne

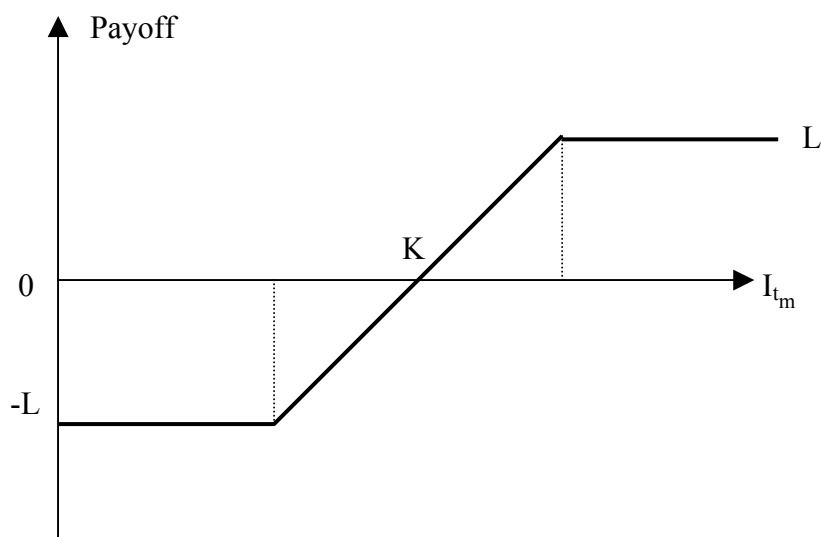
neige pas trop pour réduire les coûts de salage et d'entretien des routes. La station de ski recevra alors une somme si l'enneigement se trouve au dessous d'un certain seuil car elle aura perdu des clients tandis que les autorités auront économisé sur leurs frais. Elle paiera un dédommagement aux autorités si l'enneigement se trouve au dessus du seuil car elle aura augmenté son chiffre d'affaire. Le swap appliqué au risque climatique est différent du swap classique (swap de taux d'intérêt ou de devises). Il ne porte pas sur un échange de flux financiers à des dates précises mais sur un seul paiement qui a lieu à une date prédéterminée. De ce fait, il est semblable au contrat forward. Les contrats d'échange climatiques sont principalement des contrats dits cappés dont le montant des gains pour les deux parties est borné. Leur payoff s'écrit alors de la manière suivante :

$$\text{payoff}_{t_m}^{\text{SC}} = \delta \max[ \min(I_{t_m} - K, L), -L ] \quad (9)$$

où  $L$  est une limite fixée entre les deux parties. En se plaçant du point de vue d'une des parties, un payoff positif signifie qu'elle reçoit le paiement tandis qu'un payoff négatif indique qu'elle verse la somme à l'autre partie.

Cette structure de paiement se présente sous la forme suivante :

**Figure 10 :** Paiement du swap cappé à l'échéance  $t_m$ .  
 $I_{t_m}$  désigne la réalisation de l'indice météorologique en  $t_m$  et  
 $K$  correspond au niveau d'exercice.



## **1.3 MARCHE DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES**

Le marché à terme climatique est constitué d'un marché organisé et d'un marché OTC. Le marché organisé climatique est actuellement animé par plusieurs places boursières qui se trouvent en Amérique du nord, en Europe et en Asie. Des transactions sont également enregistrées en Australie pour laquelle il n'existe pas pour l'instant de marché officiel climatique. La plus dynamique de ces places est le Chicago Mercantile Exchange (CME).

### **1.3.1 Historique et évolution du marché des produits dérivés climatiques**

La première transaction portant sur les conditions climatiques a été effectuée aux Etats-Unis en septembre 1997. Les compagnies d'énergie Enron et Koch en ont été les initiatrices en concluant ensemble un swap sur un indice basé sur l'accumulation des degrés-jours pour couvrir leur chiffre d'affaire contre un hiver trop clément. Le degré-jour représente la déviation de la température par rapport à une valeur de référence qui est 65° Fahrenheit (ou 18° Celsius). C'est la valeur communément choisie par le secteur de l'énergie aux Etats-Unis. Elle correspond au seuil en deçà duquel on observe la mise en route du système de chauffage et au delà duquel on constate le déclenchement de la climatisation. Lorsque l'on considère la température excédant 65°F, on parlera de degré-jour refroidissement (ou CDD pour "Cooling Degree Day") et lorsque l'on s'intéresse à son écart en dessous de 65°F, on parlera de degré-jour chauffe (ou HDD pour "Heating Degree Day"). La dérégulation du secteur énergétique aux Etats-Unis en 1996 a contribué au développement des contrats climatiques. En soumettant le prix du gaz et de l'électricité aux conditions du marché, elle a créé une concurrence accrue entre les compagnies d'énergie qui, pour conserver ou augmenter leur position dans le secteur, devaient proposer des tarifs attractifs aux consommateurs. Pour ce faire, elles devaient chercher à minimiser leurs coûts en anticipant avec précision la demande des agents car, par exemple, une hausse brutale et inattendue de cette demande pour le chauffage suite à une baisse des températures en dessous de la normale, les contraignait à se fournir sur les marchés, aux prix forts, l'énergie dont elles avaient besoin pour répondre immédiatement au surplus de la demande. Cette hausse des coûts se répercutait alors sur le montant de la facture que devait payer le consommateur. Pour éviter une trop forte volatilité des tarifs proposés, les compagnies d'énergie se sont progressivement tournées vers les dérivés climatiques qui leur procuraient un dédommagement financier lorsque l'indice météorologique s'écartait d'un



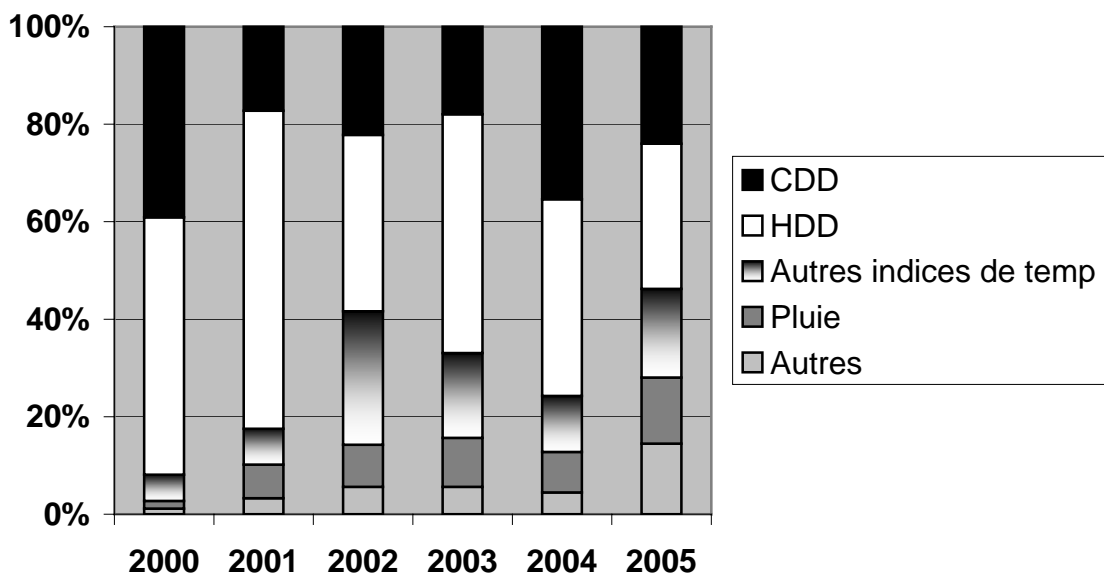
niveau fixé à l'avance. Au cours de l'hiver 1997, le phénomène El Niño, un courant marin chaud survenant tous les 3 à 4 ans dans l'océan pacifique, a entraîné des dérèglements climatiques importants aux Etats-Unis, qui ont incité beaucoup d'entreprises à rechercher une couverture contre le risque climatique. Les violentes précipitations en Californie et le niveau des températures plus élevé que la normale dans le nord des Etats-Unis ont occasionné un coût de 1.96 milliard de dollars, soit 0.03% du PIB américain.

L'expansion des contrats climatiques sur le marché de gré à gré a donné lieu en septembre 1999 à la mise en place d'une plate-forme électronique dédiée au commerce des produits dérivés climatiques sur le marché organisé du Chicago Mercantile Exchange. Les premiers contrats climatiques standardisés du CME reposaient essentiellement sur les indices des HDD et CDD cumulés et concernaient dix villes américaines : Atlanta, Chicago, Cincinnati, Dallas, Des Moines, Las Vegas, New York, Philadelphie, Portland et Tucson. Aujourd'hui, ils se sont étendus à dix-huit villes américaines comprenant Baltimore, Boston, Detroit, Houston, Kansas City, Minneapolis, Sacramento et Salt Lake City. Neuf villes européennes s'y sont adjointes en octobre 2003, Amsterdam, Barcelone, Berlin, Essen, Londres, Madrid, Paris, Rome et Stockholm ainsi que deux villes japonaises, Tokyo et Osaka, pour lesquelles l'indice de température est basé sur la température moyenne de la journée et non pas sur le degré-jour. Les villes européennes ont à la fois un indice climatique sur la température moyenne de la journée et sur le degré-jour. Afin de répondre à un besoin de couverture contre des risques liés à d'autres phénomènes climatiques que la température, le CME a introduit en 2006 un contrat sur le gel pour la ville d'Amsterdam et un contrat sur la neige pour Boston et New York. La figure 11 montre la part prépondérante des contrats sur l'indice de température (hors CME) qui représentent 72% des transactions en 2005. On observe également la part croissante des dérivés sur d'autres variables climatiques (notamment la pluie).

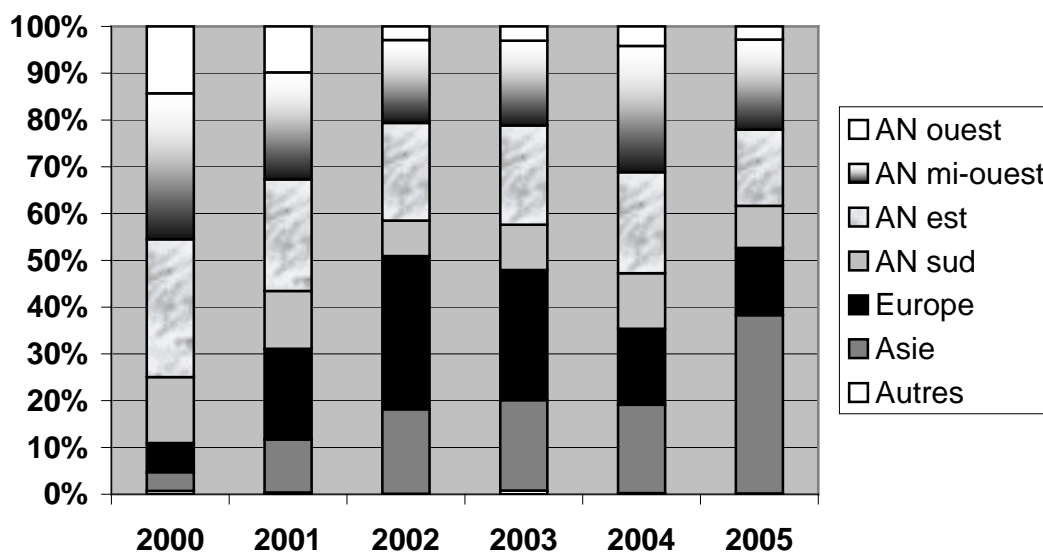
Les contrats climatiques se sont également développés à travers le monde. En Europe, la première transaction climatique a eu lieu en septembre 1998 entre Enron et Scottish Hydro Electric. Par la suite, le LIFFE (London International Financial Futures and Options Exchange) a lancé en juillet 2001 trois contrats à terme sur la température moyenne journalière pour Londres, Paris et Berlin. Au Japon, la firme Mitsui Marine et un producteur d'accessoires de sport ont négocié en 1999 la première option climatique sur un indice d'enneigement. En mars 2003, Natsource Japan, une importante entreprise de courtage en

énergie, a introduit l'indice de température JWDI (Japan Weather Derivatives Index) ainsi qu'une plate-forme électronique d'échange des produits dérivés climatiques, le Japanese Weather Exchange (JWE). En Australie, le premier contrat climatique a été conclu en mars 1998 entre deux compagnies d'énergie, United Energy Marketing et Utilicorp. Au Canada, le marché climatique de Montréal a vu le jour en juillet 2006. Il est né de l'accord entre la Bourse de Montréal et le Chicago Climate Exchange (CCE). La figure 12 ci-dessous met en évidence le volume important des contrats climatiques échangés (hors CME) sur le continent nord américain et révèle également l'intérêt grandissant de l'Asie pour ce type de produit.

**Figure 11** : Répartition des contrats climatiques négociés par type de sous-jacent (contrats du CME non inclus).  
Source : PriceWaterHouseCoopers, juin 2006



**Figure 12 :** Répartition des contrats climatiques négociés par continent (contrats du CME non inclus). AN désignant l'Amérique du nord.  
Source : PriceWaterHouseCoopers, juin 2006

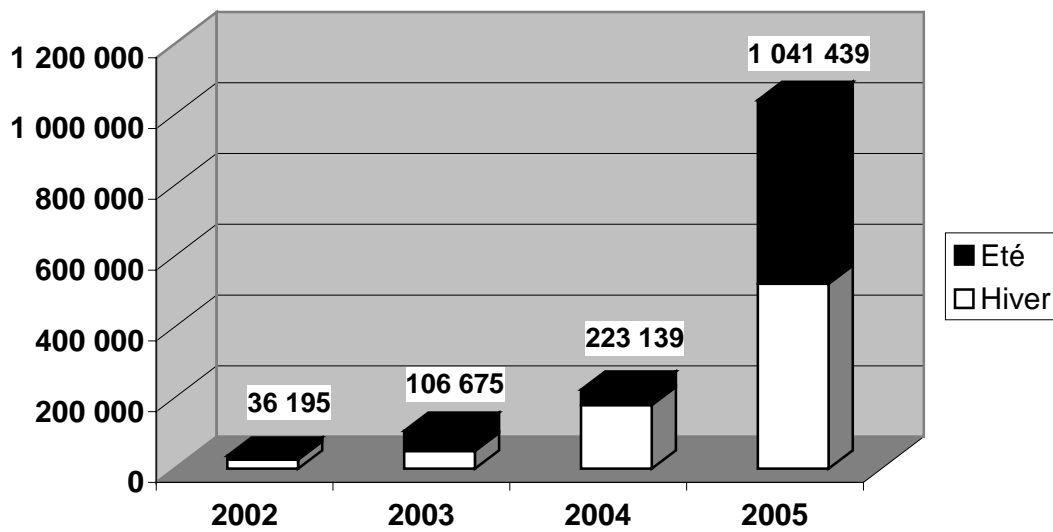


### 1.3.2 Organisation du Chicago Mercantile Exchange et structure des contrats

Le Chicago Mercantile Exchange est une bourse américaine d'instruments financiers dérivés. Comme tout autre marché financier, elle comprend un marché primaire où sont émis les nouveaux contrats, un marché secondaire sur lequel les produits déjà émis sont échangés et une chambre de compensation qui s'interpose entre les acheteurs et les vendeurs. Ses opérations portant sur les dérivés climatiques n'ont cessé de progresser au cours des dernières années comme on peut le constater à travers la figure 13. Elle a réalisé 1.04 million de transactions de produits dérivés climatiques en 2005 ce qui représente un bond de 300% par rapport au nombre de contrats conclus en 2004. Le montant total des échanges s'est porté à 42.9 milliards de dollars en 2005 contre 5.5 milliards de dollars en 2004. Il a été multiplié par 8 entre 2004 et 2005. Le nombre de contrats négociés pendant les périodes hivernales est supérieur à celui des contrats souscrits durant les périodes estivales. Toutefois, on a pu constater une hausse spectaculaire en 2005 de la demande de couverture pour la saison chaude : 518 952 contrats en 2005 contre 43 482 en 2004. Ceci peut se justifier par la prise de conscience des dommages économiques engendrés par des étés de plus en plus chauds et qui se prolongent au fil des ans. Lorsque l'on rapproche les résultats du CME et du marché de gré à gré qui apparaissent sur la figure 14, on observe une progression soutenue et de plus en plus

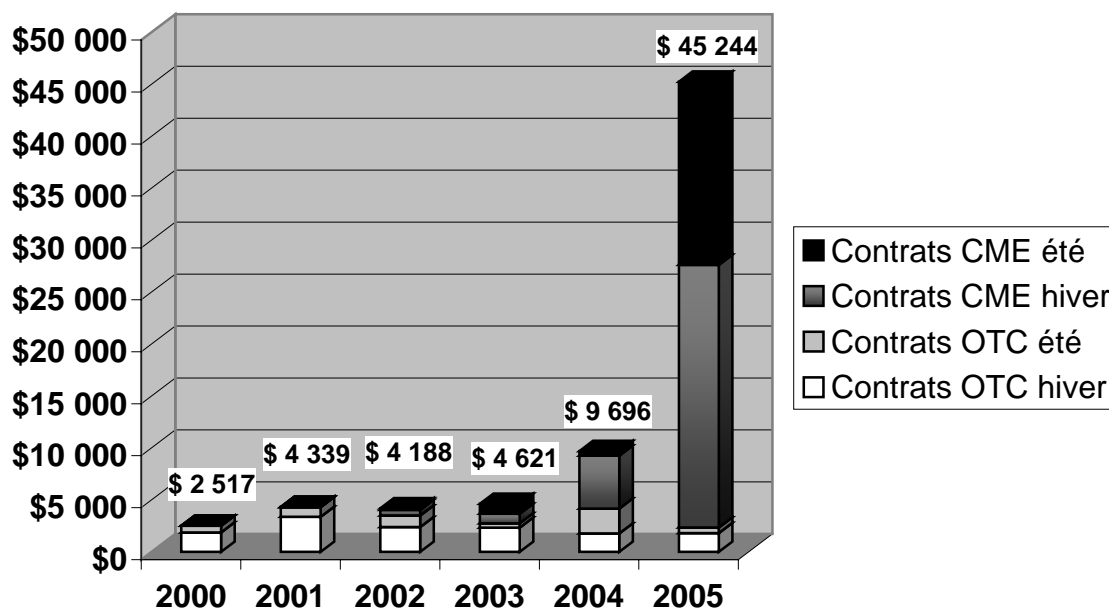
importante du nombre de contrats climatiques traités sur le CME au détriment de ceux sur le marché OTC. En 2005, la proportion des contrats négociés sur le CME a été de 94,8% contre 5,2 % pour le marché de gré à gré. La sécurité et la liquidité, qui sont plus grandes sur le CME que sur le marché OTC, expliquent le succès progressif du marché organisé.

**Figure 13 :** Nombre de contrats négociés sur le CME au cours de la saison froide et chaude.  
Source : PriceWaterHouseCoopers, juin 2006



**Figure 14 :** Valeur notionnelle totale des contrats climatiques négociés entre 2000 et 2005 (exprimée en millions de dollars).

Source : PriceWaterHouseCoopers, juin 2006



Le CME est à l'origine des contrats climatiques standardisés. L'indice sous-jacent porte principalement sur la température. Il n'est pas possible de structurer les contrats sur d'autres indices que ceux figurant sur ce marché. De plus, il n'est disponible que pour certaines villes américaines, européennes et japonaises comme on peut le voir dans les tableaux 1, 2 et 3. Les échéances et les prix d'exercice sont également pré-définis par le marché. Les strike prices doivent évoluer à l'intérieur d'un intervalle précis et les périodes de couverture s'étendent sur un mois ou sur une saison (d'octobre à avril pour les contrats sur l'indice des HDD cumulés et de mai à septembre pour ceux sur l'indice des CDD cumulés). Les instruments financiers climatiques négociés sur le CME sont les contrats à terme (futures) et les contrats d'option sur futures. Ces instruments sont négociables. Un intervenant peut à tout moment dénouer sa position initiale en prenant une position inverse. La cotation de ces contrats est effectuée en points d'indice. Pour obtenir la valeur du contrat, il suffit de multiplier le cours coté par le tick size qui est par exemple de 20\$ pour un degré-jour. Les principaux intervenants sur ce marché sont, d'un côté, les compagnies énergétiques (dites "end users") qui souhaitent couvrir leurs risques météorologiques et qui représentent pour une grande partie la communauté des acheteurs et de l'autre côté, les banques et les compagnies d'assurance et de réassurance qui sont souvent à l'origine des transactions et qui constituent la communauté des vendeurs. La

domination des compagnies d'énergie sur ce marché explique la prépondérance des indices exprimés en degrés-jours. Toutefois, la place boursière a étendu son offre en proposant désormais des sous-jacents sur la température moyenne journalière, sur le gel et sur la neige permettant ainsi des couvertures moins destinées à l'industrie énergétique. Le CME est organisé selon les mêmes règles que celles présentées au cours de la description du marché réglementé. Les intervenants passent des ordres d'achat et de vente qui sont confrontés sur le marché. Les accords issus de cette confrontation sont ensuite enregistrés auprès de la chambre de compensation et entraînent la constitution d'un dépôt de garantie pour chacune des parties. Le compte de marge du client est ajusté quotidiennement en fonction de l'écart entre le cours de compensation déterminé à la fin de chaque séance boursière et le prix auquel le contrat a été négocié. Si l'écart se solde par un gain pour le client, son compte sera crédité. S'il représente une perte, un intermédiaire du marché qui gère son compte lui fera un appel de marge. L'intervenant devra alors verser le montant de sa perte avant l'ouverture de la prochaine séance, autrement sa position sera liquidée.

**Tableau 1 : Contrats climatiques du CME sur indice de température concernant les villes américaines**

	Etats-Unis			
	Contrats mensuels		Contrats saisonniers	
	Futures	Options sur futures	Futures	Options sur futures
<b>Villes cotées</b>	Atlanta, Baltimore, Chicago, Cincinnati, Detroit, New York, Dallas, Philadelphie, Portland, Tucson, Des Moines, Las Vegas, Boston, Houston, Kansas City, Minneapolis, Sacramento et Salt Lake City	Atlanta, Chicago, Cincinnati, New York, Dallas, Philadelphie, Portland, Tucson, Des Moines, Las Vegas, Boston, Houston, Kansas City, Minneapolis, Sacramento	Atlanta, Baltimore, Chicago, Cincinnati, Detroit, New York, Dallas, Philadelphie, Portland, Tucson, Des Moines, Las Vegas, Boston, Houston, Kansas City, Minneapolis, Sacramento et Salt Lake City	Atlanta, Chicago, Cincinnati, New York, Dallas, Philadelphie, Portland, Tucson, Des Moines, Las Vegas, Boston, Houston, Kansas City, Minneapolis, Sacramento
<b>Sous-jacent</b>	Nombre cumulé de HDD/CDD	Nombre cumulé de HDD/CDD	Nombre cumulé de HDD/CDD	Nombre cumulé de HDD/CDD
<b>Mesure de la température</b>	Fahrenheit	Fahrenheit	Fahrenheit	Fahrenheit
<b>Taille du contrat</b>	20\$ × indice climatique	1 contrat futures	20\$ × indice climatique	1 contrat futures
<b>Tick size</b>	1 degré-jour=20\$	1 degré-jour=20\$	1 degré-jour=20\$	1 degré-jour=20\$
<b>Variation minimale du cours du contrat</b>	1 degré-jour	1 degré-jour	1 degré-jour	1 degré-jour
<b>Echéances</b>	Octobre, novembre, Décembre, janvier, février, mars et avril pour le contrat HDD ;  mai, juin, juillet, août et septembre pour le contrat CDD	Octobre, novembre, Décembre, janvier, février, mars et avril pour le contrat HDD ;  mai, juin, juillet, août et septembre pour le contrat CDD	Novembre à mars pour le contrat HDD ;  mai à septembre pour le contrat CDD	Novembre à mars pour le contrat HDD ;  mai à septembre pour le contrat CDD
<b>Dernier jour de cotation</b>	Premier jour ouvré situé au moins deux jours après le dernier jour calendaire du mois	Premier jour ouvré situé au moins deux jours après le dernier jour calendaire du mois		
<b>Prix d'exercice</b>		[1 ;1500] pour le contrat CDD ;  [1 ;3200] pour le contrat HDD		[1 ;7500] pour le contrat CDD ;  [1 ;15500] pour le contrat HDD
<b>Type de l'option</b>		Option européenne		Option européenne

**Tableau 2 : Contrats climatiques du CME sur indice de température concernant les villes européennes**

	Europe			
	Contrats mensuels		Contrats saisonniers	
	Futures	Options sur futures	Futures	Options sur futures
<b>Villes cotées</b>	Amsterdam, Barcelone, Berlin, Essen, Londres, Madrid, Paris, Rome, Stockholm	Amsterdam, Berlin, Londres, Paris, Stockholm	Amsterdam, Barcelone, Berlin, Essen, Londres, Madrid, Paris, Rome, Stockholm	Amsterdam, Berlin, Londres, Paris, Stockholm
<b>Sous-jacent</b>	Nombre cumulé de HDD/CDD ;  Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)	Nombre cumulé de HDD/CDD ;  Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)	Nombre cumulé de HDD/CDD ;  Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)	Nombre cumulé de HDD/CDD ;  Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)
<b>Mesure de la température</b>	Celsius	Celsius	Celsius	Celsius
<b>Taille du contrat</b>	20£ × indice climatique	1 contrat futures	20£ × indice climatique	1 contrat futures
<b>Tick size</b>	1 degré-jour=20£	1 degré-jour=20£	1 degré-jour=20£	1 degré-jour=20£
<b>Variation minimale du cours du contrat</b>	1 degré-jour	1 degré-jour	1 degré-jour	1 degré-jour
<b>Echéances</b>	Octobre, novembre, Décembre, janvier, février, mars et avril pour le contrat HDD ;  mai, juin, juillet, août et septembre pour le contrat CDD ;  avril, mai, juin, juillet, août, septembre et octobre pour le contrat sur TMJ	Octobre, novembre, Décembre, janvier, février, mars et avril pour le contrat HDD ;  mai, juin, juillet, août et septembre pour le contrat CDD ;  avril, mai, juin, juillet, août, septembre et octobre pour le contrat sur TMJ	Novembre à mars pour le contrat HDD ;  mai à septembre pour le contrat CDD	Novembre à mars pour le contrat HDD ;  mai à septembre pour le contrat CDD
<b>Dernier jour de cotation</b>	Premier jour ouvré situé au moins deux jours après le dernier jour calendaire du mois	Premier jour ouvré situé au moins deux jours après le dernier jour calendaire du mois		
<b>Prix d'exercice</b>		[1 ;1300] pour le contrat CDD ;  [1 ;1700] pour le contrat HDD ;  [1 ;1300] pour le contrat sur TMJ		[1 ;6500] pour le contrat CDD ;  [1 ;8500] pour le contrat HDD
<b>Type de l'option</b>		Option européenne		Option européenne



**Tableau 3 : Contrats climatiques du CME sur indice de température concernant les villes japonaises**

	Asie			
	Contrats mensuels		Contrats saisonniers	
	Futures	Options sur futures	Futures	Options sur futures
<b>Villes cotées</b>	Tokyo, Osaka	Tokyo, Osaka	Tokyo, Osaka	Tokyo, Osaka
<b>Sous-jacent</b>	Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)	Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)	Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)	Nombre cumulé des températures moyennes journalières (TMJ)
<b>Mesure de la température</b>	Celsius	Celsius	Celsius	Celsius
<b>Taille du contrat</b>	250 000 JPY × indice climatique (JPY=yen japonais)	1 contrat futures	250 000 JPY × indice climatique	1 contrat futures
<b>Tick size</b>	1 point d'indice = 250 000 JPY	1 point d'indice = 250 000 JPY	1 point d'indice = 250 000 JPY	1 point d'indice = 250 000 JPY
<b>Variation minimale du cours du contrat</b>	1 point	1 point	1 point	1 point
<b>Echéances</b>	Les 12 mois	Les 12 mois		
<b>Dernier jour de cotation</b>	Premier jour ouvré situé au moins deux jours après le dernier jour calendaire du mois	Premier jour ouvré situé au moins deux jours après le dernier jour calendaire du mois		
<b>Prix d'exercice</b>		[1 ;1500] pour le contrat CDD ; [1 ;3200] pour le contrat HDD		[1 ;7500] pour le contrat CDD ; [1 ;15500] pour le contrat HDD
<b>Type de l'option</b>		Option européenne		Option européenne

## 1.4 CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, nous avons pu constater l'expansion du marché des dérivés climatiques et notamment celui du marché organisé du Chicago Mercantile Exchange. Première bourse à avoir lancé les contrats climatiques standardisés, elle occupe aujourd'hui une place prépondérante dans les échanges. Son rôle s'est renforcé au cours de ces deux dernières années : le nombre et la valeur de ses contrats sur degrés-jours ont augmenté spectaculairement et de manière écrasante sur ceux négociés sur le marché de gré à gré. On peut voir dans cette croissance une préférence de la part des intervenants pour la sécurité, la liquidité et la transparence prévalant sur le marché, même s'il n'est pas possible d'y réaliser des couvertures sur mesure compte tenu de la standardisation des contrats. Les dérèglements climatiques de plus en plus fréquents et occasionnant des dommages économiques importants ont fortement contribué à cet accroissement des contrats. En août 2003, une vague de chaleur

a entraîné une panne géante de courant dans le nord-est des Etats-Unis. De même, en juillet 2006, elle a privé d'électricité des dizaines de milliers d'abonnés à New York, dans le Missouri et en Californie. Le marché climatique s'est déployé également grâce au développement de modèles de plus en plus sophistiqués pour rendre compte des états climatiques. C'est ce que nous verrons au cours du chapitre 3 concernant la modélisation du comportement de la température. Il pourrait connaître un développement encore plus significatif si la question de l'évaluation des dérivés climatiques était tranchée. Pour le moment, plusieurs modèles concurrents se côtoient. Nous les présentons de manière détaillée dans le chapitre 2.

## **CHAPITRE 2**

### **VALORISATION DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES**

La valorisation des produits dérivés consiste à déterminer leur valeur à l'instant présent ou à tout instant avant l'échéance, sachant qu'ils procureront un payoff variable à l'acheteur à un moment donné dans le futur. Comme il a été montré au cours du chapitre 1, ce montant dépend de l'évolution de l'actif sous-jacent. Cette tâche est particulièrement complexe dans le cas des dérivés climatiques car l'indice météorologique sous-jacent n'est pas un actif négocié sur le marché financier. La méthode en l'absence d'opportunités d'arbitrage qui est traditionnellement utilisée pour évaluer les produits dérivés est remise en question et d'autres approches, telles que la méthode actuarielle et le modèle d'équilibre général de Lucas (1978), ont été suggérées pour valoriser les dérivés climatiques. Dans la section 2.1, nous développerons le modèle de valorisation en l'absence d'arbitrage afin de comprendre dans quelle mesure l'utilisation de cette méthodologie est compromise lorsque le sous-jacent ne constitue pas un actif négocié sur le marché financier. Nous verrons que plusieurs types de difficultés sont rencontrés lors de l'évaluation des dérivés climatiques par cette approche. Des propositions seront faites pour résoudre ces problèmes. Dans la section 2.2, nous présenterons le principe de l'évaluation actuarielle et dans la section 2.3, nous discuterons du modèle d'équilibre général. Nous résumerons les caractéristiques des différentes méthodes de valorisation lors de la section 2.4.

#### **2.1 MODELE D'EVALUATION EN L'ABSENCE D'ARBITRAGE**

Un arbitrage est défini comme une opération qui génère un profit positif sans prendre de risque, en particulier sans mise de fonds initiale. En présence d'opportunités d'arbitrage, le marché financier n'est pas à l'équilibre. Par exemple, s'il existait sur le marché deux actifs identiques avec des prix différents, il est évident que les agents réaliseraient un gain certain et sans mise de fonds en vendant l'actif dont le coût est élevé pour acheter celui dont la valeur est faible. Cette situation engendrerait une forte demande pour l'actif qui a un prix bas et une offre supérieure pour celui qui a un cours haut. L'équilibre se rétablissant avec une hausse de la valeur de l'actif suite à la forte demande et avec une baisse du prix de l'autre actif

consécutives à l'offre importante. La méthode d'évaluation en l'absence d'arbitrage consiste à déterminer le prix d'équilibre des actifs, en d'autres termes le prix tel qu'aucun agent ne puisse bénéficier d'opportunités d'arbitrage. Pour les options européennes, ce prix (ou prime) est égal à l'espérance conditionnelle du paiement de l'option à la date d'échéance, actualisée au taux sans risque et définie sous une mesure martingale ou mesure de probabilité dite neutre au risque de l'actif sous-jacent. Ce résultat important a été démontré en temps discret par Cox, Ross et Rubinstein (1979) à l'aide du modèle binomial et en temps continu par Harrison et Kreps (1979). Black et Scholes (1973) ont donné la formule fermée de ce prix qui est plus simple à manipuler car comme nous allons le voir elle ne dépend que des variables observables à l'exception de la volatilité du prix du sous-jacent. La démonstration de Cox, Ross et Rubinstein (1979) s'appuie sur la création d'une stratégie de portefeuille autofinancée composée des quantités de l'actif sous-jacent et d'un titre sans risque qui duplique le profil des résultats à l'échéance de l'option que l'on cherche à évaluer. Un obstacle majeur à l'application de la méthode en l'absence d'arbitrage aux dérivés climatiques est l'impossibilité de créer cette stratégie de portefeuille car l'indice météorologique sous-jacent ne constitue pas un actif négocié sur le marché financier. Il n'est pas possible d'acheter ou de vendre cet indice sur le marché au comptant. Nous nous trouvons alors face à un marché dit incomplet. Il a été démontré que dans ce cas la mesure martingale n'était plus unique et que de ce fait, il existait plusieurs prix possibles libres de tout arbitrage pour l'option. La question qui se pose alors est de savoir quelle mesure martingale choisir pour évaluer les dérivés climatiques. Nous verrons au cours de cette section que ce choix délicat pourra être évité en calibrant le modèle d'évaluation par rapport aux prix observés des contrats climatiques à condition que ces derniers soient suffisamment liquides. Dans cette section, nous décrirons le modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) car il présente l'avantage d'aborder le mécanisme de base de l'évaluation des options européennes sans faire appel à des mathématiques poussées. Nous expliquerons les termes de mesure de probabilité neutre au risque et de complétude du marché. Nous analyserons également la démarche adoptée par Black et Scholes (1973) pour parvenir à la formulation fermée du prix. Comme celle-ci fait appel au calcul différentiel stochastique et comme nous serons amenés à nous en servir par la suite, nous débuterons le chapitre par une présentation des règles principales. Nous y définirons également les notions importantes de stratégie d'autofinancement et de martingale. L'étude des deux modèles montrera que la détermination des prix des options peut s'effectuer de deux façons, soit par une approche mesure martingale mise en évidence par Cox, Ross et Rubinstein (1979) et par Harrison et Kreps (1979), soit par la résolution d'une équation aux

dérivées partielles, qui est la méthode employée par Black et Scholes (1973). Cette étude nous permettra également de cerner les difficultés liées à la mise en œuvre de la méthode en l'absence d'arbitrage dans le cas des dérivés climatiques.

### 2.1.1 Définitions et notions du calcul stochastique

Commençons par décrire l'incertitude prévalant sur le marché financier. Elle est représentée par un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $\Omega$  est l'ensemble de toutes les possibilités,  $\mathcal{F}$  est une tribu ou un ensemble d'événements et  $P$  est une probabilité sur  $\mathcal{F}$  : à tout événement  $A$  de  $\mathcal{F}$ , on associe le nombre  $P(A) \in [0, 1]$  qui représente les chances que se réalise l'événement  $A$ . Une famille croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  notée  $F = (F_t)_{t \geq 0}$  est appelée filtration. On l'interprète comme l'information disponible qui augmente au cours du temps ce qui signifie que cette information n'est pas perdue ou oubliée. En général, on ne s'intéresse pas directement à l'ensemble  $\Omega$  mais plutôt à une application de  $\Omega$  appelée variable aléatoire qui est par exemple  $X =$  "les valeurs possibles d'un titre à la date 2" dont les événements constituent un sous-ensemble de  $\mathcal{F}$ .

**Variable aléatoire.** Une variable aléatoire  $X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{R}$  : à tout résultat possible de l'expérience (à tout élément de  $\Omega$ ), la variable aléatoire fait correspondre un nombre <sup>(5)</sup>.

**Processus stochastique.** On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires  $Z = (X_t)_{t \geq 0}$ .

#### 2.1.1.1 Stratégie autofinancée

Pour expliquer la notion de stratégie autofinancée, nous la définirons d'abord en temps discret puis nous donnerons la définition en temps continu.

---

<sup>(5)</sup> La définition rigoureuse de la variable aléatoire est la suivante : soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé. On dit qu'une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  est une variable aléatoire si, pour tout intervalle de  $I$  de  $\mathfrak{R}$ ,  $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$ .

**Stratégie de portefeuille (en temps discret).** Une stratégie de portefeuille est une suite  $\varnothing = (\varnothing_n^0, \varnothing_n^1, \dots, \varnothing_n^d)_{0 \leq n \leq N}$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathfrak{R}^{d+1}$  donnant à chaque instant  $n$  les quantités  $\varnothing_n^0, \varnothing_n^1, \dots, \varnothing_n^d$  des  $(d+1)$  actifs dans le portefeuille. On impose au processus  $\varnothing$  d'être prévisible au sens suivant :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, d\} \begin{cases} \varnothing_0^i \text{ est } F_0\text{-mesurable} \\ \varnothing_n^i \text{ est } F_{n-1}\text{-mesurable pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Cela signifie que la composition du portefeuille en  $n$  est faite au vu des informations en  $n-1$ .

**Stratégie de portefeuille autofinancée (en temps discret).** Soit  $V_n$  la valeur du portefeuille à la date  $n$  qui est donnée par :

$$V_n = \varnothing_n^1 S_n + \varnothing_n^0 S_n^0 \quad (10)$$

où  $\varnothing_n^1$  représente la quantité d'actifs risqués,  $\varnothing_n^0$  le nombre de titres sans risque,  $S_n$  la valeur de l'actif risqué et  $S_n^0$  le prix du titre sans risque, la stratégie de portefeuille est dite autofinancée si la relation suivante est réalisée :

$$\varnothing_n^1 S_n + \varnothing_n^0 S_n^0 = \varnothing_{n+1}^1 S_n + \varnothing_{n+1}^0 S_n^0. \quad (11)$$

Le membre de gauche est égal à la valeur de liquidation du portefeuille constitué de  $\varnothing = (\varnothing_n^1, \varnothing_n^0)$  à la date  $n+1$  alors que le membre de droite correspond au coût de création du portefeuille composé de  $\varnothing_{n+1} = (\varnothing_{n+1}^1, \varnothing_{n+1}^0)$  à la date  $n+1$ . L'égalité traduit le fait qu'il n'y a ni apport ni retrait de fonds du portefeuille et que toute la valeur liquidative a été réinvestie pour la constitution du portefeuille à la date  $n+1$ .

Cette relation est aussi équivalente à

$$\varnothing_n^1 S_n + \varnothing_n^0 S_n^0 + (\varnothing_{n+1}^1 S_{n+1} + \varnothing_{n+1}^0 S_{n+1}^0) - (\varnothing_{n+1}^1 S_{n+1} + \varnothing_{n+1}^0 S_{n+1}^0) = \varnothing_{n+1}^1 S_n + \varnothing_{n+1}^0 S_n^0 \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow V_n - V_{n+1} = \varnothing_{n+1}^1 S_n + \varnothing_{n+1}^0 S_n^0 - (\varnothing_{n+1}^1 S_{n+1} + \varnothing_{n+1}^0 S_{n+1}^0) \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow V_n - V_{n+1} = \vartheta_{n+1}^1 (S_n - S_{n+1}) + \vartheta_{n+1}^0 (S_n^0 - S_{n+1}^0) \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} - V_n = \vartheta_{n+1}^1 (S_{n+1} - S_n) + \vartheta_{n+1}^0 (S_{n+1}^0 - S_n^0). \quad (15)$$

On constate qu'une stratégie autofinancée est une stratégie pour laquelle les variations de la valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dûs à la variation des cours.

Récursivement, on obtient la relation suivante :

$$V_n = V_0 + \sum_{j=1}^n \vartheta_j^1 \Delta S_j + \sum_{j=1}^n \vartheta_j^0 \Delta S_j^0 \quad (16)$$

pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ .

**Stratégie de portefeuille autofinancée (en temps continu).** Soit  $V_t$  la valeur suivante du portefeuille à l'instant  $t$  :

$$V_t = \vartheta_t^1 S_t + \vartheta_t^0 S_t^0, \quad (17)$$

une stratégie autofinancée est définie par un couple  $\vartheta$  de processus adaptés <sup>(6)</sup>  $(\vartheta_t^1)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(\vartheta_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  vérifiant :

- (i)  $\int_0^T |\vartheta_t^0| dt + \int_0^T (\vartheta_t^1)^2 dt < +\infty$  presque-sûrement ;
- (ii)  $V_t = V_0 + \int_0^t \vartheta_u^1 dS_u + \int_0^t \vartheta_u^0 dS_u^0$  p.s. pour tout  $t \in [0, T]$ . (18)

---

<sup>(6)</sup> On dit qu'un processus  $X$  est adapté à  $F$  si pour tout  $t$ ,  $X_t$  est mesurable par rapport à  $F_t$  ce qui signifie que l'on observe ses valeurs passées et actuelles en  $t$  mais pas ses valeurs futures.

### 2.1.1.2 Martingale

**Martingale.** Une martingale est une famille adaptée  $(X_t)_{t \geq 0}$  de variables aléatoires intégrables (c'est à dire vérifiant  $E(|X_t|) < +\infty$  pour tout  $t$ ) telle que pour tout  $s \leq t$  :

$$E(X_t | F_s) = X_s \Leftrightarrow E(X_t - X_s | F_s) = 0 \quad (19)$$

où  $E(\dots | F_s)$  représente l'opérateur d'espérance mathématique conditionnelle à l'ensemble  $F_s$  des informations dont disposent les agents à la date  $s$ .

On voit qu'une martingale n'est rien d'autre qu'une suite de variables aléatoires dont l'espérance conditionnelle de son accroissement  $X_t - X_s$  est toujours nulle.

### 2.1.1.3 Mouvement brownien, équation différentielle stochastique et lemme d'Itô

**Mouvement brownien standard.** Un mouvement brownien standard ou processus de Wiener est une famille de variables aléatoires  $(W_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

- (i)  $W_0 = 0$  ;
- (ii) si  $s \leq t$ , les accroissements  $W_t - W_s$  sont indépendants et stationnaires ;
- (iii) si  $s \leq t$ , les accroissements  $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$  où  $N$  désigne la loi normale ;
- (iv)  $W_t$  est à trajectoires continues.

Le mouvement brownien standard peut être complété par un terme  $\mu$  qui représente l'espérance et par  $\sigma^2$  qui correspond à la variance, on obtient alors le processus suivant appelé mouvement brownien arithmétique avec drift (car il comprend le terme  $\mu$ ) :

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t \quad \text{avec} \quad X_0 = 0. \quad (20)$$

Il peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle stochastique dont la définition sera donnée ci-après. Le problème avec ce processus est qu'il peut être négatif. Il ne peut



donc pas être utilisé pour modéliser l'évolution du prix d'un titre. Pour contourner ce problème, on emploie la forme exponentielle de  $X_t$  :

$$X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma W_t) \quad \text{avec } X_0 = 1. \quad (21)$$

Ce processus est appelé mouvement brownien géométrique avec drift. Il peut également s'exprimer sous la forme d'une équation différentielle stochastique.

**Equation différentielle stochastique.** Une équation différentielle stochastique est une équation du type suivant :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad (22)$$

ou sous forme différentielle <sup>(7)</sup>

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (23)$$

où  $W_t$  représente le mouvement brownien standard à l'instant  $t$ ,  $x$  la valeur initiale,  $\mu$  et  $\sigma$  sont les coefficients de l'équation.

Cette équation admet une solution unique  $X$  si les pentes des fonctions  $\mu$  et  $\sigma$  sont finies (condition de Lipschitz) et si  $\mu$  et  $\sigma$  n'atteignent pas des niveaux trop élevés (condition de croissance) <sup>(8)</sup>. La solution de cette équation est appelée processus de diffusion.

---

<sup>(7)</sup> Il s'agit d'une notation simplifiée de l'équation intégrale. La forme différentielle n'a pas de sens car le mouvement brownien  $W$  dont les trajectoires sont continues mais très heurtées n'est dérivable en aucun point.

<sup>(8)</sup> Un processus  $X$  est solution de l'équation différentielle stochastique si :

(i)  $X$  est adapté à  $F$  ;

(ii) les fonctions  $\mu$  et  $\sigma$  vérifient pour tout  $t \geq 0$  :

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)| ds < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty ;$$

(iii)  $X$  vérifie :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s .$$

L'équation différentielle stochastique admet une solution unique  $X$  si  $\mu$  et  $\sigma$  sont des fonctions continues telles qu'il existe  $K < +\infty$  (Lamberton et Lapeyre (2000)) avec :

(i)  $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|$  ; (condition de Lipschitz)

(ii)  $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$  ; (condition de croissance)

(iii)  $E(X_0^2) < +\infty$ .

Supposons que nous ayons une fonction quelconque  $f(t, X_t)$  où  $X_t$  est régi par l'équation différentielle stochastique  $dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$ . Le lemme d'Itô permet de déterminer la différentielle de la fonction  $f(t, X_t)$ .

**Lemme d'Itô.** Soit un processus  $dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$ , la différentielle du processus  $Y$  défini par  $Y_t = f(t, X_t)$  est donnée par :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX_t)^2 + \frac{\partial f}{\partial X} dX_t. \quad (24)$$

Cette formule peut s'écrire sous une autre forme. Pour le voir, nous avons besoin d'énoncer les règles de calcul suivantes :

(i) les termes d'ordre supérieur à 1 par rapport à  $dt$  sont négligés car ils sont infiniment petits devant  $dt$  ;

$$(ii) (dW_t)^2 = dt \text{ où } dW_t = \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{dt} \text{ avec } \tilde{\varepsilon}_t \sim N(0,1) ; \quad (25)$$

$$(iii) (dX_t)^2 = \sigma^2(X_t, t) dt. \quad (10) \quad (26)$$

Nous pouvons maintenant expliciter l'autre formulation possible du lemme d'Itô :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial X} (\mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t) \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow dY_t = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2(t, X_t) + \frac{\partial f}{\partial X} \mu(t, X_t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma(t, X_t) dW_t. \quad (28)$$

<sup>(9)</sup> La démonstration de  $(dW_t)^2 = dt$  pourra être consultée par exemple dans l'ouvrage de Baxter et Rennie (1998).

<sup>(10)</sup>  $(dX_t)^2 = (\mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t)^2 = (\mu(t, X_t) dt)^2 + (\sigma(t, X_t) dW_t)^2 + 2 \mu(t, X_t) dt \sigma(t, X_t) dW_t = \mu^2(t, X_t) dt^2 + \sigma^2(t, X_t) dt + 2 \mu(t, X_t) \sigma(t, X_t) dt (\tilde{\varepsilon}_t \sqrt{dt}) = \sigma^2(t, X_t) dt$ , les autres termes étant négligés car les  $dt$  sont d'ordre supérieur à 1.

A l'aide de la formule d'Itô, nous pouvons par exemple exprimer la forme différentielle du mouvement brownien géométrique <sup>(11)</sup> en posant  $X_t = \exp(\mu t + \sigma W_t) = \exp(Z_t) = f(Z_t)$  où  $dZ_t = \mu dt + \sigma dW_t$ . Nous obtenons les calculs suivants :

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} \sigma^2 + \frac{\partial f}{\partial Z} \mu \right] dt + \frac{\partial f}{\partial Z} \sigma dW_t \quad (29)$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 \exp(Z_t) + \mu \exp(Z_t) \right] dt + \exp(Z_t) \sigma dW_t \quad (30)$$

$$= \exp(Z_t) \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma^2 + \mu \right) dt + \sigma dW_t \right] \quad (31)$$

$$= f \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma^2 + \mu \right) dt + \sigma dW_t \right]. \quad (32)$$

Dans la suite, nous serons amenés à déterminer la différentielle d'une fonction dépendante de deux variables de la forme  $Y_t = f(t, X_t^1, X_t^2)$ . Pour cela, nous utiliserons le lemme d'Itô multidimensionnel.

**Lemme d'Itô multidimensionnel.** Soient les processus  $X^i$  pour  $i = 1, \dots, N$  vérifiant les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$dX_t^i = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i, \quad (33)$$

la différentielle de la fonction  $Y_t = f(t, X_t^1, \dots, X_t^N)$  est donnée par :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial f}{\partial X^i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j} dX_t^i dX_t^j \quad \text{pour } i \neq j. \quad (34)$$

---

<sup>(11)</sup> La différentielle du mouvement brownien arithmétique est simplement  $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$ .

Appliquons ce lemme à la fonction suivante  $v(t, X_t, I_t)$  où

$$I_t = \int_0^t X(s) ds \Rightarrow dI_t = X_t dt \quad (35)$$

et

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (36)$$

Il vient

$$dv_t = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial X} dX_t + \frac{\partial v}{\partial I} dI_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} (dX_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial I^2} (dI_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial I} dX_t dI_t \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial X} (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{\partial v}{\partial I} (X_t dt) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \sigma^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial I^2} (X_t dt)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial I} (\mu dt + \sigma dW_t) (X_t dt) \end{aligned} \quad (38)$$

$$= \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \mu \frac{\partial v}{\partial X} + X_t \frac{\partial v}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \right] dt + \sigma \frac{\partial v}{\partial X} dW_t. \quad (39)$$

Nous avons  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial I^2} (X_t dt)^2 = 0$  et  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial I} (\mu dt + \sigma dW_t) (X_t dt) = 0$  car les termes d'ordre supérieur à 1 par rapport à  $dt$  sont négligés. On a donc  $(dt)^2 = 0$  et  $dW_t dt = 0$  car  $dW_t = \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{dt}$ .

#### 2.1.1.4 Equation aux dérivées partielles et théorème de Feynman-Kac

**Equation aux dérivées partielles.** Une équation aux dérivées partielles est une équation qui se présente de la façon suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial X} \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \sigma^2(t, X_t) + r C(t, X_t) = 0 \quad (40)$$

où  $r$  est une constante. Cette équation admet une infinité de solutions sans la précision d'une condition terminale. Par conséquent, lors de sa résolution, on l'écrit plutôt sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial X} \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \sigma^2(t, X_t) + r C(t, X_t) = 0 \\ C(T, X_T) = \Phi(X_T) \end{cases} \quad (41)$$

où la fonction  $\Phi(X_T)$  précise la valeur de la solution de l'équation aux dérivées partielles à la date  $T$  ( $T \geq t$ ). Elle constitue la condition terminale.

La solution  $C$  résolvant ce problème nous est fournie par le théorème de Feynman-Kac.

**Theorème de Feynman-Kac.** Soit  $X$  le processus de diffusion défini par

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad \text{avec } X_0 = x, \quad (42)$$

la solution du problème (41) est donnée par

$$C(t, X_t) = e^{r(T-t)} E_{x,t}[\Phi(X_T)] \quad (43)$$

où  $E_{x,t}[\dots]$  désigne l'opérateur d'espérance conditionnelle à l'événement  $X_t$ .

En effet, supposons sans perte de généralité que  $r = 0$ . A l'aide de la formule d'Itô, développons le terme  $C(t, X_t)$  :

$$\begin{aligned} C(T, X_T) &= C(t, X_t) + \int_t^T \left( \frac{\partial C}{\partial t}(s, X_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial X^2}(s, X_s) \sigma^2(s, X_s) + \frac{\partial C}{\partial X}(s, X_s) \mu(s, X_s) \right) ds \\ &\quad + \int_t^T \frac{\partial C}{\partial X}(s, X_s) \sigma(s, X_s) dW_s. \end{aligned} \quad (44)$$

Puisque  $C$  doit satisfaire l'équation (40) et que l'intégrale stochastique  $\int_0^T \frac{\partial C}{\partial X}(s, X_s) \sigma(s, X_s) dW_s$  est une martingale <sup>(12)</sup>, en prenant l'espérance conditionnelle de l'égalité (44) par rapport à  $X_t$ , il vient :

$$E_{x,t}[C(T, X_T)] = C(t, X_t). \quad (45)$$

Ce théorème nous sera utile par la suite pour déduire que le prix d'un produit dérivé exprimé sous la forme d'une espérance conditionnelle est la solution unique d'une équation aux dérivées partielles définie avec une condition terminale.

### 2.1.1.5 Changement de probabilité et théorème de Girsanov

Le théorème fondamental d'évaluation en l'absence d'arbitrage stipule que s'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage sur le marché, il existe alors une probabilité, équivalente à la probabilité initiale, sous laquelle le prix actualisé d'un actif est une martingale (Harrison et Pliska (1981)). Pour transformer un processus sous une probabilité différente de celle sous laquelle il est exprimé au départ, on utilise le théorème de Girsanov. Considérons l'espace mesurable suivant  $(\Omega, \mathcal{F})$  contenant deux probabilités  $P$  et  $Q$ . Ces deux mesures sont dites équivalentes si elles ont les mêmes ensembles négligeables, c'est à dire que pour chaque événement  $A \in \mathcal{F}$ , on a :

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0. \quad (46)$$

---

<sup>(12)</sup> Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $F_t$ -mouvement brownien et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus  $F_t$ -adapté. On peut définir l'intégrale stochastique  $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$  dès que  $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$  presque-sûrement. Le processus  $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale si  $E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$ . Cette condition n'est cependant pas nécessaire. Remarquons, toutefois, que la condition  $E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$  est équivalente à  $E\left(\sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) < +\infty$  et qu'on a alors l'égalité :  $E\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$  (Lamberton et Lapeyre (2000)). Dans notre cas, on a  $E\left[\int_0^T \sigma(s, X_s) dW_s \mid F_t\right] = \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ .

Avant d'exposer le théorème de Girsanov, introduisons la notion de dérivée de Radon-Nikodym notée  $\frac{dQ}{dP}$  qui permet d'exprimer Q en fonction de P.

**Lemme.** Soit  $Z \sim N(0,1)$  sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ; soit Q l'application définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad Q(A) = E^P \left[ \exp\left(\alpha Z - \frac{\alpha^2}{2}\right) \mathbf{1}_A \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\alpha Z - \frac{\alpha^2}{2}\right) \mathbf{1}_A dP \quad (47)$$

où la variable aléatoire  $\exp\left(\alpha Z - \frac{\alpha^2}{2}\right)$  est la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P, c'est à dire que l'on a  $\exp\left(\alpha Z - \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{dQ}{dP}$  et Q est une probabilité équivalente à P sous laquelle  $Z \sim N(\alpha, 1)$ .

Nous allons chercher à préciser l'expression de la dérivée de Radon-Nikodym. Comme nous allons le voir dans la suite, le passage usuel est celui de la probabilité initiale à une mesure de probabilité sous laquelle en plus de donner des prix actualisés qui sont des martingales, les actifs risqués rapportent en moyenne autant que les titres sans risque, c'est à dire que l'on a la relation suivante :

$$E^Q(X_t) = r t \quad (48)$$

où  $X_t = \mu t + \sigma W_t = \mu t + \sigma \tilde{\epsilon}_t \sqrt{t}$  avec  $\tilde{\epsilon}_t \sim N(0,1)$  sous la probabilité initiale P,  $X_t$  exprime le logarithme du cours du titre risqué,  $E^Q(\dots)$  représente l'opérateur d'espérance défini à l'aide de la probabilité Q et r désigne le taux d'intérêt d'un placement sans risque. On obtient alors :

$$E^Q(X_t) = \mu t + \sigma \sqrt{t} E^Q(\tilde{\epsilon}_t) = \mu t + \sigma \sqrt{t} \alpha = r t \quad (49)$$

car  $\tilde{\epsilon}_t \sim N(0,1)$  sous P et donc  $\tilde{\epsilon}_t \sim N(\alpha, 1)$  sous Q selon le lemme donné ci-dessus.

D'où

$$\alpha = \frac{(r - \mu)\sqrt{t}}{\sigma}. \quad (50)$$

En substituant  $\alpha$  par cette expression dans la formulation de la dérivée de Radon-Nikodym, on trouve :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\alpha \tilde{\varepsilon}_t - \frac{\alpha^2}{2}\right) = \exp\left[\left(\frac{(r-\mu)\sqrt{t}}{\sigma}\right) \tilde{\varepsilon}_t - \frac{1}{2}\left(\frac{(r-\mu)\sqrt{t}}{\sigma}\right)^2\right] = \exp\left[-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t - \frac{t}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (51)$$

A ce stade nous pouvons énoncer le théorème de Girsanov qui va nous permettre de transformer un processus sous P en processus sous Q.

**Théorème de Girsanov.** Soit  $\lambda = (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté à la filtration  $F$  et  $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T}$  le processus défini par

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds\right) \quad (52)$$

avec  $E\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds\right)\right] < \infty$ ,<sup>(13)</sup> on a :

- (i) le processus L est une martingale sous P,
- (ii) le processus  $W^Q$  déterminé par

$$W_t^Q = W_t + \int_0^t \lambda_s ds \quad (53)$$

est un mouvement brownien standard sur l'espace  $(\Omega, F, Q)$  où la mesure Q est caractérisée par

$$\frac{dQ}{dP} = L_T. \quad (54)$$

Illustrons ce théorème par un exemple. Soit le processus de prix X vérifiant l'équation

---

<sup>(13)</sup> Cette condition est destinée à assurer que la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P est une martingale positive.



$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t$  sous la mesure de probabilité  $P$ . Pour l'écrire sous la probabilité

équivalente à  $P$ , nous posons  $W_t^Q = W_t + \lambda t$ . On obtient alors  $\frac{dX_t}{X_t} = (\mu - \lambda\sigma) dt + \sigma dW_t^Q =$

$$\left[ \mu - \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) \sigma \right] dt + \sigma dW_t^Q = r dt + \sigma dW_t^Q.$$

Le terme  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$  est appelé le prix de marché du risque.

### 2.1.1.6 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Nous verrons qu'une des propriétés de la température est qu'elle évolue autour d'une valeur d'équilibre. Un processus souvent utilisé pour modéliser ce type de dynamique est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ou processus de retour à la moyenne.

**Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.** On le définit comme étant la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t) dt + \sigma dW_t \quad (55)$$

où  $\alpha$  reflète la vitesse de retour à la moyenne et  $\beta$  représente la valeur d'équilibre de long terme. On voit que lorsque  $X_t$  est supérieur à  $\beta$ , la tendance  $\alpha(\beta - X_t)$  est à la baisse et quand  $X_t$  est inférieur à  $\beta$ , la tendance est à la hausse. Il y a par conséquent une force de rappel vers la valeur d'équilibre.

Soit le processus général suivant :

$$dX_t = (\mu_1(t) X_t + \mu_2(t)) dt + \sigma(t) dW_t. \quad (56)$$

La solution  $X$  de cette équation est donnée par la formule suivante :

$$X_t = \Phi(t) \left[ X_0 + \int_0^t \frac{\mu_2(s)}{\Phi(s)} ds + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\Phi(s)} dW_s \right] \quad (57)$$

où  $\Phi(t)$  est la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$d\Phi(t) = \mu_1(t) \Phi(t) dt \text{ avec } \Phi(0) = 1. \quad (58)$$

Nous appliquons cette formule pour trouver la solution de l'équation (55). Il nous faut d'abord préciser la fonction  $\Phi(t)$  qui satisfait la relation  $d\Phi(t) = -\alpha \Phi(t) dt$  avec  $\Phi(0) = 1$ . La solution évidente est  $\Phi(t) = \exp(-\alpha t)$ . En posant  $\mu_2 = \alpha \beta$ , nous obtenons

$$X_t = \exp(-\alpha t) \left[ X_0 + \int_0^t \exp(\alpha s) \alpha \beta ds + \int_0^t \exp(\alpha s) \sigma dW_s \right] \quad (59)$$

$$= \exp(-\alpha t) X_0 + \exp(-\alpha t) (\exp(\alpha t) \beta - \beta) + \sigma \int_0^t \exp(-\alpha(t-s)) dW_s \quad (60)$$

$$= \exp(-\alpha t) X_0 + \beta(1 - \exp(-\alpha t)) + \sigma \int_0^t \exp(-\alpha(t-s)) dW_s. \quad (61)$$

Dans la partie qui suit, nous allons nous attacher à décrire la méthode d'évaluation en temps discret et en temps continu.

### 2.1.2 Marché complet et modèles d'évaluation des options

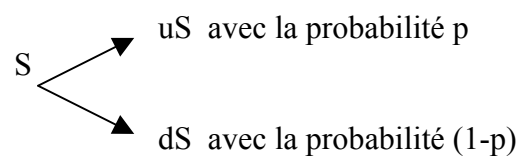
Un marché est complet si et seulement si le paiement de tout actif contingent peut être atteint par une stratégie de portefeuille autofinancée. Soit  $h$  le paiement d'une option européenne à l'échéance  $T$ , le marché est complet s'il existe une stratégie de portefeuille autofinancée valant  $h$  au temps  $T$ , c'est à dire  $V_T = h$  où  $V_T$  correspond à la valeur du portefeuille en  $T$  avec  $V_t \geq 0$  pour tout  $t$ . Dans cette situation, en l'absence d'opportunités d'arbitrage, le prix de l'option à l'instant présent doit être égal au coût initial du portefeuille de réplcation puisque l'option et le portefeuille procurent le même revenu à l'échéance. Cox, Ross et Rubinstein (1979) montrent plus précisément que ce prix est déterminé à l'aide d'une mesure de probabilité modifiée ou mesure martingale qui est différente de la mesure de probabilité initiale de l'actif sous-jacent. Selon les travaux de Harrison et Kreps (1979) et

Harrison et Pliska (1981), il ne peut exister qu'une seule mesure martingale lorsque le marché est complet et par conséquent qu'un seul prix possible pour l'option. Nous allons voir dans les parties qui suivent que ce prix peut s'écrire de deux manières soit sous la forme de Cox, Ross et Rubinstein (1979) soit sous une forme explicite fournie par Black et Scholes (1973).

### 2.1.2.1 Modèle en temps discret ou modèle binomial

Nous commençons l'étude du modèle de Cox, Ross et Rubinstein (1979) avec une seule période de temps puis nous la généraliserons progressivement jusqu'à  $n$  périodes. Dans ce modèle, nous cherchons à évaluer une option d'achat européenne. Les hypothèses sont les suivantes :

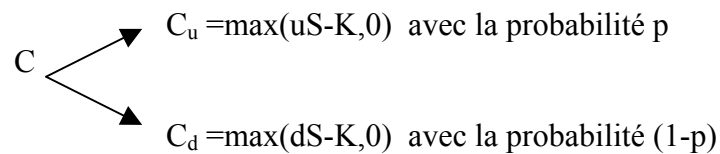
- Il n'existe pas de frictions sur le marché financier : pas de taxes, ni de coûts de transaction et ni de restrictions sur la vente à découvert qui consiste à vendre un titre que l'on ne possède pas en espérant le racheter plus tard à un prix inférieur.
- Il y a absence d'opportunités d'arbitrage. Rappelons que cette hypothèse constitue une condition minimale pour l'existence d'un marché à l'équilibre où l'offre de chaque titre est égale à la demande de chaque titre.
- L'actif sous-jacent ne paie pas dividende. Le cours  $S$  de l'actif suit un processus binomial. A la fin de la période (à la date de maturité), il peut soit augmenter de  $U\%$  avec une probabilité  $p$  soit baisser de  $D\%$  avec une probabilité  $(1-p)$ . Par conséquent, il peut prendre les valeurs  $uS$  et  $dS$  avec  $u=(1+U)>1$ ,  $d=(1+D)<1$  et  $0<d<u$ .



- Il existe un titre sans risque dont le taux d'intérêt  $i$  est supposé constant. Le facteur de capitalisation s'écrit alors  $R = 1 + i$  avec  $0 < d < R < u$  pour proscrire toute occasion

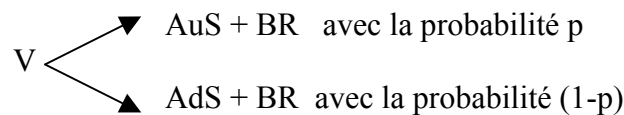
d'arbitrage. En effet, si on avait  $R < d$ , il serait alors possible de réaliser un profit sans mise de fonds initiale en empruntant une somme  $S_0 = S$  à la date 0 pour acheter l'actif sous-jacent et en le revendant à la date 1 au prix  $S_1 = dS$  pour rembourser le montant  $RS_0 = (1+i)S_0$  de l'emprunt et pour bénéficier du gain égal à  $dS - (1+i)S_0 > 0$ . De même si on avait  $u < R$ , on aurait un gain de  $(1+i)S_0 - uS > 0$  sans mise de fonds initiale en vendant l'actif sous-jacent au prix  $S_0 = S$  à l'instant 0 afin de prêter ce montant. A la date 1, on reçoit  $(1+i)S_0$  et on rachète l'actif sous-jacent au prix  $S_1 = uS$ .

- Le call européen a le profil de paiement suivant à la fin de la période :



où  $K$  est le prix d'exercice.

- Supposons qu'un portefeuille puisse être formé à partir d'une quantité  $A$  de l'actif sous-jacent et d'un montant  $B$  investi dans le titre sans risque. La valeur initiale de ce portefeuille est  $V = AS + B$ . Les paiements de ce portefeuille à la fin de la période sont :



Cox, Ross et Rubinstein (1979) montrent qu'il est possible d'évaluer l'option d'achat européenne à l'instant 0 (en début de période) en choisissant la quantité  $A$  et le montant  $B$  tels que la valeur du portefeuille soit égale au profil de paiement de l'option à l'échéance. En conséquence, afin d'éviter tout arbitrage, le prix de l'option en 0 doit être égal au coût du portefeuille en 0 puisque le call et le portefeuille procurent le même revenu à la date de maturité. Suite à cette proposition, explicitons  $A$ ,  $B$  et la valeur de l'option en 0. On suppose l'égalisation des paiements du portefeuille et de l'option d'achat à la fin de la période :

$$C_u = AuS + BR \quad (62)$$

$$C_d = AdS + BR \quad (63)$$

En exprimant les quantités A et B en fonction du profil des résultats de l'option à l'échéance, on obtient :

$$A = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \quad \text{et} \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)R}. \quad (64)$$

On remarque que  $A > 0$  tandis que  $B < 0$  car on a supposé  $0 < d < R < u$ . Le portefeuille est par conséquent constitué de l'achat de l'actif sous-jacent financé par la vente du titre sans risque.

En utilisant l'hypothèse de non arbitrage, on a  $C = V$  à l'instant 0. D'où la valeur initiale suivante du call :

$$C = V = AS + B = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} S + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)R}, \quad (65)$$

$$C = \frac{\frac{R-d}{u-d} C_u + \frac{u-R}{u-d} C_d}{R} \quad (66)$$

ce qui revient à écrire <sup>(14)</sup>

$$C = \frac{1}{R} [qC_u + (1-q)C_d] \quad (67)$$

où  $q = \frac{R-d}{u-d} > 0$  et  $(1-q) = \frac{u-R}{u-d} > 0$  car on avait supposé  $0 < d < R < u$ ,  $\frac{R-d}{u-d} + \frac{u-R}{u-d} = 1$  et  $1 > q > 0$ .

On constate que le terme q a toutes les propriétés d'une probabilité. Le prix <sup>(15)</sup> C de l'option d'achat à l'instant 0 peut s'interpréter alors comme une espérance actualisée du paiement de

<sup>(14)</sup> Le prix obtenu est unique car il y a ici autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Lorsque le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues (quand le marché est incomplet), le prix n'est plus unique. Il appartient à un intervalle de valeurs satisfaisant toutes l'hypothèse de non arbitrage.

<sup>(15)</sup> On peut vérifier que l'on a  $C > S - K$  afin que l'option d'achat ne puisse pas être exercée immédiatement. Pour cela, on envisage trois cas possibles pour S :

- $uS \leq K$ , on a alors  $C_u = \max(0, uS - K) = 0$  et  $C_d = \max(0, dS - K) = 0$  car  $d < u$  et donc  $C = 0$ .  
 $uS \leq K \Rightarrow S - K < 0 \Rightarrow S - K < C$ .
- $dS \geq K$ , on a alors  $C_d = \max(0, dS - K) = dS - K$  et  $C_u = \max(0, uS - K) = uS - K$  car  $d < u$   
d'où  $C = \frac{1}{R} \left[ \frac{R-d}{u-d} (uS - K) + \frac{u-R}{u-d} (dS - K) \right] = S - \frac{K}{R} \Rightarrow C > S - K$  puisque  $R = (1+i) > 1$ .
- $uS > K > dS$ , on a alors  $C_u = \max(0, uS - K) = uS - K$  et  $C_d = \max(0, dS - K) = 0$  d'où  $C = \frac{1}{R} \frac{R-d}{u-d} (uS - K)$ .

l'option à l'échéance. Il n'inclut pas du tout les probabilités initiales  $p$  et  $(1-p)$  du sous-jacent. Les probabilités  $q$  et  $(1-q)$  sont appelées aussi probabilités neutres au risque car elles sont identiques à celles intervenant dans une économie neutre au risque. Dans une telle économie, les agents choisissent de manière indifférente l'actif sous-jacent ou le titre sans risque car l'actif risqué rapporte en moyenne autant que le titre sans risque, c'est à dire que l'on a la relation suivante :

$$E\left(\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right) = g \left(\frac{US_{n-1}}{S_{n-1}}\right) + (1-g) \left(\frac{DS_{n-1}}{S_{n-1}}\right) = R-1 = i \quad \forall \text{ date } n \quad (68)$$

où  $\Delta S_n = S_n - S_{n-1} = \begin{cases} (S_{n-1} + US_{n-1}) - S_{n-1} = US_{n-1} \\ (S_{n-1} + DS_{n-1}) - S_{n-1} = DS_{n-1} \end{cases}$ ,  $U=1-u$ ,  $D=1-d$ ,  $g$  et  $(1-g)$  sont respectivement les probabilités d'avoir  $US_{n-1}$  et  $DS_{n-1}$  dans l'univers neutre au risque. En utilisant cette relation, on aboutit aux expressions suivantes de  $g$  et de  $(1-g)$  :

$$g = \frac{R-d}{u-d} = q \quad \text{et} \quad (1-g) = \frac{u-R}{u-d} = (1-q). \quad (69)$$

On conclut donc que les termes  $q$  et  $(1-q)$  sont des probabilités neutres au risque. Elles sont également nommées mesures martingales ou mesures de probabilité équivalentes aux mesures de probabilité historique ou réelle. Les probabilités  $q$  et  $(1-q)$  sont des mesures martingales car la suite actualisée  $\left(\frac{1}{R^n} C_n\right)_{0 \leq n \leq N}$  constitue une martingale sous ces probabilités.  $C_n$  désigne la valeur de l'option au temps  $n$ . En effet dans le cas d'une seule période, nous avons l'expression suivante :

$$C = C_0 = E^Q \left[ \frac{1}{R} \max(S_1 - K, 0) \mid F_0 \right] \quad (70)$$

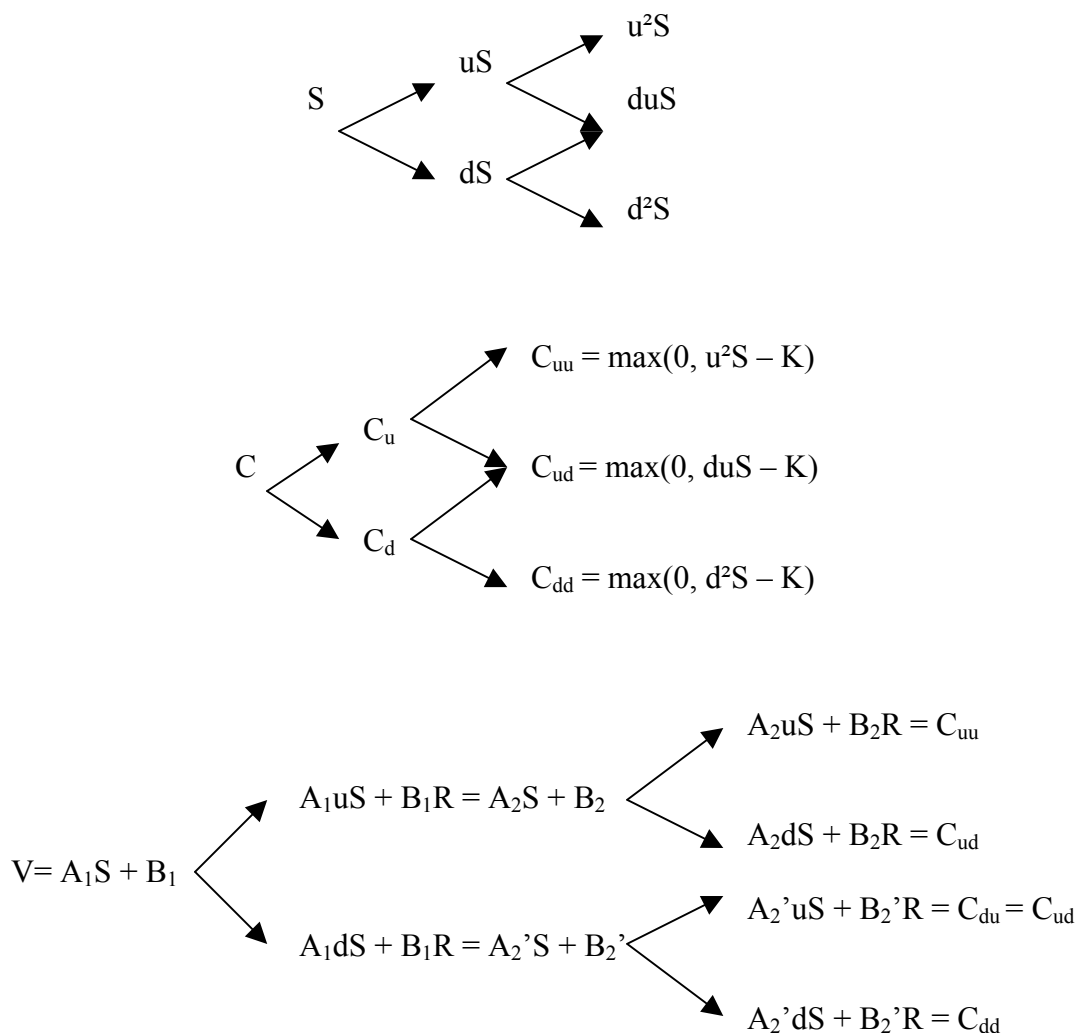
où  $S_1$  est le cours de l'actif sous-jacent au terme de la période,  $K$  est le prix d'exercice et

$$\begin{aligned} \text{On a } C > S - K \text{ si } & \frac{1}{R} \frac{R-d}{u-d} (uS - K) > S - K \\ \Leftrightarrow & \left[ \frac{u}{R} \frac{R-d}{u-d} - 1 \right] S > \left[ \frac{1}{R} \frac{R-d}{u-d} - 1 \right] K \\ \Leftrightarrow & (p-1) uS > (p-R) K \quad \text{qui est vrai tant que } R > 1 \quad \text{où } p = \frac{R-d}{u-d} \text{ et } \frac{R-d}{u-d} + \frac{u-R}{u-d} = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $C > S - K$  est toujours vrai.

$E^Q(\dots | F_0)$  représente l'opérateur d'espérance mathématique définie sous la mesure de probabilité neutre au risque ou martingale souvent notée  $Q$  et conditionnelle à l'ensemble  $F_0$  des informations dont dispose les agents à la date 0.

Passons maintenant à deux périodes afin de mettre en évidence la stratégie d'autofinancement du portefeuille. Supposons maintenant les comportements suivants de l'actif sous-jacent, de l'option et du portefeuille pour les deux périodes à venir :



A l'instar de la situation avec une seule période, on utilise l'approche récursive pour déterminer les prix du call ( $C_u$ ,  $C_d$ ,  $C$ ) en fonction de ses paiements ( $C_{uu}$ ,  $C_{ud}$  et  $C_{dd}$ ) à l'échéance. Commençons par calculer le prix  $C_u$  du call à la fin de la première période. Pour ce faire, on crée un portefeuille de duplication dont sa valeur de constitution dans le cas d'une hausse du cours du sous-jacent est exprimée par  $V_{c,u} = A_2S + B_2$ . Les quantités  $A_2$  et  $B_2$  de

l'actif sous-jacent et du titre sans risque sont choisies de telle sorte que la valeur du portefeuille à la fin de la deuxième période soit égale à  $C_{uu}$  et  $C_{ud}$ . Elles sont données par :

$$A_2 = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{(u-d)S} \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{uC_{ud} - dC_{uu}}{(u-d)R} . \quad (71)$$

Comme la valeur du portefeuille correspond au profil des résultats de l'option à la date de maturité, le prix  $C_u$  de l'option doit être égal au coût  $V_{c,u}$  du portefeuille de réplcation en l'absence d'opportunités d'arbitrage. On procède de la même manière pour déterminer le prix  $C_d$  du call. On trouve les quantités suivantes :

$$A_2' = \frac{C_{ud} - C_{dd}}{(u-d)S} \quad \text{et} \quad B_2' = \frac{uC_{dd} - dC_{ud}}{(u-d)R} . \quad (72)$$

Suite à l'égalisation des valeurs du portefeuille et de l'option à l'échéance et afin d'éviter tout arbitrage, le prix  $C_d$  du call doit être équivalent à la valeur de constitution du portefeuille  $V_{c,d}$  dans le cas d'une baisse du cours du sous-jacent. A la fin de la première période, on obtient donc les prix suivants pour le call :

$$C_u = V_{c,u} = A_2S + B_2 \quad \text{et} \quad C_d = V_{c,d} = A_2'S + B_2' \quad (73)$$

où les quantités  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_2'$  et  $B_2'$  sont données par les équations (71) et (72).

A l'aide de ces résultats, on peut maintenant chercher à calculer le prix  $C$  de l'option à l'instant 0. On construit un portefeuille formé des quantités  $A_1$  et  $B_1$  à l'instant 0 et dont ses valeurs liquidatives  $V_{\ell,u} = A_1uS + B_1R$  dans le cas d'une hausse du cours du sous-jacent et  $V_{\ell,d} = A_1dS + B_1R$  dans le cas d'une baisse seront respectivement identiques à  $C_u$  et à  $C_d$ . Les quantités  $A_1$  et  $B_1$  permettant la duplication sont définies de la manière suivante :

$$A_1 = \frac{(1-d/R)C_{uu} + (-2 + u/R + d/R)C_{ud} + (1-u/R)C_{dd}}{(u-d)^2S} \quad (74)$$

et

$$B_1 = \frac{(-d + d^2/R)C_{uu} + (u + d - 2ud/R)C_{ud} + (-u + u^2/R)C_{dd}}{(u-d)^2R} . \quad (75)$$



On observe que les valeurs liquidatives et de constitution du portefeuille sont égales. En effet, on a  $V_{\ell,u}=C_u=V_{c,u}$  et  $V_{\ell,d}=C_d=V_{c,d}$  à la fin de la première période. Nous retrouvons ici la condition d'autofinancement énoncée plus haut. En adoptant les quantités  $A_1$  et  $B_1$  données par les équations (74) et (75), l'agent obtiendra une stratégie de portefeuille autofinancée qui répliquera le paiement de l'option à la date de maturité. En l'absence d'arbitrage, on a  $C=V=A_1S+B_1$  à l'instant 0. En remplaçant  $A_1$  et  $B_1$  par leur expression dans l'égalité, on parvient à la formulation suivante du prix  $C$  du call :

$$C = A_1S + B_1 = \frac{1}{(u-d)^2} \left[ \left(1 - 2\frac{d}{R} + \frac{d^2}{R^2}\right) + \left(-2 + 2\frac{u+d}{R} - 2\frac{ud}{R}\right) C_{ud} + \left(1 - 2\frac{u}{R} - \frac{u^2}{R^2}\right) C_{dd} \right] \quad (76)$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{R^2} \left[ \left(\frac{R-d}{u-d}\right)^2 C_{uu} + 2\frac{(u-R)(R-d)}{(u-d)^2} C_{ud} + \left(\frac{u-R}{u-d}\right)^2 C_{dd} \right] \quad (77)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{R^2} [ q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd} ]} \quad (78)$$

où  $q = \left(\frac{R-d}{u-d}\right) > 0$  et  $(1-q) = \left(\frac{u-R}{u-d}\right) > 0$ .

On retrouve ici à nouveau le prix du call comme étant l'espérance du paiement de l'option à l'échéance, actualisée par le taux sans risque sur deux périodes et définie à l'aide des probabilités  $q$  et  $(1-q)$  neutres au risque. Comme précédemment, nous pouvons l'exprimer aussi sous la forme suivante :

$$C = C_0 = E^Q \left[ \frac{1}{R^2} \max(S_2 - K, 0) \mid F_0 \right] \quad (79)$$

où  $S_2$  est le cours de l'actif sous-jacent à la fin de la deuxième période.

En généralisant à  $n$  périodes de temps et en raisonnant toujours par induction arrière, on obtient le prix suivant pour l'option à l'instant 0 :

$$C = \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - K) \right] \quad (80)$$

$\max(0, u^j d^{n-j} S - K)$  est le paiement de l'option d'achat dans le cas où le prix du sous-jacent a augmenté  $j$  fois, cette valeur est nulle si l'option n'est pas exercée, c'est à dire si  $u^j d^{n-j} S < K$ .

Cox, Ross et Rubinstein démontrent que cette équation peut se ramener à la formulation suivante lorsque le nombre de périodes  $n$  sur une durée de temps  $t$  fixée devient infiniment grand (les détails de la démonstration ont été placés en annexe) :

$$C = S N(x) - KR^{-t} N(x - \sigma\sqrt{t}) \quad \text{où} \quad x = \frac{\ln(S/(KR^{-t}))}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \sigma\sqrt{t}, \quad R^{-n} = \acute{R}^{-t}, \quad (81)$$

$\acute{R}$  correspond au taux d'intérêt sur la période de temps  $t$ ,  $R$  est le taux d'intérêt sur la période de longueur  $h$  et  $\sigma$  représente la volatilité du cours du sous-jacent et  $N(x)$  désigne la distribution normale cumulée centrée réduite.

Cette expression est identique à la formule du prix de l'option d'achat européenne trouvée par Black et Scholes (1973) qui, *a contrario*, ont utilisé des mathématiques plus sophistiquées pour parvenir à ce même résultat. C'est ce que nous allons découvrir dans la partie qui suit.

**2.1.2.2 Modèle en temps continu de Black et Scholes**

Le modèle de Black et Scholes (1973) évalue les options européennes en temps continu. Sa formule simple et pratique du prix de l'option a contribué à sa popularité et au développement des marchés à terme. Toutefois, sa démonstration qui sera menée dans sa totalité est difficile. Elle s'appuie sur le calcul différentiel stochastique et amène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Nous verrons qu'il est possible de parvenir à

la même formule de manière moins laborieuse en appliquant l'approche par la mesure martingale mise en avant dans le modèle binomial tout en conservant un cadre en temps continu. L'étude du modèle de Black et Scholes a pour but de montrer une autre façon d'aborder le problème de l'évaluation des options européennes. Pour commencer, nous énonçons les hypothèses du modèle qui sont les suivantes :

- Il n'y a pas de frictions sur le marché financier, donc pas de taxes ni de coûts de transaction et ni de restrictions sur les ventes à découvert.
- Il y a absence d'opportunités d'arbitrage.
- Il existe un titre sans risque dont le taux d'intérêt composé instantané est constant et égal à  $r$ . On suppose que le prix de ce titre  $\beta_t$  suit le processus suivant :

$$d\beta_t = r\beta_t dt \text{ avec } \beta_t = e^{rt} \text{ et } \beta_0=1 \quad (82)$$

- L'actif sous-jacent ne paie pas de dividende. On suppose que son prix est régi par l'équation suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (83)$$

dont la solution est  $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t)$  avec  $S_0=1$ ,  $\mu$  se réfère au rendement espéré instantané,  $\sigma$  correspond à la volatilité du prix et  $W_t$  représente le mouvement brownien standard.

### ***Détermination de la formule de Black et Scholes en résolvant une équation aux dérivées partielles***

Contrairement à Cox, Ross et Rubinstein (1979), Black et Scholes (1973) cherchent à évaluer l'option d'achat européenne en construisant non pas un portefeuille de duplication mais un portefeuille sans risque qui est composé des quantités de l'option et de l'actif sous-jacent de telle sorte qu'il soit totalement immunisé contre les variations du cours du sous-jacent. Son taux de rendement devra alors être identique à celui du titre sans risque afin

d'éviter tout arbitrage. Suite à ce raisonnement, ils aboutissent à l'écriture de l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit la valeur de l'option d'achat. Nous débutons la démonstration par expliciter la différentielle du prix du call  $C(t, S_t)$  à l'aide du lemme d'Itô :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial C}{\partial S} dS \quad (84)$$

$$= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 (\mu dt + \sigma dW)^2 + \frac{\partial C}{\partial S} S (\mu dt + \sigma dW) \quad (85)$$

$$= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 (\mu^2 dt^2 + \sigma^2 dW^2 + 2 \mu dt \sigma dW) + \frac{\partial C}{\partial S} S (\mu dt + \sigma dW) \quad (86)$$

$$= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 (\mu^2 dt^2 + \sigma^2 dt + 2 \mu dt \sigma \tilde{\varepsilon} \sqrt{dt}) + \frac{\partial C}{\partial S} S (\mu dt + \sigma \tilde{\varepsilon} \sqrt{dt}) \quad (87)$$

$$= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 dt + \frac{\partial C}{\partial S} S (\mu dt + \sigma \tilde{\varepsilon} \sqrt{dt}) \quad (88)$$

car on a  $dW = \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{dt}$  et les termes d'ordre supérieur à 1 par rapport à  $dt$  sont négligés,

$$= \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 + \frac{\partial C}{\partial S} \mu S \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dW. \quad (89)$$

On constate que les équations (83) et (89) possèdent le même terme  $dW_t$ . Par conséquent, en composant un portefeuille à partir de l'option et du sous-jacent, on peut éliminer l'aléa  $dW_t$  du modèle. Il suffit que le portefeuille comporte  $-1 C$  (vente de l'option) et  $+\frac{\partial C}{\partial S} S$  (achat de

$\frac{\partial C}{\partial S}$  actifs sous-jacents) :

$$V = -1C + \frac{\partial C}{\partial S} S \quad (90)$$

où  $V$  est la valeur du portefeuille.

Soit la variation suivante du coût du portefeuille,

$$dV = -1 dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS, \quad (91)$$

en remplaçant les expressions de dC et de dS dans cette équation, on obtient

$$dV = - \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 + \frac{\partial C}{\partial S} \mu S \right) dt - \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dW + \frac{\partial C}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dW) \quad (92)$$

$$\Leftrightarrow dV = - \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt. \quad (93)$$

On remarque que la variation de notre portefeuille ne comporte plus l'aléa. On a ainsi constitué un portefeuille sans risque. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, celui-ci doit rapporter un même taux d'intérêt r que celui du titre sans risque, c'est à dire que l'on a

$$dV = rV dt. \quad (94)$$

Une autre façon de définir la complétude du marché est aussi de dire qu'il doit exister autant d'aléas qu'il y a d'actifs risqués liés à ces aléas afin de pouvoir créer un portefeuille sans risque. Revenons à l'équation (94) et remplaçons dV et V par leur expression. On trouve alors :

$$- \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt = r \left( -1C + \frac{\partial C}{\partial S} S \right) dt \quad (95)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 + r \frac{\partial C}{\partial S} S - rC = 0} \quad (96)$$

Cette relation est l'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes que doit satisfaire le prix C de l'option. Afin d'obtenir une solution unique de cette équation, il faut ajouter la condition finale qui est  $C_{t_m} = \max(S_{t_m} - K, 0)$  dans le cas de l'option d'achat européenne où  $t_m$  est la date de maturité. Black et Scholes (1973) réussissent à résoudre cette relation en la ramenant à l'équation classique de propagation de la chaleur dont la solution a une forme

explicite.

**Equation de la chaleur.** L'équation de la chaleur est l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (97)$$

où  $u(\tau, x)$  représente la température en un point  $x$  à l'instant  $\tau$ . La solution de cette équation soumise à la condition initiale  $u(0, x) = \varphi(x)$  est donnée par :

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) d\xi . \quad (98)$$

Black et Scholes trouvent l'expression suivante du prix de l'option d'achat européenne :

$$C(t, S) = S N(d_1) - K \exp(-r(t_m - t)) N(d_2) \quad (99)$$

où  $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)}{\sigma\sqrt{t_m - t}}$  ,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_m - t}$

et  $N$  est la distribution normale cumulée centrée réduite .

Dans un souci de clarté, nous avons relégué la démonstration de la formule de Black et Scholes en annexe.

Nous avons vu précédemment que le prix de Cox, Ross et Rubinstein (1979) tendait vers cette formule quand un nombre infini de périodes était distingué. Sur une période  $t$ , le taux en temps discret  $\hat{R}$  du modèle binomial et le taux en temps continu  $e^f$  doivent être égaux, c'est à dire que l'on a  $\hat{R}^t = e^{rt}$ . Nous observons que la formulation de Black et Scholes dépend uniquement de  $S$ ,  $K$  et  $r$  qui sont des variables directement observables. Seul le paramètre  $\sigma$  doit être estimé.

### ***Détermination de la formule de Black et Scholes par l'approche par une mesure martingale***

Il est possible d'éviter ces longs calculs en se plaçant directement dans une économie neutre au risque puisque nous avons vu à travers le modèle binomial que le prix de l'option s'exprimait à l'aide des probabilités neutres au risque. Rappelons que dans cette économie, le taux de rendement de l'actif risqué est similaire à celui du titre sans risque. Dans notre cas, cette condition s'écrit de la manière suivante :

$$E\left(\frac{dS}{S}\right) = \mu dt = r dt \quad (100)$$

où  $\mu$  est le rendement espéré instantané de l'équation (83) et  $r$  est le taux d'intérêt composé instantané de l'équation (82). Par conséquent, nous pouvons formuler le processus de prix de l'actif sous-jacent sous la probabilité neutre au risque ou mesure martingale  $Q$  de la façon suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^Q \quad (101)$$

où  $W_t^Q$  correspond au mouvement brownien standard exprimé sous la mesure  $Q$ .

La solution  $S$  de cette équation différentielle est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t^Q + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t) \text{ avec } S_0 = 1 . \quad (102)$$

Comme nous l'avons montré précédemment, la valeur de l'option d'achat à la date  $t$  est définie par :

$$C(t,S) = e^{-r(t_m-t)} E^Q [ \max (S_{t_m} - K, 0) | F_t ]. \quad (103)$$

L'évaluation par l'approche mesure martingale consiste à utiliser cette écriture pour déterminer le prix de l'option. Nous savons que pour  $S_{t_m} \geq K$ , l'option est exercée, son payoff est donné par  $(S_{t_m} - K)$  et donc nous pouvons écrire :

$$C(t,S) = e^{-r(t_m-t)} \int_0^\infty \max(x - K, 0) f_Q(x) dx = e^{-r(t_m-t)} \int_K^\infty (x - K) f_Q(x) dx \quad (104)$$

où  $f_Q(x)$  fait référence à la densité de probabilité  $Q$ .

