Sur les fonctions logiques permutantes

Anne-Marie Pastel

N° d'ordre

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Anne-Marie PASTEL

SUR LES FONCTIONS LOGIQUES PERMUTANTES

Thèse soutenue le 29 octobre 1971 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	KUNTZMANN	Président
Monsieur	FRAÏSSE	Examinateur
Monsieur	BENZAKEN	Examinateur
Monsieur	JULLIEN	Examinateur

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie

	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARRA Jean	Mathématiques appliquées
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie

	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michael	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)

	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Monsieur C. BENZAKEN m'a permis, par son aide et ses précieux conseils, de mener à bien ce travail.

Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

C'est grâce à Monsieur KUNTZMANN que je peux travailler à Grenoble dans les meilleures conditions. Il a bien voulu accepter de présider ce jury et je lui en suis particulièrement reconnaissante.

Que Monsieur R. FRAISSE, qui a eu l'idée de cette thèse, soit vivement remercié pour les suggestion qu'il m'a faites et l'intérêt qu'il a manifesté pour mes recherches. Je suis très heureuse qu'il ait accepté de juger aujourd'hui mon travail.

Je remercie vivement Monsieur P. JULLIEN qui, après m'avoir éclairée de ses conseils, a bien voulu faire partie du Jury.

Je ne saurais, enfin, oublier, dans mes remerciements, Madame NEUMANN, ni les services de tirage, qui ont assuré la réalisation matérielle de cet ouvrage.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Les fonctions logiques permutantes ont été introduites par R. FRAÏSSE. Ces fonctions sont telles que l'ordre des quantificateurs portant sur les formules atomiques n'influe pas sur leur résultat de vérité. Dans les trois premiers chapitres, outre quelques propriétés élémentaires, il est donné une caractérisation géométrique des fonctions permutantes de n variables sur l'hypercube de dimension n, K_n. Cette caractérisation repose d'une part sur la notion de connexité de f et $\bar{f}$ sur tous les sous-hypercubes de K_n (propriété que nous appelons de "faible biconvexité"), d'autre part sur la notion d'absence de tour du cube dans f et dans $\bar{f}$ sur tous les sous-hypercubes de dimension supérieure à deux de K_n.

A partir de ces résultats, nous constatons que, pour une fonction f non permutante de n variables donnée, on peut fixer la valeur d'un certain nombre des n variables dont dépend f de façon que f ne soit monotone par rapport à aucune des variables restantes. La question se pose alors de savoir si une fonction dont toutes les variables sont biformes n'est pas permutante. A cette question est donnée dans le chapitre IV une réponse partielle.

Dans le chapitre V sont étudiées les fonctions antagoséparables : si on appelle pseudo-duale d'une fonction f la duale de la fonction f' obtenue en remplaçant dans f chaque occurrence de la variable complémentée $\bar{x}$ par une variable x' indépendante de x, on dira que f est antagoséparable si dans sa pseudo-duale tous les monômes contenant un produit antagoniste xx' disparaissent par absorption. Les fonctions antagoséparables sont permutantes et on démontre que certaines fonctions permutantes sont antagoséparables.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET GENERALITES

I - FONCTIONS BOOLEENNES

Soit U un ensemble de n variables booléennes, $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et soit L_n l'algèbre de Boole libre engendrée par U.

Dans L_n on appelle somme, notée additivement, et produit, noté multiplicativement les opérations de borne supérieure et borne inférieure. Le complément d'une variable x est $\overline{x}$.

On appelle monôme tout produit d'un nombre fini de variables directes ou complémentées. Chaque variable n'apparaît qu'une fois dans un monôme sinon, ou bien il est nul (une variable et son complément), ou bien il se simplifie.

Les atomes de L_n sont appelés monômes canoniques. Toutes les variables y figurent.

Les éléments de L_n peuvent être considérés comme des fonctions $f : 2^n \rightarrow 2$ (où $2 = \{0, 1\}$). L'ensemble 2^n est appelé hypercube de dimension n ou n-cube.

A toute fonction f de L_n on peut associer la somme des monômes canoniques contenus dans f. Cette expression est appelée forme canonique de f.

On dit qu'un monôme μ est compatible avec f lorsque $\mu f \equiv \mu$.
Exemple : $f(a, b, c, d) = ab + \overline{a}c$ $\quad\quad$ $\mu = bcd$ est compatible avec f.

On dit qu'un monôme μ est un monôme premier de f lorsqu'il est compatible avec f et tel que tout monôme obtenu à partir de μ par suppression d'une variable n'est plus compatible.
Exemple : $f(a, b, c, d) = ab + \overline{a}c$ $\quad\quad$ $\mu = bc$ est monôme premier de f.

L'expression formée de la somme de tous les monômes premiers de f est appelée base complète de f.

Exemple : $f(a, b, c, d) = ab + \bar{a}c$

$ab + \bar{a}c + bc$ est la base complète de f.

Une variable monoforme de f est une variable qui, dans une écriture de f sous forme de somme de monômes premiers, n'apparaît que sous une seule forme (directe ou complémentée).

Une variable biforme de f est une variable qui, dans une écriture de f sous forme de somme de monômes premiers apparaît sous les deux formes directe et complémentée.

Exemple : $f = ab + \bar{a}c + bc$

a est une variable biforme

b et c sont monoformes.

Remarquons qu'une variable monoforme (resp. biforme) de f apparaît sous une seule (resp. deux) forme dans toute écriture de f sous forme de somme de monômes premiers.

II - HYPERCUBE DE DIMENSION N

L'ensemble 2^n est le treillis de Boole des 2^n atomes de L_n ; treillis pour la relation d'ordre

$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n \leq \tilde{\tilde{x}}_1 \tilde{\tilde{x}}_2 \ldots \tilde{\tilde{x}}_n$ si et seulement si pour tout i, $1 \leq i \leq n$,

$\tilde{x}_i = x_i$ implique $\tilde{\tilde{x}}_i = x_i$

où $\tilde{x}_i$ et $\tilde{\tilde{x}}_i$ représentent chacun x_i ou $\overline{x}_i$.

A un atome de L_n correspond donc un point ou sommet du n-cube. Deux points du n-cube sont dits voisins s'ils correspondent à deux monômes canoniques qui diffèrent d'une seule variable (directe dans l'un, complémentée dans l'autre).

On définit la distance entre deux points du n-cube comme le nombre de variables dont diffèrent les deux monômes canoniques auxquels correspondent ces deux points. La distance entre les points a et b sera notée d(a, b).

A une fonction f de L_n on associe l'ensemble $f^{-1}(1)$ constitué de sommets du n-cube. La fonction f est dite connexe sur le n-cube lorsque $f^{-1}(1)$ est connexe sur le n-cube pour la relation de voisinage.

Sous hypercube

L'ensemble des atomes contenus dans un monôme $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_p$ de L_n ($\tilde{x}_i = x_i$ ou $\overline{x}_i$) correspond au treillis de Boole 2^{n-p}, sous treillis de 2^n. Ce sous treillis 2^{n-p} est appelé sous hypercube de dimension n-p du n-cube ou (n-p)-cube du n-cube.

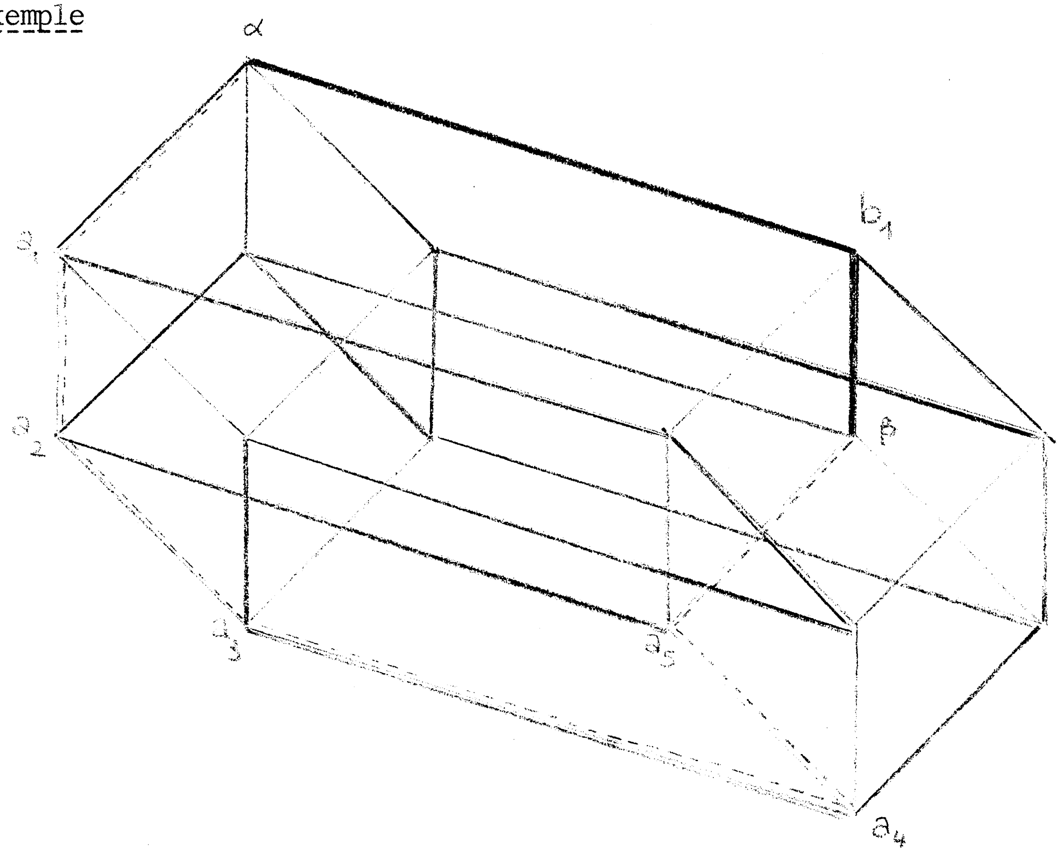
Chemin

On appelle chemin de longueur p entre deux points α et β distincts du n-cube, une suite de p + 1 points

$a_o, a_1, a_2, \ldots, a_p$ avec $a_o = \alpha$, $a_p = \beta$, tels que pour tout i, $o \leq i \leq p-1$, a_{i+1}

soit différent de a_i et a_{i+1} et a_i soient voisins.

