



**HAL**  
open science

# Instabilités couplées à haute fréquence dans les moteurs - fusées à ergols liquides : étude du couplage chambre de combustion/système d'alimentation

Massimiliano de Benedictis

## ► To cite this version:

Massimiliano de Benedictis. Instabilités couplées à haute fréquence dans les moteurs - fusées à ergols liquides : étude du couplage chambre de combustion/système d'alimentation. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université de Poitiers, 2007. Français. NNT : . tel-00283229

**HAL Id: tel-00283229**

**<https://theses.hal.science/tel-00283229>**

Submitted on 29 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**(Exemplaire provisoire)**  
**THESE**

pour l'obtention du Grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS**  
(ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE de MÉCANIQUE et d'AÉROTECHNIQUE)

Ecole Doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur

Secteur de Recherche : Energétique, Thermique, Combustion, Acoustique

Présentée par :

**Massimiliano DE BENEDICTIS**

\*\*\*\*\*

**INSTABILITÉS COUPLÉES A HAUTE FRÉQUENCE DANS LES  
MOTEURS - FUSÉES A ERGOLS LIQUIDES : ÉTUDE DU COUPLAGE  
CHAMBRE DE COMBUSTION / SYSTÈME D'ALIMENTATION**

\*\*\*\*\*

Directeur de Thèse : Vladimir SABEL'NIKOV

\*\*\*\*\*

Soutenue le 19 Décembre 2007 (date prévue)

devant la Commission d'Examen

\*\*\*\*\*

**JURY**

|  |            |
|--|------------|
| .....  | Président  |
| M. Mikhael GOROKHOVSKI, Professeur, ECL Lyon                       | Rapporteur |
| M. Geoff SEARBY, Directeur de Recherche au CNRS – IRPHE, Marseille | Rapporteur |
| M. Pascal BRUEL, Chargé de Recherche CNRS, LMA Université Pau      | Examineur  |
| M. Jean-Michel MOST, Directeur de Recherche au CNRS – LCD ENSMA    | Examineur  |
| M. Gérard ORDONNEAU, Ingénieur, ONERA Châtillon                    | Examineur  |
| M. Vladimir SABEL'NIKOV, Directeur de Recherche, ONERA Palaiseau   | Examineur  |
| Mme Marie THERON, Ingénieur – Docteur, CNES Evry                   | Examineur  |



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>NOTATION.....</b>   | <b>7</b>  |
| <b>CHAPITRE 1 .....</b>  | <b>15</b> |
| <b>1 INTRODUCTION GENERALE .....</b>                                     | <b>15</b> |
| 1.1 Les systèmes propulsifs spatiaux.....                                | 15        |
| 1.2 Moteurs fusée à ergols liquides .....                                | 16        |
| 1.3 Les ergols .....   | 17        |
| 1.4 Le système d'alimentation.....                                       | 18        |
| 1.5 Système d'injection.....   | 20        |
| 1.6 La chambre de combustion .....                                       | 23        |
| 1.6.1 Sa géométrie   | 23        |
| 1.6.2 La combustion  | 23        |
| 1.7 Les instabilités de combustion dans la propulsion liquide.....       | 25        |
| 1.7.1 L'origine des instabilités   | 25        |
| 1.7.2 Critère d'instabilité  | 26        |
| 1.7.3 Les catégories d'instabilités de combustion                        | 27        |
| 1.7.4 Les instabilités hybrides : revue bibliographique                  | 30        |
| 1.8 Objectifs de l'étude.....  | 32        |
| 1.8.1 Plan de présentation de la thèse                                   | 32        |
| <b>CHAPITRE 2 .....</b>  | <b>34</b> |
| <b>2 TEMPS CARACTERISTIQUES LIES A LA MECANIQUE DES INJECTEURS .....</b> | <b>34</b> |

|                         |  |            |
|-------------------------|--|------------|
| <b>2.1</b>              | <b>Temps caractéristiques de l'atomisation .....</b>                                     | <b>34</b>  |
| 2.1.1                   | Temps caractéristiques d'atomisation primaire  | 35         |
| 2.1.2                   | Temps d'atomisation secondaire   | 40         |
| <b>2.2</b>              | <b>Temps caractéristiques de mélange .....</b>   | <b>43</b>  |
| 2.2.1                   | Rappels de turbulence  | 43         |
| 2.2.2                   | Relations fondamentales entre les échelles des tourbillons                               | 46         |
| 2.2.3                   | Temps caractéristiques du mélange turbulent  | 48         |
| <b>CHAPITRE 3 .....</b> |  | <b>52</b>  |
| <b>3</b>                | <b>TEMPS CARACTERISTIQUES LIES A LA NATURE<br/>THERMO-PHYSIQUE DE L'ECOULEMENT .....</b> | <b>52</b>  |
| <b>3.1</b>              | <b>Vaporisation et chauffage des gouttes.....</b>  | <b>52</b>  |
| 3.1.1                   | Temps caractéristiques en régime sub-critique  | 54         |
| 3.1.2                   | Prise en compte des profils de vitesse   | 62         |
| <b>3.2</b>              | <b>Calcul des temps caractéristiques de la chimie .....</b>                              | <b>74</b>  |
| 3.2.1                   | Méthode des valeurs propres  | 74         |
| 3.2.2                   | Application à la chimie du couple d'ergols L O <sub>2</sub> /G H <sub>2</sub>            | 76         |
| 3.2.3                   | Temps caractéristiques de la chimie : utilisation de CHEMKIN                             | 87         |
| <b>CHAPITRE 4 .....</b> |  | <b>96</b>  |
| <b>4</b>                | <b>APPROCHE A LA MODELISATION DU SYSTEME<br/>PROPULSIF .....</b>                         | <b>96</b>  |
| <b>4.1</b>              | <b>Modélisation du système d'alimentation .....</b>                                      | <b>97</b>  |
| 4.1.1                   | Présentation du modèle   | 97         |
| <b>4.2</b>              | <b>Validation de la méthode.....</b>   | <b>103</b> |
| 4.2.1                   | Définition des cas tests   | 103        |
| 4.2.2                   | Cas test 1 : tuyau droit ouvert-ouvert (1D)  | 103        |
| 4.2.3                   | Cas test 2 : deux tuyaux en série ouvert-fermé (1D)                                      | 107        |
| 4.2.4                   | Cas test 3 : cylindre fermé (2D)   | 115        |
| <b>CHAPITRE 5 .....</b> |  | <b>123</b> |
| <b>5</b>                | <b>MODELE ACOUSTIQUE DE LA CHAMBRE DE<br/>COMBUSTION .....</b>                           | <b>123</b> |
| <b>5.1</b>              | <b>Equations de conservation pour les phases gazeuse et liquide.....</b>                 | <b>125</b> |
| 5.1.1                   | Equation de bilan de masse   | 125        |
| 5.1.2                   | Equation de bilan de quantité de mouvement   | 127        |
| 5.1.3                   | Equation de bilan d'énergie  | 128        |

|   |   |            |
|---|---|------------|
| <b>5.2</b>                              | <b>Equations de conservation pour le mélange .....</b>                                      | <b>130</b> |
| <b>5.3</b>                              | <b>Equation de la pression pour le mélange .....</b>  | <b>137</b> |
| <b>5.4</b>                              | <b>Equation des ondes .....</b>   | <b>140</b> |
| 5.4.1                                   | Cas général avec prise en compte de tous les termes source                                  | 140        |
| 5.4.2                                   | Cas simplifié avec prise en compte du terme source dû à la vaporisation et de la combustion | 145        |
| <b>5.5</b>                              | <b>Solution approchée .....</b>   | <b>146</b> |
| <b>5.6</b>                              | <b>Modèle de combustion et système d'équations modales.....</b>                             | <b>150</b> |
| <b>CHAPITRE 6 .....</b>                 |   | <b>157</b> |
| <b>6</b>                                | <b>ETUDE DE SYSTEMES COUPLES .....</b>  | <b>157</b> |
| <b>6.1</b>                              | <b>Etude simplifiée .....</b>   | <b>157</b> |
| 6.1.1                                   | Evaluation théorique des paramètres de couplage   | 158        |
| 6.1.2                                   | Estimation théorique de l'amortissement et de la fréquence du système couplé                | 162        |
| 6.1.3                                   | Estimation théorique de l'amortissement de la chambre de combustion                         | 165        |
| 6.1.4                                   | Résultats du calcul   | 167        |
| <b>6.2</b>                              | <b>Etude d'un cas réel : application au moteur Aestus.....</b>                              | <b>175</b> |
| 6.2.1                                   | Géométrie du dôme MMH   | 176        |
| 6.2.2                                   | Points de fonctionnement considérés pour l'étude du couplage                                | 177        |
| 6.2.3                                   | Evaluation théorique des entrées du calcul  | 178        |
| 6.2.4                                   | Résultats des calculs de couplage   | 194        |
| <b>CONCLUSIONS .....</b>                |   | <b>209</b> |
| <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b> |   | <b>212</b> |
| <b>A</b>                                | <b>CONCENTRATIONS MOLAIRES OBTENUES PAR CHEMKIN.....</b>                                    | <b>223</b> |
| <b>B</b>                                | <b>RAPPELS D'ACOUSTIQUE .....</b>   | <b>230</b> |
|   | Acoustique classique d'une chambre de combustion cylindrique .....                          | 230        |
| <b>C</b>                                | <b>RAPPELS DU MODELE 'TIME LAG' DE CROCCO.....</b>  | <b>234</b> |
|   | Dérivations des principaux résultats de la théorie de Crocco.....                           | 234        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>D</b> | <b>MODES PROPRES DU DOME SUITE A EXCITATION PAR UN INJECTEUR.....</b> | <b>237</b> |
|----------|---|------------|

# Notation

## Lettres Latines

|             |   |
|-------------|---|
| $a$         | vitesse du son  |
| $A$         | section   |
| $a$         | vitesse du son du mélange gaz/liquide                               |
| $B$         | nombre de transfert de chaleur                                      |
| $c_p$       | chaleur massique à pression constante                               |
| $c_v$       | chaleur massique à volume constant                                  |
| $C_p$       | chaleur spécifique à pression constante                             |
| $C_v$       | chaleur spécifique à volume constant                                |
| $C_D$       | coefficient de traînée  |
| $C_i$       | concentration molaire de l'espèce $i$ ; capacité du nœud $i$        |
| $\dot{C}_i$ | taux de production molaire de l'espèce $i$                          |
| $CO_2$      | dioxyde de carbone  |
| $C_p$       | chaleur spécifique à pression constante pour le mélange gaz/liquide |
| $C_v$       | chaleur spécifique à volume constante pour le mélange gaz/liquide   |
| $d$         | diamètre des gouttes  |
| $d_s$       | diamètre minimal des gouttes fragmentées par cisaillement           |
| $D$         | diamètre d'injection  |
| $e$         | épaisseur de l'entrefer   |
| $e_i$       | énergie interne de l'espèce $i$                                     |
| $EP$        | équilibre partiel   |
| $EQS$       | état quasi-stationnaire   |

|                     |   |
|---------------------|---|
| $E_i$               | énergie interne totale de l'espèce $i$  |
| $E_D$               | énergie d'activation dans le sens direct  |
| $E_n^2$             | intégrale des modes propres (normaux)   |
| $f$                 | condition limite  |
| $f_n$               | fréquence de résonance du mode acoustique $n$   |
| $F$                 | force   |
| $F_t$               | force de traînée  |
| $\mathcal{F}$       | terme source (dans l'équation de conservation de quantité de mouvement du mélange gaz/liquide)                                    |
| $F_n^{(Q)}$         | influence explicite de la vaporisation et la combustion dans l'équation différentielle $n$ de l'amplitude de la pression          |
| $F_n^{(e)}$         | tout contribution différente de la vaporisation et la combustion dans l'équation différentielle $n$ de l'amplitude de la pression |
| $GH_2$              | hydrogène gazeux  |
| $h$                 | terme source (dans l'équation des ondes du mélange gaz/liquide)   |
| $h_i$               | enthalpie de l'espèce $i$   |
| $h^0, \Delta h_f^0$ | enthalpie de formation  |
| $h^{(s)}$           | enthalpie sensible (dépendant de la température)  |
| $H_2$               | hydrogène   |
| $H_2O$              | eau   |
| $IMH$               | point de fonctionnement extrême de l'Aestus (en allumage)   |
| $j$                 | partie imaginaire   |
| $k$                 | conductivité thermique ; énergie cinétique  |
| $k_n$               | nombre d'onde du mode $n$   |
| $K_D$               | constante de vitesse de réaction directe  |
| $K_e$               | constante d'équilibre   |
| $K_I$               | constante de vitesse de réaction inverse  |
| $K_P$               | constante de réaction à pression constante  |
| $K_v, K_{v_1}$      | constantes de vaporisation  |
| $J_0$               | matrice jacobienne  |
| $J_2()$             | fonction de Bessel de premier type et d'ordre 2   |

|                      |   |
|----------------------|---|
| $l, L$               | longueur  |
| $L_{OX}$             | oxygène liquide   |
| $L_{ij}$             | inductance du liquide entre les nœuds $i$ et $j$  |
| $L_t$                | taille tourbillon   |
| $L_v$                | chaleur latent de vaporisation  |
| $M$                  | nombre de Mach ; rapport des pressions dynamiques, $M = (\rho_g U_g^2 / \rho_l U_l^2)$  |
| $MMH$                | mono-méthyl-hydrazine   |
| $M_i$                | masse molaire de l'espèce $i$   |
| $\dot{m}$            | débit   |
| $n$                  | indice d'interaction  |
| $nSe$                | nombre de surfaces élémentaires   |
| $N_2$                | azote   |
| $N_2O_4$             | péroxyde d'azote  |
| $Nu$                 | nombre de Nusselt   |
| $\mathbf{n}$         | vecteur normal unitaire   |
| $O_2$                | oxygène   |
| $OH$                 | radical hydroxyle   |
| $p$                  | pression  |
| $p_c$                | pression critique   |
| $p_s$                | pression de vapeur saturante  |
| $Pr$                 | nombre de Prandtl   |
| $\mathcal{P}$        | source d'énergie (dans l'équation de la pression du mélange gaz/liquide)  |
| $Q$                  | chaleur   |
| $Q, Q_s$             | terme source (dans l'équation de conservation de l'énergie du mélange gaz/liquide)  |
| $\hat{Q}_s, \hat{Q}$ | partie constante dans la contribution des fluctuation du terme source (dans l'équation de conservation de l'énergie du mélange gaz/liquide) |
| $QSUI$               | point de qualification de l'Aestus (en allumage)  |
| $R$                  | résistance du débit ; rayon   |
| $R_c$                | longueur du recès du pitot d'injection  |
| $Re$                 | nombre de Reynolds  |
| $RM$                 | rapport de mélange  |

|                      |  |
|----------------------|--|
| $RM_s$               | rapport de mélange stœchiométrique   |
| $\mathfrak{R}$       | constante universelle des gaz  |
| $\mathcal{R}$        | constante des gaz définie pour le mélange gaz/liquide                          |
| $s$                  | variable de Laplace  |
| $s_i$                | vecteur propre $i$   |
| $S$                  | surface  |
| $SMD$ (ou $d_{32}$ ) | diamètre Moyen de Sauter   |
| $\mathbf{S}$         | matrice des vecteurs propres   |
| $t$                  | temps  |
| $T$                  | température ; période  |
| $T_c$                | température critique   |
| $T_s, T_v$           | température de vapeur saturante  |
| $u, \mathbf{u}$      | vitesse  |
| $U$                  | vitesse d'injection  |
| $V, Vol$             | volume   |
| $V_{mol}$            | volume molaire   |
| $K_v, K_{v_1}$       | vitesse relative à l'injection   |
| $We$                 | nombre de Weber  |
| $\dot{w}_D$          | taux de production directe   |
| $\dot{w}_I$          | taux de production inverse   |
| $\mathcal{W}$        | terme source (dans l'équation conservation de la masse du mélange gaz/liquide) |
| $\mathbf{x}$         | vecteur position   |
| $X_i$                | fraction molaire   |
| $Y_I$                | admittance injecteur   |
| $Y_i$                | fraction massique  |
| $z$                  | position axiale dans la chambre de combustion                                  |

## Lettres Grecques

|                |   |
|----------------|---|
| $\chi$         | rapport de vitesses   |
| $\delta$       | delta de Kronecker ; variation infinitésimale   |
| $\delta()$     | delta de Dirac  |
| $\delta_g$     | épaisseur de voracité de la phase gazeuse   |
| $\Delta$       | variation finie   |
| $\varepsilon$  | taux de dissipation de l'énergie cinétique  |
| $\varphi$      | phase de la fonction complexe admittance de l'injection ; flux d'énergie échangé entre le gaz et le liquide |
| $\gamma$       | rapport des chaleurs spécifique (Gamma)   |
| $\bar{\gamma}$ | rapport des chaleurs spécifique pour le mélange gaz/liquide (Gamma)   |
| $\varphi$      | rapport d'équivalence   |
| $\eta$         | échelle de Kolmogorov   |
| $\eta_n$       | amplitude modale de la pression du mode $n$   |
| $\lambda$      | conductibilité thermique  |
| $\lambda_n$    | longueur d'onde du mode $n$ ;   |
| $\lambda_i$    | valeur propre $i$   |
| $\Lambda$      | matrice diagonale des valeurs propres   |
| $\mu$          | coefficient de viscosité dynamique  |
| $\nu$          | coefficient de viscosité cinématique  |
| $\nu'_j$       | indices des réactants d'une réaction  |
| $\nu''_j$      | indices des produits d'une réaction   |
| $\theta$       | angle tangentiel (en coordonnées cylindriques)  |
| $\rho$         | masse volumique   |
| $\sigma$       | tension superficielle   |
| $\tau$         | temps caractéristique ; délai   |
| $\tau_c$       | temps caractéristique de convection   |
| $\tau_e$       | temps caractéristique de vaporisation   |
| $\tau_\eta$    | temps caractéristique du mélange  |
| $\tau_l$       | temps caractéristique d'atomisation primaire  |

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\tau_2$             | temps caractéristique d'atomisation secondaire               |
| $\tau_s^*, \theta_w$ | temps requis pour une onde acoustique à traverser la chambre |
| $\omega_n$           | pulsation du mode propre $n$                                 |
| $\Omega_n$           | pulsation du mode propre $n$ perturbé                        |
| $\dot{\omega}_c$     | source de masse dûe à la combustion                          |
| $\dot{\omega}_s$     | source de débit vaporisé                                     |
| $\psi_n$             | mode propre $n$  |
| $\zeta_n$            | amortissement du mode $n$                                    |

## Indices

|                  |   |
|------------------|---|
| $b$              | brûlé   |
| $c$              | combustion  |
| $ch$             | chambre de combustion                                     |
| $d$              | diamètre de la goutte                                     |
| $e$              | évaporation   |
| $exc$            | excitation  |
| $f$              | finale  |
| $fuel$           | combustible   |
| $g$              | phase gazeuse   |
| $G$              | goutte  |
| $H_2$            | hydrogène   |
| $H_2O$           | eau   |
| $i$              | indice ; insensible                                       |
| $inf$            | inférieur   |
| $inj, inj_{tot}$ | injection, injection totale                               |
| $IMH$            | point de fonctionnement extrême de l'Aestus (en allumage) |
| $l$              | phase liquide   |
| $lv$             | liquide en condition de vapeur saturante                  |
| $MMH$            | mono-méthyl-hydrazine                                     |

|                    |   |
|--------------------|---|
| $N_2O_4$           | péroxyde d'azote                                      |
| $O_2$              | oxygène   |
| $OH$               | hydroxyde   |
| ox                 | oxydant   |
| 0                  | référence ; injection                                 |
| $pc$               | produits de combustion                                |
| $QSUI$             | points de qualification de l'Aestus (en allumage)     |
| $r, rel$           | relatif   |
| $R$                | relaxation (due à la traînée)                         |
| $s$                | source ; sensible                                     |
| $sup$              | supérieur   |
| $T$                | total   |
| $v$                | vaporisation  |
| $(\dot{\omega}_s)$ | source de vapeur                                      |
| $1L\_ch$           | premier mode longitudinal dans la chambre             |
| $1L\_d\hat{o}me$   | premier mode longitudinal dans le dôme                |
| $1T, \dots, nT$    | premier mode tangentiel, ..., $n$ ème mode tangentiel |
| $1R, \dots, nR$    | premier mode radial, ..., $n$ ème mode radial         |

## Exposants

|         |   |
|---------|---|
| $f$     | valeur finale   |
| 0       | valeur initiale ; valeur de référence                               |
| inj     | injection   |
| $(MMH)$ | mono-méthyl-hydrazine   |
| $(O_2)$ | oxygène   |
| $(T)$   | partie sensible (dépendant de la température), pour énergie interne |
| °       | référence   |
| ,       | perturbation  |

## Opérateurs mathématiques

|              |                              |
|--------------|------------------------------|
| $D(\ )/Dt$   | dérivée totale               |
| $\bar{(\ )}$ | valeur moyenne               |
| $  $         | module                       |
| $\dot{(\ )}$ | dérivée par rapport au temps |

# Chapitre 1

## 1 Introduction générale

### 1.1 Les systèmes propulsifs spatiaux

Un moteur fusée peut être classé principalement selon le type d'énergie stockée (chimique, nucléaire, électrique ou rayonnante), sa fonction (booster, contrôle d'altitude, manœuvre orbitale, etc.) et les propergols utilisés. La propulsion d'un lanceur de satellites est assurée essentiellement par des systèmes propulsifs chimiques : l'énergie interne des gaz brûlés, produits par des réactions chimiques, est transformée en énergie cinétique par la détente dans la tuyère. L'éjection de ces gaz à grande vitesse permet d'obtenir une poussée importante qui permet la satellisation de la charge utile transportée et éventuellement la libération de l'attraction gravitationnelle terrestre.

Les deux grandes branches des systèmes propulsifs chimiques sont les systèmes à propergols solides et les systèmes à ergols liquides. En propulsion dite « solide », le matériau énergétique, qui se présente sous forme d'un composé solide (propergol) constitué d'un couple oxydant-combustible, est stocké dans la chambre de combustion. Par exemple le propergol utilisé sur le lanceur Ariane 5 est composé de grains de perchlorate d'ammonium (oxydant) enveloppés par un liant polymérisé : le polybutadiène (combustible). L'ajout de particules d'aluminium au composé permet d'augmenter la température de combustion et donc la poussée. En propulsion dite « liquide » les combustibles et comburants considérés (ergols) sont à l'état liquide dans les réservoirs et injectés à haut débit et haute pression dans la chambre de combustion, par l'intermédiaire d'un système d'alimentation. Parmi les systèmes propulsifs liquides on distingue : les moteurs à ergols stockables, qui utilisent des ergols qui sont liquides à pression et à température ambiante, ce qui permet un stockage aisé

dans les réservoirs (comme dans le moteur Aestus de l'étage supérieur du lanceur Ariane 5 qui utilise le couple  $N_2O_4/MMH$ ) ; et les moteurs cryotechniques, où les ergols, gazeux en condition normale de pression et température, sont maintenus à l'état liquide à très basse température (fluides cryogéniques), ce qui complique leur stockage fait avant le lancement (c'est le cas du moteur Vulcain de l'étage principal d'Ariane 5 utilisant le couple  $Lox/GH_2$ ).

## 1.2 Moteurs fusée à ergols liquides

Dans cette étude on s'intéressera aux moteurs fusées à ergols liquides (voir [1], [2] et [3]). Les composants généraux d'un système propulsif de ce type peuvent être résumés en :

- une ou plusieurs chambres de poussée ;
- un ou plusieurs réservoirs ;
- un système d'alimentation qui fournit le débit liquide dans la chambre de combustion ;
- une source de puissance qui permet le fonctionnement du système d'alimentation ;
- des canalisations pour les fluides ;
- une structure de transmission des forces de poussée ;
- des dispositifs de régulation pour amorcer et régler le débit des ergols (les vannes par exemple) ;
- des systèmes de refroidissement de la chambre de combustion (par fluides réfrigérant, matériaux ablatifs, etc.) ;
- une tuyère de sortie des gaz de combustion.

Comme exemple typique d'un système on peut considérer la figure suivante, qui montre les détails d'un moteur cryotechnique.

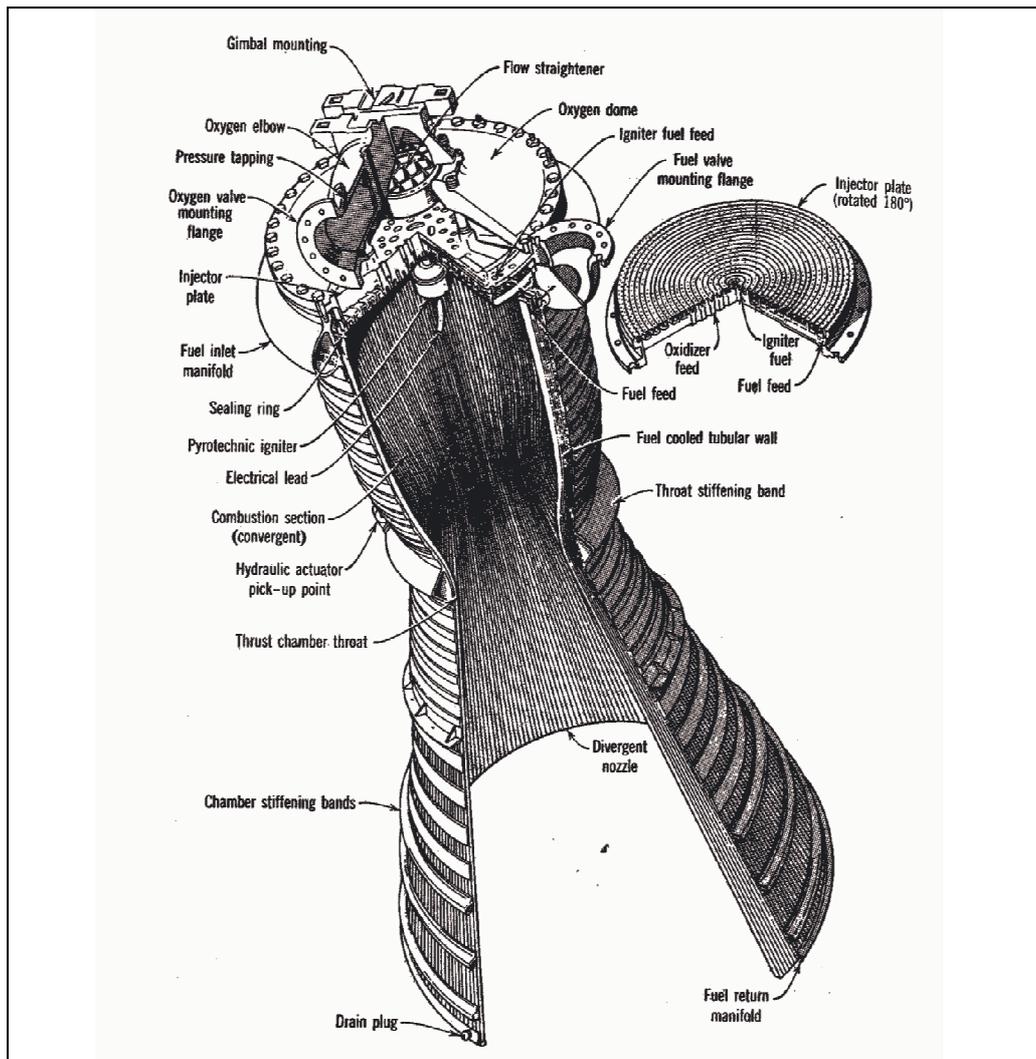


Figure 1-1 : Moteur cryotechnique.

### 1.3 Les ergols

Les propergols liquides ou bien les ergols sont des substances sujettes à des changements chimiques et thermochimiques qui déterminent les performances du moteur. Ils sont oxydants, combustibles et mélanges des deux. Les ergols sont classifiés selon leur composition en :

- mono-ergol : il s'agit d'un seul fluide qui libère de l'énergie sans avoir besoin d'un deuxième composant. Cette substance est stable en condition atmosphérique

mais elle se décompose chimiquement et produit des gaz chauds si elle est réchauffée ou catalysée. L'hydrazine ( $N_2H_4$ ), la monométhylhydrazine (MMH), la dissymétrique diméthylhydrazine dissymétrique (UDMH), le peroxyde d'hydrogène ( $H_2O_2$ ), sont des exemples de mono-ergol. ;

- bi-ergol : l'oxydant et le réducteur sont tenus séparés jusqu'à la chambre de combustion. Ce sont les réactants les plus utilisés dans la propulsion spatiale, comme par exemple : l'oxygène et l'hydrogène ( $O_2 - H_2$  utilisés dans l'étage principal et l'étage supérieur du lanceur européen Ariane 5 ESCA), l'oxygène et le RP1 ( $O_2 - RP1$ , ce dernier est un combustible très utilisé dans la propulsion fusée, il est à base d'hydrocarbures :  $CH_{1,97}$ ), le peroxyde d'azote avec l'hydrazine ( $N_2O_4 - N_2H_4$ ) ou ses dérivés méthylés (UDMH, MMH), le fluor et l'hydrogène ( $F_2 - H_2$ : très performant mais très peu utilisé à cause de sa forte réactivité chimique avec les métaux et les polymères ainsi que sa toxicité et son coût élevé) ;
- tri-ergol : le couple d'oxydant et combustible est combiné à un troisième ergol réducteur : les deux combustibles sont généralement utilisés l'un après l'autre et non de façon simultanée, par exemple RP1 –  $H_2 - O_2$  hypergolique (spontanément allumable), où avec de l'hydrogène en excès.

La classification des ergols peut être faite aussi selon la possibilité de conservation pour des longues périodes. Comme vu dans le paragraphe 1.1, ils sont distingués en cryogéniques et stockables.

## 1.4 Le système d'alimentation

Dans la propulsion spatiale deux principaux systèmes d'alimentation sont utilisés : celui à turbopompe, qui est basé sur un système de pompes (voir [3] et [4]) pour permettre aux ergols de quitter les réservoirs à faible pression et aller dans la chambre de combustion à haute pression, et celui à pressurisation (voir [5]), qui utilise un gaz à haute pression pour faire sortir les ergols des réservoirs. Tout système d'alimentation est constitué de tuyauterie,

d'une série de vannes, de dispositifs pour le remplissage et le vidage des ergols, ainsi que des dispositifs de contrôle pour commencer, arrêter et régler son fonctionnement.

Les systèmes d'alimentation à réservoirs pressurisés (voir Figure 1-2) offrent des performances supérieures si la pression de chambre, le débit des ergols et la poussée sont bas : ils sont utilisés quand on a besoin d'impulsions répétitives de poussée de courte durée (un besoin important pendant la phase de satellisation). Le désavantage de cette configuration est une augmentation de masse due à un troisième réservoir (celui du gaz qui met en pression la ligne d'alimentation) et au fait que à cause de pressions élevées, les parois des réservoirs doivent être plus épaisses.

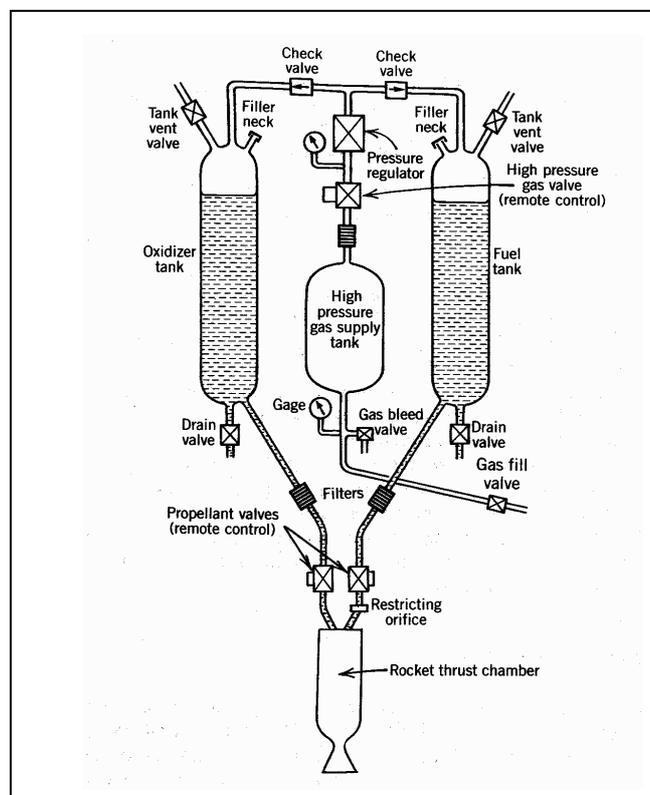


Figure 1-2 : Système d'alimentation à réservoirs pressurisés.

Les systèmes à turbopompe (voir Figure 1-3), au contraire permettent des pressions basses dans les réservoirs (même dix fois moins) et des avantages en terme de légèreté (il faut toutefois prévoir une augmentation de masse par la présence d'un générateur de gaz et d'une turbopompe dans les moteurs). Les pompes sont actionnées par des turbines qui sont mises en mouvement par les gaz chaud d'un générateur de gaz, qui utilisent des petites quantités

d'oxydant et de combustible provenant des canalisations principales. Les performances sont supérieures si des pressions de chambre et des poussées élevées sont prévues : ils sont utilisés quand les poussées élevées sont de longue durée, comme c'est le cas pour la propulsion des deux premiers étages d'Ariane 5 ESCA et du SSME (Space Shuttle Main Engine) de la navette américaine.

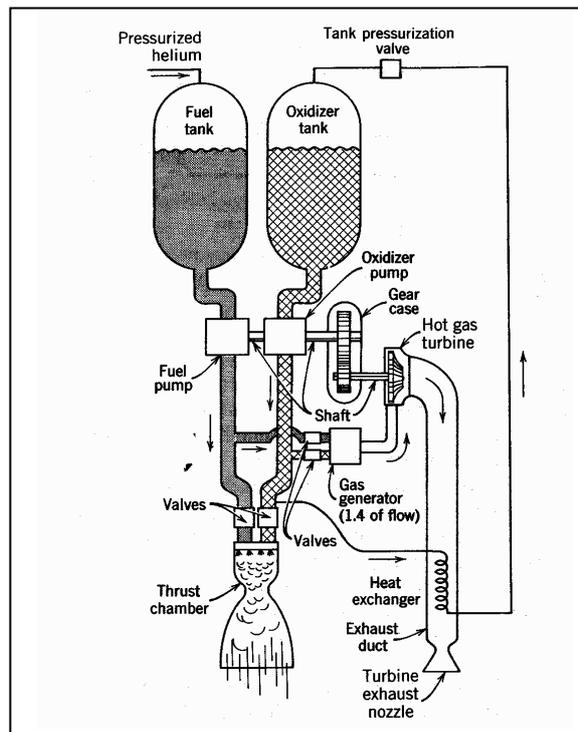


Figure 1-3 : Système d'alimentation à turbopompe.

## 1.5 Système d'injection

La fonction du système d'injection est d'introduire dans la chambre de combustion la correcte quantité de combustible et d'oxydant afin de permettre la vaporisation et le mélange complet des réactants et régler le rapport de mélange ( $RM$ ) à la valeur de projet (sur le Viking, il existait un système de régulation, sur l'Aestus, le  $RM$  est réglé par deux diaphragmes en sortie réservoirs, sur le Vulcain par le calage des vannes d'alimentation du générateur de gaz ( $GG$ ) et la vanne des gaz chauds).

Les paramètres à dimensionner dans le projet d'un système d'injection sont : les points d'injections et leurs distribution sur la face d'injection ; la forme géométrique et la dimension des éléments d'injection, ainsi que leurs caractéristiques hydrauliques ; l'angle de croisement des jets des réactants ainsi que la distance à laquelle ils vont se rencontrer (pour avoir un bon mélange dans la chambre de combustion) ; la vitesse des fluides à l'injection et la chute de pression nécessaire à travers l'injection qui permet une telle vitesse. Ces paramètres sont généralement déterminés expérimentalement, en prenant soin d'utiliser les bons réactants, car les systèmes d'injections sont dessinés pour une combinaison particulière de combustible/oxydant (on peut toutefois utiliser des fluides de similitude et vérifier avec les ergols réels). Considérant la géométrie d'un système d'alimentation (voir [6]), on peut distinguer trois typologies de construction (voir Figure 1-4) :

- à jets croisés (impinging jets) : les points d'injection sont disposés de façon à permettre aux ergols de s'impacter (soit combustible/combustible, oxydant/oxydant, on parle alors de like-on-like, soit combustible/oxydant, on parle alors d'injecteurs like/unlike) et de favoriser leur atomisation et mélange. L'impact peut être fait sur deux ou trois jets, selon les rapports des débits. Cette configuration est souvent utilisée pour les moteurs à ergols stockables comme le Viking d'Ariane 1 - 4.
- à jets parallèles (shower head) : le mélange de ergols (très réactifs) est obtenu par la turbulence et la diffusion radiale dans la chambre de combustion. Cette typologie à non-impact était utilisée dans le moteur allemand V2 des années 44-45 (voir [7], [8] et [9]).
- à jets coaxiaux : dans cette configuration utilisée fréquemment dans la propulsion cryotechnique pour les ergols Lox/GH<sub>2</sub> (dans les moteurs Vulcain et Vulcain 2 par exemple), les éléments d'injection sont cylindriques et à flux concentriques. Le jet liquide central est injecté à une vitesse voisine de 20 m/s et l'écoulement annulaire de combustible à une vitesse de 300 m/s environ : cette différence de vitesse assure la pulvérisation du jet central.

Si les ergols ne sont pas assez volatils et/ou réactifs, le processus d'injection est rendu plus énergétique par :

- l'utilisation de surfaces d'impacte,
- la formation de vortex à coté de la surface d'injection ;
- et des autres dispositifs favorisant l'atomisation (le swirl par exemple).

Ces techniques sont aujourd'hui rarement utilisées car il est préférable d'éviter des complications technologiques non indispensable.

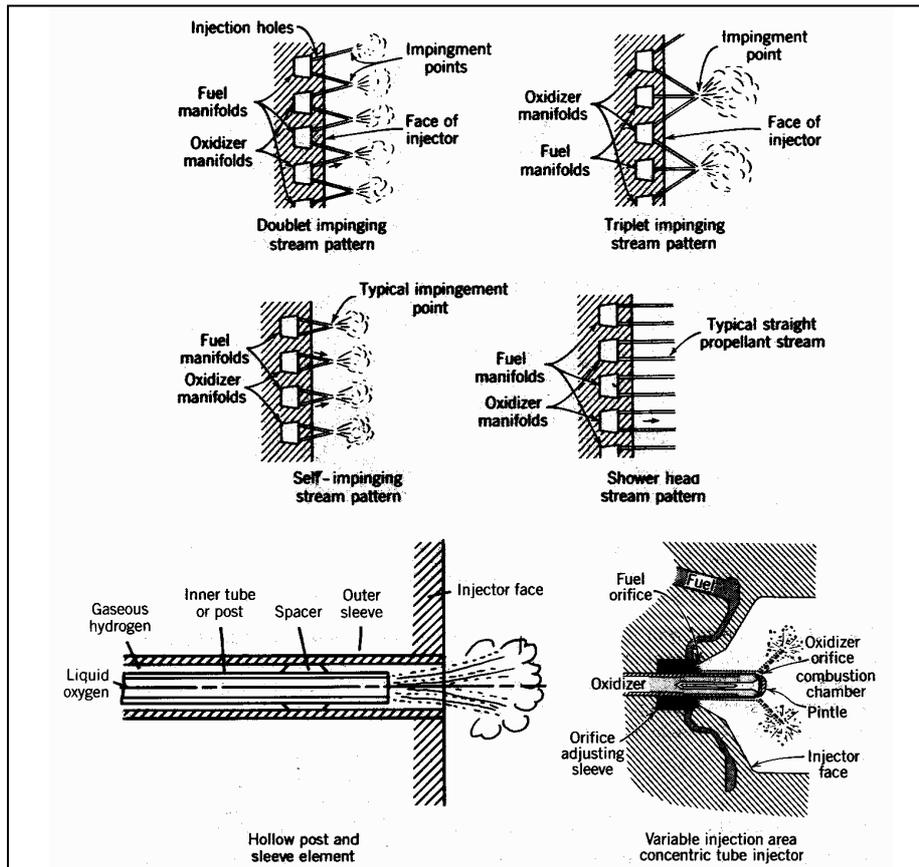


Figure 1-4 : Types d'injecteurs.

## 1.6 La chambre de combustion

### 1.6.1 Sa géométrie

La chambre de combustion est la partie du moteur où prend place la combustion des réactants pour produire des gaz très chauds qui seront éjectés par la tuyère, afin d'obtenir une poussée élevée. Les paramètres qui la caractérisent sont sa forme géométrique et son volume, choisis pour minimiser sa masse et ses inerties. Son volume doit être assez grand pour garantir le bon mélange des réactants et une complète combustion : une pression élevée peut permettre une réduction de son volume car cela améliore le mélange des réactants et surtout la vaporisation, mais quand le volume de la chambre est trop petit la combustion peut rester incomplète. En phase de fonctionnement normale elle supporte des pressions et des températures élevées (pour le Vulcain la pression de chambre est environ 100 *bar* et la température est supérieure à 3500 *K*), ce qui permet d'obtenir des performances meilleures en terme de poussée.

### 1.6.2 La combustion

Les chambres de combustion des fusées à ergols liquides sont le siège d'un nombre considérable de phénomènes physiques encore mal maîtrisés par la communauté scientifique. Comme ils sont fortement dépendants du type d'injecteur choisi et des ergols utilisés, il conviendra de choisir une configuration spécifique pour faire une étude phénoménologique précise. En considérant un moteur alimenté par l'oxygène liquide et l'hydrogène gazeux injectés par des injecteurs coaxiaux, on peut représenter les processus qui prennent place dans la chambre de combustion, de l'injection dans la chambre à l'expansion en la tuyère, par le schéma montré en Figure 1-5 :

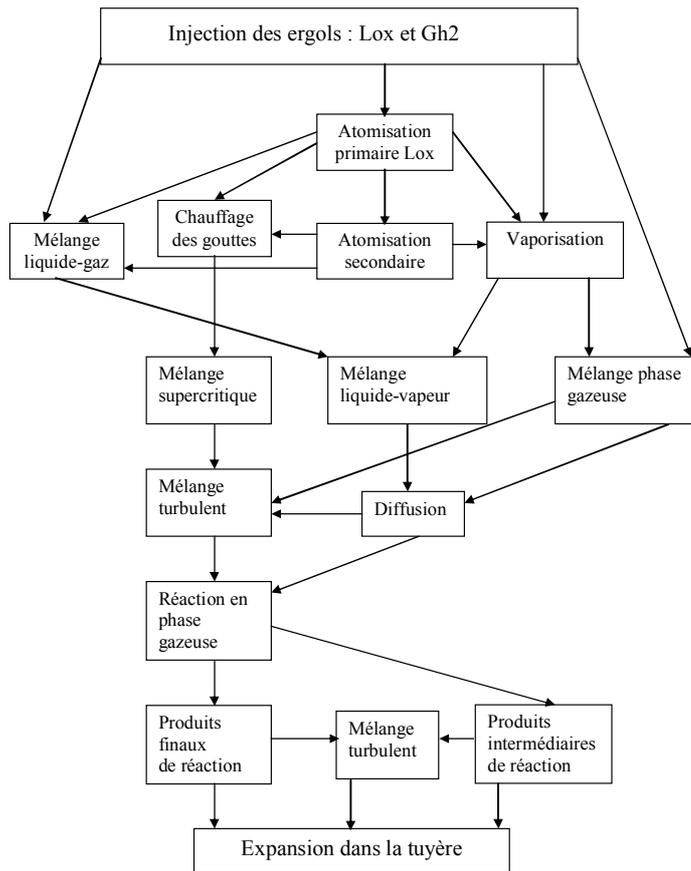


Figure 1-5 Schéma de la combustion dans un foyer Lox/GH<sub>2</sub>.

Comme on peut voir par ce schéma, les liens entre les différents phénomènes présents pendant la combustion sont plutôt complexes. Par exemple, si l'on considère la vaporisation, on ne peut pas lui donner de vraie position chronologique, car on a un front de vaporisation qui implique de l'oxygène à la sortie de l'injecteur, ainsi que des gouttes et des fragments de liquide qui sortent de l'atomisation primaire, et des gouttes plus petites qui se forment par l'atomisation secondaire. Comme l'ont montré W.A. Sirignano, J.-P. Delplanque, C. H. Chiang, et R. Bhatia [10], une vision approximative et primitive, mais efficace pour une analyse des phénomènes, est de concevoir la combustion dans un moteur fusées comme une séquence de processus suivie par un élément de propergol. Les processus sont dans l'ordre : l'injection, l'atomisation primaire, l'atomisation secondaire, le chauffage du liquide, la vaporisation, le mélange et le chauffage de la phase gazeuse, les réactions chimiques de la phase gazeuse et la diffusion d'une partie de chaleur vers les ergols frais. En effet, ils mettent en évidence que :

- la combustion est continue : les éléments de propergols injectés à différents moments ne sont pas forcément au même processus à un instant donné ;
- la combustion présente une distribution spatiale : les éléments distincts injectés au même instant de temps, peuvent être en différents processus à un moment donné.

Les détails d'un processus pour un élément spécifique dépendent des processus précédents qu'il a subit et des processus subits par les autres éléments. Par exemple, la vitesse de vaporisation pour un élément dépend soit de son processus d'atomisation, qui détermine sa taille, soit de la chaleur transférée par les autres éléments déjà brûlés. Tout processus a une durée, ou un temps caractéristique, associés, et si un temps dans la séquence des processus est beaucoup plus long que la somme des autres, le temps de combustion de l'élément de propergol est essentiellement donné par ce temps caractéristique. On estime que ce processus est le contrôleur de vitesse, car la vitesse de combustion est approximativement égale à celle de ce processus. On observe qu'une variation de pression, de température, ou de vitesse dans la chambre de combustion, influencera ces processus, en particulier les temps caractéristiques et les vitesses associées : dans ce cas, des phénomènes dynamiques et dépendant des fréquences sont attendus.

## **1.7 Les instabilités de combustion dans la propulsion liquide**

### **1.7.1 L'origine des instabilités**

En ce qui concerne les instabilités de combustion (que l'on examinera au paragraphe suivant), si le processus est contrôleur de vitesse, et a un temps caractéristique du même ordre que la période d'oscillation, il peut fortement répondre aux oscillations de pression et de vitesse dans la chambre. Par contre si le temps caractéristique du contrôleur est très grand, le processus ne répond pas aux oscillations de pression et s'il est très court par rapport à la période d'oscillation, il peut répondre de façon quasi-stationnaire, mais difficilement ce processus sera le contrôleur de la vitesse de combustion. Si le processus n'est pas le contrôleur, les oscillations de sa vitesse ne peuvent influencer significativement la vitesse de

combustion et donc la boucle menant aux oscillations dans la chambre ne peut pas être conduite.

## 1.7.2 Critère d'instabilité

Le problème des instabilités de combustion dans les moteurs fusée à ergols liquides est un défi permanent: toute chambre de combustion, avec des conditions peu restrictives, est aussi un résonateur acoustique, avec un nombre infini de modes résonants.

Le critère le plus utilisé pour affirmer si un mécanisme conduit à l'instabilité de combustion, est le critère formulé par Rayleigh en 1878 [11], qui peut être résumé comme suit : un mécanisme peut conduire à l'instabilité si la vitesse de combustion qui lui est associée oscille avec une amplitude assez large et un petit retard de phase par rapport aux oscillations de pression, c'est-à-dire que le temps caractéristique du mécanisme est du même ordre de grandeur que la période d'oscillation de la pression. D'un point de vue mathématique ce critère affirme qu'il y a des instabilités de combustion si :

$$\int_{V_{ch}} \left( \int_0^T p' \dot{q}' dt \right) dV_{ch} > 0 \quad (1.1)$$

Où  $p'$  et  $\dot{q}'$  sont respectivement les oscillations de pression et de taux de libération de chaleur. L'intégration temporelle est prise sur une période acoustique et l'intégration spatiale sur tout le volume de la chambre de combustion. Il faut préciser que lorsque l'on parle de fluctuations de pression dans les instabilités de combustion, elles sont organisées (et donc on met aussi en évidence des fréquences d'oscillation) et elles ont une certaine amplitude qui peut s'amplifier ou se réduire au cours du temps (voir Figure 1.6). Dans un fonctionnement opérationnel stable d'un moteur, il est possible d'avoir des amplitudes de fluctuations inférieures ou égales au 5% de la pression moyenne de chambre : on a ce que l'on appelle une combustion lisse (*smooth combustion*). Une combustion conduisant à des fluctuations de pression plus importantes en un endroit de la chambre et de façon complètement aléatoires est connue sous le nom de "combustion dure" (*rough combustion*).

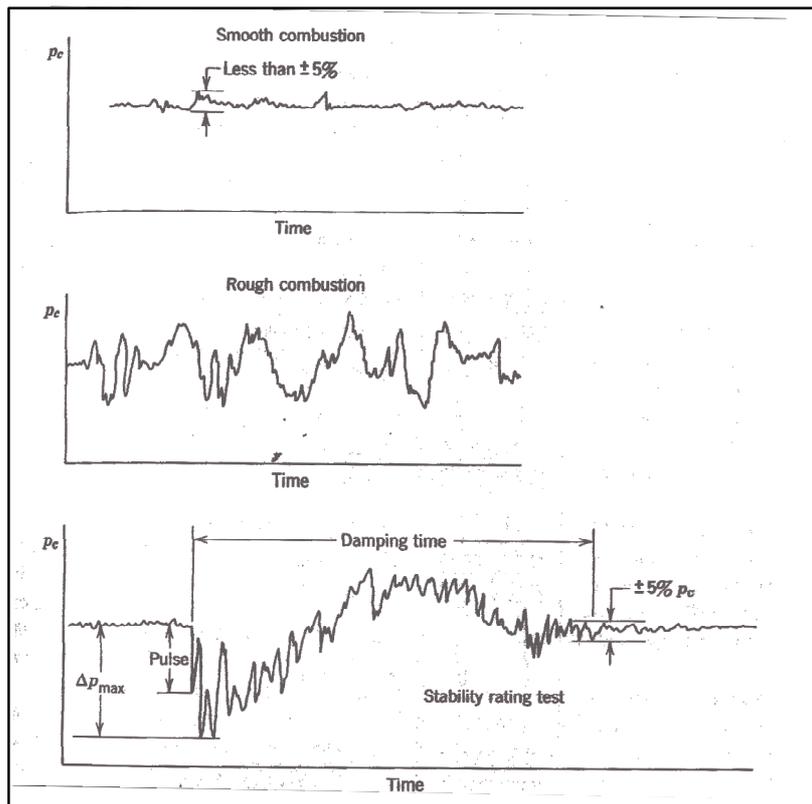


Figure 1-6 : Traces typiques d'oscillogramme pendant divers cas de combustion.

### 1.7.3 Les catégories d'instabilités de combustion

Depuis les années 40, la prévention des instabilités de combustion a été un grand défi pour les développeurs et les constructeurs des moteurs spatiaux ([9], [12], – [19]) : des oscillations instables de pressions sont apparues pratiquement dans tous les programmes de développement de nouveaux moteurs. Selon leur nature, les instabilités de combustion sont classées en :

- instabilités à basse fréquence, comme le chugging ou le pogo, qui mettent en jeu les modes hydrauliques de l'ensemble du système d'alimentation. La fluctuation de pression est la même en tout point dans la chambre de combustion ;
- instabilités à haute fréquence, également appelées acoustic instability ou intrinsic instability, qui affectent exclusivement la chambre de combustion par

l'intermédiaire de ses modes acoustiques. La distribution de pression n'est plus uniforme dans la chambre ;

- instabilités hybrides, ou injection-coupled instabilities, sont de instabilités à haute fréquence où le système d'alimentation interagit avec la chambre de combustion. Dans cette catégorie, l'amplitude des fluctuations de débit injecté dans la chambre, pilotée par les fluctuations de pression dans cette dernière, est le mécanisme principal qui conduit à l'instabilité.

Parmi ces types d'instabilité, les deux derniers sont les plus destructifs et les plus difficiles à contrôler : le problème principal dans l'étude de ces instabilités est de comprendre comment les perturbations acoustiques modulent le taux de dégagement de chaleur. Les mécanismes candidats dans les moteurs fusées à ergols liquides impliquent le couplage de l'acoustique de la chambre de combustion avec un ou plusieurs processus qui prennent place pendant la combustion (voir Figure 1-7) : la chaleur dégagée, associée aux processus de la combustion, peut potentiellement conduire à des oscillations de pression qui vont exciter les modes acoustiques qui ont tendance à provoquer une oscillation locale de la vitesse de combustion.

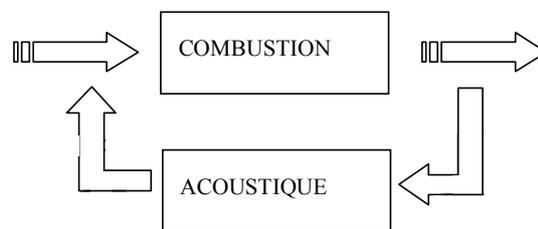


Figure 1-7 : Boucle du mécanisme qui amplifie les modes propres de la chambre de combustion.

Souvent les amplitudes des fluctuations de pression sont suffisamment grandes pour produire des augmentations du flux de chaleur capables d'endommager les parties les plus difficiles à refroidir : l'injecteur et le col de la tuyère. Sur cette dernière l'intensité de chaleur transférée par les gaz chauds est déjà très élevée en fonctionnement normal. En particulier le dommage est proportionnel au dégagement d'énergie par unité de volume, c'est-à-dire qu'il augmente avec les performances du moteur.

Les instabilités intrinsèques et hybrides se présentent en deux familles de modes, longitudinaux et transversaux. Les modes longitudinaux se propagent dans la direction axiale de la chambre de combustion et ses ondes de pression sont réfléchies au niveau de la face d'injection et du cône convergent de la tuyère. Les modes transversaux (voir Figure 1-8) se propagent perpendiculairement à l'axe de la chambre et ils sont distingués en modes tangentiels et radiaux. Les modes tangentiels peuvent être fixes ou en rotation (*standing or spinning modes*), selon si la ligne des nœuds (N-N) est stationnaire ou en rotation. En plus ces modes peuvent se mélanger entre eux : ils ont les caractéristiques de modes purs multiples qui ont des fréquences naturelles discrètes d'oscillation.

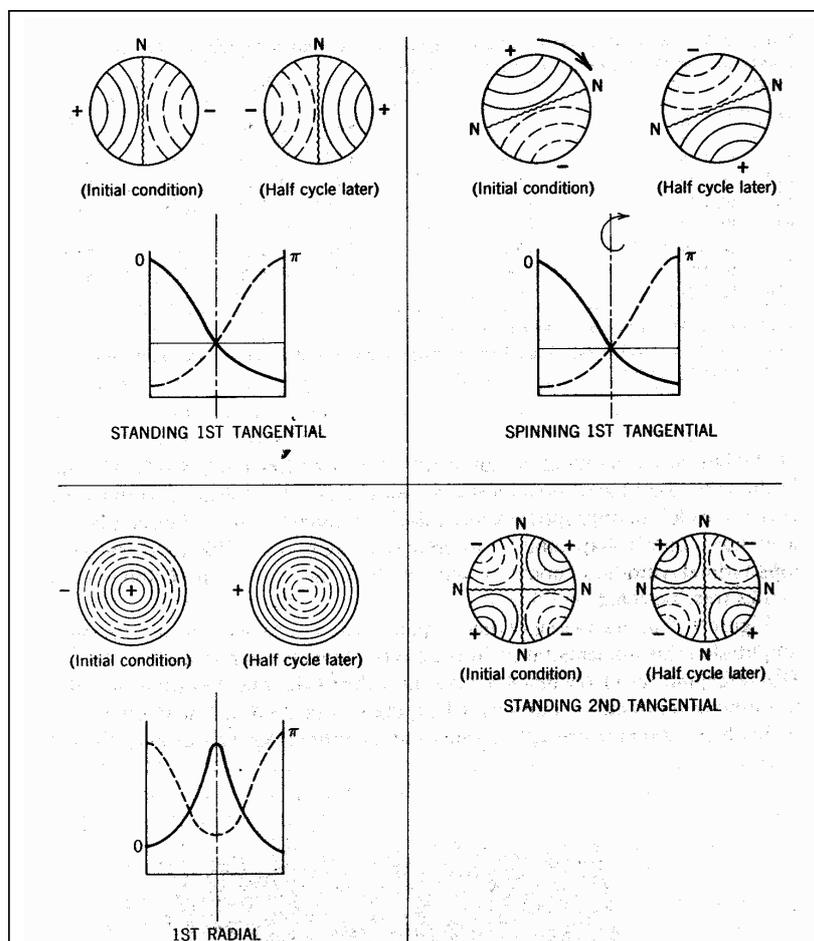


Figure 1-8 : Représentation simplifiée des modes transversaux fondamentaux dans une chambre de combustion cylindrique.

Dans la figure du haut, les lignes continues représente des pressions supérieures à la pression moyenne de fonctionnement du moteur et les lignes discontinues le contraire.

#### 1.7.4 Les instabilités hybrides : revue bibliographique

Cette catégorie d'instabilités a été mise en évidence plus récemment que les autres car elles font intervenir une partie du système d'alimentation dont les modes hydrauliques sont proches des modes acoustiques de la chambre de combustion. Peu d'informations sont collectées aujourd'hui : quelques unes grâce au programme Apollo, puis par les développements des moteurs de la Navette Spatiale et en Europe, très peu pendant le programme Ariane.

L'exemple le plus connu d'instabilités couplées a été donné, pendant le programme Apollo (années 60), par le moteur J2-S, version réutilisable du moteur J2 (étages II et IVB du Saturn V) qui révéla une instabilité hybride à haute fréquence à 4400 Hz (Anon. [20]). Ce moteur utilisait de l'oxygène liquide et de l'hydrogène gazeux comme ergols, injectés au travers d'injecteurs coaxiaux. En changeant le dessin des injecteurs, Rocketdyne, une Division de Rockwell International Corporation en Californie, résolut le problème au début des années 70. En 1964, sous contrat du NASA Lewis Research Center (LeRC), la société Pratt and Whitney Aircraft a mené un programme expérimental afin d'étudier la dépendance de l'instabilité de combustion à haute fréquence à la température d'injection de l'hydrogène, sur des chambres Lox/hydrogène (Anon. [21]). L'augmentation de cette température avait un effet stabilisant sur les moteurs.

Pendant la phase de développement des moteurs de la navette spatiale, le NASA LeRC a conduit, dans la deuxième moitié des années 60, un programme expérimental sur les instabilités à haute fréquence, sur une chambre oxygène/hydrogène de 89 KN de poussée (Wanhainen J.P., Parish C.P., et Conrad E.W. [22]). Ils firent varier la température entre 33 K et 107 K à une pression fixée de 2070 KPa et trouvèrent que, pour ce moteur, la limite d'instabilité pouvait toujours être définie en terme d'un rapport critique des vitesses (rapport de vitesse d'injection du combustible et de l'oxydant) sans dépendance explicite à la température du combustible. Le rapport des vitesses était contrôlé par la variation des sections d'écoulement du combustible. Par la suite, Hannum N.P., et Conrad E.W. ([23]) montrèrent que la corrélation du rapport des vitesses ne tenait pas si les dimensions de l'injecteur étaient changées. Une étude fut donc conduite pour examiner le cas de la variation de chute de

pression de l'oxygène indépendamment de la vitesse de sortie à l'injection : la limite d'instabilité à haute fréquence était dissociée de cette chute de pression, consolidant l'argumentation d'un mécanisme intrinsèque. Comme dans ces études le côté combustible fut négligé, Conrad E.W., Bloomer H.E., Wanhainen J.P., and Vincent D.W. ([24]), comprirent que les instabilités hybrides étaient liées au changement de la température du fuel qui modifiait la chute de pression d'injection : une corrélation empirique, qui dépendait de la forme de l'injecteur et de la chambre fut trouvée pour la température critique d'instabilité. Ils découvrirent aussi que le changement de la chute de pression de l'hydrogène, due à la présence du retrait du pitot du côté oxygène de l'élément d'injection, avait un effet stabilisant : un retrait de 0.25 *cm* augmenta la limite de stabilité de la chambre de combustion utilisée (à 89-KN). En 1974 le NASA LeRC réalisa un rapport (Hannum N.P., Russell L.M., Vincent D.W. et Conrad E.W. [25]) qui vérifiait, sur le même moteur, ce phénomène d'injection couplée qui liait la chute de pression du côté combustible à la géométrie de la sortie du côté oxydant dans l'injecteur. Bien plus tard cette caractéristique se révéla être valable dans des chambres oxygène/méthane (Jenson R.J., Dodson H.C., et Claflin S.E. [26]). Cependant, une étude sur ce type d'instabilité fut menée par Rocketdyne sous contrat de la NASA Johnson Space Center (JSC) du Texas, sur trois injecteurs à propergols stockables (Kesselring R.C., Nelson R. L. et Sprouse K.M [27]) : le « Rocketdyne Lance XRL Boosters Injector », l'« Aerojet Space Shuttle OME technology injector » et le « Rocketdyne Space Shuttle OME technology injector ». Ils ont montré que sur les trois systèmes d'injection il y avait des instabilités hybrides sur une plage de fréquences de 100-3000 *Hz* : ils résolurent le problème en utilisant un code en boucle ouverte qui requérait en entrée un mode acoustique spécifique de la chambre de combustion.

Pendant les dix dernières années, très peu d'informations ont été diffusées sur les instabilités couplées. Les derniers travaux sont, d'une part, ceux de Hutt J.J., Hulka J., et Rocker M. ([28] et [29]), qui en 1994 étudièrent les instabilités couplées sur les moteurs oxygène/hydrogène avec des injecteurs de configurations différentes et, d'autre part, ceux de Hutt J.J. et Rocker M. ([29]) qui en 1995 développèrent un modèle spécifique basé sur la réponse forcée du système injecteur-chambre de combustion.

En Europe, des instabilités hybrides furent observées sur le moteur cryogénique HM7 de l'étage supérieur d'Ariane 1 à 4, pendant les tests de développement. Ces instabilités impliquaient la ligne d'alimentation de l'hydrogène et dépendaient de la température d'injection (Preklik D. et Spagna P. [30]). Récemment le moteur Aestus MMH/N<sub>2</sub>O<sub>4</sub> de

l'étage supérieur d'Ariane 5 du vol 142 a présenté des instabilités couplées entre la ligne d'alimentation du MMH et la chambre de combustion pendant la phase de démarrage (Ordonneau G. [31]).

## 1.8 Objectifs de l'étude

Depuis les années 90, un groupe de recherche a été créé en Europe, sous l'égide du CNES, qui implique les centres de recherche tels que, l'ONERA, le CNRS et la DLR, et des industriels tels que l'EADS ST et la SNECMA, pour étudier les instabilités à haute fréquence (HF). L'échec du vol 142 a contribué à augmenter l'effort sur l'étude des instabilités hybrides, dont fait partie cette thèse qui a comme but la compréhension du mécanisme de couplage qui guide les instabilités hybrides et le développement d'un outil numérique approprié à l'analyse et à la prévention des instabilité hybrides.

### 1.8.1 Plan de présentation de la thèse

- Chapitre 2 : « Temps caractéristiques liés à la mécanique des injecteurs ».
- Chapitre 3 : « Temps caractéristiques liés à la nature thermo-physique de l'écoulement ».
- Chapitre 4 : « Approche à la modelisation du systeme propulsif ».
- Chapitre 5 : « Modèle acoustique de la chambre de combustion ».
- Chapitre 6 : «Etude de systemes couplés ».

Dans les deux prochains chapitres, on s'intéresse à l'identification des processus, parmi ceux qui se déroulent pendant la combustion d'un moteur  $\text{Lox}/\text{GH}_2$ , qui peuvent se coupler avec l'onde acoustique qui se propage dans la chambre de combustion suite à une manifestation d'instabilités hybrides. Afin d'interpréter et de modéliser les instabilités hybrides, on s'intéressera surtout à l'examen de l'ordre de grandeur des temps caractéristiques des principaux processus en jeu dans la chambre de combustion : on regardera si leurs temps caractéristiques sont compris entre  $10^{-4}$  et  $10^{-2}$  secondes qui sont les bornes de temps associés aux instabilités considérées dans ce travail de thèse.

# Chapitre 2

## 2 Temps caractéristiques liés à la mécanique des injecteurs

Comme il a été expliqué dans le chapitre précédent, les instabilités à haute fréquence, et en particulier les instabilités hybrides, peuvent être dépendantes des processus qui prennent place dans la chambre de combustion, dès que les ergols y sont injectés. Examinons à ce propos les temps caractéristiques liés aux phénomènes élémentaires de ces processus. Afin de fixer les idées, les applications numériques sont faites pour un moteur du type Vulcain, à oxygène liquide et hydrogène gazeux, injectés coaxialement : par chaque élément d'injection un jet axisymétrique biphasique débouche dans la chambre de combustion. On peut énoncer les processus qui suivent l'injection selon la séquence suivante : l'atomisation primaire, l'atomisation secondaire, le chauffage et la vaporisation des gouttes, le mélange, et les réactions chimiques.

Dans ce chapitre on commence par analyser l'atomisation primaire, puis l'atomisation secondaire et enfin le mélange, qui sont des processus liés à la mécanique des injecteurs. Et on verra par la suite dans le prochain chapitre, les processus liés aux phénomènes thermiques, c'est à dire le chauffage et la vaporisation, ainsi que les réactions chimiques, qui dépendent de la nature thermo-physique de l'écoulement et qui sont des candidats potentiels dans l'étude du couplage de la combustion avec une onde acoustique à haute fréquence (voir à ce sujet l'article de Sirignano W.A., Delplanque J.-P., Chiang C. H., et Bhatia R. [10]).

### 2.1 Temps caractéristiques de l'atomisation

Différentes techniques d'atomisation sont utilisées dans les moteurs à ergols liquides selon les injecteurs utilisés (« impinging jets », injecteurs coaxiaux, etc...). On focalise notre

attention sur les injecteurs coaxiaux qui sont utilisés dans le moteur Vulcain (et largement utilisés dans la propulsion spatiale, en particulier sur les moteurs cryotechniques) : les ergols que l'on prend à l'étude sont l'oxygène liquide et l'hydrogène gazeux. La structure de l'écoulement diphasique, à l'aval d'un tel injecteur liquide-gaz, est le résultat d'une interaction complexe entre les forces d'inertie, de viscosité et de tension superficielle. Lorsqu'un jet liquide est cisailé par un écoulement gazeux annulaire, avec un important différentiel de vitesse, des perturbations, d'origine aérodynamique, se développent à sa surface. On assiste à la naissance d'une instabilité de l'interface liquide/gaz de type Kelvin-Helmoltz ([32] et [33]). Les forces exercées par le gaz sur le liquide tendent à amplifier cette instabilité, tandis que la viscosité du liquide contribue à l'amortir. En même temps, la tension superficielle exerce un rappel sur le liquide en s'opposant à sa fragmentation. Lorsque l'instabilité croît suffisamment, des ligaments se forment et se détachent de la surface du jet. Ces ligaments se brisent en grosses gouttes qui, à leur tour, se brisent en de plus petites gouttes sous l'influence des interactions aérodynamiques avec le gaz environnant. Ce processus aboutit finalement à la rupture du jet liquide continu en un brouillard de gouttes : on parle d'atomisation du jet liquide.

L'atomisation primaire entraîne la formation initiale de gouttes et d'autres fragments de liquide sur la surface d'un liquide. L'atomisation secondaire entraîne toutes les ruptures successives des gouttes et des fragments liquides présents dans les liquides dispersés dans la chambre de combustion, près du dard liquide. Cette dernière fragmentation est un phénomène important car après l'atomisation primaire, les gouttes sont intrinsèquement instables vis-à-vis de l'atomisation secondaire et c'est celle-ci qui influencera leur taille et modifiera ainsi les rapports de mélange locaux.

### 2.1.1 Temps caractéristiques d'atomisation primaire

La détermination du mécanisme ou des mécanismes de l'atomisation primaire est un problème difficile à résoudre, car la gamme de paramètres à prendre en considération est très large. La Figure 2-1 (GDR [34]) montre par exemple deux à trois ordres de grandeur de variation en nombres de Weber ( $We = \rho_g U_g^2 D_l / \sigma$ ) et de Reynolds associés au liquide ( $Re_l = U_l D_l / \nu_l$ ) entre les expériences de laboratoire et le cas industriel des moteurs fusées.

Le rapport des densités peut également être très différent et, dans les moteurs fusées, des incertitudes persistent quant à la valeur de la tension superficielle. Il est clair qu'une bonne atomisation peut être réalisée soit par injection du liquide à grande vitesse (atomisation à pression) dans un gaz au repos, soit par un jet de gaz coaxial, à très grande vitesse entourant le jet liquide (atomisation assistée) ou, bien entendu, les deux à la fois, comme c'est le cas dans les moteurs de fusées cryotechniques. Des effets géométriques et l'ajout d'une rotation peuvent également être utilisés pour agir sur l'atomisation afin d'obtenir des gouttes plus fines et une meilleure distribution dans la chambre. Dans le cas que l'on considérera ici, celui des injecteurs coaxiaux du Vulcain, il est avantageux d'avoir un flux de quantité de mouvement du gaz par unité de surface (c'est-à-dire la pression dynamique) bien plus grande que celle du liquide : cette condition se reflète sur le taux d'épluchage du jet liquide et donc sur la longueur du dard liquide.

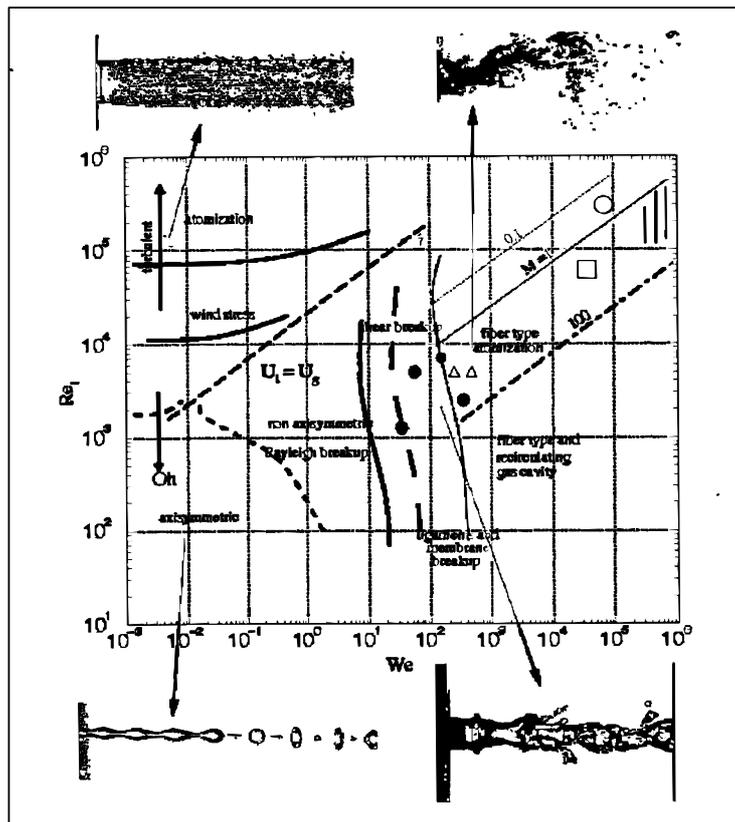


Figure 2-1 : Cartographie des régimes d'atomisation dans l'espace des paramètres  $Re_l$ - $We$

Dans la figure ci-dessus, les lignes à iso rapport de pressions dynamiques ( $M = \rho_g U_g^2 / \rho_l U_l^2$ ) sont calculées pour un injecteur avec un diamètre du pitot liquide ( $D_l$ ) qui vaut 7 mm.  $Oh$  est le nombre de d'Ohnesorge, rapport de la racine du Weber du liquide sur le Reynolds du liquide (ou bien  $Oh = \mu_l / (\rho_l \sigma D_l)^{1/2}$ ) : ce nombre exprime le fait que le fractionnement dû à la force de tension de surface d'un ligament liquide ou d'un jet capillaire peut être influencé par sa viscosité. Les symboles qui sont tracés dans la cartographie ont la signification suivante :

|     |   |
|-----|---|
| ●   | expériences de laboratoire  |
| △   | expériences de laboratoire  |
| /// | conditions des moteurs cryotechniques en supposant la tension superficielle $\sigma : 13 \cdot 10^{-3}$ N/m pour Lox/G H <sub>2</sub> |
| □   | banc MASCOTTE   |
| ○   | banc Penn State   |

Tableau 2-1 : Symboles utilisés dans la cartographie de Figure 2-1.

Si on analyse un peu plus en détail cette cartographie, on peut identifier les différents régimes de fractionnement et d'atomisation pour un jet liquide. A faible nombre de  $Re_l$  et  $We$  le fractionnement du jet liquide se fait par instabilité de Rayleigh : les instabilités capillaires sont responsables de l'atomisation ; des gouttes sont produites à l'extrémité du jet avec un diamètre comparable à celui du jet. Pour atteindre un régime d'atomisation en absence d'un jet de gaz coaxial, il est nécessaire d'avoir des valeurs de  $Re_l$  supérieures à  $10^5$ . A ces valeurs de  $Re_l$ , le nombre de Reynolds et le nombre de Weber basés sur l'épaisseur de vorticité à la sortie de l'injecteur,  $Re_{\delta_l} = U_l \delta_l / \nu_l$  et  $We_{\delta_l} = \rho_l U_l^2 \delta_l / \sigma$ , sont également grands pour que l'instabilité dans la couche de liquide puisse se développer. En présence d'un jet de gaz coaxial, la déstabilisation et l'atomisation passent souvent par un mode d'instabilité interfaciale, piloté par la couche de vorticité coté gaz avec formation de ligaments. A Weber modéré ( $We \sim 100$ ) la taille des ligaments dépend de la tension de surface et ils sont souvent accompagnés par la formation de membranes. A des nombres de Weber plus grands (vitesse

du gaz plus élevée) les ligaments sont remplacés par des ligaments fibreux qui dépendent peu ou pas de la tension de surface.

Concernant les instabilités de la couche limite du jet liquide cisailé par le gaz à haute vitesse (voir Figure 2-2), on peut mettre en évidence deux modes instables, ceux à courte longueur d'onde qui proches de l'injecteur et qui ont l'avantage de créer des grandes surfaces d'échange, et ceux à plus grande longueur d'onde, qui sont une évolution des premiers et se forment dans la partie finale du darde liquide.

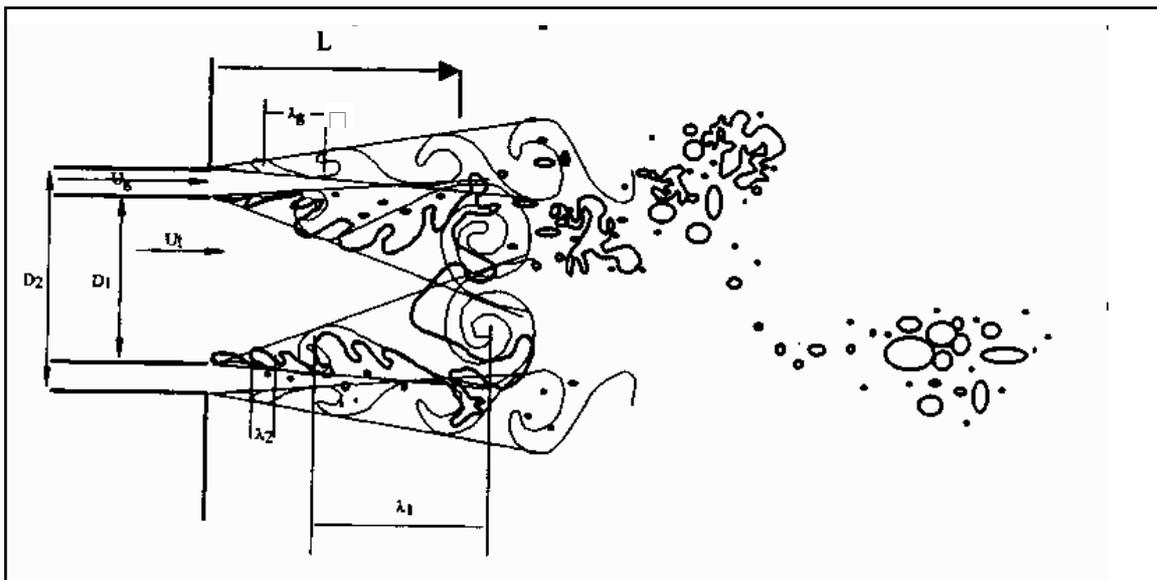


Figure 2-2 : Représentation schématique des instabilités et de l'atomisation d'un jet diphasique.