Exprimons  $S_{t_m}$  sous la probabilité  $Q$  :

$$S_{t_m} = S_t \exp(\sigma(W_{t_m}^Q - W_t^Q) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)) . \quad (105)$$

Signalons que la variable  $\frac{S_{t_m}}{S_t}$  suit une loi lognormale <sup>(16)</sup> de paramètres  $m$  et  $s^2$  avec

$$m = E\left(\frac{S_{t_m}}{S_t}\right) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t) \text{ et } s^2 = \text{var}\left(\frac{S_{t_m}}{S_t}\right) = \sigma^2(t_m-t).$$

La fonction de densité de la variable  $x = S_{t_m}$  s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/S)-m}{s}\right)^2\right] \quad (106)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)}{\sigma\sqrt{t_m-t}}\right)^2\right] . \quad (107)$$

Effectuons un changement de variable en posant :

$$u = \frac{\ln(x/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)}{\sigma\sqrt{t_m-t}} . \quad (108)$$

Il vient

$$\ln(x/S) = u \sigma\sqrt{t_m-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t) \quad (109)$$

ou encore

---

<sup>(16)</sup> Soit  $X$  une variable aléatoire continue ;  $X \sim LN(m,s^2)$  si  $\ln(X) \sim N(m,s^2)$  où  $LN$  désigne la loi lognormale et  $N$  la loi normale.



$$x = S \exp(u \sigma \sqrt{t_m - t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)) \quad (110)$$

et

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} u^2) \quad (111)$$

où  $u$  est une variable centrée et réduite.

L'expression de  $x$  s'exprime maintenant en fonction de  $u$ . En la remplaçant dans l'équation (104) et en utilisant la formule (111) de  $f(u)$ , on aboutit à la formule de Black et Scholes (1973). Pour ne pas alourdir l'exposé de la méthode, nous avons relégué le détail des calculs en annexe.

Nous avons mis en évidence les deux façons d'évaluer une option d'achat européenne par la méthode en l'absence d'arbitrage, l'une en partant de la constitution d'un portefeuille de duplication et l'autre de celle d'un portefeuille sans risque. La composition de ces deux portefeuilles étant sujet au balancement continu des quantités du sous-jacent et du titre sans risque ou de l'option selon l'évolution du cours du sous-jacent, elle requière donc l'accès sans limite à ces actifs sur le marché. Il est par conséquent clair que cette méthode n'est pas applicable dans le cas des dérivés climatiques puisqu'il n'est pas possible d'acquérir l'indice météorologique sur le marché financier afin d'élaborer les deux approches. Le marché est alors dit incomplet. Harrison et Pliska (1981) montrent que dans cette situation le prix de l'option en l'absence d'arbitrage n'est pas unique. Il existe autant de prix qu'il y a de mesures martingales  $Q$  possibles. Développons cet argument.

### **2.1.3 Produits dérivés climatiques et marché incomplet**

Le marché est incomplet dans le cas des dérivés climatiques car il n'est pas possible de créer une stratégie de portefeuille autofinancée à partir de l'indice météorologique qui duplique le profil de paiement terminal de l'option climatique, ou de former un portefeuille sans risque compte tenu du caractère non négocié du sous-jacent. Face à ce problème, la pratique courante est de recourir à un actif de substitution qui serait négocié sur le marché et dont le prix évoluerait étroitement avec la valeur de l'actif défaillant que l'on cherche à remplacer. En règle générale, la corrélation des deux prix est différente de l'unité ce qui

implique que le portefeuille incluant l'actif de substitution ne sera pas absolument sans risque ou ne garantira pas une duplication parfaite du paiement de l'option. Il subsiste un risque qui sera géré en adoptant une toute autre stratégie d'investissement qui aura pour but, par exemple, de maximiser l'utilité espérée de la richesse de l'agent au terme de la transaction, ou encore de minimiser la variance de l'écart entre la valeur du portefeuille et celle de l'option à l'échéance. Nous discuterons dans ce qui suit de la mise en place de ces méthodes alternatives dans le cas des dérivés climatiques.

### 2.1.3.1 Problèmes d'évaluation des dérivés climatiques

Afin de pouvoir évaluer les dérivés climatiques par la méthode en l'absence d'arbitrage, Geman (1999) a proposé de remplacer l'indice météorologique par des contrats dérivés sur l'énergie mais selon Brix, Jewson et Ziehmman (2002), le prix des dérivés sur le gaz dépend davantage de la demande que de la température. Ces auteurs font plutôt mention du contrat à terme climatique pour suppléer l'indice météorologique dans le portefeuille, car son prix est intimement lié à l'indice. Ils émettent toutefois des réserves quant à son usage dans l'immédiat, car la majorité de ces contrats manque encore de liquidité et de ce fait, ils ne permettent pas pour l'instant de construire un portefeuille de réplication parfait. A côté de cela, dans l'optique d'amélioration de la méthode en l'absence d'arbitrage, un pan de la littérature s'est consacré à la prise en compte des frictions sur le marché financier en suggérant la création de stratégies d'autofinancement ayant pour but, par exemple, la maximisation de l'utilité espérée de la richesse terminale de l'individu, ou encore la réduction de la variance du risque résiduel, correspondant au différentiel entre la valeur du portefeuille et celle de l'option à la date de maturité. Lorsque les quantités de l'actif sous-jacent et du titre sans risque sont employées de manière à maximiser la fonction d'utilité de forme exponentielle, Fritelli (2000) montre qu'il existe une mesure martingale ayant la particularité de minimiser l'entropie relative  $H(Q,P)$  ou distance de Kullback-Leibler de la probabilité  $Q$  par rapport à la probabilité réelle  $P$  de l'actif sous-jacent, qui s'exprime de la sorte <sup>(17)</sup> :

$$^{(17)} E^P \left[ \frac{dQ}{dP} \ln \left( \frac{dQ}{dP} \right) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ}{dP} \ln \left( \frac{dQ}{dP} \right) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( \frac{dQ}{dP} \right) dQ = E^Q \left[ \ln \left( \frac{dQ}{dP} \right) \right].$$

En temps discret,  $E^P \left[ \frac{dQ}{dP} \ln \left( \frac{dQ}{dP} \right) \right] \approx \sum_{i=1}^N f_{P,i} \frac{f_{Q,i}}{f_{P,i}} \ln \left( \frac{f_{Q,i}}{f_{P,i}} \right) = \sum_{i=1}^N f_{Q,i} \ln \left( \frac{f_{Q,i}}{f_{P,i}} \right)$  où  $f_{Q,i}$  et  $f_{P,i}$  correspondent respectivement à une probabilité neutre au risque et à une probabilité réelle de l'actif sous-jacent pour  $i = 1, \dots, N$ .

$$H(Q,P) = \begin{cases} E^P \left[ \frac{dQ}{dP} \ln \left( \frac{dQ}{dP} \right) \right] & \text{si } Q \ll P \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (112)$$

où  $E^P[\dots]$  est l'opérateur d'espérance sous la probabilité  $P$ . La mesure  $Q$  ici est aussi appelée "minimal entropy martingale measure". Lorsque la stratégie d'autofinancement vise à réduire la variance du risque résiduel, Heath, Platen et Schweizer (2001) et Schweizer (1999) mettent en évidence l'existence de la mesure martingale nommée "variance optimal martingale measure". Signalons que toutes ces mesures martingales sont des mesures de probabilité neutres au risque sous lesquelles les actifs risqués rapportent en moyenne autant que les titres sans risque. On observe alors que le prix de l'option n'est pas unique quand le marché est incomplet, puisque l'espérance du paiement de l'option à l'échéance peut être définie à l'aide de plusieurs mesures martingales qui permettent toutes l'absence d'arbitrage. Il existe par conséquent autant de prix qu'il y a de mesures de probabilité  $Q$  tandis qu'une seule mesure apparaît lorsque le marché est complet. Les différentes probabilités se confondent avec la mesure unique issue de la technique de duplication. Les deux stratégies que nous venons d'exposer sont tout à fait envisageables pour traiter le problème de liquidité des contrats à terme climatiques <sup>(18)</sup>. La question est de savoir laquelle choisir. Mais le problème ne réside pas seulement dans ce choix à effectuer, il concerne aussi la difficulté à implémenter ces approches. Pour obtenir le prix d'un actif contingent à partir d'une de ces stratégies, il convient de calculer l'espérance de son paiement terminal à l'aide de la mesure martingale correspondante. Le théorème de Girsanov nous a montré que la mesure de probabilité  $Q$  était caractérisée par la dérivée de Radon-Nikodym de  $Q$  par rapport à  $P$ . Donc, pour déterminer le prix sous une de ces mesures, il est nécessaire de préciser l'expression de cette dérivée et notamment le terme  $\lambda$  appelé prix de marché du risque qui, en nous référant à l'exemple fourni au cours de l'énoncé du théorème de Girsanov, permet le passage du prix d'un actif sous la probabilité  $P$  à son prix sous la probabilité  $Q$ . Henderson (2000) et Heath, Platen et Schweizer (2001) précisent par exemple que la dérivée de Radon-Nikodym de la probabilité

---

<sup>(18)</sup> Brockett, Wang, Yang et Zou (2006) évaluent les dérivés climatiques à l'aide de la méthode du prix d'indifférence. Elle repose sur le principe de la maximisation de la fonction d'utilité de l'agent. Le prix d'indifférence d'une option correspond à la valeur telle que l'utilité optimale de la richesse à la date d'échéance dans le cas où l'agent achèterait ou vendrait l'option est identique à celle dans le cas où il n'achèterait pas ou ne vendrait pas l'option.

baptisée "variance optimal martingale measure", que nous notons  $\tilde{Q}$ , s'écrit sous la forme de l'équation (115) ci-dessous dans un modèle avec une volatilité stochastique. Le marché est incomplet dans ce cadre car il y a deux aléas, l'un lié au prix du sous-jacent et l'autre à la volatilité, alors que nous n'avons que le sous-jacent pour former le portefeuille sans risque, puisque la volatilité qui ne constitue pas un titre négocié sur le marché ne peut pas entrer dans la composition du portefeuille. L'agent cherche alors à déterminer une stratégie de portefeuille autofinancée constituée des quantités de l'actif sous-jacent et du titre sans risque de manière à limiter la variance du risque résiduel. Soient les processus de prix  $X$  et de volatilité  $Y$  satisfaisant les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$dX_t = X_t (\mu(t, Y_t) dt + Y_t dW_t^1) \quad (113)$$

et

$$dY_t = a(t, Y_t) dt + b(t, Y_t) dW_t^2 \quad (114)$$

où  $\rho \in [-1, 1]$  désigne le coefficient de corrélation des mouvements browniens standards  $W_t^1$  et  $W_t^2$ ,  $dW_t^2 = \rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{\perp}$  et  $W_t^1$  et  $W_t^{\perp}$  sont indépendants, la dérivée de Radon-Nikodym de la probabilité  $\tilde{Q}$  par rapport à la probabilité  $P$  est donnée par <sup>(19)</sup> :

$$\frac{d\tilde{Q}}{dP} = \tilde{Z}_T \quad (115)$$

où

---

<sup>(19)</sup> De manière générale, pour deux processus  $X$  et  $Y$  corrélés satisfaisant  $\frac{dX_t}{X_t} = \mu_x dt + \sigma_x dW_t^x$  et  $\frac{dY_t}{Y_t} = \mu_y dt + \sigma_y dW_t^y$  avec  $dW_t^y = \rho dW_t^x + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{\perp}$ , la dérivée de Radon-Nikodym de  $Q$  par rapport à  $P$  s'écrit :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T m_t dW_t^x - \frac{1}{2} \int_0^T m_t^2 dt - \int_0^T g_t dW_t^{\perp} - \frac{1}{2} \int_0^T g_t^2 dt\right)$$

où  $W_t^x$  et  $W_t^{\perp}$  sont des mouvements browniens standards indépendants. On a  $W_t^{x,Q} = W_t^x + m_t t$ ,  $W_t^{\perp,Q} = W_t^{\perp} + g_t t$ ,

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\mu_x - m_t \sigma_t) dt + \sigma_x dW_t^{x,Q} \quad \text{et} \quad \frac{dY_t}{Y_t} = (\mu_y - \rho m_t \sigma_y - \sqrt{1-\rho^2} g_t \sigma_y) dt + \sigma_y dW_t^{y,Q}$$

où  $dW_t^{y,Q} = \rho dW_t^{x,Q} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{\perp,Q}$ .

$$\tilde{Z}_t = \exp\left(\int_0^t \frac{\mu(s, Y_s)}{Y_s} dW_s^1 - \int_0^t \tilde{\lambda}_s dW_s^\perp - \frac{1}{2} \int_0^t \left[\left(\frac{\mu(s, Y_s)}{Y_s}\right)^2 + \tilde{\lambda}_s^2\right] ds\right) \quad (116)$$

pour un taux d'intérêt sans risque  $r$  que nous avons supposé égal à zéro,

$$\tilde{\lambda}_t = b(t, Y_t) \frac{\partial J}{\partial Y}, \quad (117)$$

$$J(t, Y_t) = -\log E\left[\exp\left(\int_t^T \left(\frac{\mu(s, Y_s)}{Y_s}\right)^2 ds\right)\right] \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T \quad (118)$$

où  $J$  est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial t} + a \frac{\partial J}{\partial Y} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 J}{\partial Y^2} - \frac{1}{2} b^2 \left(\frac{\partial J}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{Y}\right)^2 = 0. \quad (119)$$

En remplaçant les expressions  $\tilde{\lambda}_t = b(t, Y_t) \frac{\partial J}{\partial Y}$  et  $\lambda_t = \frac{\mu(t, Y_t)}{Y_t}$  dans les relations  $W_t^{\perp, \tilde{Q}} = W_t^\perp + \tilde{\lambda}_t t$  et  $W_t^{1, \tilde{Q}} = W_t^1 + \lambda_t t$ , on obtient les équations suivantes sous la probabilité  $\tilde{Q}$  :

$$dX_t = X_t Y_t dW_t^{1, \tilde{Q}} \quad (120)$$

et

$$\begin{aligned} dY_t &= [a(t, Y_t) - \tilde{\lambda}_t b(t, Y_t)] dt + b(t, Y_t) dW_t^{\perp, \tilde{Q}} \\ &= \left[ a(t, Y_t) - b^2(t, Y_t) \frac{\partial J}{\partial Y} \right] dt + b(t, Y_t) dW_t^{\perp, \tilde{Q}} \end{aligned} \quad (121)$$

pour  $\rho = 0$ .

En utilisant les équations (120) et (121), Heath, Platen et Schweizer (2001) parviennent à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left[ a(t, Y_t) - b^2(t, Y_t) \frac{\partial J}{\partial Y} \right] \frac{\partial C}{\partial Y} + \frac{1}{2} X_t^2 Y_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{1}{2} b^2(t, Y_t) \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} = 0 \quad (122)$$

où la condition terminale s'écrit  $C(T, X_T, Y_T) = \max(S_T - K, 0)$ .

L'application du théorème de Feynman-Kac montre que la solution de l'équation (122) est

$$C(t, X_t, Y_t) = E^{\tilde{Q}}[\max(X_T - K, 0) | F_t] \text{ pour } r = 0. \quad (123)$$

Elle correspond au prix de l'option d'achat sur le cours  $X$  déterminé à partir de la stratégie de réduction de la variance du risque résiduel. Comme nous avons pu le constater lors de la présentation du modèle de Black et Scholes (Cf. annexe), les équations aux dérivées partielles sont très difficiles à résoudre. Face à ce genre de problème, on fait plutôt appel aux méthodes de résolution numérique, notamment à celle des différences finies qui sera abordée au cours du chapitre 4. Dans le cas présent, la formulation (122) qui est de dimension deux est coûteuse en temps de calcul. Complétée du calcul du prix de marché du risque  $\tilde{\lambda}_t$ , elle devient alors très difficile à résoudre. Une reformulation par un changement de l'espace des variables s'avère nécessaire. Il existe cependant une technique permettant de contourner ces difficultés.

Au lieu de chercher à calculer  $\tilde{\lambda}_t$  pour valoriser les produits dérivés, il est possible d'employer le calibrage ou l'étalonnage (ou dit encore le "mark-to-market") afin de déterminer les paramètres non observables à partir des données du marché. Dans notre cas, cette technique va consister à rechercher les valeurs du prix de marché du risque de manière à minimiser la somme des écarts au carré entre le prix donné par le modèle d'évaluation et le prix observé sur le marché. Cette proposition a été faite par Pirrong et Jermakyan (2001) pour évaluer les options sur l'électricité et sur le climat. Une autre approche encore plus simple pour évaluer les dérivés climatiques est d'induire directement les probabilités martingales ou neutres au risque à partir des observations du marché. Ces deux approches par le mark-to-market seront étudiées ci-après. L'utilisation du calibrage est particulièrement préconisée dans le cas des contrats liquides qui s'échangent à leur valeur juste (ou "fair price"), c'est à dire à un prix qui n'est défavorable ni pour le vendeur ni pour l'acheteur, car les intervenants trouvent facilement pour ces contrats une contrepartie intéressée. Ce prix qui a été formé en tenant compte de l'ensemble des informations disponibles renseigne alors sur la valeur

intrinsèque des contrats. En présence d'illiquidité sur le marché, le prix coté des produits ne correspond pas à la valeur juste car les intervenants sont souvent contraints de réaliser leur opération à un prix très différent du prix qu'ils avaient espéré compte tenu du manque d'acheteurs et de vendeurs. Par conséquent, les prix, sur ce type de marché, constituent généralement des estimateurs biaisés de la valeur intrinsèque. Il est recommandé dans ce cas de pratiquer le "mark-to-model", c'est à dire de ne pas caler le modèle d'évaluation par rapport aux informations fournies par le marché, au risque d'obtenir un prix estimé qui s'écarte de la valeur intrinsèque. Comme nous l'avons mentionné auparavant, la majorité des dérivés climatiques ne sont pas encore suffisamment liquides. Pour cette raison, nous limitons notre pratique du calibrage aux contrats mensuels sur la température (plus précisément sur l'accumulation des degrés-jours) des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York, qui sont les plus négociés sur le CME et qui sont considérés comme étant liquides (voir VanderMarck (2003) et Jewson (2004)). De plus, nous nous bornons à la période 2004 à 2005 qui a connu une envolée du volume des transactions (en nombre et en valeur) des produits dérivés climatiques.

Lors de la mise en œuvre de la méthode d'évaluation en l'absence d'arbitrage et aussi des modèles de valorisation actuarielle et d'équilibre général de Lucas (1978), il nous faudra prendre en compte deux obstacles : l'absence d'une expression explicite pour le prix des dérivés climatiques et le défaut de cotations pour les options climatiques (sur indice météorologique et non pas sur futures) car elles ne sont négociées que de gré à gré. Le premier implique que le prix devra être calculé numériquement tandis que le second induit que la valeur des options climatiques ne pourra pas être déterminée par le calibrage à partir des prix cotés des options climatiques. La difficulté à trouver une formulation exacte pour l'espérance du prix des contrats climatiques réside dans le fait que l'indice météorologique étudié ici repose sur l'accumulation des degrés-jours <sup>(20)</sup>. Les expressions du "degré-jour chauffe" ou HDD (Heating Degree Day) et du degré-jour refroidissement ou CDD (Cooling Degree Day) pour un jour  $j$  se présentent de la façon suivante :

---

<sup>(20)</sup> Euronext.Liffe cotait les contrats sur la température moyenne journalière et non pas sur les degrés-jours.

L'indice mensuel des températures moyennes journalières était défini par  $MI = 100 + \frac{1}{N_{\text{mois}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{mois}}} \frac{T_j^{\min} + T_j^{\max}}{2}$  où

$N_{\text{mois}}$  désigne le nombre de jours calendaires du mois (Marteau, Carle, Fourneaux, Holz et Moréno (2004)). Fin septembre 2003, Euronext.Liffe a retiré de la cotation les contrats climatiques suite à un manque d'intérêt de la part des investisseurs.

$$\text{HDD}_j = \max(65^\circ\text{F} - T_j, 0) \text{ et } \text{CDD}_j = \max(T_j - 65^\circ\text{F}, 0) \quad (124)$$

où  $65^\circ$  Fahrenheit correspond à la valeur de référence de l'industrie énergétique aux Etats-Unis,  $T_j = \frac{T_j^{\min} + T_j^{\max}}{2}$  renvoie à la température moyenne journalière,  $T_j^{\min}$  et  $T_j^{\max}$  sont respectivement la température minimale et maximale de la journée.

L'indice de température est alors formé par l'accumulation des HDD pour chacun des mois allant d'octobre à avril et par l'accumulation des CDD pour chacun des mois couvrant mai à septembre. Il apparaît de la sorte :

$$I_{t_m}^H = \sum_{j=1}^n \max(65 - T_j, 0) \text{ durant la période froide} \quad (125)$$

et

$$I_{t_m}^C = \sum_{j=1}^n \max(T_j - 65, 0) \text{ durant la période chaude} \quad (126)$$

où  $n$  représente le nombre total de jours du mois du calendrier (pour les contrats mensuels) et  $t_m$  la date de maturité du contrat.

Pour avoir une idée concrète du problème posé par cette construction de l'indice, calculons la valeur de l'option climatique d'achat sur l'indice des HDD cumulés par l'approche mesure martingale. En reprenant les mêmes notations que précédemment, nous écrivons :

$$C(t, I_t^H) = \delta e^{-r(t_m-t)} E^Q [ \max (I_{t_m}^H - K, 0) | F_t ] = \delta e^{-r(t_m-t)} \int_K^\infty (x - K) f_Q(x) dx \quad (127)$$

où  $I_{t_m}^H$  qui s'exprime sous une probabilité  $Q$  constitue l'accumulation des degrés-jours chauffe sur les  $n$  jours du mois considéré,  $\delta$  correspond à la valeur attribuée à un degré-jour,  $r$  est le taux d'intérêt composé instantané,  $K$  est le prix d'exercice et  $f_Q(x)$  désigne une fonction de densité de probabilité  $Q$  de la variable  $I_{t_m}^H$ .

Remarquons que ce prix est similaire à celui d'une option asiatique (ou option sur la moyenne des cours du sous-jacent) :



$$C(t, I_t^H) = \delta e^{-r(t_m-t)} E^Q \left[ \max \left( \sum_{j=1}^n \text{HDD}_j - K, 0 \right) \mid F_t \right] \quad (128)$$

$$\Leftrightarrow C(t, I_t^H) = \delta e^{-r(t_m-t)} E^Q \left[ n \times \max \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{HDD}_j - \frac{1}{n} K, 0 \right) \mid F_t \right]. \quad (129)$$

Le degré-jour chauffe, qui n'est jamais négatif, peut être modélisé à l'aide du même mouvement brownien géométrique que celui donné par l'équation (101). Dans ces conditions, il n'est pas possible de préciser la fonction  $f_Q(x)$  car la distribution d'une somme arithmétique d'éléments suivant une loi lognormale reste à ce jour inconnue. Par conséquent, on ne peut pas trouver une forme analytique pour le prix.

### 2.1.3.2 Evaluation par le mark-to-market

Pour nous soustraire, d'une part, au choix d'une mesure martingale parmi plusieurs et, d'autre part, à l'implémentation difficile des prix sous l'une de ces mesures, nous avons évoqué le principe du mark-to-market ou technique d'étalonnage pour inférer une probabilité neutre au risque ou un prix de marché du risque à partir des cotations des dérivés climatiques. Une présentation détaillée de la méthode sera apportée ici. Nous commençons par exposer l'approche la plus simple à mettre en œuvre à savoir l'inférence d'une distribution neutre au risque.

#### *Extraction d'une densité neutre au risque*

Le prix à l'instant  $t$  de l'option climatique d'achat sur l'indice des HDD cumulés est défini par :

$$C(t, I_t^H) = \delta e^{-r(t_m-t)} E^Q \left[ \max (I_{t_m}^H - K, 0) \mid F_t \right] = \delta e^{-r(t_m-t)} \int_K^\infty (x-K) f_Q(x) dx \quad (130)$$

où  $f_Q(x)$  représente une fonction de densité de probabilité neutre au risque de la variable  $I_{t_m}^H$ .

Dans le cas des dérivés climatiques, il existe plusieurs distributions neutres au risque  $f_Q$  possibles. Nous pouvons en sélectionner une par le calibrage, c'est à dire en estimant les valeurs qui composent  $f_Q$  de manière à réduire les écarts entre le prix donné par le modèle d'évaluation ci-dessus et le prix observé sur le marché. Cette recherche passe par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_{f_Q} \sum_{t=1}^M (C(t, I_t^H) - C_t^m)^2 \quad (131)$$

où  $C_t^m$  se réfère au prix observé de l'option climatique sur le marché à la date  $t$ .

Une fois obtenues les valeurs optimales de  $f_Q$ , nous pouvons ensuite nous en servir pour valoriser ces mêmes options ou les contrats qui en sont proches. Comme nous l'avons fait remarqué auparavant, il n'existe pas de cotations pour les options climatiques. Pour résoudre ce problème, nous proposons d'utiliser les prix observés des contrats à terme climatiques négociés sur le CME. Pour le contrat à terme climatique sur l'indice des HDD cumulés, sa valeur théorique en l'absence d'arbitrage à la date  $t$  est donnée par :

$$F(t, I_t^H) = \delta E^Q [ I_{t_m}^H | F_t ] = \delta \int_0^\infty x f_Q(x) dx. \quad (132)$$

Ce prix découle de l'expression de  $C(t, I_t^H)$  pour laquelle on a admis que  $C(t, I_t^H)$  était nul puisque le contrat à terme n'exige le paiement d'aucune prime lors de sa conclusion. La valeur  $F(t, I_t^H)$  représente alors le prix d'exercice  $K$  convenu à l'instant  $t$  pour la transaction qui aura lieu à la date d'échéance  $t_m$ . Nous voyons que  $C(t, I_t^H)$  et  $F(t, I_t^H)$  possèdent une même distribution neutre au risque compte tenu du fait qu'ils reposent sur le même indice de température. Par conséquent, nous pouvons évaluer les options climatiques à l'aide des probabilités issues des prix des contrats à terme climatiques basés sur un indice similaire ou étroitement lié au sous-jacent des options.

Pour l'extraction d'une densité neutre au risque, nous suggérons la méthode de Jackwerth et Rubinstein (1996) qui ne nécessite pas la stipulation d'une forme spécifique pour  $f_Q$ . Nous avons vu qu'il n'était pas possible de préciser la densité de probabilité de l'indice de

température car ce dernier était établi à partir de l'accumulation des degrés-jours. Breeden et Litzenberger (1978) et Aït-Sahalia et Lo (2000) emploient une méthode d'inférence non paramétrique pour déterminer la distribution risque-neutre qui résulte du calcul suivant :

$$f_Q(S_{t_m}) = e^{r(t_m-t)} \frac{\partial^2 C(t,S)}{\partial K^2} \quad (133)$$

où  $S_{t_m}$  est le cours du sous-jacent à la date de maturité  $t_m$ ,  $C(t,S)$  correspond au prix de l'option sur  $S$  à l'instant  $t$  et  $K$  est le prix d'exercice.

Bien que cette méthode ne fasse aucune supposition concernant la distribution neutre au risque, nous ne pouvons pas l'utiliser car elle ne peut s'appliquer qu'aux options. La méthode de Jackwerth et Rubinstein (1996) repose sur la construction d'une arborescence pour le prix du sous-jacent comme dans le cas du modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979). Nous la modifions en permettant aux trajectoires du cours d'être simulées à partir de la technique de Monte-Carlo et ceci afin de pouvoir considérer des processus plus complexes pour le sous-jacent. La procédure d'inférence va consister à générer  $N$  parcours pour la température moyenne journalière  $T_i$  pour  $i = 1, \dots, N$  sur une période de temps donnée. Pour chacun de ces tirs, on construira l'indice des degrés-jours cumulés sur les  $n$  jours du mois étudié. Les probabilités neutres au risque sont estimées en résolvant le programme d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_{f_{Q,i}} \sum_{t=1}^M \left( E_t^Q [ I_{t_m}^H | F_t ] - F_t^m \right)^2 + \alpha \left( \sum_{i=1}^N f_{Q,i} - 1 \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^N \max(0, -f_{Q,i})^2 + \alpha \sum_{i=1}^N (f_{Q,i}'' )^2 \quad (134)$$

$$\Leftrightarrow \text{Min}_{f_{Q,i}} \sum_{t=1}^M \left( \left( \sum_{i=1}^N I_{t_m,i}^H f_{Q,i} \right)_t - F_t^m \right)^2 + \alpha \left( \sum_{i=1}^N f_{Q,i} - 1 \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^N \max(0, -f_{Q,i})^2 + \alpha \sum_{i=1}^N (f_{Q,i}'' )^2 \quad (135)$$

où

$$I_{t_m,i}^H = \sum_{j=1}^n \text{HDD}_{j,i} = \sum_{j=1}^n \max(65 - T_{j,i}, 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \text{ et } \forall t, \quad (136)$$

$$f''_{Q,i} \approx \frac{f_{Q,i-1} - 2f_{Q,i} + f_{Q,i+1}}{\Delta T_{j,i}^2} \approx f_{Q,i-1} - 2f_{Q,i} + f_{Q,i+1} \quad \text{avec } f_{Q,0} = f_{Q,N+1} = 0, \quad (137)$$

$f_{Q,i}$  représente une probabilité  $Q$  de l'indice  $I_{t_m,i}^H$ ,  $F_t^m$  se rapporte au prix coté à la date  $t$  du contrat à terme climatique,  $\alpha$  est un paramètre de régularisation,  $T_{i,j}$  désigne la température moyenne journalière pour le jour  $j$  du mois et pour le tir  $i$  et  $\Delta T_{j,i}^2 = (T_{j,i} - T_{j-1,i})^2$ .

Lorsque la valeur donnée à  $\alpha$  est petite, l'algorithme d'optimisation privilégie la réduction des écarts entre le prix théorique et le prix observé tandis qu'une valeur élevée de  $\alpha$  l'incite à respecter davantage les contraintes  $\sum_{i=1}^N f_{Q,i} = 1$ ,  $f_{Q,i} \geq 0 \forall i$  et de minimisation de la somme des dérivées secondes  $f''_{Q,i}$  au carré. Cette dernière joue un rôle important ici car le nombre  $N$  d'inconnues est supérieur au nombre  $M$  d'équations. En général, il faut simuler un nombre largement supérieur à 500 trajectoires pour obtenir une bonne approximation de l'espérance du prix théorique alors que l'on dispose d'une trentaine de cotations pour le mois considéré. Ce genre de système d'équations admet en général une multitude de solutions. Il faut par conséquent "ajouter de l'information" pour obtenir une solution unique. Par cette dernière contrainte, on précise que la courbe de distribution souhaitée doit être lisse <sup>(21)</sup>.

Soulignons que le problème d'optimisation porte sur la simulation de la température moyenne journalière et non pas sur celle de l'indice des degrés-jours cumulés et ceci pour une question d'estimation. Afin de pouvoir générer un ensemble de tirs relativement fidèle au comportement de la variable observée, il est nécessaire d'estimer avec précision les coefficients du modèle adopté pour cette variable. Or, il n'est pas possible d'utiliser, pour cette estimation, l'intégralité des données relatives aux degrés-jours car elles sont composées de valeurs nulles concernant les HDD pendant la période chaude au cours de laquelle la température est au-dessus des 65°F et elles sont égales à zéro pour les CDD durant la saison froide. C'est pourquoi, on choisit le plus souvent de travailler avec la température moyenne journalière.

---

<sup>(21)</sup> La courbure d'une courbe décrite par l'équation  $y = f(x)$  est donnée par  $\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} \approx |f''(x)|$

lorsque  $f'(x)$  est petit. L'expression  $\sum_{i=1}^N (f''_{Q,i})^2$  représente donc une mesure de la courbure totale. La minimisation de cette expression signifie alors la minimisation de la courbure totale de  $f_Q(x)$ .

Nous pouvons aussi chercher à déduire une densité risque-neutre en imposant à cette dernière d'être la plus proche possible de la distribution réelle, c'est à dire en réduisant l'entropie relative de la probabilité Q par rapport à la probabilité historique P de l'actif sous-jacent. Ce critère a été considéré par plusieurs auteurs pour l'inférence de la mesure martingale lorsque le marché est complet (voir Stutzer (1996), Jackwerth et Rubinstein (1996), Avellaneda, Buff, Friedman, Grandechamp, Kruk et Newman (2001)). Le programme d'optimisation est formulé de la manière suivante :

$$\text{Min}_{f_{Q,i}} \sum_{t=1}^M \left( E_t^Q [ I_{t,m}^H | F_t ] - F_t^m \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^N f_{Q,i} \ln \left( \frac{f_{Q,i}}{f_{P,i}} \right). \quad (138)$$

Nous avons vu que cette mesure martingale coïncidait avec la maximisation de la fonction d'utilité de type exponentiel. En comparant les distributions extraites de la minimisation de l'entropie relative et des autres critères tels que celui du plus proche  $\sum_i (f_{Q,i} - f_{P,i})^2 / f_{P,i}$  et de la différence absolue  $\sum_i |f_{Q,i} - f_{P,i}|$ , Jackwerth et Rubinstein (1996) montrent que les courbes ne sont pas suffisamment lisses. Ils font également remarquer qu'une limite de ces critères est qu'ils requièrent la définition des valeurs  $f_{P,i}$  afin que le rapprochement avec les probabilités  $f_{Q,i}$  puisse s'effectuer, alors qu'elles sont inutiles lorsque l'on fait appel à la minimisation de la courbure totale. En raison de ces inconvénients, nous ne déterminerons pas les probabilités neutres au risque à l'aide de la distance de Kullback-Leibler.

### ***Extraction d'un prix de marché du risque***

Au cours de l'énoncé du théorème de Girsanov, nous avons souligné que le paramètre  $\lambda$  représentait le prix de marché du risque. Ce paramètre est nul lorsque le marché est complet. On a alors  $\mu = r$  lorsque l'espérance est calculée par rapport à la distribution risque-neutre. Soit le prix X d'un actif régit par l'équation différentielle stochastique  $\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t$  sous la probabilité P, pour  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = 0$  nous avons  $\mu = r$ ,  $W_t^Q = W_t$  et  $\frac{dX_t}{X_t} = r dt + \sigma dW_t^Q$  sous la

probabilité Q. Lorsque le marché est complet, il suffit donc de remplacer  $\mu$  par le taux d'intérêt sans risque  $r$  pour obtenir l'équation sous la probabilité équivalente.

La situation est différente quand le marché est incomplet. Le vendeur ne peut plus former un portefeuille sans risque. En conséquence, le prix de marché du risque est dans ce cas non nul. Nous avons donc  $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma} \neq 0$ ,  $W_t^Q = W_t + \lambda t$  et  $\frac{dX_t}{X_t} = (\mu - \lambda\sigma) dt + \sigma dW_t^Q = r dt + \sigma dW_t^Q$ . Nous ne pouvons plus substituer  $\mu$  par  $r$  pour trouver l'équation sous la probabilité risque-neutre. Il faut déterminer la composante  $\lambda\sigma$  pour la déduire de  $\mu$  afin d'obtenir le taux sans risque  $r$ . Comme nous l'avons déjà mentionné, une mesure martingale Q est caractérisée par la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P et notamment par le prix de marché du risque  $\lambda$ . Par conséquent, il existe autant de prix de marché du risque qu'il y a de mesures martingales <sup>(22)</sup> possibles lorsque le marché est incomplet. Nous pouvons observer que les préférences de l'agent jouent un rôle ici dans l'évaluation des dérivés puisqu'il faut considérer le prix de marché du risque, qui est lié à la stratégie de portefeuille adoptée par l'agent. Afin de contourner le calcul de  $\lambda$ , nous avons précisé qu'il était possible de l'estimer à partir des données de marché en utilisant la technique d'étalonnage.

Pirrong et Jermakyan (2001) l'ont appliqué pour évaluer les contrats sur l'électricité pour lesquels le marché est incomplet, car l'électricité n'est pas un bien stockable. En outre, le prix de l'électricité subit d'importantes fluctuations liées à l'évolution de la demande. Il peut d'un jour à l'autre passer de 20 à plus de 100 dollars par mégawatt heure. Une augmentation brutale et inattendue de la demande a souvent pour effet un approvisionnement forcé sur les marchés de la part des compagnies d'énergie afin de répondre aussitôt à la demande. Généralement, le prix pour lequel elles réalisent leur opération est élevé. Le supplément de coût est alors répercuté sur leur tarif. Pour prendre en compte les sursauts du prix de

---

<sup>(22)</sup> Pour la mesure martingale appelée "minimal entropy martingale measure" que nous notons  $\hat{Q}$ , Henderson (2002) donne l'expression suivante de la dérivée de Radon-Nikodym de  $\hat{Q}$  par rapport à P. En Reprenant les mêmes processus X et Y que ceux utilisés pour la mesure martingale "variance optimal martingale measure", on a :

$$\frac{d\hat{Q}}{dP} = \exp\left(\int_0^T \frac{\mu(S_s, Y_s)}{Y_s} dW_s^1 - \int_0^T \hat{\lambda}_s dW_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^T \left[\left(\frac{\mu(S_s, Y_s)}{Y_s}\right)^2 + \hat{\lambda}_s^2\right] ds\right)$$

où  $\hat{\lambda}_t = b(t, Y_t) \frac{\partial J}{\partial Y}$  et  $J(t, Y_t) = -\log E\left[\exp\left(-\frac{1}{2} \int_t^T \left(\frac{\mu(S_s, Y_s)}{Y_s}\right)^2 ds\right)\right]$  pour  $0 \leq t \leq T$ .

l'électricité, un processus à sauts est le plus souvent considéré. Son utilisation rend, cependant, le calcul des prix des dérivés plus complexe, car on se retrouve en présence de deux sources d'aléas qui ne peuvent être couvertes par une stratégie de portefeuille autofinancée, l'une étant liée à la variation du cours de l'électricité et l'autre aux sauts éventuels du cours. Cette restriction a incité les auteurs à ne pas examiner la modélisation du prix de l'électricité. Pour ce faire, ils ont émis l'hypothèse selon laquelle la valeur  $C$  de l'actif contingent était dépendante de la demande d'électricité  $q_t$  et du prix  $f_t$  du contrat à terme sur le fuel, c'est à dire que l'on a  $C(t, q_t, f_t)$ . La valeur du contrat sur l'électricité peut ainsi être déterminée à partir de ces deux seuls processus dont le comportement n'est pas discontinu. Comme la variable de demande ne représente pas un actif négocié sur le marché, les auteurs ont cherché alors à estimer le prix de marché du risque  $\lambda$  lié à cette variable par le calibrage. Ils supposent qu'il est fonction à la fois de la demande d'électricité  $q_t$  et du temps  $t$  et le notent  $\lambda(t, q_t)$ . Pour extraire, à partir des données, ce paramètre évoluant selon deux variables, ils proposent d'exprimer le prix des dérivés sur l'électricité comme étant la solution d'une équation aux dérivées partielles qui sera résolue à l'aide de la méthode numérique des différences finies<sup>(23)</sup>. Par cette procédure, il est simple de trouver les valeurs de toute grandeur dépendante de plusieurs variables. Toutefois, plus on ajoute de variables et plus le temps de calcul est long puisque le nombre de valeurs à déterminer en chacun des nœuds augmente avec l'accroissement des points du maillage. De plus, il est à signaler que le nombre de points sur la grille est en général déjà important au départ car il est souhaitable de travailler avec un quadrillage fin de façon à gagner en précision pour les approximations. Le prix estimé  $C(t, q_t, f_t)$  pour les réalisations de  $q_t$  et  $f_t$  à la date  $t$  est ensuite comparé au prix observé sur le marché, afin de déduire la valeur du prix de marché du risque. Les auteurs suggèrent de l'inférer à partir des prix disponibles des contrats à terme sur l'électricité et de l'utiliser ensuite pour évaluer les options sur l'électricité. Ils proposent *in fine* d'adopter une démarche similaire pour valoriser les options climatiques.

Dans notre cas, il faut tenir compte d'un prix de marché du risque associé à l'indice de température et plus précisément attaché à la température moyenne journalière, puisque pour une question d'estimation évoquée auparavant, il est préférable de travailler avec la

---

<sup>(23)</sup> La méthode consiste à définir d'abord une grille finie de points. Par exemple ici, le maillage est constitué par  $M \times K \times P$  points des variables  $t$ ,  $q_t$  et  $f_t$  où  $M$  correspond au nombre de points pour  $t$ ,  $K$  à celui de  $q_t$  et  $P$  à celui de  $f_t$ . On approche ensuite les dérivées de l'équation à l'aide du développement de Taylor puis on regroupe les termes pour faire apparaître un schéma de résolution. A partir de ce schéma, on détermine les valeurs discrètes de la quantité  $C(t, q_t, f_t)$  pour chacun des nœuds de la grille. Nous reviendrons plus en détail sur cette approche lors du chapitre 4.

température plutôt qu'avec l'indice. Supposons que cette variable, qui peut prendre des valeurs négatives, suit le mouvement brownien arithmétique suivant :

$$dT_t = \mu_T dt + \sigma_T dW_t \text{ avec } T_0 = 0. \quad (139)$$

Nous verrons au cours du chapitre 3 que le comportement de la température est en réalité plus complexe que cela. Pour l'instant, cette modélisation nous permet de présenter de manière simple le principe de la valorisation en l'absence d'arbitrage. Nous avons vu que cette méthode d'évaluation nécessitait le passage du processus de prix de l'actif sous-jacent défini sous la probabilité  $P$  à un processus exprimé sous une probabilité risque-neutre. En invoquant le théorème de Girsanov, le processus de température sous une probabilité  $Q$  est gouverné par l'équation suivante :

$$dT_t = (\mu_T - \lambda \sigma_T) dt + \sigma_T dW_t^Q \text{ avec } T_0 = 0. \quad (140)$$

Rappelons que le prix du contrat à terme climatique sur l'indice des HDD cumulés s'écrit à la date  $t$  comme suit :

$$F(t, T_t, I_t^H) = \delta E^Q [ I_{t_m}^H | F_t ] \quad (141)$$

où  $I_t^H = \int_0^t \max(65 - T_s, 0) ds$  correspond ici à l'écriture de l'indice en temps continu.

Selon le théorème de Feynman-Kac, ce prix constitue l'unique solution de l'équation aux dérivées partielles suivante (sous la mesure  $Q$ ) :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial T} (\mu_T - \lambda \sigma_T) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sigma_T^2 + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial F}{\partial I^H} = 0 \quad (142)$$

avec la condition terminale  $F(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H) = \delta I_{t_m}^H$ . Cette relation vient de l'application du lemme d'Itô multidimensionnel à la fonction  $F(t, T_t, I_t^H)$ .<sup>(24)</sup>

---

<sup>(24)</sup> Dans le cas du calcul du prix de marché du risque de la mesure "minimal entropy martingale measure" ou "variance optimal martingale measure", on aurait été amené à résoudre une équation aux dérivées partielles de dimension trois constituée des variables  $I_t^H$ ,  $T$  et du cours de l'actif de substitution corrélé à  $T$  ce qui aurait exigé un temps de calcul extrêmement long.



Une fois estimé le processus de température, la seule inconnue de cette équation est le prix de marché du risque,  $\lambda$ , lié à la température. Nous allons utiliser le programme d'optimisation proposé par Pirrong et Jermakyan (2001) pour déterminer ce paramètre. Dans le même esprit que ces auteurs, nous supposons qu'il dépend simultanément de deux variables qui sont le niveau de la température et le temps. Cette hypothèse peut être justifiée par la constatation faite par Cao et Wei (2004) selon laquelle en hiver, la température est plus variable qu'en été. Le prix de marché du risque devrait donc être plus élevé durant la saison froide que lors de la saison chaude. Dans ces conditions, le problème d'optimisation s'exprime de la façon suivante :

$$\text{Min}_{\lambda(t, T_t)} \sum_{t=1}^M (F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m)^2 + \alpha \left[ \int_0^{t_m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 dT_t dt \right] \quad (143)$$

où  $F(t, T_t, I_t^H)$  est le prix théorique du contrat à terme climatique qui est obtenu en résolvant l'équation (142),  $F_t^m$  représente le prix coté sur le marché à la date  $t$  et  $\alpha$  désigne le terme régulateur.

La régularisation est à nouveau nécessaire ici car nous nous retrouvons face à un système d'équations qui comporte une infinité de solutions. Le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. En effet, pour chaque date  $t$ , on ne dispose que d'une observation  $F_t^m$  alors que nous devons trouver plusieurs valeurs pour  $\lambda$ , puisque nous avons supposé que le paramètre était dépendant de  $t$  et de  $T_t$ . En nous référant à la grille de la méthode des différences finies, nous devons en fait calculer  $\lambda$  pour l'ensemble des points de la variable  $T$  à un instant précis  $t$  ce qui génère un nombre important d'inconnues pour chaque date  $t$ . Plusieurs combinaisons de  $\lambda(t, T_t)$  peuvent alors résoudre la fonction objectif (appelée aussi fonction critère ou perte)  $\sum_{t=1}^M (F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m)^2$ . Afin de dégager une seule possibilité, il faut ajouter des contraintes au problème d'optimisation, en l'occurrence ici on précise à l'aide des dérivées premières que cette combinaison doit former une courbe régulière. Dans le cas présent, l'ajout de cette contrainte allonge considérablement le temps de calcul qui est déjà très long compte tenu de la dimension deux de l'équation aux dérivées partielles. L'augmentation du temps de calcul s'explique par l'introduction d'étapes supplémentaires dans l'algorithme d'optimisation. En effet, en suivant la procédure proposée par Lagnado et

Osher (1997), nous exprimons l'équation (143) sous la forme d'une intégrale afin de pouvoir utiliser le calcul variationnel <sup>(25)</sup>. Le programme se présente alors de la manière suivante :

$$\text{Min}_{\lambda(t, T_t)} \int_0^{t_m} \int_{-\infty}^{+\infty} (F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m)^2 + \alpha \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 \right] dT_t dt . \quad (144)$$

Posons  $L = (F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m)^2 + \alpha \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 \right]$ ,  $\lambda(t, T_t)$  minimise la fonction critère ci-dessus s'il vérifie la condition d'optimalité suivante appelée équation Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dT} \frac{\partial L}{\partial \lambda_T} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (145)$$

où

$$\lambda_T = \frac{\partial \lambda}{\partial T}, \lambda_t = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (146)$$

$$\frac{d}{dT} \frac{\partial L}{\partial \lambda_T} = 2 \alpha \frac{\partial^2 \lambda}{\partial T^2}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = 2 \alpha \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2 (F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m) \frac{\partial F}{\partial \lambda}. \quad (147)$$

D'où

$$\alpha \left[ \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial T^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right) \right] - (F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m) \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \quad (148)$$

---

<sup>(25)</sup> Soit une intégrale J de la forme  $J = \int f(t, y, \dot{y}) dt$  où  $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$  alors J a un extremum si l'équation différentielle

Euler-Lagrange est satisfaite :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . Si on a  $y_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ , l'équation devient alors :  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

où  $F(t, T_t, I_t^H)$  et  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$  sont obtenus en résolvant l'équation aux dérivées partielles (142).

Comme le soulignent Chiarella, Craddock et El-Hassan (2000), la résolution de l'équation Euler-Lagrange passe par trois grandes étapes. Transposée à notre situation, la première porte sur le calcul de  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$  après avoir défini les valeurs initiales pour  $\lambda$ , la seconde détermine

$W(t, T_t) = (F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m) \frac{\partial F}{\partial \lambda}$  et enfin la troisième fournit les valeurs de  $\lambda$  qui proviennent de

la relation  $\alpha \left[ \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial T^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right) \right] = W(t, T_t)$ . Afin de réduire le temps de calcul, nous avons choisi

de ne pas employer la régularisation en posant l'hypothèse selon laquelle  $\lambda$  n'est plus soumis qu'à la variable  $t$ . En dépit de cette hypothèse, le programme d'optimisation comporte toujours plus d'inconnues que d'équations car les prix du marché ne sont cotés que pendant les jours ouvrés alors que  $\lambda(t)$  doit être défini pour tous les points de la variable  $t$  sur la grille de la méthode des différences finies. Pour ne pas recourir à la régularisation, nous supposons que les prix durant les jours non ouvrés demeurent identiques au dernier prix coté ce qui nous permet d'avoir autant d'inconnues que d'équations et donc d'obtenir un seul ensemble de solutions pour  $\lambda(t)$ . Nous retiendrons cette approche au cours du chapitre 4 afin d'extraire les prix de marché du risque.

**A travers cette section, nous avons pu nous rendre compte de toute la complexité de la méthode de valorisation en l'absence d'arbitrage notamment lorsque le marché est incomplet. Nous avons pu également observer qu'elle était restreinte aux dérivés climatiques pour lesquels on disposait des données de prix afin de pouvoir pratiquer le calibrage. Les cotations sont également nécessaires pour le calcul des valeurs des contrats à l'aide des mesures "minimal entropy martingale measure" et "variance optimal martingale measure" afin d'estimer les paramètres du processus de prix de l'actif de substitution qui est corrélé à la variable climatique non négociée sur le marché financier. En outre, l'inférence d'une distribution risque-neutre et des prix de marché du risque requière la liquidité des contrats à terme climatiques cotés. Par conséquent, cette méthode de valorisation n'est applicable pour l'instant qu'aux dérivés climatiques sur la température qui sont les plus négociés sur le marché. Face à la difficulté à créer un parfait portefeuille de duplication sur la base des contrats à terme climatiques qui ne**

sont en majorité pas suffisamment liquides, des auteurs tels que Brix, Jewson et Ziehmman (2002) et Augros et Moréno (2002) ont proposé d'évaluer les dérivés climatiques à l'aide de la méthode dite actuarielle. Les principaux atouts de cette méthode que nous allons exposer dans la suite sont sa simplicité de mise en œuvre et son application à tout type de dérivé climatique qu'il soit liquide ou non, qu'il possède ou non des cotations et qu'il ait ou non un actif de substitution.

## 2.2 MODELE D'EVALUATION ACTUARIELLE

La méthode actuarielle évalue les produits dérivés comme étant l'espérance actualisée du paiement futur de ces produits, définie sous la probabilité réelle et non équivalente de l'actif sous-jacent et à laquelle s'ajoute une compensation actualisée pour le risque supporté par le vendeur du contrat. Les prix actuariels de l'option d'achat et du contrat à terme sur l'indice des HDD cumulés s'expriment alors au temps  $t$  :

$$C^A(t, T_t, I_t^H) = \delta e^{-r(t_m-t)} (E[\text{payoff} | F_t] + \kappa \sigma_{\text{payoff}}) \quad (149)$$

et

$$F^A(t, T_t, I_t^H) = \delta (E[I_{t_m}^H | F_t] + \kappa \sigma_{I^H}) \quad (150)$$

où  $\text{payoff} = \max(I_{t_m}^H - K, 0)$ ,  $K$  représente le niveau d'exercice,  $\delta$  donne la valeur d'un degré-jour,  $r$  est le taux d'intérêt sans risque,  $t_m$  est la date d'échéance de l'option,  $E[\dots | F_t]$  correspond à l'opérateur d'espérance définie sous la probabilité réelle ou historique  $P$  et conditionnelle aux informations  $F_t$  disponibles à la date  $t$ ,  $\kappa \sigma_{\text{payoff}}$  et  $\kappa \sigma_{I^H}$  se réfèrent à la prime de risque et  $\sigma_{\text{payoff}}$  et  $\sigma_{I^H}$  désignent respectivement la volatilité du payoff de l'option et de l'indice des HDD cumulés.

Cette méthode repose sur la loi des grands nombres qui précise qu'en répétant un grand nombre de fois une expérience, de façon indépendante, on obtient une approximation de plus en plus fiable de la vraie valeur de l'espérance du phénomène observé. L'espérance sous la probabilité objective peut être implémentée de deux façons, soit en utilisant les données historiques de la température, soit en faisant appel à la technique de simulation de Monte-Carlo. La première approche appelée "burn analysis" consiste à cumuler sur une année les

degrés-jours, à déterminer ensuite le payoff du dérivé pour cette année, puis à réitérer cette opération pour les autres années. L'espérance du prix du dérivé climatique correspond alors à la moyenne des payoffs annuels. La seconde approche est fondée sur l'utilisation d'un modèle pour la température afin de générer un ensemble de trajectoires. Pour chacune d'entre elles, on construit la série des degrés-jours que l'on accumule sur la période de temps considérée. L'indice des degrés-jours ainsi obtenu est employé pour calculer le payoff. L'espérance de la valeur du dérivé climatique équivaut alors à la moyenne des payoffs issus de l'ensemble des tirs. En faisant abstraction ici des occasions d'arbitrage, l'implémentation de cette méthode ne pose aucune difficulté technique car il n'y a plus lieu à considérer une mesure martingale en particulier. Par ailleurs, les auteurs (Brix, Jewson et Ziehmman (2002), Jewson (2004), Augros et Moréno (2002), Dischel (1999) et Platen et West (2004)) font très peu mention de l'estimation de la prime de risque qui est supposée soit nulle, soit égale à une valeur arbitraire. Platen et West (2004) argumentent que cette prime de risque a tendance à se réduire lorsque les compagnies d'assurance se trouvent en situation de concurrence et lorsqu'il existe un système de réassurance. Afin de justifier le bien-fondé de l'utilisation de la méthode actuarielle pour évaluer les dérivés climatiques, Platen et West (2004) ont défini un cadre théorique qui unifie les approches actuarielle et en l'absence d'arbitrage. Ils montrent, à travers ce cadre d'analyse, que l'usage de la méthode actuarielle dans le cas des dérivées climatiques se justifie par le fait que l'indice de température est indépendant du portefeuille dit de croissance optimale ou "growth optimal portfolio" (GOP) dont les poids des actifs qui le composent forment une stratégie autofinancée maximisant l'accroissement espéré de sa valeur. On a :

$$\sup_{V^{\pi}} E(\ln(h_{t+1}) | F_t) \quad (151)$$

où  $h_{t+1} = \frac{V_{t+1}^{\pi}}{V_t^{\pi}}$  à la date  $t+1$ ,  $V^{\pi} = (V_t^{\pi})_{t \geq 0}$  correspond au processus de valeur du portefeuille constitué par les proportions  $\pi = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)_{t \geq 0}$  des  $d$  actifs.

Ce portefeuille est à la base du lien qui unit les deux méthodologies. Utilisé en tant que numéraire, il permet de changer les processus de prix en martingales sous la probabilité réelle  $P$  lorsqu'ils sont exprimés en unités du GOP. Soit  $\hat{H}_T$  le payoff suivant d'une option libellé en unités du GOP à la date  $T$ ,

$$\hat{H}_T = \frac{H_T}{V_T^\pi}, \quad (152)$$

le prix de l'option en termes de GOP à l'instant t est alors donné par :

$$\hat{C}(t,T) = E(\hat{H}_T | F_t). \quad (153)$$

En valeur, il s'exprime de la sorte :

$$C(t,T) = V_t^\pi E(\hat{H}_T | F_t). \quad (154)$$

En introduisant la dérivée de Radon-Nikodym sous la forme suivante <sup>(26)</sup> :

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{S_T^0}{V_T^\pi} \quad (155)$$

où  $S_T^0$  désigne le cours de l'actif 0 qui représente un actif sans risque, Platen et West (2004) déduisent que le prix de l'option peut s'écrire de la manière suivante :

$$C(t,T) = S_t^0 E \left( \frac{S_T^0}{V_T^\pi} \frac{H_T}{S_T^0} | F_t \right) \quad (156)$$

---

<sup>(26)</sup> La valeur  $V^\pi$  du portefeuille et le prix  $S^0$  de l'actif sans risque suivent les équations suivantes (voir Bajoux-Besnainou et Portait (2002)) :

$$\frac{dV^\pi}{V^\pi} = (r + \lambda^2) dt + \lambda' dW \Leftrightarrow V_t^\pi = \exp \left[ \int_0^t (r + \frac{1}{2} \lambda^2) ds + \int_0^t \lambda' dW \right]$$

et

$$\frac{dS^0}{S^0} = r dt$$

où  $r$  représente le taux sans risque instantané,  $\lambda$  exprime la norme euclidienne du vecteur des prix de marché du risque  $\lambda$ ,  $\lambda'$  est la transposée du vecteur  $\lambda$  et  $W$  constitue le vecteur des mouvements browniens standards associés aux  $d+1$  actifs du portefeuille de croissance optimale. En conséquence, on obtient

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{S_T^0}{V_T^\pi} = \exp \left[ - \int_0^T \frac{1}{2} \lambda^2 ds - \int_0^T \lambda' dW \right].$$

$$= S_t^0 E \left( \frac{dQ}{dP} \frac{H_T}{S_T^0} \mid F_t \right) \quad (157)$$

$$= S_t^0 E^Q \left( \frac{H_T}{S_T^0} \mid F_t \right) . \quad (158)$$

On reconnaît ici le prix de l'option en l'absence d'arbitrage.

Si le paiement de l'option est indépendant de la valeur du portefeuille de croissance optimale, le prix de l'option s'exprime alors de la façon suivante :

$$C(t,T) = V_t^\pi E \left( \frac{1}{V_T^\pi} \mid F_t \right) E(H_T \mid F_t) \quad (159)$$

$$\Leftrightarrow C(t,T) = P(t,T) E(H_T \mid F_t) \quad (160)$$

où  $P(t,T) = V_t^\pi E \left( \frac{1}{V_T^\pi} \mid F_t \right)$  constitue le prix au temps  $t$  d'une obligation zéro-coupon, c'est à dire qui ne distribue qu'un seul flux à l'échéance et dont la date d'échéance est  $T$ .

On constate que  $C(t,T)$  représente ici le prix de la méthode actuarielle quand le chargement pour le risque est supposé nul. Par la suite, on se référera à la représentation de la valeur actuarielle sans la prime de risque lorsque l'on évoquera le prix de la méthode actuarielle. En approchant le portefeuille de croissance optimale par l'indice mondial MSCI (Morgan Stanley Capital International), Platen et West (2004) montrent que l'indice de température (de Sydney) n'est pas corrélé au GOP et que, de ce fait, les dérivés climatiques peuvent être évalués à l'aide du principe actuariel. Cette conclusion est toutefois réfutée par Cao et Wei (2004) au travers du modèle d'équilibre général de Lucas (1978) ou modèle d'évaluation des actifs financiers fondé sur la consommation ("Consumption-Capital Asset Pricing Model" ou C-CAPM). En mettant en évidence une corrélation significative entre la moyenne des températures de certaines villes américaines et la consommation totale des biens et services aux Etats-Unis, Cao et Wei (2004) suggèrent au contraire de ne pas évaluer les dérivés climatiques par le biais de la méthode actuarielle. Exposons les fondements théoriques du C-

CAPM et analysons les arguments de Cao et Wei (2004).

## 2.3 MODELE D'EVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS FONDE SUR LA CONSOMMATION

Le modèle d'équilibre général de Lucas (1978) considère une économie dans laquelle un agent représentatif choisit la consommation et la quantité de titres risqués et sans risque de façon à maximiser l'espérance de son utilité intertemporelle tout en respectant sa contrainte budgétaire. Le problème auquel est confronté l'agent s'écrit de la manière suivante :

$$\text{Max}_{C_\tau, Q_\tau, Q_\tau^0} E \left[ \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} U(C_\tau) \mid F_t \right], \quad 0 < \beta < 1 \quad (161)$$

sous la contrainte que <sup>(27)</sup>

$$C_\tau + P_\tau Q_\tau + P_\tau^0 Q_\tau^0 \leq (P_\tau + D_\tau) Q_{\tau-M} + P_\tau^0 Q_{\tau-M}^0 + L_\tau \quad (162)$$

où  $U(\dots)$  exprime la fonction d'utilité de l'individu, celle-ci est croissante et concave ce qui se traduit par les conditions  $U' > 0$  et  $U'' < 0$  <sup>(28)</sup>,  $C_\tau$  correspond à la consommation réelle de l'individu à la date  $\tau$ ,  $P_\tau$  et  $P_\tau^0$  définissent respectivement le prix de l'actif risqué et le prix du titre sans risque,  $D_\tau$  désigne les dividendes,  $Q_\tau$  et  $Q_\tau^0$  donnent les quantités de l'actif risqué et du titre sans risque,  $Q_{\tau-M}$  et  $Q_{\tau-M}^0$  correspondent aux quantités détenues depuis  $M$  périodes,  $L_\tau$  décrit le salaire de l'agent et  $\beta$  reflète un facteur d'actualisation qui permet de rendre compte de la préférence de l'agent pour le présent : lorsque  $\beta$  tend vers 0, l'individu valorise davantage la consommation présente ce qui est moins le cas lorsque  $\beta$  converge vers 1.

<sup>(27)</sup> Hansen et Singleton (1982) présentent le modèle de Lucas (1978) dans un cadre plus général comprenant  $N$  actifs financiers. Leur contrainte budgétaire est formulée alors de la sorte :  $C_\tau + \sum_{j=1}^N P_{j\tau} Q_{j\tau} \leq \sum_{j=1}^N R_{j\tau} Q_{j\tau-M} + L_\tau$  avec  $R_{j\tau} = (P_{j\tau} + D_{j\tau})$  lorsque l'actif financier  $j$  est un titre risqué où  $D_{j\tau}$  représente les dividendes.

<sup>(28)</sup> Dans le cas présent, nous avons  $U'(C) > 0$  et  $U''(C) < 0$  où  $C$  désigne le niveau de la consommation. La première condition signifie que l'utilité augmente lorsque la consommation croît tandis que la seconde évoque l'idée selon laquelle une unité supplémentaire du bien consommé apportera plus de satisfaction lorsque l'agent dispose d'une petite quantité de ce bien que lorsqu'il en possède une quantité importante.



Nous supposons que les ressources ne sont pas gaspillées et que de ce fait, celles-ci égalisent les emplois. Nous avons donc :

$$C_{\tau} + P_{\tau}Q_{\tau} + P_{\tau}^0 Q_{\tau}^0 = (P_{\tau}+D_{\tau})Q_{\tau-M} + P_{\tau}^0 Q_{\tau-M}^0 + L_{\tau}. \quad (163)$$

Les autres hypothèses du modèle sont les suivantes :

- l'influence de la monnaie sur l'économie n'est pas prise en compte. Par conséquent,  $C_{\tau}$ ,  $P_{\tau}$ ,  $P_{\tau}^0$ ,  $D_{\tau}$  et  $L_{\tau}$  sont exprimés en termes réels ;
- nous sommes en présence d'une économie de dotation et non pas de production ;
- les biens de consommation ne sont pas durables. La fonction d'utilité est séparable dans le temps, c'est à dire que son niveau dépend de la consommation actuelle mais pas de la consommation passée.

L'équilibre général est obtenu en complétant les équations du problème par la condition suivante dans le cas de l'agent représentatif :

$$C_t = D_t \quad (164)$$

où  $D_t$  représente le dividende de l'actif risqué. Elle signifie que l'individu consomme entièrement à chaque instant  $t$  le revenu de l'économie reflété par le dividende perçu puisque nous sommes dans une économie de dotation et non pas de production.

Les quantités optimales  $C$ ,  $Q$  et  $Q^0$  satisfont les conditions de premier ordre du programme d'optimisation stipulé par les équations (161) et (163). Les conditions que vérifient  $Q$  et  $Q^0$  s'écrivent :

$$E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} \frac{(P_{t+M}+D_{t+M})}{P_t} \right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P_t = E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} (P_{t+M}+D_{t+M}) \right] \quad (165)$$

et

$$E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} \frac{P_{t+M}^0}{P_t^0} \right] = 1 \Leftrightarrow P_t^0 = E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} P_{t+M}^0 \right] \quad (166)$$

où  $\beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)}$  représente le taux marginal de substitution intertemporelle de la consommation <sup>(29)</sup>. Ces deux équations sont souvent nommées conditions d'Euler. Dans un souci de clarté, nous avons placé la démonstration des relations (165) et (166) en annexe.

Modélisons à présent les préférences de l'agent représentatif en adoptant une fonction d'utilité puissance de la forme suivante :

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\varphi} - 1}{1-\varphi} \quad (167)$$

où  $\varphi \geq 0$  définit le coefficient constant d'aversion relative pour le risque. Pour  $\varphi > 0$ , nous obtenons les propriétés usuelles de la fonction d'utilité ( $U' > 0$  et  $U'' < 0$ ). Le lecteur intéressé pourra trouver en annexe la définition du coefficient constant d'aversion relative pour le risque ainsi que l'explication des principaux atouts de la fonction d'utilité puissance. En utilisant cette fonction d'utilité, les restrictions d'Euler deviennent alors :

$$P_t = E_t \left[ \beta^M \left( \frac{C_{t+M}}{C_t} \right)^{-\varphi} (P_{t+M} + D_{t+M}) \right] \quad (168)$$

et

$$P_t^0 = E_t \left[ \beta^M \left( \frac{C_{t+M}}{C_t} \right)^{-\varphi} P_{t+M}^0 \right] . \quad (169)$$

On s'aperçoit que les prix des actifs financiers apparaissant dans ce modèle d'évaluation sont liés aux décisions de consommation des individus.

Cao et Wei (2004) utilisent ces relations pour évaluer les dérivés climatiques. Pour les dérivés climatiques sur l'indice des HDD cumulés dont la date d'expiration est  $t_m$ , leur prix à

---

<sup>(29)</sup> Le taux marginal de substitution intertemporelle de la consommation  $C_t$  à la consommation  $C_{t+M}$  mesure le supplément de consommation immédiate qui compense une réduction de la consommation future de façon à conserver le même niveau d'utilité.

la date  $t$  s'exprime de la façon suivante <sup>(30)</sup> :

$$f(t, T_t, I_t^H) = \delta E \left[ \beta^{(t_m - t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \max(I_{t_m}^H - K, 0) \mid F_t \right] \quad (170)$$

pour l'option d'achat et

$$F(t, T_t, I_t^H) = \delta E \left[ \beta^{(t_m - t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H \mid F_t \right] \quad (171)$$

pour le contrat à terme.

Ces prix peuvent se ramener à ceux de la méthode actuarielle et en l'absence d'arbitrage si on considère que le taux marginal de substitution intertemporelle coïncide avec le facteur d'escompte stochastique (ou "stochastic discount factor") qui désigne une variable aléatoire ne pouvant prendre que des valeurs positives (Campbell, Lo et MacKinlay (1997)). L'existence de ce facteur implique l'absence d'opportunités d'arbitrage sur le marché. Il est unique lorsque le marché est complet. Comme nous avons supposé que la fonction d'utilité était croissante, le taux marginal de substitution intertemporelle est donc bien positif. Nous pouvons alors écrire que

$$M_{t, t_m} = \beta^{(t_m - t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \quad (172)$$

où  $M_{t, t_m}$  désigne le facteur d'escompte stochastique.

Par ailleurs, Cox, Ingersoll et Ross (1985) démontrent que

---

<sup>(30)</sup> Davis (2001) parvient à une formulation similaire du prix de l'option climatique en utilisant l'approche de la

valeur marginale (ou "shadow price") :  $p = \frac{E[U'(H_{x, t_m}^\pi) B]}{V'(x)}$

où  $H_{x, t_m}^\pi$  représente la valeur du portefeuille de l'agent à l'échéance avec  $x$  désignant sa richesse initiale et  $\pi$  constituant la stratégie de portefeuille autofinancée,  $U'(\dots)$  est la dérivée de la fonction d'utilité,  $B$  est le payoff de l'option climatique et  $V(x) = \sup_{\pi} E[U(H_{x, t_m}^\pi)]$ . L'approche de la valeur marginale consiste à déterminer le prix tel qu'une petite somme  $\delta$  investie dans l'achat de l'option au temps 0 n'a pas d'effet sur l'utilité maximale de l'agent à l'échéance. Soit  $V(x) = \sup_{\pi} E[U(H_{x, t_m}^\pi)]$  dans le cas où l'agent n'achète pas l'option et  $W(\delta, x, p) = \sup_{\pi} E[U(H_{x-\delta, t_m}^\pi + \delta p B)]$  dans le cas où il achète l'option, le prix  $p$  est tel que  $\frac{\partial W(0, p, x)}{\partial \delta} = \frac{\partial V(x)}{\partial \delta} = 0$  (Davis (1998)).

$$\beta^{(t_m-t)} \frac{U'(W_{t_m}^e)}{U'(W_t^e)} = e^{-r(t_m-t)} \zeta_{t_m} \quad (173)$$

où  $W_t^e$  correspond à la richesse de l'agent à l'instant  $t$  et

$$\zeta_s = \exp \left[ \int_t^s \left( \frac{\mu(u, S_u) - r}{\sigma(u, S_u)} \right) dW_u - \frac{1}{2} \int_t^s \left( \frac{\mu(u, S_u) - r}{\sigma(u, S_u)} \right)^2 du \right] \quad (174)$$

où le processus de prix  $S$  d'un actif risqué suit le mouvement brownien géométrique suivant :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t. \quad (175)$$

Les auteurs supposent que l'agent investit toute sa richesse dans l'achat de l'actif risqué à chaque date  $t$ . On a ainsi  $W_t^e = S_t \forall t$ .

Si nous définissons la fonction de densité neutre au risque de la façon suivante :

$$f_Q(I_{t_m}^H) = f_p(I_{t_m}^H) \times \zeta_{t_m} \quad (176)$$

où  $f_p(I_{t_m}^H)$  est la densité de probabilité réelle et les prix donnés par les équations (170) et (171) s'écrivent alors sous la probabilité  $Q$  de la manière suivante :

$$f(t, T_t, I_t^H) = \delta E [ M_{t, t_m} \max(I_{t_m}^H - K, 0) | F_t ] \quad (177)$$

$$= \delta \int_0^\infty \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\rho} \max(I_{t_m}^H - K, 0) f_p(I_{t_m}^H) dI_{t_m}^H \quad (178)$$

$$= \delta \int_0^\infty e^{-r(t_m-t)} \zeta_{t_m} \max(I_{t_m}^H - K, 0) f_p(I_{t_m}^H) dI_{t_m}^H \quad (179)$$

$$= \delta \int_0^\infty e^{-r(t_m-t)} \max(I_{t_m}^H - K, 0) f_Q(I_{t_m}^H) dI_{t_m}^H \quad (180)$$

$$= \delta e^{-r(t_m-t)} E^Q[\max(I_{t_m}^H - K, 0) | F_t] \quad (181)$$

$$\text{et } F(t, T_t, I_t^H) = \delta E^Q[I_{t_m}^H | F_t] \text{ avec } r = 0. \quad (182)$$

Lorsque le coefficient  $\phi$  vaut zéro, nous observons que les prix deviennent identiques à ceux de la méthode actuarielle. Cette situation survient quand les prix sont indépendants du niveau de la consommation, car le vendeur du titre est dans ce cas neutre vis-à-vis du risque. La prime de risque est donc nulle.

Cao et Wei (2004) montrent que la consommation totale des biens et services aux Etats-Unis est significativement corrélée à la moyenne des températures des cinq villes Atlanta, Chicago, Dallas, New York et Philadelphie. Richards, Manfredo et Sanders (2004) parviennent à la même conclusion en utilisant la consommation et la température de la ville de Fresno en Californie. Ces auteurs déterminent la significativité de la relation entre ces deux variables en estimant l'équation suivante :

$$\ln C_t = a_0 + a_1 \ln C_{t-1} + \mu_t \quad (183)$$

où  $a_1 \leq 1$ ,  $\mu_t = \sqrt{1-\rho^2} v_t + \rho \varepsilon_t + \eta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \eta_m \varepsilon_{t-m}$ ,  $v_t$  est un bruit blanc indépendant de la perturbation  $\varepsilon_t$ ,  $\rho$  désigne le coefficient de corrélation entre la consommation et la température et  $\eta_1, \dots, \eta_m$  représentent les paramètres des impacts passés de la température sur la consommation. Les perturbations  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$  sont approchées en utilisant les résidus  $\hat{\varepsilon}_t$  issus du modèle estimé pour la température. Le résultat obtenu par Cao et Wei (2004) et par Richards, Manfredo et Sanders (2004) implique que le coefficient constant d'aversion relative pour le risque ne peut pas être nul dans le cas des dérivés climatiques et que, par conséquent, la méthode actuarielle n'apparaît pas acceptable pour leur valorisation. Suite à ce résultat, Cao et Wei (2004) déterminent la part occupée par la prime de risque dans la valeur des options et des contrats à terme climatiques en comparant les prix lorsque le coefficient de corrélation entre la température et la consommation est supposé d'une part nul et d'autre part non nul. Ils indiquent que l'écart observé entre les deux prix correspond à la prime de risque car les prix se décomposent de la manière suivante (dans le cas du contrat à terme) :

$$\hat{F}(t, T_t, I_t^H) = \frac{F(t, T_t, I_t^H)}{E[M_{t,t_m} | F_t]} = \delta \frac{E[M_{t,t_m} I_{t_m}^H | F_t]}{E[M_{t,t_m} | F_t]} = \delta \left( E[I_{t_m}^H | F_t] + \frac{\text{cov}(I_{t_m}^H, M_{t,t_m})}{E[M_{t,t_m} | F_t]} \right) \quad (184)$$

lorsqu'il existe une dépendance entre la consommation et la température, autrement on a

$$\hat{F}(t, T_t, I_t^H) = \delta E[I_{t_m}^H | F_t]. \quad (185)$$

Ils révèlent ainsi que la prime de risque occupe une part importante dans le prix des options : 11,61% pour un paramètre d'aversion correspondant à <sup>(31)</sup> -40. Nous traiterons de l'estimation du coefficient constant d'aversion relative pour le risque au cours du chapitre 4, ce point n'ayant pas encore été abordé par Cao et Wei (2004) et par Richards, Manfredo et Sanders (2004). Nous verrons que les données sur les prix des contrats à terme climatiques sont nécessaires pour estimer le paramètre d'aversion. De ce fait et similairement à la méthode en l'absence d'arbitrage, le modèle d'équilibre général ne permet pas d'évaluer tout type de contrat climatique.

## 2.4 CONCLUSION

L'examen approfondi des trois méthodes d'évaluation montre que malgré des fondements théoriques différents, les prix procurés sont liés entre eux. Le modèle d'évaluation en l'absence d'arbitrage détermine le prix de l'option à une date avant l'expiration comme l'espérance conditionnelle du paiement du contrat à l'échéance, actualisée et définie sous une mesure de probabilité risque-neutre ou martingale. Concrètement, lorsque le marché est complet, le prix est donné par la formule de Black et Scholes. Lorsque le marché est incomplet, il existe plusieurs prix possibles pour l'option. Il peut être défini en résolvant simultanément une équation aux dérivées partielles pour la valeur de l'option et une autre équation aux dérivées partielles pour le prix de marché du risque qui renvoie à une mesure martingale précise. Rappelons qu'il existe autant de prix de marché du risque qu'il y a de mesures de probabilité risque-neutre possibles lorsque le marché est incomplet. Compte

---

<sup>(31)</sup> Le coefficient constant d'aversion relative pour le risque est négatif ici car Cao et Wei (2004) utilisent la fonction d'utilité de la forme suivante :  $U(C_t) = \frac{C_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$ .

tenu de la difficulté à résoudre numériquement cet ensemble d'équations, il a été proposé d'évaluer les dérivés climatiques en estimant soit le prix de marché du risque soit la distribution neutre au risque à partir des prix cotés des contrats à terme sur les degrés-jours, qui représentent les produits les plus négociés sur le marché.

La présentation du modèle d'équilibre général nous a révélé un outil supplémentaire afin de déterminer les prix en l'absence d'arbitrage. Elle consiste à calculer le taux marginal de substitution intertemporelle de la consommation ou facteur d'escompte stochastique. Platen et West (2004) ont mis en évidence un lien entre les méthodes actuarielle et en l'absence d'arbitrage. L'approche actuarielle valorise les produits dérivés climatiques à l'aide des probabilités historiques et non neutres au risque de l'indice sous-jacent. Nous avons vu à travers le modèle d'équilibre général que cette démarche revenait à admettre que la prime de risque était nulle. Or Cao et Wei (2004) ont montré que la compensation pour le risque endossé était non négligeable dans le cas des dérivés climatiques. L'utilisation de la méthode actuarielle s'avère alors discutable pour la valorisation des contrats climatiques. Les prix issus de cette approche seront toutefois calculés et comparés aux valeurs provenant des autres modèles d'évaluation dans le chapitre 4. Pour ce faire, nous avons besoin de modéliser le comportement de la température. L'objet du chapitre 3 consiste donc à analyser les caractéristiques de la variable climatique.

## **CHAPITRE 3**

### **MODELISATION DU COMPORTEMENT DE LA TEMPERATURE MOYENNE JOURNALIERE**

Cao et Wei (1998) ont souligné les caractéristiques suivantes de la température moyenne journalière : comportement cyclique, saisonnalité dans la variance, propriété de retour à la moyenne, caractère autorégressif (un jour chaud sera suivi vraisemblablement par un autre jour chaud, idem pour un jour froid) et tendance haussière due au réchauffement de la planète. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature afin de prendre en compte ces caractéristiques. Nous débutons dans la section 3.1 par la synthèse de ces modèles. Nous expliquons ensuite dans la section 3.2 leurs méthodes d'estimation, puis nous procédons à l'estimation des paramètres des modèles pour la température des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York. Nous récapitulerons les résultats obtenus dans la section 3.3.

#### **3.1 REVUE DE LA LITTERATURE**

Le cadre en temps continu de la théorie financière a incité plusieurs auteurs à adopter un processus d'Ornstein-Uhlenbeck afin de saisir la propriété de retour à la moyenne de la température (Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) et Benth et Šaltytė-Benth (2005)). De manière plus élaborée, le processus peut incorporer des sauts et une volatilité ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) (modèle de Richards, Manfredo et Sanders (2004)) ou une mémoire longue (modèle de Brody, Syroka et Zervos (2002)). Le dernier aspect signifie que la température moyenne journalière peut exhiber une structure de dépendance de long terme. Nous y reviendrons plus en détail dans les parties qui suivent. Les théories actuarielle et d'équilibre général moins orientées vers un cadre temporel précis ont favorisé l'utilisation des processus en temps discret plus en mesure de rendre compte de la structure autorégressive complexe de la température moyenne journalière. Cao et Wei (1998) et Roustant (2002) ont fait appel à un processus ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) et Caballero, Jewson et Brix (2002) ont eu recours à un processus ARFIMA (AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average) afin modéliser la mémoire longue.

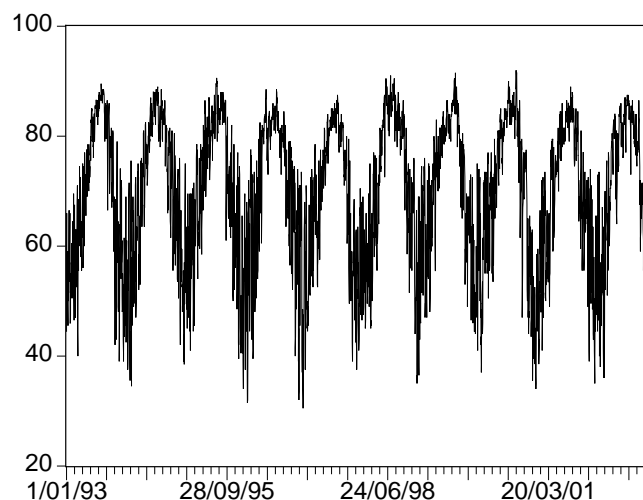


Campbell et Diebold (2004) ont développé un processus GARCH (Generalized ARCH) périodique. Cette section se divise en trois parties, la première introduira les composants de la chronique de la température moyenne journalière, la seconde portera sur l'étude des processus en temps continu et la troisième sur celle des processus en temps discret.

### 3.1.1 Décomposition de la chronique de la température moyenne journalière

Les différents modèles suggérés dans la littérature reposent sur la juxtaposition de deux principaux composants afin de restituer la série de la température moyenne journalière. L'analyse de la figure ci-dessous qui illustre la dynamique de la température moyenne journalière de la ville de Houston va nous permettre de les identifier.

**Figure 15 :** Température moyenne journalière (en degrés Fahrenheit) de l'aéroport de Houston Bush Intercontinental (01/01/1993 – 31/12/2002)  
Source : CME



Nous pouvons y déceler un fort mouvement cyclique dont l'amplitude ne s'accroît pas au cours du temps. Par conséquent, la série chronologique peut se décomposer selon le modèle additif<sup>(31)</sup> suivant :

<sup>(31)</sup> Si l'amplitude du mouvement cyclique avait été croissante, on aurait plutôt adopté le modèle multiplicatif suivant :  $T_t = m_t \times c_t \times \varepsilon_t$ .

$$T_t = m_t + s_t + \varepsilon_t \quad (186)$$

où  $m_t$  comporte une tendance,  $s_t$  regroupe les oscillations autour de la tendance et  $\varepsilon_t$  désigne les fluctuations aléatoires.

Il existe plusieurs ajustements possibles de la tendance. Citons les 3 majeurs :

- par une droite :  $m_t = at + b$  ;
- par une parabole :  $m_t = at^2 + bt + c$  ;
- par une courbe polynomiale :  $m_t = a_p t^p + a_{p-1} t^{p-1} + \dots + a_1 t + a_0$

où  $t$  désigne la variable temps.

On évalue souvent les coefficients de façon à minimiser la somme des écarts au carré entre  $T_t$  et  $m_t$ . On utilise, par conséquent, la méthode d'estimation des Moindres Carrés.

De manière générale, la tendance de la série des températures moyennes journalières est représentée à l'aide de la droite. Nous verrons, en testant sur nos données les différentes formes de la tendance présentées ci-dessus, que cette modélisation est effectivement la plus adéquate.

Le mouvement sinusoïdal qui est constaté sur la figure 15 est souvent pris en compte en utilisant la transformée tronquée de Fourier à un ordre  $K$  qui s'écrit :

$$s_t = \sum_{k=1}^K [\delta_{c,k} \cos(k\omega t) + \delta_{s,k} \sin(k\omega t)] \quad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi}{365} \quad (187)$$

Cao et Wei (1998) ont préféré faire appel à une forme non paramétrique pour représenter le mouvement oscillatoire de la température. Nous l'introduirons au cours de la section concernant les processus en temps discret.

En notant que les variations de la température ne s'écartent jamais longtemps de la valeur d'équilibre qui est donnée par  $(m_t + s_t)$ , il apparaît donc judicieux de considérer un processus

de retour à la moyenne pour la température moyenne journalière. Nous commençons par étudier ses formulations en temps continu pour venir ensuite à ses spécifications en temps discret.

### 3.1.2 Processus en temps continu

En premier lieu, nous étudions les processus de loi normale tels que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini par Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) et le processus de retour à la moyenne gouverné par un mouvement brownien fractionnaire suggéré par Brody, Syroka et Zervos (2002). En dernier lieu, nous examinerons le processus à sauts avec une volatilité ARCH(1) proposé par Richards, Manfredo et Sanders (2004).

#### 3.1.2.1 Modèle d'Alaton, Djehiche et Stillberger (2002)

Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) utilisent une représentation de loi gaussienne pour modéliser le comportement de la température moyenne journalière car ils ont observé une analogie entre la courbe de distribution de la variable climatique et celle de la loi normale. Leur modèle s'écrit de la sorte :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_t dW_t \quad (188)$$

où  $\alpha$  représente la vitesse de retour à la moyenne,  $\sigma_t$  la volatilité de la température,  $dW_t = \tilde{\epsilon}_t \sqrt{dt}$  avec  $\tilde{\epsilon}_t \sim N(0,1)$ ,

$$T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \varnothing), \quad \omega = \frac{2\pi}{365}, \quad (189)$$

A, B, C,  $\varnothing$  sont des constantes et

$$\frac{dT_t^m}{dt} = B + \omega C \cos(\omega t + \varnothing). \quad (190)$$

Ce dernier élément est requis dans la formulation (188) afin d'obtenir la propriété de retour à la moyenne à long terme, c'est à dire  $E[ T_t ] \approx T_t^m$ . Dornier et Queruel (2000) font remarquer que cette propriété ne serait pas vérifiée si l'on avait eu l'équation suivante :

$$dT_t = \alpha(T_t^m - T_t) dt + \sigma_t dW_t. \quad (191)$$

En effet, la forme discrétisée de l'équation (191) aurait donné :

$$(T_{t+1} - T_t) = \alpha(T_t^m - T_t) \Delta t + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{\Delta t} \quad (192)$$

$$\Leftrightarrow T_{t+1} = T_t + \alpha(T_t^m - T_t) + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t \quad \text{avec } \Delta t = 1 \quad (193)$$

$$\Leftrightarrow T_{t+1} = T_t(1-\alpha) + \alpha T_t^m + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t. \quad (194)$$

D'où  $E[ T_{t+1} ] = (1-\alpha) E[ T_t ] + \alpha T_t^m$  ne tend pas vers  $T_{t+1}^m$ .

Tandis que pour l'équation (188), on a

$$T_{t+1} - T_t = (T_{t+1}^m - T_t^m) + \alpha(T_t^m - T_t) \Delta t + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{\Delta t} \quad (195)$$

$$\Leftrightarrow T_{t+1} - T_{t+1}^m = (T_t - T_t^m) + \alpha(T_t^m - T_t) + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t \quad \text{avec } \Delta t = 1 \quad (196)$$

$$\Leftrightarrow T_{t+1} - T_{t+1}^m = (1-\alpha) (T_t - T_t^m) + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t. \quad (197)$$

D'où  $E[ T_{t+1} ] - T_{t+1}^m = (1-\alpha) (E[ T_t ] - T_t^m)$  tend à décroître géométriquement vers 0 car on a  $0 < \alpha < 1$ .

Par ailleurs, la formulation (188) équivaut à un processus AR(1) en temps discret ce qui n'est pas le cas pour la représentation (191).

Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) observent que la volatilité diffère un mois sur l'autre et proposent de la déterminer de deux manières qui sont :

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{N_\mu} \sum_{t=0}^{N_\mu-1} (T_{t+1} - T_t)^2 \quad (198)$$

et

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{N_\mu - 2} \sum_{j=1}^{N_\mu} (\tilde{T}_t - \hat{\alpha}T_{t-1}^m - (1-\hat{\alpha})T_{t-1})^2 \quad (199)$$

où  $N_\mu$  se réfère au nombre de jours du mois  $\mu$ ,  $\hat{\alpha}$  est la valeur estimée de  $\alpha$  et

$$\tilde{T}_t = T_t - (T_t^m - T_{t-1}^m) \quad (200)$$

lorsque l'équation (196) est réécrite de la façon suivante :

$$T_t = (T_t^m - T_{t-1}^m) + \alpha T_{t-1}^m + (1-\alpha) T_{t-1} + \sigma_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1} \quad (201)$$

$$\Leftrightarrow T_t - (T_t^m - T_{t-1}^m) = \alpha T_{t-1}^m + (1-\alpha) T_{t-1} + \sigma_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1} \quad (202)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{T}_t = \alpha T_{t-1}^m + (1-\alpha) T_{t-1} + \sigma_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1} . \quad (203)$$

Contrairement à Alaton, Djehiche et Stillberger (2002), Benth et Šaltytė-Benth (2005) suggèrent pour la volatilité la forme suivante afin de traduire la périodicité :

$$\hat{\sigma}_t^2 = \bar{\varepsilon}_d^2 (365 \times 1) \otimes \ell_{(Y \times 1)}, \quad (204)$$

où

$$\bar{\varepsilon}_d^2 = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y \hat{\varepsilon}_{d,y}^2 \quad (205)$$

et

$$\hat{\varepsilon}_{d,y} = T_{d,y} - T_{d,y}^m - (1-\hat{\alpha})(T_{d,y-1} - T_{d,y-1}^m) \quad (206)$$

où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker,  $d = 1, \dots, 365$  représente le jour de l'année  $y = 1, \dots, Y$ ,  $\ell$  est un vecteur  $Y \times 1$  composé de 1 et  $t = 1, \dots, n$  avec  $n = 365 \times Y$  (le 29 février n'est pas pris en compte).

Dans la suite, nous choisissons le modèle de Benth et Šaltytė-Benth (2005) pour représenter la volatilité car il permet à celle-ci de varier au jour le jour ce qui est conforme aux observations. En outre, la série  $\{\sigma_t^2\}_{0 \leq t \leq n}$  avec  $n = 365 \times Y$  de Benth et Šaltytė-Benth (2005) est construite à partir de la réplication pour les  $Y$  années de la série  $\{\bar{\varepsilon}_d^2\}_{d=1}^{365}$  créée en faisant la moyenne des résidus au carré du jour  $d$  de plusieurs années alors qu'il semblerait que la série  $\{\sigma_t^2\}_{0 \leq t \leq n}$  d'Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) renvoie plutôt à la réplication pour les  $Y$  années de la série  $\{\hat{\sigma}_\mu^2\}_{\mu=1}^{12}$  définie pour tout mois  $\mu$  en effectuant la moyenne des résidus au carré du mois  $\mu$  et ceci sur la base d'une seule année.

Des auteurs comme Brody, Syroka et Zervos (2002) ont détecté une mémoire longue dans la température moyenne journalière. Afin de considérer ce caractère, ils ont étudié un processus gaussien du type fractionnaire que nous allons introduire.

### 3.1.2.2 Modèle de Brody, Syroka et Zervos (2002)

Brody, Syroka et Zervos (2002) ont été les premiers à proposer un processus d'Ornstein-Uhlenbeck régi par un mouvement brownien fractionnaire pour modéliser la structure de dépendance de long terme dans la température. Le phénomène de "mémoire longue" est observable dans les données lorsqu'il laisse apparaître dans le domaine temporel une fonction d'autocorrélation décroissant très lentement quand le retard augmente et lorsqu'il révèle dans le domaine fréquentiel un pic à la fréquence zéro. Il est à noter qu'une série non stationnaire se comporte de manière similaire à une chronique ayant une mémoire de long terme. De ce fait, lors du traitement des données, il conviendra de les stationnariser avant de mener toute analyse.

La formulation de Brody, Syroka et Zervos (2002) s'exprime comme suit :

$$dT_t = \alpha(T_t^m - T_t) dt + \sigma_t dW_t^H \quad (207)$$

où

$$T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \vartheta), \quad \omega = \frac{2\pi}{365}, \quad (208)$$

$W_t^H$  fait référence au mouvement brownien fractionnaire<sup>(32)</sup> et  $H$  correspond à l'exposant de Hurst (1951).

Pour  $\frac{1}{2} < H < 1$  le processus possède une mémoire longue, pour  $0 < H < \frac{1}{2}$  il est dit anti-persistant et pour  $H = \frac{1}{2}$  il a une mémoire courte<sup>(33)</sup>.

Nous réécrivons la spécification (207) de Brody, Syroka et Zervos (2002) de manière à considérer la remarque de Dornier et Queruel (2000). Nous obtenons alors :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_t dW_t^H . \quad (209)$$

Nous appelons cette représentation "modèle modifié de Brody, Syroka et Zervos".

---

<sup>(32)</sup> Le mouvement brownien fractionnaire a été introduit par Kolmogorov (1940). Mandelbrot et Van Ness (1968) le définissent par rapport au mouvement brownien standard de la façon suivante :

$$W_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s$$

où  $\Gamma$  représente la fonction gamma et  $H$  correspond à l'exposant de Hurst (1951).

<sup>(33)</sup> Le mouvement brownien fractionnaire est un processus gaussien caractérisé par  $E(W_t^H) = 0$ ,  $E(W_t^H)^2 = |t|^{2H}$  et dont la covariance est donnée par

$$E(W_t^H W_s^H) = \frac{1}{2} [ |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} ] , \quad s \leq t .$$

Les incréments  $(W_{t+h}^H - W_t^H)$  et  $(W_{s+h}^H - W_s^H)$  du mouvement brownien fractionnaire forment un processus gaussien stationnaire appelé bruit gaussien fractionnaire en temps discret. Soient  $s \leq t$ ,  $s+h \leq t$ ,  $t-s = kh$ , la covariance du bruit gaussien fractionnaire  $E[(W_{t+h}^H - W_t^H)(W_{s+h}^H - W_s^H)]$  s'écrit alors

$$\rho_H(k) = \frac{1}{2} h^{2H} [ |k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H} ] \approx h^{2H} H(2H-1)k^{2H-2} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

où  $0 < H < 1$  et  $H$  représente l'exposant de Hurst.