Exemple



Le chemin $\{\alpha, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \beta\}$ est un chemin de longueur 6 entre α et β.

L'ensemble de deux points constitue un chemin de longueur 1 entre ces deux points.

Un chemin entre deux points distincts α et β est dit minimal si sa longueur est égale à la distance entre α et β.

Exemple de la figure précédente : Le chemin $\alpha\ b_1\ \beta$ est minimal entre α et β.

Remarque

Soit un ensemble D de sommets du n-cube. Si D est connexe alors pour tout couple (α, β) de points de D il existe dans D un chemin entre α et β.

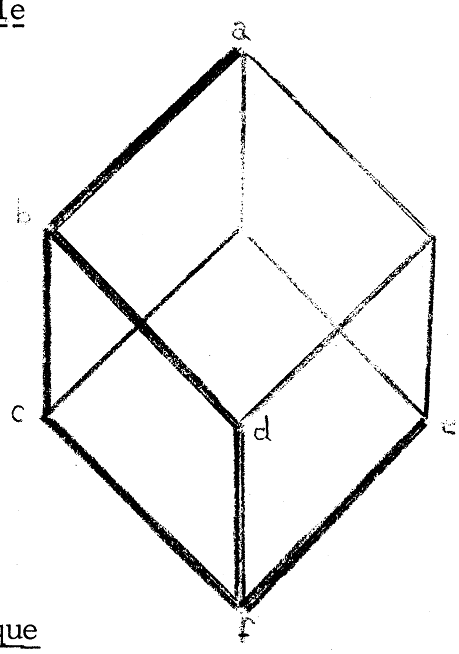
Propriété

Soient α et β deux points du n-cube. Tout chemin minimal entre α et β est tout entier contenu dans le sous hypercube minimal (pour la dimension) contenant α et β.

Ecart

Soit D un ensemble connexe de sommets du n-cube. Soient a et b deux points de D. On appelle écart dans D de a et b la longueur du plus court chemin de D entre a et b.

Exemple



Soit D = {a, b, c, d, e, f}, l'écart dans D de a et e est 4.

Remarque

L'écart, dans un p-cube les contenant, des points a et b est égal à leur distance.

III - FONCTIONS MONOTONES

Définition

Une fonction f de n variables x_1, x_2, ..., x_n est dite monotone lorsqu'il existe une expression en somme de monômes de f dans laquelle chacune des variables apparaît sous une seule forme ou n'apparaît pas.

Exemple

$f(a, b, c, d) = ab + \overline{a}bcd + \overline{a}b\overline{c}d = ab + bd$
est monotone de ses 4 variables.

Fonction croissante

Une fonction f est dite croissante de ses variables lorsqu'il existe une expression en somme de monômes de f dans laquelle chacune des variables apparaît sous la forme directe ou n'apparaît pas.

Propriété 1

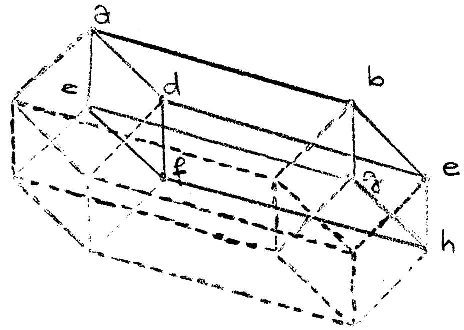
Une fonction f monotone de ses n variables est telle que f et $\overline{f}$ sont connexes sur le n-cube.

Centre

Soit D un sous-ensemble de points du n-cube. On dit qu'un point a de D est centre de D lorsque pour tout point x de D l'ensemble de tous les chemins minimaux entre a et x est contenu dans D.

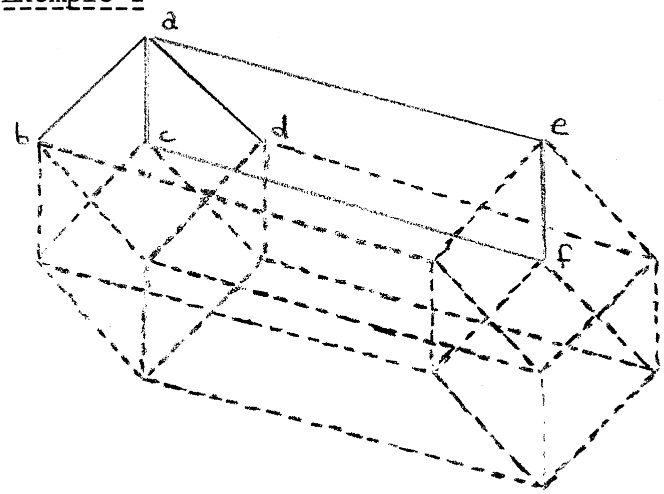
Autrement dit a est un centre de D lorsque pour tout point x de D le sous cube minimum contenant a et x est tout entier contenu dans D.

Exemple 1



D = {a, b, c, d, e, f, g, h}
chaque point de D est centre de D.

Exemple 2



$D = \{a, b, c, d, e, f\}$
a est centre de D. Aucun autre point de D n'est centre de D.

Propriété 2

Une fonction f est monotone si et seulement si l'image réciproque $f^{-1}(1)$ possède un centre.

On se place dans le cas où f est croissante. Alors $X \leq Y$ implique $f(X) \leq f(Y)$.

Soit $D = f^{-1}(1)$. Considérons les points X_1, X_2 ... X_p minimaux de D. Pour tout $X \geq X_i$, $i = 1, \ldots p$, $f(X) = 1$. Il en résulte que chaque sous cube minimum contenant l'élément maximum Π du n-cube et X_i est tout entier contenu dans D. Π est donc centre de D.

Réciproquement, on pose $D = f^{-1}(1)$. Supposons que Π est centre de D, alors f est croissante.

Soit $d = \underset{X \in D}{\mathrm{Max}}\ d(\Pi, X)$ et soient $X_1, X_2, \ldots, X_q$ les points de D à distance d de Π. Soient D_1 l'ensemble des points de D non comparables à $X_1, X_2, \ldots, X_q$, $d_1 = \underset{X \in D_1}{\mathrm{Max}}\ d(\Pi, X)$ et $X_{q+1}, \ldots, X_r$ les points de D_1 à distance d_1 de Π.

On définit de même D_2, d_2, $X_{r+1} \ldots X_q$, et ainsi de suite des ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_p$ et des nombres $d_1, d_2, \ldots, d_p$. Le processus s'arrête quand

D_{p+1} est vide. On a ainsi défini s points $X_1, X_2, \ldots X_s$ et pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$ le sous cube minimal passant par $\mathbb{1}$ et X_i est tout entier contenu dans D (puisque $X_i \in D$ pour tout i et que $\mathbb{1}$ est centre de D), donc pour tout $X \geq X_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, $f(X) = 1$ en conséquence f est croissante car $X \geq Y$ implique $f(X) \geq f(Y)$ puisque si $f(Y) = 0$ $f(X) \geq 0$ et si $f(Y) = 1$ alors il existe i tel que $Y \geq X_i$ et donc $X \geq X_i$ d'où $f(X) = 1$.

<u>Remarque</u> : Si f est monotone alors $\overline{f}$ est monotone donc $f^{-1}(0)$ possède un centre.

IV - DEFINITION DES FONCTIONS PERMUTANTES

1 - Opérateurs élémentaires de quantification

A chaque variable x_i on associe deux opérateurs :

$\forall x_i : L_n \longrightarrow L_n$

$\exists x_i : L_n \longrightarrow L_n$

définis respectivement par :

$$\forall x_i\ f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,0,\ldots,x_n)\ .\ f(x_1,x_2,\ldots,1,\ldots,x_n)$$

$$\exists x_i\ f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,0,\ldots,x_n) + f(x_1,x_2,\ldots,1,\ldots,x_n).$$

Ces définitions rejoignent la signification classique des quantificateurs.

Les fonctions $\forall x_i\ f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ et $\exists x_i\ f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ ne dépendent plus de la variable x_i.

2 - Définition des fonctions permutantes

Soit une partie X de U formée de p variables $(1 \leq p \leq n)$.
$X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p} \ ;\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_p\}$.

On choisit pour chaque générateur x de X l'un des deux opérateurs $\forall x$ ou $\exists x$. On désigne par qx l'un de ces deux opérateurs. Il y a, dans X, 2^p affectations d'opérateurs possibles.