L'instabilité interfaciale primaire, longitudinale et axisymétrique de longueur d'onde  $\lambda_1$  a pour origine la couche limite du gaz créée dans l'injecteur (Raynal L. [35]) et dépend du rapport des densités :

$$\lambda_1 = B \cdot \delta_g \cdot \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

où la constante  $B$  dépend des injecteurs ( $B \approx 2$  pour les injecteurs axisymétriques : voir Réf. [36] de Marmottant Ph., Villermaux E.),  $\rho_l$  est la masse volumique de l'ergol liquide injecté dans la chambre,  $\rho_g$  est celle de l'ergol gazeux et  $\delta_g$  est l'épaisseur de vortacité du gaz injecté. Pour le cas des écoulements à nombre de Reynolds élevé ( $\sim 10^5$ ), cas d'un moteur-fusée, les

conditions d'injection sont turbulentes dans le jet liquide et le jet gazeux, et l'épaisseur de vorticité, évaluée selon les résultats du GDR [34], est :

$$\delta_g = \frac{70 \cdot e}{Re_g^{3/4}} \quad (2.2)$$

où  $Re_g = U_g \cdot e / \nu_l$  et où  $e$  est l'épaisseur de l'entrefer définie par  $e = (D_g - D_n) / 2$  (voir la Figure 2-3).

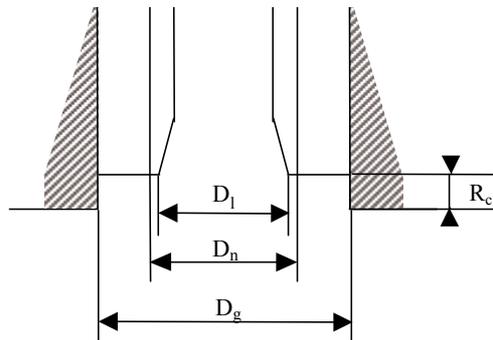


Figure 2-3 : Injecteur coaxial Lox/G H<sub>2</sub>.

Cette instabilité forme des vagues bidimensionnelles qui sont amplifiées et étirées en nappes liquides. Ces nappes sont déstabilisées dans la direction transverse (perpendiculaire à l'écoulement sur la nappe) pour former des ligaments et des gouttes. A des grandes vitesses du gaz, les instabilités à courte longueur d'onde (mode liquide  $\lambda_2$ ) peuvent également être amplifiées et déstabilisées dans la couche de vorticité du liquide. Dans les moteurs cryotechniques, sur lesquels se focalise notre étude, le GDR [34] constate que cette instabilité interfaciale ( $\lambda_2$ ) a à peu près la même valeur que celle primaire ( $\lambda_1$ ) : pour cette raison on portera notre attention, par la suite, sur la définition de  $\lambda_1$ , donnée par l'expression (2.1). Une fois calculée la longueur d'onde d'instabilité interfaciale, le temps d'atomisation primaire peut être défini comme :

$$\tau_1 = \frac{\lambda_1}{(U_g - U_l)} \quad (2.3)$$

Dans le cas d'un moteur cryotechnique, suivant [34], on considère les valeurs suivantes : la vitesse d'injection du gaz ( $U_g$ ) égale à 240 m/s, celle du liquide ( $U_l$ ) de 10 m/s, l'épaisseur de l'entrefer de 0.5 mm, la masse volumique du gaz de 24.4 kg/m<sup>3</sup> et celle du liquide de 1138 kg/m<sup>3</sup>, on obtient  $\lambda \approx 2 \cdot 10^{-5}$  cm et  $\tau_1 \approx 8.5 \cdot 10^{-8}$  secondes. Ce dernier est un temps caractéristique trop petit pour avoir de l'importance au niveau du couplage avec une onde acoustique à haute fréquence qui se propage dans une chambre de combustion manifestant des instabilité hybrides.

## 2.1.2 Temps d'atomisation secondaire

L'atomisation secondaire commence dès que les gouttes ou fragments de liquide sont détachés du dard liquide. Ils sont immédiatement soumis à une accélération due à la traînée du gaz et à la turbulence de l'écoulement. Trois scénarios de brisure secondaire sont à prendre en considération :

- brisure par cisaillement ;
- brisure par la turbulence de l'écoulement;
- brisure par collision entre gouttes.

On focalise notre attention sur le premier cas, car dans un moteur cryotechnique il est plus probable que la brisure par cisaillement soit le mécanisme le plus important en terme de réduction de taille des gouttes du fait du type d'écoulement. La vitesse du gaz  $u_g$  au voisinage du dard liquide est bien plus grande que la vitesse des gouttes ou des fragments détachés du dard. Les mécanismes de brisure par cisaillement dépendent du nombre de Weber (voir Pilch M., Erdman C.A. [37]) ; il aura lieu si  $We_d = \rho_g (u_g - u_G)^2 \cdot \frac{d}{\sigma} > 20$  environ, où  $d$  est la taille des gouttes issues de l'atomisation primaire et  $u_G$  leur vitesse, voir figure suivante :

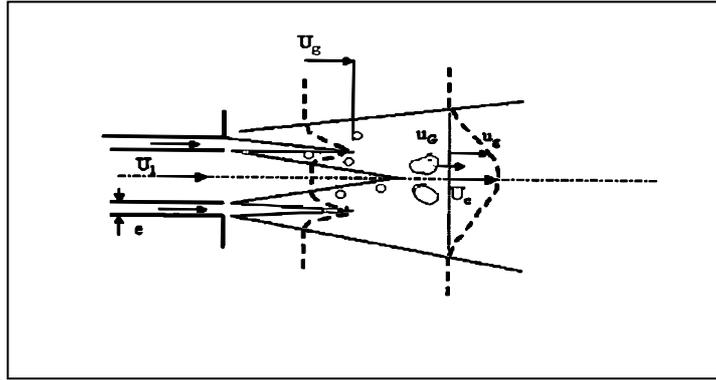


Figure 2-4 : Représentation schématique de la vitesse du gaz et des gouttes.

La taille  $d$  correspond soit au diamètre moyen des gouttes issues de l'atomisation primaire, soit à la taille prise en compte pour caractériser les fragments plus gros détachés surtout de l'extrémité du dard. La taille minimale des gouttes fragmentées par ce mécanisme est :

$$d_s \approx 20 \cdot \frac{\sigma}{\rho_g U_g^2} \quad (2.4)$$

La brisure est très rapide et s'effectue dans un temps qui vaut :

$$\tau_2 \approx \frac{d}{(u_g - u_G)} \cdot \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

Pour les conditions régnant dans les moteurs fusées, lorsque une goutte traverse le cône potentiel du gaz (zone dans laquelle la vitesse axiale du gaz,  $u_g$ , est égale à celle d'injection du gaz ( $U_g$ ), sa taille peu être réduite à  $d_s \approx 20 \cdot \delta_c = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ , où  $\delta_c = \sigma / \rho_g U_g^2$ . En prenant  $u_g \approx U_g / 2$  et  $u_G \approx U_l^* \approx (\rho_g / \rho_l)^{1/2} U_g \approx 40 \text{ ms}^{-1}$ , on obtient  $d_s \approx 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ . Mais le cône potentiel se limite à une zone très réduite (d'épaisseur  $e$  et de longueur  $6e$  environ) et, de ce fait, très peu de gouttes subissent un tel fractionnement. En aval du dard  $u_G > U_l^* \approx 40 \text{ m/s}$  et à  $x/D_l \approx 3$  la vitesse  $u_g$  est de l'ordre de  $U_g/10$  (le rapport des sections  $A_g/A$  est environ 10) et la brisure secondaire par cisaillement n'est plus possible.

Afin d'évaluer le diamètre caractéristique des gouttes à la sortie de l'atomisation primaire, on peut choisir différentes définitions, mais le plus couramment utilisé dans les applications aérospatiales est le diamètre moyen de Sauter noté généralement  $SMD$ . Ce diamètre dépend du type d'injecteur utilisé et de la vitesse relative des deux ergols. En considérant la Figure 2-3 d'un injecteur coaxial et la définition donnée par Habiballah M., Vingert L. [38], le  $SMD$  n'est défini que pour l'oxygène car l'hydrogène est injecté gazeux :

$$SMD_{(\mu m)} = 127 \cdot \left( \frac{U_r^{inj}}{160} \right)^{-0.93} \cdot \left( \frac{D_l(mm)}{2} \right)^{2.25} \cdot \left( \frac{D_g(mm)}{3} \right)^{-2.65} \cdot \left( \frac{R_c}{D_l} \right)^{-0.26} \quad (2.6)$$

où le seul paramètre qui dépend de l'écoulement est la vitesse relative d'injection,  $U_r^{inj}$ , qui est égale à la différence entre la vitesse du gaz et celle du liquide. Les autres grandeurs dans l'équation (2.6) sont purement géométriques. En utilisant les valeurs numériques suivantes :  $U_r^{inj} = 230 \text{ m/s}$  ;  $D_l = 3.15 \text{ mm}$  ;  $D_g = 3.95 \text{ mm}$  ; et  $R_c = 1.5 \text{ mm}$  (les diamètres et le retrait sont pris en échelle 1/2), on obtient un diamètre moyen de Sauter de  $147 \mu m$ , qui, substitué dans l'équation (2.6), permet d'estimer le temps caractéristique d'atomisation secondaire, pour un moteur cryotechnique à  $\tau_2 \approx 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . On présente ci-dessous la dépendance de  $\tau_2$  par rapport au diamètre de la goutte sortant de l'atomisation primaire et de la vitesse d'injection :

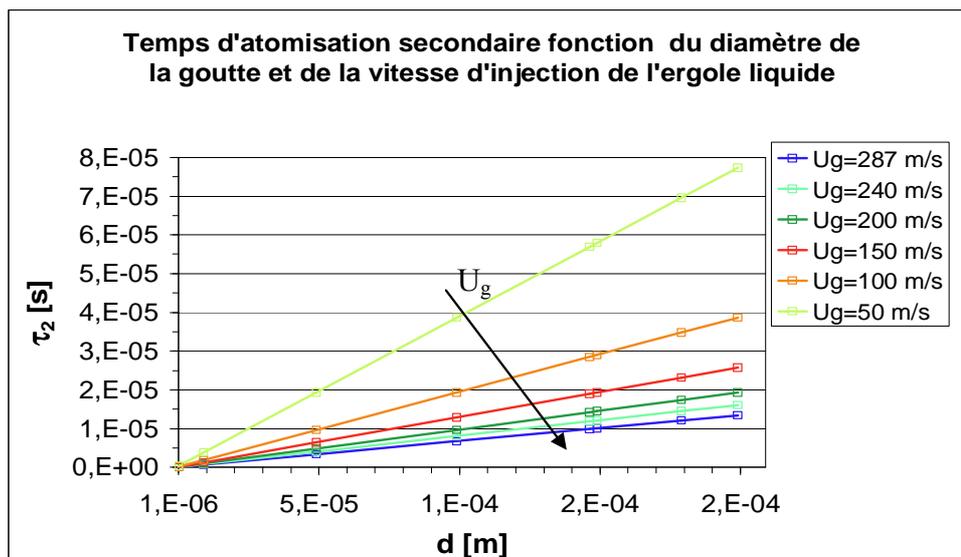


Figure 2-5 : Temps d'atomisation secondaire en fonction du diamètre de la goutte.

Comme le montre la Figure 2-5, les ligaments et les gouttes de dimensions (diamètre ou dimension de référence) comprises entre  $1 \mu m$  et  $200 \mu m$  ont un temps caractéristique d'atomisation secondaire qui est plus petit que celui de l'acoustique qui nous intéresse et dont la borne inférieure d'investigation est  $10^{-4}$  seconde.

Après cette étude sur les temps caractéristiques liés à l'atomisation, on peut en conclure que l'atomisation primaire ainsi que la secondaire, ne sont pas les processus qui conduisent aux instabilités hybrides, car leurs temps caractéristiques sont plus petits que les temps acoustiques, et donc trop petits pour un couplage possible.

## 2.2 Temps caractéristiques de mélange

Le processus de mélange dans une chambre de combustion à injection coaxiale est turbulent du moment où le nombre de Reynolds calculé à partir du diamètre de l'élément d'injection et de la vitesse des ergols, est dans la plage de  $10^4 - 10^6$  (Sirignano W.A., Delplanque J.-P., Chiang C. H., et Bhatia R. [10]). En effet le Reynolds calculé pour le Vulcain, prenant le diamètre de tout l'injecteur est de  $10^4$ , ce qui nous indique la présence d'un régime turbulent. Pour l'estimation des temps de mélange on se basera donc sur les temps de la turbulence dont on va rappeler les aspects phénoménologiques.

### 2.2.1 Rappels de turbulence

Il n'existe pas de définitions précises de la turbulence mais elle se définit par un ensemble de propriétés générales. Une de ces propriétés est l'accroissement des échanges des quantités physico-chimiques (masse, quantité de mouvement, énergie) et la dispersion de particules présentes au sein de l'écoulement. Cette propriété est à la base des modèles de turbulence fondés sur le concept de viscosité turbulente introduit par Boussinesq en 1876 (hypothèse de Boussinesq, voir [39] et [40]). Ainsi, les transports turbulents en favorisant les échanges et la dispersion, sont assimilables à un phénomène de diffusion. Ces transports sont liés à la nature de l'écoulement et non à celle du fluide comme dans la diffusion moléculaire. La turbulence induit des instabilités qui se développent à nombre de Reynolds élevé et qui confère un caractère aléatoire à l'écoulement. Du point de vue de la modélisation, la difficulté

réside dans la traduction mathématique de ce caractère non reproductible des écoulements turbulents. Ce caractère stochastique conduit à assimiler chaque grandeur physique fluctuante au sein de l'écoulement turbulent à une variable aléatoire : il s'ensuit une utilisation évidente de la théorie statistique dans la caractérisation des écoulements turbulents. La turbulence se caractérise aussi par la présence au sein de l'écoulement d'une multitude de tourbillons avec des échelles caractéristiques différentes. Ceux-ci évoluent dans le temps et dans l'espace selon le concept de cascade tourbillonnaire introduit par Kolmogorov [41]. Par déformation et étirement, les grandes structures qui portent l'essentiel de l'énergie cinétique se scindent en structures plus petites sur lesquelles les effets visqueux agissent plus efficacement pour le dissiper dans tout l'écoulement. On introduit la plus petite échelle dite de Kolmogorov, en deçà de laquelle la turbulence n'existe pas, les tourbillons étant dissipés par les effets de diffusion moléculaire.

La turbulence se traduit par des fluctuations provoquées par une multitude de tourbillons de tailles différentes. Soit un tourbillon de taille  $L_t$  et de vitesse  $u'_{L_t}$ , son énergie cinétique turbulente,  $k'_{L_t}$ , est définie comme :

$$k'_{L_t} = \frac{1}{2} u'_{L_t} u'_{L_t} \quad (2.7)$$

Et le taux de dissipation de  $k'_{L_t}$  est, par analyse dimensionnelle :

$$\epsilon'_{L_t} = \frac{u'^3_{L_t}}{L_t} \quad (2.8)$$

Afin d'introduire plus rigoureusement le caractère multi-échelle de la turbulence, on recourt usuellement à une approche spectrale, qui fait correspondre le nombre d'onde  $K = \pi/L$ . Classiquement, on utilise la répartition du spectre d'énergie cinétique turbulente  $E(K)$  pour décrire la turbulence. Toutes les échelles de la turbulence se retrouvent dans la répartition spectrale de  $E(K)$ . Celle-ci est composée de trois domaines comme l'illustre la Figure 2-6 :

- Un domaine énergétique, où l'énergie cinétique des gros tourbillons provient de l'écoulement moyen par les instabilités aérodynamiques. Dans cette zone les

tourbillons ont une taille caractéristique  $l$  et leur formation dépend fortement de la géométrie et de l'écoulement considéré.

- Un domaine inertiel où les tourbillons interagissent entre eux. Ils se cassent en structures plus fines sans production ni dissipation d'énergie (hypothèse de Kolmogorov), sous l'effet d'étirements : on assiste à un transfert progressif de l'énergie cinétique des gros tourbillons vers les plus petits. L'énergie cinétique turbulente dans cette zone suit une loi d'évolution en  $K^{-5/3}$ .
- Un domaine dissipatif où on assiste à une dissipation des petites structures sous l'effet de la viscosité : la taille des tourbillons diminue jusqu'à ce que les effets de viscosité moléculaire deviennent prépondérants et transforment l'énergie cinétique en chaleur.

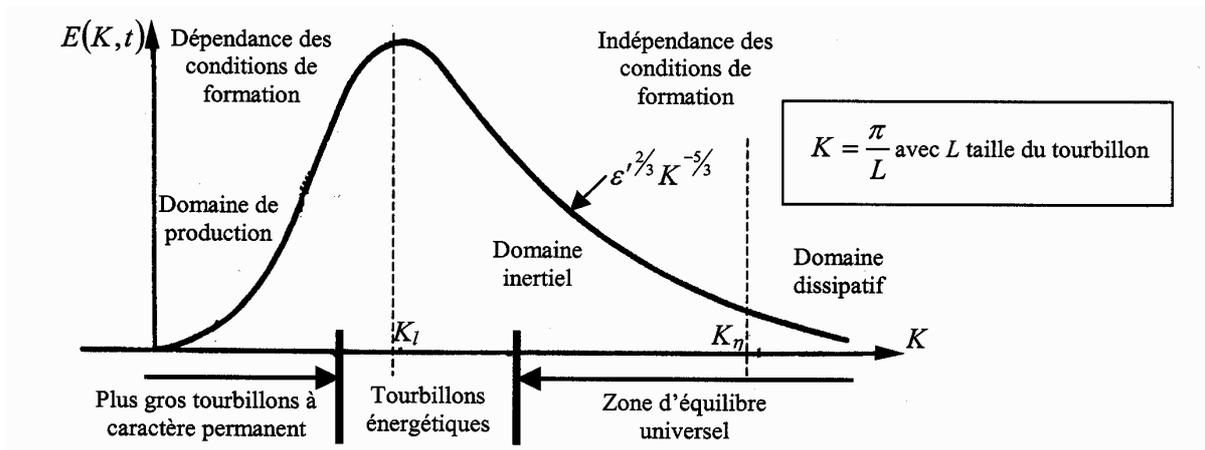


Figure 2-6 : Spectre de l'énergie turbulente.

Les écoulements turbulents sont ainsi constitués d'une collection de tourbillons de tailles différentes. La gamme des échelles présentes s'étend sur plusieurs ordres de grandeur entre les plus petites échelles contrôlées par les effets visqueux et les grandes échelles influencées par la géométrie.

L'échelle de Kolmogorov,  $\eta$ , marque la limite entre le domaine inertiel et le domaine dissipatif contrôlé par la viscosité  $\nu$ , c'est-à-dire quand les forces de viscosité moléculaires sont du même ordre de grandeur que les forces d'inertie. Soit  $u_\eta$  la vitesse caractéristique de ces structures dissipatives, on a :

$$\text{Re}_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1 \quad (2.9)$$

Or, la relation (2.8) appliquée à l'échelle de Kolmogorov nous donne le taux de dissipation suivant :

$$\varepsilon_\eta = \frac{u_\eta^3}{\eta} \quad (2.10)$$

Par les deux expressions (2.9) et (2.10) on en déduit la vitesse caractéristique de ces tourbillons :

$$u_\eta \approx (\nu \varepsilon_\eta)^{1/4} \quad (2.11)$$

et par les équations (2.10) et (2.11) on en obtient l'échelle spatiale :

$$\eta \approx \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon_\eta} \right)^{1/4} \quad (2.12)$$

## 2.2.2 Relations fondamentales entre les échelles des tourbillons

Une fois défini l'ordre de grandeur de la vitesse et de la longueur caractéristiques à l'échelle de Kolmogorov, on peut introduire un temps caractéristique turbulent des échelles de Kolmogorov :

$$\tau_\eta = \frac{\eta}{u_\eta} = \left( \frac{\nu}{\varepsilon_\eta} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

De la même façon on définit un nombre de Reynolds pour l'écoulement moyen :

$$\text{Re}_L = \frac{L \bar{u}}{\nu} \gg 1 \quad (2.14)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique de l'écoulement (pour une chambre de combustion  $L$  coïncide avec son diamètre), qui coïncide aussi avec l'échelle spatiale des gros tourbillons. On peut également définir un temps caractéristique de l'écoulement, appelé temps convectif :

$$\tau_c = \frac{L}{\bar{u}} \quad (2.15)$$

Ce dernier représente le temps qu'un élément de fluide prend pour parcourir une distance d'ordre de grandeur de la longueur caractéristique  $L$ , transporté par une vitesse d'ordre de grandeur  $\bar{u}$ .

L'échelle globale, ou des gros tourbillons, et l'échelle de Kolmogorov sont ensuite reliées grâce à l'hypothèse de Kolmogorov qui suppose constant le taux de dissipation des tourbillons depuis la dissipation des grandes échelles (échelles intégrales  $L$ ) jusqu'aux plus petites (échelle de Kolmogorov  $\eta$ ) :

$$\varepsilon_L = \frac{\bar{u}^3}{L} = \varepsilon_\eta = \frac{u_\eta^3}{\eta} = \varepsilon \quad (2.16)$$

Il est intéressant maintenant d'exprimer la relation entre les échelles globales de l'écoulement et les échelles de Kolmogorov, en fonction du Reynolds de l'écoulement. Par la relation (2.14) on obtient la viscosité cinématique :

$$\nu = \frac{L\bar{u}}{\text{Re}_L} \quad (2.17)$$

Si on substitue les équations (2.16) et la (2.17) dans l'expression (2.12), on obtient la relation entre les longueurs intégrale et de Kolmogorov :

$$\frac{L}{\eta} = \text{Re}_L^{3/4} \quad (2.18)$$

De même, les expressions du taux de dissipation des tourbillons (relation (2.16)), et de la viscosité cinématique (relation (2.17)), dans l'équation (2.15) du temps convectif, nous permettent d'établir la relation entre les vitesses :

$$\frac{\bar{u}}{u_\eta} = \text{Re}_L^{1/4} \quad (2.19)$$

et par les deux dernières expressions (2.18) et (2.19), on obtient la relation entre les temps caractéristiques :

$$\frac{\tau_c}{\tau_\eta} = \text{Re}_L^{1/2} \quad (2.20)$$

### 2.2.3 Temps caractéristiques du mélange turbulent

Les relations trouvées dans le paragraphe précédent nous permettent de calculer facilement les temps caractéristiques du mélange turbulent à partir des données de l'écoulement moyen :

$$\tau_\eta = \frac{\bar{u}}{L} \cdot \text{Re}_L^{-1/2} \quad (2.21)$$

Pour calculer le nombre de Reynolds on a besoin de la densité et de la viscosité dynamique des gaz chauds dans la chambre de combustions. Pour cela, si on considère un mélange de  $N$  gaz parfaits, la pression totale est la somme des pressions partielles :

$$p = \sum_{i=1}^N p_i \quad \text{où} \quad p_i = \rho_i \frac{\mathfrak{R}}{M_i} T \quad (2.22)$$

où  $T$  est la température du mélange chaud (qu'on pose égale à la température d'équilibre dans la chambre de combustion, après la réaction chimique),  $\mathfrak{R} = 8.314 \text{ J/(mole K)}$  est la constante des gaz parfaits,  $\rho_i$  et  $M_i$  sont respectivement la densité et la masse molaire de l'espèce  $i$ . Dans notre approche simplifiée, appliquée au moteur Vulcain, les espèces prépondérantes présentes dans le mélange chaud sont l'oxygène, l'hydrogène et l'eau. Suivant le dossier fonctionnel du Vulcain [42], les fractions massiques sont calculées à 110 bar et à un rapport de mélange ( $RM$ ) de 5.91. Le code utilisé est COPPELIA (Calcul et Optimisation des Performances Energétiques des systèmes Liés à l'Autopropulsion), développé par l'ONERA (Bourasseau B. [43] et [44]). La masse molaire du mélange découle de l'utilisation de l'équation (2.22) et du fait que la masse volumique de l'espèce  $i$  ( $\rho_i$ ) est donnée par le produit de la masse volumique du gaz par la fraction massique de l'espèce considérée ( $\rho Y_i$ ) :

$$\frac{1}{M} = \sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{M_i} \quad (2.23)$$

Les résultats sont :

|                             |          |
|-----------------------------|----------|
| $Y_{H_2}$                   | 4,09E-02 |
| $Y_{H_2O}$                  | 8,99E-01 |
| $Y_{O_2}$                   | 6,18E-03 |
| T (K)                       | 3541.07  |
| M (kg/kmol)                 | 13.15    |
| $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | 5.31     |

Tableau 2-1 : Fractions massiques, masse molaire et masse volumique du mélange gazeux.

Afin de calculer les viscosités dynamiques, on suit les travaux de Habiballah M., et Dubois M. sur les instabilités de combustion du moteur Vulcain (Réf. [45]). On en déduit les expressions analytiques qui nous permettent de calculer la viscosité dynamique de l'oxygène, de l'hydrogène et de l'eau :

$$\mu_i = \frac{A_i T^{1.5}}{T + B_i} \quad \text{en } Kg/s/m \quad (2.24)$$

On obtient :

|           | A         | B      | $\mu_i$  |
|-----------|-----------|--------|----------|
| Hydrogène | 0.648 E-6 | 30.36  | 3.82E-05 |
| Oxygène   | 1.656 E-6 | 132.52 | 9.50E-05 |
| Eau       | 1.668 E-6 | 548.53 | 8.59E-05 |

Tableau 2-2 : Constantes pour calculer les viscosités dynamiques.

et pour le mélange :

$$\frac{1}{\mu_g} = \sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{\mu_i} \quad (2.25)$$

Soit :  $\mu_g = 8.27 \cdot 10^{-5} \text{ Pi}$ .

On calcule le Reynolds et donc le temps de mélange en fonction de différentes valeurs de la vitesse du débit gazeux. Les résultats sont présentés en Figure 2-7 :

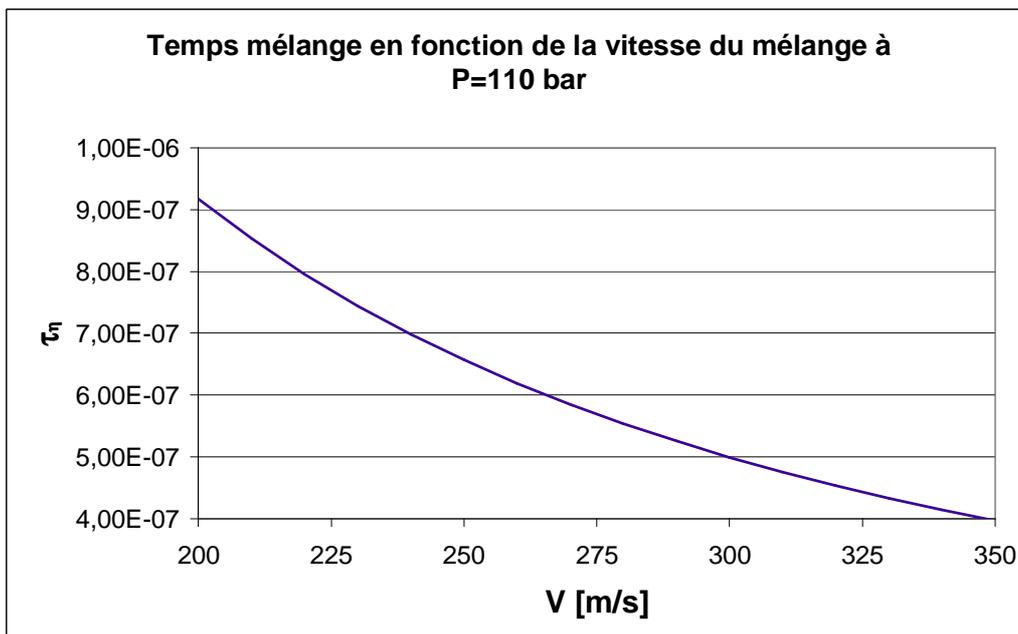


Figure 2-7 : Temps de mélange fonction de la vitesse du mélange gazeux.

Comme on pouvait s'y attendre, car le mélange est très rapide à cause de rendements de combustion très élevés dans les moteurs fusées, les temps de mélange sont beaucoup plus petits que les temps acoustiques des instabilités hybrides. Le phénomène de mélange n'est donc pas à prendre en compte dans la modélisation des instabilités hybrides.

Dans le prochain chapitre on passera en revue les temps caractéristiques liés à la vaporisation et aux réactions chimiques, qui, suivant la bibliographie, sont plus facilement impliqués dans le phénomène d'instabilité à haute fréquence. Pour cela, comme on a fait dans ce chapitre, on observera si leurs temps caractéristiques sont compris entre  $10^{-4}$  et  $10^{-2}$  secondes qui sont les bornes de temps associés aux instabilités considérées dans cette thèse.

# Chapitre 3

## 3 Temps caractéristiques liés à la nature thermo-physique de l'écoulement

Comme expliqué dans le chapitre 1, les instabilités à haute fréquence, et en particulier les instabilités hybrides, peuvent être influencées par les processus qui s'établissent dans la chambre de combustion, dès que les ergols sont injectés. On a examiné dans le chapitre précédent les temps caractéristiques liés à l'atomisation primaire, secondaire et au mélange.

On continue l'étude en focalisant notre attention sur deux processus qui peuvent guider le couplage entre la chambre de combustion et le système d'alimentation. Les deux processus sont la vaporisation et les réactions chimiques. Le premier étant soupçonné seulement dans certaines configurations d'opérativité du moteur, tandis que le deuxième est, selon la bibliographie, responsable du couplage (Sirignano W.A., Delplanque J.-P., Chiang C. H., et Bhatia R. [10]). Le moteur étudié est le Vulcain à des différentes valeurs de pression et de rapport de mélange.

### 3.1 Vaporisation et chauffage des gouttes

Dans un moteur *Lox / GH<sub>2</sub>* du type Vulcain, fonctionnant à une pression inférieure à la pression critique, la vaporisation des gouttes d'oxygène implique en même temps les processus de transfert de chaleur et de masse. La chaleur des gaz à haute température est transférée principalement par convection aux gouttes. A la surface de la goutte, une partie de la chaleur passe à l'intérieur, faisant croître la température interne de la goutte comme à sa surface. Le surplus de la chaleur transférée entretient le changement de phase à la surface et augmente la température des vapeurs qui s'éloignent (une partie de la masse des gouttes est perdue par vaporisation et diffusion dans le gaz environnant).

A cause de la convection, les taux de chauffage et de vaporisation des gouttes dépendent du nombre de Reynolds de la goutte basé sur la vitesse relative gaz-goutte, dont la valeur change pendant la vie de la goutte, car son diamètre et sa vitesse changent constamment.

Le taux de vaporisation dépend de la pression, de la température et des propriétés de transport du gaz, ainsi que de la température, de la volatilité et du diamètre des gouttes, dans le spray, et de la vitesse relative des gouttes par rapport au gaz. Après un certain temps, chaque goutte atteint son état stationnaire correspondant aux conditions prédominantes. Les gouttes plus larges prennent plus de temps que les petites pour arriver aux conditions d'équilibre, et leurs trajectoires sont différentes, car elles sont influencées considérablement par la force de traînée d'origine aérodynamique.

Au-dessous de la pression critique, les gouttes d'oxygène sont bien distinguables du gaz. La tension superficielle tient la goutte sphérique. Sirignano W.A. et al. [10], expliquent qu'à l'équilibre le temps de chauffage du liquide tend à être plus élevé que le temps de chauffage de la couche limite qui se forme sur la surface de la goutte. En particulier le temps de chauffage est plus long que celui de la vie d'une goutte. Dans un moteur fusée à ergols liquides, les périodes d'oscillation acoustique tendent à être du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de chauffage de la goutte, suggérant ainsi un couplage potentiel (la vaporisation et le chauffage des gouttes doivent être considérés comme un processus intégré).

La situation est plus compliquée au voisinage de la pression critique ou en condition supercritique (voir Lafon P. [46]). La tension superficielle devient très faible et la goutte perd sa forme sphérique. La densité du gaz augmente et la distinction entre les phases cesse : le temps de chauffage du gaz croît. Un couplage avec l'acoustique peut exister mais ce sujet est encore peu connu.

Différentes études ont été faites [19, 47-61] qui considèrent la vaporisation comme le processus qui conduit aux instabilités de combustion dans les moteurs fusées à ergols liquides. En général la vaporisation est le processus le plus lent dans un moteur fusée et il apparaît donc comme le contrôleur du processus global de combustion. Une réponse quasi-stationnaire de la vaporisation aux oscillations de la combustion ne peut pas être suffisante à produire la boucle qui conduit à l'instabilité, donc une réponse dynamique ou résonante est nécessaire.

### 3.1.1 Temps caractéristiques en régime sub-critique

Pour l'estimation du temps de vaporisation on peut baser le calcul en condition sub-critique sur les études de Lefebvre A.H. [62], et voir aussi le modèle de Ordonneau G. et Nicole A. [63] qui se base sur les études précédentes.

Suivant ces travaux, quand il existe un mouvement relatif entre une goutte et le gaz environnant, la vitesse de vaporisation augmente par rapport à une condition de repos de la goutte et donc par conséquent le temps de vie de la goutte diminue. D'une façon générale, le temps de vaporisation est donné en première approximation par :

$$\tau_e = \frac{d_0^2}{K_v} \quad (3.1)$$

où  $d_0$  est le diamètre initial des gouttes et  $K_v$  est la constante de vaporisation. En condition

de goutte immobile,  $K_{v_1} = \frac{8k_g}{\rho_l \cdot (c_p)_g} \ln \left( 1 + \frac{(c_p)_g}{L} \cdot (T_\infty - T_s) \right)$ . Lorsqu'elle est en mouvement, il

faut considérer la correction de Ranz-Marshall :

$$K_v = K_{v_1} \cdot (1 + 0.3 \cdot Pr^{1/3} \cdot Re_{d_0}^{1/2}) \quad (3.2)$$

En substituant l'expression de  $K_v$  dans (3.1), on obtient une expression pour évaluer le temps de vaporisation :

$$\tau_e = \frac{\rho_l d_0^2}{8 \cdot (k/c_p)_g \cdot \ln(1+B) \cdot (1 + 0.22 \cdot Re_{d_0}^{0.5})} \quad (3.3)$$

pour résoudre (3.3) on a besoin de  $\rho_l$ , masse volumique du liquide, de  $d_0$ , diamètre initial de la goutte, de  $k_g$ , la conductivité thermique moyenne du gaz, de  $(c_p)_g$ , la chaleur spécifique à pression constante du gaz, de  $B$ , le nombre de transfert de chaleur  $(B = (c_p)_g \cdot (T_\infty - T_s) / L_v)$  et du nombre de Reynolds de la goutte.

On considère un moteur type Vulcain en phase de démarrage, avec un rapport de mélange de 6.3 et une pression de chambre supérieure ou égale à la pression de vapeur de l'oxygène injecté à 94 K (c'est-à-dire de 1.4854 bar) et inférieure à la pression critique de l'oxygène qui correspond à 50.43 bar (au dessus de la quelle il n'y a pas de distinction entre

liquide et gaz). Dans ces conditions où la vaporisation est possible car il existe une phase liquide, le débit total est donné par l'expression suivante :

$$\dot{m}_T = \frac{P_{ch} \cdot A_{col}}{c^*} \quad (3.4)$$

Dans l'équation (3.4)  $c^*$  est la vitesse caractéristique, qu'on trouve en effectuant un calcul d'équilibre, à l'aide du code COPPELIA ([43], [44]) par exemple, en considérant de l'oxygène liquide à 94 K et de l'hydrogène gazeux à 100 K. Suivant la référence de Ordonneau G. [64], la surface de la section au col,  $A_{col}$ , vaut  $0.0654 \text{ m}^2$  correspondant à un diamètre de col de  $0.2886 \text{ m}$ . Les résultats, obtenus pour les valeurs de la pression dans la chambre  $P_{ch}$  de 10 bar, 20 bar et 40 bar, sont présentés dans le tableau suivant :

| P (bar) | $c^*$ (m/s) | $\dot{m}_T$ (kg/s) | $\dot{m}_{H_2}$ (kg/s) | $\dot{m}_{O_2}$ (kg/s) |
|---------|-------------|--------------------|------------------------|------------------------|
| 10      | 2254.52     | 23.99              | 3.29                   | 20.7                   |
| 20      | 2271.84     | 47.61              | 6.52                   | 41.09                  |
| 40      | 2288.03     | 114.36             | 15.67                  | 98.7                   |

Tableau 3-1 : Valeurs de la vitesse caractéristique et des débits à différentes pressions.

Comme  $\dot{m}_T$  est donné par la somme de  $\dot{m}_{H_2}$  et  $\dot{m}_{O_2}$  et le rapport de mélange ( $RM$ ) par le rapport  $\dot{m}_{O_2} / \dot{m}_{H_2}$  on a pu calculer le débit de chaque ergol :  $\dot{m}_{H_2} = \dot{m}_T / (1 + RM)$  et  $\dot{m}_{O_2} = \dot{m}_T \cdot RM / (1 + RM)$ . On remarque que les valeurs trouvées sont exploratoires car elles ne correspondent pas aux données réelles du transitoire de démarrage (en particulier le rapport de mélange).

Pour trouver la densité de l'hydrogène à l'injection on utilise l'équation des gaz parfaits :

$$\rho_{H_2} = \frac{P}{\frac{\mathfrak{R}}{M_{H_2}} \cdot T_{H_2}} \quad (3.5)$$

où  $\mathfrak{R}$  est la constante universelle des gaz et vaut  $8314 \text{ J/kmol/K}$  et  $M_{H_2}$  est la masse molaire de l'hydrogène (elle vaut  $2.02 \text{ kg/kmol}$ ) et  $T_{H_2}$  est sa température d'injection. Pour l'oxygène, comme il est injecté à l'état liquide, on a trouvé ses valeurs aux différentes conditions de calcul, en utilisant la loi d'état MBWR (Modified Benedict Webb Rubin) selon Woolley H.W. et Benedict W.S. [43]. Pour la masse molaire du gaz, on sait que :

$$Y_i = \frac{\rho_i}{\rho_g} = \frac{M_i \cdot n_i}{M_g \cdot n} = \frac{M_i}{M_g} \cdot X_i \quad (3.6)$$

où  $n_i$  est le nombre de moles de l'espèce  $i$  et  $Y_i$  et  $X_i$  sont respectivement ses fractions massique et molaire. La relation (3.6) étendue aux espèces présentes dans le gaz devient :

$$\sum Y_i = \sum \frac{M_i}{M_g} \cdot X_i = 1 \quad (3.7)$$

Par la relation (3.7) on peut calculer la masse molaire du gaz :

$$M_g = \sum M_i \cdot X_i \quad (3.8)$$

En utilisant les résultats de COPPELIA pour le calcul des fractions massiques, on a pour chaque pression de chambre et pour les masses volumiques des ergols à l'injection, les masses volumiques des gaz suivantes :

| P (bar) | $\rho_{H_2}$ (kg/m <sup>3</sup> ) | $\rho_{O_2}$ (kg/m <sup>3</sup> ) | $M_g$ (kg/kmol) | $\rho_g$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
|---------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 10      | 2.41                              | 1122.9                            | 13.49           | 0.49                          |
| 20      | 4.81                              | 1125.31                           | 13.61           | 0.96                          |
| 40      | 9.62                              | 1130                              | 13.73           | 1.89                          |

Tableau 3-2 : Valeurs de densité et masse molaire à différentes pressions.

Dans le Tableau 3-2, la masse volumique du gaz,  $\rho_g$ , est calculée par l'équation d'état des gaz parfaits adaptée au mélange gazeux (de masse molaire  $M_g$ ) présent dans la chambre à la température de combustion.

Pour l'évaluation du diamètre initial d'une goutte on utilise la formule du diamètre de Sauter (voir équation (2.6)), issue de nombreux essais réalisés par l'ONERA [38]. En même temps on prend en considération des bornes pour limiter les dimensions d'une goutte : un diamètre minimal de  $1 \mu m$  ( $d_{inf}$ ) et un diamètre maximal de  $200 \mu m$  ( $d_{sup}$ ). Pour les dimensions de l'injecteur, on considère les valeurs reportées dans la référence [65], c'est à dire :

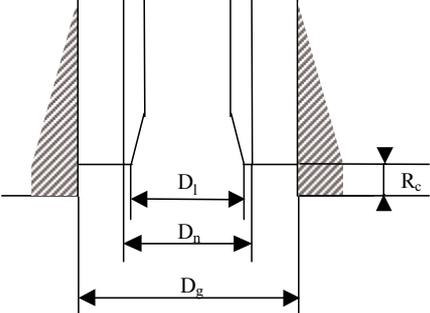
| Géométrie d'un injecteur coaxial   | Vulcain  |
|--|--|
|  <p>The diagram shows a cross-section of a coaxial injector. It features an inner needle and an outer sleeve. The inner diameter of the needle is labeled <math>D_l</math>. The inner diameter of the sleeve is labeled <math>D_n</math>. The diameter of the sleeve at its base is labeled <math>D_g</math>. The radius of the sleeve's tip is labeled <math>R_c</math>.</p> | <p><math>D_l</math> : 6.3 mm</p> <p><math>D_n</math> : 6.95 mm</p> <p><math>D_g</math> : 7.9 mm</p> <p><math>R_c</math> : 3 mm</p> <p>Nb. Injecteurs : 516</p> |

Figure 3-1 : Dimensions d'un injecteur du moteur Vulcain.

Dans l'expression (2.6) qui sert à évaluer le diamètre moyen de Sauter, la vitesse relative d'injection est donnée par la différence entre la vitesse d'injection de l'hydrogène et celle de l'oxygène :  $U_r^{inj} = (U_{H_2} - U_{O_2})$ . A ce propos, on examine les données de la chambre de combustion, de la référence ci-dessus :

|   |    |       |
|---|----|-------|
| Diamètre chambre de combustion en fond de chambre | m  | 415   |
| Diamètre au col                                   | mm | 262.4 |
| Longueur de la chambre de combustion              | m  | 425.8 |

Tableau 3-3 : Dimensions de la chambre du moteur Vulcain.

On utilise la conservation de la masse afin d'estimer les deux vitesses d'injection dont on a besoin :

$$\dot{m}_{O_2} = \rho_{O_2} \cdot U_{O_2} \cdot S_{O_2}^{inj} \quad (3.9)$$

$$\dot{m}_{H_2} = \rho_{H_2} \cdot U_{H_2} \cdot S_{H_2}^{inj} \quad (3.10)$$

Comme la masse volumique et le débit à l'injection dépendent de la pression dans la chambre, la vitesse à l'injection change avec la pression :

| P (bar) | $U_{H_2}$ (m/s) | $U_{O_2}$ (m/s) | $U_r^{inj}$ (m/s) | SMD (m)  |
|---------|-----------------|-----------------|-------------------|----------|
| 10      | 238.9           | 1.15            | 237.76            | 1,43E-04 |
| 20      | 237.09          | 2.27            | 234.82            | 1,45E-04 |
| 40      | 284.76          | 5.43            | 279.34            | 1,23E-04 |

Tableau 3-4 : Vitesses d'injection de l'O<sub>2</sub> et de l'H<sub>2</sub> à différentes pressions.

Dans notre cas on a fixé notre attention sur le moteur Vulcain, on peut donc exprimer le diamètre moyen de Sauter en fonction de la vitesse relative d'injection suivant l'interpolation de la courbe si dessous :

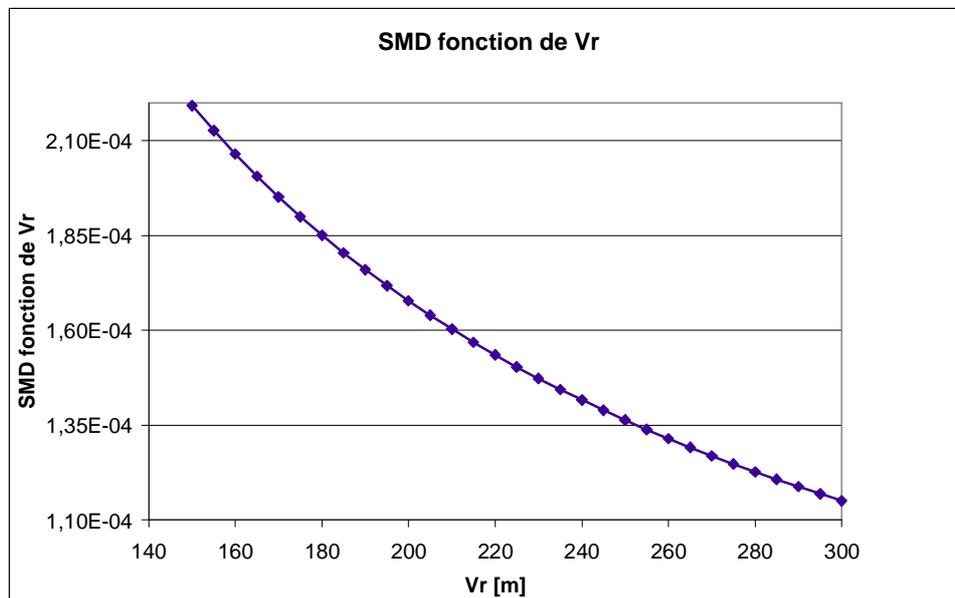


Tableau 3-5 : Diamètre de Sauter en fonction de la vitesse relative d'injection dans le moteur Vulcain.

La relation entre la vitesse relative d'injection et le diamètre moyen de Sauter est :

$$SMD = 0.0232 \cdot (U_r^{inj})^{-0.93} \quad (3.11)$$

L'évaluation du nombre de Reynolds de la goutte ( $Re = d_0 \cdot |u_{rel}| \cdot \rho_l / \mu$ ), qui apparaît dans l'équation (3.3), nécessite une estimation de la vitesse relative entre le gaz et la goutte ( $u_{rel}$ ) dans la chambre de combustion. L'ordre de grandeur de cette vitesse est calculé en considérant l'encadrement suivant :

$$\dot{m}_{H_2} \leq \dot{m}(x) \leq \dot{m}_g \Rightarrow \rho_{H_2} \cdot U_{H_2} \cdot A_{H_2}^{inj} \leq \rho_g \cdot u_g \cdot A_{ch} \leq \rho_g \cdot u_g^f \cdot A_{ch} \quad (3.12)$$

Cela nous permet de borner la vitesse du gaz dans une section quelconque de la chambre. A partir de cette relation on estime la vitesse du gaz près de l'injection ( $u_g^0$ ) par :

$$u_g^0 = \frac{\rho_{H_2} \cdot A_{H_2}^{inj}}{\rho_g \cdot A_{ch}} \cdot U_{H_2} \quad (3.13)$$

Pour évaluer la vitesse du gaz dans une section de la chambre en aval de la section d'injection, suffisamment loin afin de considérer qu'il n'y a que du mélange gazeux des produits de combustion, on utilise l'équation de conservation de la masse entre l'injection et la section considérée :

$$\rho_g \cdot u_g(x) \cdot A_{ch} = \rho_g \cdot u_g^f \cdot A_{ch} = \rho_{H_2} \cdot U_{H_2} \cdot A_{H_2}^{inj} + \rho_{O_2} \cdot U_{O_2} \cdot A_{O_2}^{inj} \quad (3.14)$$

C'est-à-dire :

$$u_g^f = \frac{\rho_{H_2} \cdot A_{H_2}^{inj}}{\rho_g \cdot A_{ch}} \cdot U_{H_2} + \frac{\rho_{O_2} \cdot A_{O_2}^{inj}}{\rho_g \cdot A_{ch}} \cdot U_{O_2} \quad (3.15)$$

Pour une estimation de l'ordre de grandeur de la vitesse des gouttes à proximité du dard liquide, on se réfère aux résultats du GDR [34] (dans la réalité la vitesse de la goutte augmente dans le temps, en suivant une trajectoire différente selon son diamètre initial) :

$$u_G \approx U_{H_2} \cdot \left( \frac{\rho_{H_2}}{\rho_{O_2}} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

La vitesse relative majorante entre le gaz est et les gouttes est :

$$u_{rel}^f = u_g^f - u_G \quad (3.17)$$

En même temps on peut définir une vitesse relative minorante :

$$u_{rel}^0 = u_g^0 - u_G \quad (3.18)$$

Les vitesses relatives trouvées sont montrées dans le tableau suivant :

| P (bar) | $u_g^0$ (m/s) | $u_g^f$ (m/s) | $u_G$ (m/s) | $u_{rel}^0$ (m/s) | $u_{rel}^f$ (m/s) |
|---------|---------------|---------------|-------------|-------------------|-------------------|
| 10      | 49.59         | 362           | 11.06       | 38.53             | 350.95            |
| 20      | 50.1          | 365.76        | 15.5        | 34.6              | 350.26            |
| 40      | 61.22         | 446.91        | 26.27       | 34.94             | 420.63            |

Tableau 3-6 : Vitesses relatives à différentes pressions.

Dans le tableau suivant on montre les valeurs du Reynolds calculées avec les deux vitesses relatives, et par les trois valeurs de diamètre de la goutte : diamètre inférieur ( $d_{inf}$ ), diamètre supérieur ( $d_{sup}$ ) et diamètre de Sauter ( $SMD$  ou bien  $d_{32}$ ).

| P (bar) | $Re_{d_{inf}}^0$ | $Re_{d_{sup}}^0$ | $Re_{d_{32}}^0$ | $Re_{d_{inf}}^f$ | $Re_{d_{sup}}^f$ | $Re_{d_{32}}^f$ |
|---------|------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|
| 10      | 0.22             | 43.04            | 30.74           | 1.96             | 391.96           | 279.95          |
| 20      | 0.38             | 75.19            | 54.33           | 3.81             | 761.11           | 549.55          |
| 40      | 0.74             | 148.03           | 91.01           | 8.91             | 1781.92          | 1095.58         |

Tableau 3-7 : Estimation du Reynolds par les deux définitions de vitesse relative et par différents diamètres de gouttes.

La conductivité thermique moyenne  $k$  et la chaleur spécifique à pression constante  $c_p$ , ainsi que la température à l'infini ( $T_\infty$ ), c'est-à-dire la température de la chambre de combustion ( $T_{ch}$ ), qui sont nécessaires à la résolution de l'équation (3.3), ont été obtenus par l'utilisation du code COPPELIA ([43], [44]). On a besoin également d'évaluer le nombre de transfert de chaleur ( $B$ ), et la température à la surface de la goutte d'oxygène ( $T_s$ ) ainsi que la

chaleur latente de vaporisation ( $L_v$ ). Pour cela on utilise la loi d'état MBWR (Modified Benedict Webb Rubin).

| P (bar) | k (J/(m.s)) | $(c_p)_g$<br>(J/(kg.K)) | $T_\infty$ (K) | $T_s$ (K) | L (J/kg)  | B        |
|---------|-------------|-------------------------|----------------|-----------|-----------|----------|
| 10      | 5.77E-01    | 1.34E+04                | 3312.01        | 119.62    | 174722.15 | 2.45E+02 |
| 20      | 5.87E-01    | 1.20E+04                | 3401.69        | 132.74    | 146825.62 | 2.66E+02 |
| 40      | 5.95E-01    | 1.07E+04                | 3490.88        | 148.67    | 88236.80  | 4.04E+02 |

Tableau 3-8 : Calcul du nombre de transfert de chaleur.

On montre par la suite les temps caractéristiques de vaporisation correspondant aux diamètres  $d_{inf}$ ,  $d_{sup}$  et  $d_{32}$  calculés aux deux vitesses relatives ( $u_{rel}^0$  et  $u_{rel}^f$ ) :

| P (bar) | $\tau_{e_{d_{inf}}}^0$ (s) | $\tau_{e_{d_{sup}}}^0$ (s) | $\tau_{e_{d_{32}}}^0$ (s) | $\tau_{e_{d_{inf}}}^f$ (s) | $\tau_{e_{d_{sup}}}^f$ (s) | $\tau_{e_{d_{32}}}^f$ (s) |
|---------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 10      | 5.37E-7                    | 9.68E-3                    | 5.44E-3                   | 4.52E-7                    | 4.42E-3                    | 2.58E-3                   |
| 20      | 4.52E-7                    | 7.06E-3                    | 4.09E-3                   | 3.59E-7                    | 2.90E-3                    | 1.74E-3                   |
| 40      | 3.54E-7                    | 4.58E-3                    | 2.05E-3                   | 2.54E-7                    | 1.64E-3                    | 7.69E-4                   |

Tableau 3-9 : Temps de vaporisation calculés selon l'équation (3.3).

L'analyse des résultats révèle des temps de vaporisation très sensibles aux dimensions des gouttelettes issues de l'atomisation, ainsi qu'à la différence des vitesses gaz/goutte avant la combustion. Les temps caractéristiques calculés sont très petits pour les gouttes d'un micron, mais sont dans la plage d'intérêt pour les autres cas : le diamètre de Sauter représente bien la valeur moyenne de cette distribution. Comme dans la réalité on a une distribution des diamètres de gouttes, avec des gros diamètres surtout à proximité de la plaque d'injection, on en déduit que l'onde acoustique se couple avec le processus de vaporisation à proximité de la sortie de l'injection. Dans le paragraphe suivant on va considérer l'évolution des vitesses du gaz et des gouttes après injection dans la chambre, afin de valider les résultats trouvés

concernant le couplage vaporisation et acoustique, dans une configuration qui représente mieux la réalité.

### 3.1.2 Prise en compte des profils de vitesse

On prendra en compte, dans ce qui suit, le fait que les vitesses de la phase gazeuse et des gouttelettes issues du processus d'atomisation, changent dans le temps le long des trajectoires de ces dernières dans la chambre de combustion. On utilisera les travaux de Ordonneau G. et Nicole A. [63] : leur modèle, développé pour étudier un écoulement constitué d'un brouillard de gouttelettes entouré d'un film de gaz, est appliqué ici dans les mêmes conditions de pression et température que celles utilisées dans le paragraphe précédent. La vitesse d'une goutte est liée à l'accélération par la loi de Newton :

$$\mathbf{F} = m \cdot \frac{d\mathbf{u}_l}{dt} \quad (3.19)$$

La force principale appliquée à la goutte est celle de la traînée, que l'on peut exprimer comme suit :

$$\mathbf{F}_t = \pi \frac{d^2}{4} C_D \cdot \rho_g \frac{(\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l|}{2} \quad (3.20)$$

Dans l'équation (3.20) le coefficient de traînée  $C_D$  dépend du nombre de Reynolds : la loi de dépendance est en général plutôt compliquée, surtout à grand nombre de Reynolds. Pour simplifier on utilisera la loi de Stokes pour une sphère rigide :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad \text{avec} \quad Re_d = d \cdot \frac{\rho_g |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l|}{\mu_g} \quad (3.21)$$

Cela nous conduit à exprimer l'équation (3.19) comme :

$$\frac{d\mathbf{u}_l}{dt} = \frac{1}{\tau_R} \left( \frac{d_0}{d} \right)^2 \cdot (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \quad (3.22)$$

Dans l'équation (3.22) on a considéré que le terme  $18\mu/(\rho_l \cdot d^2)$  est l'inverse du temps de relaxation cinétique ( $\tau_R$ ). Pour exprimer la vitesse du gaz, on introduit la fraction massique du liquide ( $Y_l$ ) et sa valeur initiale à l'injection ( $Y_l^0$ ). On sait que, d'une part :

$$\dot{m}_g = (1 - Y_l) \cdot \dot{m}_T \quad \text{et} \quad Y_l = \left( \frac{d}{d_0} \right)^3 \cdot Y_l^0 \quad (3.23)$$

et d'autre part, en appelant  $A_g$  la section occupée par le gaz à l'abscisse  $x$  :

$$\dot{m}_g = \rho_g A_g \mathbf{u}_g \quad (3.24)$$

En manipulant les équations (3.23) et (3.24), on peut exprimer la vitesse du gaz :

$$\mathbf{u}_g = \left( 1 - \left( \frac{d}{d_0} \right)^3 \cdot Y_l^0 \right) \cdot \frac{\dot{m}_T}{\rho_g \cdot A_g} = \left( 1 - \left( \frac{d}{d_0} \right)^3 \cdot Y_l^0 \right) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\dot{m}_T}{\rho_g \cdot A_{ch}} \quad (3.25)$$

Dans l'équation (3.25), la constante  $\dot{m}_T/(\rho_g \cdot A_{ch})$  correspond à la vitesse finale du gaz,  $\mathbf{u}_g^f$  et le facteur  $\alpha$  qui dépend de la position  $x$  dans la chambre ( $\alpha = A_g/A_{ch}$ ), peut être relié à la fraction massique du gaz ( $Y_g = 1 - Y_l$ ) par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1 - Y_g}{Y_g} \cdot \frac{\rho_g}{\rho_l} \cdot \chi} \quad (3.26)$$

Dans l'expression (3.26),  $\chi$  est le rapport entre la vitesse du gaz et la vitesse du liquide ( $\chi = \mathbf{u}_g/\mathbf{u}_l$ ). Par la combinaison des équations (3.25) et (3.26), on peut récrire la vitesse du gaz :

$$\mathbf{u}_g = \left( 1 - \left( 1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} \cdot \chi \right) \cdot Y_l \right) \cdot \mathbf{u}_g^f \quad (3.27)$$

On peut introduire une nouvelle variable :  $\hat{Y}_l = \left( 1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} \chi \right) \cdot Y_l$ , pour laquelle la relation

$\frac{\hat{Y}_l}{\hat{Y}_l^0} = \left( \frac{d}{d_0} \right)^3$  est toujours valable. L'équation (3.27) se simplifie :

$$\mathbf{u}_g = \left( 1 - \left( \frac{d}{d_0} \right)^3 \hat{Y}_l^0 \right) \cdot \mathbf{u}_g^f \quad (3.28)$$

L'équation (3.22) qui nous permet de calculer la vitesse de la goutte, peut être réécrite en introduisant le temps de relaxation cinétique et l'équation (3.28) :

$$\frac{d\mathbf{u}_l}{dt} = \frac{1}{\tau_R} \left( \frac{d_0}{d} \right)^2 \cdot \left( \left( 1 - \left( \frac{d}{d_0} \right)^3 \cdot \hat{Y}_l^0 \right) \cdot \mathbf{u}_g^f - \mathbf{u}_l \right) \quad (3.29)$$

On suppose que l'évolution du diamètre des gouttes est donnée par la loi du  $d^2$  :

$$\left( \frac{d}{d_0} \right)^2 = 1 - \frac{t}{\tau_e} \quad (3.30)$$

avec  $\tau_e$  donné par la relation (3.1). L'équation différentielle (3.29) devient :

$$\left( 1 - \frac{1}{\tau_e} \right) \cdot \frac{d\mathbf{u}_l}{dt} = \frac{1}{\tau_R} \cdot \left( \left( 1 - \left( 1 - \frac{t}{\tau_e} \right)^{3/2} \right) \cdot \hat{Y}_l^0 \right) \cdot \mathbf{u}_g^f - \mathbf{u}_l \quad (3.31)$$

Dans l'expression (3.31)  $\tau_e$  dépend du Reynolds et donc de la solution recherchée ( $\mathbf{u}_l$ ) : pour simplifier le problème nous ferons l'hypothèse qu'il dépend d'un Reynolds moyen.

En posant  $\beta = 1 - \frac{t}{\tau_e}$ ,  $\hat{\tau} = \frac{\tau_e}{\tau_R} = \frac{18\mu}{\rho_l K_v}$  et  $dt = -\tau_e \cdot d\beta$ , la solution de (3.31) est :

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_l^0 \cdot \beta^{\hat{\tau}} + \mathbf{u}_g^f \cdot \left( 1 + \frac{\hat{\tau}}{\frac{3}{2} - \hat{\tau}} \beta^{3/2} \cdot \hat{Y}_l^0 - \left( 1 + \frac{\hat{\tau}}{\frac{3}{2} - \hat{\tau}} \cdot \hat{Y}_l^0 \right) \cdot \beta^{\hat{\tau}} \right) \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{u}_l^0$  est la vitesse initiale des gouttes. Par l'équation (3.30) et la relation entre  $\beta$  et le temps de vaporisation  $\tau_e$ , (3.28) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{u}_g = \left( 1 - \beta^{3/2} \cdot \hat{Y}_l^0 \right) \cdot \mathbf{u}_g^f \quad (3.33)$$

Par l'équation (3.33) on obtient en particulier, pour une valeur unitaire de  $\beta$ , la relation :

$$\hat{Y}_l^0 = 1 - \frac{\mathbf{u}_g^0}{\mathbf{u}_g^f} \quad (3.34)$$

La valeur de la vitesse initiale du gaz, est obtenue par l'équation (3.13), ensuite comme la valeur de la variable  $\hat{Y}_l^0$ , donnée par l'équation (3.34), est aussi donnée par la relation  $\hat{Y}_l^0 = \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} \chi\right) \cdot Y_l^0$ , si on ajoute des petites incréments à la vitesse initiale du gaz, avec quelques itérations on obtient la valeur de vitesse qui nous permet d'obtenir la même valeur de  $\hat{Y}_l^0$ .

| P (bar) | $(\mathbf{u}_g^0)_0$ (m/s) | $(\mathbf{u}_g^0)_f$ (m/s) | $\hat{Y}_l^0$ |
|---------|----------------------------|----------------------------|---------------|
| 10      | 49.59                      | 50.21                      | 0.8613        |
| 20      | 50.1                       | 50.99                      | 0.8605        |
| 40      | 61.22                      | 62.76                      | 0.8595        |

Tableau 3-10 : Vitesses initiales du gaz et  $\hat{Y}_l^0$  après itérations.

On va définir par la suite la valeur du nombre de Reynolds moyen. Par la définition de la variable  $\beta$ , on a :

$$\text{Re}_d = \frac{d \cdot |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l|}{\nu_g} = \frac{d_0}{\nu_g} |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l| \cdot \beta^{1/2} \quad (3.35)$$

En substituant dans l'équation (3.35) les expressions (3.32) et (3.33) :

$$\text{Re}_d = \frac{d_0}{\nu_g} \cdot \left| \left( \left( 1 + \frac{\hat{\tau}}{2} \hat{Y}_l^0 \right) \cdot \mathbf{u}_g^f - \mathbf{u}_l^0 \right) \cdot \beta^{\hat{\tau}+1/2} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - \hat{\tau}} \hat{Y}_l^0 \cdot \mathbf{u}_g^f \cdot \beta^2 \right| \quad (3.36)$$

La valeur moyenne du Reynolds au cours de la vie d'une goutte est :

$$\overline{\text{Re}_d} = \frac{1}{\tau_e} \int_0^{\tau_e} \text{Re} \cdot dt \quad (3.37)$$

Soit :

$$\overline{\text{Re}}_d = \frac{d_0}{\nu} \cdot \frac{1}{\hat{\tau} + \frac{3}{2}} \left| \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \hat{Y}_l^0 \right) \cdot \mathbf{u}_g^f - \mathbf{u}_l^0 \right| \quad (3.38)$$

Dans notre approche monodimensionnelle, les vecteurs vitesses sont en direction de l'axe de symétrie de la chambre de combustion. Dans l'équation (3.38)  $\hat{\tau}$  est fonction de la constante de vaporisation (voir l'équation (3.2)) et donc du Reynolds. On obtient la convergence du Reynolds moyen en quelques itérations :

| P (bar) | $\overline{\text{Re}}_d(d_0 = 1\mu\text{m})$ | $\overline{\text{Re}}_d(d_0 = 200\mu\text{m})$ | $\overline{\text{Re}}_d(\text{SMD})$ |
|---------|--|--|--------------------------------------|
| 10      | 0.68   | 135.15   | 96.53                                |
| 20      | 1.32   | 264.46   | 191.09                               |
| 40      | 3.10   | 620.97   | 381.79                               |

Tableau 3-11 : Reynolds moyens aux différentes pressions.

Les temps caractéristiques sont calculés par la relation (3.1), qui dépendent de la définition du diamètre utilisé dans le Reynolds moyen  $\tau_e = f(\overline{\text{Re}}(d_0))$  :

| P (bar) | $\tau_e(d_0 = 1\mu\text{m})$ (s) | $\tau_e(d_0 = 200\mu\text{m})$ (s) | $\tau_e(\text{SMD})$ (s) |
|---------|----------------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| 10      | 2.28E-07                         | 2.82E-03                           | 1.62E-03                 |
| 20      | 2.07E-07                         | 2.11E-03                           | 1.25E-03                 |
| 40      | 1.71E-07                         | 1.36E-03                           | 6.30E-04                 |

Tableau 3-12 Temps caractéristiques de vaporisation à différentes pressions.

Les temps trouvés sont du même ordre de grandeur que ceux estimés dans le Tableau 3-8 du paragraphe précédent, ce qui valide les résultats trouvés. Si l'on considère les résultats correspondants au diamètre moyen de Sauter, les temps caractéristiques de vaporisation sont compris entre  $1 \cdot 10^{-2}$  et  $1 \cdot 10^{-4}$  secondes (ou bien des fréquences entre 100 et 10000 Hz), ce qui

nous confirme un possible couplage entre la propagation de l'onde acoustique des instabilités hybrides dans la chambre de combustion et la vaporisation.

Il est intéressant maintenant de montrer les évolutions des vitesses du gaz et des gouttes dès le début de la vaporisation. Comme il apparaît dans la Figure 3-2, les gouttes sont entraînées par le gaz dans la chambre et plus elles sont petites, plus leur vitesse se rapproche vite de celle du gaz. Dans la partie finale des courbes représentant la vitesse des gouttes il y a comme une discontinuité : la vitesse des gouttes rejoint très rapidement la vitesse finale du gaz. Ce phénomène, accentué par un effet de dilatation d'échelle, peut s'expliquer en considérant le fait que chaque goutte est accélérée par la loi de Newton, et comme la masse de la goutte tend vers zéro en fin de vaporisation, alors son accélération tend à être très grande.

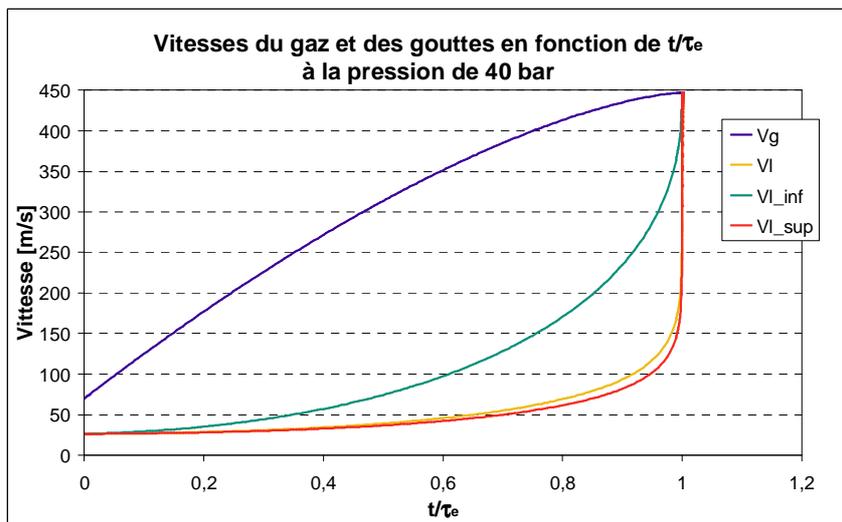
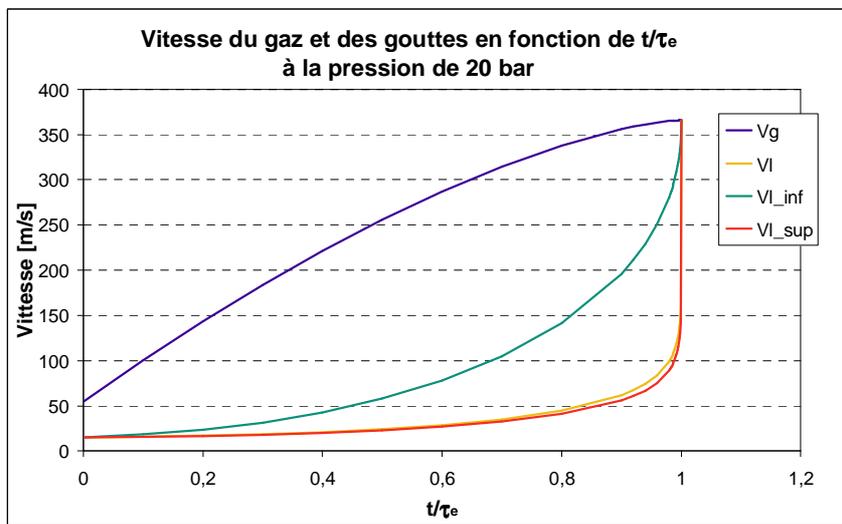
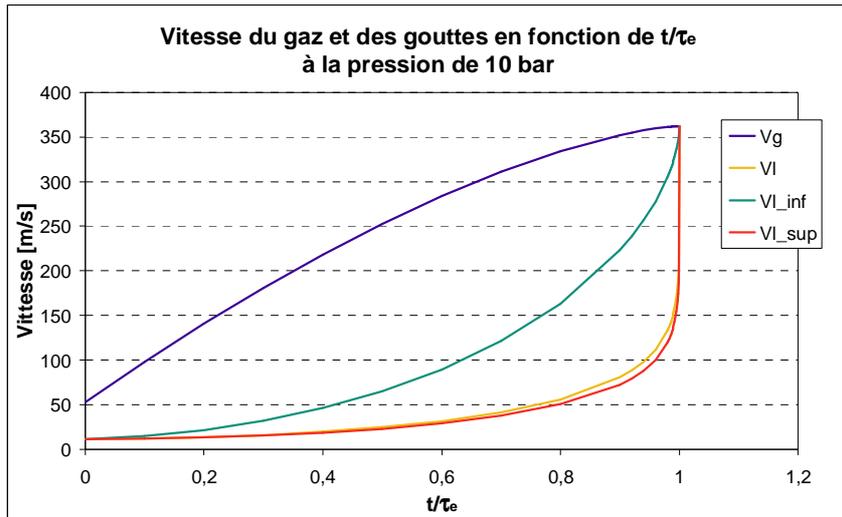


Figure 3-2 : Vitesse du gaz ( $V_g$ ) et vitesse des gouttes ( $V_l = V_l(d_0 = SMD)$  ;  $V_{l\_inf} = V_l(d_0 = 1 \mu m)$  ;  $V_{l\_sup} = V_l(d_0 = 200 \mu m)$ ) en phase de vaporisation.

On peut aussi représenter la vitesse en fonction de la distance du plan d'injection qui correspond au début de la vaporisation dans la chambre de combustion. Pour cela on sait que

$$\frac{dx}{dt} = u_G, \text{ et } dt = -\tau_e \cdot d\beta, \text{ c'est à dire :}$$

$$dx = -u_G \cdot \tau_e \cdot d\beta \quad (3.39)$$

En faisant l'intégration :

$$\int_0^x dx = -\int_1^\beta u_G \cdot \tau_e \cdot d\beta = \tau_e \int_\beta^1 u_G \cdot d\beta \quad (3.40)$$

la solution de l'équation (3.40) est :

$$x = \left[ \begin{array}{l} \frac{u_l^0}{\hat{\tau} + 1} \cdot (1 - \beta^{\hat{\tau} + 1}) + u_g^f \cdot (1 - \beta) + \frac{2}{5} \cdot \frac{\hat{\tau}}{\frac{3}{2} - \hat{\tau}} \cdot \hat{Y}_l^0 \cdot \left(1 - \beta^{\frac{5}{2}}\right) \cdot u_g^f \\ - \left(1 + \frac{\hat{\tau}}{\frac{3}{2} - \hat{\tau}} \cdot \hat{Y}_l^0\right) \cdot \frac{u_g^f}{\hat{\tau} + 1} \cdot (1 - \beta^{\hat{\tau} + 1}) \end{array} \right] \quad (3.41)$$

On peut adimensionaliser l'abscisse  $x$  par la longueur de vaporisation  $L_e$  définie comme suit :

$$L_e = \int_0^{\tau_e} u_G \cdot dt \quad (3.42)$$

Substituant l'équation (3.32) dans l'intégrale (3.42), on obtient la longueur de vaporisation en fonction du temps de vaporisation :

$$L_e = \left[ \frac{u_G^0}{1 + \hat{\tau}} + u_g^f \cdot \frac{\hat{\tau}}{1 + \hat{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \hat{Y}_l^0\right) \right] \cdot \tau_e \quad (3.43)$$

On peut utiliser ce résultat pour exprimer la vitesse des gouttes et du gaz en fonction de la longueur de vaporisation, comme il est présenté dans la figure suivante :

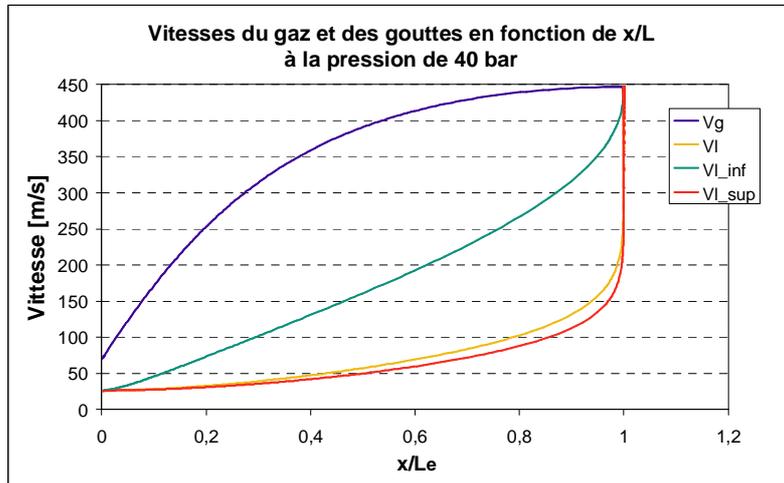
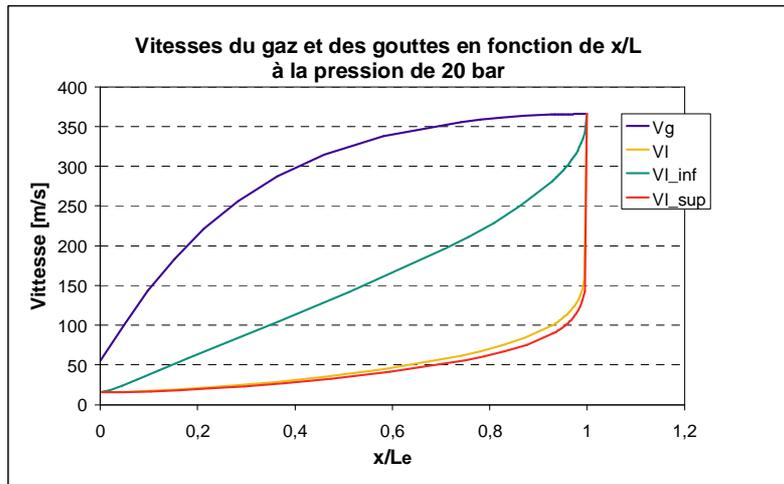
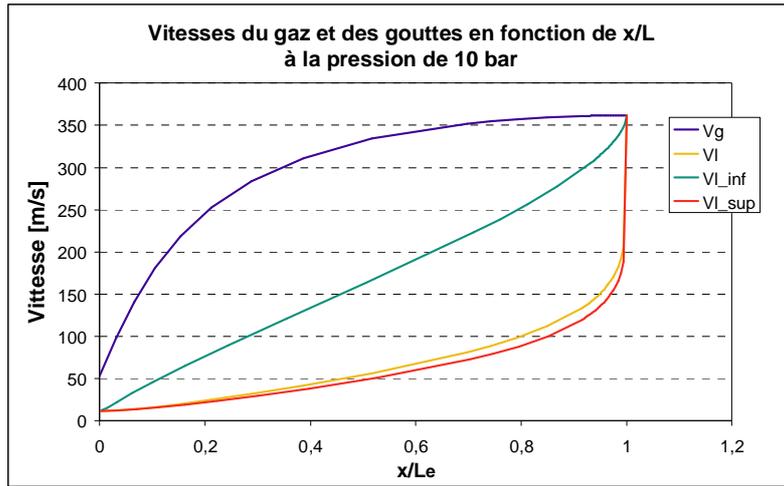


Figure 3-3 : Vitesse du gaz ( $V_g$ ) et vitesse des gouttes ( $V_d = V_d(d_0 = SMD)$  ;  $V_{d\_inf} = V_d(d_0 = 1 \mu m)$  ;  $V_{d\_sup} = V_d(d_0 = 200 \mu m)$ ) en phase de vaporisation, en fonction de la distance.

Par la suite on voit l'influence de la vaporisation sur la vitesse de la goutte qui vaporise. Il est intéressant de noter que si la vaporisation est forte,  $\hat{\tau} \ll 1$  dans les expressions (3.32) et (3.43), la vitesse de la goutte et la longueur de vaporisation sont données en première approximation par la vitesse initiale de la goutte. Au contraire, quand la vaporisation est faible,  $\hat{\tau} \gg 1$ , la vitesse de la goutte et la longueur diphasique sont données en première approximation par la vitesse finale du gaz, pondérée par la fraction massique initiale des gouttes.

En considérant par exemple le cas à 40 bar, on voit que pour  $\hat{\tau}$  petite, la courbe reste presque constante jusqu'à la fin de la vaporisation lorsque l'accélération de la goutte tend à être infinie. Pour  $\hat{\tau}$  grande, la courbe de la vitesse de la goutte change de concavité et se rapproche à la courbe de vitesse du gaz.

