Etude combinatoire des ordonnés finis

André Bouchet

N° d'ordre :

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

André BOUCHET

ETUDE COMBINATOIRE DES ORDONNES FINIS
APPLICATIONS

Thèse soutenue le 13 Mai 1971 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	J. KUNTZMANN	Président
Messieurs	KOSZUL	Examinateurs
	BENZAKEN	
	NIVAT	

FACULTE DES SCIENCES
DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

<> <> <>

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	KOSZUL Jean Louis	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	MOUSSA André	Chimie nucléaire et radioactivité
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	SOUTIF Michel	Physique générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie minérale
	AYANT Yves	Physique approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
Mle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie-Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	PILLET Emile	Physique industrielle
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARBIER Jean Claude	Physique expérimentale
	SILBER Robert	Mécanique des fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique

	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	VAILLANT François	Zoologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée- I.U.T."A"
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servomécanisme
	PAYAN Jean Jacques	Mathématiques pures
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BOLLIET Louis	Informatique- I.U.T."B"

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RADHAKRISHNA	Thermodynamique
	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	GIDON Paul	Géologie et minéralogie- C.S.U.
Mme	BARBIER Marie Jeanne	Electrochimie
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GLENAT René	Chimie organique
	BARRA Jean	Mathématiques appliquées
	COUMES André	Electronique- E.I.E.
	PERRIAUX Jacques	Géologie et minéralogie
	ROBERT André	Chimie papetière
	BIAREZ Jean Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme	KAHANE Josette	Physique
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	REBECQ Jacques	Biologie- C.S.U.Chambery
	DEPORTES Charles	Chimie minérale

MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques appliquées
	AUBERT Guy	Physique
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques- C.S.U.
	DOLIQUE Jean Michel	Physique des plasmas
	DESRE Pierre	Métallurgie
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique-I.U.T."A"

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique automatique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques. C.S.U.Chambery
MM	KAHANE André	Physique générale
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
M.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	LONGEQUEUE Jean Pierre	Physique nucléaire
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	PFISTER Jean Claude	Physique générale
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique- I.P.
	MARTIN-BOYER Michel	Chimie-C.S.U.Chambery
	BRUGEL Lucien	Energétique- I.U.T."A"
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	ARMAND Yves	Chimie-I.U.T."A"
	KUHN Gérard	Physique- I.U.T."A"
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	BOUSSARD Jean Claude	Mathématiques appliquées.I.P.
	MOREAU René	Hydraulique. I.P.
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	JOLY Jean René	Mathématiques pures
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM	CONTE René	Physique I.U.T."A"
	PEFFEN René	Métallurgie I.U.T. "A"
	LE JUNTER Noël	Electronique I.U.T. "A"
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	MAYNARD Roger	Physique
	BLIMAN Samuel	Electronique E.I.E.
	DUSSAUD René	Mathématiques C.S.U. Chambery
	BELORIZKY Elie	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
M.	JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM	LEROY Philippe	Mathématiques I.U.T. "A"
	BRODEAU François	Mathématiques I.U.T. "B"

MM	ROMIER Guy	Mathématiques I.U.T. "B"
	NEGRE Robert	Mécanique I.U.T. "A"
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BUISSON Roger	Physique I.U.T."A"
	IVANES Marcel	Electricité I.U.T. "A"
	GIDON Maurice	Géologie
	COHEN ADDAD	Spectrométrie physique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	GRIFFITHS Michael	Informatique
	MACHE Regis	Physiologie végétale
	GENSAC Pierre	Sciences biologiques
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide I.P
	VEILLON Gerard	Mathématiques appliquées I.P.
	MARECHAL Jean	Physique mécanique I.U.T. "A"
	PECCOUD François	Analyse I.U.T. "B"
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée E.F.P.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BENENSON Walter	Physique nucléaire
	GOLDSCHMIDT H.	Mathématiques

Les travaux qui font l'objet de cette thèse ont été effectués à l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

Monsieur le Professeur KUNTZMANN a dirigé l'ensemble de ces travaux. Par son aide efficace et ses conseils constructifs, il m'a permis de les mener à bien. Je le prie de trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur KOSZUL a bien voulu s'intéresser à cette thèse. Il m'a permis d'élargir mon champ de recherches grâce aux conseils qu'il m'a donnés pour conduire des travaux n'entrant pas dans le cadre de cette thèse. Je le prie de trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je remercie très vivement Monsieur NIVAT et Monsieur BENZAKEN pour les fructueux échanges scientifiques que j'ai eu avec eux.

Je tiens également à remercier Monsieur PAYAN, chercheur à l'Institut de Mathématiques Appliquées avec lequel j'ai travaillé de façon efficace pendant deux ans.

Enfin, tous mes collègues de l'Equipe de Logique ont contribué à ces travaux par les fructueux échanges d'idées qui les ont jalonnés ; Madame NEUMANN et Mademoiselle BICAIS ont contribué à leur réalisation matérielle. Que toutes ces personnes trouvent ici mes meilleurs remerciements.

TABLE DES MATIERES

RAPPELS

pages

1 - Propriétés élémentaires des fermetures 5

A) Définition

B) Caractérisation d'une fermeture par ses invariants

C) Invariants d'une fermeture sur un treillis complet

D) U - Homomorphisme complet

E) Théorème du point fixe

2 - Sections d'un ensemble préordonné - Treillis distributifs 8

A) Relation de préordre

B) Définition d'une section

C) Treillis distributif

D) Treillis de sections

E) Sections principales

F) Somme d'éléments U-irréductibles d'un treillis distributif fini

3 - Fonctions booléennes et recouvrements d'un ensemble fini 11

A) Treillis de Boole

B) Autres expressions d'un treillis de Boole

C) Cubes d'un treillis de Boole

D) Fonctions booléennes

E) Ensemble caractéristique d'une fonction booléenne simple

F) Fonction booléenne caractéristique d'un recouvrement partiel

G) Monôme booléens

H) Ecriture SP d'une fonction booléenne simple

I) Fonctions booléennes croissantes

J) Recouvrements partiels libres d'un ensemble - Correspondance avec les fonctions booléennes croissantes

1ère partie : REPRESENTATION DES ORDONNES FINIS

Pages

Chapitre I :
Systèmes générateurs d'un ensemble ordonné - Application de la notion de fermeture 18

1 - Définitions relatives à l'engendrement 20
2 - Systèmes $\cup$ générateurs ($\cap$ générateurs) d'un ensemble ordonné 22
3 - Systèmes $\cup$ et $\cap$ générateurs d'un ordonné 23

Chapitre II :
$\cap$ Codage d'un treillis fini dans un treillis distributif fini 29

1 - Préimmersion - Précodage - Extension d'un précodage 30
2 - Conditions nécessaires d'existence d'un $\cap$ codage 30
3 - Extension d'un précodage dans un treillis distributif fini ... 35
4 - Réciproque du théorème 1 dans le cas où $\mathcal{E}'$ est distributif 37
5 - Correspondance bijective entre précodages et $\cap$ codages minimaux 38
6 - $\cap$ codage dans un produit de chaînes - Généralités 39
7 - $\cap$ codage dans 2^n 40
8 - $\cap$ codage dans $n^k (n > 1)$ 41
9 - $\cap$ codage dans N^n 42

Chapitre III
Codage d'un ensemble ordonné dans un produit de chaînes 44

1 - Engendrement d'un treillis de sections 46
2 - Condition nécessaire et suffisante pour qu'un préordre soit une intersection de préordres donnés 51
3 - Condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordonné s'immerge dans une puissance cartésienne de chaînes n^k 53
4 - Décomposition d'un ordre en ordres totaux - Dimension 55
5 - Algorithmes d'immersion - Exemple 56

A) Recherche des éléments $\cup$ irréductibles ($\cap$ irréductibes)
B) Détermination des couples (i, u) utiles
C) Recherche des systèmes générateurs minimaux
D) Immersion minimale dans 2^k, N^k, décomposition en ordres totaux

2ème partie : REPRESENTATION DES RELATIONS BINAIRES

Chapitre I : Pages

Génération d'une relation binaire 64

1 - Définitions générales relatives aux relations binaires 66
2 - Homomorphismes de relations binaires 67

A) Applications décomposables
B) Homomorphismes
C) Congruences
D) Relations binaires atomiques
E) Relations binaires semblables

3 - Etude comparée des relations binaires et des relations n-aires 70

A) Définition générale d'une relation n-aire
B) Définition d'un homomorphisme
C) Sous-relations

4 - Correspondaces de Galois associées à une relation binaire 72
5 - Sous-ensembles générateurs gauches (droits) d'une relation ... 75
6 - Interprétation des systèmes générateurs dans le cas des relations d'ordre 75
7 - Eléments irréductibles d'une relation binaire 77
8 - Propriété caractéristique d'un sous-ensemble générateur gauche (resp. droit) 78
9 - Pavé générateur - Sous-relation génératrice 79
10 - Remarque sur les algorithmes de recherche des pavés maximaux . 82

Chapitre II :

Homomorphisme d'une relation binaire dans un treillis complet 84

1 - Sous relations contractées - Propriétés générales 86
2 - Homomorphisme contracté d'une relation binaire dans un treillis complet 87
3 - Extensions d'une sous-relation contractée 90
4 - Bissection contractée d'une relation d'ordre 94
5 - Immersion canonique d'une relation binaire dans un treillis complet 96
6 - Eléments caractéristiques d'une relation binaire (resp. relation d'ordre fini) 97

Chapitre III : Pages

Relations en escaliers 101

1 - Chaînes de pavés 102

A) Définitions

B) Type d'une chaîne complète

2 - Définition d'un escalier 104

A) Propriétés fondamentales d'un escalier

B) Type d'un escalier

C) Autres propriétés d'un escalier

3 - Pavés pleins maximaux du complémentaire d'un escalier défini par un homomorphisme contracté 110

4 - Pavés pleins maximaux du complémentaire d'un escalier défini par une chaîne complète - Numérotation canonique 113

A) Numérotations minimales d'un escalier défini par sa chaîne de pavés pleins maximaux

B) Numérotation canonique d'un escalier défini par sa chaîne de pavés pleins maximaux

C) Complémentation d'un escalier

D) Variation du nombre de marches d'un escalier par passage au complémentaire

E) Numérotation canonique du complémentaire d'un escalier

Chapitre IV

Codage d'une relation binaire dans un produit de chaînes 121

1 - Homomorphismes d'une relation binaire dans un produit cartésien de relations binaires 123

A) Image réciproque d'une relation binaire par une application décomposable

B) Produit cartésien d'une famille de relations binaires

C) Intersection (union) d'une famille de relation binaires ayant même support.

D) Caractérisation d'un homomorphisme dans un produit cartésien de relations

Pages

2 - Dimension d'une relation binaire 125

A) Dimension d'une relation d'ordre

B) Propriétés de la dimension

C) Dimensions comparées d'une relation et d'une sous-relation

3 - Caractérisation d'un homomorphisme contracté dans un produit cartésien de relations d'ordre 127

4 - Etude des homomorphismes contractés dans un produit de chaînes 129

5 - Algorithmes de recherche d'un homomorphisme d'une relation binaire dans un produit de chaînes 130

6 - Codage d'une relation d'ordre 134

3ème partie : REPRESENTATION DES FAMILLES DE MOORE
ETUDE ANALYTIQUE DES FERMETURES SUR UN TREILLIS DE BOOLE

1 - Préordre régulier sur un treillis complet 139

2 - Fonction caractéristique d'une famille de Moore 142

3 - Traduction en algèbre de Boole de certaines propriétés vérifiées par une application $F : B^n \to B^n$ 143

4 - Monômes réguliers d'une fermeture duale 148
A) Propriétés générales de monômes reguliers
B) Caractérisation d'une fermeture duale
C) Application - Génération des fermetures duales
D) Caractérisation des monômes réguliers d'une fermeture duale

5 - Caractérisation des monômes premiers d'une fermeture 153

6 - Préordre régulier attaché à un recouvrement 155
A) Propriétés du préordre régulier attaché à un recouvrement
B) Exemple - Bases premières complètes d'une fonction booléenne simple
C) Correspondances de Galois associées à un recouvrement partiel

7 - Interprétation du préordre régulier attaché à un recouvrement 160

8 - Recherche d'un recouvrement associé à un préordre régulier donné (1ère méthode) 160

9 - Existence d'un recouvrement attaché à un préordre régulier donné (2ème méthode) 162

10 - Limite inductive d'une application monotone et extensive (resp. contractante) 163

11 - Génération des familles de parties d'un ensemble 171
A) Introduction
B) Décomposition d'une famille de parties
C) Famille de caractère fini
D) Expression booléenne de la famille engendrée par une relation normale
E) Décomposition d'une fonction booléenne
F) Recherche des décompositions d'une famille de parties d'un ensemble fini

12 - Etude des familles de Moore de caractère fini 179

A) Génération d'un préordre régulier

B) Caractérisation des préordres réguliers de caractère fini

C) Caractérisation des préordres réguliers d'indice fini

D) Seconde méthode d'étude des préordres réguliers de caractère fini

E) Applications

4ème partie : SYSTEMES SEQUENTIELS

Pages

Chapitre I :

Réduction des systèmes séquentiels partiellement déterminés 187

1 - Introduction - Problèmes posés par la synthèse des systèmes séquentiels 187

A) Systèmes séquentiels et circuits séquentiels

B) Séquences d'entrée - sortie d'un système séquentiel

C) Synthèse d'un circuit séquentiel - Spécification des séquences d'entrée-sortie

D) Problème de la réduction

2 - Surhomomorphisme d'un système séquentiel partiellement déterminé 191

A) Surhomomorphisme d'un système séquentiel incomplet (rappel)

B) Surhomomorphisme d'un système séquentiel partiellement déterminé

C) Traduction en termes de relation des propriétés caractéristiques d'un surhomomorphisme

D) Liaison entre surhomomorphisme et précision

3 - Recouvrement compatible d'un système séquentiel partiellement déterminé 195

4 - Propriétés algébriques des recouvrements compatibles - Algorithme de calcul 198

A) Propriétés algébriques élémentaires

B) Génération des recouvrements partiels libres compatibles

C) Algorithme de calcul des classes maximales de compatibilité

5 - Interprétation de l'algorithme de recherche des classes maximales de compatibilité 204

6 - Principe général de la méthode de réduction d'un système séquentiel partiellement déterminé 205

7 - Recouvrements partiels impliqués par une classe de compatibilité 208

8 - Calcul d'un système $\mathcal{V}$ générateur des recouvrements compatibles . 211

Pages

9 - Règles permettant d'accélérer le calcul d'un recouvrement compatible de coût minimal 214

10 - Conclusions - Remarques relatives à certains programmes linéaires en nombres entiers 218

Chapitre II :
Etude du comportement global d'un système séquentiel

1 - Systèmes séquentiels de classe D - Graphes étiquetés 221
A) Définition des systèmes séquentiels de classe D
B) Graphe de détermination d'un système séquentiel partiellement déterminé
C) Caractérisation de la meilleure précision globale pour les systèmes séquentiels de classe D
D) Problèmes liés à l'étude du comportement global

2 - Etude comparée des graphes étiquetés et des automates finis .. 227
A) Définition fonctionnelle d'un graphe étiqueté
B) Application régulière associée à un graphe étiquetté
C) Complétion d'un graphe étiqueté déterministe
D) Etude de l'équivalence ponctuelle
E) Relation de dominance - Composantes fortement connexes - Sous-graphes - Sous-graphes fermés

3 - Composantes fermées de deux graphes étiquetés déterministes globalement équivalents 231
A) Développement d'un graphe étiqueté
B) Composantes fortement connexes du développé d'un graphe étiqueté déterministe
C) Sous-graphe nécessaire d'un graphe étiqueté déterministe réduit
D) Etats inutiles d'un graphe étiqueté déterministe réduit
E) Cas des graphes déterministes non réduits

4 - Configurations d'un graphe étiqueté déterministe 241
A) Définitions
B) Interprétation graphique des configurations
C) Liaison entre le comportement global d'un graphe étiqueté déterministe et l'ensemble de ses configurations

Pages

5 - Décomposition d'un graphe étiqueté 247

A) Composantes connexes - Somme cardinale

B) Sous-graphes partiels

C) Classes de flèches fortement connexes

D) Définition des décompositions d'un graphe étiqueté

E) Configurations extraites d'une chaîne

6 - Reconnaissance des relations séquentielles 253

A) Degrés d'un sommet d'une quasi-machine séquentielle

B) Caractérisation des quasi-machines séquentielles qui représentent une relation séquentielle

C) Relations séquentielles complètes.

INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est d'apporter une contribution à la manipulation algorithmique des relations binaires, relations d'ordre et fermetures ; dans une dernière partie, nous montrerons comment l'utilisation des outils ainsi définis permet de résoudre le problème de réduction d'un système séquentiel.

Tout calcul algorithmique effectué sur certains êtres algorithmiques -i.e. susceptible d'être traité par un ordinateur moyennant la matérialisation de cet algorithme en un programme- nécessite une représentation de ces êtres adaptée à la structure de la mémoire d'un ordinateur. Chaque "mot machine" -i.e. le plus petit sous-ensemble d'informations de la mémoire directement adressable- est décomposé en k bits pouvant prendre deux valeurs notées 0 et 1. Une telle information peut donc être considérée comme la valeur d'un vecteur caractéristique sur un ensemble fini de cardinal k ; d'une façon générale, tout groupe de n mots machine permet de repérer toute partie d'un ensemble fini de cardinal majoré par n.k. Enfin, rappelons que tout ordinateur peut effectuer à partir des mots machines les opérations d'union, d'intersection et de complémentation au sens de la théorie des ensembles. L'ordre d'un treillis de Boole de dimension finie est donc "naturel" pour un ordinateur.

Dans la première partie de cette thèse, nous étudierons le problème du <u>codage booléen</u> d'un ensemble ordonné fini E, i.e. la recherche d'une application injective Ψ de E dans un treillis de Boole telle que $x \leq y \iff \Psi(x) \leq \Psi(y)$. Nous chercherons en particulier quelle doit être la dimension minimale du treillis de Boole pour que cela soit possible (chapitre III, Partie I). On peut désirer, dans le cas où E possède de plus une structure de treillis, conserver cette structure à travers l'application Ψ. Il est impossible dans le cas général de le faire à la fois pour les opérations de borne sup et de borne inf à moins que E ne soit un treillis distributif. Par contre, il est toujours possible de conserver une des deux opérations ; par exemple, on peut s'arranger pour que Ψ soit un isomoprhisme par rapport à l'intersection de E sur son image -on dira alors que Ψ est un codage-. On peut alors représenter tout treillis fini dans la mémoire d'un ordinateur à l'aide d'un U codage Ψ_1 et d'un codage Ψ_2 (la recherche des $\cap$ codages sera effectuée dans le chapitre II, Partie I).

Mathématiquement, le codage dans un treillis de Boole qui est une puissance cartésienne B^n de l'ordonné total à deux éléments $B = \{0,1\}$ avec $0 < 1$ est de même nature que le codage dans l'ordonné $\mathbb{N}^n$, où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls naturellement ordonnés. Il est d'ailleurs à noter que l'ordre sur $\mathbb{N}$ est également "naturel" pour un ordinateur, ce dernier pouvant effectuer la comparaison de deux entiers. Les chapitres II et III de la partie I traitent également ce problème plus général. On obtiendra ainsi deux ensembles de résultats :

1 - une théorie de l'$\cap$-codage des treillis finis à partir de leurs éléments U-irréductibles, généralisation de celle qui a été faite par Birkhoff |4| et Campbell [9] dans le cas des $\cap$-codages dans un treillis de Boole (chapitre II) ;

2 - un moyen algorithmique d'atteindre la dimension d'un ensemble ordonné fini E, cette dimension définie par Spielzrajn |31| étant le plus petit entier n tel qu'il existe un isomorphisme d'ordre entre E et un ordre restreint à un sous-ensemble de $\mathbb{N}^n$ (chapitre III).

Dans la partie II, nous étendrons ces résultats au cas des relations binaires. D'une façon générale, la représentation d'une relation binaire $|E_1, \rho, E_2|$ -voir le sens de cette notations au début du chapitre I de la partie II- dans un ordonné E est la donnée de deux applications Ψ_1 et Ψ_2 de E_1 et E_2 dans E telles que :

$\forall x_1\ E_1, \forall x_2\ E_2, x_1\ x_2 \iff \Psi_1(x_1) \leq \Psi_2(x_2)$. Un rappel préliminaire de la théorie des correspondances de Galois (chapitre I, partie II) montrera qu'il est toujours possible de trouver une telle représentation. De plus, on peut choisir comme ordonné E un treillis complet, un treillis de Boole B^n en une puissance cartésienne $\mathbb{N}^n$. Deux séries principales de résultats seront obtenues :

1 - la généralisation du procédé d'extension d'un ordonné en treillis complet (procédé d'extension par "coupures" |23|) à une relation binaire quelconque. On dégagera une extension canonique qui s'avèrera minimale au sens de Birkhoff [5] (cf. chapitre II, partie II). On exhibera également un ordonné minimal et une relation binaire minimale dont l'extension canonique en treillis soit donnée (chapitre II).

2 - l'extension de la notion de dimension ci-dessus définie pour les ensembles ordonnés finis au cas des relations binaires finies (chapitre IV).

Les résultats énoncés dans ces deux premières parties seront basés sur une étude préalable des notions d'engendrement d'un ordonné et d'une relation binaire. Dans un premier temps (chapitre I, partie I) nous étendrons aux ordonnés quelconques les notions d'U-engendrement et d'$\cap$-engendrement définies sur les treillis. Dans un second temps (chapitre I, partie II) nous procèderons à cette extension pour les relations binaires.

La troisième partie traite de la représentation des fermetures sur un treillis de Boole, cette représentation sera faite à l'aide des expressions booléennes dans un esprit analogue à celui de la géométrie analytique où les constructions géométriques sont remplacées par des calculs formels. Ce type de représentation est également adapté au traitement par ordinateur ainsi que le montrent les travaux réalisés par l'équipe d'algèbre appliquée de Grenoble (cf. bibliographie). Cette étude trouvera son application dans deux problèmes théoriques :

1 - le concept de propriété de caractère fini introduit par Tukey [34] sera relié au concept de décomposition d'une fonction booléenne ; ceci se fera grâce à l'étude du procédé utilisé par Tukey pour engendrer ces propriétés de caractère fini ;

2 - un moyen algorithmique sera donné pour reconnaître l'ordre d'une propriété de caractère fini. Un tel moyen permettra en particulier de tester si un treillis fini donné peut être isomorphe au treillis des sous algèbres d'une algèbre abstraite dont la n-arité des opérations est bornée.

Dans la quatrième partie on redéfinira le problème de la réduction du nombre d'états d'un système séquentiel incomplet [26]. On montrera que ce problème reste inchangé si on se place dans la catégorie plus large des systèmes séquentiels partiellement déterminés. Le chapitre I donnera un algorithme pour opérer cette réduction en se servant des outils définis à propos de la partie III. Dans le chapitre II, nous étudierons le problème plus général de la réduction globale et établirons certains résultats nouveaux ou plus généraux que ceux qui ont été déjà énoncés par Gray et Harrison [17]. Cette étude sera basée sur la notion de graphe étiqueté qui généralise en un certain sens celle de système séquentiel.

RAPPELS

(1.) PROPRIETES ELEMENTAIRES DES FERMETURES

A) Définition

Une fermeture sur un ensemble ordonné E est une application $f : E \to E$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$\forall x \in E$: $f(X) \geq X$ (extensivité) ;
$\forall x \in E$: $f(f(x)) = f(x)$ (idempotence) ;
$\forall x$ et $y \in E$: $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (monotonie).

Une fermeture duale est une fermeture sur E ordonné par l'ordre opposé, les propriétés caractéristiques sont les mêmes, à l'exception de l'extensivité qui est remplacée par la contractivité :

$\forall x \in E : f(x) \leq x$.

Un invariant d'une fermeture est un élément i tel que $f(i) = i$; il résulte de l'idempotence que l'ensemble des invariants est égal à $f(E)$.

B) Caractérisation d'une fermeture par ses invariants

Une partie de Moore dans un ensemble ordonné E est un sous ensemble P tel que pour tout x appartenant à E, il existe un plus petit élément $\bar{x}$ dans P qui majore x.

Théorème 1 : "L'ensemble des invariants d'une fermeture f est une partie de Moore, $f(x)$ est le plus petit majorant de x appartenant à cette partie de Moore. Réciproquement, étant donnée une partie de Moore P, la correspondance $x \to \bar{x}$ est une fermeture."

Théorème 2 : "La correspondance qui à chaque fermeture f associe son ensemble d'invariants $f(E)$ est une bijection telle que : $f \leq g \Leftrightarrow f(E) \supseteq g(E)$."

C) *Invariants d'une fermeture sur un treillis complet*

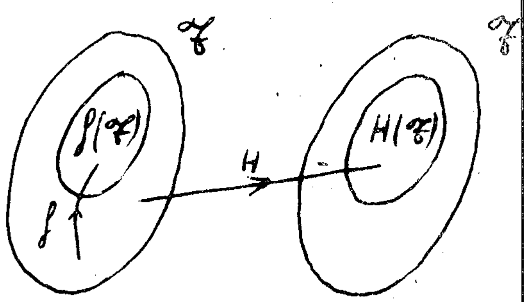
Théorème 3 : "Les parties de Moore d'un treillis complet sont confondues avec les sous inter demi-treillis complets contenant l'élément universel."

Lorsque ce treillis complet est le treillis des parties d'un ensemble F, une partie de Moore sur $\mathcal{P}(F)$ est plutôt nommée une famille de Moore sur F.

D) *U Homomorphisme complet*

On sait que tout $\bigcap$ demi-treillis complet possédant un élément universel est en fait un treillis complet ; la borne supérieure d'un sous-ensemble P est égale à la borne inférieure de l'ensemble des majorants de P (il existe au moins un tel majorant, par exemple l'élément universel). Il résulte alors du théorème 3 qu'une partie de Moore est un treillis complet ; ce treillis complet n'est pas nécessairement un sous-treillis complet car les bornes sup ne sont pas nécessairement conservées.

Etant donnée une fermeture f sur un treillis complet $\mathcal{T}$ dont l'opération de borne sup est notée U, en notant $\dot{\cup}$ l'opération de borne sup sur f( ), on peut alors écrire l'égalité $f(\bigcup_i x_i) = \dot{\bigcup_i} f(x_i)$, l'indice i variant dans un ensemble quelconque. Cette égalité établie par Ward [35] exprime que f est un U homomorphisme complet de $\mathcal{T}$ sur $f(\mathcal{T})$. Réciproquement, considérons deux treillis complets $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, un U homorphisme complet H de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$. Pour tout x' appartenant à $H(\mathcal{T})$, il existe dans $H^{-1}(x')$ un plus grand élément $\overline{x'}$. La correspondance $f : x \rightarrow \overline{H(x)}$ est une fermeture sur $\mathcal{T}$, et la restriction de H à $f(\mathcal{T})$ est un isomorphisme d'ordre.



E) *Théorème du point fixe*

Un ensemble ordonné E est dit inductif si toute chaîne non vide admet une borne supérieure (*) ; ainsi tout U demi-treillis complet et tout ordonné fini sont inductifs.

<u>Théorème 4</u> : "Toute application extensive f sur un ordonné inductif E possède un point fixe."

Rappelons le principe de la démonstration. Soit x un élément quelconque, l'ensemble des parties P de l'ordonné inductif vérifiant les propriétés :

a) $x \in P$,

b) $f(P) \subseteq P$,

c) les bornes sup des chaînes de P sont dans P,

est une famille de Moore sur E. Pour tout x appartenant à E, il existe donc un plus petit sous-ensemble C_x vérifiant a), b) et c). On démontre alors que C_x est une chaîne bien ordonnée (l'axiome du choix est nécessaire), C_x possède une borne sup $\overline{x}$ qui est un point fixe.

Si on suppose de plus que f est monotone, on démontre alors que la correspondance $\tilde{f} : x \to \overline{x}$ est une fermeture. $\tilde{f}$ est <u>la limite inductive</u> de f.

(*) Très couramment, on admet également que l'ensemble vide admet aussi une borne supérieure (cf. Bourbaki), ceci est équivalent à dire qu'il existe un plus petit élément. Nous ne supposerons pas nécessairement vérifiée cette hypothèse qui n'ajoute pas de propriété fondamentale.

(2) SECTIONS D'UN ENSEMBLE PREORDONNE - TREILLIS DISTRIBUTIFS

A) *Relation de préordre*

Une relation binaire sur un ensemble E est un préordre si elle est réflexive et transitive -elle n'est pas nécessairement antisymétrique-. Nous noterons $x \leq y$ quand la relation de préordre sera vérifiée, $y \geq x$ sera utilisé pour noter la relation duale qui est également un préordre.

Deux éléments x et y d'un ensemble préordonné seront dits isovalents -notation $x = y$- si $x \leq y$ et $y \geq x$ sont vérifiés. La relation d'isovalence est manifestement une équivalence, ses classes seront nommées classes d'isovalence.

On démontre que la relation $A \leq B$ vérifiée entre deux classes d'isovalence A et B si il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \leq b$ est une relation d'ordre entre classes d'isovalence.

B) *Définition d'une section*

Une section initiale J d'un ensemble préordonné E est un sous-ensemble vérifiant la propriété :

$$\forall x \in J,\ \forall y \in E : y \leq x \Rightarrow y \in J.$$

Une section finale est un sous-ensemble F vérifiant :

$$\forall x \in F,\ \forall y \in E : y \geq x \Rightarrow y \in F.$$

Les définitions de ces deux sortes de sections sont donc duales (remarquer que l'opposé d'un préordre est également un préordre), d'ailleurs elles se correspondent par complémentation en ce sens que la complémentaire d'une section initiale est une section finale, et réciproquement. On remarque également que le sous-ensemble vide et l'ensemble tout entier sont des sections à la fois initiales et finales.

C) *Treillis distributif*

Un treillis $\mathcal{T}$ dont les opérations de borne sup et de borne inf sont notées + et . est distributif si la condition suivante est réalisée :

$$\forall x, y \text{ et } z \in \mathcal{T} : (x+y).z = x.z + y.z \; .$$

On démontre alors que la condition duale est également vérifiée, i.e. :

$$\forall x, y \text{ et } z \in \mathcal{T} : (x.y) + z = (x+z).(y+z)$$

Un treillis sera dit complètement distributif si il vérifie les conditions suivantes :

- ce treillis est complet
- toute expression du type $\prod\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in J_i} x_{ij}$ est égale à $\sum \left(\prod\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J_i}} x_{ij} \right)$, les

ensembles d'indices I et J_i étant de cardinal quelconque. L'égalité duale est également vérifiée.

D) *Treillis de sections*

L'union et l'intersection d'une famille quelconque de sections initiales d'un ensemble préordonné est encore une section initiale. Les sections initiales constituent donc un sous-treillis complet du treillis des parties ; ce dernier étant complètement distributif, il en est de même pour le treillis des sections initiales. Les mêmes propriétés sont également valables pour les sections finales ; on remarque que la correspondance par complémentation est un anti isomorphisme entre ces deux treillis.

Dans le cas fini, les treillis de sections initiales d'un ensemble ordonné jouent un rôle important par suite du théorème suivant :

Théorème : "Tout treillis distributif fini est isomorphe au treillis des sections initiales d'un certain ensemble ordonné fini."

E) *Sections principales*

Etant donné un ensemble préordonné E et un élément $x \in E$, l'ensemble $\hat{x}$ des éléments y tel que $x \geq y$ constitue une <u>section initiale principale</u> qui est dite <u>engendrée</u> par x. Deux sections initiales principales $\hat{x}$ et $\hat{y}$ ne sont égale que si x et y sont isovalents dans le préordre. En particulier, si le préordre est un ordre, cela nécessite $x = y$. Il est manifeste que toute section initiale est union de sections principales, ces sections forment donc un système U générateur (cf. partie I, chapitre I) ; elles sont de plus U irréductibles en ce sens que si une section $\hat{x}$ est union d'une famille de sections, alors une des sections de la famill doit être égale à $\hat{x}$ (cf. partie I, chapitre I).

Les mêmes remarques sont valables pour les sections finales, on note $\check{x}$ la section finale principale engendrée par x. Il résulte de la correspondance par complémentation que les sections initiales égales aux $\complement\check{x}$ forment un système $\cap$-générateur; ces sections sont de plus $\cap$-irréductibles.

F) *Somme d'élément U irréductibles d'un treillis distributif fini*

On peut maintenant préciser le sens du théorème énoncé en D).
Etant donné un treillis distributif fini $\mathcal{T}$ dont $\mathcal{U}$ est l'ensemble des éléments U-irréductibles, la correspondance $x \to \hat{x} \cap \mathcal{U}$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ est un isomorphisme d'ordre entre $\mathcal{T}$ et le treillis distributif des sections initiales de $\mathcal{U}$ ordonné par l'ordre induit par $\mathcal{T}$. La bijection inverse est la correspondance $S \to$ Borne Sup (S), où S est une section initiale de $\mathcal{U}$. Cette interprétation permet alors d'énoncer la propriété suivante :

<u>Propriété</u> : "Dans tout treillis distributif, si une somme d'éléments U-irréductibles Σu est majorée par une somme quelconque Σx, alors pour tout terme u de la première somme, il en existe un x de la seconde tel que $u \leq x$."

Cette propriété est évidente si on l'interprète en termes de sections initiales.

(3) FONCTIONS BOOLEENNES ET RECOUVREMENTS D'UN ENSEMBLE FINI

A) *Treillis de Boole*

Un ensemble ordonné fini possédant une structure de treillis distributif complémenté (*) est appelé <u>treillis de Boole</u>. On constate aisément que l'ensemble ordonné $B = \{0, 1\}$ muni de l'ordre $0 < 1$ répond à cette définition, ainsi que toute puissance cartésienne B^n de cet ensemble ordonné. D'une façon générale, on peut établir le théorème suivant -cf. [3]- :

"Pour tout treillis de Boole fini, $\mathcal{T}$, il existe un entier $n \geq 0$, appelé <u>dimension de ce treillis de Boole</u>, tel que soit isomorphe à B^n".

Dans le cas où $n = 0$, on conviendra que B^0 est l'ensemble réduit à un seul élément muni de l'ordre trivial ; si $n = -1$, on conviendra que B^{-1} est l'ensemble vide (**).

B) *Autres expressions d'un treillis de Boole*

Considérons un ensemble fini E contenant n éléments numérotés de 1 à n, l'ensemble B^E des applications de E dans B, et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Sur B^E, définissons l'ordre "$f \leq g \iff \forall x \in E : f(x) \leq g(x)$", et sur $\mathcal{P}(E)$, considérons la relation classique d'inclusion. Les trois ensembles ordonnés B^n, B^E, (E) sont des treillis de Boole isomorphes par l'intermédiaire des bijections $\alpha : \mathcal{P}(E) \to B^n$ et $\beta : \mathcal{P}(E) \to B^E$ définies pour tout $P \in \mathcal{P}(E)$ par :

$\alpha(P) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est tel que $a_i = 1$ si et seulement si l'élément de E numéroté par i appartient à P ;

$\beta(P) : E \to B$ est telle que l'image de l'élément numéroté par i soit égale à a_i.

(**) Cf. chapitre I, partie II, pour la défintion d'une relation binaire sur un ensemble vide.

(*) Un treillis dont les opérations de borne sup et de borne inf sont notées + et . respectivement est <u>complémenté</u> si à chacun de ses éléments x, on peut associer un élément x' vérifiant les égalités $x.x' = 0$ et $x + x' = 1$, 0 et 1 étant respectivement le plus petit et le plus grand élément de ce treillis.

$\alpha(P)$ est appelé le vecteur caractéristique de P ;

$\beta(P)$ est appelé la fonction caractéristique de P ;

P est appelé le support de $\alpha(P)$;

P est appelé le sous-ensemble caractéristique de $\beta(P)$.

C) *Cubes d'un treillis de Boole*

Définition : Tout sous-treillis de Boole d'un treillis de Boole est appelé un cube la dimension de ce sous-treillis de Boole est appelée la dimension du cube. On utilisera souvent la locution m-cube -m, entier ≥ -1- pour désigner un cube de dimension m ; ainsi le -1-cube est la partie vide de B^n.

Coordonnées d'un cube : Soit un treillis de Boole identifié à B^n par isomorphisme. Pour tout couple de sous-ensembles I et J de $[1, n]$, on vérifie facilement que le sous-ensemble $C_{IJ} \subseteq B^n$ constitué par les n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tels que $a_i = 1$ si $i \in I$ et $a_j = 0$ si $j \in J$ est un cube ; ce cube est vide si $I \cap J \neq \emptyset$. Réciproquement pour tout cube C, on peut déterminer un couple de sous-ensembles I et J dans $[1, n]$ tels que $C = C_{IJ}$. I et J seront appelés coordonnées du cube. Ces coordonnées sont déterminées de façon unique si $C \neq \emptyset$, elles vérifient alors la condition $I \cap J = \emptyset$; par contre si $C = \emptyset$, elles peuvent être choisies quelconques à vérifier la relation $I \cap J \neq \emptyset$.

Propriétés des cubes d'un treillis de Boole B^n :

P1 : B^n est un n-cube. Ses coordonnées sont $I = J = \emptyset$.

P2 : L'ensemble vide est un -1-cube. Cf. plus haut.

P3 : Tout sous-ensemble de B^n contenant un seul n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un 0-cube. Ses coordonnées I et J sont définies par

$I = \{i \mid a_i = 1\}$ et $J = \{j \mid a_j = 0\}$.

P4 : L'intersection de deux cubes est un cube. On vérifiera la formule :

$C_{IJ} \cap C_{I'J'} = C_{I \cup I', J \cup J'}$.

D) *Fonctions booléennes*

Une fonction booléenne simple de n variables est une application

$f : B^n \to B$; une fonction booléenne générale de n variables, à m composantes, est une application $F : B^n \to B^m$ dont les composantes seront notées $F_1, F_2, \ldots, F_m$. On utilisera couramment les notations $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour rappeler que ces fonctions dépendent de n variables ; ces notations ne seront pas à confondre avec $F(a_1, \ldots, a_n)$, $F_i(a_1, \ldots, a_n)$ et $f(a_1, \ldots, a_n)$ exprimant la valeur prise sur un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$.

E) *Ensemble caractéristique d'une fonction booléenne simple*

Une fonction booléenne simple étant une application de B^n dans B, on peut parler de son sous-ensemble caractéristique (cf. B)), constitué par les n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dont l'image vaut 1. Rappelons que l'on définit trois opérations sur les fonctions booléennes, deux opérations binaires : somme et produit, notées f + g et f.g, et une opération unaire : complémentation, notée f' (cf. [18]). Si on note E(f) le sous-ensemble caractéristique d'une fonction f, alors les propriétés d'isomorphisme signalées en B) impliquent :

$$E(f+g) = E(f) \cup E(g) \ ; \ E(f.g) = E(f) \cap E(g) \ ; \ E(f') = \complement E(f).$$

F) *Fonction booléenne caractéristique d'un recouvrement partiel*

Un recouvrement partiel d'un ensemble E est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, i.e. un ensemble de parties de E. Moyennant l'identification de $\mathcal{P}(E)$ à B^n par l'intermédiaire d'une numérotation des éléments de E, on peut associer bijectivement à chaque recouvrement partiel de E un sous-ensemble de B^n. Ce sous-ensemble est lui-même le sous-ensemble caractéristique d'une certaine fonction booléenne $f : B^n \to B$ qui sera appelée fonction caractéristique du recouvrement partiel considéré.

Il est naturel d'appeler union de deux recouvrements partiels, le recouvrement partiel constitué par les parties appartenant à l'un ou l'autre de ces recouvrements partiels, intersection de deux recouvrements partiels, celui qui est constitué par les parties appartenant à l'un et l'autre de ces recouvrements partiels, complémentaire d'un recouvrement partiel, l'ensemble des parties n'appartenant pas à ce dernier. Ces opérations seront notées $\cup$, $\cap$ et $\complement$ comme pour les

les ensembles. Les propriétés d'isomorphisme signalées en B) leur font correspondre les opérations +, . et ' dans l'ensemble des fonctions booléennes simples.

G) *Monômes booléens*

Une fonction booléenne simple $f : B^n \to B$ est un monôme si son ensemble caractéristique est un cube C_{IJ} ; la somme Card(I) + Card(J) est appelé le degré du monôme si $I \cap J = \emptyset$; on voit ainsi que la somme du degré d'un monôme avec la dimension de son cube caractéristique est égale à n. On distingue en particulier :

- le monôme de degré 0 correspondant au cube B^n, cette fonction booléenne est toujours égale à 1, elle sera donc notée "1" ;
- le monôme correspondant au cube $\emptyset$, cette fonction booléenne est notée "0" ;
- les monômes canoniques correspondant aux 0-cubes, ils sont de degré n ;
- les monômes de degré 1 correspondant aux n-1 cubes. Un tel monôme ne dépend que d'une variable α_i ; il sera représenté par cette variable si il correspond au cube $C_{i\emptyset}$, par sa complémentaire α_i', si il correspond au cube $C_{\emptyset i}$. D'une façon générale, en tenant compte de la correspondance entre intersection de cubes et produit de monômes, on voit que le monôme associé au cube $C_{IJ} \neq \emptyset$ se représente comme le produit $\prod_{i \in I} \alpha_i . \prod_{j \in J} \alpha_j'$.

H) *Ecriture SP d'une fonction booléenne simple*

Tout sous-ensemble de B^n étant une union de cubes (on peut en particulier considérer les 0-cubes), on en conclut que toute fonction booléenne simple est représentable comme une somme de monômes ; une telle représentation sera appelée une écriture SP -somme de produits- de la fonction booléenne. En particulier, l'écriture SP correspondant à la décomposition de l'ensemble caractéristique en 0-cubes est la décomposition en monômes canoniques de cette fonction booléenne.

D'une façon générale, tout monôme inférieur ou égal à une fonction booléenne peut figurer dans une de ses écritures SP ; ceux de ces monômes qui sont maximaux sont dits premiers. L'écriture SP constituée par l'ensemble des monômes premiers est la base première complète de la fonction.

I) *Fonctions booléennes croissantes*

Une fonction booléenne $f : B^n \rightarrow B$ est croissante si

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) \Rightarrow f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq f(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$.

On voit facilement qu'un monôme $\prod_{i \in I} \alpha_i . \prod_{j \in J} \alpha'_j$ est croissant si et seulement si $J = \emptyset$, ce qui revient à dire qu'il ne possède pas de variable complémentée. On démontre les résultats suivants quand aux fonctions booléennes croissantes :

1 - Tout monôme premier d'une fonction croissante est croissant ;

2 - La seule écriture SP d'une fonction croissante ne contenant que des monômes premiers est sa base première complète.

J) *Recouvrements partiels libres d'un ensemble - Correspondance avec les fonctions booléennes croissantes*

Un recouvrement partiel $\mathcal{R}$ est couvert par un autre recouvrement partiel $\mathcal{R}'$ -notation : $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$- si toute partie de $\mathcal{R}$ est incluse dans au moins une partie de $\mathcal{R}'$. La relation $\leq$ est manifestement un préordre ; on voit qu'elle n'est pas antisymétrique en considérant par exemple $\mathcal{R}$ = (ab)(abc)(cd) et $\mathcal{R}'$ = (abc)(c)(cd).

Un recouvrement partiel est libre si tout couple de ses parties distinctes ne vérifie pas la relation de **comparabilité par inclusion** ; l'ensemble des recouvrements partiels libres de E sera noté $\mathcal{P}_L(E)$.

Propriété : "La restriction de la relation $\leq$ à $\mathcal{P}_L(E)$ est un ordre".

Bornons nous maintenant aux recouvrements pariels d'un ensemble E fini. L'ensemble $\bar{\bar{\mathcal{R}}}$ des parties maximales d'un tel recouvrement partiel est libre, $\bar{\bar{\mathcal{R}}}$ sera appelé base première de $\mathcal{R}$.

Propriétés : " 1) $\mathcal{R} \leq \bar{\bar{\mathcal{R}}}$ et $\bar{\bar{\mathcal{R}}} \leq \mathcal{R}$ sont vérifiés ;

2) $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}' \Longleftrightarrow \bar{\bar{\mathcal{R}}} \leq \bar{\bar{\mathcal{R}}}'$ ".

Théorème : "La relation d'ordre $\leq$ induit une structure de treillis distributif sur $\mathcal{P}_L(E)$".

Etablissons une correspondance bijective $v : E \to V$ entre E et un ensemble fini de variables booléennes sous leur forme non accentuée. A un sous-ensemble $P \subseteq E$, associons le monôme croissant $v(P) = \prod_{e\in P} v(e)$; convenons que $v(\emptyset) = 1$. La relation $P \subseteq Q$ est équivalente à $v(P)$ absorbe $v(Q)$.

A un recouvrement partiel libre $\mathcal{R}$, associons la fonction booléenne $\dot{\mathcal{R}} = \sum_{P\in\mathcal{R}} v(\ P)$, P représentant la complémentaire de P dans E ; on conviendra que $\dot{\mathcal{R}} = 0$ si $\mathcal{R}$ est vide de parties. Puisque $\mathcal{R}\in\mathcal{P}_L(E)$, chaque monôme $v(\complement P)$ est premier par rapport à $\dot{\mathcal{R}}$. On voit que la correspondance $\mathcal{R} \to \dot{\mathcal{R}}$ est bijective entre $\mathcal{P}_L(E)$ et les fonctions booléennes croissantes par rapport à V écrites avec leur base première ; de plus, il est immédiat de vérifier que cette correspondance est un isomorphisme d'ordre, i.e. $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}' \iff \dot{\mathcal{R}} \leq \dot{\mathcal{R}}'$. Le théorème découle de cette propriété.

La borne sup de de deux recouvrements partiels libres $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sera appelée la <u>somme</u> de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et notée $\mathcal{R}+\mathcal{R}'$. Elle correspond à la borne sup des fonctions booléennes croissantes associées. On l'obtient en prenant la base première de l'union de et $\mathcal{R}'$.

La borne inf appelée <u>produit</u> et notée $\mathcal{R}.\mathcal{R}'$ s'obtient en prenant la base première de l'intersection de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}'$.

Première Partie

REPRESENTATION DES ORDONNES FINIS

Chapitre I : Systèmes générateurs d'un ensemble ordonné - Application de la notion de fermeture.

Chapitre II : $\cap$-codages d'un treillis fini dans un treillis distributif fini.

Chapitre III : Codage d'un ensemble ordonné dans un produit de chaînes.

CHAPITRE I

SYSTEMES GENERATEURS D'UN ENSEMBLE ORDONNE

APPLICATION DE LA NOTION DE FERMETURE

Dans ce premier chapitre, nous étendrons la notion de système générateur définie dans le cadre des treillis au cadre des ensembles ordonnés quelconques. Ceci nous permettra en particulier de généraliser les notions d'éléments U-irréductibles (resp. $\cap$-irréductibles) dont les propriétés sont semblables à celles qu'ils vérifient dans les treillis. La notion d'ensemble caractéristique définie au paragraphe (3) s'avèrera utile dans le deuxième chapitre de la seconde partie pour étudier l'extension de Mac Neille d'un ordonné fini en treillis complet (cf. paragraphe (6) de ce chapitre).

Enfin, nous étudierons en annexe une caractérisation à l'aide des fermetures des sous-ensembles d'un treillis complet qui sont également des treillis complets pour l'ordre induit.

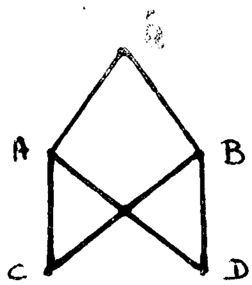
(1) DEFINTIONS RELATIVES A L'ENGENDREMENT

On dira qu'un sous-ensemble Φ d'un ordonné E <u>contient ses bornes sup</u> (resp. <u>contient ses bornes inf</u>) si pour tout sous-ensemble $P \subseteq \Phi$ admettant une borne sup (resp. borne inf), cette borne appartient à Φ. Si Φ contient à la fois ses bornes sup et ses bornes inf, on dira que Φ contient ses bornes.

<u>Remarques</u> :

- Si E admet un plus grand élément (resp. plus petit élément), cet élément est borne inférieure (resp. borne supérieure) de la partie vide, donc il appartient à tout sous-ensemble contenant ses bornes inf (resp. borne sup).
- Si E est un treillis complet, les sous-ensembles précédemment définis sont les sous $\cap$ demi treillis complets, sous U demi treillis complets, sous treillis.
- Toujours dans le cas où E est un treillis complet, on a vu dans la première partie, que les parties de Moore sont les $\cap$ demi treillis complets contenant l'élément universel ; en adoptant la terminologie ci-dessus définie, les parties de Moore sont les sous-ensembles contenant leurs bornes inf.

Dans le cas général d'un ordonné quelconque, les parties de Moore contiennent évidemment leurs bornes inf. Mais la réciproque est fausse comme on peut le voir sur la figure 1 ; $\{1,A,B\}$ est fermé pour ses bornes inf, car A et B n'ont pas de borne inférieure, ce n'est pas une partie de Moore car elle ne contient pas de plus petit majorant de C.



[Fig. 1]

Les familles d'ensembles contenant leurs bornes inf (bornes sup, bornes) sont manifestement des familles de Moore ; on notera $F \to F^{\bullet}$, $F \to F^{+}$ et $F \to F^{*}$ les fermetures associées. On dira alors qu'un sous-ensemble P est

<u>$\cap$ engendré</u> par F si $P \subseteq F^{\bullet}$

<u>U engendré</u> par F si $P \subseteq F^{+}$

<u>engendré</u> par F si $P \subseteq F^{*}$

Transitivité de l'engendrement : " Si P est engendré par Q, Q est engendré par R, alors P est engendré par R".

En effet les inclusions $P \subseteq Q^*$ et $Q \subseteq R^*$ impliquent $P \subseteq Q^*$ et $Q^* \subseteq R^*$ car l'application $F \to F^*$ est une fermeture ; il en résulte $P \subseteq R^*$.

Cette propriété de transitivité de l'engendrement est évidemment valable pour l'U engendrement et l'$\cap$ engendrement. Enfin, on peut établir le théorème :

"Un élément x est U engendré (resp. $\cap$ engendré) par un sous-ensemble F si et seulement si il existe une partie $P \subseteq F$ dont x soit la borne supérieure (resp. borne inférieure)".

Ce théorème revient à dire que pour obtenir F^*, il suffit d'ajouter à F toutes les bornes sup de ses sous-ensembles en admettant. C'est la façon dont on construit par exemple le sous U demi treillis complet engendré par un sous-ensemble F d'un treillis complet. La démonstration de ce théorème est identique à celle que l'on fait pour les treillis, nous ne la reprendrons pas ici. Il faut, d'autre part, remarquer que cette propriété est fausse pour l'engendrement en général.

Corollaire : "Un élément x est U engendré (resp. $\cap$ engendré) par un sous-ensemble F si et seulement si x est borne supérieure (resp. borne inférieure) de $\hat{x} \cap F$ (resp. $\check{x} \cup F$)."

Démonstration immédiate.

(2) SYSTEMES U GENERATEURS ($\cap$ GENERATEURS) D'UN ENSEMBLE ORDONNE

On dira d'une façon générale qu'un sous-ensemble F d'un ordonné E est

U générateur si $F^+ = E$

$\cap$ générateur si $F^\bullet = E$

générateur si $F^* = E$

U et $\cap$ générateur si $F^+ = F^* = E$

Les deux premières notions sont très liées à celle d'élément irréductible, particulièrement dans le cas fini. Un élément α est U irréductible si il appartient à toute partie dont il est borne sup. Cela revient encore à dire qu'il n'est pas U engendré par $E - \{\alpha\}$. En utilisant le corollaire du théorème établi dans la partie précédente, on voit alors qu'un élément x n'est pas U irréductible si et seulement si il est borne supérieure de $\hat{x} - \{x\}$.

Remarquons d'autre part que si l'ensemble E admet un plus petit élément, cet élément n'est pas U irréductible car il est borne supérieure de la partie vide. Par contre, si E contient un élément minimal qui ne soit pas un plus petit élément, alors cet élément est U irréductible.

Théorème : "Pour tout ensemble ordonné, l'ensemble des éléments qui ne sont pas U engendrés par ses U irréductibles n'admet pas d'élément minimal."

Un élément x non U engendré par les U irréductibles n'est pas lui-même irréductible, il est donc borne supérieure de $\hat{x} - \{x\}$. Si x était minimal, $\hat{x} - \{x\}$ ne serait composé que d'éléments U engendrés par les U irréductibles, x le serait donc lui-même par transitivité de l'engendrement (cf. paragraphe (1)).

Remarque :
L'ensemble des éléments non U engendrés par les U irréductibles peut être vide, c'est le cas par exemple si il n'y a pas d'éléments U irréductibles.

Corollaire : "Si toutes les suites strictement décroissantes d'un ordonné sont finies, il est U engendré par ses éléments U irréductibles."

En effet, la propriété de suite décroissante finie revient à dire que seule la partie vide n'admet pas d'élément minimal. Etant donné que tout système U générateur doit contenir les U irréductibles, on en déduit que dans les conditions de ce corollaire, l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments U irréductibles est le plus petit système U générateur.

On peut également définir par dualité la notion d'élément $\cap$ irréductible (i.e. élément qui appartient à tout sous-ensemble dont il est borne inférieure) ; on démontrerait de la même façon que l'ensemble $\mathcal{J}$ des éléments $\cap$ irréductibles est le plus petit système $\cap$ générateur d'un ordonné à suites strictement croissantes finies.

Enfin, remarquons que les notions d'éléments irréductibles ainsi définies généralisent celles qui sont définies dans le cadre des treillis ; le théorème et son corollaire sont de même des généralisations de résultats connus pour les treillis (cf. [3]).

(3) *SYSTEMES U ET $\cap$ GENERATEURS D'UN ORDONNE*

Conservation des bornes : Soit Φ un sous-ensemble d'un ordonné E, P un sous-ensemble de Φ, et x un élément de Φ. On dira que :

- x est borne sup de P (resp. borne inf de P, U irréductible, $\cap$ irréductible) par rapport à Φ, si cela est le cas pour l'ordre induit sur Φ ;
- Φ conserve les bornes de E si toute borne (sup ou inf) par rapport à Φ d'un sous-ensemble $P \subseteq \Phi$ est borne (sup ou inf) de P par rapport à l'ordonné tout entier.

Remarque :
Un sous-ensemble qui contient ses bornes (cf. paragraphe (1)) conserve les bornes de l'ordonné. Mais la réciproque n'a aucune raison d'être vérifiée ; en effet, un sous-ensemble $P \subseteq \Phi$ peut posséder une borne par rapport à l'ordonné tout entier et non par rapport à Φ.

Théorème 1 : "Tout système U et $\cap$ générateur d'un ordonné conserve les bornes de cet ordonné."

Soit Φ un tel système U et $\cap$ générateur, P un sous-ensemble de Φ possédant une borne sup x par rapport Φ. x est un majorant de P par rapport à l'ordre tout entier ; considérons en un autre y. y est borne inférieure par rapport à l'ordre tout entier d'un sous-ensemble $J \subseteq \Phi$, puisque Φ est $\cap$ générateur. Chacun des éléments de J majore tous les éléments de P, on peut donc dire puisque $\mathcal{J}$ et P appartiennent à Φ que chacun des éléments de $\mathcal{J}$ majore la borne sup de P par rapport à Φ, i.e. l'élément x. Il en résulte que, par rapport à l'ordonné tout entier, y qui est borne inférieure de P, majore x.

Nous appellerons <u>ensemble caractéristique</u> d'un ordonné, l'ensemble de ses éléments qui sont U ou/et $\cap$ irréductibles. Il résulte du corollaire du théorème énoncé en (2) que l'ensemble caractéristique d'un ordonné à chaînes finies est le plus petit système U et $\cap$ générateur de cet ordonné. Dans le cas général, on peut énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> : "Pour tout ensemble ordonné E, l'ensemble caractéristique d'un système U et $\cap$ générateur Φ est égal à l'ensemble caractéristique de cet ordonné. De plus, un élément U irréductible (resp. $\cap$ irréductible) par rapport à Φ l'est par rapport à E, et réciproquement."

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{J} \cup \mathcal{U}$ l'ensemble caractéristique de E, $\mathcal{C}' = \mathcal{J}' \cup \mathcal{U}'$ celui de Φ. Puisque Φ est U et $\cap$ générateur, $\mathcal{C}$ doit appartenir à Φ. Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir que $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$; faisons le pour $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$.

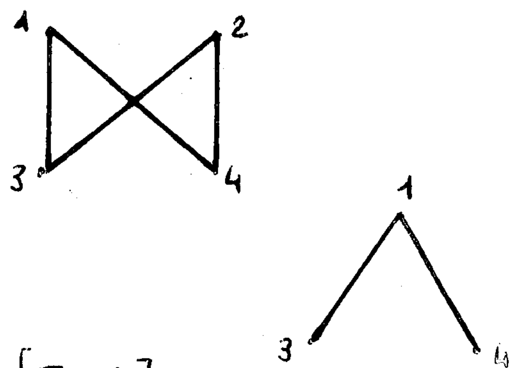
1) Un élément x non U irréductible par rapport à Φ ne l'est pas pas par rapport à E puisque Φ conserve ses bornes (théorème 1) ;

2) Un élément x non U irréductible par rapport à E est borne supérieure de $\hat{x} - \{x\}$. $\hat{x} - \{x\}$ est U engendré par $[\hat{x} - \{x\}] \cap \Phi$ puisque Φ est U générateur, donc x est U engendré par $[\hat{x} - \{x\}] \cap \Phi$ -transitivité de l'engendrement-. Si x appartient à Φ, il en résulte qu'il est borne sup d'un sous-ensemble de Φ ne le contenant pas, donc x n'est pas U irréductible par rapport à Φ.

1) et 2) impliquent que les complémentaires de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ par rapport à Φ sont égaux, donc $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. On ferait la démonstration duale pour établir $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$.

Corollaire : "Si toutes les chaînes d'un ordonné sont finies, tout élément U irréductible par rapport à un ensemble Φ contenant l'ensemble caractéristique est également U irréductible par rapport à l'ordonné tout entier, et réciproquement."

Ce corollaire traduit une propriété héréditaire du caractère d'U irréductibilité quand on passe à un sous-ensemble contenant l'ensemble caractéristique. Cette propriété est fausse par rapport à un sous-ensemble ne contenant pas l'ensemble caractéristique. Par exemple, l'ordonné représenté par la figure 2 est réduit à son ensemble caractéristique. L'élément 1 est U irréductible dans cet ordonné et non par rapport au sous-ensemble {1, 3, 4}.



[Fig. 2]

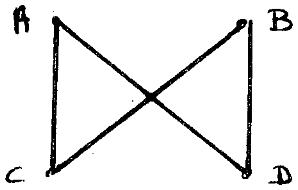
Remarque :
On étudiera en deuxième partie (chapitre II, paragraphe (6)) les relations existant entre l'ensemble caractéristique d'un ordonné et l'extension par coupures de cet ordonné en treillis complet. Nous utiliserons également les deux définitions suivantes :
- un ordonné fini sera dit caractéristique si son support égale son ensemble caractéristique ;
- la relation d'ordre induite par un ordonné fini sur son ensemble caractéristique sera appelée l'ordre caractéristique induit par cet ordonné.

Annexe : Application de la notion de fermeture - Caractérisation des sous-ensembles d'un treillis complet qui sont également des treillis complets pour l'ordre induit.

Etant donné un sous-ensemble F d'un ordonné E, toute application de F dans F possédant les propriétés d'une fermeture par rapport à l'ordre induit sur F sera appelée une fermeture restreinte à F. Un prolongement de cette fermeture est une fermeture sur l'ordonné E tout entier dont la restriction à F est égale à cette fermeture restreinte.

Remarque :

Une fermeture restreinte ne possède pas nécessairement de prolongement. Si on considère l'ordonné représenté par la figure 3, sa seule fermeture est l'application identité. Relativement au sous-ensemble $\{B, D\}$ l'application f définie par $f(D) = B$ et $f(B) = B$ est une fermeture restreinte.



[Fig. 3]

Lemme 1 : "Toute fermeture restreinte sur un U demi treillis complet possède au moins un prolongement."

Soit f cette fermeture restreinte à un sous-ensemble F d'un U demi treillis complet $\mathcal{U}$. Soit x un élément quelconque de $\mathcal{U}$, posons $\varphi(x) = \text{Borne sup } [\{x\} \cup f(\hat{x} \cap F)]$. Il est immédiat que l'application φ est monotone et extensive. D'autre part, si $x \in F$, $\varphi(x) = f(x)$, donc $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$. On a vu dans les rappels (paragraphe (1) E)) que toute application φ monotone et extensive d'un ordonné inductif (donc en particulier d'un U demi treillis complet) est majorée par une plus petite fermeture $\bar{\varphi}$. $\bar{\varphi}$ est un prolongement de f car $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x) \Rightarrow \bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$; cela est vrai en particulier si $x \in F$, et alors $\bar{\varphi}(x) = f(X)$.

Lemme 2 : "Tout système U générateur d'un U demi treillis complet structuré en U demi treillis complet pour l'ordre induit, est une partie de Moore."

Soit F ce sous-ensemble, montrons que tout élément x admet un plus petit majorant dans F. x est borne sup (par rapport au U demi treillis complet tout entier) de $\hat{x} \cap F$ puisque F est U générateur. Soit $\dot{x}$ la borne sup par rapport à F de $\hat{x} \cap F$ (cette borne sup existe puisque F est structuré en U demi treillis complet pour l'ordre induit). $\dot{x}$ majore $\hat{x} \cap F$, c'est donc un majorant de x qui est la borne sup de ce sous-ensemble. D'autre part, tout autre majorant de $\dot{x}$ appartenant à F doit majorer $\hat{x} \cap F$, et par conséquent $\dot{x}$.

Remarque :

Toute partie de Moore d'un U demi treillis complet est structurée en U demi treillis complet pour l'ordre induit, en effet une telle partie de Moore est image de ce demi treillis par une fermeture et toute fermeture sur un U demi treillis complet est un U homomorphisme complet (cf. rappel (1) D)). Le lemme 2 revient à établir la réciproque dans le cas où F est un système U générateur ; dans le cas général, cette réciproque peut être fausse.

Théorème : "Si $\mathcal{T}$ est un treillis complet et F un sous-ensemble non vide de ce treillis complet, les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) F est un treillis complet pour l'ordre induit par $\mathcal{T}$;

(2) Il existe une fermeture ϕ^+ et une fermeture duale ϕ^- telles que $F = \phi^+(\phi^-(\mathcal{T}))$;

(3) Il existe une application Ψ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$, monotone et idempotente, telle que $F = \Psi(\mathcal{T})$."

En utilisant le théorème de Ward [35] (rappel (1) D)) suivant lequel toute fermeture sur un U demi treillis complet est un U homomorphisme complet, on établit aisément que pour toute fermeture ϕ^+ sur un treillis complet, l'image $\phi^+(F)$ d'un sous-ensemble F structuré en treillis complet est également un treillis complet ; ce résultat tient encore pour les fermetures duales. Il résulte de ces remarques que (2) → (1).

Si Ψ est une application de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}$, monotone et idempotente, le sous-ensemble $\mathcal{G}$ constitué par les éléments x tels que $\Psi(x) \geq x$ est non vide (il contient au moins le plus petit élément) et est un sous U demi treillis complet de $\mathcal{T}$. $\mathcal{G}$ est même un treillis complet, car $\Psi(0)$ est plus petit élément dans $\mathcal{G}$. Ψ est une fermeture sur $\mathcal{G}$, donc $\Psi(\mathcal{G})$ est un treillis complet ; comme d'autre part $\mathcal{G}$ contient tous les points fixes de Ψ, on a en fait $\Psi(\mathcal{G}) = \Psi(\mathcal{T})$. D'où (3) → (1).

Démontrons maintenant que (1) → (2). Considérons le sous-ensemble F^+ U engendré par F, on a vu que F^+ est une famille de Moore duale (remarque (3) de la partie 2-1), il existe donc une fermeture duale ϕ^- telle que $F^+ = \phi^-(\mathcal{T})$.

F est structurée en U demi treillis complet et est système U générateur de F^+, il existe donc une fermeture f définie sur F^+ telle que $F = f(F^+)$ [application du lemme 2]. Cette fermeture restreinte peut être prolongée en une fermeture ϕ^+ sur $\mathcal{T}$ tout entier [lemme 1], on a donc $F = \phi^+(\phi^-(\mathcal{T}))$.

En fait, $\phi^+ \circ \phi^-$ est une application monotone (composée de deux applications monotones) et idempotente (les invariants de ϕ^+ sont des invariants de ϕ^-) ; l'implication (1) $\rightarrow$ (3) est donc également établie.

CHAPITRE II

CODAGES D'UN TREILLIS FINI DANS UN TREILLIS DISTRIBUTIF FINI

(1) PREIMMERSION - PRECODAGE - EXTENSION D'UN PRECODAGE

A) *Préimmersion*

Une application injective Π d'un ordonné E dans un autre E' sera appelée une préimmersion si la condition suivante est réalisée :

$$\forall x \text{ et } y \in E : \Pi(x) \geq \Pi(y) \Rightarrow x \geq y.$$

On voit qu'une préimmersion Π est égale à l'inverse d'une application monotone surjective d'un sous-ensemble de E' sur E ; par conséquent, une telle préimmersion ne pourra exister que si l'ordre induit sur un sous-ensemble de E' peut se prolonger en un ordre isomorphe à celui de E. En particulier, si E' est muni de l'ordre nul (i.e. $x' \leq y' \Leftrightarrow x' = y'$), toute injection de E dans E' est une préimmersion.