Une telle affectation d'opérateurs :

$\{q_{i_1} x_{i_1}, q_{i_2} x_{i_2}, \ldots, q_{i_p} x_{i_p}\}$ sera notée plus simplement Q(X) et s'appellera <u>quantification de X</u>.

$\forall X$ (respectivement $\exists X$) représente la quantification $Q(X)$ dans laquelle l'opérateur choisi pour chaque générateur est $qx = \forall x$ (respectivement $qx = \exists x$).

On désigne par $Q(X)f$ la fonction de n-p variables obtenue par application successive des opérateurs de la quantification $Q(X)$ dans l'ordre suivant :

$$Q(X)\ f = (q_{i_1}\ x_{i_1} \circ q_{i_2}\ x_{i_2} \circ \dots \circ q_{i_p}\ x_{i_p})\ f.$$

Exemple

$$\forall x\ \exists y\ f(x, y) = \forall x\ [f(x, 0) + f(x, 1)]$$

$$= [f(0, 0) + f(0, 1)]\,[f(1, 0) + f(1, 1)]$$

Enfin si σ désigne une permutation des p premiers entiers on note

$$\sigma\ Q(X)\ f = \left(q_{i_{\sigma_1}}\ x_{i_{\sigma_1}} \circ q_{i_{\sigma_2}}\ x_{i_{\sigma_2}} \circ \dots \circ q_{i_{\sigma_p}}\ x_{i_{\sigma_p}}\right)\ f.$$

Définition

Une fonction f de L_n est dite permutante par rapport à $X \subset U$ si pour toute quantification Q de X et toute permutation σ on a :

$$\sigma\ Q(X)\ f = Q\ (X)\ f.$$

Si $X \not\subset U$ on pourra préciser que f est partiellement permutante.

On dit que f est permutante si elle est permutante par rapport à U tout entier.

Exemple

$f(a, b) = a + b$ est permutante.

En effet on a :

$$\forall a \ \forall b \ \ f(a, b) = \forall b \ \forall a \ \ f(a, b)$$

$$\exists a \ \exists b \ \ f(a, b) = \exists b \ \exists a \ \ f(a, b)$$

et ceci de façon évidente.

De plus

$$\forall a \ \exists b \ \ f(a, b) = \exists b \ \forall a \ \ f(a, b)$$

car

$$\forall a \ \exists b \ \ f(a, b) = \forall a \ [f(a, 0) + f(a, 1)] = \forall a \ (a + a + 1) = 1$$

$$\exists b \ \forall a \ \ f(a, b) = \exists b \ [f(0, b) + f(1, b)] = \exists b \ (b + 1 + b) = 1$$

De même, a et b jouant le même rôle dans f, on a

$$\forall b \ \exists a \ \ f(a, b) = \exists a \ \forall b \ f(a, b).$$

Mais la fonction $g(a, b) = a \oplus b = a\bar{b} + b\bar{a}$ n'est pas permutante puisque $\forall a \ \exists b \ \ g \neq \exists b \ \ \forall a \ g$:

$$\begin{aligned} \forall a \ \exists b \ g(a, b) &= \forall a \ [g(a, 0) + g(a, 1)] \\ &= \forall a \ [a + \bar{a}] = \forall a \ [1] = 1 \\ \exists b \ \forall a \ g(a, b) &= \exists b \ [g(a, b) \ . \ g(1, b)] \\ &= \exists b \ [b \ . \ \bar{b}] = \exists b \ [0] = 0 \end{aligned}$$

(Cette fonction et sa complémentaire ($\bar{g} = ab + \bar{a}\bar{b}$) sont d'ailleurs les seules fonctions de deux variables non permutantes).

3 - Simplification de la définition précédente

Proposition :

Soient x et y deux variables de U et Z l'ensemble des autres variables.

On a :

$$\forall x \, \exists y \, f(x, y, Z) \geq \exists y \, \forall x \, f(x, y, Z)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \forall x \, \exists y \, f(x, y, Z) &= \forall x \, [f(x, 0, Z) + f(x, 1, Z)] \\ &= [f(0, 0, Z) + f(0, 1, Z)] \, . \, [f(1, 0, Z + f(1, 1, Z)] \\ &= f(0, 0, Z) \, f(1, 0, Z) + f(0, 0, Z) \, . \, f(1, 1, Z) \\ &\quad + f(0, 1, Z) \, . \, f(1, 0, Z) + f(0, 1, Z) \, . \, f(1, 1, Z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \exists y \, \forall x \, f(x, y, Z) &= \exists y \, [f(0, y, Z) \, . \, f(1, y, Z)] \\ &= f(0, 0, Z) \, . \, f(1, 0, Z) + f(0, 1, Z) \, . \, f(1, 1, Z) \end{aligned}$$

La propriété est d'ailleurs évidente si l'on considère la signification classique des quantificateurs.

Conséquence :

Pour que f soit permutante il faut et il suffit que pour toute partition de U en C, D, on ait :

$$\forall C \, \exists D \, f(C, D) = \exists D \, \forall C \, f(C, D)$$

La condition est évidemment nécessaire.

Montrons qu'elle est suffisante.

Soit f une fonction non permutante. Il existe alors une quantification Q de U et une permutation σ des n premiers entiers telles que .

$$\sigma \, Q(U) \, f(U) \neq Q(U) \, f(U)$$

Or, puisque la quantification est totale, les fonctions Q(U) f(U) et σ Q(U) f(U) sont des constantes. Soit, par exemple :

$$\sigma \, Q(U) \, f(U) = 0 \qquad\qquad Q(U) \, f(U) = 1.$$

Soient C l'ensemble des variables x telles que $qx = \forall x$ dans Q(U) et D l'ensemble des autres variables. On obtient, grâce à la propriété précédente :

$\forall C \, \exists D \, f(U) \geq Q(U) \, f(U)$

et

$\exists D \, \forall C \, f(U) \leq \sigma \, Q(U) \, f(U)$

Soit

$\forall C \, \exists D \, f(U) = 1$

et

$\exists D \, \forall C \, f(U) = 0$

Il existe donc une partition de U en C, D telle que

$\forall C \, \exists D \, f(C, D) \neq \exists D \, \forall C \, f(C, D)$.

CHAPITRE II

PROPRIETES ELEMENTAIRES ET CONSTRUCTION DE CERTAINES FONCTIONS PERMUTANTES

Proposition 1

Si l'on change dans $f(U)$ supposée permutante toutes les occurrences d'une variable quelconque x en son complément $\bar{x}$ on obtient encore une fonction permutante.

En effet :

$$\forall x\, f(\bar{x}, Y) = f(1, Y)\, f(0, Y)$$

$$\forall x\, f(x, Y) = f(0, Y)\, f(1, Y)$$

et de même

$$\exists x\, f(x, Y) = \exists x\, f(\bar{x}, Y)$$

Proposition 2

Si f est permutante alors $\bar{f}$ est permutante

Cette propriété découle de la dualité $(0, 1)$, $(\cdot, +)$, $(\forall, \exists)$, en effet

$$\forall x\, \bar{f}(x, Y) = \bar{f}(1, Y)\, \bar{f}(0, Y) = \overline{f(1, Y) + f(0, Y)}$$

$$= \overline{\exists x\, f(x, Y)}$$

Proposition 3

Toute fonction monotone est permutante

On se ramène, d'après ce qui précède, au seul cas : f croissante.

Alors $\exists x\, f(x, Y) = f(0, Y) + f(1, Y)$
$= f(1, Y)$

car $f(1, Y) \geq f(0, Y)$

De même $\forall x\, f(x, Y) = f(0, Y) \cdot f(1, Y)$
$= f(0, Y)$

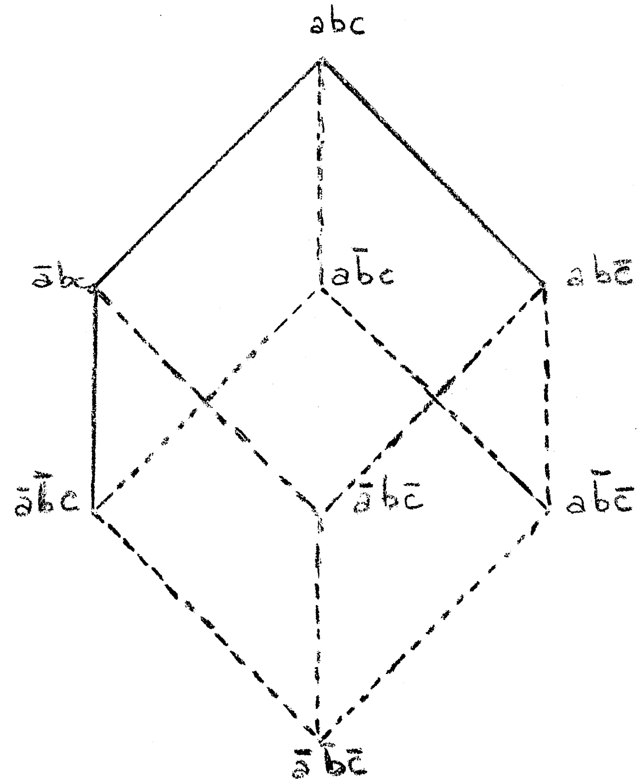
Faire agir qx revient donc à remplacer, dans $f_j x$ par 0 (respectivement 1) si qx = $\forall$ x (respectivement qx = $\exists$ x). L'ordre dans lequel sont rangés les quantificateurs n'intervient donc évidemment pas.