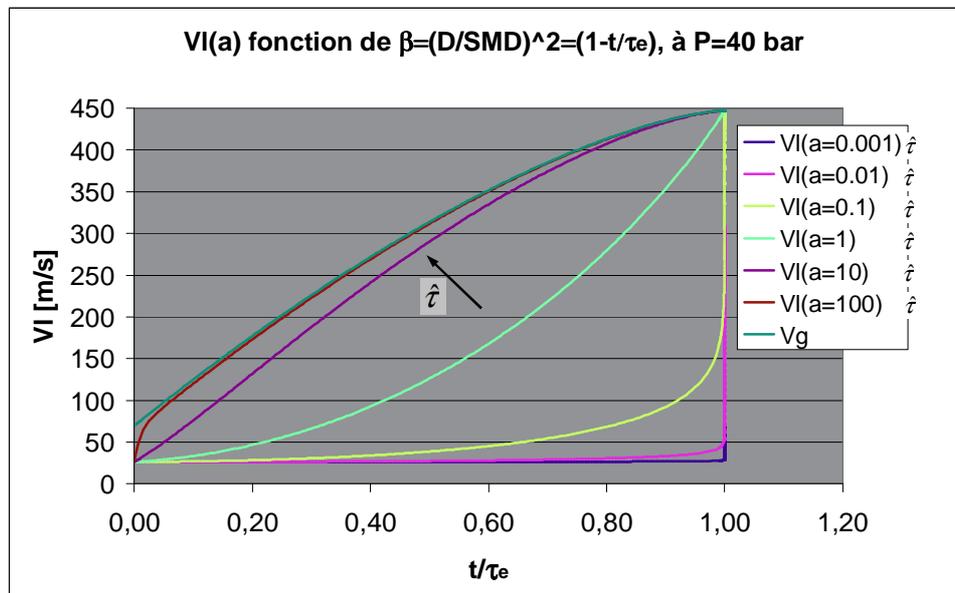


Figure 3-4 : Comportement de  $V_I$  par rapport à variation de  $a:\tau_e/\tau_R$ .

On montre aussi l'influence du paramètre  $\hat{\tau}$  sur la longueur de vaporisation :

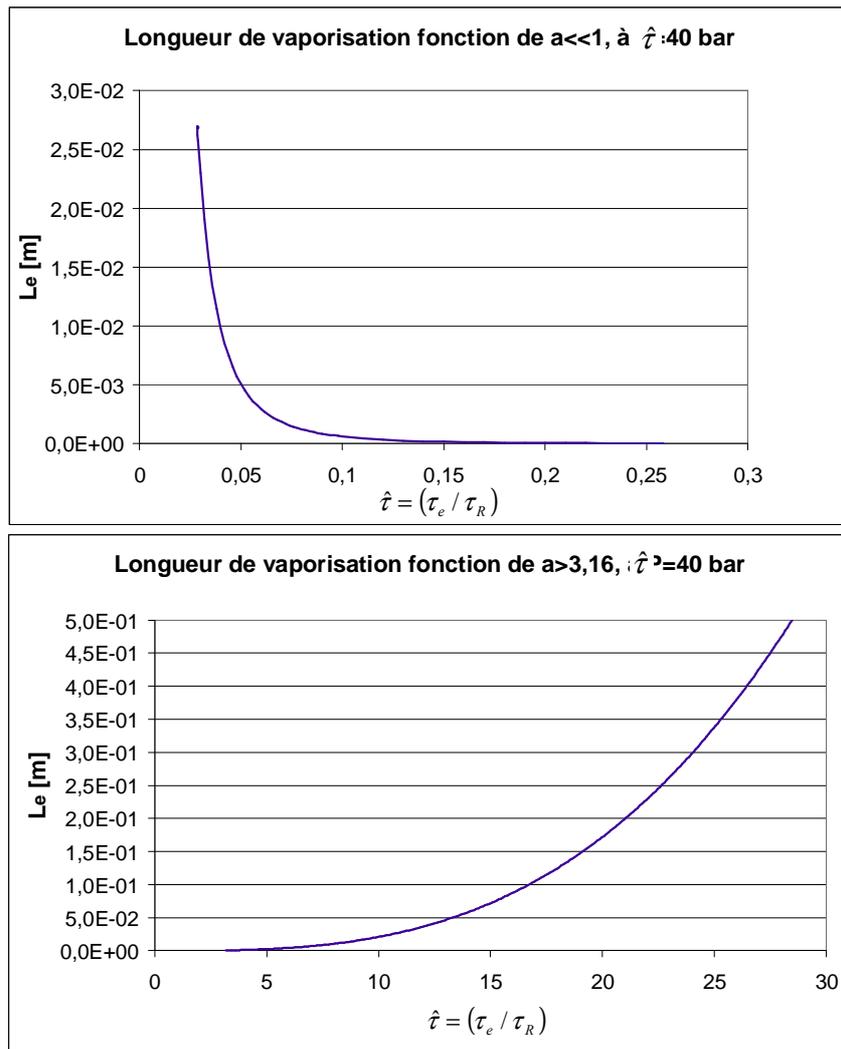


Figure 3-5 : Longueur de vaporisation en fonction de  $\hat{\tau}$ .

On remarque que si la vitesse de goutte est petite ( $\hat{\tau} \ll 1$ ) c'est aussi parce que celle-ci vaporise avant d'avoir eu le temps de se déplacer. Cela donne donc des petite valeurs de la longueur de vaporisation,  $L_e$ . Comme on a utilisé des bornes pour les valeurs du diamètre des gouttes : le diamètre inférieur ( $d_{inf}$ ) et le diamètre supérieur ( $d_{sup}$ ) sont respectivement de  $1 \mu m$  et de  $200 \mu m$ , c'est-à-dire qu'on a aussi borné  $\hat{\tau}$  (voir Figure 3-6) :

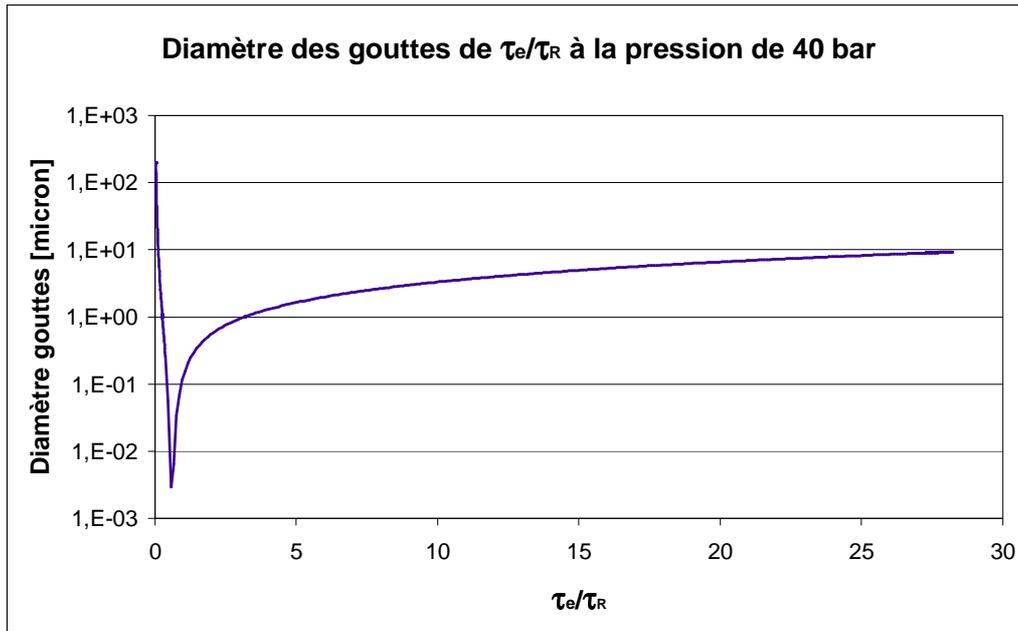


Figure 3-6 : Diamètre goutte en fonction de  $\hat{\tau}$ .

Les valeurs qu'on peut accepter sont données par  $0.0284 \leq \hat{\tau} \leq 0.2579$  et  $3.1760 \leq \hat{\tau} \leq 26.9890$ . La limite supérieure de 26.9890 n'est pas donnée par le diamètre de la goutte mais par la longueur de la chambre de combustion du moteur Vulcain ( $L_{ch} : 425.8 \text{ mm}$ ) : sous l'hypothèse que la goutte vaporise avant d'être éjectée par la tuyère. Le lien de  $\hat{\tau}$  envers le diamètre de la goutte est montré par :

$$\hat{\tau} = \frac{\tau_e}{\tau_R} = \frac{d_0^2}{K_v} \cdot \frac{18\mu}{\rho_l d_0^2} = \frac{18\mu}{K_v \rho_l} \quad (3.44)$$

Dans l'équation (3.44) la constante de vaporisation,  $K_v$ , dépend du Reynolds de la goutte selon l'équation (3.2) et donc du diamètre de la goutte. Les limites en  $\hat{\tau}$  nous permettent d'évaluer les valeurs de  $L_e$  :  $1.48E-5 \text{ m} \leq L_e \leq 2.70E-2 \text{ m}$  correspondant à la première plage de valeurs possibles de  $\hat{\tau}$ , et  $5.17E-4 \text{ m} \leq L_e \leq 0.4258 \text{ m}$  correspondant à la seconde plage.

## 3.2 Calcul des temps caractéristiques de la chimie

### 3.2.1 Méthode des valeurs propres

Pour le calcul de temps chimiques, revenons sur les notions de base d'un système dynamique. Tout système dynamique peut être représenté par un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.45)$$

où  $\mathbf{x}$  représente le vecteur d'état du système au temps  $t$  et  $\mathbf{x}_0$  est l'état au temps initiale (par exemple les fractions molaire des ergols à l'injection d'un moteur). Si la fonction  $\mathbf{f}$  ne dépend pas du temps le système est dit autonome. Effectuons maintenant une analyse linéaire du système au voisinage de l'état d'équilibre  $\bar{\mathbf{x}}$  ( $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}'$ , avec  $\mathbf{x}' \ll \bar{\mathbf{x}}$ ).

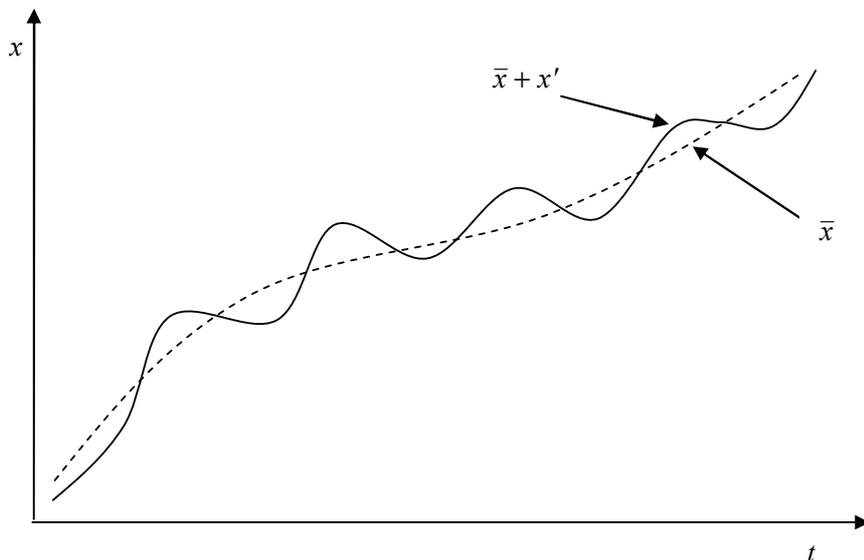


Figure -3-7 : Evolution temporelle de l'état à l'équilibre et perturbé.

Le système linéarisé s'écrit :

$$\frac{d(\bar{x} + \mathbf{x}')}{dt} = \mathbf{f}(\bar{x} + \mathbf{x}') \Rightarrow \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{J}_0 \mathbf{x}' + o(\mathbf{x}'^2) \quad (3.46)$$

où  $\bar{\mathbf{f}} \equiv \mathbf{f}(\bar{x})$ , et la matrice jacobienne du système  $\mathbf{J}_0 \equiv (\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\bar{x}} \equiv \mathbf{J}(\bar{x})$ . Or, sachant que  $d\bar{x}/dt = \bar{\mathbf{f}}$ , on peut récrire l'équation matricielle (3.46) :

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{J}_0 \mathbf{x}' + o(\mathbf{x}'^2) \quad (3.47)$$

Supposons pour simplifier l'exposé que  $\mathbf{J}_0$  soit diagonalisable et soit  $\mathbf{A}_0$  la matrice diagonale formée par les  $n$  valeurs propres  $\lambda_k$  de  $\mathbf{J}_0$ . Soit aussi  $\mathbf{S}_0$  la matrice dont les vecteurs colonnes  $\mathbf{s}_k$  sont les vecteurs propres à droite de  $\mathbf{J}_0$ , alors :  $\mathbf{J}_0 \mathbf{s}_k = \lambda_k \mathbf{s}_k$ . On a alors :  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{J}_0 \mathbf{S}_0$  et dans la nouvelle base de vecteurs propres  $\mathbf{s}_k$  l'équation devient :

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}}' \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{x}}'(t=0) = \hat{\mathbf{x}}'_0 \quad (3.48)$$

dans l'équation (3.48)  $\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{x}'$  représente le vecteur  $\mathbf{x}'$  exprimé dans la nouvelle base. Les équations étant découplées, la solution est facilement obtenue :

$$\hat{x}'_k = \hat{x}'_{0_k} \cdot e^{\lambda_k t} \quad k: 1, 2, \dots, n \quad (3.49)$$

Ce résultat montre que les valeurs propres  $\lambda_k$  donnent une estimation temporelle sur l'évolution de la réponse du système suivant la direction  $\mathbf{s}_k$ , lorsqu'il est perturbé selon cette direction à partir de l'état  $\mathbf{x}_0$ . Il y a trois cas principaux : la partie réelle de la valeur propre,  $\text{Re}(\lambda_k)$ , est positive, implique que les perturbations sont amplifiées ; la partie réelle de la valeur propre est nulle, alors l'amplitude des perturbations reste constante ; la partie réelle de la valeur propre est négative, les perturbations sont amorties avec un temps caractéristique de réponse de  $\tau_k \approx 1/|\text{Re}(\lambda_k)|$ . Si la valeur propre est complexe, le mouvement s'accompagne d'oscillations de fréquence qui vaut approximativement la partie imaginaire de la valeur propre,  $\omega_k \approx |\text{Im}(\lambda_k)|$ .

### 3.2.2 Application à la chimie du couple d'ergols L O<sub>2</sub>/G H<sub>2</sub>

Une relation stœchiométrique décrivant une réaction chimique élémentaire se met en général sous la forme :

$$\sum_{j=1}^n \nu'_j A_j = \sum_{j=1}^n \nu''_j A_j \quad (3.50)$$

l'espèce  $A_j$  pouvant figurer dans les deux membres de la réaction avec des coefficients  $\nu'_j$  et  $\nu''_j$  différents. Dans une réaction le taux de production molaire de l'espèce  $i$  est donné par :

$$\frac{dC_i}{dt} = (\nu''_i - \nu'_i) \cdot (K_D \prod_j C_j^{\nu'_j} - K_I \prod_j C_j^{\nu''_j}) = a_i (\dot{w}_d - \dot{w}_r) \quad (3.51)$$

Dans l'expression du taux de production molaire :  $C_i$  est la concentration molaire de l'espèce  $A_i$ ;  $K_D$  et  $K_I$  sont les vitesses spécifiques de réaction dans le sens direct et dans le sens retour ;  $a_i$  est liée aux coefficients de la réaction ( $a_i = \nu''_i - \nu'_i$ ),  $\dot{w}_D$  est le taux de production direct et  $\dot{w}_I$  le taux de production inverse. Dans un système multi-réactif, le taux de production de l'espèce  $i$  s'obtient en sommant le résultat précédent à  $R$  réactions repérées par l'indice  $r$  :

$$\frac{dC_i}{dt} = \sum_{r=1}^R a_{ir} (K_D^r \prod_j C_j^{\nu'_{jr}} - K_I^r \prod_j C_j^{\nu''_{jr}}) = a_{ir} (\dot{w}_D^r - \dot{w}_I^r) \quad (3.52)$$

En considérant l'équation (3.52) pour le  $n$  espèces, on obtient un système d'équations de la forme (3.45) et qu'on peut linéariser et étudier afin de trouver les temps chimiques d'un système réactionnel.

Avant de considérer le cas spécifique de la réaction de l'oxygène avec l'hydrogène, on introduit du point de vue théorique la méthode de réduction d'un mécanisme réactionnel, présenté par Mass U., et Pope S. B. [66] (pour plus détails sur modèle le lecteur se reportera l'article). Le modèle mathématique pour un système de réactions chimiques pour la phase gazeuse, consiste en un ensemble d'équations différentielles, les équations de conservation, qui décrivent la dépendance temporelle de toutes les propriétés qui déterminent l'état du système. Le développement de la méthode est réalisé pour un système en évolution isobare, adiabatique et spatialement homogène. Dans ce cas les équations qui décrivent l'évolution temporelle des propriétés, sont l'équation (3.52) associées aux équations caractérisant la constance de la pression  $p$  et de l'enthalpie spécifique  $h$  (c'est-à-dire  $\partial p / \partial t = 0$  et

$\partial h / \partial t = 0$ ). Donc à l'instant  $t$ , le système est complètement déterminé par ses  $(n + 2)$  variables d'état, sachant que  $n$  est le nombre d'espèces dans le système réactif et les deux autres variables sont la pression et l'enthalpie. La solution de ce système d'équations donne la trajectoire du système dans l'espace des états,  $\Sigma$ , de dimension  $(n + 2)$ . Comme dans l'étude  $h$  et  $p$  sont fixés dans le temps, il est suffisant de considérer l'espace des espèces  $\mathbf{C}$ , de dimension  $n$ . Tous les points de  $\mathbf{C}$ , ne sont pas réalisables : la région possible est donnée par les conditions sur les fractions molaires :  $0 \leq V_{mol} C_i \leq 1$  (domaine de validité des concentrations) ; et  $\sum_{i=1}^n V_{mol} C_i = \sum_{i=1}^n X_i = 1$  (normalisation sur les fractions molaires). La normalisation comporte une restriction des solutions à un sous-espace linéaire  $\mathbf{M}$ , de dimension  $(n - 1)$ . Le domaine de validité des concentrations ( $0 \leq V_{mol} C_i \leq 1$ ) crée un sous-ensemble de  $\mathbf{C}$  normé,  $\mathbf{S}_C$ , et donc cette condition plus la normalisation, confinent les compositions réalisables à l'intersection de  $\mathbf{S}_C$  et  $\mathbf{M}$ , qui est de dimension  $(n - 1)$ . A ce stade, les hypothèses d'équilibre partiel et d'état stationnaire sont utilisées pour obtenir des schémas réduits. Ces hypothèses conduisent à des espaces de dimension plus basse pour ce qui concerne la composition. L'hypothèse d'équilibre partiel dans le domaine de la chimie ou de la combustion consiste à supposer un équilibre entre les vitesses de réaction dans les sens direct et inverse de certaines réactions réversibles très rapides. On parle alors de réactions à l'équilibre partiel (EP). Soit  $n_{EP}$  le nombre de réactions supposées à l'équilibre partiel, les  $n_{EP}$  relations d'équilibre *vitesse dans le sens direct = vitesse dans le sens inverse* permettent d'éliminer  $n_{EP}$  espèces du schéma cinétique initial, et obtenir ainsi un schéma réduit de dimension  $(n - n_{EP})$ . L'autre hypothèse classique d'état quasi-stationnaire (EQS), consiste à supposer un équilibre entre les taux de production et de consommation de certaines espèces intermédiaires très réactives. Soit  $n_{EQS}$  le nombre d'espèces supposées à l'état quasi-stationnaire, les  $n_{EQS}$  relations d'équilibre *production = consommation* permettent d'éliminer les espèces quasi-stationnaires du schéma cinétique initial, et d'obtenir ainsi un schéma réduit de dimension  $(n - n_{EQS})$ . Le désavantage d'utiliser l'EP et l'EQS, c'est que ces derniers sont imposés explicitement : cas par cas, il faut comprendre les systèmes de réactions chimiques, pour développer le mécanisme de réduction. Selon la nature du processus de réaction, de la composition du mélange, de l'intervalle de température, etc..., différentes hypothèses d'EP et d'EQS doivent être spécifiées.

Dans notre application on étudie la combustion de l'hydrogène et de l'oxygène, et comme première approche on utilise la cinétique de Rogers R. C., et Chinitz W. [67] qui

présente un schéma cinétique réduit à deux réactions chimiques et à quatre espèces ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2O$  et le radical  $OH$ ). Cette cinétique, moins compliquée de celle d'un schéma détaillé, reproduit bien le profil de température pendant la combustion dans un réacteur parfaitement mélangé et en même temps couvre une large plage de température initiale (1000-2000 K), ce qui nous permet une étude simplifiée de la chimie du Vulcain. Suivant ce modèle global à deux étapes, on a :



La relation (3.52) appliquée aux équations (3.53) et (3.54) nous permet d'exprimer les taux de production des espèces présentes. On obtient les équations suivantes :

$$\frac{dC_{OH}}{dt} = 2 \cdot (K_D^1 C_{H_2} C_{O_2} - K_I^1 C_{OH}^2) - 2 \cdot (K_D^2 C_{H_2} C_{OH}^2 - K_I^2 C_{H_2O}^2) \quad (3.55)$$

$$\frac{dC_{H_2}}{dt} = -(K_D^1 C_{H_2} C_{O_2} - K_I^1 C_{OH}^2) - (K_D^2 C_{H_2} C_{OH}^2 - K_I^2 C_{H_2O}^2) \quad (3.56)$$

$$\frac{dC_{O_2}}{dt} = -(K_D^1 C_{H_2} C_{O_2} - K_I^1 C_{OH}^2) \quad (3.57)$$

$$\frac{dC_{H_2O}}{dt} = 2 \cdot (K_D^2 C_{H_2} C_{OH}^2 - K_I^2 C_{H_2O}^2) \quad (3.58)$$

Le système d'équations est sous la forme suivante :

$$\frac{dC_i}{dt} = f_i(C_j, T) \quad (3.59)$$

Le taux de production de l'espèce  $i$  est également fonction de la pression dans la chambre de combustion, de l'enthalpie et du rapport de mélange. Ces trois grandeurs n'ont pas été mises en évidence dans l'équation (3.59) car elles sont considérées être les entrées du système (ou bien les variables de contrôle du système) et restent constantes pendant la combustion : une fois fixé l'enthalpie, la pression de chambre et le rapport de mélange, notre système sera considéré adiabatique, isobarique et fermé. Suivant la Réf. [67], on exprime, sous la forme

d'Arrhenius, les constantes de vitesse de réaction dans le sens directe,  $K_D$ , pour les deux réactions :

$$K_D = A_D(\phi)T^N \exp(-E_D / \mathfrak{R}T) \quad (3.60)$$

Dans la relation (3.60)  $\mathfrak{R}$  est la constante universelle de gaz, qui est exprimée en Cal/(mol.K) et le terme pré exponentiel  $A_D$  est fonction du rapport d'équivalence  $\phi$  qui est donné par le rapport de mélange,  $RM$ , divisé le rapport de mélange stœchiométrique,  $RM_s$  :

$$RM_s = (Y_{ox} / Y_{fuel})_{st} = (m_{O_2} / m_{H_2})_{st} = (\nu_{O_2} \cdot M_{O_2}) / (\nu_{H_2} \cdot M_{H_2}) = (1 \cdot 32) / (2 \cdot 2) = 8 \quad (3.61)$$

où  $Y_i$  est la fraction molaire de l'espèce  $i$ ,  $\nu_{O_2}$  et  $\nu_{H_2}$  sont les coefficients stœchiométriques de  $O_2$  et  $H_2$  dans l'équation ( $2.H_2 + O_2 \leftrightarrow 2.H_2O$ ) et  $M_i$  est la masse molaire de l'espèce  $i$ . Les valeurs des paramètres  $A_D$ ,  $E_D$ , et  $N_D$  pour la réaction (3.53) sont :

$$A_D^1(\phi) = (8.917\phi + 31.433 / \phi - 28.950) \times 10^{47}, \text{ cm}^3/(\text{mol}\cdot\text{s}) \quad (3.62)$$

$$E_D^1 = 4865 \text{ Cal/mol} \quad (3.63)$$

$$N_1 = -10 \quad (3.64)$$

Pour la réaction (3.54) :

$$A_D^2(\phi) = (2.000 + 1.333 / \phi - 0.833\phi) \times 10^{64} \text{ cm}^6/\text{mol}^2/\text{s} \quad (3.65)$$

$$E_D^2 = 42500 \text{ Cal/mol} \quad (3.66)$$

$$N_2 = -13 \quad (3.67)$$

Les constantes de vitesse de réaction dans le sens direct ont alors la forme suivante :

$$K_D^1 = A_D^1(\phi)T^{-10} \exp(-2450.882/T) \quad \left[ \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}\cdot\text{s}} \right] \quad (3.68)$$

$$K_D^2 = A_D^2(\phi)T^{-13} \exp(-21410.58/T) \quad \left[ \frac{\text{cm}^6}{\text{mol}^2\cdot\text{s}} \right] \quad (3.69)$$

Pour calculer les constantes de vitesse de réaction dans le sens inverse,  $K_I$ , on utilise les définitions de la constante d'équilibre,  $K_e$ , et de la constante d'équilibre pour les pressions partielles,  $K_p$  :

$$K_I = K_D / K_e \quad (3.70)$$

$$K_e = K_p / (\mathfrak{R}T)^{a_r} \quad (3.71)$$

Pour les deux réactions chimiques étudiées, la (3.53) et la (3.54), les valeurs de  $K_p$ , qui sont tabulées (voir Glassman I. [68]), ont été interpolées par les polynômes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(K_p^1) = -62.317 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^6 + 386.83 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^5 - 989.98 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^4 + 1348.1 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^3 \\ \quad - 1050.1 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^2 + 465.47 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right) - 104.35 \\ \quad \quad \quad 298 \leq T \leq 1500 \end{array} \right. \quad (3.72)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(K_p^1) = -0.0105 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^6 + 0.2043 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^5 - 1.6833 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^4 + 7.5949 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^3 \\ \quad - 20.237 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^2 + 31.741 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right) - 23.707 \\ \quad \quad \quad 1500 < T \leq 5000 \end{array} \right. \quad (3.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(K_p^2) = 419.06 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^6 - 2600.8 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^5 + 6654.2 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^4 - 9058.3 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^3 \\ \quad + 7053.3 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^2 - 3128.6 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right) + 713.65 \\ \quad \quad \quad 298 \leq T \leq 1500 \end{array} \right. \quad (3.74)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ln(K_p^2) &= 0.0706 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^6 - 1.3866 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^5 + 11.499 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^4 - 52.138 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^3 \\ &\quad + 139.62 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^2 - 220.98 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right) + 174.21 \end{aligned} \right. \quad (3.75)$$

1500 < T ≤ 5000

Les expressions de  $K_p$  ainsi obtenues, permettent d'évaluer les  $K_e$  par l'équation (3.71) et par la suite les  $K_I$  à l'aide de l'équation (3.70).

Maintenant qu'on connaît les expressions des vitesses de réaction,  $K_D$  et les  $K_I$ , pour les deux réactions on peut passer à la linéarisation du système d'équations (3.55-3.58) autour de sa configuration d'équilibre dans la chambre de combustion :

$$\begin{aligned} \frac{dC'_{OH}}{dt} &= -4 \cdot (\bar{K}_I^1 \bar{C}_{OH} + \bar{K}_D^2 \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}) C'_{OH} + 2 \cdot (\bar{K}_D^1 \bar{C}_{O_2} - \bar{K}_D^2 \bar{C}_{OH}^2) C'_{H_2} \\ &\quad + 2 \cdot \bar{K}_D^1 \bar{C}_{H_2} C'_{O_2} + 4 \cdot \bar{K}_I^2 \bar{C}_{H_2O} C'_{H_2O} \\ &\quad + 2 \cdot \left( \frac{\partial K_D^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{O_2} - \frac{\partial K_I^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{OH}^2 - \frac{\partial K_D^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}^2 + \frac{\partial K_I^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2O} \right) T' \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC'_{H_2}}{dt} &= 2 \cdot (\bar{K}_I^1 \bar{C}_{OH} - \bar{K}_D^2 \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}) C'_{OH} - (\bar{K}_D^1 \bar{C}_{O_2} + \bar{K}_D^2 \bar{C}_{OH}^2) C'_{H_2} \\ &\quad - \bar{K}_D^1 \bar{C}_{H_2} C'_{O_2} + 2 \cdot \bar{K}_I^2 \bar{C}_{H_2O} C'_{H_2O} \\ &\quad - \left( \frac{\partial K_D^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{O_2} + \frac{\partial K_I^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{OH}^2 + \frac{\partial K_D^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}^2 - \frac{\partial K_I^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2O} \right) T' \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC'_{O_2}}{dt} &= 2 \cdot \bar{K}_I^1 \bar{C}_{OH} C'_{OH} - \bar{K}_D^1 \bar{C}_{O_2} C'_{H_2} - \bar{K}_D^1 \bar{C}_{H_2} C'_{O_2} \\ &\quad - \left( \frac{\partial K_D^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{O_2} - \frac{\partial K_I^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{OH}^2 \right) T' \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC'_{H_2O}}{dt} = & 4 \cdot \bar{K}_D^2 \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH} C'_{OH} + 2 \cdot \bar{K}_D^2 \bar{C}_{OH}^2 C'_{H_2} - 4 \cdot \bar{K}_I^2 \bar{C}_{H_2O} C'_{H_2O} \\ & + 2 \cdot \left( \left. \frac{\partial K_D^2}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}^2 - \left. \frac{\partial K_I^2}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2O} \right) T' \end{aligned} \quad (3.79)$$

où  $\bar{C}_i$  et  $\bar{T}$  sont respectivement les valeurs à l'équilibre de la concentration de l'espèce  $i$  et de la température dans la chambre de combustion, tandis que  $C'_i$  et  $T'$  sont les variations par rapport à la condition d'équilibre. On a quatre équations et cinq inconnues : il nous manque une équation.

Pour obtenir l'équation manquante on utilise l'équation de bilan d'enthalpie du système, en introduisant l'enthalpie de formation et la chaleur spécifique à pression constante, pour chaque espèce :

$$h(T) = \sum_{i=1}^n Y_i \left[ (\Delta h_f^0)_{i,298} + \int_{298}^T c_{p,i}(T) dT \right] = \sum_{i=1}^n Y_i \left[ (\Delta h_f^0)_{i,298} + h_i^{(s)} \right] \quad (3.80)$$

On exprime les fractions massiques en fonction de concentrations :

$$Y_i = \frac{m_i}{m} = \frac{n_i \cdot M_i}{n \cdot M} = X_i \frac{M_i}{M} = \frac{X_i \cdot M_i}{\sum_j (X_j \cdot M_j)} = \frac{C_i \cdot M_i}{\sum_j (C_j \cdot M_j)} \quad (3.81)$$

Dans l'expression de la fraction massique donnée (3.81), nous avons utilisé la définition de la fraction molaire ( $X_i = n_i/n$ ) et la relation entre cette dernière et la concentration ( $\bar{C}_i = \bar{X}_i / V_{mol}$ ). On substitue l'expression de la fraction massique (3.81) dans l'équation de l'enthalpie (3.80) et on considère l'élément différentiel :

$$dh(T) = 0 = \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial h}{\partial C_i} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial t} \right) + \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.82)$$

Le développement des dérivées partielle permet d'écrire une équation pour la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ M_i \left( \frac{C_i \cdot M_i}{\sum_j (C_j \cdot M_j)} - 1 \right) \left( (\Delta h_f^0)_{i,298} + h_i^{(s)} \right) \cdot \dot{C}_i \right]}{\sum_k (C_k \cdot M_k \cdot c_{p,k})} \quad (3.83)$$

Dans l'équation (3.83) les chaleurs spécifiques  $c_{p,k}$  (en Cal/(mol.K)), ont été interpolées par des polynômes de degré sept, disponibles à l'ONERA (et vérifiés par la base NIST [69]):

$$c_{p,i}(T) = P_i^7(T) = b \cdot \sum_{k=0}^7 \left[ b_k \cdot \left( \frac{T}{1000} \right)^k \right] \quad \text{avec } b = 0.23885 \quad (3.84)$$

Les constantes  $b_i$  sont tabulées ci-dessous :

|    | OH            | H <sub>2</sub> | O <sub>2</sub> | H <sub>2</sub> O |
|----|---------------|----------------|----------------|------------------|
| b0 | 32.978918     | 26.99948       | 27.46205       | 33.599793        |
| b1 | -16.694315    | 12.32724       | 0.9239449      | -7.1688089       |
| b2 | 25.89916      | -29.0552       | 26.36518       | 29.159121        |
| b3 | -15.73637     | 35.44914       | -35.9247       | -19.820164       |
| b4 | 5.1389553     | -21.1393       | 21.93279       | 6.699382         |
| b5 | -0.94225686   | 6.656003       | -6.977649      | -1.2518515       |
| b6 | 0.091345891   | -1.067051      | 1.125294       | 0.12331741       |
| b7 | -0.0036464304 | 0.0686982      | -0.07271323    | -0.004994331     |

Tableau 3-13. : Constantes utilisées pour l'interpolation des chaleurs spécifiques à pression constante.

Les enthalpies sensibles sont calculées directement en intégrant les équations (3.84) :

$$h_i^{(s)}(T) = P_i^8(T) = \int_{298}^T P_i^7(T) dT = 1000 \cdot b \cdot \sum_{k=0}^7 \left[ \frac{b_k}{k+1} \cdot \left( \left( \frac{T}{1000} \right)^{k+1} - \left( \frac{298}{1000} \right)^{k+1} \right) \right] \quad (3.85)$$

L'équation (3.83) est sous la forme  $\partial T / \partial t = g(C_i, T)$  : on linéarise autour de la température d'équilibre de combustion pour pouvoir étudier les petites variations dues à des perturbations de l'état d'équilibre :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial C_i} \Big|_{\bar{C}_i, \bar{T}} \cdot C'_i \right) + \frac{\partial g}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_i, \bar{T}} \cdot T' \quad (3.85)$$

Les dérivées partielles dans l'équation (3.85) ont la forme suivante :

$$\left. \frac{\partial g}{\partial C_i} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = \frac{M_i \left( \frac{C_i \cdot M_i}{\sum_j (C_j \cdot M_j)} - 1 \right) \left( (\Delta h_f^0)_{i,298} + h_i^{(s)} \right) \cdot \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial C_i}}{\sum_k (C_k \cdot M_k \cdot c_{p,k})} \Bigg|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \quad (3.86)$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ M_i \left( \frac{C_i \cdot M_i}{\sum_j (C_j \cdot M_j)} - 1 \right) \left( (\Delta h_f^0)_{i,298} + h_i^{(s)} \right) \cdot \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial T} \right]}{\sum_k (C_k \cdot M_k \cdot c_{p,k})} \Bigg|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \quad (3.87)$$

Dans les expressions (3.86) et (3.87) les  $\frac{\partial \dot{C}_i}{\partial C_i}$  sont données par :

$$\left. \frac{d\dot{C}_{OH}}{dC_{OH}} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = -4 \cdot (\bar{K}_I^1 \bar{C}_{OH} + \bar{K}_D^2 \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}) \quad (3.88)$$

$$\left. \frac{d\dot{C}_{H_2}}{dC_{H_2}} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = -(\bar{K}_D^1 \bar{C}_{O_2} + \bar{K}_D^2 \bar{C}_{OH}^2) \quad (3.89)$$

$$\left. \frac{d\dot{C}_{O_2}}{dC_{O_2}} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = -\bar{K}_D^1 \bar{C}_{H_2} \quad (3.90)$$

$$\left. \frac{d\dot{C}_{H_2O}}{dC_{H_2O}} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = -4 \cdot \bar{K}_I^2 \bar{C}_{H_2O} C'_{H_2O} \quad (3.91)$$

et les dérivées partielles  $\frac{\partial \dot{C}_i}{\partial T}$  sont :

$$\left. \frac{d\dot{C}_{OH}}{dT} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = 2 \cdot \left( \begin{array}{l} \left. \frac{\partial K_D^1}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{O_2} \\ - \left. \frac{\partial K_I^1}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{OH}^2 - \left. \frac{\partial K_D^2}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}^2 + \left. \frac{\partial K_I^2}{\partial T} \right|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2O} \end{array} \right) \quad (3.92)$$

$$\frac{d\dot{C}_{H_2}}{dT} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_D^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{O_2} + \frac{\partial K_I^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{OH}^2 \\ + \frac{\partial K_D^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}^2 - \frac{\partial K_I^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2O} \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

$$\frac{d\dot{C}_{O_2}}{dT} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = - \left( \frac{\partial K_D^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{O_2} - \frac{\partial K_I^1}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{OH}^2 \right) \quad (3.94)$$

$$\frac{d\dot{C}'_{H_2O}}{dt} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} = 2 \cdot \left( \frac{\partial K_D^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2} \bar{C}_{OH}^2 - \frac{\partial K_I^2}{\partial T} \Big|_{\bar{C}_j, \bar{T}} \cdot \bar{C}_{H_2O} \right) \quad (3.95)$$

Le système d'équations (3.59-3.62) et l'équation (3.85), sont bien de la forme (3.47) appliqué au vecteur des concentrations  $\mathbf{C}'$  (qui inclue également la température) :

$$\dot{\mathbf{C}}' = \mathbf{J}_\theta \mathbf{C}' \quad (3.96)$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} C'_{OH} \\ C'_{H_2} \\ C'_{O_2} \\ C'_{H_2O} \\ T \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

On obtient un système de cinq équations à cinq inconnues : pour le résoudre on a besoin de connaître les valeurs des concentrations  $\bar{C}_i$  à l'équilibre chimique dans la chambre de combustion. Pour cela on se servira de CHEMKIN (Kee R.J., Miller J.A., et Jefferson T.H., [70]), un outil numérique de cinétique chimique. Les entrées sont la température des réactants, la pression dans la chambre de combustion et le rapport de mélange : ce dernier permet de fixer les fractions molaires d'hydrogène et d'oxygène présents dans la chambre de combustion, avant la réaction. Dans l'annexe A sont tabulées les fractions molaire pour chaque valeur de rapport de mélange comprises entre 0.2 et 14 ( $RM$  : [0.2, 0.4, ..., 13.8, 14]), pour une température d'injection du mélange de réactant de 300 K et pour les quatre valeurs de pression investiguées : 1, 10, 60, 100 bar.

Une fois évalués les éléments de la matrice du système linéaire,  $J_0$ , on peut calculer les valeurs propres  $\lambda_k$  et les vecteurs propres correspondants  $s_k$  qui vérifient la relation suivante :  $J_0 s_k = \lambda_k s_k$ . En utilisant MATLAB on obtient le vecteur  $\lambda$  et la matrice  $S$  (matrice de changement de base formée par les vecteurs propres  $s_k$ ) pour chaque valeur du rapport de mélange (voir l'annexe A pour les valeurs numériques). Les temps caractéristiques du système sont donnés par le module de l'inverse de la partie réelle des  $\lambda_k$ .

Les résultats obtenus ont révélé un problème dû au conditionnement des matrices  $J_0$ , à cause de la diversité dans les ordres de grandeur de ses éléments : pour cela une petite perturbation des données peut provoquer une grande variation dans les résultats (les valeurs propres du système). Par la suite on représente les temps chimiques qu'on a pu calculer aux différentes pressions de chambre considérées :

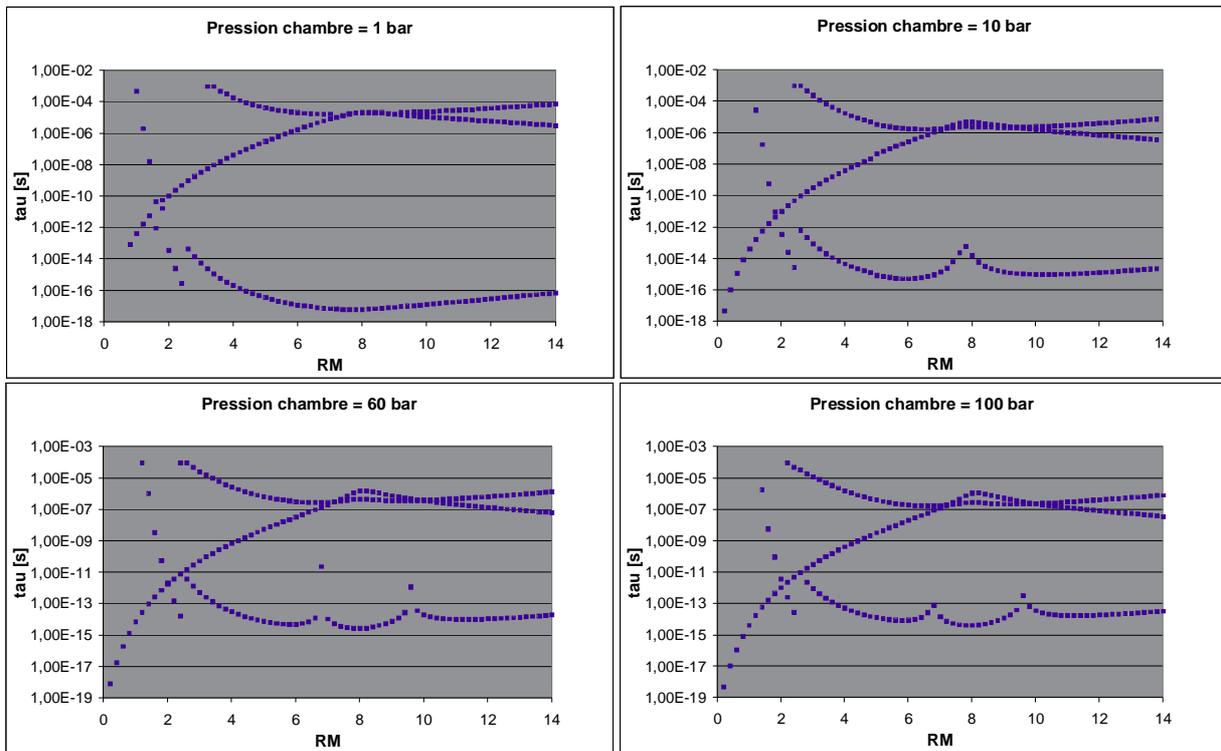


Figure 3-8 : Temps de destruction des espèces (OH, H2, O2) en fonction du RM : résultats de la méthode à valeurs propres.

En analysant les résultats on remarque que pour des rapports de mélange bas, c'est à dire en phase de démarrage du moteur, parmi les temps trouvés il y en a qui sont comparables aux temps typiques du phénomène d'instabilité à haute fréquence étudié ( $1 \cdot 10^{-2}$  et

$1 \cdot 10^{-4}$  seconds), ce qui rend aussi la chimie digne d'intérêt dans le problème du couplage étudié. Cependant on voit dans la figure ci-dessus que les courbes présentent une manque d'information pour certains rapport de mélange et ne permettent pas d'associer un temps avec une espèce chimique du problème ou à la température (probablement en Figure 3-8 les points qui ont une tendance à donner des temps caractéristiques bas lorsque le rapport de mélange diminue, sont associés à la température, qu'étant plus basse répond plus rapidement à une perturbation de son état d'équilibre). En outre comme il y a une incertitude numérique et que les résultats obtenus montrent un couplage possible entre la chimie et l'acoustique à bas rapport de mélange, on préfère utiliser le code CHEMKIN pour une évaluation supplémentaire des temps chimiques.

### 3.2.3 Temps caractéristiques de la chimie : utilisation de CHEMKIN

La méthode montrée précédemment est effectivement rigoureuse du point de vue analytique, mais à cause de la complexité de son application, nous n'avons pu l'utiliser que sur un schéma réduit à deux réactions et son interprétation reste difficile. Pour une étude des temps chimiques qui considère une chimie plus complète on propose d'utiliser une autre procédure plus pratique, qui utilise des mécanismes proposés sur GRI-Mech Version 3.0 en format CHEMKIN-II (voir [71]).

#### 3.2.3.1 Temps caractéristiques $O_2/H_2$

Pour un calcul à 8 espèces (H,  $H_2$ , O,  $O_2$ , OH,  $H_2O$ ,  $HO_2$ ,  $H_2O_2$ ) et une schéma plus détaillée qu'au paragraphe précédent, on utilise CHEMKIN aussi pour le calcul des temps caractéristiques. La subroutine est CKCTXP, elle a besoin de la pression de calcul, de la température du mélange réactif et des fractions molaires des espèces présentes dans la chambre de combustion avant l'activation du processus chimique. Par la suite on présente le modèle utilisé pour l'évaluation des temps de réaction.

Dans un système multi-réactif, le taux de production de l'espèce  $i$  s'obtient en sommant le résultat à  $R$  réactions repérées par l'indice  $r$ , comme montré avec (3.52). On peut exprimer

le tau de production molaire,  $\dot{C}_i$  ( $mol/cm^3/s$ ), en fonction du taux de création  $\dot{\xi}_i$  et du taux de destruction  $\dot{\beta}_i$  :

$$\dot{C}_i = \dot{\xi}_i - \dot{\beta}_i \quad (3.98)$$

D'où :

$$\dot{\xi}_i = \sum_{r=1}^R \nu'_{ir} (K_d^r \Pi_j C_j^{\nu'_{jr}}) + \sum_{r=1}^R \nu''_{ir} (K_r^r \Pi_j C_j^{\nu''_{jr}}) \quad (3.99)$$

$$\dot{\beta}_i = \sum_{r=1}^R \nu'_{ir} (K_r^r \Pi_j C_j^{\nu'_{jr}}) + \sum_{r=1}^R \nu''_{ir} (K_d^r \Pi_j C_j^{\nu''_{jr}}) \quad (3.100)$$

En écrivant le taux de destruction proportionnel à la concentration molaire, on peut mettre en évidence dans (3.98) le temps caractéristique de destruction par l'inverse de la constante de proportionnalité :

$$\dot{C}_i = \dot{\xi}_i - \frac{C_i}{\tau_i} \quad (3.101)$$

donc pour le temps caractéristique on a :

$$\tau_i = \frac{C_i}{\dot{\beta}_i} \quad (3.102)$$

Comme dans l'équation (3.102) soit le numérateur soit le dénominateur peuvent tendre à zéro : pour éviter des problèmes au niveau numérique, le dénominateur de cette équation contient aussi un terme  $\varepsilon$  très petit ( $1 \cdot 10^{-99}$ ).

Pour le calcul des temps de destruction le fichier des données thermodynamiques est therm.dat (fichier disponibles à l'ONERA et vérifiés par la base NIST [69]), valable pour des températures entre 300-3500 K. Les conditions du calcul sont les mêmes que celles présentées au paragraphe précédent, les valeurs de pression imposées sont :  $P$  : [1, 10, 60, 100] bar ; et les valeurs de rapport de mélange :  $RM$  : [0.2, 0.4, ... , 13.8, 14]. Les courbes de temps de destruction, fonction du rapport de mélange, sont représentés pour chaque espèce dans la figure suivante, pour les différentes valeurs de pression analysées :

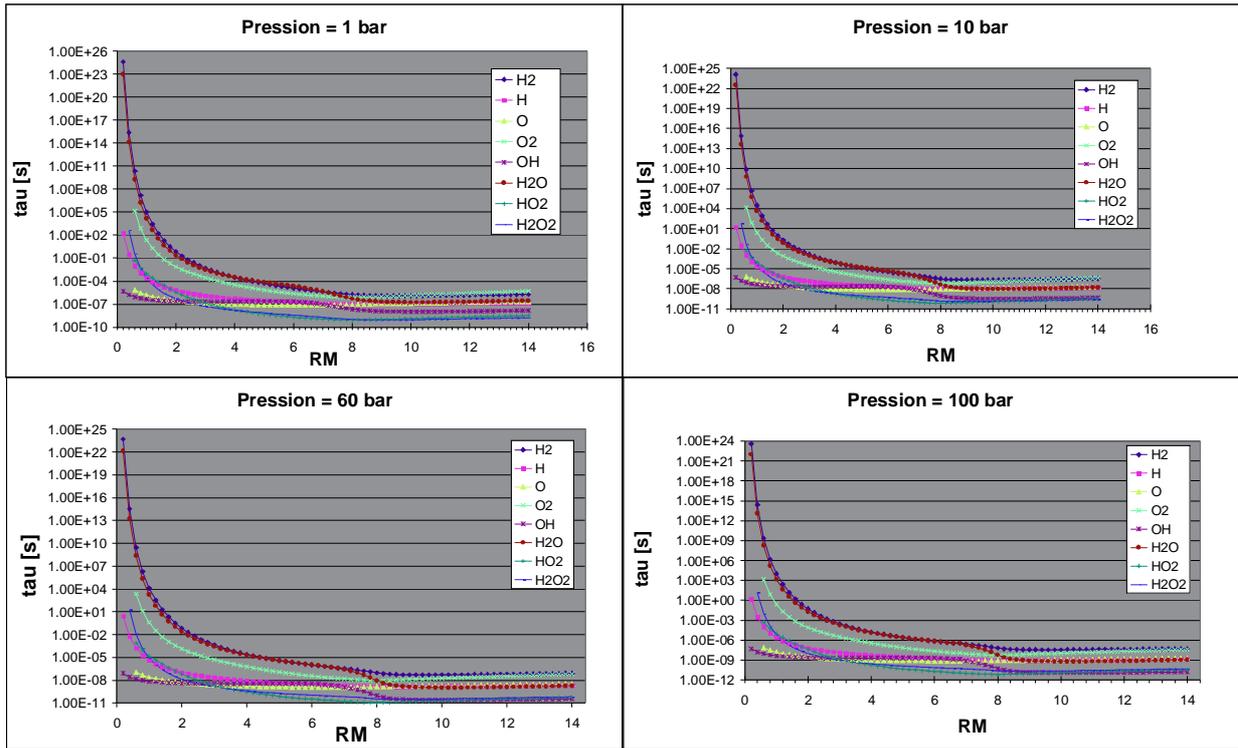


Figure 3-9 : Temps de destruction des espèces ( $H$ ,  $H_2O$ ,  $O_2$ ,  $OH$ ,  $H_2O$ ,  $HO_2$ ,  $H_2O_2$ ) en fonction du  $RM$ , à différentes pressions.

On remarque, que pour des  $RM$  extrêmement bas, les temps de destructions des espèces sont énormément longs, ce qui apparaît tout à fait normal, car on a peu d'oxydant ( $O_2$ ). Comme on peut mieux voir dans la Figure 3-10, les résultats accentuent ce qu'on avait trouvé dans le paragraphe précédent : la chimie interagit avec le phénomène des instabilités à haute fréquence.

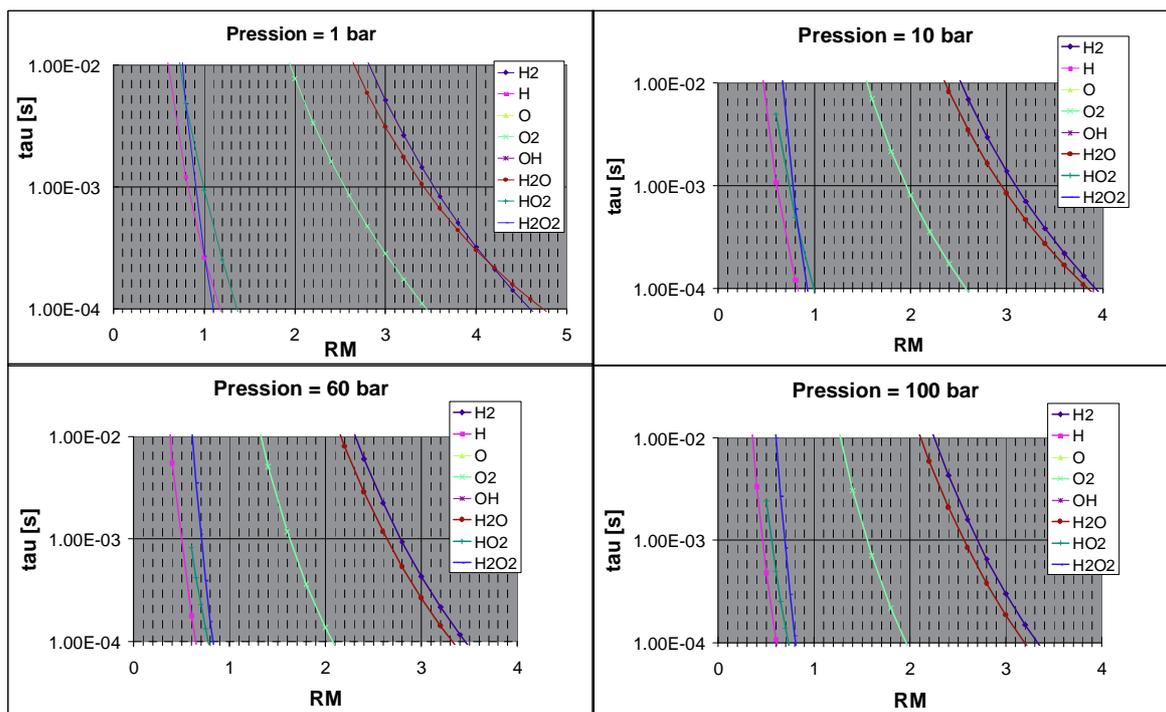


Figure 3-10 : Courbes des temps de destructions entre 1E-4 et 1E-2 seconds.

Par la suite on montre, pour les plages d'intérêt, les interpolations des temps chimiques des espèces en fonction du rapport de mélange. Pour une pression de chambre d'un bar, et pour des rapports de mélange compris entre 0.6 et 1.4, les espèces H, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> et HO<sub>2</sub> ont des temps de destructions compris dans les valeurs à risque. A la même pression, les espèces O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O et H<sub>2</sub> ont des temps caractéristiques entre 1·10<sup>-2</sup> et 1·10<sup>-4</sup> secondes pour l'intervalle des RM situé entre 1.9 et 4.8. Les courbes d'approximation sont les suivantes :

|  |   |
|--|---|
| Pour l'H et 0.6<RM<1.2                             | $\tau_H = 0.0003 * RM^{(-6.7218)}$ avec $R^2 = 0.9965$        |
| Pour l'H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> et 0.7<RM<1.1 | $\tau_{H_2O_2} = 0.0003 * RM^{(-13.324)}$ avec $R^2 = 0.9956$ |
| Pour l'HO <sub>2</sub> et 0.7<RM<1.4               | $\tau_{HO_2} = 0.001 * RM^{(-7.5431)}$ $R^2 = 0.9994$         |
| Pour l'O <sub>2</sub> et 1.9<RM<3.5                | $\tau_{O_2} = 2.0569 * RM^{(-8.0726)}$ $R^2 = 0.9985$         |
| Pour l'H <sub>2</sub> O et 2.6<RM<4.8              | $\tau_{H_2O} = 19.09 * RM^{(-7.9184)}$ $R^2 = 0.9949$         |
| Pour l'H <sub>2</sub> et 2.8<RM<4.6                | $\tau_{H_2} = 157.28 * RM^{(-9.426)}$ $R^2 = 0.9981$          |

Tableau 3-14 : Interpolations des temps de destruction à P=1 bar.

Pour P=10 bar ces fenêtres se déplacent vers l'intervalle [ 0.4 – 1] pour H, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> et HO<sub>2</sub> et [1.5 – 4] pour O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O et l'H<sub>2</sub>. A cette pression, les fonctions  $\tau_i(RM)$ , sont :

|  |   |
|--|---|
| Pour l'H et 0.4<RM<0.9                           | $\tau_H = (2E-05)*RM^{(-7.8201)}$ avec $R^2 = 0.9978$       |
| Pour l'H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> et 0.6<RM<1 | $\tau_{H_2O_2} = (3E-05)*RM^{(-14.162)}$ avec $R^2 = 0.998$ |
| Pour l'HO <sub>2</sub> et 0.6<RM<1               | $\tau_{HO_2} = (9E-05)*RM^{(-7.7868)}$ avec $R^2 = 0.9994$  |
| Pour l'O <sub>2</sub> et 1.5<RM<2.6              | $\tau_{O_2} = (0.5854)*RM^{(-9.3222)}$ avec $R^2 = 0.9965$  |
| Pour l'H <sub>2</sub> O et 2.3<RM<3.9            | $\tau_{H_2O} = 84.262*RM^{(-10.523)}$ avec $R^2 = 0.999$    |
| Pour l'H <sub>2</sub> et 2.5<RM<4                | $\tau_{H_2} = 156.67*RM^{(-10.512)}$ avec $R^2 = 0.9978$    |

Tableau 3-15 : Interpolations des temps de destruction à P=10 bar.

À P=60 bar on obtient [0.3 – 0.9] pour H, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> et HO<sub>2</sub> et [1.3 – 3.5] pour O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O et l'H<sub>2</sub>. A cette pression, les fonctions  $\tau_i(RM)$  sont :

|  |  |
|--|--|
| Pour l'H et 0.3<RM<0.7                             | $\tau_H = 3E-06*RM^{(-8.5782)}$ avec $R^2 = 0.999$         |
| Pour l'HO <sub>2</sub> et 0.6<RM<0.8               | $\tau_{HO_2} = 1E-05*RM^{(-8.0732)}$ avec $R^2 = 0.9998$   |
| Pour l'H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> et 0.6<RM<0.9 | $\tau_{H_2O_2} = 7E-06*RM^{(-14.307)}$ avec $R^2 = 0.9972$ |
| Pour l'O <sub>2</sub> et 1.3<RM<2.1                | $\tau_{O_2} = 0.1829*RM^{(-10.391)}$ avec $R^2 = 0.9959$   |
| Pour l'H <sub>2</sub> O et 2.1<RM<3.4              | $\tau_{H_2O} = 42.119*RM^{(-10.867)}$ avec $R^2 = 0.9977$  |
| Pour l'H <sub>2</sub> et 2.3<RM<3.5                | $\tau_{H_2} = 136.33*RM^{(-11.45)}$ avec $R^2 = 0.9977$    |

Tableau 3-16 : Interpolations des temps de destruction à P=60 bar.

enfin , A P=100 bar, on obtient l'intervalle [0.3 – 1.5] pour H, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> et HO<sub>2</sub> et [1.2 – 3.4] pour O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O et l'H<sub>2</sub> :

|   |  |
|---|--|
| Pour l'H et 0.3<RM<0.7                              | $\tau_H = 1E-06*RM^{(-8.6646)}$ avec $R^2 = 0.9996$        |
| Pour l'HO <sub>2</sub> et 0.6<RM<0.8                | $\tau_{HO_2} = 8E-06*RM^{(-8.0732)}$ avec $R^2 = 0.9998$   |
| Pour l' H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> et 0.6<RM<0.9 | $\tau_{H_2O_2} = 4E-06*RM^{(-15.714)}$ avec $R^2 = 0.9973$ |
| Pour l'O <sub>2</sub> et 1.2<RM<2                   | $\tau_{O_2} = 0.1244*RM^{(-10.742)}$ avec $R^2 = 0.9969$   |
| Pour l'H <sub>2</sub> O et 2.1<RM<3.2               | $\tau_{H_2O} = 42.222*RM^{(-11.243)}$ avec $R^2 = 0.9983$  |
| Pour l'H <sub>2</sub> et 2.2<RM<3.4                 | $\tau_{H_2} = 129.95*RM^{(-11.769)}$ avec $R^2 = 0.9982$   |

Tableau 3-17 : Interpolations des temps de destruction à P=100 bar.

On peut remarquer que plus la pression augmente plus l'intervalle d'intérêt tend vers les valeurs les plus basses du rapport de mélange. Les bas  $RM$  sont utilisés surtout dans les laboratoires ou par les générateurs de gaz mais ils sont intéressants aussi dans le cas des moteurs réels pendant les phases transitoires de démarrage et d'arrêt.

Par la suite on va montrer comment les deux méthodes des valeurs propres et CHEMKIN peuvent être liées. On prend une réaction très simple :



On obtient aussi un système d'équations différentielles, qu'on peut comparer au système qu'on obtiendra par la méthode des valeurs propres. Les taux de production molaire, pour la réaction (3.103), sont :

$$\frac{dC_A}{dt} = -2K_D C_A^2 + 2K_I C_{A_2} \quad (3.104)$$

$$\frac{dC_{A_2}}{dt} = K_D C_A^2 - K_I C_{A_2} \quad (3.105)$$

Suivant la méthode utilisée dans le code CHEMKIN, les taux de production molaire pour la réaction (3.103) peuvent être écrites selon (3.101), c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_A \\ \dot{C}_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_A} & a_1 \\ a_2 & -\frac{1}{\tau_{A_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_A \\ C_{A_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{C} = M_\theta C \quad (3.106)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont respectivement  $\xi_A / C_{A_2}$  et  $\xi_{A_2} / C_A$ . Si on compare le système donné par les équations (3.104) et (3.105) avec celui donné par (3.106) on obtient les expressions des temps caractéristiques de destruction des deux espèces présentes dans la réaction (3.103) à chaque instant :

$$\tau_A = \frac{1}{2K_D C_A} \quad (3.107)$$

$$\tau_{A_2} = \frac{1}{K_I} \quad (3.108)$$

Si maintenant on linéarise le deux équations (3.104) et (3.105) :

$$\frac{dC'_A}{dt} = -4K_D \bar{C}_A C'_A + 2K_I C'_{A_2} \quad (3.109)$$

$$\frac{dC'_{A_2}}{dt} = 2K_D \bar{C}_A C'_A - K_I C'_{A_2} \quad (3.110)$$

en forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{C}'_A \\ \dot{C}'_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4K_D \bar{C}_A & 2K_I \\ 2K_D \bar{C}_A & -K_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C'_A \\ C'_{A_2} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Le polynôme caractéristique de (3.111) est :

$$\lambda^2 + \lambda \cdot (4K_D \bar{C}_A + K_I) = 0 \quad (3.112)$$

Les valeurs propres du système (3.111) sont les solutions du polynôme (3.112) :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -4K_D \bar{C}_A - K_I \end{cases} \quad (3.113)$$

C'est-à-dire :  $\lambda_1 = 0$ , c'est la conservation des atomes et  $\lambda_2 = -4K_D \bar{C}_A - K_I = -2/(\tau_A) - 1/\tau_{A_2}$  selon les relations (3.107) et (3.108). On a trouvé donc le lien entre les valeurs propres et les temps caractéristiques de destruction chimique calculés par CHEMKIN dans le cas de la réaction (3.103). Comme  $\tau_{A_2} / \tau_A = 2K_D \bar{C}_A / K_I = 2K_e \bar{C}_A$ , si la réaction va en direction de  $A_2$ , et donc  $K_e$  est grand, on a  $\tau_A \ll \tau_{A_2}$ , et la valeur propre  $\lambda_2$  ou bien sa partie réelle  $Re(\lambda_2)$  vaut  $-2/\tau_A$ , vice-versa  $\tau_A \gg \tau_{A_2}$  donne  $Re(\lambda_2) = -1/\tau_{A_2}$ . C'est-à-dire que, d'un point de vue analytique, la partie réelle des valeurs propres calculées au paragraphe précédent est proportionnelle à l'inverse du plus petit temps caractéristique de destruction calculé à l'aide de CHEMKIN, ce qui n'est pas en contradiction avec la définition du temps caractéristique chimique : l'ensemble des temps de destruction des espèces ne s'identifie pas totalement avec l'ensemble des temps caractéristiques du schéma réactionnel, mais les informations obtenues par les deux méthodes sont liées. Il faut aussi mettre en évidence que les temps de destructions des espèces sont plus faciles à obtenir que les valeurs propres du système complet, ce qui rend préférable l'utilisation de cette méthode.

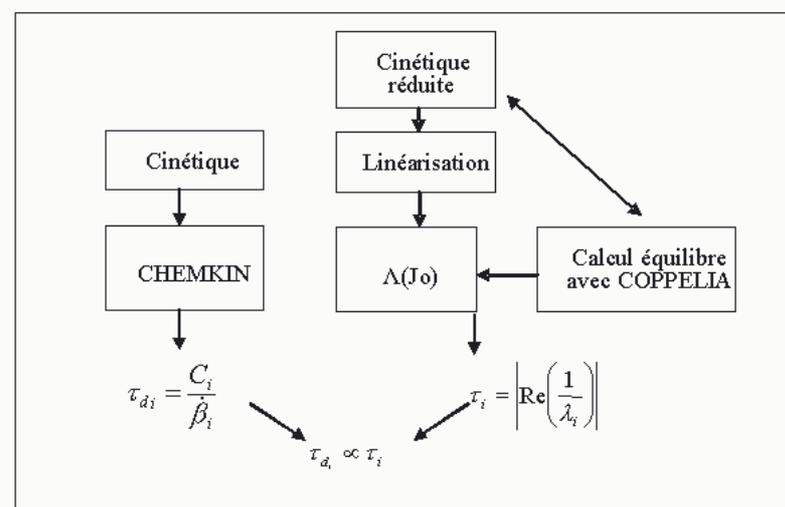


Figure 3-11 : Schéma des deux méthodes utilisées.

Ci-dessus une schématisation des deux méthodes utilisées pour l'évaluation des temps caractéristiques liés à la chimie.

Dans les deux prochains chapitres on passera en revue la modélisation des deux systèmes principaux impliqués dans l'étude des instabilités hybrides : le système d'alimentation et la chambre de combustion. Les résultats de l'étude des temps caractéristiques ont montré que les processus de vaporisation et de chimie sont des candidats au couplage : on tiendra compte de ce résultat dans le modèle de chambre de combustion (chapitre 5).

# Chapitre 4

## 4 Approche pour la modelisation du systeme propulsif

Comme il a été vu au chapitre 1, les instabilités hybrides sont des instabilités à haute fréquence, qui impliquent l'interaction acoustique entre les phénomènes présents dans le système d'injection et ceux de la chambre de combustion. Pour étudier ce problème il est donc important de coupler les deux systèmes mentionnés. Jusqu'à maintenant aucune solution analytique du problème couplé n'a été trouvée et les études se contentent de modéliser l'une ou l'autre des parties, ou bien une combinaison simplifiée car cela peut contribuer à éliminer ces instabilités pour un effort relativement limité. Cependant, les marges sont faibles et mal connues, si bien que les risques d'observer à nouveau des instabilités reste grand.

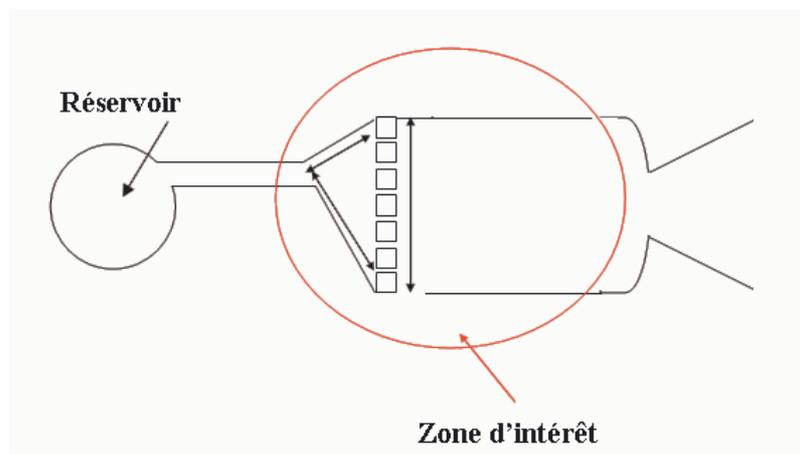


Figure 4-1 : Zone d'un moteur-fusée à ergols liquides, intéressée par les instabilités hybrides.

L'approche retenue dans le cadre de cette thèse propose de découper le problème étudié en deux parties : les deux systèmes concernés par les instabilités hybrides, à savoir le système d'alimentation et la chambre de combustion qui seront étudiés avec deux approches

différentes; d'une part, le système d'alimentation, dans lequel on trouve des propergols sous forme liquide et/ou gazeuse dans une géométrie complexe, est étudiée par la méthode des paramètres discrets (Kesselring R.C., Nelson R.L., et Sprouse K.M. [27]) et, d'autre part, la chambre de combustion, qui présente une géométrie simple mais où interviennent de nombreux phénomènes pendant la combustion, est modélisée par un approche globale basée sur les travaux du Pr. Culick [72]. Les deux systèmes seront couplés à la section d'injection par la fonction admittance définie pour chaque injecteur : par l'expression de cette fonction, le débit injecté dans la chambre de combustion sera influencé par la distribution de pression sur la plaque d'injection.

## **4.1 Modélisation du système d'alimentation**

### **4.1.1 Présentation du modèle**

Le système d'alimentation est modélisé par la méthode des paramètres discrets (« Lumped parameters ») qui est d'ailleurs la plus adaptée pour sa facilité de mise en œuvre dans les lignes d'alimentation et les injecteurs présentant des géométries compliquées. La technique des paramètres discrets consiste à diviser une cavité hydraulique en un certain nombre de nœuds de pression entre lesquels sont calculés des débits. Cette technique s'appuie sur une méthode de volumes finis où les équations de bilan sont écrites sous forme intégrale sur chaque volume de contrôle. Ainsi, chaque élément de pression est caractérisé par un volume (capacité) et les éléments de débits par une inductance et une résistance. Cette technique est surtout utilisée pour des problèmes en une dimension comme le montre le schéma ci-dessous.

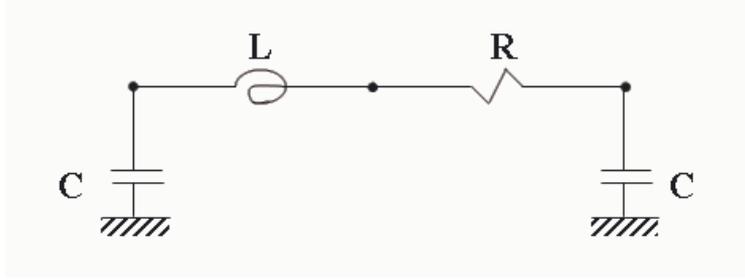


Figure 4-2 : Schéma électrique utilisé dans le modèle.

La distance maximale entre deux nœuds de pression dépend de la fréquence du mode étudié et de la vitesse du son dans le fluide. Le critère proposé pour estimer cette distance, selon Kesselring R.C., Nelson R.L., et Sprouse K.M. [27] et Hutt J.J., et Rocker M. [29] est :

$$l \leq \frac{\lambda}{8} = \frac{a}{8 \cdot f} \quad (4.1)$$

C'est-à-dire qu'une longueur d'onde doit être représentée par au moins 8 segments. Ce critère donne un ordre de grandeur qu'il faut utiliser en rapport avec la dimension et la géométrie de l'injecteur.

La figure suivante montre comment une cavité hydraulique peut être discrétisée par la technique « lumped parameter » : chaque cavité hydraulique est divisée en nœuds de pression,  $p_i$ , séparés par une longueur,  $l$ , et entre deux nœuds est définis un débit,  $\dot{m}_i$ .

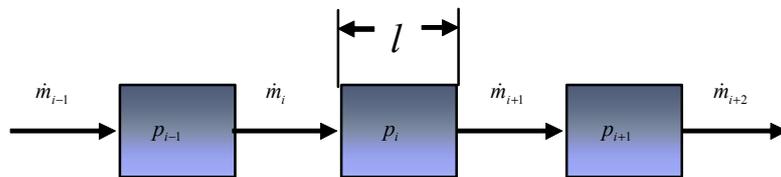


Figure 4-3 : Description d'une ligne de segment de fluide par la « Lumped Parameter ».

Pour le développement mathématique de la méthode on considère les équations qui gouvernent le comportement du fluide. Elles s'écrivent sous forme intégrale :

➤ équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho dV + \int_{\partial D} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4.2)$$

➤ équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho \mathbf{u} dV + \int_{\partial D} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial D} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3)$$

en négligeant les forces de volume.

Dans les formules,  $\partial D$  indique la frontière du domaine  $D$  et  $\boldsymbol{\tau} = -p \cdot \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_v$ , représente le tenseur des contraintes, fonction de la pression isotrope et du tenseur de contraintes visqueuses.

Un écoulement monodimensionnel est caractérisé par une direction privilégiée (qu'on peut appeler  $x$  par exemple), c'est-à-dire que dans toute section normale à cette direction, on peut admettre que toutes les grandeurs thermodynamiques  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ , ainsi que la vitesse de l'écoulement, sont constantes. Dans le cas d'une canalisation de longueur  $dx$ , la frontière du domaine  $D$  est constituée par la paroi et les sections d'entrée  $A(x)$  et de sortie  $A(x+dx)$ , les équations (4.2) et (4.3) peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{dx} \rho A(x) dx - (\rho u A)(x) + (\rho u A)(x + dx) = 0 \quad (4.4)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{dx} \rho u A(x) dx - (\rho u^2 A)(x) + (\rho u^2 A)(x + dx) = \\ & - p(x + dx) \cdot A(x + dx) + p(x) \cdot A(x) + p(x) \cdot (A(x + dx) - A(x)) + \int_{\partial D} \boldsymbol{\tau}_v \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dans la seconde équation on a utilisé le théorème de la moyenne pour exprimer l'intégral de la pression sur la surface latéral :  $\int_{S_{lat}} p \cdot \mathbf{n} dS = p(x + \xi dx) \cdot \int_{S_{lat}} \mathbf{n} dS \cong -p(x) \cdot (A(x + dx) - A(x))$

Si l'on considère les hypothèses suivantes :

- Ecoulement isentropique  $\Rightarrow \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) = a^2$  ;
- Vitesse d'écoulement faible par rapport à la vitesse du son  $\Rightarrow \frac{u}{a} \ll 1$  ;
- Longueur  $dx$  infiniment faible et  $A(x) \approx A(x+dx)$  ;
- L'intégrale de la perte de quantité de mouvement due aux forces de viscosité superficielle  $\left( \int_{\partial D} \boldsymbol{\tau}_v \cdot \mathbf{n} dS \right)$  est modélisée par le terme  $-Q_v \dot{m} A dx$  (Réf. [27]).

On obtient alors deux équations monodimensionnelles et différentielles :

$$\begin{cases} \frac{A}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial (u \dot{m})}{\partial x} = -A \frac{\partial p}{\partial x} - Q_v \dot{m} A \end{cases} \quad (4.6)$$

Les grandeurs considérées sont décomposées en une partie moyenne et en une petite perturbation :

$$f = \bar{f} + f' \quad (4.7)$$

On linéarise le système (4.6) et on applique la transformée de Laplace :

$$\begin{cases} \frac{As}{a^2} p' + \frac{\partial \dot{m}'}{\partial x} = 0 \\ \frac{s \dot{m}'}{A} + \frac{\partial p'}{\partial x} + Q_v \dot{m}' = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Dans la deuxième équation du système ci-dessus, le terme  $\left( 2 \frac{\bar{u}}{A} \frac{\partial \dot{m}'}{\partial x} \right)$  a été négligé en s'appuyant sur les hypothèses effectuées sur l'écoulement. Le terme des pertes visqueuses,  $Q_v$ , est donné par les valeurs moyennes de vitesse et variation de pression de l'écoulement :

$$Q_v = \frac{2|\Delta\bar{p}|}{dx|\dot{m}|} \quad (4.9)$$

Dans l'approche à paramètres discrets, on suppose les dimensions sont suffisamment faibles pour que l'approximation des variables non dérivées par des constantes soit acceptable (ces variables sont considérées homogènes sur le volume). L'intégration du bilan de masse sur une cellule  $i$  donne :

$$C_i s p'_i = \dot{m}'_{i-1} - \dot{m}'_{i+1} \quad (4.10)$$

L'intégrale de la quantité de mouvement pour le débit reliant les cellules  $i$  et  $j$  donne :

$$L_{ij} s \dot{m}'_{ij} = p'_i - p'_j - R_{ij} \dot{m}'_{ij} \quad (4.11)$$

L'équation de bilan de masse étendue à un nombre quelconque de connexions est :

$$C s p'_i = - \sum_{\text{debits}} \dot{m}'_{ij} \quad (4.12)$$

Dans les équations (4.10), (4.11) et (4.12) on a introduit les constantes se référant à l'analogie électrique. Elles sont définies comme suit :

- la capacité,  $C_i = \frac{Vol_i}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S|_i}} = \frac{Vol_i}{a_i^2}$  ;
- l'inductance (ou la self),  $L_{ij} = \int_i^j \frac{1}{A(\eta)} d\eta$  ;
- la résistance linéarisée du débit,  $R_{ij} = 2 \frac{|\Delta\bar{p}_{ij}|}{|\dot{m}'_{ij}|}$ .

Le débit entre deux nœuds  $i$  et  $j$ ,  $\dot{m}'_{ij}$ , est compté positivement lorsque le flux va de  $i$  à  $j$ , c'est-à-dire qu'il sort du domaine.