B) *Précodage*

Etant donnés deux treillis finis $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ dont $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont les ensembles d'éléments U irréductibles, un précodage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$ est une préimmersion Π de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ étant ordonnés par les ordres induits par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. La correspondance $\gamma : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ définie par :

$$\gamma(x) = \text{Borne sup } \{\Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})\}$$

est appelée l'extension de ce précodage. On vérifie immédiatement que γ est monotone.

(2) CONDITIONS NECESSAIRES D'EXISTENCE D'UN $\cap$ CODAGE

Rappelons qu'un $\cap$ codage d'un treillis $\mathcal{T}$ dans un autre $\mathcal{T}'$ est une injection $\Psi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ telle que :

$$\forall x \text{ et } y \in \mathcal{T} : \Psi(x.y) = \Psi(x).\Psi(y),$$

le signe opération . représentant les opérations de borne inf dans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

Théorème 1 : "L'existence d'un $\cap$ codage Ψ d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans un autre treillis fini $\mathcal{T}'$ implique l'existence d'un ou plusieurs précodages de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$."

Théorème 2 : "Si deux treillis finis $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ ont un même nombre d'éléments U-irréductibles, tout $\cap$ codage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$ est égal à l'extension d'un précodage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$."

Nous allons donner de ces deux théorèmes deux démonstrations distinctes basées respectivement sur les lemmes 1 et 2. Auparavant, précisons les notations suivantes : on désignera par x' l'image dans $\mathcal{T}'$ du plus grand élément de $\mathcal{T}$. $\hat{x}'$ est un sous-treillis de $\mathcal{T}'$, et $\Psi(\mathcal{T})$ est une partie de Moore par rapport à $\hat{x}'$; il existe donc une fermeture f définie sur $\hat{x}'$ telle que $f(\hat{x}') = \Psi(\mathcal{T})$. Nous noterons τ l'application de $\hat{x}'$ sur $\mathcal{T}$ égale à $f \circ \Psi^{-1}$.

Enfin, faisons la remarque suivante :

Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ désignent les ensembles d'éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, le théorème 1 contient comme condition implicite Card $(\mathcal{U}) \leq$ Card $(\mathcal{U}')$. Nous dirons donc qu'un $\cap$ codage est minimal si la condition Card $(\mathcal{U})$ = Card $(\mathcal{U}')$ est vérifiée. Le théorème 2 affirme que tout $\cap$ codage minimal est l'extension d'un précodage.

Lemme 1 : "Pour tout élément x d'un treillis $\mathcal{T}$, l'ensemble des éléments U-irréductibles par rapport à la section initiale $\hat{x}$ est égal à l'intersection ensembliste de $\hat{x}$ avec l'ensemble des éléments U-irréductibles par rapport au treillis tout entier."

Soit z un élément de $\hat{x}$ non U-irréductible par rapport à $\hat{x}$. Il existe un sous-ensemble $P \subseteq \hat{x}$ ne contenant pas z et admettant z comme borne supérieure par rapport à $\hat{x}$. z est un majorant de P par rapport à l'ordonné tout entier, considérons un autre majorant z'. Les conditions z' majore P et x majore P impliquent $x.z'$ majore P. La condition $x.z' \in \hat{x}$ implique $x.z'$ majore z, d'où z' majore z. z est borne sup par rapport à l'ordonné tout entier d'un sous-ensemble P ne le contenant pas, i.e. z n'est pas U-irréductible par rapport à l'ordonné tout entier.

Réciproquement, supposons que z n'est pas U-irréductible par rapport à l'ordonné tout entier. z est borne sup par rapport à cet ordonné d'un sous-ensemble P ne le contenant pas. Les conditions $z \in \hat{x}$ et z majore P impliquent $P \subseteq \hat{x}$. Il est immédiat de vérifier que z est borne sup de P par rapport à $\hat{x}$.

Démonstration du théorème 1

La fermeture f définie sur $\hat{x}'$ est un U homomorphisme de $\hat{x}'$ sur $\Psi(\mathcal{T})$ [théorème de Ward], elle transforme donc tout système U générateur de $\hat{x}'$ en un système U générateur de $\Psi(\mathcal{T})$.

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ les ensembles d'éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. D'après le lemme, $\hat{x}' \cap \mathcal{U}'$ est égal à l'ensemble des éléments U-irréductibles du sous-treillis $\hat{x}'$. D'autre part, puisque Ψ est un $\cap$ codage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$, $\Psi(\mathcal{U})$ est égal à l'ensemble des éléments U-irréductibles par rapport à $\Psi(\mathcal{T})$. Le théorème de Ward implique donc que $f(\hat{x} \cap \mathcal{U}')$ contient $\Psi(\mathcal{U})$.

f est monotone de $\hat{x}'$ dans $\Psi(\mathcal{T})$, Ψ^{-1} est monotone de $\Psi(\mathcal{T})$ dans $\mathcal{T}$; il en résulte que $\tau = f \circ \Psi^{-1}$ est monotone de $\hat{x}' \cap \mathcal{U}'$ sur un sous-ensemble contenant $\mathcal{U}$, i.e. il existe une préimmersion de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$.

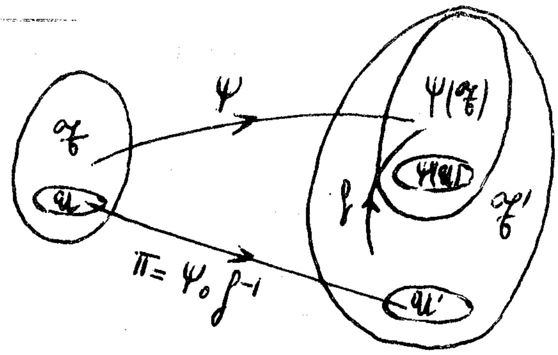
Démonstration du théorème 2

En gardant les mêmes notations que pour la démonstration précédente, on vérifie aisément que la condition Card $(\mathcal{U})$ = Card $(\mathcal{U}')$ implique :

- $\hat{x}' = \mathcal{T}'$;
- f est une fermeture définie sur $\mathcal{T}'$ dont l'ensemble des invariants est égal à $\Psi(\mathcal{T})$;
- l'application $\Pi = f \circ \Psi^{-1}$ définie de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$ est un précodage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$.

Démontrons que $\Psi(x)$ = Borne sup $\{\Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})\}$.

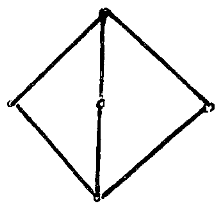
Puisque $\Psi(\hat{x})$ est un invariant de la fermeture f, pour tout élément $u' \in \mathcal{U}'$, l'inégalité $u' \leq \Psi(x)$ est équivalente à $f(u') \leq \Psi(x)$. Cette dernière inégalité est elle-même équivalente à $\Psi^{-1}(f(u')) \leq x$ puisque Ψ est un $\cap$-codage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$. Les éléments $u' \in \mathcal{U}'$ qui vérifient $u' \leq \Psi(x)$ constituent le sous-ensemble $\widehat{\Psi(x)} \cap \mathcal{U}'$; on a donc démontré que $u' \in \widehat{\Psi(x)} \cap \mathcal{U}' \Rightarrow \Psi^{-1}(f(u')) \in \hat{x} \cap \mathcal{U}$.



Réciproquement, on établirait aisément que tout élément u appartenant à $\hat{x} \cap \mathcal{U}$ est image par Ψ^{-1} o f d'un élément u' appartenant à $\widehat{\Psi(x)} \cap \mathcal{U}'$. Les deux sous-ensembles $\widehat{\Psi(x)} \cap \mathcal{U}'$ et $\Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})$ sont donc égaux ; l'égalité $\Psi(x) = \text{Borne sup } \{\Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})\}$ résulte alors du fait que $\mathcal{U}'$ est U générateur dans $\mathcal{T}'$.

Remarque :

La condition du théorème 1 n'est que nécessaire. Par exemple, bien qu'il existe un isomorphisme entre les U-irréductibles du treillis de Boole à trois atomes et les U-irréductibles du treillis $\mathcal{T}'$ représenté par la figure 1; il n'existe pas d'$\cap$ codage de ce treillis de Boole dans $\mathcal{T}'$. Remarquons que $\mathcal{T}'$ n'est pas distributif, or nous établirons [3] que cette réciproque est vraie si $\mathcal{T}'$ est distributif.



[Fig. 1]

Lemme 2 : "Pour toute immersion(*) Ψ d'un ordonné E dans un autre E', si il existe dans E' une égalité du type $\Psi(a) = \text{Borne sup } (\Psi(P))$, alors l'égalité $a = \text{Borne sup } (P)$ est vérifiée dans E."

(*) Une immersion est une application $\Psi : E \to E'$ telle que $a \leq b \Leftrightarrow \Psi(a) \leq \Psi(b)$.

$\Psi(a)$ = Borne sup $(\Psi(P)) \Rightarrow \forall x \in P : \Psi(a) \geq \Psi(x) \Rightarrow \forall x \in P : a \geq x \Rightarrow$ a majore P. Réciproquement, soit a' un autre majorant de P, on obtient $\Psi(a')$ majore $\Psi(P)$; par conséquent $\Psi(a')$ majore $\Psi(a)$ qui est la borne sup de $\Psi(P)$, on en tire $\Psi(a') \geq \Psi(a)$ qui implique $a' \geq a$. a est bien la borne sup de P.

Revenons maintenant à l'application Ψ du théorème 1 Ψ est un cas particulier d'immersion. On peut énoncer le corollaire suivant dont la vérification est immédiate :

"Si l'égalité $\Psi(a)$ = Borne sup (P) est vérifiée dans $\mathcal{T}$, alors l'égalité a = Borne sup $(\tau(P))$ est vérifiée dans $\mathcal{T}'$".

On peut alors démontrer la propriété suivante :

"Pour tout élément U-irréductible $a \in \mathcal{U}$, il existe un élément U-irréductible $a' \in \mathcal{U}'$ tel que $\Psi(a) = f(a')$".

Nions cette propriété et considérons un sous-ensemble $P' \subseteq \mathcal{U}'$ tel que $\Psi(a)$ = Borne sup (P'). Les éléments a' constituant P' sont tels que $\Psi(a) \neq f(a')$, soit $a \neq \tau(a')$. Le sous-ensemble $\tau(P')$ ne contient pas a, ce qui eu contradiction avec le fait que a soit U-irréductible et l'égalité a = Borne sup $(\tau(P'))$ tirée du corollaire précédent.

On peut alors considérer une application quelconque $\Pi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ qui à chaque élément $a \in \mathcal{U}$ fait correspondre un élément $a' \in \mathcal{U}'$ tel que $\tau(a') = a$. Π est une préimmersion de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$ puisque τ est monotone, ce qui démontre le théorème 1.

Dans le cas du théorème 2, cette application Π est nécessairement bijective puisque Card $(\mathcal{U})$ = Card $(\mathcal{U}')$, on termine la démonstration de la même façon.

(3) EXTENSION D'UN PRECODAGE DANS UN TREILLIS DISTRIBUTIF FINI

Théorème 3 : "Si il existe un précodage Π d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans un treillis distributif fini $\mathcal{T}'$ ayant même nombre d'éléments U-irréductibles, alors l'extension γ de ce précodage est un $\cap$-codage minimal."

Nous allons également donner de ce théorème deux démonstrations, la première sera basée sur les particularités des calculs faits dans un treillis distributif, la seconde utilisera des théorèmes d'isomorphisme relatifs à ces treillis.

Première démonstration :

L'extension γ d'un précodage étant monotone, on obtient facilement l'inégalité $\gamma(x.y) \leq \gamma(x).\gamma(y)$. Il nous reste donc deux propriétés à établir :

(1) $\forall x$ et $y \in \mathcal{T}$: $\gamma(x) \leq \gamma(y) \Rightarrow x \leq y$ (i.e. γ est une immersion) ;
(2) $\forall x$ et $y \in \mathcal{T}$: $\gamma(x) \, . \, \gamma(y) \leq \gamma(x.y)$

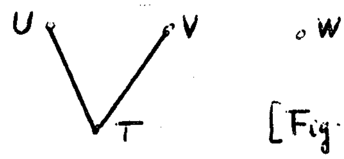
Etablissons d'abord (1). L'inégalité $\gamma(x) \leq \gamma(y)$ est équivalente à

$\sum_{u_i \, \hat{x} \cap \mathcal{U}} \Pi(ui) \leq \sum_{v_j \, \hat{y} \cap \mathcal{U}} \Pi(vj)$ -définition de $\gamma(x)$ et $\gamma(y)$-. Puisque $\mathcal{T}'$ est distributif, cette dernière inégalité implique que chaque $\Pi(u_i)$ est majoré par au moins un $\Pi(v_j)$. Par conséquent, pour tout u_i $\hat{x}$, il existe un v_j $\hat{y}$ tel que $u_i \leq v_j$; soit $\hat{x} \cap \mathcal{U} \leq \hat{y} \cap \mathcal{U}$. Cette dernière inégalité implique $x \leq y$ car $\mathcal{U}$ est un système générateur de $\mathcal{T}$.

Etablissons maintenant (2). Puisque $\mathcal{T}'$ est distributif, le produit $\gamma(x).\gamma(y)$ est égal à $\sum_{\substack{u \in \hat{x} \cap \mathcal{U} \\ v \in \hat{y} \cap \mathcal{U}}} \Pi(u).\Pi(v)$. Un terme $\Pi(u).\Pi(v)$ non nul appartenant à cette somme est égal à une somme d'éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}'$; soit $\Pi(u).\Pi(v) = \Sigma u'$. La condition Card $(\mathcal{U})$ = Card $(\mathcal{U}')$ implique que chacun des u' figurant dans la seconde somme est l'image par Π d'un U-irréductible α du treillis $\mathcal{T}$; l'inégalité $u' \leq \Pi(u).\Pi(v)$ implique $\Pi(\alpha) \leq \Pi(u)$ et $\Pi(\alpha) \leq \Pi(v)$, soit $\alpha \leq u$ et $\alpha \leq v$. Par ailleurs, u et v sont majorés respectivement par x et y, donc $\Pi(u).\Pi(v)$ est majoré par une somme de termes $\Pi(\alpha)$ vérifiant $\alpha \leq x.y$. Par définition la somme de tous les termes $\Pi(\alpha)$ tels que $\alpha \leq x.y$ est égale à $\gamma(x.y)$, on a donc démontré que $\gamma(x).\gamma(y) \leq \gamma(x.y)$

Remarques

(1) L'hypothèse Card $(\mathcal{U})$ = Card $(\mathcal{U}')$ est essentielle pour établir ce théorème. Considérons d'une part le treillis de Boole à trois atomes notés u, v, w ; d'autre part le treillis distributif $\mathcal{T}'$ des sections initiales de l'ordonné représenté par la figure 2. Les sections UT, VT et W sont principales, ce sont donc des éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}'$; elles sont d'autre part deux à deux non comparables, par conséquent l'application Π défini par $\Pi(u)$ = UT, $\Pi(v)$ = VT et $\Pi(w)$ = W est précodage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$. L'extension γ de ce précodage est telle que $\gamma(uw)$ = UWT, $\gamma(vw)$ = VWT. On a $\gamma(uw) \cap \gamma(vw)$ = WT $\neq$ W = $\gamma(uw \cap vw)$.



[Fig. 2]

(2) L'extension d'un précodage dans un treillis quelconque vérifiant la condition Card $(\mathcal{U})$ = Card $(\mathcal{U}')$ n'est pas en général un $\cap$-codage ; il suffit de considérer le contre-exemple du paragraphe (2).

Deuxième démonstration :

Lemme : "Pour tout $x \in \mathcal{T}$, le sous-ensemble $\Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})$ est une section initiale par rapport à l'ensemble $\mathcal{U}'$ des éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}'$."

Soit $u'_1 \in \Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})$ et u'_2 un élément de $\mathcal{U}'$ majoré par u'_1, il faut montrer que $u'_2 \in \Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})$. Puisque $u'_1 \in \Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})$, il existe un élément U-irréductible $u_1 \in \hat{x} \cap \mathcal{U}$ tel que $u'_1 = \Pi(u_1)$. L'application Π étant surjective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$, il existe un élément $u_2 \in \mathcal{U}$ tel que $u'_2 = \Pi(u_2)$. La condition $u'_2 \leq u'_1$ équivalente à $\Pi(u_2) \leq \Pi(u_1)$ implique $u_2 \leq u_1$, donc $u_2 \in \hat{x} \cap \mathcal{U}$ et $u'_2 \in \Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})$.

Démonstration du théorème :

Désignons par $f_1 : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ l'application définie par $f_1(x) = \hat{x} \cap \mathcal{U}$. Soit $(\mathcal{U}')$ l'ensemble des sections initiales sur $\mathcal{U}'$; d'après le lemme précédent, l'application f_2 qui fait correspondre à chaque sous-ensemble $\hat{x} \cap \mathcal{U}$ son image $\Pi(\hat{x} \cap \mathcal{U})$ est du type $f_2 : f_1(\mathcal{T}) \to \mathcal{J}_n(\mathcal{U}')$. Enfin, désignons par $f_3 : \mathcal{J}_n(\mathcal{U}') \to \mathcal{T}'$ l'application définie par $f_3(P') =$ Borne sup (P'). est la succession de f_1, f_2 et f_3.

1) f_1 est injective par suite de l'égalité $x =$ Borne sup $(\hat{x} \cap \mathcal{U})$ -cf. Rappels- ;

f_2 est injective car Π est bijective entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$;

f_3 est injective car $\mathcal{T}'$ est distributif -cf. rappel-.

2) $\mathcal{T}$, $f_1(\mathcal{T})$, $\mathcal{J}_n(\mathcal{U}')$ et $\mathcal{T}'$ sont des demis treillis par rapport à l'opération de borne inf, cette opération correspondant à l'intersection de parties sur $f_1(\mathcal{T})$ et $\mathcal{J}_n(\mathcal{U}')$. On vérifiera aisément en se reportant au chapitre des rappels que f_1, f_2 et f_3 conservent ces opérations de borne inf. γ est donc un $\cap$-isomorphisme.

(4) *RECIPROQUE DU THEOREME 1 DANS LE CAS OU $\mathcal{T}'$ EST DISTRIBUTIF*

Théorème 4 : "Si il existe un précodage Π d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans un treillis distributif $\mathcal{T}'$, il existe un $\cap$-codage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$."

Lemme : "Soit F un sous-ensemble quelconque d'un ordonné E, il existe un $\cap$-codage du treillis $\mathcal{J}_n(F)$ des sections initiales de F dans le treillis $\mathcal{J}_n(E)$ des sections initiales de E."

Soit σ une section initiale quelconque par rapport à F ; il existe au moins une section initiale σ' par rapport à E telle que $\sigma' \cap F = \sigma$, il suffit de considérer par exemple $\sigma' = \bigcup_{x \in \sigma} \hat{x}$. En fait, il existe même une plus grande section initiale $\overline{\sigma}$ par rapport à E telle que $\overline{\sigma} \cap F = \sigma$; en effet, l'union ensembliste d'une famille de sections σ_i vérifiant $\sigma_i \cap F = \sigma$ vérifie encore cette condition. L'application $\sigma \to \overline{\sigma}$ de $\mathcal{J}_n(F)$ dans $\mathcal{J}_n(E)$ est un $\cap$-codage :

Si σ_1 et σ_2 sont deux sections initiales par rapport à F, l'intersection de $\overline{\sigma}_1 \cap \overline{\sigma}_2$ avec F est égale à $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Soit σ une autre section telle que $\sigma \cap F = \sigma_1 \cap \sigma_2$; $(\sigma \cup \overline{\sigma}_1) \cap F = (\sigma \cap F) \cup (\overline{\sigma}_1 \cap F) = \sigma_1$, de même $(\sigma \cup \overline{\sigma}_2) \cap F = \sigma_2$. Il résulte de ces égalités $\sigma \subseteq \overline{\sigma}_1 \cap \overline{\sigma}_2$; donc $\overline{\sigma}_1 \cap \overline{\sigma}_2$ est égal à la section maximale telle que $\sigma \cap F = \sigma_1 \cap \sigma_2$.

Démonstration du théorème :

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ les ensembles d'éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$; considérons les treillis distributifs intermédiaires $\mathcal{T}'_1 = \mathcal{J}_\cap(\Pi(\mathcal{U}))$ et $\mathcal{T}'_2 = \mathcal{J}_\cap(\mathcal{U}')$. $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'_1$ ont même nombre d'éléments U-irréductibles, et l'application $u \to \widehat{\Pi(u)} \cap \Pi(\mathcal{U})$ est un précodage de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'_1$. Il existe donc d'après le théorème 3 un $\cap$-codage minimal $\Psi_1 : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'_1$. D'après le lemme précédent, il existe un $\cap$-codage $\Psi_2 : \mathcal{T}'_1 \to \mathcal{T}'_2$. Enfin il existe un isomorphisme $\Psi_3 : \mathcal{T}'_2 \to \mathcal{T}'$ puisque tout treillis distributif fini est isomorphe au treillis des sections initiales sur ses éléments U-irréductibles. L'application composée $\Psi_3 \circ \Psi_2 \circ \Psi_1 : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ est un $\cap$-codage.

(5) *CORRESPONDANCE BIJECTIVE ENTRE PRECODAGES ET $\cap$-CODAGES MINIMAUX*

Le théorème 2 affirme que tout $\cap$-codage minimal est l'extension d'un précodage ; dans le cas où le treillis de codage est distributif, le théorème 3 affirme que tout précodage s'étend en un $\cap$-codage minimal. Nous allons maintenant établir que deux précodages distincts s'étendent en deux $\cap$-codages minimaux distincts, ce qui établira la correspondance bijective.

Théorème 5 : "Etant donnés deux précodages distincts Π_1 et Π_2 d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans un treillis distributif $\mathcal{T}'$, leurs extensions Ψ_1 et Ψ_2 sont deux $\cap$-codages minimaux distincts."

Supposons que $\Psi_1 = \Psi_2$; nous allons montrer, que pour tout élément U-irréductible $u_o \in \mathcal{T}$, il en existe un autre u_1 tel que soient vérifiées les conditions :

$$\Pi_1(u_o) \leq \Pi_2(u_1) \text{ et } u_1 \leq u_o.$$

$$\text{En effet } \Psi_1(u_o) = \Psi_2(u_o) \Rightarrow \sum_{u_1 \leq u_o} \Pi_1(u_1) = \sum_{u_1 \leq u_o} \Pi_2(u_1).$$

$\Pi_1(u_o)$ figure dans la première somme d'éléments, il existe donc un élément de la seconde somme qui le majore. Ce qui établit le résultat.

Π_1 et Π_2 jouant des rôles identiques, il existe un élément U-irréductible u_2 vérifiant les conditions :

$$\Pi_2(u_1) \leq \Pi_1(u_2) \text{ et } u_2 \leq u_1$$

Par transitivité, on obtient $\Pi_1(u_o) \leq \Pi_1(u_2)$, ce qui entraîne $u_o \leq u_2$ puisque Π_1 est un précodage. Des inégalités $u_2 \leq u_1$ et $u_1 \leq u_o$, on tire alors $u_o = u_2$. On a donc démontré que pour tout U-irréductible u_o, on a l'inégalité $\Pi_1(u_o) \leq \Pi_2(u_o)$; on démontrerait l'inégalité inverse de la même manière, d'où l'égalité de Π_1 et Π_2.

(6) $\cap$-CODAGE DANS UN PRODUIT CARTESIEN DE CHAINES - GENERALITES

Nous avons montré dans l'introduction que les codages d'un ordonné dans B^n et $\mathbb{N}^n$ étaient intéressants du point de vue algorithmique. Comme cas intermédiaire, il est intéressant d'étudier les codages dans k^n, k, entier supérieur ou égal à $2^{(*)}$ représentant l'ensemble totalement ordonné fini contenant k éléments.

Un des premiers problèmes que se pose est celui de la possibilité de trouver un $\cap$-codage. Il suffit de remarquer pour cela que l'application $x \to \hat{x}$ d'un treillis $\mathcal{T}$ dans celui de ses sections initiales est un $\cap$-codage dans $2^{\mathrm{Card}(\mathcal{T})}$. Ceci montre qu'il est toujours possible de trouver un $\cap$-codage dans un produit 2^n à condition de choisir n suffisamment grand. A fortiori, on pourra donc trouver des $\cap$-codages dans toute puissance k^n et $\mathbb{N}^n$.

Considérons le nombre entier $|\mathcal{T}|_k$ (resp. $|\mathcal{T}|_\infty$) égal au plus petit n tel qu'il existe un $\cap$-codage dans k^n (resp. $\mathbb{N}^n$). Il est immédiat que la suite $|\mathcal{T}|_n$ est décroissante lorsque n est croissant, il existe donc un plus petit entier n' tel que $n \geq n' \Rightarrow |\mathcal{T}|_n = |\mathcal{T}|_{n'} = |\mathcal{T}|_\infty$.

(*) Le cas k = 1 n'a aucun intérêt car $1^n = 1$, on peut donc y coder le seul ordonné réduit à un élément.

Nous allons étudier dans cette partie une méthode pour trouver les $\cap$-codages dans une puissance cartésienne minimale d'une chaîne donnée k. Nous commençons par rappeler les résultats connus pour le cas 2^n, en les reliant aux théorèmes précédemment établis.

(7) CODAGE DANS 2^n

L'$\cap$-codage d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans une puissance cartésienne 2^n est souvent appelée $\cap$ représentation par des parties, vu que 2^n est isomorphe au treillis des parties d'un ensemble à n éléments. Campbell a remarqué [9] que l'application $x \to \hat{x} \cap \mathcal{U}$ possédait les propriétés d'un codage, et était plus économique que l'application $x \to \hat{x}$; Birkhoff [4] a également retrouvé cet $\cap$-codage. La démonstration du caractère minimal a été donné par Zarecki [36]* qui a établi de plus que tous les $\cap$-codages possibles dans $2^{\mathrm{Card}(\mathcal{T})}$ étaient isomorphes ; ce qui revient à dire qu'il existe un seul $\cap$-codage dans 2^n, plus économique que tous les autres.

Ces divers résultats se retrouvent de la façon suivante :

Soit $\mathcal{T}$ le treillis à coder, $\mathcal{U}$ son ensemble d'éléments U-irréductibles, n = Card ($\mathcal{T}$). Soit $\mathcal{U}'_{n'}$ l'ensemble des éléments U-irréductibles du treillis de Boole $2^{n'}$; le nombre d'éléments de $\mathcal{U}'_{n'}$ est égal à n', et ces éléments sont deux à deux non comparables. La condition d'existence d'un précodage de $\mathcal{T}$ dans $2^{n'}$ se ramène donc simplement à $n \geq n'$.

Si $n' = n$, le théorème 2 affirme que tout $\cap$-codage minimal est l'extension d'un précodage, le théorème 3 affirme la réciproque. Puisque $\mathcal{U}'$ est un ensemble ordonné libre, toute injection de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'_n$ est un précodage. Une telle injection est en fait une correspondance d'univoque entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$; l'extension d'un tel précodage revient donc à associer à un élément x de $\mathcal{T}$, le sous-ensemble $\hat{x} \cap \mathcal{U}$; on voit de plus que cet $\cap$-codage est unique à un isomorphisme près.

(*) Il n'a pas encore été possible à l'auteur de comprendre cette démonstration, car l'article de Zarecki (2 pages) est rédigé en russe. On trouve un énoncé de la propriété dans les Maths Review.

(8) CODAGE DANS n^k ($n > 1$)

Théorème : "Pour qu'il existe un $\cap$-codage d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans une puissance cartésienne de chaîne k^n, il faut et il suffit que l'ensemble $\mathcal{U}$ de ses éléments U-irréductibles soit couvert par n chaînes de longueur inférieure ou égale à k-1."

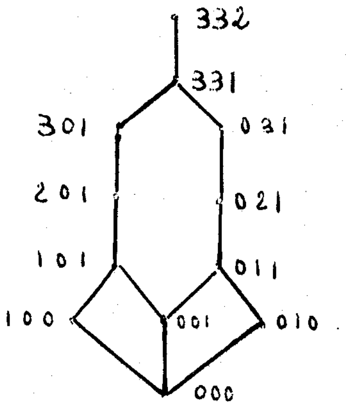
L'ensemble $\mathcal{U}'$ des éléments U-irréductibles de k^n est égal à l'union disjointe de n chaînes de longueur k-1. En effet, représentons par $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ les éléments de la chaîne k ; un élément de k^n est alors un n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de nombres compris entre 0 et k-1. Un tel n-uplet est U-irréductibles si et seulement si il exite un $\alpha_i \neq 0$, tous les autres α_j étant nuls. A chaque indice de position i, on fait donc correspondre la chaîne C_i constituée des k-1 n-uplets
$\{(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots 0), (0, 0, \ldots, 2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, k-1, 0, \ldots, 0)\}$
Ces chaînes C_i forment bien une union disjointe en ce sens que des éléments appartenant à deux chaînes C_i et C_j distinctes sont non comparables.

Il est alors immédiat que l'existence d'un précodage Π de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$ implique une couverture de $\mathcal{U}$ par n chaînes de longueur majorée par k-1 (il suffit de remarquer que Π^{-1} est une application monotone). Réciproquement, si l'on a réalisé une couverture de $\mathcal{U}$ par n chaînes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ toutes de longueur majorée par k-1, on peut numéroter chaque élément sur la chaîne qui le contient de la façon suivante :

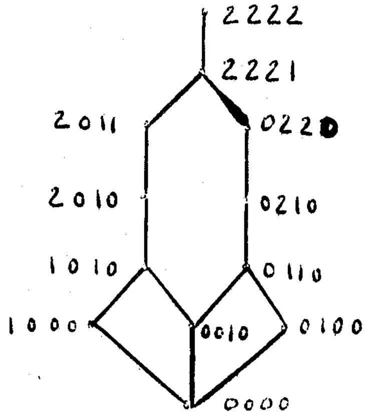
Le plus petit élément de Γ_i est numéroté u_i^1, l'élément de Γ_i qui couvre u_i^1 est numéroté u_i^2, ..., l'élément de Γ_i qui couvre u_i^m est numéroté u_i^{m+1}... .
Il est alors immédiat que la correspondance $\Pi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ définie par
$\Pi(u_i^j) = (0, 0, \ldots, j, 0, \ldots, 0)$, où l'entier j est placé en position i, est un précodage.

Exemple : Considérons le treillis représenté par la figure 3, ses éléments U-irréductibles sont entourés. On peut les couvrir par les 4 chaînes de longueur 2 :

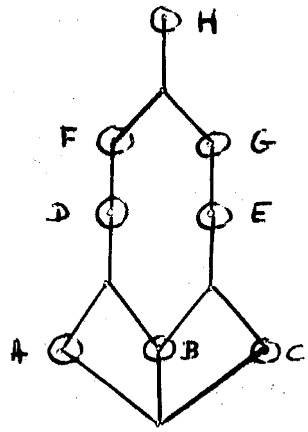
Γ_1 = (AD), Γ_2 = (CE), Γ_3 = (BG), Γ_4 = (FH).



[Fig. 5]



[Fig. 4]



[Fig. 3]

On peut donc obtenir un Λ-codage dans 3^4, extension du précodage Π tel que

$\Pi(A) = (1\ 0\ 0\ 0)$	$\Pi(D) = (2\ 0\ 0\ 0)$
$\Pi(C) = (0\ 1\ 0\ 0)$	$\Pi(F) = (0\ 2\ 0\ 0)$
$\Pi(B) = (0\ 0\ 1\ 0)$	$\Pi(G) = (0\ 0\ 2\ 0)$
$\Pi(F) = (0\ 0\ 0\ 1)$	$\Pi(H) = (0\ 0\ 0\ 2)$

L'extension de ce précodage est représentée par la figure 4.

On peut également couvrir les U-irréductibles par les 3 chaînes Γ_1 = (ADF), Γ_2 = (CEG), Γ_3 = (BH) qui sont de longueur ≤ 3 ; on peut donc obtenir un Λ-codage dans 4^3, extension du précodage Π tel que

$\Pi(A) = (1\ 0\ 0)$	$\Pi(D) = (2\ 0\ 0)$	$\Pi(F) = (3\ 0\ 0)$
$\Pi(C) = (0\ 1\ 0)$	$\Pi(F) = (0\ 2\ 0)$	$\Pi(G) = (0\ 3\ 0)$
$\Pi(B) = (0\ 0\ 1)$	$\Pi(H) = (0\ 0\ 2)$	

L'extension de ce précodage est représentée par la figure 5.

(9) Λ-CODAGE DANS $\mathbb{N}^n$

On peut démontrer par la même méthode que précédemment le théorème suivant :

"Pour qu'il existe un $\cap$-codage d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans une puissance cartésienne $\mathbb{N}^n$, il faut et il suffit que l'ensemble $\mathcal{U}$ de ses éléments U-irréductibles soit couvert par n chaînes".

La longueur des chaînes n'est plus bornée, on peut alors songer au théorème établi par Dillworth [11] selon lequel :

"Le nombre minimum de chaînes nécessaires pour couvrir un nombre ordonné fini est égal au maximum d'éléments deux à deux non comparables que l'on peut trouver dans cet ordonné".

On obtient alors le corollaire :

"Pour qu'il existe un $\cap$-codage d'un treillis fini $\mathcal{T}$ dans une puissance cartésienne $\mathbb{N}^n$, il faut et il suffit que tout ensemble d'éléments U-irréductibles deux à deux non comparables soit de cardinal inférieur ou égal à k".

Un des derniers problèmes qui se pose encore est la recherche d'une couverture minimale d'un ordonné par des chaînes de longueur bornée. A part une méthode booléenne de couverture de cet ordonné, une fois fait le dénombrement des chaînes dont la longueur est bornée par un nombre, il ne semble pas exister de méthode plus simple.

CHAPITRE III

CODAGE D'UN ENSEMBLE ORDONNE DANS UN PRODUIT DE CHAINES

Dans ce chapitre, nous définissons une méthode d'immersion d'un ordonné fini dans un produit de chaînes. Cette méthode est basée sur la notion d'engendrement d'un treillis de sections d'un ordonné. Les algorithmes finaux qui sont exposés dans le paragraphe (5) pourraient être déduits de l'étude des représentations des relations binaires dans un produit de chaîne (chapitre IV, 2ème partie). Cette seconde méthode nécessite un assez long préliminaire théorique (chapitres I, II et III de la 2ème partie), nous avons donc préféré la développer d'une façon autonome. On indiquera dans le paragraphe (6) du chapitre IV de la 2ème partie ce qui assure la liaison de ces deux méthodes.

(1) ENGENDREMENT D'UN TREILLIS DE SECTIONS

Etant donné un sous-ensemble F d'un treillis complet $\mathcal{T}$, nous avons défini au chapitre I, paragraphe (1) le sous-ensemble F^* engendré par un sous-ensemble F ; on a dit alors que F était un système générateur de $\mathcal{T}$ si $F^* = \mathcal{T}$. En général, F^* ne se déduit pas de façon simple à partir de F. Lorsque $\mathcal{T}$ est fini, il faut considérer une suite de sous-ensembles F_o, F_1, F_2, ..., F_n, ... définie par $F_o = F$, $F_{2n+1} = F^+_{2n}$, $F_{2n+2} = F^{\cdot}_{2n+1}$ ou encore par $F_o = F$, $F_{2n+1} = F^{\cdot}_{2n}$, $F_{2n+2} = F^+_{2n+1}$. Ces deux suites sont des suites d'ensembles emboités, donc à partir d'un certain indice elles deviendront stationnaires puisque $\mathcal{T}$ est fini. Il est alors facile de voir que cette limite stationnaire est égale à F^*. Si on voulait accélérer le procédé, on pourrait aussi prendre la suite F_o, F_1, F_2, ..., F_n, ... définie par $F_o = F$, $F_{n+1} = F^+_n \cup F^{\cdot}_n$ qui convergerait plus vite. De toutes façons, on ne pourra a priori se fixer une borne à partir de laquelle on est sûr d'atteindre la limite que relativement au nombre d'éléments du treillis. Ce procédé d'engendrement n'est pas simple, de plus, dans le cas infini, il pose des problèmes d'interprétation. Si est complètement distributif, alors l'engendrement se fait plus simplement, en effet :

<u>Propriété</u> : "Pour tout sous-ensemble F d'un treillis complètement distributif $F^* = (F^{\cdot})^+ = (F^+)^{\cdot}$."

Cette propriété revient à dire qu'en utilisant les deux premières suites définies plus haut, la limite stationnaire est atteinte en deux coups. Etant donnés que $(F^{\cdot})^+$ et $(F^+)^{\cdot}$ sont nécessairement contenus dans F^*, il suffit de montrer que $(F^{\cdot})^+$ contient ses bornes inférieures et que $(F^+)^{\cdot}$ contient ses bornes supérieures. Faisons cette vérification pour $(F^{\cdot})^+$. Chaque élément de $(F^{\cdot})^+$ est une borne supérieure $\sum_{j\in J} x_j$, où chaque x_j est une borne inférieure d'éléments de F. Une borne inférieure d'éléments dans $(F^{\cdot})^+$ est donc de la forme $\prod_{i\in I} \sum_{j\in J_i} x_{ij}$, cette expression est égale à $\sum \prod_{\substack{i\in I \\ j\in J_i}} x_{ij}$ par suite de la complète distributivité.

Puisque chaque x_{ij} est borne inférieure d'éléments de F, il en est de même de chaque terme $\Pi\, x_{ij}$; on obtient donc à nouveau un élément de $(F^{\cdot})^{+}$. La démonstration pour $(F^{+})^{\cdot}$ se ferait en utilisant l'égalité duale.

Corollaire 1 : "Pour tout sous-ensemble F d'un treillis complètement distributif, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) F est générateur ;
(2) F^{+} est $\cap$-générateur ;
(3) $F^{\cdot}$ est U générateur."

Vérification immédiate.

Supposons maintenant que $\mathcal{T}$ est le treillis des sections initiales d'un ensemble ordonné E. Alors on sait que les $\hat{x}$ sont U-irréductibles dans ce treillis et engendrent $\mathcal{T}$ par union, de même les sections $\complement\check{y}$ sont $\cap$-irréductibles et engendrent $\mathcal{T}$ par intersection. En tenant compte du fait que tout système U générateur doit contenir les U-irréductibles et que tout système $\cap$-générateur doit contenir les $\cap$-irréductibles, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2 : "Etant donnée une famille F de sections initiales d'un ensemble ordonné E, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) F est un système générateur du treillis des sections initiales de E ;
(2) Pour tout x appartenant à E, $\hat{x}$ est intersection de sections appartenant à F ;
(3) Pour tout y appartenant à E, $\complement\check{y}$ est union de sections appartenant à F."

En fait ce corollaire peut être raffiné. En effet supposons que l'on connaisse un système $\cap$-générateur $\mathcal{J}'$ de l'ordonné E, alors si pour tout élément $i' \in \mathcal{J}'$, $\hat{i}'$ est intersection de sections appartenant à F, on peut affirmer qu'il en est de même pour tout $\hat{x}$. En effet, tout élément x est borne inférieure d'un sous-ensemble $I' \subseteq \mathcal{J}'$, et cela implique que $\hat{x} = \bigcap_{i' \in I'} \hat{i}'$. On peut également faire la remarque duale, si on connait un sous-ensemble U générateur $\mathcal{U}'$ de l'ordonné E, si pour tout élément $u' \in \mathcal{U}'$, $\complement\check{u}'$ est union de sections appartenant à F, alors il en est de même pour tout y. D'où le corollaire plus fin :

<u>Corollaire 3</u> : "Etant donnés un système U générateur $\mathcal{U}'$ d'un ordonné E, un système $\cap$-générateur $\mathcal{J}'$ de ce même ordonné et un sous-ensemble F de sections initiales de cet ordonné, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) F est un système générateur du treillis des sections initiales de E ;

(2) Pour tout i' appartenant à $\mathcal{J}'$, $\hat{i}'$ est intersection de sections appartenant à F ;

(3) Pour tout u' appartenant à $\mathcal{U}'$, $\complement\check{u}'$ est union de sections appartenant à F."

En particulier si l'ensemble ordonné E est à chaînes finies, on peut se borner aux sous-ensembles $\mathcal{J}$ et $\mathcal{U}$ des éléments respectivement $\cap$ et U-irréductibles. Nous allons maintenant énoncer un théorème qui présente les résultats sous une forme différente.

<u>Théorème 1</u> : "Etant donnés un système U générateur $\mathcal{U}'$ d'un ordonné E et un système $\cap$-générateur $\mathcal{J}'$ de ce même ordonné, un sous-ensemble F de sections initiales de cet ordonné est un système générateur de toutes les sections initiales si et seulement si pour tout doublet $(i', u') \in \mathcal{J}' \times \mathcal{U}'$ vérifiant la condition $\hat{i}' \subseteq \complement\check{u}'$, il existe une section S appartenant à F telle que $\hat{i}' \subseteq S \subseteq \complement\check{u}'$."

1) <u>Condition nécessaire</u> : Il résulte du corollaire 3 que toute section $\complement\check{u}'$ est égale à une union $\bigcup_{i \in I} S_i$ de certaines sections appartenant à F. Si i' est un élément de $\mathcal{J}'$ tel que $\hat{i}' \subseteq \complement\check{u}'$, on doit donc avoir $i' \in \bigcup_{i \in I} S_i$; ceci signifie qu'il existe un S_i qui contient i', mais puisque S_i est une section initiale, S_i contient $\hat{i}'$ en entier. Ce qui établit la condition nécessaire.

2) <u>Condition suffisante</u> : Il suffit d'après le corollaire 3 de montrer que tout $\complement\check{u}'$ est une union de sections appartenant à F.

<u>Lemme</u> : "Pour $u' \in \mathcal{U}'$, $\complement\check{u}'$ est l'union d'une famille de $\hat{i}'$."

On sait déjà que $\complement\check{u}'$ est union d'une famille de $\hat{x}$; nous allons montrer que chacun des $\hat{x}$ de cette famille peut être inclus dans un $\hat{\imath}'$ tel que $\hat{\imath}' \subseteq \complement u'$, le lemme sera ainsi démontré. Supposons qu'il existe un $\hat{x}$ pour lequel cela n'est pas possible, cela signifie que tout $\hat{\imath}'$ tel que $\hat{\imath}' \subseteq \hat{x}$ intersecte $\check{u}'$; ceci est équivalent au fait que tout i' qui majore x majore également u'. Or x est égal à la borne inférieure de ces i' ($\mathcal{J}'$ est $\cap$-générateur), par conséquent x majore aussi u', cela est incompatible avec $\hat{x} \subseteq \complement\check{u}'$.

D'après ce lemme, on peut donc exprimer $\complement\check{u}'$ comme une union de sections $\hat{\imath}'_k$, où chaque i'_k appartient à $\mathcal{J}'$. Les couples (i'_k, u') vérifient les conditions du théorème, on peut donc extraire de F une famille de sections S_k telles que $\hat{\imath}'_k \subseteq S_k \subseteq \complement\check{u}'$; il est alors immédiat que u' est égal à l'union de ces S_k.

Il est intéressant d'interpréter ce théorème dans le cas des treillis distributifs finis ; en effet, on sait qu'un tel treillis $\mathcal{T}$ est isomorphe au treillis des sections initiales d'un certain ordonné fini E (cet ordonné fini étant d'ailleurs isomorphe au sous-ensemble $\mathbb{U}$ des éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}$ ordonné par l'ordre induit). Dans un tel isomorphisme, un élément $\cap$-irréductible de $\mathcal{T}$ correspond à une section $\complement\check{y}$ sur E, et un élément U-irréductible de $\mathcal{T}$ correspond à une section $\hat{x}$ sur E.

Commençons donc par interpréter le théorème en prenant $\mathcal{J}' = \mathcal{U}' = E$, on obtient le corollaire suivant :

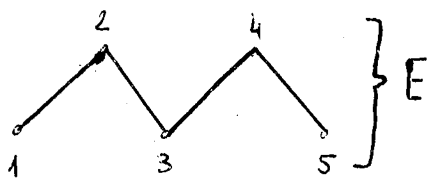
<u>Corollaire 1</u> : "Un sous-ensemble F engendre un treillis distributif fini si et seulement si il intersecte tout segment(*) $[u,i]$ de ce treillis dont la borne inf est un élément U-irréductible et la borne sup un élément $\cap$-irréductible."

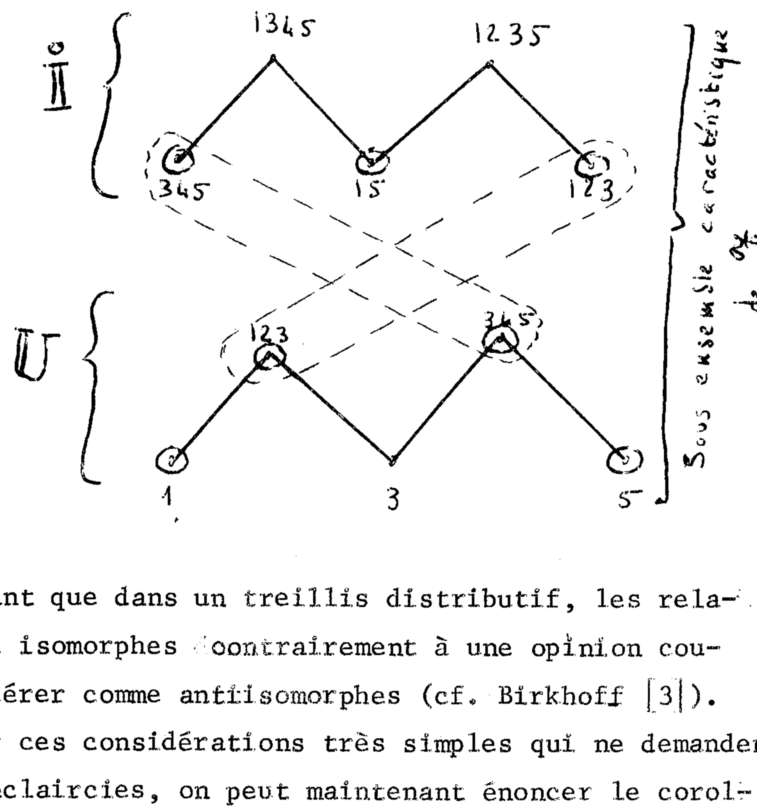
On peut maintenant raffiner ce corollaire en tenant compte du fait que E est fini, on va poser $\mathcal{J}'$ = ensemble des éléments $\cap$-irréductibles de E et $\mathcal{U}'$ = ensemble des éléments U irréductibles de E. Désignons par $\mathbb{I}$ l'ensemble des éléments $\cap$-irréductibles du treillis distributif $\mathcal{T}$ et par $\mathbb{U}$ l'ensemble des éléments U irréductibles de ce même treillis. Les éléments $\hat{\imath}'$ tels que $i' \in \mathcal{J}'$

(*) Le segment $[u, i]$ est l'ensemble des éléments a tels que $u \leq a \leq i$.

correspondent alors biunivoquement aux éléments $\breve{\imath}'$ $\cap$-irréductibles par rapport à $\mathbb{U}$ et les éléments $\complement \breve{u}'$ tels que $u' \in \mathcal{U}'$ correspondent biunivoquement aux éléments $\tilde{u}'$ U-irréductibles par rapport à $\dot{\mathbb{I}}$.

Pour bien comprendre le phénomène, il n'y a qu'à se reporter à la figure 1 où l'on donne, d'une part l'ordonné E constitué par les éléments {1, 2, 3, 4, 5}, l'ensemble $\mathbb{U}$ constitué par les sections {1, 3, 5, 123, 345} et l'ensemble $\dot{\mathbb{I}}$ constitué par les sections {345, 15, 123, 1345, 1235}. Les éléments $\breve{\imath}'$ $\cap$-irréductibles par rapport à $\mathbb{U}$ sont encerclés ainsi que les éléments $\tilde{u}'$ U-irréductibles par rapport à $\dot{\mathbb{I}}$. On constate que ces deux ensembles ont deux éléments communs {123, 345} qui doivent donc appartenir à tout système générateur du treillis distributif.





[Fig. 1]

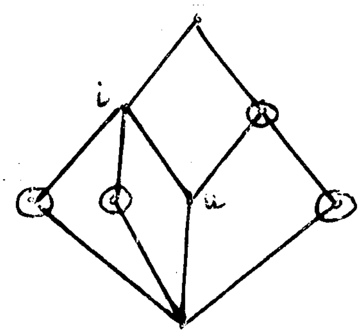
Notons aussi en passant que dans un treillis distributif, les relations d'ordre sur $\mathbb{U}$ et $\dot{\mathbb{I}}$ sont isomorphes contrairement à une opinion courante qui consiste à les considérer comme antiisomorphes (cf. Birkhoff [3]). Nous n'insisterons pas plus sur ces considérations très simples qui ne demandent qu'une bonne figure pour être éclaircies, on peut maintenant énoncer le corollaire plus précis.

Corollaire 2 : "Un sous-ensemble F engendre un treillis distributif fini $\mathcal{T}$ si et seulement si il intersecte tout segment $[\breve{\imath}, \ddot{u}]$ tel que

la borne inférieure $\breve{\imath}$ est un élément $\cap$-irréductible par rapport à l'ensemble $\mathbb{U}$ des éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}$, la borne supérieure $\tilde{u}$ est un élément U-irréductible par rapport à l'ensemble E des éléments $\cap$-irréductibles de $\mathcal{G}$."

Remarque :

Dans un treillis fini quelconque, la condition énoncée dans le corollaire 1 (et également dans le corollaire 2 ou tout autre moins raffiné) pour qu'un système F soit un système générateur est suffisante. Par contre elle n'est pas nécessaire. Dans le treillis représenté par la figure 1, les quatre éléments cerclés constituent un système générateur ; aucun d'entre eux n'est contenu dans le segment $[u,i]$ où u est U irréductible et i irréductible.



[Fig. 1]

Nota : Se reporter au paragraphe (6) du chapitre IV en 2ème partie pour une interprétation de ce corollaire qui ne sera pas utilisé dans les algorithmes décrits à la fin de ce chapitre.

(2) CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UN PREORDRE SOIT UNE INTERSECTION DE PREORDRES DONNES

A) Dans toute cette partie, ainsi que la suivante, nous devrons considérer plusieurs relations de préordre ou d'ordre sur un même ensemble E. Nous leur donnerons des noms distincts et traduirons par la notation $x \leq y\ |\mathcal{O}|$ le fait que le doublet (x,y) vérifie la relation de préordre $\mathcal{O}$. De même nous noterons $(\hat{x}/\mathcal{O})$ ou $(\check{y}/\mathcal{O})$ une section initiale ou finale principale par rapport au préordre .

On dit qu'un préordre $\mathcal{O}'$ en prolonge un autre $\mathcal{O}$ si $x \leq y\ |\mathcal{O}| \Rightarrow x \leq y\ |\mathcal{O}'|$. La relation $\mathcal{O}'$ prolonge $\mathcal{O}$ est une relation d'ordre sur les préordres définis sur le même ensemble E. Cette relation d'ordre induit même une structure de $\cap$-demi treillis, on démontre que l'intersection d'une famille de préordres $\mathcal{O}_i$ est le préordre $\mathcal{O}$ défini par

$$x \leq y\ [\mathcal{O}] \iff \forall i : x \leq y\ [\mathcal{O}_i]$$

L'ensemble des relations d'ordre est un sous $\bigcap$-demi treillis de ce dernier.

B) Les notions de prolongement et d'intersection se traduisent bien en termes de sections. En effet, nous allons démontrer les deux propriétés suivantes :

<u>Propriété 1</u> : "Un préordre $\mathcal{O}'$ prolonge un préordre $\mathcal{O}$ si et seulement si toute section initiale pour $\mathcal{O}'$ est une section initiale pour $\mathcal{O}$."

<u>Propriété 2</u> : "Un préordre $\mathcal{O}$ est l'intersection d'une famille de préordres $\mathcal{O}_i$ si et seulement si l'ensemble des sections initiales principales pour les $\mathcal{O}_i$ constituent un système générateur des sections pour $\mathcal{O}$."

<u>Démonstration de la propriété 1</u> :

Toute section pour $\mathcal{O}'$ est section pour $\mathcal{O}$, car si on considère un élément x qui appartient à une telle section S et un élément $z \leq x\ [\mathcal{O}]$, cet élément appartient à S car $z \leq x\ [\mathcal{O}] \Rightarrow z \leq x\ [\mathcal{O}']$. Il en résulte que en particulier toute section $(\hat{y}/\mathcal{O}')$ est une section pour $\mathcal{O}$.

Réciproquement, si toute section $(\hat{y}/\mathcal{O}')$ est une section pour $\mathcal{O}$, alors la relation $z \leq y\ [\mathcal{O}]$ implique $z \in (\hat{y}/\mathcal{O}')$, ce qui est équivalent à $z \leq y\ [\mathcal{O}']$.

<u>Démonstration de la propriété 2</u> :

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{O}$ est intersection des $\mathcal{O}_i$ si et seulement si pour tout élément x, l'égalité suivante est vérifiée : $(\hat{x}/\mathcal{O}) = \bigcap_i (\hat{x}/\mathcal{O}_i)$. En effet un élément z appartient à $(\hat{x}/\mathcal{O})$ si et seulement si $z \leq x\ [\mathcal{O}]$, ce qui est équivalent à $z \leq x\ [\mathcal{O}_i]$ pour tout i, soit $z \in \bigcap_i (\hat{x}/\mathcal{O}_i)$.

La condition nécessaire découle de cette remarque. En effet, on sait par la propriété 1 que chaque section principale pour un $\mathcal{O}_i$ est une section pour

$\mathcal{O}$ car chaque $\mathcal{O}_i$ prolonge $\mathcal{O}$; d'autre part, les $(\hat{x}/\mathcal{O}_i)$ engendrent les $(\hat{x}/\mathcal{O})$ par intersection ; ils engendrent donc toutes les sections pour $\mathcal{O}$.

Pour démontrer la condition suffisante, il suffit d'établir que pour tout x, $\bigcap_i (\hat{x}/\mathcal{O}_i) = (\hat{x}/\mathcal{O})$. On peut déjà affirmer que l'intersection des $(\hat{x}/\mathcal{O}_i)$ contient $(\hat{x}/\mathcal{O})$ car chaque $(\hat{x}/\mathcal{O}_i)$ contient x. D'autre part, $(\hat{x}/\mathcal{O})$ est intersection de certaines sections principales pour les $\mathcal{O}_i$ (propriétés caractéristiques d'un système générateur des sections initiales, (cf 1-1, corollaire 2), chacune des sections qui compose cette intersection doit contenir x et par conséquent un $(\hat{x}/\mathcal{O}_i)$; cette intersection majore donc $\bigcap_i (\hat{x}/\mathcal{O}_i)$. Ce qui établit l'inclusion inverse.

(3) *CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UN ORDONNE S'IMMERGE DANS UNE PUISSANCE CARTESIENNE DE CHAINES k^n*

Considérons un ensemble ordonné E et une immersion stricte(*) Ψ dans un produit de k chaînes $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$. Soient $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$ les applications de E sur la 1ère, 2ème, ..., kième composante lorsque Ψ est appliqué. Définissons les relations de préordre sur E :

$$x \leq y\ [\mathcal{O}_1] \iff \Psi_1(x) \leq \Psi_1(y)$$
$$x \leq y\ [\mathcal{O}_2] \iff \Psi_2(x) \leq \Psi_2(y)$$

$$x \leq y\ [\mathcal{O}_k] \iff \Psi_k(x) \leq \Psi_k(y)$$

Puisque Ψ est une immersion dans le produit de chaînes, la relation $x \leq y\ [\mathcal{O}]$ sera vérifiée si et seulement si $x \leq y\ [\mathcal{O}_i]$ pour tout i. Cela revient à dire que l'ordre E est l'intersection des préordres $\mathcal{O}_i$.

Chacun des préordres $\mathcal{O}_i$ est un préordre total, ses sections initiales principales forment donc une chaîne de longueur n_i (chaîne en ce sens

(*) Une immersion Ψ d'un ensemble ordonné dans un produit de chaînes $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ est <u>stricte</u> si chaque application composante Ψ_i est surjective.

que deux sections sont toujours comparables par inclusion). En appliquant la propriété 2, on voit donc que le treillis des sections initiales de E est engendré par les chaînes de longueurs respectives $n_1, n_2, \ldots, n_k$; mais il faut remarquer que dans chacune de ces k chaînes figure la section égale à E tout entier (cette section est donnée à chaque fois par un des éléments maximaux du préordre total), cette section peut être retirée de tout système générateur sans qu'il perde pour cela sa propriété, il en résulte que le treillis des sections de E possède un système générateur couvert par k chaînes de longueurs $n_{1-1}, n_{2-1}, \ldots, n_{k-1}$.

Réciproquement, supposons que le treillis des sections possède cette propriété. Considérons une des chaînes Γ_i de longueur n_{i-1}, numérotons les sections qu'elle contient de 1 à n-1, et déterminons l'application Ψ_i de E dans $[1, n]$ définie par $\Psi_i(x) = n$ si x n'appartient à aucune section de Γ_i, $\Psi_i(x)$ = numéro de la section la plus basse dans Γ_i qui contient x. Il est immédiat que les sections du préordre $\mathcal{O}_i$ défini par $x \leq y\ [\mathcal{O}_i] \iff \Psi_i(x) \leq \Psi_i(y)$ sont les sections de Γ_i auxquelles on a ajouté la section E. Faisons de même pour toutes les chaînes qui couvrent le système générateur donné, on détermine ainsi k applications $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$ dans des chaines $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Puisque l'ensemble des sections considérées est un système générateur, l'intersection des préordres $\mathcal{O}_i$ engendre $\mathcal{O}$, il en résulte que l'application $x \to (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_k(x))$ est une immersion dans $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.

D'où le <u>théorème</u> :

"Un ensemble ordonné E s'immerge strictement dans un produit de k chaînes $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ si et seulement si il existe un système générateur du treillis de ses sections couvert par k chaînes de longueurs respectives $n_{1-1}, n_{2-1}, \ldots, n_{k-1}$."

<u>Corollaire 1</u> : "On peut immerger un ensemble ordonné dans une puissance cartésienne d'ordre k d'une chaîne de longueur n si et seulement si il existe un système générateur de ses sections couvert par au plus k chaînes de longueur $\leq n-1$."

<u>Corollaire 2</u> : "On peut immerger un ensemble ordonné dans une puissance cartésienne d'ordre k de la chaîne $\mathbb{N}$ si et seulement si il existe un système générateur de ses sections couvert par au plus k chaînes."

<u>Corollaire 3</u> : "On peut immerger un ensemble ordonné dans un treillis de Boole de dimension k si et seulement si il existe un système générateur de cardinal inférieur ou égal à k."

(4) *DECOMPOSITION D'UN ORDRE EN ORDRES TOTAUX - DIMENSION*

Etant donné un ensemble fini E, un ensemble $\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ d'ordres totaux réalise une <u>décomposition</u> d'un ordre $\mathcal{O}$, si $\mathcal{O}$ est égal à l'intersection des T_i. Le minimum d'ordres totaux nécessaire pour réaliser cette décomposition est appelé <u>dimension</u> de $\mathcal{O}$.

Supposons que l'on connaisse une telle décomposition : les sections initiales pour un ordre total T_i constituent une chaîne maximale Γ_i du treillis $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ des sections initiales pour $\mathcal{O}$. De plus il découle de la propriété 2 que les Γ_i engendrent $\mathcal{S}(\mathcal{O})$.

Réciproquement, si on considère un système générateur quelconque de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ couvert par k chaînes, en prolongeant ces chaînes en k chaînes maximales, on peut associer k ordres totaux $T_1, T_2, \ldots T_k$ qui réalisent une décomposition de $\mathcal{O}$.

On obtient donc le théorème :

<u>Théorème</u> : "La dimension d'un ordre $\mathcal{O}$ est égale au minimum de chaînes nécessaires pour couvrir un système générateur du treillis de ses sections initiales."

En rapprochant ce théorème du corollaire 2 établi au pargraphe précédent, on obtient le corollaire :

"Un ordre $\mathcal{O}$ est de dimension k si et seulement si il peut être immergé dans $\mathbb{N}^k$."

Note : Pour l'étude de la dimension, cf. [29] et [31].

(5) ALGORITHMES D'IMMERSION (EXEMPLE)

Il résulte des paragraphes précédents que les problèmes d'immersion d'un ensemble ordonné dans un produit de chaînes, ou de décomposition en ordres totaux, peuvent se traiter par la recherche de systèmes générateurs minimaux du treillis de ses sections initiales. Une méthode de recherche est suggérée par le théorème 1, elle consiste à dresser la liste de toutes les sections initiales comprises dans un couple $[\hat{\mathrm{I}}', \complement \check{u}']$ et ensuite à chercher un système de représentants minimaux.

A) *Recherche des éléments ∪ irréductibles (et ∩-irréductibles)*

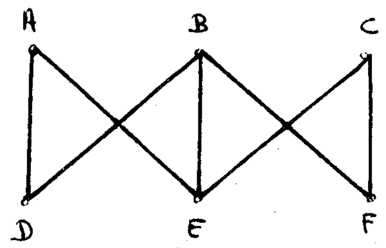
Il faudra se donner l'ensemble ordonné par l'ensemble de ses sections initiales principales et de ses sections finales principales. Si l'on ne possède qu'une seule sorte de sections, le passage à l'autre est immédiat ; dans chaque section, on distinguera le sommet en le soulignant.

Exemple : ξ = (A, B, C, D, E, F)

Sections initiales	Sections finales
* <u>A</u> D E	* <u>A</u>
* <u>B</u> D E F	<u>B</u>
* <u>C</u> E F	* <u>C</u>
* <u>D</u>	* <u>D</u> A B
<u>E</u>	* <u>E</u> A B C
* <u>F</u>	* <u>F</u> B C

Un élément i est $\cap$-irréductible si la section $\hat{\imath}$ n'est pas intersection d'autres sections principales. Pour chaque $\hat{\imath}$, on considère donc l'ensemble des sections qui le contiennent proprement et on regarde si leur intersection est égale à $\hat{\imath}$. On opère de même pour les sections finales qui permettent de déterminer les éléments U irréductibles. Ces éléments U ou $\cap$-irréductibles sont précédés d'un * dans chaque liste.

Si on opère le calcul à la main, on se donnera l'ensemble ordonné par son diagramme de Hasse (i.e. la relation de couverture). On peut alors déterminer plus rapidement les irréductibles. En effet, un élément est U irréductibles si et seulement si il n'est pas borne sup des éléments qu'il couvre, cela arrive si et seulement si ces mêmes éléments sont majorés par deux éléments non comparable. On regarde sur la figure si ce fait se produit ou non. Cette méthode est plus rapide à la main, mais elle n'est que "visuelle" et ne peut pas être programmée. La figure 2 représente le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné dont on est parti.



[Fig. 2]

B) *Détermination des couples (i, u) utiles*

Si deux couples (i, u) et (i', u') sont tels que $\hat{\imath}' \subseteq \hat{\imath} \subseteq \complement\check{u} \subseteq \complement\check{u}'$, le second couple sera inutile en ce sens que si une partie $P_i \in F$ est incluse entre $\hat{\imath}$ et $\complement\check{u}$, alors elle le sera aussi entre $\hat{\imath}'$ et $\complement\check{u}'$; les conditions du théorème ne sont donc pas à vérifier pour le couple extrême. Pour éliminer ces couples, on dressera un tableau représentatif de la relation $\hat{\imath} \subseteq \complement\check{u}$. On balaiera d'abord ce tableau par lignes pour ne conserver dans chacune d'elles que les $\complement\check{u}$ minimaux, ensuite on balaiera par colonne le tableau restant pour ne conserver que les $\hat{\imath}$ maximaux.

La figure 3 représente ce tableau pour l'exemple considéré, les croix simplement ou doublement cerclées correspondent au premier balayage par ligne, les croix doublement cerclées au second par colonne.

[Fig. 3]

$\hat{\imath}$ \ $\complement\check{u}$	BCDEF	ABDEF	CEF	DF	ADE
ADE		x			x
BDEF	x	x			
CEF	x		x		
D	x	x		x	x
F	x	x	x	x	

C) *Recherche des systèmes générateurs minimaux*

Pour chaque couple (i, u) restant, il faut faut dénombrer les sections intiales comprises entre $\hat{\imath}$ et $\complement\check{u}$. Décrivons un procédé permettant d'arriver à ce dénombrement. On dresse une liste de sections de la façon suivante :

Initialement, la seule section figurant dans la liste est $\complement\check{u}$. On considère alors tous les éléments maximaux de $\complement\check{u}$ n'appartenant pas à $\hat{\imath}$, et on ajoute à la liste les sections provenant de $\complement\check{u}$ auquel on a soustrait un de ces éléments maximaux. On passe alors à la section suivante de la liste, et on répète le même procédé ; toute fois on n'ajoute en queue de liste une section que si elle ne figure pas déjà dans cette liste. Le processus s'arrête dès qu'il n'y a pas de section suivante dans la liste, la dernière section rencontrée est d'ailleurs $\hat{\imath}$. Il est facile de voir que ce procédé énumère effectivement toutes les sections comprises entre $\hat{\imath}$ et $\complement\check{u}$.

Pour l'exemple dont nous sommes partis, il faut chercher les sections incluses dans les couples :

[ADE, ADE] ; [BDEF, BCDEF] ; [BDEF, ABDEF] ;
[CEF, CEF] ; [D, DF] ; [F, DF]

Dans ce cas, il y a au plus une ou deux sections par couple. Les sections figurant seules dans un couple sont obligatoires dans tout système générateur.