Remarque

Les fonctions monotones ne sont pas les seules fonctions permutantes.

Exemple

$f(a, b, c) = ab + \bar{a}c$



Plus généralement :

Proposition 4

Soit une partition de U en A, B, C, D telles que $f(A, B, C, D) = \sum_{u \in A} ug_u(B, D) + \bar{u}h_u(C, D)$ où f est monotone par rapport aux variables de D, g_u et h_u sont permutantes par rapport aux variables de $B \cup C \cup D$.

<u>Alors f est permutante.</u>

En effet f est partiellement permutante par rapport à B U C U D, indépendamment des opérateurs qa ($a \in A$) ayant éventuellement agi sur f auparavant et elle est partiellement permutante par rapport à A, indépendamment des opérateurs qx ($x \in B \cup C \cup D$) ayant éventuellement agi sur elle auparavant.

En effet soit $a \in A$. On a :

$$\forall a\, f = \forall a \left[ag_a + \bar{a}h_a + \sum_{u \in A\setminus\{a\}} (ug_u + \bar{u}h_u)\right]$$

$$= \left[g_a + \sum_{u \in A\setminus\{a\}} (ug_u + \bar{u}h_u)\right] \cdot \left[h_a + \sum_{u \in A\setminus\{a\}} (ug_u + \bar{u}h_u)\right]$$

$$= h_a\, g_a + \sum_{u \in A\setminus\{a\}} (ug_u + \bar{u}h_u)$$

Faire agir $\forall a$, $a \in A$, revient à remplacer dans l'expression en somme de f, $ag_a + \bar{a}h_a$ par $g_a\, h_a$, ceci indépendamment des variables de B U C U D.

De même faire agir $\exists a$, $a \in A$, revient à remplacer dans l'expression en somme de f, $ag_a + \bar{a}h_a$ par $g_a + h_a$. La fonction f est donc permutante.

CHAPITRE III

CARACTERISATION GEOMETRIQUE

I - CONNEXITE - BICONNEXITE

Lemme

Si une fonction f de L_n est permutante alors elle est partiellement permutante par rapport à tout ensemble X de n-1 variables.

Supposons que f n'est pas permutante par rapport à un certain sous-ensemble X de n-1 variables et soit x la variable non contenue dans X. Si f est non permutante par rapport à X alors $f(x_o, X)$ est non permutante pour une certaine valeur, 0 ou 1, de x_o.

Supposons, par exemple, que f(1, X) est non permutante. Alors il existe une partition de X en C, D telle que :

$$\forall C\ \exists D\ f(1, C, D) = 1 \qquad \text{et} \qquad \exists D\ \forall C\ f(1, C, D) = 0$$

On peut écrire :

$$f(x, C, D) = x\ \ f(1, C, D) + \bar{x}\ f(0, C, D)$$

et on a :

$$\forall x\ \forall C\ \exists D\ f(x, C, D) = [\forall C\ \exists D\ f(0, C, D)]\ .\ [\forall C\ \exists D\ f(1, C, D)]$$
$$= \forall C\ \exists D\ f(0, C, D)$$

$$\forall x\ \exists D\ \forall C\ f(x, C, D) = [\exists D\ \forall C\ f(0, C, D)]\ .\ [\exists D\ \forall C\ f(1, C, D)]$$
$$= 0$$

$$\exists x\ \forall C\ \exists D\ f(x, C, D) = \forall C\ \exists D\ f(0, C, D) + \forall C\ \exists D\ f(1, C, D)$$
$$= 1$$

$$\exists x\ \exists D\ \forall C\ f(x, C, D) = \exists D\ \forall C\ f(0, C, D) + \exists D\ \forall C\ f(1, C, D)$$
$$= \exists D\ \forall C\ f(0, C, D)$$

Alors f n'est pas permutante, sinon

$$\forall C\ \exists D\ f(0, X) = 0 \quad \text{et} \quad \exists D\ \forall C\ f(0, X) = 1,$$

ce qui est absurde d'après la propriété d'ordre.

Corollaire 1

Si f est permutante alors f est partiellement permutante par rapport à tout ensemble $X \subseteq U$.

Corollaire 2

Si f est permutante, alors f et $\bar{f}$ sont connexes.
(Nous dirons plus simplement que f est "biconnexe").

Il suffit de montrer que si f n'est pas connexe elle n'est pas permutante pour parvenir au résultat.

Soient α et β deux points du n-cube. On note $d(\alpha, \beta)$ la distance entre ces deux points (nombre de variables différentes dans les monômes canoniques associés **à** α et β).

Soit f une fonction non connexe alors $f^{-1}(1)$ possède q constituants connexes. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_q$, ces constituants connexes. $(2 \leq q)$.

On pose

$$P_i = \underset{\substack{\alpha_1 \in A_1 \\ \alpha_i \in A_i}}{\mathrm{Min}} d(\alpha_1, \alpha_i)$$

on a : $p_i > 2$ pour $i = 1, 2, \ldots, q$

Soit $p = \underset{i=1,\ldots,q}{\mathrm{Min}} p_i$. Ce minimum est réalisé par au moins un p_j. Donc $p = p_j = \underset{\substack{\alpha_1 \in A_1 \\ \alpha_j \in A_j}}{\mathrm{Min}} d(\alpha_1, \alpha_j)$

De plus le minimum p_j de la distance entre les points de A_1 et ceux de A_j est réalisé par au moins un couple de points. Soit (β, γ), $\beta \in A_1$, $\gamma \in A_j$, un tel couple. Les points β et γ correspondent à deux monômes canoniques distants de p variables ; soit, en ordonnant, et éventuellement en complémentant, correctement les variables ($a_i = \tilde{x}_{j_i}$ où $\tilde{x}$ représente x ou $\bar{x}$)

$$\beta = a_1\, a_2 \ldots a_p\ \lambda$$
$$\gamma = \bar{a}_1\, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p\ \lambda$$

où λ représente un produit des n-p variables $x_{j_{p+1}}, x_{j_{p+2}}, \ldots, x_{j_n}$ directes ou complémentées.

C'est à dire que β et γ sont opposés sur un sous hypercube K_p du n-cube, de dimension p, défini par $\lambda = 1$. Sur le p-cube K_p la fonction f s'écrit

$$f = a_1\, a_2 \ldots a_p + \bar{a}_1\, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_p \quad \text{soit}$$
$$f = \prod_{i=1}^{p} a_i + \prod_{i=1}^{p} \bar{a}_i$$

en effet tout point de n-cube pour lequel la fonction f ne s'annule pas quand λ prend la valeur 1, s'écrit $\tilde{a}_1\, \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_p\ \lambda$ où $\tilde{a}_i$ représente a_i ou $\bar{a}_i$. D'après la construction un tel point ne saurait être que β ou γ, sinon $d(\beta, \gamma)$ ne réaliserait pas le minimum des distances de A_1 aux autres constituants connexes.

Mais alors f n'est pas permutante par rapport aux variables $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.

En effet on a, sur le sous cube K_p

$$\exists a_k\ f = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} a_i + \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} \bar{a}_i$$

et

$$\forall a_k\ f = \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} a_i\right)\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} \bar{a}_i\right) = 0$$

Donc en appliquant à f, sur le p-cube K_p, les quantifications

$\forall a_1\ \exists a_2\ \exists a_3 \ldots \exists a_p$ et $\exists a_2\ \exists a_3 \ldots \exists a_p\ \forall a_1$

on obtient que f est non permutante puisque

$\forall a_1\ \exists a_2 \ldots \exists a_p\ f = \forall a_1\ (a_1 + \bar{a}_1) = 1$

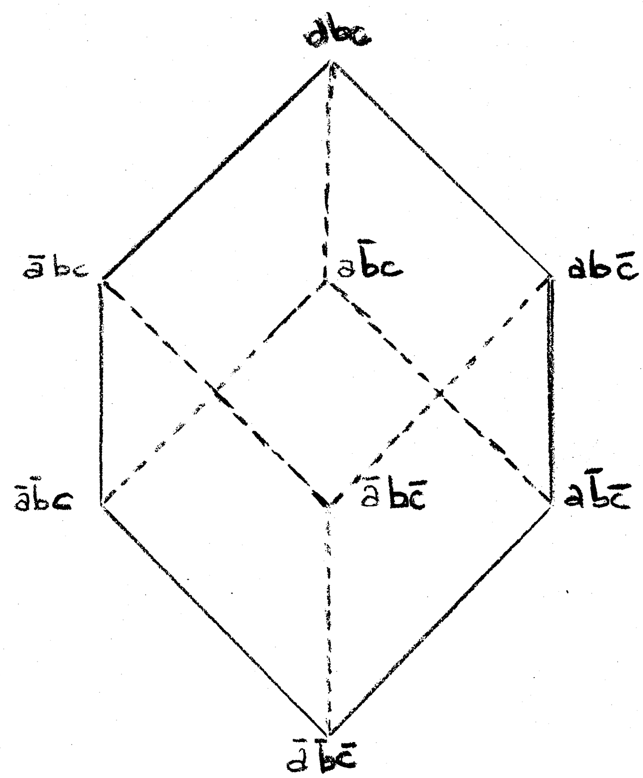
$\exists a_2 \ldots \exists a_p\ \forall a_1\ f = 0$

La fonction f n'est donc pas permutante par rapport aux variables $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, et d'après le corollaire 1, f n'est pas permutante.