Pour chaque nœud de pression on a donc défini une vitesse du son et un volume de contrôle pour évaluer sa capacité et pour chaque débit une surface de passage et une longueur

pour son inductance et sa résistance. Les inconnues du problème sont les pressions aux nœuds actifs (nœuds de pressions qui ne sont pas des conditions limites), et les débits entre les nœuds. On obtient ainsi le système matriciel suivant :

$$[M] \begin{Bmatrix} p' \\ \dot{m}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p'_{exc} \\ \dot{m}'_{exc} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

où  $\begin{Bmatrix} p'_{exc} \\ \dot{m}'_{exc} \end{Bmatrix}$  est le vecteur des pressions et des débits d'excitation appliquées au système comme condition limite.

Pour améliorer le temps de calcul qui est proportionnel au carré de la dimension de la matrice [M], on peut éliminer les débits des variables, de façon à réduire notablement cette dernière en dimension :

$$\dot{m}'_{ij} = \frac{p'_i - p'_j}{L_{ij}s + R_{ij}} \quad (4.14)$$

et l'expression (4.14) en (4.12) donne :

$$\left[ C_i s + \sum_{\text{debits}} \frac{\alpha_{ij}}{L_{ij}s + R_{ij}} \right] \cdot p'_i - \sum_{\text{debits}} \frac{\alpha_{ij} \cdot p'_j}{L_{ij}s + R_{ij}} = 0. \quad (4.15)$$

où le coefficient  $\alpha_{ij}$  vaut 1 si il y a un débit entre les nœuds  $i$  et  $j$ , et 0 dans le cas contraire. On obtient comme ça une nouvelle matrice [M'], de taille réduite. La solution du nouveau système donne le vecteur des pressions ; les débits sont calculés par la suite en appliquant l'équation (4.14).

## 4.2 Validation de la méthode

### 4.2.1 Définition des cas tests

Les cas tests ont pour principal but l'application du code de calcul et la vérification de la bonne programmation de la méthode mais aussi sa précision.

### 4.2.2 Cas test 1 : tuyau droit ouvert-ouvert (1D)

On considère comme premier cas test un tube droit, excité à l'entrée par une fluctuation de pression  $p'_{exc}$ , avec une pression constante à la sortie :



Figure 4-4 : Cas test 1, tuyau droit.

L'équation des ondes pour un flux monodimensionnel, isentropique et non visqueux s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (4.16)$$

avec les conditions limites  $p'(x=0) = p'_{exc}$  et  $p'(x=l) = 0$ , où  $p'_{exc} = p_{exc} \cdot \cos(\omega t)$ .

La solution sera de la forme :

$$p' = f(t) \cdot g(x) \quad (4.17)$$

en substituant (4.17) dans (4.16) :

$$f''(t) \cdot g(x) - a^2 \cdot f(t) \cdot g''(x) = 0 \quad (4.18)$$

Les conditions limite  $p'(x=0) = p_{exc.} \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow \begin{cases} f(t) = \cos(\omega t) \\ g(0) = p_{exc.} \end{cases}$  et  $P'(x=l)=0 \Rightarrow g(l)=0$ .

L'équation (4.18) devient alors :

$$-\omega^2 \cdot g(x) - a^2 \cdot g''(x) = 0 \Rightarrow g''(x) + k^2 \cdot g(x) = 0 \quad (4.19)$$

où  $k=(\omega/a)$  est le nombre d'onde. La solution est celle d'un oscillateur harmonique :

$$g(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (4.20)$$

Les conditions aux limites de (4.20) sont :

$$\begin{cases} g(0) = p_{exc.} \\ g(l) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

l'équation (4.20) et les conditions aux limites (4.21) donnent la solution suivante :

$$g(x) = p_{exc.} (\cos(kx) - \cotg(kl) \sin(kx)) = p_{exc.} \left( \frac{\sin(k(l-x))}{\sin(kl)} \right) \quad (4.22)$$

donc la solution de la forme (4.17) devient :

$$p'(x) = p_{exc.} \cos(\omega t) \cdot \left( \frac{\sin(k(l-x))}{\sin(kl)} \right). \quad (4.23)$$

Pour une comparaison entre les résultats analytiques et numériques on considère les données suivantes :

- une vitesse du son :  $a=1000 \text{ m/s}$  ;

- la longueur du tube :  $l=20 \text{ m}$  ;
- la surface perpendiculaire à l'axe du tube :  $A=0.2 \text{ m}^2$  ;
- l'amplitude de la pression d'excitation :  $p_{exc.} = 1 \cdot E5 \text{ Pa}$  ;

La fréquence fondamentale est alors :

$$f_1 = \frac{a}{2l} \quad (4.24)$$

A partir de  $f_1$  ses harmoniques sont calculées par la formule  $f_n = n \cdot f_1$ . Par l'expression (4.23) appliquée aux différentes valeurs de  $\omega$  ou bien de la fréquence d'excitation (donnée par (4.24)), on obtient à l'instant initial les distributions de pression suivantes à l'intérieur du tuyau :

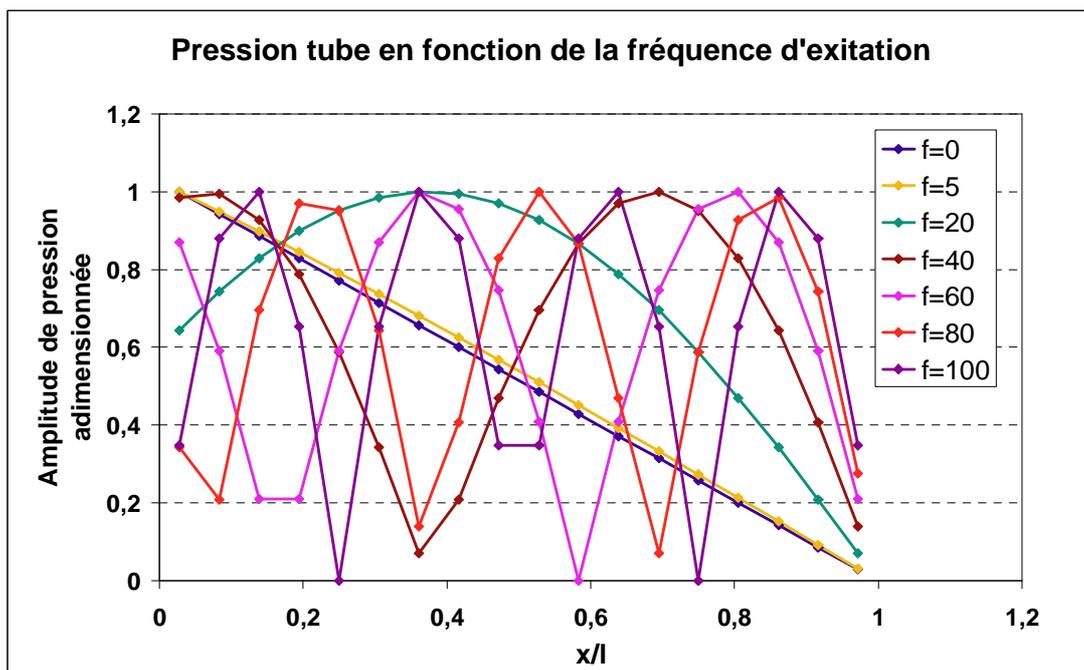


Figure 4-5 : Distribution de pression dans le tuyau à différentes fréquences d'excitation.

D'un point de vue numérique, en considérant l'équation (4.1), on obtient que le nombre de cellules doit être au moins égal à 16 pour étudier les quatre premiers modes de vibration. Pour cela on divise le tube en 18 éléments.

Comme montré en Figure 4-6, dans laquelle la valeur maximale de pression adimensionnée par le module de la pression d'excitation est représentée en fonction de la fréquence, on retrouve bien la concordance entre les résultats théoriques et ceux du calcul :

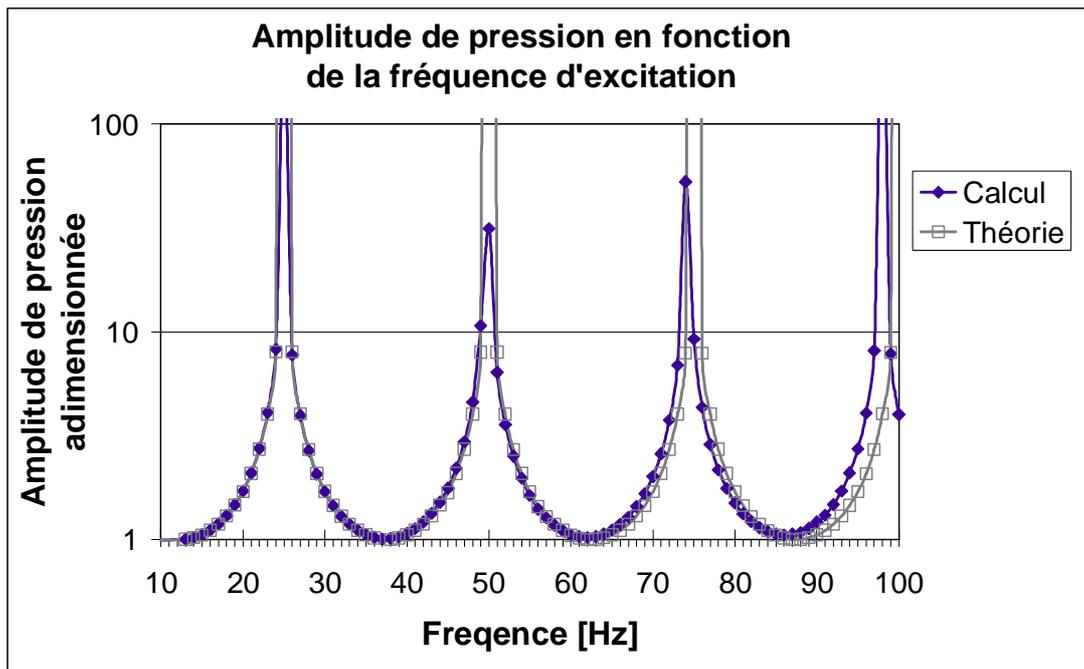


Figure 4-6 : Amplitude maximale de fluctuation de pression en fonction de la fréquence.

On peut observer en Figure 4-7, que la précision sur les fréquences de résonance est meilleure que 2% jusqu'au 4<sup>ième</sup> mode qui est la limite donnée du critère préalable.

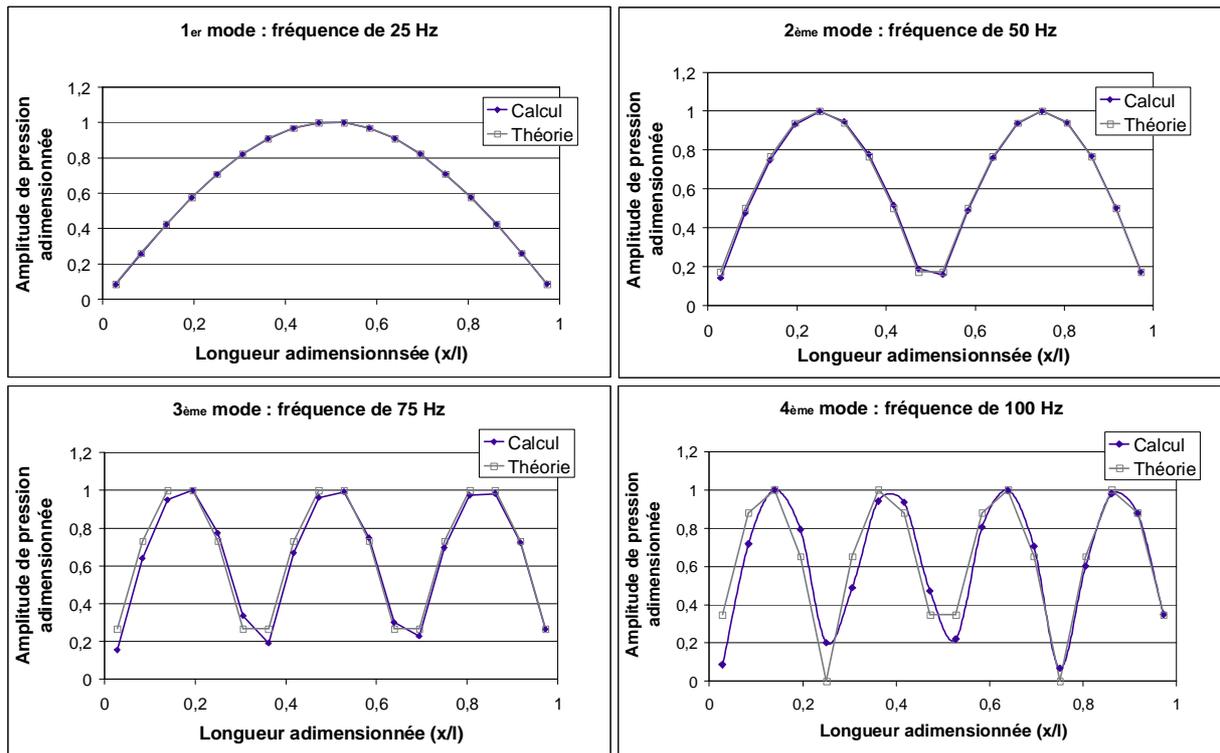


Figure 4-7 : Modes propres de vibrer du tube.

### 4.2.3 Cas test 2 : deux tuyaux en série ouvert-fermé (1D)

Pour la représentation d'un simple système d'injection on a besoin d'au moins deux cavités, une pour représenter le dôme et l'autre pour représenter l'injecteur. Pour cela on considère ce cas test à deux tuyaux en série, comme montré dans la Figure 4-8 :

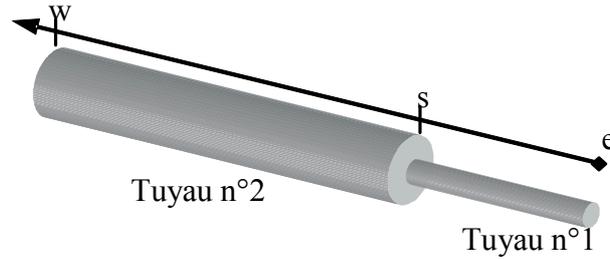


Figure 4-8 : Cas test 2, deux tuyaux en série ouvert-fermé.

Le premier tuyau est ouvert aux deux sections d'extrémité, que l'on appelle 'e' et 's' et le deuxième est ouvert en 's' et fermé en 'w'. Afin de considérer ce problème monodimensionnel on fait l'hypothèse suivante entre la longueur et le rayon de chaque tuyau :  $l/r \gg 1$ .

Les données considérées sont les suivantes :

- la vitesse du son :  $a=1000 \text{ m/s}$  ;
- la longueur du premier tuyau :  $l_1=0.05 \text{ m}$  ;
- la longueur du deuxième tuyau :  $l_2=0.1 \text{ m}$  ;
- la surface d'entrée et de sortie du premier tuyau:  $A_1=0.003 \text{ m}^2$  ;
- la surface d'entrée et de sortie du deuxième tuyau:  $A_2=0.021 \text{ m}^2$  (le rapport  $A_2/A_1=7$ ) ;
- le maillage mono-dimensionnel du premier tuyau présente 10 mailles (et donc 10 nœuds de pression) ;
- le maillage mono-dimensionnel du deuxième tuyau présente 21 mailles (et donc 21 nœuds de pression) ;
- l'amplitude de la pression d'excitation :  $p_{exc.} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ;

Afin d'évaluer les fréquences propres des deux tuyaux en série, on introduit la matrice de transfert hydraulique, qui permet de lier les pressions et les débits d'entrée et de sortie pour un écoulement compressible et à Mach faible, dans une conduite droite (voir [73]) :

$$\begin{Bmatrix} p'_{i+1} \\ \dot{m}'_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ch(\Gamma) & -\Sigma \cdot Sh(\Gamma) \\ -\frac{Sh(\Gamma)}{\Sigma} & Ch(\Gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p'_i \\ \dot{m}'_i \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Dans le système ci-dessus,  $i+1$  représente la section de sortie et  $i$  celle de l'entrée d'un tuyau, et les grandeurs introduites sont :

- $\Gamma = \sqrt{(R + Ls)Cs}$  ;
- $\Sigma = \frac{\Gamma}{Cs}$  ;

Dans les relations ci-dessus, la variable  $s$  est la fréquence complexe ( $s=j\omega$ ), et on a utilisé les définitions de la self ( $L = l/A$ ) et de la capacité ( $C = lA/a^2$ ), ainsi que celle de la résistance linéarisée du débit  $e$  qu'on considèrera comme négligeable).

On applique l'équation (4.25) à notre problème :

$$\begin{Bmatrix} p'_w \\ \dot{m}'_w \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Ch(\Gamma)_2 & -\Sigma_2 \cdot Ch(\Gamma)_2 \\ -\frac{Sh(\Gamma)_2}{\Sigma_2} & Ch(\Gamma)_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ch(\Gamma)_1 & -\Sigma_1 \cdot Ch(\Gamma)_1 \\ -\frac{Sh(\Gamma)_1}{\Sigma_1} & Ch(\Gamma)_1 \end{bmatrix}}_{H_2} \begin{Bmatrix} p'_e \\ \dot{m}'_e \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

avec les conditions aux limites de fluctuation de pression nulle à la section d'entrée  $e$  et de fluctuation de débit nulle à la sortie  $w$ , c'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} p'_e = 0 \\ \dot{m}'_w = 0 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

On peut réécrire les (4.26) et (4.27) comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -H_2 & \vdots & & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p'_e \\ \dot{m}'_e \\ p'_w \\ \dot{m}'_w \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

Comme on ne veut pas la solution triviale du système (4.28), on impose que son déterminant soit égal à zéro, ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\frac{Sh\Gamma_2}{\Sigma_2} \cdot \Sigma_1 \cdot Sh\Gamma_1 + Ch\Gamma_2 \cdot Ch\Gamma_1 = 0 \quad (4.29)$$

La résolution de l'équation (4.29), donne deux familles de solutions : la première est donnée par :

$$\begin{cases} Ch\Gamma_2 \cdot Ch\Gamma_1 = 0 \\ \text{et} \\ Sh\Gamma_2 \cdot Sh\Gamma_1 = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

et la deuxième par :

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \cdot Th\Gamma_2 \cdot Th\Gamma_1 + 1 = 0 \quad (4.31)$$

En terme de fréquences on a :

$$f_I = 5000 \cdot (2n + 1) Hz \quad (4.32)$$

et

$$f_{II} = 10000 \cdot (\pm 0.0802 + n) Hz \quad (4.33)$$

c'est-à-dire :

| $f_I$ [Hz] | $f_{II}$ [Hz] |
|------------|---------------|
| 5000       | 802           |
| 15000      | 9198          |
| 25000      | 10802         |
| etc.       | 19198         |
|            | 20802         |
|            | etc.          |

Tableau 4-1 : Modes propres des deux tuyaux : deux familles de solution.

Pour obtenir les fréquences de résonance ci-dessus, on a utilisé les relations suivantes :

$$Ch(\Gamma) = \frac{e^{\Gamma} + e^{-\Gamma}}{2} \quad (4.34)$$

et :

$$Sh(\Gamma) = \frac{e^{\Gamma} - e^{-\Gamma}}{2} \quad (4.35)$$

D'un point de vue numérique on trouve les fréquences suivantes :

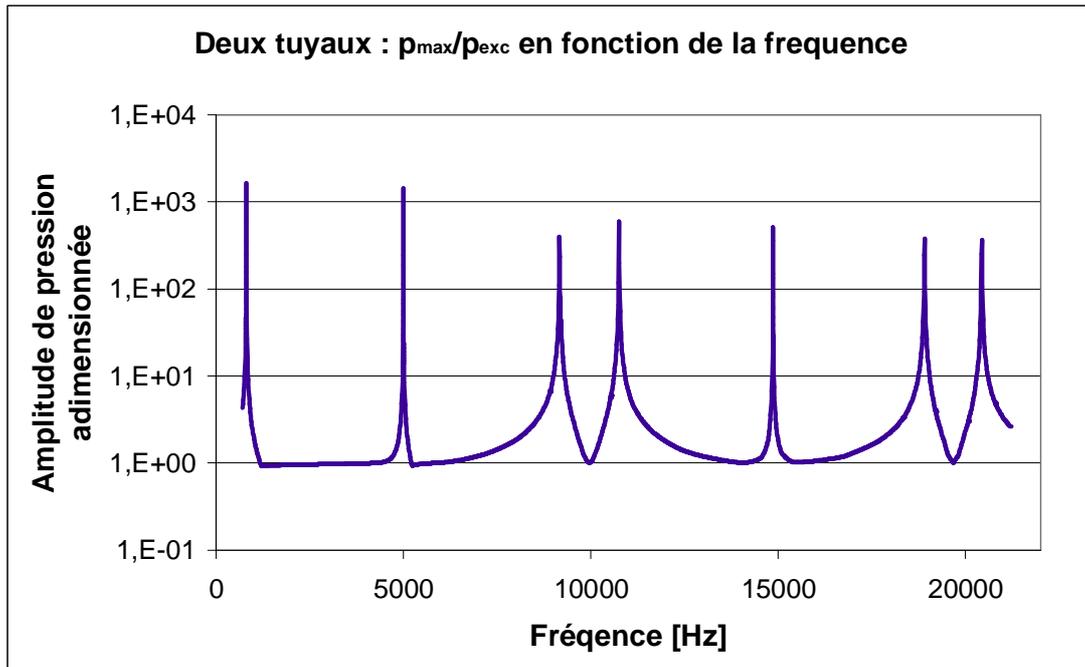


Figure 4-9 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation dans les deux tuyaux en série.

Dans la figure ci-dessus la valeur maximale de pression est adimensionnée par le module de la pression d'excitation ( $p_{exc}$ ). Les formes d'onde résonantes calculées numériquement sont les suivantes :

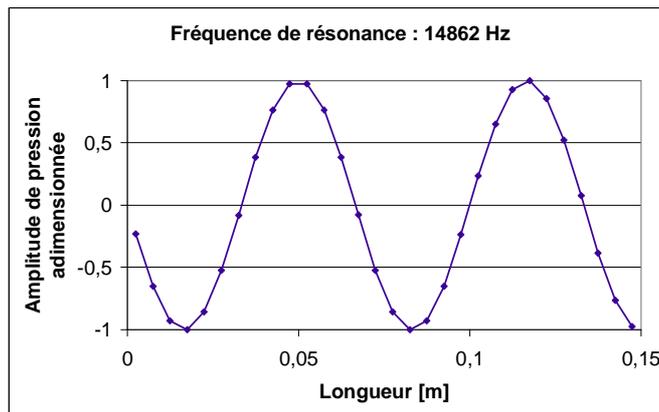
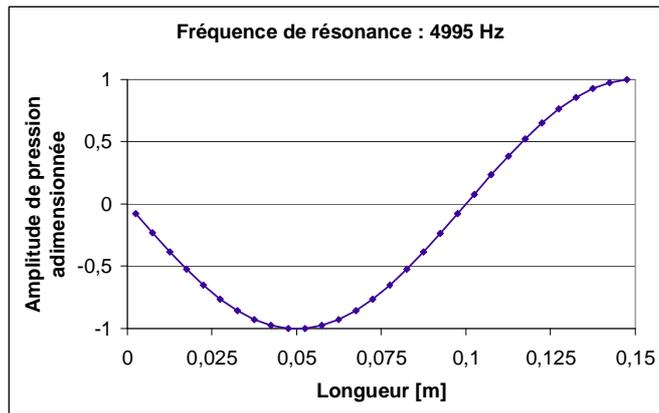


Figure 4-10 : Mode propres non - couplés.

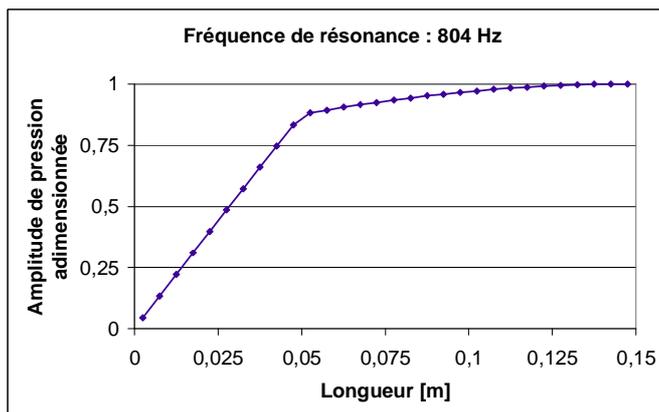


Figure 4-11 : Mode propres d'un résonateur d'Helmholtz.

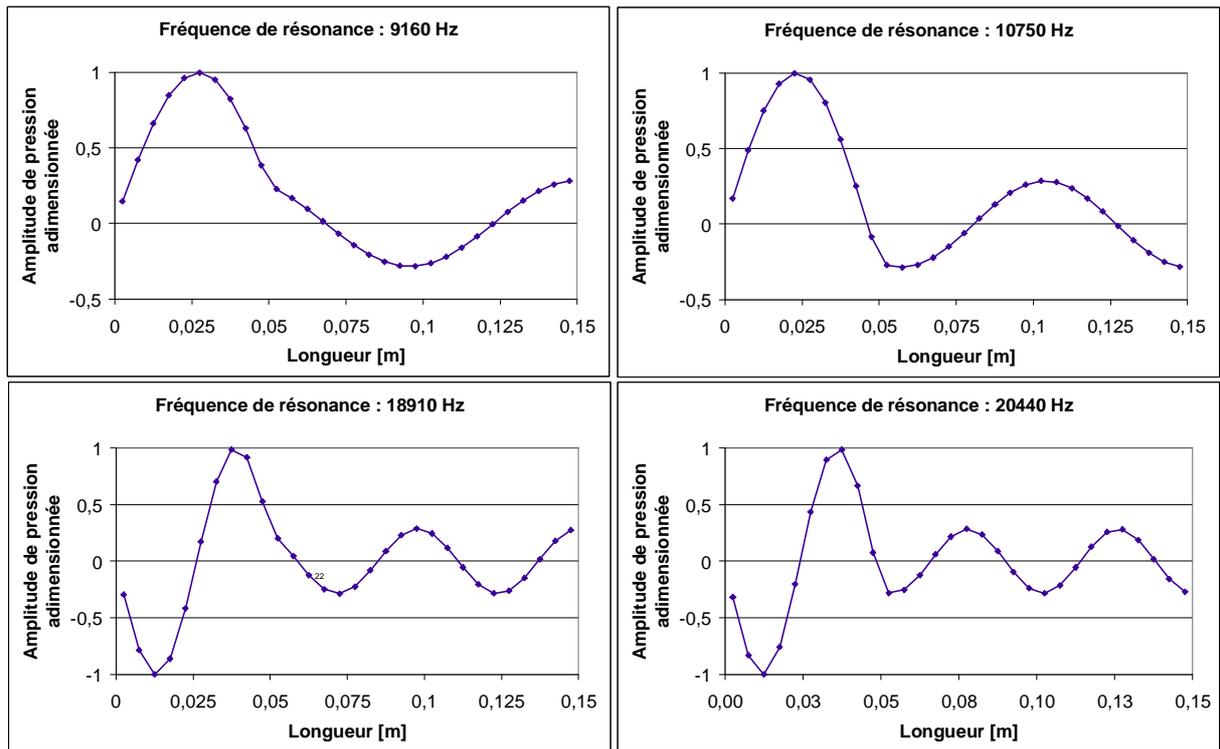


Figure 4-12 : Mode propres couplés.

Une comparaison entre les valeurs trouvées par la théorie et par le numérique est présentée dans le tableau ci-dessous :

| Théorie | Numérique | Erreur (%) |
|---------|-----------|------------|
| 802     | 804       | -0.25      |
| 5000    | 4995      | 0.10       |
| 9198    | 9160      | 0.41       |
| 10802   | 10750     | 0.48       |
| 15000   | 14862     | 0.92       |
| 19198   | 18910     | 1.50       |
| 20802   | 20440     | 1.74       |

Tableau 4-2 : Fréquences de résonance : comparaison théorie/calcul.

La première famille de solutions, donnée par (4.32), correspond à la solution du problème dans lequel la section 's' est considérée fermée (voir Figure 4-10) : le premier tuyau devient ouvert – fermé et le deuxième fermé – fermé. Dans ce cas on n'as pas des modes réellement couplés et on peut observer que l'amplitude de pression présente un point d'extremum dans la section 's' : ce comportement est typique d'une paroi fermée où la vitesse normale du débit acoustique, proportionnelle à la dérivée spatiale de la pression, vaut zéro. En considérant la deuxième famille de solutions, donnée par (4.33), on trouve un premier mode qui correspond à une résonance d'Helmholtz : la pression a un comportement presque linéaire dans le premier tuyau et présente un changement de pente en correspondance de l'entrée du deuxième (voir Figure 4-11). Les autres fréquences solution de (4.33), correspondent à des mode couplés (voir Figure 4-12) : la courbe de pression présente un zéro en proximité de la discontinuité de section (au voisinage de 'e'), et ce point est positionné entre deux extrême hors phase, typique d'une configuration où la section de passage est ouverte.

#### 4.2.4 Cas test 3 : cylindre fermé (2D)

La méthode développée initialement pour un étude monodimensionnelle, a été étendue à un problème bidimensionnel. On considère un cylindre fermé afin d'évaluer ses modes propres qui sont bien connus (voir [27]). Pour les obtenir numériquement à l'aide d'une méthode par excitation forcée, il n'est pas possible d'exciter en pression dans une cellule interne car alors on y fixe la pression et on modifie la forme du mode : on excite alors la cavité par une fluctuation en débit. D'un point de vue théorique, les fréquences propres des modes transverses sont calculées par :

$$f_{mn} = \frac{a}{2\pi} \frac{\lambda_{mn}}{R} \quad (4.36)$$

où  $a$  est la vitesse du son,  $R$  est le rayon du cylindre et  $\lambda_{mn}$  sont donnés par le tableau suivant :

| Indices des modes<br>radiaux (n) | Indices des modes tangentiels (m) |        |        |        |        |         |
|----------------------------------|-----------------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
|                                  | 0                                 | 1      | 2      | 3      | 4      | 5       |
| 0                                | 0                                 | 1.8412 | 3.0542 | 4.2012 | 5.3176 | 6.4156  |
| 1                                | 3.8317                            | 5.3314 | 6.7061 | 8.0152 | 9.2824 | 10.5199 |

Tableau 4-3 : valeur de  $\lambda_{mn}$ .

Pour simplifier l'étude des résultats, la vitesse du son dans le cylindre a été fixée à  $2 \cdot \pi \cdot 10^3$  m/s et le rayon du cylindre à 1 m : les fréquences s'expriment alors simplement par  $10^3 \cdot \lambda_{mn}$ .

Le maillage en débit sur le disque comporte: 18 secteurs et 14 lignes. La figure suivante montre la grille formée par la connexion des centres des cellules de pression.

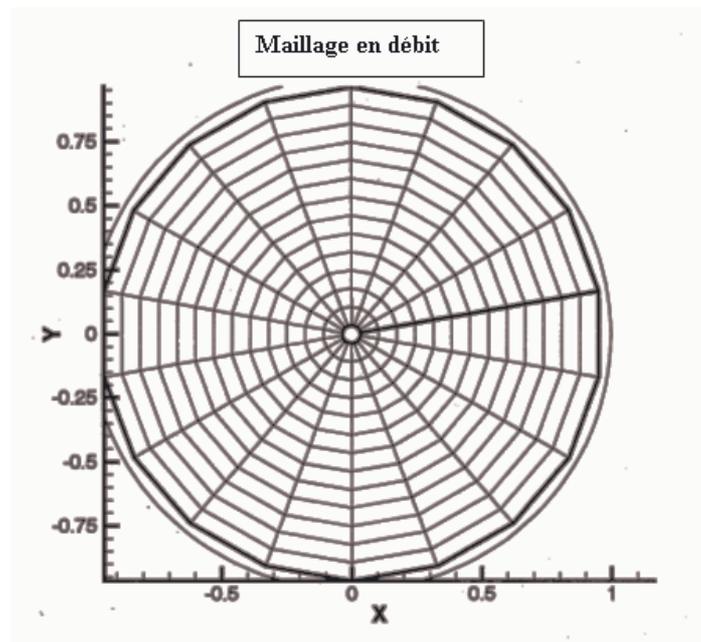


Figure 4-13 : Maillage en débit pour la validation 2D.

Les fréquences d'excitation varient entre 1000 Hz et 8000 Hz avec un pas de 50 Hz. La fréquence de résonance est obtenue avec une précision absolue de 25 Hz. La précision relative varie alors entre 2.5% et 0.3% . Les résultats du Tableau 4-4, montrent que la précision de la

fréquence dépend plus de la forme du mode plutôt que de la valeur de sa fréquence. A titre d'exemple on obtient une meilleure précision sur le mode radial R1 de fréquence 3831 *Hz* que sur le T2 de fréquence 3054 *Hz*, qui est pourtant plus faible. Ce résultat est cohérent avec la méthode choisie (à paramètres discrets), qui nous impose d'utiliser au moins 8 nœuds de pression par longueur d'onde (voir la formule (4.1)) pour obtenir des fréquences suffisamment précises : avec le maillage utilisé, le critère de la méthode est respecté pour le mode T1 (il requiert 8 éléments tangentiels), le mode R1 (il nécessite de 8 éléments radiaux), le mode T1R1 (il demande 8 éléments tangentiels et 8 éléments radiaux), et le mode T2 (qui présente deux longueurs d'onde en direction tangentielle et a besoin d'au moins 16 éléments).

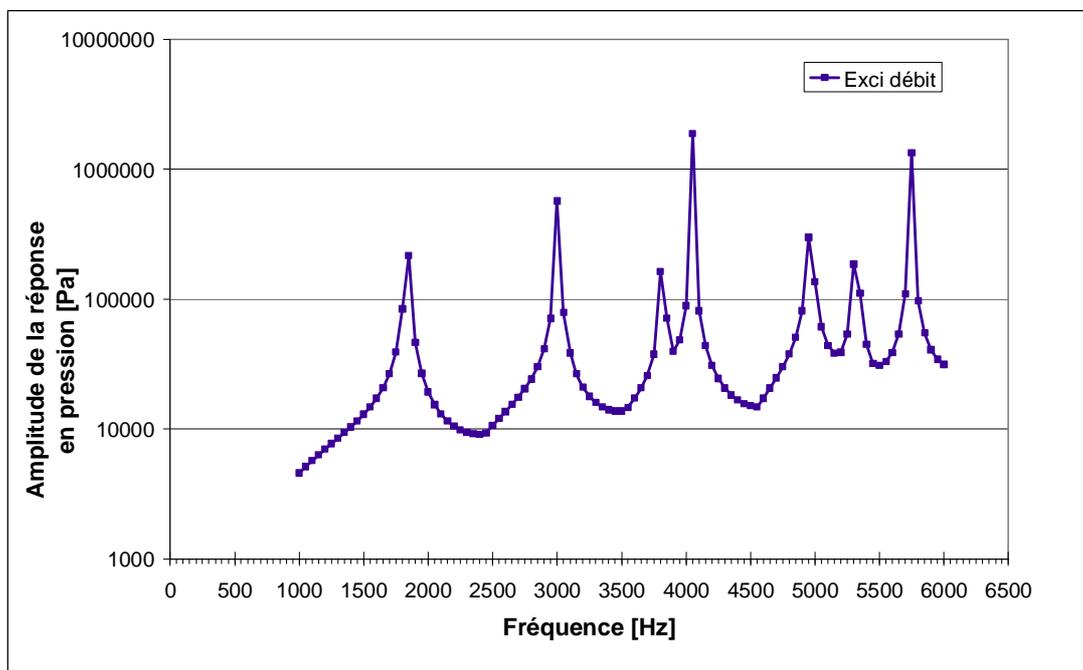


Figure 4-14 : Réponse en pression pour la validation 2D.

| Mode | Calcul | Précision | Théorie | Erreur (%) |
|------|--------|-----------|---------|------------|
| 1T   | 1850   | 1.35%     | 1841    | 0.49%      |
| 2T   | 3000   | 0.83%     | 3054    | -1.77%     |
| 3T   | 4050   | 0.62%     | 4200    | -3.57%     |
| 4T   | 4950   | 0.51%     | 5317    | -6.90%     |
| 5T   | 5750   | 0.43%     | 6415    | -10.37%    |
| 1R   | 3800   | 0.66%     | 3831    | -0.81%     |
| 1T1R | 5300   | 0.47%     | 5331    | -0.58%     |

Tableau 4-4 : Fréquences de résonance.

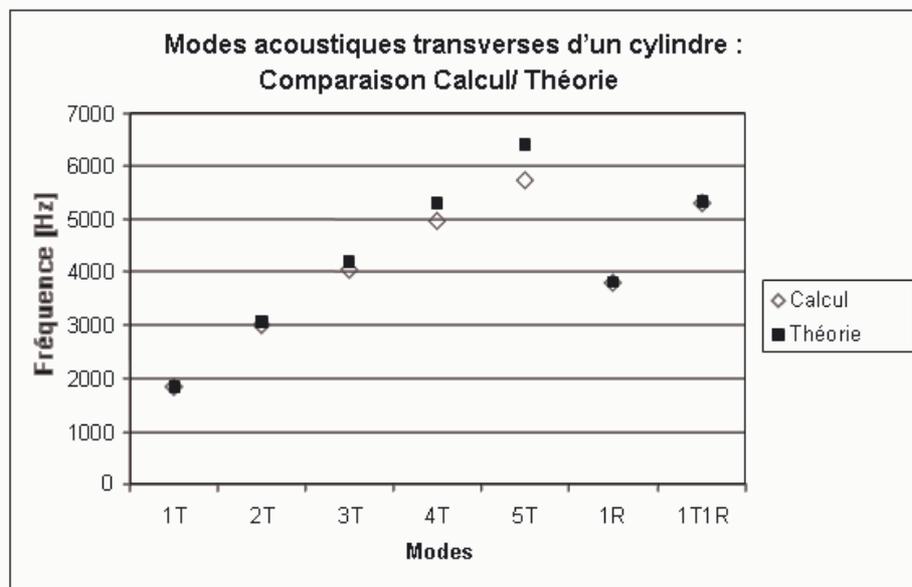


Tableau 4-5 : Comparaison Calcul/Théorie.

Les figures suivantes montrent les déformées en pression des modes du Tableau 4-5.

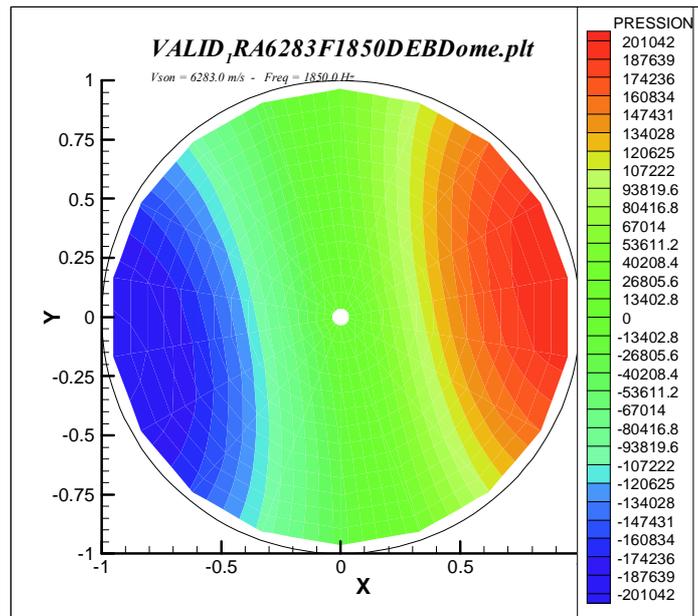


Tableau 4-6 : Mode T1.

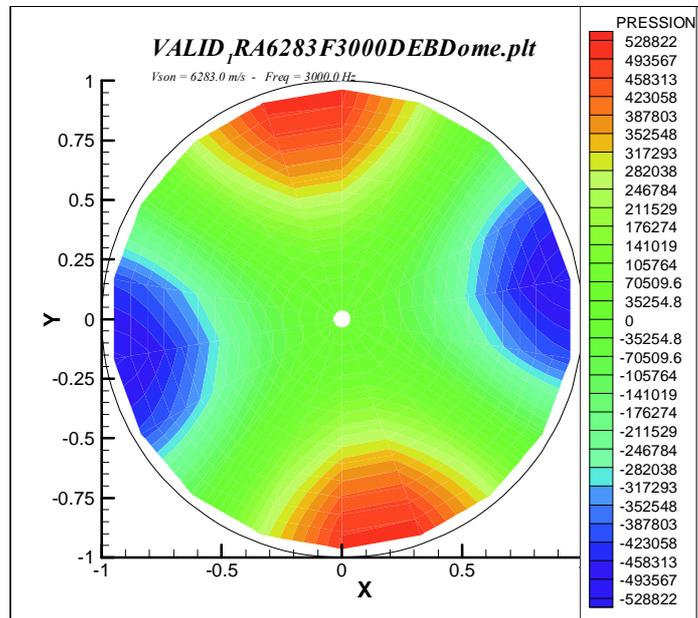


Tableau 4-7 : Mode T2.

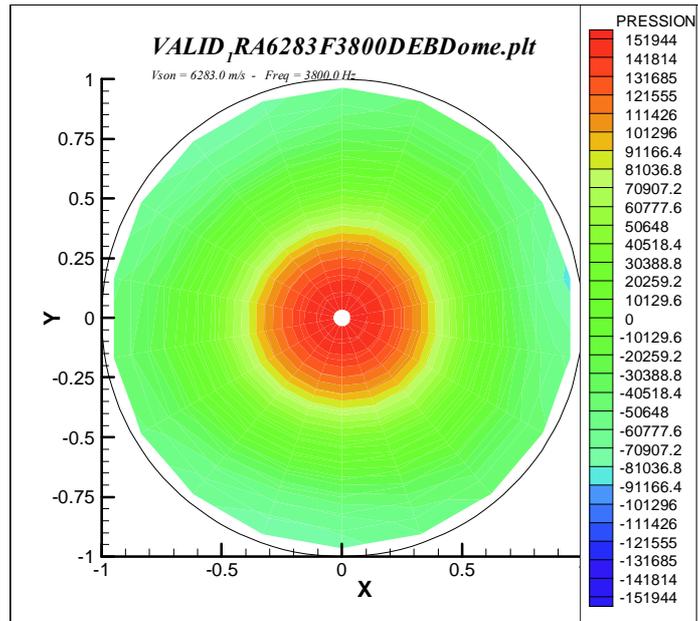


Tableau 4-8 : Mode R1.

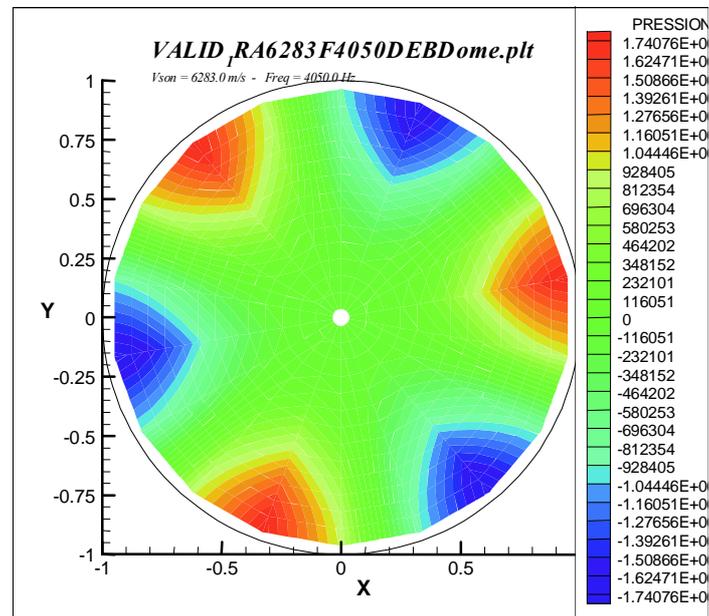


Tableau 4-9 : Mode T3.

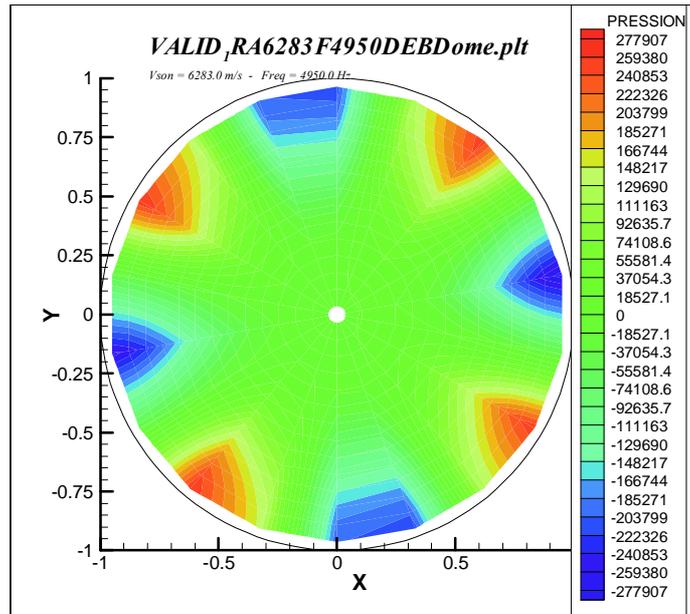


Tableau 4-10 : Mode T4.

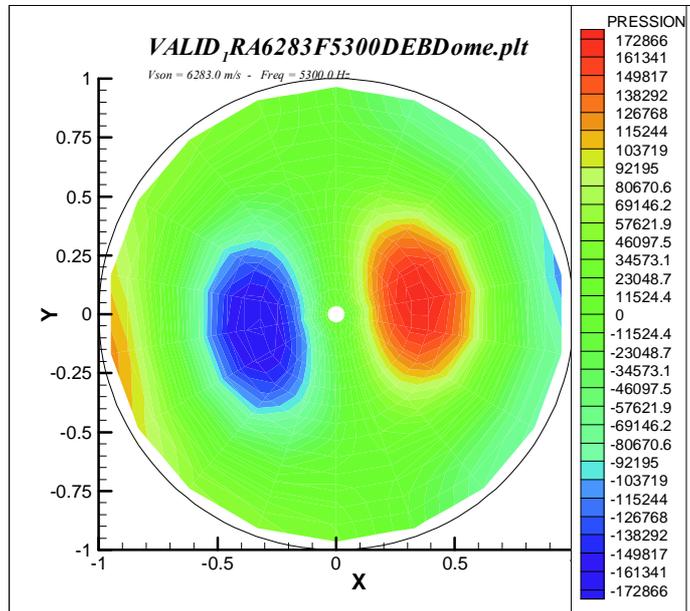


Tableau 4-11 : Mode T1R1.

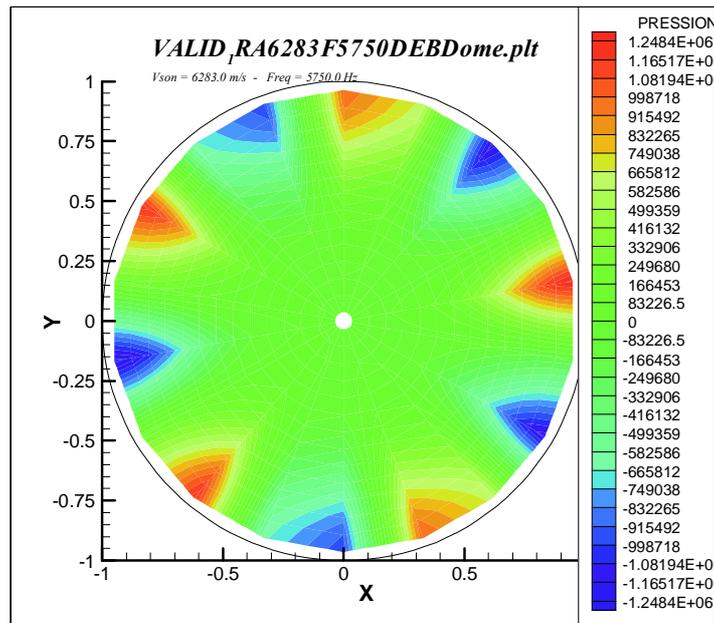


Tableau 4-12 : Mode T5.

Les résultats obtenus dans ce cas test 2D montrent, d'une part, que la méthode s'adapte à une étude bidimensionnelle et, d'autre part, que la dépendance de la précision de la réponse en pression dépend plus du numéro de l'harmonique étudiée que de la fréquence du mode.

Le système d'injection a été modélisé par la méthode à paramètres discrets : cette méthode qui n'a pas besoin d'un nombre élevé d'éléments dans la discrétisation de cavités, a montré des bons résultats dans la simulation mono – dimensionnelle d'un tuyau et d'un système d'alimentation simple. La méthode s'est bien prêtée aussi à l'étude bidimensionnelle d'un cylindre infini : cela nous confirme son applicabilité à un dôme d'un système d'alimentation d'un moteur fusée à ergols liquides. Dans le chapitre suivant on présentera la modélisation du système « chambre de combustion », nécessaire pour mener une étude couplée du système d'injection avec la chambre de combustion.

# Chapitre 5

## 5 Modèle acoustique de la chambre de combustion

Cette partie présente le modèle de chambre adopté, nécessaire pour l'étude couplée des systèmes de chambre de combustion et d'alimentation (la modélisation de ce dernier a discutée au chapitre précédent). Comme cela a été présenté en détail dans les chapitres 2 et 3, et est rappelé en

Figure 5-1, la chambre de combustion est le siège d'un nombre considérable de phénomènes. Si l'on considère un moteur de type Vulcain, utilisant deux ergols liquides, dont un est injecté gazeux, au travers d'un injecteur coaxial, chaque élément d'injection génère un jet axisymétrique diphasique qui débouche dans la chambre de combustion. A la phase d'injection suivent les processus d'atomisation, de vaporisation, de mélange et de réaction chimique : ils interagissent entre eux dans le temps et l'espace. Le résultat de cette séquence complexe est une combustion distribuée : la zone voisine de l'injection est siège de phénomènes fortement tridimensionnels et la récirculation des gaz à haute température qui s'y établit, chauffe et vaporise les gouttes formées ici, et produit leurs combustion (voir figure suivante).

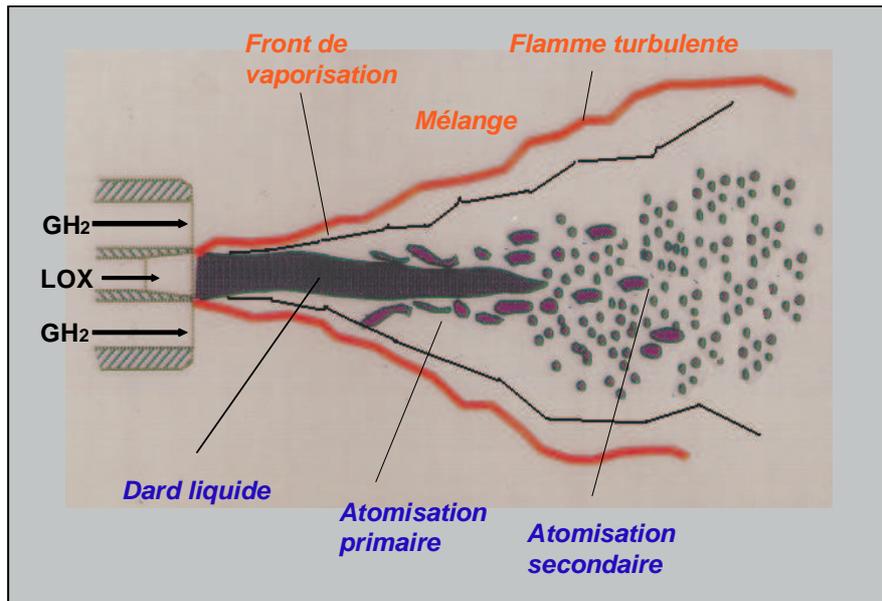


Figure 5-1 : Processus élémentaires de la combustion cryotechnique (Réf. [74]).

Les gaz formés sont constitués de combustible gazeux, de comburant gazeux et des produits de combustion. En réalité, même si la combustion apparaît distribuée, la pourcentage des ergols qui brûle est très faible jusqu'à une section que l'on appelle le front de flamme, avant laquelle on peut négliger la présence des gaz de combustion par rapport aux fractions massiques de ergols frais en phase gazeuse (on approfondira cette simplification par la suite).

Dans notre étude on traite la chambre avec une approche globale, suivant les travaux du Pr. Culick [72] qui s'appuie sur le regroupement des phases liquide et gazeuse proposé initialement par Sirignano (Réf. [19], chapitre 4.1). On considèrera un écoulement diphasique où la phase liquide sera constituée d'oxygène injecté sous forme liquide à 94 K et la phase gazeuse sera composée d'un mélange d'hydrogène (injecté sous forme gazeuse à 100 K), d'oxygène gazeux (dont la présence est due à sa vaporisation) et des produits de combustion (qu'on appelle par le suffixe '*pc*'). On écrira les équations de conservation globale pour l'écoulement considéré un seul fluide se déplaçant à la vitesse du gaz. On considèrera la vaporisation ainsi que la combustion concentrée dans le front de flamme.

## 5.1 Equations de conservation pour les phases gazeuse et liquide

### 5.1.1 Equation de bilan de masse

Afin de trouver les équations de conservation pour le mélange réactif diphasique, on commence par étudier séparément les deux phases considérées, celle gazeuse et celle liquide. L'équation de conservation de la masse pour une espèce gazeuse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_i u_j^i) = \dot{\omega}_{s_i} + \dot{\omega}_{c_i} \quad (5.1)$$

Dans l'équation (5.1) l'indice  $i$  représente les espèces gazeuses présentes dans la chambre de combustion, c'est à dire l'oxygène, l'hydrogène et les produits de combustion ;  $\dot{\omega}_{s_i}$  est l'apport de masse  $i$ , dû à la vaporisation de la même espèce présente sous forme liquide (dans le cas considéré ici, ce terme est présent seulement pour l'oxygène gazeux) ;  $\dot{\omega}_{c_i}$  est l'apport de masse de l'espèce  $i$  résultant de la combustion. La formule (5.1) écrite pour les trois espèces gazeuses devient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_{H_2}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{H_2} \mathbf{u}_{H_2}) = \dot{\omega}_c^{(H_2)} \\ \frac{\partial \rho_{O_2}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{O_2} \mathbf{u}_{O_2}) = \dot{\omega}_s + \dot{\omega}_c^{(O_2)} \\ \frac{\partial \rho_{pc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{pc} \mathbf{u}_{pc}) = \dot{\omega}_c^{(pc)} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Si on néglige la diffusion, les vitesses des espèces gazeuses sont les mêmes ( $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_g + \mathbf{V}_i \equiv \mathbf{u}_g$ ) et si on écrit l'équation de continuité pour la phase gazeuse, somme des équations du systèmes (5.2) on a :

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) = \dot{\omega}_s \quad (5.3)$$

Dans l'équation (5.3) on a :

$$\rho_g = \sum_i \rho_i = \sum_i \frac{m_i}{V_{ch}} \quad (5.4)$$

où  $i$  représente les espèces gazeuses  $H_2$ ,  $O_2$  et ' $pc$ ' et  $V_{ch}$  est le volume de la chambre de combustion. Compte tenu de l'équation (5.3) et de la définition des fractions massiques ( $Y_i = \rho_i / \rho_g$ ), on peut récrire le système (5.2) en mettant en évidence les  $Y_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_g \left[ \frac{\partial Y_{H_2}}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla Y_{H_2} \right] = \dot{\omega}_c^{(H_2)} - Y_{H_2} \dot{\omega}_s \\ \rho_g \left[ \frac{\partial Y_{O_2}}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla Y_{O_2} \right] = \dot{\omega}_s + \dot{\omega}_c^{(O_2)} - Y_{O_2} \dot{\omega}_s \\ \rho_g \left[ \frac{\partial Y_{pc}}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla Y_{pc} \right] = \dot{\omega}_c^{(pc)} - Y_{pc} \dot{\omega}_s \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Si on considère le bilan de masse pour l'espèce liquide, indicé par le suffixe  $l$ , qui correspond, dans notre cas, à l'oxygène liquide injecté, on a :

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_l) = -\dot{\omega}_s \quad (5.6)$$

Comme on peut le remarquer, la masse d'oxygène liquide vaporisée est un terme de production pour la phase gazeuse de la même espèce et un terme de disparition pour la phase liquide. Si on dit que toutes les gouttes présentes dans la chambre de combustion ont le même diamètre, alors le débit de vaporisation est lié au débit de vaporisation d'une goutte multiplié par le nombre des gouttes :

$$\dot{\omega}_s = \dot{\omega}_G n_G \quad (5.7)$$

## 5.1.2 Equation de bilan de quantité de mouvement

Pour la conservation de la quantité de mouvement de la phase gazeuse :

$$\sum_i \left[ \frac{\partial(\rho_i u_k^i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_i u_j^i u_k^i) + \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right] = \sum_i v_k^i \dot{\omega}_{si} - F_k \quad (5.8)$$

Dans l'équation (5.8) on néglige la contribution de la viscosité des fluides, afin de simplifier le problème. Parmi les termes mis en évidence, on a :

- $F_k$  , résultante des forces exercées par le gaz sur les particules liquides dans laquelle on se limite à considérer la force de traînée ( $F_{t,k}$ ) ;
- $v_k^i$  est la composante dans la direction  $k$  de la vitesse de l'espèce liquide  $i$  : pour le problème examiné, les espèces liquides présentes sont réduites à une seule, l'oxygène, dont la vitesse sera  $u_l$ .

L'équation (5.8) pour la phase gazeuse devient :

$$\sum_i \left[ \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i u_i u_i) + \nabla p_i \right] = u_i \dot{\omega}_s - F_t \quad (5.9)$$

ou également :

$$\sum_i \left[ \frac{\partial \rho_g (Y_i u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g (Y_i u_i u_i)) + \nabla p_i \right] = u_l \dot{\omega}_s - F_t \quad (5.10)$$

Comme  $u_i$  coïncide avec  $u_g$  l'équation devient :

$$\frac{\partial \rho_g u_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g u_g u_g) + \nabla p = u_l \dot{\omega}_s - F_t \quad (5.11)$$

Pour la phase liquide on a :

$$\frac{\partial \rho_l u_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l u_l u_l) = -u_l \dot{\omega}_s + F_t \quad (5.12)$$

### 5.1.3 Equation de bilan d'énergie

On examine maintenant l'équation de conservation de l'énergie pour la phase gazeuse en considérant, comme pour la masse et la quantité de mouvement, la présence d'une seule espèce liquide comme terme source de masse évaporée :

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i E_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_i E_i u_j^i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_i u_j^i) \right] \\ & + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = \dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + k_l - \frac{p}{\rho_l} \right) - F_j v_j - \varphi \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dans l'équation (5.13),  $h_v^\sigma$  est l'enthalpie de la vapeur à la surface de la goutte à la température de saturation ;  $k_l$  est l'énergie cinétique du liquide par unité de masse ( $1/2 \cdot u_l^2$ ) ;  $\varphi$  est le flux d'énergie interne échangée entre le gaz et le liquide ou bien le taux de chaleur conductif apporté par le gaz à la surface des gouttes ;  $E_i$  est l'énergie interne totale de l'espèce  $i$  :

$$E_i = e_i + \frac{1}{2} u_i^2 = e_i^0 + \int_{T_0}^T C_{v,i}(T') dT' + \frac{1}{2} u_i^2 \quad (5.14)$$

La relation (5.13) dans notre application est :

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_g \left( Y_i e_i + \frac{1}{2} Y_i u_i^2 \right) \right) \right. \\ & \left. + \nabla \cdot \left( \rho_g \left( Y_i e_i + \frac{1}{2} Y_i u_i^2 \right) \mathbf{u}_i \right) + \nabla \cdot (p_i \mathbf{u}_g) \right] \\ & = \dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + \frac{1}{2} u_i^2 - \frac{p}{\rho_l} \right) - \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}_l - \varphi \end{aligned} \quad (5.15)$$

Comme les vitesses des espèces sont les mêmes et la somme des pressions partielles nous donnent la pression du gaz, l'équation (5.15) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_g \left( e_g + \frac{1}{2} u_g^2 \right) \right) + \nabla \cdot \left( \rho_g \left( e_g + \frac{1}{2} u_g^2 \right) \mathbf{u}_g \right) \\ & + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_g) = \dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + k_l - \frac{p}{\rho_l} \right) - \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}_l - \varphi \end{aligned} \quad (5.16)$$

ou bien en simplifiant l'écriture de l'équation (4.16) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g E_g) + \nabla \cdot (\rho_g E_g \mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_g) = \dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + k_l - \frac{p}{\rho_l} \right) - \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}_l - \varphi \quad (5.17)$$

Pour la phase liquide l'équation de l'énergie est de la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l E_l) + \nabla \cdot (\rho_l E_l \mathbf{u}_l) = -\dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + k_l - \frac{p}{\rho_l} \right) + \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}_l + \varphi \quad (5.18)$$

Comme pour le gaz (voir relation (5.14)), l'énergie totale du liquide peut être décomposée en énergie interne et cinétique :

$$E_l = e_l + \frac{1}{2} u_l^2 = e_l^0 + \int_{T_0}^{T_l} C_l(T') dT' + \frac{1}{2} u_l^2 \quad (5.19)$$

et donc l'équation (5.18) peut être également écrite comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_l \left( e_l + \frac{1}{2} u_l^2 \right) \right) + \nabla \cdot \left( \rho_l \left( e_l + \frac{1}{2} u_l^2 \right) \mathbf{u}_l \right) \\ & = -\dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + k_l - \frac{p}{\rho_l} \right) + \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}_l + \varphi \end{aligned} \quad (5.20)$$

En résumé on a les équations de conservation suivantes pour la phase gazeuse :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho_g \left[ \frac{\partial Y_{H_2}}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla Y_{H_2} \right] = \dot{\omega}_c^{(H_2)} - Y_{H_2} \dot{\omega}_s \\
\rho_g \left[ \frac{\partial Y_{O_2}}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla Y_{O_2} \right] = \dot{\omega}_s + \dot{\omega}_c^{(O_2)} - Y_{O_2} \dot{\omega}_s \quad (\text{conservation masse}) \\
\rho_g \left[ \frac{\partial Y_{pc}}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla Y_{pc} \right] = \dot{\omega}_c^{(pc)} - Y_{pc} \dot{\omega}_s \\
\frac{\partial \rho_g \mathbf{u}_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g) + \nabla p = \mathbf{u}_l \dot{\omega}_s - \mathbf{F}_t \quad (\text{conservation quantité de mouvement}) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g E_g) + \nabla \cdot (\rho_g E_g \mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (p \mathbf{u}_g) = \dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + k_l - \frac{p}{\rho_l} \right) - \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}_l - \varphi \quad (\text{conservation énergie})
\end{array} \right. \quad (5.21)$$

et pour la phase liquide :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_l) = -\dot{\omega}_s \quad (\text{conservation masse}) \\
\frac{\partial \rho_l \mathbf{u}_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l) = -\mathbf{u}_l \dot{\omega}_s + \mathbf{F}_t \quad (\text{conservation quantité de mouvement}) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\rho_l E_l) + \nabla \cdot (\rho_l E_l \mathbf{u}_l) = -\dot{\omega}_s \left( h_v^\sigma + k_l - \frac{p}{\rho_l} \right) + \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}_l + \varphi \quad (\text{conservation énergie})
\end{array} \right. \quad (5.22)$$

## 5.2 Equations de conservation pour le mélange

A partir des équations de conservation trouvées pour les deux phases présentes dans notre chambre de combustion (type Vulcain), en tenant compte des influences entre eux, on écrit par la suite les équations pour le mélange gaz/liquide dans le système étudié. Le mélange, comme introduit au début du chapitre, sera considéré comme un fluide de densité égale à la somme des densités du gaz et du liquide et qui traverse la chambre à la vitesse du gaz. La conservation de la masse, tenant compte des relations (5.3) et (5.6), est :

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) + \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_l) = 0 \quad (5.23)$$

On introduit la densité du mélange :

$$\rho = \rho_g + \rho_l = \sum_i \rho_i + \rho_l = \sum_i \frac{m_i}{V_{ch}} + \frac{m_l}{V_{ch}} \quad (5.24)$$

Dans l'équation (5.24) on a considéré des densités partielles par rapport au volume total de la chambre et on a introduit une somme élargie aux espèces gazeuses présentes pendant la combustion. On peut manipuler l'équation (5.23) en utilisant la relation entre les densités, donnée par (5.24). En ajoutant d'un côté le terme  $\pm \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_g)$  au premier terme de divergence et en le retranchant du second terme de divergence on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_g) = \mathcal{W} \quad (5.25)$$

en sachant que dans l'expression (5.25),  $\mathcal{W} = -\nabla \cdot (\rho_l (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g))$  est le terme source de masse du mélange diphasique. Pour l'équation de conservation du mouvement on additionne les deux équations (5.11) et (5.12) :

$$\frac{\partial \rho_g \mathbf{u}_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l \mathbf{u}_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g + \rho_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l) + \nabla p = 0 \quad (5.26)$$

En considérant les équations de continuité (5.3) et (5.6) :

$$\rho_g \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] + \rho_l \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l \right] + \nabla p = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) \quad (5.27)$$

si on considère l'équation de conservation de la quantité du mouvement pour la phase liquide, (5.12), on a :

$$\mathbf{F}_l = \rho_l \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l \right] \quad (5.28)$$

et donc l'équation (5.27) peut être écrite en ,en mettant en évidence la force de traînée :

$$\rho_g \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] + \nabla p = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) - \mathbf{F}_t \quad (5.29)$$

Si on veut adapter la relation (5.29) au mélange liquide/gaz, on introduit, comme précédemment ; les termes  $\pm \rho_l (\partial \mathbf{u}_g / \partial t + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g)$  et on obtient :

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] + \nabla p \\ & = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) - \mathbf{F}_t + \rho_l \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

A partir de la relation (5.28), on peut introduire, dans l'équation de conservation du mouvement, l'interaction entre la phase gazeuse et la phase condensée, donnée par :

$$\delta \mathbf{F}_t = \rho_l \left\{ \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l \right] - \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] \right\} \quad (5.31)$$

L'équation (5.30) peut être alors écrite comme :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] + \nabla p = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) - \delta \mathbf{F}_t \quad (5.32)$$

On simplifie l'écriture, en regroupant dans un terme source l'interaction entre les deux phases :

$$\mathcal{F} = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) - \delta \mathbf{F}_t \quad (5.33)$$

l'équation (5.32) devient :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] + \nabla p = \mathcal{F} \quad (5.34)$$

On écrit l'équation de l'énergie du mélange à partir des expressions (5.16) et (5.20), qui sont respectivement l'équation de l'énergie de la phase gazeuse et de la phase liquide :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_g \left( e_g + \frac{1}{2} u_g^2 \right) \right) + \nabla \cdot \left( \rho_g \left( e_g + \frac{1}{2} u_g^2 \right) \mathbf{u}_g \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_l \left( e_l + \frac{1}{2} u_l^2 \right) \right) + \nabla \cdot \left( \rho_l \left( e_l + \frac{1}{2} u_l^2 \right) \mathbf{u}_l \right) + \nabla \cdot (p \mathbf{u}_g) = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

L'énergie interne totale de chaque espèce présente dans la chambre sous forme gazeuse est donnée par la relation (5.14), ce qui nous permet de réécrire (5.35) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g E_g) + \nabla \cdot (\rho_g E_g \mathbf{u}_g) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l E_l) + \nabla \cdot (\rho_l E_l \mathbf{u}_l) + \nabla \cdot (p \mathbf{u}_g) = 0 \quad (5.36)$$

On introduit par la suite la notation de dérivée totale monodimensionnelle pour la phase gazeuse,  $D/Dt_{/g} = \partial/\partial t + \mathbf{u}_g \cdot \nabla$ , et pour la phase liquide,  $D/Dt_{/l} = \partial/\partial t + \mathbf{u}_l \cdot \nabla$ , afin de compacter l'écriture de l'équation (5.36) :

$$\rho_g \frac{DE_g}{Dt_{/g}} + \rho_l \frac{DE_l}{Dt_{/l}} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}_g) + E_g \dot{\omega}_s - E_l \dot{\omega}_s = 0 \quad (5.37)$$

Sachant que l'énergie interne des deux phases est donnée par la somme de l'énergie de formation, de l'énergie sensible et de l'énergie cinétique ( $E = e^0 + e^{(T)} + 1/2 \cdot u^2$ ) ; pour la phase gazeuse l'énergie de formation et l'énergie sensible sont :

$$e_g^0 = \sum_i Y_i e_i^0 = Y_{H_2} e_{H_2}^0 + Y_{O_2} e_{O_2}^0 + Y_{pc} e_{pc}^0 \quad (5.38)$$

et :

$$e_g^{(T)} = \sum_i Y_i e_i^{(T)} = Y_{H_2} \int_{T_0}^T C_{v,H_2}(T') dT' + Y_{O_2} \int_{T_0}^T C_{v,O_2}(T') dT' + Y_{pc} \int_{T_0}^T C_{v,pc}(T') dT' \quad (5.39)$$

Pour la phase liquide l'énergie totale est donnée par l'expression (5.19). On peut alors manipuler l'expression (5.37), comme suit :

$$\begin{aligned}
& \rho_g \sum_i e_i^0 \frac{DY_i}{Dt_{/g}} + \rho_g \frac{De_g^{(T)}}{Dt_{/g}} + \rho_g \mathbf{u}_g \cdot \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt_{/g}} \\
& + \rho_l \frac{De_l^{(T)}}{Dt_{/l}} + \rho_l \mathbf{u}_l \cdot \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt_{/l}} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}_g) + E_g \dot{\omega}_s - E_l \dot{\omega}_s = 0
\end{aligned} \tag{5.40}$$

et par les relations (5.5), (5.28), (5.29) et (5.39), on a :

$$\begin{aligned}
& e_{H_2}^0 (\dot{\omega}_c^{(H_2)} - Y_{H_2} \dot{\omega}_s) + e_{O_2}^0 (\dot{\omega}_c^{(O_2)} + \dot{\omega}_s - Y_{O_2} \dot{\omega}_s) + e_{pc}^0 (\dot{\omega}_c^{(pc)} - Y_{pc} \dot{\omega}_s) \\
& + \rho_g \frac{D}{Dt_{/g}} \left( \sum_i Y_i \int_{T_0}^T C_{v,i}(T') dT' \right) + \mathbf{u}_g \cdot (-\nabla p + \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) - \mathbf{F}_t) \\
& + \nabla \cdot (p\mathbf{u}_g) = \dot{\omega}_s (E_l - E_g) - \rho_l \frac{De_l^{(T)}}{Dt_{/l}} - \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{F}_t
\end{aligned} \tag{5.41}$$

On définit le terme de chaleur de réaction dû à la contribution des énergies internes de référence :

$$Q_c^0 = -\left( e_{H_2}^0 \dot{\omega}_c^{(H_2)} + e_{O_2}^0 \dot{\omega}_c^{(O_2)} + e_{pc}^0 \dot{\omega}_c^{(pc)} \right) \tag{5.42}$$

On reprend l'équation (5.41), on introduit la définition de chaleur de réaction ci-dessus, on utilise la définition d'énergie de formation pour le gaz, donnée par la relation (5.38), et on applique la définition de dérivée totale de fonctions composées et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \rho_g \sum_i \left[ \int_{T_0}^T C_{v,i}(T') dT' \frac{DY_i}{Dt_{/g}} + Y_i \frac{D}{Dt_{/g}} \int_{T_0}^T C_{v,i}(T') dT' \right] \\
& + p \nabla \cdot \mathbf{u}_g = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{u}_g + (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{F}_t + \dot{\omega}_s (E_l - E_g) \\
& + Q_c^0 + \dot{\omega}_s (e_g^0 - e_{O_2}^0) - \rho_l \frac{D}{Dt_{/l}} \int_{T_0}^{T_l} C_l(T'_l) dT'_l
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Si on développe la somme apparaissant au premier terme de (5.43), en utilisant les relations données par le système (5.5) et si on considère le fait que la chaleur spécifique à volume constant dépend de la température et que cette dernière dépend du temps et de la position dans la chambre de combustion, alors :

$$\begin{aligned}
& (\dot{\omega}_c^{(H_2)} - Y_{H_2} \dot{\omega}_s) \int_{T_0}^T C_{v,H_2}(T') dT' + (\dot{\omega}_c^{(O_2)} + \dot{\omega}_s - Y_{O_2} \dot{\omega}_s) \int_{T_0}^T C_{v,O_2}(T') dT' \\
& + (\dot{\omega}_c^{(pc)} - Y_{pc} \dot{\omega}_s) \int_{T_0}^T C_{v,pc}(T') dT' + p \nabla \cdot \mathbf{u}_g \\
& + \rho_g \sum_i \left\{ Y_i \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \int_{T_0}^T C_{v,i}(T') dT' \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left( \int_{T_0}^T C_{v,i}(T') dT' \right) \nabla T \right] \right\} \\
& = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{u}_g + (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{F}_t + \dot{\omega}_s (E_l - E_g) + Q_c^0 + \dot{\omega}_s (e_g^0 - e_{O_2}^0) \\
& - \rho_l \left[ \frac{\partial}{\partial T_l} \left( \int_{T_0}^{T_l} C_l(T_l') dT_l' \right) \frac{\partial T_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \frac{\partial}{\partial T_l} \left( \int_{T_0}^{T_l} C_l(T_l') dT_l' \right) \nabla T_l \right]
\end{aligned} \tag{5.44}$$

On introduit la définition de la chaleur de réaction effective du mélange :

$$Q_c = Q_c^0 - (e_{H_2}^{(T)} \dot{\omega}_c^{(H_2)} + e_{O_2}^{(T)} \dot{\omega}_c^{(O_2)} + e_{pc}^{(T)} \dot{\omega}_c^{(pc)}) = - \sum_i e_i \dot{\omega}_c^{(i)} \tag{5.45}$$

En tenant compte des relations (5.38) et (5.45), l'équation de l'énergie, (5.44), devient :

$$\begin{aligned}
& \dot{\omega}_s e_{O_2}^{(T)} - \dot{\omega}_s e_g^{(T)} + \rho_g \frac{DT}{Dt_{/g}} \sum_i (Y_i C_{v,i}) + p \nabla \cdot \mathbf{u}_g = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{u}_g \\
& + (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{F}_t + \dot{\omega}_s (E_l - E_g) + Q_c + \dot{\omega}_s (e_g^0 - e_{O_2}^0) - \rho_l C_l \frac{DT_l}{Dt_{/l}}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

On définit la chaleur spécifique à volume constant pour le mélange gaz/liquide, par la formule barycentrique suivante :

$$\mathbf{C}_v = \frac{\rho_g \mathbf{C}_v + \rho_l \mathbf{C}_l}{\rho_g + \rho_l} \tag{5.47}$$

en sachant que pour la phase gazeuse, la chaleur volumique est donnée par la formule barycentrique appliquée aux chaleurs volumiques des espèces gazeuses présentes dans le mélange :

$$C_v = \sum_i (Y_i C_{v,i}) \tag{5.48}$$

On introduit le terme de chaleur échangée entre les deux phases :

$$\delta Q_l = -\rho_l C_l \left[ \frac{DT_l}{Dt_{/l}} - \frac{DT}{Dt_{/g}} \right] \quad (5.49)$$

et la force exercée par le gaz présent dans la chambre de combustion sur le liquide vaporisé :

$$\sigma = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \quad (5.50)$$

On simplifie la notation pour représenter les différences de vitesses et d'énergies entre les phases :  $\delta \mathbf{u}_l = \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g$  ;  $\delta E_l = E_l - E_g$ . On tient compte des relations (5.47), (5.48), (5.49) et (5.50), on ajoute  $\pm \rho_l C_l DT/Dt_{/g}$  afin de faire apparaître la masse volumique du mélange et on réécrit l'équation (5.46) :

$$\begin{aligned} \rho C_v \frac{DT}{Dt_{/g}} + p \nabla \cdot \mathbf{u}_g &= \sigma \cdot \mathbf{u}_g - \delta \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{F}_l \\ &+ \dot{\omega}_s \delta E_l + \dot{\omega}_s (e_g - e_{O_2}) + Q_c + \delta Q_l \end{aligned} \quad (5.51)$$

Afin de simplifier l'écriture de l'équation (5.51), on peut réunir les termes sources de l'équation :

$$\mathcal{Q} = \sigma \cdot \mathbf{u}_g - \delta \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{F}_l + \dot{\omega}_s \delta E_l + \dot{\omega}_s (e_g - e_{O_2}) + Q_c + \delta Q_l \quad (5.52)$$

La nouvelle variable ainsi introduite contient les termes dus à l'interaction du gaz avec les particules et leurs vapeurs, ainsi que le terme source dû à la combustion. On réécrit l'équation (5.51) comme :

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt_{/g}} + p \nabla \cdot \mathbf{u}_g = \mathcal{Q} \quad (5.53)$$

En résumé, les équations de conservation pour le mélange réactif diphasique considéré, sont :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_g) = \mathcal{W} & \text{(conservation masse)} \\
\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g \right] + \nabla p = \mathcal{F} & \text{(conservation quantité de mouvement)} \\
\rho C_v \frac{DT}{Dt_{/g}} + p \nabla \cdot \mathbf{u}_g = \mathcal{Q} & \text{(conservation énergie)}
\end{cases} \quad (5.54)$$

avec les termes sources définis comme suit :

$$\begin{cases}
\mathcal{W} = -\nabla \cdot (\rho_l (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g)) \\
\mathcal{F} = \dot{\omega}_s (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) - \delta \mathbf{F}_t \\
\mathcal{Q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_g - \delta \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{F}_l + \dot{\omega}_s \delta E_l + \dot{\omega}_s (e_g - e_{O_2}) + \mathcal{Q}_c + \delta \mathcal{Q}_l
\end{cases} \quad (5.55)$$

### 5.3 Equation de la pression pour le mélange

Comme on aura besoin d'étudier l'acoustique du système, il est important de disposer de l'équation de la pression à la place de celle de l'énergie. Pour parvenir à l'équation d'évolution de la pression pour le mélange, on combine l'équation de conservation de l'énergie et l'équation de conservation de la masse du système (5.54). On fait la somme de la première divisée par la chaleur spécifique à volume constant du mélange,  $C_v$ , et de la deuxième multipliée pour la température du gaz,  $T$  :

$$\rho \frac{DT}{Dt_{/g}} + \left( \frac{p}{C_v} + T\rho \right) \nabla \cdot \mathbf{u}_g - \frac{\mathcal{Q}}{C_v} + T \frac{\partial \rho}{\partial t} + T \mathbf{u}_g \cdot \nabla \rho - T \mathcal{W} = 0 \quad (5.56)$$

ou bien :

$$\frac{D(\rho T)}{Dt_{/g}} + \left( \frac{p}{C_v} + T\rho \right) \nabla \cdot \mathbf{u}_g - \frac{\mathcal{Q}}{C_v} - T \mathcal{W} = 0 \quad (5.57)$$

On définit la constante massique pour la phase gazeuse :

$$r_g = \sum_i Y_i r_i = \sum_i \frac{Y_i}{M_i} \mathfrak{R} \quad (5.58)$$

ainsi que l'équation des gaz parfaits :

$$p = \rho_g r_g T \quad (5.59)$$

On considère l'expression entre parenthèse de l'équation (5.57) et on tient compte de la relation (5.59) :

$$\frac{p}{C_v} + T\rho = T \frac{\rho_g r_g + (\rho_g C_v + \rho_l C_l)}{C_v} = T \frac{\rho_g C_p + \rho_l C_l}{C_v} = \rho T \frac{C_p}{C_v} = \rho T \gamma \quad (5.60)$$

ci-dessus on a introduit la chaleur spécifique à pression constante pour le mélange :

$$C_p = \frac{\rho_g C_p + \rho_l C_l}{\rho_g + \rho_l} \quad (5.61)$$

où comme pour la chaleur spécifique à volume constant de la phase gazeuse, on a :

$$C_p = \sum_i (Y_i C_{p,i}) \quad (5.62)$$

Dans (5.60) on a défini également le gamma du mélange gaz/liquide :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (5.63)$$

Comme on a introduit les  $C_p$  et  $C_v$  pour le mélange, on peut également définir leur différence de la façon suivante :

$$C_p - C_v = \frac{\rho_g C_p + \rho_l C_l - (\rho_g C_v + \rho_l C_l)}{\rho} = \frac{\rho_g C_p - \rho_g C_v}{\rho} = \frac{\rho_g}{\rho} r_g = r \quad (5.64)$$

et donc l'expression (5.60) peut être écrite en fonction de la constante des gaz pour le mélange définie ci-dessus (la loi d'état pour le mélange peut être écrite comme :  $p = \rho \mathcal{R} T$ ) :

$$\rho T \gamma = \rho T \frac{\rho_g r_g}{\rho_g r_g} \gamma = \frac{p}{\mathcal{R}} \gamma \quad (5.65)$$

L'équation (5.57), peut être manipulée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt_{/g}} \left( \frac{p}{\mathcal{R}} \right) + \left( \frac{p}{\mathcal{R}} \gamma \right) \nabla \cdot \mathbf{u}_g - \frac{\mathcal{Q}}{C_v} - T \mathcal{W} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{Dp}{Dt_{/g}} - p \frac{D}{Dt_{/g}} \ln(\mathcal{R}) + (p \gamma) \nabla \cdot \mathbf{u}_g &= (\gamma - 1) \mathcal{Q} + T \mathcal{W} \mathcal{R} \end{aligned} \quad (5.66)$$

ou bien, en introduisant le terme source :

$$\frac{dp}{dt_{/g}} + p \gamma \nabla \cdot \mathbf{u}_g = \mathcal{P} \quad (5.67)$$

Dans l'équation (5.67)  $\mathcal{P}$  contient les termes sources incluant les effets de la chaleur dus à la combustion, et les interactions entre les phases condensée et gazeuse :

$$\mathcal{P} = (\gamma - 1) \mathcal{Q} + p \frac{D}{Dt_{/g}} \ln(\mathcal{R}) + T \mathcal{W} \mathcal{R} \quad (5.68)$$

L'équation (5.67) permet de remplacer l'équation de l'énergie par la pression de la chambre de combustion et cela pour un modèle mono-fluide d'un écoulement diphasique réactif.