Si  $H = \frac{1}{2}$ ,  $\rho_H(k) = 0$ ,  $W_t^H$  devient un mouvement brownien standard.

Si  $H > \frac{1}{2}$ ,  $\rho_H(k) > 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_H(k) = \infty$ , on est en présence d'une mémoire longue et  $W_t^H$  est dit persistant, c'est à dire qu'il y a une forte chance qu'une hausse de ses valeurs soit suivie par une hausse de ses valeurs futures.

Si  $H < \frac{1}{2}$ ,  $\rho_H(k) < 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho_H(k)| < \infty$ ,  $W_t^H$  est dit anti-persistant. Des auteurs renvoient ce cas à de la mémoire courte alors qu'il existe ici une corrélation négative : les phases de hausse ont tendance à être suivies par des phases de baisse.

Nous verrons au cours de la prochaine section que la température des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York ne suit pas une loi gaussienne. Afin de tenir compte de cette observation, nous estimerons un processus à sauts avec une volatilité ARCH(1) dans le même esprit que celui spécifié par Richards, Manfredo et Sanders (2004). Dans l'immédiat, nous allons le définir.

### 3.1.2.3 Modèle de Richards, Manfredo et Sanders (2004)

Afin d'adapter leur spécification aux changements brutaux de la température, Richards, Manfredo et Sanders (2004) ont construit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts comprenant une volatilité ARCH(1) dont l'équation différentielle stochastique se présente de la manière suivante en utilisant les notations précédentes :

$$dT_t = \alpha(T_t^m - \gamma U - T_t) dt + \sigma_t dW_t + U dq_t \quad (210)$$

ou plus précisément,

$$dT_t = \alpha(T_t^m - \gamma U - T_t) dt + \sigma_t dW_t + U \times \begin{cases} 1 & \text{avec la probabilité } \gamma dt \\ 0 & \text{avec la probabilité } 1 - \gamma dt \end{cases} \quad (211)$$

avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (T_{t-1} - T_{t-1}^m)^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \quad (212)$$

$$T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \vartheta) + \sum_{j=1}^p \rho_j T_{t-j} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{365} \quad (213)$$

où  $U$  représente l'amplitude du saut et  $U \sim N(\mu_U, \sigma_U^2)$ . La probabilité de survenance d'un saut au cours de l'intervalle de temps  $dt$  est donnée par  $\gamma dt$  tandis que celle de la non apparition d'un saut est fournie par  $1 - \gamma dt$  ( $\gamma > 0$  étant une constante) et  $U$  et  $dq_t$  sont supposés indépendants.

Nous souhaitons apporter quelques modifications à ce modèle afin, d'une part de tenir compte de l'argument de Dornier et Queruel (2000) et d'autre part, pour l'adapter aux caractéristiques de nos séries de températures. Les auteurs font dépendre la valeur d'équilibre



$T_t^m$  des valeurs passées de la température moyenne journalière et ceci afin de stationnariser la série des températures par la suite en lui retranchant la partie autorégressive à travers l'opération  $(T_t - T_t^m)$ . Ils trouvent  $p = 3$  pour la partie autorégressive de l'équation (213) en utilisant le critère de Schwarz. Nous n'observons pas cette forme de non stationnarité dans nos données. En appliquant les tests de stationnarité au cours de la section 3.2 pour déterminer le caractère stationnaire ou non des séries, nous obtenons des chroniques non stationnaires dues à la présence d'une tendance sans effet autorégressif. En outre, La spécification de la volatilité n'apparaît pas correcte car elle porte sur la variable  $(T_{t-1} - T_{t-1}^m)$  qui ne possède pas une moyenne nulle <sup>(34)</sup>. En effet, si on discrétise l'équation (210), on obtient :

$$\Delta T_t = \alpha(T_{t-1}^m - \gamma U - T_{t-1}) \Delta t + \sigma_{t-1} \Delta W_t + U \Delta q_t \quad (214)$$

$$\Leftrightarrow T_t - T_t^m = T_{t-1} - T_{t-1}^m + \alpha(T_{t-1}^m - \gamma U - T_{t-1}) \Delta t + \sigma_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1} \sqrt{\Delta t} + U \Delta q_t . \quad (215)$$

En prenant l'espérance de cette relation, on aboutit à :

$$E[T_t - T_t^m] = T_{t-1} - T_{t-1}^m + \alpha(T_{t-1}^m - \gamma \mu_U - T_{t-1}) \Delta t + E[U \Delta q_t] \quad (216)$$

$$= T_{t-1} - T_{t-1}^m + \alpha(T_{t-1}^m - \gamma \mu_U - T_{t-1}) \Delta t + \mu_U \gamma \Delta t \neq 0 \quad (217)$$

où  $E[U \Delta q_t] = E[U] \times E[\Delta q_t] = \mu_U \times [1 \times \gamma \Delta t + 0 \times (1 - \gamma \Delta t)] = \mu_U \times \gamma \Delta t$  puisque l'on a supposé que  $U$  et  $dq_t$  étaient indépendants. Par ailleurs, Richards, Manfredo et Sanders (2004) ne justifient pas la présence du terme  $-\gamma U$  dans leur modélisation qui implique que la température  $T_t$  tend à retrouver sa valeur d'équilibre  $(T_t^m - \gamma U)$  et non pas  $T_t^m$ . Si l'écriture du modèle donnée par l'équation (210) avait été :

$$dT_t = \alpha(T_t^m - T_t) dt + \sigma_t dW_t + U dq_t, \quad (218)$$

on aurait eu l'expression suivante sous une probabilité  $Q$  :

---

<sup>(34)</sup> Un processus ARCH(q) est défini par  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$  avec  $\alpha_0 > 0$  et  $\alpha_j \geq 0 \forall j$  où  $E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0$  et  $\text{Var}(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \sigma_t^2$ .

$$dT_t = [ \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda\sigma_t - \gamma E(U) ] dt + \sigma_t dW_t^Q + Udq_t \quad (219)$$

où  $\lambda$  correspond au prix de marché du risque lié à la température. Il n'y a pas de prix de marché du risque associé au saut si on suppose comme Merton (1976) qu'il n'est pas systématique et qu'il est diversifiable.

Le terme  $-\gamma E(U)$  permet de transformer la variable actualisée de  $T_t$  en martingale sous une mesure de probabilité  $Q$  puisque l'on a  $E[dT_t - (\alpha(T_t^m - T_t) - \lambda\sigma_t)dt] = 0$ . En effet,

$$\begin{aligned} E[ dT_t ] &= [ \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda\sigma_t - \gamma E(U) ] dt + E[ Udq_t ] \\ &= [ \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda\sigma_t ] dt - \gamma\mu_U dt + \mu_U \gamma dt \\ &= [ \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda\sigma_t ] dt . \quad (35) \end{aligned} \quad (220)$$

Suite à ces remarques, le modèle que nous proposons d'estimer et que nous nommons "modèle modifié de Richards, Manfredo et Sanders" s'écrit de la façon suivante :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_t dW_t + Udq_t \quad (221)$$

soit sous la forme discrétisée suivante :

---

<sup>(35)</sup> Rappelons que la probabilité  $Q$  est la probabilité sous laquelle le prix actualisé  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  du titre sous-jacent est une martingale, c'est à dire que l'on a  $E\left(\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t}\right) = 0$  ou  $E(dS_t - rS_t dt) = 0$  sous la probabilité  $Q$ .

Supposons que l'on ait sous la probabilité réelle  $P$  :  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ .

En posant  $dW_t^Q = dW_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt$ , on obtient  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \left[ dW_t^Q - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt \right] = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$  et  $E(dS_t - r S_t dt) = 0$ .

Si on avait appliqué le lemme d'Itô à  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ , on aurait obtenu

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= S_t e^{-rt} [ (\mu - r) dt + \sigma dW_t ] \\ &= \tilde{S}_t \left[ (\mu - r) dt + \sigma \left( dW_t^Q - \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right) \right] = \tilde{S}_t \sigma dW_t^Q \quad \text{et} \quad E\left(\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t}\right) = 0 . \end{aligned}$$

$$\Delta T_t = \left[ \frac{\Delta T_t^m}{\Delta t} + \alpha(T_{t-1}^m - T_{t-1}) \right] \Delta t + \sigma_{t-1} \Delta W_t + U \Delta q_t \quad (222)$$

avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \quad (223)$$

et

$$T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \vartheta) \quad (224)$$

$$\text{où } \varepsilon_t = \Delta T_t - E(\Delta T_t) \quad (225)$$

$$= \Delta T_t - \left[ \frac{\Delta T_t^m}{\Delta t} + \alpha(T_{t-1}^m - T_{t-1}) \Delta t + \mu_U \gamma \Delta t \right] \quad (226)$$

$$= \sigma_{t-1} \Delta W_t + U \Delta q_t - \mu_U \gamma \Delta t. \quad (227)$$

On observe ici que  $E(\varepsilon_t) = 0$

$$\text{car } E(\varepsilon_t) = E[\sigma_{t-1} \Delta W_t + U \Delta q_t - \mu_U \gamma \Delta t] \quad (228)$$

$$= E[U \Delta q_t] - \mu_U \gamma \Delta t \quad \text{avec } E[\sigma_{t-1} \Delta W_t] = E[\sigma_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1} \sqrt{\Delta t}] = 0 \quad \text{car } \tilde{\varepsilon}_t \sim N(0,1)$$

$$= \mu_U \gamma \Delta t - \mu_U \gamma \Delta t = 0.$$

Le modèle peut s'écrire également sous la forme d'une intégrale :

$$T_t = T_0 + \int_0^t \left[ \frac{dT_s^m}{ds} + \alpha(T_s^m - T_s) \right] ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{k=1}^{N(t)} U_k dq_k \quad (229)$$

où  $N(t)$  est un processus de Poisson qui comptabilise le nombre de sauts survenus depuis l'instant 0 jusqu'à la date  $t$ , on suppose ici qu'il ne peut y avoir qu'un seul saut par intervalle de temps  $dt$  ce qui est plausible dans notre cas puisque la température moyenne journalière subit rarement plus d'un changement brutal par jour,  $U_k$  correspond à l'amplitude du  $k^{\text{ème}}$  saut et  $U_k, N_t$  et  $dW_t$  sont supposés indépendants.

Roustant (2002) note que les processus de type financier sont bien trop grossiers pour traduire la dynamique complexe de la température moyenne journalière. Comme nous l'avons

mentionné auparavant, la spécification de retour à la moyenne en temps continu correspond à un processus AR(1) en temps discret alors que Roustant (2002) met en évidence un modèle AR(3) comme étant le plus adapté pour capter la structure autorégressive de la température et ceci à partir de l'observation des autocorrélations partielles et du critère de Schwarz. De ce fait, nous entamons dans la partie qui suit l'étude des processus en temps discret.

### 3.1.3 Processus en temps discret

De par sa simplicité, la représentation de Cao et Wei (1998) et Cao et Wei (2004) introduira cette partie, viendra ensuite le modèle de Roustant (2002) qui constitue une version plus générale de la précédente en ce sens qu'il considère une structure ARMA pour la température au lieu d'une représentation AR. Nous poursuivrons par une présentation du modèle de Campbell et Diebold (2004) qui met en avant une volatilité GARCH périodique puis nous concluons la partie par l'étude du processus à mémoire longue en temps discret de Caballero, Jewson et Brix (2002).

#### 3.1.3.1 Modèle de Cao et Wei (1998) et Cao et Wei (2004)

Pour tenir compte des nombreux aspects de la température moyenne journalière qui ont été énumérés au début de ce chapitre, Cao et Wei (1998) et Cao et Wei (2004) suggèrent le processus suivant :

$$T_t = m_t + s_t + \sum_{j=1}^p \rho_j U_{t-j} + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t, \quad \tilde{\varepsilon}_t \sim \text{iid}(0,1) \quad (230)$$

$$m_t = \frac{\beta_0}{365} \left( t - \frac{n}{2} \right), \quad (231)$$

$$s_t = \bar{T}_d \otimes \ell_{(Y \times 1)}, \quad (232)$$

$$\bar{T}_d = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y T_{d,y}, \quad (233)$$

où  $\ell$  est un vecteur  $Y \times 1$  composé de 1,  $d=1, \dots, 365$  correspond au jour  $d$  de l'année  $y=1, \dots, Y$ ,  $t=1, \dots, n$  avec  $n=365 \times Y$ ,

$$U_t = T_t - \left( \frac{\beta_0}{365} \left( t - \frac{n}{2} \right) + s_t \right) \quad (234)$$

et

$$\sigma_t = \sigma_0 - \sigma_1 \left| \sin \left( \frac{\pi t}{365} + \phi \right) \right|. \quad (235)$$

Afin de pouvoir analyser la significativité de la tendance dans l'équation (231), nous la reformulons comme suivant :

$$m_t = \frac{\beta_1}{365} t - \frac{\beta_2}{365} \frac{n}{2}. \quad (236)$$

Nous remarquons que Cao et Wei (1998) déterminent l'élément cyclique  $s_t$  à l'aide de la série brute  $T_t$  sans avoir ôté au préalable la tendance  $m_t$ . La conséquence de ceci est que le calcul de la composante  $s_t$  est biaisé par la présence de la tendance. De ce fait, nous définirons  $s_t$  de la façon suivante :

$$s_t = \overline{TS}_d (365 \times 1) \otimes \ell_{(Y \times 1)} \quad (237)$$

où

$$\overline{TS}_d = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y (T_{d,y} - m_{d,y}). \quad (238)$$

Par conséquent, nous appelons le modèle comportant cette modification le "modèle modifié de Cao et Wei".

### 3.1.3.2 Modèle de Roustant (2002)

Le modèle de Roustant (2002) est proche de celui de Cao et Wei (1998) et Cao et Wei (2004) à la différence qu'il comporte un écart-type qui est parfaitement lisse et une

composante cyclique  $s_t$  paramétrique. En outre, il attribue à la température une structure ARMA <sup>(36)</sup> plutôt qu'une forme purement AR. Il s'exprime en ces termes :

$$T_t = m_t + s_t + \sum_{j=1}^p \rho_j U_{t-j} - \sum_{l=1}^q \Theta_l \varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t \quad (239)$$

soit

$$[1-\rho(L)] (T_t - m_t - s_t) = [1-\Theta(L)] \varepsilon_t, \quad (240)$$

où

$$\rho(L) = \sum_{j=1}^p \rho_j L^j, \quad \Theta(L) = \sum_{l=1}^q \Theta_l L^l, \quad (37) \quad (241)$$

avec  $L^n y_t = y_{t-n}$ ,

$$U_t = T_t - m_t - s_t, \quad (242)$$

$$m_t = d t + e, \quad (243)$$

$$s_t = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t), \quad (244)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{365}, \quad (245)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t, \quad \tilde{\varepsilon}_t \sim \text{iid}(0,1) \quad (246)$$

et

$$\sigma_t = a + b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t). \quad (247)$$

---

<sup>(36)</sup> Un processus stationnaire  $y_t$  suit un ARMA(p,q) s'il vérifie la relation suivante :

$$y_t - \rho_1 y_{t-1} - \dots - \rho_p y_{t-p} = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \Theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \forall t$$

où les coefficients  $\rho_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) et  $\Theta_l$  ( $l=1, \dots, q$ ) sont des réels et  $\varepsilon_t \sim \text{bruit blanc}(0, \sigma^2)$ .

<sup>(37)</sup> Soit le processus ARMA(p,q) défini par  $\Phi(L)y_t = \varphi(L)\varepsilon_t$  où  $\Phi(L) = [1-\rho(L)]$  et  $\varphi(L) = [1-\Theta(L)]$ , il est stationnaire si le polynôme  $\Phi$  a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité (ce qui correspond à des coefficients  $\rho_j$  compris entre -1 et 1 pour  $j=1, \dots, p$ ) et il est inversible si toutes les racines du polynôme  $\varphi$  sont à l'extérieur du disque unité (ce qui correspond à des coefficients  $\Theta_l$  compris entre -1 et 1 pour  $l=1, \dots, q$ ).

On constate que, pour le modèle de Roustant (2002), la formulation de l'élément cyclique  $s_t$  est tronquée au rang 2 tandis que l'équation de la variance  $\sigma_t^2$  est limitée à l'ordre 1. Campbell et Diebold (2004) vont fournir une forme plus générale à ces deux composants.

### 3.1.3.3 Modèle de Campbell et Diebold (2004)

La spécification de Campbell et Diebold (2004) constitue une généralisation du modèle de Roustant (2002), même si elle ne considère pas une structure ARMA mais plutôt AR pour la température. Son originalité tient à l'expression proposée pour la volatilité. En effet, celle-ci mêle à la fois un effet GARCH<sup>(38)</sup> et une composante de saisonnalité. Le modèle de Campbell et Diebold (2004) apparaît sous la forme suivante :

$$T_t = m_t + s_t + \sum_{j=1}^p \rho_j T_{t-j} + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t, \quad (248)$$

$$m_t = \sum_{m=0}^M \beta_m t^m, \quad (249)$$

$$s_t = \sum_{k=1}^K \left[ \delta_{c,k} \cos\left(2\pi k \frac{d(t)}{365}\right) + \delta_{s,k} \sin\left(2\pi k \frac{d(t)}{365}\right) \right] \quad (250)$$

et <sup>(39)</sup>

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{\ell=1}^L \left[ \gamma_{c,\ell} \cos\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) + \gamma_{s,\ell} \sin\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) \right] + \sum_{r=1}^R \mu_r (\sigma_{t-r} \tilde{\varepsilon}_{t-r})^2 + \sum_{u=1}^U v_u \sigma_{t-u}^2 \quad (251)$$

où  $d(t)$  est une fonction cyclique qui prend successivement les valeurs 1, ..., 365 au fil des dates  $t$ . Il est possible d'utiliser, au lieu de  $d(t)$ , la variable temps  $t$  avec  $t=1,2,..n$  où  $n$

---

<sup>(38)</sup> Un processus GARCH(p,q) est défini par  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{l=1}^q \alpha_l \varepsilon_{t-l}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$  où  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_l \geq 0$  et  $\beta_j \geq 0 \quad \forall l, \forall j$ .

<sup>(39)</sup> Campbell et Diebold (2004) omettent la constante dans l'expression de la volatilité. Cette dernière peut alors être négative puisque la composante de saisonnalité passe par des phases positives et négatives. Afin d'éviter ce problème, nous lui ajoutons une constante.

représente le nombre d'observations. Les résultats seront similaires.

Contrairement à la spécification habituellement faite du processus GARCH, on ne postule pas ici de contraintes pour garantir la positivité de la volatilité car la structure

$$c + \sum_{\ell=1}^L \left[ \gamma_{c,\ell} \cos\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) + \gamma_{s,\ell} \sin\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) \right] \text{ assure la non négativité de } \sigma_t^2.$$

Nous observons que la formule (248) de la température moyenne journalière dépend de ses valeurs passées. Nous voulons la modifier afin de faire apparaître une structure AR définie en fonction des termes stationnaires  $(T_t - m_t - s_t)$  comme il est d'usage de la représenter.

Précisément, nous proposons l'écriture suivante du ARMA(p,0) (ou AR(p)) :

$$T_t = m_t + s_t + \sum_{j=1}^p \rho_j (T_{t-j} - m_{t-j} - s_{t-j}) + \sigma_t \tilde{\varepsilon}_t . \quad (252)$$

Nous désignons cette représentation par "modèle modifié de Campbell et Diebold".



### 3.1.3.4 Modèle de Caballero, Jewson et Brix (2002)

En appliquant un ensemble de tests de mémoire longue, Caballero, Jewson et Brix (2002) ont constaté la présence d'un phénomène de persistance dans trois séries de températures (centre du Royaume-Uni, Chicago et Los Angeles). Afin de modéliser le phénomène observé, Caballero, Jewson et Brix (2002) utilisent un processus ARFIMA(1,d,1). Les processus ARFIMA ont été créés par Granger et Joyeux (1980) et par Hosking (1981) afin de prendre en compte l'effet durable mais non permanent d'un choc sur une série en permettant au paramètre de différenciation de prendre des valeurs non entières<sup>(40)</sup>. Formellement, ces processus répondent à la définition suivante.

**Processus ARFIMA.** Un processus stationnaire  $y_t$  suit un processus ARFIMA(p,d,q) s'il vérifie la relation suivante<sup>(41)</sup> :

$$[1-\rho(L)] (1-L)^d y_t = [1+\Theta(L)] \varepsilon_t \quad \forall t \quad (253)$$

où  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ , d est un paramètre de différenciation fractionnaire à valeurs réelles<sup>(42)</sup>, L désigne l'opérateur de retard,

<sup>(40)</sup> Le caractère durable d'un choc ne pouvait être considéré à travers les modèles classiques ARIMA et ARMA. De manière générale, un processus  $X_t$  non stationnaire (à non stationnarité stochastique) suit un ARIMA(p,d,q) s'il vérifie la relation suivante :

$$[1-\rho(L)] (1-L)^d X_t = [1-\Theta(L)] \varepsilon_t \quad \forall t$$

où d est un entier positif, les coefficients  $\rho_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) et  $\Theta_l$  ( $l=1, \dots, q$ ) sont des réels et  $\varepsilon_t \sim$  bruit blanc  $(0, \sigma^2)$ .

Dans le cas du processus ARIMA(0,1,0) définit par :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

le paramètre de différenciation vaut 1 car il suffit généralement d'une seule différenciation pour rendre la série  $(X_t - X_{t-1})$  stationnaire. On constate que pour ces processus, un choc sur la série aura des répercussions permanentes sur ses valeurs futures. Tandis que pour les processus ARMA qui sont des représentations de séries stationnaires dont le paramètre de différenciation est égal à zéro, les conséquences d'un choc sur la série seront temporaires. En permettant au paramètre de différenciation de prendre des valeurs non entières, les processus ARFIMA constituent ainsi des modèles intermédiaires entre ces deux spécifications.

<sup>(41)</sup> Le processus ARFIMA est présenté sous cette forme dans Brockwell et Davis (1991). Néanmoins, il peut également s'écrire comme suit :  $[1-\rho(L)] (1-L)^d y_t = [1-\Theta(L)] \varepsilon_t \quad \forall t$ .

<sup>(42)</sup> Pour d entier, le processus ARFIMA(p,d,q) équivaut à un processus ARIMA(p,d,q) tandis que pour  $d = 0$ , le processus ARFIMA(p,0,q) devient un processus ARMA(p,q).

$$(1-L)^d = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!} L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} L^3 - \dots = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi_{\ell} L^{\ell}, \quad (254)$$

$$\pi_{\ell} = \frac{\Gamma(\ell-d)}{\Gamma(\ell+1)\Gamma(-d)} = \prod_{0 < k \leq \ell} \binom{k-1-d}{k}, \quad \ell = 0, 1, \dots, \quad (255)$$

$\Gamma$  est la fonction gamma,

$$\rho(L) = \sum_{j=1}^p \rho_j L^j \quad \text{et} \quad \Theta(L) = \sum_{l=1}^q \Theta_l L^l. \quad (256)$$

La caractérisation de la persistance est ici effectuée à l'aide du paramètre de différenciation fractionnaire  $d$ . Pour  $0 < d < \frac{1}{2}$  le processus  $X_t$  a une mémoire longue, pour  $-\frac{1}{2} < d < 0$  il est anti-persistant, pour  $d=0$  il possède une mémoire courte et pour  $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$  il est stationnaire. Cette classification est fondée sur la relation suivante<sup>(43)</sup> :

$$d = H - \frac{1}{2}. \quad (257)$$

Nous allons maintenant estimer les coefficients des modèles que nous venons de présenter.

---

<sup>(43)</sup> Cette relation s'établit en rapprochant les fonctions d'autocovariance du processus ARFIMA(0,d,0) et du bruit gaussien fractionnaire. La fonction d'autocovariance du processus ARFIMA(0,d,0) est donnée par

$$\rho_H(k) = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)} \quad \text{pour } -\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2} \text{ et } \varepsilon_t \text{ de variance unitaire}$$

avec

$$\rho_H(k) \approx \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} k^{2d-1} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

On a vu que la fonction d'autocovariance du bruit gaussien fractionnaire s'écrivait

$$\rho_H(k) \approx h^{2H} H(2H-1)k^{2H-2} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

D'où

$$2d-1 = 2H-2 \quad \Leftrightarrow \quad d = H - \frac{1}{2}.$$

## **3.2 APPLICATION SUR LES SERIES DE TEMPERATURES**

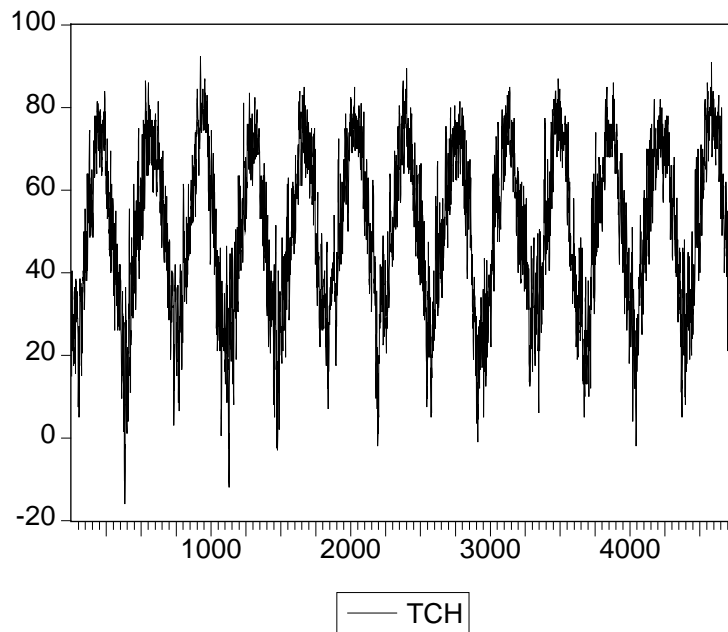
L'estimation des paramètres des processus nécessitant la stationnarité des séries, nous mettons en application au cours de la première partie les tests de non stationnarité de Phillips-Perron (1988) et de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (1992). Ils mettront en évidence une non stationnarité de type déterministe qui sera corrigée en retranchant aux séries brutes des températures les composants assujettis au temps. Le comportement des chroniques ainsi défaites de leur tendance et saisonnalité fera ensuite l'objet d'une modélisation par les processus en temps continu au cours de la seconde partie. Nous estimerons les paramètres des processus de retour à la moyenne standard, à sauts et fractionnaire en vue de retenir le "meilleur" modèle sur la base des critères d'information. Le modèle choisi sera utilisé pour le calcul des prix à l'aide de la méthode en l'absence d'arbitrage lors du chapitre 4. Au cours de la troisième partie, nous modéliserons la dynamique des températures au moyen des processus en temps discret. Nous estimerons les coefficients des processus proposés par Cao et Wei (1998), Roustant (2002) et Campbell et Diebold (2004). Nous choisirons la spécification adéquate par le biais des mêmes critères que ceux utilisés pour la sélection du processus en temps continu. Le modèle retenu sera destiné au calcul des prix par les méthodes actuarielle et fondée sur la consommation.

### **3.2.1 Etude de la stationnarité**

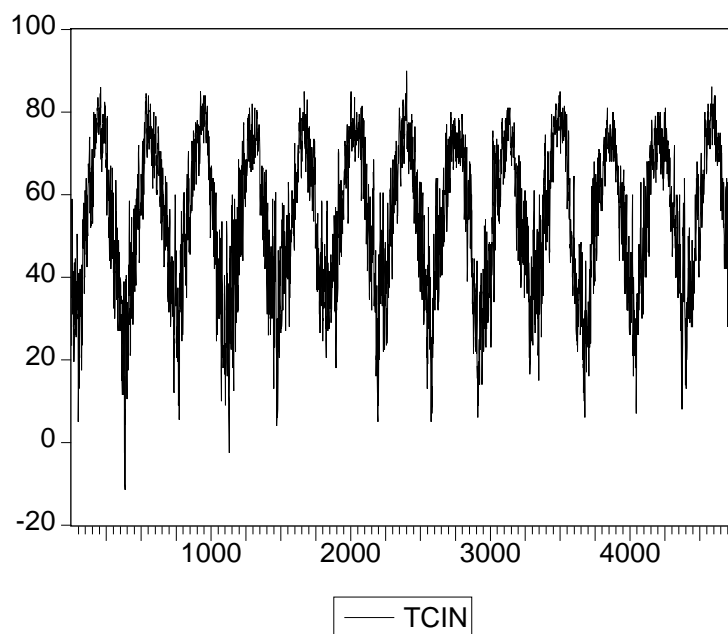
L'étude porte sur les séries de la température moyenne journalière des villes de Chicago (TCH), de Cincinnati (TCIN) et de New York (TNY) qui sont disponibles sur le site du CME. Elles couvrent la période du 01/01/1993 au 31/12/2005 et comportent chacune un total de 4745 observations (les 29 février ayant été retirés afin d'obtenir un même nombre de jours pour chacune des années). Nous représentons leur comportement sur les figures 16, 17 et 18.

### 3.2.1.1 Graphiques et statistiques descriptives des séries de températures

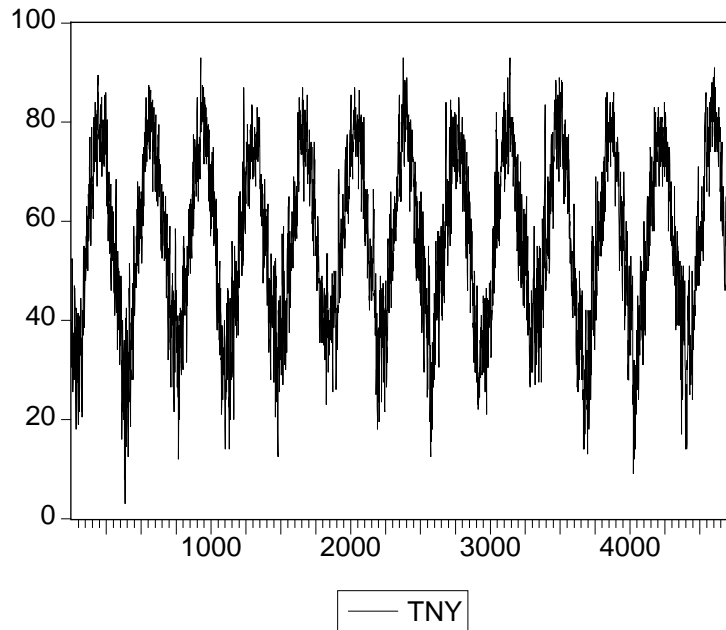
**Figure 16 :** Température moyenne journalière (en degrés Fahrenheit) de l'aéroport international O'Hare de Chicago (01/01/1993 – 31/12/2005)  
Source : CME



**Figure 17 :** Température moyenne journalière (en degrés Fahrenheit) de l'aéroport Northern Kentucky de Cincinnati (01/01/1993 – 31/12/2005)  
Source : CME



**Figure 18 :** Température moyenne journalière (en degrés Fahrenheit)  
de l'aéroport Laguardia de New York (01/01/1993 – 31/12/2005)  
Source : CME



Au regard des figures 16, 17 et 18, la température moyenne journalière manifeste un fort mouvement cyclique. Afin d'analyser le caractère non stationnaire<sup>(44)</sup> des séries, nous leur appliquons les tests de Phillips-Perron (1988) et de Kwiatkowski et al. (1992). La description de ces tests est fournie en annexe. Examinons tout d'abord le caractère non stationnaire de la série de températures de Chicago.

<sup>(44)</sup> Une série  $\{X_t\}$  est dite non stationnaire si elle ne vérifie pas au moins une de ces conditions :

$$E(X_t) = \mu \quad \forall t ;$$

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_x^2 < \infty \quad \forall t ;$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \gamma_k .$$

Il existe deux formes de non stationnarité : la non stationnarité déterministe caractérisée par les processus dits TS (Trend Stationary) et la non stationnarité stochastique représentée par les processus appelés DS (Differency Stationary). Le processus TS s'écrit de la façon suivante :  $X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$  où  $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$  tandis que le processus DS a pour forme :  $X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$ .

### 3.2.1.2 Application des tests de stationnarité à la série TCH

Nous commençons par effectuer le test de Phillips-Perron qui est le plus utilisé en raison de sa simplicité de mise en œuvre.

#### *Test de Phillips-Perron*

Le test de Phillips-Perron nécessite la détermination du paramètre de troncature  $b$  qui est donné par  $b \approx 4 \left( \frac{n}{100} \right)^{2/9}$ . Nous obtenons  $b = 9$  pour un nombre d'observations  $n$  égal à 4745. Les résultats de l'estimation du modèle avec constante et tendance du test de Phillips-Perron sont les suivants :

**Tableau 4 :** Estimation des coefficients du modèle avec constante et tendance du test de Phillips-Perron pour un paramètre de troncature  $b$  égal à 9

PP Test Statistic	-9.118697	1% Critical Value*	-3.9656	
		5% Critical Value	-3.4135	
		10% Critical Value	-3.1284	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Lag truncation for Bartlett kernel: 9	(Newey-West suggests: 9)			
Residual variance with no correction	40.19610			
Residual variance with correction	23.99170			
Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(TCH)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 4745				
Included observations: 4744 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TCH(-1)	-0.054611	0.004724	-11.56059	0.0000
C	2.670267	0.292974	9.114348	0.0000
@TREND(1)	3.63E-05	6.74E-05	0.538282	0.5904
R-squared	0.027425	Mean dependent var	0.004216	
Adjusted R-squared	0.027015	S.D. dependent var	6.429484	
S.E. of regression	6.342045	Akaike info criterion	6.532912	
Sum squared resid	190690.3	Schwarz criterion	6.537000	
Log likelihood	-15493.07	F-statistic	66.84393	
Durbin-Watson stat	1.918664	Prob(F-statistic)	0.000000	

Nous constatons que la série TCH ne présente pas une non stationnarité de type stochastique puisque la statistique de Phillips-Perron vaut -9.12. Cette dernière est inférieure à la valeur critique de -3.41 à 5%. On notera que la règle de décision est inversée dans le cas du test de

Phillips-Perron, c'est à dire que la valeur inférieure de la statistique de test par rapport au niveau critique donné n'implique pas l'acceptation de l'hypothèse nulle (l'hypothèse nulle étant ici la non stationnarité de type stochastique). La série semble également ne manifester aucune tendance à la hausse puisque son ratio de Student est au-dessous de  $|1.96|$  au seuil de 5%. Nous pouvons utiliser ici la valeur critique de la loi normale centrée et réduite étant donné que l'hypothèse nulle du test de Phillips-Perron est rejetée. Le résultat de l'estimation du coefficient de la tendance en dehors du test de Philips-Perron que nous avons reporté dans le tableau 5 montre cependant le contraire.

**Tableau 5** : Régression de la variable TCH sur la tendance t et la constante c

	<b>Estimation</b>	<b>t-Student</b>
<b>t</b>	0.0009	4.39
<b>c</b>	48.2377	85.21

La significativité de la tendance n'est pas apparente dans le cadre du test de Phillips-Perron car ce dernier semble être biaisé en présence de la composante cyclique. Pour vérifier cette hypothèse, nous retranchons la partie saisonnière à la série brute après avoir estimé ses paramètres. Comme nous avons pu le constater au cours de la présentation des processus en temps continu et en temps discret, il existe plusieurs façons pour modéliser les oscillations de la température moyenne journalière. On peut adopter soit une forme paramétrique (modèles d'Alaton, Djehiche et Stillberger (2002), de Roustant (2002) et de Campbell et Diebold (2004)), soit une forme non paramétrique (modèle de Cao et Wei (1998)). Pour la

spécification  $s_t = \sum_{k=1}^K \left[ \delta_{c,k} \cos\left(2\pi k \frac{d(t)}{365}\right) + \delta_{s,k} \sin\left(2\pi k \frac{d(t)}{365}\right) \right]$  suggérée par Campbell et

Diebold (2004), nous choisirons l'ordre K qui minimisera les mesures d'information d'Akaike

(1973) (noté AIC) et de Schwarz (1978) (SIC) <sup>(45)</sup>. Nous trouvons K=3 pour les températures de Chicago et de New York et K=2 pour celle de Cincinnati. Nous notons au passage que le modèle avec K=1 utilisé par Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) n'apparaît pas adéquat dans le cas de nos données. Le modèle avec K=2 proposé par Roustant (2002) n'est, quant à lui, satisfaisant que pour la température de Cincinnati. En enlevant l'élément  $s_t$  de la série brute et en appliquant le test de Phillips-Perron à la chronique désaisonnalisée, nous obtenons les résultats suivants selon la formulation choisie pour  $s_t$ .

**Tableau 6 :** Estimation des coefficients du modèle avec constante et tendance du test de Phillips-Perron pour la série désaisonnalisée TCHNPCAO à l'aide du modèle de Cao et Wei (1998) et pour un paramètre de troncature b égal à 9.

PP Test Statistic	-26.68826	1% Critical Value*	-3.9656	
		5% Critical Value	-3.4135	
		10% Critical Value	-3.1284	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Lag truncation for Bartlett kernel: 9	(Newey-West suggests: 9)			
Residual variance with no correction	32.54393			
Residual variance with correction	30.32502			
Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(TCHNPCAO)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 4745				
Included observations: 4744 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TCHNPCAO(-1)	-0.272803	0.009966	-27.37362	0.0000
C	13.33469	0.514278	25.92895	0.0000
@TREND(1)	0.000175	6.08E-05	2.880606	0.0040
R-squared	0.136480	Mean dependent var		0.004115
Adjusted R-squared	0.136115	S.D. dependent var		6.139662
S.E. of regression	5.706534	Akaike info criterion		6.321733
Sum squared resid	154388.4	Schwarz criterion		6.325821
Log likelihood	-14992.15	F-statistic		374.6580
Durbin-Watson stat	1.746466	Prob(F-statistic)		0.000000

<sup>(45)</sup> Les critères d'information d'Akaike et de Schwarz d'un modèle comportant k paramètres sont définis respectivement par :

$$AIC = -2 \left( \frac{LL}{n} \right) + \frac{2k}{n} \text{ et } SIC = -2 \left( \frac{LL}{n} \right) + k \frac{\ln(n)}{n}$$

où n représente le nombre d'observations et LL correspond à la valeur de la log-vraisemblance à l'optimum. Plus ces critères sont faibles et plus le modèle est proche des observations.



**Tableau 7 :** Estimation des coefficients du modèle avec constante et tendance du test de Phillips-Perron pour la série désaisonnalisée TCHNPCAMPB à l'aide du modèle de Campbell et Diebold (2004) et pour un paramètre de troncature  $b$  égal à 9.

PP Test Statistic	-26.95478	1% Critical Value*	-3.9656	
		5% Critical Value	-3.4135	
		10% Critical Value	-3.1284	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Lag truncation for Bartlett kernel: 9	( Newey-West suggests: 9 )			
Residual variance with no correction	35.50263			
Residual variance with correction	32.97224			
Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(TCHNPCAMPB)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 4745				
Included observations: 4744 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TCHNPCAMPB(-1)	-0.278152	0.010051	-27.67507	0.0000
C	13.59794	0.520790	26.11022	0.0000
@TREND(1)	0.000178	6.35E-05	2.800331	0.0051
R-squared	0.139082	Mean dependent var	0.004178	
Adjusted R-squared	0.138718	S.D. dependent var	6.422366	
S.E. of regression	5.960293	Akaike info criterion	6.408749	
Sum squared resid	168424.5	Schwarz criterion	6.412837	
Log likelihood	-15198.55	F-statistic	382.9548	
Durbin-Watson stat	1.745716	Prob(F-statistic)	0.000000	

La tendance apparaît significative dans les deux cas. Le  $t$  de Student est supérieur à  $|1.96|$ . La statistique de Phillips-Perron qui est égale à  $-26.68$  pour la série TCHNPCAO et  $-26.95$  pour la chronique TCHNPCAMPB demeure inférieure à  $-3.41$  au seuil de 5%. La série TCH se caractérise donc par une non stationnarité de type déterministe. Nous avons observé ici le manque de fiabilité du test de Phillips-Perron lorsque la composante cyclique n'a pas été éliminée au préalable de la série brute. Appliquons à présent le test de KPSS à la série TCH.

### ***Test de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (KPSS)***

Nous menons le test en utilisant le paramètre de troncature de Newey et West (1994). Les résultats sont reportés dans le tableau 8. Le choix du paramètre de troncature d'Andrews (1991) conduirait à des résultats similaires. On remarque que le  $t$ -Student du trend est ici supérieur à  $|1.96|$  à 5% alors qu'il était en deçà de cette valeur pour le test de Phillips-Perron appliqué à la série TCH. L'analyse de la statistique de test montre que la série de températures de Chicago manifeste bien une non stationnarité de type déterministe puisque sa valeur

(0.0174) est inférieure au seuil critique à 5% (0.1460). Il apparaît alors que le test de KPSS est plus robuste que le test de Phillips-Perron en présence d'un phénomène saisonnier. C'est pourquoi, nous n'appliquerons, dans la suite, que le test de KPSS aux séries de températures de Cincinnati (TCIN) et de New York (TNY).

**Tableau 8 :** Estimation des coefficients du modèle avec constante et tendance du test de KPSS avec le paramètre de troncature de Newey et West (1994)

Null Hypothesis: TCH is stationary				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Bandwidth: 53 (Newey-West using Bartlett kernel)				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				0.017426
Asymptotic critical values*:				
1% level				0.216000
5% level				0.146000
10% level				0.119000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				379.9178
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				15645.56
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: TCH				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1/01/1993 12/28/2005				
Included observations: 4745 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	48.23858	0.565952	85.23441	0.0000
@TREND	0.000907	0.000207	4.391425	0.0000
R-squared	0.004049	Mean dependent var		50.39083
Adjusted R-squared	0.003839	S.D. dependent var		19.53312
S.E. of regression	19.49559	Akaike info criterion		8.778675
Sum squared resid	1802710.	Schwarz criterion		8.781400
Log likelihood	-20825.41	F-statistic		19.28461
Durbin-Watson stat	0.108763	Prob(F-statistic)		0.000012

### 3.2.1.3 Application du test de KPSS à la série TCIN

**Tableau 9 :** Estimation des coefficients du modèle avec constante et tendance du test de KPSS avec le paramètre de troncature de Newey et West (1994)

Null Hypothesis: TCIN is stationary  
 Exogenous: Constant, Linear Trend  
 Bandwidth: 52 (Newey-West using Bartlett kernel)

	LM-Stat.			
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic	0.016197			
Asymptotic critical values*:				
	1% level			
	5% level			
	10% level			
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)	321.3655			
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	12674.85			
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: TCIN				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1/01/1993 12/28/2005				
Included observations: 4745 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	52.76643	0.520516	101.3732	0.0000
@TREND	0.000516	0.000190	2.713524	0.0067
R-squared	0.001550	Mean dependent var		53.98957
Adjusted R-squared	0.001340	S.D. dependent var		17.94247
S.E. of regression	17.93045	Akaike info criterion		8.611299
Sum squared resid	1524879.	Schwarz criterion		8.614024
Log likelihood	-20428.31	F-statistic		7.363211
Durbin-Watson stat	0.127315	Prob(F-statistic)		0.006681

La tendance est contributive à l'explication de la variable endogène puisque son ratio de Student est supérieur à  $|1.96|$  à 5%. La statistique de test de KPSS est au-dessous de la valeur critique de 0.1460 à 5%. La série TCIN exhibe alors une non stationnarité de type déterministe. Analysons maintenant la stationnarité de la série de températures de New York.

### 3.2.1.4 Application du test de KPSS à la série TNY

**Tableau 10 :** Estimation des coefficients du modèle avec constante et tendance du test de KPSS avec le paramètre de troncature de Newey et West (1994)

Null Hypothesis: TNY is stationary  
 Exogenous: Constant, Linear Trend  
 Bandwidth: 53 (Newey-West using Bartlett kernel)

	LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic	0.017714
Asymptotic critical values*:	
1% level	0.216000
5% level	0.146000
10% level	0.119000

\*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)

Residual variance (no correction)	299.3875
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	12777.79

KPSS Test Equation  
 Dependent Variable: TNY  
 Method: Least Squares  
 Sample(adjusted): 1/01/1993 12/28/2005  
 Included observations: 4745 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	55.13650	0.502402	109.7457	0.0000
@TREND	0.000344	0.000183	1.874045	0.0610

R-squared	0.000740	Mean dependent var	55.95184
Adjusted R-squared	0.000529	S.D. dependent var	17.31105
S.E. of regression	17.30647	Akaike info criterion	8.540459
Sum squared resid	1420594.	Schwarz criterion	8.543184
Log likelihood	-20260.24	F-statistic	3.512043
Durbin-Watson stat	0.107189	Prob(F-statistic)	0.060986

Dans le tableau 10, la tendance n'apparaît pas significative. On a alors estimé le modèle sans le trend avec uniquement la constante. Cette dernière se révèle significative dans le tableau 11. La valeur de la statistique de test est inférieure à 0.4630 à 5%. On conclut alors que la série de températures de New York ne présente ni une non stationnarité de type déterministe ni une non stationnarité de type stochastique.

**Tableau 11** : Estimation des coefficients du modèle avec constante et sans tendance du test de KPSS avec le paramètre de troncature de Newey et West (1994)

Null Hypothesis: TNY is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 53 (Newey-West using Bartlett kernel)				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				0.022884
Asymptotic critical values*:				
1% level				0.739000
5% level				0.463000
10% level				0.347000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				299.6092
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				12789.55
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: TNY				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 1/01/1993 12/28/2005				
Included observations: 4745 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	55.95184	0.251307	222.6431	0.0000
R-squared	0.000000	Mean dependent var		55.95184
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var		17.31105
S.E. of regression	17.31105	Akaike info criterion		8.540778
Sum squared resid	1421646.	Schwarz criterion		8.542140
Log likelihood	-20261.99	Durbin-Watson stat		0.107109

### 3.2.2 Estimation des paramètres des processus en temps continu

Nous allons à présent estimer globalement les coefficients des facteurs affectant l'évolution des séries de températures afin de les soustraire ensuite aux données brutes. Nous modéliserons la dynamique des chroniques désaisonnalisées et dépourvues de leur tendance au moyen successivement des processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard, à sauts et fractionnaire. Nous comparerons ensuite les résultats à l'aide des critères d'information.

#### 3.2.2.1 Estimation des coefficients de la tendance et de la saisonnalité

A la différence d'Alaton, Djehiche et Stillberger (2002), de Richards, Manfredo et Sanders (2004) et de Benth et Šaltytė-Benth (2005) qui tronquent arbitrairement la fonction circulaire à l'ordre 1, nous préférons spécifier la forme de la composante cyclique en nous basant sur nos observations. Les représentations ci-dessous fournissent les plus faibles valeurs pour les critères de l'Akaike et de Schwarz. Parmi les différents modèles possibles afin de représenter la tendance, nous pouvons constater que l'ajustement à l'aide de la droite a été

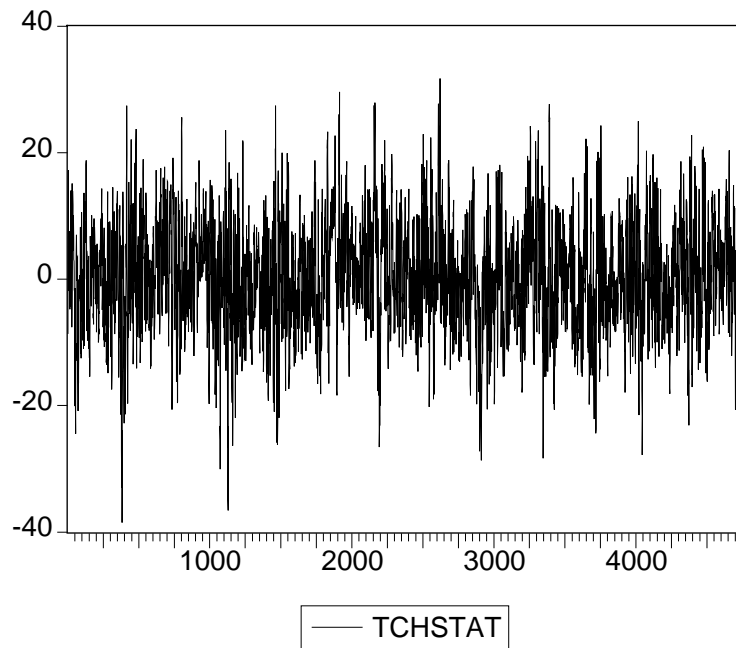
retenu. Seule la série de températures de New York ne comporte pas de tendance significative. Nous pouvons également observer que la troncature de la transformée de Fourier à l'ordre 1 n'a pas été validée pour nos trois chroniques.

**Tableau 12 :** Estimation des paramètres de la décomposition additive pour les températures de Chicago, de Cincinnati et de New York

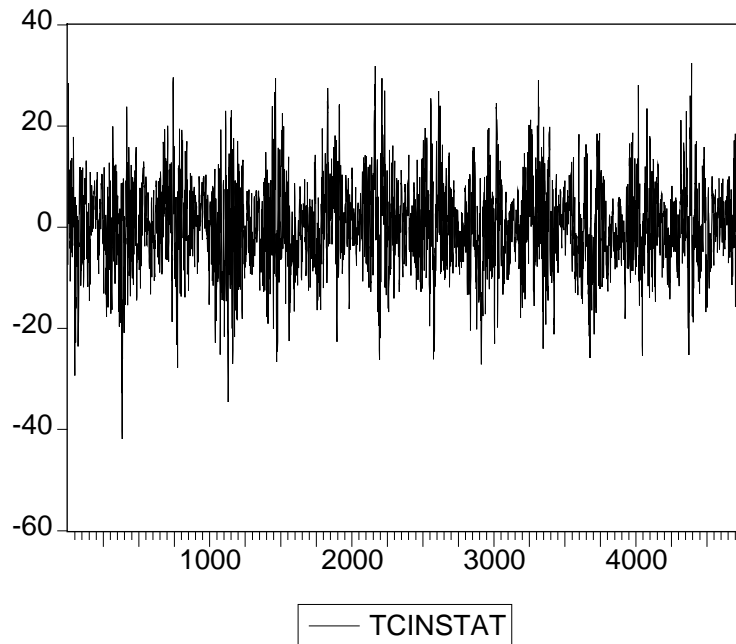
	TCH		TCIN		TNY	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
<b>c</b>	48.8597	194.90	53.2584	217.45	55.9518	548.60
<b>t</b>	0.0006	7.05	0.0003	3.45		
<b>Cos(<math>\omega t</math>)</b>	-23.1543	-130.88	-21.2204	-122.76	-20.3897	-141.36
<b>Sin(<math>\omega t</math>)</b>	-8.5353	-48.16	-7.0521	-40.72	-9.1605	-63.51
<b>Cos(<math>2\omega t</math>)</b>	-1.3106	-7.41	-1.0714	-6.20	-0.2237	-1.55
<b>Sin(<math>2\omega t</math>)</b>	0.2686	1.52	0.3158	1.83	0.1728	1.20
<b>Cos(<math>3\omega t</math>)</b>	-0.6098	-3.45			-0.0207	-0.14
<b>Sin(<math>3\omega t</math>)</b>	-0.8419	-4.76			-0.9561	-6.63
<b>LL</b>	-16948.30		-16839.54		-15979.96	
<b>AIC</b>	7.1470		7.1003		6.7384	
<b>SIC</b>	7.1579		7.1085		6.7480	

Nous enlevons maintenant à la série originelle la tendance et la composante cyclique estimées pour obtenir les séries que nous appelons TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT. Nous traçons leur évolution sur les figures 19, 20 et 21.

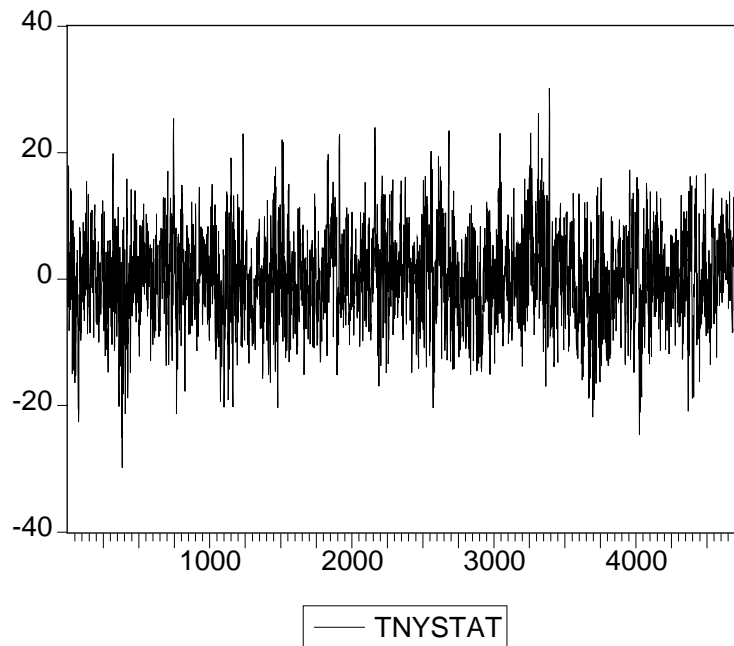
**Figure 19 :** Température moyenne journalière désaisonnalisée et corrigée de la tendance de Chicago (01/01/1993 – 31/12/2005)



**Figure 20 :** Température moyenne journalière désaisonnalisée et corrigée de la tendance de Cincinnati (01/01/1993 – 31/12/2005)



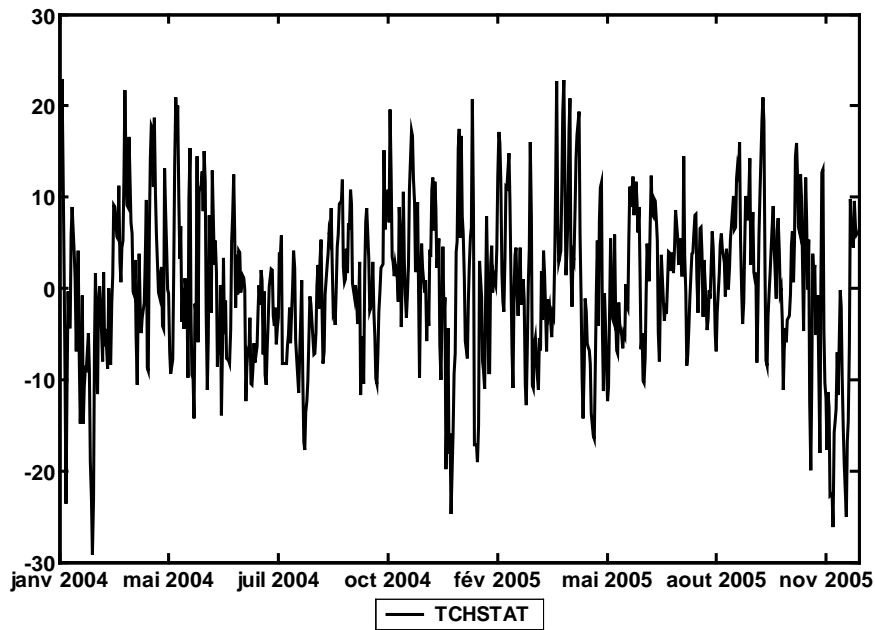
**Figure 21** : Température moyenne journalière désaisonnalisée et corrigée de la tendance de New York (01/01/1993 – 31/12/2005)



Au vu des figures 19, 20 et 21, les chroniques TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT semblent ne plus comporter de tendance ni de saisonnalité. Toutefois, elles n'apparaissent pas parfaitement linéaires, on peut distinguer une légère oscillation dans la dispersion des valeurs ce qui laisse augurer une modélisation périodique pour la volatilité. Par ailleurs, le tracé de la variable TCHSTAT entre 2004 et 2005 que nous avons reproduit sur la figure 22 ci-dessous rend compte d'une plus grande variabilité des valeurs en hiver qu'en été comme l'avait souligné Cao et Wei (1998) et Cao et Wei (2004).



**Figure 22 :** Température moyenne journalière désaisonnalisée et corrigée de la tendance de Chicago (01/01/2004 - 31/12/2005)



Les séries TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT sont stationnaires. Toutefois, leur variance n'est pas indépendante du temps étant donné la légère oscillation qui subsiste encore dans les données. De ce point de vue, ces chroniques ne sont pas stationnaires. Comme nous allons le voir, leur modélisation à partir de processus générés par un processus bruit blanc présente des résultats moins satisfaisants en termes de minimisation des critères d'information que ceux procurés par les modèles prenant en compte la volatilité non constante.

### 3.2.2.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On se propose d'estimer les paramètres du processus de retour à la moyenne suivant avec une volatilité supposée constante :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha_{OU}(T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_{OU} dW_t \quad (258)$$

qui a pour forme discrétisée :

$$(T_t - T_t^m) = (1 - \alpha_{OU})(T_{t-1} - T_{t-1}^m) + \varepsilon_t \quad (259)$$

où  $\alpha_{OU}$  et  $\sigma_{OU}$  désignent respectivement la vitesse de retour à la moyenne et la volatilité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Les valeurs estimées des coefficients de  $T_t^m$  sont données dans le tableau 12.

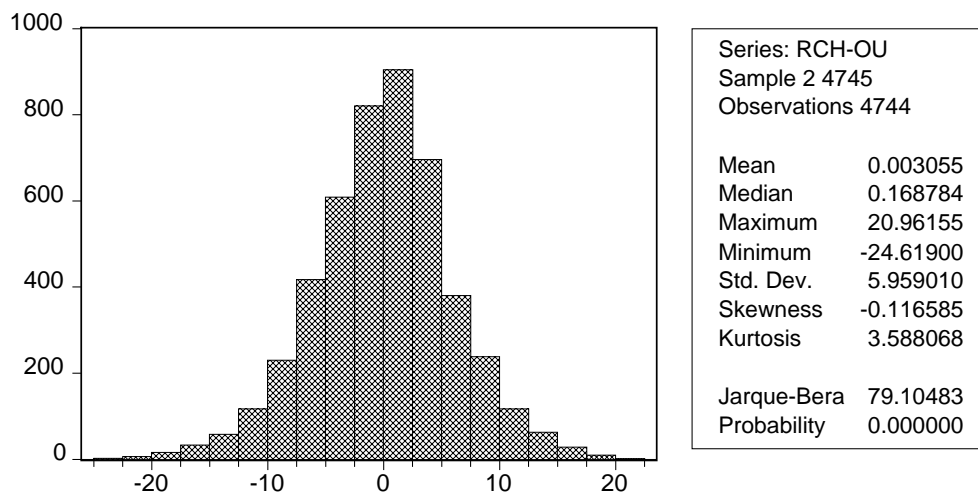
Nous avons réuni les résultats des estimations (par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires) pour toutes les villes dans le tableau 13.

**Tableau 13 :** Estimation de la vitesse de retour à la moyenne pour les séries de températures désaisonnalisées et dénuées de la tendance de Chicago (TCHSTAT), de Cincinnati (TCINSTAT) et de New York (TNYSTAT)

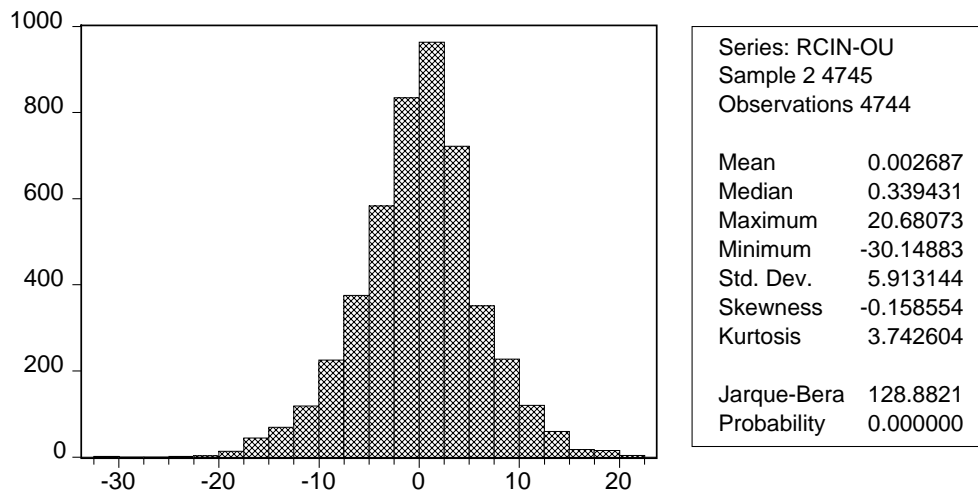
	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
<b>1-<math>\alpha_{OU}</math></b>	0.7218	71.83	0.7116	69.74	0.6752	63.04
<b><math>\alpha_{OU}</math></b>	0.2782		0.2884		0.3248	
<b><math>\hat{\sigma}_{OU}</math></b>	5.9590		5.9131		5.1794	
<b>LL</b>	-15198.53		-15161.88		-14533.34	
<b>AIC</b>	6.4079		6.3924		6.1275	
<b>SIC</b>	6.4093		6.3938		6.1288	

Les ratios de Student pour les trois séries sont tous supérieurs à  $|1.96|$  à 5% ce qui confirme la propriété de retour à la moyenne de la température moyenne journalière. L'examen des statistiques descriptives des résidus fournies sur les figures 23, 24 et 25 indique pour les trois séries un kurtosis (ou coefficient d'aplatissement) supérieur à 3 ce qui se traduit graphiquement par une distribution plus en forme de pic que celle de la loi normale dont le kurtosis est égal à 3 tandis que le skewness (ou coefficient de symétrie) de valeur négative laisse apparaître une queue de probabilité plus épaisse sur la gauche que celle de la loi de Gauss dont le skewness vaut zéro. Les résidus n'obéissent donc pas à la loi normale.

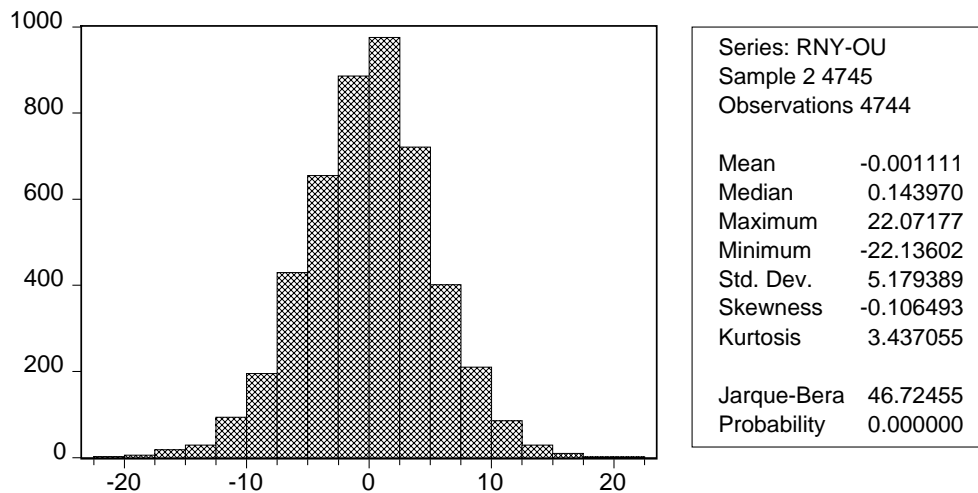
**Figure 23 :** Statistiques descriptives de la série des résidus RCH-OU issus de l'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour la température de Chicago



**Figure 24 :** Statistiques descriptives de la série des résidus RCIN-OU issus de l'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour la température de Cincinnati



**Figure 25 :** Statistiques descriptives de la série des résidus RNY-OU issus de l'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour la température de New York



Nous pouvons attribuer l'asymétrie de la distribution à l'hétéroscédasticité. Des oscillations avaient été observées au niveau de la dispersion des valeurs de TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT. Les résultats du test ARCH<sup>(46)</sup> appliqué aux séries des résidus du modèle de Chicago (RCH-OU), de Cincinnati (RCIN-OU) et de New York (RNY-OU) que nous présentons dans les tableaux 14, 15 et 16 confortent cette hypothèse. Le choix du nombre de retards  $p$  pour la mise en œuvre du test peut être déterminé au moyen de l'étude du corrélogramme des résidus carrés qui nous indique que les 5 premières autocorrélations partielles (graphique non reporté) sont significativement différentes de zéro pour RCH-OU et RCIN-OU et que seules les 2 premières le sont pour RNY-OU. Nous choisissons, par conséquent, un nombre de retards égal à 5 pour RCH-OU et RCIN-OU et de 2 pour RNY-OU.

<sup>(46)</sup> Le test ARCH consiste à effectuer une régression autorégressive des résidus carrés sur  $p$  retards :

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 .$$

Le coefficient de détermination (le  $R^2$ ) est ensuite utilisé pour calculer la statistique de test qui est définie par  $LM = n \times R^2$  où  $n$  désigne le nombre d'observations. Cette statistique suit un  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté sous l'hypothèse nulle d'homoscédasticité des erreurs.

**Tableau 14 :** Application du Test ARCH à la série des résidus carrés RCH-OU pour  $p = 5$

ARCH Test:				
F-statistic	23.75627	Probability	0.000000	
Obs*R-squared	116.0202	Probability	0.000000	
Test Equation:				
Dependent Variable: (RCH-OU) <sup>2</sup>				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 7 4745				
Included observations: 4739 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	24.82157	1.291656	19.21686	0.0000
(RCH-OU) <sup>2</sup> (-1)	0.042377	0.014496	2.923404	0.0035
(RCH-OU) <sup>2</sup> (-2)	0.075784	0.014497	5.227455	0.0000
(RCH-OU) <sup>2</sup> (-3)	0.067332	0.014506	4.641599	0.0000
(RCH-OU) <sup>2</sup> (-4)	0.040506	0.014477	2.798037	0.0052
(RCH-OU) <sup>2</sup> (-5)	0.073604	0.014475	5.084722	0.0000
R-squared	0.024482	Mean dependent var	35.45415	
Adjusted R-squared	0.023451	S.D. dependent var	57.06076	
S.E. of regression	56.38771	Akaike info criterion	10.90364	
Sum squared resid	15048923	Schwarz criterion	10.91183	
Log likelihood	-25830.19	F-statistic	23.75627	
Durbin-Watson stat	2.004924	Prob(F-statistic)	0.000000	

**Tableau 15 :** Application du Test ARCH à la série des résidus carrés RCIN-OU pour  $p = 5$

ARCH Test:				
F-statistic	80.47851	Probability	0.000000	
Obs*R-squared	371.3325	Probability	0.000000	
Test Equation:				
Dependent Variable: (RCIN-OU) <sup>2</sup>				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 7 4745				
Included observations: 4739 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	17.83374	1.170535	15.23555	0.0000
(RCIN-OU) <sup>2</sup> (-1)	0.087006	0.014465	6.015022	0.0000
(RCIN-OU) <sup>2</sup> (-2)	0.109747	0.014450	7.594826	0.0000
(RCIN-OU) <sup>2</sup> (-3)	0.097144	0.014450	6.722784	0.0000
(RCIN-OU) <sup>2</sup> (-4)	0.096095	0.014405	6.671193	0.0000
(RCIN-OU) <sup>2</sup> (-5)	0.097640	0.014413	6.774526	0.0000
R-squared	0.078357	Mean dependent var	34.85635	
Adjusted R-squared	0.077383	S.D. dependent var	57.70020	
S.E. of regression	55.42274	Akaike info criterion	10.86912	
Sum squared resid	14538265	Schwarz criterion	10.87731	
Log likelihood	-25748.39	F-statistic	80.47851	
Durbin-Watson stat	2.007500	Prob(F-statistic)	0.000000	

**Tableau 16 :** Application du Test ARCH à la série des résidus carrés RNY-OU pour  $p = 2$

ARCH Test:				
F-statistic	58.20523	Probability	0.000000	
Obs*R-squared	113.6914	Probability	0.000000	
Test Equation:				
Dependent Variable: (RNY-OU)^2				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 4 4745				
Included observations: 4742 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	21.25506	0.793235	26.79542	0.0000
(RNY-OU)^2(-1)	0.093323	0.014431	6.466858	0.0000
(RNY-OU)^2(-2)	0.114115	0.014431	7.907842	0.0000
R-squared	0.023975	Mean dependent var	26.81864	
Adjusted R-squared	0.023563	S.D. dependent var	41.88070	
S.E. of regression	41.38433	Akaike info criterion	10.28431	
Sum squared resid	8116311.	Schwarz criterion	10.28840	
Log likelihood	-24381.11	F-statistic	58.20523	
Durbin-Watson stat	1.996330	Prob(F-statistic)	0.000000	

On observe que les t-statistiques sont toutes au-dessus de  $|1.96|$  à 5% et que la probabilité d'obtenir la grandeur  $n \times R^2$  ("Obs\*R-squared") supérieure à sa valeur estimée est en-deçà des 5%. On rejette donc l'hypothèse nulle d'homoscédasticité. Il convient alors de chercher à modéliser la volatilité des séries en employant notamment les modèles de variance périodique proposés par Cao et Wei (1998), Roustant (2002), Campbell et Diebold (2004) et Benth et Šaltytė-Benth (2005). Nous avons d'abord vérifié que la spécification du processus d'Ornstein-Uhlenbeck était adéquate en menant un test d'autocorrélation sur les résidus. Nous avons utilisé à cette fin le test de Box-Pierce<sup>(47)</sup> qui permet de tester une autocorrélation d'ordre supérieur à 1. L'examen de la probabilité associée à la statistique Q (résultats non reportés) nous a révélé que pour l'ensemble des autocorrélations, nous rejetons l'hypothèse nulle d'un processus d'un processus de bruit blanc. Nous pouvons donc conclure que la modélisation de la température à l'aide du processus d'Ornstein-Uhlenbeck n'est pas satisfaisante. Comme nous l'avons fait remarqué, il correspond à un processus AR(1) en temps discret alors qu'une structure autorégressive d'un ordre supérieur à 1 permettrait d'éliminer l'autocorrélation des résidus et d'obtenir des bruits blancs. Nous faisons donc la

<sup>(47)</sup> Le test de Box-Pierce repose sur l'analyse de la statistique Q qui est définie par :

$$Q = n \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_k^2$$

où  $n$  est le nombre d'observations et  $\hat{\rho}_k$  fait référence à l'autocorrélation empirique d'ordre  $k$ . La statistique  $Q$  suit asymptotiquement la loi du  $\chi^2$  à  $h$  degrés de liberté.

même remarque que Roustant (2002) selon laquelle les processus en temps continu ne permettent pas de traduire correctement le comportement de la température moyenne journalière. Dans l’immédiat, tentons d’améliorer la modélisation en considérant l’estimation des coefficients des équations de la variance.

### 3.2.2.3 Processus d’Ornstein-Uhlenbeck avec une volatilité non constante

Nous estimons successivement les paramètres du processus d’Ornstein-Uhlenbeck avec une volatilité de type ARCH puis avec les modèles de variance périodique mis en avant par Cao et Wei (1998), Roustant (2002), Campbell et Diebold (2004) et Benth et Šaltytė-Benth (2005).

#### *Processus d’Ornstein-Uhlenbeck avec une volatilité de type ARCH*

Nous souhaitons estimer les coefficients du processus de retour à la moyenne de la forme suivante :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha_{OU} (T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_{OU,t} dW_t \quad (260)$$

où  $\sigma_{OU,t}^2$  correspond à un processus ARCH ou GARCH.

L’estimation des coefficients du processus s’effectuera à l’aide de la méthode du maximum de vraisemblance dont la description est donnée en annexe.

Afin de déterminer le modèle le mieux adapté pour représenter la volatilité de nos séries de températures, nous allons tout d’abord chercher à préciser les ordres p et q des représentations ARCH et GARCH. Pour ce faire, nous analysons les fonctions d’autocorrélation simple et partielle des résidus carrés (non reportées ici). Elles nous indiquent que la première autocorrélation simple et les 5 premières autocorrélations partielles sont significativement différentes de zéro pour les séries RCH-OU et RCIN-OU tandis que les 2 premières autocorrélations partielles sont significatives pour RNY-OU. Par conséquent, nous avons estimé les paramètres des spécifications ARCH(5), GARCH(5,1) et GARCH(1,1)

pour les températures de Chicago et de Cincinnati et ARCH(2), GARCH(2,1) et GARCH(1,1) pour celles de New York. La comparaison des critères AIC et SIC nous a amené à retenir le modèle GARCH(1,1) pour les trois villes dont les résultats de l'estimation figurent dans le tableau 17.

**Tableau 17** : Estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec une volatilité GARCH(1,1) pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York.

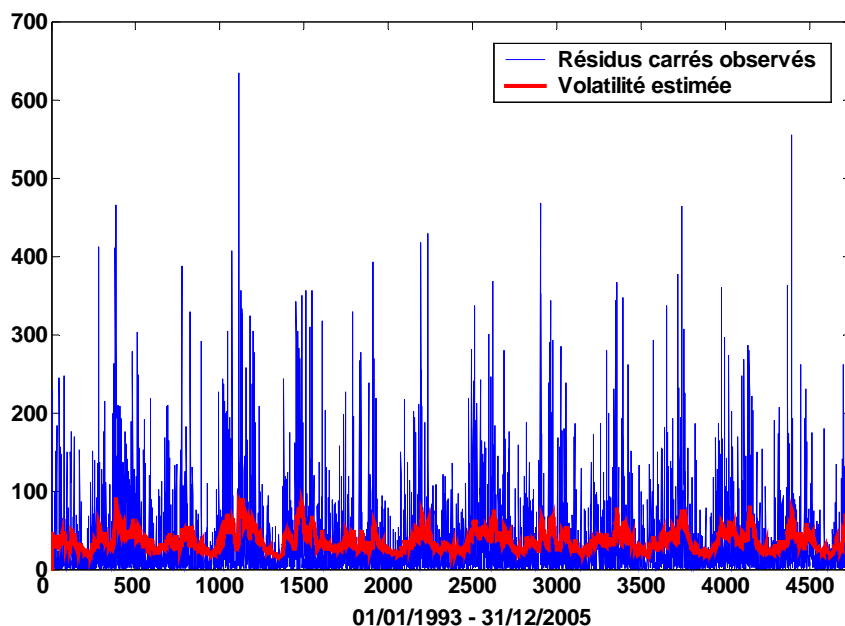
	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\alpha_{OU}$	0.2772	26.83	0.2838	27.92	0.3277	29.86
$\alpha_0$	0.7428	5.83	0.3359	5.49	0.7261	8.29
$\alpha_1$	0.0515	8.05	0.0772	11.37	0.0532	7.38
$\alpha_2$	0.9280	108.54	0.9147	130.28	0.9197	115.70
LL	-15074.13		-14772.35		-14422.59	
AIC	6.3567		6.2295		6.0820	
SIC	6.3622		6.2349		6.0875	

La représentation GARCH(1,1) est donnée par  $\sigma_{OU,t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{OU,t-1}^2$  avec  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$  et  $\alpha_2 \geq 0$ . LL désigne la valeur de la log-vraisemblance à l'optimum.

Nous constatons que les coefficients estimés sont tous positifs et significativement différents de zéro ce qui valide le choix du modèle GARCH(1,1) pour représenter la volatilité des températures. Nous avons reproduit conjointement sur la figure 26 le tracé des résidus carrés et celui de la volatilité estimée pour les températures de Chicago.



**Figure 26** : Résidus carrés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et volatilité estimée par le processus GARCH(1,1) pour la température de Chicago



On peut constater que le tracé de la volatilité supputée suit assez fidèlement celui de la volatilité observée. Son comportement n'est cependant pas oscillatoire alors que celui des résidus carrés apparaît clairement cyclique. Dans le but de considérer cette caractéristique, nous estimons les paramètres du modèle de variance périodique suggéré par Cao et Wei.

### *Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique de Cao et Wei*

Nous cherchons à estimer le processus d'Ornstein-Uhlenbeck qui est donné par l'équation (260) en intégrant le modèle de variance de Cao et Wei (1998) qui, rappelons le, est formulé de la sorte :

$$\sigma_{OU,t} = \sigma_0 - \sigma_1 \left| \sin\left(\frac{\pi t}{365} + \phi\right) \right|. \quad (261)$$

L'estimation du processus de retour à la moyenne incorporant cette formulation de la variance est également menée à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance.

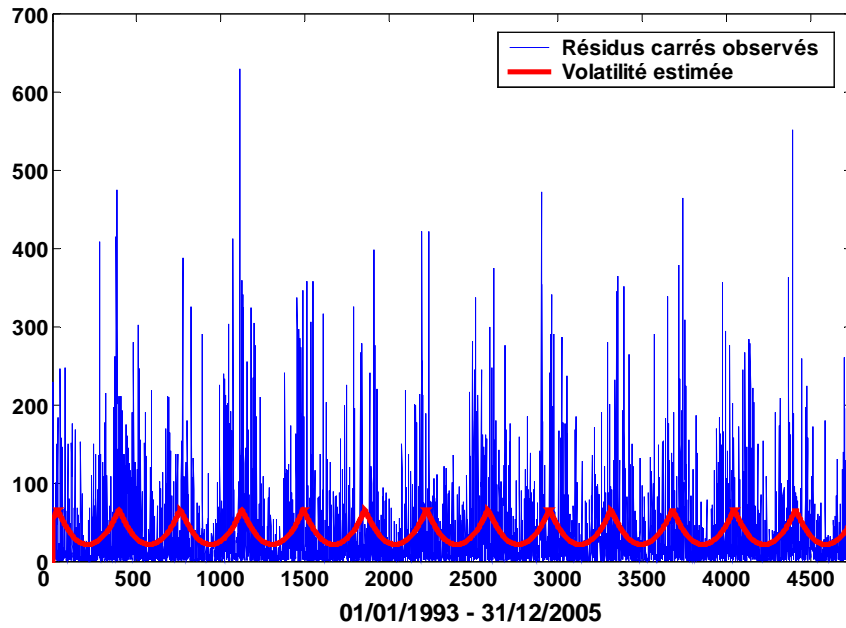
Au regard des résultats de l'estimation enregistrés dans le tableau 18, les coefficients de l'équation de la variance apparaissent tous significativement différents de zéro ce qui renforce l'idée d'une évolution cyclique dans le comportement des résidus carrés. En outre, les critères AIC et SIC ont baissé par rapport au précédent modèle.

**Tableau 18 :** Estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni de la représentation de la variance de Cao et Wei pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York.

	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\alpha_{OU}$	0.2870	31.19	0.2868	28.55	0.3315	32.62
$\sigma_0$	8.1231	45.97	9.7286	59.40	6.9749	47.76
$\sigma_1$	3.4956	15.22	6.2557	29.43	2.9175	15.50
$\theta$	-0.2547	-9.01	-3.3520	-223.08	-0.3018	-6.93
LL	-15073.58		-14763.52		-14406.00	
AIC	6.3565		6.2258		6.0750	
SIC	6.3619		6.2312		6.0805	

On peut voir sur la figure 27 que l'ajustement des résidus carrés par le modèle de variance de Cao et Wei est correct.

**Figure 27** : Résidus carrés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et volatilité estimée par le modèle de Cao et Wei pour la température de Chicago



Roustant (2002) a proposé un modèle de variance périodique légèrement différent de celui de Cao et Wei (1998). Afin de considérer la performance du modèle, nous procédons à l'estimation de ses coefficients.

***Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique de Roustant***

Comme nous l'avons précisé auparavant, le modèle de variance de Roustant (2002) se présente comme suit :

$$\sigma_{OU,t} = a + b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t) \tag{262}$$

où  $\omega = \frac{2\pi}{365}$ .

De la même façon que pour les précédents processus, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni du modèle de variance de Roustant.

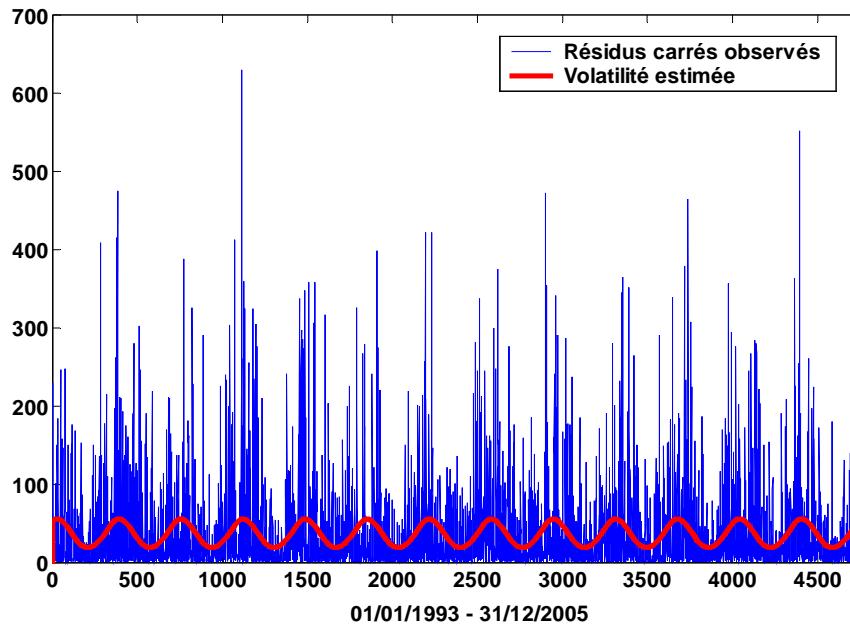
Les résultats de l'estimation reproduits dans le tableau 19 montrent que la formulation de Roustant est un bon candidat pour représenter la volatilité des séries de températures. Les t de Student sont en effet au-delà de  $|1.96|$  à 5% et les valeurs des critères d'information sont inférieures à celles du modèle de Cao et Wei.

**Tableau 19 :** Estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni de la représentation de la variance de Roustant pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York.

	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\alpha_{OU}$	0.2865	31.18	0.2838	28.31	0.3297	33.23
<b>a</b>	5.8783	101.04	5.6864	119.69	5.1073	97.53
<b>b</b>	1.3404	16.28	2.3147	28.73	0.9979	13.91
<b>c</b>	0.7594	9.91	1.0204	13.89	0.7286	10.28
<b>LL</b>	-15051.91		-14722.43		-14397.42	
<b>AIC</b>	6.3474		6.2084		6.0714	
<b>SIC</b>	6.3528		6.2139		6.0769	

Les résultats performants du modèle de Roustant proviennent, comme nous pouvons le voir sur la figure 28 de la forme plus lisse de la courbe de la volatilité estimée qui s'ajuste ainsi mieux aux contours des résidus carrés.

**Figure 28 :** Résidus carrés du processus d’Ornstein-Uhlenbeck et volatilité estimée par le modèle de Roustant pour la température de Chicago



Contrairement aux spécifications de Cao et Wei (1998) et de Roustant (2002), Campbell et Diebold (2004) ont incorporé un effet GARCH dans l’équation de la variance. Nous allons juger de l’apport d’une telle formulation en estimant les paramètres du modèle.

***Processus d’Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique de Campbell et Diebold***

Pour rappel, le modèle de la variance de Campbell et Diebold (2004) s’écrit :

$$\sigma_{OU,t}^2 = c + \sum_{\ell=1}^L \left[ \gamma_{c,\ell} \cos\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) + \gamma_{s,\ell} \sin\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) \right] + \sum_{r=1}^R \mu_r \varepsilon_{t-r}^2 + \sum_{u=1}^U v_u \sigma_{OU,t-u}^2 \quad (263)$$

où  $d(t)$  est une fonction cyclique qui prend successivement les valeurs  $1, \dots, 365$  au fil des dates  $t$ .

Les coefficients du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pourvu de ce modèle de variance sont estimés au moyen de la méthode du maximum de vraisemblance.

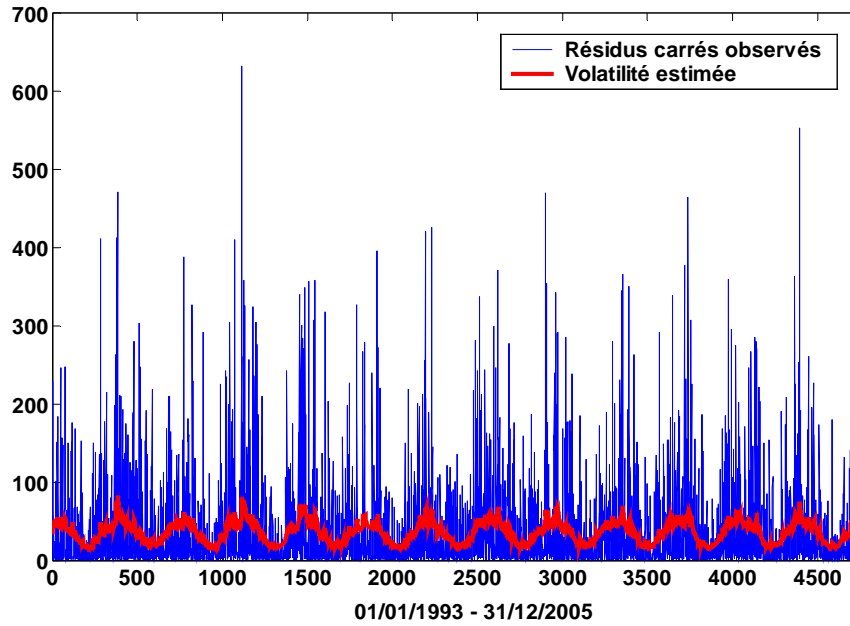
Nous avons besoin de préciser les ordres L, R et U de la spécification. Nous commençons par choisir R=1 et U=1 puisque nous avons pu nous rendre compte précédemment d'un effet GARCH(1,1). Nous déterminons l'ordre L en choisissant d'abord L=1 et en estimant les coefficients de la formulation. Nous estimons ensuite le modèle pour L=2 et nous comparons les critères d'information avec ceux trouvés pour L=1. Si nous constatons une baisse des valeurs pour L=2, nous poursuivons avec L=3. Dans le cas contraire, nous conservons L=1. Nous répétons ainsi de suite cette opération jusqu'à l'obtention des critères les plus bas. Pour les trois séries, nous trouvons que la combinaison permettant d'obtenir les critères les plus faibles est R=1, U=1 et L=1. Les ratios de Student des coefficients estimés que nous avons regroupé dans le tableau 20 sont au-dessus de |1.96| et les critères d'information sont ici inférieurs à ceux du modèle de Cao et Wei et de Roustant, ce qui nous informe que la dynamique des résidus carrés est gouvernée à la fois par un élément GARCH(1,1) et une composante cyclique.

**Tableau 20** : Estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni de la représentation de la variance de Campbell et Diebold pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York.

	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\alpha_{OU}$	0.2817	27.13	0.2821	27.34	0.3306	29.25
$c$	3.9197	55.44	5.3704	8.30	6.0347	6.04
$\gamma_{c,1}$	1.8129	12.74	3.7922	13.63	2.2796	2.52
$\gamma_{s,1}$	0.7154	0.71	1.2087	1.65	1.4179	1.42
$\mu_1$	0.0390	4.36	0.0592	3.48	0.0668	5.08
$v_1$	0.8510	81.23	0.7858	24.04	0.7075	2.90
<b>LL</b>	-15030.16		-14692.94		-14377.44	
<b>AIC</b>	6.3390		6.1969		6.0638	
<b>SIC</b>	6.3472		6.2050		6.0720	

La courbe de la volatilité estimée sur la figure 29 semble reproduire parfaitement le mouvement de la volatilité observée.

**Figure 29** : Résidus carrés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et volatilité estimée par le modèle de Campbell et Diebold pour la température de Chicago



Nous avons considéré jusqu'à présent la forme paramétrique de la volatilité. Nous avons vu que Benth et Šaltytė-Benth (2005) avaient supposé un processus périodique non paramétrique pour la variance. Pour apprécier la pertinence de cette spécification, nous allons estimer les coefficients du modèle.

***Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique non paramétrique de Benth et Šaltytė-Benth***

Nous avons montré que le modèle de Benth et Šaltytė-Benth (2005) était défini de la façon suivante<sup>(48)</sup> :

$$\hat{\sigma}_{OU,t}^2 = \eta \bar{\hat{\epsilon}}_d^2 (365 \times 1) \otimes \ell_{(Y \times 1)}, \quad (264)$$

où

$$\bar{\hat{\epsilon}}_d^2 = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y \hat{\epsilon}_{d,y}^2 \quad (265)$$

et

---

<sup>(48)</sup> Le coefficient  $\eta$  a été ajouté pour l'estimation afin de vérifier que l'on a bien  $\eta \approx 1$ .

$$\hat{\varepsilon}_{d,y} = T_{d,y} - T_{d,y}^m - (1 - \hat{\alpha}_{OU})(T_{d,y-1} - T_{d,y-1}^m) \quad (266)$$

où  $d = 1, \dots, 365$  représentait le jour de l'année  $y = 1, \dots, Y$ ,  $\ell$  était un vecteur  $Y \times 1$  composé de 1 et  $t = 1, \dots, n$  avec  $n = 365 \times Y$ .

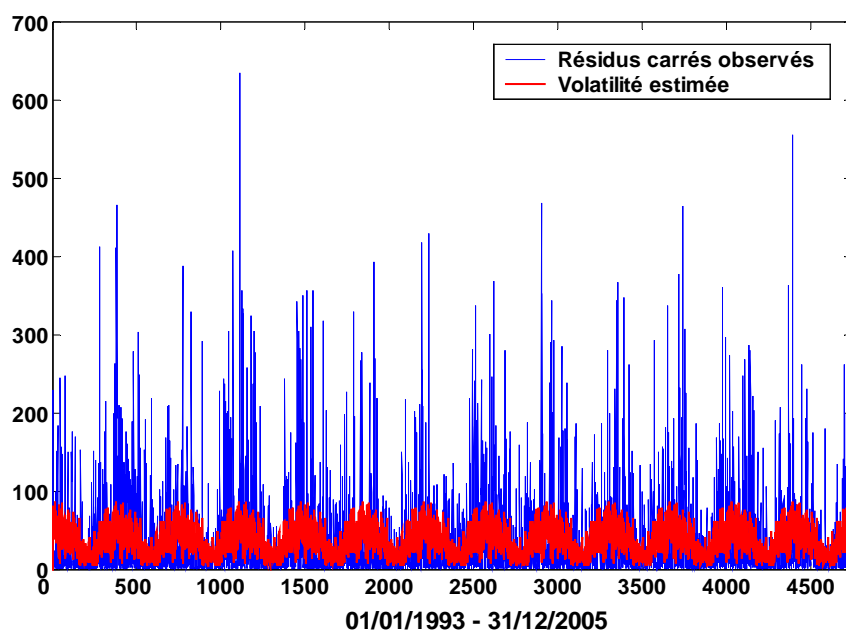
Nous constatons à travers les résultats de l'estimation, fournis dans le tableau 21, la significativité des coefficients estimés et surtout la baisse substantielle des valeurs de l'AIC et du SIC qui témoigne de la qualité de l'ajustement. La figure 30, qui reproduit conjointement les variations des résidus carrés et celles de la volatilité estimée, indique en effet que cette dernière explique l'essentiel du comportement des résidus carrés.

**Tableau 21** : Estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni de la représentation de la variance de Benth et Šaltytė-Benth pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York.