Pour le reste, on procède de la façon habituelle pour rechercher les ensembles de représentants minimaux. Dans ce cas on trouve en plus des section obligatoires ADE et CEF, les systèmes minimaux :

$$\left.\begin{cases}\{DF,\ BDEF\}\\ \{DF,\ BCDEF,\ ABDEF\}\\ \{D,\ F,\ BDEF\}\\ \{D,\ F,\ BCDEF,\ ABDEF\}\end{cases}\right\} \cup \{ADE,\ CEF\}$$

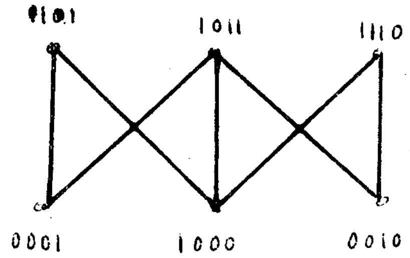
Si on cherchait seulement les systèmes générateurs de cardinal minimal, on pourrait appliquer les méthodes de Quine--Mac Cluskey [ ]. Dans l'exemple qui nous intéresse, on supprimerait effectivement les sections BCDEF et ABDEF qui figurent partout où figure BDEF, ainsi que D et F qui figurent partout où figure DF, on obtiendrait ainsi le seul système générateur de cardinal 4.

D) *Immersion minimale dans 2^k, $\mathbb{N}^k$, décomposition en ordres totaux*

Pour l'immersion minimale dans 2^k, il faudra considérer le seul système générateur minimal de cardinal 4 ; soit :

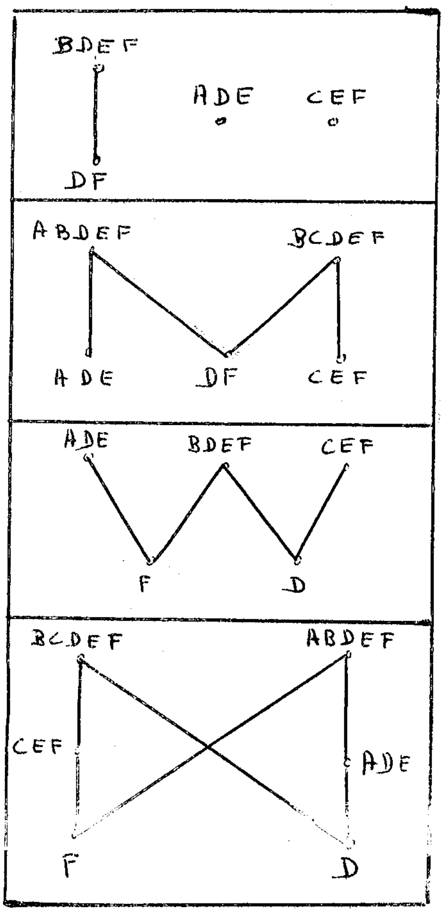
DF, BDEF, ADE, CEF.

On associe 4 variables binaires $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ à chaque élément, la variable $\alpha_i = 1$ si et seulement si l'élément figure dans la ième composante.
La figure 4 montre le codage ainsi obtenu.



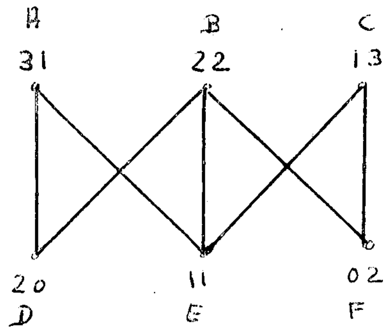
[Fig. 4]

Par contre, pour l'immersion minimale dans $\mathbb{N}^k$, il faut trouver un système générateur couvert par un minimum de chaînes. La figure 5 représente les diagrammes de Hasse de chacun des quatre systèmes générateurs.



[Fig. 5]

On voit que c'est le système générateur de cardinal maximal qui est couvert par le minimum de chaînes ; on obtient donc un codage dans $\mathbb{N}^2$. Plus précisément, puisqu'il y a 3 éléments dans chacune des deux chaînes, on obtient un codage dans 4^2. Considérons par exemple la chaîne F, CEF, BCDEF ; on lui associe la variable α_1 et on pose $\alpha_1 = 0$ pour F, $\alpha_1 = 1$ pour CE, $\alpha_1 = 2$ pour BD et $\alpha_1 = 3$ pour A. On procède de même avec une seconde variable α_2 pour la chaîne D, ADE, ABDEF. La figure 6 montre le codage ainsi réalisé.



[Fig. 6]

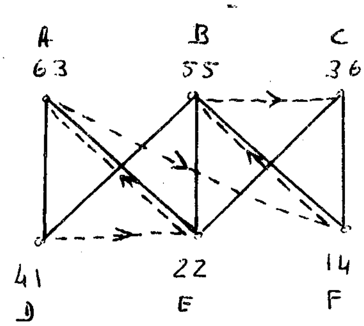
Enfin pour réaliser une décomposition minimale en ordres totaux, il suffit de prolonger chacune des deux chaînes trouvées en chaînes maximales. Soit :

F, EF, CEF, CDEF, BCDEF, ABCDEF,

D, DE, ADE, ADEF, ABDEF, ABCDEF.

Ces prolongements en chaînes maximales sont d'ailleurs uniques (particularité de l'exemple), il existe donc une seule décomposition en deux ordres totaux. Soit :

$F < E < C < D < B < A$ et $D < E < A < F < B < C$.



[Fig. 7]

Cela revient également à effectuer deux numérotations de 1 à 6 sur les 6 éléments. |cf. fig. 7|.

Ce problème de dimension d'un ensem~~ble~~ ordonné sera étendu au cas des relations binaires quelconques dans le chapitre IV, 2ème partie. Signalons également que Monsieur Ducamp [12] a décrit une méthode de décomposition minimale en ordres totaux basée sur la théorie des graphes.

DEUXIEME PARTIE

REPRESENTATION DES RELATIONS BINAIRES

Chapitre I : Génération d'une relation binaire.

Chapitre II : Homomorphisme d'une relation binaire dans un treillis complet.

Chapitre III : Relations en escalier.

Chapitre IV : Codage d'une relation binaire dans un produit de chaînes.

CHAPITRE I

GENERATION D'UNE RELATION BINAIRE

Nous allons définir dans ce chapitre certains concepts de base pour une étude comparée des relations binaires quelconques et des relations d'ordre.

Dans les deux premiers paragraphes, on fixera les notations utilisées pour l'étude des relations binaires, et on définira les notions de sous relation et d'homomorphisme de relations. Ces deux dernières notions qui sont définies d'une façon générale pour les relations n-aires [19] seront rappelées au paragraphe 3 et comparées à celles que nous adoptons.

Nous rappellerons dans le quatrième paragraphe les résultats relatifs aux correspondances de Galois ([3] et [25]) dont l'étude se fait seulement dans le cas particulier des relations binaires. Cette notion de correspondance de Galois permet d'introduire dans les paragraphes 5 à 9 le concept de génération d'une relation binaire, généralisation du concept de génération d'une relation d'ordre -cf. paragraphe 6-. Le paragraphe 10 donne une application directe de ce concept au problème de recherche des pavés pleins maximaux d'une relation binaire.

(1) DEFINITIONS GENERALES RELATIVES AUX RELATIONS BINAIRES

Une relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$ est définie par la donnée d'un ensemble objet (ou support gauche) E_1, d'un ensemble but (ou support droit) E_2 et d'un sous-ensemble ρ du produit cartésien $E_1 \times E_2$ appelé domaine de vérification de la relation. Tout doublet (e_1, e_2) qui appartient au domaine de vérification est dit vérifier la relation ; très souvent on crée un symbole spécial σ, appelé symbole relationnel, et on note $e_1 \sigma e_2$ le fait que (e_1, e_2) vérifie la relation(*). Pour ne pas alourdir les notations, nous utiliserons comme symbole relationnel le symbole ρ qui représente le domaine de vérification de la relation ; ainsi on dira que $e_1 \rho e_2$ est vérifié pour signifier que $(e_1, e_2) \in \rho$.

Lorsque les ensembles objet et but d'une relation binaire sont confondus en un même ensemble E, on dira que la relation est interne à E. Une relation $[E_1, \rho, E_2]$ pour laquelle $e_1 \rho e_2$ est toujours vérifié sera appelée une relation pleine ; une relation pour laquelle $e_1 \rho e_2$ n'est jamais vérifié sera dite vide. Par exemple, si $E_1 = \emptyset$ ou $E_2 = \emptyset$, $[E_1, \rho, E_2]$ est la relation vide car $E_1 \times E_2$ est vide.

La relation duale d'une relation $[E_1, \rho, E_2]$ est la relation $[E_2, \rho^*, E_1]$ telle que $e_2 \rho^* e_1$ soit vérifié si et seulement si $e_1 \rho e_2$ l'est ; sa complémentaire est la relation $[E_1, \not\rho, E_2]$ telle que $e_1 \not\rho e_2$ est vérifié si et seulement si $e_1 \rho e_2$ ne l'est pas.

Très souvent une relation $[E_1, \rho, E_2]$ sera représentée par un seul symbole $\mathcal{R}$, on notera alors la duale $\mathcal{R}^*$ et la complémentaire $\not\mathcal{R}$. Il est immédiat

(*) Exemple : $e_1 \leq e_2$, $e_1 = e_2$, $e_1 \equiv e_2$ ...

que l'on a les propriétés :

$$(\mathcal{R}^*)^* = \mathcal{R} \; ; \; \not(\not\mathcal{R}) = \mathcal{R} \; ; \; (\not\mathcal{R})^* = \not(\mathcal{R}^*)$$

Par exemple, si on considère une relation $\mathcal{R} = [E, \leq, E]$ où $\leq$ est un préordre sur E, on a :

$$\mathcal{R}^* = [E, \geq, E] \; ; \; \not\mathcal{R} = [E, \not\leq, E] \; ; \; \not\mathcal{R}^* = [E, \not\geq, E].$$

Etant donné une relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$ et un pavé $P_1 \times P_2 \subseteq E_1 \times E_2$, la relation $[P_1, \rho', P_2]$ définie par $\rho' = \rho\, P_1 \times P_2$ sera appelée une <u>sous relation</u> de $[E_1, \rho, E_2]$. Compte tenu du fait que ρ' est déterminé par ρ, P_1 et P_2, on notera souvent une sous relation $[P_1, \rho, P_2]$ en utilisant le même symbole relationnel ρ.

Dans le cas où E_1 et E_2 sont finis, on pourra représenter graphiquement une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ par un tableau rectangulaire dont les lignes seront indicées par E_1 et les colonnes par E_2. Une case du tableau contiendra une croix si ses indices e_1 et e_2 sont tels que $e_1 \rho e_2$ soit vérifié, sinon la case restera vide [cf. fig. 1].

	1	2	3	4	5
A	x		x		
B		x	x	x	
C	x		x		x
D		x		x	
E	x	x	x		x

$E_1 = \{A, B, C, D, E\}$

$E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

[Fig. 1]

(2) HOMOMORPHISMES DE RELATIONS BINAIRES

A) Applications décomposables

Etant donnés deux produits cartésiens d'ensembles, $\prod_I E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et $\prod_I E'_i = E'_1 \times E'_2 \times \ldots \times E'_n$, indicés sur le même ensemble $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, une application $H = \prod_I E_i \to \prod_I F_i$ est dite <u>décomposable</u>

si il existe une famille d'applications indicées sur I, $H_i : E_i \to E'_i$, vérifiant la condition:

$$\forall (e_1, e_2, \ldots, e_n) \prod_I E_i, H(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (H_1(e_1), H_2(e_2), \ldots, H_n(e_n)).$$

Les applications H_i seront appelées les <u>facteurs</u> de H, et on dira que H est le <u>produit tensoriel</u> de ces facteurs ; on note alors $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ ou $H = \prod H_i$. Rappelons que si aucun des ensembles E_i n'est vide, la décomposition en facteurs d'une application décomposable est unique.

B) *<u>Homomorphisme</u>*

Etant données deux relations binaires $[E_1, \rho, E_2]$ et $[E'_1, \rho', E'_2]$, un <u>homomorphisme</u> $H_1 \times H_2 : [E_1, \rho, E_2] \to [E'_1, \rho', E'_2]$ est une application décomposable de $E_1 \times E_2$ dans $E'_1 \times E'_2$ vérifiant la condition :

$$\forall (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2, \quad e_1 \rho e_2 \Longleftrightarrow H_1(e_1)\rho' H_2(e_2).$$

Lorsque H_1 et H_2 seront surjectives on dira également que $H_1 \times H_2$ est un <u>épimorphisme</u>, si H_1 et H_2 sont injectives on dira que $H_1 \times H_2$ est une <u>immersion</u>, enfin si H_1 et H_2 sont bijectives on dira que $H_1 \times H_2$ est un <u>isomorphisme</u>.

C) *<u>Congruences</u>*

Une congruence $\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ sur une relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$ est constituée par une partition $\overline{\omega}_1$ de l'ensemble objet E_1, et une partition $\overline{\omega}_2$ de l'ensemble but E_2 vérifiant la propriété :

$$\forall (e_1, e_2) \text{ et } (e'_1, e'_2) \in E_1 \times E_2 : e_1 \rho e_2,\ e_1 \equiv e'_1 [\overline{\omega}_1],\ e_2 \equiv e'_2 [\overline{\omega}_2] \Rightarrow e'_1 \rho e'_2$$

A partir d'une telle congruence, on définira la <u>relation binaire quotient</u> $\left[E_1/\overline{\omega}_1,\ \rho/\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2,\ E_2/\overline{\omega}_2\right]$, où $\rho/\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ est vérifié entre deux classes si et seulement si ρ est vérifié entre deux éléments quelconques pris dans ces classes. L'application décomposable $H_1 \times H_2 : E_1 \times E_2 \to E_1/\overline{\omega}_1 \times E_2/\overline{\omega}_2$ qui associe aux éléments de E_1 et E_2 leurs classes de congruences dans $E_1/\overline{\omega}_1$ et $E_2/\overline{\omega}_2$ respectivement est un homomorphisme de la relation binaire donnée dans son quotient. Réciproquement, si on se donne un homomorphisme quelconque $H_1 \times H_2$: $\left[E_1,\ \rho,\ E_2\right] \to \left[E'_1,\ \rho',\ E'_2\right]$, les partitions canoniques $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ définies par les applications H_1 et H_2 définissent une congruence $\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ sur la relation binaire $\left[E_1,\ \rho,\ E_2\right]$; de plus la sous relation $\left[H_1(E_1),\ \rho',\ H_2(E_2)\right]$ est isomorphe à la relation quotient $\left[E_1/\overline{\omega}_1,\ \rho/\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2,\ E_2/\overline{\omega}_2\right]$.

D) *Relations binaires atomiques*

Si on considère une famille $(\overline{\omega}_1^i \times \overline{\omega}_1^i)$, $i \in I$, de congruences sur une relation binaire $\left[E_1,\ \rho,\ E_2\right]$, les partitions $\overline{\omega}_1 = \bigvee_I \overline{\omega}_1^i$ et $\overline{\omega}_2 = \bigvee_I \overline{\omega}_2^i$ définissent manifestement une congruence $\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ sur cette relation ; il existe donc une plus grande congruence $\overline{\omega}_1^M \times \overline{\omega}_2^M$ sur cette relation binaire. Si les partitions $\overline{\omega}_1^M$ et $\overline{\omega}_2^M$ sont toutes deux nulles, on dira que la relation binaire $\left[E_1,\ \rho,\ E_2\right]$ est <u>atomique</u>. Dans tous les cas, on constate que le quotient d'une relation binaire quelconque par sa congruence maximale est une relation atomique.

<u>Exemple</u> : Si $[E,\ \leq,\ E]$ est un préordre défini sur un ensemble E, en désignant par $\overline{\omega}$ la partition d'isovalence (cf. rappels) associée à ce préordre, on voit que $\overline{\omega} \times \overline{\omega}$ est la plus grande congruence définie sur la relation $[E,\ \leq,\ E]$. Le quotient de cettre relation par $\overline{\omega} \times \overline{\omega}$ est la relation d'ordre induite sur les classes d'isovalence. Il résulte de cet exemple qu'un préordre est atomique si et seulement si c'est une relation d'ordre.

E) *Relations binaires semblables*

Deux relations binaires $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ seront dites <u>semblables</u> si il existe deux épimorphismes $H'_1 \times H'_2$ et $H''_1 \times H''_2$ de $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ sur une même relation binaire $\mathcal{R}$. Cette définition revient à dire que les quotients de $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ par leurs congruences maximales sont isomorphes, la relation de similitude est donc transitive.

(3) ETUDE COMPAREE DES RELATIONS BINAIRES ET DES RELATIONS N-AIRES

A) *Définition générale d'une relation n-aire* : (cf. |19|)

Une relation n-aire, $\mathcal{R}$, est définie par un sous-ensemble <u>-domaine de vérification-</u> d'un produit cartésien de n ensembles, $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. On note $\mathcal{R}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ le fait qu'un n-uplet $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ appartient au domaine de vérification.

A une relation n-aire on attache une relation d'équivalence $\mathcal{I}d$ sur l'ensemble $I = [1, n]$ qui indice les facteurs du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Cette équivalence appelée <u>identité attachée à $\mathcal{R}$</u> ne pourra pas être vérifiée entre deux indices u et v si $E_u \neq E_v$; par contre, on n'exigera pas que réciproquement $E_u = E_v$ implique $u \,\mathcal{I}d\, v$.

B) *Définition d'un homomorphisme*

Soient deux relations n-aires $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ définies sur les produits cartésiens $E'_1 \times E'_2 \times \dots \times E'_n$ et $E''_1 \times E''_2 \times \dots \times E''_n$ indicés sur un même ensemble $I = [1, n]$. La définition d'un homomorphisme de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}''$ exige que les identités attachées à $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ soient une même relation $\mathcal{I}d$. On considère alors un sous-ensemble $I' \subseteq I$ et on dit qu'une application décomposable $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n : E'_1 \times E'_2 \times \dots \times E'_n \to E''_1 \times E''_2 \times \dots \times E''_n$ est un <u>homomorphisme privilégié par rapport à I'</u> si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $u \mathcal{J}d\, v \Rightarrow H_u = H_v$;

(2) $\mathcal{R}'(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \Rightarrow \mathcal{R}''(H_1(e'_1), H_2(e'_2), \ldots, H_n(e'_n))$;

(3) Si on se donne un n-uplet $(e''_1, e''_2, \ldots, e''_n)$ vérifiant $\mathcal{R}''$ et pour chaque indice $i' \in I'$ un élément quelconque $e_{i'} \in H_{i'}^{-1}(e''_{i'})$, on peut trouver pour chaque indice i I' un élément e'_i $H_i^{-1}(e''_i)$ de telle façon que le n-uplet $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ ainsi constitué vérifie '.

Dans la définition que nous donnée en (1) d'une relation binaire, nous n'avons pas considéré d'identité attachée, mais le fait que nous n'imposons pas de condition particulière aux composantes H_1 et H_2 d'un homomorphisme $H_1 \times H_2$ exprime implicitement que cette identité est l'équivalence nulle. Ainsi la condition (1) d'un homomorphisme est automatiquement vérifiée.

La condition $e_1 \rho e_2 \Longleftrightarrow H_1(e_1)\rho' H_2(e_2)$ -cf. (2) B)- implique la condition (2) dans le sens $\Rightarrow$ et implique la condition (3) dans le sens $\Leftarrow$ en sous entendant que l'homomorphisme est privilégié par rapport aux deux indices.

Dans tous les chapitres qui suivent, nous ne rappellerons pas les caractéristiques des homomorphismes de relations binaires ainsi définis au paragraphe (2) B).

C) *Sous-relations*

Considérons une relation n-aire $\mathcal{R}$ sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ à laquelle est attachée l'identité $\mathcal{J}d$ sur $I = [1, n]$. Une sous-relation $\mathcal{R}'$ est définie sur un produit cartésien $E'_1 \times E'_2 \times \ldots \times E'_n$ tel que :

(1) $\forall i \in I,\ E'_i \subseteq E_i$;

(2) $u \mathcal{J}d\, v \Rightarrow E'_u = E'_v$.

L'identité $\mathcal{J}d$ attachée à $\mathcal{R}'$ est la même que celle qui est attachée à $\mathcal{R}$, enfin on exige que pour tout n-uplet $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \in E'_1 \times E'_2 \times \ldots \times E'_n$,

$\mathcal{R}'(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ soit vérifié si et seulement si $\mathcal{R}(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est vérifié.

On voit que les sous-relations définies au paragraphe (1) sont des cas particuliers, et que l'on suppose implicitemant que $\mathcal{U}$ est l'équivalence nulle. Cette remarque a son importance dans le cas particulier des sous-relations d'ordre -cf. chapitre II- où l'on raisonne comme si la composante gauche de l'ordre différait de la composante droite.

(4) *CORRESPONDANCES DE GALOIS ASSOCIEES A UNE RELATION BINAIRE*

Etant donnée une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$, les correspondances $\rho_{12} : \mathcal{P}(E_1) \to \mathcal{P}(E_2)$ et $\rho_{21} : \mathcal{P}(E_2) \to \mathcal{P}(E_1)$ définies par $\rho_{12}(P_1)$ = ensemble de tous les éléments de E_2 en relation avec tous les éléments de P_1, $\rho_{21}(P_2)$ = ensemble de tous les éléments de E_1 en relation avec tous les éléments de P_2, sont appelées <u>correspondances de Galois</u> associées à la relation binaire. On note que pour la partie vide, on obtient $\rho_{12}(\emptyset) = E_2$ et $\rho_{21}(\emptyset) = E_1$.

Ces correspondances qui peuvent être définies d'une façon générale entre deux treillis complets (Ore [25]) possèdent des propriétés remarquables que nous allons reprendre dans ce paragraphe en précisant la terminologie qui sera adoptée.

<u>Propriété 1</u> : "Pour toute famille $\{P_1^i\}$ de sous-ensembles de E_1, et toute famille $\{P_2^i\}$ de sous-ensembles de E_2, on a les égalités :

$$\rho_{12}(\bigcup_i P_1^i) = \bigcap_i \rho_{12}(P_1^i) \; ; \; \rho_{21}(\bigcup_i P_2^i) = \bigcap_i \rho_{21}(P_2^i)."$$

Cette propriété implique à la fois que ρ_{12} et ρ_{21} sont décroissants, et que les images Γ_2 et Γ_1 de $\mathcal{P}(E_1)$ et $\mathcal{P}(E_2)$ par ρ_{12} et ρ_{21} sont des familles de Moore sur $\mathcal{P}(E_2)$ et $\mathcal{P}(E_1)$. Les sous-ensembles appartenant à ces familles de Moore seront appelés <u>clôtures gauches</u> (pour Γ_1) <u>et clôtures droites</u> (pour Γ_2).

En particulier, pour tout élément $a_2 \in E_2$, $\rho_{21}(a_2)$ sera appelée clôture gauche principale de sommet a_2, et pour tout élément $a_1 \in E_1$, $\rho_{12}(a_1)$ sera appelée clôture droite principale de sommet a_1. Ces clôtures principales jouent un rôle particulier en ce sens qu'elles engendrent par intersection les familles de Moore Γ_1 et Γ_2.

Enfin, on constate aisément que les sommets d'une même clôture principale sont tous les éléments d'une plus grande classe de congruence ; par conséquent, toute clôture principale d'une relation atomique a un seul sommet.

Propriété 2 : "Les fermetures associées aux familles de Moore Γ_1 et Γ_2 sont les applications $\rho_{11} = \rho_{21} o \rho_{12}$ et $\rho_{22} = \rho_{12} o \rho_{21}$."

Très souvent, la clôture ρ_{11}(P1) d'un sous-ensemble $P_1 - E_1$ sera notée $\overline{P_1}$; de même on utilisera la notation $\overline{P_2}$. En particulier, on distinguera les clôtures atomiques $\overline{a_1}$ et $\overline{a_2}$, clôtures de parties à un élément ; a_1 et a_2 seront appelées centres de $\overline{a_1}$ et $\overline{a_2}$. Les clôtures atomiques jouent un rôle particulier en ce sens que touteclôture est union de clôtures atomiques ; elles constituent donc des systèmes U générateurs des familles de Moore Γ_1 et Γ_2. Enfin, on constate comme plus haut que les centres d'une même clôture atomique sont tous les éléments d'une plus grance classe de congruence ; par conséquent, toute clôture atomique d'une relation binaire atomique a un seul centre.

Propriété 3 : "Pour tout sous-ensemble $P_1 \subseteq E_1$, et tout sous-ensemble $P_2 \subseteq E_2$, on a les égalités :

$$\rho_{12}(P_1) = \rho_{12}(\overline{P}_1) = \overline{\rho_{12}(P_1)} = \overline{\rho_{12}(\overline{P}_1)} \; ;$$
$$\rho_{21}(P_2) = \rho_{21}(\overline{P}_2) = \overline{\rho_{21}(P_2)} = \overline{\rho_{21}(\overline{P}_2)}."$$

Les égalités $\rho_{12}(P_1) = \overline{\rho_{12}(P_1)}$ et $\rho_{21}(P_2) = \overline{\rho_{21}(P_2)}$ ne font que retraduire le fait que ρ_{12} et ρ_{21} sont des applications sur Γ_2 et Γ_1. Les égalités

$\rho_{12}(\overline{P}_1) = \overline{\rho_{12}(\overline{P}_1)}$ et $\rho_{21}(\overline{P}_2) = \overline{\rho_{21}(\overline{P}_2)}$ montrent que ρ_{12} et ρ_{21} sont deux anti-isomorphismes (ρ_{12} et ρ_{21} sont décroissants) inverses entre Γ_1 et Γ_2.

La notion de pavé plein maximal permet d'interpréter cette liaison entre parties closes. Un pavé $P_1 \times P_2$ d'une relation $[E_1, \rho, E_2]$ est dit <u>plein</u> si la sous-relation $[P_1, \rho, P_2]$ est pleine. Cela revient à affirmer que $P_1 \subseteq \rho_{21}(P_2)$ et $P_2 \subseteq \rho_{12}(P_1)$. En particulier, si $\overline{P}_1$ et $\overline{P}_2$ sont deux parties closes liées par la relation, $\overline{P}_1 \times \overline{P}_2$ est un pavé plein <u>maximal</u>, en ce sens qu'il ne peut être inclus dans aucun autre pavé plein. Réciproquement, tout pavé plein maximal doit être le produit cartésien de deux parties closes liées par la relation. La liaison étant bijective, tout pavé plein maximal est déterminé par une seule de ses composantes.

On dira qu'un pavé plein maximal est <u>principal</u> si il est égal au produit cartésien $\rho_{12}(a_2) \times \rho_{21}(a_1)$ de deux clôtures principales. Pour que cette éventualité se produise, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition $\overline{a_1} = \rho_{12}(a_2)$, ou la condition équivalente $\overline{a_2} = \rho_{21}(a_1)$; ce qui revient à dire qu'une clôture principale est confondue avec une clôture atomique. Un pavé principal est donc également de la forme $\overline{a_1} \times \overline{a_2}$. Le doublet (a_1, a_2) sera appelé <u>sommet</u> du pavé principal $\overline{a_1} \times \overline{a_2}$. Si la relation est atomique, ce sommet est unique et on peut définir une bijection partielle $a_1 \longleftrightarrow a_2$, appelée <u>bijection</u> principale, définie si et seulement si $\overline{a_1} = \rho_{21}(a_2)$ $[$ou $\overline{a_2} = \rho_{12}(a_1)]$.

Cette bijection principale peut ne jamais être définie ; c'est le cas pour la relation représentée par la figure 2, où les $\overline{a_1}$ sont égaux à $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$, et les $\rho_{12}(a_2)$ à $\{12\}$, $\{23\}$ et $\{13\}$.

	1'	2'	3'
1		x	x
2	x		x
3	x	x	

[Fig. 2]

(5) SOUS-ENSEMBLES GENERATEURS GAUCHES (RESP. DROITS) D'UNE RELATION

Soit une relation $[E_1, \rho, E_2]$, un sous-ensemble $\mathcal{G}_1 \subseteq E_1$ est générateur gauche si toute clôture appartenant à Γ_1 est borne supérieure de clôtures atomiques dont le centre appartient à $\mathcal{G}_1$. Compte tenu de la dualité entre les bornes sup à gauche et les intersections à droite, cela revient aussi à dire que toute clôture appartenant à Γ_2 est intersection de clôtures principales droites dont le sommet appartient à $\mathcal{G}_1$, ou encore que toute clôture appartenant à Γ_2 est image par la correspondance de Galois ρ_{12} d'un sous-ensemble inclus dans $\mathcal{G}_1$. Remarquons également que $\mathcal{G}_1$ est générateur gauche si et seulement si toute clôture atomique gauche (resp. principale droite) dont le centre (resp. sommet) appartient à $\mathcal{G}_1$; cette dernière propriété tient au fait que l'ensemble de toutes les clôtures principales droites constituent un système $\bigcap$ générateur de la famille de Moore Γ_2.

On peut définir de la même façon un système générateur droit, et établir les mêmes propriétés en remplaçant droit par gauche, et vice versa.

(6) INTERPRETATION DES SYSTEMES GENERATEURS DANS LE CAS DES RELATIONS D'ORDRE

A) *Propriétés d'une relation d'ordre*

Etant donné un ordre $\leq$ sur un ensemble E, interprétons les propriétés des correspondances de Galois associées à $\mathcal{R} = [E, \leq, E]$.

Dénotons par ρ le symbole relationnel attaché à $[E, \leq, E]$. Pour tout élément $e \in E$, $\rho_{12}(e)$ est l'ensemble des éléments qui majorent e, i.e. la section finale principale $\check{e}$; de même $\rho_{21}(e)$ est égal à la section initiale principale $\hat{e}$. Les deux égalités $\rho_{12}(e) = \check{e}$ et $\rho_{21}(e) = \hat{e}$ justifient les termes de clôtures principales affectés à $\rho_{12}(e)$ et $\rho_{21}(e)$; elles impliquent également les deux propriétés suivantes :

"Une relation d'ordre est atomique."

"La bijection principale d'une relation d'ordre est partout définie."

La première propriété découle de l'hypothèse d'antisymétrie vérifiée par une relation d'ordre ; en effet $e = e'$ (resp. $\hat{e} = \hat{e}'$) implique $e = e'$, donc $\rho_{12}(e) = \rho_{12}(e')$ (resp. $\rho_{21}(e) = \rho_{21}(e')$) implique $e = e'$.

La seconde propriété est une conséquence des égalités :

$\rho_{12}(e) = \rho_{22}(e) = \check{e}$
$\rho_{21}(e) = \rho_{11}(e) = \hat{e}$

Démontrons par exemple la seconde.
On a $\rho_{22}(e) = \rho_{12}(\rho_{21}(e)) = \bigcap\limits_{\alpha\in\hat{e}} \rho_{12}(\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\leq e} \check{\alpha}$. Il est immédiat que $\bigcap\limits_{\alpha\leq e} \check{\alpha} = \check{e}$, ce qui établit l'égalité. L'ensemble de ces deux propriétés caractérise d'ailleurs une relation d'ordre, en effet :

"Une relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$ est isomorphe à une relation d'ordre $[E, \leq, E]$ si et seulement si elle est atomique et sa bijection principale est partout définie."

Soit $\mathcal{A}_1$ l'ensemble des clôtures atomiques gauches de $[E_1, \rho, E_2]$, considérons la relation binaire interne $\mathcal{R}_1 = [\mathcal{A}_1, \subseteq, \mathcal{A}_1]$. Puisque $[E_1, \rho, E_2]$ est atomique, l'application $\rho_{11} : E_1 \rightarrow {}_1$ est bijective. Puisque la bijection principale de $[E_1, \rho, E_2]$ est partout définie, l'application $\rho_{21} : E_2 \rightarrow \Gamma_1$ est une application <u>sur</u> $\mathcal{A}_1$; ρ_{21} est aussi une application <u>dans</u> $\mathcal{A}_1$ puisque $[E_1, \rho, E_2]$ est atomique. On a donc établi que $\rho_{11} \times \rho_{21}$ est une bijection décomposable de $E_1 \times E_2$ sur $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1$; pour voir que $\rho_{11} \times \rho_{21}$ est un isomorphisme entre $[E_1, \rho, E_2]$ et $[\mathcal{A}_1, \subseteq, \mathcal{A}_1]$, il suffit alors de remarquer que $e_1 \rho e_2 \iff \rho_{11}(e_1) \subseteq \rho_{21}(e_2)$.

B) Systèmes générateurs

Considérons à nouveau une relation d'ordre $[E, \leq, E]$. $\mathcal{G}_1 \subseteq E$ est un système générateur gauche si et seulement si toute clôture principale droite $\rho_{12}(e)$ est l'intersection d'une famille de clôtures principales droites dont les sommets appartiennent à $\mathcal{G}_1$; compte tenu de l'interprétation qui a été donnée plus haut, cela revient à dire que toute section finale principale $\check{e}$ est l'intersection d'une famille de sections finales principales dont les somments appartiennent à $\mathcal{G}_1$; ceci revient à dire que tout élément $e \in E$ est la borne supérieure d'une famille d'éléments appartenant à $\mathcal{G}_1$. D'où la propriété :

"Pour toute relation d'ordre $[E, \leq, E]$, $\mathcal{G}_1 \subseteq E$ (resp. $\mathcal{G}_2 \subseteq E$) est un système générateur gauche (resp. droit) si et seulement si $\mathcal{G}_1$ est un système $\cup$ générateur (resp. $\cap$ générateur) par rapport à cette relation d'ordre."

(7) *ELEMENTS IRREDUCTIBLES D'UNE RELATION BINAIRE*

Soit une relation $[E_1, \rho, E_2]$, un élément $e_1 \in E_1$ est irréductible gauche si la clôture atomique $\overline{e_1}$ est $\cup$ irréductible dans la famille de Moore Γ_1 ; par dualité, cela revient à dire que $\rho_{12}(a_1)$ est $\cap$ irréductible dans la famille de Moore Γ_2. Pour relier les notions d'élément irréductible gauche et de sous-ensemble générateur gauche, deux cas sont à considérer :

(1) <u>La plus grande congruence gauche π_1 est nulle</u> : dans ce cas, il résulte aisément du théorème démontré au chapitre I que :

"Si toutes les suites décroissantes de clôtures atomiques gauches sont finies, alors l'ensemble des éléments irréductibles gauches constitue un plus petit sous-ensemble générateur gauche."

(2) <u>La plus grande congruence gauche π_1 n'est pas nulle</u> : les irréductibles gauches constituent encore un sous-ensemble générateur gauche, mais ce n'est pas le plus petit. Il ne peut d'ailleurs pas exister de plus petit sous-ensemble générateur, si on extrait de chaque classe de congruence un irréductible gauche, alors on obtient un sous-ensemble générateur <u>minimal</u> (sous l'hypothèse de suite décroissante) ; l'intersection de deux système générateurs minimaux distincts ne peut plus être un système générateur.

On peut par dualité définir les éléments irréductibles droits et établir les mêmes propriétés. Si la relation binaire considérée est une relation d'ordre $[E, \leq, E]$, on constate que les éléments irréductibles gauches correspondent aux $\cup$ irréductibles, et les éléments irréductibles droits aux $\cap$ irréductibles. Désormais, pour toute relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$, on notera respectivement $\mathcal{U}$ et $\mathcal{J}$ les ensembles irréductibles gauches et droits.

(8) PROPRIETE CARACTERISTIQUE D'UN SOUS-ENSEMBLE GENERATEUR GAUCHE (RESP. DROIT)

"Un sous-ensemble $\mathcal{G}_1 \subseteq E_1$ est générateur gauche (resp. $\mathcal{G}_2 \subseteq E_2$ est générateur droit) par rapport à une relation $[E_1, \rho, E_2]$ si et seulement si pour toute clôture gauche $\overline{P_1} \subseteq E_1$ (resp. clôture droite $\overline{P_2} \subseteq E_2$), on a l'égalité : $\rho_{12}(\overline{P_1}) = \rho_{12}(\overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1)$ (resp. $\rho_{21}(\overline{P_2}) = \rho_{21}(\overline{P_2} \cap \mathcal{G}_2)$)."

On a vu que $\mathcal{G}_1$ est générateur si et seulement si toute clôture droite $\rho_{12}(\overline{P_1})$ est image par ρ_{12} d'un sous-ensemble $P'_1 \subseteq \mathcal{G}_1$; cette condition est affirmée dans l'égalité $\rho_{12}(\overline{P_1}) = \rho_{12}(\overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1)$, cette égalité supposée vraie pour tout $\overline{P_1}$ est donc suffisante. Réciproquement, le sous-ensemble P'_1 doit être inclus dans $\overline{P_1}$; on peut donc poser pour la double inégalité $P'_1 - \overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1 \subseteq \overline{P_1}$; en appliquant ρ_{12} aux trois membres de cette inégalité, on trouve $\rho_{12}(\overline{P_1}) = \rho_{12}(\overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1)$.

<u>Corollaire</u> : "$\mathcal{G}_1$ est générateur gauche si et seulement si la correspondance $\overline{P_1} \to \overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1$ est injective."

La condition est nécessaire d'après la propriété précédente. Réciproquement, si on considère le sous-ensemble $\overline{Q_1} = \overline{P_1 \cap \mathcal{G}_1}$, on vérifie facilement en utilisant les propriétés des fermetures que $\overline{\overline{Q_1} \cap \mathcal{G}_1} = \overline{P_1 \cap \mathcal{G}_1}$; l'injectivité implique alors $\overline{P_1} = \overline{Q_1}$, d'où $\rho_{12}(\overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1) = \rho_{12}(\overline{P_1 \cap \mathcal{G}_1}) = \rho_{12}(\overline{Q_1}) = \rho_{12}(\overline{P_1})$.

Remarque :
En fait, il est aisé de voir que l'on peut se limiter à l'injectivité de l'application $\overline{e_1} \to \overline{e_1} \cap \mathcal{G}_1$ vérifiée à partir de l'ensemble des clôtures atomiques gauches. Ce résultat transporté dans les ensembles ordonnés montre qu'un sous-ensemble $\mathcal{G}$ est U générateur si et seulement si la correspondance $x \to \hat{x} \cap \mathcal{G}$ est injective.

(9) *PAVE GENERATEUR - SOUS-RELATION GENERATIVE*

Un pavé $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ d'une relation $[E_1, \rho, E_2]$ est générateur si et seulement si $\mathcal{G}_1$ est générateur gauche et $\mathcal{G}_2$ est générateur droit. La sous-relation induite sur $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ est alors dite génératrice.

Propriété - définition : "Toute relation binaire atomique finie admet un plus petit pavé générateur -appelé pavé caractéristique- $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des ses éléments irréductibles gauches, et $\mathcal{J}$ l'ensemble de ses irréductibles droits."

Cette propriété est une conséquence immédiate du paragraphe 7. Dans le cas où la relation binaire n'est pas atomique, on peut seulement affirmer qu'il existe des pavés générateurs minimaux, supports de sous-relations isomorphes. On dira encore dans le cas général que $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$ est le pavé caractéristique. Toute relation atomique finie dont le support est égal au pavé caractéristique sera appelée une relation caractéristique. Enfin, la classe d'isomorphisme constituée par les sous-relations déterminées par les pavés générateurs minimaux d'une relation donnée sera appelée la sous-relation caractéristique de cette relation. Ces définition sont à rapprocher de celles qui ont été données pour les relations d'ordre finies ; on étudiera ces notions dans le paragraphe 6 du chapitre II.

Théorème : "Une sous relation $[\mathcal{G}_1, \rho', \mathcal{G}_2]$ d'une relation $[E_1, \rho, E_2]$ est génératrice si et seulement si la correspondance $\overline{P_1} \times \overline{P_2} \to (\overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1) \times (\overline{P_2} \cap \mathcal{G}_2)$ qui associe à chaque pavé maximal plein sa trace sur $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ est bijective entre les pavés maximaux de la première relation et ceux de la sous relation."

Condition suffisante :

Considérons un pavé plein maximal $P_1 \times P_2$ de la sous relation $[\mathcal{G}_1, \rho', \mathcal{G}_2]$; les traces sur $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ des pavés pleins maximaux $P_1 \times \rho_{12}(P_1)$ et $\rho_{21}(P_2) \times \overline{P_2}$ sont des pavés qui contiennent $P_1 \times P_2$. Puisque $P_1 \times P_2$ est maximal, les traces précédentes sont égales à $P_1 \times P_2$; la bijectivité de la correspondance implique alors :

$$\rho_{12}(P_1) = \rho_{12}(\overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1) = \overline{P_2} = \rho_{12}(\overline{P_1})$$

$$\rho_{21}(P_2) = \rho_{21}(\overline{P_2} \cap \mathcal{G}_2) = \overline{P_1} = \rho_{21}(\overline{P_2})$$

Ces égalités doivent être vérifiées pour tout pavé maximal $\overline{P_1} \times \overline{P_2}$, puisque chacun d'eux a pour trace sur $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ un pavé maximal distinct de la sous relation $[\mathcal{G}_1, \rho', \mathcal{G}_2]$. $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ est donc un pavé générateur.

Condition nécessaire :

Les correspondances de Galois ρ'_{12} et ρ'_{21} sont liées à ρ_{12} et ρ_{21} par les égalités :

$$\forall P_1 \subseteq \mathcal{G}_1 : \rho'_{12}(P_1) = \rho_{12}(P_1) \cap \mathcal{G}_2 \ ;$$

$$\forall P_2 \subseteq \mathcal{G}_2 : \rho'_{21}(P_2) = \rho_{21}(P_2) \cap \mathcal{G}_1 \ ;$$

Montrons que si $\overline{P_1} \times \overline{P_2}$ est un pavé maximal de $[E_1, \rho, E_2]$, alors $(\overline{P_1} \cap \mathcal{G}_1) \times (\overline{P_2} \cap \mathcal{G}_2)$ est un pavé maximal de $[\mathcal{G}_1, \rho', \mathcal{G}_2]$.

$$\rho'_{12}(\overline{P_1}\cap\mathcal{G}_1) = \rho_{12}(\overline{P_1}\cap\mathcal{G}_1)\quad{}_2 = \rho_{12}(\overline{P_1})\cap\mathcal{G}_2 = \overline{P_2}\cap\mathcal{G}_2\ ;$$

on obtient cette suite d'égalité car l'hypothèse selon laquelle $\mathcal{G}_1$ est générateur gauche implique $\rho_{12}(\overline{P_1}\cap\mathcal{G}_1) = \rho_{12}(\overline{P_1})$. On obtient de la même façon $\rho'_{21}(\overline{P_2}\cap\mathcal{G}_2) = \overline{P_1}\cap\mathcal{G}_1$.

On obtient ainsi tous les pavés maximaux de $[\mathcal{G}_1, \rho', \mathcal{G}_2]$ car chacun d'eux doit être la trace d'au moins un pavé maximal de $[E_1, \rho, E_2]$. la correspondance bijective est donc établie.

Corollaire 1 : "Si $[\mathcal{G}_1, \rho, \mathcal{G}_2]$ est sous relation génératrice de la relation $[E_1, \rho, E_2]$, alors son extension canonique en treillis complet est isomorphe à celle de la relation totale."

Ceci résulte du fait que les clôtures gauches de $[\mathcal{G}_1, \rho, \mathcal{G}_2]$ sont les traces des clôtures gauches de $[E_1, \rho, E_2]$, et que cette correspondance est injective.

Remarque :

La réciproque de ce corollaire est fausse dans le cas infini. Il suffit de considérer la relation d'ordre $[\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}]$ où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont à la fois U et $\cap$ irréductibles, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est donc le seul pavé générateur de cette relation. L'extension de cet ordonné en treillis complet est l'ordonné $\mathbb{N}+\infty$; l'extension du sous-ensemble $2.\mathbb{N}$ est isomorphe.

Par contre, cette réciproque est vraie dans le cas fini. En effet, il doit y avoir sur $\mathcal{G}_1$ autant de traces de clôture qu'il y a de clôtures gauches dans la relation toute entière. La correspondance $\overline{P_1} \to \overline{P_1}\cap\mathcal{G}_1$ doit donc être injective ; il en résulte que $\mathcal{G}_1$ est nécessairement générateur gauche. Le même raisonnement peut être fait pour $\mathcal{G}_2$.

Corollaire 2 : "Si deux treillis complets possèdent deux sous relations génératrices isomorphes, ils sont isomorphes."

Ce corollaire résulte du fait que l'extension canonique d'un treillis complet est confondue avec ce treillis complet.

Corollaire 3 : "Si deux treillis complets possèdent deux sous-ensembles U et $\cap$ générateurs isomorphes, ils sont isomorphes."

En effet si F est un sous-ensemble U et $\cap$ générateur, $F \times F$ est un pavé générateur.

(10) *REMARQUE SUR LES ALGORITHMES DE RECHERCHE DE PAVES MAXIMAUX*

De nombreux auteurs se sont intéressés à la recherche de l'ensemble des pavés maximaux d'une relation finie ; on peut citer principalement la méthode de Malgrange [24] améliorée par Chein [10], et celle de Pichat [27]. L'étude qui précède montre qu'il y a avantage à procéder sur une sous relation génératrice comportant moins d'éléments, et d'étendre ensuite les pavés maximaux ainsi trouvés à la relation toute entière.

Exemple : Considérons la relation représentée par la figure 3.

Les clôtures principales droites sont :

X	A	B	C	D	E
$\rho_{12}(X)$	12	134	235	1	2

On ne conserve que les éléments {A, B, C} donnant des clôtures $\cap$ irréductibles. Les clôtures principales gauches sont :

Y	1	2	3	4	5
$\rho_{21}(Y)$	AB	ACE	BC	B	C

	1	2	3	4	5
A	x	x			
B	x		x	x	
C		x	x		x
D	x				
E		x			

[Fig. 3]

On ne conserve que les éléments {1, 2, 3} donnant des clôtures $\cap$ irréductibles. On est alors ramené à la recherche des pavés maximaux de la sous relation déterminée par $\{A, B, C\} \times \{1, 2, 3\}$. Une des méthodes ci-dessus citée donnerait :

$\emptyset \times 123$; $A \times 12$; $B \times 13$; $C \times 23$; $AB \times 1$; $AC \times 2$; $BC \times 3$; $ABC \times \emptyset$.

Pour obtenir les pavés maximaux de la relation initiale, on ajoute successivement une par une les lignes et les colonnes qui ont été supprimées, à chaque pas on étend les pavés maximaux. Par exemple, si on commence par ajouter la ligne D, on voit que D est en relation avec le sous-ensemble 1 ; par conséquent on prolonge tous les pavés maximaux dont le second sous-ensemble est inclus dans $\{1\}$. Les seuls pavés qui se prolongent ainsi sont $AB \times 1 \rightarrow ABD \times 1$ et $ABC \times \emptyset \rightarrow ABCD \times \emptyset$. On continue ensuite en ajoutant la ligne E, et les colonnes et 5. La figure 4 montre les prolongements possibles à chaque adjonction.

$\emptyset \times 123$	$A \times 12$	$B \times 13$	$C \times 23$	$AB \times 1$	$AC \times 2$	$BC \times 3$	$ABC \times \emptyset$	
-	-	-	-	$ABD \times 1$	-	-	$ABCD \times \emptyset$	adjonction de $D \times 1$
-	-	-	-	-	$ACE \times 2$	-	$ABCDE \times \emptyset$	adjonction de $E \times 2$
$\emptyset \times 1234$	-	$B \times 134$	-	-	-	-	-	adjonction de $B \times 4$
$\emptyset \times 12345$	-	-	$C \times 235$	-	-	-	-	adjonction de $C \times 5$
$\emptyset \times 12345$	$A \times 12$	$B \times 134$	$C \times 235$	$ABD \times 1$	$ACE \times 2$	$BC \times 3$	$ABCDE \times \emptyset$	Solution

[Fig. 4]

CHAPITRE II

HOMOMORPHISME D'UNE RELATION BINAIRE DANS UN TREILLIS COMPLET

Nous avons vu dans le chapitre I que pour toute relation binaire $\mathcal{R} = \left[E_1, \rho, E_2\right]$, $e_1 \rho e_2$ est équivalent à $\rho_{11}(e_1) \subseteq \rho_{21}(e_2)$; par conséquent l'application décomposable $\tilde{\mathcal{H}} = \rho_{11} \times \rho_{21} : E_1 \times E_2 \to \Gamma_1 \times \Gamma_1$ est un homomorphisme de $\mathcal{R} = \left[E_1, \rho, E_2\right]$ dans $\tilde{\mathcal{R}} = \left[\Gamma_1, \subseteq, \Gamma_1\right]$, où Γ_1 est la famille de Moore des clôtures gauches.

$\tilde{\mathcal{R}}$ sera appelé <u>l'extension canonique de $\mathcal{R}$ en treillis complet</u>, $\tilde{\mathcal{H}}$, <u>l'homomorphisme canonique</u> de $\mathcal{R}$ dans $\tilde{\mathcal{R}}$. On remarque que les partitions associées à cet homomorphisme canonique sont les congruences maximales de la relation $\mathcal{R}$; par conséquent, lorsque $\mathcal{R}$ est atomique, $\tilde{\mathcal{H}}$ est une immersion de $\mathcal{R}$ dans $\tilde{\mathcal{R}}$.

Si $\mathcal{R} = [E, \leq, E]$ est un ordre sur un ensemble E, le procédé d'extension ci-dessus défini coïncide avec <u>le procédé d'extension par coupures</u> utilisé par Mac Neille [23] pour immerger un ordonné dans un treillis complet. Birkhoff [5] a démontré que cette extension est minimale dans le sens suivant : en utilisant les notations $E \leq F$ et $E = F$ pour signifier qu'il existe une immersion, ou un isomorphisme, d'un ordonné E dans un autre F, alors la correspondance $E \to \tilde{E}$ définie par le procédé d'extension par coupures vérifie les propriétés caractéristiques suivantes :

$$E \leq \tilde{E} \ ; \ E \leq F \Rightarrow \tilde{E} \leq \tilde{F} \ ; \text{ si } E \text{ est un treillis complet, alors } E = \tilde{E}.$$

Ces propriétés sont formellement identiques aux propriétés caractéristiques d'une fermeture, mais le fait que les relations d'ordre sur tous les ensembles ne forment pas un ensemble nécessite une interprétation plus fine. Néanmoins, si on se limite aux relations d'ordre sur les ensembles finis, elles constituent un ensemble (modulo l'isomorphisme $=$) ; la relation $E \leq F$ est alors une relation d'ordre sur cet ensemble et la correspondance $E \to \tilde{E}$ est une fermeture dont les invariants sont les treillis finis.

Nous allons étendre ces résultats aux relations atomiques en considérant l'application $\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}}$. Nous démontrerons de plus, que dans le cas des relations atomiques finies définies modulo un isomorphisme, il existe une plus petite relation atomique dont l'extension canonique soit un treillis fini donné ; ce résultat sera également démontré pour les ordonnés finis.

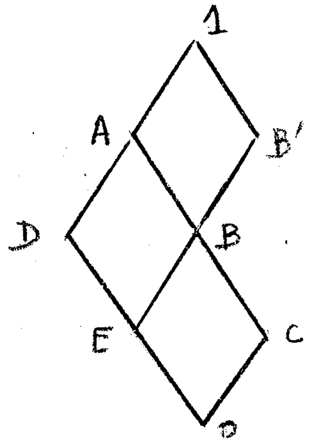
(1) SOUS-RELATIONS CONTRACTEES - PROPRIETES GENERALES

Une sous-relation $[P, \leq, Q]$ d'une relation d'ordre $[E, \leq, E]$ sera appelée une relation de sous ordre, PUQ sera appelé le support de cette relation de sous ordre. Une relation de sous ordre sera dite contractée (ou sous relation contractée) si elle vérifie les conditons $P \subseteq Q^{\bullet}$ et $Q \subseteq P^{+}$. Rappelons (chapitre I, partie I) que P^{+} est constitué par les bornes sup des sous-ensembles de P qui en admettent, $Q^{\bullet}$ par les bornes inf des sous-ensembles de Q qui en admettent. On a également vu qu'un élément x appartient à P^{+} si il est borne sup du sous-ensemble $\hat{x} \cap P$, que deux éléments x et y appartenant à P^{+} ne sont comparables que si $\hat{x} \cap P$ et $\hat{y} \cap P$ sont comparables dans le même sens, enfin que l'application $x \rightarrow \hat{x} \cap P$ est injective de P^{+} dans $\mathcal{P}(P)$; les propriétés duales s'appliquent évidemment à $Q^{\bullet}$.

Propriété 1 : "Toute sous relation contractée est atomique."

Conséquence immédiate de l'injectivité des applications $x \rightarrow \hat{x} \cap P$ et $y \rightarrow \check{y} \cap Q$ lorsque x et y appartiennent à P^{+} et $Q^{\bullet}$ respectivement.

La réciproque de cette propriété est fausse. Il suffit de considérer le treillis représenté par la fig. 1 ; la sous relation $[\{CDE\}, \leq, \{AB'CD\}]$ est atomique, elle n'est pas contractée car $\{CDE\}^{+} = \{ABCDE\}$. Par contre la sous relation $[\{CED\}, \leq, \{ABCD\}]$ est contractée et atomique ; cette dernière sous relation est isomorphe à la première.

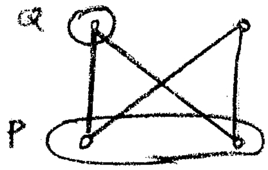


[Fig 1]

Propriété 2 : "Si une relation de sous ordre $[P, \leq, Q]$ est contractée par rapport à un ensemble ordonné E, elle est également contractée par rapport à son support$^{(*)}$."

Soit y un élément appartenant à Q. Par rapport à l'ordre défini sur E, y est borne supérieure de $\hat{y} \cap P$. Par conséquent, y est un majorant de $\hat{y} \cap P$ par rapport à l'ordre induit sur PUQ. Par ailleurs, tout majorant de $\hat{y} \cap P$ par rapport à l'ordre induit sur PUQ est aussi un majorant de $\hat{y} \cap P$ par rapport à l'ordre défini sur E ; il en résulte que y est borne sup de $\hat{y} \cap P$ par rapport à l'ordre induit sur PUQ ; d'où $Q \subseteq P^+$ par rapport à l'ordre induit sur PUQ. On établit de même $P \subseteq Q^*$.

La réciproque de cette propriété est également fausse [cf. fig. 2].



[Fig 2]

Propriété 3 : "Toute sous relation génératrice d'un ensemble ordonné est une sous relation contractée."

Cette propriété découle immédiatement de la définition d'une sous relation génératrice [cf. paragraphe (9) du chapitre I]. La réciproque de cette propriété est manifestement fausse. Il suffit de considérer un sous-ensemble P réduit à un élément et la sous relation contractée $[P, \subseteq, P]$.

Propriété 4 : "Toute relation atomique est isomorphe à au moins une sous relation contractée d'une certaine relation d'ordre."

Reprenons la construction de l'extension canonique en treillis complet (introduction) d'une relation $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$. Soit $\mathcal{A}_1$ l'ensemble des clôtures atomiques gauches, $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des clôtures principales droites. $[\mathcal{A}_1, \subseteq, \mathcal{P}_1]$ est une sous relation génératrice du treillis complet $\tilde{\mathcal{R}} = [\Gamma_1, \subseteq, \Gamma_1]$, où Γ_1 représente l'ensemble de toutes les clôtures gauches. D'après la propriété 3, $[\mathcal{A}_1, \subseteq, \mathcal{P}_1]$ est donc une sous relation contractée de $\tilde{\mathcal{R}}$. L'application décomposable $\rho_{11} \times \rho_{21}$ est un isomorphisme entre $\mathcal{R}$ et $[\mathcal{A}_1, \subseteq, \mathcal{P}_1]$ car $\mathcal{R}$ est atomique et $e_1 \rho e_2 \iff \rho_{11}(e_1) \subseteq \rho_{21}(e_2)$.

(2) *HOMOMORPHISME CONTRACTE D'UNE RELATION BINAIRE DANS UN TREILLIS COMPLET*

Définitions :

Etant donnés une relation d'ordre $[E, \leq, E]$ et un pavé $F_1 \times F_2 \subseteq E \times E$, on dira qu'une application décomposable $\varphi_1 \times \varphi_2 : F_1 \times F_2 \to E \times E$ est contractante si pour tout doublet $(e_1, e_2) \in F_1 \times F_2$, les inégalités $\varphi_1(e_1) \geq e_1$ et $\varphi_2(e_2) \leq e_2$ sont vérifiées.

Etant données deux applications décomposables $\varphi_1 \times \varphi_2$ et $\Psi_1 \times \Psi_2$ d'un produit d'ensembles $E_1 \times E_2$ dans le support $E \times E$ d'une relation d'ordre $[E, \leq, E]$, on dira que <u>$\Psi_1 \times \Psi_2$ est plus contracté que $\varphi_1 \times \varphi_2$</u> si les inégalités $\varphi_1 \leq \Psi_1$ et $\Psi_2 \leq \varphi_2$ sont vérifiées. La relation "plus contractée que" est manifestement un ordre entre les applications décomposables de $E_1 \times E_2$ dans $E \times E$.

Un homomorphisme $H_1 \times H_2$ d'une relation $[E_1, \rho, E_2]$ dans une relation d'ordre $[E, \leq, E]$ sera dit <u>contracté</u> si il n'existe aucun homomorphisme strictelebt plus contracté que lui. Si $[E_1, \rho, E_2]$ est une sous relation de $[E, \leq, E]$, il ne faut pas confondre la notion <u>d'homomorphisme contractant</u> avec celle <u>d'homomorphisme contracté</u> ; dans le premier cas, il s'agit d'une application décomposable qui possède d'une part la propriété d'homomorphisme, d'autre part celle d'être contractante.

<u>Propriété 1</u> : "Si l'image homomorphe, par un homomorphisme $H_1 \times H_2$, d'une relation $[E_1, \rho, E_2]$, dans un treillis complet $[E, \leq, E]$, est une sous relation contractée de ce treillis complet, alors $H_1 \times H_2$ est un homomorphisme contracté."

Considérons un homomorphisme $H'_1 \times H'_2 : [E_1, \rho, E_2] \to [E, \leq, E]$ plus contracté que $H_1 \times H_2$. L'hypothèse suivant laquelle $H_1 \times H_2$ et $H'_1 \times H'_2$ sont des homomorphismes implique pour tout $e_2 \in E_2$, les égalités :

$$\text{(A)} \quad H_1(\rho_{21}(e_2)) = \widehat{H_2(e_2)} \cap H_1(E_1) \ ,$$

$$\text{(A')} \quad H'_1(\rho_{21}(e_2)) = \widehat{H'_2(e_2)} \cap H'_1(E_1) \ .$$

L'inégalité $H'_1 \geq H_1$ (dûe au fait que $H'_1 \times H'_2$ est plus contracté que $H_1 \times H_2$) implique :

$$\text{(B)} \quad \text{Borne Sup } H_1(\rho_{21}(e_2)) \leq \text{Borne Sup } H'_1(\rho_{21}(e_2)).$$

L'hypothèse suivant laquellle $[H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)]$ est une sous relation contractée implique :

(C) $H_2(e_2)$ = Borne Sup $\widehat{H_2(e_2) \cap H_1(E_1)}$.

Enfin, on a l'égalité

(D) $H'_2(e_2) \geq$ Borne Sup $\widehat{H'_2(e_2) \cap H'_1(E_1)}$

qui est vérifiée dans tout treillis complet si on considère que $H'_2(e_2)$ et $H'_1(E_1)$ sont respectivement un élément et un sous-ensemble quelconque de ce treillis complet.

La transitivité appliquée aux trois inégalités (B), (C) et (D), en tenant compte des égalités (A) et (A') implique $H'_2(e_2) \geq H_2(e_2)$. Mais on a également $H'_2(e_2) \leq H_2(e_2)$ puisque $H'_1 \times H'_2$ est plus contracté que $H_1 \times H_2$, il en résulte $H_2(e_2) = H'_2(e_2)$. On démontrerait par dualité que pour tout élément $e_1 \in E_1$, $H_1(e_1) = H'_1(e_1)$. La propriété est ainsi établie.

Propriété 2 : "Toute relation de sous ordre $[P, \leq, Q]$ d'un treillis complet $[E, \leq, E]$ peut être transformée en une sous relation contractée par un homomorphisme contractant $f \times g : [P, \leq, Q] \to [E, \leq, E]$."

Soit $Q^\bullet$ le sous-ensemble $\cap$ engendré par Q, f la fermeture associée à la partie de Moore $Q^\bullet$. L'inégalité $x \leq y$ étant équivalente à l'inégalité $f(x) \leq y$ lorsque $y \in Q^\bullet$, l'application décomposable $f \times 1$(*) : $P \times Q \to E \times E$ est un homomorphisme contractant de la sous relation $[P, \leq, Q]$; soit $[f(P), \leq, Q]$ l'image homomorphe de cette sous relation.

Soit $f(P)^+$ le sous-ensemble $\cup$ engendré par f(P) dans le sous-ensemble $Q^\bullet$. $Q^\bullet$ étant un treillis complet pour l'ordre induit, $f(P)^+$ est une partie de Moore duale dans $Q^\bullet$; il existe donc une fermeture duale g, définie sur $Q^\bullet$ dont l'ensemble des invariants est $f(P)^+$. Pour les mêmes raisons que plus haut, l'application décomposable $1 \times g : f(P) \times Q \to E \times E$ est un homomorphisme contractant de la sous relation $[f(P), \leq, Q]$; soit $[f(P), \leq, g(Q)]$ la sous relation image.

(*) On désigne par 1 l'application identité

$f \times g$, composition de deux homomorphismes contractants successifs, $f \times 1$ et $1 \times g$, est aussi un homomorphisme contractant. Démontrons que l'image homomorphe $|f(P), \leq, g(Q)|$ est une sous relation contractée. On sait déjà que $g(Q) \subseteq f(P)^+$, il reste donc à établir $f(P) \subseteq g(Q)^\cdot$, sachant que $f(P) \subseteq Q^\cdot$. D'après cette dernière inclusion, tout élément $z \in f(P)$ est borne inf d'un sous-ensemble $Q' \subseteq Q$. Par la fermeture duale g, Q' est transformé en un ensemble $g(Q')$ dont chaque élément est majoré par un élément de Q' ; la borne inférieure de $g(Q')$ est donc majorée par z. Mais puisque z est invariant par g, z minore également $g(Q')$; il en résulte que z est borne inférieure de $g(Q')$. Nous avons donc établi que $f(P) \subseteq g(Q)^\cdot$.

<u>Corollaire</u> : "Pour tout homomorphisme $H_1 \times H_2$ d'une relation binaire $|E_1, \rho, E_2|$ dans un treillis complet $|E, \leq, E|$, il existe un homomorphisme contracté $H'_1 \times H'_2 : |E_1, \rho, E_2| \to |E, \leq, E|$ plus contracté que $H_1 \times H_2$."

D'après la propriété 2, il existe un homomorphisme contractant $f \times g$: $|H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)| \to |E, \leq, E|$ dont l'image homomorphe est une sous relation contractée. L'application décomposable $(f \circ H_1) \times (g \circ H_2)$ est un homomorphisme -succession de deux homomorphismes- plus contracté que $H_1 \times H_2$ -car $f \times g$ est contractant- ; l'image homomorphe est une sous relation contractée, d'après la propriété 1, cet homomorphisme est donc contracté.

La combinaison des propriétés 1 et 2 du corollaire implique immédiatement le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : "Un homomorphisme $H_1 \times H_2$ d'une relation binaire $|E_1, \rho, E_2|$ dans un treillis complet $|E, \leq, E|$ est contracté si et seulement si l'image homomorphe $|H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)|$ est une sous relation contractée de ce treillis complet."

(3) EXTENSIONS D'UNE SOUS-RELATION CONTRACTEE

Etant donnée une sous relation contractée $|P, \leq, Q|$, tout sous-ensemble $P' \subseteq (P \cup Q)^+$ sera appelé une <u>extension supérieure</u> de cette relation de sous ordre, tout sous-ensemble $Q' \subseteq (P \cup Q)^\cdot$ sera appelé une <u>extension inférieure</u> de la sous relation.

<u>Théorème</u> : "Etant donné un isomorphisme $\varphi_1 \times \varphi_2$: $[\mathcal{G}_1, \leq, \mathcal{G}_2] \to [P, \leq, Q]$ d'une sous relation génératrice $[\mathcal{G}_1, \leq, \mathcal{G}_2]$ d'un ordonné E sur une sous relation contractée $[P, \leq, Q]$ d'un treillis complet $\mathcal{T}$, il existe deux immersions Φ_1 et Φ_2 de E dans $\mathcal{T}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\Phi_1(E)$ et $\Phi_2(E)$ sont des extensions respectivement supérieure et inférieure de la sous relation contractée $[P, \leq, Q]$;

(2) Les restrictions de Φ_1 et Φ_2 au sous-ensemble $\mathcal{G}_1$ sont égales à l'application $\varphi_1 : \mathcal{G}_1 \to P$, les restrictions de Φ_1 et Φ_2 au sous-ensemble $\mathcal{G}_2$ sont égales à l'application $\varphi_2 : \mathcal{G}_2 \to Q$."

Etant donné un élément x de l'ordonné E, posons :

$$\Phi_1(x) = \text{Borne Sup } \varphi_1(\hat{x} \cap \mathcal{G}_1) \;;$$

$$\Phi_2(x) = \text{Borne Inf } \varphi_2(\check{x} \cap \mathcal{G}_2).$$

Démontrons les propriétés énoncées dans le théorème pour l'application Φ_1, celles de Φ_2 s'en déduiront par dualité.

Puisque $[\mathcal{G}_1, \leq, \mathcal{G}_2]$ est une sous relation génératrice de l'ordonné E, pour tout élément x E, le produit cartésien $(\hat{x} \cap \mathcal{G}_1) \times (\check{x} \cap \mathcal{G}_2)$ est un pavé maximal de cette sous relation. Il en résulte par isomorphisme que $\varphi_1(\hat{x} \cap \mathcal{G}_1) \times \varphi_2(\check{x} \cap \mathcal{G}_2)$ est un pavé maximal de la sous relation contractée $[P, \leq, Q]$.