<u>Remarques</u>

(1) Une fonction f connexe n'est pas forcément biconnexe.

<u>Exemple</u> : $f(a, b, c) = bc + \bar{a}\bar{b} + a\bar{c}$

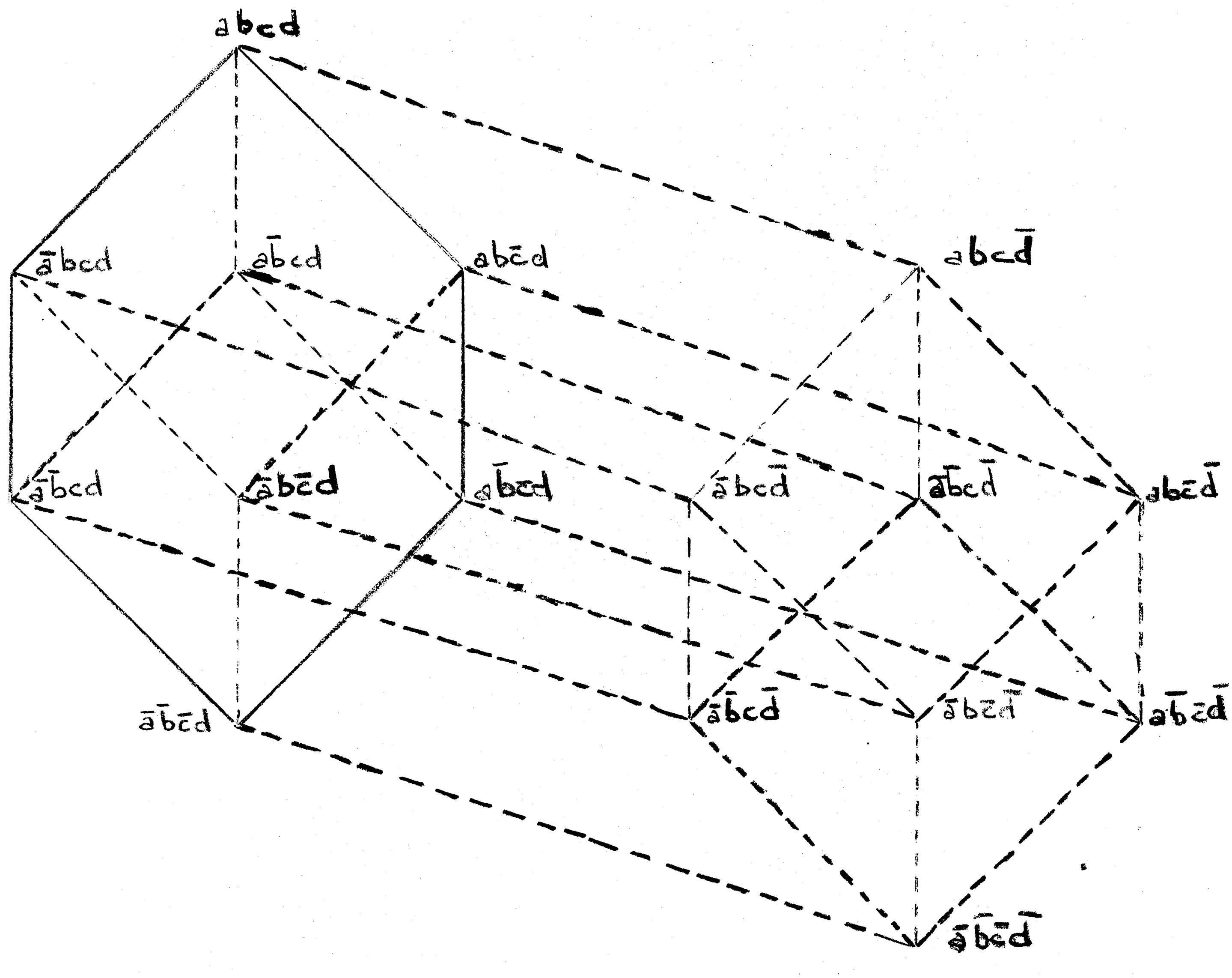


En effet $\bar{f} = a\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c}$ n'est pas connexe.

(2) Une fonction f permutante est biconnexe, mais une fonction biconnexe n'est pas forcément permutante.

Exemple

$$f(a, b, c, d) = d(a\bar{c} + \bar{a}\bar{b} + bc)$$



On remarque que f n'est pas biconnexe sur le 3-cube d = 1.

II - FAIBLE CONVEXITE

Définitions

- Un sous-ensemble D de points d'un n-cube 2^n est dit faiblement convexe si pour tout couple (a, b) de points de D, l'écart dans D de a et b est égal à l'écart dans 2^n de ces deux points.

Autrement dit D est faiblement convexe s'il contient pour tout couple (a, b) de ses points, au moins un chemin minimum entre a et b.

- Une fonction f est dite faiblement convexe si $f^{-1}(1)$ est faiblement convexe sur le n-cube. Elle est dite faiblement biconvexe si f et $\bar{f}$ sont faiblement convexes.

Propriété

Pour que f soit faiblement convexe il faut et il suffit que f soit connexe par rapport à tout sous-ensemble de U.

En effet si f est faiblement convexe alors f est connexe par rapport à tout sous-ensemble de U puisque entre deux points quelconques de $f^{-1}(1)$ il y a un chemin minimum, donc dans chaque sous cube de 2^n il y a un chemin entre deux points de $f^{-1}(1)$.

Réciproquement si f est connexe par rapport à tout sous-ensemble de U alors sur chaque p-cube du n-cube $f^{-1}(1)$ est connexe.

Soient a et b deux points de $f^{-1}(1)$.
Ils sont à distance p. Soit K_p le cube minimum qui contient a et b. Comme f est connexe sur K_p il y a au moins dans K_p un chemin de longueur p entre a et b.

Théorème

Si f est permutante alors f est faiblement biconvexe.

En effet si **f** est permutante f est biconnexe ; d'autre part f est permutante par rapport à tout sous-ensemble de U donc f est biconnexe sur tous les p-cubes, $p \leq n$, du n-cube.

Remarque

La réciproque est inexacte. Une fonction faiblement biconvexe n'est pas forcément permutante.

Exemple

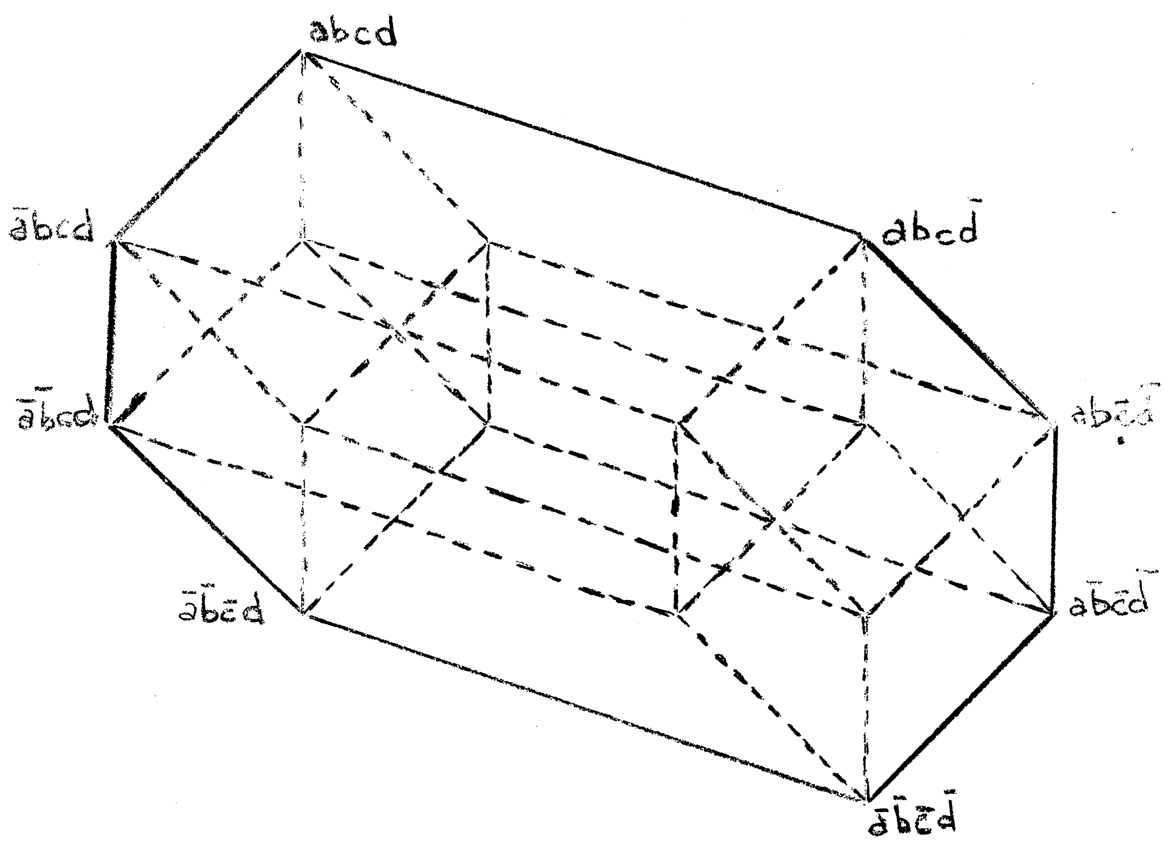
$$f(a, b, c, d) = bcd + \bar{a}\bar{b}d + \bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{d}$$

n'est pas permutante car

$$\forall a\ \exists b\ \forall c\ \exists d\ f(a, b, c, d) = 1$$

$$\exists b\ \forall a\ \forall c\ \exists d\ f(a, b, c, d) = 0.$$

Pourtant cette fonction est biconnexe sur le 4-cube et sur tous les sous cubes du 4-cube.