	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\alpha_{OU}$	0.2736	29.80	0.2698	29.20	0.3207	32.73
$\eta$	0.9999	51.53	0.9991	48.62	0.9999	48.63
LL	-14831.79		-14506.77		-14182.91	
AIC	6.2537		6.1167		5.9801	
SIC	6.2564		6.1194		5.9829	



**Figure 30** : Résidus carrés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et volatilité estimée par le modèle de Benth et Šaltytė-Benth pour la température de Chicago

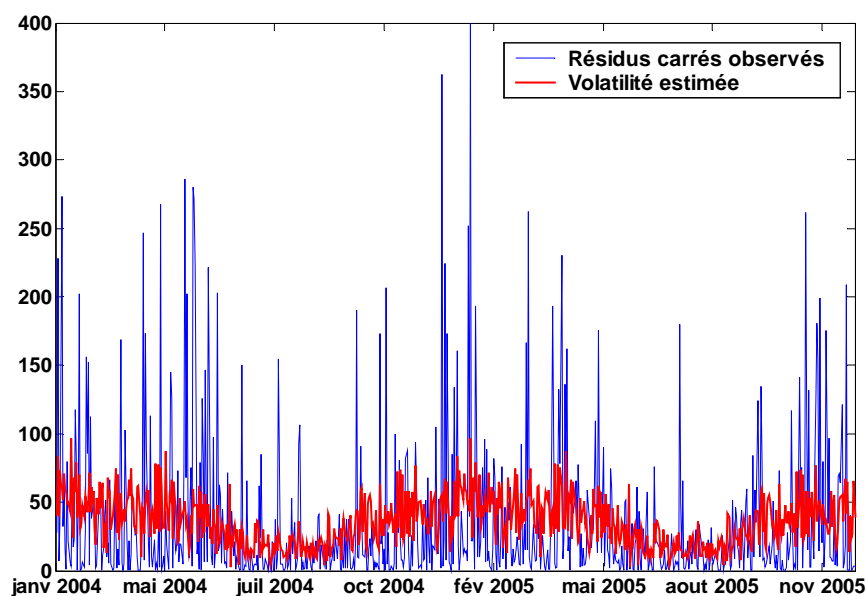


**Tableau 22** : Récapitulatif des critères de comparaison obtenus pour les modèles en temps continu

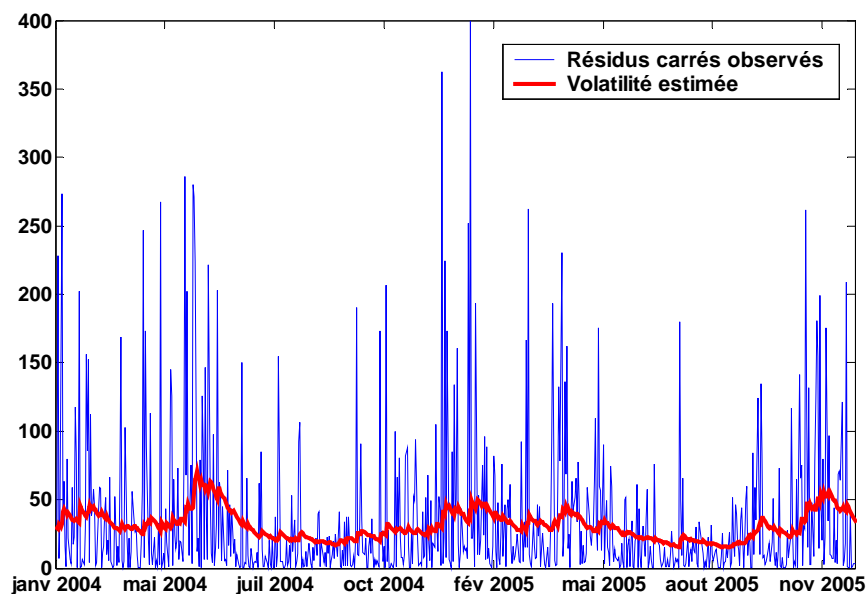
	Processus OU avec volatilité constante	Processus OU avec volatilité de type ARCH	Processus OU avec modèle de variance de Cao et Wei	Processus OU avec modèle de variance de Roustant	Processus OU avec modèle de variance de Campbell et Diebold	Processus OU avec modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth
<b>Série TCHSTAT</b>						
<b>LL</b>	-15198.53	-15074.13	-15073.58	-15051.91	-15030.16	<b>-14831.79</b>
<b>AIC</b>	6.4079	6.3567	6.3565	6.3474	6.3390	<b>6.2537</b>
<b>SIC</b>	6.4093	6.3622	6.3619	6.3528	6.3472	<b>6.2564</b>
<b>Série TCINSTAT</b>						
<b>LL</b>	-15161.88	-14772.35	-14763.52	-14722.43	-14692.94	<b>-14506.77</b>
<b>AIC</b>	6.3924	6.2295	6.2258	6.2084	6.1969	<b>6.1167</b>
<b>SIC</b>	6.3938	6.2349	6.2312	6.2139	6.2050	<b>6.1194</b>
<b>Série TNYSTAT</b>						
<b>LL</b>	-14533.34	-14422.59	-14406.00	-14397.42	-14377.44	<b>-14182.91</b>
<b>AIC</b>	6.1275	6.0820	6.0750	6.0714	6.0638	<b>5.9801</b>
<b>SIC</b>	6.1288	6.0875	6.0805	6.0769	6.0720	<b>5.9829</b>

D'après les résultats regroupés dans le tableau 22, on s'aperçoit sans surprise que les processus d'Ornstein-Uhlenbeck dotés d'une volatilité variable rendent mieux compte de la dynamique de la température moyenne journalière que le processus de retour à la moyenne avec une volatilité indépendante du temps. Leurs critères d'information étant les plus bas. Au sein des processus munis d'une volatilité variable, le processus GARCH(1,1) produit les résultats les moins bons en comparaison avec ceux des représentations de variance périodique. Toutefois, la prise en compte uniquement de la composante oscillatoire ne procure pas les meilleurs résultats comme nous le montre les valeurs plus élevées de l'AIC et du SIC des modèles de Cao et Wei et de Roustant par rapport aux spécifications de Campbell et Diebold et de Benth et Šaltytė-Benth. Au regard des figures 31 et 32, les modèles de Campbell et Diebold et de Benth et Šaltytė-Benth tiennent compte, en plus des oscillations, de la variabilité plus grande de la température en hiver qu'en été ce qui explique leur supériorité.

**Figure 31** : Résidus carrés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et volatilité estimée par le modèle de Benth et Šaltytė-Benth pour la température de Chicago (01/01/2004 – 31/12/2005)



**Figure 32 :** Résidus carrés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et volatilité estimée par le modèle de Campbell et Diebold pour la température de Chicago (01/01/2004 – 31/12/2005)



L'amplitude des variations engendrée par le modèle de Benth et Šaltytė-Benth étant plus grande et plus proche de celle des variations observées des résidus carrés, il affiche de ce fait les plus faibles critères d'information au regard du modèle de Campbell et Diebold et apparaît alors comme étant la meilleure représentation, parmi celles présentées ici, de la volatilité de la température moyenne journalière des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York.

Nous venons de voir dans cette section que la non normalité de la température pouvait provenir de la volatilité non constante des erreurs mais elle peut également s'expliquer par des discontinuités dans la moyenne de la température. Nous allons chercher à savoir à l'aide de l'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1), proposé par Richards, Manfredo et Sanders (2004), si ces discontinuités pourraient être contributives à l'explication du comportement de la température.

### 3.2.2.4 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1)

On se propose d'estimer les coefficients de la version modifiée du modèle de Richards, Manfredo et Sanders (2004) pour les raisons que nous avons évoqué auparavant. Elle avait pour représentation :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha_J (T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_{J,t} dW_t + U dq_t \quad (267)$$

où  $U \sim N(\mu_U, \sigma_U^2)$ ,  $\text{Prob}[dq_t=1] = \gamma dt$  et  $\sigma_{J,t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$  avec  $\varepsilon_t = \Delta T_t - E(\Delta T_t)$ ,  $\alpha_0 > 0$  et  $\alpha_1 \geq 0$ .

Richards, Manfredo et Sanders (2004) utilisent la méthode développée par Ball et Torous (1985) pour estimer leur processus à sauts comprenant une volatilité ARCH(1). Elle est fondée sur le principe de la maximisation de la fonction de vraisemblance. Compte tenu du fait que les processus à sauts comportent deux sources d'aléas, l'une liée au mouvement brownien standard et l'autre au processus de Poisson, leur densité de probabilité est un mélange de la loi normale et de la loi de Poisson. Soit le processus à sauts dont l'équation différentielle stochastique s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dW + J dq \quad (268)$$

où  $J \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ ,  $\text{Prob}[dq=1] = \gamma dt$ ,  $\frac{dS}{S} \approx \ln S_t - \ln S_{t-1} \equiv y_t$  pour une fréquence journalière des données, la fonction de densité de ce processus s'écrit de la manière suivante :

$$f(y_t) = \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma \Delta t} (\gamma \Delta t)^{n_s}}{n_s!} (2\pi (\sigma_S^2 \Delta t + n_s \sigma_J^2))^{-1/2} \exp \left[ \frac{-(y_t - \mu_S \Delta t - n_s \mu_J)^2}{2 (\sigma_S^2 \Delta t + n_s \sigma_J^2)} \right] \quad (269)$$

où  $n_s$  désigne le nombre de sauts survenus.

Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1), elle apparaît de la sorte :

$$f(\Delta T_t) = \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma \Delta t} (\gamma \Delta t)^{n_s}}{n_s!} (2\pi (\sigma_t^2 \Delta t + n_s \sigma_U^2))^{-1/2} \exp \left[ \frac{-\left( \Delta T_t - (\Delta T_t^m + \alpha (T_{t-1}^m - T_{t-1}) \Delta t) - n_s \mu_U \right)^2}{2 (\sigma_t^2 \Delta t + n_s \sigma_U^2)} \right] \quad (270)$$

avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0 \quad (271)$$

et

$$\varepsilon_t = \Delta T_t - E(\Delta T_t) = \Delta T_t - \left( \Delta T_t^m + \alpha (T_{t-1}^m - T_{t-1}) \Delta t + \mu_U \gamma \Delta t \right) \quad (272)$$

où  $\Delta t = 1$  et  $U \sim N(\mu_U, \sigma_U^2)$ .

L'estimation des coefficients est obtenue en maximisant la log-vraisemblance suivante :

$$LL(\Delta T_1, \dots, \Delta T_n; \theta) = \ln L(\Delta T_1, \dots, \Delta T_n; \theta) = \sum_{t=1}^n \ln f(\Delta T_t) \quad (273)$$

où  $n$  représente le nombre d'observations et  $\theta' = (\gamma \ \sigma_U^2 \ \mu_U \ \alpha \ \alpha_0 \ \alpha_1)$ .

En supposant que la température ne puisse subir qu'un seul saut par intervalle de temps  $\Delta t$ , la fonction de densité (270) peut alors se ramener à cette simple expression :

$$f(\Delta T_t) = \gamma \exp \left[ \frac{-\left( \Delta T_t - (\Delta T_t^m + \alpha (T_{t-1}^m - T_{t-1}) \Delta t + \mu_U) \right)^2}{2 (\sigma_t^2 \Delta t + \sigma_U^2)} \right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi (\sigma_t^2 \Delta t + \sigma_U^2)}} \quad (274)$$

$$+ (1 - \gamma) \exp \left[ \frac{-\left( \Delta T_t - (\Delta T_t^m + \alpha (T_{t-1}^m - T_{t-1}) \Delta t) \right)^2}{2 \sigma_t^2 \Delta t} \right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_t^2 \Delta t}}.$$

Nous avons regroupé les résultats de l'estimation pour toutes les villes dans le tableau 23.

**Tableau 23** : Estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1) pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York.

	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\alpha_J$	0.2766	26.08	0.2748	25.22	0.3339	28.96
$\mu_U$	-0.0395	-0.28	-0.0564	-0.49	-0.0631	-0.50
$\sigma_U$	5.6594	29.70	5.8128	42.10	4.3823	19.58
$\gamma$	0.5235	9.53	0.6557	11.09	0.5804	7.28
$\alpha_0$	15.5574	20.92	10.2178	5.16	12.0305	12.18
$\alpha_1$	0.0866	3.55	0.0916	4.73	0.1399	6.09
LL	-15140.27		-15137.51		-14481.90	
AIC	6.3854		6.3843		6.1079	
SIC	6.3936		6.3925		6.1161	

On remarque que les sauts n'affectent pas en moyenne le comportement de la température étant donnée la non significativité du paramètre  $\mu_U$ . Relativement aux résultats du tableau 24, le processus à sauts pourvu de la volatilité ARCH(1) présente, en générale, des critères de choix plus faibles que ceux des processus d'Ornstein-Uhlenbeck standards comportant une variance constante et une volatilité ARCH(1). La prise en considération des discontinuités dans le comportement de la température aide donc à améliorer la qualité de l'ajustement. Cependant, la probabilité estimée d'occurrence d'un saut au cours d'une journée est très élevée et significative ce qui soulève des interrogations sur la pertinence de cette modélisation pour la variable climatique. En effet, la fréquence est au-delà de 1/2 pour les trois séries. Richards, Manfredo et Sanders (2004) aboutissent également à une valeur estimée déraisonnablement grande pour  $\gamma$ , égale à 0.8.

**Tableau 24** : Comparaison des critères d'information

	<b>Processus OU avec volatilité constante</b>	<b>Processus OU avec volatilité ARCH(1)</b>	<b>Processus OU à sauts avec volatilité ARCH(1)</b>
	<b>Série TCHSTAT</b>		
<b>LL</b>	-15198.53	-15184.50	-15140.27
<b>AIC</b>	6.4079	6.4028	6.3854
<b>SIC</b>	6.4093	6.4069	6.3936
	<b>Série TCINSTAT</b>		
<b>LL</b>	-15161.88	-15089.23	-15137.51
<b>AIC</b>	6.3924	6.3627	6.3843
<b>SIC</b>	6.3938	6.3667	6.3925
	<b>Série TNYSTAT</b>		
<b>LL</b>	-14533.34	-14500.64	-14481.90
<b>AIC</b>	6.1275	6.1145	6.1079
<b>SIC</b>	6.1288	6.1186	6.1161

Par ailleurs, Brody, Syroka et Zervos (2002) et Caballero, Jewson et Brix (2002) ont mis en évidence une structure de dépendance de long terme dans le comportement de la température. Nous montrons dans la partie qui suit qu'elle est présente dans nos séries de températures. Nous la modélisons à l'aide du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire et nous cherchons ensuite à déterminer son apport en comparant les critères RMSE (Root Mean Squared Error) et MAE (Mean Absolute Error) du processus à mémoire longue et du processus de retour à la moyenne standard.

### 3.2.2.5 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire

Afin de déceler la mémoire de long terme dans nos données de températures, nous procédons au calcul de l'exposant de Hurst à travers l'analyse R/S et à celui du paramètre de différenciation fractionnaire au moyen de la méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983). L'analyse R/S et l'approche de Geweke et Porter-Hudak (1983) sont détaillées en annexe.

#### *Tests de mémoire longue*

Etant donné qu'une série non stationnaire se comporte de façon similaire à une série à mémoire longue, nous prenons le soin de travailler sur les chroniques TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT qui sont dépourvues de leur tendance et de leurs variations périodiques. Les résultats du calcul de l'exposant de Hurst et du paramètre fractionnaire sont réunis dans les tableaux 25 et 26.

**Tableau 25 :** Analyse R/S

	R/S	R/S modifiée	
<b>TCHSTAT</b>	H = 0.6475	H = 0.6465	V = 3.4565
<b>TCINSTAT</b>	H = 0.6223	H = 0.6232	V = 2.8373
<b>TNYSTAT</b>	H = 0.6547	H = 0.6551	V = 3.7154

**Tableau 26 :** Estimation du paramètre de différenciation fractionnaire par la méthode de Geweke et Porter-Hudak

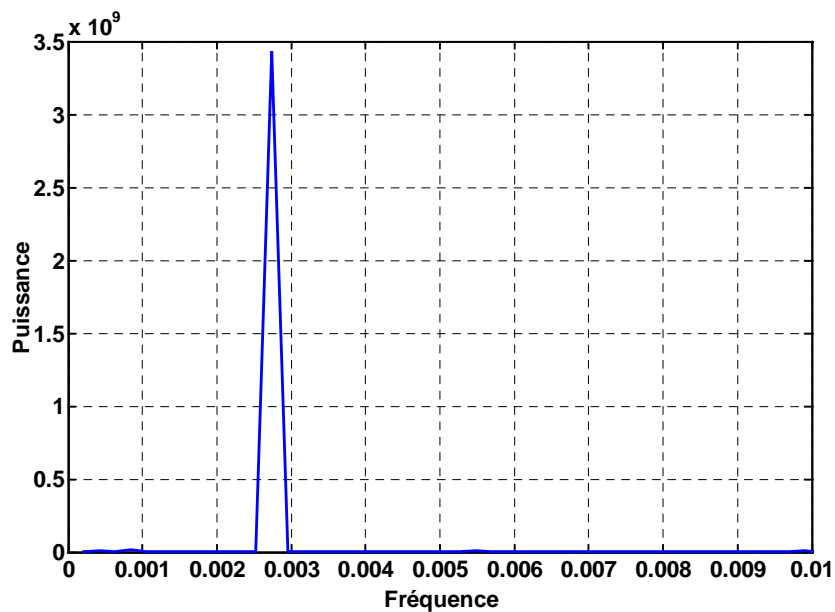
	$m = n^{0.45}$	$m = n^{0.5}$	$m = n^{0.55}$
<b>TCHSTAT</b>	$\hat{d} = 0.6537$ (25.34)	$\hat{d} = 0.0237$ (1.03)	$\hat{d} = -0.2075$ (-9.98)
<b>TCINSTAT</b>	$\hat{d} = 0.1793$ (6.95)	$\hat{d} = -0.0820$ (-3.57)	$\hat{d} = -0.1274$ (-6.13)
<b>TNYSTAT</b>	$\hat{d} = 0.5251$ (20.35)	$\hat{d} = 0.0976$ (4.25)	$\hat{d} = -0.0938$ (-4.51)

Le chiffre entre parenthèses désigne la valeur de la t-statistique et n représente le nombre d'observations.



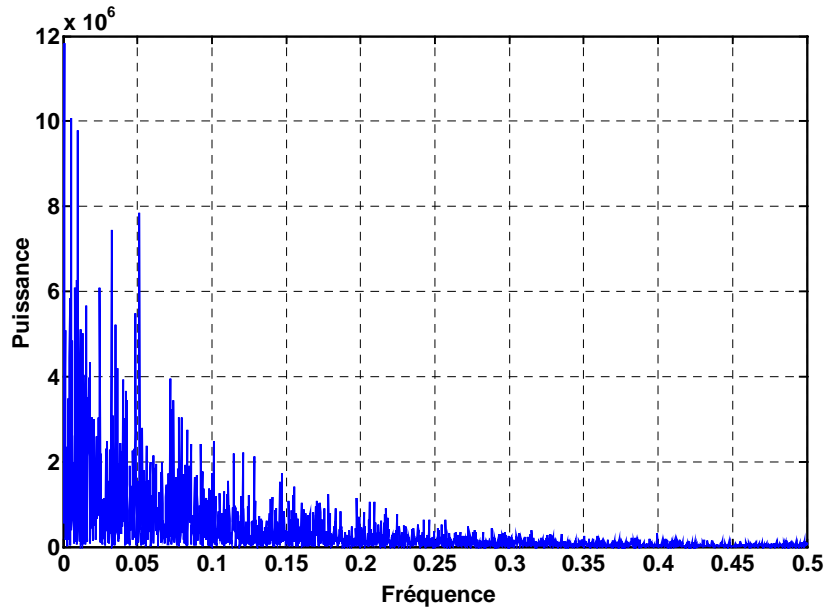
On constate que pour l'analyse R/S, les valeurs de l'exposant de Hurst sont toutes supérieures à 0.5 et que la statistique V est au-dessus du seuil critique de 1.747 à 5% ce qui semble indiquer l'existence de la mémoire longue dans les séries de températures. Au regard des paramètres fractionnaires estimés et de leur t de Student, ils attestent également la présence de la structure de dépendance de long terme. En effet, les valeurs du coefficient d sont comprises entre 0 et 1/2 et entre -1/2 et 0 et leur t de Student est supérieur à 1.96 pour  $m=n^{0.5}$  et  $m=n^{0.55}$ . On remarque que l'ordonnée  $m=n^{0.45}$  produit des valeurs très élevées pour d et la t-statistique. Nous pouvons nous demander si la présence de la mémoire longue n'est pas due aux faibles oscillations perçues dans le comportement de TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT. Afin de lever le doute, nous étudions les périodogrammes que nous avons reproduit sur les figures 33 et 34 de la série initiale des températures de Chicago (TCH) et de sa version corrigée de la tendance et des cycles (TCHSTAT).

**Figure 33** : Périodogramme de la série des températures moyennes journalières de Chicago (TCH)



$$\text{Puissance} = \left| \sum_{k=1}^n y_k e^{i k (2 \pi \tau_j)} \right|^2 \quad \text{où } \tau_j = \text{fréquence} = \frac{j}{n/2}$$

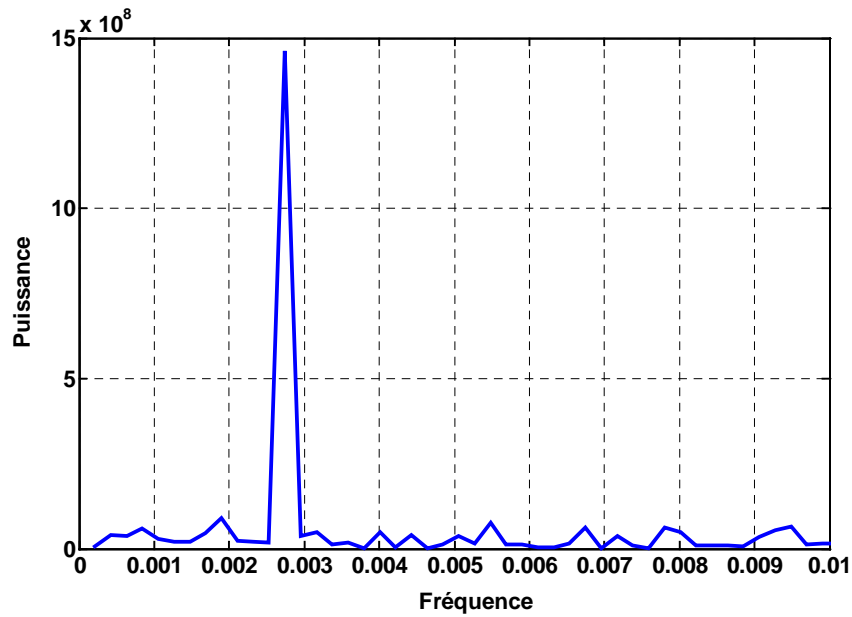
**Figure 34** : Périodogramme de la série des températures corrigées de la tendance et des variations saisonnières de Chicago (TCHSTAT)



$$\text{Puissance} = \left| \sum_{k=1}^n y_k e^{i k (2 \pi \tau_j)} \right|^2 \quad \text{où } \tau_j = \text{fréquence} = \frac{j}{n/2}$$

Nous remarquons que la densité spectrale de la chronique TCH exhibe un pic aux fréquences proches de zéro tandis que la série TCHSTAT manifeste une concentration des éléments dans les basses fréquences. Afin d'expliquer la provenance du pic que nous apercevons pour TCH, nous traçons sur la figure 35 le périodogramme de la série des résidus carrés pour Chicago. Nous savons que le comportement de cette série est gouverné principalement par la composante saisonnière. La figure 35 laisse apparaître le même pic que nous avons identifié pour TCH.

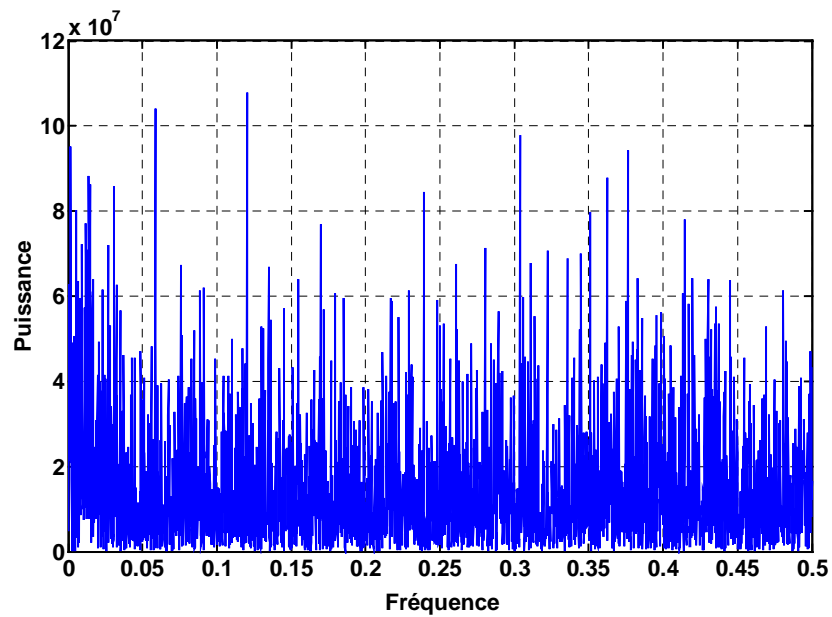
**Figure 35** : Périodogramme de la série des résidus carrés issus du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour la température de Chicago (RCHSQR-OU)



$$\text{Puissance} = \left| \sum_{k=1}^n y_k e^{i k (2 \pi \tau_j)} \right|^2 \quad \text{où } \tau_j = \text{fréquence} = \frac{j}{n/2}$$

En retranchant la composante saisonnière à la chronique des résidus carrés, nous observons sur la figure 36 que le spectre des données obtenues (RCHSQR-OUNP) ne comporte plus de pointe dans les basses fréquences. Nous pouvons remarquer également que son aspect est régulier ce qui est la caractéristique des séries à mémoire courte.

**Figure 36** : Périodogramme de la série des résidus carrés issus du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et corrigés des variations saisonnières pour la température de Chicago (RCHSQR-OUNP)



$$\text{Puissance} = \left| \sum_{k=1}^n y_k e^{i k (2 \pi \tau_j)} \right|^2 \quad \text{où } \tau_j = \text{fréquence} = \frac{j}{n/2}$$

Le calcul de l'exposant de Hurst et du paramètre fractionnaire pour la série RCHSQR-OUNP révèle qu'elle ne possède pas de mémoire de long terme. En effet, d'après les résultats reportés dans les tableaux 27 et 28, la statistique V est inférieure à 1.747 à 5% et à 1.620 à 10% et le ratio de Student du paramètre fractionnaire estimé est en-deçà de |1.96| pour  $n^{0.55}$ .

**Tableau 27** : Analyse R/S

	R/S	R/S modifiée	
	Série TCHSTAT		
<b>RCHSQR-OUNP</b>	H = 0.5515	H = 0.5514	V = 1.5457

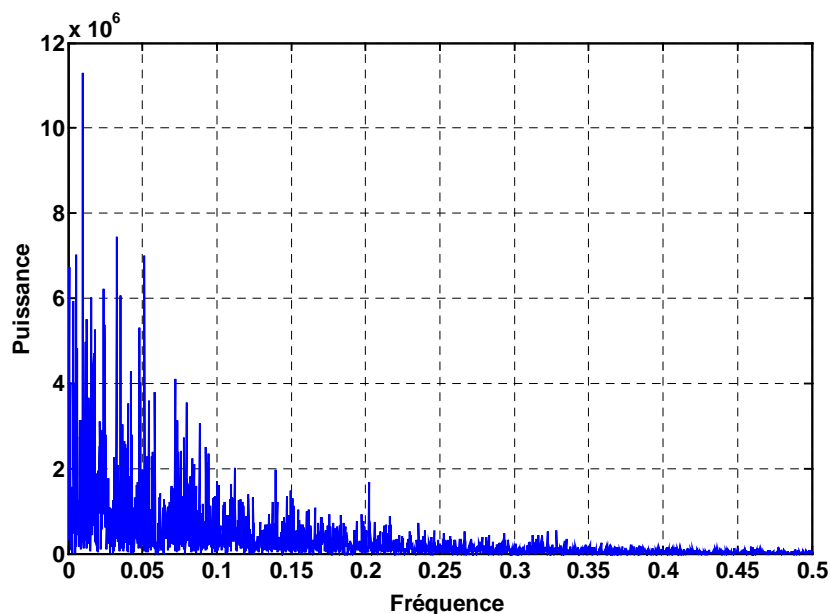
**Tableau 28 :** Estimation du paramètre de différenciation fractionnaire par la méthode de Geweke et Porter-Hudak

	$M = n^{0.45}$	$m = n^{0.5}$	$m = n^{0.55}$
	<b>Série TCHSTAT</b>		
<b>RCHSQR-OUNP</b>	$\hat{d} = 0.2144$ (8.31)	$\hat{d} = 0.0458$ (1.99)	$\hat{d} = 0.0292$ (1.41)

Le chiffre entre parenthèses désigne la valeur de la t-statistique et n représente le nombre d'observations.

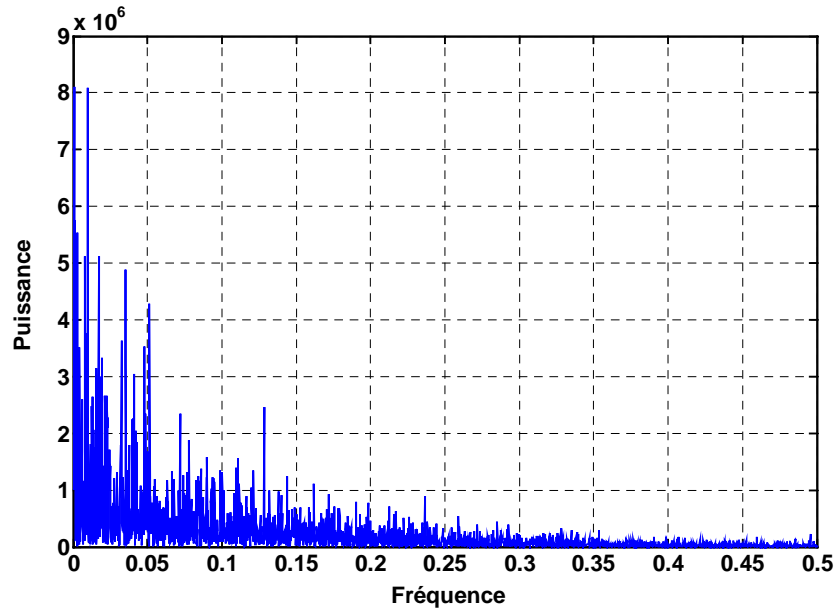
Nous pouvons par conséquent conclure que les résultats des tests de mémoire longue pratiqués sur les chroniques TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT témoignent bien de la présence d'un phénomène de dépendance de long terme dans les températures. Nous avons reproduit également le spectre des chroniques TCINSTAT et TNYSTAT sur les figures 37 et 38. Nous constatons que leur aspect est similaire à celui de la série TCHSTAT.

**Figure 37 :** Périodogramme de la série des températures corrigées de la tendance et des variations saisonnières de Cincinnati (TCINSTAT)



$$\text{Puissance} = \left| \sum_{k=1}^n y_k e^{i k (2 \pi \tau_j)} \right|^2 \quad \text{où } \tau_j = \text{fréquence} = \frac{j}{n/2}$$

**Figure 38** : Périodogramme de la série des températures corrigées de la tendance et des variations saisonnières de New York (TNYSTAT)



$$\text{Puissance} = \left| \sum_{k=1}^n y_k e^{i k (2 \pi \tau_j)} \right|^2 \quad \text{où } \tau_j = \text{fréquence} = \frac{j}{n/2}$$

L'existence de la mémoire longue étant prouvée dans les données de températures, nous procédons à l'estimation des coefficients du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.

### *Estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire*

Nous envisageons d'estimer les paramètres du modèle suivant qui constitue le "modèle modifié de Brody, Syroka et Zervos" :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha_{FR} (T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_{FR} dW_t^H \quad (275)$$

où  $\alpha_{FR}$  et  $\sigma_{FR}$  représentent respectivement la vitesse de retour à la moyenne et la volatilité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.

Dans leur article, Brody, Syroka et Zervos (2002) n'abordent pas la question de l'estimation de leur modèle. Nous nous appuyerons alors sur les travaux de Comte (1996) pour estimer les coefficients du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire. Commençons d'abord par écrire le modèle modifié de Brody, Syroka et Zervos en fonction du paramètre fractionnaire  $d$  :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma dW_{d,t}. \quad (276)$$

La solution de cette équation est formulée alors de la manière suivante :

$$T_t = e^{-\alpha(t-s)}(T_s - T_s^m) + T_t^m + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)} dW_{d,\tau}, \quad 0 \leq s \leq t \quad (277)$$

avec  $d = H - \frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ .

La représentation en fonction de  $d$  rend possible l'utilisation des formules de calcul suivantes mises en avant par Comte (1996). Considérons :

$$z_t = \int_s^t \sigma e^{-\alpha(t-\tau)} dW_{d,\tau}, \quad (278)$$

la dérivée d'ordre  $d$  de cette relation donne

$$z_t^{(d)} = \int_s^t \sigma e^{-\alpha(t-\tau)} dW_\tau \quad (279)$$

où  $dW_t = \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{dt}$  et  $\tilde{\varepsilon}_t \sim N(0,1)$ .

Cette dérivée d'ordre  $d$  peut également se calculer de la manière suivante :

$$z_t^{(d)} = \int_s^t \frac{(t-\tau)^{-d}}{\Gamma(1-d)} dz_\tau \quad (280)$$

où  $\Gamma$  représente la fonction gamma et  $z_t = T_t - e^{-\alpha(t-s)}(T_s - T_t^m) - T_t^m$  avec  $0 \leq s \leq t$ .

En discrétisant cette expression, on obtient :

$$z_t^{(d)} = \sum_{ph < t} \frac{(t-ph)^{-d}}{\Gamma(1-d)} \Delta z_{ph} \quad (281)$$

où les observations de la série  $\{z_{ph}\}$  sont espacées entre elles d'un pas  $h$  qui est supposé ici égal à 1,  $t = jh$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $p = 0, 1, \dots, j$ .

Appliquons maintenant la formule (281) à la série des températures  $\{T_t - T_t^m\}$  que nous désignons par  $\{TSTAT_t\}$  :

$$Y_t = TSTAT_t^{(d)} = \sum_{k=1}^t \frac{(t-k+1)^{-d}}{\Gamma(1-d)} \Delta TSTAT_k \quad (282)$$

où  $TSTAT_t = T_t - T_t^m$  et le paramètre  $d$  est déterminé soit par le calcul de l'exposant de Hurst soit par l'approche de Geweke et Porter-Hudak.

La série  $Y_t$  ne comporte plus de mémoire longue. Nous pouvons, par conséquent, estimer la vitesse de retour à la moyenne  $\alpha_Y$  de la relation :

$$Y_t = (1-\alpha_Y) Y_{t-1} . \quad (283)$$

Afin de mesurer la performance du processus fractionnaire par rapport au processus standard, nous recourons aux critères RMSE et MAE <sup>(49)</sup> qui sont fondés sur le calcul de l'erreur prévisionnelle. Nous utilisons le modèle estimé donné par l'équation (283) pour déterminer

---

<sup>(49)</sup> Les critères RMSE et MAE sont respectivement définis par :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_t^2} \quad \text{et} \quad MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\hat{\epsilon}_t|$$

où  $\hat{\epsilon}_t = T_t - \hat{T}_t$  désigne l'erreur de prévision à la date  $t$ ,  $T_t$  est la température observée et  $\hat{T}_t$  représente la température prévue pour la date  $t$  en  $t-1$ .



les prévisions  $\hat{Y}_t$  sur la période d'échantillonnage (01/01/1993 – 31/12/2005) à l'aide des valeurs connues pour  $Y_{t-1}$ . Nous transformons la série des projections obtenues au moyen du filtre suivant afin de pouvoir calculer ensuite l'erreur de prévision et les critères de comparaison :

$$\widehat{TSTAT}_t = \sum_{k=1}^t \frac{(t-k+1)^d}{\Gamma(1+d)} \Delta \hat{Y}_k . \quad (284)$$

La température prévue pour la date t en t-1 est donnée par :

$$\hat{T}_t = \widehat{TSTAT}_t + T_t^m . \quad (285)$$

Les résultats de l'estimation de la relation (283) ainsi que les critères RMSE et MAE sont regroupés dans les tableaux 29 et 30. Il convient en général d'accorder plus d'importance à l'estimation de d pour  $m=n^{0.5}$ . Etant donné que la valeur du paramètre fractionnaire n'est pas significativement différente de zéro pour ce nombre d'ordonnées en ce qui concerne la série TCHSTAT (voir tableau 26), nous l'avons filtré en employant la valeur de  $d = H - \frac{1}{2}$  avec  $H=0.6465$ . Nous avons ensuite estimé la vitesse de retour à la moyenne de l'équation (283) pour chacune des séries filtrées qui apparaissent graphiquement non centrées sur zéro (représentations non reportées). C'est pourquoi, nous avons également estimé le coefficient de la constante qui est donc significatif.

**Tableau 29 :** Estimation de la vitesse de retour à la moyenne  $\alpha_Y$  pour les séries filtrées des températures de Chicago, Cincinnati et de New York

	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	H = 0.6465		$\hat{d} = -0.0820$		$\hat{d} = 0.0976$	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\alpha_Y$	0.3587	57.55	0.2359	81.58	0.3874	53.37
Constante	0.9449	11.35	3.3561	20.91	-0.7703	-10.41

**Tableau 30** : Critères de comparaison des modèles

<b>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire</b>			
	<b>TCHSTAT</b>	<b>TCINSTAT</b>	<b>TNYSTAT</b>
	<b>H=0.6465</b>	<b><math>\hat{d} = -0.0820</math></b>	<b><math>\hat{d} = 0.0976</math></b>
<b>RMSE</b>	10.419	9.446	6.796
<b>MAE</b>	8.965	7.971	5.561
<b>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard</b>			
	<b>TCHSTAT</b>	<b>TCINSTAT</b>	<b>TNYSTAT</b>
<b>RMSE</b>	5.958	5.913	5.178
<b>MAE</b>	4.588	4.520	4.030

Les chiffres du tableau 30 montrent la supériorité du processus de retour à la moyenne standard par rapport au processus fractionnaire. Ses critères RMSE et MAE sont les plus bas. Aux résultats décevants du processus fractionnaire, nous pouvons attribuer le manque de précision des paramètres estimés. En effet, ils n'ont pas été évalués de manière globale en tenant compte à la fois du comportement de dépendance de long et court terme présent dans les séries puisque l'estimation s'est effectuée en deux étapes. Dans un premier temps, nous avons estimé le paramètre fractionnaire. Nous l'avons ensuite utilisé pour filtrer les séries et dans un second temps, nous avons estimé les coefficients de court terme à partir des données filtrées et à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Bien que l'estimation en une seule étape s'avère la plus adéquate, elle nécessite cependant un temps de calcul extrêmement long puisque l'algorithme d'optimisation devra filtrer à plusieurs reprises les données afin de trouver la valeur optimale du paramètre fractionnaire qui maximisera la fonction de vraisemblance. Le temps de calcul sera d'autant plus long que la taille des observations est grande. Face aux résultats non satisfaisants que nous avons trouvé ici pour le processus fractionnaire et à la difficulté de mettre en place une estimation globale des coefficients, nous ne retenons pas ce processus pour représenter la dynamique de la température.

**Nous choisissons finalement pour la modélisation en temps continu le processus de retour à la moyenne standard avec pour variance le modèle périodique non paramétrique suggéré par Benth et Šaltytė-Benth. En saisissant l'essentiel du comportement des résidus carrés, cette représentation affiche de ce fait les critères d'information les plus faibles. Néanmoins, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ne permet**

**pas de résoudre le problème de l'autocorrélation des résidus compte tenu de sa spécification autorégressive en temps discret limité à l'ordre 1.** Les processus ARMA qui permettent de considérer des ordres plus élevés pour leur partie autorégressive apparaissent alors plus adaptés pour capter les caractéristiques de la température. C'est ce que nous allons voir dans les parties qui suivent.

### 3.2.3 Estimation des paramètres des processus en temps discret

Nous commençons par estimer les coefficients de la décomposition additive suggérée par Cao et Wei (1998). Nous comparerons ensuite les résultats avec ceux trouvés pour les modèles additifs de Roustant (2002) et de Campbell et Diebold (2004). Après avoir retranché aux séries les composants estimés, nous modéliserons leur évolution tour à tour à l'aide du processus ARMA avec une volatilité constante puis variable et enfin par un processus ARFIMA.

#### 3.2.3.1 Estimation des coefficients de la tendance et de la saisonnalité

Lors de la modélisation du comportement de la température à l'aide des processus en temps continu, nous avons choisi de caler par rapport aux données les modèles d'Alaton, Djehiche et Stillberger (2002), de Brody, Syroka et Zervos (2002) et de Richards, Manfredo et Sanders (2004). Nous n'avons donc pas suivi la démarche adoptée par ces auteurs de tronquer la transformée de Fourier à l'ordre 1 pour représenter le mouvement oscillatoire de la variable climatique. De ce fait, nous avons appliqué la décomposition additive suggérée par Campbell et Diebold (2004) et aussi, par la même occasion, celle proposée par Roustant (2002) qui est un cas particulier du modèle de Campbell et Diebold. Nous avons trouvé que le rang de troncature optimal était au-delà de 1 pour les trois séries. Nous allons rapprocher ici ces résultats de ceux du modèle additif de Cao et Wei (1998). Pour les raisons que nous avons mentionné précédemment, le modèle avait été modifiée et se présentait comme suit :

$$T_t = m_t + s_t \quad (286)$$

où

$$m_t = \frac{\beta_1}{365} t + c \quad (287)$$

et

$$s_t = \overline{TS}_d (365 \times 1) \otimes \ell_{(Y \times 1)} \quad (288)$$

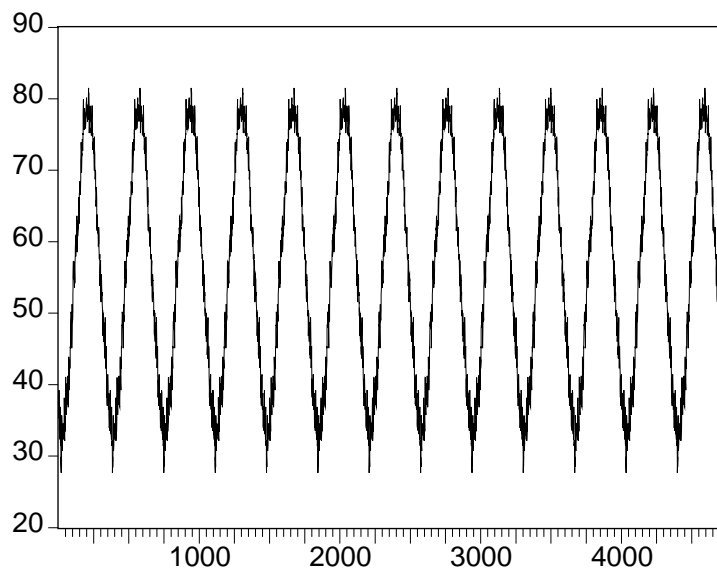
avec

$$\overline{TS}_d = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y (T_{d,y} - m_{d,y}) . \quad (289)$$

où  $\ell$  est un vecteur  $Y \times 1$  composé de 1,  $d=1, \dots, 365$  correspond au jour  $d$  de l'année  $y=1, \dots, Y$ ,  $t=1, \dots, n$  avec  $n=365 \times Y$ ,

La composante cyclique  $s_t$  de la décomposition additive de Cao et Wei présente la particularité de ne pas être lisse comme nous le montre sa représentation graphique ci-dessous.

**Figure 39** : Composante périodique du modèle additif de Cao et Wei pour la température de Chicago



Nous avons noté les valeurs estimées du modèle pour Chicago, Cincinnati et New York dans le tableau 31. Nous avons reporté, dans le tableau 32, les résultats précédemment obtenus pour le modèle de Campbell et Diebold afin de pouvoir les comparer avec ceux du processus de Cao et Wei. Conformément à ce que nous avons trouvé précédemment, les chiffres montrent que le comportement de la température moyenne journalière de Chicago et de

Cincinnati est dominé par une tendance haussière et par des mouvements saisonniers. Leur t de Student est largement supérieur à  $|1.96|$  à 5%.

**Tableau 31** : Estimation des paramètres de la décomposition additive de Cao et Wei pour les températures de Chicago, de Cincinnati et de New York

	TCH		TCIN		TNY	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
<b>c</b>	48.8480	202.26	53.2553	226.16	55.9518	566.31
<b>(1/365)*t</b>	0.2373	7.38	0.1129	3.60		
<b>s</b>	1.0003	146.04	1.0003	135.84	1.0000	161.09
<b>LL</b>	-16781.88		-16662.04		-15831.71	
<b>AIC</b>	7.0748		7.0243		6.6738	
<b>SIC</b>	7.0789		7.0283		6.6766	

**Tableau 32** : Critères de choix du modèle additif de Campbell et Diebold pour les températures de Chicago, de Cincinnati et de New York

	TCH	TCIN	TNY
	M=1 et K=3	M=1 et K=2	M=0 et K=3
<b>LL</b>	-16948.30	-16839.54	-15979.96
<b>AIC</b>	7.1470	7.1003	6.7384
<b>SIC</b>	7.1579	7.1085	6.7480

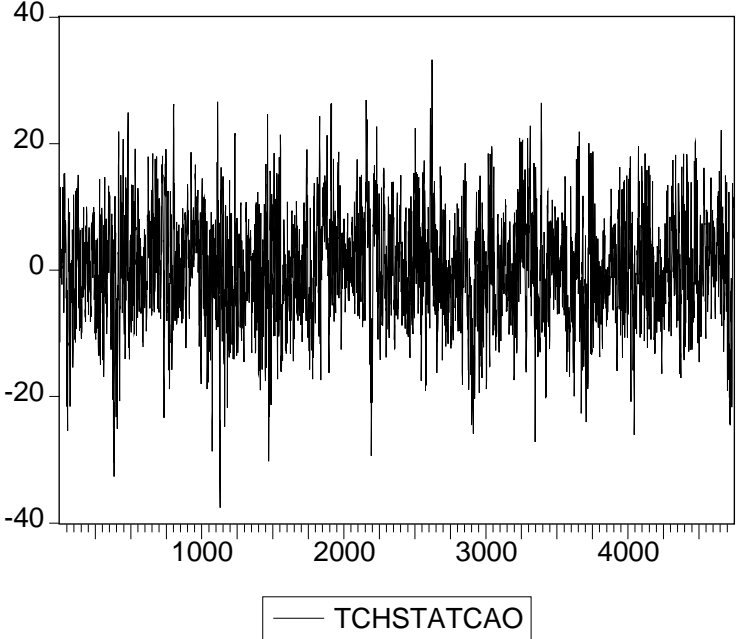
LL désigne la valeur de la fonction log-vraisemblance à l'optimum,

$$m_t = \sum_{m=0}^M \beta_m t^m \quad \text{et} \quad s_t = \sum_{k=1}^K \left[ \delta_{c,k} \cos\left(2\pi k \frac{d(t)}{365}\right) + \delta_{s,k} \sin\left(2\pi k \frac{d(t)}{365}\right) \right]$$

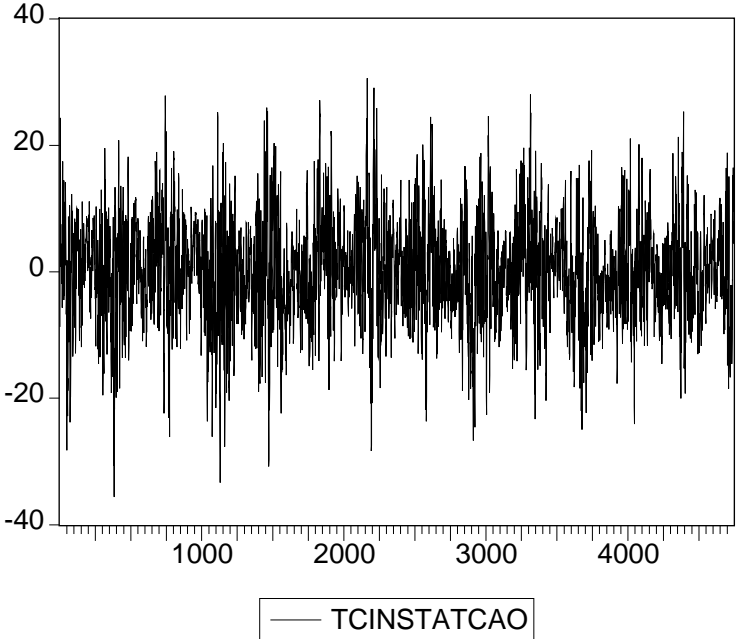
Nous constatons que la prise en compte de la composante cyclique qui n'est pas parfaitement lisse à travers le modèle de Cao et Wei a permis, en comparaison avec la spécification de Campbell et Diebold, de réduire les valeurs de l'AIC et du SIC. L'utilisation de la fonction circulaire dans les processus en temps continu n'apparaît donc pas être un bon choix pour représenter le mouvement oscillatoire de la température. Nous utilisons donc la décomposition additive de Cao et Wei pour corriger les séries de leur tendance et de leurs variations périodiques. Les chroniques ainsi

obtenues sont appelées TCHSTATCAO, TCINSTATCAO et TNYSTATCAO et leur représentation graphique est donnée sur les figures 40, 41 et 42.

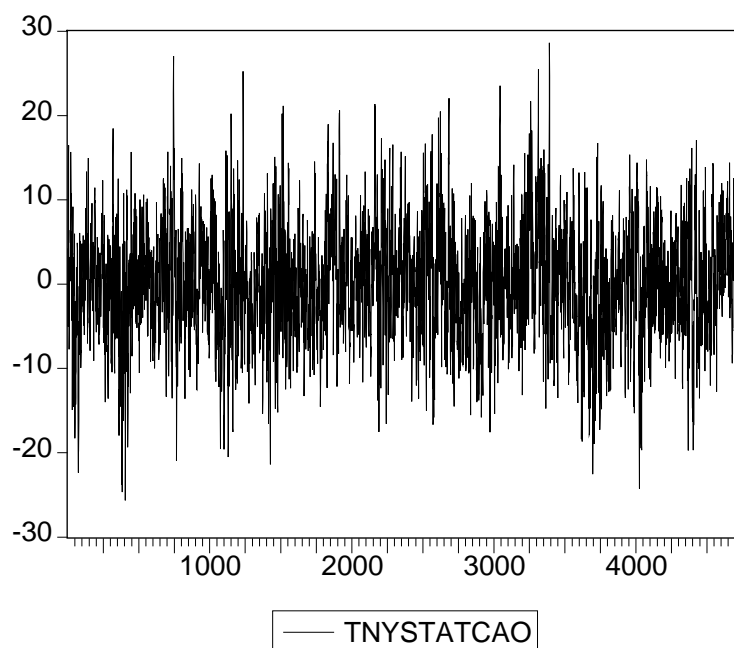
**Figure 40 :** Température moyenne journalière de Chicago désaisonnalisée et corrigée de la tendance à l'aide du modèle additif de Cao et Wei



**Figure 41 :** Température moyenne journalière de Cincinnati désaisonnalisée et corrigée de la tendance à l'aide du modèle additif de Cao et Wei



**Figure 42 :** Température moyenne journalière de New York désaisonnalisée et corrigée de la tendance à l'aide du modèle additif de Cao et Wei



A l'instar des chroniques précédemment désaisonnalisées (TCHSTAT, TCINSTAT et TNYSTAT), les séries présentées ici manifestent une légère oscillation dans la dispersion des valeurs. De façon analogue, nous la modéliserons à l'aide des représentations de variance périodique développées par Cao et Wei, par Roustant, par Campbell et Diebold et par Benth et Šaltytė-Benth. Pour le moment, considérons un processus ARMA pour rendre compte de la dynamique des séries de températures.

### 3.2.3.2 Processus ARMA

Afin d'identifier les ordres  $p$  et  $q$  du processus ARMA, nous avons étudié les fonctions d'autocorrélation simple et partielle des séries TCHSTATCAO, TCINSTATCAO et TNYSTATCAO qui nous ont conduit à retenir le processus AR(3) pour les températures de Chicago, de Cincinnati et de New York. Les 3 premières autocorrélations partielles étant significativement différentes de zéro (graphique non reporté). Toutefois, l'estimation du processus AR(5) pour New York apporte de meilleurs résultats en termes de  $R^2$  ajusté et d'AIC et de SIC que la formulation AR(3). L'examen des t-statistiques présentés dans le

tableau 33 révèle que les coefficients sont tous significativement différents de zéro. Nous conservons en conséquence ces spécifications pour l'analyse des résidus. Nous notons au passage la supériorité du processus ARMA sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à travers les critères de comparaison fournis dans le tableau 34 qui sont plus faibles pour le premier.

**Tableau 33 :** Estimation du processus AR pour les températures de Chicago, de Cincinnati et de New York

	TCHSTAT		TCINSTAT		TNYSTAT	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
AR(1)	0.8695	60.15	0.8690	60.23	0.8076	55.63
AR(2)	-0.2512	-13.34	-0.2794	-14.92	-0.2645	-14.18
AR(3)	0.0913	6.31	0.1110	7.69	0.1402	7.40
AR(4)					-0.0326	-1.75
AR(5)					0.0444	3.06
LL	-14890.58		-14835.33		-14227.20	
AIC	6.2816		6.2583		6.0051	
SIC	6.2856		6.2623		6.0120	

**Tableau 34 :** Critères de comparaison des modèles en temps discret et en temps continu

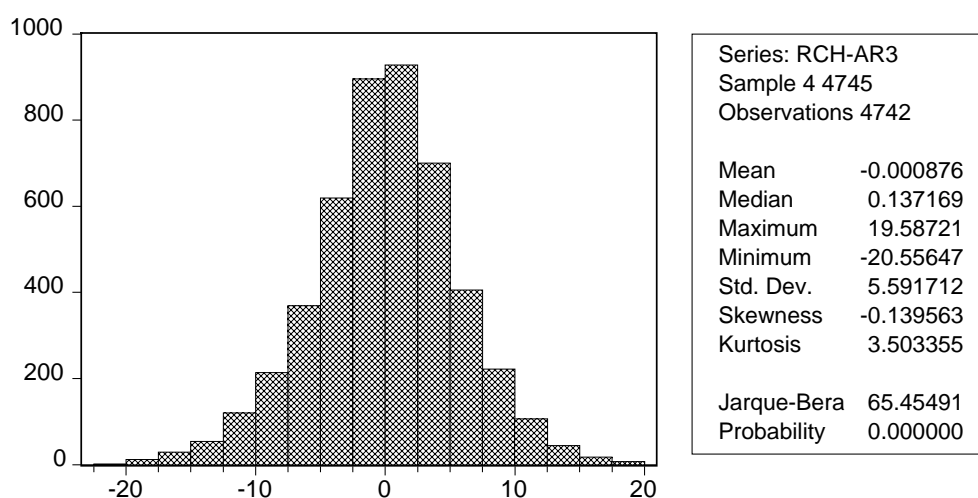
	Processus ARMA		
	TCHSTATCAO	TCINSTATCAO	TNYSTATCAO
AIC	6.2816	6.2583	6.0051
SIC	6.2856	6.2623	6.0120
RMSE	5.5911	5.5265	4.8675
MAE	4.3206	4.2008	3.7886
	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck		
	TCHSTAT	TCINSTAT	TNYSTAT
AIC	6.4079	6.3924	6.1275
SIC	6.4093	6.3938	6.1288
RMSE <sup>(50)</sup>	5.9541	5.9079	5.9117
MAE	4.5856	4.5170	4.5309

<sup>(50)</sup> Les chiffres donnés pour les critères RMSE et MAE sont légèrement différents de ceux apportés lors de la comparaison avec le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire car nous avons calculé ici les critères en employant la même taille d'échantillon que celle utilisée pour le calcul des indicateurs relatifs aux processus ARMA.

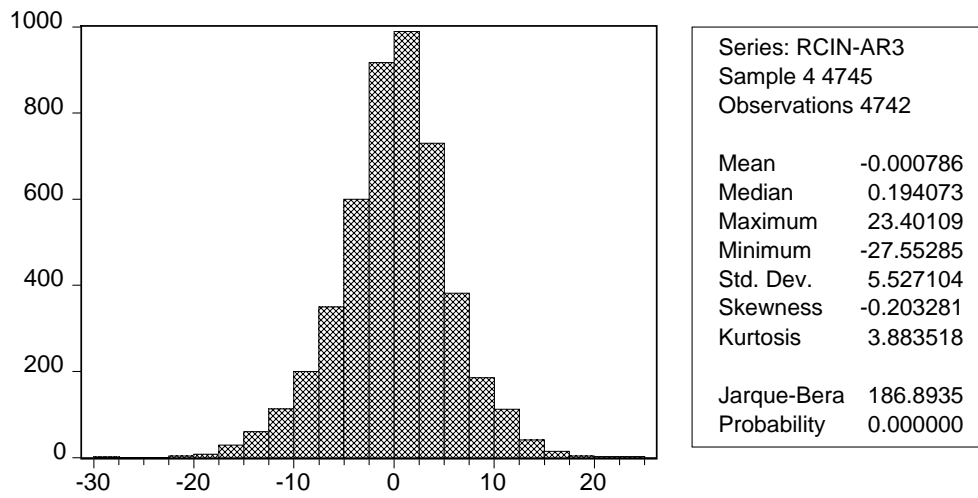


Les statistiques descriptives des résidus des modèles AR que nous désignons par RCH-AR3 pour Chicago, RCIN-AR3 pour Cincinnati et RNY-AR5 pour New York montrent qu'ils ne sont pas gaussiens. Comme pour les écarts estimés issus du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, leur skewness qui est négatif témoigne de la présence d'une hétéroscédasticité que nous avons pu observer précédemment. Le test ARCH mené sur les résidus carrés et dont les résultats apparaissent dans les tableaux 35, 36 et 37 confirment à nouveau cette hypothèse. Les t de Student sont tous au-dessus de  $|1.96|$  et la probabilité adjointe à la statistique  $n \times R^2$  est inférieure à 5%. Le nombre de retards p pour la mise en œuvre du test est déterminé en étudiant le corrélogramme partiel des résidus carrés.

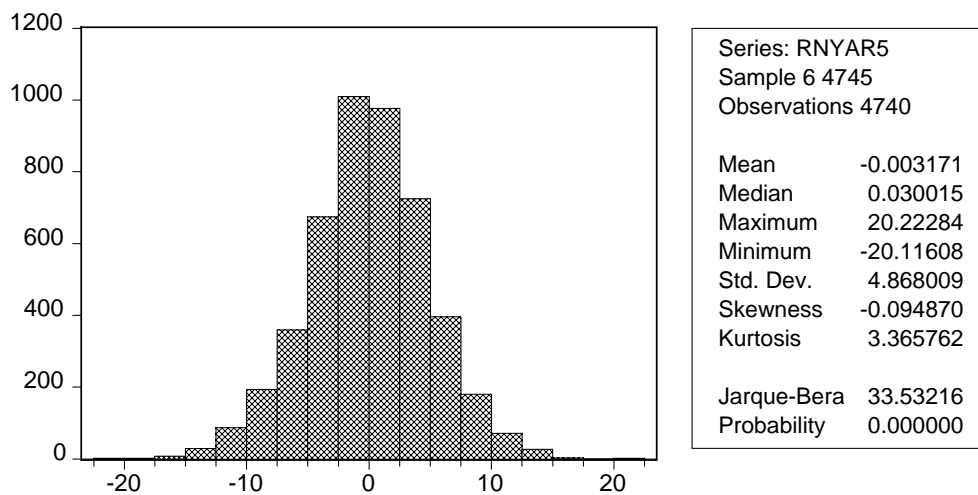
**Figure 43 :** Statistiques descriptives de la série des résidus RCH-AR3 issus de l'estimation du processus AR(3) pour la température de Chicago



**Figure 44 :** Statistiques descriptives de la série des résidus RCIN-AR3 issus de l'estimation du processus AR(3) pour la température de Cincinnati



**Figure 45 :** Statistiques descriptives de la série des résidus RNY-AR5 issus de l'estimation du processus AR(5) pour la température de New York



**Tableau 35 :** Application du Test ARCH à la série des résidus carrés RCH-AR3 pour  $p = 3$

ARCH Test:				
F-statistic	18.53004	Probability	0.000000	
Obs*R-squared	54.99148	Probability	0.000000	
Test Equation:				
Dependent Variable: (RCH-AR3) <sup>2</sup>				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 7 4745				
Included observations: 4739 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	25.90619	1.030607	25.13684	0.0000
(RCH-AR3) <sup>2</sup> (-1)	0.053840	0.014488	3.716116	0.0002
(RCH-AR3) <sup>2</sup> (-2)	0.039703	0.014498	2.738485	0.0062
(RCH-AR3) <sup>2</sup> (-3)	0.078115	0.014489	5.391484	0.0000
R-squared	0.011604	Mean dependent var	31.27543	
Adjusted R-squared	0.010978	S.D. dependent var	49.47879	
S.E. of regression	49.20645	Akaike info criterion	10.63077	
Sum squared resid	11464738	Schwarz criterion	10.63623	
Log likelihood	-25185.61	F-statistic	18.53004	
Durbin-Watson stat	2.004420	Prob(F-statistic)	0.000000	

**Tableau 36 :** Application du Test ARCH à la série des résidus carrés RCIN-AR3 pour  $p = 5$

ARCH Test:				
F-statistic	53.62175	Probability	0.000000	
Obs*R-squared	254.0515	Probability	0.000000	
Test Equation:				
Dependent Variable: (RCIN-AR3) <sup>2</sup>				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 9 4745				
Included observations: 4737 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	17.60931	1.082726	16.26386	0.0000
(RCIN-AR3) <sup>2</sup> (-1)	0.068961	0.014460	4.769199	0.0000
(RCIN-AR3) <sup>2</sup> (-2)	0.064452	0.014446	4.461653	0.0000
(RCIN-AR3) <sup>2</sup> (-3)	0.104441	0.014396	7.254864	0.0000
(RCIN-AR3) <sup>2</sup> (-4)	0.081616	0.014446	5.649746	0.0000
(RCIN-AR3) <sup>2</sup> (-5)	0.103628	0.014440	7.176565	0.0000
R-squared	0.053631	Mean dependent var	30.51945	
Adjusted R-squared	0.052631	S.D. dependent var	51.82193	
S.E. of regression	50.43977	Akaike info criterion	10.68070	
Sum squared resid	12036472	Schwarz criterion	10.68889	
Log likelihood	-25291.24	F-statistic	53.62175	
Durbin-Watson stat	2.010854	Prob(F-statistic)	0.000000	

**Tableau 37 :** Application du Test ARCH à la série des résidus carrés RNY-AR5 pour  $p = 2$

ARCH Test:				
F-statistic	39.49447	Probability	0.000000	
Obs*R-squared	77.74210	Probability	0.000000	
Test Equation:				
Dependent Variable: (RNY-AR5) <sup>2</sup>				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 8 4745				
Included observations: 4738 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	19.59371	0.699188	28.02353	0.0000
(RNY-AR5) <sup>2</sup> (-1)	0.088121	0.014480	6.085564	0.0000
(RNY-AR5) <sup>2</sup> (-2)	0.084879	0.014481	5.861505	0.0000
R-squared	0.016408	Mean dependent var	23.69354	
Adjusted R-squared	0.015993	S.D. dependent var	36.45495	
S.E. of regression	36.16226	Akaike info criterion	10.01454	
Sum squared resid	6192004.	Schwarz criterion	10.01863	
Log likelihood	-23721.45	F-statistic	39.49447	
Durbin-Watson stat	2.006676	Prob(F-statistic)	0.000000	

En effectuant le test d'autocorrélation de Box-Pierce dont les résultats figurent dans les encadrés ci-dessous, nous constatons qu'il n'y a pas de dépendance des résidus puisque la probabilité qui se rapporte à la statistique Q excède les 5%. La formulation autorégressive d'ordre supérieur à 1 a donc permis de résoudre le problème de l'autocorrélation que nous avons observé avec le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous allons à présent passer à la modélisation de la volatilité.

**Tableau 38 :** Fonctions d'autocorrélation simple et partielle de la série des résidus RCH-AR3 accompagnées de la statistique Q

Ordre	Autoc. simple	Autoc. Partielle	Q-Stat	Prob
1	0.000	0.000	0.0008	
2	-0.004	-0.004	0.0634	
3	0.010	0.010	0.4947	
4	-0.022	-0.022	2.7301	0.098
5	0.000	0.000	2.7301	0.255
6	0.016	0.016	3.9448	0.267
7	0.004	0.004	4.0124	0.404
8	0.007	0.007	4.2387	0.516
9	-0.004	-0.004	4.3041	0.636
10	0.031	0.032	8.8962	0.260
11	-0.025	-0.025	11.909	0.155
12	0.033	0.033	17.059	0.048
13	0.023	0.022	19.591	0.033
14	-0.005	-0.003	19.687	0.050
15	0.000	-0.001	19.688	0.073
16	-0.001	-0.001	19.689	0.103
17	-0.004	-0.002	19.757	0.138
18	0.008	0.007	20.072	0.169
19	0.026	0.026	23.297	0.106
20	0.007	0.005	23.540	0.132

**Tableau 39 :** Fonctions d'autocorrélation simple et partielle de la série des résidus RCIN-AR3 accompagnées de la statistique Q

Ordre	Autoc. simple	Autoc. partielle	Q-Stat	Prob
1	0.000	0.000	0.0005	
2	-0.005	-0.005	0.1189	
3	0.012	0.012	0.8030	
4	-0.023	-0.023	3.2622	0.071
5	-0.004	-0.004	3.3267	0.190
6	0.027	0.026	6.6995	0.082
7	-0.003	-0.002	6.7359	0.151
8	-0.004	-0.004	6.8169	0.235
9	0.014	0.014	7.8118	0.252
10	0.015	0.016	8.8563	0.263
11	0.013	0.014	9.7110	0.286
12	0.011	0.010	10.308	0.326
13	0.015	0.015	11.352	0.331
14	-0.027	-0.026	14.803	0.192
15	0.014	0.014	15.751	0.203
16	-0.007	-0.007	15.954	0.252
17	-0.015	-0.014	16.966	0.258
18	0.001	-0.001	16.973	0.320
19	0.010	0.010	17.493	0.354
20	0.018	0.019	19.023	0.327

**Tableau 40 :** Fonctions d'autocorrélation simple et partielle de la série des résidus RNY-AR5 accompagnées de la statistique Q

Ordre	Autoc. simple	Autoc. partielle	Q-Stat	Prob
1	-0.001	-0.001	0.0033	
2	0.000	0.000	0.0034	
3	-0.004	-0.004	0.0958	
4	0.001	0.001	0.1032	
5	-0.013	-0.013	0.9034	
6	0.004	0.004	0.9636	0.326
7	0.011	0.011	1.5147	0.469
8	0.005	0.005	1.6538	0.647
9	0.027	0.027	5.2238	0.265
10	0.012	0.012	5.9043	0.316
11	-0.009	-0.008	6.2564	0.395
12	0.012	0.012	6.9386	0.435
13	-0.003	-0.003	6.9771	0.539
14	-0.005	-0.004	7.0810	0.629
15	-0.009	-0.009	7.4888	0.679
16	0.000	-0.001	7.4895	0.758
17	0.002	0.002	7.5135	0.822
18	0.017	0.016	8.8732	0.782
19	-0.016	-0.016	10.028	0.760
20	0.004	0.004	10.117	0.812

### 3.2.3.3 Processus ARMA avec une volatilité non constante

Nous estimons, à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, le processus ARMA muni successivement d'une volatilité de type ARCH, du modèle de variance périodique de Cao et Wei (1998), de Roustant (2002) puis de Campbell et Diebold (2004) et enfin de Benth et Šaltytė-Benth (2005).

#### *Processus ARMA avec une volatilité de type ARCH*

Nous avons tout d'abord analysé les corrélogrammes simple et partiel des résidus carrés pour sélectionner les ordres  $p$  et  $q$  des processus ARCH et GARCH. Nous avons distingué que la première autocorrélation simple était significative pour les trois séries et qu'en revanche, les 3 premières autocorrélations partielles étaient significativement différentes de zéro pour les données de Chicago, que les 5 premières autocorrélations partielles étaient significatives pour l'échantillon de Cincinnati et que seules les 2 premières l'étaient pour la série de New York. Nous avons alors entrepris l'estimation des processus ARCH(3), GARCH(3,1) et GARCH(1,1) pour Chicago, ARCH(5), GARCH(5,1) et GARCH(1,1) pour Cincinnati et ARCH(2), GARCH(2,1) et GARCH(1,1) pour New York. Il en est ressorti que la représentation GARCH(1,1) disposait des critères d'information les meilleurs. Les résultats reportés dans le tableau 41 indiquent que les coefficients estimés de l'équation de la variance vérifient tous la condition de positivité et qu'ils sont significatifs. Le processus GARCH(1,1) permet donc d'expliquer la dynamique de la volatilité des trois séries de températures.

**Tableau 41** : Estimation du processus AR-GARCH(1,1) pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York

	TCHSTATCAO		TCINSTATCAO		TNYSTATCAO	
	AR(3) + GARCH(1,1)		AR(3) + GARCH(1,1)		AR(5) + GARCH(1,1)	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\rho_1$	0.863	58.65	0.861	57.38	0.809	54.40
$\rho_2$	-0.250	-13.54	-0.250	-12.75	-0.264	-14.27
$\rho_3$	0.092	6.55	0.085	5.66	0.135	7.12
$\rho_4$					-0.032	-1.70
$\rho_5$					0.043	2.94
$\alpha_0$	0.855	5.82	0.264	4.46	0.471	3.52
$\alpha_1$	0.050	8.65	0.067	11.97	0.046	6.88
$\alpha_2$	0.923	110.19	0.926	157.01	0.935	91.96
LL	-14791.14		-14498.31		-14128.89	
AIC	6.2409		6.1174		5.9649	
SIC	6.2491		6.1256		5.9758	

Observons à présent si l'estimation des coefficients du modèle de variance périodique de Cao et Wei (1998) améliore ou non les valeurs des critères de choix.

***Processus ARMA avec le modèle de variance périodique de Cao et Wei***

Similairement à ce que nous avons trouvé pour les résidus du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, les résultats des estimations réunis dans le tableau 42 témoignent de l'existence des variations saisonnières dans le comportement des résidus carrés issus des processus estimés AR. Les ratios de Student des coefficients estimés de l'équation de la variance dépassent  $|1.96|$  à 5% et les valeurs de l'AIC et du SIC ont diminué.

**Tableau 42** : Estimation du processus AR muni de la représentation de la variance de Cao et Wei (\*) pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York.

	TCHSTATCAO		TCINSTATCAO		TNYSTATCAO	
	AR(3) + variance de Cao et Wei		AR(3) + variance de Cao et Wei		AR(5) + variance de Cao et Wei	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\rho_1$	0.857	60.34	0.865	63.32	0.805	57.72
$\rho_2$	-0.238	-12.98	-0.256	-14.23	-0.261	-14.32
$\rho_3$	0.080	5.66	0.080	5.76	0.128	6.98
$\rho_4$					-0.032	-1.77
$\rho_5$					0.038	2.76
$\sigma_0$	3.534	37.97	8.973	51.23	6.571	47.91
$\sigma_1$	-3.110	-20.07	5.651	26.20	2.764	15.42
$\theta$	7.616	502.35	2.941	189.18	2.804	101.20
LL	-14745.47		-14462.74		-14104.62	
AIC	6.2216		6.1024		5.9547	
SIC	6.2298		6.1106		5.9656	

$$(*) \sigma_t = \sigma_0 - \sigma_1 \left| \sin\left(\frac{\pi t}{365} + \phi\right) \right|$$

Au cours de l'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni du modèle de variance périodique de Roustant (2002), nous avons constaté une diminution des valeurs des critères d'information par rapport à celles du processus de retour à la moyenne pourvu du modèle de volatilité de Cao et Wei (1998). Nous allons vérifier si ce résultat se reproduit dans le cas du processus ARMA doté de la représentation de Roustant (2002) pour la variance.

### ***Processus ARMA avec le modèle de variance périodique de Roustant***

Au vu des résultats regroupés dans le tableau 43, la formulation de la variance de Roustant (2002) présente des coefficients qui sont significativement différents de zéro ainsi que des critères de comparaison qui sont plus petits que ceux du modèle de Cao et Wei (sauf pour la température de Chicago dont les valeurs sont légèrement plus élevées). Ces résultats rejoignent donc ceux que nous avons observé pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni du modèle de variance de Roustant.



**Tableau 43 :** Estimation du processus AR muni de la représentation de la variance de Roustant (\*) pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York

	TCHSTATCAO		TCINSTATCAO		TNYSTATCAO	
	AR(3) + variance de Roustant		AR(3) + variance de Roustant		AR(5) + variance de Roustant	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\rho_1$	0.855	60.75	0.865	63.71	0.806	56.93
$\rho_2$	-0.238	-13.07	-0.252	-14.13	-0.263	-14.41
$\rho_3$	0.079	5.62	0.080	5.88	0.130	7.02
$\rho_4$					-0.034	-1.84
$\rho_5$					0.040	2.84
<b>a</b>	1.247	15.87	5.328	96.28	4.799	112.14
<b>b</b>	0.664	8.95	2.115	28.73	0.921	13.91
<b>c</b>	5.522	116.57	0.894	13.62	0.736	11.52
<b>LL</b>	-14754.41		-14426.08		-14094.12	
<b>AIC</b>	6.2254		6.0869		5.9503	
<b>SIC</b>	6.2336		6.0951		5.9612	

(\*)  $\sigma_t = a + b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t)$  où  $\omega = \frac{2\pi}{365}$

En tenant compte d'un effet GARCH dans la volatilité périodique, le modèle de Campbell et Diebold (2004) avait permis d'améliorer les résultats de la modélisation au moyen du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. De ce fait, nous procédons à l'estimation des coefficients du processus ARMA comportant cette spécificité pour la variance.

***Processus ARMA avec le modèle de variance périodique de Campbell et Diebold***

Une structure GARCH(1,1) ayant été mise en évidence précédemment, nous choisissons les ordres R=1 et U=1 respectivement pour la partie ARCH et GARCH du modèle de Campbell et Diebold (2004). Nous fixons ensuite le rang L pour la fonction circulaire de manière à minimiser les critères d'information. Nous aboutissons au choix R=1, U=1 et L=1. L'observation des coefficients estimés fournis dans le tableau ci-dessous montre qu'ils sont significatifs, ce qui valide la spécification retenue pour la variance des trois séries. Les valeurs de l'AIC et du SIC étant inférieures à celles des représentations GARCH(1,1), de Cao et Wei et de Roustant, le modèle adopté ici permet un meilleur ajustement des observations. La prise en considération à la fois de l'effet GARCH(1,1) et du mouvement oscillatoire apparaît alors

indispensable pour reproduire correctement le comportement de la volatilité de la température.

**Tableau 44** : Estimation du processus AR muni de la représentation de la variance de Campbell et Diebold (\*) pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York

	TCHSTATCAO		TCINSTATCAO		TNYSTATCAO	
	AR(3) + variance de Campbell et Diebold		AR(3) + variance de Campbell et Diebold		AR(5) + variance de Campbell et Diebold	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\rho_1$	0.859	58.26	0.868	58.23	0.809	51.22
$\rho_2$	-0.241	-12.66	-0.251	-12.95	-0.266	-13.40
$\rho_3$	0.082	5.62	0.080	5.41	0.133	6.76
$\rho_4$					-0.031	-1.62
$\rho_5$					0.041	2.83
$c$	1.031	13.36	4.999	10.18	5.576	36.04
$\gamma_{c,1}$	0.580	11.33	3.512	14.52	2.146	2.95
$\gamma_{s,1}$	0.011	0.248	1.083	4.68	1.449	2.08
$\mu_1$	0.013	2.93	0.030	3.18	0.050	4.08
$v_1$	0.955	182.24	0.806	35.90	0.715	43.95
<b>LL</b>	-14740.36		-14414.02		-14078.52	
<b>AIC</b>	6.2203		6.0827		5.9445	
<b>SIC</b>	6.2312		6.0936		5.9582	

$$(*) \sigma_t^2 = c + \sum_{\ell=1}^L \left[ \gamma_{c,\ell} \cos\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) + \gamma_{s,\ell} \sin\left(2\pi \ell \frac{d(t)}{365}\right) \right] + \sum_{r=1}^R \mu_r \varepsilon_{t-r}^2 + \sum_{u=1}^U v_u \sigma_{t-u}^2$$

Nous avons vu dans la sous-section 3.2.2.3 que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé au modèle de variance périodique non paramétrique de Benth et Šaltytė-Benth (2005) affichait les critères de choix les plus faibles. C'est pourquoi, nous estimons ici les paramètres du processus ARMA doté de ce modèle de variance afin de vérifier si l'on retrouve la même performance.

**Processus ARMA avec le modèle de variance périodique non paramétrique de Benth et Šaltytė-Benth**

A partir des résultats donnés dans le tableau 45 ci-dessous, nous remarquons, d'une part, que les coefficients sont significatifs et, d'autre part, une nette baisse des valeurs de l'AIC et du SIC.

**Tableau 45 :** Estimation du processus AR muni de la représentation de la variance de Benth et Šaltytė-Benth (\*) pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York

	TCHSTATCAO		TCINSTATCAO		TNYSTATCAO	
	AR(3) + variance de Benth et Šaltytė-Benth		AR(3) + variance de Benth et Šaltytė-Benth		AR(5) + variance de Benth et Šaltytė-Benth	
	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student	Estimation	t-Student
$\rho_1$	0.863	66.38	0.890	67.34	0.817	56.41
$\rho_2$	-0.226	-13.46	-0.267	-15.61	-0.264	-11.37
$\rho_3$	0.078	6.00	0.083	6.33	0.146	8.516
$\rho_4$					-0.046	-2.10
$\rho_5$					0.047	3.083
$\eta$	1.000	48.75	0.998	48.15	1.000	55.18
LL	-14515.43		-14175.11		-13860.78	
AIC	6.1238		5.9802		5.8510	
SIC	6.1292		5.9857		5.8591	

(\*)  $\hat{\sigma}_t^2 = \eta \bar{\hat{\varepsilon}}_d^2 \otimes \ell_{(Y \times 1)}$  où  $\bar{\hat{\varepsilon}}_d^2 = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y \hat{\varepsilon}_{d,y}^2$ ,  $\ell$  est un vecteur composé de 1, d et y désignent respectivement le jour et l'année.

Au vu des résultats donnés dans le tableau 46 ci-dessous, les processus ARMA comportant une volatilité variable affichent les critères de choix les meilleurs. Les valeurs les plus faibles sont principalement constatées pour les processus pourvus d'une variance périodique et notamment pour le processus doté de la représentation cyclique non paramétrique de Benth et Šaltytė-Benth.

**Tableau 46** : Récapitulatif des critères de comparaison obtenus pour les modèles en temps discret

	Processus ARMA avec volatilité constante	Processus ARMA avec volatilité de type ARCH	Processus ARMA avec modèle de variance de Cao et Wei	Processus ARMA avec modèle de variance de Roustant	Processus ARMA avec modèle de variance de Campbell et Diebold	Processus ARMA avec modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth
<b>Série TCHSTATCAO</b>						
<b>LL</b>	-14890.58	-14791.14	-14745.47	-14754.41	-14740.36	<b>-14515.43</b>
<b>AIC</b>	6.2816	6.2409	6.2216	6.2254	6.2203	<b>6.1238</b>
<b>SIC</b>	6.2856	6.2491	6.2298	6.2336	6.2312	<b>6.1292</b>
<b>Série TCINSTATCAO</b>						
<b>LL</b>	-14835.33	-14498.31	-14462.74	-14426.08	-14414.02	<b>-14175.11</b>
<b>AIC</b>	6.2583	6.1174	6.1024	6.0869	6.0827	<b>5.9802</b>
<b>SIC</b>	6.2623	6.1256	6.1106	6.0951	6.0936	<b>5.9857</b>
<b>Série TNYSTATCAO</b>						
<b>LL</b>	-14227.20	-14128.89	-14104.62	-14094.12	-14078.52	<b>-13860.78</b>
<b>AIC</b>	6.0051	5.9649	5.9547	5.9503	5.9445	<b>5.8510</b>
<b>SIC</b>	6.0120	5.9758	5.9656	5.9612	5.9582	<b>5.8591</b>

La mémoire longue ayant été observée au cours de la sous-section 3.2.2.5, nous allons chercher à savoir si la modélisation de la température à l'aide du processus ARFIMA permet d'améliorer ou non les résultats par rapport au processus ARMA.

### 3.2.3.4 Processus ARFIMA

Les méthodes d'estimation des processus ARFIMA peuvent être réparties en deux catégories : les méthodes en deux étapes et les méthodes en une étape. La première consiste à estimer en premier lieu le paramètre fractionnaire  $d$ , soit par le calcul de l'exposant de Hurst, soit par l'approche de Geweke et Porter-Hudak, à calculer ensuite la série  $z_t = (1-L)^d y_t$  avec  $\{y_t\}$  désignant une série stationnaire et à estimer en dernier lieu les paramètres du processus ARMA :  $[1-\rho(L)] z_t = [1-\Theta(L)] \varepsilon_t$ . L'inconvénient majeur des méthodes en deux étapes est qu'elles ne permettent pas une estimation globale des coefficients  $d$ ,  $\rho_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) et  $\Theta_l$  ( $l=1, \dots, q$ ) en s'appuyant sur toute l'information à court et à long terme de la série. Les

méthodes en une étape répondent à cette lacune mais elles sont plus difficiles à mettre en œuvre, notamment la méthode du maximum de vraisemblance exact de Sowell (1992) dont la description est donnée en annexe. Il existe une seconde méthode en une étape beaucoup plus simple à mettre en place qui est celle du maximum de vraisemblance approximé par la fonction de Whittle. Son développement est également donné en annexe. Nous privilégierons dans la suite l'approche par le maximum de vraisemblance approximé pour nos estimations.

L'estimation du processus ARFIMA par la maximisation de la fonction de Whittle nécessite de préciser les valeurs initiales pour le paramètre fractionnaire et les coefficients des polynômes autorégressif et moyenne mobile. Nous commençons par évaluer le paramètre fractionnaire au moyen de la méthode de Geweke et Porter-Hudak. A partir de la valeur trouvée, nous déterminons ensuite la série  $y_t = (1-L)^{\hat{d}} (T_t - m_t - s_t)$  pour laquelle nous estimons les coefficients du processus ARMA. Les estimations que nous obtenons vont constituer les valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation. Les résultats fournis par la procédure de Geweke et Porter-Hudak sont reportés dans le tableau 47.

**Tableau 47 :** Estimation du paramètre de différenciation fractionnaire par la méthode de Geweke et Porter-Hudak

	$m = n^{0.45}$	$m = n^{0.5}$	$m = n^{0.55}$
<b>TCHSTATCAO</b>	$\hat{d} = 0.352$ (13.65)	$\hat{d} = 0.274$ (11.93)	$\hat{d} = 0.199$ (9.58)
<b>TCINSTATCAO</b>	$\hat{d} = 0.326$ (12.61)	$\hat{d} = 0.239$ (10.40)	$\hat{d} = 0.204$ (9.83)
<b>TNYSTATCAO</b>	$\hat{d} = 0.370$ (14.33)	$\hat{d} = 0.359$ (15.66)	$\hat{d} = 0.269$ (12.95)

Le chiffre entre parenthèses désigne la valeur de la t-statistique et n représente le nombre d'observations.

Nous observons que les valeurs estimées de d ainsi que leur ratio de Student sont très élevés en comparaison avec les résultats trouvés au cours de l'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire. Le modèle choisi pour la désaisonnalisation des séries a donc une

incidence sur leurs caractéristiques. Nous choisissons pour la valeur d’amorce du paramètre fractionnaire la valeur estimée à l’aide de la méthode de Geweke et Porter-Hudak pour  $m=n^{0.5}$ . L’étude des fonctions d’autocorrélation simple et partielle (non reporté ici) des séries filtrées  $y_t$  à l’aide de l’estimation de  $d$  pour  $m=n^{0.5}$  révèle que la première autocorrélation simple et les 3 premières autocorrélations partielles sont significatives pour les trois séries. En conséquence, nous avons estimé les coefficients des processus ARFIMA(3,d,0) et ARFIMA(3,d,1) pour les trois chroniques. La comparaison des critères d’information nous a conduit au choix du processus ARFIMA(3,d,1) pour la température de Chicago et du processus ARFIMA(3,d,0) pour les températures de Cincinnati et de New York. Les résultats sont présentés dans le tableau 48.

**Tableau 48 :** Estimation du processus ARFIMA pour les températures moyennes journalières de Chicago, de Cincinnati et de New York

	<b>TCHSTATCAO</b>		<b>TCINSTATCAO</b>		<b>TNYSTATCAO</b>	
	<b>ARFIMA(3,d,1)</b>		<b>ARFIMA(3,d,0)</b>		<b>ARFIMA(3,d,0)</b>	
	<b>Estimation</b>	<b>t-Student</b>	<b>Estimation</b>	<b>t-Student</b>	<b>Estimation</b>	<b>t-Student</b>
<b>d</b>	0.077	1.98	0.019	0.43	0.108	2.90
<b><math>\rho_1</math></b>	0.453	4.80	0.849	19.46	0.695	18.57
<b><math>\rho_2</math></b>	0.038	0.64	-0.271	-12.37	-0.232	-12.79
<b><math>\rho_3</math></b>	0.019	0.73	0.108	6.24	0.102	6.07
<b><math>\Theta_1</math></b>	0.338	4.28				
<b>LL</b>	-10537.00		-10481.262		-9882.408	
<b>AIC</b>	4.4462		4.4227		4.1701	
<b>SIC</b>	4.4530		4.4296		4.1770	

Nous remarquons que les t-statistiques du paramètre fractionnaire estimé ne sont pas aussi élevées que celles obtenues par l’approche de Geweke et Porter-Hudak. Par ailleurs, le t de Student se rapportant à la série de Cincinnati est inférieure à  $|1.96|$ . En confrontant les critères RMSE et MAE calculés pour les processus ARMA et ARFIMA et transcrits dans le tableau 49, nous voyons que la formulation ARMA présente les valeurs les plus faibles. Nous pouvons noter que les valeurs des critères pour le processus ARFIMA sont assez proches de celles du processus ARMA contrairement aux résultats trouvés pour le processus d’Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire qui s’écartaient beaucoup de ceux du processus de retour à la moyenne standard. Nous pouvons imputer ce constat à la méthode d’estimation en une seule

étape qui a été employée pour le processus ARFIMA dont la faible performance par rapport au modèle ARMA peut s'expliquer par une estimation non précise du paramètre fractionnaire qui a été évalué ici à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance approximé par la fonction de Whittle. En outre, la troncature du filtre  $(1-L)^d y_{n+1} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \pi_{\ell} y_{n+1-\ell}$  dont la somme infinie a été remplacée par la somme allant jusqu'à  $(n+1)-1$  lors du calcul de la température estimée a pu contribuer également à la contre-performance du processus ARFIMA. Devant ce résultat, nous ne poursuivons pas l'étude du processus à mémoire longue et nous retenons en définitif pour la modélisation en temps discret le processus ARMA pourvu du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth.

**Tableau 49 :** Critères de comparaison des modèles

	<b>Processus ARFIMA</b>		
	<b>TCHSTATCAO</b>	<b>TCINSTATCAO</b>	<b>TNYSTATCAO</b>
<b>RMSE</b>	5.6278	5.9461	5.3536
<b>MAE</b>	4.3567	4.5490	4.1989
	<b>Processus ARMA</b>		
	<b>TCHSTATCAO</b>	<b>TCINSTATCAO</b>	<b>TNYSTATCAO</b>
<b>RMSE</b>	5.5911	5.5265	4.8675
<b>MAE</b>	4.3206	4.2008	3.7886

### 3.3 CONCLUSION

Nous avons vu au cours de ce chapitre que plusieurs modèles ont été proposés afin de saisir les caractéristiques de la température moyenne journalière. Nous avons pu ainsi distinguer deux principales catégories, les processus en temps continu et les processus en temps discret. Dans les représentations en temps continu, l'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1) visant à répondre aux changements brutaux de la variable climatique aboutit à des résultats qui ne sont pas convaincants. La probabilité estimée d'occurrence d'un saut sur une journée apparaît improbable car elle s'avère très élevée. L'emploi du processus fractionnaire ne donne également pas satisfaction bien qu'une mémoire de long terme ait été décelée dans les séries.

Il donne lieu à des erreurs de prévision importantes qui peuvent être imputées à l'imprécision des paramètres obtenus par la méthode d'estimation en deux étapes. Il ressort de l'étude des modèles en temps continu que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard doté de la représentation de la variance de Benth et Šaltytė-Benth permet le meilleur ajustement des observations en considérant à la fois la périodicité et la variabilité plus grande en hiver qu'en été du mouvement de la volatilité de la température. Nous le destinons en conséquence au calcul des prix par la méthode en l'absence d'arbitrage dont les résultats sont donnés en temps continu. Bien que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck réponde à la propriété de retour à la moyenne de la température et qu'il convienne au maniement du calcul stochastique, il ne procure pas des résidus qui sont des bruits blancs car nous avons pu constater la présence d'une autocorrélation. Sa formulation restreinte AR(1) en temps discret ne permet pas de résoudre ce problème. Nous avons montré qu'une spécification avec un ordre plus élevé notamment AR(3) pour la température de Chicago et de Cincinnati et AR(5) pour celle de New York amenait des résidus non autocorrélés. Il apparaît alors que la formulation en temps discret à travers l'usage du processus ARMA est plus à même de traduire correctement le comportement de la température que la formulation en temps continu. Le processus ARMA pourvu du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth qui présente les critères d'information les plus faibles pour l'ensemble de nos séries de températures sera utilisé pour le calcul des prix par la méthode actuarielle et fondée sur la consommation au cours du chapitre suivant.



## **CHAPITRE 4**

### **CALCUL DES PRIX DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES**

Suite à la présentation des différentes méthodes d'évaluation des dérivés climatiques au cours du chapitre 2, nous envisageons ici de les mettre en application. Pour le modèle de valorisation actuarielle, nous avons besoin de générer un ensemble de trajectoires pour la température. Cette tâche sera accomplie à l'aide de la technique de simulation de Monte-Carlo que nous décrirons au cours de la section 4.1. La mise en œuvre du modèle d'évaluation en l'absence d'arbitrage nécessite l'usage de la méthode des différences finies afin de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles dans le cas de l'extraction des prix de marché du risque liés à la température. Nous analyserons cette méthode dans la section 4.2. Concernant le calcul des prix au moyen du modèle C-CAPM, il est nécessaire d'estimer le coefficient constant d'aversion relative pour le risque. Pour ce faire, nous examinerons dans la section 4.3 les deux méthodes couramment employées pour ce type d'estimation qui sont les méthodes des moments généralisés (GMM) et des moments simulés (SMM). Dans la section 4.4, nous comparerons les prix déterminés à l'aide des trois approches pour lesquelles nous utiliserons les modèles de température estimés dans le chapitre 3. La section 4.5 correspond à la synthèse des résultats.

#### **4.1 TECHNIQUE DE SIMULATION DE MONTE-CARLO**

La technique de simulation de Monte-Carlo est une méthode numérique qui est fréquemment utilisée afin d'estimer les intégrales et les espérances qui ne peuvent être déterminées de façon analytique. Les estimations issues de cette méthode sont d'autant plus précises que le nombre de simulations réalisées est important. Afin d'accélérer la convergence des estimateurs vers les vraies valeurs, on peut recourir à différents procédés. Nous nous intéressons ici à la méthode des variables antithétiques qui est la plus simple à mettre en place. Son exposé suivra la présentation de la technique de Monte-Carlo que nous allons à présent introduire.