Pour tout élément y du treillis $\mathcal{T}$, $(\hat{y} \cap P) \times (\check{y} \cap Q)$ est un pavé plein de la relation de sous ordre $[P, \leq, Q]$; en effet les conditons $z \in \hat{y} \cap P$ et $t \in \check{y} \cap Q$ impliquent $z \leq y \leq t$. Considérons en particulier le pavé plein $(\widehat{\Phi_1(x)} \cap P) \times (\widecheck{\Phi_1(x)} \cap Q)$. La condition $\Phi_1(x)$ = Borne sup $\varphi_1(\hat{x} \cap \mathcal{G}_1)$ implique $\widehat{\Phi_1(x)} \cap P \subseteq \varphi_1(\hat{x} \cap \mathcal{G}_1)$. D'autre part, puisque $\varphi_1(\hat{x} \cap \mathcal{G}_1) \times \varphi_2(\check{x} \cap \mathcal{G}_2)$ est un pavé de

$[P, \leq, Q]$, tout élément z qui appartient à $\varphi_2(\check{x}\cap\mathcal{G}_2)$ majore $\varphi_1(\hat{x}\cap\mathcal{G}_1)$; un tel élément z majore donc $\Phi_1(x)$ qui est la borne sup de $\varphi_1(\hat{x}\cap\mathcal{G}_1)$. Il en résulte que $\widecheck{\Phi_1(x)}\cap Q \supseteq \varphi_2(\check{x}\cap\mathcal{G}_2)$.

Les deux inclusions $\widehat{\Phi_1(x)}\cap P \supseteq \varphi_1(\hat{x}\cap\mathcal{G}_1)$ et $\widecheck{\Phi_1(x)}\cap Q \supseteq \varphi_2(\check{x}\cap\mathcal{G}_2)$, ajoutées au fait que $\varphi_1(\hat{x}\cap\mathcal{G}_1) \times \varphi_2(\check{x}\cap\mathcal{G}_2)$ est un pavé maximal de $[P, \leq, Q]$, impliquent que $(\widehat{\Phi_1(x)}\cap P) \times (\widecheck{\Phi_1(x)}\cap Q)$ est un pavé maximal égal au précédent.

Puisque $\mathcal{G}_1$ est U générateur dans l'ensemble E, l'inégalité $x \leq y$ est équivalent à $\hat{x}\cap\mathcal{G}_1 \subseteq \hat{y}\cap\mathcal{G}_1$; cette dernière inclusion est elle-même équivalente à $\varphi_1(\hat{x}\cap\mathcal{G}_1) \subseteq \varphi_1(\hat{y}\cap\mathcal{G}_1)$ puisque φ_1 est bijective ; d'après l'égalité des pavés pleins maximaux qui vient d'être établie, cette dernière inclusion est équilente à $\widehat{\Phi_1(x)}\cap P \subseteq \widehat{\Phi_1(y)}\cap P$; enfin, puisque $\Phi_1(x)$ et $\Phi_1(y)$ sont U engendrés par P, cette inclusion est équivalente à $\Phi_1(x) \leq \Phi_1(y)$. Ce qui prouve que l'application $\Phi_1 : E \to \mathcal{E}$ est une immersion. On démontrerait d'une façon duale le même résultat pour l'application $\Phi_2 : E \to \mathcal{E}$.

La restriction de Φ_1 au sous-ensemble $\mathcal{G}_1$ est manifestement égale à φ_1. Soit x un élément quelconque appartenant à $\mathcal{G}_2$. Le fait que $\varphi_1 \times \varphi_2$ soit isomorphisme de $[\mathcal{G}_1, \leq, \mathcal{G}_2]$ dans $[P, \leq, Q]$ implique $\widehat{\varphi_2(x)}\cap P = \varphi_1(\hat{x}\cap\mathcal{G}_1)$. $\varphi_2(x)$ est égal à la borne supérieure de $\widehat{\varphi_2(x)}\cap P$ puisque la sous relation $[P, \leq, Q]$ est contractée ; on obtient donc $\varphi_2(x) = \text{Borne Sup } \varphi_1(\hat{x}\cap\mathcal{G}_1) = \Phi_1(x)$. Ce qui établit la seconde partie du théorème pour l'application Φ_1 ; la propriété pour Φ_2 s'obtiendrait de façon duale.

Enfin, cette dernière démonstration prouve également que $\Phi_1(E)$ contient PUQ. Etant donnés que les $\Phi_1(x)$ ont été définis comme des bornes sup de sous-ensembles inclus dans P, il en résulte que $\Phi_1(E)$ est une extension supérieure de la relation de sous ordre $[P, \leq, Q]$; ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarques :

(1) L'immersion $\Phi_1 : E \to \mathcal{T}$ sera appelée le prolongement supérieur de l'application $\varphi_1 : \mathcal{G}_1 \to P$, et l'immersion $\Phi_2 : E \to \mathcal{T}$ sera appelée le prolongement inférieur de l'application $\varphi_2 : \mathcal{G}_2 \to Q$.

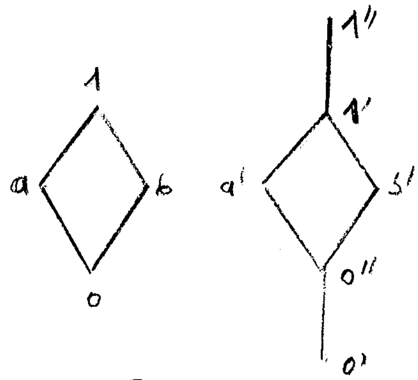
(2) Les deux prolongements Φ_1 et Φ_2 sont égaux sur $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, il se peut que partout ailleurs ils soient distincts. Considérons par exemple les treillis E et $\mathcal{T}$ représentés par la figure 9. Posons $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \{a,b\}$, $P = Q = \{a',b'\}$, $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = a'$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b) = b'$.

On aura :

$\Phi_1(1) = 1'$, $\Phi_1(0) = 0'$;

$\Phi_2(1) = 1''$, $\Phi_2(0) = 0''$.

(3) D'une façon générale, il peut exister d'autres immersions $\Phi : E \to \mathcal{T}$ dont les restrictions sur $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont égales à φ_1 et φ_2 ; on démontrerait aisément que de telles immersions vérifient la double inégalité $\Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2$.



Treillis E Treillis $\mathcal{T}$

[Fig 9]

Corollaire du théorème : "Soit $\tilde{\mathcal{R}} = [\Gamma_1, \subseteq, \Gamma_1]$ l'extension canonique en treillis complet d'une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$. Si il existe un homomorphisme $H_1 \times H_2 : [E_1, \rho, E_2] \to \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est un treillis complet, alors il existe une immersion de $\tilde{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{T}$."

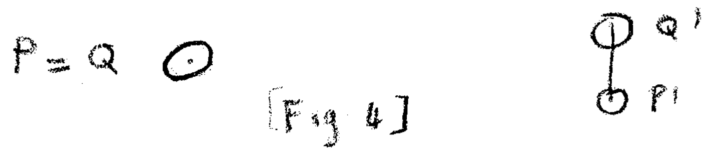
On peut toujours supposer que $H_1 \times H_2$ est contracté (cf. paragraphe (2)). $[H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)]$ est alors une sous relation contractée isomorphe à une sous relation génératrice $[\mathcal{G}_1, \subseteq, \mathcal{G}_2]$ de $[\Gamma_1, \subseteq, \Gamma_1]$. Soit $\varphi_1 \times \varphi_2$ l'isomorphisme de $[\mathcal{G}_1, \subseteq, \mathcal{G}_2]$ sur $[H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)]$, l'application du théorème précédent permet d'affirmer l'existence d'une immersion $\Phi_1 : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{T}$.

(4) *BISSECTION CONTRACTEE D'UNE RELATION D'ORDRE*

Une <u>bissection</u> d'une relation d'ordre $[E, \leq, E]$ est une relation de sous ordre $[P, \leq, Q]$ extraite de cette relation d'ordre vérifiant la condition $P \cup Q = E$. Si $[P, \leq, Q]$ est contractée, cette bissection sera dite contractée.

Deux bissections $[P, \leq, Q]$ et $[P', \leq, Q']$ de deux relations d'ordre $[E, \leq E]$ et $[E', \leq, E']$ seront dites <u>faiblement isomorphes</u> si elles sont isomorphes au sens des relations binaires -i.e. il existe une bijection décomposable $\varphi_1 \times \varphi_2 : P \times Q \to P' \times Q'$ telle que $x \leq y \Longleftrightarrow \varphi_1(x) \leq \varphi_2(y)$-, elles seront dites fortement isomorphes si il existe un isomorphe d'ordre $\varphi : E \to E'$ tel que $P' = \varphi(P)$ et $Q' = \varphi(Q)$.

L'isomorphisme fort implique manifestement l'isomorphisme faible, mais la réciproque est en général fausse comme le montre la figure ci-dessous.



[Fig 4]

<u>Théorème</u> : "Si deux bissection contactées $[P, \leq, Q]$ et $[P', \leq, Q']$ de deux relations d'ordre $[E, \leq, E]$ et $[E', \leq, E']$ sont faiblement isomorphes, elles sont fortement ismorphes."

Ce théorème est un simple corollaire du théorème énoncé dans le paragraphe (3). Pour s'y ramener, posons $P' = \mathcal{G}_1$ et $Q' = \mathcal{G}_2$. On possède par hypothèse un isomorphisme de relation $\varphi_1 \times \varphi_2 : [\mathcal{G}_1, \leq, \mathcal{G}_2] \to [P, \leq, Q]$. On peut toujours supposer que $[E, \leq, E]$ est une relation d'ordre induite sur un sous-ensemble E d'un treillis complet $\mathcal{C}$ -il suffit pour cela de considérer l'extension canonique de $[E, \leq, E]$ en treillis complet-. Enfin les conditions $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2^{\bullet}$, $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1^{+}$, et $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = E'$ impliquent que $[\mathcal{G}_1, \leq, \mathcal{G}_2]$ est une sous relation génératrice de $[E', \leq, E']$. On peut appliquer le théorème du paragraphe (3) qui affirme l'existence d'une immersion $\Phi_1 : E' \to \mathcal{C}$ telle que $\Phi_1(\mathcal{G}_1) = \Phi_1(P') = P$ et $\Phi_1(\mathcal{G}_2) = \Phi_1(Q') = Q$.

Ce théorème permet de parler sans ambiguïté d'un isomorphisme entre deux bissections contractées sans préciser si cet isomorphisme est fort ou faible. Notons que toute sous relation contractée est une bissection de l'ordre induit sur son support, il en résulte le corollaire suivant :

"Si deux relations contractées sont isomorphes -isomorphisme au sens des relations-, les ordres induits sur leurs supports sont isomorphes."

Etant donnée une relation binaire quelconque $[E_1, \rho, E_2]$, la relation $e_1 \rho e_2$ est vérifiée si et seulement si $\rho_{11}(e_1) \subseteq \rho_{21}(e_2)$. L'application décomposable $\rho_{11} \times \rho_{21} : [E_1, \rho, E_2] \rightarrow [\mathcal{A}_1, \subseteq, \mathcal{P}_1]$ est donc un homomorphisme. De plus, la relation $[\mathcal{A}_1, \subseteq, \mathcal{P}_1]$ est une bissection contractée de la relation d'ordre $[\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{P}_1, \subseteq, \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{P}_1]$ puisque $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}_1^{\cdot}$ et $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{A}_1^{+}$. Cette <u>bissection contractée sera dite associée à la relation binaire</u>. L'intérêt de cette bissection contractée résulte de la propriété suivante :

"Deux relations binaires sont semblables si et seulement si les bissections contractées qui leur sont associées sont isomorphes."

Cette propriété, dont la démonstration se déduit immédiatement de la propriété 4 établie dans le paragraphe (1), montre que l'étude de certaines propriétés des relations binaires se ramène à celles des relations d'ordre.

Exemple : Considérons la relation représentée par la figure 5. Posons $E_1 = \{A, B, C, D\}$ et $E_2 = \{1, 2, 3, 4\}$; les tableaux suivants énumèrent les ensembles $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{P}_1$.

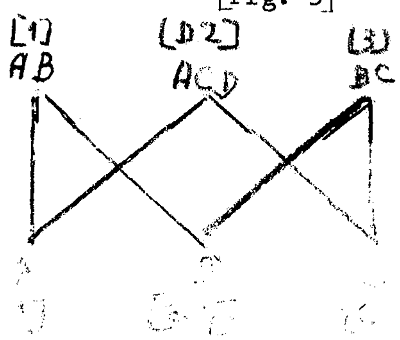
	1	2	3	4
A	x	x		
B	x		x	x
C		x	x	
D		x		

[Fig. 5]

E_1	A	B	C	D
$\mathcal{A}_1$	A	B	C	ACD

E_2	1	2	3	4
$\mathcal{P}_1$	AB	ACD	BC	B

$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{P}_1 = \{A, B, C, AB, BC, ACD\}$



(5) IMMERSION CANONIQUE D'UNE RELATION BINAIRE DANS UN TREILLIS COMPLET

Théorème 1 : "Etant donnés un ensemble E muni d'une relation d'ordre $[E, \leq, E]$ et un ensemble F structuré en treillis complet par une relation d'ordre $[F, \leq, F]$, l'existence d'une immersion $\varphi : E \to F$ au sens des relations d'ordre -i.e. $\forall x$ et $y \in E$: $x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$- est équivalente à l'existence d'un homomorphisme $H_1 \times H_2 : [E, \leq, E] \to [F, \leq, F]$."

Il est immédiat que si $\varphi : E \to F$ est une immersion au sens des relations d'ordre, $\varphi \times \varphi : [E, \leq, E] \to [F, \leq, F]$ est un homomorphisme.

Réciproquement, si il existe un homomorphisme $H_1 \times H_2 : [E, \leq, E] \to [F, \leq, F]$, il existe un homomorphisme contracté $\varphi_1 \times \varphi_2 : [E, \leq, E] \to [F, \leq, F]$ (cf. corollaire des propriétés 1 et 2, paragraphe (2)). L'image homomorphe $[\varphi_1(E), \leq, \varphi_2(E)]$ est une sous relation contractée (théorème du paragraphe (2)) ; on peut alors appliquer le théorème du paragraphe (3) en considérant que $[E, \leq, E]$ est une sous relation génératrice de l'ensemble ordonné E. Ce théorème affirme l'existence d'une immersion $\varphi : E \to \varphi_1(E) \cup \varphi_2(E)$ dont les restrictions à $\mathcal{J}_1 = E$ et $\mathcal{J}_2 = E$ sont égales ; il en résulte $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, donc φ est une immersion de E dans F au sens des relations d'ordre.

Théorème 2 : "L'application $\mathcal{R} \mapsto \tilde{\mathcal{R}}$ qui a une relation binaire atomique $\mathcal{R}$ fait correspondre son extension canonique en treillis complet $\tilde{\mathcal{R}}$ est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

(1) $\mathcal{R} \leq \tilde{\mathcal{R}}$;

(2) $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}' \Rightarrow \tilde{\mathcal{R}} \leq \tilde{\mathcal{R}}'$;

(3) si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre associée à un treillis complet, alors $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}$."

Les signes $\leq$ et $=$ sont à prendre au sens d'immersion et d'isomorphisme. Toutes les propriétés directes découlent immédiatement de la définition de l'immersion canonique. Pour établir la réciproque, considérons une application $\mathcal{R} \to \dot{\mathcal{R}}$ possédant ces trois propriétés, et montrons que $\dot{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}}$.

Puisque $\mathcal{R} \leq \tilde{\mathcal{R}}$ est vérifié, on a, en appliquant la propriété 2 à l'application $\mathcal{R} \to \dot{\mathcal{R}}$, $\dot{\mathcal{R}} \leq \tilde{\mathcal{R}}$. D'autre part, $\tilde{\tilde{\mathcal{R}}} = \tilde{\mathcal{R}}$ car $\tilde{\mathcal{R}}$ est un treillis complet (propriété 3 appliquée à $\mathcal{R} \to \dot{\mathcal{R}}$) ; on en tire $\dot{\mathcal{R}} \leq \tilde{\mathcal{R}}$.

La propriété 1 appliquée à $\mathcal{R} \to \dot{\mathcal{R}}$ implique $\mathcal{R} \leq \dot{\mathcal{R}}$. Puisque $\dot{\mathcal{R}}$ est un treillis complet dans lequel s'immerge $\mathcal{R}$, on tire du corollaire du théorème établi dans le paragraphe (3) que $\tilde{\mathcal{R}} \leq \dot{\mathcal{R}}$. Les deux inégalités $\tilde{\mathcal{R}} \leq \dot{\mathcal{R}}$ et $\dot{\mathcal{R}} \leq \tilde{\mathcal{R}}$ impliquent $\dot{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}}$.

Ce théorème apparaît donc comme une généralisation du théorème analogue établi par Birkhoff [5] relatif au procédé d'extension par coupures (cf. introduction de ce chapitre). Il montre que $\tilde{\mathcal{R}}$ est à un isomorphisme près, le plus petit treillis complet dans lequel peut s'immerger $\mathcal{R}$. Désormais, tout treillis complet isomorphe à $\tilde{\mathcal{R}}$ sera appelé <u>une extension minimale de $\mathcal{R}$ en treillis complet</u>.

(6) ELEMENTS CARACTERISTIQUES D'UNE RELATION BINAIRE (RESP. RELATION D'ORDRE FINI)

Dans le chapitre I (paragraphe (8)) nous avons défini un certain nombre de concepts dits caractéristiques pour une relation binaire finie ; de même on a donné de telles définitions pour les ordonnés finis dans la première partie (chapitre I, paragraphe (3)). Notons tout de suite que les notions de :

relation caractéristique et ordonné caractéristique,

sous relation caractéristique d'une relation finie et ordre caractéristique induit par un ordre fini,

pavé caractéristique d'une relation finie et ensemble caractéristique d'un ordonné fini,

se correspondent deux à deux. Nous allons maintenant étudier les relations entre ces notions et les procédés d'immersion d'une relation binaire ou d'un ordonné dans un treillis complet. Précisons que nous nous intéressons seulement au cas fini. Enfin, nous ne démontrerons les propriétés que pour les relations binaires ; elles seront simplement énoncées pour les relations d'ordre, on s'aidera du théorème énoncé dans le paragraphe (3) pour les établir.

<u>Propriété 1</u> : "Pour tout homomorphisme $H_1 \times H_2$ d'une relation binaire finie $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ dans une de ses extensions minimales en treillis $\mathcal{T} = |E, \leq, E|$, $H_1(E_1) \times H_2(E_2)$ est un pavé générateur de $|E, \leq, E|$."

Si $H_1(E_1) \times H_2(E_2)$ n'est pas un pavé générateur de $[E, \leq, E]$, alors $H_1(E_1)^+$ ou $H_2(E_2)^\cdot$ est strictement inclus dans ~~E~~. Supposons qu'il s'agit de $H_2(E_2)^\cdot$. D'après le théorème établi dans le paragraphe précédent, il existe un sous-ensemble $F \subseteq H_2(E_2)^\cdot$ tel que $[F, \leq, F]$ soit un treillis complet isomorphe à $\mathcal{T}$. Deux treillis complets finis ne peuvent être isomorphes que si ils ont même nombre d'éléments, cela est incompatible avec $F \subseteq H_2(E_2)^\cdot \subset E$.

Remarque :

Cette propriété est évidemment fausse dans le cas infini. Il suffit de considérer l'ensemble $\{-\infty, \mathbb{N}, +\infty\}$ des entiers naturels complété et l'immersion $\mathbb{N} \to 2.\mathbb{N}$; $-\infty \to -\infty$; $+\infty \to +\infty$. La propriété analogue pour les ensembles ordonnés s'énonce :

"Pour toute immersion ψ d'une relation d'ordre fini $[E, \leq, E]$ dans une de ses extensions minimales en treillis complet, $\Psi(E)$ est un sous-ensemble U et $\bigcap$ générateur de ce treillis complet."

Ces deux propriétés montrent que les propriétés valables pour l'homomorphisme canonique dans l'extension canonique en treillis complet se conservent dans le cas d'un homomorphisme quelconque dans un treillis minimal.

Propriété 2 : "Pour tout homomorphisme $H_1 \times H_2$ d'une relation binaire finie, $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ dont $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$ est le pavé caractéristique, dans une de ses extensions minimales en treillis, $\mathcal{T} = [E, \leq, E]$, $H_1(\mathcal{U}) \times H_2(\mathcal{J})$ est le pavé caractéristique de $\mathcal{T}$."

Cette propriété revient encore à dire que $H_1(\mathcal{U})$ est égal à l'ensemble des éléments U-irréductibles de $\mathcal{T}$ et $H_2(\mathcal{J})$ est égal à l'ensemble de ses éléments $\bigcap$-irréductibles. On peut encore énoncer cette propriété plus brièvement sous la forme :

"La propriété d'être le pavé caractéristique est invariante par tout homomorphisme dans une extension minimale en treillis."

Nous démontrerons tout d'abord cette propriété dans le cas des relations atomiques en nous basant sur le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : "Etant donnés une relation caractéristique atomique $[\mathcal{U}, \rho, \mathcal{J}]$ et un pavé $\mathcal{U}'' \times \mathcal{J}''$ strictement inclus dans $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$, l'extension minimale en treillis de la sous relation $[\mathcal{U}'', \rho, \mathcal{J}'']$ n'est pas isomorphe à celle de $[\mathcal{U}, \rho, \mathcal{J}]$."

Si il en était ainsi, $[\mathcal{U}'', \rho, \mathcal{J}'']$ serait une sous relation génératrice de $[\mathcal{U}, \rho, \mathcal{J}]$ -cf. chapitre I, paragraphe (8), réciproque du corollaire 1-. Cela est impossible car $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$ est plus petit pavé générateur par hypothèse.

<u>Démonstration de la propriété</u> :

Désignons par $\mathcal{R}' = [\mathcal{U}, \rho, \mathcal{J}]$ la sous relation déterminée par $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$; cette sous relation est génératrice, donc $\mathcal{T}$ est une extension minimale de $\mathcal{R}'$ en treillis (utiliser le théorème démontré dans le paragraphe (8) du chapitre I).

Soit $h_1 \times h_2 : [\mathcal{U}, \rho, \mathcal{J}] \to [E, \leq, E]$ la restriction de $H_1 \times H_2$ à la sous relation $\mathcal{R}'$. $h_1 \times h_2$ est un homomorphisme, on peut donc appliquer la propriété 1. Il en résulte que $h_1(\mathcal{U}) \times h_2(\mathcal{J}) = H_1(\mathcal{U}) \times H_2(\mathcal{J})$ est un pavé générateur de $\mathcal{T} = [E, \leq, E]$. Ce pavé générateur inclut le pavé caractéristique $\mathcal{U}' \times \mathcal{J}'$ de $\mathcal{T}$.

Supposons que cette inclusion est stricte, on pourra trouver un pavé $\mathcal{U}'' \times \mathcal{J}''$ de $E_1 \times E_2$ tel que $h_1(\mathcal{U}'') = H_1(\mathcal{U}'') = \mathcal{U}'$ et $h_2(\mathcal{J}'') = H_2(\mathcal{J}'') = \mathcal{J}'$. $\mathcal{U}'' \times \mathcal{J}''$ est strictement inclus dans $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$, et $h_1 \times h_2 : [\mathcal{U}'', \rho, \mathcal{J}''] \to [\mathcal{U}', \leq, \mathcal{J}']$ est un homomorphisme surjectif. Les extensions minimales en treillis complet de $[\mathcal{U}'', \rho, \mathcal{J}'']$ et $[\mathcal{U}', \leq, \mathcal{J}']$ sont donc isomorphes. La seconde de ces extensions est égale à $\mathcal{T}$, il en est donc de même de la première. Cette dernière propriété est en contradiction avec le lemme.

L'énoncé analogue pour les ordonnés finis de cette propriété est le suivant :

"Pour toute immersion Ψ d'un ordonné fini dans une de ses extensions minimales en treillis complet, l'image par Ψ de l'ensemble caractéristique de cet ordonné est l'ensemble caractéristique de ce treillis."

De ces deux propriétés on pourra déduire les corollaires suivants :

Corollaire 1 : "Deux relations finies $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ont des extensions minimales en treillis isomorphes si et seulement si leurs sous relations caractéristiques sont isomorphes."

Ce corollaire 1 montre que parmi toutes les relations qui s'étendent en un treillis minimal donné, la sous relation caractéristique de ce treillis est la plus petite à posséder cette propriété. De même parmi tous les ordonnés finis qui s'étendent en un treillis minimal donné, la relation d'ordre caractéristique induite par ce treillis est la plus petite à vérifier cette propriété.

Corollaire 2 : "Une relation finie admet un homomorphisme sur un treillis complet si et seulement si il en est de même pour sa sous relation caractéristique."

CHAPITRE III

RELATIONS EN ESCALIER

----

(1) CHAINES DE PAVES

A) *Définitions*

Une suite $\mathcal{S} = \{Q_1^1 \times Q_2^1, Q_1^2 \times Q_2^2, \ldots, Q_1^s \times Q_2^s\}$ de pavés extraits d'un produit cartésien d'ensembles $E_1 \times E_2$ est une chaîne si et seulement si pour tout couple d'indices α et β, on a :

$$\alpha < \beta \Longrightarrow Q_1^\alpha \subset Q_1^\beta \text{ et } Q_2^\alpha \supset Q_2^\beta \text{ (*)}$$

Si au contratire, la condition :

$$\alpha < \beta \Longrightarrow Q_1^\alpha \supset Q_1^\beta \text{ et } Q_2^\alpha \subset Q_2^\beta$$

est vérifiée, on dira que $\mathcal{S}$ est une chaîne inversée.

Une chaîne sera dite normale si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

[N1] $Q_1^1 = \emptyset \Longrightarrow Q_2^1 = E_2$;

[N2] $Q_2^s = \emptyset \Longrightarrow Q_1^s = E_1$.

Une chaîne sera dite complète si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

[C1] elle est normale ;

[C2] $Q_2^1 = E_2$;

[C3] $Q_1^s = E_1$.

Une chaîne sera dite réduite si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(*) Noter que les inclusions sont strictes.

[R1] elle est normale ;

[R2] $Q_1^1 \neq \emptyset$;

[R3] $Q_2^s \neq \emptyset$.

Notons que [R2] et [R3] impliquent [R1].

Exemples : Sur le produit cartésien ABCD × αβγδ,

$\mathcal{S}_1 = \{\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta,\ A \times \alpha\beta\}$ est une chaîne non normale car [N1] n'est pas vérifié.

$\mathcal{S}_2 = \{\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta,\ A \times \alpha\beta\}$ est une chaîne normale non complète car [C3] n'est pas vérifié ; cette chaîne n'est pas réduite car [R1] n'est pas vérifié.

$\mathcal{S}_3 = \{\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta,\ A \times \alpha\beta,\ ABCD \times \emptyset\}$ est une chaine complète.

$\mathcal{S}_4 = \{A \times \alpha\beta\}$ est une chaîne réduite.

Propriété 1 : "Toute chaîne extraite de l'ensemble des pavés pleins maximaux d'une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ est normale."

En effet tout pavé plein maximal $Q_1 \times Q_2$ extrait de $\mathcal{R}$ est tel que $Q_1 = \emptyset \Rightarrow Q_2 = E_2$ et $Q_2 = \emptyset \Rightarrow Q_1 = E_1$. [N1] et [N2] sont donc vérifiés.

Propriété 2 : "Toute chaîne normale $\mathcal{S}$ peut être transformée en une chaîne complète $\overline{\mathcal{S}}$ en ajoutant le pavé $Q_1^{\circ} \times Q_2^{\circ} = \emptyset \times E_2$ si $Q^1 \neq E_2$ et le pavé $Q_1^{s+1} \times Q_2^{s+1} = E_1 \times \emptyset$ si $Q_1^s \neq E_1$."

La vérification est immédiate, $\overline{\mathcal{S}}$ sera appelée la chaîne complétée de $\mathcal{S}$. Dans l'exemple précédent, on a $\mathcal{S}_3 = \overline{\mathcal{S}_2}$.

Propriété 3 : "Toute chaîne normale $\mathcal{S}$ peut être transformée en une chaîne réduite par suppression du pavé $Q_1^1 \times Q_2^1$ si $Q_1^1 = \emptyset$ et du pavé $Q_1^s \times Q_2^s$ si $Q_2^s = \emptyset$."

Vérification immédiate. La nouvelle chaîne obtenue sera appelée <u>la réduite de la chaîne $\mathcal{S}$</u>. Dans l'exemple précédent, $\mathcal{S}_4$ est la réduite de $\mathcal{S}_2$. Enfin, notons qu'une réduction suivie d'une complétion revient à une complétion et qu'une complétion suivie d'une réduction revient à une réduction.

B) *TYPE D'UNE CHAINE COMPLETE*

Le <u>type</u> d'une chaîne complète $\mathcal{S} = \{Q_1^1 \times Q_2^1, Q_1^2 \times Q_2^2, \ldots, Q_1^s \times Q_2^s\}$ est un doublet $(\alpha\beta)$ où α et β sont deux quantités booléennes définies par :

$$\alpha = 0 \iff Q_1^1 = \emptyset \quad \text{et} \quad \beta = 0 \iff Q_2^s = \emptyset.$$

<u>Exemples</u> : Sur $ABCD \times \alpha\beta\gamma\delta$:

$\{\emptyset \times ABCD, \alpha\beta \times AB, \alpha\beta\gamma\delta \times \emptyset\}$	est de type (00) ;
$\{\emptyset \times ABCD, \alpha\beta\gamma\delta \times AB\}$	est de type (01) ;
$\{\alpha\beta \times ABCD, \alpha\beta\gamma\delta \times \emptyset\}$	est de type (10) ;
$\{\alpha\beta\gamma\delta \times ABCD\}$	est de type (11).

(2) *DEFINITION D'UN ESCALIER*

Etant donné un ensemble de pavés $\mathcal{P} = \{Q_1^i \times Q_2^i\}_{i \in I}$, on notera $\bigcup_{i \in I} (Q^i \times Q^i)$ l'ensemble des doublets (e_1, e_2) tels qu'il existe un indice i pour lequel $(e_1, e_2) \in Q_1^i \times Q_2^i$.

<u>Définition</u> : Une relation $\mathcal{R} = \left[E_1, \rho, E_2\right]$ est un escalier si il existe une chaîne normale de pavés sur $E_1 \times E_2$, $\mathcal{S} = \{Q_1^1 \times Q_2^1, Q_1^2 \times Q_2^2, \ldots, Q_1^s \times Q_2^s\}$ telle que le domaine de vérification de $\mathcal{R}$ soit égal à $\bigcup_{i \in [1,s]} (Q_1^i \times Q_2^i)$.

A) *Propriétés fondamentales des escaliers*

<u>Première propriété caractéristique des escaliers</u> : "$\mathcal{R} = \left[E_1, \rho, E_2\right]$ est un escalier si et seulement si l'ensemble de ses clôtures droites (ou gauches) est fini et totalement ordonné par inclusion."

1 - Condition suffisante :

Si l'ensemble $Q_2^1, Q_2^2, \ldots, Q_2^s$ des clôtures droites de $\mathcal{R}$ est totalement ordonné, il est immédiat que l'ensemble des pavés pleins maximaux $Q_1^1 \times Q_2^1$, $Q_1^2 \times Q_2^2, \ldots, Q_1^s \times Q_2^s$ constitue une chaîne complète. D'autre part le domaine de vérification de $\mathcal{R}$ égale l'union des pavés pleins maximaux.

2 - Condition nécessaire :

Soit $\mathcal{Y} = \{Q_1^1 \times Q_2^1, Q_1^2 \times Q_2^2, \ldots, Q_1^s \times Q_2^s\}$ la chaîne normale de pavés dont on part. On peut toujours supposer que $\mathcal{Y}$ est complète car l'adjonction d'un pavé tel que $\emptyset \times E_2$ ou $E_1 \times \emptyset$ -pavés ne contenant aucun doublet (e_1, e_2)- ne change pas l'union des pavés dont on part. Posons :

$$A_1 = Q_1^1,\ A_2 = Q_1^2 - Q_1^1,\ \ldots,\ A_i = Q_1^i - Q_1^{i-1},\ \ldots,\ A_s = Q_1^s - Q_1^{s-1}$$

Puisque $Q_1^1, Q_1^2, \ldots, Q_1^s$ est strictement croissant, les A_i sont deux à deux disjoints et non vides, à l'exception peut-être de A_1 qui sera vide si $Q_1^1 = \emptyset$. La chaîne $\mathcal{Y}$ étant supposée complète, $Q_1^s = E_1$, il en résulte que l'union des A_i égale E_1. Enfin, il est aisé de vérifier que

$$e_1 \in A_i \Rightarrow \rho_{12}(e_1) = Q_2^i.$$

L'ensemble des Q_2^i, à l'exception peut-être de Q_2^1 si $A_1 = \emptyset$, est donc égal à l'ensemble des clôtures principales droites de $\mathcal{R}$. Considérons maintenant deux cas :

α) $A_1 \neq \emptyset$. Puisque la chaîne est complète $Q_2^1 = E_2$. L'ensemble des clôtures droites est engendré par les intersections des Q_2^i, il est donc égal à cet ensemble puisque les Q_2^i sont totalement ordonnés par inclusion et contiennent E_2.

β) $A_1 = \emptyset$. L'ensemble des $Q_2^i (i \neq 1)$ totalement ordonné engendre par intersection ce même ensemble plus E_2 ; E_2 est égal à Q_2^1, la propriété est encore démontrée.

Théorème : "Si le domaine de vérification d'un escalier $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ est égal à l'union des pavés d'une chaîne complète $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}$ est égal à la chaîne des pavés pleins maximaux de cet escalier."

Pour démontrer ce théorème, il suffit de continuer le raisonnement utilisé pour la démonstration de la condition nécessaire précédemment établie. En envisageant la suite :

$$B_s = Q_2^s,\ B_{s-1} = Q_2^{s-1} - Q_2^s,\ \dots,\ B_i = Q_2^i - Q_2^{i+1},\ \dots,\ B_1 = Q_2^1 - Q_2^2,$$

on pourra établir de la même façon que l'ensemble des Q_1^i est égal à l'ensemble des clôtures gauches de $\mathcal{R}$. Les correspondances de Galois associées à $\mathcal{R}$ associeront nécessairement chaque Q_1^i avec le Q_2^i de même indice pour respecter la décroissance de ces correspondances. Ce qui établit le théorème.

Corollaire 1 : "Les escaliers définis sur un produit cartésien $E_1 \times E_2$ correspondent biunivoquement aux chaînes complètes de pavés de $E_1 \times E_2$."

Corollaire 2 : "Deux chaînes complètes $\mathcal{S}' = \{Q'^i_1 \times Q'^i_2\}$ et $\mathcal{S}'' = \{Q''^i_1 \times Q''^i_2\}$ sont égales si et seulement si $U(Q'^i_1 \times Q'^i_2) = U(Q''^i_1 \times Q''^i_2)$."

Deuxième propriété caractéristique des escaliers : "Une relation $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ est un escalier si et seulement si il existe un homomorphisme $H_1 \times H_2$ de $\mathcal{R}$ dans une relation d'ordre total fini $T = [F, \leq, F]$."

Condition nécessaire :

Il suffit de considérer l'homomorphisme canonique $\rho_{11} \times \rho_{21} : [E_1, \rho, E_2] \to [\Gamma_1, \subseteq, \Gamma_1]$ -cf. introduction du chapitre II-.

Condition suffisante :

Pour tout élément $e_1 \in E_1$, $\rho_{12}(e_1)$ est l'ensemble des éléments $e_2 \in E_2$ tels que $H_2(e_2) \geq H_1(e_1)$, i.e. $\rho_{12}(e_1) = H_2^{-1}(\widehat{H_1(e_1)})$. Une autre clôture droite principale $\rho_{12}(e'_1)$ est également de la forme $H_2^{-1}(\widehat{H_1(e'_1)})$. $H_1(e_1)$ et $H_1(e'_1)$ sont deux éléments de F comparables, par conséquent $\widehat{H_1(e_1)}$ et $\widehat{H_1(e'_1)}$ sont deux sous-ensembles comparables de F, il en est de même des images réciproques $H_2^{-1}(\widehat{H_1(e_1)})$ et $H_2^{-1}(\widehat{H_1(e'_1)})$. L'ensemble des clôtures droites principales est donc totalement ordonné, il en est de même pour l'ensemble de toutes les clôtures droites engendrées par intersection de ces dernières.

Corollaire : "La relation complémentaire d'un escalier est aussi un escalier."

Soit $\bar{\mathcal{R}} = [E_1, \rho, E_2]$ cette relation en escalier définie par l'homomrophisme $H_1 \times H_2$ dans l'ensemble totalement ordonné $[F, \leq F]$. La relation $e_1 \not\rho e_2$ est vérifiée si et seulement si $H_1(e_1) \not\leq H_2(e_2)$; cette dernière relation est équivalente à $H_1(e_1) > H_2(e_2)$ puisque F est totalement ordonné. Une clôture principale droite $\not\rho_{12}(e_1)$ est donc égale à $H_2^{-1}(\widehat{H_1(e_1)} - \{H_1(e_1)\})$; on voit que ces sous-ensembles sont totalement ordonnés, la relation $\not\mathcal{R}$ est donc aussi un escalier.

B) *Type d'un escalier*

On dira qu'une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ admet une ligne pleine si il existe un élément $e_1 \in E_1$ tel que $\rho_{12}(e_1) = E_2$; cela signifie qu'il existe une ligne du tableau représentatif de $\mathcal{R}$ dont chaque case contient une croix. Cette condition est encore équivalente au fait que la plus petit clôture gauche est différente de l'ensemble vide ; en effet, cette plus petit clôture gauche, égale à $\rho_{21}(E_2)$, contient alors l'élément e_2.

De même, on dira que $\mathcal{R}$ admet une colonne pleine si il existe un élément $e_2 \in E_2$ tel que $\rho_{21}(e_2) = E_1$; il existe alors dans le tableau représentatif de $\mathcal{R}$ une colonne dont chaque case contient une croix. Cette condition est équivalente au fait que la plus petite clôture droite est non vide.

Le <u>type</u> d'une relation binaire $\mathcal{R}$ est un doublet $(\alpha\beta)$ dont chaque élément est un nombre binaire (0 ou 1) déterminé de la façon suivante :

$\alpha = 1 \Longleftrightarrow \mathcal{R}$ admet une ligne pleine ;

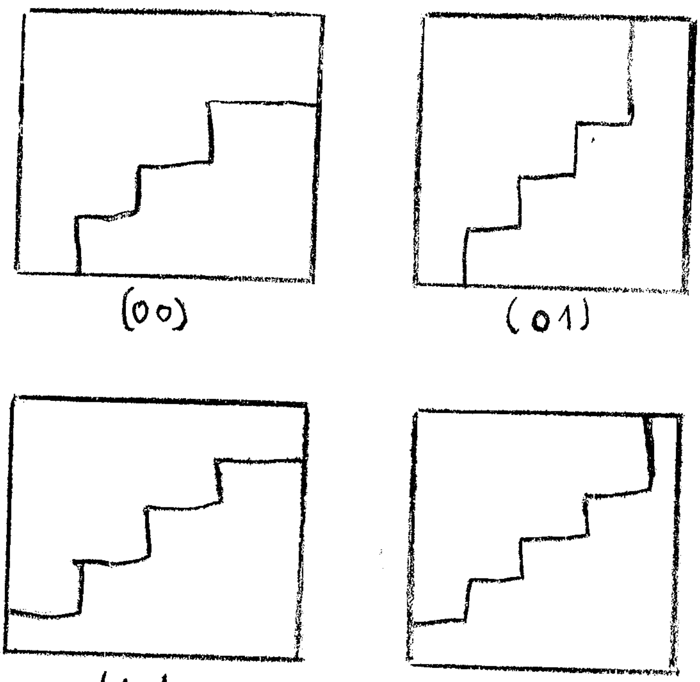
$\beta = 1 \Longleftrightarrow \mathcal{R}$ admet une colonne pleine.

<u>Propriété 1</u> : "Le type d'une relation en escalier est égal au type de sa chaîne de pavés pleins maximaux."

Vérification immédiate. Les quatre types distincts d'escaliers sont représentés par la figure 1.

Disons maintenant que $\mathcal{R} = |E_1, \rho, E_2|$ <u>admet une ligne vide</u> (resp. <u>colonne vide</u>) si il exite un élément $e_1 \in E_1$ (resp. $e_2 \in E_2$) tel que $\rho_{12}(e_1) = \emptyset$ (resp. $\rho_{21}(e_2) = \emptyset$). Il est alors immédiat de vérifier que :

<u>Propriété 2</u> : "Un escalier admet une ligne pleine (reps. colonne pleine) si et seulement si il n'admet pas de colonne vide (resp. ligne vide)."



[Fig 1]

Traduisons cette propriété en introduisant deux nouveaux indices binaires γ et δ attachés à la relation et tels que :

$\gamma = 1 \Longleftrightarrow$ admet une ligne vide ;
$\delta = 1 \Longleftrightarrow \mathcal{R}$ admet une colonne vide.

On obtient alors $(\gamma\delta) = (\beta'\alpha')$ qui permet d'énoncer :

Propriété 3 : "Le complémentaire d'un escalier de type $(\alpha\beta)$ est un escalier de type $(\beta'\alpha')$."

Le tableau de la figure 2 résume les propriétés associées au quatre types d'escaliers.

Type de l'escalier	Pavés pleins maximaux	Lignes et colonnes		Type du complémentaire
		Plein	Vide	
0 0	$\emptyset \times E_2$ $E_1 \times \emptyset$	pas de ligne pleine pas de colonne pleine	ligne vide colonne vide	1 1
0 1	$\emptyset \times E_2$	pas de ligne pleine colonne pleine	pas de ligne vide colonne vide	1 0
1 0	$E_1 \times \emptyset$	ligne pleine pas de colonne pleine	ligne vide pas de colonne vide	0 1
1 1		ligne pleine colonne pleine	pas de ligne vide pas de colonne vide	0 0

[Fig. 2]

C) *Autres propriétés des escaliers*

1 - Il est facile de voir que la relation duale d'un escalier est un escalier.

2 - Les relations que nous avons nommées escaliers (terme choisi en raison de la forme particulière de leur représentation) ont été étudiées par Ferrer [13] en partant d'une autre propriété caractéristique basée sur la transitivité et les

compositions des relations. Notons par le signe o la composition de deux relations, une relation $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ est <u>une relation de Ferrer</u> si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^* \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$; ce qui veut dire en d'autres termes que $a_1 \rho b_2$, $b_2 \not\rho c_1$, $c_1 \rho d_2 \Rightarrow a_1 \rho d_2$. Ferrer montre alors que de telles relations vérifient la première propriété caractéristique.

(3) PAVES PLEINS MAXIMAUX DU COMPLEMENTAIRE D'UN ESCALIER DEFINI PAR UN HOMOMORPHISME CONTRACTE

Nous allons établir dans ce paragraphe les propriétés des pavés pleins maximaux du complémentaire d'un escalier $\xi = [E_1, \rho, E_2]$ défini par un homomorphisme contracté $H_1 \times H_2$ dans une relation d'ordre total finie $[F, \leq, F]$. Ces propriétés serviront de base à la démonstration du théorème énoncé dans le paragraphe (4) du chapitre IV.

On représentera par 0 et 1 respectivement le plus petit et le plus grand élément de F ; à chaque élément $\alpha \in F$, on associera les sous-ensembles :

$$P_1(\alpha) = \{e_1 | e_1 \in E_1,\ H_1(e_1) \geq \alpha\},$$

$$P_2(\alpha) = \{e_2 | e_2 \in E_2,\ H_2(e_2) < \alpha\}.$$

<u>Propriété 0</u> : "Tout élément appartenant à $H_1(E_1)$ et différent de 1 appartient également à $H_2(E_2)$. Tout élément appartenant à $H_2(E_2)$ et différent de 0 appartient également à $H_1(E_1)$."

Les deux résultats se démontrent de façon duale, prouvons le premier. Puisque $H_1 \times H_2$ est un homomorphisme contracté, $[H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)]$ est une sous relation contractée de $[F, \leq, F]$ -théorème établi dans le paragraphe (2) du chapitre II-. Tout élément appartenant à $H_1(E_1)$ doit donc être la borne inf d'un sous-ensemble $P \subseteq H_2(E_2)$; si cet élément est différent de 1, P doit être non vide. Puisque F est totalement ordonné, la borne inf du sous-ensemble P non vide doit appartenir à P. Il en résulte bien que l'élément considéré appartient à $H_2(E_2)$.

Propriété 1 : "Pour tout élément $\alpha \in F$, $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ est un pavé plein de l'escalier $\mathcal{E}$."

Puisque $H_1 \times H_2 : [E_1, \rho, E_2] \to [F, \leq, F]$ est un homomorphisme, $e_1 \rho e_2$ est équivalent à $H_1(e_1) \leq H_2(e_2)$. Puisque F est totalement ordonné, $e_1 \not\rho e_2$ sera vérifié si et seulement si $H_1(e_1) > H_2(e_2)$. Les doublets (e_1, e_2) qui appartiennent à $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ satisfont à $H_1(e_1) \geq \alpha > H_2(e_2)$, soit $H_1(e_1) > H_2(e_2)$.

Propriété 2 : "Pour tout pavé plein maximal $P_1 \times P_2$ de l'escalier $\mathcal{E}$ qui vérifie la condition $P_1 \neq \emptyset$, il existe $\alpha \in F$ tel que $P_1 \times P_2 = P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$."

Posons α = Borne Inf $H_1(P_1)$; P_1 est manifestement inclus dans $P_1(\alpha)$. L'hypothèse suivant laquelle $P_1 \times P_2$ est un pavé plein de $\mathcal{E}$ implique que tout doublet (e_1, e_2) appartenant à ce pavé vérifie la condition $H_1(e_1) > H_2(e_2)$. Par conséquent, si $P_1 \neq \emptyset$, on a $\alpha = \underset{e_1 \in P_1}{\text{Borne Inf}}\, H_1(e_1) > H_2(e_2)$; d'où il résulte $P_2 \subseteq P_2(\alpha)$.

D'après la propriété 1, $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ est un pavé plein de $\mathcal{E}$. Les inclusions $P_1 \subseteq P_1(\alpha)$ et $P_2 \subseteq P_2(\alpha)$ impliquent donc $P_1 \times P_2 = P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ puisque $P_1 \times P_2$ est un pavé plein maximal.

Propriété 3 : "Tout couple d'éléments α et β de F vérifie les deux propriétés suivantes :

[A] $\qquad P_1(\alpha) \supset P_1(\beta) \Rightarrow P_2(\alpha) \subset P_2(\beta)$;

[B] $\alpha \neq 0$ et $P_2(\alpha) \subset P_2(\beta) \Rightarrow P_1(\alpha) \supset P_1(\beta)$."

L'inclusion stricte $P_1(\alpha) \supset P_1(\beta)$ est vérifiée si et seulement si il existe un élément e_1 qui appartient à $P_1(\alpha)$ et non à $P_1(\beta)$; compte tenu de la définition des sous-ensembles $P_1(\alpha)$ et $P_1(\beta)$, on obtient donc :

$$P_1(\alpha) \supset P_1(\beta) \iff \exists\, e_1 : \alpha \leq H_1(e_1) < \beta.$$

De même, on vérifiera que :

$$P_2(\alpha) \subset P_2(\beta) \iff \exists\, e_2 : \alpha \leq H_2(e_2) < \beta.$$

Ces deux équivalences permettent de remplacer les propriétés [A] et [B] par :

[A'] $\exists\, e_1 : \alpha \leq H_1(e_1) < \beta \Rightarrow \exists\, e_2 : \alpha \leq H_2(e_2) < \beta$;

[B'] $\exists\, e_2 : 0 < \alpha \leq H_2(e_2) < \beta \Rightarrow \exists\, e_1 : \alpha \leq H_1(e_1) < \beta$.

L'élément $H_1(e_1)$ de la propriété [A'] est nécessairement différent de 1 car on ne peut pas avoir $1 < \beta$; la propriété 0 permet alors d'affirmer l'existence d'un élément e_2 tel que $H_1(e_1) = H_2(e_2)$, soit $\alpha \leq H_2(e_2) < \beta$. Dans le cas de [B'], on suppose que $H_2(e_2) \neq 0$; la propriété 0 permet donc encore d'affirmer l'existence d'un élément e_1 tel que $\alpha \leq H_1(e_1) < \beta$.

<u>Corollaire</u> : "Tout couple d'éléments α et β de F vérifie la propriété suivante :

$\alpha \neq 0$ et $P_1(\alpha) \subseteq P_1(\beta)$ et $P_2(\alpha) \subseteq P_2(\beta) \Rightarrow P_1(\alpha) = P_1(\beta)$ et $P_2(\alpha) = P_2(\beta)$."

Nions l'énoncé du corollaire. Il existe deux éléments α et β tels que soit vérifiée l'une des deux propriétés suivantes :

[A'] $\alpha \neq 0$ et $P_1(\alpha) \subseteq P_1(\beta)$ et $P_2(\alpha) \subseteq P_2(\beta)$ et $P_1(\alpha) \neq P_1(\beta)$;

[B'] $\alpha \neq 0$ et $P_1(\alpha) \subseteq P_1(\beta)$ et $P_2(\alpha) = P_2(\beta)$ et $P_2(\alpha) \neq P_2(\beta)$.

Ces deux propriétés impliquent respectivement :

[A''] $P_1(\alpha) \subset P_1(\beta)$ et $P_2(\alpha) \subseteq P_2(\beta)$;

[B''] $\alpha \neq 0$ et $P_2(\alpha) \subset P_2(\beta)$ et $P_1(\alpha) \subseteq P_1(\beta)$.

$[A'']$ et $[B'']$ sont respectivement en contradiction avec les points $[A]$ et $[B]$ de la propriété 3.

<u>Propriété 4</u> : "Pour tout élément $\alpha \neq 0$ de F, $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ est un pavé plein maximal de $\not{\mathcal{E}}$."

On sait d'après la propriété 1 que $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ est un pavé plein de $\not{\mathcal{E}}$. Considérons un pavé plein maximal $P_1 \times P_2$ qui contient $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$. Deux cas sont à distinguer :

1) $P_1 \neq \emptyset$. Il existe d'après la propriété 2 un élément $\beta \in F$ tel que $P_1 \times P_2 = P_1(\beta) \times P_2(\beta)$. Les conditions $\alpha \neq 0$, $P_1(\alpha) \subseteq P_1(\beta)$ et $P_2(\alpha) \subseteq P_2(\beta)$ sont simultanément vérifiées ; elles impliquent d'après le corollaire de la propriété 3 : $P_1(\alpha) = P_1(\beta)$ et $P_2(\alpha) = P_2(\beta)$, soit $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha) = P_1 \times P_2$.

2) $P_1 = \emptyset$. $P_1(\alpha) \subseteq P_1$ est également vide. Pour montrer que $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ est un pavé plein maximal il suffit de montrer que $P_2(\alpha) = E_2$ car le pavé plein maximal $P_1 \times P_2$ considéré admet une composante vide. Supposons que $P_2(\alpha) \neq E_2$. Il existe alors un élément e_2 tel que $H_2(e_2) \geq \alpha$. Puisque α est différent de 0 par hypothèse, $H_2(e_2)$ est également différent de 0. Il existe donc d'après la propriété 0 un élément $H_1(e_1) = H_2(e_2)$. Cet élément $H_1(e_1)$ doit vérifier comme $H_2(e_2)$ la condition $H_1(e_1) \geq \alpha$ qui est contradictoire avec $P_1(\alpha) = \emptyset$.

(4) *PAVES PLEINS MAXIMAUX DU COMPLEMENTAIRE D'UN ESCALIER DEFINI PAR UNE CHAINE COMPLETE - NUMEROTATION CANONIQUE*

Les algorithmes décrits dans ce paragraphe, relatifs aux escaliers définis par une chaîne de pavés, serviront dans le prochain chapitre pour résoudre par algorithme le problème de la représentation d'une relation binaire finie dans un produit de chaînes.

A) *Numérotation canonique d'un escalier défini par sa chaîne de pavés pleins maximaux*

Une numérotation d'un escalier $[E_1, \rho, E_2]$ est un homomorphisme $H_1 \times H_2 : [E_1, \rho, E_2] \to [F, \leq, F]$, où $[F, \leq, F]$ est la relation d'ordre entre entiers naturels restreinte à un de ses sous-ensembles finis F. Nous serons amenés dans le chapitre IV à chercher une numérotation vérifiant les deux propriétés suivantes :

1 - la numérotation est un homomorphisme contracté ;

2 - F est de cardinal minimal.

Une telle numérotation sera dite minimale.

Propriété : "Si $H_1 \times H_2 : [E_1, \rho, E_2] \to [F, \leq, F]$ est une numérotation minimale, alors $[H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)]$ est une bissection contractée de $[F, \leq, F]$."

$[H_1(E_1), \leq, H_2(E_2)]$ est une sous relation contractée puisque $H_1 \times H_2$ est un homomorphisme contracté -théorème du paragraphe (2), chapitre II-. Si on avait $H_1(E_1) \cup H_2(E_2) \neq F$, on pourrait supprimer de F tout élément n'appartenant pas à $H_1(E_1) \cup H_2(E_2)$ sans changer la propriété pour $H_1 \times H_2$ d'être un homomorphe contracté.

Corollaire 1 : "Toute numérotation minimale d'un escalier $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ est semblable à l'homomorphisme canonique $\rho_{11} \times \rho_{21} : [E_1, \rho, E_2] \to [\Gamma_1, \subseteq, \Gamma_I]$."

Par définition, deux homomorphismes $H'_1 \times H'_2$ et $H''_1 \times H''_2$ d'une même relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$ dans deux relations d'ordre $[F', \leq, F']$ et $[F'', \leq, F'']$ seront dits semblables si il existe un isomorphisme d'ordre Ψ de $[F', \leq, F']$ sur $[F'', \leq, F'']$ (*) vérifiant les relations :

$$\forall e_1 \in E_1 : H''_1(e_1) = \Psi(H'_1(e_1)) ;$$

$$\forall e_2 \in E_2 : H''_2(e_2) = \Psi(H'_2(e_2)).$$

Vérification immédiate basée sur l'unicité de la bissection contractée associée à une relation -cf. paragraphe (4) du chapitre II-. On pourra établir de la même façon la réciproque de la propriété précédente, et démontrer que toutes les numérotations minimales sont semblables entre elles.

B) *Numérotation canonique d'un escalier défini par sa chaîne de pavés pleins maximaux*

On numérote les éléments de la chaîne $\mathcal{S}$ définissant l'escalier à partir de 0, soit $\mathcal{S} = \{Q_1^o \times Q_2^o, Q_1^1 \times Q_2^1, \ldots, Q_1^s \times Q_2^s\}$. On définit les deux applications :

$$\boxed{H_1(e_1) = \operatorname*{Inf}_{e_1 \in Q_1^i}(i) \; ; \; H_2(e_2) = \operatorname*{Sup}_{e_2 \in Q_2^i}(i)}$$

Ces deux applications de E_1 et E_2 dans le segment entier $[1, s]$ sont toujours définies car pour tout élément $e_1 \in E_1$ (resp. $e_2 \in E_2$), il existe au moins un sous-ensemble Q_1^i (resp. Q_2^i) qui le contient ; en effet, la chaîne étant supposée complète, on a $Q_1^s = E_1$ et $Q_2^o = E_2$. Il est d'autre part aisé de vérifier que $H_1(e_1)$ est égal à l'indice du sous-ensemble Q_1^i égal à $\rho_{11}(e_1)$, et que $H_2(e_2)$ est égal à l'indice du sous-ensemble Q_2^i égal à $\rho_{21}(e_2)$. Il en résulte que $H_1 \times H_2$ est une application décomposable semblable à l'homomorphisme canonique $\rho_{11} \times \rho_{21}$; $H_1 \times H_2$ est donc une numérotation minimale qui sera appelée la <u>numérotation canonique</u> de l'escalier. Cette numérotation est caractérisée par le fait que F est un segment entier dont le plus petit élément est égal à 0. On remarque d'autre part que le cardinal de F est égal à la longueur de la chaîne complète $\mathcal{S}$

<u>Exemple</u> : Soit la chaîne complète, $\mathcal{S}$, sur abcdef $\times$ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, et l'ensemble I de ses indices :

$= \{f \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ def \times \beta\gamma\delta\varepsilon,\ cdef \times \gamma\delta\varepsilon,\ bcdef \times \varepsilon,\ abcdef \times \emptyset\}$,

$I = \{\quad 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 4 \quad \}.$

La figure 3 représente l'escalier associé à $\mathcal{S}$ ainsi que sa numérotation canonique.

	$E_1 \backslash E_2$	(0) α	(1) β	(2) γ	(2) δ	(3) ε
(4)	a					
(3)	b					x
(2)	c			x	x	x
(1)	d		x	x	x	x
(1)	e		x	x	x	x
(0)	f	x	x	x	x	x

[Fig. 3]

C) *Complémentation d'un escalier*

Soit un escalier $\mathcal{R} = \left[E_1,\ \rho,\ E_2\right]$ défini par sa chaîne complète de pavés pleins maximaux, $\mathcal{S} = \{Q_1^o \times Q_2^o,\ Q_1^1 \times Q_2^1,\ \ldots,\ Q_1^s \times Q_2^s\}$. Transformons la chaîne en lui ajoutant le pavé $Q_1^{-1} \times Q_2^{-1} = \emptyset \times E_2$ si $Q_1^o \neq \emptyset$, et le pavé $Q_1^{s+1} \times Q_2^{s+1} = E_1 \times \emptyset$ si $Q_2^s \neq E_1$; on dira alors que l'on a <u>forcé la chaîne $\mathcal{S}$ au type (00)</u>, mais il faut remarquer que la nouvelle suite $\mathcal{S}' = \{P_1^o \times P_2^o,\ P_1^1 \times P_2^1,\ \ldots,\ P_1^t \times P_2^t\}$ n'est plus nécessairement une chaîne, les conditions de croissance stricte sur P_1^i et de décroissance stricte sur P_2^i n'étant plus vérifiées si $\mathcal{S}$ n'était pas de type (00).

Etant donné un sous-ensemble $P_1 \subseteq E_1$ (resp. $P_2 \subseteq E_2$), convenons de noter $\overline{P_1}$ (resp. $\overline{P_2}$) le complémentaire de ce sous-ensemble par rapport à E_1 (resp. E_2). A partir de la suite $\mathcal{S}'$, construisons la suite

$$\mathcal{S}'' = \{\overline{P_1^o} \times \overline{P_2^1},\ \overline{P_1^1} \times \overline{P_2^2},\ \ldots,\ \overline{P_1^i} \times \overline{P_2^{i+1}},\ \ldots,\ \overline{P_1^{t-1}} \times \overline{P_2^t}\}$$

<u>Exemple</u> : Si on reprend la chaîne $\mathcal{S}$ précédemment considérée, il faut ajouter le pavé $\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ au début de cette chaîne pour la forcer au type (00). Le graphique ci-dessous montre le procédé de formation de $\mathcal{S}''$ à partir de $\mathcal{S}'$.

$$\mathcal{S}' = \{\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ f \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ def \times \beta\gamma\delta\varepsilon,\ cdef \times \gamma\delta\varepsilon,\ bcdef \times \varepsilon,\ abcdef \times \emptyset\}$$

$$\mathcal{S}'' = \{abcdef \times \emptyset,\ abcde \times \alpha,\ abc \times \alpha\beta,\ ab \times \alpha\beta\gamma\delta,\ a \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\}.$$

<u>Théorème</u> : "$\mathcal{S}''$ est l'inverse de la chaîne des pavés pleins maximaux du complémentaire de l'escalier défini par la chaîne $\mathcal{S}$."

On vérifiera tout d'abord aisément que $\mathcal{S}''$ est bien l'inverse d'une chaîne complète de pavés de $E_1 \times E_2$.

Démontrons tout d'abord que si un doublet (e_1, e_2) n'appartient pas à l'unions des pavés de $\mathcal{S}$, il appartient à un pavé de $\mathcal{S}''$. Etant donné que $\mathcal{S}'$ se déduit de $\mathcal{S}$ par l'adjonction de 0, 1 ou 2 pavés ne contenant aucun doublet (e_1, e_2), on part de l'hypothèse :

$$\forall i \in |1, t| : (e_1, e_2) \notin P_1^i \times P_2^i$$

Soit j le plus petit indice tel que $e_1 \in P_1^j$. Ce plus petit indice existe puisque $P_1^t = E_1$; d'autre part, il est au moins égal à 1 puisque $P_1^o = \emptyset$. On obtient donc $e_1 \notin P_1^{j-1}$, ce qui implique $e_1 \in \overline{P_1^{j-1}}$.

Les conditions $e_1 \in P_1^j$ et $(e_1, e_2) \notin P_1^j \times P_2^j$ impliquent $e_2 \notin P_2^j$, soit $e_2 \in \overline{P_2^j}$. On a donc montré que $(e_1, e_2) \in \overline{P_1^{j-1}} \times \overline{P_2^j}$.

Pour achever la démonstration, il reste à établir que les pavés $P_1^i \times P_2^i$ et $\overline{P_1^{j-1}} \times \overline{P_1^j}$ sont deux à deux disjoints. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'il existe un doublet $(e_1, e_2) \in P_1^i \times P_2^i$, et $(e_1, e_2) \in \overline{P_1^{j-1}} \times \overline{P_2^j}$. La seconde condition est équivalente à $e_1 \notin P_1^{j-1}$ et $e_2 \notin P_2^j$.

La suite des P_1^i est strictement croissante dans $\mathcal{S}'$ tant que i est majoré par t - 1 ; en effet, dans le forçage au type (OO), on a ajouté la partie $P_1^o = \emptyset$ dans le cas où $P_1^1 = Q_1^o \neq \emptyset$. Par conséquent, les conditions $e_1 \in P_1^i$ et $e_1 \notin P_1^{j-1}$ impliquent $j - 1 < i$. On démontrerait de même que les conditions $e_2 \in P_2^i$ et $e_2 \notin P_2^j$ impliquent $j > i$. Les deux inégalités $j - 1 < i$ et $j > i$ sont contradictoires.

D) Variation du nombre de marches d'un escalier par passage au complémentaire

Le nombre de marches d'un escalier $\mathcal{R}$ est égal au nombre de ses pavés pleins maximaux, c'est donc aussi la longueur de la chaîne $\mathcal{S}$ de ces rectangles.

Le nombre de marches de l'escalier complémentaire $\not{\mathcal{R}}$ est égal à la longueur de la chaîne $\mathcal{S}''$ construite au paragraphe précédent, cette longueur est égale à la longueur de la chaîne $\mathcal{S}'$ diminuée de 1. Pour connaître la variation du nombre de marches par passage de $\mathcal{R}$ à $\not{\mathcal{R}}$, il suffit de connaître la variation de la longueur de $\mathcal{S}$ quand on la force au type (00).

1) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type (00) : la longueur de $\mathcal{S}$ égale la longueur de $\mathcal{S}'$, par conséquent le nombre de marches de $\not{\mathcal{R}}$ égale celui de $\mathcal{R}$ diminué de 1 ;

2) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type (01) ou (10) : la longueur de $\mathcal{S}'$ égale la longueur de $\mathcal{S}$ augmentée de 1, $\mathcal{R}$ et $\not{\mathcal{R}}$ ont donc un même nombre de marches ;

3) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type (11) : la longueur de $\mathcal{S}'$ égale la longueur de $\mathcal{S}$ augmentée de 2, $\not{\mathcal{R}}$ a donc une marche de plus que $\mathcal{R}$.

Le tableau de la figure 4 résume les variations des caractéristiques d'un escalier $\mathcal{R}$ par passage au complémentaire.

Type de $\mathcal{R}$	Type de $\not{\mathcal{R}}$	Variation du nombre de marches dans le passage $\mathcal{R} \to \not{\mathcal{R}}$
0 0	1 1	- 1
1 1	0 0	+ 1
0 1	1 0	0
1 0	0 1	0

[Fig. 4]

E) *Numérotation canonique du complémentaire d'un escalier*

Soit un escalier $\mathcal{R}$ donné par la chaîne $\mathcal{S}$ de ses pavés pleins maximaux. Pour obtenir la numérotation canonique de $\overline{\mathcal{R}}$, on peut calculer la chaîne inversée $\mathcal{S}''$ et appliquer la méthode définie en B). Compte tenu du mode de passage de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{S}''$, on peut également procéder directement en partant de la chaîne $\mathcal{S}'$ forcée au type (00).

Numérotons les pavés de $\mathcal{S}'$ par une suite d'entiers relatifs successifs dont le plus petit est -1, et en partant de la fin de la chaîne $\mathcal{S}'$; soit :

$$\mathcal{S}' = \{P_1^s \times P_2^s,\ P_1^{s-1} \times P_2^{s-1},\ \ldots,\ P_1^{-1} \times P_2^{-1}\}.$$

Compte tenu de cette numérotation inverse de $\mathcal{S}'$, la chaîne $\mathcal{S}''$ écrite dans le sens direct sera :

$$\mathcal{S}'' = \{\overline{P_1^o} \times \overline{P_2^{-1}},\ \overline{P_1^1} \times \overline{P_2^o},\ \ldots,\ \overline{P_1^i} \times \overline{P_2^{i-1}},\ \ldots,\ \overline{P_1^s} \times \overline{P_2^{s-1}}\}$$

$$= \{\overline{Q_1^o} \times \overline{Q_2^o},\ \overline{Q_1^1} \times \overline{Q_2^1},\ \ldots,\ \overline{Q_1^i} \times \overline{Q_2^i},\ \ldots,\ \overline{Q_1^s} \times \overline{Q_2^s}\},$$

en posant $\overline{Q_1^i} = \overline{P_1^i}$ et $\overline{Q_2^i} = \overline{P_2^{i-1}}$.