III - FONCTION COLLIER

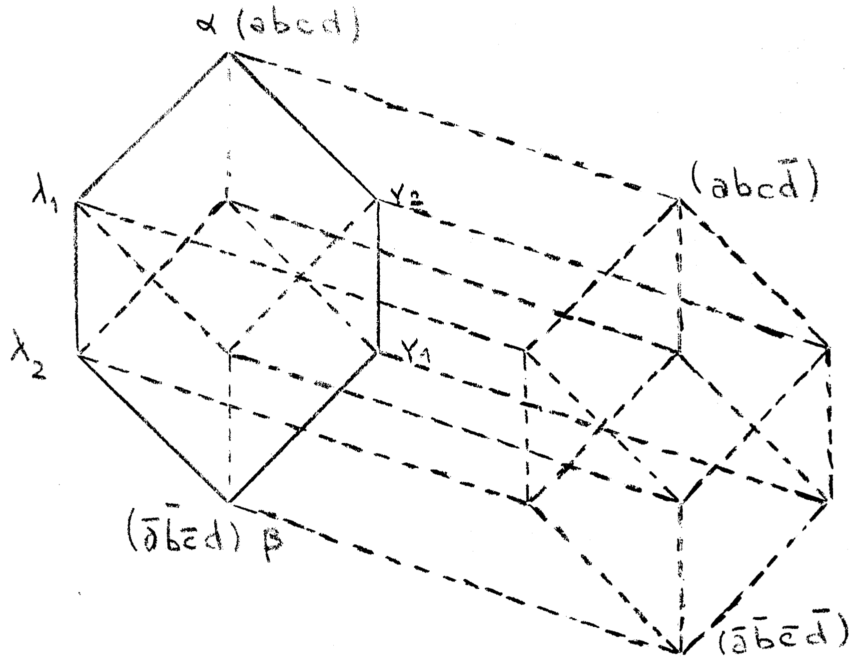
Définition

Soient α et β deux sommets quelconques du n-cube. Ces deux sommets sont à distance p sur le n-cube et sont donc opposés sur un certain p-cube K_p. Soit λ un chemin minimum entre α et β. Il est donc tout entier contenu dans K_p.

L'ensemble des points opposés, dans K_p, à chacun des sommets du chemin λ constitue un autre chemin (lui aussi minimum) entre α et β.

L'ensemble des deux chemins ainsi définis constitue ce que nous appelons tour du p-cube ou p-collier.

Exemple



Les points α et β sont à distance 3. (α, λ_1, λ_2, β) constitue un chemin minimum entre α et β. γ_1 et γ_2 sont les points opposés respectivement à λ_1 et λ_2 dans le 3-cube minimum contenant α et β. α λ_1 λ_2 β γ_1 γ_2 constitue un 3-collier.

Remarquons qu'un p-collier est connexe et que, si $p \neq 3$, il est biconnexe.

Remarquons aussi qu'un p-collier est biconnexe sur tous les p-cubes, $q \leq p - 1$, du n-cube, car l'intersection d'un p-collier avec un q-cube quelconque est réduite au plus à un chemin de longueur q donc minimum et biconnexe sur le q-cube.

Définition

Soit f une fonction booléenne de n variables. On dit que f est une fonction n-collier lorsque $f^{-1}(1)$ est un n-collier.

Propriété

Si $n \geq 3$, une fonction n-collier n'est pas permutante.

Nous avons vù que dans le cas n = 3 une fonction n-collier est non biconnexe donc non permutante.

En revanche dans le cas n > 3, on ne peut conclure de cette façon.

Soit donc f une fonction n-collier.

En ordonnant, et éventuellement en complémentant, correctement les variables ($a_i = \tilde{x}_{j_i}$, pour $1 \leq i \leq n$, où $\tilde{x}$ représente x ou $\bar{x}$) on obtient que la fonction f est composée de 2 chemins opposés entre les points opposés correspondant aux monômes canoniques $a_1\ a_2\ a_3 \dots a_n$ et $\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n$.

La fonction f s'écrit donc, dans la forme canonique (les variables ayant été correctement ordonnées).

$$
\begin{aligned}
f = {} & a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n + \bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3\, \bar{a}_4 \dots \bar{a}_{n-1}\, \bar{a}_n \\
& + \bar{a}_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n + a_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3\, \bar{a}_4 \dots \bar{a}_{n-1}\, \bar{a}_n \\
& + \bar{a}_1\, \bar{a}_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n + a_1\, a_2\, \bar{a}_3\, \bar{a}_4 \dots \bar{a}_{n-1}\, \bar{a}_n \\
& + \bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n + a_1\, a_2\, a_3\, \bar{a}_4 \dots \bar{a}_{n-1}\, \bar{a}_n \\
& + \dots\dots\dots \\
& + \bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3\, \bar{a}_4 \dots \bar{a}_{n-1}\, a_n + a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, \bar{a}_n
\end{aligned}
$$

soit, dans la base complète :

$$\begin{aligned} f = {} & a_2\, a_3 \ldots a_n + \bar a_2\, \bar a_3 \ldots \bar a_n \\ & + \bar a_1\, a_3 \ldots a_n + a_1\, \bar a_3 \ldots \bar a_n \\ & + \bar a_1\, \bar a_2\, a_4 \ldots a_n + a_1\, a_2\, \bar a_4 \ldots \bar a_n \\ & + \ldots \qquad\qquad + \ldots \\ & + \bar a_1\, \bar a_2 \ldots \bar a_{n-2}\, a_n + a_1\, a_2 \ldots a_{n-2}\, \bar a_n \\ & + \bar a_1\, \bar a_2 \ldots \bar a_{n-1} \quad + a_1\, a_2 \ldots a_{n-1} \end{aligned}$$

ou, dans une écriture plus condensée,

$$f = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j<i} \bar a_j \prod_{k>i} a_k + \prod_{j<i} a_j \prod_{k>i} \bar a_k \right)$$

Appliquons à f la quantification $\forall a_1$

$$\forall a_1\ f = \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{1<j<i} a_i \prod_{k>i} \bar a_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} \prod_{1<j<\ell} \bar a_j \prod_{k>\ell} a_k \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \prod_{1<j<i} a_j \prod_{1<j<\ell} \bar a_j \prod_{k>i} \bar a_k \prod_{k>\ell} a_k$$

Or, si (i, ℓ) est différent de $(2, n)$ et de $(n, 2)$ l'expression :

$$\prod_{1<j<i} a_j \prod_{1<j<\ell} \bar a_j \prod_{k>i} \bar a_k \prod_{k>\ell} a_k$$

est nulle car a_{i-1} apparaît dans $\prod_{1<j<i} a_j$ et ou bien le terme $\bar a_{i-1}$ apparaît dans $\prod_{1<j<\ell} \bar a_j$, si $\ell \geq i$, ou bien les termes $\bar a_{i+1}$ et a_{i+1} apparaissent respectivement dans $\prod_{k>i} \bar a_k$ et dans $\prod_{k>\ell} a_k$, si $\ell \leq i$.

Par conséquent, nous obtenons que :

$$\forall a_1\ f = \prod_{j=2}^{n-1} \bar a_j \prod_{k=3}^{n} \bar a_k + \prod_{j=2}^{n-1} a_j \prod_{k=3}^{n} a_k$$

ou, en tenant compte de l'idempotence de la multiplication

$$\forall a_1 \ f = \prod_{j=2}^{n} \bar{a}_j + \prod_{j=2}^{n} a_j$$

La fonction $\forall a_1 \ f$ n'est donc pas permutante, car elle n'est pas connexe. En conséquence f n'est pas permutante, puisqu'il suffit d'appliquer les quantifications :

$\forall a_2 \ \exists a_3 \ldots \exists a_n \ \forall a_1$ et $\exists a_3 \ldots \exists a_n \ \forall a_2 \ \forall a_1$ pour établir que f n'est pas permutante, puisque

$\forall a_2 \ \exists a_3 \ldots \exists a_n \ \forall a_1 \ f = 1$ et

$\exists a_3 \ldots \exists a_n \ \forall a_2 \ \forall a_1 \ f = 0.$

On remarque que, dans le cas d'une fonction n-collier, il suffit de faire intervenir deux fois l'opérateur $\forall x$ pour montrer que la fonction n'est pas permutante, alors que dans le cas d'une fonction non connexe il suffit de le faire intervenir une seule fois.

Théorème

Si f est permutante alors sur aucun p-cube du n-cube, $3 \leq p \leq n$, ni f, ni $\bar{f}$ ne sont fonctions p-collier.

En effet, si f est permutante sur le n-cube alors f est permutante sur tout p-cube, $1 \leq p \leq n$ du n-cube.

f ni $\bar{f}$ ne sont donc sur aucun p-cube, $3 \leq p \leq n$, de la forme tour du cube. (La fonction tour du cube pour $p \leq 2$ est constante donc permutante).