## 5.4 Equation des ondes

### 5.4.1 Cas général avec prise en compte de tous les termes source

Pour étudier la stabilité des mouvements oscillatoires, en termes de fluctuations de pression, dans la chambre, on a besoin de linéariser jusqu'au premier ordre les équations de conservation obtenues aux paragraphes précédents, en prenant l'équation (5.67) comme équation de l'énergie. On exprime toute grandeur  $y$  sous la forme d'une somme d'un terme moyen en temps avec un terme fluctuant :

$$y = \bar{y}(\mathbf{x}) + y'(\mathbf{x}, t) \quad (5.69)$$

et on considère, d'une part, les petites amplitudes des mouvements de l'écoulement et, d'autre part, un écoulement moyen à faible nombre de Mach ( $\bar{M}^2 \ll 1$ ). Les équations de conservation d'ordre zéro deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}_g) = \bar{\mathcal{W}} \\ \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \nabla \bar{p} = \bar{\mathcal{F}} \\ \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{p} + \bar{\gamma} \bar{p} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g = \bar{\mathcal{P}} \end{array} \right. \quad (5.70)$$

A l'ordre un, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\rho} \mathbf{u}'_g) = \mathcal{W}' \quad (5.71)$$

celle de conservation de la quantité de mouvement est :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'_g}{\partial t} + \rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\rho} \mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g + \nabla p' = \mathcal{F}' \quad (5.72)$$

Elle peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'_g}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g) - \frac{1}{\bar{\rho}} (\nabla p' - \mathcal{F}') \quad (5.73)$$

L'équation de la pression à l'ordre un :

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla p' + \mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{p} + \bar{p} \bar{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{u}'_g + p' \bar{\gamma} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{p} \gamma' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g = \mathcal{P}' \quad (5.74)$$

Afin d'obtenir l'équation des ondes on dérive par rapport au temps l'équation (5.74) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p') + \frac{\partial \mathbf{u}'_g}{\partial t} \cdot \nabla \bar{p} + \bar{p} \bar{\gamma} \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}'_g}{\partial t} \right) \\ + \frac{\partial p'}{\partial t} \bar{\gamma} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{p} \frac{\partial \gamma'}{\partial t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g = \frac{\partial \mathcal{P}'}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.75)$$

On fait la substitution de l'équation (5.73) dans l'équation (5.75) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p') + \nabla \bar{p} \cdot \left[ -\frac{1}{\bar{\rho}} (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \nabla p' - \mathcal{F}') - (\mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g) \right] \\ + \bar{p} \bar{\gamma} \nabla \cdot \left[ -\frac{1}{\bar{\rho}} (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \nabla p' - \mathcal{F}') - (\mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g) \right] \\ + \frac{\partial p'}{\partial t} \bar{\gamma} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{p} \frac{\partial \gamma'}{\partial t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g = \frac{\partial \mathcal{P}'}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.76)$$

en définissant la vitesse du son pour le mélange gaz/liquide, qu'on considérera indépendant de la position :

$$\bar{a}^2 = \bar{\gamma} \bar{r} \bar{T} \quad (5.77)$$

En tenant compte de la relation suivante :

$$\begin{aligned} \bar{p} \bar{\gamma} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = -\frac{\bar{\rho}_g \bar{r}_g \bar{T}}{\bar{\rho}} \bar{\gamma} \nabla (\ln \bar{\rho}) \cdot \nabla p' \\ + \frac{\bar{\rho}_g \bar{r}_g \bar{T}}{\bar{\rho}} \bar{\gamma} \nabla^2 p' = -\bar{a}^2 \nabla (\ln \bar{\rho}) \cdot \nabla p' + \bar{a}^2 \nabla^2 p' \end{aligned} \quad (5.78)$$

pour un des termes qui apparaît dans l'équation (5.76) on peut alors la récrire :

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = h \quad (5.79)$$

où :

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{\bar{a}^2} \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \left( \frac{\partial p'}{\partial t} \right) - \frac{1}{\bar{a}^2} \nabla \bar{p} \cdot \left[ \frac{1}{\bar{\rho}} (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \nabla p' - \mathcal{F}') + (\mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g) \right] \\ & + \nabla(\ln \bar{\rho}) \cdot (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g - \mathcal{F}') - \nabla \cdot (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g - \mathcal{F}') - \bar{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g) \quad (5.80) \\ & + \nabla(\ln \bar{\rho}) \cdot \nabla p' + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{a}^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g + \frac{\bar{p}}{\bar{a}^2} \frac{\partial \bar{\gamma}'}{\partial t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g - \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial \mathcal{P}'}{\partial t} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont données par la composante normale au volume de contrôle du gradient de pression, qu'on obtient en prenant le produit scalaire de l'équation de conservation du mouvement (5.73) avec le vecteur normal  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = -f \quad (5.81)$$

le terme  $f$  est de la forme suivante :

$$f = \mathbf{n} \cdot \left[ (\rho' \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g) + \bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{u}'_g}{\partial t} + \mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g \right) - \mathcal{F}' \right] \quad (5.82)$$

On fait des hypothèses sur le mélange présent dans la chambre, afin de simplifier l'équation des ondes :  $\bar{p}$ ,  $\bar{\rho}$  indépendants de la position, ce qui est plus ou moins vrai dans la réalité car ces valeurs ne change pas beaucoup dans la chambre (jusqu'à l'entrée du convergent). On rappelle aussi qu'on a fait l'hypothèse que la vitesse de l'écoulement moyen est faible, ce qui se traduit la suppression des termes de l'ordre de la fluctuation d'une variable fois le carré de la vitesse moyenne ( $\propto (\bar{\mathbf{u}}_g)^2$ ). L'expression (5.80) qui est le terme de droite de l'équation des ondes, devient alors :

$$\begin{aligned}
h = & \frac{1}{\bar{a}^2} \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \left( \frac{\partial p'}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \mathcal{F}' - \bar{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{u}'_g \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_g + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \mathbf{u}'_g) \\
& + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{a}^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_g + \frac{\bar{p}}{\bar{a}^2} \frac{\partial \bar{\gamma}'}{\partial t} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_g}{\partial x} - \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial \mathcal{P}'}{\partial t}
\end{aligned} \quad (5.83)$$

On fait l'hypothèse que les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant, sont invariantes ( $C_{p,H_2} = C_{p,O_2} = C_{p,pc} = \tilde{C}_p = \text{cst.}$ ,  $C_{v,H_2} = C_{v,O_2} = C_{v,pc} = \tilde{C}_v = \text{cst.}$ ) et on considère négligeables les fluctuations de masse volumique du liquide ( $\rho'_l = 0$ ). Les fluctuations des termes sources dans l'expression (5.83) sont obtenues en linéarisant les expressions (5.33) et (5.68) :

$$\mathcal{F}' = \bar{\omega}_s \delta \mathbf{u}'_l + \omega'_s \delta \bar{\mathbf{u}}_l - \delta \mathbf{F}'_l \quad (5.84)$$

$$\mathcal{P}' = \bar{\gamma}' \bar{Q} + (\bar{\gamma} - 1) \bar{Q}' + \bar{p} \frac{\bar{D}}{Dt_{/g}} \ln(\mathbf{r}') + \bar{T} \bar{\mathcal{W}} \mathbf{r}' + \bar{T} \mathcal{W}' \bar{\mathbf{r}} + T' \bar{\mathcal{W}} \bar{\mathbf{r}} \quad (5.85)$$

dans l'expression (5.84), la fluctuation de la force d'interaction entre les phases gaz et liquide,  $\delta \mathbf{F}'_l$ , est :

$$\delta \mathbf{F}'_l = \bar{\rho}_l \left( \frac{\partial \mathbf{u}'_l}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}_l \frac{\partial \mathbf{u}'_l}{\partial x} + \mathbf{u}'_l \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_l}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}'_g}{\partial t} - \bar{\mathbf{u}}_g \frac{\partial \mathbf{u}'_g}{\partial x} - \mathbf{u}'_g \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_g}{\partial x} \right) \quad (5.86)$$

Dans la relation (5.85), on a introduit la dérivée totale basée sur la vitesse moyenne du gaz  $\left( \frac{\bar{D}}{Dt_{/g}} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}_g \cdot \nabla \right)$ . Egalement dans l'équation (5.85), la partie moyenne et la partie fluctuante du rapport des chaleurs spécifiques du mélange,  $\bar{\gamma}$ , après linéarisation de la relation (5.63), ont la forme suivante :

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{\rho}_g \tilde{C}_p + \bar{\rho}_l C_l}{\bar{\rho}_g \tilde{C}_v + \bar{\rho}_l C_l} \quad (5.87)$$

et

$$\mathbf{Y}' = \frac{\bar{\rho}_l C_l (\tilde{C}_p - \tilde{C}_v)}{(\bar{\rho}_g \tilde{C}_v + \bar{\rho}_l C_l)^2} \rho'_g = \frac{\bar{\rho}_l C_l r_g}{(\bar{\rho}_g \tilde{C}_v + \bar{\rho}_l C_l)^2} \rho'_g \quad (5.88)$$

Concernant la source d'énergie due à la présence des deux phases qui interagissent, donnée par (5.52), la partie moyenne et la partie fluctuante sont :

$$\bar{Q} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}}_g - \delta \bar{\mathbf{u}}_l \cdot \bar{\mathbf{F}}_l + \bar{\omega}_s \delta \bar{E}_l + \bar{\omega}_s (\bar{e}_g - \bar{e}_{o_2}) + \bar{Q}_c + \delta \bar{Q}_l \quad (5.89)$$

et

$$\begin{aligned} Q' = & \bar{\sigma} \cdot \mathbf{u}'_g + \sigma' \cdot \bar{\mathbf{u}}_g - \delta \mathbf{u}'_l \cdot \bar{\mathbf{F}}_l - \delta \bar{\mathbf{u}}_l \cdot \mathbf{F}'_l + \dot{\omega}'_s \delta \bar{E}_l \\ & + \bar{\omega}'_s \delta E'_l + \dot{\omega}'_s (\bar{e}_g - \bar{e}_{o_2}) + \bar{\omega}'_s (e'_g - e'_{o_2}) + Q'_c + \delta Q'_l \end{aligned} \quad (5.90)$$

La partie moyenne et fluctuante de la constante massique du mélange gazeux sont :

$$\bar{r} = \frac{\bar{\rho}_g r_g}{\bar{\rho}_g + \bar{\rho}_l} \quad (5.91)$$

et

$$r' = \frac{r_g \bar{\rho}_l}{(\bar{\rho}_g + \bar{\rho}_l)^2} \rho'_g \quad (5.92)$$

Les parties moyenne et fluctuante de la source de masse valent :

$$\bar{\mathcal{W}} = -\bar{\rho}_l \nabla \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_l \quad (5.93)$$

et

$$\mathcal{W}' = -\bar{\rho}_l \nabla \cdot \delta \mathbf{u}'_l \quad (5.94)$$

On omet de réécrire les autres termes linéarisés qui apparaissent dans les équations montrées pour l'évidence de leur expression.

### 5.4.2 Cas simplifié avec prise en compte du terme source dû à la vaporisation et de la combustion

On reprend les résultats obtenus au paragraphe précédent et on fait des simplifications concernant le terme source donnée par la relation (5.52). On s'intéressera aux contributions de la source d'énergie, du mélange diphasique, qui sont une conséquence de la vaporisation et de la combustion, on négligera :

- la chaleur échangée entre les deux phases pendant le mouvement du mélange,  $\delta Q_l$  ;
- l'énergie dissipée par la traînée,  $-\delta \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{F}_t$ .

Le terme source devient alors :

$$\mathcal{Q}_s = \dot{\omega}_s \delta \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{u}_g + \dot{\omega}_s \delta E_l + \dot{\omega}_s (e_g - e_{O_2}) + Q_c \quad (5.95)$$

Dans la relation (5.95), comme on a fait l'hypothèse d'un Mach faible pour l'écoulement moyen, on peut négliger le premier terme ainsi que la contribution de l'énergie cinétique dans le deuxième terme :

$$\mathcal{Q}_s = \dot{\omega}_s \delta e_l + \dot{\omega}_s (e_g - e_{O_2}) + Q_c \Rightarrow \mathcal{Q}_s = \dot{\omega}_s (e_l - e_{O_2}) + Q_c \quad (5.96)$$

on applique la relation entre l'énergie interne et l'enthalpie pour les deux phases  $\left( e = h - \frac{p}{\rho} \right)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_s &= \dot{\omega}_s \left[ \left( h_l - \frac{p}{\rho_l} \right) - \left( h_{O_2} - \frac{p}{\rho_{O_2}} \right) \right] + Q_c \\ \Rightarrow \mathcal{Q}_s &= \dot{\omega}_s \left[ h_l - h_{O_2} + \frac{p}{\rho_{O_2}} \right] + Q_c \end{aligned} \quad (5.97)$$

Dans l'équation ci-dessus on a considéré le fait que la masse volumique du liquide est environ mille fois celle de sa vapeur et que donc la contribution  $p/\rho$  donnée par l'espèce liquide est négligeable par rapport à celle de la même espèce à l'état gazeux. Dans la relation (5.97)

l'enthalpie du liquide est évaluée à la température d'injection de l'ergol liquide considéré ici (l'oxygène) tandis que les autres termes sont évalués à la température de combustion.

On considère maintenant la relation (5.85) en mettant en évidence la seule contribution due aux fluctuations de débit vaporisé :

$$\mathcal{P}'_s = (\bar{\gamma} - 1) \mathcal{Q}'_s = \dot{\omega}'_s (\bar{\gamma} - 1) \left[ h_l - h_{O_2} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_{O_2}} \right] + \mathcal{Q}'_c \quad (5.98)$$

donc le système étudié est :

$$\begin{aligned} \nabla^2 p' - \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial \mathcal{P}'_s}{\partial t} + g \\ \Rightarrow \nabla^2 p' - \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= -\frac{(\bar{\gamma} - 1)}{\bar{a}^2} \frac{\partial \mathcal{Q}'_s}{\partial t} + g \end{aligned} \quad (5.99)$$

avec  $g$  qui contient tous les termes restants de l'expression (5.83) différents de celui mis en évidence qui dépend des fluctuations de débit vaporisé et brûlé. Le terme  $g$ , comme aussi  $f$  (ce dernier apparaît dans la condition aux limites donnée par (5.81) et (5.82)), contient toutes contributions qui ne dépendent pas du débit vaporisé et brûlé, c'est-à-dire : les interactions entre le débit moyen et l'acoustique, les influences de la phase condensée sur le débit gazeux, les variations spatiales et temporelles des propriétés de l'écoulement moyen, les variations de l'énergie interne des espèces chimique présentes, et, dans une approche plus générique, les effets visqueux, les variations de la vitesse du son du mélange et les effets dus à la tuyère (en cas de Mach élevé dans la chambre).

## 5.5 Solution approchée

Suivant les travaux de Culick, le système constitué par les équations (5.79) et (5.81) est un problème d'Helmholtz avec termes sources ( $h$  et  $f$ ). Maintenant on considère le problème non perturbé, obtenu en annulant les terme  $h$  et  $f$ . Celui-ci définit les modes normaux  $\psi_n$  et les fréquences naturelles  $\omega_n = \bar{a} k_n$  (où  $k_n$  est le numéro d'onde) d'une chambre de combustion.

Les équations sont :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \psi_n = 0 \end{cases} \quad (5.100)$$

On fait porter l'approximation sur le champ des fluctuations de pression dans la chambre de combustion : on dit qu'il peut être exprimé par une série de Fourier de modes normaux pondérés par des coefficients (amplitude) qui sont dépendants du temps. C'est-à-dire qu'on utilise la définition suivante :

$$p' = \bar{p} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\bar{x}) \eta_m(t) \quad (5.101)$$

L'idée est de comparer le problème perturbé et celui non perturbé : pour cela, on multiplie la première équation du système (5.79) par  $\psi_n$  et on lui soustrait celle du système (5.100) multipliée par  $p'$ , ensuite on intègre sur le volume de la chambre de combustion :

$$\begin{aligned} \int_{V_{ch}} \left[ (\psi_n \nabla^2 p' - p' \nabla^2 \psi_n) - \frac{1}{\bar{a}^2} \left( \psi_n \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \omega_n^2 p' \psi_n \right) \right] dVol &= \int_{V_{ch}} \psi_n h dVol \\ \Rightarrow \frac{1}{\bar{a}^2} \int_{V_{ch}} \psi_n \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \omega_n^2 p' \right) dVol &= \int_{V_{ch}} \left[ (\nabla \cdot (\psi_n \nabla p') - \nabla \psi_n \cdot \nabla p') \right. \\ &\quad \left. + (\nabla p' \cdot \nabla \psi_n - \nabla \cdot (p' \nabla \psi_n)) \right] dVol - \int_{V_{ch}} \psi_n h dVol \end{aligned} \quad (5.102)$$

Par le Théorème de Gauss Green la deuxième intégrale de l'équation (5.102) devient une intégrale de surface :

$$\frac{1}{\bar{a}^2} \int_{V_{ch}} \psi_n \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \omega_n^2 p' \right) dVol = \oint_{\partial V_{ch}} (\psi_n \nabla p' - p' \nabla \psi_n) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V_{ch}} \psi_n h dVol \quad (5.103)$$

On reporte dans l'équation (5.103) la définition de la fluctuation de pression donnée par (5.101) et les conditions aux limites données, d'une part, par la relations (5.81) et, d'autre part, par la deuxième relation du système (5.100). Elle devient alors :

$$\sum_m \left[ \int_{V_{ch}} \psi_n \psi_m dVol \right] \bar{p} \ddot{\eta}_m + \sum_m \left[ \int_{V_{ch}} \psi_n \psi_m dVol \right] \bar{p} \omega_n^2 \eta_m = -\bar{a}^2 \left[ \oint_{\partial V_{ch}} \psi_n f dS + \int_{V_{ch}} \psi_n h dVol \right] \quad (5.104)$$

on admet que les modes normaux sont orthogonaux :

$$\int_{V_{ch}} \psi_n \psi_m dVol = E_n^2 \delta_{mn} \quad (5.105)$$

et on obtient un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre pour les fonctions amplitude  $\eta_n(t)$  :

$$\frac{d^2 \eta_n}{dt^2} + \omega_n^2 \eta_n = F_n \quad (5.106)$$

où on a défini le terme  $F_n$  par la relation suivante :

$$F_n = -\frac{\bar{a}^2}{E_n^2 \bar{P}} \left[ \iint_{\partial V_{ch}} \psi_n f dS + \int_{V_{ch}} \psi_n h dVol \right] \quad (5.107)$$

On peut écrire  $h$  dans (5.107) comme dans l'équation (5.99) et en utilisant la définition (5.98) on obtient :

$$h = -\frac{(\bar{\nu} - 1)}{\bar{a}^2} \frac{\partial \mathcal{Q}'_s}{\partial t} + g \quad (5.108)$$

où  $g$ , comme expliqué dans le paragraphe précédent, est un terme qui inclue tous les différents effets de la chaleur additionnelle dus à la vaporisation, que l'on a défini au paragraphe précédent. On tient compte de l'expression de  $h$  donnée ci-dessus dans la définition du second membre des équations différentielles de l'amplitude :

$$\frac{d^2 \eta_n}{dt^2} + \omega_n^2 \eta_n = F_n^{(Q_s)} + F_n^{(e)} \quad (5.109)$$

où le terme de droite qui dépend de la vaporisation et de la combustion, est :

$$\begin{aligned} F_n^{(Q_s)} &= \frac{(\bar{\nu} - 1)}{E_n^2 \bar{P}} \int_{V_{ch}} \psi_n \frac{\partial \mathcal{Q}'_s}{\partial t} dVol \\ \Rightarrow F_n^{(Q_s)} &= \frac{(\bar{\nu} - 1)}{E_n^2 \bar{P}} \hat{Q}_s \int_{V_{ch}} \psi_n \frac{\partial \dot{\omega}'_s}{\partial t} dVol \end{aligned} \quad (5.110)$$

On introduit la notation  $\hat{Q}_s$  pour regrouper la partie constante dans les fluctuations de chaleur dues à la vaporisation et à la combustion. Cette dernière est :

$$\mathcal{Q}'_s = \dot{\omega}'_s \left[ \left( h_l - h_{o_2} \right) + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_{O_2}} \right] + \hat{Q}_c = \dot{\omega}'_s \hat{Q}'_s \quad (5.111)$$

et celui qui dépend des autres phénomènes est :

$$F_n^{(e)} = -\frac{\bar{a}^2}{E_n^2 \bar{p}} \left[ \iint_{\partial V_{ch}} \psi_n f dS + \int_{V_{ch}} \psi_n g dVol \right] \quad (5.112)$$

Comme on verra mieux dans le paragraphe suivant, on a considéré la combustion infiniment rapide, se qui nous permet de relier la chaleur dégagée par la combustion au débit vaporisé ( $Q_c = \hat{Q}_c \dot{\omega}_s$ ) : une partie de ce qui vaporise, va brûler et les termes  $\dot{\omega}_{c_i}$  (l'apport de masse de l'espèce  $i$  résultant de la combustion) peuvent être exprimé proportionnellement à la source de vapeur selon la réaction chimique considérée.

Par la suite on focalise notre attention sur l'influence de la chaleur dégagée par la vaporisation et par la combustion sur les oscillations de pression dans la chambre. Comme on a fait des simplifications pendant la modélisation, on introduit dans (5.109) un terme de dissipation dû à tous les types de perte d'énergie du système (tout ce qui apporte de l'amortissement et qu'on ne considère pas dans le modèle). Ce terme est proportionnel à la vitesse de variation de l'amplitude multiplié par le produit de l'amortissement et de la fréquence de l'énième mode du problème non perturbé ( $\zeta_{0n}$  et  $\omega_n$ ) solution du système (5.100) :

$$\frac{d^2 \eta_n}{dt^2} + 2\zeta_{0n} \omega_n \frac{d\eta_n}{dt} + \omega_n^2 \eta_n = F_n^{(Q_s)} \quad (5.113)$$

Par l'expression (5.101) et le système d'équations (5.113), tout mouvement instable peut être vu comme un ensemble d'oscillateur, chacun associé à un mode propre de l'oscillation du système. Le problème maintenant est de trouver les amplitudes des modes,  $\eta_n(t)$  : ce qu'on fera par la suite dans le domaine de Laplace.

## 5.6 Modèle de combustion et système d'équations modales

La théorie de Culick, nous a permis de modéliser l'équation des ondes dans la chambre pour un mélange gaz/liquide dans une approche globale. On a simplifié le problème en ne considérant, parmi les termes sources, que la contribution donnée par la vaporisation et la combustion. Cette simplification est justifiée par l'étude des temps caractéristiques qu'on a faite aux chapitres 2 et 3. En effet, nous avons montré que, parmi tous les processus dus aux différentes transformations auxquelles l'ergol injecté va être soumis, la vaporisation et la combustion (à bas rapport de mélange) étaient les principaux moteurs du couplage acoustique entre la chambre de combustion et le système d'injection, sujet de notre étude. Par la suite on fera l'hypothèse que la vaporisation et la combustion s'effectuent dans la même section que l'on appelle section de front de flamme : on considère que la combustion y est concentrée et instantanée. Une hypothèse supplémentaire est de considérer que tout le liquide injecté est vaporisé, ce qui n'est pas loin de la réalité. La vapeur ainsi formée brûle dans la mesure où elle n'est pas en accès. Si l'ergol est en accès, le débit brûlé est une partie de celui vaporisé. Dans le cas général le débit brûlé est donné par la relation suivante :

$$\dot{m}_b = \alpha \dot{\omega}_s V_{ch} \quad \text{avec } \alpha = \min\left(\frac{RM}{RMs}, 1\right) \quad (5.114)$$

Sous les hypothèses précédentes, si on considère les gouttes, avec les mêmes caractéristiques en terme de diamètre et vitesse, on a :

$$\dot{\omega}_s = \frac{\dot{m}_b}{\alpha \cdot V_{ch}} = \frac{1}{\alpha \cdot V_{ch}} \int \dot{\rho}_b dVol = \frac{1}{\alpha \cdot V_{ch}} \int_{gouttes} (\rho_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (5.115)$$

En effet, la production volumique de gaz au sein de la chambre provient en réalité du liquide qui se vaporise à la surface des gouttes. On applique par la suite la théorie de Crocco ([53]), connue sous le nom de 'time lag theory'. L'idée principale de cette théorie est l'utilisation d'un délai correspondant à la durée nécessaire pour qu'une masse élémentaire d'ergol qui entre dans la chambre de combustion, acquiert un certain niveau d'énergie par interaction avec l'environnement et qui la fait se transformer instantanément en produit brûlé, libérant ainsi sous forme de chaleur l'énergie stockée dans la liaison chimique. Le délai peut être divisé en deux parties :

- la partie qui dépend de la configuration de l'injecteur et non des variations des facteurs physiques dans la chambre de combustion : le délai insensible ( $\tau_i$ ) ;
- la partie sensible, qui répond aux fluctuations de pression et de vitesse des gaz dans la chambre : cette partie est appelée délai sensible ( $\tau_s$ ) ;

On peut donc relier la masse qui brûle dans le moteur à celle injectée par la plaque d'injection. Ainsi, la masse injectée entre l'instant  $t$  et  $t+dt$  vaut  $\dot{m}_{inj}(t)dt$  est brûlée entre l'instant  $t+\tau$  et  $t+\tau+dt+d\tau$  est  $\dot{m}_b(t+\tau) \cdot (dt+d\tau)$ , et donc :

$$\dot{m}_{inj}(t) \cdot dt = \dot{m}_b(t+\tau) \cdot (dt+d\tau) \quad (5.116)$$

ou bien :

$$\dot{m}_b(t) \cdot dt = \dot{m}_{inj}(t-\tau) \cdot (dt-d\tau) \quad (5.117)$$

on divise par  $dt$  et on tient compte que la partie insensible du délai ne dépend pas du temps :

$$\dot{m}_b(t) = \dot{m}_{inj}(t-\tau) \cdot \left(1 - \frac{d\tau_s}{dt}\right) \quad (5.118)$$

On linéarise l'équation ci-dessus pour obtenir :

$$\bar{\dot{m}}_b + \dot{m}'_b(t) = \bar{\dot{m}}_{inj} + \dot{m}'_{inj}(t-\bar{\tau}) \cdot \left(1 - \frac{d\tau'_s}{dt}\right) \quad (5.119)$$

On tient compte du fait que la valeur moyenne du débit brûlé coïncide, avec la valeur moyenne du débit injecté. On obtient :

$$\dot{m}'_b(t) = \dot{m}'_{inj}(t-\bar{\tau}) - \bar{\dot{m}}_{inj} \frac{d\tau'_s}{dt} \quad (5.120)$$

et on a que la variation du délai sensible est due aux variations des conditions dans la chambre, en particulier aux variations de pression dans ce délai :

$$\frac{d\bar{\tau}'_s}{dt} = -n_s \left[ \frac{p'(\mathbf{x}(t), t) - p'(\mathbf{x}(t - \bar{\tau}'_s), t - \bar{\tau}'_s)}{\bar{p}} \right] \quad (5.121)$$

Pour étudier la stabilité linéaire du moteur, couplé avec l'injection, on a besoin d'explicitier le système (5.113), c'est à dire d'explicitier son terme de droite, en particulier les fluctuations de débit vaporisé. Comme on a fait l'hypothèse d'une vaporisation/combustion simplifiée, suivant laquelle chacune des gouttes d'ergol injecté reste d'abord uniquement à l'état liquide, puis se transforme instantanément à l'état gazeux dès qu'elle a accumulé une certaine quantité d'énergie qui lui permet de brûler, on admet que la vaporisation se tient à la section de front de flamme (la vaporisation est alors représentée par un Dirac à l'abscisse  $z_c$  : elle est concentrée à la distance  $\mathbf{x}_c = (r, \vartheta, z_c)$  de l'injection, qui est la position du front de flamme), voir

Figure 5-2, où on a également une cinétique chimique infiniment rapide. Avec cette hypothèse et par la relation (5.115) entre vaporisation et combustion on obtient :

$$\begin{aligned} F_n^{(Q_s)} &= \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{E_n^2 \bar{p}} \hat{Q}_s \int_{V_{ch}} \psi_n \frac{\partial \dot{\omega}'_s}{\partial t} dVol \\ &= \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{E_n^2 \bar{p}} \hat{Q}_s \int_{V_{ch}} \psi_n(\mathbf{x}) \frac{\partial (\dot{\omega}'_s(\mathbf{x}, t) \delta(z - z_c))}{\partial t} dVol \\ \Rightarrow F_n^{(Q_s)} &= \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{\alpha E_n^2 \bar{p} S_{ch}} \hat{Q}_s \int_{S_{ch}} \psi_n(\mathbf{x}_c) \frac{\partial \dot{m}'_b(\mathbf{x}_c)}{\partial t} dS \end{aligned} \quad (5.122)$$

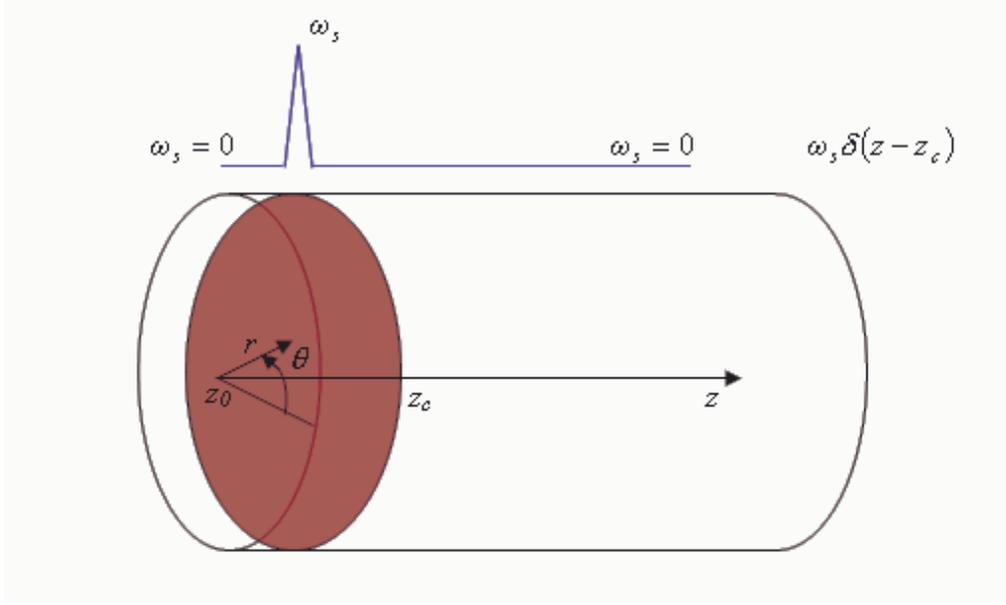


Figure 5-2 : Schématisation de la chambre de combustion, mise en évidence du front de combustion.

A la position du front de flamme on considère la surface de la chambre (normale à l'axe de la chambre), divisée en  $nSe$  surfaces élémentaires, contenant au moins un injecteur (de position  $\mathbf{x}_{c,i}$ ) et on utilise l'équation (5.120) qui relie débit brûlé et débit injecté :

$$\begin{aligned}
 F_n^{(Q_s)} &= \frac{(\bar{\nu} - 1)}{\alpha E_n^2 \bar{p} S_{ch}} \hat{Q}_s \int_{S_{ch}} \psi_n(\mathbf{x}_c) \frac{\partial \dot{m}'_b(\mathbf{x}_c)}{\partial t} dS \\
 &= \frac{(\bar{\nu} - 1)}{\alpha E_n^2 \bar{p} S_{ch}} \hat{Q}_s \sum_{i=1}^{nSe} \psi_n(\mathbf{x}_{c_i}) \frac{\partial \dot{m}'_{b_i}(\mathbf{x}_{c_i})}{\partial t} \\
 &= \frac{(\bar{\nu} - 1)}{\alpha E_n^2 \bar{p} S_{ch}} \hat{Q}_s \sum_{i=1}^{nSe} \psi_n(\mathbf{x}_{c_i}) \frac{\partial}{\partial t} \left( \dot{m}'_{inj_i}(\mathbf{x}_{0_i}, t - \bar{\tau}) - \bar{m}_{inj_i} \frac{d\tau'_s}{dt} \right)
 \end{aligned} \tag{5.123}$$

où bien par l'expression (5.121) :

$$F_n^{(Q_s)} = \frac{(\bar{\nu} - 1)}{\alpha E_n^2 \bar{p} S_{ch}} \hat{Q}_s \sum_{i=1}^{nSe} \psi_n(\mathbf{x}_{c_i}) \frac{\partial}{\partial t} \left( \dot{m}'_{inj_i}(\mathbf{x}_{0_i}, t - \bar{\tau}) + \bar{m}_{inj_i} n_s \left[ \frac{p'(\mathbf{x}_{c_i}, t) - p'(\mathbf{x}_{c_i}, t - \bar{\tau}_s)}{\bar{p}} \right] \right) \tag{5.124}$$

où, suivant [53], on a considéré que la position du front de flamme coïncide au plus près avec celle que l'élément d'ergol occupe à l'instant où il commence à être sensible aux variations de

pression et vitesse, c'est-à-dire qu'on a considéré  $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}(t - \bar{\tau}_s)$ , tandis que pour l'injection on a  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t - \bar{\tau})$ . Afin de modéliser le débit injecté à la sortie de chaque injecteur, à la position  $\mathbf{x}_{0,i}$ , on introduit la réponse de chaque injecteur :

$$Y_{ik} = \frac{\dot{m}'_{inj_i}}{p'_k} \quad (5.125)$$

Cela représente l'influence de la fluctuation de pression au point d'injection  $k$ , sur le débit d'injection au point  $i$ . La définition d'admittance ci-dessus, et la définition des fluctuations de pression donnée par (5.101), nous permet d'exprimer le débit d'injection à la sortie de l'injecteur  $i$  comme :

$$\dot{m}'_{inj_i} = \sum_k^{nSe} Y_{ik} \cdot p_k' = \bar{p} \sum_k^{nSe} Y_{ik} \sum_l \eta_l(t) \psi_l(\mathbf{x}_{0,k}) \quad (5.126)$$

On obtient ainsi l'expression du terme de droite du système d'équations (5.113) :

$$F_n^{(Q_s)} = \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{\alpha E_n^2 S_{ch}} \hat{Q}_s \sum_{i=1}^{nSe} \psi_n(\mathbf{x}_{c,i}) \frac{\partial}{\partial t} \left( \begin{array}{l} \sum_k^{nSe} Y_{ik} \sum_l \psi_l(\mathbf{x}_{0,k}) \eta_l(t - \bar{\tau}) \\ + \frac{\bar{m}'_{inj_i}}{\bar{p}} n_s \sum_l \psi_l(\mathbf{x}_{c,i}) (\eta_l(t) - \eta_l(t - \bar{\tau}_s)) \end{array} \right) \quad (5.127)$$

Si on considère le système (5.113) avec le terme de droite donné par (5.127) et on se positionne dans le domaine de Laplace, on passe de  $\eta(t)$  à  $\eta(s)$ , en considérant les conditions initiales nulles (pour l'amplitude et ses dérivées), car on étudie un phénomène d'instabilités naturelles et on peut donc supposer qu'on part d'un état stationnaire sans fluctuations :

$$\begin{aligned} & s^2 \eta_n + 2\zeta_{0n} \omega_n s \eta_n + \omega_n^2 \eta_n \\ & = \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{\alpha E_n^2 S_{ch}} \hat{Q}_s \sum_{i=1}^{nSe} \psi_n(\mathbf{x}_{c,i}) s \left( \begin{array}{l} \sum_k^{nSe} Y_{ik} \sum_l \psi_l(\mathbf{x}_{0,k}) \eta_l e^{-s\bar{\tau}} \\ + \frac{\bar{m}'_{inj_i}}{\bar{p}} n_s \sum_l \psi_l(\mathbf{x}_{c,i}) (\eta_l - \eta_l e^{-s\bar{\tau}_s}) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (5.128)$$

Dans le système ci-dessus, la variable de Laplace vaut :  $s = (-\zeta_n + j)\Omega_n$ , avec l'introduction de l'amortissement et de la fréquence du mode  $n$  de la chambre, perturbé par le couplage

( $\zeta_n = \zeta_{0n} + \delta\zeta_n$  et  $\Omega_n = \omega_n + \delta\Omega_n$ ). On peut réécrire le système (5.128) en forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & s^2 + 2\zeta_{0n}\omega_n s + \omega_n^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \eta_n \\ \vdots \end{Bmatrix} = \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{\alpha E_n^2 S_{ch}} \hat{Q}_s s \left\{ \begin{array}{l} e^{-s\bar{\tau}} \cdot [\psi(\mathbf{x}_c)_{ni}] \cdot [Y_{ik}] \cdot [\psi(\mathbf{x}_0)_{kl}] \\ + \left( \frac{\bar{m}_{inj}}{nSe\bar{p}} \right) n_s (1 - e^{-s\bar{\tau}_s}) \cdot [\psi(\mathbf{x}_c)_{ni}] \cdot [\psi(\mathbf{x}_c)_{il}] \end{array} \right\} \{\eta_l\} \quad (5.129)$$

où on a considéré que le débit injecté dans chaque surface élémentaire est égal au débit total injecté, divisé le nombre  $nSe$  de surfaces. On remarque aussi que dans le modèle utilisé pour développer les équations modales, le délai de vaporisation ne dépend pas de l'injecteur, tous les élément d'injection ont le même  $\tau_s$ . On peut compacter l'écriture du système (5.129) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & s^2 + 2\zeta_{0n}\omega_n s + \omega_n^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \eta_n \\ \vdots \end{Bmatrix} = \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{E_n^2} s \left\{ [G_{m_{nl}}] + [G_{p_{nl}}] \right\} \{\eta_l\} \quad (5.130)$$

On considère la partie de droite du système(5.130) : dans  $[G_{m_{nl}}]$  on a réunis les termes liés au couplage entre le système d'injection et la combustion, et dans  $[G_{p_{nl}}]$  les termes de couplage entre l'acoustique de la chambre et la combustion. Dans la notation introduite en ci-dessus, les deux matrice sont définîtes comme suit :

$$[G_{m_{nl}}] = \frac{\hat{Q}_s}{\alpha S_{ch}} e^{-s\bar{\tau}} [\psi(\mathbf{x}_c)_{ni}] \cdot [Y_{ik}] \cdot [\psi(\mathbf{x}_0)_{kl}] \quad (5.131)$$

$$[G_{p_{nl}}] = n_s \frac{\hat{Q}_s}{\alpha S_{ch}} \left( \frac{\bar{m}_{inj}}{nSe\bar{p}} \right) (1 - e^{-s\bar{\tau}_s}) [\psi(\mathbf{x}_c)_{ni}] \cdot [\psi(\mathbf{x}_c)_{il}] \quad (5.132)$$

Cette notation nous sera pratique dans le chapitre prochain, quand on considérera à la fois le couplage acoustique chambre/injection et acoustique chambre/combustion, pour l'évaluation des paramètres de couplage présents dans le système étudié.

On peut compacter ultérieurement le système, dans la forme suivante :

$$[M(s)]\{\eta_n\} = \{0\} \quad (5.133)$$

Comme on veut une solution oscillante, on ne veut pas la solution triviale pour l'amplitude, ce qui implique d'annuler le déterminant de la matrice  $[M(s)]$ . Par le découplage de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'équation caractéristique, on trouve  $n$  solutions du polynôme caractéristique ( $\det[M]=0$ ) et donc du système (5.133), c'est-à-dire qu'on obtient les  $n$  fréquences  $\Omega_n$ , et les  $n$  amortissement  $\zeta_n$ , du système couplé. On rappelle que chaque mode propre de la chambre est modifié à cause du couplage, du fait qu'on a les termes  $h$  et  $f$  dans les équations des ondes (voir équations (5.79) et (5.81)).

La chambre de combustion a été modélisée par une approche globale, suivant les travaux du Pr. Culick [72]. On a considéré un écoulement diphasique multiespèce injecté dans la chambre propulsive et soumis à combustion. Pour cet écoulement on a trouvé l'équation des ondes, avec prise en compte de tous les termes source. Le système d'équations modales a été par la suite modélisé : par la fonction admittance de l'injection on a couplé le système chambre de combustion avec le système d'alimentation.

Dans le chapitre suivant, on modélisera les paramètres de couplage présents dans le système couplé étudié.

# Chapitre 6

## 6 Etude de systemes couplés

L'objet de ce chapitre est l'application des modèles vus précédemment, à savoir celui de la méthode à paramètres discrets des cavités hydrauliques, appliqué aux systèmes d'alimentation, et celui de l'approche globale utilisant une décomposition modale des fluctuations, appliquée à la chambre de combustion dans laquelle on considère le mélange diphasique comme un gaz équivalent dont les propriétés sont obtenues par pondération de celles du gaz et celles du liquides. Les deux systèmes sont couplés à l'interface d'injection par l'introduction de l'admittance du système d'injection définie pour chaque injecteur : le débit injecté dans la chambre de combustion est influencé par la distribution de pression à la plaque d'injection. Pour étudier le couplage complet d'une chambre de combustion et d'un système d'alimentation, on se positionne dans deux cas :

- un cas simple de deux cavités (chambre et dôme) liées par un petit conduit qui représente l'injecteur (voir [75]) ;
- un cas réel, concernant le moteur Aestus de l'étage supérieur d'Ariane 5.

### 6.1 Etude simplifiée

Un première étude couplée a été effectuée sur une configuration monodimensionnelle, dans laquelle le système d'alimentation a été maillé par trente nœuds de pression et la chambre de combustion a été considérée comme une cavité cylindrique mono-bloc. On voit par la suite le schéma et les données utilisées :

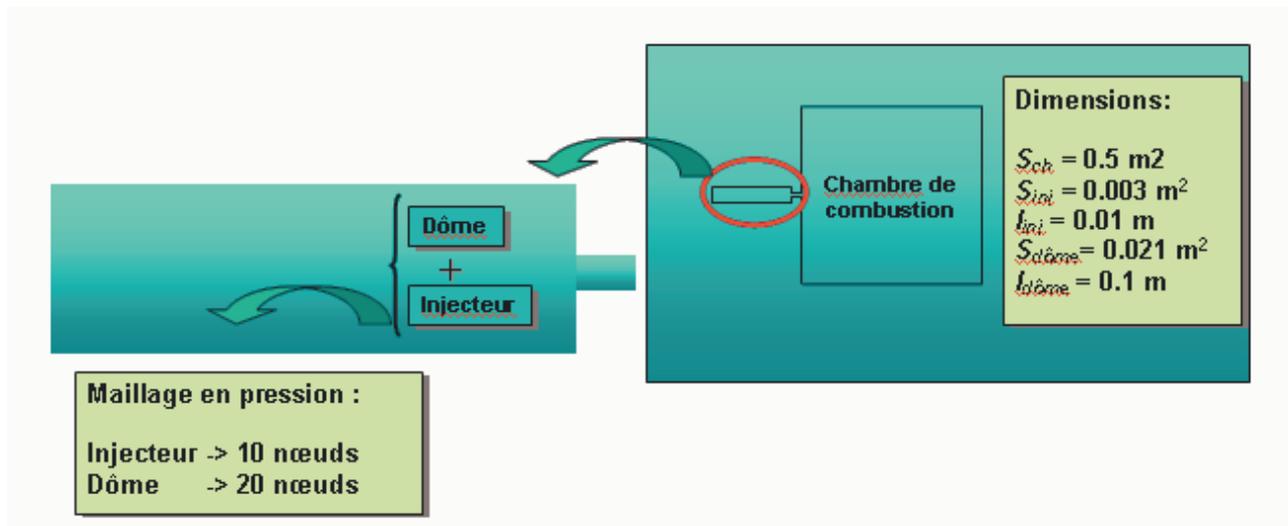


Figure 6-1 : Configuration du système couplé

Dans cette étude, on perturbe la chambre par son premier mode longitudinal (1L), dont on impose la fréquence à 1500 Hz. La longueur de la chambre correspondant à ce mode est donnée par la formule suivante :

$$l_{ch} = \frac{a}{2f_{1L\_ch}} \quad (6.1)$$

avec la vitesse du son évaluée pour le mélange gazeux.

## 6.1.1 Evaluation théorique des paramètres de couplage

### 6.1.1.1 Estimation de la vitesse du son dans le dôme au couplage

On évaluera théoriquement le couplage du système, ce qui signifie avoir dans les deux système la même fréquence, proche de celle du mode longitudinal 1L que l'on utilise pour exciter la chambre. Comme la fréquence du premier mode longitudinal du dôme est donnée par :

$$f_{1L\_d\acute{o}me} = \frac{a_{d\acute{o}me}}{2l_{d\acute{o}me}} \quad (6.2)$$

on peut obtenir le couplage soit en faisant varier la longueur du dôme jusqu'à obtenir l'égalité entre les fréquences des deux systèmes étudiés, soit en faisant varier la vitesse du son du dôme ou bien du système dôme plus injecteur (voir Figure 6-2) : ce qui est plus simple pour notre étude, car on fixe la géométrie du système d'alimentation, qu'on va discrétiser une seule fois.

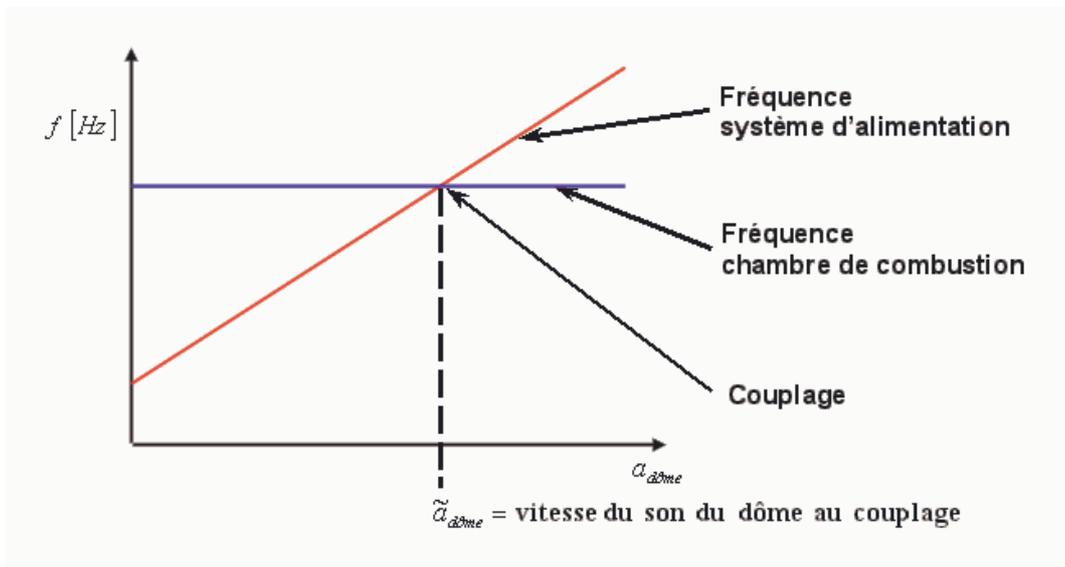


Figure 6-2 : Fréquence du système d'alimentation en fonction de la vitesse du son dans le dôme : condition de couplage.

Suivant la Figure 4-8 (du chapitre 4), on applique la théorie de la matrice de transfert, qui permet de lier les pressions et les débits d'entrée et de sortie pour un écoulement compressible et à Mach faible dans une conduite droite ([73]), afin d'évaluer la fréquence du premier mode propre longitudinal du système d'alimentation. Pour l'injecteur on a des dimensions presque négligeables par rapport aux autres cavités ( $l_{inj} = \epsilon l_0$  ;  $S_{inj} = \epsilon S_0$  ;  $\epsilon \ll 1$ ), et suivant la notation du chapitre 4, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} p'_w \\ \dot{m}'_w \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Ch(\Gamma_{d\acute{o}me}) & -\Sigma_{d\acute{o}me} \cdot Sh(\Gamma_{d\acute{o}me}) \\ -\frac{Sh(\Gamma_{d\acute{o}me})}{\Sigma_{d\acute{o}me}} & Ch(\Gamma_{d\acute{o}me}) \end{bmatrix}}_{[H]_{syst\_a\ lim}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -L_{inj} \cdot s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p'_e \\ \dot{m}'_e \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

avec les condition aux limites de fluctuation de pression nulle à la section d'entrée  $e$  et de fluctuation de débit nulle à la sortie  $w$ , c'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} p'_e = 0 \\ \dot{m}'_w = 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Car le premier tuyau, représentant l'injecteur, est ouvert à ses deux extrémités et le deuxième, représentant le dôme, est ouvert seulement à la surface de jonction (nommée  $s$  dans la Figure 4-8).

On peut récrire les équations (6.3) et (6.4) comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ & -H_{syst\_a\ lim} & \vdots & 1 & 0 \\ & & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p'_e \\ \dot{m}'_e \\ p'_w \\ \dot{m}'_w \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

Comme on ne veut pas la solution triviale du système (6.5), on impose la nullité du déterminant de la matrice, ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\frac{Sh(\Gamma_{d\acute{o}me})}{\Sigma_{d\acute{o}me}} L_{inj} \cdot s + Ch(\Gamma_{d\acute{o}me}) = 0 \quad (6.6)$$

Dans les équations (6.3) et (6.6) la variable  $s$  est la variable de Laplace, l'inductance de l'injecteur est  $L_{inj} = l_{inj} / S_{inj}$ , et les variables du dôme valent :  $\Gamma_{d\acute{o}me} = s \cdot l_{d\acute{o}me} / a_{d\acute{o}me}$  ;

$\Sigma_{d\acute{o}me} = \Gamma_{d\acute{o}me} / s \cdot C_{d\acute{o}me}$  ; et  $C_{d\acute{o}me} = (l_{d\acute{o}me} S_{d\acute{o}me}) / a_{d\acute{o}me}^2$  . L'équation (6.6) présente deux familles de solutions, la première est donnée par :

$$\begin{cases} Ch(\Gamma_{d\acute{o}me}) = 0 \\ \text{et} \\ Sh(\Gamma_{d\acute{o}me}) = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

qui n'admet pas de solutions ( $\Gamma_{d\acute{o}me} \in \emptyset$ ). La deuxième famille de solutions est donnée par :

$$\frac{s \cdot L_{inj}}{\Sigma_{d\acute{o}me}} \cdot Th(\Gamma_{d\acute{o}me}) + 1 = 0 \quad (6.8)$$

ou bien, en utilisant les définitions des variable présentes, on a :

$$\tan\left(\pi \frac{\omega}{\omega_{d\acute{o}me}}\right) = a \frac{\omega_{d\acute{o}me}}{\pi \omega} \quad \text{avec } a = \left(\frac{l_{d\acute{o}me}}{S_{d\acute{o}me}} \cdot \frac{S_{inj}}{l_{inj}}\right) \quad (6.9)$$

Parmi l'ensemble des solutions de ce problème on a considéré la deuxième solution donnée par :

$$f_{1L\_syst\_a\acute{l}im} \approx 1.122 \cdot f_{1L\_d\acute{o}me} \quad (6.10)$$

qui fait intervenir le premier mode acoustique du système d'alimentation, sachant que la première solution de l'équation (6.9) correspond au mode d' Helmholtz (par l'étude effectuée sur deux tuyaux en série au chapitre 4). Comme au couplage la fréquence du premier mode longitudinal du système dôme plus injecteur doit être la même que celui de la chambre de combustion, c'est-à-dire 1500 Hz, par la (6.2) et la (6.10), on trouve une vitesse du son dans le dôme de environ 267 m/s.

## 6.1.2 Estimation théorique de l'amortissement et de la fréquence du système couplé

Pour l'évaluation théorique des amortissements et des fréquences de couplage, on considère le système (5.131) pour un seul mode (le premier mode longitudinal). On néglige la partie qui concerne le couplage de la combustion avec l'acoustique du dôme, ce qui signifie imposer à zéro le terme  $G_m$  ( $G_m = 0$  dans le système (5.130)). Le système devient :

$$s^2 + 2\zeta_0 \omega s + \omega^2 = \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{\alpha E_n^2 S_{ch}} \hat{Q}_s s \cdot \psi(\mathbf{x}_c) \psi(\mathbf{x}_0) \hat{Y} e^{j\varphi} \cdot e^{-s\bar{\tau}} \quad (6.11)$$

Dans l'équation ci-dessus on a introduit la fonction complexe de l'admittance de l'injecteur ( $\hat{Y} e^{j\varphi}$  suivant la Réf. ([53])) que l'on peut simplifier car le déphasage entre le débit et la pression de chambre est nul au couplage ( $\varphi = 0$ ). Si on englobe les termes de droite dans un coefficient qu'on appelle  $\mathcal{A}$ , et si on introduit la variable complexe de Laplace pour le système couplé,  $s = \Omega(-\zeta + j)$ , on a :

$$\Omega^2 (\zeta^2 - 1 - 2j\zeta) + 2\zeta_0 \omega \cdot \Omega(-\zeta + j) + \omega^2 = \mathcal{A} \Omega(-\zeta + j) \cdot e^{-\Omega(-\zeta + j)\bar{\tau}} \quad (6.12)$$

On divise la partie réelle et la partie imaginaire on obtient :

$$\begin{cases} \Omega^2 (\zeta^2 - 1) - 2\zeta_0 \zeta \omega \Omega + \omega^2 = -\mathcal{A} \Omega e^{\zeta \Omega \bar{\tau}} (\zeta \cos(\Omega \bar{\tau}) - \sin(\Omega \bar{\tau})) \\ 2\zeta_0 \omega \Omega - 2\zeta \Omega^2 = \mathcal{A} \Omega e^{\zeta \Omega \bar{\tau}} (\cos(\Omega \bar{\tau}) + \zeta \sin(\Omega \bar{\tau})) \end{cases} \quad (6.13)$$

Notre objectif étant une évaluation qualitative de l'amortissement et de l'écart en fréquence qui sont dans le cas usuel très inférieurs à l'unité, donc on a pu faire des simplifications en négligeant les termes qui font intervenir l'amortissement devant les autres termes. Par la première équation du système on a :

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \omega^2 + \mathcal{A} \omega e^{\zeta \Omega \bar{\tau}} (\zeta \cos(\omega \bar{\tau}) - \sin(\omega \bar{\tau})) \approx \omega^2 - \mathcal{A} \omega \sin(\omega \bar{\tau}) \\ \Rightarrow \delta \omega &= -\frac{\mathcal{A}}{2} \sin(\omega \bar{\tau}) \Rightarrow \delta \omega \approx -\mathcal{B} \sin(\omega \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Si le coefficient multiplicatif,  $\mathcal{B}$  dans l'équation (6.14) est positif la variation de fréquence dû au couplage du système d'alimentation avec la chambre de combustion présente le comportement suivant :

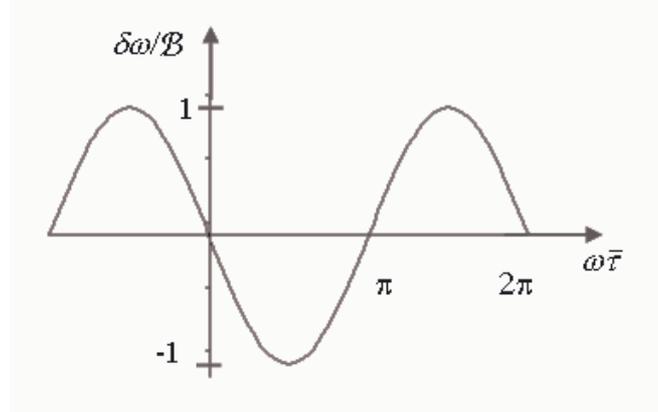


Figure 6-3 : comportement de la fonction  $\delta\omega$

La variation de fréquence est donc maximale pour les valeurs suivantes du délai total :

$$\begin{aligned} \delta\omega_{max} &\Rightarrow \bar{\tau} = \frac{1}{2f_{1L\_ch}} \left( \frac{3}{2} + 2m \right) = \frac{T_{1L\_ch}}{2} \left( \frac{3}{2} + 2m \right) \quad \text{avec } m = 0, 1, \dots \\ &\Rightarrow \bar{\tau} = \bar{\tau}_s^* \left( \frac{3}{2} + 2m \right) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Dans l'expression (6.15) on a introduit le délai sensible critique, défini par le temps caractéristique requis par l'onde acoustique, du mode considéré, pour traverser la chambre de combustion. De la même façon on a un couplage minimal en terme de fréquence pour les valeurs de délais totaux suivants :

$$\delta\omega_{min} \Rightarrow \bar{\tau} = \bar{\tau}_s^* \left( \frac{1}{2} + 2m \right) \quad \text{avec } m = 0, 1, \dots \quad (6.16)$$

On remarque que si le coefficient  $\mathcal{B}$  est négatif dans la relation (6.14), la (6.15) donne le  $\delta\omega_{min}$  et la (6.16) le  $\delta\omega_{max}$ . On considère maintenant la deuxième équation du système (6.13) avec les mêmes considérations que celles faites pour la première :

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{\mathcal{A}}{2\omega} e^{i\omega\bar{\tau}} (\cos(\omega\bar{\tau}) + \zeta \sin(\omega\bar{\tau})) \approx \zeta_0 - \frac{\mathcal{A}}{2\omega} \cos(\omega\bar{\tau}) \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow \delta\zeta = -C \cos(\omega\bar{\tau})$$

Si le coefficient multiplicatif,  $C$  dans l'équation (6.17) est positif la variation de l'amortissement au couplage fluide-acoustique injection/chambre présente le comportement suivant:

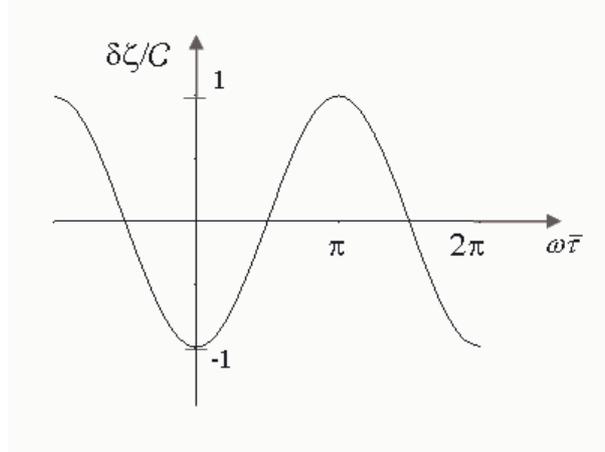


Figure 6-4 : comportement de la fonction  $\delta\zeta$ .

Suivant l'équation (6.17), la variation d'amortissement est maximale pour les valeurs suivantes du délai total :

$$\delta\zeta_{max} \Rightarrow \bar{\tau} = \frac{1}{2f_{1L\_ch}} (1 + 2m) = \frac{T_{1L\_ch}}{2} (1 + 2m) \quad \text{avec } m = 0, 1, \dots \quad (6.18)$$

$$\Rightarrow \bar{\tau} = \bar{\tau}_s^* (1 + 2m)$$

De la même façon le couplage est minimal en terme d'amortissement pour :

$$\delta\zeta_{min} \Rightarrow \bar{\tau} = \bar{\tau}_s^* \cdot 2m \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots \quad (6.19)$$

Comme pour le cas précédent, si le coefficient  $C$  est négatif dans la relation (6.17), l'équation (6.18) donne le  $\delta\zeta_{min}$  et l'équation (6.19) donne le  $\delta\zeta_{max}$ . On remarque aussi que

le comportement de la variation de fréquence et de l'amortissement sont en quadrature, quand l'un présente un maximum l'autre vaut zéro et vice-versa.

### 6.1.3 Estimation théorique de l'amortissement de la chambre de combustion

Dans notre système d'équations modales (5.130) on a introduit un terme pour chaque mode étudié ( $2\zeta_{0n}\omega_n s \eta_n$ ), afin de prendre en considération la dissipation due à toutes les pertes d'énergie dans la chambre de combustion : on est intéressé maintenant par l'évaluation théorique de ce terme, en particulier par  $\zeta_{0n}$ . Comme dans le paragraphe précédent, on considère le système modal en variables de Laplace pour un seul mode (le premier mode longitudinal) et cette fois on néglige la partie qui concerne l'influence de l'injection sur la combustion, car on est intéressé par le couplage combustion/acoustique de la chambre, ce qui signifie annuler le terme  $G_p$  ( $G_p = 0$  dans le système (5.130)). Le système devient :

$$s^2 + 2\zeta_0 \omega s + \omega^2 = \frac{(\bar{\nu} - 1)}{\alpha S_{ch}} s \cdot n_s \hat{Q}_s \left( \frac{\bar{m}_{inj}}{\bar{p}} \right) (1 - e^{-s\bar{\tau}_s}) \quad (6.20)$$

Si on englobe les termes de droite dans un coefficient qu'on appelle  $\hat{\mathcal{A}}$ , et on introduit la variable complexe de Laplace pour le système couplé,  $s = \Omega(-\zeta + j)$ , on a :

$$\Omega^2 (\zeta^2 - 1 - 2j\zeta) + 2\zeta_0 \omega \cdot \Omega(-\zeta + j) + \omega^2 = \hat{\mathcal{A}} \Omega(-\zeta + j) \cdot n_s (1 - e^{-\Omega(-\zeta + j)\bar{\tau}_s}) \quad (6.21)$$

On découple la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} \Omega^2 (\zeta^2 - 1) - 2\zeta_0 \zeta \omega \Omega + \omega^2 = \hat{\mathcal{A}} n_s [-\zeta \Omega + e^{\zeta \Omega \bar{\tau}_s} (\zeta \Omega \cos(\Omega \bar{\tau}_s) - \Omega \sin(\Omega \bar{\tau}_s))] \\ 2\zeta_0 \omega \Omega - 2\zeta \Omega^2 = \hat{\mathcal{A}} n_s [\Omega - e^{\zeta \Omega \bar{\tau}_s} (\zeta \Omega \sin(\Omega \bar{\tau}_s) + \omega \cos(\Omega \bar{\tau}_s))] \end{cases} \quad (6.22)$$

La deuxième équation, qui concerne la partie imaginaire, fournit l'équation de la courbe limite de stabilité ( $\zeta = 0$ ) :

$$\zeta_0 \omega = \frac{\hat{\mathcal{A}}}{2\Omega} n_s (\Omega - \omega \cos(\Omega \bar{\tau})) \approx \frac{\hat{\mathcal{A}}}{2} n_s (1 - \cos(\omega \bar{\tau}_s))$$

$$\Rightarrow \frac{n_s}{\left( \frac{2\zeta_0 \omega}{\hat{\mathcal{A}}} \right)} = \frac{1}{(1 - \cos(\omega \bar{\tau}_s))} \Rightarrow \frac{n_s}{G_R} = \frac{1}{(1 - \cos(\omega \bar{\tau}_s))} \quad (6.23)$$

Ceci nous donne la limite de stabilité présentée en Figure 6-5 (présentée également par Crocco dans la Réf. [19]) :

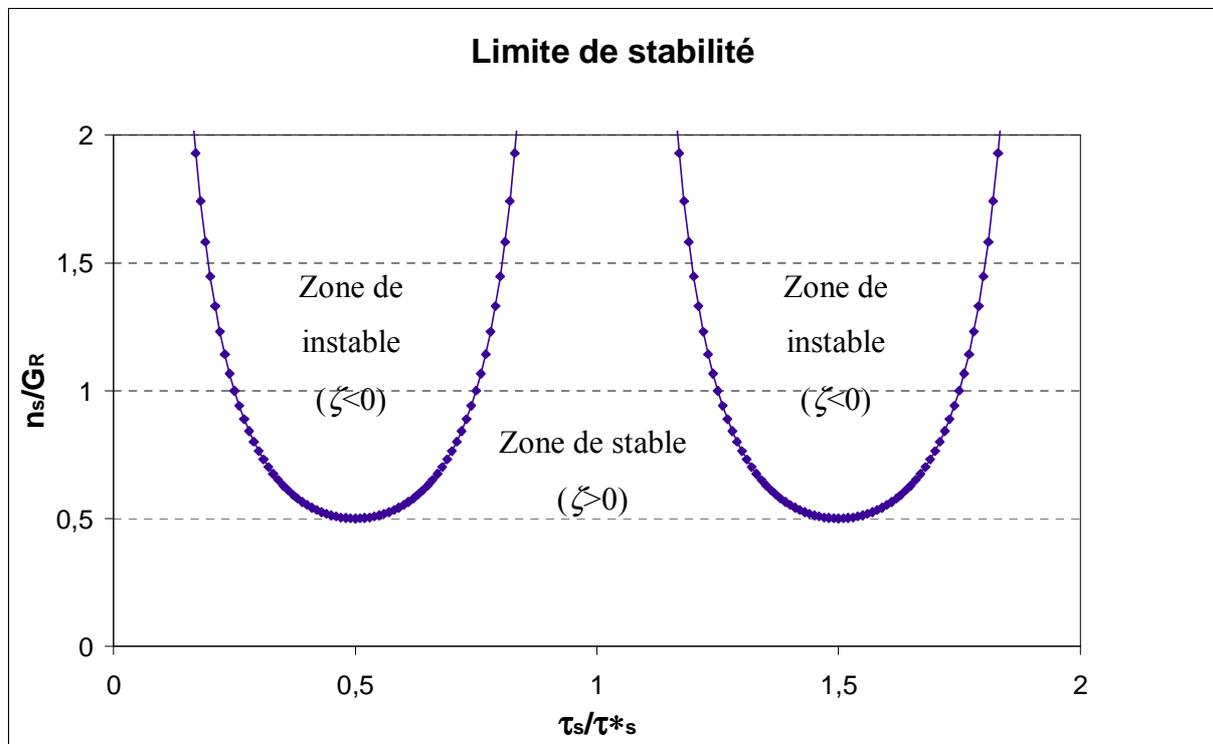


Figure 6-5 : Limite de stabilité du problème étudié.

Et par la relation (6.23), si on connaît  $n_s$  (nommé aussi indice d'interaction) et le délais sensible,  $\bar{\tau}_s$ , on peut évaluer l'amortissement de la chambre ( $\zeta_0$ ) qui donne le terme de dissipation dans (6.20) :

$$\zeta_0 = \left( \frac{\hat{\mathcal{A}}}{2\omega} \right) n_s (1 - \cos(\omega \bar{\tau}_s)) \quad (6.24)$$

### 6.1.4 Résultats du calcul

Par la suite on fait la comparaison entre les résultats obtenus par le code et les prévisions théoriques obtenus dans le paragraphe 6.1.2. On utilise les relations (6.15), (6.16), (6.18) et (6.19) pour l'estimation du délai total à introduire dans le calcul, afin d'obtenir une condition de couplage maximale stabilisant où déstabilisant, ou bien un couplage neutre en termes d'amortissement qui donne une variation de fréquence maximale/minimale. On considère pour chaque condition le premier délai total physiquement acceptable parmi les valeurs qui sont périodiques, et on doit obtenir les résultats suivants par le calcul :

| $\bar{\tau}$ [s]     | PREVISIONS DU CALCULS |   |
|----------------------|-----------------------|---|
| $10^{-3}$            | $\delta\zeta_{max}$   | Configuration Stable                            |
| $6.67 \cdot 10^{-4}$ | $\delta\zeta_{min}$   | Configuration Instable                          |
| $5.00 \cdot 10^{-4}$ | $\delta\omega_{max}$  | Configuration Neutre<br>(en terme de stabilité) |
| $8.33 \cdot 10^{-4}$ | $\delta\omega_{min}$  | Configuration Neutre<br>(en terme de stabilité) |

Tableau 6-1 : Prévisions théoriques du calcul.

Pendant le calcul on fera varier la vitesse du son à l'intérieur du dôme et, comme cela a été mis en évidence dans le paragraphe 6.1.1, on devra obtenir un couplage maximal pour une vitesse du son à l'intérieur du système d'injection d'environ 267 m/s, pour laquelle la fréquence des deux systèmes est la même. Pour l'évaluation des termes de couplage (voir les relations (5.131) et (5.132)) on a besoin de connaître les données thermo physiques du mélange gazeux dans la chambre, pour cela on effectue un calcul de performances énergétiques par COPPELIA ([43] et [44]) avec comme entrées de l'oxygène liquide et de

l'hydrogène gazeux, le premier injecté à une température de 94 K et l'autre à 100 K (comme pour le Vulcain). On considère une pression 5 bar dans la chambre (on considère une pression de chambre supérieure à la pression de vapeur de l'oxygène injecté, c'est-à-dire de 1.4854 bar à 94 K, et inférieure à la pression critique de l'oxygène qui correspond à 50.43 bar, au dessus de la quelle il n'y a pas de distinction entre liquide et gaz). Par ELX ([76]) on trouve les masses volumiques et les enthalpies qui sont des entrées pour le calcul COPPELIA :

|                              | $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ] | $h$ [Cal/mole] à $T_{ref} = 298$ K |
|------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| Oxygène liquide<br>(T=94K)   | 1.1227                      | -3066.49                           |
| Hydrogène gazeux<br>(T=100K) | 0.00124                     | -1486.25                           |

Tableau 6-2 : Données d'entrée pour le calcul des caractéristiques du mélange dans le cas Lox/GH2.

Avec un rapport de mélange de 6, on obtient les propriétés suivantes du mélange gazeux :

| $C_p$ [Cal/g/K] | Masse molaire [kg/kmol] | Gamma (=C <sub>p</sub> /C <sub>v</sub> ) | $\mu$ [Poiseuille] | T [K]   | $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] |
|-----------------|-------------------------|--|--------------------|---------|-----------------------------|
| 3.40033         | 12.9944                 | 1.17386                                  | 1.80E-04           | 3199.24 | 2.44E-01                    |

Tableau 6-3 : Résultat du calcul COPPELIA : caractéristiques du mélange gazeux.

A l'aide de ELX on trouve également les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constante pour l'oxygène liquide :  $C_v = 941.25$  J/(kg.K),  $C_p = 1735.77$  J/(kg.K). Avec les résultats ci-dessus on peut estimer la valeur du gamma du mélange liquide/gaz :  $\bar{\gamma} = 1.000264$ . Pour évaluer le coefficient qui multiplie les termes de couplage de l'équation (5.130) ou bien, comme on étudie un seul mode, celui de l'équation (6.11),  $(\bar{\gamma} - 1)/E_n^2$ , on considère que l'intégrale des modes longitudinaux purs (qui correspond au cas étudié) valent :

$$E_n^2 \equiv E_{1L}^2 = \int_{V_{ch}} \psi_{1L} \psi_{1L} dVol = \int_{V_{ch}} \cos^2(k_{z,1L} z) dVol = \pi R_{ch}^2 \int_0^{l_{ch}} \cos^2(k_{z,1L} z) dz = \pi \frac{R_{ch}^2 l_{ch}}{2} \quad (6.25)$$

et que la longueur de la chambre est donnée par la relation (6.1). Au final, ce coefficient (adimensionnel) vaut  $2.04 \cdot 10^{-3}$ . On s'intéresse au couplage injection/combustion. Pour cela on considère l'indice d'interaction égal à zéro (c'est-à-dire :  $G_p = 0$ ) dans la partie du système étudié qui couple l'acoustique avec la combustion. Dans le terme de couplage qui nous intéresse  $\left( G_m = \frac{\hat{Q}_s}{\alpha S_{ch}} \psi(\mathbf{x}_c) Y \psi(\mathbf{x}_0) e^{-s\bar{\tau}} \right)$ , le coefficient  $\hat{Q}_s$  est évalué par l'expression mise en évidence dans la formule (5.111) ; il comporte une contribution due à la vaporisation et une autre due à la combustion :

$$\hat{Q}_{(\dot{\omega}_s)} = \left( (h_1 - h_{O_2}) + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_{O_2}} \right) = \left( (h_1 - h_{O_2}) + \frac{\mathfrak{R}}{M_{O_2}} T \right) \quad (6.26)$$

et

$$\hat{Q}_c = f(e_{H_2}, e_{O_2}, e_{pc}) \quad (6.27)$$

Pour exprimer ce dernier terme on considère la réaction stœchiométrique de la formation d'eau ( $2H_2 + O_2 \leftrightarrow 2H_2O$ ) et l'hypothèse de combustion instantanée au front de flamme à partir de l'oxygène vaporisé, ce qui nous permet d'écrire le taux de production d'oxygène comme :

$$\dot{\omega}_c^{(O_2)} = -\alpha \dot{\omega}_s \quad \text{avec } \alpha = \min\left(\frac{RM}{RMs}, 1\right) \quad (6.28)$$

et comme la consommation d'hydrogène et la production d'eau sont liées, le terme source dû à la combustion, suivant la relation (5.45), est :

$$Q_c = -\sum_i e_i \dot{\omega}_c^{(i)} = \left( e_{O_2} + e_{H_2} \cdot \frac{1}{RMs} - e_{H_2O} \cdot 2 \frac{M_{H_2O}}{M_{O_2}} \right) \cdot \alpha \dot{\omega}_s \quad (6.29)$$

La relation (6.27) peut être explicitée par la (6.29) :

$$\hat{Q}_c = \left( e_{O_2} + e_{H_2} \cdot \frac{1}{RMs} - e_{H_2O} \cdot 2 \frac{M_{H_2O}}{M_{O_2}} \right) \cdot \alpha \quad (6.30)$$

Afin d'évaluer le terme  $\hat{Q}_s$ , on a besoin des enthalpies des espèces gazeuses présentes dans la chambre, à la température de combustion. La base du NIST (voir Réf. [69]) donne :

| Espèce   | Oxygène gazeux     | Hydrogène gazeux   | Vapeur d'eau        |
|--|--------------------|--------------------|---------------------|
| $h$ [J/kg]<br>avec $T_{ref} = 298 K$<br>(à $T=3199.24 K$ ) | $3.314 \cdot 10^6$ | $4.771 \cdot 10^7$ | $-5.779 \cdot 10^6$ |

Tableau 6-4 : Enthalpies des espèces gazeuses présentes dans la chambre de combustion.