Compte tenu du paragraphe B), la numérotation canonique $H_1 \times H_2$ de $\overline{\mathcal{R}}$ est donnée par :

$$H_1(e_1) = \operatorname*{Inf}_{e_1 \in \overline{Q_1^i}}(i) = \operatorname*{Inf}_{e_1 \in \overline{P_1^i}}(i) = \operatorname*{Inf}_{e_1 \notin P_1^i}(i) = \operatorname*{Sup}_{e_1 \in P_1^{i-1}}(i) \quad ;$$

$$H_2(e_2) = \operatorname*{Sup}_{e_2 \in \overline{Q_2^i}}(i) = \operatorname*{Sup}_{e_2 \in \overline{P_2^{i-1}}}(i) = \operatorname*{Sup}_{e_2 \notin P_2^{i-1}}(i) = \operatorname*{Inf}_{e_2 \in P_2^i}(i) .$$

Les deux dernières égalités relatives à $H_1(e_1)$ et $H_2(e_2)$ sont obtenues en tenant compte du fait que la numérotation adoptée sur $\mathcal{S}'$ est strictement décroissante pour P_1^i tant que $i < s$, et strictement croissante pour P_2^i tant que $i > -1$.

En définitive, on obtient les formules :

$$\boxed{H_1(e_1) = \underset{e_1 \in P_1^{i-1}}{\mathrm{Sup}(i)} \quad ; \quad H_2(e_2) = \underset{e_2 \in P_2^{i}}{\mathrm{Inf}(i)}}$$

Exemple : Reprenons la chaîne φ considérée en B). La chaîne φ' forcée au type (00) et sa numérotation inversée I sont :

$' = \{\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ f \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,\ def \times \beta\gamma\delta\varepsilon,\ cdef \times \gamma\delta\varepsilon,\ bcdef \times \varepsilon,\ abcdef \times \emptyset\}$

$I = \{ \quad 4 \quad , \quad 3 \quad , \quad 2 \quad , \quad 1 \quad , \quad 0 \quad , \quad -1 \quad \}$

On obtient les numérotations canoniques :

H_1	a	b	c	d e	f
	0	1	2	3	4

H_2	α	β	γ δ	ε
	3	2	1	0

CHAPITRE IV

CODAGE D'UNE RELATION BINAIRE DANS UN PRODUIT DE CHAINES

Dans ce chapitre, nous appliquons les théories qui viennent d'être développées au problème du codage des relations binaires dans un produit de chaînes ; d'une façon précise, une relation binaire finie, $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ étant donnée, il s'agit de trouver un homomorphisme (au sens des relations, cf. chaptire I) $\varphi_1 \times \varphi_2 : \mathcal{R} \to k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_n$, où chaque k_i est un ordre total fini de cardinal k_i.

Dans le cas où $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $[E, \leq, E]$, on a résolu ce problème avec une immersion Ψ (au sens des relations d'ordre) de $\mathcal{R}$ dans $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_n$. Le théorème énoncé dans le paragraphe (3) du chapitre II montre ~~la~~ que résolution du premier problème implique la résolution du second. Il suffit pour cela de choisir pour $\varphi_1 \times \varphi_2$ un homomorphisme contracté -ce qui est toujours possible d'après les résultats énoncés dans le paragraphe (2) du chapitre II- ; on peut alors calculer une extension supérieure, Φ_1 (ou inférieure, Φ_2), ce qui est une immersion au sens des relations d'ordre.

Nous commencerons par étudier dans le paragraphe (1) les particularités attachées aux homomorphismes d'une relation binaire dans un produit cartésien de relations binaires. Ceci permettra (paragraphe (2)) de définir la dimension d'une relation binaire, énoncer les propriétés de cette dimension, et montrer qu'elle généralise celle qui est définie pour les ensembles ordonnés (première partie, chapitre III, paragraphe (4)). On établira dans le paragraphe (3) un théorème relatif aux homomorphismes contractés dans une produit cartésien de treillis complets ; l'application de ce théorème et des propriétés des pavés pleins maximaux d'un escalier énoncées dans le pargraphe (3) du chapitre III permettront de donner une caractérisation combinatoire des homomorphismes contractés dans un produit de chaînes (paragraphe (4)).

Dans le paragraphe (5) nous décrirons sur un exemple les algorithmes de codage, ils seront comparés dans le paragraphe (6) aux algorithmes d'immersion d'un ensemble ordonné dans un produit de chaînes (chapitre III, première partie).

(1) HOMOMORPHISMES D'UNE RELATION BINAIRE DANS UN PRODUIT CARTESIEN DE RELATIONS BINAIRES

A) Image réciproque d'une relation binaire par une application décomposable

Etant donné une application décomposable $H_1 \times H_2$ d'un produit cartésien $E_1 \times E_2$ dans un autre $F_1 \times F_2$, l'image réciproque par $H_1 \times H_2$ d'une relation binaire $\left[F_1, \theta, F_2\right]$ est la relation binaire $\left[E_1, \rho, E_2\right]$ définie par :

$\forall e_1 \in E_1$ et $\forall e_2 \in E_2$: $e_1 \rho e_2 \iff H_1(e_1)\ \theta\ H_2(e_2)$.

En comparant cette définition avec celle d'un homomorphisme, on obtient la propriété :

"Une application décomposable $H_1 \times H_2$ d'une relation binaire $\left[E_1, \rho, E_2\right]$ dans une autre $\left[F_1, \theta, F_2\right]$ est un homomorphisme si et seulement si la première est image réciproque de la seconde par cette application décomposable."

B) Produit cartésien d'une famille de relations binaires

Etant donnée une famille de relations binaires $\mathcal{R}^i = \left[F_1^i, \theta^i, F_2^i\right]$ indicée sur l'ensemble $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, le produit cartésien de cette famille est la relation $\mathcal{R} = \left[F_1, \theta, F_2\right]$ dont les ensembles objets et buts sont respectivement les produits cartésiens $F_1 = F_1^1 \times F_1^2 \times \ldots \times F_1^n$ et $F_2 = F_2^1 \times F_2^2 \times \ldots \times F_2^n$, et telle que pour tout doublet (f_1, f_2) $F_1 \times F_2$, $f_1 \theta f_2$ soit vérifié si et seulement si pour tout $i = \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_1^i \theta^i f_2^i$ est vérifié -f_1^i et f_2^i représentent les composants d'ordre i des n-uplets f_1 et f_2-.

Soit $H_1 \times H_2$ une application décomposable du produit cartésien de deux ensembles quelconques, $E_1 \times E_2$, dans le support $F_1 \times F_2$ du produit cartésien de relations précédemment défini. Les projections de cette application décomposable sont les applications décomposables $H_1^i \times H_2^i : E_1 \times E_2 \to F_1^i \times F_2^i$ telles que pour tout doublet $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$, on ait :

$$H_1(e_1) = (H_1^1(e_1), H_1^2(e_1), \ldots, H_1^n(e_1))$$

$$H_2(e_2) = (H_2^1(e_2), H_2^2(e_2), \ldots, H_2^n(e_2)).$$

Les applications $H_1^i : E_1 \to F_1^i$ (resp. $H_2^i : E_2 \to F_2^i$) seront appelées les projections gauches (resp. projections droites) ; d'une façon générale les projections gauches et droites seront appelées projections partielles. Deux applications décomposables $H_1 \times H_2$ et $H_1^1 \times H_2^1$ de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \times F_2$ dont toutes les projections partielles de même ordre sont deux à deux égales sauf une (i.e. $H_\alpha^i = H'^i_\alpha$ sauf pour un doublet (α, i)) seront dites voisines.

C) *Intersection (Union) d'une famille de relations binaires ayant même support*

L'intersection (resp. union) d'une famille de relations binaires $\mathcal{R}^i = [E_1, \rho^i, E_2]$ ayant un même support $E_1 \times E_2$ est la relation $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ telle que pour tout doublet (e_1, e_2) $E_1 \times E_2$, $e_1 \rho e_2$ soit vérifié si et seulement si $e_1 \rho^i e_2$ est vérifié pour tout i (resp. il existe un i tel que $e_1 \rho^i e_2$). On utilisera les notations ensemblistes pour représenter les unions et intersections de relations binaires ; il est alors immédiat que $\mathcal{R} = \bigcap_i \mathcal{R}_i \iff \not{\mathcal{R}} = \bigcup_i \not{\mathcal{R}}^i$.

D) *Caractérisation d'un homomorphisme dans un produit cartésien de relations*

"Une application décomposable $H_1 \times H_2$ du support $E_1 \times E_2$ d'une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ dans le support $F_1 \times F_2$ du produit cartésien d'une famille de relations binaires $[F_1^i, \theta^i, F_2^i]$ est un homomorphisme entre les deux relations binaires si et seulement si on a l'égalité $\mathcal{R} = \bigcap_i \mathcal{R}^i$ -ou l'égalité équivalente $\not{\mathcal{R}} = \bigcup_i \not{\mathcal{R}}^i$-, $\mathcal{R}^i$ étant défini pour chaque indice i comme l'image réciproque de la relation $[F_1^i, \theta^i, F_2^i]$ par la $i^{ème}$ projection $H_1^i \times H_2^i$ de l'application $H_1 \times H_2$."

Soit $[F_1, \theta, F_2]$ le produit cartésien des relations $[F_1^i, \theta^i, F_2^i]$. $H_1 \times H_2$ est un homomorphisme si et seulement si pour tout doublet $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$, $e_1 \rho e_2 \iff H_1(e_1)\ \theta\ H_2(e_2)$. D'après la définition d'un produit cartésien de relations binaires et des projections $H_1^i \times H_2^i$ de l'application décomposable $H_1 \times H_2$, la condition $H_1(e_1)\ \theta\ H_2(e_2)$ est vérifiée si et seulement si pour tout i, $H_1^i(e_1)\ \theta^i\ H_2^i(e_2)$ est vérifiée. Cette dernière condition revient à dire que (e_1, e_2) appartient au domaine de vérification de la relation $\mathcal{R}^i$. La condition d'homomorphisme est donc équivalente à $\mathcal{R} = \bigcap_i \mathcal{R}^i$.

On dira que les ensembles de relations $\mathcal{R}^i$ et $\mathcal{F}^i$ constituent <u>la décomposition</u> de la relation $\mathcal{R}$ par rapport à l'homomorphisme $H_1 \times H_2$.

(2) *DIMENSION D'UNE RELATION BINAIRE*

<u>Définition</u> : La dimension d'une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ est le minimum k du nombre de relations d'ordre total $\mathcal{F}^1 = [F^1, \leq, F^1]$, $\mathcal{F}^2 = [F^2, \leq, F^2]$, ..., $\mathcal{F}^k = [F^k, \leq, F^k]$ telles qu'il existe un homomorphisme $H_1 \times H_2$ de dans le produit cartésien $\mathcal{F} = [F, \leq, F]$ de ces relations d'ordre total.

A) *Dimension d'une relation d'ordre*

Supposons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $[E, \leq, E]$; chaque $\mathcal{F}^i$ est un treillis, il en est donc de même du produit cartésien $\mathcal{F}$. Le théorème 1, démontré dans le paragraphe (5) du chapitre II, affirme que l'existence d'un homomorphisme de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{F}$ est équivalente à l'existence d'une immersion au sens des relations d'ordre. Il en résulte que la dimension définie ci-dessus coïncide avec la dimension qui a été définie pour les ensembles ordonnés (cf. chapitre III, première partie).

B) *Propriétés de la dimension*

Théorème : "Il existe un homomorphisme d'une relation binaire dans un produit cartésien de k ensembles totalement ordonnés si et seulement si cette relation est égale à l'intersection de k escaliers."

Soit $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ la relation donnée, $\mathcal{F}^1 = [F^1, \leq, F^1]$, $\mathcal{F}^2 = [F^2, \leq, F^2]$, ..., $\mathcal{F}^k = [F^k, \leq, F^k]$ les relations d'ordre total composantes, $\mathcal{F} = [F, \leq, F]$, le produit cartésien des $\mathcal{F}^i$, $H_1 \times H_2$ un homomorphisme de dans $\mathcal{F}$. Les images réciproques des ordonnés ^{i} par les projections $H_1^i \times H_2^i$ de l'homomorphisme sont des escaliers ξ^i, il résulte alors de la caractérisation d'un homomorphisme dans un produit cartésien de relations (paragraphe (1) D)) que $\mathcal{R} = \bigcap \xi^i$.

Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est égal à l'intersection de k escaliers ξ^1, ξ^2, ..., ξ^k, on peut construire des homomorphismes $H_1^i \times H_2^i$ de $\mathcal{R}$ dans des ensembles totalement ordonnés $\mathcal{F}^i$. La caractérisation démontrée dans le paragraphe (1) D) implique l'existence d'un homomorphisme de $\mathcal{R}$ dans le produit cartésien des $\mathcal{F}^i$.

Corollaire 1 : "Il existe un homomorphisme d'une relation binaire dans un produit cartésien de k ensembles totalement ordonnés si et seulement si la complémentaire de cette relation est égale à l'union de k escaliers."

Corollaire 2 : "La dimension d'une relation binaire $\mathcal{R}$ est égale au nombre minimal k de relations en escaliers ξ^1, ξ^2, ..., ξ^k telles que $\mathcal{R} = \xi^1 \cap \xi^2 \cap \ldots \cap \xi^k$."

Corollaire 3 : "La dimension d'une relation binaire $\mathcal{R}$ est égale au nombre minimal k de relations en escalier ξ'^1, ξ'^2, ..., ξ'^k telles que $\not{\mathcal{R}} = \xi'^1 \cup \xi'^2 \cup \ldots \cup \xi'^k$."

C) *Dimensions comparées d'une relation et d'une sous-relation*

Propriété 1 : "La dimension d'une relation binaire majore la dimension de toute sous-relation."

Cette propriété tient du fait que la restriction d'un homoprhisme au support d'une sous-relation est encore un homomorphisme de cette sous-relation.

Propriété 2 : "La dimension d'une relation binaire est égale à la dimension de toute sous-relation génératrice."

Il suffit de démontrer cette propriété pour les relations atomiques. A une telle relation $\mathcal{R}$ on associe son extension canonique en treillis complet $\tilde{\mathcal{R}}$. Si $\tilde{\mathcal{R}}$ peut s'immerger dans un produit de k ensembles totalement ordonnés, il en est de même pour toute sous-relation génératrice de $\tilde{\mathcal{R}}$ et réciproquement. Les sous-relations génératrices de $\mathcal{R}$ sont en correspondance bijective avec celles de $\tilde{\mathcal{R}}$, ce qui achève la démonstration de la propriété.

Corollaire : "La dimension d'un ensemble ordonné est égale à la dimension de sa sous-relation génératrice."

(3) CARACTERISATION D'UN HOMOMORPHISME CONTRACTE DANS UN PRODUIT CARTESIEN DE RELATIONS D'ORDRES

Théorème : "Un homomoprhisme $H_1 \times H_2$ d'une relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$ dans un produit cartésien de treillis complets $[F^1, \leq, F^1] \times [F^2, \leq, F^2] \times \ldots \times [F^k, \leq, F^k]$ est contracté si et seulement si il n'existe pas d'homomorphisme voisin $H'_1 \times H'_2$ plus contracté que $H_1 \times H_2$."

La condition est suffisante d'après la définition d'un homomorphisme contracté (cf. chapitre II, paragraphe (2)). Réciproquement, puisque l'on considère un homomorphisme dans un treillis complet, si $H_1 \times H_2$ n'est pas contracté, il existe un homomorphisme $H''_1 \times H''_2$ strictement plus contracté [cf. chapitre II, paragraphe (2)]. Considérons les projections partielles des homomorphismes $H_1 \times H_2$ et $H''_1 \times H''_2$, soit :

$$H_1 = H_1^{\;1} \times H_1^{\;2} \times \ldots \times H_1^{\;k} \; ; \; H_2 = H_2^{\;1} \times H_2^{\;2} \times \ldots \times H_2^{\;k} \; ;$$

$$H''_1 = H''^{1}_1 \times H''^{2}_1 \times \ldots \times H''^{k}_1 \; ; \; H''_2 = H''^{1}_2 \times H''^{2}_2 \times \ldots \times H''^{k}_2 .$$

La condition $H_1 \times H_2 \neq H''_1 \times H''_2$ implique l'exsitence d'un indice j tel que $H''^{j}_1 \neq H_1^{\;j}$ ou $H''^{j}_2 \neq H_2^{\;j}$. Supposons dans un premier temps que l'on ait $H''^{j}_1 \neq H_1^{\;j}$, on peut supposer sans perte de généralité que j = 1. Considérons alors l'application

$$H'_1 = H''^{1}_1 \times H_1^{\;2} \times \ldots \times H_1^{\;k} .$$

Démontrons que l'application décomposable $H'_1 \times H_2$ voisine de $H_1 \times H_2$ est un homomorphisme.

Le fait que $H_1 \times H_2$ et $H''_1 \times H''_2$ soient des homomorphismes est exprimé par

(C) $e_1 \rho e_2 \iff \forall j = \{1, 2, \ldots, k\} : H_1^{\;j}(e_1) \leq H_2^{\;j}(e_2)$

(C") $e_1 \rho e_2 \iff \forall j = \{1, 2, \ldots, k\} : H''^{j}_1(e_1) \leq H''^{j}_2(e_2)$.

Le fait que $H''_1 \times H''_2$ est plus contracté que $H_1 \times H_2$ est exprimé par

(D_1) $\forall e_1 \in E_1, \forall j = \{1, 2, \ldots, k\} : H_1^{\;j}(e_1) \leq H''^{j}_1(e_1)$

(D_2) $\forall e_2 \in E_2, \forall j = \{1, 2, \ldots, k\} : H_2^{\;j}(e_2) \geq H''^{j}_2(e_2)$.

Supposons tout d'abord que $e_1 \rho e_2$ est vérifié ; la condition (C") implique $H''^{1}_1(e_1) \leq H''^{1}_2(e_2)$, la condition ($D_2$) implique $H''^{1}_2(e_2) \leq H_2^{\;1}(e_2)$; il en résulte $H''^{1}_1(e_1) \leq H_2^{\;1}(e_2)$. D'autre part, pour tout autre indice $j \neq 1$, la condition (C) implique $H_1^{\;j}(e_1) \leq H_2^{\;j}(e_2)$. Par conséquent $e_1 \rho e_2$ implique $H'_1(e_1) \leq H_2(e_2)$.

Réciproquement, si $H_1'(e_1) \leq H_2(e_2)$ est vérifié, $H_1''^{1}(e_1) \leq H_2^{1}(e_2)$ est vérifié, la condition (D_1) implique $H_1^{1}(e_1) \leq H_1''^{1}(e_1)$; il en résulte $H_1^{1}(e_1) \leq H_2^{1}(e_2)$. D'autre part, pour tout autre indice $j \neq 1$, $H_1'(e_1) \leq H_2(e_2)$ implique également $H_1^{j}(e_1) \leq H_2^{j}(e_2)$. $H_1^{j}(e_1) \leq H_2^{j}(e_2)$ est donc vérifié pour tout indice j, ce qui implique d'après (C), $e_1 \rho e_2$.

$H_1' \times H_2$ est donc bien un homomorphisme, d'autre part il est strictement plus contracté que $H_1 \times H_2$. La démonstration aurait été conduite de la même manière si on avait supposé au départ qu'il existait un indice j tel que $H_2''^{j} \neq H_2^{j}$.

(4) *ETUDE DES HOMOMORPHISMES CONTRACTES DANS UN PRODUIT DE CHAINES*

Théorème : "Un homomorphisme $H_1 \times H_2 : [E_1, \rho, E_2] \rightarrow [F, \leq, F]$ d'une relation $[E_1, \rho, E_2]$ dans un produit cartésien de k ensembles totalement ordonnés $[F, \leq, F] = [F^1, \leq, F^1] \times [F^2, \leq, F^2] \times \ldots \times [F^k, \leq, F^k]$ est contracté si et seulement si :

1°) Les projections $H_1^{j} \times H_2^{j} : [E_1, \rho^j, E_2] \rightarrow [F^j, \leq, F^j]$ sont contractées(*) ;

2°) Les pavés pleins maximaux des relations composants $[E_1, \phi^j, E_2]$ sont des pavés pleins maximaux de la relation $[E_1, \phi, E_2]$."

Pour que $H_1 \times H_2$ soit contracté, il faut et il suffit qu'il n'existe pas d'homomorphisme voisin $H_1' \times H_2'$ plus contracté que $H_1 \times H_2$ (cf. paragraphe 3) ; supposons qu'un tel homomorphisme existe, sans diminuer la généralité, on peut poser :

$$H_1' = H_1'^{1} \times H_1^{2} \times \ldots \times H_1^{k} \text{ et } H_2' = H_2$$

Soit $\mathcal{R} = \bigcap \mathcal{G}^{j}$ et $\mathcal{R} = \bigcap \mathcal{G}'^{j}$ les décompositions de $\mathcal{R}$ par rapport aux homomorphismes $H_1 \times H_2$ et $H_1' \times H_2'$. Pour tout indice $j \neq 1$, on a $\mathcal{G}^{j} = \mathcal{G}'^{j}$.

(*) $[E_1, \rho^j, E_2]$ désigne l'image réciproque par $H_1^{j} \times H_2^{j}$ de la relative $[F^j, \leq, F^j]$.

Pour l'indice 1, deux cas sont à distinguer :

(1) $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G}'^1$; $H_1{}^1 \times H_2^1$ et $H_1'^1 \times H_2{}^1$ sont ~~deux~~ homomorphismes de $\mathcal{G}^1$ dans $[F^1, \leq, F^1]$, et $H_1'^1 \times H_2{}^1$ est strictement plus contracté que $H_1^1 \times H_2^1$. D'où la première condition du théorème.

(2) $\mathcal{G}^1 \neq \mathcal{G}'^1$. Pour respecter la première condition du théorème, supposons que $H_1{}^1 \times H_2{}^1$ est contracté. A chaque élément α de l'ensemble F^1, faisons correspondre les sous-ensembles :

$$P_1(\alpha) = \{e_1 | e_1 \in E_1,\ H_1{}^1(e_1) \geq \alpha\}$$

$$P_1'(\alpha) = \{e_1 | e_1 \in E_1,\ H_1'^1(e_1) \geq \alpha\}$$

$$P_2(\alpha) = \{e_2 | e_2 \in E_2,\ H_2{}^1(e_2) < \alpha\}$$

Puisque $H_1'^1 \times H_2{}^1$ est strictement plus contracté que $H_1{}^1 \times H_2{}^1$, il existe un élément α tel que $P_1'(\alpha) \supset P_1(\alpha)$. Cet élément α est distinct du plus petit élément de F^1, car $P_1(0) = E_1$ ne peut pas être strictement inclus dans un sous-ensemble de E_1. La propriété 4 établie dans le paragraphe (4) du chapitre précédent implique que $P_1(\alpha) \times P_2(\alpha)$ est un pavé plein maximal de $\mathcal{G}^1$, la propriété 1 établie dans le même paragraphe implique que $P_1'(\alpha) \times P_2(\alpha)$ est un pavé plein de $\mathcal{G}'^1$.

(5) *ALGORITHMES DE RECHERCHE D'UN HOMOMORPHISME D'UNE RELATION BINAIRE DANS UN PRODUIT DE CHAINES*

Soit une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ pour laquelle on cherche un homomorphisme $H_1 \times H_2$ dans un produit cartésien de n chaînes. On peut toujours supposer que $\mathcal{R}$ est atomique, sinon on opère la réduction à une relation atomique, et une fois trouvé un homomorphisme de cette relation, on envoie les éléments équivalents sur une même image homomorphe. On commencera par réduire à sa sous relation caractéristique $\mathcal{C} = [\mathcal{U}, \rho, \mathcal{J}]$, et on cherchera un homomorphisme contracté $h_1 \times h_2$ de $\mathcal{C}$ dans un produit de n chaînes, homomorphisme qui pourra être ensuite étendu à $\mathcal{R}$ en utilisant l'une des extensions décrites dans le théorème du paragraphe (3) du chapitre II.

La recherche de $h_1 \times h_2$ sera conduite de la façon suivante :

(P1) Complémenter $\mathcal{C}$, soit $\bar{\mathcal{C}} = [\mathcal{U}, \bar{\rho}, \mathcal{J}]$ la nouvelle relation obtenue ;

(P2) Rechercher un ensemble $\mathcal{P} = \{P_1^i \times P_2^i\}_{i \in I}$ de pavés pleins maximaux de $\bar{\mathcal{C}}$ dont l'union couvre cette relation ;

(P3) Partitionner $\mathcal{P}$ en des sous-ensembles $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ tels que l'union des pavés appartenant à chaque $\mathcal{P}_i$ soit un escalier $\xi_i = [\mathcal{U}, \theta^i, \mathcal{J}]$.

(P4) Trouver un homomorphisme contracté $h_1^i \times h_2^i$ de chaque escalier ξ_i dans une chaîne k_i.

On sait alors que le produit des homomorphismes $h_1^i \times h_2^i$ dans $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_n$ est un homomorphisme contracté de $\mathcal{C}$ dans ce produit de chaînes.

Le problème (P3) se résoud à l'aide de la caractérisation des escaliers par des chaînes de pavés pleins maximaux (chapitre III), et le problème (P4) a été résolu dans le même chapitre. Il reste seulement à donner un moyen de résoudre (P2). Pour cela nous utiliserons le critère de couverture suivant énoncé par Carrez [ ] dans sa thèse :

"Un sous-ensemble $\mathcal{P} = \{P_1^1 \times P_2^1, P_1^2 \times P_2^2, \ldots, P_1^m \times P_2^m\}$ est une couverture d'une relation binaire $\mathcal{R} = [E_1, \rho, E_2]$ si et seulement si pour tout couple (A_1, P_1) constitué par un clôture atomique gauche A_1 et une clôture principale gauche P_1 vérifiant la condition $A_1 \subseteq P_1$, il existe une clôture gauche P_1^i telle que $A_1 \subseteq P_1^i \subseteq P_1$."

Ce critère est du même type que celui qui a été utilisé pour trouver un système générateur minimal du treillis des sections initiales d'un ordonné fini -cf. chapitre III, première partie-, on l'utilisera de la même façon.

Exemple :

$\mathcal{U}$	α	β	γ	δ	ε
A	x				x
B		x	x	x	
C		x		x	
D	x	x			x
E			x	x	x

Relation $\mathcal{C}$

$\mathcal{U}$	α	β	γ	δ	ε
A		x	x	x	
B	x				x
C	x		x		x
D			x	x	
E	x	x			

Relation $\not{\mathcal{C}}$

Considérons la relation caractéristique $\mathcal{C}$ décrite par la figure ci-dessus.

Les clôtures atomiques gauches et principales gauches de la relation $\not{\mathcal{C}}$ sont :

$\mathcal{A}_1$ = {A, BC, C, AD, E}, $\mathcal{P}_1$ = {BCE, AE, ACD, AD, BC}

Les clôtures AD et BC sont obligatoires ; il faut alors chercher des systèmes minimaux de clôtures comprises dans les couples :

(A, AE) ; (C, ACD) ; (E, AE) ; (E, BCE).

Le calcul conduit comme dans le chapitre III de la première partie, à six solutions minimales :

(S_1) A. E. C. BC. AD

(S_2) A. E. ACD. BC. AD

(S_3) AE. E. C. BC. AD

(S_4) AE. E. ACD. BC. AD

(S_5) AE. BCE. C. BC. AD

(S_6) AE. BCE. ACD. BC. AD

Considérons la solution (S_1), on peut la partionner en 3 chaînes :

$\mathcal{S}_1$ = A, AD ;

$\mathcal{S}_2$ = C, BC ;

$\mathcal{S}_3$ = E .

A ces trois chaînes correspondent les chaînes de pavés pleins maximaux :

$\mathcal{S}_1 = A \times \beta\gamma\delta,\ AD \times \gamma\delta$;

$\mathcal{S}_2 = C \times \alpha\gamma\varepsilon,\ BC \times \alpha\varepsilon$;

$\mathcal{S}_3 = E \times \alpha\beta$.

Les chaînes correspondantes forcées au type (00), et leurs numérotations inversées à partir de -1 sont :

$\mathcal{S}'_1$	$\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$	$A \times \beta\gamma\delta$	$AD \times \gamma\delta$	$ABCDE \times \emptyset$
	2	1	0	-1
$\mathcal{S}'_2$	$\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$	$C \times \alpha\gamma\varepsilon$	$BC \times \alpha\varepsilon$	$ABCDE \times \emptyset$
	2	1	0	-1
$\mathcal{S}'_3$		$\emptyset \times \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$	$E \times \alpha\beta$	$ABCDE \times \emptyset$
		1	0	-1

On en tire les numérotations canoniques :

	A	B	C	D	E
h_1^1	2	0	0	1	0
h_1^2	0	1	2	0	0
h_1^3	0	0	0	0	1

	α	β	γ	δ	ε
h_2^1	2	1	0	0	2
h_2^2	0	2	1	2	0
h_2^3	0	0	1	1	1

La figure ci-dessous donne la relation $\mathcal{C} = [\mathcal{U}\ \rho, \mathcal{J}]$ codée

		200	120	011	021	201
		α	β	γ	δ	ε
200	A	x				x
010	B		x	x	x	
020	C		x		x	
100	D	x	x			x
001	E			x	x	x

(6) *CODAGE D'UNE RELATION D'ORDRE*

Appliquons la méthode précédemment développée à la recherche d'une immersion Ψ d'une relation d'ordre $[E, \leq, E]$ dans un produit de chaînes. On est conduit à chercher la sous relation $\mathcal{C} = [\mathcal{U}, \leq, \mathcal{J}]$, restriction de $[E, \leq, E]$ au pavé $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$ constitué par les éléments U-irréductibles et les éléments $\cap$-irréductibles. Analysons la signification de la relation complémentaire $\bar{\mathcal{C}} = [\mathcal{U}, \not\leq, \mathcal{J}]$.

Théorème : "Les correspondances de Galois ρ_{12} et ρ_{21} associées à la complémentaire d'une relation d'ordre, soit $[E, \not\leq, E]$, sont telles que :

1) $P_1 \subseteq E$ (resp. $P_2 \subseteq E$) est une clôture gauche (resp. droite) si et seulement si P_1 (resp. P_2) est une section finale (resp. initiale) ;

2) $P_1 \times P_2$ est un pavé plein maximal si et seulement si P_1 et P_2 sont complémentaires ;

3) En particulier, pour tout élément x appartenant à E, on a :

$$\rho_{12}(x) = \complement \check{x} \quad ; \quad \rho_{11}(x) = \check{x} \quad ;$$

$$\rho_{21}(x) = \complement \hat{x} \quad ; \quad \rho_{22}(x) = \hat{x} \quad ."$$

Les relations de 3) sont immédiates à vérifier, et 1) en découle. Il reste à montrer 2).

Si $P_2 = \rho_{12}(P_1)$; alors pour tout x appartenant à P_1 et tout y appartenant à P_2, $x \not\leq y$ est vérifié. Il est donc impossible que x = y par suite de la réflexivité d'une relation d'ordre. On a donc $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Soit x un élément n'appartenant pas à P_1, pour tout autre élément $x' \in P_1$, $x' \geq x$ n'est pas vérifié puisque P_1 est une section finale (point 1) du théorème). Ceci implique directement $x \in P_2$. On a donc $P_1 \cup P_2 = E$, ce qui achève la démonstration.

La recherche d'un ensemble $\mathcal{P}$ de pavés pleins maximaux couvrant la relation $\not{\mathcal{G}} = [\mathfrak{U}, \not\leq, \mathfrak{J}]$ -cf. critère de couverture du paragraphe (5)- s'effectue en cherchant les clôtures gauches comprises dans les couples $[\check{u} \cap \mathfrak{U}, \complement \hat{\imath} \cap \mathfrak{U}]$. Ce problème est celui qui a été traité dans le chapitre III, première partie.

Notons que les pavés maximaux de $\not{\mathcal{G}} = [\mathfrak{U}, \not\leq, \mathfrak{J}]$ peuvent se déduire de la relation caractéristique de $\not{\mathcal{G}}$, soit $\Gamma = [\mathfrak{J}', \not\leq, \mathfrak{U}']$ -cf. chapitre I, paragraphe (9)-. Ce résultat est à rapporcher du corollaire 2 établi dans le paragraphe (1) du chapitre III de la première partie.

TROISIEME PARTIE

REPRESENTATION DES FAMILLES DE MOORE

ETUDE ANALYTIQUE DES FERMETURES SUR UN TREILLIS DE BOOLE

Etant donnée une fermeture F sur un treillis de Boole fini B^n, on peut lui associer biunivoquement une représentation par des fonctions booléennes -on parlera ainsi d'une représentation analytique- par l'un des trois moyens suivants :

1°) Traduction en expression booléenne de la fonction générale $F : B^n \to B^n$;

2°) Traduction en expression booléenne de la fonction booléenne duale $F^* : B^n \to B^n$ (on montrera que F^* représente une fermeture duale sur B^n).

3°) Traduction en expression booléenne de la fonction caractéristique f_M (ou f'_M) de la famille de Moore M des invariants de F (cette représentation a été définie par Mme Zidani (cf. Paragraphe 2).

Les monômes premiers des expressions booléennes ci-dessus définis correspondent biunivoquement à certains éléments caractéristiques de la famille de Moore M et de la fonction F ; nous étudierons ces correspondances dans les paragraphes (3), (4) et (5). En particulier, on montrera que les monômes premiers de F (de même que ceux de f'_M) sont attachés à la génération des fermetures par des préordres réguliers dont l'étude est faite dans le paragraphe (1).

Les paragraphes (6) à (9) sont dévolus à l'étude des rapports existant entre préordre réguliers sur B^n et les recouvrements par n parties d'un ensemble ; on étudiera le cas particulier de la couverture d'une fonction booléenne simple par ses monômes premiers, ce qui permettra d'interpréter certains résultats énoncés par Tison dans sa thèse sur la théorie des consensus [33].

Le paragraphe 10 qui traite du calcul de la limite inductive d'une application monotone et extensive de B^n dans B^n servira de base à la méthode de réduction des systèmes séquentiels partiellement déterminés (quatrième partie - Chapitre I).

Enfin, les derniers paragraphes sont consacrés à une étude des familles de Moore de caractère fini suivant le procédé de génération défini par Tukey [34]. Comme application, on pourra résoudre analytiquement la recherche de la n-arité minimale d'une algèbre abstraite finie dont le treillis des sous-algèbres est donné ; cette dernière application rejoint l'étude des familles de Moore de caractère fini faite par Birkoff [4].

(1) PREORDRE REGULIER SUR UN TREILLIS COMPLET

Soit un treillis complet $\mathcal{T}$ et une relation de préordre notée $a \overset{\theta}{\rightarrow} b$ (*) définie sur les éléments de $\mathcal{T}$; on dira que ce préordre est <u>régulier</u> si il vérifie les deux axiomes suivants :

(1) $a \geq b \Rightarrow a \overset{\theta}{\rightarrow} b$;

(2) Si deux familles $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ indicées par le même ensemble I vérifient la relation $a_i \overset{\theta}{\rightarrow} b_i$ pour tout i, $\vee a_i \overset{\theta}{\rightarrow} \vee b_i$ est également vérifié.

On dira que a est une <u>attribution</u> de b si la relation $a \overset{\theta}{\rightarrow} b$ est vérifiée.

Propriété - Définition

"Toute classe d'isovalence (cf. rappels) d'un préordre régulier contient un plus grand élément qui sera appelé <u>l'optimum</u> de cette classe."

Indiçons les éléments de cette classe par un ensemble I, soit $\{a_i\}$ la famille ainsi obtenue ; désignons par b la borne supérieure des a_i. La relation $b \geq a_j$ vérifiée pour tout $j \in I$ implique $b \overset{\theta}{\rightarrow} a_j$ (axiome 1).
D'autre part, pour tout élément a_i, la relation $a_j \overset{\theta}{\rightarrow} a_i$ est vérifiée puisque l'on se trouve dans une classe d'isovalence, il résulte alors de l'axiome 2 :

(*) Nous avons convenu (rappels) d'utiliser le même signe $\leq$ pour représenter les relations d'ordre et de préordre ; le signe $\overset{\theta}{\rightarrow}$ sera utilisé pour les préordres réguliers. Cette notation sera ainsi en concordance avec celle utilisée par Mme Zidani [37], de même les termes optimum et attribution sont empruntés à Mme Zidani.

$a_j \xrightarrow{o} Va_i = b$. b est donc le plus grand élément de cette classe d'isovalence.

Notation : Etant donné un élément a du treillis, nous noterons Opt(a) l'élément optimum de sa classe d'isovalence.

Théorème

"Etant donné une fermeture f sur un treillis complet T , la relation $a \xrightarrow{o} b$ définie par $f(a) \geq b$ est un préordre régulier dont les éléments optimum sont les invariants de f ; réciproquement, étant donné un préordre régulier $a \xrightarrow{o} b$, l'application $a \to Opt(a)$ est une fermeture".

Partie directe :

Axiome 1 : Si $a \geq b$ est vérifié, $f(a) \geq b$ l'est également par suite de l'extensivité d'une fermeture.

Axiome 2 : Si $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont deux familles telles que $f(a_i) \geq b_i$ soit vérifié pour tout indice i, alors $f(Va_i) \geq Vf(a_i) \geq Vb_i$.

Les éléments optimum sont les invariants de f car les conditions $a \xrightarrow{o} b$ et $b \xrightarrow{o} a$, équivalentesà $f(a) \geq b$ et $f(b) \geq a$, sont également équivalentes à $f(a) = f(b)$.

Partie réciproque :

Il est immédiat que l'application $a \to Opt(a)$ est extensive et idempotente. Vérifions sa monotonie. Si $a \geq b$, alors d'après l'axiome 1, on a $a \xrightarrow{o} b$. On a d'autre part $Opt(a) \xrightarrow{o} a$ ainsi que $b \xrightarrow{o} Opt(b)$, il en résulte par transitivité du préordre $Opt(a) \xrightarrow{o} Opt(b)$. En appliquant l'axiome (2) on obtient $Opt(a) \xrightarrow{o} Opt(a)\ V Opt(b)$; d'où il résulte que Opt(a) et Opt(a) V Opt(b) sont isovalents. Etant donné que Opt(a) est le plus grand élément de sa classe d'isovalence, on obtient alors $Opt(a) \geq Opt(a)\ V\ Opt(b)$, soit $Opt(a) \geq Opt(b)$.

Corollaire

"Les éléments optimum d'un préordre régulier forment une partie de Moore".

(1 *bis*) AFFAIBLISSEMENT DE L'AXIOME (2)

Il est intéressant de chercher à affaiblir l'axiome (2) de manière à pouvoir définir un préordre régulier sur un ordonné quelconque tout en conservant le théorème établissant la liaison avec les fermetures. L'axiome (2) sera remplacé par les deux suivants :

(2') Etant donné deux éléments a et b tels que $a \xrightarrow{o} b$, il existe un élément c isovalent à a qui majore a et b.

(2") Toute chaîne C d'éléments deux à deux isovalents est majorée par un élément c isovalent aux éléments de cette chaîne.

Remarquons que dans le cas fini, seul l'axiome (2') est nécessaire puisque toute chaîne est finie.

Existence d'un optimum :

Considérons une classe d'isovalence Γ, et un élément quelconque a de cette classe. Moyennant l'axiome du choix, on peut extraire de Γ une chaîne maximale C contenant a ; il existe d'après (2") un élément c qui majore C et isovalent aux éléments de C . c appartient donc à Γ, d'autre part, il appartient à C puisque cette dernière est maximale, c est donc un élément maximal de Γ. Nous avons ainsi démontré que tout élément de Γ est majoré par un élément maximal ; l'axiome (2') implique qu'il ne peut pas exister deux éléments maximaux distincts.

Démonstration du théorème

La partie directe est immédiate.

Pour établir la partie réciproque, on considère l'application $a \to Opt(a)$ extensive et idempotente. On montre de la même façon que $a \geq b$ implique $Opt(a) \xrightarrow{o} Opt(b)$. Il existe alors d'après l'axiome (2') un élément c qui majore Opt(a) et Opt(b), et isovalent à Opt(a). Puisque Opt(a) est le plus grand élément de sa classe d'isovalence, c = Opt(a) ; d'où il résulte $Opt(a) \geq Opt(b)$.

(2) FONCTION CARACTERISTIQUE D'UNE FAMILLE DE MOORE

La fonction booléenne f_M caractéristique d'une famille de Moore $M \subseteq B^n$ -B^n est un treillis de Boole de dimension finie (cf. rappels)- possède des propriétés remarquables qui ont été mises en évidence par Mme Zidani [37].

Théorème 1

"f_M est attachée à une famille de Moore $M \subseteq B^n$ si et seulement si tout monôme premier de f'_M contient une et une seule variable complémentée".

Théorème 2

"Un monôme $\alpha'_i \cdot \prod_{j \in J} \alpha_j$ est premier par rapport à f'_M si et seulement si J est le support d'une attribution élémentaire d'indice i".

1 - Rappelons que le support d'un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B^n$ est l'ensemble J des indices des a_i égaux à 1 ; on a vu dans le chapitre des rappels que cette notion de support permet d'établir une bijection entre B^n et l'ensemble des parties de $[1,n]$, ensemble des entiers compris entre 1 et n.

Par <u>attribution élémentaire d'indice i</u>, on entend la chose suivante. On considère le préordre régulier "$\xrightarrow{\theta}$" défini sur B^n dont l'ensemble des optimums est égal à M ; un n-uplet $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in B^n$ sera appelé une attribution élémentaire d'indice i si les conditions suivantes sont vérifiées :

1 - $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \xrightarrow{\theta} (\delta_i^1,\delta_i^2,\ldots,\delta_i^n)$ (*)

2 - $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \neq (\delta_i^1,\delta_i^2,\ldots,\delta_i^n)$

3 - $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est minimal à vérifier 1 et 2.

Nous utiliserons également la notion <u>d'attribution minimale d'indice i</u>, pour désigner un n-uplet vérifiant 1 et minimal avec cette propriété. On voit que toute attribution minimale d'indice i est élémentaire à l'exception de $(\delta_i^1,\delta_i^2,\ldots,\delta_i^n)$.

(3) TRADUCTION EN ALGEBRE DE BOOLE DE CERTAINES PROPRIETES VERIFIES PAR UNE APPLICATION $F : B^n \to B^n$

Toute fermeture ou fermeture duale $F : B^n \to B^n$ peut être considérée comme une fonction booléenne générale particulière. L'intérêt de ce nouveau point de vue consiste en ce que toute fonction booléenne est représentée par une somme de monômes, et que les propriétés algébriques abstraites des fermetures seront remplacées par des règles vérifiables par un algorithme devant lier ces monômes entre eux. C'est déjà le cas de la situation que nous avons rencontrée en associant une fonction booléenne simple f_M à une famille de Moore $M \subseteq B^n$. Traduisons dans le

------

(*) δ_i^j est une quantité booléenne qui vaut 1 si i = j et 0 si i $\neq$ j.

langage des expressions booléennes les propriétés de monotonie, extensivité, contractivité et idempotence qui interviennent dans la définition d'une fermeture $F : B^n \to B^n$.

Propriété 1

"Une application $F : B^n \to B^n$ est croissante si et seulement si chacune de ses fonctions composantes est croissante par rapport à toutes ses variables".

Ceci n'est qu'une propriété triviale de l'algèbre de Boole ; elle tire son intérêt du fait que chaque fonction composante pourra être représentée par une somme de monômes croissants, i.e dont aucune variable n'est complémentée. De plus, on pourra choisir la représentation par la base première complète qui est minimale ; en ce sens on peut dire qu'une fonction booléenne croissante a une seule représentation avec un seul type de variable. Cette remarque a son importance du point de vue algorithmique car la représentation, dans un ordinateur par exemple, d'un monôme booléen quelconque exige la réservation de deux zones de mémoire égales contenant respectivement les variables complémentées et les variables non complémentées ; en ce sens, nous dirons qu'une fonction booléenne quelconque exige une double représentation, et une fonction booléenne croissante par rapport à toutes ses variables une simple représentation. Remarquons tout de suite que la fonction $f_{\mathcal{M}}$ associée à une famille de Moore $\mathcal{M} \subseteq B^n$ exige une double représentation.

Définition

Le support d'un monôme croissant dépendant d'un ensemble de variables $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ est le sous-ensemble $I \subseteq [1,n]$ des indices de ces variables dont il dépend effectivement. Si ce support est vide, on a à faire au monôme croissant toujours égal à 1.

Propriété 1'

"Etant donné une fonction croissante $F : B^n \to B^n$, un monôme croissant $\prod_{i \in I} \alpha_i$ est majoré par une fonction composante F_j si et seulement si l'image par F du n-uplet de support I a sa $j^{\text{ème}}$ composante égale à 1".

Cette propriété de vérification immédiate implique que les monômes premiers de F_j correspondent aux plus petits n-uplets dont l'image par F ont leur $j^{\text{ème}}$ composante non nulle.

Propriété 2

"Une application $F : B^n \to B^n$ est extensive si et seulement si pour tout indice $i \in [1,n]$, α_i est un monôme inférieur ou égal à F_i."

La vérification de cette propriété est encore triviale. On remarque que α_i sera un monôme premier de F_i sauf si $F_i \equiv 1$.

Propriété 2*

"Une application $F : B^n \to B^n$ est contractante si et seulement si pour tout indice $i \in [1,n]$, α_i est un monôme supérieur ou égal à F_i."

Cette propriété qui peut se vérifier de façon directe implique que chaque monôme premier de F_i contient une variable α_i sauf si $F_i = 0$. On peut aussi déduire la propriété 2* de la propriété suivante :

Propriété 2'

"La duale d'une application contractante $F : B^n \to B^n$ est une application extensive".

Rappelons que la duale d'une fonction booléenne simple $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ est la fonction $f^*(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = f'(\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_n')$; par définition, nous définissons la duale d'une fonction booléenne générale $F = (F_1,F_2,\ldots,F_n)$ comme étant la fonction $F^* = (F_1^*,F_2^*,\ldots,F_n^*)$.

Propriété 3

"Une application $F : B^n \to B^n$ est idempotente si et seulement si chacune de ses fonctions composantes F_i vérifie l'égalité

$$(E_i) \qquad F_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = F_i(F_1,F_2,\ldots,F_n)."$$

Cette propriété n'apporte rien de nouveau puisqu'elle ne fait que traduire la définition de l'idempotence. On peut cependant la remplacer par la propriété ci-dessous dans le cas des fermetures.

Propriété 3'

"Une application $F : B^n \to B^n$ croissante et extensive (ou croissante et contractante) est idempotente si et seulement si pour tout couple d'indices i et j, l'égalité suivante est vérifiée :

$$(E_{ij}) \qquad F_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n) = F_i(\alpha_1,\ldots,F_j,\ldots,\alpha_n) ."$$

Il suffit de vérifier cette propriété dans le cas où F est monotone et extensive, et appliquer la propriété 2' pour l'obtenir lorsque F est monotone et contractante.

Condition nécessaire

$F_i(\alpha_1,\ldots,F_j,\ldots,\alpha_n)$ majore $F_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n)$ car F_i est croissante et $F_j \geq \alpha_j$. $F_i(F_1,\ldots,F_j,\ldots,F_n)$ majore $F_i(\alpha_1,\ldots,F_j,\ldots,\alpha_n)$ car F_i est croissante et $F_k \geq \alpha_k$ pour tout k. Compte tenu de l'égalité (E_i), on en tire l'égalité (E_{ij}).

Condition suffisante

L'égalité $(E_{i,j+1})$ permet d'écrire

$F_i(F_1,F_2,\ldots,F_j,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n) = F_i(F_1,F_2,\ldots,F_j,F_{j+1},\ldots,\alpha_n)$;

on en déduit de proche en proche en utilisant les égalités (E_{i1}), (E_{i2}),..(E_{in}) que $F_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = F_i(F_1,F_2,\ldots,F_n)$.

Conclusions

1) Une fermeture est caractérisée par les propriétés 1,2 et 3', une fermeture duale par les propriétés 1,2^* et 3'. Les propriétés 1 et 3' sont autoduales, d'autre part la propriété 2^* est duale de la propriété 2, il en résulte que la duale d'une fermeture est une fermeture duale. L'opération unaire de dualité étant notée $F \to F^*$, nous conviendrons désormais de se présenter une fermeture par la notation F et une fermeture duale par la notation F^*.

2) Si les propriétés 1,2 et 2^* qui traduisent la monotonie, l'extensivité et la contractivité sont commodes d'emploi, il n'en est pas de même pour les propriétés 3 ou 3' qui traduisent l'idempotence ; ces dernières conduisant à effectuer des calculs de fonction de fonctions. Le paragraphe suivant va nous permettre d'énoncer des propriétés plus caractéristiques de l'idempotence dans le cas des fermetures duales.

(4) MONOMES REGULIERS D'UNE FERMETURE DUALE

Définitions

1) Soit une application croissante $F : B^n \to B^n$, un monôme m croissant par rapport aux variables $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ est régulier par rapport à F si l'inégalité $m \leq F_i$ est vérifiée pour tout indice i du support de m.

2) Un monôme m sera dit premier par rapport à F si il l'est pas rapport à une des fonctions F_i.

A) *Propriétés générales des monômes réguliers*

Propriété 1

"Un monôme m de support I est régulier par rapport à une application monotone $F : B^n \to B^n$ si et seulement si le n-uplet X_I ayant même support vérifie la condition $F(X_I) \geq X_I$."

Posons $X_I = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$. La condition $m \leq F_i$ est équivalente à $F_I(X_I) = 1$, cette condition étant vérifiée par hypothèse pour tout indice i tel que $a_i = 1$, il en résulte l'équivalence $F(X_I) \geq X_I$.

Propriété 2

"Le produit de deux monômes réguliers par rapport à une même application monotone $F : B^n \to B^n$ est également régulier par rapport à cette application".

Démonstration directe :

Soient m et m' ces deux monômes, I et I' leurs supports. Le support de m.m' est égal à $I \cup I'$. Par hypothèse, on a :

$$\forall i \in I : m \leq F_i ,$$

$$\forall i \in I' : m \leq F_i .$$

Il en résulte $\quad \forall i \in I \quad I' : m.m' \leq F_i .$

Corollaire de la proposition 1

On peut considérer la correspondance biunivoque qui associe à un monôme croissant des variables $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ le n-uplet de B^n ayant même support que ce monôme. Le produit de monômes correspond alors à l'union de n-uplets. La propriété 2 revient alors à dire que l'ensemble des n-uplets X tels que $F(X) \geq X$ constitue un sous $\cup$ demi-treillis de B^n lorsque F est monotone. Il s'agit là d'une propriété classique basée sur le fait que

$$F(X) \geq X \text{ et } F(Y) \geq Y = F(X \cup Y) \geq F(X) \geq X$$

et

$$F(X \cup Y) \geq F(Y) \geq Y$$

par suite de la monotonie.

Nous parlerons désormais du sous $\cap$ 1/2 treillis des monômes réguliers par rapport à une application croissante $F : B^n \to B^n$, le produit de monômes croissants correspondant à une opération de borne inférieure.

(B) *Caractérisation d'une fermeture duale*

Théorème

"Une fonction booléenne générale $F^* : B^n \to B^n$ est une fermeture duale si et seulement si elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

1) Chaque fonction composante F_i^* est croissante par rapport à toutes ses variables ;

2) Si une fonction composante F_i^* n'est pas identiquement nulle, chacun de ses monômes premiers contient la variable α_i ;

3) Tout monôme premier de F^* est régulier. "

Les conditions (1) et (2) traduisent la monotonie et la contractivité ainsi qu'on l'a vu dans le paragraphe 3 ; il suffit donc d'établir que la condition (3) équivaut à l'idempotence compte tenu de (1) et (2).

Condition suffisante

D'après la propriété 3' établie dans le paragraphe 3, il suffit de vérifier que pour tout couple d'indice i et j, on a l'égalité :

$$(E_{ij}) \qquad F_i^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n) = F_i^*(\alpha_1,\ldots,F_j^*,\ldots,\alpha_n).$$

Posons $F_i^* = \varphi+\Psi$ en séparant la somme φ des monômes premiers ne contenant pas α_j de la somme Ψ des monômes premiers contenant α_j. $F_i^*(\alpha_1,\ldots,F_j^*,\ldots,\alpha_n)$ est égal à $\varphi+F_j^*.\Psi$. Tout monôme premier appartenant à Ψ contient α_j, et minore donc F_j^* (condition de régularité) ; il en résulte $\Psi \leq F_j^*$, ce qui implique l'égalité $\varphi+\Psi = \varphi+F_j^*.\Psi$.

Condition nécessaire

Soit m un monôme premier de l'une des fonctions composantes $-F_i^*$ par exemple-, et α_j une des variables de ce monôme. Posons $F_i^* = \varphi+\Psi$, le sens de cette égalité étant le même que dans la condition suffisante. Pour que F^* soit idempotente, il est nécessaire que l'on ait l'égalité $\varphi+\Psi = \varphi+F_j^*.\Psi$. Cette égalité implique $\Psi = F_j^*.\Psi$ car ces deux fonctions sont majorées par α_j et aucun monôme de φ n'est majoré par α_j. Le monôme m considéré au départ appartient à Ψ, on doit donc avoir $m \leq \Psi = F_j^*.\Psi \leq F_j^*$.

(C) *Application - Génération des fermetures duales*

Considérons un ensemble M de monômes croissants par rapport à un ensemble de variables $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, et construisons les applications $F_i^* = m_{ij}$, où les m_{ij} sont les monômes de M contenant la variable α_i -on considèrera que $F_i^* = 0$ si cette somme est vide-. La fonction générale $F^* = (F_1^*,F_2^*,\ldots,F_n^*)$ ainsi construite vérifie les propriétés 1) et 2) du théorème de caractérisation des fermetures duales. D'autre part, les monômes de M sont par construction réguliers, il en est donc de même pour l'ensemble $M' \subseteq M$ des monômes premiers. La propriété 3) est donc également vérifiée, et F^* est une fermeture. Réciproquement, toute fermeture duale peut être construite par ce procédé en l'appliquant à l'ensemble M' de ses monômes premiers ; d'une façon générale, on voit que F^* pourra être construite à partir d'un sous-ensemble quelconque de ses monômes réguliers contenant les monômes premiers.

Exemple : Variables = {A,B,C,D,E}

M = {AB,CD,ABC,DE,CDE}

$F_A^* = AB+ABC = AB$

$F_B^* = AB+ABC = AB$

$F_C^* = CD+ABC+CDE = CD+ABC$

$F_D^* = CD+DE+CDE = CD+DE$

$F_E^* = DE+CDE = DE$

L'ensemble M' = {AB,CD,ABC,DE} des monômes premiers est strictement inclus dans M.

(D) *Caractérisation des monômes réguliers d'une fermeture duale*

1) Liaison entre monômes réguliers et invariants

Compte tenu de la propriété 1 établie en A), il est immédiat qu'un monôme m est régulier par rapport à une fermeture duale F^* si et seulement si le n-uplet X_I ayant même support que ce monôme est invariant par cette fermeture.

D'autre part, l'égalité $F^*(a_1,a_2,\ldots,a_n) = F'(a'_1,a'_2,\ldots,a'_n)$ (*) vérifiée pour tout n-uplet $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ implique qu'un n-uplet est invariant par F^* si et seulement si le n-uplet de support complémentaire est invariant par F. Il en résulte qu'un monôme m est régulier par rapport à F^* si et seulement si le n-uplet de support complémentaire est invariant par F.

2) Monômes réguliers $\cap$ irréductibles

"Un monôme régulier d'une fermeture duale $F^* : B^n \to B^n$ est $\cap$ irréductible si et seulement si il est premier par rapport à cette fermeture".

Supposons qu'un monôme premier m est égal au produit de deux monômes réguliers m' et m''. Le support I de m est égal à l'union des supports I' et I'' des monômes m'' et m''. Il existe un indice $i \in [1,n]$ tel que ce monôme soit premier par rapport à F^*_i -définition d'un monôme premier de F^*-, la variable α_i appartient à ce monôme (Propriété 2^* équivalente à la contractivité établie dans le paragraphe par conséquent l'indice i appartient à I. L'égalité $I = I' \cup I''$ implique que l'un des deux monômes m' ou m'' -monômes réguliers par hypothèse- minore F^*_i. Si l'on suppose

-----

(*) F' représente la fonction ayant pour composantes $F'_1,F'_2,\ldots,F'_n$.

par exemple que $m' \leq F_i^*$, alors l'hypothèse suivant laquelle $m = m'.m''$ est premier dans F_i^* implique $m' = m$.

Réciproquement, considérons un monôme m régulier et $\cap$-irréductible. Pour tout indice i du support I du monôme m, l'inégalité $m \leq F_i^*$ implique l'existence d'un monôme premier m_i' tel que $m \leq m_i'$. On en tire l'inégalité $m \leq \prod_{i \in I} m_i'$. D'autre part chacun des monômes m_i' est inférieur ou égal à α_i (contractivité de F^*), par conséquent $\prod_{i \in I} m_i' \leq \prod_{i \in I} \alpha_i = m$. On a donc l'égalité $m = \prod_{i \in I} m_i'$ qui implique l'existence d'un indice i tel que $m = m_i'$ puisque m est supposé $\cap$-irréductible.

(5) CARACTERISATION DES MONOMES PREMIERS D'UNE FERMETURE

Théorème

"Un monôme croissant est premier par rapport à une fonction composante F_j d'une fermeture $F : B^n \to B^n$ si et seulement si son support est égal à celui d'une attribution minimale d'indice j du préordre régulier attaché à F".

Soit m un monôme croissant de support I, $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ le n-uplet de support I, F_j une fonction composante de F ;

$$m \leq F_j \iff F_j(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1 \iff F(a_1,a_2,\ldots,a_n) \geq (\delta_j^1,\delta_j^2,\ldots,\delta_j^n)$$

$$\iff (a_1,a_2,\ldots,a_n) \xrightarrow{\ \circ\ } (\delta_j^1,\delta_j^2,\ldots,\delta_j^n).$$

m est premier par rapport à F_j si et seulement si son support I est minimal à vérifier la propriété $m \leq F_j$. D'après l'équivalence précédente, cela revient à dire que $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est une attribution minimale de $(\delta_j^1,\delta_j^2,\ldots,\delta_j^n)$.

Corollaire

"La fonction booléenne simple f_M attachée à la famille de Moore $M \subseteq B^n$ des invariants d'une fermeture $F : B^n \rightarrow B^n$ est reliée à F par l'égalité :

$$f'_M = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha'_i . F_i \quad ".$$

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème précédent et du théorème 2 cité dans le paragraphe. Il n'existe pas de formule analogue pour calculer F à partir de f'_M ; en effet, il faut disposer de la base première complète de f'_M pour pouvoir calculer les fonctions composantes de la fonction F. Ce passage de f'_M à F n'est donc pas de nature algébrique mais résulte d'une opération particulière accomplie sur une représentation de la fonction f'_M .

Exemple : Sur l'ensemble {A,B,C,D,E}, considérons la famille de Moore dont le diagramme de Hasse est représenté par la figure 1. Ses parties ∩-irréductibles sont :

{ABCD,ABCE,AD,CE,B}

les complémentaires sont donc :

{E,D,BCE,ABD,ACDE}

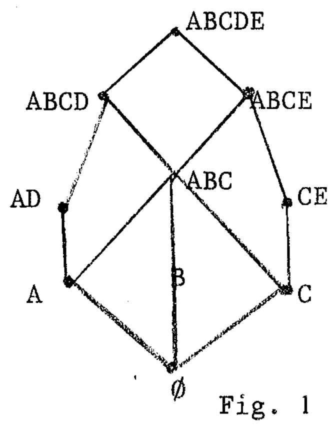


Fig. 1

La fermeture duale associée à cette famille de Moore sera donc donnée par les fonctions composantes (*)

F^*_A = ABD+ACDE	F_A = A+D+BC+BE
F^*_B = ABD+BCE	F_B = B+AC+AE+CD+DE
F^*_C = BCE+ACDE	F_C = C+E+AB+BD
F^*_D = D	F_D = D
F^*_E = E	F_E = E

Les fonctions F_A, F_B, F_C, F_D, F_E donnent toutes les attributions minimales de divers éléments A,B,C,D et E ; il est donc possible d'en déduire les attributions minimales d'un sous-ensemble P quelconque en effectuant le produit des F_{A_i} tels que $A_i \in P$. Ainsi les attributions minimales d'un sous-ensemble {A,C} sont données par

$$F_A . F_C = AC+AB+BD+BC+BE+AE+CD.$$

Enfin, la complémentaire $f'_{\mathcal{M}}$ de la fonction booléenne simple attachée à cette famille de Moore est :

$$F'_{\mathcal{M}} = A'D+A'BC+A'BE+B'AC+B'CD+B'AE+B'DE+C'E+C'AB+C'BD.$$

Remarque - Il peut à première vue sembler préférable de représenter la famille de Moore $\mathcal{M}$ par la seule fonction booléenne simple f' que par les n fonctions composantes $F_1,F_2,...,F_n$ de la fermeture F définie par $\mathcal{M}$. En fait, ces deux représentations apparaissent comme identiques si f' est exprimé par sa base première complète ; dans ce dernier cas, on peut même affirmer que la représentation par les fonctions $F_1,F_2,...,F_n$ est préférable car chacune d'elles exige seulement une simple représentation alors que $f'_{\mathcal{M}}$ nécessite une double représentation (cf. paragraphe 3). Nous examinerons au paragraphe 10 ce qui se passerait si on adoptait pour $f'_{\mathcal{M}}$ une base première minimale au lieu de la base première complète.

(6) PREORDRE REGULIER ATTACHE A UN RECOUVREMENT

Dans tout ce paragraphe, nous nous occuperons seulement de préordres réguliers définis sur un treillis de Boole B^n. Donnons nous un ensemble fini $\mathcal{E}$ et une famille de ses parties $\mathcal{R} = \{P_1,P_2,...,P_n\}$ indicée sur l'ensemble $[1,n]$ des entiers compris entre 1 et n. Nous supposerons que cette famille $\mathcal{R}$ est un recouvrement de l'ensemble $\mathcal{E}$, i.e. $\bigcup_{i=1}^{i=n} P_i = \mathcal{E}$.

Il est alors immédiat de vérifier que la relation $I \multimap J$, définie entre les sous-ensembles de $[1,n]$, par la condition $\bigcup_{i \in I} P_i \supseteq \bigcup_{j \in J} P_j$, est un préordre régulier sur le treillis de Boole B^n. Le préordre ainsi défini sera dit <u>attaché</u> au recouvrement R de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Dans un premier paragraphe, (A), nous établirons la liaison entre les divers éléments qui ont été définis à partir d'un préordre régulier et les propriétés du recouvrement à partir duquel ce préordre a été défini. En vue de résoudre le problème de la recherche d'un recouvrement auquel soit attaché un préordre régulier donné, paragraphe (C), nous montrerons au paragraphe (B) que la donnée d'un recouvrement n'est autre que celle d'une certaine relation binaire dont les correspondances de Galois définissent la fermeture attachée au préordre régulier déduit de ce recouvrement.

(A) <u>*Propriétés du préordre régulier attaché à un recouvrement*</u>

[P1] : "Deux sous-ensembles I et J de $[1,n]$ sont isovalents si et seulement si les sous familles d'indices I et J couvrent le même sous-ensemble de $\mathcal{E}$".

Cette propriété immédiate à établir revient à dire que $I \equiv J$ si et seulement si $\bigcup_{i \in I} P_i = \bigcup_{j \in J} P_j$.

[P2] : "Un optimum I (i.e. un invariant de la fermeture associée au préordre régulier) correspond à un ensemble maximal de parties appartenant à R dont l'union est égale à un domaine donné".

Ce domaine ne doit évidemment pas être pris quelconque, il doit déjà être égal à au moins une union de parties appartenant à R.

[P3] : "Un sous-ensemble d'indices $I \subseteq [1,n]$ est une attribution minimale d'un indice j si l'ensemble des parties P_i indicées sur I est minimal à couvrir la partie P_j".

Ceci revient à dire que I est minimal à vérifier la propriété $\bigcup_{i\in I} P_i \supseteq P_j$. Cette dernière propriété nous permet de donner l'expression analytique de la fermeture $F : B^n \to B^n$ définie par le préordre régulier. Soient $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ les variables dont dépend cette fermeture, à chaque élément $e \in \mathcal{E}$ associons la somme des variables $S_e = \alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\dots+\alpha_{i_\ell}$ telles que $\alpha_i \le S_e \iff e \in P_i$. On sait qu'un sous-ensemble d'indices $i \subseteq [1,n]$ est support minimal d'une famille de parties extraites de R à couvrir un sous-ensemble $Q \subseteq \mathcal{E}$ si et seulement si I est le support d'un monôme premier de la fonction $\prod_{e\in Q} S_e$. Il en résulte que les fonctions composantes F_j de la fermeture F sont de la forme :

$$[\Phi] \qquad \boxed{\begin{aligned} F_j &= \prod_{e\in P_j} S_e \\ S_e &= \sum_{e\in P_i} \alpha_i \end{aligned}}$$

<u>Exemple</u> :

Soit $\mathcal{E} = \{1,2,3,4,5\}$

$R = \{A,B,C,D\}$

avec

$A = \{1,2\}$, $B = \{1,3,5\}$, $C = \{2,4\}$, $D = \{2,5\}$

On a : $S_1 = A+B$; $S_2 = A+C+D$; $S_3 = B$

$S_4 = C$; $S_5 = B+D$.