### 4.1.1 Aspects généraux de la méthode de Monte-Carlo

Dans le but d'estimer l'espérance  $E[g(x)]$  de la fonction  $g(x)$ , la méthode de Monte-Carlo va réaliser  $N$  tirages aléatoires indépendants  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  suivant une loi  $f_x$  et approcher  $E[g(x)]$  par le calcul de la moyenne  $\mu$  donnée par :

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(x_j). \quad (290)$$

Selon la loi des grands nombres, nous avons :

$$\mu \rightarrow E[g(x)] \text{ presque sûrement lorsque } N \rightarrow \infty. \quad (291)$$

De plus, le théorème central limite stipule que la loi de la variable  $Z$  définie par :

$$Z = N^{1/2} \left[ \frac{\mu - E[g(x)]}{\text{Var}[g(x)]} \right] \text{ avec } \text{Var}[g(x)] < \infty \quad (292)$$

converge vers une distribution normale centrée et réduite quand  $N$  tend vers l'infini. Ce résultat est utile pour la construction de l'intervalle de confiance pour  $E[g(x)]$  qui nous renseigne sur la qualité de l'estimation obtenue (plus l'intervalle est petit et plus l'estimation est précise). Dans le cas présent, l'intervalle de confiance à  $(1-\alpha)\%$  a pour forme :

$$\text{IC} = \left[ \mu - z^{\alpha/2} \sqrt{\frac{\text{Var}[g(x)]}{N}} ; \mu + z^{\alpha/2} \sqrt{\frac{\text{Var}[g(x)]}{N}} \right] \quad (293)$$

où  $z^{\alpha/2}$  symbolise la valeur critique de la loi normale.

Pour déterminer cet intervalle, on a besoin de connaître la valeur de  $\text{Var}[g(x)]$  qui sera approximée à l'aide des réalisations  $x_j$  en calculant :

$$V = \sum_{j=1}^N \frac{(g(x_j) - \mu)^2}{N}. \quad (294)$$

Les N tirages issus d'une distribution quelconque sont obtenus en appliquant les techniques de génération des nombres mais la plupart d'entre elles sont accessibles directement à l'aide des fonctions pré-programmées présentes dans des logiciels tels que Matlab et Excel. La simulation de la trajectoire d'un processus selon une certaine loi s'effectue sur une période de temps donnée  $[0, t_n]$  composée de n intervalles d'une durée  $\Delta t = \frac{t_n}{n}$ . Pour générer N parcours d'un processus en temps continu sur la période considérée, il est nécessaire tout d'abord de discrétiser l'équation différentielle stochastique qui régit le processus. La discrétisation est fondée le plus souvent sur le schéma d'Euler. La forme discrète de l'équation satisfaite par le processus de retour à la moyenne se présente comme suit :

$$\Delta T_t = \left[ \frac{\Delta T_t^m}{\Delta t} + \alpha(T_{t-1}^m - T_{t-1}) \right] \Delta t + \sigma_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1} \sqrt{\Delta t} \quad (295)$$

Soit

$$T_t = T_{t-1} + \Delta T_t^m + \alpha(T_{t-1}^m - T_{t-1})\Delta t + \sigma_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1} \sqrt{\Delta t} \quad (296)$$

où  $\tilde{\varepsilon}_t \sim N(0,1)$ .

L'expression (296) sera utilisée pour mener les simulations à chacune des dates  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ .

#### 4.1.2 Méthode des variables antithétiques

L'intervalle de confiance pour  $E[g(x)]$  nous indique que la précision peut être apportée aux estimations soit en augmentant le nombre de simulations soit en diminuant la variance de  $g(x)$ . Dans le premier cas, il est souvent nécessaire de recourir à un grand nombre de simulations pour obtenir une bonne approximation car la vitesse de convergence de la méthode de Monte-Carlo est connue pour être faible. C'est pourquoi, on préfère la plupart du temps se tourner vers le second cas. Parmi les techniques de réduction de la variance, on trouve la méthode des variables antithétiques.

Elle consiste à associer à chaque tirage  $x_j$  son opposé  $-x_j$  et à utiliser la moyenne des fonctions  $g(x_j)$  et  $g(-x_j)$  pour accélérer la vitesse de convergence. Pour le comprendre,

repreons l'espérance  $E[g(x)]$  que l'on souhaite estimer et considérons un premier échantillon de taille  $2N$  constitué des tirs  $x_j$  avec  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2N})$  issu de la distribution  $f_x$  et un second échantillon de taille  $N$  composé des éléments  $-x_j$  avec  $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_N)$  issu aussi de la loi  $f_x$ . On a  $E[g(x)] = E[g(-x)] = \theta$ .<sup>(51)</sup> Construisons la variable  $Z$  à l'aide des  $N$  réalisations telle que :

$$Z = \frac{g(x) + g(-x)}{2} . \quad (297)$$

$Z$  est un estimateur sans biais de  $E[g(x)]$  car on a  $E[Z] = \theta$ . Supposons que l'on utilise  $Z$  pour approcher  $E[g(X)]$ , la quantité estimée  $\hat{\theta}_Z$  est déterminée par :

$$\hat{\theta}_Z = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Z_j . \quad (298)$$

La variance de l'estimateur  $\hat{\theta}_Z$  est donc définie par :

$$\text{Var}(\hat{\theta}_Z) = \text{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Z_j\right) \quad (299)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \text{Var}\left(\frac{g(x_j) + g(-x_j)}{2}\right) \quad \text{car les } Z_j \text{ sont indépendants} \quad (300)$$

$$= \frac{1}{4N^2} \sum_{j=1}^N \left[ \text{Var}[g(x_j)] + \text{Var}[g(-x_j)] + 2 \text{cov}(g(x_j), g(-x_j)) \right] \quad (301)$$

$$= \frac{1}{2N} \text{Var}[g(x)] + \frac{1}{2N} \text{cov}(g(x), g(-x)) . \quad (302)$$

Regardons maintenant la variance de l'estimateur  $\hat{\theta}_g$  provenant de l'utilisation des  $2N$  réalisations de  $g(x_j)$ . Elle est donnée par :

$$\text{Var}(\hat{\theta}_g) = \text{Var}\left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} g(x_j)\right) = \frac{1}{2N} \text{Var}[g(x)] \quad (303)$$

---

<sup>(51)</sup> Soit  $g(x_t) = \theta + \sigma x_t$  avec  $x_t \sim N(0,1)$ , on a bien  $E[g(x_t)] = \theta$  pour  $x_t$  et  $-x_t$ .

car les  $g(x_j)$  sont indépendants.

On observe que  $\text{Var}(\hat{\theta}_Z) < \text{Var}(\hat{\theta}_g)$  à condition que  $\text{cov}(g(x), g(-x)) < 0$ . Cette restriction est satisfaite si la fonction  $g$  est monotone. Si pour  $x$ , on a une croissance de  $g(x)$ . Alors pour  $-x$ , on doit avoir une décroissance de  $g(-x)$ . Ainsi, la corrélation négative entre  $g(x)$  et  $g(-x)$  est respectée. On conclut que l'utilisation de la variable  $Z$  au lieu de la quantité  $g(x)$  permet d'obtenir un bon compromis entre la précision et le temps de calcul qui est ici limité puisque l'on ne génère que  $N$  tirages au lieu des  $2N$  tirs pour  $g(x)$  et ceci sans perte de la précision.

## **4.2 RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Contrairement aux éléments finis et aux volumes finis qui utilisent une formulation sous forme d'intégrale des équations, la méthode des différences finies remplace les dérivées par des opérateurs en temps discret. La simplicité de la démarche fait qu'elle est souvent employée pour résoudre ce type d'équation. Nous exposerons dans la première partie l'idée de base de la méthode pour ensuite traiter dans la seconde partie des différents schémas de résolution auxquels conduisent les approximations. Dans la troisième partie, nous appliquerons la méthode aux équations formulées dans le cas des dérivées climatiques.

### **4.2.1 Présentation de la méthode des différences finies**

La méthode des différences finies repose sur la discrétisation des dérivées partielles et sur l'étude de la stabilité du schéma de résolution obtenu qui permet de savoir s'il y a convergence de la solution numérique vers la solution exacte. Nous commençons par présenter les formules d'approximation pour arriver ensuite à la notion de stabilité.

### 4.2.1.1 Principe

Pour expliquer la démarche des différences finies, prenons par exemple l'équation de Black et Scholes que l'on cherche à résoudre numériquement :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + r S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \\ C(t_m, S) = \max(S-K, 0) \quad \forall S. \end{cases} \quad (304)$$

dans le cas d'une option d'achat sur le prix  $S$  d'un titre avec un prix d'exercice  $K$  à la date de maturité  $t_m$ . L'équation est dite d'ordre 2 (car l'ordre le plus haut de la dérivée est 2). Elle est également dite de dimension une (car il y a une seule variable espace qui est  $S$ ). Les termes  $\frac{\partial C}{\partial t}$  et  $\frac{\partial C}{\partial S}$  sont appelés termes de convection tandis que  $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$  est dénommé élément de diffusion.

La méthode consiste dans une première étape à définir une grille finie de points (ou maillage) qui constitue le domaine de résolution de l'équation. Chacun des points de cette grille représente le prix  $C$  de l'option qui dépend des variables  $S$  et  $t$ . Le but de la méthode des différences finies est de chercher à calculer l'ensemble des points  $C$  de la grille compte tenu des différentes valeurs prises par  $S$  et  $t$ . Pour ce faire, les dérivées partielles sont discrétisées en temps et en espace dans la seconde étape à l'aide de la formule de Taylor et les termes sont réorganisés de façon à faire apparaître un schéma de résolution. Considérons les développements suivants de Taylor autour de  $x$  de la fonction  $f$  :

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \frac{1}{6} h^3 f'''(x) + \dots \quad (305)$$

et

$$f(x - h) = f(x) - h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) - \frac{1}{6} h^3 f'''(x) + \dots \quad (306)$$

Avec l'équation (305), nous obtenons l'approximation suivante dite d'ordre un :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \frac{1}{6} h^3 f'''(x) + \dots \right] = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h). \quad (307)$$

L'approximation de  $f'(x)$  est appelée ici différence finie décentrée en aval ou différence décentrée à droite (ou encore forward difference).

L'équation (306) donne lieu à l'opérateur en temps discret suivant :

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2} h^2 f''(x) - \frac{1}{6} h^3 f'''(x) + \dots \right] = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h). \quad (308)$$

On parle ici pour  $f'(x)$  de différence finie en amont ou différence décentrée à gauche (ou encore backward difference).

Nous pouvons obtenir une approximation de  $f'(x)$  plus précise dite d'ordre 2 en soustrayant l'équation (306) à l'équation (305) :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{1}{3} h^3 f'''(x) + \dots \quad (309)$$

soit

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{2h} \left[ \frac{1}{3} h^3 f'''(x) + \dots \right] = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2). \quad (310)$$

Cette approximation est désignée par différence finie centrée (ou central difference).

En additionnant les équations (305) et (306) :

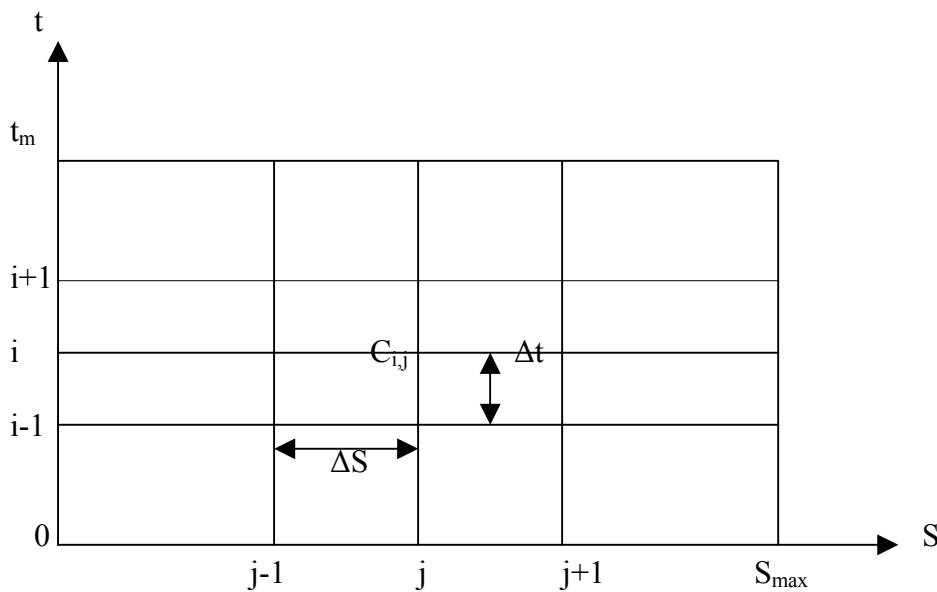
$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + O(h^4), \quad (311)$$

nous pouvons déduire l'approximation suivante de la dérivée seconde  $f''(x)$  dite également différence finie centrée :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2). \quad (312)$$

Etablissons maintenant la grille de points à pas constant formée des variables  $S$  et  $t$  de l'équation de Black et Scholes en précisant les valeurs  $S_{\max}$ ,  $N$  ainsi que la date de maturité  $t_m$  et  $M$ .  $N$  et  $M$  représentent respectivement le nombre de points choisi pour la variable  $t$  et la variable  $S$ . La valeur  $S_{\max}$  joue le rôle de  $+\infty$  car le domaine de résolution est ici borné. Elle correspond à une valeur maximale que ne peut pas atteindre la variable  $S_t$ . A chacun des nœuds de cette grille coïncide le prix de l'option défini par  $C_{i,j} = C(i\Delta t, j\Delta S)$  où  $i = 0, 1, \dots, N$  et  $j = 0, 1, \dots, M$  avec  $N\Delta t = t_m$  et  $M\Delta S = S_{\max}$ .

**Figure 46 :** Grille finie de points de la méthode des différences finies



Discretisons les dérivées partielles de l'équation de Black et Scholes en utilisant les approximations développées plus haut et la notation  $C_{i,j}$  :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta S}, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t} \quad (313)$$

pour les différences finies en aval,



$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\Delta S} \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{i,j} - C_{i-1,j}}{\Delta t} \quad (314)$$

pour les différences finies en amont,

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta S} \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2\Delta t} \quad (315)$$

et

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2C_{i,j}}{(\Delta S)^2} \quad (316)$$

pour les différences finies centrées.

On remplace ensuite ces formules dans l'équation de Black et Scholes et on regroupe les termes de manière à mettre en évidence un schéma de résolution. Parmi les plus connus, nous avons le schéma explicite, implicite et de Crank-Nicolson. Le schéma explicite fait intervenir la différence finie en aval (si on résout l'équation aux dérivées partielles en avançant dans le temps) ou en amont (si on résout l'équation en rétrogradant dans le temps) pour la dérivée partielle en fonction du temps  $t$  et la différence finie centrée pour la dérivée partielle en fonction de la variable  $S$ . Le schéma implicite est obtenu en remplaçant la dérivée partielle en fonction de  $t$  par la différence finie en amont (si on résout l'équation en avançant dans le temps) ou en aval (si on résout l'équation en reculant dans le temps) et la dérivée partielle en fonction de  $S$  par la différence finie centrée. Le schéma de Crank-Nicolson est construit en combinant les schémas explicite et implicite.

Trois notions sont importantes pour l'étude de ces schémas. Elles réunissent la convergence, la consistance et la stabilité du schéma que nous allons définir.

**Convergence du schéma.** La convergence signifie que la solution obtenue en temps discret converge vers la solution exacte en temps continu lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers zéro ( $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\Delta S \rightarrow 0$ ).

**Consistance du schéma.** Le schéma est dit consistant avec l'équation (304) si on a convergence de l'approximation du problème continu vers le problème continu lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers zéro ( $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\Delta S \rightarrow 0$ ).

**Stabilité du schéma.** Le schéma est dit stable lorsque les petites erreurs dans la résolution en temps discret ne vont pas en s'amplifiant à chacun des pas suivants de temps.

Le théorème d'équivalence de Lax relie ces trois notions en précisant que la stabilité est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence <sup>(52)</sup>. C'est pourquoi, nous consacrons la prochaine partie à l'analyse de la stabilité des schémas implicite, explicite et de Crank-Nicolson.

#### 4.2.1.2 Etude de la stabilité

Afin de mettre en lumière la notion de stabilité de manière simple, nous allons construire les schémas explicite, implicite et de Crank-Nicolson en nous inspirant de la démarche adoptée par Wilmott, Dewynne et Howison (1993) qui utilisent la représentation de l'équation de Black et Scholes sous la forme de l'équation de la chaleur qui s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (317)$$

avec la condition initiale :

$$u(0,x) = \varphi(x) = \begin{cases} K \left( \exp\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{2}} x\right) - 1 \right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 . \end{cases} \quad (318)$$

Déterminons tout d'abord le schéma explicite en discrétisant l'équation de la chaleur à l'aide de la différence finie centrée pour  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et de la différence finie en aval pour  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  car nous résolvons l'équation de la chaleur en partant de la connaissance de la condition initiale définie à la date 0 et nous avançons dans le temps jusqu'à la date de maturité. Nous obtenons :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau) = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad (319)$$

où  $u_{i,j} = u(i\Delta \tau, j\Delta x)$ .

---

<sup>(52)</sup> Le théorème d'équivalence de Lax s'énonce de la manière suivante : "Given a properly posed linear initial value problem and a consistent finite difference scheme, stability is the only requirement for convergence."

Il vient alors le schéma de résolution suivant (en ignorant les termes  $O(\Delta\tau)$  et  $O((\Delta x)^2)$ ) :

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \delta(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}) \quad (320)$$

où  $\delta = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$ . Il est appelé explicite car la valeur à la date  $i+1$  peut être calculée directement en utilisant les valeurs passées à la date  $i$  puisque nous disposons de la valeur  $u(0,x) \forall x$ . En effet,  $u_{1,j}$  est donné par :

$$u_{1,j} = u_{0,j} + \delta(u_{0,j+1} + u_{0,j-1} - 2u_{0,j}) \quad (321)$$

où  $u_{0,j}$ ,  $u_{0,j-1}$  et  $u_{0,j+1}$  sont fournis par la fonction  $u(0,x)$ .

L'approche implicite est formée à partir de la différence finie centrée pour  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et de l'opérateur en amont pour  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  ce qui aboutit à la relation suivante :

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau) = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad (322)$$

qui donne lieu à :

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \delta(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}) \quad (323)$$

où  $\delta = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$ . Elle est dénommée implicite car les valeurs à la date  $i$  ne peuvent pas être déterminées directement en utilisant la valeur passée à la date  $i-1$ .

La méthode de Crank-Nicolson est établie en faisant la moyenne des équations (319) et (322) avec pour l'équation (322),  $i$  et  $i-1$  remplacés respectivement par  $i+1$  et  $i$  ce qui nous permet d'aboutir à l'expression suivante :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta\tau} + O((\Delta\tau)^2) = \left( \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{2(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i+1,j}}{2(\Delta x)^2} \right) + O((\Delta x)^2). \quad (324)$$

On peut constater ici que les erreurs sont à la fois  $O((\Delta\tau)^2)$  et  $O((\Delta x)^2)$  ce qui implique que les résultats fournis par la méthode de Crank-Nicolson seront plus précis que ceux donnés par les modèles explicite et implicite.

A partir de cette relation, on déduit le schéma de résolution suivant :

$$u_{i+1,j} - \frac{1}{2} \delta(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i+1,j}) = u_{i,j} + \frac{1}{2} \delta(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}). \quad (325)$$

Pour étudier la stabilité de ces trois schémas, Wilmott, Dewynne et Howison (1993) supposent que la solution  $\tilde{u}_{i,j}$  est entachée d'une erreur  $E_{i,j}$  qui a pour forme :

$$E_{i,j} = \varepsilon \lambda^i \sin(j\omega) \quad (326)$$

et

$$\tilde{u}_{i,j} = u_{i,j} + E_{i,j}. \quad (327)$$

En substituant l'erreur  $E_{i,j}$  dans l'équation (320) définissant l'approche explicite, ils obtiennent :

$$E_{i+1,j} = E_{i,j} + \delta(E_{i,j+1} + E_{i,j-1} - 2E_{i,j}) \quad (328)$$

soit

$$\lambda^{i+1} \sin(j\omega) = \lambda^i \sin(j\omega) + \delta \lambda^i [ \sin((j+1)\omega) + \sin((j-1)\omega) - 2 \sin(j\omega) ]. \quad (329)$$

En réorganisant les termes, il vient :

$$\lambda = 1 + \delta \left[ \frac{\sin((j+1)\omega) + \sin((j-1)\omega) - 2 \sin(j\omega)}{\sin(j\omega)} \right]. \quad (330)$$

Sachant que  $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin(A) \cos(B)$ , l'expression de l'équation (330) peut se simplifier de la façon suivante :

$$\lambda = 1 + 2\delta(\cos(\omega) - 1) = 1 - 4\delta \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\right). \quad (331)$$

Nous observons que pour  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ ,  $-1 \leq \lambda \leq 1$  quelque soit  $\omega$  ce qui signifie que l'erreur  $E_{i,j}$  ne tend pas à s'amplifier à mesure que  $i$  augmente puisque  $\lambda^i$  tend vers 0. Par conséquent, le schéma explicite est dit stable pour  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ , c'est à dire pour  $\Delta\tau \leq \frac{1}{2}(\Delta x)^2$  ce qui implique un pas très petit pour  $\tau$  et nécessairement un temps de calcul très important pour déterminer l'ensemble des points de la grille dont le nombre augmente avec le raffinement du maillage. Par contre, pour  $\delta > \frac{1}{2}$ , l'erreur  $E_{i,j}$  peut augmenter lorsque  $i$  tend vers l'infini car on peut avoir  $\lambda < -1$ . Dans ce cas là, le schéma explicite est dit instable <sup>(53)</sup>. Visuellement, cette instabilité se manifeste par des oscillations de la solution qui vont en croissant à mesure que  $t$  augmente.

La même analyse de la stabilité peut être menée pour l'approche implicite en remplaçant l'erreur  $E_{i,j}$  dans l'équation (323) qui est réécrite de la façon suivante :

$$(1 + 2\delta) u_{i,j} - \delta u_{i,j-1} - \delta u_{i,j+1} = u_{i-1,j}. \quad (332)$$

On parvient alors à :

$$\lambda \left[ 1 + \delta \left( 2 - \frac{\sin((j+1)\omega) + \sin((j-1)\omega)}{\sin(j\omega)} \right) \right] = 1 \quad (333)$$

soit

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4\delta \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\right)}. \quad (334)$$

Pour tout  $\delta > 0$ , on a  $|\lambda| < 1$ . Dans ce cas, le schéma implicite est dit inconditionnellement stable.

---

<sup>(53)</sup> Le schéma explicite est également instable pour  $\delta < 0$  ce qui correspond au cas où  $\Delta\tau < 0$ , c'est à dire lorsque l'on cherche à résoudre l'équation de la chaleur en rétrogradant dans le temps en partant de la date de maturité jusqu'à la date 0 ce qui n'est pas le cas ici.

On réitère l'opération pour l'approche de Crank-Nicolson en remplaçant l'erreur  $E_{i,j}$  dans l'équation (325) qui est reformulée de la manière suivante :

$$(1 + \delta) u_{i+1,j} - \frac{1}{2} \delta (u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}) = (1 - \delta) u_{i,j} + \frac{1}{2} \delta (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \quad (335)$$

ce qui conduit à l'expression de  $\lambda$  comme suit :

$$\lambda = \frac{1 - 2\delta \sin^2(\frac{1}{2}\omega)}{1 + 2\delta \sin^2(\frac{1}{2}\omega)}. \quad (336)$$

Par conséquent,  $|\lambda| < 1$  pour tout  $\delta > 0$ . Le schéma de Crank-Nicolson est donc inconditionnellement stable. Toutefois, il est à noter que plus  $\delta$  est grand et plus  $\lambda \approx -1$  lorsque  $\omega$  est proche de  $\pm \pi$ . Dans ce cas, nous avons des oscillations qui apparaissent.

De manière générale, les méthodes implicite et de Crank-Nicolson sont réputées pour être inconditionnellement stables tandis que la méthode explicite est connue pour être conditionnement stable. L'avantage des deux premiers schémas est qu'ils n'imposent pas de petits pas pour le temps. Le calcul des points de la grille se fait donc plus rapidement. En outre, comme nous l'avons fait remarquer précédemment, le schéma de Crank-Nicolson est plus précis que les configurations implicite et explicite. Par contre, leur principal inconvénient est qu'ils nécessitent la mise en oeuvre de calculs plus complexes pour déterminer les points du maillage. C'est ce que nous allons montrer dans la partie qui suit.

#### 4.2.2 Implémentation des méthodes explicite, implicite et de Crank-Nicolson

Nous cherchons dans cette partie à résoudre l'équation de Black et Scholes donnée par la relation (304) en utilisant successivement le schéma explicite, implicite et de Crank-Nicolson afin de mettre en évidence le niveau de difficulté d'élaboration associé à chacune des trois méthodes.

### 4.2.2.1 Méthode explicite

Disposant de la condition terminale à la date de maturité  $t_m$ , il nous est par conséquent possible de résoudre l'équation de Black et Scholes en rétrogradant dans le temps jusqu'à la date présente <sup>(54)</sup> 0. La discrétisation des dérivées partielles en adoptant une différence finie en amont pour  $\frac{\partial C}{\partial t}$  et une différence finie centrée pour  $\frac{\partial C}{\partial S}$  et  $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$  conduit au résultat suivant :

$$\frac{C_{i,j} - C_{i-1,j}}{\Delta t} + r_j \Delta S \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 (j \Delta S)^2 \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2C_{i,j}}{(\Delta S)^2} = r C_{i,j}. \quad (337)$$

En réarrangeant les termes, nous trouvons :

$$C_{i-1,j} = a_j C_{i,j-1} + b_j C_{i,j} + c_j C_{i,j+1} \quad (338)$$

où

$$a_j = \frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 j^2 - r_j), \quad (339)$$

$$b_j = 1 - \Delta t (\sigma^2 j^2 + r) \quad (340)$$

et

$$c_j = \frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 j^2 + r_j). \quad (341)$$

Les points  $C_{i-1,j}$  de la grille pour  $i = 0, 1, \dots, N-1$  et  $j = 0, 1, \dots, M$  sont obtenus en employant successivement  $i = N, N-1, \dots, 1$ . Pour  $i = N$ , nous avons :

$$C_{N-1,j} = a_j C_{N,j-1} + b_j C_{N,j} + c_j C_{N,j+1} \quad (342)$$

<sup>(54)</sup> Pour résoudre l'équation de Black et Scholes en commençant à la date 0 et en progressant dans le temps jusqu'à la date d'expiration  $t_m$ , il suffit de changer la variable  $t$  par  $\tau = t_m - t$ . L'équation se trouve alors modifiée

de la sorte :

$$\begin{cases} -\frac{\partial C}{\partial \tau} + r S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \\ C(0,S) = \max(S-K, 0) \quad \forall S. \end{cases}$$

où  $C_{N,j-1}$ ,  $C_{N,j}$  et  $C_{N,j+1}$  sont donnés par la condition finale  $C(t_m, S) \forall S$  et les valeurs  $\sigma^2$  et  $r$  de  $a_j$ ,  $b_j$  et  $c_j$  sont connues. Dès lors que les grandeurs  $C_{N-1,j}$  ont été déterminées, nous pouvons calculer  $C_{N-2,j}$  et ainsi de suite jusqu'à la date 0. Les points  $C_{N-1,0}$  et  $C_{N-1,M}$  sont donnés par les conditions aux limites  $S = S_{\max}$  et  $S = 0$ . Il existe plusieurs types de conditions aux limites. Les principales sont les conditions Dirichlet et Neumann. Les premières stipulent que les solutions s'annulent sur les bords tandis que les secondes précisent que la dérivée de la solution s'annule aux bords. Il est fréquent dans le cas des options d'attribuer une valeur aux conditions aux bornes en utilisant l'expression du payoff de l'option. Pour l'option d'achat sur  $S$ , les conditions aux limites s'écrivent  $C(t, S_{\max}) = S_{\max} - Ke^{-r(t_m-t)}$  et  $C(t, 0) = 0 \forall t$ . Le premier cas se justifie par le fait que lorsque  $S$  est égal à  $S_{\max}$  à une date  $t$ , il y a de fortes chances pour que cette situation perdure jusqu'à la date d'expiration  $t_m$ . On obtient alors  $C(t_m, S_{\max}) = \max(S_{\max} - K, 0) = S_{\max} - K$  à l'instant  $t_m$ . De ce fait, à la date  $t$ , nous avons la valeur actualisée  $C(t, S_{\max}) = S_{\max} - Ke^{-r(t_m-t)}$ . De même pour  $S$  égal à 0 à une date  $t$ , il est fort probable que nous ayons  $C(t_m, 0) = 0$  au temps  $t_m$  et donc  $C(t, 0) = 0$  à la date  $t$ .

Une fois calculé l'ensemble des valeurs  $C_{i,j}$  de la grille, la détermination du prix de l'option d'achat sur  $S$  à une date  $t$  comprise entre 0 et la date de maturité  $t_m$  s'effectue en regardant sur la grille la valeur  $C$  obtenue pour la réalisation de  $S$  à la date  $t$ . Si la valeur observée  $S = x$  au temps  $t$  n'apparaît pas sur le maillage, le point  $C(x)$  correspondant à cette valeur est alors calculé par interpolation. Il existe plusieurs formes d'interpolations qui sont par exemple l'interpolation polynomiale (interpolation linéaire et cubique) et l'interpolation trigonométrique. La plus simple à mettre en œuvre est l'interpolation linéaire qui consiste à joindre les points par des segments de droite. Soient  $S = a$ ,  $S = b$  figurant sur la grille à la date  $t$  et les prix  $C(a)$  et  $C(b)$  correspondants. On suppose que les points  $C(a)$  et  $C(b)$  sont les extrémités d'une droite. La valeur  $C(x)$  pour  $S = x \in [a ; b]$  est obtenue par l'interpolation linéaire en utilisant la formule suivante :

$$C(x) = C(a) \frac{x-b}{a-b} + C(b) \frac{x-a}{b-a} . \quad (343)$$



#### 4.2.2.2 Méthode implicite

La discrétisation de l'équation de Black et Scholes à l'aide de l'opérateur en aval pour  $\frac{\partial C}{\partial t}$  et de la différence finie centrée pour  $\frac{\partial C}{\partial S}$  et  $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$  nous mène à la relation suivante :

$$\frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t} + r j \Delta S \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 (j \Delta S)^2 \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2C_{i,j}}{(\Delta S)^2} = r C_{i,j} \quad (344)$$

soit

$$C_{i+1,j} = a_j C_{i,j-1} + b_j C_{i,j} + c_j C_{i,j+1} \quad (345)$$

où

$$a_j = \frac{1}{2} \Delta t (r j - \sigma^2 j^2), \quad (346)$$

$$b_j = 1 + \Delta t (\sigma^2 j^2 + r) \quad (347)$$

et

$$c_j = -\frac{1}{2} \Delta t (r j + \sigma^2 j^2). \quad (348)$$

Les points  $C_{i,j-1}$ ,  $C_{i,j}$  et  $C_{i,j+1}$  pour  $i = 0, 1, \dots, N-1$  et  $j = 0, 1, \dots, M$  sont calculés en utilisant la seule valeur connue qui est  $C_{i+1,j}$ . En effet, pour  $i = N-1$ , nous avons :

$$C_{N,j} = a_j C_{N-1,j-1} + b_j C_{N-1,j} + c_j C_{N-1,j+1} \quad (349)$$

où  $C_{N,j}$  est procuré par la condition finale  $C(t_m, S) \forall S$ . Pour  $j = 0, 1, \dots, M$ , nous obtenons le système d'équations suivant à la date  $N$  :

$$\begin{cases} C_{N,1} = a_1 C_{N-1,0} + b_1 C_{N-1,1} + c_1 C_{N-1,2} \\ C_{N,2} = a_2 C_{N-1,1} + b_2 C_{N-1,2} + c_2 C_{N-1,3} \\ C_{N,3} = a_3 C_{N-1,2} + b_3 C_{N-1,3} + c_3 C_{N-1,4} \\ \dots \\ C_{N,M-1} = a_{M-1} C_{N-1,M-2} + b_{M-1} C_{N-1,M-1} + c_{M-1} C_{N-1,M} \end{cases} \quad (350)$$

Il peut s'écrire aussi matriciellement :

$$\begin{pmatrix} C_{N,1} - a_1 C_{N-1,0} \\ C_{N,2} \\ C_{N,3} \\ \dots \\ C_{N,M-1} - c_3 C_{N-1,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & & & & & & \\ 0 & & & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{N-1,1} \\ C_{N-1,2} \\ C_{N-1,3} \\ \dots \\ C_{N-1,M-1} \end{pmatrix}$$

soit

$$\underset{(M-1 \times 1)}{C_N} = \underset{(M-1 \times M-1)}{A} \underset{(M-1 \times 1)}{C_{N-1}}. \quad (351)$$

Les valeurs  $C_{N-1,0}$  et  $C_{N-1,M}$  sont connues puisqu'elles correspondent aux conditions aux limites  $S = S_{\max}$  et  $S = 0$ . On les regroupe avec les autres valeurs connues  $C_{N,j}$  qui sont données par la condition terminale pour  $j = 1, \dots, M-1$ . Seules les grandeurs  $C_{N-1,j}$  ne sont pas connues et doivent être calculées en inversant la matrice  $A$ . On réitère ainsi cette opération pour  $i = N-2, N-3, \dots, 0$  en employant à chaque fois les valeurs précédemment trouvées. Il existe toutefois des techniques de calcul plus rapides pour résoudre le système d'équations que l'inversion de la matrice  $A$ . La méthode la plus couramment utilisée est celle de la décomposition LU de  $A$ . La forme tridiagonale de la matrice  $A$  permet de trouver facilement sans recourir à des procédures numériques une décomposition  $A = LU$  avec  $L$  (pour Lower) représentant la matrice triangulaire inférieure et  $U$  (pour Upper) désignant la matrice triangulaire supérieure. Plus précisément, la matrice  $A$  peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & & & & & & \\ 0 & & & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ell_2 & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ 0 & & & 0 & \ell_{M-1} & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 & z_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & u_2 & z_2 & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & & & & \dots & \\ \dots & & & & & & u_{M-1} & z_{M-1} \\ 0 & & & 0 & 0 & & u_M \end{pmatrix}.$$

La résolution du système d'équations  $C_N = A C_{N-1}$  pour trouver  $C_{N-1}$  se ramène alors à la résolution des deux systèmes d'équations suivants plus simples à mener compte tenu de la forme triangulaire de L et U :  $L x = C_N$  où x est le vecteur des inconnues et  $U C_{N-1} = x$ .

#### 4.2.2.3 Méthode de Crank-Nicolson

En effectuant la moyenne des équations (337) et (344) avec pour l'équation (344), les indices  $i+1$  et  $i$  remplacés respectivement par  $i$  et  $i-1$ , nous parvenons à la représentation suivante :

$$\frac{C_{i,j} - C_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{2} r j \Delta S \left[ \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{C_{i-1,j+1} - C_{i-1,j-1}}{2\Delta S} \right] + \frac{1}{4} \sigma^2 (j \Delta S)^2 \left[ \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2C_{i,j}}{(\Delta S)^2} + \frac{C_{i-1,j+1} + C_{i-1,j-1} - 2C_{i-1,j}}{(\Delta S)^2} \right] = \frac{1}{2} r [C_{i,j} + C_{i-1,j}]. \quad (352)$$

En réorganisant les termes, elle devient :

$$-a_j C_{i-1,j-1} + (1-b_j) C_{i-1,j} - c_j C_{i-1,j+1} = a_j C_{i,j-1} + (1+b_j) C_{i,j} + c_j C_{i,j+1} \quad (353)$$

où

$$a_j = \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 j^2 - r j), \quad (354)$$

$$b_j = -\frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 j^2 + r j) \quad (355)$$

et

$$c_j = \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 j^2 + r j). \quad (356)$$

Le système d'équations à résoudre pour  $i = N, N-1, \dots, 0$  s'écrit :

$$\begin{cases} -a_1 C_{i-1,0} + (1-b_1) C_{i-1,1} - c_1 C_{i-1,2} = a_1 C_{i,0} + (1+b_1) C_{i,1} + c_1 C_{i,2} \\ -a_2 C_{i-1,1} + (1-b_2) C_{i-1,2} - c_2 C_{i-1,3} = a_2 C_{i,1} + (1+b_2) C_{i,2} + c_2 C_{i,3} \\ -a_3 C_{i-1,2} + (1-b_3) C_{i-1,3} - c_3 C_{i-1,4} = a_3 C_{i,2} + (1+b_3) C_{i,3} + c_3 C_{i,4} \\ \dots \\ -a_{M-1} C_{i-1,M-2} + (1-b_{M-1}) C_{i-1,M-1} - c_{M-1} C_{i-1,M} = a_{M-1} C_{i,M-2} + (1+b_{M-1}) C_{i,M-1} + c_{M-1} C_{i,M} . \end{cases}$$

Sous forme matricielle, il s'exprime comme suit :

$$\begin{pmatrix} (1-b_1) & -c_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ -a_2 & (1-b_2) & -c_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -a_3 & (1-b_3) & -c_3 & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & & & & 0 & -a_{M-1} & (1-b_{M-1}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_{i-1,1} \\ C_{i-1,2} \\ C_{i-1,3} \\ \dots \\ C_{i-1,M-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+b_1) & c_1 & 0 & \dots & & & 0 \\ a_2 & (1+b_2) & c_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_3 & (1+b_3) & c_3 & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & & & & 0 & a_{M-1} & (1+b_{M-1}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,2} \\ C_{i,3} \\ \dots \\ C_{i,M-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 C_{i,0} + a_1 C_{i-1,0} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ c_{M-1} C_{i,M} + c_{M-1} C_{i-1,M} \end{pmatrix}$$

soit finalement :

$$\underset{(M-1 \times M-1) (M-1 \times 1)}{M_1} C_{i-1} = \underset{(M-1 \times M-1) (M-1 \times 1) (M-1 \times 1)}{M_2} C_i + \underset{(M-1 \times 1)}{B_i} \quad (357)$$

où  $B_i$  est la matrice contenant les conditions aux bords.

Les valeurs de  $C_{i-1}$  pour  $i = N, N-1, \dots, 0$  sont obtenues en effectuant le calcul suivant :

$$C_{i-1} = M_1^{-1} (M_2 C_i + B_i). \quad (358)$$

### 4.2.3 Résolution de l'équation aux dérivées partielles pour le prix des contrats climatiques

Contrairement à l'option d'achat sur le cours  $S$  d'un titre, les dérivés climatiques que nous avons étudié jusqu'à présent reposent sur l'accumulation des degrés-jours et non pas seulement sur le niveau du degré-jour. Cette différence a de l'importance car elle implique que le prix des contrats climatiques est donné par trois variables qui sont le degré-jour, le temps et l'indice cumulé des degrés-jours. Il y a par conséquent trois variables à considérer dans l'équation aux dérivées partielles que satisfait le prix des dérivés climatiques. On comprend alors que la résolution de ce genre d'équation demandera un temps de calcul énormément long compte tenu de l'extension de la grille à  $N \times M \times G$  points où  $N$ ,  $M$  et  $G$

correspondent respectivement au nombre de points pour les variables temps, degré-jour et indice cumulé. En outre, les solutions de l'équation sont soumises à des oscillations dues à l'absence d'un terme de diffusion pour l'un des éléments de convection de l'équation. Nous verrons que ces oscillations pourront être traitées en adoptant l'approche développée par Deyenne et Wilmott (1995). Avant d'aborder ce point, nous allons formuler l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le prix des dérivés climatiques dont la température suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard. La résolution des équations aux dérivées partielles produites par les processus à sauts et fractionnaire ne sera pas étudiée compte tenu d'une part de la complexité des calculs liés au processus fractionnaire <sup>(55)</sup> et d'autre part de la nécessité de recourir à des techniques numériques spécifiques pour le traitement de ces équations <sup>(56)</sup>.

<sup>(55)</sup> A la différence du mouvement brownien standard, le mouvement brownien fractionnaire n'a pas ses incréments indépendants. Le calcul stochastique utilisé jusqu'à présent pour les processus régis par un mouvement brownien standard ne peut donc plus être appliqué aux processus fractionnaires. Des versions du lemme d'Itô et du théorème de Girsanov dans le cadre du mouvement brownien fractionnaire ont été formulées respectivement par Duncan, Hu and Pasik-Duncan (2000) et Hu and Øksendal (2003). Brody, Syroka et Zervos (2002) ainsi que Benth (2003) ont utilisé ces formules pour exprimer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le prix de l'option climatique sur l'indice cumulé des températures moyennes journalières. Pour la température gouvernée par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire satisfaisant l'équation différentielle stochastique  $dT_t = \kappa_t(\theta_t - T_t)dt + \sigma_t dW_t^H$ , Brody, Syroka et Zervos (2002) aboutissent à la représentation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \kappa_t(\Theta_t - Y_t) \frac{\partial C}{\partial T} + \Psi_t \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} = r C$$

pour le prix de l'option défini par  $C(0, T_t) = e^{-r t_m} E[ f(Y_{t_m}) | F_0^H ]$  avec  $Y_{t_m} = \sum_{l=0}^n T_{t_m - (n-l)h}$  et

$$dY_t = \kappa_t(\Theta_t - Y_t)dt + \Sigma_t dW_t^H$$

où  $\Theta_u = \sum_{l=0}^n \theta_u \mathbf{1}_{\{u \leq t_m - (n-l)h\}}$ ,  $\Sigma_t = \sum_{l=0}^n \sigma_u \mathbf{1}_{\{u \leq t_m - (n-l)h\}}$ ,  $h = \frac{S}{n}$  pour la période de temps  $[t_m - S, t_m]$  composée de  $n$

intervalles,  $\Psi_t = \Sigma_t e^{-\int_0^t \kappa_u du} \int_0^t \sigma_{s,t} \Sigma_s e^{-\int_0^s \kappa_u du} ds$ ,  $s \leq t$ ,  $\sigma_{s,t} = H(2H-1)|s-t|^{2H-2}$  et  $\frac{1}{2} < H < 1$  désignant l'exposant de Hurst. En utilisant le lemme d'Itô multidimensionnel et le théorème de Girsanov définis dans le cadre fractionnaire, Benth (2003) fournit l'expression suivante sous une probabilité  $Q$  :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\kappa_t(\theta_t - T_t) - \lambda \sigma_t) \frac{\partial C}{\partial T} + T_t \frac{\partial C}{\partial I} + \Psi_{1,t} \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} + \Psi_{2,t} \frac{\partial C}{\partial T \partial I} = r C$$

pour le prix de l'option donné par  $C(0, T_t) = e^{-r t_m} E^Q[ f(I_{t_m}) | F_0^H ]$  avec  $I_{t_m} = \int_0^{t_m} T_s ds$  où  $\lambda$  est le prix de

marché du risque,  $\Psi_{1,t} = \sigma_t e^{-\int_0^t \kappa_u du} \int_0^t \sigma_{s,t} \sigma_s e^{-\int_0^s \kappa_u du} ds$  et  $\Psi_{2,t} = \sigma_t \int_0^t \sigma_{s,t} \sigma_s \int_s^t e^{-\int_s^u \kappa_\tau d\tau} du ds$ .

<sup>(56)</sup> L'équation aux dérivées partielles issue du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire comprend un terme croisé  $\frac{\partial C}{\partial T \partial I}$  pour l'expression fournie par Benth (2003). La résolution de cette équation par la méthode des différences finies suppose un remaniement des schémas afin de prendre en compte cet élément. Quant au processus à sauts, il donne lieu à une équation aux dérivées partielles comportant une intégrale qui doit être calculée par un procédé numérique (par exemple à l'aide de la méthode des trapèzes). Pour un processus à sauts vérifiant l'équation différentielle stochastique :

Rappelons que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard donné par Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) est solution de l'équation suivante :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) \right] dt + \sigma_t dW_t \quad (359)$$

où  $\alpha$  représente la vitesse de retour à la moyenne,

$$T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \vartheta) \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{365}. \quad (360)$$

Sous une probabilité  $Q$ , l'équation devient :

$$dT_t = \left[ \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda_t \sigma_t \right] dt + \sigma_t dW_t^Q \quad (361)$$

où  $\lambda_t$  reflète le prix de marché du risque à la date  $t$ .

L'équation aux dérivées partielles ne peut pas être obtenue ici à partir de la construction d'un portefeuille sans risque suivant la démarche de Black et Scholes (1973) car il n'est pas

$dy_t = v_t dt + \sigma_t dW_t + J dq_t$  avec  $J \rightsquigarrow N(\mu_J, \sigma_J)$  et  $dq_t = \begin{cases} 1 & \text{avec une probabilité } \gamma dt \\ 0 & \text{avec une probabilité } 1-\gamma dt \end{cases}$ , l'équation aux dérivées partielles sous une probabilité  $Q$  s'écrit (les sauts sont supposés ici diversifiables) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (v_t - \lambda \sigma_t - \gamma \mu_J) \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - rC + \gamma E[ C(t, y_t+J) - C ] = 0$$

soit

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (v_t - \lambda \sigma_t - \gamma \mu_J) \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - rC + \gamma \left[ \int_0^{+\infty} C(t, y_t+J) f_J dJ - C \right] = 0$$

pour le prix de l'option décrit par  $C(0, y_t) = e^{-r^* t} E^Q[ f(y_{t+m}) | F_0 ]$  où  $\lambda$  désigne le prix de marché du risque et  $f_J$  représente la fonction de densité de la variable  $J$ . L'équation est obtenue en utilisant le lemme d'Itô suivant pour les processus à sauts (arithmétiques) :

$$dC = \left( \frac{\partial C}{\partial t} + v_t \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial C}{\partial y} dW_t + [ C(t, y_t+J) - C ] dq_t$$

et en exploitant la caractéristique  $E(d\tilde{C}_t) = 0$  des processus actualisés  $\tilde{C}_t = e^{-r^* t} C_t$  et exprimés sous une probabilité  $Q$ .

possible d'acheter et de vendre l'indice de température sur le marché au comptant. Pour ce faire, nous utilisons la propriété des martingales selon laquelle leur espérance est nulle. Appliquons tout d'abord le lemme d'Itô multidimensionnel au prix  $C(t, T_t, I_t^H)$  de l'option climatique sur l'indice cumulé des degrés-jours HDD avec

$$I_t^H = \int_0^t \max(65 - T_s, 0) ds \quad (362)$$

qui peut s'écrire

$$dI_t^H = \max(65 - T_t, 0) dt \quad (363)$$

en utilisant le lemme d'Itô unidimensionnel <sup>(57)</sup>.

On trouve, en recourant au résultat obtenu pour  $v(t, X_t, I_t)$  lors de la présentation du lemme d'Itô multidimensionnel dans le chapitre 2 :

$$dC_t = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) \right) \frac{\partial C}{\partial T} + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial C}{\partial I^H} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} \right] dt + \sigma_t \frac{\partial C}{\partial T} dW_t \quad (364).$$

Sous une probabilité  $Q$ ,  $dC_t$  apparaît comme suit :

$$dC_t = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda_t \sigma_t \right) \frac{\partial C}{\partial T} + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial C}{\partial I^H} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} \right] dt + \sigma_t \frac{\partial C}{\partial T} dW_t^Q \quad (365).$$

Considérons à présent le prix actualisé  $\tilde{C}_t = e^{-rt} C_t$ . L'application du lemme d'Itô à ce prix donne :

$$d\tilde{C}_t = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial C^2} (dC_t)^2 + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial C} dC_t \quad (366)$$

soit

$$d\tilde{C}_t = -r e^{-rt} C_t dt + e^{-rt} dC_t \quad (367)$$

car  $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = -r e^{-rt} C_t$  et  $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial C} = e^{-rt}$ .

---

<sup>(57)</sup> Pour  $Y_t = f(t)$ , le lemme d'Itô s'écrit  $dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt$ . Si on a  $I_t = \int_0^t f(s) ds = F(t)$ , on obtient alors  $dI_t = \frac{\partial F}{\partial t} dt = f(t) dt$ .

On substitue  $dC_t$  par l'expression (365) pour obtenir :

$$d\tilde{C}_t = -r e^{-rt} C_t dt + e^{-rt} \left\{ \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda_t \sigma_t \right) \frac{\partial C}{\partial T} + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial C}{\partial I^H} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} \right] dt + \sigma_t \frac{\partial C}{\partial T} dW_t^Q \right\} \quad (368)$$

soit

$$d\tilde{C}_t = e^{-rt} \left\{ -rC_t + \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda_t \sigma_t \right) \frac{\partial C}{\partial T} + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial C}{\partial I^H} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} \right] \right\} dt + e^{-rt} \sigma_t \frac{\partial C}{\partial T} dW_t^Q. \quad (369)$$

Le processus  $\tilde{C}_t$  est une martingale sous une probabilité  $Q$  si  $E(d\tilde{C}_t) = 0$ . On en déduit alors l'expression suivante de l'équation aux dérivées partielles associée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard sous une probabilité  $Q$  :

$$-r C_t + \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda_t \sigma_t \right) \frac{\partial C}{\partial T} + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial C}{\partial I^H} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} = 0 \quad (370)$$

avec la condition terminale  $C(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H) = f(I_{t_m}^H)$ .

Le prix  $C(t, T_t, I_t^H) = e^{-r(t_m - t)} E^Q[ f(I_{t_m}^H) | F_t ]$  satisfait cette équation.

L'équation vérifiée par le prix du contrat à terme climatique  $F(t, T_t, I_t^H) = E^Q[ I_{t_m}^H | F_t ]$  est donnée par :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left( \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda_t \sigma_t \right) \frac{\partial F}{\partial T} + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial F}{\partial I^H} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = 0 \quad (371)$$

avec la condition terminale  $F(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H) = I_{t_m}^H$ .



Nous constatons que par rapport à l'équation de Black et Scholes, cette formulation comporte un terme de convection supplémentaire qui est  $\max(65-T_t, 0) \frac{\partial C}{\partial I^H}$  pour lequel nous n'avons pas le terme de diffusion associé. Selon Zvan, Forsyth et Vetzal (1998), l'absence de cet élément est responsable de l'oscillation des solutions rencontrée lorsque l'on résout ce type d'équation par la méthode des différences finies. Afin de traiter ce problème, Dewynne et Wilmott (1995) font remarquer que  $dI_t = f(t, S) dt = 0$  pour  $I_t = \int_0^t f(\tau, S) d\tau$  si l'on considère que la valeur de  $I_t$  est uniquement modifiée aux dates d'observation et qu'elle demeure ensuite constante entre les dates. Par conséquent, la résolution de l'équation aux dérivées partielles de dimension deux se ramène à celle d'une équation de dimension une entre les dates d'observation. Afin d'éviter toute occasion d'arbitrage, les auteurs soulignent que les prix des options doivent être identiques avant et après l'actualisation de la valeur de  $I_t$  ce qui se traduit par la condition suivante qui doit être respectée entre les dates pour  $I_i = \sum_j S_j$  :

$$C(S, I_{i-1}, t_i^-) = C(S, I_{i-1} + S, t_i^+) \quad (372)$$

où  $t_i^-$  signifie le moment juste avant la date  $i$  et  $t_i^+$  pour le moment juste après la date  $i$ . Cette condition est valable également pour les contrats à terme. En effet, si leur prix augmente en passant de  $F_0$  à  $F_1$  après l'actualisation de  $I_t$ , l'arbitragiste va souscrire aux contrats à terme avec une obligation d'achat au prix  $F_0$  avant l'actualisation et avec une obligation de vente au prix  $F_1$  après l'actualisation. A la date de maturité des contrats, il achète au prix  $F_0$  et revend au prix  $F_1$  pour réaliser un profit sans risque de  $(F_1 - F_0)$ . La démarche proposée par Dewynne et Wilmott (1995) pour aborder le problème des oscillations se résume alors à résoudre l'équation aux dérivées partielles de dimension une entre les dates d'observation (de la date de maturité jusqu'à la date 0) pour obtenir les valeurs  $C(S, I_{i-1} + S, t_i^+)$ , en prenant à chaque fois les valeurs précédemment trouvées comme conditions terminales.

Pour solutionner les équations (370) et (371), nous employons le schéma implicite qui est moins précis que le modèle de Crank-Nicolson mais qui présente l'avantage de ne pas engendrer d'oscillations. Harris (2003) a évalué l'option de vente climatique sur l'indice cumulé des degrés-jours HDD de la ville de Vlissingen (Pays-Bas) en résolvant l'équation aux dérivées partielles à l'aide du schéma de Crank-Nicolson. En formant la grille avec un pas

de 17.5°C pour l'indice cumulé et de 1 pour le temps <sup>(58)</sup>, il a constaté une oscillation des solutions qu'il a traité en combinant le modèle de Crank-Nicolson avec d'une part le décentrage aval (méthode "downwind") et d'autre part avec la méthode du semi-lagrangien. Toutefois, il semblerait, selon l'auteur, que ces combinaisons ne conduisent pas à des approximations aussi précises que celles procurées par le simple modèle de Crank-Nicolson. En vue d'appliquer l'approche de Dewynne et Wilmott (1995), nous donnons la formulation implicite pour la résolution des équations aux dérivées partielles de dimension une sans le terme  $\max(65-T_t, 0) \frac{\partial C}{\partial I^H}$  entre les dates d'observation. Dans le cas de l'option d'achat climatique sur l'indice cumulé des degrés-jours HDD, elle s'exprime comme suit avec la notation  $C_{i,j}^g = (i\Delta t, j\Delta T, g\Delta I^H)$  pour  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$  et  $g = 0, 1, \dots, G$  :

$$C_{i+1,j}^g = a_j C_{i,j-1}^g + b_j C_{i,j}^g + c_j C_{i,j-1}^g \quad (373)$$

où

$$a_j = \frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{1}{\Delta T} \Lambda_j - \sigma_{t-1}^2 \frac{1}{(\Delta T)^2} \right), \quad (374)$$

$$b_j = \Delta t \left( r + \frac{1}{\Delta t} + \sigma_{t-1}^2 \frac{1}{(\Delta T)^2} \right) \quad (375)$$

et

$$c_j = \frac{1}{2} \Delta t \left( -\frac{1}{\Delta T} \Lambda_j - \sigma_{t-1}^2 \frac{1}{(\Delta T)^2} \right) \quad (376)$$

avec

$$\Lambda_j = \frac{\Delta T_t^m}{\Delta t} + \alpha(T_{t-1}^m - j \Delta T) - \lambda_t \sigma_{t-1}. \quad (377)$$

La condition terminale et les conditions aux limites s'écrivent respectivement <sup>(59)</sup> :

$$C_{N,j}^g = \max(g\Delta I^H - K, 0) \quad \forall j, \forall g \quad (378)$$

<sup>(58)</sup> Harris (2003) considère l'indice cumulé des degrés-jours comme étant un processus satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante :  $dZ_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ . De ce fait, le prix de l'option de vente climatique dépend uniquement des variables  $Z_t$  et  $t$ .

<sup>(59)</sup> Les conditions pour l'option de vente climatique sont définies par :

$$C_{N,j}^g = \max(K - g\Delta I^H, 0) \quad \forall j, \forall g, \quad C_{i,0}^g = 0 \quad \forall i, \forall r \quad \text{et} \quad C_{i,M}^g = e^{-r(N-i)\Delta t} K \quad \forall i, \forall g.$$

$$C_{i,0}^g = G\Delta I^H - e^{-r(N-i)\Delta t} K \quad \forall i, \forall g \quad (379)$$

et

$$C_{i,M}^g = 0 \quad \forall i, \forall g. \quad (380)$$

La condition  $C_{i,0}^g = G\Delta I^H - e^{-r(N-i)\Delta t} K$  trouve son explication dans le fait que lorsque la température atteint  $0^\circ F$  à une date  $t$ , il est fort probable qu'elle ait conservé ce niveau bas jusqu'à la date  $t$  et qu'elle le maintienne jusqu'à la date de maturité. A l'expiration du contrat, l'indice cumulé vaut alors  $I_{\max}^H$  et la valeur de l'option d'achat est égale à  $C = I_{\max}^H - K$ . Par conséquent, le prix de l'option à la date  $t$  correspond à la valeur actualisée du payoff du contrat à l'échéance. Pour  $C_{i,M}^g = 0$ , le raisonnement est similaire. Quand la température parvient à un niveau très élevé à un instant  $t$ , il y a de fortes chances pour que la valeur de l'indice cumulé soit nulle à la date de maturité et que le cours de l'option d'achat soit égal à zéro. De ce fait, nous obtenons également une valeur nulle au temps  $t$ .

Dans le cas du contrat à terme climatique sur l'indice cumulé des degrés-jours HDD, la représentation implicite est donnée par :

$$F_{i+1,j}^g = \alpha_j F_{i,j-1}^g + \beta_j F_{i,j}^g + \zeta_j F_{i,j-1}^g \quad (381)$$

où

$$\alpha_j = \frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{1}{\Delta T} \Lambda_j - \sigma_{t-1}^2 \frac{1}{(\Delta T)^2} \right), \quad (382)$$

$$\beta_j = 1 + \sigma_{t-1}^2 \frac{\Delta t}{(\Delta T)^2} \quad (383)$$

et

$$\zeta_j = \frac{1}{2} \Delta t \left( -\frac{1}{\Delta T} \Lambda_j - \sigma_{t-1}^2 \frac{1}{(\Delta T)^2} \right). \quad (384)$$

La condition finale et les conditions aux bords sont formulées de la façon suivante :

$$F_{N,j}^g = g\Delta I^H \quad \forall j, \forall g, \quad (385)$$

$$F_{i,0}^g = G\Delta I^H \quad \forall i, \forall g \quad (386)$$

et

$$F_{i,M}^g = 0 \quad \forall i, \forall g. \quad (387)$$

La transposition de ces écritures aux dérivés climatiques sur l'indice cumulé des degrés-jours CDD se fait simplement en remplaçant  $I_{tm}^H = \sum_{k=1}^n \max(65 - T_k, 0)$  par  $I_{tm}^C = \sum_{k=1}^n \max(T_k - 65, 0)$  et en modifiant les conditions aux bords.

### 4.3 ESTIMATION DU COEFFICIENT CONSTANT D'AVERSION RELATIVE POUR LE RISQUE

L'estimation du coefficient d'aversion relative pour le risque peut être menée à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle suppose que l'erreur suit une distribution normale. Les résultats obtenus peuvent alors être biaisés lorsque les variables ne sont pas gaussiennes et que l'échantillon est de petite taille. C'est pourquoi, les méthodes des moments généralisés et des moments simulés qui ne reposent pas sur une forme précise de distribution sont les plus couramment utilisées. Du fait que la seconde approche détermine le coefficient d'aversion relative pour le risque de manière à ce que le prix des contrats calculé à partir de simulations soit le plus proche possible du prix observé, elle répond davantage aux caractéristiques des prix des dérivés climatiques qui ne peuvent être évalués que numériquement. On peut alors s'attendre à ce que le coefficient donné par cette méthode procure des prix estimés pour les contrats climatiques qui seront fidèles aux observations. Nous étudierons toutefois les deux méthodes d'estimation dans cette partie car la démarche SMM est une variante de l'approche GMM. Nous commençons par expliquer la méthode GMM développée par Hansen (1982) pour poursuivre ensuite avec la procédure SMM mise en avant par Lee et Ingram (1991).

### 4.3.1 Estimation du coefficient constant d'aversion relative pour le risque par la méthode des moments généralisés

L'idée de base de la méthode des moments généralisés est d'approcher l'espérance présente dans les conditions d'Euler par la moyenne d'échantillonnage (moment empirique) et de déterminer ensuite le coefficient constant d'aversion relative pour le risque de façon à ce que les moyennes d'échantillonnage soient les plus proches de zéro. La convergence de l'estimateur dépendra du choix de la matrice des poids présente dans la fonction objectif à minimiser. Nous allons présenter dans un premier temps la méthode des moments généralisés et discuter dans un second temps du choix de la matrice des poids.

#### 4.3.1.1 Présentation de la méthode des moments généralisés

Afin d'expliquer le principe de la méthode des moments généralisés, nous utilisons pour l'exemple les prix des dérivés climatiques que nous avons formulé au cours du chapitre 2. Ils s'expriment de la manière suivante pour les contrats sur l'indice des HDD cumulés à la date  $t$  :

$$f(t, T_t, I_t^H) = \delta E \left[ \beta^{(t_m - t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \max(I_{t_m}^H - K, 0) \mid F_t \right] \quad (388)$$

pour l'option d'achat et

$$F(t, T_t, I_t^H) = \delta E \left[ \beta^{(t_m - t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H \mid F_t \right] \quad (389)$$

pour le contrat à terme.

En termes de degrés-jours, ils s'écrivent :

$$\tilde{f}(t, T_t, I_t^H) = E \left[ \beta^{(t_m - t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \max(I_{t_m}^H - K, 0) \mid F_t \right] \quad (390)$$

et

$$\tilde{F}(t, T_t, I_t^H) = E \left[ \beta^{(t_m - t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H \mid F_t \right]. \quad (391)$$

Afin de calculer ces prix, nous avons besoin d'estimer les paramètres  $\beta$  et  $\varphi$ . Pour ce faire, l'espérance conditionnelle doit être transformée en espérance non conditionnelle à l'aide de la relation suivante :

$$E[E[X_t | F_t]] = E[X_t]. \quad (392)$$

En prenant l'espérance des équations (390) et (391), nous obtenons alors :

$$E \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \frac{\max(I_{t_m}^H - K, 0)}{\tilde{f}(t, T_t, I_t^H)} - 1 \right] = E \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \frac{\tilde{f}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{f}(t, T_t, I_t^H)} - 1 \right] = 0 \quad (393)$$

et

$$E \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \frac{I_{t_m}^H}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)} - 1 \right] = E \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)} - 1 \right] = 0. \quad (394)$$

L'estimation des paramètres  $\beta$  et  $\varphi$  ne pouvant s'effectuer à l'aide des prix des options climatiques car il n'existe pas de cotation pour ces produits, nous poursuivons notre analyse en nous basant sur la formulation du prix du contrat à terme climatique.

Posons  $h_t(\theta) = \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} \frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)} - 1$  avec  $\theta' = (\beta \ \varphi)$ , la formule (394) s'écrit alors<sup>(60)</sup> :

$$E[h_t(\theta)] = 0. \quad (395)$$

L'estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est obtenu en minimisant la forme quadratique suivante :

$$Q_n(\theta) = \bar{h}(\theta)' W_n \bar{h}(\theta) \quad (396)$$

<sup>(60)</sup> Le terme  $h_t(\theta)$  peut être interprété comme l'erreur du modèle.

où  $\bar{h}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_t(\theta)$ ,  $n$  correspond au nombre d'observations pour  $h_t(\theta)$  et  $W_n$  représente une matrice de poids qui est symétrique, non singulière et définie positive.

Or, la fonction  $Q_n(\theta)$  comporte ici deux inconnues <sup>(61)</sup>  $\beta$  et  $\varphi$  et une seule équation qui est donnée par  $\bar{h}(\theta)$ . Il n'est donc pas possible de trouver une solution unique à ce programme de minimisation. Afin d'augmenter le nombre d'équations, Hansen et Singleton (1982) suggèrent d'utiliser les variables instrumentales que nous regroupons dans le vecteur  $z_t$ . Elles présentent la particularité d'être corrélées à la fois aux variables  $\left(\frac{C_{t_m}}{C_t}\right)$  et  $\left(\frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)}\right)$  mais non à l'erreur  $h_t(\theta)$  ce qui nous permet d'écrire les conditions d'orthogonalité suivantes <sup>(62)</sup> :

$$E[ h_t(\theta) \otimes z_t ] = 0_L \quad (397)$$

⇔

$$E[ g_t(\theta) ] = 0_L \quad (398)$$

où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker,  $z_t$  est un vecteur de format  $(Z \times 1)$  et  $0_L$  est un vecteur  $(L \times 1)$  composé de zéros avec  $L = 1 \times Z$  (le chiffre 1 renvoie à l'unique variable  $h_t(\theta)$ ).

Pour le choix des variables instrumentales, Hansen et Singleton (1982) proposent d'utiliser les valeurs retardées des variables présentes dans la condition d'Euler, c'est à dire ici  $\left(\frac{C_{t_m}}{C_t}\right)$  et  $\left(\frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)}\right)$  car elles sont en principe corrélées entre elles et indépendantes de l'erreur  $h_t(\theta)$ . Le vecteur  $z_t$  est alors constitué des éléments suivants :

$$z_t = \left( 1 \left(\frac{C_{t_m}}{C_t}\right)_{-1} \left(\frac{C_{t_m}}{C_t}\right)_{-2} \dots \left(\frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)}\right)_{-1} \left(\frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)}\right)_{-2} \dots \right) \quad (399)$$

<sup>(61)</sup> Nous estimons  $\beta$  afin de vérifier que l'on a bien  $\beta$  proche de 1 dans le cas du contrat à terme climatique.

<sup>(62)</sup> Les variables instrumentales du vecteur  $z_t$  ne sont pas corrélées à  $h_t(\theta)$ . Nous avons alors  $\text{cov}(z_t, h_t(\theta)) = E[ z_t h_t(\theta) ] = 0$  avec  $E[h_t(\theta)] = 0$  où  $z_t$  est de format  $(Z, 1)$  et  $h_t(\theta)$  est de dimension  $(1, 1)$ .

pour  $t = 1, \dots, n$  et où le nombre 1 correspond à la constante.

Dans ces conditions, l'estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est obtenu en minimisant la forme quadratique suivante :

$$Q_n(\theta) = \bar{g}(\theta)' W_n \bar{g}(\theta) \quad (400)$$

où  $\bar{g}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\theta)$ ,  $\bar{g}(\theta)$  est un vecteur ( $L \times 1$ ) et  $W_n$  est de format ( $L \times L$ ).

Afin de savoir si la valeur estimée  $\hat{\theta}$  donne lieu ou non à des moments calculés qui sont correctement spécifiés lorsque le nombre de conditions est supérieur au nombre d'inconnues, Hansen (1982) a mis en place le test des restrictions sur-identifiantes (appelé aussi J-test) qui repose sur la construction de la statistique J définie de la manière suivante :

$$J = n \times \hat{Q}_n(\hat{\theta}) . \quad (401)$$

Sous l'hypothèse selon laquelle  $E[ g_t(\theta) ] = 0_L$ , cette statistique suit la loi du Khi-deux à ( $L-p$ ) degrés de liberté :

$$J \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \chi_{L-p}^2 \quad (402)$$

où  $L$  représente le nombre de conditions et  $p$  le nombre de paramètres à estimer.

Pour implémenter la méthode des moments généralisés, nous voyons à travers la formule (400) qu'il est nécessaire de connaître la matrice des poids  $W_n$ . Le choix de cette matrice est important, d'une part, pour obtenir l'efficacité des estimateurs et, d'autre part, pour assurer leur convergence lorsque le nombre des conditions d'orthogonalité dépasse celui des paramètres à estimer. Nous allons aborder ce point dans la partie qui suit.



### 4.3.1.2 Matrice des poids

Lorsque le nombre de moments est égal au nombre d'inconnues ( $L=p$ ), il existe une seule solution  $\hat{\theta}$  qui donne  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\hat{\theta}) = 0$  pour les  $L$  équations. Quand il y a davantage de moments que de paramètres, il n'existe pas de solution vérifiant l'ensemble des  $L$  relations. On peut toutefois trouver une valeur  $\hat{\theta}$  telle que  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\hat{\theta}) \approx 0$  pour les  $L$  conditions. En présence d'un nombre de moments plus élevé que celui des inconnues <sup>(63)</sup>, l'algorithme d'optimisation peut converger avec difficulté vers la solution lorsque la matrice  $W_n$  n'est pas correctement définie. Le choix de la matrice des  $W_n$  apparaît alors crucial dans ce cas précis. Hansen (1982) suggère de choisir  $W_n = S^{-1}$  de façon à minimiser la variance de l'estimateur  $\hat{\theta}$ ,  $S$  étant la matrice des variances-covariances asymptotique de l'erreur  $g_t(\theta)$ . Sous certaines restrictions (stationnarité des variables<sup>(64)</sup> appartenant à la condition d'orthogonalité et continuité de la fonction  $g(\theta)$ ), l'estimateur  $\hat{\theta}$  de la méthode GMM est asymptotiquement normal <sup>(65)</sup>. Nous avons alors :

$$n^{1/2}(\hat{\theta} - \theta) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} N(0, \text{Var}_{\hat{\theta}}) \quad (403)$$

---

<sup>(63)</sup> Andersen et Sørensen (1996) montrent que le cas pour lequel il existe autant de conditions d'orthogonalité que de paramètres conduit à des estimations moins satisfaisantes que lorsque le nombre de conditions est supérieur au nombre de paramètres.

<sup>(64)</sup> Les variables  $\frac{C_{t_m}}{C_t}$  et  $\frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)}$  sont stationnaires.

<sup>(65)</sup> Hansen (1982) démontre que la distribution de l'estimateur  $\hat{\theta}$  est asymptotiquement normale en utilisant le résultat suivant, valable sous certaines conditions, notamment celle de stationnarité des variables présentes dans les conditions d'orthogonalité et de continuité de la fonction  $g_t(\theta)$  :

$$n^{1/2} \bar{g}(\theta) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} N(0, S)$$

où  $\bar{g}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\theta)$  et  $S$  est la matrice des variances-covariances de l'erreur  $g_t(\theta)$  qui s'écrit

$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} E[g(\theta)g(\theta)']$  telle que  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} n E[\bar{g}(\theta)\bar{g}(\theta)']$ . Ce résultat résulte de l'application du théorème central limite pour lequel on a  $n^{1/2} [\bar{g}(\theta) - E(\bar{g}(\theta))] \underset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} N(0, S)$  avec  $E[g_t(\theta)] = 0$  et  $E(\bar{g}(\theta)) = 0$ .

où  $\text{Var}_{\hat{\theta}}$  correspond à la matrice des variances-covariances de  $\hat{\theta}$ . Comme  $g_t(\theta)$  est une fonction non linéaire, l'expression de  $\text{Var}_{\hat{\theta}}$  est donnée sous la forme suivante :

$$\text{Var}_{\hat{\theta}} = (D' S^{-1} D)^{-1} \quad (404)$$

où  $\text{Var}_{\hat{\theta}}$  est de format  $(p \times p)$  avec  $p$  représentant le nombre d'inconnues (ici  $p = 2$ ) et

$D = E\left(\frac{\partial g_t(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}'}\right)$  qui est une matrice de dimension  $(L \times p)$ . La matrice  $D$  est estimée par :

$$\hat{D} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial g_t(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}'}. \quad (405)$$

La matrice  $S$  des variances-covariances de l'erreur  $g_t(\theta)$  est définie de la façon suivante :

$$S = \text{Cov}(E[g_t(\theta)], E[g_{t'}(\theta)]) \quad (406)$$

pour  $t \neq t'$ .

Posons

$$V = \text{Cov}(n E[g_t(\theta)], n E[g_{t'}(\theta)]), \quad (407)$$

on a

$$V = E\left[ n E[g_t(\theta)] \cdot n E[g_{t'}(\theta)]' \right] - E\left[ n E[g_t(\theta)] \right] E\left[ n E[g_{t'}(\theta)]' \right] \quad (408)$$

$$V = E\left[ n \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\theta) \right) \cdot n \left( \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n g_s(\theta) \right)' \right] \quad (409)$$

$$V = E\left[ \left( \sum_{t=1}^n g_t(\theta) \right) \left( \sum_{s=1}^n g_s(\theta) \right)' \right] \quad (410)$$

$$V = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n E[g_t(\theta) g_s(\theta)'] \quad (411)$$

$$V = n \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n E[ g_t(\theta) g_s(\theta)' ] \right) = n S. \quad (412)$$

Par un changement d'indices, nous obtenons pour S :

$$S = \sum_{j=-n+1}^{n-1} \Gamma(j) \quad (413)$$

où

$$\Gamma(j) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=j+1}^n E[ g_t(\theta) g_{t-j}(\theta)' ] & \text{pour } j \geq 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{t=-j+1}^n E[ g_{t+1}(\theta) g_t(\theta)' ] & \text{pour } j < 0. \end{cases} \quad (414)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , S est égale à  $2\pi$  fois la densité spectrale de  $g_t(\theta)$  à la fréquence  $\lambda \approx 0$  qui est donnée par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ij\lambda} E[ g_t(\theta) g_{t-j}(\theta)' ]. \quad (415)$$

C'est pourquoi, on approche le plus souvent la matrice S par la densité spectrale. L'estimateur de S s'écrit alors <sup>(66)</sup> :

$$\hat{S} = \Omega_0 + \sum_{j=1}^{n-1} [ \Omega_j + \Omega_j' ] \quad (416)$$

où

$$\Omega_j = \frac{1}{n} \sum_{t=j+1}^n g_t(\hat{\theta}) g_{t-j}(\hat{\theta})'. \quad (417)$$

La matrice  $\hat{S}$  est appelée matrice HAC (heteroskedasticity and autocorrelation covariance). En présence d'échantillons finis, Newey and West (1987) font remarquer que  $\hat{S}$  peut ne pas être définie positive ni même semi-définie positive lorsque le nombre des autocovariances est non

---

<sup>(66)</sup> Lorsque les erreurs  $g_t(\theta)$  ne sont pas autocorrélées, la matrice S s'écrit  $S = E[ g_t(\theta) g_t(\theta)' ]$  qui est estimée par  $\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\hat{\theta}) g_t(\hat{\theta})'$ .

nul. Ils suggèrent la construction de la matrice HAC suivante qui est convergente et semi-définie positive :

$$\tilde{S} = \Omega_0 + \sum_{j=1}^b \text{ker}(j) [\Omega_j + \Omega_j'] \quad (418)$$

où  $b$  désigne le paramètre de troncature,  $\text{ker}(j) = 1 - \frac{j}{b+1}$  représente un poids qui est appelé fonction kernel de Bartlett. Le poids attribué à chacune des autocovariances diminue quand  $j$  augmente.

La valeur  $b$  peut être fixée indépendamment ou en fonction de la taille de l'échantillon. Toutefois, Andrews (1991) précise que la matrice  $\tilde{S}$  tendra d'autant plus vite vers sa vraie valeur  $S$  si on laisse  $b$  croître avec la taille de l'échantillon, c'est à dire de  $n^{1/3}$  pour la fonction kernel de Bartlett <sup>(67)</sup>. La valeur  $b$  est alors donnée par :

$$b = \delta n^{1/3}. \quad (419)$$

Le paramètre  $\delta$  est le plus souvent déterminé de deux façons. Conformément à la méthode de Newey et West (1994),

$$\delta = 1.1447 \left( \frac{s_1}{s_0} \right)^{2/3} \quad (420)$$

où

$$s_1 = 2 \sum_{j=1}^d j \hat{\sigma}_j, \quad s_0 = \hat{\sigma}_0 + 2 \sum_{j=1}^d \hat{\sigma}_j \quad (421)$$

avec

$$d = 4 \left( \frac{n}{100} \right)^{2/9}, \quad \hat{\sigma}_j = \frac{1}{n-1} \sum_{t=j+2}^n g_t(\hat{\theta}) g_{t-j}(\hat{\theta})' \quad \text{et } j = 0, \dots, d. \quad (422)$$

---

<sup>(67)</sup> Il existe d'autres formes de fonction kernel comme par exemple les fonctions kernels, de Parzen, de Tukey-Hanning et de type QS ("Quadratic Spectral") qui sont relatées dans l'article d'Andrews (1991).

Selon l'approche d'Andrews (1991),

$$\delta = 1.1447 \hat{\alpha}^{1/3} \quad (423)$$

où

$$\hat{\alpha} = \sum_{\ell=1}^L \frac{4 \hat{\rho}_{\ell}^2 \hat{\rho}_{\ell}^4}{K(1-\hat{\rho}_{\ell})^6(1+\hat{\rho}_{\ell})^2} \quad (424)$$

et

$$K = \sum_{\ell=1}^L \frac{\hat{\sigma}_{\ell}^4}{(1-\hat{\rho}_{\ell})^4} \quad (425)$$

avec  $(\hat{\rho}_{\ell}, \hat{\sigma}_{\ell})$  se référant aux valeurs estimées du paramètre autorégressif et de l'écart-type de l'erreur pour chacun des moments  $(\ell=1, \dots, L)$ .

Ces deux méthodes seront employées dans la suite pour calculer la matrice  $\tilde{S}$ .

Il a été constaté que l'utilisation de la matrice  $\tilde{S}$  entraînait un grand nombre de fois le rejet de l'hypothèse de significativité des paramètres estimés (t-Student trop faibles). Andrews et Monahan (1992) expliquent que cela provient du fait que  $\tilde{S}$  ne soit pas suffisamment lisse car les données utilisées pour sa construction sont autocorrélées. Ils proposent alors de transformer les données en bruit blanc avant de calculer  $\tilde{S}$ . Pour ce faire, ils préconisent l'utilisation d'un modèle VAR (vector autoregressive) d'ordre  $p$  <sup>(68)</sup>. Dans un souci de simplification, nous écrivons ici le modèle VAR(1) :

---

<sup>(68)</sup> VAR à 2 variables et avec 2 décalages ( $p=2$ ) :

$$\begin{cases} y_{1t} = a_1^0 + a_{11}^1 y_{1t-1} + a_{12}^1 y_{1t-2} + a_{11}^2 y_{2t-1} + a_{12}^2 y_{2t-2} + \mu_{1t} \\ y_{2t} = a_2^0 + a_{21}^1 y_{1t-1} + a_{22}^1 y_{1t-2} + a_{21}^2 y_{2t-1} + a_{22}^2 y_{2t-2} + \mu_{2t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{11}^2 \\ a_{21}^1 & a_{21}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}^1 & a_{12}^2 \\ a_{22}^1 & a_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + U_t.$$

Les erreurs  $\mu_{1t}$  et  $\mu_{2t}$  ont une espérance nulle et sont non autocorrélées.

$$g_t(\theta) = B g_{t-1}(\theta) + g_t^*(\theta) \quad (426)$$

où  $g_t(\theta)$  est un vecteur ( $L \times 1$ ),  $B$  est de format ( $L \times L$ ) et  $g_t^*(\theta)$  représente le vecteur des perturbations non autocorrélées.

Les termes de  $g_t^*(\theta)$  vont servir à construire la matrice  $\tilde{S}^*$  qui sera "recolorée" pour donner la matrice  $\tilde{S}_{pw}$  utilisée pour calculer la fonction critère et la matrice  $\text{Var}_{\hat{\theta}_{GMM}}$ , c'est à dire que

l'on a

$$\tilde{S}_{pw} = (I - \hat{B})^{-1} \tilde{S}^* (I - \hat{B}')^{-1} \quad (427)$$

où

$$\tilde{S}^* = \Omega_0 + \sum_{j=1}^b \text{ker}(j) [\Omega_j + \Omega_j'] \quad (428)$$

$$\Omega_j = \frac{1}{n} \sum_{t=j+1}^n \hat{g}_t^*(\hat{\theta}) (\hat{g}_{t-j}^*(\hat{\theta}))' \quad (429)$$

$$\hat{g}_t^*(\hat{\theta}) = g_t(\hat{\theta}) - \hat{B} g_{t-1}(\hat{\theta}). \quad (430)$$

On observe que la détermination des matrices  $\tilde{S}$  et  $\tilde{S}^*$  nécessite la connaissance au préalable de la valeur  $\hat{\theta}$  qui peut être obtenue en prenant  $W_n = I_n^{-1}$  lors de la minimisation de la fonction  $Q_n(\theta)$  avec  $I_n$  représentant la matrice identité. Selon Hansen (1982), toute matrice symétrique définie positive conduit à des estimateurs convergents. La solution trouvée suite au choix  $W_n = I_n^{-1}$  est utilisée pour calculer  $\tilde{S}$  (ou  $\tilde{S}^*$ ). De là, on forme la matrice  $W_n = \tilde{S}^{-1}$  (ou  $W_n = \tilde{S}_{pw}^{-1}$ ) qui servira à la minimisation de la fonction  $Q_n(\theta)$ . Dans ce dernier cas, la variance de l'estimateur  $\hat{\theta}$  est minimale.

### 4.3.2 Estimation du coefficient constant d'aversion relative pour le risque par la méthode des moments simulés

Dans la méthode GMM, on recherche la valeur  $\hat{\theta}$  telle que les moments estimés à l'aide de la moyenne d'échantillonnage soient les plus proches de zéro :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_t(\hat{\theta}) \approx 0. \quad (431)$$

L'approche SMM est différente de la méthode GMM au sens où l'on recherche la valeur  $\hat{\theta}$  telle que les moments estimés à partir de simulations soient les plus proches des observations :

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H \right] \approx \tilde{F}_t^m \quad (432)$$

où  $\tilde{F}_t^m$  représente le prix coté sur le marché et N correspond au nombre de simulations pour les variables  $\left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)$  et  $I_{t_m}^H$ .

Nous pouvons noter ici que l'approche SMM correspond davantage à une démarche de calibrage qu'à une procédure d'estimation. Les paramètres sont choisis de façon à ce que le prix simulé se cale sur le prix observé. Cette démarche nous semble plus appropriée pour évaluer le coefficient d'aversion relative pour le risque dans le cas des dérivés climatiques que celle de l'approche GMM. Nous avons vu lors du chapitre 2 que les prix des contrats climatiques sur l'indice cumulé des degrés-jours ne pouvaient avoir une expression analytique. L'espérance figurant dans ces prix est, le plus souvent, calculée à partir de la technique de simulation de Monte-Carlo. Il apparaît alors plus judicieux ici de rechercher la valeur du coefficient d'aversion relative pour le risque de sorte que les prix simulés des dérivés climatiques se rapprochent des cotations observées. Nous trancherons sur la question au cours de la section 4.4.2 en recourant aux deux méthodes pour estimer le paramètre d'aversion.

Dans le cas de l'approche SMM, la fonction objectif est formulée de la manière suivante :

$$\text{Min}_{\theta} Q_N(\theta) = \left( E \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H | F_t \right] - \tilde{F}_t^m \right)' W_N \left( E \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H | F_t \right] - \tilde{F}_t^m \right) \quad (433)$$

qui est approchée par

$$\text{Min}_{\theta} Q_N(\theta) = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H \right] - \tilde{F}_t^m \right)' W_N \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H \right] - \tilde{F}_t^m \right) \quad (434).$$

Posons  $k_t(\theta) = \left[ \beta^{(t_m-t)} \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)^{-\varphi} I_{t_m}^H \right] - \tilde{F}_t^m$  avec  $\theta' = (\beta \ \varphi)$ , la matrice des variances-covariances de l'erreur  $k_t(\theta)$  est donnée par :

$$\Omega_j = \frac{1}{N} \sum_{t=j+1}^N k_t(\hat{\theta}) k_{t-j}(\hat{\theta})' . \quad (435)$$

Comme pour la méthode GMM, l'estimateur  $\hat{\theta}_{SMM}$  est asymptotiquement normal :

$$n^{1/2} (\hat{\theta}_{SMM} - \theta) \rightsquigarrow N \left( 0, \text{Var}_{\hat{\theta}_{SMM}} \right) \quad (436)$$

où  $\text{Var}_{\hat{\theta}_{SMM}}$  correspond à la matrice des variances-covariances de  $\hat{\theta}_{SMM}$ .

Les procédures de calcul de la matrice  $\Omega_j$  qui ont été décrites précédemment pour la méthode GMM s'appliquent également ici à la méthode SMM. En général, le nombre de cotations  $\tilde{F}_t^m$  dont on dispose est supérieur au nombre de paramètres à estimer. En conséquence, les variables instrumentales ne sont pas nécessaires pour la mise en œuvre de la méthode SMM. Par contre, la méthodologie d'estimation requière, pour les simulations, la modélisation des



variables qui entrent dans l'expression de la condition d'Euler. Les séries temporelles sont destinées ici à estimer les paramètres des modèles pour la consommation et la température.

#### **4.4 APPLICATION DES MODELES DE VALORISATION**

L'objet de cette section est de confronter les prix fournis par les trois méthodes de valorisation. A cet effet, nous choisissons l'échantillon des prix du contrat à terme échéance mars 2005 qui comprend 23 observations des jours ouvrés pour la période 01/03/2005-31/03/2005 afin de mener le calibrage du modèle d'évaluation en l'absence d'arbitrage au cours de la première partie et du modèle C-CAPM lors de la seconde partie. La mise en place de la méthode d'évaluation actuarielle est abordée au cours de la troisième partie. Nous calculons ensuite les prix des contrats de Chicago, de Cincinnati et de New York au cours de la quatrième partie pour la période hors échantillonnage 05/03/2006-31/03/2006 durant laquelle nous disposons de cotations provenant du site du CME qui seront comparées aux prix estimés. En constatant une forte corrélation entre les températures, nous déterminerons les prix du contrat à terme climatique de Cincinnati en employant les cotations du contrat de New York et ceci afin de nous rendre compte de la marge d'erreur liée à l'emploi de contrats climatiques comme instruments de substitution lors du calibrage en l'absence de prix cotés pour un contrat à terme climatique.

##### **4.4.1 Mise en œuvre de la méthode de valorisation en l'absence d'arbitrage**

Nous déterminons dans cette partie les éléments concourant à la formation des prix par la méthode en l'absence d'arbitrage tels que la distribution risque-neutre et les prix de marché du risque.

###### **4.4.1.1 Extraction d'une distribution neutre au risque**

Nous suivons la démarche décrite au cours du chapitre 2 pour inférer une distribution neutre au risque à partir des prix des contrats à terme climatiques en réduisant la somme des carrés des écarts entre le prix théorique et le prix observé. Afin d'approcher le prix supposé du contrat à terme climatique, nous utilisons la méthode des variables antithétiques. Nous

réalisons 1000 tirages de la variable aléatoire et de son opposé sur la période 01/03/2005-31/03/2005. Ils constituent les perturbations du modèle choisi pour la température. Nous considérons ici le processus estimé d'Ornstein-Uhlenbeck avec la représentation de la variance de Benth et Šaltytė-Benth. Pour chacun des tirs de la variable aléatoire et de son opposé, nous déterminons le degré-jour chauffe et nous les cumulons sur la période de temps considérée pour former les indices  $I_{t_m, i}^{H, v1}$  et  $I_{t_m, i}^{H, v2}$  pour  $i=1, \dots, 1000$  avec  $v1$  et  $v2$  désignant la première et seconde variable antithétique. L'indice cumulé des degrés-jours est alors donné par :

$$I_{t_m, i}^H = \frac{1}{2} (I_{t_m, i}^{H, v1} + I_{t_m, i}^{H, v2}). \quad (437)$$

Le prix théorique du contrat à terme climatique est obtenu en associant à chacun des indices  $I_{t_m, i}^H$  une probabilité risque-neutre notée  $f_{Q, i}$  qui est déterminée en résolvant le problème d'optimisation suivant que nous avons introduit auparavant :

$$\text{Min}_{f_{Q, i}} \sum_{t=1}^M \left( \left( \sum_{i=1}^N I_{t_m, i}^H f_{Q, i} \right)_t - F_t^m \right)^2 + \alpha \left( \sum_{i=1}^N f_{Q, i} - 1 \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^N \max(0, -f_{Q, i})^2 + \alpha \sum_{i=1}^N (f_{Q, i}'' )^2 \quad (438)$$

où  $F(t, T_t, I_t^H) \approx \left( \sum_{i=1}^N I_{t_m, i}^H f_{Q, i} \right)_t$  constitue le prix théorique du contrat à terme climatique à l'instant  $t$ ,  $F_t^m$  correspond au prix observé en  $t$  pour  $t=1, \dots, M$ ,  $N$  représente le nombre de simulations,  $\alpha$  est le paramètre de régularisation et

$$f_{Q, i}'' \approx \frac{f_{Q, i-1} - 2f_{Q, i} + f_{Q, i+1}}{\Delta T_i^2} \approx f_{Q, i-1} - 2f_{Q, i} + f_{Q, i+1} \quad (439)$$

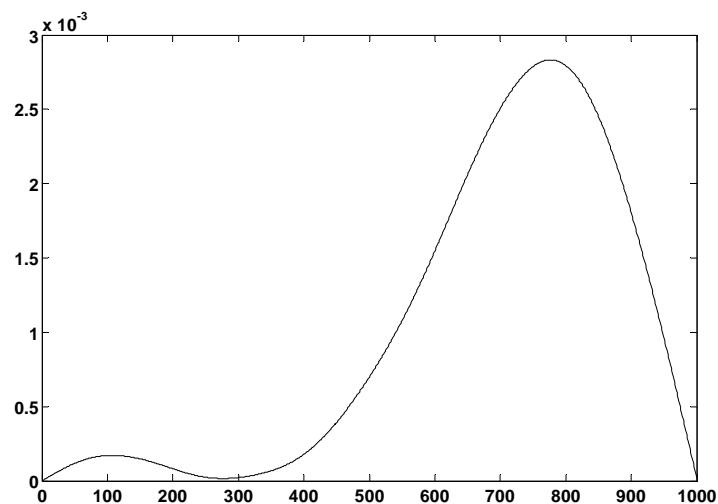
avec  $f_{Q, 0} = f_{Q, N+1} = 0$  et  $T_i$  désigne la température.

Nous soulignons que le prix hypothétique du contrat à terme pour une date  $t$  de la période fixée est déterminé en générant les trajectoires de la température pour les dates allant de  $t$  à  $M$  et en prenant pour les moments antérieurs à  $t$  les valeurs observées de la température. Nous avons tracé sur les figures 47, 50 et 51 les distributions neutres au risque issues du programme

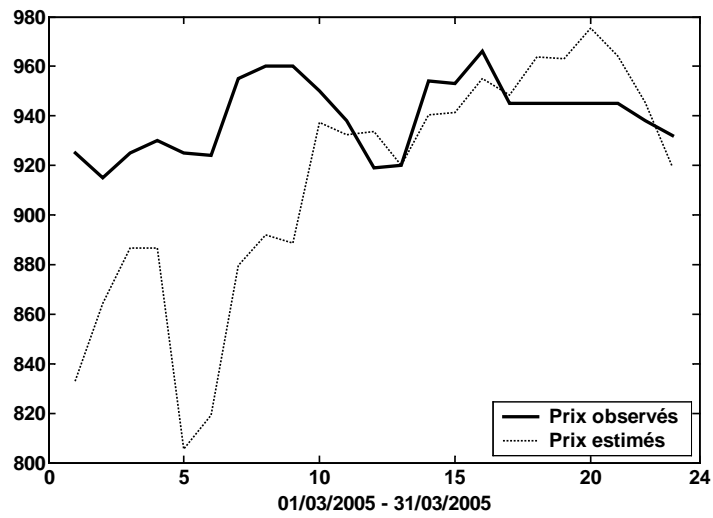
d'optimisation pour les contrats de Chicago, de Cincinnati et de New York. Nous pouvons noter la valeur très élevée du paramètre de régularisation afin d'obtenir une courbe de distribution lisse. Ce choix se fait aux dépens de l'ajustement des prix estimés aux prix observés qui n'est pas parfait comme nous pouvons le remarquer à travers la figure 48 qui montre le décalage entre le tracé des cotations observées et celui des prix estimés pour le contrat échéance mars 2005 de Chicago. En choisissant une valeur très faible pour  $\alpha$  et en relaxant les contraintes sur les probabilités (autrement nous n'avons pas la convergence de l'algorithme d'optimisation), nous parvenons à une adéquation des deux contours mais au détriment de l'aspect lisse de la courbe de distribution risque-neutre qui comprend en outre des valeurs négatives comme nous le révèle la figure 49.