Par les données collectées on obtient une estimation de  $\hat{Q}_s$ , qui vaut  $9.23 \cdot 10^6 J/kg$ . La position du front de flamme peut être exprimée par le délai total et une vitesse moyenne du fluide injecté, calculée par la conservation de l'impulsion :

$$z_c = \bar{\tau} \cdot \bar{u} \quad (6.31)$$

avec  $\bar{u}$  donnée par :

$$\bar{u} = \frac{\dot{m}_{ox} u_{ox} + \dot{m}_{fuel} u_{fuel}}{\dot{m}_{tot\_inj}} \quad (6.32)$$

avec le débit total injecté calculé par voie classique ( $\dot{m}_{tot\_inj} = S_{col} p_{ch} / c^*$ ) et les débits des ergols, fonction du rapport de mélange ( $\dot{m}_{fuel} = \dot{m}_{tot\_inj} / (RM + 1)$  et  $\dot{m}_{ox} = RM \cdot \dot{m}_{fuel}$ ). Pour les vitesses des ergols après injection, on a :

$$u_{fuel} = \frac{\dot{m}_{fuel}}{S_{ch} \rho_{fuel}} \quad (6.33)$$

et

$$u_{ox} = \frac{\dot{m}_{ox}}{S_{inj} \rho_{inj}} \quad (6.34)$$

Pour le fuel, l'hydrogène gazeux dans notre application, on a considéré le débit à l'entrée de la chambre (d'où la surface chambre au dénominateur de l'équation (6.33)), pour tenir compte

du fait que le gaz a la propriété de s'adapter rapidement au volume qui le contient (ici le volume de la chambre de combustion). Sa masse volumique, afin de tenir compte des conditions après injection, est évaluée à 300 K, une température supérieure à celle à l'injection et aussi inférieure à celle de la flamme pendant la combustion. Concernant l'oxydant, l'oxygène liquide, sa vitesse est évaluée à ses conditions d'injection, afin d'obtenir sa valeur avant toute processus de transformation qu'il subit dans la chambre (en particulier, avant vaporisation). Avec ces entrées, les résultats du calcul sont présentés dans les figures suivantes :

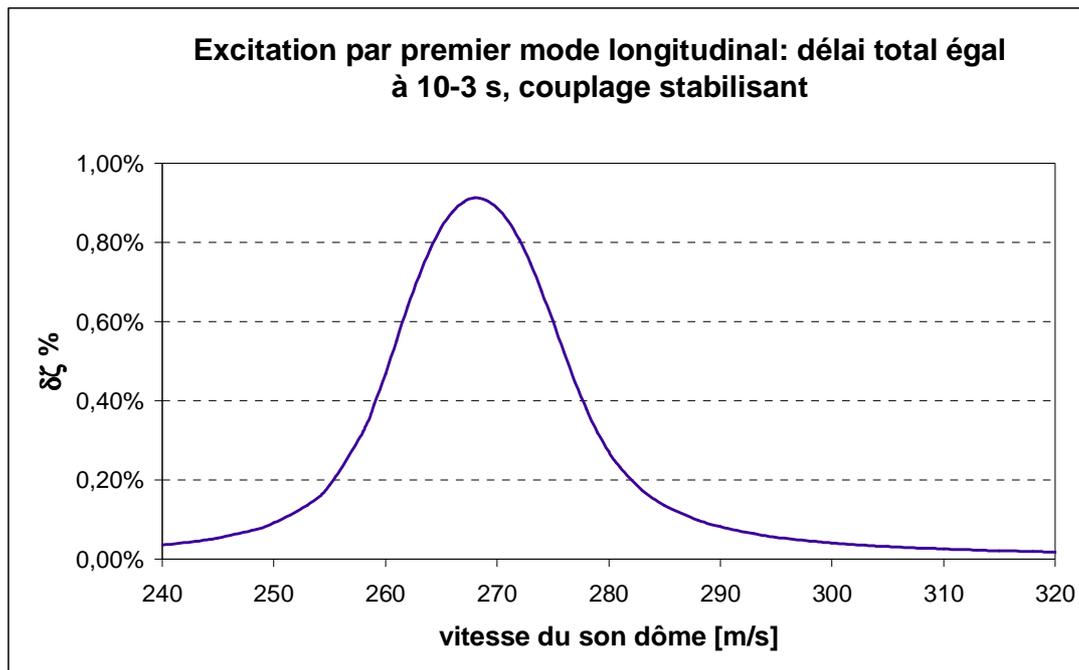


Figure 6-6 : Couplage stabilisant (le délai total est de  $10^{-3}$  s) : la variation d'amortissement est positive.

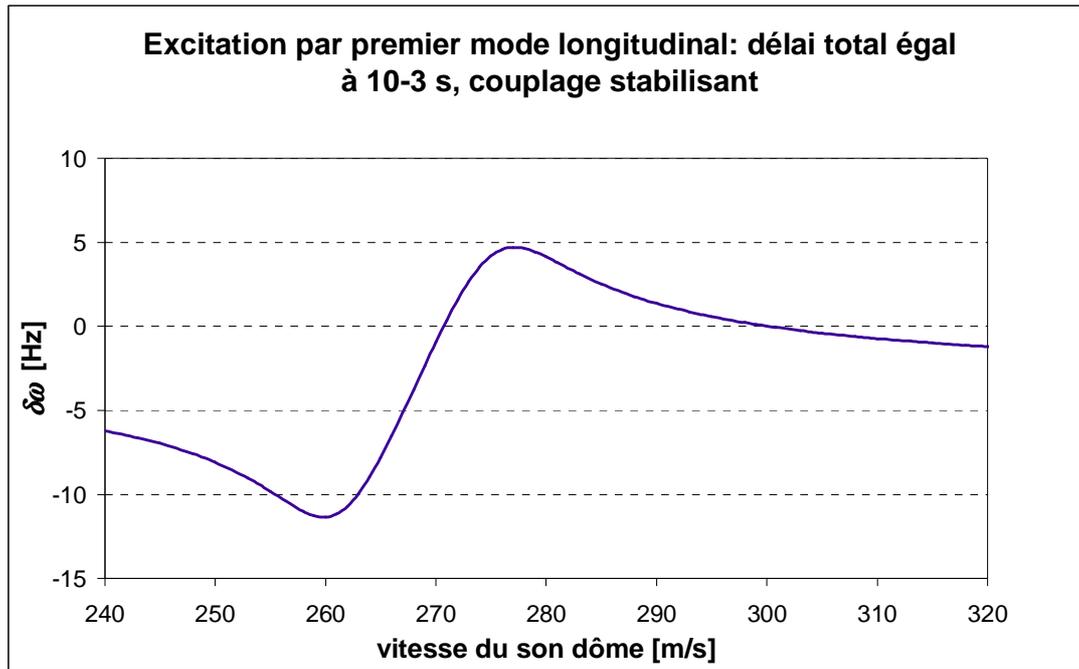


Figure 6-7 : Couplage stabilisant (le délai total est de  $10^{-3}$  s) : la variation fréquentielle est négligeable.

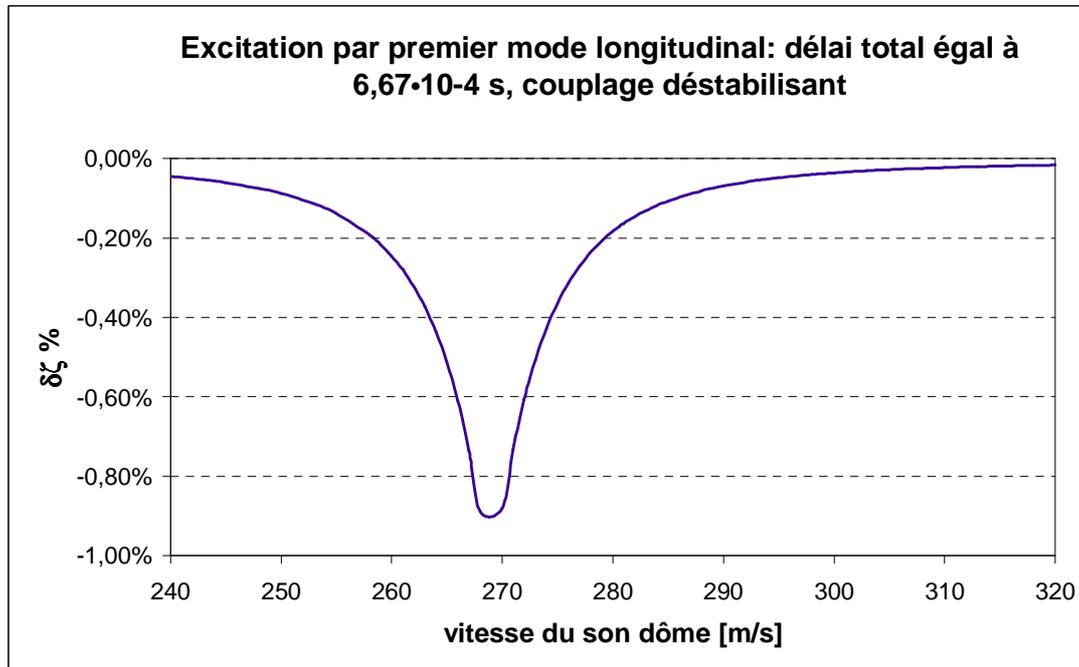


Figure 6-8 : Couplage déstabilisant (le délai total est de  $6,67 \cdot 10^{-4}$  s) : la variation d'amortissement est positive.

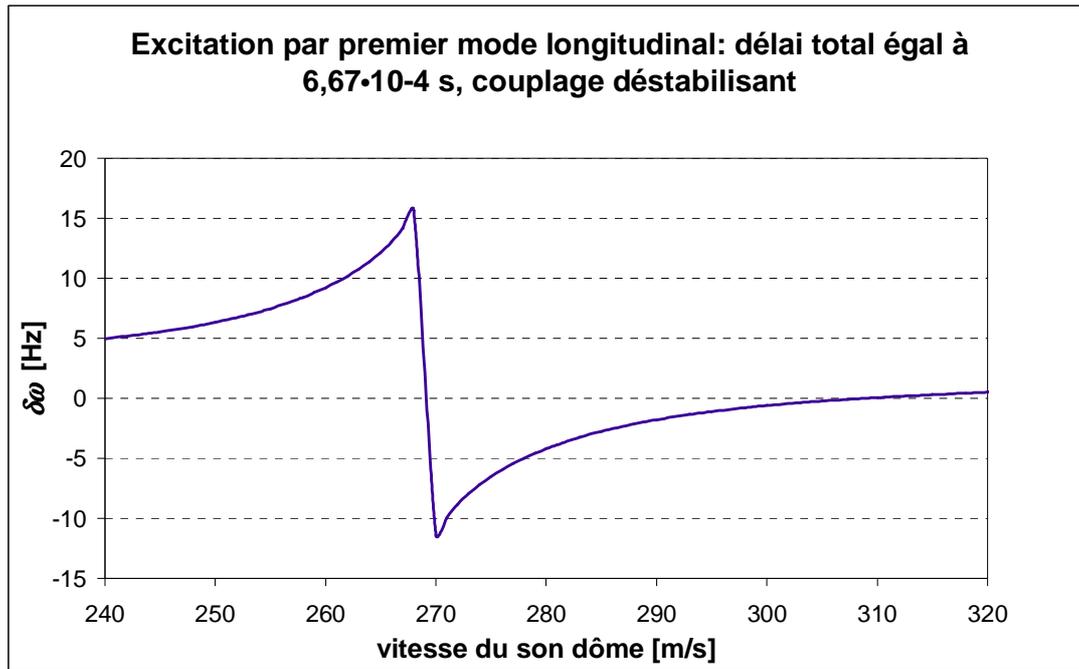


Figure 6-9 : Couplage déstabilisant (le délai total est de  $6.67E-4$  s) : la variation fréquentielle est négligeable.

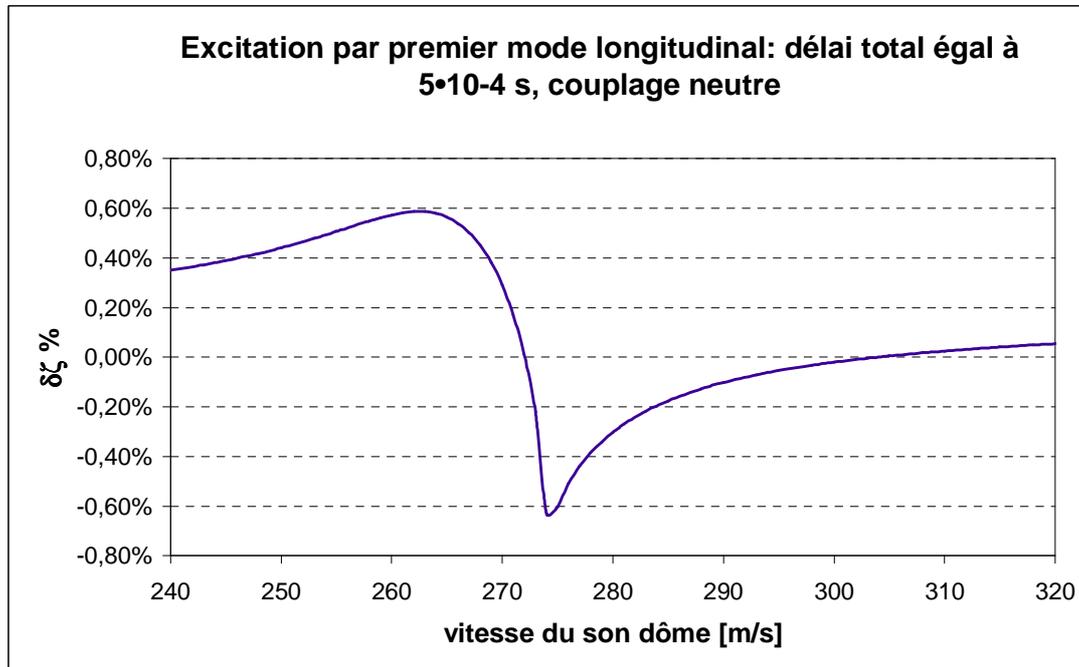


Figure 6-10 : Couplage neutre (le délai total est de  $5.00 \cdot 10^{-4}$  s) : la variation de l'amortissement est autour de sa position neutre.

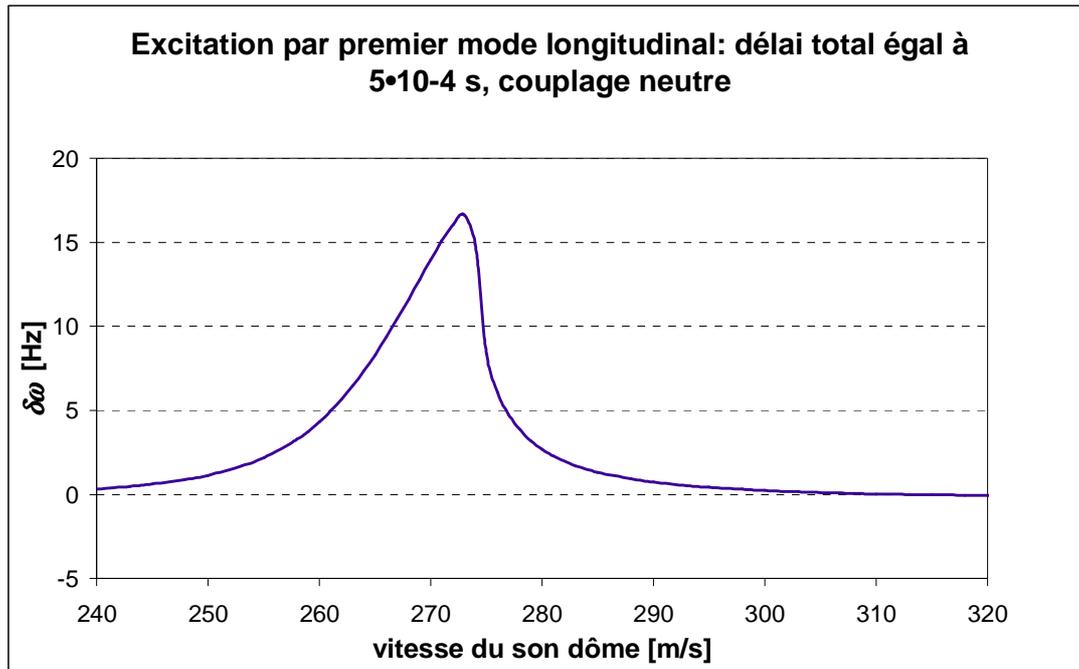


Figure 6-11 : Couplage neutre (le délai total est de  $5.00 \cdot 10^{-4}$  s) : la variation fréquentielle présente un maximum.

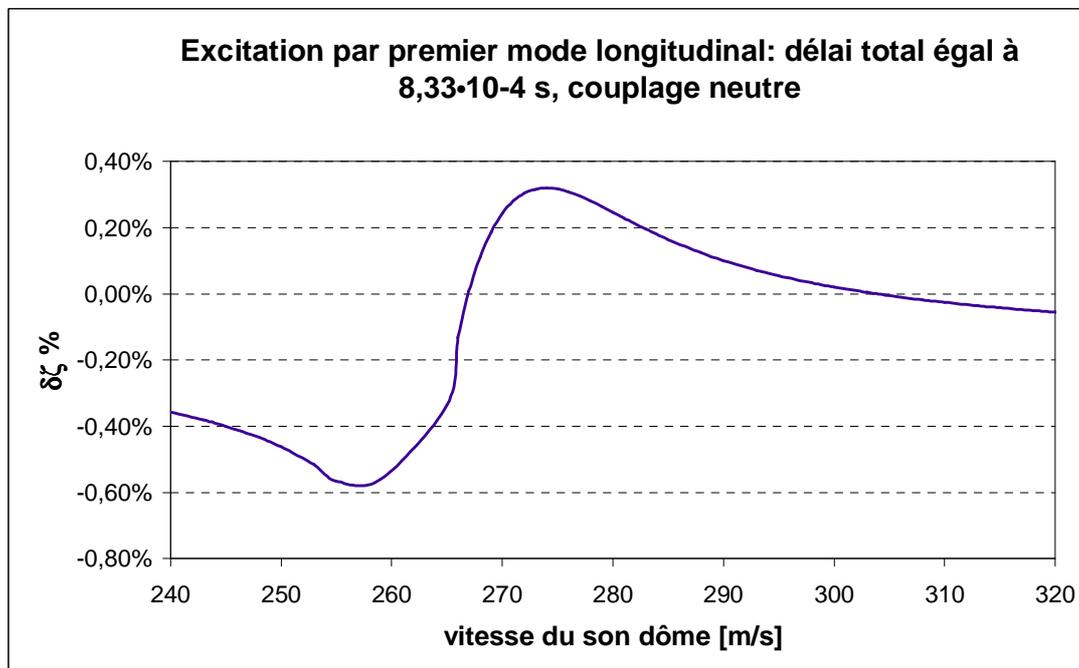


Figure 6-12 : Couplage neutre (le délai total est de  $8.33 \cdot 10^{-4}$  s) : la variation de l'amortissement est au tour de sa position neutre.

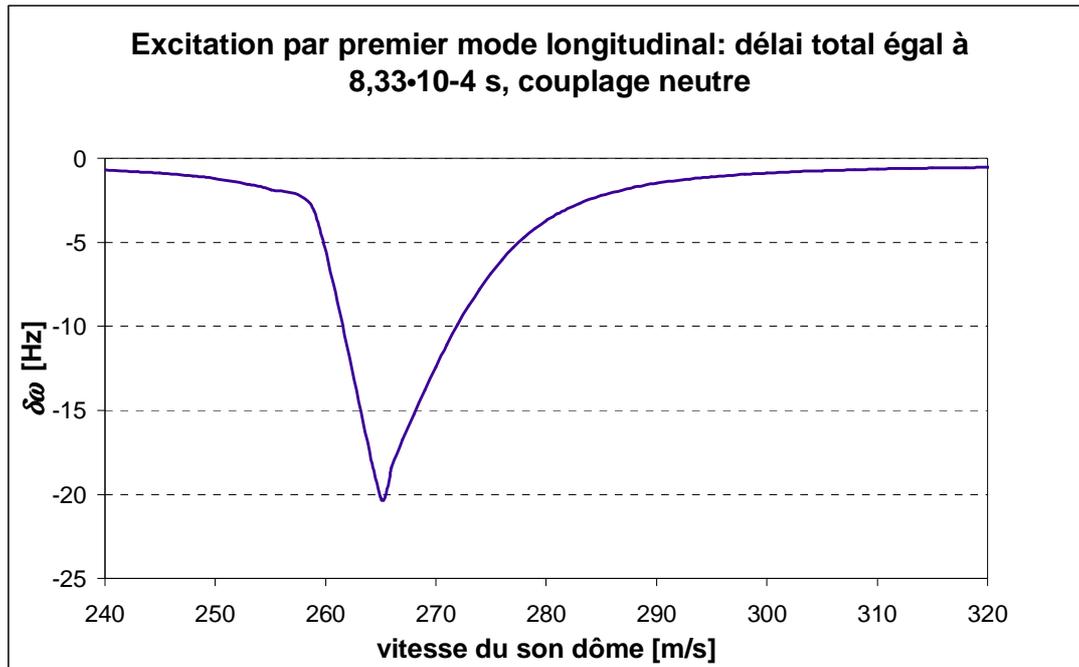


Figure 6-13 : Couplage neutre (le délai total est de  $8.33 \cdot 10^{-4}$  s) : la variation fréquentielle présente un maximum.

Les résultats du calcul retrouve bien le comportement prédit par l'étude théorique des délais totaux et en particulier on montre des maxima ou des valeurs nulles de variations d'amortissement ou de fréquence à des valeurs de vitesse du son du système d'injection proches de 267 m/s, comme on s'y attendait. On remarque aussi qu'en conditions de couplage neutre, pour une vitesse du son de 267 m/s, on retrouve bien ce comportement, par contre, si on s'écarte un peu de cette vitesse du son on trouve d'un côté un système stable, et de l'autre un système instable alors que dans les autres valeurs de tau, soit on est toujours stabilisant, soit toujours déstabilisant.

## 6.2 Etude d'un cas réel : application au moteur Aestus

Afin d'effectuer un calcul d'instabilité couplée sur un cas réel, on considère le moteur Aestus de l'étage supérieur à ergols stockables d'Ariane 5, qui, semble-t-il, a présenté des problèmes d'instabilité hybride pendant la phase de démarrage du vol 142. Pour une telle démarche on reprend la modélisation du dôme du fuel MMH (la mono-méthyl-hydrazine)

faite par l'ONERA ([31] et [77]), et on considérera les données de deux tests de qualification de l'Aestus, dont un avec une manifestation d'instabilité à haute fréquence, le 9052\_28 et l'autre, le 9054\_014 sans instabilité (voir [78]-[81]).

## 6.2.1 Géométrie du dôme MMH

Comme le système d'injection de la MMH pourrait s'être couplé avec l'acoustique de la chambre de combustion de l'Aestus, on considère le dôme du côté de la MMH et on applique la modélisation à paramètres discrets, dont la procédure a été montrée dans le paragraphe (4.2.2). On divise toute cavité en nœuds de pression en incluant la présence des injecteurs ainsi que de leurs caractéristiques géométriques (pour plus de renseignements voir [31] et [82]). Dans la modélisation, Les nœuds de pression reliant les cavités du dôme MMH sont représentés comme dans la figure suivante :

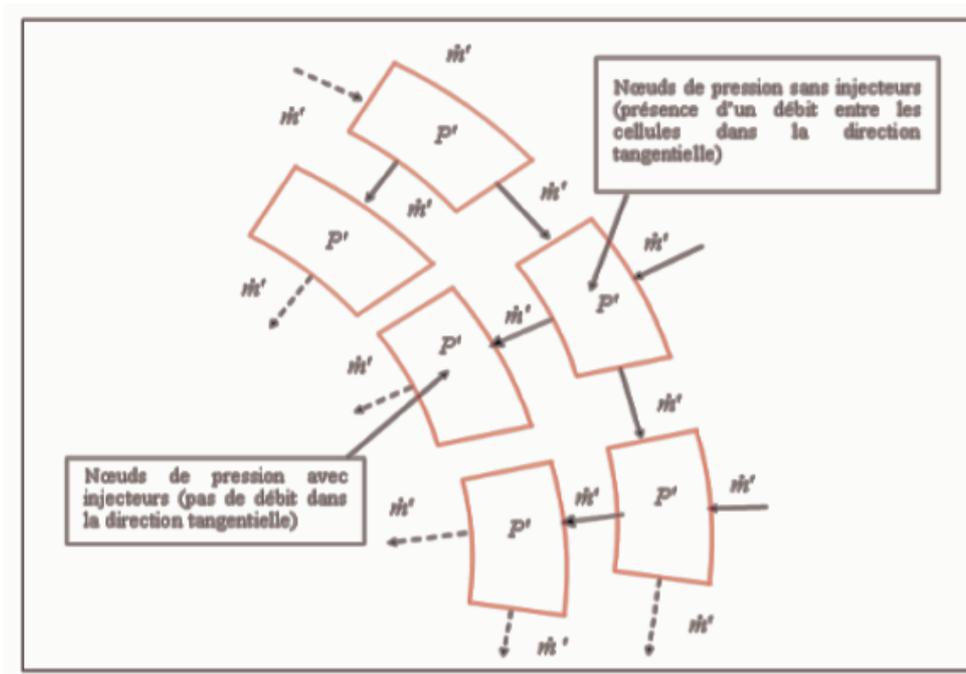


Figure 6-14 : Liaisons entre les nœuds de pressions.

Le dôme d'injection inclut les couronnes d'injection, les inter-couronnes, et un anneau de distribution connecté par des canaux à la couronne la plus extérieure.

## 6.2.2 Points de fonctionnement considérés pour l'étude du couplage

Les données expérimentales, dont on a besoin pour valider la simulation du couplage de la chambre de combustion avec le système d'injection MMH de l'Aestus, sont obtenues à partir de deux points de qualification, le point IMH de la campagne d'essais 9052 (9052\_28) et le point QSU1 de la campagne d'essais 9054 (9054\_014). Le premier est un point de fonctionnement en conditions extrêmes, obtenues par augmentation du débit de MMH à l'allumage par rapport aux conditions de vol, et il est intéressant car il montre l'apparition d'instabilités à haute fréquence à l'allumage. Le deuxième fait partie des points de qualification d'allumage de la campagne 9054, qui présente un comportement avec des petites oscillations de pression au début de l'allumage et qui reste stable. On montre par la suite trois points issus du transitoire d'allumage, repérés en termes de pression chambre, rapport de mélange et temps d'allumage pour l'essais IMH et deux points avec les mêmes valeurs de pression pour le point QSU1 (il manque un troisième point car la pression ne monte pas aussi haut que dans le cas IMH juste après l'allumage). Les valeurs de pression, de rapport de mélange et de temps sont adimensionnées par rapport à la pression visée, au rapport de mélange stabilisé et au temps d'allumage de l'essai IMH.

| Cas test           | Point Considéré | Pch/Pch_ref | RM/RM_ref | t/t_ref  |
|--------------------|-----------------|-------------|-----------|----------|
| 9052_028 :<br>IMH  | IMH_1           | 0.33        | 1.84      | 3.71E-02 |
|                    | IMH_2           | 0.89        | 1.67      | 3.75E-02 |
|                    | IMH_2           | 1.13        | 1.41      | 4.14E-02 |
| 9054_014 :<br>QSU1 | QSU1_1          | 0.33        | 3.74      | 3.67E-02 |
|                    | QSU1_2          | 0.89        | 3.34      | 3.78E-02 |

Tableau 6-5 : Point de références pour le calcul de couplage.

Le premier point choisi pour les deux essais correspond à un point peu après l'injection de la MMH dans la chambre, dans laquelle le N<sub>2</sub>O<sub>4</sub> est déjà présent car on admet qu'il commence à vaporiser dès qu'il est injecté, car sa température de vapeur saturante à la pression chambre est très voisine de celle d'injection. Le deuxième point considéré pour IMH et QSU1 est au

voisinage de la fin de la montée en pression dans la chambre, avant qu'elle puisse atteindre (en condition stables du moteur) sa valeur de régime. Le troisième qu'on a considéré pour le point IMH est pris en pleine instabilité du moteur : les fluctuations de pression sont du même ordre de grandeur que la pression moyenne.

### 6.2.3 Evaluation théorique des entrées du calcul

Afin de simuler le comportement stabilisant ou déstabilisant du moteur dans les cas montrés au paragraphe précédent, on a besoin d'entrer dans le code les données nécessaires à la résolution du système modal (5.130). Pour cela, on a besoin de :

- modéliser et évaluer les paramètres de la 'time lag theory' de Crocco, du moteur Aestus ;
- expliciter et évaluer le terme source dû à la vaporisation et à la combustion,  $\hat{Q}_s$  (voir chapitre 5) ;
- évaluer le Gamma du mélange, la position du front de flamme et l'amortissement intrinsèque du moteur.

#### 6.2.3.1 Modélisation des paramètres de la 'time-lag theory'

Suivant les travaux de Schmitt D. et Lourme D. [83], on évaluera les paramètres, liés à la théorie de Crocco, qu'on a introduits dans le chapitre précédent afin d'étudier le couplage du système d'alimentation avec la chambre de combustion. Parmi les paramètres à modéliser, il y a le délai insensible, qui ne dépend pas des facteurs physiques dans la chambre de combustion, et qui pourrait être par exemple le temps que les particules liquides injectées mettent pour atteindre la fin du dard liquide dans la chambre :

$$\bar{\tau}_i = \frac{l_d}{\bar{u}} \quad (6.35)$$

où la longueur du dard, évaluée par l'expérience (Réf. [34]) est environ deux fois le diamètre d'injection du liquide ( $l_d \approx 2D_l$ ), et la vitesse moyenne, suivant l'équation de l'impulsion, est évaluée par l'expression (6.32).

Concernant le délai sensible moyen, il est dû à la vaporisation, car dans l'étude couplée on modélise ce processus, qui a été considéré comme un candidat privilégié pour les instabilités hybrides (la contribution due à la combustion qu'on a écrite en fonction du débit vaporisé (voir la relation (6.29)) : l'étude des temps caractéristiques des processus qui suivent l'injection (voir chapitres 2 et 3) a montré le rôle guide de la vaporisation dans la boucle de couplage fluide/acoustique de la chambre. Suivant la Réf. [83], le délai de vaporisation (valeur stationnaire moyenne) est obtenue par intégration de l'équation de bilan de masse pendant la phase de vaporisation. On écrit que la diminution de la masse d'une goutte de rayon  $R_l$  et de masse volumique  $\rho_l$  pendant le temps élémentaire  $dt$  est égale à la masse de vapeur qui diffuse pendant le même temps dans le milieu gazeux environnant, soit :

$$-d\left(\frac{4}{3}\pi R_l^3 \rho_l\right) = 4\pi R_l \frac{\lambda_g}{C_{p,g}} Nu \cdot \ln(1+B) dt \quad (6.36)$$

L'équation (6.36) a été obtenue en considérant le nombre de Lewis unitaire ; la conductibilité thermique du gaz et la chaleur spécifique sont à évaluer à la température de chambre (supposée uniforme) ; le nombre de Nusselt,  $Nu$ , est définie comme :

$$Nu = 1 + 0.276 \cdot Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (6.37)$$

et  $B$  est le nombre de transfert introduit au chapitre 3. Lors de la vaporisation la masse volumique du liquide est égale à celle de sa vapeur en condition de saturation ( $\rho_l = \rho_{lv} = \text{constante}$ ), d'où l'expression du délai de vaporisation, obtenu par l'intégration entre la valeur initiale du rayon de la goutte ( $R_{lv}$ ) et sa valeur finale que l'on prendra égale à  $R_{lv}/2$  (suivant la référence considérée, ça correspond à la disparition de 7/8 de la masse de liquide) :

$$\bar{\tau}_s \equiv \bar{\tau}_v = \int_{\frac{R_{lv}}{2}}^{\frac{R_{lv}}{2}} \frac{-\rho_{lv} R_l dR_l}{\frac{\lambda_g}{C_{p,g}} Nu \cdot Ln(1+B)} = \frac{C_{p,g} \rho_{lv}}{\lambda_g Ln(1+B)} \int_{\frac{R_{lv}}{2}}^{\frac{R_{lv}}{2}} \frac{R_l dR_l}{Nu} \quad (6.38)$$

or le  $Nu$  peut être mis dans la forme suivante :

$$Nu = 1 + A\sqrt{R_l} \quad (6.39)$$

avec la variable  $A$  définie comme :

$$A = 0.276 \cdot \left( \frac{2\rho_g |\Delta u|}{\mu_g} \right)^2 \left( \frac{\mu_g C_{p,g}}{\lambda_g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.40)$$

où  $\Delta u$  est la différence de vitesse gaz/goutte.

On obtient l'expression suivante du délai de vaporisation :

$$\bar{\tau}_v = \frac{2C_{pg}\rho_{lv}}{A^4 \lambda_g Ln(1+B)} \cdot \left[ \frac{Nu^3}{3} - \frac{3Nu^2}{2} + 3Nu - Ln(Nu) \right]_{Nu\left(\frac{R_{lv}}{2}\right)}^{Nu(R_{lv})} \quad (6.41)$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_v = \frac{2C_{pg}\rho_{lv}}{A^4 \lambda_g Ln(1+B)} \cdot \mathcal{G}(T_v, T_{ch})$$

L'expression de l'indice de vaporisation  $n_v$  ( $n_v \equiv n_s$ ) relatif à la pression (voir Annexe C) est définie par :

$$\frac{d\bar{\tau}_v}{\bar{\tau}_v} = -n_v \frac{dp}{p} \quad (6.42)$$

En dérivant le délai de vaporisation par rapport à la température de vapeur saturante et de la chambre de combustion :

$$\frac{d\bar{\tau}_v}{\bar{\tau}_v} = -4 \frac{dA}{A}(T_{ch}) + \frac{d\rho_{lv}}{\rho_{lv}}(T_v) - \frac{d\lambda_g}{\lambda_g}(T_{ch}) - \frac{dLn(1+B)}{Ln(1+B)}(T_v, T_{ch}) + \frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}}(T_v, T_{ch}) \quad (6.43)$$

Par l'équation (6.42) et la dérivation (6.43), on trouve l'expression de l'indice :

$$n_v = p \left[ \left( \frac{4}{A} \frac{dA}{dT_{ch}} + \frac{1}{\lambda_g} \frac{d\lambda_g}{dT_{ch}} + \frac{1}{(1+B) \text{Ln}(1+B)} \frac{dB}{dT_{ch}} - \frac{1}{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T_{ch}} \right) \frac{dT_{ch}}{dp} + \left( -\frac{1}{\rho_{lv}} \frac{d\rho_{lv}}{dT_v} + \frac{1}{(1+B) \text{Ln}(1+B)} \frac{dB}{dT_v} - \frac{1}{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T_v} \right) \frac{dT_v}{dp} \right] \quad (6.44)$$

suivant la Réf. [83], on montre la forme de termes de l'équation ci-dessus qui dépendent de la température de la chambre de combustion. Le premier terme, qui représente la variation du nombre de Nusselt avec la variation de la température, est :

$$\frac{4}{A} \frac{dA}{dT_{ch}} = 2 \left( \frac{d\rho_g}{\rho_g} - \frac{d\mu_g}{\mu_g} \right) \quad (6.45)$$

avec  $A$  donnée par l'expression (6.40).

Comme la viscosité du gaz est supposée suivre la loi en racine de la température ( $\sqrt{T_{ch}}$ ), que la variation de la masse volumique du gaz, supposé isentropique, est :

$$\frac{d\rho_g}{\rho_g} = \frac{dp}{p} - \frac{dT_{ch}}{T_{ch}} = \frac{1}{\gamma_g - 1} \frac{dT_{ch}}{T_{ch}} \quad (6.46)$$

La relation (6.45), devient alors :

$$\frac{4}{A} \frac{dA}{dT_{ch}} = \left( \frac{3 - \gamma_g}{\gamma_g - 1} \right) \frac{1}{T_{ch}} \quad (6.47)$$

Le deuxième terme de l'équation (6.44) est :

$$\frac{1}{\lambda_g} \frac{d\lambda_g}{dT_{ch}} = \frac{1}{2T_{ch}} \quad (6.48)$$

où il a été considéré que la conductibilité thermique varie selon la loi d'Eucken :

$$\lambda_g = \mu_g \left( C_{p,g} + \frac{5}{4} \frac{\Re}{M_g} \right) \quad (6.49)$$

et que la chaleur spécifique à pression constante du gaz,  $C_{p,g}$ , est par hypothèse indépendante de la température de la chambre de combustion), ce qui nous fait varier la conductibilité suivant la viscosité dynamique du gaz ( $\Rightarrow$  comme  $\sqrt{T_{ch}}$ ).

Le troisième terme a la forme suivante :

$$\frac{1}{(1+B)Ln(1+B)} \frac{dB}{dT_{ch}} = \frac{1}{(1+B)Ln(1+B)} \cdot \frac{C_{p,g}}{L_v} \quad (6.50)$$

et la chaleur latente de vaporisation a la forme suivante :

$$L_v = L_{v0} \left(1 - \frac{T_v}{T_c}\right)^{\beta_L} \quad (6.51)$$

En effet on peut constater que la majorité des corps simples ou composés se comporte, lorsqu'on se rapproche du point critique, d'une manière assez semblable et que la plupart des grandeurs liées à la vaporisation suivent une loi du type (voir [1], [84]-[86]) :

$$g = g_0 \left(1 - \frac{T_v}{T_c}\right)^{\beta_g} + b_g \quad (6.52)$$

Pour le calcul du terme relatif à la fonction  $\mathcal{G}(T_v, T_{ch})$ , on pose  $\mathcal{G}(T_v, T_{ch}) = \tilde{\mathcal{G}}(R_{lv}) - \tilde{\mathcal{G}}(R_{lv}/2)$ .

Par ailleurs sa dérivée par rapport à la température de chambre est :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T_{ch}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Nu} \frac{dNu}{dT_{ch}} = \left[ \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}(R_{lv})}{\partial Nu} \sqrt{R_{lv}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}\left(\frac{R_{lv}}{2}\right)}{\partial Nu} \sqrt{\frac{R_{lv}}{2}} \right] \frac{dA}{\partial T_{ch}} \quad (6.53)$$

Donc le terme dépendant de cette dérivée dans l'équation (6.44) (qui représente avec le terme (6.47) la variation du nombre de Nusselt en fonction de la température), est :

$$\frac{1}{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T_{ch}} = \frac{A\sqrt{R_{lv}}}{\mathcal{G}} \left[ \left( \frac{(Nu-1)^3}{Nu} \right) \right]_{R_{lv}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{(Nu-1)^3}{Nu} \right) \left[ \frac{3-\gamma_g}{4(\gamma_g-1)} \frac{1}{T_{ch}} \right]_{\frac{R_{lv}}{2}} \quad (6.54)$$

On considère maintenant les dérivées de l'expression (6.44) par rapport à la température de vapeur saturante. Le premier terme est :

$$-\frac{1}{\rho_{lv}} \frac{d\rho_{lv}}{dT_v} = \frac{\rho_{lv0}}{\rho_{lv} T_c} \beta_\rho \left( 1 - \frac{T_v}{T_c} \right)^{\beta_\rho - 1} \quad (6.55)$$

où on a considéré, pour la masse volumique du liquide en conditions de vapeur saturante, la loi suivante (de la forme (6.52)) :

$$\rho_{lv} = \rho_{lv0} \left( 1 - \frac{T_v}{T_c} \right)^{\beta_\rho} + b_\rho \quad (6.56)$$

le terme contenant la dérivée du nombre de transfert par rapport à la température de vapeur est :

$$\frac{1}{(1+B)Ln(1+B)} \frac{dB}{dT_v} = \frac{1}{(1+B)Ln(1+B)} \cdot \frac{C_{p,g}}{L_v} \left[ \beta_L \frac{\left( \frac{T_{ch}}{T_c} - \frac{T_v}{T_c} \right)}{\left( 1 - \frac{T_v}{T_c} \right)} - 1 \right] \quad (6.57)$$

Concernant la dernière dérivée du terme relatif à la fonction  $\mathcal{G}(T_v, T_{ch})$  dans la relation (6.44), on a :

$$\frac{1}{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T_v} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial R_{lv}} \frac{dR_{lv}}{dT_v} = \frac{A}{2\mathcal{G}\sqrt{R_{lv}}} \left[ \left( \frac{(Nu-1)^3}{Nu} \right) \right]_{R_{lv}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{(Nu-1)^3}{Nu} \right) \left[ \frac{dR_{lv}}{dT_v} \right]_{\frac{R_{lv}}{2}} \quad (6.58)$$

On fait l'hypothèse que dans la phase de chauffage la goutte reste à masse constante (ce que implique que la variation du rayon de la goutte par rapport à la masse volumique est  $dR_{lv}/d\rho_{lv} = -R_{lv}/3\rho_{lv}$ ). On considère l'équation (6.56) pour décrire la fonction masse

volumique du liquide en condition de saturation, si bien que la dérivée du rayon de la goutte par rapport à la température de vapeur saturante, dans l'équation (6.58), est :

$$\frac{dR_{lv}}{dT_v} = -\frac{R_{lv}}{3\rho_{lv}} \cdot \frac{d\rho_{lv}}{dT_v} = \frac{R_{lv}}{\rho_{lv}} \frac{\rho_{lv0} \beta_\rho}{3T_{ch}} \left(1 - \frac{T_v}{T_c}\right)^{\beta_\rho - 1} \quad (6.59)$$

Dans l'expression (6.44), il nous reste deux dérivées par rapport à la pression à évaluer : une concernant la température de la chambre et l'autre la température de saturation. On trouve la première en manipulant l'équation (6.46) :

$$p \frac{dT_{ch}}{dp} = \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} T_{ch} \quad (6.60)$$

La deuxième dérivée utilise la loi de pression de vapeur saturante suivante (voir Réf. [87]) :

$$p = e^{\left(a_p - \frac{b_p}{T_v - c_p}\right)} \quad (6.61)$$

ce qui donne :

$$p \frac{dT_v}{dp} = \frac{b_p}{(a_p - \ln(p))} \quad (6.62)$$

### 6.2.3.2 Evaluation des paramètres de la 'time-lag theory'

En utilisant les équations présentées au paragraphe précédent, on peut évaluer les paramètres de la théorie de Crocco, introduites dans notre modèle d'équations modales, afin d'étudier le couplage de la chambre de combustion Aestus, avec le système d'injection de la MMH : comme l'étude du couplage est réduit à la partie de l'injection qui concerne la seule MMH, on évaluera le délai sensible et l'indice d'interaction pour le côté combustible (car ils peuvent être définis pour les deux ergols). Dans le modèle de la chambre de combustion, comme dans l'Aestus, le peroxyde d'azote (N<sub>2</sub>O<sub>4</sub>) est injecté à une température voisine de celle de sa vapeur saturante et avant la MMH. On considérera que pendant le démarrage du moteur il est gazeux à la sortie de l'injection, tandis que la MMH est liquide, ce qui nous

permettra d'utiliser la modélisation présentée au chapitre 4 (pour le couple d'ergols oxygène liquide/hydrogène gazeux), appliquée aux ergols de l'Aestus. Cependant pour l'évaluation des propriétés thermo-physiques des produits de combustion, dont on a besoin pour évaluer une partie des inconnues de notre problème, on considérera les ergols à l'injection, c'est-à-dire les deux ergols à l'état liquide à la section d'injection.

On commence par l'évaluation des délais insensible et sensible de la MMH qui s seront adimensionnés par rapport à  $\theta_w$ , le temps requis pour une onde sonore à traverser la chambre :

$$\theta_w = \frac{l_{ch}^*}{a} \quad (6.63)$$

où,  $a$  est la vitesse du son du mélange gazeux à la température de combustion et  $l_{ch}^*$  est la longueur efficace de la chambre qui tient compte de la partie cylindrique de la chambre et d'une partie du convergent (jusqu'à la section dont la surface est la moitié de celle de la partie cylindrique). Le délai insensible requiert la connaissance de la vitesse moyenne du fluide injecté, dans la chambre. Cette vitesse est calculée par la conservation de l'impulsion selon la formule (6.32), en sachant que la vitesse du combustible (la MMH liquide) et celle de l'oxydant (le peroxyde d'azote ( $N_2O_4$ ) liquide), sont données par :

$$u_{ergol} = \frac{\dot{m}_{ergol}}{(S_{inj} \rho_{inj})_{ergol}} \quad (6.64)$$

pour tenir compte du fait que les deux ergols sont injectés liquide et que leurs vitesses sont évaluées aux conditions d'injection, avant tout processus de transformation qu'ils subissent dans la chambre (en particulier, avant vaporisation).

L'évaluation des délais et de l'indice d'interaction requiert la connaissance des propriétés thermo-physiques du mélange gazeux dans la chambre de combustion, pour cela on utilise le code COPPELIA ([43] et [44]), qui nécessite comme entrées, la masse volumique et l'enthalpie des ergols. Les deux ergols sont injectés liquide à la température  $T_{inj\ ergol}$ , les données sont obtenus par ELX ([76]) :

|   | $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ] | $h$ [Cal/mole] à $T_{ref}=298 K$ | $T_{inj\ ergol} / (\bar{T}_{inj\ ergol})_{IMH}$ |
|---|-----------------------------|----------------------------------|---|
| Oxydant :<br>N <sub>2</sub> O <sub>4</sub> (T=293K) | 1448                        | -4796.83                         | 1.0051  |
| Combustible :<br>MMH (T=293K)                       | 875                         | 12722.46                         | 1.0068  |

Tableau 6-6 : Données d'entrée pour le calcul des caractéristiques du mélange dans le cas de l'Austus.

Comme les ergols sont en phase liquide on néglige l'effet de la pression sur les masses volumique et les enthalpies, qui vont dépendre de la température d'injection, ici adimensionnée par la température moyenne d'injection de l'ergol considéré dans le test IMH. On obtient les caractéristiques suivantes du mélange :

| Point calcul | $C_p$ [Cal/g/K] | Masse molaire [Kg/Kmol] | Gamma (=C <sub>p</sub> /C <sub>v</sub> ) | $\mu$ [Poiseuille]   | T [K]   | $\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ] | $C^*/(C^*)_{IMH\_1}$ |
|--------------|-----------------|-------------------------|--|----------------------|---------|-----------------------------|----------------------|
| IMH_1        | 1.09            | 19.91                   | 1.17                                     | $8.23 \cdot 10^{-5}$ | 2950.68 | $3.67 \cdot 10^{-1}$        | 1.000                |
| IMH_2        | 0.80            | 19.29                   | 1.19                                     | $8.10 \cdot 10^{-5}$ | 2904.71 | $9.75 \cdot 10^{-1}$        | 0.998                |
| IMH_2        | 0.66            | 18.02                   | 1.22                                     | $7.54 \cdot 10^{-5}$ | 2660.79 | 1.26                        | 0.977                |
| QSU1_1       | 1.42            | 24.71                   | 1.16                                     | $1.50 \cdot 10^{-4}$ | 3014.43 | $4.46 \cdot 10^{-1}$        | 0.918                |
| QSU1_2       | 1.40            | 24.25                   | 1.16                                     | $1.54 \cdot 10^{-4}$ | 3159.67 | 1.13                        | 0.948                |

Tableau 6-7 : Résultats du calcul COPPELIA : caractéristiques du mélange gazeux pour les cas IMH et QSU1 de l'Austus.

Dans l'évaluation du délai sensible et de l'indice  $n$ , on a des termes qui dépendent du nombre de Nusselt, dont la modélisation est donnée par l'équation (6.39), et comme cette grandeur est fonction de la différence de vitesse gaz/goutte, on a besoin d'imposer sa valeur : suivant la Réf. [83] et les calculs effectués en Réf. [87], on considère 3 valeurs qui peuvent représenter en première approximation le comportement moyen de l'écoulement près de l'injection : 10 m/s, 50 m/s, 90 m/s. En outre, la modélisation des paramètres recherchés requiert également la connaissance du diamètre des gouttes, pour cela on considère la Réf.

[88], qui propose une expression du diamètre moyen de Sauter en fonction du nombre Weber :

$$\frac{D_{32}}{D_{ref}} = 69.9 \cdot We^{-0.44} \quad \text{avec} \quad D_{ref} = 109 \quad (6.65)$$

avec le nombre de Weber évalué à l'injection et par le diamètre du pitot du peroxyde d'azote,  $(We = (\rho_{ergol} |\mathbf{u}_{ergol}|^2 D_{pitot}) / \sigma_{ergol})$ . Il est enfin nécessaire pour le point MMH d'interpoler la chaleur latente de vaporisation (éq. (6.51)), la masse volumique du liquide en condition de vapeur saturante (éq. (6.56)) et la pression de vapeur saturante (éq. (6.61)) : on se base pour cela sur la Réf. [87] et on obtient :

$$L_v = 1218^E 3 \cdot \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{0.455} \quad [\text{J/Kg}] \quad (6.66)$$

$$\rho_{lv_{MMH}} = 789.2 \cdot \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{0.4316} + 290 \quad [\text{Kg/m}^3] \quad (6.67)$$

$$p_s = \exp\left(22.102 - \frac{3298.3}{T - 50}\right) \quad [\text{Pa}] \quad (6.68)$$

On montre ci dessous les résultats obtenus par les équations (6.35), (6.41) et (6.44) et l'utilisation des données géométriques du moteur et de la plaque d'injection (fournis par le fichier de définition de l'Aestus, Réf. [82]). Ces valeurs sont présentées pour trois valeurs de vitesse relative gaz/goutte :

|              |                         | $ \Delta u  = 10 \text{ m/s}$ |       | $ \Delta u  = 50 \text{ m/s}$ |       | $ \Delta u  = 90 \text{ m/s}$ |       |
|--------------|-------------------------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|
| Point calcul | $\bar{\tau}_i/\theta_w$ | $\bar{\tau}_v/\theta_w$       | $n_v$ | $\bar{\tau}_v/\theta_w$       | $n_v$ | $\bar{\tau}_v/\theta_w$       | $n_v$ |
| IMH_1        | 2.47                    | 95.57                         | 0.806 | 61.20                         | 0.900 | 50.08                         | 0.931 |
| IMH_2        | 0.92                    | 14.78                         | 1.103 | 9.42                          | 1.204 | 7.70                          | 1.236 |
| IMH_2        | 0.68                    | 8.82                          | 1.267 | 5.63                          | 1.367 | 4.60                          | 1.399 |
| QSU1_1       | 2.03                    | 91.97                         | 0.775 | 59.00                         | 0.872 | 48.31                         | 0.903 |
| QSU1_2       | 0.81                    | 13.13                         | 1.007 | 8.44                          | 1.111 | 6.92                          | 1.145 |

Tableau 6-8 : Evaluations des paramètres de la 'Time lag theory' de Crocco, pour les cas IMH et QSU1 de l'Aestus.

On peut remarquer que le délai insensible est un ordre de grandeur plus petit que le délai sensible, et que ce dernier diminue quand on augmente la différence de vitesse gaz/liquide, ce qui est normal, car la fragmentation augmente avec cette dernière en favorisant l'apparition de gouttes plus petites, et l'échange d'énergie cinétique entre les deux phases. Concernant l'indice d'interaction, comme il est lié à l'accumulation d'énergie dans la goutte, on a une augmentation de celui-ci quand on augmente la différence de vitesse entre les deux phases et donc les échanges entre eux.

### 6.2.3.3 Explicitation et évaluation du terme source de couplage

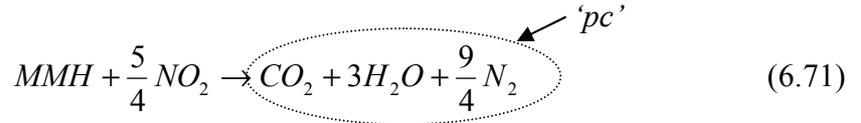
Pour évaluer le terme de couplage  $\hat{Q}_s$  dû à la vaporisation et à la combustion de la MMH, on le décompose suivant l'équation (5.111) en partie dépendante de la vaporisation ( $\hat{Q}_{(\omega_s)}$ ) et partie dépendante de la combustion ( $\hat{Q}_c$ ). La contribution due à la vaporisation de la MMH est :

$$\hat{Q}_{(\omega_s)} = \left( (h_{MMH_l} - h_{MMH_g}) + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_{MMH_g}} \right) = \left( (h_{MMH_l} - h_{MMH_g}) + \frac{\mathfrak{R}}{M_{MMH_g}} T \right) \quad (6.69)$$

Celle due à la combustion, est évaluée suivant les considérations faites au paragraphe 6.1.4 et adaptées au couple d'ergols  $N_2O_4$  gazeux et MMH liquide :

$$Q_c = -\sum_i e_i \dot{\omega}_c^{(i)} = \left( e_{MMH_g} + e_{N_2O_4_g} \cdot \frac{1}{RM_S} - e_{pc} \cdot \frac{M_{pc}}{M_{MMH_g}} \right) \cdot \alpha \dot{\omega}_s \quad (6.70)$$

Pour exprimer ce dernier terme on a considéré la réaction stœchiométrique suivante (Réf. [87]) :



dont le rapport de mélange stœchiométrique ( $RM_S$ ) vaut 2.5. L'hypothèse de vaporisation/combustion instantanée au front de flamme à partir de la MMH vaporisée, nous a permis d'écrire, dans la relation (6.70), le taux de disparition de la MMH (et par la suite celui de disparition du  $N_2O_4$ ) et de production des produits de combustion 'pc', qui sont liés à la production de MMH) comme :

$$\dot{\omega}_c^{(MMH)} = -\alpha \dot{\omega}_s \quad \text{avec } \alpha = \min\left(\frac{RM}{RM_S}, 1\right) \quad (6.72)$$

Le terme cherché est donc :

$$\hat{Q}_c = \left( e_{MMH_g} + e_{N_2O_4_g} \cdot \frac{1}{RM_S} - e_{pc} \cdot \frac{M_{pc}}{M_{MMH_g}} \right) \cdot \alpha \quad (6.73)$$

Afin d'évaluer les termes sources (6.69) et (6.73), on a besoin des enthalpies des espèces gazeuses présentes dans la chambre. Pour cela on utilise le NIST ([69]), l'AGARD ([89]) et les résultats COPPELIA ([43] et [44]) pour les produits de combustion :

| Point calcul | $h$ [J/kg]<br><i>MMH gazeux</i><br>$T_{ref} = 298 K$ | $h$ [J/kg]<br><i>N2O4 gazeux</i><br>$T_{ref} = 298 K$ | $h$ [J/kg]<br><i>Produits de combustion 'pc'</i> |
|--------------|--|---|--|
| IMH_1        | $3.60 \cdot 10^6$                                    | $8.60 \cdot 10^6$                                     | $3.18 \cdot 10^5$                                |
| IMH_2        | $3.54 \cdot 10^6$                                    | $8.60 \cdot 10^6$                                     | $3.49 \cdot 10^5$                                |
| IMH_2        | $3.19 \cdot 10^6$                                    | $8.46 \cdot 10^6$                                     | $4.06 \cdot 10^5$                                |
| QSU1_1       | $3.69 \cdot 10^6$                                    | $8.58 \cdot 10^6$                                     | $1.11 \cdot 10^5$                                |
| QSU1_2       | $3.90 \cdot 10^6$                                    | $8.46 \cdot 10^6$                                     | $1.40 \cdot 10^5$                                |

Tableau 6-9 : Enthalpies des espèces gazeuses présentes dans la chambre de combustion Aestus.

Par les données collectées on obtient une estimation des termes sources :

| Point calcul | $\hat{Q}_{(\dot{\omega}_s)}$ [J/kg] | $\hat{Q}_c$ [J/kg] | $\hat{Q}_s$ [J/kg] |
|--------------|-------------------------------------|--------------------|--------------------|
| IMH_1        | $-6.89 \cdot 10^6$                  | $6.11 \cdot 10^6$  | $-7.83 \cdot 10^5$ |
| IMH_2        | $-6.91 \cdot 10^6$                  | $5.55 \cdot 10^6$  | $-1.36 \cdot 10^6$ |
| IMH_2        | $-6.81 \cdot 10^6$                  | $4.55 \cdot 10^6$  | $-2.26 \cdot 10^6$ |
| QSU1_1       | $-6.86 \cdot 10^6$                  | $1.26 \cdot 10^7$  | $5.70 \cdot 10^6$  |
| QSU1_2       | $-6.72 \cdot 10^6$                  | $1.12 \cdot 10^7$  | $4.44 \cdot 10^6$  |

Tableau 6-10 : Evaluation des termes sources dans le modèle de couplage de la chambre de combustion et du système d'injection de l'Aestus.

On observe que la contribution de la chimie est plus importante dans le cas QSU1, pour lequel le terme source  $\hat{Q}_c$  est environ cinq fois plus grand que celui du cas de fonctionnement extrême IMH : il y a une diminution des enthalpies des produits de combustion (et donc d'énergie interne) et une augmentation de la température de combustion (voir le Tableau 6-7 et le Tableau 6-9). On assiste d'un point de vue des résultats à un changement de signe de la chaleur totale, ce qui influencera comme on verra par la suite le signe de l'amortissement initial de la chambre de combustion.

#### 6.2.3.4 Evaluation des grandeurs restantes dans le modèle de couplage

Les variables ultérieures à évaluer pour résoudre le système modal (5.130) sont :

- la gamma du mélange gaz/liquide dans la chambre ;
- la position du front de flamme ;
- l'amortissement initial des modes acoustiques de la chambre de combustion ;
- l'intégrale des modes normaux.

Pour évaluer le Gamma du mélange gaz/liquide,  $\bar{\gamma}$ , on utilise les formules (5.47), (5.61) et (5.63). A l'aide de ELX on trouve la chaleur spécifique à pression constante pour l'MMH liquide (celle qu'on a appelée  $C_l$  dans le chapitre 5) :  $C_p = 2924.48 \text{ J/(Kg.K)}$ . On utilise les résultats du Tableau 6-7 et on obtient :

| Point calcul | Gamma mélange gaz/liquide |
|--------------|---------------------------|
| IMH_1        | 1.0000955                 |
| IMH_2        | 1.0001250                 |
| IMH_3        | 1.0001499                 |
| QSU1_1       | 1.0000843                 |
| QSU1_2       | 1.0002141                 |

Tableau 6-11 : Evaluation de la Gamma du mélange gaz/liquide pour les cas IMH et QSU1 de l'Aestus.

On évalue par la suite, à l'aide de l'équation (6.31) dont on connaît les variables, la position axiale du front de flamme ( $z_c$ ) adimensionnée par la longueur de chambre ( $l_{ch}^*$ ). Les résultats sont présentés pour trois valeurs différentes de la vitesse relative gaz/goutte (10 m/s, 50 m/s, 90 m/s) car ils dépendent du délai sensibles de vaporisation :

| Point calcul | $z_c/l_{ch}^*$ à              | $z_c/l_{ch}^*$ à              | $z_c/l_{ch}^*$ à              |
|--------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|              | $ \Delta u  = 10 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 50 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 90 \text{ m/s}$ |
| IMH_1        | $4.41 \cdot 10^{-1}$          | $2.86 \cdot 10^{-1}$          | $2.36 \cdot 10^{-1}$          |
| IMH_2        | $1.91 \cdot 10^{-1}$          | $1.26 \cdot 10^{-1}$          | $1.05 \cdot 10^{-1}$          |
| IMH_3        | $1.55 \cdot 10^{-1}$          | $1.03 \cdot 10^{-1}$          | $8.63 \cdot 10^{-2}$          |
| QSU1_1       | $5.15 \cdot 10^{-1}$          | $3.34 \cdot 10^{-1}$          | $2.76 \cdot 10^{-1}$          |
| QSU1_2       | $1.90 \cdot 10^{-1}$          | $1.26 \cdot 10^{-1}$          | $1.06 \cdot 10^{-1}$          |

Tableau 6-12 : Evaluation de la position du front de flamme pour les cas IMH et QSU1 de l'Aestus.

On voit par les résultats que le front de flamme se rapproche de la plaque d'injection lorsque la différence de vitesse gaz/liquide augmente, car le délai sensible dû à la vaporisation diminue et donc la vaporisation et la combustion se produisent plus tôt.

L'estimation de l'amortissement de la chambre est donnée par l'équation (6.24), dont on connaît toutes les inconnues. Avant de donner les résultats, il faut choisir le mode d'excitation : on focalise notre attention sur le deuxième mode tangentiel (T2) de la chambre de combustion, un mode qui a été considéré dangereux pour l'Aestus, suite à l'exploitation des signaux des capteurs collectés après le vol 142 et pendant les campagnes de qualification faisant partie du programme d'accompagnement et de recherche technologique pour Ariane (ARTA) qui a suivi l'échec. La fréquence de résonance est évaluée par l'équation (4.37), avec le paramètre  $\lambda_{mn} \equiv \lambda_{20} = 3.0542$ . Les fréquences de résonance et l'amortissement initial ( $\zeta_0$ ) sont :

| Point calcul | Fréquence de résonance 2T [Hz] | $\zeta_0$ à $ \Delta u  = 10 \text{ m/s}$ | $\zeta_0$ à $ \Delta u  = 50 \text{ m/s}$ | $\zeta_0$ à $ \Delta u  = 90 \text{ m/s}$ |
|--------------|--------------------------------|---|---|---|
| IMH_1        | 5562                           | -0.000001%                                | -0.00006%                                 | -0.00007%                                 |
| IMH_2        | 5657                           | -0.00018%                                 | -0.00024%                                 | -0.00011%                                 |
| IMH_3        | 5675                           | -0.00036%                                 | -0.00067%                                 | -0.00009%                                 |
| QSU1_1       | 5011                           | 0.00011%                                  | 0.00026%                                  | 0.00011%                                  |
| QSU1_2       | 5190                           | 0.00065%                                  | 0.00030%                                  | 0.00025%                                  |

Tableau 6-13 : Evaluation du front de flamme fonction pour les cas IMH et QSU1 de l'Aestus.

Les valeurs trouvées donnent une instabilité intrinsèque de la chambre dans le cas IMH et le contraire pour le QSU1. On remarque aussi que les valeurs sont très proches de la valeur zéro, ce qui peut dépendre des approximations du terme source, dans lequel on a négligé les termes qui ne sont pas liés à la vaporisation et à la combustion.

La dernière variable à évaluer est l'intégrale des modes normaux, dans notre cas celui correspondant au deuxième mode tangentiel (voir Annexe B), donné par l'équation suivante

$$\begin{aligned}
E_n^2 &\equiv E_{2T}^2 = \int_{V_{ch}} \psi_{T2} \psi_{T2} dVol \\
&= \int_{V_{ch}} \left\{ \left[ J_2 \left( \frac{\lambda_{2,0}}{R_{ch}} r \right) \right]^2 \cos^2(k_{z,L0} z) \cos^2(2\vartheta) \right\} dVol \quad (6.74) \\
&= \pi \frac{R_{ch}^2 l_{ch}}{2} \int_0^1 [J_2(\lambda_{2,0} \cdot \xi)]^2 d\xi
\end{aligned}$$

où l'intégrale de la fonction de Bessel a été résolu par le logiciel Matlab et la fonction  $\psi_{T2}$  a la forme suivante :

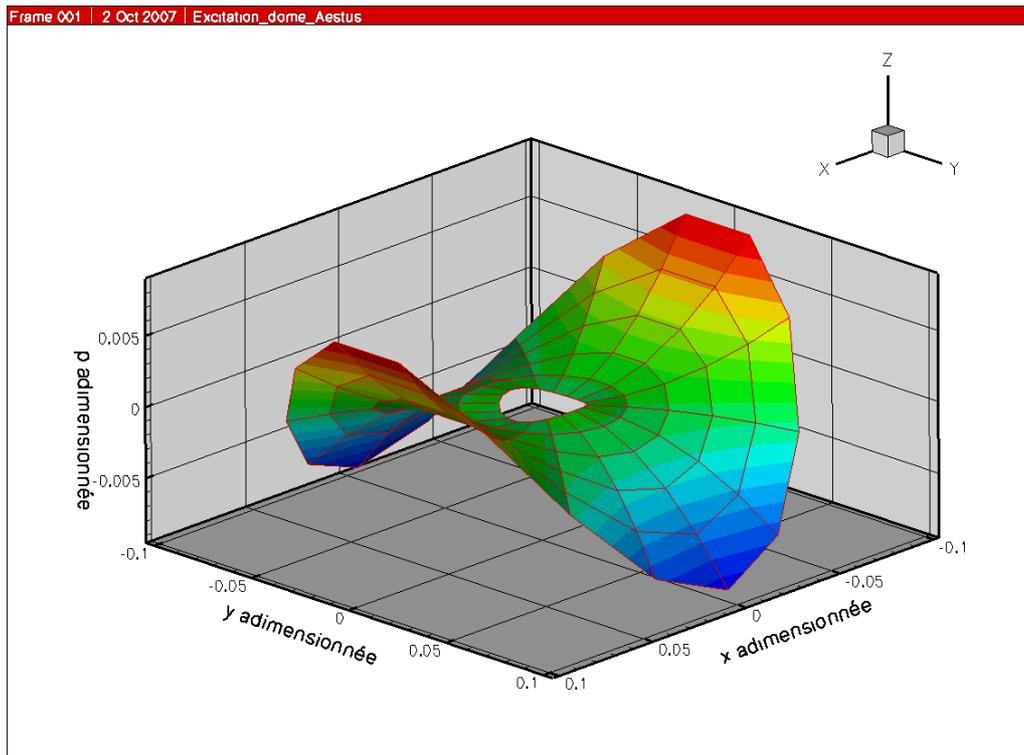


Figure 6-15 : Vue tridimensionnelle du mode T2 imposé comme excitation de la chambre de combustion.

## 6.2.4 Résultats des calculs de couplage

Dans les paragraphes précédents on a évalué toutes les entrées nécessaires pour résoudre le système modal (5.130), ce qui nous permet d'obtenir l'amortissement de la chambre de combustion couplée avec le système d'injection. On montre dans ce qui suit les amortissements pour les cinq points de fonctionnement étudiés, qui ont été obtenus lors des campagnes de qualification 9052 et 9054 :

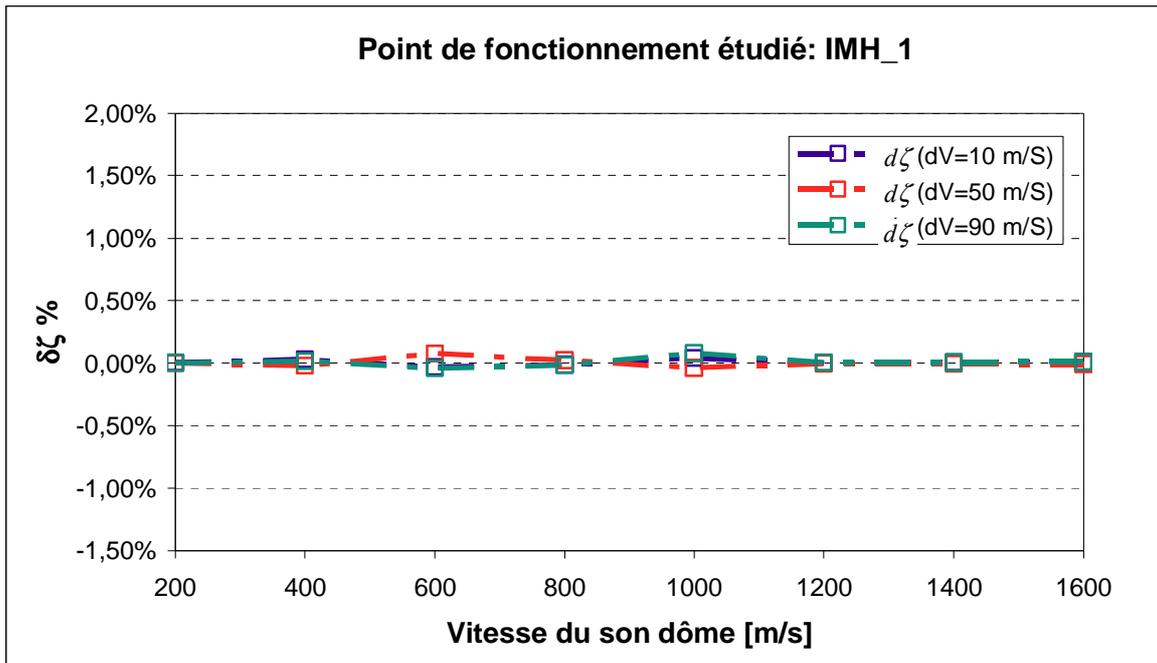


Figure 6-16 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son du dôme et de la vitesse relative gaz/liquide, pour le point de fonctionnement IMH\_1.

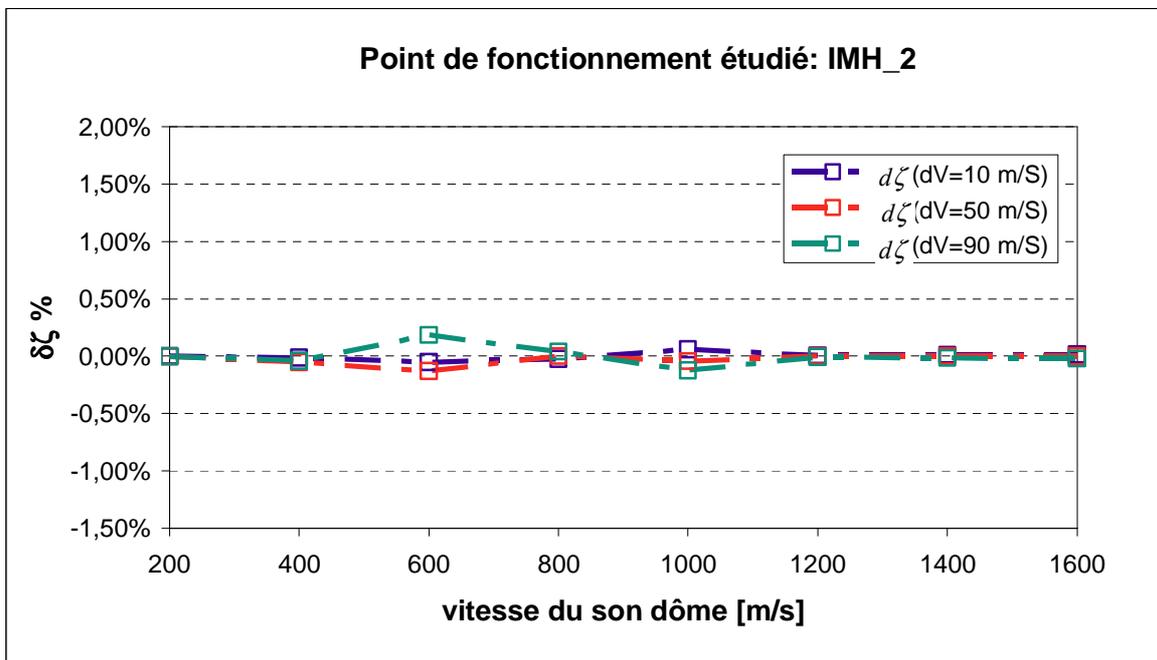


Figure 6-17 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son du dôme et de la vitesse relative gaz/liquide, pour le point de fonctionnement IMH\_2.

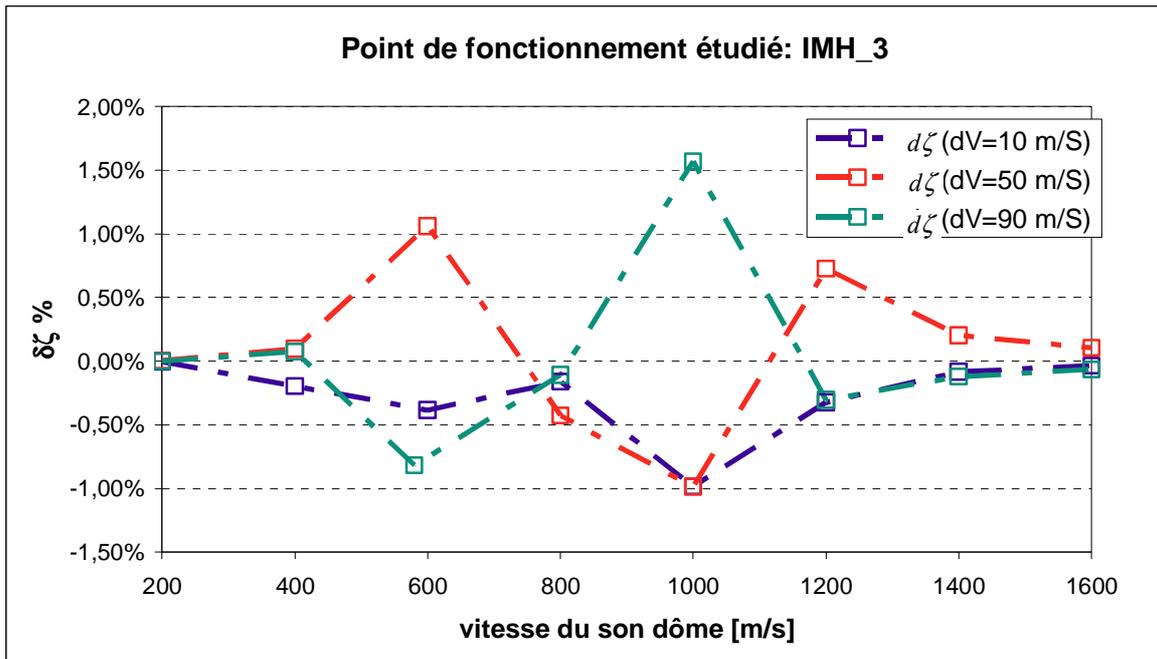


Figure 6-18 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son du dôme et de la vitesse relative gaz/liquide, pour le point de fonctionnement IMH\_3.

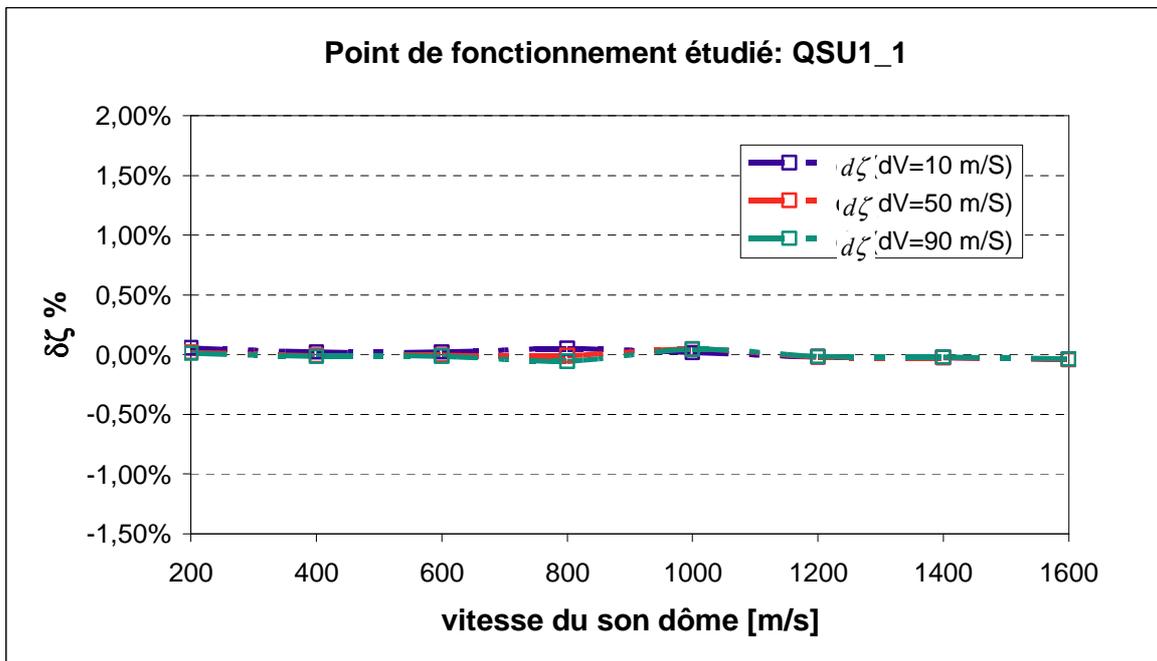


Figure 6-19 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son du dôme et de la vitesse relative gaz/liquide, pour le point de fonctionnement QSU1\_1.