$F_A = (A+B)(A+C+D) = A+BC+BD$

$F_B = (A+B)B(B+D) = B$

$F_C = (A+C+D)C = C$

$F_D = (A+C+D)(B+D) = D+AB+BC$

Remarquons que les formules $[\Phi]$ donnent plutôt une forme analytique directe des composantes de la fermeture duale F^* attachée au préordre régulier. Il suffit de remplacer S_e par les produits $\pi_e = \prod_{e \in P_i} \alpha_i$; on obtient ainsi :

$$[\Phi^*] \quad \boxed{\begin{array}{l} F^*_j = \sum_{e \in P_j} \pi_e \\ \hline \pi_e = \sum_{e \in P_i} \alpha_i \end{array}}$$

Pour l'exemple précédemment traité, on trouve ainsi directement :

$$F^*_A = AB+ACD$$

$$F^*_B = B$$

$$F^*_C = C$$

$$F^*_D = ACD+BD.$$

<u>Remarque</u> - La connaissance des fonctions composantes F_j permet de trouver les recouvrements minimaux de l'ensemble E extraits du recouvrement donné R . Il suffit pour cela de connaître un ensemble I d'indices qui constitue un recouvrement (i.e. $\bigcup_{i \in I} P_i = E$ on peut prendre par exemple $I = [1,n]$). Les supports des monômes premiers de la fonction $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} F_i$ correspondent alors aux recouvrements minimaux.

(B) <u>*Exemple - Bases premières d'une fonction booléenne simple*</u>

Considérons une fonction booléenne simple f, désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses monômes canonique, par $R = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ l'ensemble de ses monômes premiers. La recherche des bases premières de f conduit à développer les mêmes considérations que plus haut puisqu'il s'agit de couvrir les monômes canoniques par les monômes premiers. La fermeture $F : B^n \to B^n$ associée à ce problème prend alors un sens particulier ; en effet, par définition d'un consensus, un ensemble de monômes premiers $\{M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_k}$ est minimal à couvrir un monôme premier M_j si et seulement si M_j est égal au consensus de ces monômes. Les fonctions composantes de F, soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$, coïncident donc avec les fonctions INCLUSION des monômes M_i que Monsieur TISON définit dans sa thèse sur les consensus [33]. Il résulte des propriétés citées en A) que le produit de toutes ces fonctions inclusions donne l'ensemble des supports des bases premières minimales de f (fonction BASE $\mathcal{B}$ introduite dans la même thèse, théorème 4-6 page 4-33).

(C) *Correspondances de Galois associées à un recouvrement partiel*

Nous conviendrons désormais d'appeler recouvrement partiel d'un ensemble $\mathcal{E}$ toute famille de parties, R, appartenant à cet ensemble.
Il est à remarquer que la donnée d'un tel recouvrement partiel est formellement équivalente à celle d'une relation binaire $[E_1, \rho, E_2]$. Supposons tout d'abord que $\mathcal{E}$ et R soit donnés ; posons $E_1 = \mathcal{E}$, $E_2 = R$ et $e_1 \, \rho \, e_2 \iff e_1 \in e_2$. Réciproquement, si $[E_1, \rho, E_2]$ est donné, il suffit de poser $\mathcal{E} = E_1$ et $R = \{\rho_{21}(e_2)\}$ pour obtenir un recouvrement partiel. Désormais, nous identifierons donc un recouvrement partiel à une relation binaire en le notant $[\mathcal{E}, \rho, R]$. Notons qu'un tel recouvrement partiel est un recouvrement si et seulement si aucune ligne de la relation n'est vide.

Exemple : Reprenons celui qui a été traité dans le pragraphe A) ci-dessus.
Le tableau représentatif du recouvrement étudié est donné par la figure ci-dessous :

$\mathcal{E}$	A	B	C	D
1	×	×		
2	×		×	×
3		×		
4			×	
5		×		×

(7) INTERPRETATION DU PREORDRE REGULIER ATTACHE A UN RECOUVREMENT

Soit un recouvrement partiel $[\mathcal{E},\rho,R]$, les éléments de R sont identifiés à leurs clotures principales gauches $\rho_{21}(e_2)$ -on considère donc que tout élément e_2 de $E_2 = R$ est confondu avec $\rho_{21}(e_2)$-. Le préordre régulier attaché à $[\mathcal{E},\rho,R]$ a été défini par la relation $I \longrightarrow J \iff \bigcup_{e_2 \in I} \rho_{21}(e_2) \supseteq \bigcup_{e_2 \in J} \rho_{21}(e_2)$ -on convient ici d'identifier I et J à des sous-ensembles de E_2-.
Cette dernière relation est elle-même équivalente à :

$$\bigcap_{e_2 \in I} \phi_{21}(e_2) \subseteq \bigcap_{e_2 \in J} \phi_{21}(e_2).$$

Les sous-ensembles $\phi_{21}(e_2)$ sont les clotures principales gauches de la relation binaire $[\mathcal{E},\phi,R[$, et pour tout sous-ensemble $I \subseteq E_2$, $\bigcap_{e_2 \in I} \phi_{21}(e_2)$ est égal à $\phi_{21}(I)$. Par conséquent, la relation $I \longrightarrow J$ est équivalente à $\phi_{21}(I) \subseteq \phi_{21}(J)$.
En considérant les clotures droites définies par les correspondances de Galois associées à $[\mathcal{E},\phi,R]$, cette dernière relation est encore équivalente à $\bar{I} \supseteq \bar{J}$. On a donc établi le résultat suivant :

"Etant donné un recouvrement $[\mathcal{E},\rho,R]$, deux sous-ensembles I et J de R vérifient la relation $I \longrightarrow J$ si et seulement $\bar{I} \subseteq \bar{J}$, $\bar{I}$ et $\bar{J}$ étant les clotures de I et J par rapport aux correspondances de Galois à partir de la relation $[\mathcal{E},\phi,R]$".

Ce résultat permet d'établir d'une seconde façon que la relation $I \longrightarrow J$ est un préordre régulier, il donne également d'une façon canonique la fermeture associée à ce préordre régulier.

(8) RECHERCHE D'UN RECOUVREMENT ASSOCIE A UN PREORDRE REGULIER DONNE

Supposons maintenant que l'on se donne un préordre régulier, ou ce qui revient au même une fermeture F, sur un treillis de Boole B^n. Le résultat établi dans le paragraphe précédent permet de construire un recouvrement $[\mathcal{E},\phi,R]$ auquel il soit attaché

Il suffit pour cela de connaître un système $\cap$ générateur de la famille de Moore de ses invariants, ce système générateur jouera le rôle de l'ensemble $\mathcal{E} = E_1$; l'ensemble $R = E_2$ sera alors constitué par les atomes du treillis de Boole B^n sur lequel est défini le préordre régulier ; enfin on posera $e_1 \not\rho\ e_2$ si et seulement si $e_2 \not\subseteq e_1$. Notons qu'il est possible ainsi de trouver un ensemble $\mathcal{E}$ support du recouvrement plus petit que tous les autres en partant de l'ensemble des éléments $\cap$ irréductibles de la famille de Moore. Notons aussi que si le préordre régulier est donné par sa fermeture duale, on a directement l'ensemble des complémentaires des $\cap$ irréductibles (cf. paragraphe) ; si ces sous-ensembles sont notés f_1, la relation $f_1\ \rho\ e_2$ sera définie par $e_2 \in f_1$.

<u>Exemple</u> : considérons à nouveau la famille de Moore envisagée dans ce paragraphe, choisissons l'ensemble des monômes premiers de sa fermeture duale, soit :

$$\mathcal{E} = \{\{E\}, \{D\}, \{B,C,E\}, \{A,B,D\}, \{A,C,D,E\}\}$$

Nous noterons respectivement 1,2,3,4 et 5 les éléments de cet ensemble $\mathcal{E}$; l'ensemble R est constitué par les éléments A,B,C,D,E. L'énumération des sous-ensembles constituant $\mathcal{E}$ permet de construire directement la relation binaire représentative d'un recouvrement $[R,\rho,\mathcal{E}]$ associé au préordre régulier (cf. figure ci-dessous). On obtient ainsi :

$$P_A = \{4,5\}\ ;\ P_B = \{3,4\}\ ;\ P_C = \{3,5\}\ ;\ P_D = \{2,4,5\}\ ;\ P_E = \{1,3,5\}.$$

	A	B	C	D	E
1					x
2				x	
3		x	x		x
4	x	x		x	
5	x		x	x	x

(9) EXISTENCE D'UN RECOUVREMENT ATTACHE A UN PREORDRE REGULIER

La méthode précédemment développée permet de construire tous les recouvrements auxquels est attaché un préordre régulier donné. On peut montrer l'existence d'un tel recouvrement en utilisant la fonction booléenne f_M caractéristique de la famille de Moore M.

Lemme

"Un sous-ensemble d'indices $I \subseteq [1,n]$ est support d'une attribution atomique d'indice j si et seulement si

$$\prod_{i \in I} (\alpha_i . f_M) \leq \alpha_j . f_M \text{ "}.$$

Le n-uplet de support I est une attribution du n-uplet de support $\{j\}$ si et seulement si l'ensemble des n-uplets optimum dont le support contient I est inclus dans l'ensemble des n-uplets optimum dont le support contient $\{j\}$.

Exprimons cette dernière condition en utilisant la fonction f_M. Les n-uplets optimum dont le support contient $\{j\}$ ont pour fonction booléenne associée $\alpha_j . f_M$; ceux dont le support contient I ont pour fonction booléenne associée $\prod_{i \in I} (\alpha_i . f_M)$. On retrouve bien l'inégalité de l'énoncé.

En complémentant, cette inégalité devient $\sum_{i \in I} (\alpha_i' + f_M') \geq \alpha_j' + f_M'$. Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des monômes canoniques de la fonction

$$(\alpha_1' + f_M') + (\alpha_2' + f_M') + \ldots + (\alpha_n' + f_M') = \alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_n' + f_M' \text{ , par } R = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$$

les ensembles de monômes canoniques des diverses fonctions $\alpha_i' + f_M'$. Le recouvrement R de l'ensemble $\mathcal{E}$ est associé au préordre régulier.

Remarque - L'ensemble $\mathcal{E}$ des monômes canoniques de $\alpha_1'+\alpha_2'+\ldots+\alpha_n'+f_M'$ contient tous les monômes canoniques distincts de $\alpha_1.\alpha_2\ldots\alpha_n$. Ce dernier monôme n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Dans le cas contraire, il appartiendrait à f_M', ce qui reviendrait à dire qu'il n'appartient pas à f_M. Or le n-uplet de support $[1,n]$ appartient à toute famille de Moore. D'où :

$$\mathcal{E} = \alpha_1'+\alpha_2'+\ldots+\alpha_n'.$$

(10) LIMITE INDUCTIVE D'UNE APPLICATION MONOTONE ET EXTENSIVE *(resp. Contractante)*

On a vu au chapitre I que si l'on se donne une application extensive et monotone f d'un ordonné fini E dans lui-même, la suite monotone croissante $f^1,f^2,\ldots,f^n,\ldots$ stationne au bout d'un nombre fini de pas sur la plus petite fermeture $\tilde{f}$ qui majore f ; le résultat est le même si f est contractante, simplement la suite $f^1,f^2,\ldots,f^n,\ldots$ décroît et stationne sur la plus grande fermeture duale qui minore f.

Supposons que l'on considère maintenant le cas d'une application $F : B^n \to B^n$ possédant les propriétés ci-dessus ; si $F_1,F_2,\ldots,F_n$ sont les fonctions composantes de F, on pourra calculer $\tilde{F}$ en itérant les calculs des $F_i(F_1,F_2,\ldots,F_n)$. Une telle méthode oblige à chaque pas à remplacer toutes les variables par les fonctions correspondantes. Nous allons donner des algorithmes plus adaptés au problème.

(A) *$F : B^n \to B^n$ est monotone et extensive*

Théorème

"Si $F : B^n \to B^n$ est une fonction monotone et extensive, la fonction booléenne simple f_M' attachée à la famille de Moore M des invariants de la limite inductive F est égale à $\Sigma(\alpha_i'.F_i)$".

En reprenant l'étude qui a été faite au paragraphe 4, cela revient à dire que $\Sigma(\alpha_i'.F_i) = \Sigma(\alpha_i'.\tilde{F}_i)$. Avant d'établir ce théorème, remarquons qu'il donne une réponse à la question de savoir si la représentation d'une fermeture sur B^n est plus économique en utilisant la fonction booléenne simple f'_M. On a vu en effet que tout monôme premier de f'_M était le produit d'une variable complémentée α'_i par un monôme croissant μ_i^k ne dépendant pas de la variable α_i. Considérons alors une base première quelconque de f'_M, et écrivons là sous la forme :

$$f'_M = \alpha'_1.\varphi_1+\alpha'_2.\varphi_2+\ldots+\alpha'_n.\varphi_j$$

où les φ_i sont des sommes de monômes croissants ne dépendant pas de la variable α_i. Il résulte alors du théorème précédent que la fonction générale F dont les composantes sont les fonctions $\alpha_i+\varphi_i$ a pour limite inductive la fermeture $\tilde{F}$ dont les invariants constituent la famille de Moore M. Par conséquent, considérer une base première de f'_M revient à considérer une fonction générale F monotone et extensive dont la limite inductive est égale à la fermeture donnée. Les deux représentations d'une fermeture sont donc aussi économiques.

Démonstration du théorème :

Un n-uplet $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ de support I appartient au sous-ensemble caractéristique M de la fonction booléenne simple f_M si et seulement si on a l'égalité

$$(E) : (\prod_{i\in I}\alpha_i . \prod_{j\notin J}\alpha'_i).f'_M = 0$$

Compte tenu de l'égalité $f'_M = \sum_{i\in[1,n]}(\alpha'_i.F_i)$, (E) est équivalent à $\sum_{j\notin I}((\prod_{j\in I}\alpha'_j).F_j) = 0$, soit :

$$\forall j \notin I : (\prod_{j\in I}\alpha'_j)F_j = 0.$$

Cette dernière condition est équivalente à :

$$\forall j \notin I : F_j(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 0.$$

Soit $F(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leq (a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Comme F est supposé extensive, on en conclut $F(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Ce qui montre que M est l'ensemble des invariants de F ; ces invariants sont ceux de la limite inductive.

Exemple : Soit la fonction $F : B^5 \rightarrow B^5$ représentée par ses composantes :

$$F_A = A+D+BC$$

$$F_B = B+AC$$

$$F_C = C+E+AB$$

$$F_D = D$$

$$F_E = E$$

$f'_M = A'D+A'BC+B'AC+C'E+C'AB$. Un calcul de la base première complète donne $f'_M = A'D+A'BC+A'BE+B'AC+B'CD+B'DE+C'E+C'AB+C'BD$, fonction qui a déjà été envisagée dans l'exemple traité au paragraphe 5.

Procédés pratiques de stabilisation de F :

1) On cherche la base première complète de $f'_M = \Sigma\alpha'_i.F_i$ par une des méthodes classiques : algorithmes de consensus, double dualisation ... (cf. Algèbre de Boole J. Kuntzmann [18]).

2) Mettre un ordre total sur les variables, par exemple $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Remplacer chaque fonction $F_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ par $F_i(F_1,\ldots,\alpha_n)$; soit $F'_1,F'_2,\ldots,F'_n$ les nouvelles fonctions trouvées. Remplacer chaque $F'_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ par $F'_i(\alpha_1,F'_2,\ldots,\alpha_n)$; etc... jusqu'à la dernière variable α_n.

La justification de cet algorithme est basée sur un algorithme de formation des consensus d'un ensemble de monômes. En effet, remplacer toutes les fonctions $F_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ par $F_i(F_1,\ldots,\alpha_n)$ revient à calculer tous les consensus des monômes de f'_M par rapport à la variable α_1. On sait qu'en calculant successivement les consensus par rapport aux variables ordonnées, on forme tous les monômes premiers (cf [18]).

(B) $F : B^n \to B^n$ *est monotone et contractante*

a) Stabilité d'une variable :

Soit une application monotone et contractante $F : B^n \to B^n$ dont les fonctions composantes sont $F_1, F_2, \ldots, F_n$, et un monôme croissant m par rapport aux variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. On dira qu'une variable α_i est stable par rapport au couple (F,m) si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

[i] m ne dépend pas de α_i ;

[ii] m dépend de α_i et $m \leq F_i$.

La condition $m \leq F_i$ est équivalente à $m.F_i = m$. Compte tenu du fait que la variable α_i appartient à m et à tout monôme premier de F_i, $m.F_i$ est le résultat de la substitution dans m de la variable α_i par la fonction F_i. La condition [ii] peut donc s'écrire $m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, F_i, \ldots, \alpha_n)$. Lorsque m ne dépend pas de α_i, cette dernière égalité est équivalente à la condition [i]. D'où :

Propriété

"Une variable α_i est stable par rapport au couple (F,m) si et seulement si $m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, F_i, \ldots, \alpha_n)$ ".

Théorème

"Etant donné une application monotone et contractante $F : B^n \to B^n$ et sa limite inductive $\check{F}$, un monôme m est régulier par rapport à $\check{F}$ si et seulement si chacune de ses variables est stable par rapport à m et à F ".

Désignons par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les fonctions composantes de F, par $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \ldots, \tilde{F}_n$ celles de $\tilde{F}$, par F^i_1, $F^i_2, \ldots, F^i_n$ celles de F^i.

Condition nécessaire :

Si m est régulier, pour chacune de ses variables α_i, on a l'inégalité $m \leq \tilde{F}_i$. Compte tenu de l'égalité $F \leq \tilde{F}$, on doit avoir par transitivité $m \leq F_i$.

Condition suffisante :

Par hypothèse, l'égalité $m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,F_i,\ldots,\alpha_n)$ est valable pour tout indice i. On en tire l'égalité $m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = m(F_1,F_2,\ldots,F_n)$. Pour toute variable α_i du monôme m, l'inégalité $m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \leq F_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ implique $m(F_1,F_2,\ldots,F_n) \leq F_i(F_1,F_2,\ldots,F_n) = F_i^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. D'où en tenant compte de la première égalité, $m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \leq F_i^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Cette inégalité valable pour toute variable α_i du monôme m prouve que toute variable est stable par rapport au couple (F^2,m). On en déduit par récurrence que pour tout entier n, toute variable est stable par rapport au couple (F^n,m). Puisqu'il existe un entier n tel que $F^n = \tilde{F}$, toute variable est stable par rapport au couple $(\tilde{F},m)$, donc m est régulier par rapport à $\tilde{F}$.

b) Algorithme de calcul de $\tilde{F}$:

Nous distinguerons deux types de variables, les variables sous leur forme normale $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, et les variables surlignées $\{\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n\}$. Un monôme surligné est un ensemble de variables normales et de variables surlignées, chacune d'entre elles apparaissant sous une forme au plus ; par exemple $A\bar{B}C\bar{D}$ est un monôme surligné, mais non $AB\bar{B}$. Le support d'un monôme surligné est le monôme croissant obtenu en supprimant tous les surlignements ; par exemple le support de $A\bar{B}C\bar{D}$ est ABCD. Une fonction surlignée est une somme formelle de monômes surlignés ; exemple : $A\bar{B}C\bar{D}+B\bar{C}$. Le support d'une fonction surlignée s'obtient en faisant la somme booléenne des supports de ses monômes ; par exemple, le support de $A\bar{B}C\bar{D}+B\bar{C}$ est égal à ABCD+BC = BC.

Produit de deux monômes surlignés

Il s'obtient en faisant le produit booléen des supports et en surlignant toute variable qui est surlignée dans l'un des deux monômes : exemple : $\bar{A}\bar{B}CD.B\bar{C}\bar{D}E = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E$.

<u>Produit de deux fonctions surlignées</u>

Il s'obtient en effectuant les produits deux à deux des monômes surlignés de l'une par ceux de l'autre. Exemple :
$(A\bar{B}+B\bar{C}).(AC+\bar{A}B) = A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}+AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}$.

<u>Réduction d'une fonction surlignée</u>

La réduction d'une fonction surlignée s'obtient en prenant les monômes premiers de son support, chacun de ces monômes premiers est ensuite surligné par la règle suivante :

Si le monôme premier m est support des monômes surlignés $m_1,m_2,\dots,m_k$, remplacer m par le produit des monômes surlignés $m_1.m_2\dots m_k$.

<u>Exemple</u> : Soit $A\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}BC+B\bar{C}D+\bar{B}\bar{C}D+A\bar{B}CD$, le support est ABC+BCD. ABC est remplacé par le produit $A\bar{B}C.AB\bar{C}.\bar{A}BC = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ et BCD par le produit $B\bar{C}D.\bar{B}\bar{C}D = \bar{B}\bar{C}D$. La réduction de cette fonction surlignée donne donc $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}D$.

<u>Fonctions surlignées équivalentes</u>

Fonctions ayant même forme réduite. Exemple : $A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}+B\bar{C}\bar{D} = \bar{A}\bar{B}+B\bar{C}D+BC\bar{D}$.

L'algorithme que nous allons décrire est basé sur le calcul des fonctions surlignées qui vient d'être décrit .

Soit $F : B^n \to B^n$ la fonction monotone et contractante dont on cherche la limite inductive ; $F_1,F_2,\dots,F_n$ sont les fonctions composantes de F.

<u>Initialisation de l'algorithme</u>

Dans chaque fonction F_i, surligner la variable α_i dans chacun de ses monômes.

<u>Exemple</u> : Si on considère la fonction F définie par les composantes

$$F_A = AB+AC$$

$$F_B = BC$$

$$F_C = CA+CB,$$

on construira les fonctions surlignées

$$F_A = \bar{A}B+\bar{A}C$$

$$F_B = \bar{B}C$$

$$F_C = \bar{C}A+\bar{C}B.$$

<u>Règle de progression de l'algorithme</u>

Si il existe dans une fonction composante F_j un monôme μ dont une variable α_i n'est pas surlignée, remplacer α_i par la fonction F_i et calculer la nouvelle fonction réduite ainsi obtenue.

<u>Exemple</u> : Considérons dans F_C la variable A non surlignée du monôme $\bar{C}A$. La règle conduit à poser

$$F_C = \bar{C}(\bar{A}B+\bar{A}C)+\bar{C}B = \bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{C}+\bar{C}B = \bar{A}\bar{C}+\bar{C}B'.$$

On trouve ainsi le nouvel ensemble de fonctions :

$$F_A = \bar{A}B+\bar{A}C \quad (*)$$

$$F_B = \bar{B}C$$

$$F_C = \bar{C}\bar{A}+\bar{C}B.$$

Convenons désormais de marquer par une étoile (*) la variable non surlignée α_i qui va être remplacée par sa fonction F_i correspondante, on peut obtenir la suite de transformations :

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
F_A = \bar{A}B+\bar{A}\bar{C} & \bar{A}B+\bar{A}\bar{C} & \bar{A}B^{(*)}+\bar{A}\bar{C} & \bar{A}\bar{C} \\
F_B = \bar{B}C & \bar{B}C^{(*)} & \bar{B}\bar{C} & \bar{B}\bar{C} \\
F_C = \bar{C}\bar{A}+\bar{C}B^{(*)} & \bar{C}\bar{A}+\bar{C}\bar{B} & \bar{C}\bar{A}+\bar{C}\bar{B} & \bar{C}\bar{A}+\bar{C}\bar{B}
\end{array}
$$

On arrive ainsi à une fonction générale F qui ne peut plus être transformée. Ceci se produit dans tous les cas ; pour le voir, il suffit de définir la relation d'ordre suivante entre fonctions réduites surlignées :

[i] un monôme surligné m' ayant même support qu'un autre monôme surligné m'' est inférieur ou égal à ce dernier si toutes les variables surlignées dans m' sont également surlignées dans m''. Exemple : $A\bar{B}\bar{C} < A\bar{B}C$.

[ii] une fonction surlignée f' est inférieure ou égale à une fonction surlignée f'' si l'une des deux éventualités suivantes se produit :

- le support de f' est une fonction booléenne <u>strictement</u> inférieure au support de f'' ;
- les deux supports sont égaux et pour tout monôme premier de ce support, sa forme surlignée dans f' est inférieure ou égale à sa forme surlignée dans f''. Exemple : $\bar{A}B+\bar{A}\bar{C} < \bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}$.

Cette relation est manifestement un ordre entre les fonctions réduites surlignées et on vérifie aisément qu'à chaque pas de l'algorithme la fonction composante F_i qui est transformée est remplacée par une fonction strictement inférieure. L'algorithme se terminera donc puisque le nombre de fonctions réduites surlignées est fini.

Remarque - A partir de cet algorithme initial, on peut imaginer d'autres algorithmes équivalents en ce sens qu'ils donneront ~~les~~ mêmes fonctions totalement surlignées finales. Par exemple, on peut ordonner totalement les variables $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ et remplacer au pas de numéro i la variable α_i par F_i. Il est facile de voir l'équivalence avec l'algorithme précédent ; au nième pas, on possèdera les mêmes fonctions totalement surlignées.

Théorème

"Les supports des fonctions totalement surlignées obtenues en fin d'algorithme sont les composantes de la limite inductive".

En utilisant le théorème établi en a), on voit que ce dernier théorème est une conséquence de la propriété suivante :

"A chaque pas de l'algorithme (i.e. transformation d'une fonction composante par substitution de l'une de ses variables non surlignée), pour tout monôme m appartenant à une des fonctions surlignées réduites F_i, toute variable α_j surlignée du monôme m est stable par rapport à la fonction initiale F et au support de m ".

La vérification de cette dernière propriété s'effectue aisément.

(II) GENERATION DES FAMILLES DE PARTIES D'UN ENSEMBLE

(A) *Introduction*

La notion de préordre régulier sur un treillis de Boole peut servir à étudier les familles de Moore de caractère fini. Ces familles de Moore sont un cas particulier des familles de caractère fini telles qu'elles ont été définies par Tukey [34], Birkhoff [4] en a donné les principales caractéristiques en démontrant que chacune d'entre elles est identique à la famille de Moore des sous-algèbre d'une certaine algèbre abstraite.

Rappelons qu'une algèbre abstraite est définie par la donnée d'un ensemble E (support de l'algèbre abstraite) et d'une famille d'opérations $\{f_i\}_{i \in I}$, chacune d'entre elle étant une application n-aire (n variable) de E^n dans E. On distingue en particulier les opérations unaire (n = 1), binaire (n = 2), ternaire (n = 3) etc... Un sous-ensemble $F \subseteq E$ est support d'une sous-algèbre si pour tout i appartenant à I, $f_i(E^{n_i}) \subseteq E$ $-n_i$ étant l'ordre de l'opération f_i-. Les supports de sous-algèbres constituent manifestement une famille de Moore.

Avant d'aborder l'étude des familles de Moore de caractère fini, nous allons donner dans ce paragraphe les propriétés du système de génération des familles de parties utilisé par Tukey pour introduire les notions de caractère fini. Nous verrons (E) que ce procédé de génération est formellement analogue au procédé de décomposition d'une fonction booléenne ; nous emploierons donc une terminologie rappelant cette analogie.

(B) *Décomposition d'une famille de parties*

Soit une famille Φ de parties d'un ensemble E (Φ est sans répétition), une décomposition de Φ est une relation binaire $[\mathcal{P}(E),\Psi,\mathcal{P}(E)]$ telle que $P \in \Phi \iff \forall F \in R_2\Psi : P \cap F \; \Psi \; F$ est vérifié. $R_2\Psi$ représente le résultant à droite de la relation Ψ, i.e. l'ensemble des parties F telles qu'il existe G vérifiant $G \; \Psi \; F$. Le résultant $R_2\Psi$ sera également appelé support de la décomposition, les parties appartenant à $R_2\Psi$ seront appelés ensembles de décomposition. Enfin, on dira fréquemment que la relation Ψ engendre la famille de parties Φ.

Notons tout de suite que toute famille Φ admet au moins une décomposition constituée par les doublets (G,F) tels que $G \in \Phi$ et $F = E$.

Deux relations distinctes Ψ' et Ψ'' peuvent engendrer une même famille Φ. On distinguera en particulier les décompositions normales constituées par des couples (G,F) tels que $G \leq F$, et les décompositions réduites pour lesquelles tout couple (G,F) est de la forme $(P \cap F,F)$, P étant un sous-ensemble de la famille engendrée.

Nous ne considèrerons désormais que des décompositions normales. Pour normaliser une décomposition, il suffit de supprimer ses couples (G,F) ne vérifiant pas $G \subseteq F$, la décomposition ainsi obtenue engendre évidemment la même famille. De même, on peut réduire une décomposition en supprimant ses couples (G,F) non égaux à au moins un couple $(P \cap F,F)$; la famille engendrée est également inchangée.

Propriété 1

"Deux décompositions d'une même famille de parties ont une même décomposition réduite si et seulement si elles ont même support ".

Preuve immédiate. Cette propriété nous permettra de parler de la décomposition d'une famille donnée Φ ayant un support donné S ; une telle décomposition n'existe pas nécessairement, nous étudierons en F les supports de décomposition possibles pour une famille donnée Φ.

Propriété 2

"Une décomposition réduite Ψ engendre une famille de Moore si et seulement si pour tout F appartenant à son support, l'ensemble des parties G vérifiant $G\Psi F$ est une famille de Moore sur F".

Preuve immédiate.

(C) *Famille de caractère fini*

Une famille de parties est de caractère fini si elle admet une décomposition Ψ dont le support $R_2\Psi$ ne contient que des ensembles finis. On dira de plus que la famille a un indice fini si elle admet une décomposition Ψ telle que les cardinaux des ensembles appartenant à $R_2\Psi$ soit bornés; la valeur minimale du plus grand cardinal de $R_2\Psi$ pour toutes les décompositions de cette famille est alors appelée l'indice de cette famille.

D'une façon générale, une relation binaire $[\mathcal{P}(E),\Psi,\mathcal{P}(E)]$ telle que $G\Psi F \Rightarrow G$ et F finis, sera appelée une relation à composantes finies. On voit ainsi que les familles de caractère fini sont celles qui sont engendrées par les relations à composantes finies.

Il existe évidemment des familles qui ne sont pas de caractère fini sur un ensemble infini quelconque ; il suffit par exemple de considérer la famille de toutes ses parties finies. Par contre, il est immédiat que toute famille d'un ensemble fini est d'indice fini, cet indice étant au plus égal au nombre d'éléments de cet ensemble.

(D) *Expression booléenne de la famille engendrée par une relation normale*

Soit Φ la famille engendrée par une relation Ψ. Introduisons les familles $\Phi_{G,F}$ engendrées par les relations normales vérifiées par le seul doublet (G,F) ; $\Phi_{F,G}$ est l'ensemble des parties dont la trace sur F est égale à G, une telle famille est non vide puisque $G \subseteq F$. Pour tout F appartenant au support $R_2\Psi$, posons $\Psi_F = \bigcup_{G\Psi F} \Phi_{G,F}$; il est alors immédiat que $\Phi = \bigcap_{F\in R_2\Psi} \Psi_F$.

Cette expression booléenne de la famille Φ suggère une interprétation des décompositions par l'algèbre de Boole, cette interprétation qui est développée dans la suite justifiera le terme de décomposition qui a été adopté.

(E) *Décomposition d'une fonction booléenne*

Une décomposition d'une fonction booléenne φ dépendant d'un ensemble de variables E est constituée par la donnée de n sous-ensembles distincts de variables $F_1,F_2,\dots,F_n$ appelés ensembles de décomposition et de n fonctions booléennes $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ appelées facteurs de la décomposition tels que :

1) chaque facteur φ_i ne dépend que des variables de F_i

2) $\varphi = \varphi_1.\varphi_2 \dots \varphi_n$.

Remarques

1) Nous avons implicitement défini les seules décompositions en produit, une décomposition en somme serait du type $\Psi = \Psi_1+\Psi_2+\ldots+\Psi_n$. En fait les décompositions en somme sont les duales des précédentes puisque $\varphi = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_n$ est équivalent à $\varphi^* = \varphi_1^*+\varphi_2^*+\ldots+\varphi_n^*$.

2) Il est nécessaire de remarquer qu'une décomposition est définie à la fois par ses facteurs et ses ensembles de décomposition. Par exemple, les décompositions a'.(b'+c), a'.(b'+c).a', (a'+b).(b'+c).(a'+c') de la fonction φ = a'b'+a'c relatives aux ensembles de décomposition [a,bc], [ab,bc,ac], [ab,bc,ac] sont distinctes.

Nous ne nous sommes occupés dans cette définition que des fonctions booléennes d'un nombre fini de variables, cette définition reste inchangée lorsque le nombre de variable est infini. Il faut seulement prendre garde au fait que les opérations de somme et produit peuvent être définies sur une infinité de termes, en particulier on distinguera les monômes finis dépendant d'un nombre fini de variables et les monômes infinis.

Théorème

"Les décompositions normales d'une famille de parties d'un ensemble E correspondent biunivoquement aux décompositions de la fonction booléenne caractéristique de cette famille de parties ".

Reprenons l'expression booléenne de la famille Φ engendrée par une relation normale Ψ ; on a posé $\Psi_F = \bigcup_{G\Psi F} \Phi_{G,F}$, et on a trouvé $\Phi = \bigcap_{F\in R_2\Psi} \Psi_F$.
Chacune des familles $\Phi_{G,F}$ correspond à un monôme canonique par rapport aux variables de F (*), une variable de $\tilde{G}$(F) étant non accentuée si l'élément de E correspondant

---

(*) pour simplifier les notations, nous confondrons les éléments de l'ensemble E donné avec les variables booléennes associées. Le monôme canonique associé à $\Phi_{G,F}$ est noté $\tilde{G}$(F).

appartient à G, accentuée dans le cas contraire. La fonction booléenne associée à Ψ_F est égale à la somme des monômes $\tilde{G}(F)$ tels que $G\Psi F$ soit vérifié ; si on note $\tilde{\Psi}_F$ cette fonction ne dépendant que des variables de F, on voit que la fonction booléenne $\tilde{\Phi}$ associée à Φ est égale à $\prod_{F \in R_2\Psi} \tilde{\Psi}_F$. Les fonctions $\tilde{\Psi}_F$ et les ensembles de variables F définissent donc une décomposition de $\tilde{\Phi}$.

Réciproquement, donnons nous une décomposition d'une fonction booléenne $\tilde{\Phi}$ dont les ensembles de décomposition constituent une famille sans répétition S, et notons $\tilde{\Psi}_F$ les facteurs de décomposition associés à chaque ensemble de décomposition $F \in S$. La relation Ψ constituée par les couples (G,F) tels que $F \in S$ et $\tilde{G}(F) \leq \tilde{\Psi}_F$ est normale et constitue manifestement une décomposition de la famille Φ associée à $\tilde{\Phi}$. Enfin, on voit que la correspondance entre les deux types de décomposition est biunivoque.

Corollaire 1

"Une famille de parties est de caractère fini si et seulement si le complémentaire de sa fonction booléenne caractéristique est une somme de monômes finis ".

Corollaire 2

"Une famille de parties est d'indice fini $\leq k$ si et seulement si le complémentaire de sa fonction booléenne caractéristique est une somme de monômes dépendant de k variable au plus ".

Ces deux corollaires sont des conséquences immédiates de ce théorème en utilisant les décompositions en somme de la complémentaire d'une fonction décomposée en produit. Ce théorème va nous permettre également de déterminer les décompositions d'une famille de parties en appliquant les règles de calcul des monômes d'une fonction booléenne. Cette détermination ne pourra se faire que dans le cas des familles d'un ensemble fini en utilisant les algorithmes relatifs aux fonctions booléennes d'un nombre fini de variables.

(F) RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS D'UNE FAMILLE DE PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

1) Supports minimaux d'une décomposition

Soit une famille Φ de parties d'un ensemble E dont on connait une décomposition Ψ. Le support $R_2\Psi$ de cette décomposition est un recouvrement partiel de E ; nous utiliserons les résultats énoncés dans l'annexe I sur les recouvrements partiels.

On dira qu'une famille Φ admet une décomposition de support $\mathcal{S}$, si il existe une décomposition Ψ de cette famille telle que $R_2\Psi = \mathcal{S}$. Rappelons que dans ces conditions $\mathcal{S}$ détermine une et une seule décomposition réduite.

Propriété

"Si une famille Φ admet une décomposition de support $\mathcal{S}$, pour tout $\mathcal{S}'$ vérifiant $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$, Φ admet également une décomposition de support $\mathcal{S}'$ ".

Soit Ψ la décomposition réduite de support $\mathcal{S}$. Construisons la relation Ψ' constituée par les doublets $(P \cap F', F')$ pour $F' \in \mathcal{S}'$ et $P \in \Phi$. La famille Φ' engendrée par Ψ' contient manifestement Φ. Réciproquement, considérons un sous-ensemble $P' \in \Phi'$, et démontrons que pour tout F appartenant à $\mathcal{S}$, $(P' \cap F, F) \in \Psi$. Il existe un sous-ensemble $F' \supseteq F$ dans la famille $\mathcal{S}'$; ce sous-ensemble est tel que $(P' \cap F', F) \in \Psi'$ puisque $P' \in \Phi'$. Le procédé constructif de Ψ' implique l'existence d'un sous-ensemble $P \in \Phi$ tel que $(P \cap F', F') = (P' \cap F', F')$. De l'inégalité $F \subseteq F'$, on tire la suite d'égalité $P \cap F = (P \cap F') \cap F = (P' \cap F') \cap F = P' \cap F$, d'où l'on tire $(P \cap F, F) = (P' \cap F, F)$. Puisque $(P \cap F, F)$ appartient à Ψ, il en est de même de $(P' \cap F, F)$.

Restreignons nous maintenant au cas d'une famille Φ sur un ensemble fini. Il résulte de la propriété que si $\mathcal{S}$ est un support d'une décomposition de Φ, il en est de même pour $\bar{\bar{\mathcal{S}}}$ et toute famille de partie $\mathcal{S}'$ telle que $\bar{\bar{\mathcal{S}}}' = \bar{\bar{\mathcal{S}}}$. Il suffit donc de s'intéresser aux seuls supports libres de la famille ; parmi ceux là, il suffira de déterminer les <u>supports libres minimaux</u> pour la relation d'ordre $\leq$.

Il est d'autre part immédiat que S est un support de Φ si et seulement si il existe une écriture en somme de monômes de la fonction $\tilde{\Phi}'$ associée au complément de Φ telle que chacun des monômes de cette écriture dépende d'un ensemble de variables inclus dans une des parties appartenant à S. Etant donné que les monômes premiers de $\tilde{\Phi}'$ sont ceux qui dépendent du moins grand nombre de monômes, la recherche des supports minimaux revient à celle des bases premières minimales de $\tilde{\Phi}$.

2) Exemple

Sur l'ensemble constitué par les quatre éléments $\{A,B,C,D\}$, cherchons les supports libres minimaux des décompositions de la famille $\Phi = \{\emptyset,A,B,CD,AB,BCD,ACD\}$. La fonction booléenne associée à Φ est $\tilde{\Phi} = A'CD+C'D'+B'CD$. La complémentation de $\tilde{\Phi}$ donne tous les monômes premiers de $\tilde{\Phi}'$, soit :

$$\tilde{\Phi}' = \underset{1}{CD'}+\underset{2}{C'D}+\underset{3}{A'B'C'}+\underset{4}{A'B'D'}.$$

On numérote les monômes premiers et on écrit les relations de consensus de deux monômes sous forme d'une fonction générale monotone et extensive, F , des variables 1,2,3 et 4 (cf. 6-B), soit :

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 2$$

$$F_3 = 3+24$$

$$F_4 = 4+13.$$

Le procédé de calcul de la limite inductive de F montre que $F = \tilde{F}$ (cf. 10), par conséquent la fonction BASE $\mathcal{B}$ (cf. 6-B) de $\tilde{\Phi}'$ est égale à $F_1.F_2.F_3.F_4 = 123+124$. On trouve ainsi deux bases premières minimales :

$$\tilde{\Phi}'_1 = (C'D+CD')+(A'B'C')$$

$$\tilde{\Phi}'_2 = (C'D+CD')+(A'B'D').$$

Les supports correspondants des décompositions sont {CD,ABC} et {CD,ABD}. Traitons par exemple le cas de la première décomposition constituée par les sommes C'D+CD' et A'B'C' ; la complémentation de chacune de ces sommes donne les facteurs de décomposition de $\tilde{\Phi}$, soit CD+C'D' et A'+B'+C'. On trouve donc :

$$\tilde{\Phi} = (CD+C'D').(A'+B'+C').$$

En appliquant le procédé constructif décrit dans la démonstration du théorème, on trouve la décomposition correspondante de la famille Φ', soit :

$$\Psi = \{(CD,CD),(\emptyset,CD),(BC,ABC),(AC,ABC),(AB,ABC),(A,ABC),(B,ABC), (C,ABC),(\emptyset,ABC)\}.$$

(12) ETUDE DES FAMILLES DE MOORE DE CARACTERE FINI

(A) *Génération d'un préordre régulier*

Soit un ensemble E, désignons par R_E l'ensemble des relations binaires $[P(E),\rho,P(E)]$. R_E est un treillis de Boole par rapport à l'inclusion dont le sous-ensemble P_E des préordres réguliers sur $P(E)$ constitue une famille de Moore. Par conséquent, pour toute relation binaire ρ sur $P(E)$, il existe un plus petit préordre régulier $\tilde{\rho}$ tel que

$$(P,Q) \in \rho \Rightarrow P \xrightarrow{\theta} Q[\tilde{\rho}].$$

On dira que $\tilde{\rho}$ est <u>engendré</u> par ρ. De cette définition découle immédiatement

Propriété 1

"$\overline{P}$ est un optimum de $\tilde{\rho}$ si et seulement si

$$\forall (G,F) \in \rho,\ G \subseteq \overline{P} \Rightarrow F \subseteq \overline{P} \text{ ".}$$

Une relation ρ sur $\mathcal{P}(E)$ sera dite élémentaire si $(G,F) \in \rho$ implique $\mathrm{Card}(F) = 1$ et $F \not\subset G$. La décomposition élémentaire d'une relation ρ consiste à associer à chacun de ses doublets (G,F) l'ensemble des doublets (G,f) tels que $f \in F$ et $f \notin G$. On vérifie immédiatement les

Propriété 2

"Le préordre engendré par une relation ρ est identique à celui qui est engendré par sa décomposition élémentaire ".

En particulier, la décomposition élémentaire d'un préordre régulier $\tilde{\rho}$ est la relation ρ constituée des doublets (G,f) tels que $G \xrightarrow{e} f[\tilde{\rho}]$ et $f \notin G$; ce qui revient encore à dire que $(G,f) \in \rho \Leftrightarrow G$ est une attribution élémentaire de f (cf. 2). D'où

Corollaire

"Tout préordre régulier $\tilde{\rho}$ est engendré par sa décomposition élémentaire ρ constitué des doublets (G,f) tels que G soit attribution élémentaire de f."

Considérons le cas où E est fini, une variable booléenne étant attachée à chacun de ses éléments. Les relations élémentaires qui engendrent $\tilde{\rho}$ sont liées aux fonctions booléennes générales monotones et extensives, $F : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, dont la limite inductive, $\tilde{F}$, est la fermeture associée à $\tilde{\rho}$. Une telle relation élémentaire s'obtient en prenant tous les couples (G,f) tels que G soit un monôme premier distinct de f de la fonction composante F_{f}. Réciproquement, le procédé inverse permet de construire à partir d'une relation élémentaire ρ une fonction F de limite inductive égale à $\tilde{F}$.

(B) Caractérisation des préordres réguliers de caractère fini

Ces préordres sont ceux qui définissent des familles de Moore de caractère fini.

Théorème

"Un préordre régulier est de caractère fini si et seulement si il est engendré par une relation à composantes finies ".

Condition nécessaire

Soit un préordre régulier $\tilde{\rho}$ définissant la famille de Moore de caractère fini M. Il existe une décomposition réduite Ψ de la famille M dont le support $R_2\Psi$ est constitué par des ensembles finis. Pour tout F appartenant à $R_2\Psi$, l'ensemble des parties G telles que $(G,F) \in \Psi$ constitue une famille de Moore M_F de l'ensemble F (cf. , propriété des décompositions réduites d'une famille de Moore). A chaque partie P, associons le plus petit sous-ensemble P_F qui majore $P \cap F$ dans la famille M_F. Par définition de la famille engendrée par Ψ, M est caractérisé par la propriété :

$$[\pi_1] \quad \bar{Q} \in M \Leftrightarrow \forall F \in R_2\Psi : \bar{Q} \cap F = \bar{Q}_F.$$

Considérons maintenant la relation τ à composantes finies constituée par les couples $(P \cap F, P_F)$ définis pour tout $P \in P(E)$ et tout $F \in R_2\Psi$. D'après la propriété 1 établie en A), la famille de Moore M' des optimums du préordre régulier $\tilde{\tau}$ engendrée par τ est caractérisée par la propriété

$$[\pi_2] \quad \bar{Q} \in M' \Leftrightarrow [\forall F \in R_2\Psi, \forall P \in P(E), P \cap F \subseteq \bar{Q}] \Rightarrow P_F \subseteq \bar{Q}.$$

Nous allons démontrer que $\tilde{\rho} = \tilde{\tau}$ en prouvant que $M = M'$.

1) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$

Soit un ensemble $\bar{Q}$ appartenant à $\mathcal{M}$, c'est-à-dire vérifiant $\bar{Q} \cap F = \bar{Q}_F$ pour tout F pris dans $R_2\Psi$. Tout sous-ensemble $P \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $P \cap F \subseteq \bar{Q}$ vérifiera aussi $P \cap F \subseteq \bar{Q} \cap F$, ce qui implique $P_F \subseteq \bar{Q}_F$. L'hypothèse $\bar{Q} \cap F = \bar{Q}_F$ impliquera donc $P_F \subseteq \bar{Q} \cap F \subseteq \bar{Q}$, donc $\bar{Q} \in \mathcal{M}'$ d'après $[\pi_2]$.

2) $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$

Soit une partie $\bar{Q}$ prise dans $\mathcal{M}'$; en appliquant $[\pi_2]$ au sous-ensemble $P = \bar{Q}$, on voit que $\bar{Q}_F \subseteq \bar{Q}$ est vérifié. Cette inégalité implique $\bar{Q}_F = \bar{Q}_F \cap F \subseteq \bar{Q} \cap F$; d'autre part, $\bar{Q} \cap F$ est inclus dans $\bar{Q}_F$ par définition. On trouve donc $\bar{Q} \cap F = \bar{Q}_F$ pour tout F pris dans $R_2\Psi$, ce qui montre que $\bar{Q} \in \mathcal{M}$ d'après $[\pi_1]$.

Condition suffisante

Considérons un préordre régulier engendré par une relation ρ à composantes finies. On peut toujours supposer ρ élémentaire et constituée de doublets (G,f) vérifiant la condition $f \notin G$. La famille $\mathcal{M}$ des optimums de $\tilde{\rho}$ est caractérisée par

$$[\pi_1] \quad P \in \mathcal{M} \iff \forall (G,f) \in \rho,\ G \subseteq P \Rightarrow f \in P.$$

Le prédicat $\forall (G,f) \in \rho,\ G \subseteq P \Rightarrow f \in P$ est équivalent au prédicat $\forall (G,f) \in \rho$, $P \cap (G+f) \neq G$. En effet, si $G \subseteq P$ et $P \cap (G+f) \neq G$, la seule valeur possible de $P \cap (G+f)$ est $G+f$, ce qui implique $f \in P$. Considérons donc la relation Ψ à composantes finies déterminée par les doublets (S,T) tels que :

1) $\exists (G,f) \in \rho, \quad T = G+f$

2) $\forall (G,f) \in \rho, \quad T = G+f \Rightarrow S \neq G$

3) $S \subseteq T$.

La seconde forme du prédicat définissant M est équivalente à $\forall T \in R_2\Psi$, $(P \cap T, T) \in \Psi$. Ce qui montre que M est de caractère fini.

Corollaire

"Un préordre régulier $\tilde{\rho}$ est de caractère fini si et seulement si il est engendré par les doublets (G,f) tels que G soit une attribution élémentaire finie de f ".

(C) *Caractérisation des préordres réguliers d'indice fini*

Théorème

"Un préordre régulier est d'indice fini $\leq k$ (k entier positif non nul) si et seulement si il est engendré par les doublets (G,f) tels que G soit une attribution élémentaire de f contenant au plus k-1 éléments ".

Condition nécessaire

Si la famille de Moore associée au préordre est d'indice $\leq k$, elle admet une décomposition Ψ composée de doublets (G,F) tels que Card(F) $\leq k$. Les doublets $(P \cap F, F)$ composant la relation τ construite pour la démonstration de la condition nécessaire du théorème précédent sont tels que Card$(P \cap F) \leq k$. La décomposition élémentaire de τ sera donc composée de doublets (G,f) tels que Card(G) $\leq k$. En fait, l'égalité Card(G) = k ne pourrait être obtenue que si $G = P \cap F = F$, mais alors nécessairement f appartiendrait à G. Par conséquent $(G,f) \in \tau \Rightarrow$ Card(G) $\leq k-1$.

Condition suffisante

Si le préordre est engendré par une relation élémentaire constituée de doublets (G,f) tels que Card(G) $\leq k-1$, la décomposition Ψ construite pour la démonstration de la condition suffisante du théorème précédent a son support constitué des parties G+f de cardinal $\leq k$.

(D) *Seconde méthode d'étude des préordres réguliers de caractère fini*

Les deux théorèmes qui ont été établis en B) et C) peuvent se déduire directement du théorème qui a été établi en 11-E). En effet, ce théorème lie la notion de caractère fini à celle de décomposition d'une fonction booléenne ; plus exactement, nous avons vu qu'une famille Φ est de caractère fini si la complémentaire de sa fonction booléenne caractéristique est une somme de monômes finis. Dans le cas où Φ est une famille de Moore, nous avons vu au paragraphe 5 que les monômes premiers de sa fonction booléenne caractéristique sont de la forme $f'.G$ où G est une attribution élémentaire de f ; ce résultat permet d'établir immédiatement le théorème énoncé en B). Nous avons vu également qu'une famille de caractère fini est d'indice fini $\leq k$ si et seulement si la complémentaire de sa fonction booléenne caractéristique est une somme de monômes dépendant de k variables au plus ; ce résultat permet d'établir le théorème établi en C).

(E) *Applications*

a) Algèbres abstraites

Soit une algèbre abstraite de support E dont les opérations sont les applications $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$. La définition du support d'une sous-algèbre montre clairement que ces supports sont les optimums du préordre régulier engendré par la relation à composantes finies constituée par les doublets $(\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},\ f_\alpha(a_1,a_2,\ldots,a_n))$ où l'on prend pour chaque opération f_α n-aire l'image de tout n-uplet $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Il résulte alors du théorème établi en B) que les supports des sous-algèbres constitue une famille de Moore de caractère fini ; si de plus la n-arité des opérations est bornée par un nombre k, on obtient une famille de Moore d'indice $\leq k+1$. Réciproquement, toute famille de Moore de caractère fini est isomorphe à l'ensemble des supports d'une algèbre abstraite ayant éventuellement un nombre infini d'opérations ; il suffit de considérer une relation élémentaire ρ qui engendre le préordre régulier correspondant, et associer à chaque couple (G,f) une opération φ, n-aire, telle que $n = \mathrm{Card}(G)$, $\varphi(G') = f$ pour un n-uplet G' quelconque contenant tous les éléments de G, $\varphi(G'') = g''$ où g'' appartient à G'' pour tout autre n-uplet $G'' \neq g'$. Si la famille de Moore est d'indice fini, on construit ainsi une algèbre abstraite dont les opérations ont une n-arité bornée par cet indice +1. On retrouve ainsi les propriétés établies par Birkhoff [4].

b) Problèmes relatifs aux familles de Moore d'indice 3 :

La représentation d'une famille de Moore de caractère fini par une algèbre abstraite peut nécessiter une infinité d'opérations. D'autre part, on ne sait pas si l'on peut se contenter d'opérations prises dans une certaine famille (*).

Exemple Etant donné un treillis fini, est-il isomorphe au treillis des sous-monoïdes d'un monoïde ?

De l'étude qui précède on déduit que ce treillis doit être de caractéristique 3 ; i.e. la famille de Moore qui lui est associée par son codage booléen doit être d'indice 3 (cf. Chapitre II). Cette condition est aisée à vérifier par les algorithmes développés dans ce chapitre. La question demeure posée de savoir si cette condition est suffisante.

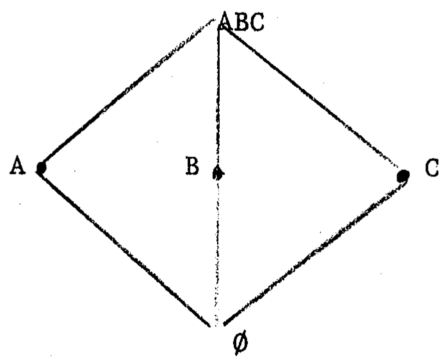
Un autre exemple important de famille de Moore d'indice 3, est celle qui est fournie par l'opération binaire non partout définie de consensus booléen ; i.e. on se donne k monômes booléens et leurs relations élémentaires de consensus, un ensemble de p monômes sera dit fermé si les consensus pris deux à deux de ces p monômes font partie de ces p monômes, les ensembles ainsi fermés constituent manifestement une famille de Moore d'indice 3. On voit que tout les $\cup$-irréductibles d'une telle famille sont atomiques et réduits à un seul élément. La réciproque

---

(*) Cependant, on voit facilement que toutes les opérations peuvent être commutatives, i.e. la valeur de l'image d'un n-uplet ne dépend de l'ordre de ses composants.

est fausse, ainsi la famille de Moore représentée ci-dessous ne correspond pas une relation de consensus entre trois monômes booléen A, B et C. En effet, C devrait être le consensus de A et B, donc A serait de la forme x'.m, B de la forme x.n et C ne contient pas la variable x. B doit être le consensus de A et C ; puisque C ne contient pas la variable x, le consensus doit se faire par rapport à une nouvelle variable y. Compte tenu du fait que A est de la forme x'.m, il doit en définitive être sous la forme x'.y'.μ ; de même C est sous la forme y.ν. Il en résulte que B est de la forme x'.μ.ν, B contient donc x', ce qui est contradictoire avec le fait que B contient x.

Le problème de la reconnaissance des treillis finis d'indice 3 associés à des relations de consensus reste ouvert.



QUATRIÈME PARTIE

SYSTEMES SEQUENTIELS

CHAPITRE - I

REDUCTION DES SYSTEMES SEQUENTIELS PARTIELLEMENT DETERMINES

(1) INTRODUCTION - PROBLEMES POSES PAR LA SYNTHESE DES SYSTEMES SEQUENTIELS

(A) *Systèmes séquentiels et circuits séquentiels*

Un système séquentiel $\mathcal{S}$ est défini par la donnée d'un quintuplet (S,I,O,δ,λ) où S, I et O sont trois ensembles finis non vides dont les éléments sont appelés respectivement états, entrées et sorties, δ et λ sont deux applications de S X I dans S et O appelées respectivement fonction de transition et fonction de sortie.

Un circuit séquentiel est un système séquentiel dont les trois ensembles S, I et O sont des puissances cartésiennes finies de l'ensemble B à deux éléments ; on a donc $S = B^{n_1}$, $I = B^{n_2}$ et $O = B^{n_3}$. On représentera par X, Y et Z respectivement les variables booléennes générales prenant leurs valeurs dans S, I et O, par X_i, Y_j et Z_k les variables booléennes simples composant X, Y et Z. δ et λ sont alors des fonctions booléennes générales $\delta: B^{n_1}\times B^{n_2} \to B^{n_1}$, $\lambda : B^{n_1} \times B^{n_2} \to B^{n_3}$; on notera δ_i et λ_k les fonctions booléennes simples déterminant les valeurs de X_i et Z_k en fonction de la valeur de la variable générale X+Y.

Les circuits séquentiels sont les systèmes séquentiels qui peuvent être matériellement réalisés par l'utilisation

- d'éléments de mémoire pouvant mémoriser deux valeurs, associés aux variables booléennes X_i,
- de canaux d'entrée et de sortie, assimilables à des "fils", susceptibles de conduire deux valeurs (tension haute ou basse, intensité nulle ou positive, etc...), associés aux variables booléennes Y_j et Z_k,
- d'opérateurs binaires dont les connexions réalisent les fonctions δ et λ.

Les circuits séquentiels sont divisés en deux catégories suivant que les valeurs emmagasinées en mémoire réagissent immédiatement (ou après un certain retard technologique) sur les opérateurs binaires, ou bien que au contraire, le système ne fonctionne que pendant certains intervalles de temps très courts empêchant tout retour des nouvelles valeurs d'états sur les opérateurs d'entrée. Dans le premier cas, on a un <u>système asynchrone</u> qui peut changer plusieurs fois d'état alors que la même entrée est appliquée ; les autres systèmes sont <u>synchrones</u> et changent une fois d'état seulement pendant l'application d'une entrée. Notons que les caractères de synchronisme et d'asynchronisme peuvent tout aussi bien être définis sur des systèmes séquentiels en faisant abstraction de la réalisation technologique à laquelle est due ce caractère. Nous traiterons essentiellement dans la suite des systèmes synchrones.

(B) *Séquences d'entrée/sortie d'un système séquentiel*

Considérons un système séquentiel $S = (S,I,O,\delta,\lambda)$ dans un état s_o, et appliquons lui une entrée i_1. Ce système va passer de l'état s_o à l'état $s_1 = \delta(s_o,i_1)$ en même temps qu'il produit à l'extérieur une sortie $o_1 = \lambda(s_o,i_1)$. Si on applique ensuite une nouvelle entrée i_2, le système passera à l'état $s_2 = \delta(s_1,i_2)$ et produira une sortie $o_2 = \lambda(s_1,i_2)$. D'une façon générale, si on applique une séquence d'entrée $i_1.i_2...i_n$ à un système séquentiel dans l'état s_o, il traversera une séquence d'états $s_1.s_2...s_n$ et produira une séquence de sortie $o_1.o_2...o_n$, ces deux séquences étant telles que pour tout indice j compris entre 1 et n, on ait les relations $s_j = \delta(s_{j-1},i_j)$ et $o_j = \lambda(s_{j-1},i_j)$. Le couple $(i_1.i_2...i_n,o_1.o_2...o_n)$ est appelé une <u>séquence d'entrée-sortie produite par l'état s_o</u>.

(C) *Synthèse d'un circuit séquentiel - Spécification des séquences d'entrée-sortie.*

Le problème général consiste à réaliser un circuit séquentiel répondant à certaines spécifications relatives aux séquences d'entrée-sortie qu'il produira. La façon de définir ces spécifications est le plus souvent empirique (cf. [ ]), elle conduit le plus souvent à définir un <u>système séquentiel incomplet</u>

$\mathcal{S} = (S,I,O,\delta,\lambda)$ où les fonctions δ et λ sont des applications partielles de $S \times I$ dans S et O respectivement. Les indéterminations-nommées en anglais "don't care conditions"- correspondent à des caractéristiques de fonctionnement qui peuvent être arbitraires. Par exemple, si l'état successeur d'un état s par une entrée i peut être quelconque sans perturber la partie utile du circuit séquentiel que l'on veut réaliser, l'application δ ne sera pas déterminée sur le doublet (s,i) ; la même remarque est valable pour la détermination des valeurs de sortie.

D'une façon plus générale, on peut considérer des <u>systèmes séquentiels partiellement déterminés</u> $\mathcal{S} = (S,I,O,\delta,\lambda)$ où δ et λ sont des applications de $S \times I$ dans $\mathcal{P}(S)-\emptyset$ et $\mathcal{P}(O)-\emptyset$ respectivement. Les applications δ et λ ont alors le sens suivant : si on applique une entrée i à un état s, l'état successeur pourra être pris quelconque dans $\delta(s,i)$, et la sortie produite quelconque dans $\lambda(s,i)$. Il faut bien noter qu'il ne s'agit pas de considérer tous les choix possibles de l'état successeur dans $\delta(s,i)$ ni tous les choix possibles de la sortie produite dans $\lambda(s,i)$, mais d'effectuer un <u>choix arbitraire</u> qui sera compatible avec le circuit séquentiel à réaliser. Il est clair avec cette interprétation qu'un système séquentiel incomplet est un cas particulier de système partiellement déterminé ; il suffit de poser $\delta(s,i) = S$ si δ est non défini sur (s,i) et $\lambda(s,i) = O$ si λ est non défini sur (s,i).

<u>Définitions</u>

Etant donné un doublet $(s_o, i_1.i_2...i_n)$ constitué par un état s_o et une séquence d'entrée $i_1.i_2...i_n$, une séquence de sortie $o_1.o_2...o_n$ est <u>compatible avec ce doublet</u> si il existe une séquence d'états $s_1.s_2...s_n$ telle que pour tout indice j compris entre 1 et n soient vérifiées les conditions $s_j \subseteq \delta(s_{j-1}, i_j)$ et $o_j \subseteq \lambda(s_{j-1}, i_j)$; si $o_1.o_2...o_n$ est unique on dira qu'elle est <u>déterminée</u> par le doublet $(s_o, i_1.i_2...i_n)$, ou encore que ce <u>doublet détermine une seule séquence de sortie</u>.

Etant donné un état s_o, une séquence d'entrée sortie $(i_1.i_2...i_n, o_1.o_2...o_n)$ sera dite déterminée par s_o si $o_1.o_2...o_n$ est déterminée par le doublet $(s_o, i_1.i_2...i_n)$.

(D) *Problème de la réduction*

Définition

Un état s' d'un système séquentiel partiellement déterminé S sera dit plus précis qu'un autre état s si pour toute séquence d'entrée $i_1.i_2...i_n$, toute séquence de sortie compatible avec $(s, i_1.i_2...i_n)$ l'est également avec $(s', i_1.i_2...i_n)$. D'une façon générale, si on considère deux systèmes séquentiels partiellement déterminés S et S' travaillant sur les mêmes valeurs d'entrée et de sortie, on dira que S' est plus précis que S si pour état s de S, il existe un état s' de S' plus précis que s.

Une première méthode de synthèse d'un système séquentiel partiellement déterminé $S = (S,I,O,\delta,\lambda)$ consiste à construire un circuit séquentiel $C' = (S',I',O',\delta',\lambda')$ tel que moyennant l'identification de I avec un sous-ensemble de I' et l'identification de O avec un sous-ensemble de O', C' soit plus précis que S. En pratique, on procède en deux temps : on cherche tout d'abord un système séquentiel S' plus précis que S et contenant un nombre minimal d'états, ensuite on le code en circuit séquentiel en cherchant à minimiser la complexité du réseau d'opérateurs binaires. Nous traiterons dans ce chapitre le premier de ces problèmes, la minimisation du nombre d'états d'un système séquentiel partiellement déterminé.

Remarque - On vérifiera aisément en se reportant à la théorie des systèmes séquentiels incomplets (cf. |14| ou |26|) que la notion de précision qui a été définie ci-dessus coïncide avec celle de surpassement ; nous préférons le premier terme qui paraît mieux traduire la réalité. On constatera alors que le problème de minimisation ci-dessus défini généralise celui qui est étudié par les systèmes incomplets.

Une seconde méthode de réduction qui sera dite globale consistera à associer à chaque doublet $(s,i_1.i_2...i_n)$ un doublet $(s',i_1.i_2...i_n)$ tel que toute séquence de sortie compatible avec le second doublet soit compatible avec le premier doublet. Remarquons que le premier type de réduction qui a été défini est un cas particulier de ce dernier, il a la particularité d'établir une correspondance $(s,i_1.i_2...i_n)$ $(s',i_1.i_2...i_n)$ indépendante de la séquence d'entrée $i_1.i_2...i_n$. Le problème ainsi défini est difficile à traiter dans un cas aussi général, nous l'étudierons dans le cas particulier des systèmes séquentiels complets (cf. Chapitre II).

(2) SURHOMOMORPHISME D'UN SYSTEME SEQUENTIEL PARTIELLEMENT DETERMINE

(A) *Surhomomorphisme d'un système séquentiel incomplet (Rappel)*

Etant donnés deux systèmes séquentiels incomplets $\mathcal{S}_1 = (S_1,I,O,\delta_1,\lambda_1)$ et $\mathcal{S}_2 = (S_2,I,O,\delta_2,\lambda_2)$ opérant sur les mêmes entrées et les mêmes sorties, un surhomomorphisme de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$ est une relation binaire $|S_1,\rho,S_2|$(*) vérifiant les propriétés suivantes :

[P1] $\forall s_1 \in S_1 : \rho_{12}(s_1) \neq \emptyset$;

[P2] $\forall i \in I, \quad s_1 \;\rho\; s_2 \Rightarrow$

α) si $\lambda_2(s_2,i)$ est défini, il en est de même pour $\lambda_1(s_1,i)$, de plus $\lambda_1(s_1,i) = \lambda_2(s_2,i)$;

β) si $\delta_1(s_1,i)$ et $\delta_2(s_2,i)$ sont tous deux définis, $\delta_1(s_1,i) \;\rho\; \delta_2(s_2,i)$ est vérifié.

(*) cf. Chapitre I de la deuxième partie pour les notations relatives aux relations.

Une telle relation est appelée surhomomorphisme, car on peut démontrer (cf. [20]) qu'elle généralise la notion d'homomorphisme. En particulier, si on se donne trois sytèmes séquentiels S_1, S_2 et S_3, deux surhomomorphismes $\rho' : S_1 \to S_2$ et $\rho'' : S_2 \to S_3$, la composition au sens des relations $\rho' \rho''$ est un surhomomorphisme de S_1 sur S_3. L'importance des surhomomorphismes tient au résultat suivant (cf. [14] ou [20]) :

"Un système séquentiel incomplet S_2 surpasse un système séquentiel incomplet S_1 si et seulement si il existe un surhomomorphisme de S_1 sur S_2 ".

La notion de surpassement, non définie dans ce chapitre, est équivalente à celle de meilleure précision dans le cas des systèmes séquentiels incomplets.