### *Contrat de Chicago*

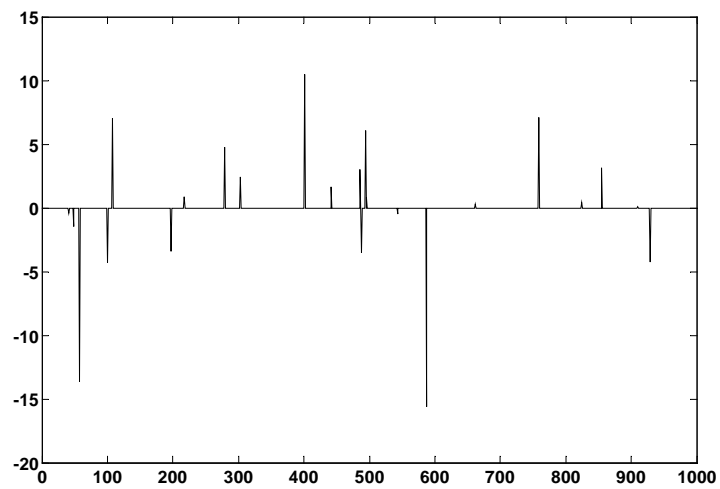
**Figure 47 :** Probabilités neutres au risque du contrat à terme échéance mars 2005 de Chicago pour  $\alpha = 1.7$  millions



**Figure 48 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 de Chicago à partir des probabilités neutres au risque extraites pour  $\alpha = 1.7$  millions

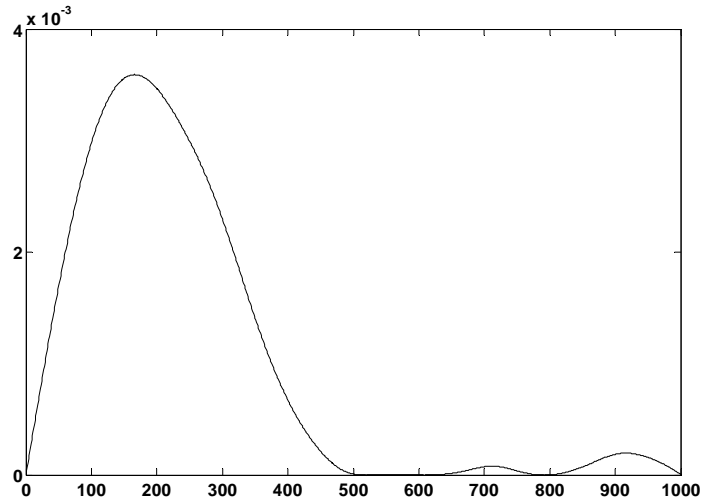


**Figure 49 :** Probabilités neutres au risque du contrat à terme échéance mars 2005 de Chicago pour  $\alpha = 0.00001$  et une optimisation non contrainte



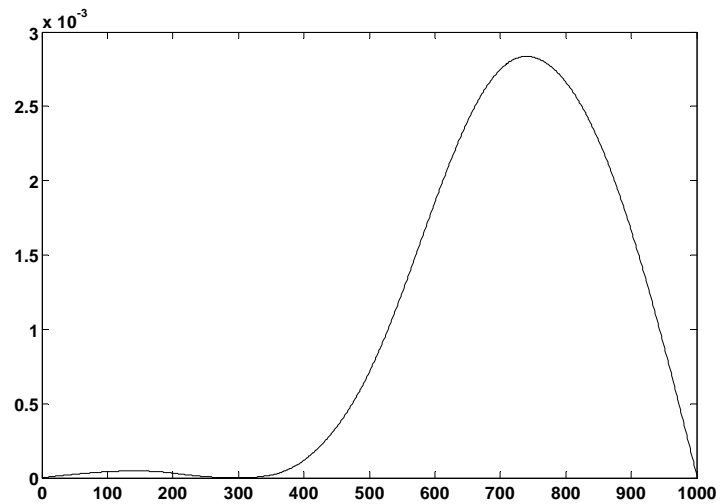
### *Contrat de Cincinnati*

**Figure 50** : Probabilités neutres au risque du contrat à terme échéance mars 2005 de Cincinnati pour  $\alpha = 1.2$  millions



### *Contrat de New York*

**Figure 51** : Probabilités neutres au risque du contrat à terme échéance mars 2005 de New York pour  $\alpha = 2$  millions



#### 4.4.1.2 Extraction des prix de marché du risque

Les prix de marché du risque, notés  $\lambda_t$ , que nous cherchons à induire des cotations des contrats à terme, minimisent la fonction objectif qui est donnée par :

$$\text{Min}_{\lambda_t} \sum_{t=1}^M \left( F(t, T_t, I_t^H) - F_t^m \right)^2 \quad (440)$$

où le prix théorique  $F(t, T_t, I_t^H)$  du contrat à terme climatique est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left( \frac{dT_t^m}{dt} + \alpha(T_t^m - T_t) - \lambda_t \sigma_t \right) \frac{\partial F}{\partial T} + \max(65 - T_t, 0) \frac{\partial F}{\partial I^H} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = 0 \quad (441)$$

avec la condition terminale  $F(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H) = I_{t_m}^H$ .

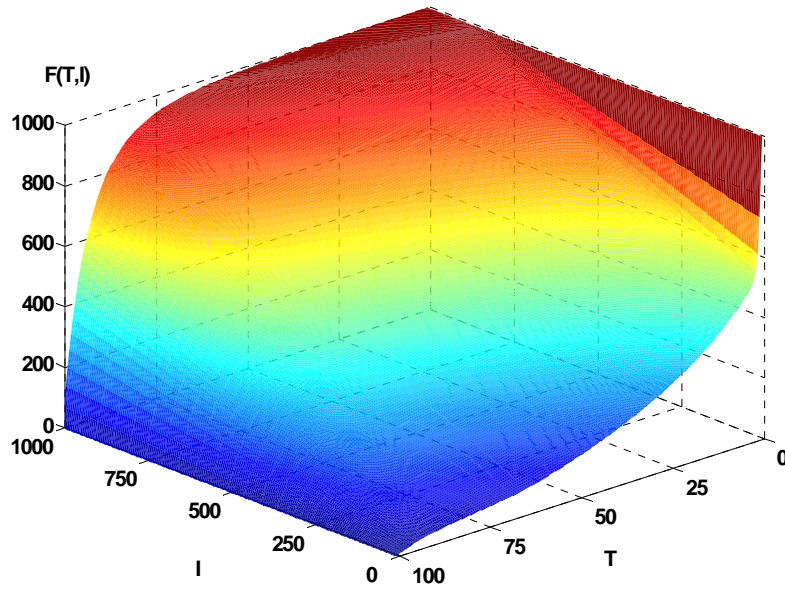
Nous résolvons cette équation en utilisant la méthode des différences finies qui, rappelons le, consiste tout d'abord à borner l'espace de résolution en définissant une grille finie de points. Nous choisissons un maillage de format  $200 \times 200 \times 31$ . Nous attribuons respectivement 0 et 100 à la valeur minimale et maximale de la température avec un espacement de 0.5 entre les points ainsi que 0 et 1000 à la borne inférieure et supérieure de l'indice des degrés-jours avec un pas de 5 et enfin 0 et 31 aux limites de la variable temps avec une distance de 1 entre les points. La valeur 31 correspond au nombre total de jours que comprend le contrat échéance mars. Les prix seront donc calculés pour  $t$  allant de 0 à 30 à l'aide du schéma implicite défini par les équations (381) à (384). Afin d'éviter l'oscillation des solutions due à l'absence du terme de diffusion associé à l'opérateur défini par rapport à l'indice dans l'équation aux dérivées partielles, nous suivons la démarche adoptée par Dewynne et Wilmott (1995) qui, comme nous l'avons vu, consiste à considérer que la valeur de l'indice demeure constante entre les dates d'observation, ce qui est vérifié dans notre cas puisque l'accumulation du degré-jour n'est effectuée qu'après l'observation de la température minimale et maximale de la journée et à résoudre de ce fait une équation de dimension une entre les dates. Etant donné que les prix ne peuvent pas subir de discontinuités au moment où la valeur de l'indice est modifiée par le cumul du degré-jour, nous devons nous assurer que la condition suivante est

respectée entre les dates :

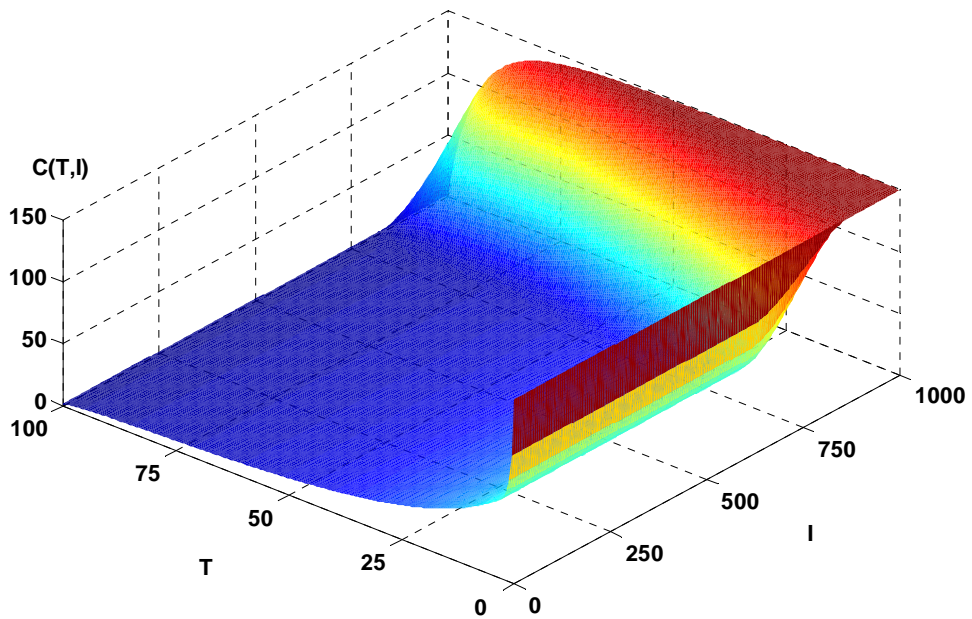
$$F(t_i, T_i^-, I_i^{H,-}) = F(t_i^+, T_i^+, I_i^{H,+}) \quad (442)$$

où  $t_i^-$  correspond au moment juste avant la date  $i$  et  $t_i^+$  le moment, juste après la date  $i$ , pour lequel la valeur de l'indice est modifiée,  $I_i^{H,-}$  représente l'indice cumulé des degrés-jours jusqu'à l'instant  $t_i^-$  et  $T_i^-$  se réfère à la température à la date  $t_i^-$ . Nous obtenons les prix  $F(t_i^+, T_i^+, I_i^{H,+})$  à l'issue de la résolution de l'équation de dimension une. Ces prix ont été calculés à l'aide des valeurs de l'indice figurant sur la grille. Pour déterminer le cours  $F(t_i, T_i^-, I_i^{H,-})$  à partir des prix obtenus  $F(t_i^+, T_i^+, I_i^{H,+})$  alors que la grandeur  $I_i^{H,-} = I_{i-1}^{H,+} = I_{i-1}^{H,-} + \max(65 - T_{i-1}^-, 0)$  ne coïncide pas avec les valeurs de l'indice apparaissant sur le quadrillage, nous recourons à l'interpolation linéaire. Les figures 52 et 53 nous indiquent que la méthode de résolution employée n'a pas engendré une oscillation des solutions compte tenu de la surface plane observée sur les deux graphiques. Les prix de marché du risque issus du programme d'optimisation, qui apparaissent sur les figures 54, 55 et 56, sont assez élevés. Il existe de ce fait un écart non négligeable entre les prix attendus et les prix cotés. Il peut s'agir d'une différence entre le modèle de température adopté par le marché et le nôtre et aussi de l'existence d'une prime de risque.

**Figure 52 :** Surface des prix (en points HDD) le 29/03/2005 du contrat à terme échéance mars 2005 de Chicago



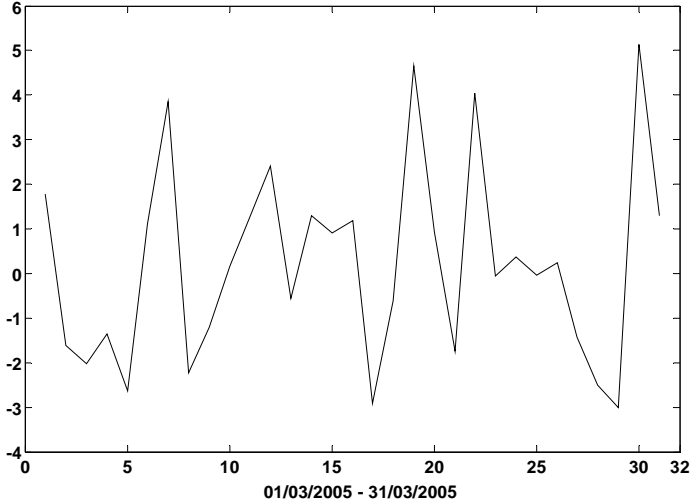
**Figure 53 :** Surface des prix (en points HDD) le 29/03/2005 de l'option d'achat échéance mars 2005 de Chicago au prix d'exercice 810 pour  $r = 1/12$





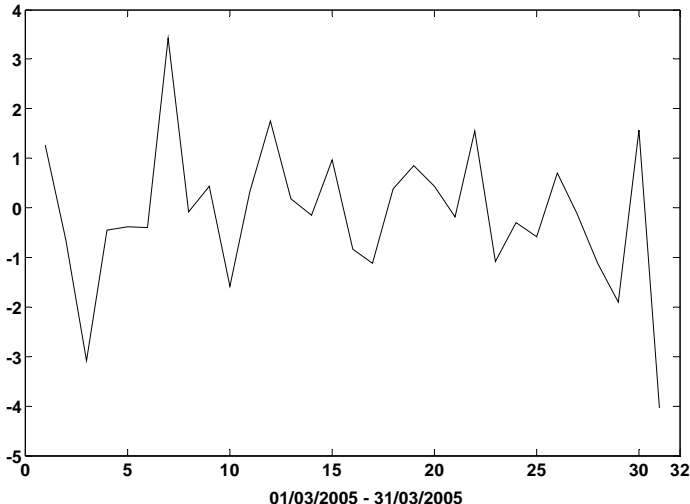
*Contrat de Chicago*

**Figure 54 :** Prix de marché du risque (en degrés Fahrenheit) du contrat à terme échéance mars 2005 de Chicago



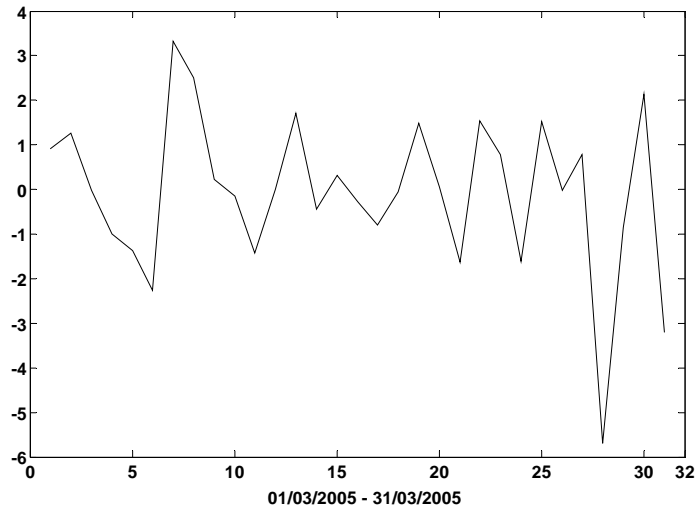
*Contrat de Cincinnati*

**Figure 55 :** Prix de marché du risque (en degrés Fahrenheit) du contrat à terme échéance mars 2005 de Cincinnati



## Contrat de New York

**Figure 56 :** Prix de marché du risque (en degré Fahrenheit) du contrat à terme échéance mars 2005 de New York



### 4.4.2 Mise en œuvre de la méthode de valorisation fondée sur la consommation

Dans le but d'estimer le coefficient d'aversion pour le risque à partir des méthodes des moments généralisés et simulés, nous utilisons la consommation des biens non durables<sup>(69)</sup> aux Etats-Unis. Ainsi, selon Ferson et Constantinides (1991), la fonction d'utilité ne dépend pas du niveau de la consommation passé. Elle est dite séparable dans le temps. L'expression de la condition d'Euler telle que nous l'avons présenté précédemment est alors satisfaite. Les données sur la consommation de la part des ménages dont nous disposons proviennent du site de la Banque Fédérale de Saint-Louis. Elles sont à prix constants, corrigées des variations saisonnières ("Seasonally Adjusted Annual Rate"), d'une fréquence mensuelle et s'étendent sur la période du 01/01/1993 au 31/12/2005. Afin d'obtenir la consommation par tête, nous divisons l'agrégat par la population totale. Etant donné que nous souhaitons calculer le prix pour chacun des jours du contrat climatique, nous recourons à l'interpolation linéaire pour transformer la consommation mensuelle en consommation journalière. Nous commençons par

<sup>(69)</sup> La consommation des biens non durables et des services est généralement utilisée dans les travaux empiriques relatifs au modèle C-CAPM. Du fait que nous constatons une plus grande corrélation de la température avec la consommation des biens non durables qu'avec la consommation des biens non durables et des services, nous avons choisi de travailler avec les premières données.

estimer le coefficient d'aversion relative pour le risque ainsi que le facteur d'actualisation au moyen de la méthode des moments généralisés. Puis nous procédons ensuite à leur estimation par la méthode des moments simulés.

#### 4.4.2.1 Estimation des paramètres par la méthode des moments généralisés

La détermination des paramètres de l'équation d'Euler par la méthode des moments généralisés portera sur la période 01/04/2004-31/12/2005 pour laquelle nous disposons de données sur les prix des contrats à terme climatiques pour les trois villes étudiées. Afin de mettre en œuvre la méthode d'estimation, nous avons besoin de préciser les variables instrumentales que nous allons utiliser. Dans le même esprit que Hansen et Singleton (1982),

nous prenons comme instruments les valeurs prises par  $c_t = \left( \frac{C_{t_m}}{C_t} \right)$  et  $f_t = \left( \frac{\tilde{F}(t_m, T_{t_m}, I_{t_m}^H)}{\tilde{F}(t, T_t, I_t^H)} \right)$  à des

dates antérieures. En l'absence de règles précises concernant le choix de ces valeurs, nous retenons quatre séries de variables. Dans la première, nous regroupons la constante et une valeur passée de  $c_t$  et de  $f_t$ . Dans la seconde, nous réunissons la constante et deux valeurs passées de  $c_t$  et de  $f_t$ . Dans la troisième, nous combinons la constante et deux valeurs retardées de  $c_t$  et dans la quatrième, nous rassemblons la constante et deux retards de  $f_t$ . Nous estimerons les paramètres en utilisant tour à tour chacune de ces catégories. Bien que Ferson et Constantinides (1991) recommandent l'usage de variables différentes des valeurs retardées du rapport des consommations et du rapport des prix afin d'éviter les biais résultant des erreurs de mesure, il est difficile dans notre situation de trouver d'autres variables qui sont à la fois corrélées à la consommation et au prix des contrats climatiques. Nous prenons pour exemple le revenu disponible qui influence davantage la consommation que le prix des dérivés climatiques. Le produit intérieur brut est certainement subordonné à la consommation et au climat mais sa fréquence annuelle ou trimestrielle nous dissuade de désagréger les observations par l'interpolation linéaire au risque d'obtenir des données journalières trop grossières. En conséquence, nous faisons le choix de conserver les quatre groupes d'instruments que nous avons précédemment défini et nous déterminons les estimateurs de façon à minimiser la fonction critère de la forme :

$$Q_n(\theta) = \bar{g}(\theta)' W_n \bar{g}(\theta) \quad (443)$$

où  $\theta' = (\beta \ \varphi)$ ,  $\bar{g}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\theta)$ ,  $g_t(\theta) = h_t(\theta) \otimes z_t$ ,  $E[g_t(\theta)] = 0$ ,  $z_t$  représente le vecteur des variables instrumentales et  $W_n$  constitue la matrice de pondération symétrique.

Nous présentons dans les tableaux 50, 51 et 52 les résultats obtenus suite à l'emploi des différents groupes d'instruments et des procédures que nous avons décrites au cours de la section 4.3 de ce chapitre.

**Tableau 50** : Estimation des paramètres de l'équation d'Euler par la méthode des moments généralisés en utilisant les données sur la consommation des biens non durables et sur les prix du contrat à terme climatique de Chicago pour la période 01/04/2004-31/12/2005

	Groupe 1 (n=437 et L=3)		Groupe 2 (n=437 et L=5)		Groupe 3 (n=437 et L=3)		Groupe 4 (n=437 et L=3)	
	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\Phi$
<b>Estimations</b>	1.0005 (291.00)	1.321 (0.11)	1.003 (421.36)	7.466 (0.82)	1.000 (355.62)	36.775 (1.50)	1.003 (132.97)	217.040 (4.07)
<b>Paramètre de troncature de Newey et West</b>	15		15		15		15	
<b>Statistique J</b>	0.0042		0.0077		0.0012		$1.47 \times 10^{-5}$	
<b>Probabilité</b>	0.1737		0.0664		0.4622		0.9361	
<b>Estimations avec préblanchiment</b>	0.999 (310.94)	16.730 (1.13)	1.0001 (331.22)	11.462 (1.15)	1.000 (356.74)	38.597 (1.48)	1.003 (130.76)	216.597 (2.37)
<b>Paramètre de troncature de Newey et West</b>	14		14		14		14	
<b>Statistique J</b>	0.0024		0.0035		0.0011		$2.36 \times 10^{-6}$	
<b>Probabilité</b>	0.3042		0.6757		0.4897		0.9744	
<b>Estimations</b>	1.0003 (307.96)	1.754 (0.16)	1.004 (474.76)	9.667 (1.17)	0.999 (370.55)	40.831 (2.02)	1.003 (130.21)	217.230 (4.10)
<b>Paramètre de troncature d'Andrews</b>	27.51		26.27		7.14		20.24	
<b>Statistique J</b>	0.0036		0.0076		0.0010		$1.80 \times 10^{-5}$	
<b>Probabilité</b>	0.2127		0.0680		0.4230		0.9293	
<b>Estimations avec préblanchiment</b>	0.999 (388.05)	26.888 (2.30)	0.999 (427.40)	24.626 (2.39)	0.999 (438.96)	43.559 (2.56)	1.003 (177.83)	216.471 (1.95)
<b>Paramètre de troncature d'Andrews</b>	2.80		3.20		2.34		3.48	
<b>Statistique J</b>	0.0029		0.0036		0.0005		$5.57 \times 10^{-7}$	
<b>Probabilité</b>	0.2623		0.6618		0.6284		0.9876	

Les groupes 1, 2, 3 et 4 comprennent les variables instrumentales. Groupe 1 : constante,  $c_{t-1}$  et  $f_{t-1}$ . Groupe 2 : constante,  $c_{t-1}$ ,  $c_{t-2}$ ,  $f_{t-1}$  et  $f_{t-2}$ . Groupe 3 : constante,  $c_{t-1}$  et  $c_{t-2}$ . Groupe 4 : constante,  $f_{t-1}$  et  $f_{t-2}$ . Le chiffre entre parenthèses désigne la t-statistique, n représente le nombre d'observations et L le nombre de moments.

**Tableau 51** : Estimation des paramètres de l'équation d'Euler par la méthode des moments généralisés en utilisant les données sur la consommation des biens non durables et sur les prix du contrat à terme climatique de Cincinnati pour la période 01/04/2004-31/12/2005

	Groupe 1 (n= 437 et L=3)		Groupe 2 (n=437 et L=5)		Groupe 3 (n=437 et L=3)		Groupe 4 (n=437 et L=3)	
	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$	B	$\varphi$
<b>Estimations</b>	0.999 (484.21)	7.054 (1.05)	0.999 (775.41)	8.193 (1.388)	0.999 (481.83)	6.145 (0.91)	1.006 (215.58)	133.320 (1.81)
<b>Paramètre de troncature de Newey et West</b>	11		11		12		15	
<b>Statistique J</b>	0.0208		0.0226		$3.87 \times 10^{-6}$		0.0015	
<b>Probabilité</b>	0.0026		0.0196		0.9672		0.4180	
<b>Estimations avec préblanchiment</b>	0.999 (480.46)	7.165 (1.08)	1.000 (884.67)	8.343 (1.44)	0.999 (481.58)	6.146 (0.92)	1.006 (201.52)	110.276 (1.33)
<b>Paramètre de troncature de Newey et West</b>	11		11		11		15	
<b>Statistique J</b>	0.0200		0.0219		$3.64 \times 10^{-6}$		0.0006	
<b>Probabilité</b>	0.0031		0.0226		0.9682		0.6015	
<b>Estimations</b>	1.000 (507.30)	6.681 (1.14)	0.999 (668.40)	6.133 (1.24)	0.999 (521.39)	6.167 (1.19)	1.006 (209.45)	135.687 (1.87)
<b>Paramètre de troncature d'Andrews</b>	5.14		4.30		3.11		18.51	
<b>Statistique J</b>	0.0280		0.0364		$3.12 \times 10^{-6}$		0.0016	
<b>Probabilité</b>	0.0005		0.0012		0.9705		0.3994	
<b>Estimations avec préblanchiment</b>	1.003 (753.58)	9.119 (2.34)	1.001 (931.53)	5.322 (1.85)	0.999 (539.24)	6.168 (1.74)	1.006 (224.23)	102.139 (1.28)
<b>Paramètre de troncature d'Andrews</b>	0.57		0.42		0.47		2.81	
<b>Statistique J</b>	0.0161		0.0601		$2.34 \times 10^{-6}$		0.0002	
<b>Probabilité</b>	0.0080		$8.65 \times 10^{-6}$		0.9745		0.7810	

Les groupes 1, 2, 3 et 4 comprennent les variables instrumentales. Groupe 1 : constante,  $c_{t-1}$  et  $f_{t-1}$ . Groupe 2 : constante,  $c_{t-1}$ ,  $c_{t-2}$ ,  $f_{t-1}$  et  $f_{t-2}$ . Groupe 3 : constante,  $c_{t-1}$  et  $c_{t-2}$ . Groupe 4 : constante,  $f_{t-1}$  et  $f_{t-2}$ . Le chiffre entre parenthèses désigne la t-statistique, n représente le nombre d'observations et L le nombre de moments.

**Tableau 52 :** Estimation des paramètres de l'équation d'Euler par la méthode des moments généralisés en utilisant les données sur la consommation des biens non durables et sur les prix du contrat à terme climatique de New York pour la période 01/04/2004-31/12/2005

	Groupe 1 (n=437 et L=3)		Groupe 2 (n=437 et L=5)		Groupe 3 (n=437 et L=3)		Groupe 4 (n=437 et L=3)	
	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$
<b>Estimations</b>	0.997 (300.37)	-2.716 (-0.37)	0.998 (564.91)	-3.010 (-0.51)	0.996 (281.64)	-9.867 (-1.20)		
<b>Paramètre de troncature de Newey et West</b>	11		11		11		Pas de convergence	
<b>Statistique J</b>	0.0113		0.0106		0.0008			
<b>Probabilité</b>	0.0261		0.2008		0.5529			
<b>Estimations avec préblanchiment</b>	0.998 (305.52)	-1.985 (-0.29)	0.997 (591.86)	-3.204 (-0.55)	0.996 (283.65)	-9.709 (-1.19)		
<b>Paramètre de troncature de Newey et West</b>	11		11		11		Pas de convergence	
<b>Statistique J</b>	0.0106		0.0101		0.0008			
<b>Probabilité</b>	0.0318		0.2201		0.5571			
<b>Estimations</b>	0.998 (319.23)	-2.988 (-0.45)	0.996 (451.97)	-5.285 (-0.87)	0.996 (305.87)	-10.198 (-1.46)		
<b>Paramètre de troncature d'Andrews</b>	5.01		4.17		1.89		Pas de convergence	
<b>Statistique J</b>	0.0164		0.0189		0.0006			
<b>Probabilité</b>	0.0074		0.0409		0.6047			
<b>Estimations avec préblanchiment</b>	1.001 (507.03)	-0.775 (-0.20)	0.996 (594.56)	-5.959 (-1.56)	0.997 (317.34)	-9.465 (-1.61)	1.003 (14.65)	191.240 (0.13)
<b>Paramètre de troncature d'Andrews</b>	0.96		0.38		0.20		3.75	
<b>Statistique J</b>	0.0086		0.0629		0.0005		$2.42 \times 10^{-5}$	
<b>Probabilité</b>	0.0486		$4.65 \times 10^{-6}$		0.6268		0.9180	

Les groupes 1, 2, 3 et 4 comprennent les variables instrumentales. Groupe 1 : constante,  $c_{t-1}$  et  $f_{t-1}$ . Groupe 2 : constante,  $c_{t-1}$ ,  $c_{t-2}$ ,  $f_{t-1}$  et  $f_{t-2}$ . Groupe 3 : constante,  $c_{t-1}$  et  $c_{t-2}$ . Groupe 4 : constante,  $f_{t-1}$  et  $f_{t-2}$ . Le chiffre entre parenthèses désigne la t-statistique, n représente le nombre d'observations et L le nombre de moments.

Nous observons que la valeur estimée du facteur d'actualisation est significative et proche de 1 ce qui est conforme à nos attentes. En revanche, la valeur du coefficient d'aversion relative pour le risque n'est pas stable et est généralement non significative. En effet, nous constatons qu'elle varie beaucoup d'un groupe d'instruments à un autre et dans une moindre mesure d'un paramètre de troncature à un autre. Elle se révèle très élevée pour le groupe 4 qui n'a pas permis dans le cas des prix de New York une convergence de l'algorithme d'optimisation. Par ailleurs, elle est négative pour les cotations de New York. Nous pouvons remarquer que malgré la non significativité des coefficients estimés, ils ont néanmoins donné lieu dans certains cas à un ajustement qui apparaît très correct compte tenu de la valeur largement au-dessus de 5% de la probabilité associée à la statistique J et ceci notamment pour les groupes 3 et 4 pour lesquels nous obtenons, dans la grande majorité, des coefficients estimés et des probabilités les plus élevés. La faiblesse des ratios de Student peut s'expliquer par la non régularité du spectre de la variable  $g_t(\theta)$  due à l'autocorrélation, ce qui a pour conséquence une variance élevée des coefficients estimés. Afin de lisser le spectre, nous avons vu qu'Andrews et Monahan (1992) ont suggéré l'utilisation du préblanchiment (ou "prewhitening") des erreurs  $g_t(\theta)$ . Comme nous pouvons le voir à travers les résultats fournis, la procédure fait augmenter en effet dans l'ensemble les t de Student et les valeurs estimées ainsi que la probabilité se rapportant à la statistique J. Nous analyserons dans les prochaines parties les prix issus de l'emploi de ces estimations pour évaluer les dérivés climatiques à partir du modèle C-CAPM.

#### 4.4.2.2 Estimation des paramètres par la méthode des moments simulés

A la différence de la précédente approche, nous estimons ici les paramètres de l'équation d'Euler seulement sur la base des prix cotés des contrats de mars 2005. Il nous faut en revanche utiliser les données sur l'ensemble de la période 01/01/1993-31/12/2005 pour déterminer les valeurs des coefficients du modèle de la consommation et de la température. Etant donné que nous avons déjà accompli cette tâche pour la température, nous étudions ici uniquement l'estimation des paramètres de la représentation suivante de la consommation (par tête) suggérée par Cao et Wei :

$$\ln C_t = a_0 + a_1 \ln C_{t-1} + \rho \varepsilon_t + \sqrt{1-\rho^2} v_t \quad (444)$$



où  $a_1 \leq 1$ ,  $v_t = \sigma_v \tilde{v}_t$  est un bruit blanc qui est indépendant de l'aléa  $\varepsilon_t$  de la température,  $\tilde{v}_t \sim \text{iid}(0,1)$  et  $\rho$  désigne le coefficient de corrélation entre la consommation et la température. L'innovation  $\varepsilon_t$  est approchée en utilisant les résidus  $\hat{\varepsilon}_t$  issus du modèle estimé pour la température. Du fait que les résidus du processus d'Ornstein-Uhlenbeck soient autocorrélés, nous n'emploierons que les erreurs estimées de la spécification ARMA. Au vu des résultats des estimations reportés dans le tableau 53, la consommation des biens non durables n'est pas corrélée à la température puisque le  $t$  de Student associé à la valeur estimée du coefficient de corrélation est inférieur à  $|1.96|$ . En utilisant les données mensuelles sur la consommation et en agrégeant les observations de la température, nous parvenons à nouveau à la même conclusion. Ce résultat, qui est contraire à la corrélation observée par Cao et Wei (2004), s'explique par le fait que les auteurs ont étudié la dépendance entre la moyenne des températures de cinq villes américaines et la consommation totale des biens et services aux Etats-Unis alors que nous n'avons considéré que la température des villes prises individuellement et nous l'avons comparé à la consommation des biens non durables qui au lieu de concerner uniquement les villes de Chicago, de Cincinnati et de New York porte sur l'ensemble du territoire américain. Il existe des données sur la consommation des ménages dans chacun des Etats américains mais leur fréquence annuelle ne nous permet pas de désagréger les observations pour obtenir des séries journalières qui seraient trop imprécises. Richards, Manfredo et Sanders (2004) qui ont travaillé sur les données annuelles relatives à la température et à la consommation de la ville de Fresno en Californie mettent en évidence un lien significatif entre l'agrégat et la variable climatique. De ce fait, et parce les cotations des contrats à terme climatiques que nous observerons dans les prochaines parties révéleront un écart par rapport aux prix espérés qui peut s'assimiler à une prime de risque, nous conservons la relation (444) pour simuler les trajectoires de la consommation ainsi que l'hypothèse selon laquelle le coefficient d'aversion relative pour le risque est non nul. Nous déterminons les estimateurs de la méthode des moments simulés par la minimisation de la fonction perte suivante :

$$Q_n(\theta) = \bar{k}(\theta)' W_N \bar{k}(\theta) \quad (445)$$

$$\text{où } \bar{k}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N k_t(\theta), \quad k_t(\theta) = \left[ \beta^{(t_m-t)} e^{-\varphi(\ln C_{t_m} - \ln C_t)} I_{t_m}^H \right] - \tilde{F}_t^m \text{ et } E[k_t(\theta)] = 0.$$

L'utilisation de la relation (444) a pour effet, comme en rend compte le tableau 54, un coefficient estimé d'aversion relative pour le risque qui est grand afin d'ajuster le prix estimé à la cotation observée compte tenu de la faible valeur du coefficient de corrélation qui apparaît dans l'équation de la consommation. Les estimations procurées par la méthode des moments simulés se révèlent plus élevées que celles provenant de la méthode des moments généralisés (hors groupe 4) car la consommation simulée est moins volatile que celle observée, ce qui entraîne un rapport des consommations qui est plus petit dans le cas de la méthode des moments simulés que dans le cas de la méthode des moments généralisés. Il en résulte alors une valeur importante pour le coefficient d'aversion afin de réduire le niveau du prix estimé.

**Tableau 53** : Estimation des paramètres de l'équation logarithmique de la consommation des biens non durables pour la période 01/01/1993 - 31/12/2005

	Utilisation des résidus du processus AR(3) de la température de Chicago	Utilisation des résidus du processus AR(3) de la température de Cincinnati	Utilisation des résidus du processus AR(5) de la température de New York
$a_0$	-0.0017 (-5.26)	-0.0017 (-5.26)	-0.0017 (-5.24)
$a_1$	1.0002 (26902.30)	1.0002 (26903.44)	1.0002 (26882.24)
$\rho$	$5.78 \times 10^{-7}$ (1.08)	$6.70 \times 10^{-7}$ (1.24)	$8.80 \times 10^{-8}$ (0.14)
$\sigma_v^{(70)}$	0.0002	0.0002	0.0002

Le nombre entre parenthèses désigne la t-statistique.

---

<sup>(70)</sup>  $\hat{\sigma}_v = \frac{\hat{\sigma}_e}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}$  où  $\hat{\sigma}_e$  correspond à l'écart-type estimé de l'erreur estimée  $e_t = \ln C_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \ln C_{t-1} + \hat{\rho} \hat{\varepsilon}_t)$ .

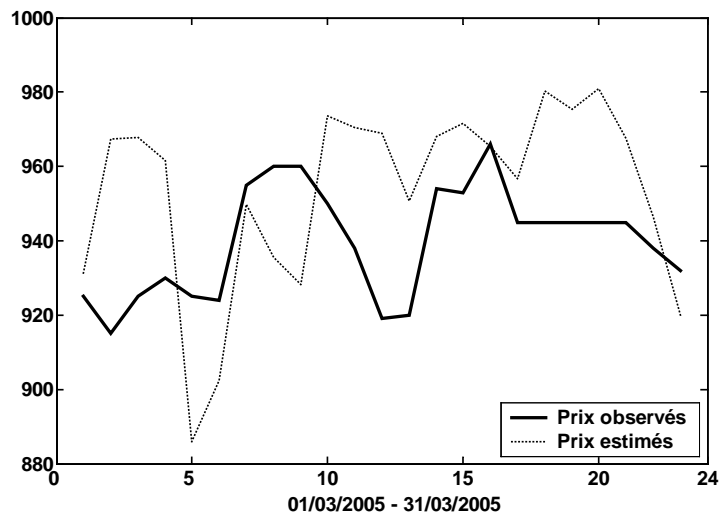
**Tableau 54 :** Estimation des paramètres de l'équation d'Euler par la méthode des moments simulés en générant 2000 tirs pour la consommation et la température de Chicago pour la période 01/03/2005-31/03/2005

	Méthode des moments simulés					
	Chicago		Cincinnati		New York	
	N=2000 et L=23		N=2000 et L=23		N=2000 et L=23	
	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\varphi$	$\beta$	$\Phi$
<b>Estimations</b>	1.010 (454.79)	49.974 (1.85)	1.004 (437.09)	20.033 (0.72)	1.004 (712.93)	14.937 (0.97)
<b>Paramètre de troncature de Newey et West</b>	9		2		10	
<b>Statistique J</b>	199.5570		657.3639		180.7557	
<b>Probabilité</b>	0.00		0.00		0.00	
<b>Estimations</b>	1.010 (456.25)	49.974 (1.85)	1.004 (438.48)	19.972 (0.72)	1.004 (692.06)	14.945 (0.94)
<b>Paramètre de troncature D'Andrews</b>	8		3		4	
<b>Statistique J</b>	221.5898		494.8851		393.5748	
<b>Probabilité</b>	0.00		0.00		0.00	

Le chiffre entre parenthèses désigne la t-statistique, N représente le nombre de simulations et L le nombre de moments.

Nous remarquons que la probabilité se rattachant à la statistique J n'indique pas ici une parfaite adéquation entre les prix estimés et les prix cotés pour les estimations obtenues ce qui est confirmé par la figure 57 reproduisant le tracé des deux prix.

**Figure 57 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode des moments simulés et de l'ensemble des tirs utilisé pour l'optimisation



Nous pouvons attribuer ce résultat à la mise en œuvre en deux étapes de la méthode des moments simulés qui est moins efficace que l'implémentation itérative de la méthode des moments généralisés. Dans le cas de la procédure en deux étapes et pour un ensemble de tirs réalisés concernant la consommation et la température, nous avons tout d'abord estimé les paramètres en nous servant de la matrice identité comme matrice de pondération puis nous avons utilisé les valeurs obtenues pour construire la matrice des poids optimale qui nous a permis de déduire les estimateurs de la méthode des moments simulés. En ce qui concerne l'approche itérative, elle consiste également à récupérer les valeurs estimées des paramètres suite à l'emploi de la matrice identité pour établir la matrice des poids optimale. Les coefficients estimés issus de l'utilisation de la matrice efficiente servent ensuite à calculer une nouvelle matrice des poids optimale. Cette opération se répète ainsi jusqu'à la stabilité des coefficients estimés.

#### 4.4.3 Mise en œuvre de la méthode de valorisation actuarielle

Nous recourons à la méthode des variable antithétiques pour déterminer les prix actuariels. La trajectoire de la température est donnée par la succession de 5000 tirages de la variable aléatoire et de son opposé qui représentent les aléas du processus estimé ARMA doté du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth. Pour chacun de ces tirages, nous calculons le degré-jour et nous les cumulons sur la période de temps considérée afin d'obtenir les indices  $I_{t_m,i}^{H,v1}$  et  $I_{t_m,i}^{H,v2}$  pour  $i=1,\dots, 5000$  avec  $v1$  et  $v2$  signifiant la première et seconde variable antithétique. Le prix actuariel à la date  $t$  du contrat à terme et de l'option d'achat sur l'indice des degrés-jours chauffe sont alors calculés respectivement comme suit :

$$F(t, T_t, I_t^H) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (I_{t_m,i}^{H,v1} + I_{t_m,i}^{H,v2}) \quad \forall t \quad (446)$$

et

$$C(t, T_t, I_t^H) = e^{-r(t_m-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [\max(I_{t_m,i}^{H,v1} - K, 0) + \max(I_{t_m,i}^{H,v2} - K, 0)] \quad \forall t \quad (447)$$

où  $N=5000$  simulations. Au temps  $t$  tel que  $0 \leq t < t_m$ , les indices  $I_{t_m,i}^{H,v1}$  et  $I_{t_m,i}^{H,v2}$  sont construits en cumulant les degrés-jours des températures observées aux dates 1 à  $t-1$  et les valeurs des températures simulées de l'instant  $t$  au dernier jour du mois calendaire.

#### 4.4.4 Evaluation des dérivés climatiques

A partir des paramètres que nous avons estimé, nous calculons les prix du contrat à terme et de l'option d'achat échéance mars 2006 concernant Chicago, Cincinnati et New York au cours de la période 05/03/2006-31/03/2006 pour laquelle nous avons à notre disposition des cotations des contrats à terme qui vont nous permettre de juger de la qualité des prévisions des prix données par les trois méthodes de valorisation. Nous commençons par étudier les résultats fournis par la méthode d'évaluation actuarielle qui vont nous montrer, d'une part, que les prix estimés s'écartent des prix observés et, d'autre part, qu'ils n'approchent pas de manière précise la valeur que réalisera effectivement l'indice cumulé à l'échéance, ce qui nous incitera à recourir aux méthodes d'évaluation en l'absence d'arbitrage et fondée sur la consommation portant sur le calibrage.

#### 4.4.4.1 Prix par la méthode actuarielle

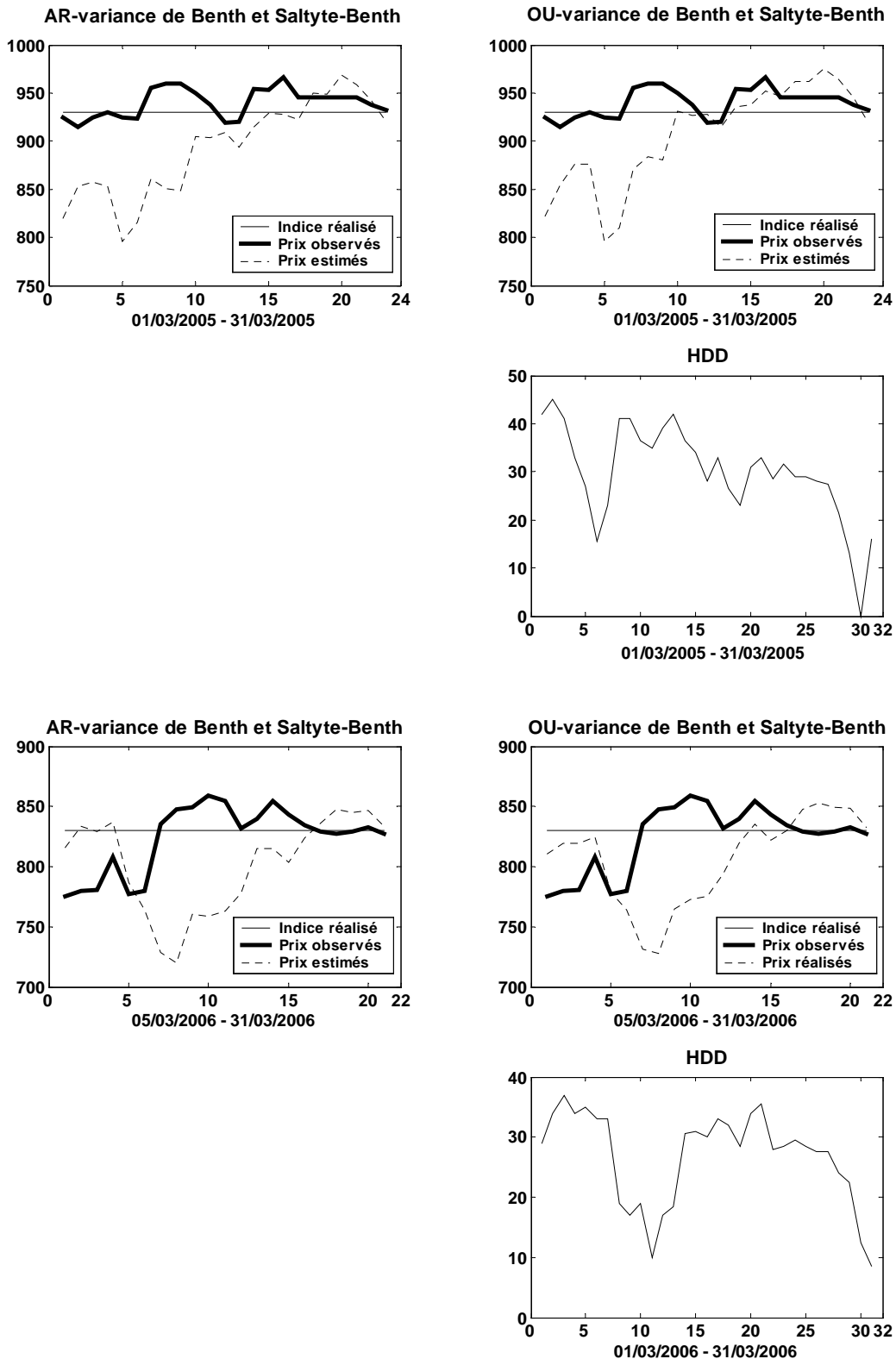
##### *Contrats climatiques de Chicago*

Nous avons reproduit sur la figure 58 le tracé des prix calculés pour le contrat à terme échéance mars 2005 afin d'observer leur évolution au cours de la période d'échantillonnage avant de procéder à leur analyse hors de cette période. Nous constatons qu'au début de la période, ils se situent largement au-dessous de la valeur de l'indice qui a atteint le niveau réel de 930 à la date d'expiration alors que les prix cotés se sont peu écartés de ce cours malgré parfois des franchissements à la hausse vers le milieu du contrat. Nous faisons le même constat pour les prix déterminés à partir des simulations du processus en temps continu. Cette sous-appréciation des prix estimés s'explique par des températures réalisées qui ont été plus basses que les moyennes du mois. En conséquence, les degrés-jours chauffe se sont trouvés être plus élevés qu'à l'accoutumé durant cette période ce qui a entraîné une valeur élevée pour l'indice observé à la date d'expiration. Nous pouvons attribuer l'écart entre le prix estimé et le cours du marché à plusieurs facteurs. Il peut s'agir d'une différence dans le modèle employé pour représenter le mouvement de la température, d'un manque de précision de nos estimations imputable notamment à un historique des températures qui n'a pas été suffisamment important et de l'ajout d'une prime de risque sur la valeur donnée par la méthode d'évaluation actuarielle, puisque nous avons vu que le marché était incomplet dans le cas des dérivés climatiques. Sur la même figure 58, les prix obtenus en dehors de la période d'échantillonnage (mars 2006) font état des prévisions à trois mois qui sous-estiment fortement la valeur de l'indice au milieu du contrat et la sur-évaluent vers la fin. En les rapprochant de l'évolution des HDD, nous constatons que le comportement des prix estimés est très sensible à l'évolution des degrés-jours surtout pour le début et la mi-période car les degrés-jours qui constituent le prix estimé initial ne sont issus que des simulations de la température. Ils sont ensuite substitués au fil des dates par les degrés-jours observés. Ainsi, lorsque ces derniers ont diminué, l'indice cumulé calculé baisse et le prix estimé décroît en conséquence et inversement. Nous pouvons envisager de gommer cet effet en prenant les moyennes des températures calculées pour le mois de mars sur la base des treize années. On lisse ainsi le tracé des degrés-jours. L'inconvénient de la méthode est qu'elle produit des prix qui s'établissent à un cours moyen et par conséquent, ils se retrouvent une année sur l'autre très au-dessus ou très en dessous du niveau réalisé de l'indice comme nous le révèle la figure 59. La solution envisagée ne donne donc pas satisfaction. En observant les cotations de mars

2006, nous remarquons qu'elles ont un mouvement inverse par rapport à celui des prix estimés. Elles sont supérieures à la valeur réelle atteinte par l'indice au centre de la période et finissent par tendre vers cette valeur à l'approche de la date d'expiration. Dans son ensemble, nous pouvons dire que les prix cotés sont davantage proches de la réalisation effective de l'indice à l'échéance que les prix estimés. Les acteurs du marché semblent alors disposer de connaissances et d'informations leur permettant d'améliorer les prévisions. De ce fait, il apparaît pertinent de calibrer les modèles de valorisation par rapport aux prix cotés afin, d'une part, d'obtenir des prédictions moins dispersées et, d'autre part, de corriger les défauts de la méthode d'évaluation adoptée (par exemple, nous n'avons pas tenu compte ici des prévisions météorologiques). Nous allons voir que, généralement, la prise en compte du point de vue du marché permet en effet d'obtenir de bonnes projections. A titre indicatif, nous avons reproduit sur la figure 60 les cours de l'option d'achat échéance mars 2006 au prix d'exercice 810 donnés par la méthode actuarielle à partir, d'une part, des trajectoires du processus en temps discret et, d'autre part, des cheminements du processus en temps continu.

**Figure 58 : Contrat à terme de CHICAGO échéance mars 2005 et mars 2006**

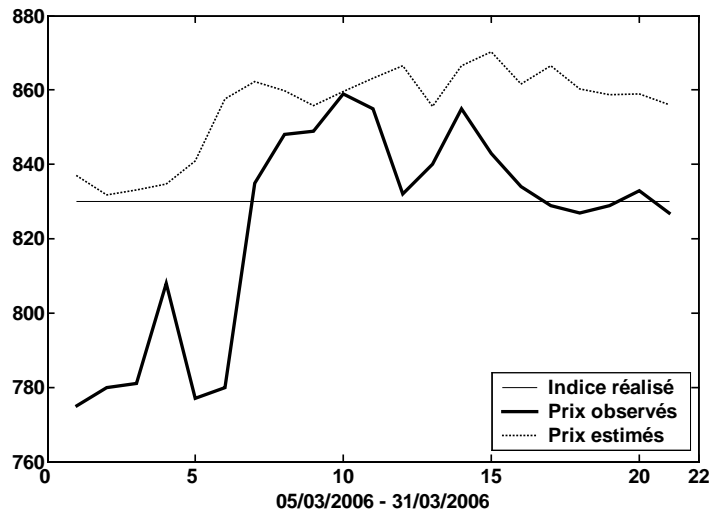
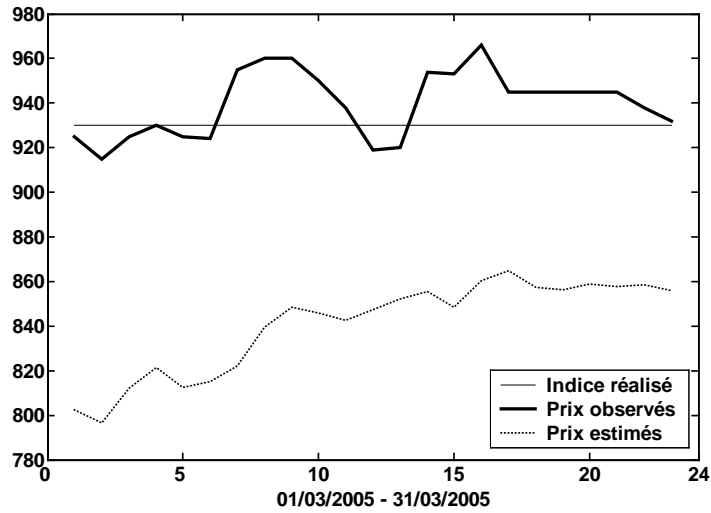
Degrés-jours chauffé (HDD) de la température de Chicago et prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) des contrats à terme échéance mars 2005 et mars 2006 de Chicago à l'aide du processus AR et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) muni du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth.





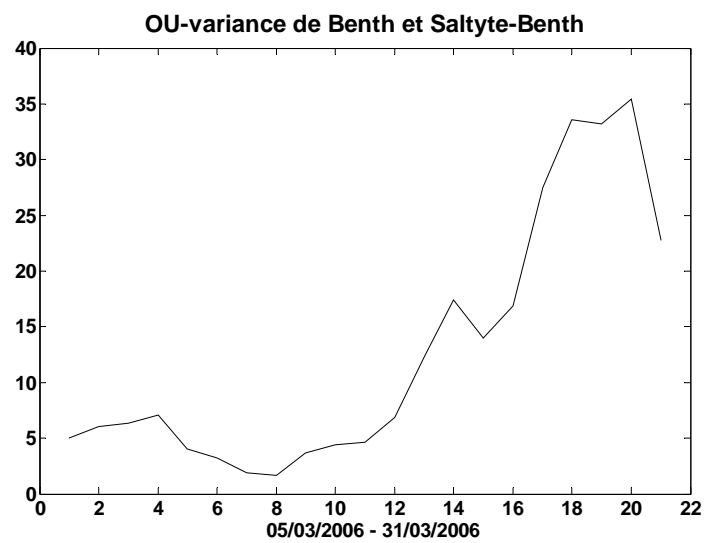
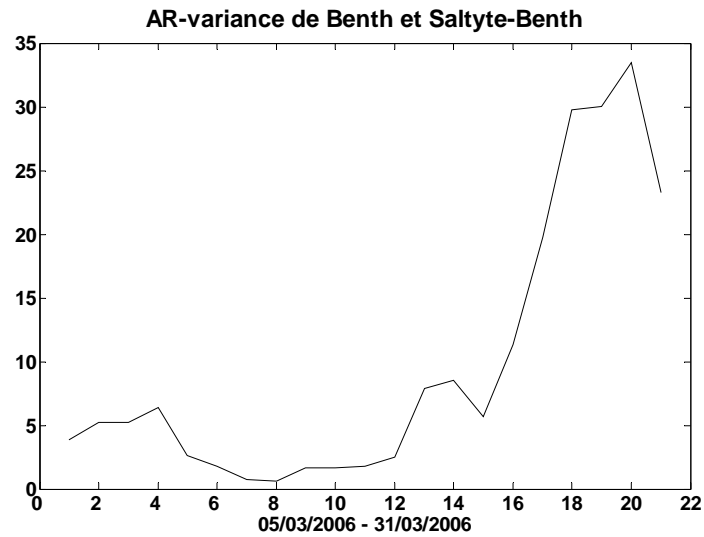
**Figure 59 : Contrat à terme de CHICAGO échéance mars 2005 et mars 2006 avec les moyennes des températures du mois**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 et mars 2006 de Chicago à l'aide des simulations du processus d'Ornstein-Uhlenbeck muni du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth pour la série des moyennes des températures.



**Figure 60 : Option d'achat de CHICAGO échéance mars 2006**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de Chicago au prix d'exercice 810 et pour  $r = 1/12$  à l'aide du processus AR et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck(OU) muni du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth.

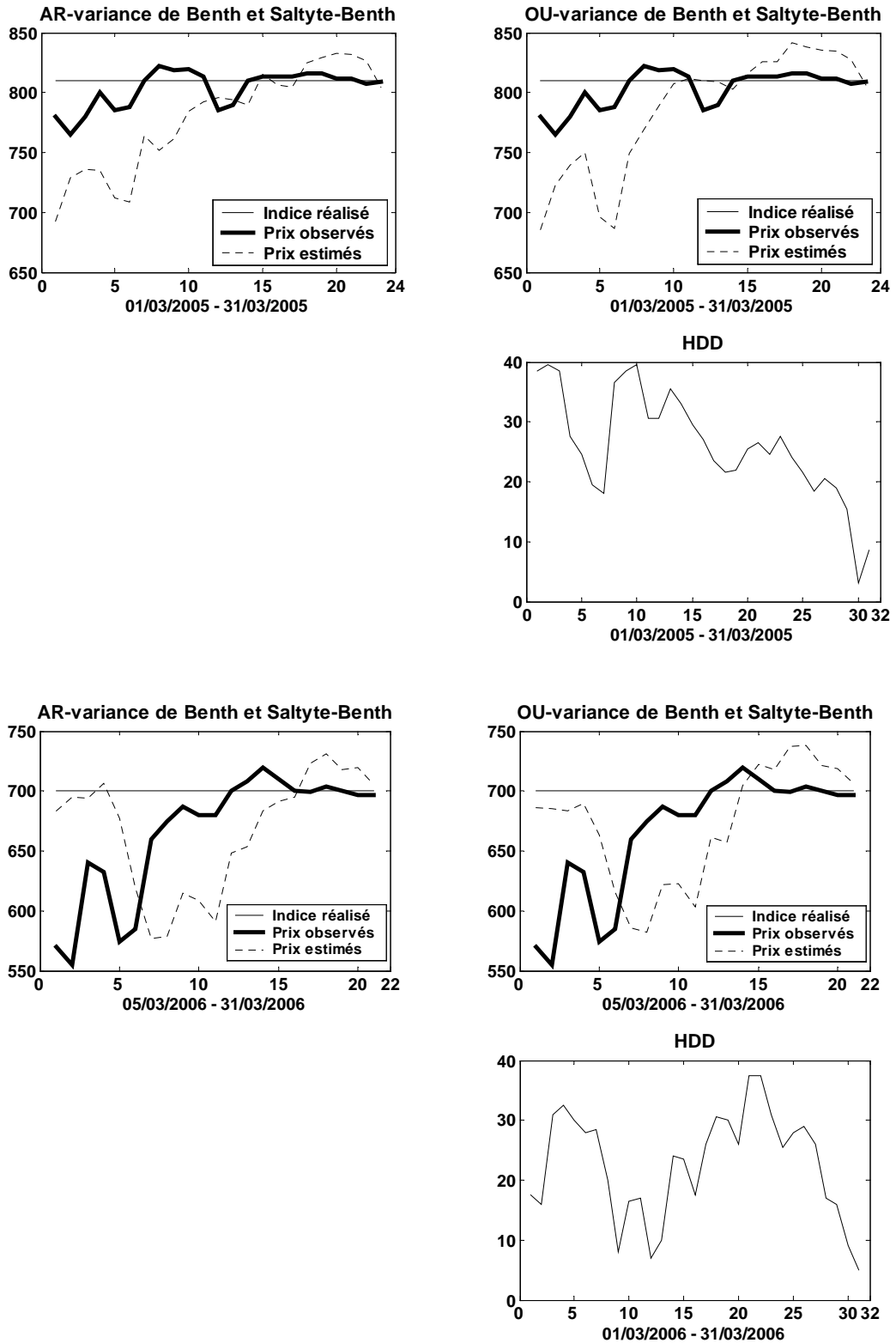


### *Contrats climatiques de Cincinnati*

La figure 61 nous indique qu'au début de la période les prix estimés pour mars 2005 par la méthode actuarielle sont très en-deçà de la grandeur effective de l'indice à l'échéance alors que les cotations s'en sont davantage approchées. Comme dans le cas du contrat de Chicago, le bas niveau des prix estimés vient des températures réalisées, qui ont été inférieures aux moyennes du mois, ce qui a occasionné un niveau réel élevé pour l'indice à la date de maturité. Les valeurs pour mars 2006 sont caractérisées par un creux à la mi-période qui résulte du comportement des degrés-jours reproduit sur la même figure 61. Les cours du marché ont, pour leur part, été fortement sous-évalués au commencement du contrat et se sont réajustés par la suite. Nous constatons ici à nouveau la capacité des prix du marché à tendre rapidement vers le vrai niveau de l'indice à la date de maturité, ce qui nous incite à considérer dans la suite l'étalonnage des modèles d'évaluation pour le contrat de Cincinnati. A titre de comparaison avec les valeurs procurées par les autres méthodes de valorisation, nous avons représenté sur la figure 62 les courbes des prix de l'option d'achat au prix d'exercice de 650 issus des processus en temps discret et en temps continu.

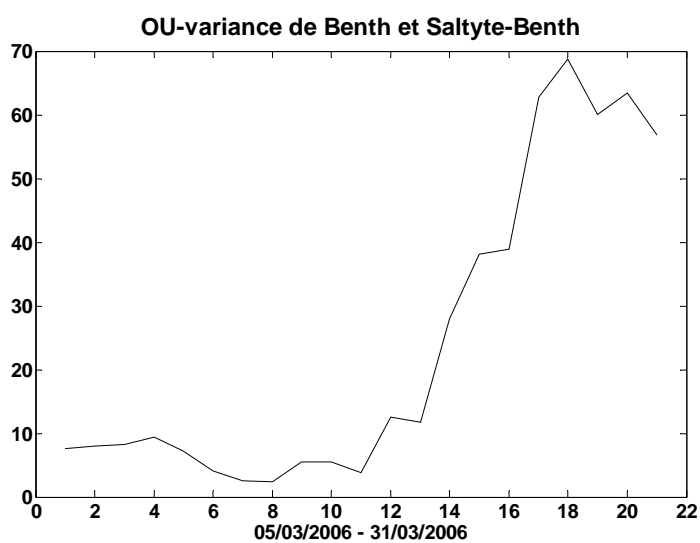
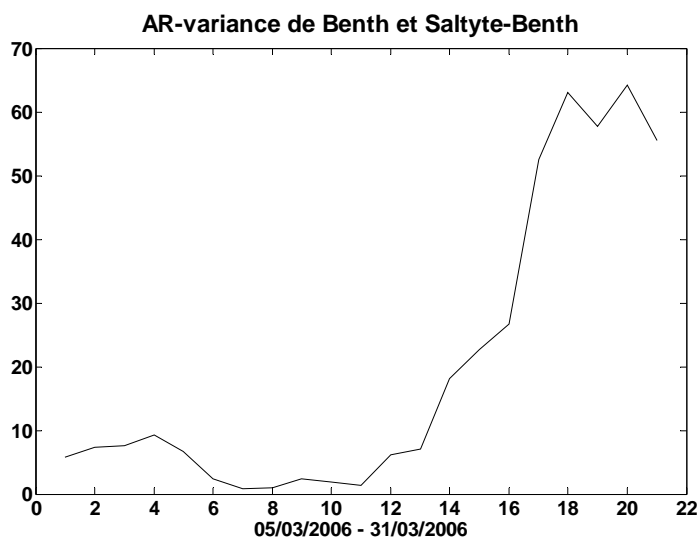
**Figure 61 : Contrat à terme de CINCINNATI échéance mars 2005 et mars 2006**

Degrés-jours chauffe (HDD) de la température de Cincinnati et prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 et mars 2006 de Cincinnati à l'aide du processus AR et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) muni du modèle de variance de Benth et Saltyte-Benth.



**Figure 62 : Option d'achat de CINCINNATI échéance mars 2006**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de Cincinnati au prix d'exercice 650 et pour  $r = 1/12$  à l'aide du processus AR et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck(OU) muni du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth.



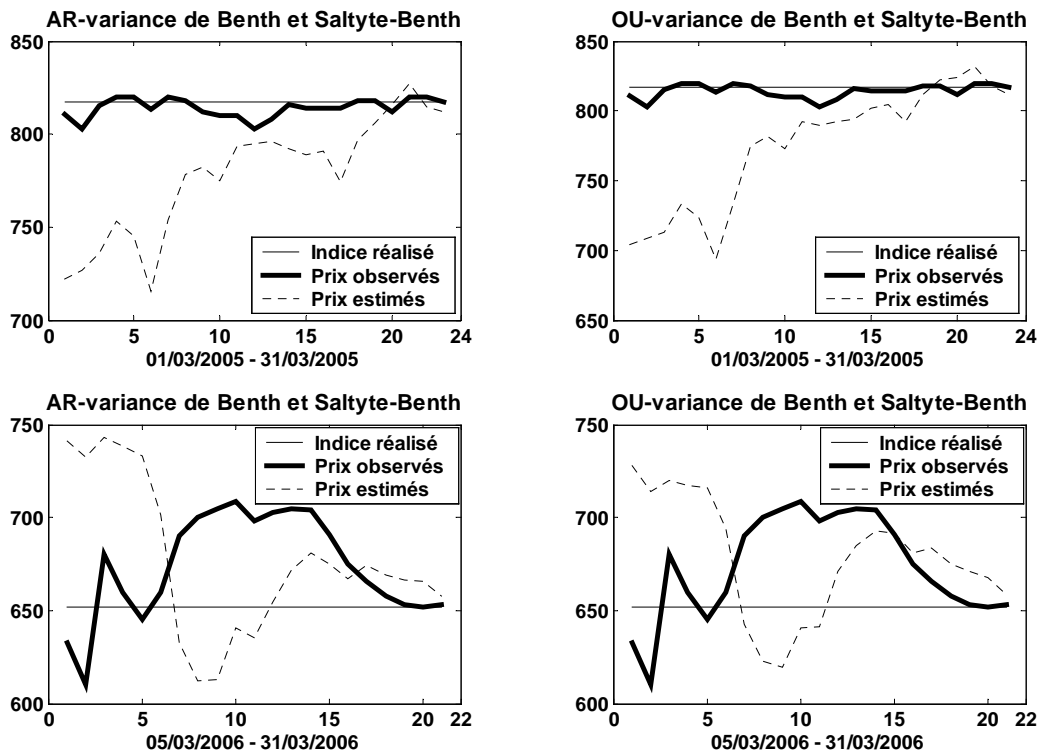
## *Contrats climatiques de New York*

Nous remarquons sur la figure 63 le niveau bas des prix estimés pour mars 2005 par rapport à la valeur réelle atteinte par l'indice des degrés-jours qui se justifie une fois de plus par des températures réalisées inférieures aux moyennes du mois. En revanche, les cours calculés pour mars 2006 mettent en évidence une sous-appréciation au milieu de la période moins marquée que pour les précédents contrats due à des degrés-jours plus faibles comme en témoigne la figure 64. Ils entraînent ainsi une diminution moins accentuée des prix estimés. Nous constatons ici et ainsi que dans les parties antérieures qu'il n'y a pas une différence marquante entre les prix issus du processus en temps discret et les cours provenant du processus en temps continu. Ils évoluent à peu de chose près de la même façon. En calculant les critères de comparaison RMSE et MAE reportés dans le tableau 55 pour les périodes hors échantillon (01/01/2006-31/03/2006 et 01/03/2006-31/03/2006), nous nous apercevons que les performances du processus en temps discret sont, généralement, inférieures à celles du processus en temps continu sauf pour la température de Cincinnati durant l'intervalle de temps 01/01/2006-31/03/2006. Il apparaît alors que pour certains laps de temps les résultats du processus ARMA ne surpassent pas ceux du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Cela provient de l'aspect non lisse de la composante cyclique du modèle de Cao et Wei. En effet, durant la période d'échantillonnage, les variations de l'élément périodique sont déterminées à partir de la série des températures passées, ce qui a engendré des critères de choix faibles car les fluctuations estimées étaient issues des réalisations passées. Mais en dehors de la période d'échantillonnage, ces variations s'écartent davantage du niveau de la température observée que les oscillations de la fonction circulaire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck car les changements de la variable climatique s'avèrent être très différents de leur structure passée. L'avantage de la fonction circulaire est qu'elle donne lieu à une courbe des valeurs d'équilibre qui est lisse et qui ne comporte pas de variations "parasites". D'où des écarts moins importants entre les valeurs moyennes et les niveaux de la température en dehors de la période de l'échantillon. Si nous considérons, à la place du modèle additif de Cao et Wei, la décomposition de Campbell et Diebold, nous apercevons dans le tableau 55 que le processus ARMA devient meilleur que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dehors de la période d'échantillonnage (sauf pour la température de Chicago au cours de la période 01/03/2006 – 31/03/2006). La structure autorégressive d'un ordre supérieur à 1 du processus en temps discret l'emporte donc sur le modèle à 1 retard du processus en temps continu. Les prix que

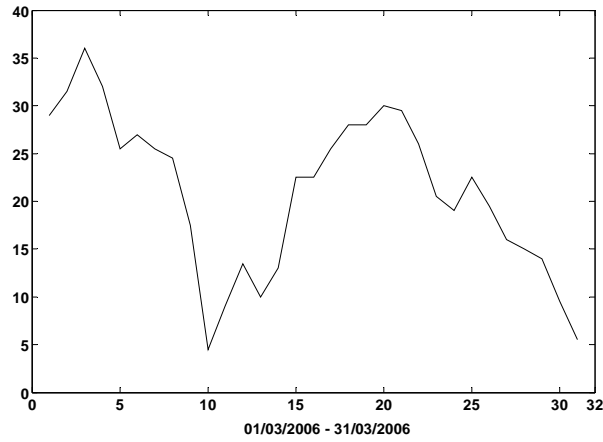
procure le processus ARMA pourvu du modèle additif de Campbell et Diebold sont très proches de ceux issus du processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme nous le montre la figure 65.

**Figure 63 : Contrat à terme de NEW YORK échéance mars 2005 et mars 2006**

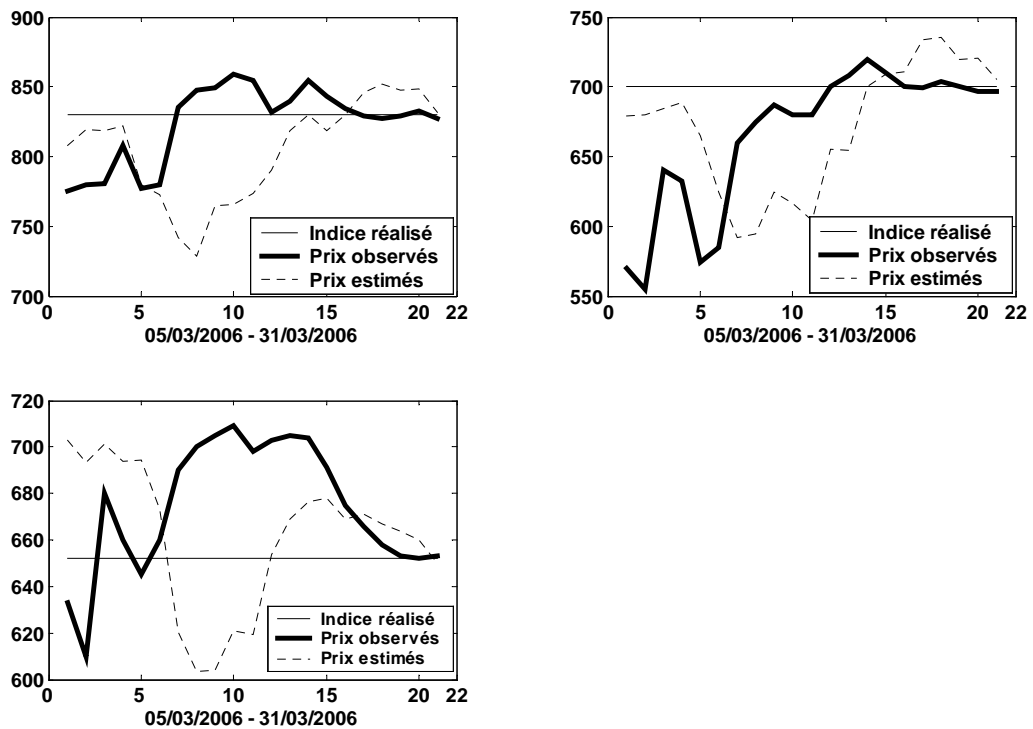
Prix actuariels estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 et mars 2006 de New York à l'aide du processus AR et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) muni du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth.



**Figure 64 :** Degrés-jours chauffe (HDD) de la température de New York pour le mois de mars 2006



**Figure 65 :** Contrats à terme de CHICAGO, CINCINNATI et NEW YORK échéance mars 2006  
La température est simulée à l'aide du processus AR comprenant la décomposition additive de Campbell et Diebold et muni du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth.





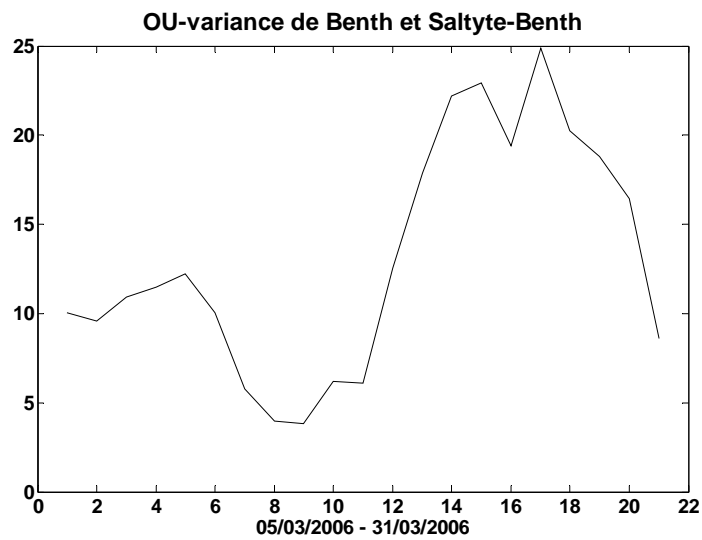
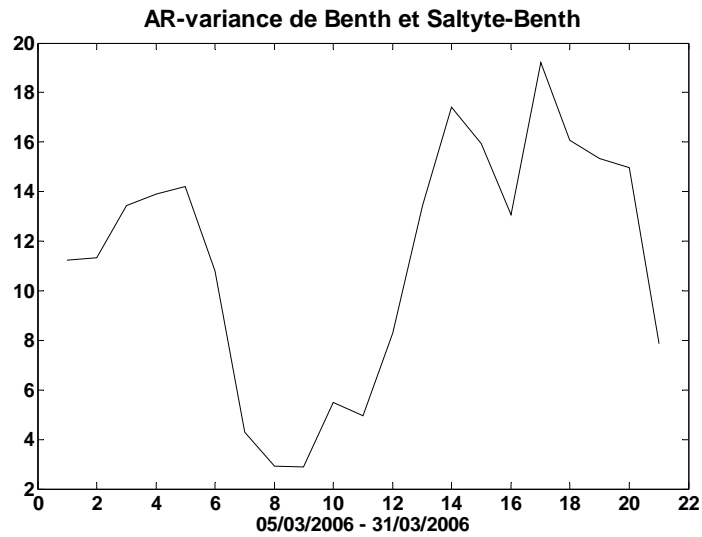
**Tableau 55 :** Critères de comparaison des modèles en temps discret et en temps continu hors de la période d'échantillonnage (01/01/2006 – 31/03/2006)

<b>Processus ARMA (modèle additif de Cao et Wei)</b>						
	<b>01/01/2006 – 31/03/2006</b>	<b>01/03/2006 – 31/03/2006</b>	<b>01/01/2006 – 31/03/2006</b>	<b>01/03/2006 – 31/03/2006</b>	<b>01/01/2006 – 31/03/2006</b>	<b>01/03/2006 – 31/03/2006</b>
	<b>TCHSTATCAO</b>		<b>TCINSTATCAO</b>		<b>TNYSTATCAO</b>	
<b>RMSE</b>	5.7259	5.0510	7.1139	6.2026	6.3651	4.7327
<b>MAE</b>	4.1809	3.8216	5.6683	4.9221	4.9386	3.4966
<b>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck</b>						
	<b>TCHSTAT</b>		<b>TCINSTAT</b>		<b>TNYSTAT</b>	
<b>RMSE</b>	5.7057	4.5928	7.2592	6.1202	6.1924	4.4648
<b>MAE</b>	4.1210	3.3818	5.7426	4.8880	4.7706	3.3151
<b>Processus ARMA (modèle additif de Campbell et Diebold)</b>						
	<b>TCHSTATCAO</b>		<b>TCINSTATCAO</b>		<b>TNYSTATCAO</b>	
<b>RMSE</b>	5.6110	4.7266	6.9985	5.8643	6.0410	4.3834
<b>MAE</b>	4.1372	3.5584	5.5750	4.7145	4.6608	3.3661

Nous pouvons observer sur la figure 63 que les prix cotés de mars 2005 sont peu éloignés de la réalisation réelle de l'indice à l'échéance alors que les cours observés de mars 2006 se sont avérés plus hauts que le niveau de l'indice. Nous pensons que la cause de cette importante hausse vient davantage d'une mauvaise anticipation de la part des intervenants du marché que d'un surcroît substantielle de la prime de risque puisque nous ne relevons pas cet effet pour les cotations de la ville de Cincinnati qui est proche de New York et dont la température est fortement corrélée à celle de New York. Le coefficient de corrélation avoisine 0.92. En calculant la moyenne des valeurs de l'indice des degrés-jours chauffé pour les treize années d'observations dont nous disposons, nous trouvons un résultat aux alentours de 700 qui peut correspondre à la grandeur attendue par le marché. Compte tenu une fois encore de la proximité des prix cotés de mars 2005 par rapport au niveau effectivement atteint par l'indice, nous nous proposons de recourir à l'étalonnage des modèles d'évaluation en l'absence d'arbitrage et fondé sur la consommation pour évaluer les produits dérivés climatiques. Dans le but de comparer par la suite les valeurs estimées de l'option d'achat provenant des autres méthodes de valorisation, nous avons tracé sur la figure 66 le comportement des prix évalués pour le contrat de New York au prix d'exercice de 650 à partir des simulations des processus en temps continu et en temps discret.

**Figure 66 : Option d'achat de NEW YORK échéance mars 2006**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de New York au prix d'exercice 650 et pour  $r = 1/12$  à l'aide du processus AR et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck(OU) muni du modèle de variance de Benth et Šaltytė-Benth.



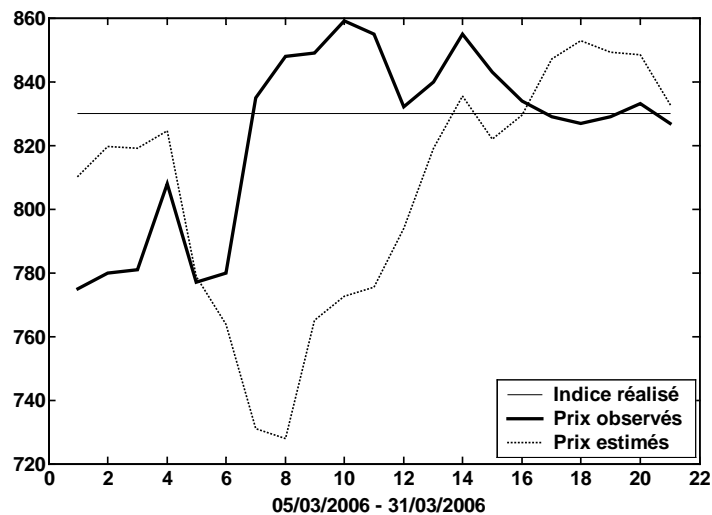
#### 4.4.4.2 Prix à partir de la distribution neutre au risque extraite

##### *Contrats climatiques de Chicago*

Au vu de la figure 67 ci-dessous, nous notons que le tracé des prix estimés en nous servant de la densité risque-neutre précédemment induite est identique à la courbe des prix déterminés par l'approche actuarielle qui apparaissait sur la figure 58 ce qui nous amène à conclure que les probabilités inférées que nous pensions être neutres au risque correspondent en fait aux probabilités réelles. Nous aboutissons à ce même résultat quelle que soit la distribution extraite pour un paramètre de régularisation grand et d'après les contraintes qui ont été fixées. L'approche par l'inférence d'une densité risque-neutre à partir du problème d'optimisation que nous avons posé semble ne pas convenir puisqu'elle nous amène à pratiquer la valorisation actuarielle.

**Figure 67 : Contrat à terme de CHICAGO échéance mars 2006**

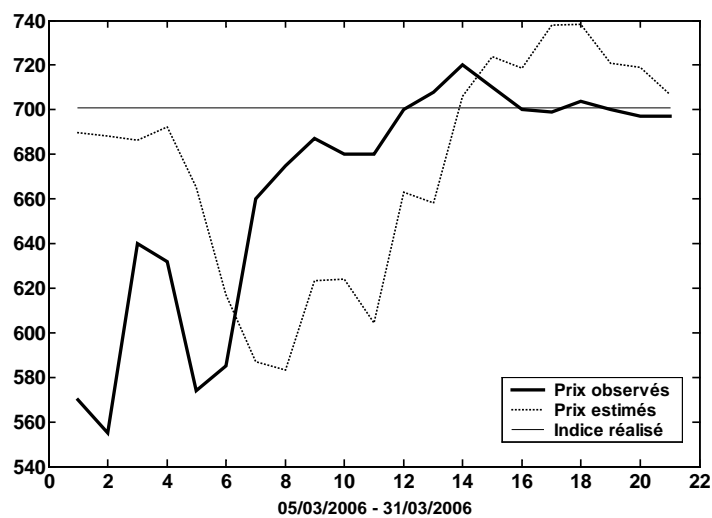
Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des probabilités neutres au risque de 2005 extraites pour  $\alpha = 1.7$  millions.



## Contrats climatiques de Cincinnati

Nous notons également ici que les probabilités déduites ne sont pas neutres au risque mais sont réelles car elles donnent lieu à une courbe des prix estimés qui est identique à celle des valeurs actuarielles.

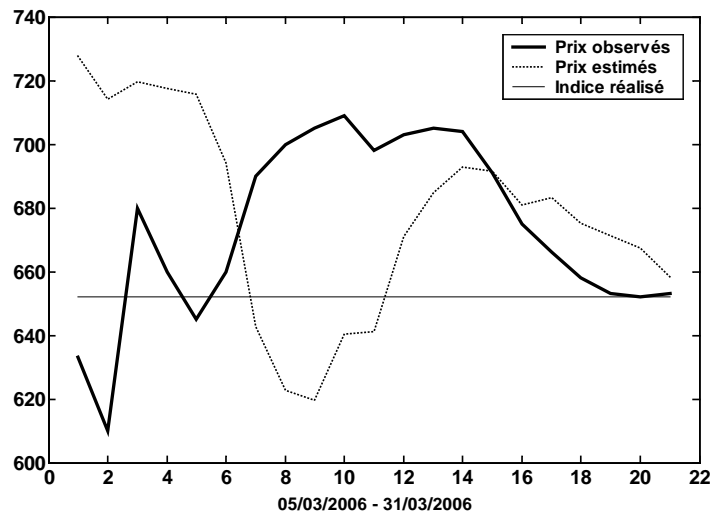
**Figure 68 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des probabilités neutres au risque de 2005 extraites pour  $\alpha = 1.2$  millions



## Contrats climatiques de New York

On retrouve sur la figure 69 la même allure de la courbe des prix que celle des valeurs actuarielles déterminées à partir des simulations du processus en temps continu. Il ne fait aucun doute que le problème d'optimisation posé ne parvient pas à inférer une densité risque-neutre. La défaillance peut venir du choix des valeurs initiales concernant les probabilités lors du démarrage de l'algorithme de recherche. Etant donné qu'il est difficile d'avoir une idée *a priori* de ces valeurs, nous leur avons attribué arbitrairement les fréquences  $1/N$  avec  $N$  correspondant au nombre de simulations. D'autres types de contraintes sont peut-être aussi à envisager afin de faire la discrimination entre les probabilités neutres au risque et les probabilités réelles. Nous considérons, à présent, la seconde façon d'évaluer les dérivés en l'absence d'arbitrage à partir du calibrage des prix de marché du risque.

**Figure 69 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de New York à partir des probabilités neutres au risque de 2005 extraites pour  $\alpha = 2$  millions



#### 4.4.4.3 Prix à partir des prix de marché du risque inférés

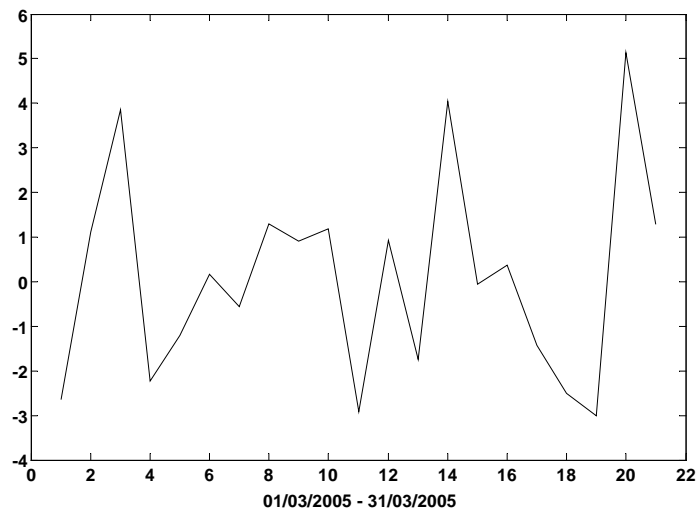
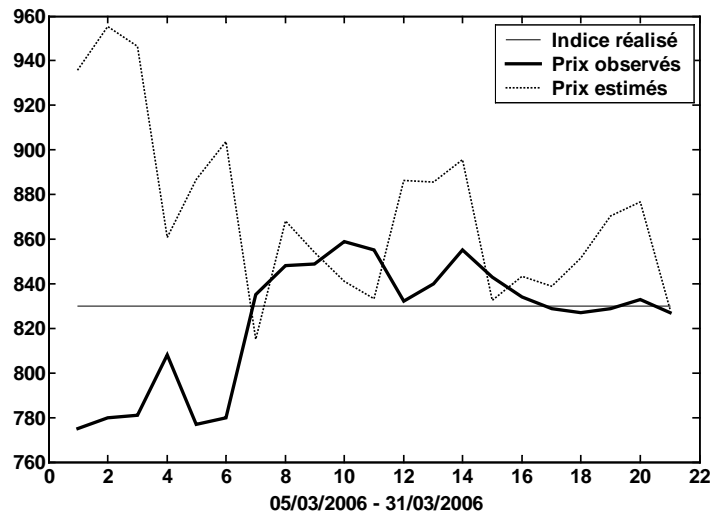
##### *Contrats climatiques de Chicago*

La figure 70 des prix calculés pour mars 2006 nous indique, qu'à la différence de la précédente approche, les prix de marché du risque inférés ont un impact sur les prévisions à 3 mois. Sur la figure 71, qui représente les cours déterminés en supposant que les prix de marché du risque valent zéro, on relève la même situation de sous-estimation par rapport au niveau observé de l'indice à l'échéance que pour les valeurs actuarielles à la mi-période du contrat de mars 2006. Nous pouvons remarquer, par la même occasion, que les cours estimés ici sont plus élevés que ceux de la méthode actuarielle alors que la supposition de prix de marché du risque nuls devrait, en théorie, nous ramener au calcul des cours actuariels. Cette différence peut se justifier par des résultats qui manquent de précision compte tenu du choix d'un maillage qui n'est pas très fin dans le but de réduire les temps de calcul. On observe sur la figure 70 que la sous-appréciation a été corrigée en utilisant les prix de marché du risque déduits des cotations de mars 2005. On note cependant que les prévisions ont tendance, cette fois, à être sur-évaluées par rapport aux cotations et au niveau réel atteint par l'indice à la date d'expiration. On peut expliquer cette sur-élévation par d'importants prix de marché du risque surtout pour les dates 3, 14 et 20. Ils proviennent du fait que les prix estimés pour mars 2005

ont été par moments très au-dessous des valeurs observées comme nous le révèle la figure 71 qui reproduit les prix déterminés en négligeant les prix de marché du risque. On remarque que les cours n'ont pu être rapprochés des cotations qu'en contrepartie d'une forte d'augmentation des prix de marché du risque qui, en réduisant le drift de la température définie sous la probabilité  $Q$ , fait accroître l'amplitude du degré-jour et de ce fait le niveau du prix calculé. Bien que la prise en compte des prix de marché du risque en 2005 ait permis de résoudre le problème de la sous-appréciation au milieu de la période, nous pouvons souligner qu'elle a toutefois donné lieu à un accroissement excessif au début du contrat et à des prix qui apparaissent volatiles comme nous le rendent compte également les cours de l'option d'achat apparaissant sur la figure 72.

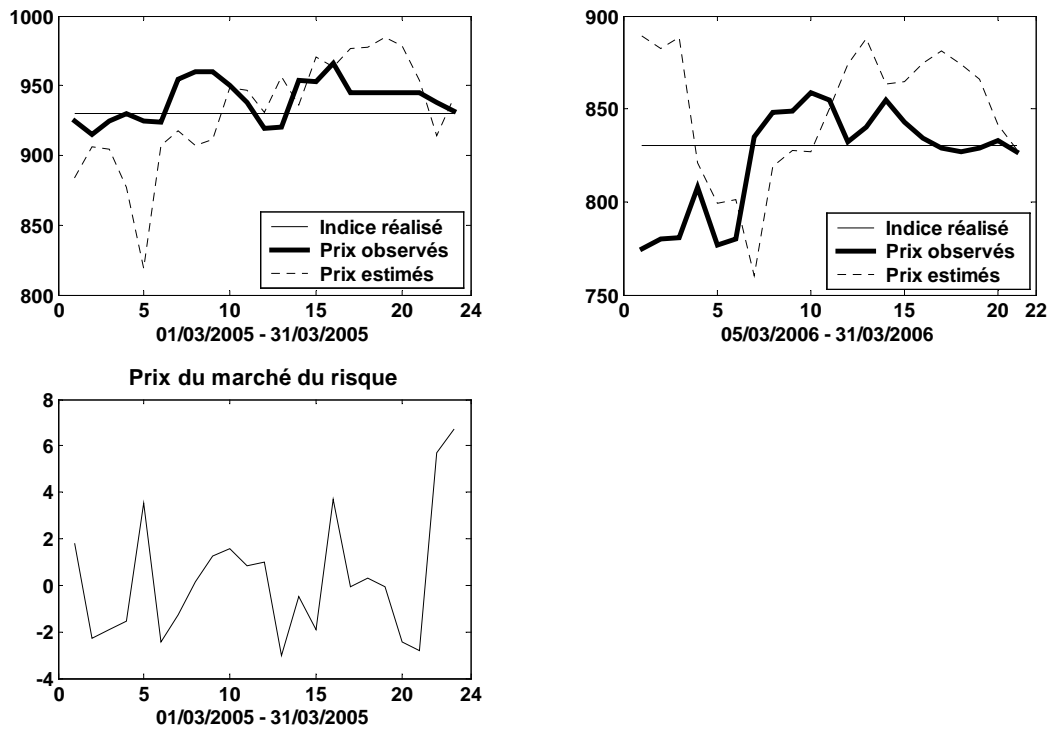
**Figure 70 : Contrat à terme de CHICAGO échéance mars 2006**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des prix de marché du risque de 2005 et prix de marché du risque (en degrés Fahrenheit) du contrat à terme échéance mars 2005 utilisés pour le calcul des prix de mars 2006.