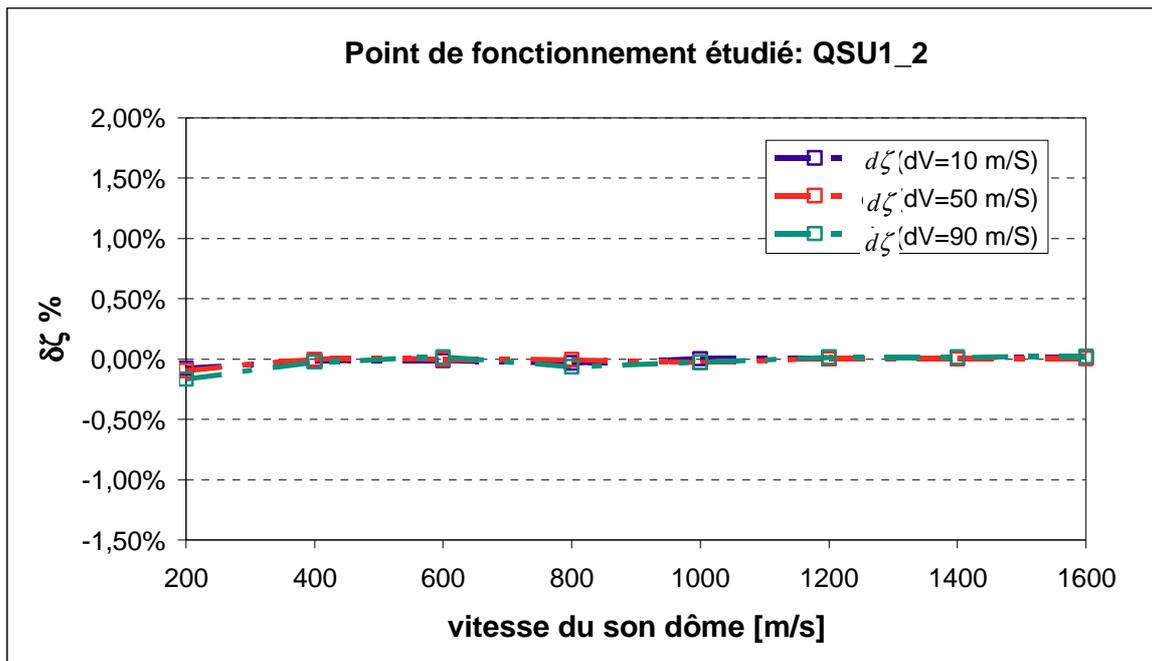


Figure 6-20 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son du dôme et de la variation de vitesse gaz/liquide, pour le point de fonctionnement QSU1\_2.

Les résultats montrent que la variation d'amortissement dépend très peu de la vitesse du son et de la vitesse relative gaz/gouttes pour les deux premiers points du transitoire, même si on peut noter une amplitude légèrement plus grande pour le point IMH\_2 qui a été choisi dans le transitoire juste avant l'apparition de l'instabilité.

Pour le troisième point (IMH\_3), choisi en plein fonctionnement instable du moteur, les fluctuations sont assez marquées, d'environ un ordre de grandeur plus grandes en amplitude. Concernant les deux points retenus dans le transitoire QSU1, ils montrent un comportement plus stable de cet essai, comparés aux deux premiers points du IMH. Cependant pour le QSU1\_2, il y a une légère déviation vers un comportement déstabilisant ( $\delta\zeta < 0$ ), à une vitesse du son de 200 m/s. Même si le comportement instable dépend de la variation de vitesse gaz/goutte, on peut affirmer que le comportement lors de l'essai IMH apparaît plus instable que celui du QSU1, car les niveaux de variation d'amortissement sont plus importants. Ci-dessous on présente les niveaux de  $\delta\zeta$  trouvés, qui montrent une tendance plus instable du point de fonctionnement IMH par rapport à QSU1 :

| Vitesse son<br>dans le<br>dôme [m/s] | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|                                      | $ \Delta u  = 10 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 50 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 90 \text{ m/s}$ |
| 200                                  | 0.0035                        | -0.0019                       | 0.0026                        |
| 400                                  | 0.0298                        | -0.0209%                      | 0.0152                        |
| 600                                  | -0.0313                       | 0.0756                        | -0.0404                       |
| 800                                  | -0.0138                       | 0.0212                        | -0.0170                       |
| 1000                                 | 0.0397                        | -0.0397                       | 0.0787                        |
| 1200                                 | 0.0026                        | -0.0038                       | 0.0037                        |
| 1400                                 | 0.0048                        | -0.0066                       | 0.0067                        |
| 1600                                 | 0.0067                        | -0.0090                       | 0.0093                        |

Tableau 6-14 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son dans le dôme et de la variation de vitesse gaz/goutte dans la chambre : point de calcul considéré, IMH\_1.

| Vitesse son<br>dans le<br>dôme [m/s] | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|                                      | $ \Delta u  = 10 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 50 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 90 \text{ m/s}$ |
| 200                                  | -0.0001                       | -0.0034                       | -0.0029                       |
| 400                                  | -0.0123                       | -0.0539                       | -0.0409                       |
| 600                                  | -0.0529                       | -0.1311                       | 0.1847                        |
| 800                                  | -0.0254                       | 0.0016                        | 0.0389                        |
| 1000                                 | 0.0583                        | -0.0444                       | -0.1252                       |
| 1200                                 | 0.0049                        | -0.0002                       | -0.0069                       |
| 1400                                 | 0.0114                        | -0.0004                       | -0.0157                       |
| 1600                                 | 0.0145                        | -0.0013                       | -0.0206                       |

Tableau 6-15 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son dans le dôme et de la variation de vitesse gaz/goutte dans la chambre : point de calcul considéré, IMH\_2.

| Vitesse son<br>dans le<br>dôme [m/s] | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|                                      | $ \Delta u  = 10 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 50 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 90 \text{ m/s}$ |
| 200                                  | -0.0030                       | 0.0041                        | -0.0010                       |
| 400                                  | -0.1963                       | 0.0969                        | 0.0744                        |
| 600                                  | -0.3857                       | 1.0614                        | -0.8177                       |
| 800                                  | -0.1620                       | -0.4268                       | -0.1095                       |
| 1000                                 | -0.9839                       | -0.9855                       | 1.5691                        |
| 1200                                 | -0.3257                       | 0.7270                        | -0.3047                       |
| 1400                                 | -0.0840                       | 0.2015                        | -0.1205                       |
| 1600                                 | -0.0367                       | 0.1035                        | -0.0655                       |

Tableau 6-16 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son dans le dôme et de la variation de vitesse gaz/goutte dans la chambre : point de calcul considéré, IMH\_3.

| Vitesse son<br>dans le<br>dôme [m/s] | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             | $\delta\zeta$ % à             |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|                                      | $ \Delta u  = 10 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 50 \text{ m/s}$ | $ \Delta u  = 90 \text{ m/s}$ |
| 200                                  | 0.0566                        | 0.0193                        | 0.0101                        |
| 400                                  | 0.0222                        | -0.0080                       | -0.0163                       |
| 600                                  | 0.0211                        | -0.0059                       | -0.0132                       |
| 800                                  | 0.0493                        | -0.0089                       | -0.0572                       |
| 1000                                 | 0.0164                        | 0.0458                        | 0.0458                        |
| 1200                                 | -0.0192                       | -0.0191                       | -0.0169                       |
| 1400                                 | -0.0251                       | -0.0251                       | -0.0222                       |
| 1600                                 | -0.0406                       | -0.0425                       | -0.0389                       |

Tableau 6-17 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son dans le dôme et de la variation de vitesse gaz/goutte dans la chambre : point de calcul considéré, QSU1\_1.

| Vitesse son<br>dans le<br>dôme [m/s] | $\delta\zeta$ % à<br>$ \Delta u  = 10$ m/s | $\delta\zeta$ % à<br>$ \Delta u  = 50$ m/s | $\delta\zeta$ % à<br>$ \Delta u  = 90$ m/s |
|--------------------------------------|--|--|--|
| 200                                  | -0.0782                                    | -0.0962                                    | 0.1668                                     |
| 400                                  | -0.0178                                    | -0.0030                                    | 0.0237                                     |
| 600                                  | -0.0147                                    | 0.0006                                     | -0.0148                                    |
| 800                                  | -0.0330                                    | -0.0062                                    | 0.0638                                     |
| 1000                                 | 0.0036                                     | -0.0267                                    | 0.0275                                     |
| 1200                                 | 0.0045                                     | 0.0022                                     | -0.0148                                    |
| 1400                                 | 0.0062                                     | 0.0027                                     | -0.0164                                    |
| 1600                                 | 0.0100                                     | 0.0041                                     | -0.0208                                    |

Tableau 6-18 : Variation de l'amortissement en fonction de la vitesse du son dans le dôme et de la variation de vitesse gaz/goutte dans la chambre : point de calcul considéré, QSU1\_2.

Pour analyser ces différences de comportement, on examine maintenant les modes sollicités dans le dôme à chaque pic stable ou instable mis en évidence dans les figures 6.16 – 6.20. Pour cela on excite tout d'abord le dôme MMH en faisant fluctuer la pression (excitation en pression) à la sortie d'un injecteur. La condition limite est de type « ouvert » du côté collecteur et dans tous les autres injecteurs. On considère des vitesses du son dôme comprises entre 200 et 1600 m/s, avec un pas de 200 m/s, et on fait balayer la fréquence de 0°Hz à 9000 Hz par pas de 50 Hz. On obtient ainsi la cartographie de la réponse en pression en fonction de la vitesse du son dans le dôme (pour plus de détails voir l'annexe D) :

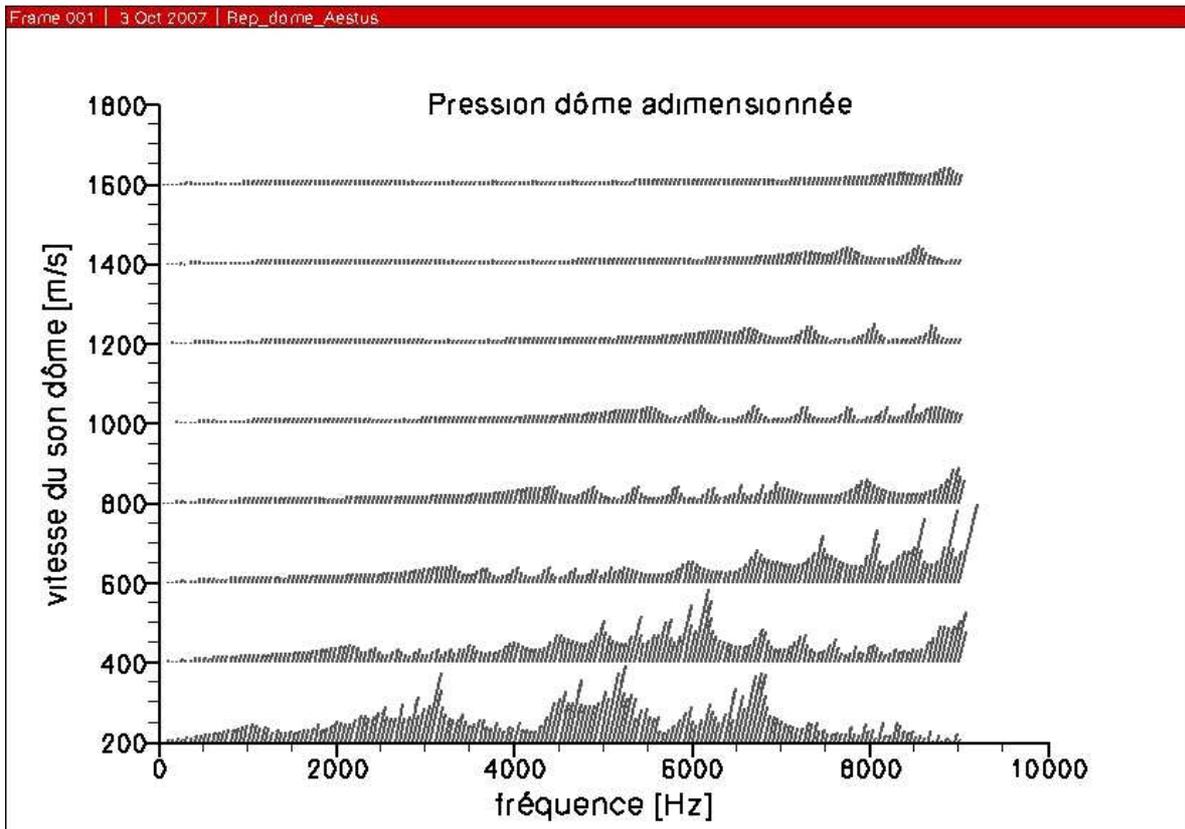


Figure 6-21 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation et de la vitesse du son dôme.

Les résultats du calcul de réponse forcée montre bien un déplacement des modes propres vers les hautes fréquences quand on augmente la vitesse du son du dôme et si on regarde le comportement du dôme à une vitesse du son de 1600  $m/s$ , seuls deux modes sont en résonance dans la plage de fréquences observée.

Par la suite on examine les modes excités en réponse forcée et les modes obtenus lors du couplage. Si on considère les deux points de fonctionnement IMH\_1 et IMH\_2, ils présentent des maxima de  $\delta\zeta$  aux vitesses du son dôme de 400  $m/s$ , 600  $m/s$  et 1000  $m/s$ . Le point de fonctionnement IMH\_1 présente une fréquence de couplage chambre d'environ 5550  $Hz$  et celui du point IMH\_2 de 5650  $Hz$  (valeurs très voisines), et si on considère ces fréquences sur la cartographie de Figure 6-21 (voir aussi l'annexe D), on voit qu'elles correspondent à deux points voisins de la résonance du dôme pour 1000  $m/s$  tandis que si on considère les courbes des évolutions de la réponse en pression du dôme pour les deux autres vitesses du son, les fréquences considérées ne sont pas vraiment des points de maximum, donc le dôme ne répond pas sur ses modes. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'on a effectué un balayage systématique

en fréquence et vitesse du son et donc les valeurs discrètes retenues ne coïncident pas nécessairement avec un point de couplage maximal. Pour les obtenir il aurait fallu affiner le choix autour des vitesses du son par approximation successive, mais ceci n'est pas le but poursuivi. En effet on s'est intéressé à évaluer la tendance stable ou instable d'un point de fonctionnement du moteur plutôt que de déterminer l'intensité maximale du couplage. On présente par la suite les modes excités dans le dôme MMH de l'Aestus ainsi que les modes couplés, pour les points de calculs IMH\_1 et IMH\_2 pour chacune des vitesses du son dans le dôme : 400 m/s, 600 m/s et 1000 m/s :

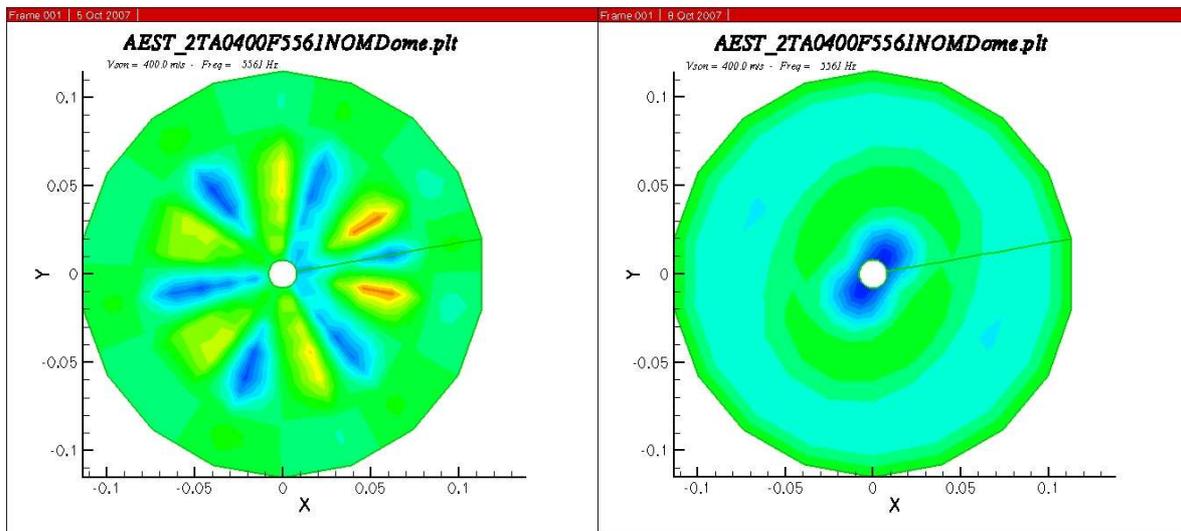


Figure 6-22 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_1 ; mode obtenu au couplage. La vitesse du son dôme MMH est de 400 m/s.

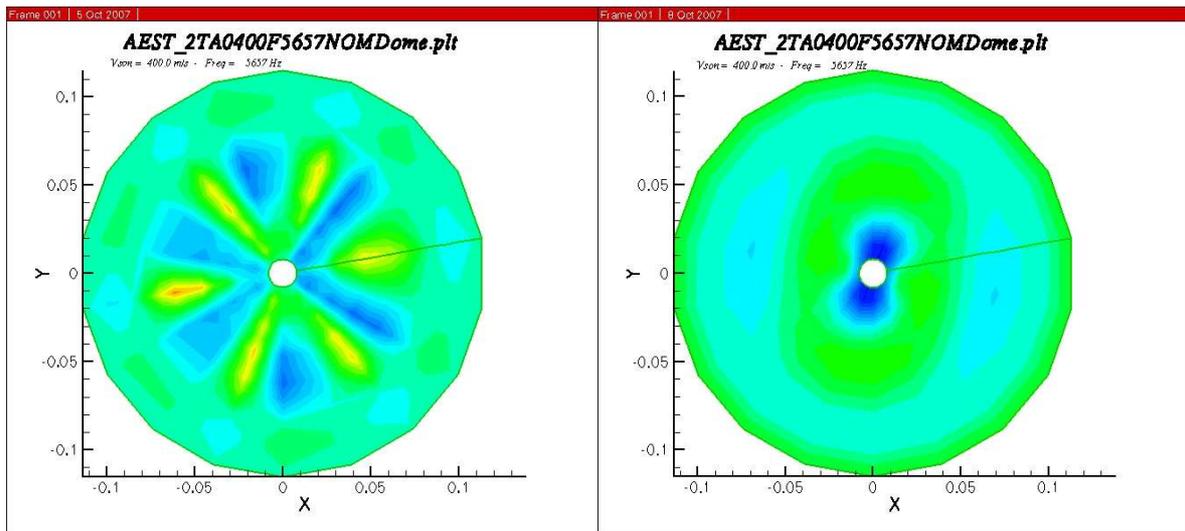


Figure 6-23 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_2 ; mode obtenu au couplage.  
La vitesse du son dôme MMH est de 400 m/s.

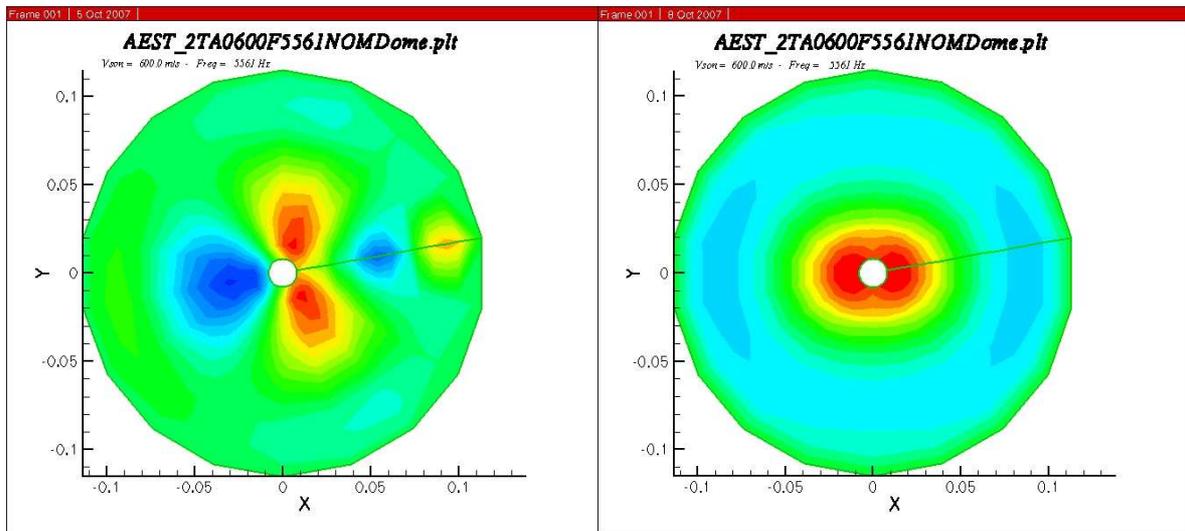


Figure 6-24 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_1 ; mode obtenu au couplage.  
La vitesse du son dôme MMH est de 600 m/s.

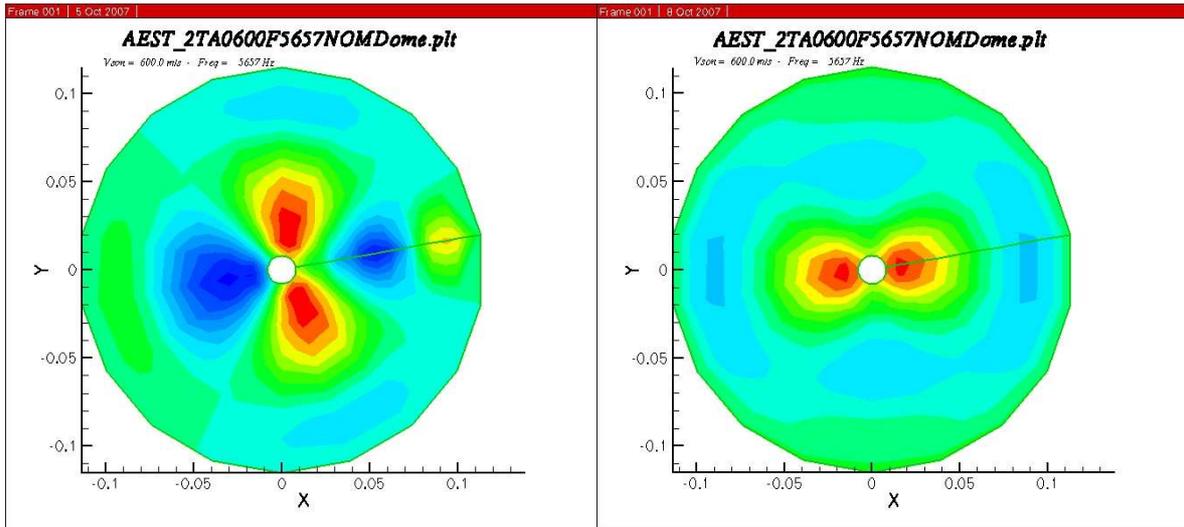


Figure 6-25 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_2 ; mode obtenu au couplage. La vitesse du son dôme MMH est de 600 m/s.

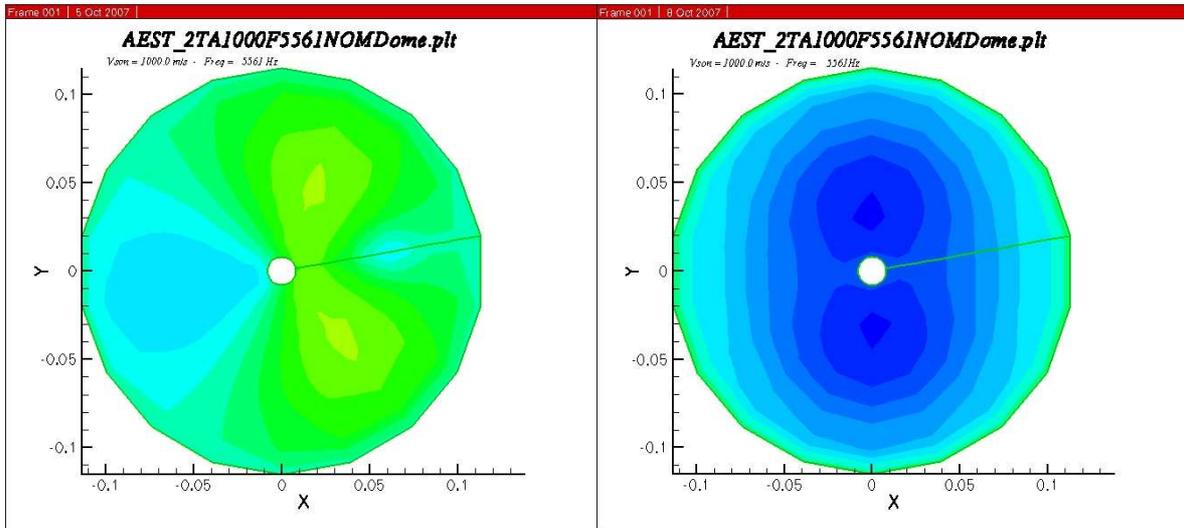


Figure 6-26 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_1 ; mode obtenu au couplage. La vitesse du son dôme MMH est de 1000 m/s.

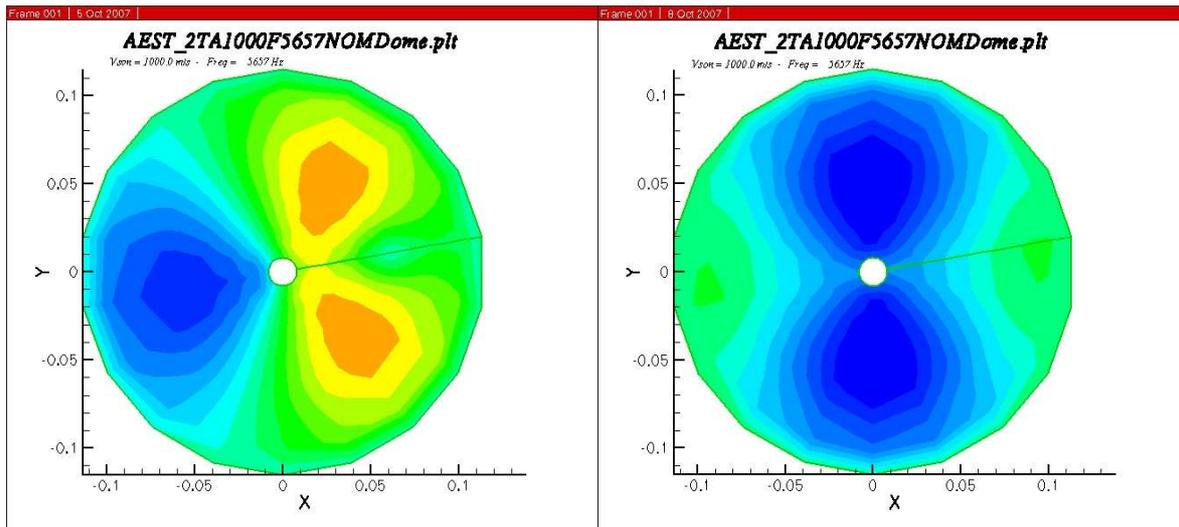


Figure 6-27 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_2 ; mode obtenu au couplage. La vitesse du son dôme MMH est de 1000 m/s.

L'observation des résultats ci-dessus montre que les modes du dôme excités dans les deux cas IMH\_1 et IMH\_2 sont les mêmes à chaque vitesse du son considérée. Comme l'excitation a été faite sur un seul injecteur placé sur la ligne mise en évidence sur chaque image, on a une légère dissymétrie dans les résultats des modes propres, cependant on peut distinguer les suivants modes : le mode T6R2 est excité à une vitesse du son de 400 m/s, le mode T2R2 à 600 m/s et le mode T1 à 1000 m/s. Les modes qu'on obtient au couplage (sur la droite des images précédentes) sont T2R2 à 400 m/s et 600 m/s, tandis qu'à 1000 m/s ils se rassemblent à R1 pour l'IMH\_1 et à T2 pour l'IMH2. Suivant les comportements du  $\delta\zeta$  pour le point de fonctionnement IMH\_3 (voir Figure 6-18) on voit que pour ce point de calcul on a un couplage plus important car les amortissements sont plus élevés que dans les cas précédents. L'excitation par le deuxième mode acoustique de la chambre (avec une fréquence de  $\sim 5680$  Hz) provoque un couplage important avec le dôme du combustible MMH, à des vitesses du son de 600 m/s 1000 m/s et 1200 m/s dans ce dernier. Les modes excités du dôme et ceux au couplage sont :

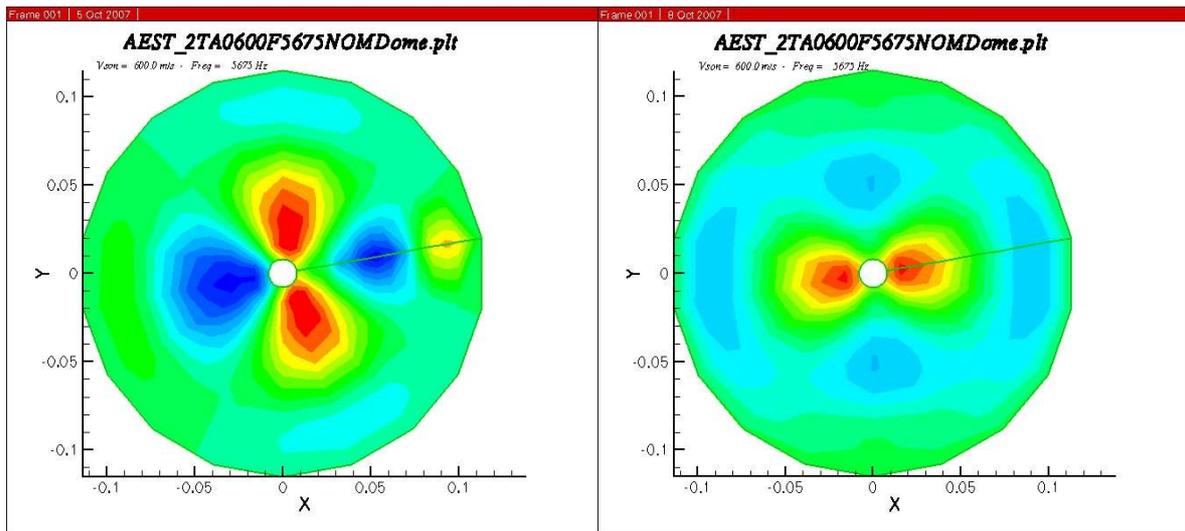


Figure 6-28 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_3 ; mode obtenu au couplage. La vitesse du son dôme MMH est de 600 m/s.

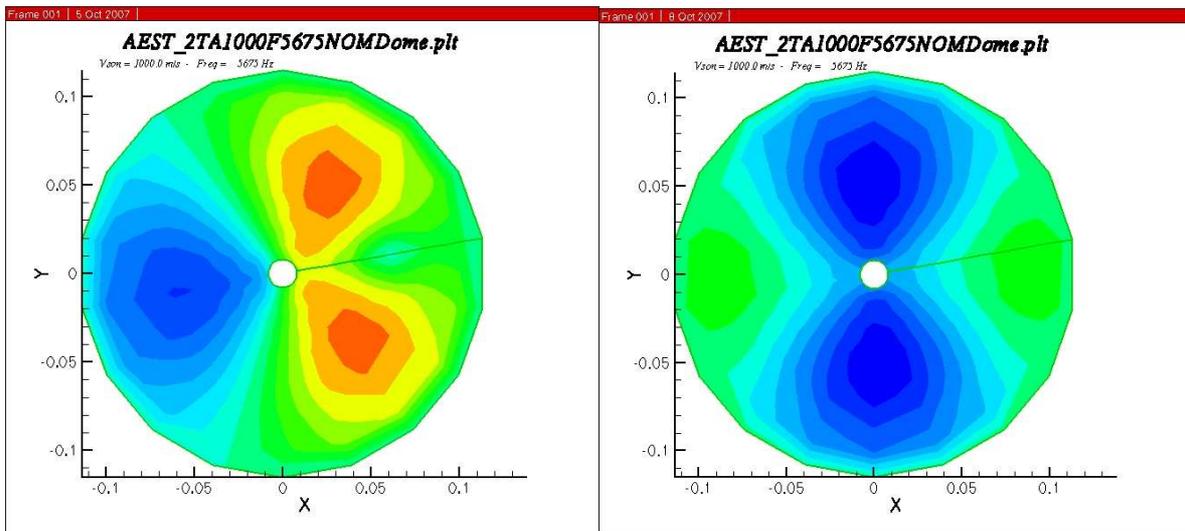


Figure 6-29 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_3 ; mode obtenu au couplage. La vitesse du son dôme MMH est de 1000 m/s.

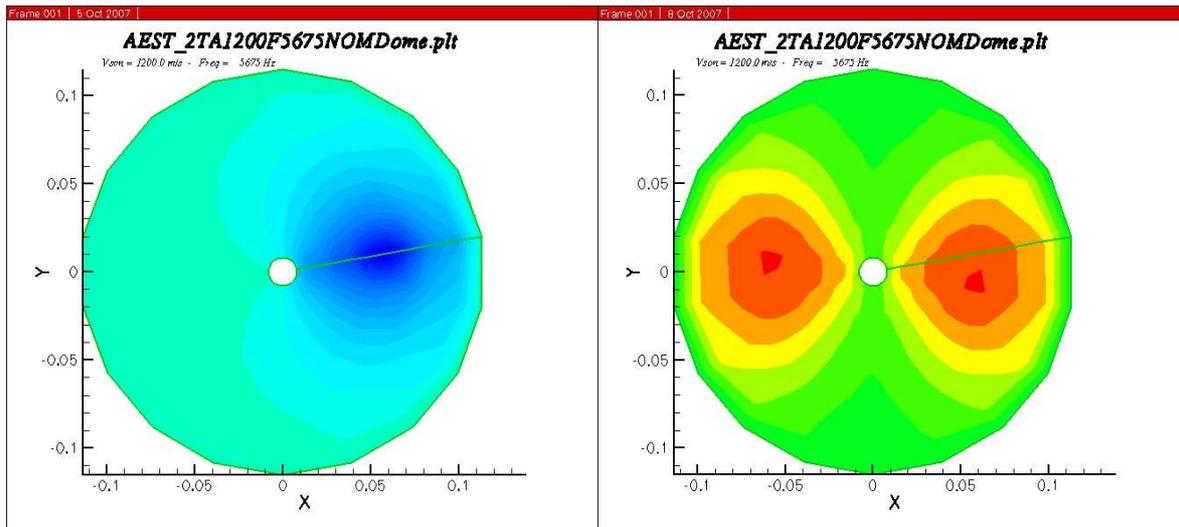


Figure 6-30 : De gauche à droite : Mode excité dans le dôme MMH au point IMH\_3 ; mode obtenu au couplage. La vitesse du son dôme MMH est de 1200 m/s.

Dans le cas IMH\_3, on voit que les modes excités du dôme sont le T2R2 à 600 m/s, le T1 à 1000 m/s et à 1200 m/s on est avant tout mode ; on est toujours en présence d'une asymétrie à cause de la position du nœud excité. Les modes au couplage sont T2R2 à 600 m/s et 1000 m/s, tandis qu'à 1200 m/s il est avant tout apparition d'un mode (la forme T2 est due à l'excitation initiale dans la chambre de combustion).

Concernant le cas QSU1, on peut dire que la variation d'amortissement reste toujours voisine de zéro, mais on remarque que le point de calcul QSU1\_2 présente une déviation vers l'instabilité, avec des niveaux très bas, à une vitesse du son dans le dôme MMH de 200 m/s. Si on considère la réponse forcée à la fréquence du deuxième mode de la chambre de combustion dans le cas QSU1\_2 (la fréquence est de  $\sim 5200$  Hz), on obtient, à la vitesse du son dôme de 200 m/s, la distribution de pression suivante dans le dôme :

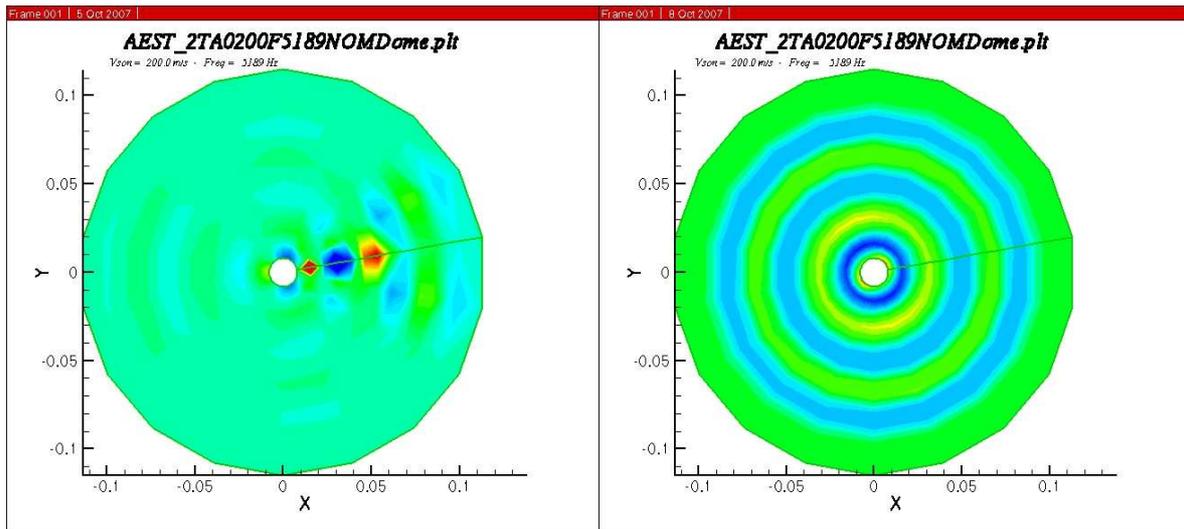


Figure 6-31 : Mode excité au point QSU1\_2 avec une vitesse du son dôme de 200 m/s.

ce qui correspond à un mode T2R3, influencé par le point d'application de l'excitation. Le mode couplé a, lui, une forme R3.

On rappelle que l'excitation forcée a été effectuée en un point car avec cette démarche on a l'avantage de trouver tous les types de modes, en particulier les tangentiels, les radiaux et les modes couplés.

Suite à la modélisation du système d'injection et de la chambre de combustion, on a exécuté des calculs de couplage dans une configuration simplifiée chambre°-°dôme, et dans un cas réel, celui de l'Aestus.

Dans le cas simplifié on obtient une bonne correspondance entre le calcul et la théorie.

Dans le cas réel, on s'est basé sur les tests de qualification 9054\_014 (QSU1) et 9052\_028 (IMH) : les résultats du calculs montrent une prédominance instable du cas IMH par rapport au QSU1 comme les essais l'ont effectivement montré.

# Conclusions

En 2002 le moteur Aestus de l'étage supérieur d'Ariane 5 du vol 142 a présenté des instabilités de combustion à hautes fréquences, qui ont été identifiées comme des instabilités couplées entre le dôme d'alimentation en fuel MMH (la mono-méthyl-hydrazine) et la chambre de combustion pendant la phase de démarrage. Pour cela on s'est intéressé à la compréhension des mécanismes de couplage qui guident les instabilités hybrides et au développement théorique et numérique de ces mécanismes.

La première étape a consisté à recenser les phénomènes élémentaires et les temps caractéristiques associés. Pour cela, en s'appuyant sur la base de données dont on a pu disposer, on a considéré comme référence, un moteur type Vulcain (moteur du premier étage d'Ariane 5), à oxygène liquide et hydrogène gazeux, injectés par un ensemble d'éléments d'injection coaxiaux créant un jet axisymétrique biphasique qui débouche dans la chambre de combustion. Les chapitres 2 et 3, ont présenté l'étude des temps caractéristiques des processus qui suivent l'injection pour ce type de moteur, c'est-à-dire l'atomisation primaire, l'atomisation secondaire, le chauffage et la vaporisation des gouttes, le mélange, et les réactions chimiques. Cette investigation a mis en évidence que la chimie à des bas rapports de mélange et la vaporisation peuvent se coupler avec l'onde acoustique pour créer des instabilités. En effet ces deux processus ont des temps caractéristiques qui sont du même ordre de grandeur que ceux de la propagation des fluctuations de pression dans la chambre de combustion. Ces temps sont compris entre  $10^{-4}$  et  $10^{-2}$  secondes. On a tenu compte de ces processus pour la modélisation de la chambre de combustion (chapitre 5).

Pour étudier le problème d'instabilités hybrides, il est important de coupler les deux systèmes mentionnés : le système d'alimentation et la chambre de combustion. Jusqu'à maintenant aucune solution analytique du problème couplé n'a été trouvée et les études se contentent de modéliser l'une ou l'autre des parties, ou bien une combinaison simplifiée car cela peut contribuer à éliminer ces instabilités pour un effort relativement limité mais avec des marges d'incertitudes élevées.

L'approche retenue dans le cadre de cette thèse propose de découper le problème en s'appuyant sur la spécificité des chaque sous-système : d'une part, le système d'alimentation, dans lequel on trouve des propergols sous forme liquide et/ou gazeuse dans une géométrie complexe, est étudiée par la méthode des paramètres discrets et, d'autre part, la chambre de combustion, qui présente une géométrie simple mais où interviennent de nombreux phénomènes pendant la combustion, est modélisée par un approche globale basée sur la décomposition sur les modes propres acoustiques. Les deux systèmes ont été couplés à la section d'injection par la fonction admittance définie pour chaque injecteur. Cette fonction exprime que le débit injecté dans la chambre de combustion dépend de la distribution de pression sur la plaque d'injection.

Dans le chapitre 4, on a exposé la méthode à paramètres discrets, qui a été retenue pour modéliser le système d'alimentation, car elle montre une bonne efficacité sans nécessiter un nombre élevé d'éléments dans la discrétisation des cavités. La méthode a montré des bons résultats dans la simulation mono – dimensionnelle d'un tuyau et d'un système d'alimentation simple, ainsi que dans un problème bidimensionnel d'un cylindre infini : cela nous confirme son applicabilité à un dôme d'un système d'alimentation d'un moteur fusée à ergols liquides.

Dans le chapitre 5 on a présenté la modélisation du système « chambre de combustion », ou bien de son acoustique. La chambre de combustion a été modélisée par une approche globale. En considérant qu'un écoulement diphasique multiespèce y est injecté et soumis à la combustion, on écrit l'équation des ondes avec prise en compte de tous les termes sources, et en particulier ceux de la combustion et de la vaporisation. Pour la résoudre, on a décomposé la fluctuation de pression sur la base des modes acoustiques de la chambre. On a appliqué par la suite la théorie de Crocco ([53]), connue sous le nom de 'time lag theory' afin de relier la masse qui brûle dans le moteur à celle injectée par la plaque d'injection. La résolution du système modal obtenu en reliant chambre et système d'alimentation, nous a permis d'évaluer le mode couplé en terme d'amortissement et de fréquence.

Dans le chapitre 6 on a appliqué cette modélisation mixte à un cas simplifié chambre-dôme en monodimensionnel. On a imposé certains paramètres de couplage selon les prévisions de la théorie. On retrouve les résultats attendus en terme de couplage stabilisant ou déstabilisant. Par la suite on a modélisé les paramètres de couplage, introduits dans le modèle, notamment les paramètres de la 'time lag theory' pour la vaporisation et la combustion ainsi que l'amortissement initial des modes acoustiques de la chambre de combustion. On a appliqué le modèle complet à un cas réel, celui de l'Aestus, avec des points de

fonctionnement issus de tests de qualification : Les calculs ont nécessité de faire varier arbitrairement un certain nombre de paramètres du modèle, mais les résultats montrent qu'une configuration est plus instable que l'autre, comme cela a été observé en essai. Les résultats montrent également la forme des modes couplés dans le dôme et les modes propres aux mêmes fréquences de couplage : de nombreux modes ont été mis en évidence mais leur identification n'est pas toujours aisée.

Dans les perspectives on peut envisager l'application de la méthode à la 'common research chamber' (CRC), qui est une chambre d'essais définie dans le cadre des travaux du groupe de recherche qui a également retenu cette thèse, afin d'analyser finement les processus physiques à l'origine du couplage acoustique / combustion dans le cadre de la compréhension des mécanismes pilotant les instabilités à haute fréquence. En effet, en raison de problèmes techniques, des résultats expérimentaux n'ont pu être disponibles. Cependant, comme à la fin de cette thèse on dispose d'une méthodologie de modélisation des systèmes d'alimentation et des chambres de combustion, il s'agit de trouver les données thermo-physiques des ergols pour en déduire les paramètres du modèle. Dans le cas où les deux ergols sont injectés en phase liquide il faudra adapter le modèle de chambre.

# Références Bibliographiques

- [1] Koell H. H. (Ed.)  
*Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw-Hill Book Company  
New York, 1961.
- [2] Huzel D. K., et Huang D.H.  
*Design of Liquid Propellant Rocket Engines*  
NASA SP 126, 1971.
- [3] Gakhun G.G., Baulin V.I., et al.  
*Construction and Design of Liquid Propellant Rocket Engines*  
(in Russian: *Konstruksiya i Proyektirovaniye Zhidkostnykh Raketnykh Dvigatelay*,  
“*Mashinostroyeniye*”)  
Moscow, 1989.
- [4] *National Space Transportation System Reference*  
Vol. 1, “National Aeronautics and Space Administration”  
Washington, D.C., Juin 1988 (description of Space Shuttle system and operation).
- [5] *Design Guide for Pressurized Gas Systems*  
Vols. I et II, préparé par IYY Research Institute,  
NASA Contract NAS7-388 Mars 1966.
- [6] Sackheim R.L., Fritz D.E., et Macklis H.  
*The Next Generation of Spacecraft Propulsion Systems*  
AIAA Paper 79-1301, 1979.
- [7] Tracy D. Dungan  
*V-2: A Combat History of the First Ballistic Missile*  
Westholme Publishing 2005, ISBN 1594160120.

- [8] Steven J. Zaloga,  
*V-2 Ballistic Missile 1942 - 52 (New Vanguard Series)*  
Osprey Publishing 2003, ISBN: 1841765414.
- [9] Dornberger W.  
*V-2*  
Viking Press, 1954.
- [10] Sirignano W.A., Delplanque J.-P., Chiang C. H., et Bhatia R.  
*Liquid-Propellant Droplet Vaporization: A Rate-Controlling Process for Combustion Instability*  
Liquid Rocket Engine Combustion Instability - Progress in Astronautics and Aeronautics - Vol 169, 1995.
- [11] Rayleigh, Lord  
*The explanation of certain acoustical phenomena*  
Nature, 18 pp. 319-321, (1878).
- [12] Rosen M. W.  
*The Viking Rocket Story*  
Harpen and Brothers, New York, 1955.
- [13] Osborn G. H., et Stinnet W.D.  
*Development of a 3000-Lb Thrust Liquid-Hydrogen-Liquid-Oxygen Rocket Motor*  
Aerojet Engineering Corp., Rept. RTM-54, Contract NOa(s) 8496, Azusa, CA, Aug. 29, 1949.
- [14] Baker D.I.  
*Experimental Investigation of Gaseous Hydrogen and Liquid Oxygen in a Rocket Motor of 100-Pound Thrust*  
Jet Propulsion Lab., Rept. '-', Contract W-04-200-ORD-455, California Inst. Of Technology, Pasadena, CA, Jan. 14, 1949.
- [15] Johnston H.L., et Doyle W.L.  
*Development of the Liquid Hydrogen-Liquid Oxygen Propellant Combustion for Rocket Motors*  
Ohio State Univ., Tech. Rept. 7, Research Foundation, Dec. 1951.

- [16] Anon.  
*Gemini Stability Improvement Program (GEMSIP)*  
USAF Contract AF 04(695)-517, Aug. 31, 1965.
- [17] Anon.  
*Hystory: Project First, F-1 Combustion Stability Program*  
Rocketdyne Rept. R-5615, Canoga Park, CA, 1964-1967.
- [18] Rubinsky V.R.  
*Analysis of Problems of Operating Process High-Frequency Stability Improvement in the Chamber of LOX-Kerosene Liquid Rocket Engine with Gas Generator Power Cycle*  
First International Symposium on Combustion Instability in Liquid Rocket Engines.  
Pennsylvania State Univ., University Park, PA, Jan. 1993.
- [19] Harrje D.T., et Reardon F.H.  
*Liquid Propellant Rocket Combustion Instability*  
NASA SP-194, Washington, DC, 1972.
- [20] Annon  
*440 Hz Vibration Investigation Final Report*  
Rocketdyne Engineering R-8724, Rockwell International Division. Canoga Park, CA, Juin 1971.
- [21] Annon  
*Summary report on an Investigation of Combustion Instability for Liquid Oxygen and Liquid Cold Gas Hydrogen Propellant*  
Pratt and Whitney Aircraft, United Aircraft Corp., PWA FR-1005, August 1964.
- [22] Wanhainen J.P., Parish C.P., et Conrad E.W.  
*Effect of Propellant Injection Velocity on Screech in 20,000-pound Hydrogen-Oxygen Rocket Engine*  
NASA TN D-3373, April 1966.
- [23] Humman H.P., et Conrad E.W.  
*Performance and Screech Characteristics of a Series of 2500-Pound-Thrust-Per-Element Injectors for a Liquid-Oxygen-Hydrogen Rocket Engine*  
NASA Lewis Research Center, E-3283, Cleveland, OH, June 1967.

- [24] Conrad E.W., Bloomer H.E., Wanhainen J.P., et Vincent D.W.  
*Interim Summary of Liquid Rocket Acoustic-Model-Instability Studies at a nominal thrust of 20,000 pounds*  
NASA TN D-4968, April 1968.
- [25] Humman H.P., Russell L.M., Vincent D.W., et Conrad E.W.  
*Some Injector Element Detail Effects on Screech in Hydrogen-Oxygen Rockets*  
NASA TM X-2982, February 1974.
- [26] Jenson R.J., Dodson H.C., et Claflin S.E.  
*LOX/Hydrocarbon Combustion Instability Investigation*  
NASA CR 182249, Juillet 1989.
- [27] Kesselring R.C., Nelson R.L., et Sprouse K.M.  
*Engine Hydraulic Stability, Final Report*  
NASA CR-151499, July 1977.
- [28] Hulka J., et Hutt J.J.  
*Instability Phenomena in Liquid Oxygen/Hydrogen Propellant Rocket Engines*  
Liquid Rocket Engine Combustion Instability – Progress in Astronautics and Aeronautics – Vol 169, 1995.
- [29] Hutt J.J., et Rocker M.  
*High-Frequency Injection Coupled Instability*  
Liquid Rocket Engine Combustion Instability – Progress in Astronautics and Aeronautics – Vol 169, 1995.
- [30] Preclik D., et Spagna P.  
*Low-Frequency and High-Frequency Combustion Oscillation Phenomena inside a Rocket Combustion Chamber Fed by Liquid or Gaseous Propellants*  
72nd AGARD P.E.P. on Combustion Instabilities on Liquid Fueled Propulsion Systems, Bath, October 1988.
- [31] Ordonneau G.  
*Flight 142 – Fuel Dome comportment during Transient - Linear analysis*  
Aestus HF instabilities Workshop, Roissy, 10 avril 2002.

- [32] Kelvin, Lord (William Thomson)  
*Hydrokinetic solutions and observations*  
 Philosophical Magazine, vol. 42, pages 362 - 377 (1871).
- [33] Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von,  
*On the discontinuous movements of fluids*  
 Monthly Reports of the Royal Prussian Academy of Philosophy in Berlin, vol. 23, pages 215 ff (1868).
- [34] GDR  
*Combustion dans les moteurs fusées*  
 Actes du Coll0oque de Synthèse du Groupe de Recherche CNES / CNRS / ONERA / SNECMA, 2001.
- [35] Raynal L.  
*Instabilité et entraînement à l'interface d'une couche de mélange Liquide-Gaz*  
 Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1997.
- [36] Marmottant Ph., Villermaux E.  
*Mécanismes d'atomisation primaire dans les jets coaxiaux*  
 Rapport de fin de contrat SEP n° 910023, 2000.
- [37] Pilch M., Erdman C.A.  
 Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of liquid drop  
 Int. J. Multiphase Flow 13, p.741-757, 1987.
- [38] Habiballah M., et Vingert L.  
*Etude des instabilités de combustion. Synthèse des travaux relatifs au moteur Vulcain*  
 ONERA, DEFA, RT n° 100/6112 EY. Châtillon, Octobre 2002.
- [39] Zeytounian Radyadour Kh.  
*Joseph Boussinesq and his approximation: a contemporary view (Joseph Boussinesq et son approximation : un aperçu actuel)*  
 Comptes rendus. Mécanique, ISSN 1631-0721, Editeur Elsevier. Paris, 2002.
- [40] [http://www.ambafrance-ca.org/article.php3?id\\_article=1529](http://www.ambafrance-ca.org/article.php3?id_article=1529)

- [41] Kolmogorov A.N.  
*Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Number*  
 Doklady Akademiya Nauk SSSR, Vol. 30, p.299-303, 1941.
- [42] Glaserman D.  
*Système Véhicule Ariane 5 : Dossier Fonctionnel du Moteur Vulcain*  
 SEP VERNON, octobre 2004. HM-DF-100-0000-B-0001-SEPV.
- [43] Bourasseau B.  
*Programme de calcul des performances des systèmes propulsifs Coppelia. 1ère partie : description théorique*  
 ONERA RT 5/3589 EY, 1986.
- [44] Bourasseau B.  
*Programme de calcul des performances des systèmes propulsifs COPPELIA. 3ème partie : manuel d'utilisation*  
 ONERA RT 7/3589 EY, 1987.
- [45] Habiballah M., et Dubois I.  
*Etude des instabilités de combustion. Adaptation du modèle annulaire PHEDRE à la chambre propulsive du moteur Vulcain*  
 ONERA, DEFA, RT n° 42/6112 EY. Châtillon, Mars 1988.
- [46] Lafon P.  
*Modélisation et simulation numérique de l'évaporation et de la combustion de gouttes à haute pression*  
 Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, Orléans, 1994.
- [47] Jensen R.J.  
*A summary of the JANNAF Workshop on Liquid Rocket Engine Combustion Driven Instability Mechanisms*  
 Proceedings of the 26th JANNAF Combustion Meeting, (Pasadena, CA), Chemical Propulsion Information Agency, Laurel, MD, Oct. 1989.
- [48] Priem R.J., et Guentert D.C.  
*Combustion Instability Limits Determined by a Nonlinear Theory and a One-*

- Dimensional Model*  
NASA, Rept. TN D-1409, Oct. 1962.
- [49] Strahle W.C.  
*Unsteady Reacting Boundary Layer on Vaporizing Flat Plate*  
AIAA Journal, Vol. 3, No. 6, 1965, p. 1195.
- [50] Preim R.J., et Heidmann M.F.  
*Propellant Vaporization as a Design Criterion for Rocket Engine Combustion Chambers*  
NASA TR-R67, 1960.
- [51] Culick F.E.C.  
*Combustion Instability in Propulsion Systems*  
Combustion Instability in Liquid-fuelled Propulsion Systems, Propulsion and Energetics Panel 72nd B Specialists' Meeting (Bath, UK), AGARD, Neuilly-sur-Senne, France, NATO, Oct. 6-7, 1988.
- [52] Williams F.A.  
*Combustion Theory*  
Benjamin-Cummings, Menlo Park, CA, 1985, Chap. 9.
- [53] Crocco L., et Cheng S.I.  
*Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors*  
AGARD Monograph No. 8, Butterworths, London, 1956, Chaps. 1-3.
- [54] Lindsay R.B.  
*Acoustics: Historical and Philosophical Development*  
Benchmark Papers in Acoustics, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, PA, 1973, pp. 5-20.
- [55] Morse P.M., et Ingard K.U.  
*Theoretical Acoustics*  
McGraw-Hill, New York, 1968.
- [56] Lord Rayleigh  
*The theory of Sound*  
McMillan, London, 1894, 2nd ed. rev. and enlarged, Vol. 2, Dover, New York, 1945, p.226, Sec. 322.

- [57] Crocco L.  
*Research on Combustion Instability in Liquid Propellant Rockets*  
Eleventh Symposium (International) on Combustion, Combustion Inst., Pittsburgh, PA,  
1966, pp. 85-99.
- [58] Rangel R.H., et Sirignano W.A.  
*Nonlinear Growth of Kelvin-Helmholtz Instability: Effect of Surface Tension and  
Density Ratio*  
Physics of Fluids, Vol. 31, No. 7, 1988, pp. 1845-1855.
- [59] Rangel R.H., et Sirignano W.A.  
*The Linear and Nonlinear Shear-Instability of a Fluid Sheet*  
Physics of Fluids A, Vol. 3, No. 10, 1991, pp. 2392-2400.
- [60] Strahle W.C., et Crocco L.  
*Analytical Investigation of Several Mechanisms of Combustion Instability*  
5<sup>th</sup> Propulsion Meeting (Tampa, FL), Chemical Propulsion Information Agency, Laurel,  
MD, Nov. 1963.
- [61] Tong A.Y., et Sirignano W.A.  
*Oscillatory Vaporisation of Fuel Droplets in an Unstable Combustor*  
Journal of Propulsion and Power, Vol. 5, No. 3, 1989, pp. 257-261.
- [62] Lefebvre A.H.  
*Atomization and Sprays*  
Hemisphere Publishing Corporation, United States of America, 1989, Chap. 8.
- [63] Ordonneau G., et Nicole A.  
*Moteur Vinci et écoulements diphasiques : synthèse des travaux réalisés dans le cadre  
de l'Assistance Technique Vinci*  
ONERA, DOSSIER n° 2/03081, Septembre 2001.
- [64] Ordonneau G.  
*Chugging moteur Vulcain 2 : rapport final sur l'évaluation du modèle initial*  
ONERA, RT 19/6151 DEFA/Y. Châtillon, novembre 1999.
- [65] Ordonneau G.  
*Etude de la stabilité d'un injecteur de moteur fusée à ergols liquides*  
ONERA RT n° 49/6116EY (1990).

- [66] Mass U., et Pope S. B.  
*Simplifying Chemical Kinetics : Intrinsic Low-Dimensional Manifolds in Composition Space*  
Combustion and Flame 88, 1992: p.239-264.
- [67] Rogers R. C., et Chinitz W.  
*Using a Global Hydrogen-Air Combustion Model in Turbulent Reacting Flow Calculations*  
AIAA Journal, Vol. 21, N°4, 1983, pp.586-592.
- [68] Glassman I.  
*Combustion*  
1987, Second Edition, Academic Press, Inc., Orlando, Florida.
- [69] <http://webbook.nist.gov/chemistry/>
- [70] Kee R.J., Rupley F.M., et Miller J.A.  
*The Chemkin thermodynamic data base. UC4.*  
SANDIA SAND 87-8215. 1992.
- [71] [www.me.berkeley.edu/gri\\_mech/version30/text30.html](http://www.me.berkeley.edu/gri_mech/version30/text30.html)
- [72] Culick F.E.C.  
*Overview of Combustion Instabilities in Liquid-Propellant Rocket Engines*  
Liquid Rocket Engine Combustion Instability - Progress in Astronautics and Aeronautics - Vol 169, 1995.
- [73] Ordonneau G.  
*Un nouvel outil numérique pour l'étude de l'effet POGO*  
30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Indianapolis, IN (USA), June 27-29, 1994. AIAA paper no. 94-2884.
- [74] Candel S., Herding G., Snyder R., Scouflaire P., Rolon C., Vingert L., Habiballah M., Grisch F., Péalat M., Bouchardy P., Stepowski D., Cessou A., et Colin P.  
*Experimental Investigation of Shear Coaxial Cryogenic Jet Flames*  
Journal of Propulsion and Power, Vol. 14 N°5, pp.826-834, 1998.
- [75] De Benedictis M., Ordonneau G.  
*High Frequency Injection Coupled Combustion Instabilities - Study of Combustion*

*Chamber / Feed System Coupling*

42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, CA (USA), July 9-12, 2006. AIAA paper no. 06-4721.

- [76] Cremel L. (LX Software Consulting)  
ELX 3.4 © CNES.
- [77] Ordonneau G.  
*Etude du couplage du dôme avec la chambre de combustion de l'Aestus. Influence de la géométrie et des conditions limites*  
ONERA RT n° 1/07626 DEFA (2003).
- [78] Bernocco L..  
*AESTUS ENGINE. Delta Qualification 1 Synthesis Report for Vacuum Campaigns 9052 and 9053*  
ASTRIUM, May 2002 (n° A5-RE-1921-X-2077-MBBO).
- [79] Bernocco L..  
*AESTUS ENGINE. Delta Qualification 2 Synthesis Report for Vacuum Campaign 9054*  
ASTRIUM, June 2002 (n° A5-RE-1921-X-2080-MBBO).
- [80] Taubenberger G. et al.  
*AESTUS ENGINE. D-Qualification 1 for GHe Cushion. Commission de Revue d'Essai Test 9052 and 9053*  
ASTRIUM, Ottobrunn, 2002.
- [81] Taubenberger G. et al.  
*AESTUS ENGINE. D-Qualification 2 for GHe Cushion. Commission de Revue d'Essai Test 9054*  
ASTRIUM, Ottobrunn, 2002.
- [82] de Bonn O.  
*AESTUS ENGINE. Definition File A5GS Configuration*  
EADS Space Transportation, November 2004 (A5-DF-1921-C-2002-MBBO).
- [83] Schmitt D. and LOURME D.  
*A model of instability of liquid propellant engine with radial injection*  
Acta Astronautica Vol. 9, No. 6-7, pp!; 445-454, 1982.

- [84] Weast R.C.  
*Handbook of Chemistry and Physics [Section E]*  
The Chemical Rubber Co., 48<sup>th</sup> ed. 1967-1968.
- [85] Geiringer P.L.  
*Handbook of Heat Transfer Media [Section III]*  
Reinhold Publishing Corp., 1962.
- [86] Nowak E.S. et al.  
*Smoothed P.V.T Data for Water in the Critical Region Derived from Experimental Measurements*  
ASME Paper 60-HT-26 (1960).
- [87] De Benedictis M.  
Validation du code CEDRE : calcul d'allumage hypergolique sur configuration simplifiée de l'Aestus  
CNES Evry, mai 2007 (n° MNS-NT-1451000-15-CNES).
- [88] Ordonneau G.  
*CARINS. Modèles de combustion pour le prototype 3*  
ONERA RT n° 4/07403 DEFA (2003).
- [89] Tavernier P., Boisson J., et Crampel B.  
*Propergols Hautement Energétiques*  
AGARDographie No. 141. AGARD-AG-141-70.

# Annexe A

## Concetrations molaires obtenues par CHEMKIN

La température d'injection du mélange de réactants oxygène<sup>o</sup>/hydrogène est de 300°K et les concentrations obtenues par CHEMKIN sont :

| RM  | C <sub>O2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2O</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>OH</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | T [K]   |
|-----|---|---|--|---|---------|
| 0.2 | 0.00E+00                                  | 2.32E-05                                  | 5.94E-07                                   | 2.95E-35                                  | 506.06  |
| 0.4 | 0.00E+00                                  | 1.61E-05                                  | 8.48E-07                                   | 1.06E-26                                  | 709.17  |
| 0.6 | 1.42E-35                                  | 1.23E-05                                  | 9.95E-07                                   | 4.69E-22                                  | 906.36  |
| 0.8 | 1.92E-30                                  | 9.88E-06                                  | 1.10E-06                                   | 3.75E-19                                  | 1095.83 |
| 1   | 6.25E-27                                  | 8.24E-06                                  | 1.18E-06                                   | 3.54E-17                                  | 1276.72 |
| 1.2 | 2.26E-24                                  | 7.06E-06                                  | 1.25E-06                                   | 9.54E-16                                  | 1449.09 |
| 1.4 | 2.03E-22                                  | 6.15E-06                                  | 1.30E-06                                   | 1.16E-14                                  | 1613.54 |
| 1.6 | 7.08E-21                                  | 5.43E-06                                  | 1.36E-06                                   | 8.25E-14                                  | 1770.72 |
| 1.8 | 1.27E-19                                  | 4.85E-06                                  | 1.41E-06                                   | 4.03E-13                                  | 1921.26 |
| 2   | 1.41E-18                                  | 4.37E-06                                  | 1.46E-06                                   | 1.50E-12                                  | 2065.74 |
| 2.2 | 1.08E-17                                  | 3.96E-06                                  | 1.50E-06                                   | 4.52E-12                                  | 2204.71 |
| 2.4 | 6.28E-17                                  | 3.60E-06                                  | 1.54E-06                                   | 1.17E-11                                  | 2338.60 |
| 2.6 | 2.91E-16                                  | 3.29E-06                                  | 1.58E-06                                   | 2.65E-11                                  | 2467.84 |
| 2.8 | 1.13E-15                                  | 3.02E-06                                  | 1.62E-06                                   | 5.44E-11                                  | 2592.75 |
| 3   | 3.80E-15                                  | 2.77E-06                                  | 1.66E-06                                   | 1.03E-10                                  | 2713.63 |
| 3.2 | 1.13E-14                                  | 2.55E-06                                  | 1.70E-06                                   | 1.82E-10                                  | 2830.73 |
| 3.4 | 3.05E-14                                  | 2.35E-06                                  | 1.74E-06                                   | 3.05E-10                                  | 2944.25 |
| 3.6 | 7.58E-14                                  | 2.16E-06                                  | 1.77E-06                                   | 4.86E-10                                  | 3054.38 |
| 3.8 | 1.75E-13                                  | 2.00E-06                                  | 1.81E-06                                   | 7.43E-10                                  | 3161.24 |
| 4   | 3.81E-13                                  | 1.84E-06                                  | 1.84E-06                                   | 1.10E-09                                  | 3264.95 |
| 4.2 | 7.86E-13                                  | 1.70E-06                                  | 1.87E-06                                   | 1.58E-09                                  | 3365.62 |
| 4.4 | 1.55E-12                                  | 1.56E-06                                  | 1.91E-06                                   | 2.20E-09                                  | 3463.30 |
| 4.6 | 2.95E-12                                  | 1.43E-06                                  | 1.94E-06                                   | 3.00E-09                                  | 3558.05 |
| 4.8 | 5.42E-12                                  | 1.32E-06                                  | 1.97E-06                                   | 4.01E-09                                  | 3649.91 |
| 5   | 9.68E-12                                  | 1.20E-06                                  | 2.00E-06                                   | 5.28E-09                                  | 3738.90 |
| 5.2 | 1.69E-11                                  | 1.10E-06                                  | 2.03E-06                                   | 6.82E-09                                  | 3825.02 |
| 5.4 | 2.89E-11                                  | 9.98E-07                                  | 2.06E-06                                   | 8.71E-09                                  | 3908.24 |

|      |          |          |          |          |         |
|------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 5.6  | 4.86E-11 | 9.04E-07 | 2.09E-06 | 1.10E-08 | 3988.54 |
| 5.8  | 8.08E-11 | 8.13E-07 | 2.12E-06 | 1.37E-08 | 4065.86 |
| 6    | 1.33E-10 | 7.28E-07 | 2.15E-06 | 1.69E-08 | 4140.09 |
| 6.2  | 2.18E-10 | 6.46E-07 | 2.18E-06 | 2.08E-08 | 4211.08 |
| 6.4  | 3.58E-10 | 5.68E-07 | 2.21E-06 | 2.53E-08 | 4278.62 |
| 6.6  | 5.88E-10 | 4.94E-07 | 2.23E-06 | 3.07E-08 | 4342.37 |
| 6.8  | 9.76E-10 | 4.23E-07 | 2.26E-06 | 3.70E-08 | 4401.83 |
| 7    | 1.64E-09 | 3.57E-07 | 2.28E-06 | 4.46E-08 | 4456.22 |
| 7.2  | 2.80E-09 | 2.95E-07 | 2.31E-06 | 5.35E-08 | 4504.35 |
| 7.4  | 4.88E-09 | 2.38E-07 | 2.33E-06 | 6.40E-08 | 4544.39 |
| 7.6  | 8.62E-09 | 1.88E-07 | 2.34E-06 | 7.59E-08 | 4573.89 |
| 7.8  | 1.51E-08 | 1.46E-07 | 2.35E-06 | 8.87E-08 | 4590.34 |
| 8    | 2.53E-08 | 1.13E-07 | 2.36E-06 | 1.01E-07 | 4592.91 |
| 8.2  | 3.96E-08 | 8.94E-08 | 2.36E-06 | 1.12E-07 | 4583.64 |
| 8.4  | 5.74E-08 | 7.24E-08 | 2.36E-06 | 1.22E-07 | 4566.20 |
| 8.6  | 7.80E-08 | 6.01E-08 | 2.35E-06 | 1.29E-07 | 4543.88 |
| 8.8  | 1.01E-07 | 5.10E-08 | 2.34E-06 | 1.34E-07 | 4518.88 |
| 9    | 1.25E-07 | 4.41E-08 | 2.34E-06 | 1.38E-07 | 4492.51 |
| 9.2  | 1.49E-07 | 3.86E-08 | 2.33E-06 | 1.40E-07 | 4465.50 |
| 9.4  | 1.75E-07 | 3.42E-08 | 2.32E-06 | 1.42E-07 | 4438.29 |
| 9.6  | 2.01E-07 | 3.06E-08 | 2.31E-06 | 1.43E-07 | 4411.11 |
| 9.8  | 2.27E-07 | 2.75E-08 | 2.30E-06 | 1.44E-07 | 4384.11 |
| 10   | 2.54E-07 | 2.50E-08 | 2.29E-06 | 1.44E-07 | 4357.38 |
| 10.2 | 2.81E-07 | 2.27E-08 | 2.29E-06 | 1.43E-07 | 4330.97 |
| 10.4 | 3.08E-07 | 2.08E-08 | 2.28E-06 | 1.43E-07 | 4304.89 |
| 10.6 | 3.35E-07 | 1.91E-08 | 2.27E-06 | 1.42E-07 | 4279.18 |
| 10.8 | 3.62E-07 | 1.76E-08 | 2.26E-06 | 1.41E-07 | 4253.83 |
| 11   | 3.89E-07 | 1.63E-08 | 2.25E-06 | 1.40E-07 | 4228.85 |
| 11.2 | 4.16E-07 | 1.51E-08 | 2.24E-06 | 1.38E-07 | 4204.22 |
| 11.4 | 4.43E-07 | 1.40E-08 | 2.24E-06 | 1.37E-07 | 4179.96 |
| 11.6 | 4.69E-07 | 1.30E-08 | 2.23E-06 | 1.35E-07 | 4156.04 |
| 11.8 | 4.96E-07 | 1.21E-08 | 2.22E-06 | 1.33E-07 | 4132.47 |
| 12   | 5.23E-07 | 1.13E-08 | 2.21E-06 | 1.31E-07 | 4109.23 |
| 12.2 | 5.49E-07 | 1.06E-08 | 2.20E-06 | 1.30E-07 | 4086.32 |
| 12.4 | 5.76E-07 | 9.94E-09 | 2.20E-06 | 1.28E-07 | 4063.73 |
| 12.6 | 6.02E-07 | 9.32E-09 | 2.19E-06 | 1.26E-07 | 4041.45 |
| 12.8 | 6.28E-07 | 8.76E-09 | 2.18E-06 | 1.24E-07 | 4019.47 |
| 13   | 6.54E-07 | 8.23E-09 | 2.18E-06 | 1.22E-07 | 3997.78 |
| 13.2 | 6.80E-07 | 7.74E-09 | 2.17E-06 | 1.20E-07 | 3976.39 |
| 13.4 | 7.06E-07 | 7.29E-09 | 2.16E-06 | 1.18E-07 | 3955.27 |
| 13.6 | 7.31E-07 | 6.88E-09 | 2.15E-06 | 1.16E-07 | 3934.43 |
| 13.8 | 7.57E-07 | 6.49E-09 | 2.15E-06 | 1.14E-07 | 3913.86 |
| 14   | 7.82E-07 | 6.13E-09 | 2.14E-06 | 1.12E-07 | 3893.54 |