(B) *Surhomomorphisme d'un système séquentiel partiellement déterminé*

En gardant les notations introduites au début de ce paragraphe, nous dirons que $[S_1, \rho, S_2]$ est un surhomomorphisme de S_1 sur S_2 si la propriété [P1] est vérifiée et si [P2] est remplacée par

[P'2] $\quad \forall i \in I, \quad s_1 \, \rho \, s_2 \Rightarrow$

α) $\quad \lambda_2(s_2,i) \subseteq \lambda_1(s_1,i)$;

β) $\quad \forall t_2 \in \delta_2(s_2,i), \quad \exists t_1 \in \delta_1(s_1,i)$ tel que $t_1 \, \rho \, t_2$ soit vérifié.

Compte tenu de l'identité qui a été établie entre les systèmes séquentiels incomplets et certains systèmes séquentiels partiellement déterminés (cf. 1), C), on vérifie aisément que [P2α] et [P2β] sont équivalents respectivement à [P'2α] et [P'2β]. La notion de surhomomorphisme qui vient d'être définie est donc une généralisation de la première.

(C) *Traduction en termes de relation des propriétés caractéristiques d'un surhomomorphisme*

Etant donné un système séquentiel partiellement déterminé $\mathcal{S} = (S,I,O,\delta,\lambda)$, associons à chaque entrée $i \in I$ les deux relations binaires $[S,\delta^{i},S]$ et $[S,\lambda^{i},O]$ définies par

$$s\delta^{i}t \iff t \in \delta(s,i)$$

$$s\lambda^{i}\delta \iff \delta \in \lambda(s,i).$$

On obtient ainsi une définition relationnelle des systèmes séquentiels partiellement déterminés qui va nous permettre d'exprimer de façon simple les propriétés d'un surhomomorphisme. En conservant les notations précédemment utilisées, représentons par $\delta_1^{i},\delta_2^{i},\lambda_1^{i},\lambda_2^{i}$ les relations associées à $\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2$ pour chaque entrée i. La condition [P'2α] peut s'écrire :

$$s_1 \;\rho\; s_2 \text{ et } s_2 \;\lambda_2^{i}\; \delta \implies s_1 \;\lambda_1^{i}\; \delta,$$

soit

$$\boxed{\delta\lambda_2^{i} \subseteq \lambda_1^{i}} \;(*)$$

La condition [P'2β] peut s'écrire :

$$s_1 \;\rho\; s_2 \text{ et } s_2 \;\delta_2^{i}\; t_2 \implies \exists t_1 : s_1 \;\delta_1^{i}\; t_1 \text{ et } t_1 \;\rho\; t_2 ,$$

soit

$$\boxed{\rho\delta_2^{i} \subseteq \delta_1^{i}\rho} \;.$$

Démontrons par exemple que la composition $\rho'\rho''$ de deux surhomomorphismes $\rho' : S_1 \to S_2$ et $\rho'' : S_2 \to S_3$ est encore un surhomorphisme. Il est immédiat de

---

(*) on convient d'écrire le produit de composition avec la notation anglo-saxonne en supprimant le signe opératoire O et en écrivant les symboles dans l'ordre naturel de leur application.

vérifier que [P1] s'applique au produit $\rho'\rho''$. La propriété [P'2] s'écrit :

$$\forall i \in I : \rho'\lambda_2^i \subseteq \lambda_1^i \quad \text{et} \quad \rho''\lambda_3^i \subseteq \lambda_2^i \ ;$$

$$: \rho'\delta_2^i \subseteq \delta_1^i\rho'' \quad \text{et} \quad \rho''\delta_3^i \subseteq \delta_2^i\rho''.$$

Il faut vérifier que

$$\forall i \in I : \rho'\rho''\lambda_3^i \leq \lambda_1^i \text{ et } \rho'\rho''\delta_3^i \subseteq \delta_1^i \, \rho'\rho'' \ ,$$

ce qui est immédiat en tenant compte de l'implication $S' \subseteq S'' \Rightarrow S'T \subseteq S''T$ valable pour tout ensemble de 3 relations S', S'' et T pouvant se composer en $S'T$ et $S''T$.

(D) *Liaison entre surhomomorphisme et précision*

Théorème

"Si $[S_1,\rho,S_2]$ est un surhomomorphisme d'un système séquentiel S_1 partiellement déterminé sur un autre S_2 la relation $s_1 \; \rho \; s_2$ implique que s_2 est plus précis que s_1 ".

Soit $o_1.o_2...o_n$ une séquence de sortie compatible avec un doublet $(s_1,i_1.i_2...i_n)$ il existe donc une séquence d'états $s_2^1.s_2^2...s_2^n$ telle que pour tout indice j compris entre 1 et n soient vérifiées les relations :

$$s_2^j \in \delta_2(s_2^{j-1},i_j) \text{ et } o_j \in \lambda_2(s_2^{j-1},i_j) \ (*)$$

D'après la propriété $|P'2\alpha|$ d'un surhomomorphisme, la relation $s_1^0 \; \rho \; s_2^0$ implique $\lambda_2(s_1^0,i_1) \subseteq \lambda_2(s_2^0,i_1)$, par conséquent $o_1 \in \lambda_1(s_1^0,i_1)$. D'après les propriétés

---

(*) on convient de poser $s_1^0 = s_1$ et $s_2^0 = s_2$.

[P2'β] d'un surhomomorphsime, il existe un état $s_1^1 \in \delta_1(s_1^0,i_1)$ vérifiant $s_1^1 \;\rho\; s_2^1$. On peut alors appliquer le même raisonnement au couple d'état (s_1^1,s_2^1), on établira ainsi que $o_2 \in \lambda_1(s_2^1,i_2)$ et qu'il existe un état $s_1^2 \in \delta_1(s_1^1,i_2)$ vérifiant $s_1^2 \;\rho\; s_2^2$, etc... De proche en proche, on arrivera ainsi à établir l'existence d'une séquence d'état $s_2^1.s_2^2...s_2^n$ produisant la séquence de sortie $o_1.o_2...o_n$, ce qui démontre bien que s_2 est plus précis que s_1.

La réciproque de ce théorème est malheureusement fausse, contrairement à ce qui a lieu dans le cas des automates incomplets. Nous élaborerons cependant une méthode de réduction généralisant celle qui est utilisée pour les automates incomplets basée sur cette réciproque. Le minimum d'états que l'on obtiendra ainsi ne sera peut-être pas absolu.

(3) RECOUVREMENT COMPATIBLE D'UN SYSTEME SEQUENTIEL PARTIELLEMENT DETERMINE

(A) *Définition*

Un recouvrement partiel R des états d'un système séquentiel partiellement déterminé sera dit compatible si pour toute entrée $i \in I$, il vérifie les conditions suivantes :

[R1] $\forall C \in R : \bigcap\limits_{s \in C} \lambda(s,i) \neq \emptyset$;

[R2] $\forall C \in R$, $\exists C' \in R$ tel que $s \in C \Rightarrow \delta(s,i) \cap C' \neq \emptyset$.

Tout sous-ensemble de S appartenant à au moins un recouvrement compatible sera appelé une classe de compatibilité. Les notions de recouvrement partiel compatible et de classe de compatibilité généralisent celles qui sont définies pour les automates incomplets (cf. [14] ou [20]). Cette généralisation comporte cependant une restriction importante. Alors que les classes de compatibilité d'un automate incomplet se définissent à partir d'une relation de compatibilité (deux éléments sont compatibles dans cette relation si leur ensemble constitue une classe de compatibilité par rapport à la définition que nous avons donnée) telle que toute classe de compatibilité soit formée d'éléments deux à deux compatibles, il n'en est plus de même pour les systèmes séquentiels partiellement déterminés. Il suffit pour cela de considérer le système séquentiel $S = (\{s_1,s_2,s_3\}, \{i\}, \{o_1,o_2,o_3\}, \delta,\lambda)$ tel que $\lambda(s_1,i) = \{o_2,o_3\}$, $\lambda(s_2,i) = \{o_1,o_3\}$, $\lambda(s_3,i) = \{o_1,o_2\}$, $\delta(s_j,i) = s_j$. Les états sont deux à deux compatibles mais $\{s_1,s_2,s_3\}$ n'est pas une classe de compatibilité à cause de la condition [R1].

(B) *Liaison entre recouvrement compatible et surhomomorphisme*

Théorème

"Si il existe un surhomomorphisme $[S_1,\rho,S_2]$ d'un automate partiellement déterminé S_1 sur un autre S_2, l'ensemble des parties $\rho_{21}(s_2)$, quand s_2 varie dans S_2, constitue un recouvrement compatible des états de S_1 ".

Les $\rho_{21}(s_2)$ constituent un recouvrement par suite de la condition [P1] imposée aux surhomomorphismes. Il reste à vérifier [R1] et [R2] pour toute entrée i.

[R1] découle de [P'2α] car $s_1 \in \rho_{21}(s_2)$ est équivalent à $s_1\ \rho\ s_2$ qui implique $\lambda_1(s_1,i) \supseteq \lambda_2(s_2,i)$, donc $\bigcap_{s_1 \in \rho_{21}(s_2)} \lambda_1(s_1,i) \supseteq \lambda_2(s_2,i) \neq \emptyset$. [R2] découle de [P'2β], en effet si on considère un état quelconque $t_2 \in \delta_2(s_2,i)$, il existe au moins un état $t_1 \in \delta_1(s_1,i)$ tel que $t_1\ \rho\ t_2$ soit vérifié ; cela revient à dire que $s_1 \in \rho_{21}(s_2) \Rightarrow \rho_{21}(t_2) \cap \delta_1(s_1,i) \neq \emptyset$.

Théorème réciproque

"A tout recouvrement compatible R des états d'un système séquentiel partiellement déterminé $S = (S,I,O,\delta,\lambda)$ correspond un système surhomomorphe, $S' = (R,I,O,\Delta,\Lambda)$ dont l'ensemble des états égale R, la relation de surhomomorphisme $|S,\rho,R|$ étant équivalente à $s \in C$ ".

Soit (C,i) un doublet appartenant à $\mathcal{R} \times I$. Posons $\Lambda(C,i) = \bigcap_{s \in C} \lambda(s,i)$; Λ est une application dans $\mathcal{P}(O)-\emptyset$ par suite de la condition [R1].
Posons $\Delta(C,i) = \{C' \in \mathcal{R} \mid s \in C \Rightarrow \delta(s,i) \cap C' \neq \emptyset\}$; Δ est une application dans $\mathcal{P}(S)-\emptyset$ par suite de la condition [R2]. Il est aisé de vérifier les propriétés [P1] et [P'2] d'un surhomomorphisme pour la relation $[S,\rho,\mathcal{R}]$ équivalente à $s \in C$.

Exemple : Considérons le système séquentiel tel que

$$S = \{A,B,C,D,E\},$$

$$I = \{i_1,i_2,i_3\}$$

$$O = \{1,2,3\}$$

décrit par la figure 1 où chaque case correspondant à l'intersection d'une ligne indicée par un état s et d'une colonne indicée par une entrée i contient les valeurs de $\delta(s,i)$ et $\lambda(s,i)$ séparées par une virgule. On vérifiera (cf. également le calcul effectué au paragraphe 4) que (AC) (CD) (BE) est un recouvrement partiel compatible. Désignons par α,β et γ respectivement les classes (AC), (CD) et (BE) ; on obtient en appliquant le procédé constructif décrit dans la démonstration précédente le système séquentiel représenté par la figure 1 bis.

	i_1	i_2	i_3
A	C, 12	AC, 12	ABC, 13
B	CDE,23	BE, 13	B, 3
C	AB,12	D, 2	CD, 13
D	E, 13	ABD, 12	ACE, 13
E	E,2	ACE, 13	ABD, 123

Figure 1

		i_1	i_2	i_3
(AC)	α	α, 12	β , 2	$\alpha\beta$, 13
(CD)	β	γ, 1	β , 2	$\alpha\beta$, 13
(BE)	γ	γ, 2	γ , 13	γ , 3

Figure 1 bis

Remarque - La réduction d'un système séquentiel incomplet conduit logiquement à un système séquentiel partiellement déterminé. En effet, il arrive fréquemment qu'un doublet (C,i) constitué par une classe de compatibilité et une entrée ait son image par δ incluse dans plusieurs classes de compatibilité du recouvrement utilisé. On convient alors de choisir arbitrairement une des classes de cette image ; en fait, conformément à l'interprétation qui a été donnée en 1), C, il serait plus logique de considérer toutes ces classes de compatibilité.

Conclusion

Les deux théorèmes énoncés ci-dessus montrent que l'on obtiendra les surhomomorphes ayant un minimum d'états en envisageant les recouvrements compatibles possédant un minimum de classes. Nous allons développer dans ce qui suit une méthode pour arriver à un tel résultat.

(4) PROPRIETES ALGEBRIQUES DES RECOUVREMENTS COMPATIBLES - ALGORITHME DE CALCUL

On utilise dans ce paragraphe la terminologie et les propriétés relatives aux recouvrements partiels rappelées dans le chapitre des rappels. On considèrera toujours un même système séquentiel partiellement déterminé $\mathcal{S} = (S,I,O,\delta,\lambda)$.

(A) *Propriétés algébriques élémentaires*

1 - "La base première d'un recouvrement partiel compatible est un recouvrement partiel compatible".

2 - "La somme de deux recouvrements partiels libres compatibles est un recouvrement partiel compatible ".

Ces deux propriétés sont immédiates à vérifier. La première montre qu'il suffit de considérer les seuls recouvrements libres compatibles pour construire un surhomomorphe minimal. Le seconde implique l'existence d'une fermeture duale qui sera noté $\tilde{\Delta}^*$: $P_L(S) \rightarrow P_L(S)$ dont les invariants sont les recouvrements partiels libres compatibles. Nous allons construire une application monotone et idempotente Δ^* : $P_L(S) \rightarrow P_L(S)$ dont la limite inductive égale $\tilde{\Delta}^*$.

(B) *Génération des recouvrements partiels libres compatibles*

A chaque entrée i du système séquentiel, associons l'application δ_i^* : $P(S) \rightarrow P(S)$ telle que $\delta_i^*(P) = \{s \mid \delta(s,i) \cap P \neq \emptyset\}$. Etendons δ_i^* en une application de $P(P(S))$ dans lui-même en posant $\delta_i^*(R)$ = ensemble des $\delta_i^*(C)$ pour $C \in R$.

Propriété 1

" δ_i^* est un $\cup$-homomorphisme de $P(S)$ dans lui-même".

Propriété 2

"$R \leq R' \Rightarrow \delta_i^*(R) \leq \delta_i^*(R)$".

La propriété 1 est immédiate à vérifier ; elle implique directement la propriété 2 en tenant compte de la monotonie de δ_i^* : $P(S) \rightarrow P(S)$. Rappelons que $R \leq R'$ est vérifié si toute partie appartenant au recouvrement partiel R est incluse dans au moins une partie appartenant au recouvrement partiel R'.

Bornons nous maintenant au sous-ensemble $P_L(S)$ des seuls recouvrements partiels libres. Chaque application δ_i^* peut être considérée comme une application de $P_L(S)$ dans lui-même en réduisant les $\delta_i^*(R)$ à leur base première. $\delta_i^* : P_L(S) \to P_L(S)$ est alors une application monotone croissante d'après la propriété 2 ; par conséquent, l'application $\Delta^* : P_L(S) \to P_L(S)$ définie par $\Delta^*(R) = R \cdot \prod_{i \in I} \delta_i^*(R)$ est monotone croissante et contractante. Tout recouvrement partiel libre vérifiant la condition $\Delta^*(R) = R$ sera dit <u>stable</u> par rapport au système séquentiel ; ce sont ceux qui sont invariants par la fermeture duale $\tilde{\Delta}^*$ égale à la limite inductive de Δ^*.

<u>Propriété 3</u>

"Un recouvrement libre R est compatible si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes :

[R1] $\forall C \in R \text{ , } \forall i \in I : \bigcap_{s \in C} \lambda(s,i) \neq \emptyset$;

[R'2] $\Delta^*(R) = R$."

Il suffit de montrer que la condition [R'2] équivaut à la condition [R2] utilisée pour définir les recouvrements compatibles. $\Delta^*(R) = R$ est équivalent à :

$$\forall i \in I : \delta_i^*(R) \geq R.$$

La condition [R2] s'écrit :

$$\forall i \in I, \forall C \in R \text{ , } \exists C' \in R \text{ : } s \in C \Rightarrow \delta(s,i) \cap C' \neq \emptyset.$$

C' est caractérisée par le fait que $\delta_i^*(C') \supseteq C$. Par conséquent, [R2] s'écrit :

$$\forall i \in I, \forall C \in R \text{ , } \exists C' \in R \text{ : } \delta_i^*(C') \supseteq C,$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall i \in I, \delta_i^*(R) \geq R.$$

Associons à chaque doublet $(i,o) \in I \times O$ le sous-ensemble

$$P(i,o) = \{s \in S \mid o \in \lambda(s,i)\} ;$$

désignons par $R(i)$ le recouvrement constitué par les $P(i,o)$ maximaux quand i est fixé et pour o variant dans O. La condition $(\forall C \in R\ ,\ \bigcap_{s \in C} \lambda(s,i) \neq \emptyset)$ est équivalente à l'inégalité $R \leq R(i)$. Par conséquent si on pose $C_o = \prod_{i \in I} R(i)$, la condition [R1] est équivalente à

[R'1] $\quad R \leq C_o$.

<u>Corollaire 1</u>

"Un recouvrement libre est compatible si et seulement si il est stable et couvert par C_o."

<u>Corollaire 2</u>

"Le recouvrement constitué par les classes maximales de compatibilité est égal à $\tilde{\Delta}^*(C_o)$."

(C) <u>*Algorithme de calcul des classes maximales de compatibilité*</u>

Cet algorithme, d'après le corollaire 2, se divise en deux phases :

1° Calcul de C_o ;

2° Calcul de $\tilde{\Delta}^*(C_o)$.

- Calcul de $\mathcal{C}_o$

On construit un tableau à double entrée indicé sur IX' énumérant les sous-ensembles P(i,o) ; ce tableau s'obtient en balayant chaque colonne d'indice bleau de sortie et reportant dans P(i,o) les états s tels que $o \in \lambda(s,i)$. On déduit aisément de ce tableau chaque recouvrement $\mathcal{R}(i)$, on calcule ensuite leur produit $\mathcal{C}_o$.

La figure 2 détaille ce processus pour l'exemple cité en 3) B).

O \ I	i_1	i_2	i_3
1	ACD	ABDE	ACDE
2	ABCD	ACD	E
3	BD	BE	ABCDE

Figure 2

$\mathcal{R}(1)$ = (ACD)(ABCE)(BD)

$\mathcal{R}(2)$ = (ABDE)(ACD)

$\mathcal{R}(3)$ = (ABCDE)

$\mathcal{C}_o$ = (ACD)(BD)(ABE)

- Calcul de $\Delta^*(\mathcal{C}_o)$

On construit un tableau à double entrée indicé sur SXI énumérant les sous-ensembles $\delta_i^*(s)$. A l'aide de ce tableau on peut calculer chaque $\delta_i^*(C)$ par l'application de la propriété 1. On en déduit alors les $\delta_i^*(\mathcal{R})$, et $\Delta^*(\mathcal{R})$ pour tout recouvrement partiel $\mathcal{R}$. Le corollaire 2 et l'application des propriétés des limites inductives (chapitre 1) montre qu'il suffit alors de calculer les termes de la suite $\mathcal{C}_o, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$ telle que $\mathcal{C}_{j+1} = \Delta^*(\mathcal{C}_j)$ jusqu'à ce que deux termes successifs soient égaux ; le dernier terme obtenu est constitué des classes maximales de compatibilité.

<u>Exemple</u> : La figure 3 représente le tableau à double entrée associé au système séquentiel étudié ; suit le calcul de $\tilde{\Delta}^*(C_o)$.

	δ_1^*	δ_2^*	δ_3^*
A	C	ADE	ADE
B	C	BD	ABE
C	AB	AE	ACD
D	B	CD	CE
E	BDE	BE	D

<u>Figure 3</u>

C_o = (ACD) (BD) (ABE)

$\delta_1^*(C_o)$ = (ABC) (BC) (BCDE)

$\delta_2^*(C_o)$ = (ACDE) (BCD) (ABDE)

$\delta_3^*(C_o)$ = (ACDE) (ABCE) (ABDE)

C_1 = (AB) (AC) (BD) (BE) (CD)

$\delta_1^*(C_1)$ = (C) (ABC) (BC) (BCDE) (AB)

$\delta_2^*(C_1)$ = (ABDE) (ADE) (BCD) (BDE) (ACDE)

$\delta_3^*(C_1)$ = (ABDE) (ACDE) (ABCE) (ABDE) (ACDE)

C_2 = (AB) (AC) (BD) (BE) (CD)

$C_1 = C_2$, on a obtenu l'ensemble des classes maximales de compatibilité.

(5) INTERPRETATION DE L'ALGORITHME DE RECHERCHE DES CLASSES MAXIMALES DE COMPATIBILITE

L'algorithme décrit dans le paragraphe précédent s'applique à tout système séquentiel partiellement déterminé ; il est utile de voir son interprétation dans le cas particuliers des systèmes séquentiels dits <u>complets</u> (définition donnée en 1 A) et des systèmes séquentiels <u>incomplets</u> (définition donnée en 1 C). La notion de surhomomorphisme coïncide avec celle d'homomorphisme dans le cas des systèmes complets, le recouvrement compatible associé correspond à une partition en états équivalents au sens des séquences d'entrée-sortie produites ; dans le cas des systèmes incomplets, on a vu aux paragraphes 2 et 3 que ces notions sont un cas particulier de celles qui sont définies pour les systèmes partiellement déterminés. L'introduction de l'application $\Delta^{*} : \mathcal{P}_{L}(S) \rightarrow \mathcal{P}_{L}(S)$ montre que les divers algorithmes décrits pour les diverses catégories de systèmes séquentiels se réduisent à un seul. On peut expliquer pourquoi le calcul de $\tilde{\Delta}^{*}(C_{o})$ nécessite un nombre de pas différent suivant les cas particuliers envisagés.

1°) Le système séquentiel est complet : C_{o} est une partition, de plus Δ^{*} transforme toute partition en une partition (le vérifier pour chaque δ_{i}^{*}). Par conséquent le nombre de pas maximal pour atteindre $\tilde{\Delta}^{*}(C_{o})$ est égal au nombre maximal de partitions deux à deux comparables, ce nombre est égal à n-1, si n est le nombre d'états.

2°) Le système séquentiel est incomplet : C_{o} est un système de cliques (cf. Annexe 1), Δ^{*} transforme tout système de cliques en un système de cliques (le vérifier pour chaque δ_{i}^{*}). Le nombre maximal de pas pour atteindre $\tilde{\Delta}^{*}(C_{o})$ est donc égal au nombre maximal de systèmes de cliques constituant un recouvrement et deux à deux comparables, soit $\frac{n(n-1)}{2} - 1$.

3°) Le système séquentiel est partiellement déterminé et quelconque. C_{o} est un recouvrement quelconque, Δ^{*} n'a aucune propriété particulière. Le nombre maximal de pas pour atteindre $\tilde{\Delta}^{*}(C_{o})$ est égal au nombre maximal de recouvrements deux à deux comparables, soit 2^{n-1}. On pourrait montrer que cette borne est atteinte.

On trouve ainsi trois bornes différentes, les deux premières étant classiques (cf. [ ]). Notons que les recouvrements C_k trouvés au cours de l'algorithme de calcul de $\tilde{\Delta}^*(C_o)$ coïncident avec les partitions de k-équivalence et les recouvrements k-compatibles (cf. [14]).

(6) PRINCIPE GENERAL DE LA METHODE DE REDUCTION D'UN SYSTEME SEQUENTIEL PARTIELLEMENT DETERMINE

La recherche des classes maximales de compatibilité d'un système séquentiel incomplet ou partiellement déterminé résulte d'un algorithme assez simple. La recherche d'un recouvrement compatible minimal se révèlera assez compliquée. Il existe à notre connaissance une seule méthode d'approche permettant de trouver un minimum strict, elle consiste à énumérer dans un premier temps l'ensemble de toutes les classes de compatibilité, et à traiter un problème de couverture relatif à ces classes. Cette méthode est exposée par Grasselli et Luccio [16] et fait appel à des techniques de recherche de tableau analogues à celles qui ont été étudiées par Mac Cluskey [22]. Nous aborderons ce problème de la même manière, en le généralisant au cas des systèmes partiellement déterminés ; par contre, nous résoudrons le problème de couverture par une méthode algébrique. Les principales étapes seront les suivantes :

1°) Détermination d'un ensemble C_p de classes premières de compatibilité tel qu'il existe un recouvrement compatible de coût minimal dont toute classe appartienne à C_p (cf. Paragraphe 7). L'ensemble C_p sera souvent beaucoup moins grand que l'ensemble C de toutes les classes de compatibilité. La méthode utilisée pour déterminer C_p est une généralisation de celle qui est utilisée par Grasselli et Luccio dans le cas des systèmes séquentiels incomplets.

2°) Soit T_p l'ensemble des recouvrements partiels libres compatibles constitués de classes premières. La somme $R+R'$ de deux recouvrements partiels appartenant à T_p appartient également à T_p (démonstration immédiate) ; T_p est donc un $\cup$ demi-treillis dont on déterminera l'ensemble U_p des éléments $\cup$-irréductibles (cf. paragraphe 8).

3°) La connaissance de U_p ramène le problème de la recherche d'un recouvrement compatible minimal à celui d'un problème de couverture généralisé qui peut être traité par la méthode suivante :

Associons une variable booléenne à chaque classe première de compatibilité ; à chaque recouvrement partiel appartenant à U_p, associons le monôme booléen croissant égal au produit des variables associées aux classes qui le composent ; enfin à chaque état s du système séquentiel, associons la fonction booléenne F_s égale à la somme des monômes associés aux recouvrements partiels dont un membre contient s. On a la propriété suivante :

"Les recouvrements compatibles de coût minimal dont toutes les classes de compatibilité sont premières correspondent biunivoquement aux monômes de coût minimal de la fonction booléenne $\prod_{s \in S} F_s$."

Soit R un tel recouvrement, il est égal à la somme $U_1+U_2+\ldots+U_k$ de recouvrements partiels appartenant à U_p. Pour tout $s \in S$, il existe un U_i qui couvre s, chacune des fonctions F_s contient un monôme associé à l'un des U_i. Soit μ un monôme premier de $\prod_{s \in F_s} F_s$ qui absorbe le produit des monômes associés aux U_i ; ce monôme premier qui correspond manifestement à une somme de recouvrements partiels compatibles ne peut pas avoir un coût inférieur à celui de R, il est donc associé à R.

Réciproquement, il est immédiat que tout monôme premier de $\prod_{s \in S} F_s$ est associé à un recouvrement compatible.

<u>Exemple</u> : Supposons que C_p = (abde),(bcd),(deh),(bc),(fg),(dh),(ag),(f) . On associera respectivement les variables booléennes A,B,D,E,I,J,K,L à ces huit sous-ensembles. Supposons que U_p est constitué par les recouvrements partiels A,E,J,K,L,BAK,DA,IDA. La table de couverture correspondante est :

	a	b	c	d	e	f	g	h
A	x	x		x	x			
E		x	x					
J				x				x
K	x						x	
L						x		
BAK	x	x	x	x	x		x	
DA	x	x		x	x			x
IDA	x	x		x	x	x	x	x

On doit donc développer le produit booléen :

$$(A+K)(A+E)(E+BAK)(A+J)A(L+IDA)(K+IDA)(J+DA) = A(E+BK)(L+ID)(K+ID)(J+D) =$$
$$A(IDE+KLJE+KLDE+IDBK+BKLJ+BKLD).$$

On voit ainsi que IDAE = (abde)(deh)(fg)(bc) est minimal. Il est utile pour augmenter la rapidité du calcul d'utiliser la règle de simplification suivante

"Si M et M' sont deux monômes d'une même somme correspondant à des recouvrements R et R' tels que $R \leq R'$ et $|R| \geq |R'|$, on peut supprimer le monôme M (*)."

Cette règle dont la justification est immédiate permet de supprimer J dans J+D, ce qui donne :

$$A.D.I(E+BK) = IDAE+ADIBK.$$

(*) On dira que M est <u>exclus</u> par M', cette relation est une relation d'ordre.

(7) RECOUVREMENTS PARTIELS IMPLIQUES PAR UNE CLASSE DE COMPATIBILITE

On utilisera les notations du paragraphe (4). A chaque doublet (C,i) constitué par une classe de compatibilité C et une entrée i, associons le recouvrement partiel $\Gamma(C,i)$ déterminé de la façon suivante :

- si $\delta_i^*(C) \supseteq C$ ou si il existe un état s tel que $\delta_i^*(s) \supseteq C$, alors $\Gamma(C,i) = \emptyset$

- sinon $\Gamma(C,i)$ est l'ensemble des plus petites classes de compatibilité C' vérifiant $\delta_i^*(C') \supseteq C$.

Chaque $\Gamma(C,i) \neq \emptyset$ s'obtient à partir des $\lambda(s,i)$ tels que $s \in C$ par un calcul formellement identique au développement booléen d'un produit de sommes de variables, les sommes de variables étant affectées aux $\lambda(s,i)$; à la fin du calcul, on élimine les monômes qui ne correspondent pas à des classes de compatibilité, les monômes restant sont associés aux classes de $\Gamma(C,i)$.

Exemple : Compte tenu du calcul qui a été fait dans le paragraphe 5 C), calculons les $\Gamma(C,i)$ relatifs au système séquentiel envisagé au paragraphe 3 B). Les résultats sont présentés dans un tableau à double entrée indicée sur $\mathcal{C} \times I$, avec $\mathcal{C}$ = {(AB),(AC),(BD),(BE),(CD)}. Le calcul des $\Gamma(C,i)$ est inutile pour les classes de compatibilité réduites à un élément, ces recouvrements sont nécessairement vides de classes.

	i_1	i_2	i_3
(AB)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
(AC)	$\emptyset$	(CD)	$\emptyset$
(BD)	$\emptyset$	$\emptyset$	(AB),(BE)
(BE)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
(CD)	(BE)	$\emptyset$	$\emptyset$

recouvrements impliqués
$\emptyset$
(CD)
(AB),(BE)
$\emptyset$
(BE)

Définition

Considérons l'ensemble des recouvrements partiels ρ_c obtenus en prenant une classe dans chaque $\Gamma(C,i)$ non vide. Réduisons chaque ρ_c à l'ensemble de ses parties maximales. Parmi les recouvrements partiels ainsi obtenus gardons seulement ceux qui sont minimaux pour les relations de couverture (i.e. si ρ'_c et ρ''_c sont tels que $\rho'_c \geq \rho''_c$, on élimine ρ'_c). Les recouvrements partiels qui restent seront dits <u>impliqués</u> par C.

Théorème

"Un recouvrement R des états d'un système séquentiel partiellement déterminé est compatible si et seulement chacune de ses classes C est une classe de compatibilité impliquant un recouvrement partiel $\rho'_c \leq R$."

R est compatible si et seulement si chacune de ses classes C est une classe de compatibilité vérifiant la condition

[A] $\quad \forall i \in I, \exists C'_i \in R \quad : \delta^*_i(C'_i) \supseteq C.$

Si $\delta^*_i(C) \supseteq C$ cette condition est vérifiée ; elle est de même automatiquement vérifiée si il existe un état s tel que $\delta^*_i(s) \supseteq C$, car R est un recouvrement. Dans les autres cas, la classe C'_i dont l'existence est nécessaire majore une certaine classe C''_i appartenant à $\Gamma(C,i)$. En désignant par ρ_c l'ensemble des classes C''_i, on voit que [A] est équivalent à

[A'] $\quad R \geq \rho_c.$

ρ_c majore un recouvrement partiel ρ'_c impliqué par C, donc [A'] $\Rightarrow R \geq \rho'_c$. La réciproque se déduit immédiatement de la condition [A'].

Définition

Associons le doublet $[C,\rho_c]$ à chaque recouvrement partiel ρ_c impliqué par une classe de compatibilité C, et introduisons la relation d'ordre $[C,\rho_c] \geq [C',\rho_c] \iff C \supseteq C'$ et $\rho_c \leq \rho_{c'}$. Un recouvrement partiel ρ_c impliqué par une classe C sera dit premier si le doublet $[C,\rho_c]$ est maximal par rapport à la relation d'ordre précédente ; on dira également que la classe de compatibilité C est première.

Exemple : Les doublets correspondant à l'exemple précédemment envisagé sont $[(AB),\emptyset]$, $[(AC),(CD)]$, $[(BD),(AB)]$, $[(BD),(BE)]$, $[(BE),\emptyset]$, $[(CD),(BE)]$, $[(A),\emptyset]$, $[(B),\emptyset]$, $[(C),\emptyset]$, $[(D),\emptyset]$, $[(E),\emptyset]$; tous sont premiers à l'exception de $[(A),\emptyset]$, $[(B),\emptyset]$ et $[(E),\emptyset]$. Les classes premières de compatibilité sont donc (AB), (AC), (BD), (BE), (CD), (C), (D).

Théorème 2

"Il existe un recouvrement compatible minimal dont toutes les classes de compatibilité sont premières".

Considérons un recouvrement compatible quelconque R, et une de ses classes de compatibilité C. D'après le théorème 1, C implique un recouvrement partiel $\rho_c \leq R$. Si C n'est pas premier, il existe une classe première C' et un recouvrement partiel $\rho_{c'}$ impliqué par C' tel que $C \subseteq C'$ et $\rho_c \geq \rho_{c'}$. Remplaçons dans R la classe C par C', soit $R_{c,c'}$ le recouvrement constitué par les nouvelles classes maximales. L'inégalité $C \subseteq C'$ implique $R \leq R_{c,c'}$.

Soit C" une classe de compatibilité quelconque de $R_{c,c'}$. Deux cas sont à distinguer :

1°) $C'' \neq C'$. C'' est une classe appartenant à R, elle implique donc un recouvrement partiel $\rho_{c''} \leq R \leq R_{c,c'}$.

2°) $C'' = C'$. $\rho_{c'} \leq \rho_c$, $\rho_c \leq R$ et $R \leq R_{c,c'}$ impliquent $\rho_{c'} \leq R_{c,c'}$.

D'après le théorème 1, $R_{c,c'}$ est donc un recouvrement compatible. On peut ainsi supprimer au fur et à mesure toute classe non première en faisant décroître le coût de recouvrement compatible ; ce qui prouve le théorème.

Remarque - L'étude des classes premières de compatibilité dans le cas des automates incomplets est plus simple. En effet, chaque $\Gamma(C,i)$ est vide ou réduit à une seule classe égale à $\bigcup_{\substack{s \in C \\ \delta(s,i) \neq S}} \delta(s,i)$. Toute classe C implique donc un seul recouvrement partiel ρ_c égal à l'ensemble des parties maximales figurant dans les $\Gamma(C,i)$ non vides. Ce recouvrement impliqué est celui qui est défini par Grasselli et Luccio [16], les classes premières de compatibilité que nous avons définies coïncident avec celles qui sont prises en considération par ces deux auteurs.

(8) CALCUL D'UN SYSTÈME Ǵ-GÉNÉRATEUR DES RECOUVREMENTS COMPATIBLES

Soit C_p l'ensemble des classes premières de compatibilité. Associons à chaque classe $C \in C_p$ une variable booléenne $v(C)$; à tout ensemble R de classes de C_p, associons le monôme booléen croissant $v(R) = \prod_{C \in R} v(C)$.

A chaque classe de compatibilité C (première ou non), associons la somme de variables $S(C) = \sum_{\substack{C' \supseteq C \\ C' \in C_p}} v(C')$. A tout recouvrement partiel ρ_c impliqué par une classe première C, faisons correspondre la fonction booléenne $G(\rho_c) = \prod_{C'' \in \rho_c} S(C'')$. Enfin, considérons les fonctions $F_c = v(C). \sum_{\rho_c \text{ impliqué par } C} G(\rho_c)$.

Propriété

"La fonction booléenne générale F dont les composantes sont les F_c est une application monotone croissante et contractante."

Soit $\tilde{F}$ la limite inductive de F.

Théorème

"Un recouvrement R constitué de classes premières de compatibilité est stable si et seulement si $v(R)$ est un monôme régulier de $\tilde{F}$."

Rappelons (troisième partie) qu'un monôme est régulier par rapport à $\tilde{F}$ si pour chacune de ses variables -de la forme v(C), pour le cas qui nous intéresse-, il existe un monôme premier M_c de la fonction F_c qui absorbe ce monôme. Soit $v(R)$ le monôme régulier envisagé, R_c l'ensemble des classes premières de compatibilité tel que $M_c = v(R_c)$. M_c est un monôme premier de l'une des fonctions $v(C).G(\rho_c)$; l'égalité $G(\rho_c) = \prod_{c''\in\rho_c} S(C'')$ implique que pour toute classe de ρ_c, il existe dans R_c une classe première qui la majore ; soit $\rho_c \leq R_c \leq R$. L'application du théorème 1 établi dans le précédent paragraphe montre que R est compatible.

Réciproquement, si R est un recouvrement compatible, chacune de ses classes C implique un recouvrement partiel $\rho_c \leq R$. Pour toute classe de ρ_c il existe donc une classe de R qui la contient, ce qui montre que $M(R)$ est absorbé par un monôme premier de F_c. $M(R)$ est donc régulier par rapport à F^*.

Corollaire

"L'ensemble des monômes premiers de $\tilde{F}$ correspond à un système $\cup$-générateur U_p de l'ensemble des recouvrements compatibles constitués de classes premières de compatibilité."

<u>Exemple</u> : Reprenons celui du paragraphe 7. Associons les variables booléennes 1,2,3,4,5,6,7 aux classes premières (AB),(AC),(BD),(BE),(CD),(C),(D).
On obtient :

$$
\begin{array}{llll}
F_1 = 1 & \qquad & \tilde{F}_1 = 1 \\
F_2 = 25 & & \tilde{F}_2 = 245 \\
F_3 = 31+34 & & \tilde{F}_3 = 31+34 \\
F_4 = 4 & & \tilde{F}_4 = 4 \\
F_5 = 54 & & \tilde{F}_5 = 54 \\
F_6 = 6 & & \tilde{F}_6 = 6 \\
F_7 = 7 & & \tilde{F}_7 = 7.
\end{array}
$$

Ce qui donne $U_p = \{1,245,13,34,4,45,6,7\}$. En appliquant la méthode décrite en (6), on est conduit à développer le produit :

$$(1+245)(1+4)(45+6)(13+34+45+7)4 = 4(1+25)(5+6)(3+5+7).$$

5 = (CD) exclut 7 = (D) dans 3+5+7 ainsi que 6 = (C) dans 5+6.
On doit donc développer :

$$45(1+2) = 145+245.$$

On trouve ainsi deux recouvrements compatibles minimaux :

(AB)(BE)(CD) et (AC)(BE)(CD).

Le système séquentiel réduit correspondant au second recouvrement a été construit au paragraphe (3) B).

(9) REGLES PERMETTANT D'ACCELERER LE CALCUL D'UN RECOUVREMENT COMPATIBLE DE COUT MINIMAL

Ainsi que cela a été dit au paragraphe (6), il est inutile d'obtenir un système $\cup$ générateur U_p qui engendre tous les recouvrements compatibles ; on peut éliminer tous les recouvrements partiels exclus par certains autres. Il est intéressant de procéder à cette élimination pendant le calcul de $\tilde{F}$. Pour cela on adoptera l'algorithme général décrit dans la 3ème partie, paragraphe 7, B) b. Chaque fois que l'on obtiendra dans une fonction composante F_c un monôme dont toutes les variables sont surlignées, on pourra considérer que ce monôme appartient à l'ensemble U_p. On dressera donc au fur et à mesure la liste des monômes qui composent U_p. On regardera à chaque fois si le monôme ainsi ajouté en exclut d'autres dans U_p ou si au contraire, il est exclus. Les monômes ainsi exclus pourront être supprimés de U_p ainsi que des fonctions composant F_c où ils figurent. Cette règle sera appelée <u>règle d'exclusion</u>.

On dispose au début du calcul d'un recouvrement compatible particulier, celui qui est constitué par des classes maximales de compatibilité -on voit facilement que ses classes sont premières- Ce recouvrement doit être considéré comme une <u>solution éventuelle</u> du problème à résoudre ; soit γ son coût. Tout monôme de U_p qui n'est pas un recouvrement et dont le coût majore $\gamma-1$ pourra donc être éliminé de U_p ainsi que des fonctions F_c où il apparait. Il est également possible que l'on trouve un nouveau recouvrement de coût strictement inférieur à γ, il devient alors solution éventuelle. Notons que l'on peut trouver un tel recouvrement au cours du développement du produit booléen destiné à fournir une solution minimale, on peut alors appliquer les règles suivantes

- supprimer de chaque facteur du produit tout recouvrement partiel de coût majorant $\gamma-1$ si ce recouvrement partiel n'est pas un recouvrement ;

- supprimer de chaque facteur tout recouvrement partiel de coût majorant γ ;

- si un des facteurs est vide de recouvrements partiels, la solution éventuelle est une solution minimale.

L'ensemble de ces règles sera appelé l'ensemble des <u>règles de coût.</u>

Exemple 1 :

Si on applique ces règles au dernier exemple traité dans le paragraphe (8), on voit que la règle d'exclusion ne s'applique pas au cours du calcul de $\tilde{F}$. Par contre on obtient directement le monôme 245 de la fonction $\tilde{F}_2$, recouvrement de coût 3 qui sera pris comme solution éventuelle. Ceci permet d'éliminer les monômes 31, 34 et 54. Le nouvel ensemble U_p est alors réduit aux monômes 1,4,6 et 7 auxquels correspond le produit à développer : 1.(1+4).6.7.4 = 1467. 245 est donc une solution minimale.

Exemple 2 :

Traitons maintenant un exemple plus complexe de réduction d'automate incomplet tiré de l'article de Grasselli et Luccio [16], ceci permettra la comparaison des deux méthodes. La figure 6 représente les tables de fonctionnement de ce système séquentiel, la figure 7 énumère les classes premières de compatibilité dont la recherche est effectuée dans l'article de Grasselli et Luccio.

Figure 6

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
a	a o	– –	d o	e 1	b o	a –	– –
b	b o	d 1	a –	– –	a –	a 1	– –
c	b o	d 1	a 1	– –	– –	– –	g o
d	– –	e –	– –	b –	b o	– –	a –
e	b –	e –	a –	– –	b –	e –	a 1
f	b o	c –	– 1	h 1	f 1	g o	– –
g	– –	c 1	– –	e 1	– –	g o	f o
h	a 1	e o	d 1	b o	b –	e –	a 1

Fig. 7

Classes de $\mathcal{C}_p$	Variable booléenne associée	Recouvrements partiels impliqués
(abde)	A	$\emptyset$
(bcd)	B	(ab)(ag)(de)
(cfg)	C	(cd)(eh)
(deh)	D	(ab)(ad)
(bc)	E	$\emptyset$
(cd)	F	(ag)(de)
(cf)	G	(cd)
(cg)	H	(cd)(fg)
(fg)	I	(eh)
(dh)	J	$\emptyset$
(ag)	K	$\emptyset$
(f)	L	$\emptyset$

Le calcul ci-dessous est relatif à la formation des fonctions booléennes F_c suivant les règles exposées dans le paragraphe (8). On adopte les règles de surlignement pour effectuer ce calcul.

$$F_A = \bar{A} \; ; \; F_E = \bar{E} \; ; \; F_J = \bar{J} \; ; \; F_K = \bar{K} \; ; \; F_L = \bar{L} \; ;$$

$$F_B = \bar{B}.A.K.(A+D) \; ;$$

$$F_C = \bar{C}.(B+F).D \; ;$$

$$F_D = \bar{D}.A.A \; ;$$

$$F_F = \bar{F}.K.(A+D) \; ;$$

$$F_G = \bar{G}.(B+F) \; ;$$

$$F_H = \bar{H}.(B+F).I \; ;$$

$$F_I = \bar{I}.D \; ;$$

Le développement des divers produits de sommes effectué en surlignant les variables A,E,J,K et L conduit aux fonctions composantes ci-dessous :

$$F_B = \bar{B}\ \bar{A}\ \bar{K}\ ;$$

$$F_C = \bar{C}\ B\ D + \bar{C}\ F\ D\ ;$$

$$F_D = \bar{D}\ \bar{A}\ ;$$

$$F_F = \bar{F}\ \bar{K}\ \bar{A} + \bar{F}\ \bar{K}\ D\ ;$$

$$F_G = \bar{G}\ B + \bar{G}\ F\ ;$$

$$F_H = \bar{H}\ B\ I + \bar{H}\ F\ I\ ;$$

$$F_I = \bar{I}\ D\ ;$$

Le remplacement de B et D par F_B et F_D conduit à :

$$F_C = \bar{C}\ \bar{B}\ \bar{A}\ K\ \bar{D} + \bar{C}\ F\ \bar{D}\ \bar{A}\ ;$$

$$F_F = \bar{F}\ \bar{K}\ \bar{A} + \bar{F}\ \bar{K}\ \bar{D}\ \bar{A} = \bar{F}\ \bar{K}\ \bar{A}\ ;$$

$$F_G = \bar{G}\ \bar{B}\ \bar{A}\ \bar{K} + \bar{G}\ F\ ;$$

$$F_H = \bar{H}\ \bar{B}\ \bar{A}\ \bar{K}\ I + \bar{H}\ F\ I\ ;$$

$$F_I = \bar{I}\ \bar{D}\ \bar{A}\ ;$$

L'ensemble $\mathcal{U}_p$ des recouvrements partiels $\cup$ générateurs est égal pour le moment à :

{A,E,J,K,L,BAK,DA,FAK,CBAKD,GBAK,IDA}

- FAK est exclus par BAK ; F_F devient donc égal à 0, et on peut annuler tout monôme contenant F.

- Au départ, on possède 5 classes maximales de compatibilité A,B,C,D,K ; on retrouve cet ensemble dans $\mathcal{U}_p$, on l'élimine dans $\mathcal{U}_p$ et dans F_C. De même on élimine GBAK qui n'est pas un recouvrement. Le nouvel ensemble $\mathcal{U}_p$ devient donc :

$$\{A,E,J,K,L,BAL,DA,IDA\},$$

cependant que les nouvelles fonctions composantes deviennent :

$$F_C = 0,\ F_F = 0,\ F_G = 0,\ F_H = 0.$$

Le calcul est donc terminé pour le système U_p ; la recherche d'un recouvrement minimal à partir de ce système U générateur a été fait dans le paragraphe (6).

(10) CONCLUSIONS - REMARQUES RELATIVES A CERTAINS PROGRAMMES LINEAIRES EN NOMBRES ENTIERS

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode exhaustive de réduction des systèmes séquentiels partiellement déterminés ; cela permet d'obtenir un minimum absolu dans le cas des systèmes incomplets. Dans lescas pratiques cette méthode peut paraître trop énumérative, on s'orientera alors vers une méthode heuristique. Il n'est malheureusement pas possible à l'heure actuelle de juger la valeur d'une heuristie par l'écart maximal du coût de la solution qu'elle fournit au coût de la solution optimale. Signalons dans ce domaine la communication de Thorng [32].

Grasselli et Luccio [16] ont montré que les problèmes de couverture avec recouvrements partiels impliqués correspondaient à certains types de problèmes linéaires en nombre entier. Les contraintes de ces problèmes sont du type :

$$\Sigma\, x_i > 0$$

$$(\Sigma\, x_i)-x_j > -1,$$

chaque entier x_i ne pouvant prendre que les valeur 0 ou 1 -soit $0 \leq x_i \leq 1$-, on cherche à rendre minimale la somme de tous les x_i. Les développements précédents montrent que de tels problèmes peuvent se traiter à l'aide d'outils algébriques empruntés à la théorie des treillis et à l'algèbre de Boole. Une étude intéressante consisterait à comparer les méthodes classiques développées en théorie des programmes linéaires en nombres entiers (cf. Gomory et Baumol [15]) avec ces méthodes algébriques.

CHAPITRE - II

ETUDE DU COMPORTEMENT GLOBAL D'UN SYSTEME SEQUENTIEL

(1) SYSTEMES SEQUENTIELS DE CLASSE *D* - GRAPHES ETIQUETES

(A) *Définition des systèmes séquentiels de classe D*

Reprenons le problème de réduction globale énoncé au paragraphe 1 du précédent chapitre. Etant donnés deux systèmes séquentiels partiellement déterminés S et S' travaillant sur les mêmes valeurs d'entrée et de sortie, on dira que S' est globalement plus précis que S, si pour tout doublet $(s, i_1.i_2...i_n)$ constitué par un état s de S est une séquence d'entrée $i_1.i_2...i_n$, il existe un état s' -pouvant dépendre à la fois de s et $i_1.i_2...i_n$- tel que toute séquence de sortie compatible avec $(s',i_1.i_2...i_n)$ le soit avec $(s,i_1.i_2...i_n)$. Si de plus S' est globalement plus précis que S, on dira que S et S' sont globalement compatibles.

L'étude de la compatibilité globale et de la meilleure précision globale dans le cas général s'avère difficile ; nous nous limiterons à la classe des systèmes séquentiels incomplets ci-dessous définie.

Définition

Un système séquentiel incomplet, $S = (S,I,O,\delta,\lambda)$ est de classe D si pour tout doublet $(s,i) \in SXI$, les égalités $\delta(s,i) = S$ et $\lambda(s,i) = O$ sont équivalentes. Il revient au même de dire que les égalités $Card(\delta(s,i)) = 1$ et $Card(\lambda(s,i)) = 1$ sont équivalentes. Il apparaît ainsi que la classe D est une généralisation de la classe C de systèmes séquentiels complets, et une restriction de la classe J des systèmes séquentiels incomplets.

(B) *Graphe de détermination d'un système séquentiel partiellement déterminé*

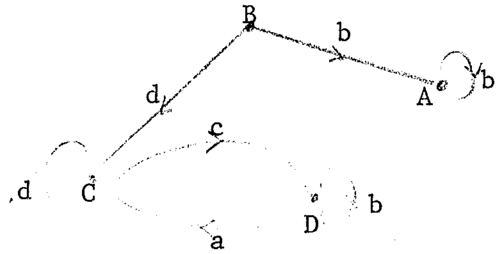
Soit un système séquentiel $S = (S,I,O,\delta,\lambda)$ partiellement déterminé et un état $s_o \in S$. Conformément à la définition donnée au chapitre précédent (paragraphe (1) C), une séquence d'entrée-sortie $(i_1\ i_2...i_n,\ o_1\ o_2...o_n)$ est déterminée par l'état s_o si $o_1\ o_2...o_n$ est la seule séquence de sortie compatible avec le doublet $(s_o, i_1\ i_2...i_n)$. Pour cela il faut et il suffit qu'il existe une séquence d'état

$s_1.s_2...s_n$ telle que pour tout entier j compris entre 1 et n soient vérifiées les relations $s_j = \delta(s_{j-1}, i_j)$ et $o_j = \lambda(s_{j-1}, o_j)$.

Posons IXO = Σ, et considérons le sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq S X \Sigma X S$ constitué par les triplets $(s,(i,o),t)$ tels que $o = \lambda(s,i)$ et $t = \delta(s,i)$. On voit qu'une séquence d'entrée-sortie $(i_1.i_2...i_n,\ o_1.o_2...o_n)$ est déterminée par un état $s_1 \in S$ si et seulement si il existe une séquence d'éléments de $\mathcal{F}$, $(s_1,(i_1,o_1),t_1)$ $(s_2,(i_1,o_2),t_2)...(s_n,(i_n,o_n),t_n)$ telle que pour tout entier j compris entre 1 et n-1 soit vérifiée la relation $t_j = s_{j+1}$.

D'une façon générale, un triplet $(S,\Sigma,\mathcal{F})$ constitué par la donnée de deux ensembles finis non vides S et Σ et d'un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq S X \Sigma X S$ sera appelé un <u>graphe étiqueté</u>. Les éléments de S seront appelés des <u>sommets</u>, ceux de Σ les <u>étiquettes</u>, et les triplets de $\mathcal{F}$ seront appelés les <u>flèches étiquetées</u> (ou plus brièvement les <u>flèches</u>). Un graphe étiqueté peut être représenté par une figure dessinée sur la feuille de papier en associant un point à chaque sommet, et le dessin d'une flèche étiquetée par le symbole σ allant du point s au point t, à tout élément $(s,\sigma,t) \in \mathcal{F}$.

Un mot (*) $\sigma_1\sigma_2...\sigma_n \in \Sigma^*$ sera dit <u>produit</u> par un sommet s_1 si il existe une séquence de flèches $(s_1,\sigma_1,t_1)(s_2,\sigma_2,t_2)...(s_n,\sigma_n,t_n)$ vérifiant pour tout entier j compris entre 1 et n-1 la condition $t_{j-1} = s_j$. -une telle séquence de flèches sera appelée <u>un itinéraire du graphe étiqueté</u> -. Le graphe étiqueté $(S,\Sigma,\mathcal{F})$ associé à un système séquentiel partiellement déterminé suivant la construction précédente sera appelée son <u>graphe de détermination.</u>



Dessin d'un graphe étiqueté

<u>Figure 1</u>

(*) Σ^* est l'ensemble des suites finies (y compris la suite vide notée Λ) d'éléments de Σ. Les suites sont aussi appelées des <u>mots.</u> L'opération qui a deux mots m_1 et m_2 associe le mot $m_1.m_2$ commençant par le mot m_1 et finissant par m_2 est appelée <u>concaténation</u>. Elle structure Σ^* en monoïde, et Λ est élément neutre.

Propriété 1

"Une séquence d'entrée-sortie $(i_1.i_2...i_n,o_1.o_2...o_n)$ est déterminée par un état s d'un système séquentiel partiellement déterminé si et seulement si le mot $(i_1,o_1)(i_2,o_2)...(i_n,o_n)$ est produit par le sommet s de son graphe de détermination".

Propriété 2

"Tout système séquentiel de classe D est parfaitement défini par la donnée de son graphe détermination".

La propriété 1 découle des considérations qui la précédent ; la propriété 2 résulte d'une simple vérification.

(C) *Caractérisation de la meilleure précision globale pour les systèmes de classe D*

Théorème

"Un système séquentiel S' de classe D est globalement plus précis qu'un système séquentiel S de classe D si et seulement si toute séquence d'entrée-sortie déterminée du système S est également une séquence d'entrée-sortie déterminée du système S'."

$(i_1.i_2...i_n,o_1.o_2...o_n)$ est une séquence d'entrée-sortie déterminée d'un système séquentiel S si il existe un état s de S qui la détermine.

Condition nécessaire

Soit un état s de S qui détermine cette séquence, il doit exister un état s' de S' tel que toute séquence de sortie compatible avec $(s',i_1.i_2...i_n)$ le soit avec $(s,i_1.i_2...i_n)$. Puisque $o_1.o_2...o_n$ est la seule séquence de sortie compatible avec $(s,i_1.i_2...i_n)$, ce doit également être la seule de séquence de sortie compatible avec $(s',i_1.i_2...i_n)$. Il en résulte que $(i_1.i_2...i_n,o_1.o_2...o_n)$ est déterminée par s'.

Remarque - On voit que cette condition est nécessaire pour les systèmes séquentiels partiellement déterminés quelconques.

Condition suffisante

Considérons un doublet $(s,i_1.i_2...i_n)$ constitué par un état de S et une séquence d'entrée. Soit k le plus grand entier compris entre 0 et n tel que $(s,i_1.i_2...i_k)$ détermine une séquence de sortie unique, désignons par $o_1.o_2...o_k$ cette séquence de sortie. Il existe un état s' de S' qui détermine la séquence d'entrée-sortie $(i_1.i_2...i_k;o_1.o_2...o_k)$ -si k = 0, on peut prendre n'importe quel état de S'-. Toute séquence de sortie compatible avec le doublet $(s',i_1.i_2...i_n)$ commence par les k premiers symboles $o_1.o_2...o_k$, elle est également compatible avec $(s,i_1.i_2...i_n)$ car l'hypothèse suivant laquelle S est de classe D implique que les symboles de sortie peuvent être pris quelconques après le $k^{\text{ème}}$.

Remarque - Seul le système S doit être de classe D pour que la condition soit suffisante.

(D) *Problèmes liés à l'étude du comportement global*

1 - A Chaque sommet s d'un graphe étiqueté (S,Σ,F) associons l'ensemble L(s) des mots produits par ce sommet. Pour tout sous-ensemble $P \subseteq S$, posons $L(P) = \bigcup_{s \in P} L(s)$. L'ensemble des mots appartenant à L(S) sera appelé le comportement global du graphe étiqueté. On dira qu'un graphe étiqueté g_1 est globalement surpassé par un graphe étiqueté g_2 si le comportement global de g_1 est inclus dans celui de g_2. g_1 et g_2 seront dits globalement équivalents s'ils ont le même comportement global.

Propriété

"Un système séquentiel S' de classe D est globalement plus précis (resp. globalement compatible) qu'un système séquentiel S de classe D si et seulement si le graphe de détermination de S' surpasse globalement (resp. est globalement équivalent) le graphe de détermination de S."

2 - Cette propriété qui est un corollaire immédiat du théorème précédent permet de ramener l'étude du comportement global des systèmes de classe D à celui des graphes étiquetés. Le graphe de détermination (S,Σ,F) d'un système de classe D n'est pas quelconque, et vérifie les deux propriétés suivantes :

1°) L'ensemble Σ des étiquettes est égal au produit cartésien $I \times O$ de deux ensembles finis non vides ; les doublets (i,o) seront appelés <u>doublets d'entrée-sortie.</u>

2°) Si $(s',(i',o'),t')$ et $(s'',(i'',o''),t'')$ sont deux flèches étiquetées telles que $s' = s''$ et $i' = i''$, alors $o' = o''$ et $t' = t''$. En effet, $o' = o'' = \lambda(s',i')$ et $t' = t'' = \delta(s',i')$.

Ces deux propriétés sont caractéristiques en ce sens que tout graphe étiqueté les vérifiant est égal au graphe de détermination d'un système de classe D unique. Ces graphes étiquetés seront appelés des <u>graphes séquentiels</u>. La propriété 2) implique la propriété plus faible :

2'°) Si (s',σ',t') et (s'',σ'',t'') sont deux flèches étiquetées telles que $s' = s''$ et $\sigma' = \sigma''$, alors $t' = t''$.

Les graphes étiquetés vérifiant 2') seront dits <u>déterministes</u>. Les propriétés les plus intéressantes relatives au comportement global seront obtenues pour ces graphes. D'une façon générale, tout graphe déterministe dont l'ensemble des étiquettes Σ sera égal au produit cartésien $I \times O$ de deux ensembles finis non vides (i.e. les graphes étiquetés vérifiant 1) et 2) sera appelé un <u>quasi-système séquentiel</u>, les éléments de Σ seront alors appelés les <u>doublets d'entrée-sortie.</u>

3 - Deux sommets s_1 et s_2 d'un graphe étiqueté (S,Σ,F) seront dits <u>équivalents</u> si $L(s_1) = L(s_2)$; deux graphes étiquetés seront dits <u>ponctuellement équivalents</u> si à tout sommet $s_1 \in S_1$ il correspond au moins un sommet $s_2 \in S_2$ tel que $L(s_1) = L(s_2)$, et réciproquement. Deux sommets équivalents du graphe de détermination d'un système de classe D correspondent à deux états produisant les mêmes séquences d'entrée-sortie déterminées ; en particulier, si les deux systèmes séquentiels sont complets, on retrouve la relation d'équivalence classique définie entre les états d'un système séquentiel complet (cf. [14]).

L'équivalence ponctuelle de deux graphes étiquetés implique manifestement leur équivalence globale, la réciproque est en général fausse. On montrera cependant que l'équivalence globale de deux graphes déterministes implique l'équivalence ponctuelle entre certaines parties de ces graphes.

4 - Tout ensemble de mots de $(IXO)^*$ égal au comportement global d'un graphe séquentiel sera appelé une <u>relation séquentielle.</u> Si il est possible que ce graphe séquentiel soit égal au graphe de détermination d'un système séquentiel complet, on dira que cette relation séquentielle est <u>complète</u>. De nombreuses propriétés des relations séquentielles complètes (*) ont été énoncées par Gray et Harrison [17], ces deux auteurs se sont également attachés au problème de leur reconnaissance. Nous reprendrons certains de ces problèmes en utilisant un mode de représentation des relations séquentielles par des quasi-machines séquentielles dont elles soient le comportement global (cf. paragraphe (6)).

(*) ce que nous appelons relation séquentielle complète est appelé simplement relation séquentielle par Gray et Harrison, ces deux auteurs n'étudiant pas les relations séquentielles plus générales telles que nous le définissons.

(2) ETUDE COMPAREE DES GRAPHES ETIQUETES ET DES AUTOMATES FINIS

(A) *Définition fonctionnelle d'un graphe étiqueté*

Soit un graphe étiqueté $(S,\Sigma,\mathcal{F})$, considérons l'application $\Delta : S \times \Sigma \to \mathcal{P}(S)$ telle que $t \in \Delta(s,\sigma) \Leftrightarrow (s,\sigma,t) \in \mathcal{F}$. Δ sera appelé la fonction de transition du graphe étiqueté.

Un graphe étiqueté déterministe sera caractérisé par la propriété

$$[D] \qquad \forall (s,\sigma) \in S \times \Sigma \quad : \mathrm{Card}(\Delta(s,\sigma)) \leq 1.$$

Si l'égalité $\mathrm{Card}(\Delta(s,\sigma)) = 1$ est toujours vérifiée, le graphe déterministe sera dit complet. En d'autres termes, un graphe complet est caractérisé par la donnée d'un triplet (S,Σ,Δ) où Δ est une application de $S \times \Sigma$ dans S.

(B) *Application régulière associée à un graphe étiqueté*

Etant donnés deux ensembles non vides S et Σ, une application $\Delta^* : \mathcal{P}(S) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(S)$ sera dite régulière par rapport au couple $[S,\Sigma]$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall P \subseteq S : \Delta^*(P,\Lambda) = P$;

2) $\forall m \in \Sigma^* : \Delta^*(\emptyset,m) = \emptyset$;

3) $\forall P \subseteq S, \forall m_1$ et $m_2 \in \Sigma^* : \Delta^*(P,m_1.m_2) = \Delta^*(\Delta^*(P,m_1),m_2)$;

4) $\forall P_1$ et $P_2 \subseteq S, \forall m \in \Sigma^* : \Delta^*(P_1 \cup P_2,m) = \Delta^*(P_1,m) \cup \Delta^*(P_2,m)$.

Théorème 1

"La fonction de transition Δ d'un graphe étiqueté $(S,\Sigma,\mathcal{F})$ s'étend de façon unique en une application régulière $\Delta^{*} : \mathcal{P}(S) \times \Sigma^{*} \to \mathcal{P}(S)$ vérifiant la propriété

$$\forall(s,\sigma) \in S \times \Sigma \quad : \Delta^{*}(\{s\},\sigma) = \Delta(s,\sigma).$$

Réciproquement, toute application Δ^{*} régulière par rapport à un couple d'ensembles finis non vides $[S,\Sigma]$ est égale à l'extension de la fonction de transition d'un graphe étiqueté $(S,\Sigma,\mathcal{F})$ unique."

Nous ne redémontrerons pas ce théorème classique de la théorie des automates. On pourra consulter l'article de Rabin et Scott [30] dans lequel on trouvera également la démonstration du théorème suivant :

Théorème 2

"Un mot m appartient à l'ensemble L(P) des mots produits par un sous-ensemble P des sommets d'un graphe étiqueté $(S,\Sigma,\mathcal{F})$ si et seulement si $\Delta^{*}(P,m) \neq \emptyset$."

(C) *Complétion d'un graphe étiqueté déterministe*

1 - Définition d'un automate fini

Un automate fini est un quadruplet (S,Σ,Δ,F) où (S,Σ,Δ) est un graphe étiqueté déterministe complet, F est un sous-ensemble de S dont les élément sont appelés états finaux. Un mot m est accepté par un état $s \in S$ si $\Delta(s,m) \in F$. Un ensemble de mots $L \subseteq \Sigma^{*}$ est un k-langage s'il existe un automate fini tel que L soit égal à l'ensemble des mots acceptés par un de ses états.

(*) En général on distingue également un état initial q permettant de définir le comportement de l'automate comme l'ensemble des mots acceptés par q.

Un automate fini sera appelé un <u>automate à trou</u> si tous les états sauf un, sont finaux, cet état non final τ vérifiant la condition $\Delta(\tau,\sigma) = \tau$ pour tout σ dans Σ.

2 - Soit un graphe étiqueté déterministe (S,Σ,F) dont Δ est la fonction de transition. Ajoutons un élément τ à l'ensemble S, et considérons l'application $\Delta' : (S+\tau) \times \Sigma \to S+\tau$ définie par :

$$\forall (s,\sigma) \in S \times \Sigma : \Delta'(s,\sigma) = \Delta(s,\sigma) \text{ si } \Delta(s,\sigma) \neq \emptyset,$$

$$\Delta'(s,\sigma) = \{\tau\} \text{ si } \Delta(s,\sigma) = \emptyset \text{ ;}$$

$$\forall \sigma \in \Sigma \; : \Delta'(\tau,\sigma) = \{\tau\}.$$

Le triplet $(S+\tau,\Sigma,\Delta')$ est un graphe étiqueté déterministe, l'automate à trou $(S+\tau,\Sigma,\Delta',S)$ sera appelé le <u>complété du graphe (S,Σ,F).</u>

<u>Propriété 1</u>

"L'ensemble L(s) des mots produits par un sommet s d'un graphe étiqueté est égal à l'ensemble des mots acceptés par l'état s de l'automate à trou obtenu par complétion."