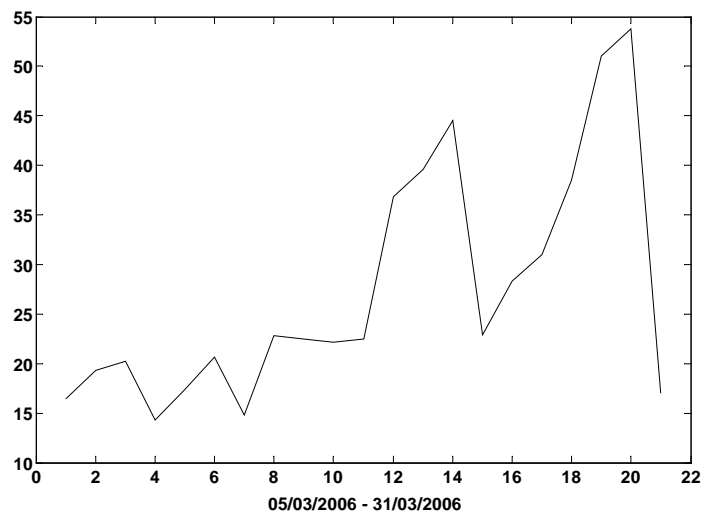


**Figure 71 : Contrat à terme de CHICAGO échéance mars 2005 et mars 2006 avec prix de marché du risque nuls**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 et mars 2006 de Chicago en supposant les prix de marché du risque nuls et prix de marché du risque (en degrés Fahrenheit) du contrat à terme échéance mars 2005 déduits de l'écart entre les prix estimés et les prix observés.



**Figure 72 : Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de Chicago au prix d'exercice 810 à partir des prix du marché du risque de 2005 et pour  $r = 1/12$**





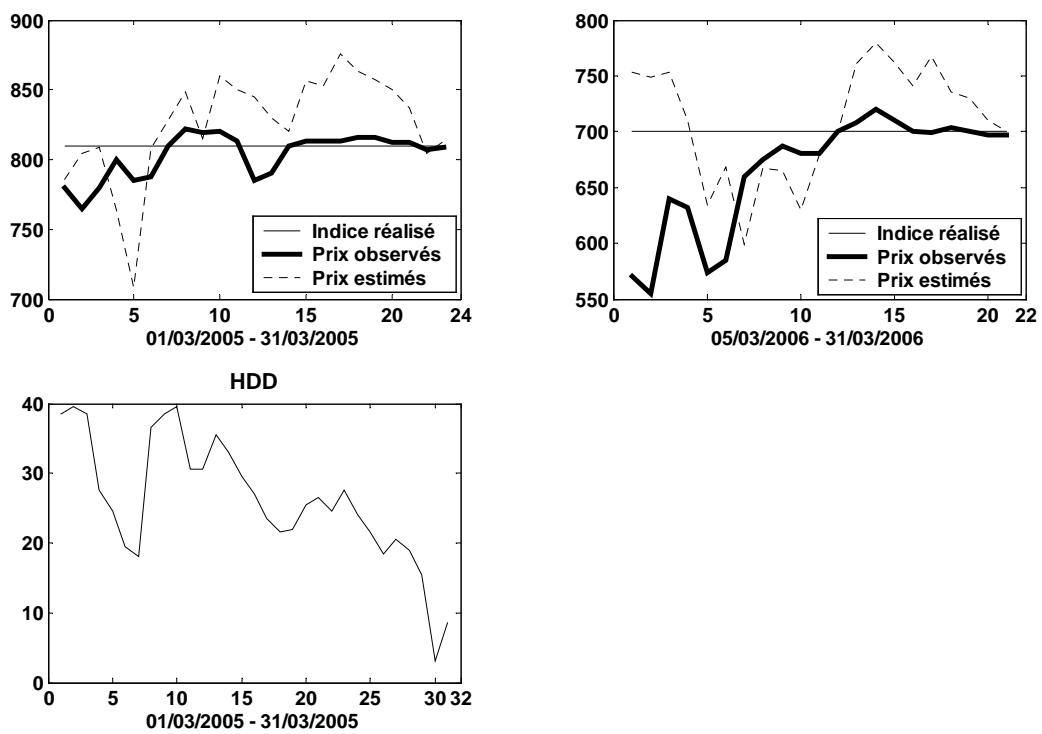
## *Contrats climatiques de Cincinnati*

Nous observons sur la figure 73, qui met en avant les prévisions pour mars 2006 en faisant l'hypothèse selon laquelle les prix de marché du risque valent zéro, une sous-évaluation au milieu de la période et une sur-appréciation pour les dates proches de l'échéance. Lorsque les prix de marché du risque sont présumés nuls, nous notons encore une fois le niveau plus élevé des prix provenant de la méthode en l'absence d'arbitrage en comparaison avec les résultats issus de la méthode actuarielle. La détermination des prix actuariels à partir de la résolution de l'équation aux dérivées partielles sous la probabilité réelle aboutit à une sous-appréciation moins prononcée dans la partie centrale qu'au moyen de la technique de Monte-Carlo mais les points extrêmes sont trop hauts par rapport à la valeur atteinte par l'indice à la date de maturité. Sur la figure 74, on remarque que l'utilisation des prix de marché du risque de mars 2005 a agrandi l'écart entre les prix calculés et les observations de 2006 pour le début et la mi-période tandis que la sur-élévation à l'approche de la date d'expiration s'est réduite. La forte hausse au début du contrat résulte d'un large prix de marché du risque alors que la chute des prévisions au sein de la période est imputable aux valeurs nulles et négatives des prix de marché du risque. L'explication du mouvement de ces prix de marché du risque vient des cours estimés (avec prix de marché du risque nuls) de mars 2005, que nous observons sur la figure 73, qui sont inférieurs aux cotations dans la partie initiale du contrat, ce qui a entraîné un accroissement des prix de marché du risque. Lorsque les cours estimés (avec prix de marché du risque nuls) sont supérieurs aux observations, cela provoque un abaissement des prix de marché du risque. Les cours estimés de mars 2005 dépendent, quant à eux, de la progression des degrés-jours observés. Nous remarquons donc que du fait que la méthode d'évaluation repose ici sur un calibrage précis qui porte sur autant de paramètres à déterminer que de prix estimés, elle rend par conséquent les cours calculés du contrat très tributaires du mouvement des prix de marché du risque induits. Il est possible de ne calculer qu'un seul prix de marché du risque pour l'ensemble de la période considérée mais on conçoit bien qu'il ne pourra ajuster que grossièrement les valeurs estimées du contrat. L'aspect des prix de l'option d'achat pour mars 2006 qui apparaît sur la figure 75, suite à l'emploi des prix de marché du risque de 2005, diffère de la forme constatée pour les valeurs actuarielles. Compte tenu des résultats obtenus pour le contrat à terme, nous déduisons que les prix de l'option donnés par la méthode en l'absence d'arbitrage au début de la période sont sur-estimés car le niveau réel de l'indice à l'échéance est 700 alors que le niveau anticipé est bien au-delà de 700. De la même façon, nous dirons que les prévisions à la mi-période sont

sous-évaluées car la valeur anticipée de l'indice est très inférieure à 700. Seuls les cours de l'option près de l'échéance ont été correctement déterminés.

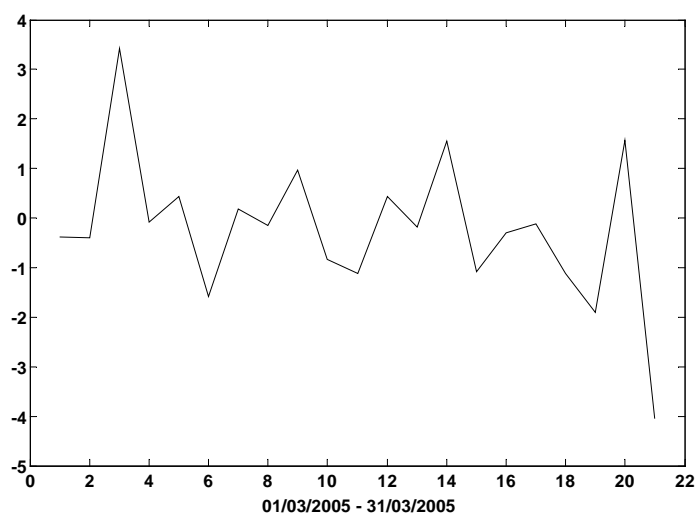
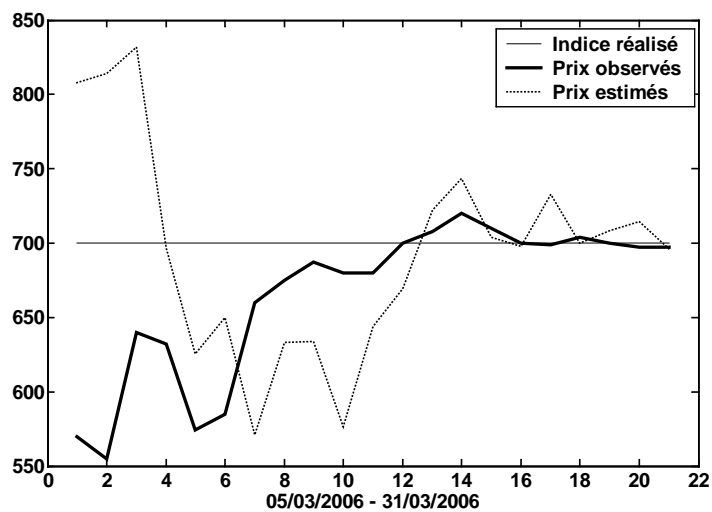
**Figure 73 : Contrat à terme de CINCINNATI échéance mars 2005 et mars 2006 avec prix de marché du risque nuls**

Degrés-jours chauffé (HDD) de la température de Cincinnati et prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 et mars 2006 de Cincinnati en supposant les prix de marché du risque nuls.

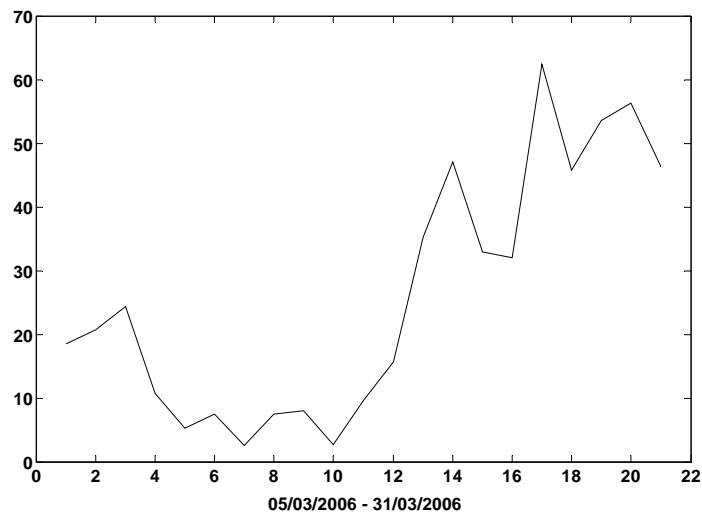


**Figure 74 : Contrat à terme de CINCINNATI échéance mars 2006**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des prix de marché du risque de 2005 et prix de marché du risque (en degrés Fahrenheit) du contrat à terme échéance mars 2005 utilisés pour le calcul des prix de mars 2006.



**Figure 75 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de Cincinnati au prix d'exercice 650 à partir des prix du marché du risque de 2005 et pour  $r = 1/12$



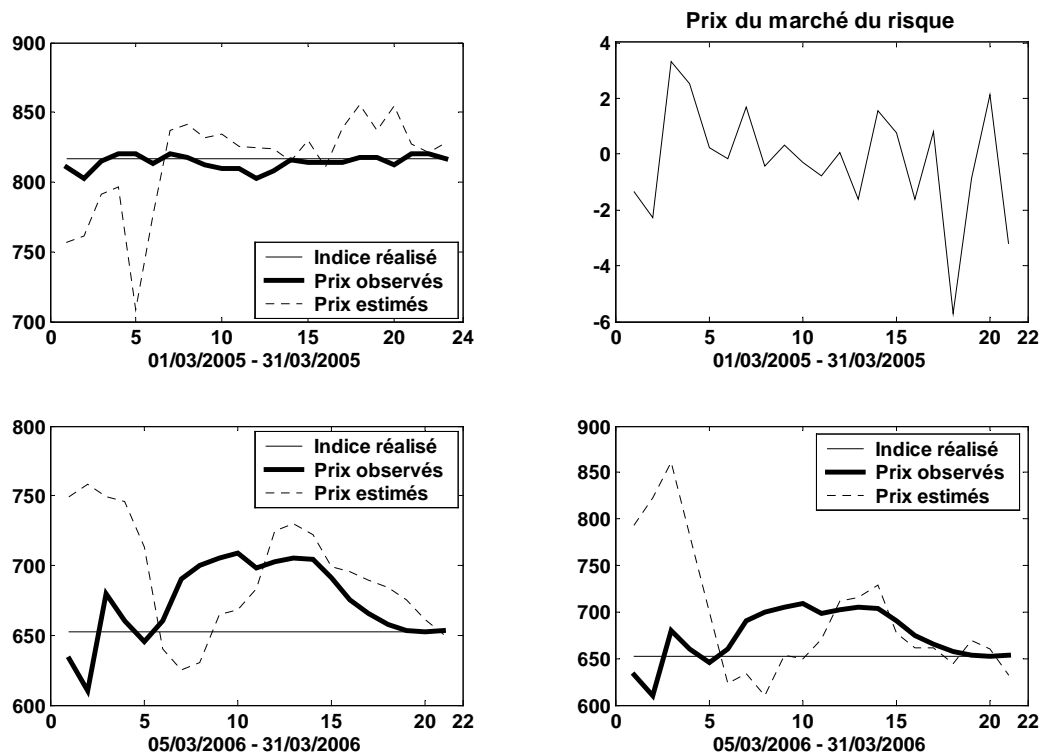
### *Contrats climatiques de New York*

La figure 76 (vignette en bas à droite) rend compte d'une réduction de l'écart entre les prix estimés et les prix cotés de mars 2006 suite à l'utilisation des prix de marché du risque de mars 2005. Le décalage, lorsque ces prix de marché du risque n'ont pas été considérés, est illustré sur la même figure 76 (vignette en bas à gauche). On s'aperçoit que cet amoindrissement provient du bas niveau à partir de la mi-période des paramètres étalonnés, qui apparaissent sur la figure 76. En revanche, les prévisions au début du contrat manifestent une forte hausse due à d'importants prix de marché du risque résultant des estimations des cours (avec prix de marché du risque nuls) pour mars 2005, qui ont été au-dessous des valeurs observées, comme nous le révèle la figure 76. Malgré les résultats satisfaisants au milieu et à la fin de la période, apportés par la présente technique de calibrage, nous signalons toutefois qu'ils ne sont attribuables qu'à l'évolution particulière ici des degrés-jours observés pour mars 2005 qui a favorisé la diminution du décalage. Nous avons vu concernant le contrat de Cincinnati que cette approche avait abouti à une situation qui s'était dégradée. Nous soulignons encore une fois la forte sensibilité des prix estimés par rapport aux prix de marché du risque inférés. Les valeurs calculées pour l'option d'achat en 2006 qui apparaissent sur la figure 77 sont plus élevées que celles procurées par la méthode actuarielle. L'observation, en 2006, de la proximité des cours déterminés du contrat à terme et du niveau réalisé de l'indice

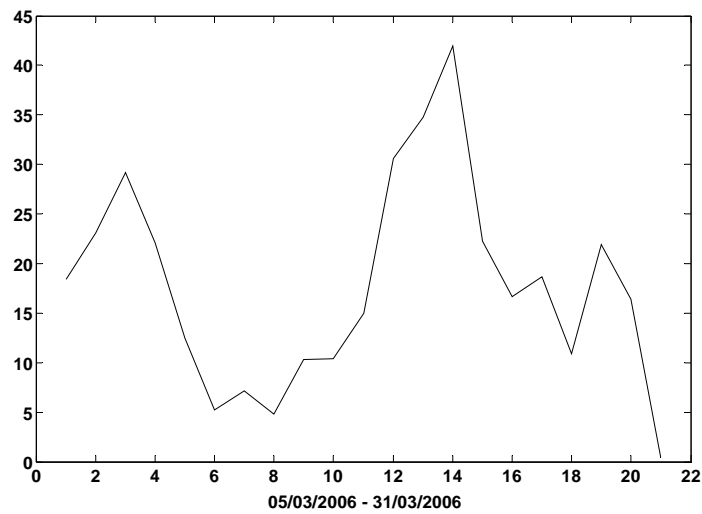
à l'échéance au milieu et à la fin de la période nous indique que l'option d'achat a été correctement évaluée durant cet intervalle de temps par la méthode en l'absence d'arbitrage. Intéressons nous maintenant aux conséquences de la troisième procédure d'étalonnage fondé sur le modèle d'équilibre général.

**Figure 76 : Contrat à terme de NEW YORK échéance mars 2005 et mars 2006**

Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2005 et mars 2006 de New York en supposant les prix de marché du risque nuls (1<sup>ère</sup> colonne), prix estimés du contrats à terme échéance mars 2006 à l'aide des prix de marché du risque induits des cotations de mars 2005 (vignette en bas à droite) et prix de marché du risque de mars 2005 (vignette en haut à droite).



**Figure 77 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de New York au prix d'exercice 650 à partir des prix du marché du risque de 2005 et pour  $r = 1/12$

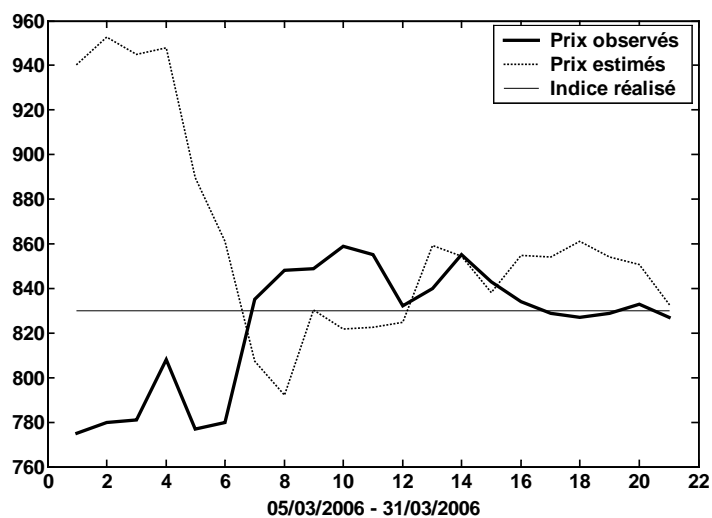


#### 4.4.4.4 Prix par la méthode fondée sur la consommation

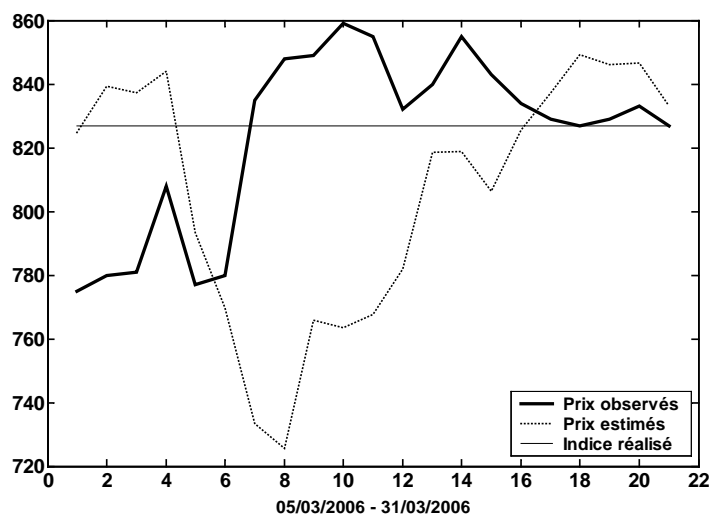
##### *Contrats climatiques de Chicago*

Devant la diversité des résultats obtenus par la méthode des moments généralisés, nous sélectionnons les estimations issues de l'emploi du paramètre de troncature d'Andrews afin de calculer les prix des contrats de Chicago. Leur ratio de Student ainsi que leur probabilité associée à la statistique J sont un peu plus élevés que ceux émanant du paramètre de Newey et West. Nous avons représenté les prix qui en résultaient sur les figures 79 à 83. Les valeurs estimées du contrat à terme provenant de l'usage des paramètres évalués par la méthode des moments simulés sont tracées sur la figure 78.

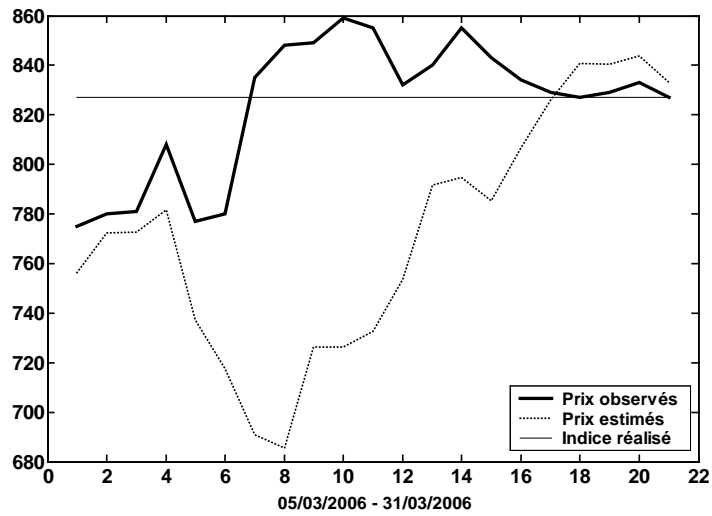
**Figure 78 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode SMM (paramètre de troncature d'Andrews)



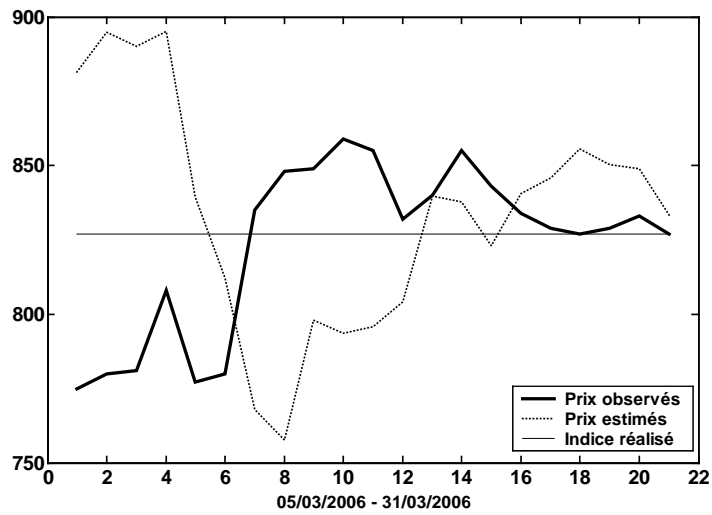
**Figure 79 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 1 et paramètre de troncature d'Andrews)



**Figure 80 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 1, paramètre de troncature d'Andrews et préblanchiment )

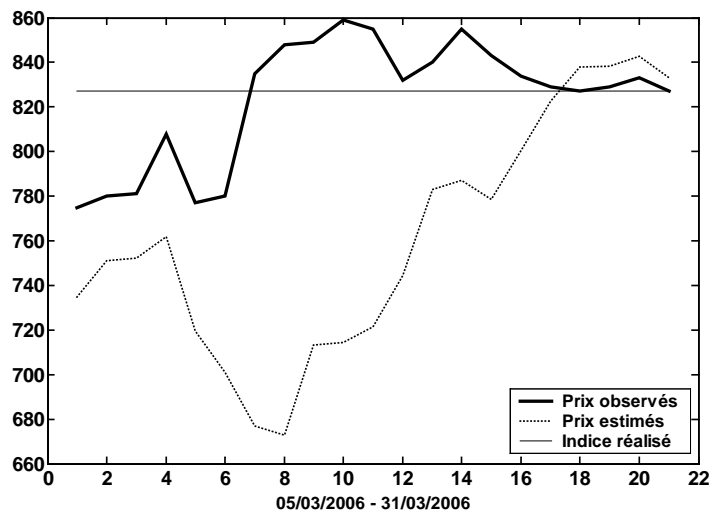


**Figure 81 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 2 et paramètre de troncature d'Andrews)

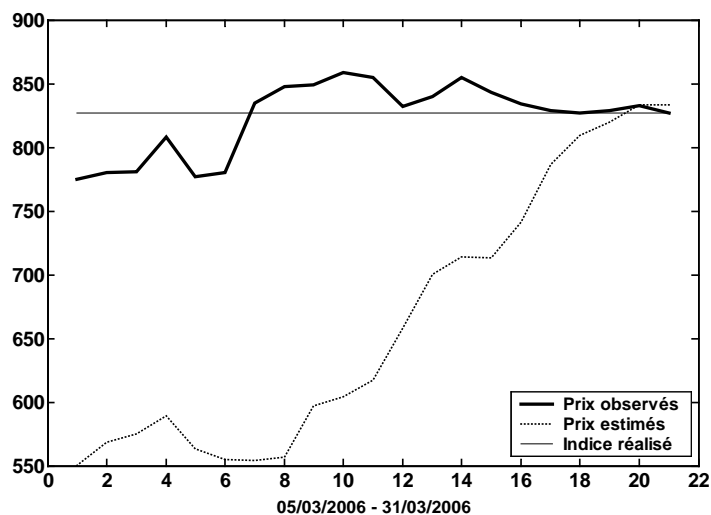




**Figure 82 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 3 et paramètre de troncature d'Andrews )



**Figure 83 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 4 et paramètre de troncature d'Andrews )

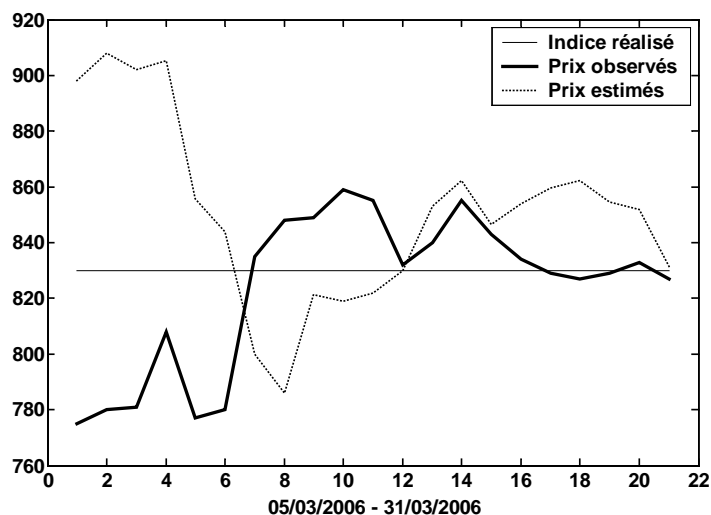


L'observation de ces figures nous amènent à plusieurs remarques. Tout d'abord, les paramètres estimés par la méthode des moments simulés procurent des prévisions plus proches des cotations et de la valeur que réalisera l'indice à la date de maturité que les coefficients issus de la méthode des moments généralisés, malgré l'envolée des prix au début

de la période. Nous pouvons noter d'autre part que les valeurs estimées découlant du groupe 2 des instruments donnent des prévisions beaucoup moins mésestimées dans la partie centrale du contrat que celles des autres catégories alors que son coefficient d'aversion relative pour le risque n'apparaissait pas significatif et que sa probabilité relative à la statistique J était assez faible en comparaison avec les valeurs des autres groupes. Les variables instrumentales du groupe 1 produisent des estimations qui donnent lieu à des prix assez proches de ceux de la méthode d'évaluation actuarielle (sauf en début de période). Par contre, les coefficients provenant des groupes 3 et 4 ainsi que du préblanchiment, qui affichaient les ratios de Student et les probabilités les plus élevés, fournissent des prédictions qui sont très au-dessous des cotations et du niveau réel de l'indice. Il semblerait que nous ne puissions pas nous appuyer sur les indicateurs statistiques obtenus pour les estimations afin de nous faire une idée de la qualité de l'ajustement des prix qui sera réalisé à partir de l'utilisation des paramètres estimés. En comparant les prévisions obtenues à partir des coefficients de la méthode des moments simulés aux valeurs résultant de l'emploi des prix de marché du risque inférés, nous remarquons la même sur-élévation au commencement du contrat. Mais, par la suite, elles manifestent des variations bien moins accentuées. Il est possible d'éliminer la hausse excessive constatée au début de la période en corrigeant dans une première étape la chute des degrés-jours en mars 2005 entre les instants 2 et 6, qui apparaît sur la figure 58, à l'aide d'une interpolation et dans une seconde étape de re-calibrer les paramètres de l'équation d'Euler et les prix de marché du risque. Au regard des résultats que nous venons d'analyser, il apparaît que l'étalonnage des paramètres du modèle C-CAPM apporte des prévisions plus satisfaisantes que le calage des prix de marché du risque de la méthode en l'absence d'arbitrage. Par ailleurs, le recours à la décomposition additive de Campbell et Diebold à la place du modèle de Cao et Wei dans le processus AR ne bouleverse pas ce constat. Les prix obtenus à l'aide de cette modélisation et des coefficients estimés par la méthode des moments simulés sont assez proches de ceux trouvés avec le précédent modèle comme nous pouvons le remarquer sur la figure 84.

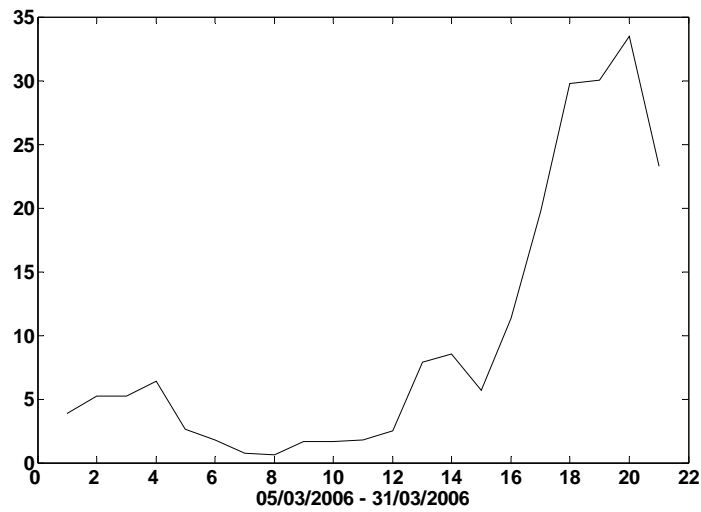
**Figure 84 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Chicago à partir des coefficients estimés par la méthode SMM.

Utilisation du processus AR (modèle additif de Campbell et Diebold) muni de la variance de Benth et Šaltytė-Benth pour simuler la température. Concernant le paramètre de troncature d'Andrews, on trouve  $\beta = 1.0083$  et  $\varphi = 50.0374$ .



Nous avons esquissé sur la figure 85 l'allure des prix calculés de l'option d'achat à partir des coefficients déterminés par la méthode des moments simulés. Nous constatons qu'ils sont similaires aux prix obtenus par la méthode actuarielle, alors que l'usage de ces mêmes coefficients pour valoriser le contrat à terme a engendré des valeurs différentes. Nous expliquons ce résultat par le fait que les paramètres de la condition d'Euler ont été étalonnés de façon à ce que les prix estimés du contrat à terme et non pas ceux de l'option achat coïncident avec les observations. Par conséquent, les valeurs trouvées pour les coefficients ont permis la déviation seulement des prix du contrat à terme de son niveau actuariel. Au final, nous pouvons dire que la valorisation à l'aide du modèle C-CAPM et des coefficients de la méthode des moments simulés s'avère être la plus efficace. Mais cela ne concerne que le contrat à terme. La valeur de l'option d'achat est restée quant à elle identique à celle procurée par la méthode actuarielle. Nous nous tournons maintenant vers l'évaluation des contrats de Cincinnati. Nous cherchons à déterminer si les résultats obtenus dans le cas des dérivés de Chicago se retrouvent dans les prix déterminés pour Cincinnati.

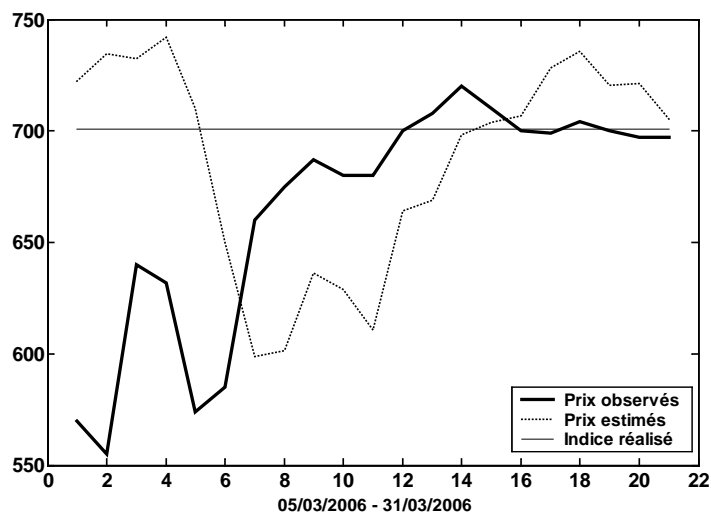
**Figure 85 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de Chicago au prix d'exercice 810 pour  $r = 1/12$  et des coefficients estimés par la méthode SMM (paramètre de troncature d'Andrews)



### *Contrats climatiques de Cincinnati*

Nous avons déterminé les prix dans les mêmes conditions que pour le contrat de Chicago en retenant les estimations issues du paramètre de troncature d'Andrews pour les méthodes des moments généralisés et simulés. On relève sur la figure 86 que la sous-estimation constatée à la mi-période des prix actuariels n'a été que faiblement corrigée en utilisant les coefficients estimés par la méthode des moments simulés. L'action du calibrage est ici moins flagrante que celle intervenue pour le dérivé de Chicago.

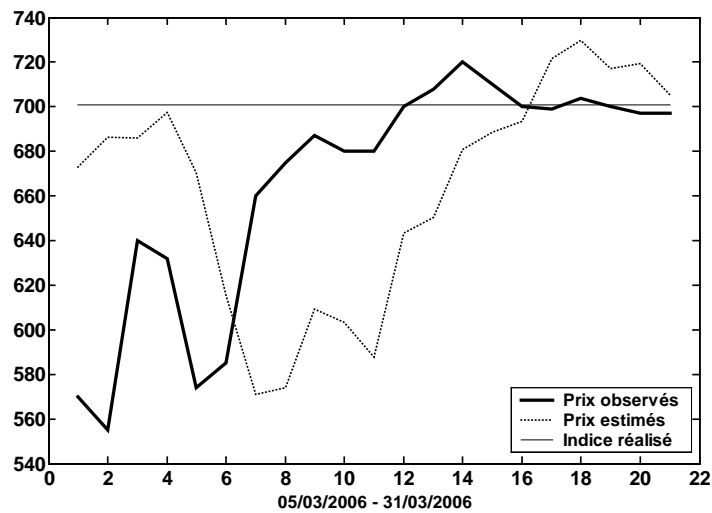
**Figure 86 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode SMM (paramètre de troncature d'Andrews)



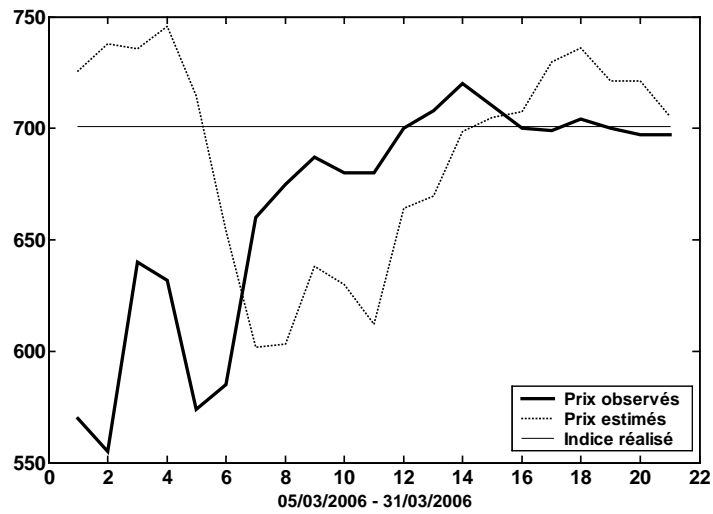
Les coefficients estimés issus du groupe 2 des variables instrumentales qui avaient permis de réduire sensiblement le décalage entre les valeurs estimées et les cotations de Chicago ont, au contraire, ici creusé l'écart comme nous le rend compte la figure 88 ci-dessous. Le  $t$  de Student du coefficient estimé d'aversion relative pour le risque concernant le groupe 2 de Cincinnati est inférieur à  $|1.96|$  et la probabilité se rapportant à la statistique  $J$  n'excède pas 5% et est en outre très faible par rapport à celle de Chicago. De la même façon, on remarque, à travers la figure 86, que les estimations du groupe 1, qui avaient donné lieu à des cours proches de ceux de la méthode actuarielle, apportent pour le contrat de Cincinnati des prix davantage sous-appréciés sur la période. Le coefficient estimé d'aversion relative pour le risque se rapportant au groupe 1 de Cincinnati n'apparaît pas non plus significatif dans le tableau 51 de la sous-section 4.4.2.1 tandis que la probabilité liée à la statistique  $J$  se trouve au-dessous de 5% et est plus petite que celle trouvée pour le dérivé de Chicago. Le recours au préblanchiment qui avait aggravé la sous-évaluation dans le cas du précédent contrat procure, dans le cas présent, des prix apparaissant sur la figure 87 qui sont proches de ceux donnés par les coefficients de la méthode des moments simulés et qui sont donc meilleurs que les résultats obtenus pour les groupes 1 et 2. Le paramètre d'aversion issu du groupe 1 avec préblanchiment se révèle significatif dans le tableau 51 alors que la probabilité associée à la statistique  $J$  demeure en-deçà des 5% et est plus basse que celle obtenue pour le contrat de

Chicago. Nous constatons à ce stade que les indications données par les ratios de Student et la probabilité relative à la statistique J ne nous renseignent pas sur l'adéquation qui s'effectuera entre les prix calculés à l'aide des paramètres estimés et les cours observés. D'après la figure 90, les coefficients évalués du groupe 3 fournissent un meilleur ajustement des prix pour le dérivé climatique de Cincinnati que pour celui de Chicago. Seuls les résultats dérivant des coefficients estimés du groupe 4 continuent à être aussi sous-évalués que pour le contrat de Chicago comme nous pouvons le voir sur la figure 91.

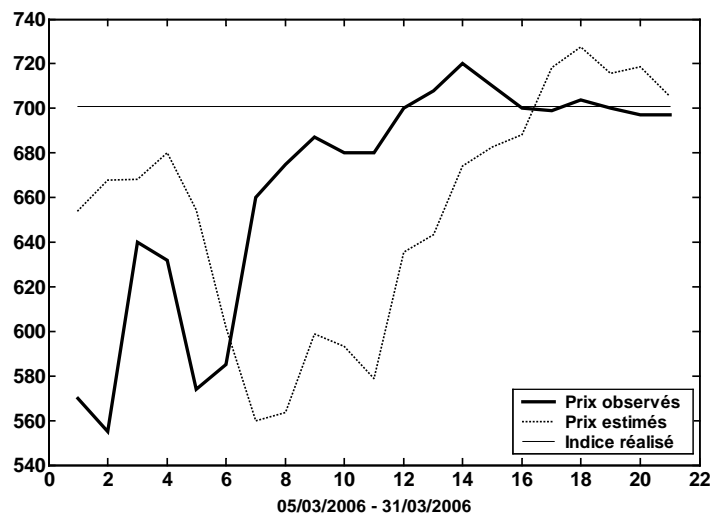
**Figure 87 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 1 et paramètre de troncature d'Andrews)



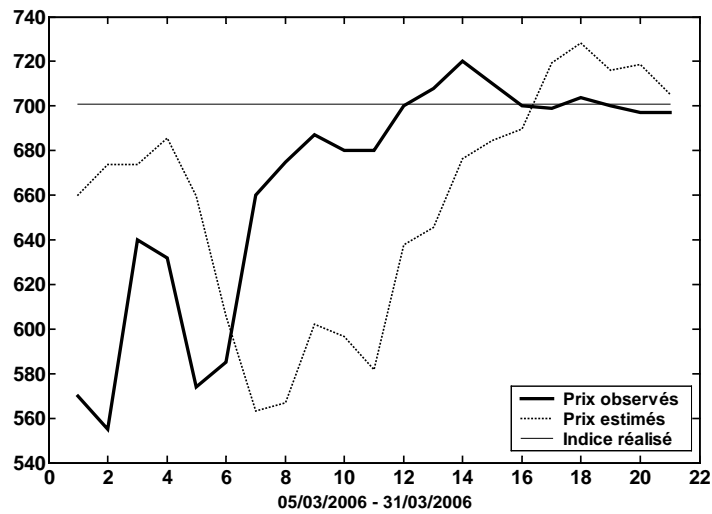
**Figure 88** : Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 1, paramètre de troncature d'Andrews et préblanchiment )



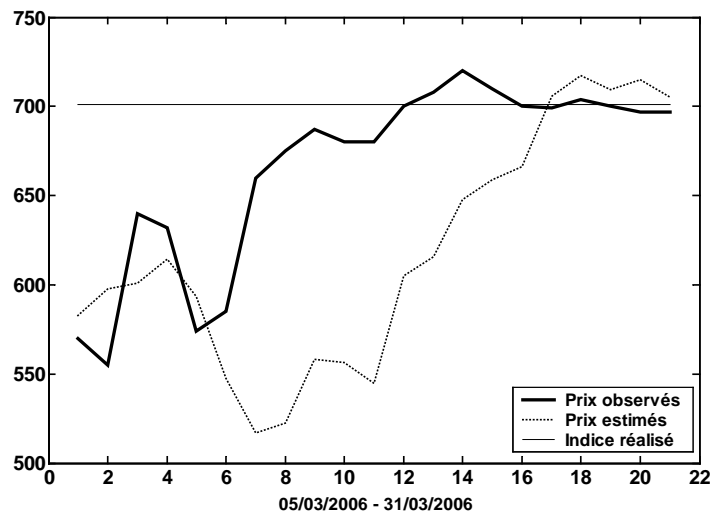
**Figure 89** : Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 2 et paramètre de troncature d'Andrews)



**Figure 90 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 3 et paramètre de troncature d'Andrews)



**Figure 91 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 4 et paramètre de troncature d'Andrews)

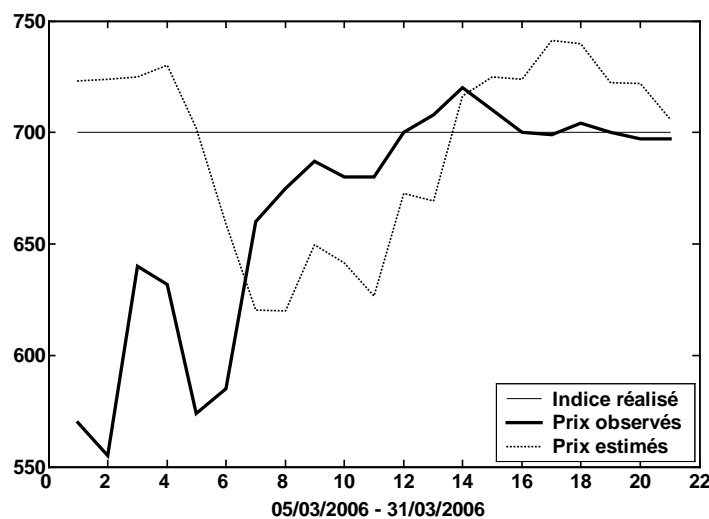


En outre, ces observations nous montrent qu'il n'existe pas un effet précis sur les prix associé à l'usage des coefficients estimés à l'aide de telle catégorie d'instruments à l'exception des paramètres du groupe 4 qui procurent manifestement des résultats non adéquats. Sur



l'ensemble des prix obtenus, nous pouvons dire que les valeurs résultant des estimations de la méthode des moments simulés supplantent les résultats (pour la mi-période) issus des coefficients estimés par la méthode des moments généralisés. Lorsque l'on emploie la décomposition additive de Campbell et Diebold dans le processus AR, on peut constater que les prévisions sont moins sur-appréciées au début du contrat et moins sous-évaluées au milieu de la période en comparaison avec les prix de la figure 86.

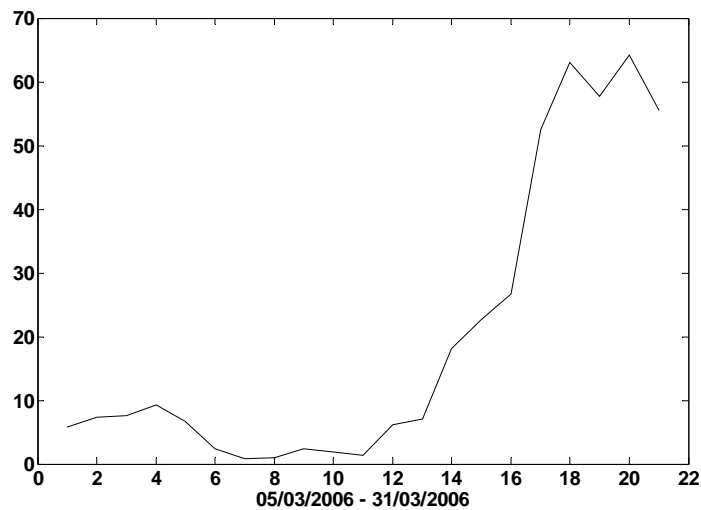
**Figure 92 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode SMM. Utilisation du processus AR (modèle additif de Campbell et Diebold) muni de la variance de Benth et Šaltytė-Benth pour simuler la température. Concernant le paramètre de troncature d'Andrews, on trouve  $\beta = 1.0068$  et  $\varphi = 49.9974$ .



En rapprochant les cours estimés à partir des coefficients de la méthode des moments simulés des valeurs issues du calibrage des prix de marché du risque, nous remarquons qu'ils présentent une augmentation beaucoup moins excessive au début de la période et qu'ils sont généralement moins éloignées, à la mi-période, des cotations et de la grandeur réellement atteinte par l'indice à l'échéance. Nous notons à nouveau ici la supériorité des résultats fournis par le modèle C-CAPM sur ceux donnés par la méthode en l'absence d'arbitrage. Au regard de la figure 93, qui reproduit le tracé des prix de l'option d'achat, nous notons qu'ils sont identiques aux prix actuariels découlant des simulations du processus en temps discret. De manière analogue au dérivé de Chicago, les paramètres estimés par la méthode des

moments simulés n'a permis que le calage des prix du contrat à terme. Au cours de cette partie, nous avons trouvé certains résultats qui étaient différents de ceux obtenus pour le contrat de Chicago. Nous allons examiner les prix calculés pour le contrat de New York afin de savoir si des changements surviennent également.

**Figure 93 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de Cincinnati au prix d'exercice 650 pour  $r = 1/12$  et des coefficients estimés par la méthode SMM (paramètre de troncature d'Andrews)

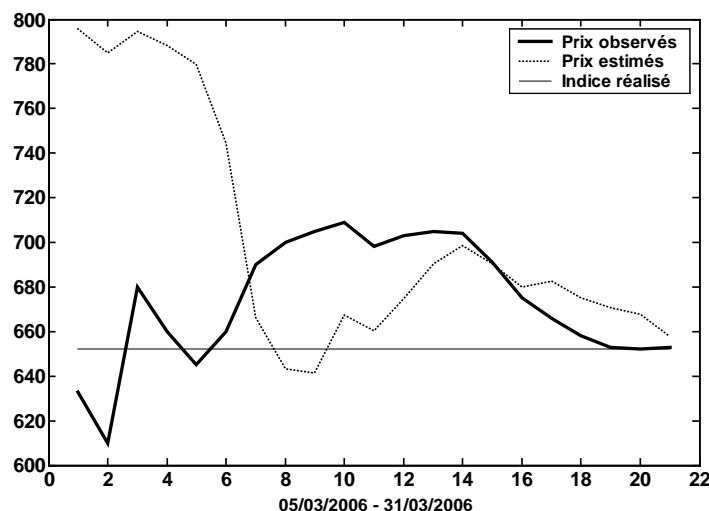


### *Contrats climatiques de New York*

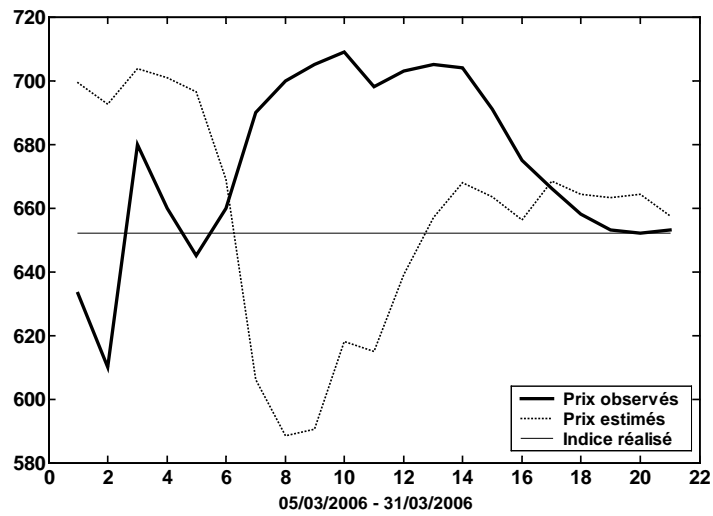
Nous avons procédé au calcul des prévisions sur la même base que celle qui a été utilisée pour la détermination des valeurs des contrats de Chicago et de Cincinnati. Nous voyons sur la figure 94 que les cours estimés par le biais des coefficients déterminés par la méthode des moments simulés sont plus proches des observations entre les dates 7 et 12 que les prix présentés sur les figures 95, 97 et 98 qui sont issus des paramètres évalués des catégories d'instruments 1, 2 et 3. Toutefois, ils s'écartent davantage du niveau réellement atteint par l'indice à l'échéance au début et à la fin du contrat. Nous remarquons également que les valeurs négatives trouvées pour le coefficient d'aversion n'amènent pas des prix estimés discordants de ceux obtenus à partir de la valeur positive du paramètre d'aversion donnée par la méthode des moments simulés bien qu'elles contredisent la théorie. En outre, les résultats fournis par les coefficients estimés du groupe 1 avec préblanchiment et

apparaissant sur la figure 96 sont assez similaires à ceux procurés par les valeurs de la méthode des moments simulés ce qui avait été également constaté pour le contrat de Cincinnati. On note, par ailleurs, que les courbes des prix issus des coefficients des groupes 1, 2 et 3 manifestent un affaiblissement des valeurs en comparaison avec la représentation des prix actuariels comme dans le cas du dérivé de Cincinnati. Le rapprochement des résultats obtenus pour les contrats des deux villes semble indiquer qu'il existe un rapport de cause à effet entre l'utilisation des paramètres estimés d'une catégorie de variables instrumentales et le rendu de la courbe des prix calculés, mais les résultats trouvés pour le dérivé de Chicago diffèrent sensiblement de ceux apparaissant ici, ce qui met en doute cette relation qui n'est peut-être que fortuite. En mettant en parallèle les valeurs données par le modèle C-CAPM et celles apportées par la méthode en l'absence d'arbitrage reposant sur le calibrage des prix de marché du risque, nous observons qu'elles sont peu différentes. Les prévisions de la dernière approche apparaissent au début de la période plus écartées de la grandeur effective réalisée par l'indice mais elles sont, vers la fin du contrat, moins dispersées. Il apparaît donc plus difficile ici de départager les résultats même lorsque l'on fait appel à la décomposition additive de Campbell et Diebold dans le processus AR car cette dernière procure des prix évoluant de manière identique à ceux issus du modèle de Cao et Wei comme nous le révèle la figure 99.

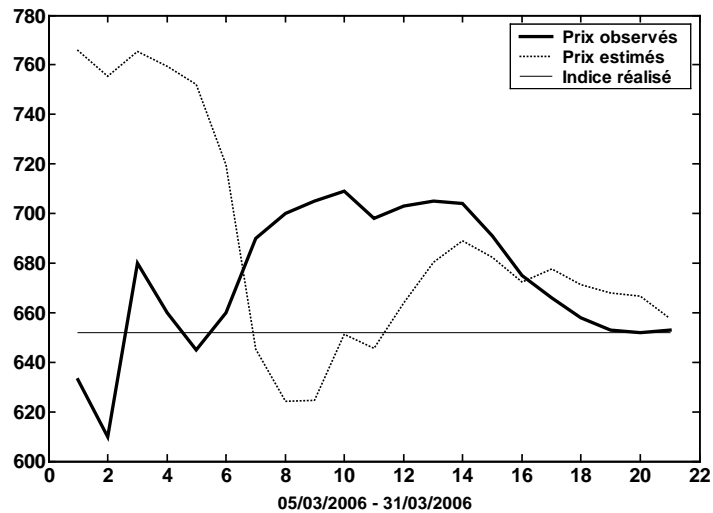
**Figure 94 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de New York à partir des coefficients issus de la méthode SMM (paramètre de troncature d'Andrews)



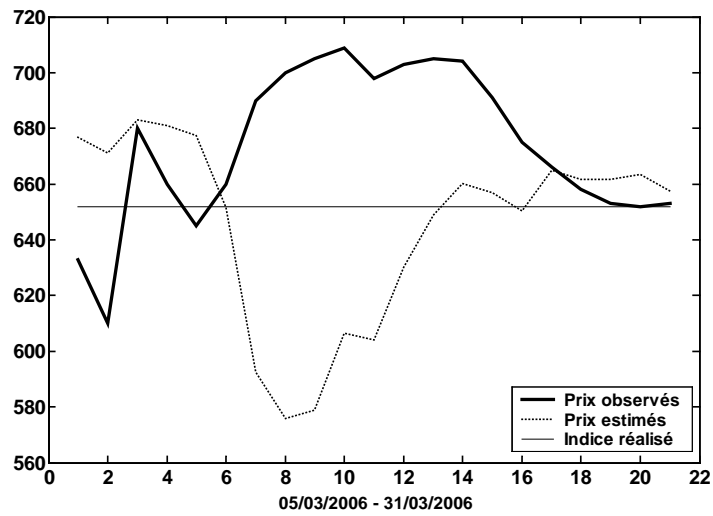
**Figure 95 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de New York à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 1 et paramètre de troncature d'Andrews)



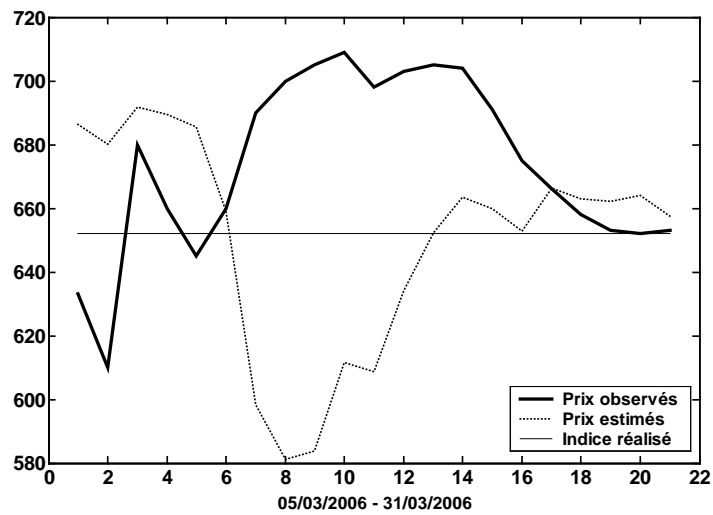
**Figure 96 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de New York à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 1, paramètre de troncature d'Andrews et préblanchiment)



**Figure 97 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de New York à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 2 et paramètre de troncature d'Andrews)

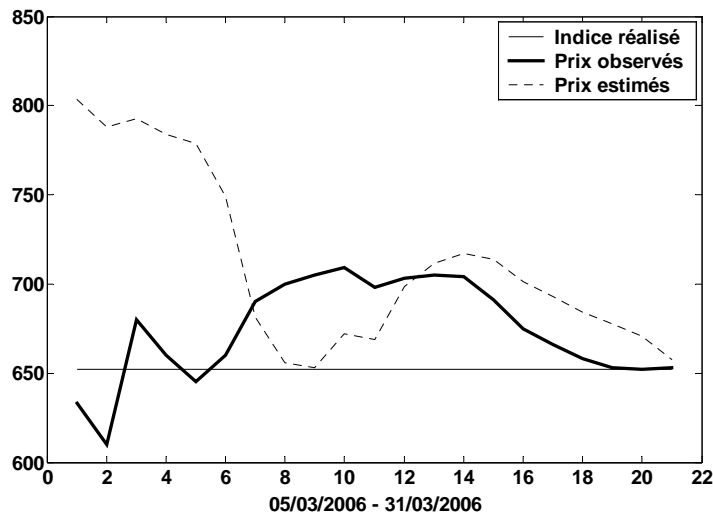


**Figure 98 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de New York à partir des coefficients estimés par la méthode GMM (groupe 3 et paramètre de troncature d'Andrews)



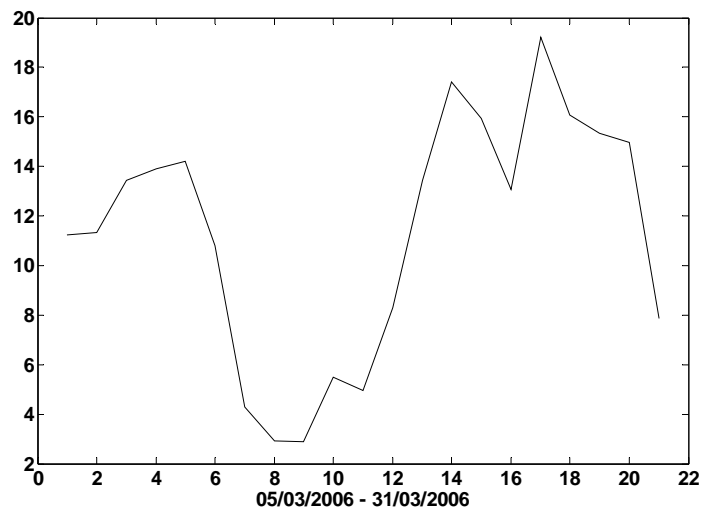
**Figure 99 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de New York à partir des coefficients estimés par la méthode SMM.

Utilisation du processus AR (modèle additif de Campbell et Diebold) muni de la variance de Benth et Šaltytė-Benth pour simuler la température. Concernant le paramètre de troncature d'Andrews, on trouve  $\beta = 1.0086$  et  $\varphi = 39.9614$ .



L'examen de la figure 100 des prix déterminés pour l'option d'achat à l'aide des estimations fournies par la méthode des moments simulés montre qu'ils présentent le même aspect que celui des cours actuariels du fait que le calibrage des paramètres n'a pu être pratiqué qu'à partir des cotations du contrat à terme.

**Figure 100 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) de l'option d'achat échéance mars 2006 de New York au prix d'exercice 650 pour  $r = 1/12$  et des coefficients estimés par la méthode SMM (paramètre de troncature d'Andrews)



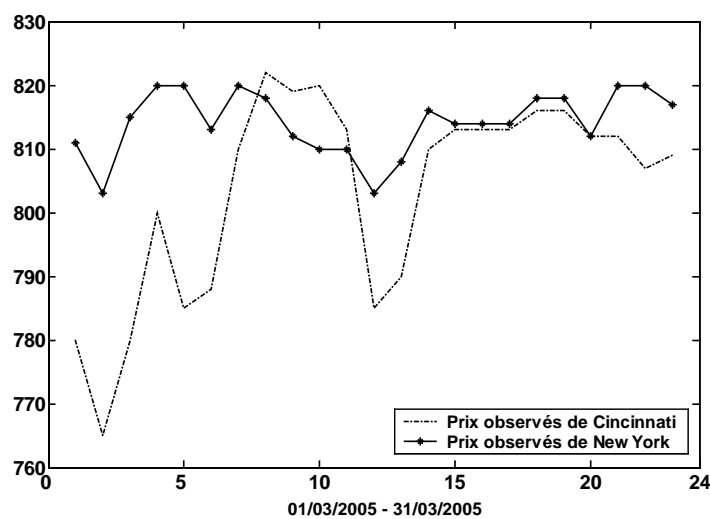
Tout au long de l'étude des prix déterminés pour les contrats à terme de Chicago, de Cincinnati et de New York, nous avons vu que la technique de l'étalonnage permettait de rapprocher les prix estimés des cours observés et surtout de la réalisation effective de l'indice à la date de maturité. Il peut arriver que nous ne possédions pas les données de prix relatives au contrat d'une ville que l'on souhaite valoriser par le calibrage. L'alternative serait alors de recourir aux échantillons de prix des contrats dont le sous-jacent serait fortement corrélé à l'indice des degrés-jours du dérivé que l'on envisage d'évaluer. Nous nous proposons dans la partie qui suit d'analyser les prix calculés du contrat à terme de Cincinnati en calibrant les modèles d'évaluation par rapport aux cotations du dérivé de New York dont la température moyenne journalière est intimement liée à celle de Cincinnati.

#### 4.4.5 Evaluation des dérivés climatiques de Cincinnati à partir des cotations de New York

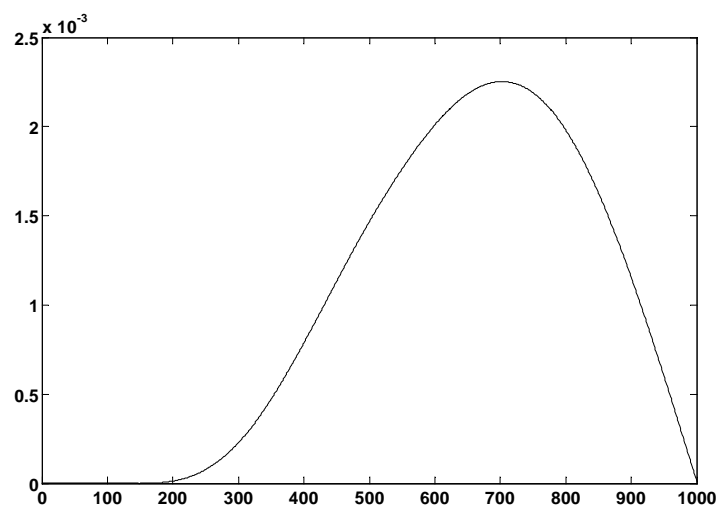
A travers la figure 101, nous relevons une certaine similitude entre les prix cotés du contrat de Cincinnati et ceux du dérivé de New York pour mars 2005. En employant les processus de température estimés pour Cincinnati et en calant les modèles de valorisation par rapport aux cotations du contrat à terme de New York, nous déduisons la distribution risque-neutre qui est reproduite sur la figure 102, les prix de marché du risque qui sont tracés sur la

figure 103 et les valeurs des paramètres de l'équation d'Euler par la méthode des moments simulés qui sont reportés dans le tableau 56. Nous utilisons ensuite ces éléments inférés pour calculer les prix du contrat à terme de Cincinnati pour mars 2006 par les méthodes en l'absence d'arbitrage et fondée sur la consommation. Nous débutons la partie par l'examen des prévisions suite à l'application de la densité risque-neutre induite.

**Figure 101 :** Prix observés (en points HDD et pour les jours ouvrés) des contrats à terme échéance mars 2005 de Cincinnati et de New York

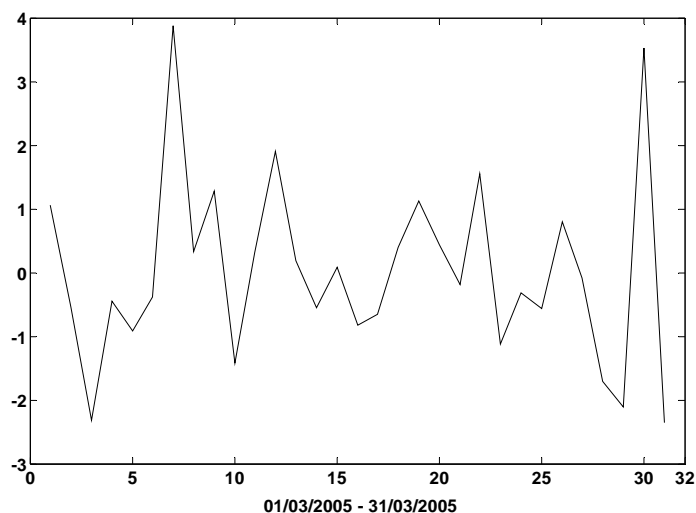


**Figure 102 :** Probabilités neutres au risque du contrat à terme échéance mars 2005 de New York pour  $\alpha = 5$  millions et à partir des simulations de la température de Cincinnati





**Figure 103 :** Prix de marché du risque (en degrés Fahrenheit) du contrat à terme échéance mars 2005 de New York en utilisant le processus de température de Cincinnati



**Tableau 56 :** Estimation des paramètres de l'équation d'Euler par la méthode des moments Simulés à partir des cotations de New York et en générant 2000 tirs pour la consommation et la température de Cincinnati pour la période 01/03/2005-31/03/2005

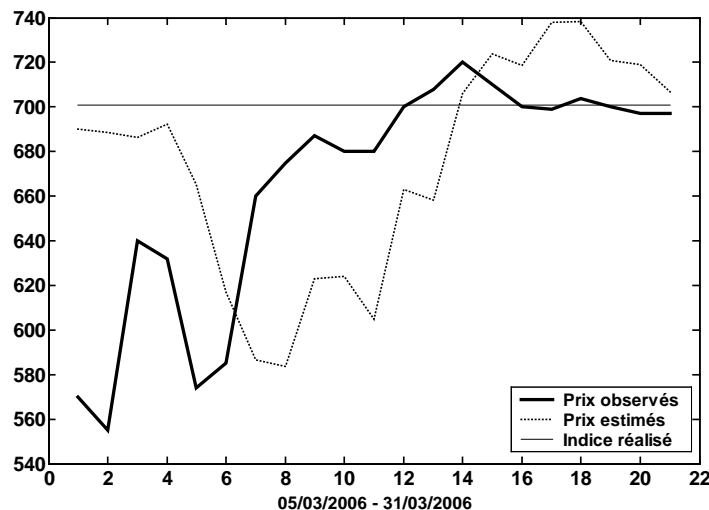
	<b>Méthode des moments simulés</b>	
	<b>N=2000 et L=23</b>	
	<b><math>\beta</math></b>	<b><math>\gamma</math></b>
<b>Estimations</b>	1.002 (431.88)	19.950 (0.71)
<b>Paramètre de troncature De Newey et West</b>	2	
<b>Statistique J</b>	659.68	
<b>Probabilité</b>	0.00	
<b>Estimations</b>	1.005 (462.96)	19.950 (0.76)
<b>Paramètre de troncature d'Andrews</b>	23	
<b>Statistique J</b>	83.58	
<b>Probabilité</b>	0.00	

Le chiffre entre parenthèses désigne la t-statistique, N représente le nombre de simulations et L le nombre de moments.

#### 4.4.5.1 Prix à partir de la distribution neutre au risque extraite

Au vu de la figure 104, les prévisions apparaissent identiques aux prix actuariels déterminés auparavant pour le contrat de Cincinnati. Ce résultat n'est pas surprenant compte tenu du fait que le calibrage de la densité au regard des cotations de mars 2005 du contrat de Cincinnati n'avait pas non plus fait ses preuves auparavant. Regardons à présent les différences qui surviennent lorsque l'on a recours à des prix de marché du risque étalonnés par rapport à un autre contrat.

**Figure 104 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des probabilités neutres au risque de 2005 extraites des cotations de New York pour  $\alpha = 5$  millions et à partir des simulations de la température de Cincinnati

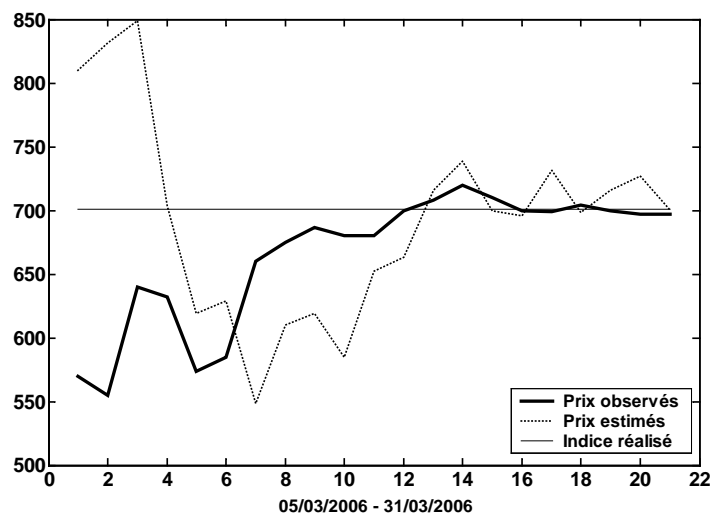


#### 4.4.5.2 Prix à partir des prix de marché du risque inférés

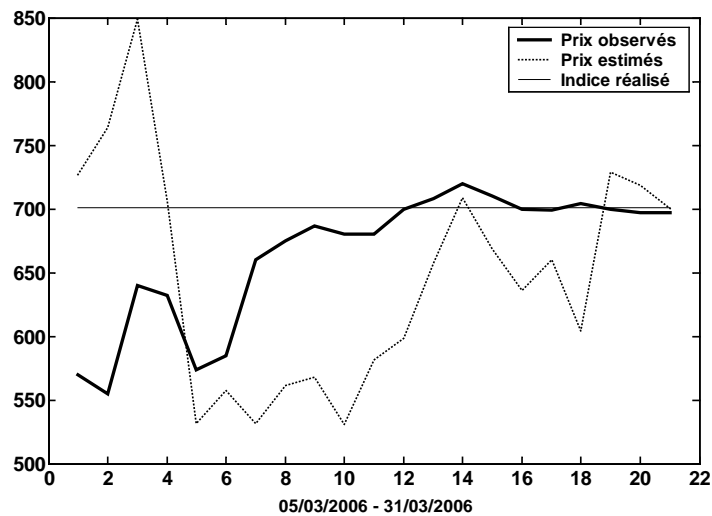
Les prévisions pour mars 2006 en utilisant les prix de marché du risque induits des valeurs observées pour New York se révèlent quasiment semblables aux cours qui ont été formés à partir des paramètres calibrés par rapport aux cotations de Cincinnati. Nous notons toutefois à travers la figure 105 de plus grandes valeurs au commencement du contrat en comparaison avec les résultats obtenus à partir des prix de marché du risque extraits des cotations de Cincinnati. Elles découlent de l'amplitude importante des paramètres étalonnés

au début de la période afin de rapprocher les prix estimés du niveau plus élevé des prix cotés de New York en 2005. La similitude constatée ici avec les précédents résultats nous amène à conclure que la démarche entreprise constitue une solution au problème de non disponibilité des données de prix pour un contrat que l'on cherche à évaluer. Supposons que nous nous contentions de valoriser le contrat de Cincinnati à partir des valeurs précédemment inférées des cotations de New York à l'aide du processus de température de New York. Nous observons sur la figure 106 que cette opération se solde par un plus grand décalage entre les cours estimés et la valeur réelle de l'indice à l'échéance. Il n'est donc pas recommandé de faire appel à cette procédure pour pallier l'absence de données pour un contrat. Nous allons voir si les résultats sont aussi concluants dans le cas de l'étalonnage des coefficients du modèle C-CAPM par rapport aux prix du dérivé de substitution.

**Figure 105 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati a partir des prix de marché du risque de 2005 extraits des cotations de New York et à partir du processus de température de Cincinnati



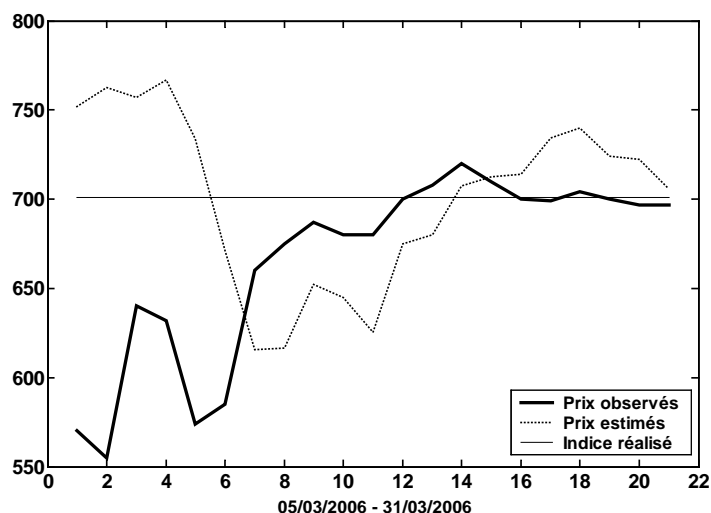
**Figure 106 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des prix de marché du risque de 2005 extraits des cotations de New York



#### 4.4.5.3 Prix par la méthode fondée sur la consommation

Relativement à la courbe des prix obtenue au moyen du calibrage par rapport aux cours observés de Cincinnati, la figure 107 laisse apparaître une diminution de l'écart au centre de la période. Cette amélioration s'explique par des valeurs qui ont augmenté de manière générale suite à l'étalonnage vis-à-vis des cotations de New York qui, comme nous avons pu le remarquer, sont plus élevées que celles de Cincinnati. Dans leur ensemble, les prévisions que nous obtenons ici sont satisfaisantes. Elle sont en outre plus proches des observations que celles procurées par le calage des prix de marché du risque. Il s'avère donc également possible de calibrer les paramètres du modèle C-CAPM au regard des cotations du contrat de substitution afin de valoriser les dérivés climatiques.

**Figure 107 :** Prix estimés (en points HDD et pour les jours ouvrés) du contrat à terme échéance mars 2006 de Cincinnati à partir des coefficients estimés par la méthode SMM (paramètre de troncature d'Andrews) sur la base des cotations de New York



#### 4.5 CONCLUSION

La représentation graphique conjointe des prix cotés, des prix actuariels et du niveau réel atteint par l'indice des degrés-jours à l'échéance nous a permis de montrer que les valeurs du marché étaient plus proches de la réalisation effective de l'indice à la date de maturité que les valeurs actuarielles. Cette observation nous a incité à calibrer les modèles d'évaluation en l'absence d'arbitrage et fondé sur la consommation par rapport aux cotations des contrats à terme de mars 2005 afin de calculer les prévisions des prix pour mars 2006 concernant les contrats climatiques des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York. Cette démarche a mis en évidence l'échec de l'étalonnage de la densité de probabilité vis-à-vis des cotations qui a donné lieu à l'inférence de la distribution réelle et non pas risque-neutre. Elle a aussi révélé l'efficacité des calibrages des prix de marché du risque et des paramètres du modèle C-CAPM qui ont permis de réduire en général la sous-appréciation des contrats constatée dans les prix actuariels au milieu de la période. Toutefois, l'ajustement des prévisions de la méthode en l'absence d'arbitrage aux observations dépend fortement du mouvement des prix de marché du risque induits pour mars 2005 du fait que chacun d'entre eux "pondère" un prix estimé à une date précise. En conséquence, on obtient des prévisions qui oscillent beaucoup en fonction des variations des valeurs inférées. Il a été constaté ainsi une sur-élévation au début de la période provoquée par de larges prix de marché du risque. Bien que nous notions

également cet accroissement exagéré au démarrage du contrat pour les prévisions du modèle C-CAPM, elles subissent cependant de façon moins marquée les effets des paramètres étalonnés compte tenu de leur nombre restreint. Il est apparu au cours de notre étude que les coefficients estimés par la méthode des moments simulés apportaient des prix moins sous-estimés à la mi-période que ceux provenant de la méthode des moments généralisés du fait qu'ils aient été déterminés de manière plus précise en tenant compte des conditions dans lesquelles les prix ont été calculés à partir des simulations de Monte-Carlo. Suite à ces remarques, le modèle fondé sur la consommation s'est révélé plus approprié pour évaluer les dérivés climatiques que la méthode en l'absence d'arbitrage portant sur les prix de marché du risque. Néanmoins, ses performances se limitent au contrat à terme pour lequel seuls les prix sont influencés par les paramètres calibrés. De ce fait, les prix des options fournis par la méthode en l'absence d'arbitrage qui assimilent pour leur part les informations passées du marché ne peuvent être écartés et apparaissent alors complémentaires des résultats procurés par le modèle C-CAPM. Pour combler le manque de données de prix pour un dérivé que l'on cherche à évaluer par le calibrage, nous avons vu que le recours aux cotations d'un contrat climatique dont le sous-jacent était fortement corrélée à son indice des degrés-jours produisait des résultats assez proches de ceux obtenus en utilisant les données existantes. Cette pratique constitue par conséquent une réponse au problème de l'absence des prix cotés.

## CONCLUSION GENERALE

Depuis l'introduction sur le marché financier du premier dérivé climatique portant sur les degrés-jours en 1997 aux Etats-Unis, un nombre important de travaux s'est orienté vers la valorisation de ce produit et la modélisation de la température moyenne journalière, à la base de 70% des contrats climatiques négociés sur le marché en 2005. Au cours de la présente thèse, nous avons décrit de manière exhaustive les trois procédures d'évaluation considérées qui regroupent les méthodes en l'absence d'arbitrage, actuarielle et fondée sur la consommation. De la même façon, nous avons fait la revue des modèles qui ont été proposés afin de rendre compte du comportement de la température.

Il est ressorti de l'étude des méthodes de valorisation que des liens unissaient les prix déterminés bien que les fondements théoriques fussent différents. La méthodologie d'évaluation en l'absence d'arbitrage détermine le prix d'une option européenne à la date d'aujourd'hui en mettant en place une stratégie de portefeuille autofinancée qui duplique le paiement de l'option à l'échéance. Afin que le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage soit satisfait sur le marché, le prix de l'option à l'instant présent doit alors être égal au coût initial du portefeuille de duplication. Cox, Ross et Rubinstein (1979) ont montré que cette opération nous ramenait au calcul du prix de l'option à l'aide des probabilités neutres au risque. Lorsque le profil des résultats de l'option est atteignable par le portefeuille, le marché est complet et le prix de l'option peut se déterminer dans ce cas précis à l'aide des probabilités réelles en remplaçant le drift de la dynamique des prix de l'actif sous-jacent par la valeur du taux sans risque. Le calcul du prix ici est similaire à celui de la méthode d'évaluation actuarielle qui consiste à actualiser au taux sans risque l'espérance définie sous la probabilité réelle du paiement de l'option à l'échéance. La valeur de l'option donnée par le modèle d'équilibre général coïncide également avec ce prix quand aucune dépendance n'est constatée entre la consommation et le cours de l'option car le coefficient constant d'aversion relative pour le risque vaut zéro. Dans le cas contraire, elle est équivalente au prix de la méthode en l'absence d'arbitrage.

Au regard de l'étude de la modélisation de la température, on a pu distinguer deux grandes catégories de modèles, décomposées en processus en temps continu et en temps

discret. Les premiers ont regroupé le processus d'Ornstein-Uhlenbeck mis en avant par Alaton, Djehiche et Stillberger (2002), le processus de retour à la moyenne fractionnaire de Brody, Syroka et Zervos (2002), le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1) de Richards, Manfredo et Sanders (2004) et le processus de retour à la moyenne doté d'une volatilité périodique non paramétrique de Benth et Šaltytė-Benth (2005). Les seconds ont réuni le processus AR pourvu d'une volatilité périodique mis en évidence par Cao et Wei (1998) et Cao et Wei (2004), le processus ARMA comportant une volatilité représentée par la transformée de Fourier tronquée à l'ordre 2, traité par Roustant (2002), le processus ARFIMA(1,d,1) de Caballero, Jewson et Brix (2002) et le processus autorégressif muni du modèle de variance assimilant une structure GARCH et une composante saisonnière, développé par Campbell et Diebold (2004).

Du fait que l'ensemble des approches d'évaluation et des représentations de la température n'avait pas fait l'objet jusqu'à présent d'une analyse conjointe sur le plan empirique, nous nous sommes proposés dans cette thèse de mener l'étude en cherchant à calculer les prix des contrats à terme et des options d'achat des villes de Chicago, de Cincinnati et de New York pour lesquelles nous avons constaté des transactions fréquentes sur le Chicago Mercantile Exchange. La valorisation des dérivés climatiques nécessitant le choix d'un modèle pour reproduire le comportement de la température, nous avons retenu un processus en temps continu et un processus en temps discret répondant à la minimisation des critères d'information. La sélection de deux processus a été effectuée dans le but de déterminer, d'une part, les prix par la méthode en l'absence d'arbitrage dont les principaux résultats ont été donnés en temps continu et, d'autre part, les prix par les méthodes actuarielle et fondée sur la consommation dont les travaux ont été réalisés en majeure partie en temps discret.

L'examen des méthodologies de valorisation nous a amené à suggérer l'évaluation par le calibrage de la densité de probabilité neutre au risque et des prix de marché du risque concernant la méthode en l'absence d'arbitrage et des paramètres de l'équation d'Euler pour la méthode fondée sur la consommation. L'étalonnage par rapport aux cours observés sur le marché avait pour but, premièrement, de nous libérer du choix arbitraire d'une mesure de probabilité neutre au risque parmi un grand nombre, qui résultait de la non complétude du marché dans le cas des dérivés climatiques, deuxièmement, de nous éviter des calculs extrêmement longs impliquant plusieurs équations aux dérivées partielles et troisièmement



d'estimer le facteur d'actualisation et le coefficient d'aversion relative pour le risque à l'aide des méthodes des moments généralisés et simulés. Cette pratique n'étant recommandée que pour un marché suffisamment liquide afin d'établir les prix estimés des produits dérivés à leurs valeurs justes, elle a été de ce fait limitée aux cotations des contrats à terme mensuels des trois villes précédemment citées et aux années 2004 et 2005 durant lesquelles le volume des échanges des dérivés climatiques avait fortement augmenté.

Pour l'inférence des probabilités neutres au risque à partir des prix cotés, nous nous sommes basés sur le problème d'optimisation de Jackwerth et Rubinstein (1996) qui ont imposé à la distribution extraite d'être lisse. Les probabilités inférées ont été obtenues en minimisant la distance au carré entre chaque prix observé et le prix théorique qui a été déterminé au moyen des simulations de Monte-Carlo. Pour l'induction des prix de marché du risque, nous nous sommes inspirés de la démarche de Pirrong et Jermakyan (2001) qui les ont estimés en réduisant la somme des carrés des écarts entre chaque observation et le prix supposé issu de la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles qui s'y rapportait grâce à la méthode des différences finies.

Après une description technique sur la mise en place des procédures de valorisation, nous nous sommes ensuite consacrés au calcul des prix des dérivés climatiques de Chicago, de Cincinnati et de New York pour les dates de mars 2006 hors de l'échantillon. Il s'est effectué sur la base des paramètres induits de mars 2005, des estimations par la méthode des moments généralisés sur la période d'avril 2004 à décembre 2005 et des modèles estimés de la température sur la période de janvier 1993 à décembre 2005.

## **I. PRINCIPAUX RESULTATS**

Le rapprochement, d'un côté des processus estimés d'Onstein-Uhlenbeck et de l'autre côté des spécifications estimées ARMA au cours du chapitre 3 nous a montré que, pour chacune des deux catégories, la représentation possédant un modèle de variance périodique non paramétrique soumis par Benth et Šaltytė-Benth (2005) affichait les critères d'information les plus bas. La prise en compte du mouvement oscillatoire et de sa variabilité plus grande en hiver qu'en été a expliqué sa performance sur les autres formulations de la volatilité pour l'ensemble de nos séries de températures. Il a été noté au cours de l'étude des

processus en temps continu que l'estimation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1) dans le but d'assimiler les changements brutaux de la température fournissait des résultats improbables concernant la fréquence d'occurrence d'un saut sur une journée, qui était très élevée. Cette modélisation nous a donc semblé inappropriée pour traduire le comportement de la température.

En comparant le processus estimé d'Ornstein-Uhlenbeck et le processus estimé ARMA dans la période d'échantillonnage, il est apparu que le second a apporté des estimations plus proches des observations que le premier compte tenu de la faiblesse plus grande de ses critères de choix. Elle a été due à la composante cyclique du processus en temps discret qui s'est reposée sur une série de moyennes d'échantillonnage de la température et qui de ce fait a tenu compte davantage des caractéristiques de la variable climatique que le facteur saisonnier du processus en temps continu. Cependant, hors de la période de l'échantillon, on a pu constater que les performances en termes de RMSE et MAE du processus ARMA étaient, en général, moins bonnes que celles du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ceci se justifiait par le fait que les variations non lisses de la composante périodique du modèle de Cao et Wei ne coïncidaient plus avec les changements de la température en dehors de la période d'échantillonnage car la dynamique de la variable climatique était profondément différente de sa structure passée. Les valeurs moyennes dénuées de variations "parasites" de la fonction circulaire du processus en temps continu se sont donc moins écartées des réalisations actuelles de la température.

L'ordre supérieur à 1 de la partie autorégressive du processus ARMA qui a été trouvé sur la base des observations a permis de lever le problème de l'autocorrélation mis en évidence dans les résidus du processus estimé en temps continu. Ce résultat nous a amené à conclure que la version autorégressive en temps discret, limité à un retard, du processus d'Ornstein-Uhlenbeck n'était pas satisfaisante pour rendre compte du comportement de la température.

Bien qu'une mémoire de long terme ait été révélée dans les données à l'aide de tests et de l'examen graphique du périodogramme, sa prise en considération à travers l'estimation des processus de retour à la moyenne fractionnaire et ARFIMA n'a pas donné lieu à une amélioration des résultats en comparaison avec ceux des processus à mémoire courte. Cette contre-performance des processus à mémoire longue peut provenir du manque de précision

des coefficients estimés. Pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, il peut s'agir de la procédure d'estimation en deux étapes qui n'intègre pas de manière simultanée les informations contenues dans les structures de dépendance de court et long terme des séries. En ce qui concerne le processus ARFIMA, il peut être attribué à l'approximation de la log-vraisemblance par la fonction de Whittle. D'autre part, les erreurs d'estimation de ce processus peuvent également être imputées à l'utilisation du polynôme tronqué de la transformation  $(1-L)^d$  lors du calcul de la température estimée. Nous signalons au passage que la mémoire longue n'a pas été décelée dans les séries de la volatilité. Il a été constaté un pic dans les basses fréquences du périodogramme des résidus carrés mais il a été provoqué par la présence de la composante cyclique. De ce fait, nous n'avons pas envisagé une modélisation de la variance à partir du processus FIGARCH comme Moréno (2003) l'avait suggéré.

Au vu des représentations graphiques du chapitre 4 reproduisant simultanément les prix cotés des contrats à terme, les prix actuariels et la grandeur réelle de l'indice des degrés-jours survenant à la date d'expiration, nous avons relevé que les prix anticipés par le marché ont approché de manière plus précise la valeur qu'avait effectivement réalisé l'indice à l'échéance que les prix issus de la méthode actuarielle. Ce constat nous a conforté dans l'idée de la valorisation par le calibrage que nous avions émise auparavant.

L'évaluation en l'absence d'arbitrage par l'inférence d'une distribution neutre au risque à partir des cotations de mars 2005 a produit des prix, pour mars 2006, similaires à ceux de la méthode actuarielle, tant pour les contrats à terme que pour les options d'achat. Nous avons conclu que les probabilités extraites étaient réelles et non pas neutres au risque. L'incapacité de l'algorithme à les différencier peut venir du choix des valeurs d'amorce pour lesquelles nous avons attribué arbitrairement les fréquences  $1/N$  avec  $N$  désignant le nombre de simulations, puisqu'il nous a été difficile d'en avoir une idée *a priori*. Elle peut concerner aussi les contraintes qui sont peut-être à redéfinir afin de permettre la distinction.

L'approche en l'absence d'arbitrage par le calibrage des prix de marché du risque a engendré des prévisions pour mars 2006 généralement moins sous-estimées au sein de la période que celles provenant de la méthode actuarielle. Toutefois, cette approche souffre de la forte dépendance de ses prix aux valeurs inférées en raison du nombre important de paramètres d'étalonnage qui gouverne leur mouvement. La "pondération" de chacun des cours estimés par un prix de marché du risque a entraîné une grande variabilité de ces cours selon

l'évolution des valeurs extraites. Les effets des paramètres inférés pourront être légèrement atténués en corrigeant les variations des degrés-jours observés en mars 2005 qui sont à l'origine des fluctuations des prix de marché du risque induits.

La valorisation fondée sur la consommation qui n'a porté que sur deux paramètres de calibrage a subi, de manière moins marquée, leur influence. L'estimation des coefficients par le biais de la méthode des moments simulés a apporté des résultats plus stables, quelles que soient les séries, que la méthode des moments généralisés, qui a conduit à des valeurs négatives pour le coefficient d'aversion relative pour le risque concernant les températures de New York. Dans l'ensemble, les prix pour mars 2006, qui ont résulté des valeurs estimées de la première approche, se sont révélés moins sous-estimés au milieu de la période et donc plus proches des observations que ceux procurés par les estimations de la seconde approche subordonnés au choix des variables instrumentales. Il s'est dégagé néanmoins de l'étude que les coefficients estimés issus du groupe des instruments, incluant une constante et un retard respectif pour le rapport des consommations et le ratio des cours du marché et accompagné de la procédure de préblanchiment, ont donné lieu à des prix qui étaient aussi proches des observations que ceux provenant de la méthode des moments simulés (à l'exception de la série des températures de Chicago). Les paramètres estimés de la catégorie des instruments, réunissant une constante et deux retards pour le ratio des cours observés, ont fourni les prix les moins satisfaisants compte tenu de la forte sous-évaluation constatée à la mi-période. La supériorité des résultats venant des coefficients estimés de la méthode des moments simulés se justifie par une estimation déterminée en tenant compte du caractère simulé des prix, alors que l'estimation de la méthode des moments généralisés repose sur le calcul des prix à partir de la moyenne d'échantillonnage.

En comparant les prévisions données par les modèles de valorisation actuarielle, en l'absence d'arbitrage et C-CAPM, nous avons remarqué des différences apparentes dans le cadre empirique. La méthodologie d'évaluation fondée sur la consommation a amené des prix plus précis que les autres approches. En effet, ils se sont moins écartés de la réalisation réelle de l'indice à l'échéance malgré la sur-élévation relevée au début du contrat. Cette sur-appréciation pourra être éliminée en corrigeant les niveaux observés des degrés-jours en mars 2005. Par conséquent, le modèle C-CAPM nous a paru être le plus adéquat afin de valoriser les produits dérivés climatiques.

Néanmoins, les résultats concluants n'ont concerné que le contrat à terme. Les paramètres inférés n'ont pas influé sur le prix des options d'achat qui sont demeurés identiques aux cours actuariels. Cette insensibilité découle d'une part du calibrage vis-à-vis des cotations des contrats à terme et d'autre part du nombre limité de paramètres d'étalonnage qui contrôlent ces prix. Dans ces conditions, les valeurs procurées par la méthode en l'absence d'arbitrage portant sur les prix de marché du risque se sont avérées être utiles pour analyser les prix des options d'achat.

Nous nous sommes également intéressés aux conséquences de l'utilisation des cours observés d'un dérivé de substitution pour répondre à l'absence de données de prix concernant un contrat à terme climatique. Nous avons alors déterminé les valeurs des contrats de Cincinnati à l'aide des méthodes en l'absence d'arbitrage et fondée sur la consommation en recourant aux cotations relatives à New York dont la température était fortement liée à celle de Cincinnati. Nous avons obtenu des prévisions assez semblables à celles provenant de l'emploi des données existantes. Il nous a paru donc possible de remédier au manque de données de prix en faisant appel aux cotations d'un contrat climatique proche de celui que l'on cherche à évaluer.