*Tableau A-1 : Concentrations molaires à pression chambre de 1 bar.*

| RM  | C <sub>O2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2O</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>OH</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | T [K]   |
|-----|---|---|--|---|---------|
| 0.2 | 0.00E+00                                  | 2.32E-04                                  | 5.94E-06                                   | 9.31E-35                                  | 506.06  |
| 0.4 | 0.00E+00                                  | 1.61E-04                                  | 8.48E-06                                   | 3.34E-26                                  | 709.17  |
| 0.6 | 1.42E-35                                  | 1.23E-04                                  | 9.95E-06                                   | 1.48E-21                                  | 906.36  |
| 0.8 | 1.92E-30                                  | 9.88E-05                                  | 1.10E-05                                   | 1.18E-18                                  | 1095.83 |
| 1   | 6.25E-27                                  | 8.24E-05                                  | 1.18E-05                                   | 1.12E-16                                  | 1276.72 |
| 1.2 | 2.26E-24                                  | 7.06E-05                                  | 1.25E-05                                   | 3.02E-15                                  | 1449.09 |
| 1.4 | 2.03E-22                                  | 6.15E-05                                  | 1.30E-05                                   | 3.67E-14                                  | 1613.54 |
| 1.6 | 7.08E-21                                  | 5.43E-05                                  | 1.36E-05                                   | 2.61E-13                                  | 1770.72 |
| 1.8 | 1.27E-19                                  | 4.85E-05                                  | 1.41E-05                                   | 1.28E-12                                  | 1921.27 |
| 2   | 1.41E-18                                  | 4.37E-05                                  | 1.46E-05                                   | 4.74E-12                                  | 2065.77 |
| 2.2 | 1.08E-17                                  | 3.96E-05                                  | 1.50E-05                                   | 1.43E-11                                  | 2204.77 |
| 2.4 | 6.29E-17                                  | 3.60E-05                                  | 1.54E-05                                   | 3.69E-11                                  | 2338.73 |
| 2.6 | 2.92E-16                                  | 3.29E-05                                  | 1.58E-05                                   | 8.39E-11                                  | 2468.07 |
| 2.8 | 1.14E-15                                  | 3.01E-05                                  | 1.62E-05                                   | 1.72E-10                                  | 2593.15 |
| 3   | 3.82E-15                                  | 2.77E-05                                  | 1.66E-05                                   | 3.27E-10                                  | 2714.27 |
| 3.2 | 1.14E-14                                  | 2.55E-05                                  | 1.70E-05                                   | 5.79E-10                                  | 2831.70 |
| 3.4 | 3.08E-14                                  | 2.35E-05                                  | 1.74E-05                                   | 9.69E-10                                  | 2945.68 |
| 3.6 | 7.67E-14                                  | 2.16E-05                                  | 1.77E-05                                   | 1.55E-09                                  | 3056.39 |
| 3.8 | 1.78E-13                                  | 2.00E-05                                  | 1.81E-05                                   | 2.37E-09                                  | 3163.99 |
| 4   | 3.88E-13                                  | 1.84E-05                                  | 1.84E-05                                   | 3.51E-09                                  | 3268.64 |
| 4.2 | 8.06E-13                                  | 1.69E-05                                  | 1.87E-05                                   | 5.05E-09                                  | 3370.44 |
| 4.4 | 1.60E-12                                  | 1.56E-05                                  | 1.91E-05                                   | 7.07E-09                                  | 3469.50 |
| 4.6 | 3.06E-12                                  | 1.43E-05                                  | 1.94E-05                                   | 9.69E-09                                  | 3565.89 |
| 4.8 | 5.66E-12                                  | 1.31E-05                                  | 1.97E-05                                   | 1.30E-08                                  | 3659.68 |
| 5   | 1.02E-11                                  | 1.20E-05                                  | 2.00E-05                                   | 1.72E-08                                  | 3750.93 |
| 5.2 | 1.80E-11                                  | 1.10E-05                                  | 2.03E-05                                   | 2.23E-08                                  | 3839.65 |
| 5.4 | 3.10E-11                                  | 9.95E-06                                  | 2.06E-05                                   | 2.86E-08                                  | 3925.90 |
| 5.6 | 5.29E-11                                  | 9.00E-06                                  | 2.09E-05                                   | 3.63E-08                                  | 4009.67 |
| 5.8 | 8.92E-11                                  | 8.09E-06                                  | 2.12E-05                                   | 4.56E-08                                  | 4090.96 |
| 6   | 1.50E-10                                  | 7.22E-06                                  | 2.15E-05                                   | 5.69E-08                                  | 4169.76 |
| 6.2 | 2.50E-10                                  | 6.39E-06                                  | 2.18E-05                                   | 7.05E-08                                  | 4246.00 |
| 6.4 | 4.21E-10                                  | 5.59E-06                                  | 2.21E-05                                   | 8.69E-08                                  | 4319.62 |
| 6.6 | 7.14E-10                                  | 4.83E-06                                  | 2.24E-05                                   | 1.07E-07                                  | 4390.46 |
| 6.8 | 1.24E-09                                  | 4.10E-06                                  | 2.27E-05                                   | 1.31E-07                                  | 4458.28 |
| 7   | 2.20E-09                                  | 3.40E-06                                  | 2.30E-05                                   | 1.62E-07                                  | 4522.65 |
| 7.2 | 4.10E-09                                  | 2.73E-06                                  | 2.32E-05                                   | 2.00E-07                                  | 4582.80 |
| 7.4 | 8.15E-09                                  | 2.11E-06                                  | 2.35E-05                                   | 2.50E-07                                  | 4637.24 |
| 7.6 | 1.77E-08                                  | 1.53E-06                                  | 2.37E-05                                   | 3.17E-07                                  | 4682.91 |
| 7.8 | 4.26E-08                                  | 1.03E-06                                  | 2.39E-05                                   | 4.06E-07                                  | 4713.67 |
| 8   | 1.05E-07                                  | 6.67E-07                                  | 2.40E-05                                   | 5.13E-07                                  | 4721.33 |
| 8.2 | 2.25E-07                                  | 4.47E-07                                  | 2.40E-05                                   | 6.13E-07                                  | 4706.02 |
| 8.4 | 3.96E-07                                  | 3.24E-07                                  | 2.39E-05                                   | 6.89E-07                                  | 4678.04 |
| 8.6 | 6.00E-07                                  | 2.51E-07                                  | 2.38E-05                                   | 7.43E-07                                  | 4645.38 |
| 8.8 | 8.26E-07                                  | 2.04E-07                                  | 2.37E-05                                   | 7.80E-07                                  | 4611.44 |
| 9   | 1.07E-06                                  | 1.71E-07                                  | 2.36E-05                                   | 8.06E-07                                  | 4577.49 |
| 9.2 | 1.31E-06                                  | 1.46E-07                                  | 2.35E-05                                   | 8.23E-07                                  | 4544.01 |
| 9.4 | 1.57E-06                                  | 1.28E-07                                  | 2.34E-05                                   | 8.34E-07                                  | 4511.19 |

|      |          |          |          |          |         |
|------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 9.6  | 1.83E-06 | 1.12E-07 | 2.33E-05 | 8.40E-07 | 4479.07 |
| 9.8  | 2.09E-06 | 1.00E-07 | 2.32E-05 | 8.43E-07 | 4447.67 |
| 10   | 2.36E-06 | 8.99E-08 | 2.31E-05 | 8.42E-07 | 4416.97 |
| 10.2 | 2.63E-06 | 8.12E-08 | 2.30E-05 | 8.39E-07 | 4386.94 |
| 10.4 | 2.90E-06 | 7.37E-08 | 2.29E-05 | 8.35E-07 | 4357.56 |
| 10.6 | 3.17E-06 | 6.73E-08 | 2.28E-05 | 8.29E-07 | 4328.79 |
| 10.8 | 3.44E-06 | 6.16E-08 | 2.27E-05 | 8.21E-07 | 4300.62 |
| 11   | 3.71E-06 | 5.66E-08 | 2.26E-05 | 8.13E-07 | 4273.00 |
| 11.2 | 3.98E-06 | 5.22E-08 | 2.25E-05 | 8.03E-07 | 4245.92 |
| 11.4 | 4.25E-06 | 4.83E-08 | 2.24E-05 | 7.93E-07 | 4219.36 |
| 11.6 | 4.52E-06 | 4.47E-08 | 2.23E-05 | 7.83E-07 | 4193.28 |
| 11.8 | 4.79E-06 | 4.15E-08 | 2.22E-05 | 7.72E-07 | 4167.68 |
| 12   | 5.06E-06 | 3.86E-08 | 2.22E-05 | 7.60E-07 | 4142.52 |
| 12.2 | 5.32E-06 | 3.60E-08 | 2.21E-05 | 7.49E-07 | 4117.80 |
| 12.4 | 5.59E-06 | 3.36E-08 | 2.20E-05 | 7.37E-07 | 4093.50 |
| 12.6 | 5.85E-06 | 3.14E-08 | 2.19E-05 | 7.25E-07 | 4069.60 |
| 12.8 | 6.12E-06 | 2.94E-08 | 2.18E-05 | 7.13E-07 | 4046.09 |
| 13   | 6.38E-06 | 2.76E-08 | 2.18E-05 | 7.01E-07 | 4022.95 |
| 13.2 | 6.64E-06 | 2.59E-08 | 2.17E-05 | 6.88E-07 | 4000.17 |
| 13.4 | 6.90E-06 | 2.43E-08 | 2.16E-05 | 6.76E-07 | 3977.75 |
| 13.6 | 7.16E-06 | 2.28E-08 | 2.15E-05 | 6.64E-07 | 3955.66 |
| 13.8 | 7.42E-06 | 2.15E-08 | 2.15E-05 | 6.52E-07 | 3933.90 |
| 14   | 7.68E-06 | 2.03E-08 | 2.14E-05 | 6.40E-07 | 3912.45 |

Tableau A-2 : Concentrations molaires à pression chambre de 10 bar.

| RM  | C <sub>O2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2O</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>OH</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | T [K]   |
|-----|---|---|--|---|---------|
| 0.2 | 0.00E+00                                  | 1.39E-03                                  | 3.57E-05                                   | 2.28E-34                                  | 506.07  |
| 0.4 | 0.00E+00                                  | 9.67E-04                                  | 5.09E-05                                   | 8.17E-26                                  | 709.17  |
| 0.6 | 1.42E-35                                  | 7.37E-04                                  | 5.97E-05                                   | 3.64E-21                                  | 906.37  |
| 0.8 | 1.92E-30                                  | 5.93E-04                                  | 6.59E-05                                   | 2.90E-18                                  | 1095.80 |
| 1   | 6.25E-27                                  | 4.95E-04                                  | 7.07E-05                                   | 2.74E-16                                  | 1276.70 |
| 1.2 | 2.26E-24                                  | 4.23E-04                                  | 7.47E-05                                   | 7.39E-15                                  | 1449.10 |
| 1.4 | 2.03E-22                                  | 3.69E-04                                  | 7.83E-05                                   | 8.98E-14                                  | 1613.50 |
| 1.6 | 7.08E-21                                  | 3.26E-04                                  | 8.15E-05                                   | 6.39E-13                                  | 1770.70 |
| 1.8 | 1.27E-19                                  | 2.91E-04                                  | 8.45E-05                                   | 3.13E-12                                  | 1921.30 |
| 2   | 1.41E-18                                  | 2.62E-04                                  | 8.73E-05                                   | 1.16E-11                                  | 2065.80 |
| 2.2 | 1.08E-17                                  | 2.37E-04                                  | 9.00E-05                                   | 3.51E-11                                  | 2204.80 |
| 2.4 | 6.29E-17                                  | 2.16E-04                                  | 9.26E-05                                   | 9.04E-11                                  | 2338.80 |
| 2.6 | 2.92E-16                                  | 1.97E-04                                  | 9.50E-05                                   | 2.05E-10                                  | 2468.10 |
| 2.8 | 1.14E-15                                  | 1.81E-04                                  | 9.74E-05                                   | 4.23E-10                                  | 2593.30 |
| 3   | 3.82E-15                                  | 1.66E-04                                  | 9.97E-05                                   | 8.01E-10                                  | 2714.40 |
| 3.2 | 1.14E-14                                  | 1.53E-04                                  | 1.02E-04                                   | 1.42E-09                                  | 2832.00 |
| 3.4 | 3.09E-14                                  | 1.41E-04                                  | 1.04E-04                                   | 2.38E-09                                  | 2946.10 |

|      |          |          |          |          |         |
|------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 3.6  | 7.70E-14 | 1.30E-04 | 1.06E-04 | 3.80E-09 | 3056.90 |
| 3.8  | 1.79E-13 | 1.20E-04 | 1.08E-04 | 5.82E-09 | 3164.80 |
| 4    | 3.91E-13 | 1.10E-04 | 1.10E-04 | 8.63E-09 | 3269.70 |
| 4.2  | 8.11E-13 | 1.02E-04 | 1.12E-04 | 1.24E-08 | 3371.80 |
| 4.4  | 1.61E-12 | 9.35E-05 | 1.14E-04 | 1.74E-08 | 3471.20 |
| 4.6  | 3.09E-12 | 8.59E-05 | 1.16E-04 | 2.39E-08 | 3568.10 |
| 4.8  | 5.73E-12 | 7.88E-05 | 1.18E-04 | 3.21E-08 | 3662.40 |
| 5    | 1.03E-11 | 7.21E-05 | 1.20E-04 | 4.24E-08 | 3754.30 |
| 5.2  | 1.83E-11 | 6.57E-05 | 1.22E-04 | 5.52E-08 | 3843.80 |
| 5.4  | 3.17E-11 | 5.97E-05 | 1.24E-04 | 7.09E-08 | 3930.90 |
| 5.6  | 5.42E-11 | 5.39E-05 | 1.26E-04 | 9.01E-08 | 4015.70 |
| 5.8  | 9.18E-11 | 4.84E-05 | 1.27E-04 | 1.13E-07 | 4098.20 |
| 6    | 1.55E-10 | 4.32E-05 | 1.29E-04 | 1.42E-07 | 4178.40 |
| 6.2  | 2.60E-10 | 3.82E-05 | 1.31E-04 | 1.76E-07 | 4256.20 |
| 6.4  | 4.41E-10 | 3.34E-05 | 1.33E-04 | 2.18E-07 | 4331.70 |
| 6.6  | 7.56E-10 | 2.88E-05 | 1.35E-04 | 2.69E-07 | 4404.70 |
| 6.8  | 1.32E-09 | 2.44E-05 | 1.36E-04 | 3.32E-07 | 4475.20 |
| 7    | 2.40E-09 | 2.01E-05 | 1.38E-04 | 4.12E-07 | 4542.90 |
| 7.2  | 4.60E-09 | 1.60E-05 | 1.40E-04 | 5.16E-07 | 4607.20 |
| 7.4  | 9.60E-09 | 1.21E-05 | 1.41E-04 | 6.56E-07 | 4667.20 |
| 7.6  | 2.29E-08 | 8.50E-06 | 1.43E-04 | 8.56E-07 | 4720.40 |
| 7.8  | 6.69E-08 | 5.27E-06 | 1.44E-04 | 1.16E-06 | 4760.30 |
| 8    | 2.34E-07 | 2.87E-06 | 1.45E-04 | 1.61E-06 | 4772.90 |
| 8.2  | 7.06E-07 | 1.61E-06 | 1.45E-04 | 2.08E-06 | 4751.20 |
| 8.4  | 1.51E-06 | 1.05E-06 | 1.44E-04 | 2.43E-06 | 4712.90 |
| 8.6  | 2.54E-06 | 7.61E-07 | 1.43E-04 | 2.67E-06 | 4671.00 |
| 8.8  | 3.73E-06 | 5.92E-07 | 1.43E-04 | 2.83E-06 | 4629.30 |
| 9    | 5.02E-06 | 4.81E-07 | 1.42E-04 | 2.94E-06 | 4589.00 |
| 9.2  | 6.39E-06 | 4.02E-07 | 1.41E-04 | 3.01E-06 | 4550.00 |
| 9.4  | 7.83E-06 | 3.44E-07 | 1.40E-04 | 3.06E-06 | 4512.50 |
| 9.6  | 9.31E-06 | 2.98E-07 | 1.40E-04 | 3.08E-06 | 4476.30 |
| 9.8  | 1.08E-05 | 2.62E-07 | 1.39E-04 | 3.09E-06 | 4441.20 |
| 10   | 1.24E-05 | 2.32E-07 | 1.38E-04 | 3.09E-06 | 4407.40 |
| 10.2 | 1.40E-05 | 2.07E-07 | 1.38E-04 | 3.08E-06 | 4374.50 |
| 10.4 | 1.55E-05 | 1.86E-07 | 1.37E-04 | 3.06E-06 | 4342.60 |
| 10.6 | 1.71E-05 | 1.69E-07 | 1.36E-04 | 3.04E-06 | 4311.60 |
| 10.8 | 1.88E-05 | 1.53E-07 | 1.36E-04 | 3.01E-06 | 4281.40 |
| 11   | 2.04E-05 | 1.40E-07 | 1.35E-04 | 2.98E-06 | 4252.00 |
| 11.2 | 2.20E-05 | 1.28E-07 | 1.35E-04 | 2.94E-06 | 4223.30 |
| 11.4 | 2.36E-05 | 1.18E-07 | 1.34E-04 | 2.91E-06 | 4195.30 |
| 11.6 | 2.53E-05 | 1.08E-07 | 1.33E-04 | 2.87E-06 | 4167.90 |
| 11.8 | 2.69E-05 | 1.00E-07 | 1.33E-04 | 2.82E-06 | 4141.20 |
| 12   | 2.85E-05 | 9.28E-08 | 1.32E-04 | 2.78E-06 | 4115.00 |
| 12.2 | 3.02E-05 | 8.61E-08 | 1.32E-04 | 2.74E-06 | 4089.40 |
| 12.4 | 3.18E-05 | 8.01E-08 | 1.31E-04 | 2.69E-06 | 4064.30 |
| 12.6 | 3.34E-05 | 7.46E-08 | 1.31E-04 | 2.65E-06 | 4039.70 |
| 12.8 | 3.50E-05 | 6.96E-08 | 1.30E-04 | 2.60E-06 | 4015.50 |
| 13   | 3.66E-05 | 6.50E-08 | 1.30E-04 | 2.56E-06 | 3991.80 |
| 13.2 | 3.82E-05 | 6.08E-08 | 1.29E-04 | 2.51E-06 | 3968.60 |

|      |          |          |          |          |         |
|------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 13.4 | 3.98E-05 | 5.69E-08 | 1.29E-04 | 2.47E-06 | 3945.80 |
| 13.6 | 4.14E-05 | 5.34E-08 | 1.28E-04 | 2.42E-06 | 3923.30 |
| 13.8 | 4.30E-05 | 5.01E-08 | 1.28E-04 | 2.38E-06 | 3901.30 |
| 14   | 4.46E-05 | 4.71E-08 | 1.28E-04 | 2.33E-06 | 3879.60 |

Tableau A-2 : Concentrations à pression chambre de 60 bar.

| RM  | C <sub>O2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>H2O</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | C <sub>OH</sub><br>[mol/cm <sup>3</sup> ] | T [K]   |
|-----|---|---|--|---|---------|
| 0.2 | 0.00E+00                                  | 2.32E-03                                  | 5.94E-05                                   | 2.95E-34                                  | 506.07  |
| 0.4 | 0.00E+00                                  | 1.61E-03                                  | 8.48E-05                                   | 1.05E-25                                  | 709.17  |
| 0.6 | 1.42E-35                                  | 1.23E-03                                  | 9.95E-05                                   | 4.69E-21                                  | 906.37  |
| 0.8 | 1.92E-30                                  | 9.88E-04                                  | 1.10E-04                                   | 3.75E-18                                  | 1095.80 |
| 1   | 6.25E-27                                  | 8.24E-04                                  | 1.18E-04                                   | 3.54E-16                                  | 1276.70 |
| 1.2 | 2.26E-24                                  | 7.06E-04                                  | 1.25E-04                                   | 9.54E-15                                  | 1449.10 |
| 1.4 | 2.03E-22                                  | 6.15E-04                                  | 1.30E-04                                   | 1.16E-13                                  | 1613.50 |
| 1.6 | 7.08E-21                                  | 5.43E-04                                  | 1.36E-04                                   | 8.26E-13                                  | 1770.70 |
| 1.8 | 1.27E-19                                  | 4.85E-04                                  | 1.41E-04                                   | 4.03E-12                                  | 1921.30 |
| 2   | 1.41E-18                                  | 4.37E-04                                  | 1.46E-04                                   | 1.50E-11                                  | 2065.80 |
| 2.2 | 1.08E-17                                  | 3.96E-04                                  | 1.50E-04                                   | 4.53E-11                                  | 2204.80 |
| 2.4 | 6.29E-17                                  | 3.60E-04                                  | 1.54E-04                                   | 1.17E-10                                  | 2338.80 |
| 2.6 | 2.92E-16                                  | 3.29E-04                                  | 1.58E-04                                   | 2.65E-10                                  | 2468.10 |
| 2.8 | 1.14E-15                                  | 3.01E-04                                  | 1.62E-04                                   | 5.46E-10                                  | 2593.30 |
| 3   | 3.82E-15                                  | 2.77E-04                                  | 1.66E-04                                   | 1.03E-09                                  | 2714.50 |
| 3.2 | 1.14E-14                                  | 2.55E-04                                  | 1.70E-04                                   | 1.83E-09                                  | 2832.00 |
| 3.4 | 3.09E-14                                  | 2.35E-04                                  | 1.74E-04                                   | 3.07E-09                                  | 2946.10 |
| 3.6 | 7.70E-14                                  | 2.16E-04                                  | 1.77E-04                                   | 4.90E-09                                  | 3057.00 |
| 3.8 | 1.79E-13                                  | 2.00E-04                                  | 1.81E-04                                   | 7.52E-09                                  | 3164.90 |
| 4   | 3.91E-13                                  | 1.84E-04                                  | 1.84E-04                                   | 1.12E-08                                  | 3269.80 |
| 4.2 | 8.12E-13                                  | 1.69E-04                                  | 1.87E-04                                   | 1.60E-08                                  | 3372.00 |
| 4.4 | 1.61E-12                                  | 1.56E-04                                  | 1.91E-04                                   | 2.25E-08                                  | 3471.50 |
| 4.6 | 3.09E-12                                  | 1.43E-04                                  | 1.94E-04                                   | 3.08E-08                                  | 3568.40 |
| 4.8 | 5.74E-12                                  | 1.31E-04                                  | 1.97E-04                                   | 4.15E-08                                  | 3662.90 |
| 5   | 1.04E-11                                  | 1.20E-04                                  | 2.00E-04                                   | 5.48E-08                                  | 3754.80 |
| 5.2 | 1.83E-11                                  | 1.09E-04                                  | 2.03E-04                                   | 7.13E-08                                  | 3844.50 |
| 5.4 | 3.18E-11                                  | 9.94E-05                                  | 2.06E-04                                   | 9.17E-08                                  | 3931.70 |
| 5.6 | 5.44E-11                                  | 8.98E-05                                  | 2.09E-04                                   | 1.17E-07                                  | 4016.70 |
| 5.8 | 9.22E-11                                  | 8.07E-05                                  | 2.12E-04                                   | 1.47E-07                                  | 4099.30 |
| 6   | 1.55E-10                                  | 7.20E-05                                  | 2.15E-04                                   | 1.84E-07                                  | 4179.70 |
| 6.2 | 2.62E-10                                  | 6.36E-05                                  | 2.18E-04                                   | 2.28E-07                                  | 4257.80 |
| 6.4 | 4.44E-10                                  | 5.56E-05                                  | 2.21E-04                                   | 2.82E-07                                  | 4333.60 |
| 6.6 | 7.63E-10                                  | 4.79E-05                                  | 2.24E-04                                   | 3.49E-07                                  | 4407.00 |
| 6.8 | 1.34E-09                                  | 4.05E-05                                  | 2.27E-04                                   | 4.31E-07                                  | 4477.90 |
| 7   | 2.44E-09                                  | 3.34E-05                                  | 2.30E-04                                   | 5.36E-07                                  | 4546.10 |
| 7.2 | 4.69E-09                                  | 2.66E-05                                  | 2.33E-04                                   | 6.72E-07                                  | 4611.20 |

|      |          |          |          |          |         |
|------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 7.4  | 9.85E-09 | 2.01E-05 | 2.36E-04 | 8.56E-07 | 4672.10 |
| 7.6  | 2.39E-08 | 1.40E-05 | 2.39E-04 | 1.12E-06 | 4726.50 |
| 7.8  | 7.24E-08 | 8.54E-06 | 2.41E-04 | 1.54E-06 | 4768.30 |
| 8    | 2.76E-07 | 4.47E-06 | 2.42E-04 | 2.18E-06 | 4782.00 |
| 8.2  | 9.19E-07 | 2.38E-06 | 2.42E-04 | 2.89E-06 | 4758.50 |
| 8.4  | 2.09E-06 | 1.49E-06 | 2.40E-04 | 3.42E-06 | 4717.10 |
| 8.6  | 3.65E-06 | 1.06E-06 | 2.39E-04 | 3.78E-06 | 4672.10 |
| 8.8  | 5.48E-06 | 8.12E-07 | 2.38E-04 | 4.02E-06 | 4627.90 |
| 9    | 7.52E-06 | 6.52E-07 | 2.36E-04 | 4.18E-06 | 4585.20 |
| 9.2  | 9.70E-06 | 5.40E-07 | 2.35E-04 | 4.29E-06 | 4544.30 |
| 9.4  | 1.20E-05 | 4.57E-07 | 2.34E-04 | 4.36E-06 | 4505.10 |
| 9.6  | 1.44E-05 | 3.94E-07 | 2.33E-04 | 4.40E-06 | 4467.40 |
| 9.8  | 1.69E-05 | 3.44E-07 | 2.31E-04 | 4.42E-06 | 4431.00 |
| 10   | 1.94E-05 | 3.03E-07 | 2.30E-04 | 4.42E-06 | 4396.00 |
| 10.2 | 2.20E-05 | 2.70E-07 | 2.29E-04 | 4.40E-06 | 4362.10 |
| 10.4 | 2.46E-05 | 2.42E-07 | 2.28E-04 | 4.38E-06 | 4329.40 |
| 10.6 | 2.73E-05 | 2.18E-07 | 2.27E-04 | 4.34E-06 | 4297.60 |
| 10.8 | 3.00E-05 | 1.97E-07 | 2.26E-04 | 4.30E-06 | 4266.70 |
| 11   | 3.27E-05 | 1.79E-07 | 2.25E-04 | 4.26E-06 | 4236.70 |
| 11.2 | 3.54E-05 | 1.64E-07 | 2.24E-04 | 4.21E-06 | 4207.50 |
| 11.4 | 3.81E-05 | 1.50E-07 | 2.23E-04 | 4.15E-06 | 4179.10 |
| 11.6 | 4.08E-05 | 1.38E-07 | 2.22E-04 | 4.09E-06 | 4151.30 |
| 11.8 | 4.36E-05 | 1.27E-07 | 2.21E-04 | 4.03E-06 | 4124.20 |
| 12   | 4.63E-05 | 1.18E-07 | 2.20E-04 | 3.97E-06 | 4097.80 |
| 12.2 | 4.90E-05 | 1.09E-07 | 2.19E-04 | 3.91E-06 | 4071.90 |
| 12.4 | 5.18E-05 | 1.01E-07 | 2.18E-04 | 3.84E-06 | 4046.60 |
| 12.6 | 5.45E-05 | 9.41E-08 | 2.17E-04 | 3.78E-06 | 4021.80 |
| 12.8 | 5.72E-05 | 8.76E-08 | 2.17E-04 | 3.72E-06 | 3997.60 |
| 13   | 5.99E-05 | 8.17E-08 | 2.16E-04 | 3.65E-06 | 3973.80 |
| 13.2 | 6.26E-05 | 7.64E-08 | 2.15E-04 | 3.59E-06 | 3950.40 |
| 13.4 | 6.53E-05 | 7.15E-08 | 2.14E-04 | 3.52E-06 | 3927.60 |
| 13.6 | 6.80E-05 | 6.69E-08 | 2.13E-04 | 3.46E-06 | 3905.10 |
| 13.8 | 7.06E-05 | 6.28E-08 | 2.13E-04 | 3.39E-06 | 3883.00 |
| 14   | 7.33E-05 | 5.90E-08 | 2.12E-04 | 3.33E-06 | 3861.40 |

*Tableau A-2 : Concentrations molaires à pression chambre de 100 bar.*

# Annexe B

## Rappels d'acoustique

Quand on étudie la dynamique d'un système d'alimentation d'un moteur fusée à ergols liquides, il est nécessaire de connaître le profil de pression dans la chambre de combustion, près de la plaque d'injection.

### 6.3 Acoustique classique d'une chambre de combustion cylindrique

La géométrie de la chambre est considérée cylindrique, avec les coordonnées spatiales placées comme montré dans la figure suivante. Toute position dans la chambre est décrite par une direction radiale ( $r$ ), une direction tangentielle ( $\theta$ ), et une direction axiale ( $z$ ). L'injection est positionnée à  $z=0$ , et le rayon de la chambre est donné par  $R_{ch}$ .

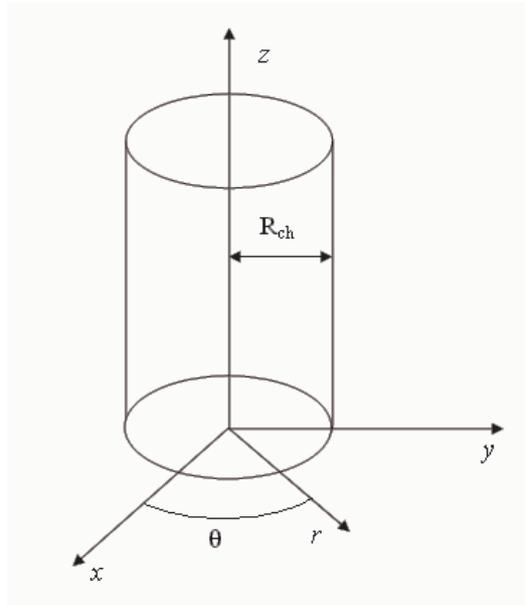


Figure B- 1 : Géométrie de la chambre de combustion.

Avant de montrer l'équation qui gouverne l'acoustique du fluide dans la chambre de combustion, on fait les hypothèses suivantes :

- le système rejoint l'état stationnaire ;
- on considère la linéarisation des variables (petite amplitude des mouvements perturbés) :  $f = \bar{f} + f'$  ;
- un petit nombre de Mach du débit moyen :  $\bar{M}^2 \ll 1$  ;
- l'incompressibilité du fluide, ce qui signifie densité moyenne constante ;
- l'non viscosité du fluide ;
- le débit est homogènement non réactif : la réaction chimique est infiniment rapide, elle prend place et se termine à une position bien définie de l'axe (qu'on appelle front de flamme) ;

Avec les hypothèses ci-dessus les équation de conservation de la masse et du mouvement vus au chapitre 5, en absence de termes sources, donnent l'équation des onde pour la partie oscillatoire de la pression :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \vartheta^2} \quad (\text{B.1})$$

on considère la solution de la forme suivante :

$$p'(r, \vartheta, z, t) = R(r) \Theta(\vartheta) e^{j(k_z z - \omega t)} \quad (\text{B.2})$$

Si on substitue la solution (B.2) dans l'équation (B.1), on obtient :

$$\frac{r^2}{R} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 - k_z^2) r^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} \quad (\text{B.3})$$

La partie gauche de l'équation (B.3) est dépendante du rayon  $r$  et la partie droite de l'angle  $\theta$ . Afin d'avoir l'égalité on introduit une constante de séparation  $m$ , on obtient deux équations, une en  $r$  et l'autre en  $\theta$  :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{B.4})$$

et

$$\frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (\text{B.5})$$

La solution des deux équations donne un champ de pression basé sur des fonctions transcendentes nommées fonctions de Bessel :

$$p' = [C_1 J_m(\alpha_{mn} r) + C_2 Y_m(\alpha_{mn} r)] \cdot [C_3 \cos(m\vartheta) + C_4 \sin(m\vartheta)] e^{j(k_z z - \omega t)} \quad (\text{B.6})$$

avec  $\alpha_{mn}^2 = (k^2 - k_z^2)$ . Dans la (B.6)  $J_m$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $m$  et  $Y_m$  est celle de seconde espèce d'ordre  $m$ , et  $C_i$ , avec  $i=1, \dots, 4$ , sont des constantes arbitraires. Les condition aux limites de notre problème sont :

$$p'(r=0) = p_0 \text{ avec } p_0 \text{ de valeur finie} \quad (\text{B.7})$$

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial r} \right|_{r=R_{ch}} = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$p'(\vartheta=0) = p'(\vartheta=2\pi) \quad (\text{B.9})$$

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = \left. \frac{\partial p'}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=2\pi} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Avec les conditions (B.7) et (B.10), les constantes  $C_2$  et  $C_4$  valent zéro. Avec la condition (B.9),  $m$  est entier ( $m=0,1,2,\dots$ ), et avec la condition (B.8), le système oscille à des fréquences discrètes qui sont les solutions de l'équation suivante :

$$\left. \frac{dJ_m(\alpha_{mn}r)}{dr} \right|_{r=R_{ch}} = 0 \quad (\text{B.11})$$

où  $n=1,2,\dots$

dont les premières solutions sont tabulées dans le tableau suivant.

| $m$ | $n$ | $\alpha_{mn}R_{ch}$ | Mode transverse                                 |
|-----|-----|---------------------|---|
| 1   | 1   | 1.8413              | Premier tangentiel                              |
| 2   | 1   | 3.0543              | Deuxième tangentiel                             |
| 0   | 2   | 3.8317              | Premier radial                                  |
| 3   | 1   | 4.2012              | Troisième tangentiel                            |
| 0   | 3   | 7.0156              | Deuxième radial                                 |
| 1   | 2   | 5.3313              | Premier tangentiel combiné avec premier radial  |
| 1   | 3   | 8.5263              | Premier tangentiel combiné avec deuxième radial |
| 2   | 2   | 6.7060              | Deuxième tangentiel combiné avec premier radial |

Tableau B- 1 : modes acoustiques transverses.

La solution (B.6) devient :

$$p' = \sum_m \sum_n p'_{mn} = \sum_m \sum_n \left[ \bar{p} J_m(\alpha_{mn}r) \cos(m\vartheta) e^{j(k_z z - \omega_{mn} t)} \right] \quad (\text{B.12})$$

avec  $\bar{p} = C_1 C_3$  amplitude du premier mode radial sur l'axe à  $z=0$ .

# Annexe C

## Rappels du modèle ‘time lag’ de Crocco

Bien que les processus exacts de vaporisation/combustion soient extrêmement complexes, Crocco a montré qu’on pouvait en première approximation les représenter au moyen d’un schéma simplifié, suivant lequel chacune des gouttes d’ergol, injecté dans une chambre de combustion d’un moteur fusée, reste d’abord uniquement à l’état liquide, puis se transforme instantanément à l’état gazeux dès qu’elle a accumulé une certaine quantité d’énergie constante dans le temps et dans l’espace. Sans entrer dans le détail de cette théorie, pour lequel le lecteur peut se reporter à la Réf. [53], nous en rappellerons ici les points nécessaires à la compréhension des hypothèses et à la définition des notations utilisées dans les chapitres 5 et 6 de ce manuscrit.

### 6.4 Dérivations des principaux résultats de la théorie de Crocco

Le taux d’accumulation d’énergie  $f$  est une fonction qui, pour une goutte donnée, dépend du temps et de toute variable quelle rencontre au long de sa trajectoire : la pression, la température, la vitesse des gaz environnants, etc. En réalité toutes ces grandeurs sont interdépendantes, de sorte qu’il suffit de connaître l’une d’elles pour que les autres soient déterminées. La fonction  $f$  peut alors être considérée comme une fonction de la seule variable principale que l’on privilégie de la sorte. Les expressions analytiques de cette fonction ainsi que celles de toutes les lois d’interdépendance entre les différentes variables sont à priori inconnues, mais si l’on effectue un développement au premier ordre en série de Taylor de ces expressions, on peut regrouper l’influence de toutes ces inconnues dans celle d’un seul paramètre que l’on appelle indice d’interaction  $n$  lié à la variable privilégiée. Cet indice ne

dépend que des valeurs stationnaires des différentes variables : il est donc indépendant de l'instant considéré, et également constant dans l'espace si les caractéristiques stationnaires de la chambre le sont elles-mêmes. Il est clair que cette théorie est d'autant plus représentative de la réalité que la variable principale privilégiée a un effet plus prépondérant sur le taux d'accumulation d'énergie  $f$ . C'est la raison pour laquelle Crocco choisit pour cette variable la pression, et supposa que  $f$  dépend à priori non seulement de celle-ci mais aussi de la température dans la chambre et de toute autre variable  $Z$ . En posant que toute variable instantanée est la somme de sa partie moyenne et d'une fluctuation ( $y = \bar{y} + y'$ , avec  $y' \ll \bar{y}$ ), on a :

$$f(p, T, Z, \dots) = \bar{f}(\bar{p}, \bar{T}, \bar{Z}, \dots) \cdot \left[ 1 + n \cdot \frac{p'}{\bar{p}} \right] \quad (\text{C.1})$$

avec

$$n = \frac{\bar{p}}{\bar{f}} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial p} + \dots \right) \quad (\text{C.2})$$

Dans le schéma proposé par Crocco, le délai de vaporisation/combustion  $\tau$  représente le temps nécessaire pour accumuler une certaine quantité constante d'énergie  $E_a$ . Ce temps qui se décompose en un délai insensible  $\tau_i$  dont la durée est totalement indépendante de la pression ( $n=0$ ) et qui pourra être par exemple le temps nécessaire à l'ergol pour parcourir la distance entre la section de sortie des orifices d'injection et la fin du darde liquide (voir chapitre 6), et un délai sensible  $\tau_s$  caractérisé par un indice d'interaction  $n$  non nul.

Avec les notations définies ci-dessus, on a :

$$\begin{cases} \tau_i = \bar{\tau}_i \\ \tau_s = \bar{\tau}_s + \tau'_s \\ \tau = \tau_i + \tau_s = \bar{\tau} + \tau' \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

En écrivant que le seuil d'énergie  $E_a$  est constante, et que sa valeur instantanée est égale à sa valeur moyenne, on a :

$$E_a = \int_{t-\tau_s}^t f(t, \mathbf{x}(t)) dt = \int_{t-\bar{\tau}_s}^t \bar{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt \quad (\text{C.4})$$

où  $\mathbf{x}(t)$  représente la position de la goutte d'ergol considérée au temps  $t$ . On linéarise et on derive par rapport au temps l'égalité précédente, et en considérant la pression moyenne indépendante de l'espace (suivant la réf. [53]), on obtient :

$$\frac{d\tau_s}{dt} = -n \frac{p'(t, \mathbf{x}(t)) - p'(t - \bar{\tau}_s, \mathbf{x}(t - \bar{\tau}_s))}{\bar{p}} \quad (\text{C.5})$$

L'équation (C.5) exprime la variation temporelle du délai sensible en fonction des fluctuations de pression rencontrées par la goutte, par l'intermédiaire de l'indice d'interaction  $n$ .

# Annexe D

## Modes propres du dôme suite a excitation par un injecteur

On montre par la suite la réponse en pression (adimensionnée) du dôme MMH en fonction de ses vitesses du son :

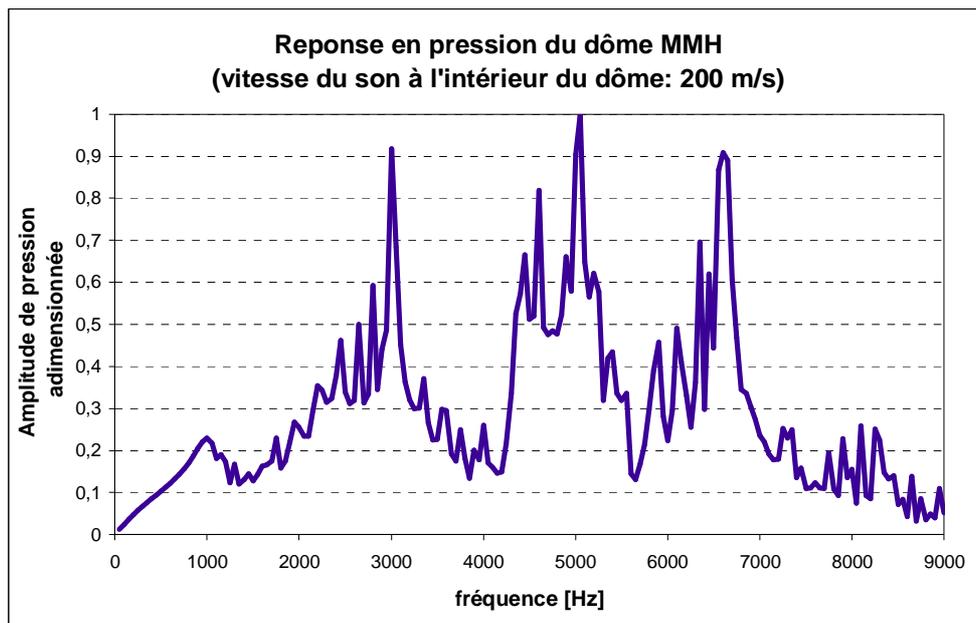


Figure D-1 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 200 m/s.

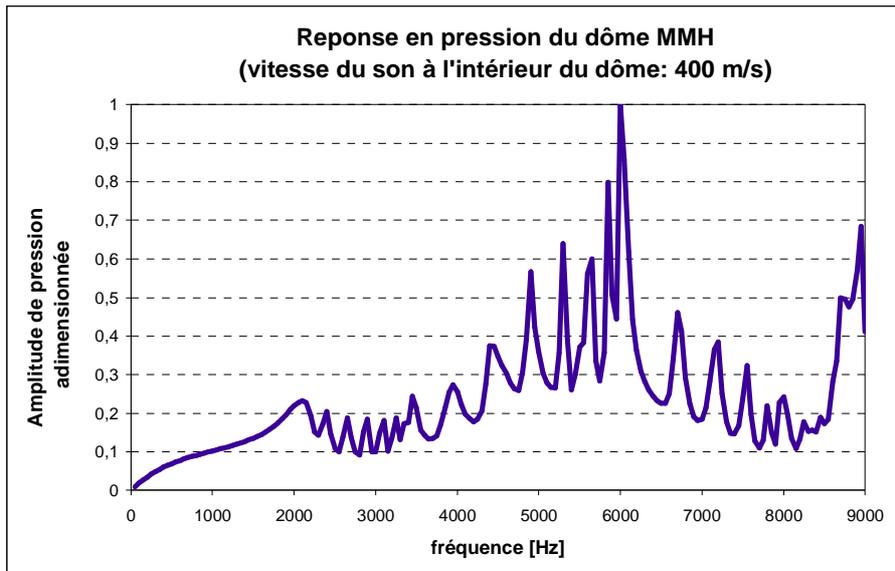


Figure D-2 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 400 m/s.

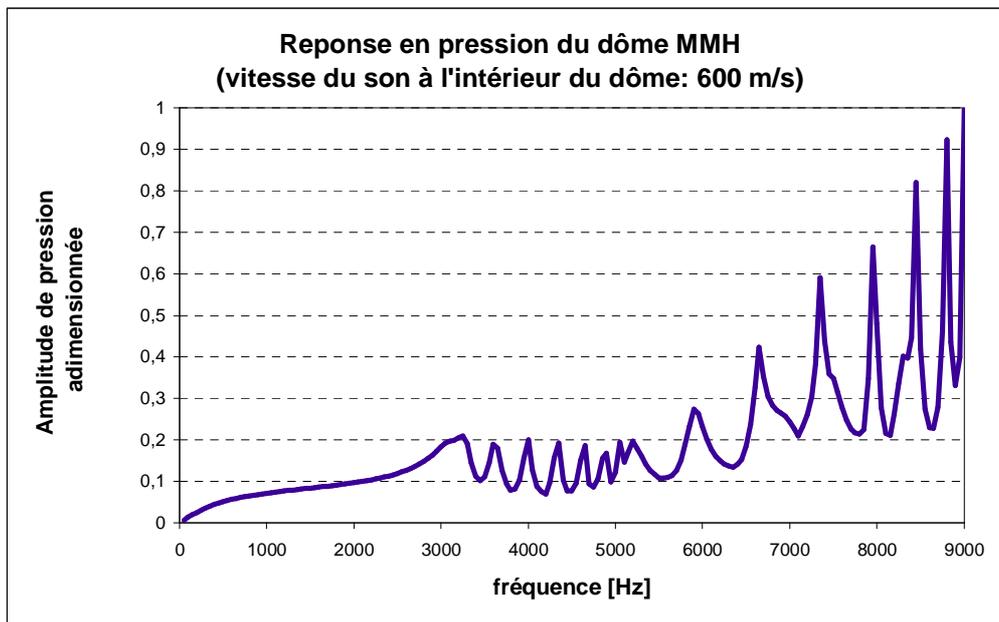


Figure D-3 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 600 m/s.

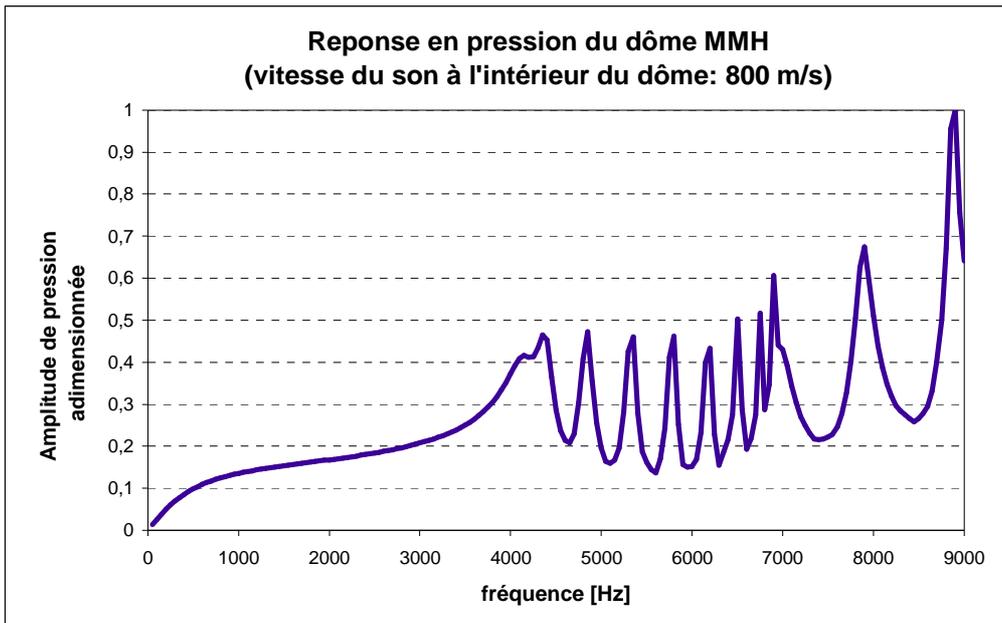


Figure D-4 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 800 m/s.

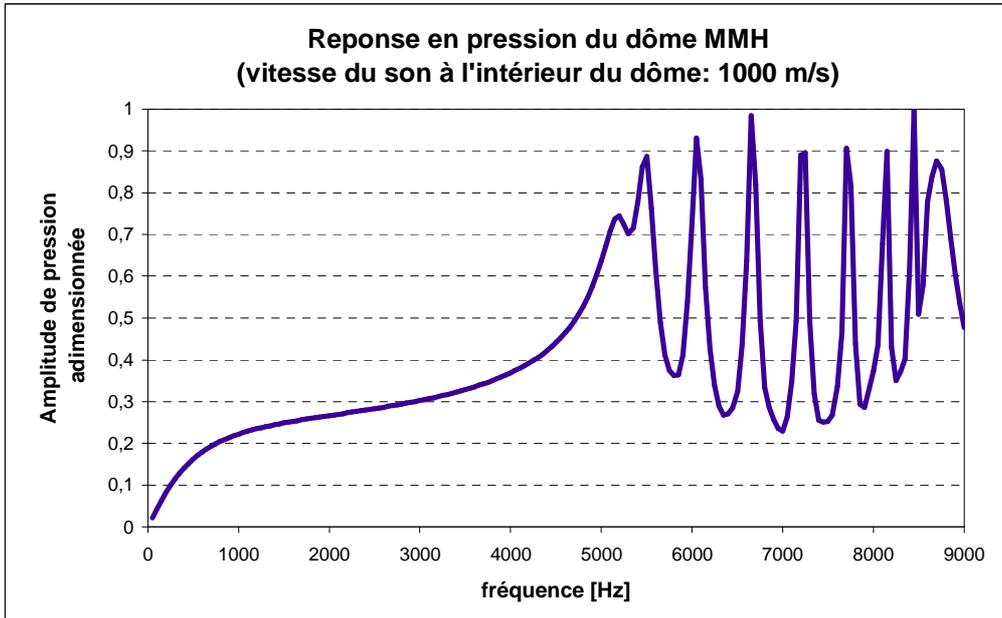


Figure D-5 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 1000 m/s.

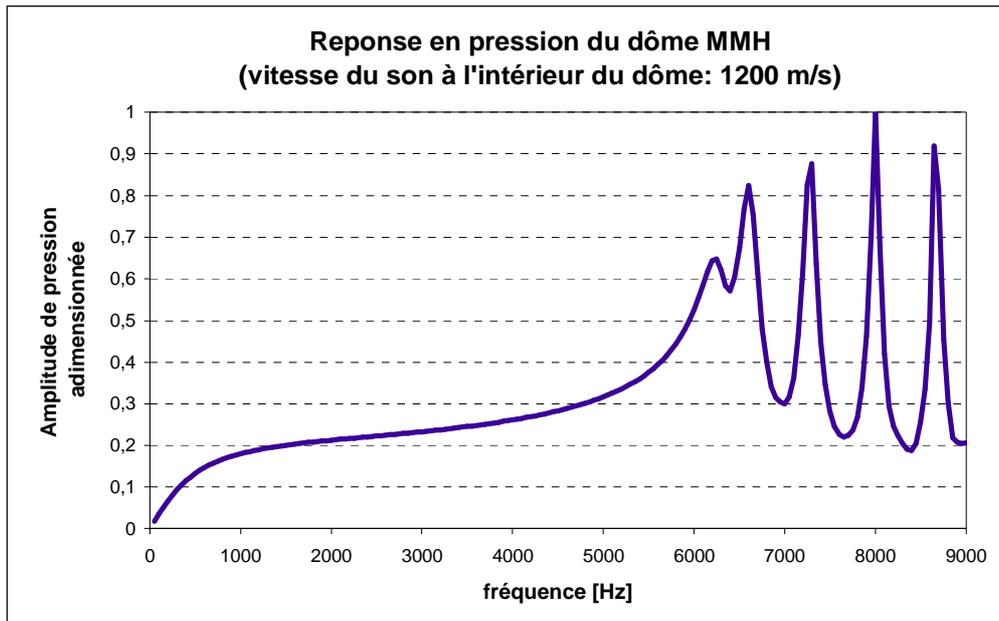


Figure D-6 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 1200 m/s.

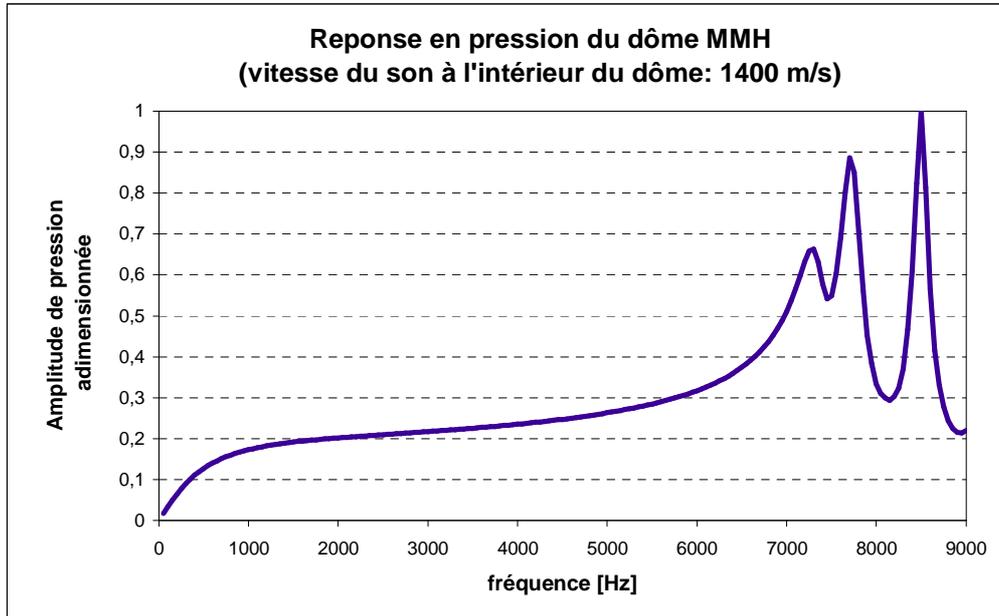


Figure D-7 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 1400 m/s.

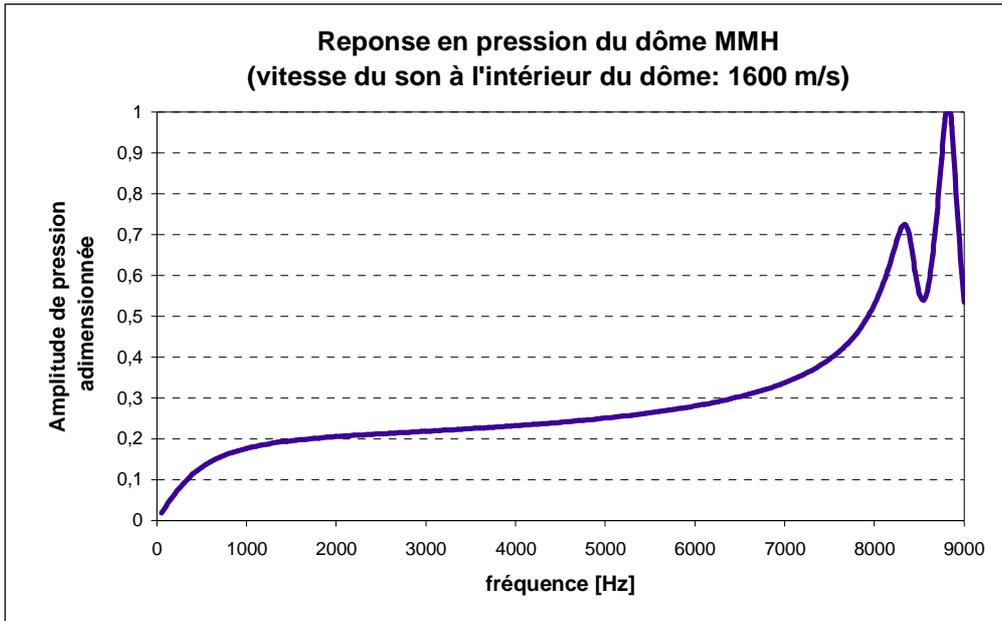
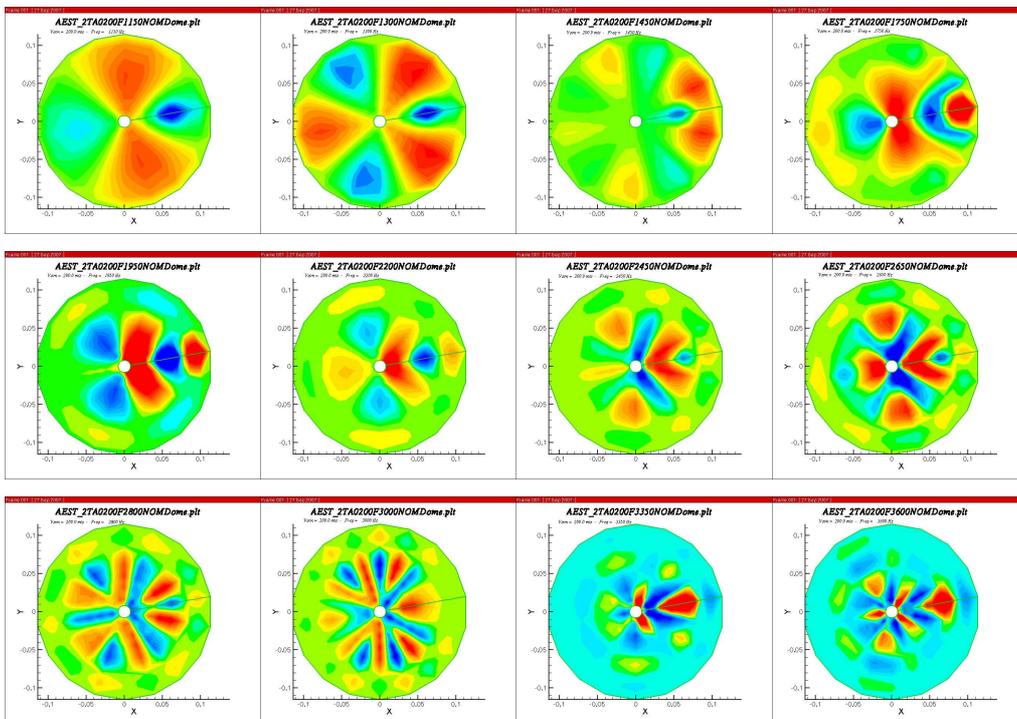
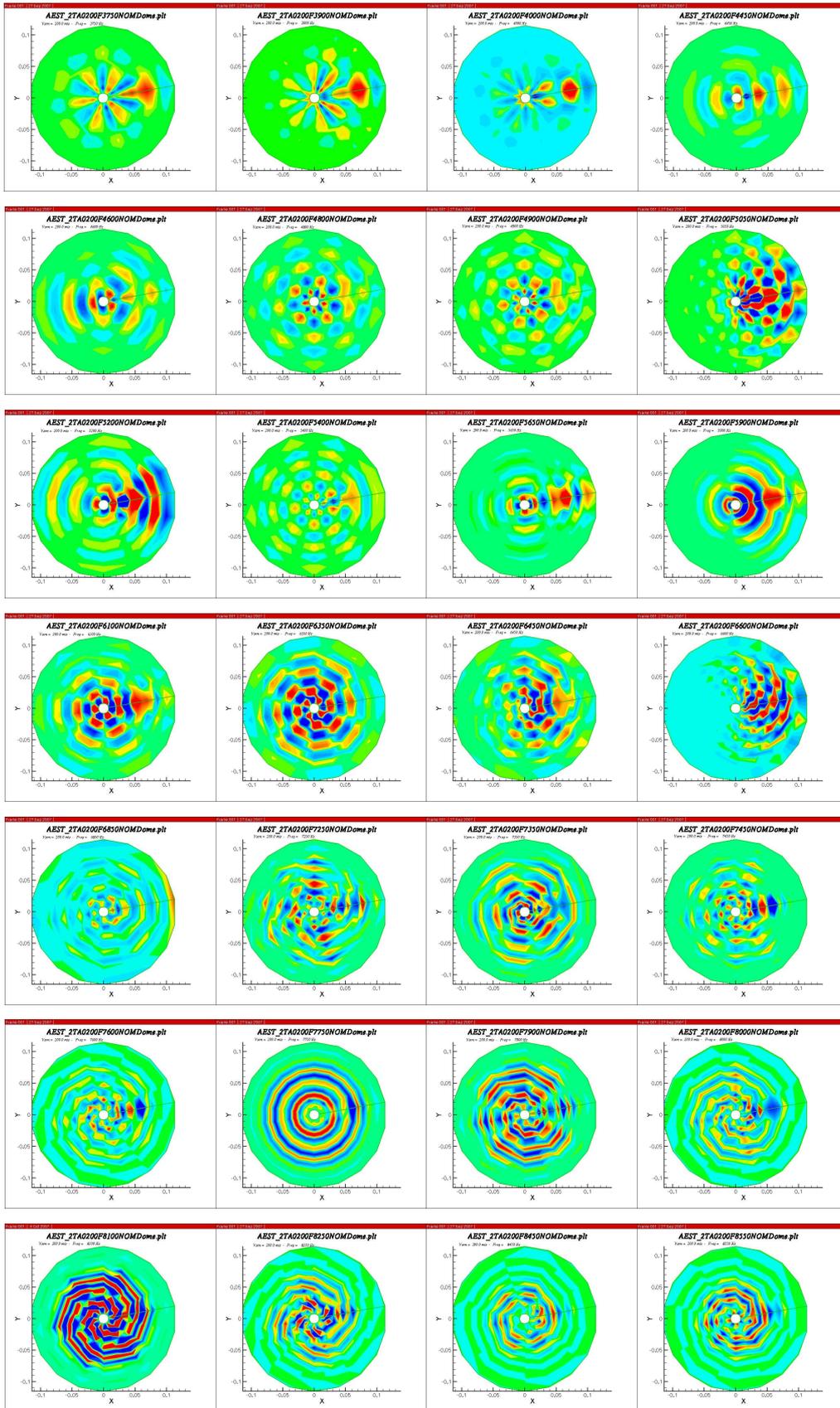
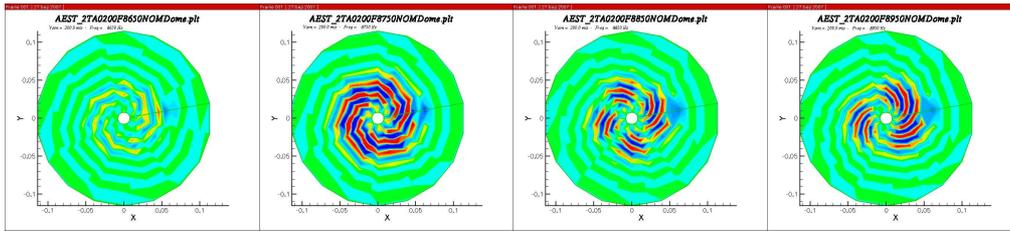


Figure D-8 : Amplitude maximale des oscillations de pression en fonction de la fréquence d'excitation à une vitesse du son dôme de 1600 m/s.

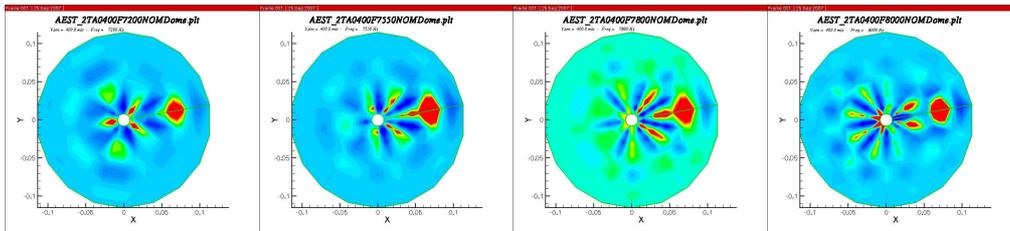
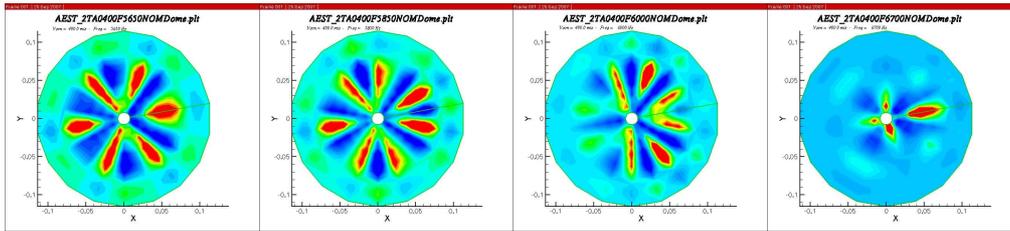
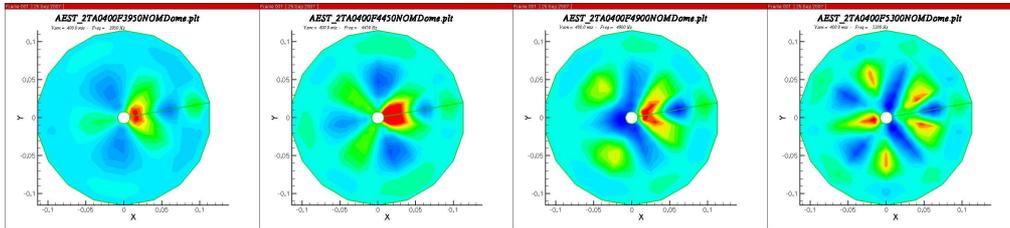
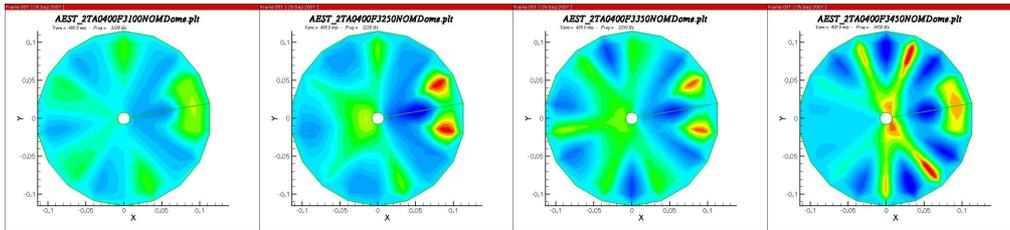
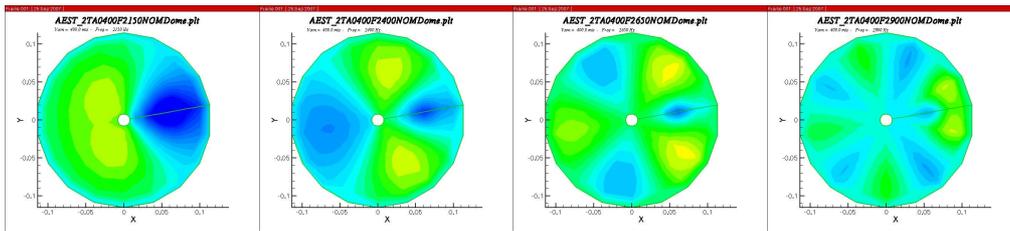
Par la suite on montre les modes dans le dôme du MMH en fonction de la vitesse du son. A une vitesse du son dôme de 200 m/s on a :

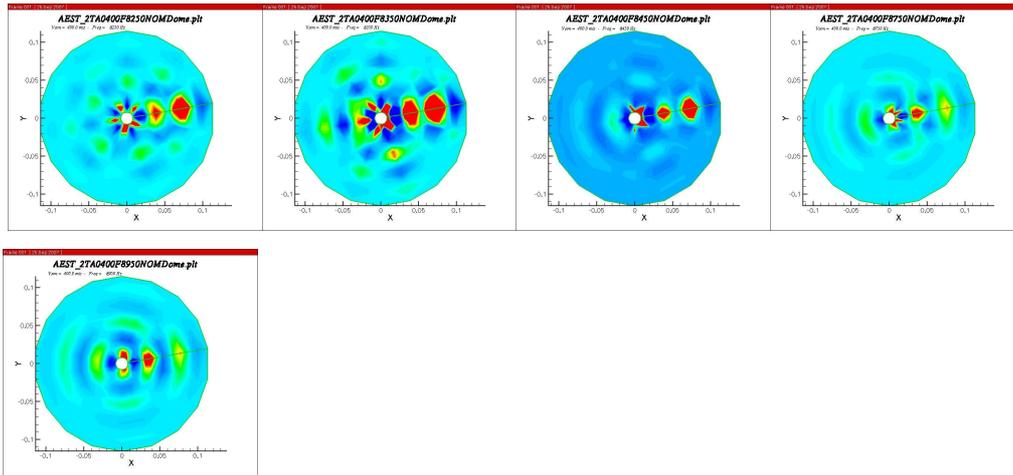




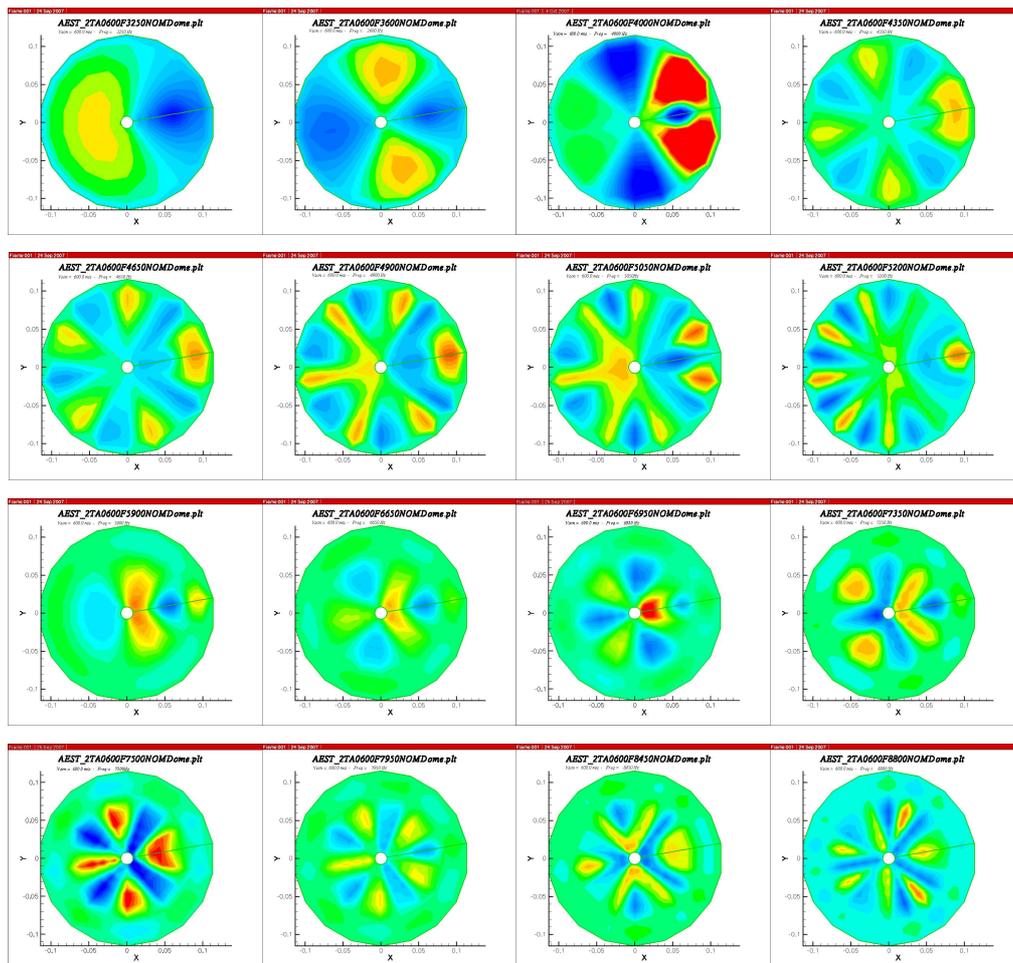


A 400 m/s :

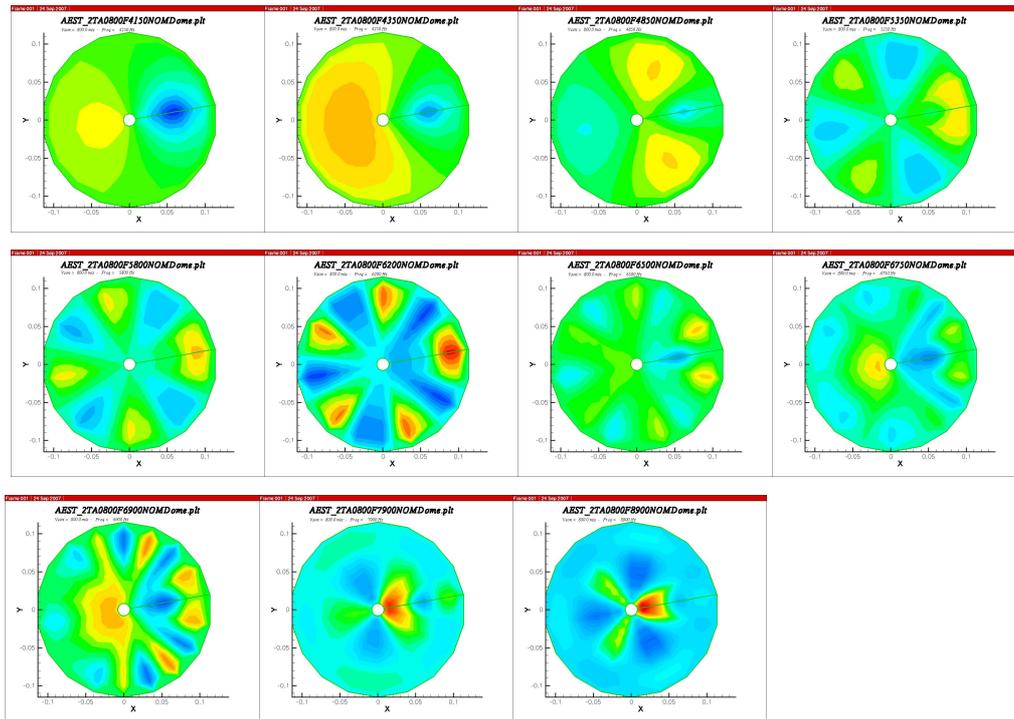




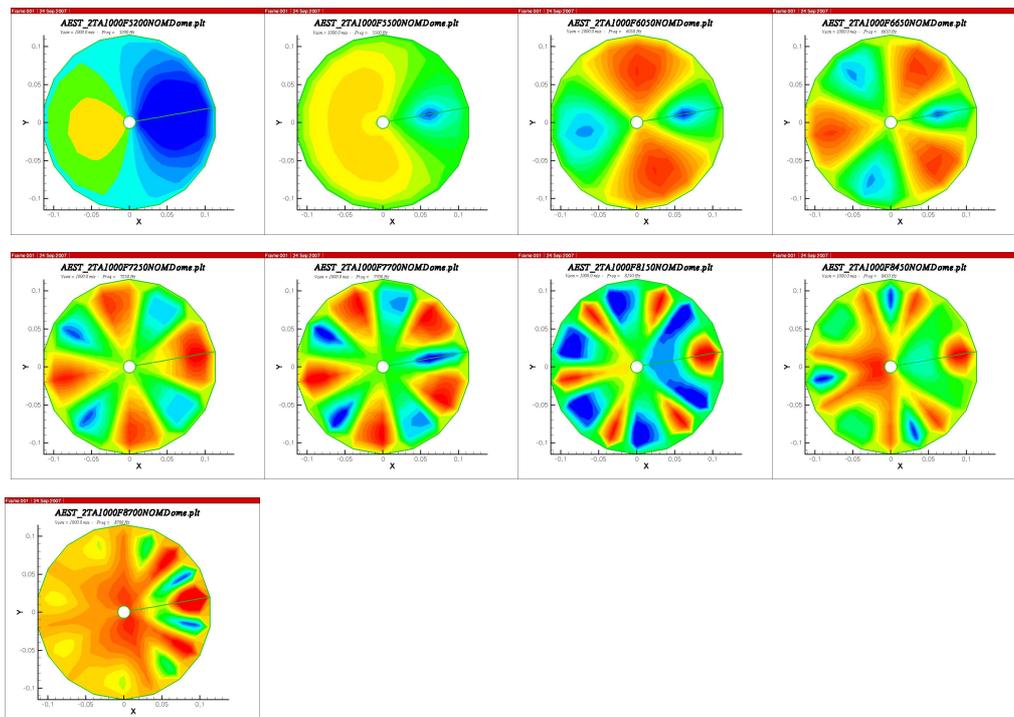
A 600 m/s :



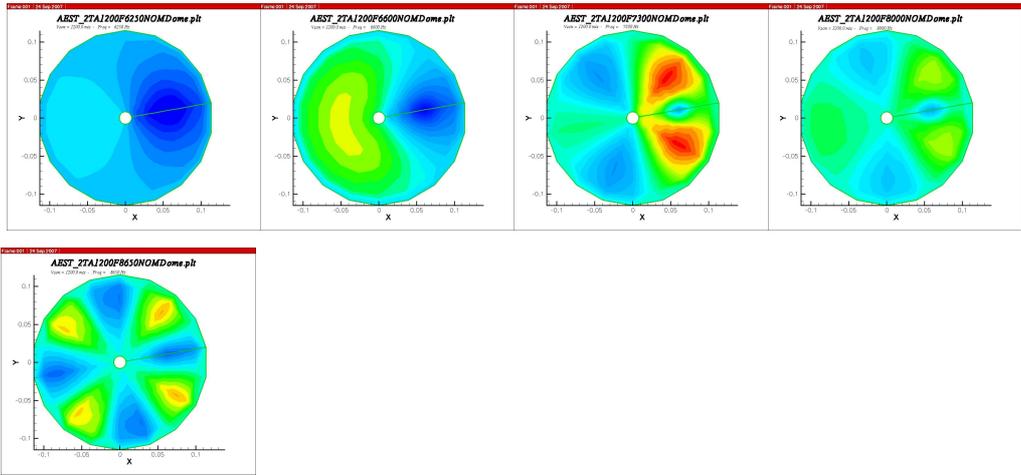
A 800 m/s :



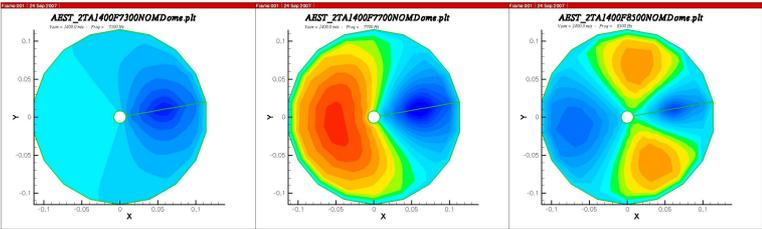
A 1000 m/s :



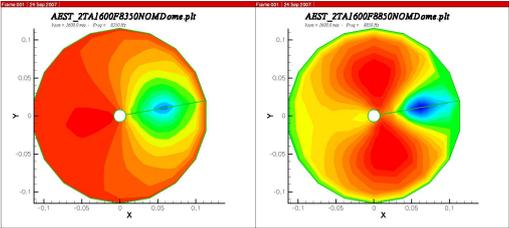
A 1200 m/s :



A 1400 m/s :



A 1600 m/s :



## **Instabilités couplées à haute fréquence dans les moteurs-fusées à ergols liquides : étude du couplage chambre de combustion / système d'alimentation**

En 2002 le moteur Aestus de l'étage supérieur d'Ariane 5 du vol 142 a présenté des instabilités de combustion à hautes fréquence, qui ont été soupçonnées être des instabilités couplées entre le dôme d'alimentation en fuel MMH (mono-méthyl-hydrazine) et la chambre de combustion pendant la phase de démarrage. Cette étude porte donc sur la compréhension des mécanismes de couplage qui guident les instabilités hybrides et le développement théorique et numérique de ces mécanismes.

Le premier aspect abordé concerne l'étude des temps caractéristiques des processus qui prennent place dans une chambre de combustion de moteur fusée à ergols liquides, dès que ces derniers sont injectés : l'atomisation primaire, l'atomisation secondaire, le mélange, le chauffage et la vaporisation des gouttes, et les réactions chimiques. Les résultats de cette analyse montrent les processus qui se couplent avec l'onde acoustique des instabilités hybrides. Ensuite une modélisation des deux systèmes principaux a été effectuée : le système d'alimentation contenant des ergols liquides ou gazeux dans une géométrie complexe, est modélisé par la méthode à paramètres discrets basée sur un schéma électrique ; le système chambre de combustion, présentant nombreux phénomènes dans une géométrie simple, presque cylindrique, a été modélisée par un approche globale, basée sur l'introduction des termes sources dans les équation de Navier Stokes. Une procédure de couplage a été développée entre les deux systèmes au travers d'une fonction admittance de l'injection. Le modèle a été validé sur une configuration simple et appliqué sur un cas réel, celui de l'Aestus.

**Mots-clés** : MOTEURS-FUSÉES ; COMBUSTION ; FRÉQUENCES DES OSCILLATIONS ; ATOMISATION

## **High frequency injection coupled instabilities in liquid rocket engines: study of combustion chamber / feed system coupling**

In 2002 the Aestus engine of the upper stage of Ariane 5 of the flight 142 presented high frequency combustion instabilities, which were probably as coupled instabilities between the fuel MMH (mono-methyl-hydrazine) supply dome and the combustion chamber during the ignition phase. For this reason we were interested in the comprehension of the coupling mechanisms driving hybrid instabilities and in the theoretical and numerical development of these mechanisms.

We first study characteristic times of processes taking place inside a liquid propellants rocket engine combustion chamber, as soon as propellants are injected: primary atomization, secondary atomization, mixing, heating and vaporization of droplets, and chemical reactions. Results of this analysis show the processes which are coupled with the acoustic wave of hybrid instabilities. Then a modelling of the two principal systems was made: the feeding system containing liquid or gaseous propellants inside a complex geometry, is modelled by the lumped parameter, based on an electric schema; the combustion chamber system where many phenomena take place, has a simple geometry, nearly cylindrical, and has been modeled by a global approach based on the Navier-Stokes equations with introduction of sources terms. A procedure of coupling was carried out between the two system by the function admittance of the injection. The full coupling model has been validated on a simple configuration and applied to a real case, the Aestus one.

**Keywords** : ROCKET ENGINES ; COMBUSTION ; FREQUENCIES OF OSCILLATING SYSTEMS ; ATOMIZATION