<u>Propriété 2</u>

"Tout automate à trou est le complété d'un graphe étiqueté déterministe unique."

Ces deux propriétés sont évidentes. Le procédé constructif pour obtenir le graphe étiqueté associé à un automate à trou $(S+\tau,\Sigma,\Delta',S)$ consiste à définir l'ensemble de flèches étiquetées $F \subseteq S \times \Sigma \times S$ tel que $(s,\sigma,t) \in F \Leftrightarrow \Delta'(s,\sigma) = \{t\}$.

(D) Etude de l'équivalence ponctuelle

Rappelons que deux états s_1 et s_2 d'un automate $(S,\Sigma,\Delta F)$ sont équivalents si ils acceptent les mêmes mots (cf. [14]), et que deux sommets s_1 et s_2 d'un graphe étiqueté (S,Σ,Δ) sont équivalents si ils produisent les mêmes mots (cf. paragraphe (1) D)-3). On sait d'autre part que :

Les successeurs de deux états équivalents d'un automate fini sont équivalents, on peut énoncer la propriété :

"Si deux sommets s_1 et s_2 d'un graphe étiqueté déterministe (S,Σ,Δ) sont équivalents, pour tout mot $m \in \Sigma^*$, une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

1) $\Delta^*(s_1,m) = \Delta^*(s_2,m) = \emptyset$;

2) $\Delta^*(s_1,m)$ et $\Delta^*(s_2,m)$ sont équivalents."

Un graphe étiqueté sera dit <u>réduit</u> si deux sommets distincts ne sont jamais équivalents. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'automate à trou obtenu par complétion soit lui-même réduit. On démontre que tout automate fini est ponctuellement équivalent à un automate fini réduit unique à un isomorphisme près. Ce résultat se transporte dans le cas des graphes étiquetés déterministes. On définira un <u>isomorphisme</u> d'un graphe (S,Σ,Δ) sur un autre (S',Σ,Δ') comme une bijection $\varphi : S \to S'$ vérifiant la condition $\varphi(\Delta(s,\sigma)) = \Delta'(\varphi(s),\sigma)$. Il résulte alors du corollaire énoncé ci-dessus que deux graphes déterministes irréductibles et ponctuellement équivalents sont isomorphes, la correspondance isomorphique étant la bijection qui lie les sommets équivalents des deux graphes.

(E) *Relation de dominance - Composantes fortement connexes - Sous graphes - Sous-graphes fermés*

Soit un graphe étiqueté déterministe $g = (S,\Sigma,\Delta)$, on dira qu'un sommet s domine un sommet t si il existe un mot m tel que $t = \Delta^*(s,m)$. La relation de dominance est un préordre sur S, ses classes d'isovalence seront appelées les composants fortement connexes (ou plus brièvement composantes) du graphe g.

Un sous-ensemble $T \subseteq S$ sera dit fermé si $s \in T$ et s domine t impliquent $t \in T$. L'union et l'intersection de plusieurs ensembles fermés sont des ensembles fermés. Pour tout sous-ensemble $T \subseteq S$, il existe un plus petit sous-ensemble $\bar{T}$ fermé contenant T ; $\bar{T}$ qui sera appelé la fermeture de T est égal à l'ensemble des $\Delta(t,m)$ quant t varie dans T et m dans Σ^*.

T étant un sous-ensemble de S, définissons l'application $\Delta' : T \times \Sigma \to P(T)$ telle que $\Delta'(t,\sigma) = \Delta(t,\sigma)$ si $\Delta(t,\sigma) \subseteq T$ et $\Delta'(t,\sigma) = \emptyset$ si $\Delta(t,\sigma) \not\subseteq T$. Le graphe $g_T = (T,\Sigma,\Delta')$ sera appelé le sous-graphe de g de support T. La définition de Δ' implique que pour tout doublet $(t,m) \in T \times \Sigma^*$, $\Delta'(t,m) \subseteq \Delta(t,m)$; l'ensemble des mots produits par un sommet t du graphe g_T est donc inclus dans l'ensemble des mots produits par ce même sommet dans le graphe g. En outre, si le sous-ensemble T est fermé, on voit que $\Delta'(t,\sigma) = \Delta(t,\sigma)$ pour tout doublet $(t,\sigma) \in T \times \Sigma$; les ensembles de mots produits par un sommet t du graphe g_T et ce même sommet du graphe g sont donc égaux. g_T sera alors appelé un sous-graphe fermé.

(3) COMPOSANTES FERMEES DE DEUX GRAPHES ETIQUETES DETERMINISTES GLOBALEMENT EQUIVALENTS

(A) *Développement d'un graphe étiqueté*

Considérons un graphe étiqueté $g = (S,\Sigma,\Delta)$ et l'application régulière $\Delta^* : P(S) \times \Sigma^* \to P(S)$ restreinte au sous-ensemble $P(S) \times \Sigma$. On peut considérer que Δ^* est une application de $P(S) \times \Sigma$ dans $P(P(S))$ vérifiant la condition $\mathrm{Card}(\Delta^*(P,\sigma))=1$.

Le quadruplet $\mathcal{A}_g = (\mathcal{P}(S),\Sigma,\Delta^*,\mathcal{P}(S)-\emptyset)$ est donc un automate à trou puisque $\Delta^*(\emptyset,\sigma) = \emptyset$ pour toute étiquette σ. Il résulte du théorème 2 énoncé au paragraphe (2) B) que l'ensemble L(P) des mots produits par un sous-ensemble $P \subseteq S$ du graphe g est égal à l'ensemble des mots acceptés par l'état P de l'automate $\mathcal{A}_g$.

Le graphe étiqueté $\tilde{g} = (\tilde{S},\Sigma,\tilde{\Delta})$ associé à l'automate à trou $\mathcal{A}_g$ par suppression de son état trou, $\emptyset$, sera appelé le graphe développé de g.

Propriété fondamentale du graphe développé

"L'ensemble L(P) des mots produits par un sous-ensemble P de sommets d'un graphe étiqueté est égal à l'ensemble des mots produits par le sommet P de son graphe développé."

En particulier, le sommet S du graphe développé produit le comportement global du graphe étiqueté.

(B) *Composantes fortement connexes du développé d'un graphe étiqueté déterministe*

Propriété 1

"Si deux parties P et Q du développé d'un graphe étiqueté déterministe appartiennent à une même composante fortement connexe de ce graphe, elles ont mêmes cardinal."

Soit $g = (S,\Sigma,\Delta)$ le graphe étiqueté déterministe considéré, $\tilde{g} = (\tilde{S},\Sigma,\tilde{\Delta})$ son graphe développé. Puisque P et Q appartiennent à une même composante fortement connexe de $\tilde{g}$, il existe un mot m_1 tel que $\{Q\} = \tilde{\Delta}(P,m_1)$ et un mot m_2 tel que $\{P\} = \tilde{\Delta}(Q,m_2)$. Les égalités $\{Q\} = \tilde{\Delta}(P,m_1)$ et $\{P\} = \tilde{\Delta}(Q,m_2)$ sont équivalentes à $Q = \Delta^*(P,m_1)$ et $P = \Delta^*(Q,m_2)$; il en résulte puisque g est déterministe $\mathrm{Card}(Q) \leq \mathrm{Card}(P)$ et $\mathrm{Card}(P) \leq \mathrm{Card}(Q)$.

Définition

L'ordre d'une composante fortement connexe du développé d'un graphe étiqueté déterministe est le cardinal commun des sous-ensembles qui la composent.

Propriété 2

"Les composantes fortement connexes fermées du développé d'un graphe étiqueté déterministe réduit ont un ordre égal à 1."

Reprenons les notations de la démonstration précédente. Considérons une partie $P \subseteq S$ appartenant à une composante fermée C du graphe développé $\tilde{g}$. Supposons que P contienne au moins deux éléments, soit s et t. Puisque g est réduit, s et t ne sont pas équivalents. Il existe donc un mot m produit par l'un des deux sommets, soit s, et non par l'autre. Posons $P = \{s\} \cup \{t\} \cup \{P'\}$ et $Q = \Delta^{*}(P,m)$. On a $Q = \Delta^{*}(s,m) \cup \Delta^{*}(P',m)$. Q est non vide puisque s produit m, d'autre part Q appartient à C puisque C est fermé. Enfin, on a $Card(Q) \leq Card(\{s\})+Card(P') < Card(P)$. Cette inégalité stricte est impossible puisque P et Q appartiennent à la même composante C.

Remarques sur les composantes fermées d'un graphe étiqueté : Tout sommet dominé par un sommet d'une composante fermée appartient à cette composante fermée, les composantes fermées sont donc les éléments minimaux de l'ordre induit par la relation de dominance sur l'ensemble des composantes fortement connexes. Les sommets appartenant aux composantes fermées seront dits finaux. L'ensemble constitué par les sommets finaux est fermé, le sous-graphe qu'il détermine sera dit final. Notons que tout sommet s domine au moins un sommet final. En effet, si ce sommet n'est pas final, il existe un mot m qui conduit de s à un sommet s' appartenant à une composante distincte de celle de s. Si s' n'est pas final, on peut trouver un mot m' menant à un sommet s" distinct de s et s', etc... Le procédé ne peut se répéter indéfiniment puisque le nombre de sommets est fini.

Immersion canonique d'un graphe étiqueté déterministe dans son graphe développé :

Considérons un graphe déterministe $g = (S,\Sigma,\Delta)$ et son graphe développé $\tilde{g} = (\tilde{S},\Sigma,\tilde{\Delta})$. On vérifie aisément que l'ensemble $S_1 \subseteq \tilde{S}$ des parties de S contenant un seul élément est fermé par rapport à $\tilde{g}$, cet ensemble détermine un sous-graphe fermé $\tilde{g}_{S_1}$ -appelé sous-graphe d'ordre 1- isomorphe à g par la correspondance $s \to \{s\}$. Cette dernière correspondance sera appelée l'immersion canonique de g dans $\tilde{g}$. L'image d'une composante fermée de g par cette immersion canonique est une composante fermée ; la propriété 2 revient à dire que la réciproque est vraie lorsque g est réduit. On peut donc dire que :

"L'immersion canonique d'un graphe déterministe réduit dans son graphe développé établit un isomorphisme entre les sous-graphes finaux de ces deux graphes".

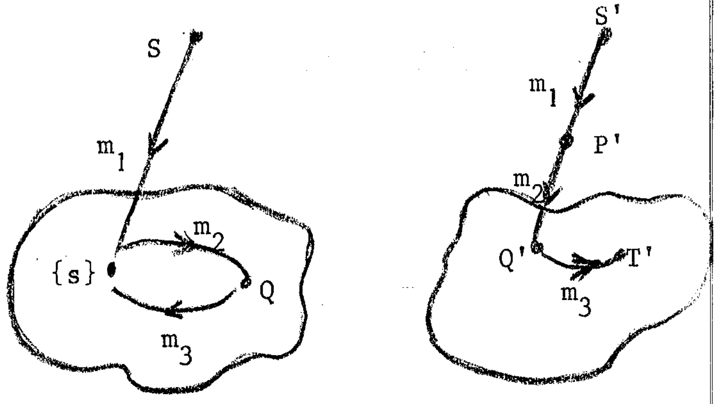
(C) *Sous-graphe nécessaire d'un graphe étiqueté déterministe réduit*

Un sommet s d'un graphe étiqueté déterministe $g = (S,\Sigma,\Delta)$ réduit sera dit nécessaire si il appartient à une composante fermée et si son image $\{s\}$ par l'immersion canonique dans $\tilde{g}$ appartient à la fermeture du sommet S dans $\tilde{g}$. L'ensemble des sommets nécessaires est un sous-ensemble fermé N du graphe g, g_N sera appelé le sous-graphe nécessaire. Ce sous-graphe nécessaire est inclus dans le sous-graphe final de g. Tout sommet s qui ne domine aucun sommet nécessaire sera dit inutile. En particulier, les sommets finaux non nécessaires sont inutiles.

Théorème

"Si deux graphes étiquetés déterministes réduits sont globalement équivalents, leurs sous-graphes nécessaires sont isomorphes."

Soient $g = (S,\Sigma,\Delta)$ et $g' = (S',\Sigma,\Delta')$ ces deux graphes, $\tilde{g} = (\tilde{S},\Sigma,\tilde{\Delta})$ et $\tilde{g}' = (\tilde{S}',\Sigma,\tilde{\Delta}')$ leurs graphes développés. Puisque g et g' sont globalement équivalents, les sommets S et S' des graphes $\tilde{g}$ et $\tilde{g}'$ sont équivalents.



On s'aidera de la figure ci-contre pour suivre la démonstration.

Soit s un sommet nécessaire du graphe g, {s} est un sommet final du graphe $\tilde{g}$ dominé par S, il existe donc un mot $m_1 \in \Sigma^*$ tel que $\tilde{\Delta}(S,m_1) = \{s\}$. Ce mot m_1 est également produit par S' et conduit à un sommet P'. Ce sommet P' domine un sommet final Q' de $\tilde{g}'$, il existe donc un mot $m_2 \in \Sigma^*$ conduisant de P' à Q'. {s} et P' atteints à partir des deux sommets équivalents S et S' par production d'un même mot sont équivalents, par conséquent, {s} produit m_2 et mène à un sommet Q équivalent à Q'. Ce sommet Q appartient à la composante fermée déterminée par {s} dans $\tilde{g}$, par conséquent, il existe un mot m_3 conduisant de Q à {s}. Ce mot m_3 est également produit par Q' et même à un sommet T', T' est final puisque Q' l'est.

D'après la propriété 2 établie en B), T' est un sous-ensemble de S' réduit à un seul élément, soit {s'}. {s} et {s'} sont deux états équivalents dans g et g', il en est donc de même entre les sommets s et s'. Enfin, le sommet s' est nécessaire dans le graphe g'.

Nous avons donc démontré que l'on peut faire correspondre à tout sommet nécessaire du graphe g un sommet nécessaire équivalent dans le graphe g'. L'inverse pourrait se démontrer de la même façon. Puisque les graphes g et g' sont réduits, il en résulte que leurs sous-graphes nécessaires sont isomorphes.

(D) *Etats inutiles d'un graphe étiqueté déterministe réduit*

Propriété

"Etant donné un graphe étiqueté déterministe réduit et l'ensemble $U \subseteq S$ de ses sommets non inutiles, le sous-graphe g_U est globalement équivalent à g."

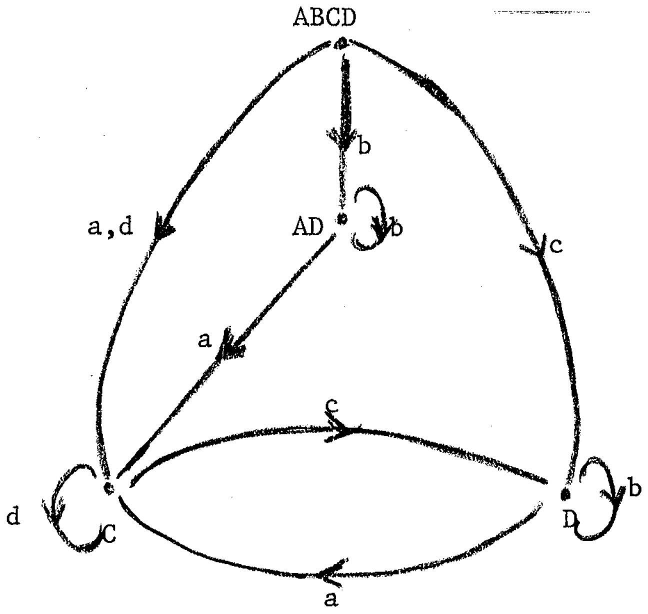
Il suffit de montrer que g surpasse globalement g_U. Tout mot m produit par g est produit par l'état S du graphe développé $\tilde{g} = (\tilde{S},\Sigma,\tilde{\Delta})$. Ce mot m peut être prolongé par un mot m' de façon à atteindre un sommet final {s} du graphe $\tilde{g}$. L'égalité $\tilde{\Delta}(S,m.m') = \{s\}$ implique l'existence d'un sommet t tel que $\Delta(t,m.m') = s$. Le sommet t ainsi que tous ceux qui sont traversés lors de la production de m.m' par ce sommet dominent le sommet nécessaire s. Par conséquent, m.m' et à fortiori m, sont produits par g_U.

D'une façon générale, on voit que pour tout sous-ensemble U' contenant U, $g_{U'}$ est globalement équivalent à g. Par contre, si on considère un sous-ensemble V auquel il manquerait un sommet nécessaire s, g_V est strictement surpassé par g. Il suffit pour s'en rendre compte de considérer un mot m conduisant dans $\tilde{g}$ de S à{s}, l'égalité $\tilde{\Delta}(S,m) = \{s\}$ implique que le mot m conduit toujours vers l'état s.

On ne peut rien dire à priori des autres sommets, certains peuvent être inutiles (i.e. leur suppression ne change rien au comportement global), d'autres peuvent être nécessaires.

<u>Exemple</u> : Considérons le graphe étiqueté représenté par la figure 1 (paragraphe (1), B)), son sous-graphe développé relatif à la fermeture du sommet ABCD est représenté par la figure 2. On voit que le sommet A est inutile, que C et D sont nécessaires, le sommet B n'est pas classé. Le sous-graphe déterminé par les sommets B, C et D est donc globalement équivalent au premier. En fait on voit qu'il en est de même pour le sous-graphe réduit aux seuls sommets C et D, B est donc inutile.

Figure 2



(E) *Cas des graphes déterministes non réduits*

Définition

Une application surjective φ des sommets d'un graphe étiqueté $g = (S,\Sigma,\Delta)$ sur les sommets d'un autre graphe étiqueté, $g' = (S',\Sigma,\Delta')$ est un épimorphisme si $\forall(s,\sigma) \in S \times \Sigma$ l'égalité $\varphi(\Delta(s,\sigma)) = \Delta'(\varphi(s),\sigma)$ est vérifiée.

Cette notion d'épimorphisme est voisine de celle qui est définie en théorie des automates finis, elle vérifie des propriétés analogues dont on vérifiera aisément la validité.

Propriété 1

"Deux graphes étiquetés liés par un épimorphisme sont ponctuellement équivalents."

Propriété 2

"L'application qui associe à chaque sommet d'un graphe étiqueté déterministe le sommet qui lui est équivalent dans un graphe réduit ponctuellement équivalent est un épimorphisme".

Cette dernière propriété ainsi que le lemme qui suit vont permettre d'étendre les résultats démontrés dans ce paragraphe au cas des graphes étiquetés déterministes quelconques.

Lemme

"L'image par un épimorphisme d'une composante fortement connexe fermée est une composante fortement connexe fermée."

Soient $g = (S,\Sigma,\Delta)$ et $g' = (S',\Sigma,\Delta')$ les deux graphes concernés, φ l'épimorphisme de g sur g', C une composante fermée du graphe g, s et t deux états de C. Il existe deux mots m_1 et m_2 tels que $s = \Delta^*(t,m_1)$ et $t = \Delta^*(s,m_2)$, on en tire $\varphi(s) = \Delta'^*(\varphi(t),m_1)$ et $\varphi(t) = \Delta'^*(\varphi(s),m_2)$. $\varphi(C)$ est donc inclus dans une composante fortement connexe de C'.

Soit u' un autre sommet quelconque de C', il existe un mot m tel que $u' = \Delta'^*(\varphi(s),m)$. m est également produit par le sommet s équivalent à $\varphi(s)$ (cf. propriété 1), et conduit à un sommet u, soit $u = \Delta^*(s,m)$, il en résulte $u' = \varphi(u)$. Puisque C est fermé par hypothèse, u appartient à C. On a donc bien démontré que $\varphi(C) = C'$. Enfin, on vérifie immédiatement que C' est fermé.

Application

Considérons un graphe déterministe quelconque $g = (S,\Sigma,\Delta)$, $g' = (S',\Sigma,\Delta')$ un des graphes réduits ponctuellement équivalent à g, φ l'épimorphisme de g sur g' défini par la propriété 2. Une composante fermée de g sera dite obligatoire si son image par φ est une composante obligatoire de g'. Un sommet de g sera dit inutile si il ne domine aucun sommet obligatoire. Le théorème démontré au paragraphe C) peut alors s'énoncer :

"Si deux graphes étiquetés déterministes sont globalement équivalents, leurs sous-graphes constitués par les composantes fermées obligatoires sont ponctuellement équivalentes".

La propriété énoncée en D) subsiste sans changement. Par contre, un sommet figurant dans une composante fermée obligatoire peut être éventuellement supprimé sans changer le comportement global ; en effet, une composante obligatoire peut être dédoublée.

Corollaire

"Si deux graphes étiquetés déterministes fortement connexes sont globalement équivalents, ils sont ponctuellement équivalents".

En effet, les deux graphes étant réduits à une seule composante fortement connexe, cette composante unique est obligatoire. On retrouve là un résultat classique établi dans la théorie des systèmes séquentiels (cf. [20] et [38]).

(F) *Cas du surpassement global*

L'étude qui vient d'être faite n'apporte pas de résultat nouveau en ce qui concerne le surpassement global. Le seul résultat que l'on peut énoncer est un théorème dérivé directement d'un théorème analogue établi dans le cas du surpassement global entre automates canoniques, établi par Monsieur Kuntzmann [20]. L'idée consiste également à comparer les notions de surpassement global et de surpassement ponctuel.

On dira qu'un sommet s d'un graphe g surpasse un sommet s' d'un graphe g' si $L(s) \supseteq L(s')$, qu'un graphe g surpasse ponctuellement un graphe g' si tout sommet de g est surpassé par un sommet de g'.

Théorème

"Si un graphe déterministe g est globalement surpassé par un graphe déterministe g', le sous-graphe final de g est ponctuellement surpassé par g'."

Notons tout d'abord la propriété suivante facile à vérifier :

"Si un sommet s surpasse un sommet s', un sommet t' atteint à partir de s' par production d'un mot m est surpassé par le sommet t atteint à partir de s par production du mot m."

Considérons un sommet quelconque s du sous-graphe final de g et un sommet s' quelconque du graphe g. Deux cas peuvent se produire :

1 - le sommet s' surpasse s, la propriété est établie.

2 - il existe un mot m_1 produit par s et nonproduit par s'. Ce mot m_1 conduit dans le graphe g du sommet s à un sommet s_1 appartenant à la composante fermée d'où s a été extrait, il existe donc un mot m_1' qui conduit de t_1 à s. Puisque $m_1.m_1'$ est produit par s, il est également produit par un certain sommet s" du graphe g'. s" est nécessairement distinct de s'. Soit t" le sommet atteint dans g' lorsque s" produit $m_1.m_1'$. Deux cas se présentent :

1 - t" surpasse s, la propriété est établie.

2 - il existe un mot m_2 produit par s et non par t". Comme ci-dessus, on prolonge m_2 par un mot m_2' permettant de retourner à s dans le graphe g. Le mot $m_1.m_1'.m_2.m_2'$ produit par le sommet s l'est également par un sommet s"' du graphe g'. On établit comme précédemment que s"' est distinct de s' et s", et on considère le sommet t"' atteint lorsque s"' produit $m_1.m_1'.m_2.m_2'$.

A nouveau on considère les deux cas à partir de t"' et s, etc... ; le cas 2 ne peut se produire indéfiniment car il conduirait à construire une suite infinie s', s", s"', ..., $s^{(n)}$, ... de sommets distincts dans g', ce qui est impossible puisque le nombre des sommets de g' est fini.

Remarques - Il n'y a aucune raison pour que le sous-graphe final de g soit ponctuellement surpassé par le sous-graphe final de g' ; cette propriété est même fausse dans le cas général. On doit donc se contenter d'un théorème moins précis que dans le cas de l'équivalence globale.

Ce théorème permet également d'établir simplement le corollaire qui a été énoncé précédemment.

(4) CONFIGURATION D'UN GRAPHE ETIQUETE DETERMINISTE

(A) *Définitions*

Soit un ensemble fini non vide Σ, une configuration sur Σ est une application $\Psi : \Sigma \to \{0,1,2\}$, l'ensemble $\{0,1,2\}$ étant naturellement ordonné par la relation $0 < 1 < 2$.

Une configuration Ψ_1 est incluse dans une configuration Ψ_2 si pour tout appartenant à Σ, $\Psi_1(\sigma) \leq \Psi_2(\sigma)$. L'inclusion est un ordre.

Une configuration Ψ_1 est extraite d'une configuration Ψ_2 si pour tout σ tel que $\Psi(\sigma) \neq 0$, on a $\Psi'(\sigma) = \Psi(\sigma)$. Cette condition implique que Ψ_1 est incluse dans Ψ_2.

Une configuration Ψ est simple si il existe au plus un symbole σ tel que $\Psi(\sigma) = 1$. On vérifiera aisément la propriété suivante :

"Une configuration Ψ_1 est incluse dans une configuration Ψ_2 si et seulement si toute configuration simple extraite de Ψ_1 est incluse dans une configuration simple extraite de Ψ_2."

La configuration d'un sommet s d'un graphe étiqueté déterministe $g = (S,\Sigma,\Delta)$ est l'application $\Psi_s : \Sigma \to \{0,1,2\}$ définie par :

$$\Psi_s(\sigma) = 0 \iff \Delta(s,\sigma) = \emptyset \ ;$$

$$\Psi_s(\sigma) = 1 \iff (s,\sigma,\Delta(s,\sigma)) \text{ est une flèche externe de } g \ ;$$

$$\Psi_s(\sigma) = 2 \iff (s,\sigma,\Delta(s,\sigma)) \text{ est une flèche interne de } g.$$

(s,σ,t) sera appelé une flèche interne du graphe g si s et t appartiennent à la même composante fortement connexe, sinon ce sera une flèche externe. Notons qu'une flèche interne est caractérisée par le fait qu'un mot de Σ^* au moins conduit de son extrémité vers son origine, alors que cela est impossible par une flèche externe.

Pour abréger la terminologie, nous conviendrons de dire qu'une configuration extraite de (resp. incluse dans) la configuration d'un sommet s est une configuration extraite du (resp. incluse dans le) sommet s. Toute configuration extraite d'un sommet d'un graphe étiqueté déterministe g sera appelée une configuration du graphe g ; nous distinguerons en particulier les configurations simples maximales du graphe g par rapport à l'inclusion.

(B) *Interprétation graphique des configurations*

1 - Considérons un dessin dans le plan représentant un jeu de flèches issues d'un même point. Certaines de ces flèches -dites doubles- sont tracées avec un double trait plein, les autres -dites simples- sont tracées avec un trait simple. Donnons nous un ensemble d'étiquettes Σ et affectons une étiquette différente à chacune des flèches de ce dessin. Le nouveau dessin ainsi étiqueté représentera la configuration $\Psi : \Sigma \to \{0,1,2\}$ telle que $\Psi(\sigma) = 2$ si σ étiquette une flèche double, $\Psi(\sigma) = 1$ si σ étiquette une flèche simple, $\Psi(\sigma) = 0$ si σ n'étiquette aucune flèche. Ce dessin sera donc appelé le dessin de la configuration Ψ.

Exemple : La configuration φ sur l'ensemble $\Sigma = \{a,b,c,d\}$ telle que $\Psi(a) = \Psi(b) = 2$, $\Psi(c) = 1$ et $\Psi(d) = 0$ est représentée par la figure 3.

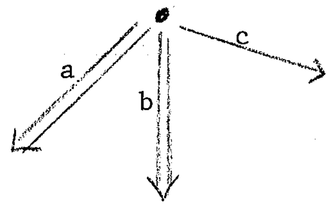


Figure 3

2 - Soit un graphe étiqueté déterministe $g = (S,\Sigma,\Delta)$, convenons de le représenter par un dessin dans le plan où les flèches internes seront tracées avec un trait double et les flèches externes avec un trait simple. On voit alors qu'une application $\Psi : \Sigma \to \{0,1,2\}$ est la configuration d'un sommet s si le dessin de Ψ est obtenu par l'extraction du jeu de flèches issues de s, on convient dans cette extraction de "dérouler les boucles sur s".

Exemple : La figure 4 représente le nouveau dessin du graphe étiqueté représenté par la figure 1 (paragraphe (1) B)). La figure 5 représente les configurations des 4 sommets de ce graphe, toutes sont simples à l'exception de la configuration du sommet B qui se décompose en deux configurations simples. Ce graphe n'a que deux configurations simples maximales qui sont les configurations des sommets C et D.

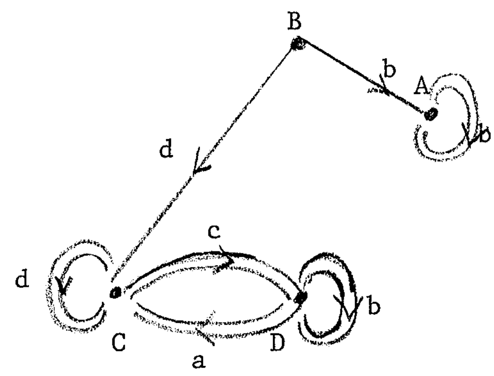
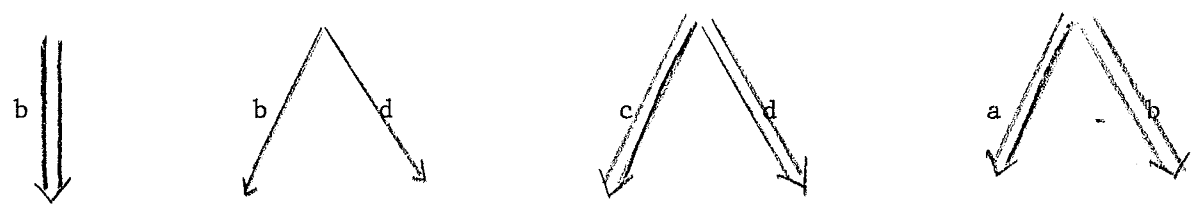


Figure 4



sommet A sommet B sommet C sommet D

(C) *Liaisons entre le comportement global d'un graphe étiqueté déterministe et l'ensemble de ses configurations*

Propriété 1

"Si un sommet s d'un graphe étiqueté déterministe g est surpassé par un sommet s' d'un autre graphe g', il existe un sommet de g' dont la configuration inclut celle de s."

Notons tout de suite que si un sommet s produit un mot commençant par l'étiquette σ, la configuration Ψ_s de ce sommet est nécessairement telle que $\Psi_s(\sigma) \geq 1$. Il en résulte que si un sommet s' surpasse un sommet s, alors $\Psi_s(\sigma) \geq 1 \Rightarrow \Psi_{s'}(\sigma) \geq 1$ Par conséquent, si la configuration $\Psi_{s'}$ n'inclut pas la configuration Ψ_s, il existe une étiquette σ telle que $\Psi_s(\sigma) = 2$ et $\Psi_{s'}(\sigma) = 1$. Ce symbole σ étiquette donc une flèche interne issues de s et une flèche externe issue de s'.

La technique utilisée maintenant pour démontrer cette propriété est semblable à celle qui a été utilisée pour démontrer le théorème du paragraphe (3) F) relatif au surpassement global. Suivant ce qui a été dit plus haut, deux cas seulement sont possibles :

1 - La configuration de s' inclut celle de s, la propriété est démontrée.

2 - Il existe un symbole σ_1 qui étiquette une flèche interne (s,σ_1,t_1) et une flèche externe (s',σ_1,t'). Soit m_1 un mot de Σ^* conduisant de t_1 à s -un tel mot existe puisque (s,σ_1,t_1) est interne-. Le mot $\sigma_1.m_1$ qui conduit de s à s est produit par s' qui surpasse s et conduit à un sommet s" qui surpasse également s. Ce sommet s" est nécessairement distinct de s' sans quoi m_1 conduirait de t' à s' et (s',σ_1,t') ne serait pas externe. A nouveau, deux cas sont possibles :

1 - La configuration de s" inclut celle de s, la propriété est démontrée.

2 - Il existe un symbole σ_2 qui étiquette une flèche interne (s,σ_2,t_2) et une flèche externe (s',σ_2,t'). On considère un mot m_2 conduisant de t_2 à s et le sommet s" atteint lors de la production de $\sigma_2.m_2$ par s'. On démontrerait comme plus haut que l'hypothèse suivant laquelle (s',σ_1,t') et (s'',σ_2,t'') sont externes implique que s" est distinct de s et s'.

On peut continuer ce raisonnement et créer ainsi une succession de sommets tous distincts entre eux, s', s", s"',...,$s^{(n)}$. Le nombre de sommets du graphe g' étant fini, le cas 1 sera vérifié à un certain moment. Remarquons d'autre part que le sommet de g' peut être choisi dans la fermeture du sommet s'.

Corollaire

"Si s est surpassé par s', toute configuration simple extraite de s est incluse dans une configuration simple extraite d'un sommet dominé par s'."

Ce corollaire est une conséquence immédiate de ce qui a été dit.

Propriété 2

"Toute configuration simple extraite du développé g d'un graphe déterministe g est incluse dans une configuration simple extraite de g."

Soit P un sommet quelconque de $\tilde{g}$, (P,σ_1,P_1), (P,σ_2,P_2),...,(P,σ_k,P_k) k flèches internes d'origine P, et éventuellement une flèche externe (P,σ,Q) déterminant une configuration simple extraite de P.

A chacune des transitions internes (P,σ_i,P_i) associons un des mots m_i qui conduit de P_i à P, l'égalité $P = \Delta^*(P,\sigma_i.m_i)$ est vérifiée. Tout sommet p appartenant à P produit le mot $\sigma_i.m_i$ et conduit à un certain sommet p', de plus l'application $p \to p'$ est bijective. En effet, si une de ces conditions n'était pas vérifiée, l'égalité $P = \Delta^*(P,\sigma_i.m_i)$ ne le serait pas non plus. Pour chaque sommt p, il existe donc un entier k tel que $(\sigma_i.m_i)^k$ conduise de p à p. Ceci implique que p et tous les sommets traversés lors de la production de $(\sigma_i . m_i)^k$ appartiennent à une même composante fortement connexe ; en particulier, il en résulte qu'il existe une flèche interne issue de p et étiquetée par σ_i. On a ainsi établi que pout tout p appartenant à P et tout symbole σ_i étiquetant une flèche interne d'origine P, σ_i étiquette également une flèche interne d'origine p. La propriété est donc établie si on considère seulement des flèches internes issues de P.

Si on considère en plus une flèche externe (P,σ,Q) issue de P, $\Delta^*(P,\sigma)$ est non vide. Il existe donc un sommet p appartenant à P, et un sommet q, tels que (p,σ,q) soit une flèche du graphe g. La configuration Ψ_p du sommet p est donc telle que $\Psi_p(\sigma) \geq 1$, la configuration Ψ_p du sommet P du graphe g est par hypothèse telle que $\Psi_p(\sigma) = 1$; compte tenu de ce qui a été établi pour les flèches internes issues de P, la propriété est également établie dans ce dernier cas.

<u>Théorème</u>

"Si un graphe étiqueté déterministe g est globalement surpassé par un graphe étiqueté déterministe g', toute configuration simple de g est incluse dans une configuration simple de g'."

Soient $g = (S,\Sigma,\Delta)$ et $g' = (S',\Sigma,\Delta')$ ces deux graphes, $\tilde{g} = (\tilde{S},\Sigma,\tilde{\Delta})$ et $\tilde{g}' = (\tilde{S}',\Sigma,\tilde{\Delta})$ leurs graphes développés. Soit Ψ une configuration simple extraite d'un sommet $s \in S$. Ce sommet s est surpassé par le sommet S du graphe $\tilde{g}$ -en effet, $L(s) \subseteq L(S)$-, par conséquent il existe une configuration simple Ψ' extraite d'un sommet P appartenant à la fermeture du sommet S dans $\tilde{g}$ qui inclut Ψ (cf. corollaire de la propriété 1).

Puisque g est globalement surpassé par g', le sommet S de $\tilde{g}$ est surpassé par le sommet S' de $\tilde{g}'$; le sommet P de $\tilde{g}$ considéré précédemment est donc surpassé par un sommet P' de $\tilde{g}'$ -il suffit de considérer un mot m qui mène de S à P, et le sommet P' auquel mène ce mot à partir de S'-. Une nouvelle application du corollaire de la propriété 1 implique que Ψ' est incluse dans une configuration simple Ψ'' extraite d'un sommet P" de $\tilde{g}'$. Enfin, la propriété 2 implique que cette dernière configuration est incluse dans une configuration simple du graphe g'.

Corollaire

"Les configurations simples maximales de deux graphes étiquetés déterministes globalement équivalents sont les mêmes."

L'ensemble des configurations simples maximales d'un graphe étiqueté déterministe est donc un nouvel invariant attaché au comportement global de ce graphe, cet invariant sera utilisé pour l'étude des relations séquentielles.

(5) DECOMPOSITIONS D'UN GRAPHE ETIQUETE

Dans ce paragraphe et le suivant, nous développons une étude des graphes étiquetés utilisant des techniques extraites de la théorie classique des graphes orientés (cf. [2]). Comme il arrive souvent dans ce genre d'études, les résultats élémentaires sont très intuitifs et de démonstration simple, mais le nombre de définitions nécessaires à préciser les concepts utilisés est assez important. On suivra donc cet exposé en se référant abondamment à l'intuition courante.

(A) *Composantes connexes - Somme cardinale*

Soit un graphe étiqueté $g = (S,\Sigma,\mathcal{F})$ dont $\mathcal{F}$ est l'ensemble des flèches. Deux sommets s et t sont adjacents si il existe une étiquette $\sigma \in \Sigma$ telle que (s,σ,t) ou/et (t,σ,s) soit une flèche de g. La relation d'adjacence étant symétrique, sa fermeture transitive forte est une relation d'équivalence dont les classes seront appelées les composantes connexes de g.

La différence existant entre les composantes connexes et les composantes fortement connexes d'un graphe étiqueté est la même que celle qui existe entre ces deux notions en théorie des graphes orientés. Remarquons d'ailleurs qu'un graphe orienté n'est autre qu'un graphe étiqueté $(S,\Sigma,\mathcal{F})$ où Σ est réduit à un seul élément.

Un graphe étiqueté g sera dit connexe si l'ensemble de ses sommets est une composante connexe.

La somme cardinale de deux graphes étiquetés $(S_1,\Sigma,\mathcal{F}_1)$ et $(S_2,\Sigma,\mathcal{F}_2)$ est le graphe $(S,\Sigma,\mathcal{F})$ dont l'ensemble S des sommets égale la somme cardinale de S_1 et S_2, et dont l'ensemble $\mathcal{F}$ des flèches égale $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Cette définition s'étend à un nombre quelconque fini de graphes.

Théorème

"Les composantes connexes de la somme cardinale de k graphes connexes, sont égales aux ensembles de sommets de ces k graphes. Réciproquement, tout graphe est égal à la somme cardinale de ses sous-graphes déterminés par ses composantes connexes".

(B) *Sous-graphes partiels*

Etant donné un graphe étiqueté $g = (S,\Sigma,\mathcal{F})$ et un sous-ensemble $\mathcal{F}'$ de l'ensemble $\mathcal{F}$ de ses flèches, le sous-graphe partiel $g_{\mathcal{F}'} = (S',\Sigma,\mathcal{F}')$ déterminé par l'ensemble $\mathcal{F}'$ est défini par l'ensemble des sommets, S', qui sont l'origine ou l'extrémité d'au moins une flèche de $\mathcal{F}'$, et par l'ensemble des flèches $\mathcal{F}'$.

On dira qu'un graphe g' est abrité par un graphe g -notation $g' \leq g$- si chacun de ses sous-graphes connexes est isomorphe à un sous-graphe partiel de g ; ceci revient à dire que g' égale la somme cardinale de k sous-graphes partiels de g.

Théorème

"Tout graphe g' abrité par un graphe g est globalement surpassé par g."

Ce théorème est une conséquence des deux propriétés suivantes dont la vérification est immédiate.

Propriété 1

"Un sous graphe partiel d'un graphe est globalement surpassé par ce graphe".

Propriété 2

"Le comportement global de la somme cardinale des k graphes est égal à l'union des comportements globaux de ces k graphes."

(C) *Classes de flèches fortement connexes*

Sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des flèches d'un graphe étiqueté $g = (S, \Sigma, \mathcal{F})$, définissons la relation $f \equiv f'$ vérifiée si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1) $f = f'$;

2) f et f' sont internes et leurs sommets origines et extrémités appartiennent à une même composante fortement connue de g.

On vérifie aisément que cette relation est une équivalence, ses classes seront appelées classes de flèches fortement connexes. Chacune de ses classes est constituée par une seule flèche externe où par l'ensemble de toutes les flèches internes reliant les sommets d'une même composante fortement connexe.

La cloture fortement connexe, $\bar{\mathcal{F}}'$, d'un ensemble de flèches $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ est l'union des classes fortement connexes déterminées par chacune des flèches appartenant à $\mathcal{F}'$. Il est immédiat que l'application $\mathcal{F}' \to \bar{\mathcal{F}}'$ est une fermeture dans l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$.

Théorème

"Toute flèche d'un sous-graphe partiel $g' = (S',\Sigma,\mathcal{F}')$ d'un graphe étiqueté $g = (S,\Sigma,\mathcal{F})$ dont l'ensemble $\mathcal{F}'$ des flèches est égal à sa cloture fortement connexe est interne (resp. externe) par rapport à g' si et seulement si elle est interne (resp. externe) par rapport à g."

Vérification immédiate.

(D) *Décompositions d'un graphe étiqueté*

1 - Chaîne : un sous-graphe partiel $(S',\Sigma,\mathcal{F}')$ d'un graphe étiqueté $g = (S,\Sigma,\mathcal{F})$ est une chaîne si $\mathcal{F}'$ est égal à la cloture fortement connexe de l'ensemble des flèches d'un itinéraire de g. Rappelons (cf. (1) B)) qu'un itinéraire de g est une suite de ses flèches (s_1,σ_1,t_1), (s_2,σ_2,t_2) ,..., (s_n,σ_n,t_n) telle que pour tout entier $j = 1,\dots,n-1$ soit vérifiée la condition $t_j = s_{j+1}$. De cette définition, il résulte que tout mot produit par un graphe étiqueté g est produit par une de ses chaînes.

2 - Décomposition : un graphe étiqueté g' est une décomposition d'un graphe g si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) g' est abrité par g ;

2) toute chaîne de g est abritée par g'.

Théorème

"Toute décomposition g' d'un graphe g est globalement équivalente à ce graphe".

g' est globalement surpassé par g car g' est abrité par g. Réciproquement, tout mot de g est produit par une de ses chaînes, cette dernière chaîne étant abritée par g'.

Comme décomposition particulière d'un graphe g, on peut citer la somme cardinale de ses chaînes, cette décomposition sera appelée décomposition en chaînes du graphe g. On peut évidemment se limiter pour vérifier la propriété 2 à celles des chaînes qui sont maximales -i.e. F' est maximal à être la cloture fortement connexe des flèches d'un itinéraire- ; la somme cardinale de ces chaînes, notée g_{C}, est la décomposition de g en ses chaînes maximales. On voit aussi qu'une décomposition de g est caractérisée par la double inégalité $g_{C} \leq g' \leq g$.

(E) *Configurations extraites d'une chaîne*

Théorème

"Tout sommet d'une chaîne est origine d'une flèche externe au plus."

Soit $g = (S,\Sigma,F)$ le graphe étiqueté d'où est extraite la chaîne $C = (S',\Sigma,F')$ considérée, $g = (s_1,\sigma_1,t_1), (s_2,\sigma_2,t_2),\dots,(s_n,\sigma_n,t_n)$, un itinéraire de g dont F' soit la cloture fortement connexe. Toute flèche externe de C est une flèche externe de g (cf. théorème énoncé en C)), elle appartient d'autre part à la classe fortement connexe d'une des flèches de l'itinéraire précédent, une telle classe est par définition réduite à cette seule flèche externe ; par conséquent, la flèche externe considérée est une flèche externe extraite de l'itinéraire g.

Supposons donc qu'il existe deux flèches externes distinctes issues d'un même sommet de la chaîne, ces deux flèches sont égales à deux flèches externes $(s_{i_1},\sigma_{i_1},t_{i_1})$ et $(s_{i_2},\sigma_{i_2},t_{i_2})$ extraite de l'itinéraire g. Supposons que $i_1 < i_2$, le mot $\sigma_{i_1+1}.\sigma_{i_1+2}\dots\sigma_{i_2-1}$ (éventuellement égal au mot Λ si $i_2 = i_1+1$) conduit de t_{i_1} à $s_{i_2} = s_{i_1}$, par conséquent $(s_{i_1},\sigma_{i_1},t_{i_1})$ est une flèche interne, ce qui mène à une contradiction.

Corollaire

"Toute configuration extraite de la décomposition en chaînes d'un graphe étiqueté déterministe est égale à une configuration simple extraite de ce graphe".

Les décompositions en chaînes ne sont pas les seules à vérifier cette propriété, d'une façon générale, celles qui les vérifient seront dites simples.
La figure 6 représente le dessin d'une composante connexe d'une telle décomposition simple -les parties cerclées figurent des composantes fortement connexes du graphe décomposé- ; la figure 7 représente le dessin d'une chaîne.

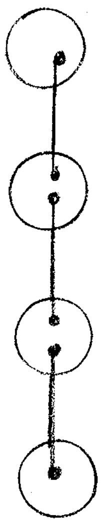


Figure 7

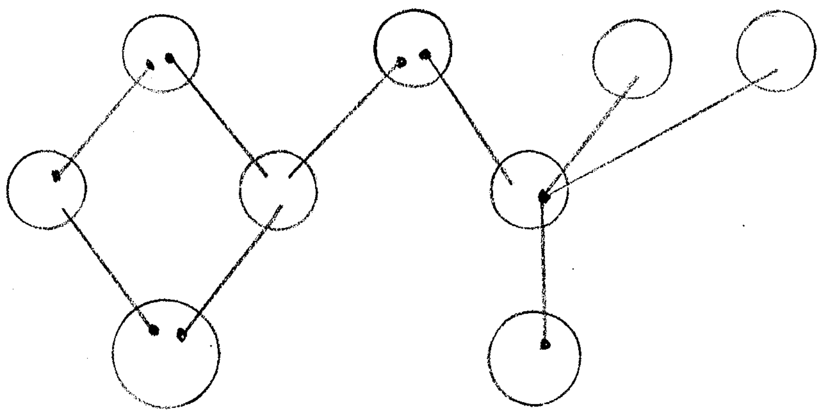


Figure 6

Remarque - On pourrait également donner une définition équivalente d'une chaîne en utilisant la propriété établie dans le théorème précédent Soit :

"Un sous-graphe partiel (S',Σ,F') d'un graphe (S,Σ,F) est une chaîne de ce graphe si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1) F' est égal à sa cloture fortement connexe ;

2) tout sommet de S' est origine d'une flèche externe au plus appartenant à F' ;

3) pour tout couple de sommet s' et s" pris dans S', il existe un mot m produit par (S',Σ,F') conduisant de s' à s" ou de s" à s'."

(6) RECONNAISSANCE DES RELATIONS SEQUENTIELLES

Etant donnée une relation séquentielle $R \subseteq (I \times O)^*$, toute quasi machine séquentielle $(S, I \times O, F)$ dont le comportement global égale F sera appelée une <u>représentation</u> de R. En particulier, tout graphe séquentiel g est une représentation de la relation séquentielle R égale à son comportement global. Il existe d'autres représentations possibles de R ; par exemple, le graphe développé $\tilde{g}$ en est une, et il n'y a aucune raison pour que $\tilde{g}$ soit un graphe séquentiel (cf. (1) D) 2 pour la définition des quasi-machines séquentielles et des graphes séquentiels). Dans ce paragraphe, nous allons énoncer une propriété caractéristique des quasi-machines séquentielles représentant une relation séquentielle.

(A) *Degrés d'un sommet d'une quasi-machine séquentielle*

Soit une quasi-machine séquentielle $(S, I \times O, F)$, un sommet $s \in S$ et une entrée $i \in I$. On peut définir deux degrés, $D_i(s)$ et $d_i(s)$, du sommet par rapport à l'entrée i. $D_i(s)$ est égal au nombre de symboles de sortie, o, distincts, tels qu'il existe une flèche d'origine s étiquetée par le doublet d'entrée-sortie (i,o). Si une de ces flèches est interne, on posera $d_i(s) = D_i(s)$, sinon on posera $d_i(s) = 0$.

Exemple : Par rapport à la quasi-machine séquentielle représentée par la figure 8, on a :

$D_o(A) = d_o(A) = 2$;

$D_o(B) = 2$; $d_o(B) = 0$.

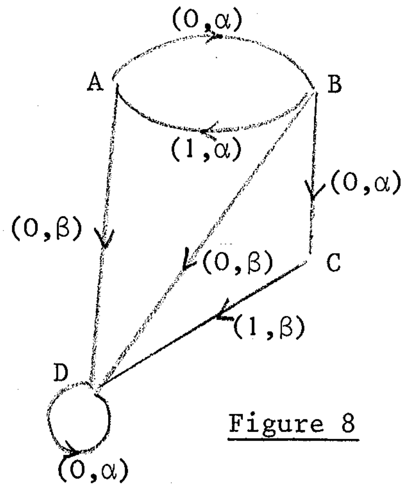


Figure 8

(B) *Caractérisation des quasi-machines séquentielles qui représentent une relation séquentielle.*

Théorème

"Une quasi-machine séquentielle représente une relation séquentielle si et seulement si pour tout sommet s et toute entrée i, l'inégalité $d_i(s) \leq 1$ est vérifiée".

Avant de démontrer ce théorème, énonçons quelques propriétés relatives aux degrés $d_i(s)$ et $D_i(s)$.

P1 : $d_i(s) \leq D_i(s)$;

P2 : Une quasi-machine séquentielle est un graphe séquentiel si et seulement si l'inégalité $D_i(s) \leq 1$ est toujours vérifiée. Ce graphe séquentiel est associé à un système séquentiel complet si et seulement si l'égalité $D_i(s) = 1$ est toujours vérifiée.

P3 : L'inégalité $d_i(s) > 1$ est vérifiée si et seulement si il existe deux symboles de sortie distincts O' et O", et une configuration simple Ψ extraite du sommet s, tels que $\Psi(i,O') \neq 0$ et $\Psi(i,O'') \neq 0$.

P4 : Si une quasi-machine séquentielle est simple, l'inégalité $D_i(s) > 1$ est équivalente à $d_i(s) > 1$.

Les propriétés P1 et P2 se vérifient facilement. Etablissons P3. L'inégalité $d_i(s) > 1$ implique $D_i(s) = d_i(s)$; par conséquent, le nombre de flèches issues de s et étiquetées par des doublets d'entrée-sortie distincts dont le symbole est i est supérieur ou égal à 2. Une de ces flèches est interne puisque $d_i(s) \neq 0$. On peut donc trouver deux flèches distinctes (s,(i,0'),t') et (s,(i,0"),t") dont l'une est interne. La configuration relative à ces deux flèches est nécessairement simple et vérifie les propriétés de l'énoncé. Réciproquement, si il existe une telle configuration simple, les deux flèches qui la déterminent vérifient la condition ci-dessus, ce qui implique $d_i(s) > 1$.

<u>Corollaire</u>

"Si deux quasi-machines séquentielles sont globalement équivalentes, l'existence dans l'une d'un couple (s,i) vérifiant $d_i(s) > 1$ implique l'existence dans l'autre d'un couple (s',i) vérifiant $d_i(s') > 1$."

Ce corollaire est une conséquence de l'invariance des configurations simples maximales de deux graphes étiquetés globalement équivalents (cf. paragraphe (4) C)).

Etablissons maintenant P4. L'implication $d_i(s) > 1 \Rightarrow D_i(s) > 1$ est valable dans tous les cas. Réciproquement, si $D_i(s) > 1$ est vérifié pour une quasi-machine séquentielle simple, il existe deux flèches distinctes (s,(i,0'),t') et (s,(i,0"),(t") distinctes. L'une d'entre elles est nécessairement interne puisqu'il existe au plus une flèche externe issue de s, $d_i(s)$ est donc égal à $D_i(s)$.

Démontrons maintenant le théorème. Désignons par g la quasi-machine séquentielle considéré, par S une décomposition simple de g. Supposons que l'inégalité $D_i(s) > 1$ puisse être vérifiée pour un doublet (s,i) relatif à S, alors d'après P4, $d_i(s) > 1$ est également vérifiée dans S. L'inégalité $d_i(s') > 1$ sera également vérifiée pour un couple (s',i) relatif à g d'après le corollaire précédent. Par conséquent, si l'inégalité $d_i(s) \leq 1$ est toujours vérifiée pour g, l'inégalité $D_i(s) \leq 1$ est toujours vérifiée pour $\mathcal{S}$. Cette dernière égalité exprime que $\mathcal{S}$ est un graphe séquentiel (propriété 2), g représente donc une relation séquentielle puisque $\mathcal{S}$ et g sont globalement équivalents.

Réciproquement, si g représente une relation séquentielle, il existe un graphe séquentiel g' globalement équivalent à g où l'inégalité $d_i(s) > 1$ n'est jamais vérifiée. Elle ne l'est donc jamais pour g d'après le corollaire précédent.

(C) *Relations séquentielles complètes*

Théorème

"Si pour tout sommet s et toute entrée i d'une quasi-machine séquentielle g, la double inégalité $d_i(s) \leq 1 \leq D_i(s)$ est vérifiée, alors g représente une relation séquentielle complète."

Lemme

"Soit une quasi-machine séquentielle g = (S,IXO,$\mathcal{F}$) vérifiant l'hypothèse du théorème, et un sous-ensemble $\bar{\mathcal{F}}' \subseteq \mathcal{F}$ égal à sa cloture fortement connexe tel que pour tout sommet s' du sous-graphe partiel g' = (S',IXO,$\bar{\mathcal{F}}'$) et toute entrée i, l'inégalité $D_i(s') \leq 1$ soit vérifiée. Si il existe un couple (s',i) tel que $D_i(s') = 0$ par rapport à g', il existe un sous-ensemble de flèches $\bar{\mathcal{F}}''$ contenant strictement $\bar{\mathcal{F}}'$ et vérifiant les mêmes propriétés que $\bar{\mathcal{F}}'$ -i.e. $\bar{\mathcal{F}}''$ égale sa cloture fortement connexe et $D_i(s'') \leq 1$ pour tout couple (s",i) du sous-graphe partiel g" = (S",IXO, $\bar{\mathcal{F}}''$)-."

Puisque $D_i(s') \geq 1$ par rapport à g, il existe une flèche (s',(i,o),t') extraite de F dont on désignera par Φ la cloture fortement connexe. Nous allons montrer que $\bar{F}'' = \bar{F}' \cup F$ vérifie les propriétés voulues. Il est tout d'abord immédiat que $\bar{F}''$ égale sa cloture fortement connexe ; d'autre part, puisque Φ est non vide et $\bar{F}' \cap \Phi = \emptyset$, $\bar{F}''$ inclut $\bar{F}'$ strictement.

Soit s" un sommet quelconque du graphe g" = (S",IXO,$\bar{F}''$) et i une entrée quelconque. Considérons deux cas :

1) Toute flèche issue de s" et étiquetée par un doublet d'entrée-sortie dont la composante d'entrée est i appartient à $\bar{F}'$. Alors les degrés $D_i(s'')$ sont égaux dans g' et g", donc $D_i(s'') \leq 1$.

2) Il existe une telle flèche dans l'ensemble Φ . A nouveau, considérons deux cas :

   a) la flèche (s',(i,o),t') choisie au début est externe, alors s" = s' et l'entrée considérée est i ; il est alors immédiat que $D_i(s') = 1$ par rapport à g".

   b) Φ est un ensemble de flèches internes. Dans ces conditions, les degrés $d_i(s'')$ et $D_i(s'')$ sont égaux dans g, donc $D_i(s'') = d_i(s'') \leq 1$ dans g. Il en est de même dans g" qui est un sous-graphe partiel de g.

<u>Démonstration du théorème</u>

Considérons un ensemble $\bar{F}' \subseteq F$ tel que g' = (S',IXO,$\bar{F}'$) soit une chaîne du graphe considéré dans l'énoncé. $\bar{F}'$ vérifie les conditions du lemme, on pourra donc l'inclure successivement dans un ensemble $\bar{F}'' \subseteq F$ tel que la condition $D_i(s'') = 1$ soit vérifiée pour tout sommet s" et toute entrée i dans le graphe g" = (S",IXO,$\bar{F}''$). Ce graphe étiqueté correspond à un système séquentiel complet. Si toute chaîne du graphe considéré dans l'énoncé n'est pas abritée par g", on recommencera la construction à partir d'une chaîne non abritée, de proche en proche, on obtiendra ainsi une décomposition constituée par des systèmes séquentiels complets.

Remarques - La condition énoncée par le théorème n'est pas suffisante, il suffit de prendre comme contre-exemple la décomposition en chaînes d'un système séquentiel complet convenablement choisi. Ce théorème généralise un résultat analogue établi par Gray et Harrison [17] dans le cas de l'automate de reconnaissance d'une relation séquentielle complète. En effet, on constatera aisément que le graphe développé $\tilde{g}$ d'un graphe g représentant une machine séquentielle complète vérifie la condition $D_i(s) \geq 1$, ce graphe développé correspond à une réduction par équivalence d'états près à l'automate de reconnaissance de la relation séquentielle produite par g (cf. paragraphes (2) et (3)).

INDEX DES PRINCIPAUX TERMES

algèbre abstraite	172
application régulière	227
atomique (relation binaire —)	69
attribution	139
attribution élémentaire	143
attribution minimale	143
automate fini	228
base première complète d'une fonction booléenne	14
caractère fini	173
chaîne de pavés	102
classe de compatibilité d'un système séquentiel	195
clôture (d'une relation binaire)	72
clôture atomique	73
clôture principale	73
comportement global	224
composante (fortement connexe)	231
concaténation	222
contracté (sous-relation —)	87
contractivité	5
décomposition d'une famille de parties	172
décomposition d'une fonction booléenne	174
développé	232
dimension d'un ensemble ordonné fini	55
dimension d'une relation binaire fini	125
duale d'une relation binaire	66
doublet d'entrée-sortie	225
écriture SP d'une fonction booléenne	14
engendré (section principale — par)	10
engendré (sous-ensemble d'un ordonné — par)	20
ensemble de décomposition d'une famille de parties	172
entrée	187
état	187
équivalence de deux graphes étiquetés	225

équivalence globale	224
extensivité	5
famille de Moore	6
fermeture	5
fermeture duale	5
fermeture d'un ensemble de sommets d'un graphe étiqueté	231
fonction booléenne	12
fonction caractéristique d'un sous-ensemble	12
fonction caractéristique d'un recouvrement partiel	13
fonction de sortie d'un système séquentiel	187
fonction de transition d'un système séquentiel	187
fonction de transition d'un graphe étiqueté	227
forcer une chaîne de pavés au type (00)	116
générateur (sous-ensemble — d'une relation binaire)	75
graphe étiqueté	222
graphe étiqueté complet	227
graphe étiqueté déterministe	225
graphe séquentiel	225
homomorphisme de relation binaire	68
homomorphisme canonique d'une relation binaire dans un treillis complet	85
idempotence	5
immersion d'un ordonné	33
immersion d'une relation binaire	69
intersection de deux recouvrements partiels	13
invariant d'une fermeture	5
isovalent	8
libre (recouvrement partiel —)	15
monôme premier d'une fonction booléenne	15
Moore (partie de —)	5
mot	222
numérotation d'un escalier	114
optimum	139
ordonné caractéristique	24
ordre caractéristique induit par un ordre fini	24
pavé caractéristique d'une relation binaire	79
pavé plein d'une relation binaire	74
précis	190
précodage	30

préimmersion	30
préordre	8
principal	74
produit de deux recouvrements partiels	15
produit cartésien de relations binaires	123
produit tensoriel d'applications	68
projections d'une application décomposable	124
prolonge	51
quasi-système séquentiel	225
quotient d'une relation binaire par une congruence	69
recouvrement compatible d'un système séquentiel	195
recouvrement partiel	13
réduite d'une chaîne de pavés	104
régulier (préordre —)	139
relation binaire	66
relation binaire caractéristique	79
relation de compatibilité	195
relation séquentielle	226
section finale	8
section initiale	8
section principale	10
semblables (relations binaires —)	69
séquence d'entrée-sortie	188
somme de deux recouvrements partiels	15
sortie	187
sous-relation	67
sous-relation caractéristique	79
sous-relation contractée	87
sous-relation génératrice	79
support d'un monôme croissant	144
support d'un n-uplet booléen	12
support d'une relation de sous-ordre	86
support droit (gauche) d'une relation binaire	66
surhomomorphisme	191
surpassement global	244
système séquentiel	187
système séquentiel incomplet	188

système séquentiel partiellement déterminé	189
système séquentiel de classe $\mathcal{D}$	221
type d'une chaîne de pavés	104
$\cup$ engendré	20
$\cup$ générateur	22
$\cup$ irréductible	22
union de deux recouvrements partiels	13
vecteur caractéristique d'un sous-ensemble	12
$\cap$ codage	30
$\cap$ engendré	20
$\cap$ générateur	22
$\cap$ irréductible	23

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAKEN C.

Contribution des structures algébriques ordonnées à la théorie des réseaux, Thèse d'Etat soutenue à la Faculté des Sciences de Grenoble.

[2] BERGE C.

Théorie des graphes et ses applications, Dunod 1958.

[3] BIRKOFF G.

Lattice Theory, A.M.S. Colloquium Publications, 1948.

[4] BIRKOFF G. and FRINK O.

Representation of lattices by sets, Annals of mathematics, septembre 1948.

[5] BIRKOFF G.

The meaning of completeness, Annals of Math. 38 (1937), p. 57-60.

[6] BOUCHET A.

Méthode algébrique pour la réduction des automates incomplets, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 721-724, (17 avril 1967).

[7] BOUCHET A.

An algebraic method for minimizing the number of states in an incomplete sequential machine, IEEETC, August 1968, vol. C-17, p. 795-798.

[8] BOUCHET A.

Caractérisation des sous-ensembles d'un treillis complet qui sont également des treillis complets pour l'ordre induit, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 265-267, (3 février 1969).

[9] CAMPBELL A.D.

Set Coordinates for lattices, Bull. A.M.S., vol. 49 (1943), p. 395-398.

[10] CHEIN M.

Etude des décompositions d'un réseau. Application à l'écriture des fonctions booléennes en sommes et produits, Thèse de Docteur-Ingénieur soutenue à la Faculté des Sciences de Grenoble.

[11] DILLWORTH R.P.

A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of math, vol. 51, janvier 1950, p. 160-166.

[12] DUCAMP A.

Sur la dimension d'un ordre partiel, Théorie des graphes, Journées internationales, Rome 1966, Dunod 1967, p. 103-112.

[13] RIGUET J.

Quelques propriétés des relations difonctionnelles, C.R. Acad. Sc. Paris, V. 230 (1950), p. 1999-2000.

[14] GINSBURG S.

An introduction to mathematical machine theory, Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1962.

[15] GOMORY R.A. and BAUMOL W.J.

Integer programming and pricing, Econometrica, vol. 28, 1960, p. 521-550.

[16] GRASSELLI A. and LUCCIO F.

A method for minimizing the number of internal states in incompletely specified sequential networks, IEEETEC, vol. EC-14, June 1965, p. 350-359.

[17] GRAY et HARRISON

[18] KUNTZMANN J.

Algèbre de Boole, Dunod 1965.

[19] KUNTZMANN J.

Théorie des réseaux et des relations, Cours de la Faculté des Sciences de Grenoble.

[20] KUNTZMANN J.
Automates canoniques, Cours de la Faculté des Sciences de Grenoble.

[21] LAPSCHER F.
Application de la notion de fermeture à l'étude des fonctions booléennes, Thèse d'état soutenue à la Faculté des Sciences de Grenoble.

[22] Mac CLUSKEY
Minimization of Boolean functions, Bell Sys. Tech. J., vol. 35, Nov. 1956, p. 1417-1444.

[23] Mac NEILLE H.
Partially ordered sets, Trans. A.M.S., vol. 42, (1937), p. 416-460.

[24] MALGRANGE
Utilisation des calculateurs électroniques en recherche opérationnelle, Bull (Publication).

[25] ORE O.
Galois connexions, Trans. A.M.S., vol. 55, (1944), p. 493-513.

[26] PAULL M.C. and UNGER M.
Minimizing the Number of States in incompletely Specified Sequential Switching Functions, IEEETEC, Septemre 1959.

[27] PICHAT E.
Contribution à l'Algorithmique non numérique dans les ensembles ordonnés, Thèse d'Etat soutenue à la Faculté des Sciences de Grenoble.

[28] PICHAT E.
Décomposition des fonctions booléennes, Thèse de 3ème cycle soutenue à la Faculté des Sciences de Grenoble.

[29] POUZET M.
Dimension d'un ensemble ordonné, Mémoire de DEA, Université de Lyon.

[30] RABIN M.O. and SCOTT D.

Finite automata and their decision problems, IBM Journal, April 1959.

[31] SZPILRAJN E.

Sur l'extension de l'ordre partiel, Find. Math. 16 (1930), p. 386-389.

[32] THORNG C.

An algorithm for selecting compatibles in the reduction of incompletely specified state tables, Colloque international sur les systèmes logiques Bruxelles (Université libre), 15-20 septembre 1969.

[33] TISON P.

Théorie des consensus, Thèse d'ingénieur-docteur soutenue à la Faculté des Sciences de Grenoble.

[34] WARD M.

The dosure operators of a lattice, Annals of Math., vol. 43, (1942), p. 191-196.

[35] ZARECKII K.A.

The representation of lattices by sets, Uspehi Mat. Nauk, 16 (1961), p. 153-154. Résumé dans Maths. Review, (1963), N° 2.

[36] ZIDANI (BOITTIAUX)

Séminaire d'algèbre appliquée et conception - Faculté des Sciences de Grenoble.