IV - CARACTERISATION GEOMETRIQUE

Lemme 1

Si $\exists z\ f(X, z)$ est non connexe alors $f(x, Z)$ est non connexe.

En effet si $\exists z\ f(X, z)$ est non connexe alors $g(X) = f(X, 0) + f(X, 1)$ est non connexe. Il existe donc au moins deux composantes connexes dans $f^{-1}(1)$, soient deux valeurs X_o et X_1 de X telles que

$$g(X_o) = g(X_1) = 1$$

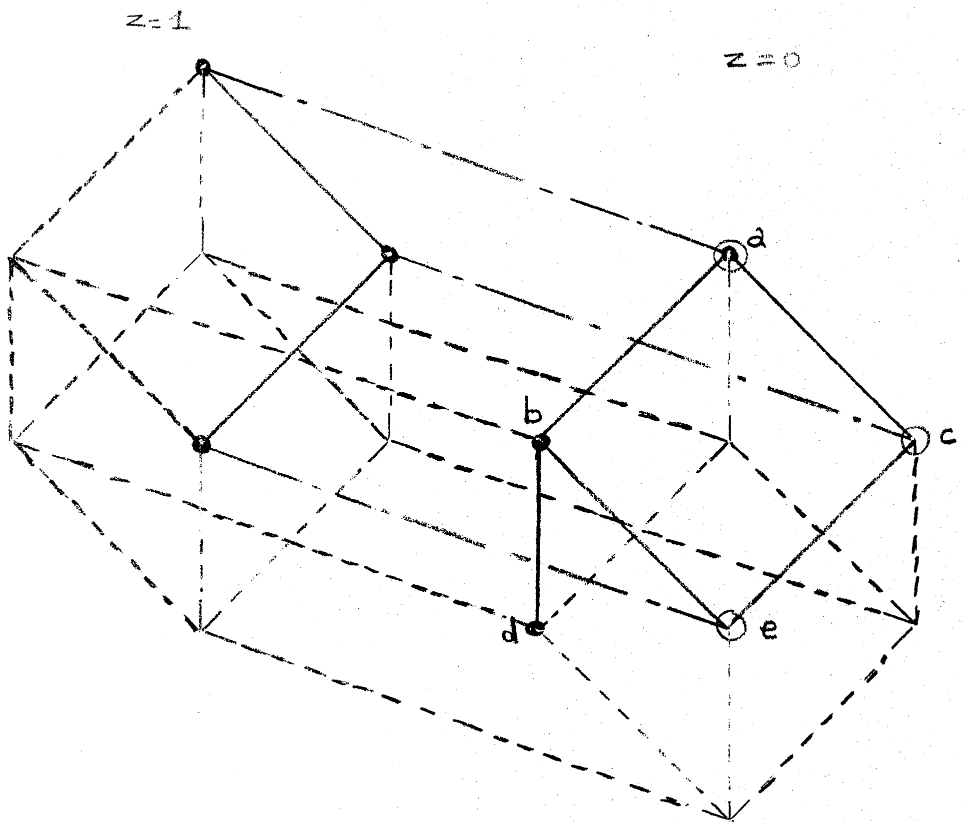
et telles qu'il n'existe pas de chemin permettant de passer de X_o à X_1 en restant dans $g^{-1}(1)$. Donc sur chaque chemin joignant, dans le n-cube, X_o à X_1 il y a un sommet X_α tel que $g(X_\alpha) = 0$; c'est à dire

$$f(1, X_\alpha) + f(0, X_\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad f(1, X_\alpha) = f(0, X_\alpha) = 0.$$

Aucune des chaînes du n-cube joignant $(0, X_o)$ (ou $(1, X_o)$) à $(1, X_1)$ (ou $(0, X_1)$) ne peut donc être suivie en restant dans $f^{-1}(1)$ et donc f est non connexe.

Dans l'hypothèse où f est faiblement convexe la seule solution possible est : f de la forme totalement disjointe $\Pi x_i + \Pi \bar{x}_i$, en effet dans une telle hypothèse on a $g(X_o) = g(X_1) = 1$ et en chaque sommet X_α d'un chemin quelconque du n-cube, entre X_1 et X_o, $g(X_\alpha) = 0$.

Remarquons que cette propriété peut être établie pour une démonstration géométrique. En effet, on peut interpréter géométriquement $\exists z\ f(X, z)$ comme la projection dans la direction z, sur un n-1-cube K_{n-1} des cubes $z = 0$ et $z = 1$ (on pourra prendre par exemple le cube $z = 0$ pour K_{n-1}) et considérer l'union dans K_{n-1} des images réciproques D_o et D_1 de 1 sur chacun des deux cubes $z = 0$ et $z = 1$.



$D_o = \{a, b, d\}$

$D_1 = \{a, c, e\}$

Si f(X, Z) est connexe alors $\exists z$ f(X, z) est connexe. En effet soient X_1 et X_2 deux points de $g^{-1}(1)$. On a $f(X_o, 0) + f(X_o, 1) = 1$ et $f(X_1, 0) + f(X_1, 1) = 1$.

Soit, par exemple, $f(X_o, 0) = 1 = f(X_1, 1)$. Comme f est supposée connexe il y a donc un chemin (X_α, z_α) entre X_o, 0 et X_1, 1 dans le n-cube X, z ; et donc un chemin X_α entre X_o et X_1 dans K_{n-1} donc $D_o \cup D_1$ est connexe.

Lemme 2

Soit f une fonction booléenne faiblement convexe. Si $\forall z$ f(X, z) est non connexe alors f(X, z) contient un tour d'un certain p-cube, $2 < p \leq n$.

Si $g(X) = \forall z\, f(X, z)$ est non connexe, alors il existe une partition de X en Y, Z telle qu'en fixant les variables de Z à Z_o (on a éventuellement Y = X), $g(Y, Z_o)$ soit de la forme totalement disjointe, c'est à dire qu'en ordonnant, et éventuellement en complémentant, correctement les q générateurs de Y ($a_i = \tilde{y}_{j_i}$ où $\tilde{y} = y$ ou $\bar{y}$) $g(Y, Z_o)$ s'écrive :

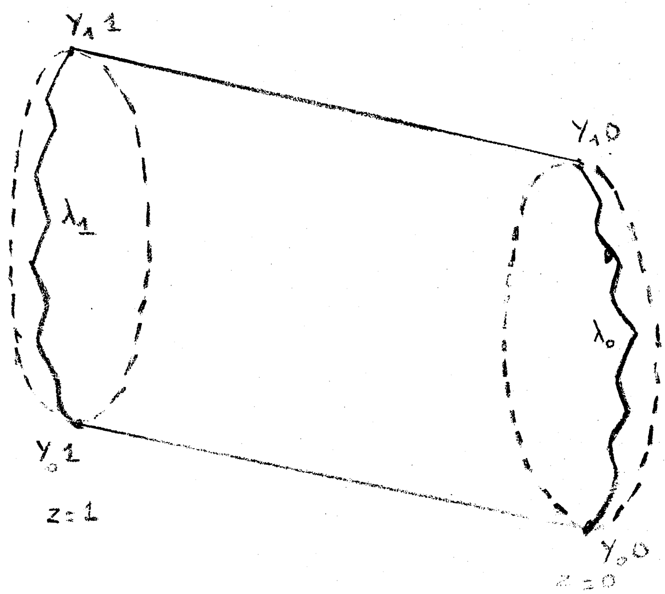
$$g(Y, Z_o) = \prod_{i=1}^{q} a_i + \prod_{i=1}^{q} \bar{a}_i$$

On a $g(Y, Z_o) = f(Y, Z_o, 0)\ f(Y, Z_o, 1)$.

C'est à dire qu'il existe deux valeurs Y_o etY_1 de Y, à distance q (les valeurs 0 et 1 des a_i) telles que

$f(Y_o, Z_o, 0)\ .\ f(Y_o, Z_o, 1) = 1$

$f(Y_1, Z_o, 0)\ .\ f(Y_1, Z_o, 1) = 1$



Soit :