Les conclusions qui ont été apportées suite à la comparaison des méthodes d'évaluation sur le plan empirique sont importantes car, avec la liquidité croissante des dérivés climatiques, des interrogations ont apparues quant au choix de la méthode à adopter pour valoriser les instruments climatiques. Jusqu'à présent, l'approche actuarielle a été la plus utilisée en raison de sa simplicité de mise en œuvre et du manque de liquidité des contrats climatiques. Mais doit-on continuer à l'employer pour évaluer des dérivés qui sont devenus liquides ? Nous avons montré dans la présente thèse que les prix actuariels des contrats à terme climatiques étaient loin de donner satisfaction tant ils s'écartaient de la réalisation réelle de l'indice des degrés-jours à l'échéance durant la mi-période des contrats. Lorsque des cotations existent pour un dérivé climatique liquide, il est préférable de recourir au calibrage par rapport aux prix du marché pour obtenir des prévisions de prix proches des observations. Le choix d'un bon modèle d'évaluation est crucial car des sommes d'argent importantes sont en jeu tant pour le vendeur que pour l'acheteur des contrats climatiques. Un prix anticipé trop bas par rapport au niveau réellement réalisé par l'indice météorologique à l'échéance aura pour conséquence une perte notable pour le souscripteur du contrat à terme climatique dans le cas d'une obligation de vente. Le prix sous-évalué d'une option climatique constituera un manque

à gagner pour le vendeur du contrat tandis que le prix sur-évalué de l'option entraînera un coût plus important pour l'acheteur du dérivé.

Nous avons vu au cours du chapitre 2 se rapportant aux modèles de valorisation que lorsque les cotations n'existaient pas pour un contrat climatique, il n'était pas possible de calibrer les méthodes d'évaluation en l'absence d'arbitrage et fondée sur la consommation. La seule façon d'évaluer les dérivés climatiques était, dans ce cas, de faire appel à la méthode actuarielle. Au regard des résultats concluants concernant l'évaluation du contrat à terme climatique de Cincinnati à partir des cotations du dérivé climatique de New York, il apparaît alors envisageable d'utiliser l'étalonnage également en l'absence de données de prix. Il suffit de calibrer les modèles de valorisation à l'aide des prix cotés des contrats climatiques liquides dont le sous-jacent est fortement corrélé à l'indice météorologique du dérivé que l'on cherche à évaluer. La démarche est également valable afin de valoriser des produits non liquides. La généralisation de cette approche à l'évaluation des instruments climatiques basés sur un tout autre facteur climatique que la température à partir des prix cotés des contrats liquides sur degrés-jours peut être considérée à condition que les variables climatiques soient fortement corrélées entre elles.

## **II. LIMITES ET PROLONGEMENTS FUTURS**

Nous pensons que la prise en compte de la mémoire longue décelée dans le comportement de la température peut nous aider à améliorer la modélisation du facteur climatique. C'est pourquoi, nous envisageons par la suite de mettre en oeuvre la méthode du maximum de vraisemblance exacte de Sowell (1992) afin de faire gagner en précision les estimations fournies par le processus ARFIMA pour lequel nous avons constaté des erreurs de prévisions légèrement supérieures à celles du processus ARMA. Dans le but encore d'améliorer les prévisions de la température et en raison de sa dépendance à d'autres variables climatiques, tels que la pluie et le vent, comme l'ont souligné Augros et Moréno (2002), nous orienterons également nos recherches vers une modélisation de la température qui allie plusieurs phénomènes météorologiques.

Pour rendre meilleures les prédictions de prix, nous projetons d'incorporer dans les modèles de valorisation les prévisions du temps à un horizon d'une semaine alors que nous

n'avons tenu compte jusqu'à maintenant que des observations passées et présentes de la température.

Toujours dans cette optique, nous souhaitons apporter des modifications à la méthodologie d'évaluation fondée sur la consommation en remplaçant la procédure d'estimation en deux étapes qui a été utilisée au cours de notre étude par une approche itérative concernant la méthode des moments simulés car nous avons pu noter la très faible probabilité associée à la statistique J qui nous a révélé le défaut d'adéquation entre les prix estimés et les prix observés pour les valeurs obtenues des paramètres à l'issue de la seconde étape de l'estimation.

Nous avons pu également remarquer pour ce modèle d'évaluation que la consommation des biens non durables n'était pas significativement influencée par la température. L'utilisation de l'équation de la consommation pourvue d'un très faible coefficient de corrélation pour générer les trajectoires de l'agrégat a eu pour effet un large paramètre d'aversion relative pour le risque au-delà de 10 provenant de la méthode des moments simulés afin de rapprocher les prix calculés des prix du marché. Or la théorie stipule que les valeurs raisonnables du coefficient d'aversion ne peuvent être comprises qu'entre 0 et 10. Un grand nombre de travaux empiriques (Mehra et Prescott (1985), Grossman, Melino et Shiller (1987), Mankiw et Zeldes (1991) et Mehra (2003)) a également mis en évidence les résultats aberrants que pouvait entraîner l'estimation du modèle C-CAPM lorsque la consommation était faiblement liée aux prix des actifs financiers. Grossman, Melino et Shiller (1987) ont expliqué que le défaut de corrélation venait de la mesure en flux de la consommation et de la détermination en stock du prix des actifs financiers. Par conséquent, le tracé de la première variable est plus lisse que celui de la seconde. Un autre problème que nous avons pu également relever concernant l'emploi de la consommation est le manque de correspondance entre la fréquence mensuelle ou annuelle d'observation de cette grandeur et la mesure journalière des cours du marché. C'est dans le but de résoudre ces difficultés que des auteurs comme Brown et Gibbons (1985) et Lioui et Malka (2004) ont substitué un indice boursier à la consommation. Il nous paraît intéressant d'analyser dans nos prochains travaux, les conséquences sur les prix estimés des dérivés climatiques, de l'usage des indices boursiers sectoriels (par exemple dans le domaine énergétique) à la place de la consommation.

De la même façon, nous souhaitons étendre le champ des actifs de substitution visant à pallier l'absence de cotation pour un contrat à terme climatique, en considérant les effets de l'utilisation des contrats à terme sur les produits agricoles (soja, blé, riz, maïs,...) pour évaluer les dérivés climatiques, notamment celui sur le soja car la production de cette plante est localisée principalement dans les Etats (Illinois et Iowa) où se trouvent les villes de Chicago et de Cincinnati. Nous pourrions ainsi comparer les résultats avec ceux que nous avons obtenus ici. Des études ont souligné l'influence du climat sur les prix de ces contrats. Stevens (1991) a montré que le modèle de marche aléatoire était rejeté pour les valeurs des contrats à terme sur le soja, sur le maïs et sur le blé durant les mois d'été, période au cours de laquelle le climat nord américain est très peu variable. Il a ainsi conclu que le climat a eu un impact sur la structure des prix.

L'extension de nos recherches portera également sur la prévision des prix à d'autres horizons (à 1 mois et à 6 mois) afin de juger du comportement des prix fournis par les trois méthodes d'évaluation sur des périodes de temps plus ou moins longues et pour d'autres types de contrats climatiques, tels que ceux basés sur un indice des précipitations, qui occupent actuellement une part grandissante dans les transactions des dérivés climatiques.



## ANNEXE

### A. Démonstration de la formule de Cox, Ross et Rubinstein (1979)

Cox, Ross et Rubinstein (1979) parviennent à la formulation suivante du prix de l'option d'achat européenne à l'instant 0 lorsque  $n$  périodes de temps sont considérées :

$$C = \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - K) \right] \quad (1)$$

$\max(0, u^j d^{n-j} S - K)$  est le paiement de l'option d'achat dans le cas où le prix du sous-jacent a augmenté  $j$  fois, cette valeur est nulle si l'option n'est pas exercée, c'est à dire si  $u^j d^{n-j} S < K$ . Nous pouvons simplifier cette formule en cherchant le plus petit entier non négatif pour  $j$ , soit  $a$ , tel que  $u^a d^{n-a} S > K$ , ainsi la formule ne dépendra plus de l'expression  $\max(\dots)$ . Pour ce faire, on linéarise  $u^a d^{n-a} S$  en utilisant les logarithmes :

$$\ln(u^a d^{n-a} S) = a \ln(u) + (n-a) \ln(d) + \ln(S) > \ln(K) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow a < \frac{\ln(K/Sd^n)}{\ln(u/d)}. \quad (3)$$

Donc pour  $j \geq a$ , on a  $\max(0, u^j d^{n-j} S - K) = u^j d^{n-j} S - K$ .

$$\text{On peut alors écrire pour } j \geq a, C = \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} (u^j d^{n-j} S - K) \right] \quad (4)$$

ou encore :

$$C = \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} u^j d^{n-j} S \right] - \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} K \right] \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow C = S \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{R^n} \right] - \frac{1}{R^n} K \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} \right]. \quad (6)$$

La seconde expression entre crochets correspond à la fonction décumulative de la loi binomiale de paramètres  $n, q$  :  $\Pr(X \geq a)$ . On peut également écrire la première expression entre crochets sous forme de fonction décumulative de la loi binomiale. Pour cela, nous réécrivons l'équation (6) de la manière suivante :

$$C = S \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) \left( \frac{u}{R} q \right)^j \left( \frac{d}{R} (1-q) \right)^{n-j} \right] - KR^{-n} \Phi(a ; n, q) \quad (7)$$

où  $\Phi(a ; n, q)$  représente la fonction décumulative de la loi binomiale de paramètre  $n, q$ .

Nous posons ensuite

$$q' = \frac{u}{R} q \text{ avec } 0 < q' < 1 \text{ et } (1-q') = 1 - \frac{u}{R} \frac{R-d}{u-d} = \frac{d}{R} \frac{u-R}{u-d} = \frac{d}{R} (1-q).$$

On obtient alors

$$C = S \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) (q')^j (1-q')^{n-j} \right] - KR^{-n} \Phi(a ; n, q) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow C = S \Phi(a ; n, q') - KR^{-n} \Phi(a ; n, q). \quad (9)$$

Lorsque le nombre de périodes  $n$  sur une durée de temps  $t$  fixée devient infiniment grand ou dit autrement lorsque la longueur du temps  $h=t/n$  entre deux dates d'une période devient

infiniment petite, Cox, Ross et Rubinstein (1979) démontrent que ce résultat converge vers la célèbre formule de Black et Scholes (1973) qui s'exprime de la façon suivante :

$$C = S N(x) - KR^{-t} N(x - \sigma\sqrt{t}) \quad \text{où } x = \frac{\ln(S/(KR^{-t}))}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \sigma\sqrt{t}, \quad R^{-n} = \dot{R}^{-t}, \quad (10)$$

$\dot{R}$  correspond au taux d'intérêt sur la période de temps  $t$ ,  $R$  est le taux d'intérêt sur la période de longueur  $h$  et  $\sigma$  représente la volatilité du cours du sous-jacent et  $N(x)$  désigne la distribution normale cumulée centrée réduite.

## B. Démonstration de la formule de Black et Scholes (1973)

L'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes que doit satisfaire le prix  $C$  de l'option d'achat européenne s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \\ C(t_m, S) = \max(S - K, 0) \quad \forall S. \end{cases} \quad (11)$$

Pour obtenir une expression fermée du prix  $C$  qui est solution de la relation (11), Black et Scholes (1973) ont cherché à transformer l'équation (11) en l'équation de la chaleur qui se définit comme suit :

**Equation de la chaleur.** L'équation de la chaleur est l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (12)$$

où  $u(\tau, x)$  représente la température en un point  $x$  à l'instant  $\tau$ . La solution de cette équation soumise à la condition initiale  $u(0, x) = \varphi(x)$  est donnée par :

$$u(\tau,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) d\xi . \quad (13)$$

Pour effectuer cette transformation, ils ont d'abord exprimé l'équation aux dérivées partielles (11) dans l'espace des variables  $(\tau,x,u)$ . Pour ce faire, considérons le prix de l'option sous la forme suivante :

$$C(t,S) = f(t) u(\tau,x) \quad (14)$$

où on a  $\tau(t,S)$  et  $x(t,S)$  .

Calculons les dérivés partielles de  $C(t,S)$  :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} u(\tau,x) + f(t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + f(t) \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} , \quad (15)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = f(t) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) \quad (16)$$

et

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = f(t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right) + f(t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial S} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2} \right) + 2f(t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) . \quad (17)$$

Remplaçons ensuite ces expressions dans l'équation aux dérivées partielles (11) qui va s'écrire :

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} u(\tau,x) + f(t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + f(t) \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 f(t) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial S} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) \right]$$

$$+ r S f(t) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) - r f(t) u(\tau, x) = 0. \quad (18)$$

On trouve facilement la représentation de  $f(t)$  en remarquant que si on a  $f(t) = \exp(-r(t_m - t))$ , on obtient alors  $\frac{\partial f}{\partial t} u(\tau, x) - r f(t) u(\tau, x) = 0$  dans l'équation (18).

Considérons maintenant seulement les termes  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  de l'équation (18) :

$$f(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \right) + f(t) \frac{\partial u}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2} + r S \frac{\partial \tau}{\partial S} \right). \quad (19)$$

$$\text{Posons } a^2 = \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \left( \frac{\partial x}{\partial S} \right)^2, \quad (20)$$

$$a^2 f(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t) \frac{\partial u}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2} + r S \frac{\partial \tau}{\partial S} \right). \quad (21)$$

On remarque que si on suppose  $\frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2} = 0$  et  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = -a^2$ , il vient

$$a^2 f(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 f(t) \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (22)$$

A partir de la relation  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = -a^2$ , on déduit que

$$\tau = a^2(t_m - t). \quad (23)$$

On obtient ainsi l'expression de  $\tau$  en fonction de  $t$ . Il nous reste à déterminer celle de  $x$  en fonction de  $t$  et de  $S$ .

$$\text{En supposant } \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2} = 0, \quad a^2 f(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t) \frac{\partial u}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2} + r S \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) = 0,$$

$\frac{\partial f}{\partial t} u(x, \tau) - r f(t) u(x, \tau) = 0$ , on aboutit à la formulation suivante de l'équation (18) :

$$f(t) \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + r S \frac{\partial x}{\partial S} \right) = 0 . \quad (24)$$

A l'aide de l'expression (20) de  $a^2$ , on déduit :

$$\frac{\partial x}{\partial S} = a\sqrt{2} \frac{1}{S} \frac{1}{\sigma} \quad (25)$$

et

$$x = \frac{a}{\sigma} \sqrt{2} \ln\left(\frac{S}{K}\right) + b(t) \quad (26)$$

où  $K$  est le prix d'exercice de l'option d'achat.

En calculant  $\frac{\partial x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}$  et  $\frac{\partial x}{\partial S}$  à partir de l'équation (26) et en plaçant les expressions dans (24), on trouve l'écriture de la fonction  $b(t)$  :

$$b'(t) + r \frac{a}{\sigma} \sqrt{2} - \frac{1}{2} a\sqrt{2} \sigma = 0 \quad (27)$$

et

$$b(t) = \left( r \frac{a}{\sigma} \sqrt{2} - \frac{1}{2} a\sqrt{2} \sigma \right) (t_m - t). \quad (28)$$

L'équation (26) devient alors :

$$x = \frac{a}{\sigma} \sqrt{2} \left( \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t) \right) . \quad (29)$$

Ainsi le prix de l'option dans l'espace des variables  $(\tau, x, u)$  s'exprime de la manière suivante :

$$C(t, S) = \exp(-r(t_m - t)) u(\tau, x) \quad (30)$$

où  $t_m$  représente la date de maturité,

$$\tau = a^2(t_m - t)$$

et

$$x = \frac{a}{\sigma} \sqrt{2} \left( \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t) \right).$$

En plaçant les dérivées  $\frac{\partial x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial S}$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial S}$  et  $\frac{\partial^2 \tau}{\partial S^2}$  dans l'équation (18), on parvient à l'équation de la chaleur. La solution de cette dernière requière une condition initiale de la forme  $u(0,x) = \varphi(x)$  que nous allons exprimer en effectuant un changement de variables pour la condition  $C_{t_m} = \max(S_{t_m} - K, 0)$  à l'aide de la relation suivante :

$$x = \frac{a}{\sigma} \sqrt{2} \ln\left(\frac{S}{K}\right) \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow S = K \exp\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{2}} x\right). \quad (32)$$

La condition  $C_{t_m} = \max(S_{t_m} - K, 0)$  devient dans l'espace des variables  $(\tau, x, u)$  :

$$u(0,x) = \varphi(x) = \begin{cases} K \left( \exp\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{2}} x\right) - 1 \right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Une fois obtenue l'expression de  $\varphi(x)$ , nous l'utilisons pour calculer la solution de l'équation de la chaleur . Nous obtenons :

$$u(\tau,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^{\infty} \frac{\left( \exp\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{2}} \xi\right) - 1 \right)}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) d\xi \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{2}} \xi\right)}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) d\xi \quad (35)$$

$$= I - II .$$

Nous allons déterminer successivement les parties I et II . Nous commençons par effectuer un changement de variables pour II en posant :

$$\frac{-x + \xi}{2\sqrt{\tau}} = \frac{\psi}{\sqrt{2}} \quad (36)$$

et

$$d\xi = \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} d\psi . \quad (37)$$

Il vient alors :

$$\Pi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{\psi^2}{2}\right) \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} d\psi \quad (38)$$

on a pour borne  $\psi = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$  car pour cette valeur,  $\exp\left(-\frac{\psi^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{-x^2}{4\tau}\right)$  ce qui est identique au cas où la limite est  $\xi=0$  dans (35) ,

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\psi^2}{2}\right) d\psi \quad (39)$$

$$= K \left[ 1 - N\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}\right) \right] = K N\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\right) \quad (40)$$

où  $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$  est la fonction de répartition d'une variable normale centrée et réduite de moyenne nulle et d'écart-type égal à 1.

Si on substitue x et  $\tau$  par leur expression, on obtient :

$$\Pi = K N\left(\frac{\frac{a}{\sigma} \sqrt{2} \left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)\right)}{a\sqrt{2} (t_m - t)}\right) \quad (41)$$

$$= K N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)}{\sigma\sqrt{t_m - t}}\right) \quad (42)$$



$$= K N(d_2) . \quad (43)$$

Il nous reste à calculer  $I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{2}} \xi\right)}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) d\xi$ .

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{\sigma}{a\sqrt{2}} \xi\right)}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x^2 + \xi^2 - 2x\xi)}{4\tau}\right) d\xi \quad (44)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{2\xi\left(x + \frac{2\tau\sigma}{a\sqrt{2}}\right) - \xi^2 - \left(x + \frac{2\tau\sigma}{a\sqrt{2}}\right)^2}{4\tau}\right) \exp\left(\frac{\left(x + \frac{2\tau\sigma}{a\sqrt{2}}\right)^2 - x^2}{4\tau}\right) d\xi . \quad (45)$$

Si on pose  $R = \left(x + \frac{2\tau\sigma}{a\sqrt{2}}\right)$ , on trouve :

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{2\xi R - \xi^2 - R^2}{4\tau}\right) \exp\left(\frac{R^2 - x^2}{4\tau}\right) d\xi \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{-(\xi - R)^2}{4\tau}\right) \exp\left(\frac{R^2 - x^2}{4\tau}\right) d\xi \quad (47)$$

$$= \exp\left(\frac{R^2 - x^2}{4\tau}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{-(\xi - R)^2}{4\tau}\right) d\xi . \quad (48)$$

Or on avait montré que  $\Pi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) d\xi = K N\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\right)$ , d'où

$$I = \exp\left(\frac{R^2 - x^2}{4\tau}\right) K N\left(\frac{R}{\sqrt{2\tau}}\right). \quad (49)$$

En substituant dans cette formule  $R$ ,  $x$  et  $\tau$  par leur expression, il vient pour  $\frac{R^2 - x^2}{4\tau}$  :

$$\frac{R^2 - x^2}{4\tau} = \frac{1}{4\tau} \left[ \left( x + \frac{2\tau\sigma}{a\sqrt{2}} \right)^2 - x^2 \right] \quad (50)$$

$$= \frac{1}{4\tau} \left[ x^2 + \frac{4\tau^2\sigma^2}{2a^2} + 2x \frac{2\tau\sigma}{a\sqrt{2}} - x^2 \right] \quad (51)$$

$$= \frac{\tau\sigma^2}{2a^2} + \frac{x\sigma}{a\sqrt{2}} \quad (52)$$

$$= \frac{a^2(t_m-t)\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma \frac{a}{\sigma} \sqrt{2} \left( \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t) \right)}{a\sqrt{2}} \quad (53)$$

$$= \frac{\sigma^2(t_m-t)}{2} + \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t) \quad (54)$$

$$= \ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(t_m - t). \quad (55)$$

Pour  $\frac{R}{\sqrt{2\tau}}$ , nous trouvons :

$$\frac{R}{\sqrt{2\tau}} = \frac{x + \frac{2\tau\sigma}{a\sqrt{2}}}{\sqrt{2\tau}} \quad (56)$$

$$= \frac{\frac{a}{\sigma} \sqrt{2} \left( \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t) \right)}{a\sqrt{2}(t_m-t)} + \frac{\frac{2\sigma a^2(t_m-t)}{a\sqrt{2}}}{a\sqrt{2}(t_m-t)} \quad (57)$$

$$= d_2 + \frac{\sigma(t_m-t)}{\sqrt{(t_m-t)}} \quad (58)$$

$$= d_2 + \sigma \sqrt{(t_m-t)} = d_1 \quad (59)$$

D'où

$$I = \exp\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(t_m - t)\right) K N(d_1) \quad (60)$$

$$= S \exp(r(t_m-t)) N(d_1) . \quad (61)$$

Par conséquent, la solution de l'équation de la chaleur s'écrit :

$$u(\tau,x) = S \exp(r(t_m-t)) N(d_1) - K N(d_2) . \quad (62)$$

Nous en déduisons l'expression suivante du prix de l'option d'achat européenne à la date  $t$  dans le modèle de Black et Scholes :

$$C(t,S) = \exp(-r(t_m-t)) u(\tau,x) \quad (63)$$

$$\Leftrightarrow C(t,S) = \exp(-r(t_m-t)) S \exp(r(t_m-t)) N(d_1) - \exp(-r(t_m-t)) K N(d_2) \quad (64)$$

$$C(t,S) = S N(d_1) - K \exp(-r(t_m-t)) N(d_2) \quad (65)$$

$$\text{où } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)}{\sigma\sqrt{t_m-t}} , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(t_m-t)}$$

et  $N$  est la distribution normale cumulée centrée réduite .

### C. Démonstration de la formule de Black et Scholes (1973) par l'approche par une mesure martingale

Le prix de l'option d'achat à la date  $t$  est défini de la façon suivante :

$$C(t,S) = e^{-r(t_m-t)} E^Q [ \max (S_{t_m}-K,0) | F_t ]. \quad (66)$$

Lorsque  $S_{t_m} \geq K$  , l'option est exercée et son payoff est donné par  $(S_{t_m} - K)$ . De ce fait, nous avons :

$$C(t,S) = e^{-r(t_m-t)} \int_0^\infty \max(x - K, 0) f_Q(x) dx = e^{-r(t_m-t)} \int_K^\infty (x - K) f_Q(x) dx. \quad (67)$$

Le prix  $S_{t_m}$  sous la probabilité  $Q$  a pour forme :

$$S_{t_m} = S_t \exp(\sigma(W_{t_m}^Q - W_t^Q) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)). \quad (68)$$

Il vient que la variable  $\frac{S_{t_m}}{S_t}$  suit une loi lognormale de paramètres  $m$  et  $s^2$  avec  $m = E\left(\frac{S_{t_m}}{S_t}\right) =$

$$(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t) \text{ et } s^2 = \text{var}\left(\frac{S_{t_m}}{S_t}\right) = \sigma^2(t_m-t).$$

La fonction de densité de la variable  $x = S_{t_m}$  s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/S)-m}{s}\right)^2\right] \quad (69)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)}{\sigma\sqrt{t_m-t}}\right)^2\right]. \quad (70)$$

En posant :

$$u = \frac{\ln(x/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)}{\sigma\sqrt{t_m-t}}, \quad (71)$$

nous déduisons que :

$$\ln(x/S) = u \sigma\sqrt{t_m-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t) \quad (72)$$

ou encore

$$x = S \exp(u \sigma\sqrt{t_m-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)). \quad (73)$$

La fonction de densité de la variable  $u$  centrée et réduite est donnée par :

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} u^2). \quad (74)$$

Nous remplaçons les expressions de  $x$  et de  $f(u)$  dans l'équation (67) pour obtenir :

$$C(t,S) = e^{-r(t_m-t)} \int_{K'}^{\infty} (S \exp(u \sigma\sqrt{t_m-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)) - K) f(u) du \quad (75)$$

$$\text{où } K' = \frac{\ln(K/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)}{\sigma\sqrt{t_m-t}},$$

$$C(t,S) = e^{-r(t_m-t)} \left[ S \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m-t)) \int_{K'}^{\infty} \exp(u \sigma\sqrt{t_m-t}) f(u) du - \int_{K'}^{\infty} K f(u) du \right] \quad (76)$$

$$C(t,S) = e^{-r(t_m-t)} (I - II). \quad (77)$$

Nous commençons par calculer l'intégrale  $\int_{K'}^{\infty} \exp(u \sigma\sqrt{t_m-t}) f(u) du$  :

$$\int_{K'}^{\infty} \exp(u \sigma\sqrt{t_m-t}) f(u) du = \int_{K'}^{\infty} \exp(u \sigma\sqrt{t_m-t}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} u^2) du \quad (78)$$

$$= \int_{K'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(u - \sigma\sqrt{t_m-t})^2}{2}\right) \exp\left(\frac{\sigma^2(t_m-t)}{2}\right) du \quad (79)$$

$$= \exp\left(\frac{\sigma^2(t_m - t)}{2}\right) \int_{K'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u - \sigma\sqrt{t_m - t})^2}{2}\right) du \quad (80)$$

$$= \exp\left(\frac{\sigma^2(t_m - t)}{2}\right) [1 - N(K' - \sigma\sqrt{t_m - t})] \quad (81)$$

$$= \exp\left(\frac{\sigma^2(t_m - t)}{2}\right) N(\sigma\sqrt{t_m - t} - K') \quad (82)$$

où  $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$  est la fonction de répartition d'une variable normale centrée et réduite de moyenne zéro et d'écart-type égal à 1.

On trouve par conséquent :

$$I = S \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)) \exp\left(\frac{\sigma^2(t_m - t)}{2}\right) N(\sigma\sqrt{t_m - t} - K') \quad (83)$$

$$= S \exp(r(t_m - t)) N(\sigma\sqrt{t_m - t} - K') . \quad (84)$$

Calculons maintenant la deuxième intégrale  $\Pi = \int_{K'}^{\infty} K f(u) du$  :

$$\Pi = K \int_{K'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} u^2) du = K (1 - N(K')) = K N(-K') . \quad (85)$$

Le prix de l'option d'achat européen s'écrit alors :

$$\begin{aligned} C(t, S) &= e^{-r(t_m - t)} (I - \Pi) \\ &= e^{-r(t_m - t)} (S \exp(r(t_m - t)) N(\sigma\sqrt{t_m - t} - K') - K N(-K')) \\ &= S N(\sigma\sqrt{t_m - t} - K') - e^{-r(t_m - t)} K N(-K') . \end{aligned} \quad (86)$$

$$\text{Or } -K' = -\frac{\ln(K/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)}{\sigma\sqrt{t_m - t}} = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_m - t)}{\sigma\sqrt{t_m - t}} = d_2$$

$$\text{et } \sigma\sqrt{t_m-t} - K' = \sigma\sqrt{t_m-t} + d_2 = d_1 .$$

Nous obtenons ainsi la formule de Black et Scholes (1973) :

$$C(t,S) = S N(d_1) - K e^{-r(t_m-t)} N(d_2) . \quad (87)$$

#### **D. Démonstration des équations d'Euler du modèle d'évaluation fondé sur la consommation**

Dans le modèle d'équilibre général de Lucas (1978), l'agent représentatif cherche à déterminer le niveau de la consommation réelle  $C_t$  et la quantité de titres risqués  $Q_t$  et sans risque  $Q_t^0$  de façon à maximiser l'espérance de son utilité intertemporelle tout en respectant sa contrainte budgétaire. Le problème auquel est confronté l'agent s'écrit de la manière suivante :

$$\text{Max}_{C_\tau, Q_\tau, Q_\tau^0} E \left[ \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} U(C_\tau) \mid F_t \right], \quad 0 < \beta < 1 \quad (88)$$

sous la contrainte :

$$C_\tau + P_\tau Q_\tau + P_\tau^0 Q_\tau^0 = (P_\tau + D_\tau) Q_{\tau-M} + P_\tau^0 Q_{\tau-M}^0 + L_\tau \quad (89)$$

où  $U(\dots)$  exprime la fonction d'utilité de l'individu,  $P_\tau$  et  $P_\tau^0$  définissent respectivement le prix de l'actif risqué et le prix du titre sans risque à la date  $\tau$ ,  $D_\tau$  désigne les dividendes,  $Q_{\tau-M}$  et  $Q_{\tau-M}^0$  correspondent aux quantités de titres risqués et sans risque détenues depuis  $M$  périodes,  $L_\tau$  décrit le salaire de l'agent et  $\beta$  reflète le facteur d'actualisation.

Les solutions du programme d'optimisation sont usuellement données par la méthode dite du multiplicateur de Lagrange. Elle consiste à introduire la fonction de la forme suivante (souvent appelée le lagrangien) :

$$L = E_t \left[ \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} U(C_{\tau}) + \gamma_{\tau} (C_{\tau} + P_{\tau} Q_{\tau} + P_{\tau}^0 Q_{\tau}^0 - (P_{\tau} + D_{\tau}) Q_{\tau-M} - P_{\tau}^0 Q_{\tau-M}^0 - L_{\tau}) \right]. \quad (90)$$

Pour  $M = 2$ ,

$$\begin{aligned} L = E_t [ & \beta^0 U(C_t) + \gamma_t (C_t + P_t Q_t + P_t^0 Q_t^0 - (P_t + D_t) Q_{t-2} - P_t^0 Q_{t-2}^0 - L_t) \\ & + \beta^1 U(C_{t+1}) + \gamma_{t+1} (C_{t+1} + P_{t+1} Q_{t+1} + P_{t+1}^0 Q_{t+1}^0 - (P_{t+1} + D_{t+1}) Q_{t-1} - P_{t+1}^0 Q_{t-1}^0 - L_{t+1}) \\ & + \beta^2 U(C_{t+2}) + \gamma_{t+2} (C_{t+2} + P_{t+2} Q_{t+2} + P_{t+2}^0 Q_{t+2}^0 - (P_{t+2} + D_{t+2}) Q_t - P_{t+2}^0 Q_t^0 - L_{t+2}) + \dots ] \end{aligned}$$

où  $E_t = E[\dots | F_t]$  et  $\gamma$  désigne le multiplicateur de Lagrange.

Les quantités optimales  $C$ ,  $Q$  et  $Q^0$  satisfont les conditions de premier ordre obtenues en égalisant à zéro les dérivées partielles de  $L$  par rapport à  $C$ ,  $Q$  et  $Q^0$ . Au temps  $t$ , on a ainsi :

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = 0 \Leftrightarrow \beta^0 E_t[U'(C_t)] = -\gamma_t ; \quad \frac{\partial L}{\partial C_{t+2}} = 0 \Leftrightarrow \beta^2 E_t[U'(C_{t+2})] = -\gamma_{t+2} ; \quad (91)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_t} = 0 \Leftrightarrow E_t[\gamma_t P_t - \gamma_{t+2} (P_{t+2} + D_{t+2})] = 0 \text{ et} \quad (92)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_t^0} = 0 \Leftrightarrow E_t[\gamma_t P_t^0 - \gamma_{t+2} P_{t+2}^0] = 0. \quad (93)$$

En combinant ces équations, il vient :

$$E_t \left[ \beta^{(2-0)} \frac{U'(C_{t+2})}{U'(C_t)} \frac{(P_{t+2} + D_{t+2})}{P_t} \right] = 1 \quad (94)$$

pour l'actif risqué et

$$E_t \left[ \beta^{(2-0)} \frac{U'(C_{t+2})}{U'(C_t)} \frac{P_{t+2}^0}{P_t^0} \right] = 1 \quad (95)$$

pour le titre sans risque.

Ces relations sont valables également pour les autres temps  $t+1$ ,  $t+2$ ,... De manière générale, il s'ensuit que



$$E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} \frac{(P_{t+M} + D_{t+M})}{P_t} \right] = 1 \Leftrightarrow P_t = E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} (P_{t+M} + D_{t+M}) \right] \quad (96)$$

et

$$E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} \frac{P_{t+M}^0}{P_t^0} \right] = 1 \Leftrightarrow P_t^0 = E_t \left[ \beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} P_{t+M}^0 \right] \quad (97)$$

où  $\beta^M \frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)}$  représente le taux marginal de substitution intertemporelle de la consommation. Ces deux équations sont souvent nommées conditions d'Euler.

### E. Fonction d'utilité puissance et définition du coefficient constant d'aversion relative pour le risque

Les préférences de l'agent représentatif du modèle d'évaluation fondé sur la consommation sont souvent modélisées en adoptant une fonction d'utilité puissance d'aspect suivant :

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\varphi} - 1}{1-\varphi} \quad (98)$$

où  $\varphi \geq 0$  définit le coefficient constant d'aversion relative pour le risque. Pour  $\varphi > 0$ , nous obtenons les propriétés usuelles de la fonction d'utilité ( $U' > 0$  et  $U'' < 0$ ).

Afin de définir la notion de coefficient constant d'aversion relative pour le risque, nous nous plaçons dans le cas où l'agent reçoit un revenu aléatoire ( $W+\varepsilon$ ) venant de l'achat d'un titre où  $\varepsilon$  représente le montant incertain du revenu avec  $E(\varepsilon) = 0$ . Considérons que cet agent n'aime pas le risque. Il est prêt à verser une somme  $\pi$  pour obtenir un gain certain, c'est à dire pour avoir  $U(W-\pi) = E[U(W+\varepsilon)]$ . Plus  $\pi$  est élevé, plus l'agent a de l'aversion pour le risque. A l'aide de ce terme, nous allons mettre en évidence les coefficients d'aversion absolue et relative pour le risque. Pour ce faire, nous utilisons le développement de Taylor qui est donné par la formule suivante pour la fonction  $U(X)$  au point  $a$  :

$$U(X) \approx U(a) + \frac{U'(a)}{1} [X-a] + \frac{U''(a)}{2 \times 1} [X-a]^2 + \frac{U'''(a)}{3 \times 2 \times 1} [X-a]^3 + \dots \quad (99)$$

Son application pour les termes  $U(W-\pi)$  et  $E[U(W+\varepsilon)]$  au voisinage de  $W$  donne :

$$U(W-\pi) = U(W) + U'(W) [(W-\pi) - W] \quad (100)$$

et

$$E[U(W+\varepsilon)] = U(W) + U'(W) E[W+\varepsilon - W] + \frac{U''(W)}{2} E[W+\varepsilon - W]^2. \quad (101)$$

En remarquant que  $E(\varepsilon) = 0$  et  $E(\varepsilon)^2 = E[\varepsilon - E(\varepsilon)]^2 = \sigma_\varepsilon^2$ , nous obtenons pour  $U(W-\pi) = E[U(W+\varepsilon)]$  :

$$U(W) + U'(W) (-\pi) = U(W) + \frac{U''(W)}{2} \sigma_\varepsilon^2. \quad (102)$$

D'où

$$\pi = -\frac{1}{2} \frac{U''(W)}{U'(W)} \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} A(W) \sigma_\varepsilon^2 \quad (103)$$

où  $A(W)$  représente le coefficient d'aversion absolue pour le risque. Le coefficient d'aversion relative est donné par  $\varphi(W) = WA(W)$  en supposant que l'agent reçoit un revenu aléatoire d'un montant  $W\varepsilon$  avec  $E(\varepsilon)=1$  et  $\text{Var}(\varepsilon)=\sigma_\varepsilon^2$  et qu'il est prêt à verser ici *une part*  $\pi$  de  $W$  de sorte à éviter le risque, c'est à dire à obtenir  $U[W(1-\pi)] = E[U(W\varepsilon)]$ .

Le coefficient d'aversion relative est dit constant si on a  $\varphi'(W) = 0$  ce qui signifie que l'agent investit toujours la même part d'argent dans l'achat de titres à mesure que sa richesse  $W$  augmente. Il est dit croissant si on a  $\varphi'(W) > 0$  et dans ce cas, l'agent place une part d'argent de moins en moins importante dans l'acquisition de titres en même temps que sa richesse croît car on a  $\varphi(W)$  qui est croissant et  $\pi = -\frac{1}{2} \frac{WU''(W)}{U'(W)} \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \varphi(W) \sigma_\varepsilon^2$  qui de ce fait s'accroît également. L'agent exprime alors une aversion pour le risque de plus en plus grande. Le coefficient est dit décroissant si on a  $\varphi'(W) < 0$ .

Les deux attraits de la fonction d'utilité puissance sont d'une part, qu'elle permet de prendre en compte le cas de la neutralité vis-à-vis du risque lorsque <sup>(1)</sup>  $\phi = 0$  et d'autre part, qu'elle donne lieu à des variables stationnaires. En effet, on a  $\frac{U'(C_{t+M})}{U'(C_t)} = \left(\frac{C_{t+M}}{C_t}\right)^{-\phi}$  où  $x_{t+M} = \frac{C_{t+M}}{C_t}$  est une variable stationnaire <sup>(2)</sup> alors que le niveau de la consommation peut ne pas être stationnaire. Cette propriété est intéressante car elle permet d'estimer le coefficient  $\phi$  par la méthode des moments généralisés et par la méthode des moments simulés. Hansen (1982) montre que sous l'hypothèse de stationnarité des variables, l'estimateur de  $\phi$  est convergent et possède une distribution asymptotique normale.

## F. Tests de stationnarité

Plusieurs tests ont été élaborés pour détecter la non stationnarité d'une série. Les tests les plus connus sont les tests de Dickey-Fuller (simple et augmenté), de Phillips-Perron et de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (KPSS). A la différence du test de Dickey-Fuller augmenté qui prend en considération l'autocorrélation des erreurs en utilisant une représentation autorégressive pour l'erreur, le test de Phillips-Perron ne stipule pas de forme particulière pour l'erreur. Il s'appuie sur une correction non paramétrique de la statistique  $t_{\hat{\phi}_1}$ . L'hypothèse nulle est jusqu'ici l'hypothèse de non stationnarité. La spécificité du test KPSS est de postuler la stationnarité en hypothèse nulle. Les auteurs considèrent la stationnarité autour d'un trend déterministe linéaire et autour d'une constante. Les tests de Phillips-Perron et de Kwiatkowski et al. (1992) sont présentés ici en détail.

---

<sup>(1)</sup> On rappelle que  $\phi(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)}$ . Si  $\phi(W) = 0$ , on a  $U''(W) = 0$  ce qui traduit la neutralité vis-à-vis du risque. Pour  $U''(W) < 0$ , la fonction d'utilité est concave ce qui signifie que l'agent n'aime pas le risque puisque plus sa richesse  $W$  augmente, plus son utilité décroît.

<sup>(2)</sup>  $x_{t+M} = \frac{C_{t+M}}{C_t} = e^{\ln\left(\frac{C_{t+M}}{C_t}\right)} = e^{\left(\ln(C_{t+M}) - \ln(C_t)\right)}$  où  $\ln(C_{t+M}) - \ln(C_t)$  est stationnaire.

### ***Test de Phillips-Perron***

Le déroulement du test de Phillips-Perron s'effectue en quatre étapes qui sont :

1) La procédure du test consiste à estimer (par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires) successivement les trois formes possibles de non stationnarité du test de Dickey-Fuller simple qui sont :

$$\begin{cases} X_t = \theta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t & [1] \\ X_t = \theta_1 X_{t-1} + c + \varepsilon_t & [2] \\ X_t = \theta_1 X_{t-1} + bt + c + \varepsilon_t & [3] \end{cases}$$

où  $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ . Le test de Dickey-Fuller simple suppose que l'erreur  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc. On commence par estimer le modèle [3] qui correspond à la forme la plus générale de non stationnarité. Si la tendance n'est pas significative, on régresse alors la série sur une constante (modèle [2]). Si la constante n'est pas contributive à l'explication de  $X_t$ , on étudie alors le modèle [1].

2) Pour chacun des modèles estimés, on détermine la variance dite de court terme à l'aide des résidus  $\hat{\varepsilon}_t$  issus de l'estimation du modèle :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \quad (104)$$

où  $n$  désigne le nombre d'observations.

3) Estimation du facteur correctif  $s^2$  appelé variance de long terme :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 + 2 \sum_{j=1}^b \left(1 - \frac{j}{b+1}\right) \frac{1}{n} \sum_{t=j+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-j} \quad (105)$$

où

$$b \approx 4 \left(\frac{n}{100}\right)^{2/9} . \quad (106)$$

4) Calcul de la statistique de Phillips et Perron :

$$t_{\hat{\phi}_1}^{PP} = \sqrt{k} \times \frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} + \frac{n(k-1)\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}{\sqrt{k}} \quad (107)$$

avec

$$k = \frac{\hat{\sigma}^2}{s^2}. \quad (108)$$

Sous  $H_0$  vraie, le processus étudié est non stationnaire ( $\phi_1=1$  et donc  $X_t \sim I(1)$ ) et l'estimateur de  $\phi_1$  ne suit pas une distribution normale. Par conséquent, le t-Student de  $\phi_1$  ne peut pas être comparé aux valeurs critiques de la table de Student. Il en va de même pour la t-statistique de b et c. Dans le cadre de leur test, Dickey et Fuller (1979) ont étudié la distribution asymptotique des estimateurs de b, c et  $\phi_1$  sous  $H_0$  vraie. Ils ont tabulé les valeurs critiques pour des échantillons de différentes tailles. Pour une taille supérieure à 500 observations, les valeurs critiques sont 2.78 à 5% pour la tendance du modèle [3], 2.52 à 5% pour la constante du modèle [2] et -1.95 à 5% pour le paramètre  $\phi_1$  du modèle [1]. Si  $t_{\hat{\phi}_1}^{PP} > t_{\text{tabulé}}$ , on accepte l'hypothèse nulle de non stationnarité de type stochastique. Si l'hypothèse nulle  $\phi_1 = 1$  est rejetée, on peut alors comparer le t-Student de l'estimateur de b et c aux valeurs critiques usuelles ( $|1.96|$  à 5%). Phillips et Perron (1988) montrent que la correction non paramétrique apportée à  $t_{\hat{\phi}_1}$  ne modifie pas la distribution asymptotique de la statistique qui reste identique à celle observée dans le cas du test de Dickey-Fuller simple. En conséquence, les valeurs critiques tabulées par Dickey et Fuller demeurent également valables pour le test de Phillips-Perron.

### ***Test de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (1992)***

Le test de KPSS consiste, dans la première étape, à régresser la série sur un trend et une constante. Si le trend n'est pas significatif, on analyse, dans la seconde étape, le modèle avec uniquement la constante. Les deux cas se présentent comme suit :

$$\begin{cases} X_t = r_t + \varepsilon_t & \text{et} & r_t = r_{t-1} + u_t & [1] \\ X_t = \beta t + r_t + \varepsilon_t & \text{et} & r_t = r_{t-1} + u_t & [2] \end{cases}$$

où  $\varepsilon_t \sim I(0)$  et  $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ .

Les modèles [1] et [2] peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X_t = \alpha + \sum_{j=1}^t u_j + \varepsilon_t & [1] \\ X_t = \beta t + \alpha + \sum_{j=1}^t u_j + \varepsilon_t & [2]. \end{cases}$$

Les résidus  $\hat{\varepsilon}_t$  issus de l'estimation de chacun des modèles sont employés ensuite pour calculer :

$$\hat{S}_t = \sum_{k=1}^t \hat{\varepsilon}_k \quad \text{avec } t = 1, 2, \dots, n \quad (109)$$

et

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^m \left( 1 - \frac{j}{m-1} \right) \sum_{t=j+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-j} \quad (110)$$

où  $m$  désigne le paramètre de troncature. Kwiatkowski et al. (1992) choisissent  $m$  tel que  $m = \text{int} \left[ x \left( \frac{n}{100} \right)^{1/4} \right]$  où  $x$  est une constante. Toutefois, Hobijn, Franses et Ooms (1998) soulignent que le test est biaisé en présence d'une autocorrélation positive car  $s^2$  dépendra fortement de la valeur choisie pour  $x$ . Pour s'affranchir du poids de  $x$ , ils suggèrent de calculer  $m$  à l'aide des méthodes de Newey et West (1994) et d'Andrews (1991) qui sont présentées dans la section 4.3 de la présente thèse.

La statistique de test a pour forme :

$$\kappa = \frac{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \hat{S}_t^2}{\hat{\sigma}^2} . \quad (111)$$

Kwiatkowski et al. (1992) ont tabulé les valeurs critiques pour la statistique  $\kappa$  dans les cas d'une stationnarité autour d'un trend et d'une stationnarité autour d'une constante. Si  $\kappa > \kappa_{\text{tabulé}}$ , on rejette l'hypothèse nulle de stationnarité.

Puisque  $y_t$  est stationnaire sous l'hypothèse nulle, il est donc possible de comparer les t-statistiques des coefficients estimés avec les valeurs critiques de la table de Student ce qui n'était pas le cas avec le test de Phillips-Perron.

## G. Méthode du maximum de vraisemblance

Soit  $Z_t$  une variable aléatoire de densité de probabilité  $f(z, \theta)$  qui dépend de  $k$  paramètres inconnus formant le vecteur  $\theta' = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_k)$ , soient  $\{z_1, \dots, z_n\}$  les réalisations indépendantes de la variable  $Z_t$ , la probabilité d'apparition *a priori* de cet échantillon est égale au produit des probabilités d'apparition de chacune des réalisations et correspond à la fonction de vraisemblance notée  $L(z_1, \dots, z_n ; \theta)$  :

$$L(z_1, \dots, z_n ; \theta) = \prod_{t=1}^n f(z_t, \theta) . \quad (112)$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à rechercher la valeur de  $\theta$  de manière à maximiser la probabilité  $L$ .

Supposons que le vecteur  $Z=y-X\theta$  de format  $(n,1)$  avec  $X$  de taille  $(n,k)$  renvoie au vecteur des erreurs  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ , la fonction de vraisemblance  $L$  s'écrit alors :

$$L(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n ; \theta) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right] \quad (113)$$

Pour faciliter les calculs, on prend généralement le logarithme de la fonction de vraisemblance que nous notons  $LL$  et qui apparaît de la manière suivante :

$$LL(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n ; \theta) = \ln L(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n ; \theta) = \sum_{t=1}^n \left[ \ln \left( \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right] \quad (114)$$

$$= \sum_{t=1}^n \left[ -\ln(\sigma_t) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right] \quad (115)$$

$$= -n \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[ \ln(\sigma_t^2) + \left( \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right] \quad (116)$$

La valeur  $\hat{\theta}$  qui maximise le logarithme de la fonction de vraisemblance (souvent appelé la log-vraisemblance) annule le score  $s(\varepsilon ; \theta)$  :

$$s(\varepsilon ; \theta) = \frac{\partial \text{LL}}{\partial \theta} = 0. \quad (117)$$

L'estimateur  $\hat{\theta}$  possède les propriétés suivantes lorsque la taille de l'échantillon est grande :

(i) convergence :

$$p \lim (\hat{\theta}) = \theta, \quad (118)$$

l'estimateur  $\hat{\theta}$  tend vers sa vraie valeur  $\theta$  ;

(ii) normalité asymptotique :

$$\hat{\theta} \overset{a}{\sim} N(\theta, I^{-1}(\theta)) \quad (119)$$

où  $I(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2 \text{LL}}{\partial \theta \partial \theta'} \right]$  est la matrice d'information. Cette dernière peut être approchée à l'aide

de la matrice hessienne  $I(\theta) \approx - \left. \frac{\partial^2 \text{LL}}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\hat{\theta}}$  lorsque l'échantillon est de grande taille. L'écart-

type estimé de l'estimateur  $\hat{\theta}$  est alors donné par  $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{\text{diag}(I^{-1}(\hat{\theta}))}$ .

L'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard et de l'équation de la variance associée nécessite la discrétisation du processus de retour à la moyenne et la maximisation de la log-vraisemblance suivante :



$$LL(\varepsilon; \theta) = -n \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left[ \ln(\sigma_t^2) + \left( \frac{\Delta T_t - E(\Delta T_t)}{\sigma_t} \right)^2 \right] \quad (120)$$

avec

$$\Delta T_t - E(\Delta T_t) = \varepsilon_t = \Delta T_t - \left( \Delta T_t^m + \alpha(T_{t-1}^m - T_{t-1}) \Delta t \right) \quad (121)$$

où  $\varepsilon' = (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)$ ,  $n$  représente le nombre d'observations,  $\theta'$  est le vecteur des coefficients à estimer incluant  $\alpha$  qui désigne la vitesse de retour à la moyenne de la température et  $\sigma_t$  correspond soit à un processus de type ARCH, soit à une représentation périodique de la variance (modèles de Cao et Wei (1998), de Roustant (2002) et de Campbell et Diebold (2004)).

## H. Tests de mémoire longue

Il existe plusieurs tests de mémoire longue. Les deux principaux sont l'analyse R/S et la méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983). Leur principal attrait est qu'ils sont très simples à mettre en œuvre.

### *L'analyse R/S*

La statistique R/S (Rescaled Range ou Range over Standard Deviation), due à Hurst (1951) est calculée de la manière suivante :

$$R/S = \frac{1}{\left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \right]^{1/2}} \times \left[ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) \right] \quad (122)$$

où  $n$  désigne le nombre d'observations et  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ .

L'exposant de Hurst est ainsi donné par :

$$H \sim \frac{\log(R/S)}{\log(n)} \text{ avec } 0 < H < 1. \quad (123)$$

Rappelons que pour  $\frac{1}{2} < H < 1$  le processus possède une mémoire longue, pour  $0 < H < \frac{1}{2}$  il est dit anti-persistant et pour  $H = \frac{1}{2}$  il a une mémoire courte. Lo (1991) souligne le biais à la hausse de la statistique R/S en présence d'une dépendance de court terme de la série temporelle et propose la statistique R/S modifiée qui a l'expression suivante :

$$R/S(q) = \frac{1}{S(q)} \times \left[ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) \right], \quad (124)$$

$$S(q) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \left[ \sum_{i=j+1}^n (X_i - \bar{X})(X_{i-j} - \bar{X}) \right], \quad (125)$$

$$\omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}, \quad q < n, \quad (126)$$

$$q = \text{int}[k_n], \quad k_n = \left( \frac{3n}{2} \right)^{1/3} \left( \frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}^2} \right)^{2/3} \quad (127)$$

où  $\text{int}[k_n]$  désigne la partie entière de  $k_n$  et  $\hat{\rho}$  représente l'estimateur du coefficient d'autocorrélation d'ordre 1.

Afin de déterminer si la valeur estimée  $H$  est significativement différente ou non de  $\frac{1}{2}$ , Lo (1991) suggère la construction de la statistique  $V$  à partir de la statistique R/S modifiée :

$$V = \frac{R/S(q)}{\sqrt{n}}. \quad (128)$$

La distribution de  $V$  est connue.  $V$  tend vers l'étendue d'un pont brownien sur l'intervalle unité. A partir de ce résultat, Lo (1991) a déterminé les valeurs critiques pour  $V$  qui sont, dans le cas d'un test unilatéral, 1.747 à 5% et 1.620 à 10%. Il est alors possible de tester la significativité de l'exposant de Hurst en utilisant  $V$  et en postulant pour l'hypothèse nulle, la présence d'une mémoire courte contre l'hypothèse alternative de mémoire longue.

**La méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983)**

La persistance peut également être mesurée au moyen du paramètre fractionnaire  $d = H - \frac{1}{2}$ ,  $H$  pouvant être déterminé par le biais de la statistique R/S ou R/S modifiée. Ce calcul simple de  $d$  ne permet pas toutefois d'effectuer un test de significativité pour la valeur  $d$  car la distribution de  $H$  n'est pas connue. Geweke et Porter-Hudak (1983) vont pallier cette lacune en proposant une estimation du paramètre  $d$  par une méthode de régression basée sur la densité spectrale. La densité spectrale d'un processus stationnaire  $y_t$  est donnée par :

$$f_y(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(4 \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{-d} f_\varepsilon(\lambda) \quad (129)$$

où  $\lambda$  désigne la fréquence et  $f_\varepsilon(\lambda)$  correspond à la densité spectrale du processus stationnaire  $\varepsilon_t = (1-L)^d y_t$  avec  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ .

Concrètement, les auteurs considèrent le modèle de régression suivant :

$$Y_j = \alpha + \beta X_j + \xi_j \quad (130)$$

où  $\alpha = \ln\left(\frac{\sigma^2 f_\varepsilon(0)}{2\pi}\right)$ ,  $f_\varepsilon(0)$  désigne la densité spectrale de  $\varepsilon_t$  à la fréquence zéro,  $\beta = -d$ ,  $X_j = \ln\left(4 \sin^2\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right)$ ,  $\xi_j = \ln\left(\frac{I(\lambda_j)}{f_y(\lambda_j)}\right)$  et  $Y_j = \ln I(\lambda_j)$

avec  $I(\lambda_j)$  représentant le périodogramme qui est un estimateur non biaisé de la densité spectrale. Il est défini par :

$$I(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{k=1}^n y_k e^{i k \lambda_j} \right|^2 \quad (131)$$

avec  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{n}$  se rapportant à la fréquence de Fourier pour  $j = 1, \dots, n/2$  et  $n$  correspondant au nombre d'observations pour  $\{y_t\}$ .

Le paramètre  $d$  est ici estimé par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires. L'estimateur de  $d$  est alors donné par :

$$\hat{d} = - \left[ \sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})^2 \right]^{-1} \left[ \sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y}) \right] \quad (132)$$

où  $m \in [n^{0.45}; n^{0.55}]$ .

Geweke et Porter-Hudak (1983) montrent que, quand  $-1/2 < d < 1/2$ , la loi de l'estimateur  $\hat{d}$  de  $d$  tend vers une loi normale quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\hat{d} \sim N \left( d, \pi^2 \left[ 6 \sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})^2 \right]^{-1} \right). \quad (133)$$

Ce résultat permet de construire la t-statistique suivante pour le test de significativité du paramètre  $d$  avec pour l'hypothèse  $H_0$  la non différence de  $d$  par rapport à zéro :

$$t_{\hat{d}} = \frac{\hat{d} - d}{\hat{\sigma}_{\hat{d}}} \quad (134)$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_{\hat{d}} = \sqrt{\pi^2 \left[ 6 \sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})^2 \right]^{-1}}.$$

## I. Méthodes d'estimation en une étape du processus ARFIMA

Les méthodes d'estimation en une étape donnent des résultats plus précis que les approches en deux étapes car elles permettent une estimation globale des coefficients. Toutefois ces méthodes sont plus difficiles à mettre en place, notamment la méthode du maximum de vraisemblance exact de Sowell (1992). Il existe une seconde méthodologie en une étape beaucoup plus simple à mettre en oeuvre qui est la méthode du maximum de vraisemblance approximé par la fonction de Whittle. Nous décrivons ici les deux méthodes.

**Méthode du maximum de vraisemblance exact**

Soit  $X$  un échantillon de  $n$  observations tel que  $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]'$ . On suppose que  $X$  suit une loi normale de moyenne nulle et de matrice des variances-covariances  $\Sigma$ . Sa fonction de densité s'exprime alors de la sorte :

$$f(X) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} X' \Sigma^{-1} X\right). \tag{135}$$

Du fait de la stationnarité de la série, la matrice des variances-covariances a une forme de Toeplitz :  $\Sigma = [\gamma_{j-l}]$  avec  $j, l = 1, \dots, n$ .

Pour estimer les paramètres  $d, \rho_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) et  $\Theta_l$  ( $l=1, \dots, q$ ), il faut d'abord formuler la matrice  $\Sigma = [\gamma_{j-l}]$  en fonction de ces paramètres. La fonction d'autocovariance  $\gamma$  est donnée par :

$$\gamma_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_x(\lambda) e^{i\lambda s} d\lambda \tag{136}$$

où  $f_x(\lambda)$  représente la densité spectrale de  $x_t$ .

Pour déterminer l'expression de  $f_x(\lambda)$ , Sowell (1992) utilise la densité spectrale  $f_u(\lambda)$  de  $u_t = (1-L)^d x_t$ . Pour  $u_t$  généré par  $\Phi(L) u_t = \varphi(L) \varepsilon_t$  avec  $\Phi(L) = 1 - \rho_1 L - \dots - \rho_p L^p$ ,  $\varphi(L) = 1 - \Theta_1 L - \dots - \Theta_q L^q$  et  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ , elle s'écrit de la manière suivante :

$$f_u(\lambda) = \frac{|\varphi(\omega)|^2}{|\Phi(\omega)|^2} \sigma^2 \tag{137}$$

où  $\omega = e^{i\lambda}$ .

Soit l'équation caractéristique suivante associée à  $\Phi(L)$  :

$$1 - \rho_1 z - \dots - \rho_p z^p = 0, \tag{138}$$

en supposant que les racines  $r_j$  de cette équation soient de module supérieur à 1, on peut alors écrire :

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^p \left( 1 - \frac{z}{r_j} \right) = \prod_{j=1}^p (1 - \kappa_j z) \quad (139)$$

où  $|\kappa_j| < 1$  pour  $j=1, \dots, p$ .

En remplaçant cette formulation dans (137), on obtient :

$$f_u(\lambda) = |\varphi(\omega)| \sigma^2 \prod_{j=1}^p (1 - \kappa_j \omega)^{-1} (1 - \kappa_j \omega^{-1})^{-1} \quad (140)$$

qui peut se décomposer de la façon suivante :

$$f_u(\lambda) = \sigma^2 \sum_{l=-q}^q \psi(l) \omega^l \sum_{j=1}^p \omega^p \zeta_j \left[ \frac{\kappa_j^{2p}}{(1 - \kappa_j \omega)} - \frac{1}{(1 - \kappa_j^{-1} \omega)} \right] \quad (141)$$

où  $\psi(l) = \sum_{s=\max[0, l]}^{\min[q, q-l]} \Theta_s \Theta_{s-l}$  et  $\zeta_j = \left[ \kappa_j \prod_{i=1}^p (1 - \kappa_i \kappa_j) \prod_{m \neq j} (\kappa_j - \kappa_m) \right]^{-1}$ .

La relation (141) est l'expression de la densité spectrale d'un processus ARMA(p,q).

A partir de cette expression, on peut écrire la densité spectrale de  $x_t$  comme suivante :

$$f_x(\lambda) = (1 - \omega)^{-d} (1 - \omega^{-1})^{-d} f_u(\lambda) \quad (142)$$

$$\Leftrightarrow f_x(\lambda) = \sigma^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(l) \zeta_j \left[ \frac{\kappa_j^{2p}}{(1 - \kappa_j \omega)} - \frac{1}{(1 - \kappa_j^{-1} \omega)} \right] (1 - \omega)^{-d} (1 - \omega^{-1})^{-d} \omega^{p+1}. \quad (143)$$

Cette équation représente la densité spectrale d'un processus ARFIMA(p,d,q).

En la substituant dans la formule (136), il nous vient l'expression suivante de la fonction d'autocovariance :

$$\gamma_s = \sigma^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(l) \zeta_j C(d, p+l-s, \kappa_j) \quad (144)$$

avec en posant  $h = p + l - s$ ,

$$C(d, h, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\kappa^{2p}}{(1 - \kappa e^{-i\lambda})} - \frac{1}{(1 - \kappa^{-1} e^{-i\lambda})} \right] \times (1 - e^{-i\lambda})^{-d} (1 - e^{i\lambda})^{-d} e^{-i\lambda h} d\lambda. \quad (145)$$

L'expression utilisée pour calculer  $C(d, h, \kappa)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & C(d, h, \kappa) \\ &= \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d+h)}{\Gamma(1-d+h)\Gamma(1-d)\Gamma(d)} \times \left[ \kappa^{2p} F(d+h, 1; 1-d+h; \kappa) + F(d-h, 1; 1-d-h; \kappa) - 1 \right] \end{aligned} \quad (146)$$

où  $F(a, b; c; x)$  est la fonction hypergéométrique définie par :

$$F(a, b; c; x) = \sum_j \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+j)\Gamma(j+1)} x^j. \quad (147)$$

### ***Méthode du maximum de vraisemblance approximé par la fonction de Whittle***

Brockwell et Davis (1991) maximisent la log-vraisemblance suivante (appelée fonction de Whittle) :

$$LL(X, \theta) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_j \left( \frac{I_n(\lambda_j)}{g(\lambda_j)} \right) - \sum_j \ln g(\lambda_j) \quad (148)$$

où  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{n}$ ,  $I_n$  est le périodogramme qui est donné par :

$$I_n(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}) e^{ik\lambda_j} \right|^2 \quad \text{avec} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad (149)$$

et  $\sigma^2 g = f$  correspond à la densité spectrale qui s'exprime de la façon suivante :

$$f(\lambda_j) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\varphi(e^{-i\lambda_j})|^2}{|\Phi(e^{-i\lambda_j})|^2} |1 - e^{-i\lambda_j}|^{-2d} \quad (150)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{(1 + \Theta_1 e^{-i\lambda_j} + \Theta_2 e^{-2i\lambda_j} + \dots + \Theta_q e^{-qi\lambda_j})(1 + \Theta_1 e^{i\lambda_j} + \Theta_2 e^{2i\lambda_j} + \dots + \Theta_q e^{qi\lambda_j})}{(1 - \rho_1 e^{-i\lambda_j} - \rho_2 e^{-2i\lambda_j} - \dots - \rho_p e^{-pi\lambda_j})(1 - \rho_1 e^{i\lambda_j} - \rho_2 e^{2i\lambda_j} - \dots - \rho_p e^{pi\lambda_j})} |1 - e^{-i\lambda_j}|^{-2d} \quad (151)$$

C'est la densité spectrale du processus ARFIMA défini par :

$$\Phi(L) (1-L)^d X_t = \varphi(L) \varepsilon_t \quad (152)$$

où  $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ,  $\Phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \rho_j L^j$  et  $\varphi(L) = 1 + \sum_{l=1}^q \Theta_l L^l$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- Ait-Sahalia Y. et Lo A. (2000), "Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion", *Journal of Econometrics*, Vol. 94, 9-51.
- Akaike H. (1973), "Information theory as an extension of the maximum likelihood principle", B. N. Petrov and F. Csaksi, editors. 2nd International Symposium on Information Theory. Akademiai Kiado, Budapest, 267-281.
- Alaton P., Djehiche B. et Stillberger D. (2002), "On Modelling and Pricing Weather Derivatives", *Applied Mathematical Finance*, Vol. 9, 1-20.
- Andersen T.G. et Sørensen B.E. (1996), "GMM Estimation of a Stochastic Volatility Model: A Monte Carlo Study", *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 14, No. 3, 328-352.
- Andrews D.W.K. (1991), "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation", *Econometrica*, Vol. 59, No. 3, 817-858.
- Andrews D.W.K. et Monahan J.C. (1992), "An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimator", *Econometrica*, Vol. 60, No. 4, 953-966.
- Augros J.C. et Moréno M. (2002), *Les Dérivés Financiers et d'Assurance*, Economica.
- Avellaneda M., Buff R., Friedman C., Grandechamp N., Kruk L. et Newman J. (2001), "Weighted Monte-Carlo : a New Technique for Calibrating Asset-Pricing Models", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 4, No. 1, 91-119.
- Bahra B. (1997), "Implied Risk-neutral Probability Density Functions from Option Prices: Theory and Application", Working Paper 66, Bank of England.
- Baillie R.T. (1996), "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics", *Journal of Econometrics*, Vol. 73, No. 1, 5-59.
- Baillie R.T., Bollerslev T. et Mikkelsen H.O. (1996), "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 74, 3-30.
- Bajeux-Besnainou I. et Portait R. (2002), "Pricing Contingent Claims in Incomplete Markets using the Numeraire Portfolio", *International Journal of Finance*, Vol. 13, No. 3, 2291-2310.
- Ball A.C. et Torous W.N. (1983), "A Simplified Jump Process for Common Stock Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18, No. 1, 53-65.
- Ball A.C. et Torous W. N. (1985), "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing", *Journal of Finance*, Vol. 40, 155-174.
- Baxter M. et Rennie A. (1998), *Financial Calculus*, Cambridge University Press.

- Benth F.E. (2003), "On Arbitrage-free Pricing of Weather Derivatives based on Fractional Brownian Motion", *Applied Mathematical Finance*, Vol. 10, 303-324.
- Benth F.E. et Šaltytė-Benth J. (2005), "Stochastic Modelling of Temperature Variations with a View Towards Weather Derivatives", *Applied Mathematical Finance*, Vol. 12, No. 1, 53-85.
- Bertsimas D., Kogan L. et Lo A.W (2001), "Hedging derivative securities and incomplete market : an  $\varepsilon$ -arbitrage approach", *Operations Research*, 49, 372-97.
- Black F. et Scholes M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 637-659.
- Bollerslev T. et Mikkelsen H.O. (1996), "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility", *Journal of Econometrics*, Vol. 73, 151-184.
- Boyle P., Broadie M. et Glasserman P. (1977), "Monte-Carlo Methods for Security Pricing", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 21, 1267-1321.
- Brandimarte P. (2002), *Numerical Methods in Finance : A Matlab-Based Introduction*, Wiley.
- Breeden D. et Litzenberger R. H. (1978), "Prices of state-contingent claims implicit in option prices", *Journal of Business*, Vol. 51, 621-651.
- Breidt F.J., Crato N. et de Lima P. (1998), "On the Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, Vol. 83, 325-348.
- Briani M. (2003), "Numerical Methods for Option Pricing in Jump-diffusion Markets", Thèse, Université de Rome.
- Brix A., Jewson S. et Ziehmann C. (2002), "Weather Derivative Modelling and Valuation : a Statistical Perspective", *Climate Risk and the Weather Market, Financial Risk Management with Weather Hedges*, ed. Dischel R.S., 127-150.
- Brockett P.L., Wang M. et Zou H. (2006), "Portfolio Effects and Valuation of Weather Derivatives", *Financial Review*, Vol. 41, 55-76.
- Brockwell P.J et Davis R.A. (1991), *Time Series : Theory and Methods*, Springer Verlag.
- Brody D.C., Syroka J. et Zervos M. (2002), "Dynamical Pricing of Weather Derivatives", *Quantitative Finance*, Vol. 2, 189-198.
- Brown D.P. et Gibbons M.R. (1985), "A Simple Econometric Approach for Utility-Based Asset Pricing Models", *Journal of Finance*, vol. 40, No. 2, 359-381.
- Caballero R., Jewson S. et Brix A. (2002), "Long Memory in Surface Air Temperature: Detection, Modelling and Application to Weather Derivative Valuation", *Climate Research*, Vol. 21, 127-140.

- Campbell J.Y., Lo A.W. et MacKinlay A.C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Campbell S.D. et Diebold F.X. (2004), “Weather Forecasting for Weather Derivatives”, CFS Working Paper.
- Canter M.S., Cole J.B. et Sandor R.L. (1996), “Insurance Derivatives : A New Asset Class for the Capital Markets and A New Hedging Tool for the Insurance Industry”, *Journal of Derivatives*, 89-104.
- Cao M. et Wei J. (1998), “Pricing Weather Derivatives : an Equilibrium Approach”, Working Paper, ancienne version de l'article “Weather Derivatives Valuation and Market Price of Weather Risk”.
- Cao M. et Wei J. (2004), “Weather Derivatives Valuation and Market Price of Weather Risk”, *Journal of Futures Markets*, Vol. 24, No. 11, 1065-1089.
- Cerný A. (2004), “Dynamic programming and mean-variance hedging in discrete time”, *Applied Mathematical Finance*, Vol. 11, 1-25.
- Chiang M. et Kao C. (2005), “Spectral Density Bandwidth Choice and Prewhitening in the Generalized Method of Moments Estimators for the Asset Pricing Model”, *Economics Bulletin*, Vol. 3, No. 10, 1-13.
- Chiarella C., Craddock M. et El-Hassan N. (2000), “The Calibration of Stock Option Pricing Models using Inverse Problem Methodology”, Research Paper Series, Quantitative Finance Research Centre, Université de Technologie de Sydney.
- Comte F. (1996), “Simulation and Estimation of Long Memory Continuous Time Models”, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 17, No. 1, 19-36.
- Constantinides G.M. et Duffie D. (1996), “Asset Pricing with Heterogeneous Consumers”, *Journal of Political Economy*, Vol. 104, No. 2., 219-240.
- Cox J.C., Ingersoll J.E. Jr. et Ross S.A. (1985), “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices”, *Econometrica*, Vol. 53, No.2, 363-384.
- Cox J.C., Ross S.A. et Rubinstein M. (1979), “Option pricing : a simplified approach”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, 229-263.
- Cummins J.D. et Geman H. (1994), “An Asian Option Approach to Valuation of Insurance Futures Contracts”, *Review Futures Markets*, Vol. 13, 517-557.
- Cummins J.D. et Geman H. (1995), “Pricing catastrophe insurance futures and call spreads, an arbitrage approach”, *Journal of Fixed Income*, mars, 46-57.
- Das S.R. (1998), “Poisson-Gaussian process and the bond markets”, Working Paper 6631, NBER.

- Davis M. (2001), "Pricing weather derivatives by marginal value", *Quantitative finance*, Vol. 1, 1-4.
- Davis M. (1998), Option pricing in incomplete markets, *Mathematics of Derivative Securities* ed MAH Dempster and SR Pliska, Cambridge University Press, 216-225.
- Delbaen F. et Schachermayer W. (1994), "A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing", *Mathematische Annalen*, Vol. 300, No. 3, 463-520.
- De Paiva e Pona R. (2000), "Les Dérivés Climatiques : des Parapluies Financiers ?" , Mémoire de Magistère Juriste d'Affaires, Université Paris 2.
- Devolder P. (1996) , *Finance stochastique*, Editions de l'Université de Bruxelles.
- Dewynne J.N. et Wilmott P. (1995), "A Note on Average Rate Options with Discrete Sampling", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 55, No. 1, 267-276.
- Dickey D.A. et Fuller W.A. (1979), "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 74, 427-431.
- Dischel B. (1998), "Black-Scholes won't do", *Energy & power risk management*, octobre.
- Dischel B. (1999), "A Weather Risk Management Choice: Hedging with Degree-day Derivatives", *Insurance and Weather Derivatives : From Exotic Options to Exotic Underlyings*, ed. H. Geman, 183-195.
- Dornier F. et Queruel M. (2000), "Caution to the wind", Weather Risk Special Report, *Energy & Power Risk Management/Risk Magazine*, 30-32.
- Duncan T.E, Hu Y. et Pasik-Duncan B. (2000), "Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion I. Theory", *SIAM Journal of Control Optimisation*, Vol. 38, 582-612.
- Ferson W.E. et Constantinides G.M. (1991), "Habit Persistence and Durability in Aggregate Consumption", *Journal of Financial Economics*, Vol. 29, 199-240.
- Föllmer H. et Schweizer M. (1991), "Hedging of contingent claims under incomplete information", *Applied Stochastic Analysis* (M.H.A. Davis and R.J. Elliott, eds.), Gordon et Breach Science Publishers, 389- 414.
- Föllmer H. et Sondermann D. (1986), "Hedging of Non-Redundant Contingent Claims", *Contributions to Mathematical Economics*, eds. W. Hildenbrand et A. Mas-Colell, 205-223.
- Fox R. et Taqqu M. (1986), "Large-Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series", *Annals of Statistics*, Vol. 14, No. 2, 517-532.
- Frittelli M. (2000), "The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets", *Mathematical Finance*, Vol. 10, No. 1, 39-52.
- Garcia A.F. et Sturzenegger F. (2001), "Hedging corporate revenues with weather derivatives : a case study", Mémoire, Université de Lausanne.

Garman M., Blanco C. et Erickson R. (2000), "Weather derivatives : instruments and pricing issues", Financial engineering associates.

Geman H. (1997), "Gestion du risque d'assurance et instruments dérivés en assurance", *Encyclopédie des marchés financiers*, Tome 1, Economica, 583-596.

Geman H. (1999), "The Bermudan Triangle : Weather, Electricity and Insurance Derivatives", *Insurance and weather derivatives : from exotic options to exotic underlyings*, ed. H. Geman, 197-203.

Geman H. et Vasicek O. (2001), "Plugging into Electricity", *Risk*, Août, 93-99.

Geweke J. et Porter-Hudak S. (1983), "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 4, No. 4, 221-238.

Granger C.W. et Joyeux R. (1980), "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 1, No. 1, 15-29.

Grossman S.J., Melino A. et Shiller R.J. (1987), "Estimating the Continuous-Time Consumption-Based Asset-Pricing Model", *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 5, No. 3, 315-327.

Gibson R. (1993), *Evaluation des options : Analyse et Evaluation des Contrats d'Option Standardisés*, Presses Universitaires de France-PUF.

Hansen L.P. (1982), "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators", *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, 1029-1054.

Hansen L.P. et Singleton K.J. (1982), "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models", *Econometrica*, Vol. 50, No. 5, 1269-1286.

Harris C. (2003), "The Valuation of Weather Derivatives using Partial Differential Equations", Mémoire, Université de Reading.

Harrison J.M. et Kreps D.M. (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, 381-408.

Harrison J.M. et Pliska S.R. (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 11, 215-260.

Haslett J. et Raftery A.E. (1989), "Space-time Modelling with Long Memory Dependence : Assessing Ireland's Wind Power Resource", *Journal of the Royal Statistical Society, series C-Applied Statistics*, Vol. 38, 1-50.

Heath D., Platen E. et Schweizer M. (2001), "A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets", *Mathematical Finance*, Vol. 11, No. 4, 385-413.

Heath D., Platen E. et Schweizer M. (2001), "Numerical comparison of local risk-minimisation and mean-variance hedging", *Handbook in Mathematical finance : Option*

*Pricing, Interest Rates and Risk Management*, E. Jouini, J. Cvitanić, M. Musiela, eds. Cambridge University Press, 509-537.

Henderson V. (2002), "Analytical Comparisons of Option Prices in Stochastic Volatility Models", OFRC Working Papers Series, Oxford Financial Research Centre.

Hobijn B., Franses P.H. et Ooms M. (2004), "Generalization of the KPSS-test for stationarity", *Statistica Neerlandica*, Vol. 58, 483-502.

Hofmann N., Platen E. et Schweizer M. (1992), "Option Pricing under Incompleteness and Stochastic Volatility", *Mathematical Finance*, Vol. 2. No. 3, 153-187.

Hosking J.R. (1981), "Fractional Differencing", *Biometrika*, Vol. 68, No. 1, 165-176.

Hu Y. et Øksendal B. (2003), "Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance", *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, Vol. 6, No. 1, 1-32.

Hubalek F. et Schachermayer W. (2001), "The limitations of no-arbitrage arguments for real options", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 4, No. 2, 361-373.

Hurst H.E. (1951), "Long Term Storage of Reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 116, 400-410.

Jackwerth J.C. et Rubinstein M. (1996), "Recovering Probability Distributions from Option Prices", *Journal of Finance*, Vol. 51, No. 5, 1611-1631.

Jagannathan R. (1985), "An Investigation of Commodity Futures Prices Using the Consumption-Based Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 1, 175-191.

Jewson S. (2004), "Introduction to Weather Derivative Pricing", Risk Management Solutions Inc.

Kallsen J. et Taqqu M.S. (1998), "Option Pricing in ARCH-type models", *Mathematical Finance*, Vol. 8, No. 1, 13-26.

Karatzas I. et Kou S.G. (1996), "On the Pricing of Contingent Claims under Constraints", *The Annals of Applied Probability*, Vol. 6, No. 2, 321-369.

Kast R. et Lapied A. (1992), *Fondements microéconomiques de la théorie des marchés financiers*, Economica.

Kolmogorov A.N. (1940), "Wienersche Spiralen und einige, andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum", *Comptes Rendus (Doklady), Acad. Sci. URSS (N.S.)*, Vol.26, 115-118.

Kwiatkowski D., Phillips P.C.B., Schmidt P. et Shin Y. (1992), "Testing the Null of Stationarity against the Alternative of a Unit Root : How Sure Are We that Economic Time Series Have a Unit Root ? ", *Journal of Econometrics*, Vol. 54, 159-178.

- Lagnado R. et Osher S. (1997), “A Technique for Calibrating Derivative Security Pricing Models: Numerical Solution of an Inverse Problem”, *Journal of computational Finance*, Vol. 1, No. 1, 13-25.
- Lamberton D. et Lapeyre B. (2000), *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses.
- Lardic S. et Mignon V. (2002), *Econométrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières*, Economica.
- Lee B. et Ingram B.F. (1991), “Simulation Estimation of Time-Series Models”, *Journal of Econometrics*, Vol. 47, 197-205.
- Leggio K.B. et Lien D. (2002), “Hedging gas bills with weather derivatives”, *Journal of economics and finance*, Vol. 26, No. 1, 88-100.
- Lioui A. et Malka R. (2004), “Revealing the Parameter of Risk-Aversion from Option Prices when Markets are Incomplete : Theory and Evidence ”, Working Paper, Université de Bar Ilan, Israël.
- Lo A.W. (1991), “Long-Term Memory in Stock Market Prices”, *Econometrica*, Vol. 59, 1279-1313.
- Long J.B. (1990), “The Numeraire Portfolio”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 26, 29-69.
- Lucas R.E. Jr. (1978), “Asset Prices in an Exchange Economy”, *Econometrica*, Vol. 46, No. 6, 1429-1445.
- Lund J. et Engsted T. (1996), “GMM and Present Value Tests of the C-CAPM: Evidence from the Danish, German, Swedish and UK Stock Markets”, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 15, No. 4, 497-521.
- Mandelbrot B.B. et Van Ness J.W. (1968), “Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications”, *SIAM Review*, Vol. 10, 422-437.
- Mankiw N.G. et Zeldes S.P. (1991), “The Consumption of Stockholders and Nonstockholders”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 29, 97-112.
- Marteau D., Carle J., Fourneaux S., Holz R. et Moréno M. (2004), *La Gestion du Risque Climatique*, Economica.
- Mehra R. (2003), “The Equity Premium: Why Is It a Puzzle ?”, *Financial Analysts Journal*, 54-69.
- Mehra R. et Prescott E.C. (1985), “The Equity Premium: a Puzzle”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, 145-161.
- Merton R.C. (1976), “Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, 125-144.

- Mignon V. (1998), *Marchés Financiers et Modélisation des rentabilités boursières*, Economica.
- Moréno M. (2000), “Riding the Temp”, *Weather Derivatives*, FOW Special Supplement, Décembre.
- Moréno M. (2003), “Weather Derivatives Hedging and Swap Illiquidity”, *Weather Risk Management Association*.
- Müller A. et Grandi M. (2000), “Weather Derivatives : A Risk Management Tool for Weather-sensitive Industries”, *Geneva Papers on Risk and Insurance*, Vol. 25, No. 2, 273-287.
- Newey W.K. et West K.D. (1987), “A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix”, *Econometrica*, Vol. 55, No. 3, 703-708.
- Newey W.K. et West K.D. (1994), “Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation”, *Review of Economic Studies*, Vol. 61, 631-653.
- Phillips P.C.B. et Perron P. (1988), “Testing for a Unit Root in Time Series Regression”, *Biometrika*, 75 : 165-193.
- Pirrong C. et Jermakyan M. (2001), “The Price of Power : The Valuation of Power and Weather Derivatives”, Working Paper.
- Platen E. et West J. (2004), “Fair Pricing of Weather Derivatives”, Working Paper, Université de Technologie de Sydney.
- Ramage P. (2002), *Finance de marché*, Editions d’Organisation.
- Randall C. et Tavella D. (2000), *Pricing Financial Instruments – the Finite Difference Method*, John Wiley & Sons, Inc.
- Richards T.J., Manfredo M.R. et Sanders D.R. (2004), “Pricing Weather Derivatives”, *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 4, 1005-1017.
- Roger P. (2004), *Probabilités, Statistique et Processus stochastiques*, Pearson Education.
- Roustant O. (2002), “Une application de deux modèles économétriques de température à la gestion des risques climatiques (1<sup>ère</sup> partie)”, *Banque & Marchés*, Vol. 58, 22-29.
- Roustant O. (2002), “Une application de deux modèles économétriques de température à la gestion des risques climatiques (2<sup>ème</sup> partie)”, *Banque & Marchés*, Vol. 59, 36-44.
- Schwarz G. (1978), “Estimating the Dimension of a Model”, *Annals of Statistics*, Vol. 6, 461-464.
- Schweizer M. (1996), “Approximation Pricing and the Variance-Optimal Martingale Measure”, *Annals of Probability*, Vol. 24, No. 1, 206-236.



- Schweizer M. (1999), “A guided Tour through Quadratic Hedging Approaches”, *Handbook in Mathematical finance : Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, E. Jouini, J. Cvitanić, M. Musiela, eds. Cambridge University Press, 538 –574.
- Sowell F. (1992), “Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models”, *Journal of Econometrics*, Vol. 53, 165-188.
- Stevens S.C. (1991), “Evidence for a Weather Persistence Effect on the Corn, Wheat, and Soybean Growing Season Price Dynamics”, *Journal of Futures Markets*, Vol. 11, No. 1, 81-88.
- Stutzer M. (1996), “A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation”, *Journal of Finance*, Vol. 51, No. 5, 1633-1652.
- VanderMarck P. (2003), “Marking to Model or to Market ?”, *Environmental Finance*, 36-37.
- West J. (2002), “Benchmark Pricing of Weather Derivatives”, Working Paper, Université de Technologie de Sydney.
- Wilmott P., Dewynne J.N. et Howison P. (2000), *Option Pricing : Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press.
- Yoo S. (2003), “Weather Derivatives and Seasonal Forecast”, Working Paper, Université Cornell, New York.
- Zvan R., Forsyth P.A. et Vetzal K.R. (1998), “Robust Numerical Methods for PDE Models of Asian Options”, *Journal of Computational Finance*, Vol. 1, No. 2, 39-78.

# TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES ET MARCHE .....</b>	<b>14</b>
1.1 PRELIMINAIRES .....	14
1.1.1 Qu'est ce qu'un produit dérivé ? .....	14
1.1.1.1 Instrument conditionnel : l'option .....	15
<i>L'option d'achat</i> .....	15
<i>L'option de vente</i> .....	17
1.1.1.2 Instruments à terme ferme .....	19
<i>Le contrat à terme</i> .....	19
<i>Le contrat d'échange</i> .....	22
1.1.2 Organisation du marché des produits dérivés .....	23
1.1.2.1 Marché réglementé ou organisé .....	24
1.1.2.2 Marché de gré à gré .....	25
1.2 TYPOLOGIE DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES .....	25
1.2.1 Options climatiques .....	26
1.2.1.1 Le cap ou option d'achat .....	26
1.2.1.2 Le floor ou option de vente .....	28
1.2.1.3 Le call spread .....	29
1.2.1.4 Le put spread .....	30
1.2.2 Contrat à terme et swap climatique .....	32
1.3 MARCHE DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES .....	34
1.3.1 Historique et évolution du marché des produits dérivés climatiques .....	34
1.3.2 Organisation du Chicago Mercantile Exchange et structure des contrats .....	37
1.4 CONCLUSION .....	43
<b>VALORISATION DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES .....</b>	<b>45</b>
2.1 MODELE D'EVALUATION EN L'ABSENCE D'ARBITRAGE .....	45
2.1.1 Définitions et notions du calcul stochastique .....	47
2.1.1.1 Stratégie autofinancée .....	47
2.1.1.2 Martingale .....	50
2.1.1.3 Mouvement brownien, équation différentielle stochastique et lemme d'Itô ...	50
2.1.1.4 Equation aux dérivées partielles et théorème de Feynman-Kac .....	54
2.1.1.5 Changement de probabilité et théorème de Girsanov .....	56
2.1.1.6 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck .....	59
2.1.2 Marché complet et modèles d'évaluation des options .....	60
2.1.2.1 Modèle en temps discret ou modèle binomial .....	61
2.1.2.2 Modèle en temps continu de Black et Scholes .....	68

<i>Détermination de la formule de Black et Scholes en résolvant une équation aux dérivées partielles</i> .....	69
<i>Détermination de la formule de Black et Scholes par l'approche par une mesure martingale</i> .....	73
2.1.3 Produits dérivés climatiques et marché incomplet .....	75
2.1.3.1 Problèmes d'évaluation des dérivés climatiques .....	76
2.1.3.2 Evaluation par le mark-to-market .....	83
<i>Extraction d'une densité neutre au risque</i> .....	83
<i>Extraction d'un prix de marché du risque</i> .....	87
2.2 MODELE D'EVALUATION ACTUARIELLE .....	94
2.3 MODELE D'EVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS FONDE SUR LA CONSOMMATION .....	98
2.4 CONCLUSION .....	104

## **MODELISATION DU COMPORTEMENT DE LA TEMPERATURE MOYENNE JOURNALIERE ..... 106**

3.1 REVUE DE LA LITTERATURE .....	106
3.1.1 Décomposition de la chronique de la température moyenne journalière .....	107
3.1.2 Processus en temps continu .....	109
3.1.2.1 Modèle d'Alaton, Djehiche et Stillberger (2002) .....	109
3.1.2.2 Modèle de Brody, Syroka et Zervos (2002) .....	112
3.1.2.3 Modèle de Richards, Manfredo et Sanders (2004) .....	114
3.1.3 Processus en temps discret .....	118
3.1.3.1 Modèle de Cao et Wei (1998) et Cao et Wei (2004) .....	118
3.1.3.2 Modèle de Roustant (2002) .....	119
3.1.3.3 Modèle de Campbell et Diebold (2004) .....	121
3.1.3.4 Modèle de Caballero, Jewson et Brix (2002) .....	123
3.2 APPLICATION SUR LES SERIES DE TEMPERATURES .....	125
3.2.1 Etude de la stationnarité .....	125
3.2.1.1 Graphiques et statistiques descriptives des séries de températures .....	126
3.2.1.2 Application des tests de stationnarité à la série TCH .....	128
3.2.1.3 Application du test de KPSS à la série TCIN .....	133
3.2.1.4 Application du test de KPSS à la série TNY .....	134
3.2.2 Estimation des paramètres des processus en temps continu .....	135
3.2.2.1 Estimation des coefficients de la tendance et de la saisonnalité .....	135
3.2.2.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck .....	139
3.2.2.3 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec une volatilité non constante .....	145
<i>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec une volatilité de type ARCH</i> .....	145
<i>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique de Cao et Wei</i> .....	147
<i>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique de Roustant</i> .....	149
<i>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique de Campbell et Diebold</i> .....	151

<i>Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec le modèle de variance périodique non paramétrique de Benth et Šaltytė-Benth</i> .....	153
3.2.2.4 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck à sauts avec une volatilité ARCH(1) .....	158
3.2.2.5 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.....	162
<i>Tests de mémoire longue</i> .....	162
<i>Estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire</i> ....	168
3.2.3 Estimation des paramètres des processus en temps discret.....	173
3.2.3.1 Estimation des coefficients de la tendance et de la saisonnalité .....	173
3.2.3.2 Processus ARMA .....	177
3.2.3.3 Processus ARMA avec une volatilité non constante.....	184
<i>Processus ARMA avec une volatilité de type ARCH</i> .....	184
<i>Processus ARMA avec le modèle de variance périodique de Cao et Wei</i> .....	185
<i>Processus ARMA avec le modèle de variance périodique de Roustant</i> .....	186
<i>Processus ARMA avec le modèle de variance périodique de Campbell et Diebold</i> .....	187
<i>Processus ARMA avec le modèle de variance périodique non paramétrique de Benth et Šaltytė-Benth</i> .....	189
3.2.3.4 Processus ARFIMA.....	190
3.3 CONCLUSION .....	193

## **CALCUL DES PRIX DES PRODUITS DERIVES CLIMATIQUES 195**

4.1 TECHNIQUE DE SIMULATION DE MONTE-CARLO .....	195
4.1.1 Aspects généraux de la méthode de Monte-Carlo.....	196
4.1.2 Méthode des variables antithétiques .....	197
4.2 RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES .....	199
4.2.1 Présentation de la méthode des différences finies.....	199
4.2.1.1 Principe.....	200
4.2.1.2 Etude de la stabilité .....	204
4.2.2 Implémentation des méthodes explicite, implicite et de Crank-Nicolson.....	208
4.2.2.1 Méthode explicite .....	209
4.2.2.2 Méthode implicite .....	211
4.2.2.3 Méthode de Crank-Nicolson .....	213
4.2.3 Résolution de l'équation aux dérivées partielles pour le prix des contrats climatiques .....	214
4.3 ESTIMATION DU COEFFICIENT CONSTANT D'AVERSION RELATIVE POUR LE RISQUE.....	222
4.3.1 Estimation du coefficient constant d'aversion relative pour le risque par la méthode des moments généralisés .....	223
4.3.1.1 Présentation de la méthode des moments généralisés.....	223
4.3.1.2 Matrice des poids .....	227
4.3.2 Estimation du coefficient constant d'aversion relative pour le risque par la méthode des moments simulés.....	233
4.4 APPLICATION DES MODELES DE VALORISATION .....	235

4.4.1	Mise en œuvre de la méthode de valorisation en l'absence d'arbitrage.....	235
4.4.1.1	Extraction d'une distribution neutre au risque .....	235
	<i>Contrat de Chicago</i> .....	237
	<i>Contrat de Cincinnati</i> .....	239
	<i>Contrat de New York</i> .....	239
4.4.1.2	Extraction des prix de marché du risque .....	240
	<i>Contrat de Chicago</i> .....	243
	<i>Contrat de Cincinnati</i> .....	243
	<i>Contrat de New York</i> .....	244
4.4.2	Mise en œuvre de la méthode de valorisation fondée sur la consommation.....	244
4.4.2.1	Estimation des paramètres par la méthode des moments généralisés .....	245
4.4.2.2	Estimation des paramètres par la méthode des moments simulés.....	250
4.4.3	Mise en œuvre de la méthode de valorisation actuarielle .....	255
4.4.4	Evaluation des dérivés climatiques .....	255
4.4.4.1	Prix par la méthode actuarielle.....	256
	<i>Contrats climatiques de Chicago</i> .....	256
	<i>Contrats climatiques de Cincinnati</i> .....	261
	<i>Contrats climatiques de New York</i> .....	264
4.4.4.2	Prix à partir de la distribution neutre au risque extraite .....	269
	<i>Contrats climatiques de Chicago</i> .....	269
	<i>Contrats climatiques de Cincinnati</i> .....	270
	<i>Contrats climatiques de New York</i> .....	270
4.4.4.3	Prix à partir des prix de marché du risque inférés.....	271
	<i>Contrats climatiques de Chicago</i> .....	271
	<i>Contrats climatiques de Cincinnati</i> .....	275
	<i>Contrats climatiques de New York</i> .....	278
4.4.4.4	Prix par la méthode fondée sur la consommation .....	280
	<i>Contrats climatiques de Chicago</i> .....	280
	<i>Contrats climatiques de Cincinnati</i> .....	286
	<i>Contrats climatiques de New York</i> .....	292
4.4.5	Evaluation des dérivés climatiques de Cincinnati à partir des cotations de New York.....	297
4.4.5.1	Prix à partir de la distribution neutre au risque extraite .....	300
4.4.5.2	Prix à partir des prix de marché du risque inférés.....	300
4.4.5.3	Prix par la méthode fondée sur la consommation .....	302
4.5	CONCLUSION .....	303
	<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>305</b>
	<b>ANNEXE.....</b>	<b>315</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>347</b>