$f(Y_o, Z_o, 0) = f(Y_o, Z_o, 1) = f(Y_1 , Z_o, 0) = f(Y_1, Z_o, 1)$

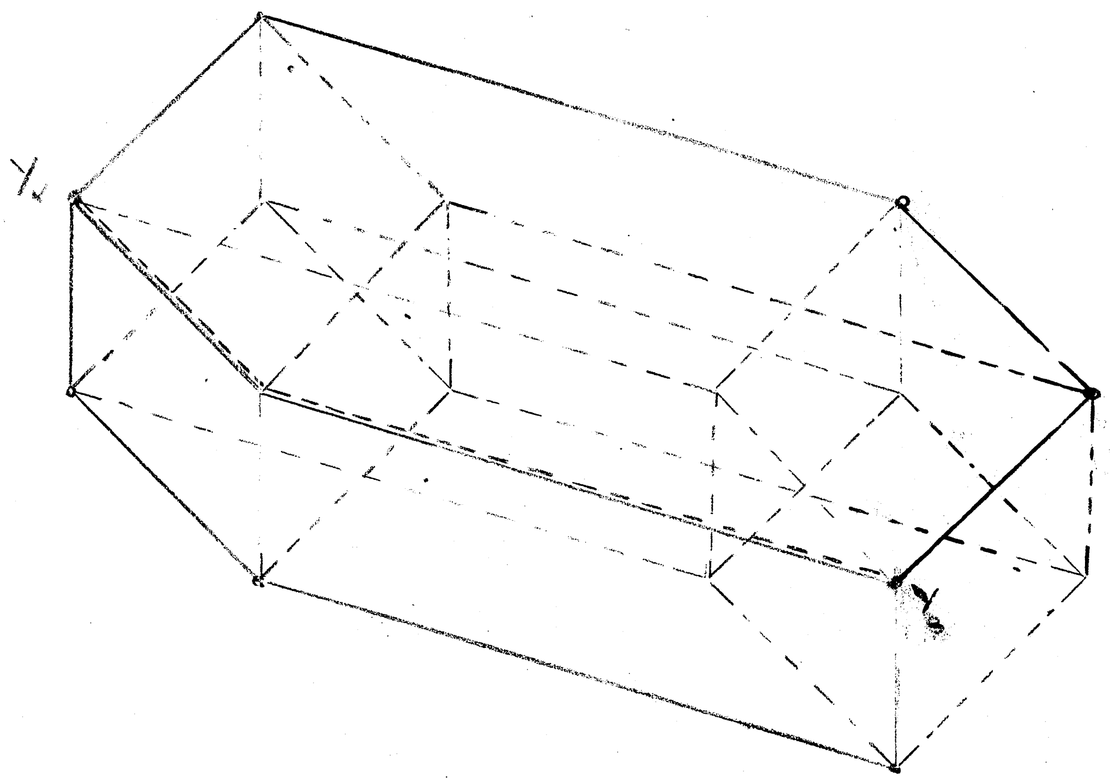
Comme f est supposée faiblement convexe il existe, dans le cube Z_o, 0 un chemin minimal λ_o entre Y_o et Y_1, lequel chemin est tout entier contenu dans $f^{-1}(1)$; de même il existe dans le cube Z_o, 1 un chemin minimal λ_1 entre Y_o et Y_1 qui est tout entier contenu dans $f^{-1}(1)$.

Comme $g(Y, Z_o)$ est sous forme totalement disjointe (c'est à dire que les seules valeurs qui n'annulent pas g sont Y_o et Y_1) il ne peut y avoir de valeur Y_α, $Y_\alpha \neq Y_o$ et $Y_\alpha \neq Y_1$, de Y telle que $f(Y_\alpha, Z_o, 1) = f(Y_\alpha, Z_o, 0) = 1$. En conséquence les seuls chemins possibles dans $f^{-1}(1)$ pour aller d'un point du chemin λ_o à un point du chemin λ_1 passent par les points Y_o et Y_1. On en déduit que l'ensemble constitué des points $(Y_o, Z_o, 1)$, $(Y_o, Z_o, 0)$, $(Y_1, Z_o, 1)$ et $(Y_1, Z_o, 0)$ ainsi que des chemins λ_o et λ_1 est un (q+1)-collier.

En effet soit Y_α un sommet quelconque appartenant au chemin λ_o. Il est à distance r, $1 \leq r \leq q$ de $(Y_o, 0)$; dans l'ensemble des sommets du chemin λ_1 il s'en trouve un , soit Y_β, qui est à distance q-r de $(Y_o, 1)$.

Autrement dit, en ordonnant et éventuellement en complémentant correctement les variables, Y_α correspond au monôme canonique $\prod_{i=1}^{r} a_{j_i} \prod_{i=r+1}^{q} \bar{a}_{j_i}$ dans le cube Z_o, 0 et tout point à distance q-r de $(Y_o, 1)$ s'écrit $\prod_{j_i \in E_r} \bar{a}_{j_i} \prod_{j_i \in E_{q-r}} a_{j_i}$ dans le cube Z_o, 1, E_r représentant un ensemble quelconque de r variables prises dans les q variables $a_1, \dots a_q$.

Nous avons vu que les seuls chemins possibles de $f^{-1}(1)$ pour aller de Y_α à Y_β passent par les points $(Y_o, 0)$ et $(Y_o, 1)$ ou $(Y_1, 0)$ et $(Y_1, 1)$ du cube Z_o. En conséquence l'écart dans $f^{-1}(1)$ de Y_α et Y_β est est q+1. Or si $E_r \neq \{1, 2, \dots, r\}$ l'écart, dans le q+1 cube Z_o, de Y_α et Y_β est strictement inférieur à q+1, et, puisque f est supposée faiblement convexe il devrait y avoir un chemin de longueur s, dans $f^{-1}(1)$ qui relie Y_α et Y_β.



(Sur la figure Y_α et Y_β sont à distance 2. Il y a donc un chemin de longueur 2 qui les joint, donc g ne peut avoir la forme $\Pi a_i + \Pi \bar{a}_i$).

On déduit de ce qui précède que le point du chemin λ_1 qui est à distance q-r de Y_o, 1 est forcément le point opposé à Y_α sur le (q+1)-cube Z_o. L'ensemble des chemins λ_o et λ_1 et des points $(Y_o, Z_o, 0)$, $(Y_o, Z_o, 1)$, $(Y_1, Z_o, 0)$ et $(Y_1, Z_o, 1)$ constitue donc bien un (q+1)-collier.

Lemme 3

Soit f une fonction faiblement convexe de n variables. Si $\exists z\, f(X, z)$ est une fonction (n-1)-collier alors ou bien $f(X, z)$ est une fonction n-collier, ou bien $f(X, 0)$ ou $f(X, 1)$ est une fonction (n-1)-collier.

Soit $g(X) = \exists z\, f(X, z) = f(X, 0) + f(X, 1)$. On considère les projections dans la direction z des cubes z = 0 et z = 1 sur un (n-1)-cube K_{n-1}. $g^{-1}(1)$ est alors l'union, dans K_{n-1}, des projections des images réciproques D_o et D_1 de 1 sur chacun des cubes z = 0 et z = 1.

$g(X)$ est une fonction (n-1)-collier. On note X_i les points de K_{n-1} tels que $g(X_i) = 1$ $(i = 1, 2, \dots 2n-2)$. Pour tout autre point X_j de K_{n-1} on a $g(X_j) = 0$.

$g(X_i) = 1$ implique $f(X_i, 0) + f(X_i, 1) = 1$. On se trouve alors devant l'alternative suivante :

- ou bien, pour tout i, $1 \leq i \leq 2n - 2$, $f(X_i, 0) = 1$ (ou $f(X_i, 1) = 1$) et donc f est (n-1)-collier sur le cube $z = 0$ (ou sur le cube $z = 1$) ;
- ou bien il existe α tel que $g(X_\alpha) = 1$ et $f(X_\alpha, 0) = 0$. On a alors $f(X_\alpha, 1) = 1$.

Il y a alors dans le cube $z = 1$ au moins une chaîne de longueur n-1 de $f^{-1}(1)$ passant par X_α (qui se projette, suivant la direction z, sur le cube K_{n-1} selon une chaîne du tour du cube X_i). En effet soit, dans le cube $z = 1$, λ la chaîne de $f^{-1}(1)$ qui passe par X_α et soit d la longueur de cette chaîne. On suppose $d < n - 1$.

Soient X_β et X_γ les extrémités de cette chaîne dans le cube $z = 1$. On a, par faible convexité, $f(X_\beta, 0) = f(X_\gamma, 0) = 1$, puisqu'il y a un chemin entre les points de $f^{-1}(1)$ appartenant au cube $z = 0$ et les points de $f^{-1}(1)$ appartenant au cube $z = 1$. Or les points $X_\beta, 0$ et $X_\gamma, 0$ ne sont pas jointifs par un chemin de longueur d de $f^{-1}(1)$, puisque $f(X_\alpha, 0) = 0$ et qu'un chemin de $f^{-1}(1)$ passe forcément par X_α de par la forme collier de $\exists z\, f(X, z)$.
Si donc la chaîne λ n'est pas de longueur n-1 f n'est pas connexe sur le cube $z = 0$. De même puisque $f(X, z)$ est supposée n'être pas un collier sur le cube $z = 1$, il y a une chaîne de longueur n-1 de $f^{-1}(1)$ dans le cube $z = 0$.

Ces deux chaînes sont jointives puisque f est connexe. Il existe donc deux points à distance n-1, de K_{n-1}, soient X_β et X_γ, tels que :

$$f(X_\beta, 0) = f(X_\beta, 1) = f(X_\gamma, 0) = f(X_\gamma, 1) = 1$$

De plus ces deux chaînes forment un tour du n-cube car, par faible convexité, si les points de l'ensemble constitué par les deux chaînes mises en évidence n'étaient pas deux à deux opposés il y aurait un chemin entre eux et ce chemin se projetterait sur K_{n-1} en deux points qui n'appartiendraient pas au tour du cube.

Lemme 4

Soit f une fonction faiblement biconvexe. Si $\forall z\ f(X, z)$ est une fonction collier alors il existe un p-cube, $3 \leq p \leq n-1$, où f est une fonction collier.

Si $g(X) = \forall z\ f(X, z) = f(X, 0) \cdot f(X, 1)$ est une fonction collier cela signifie que sur le cube K_{n-1} l'intersection de D_o et D_1, projections sur K_{n-1} des images réciproques de 1 sur les cubes z = 0 et z = 1, est un tour du cube. Alors il existe 2(n-1) points X_i de K_{n-1} tels que $g(X_i) = 1$ (et pour tout autre point X_j de K_{n-1} $g(X_j) = 0$).

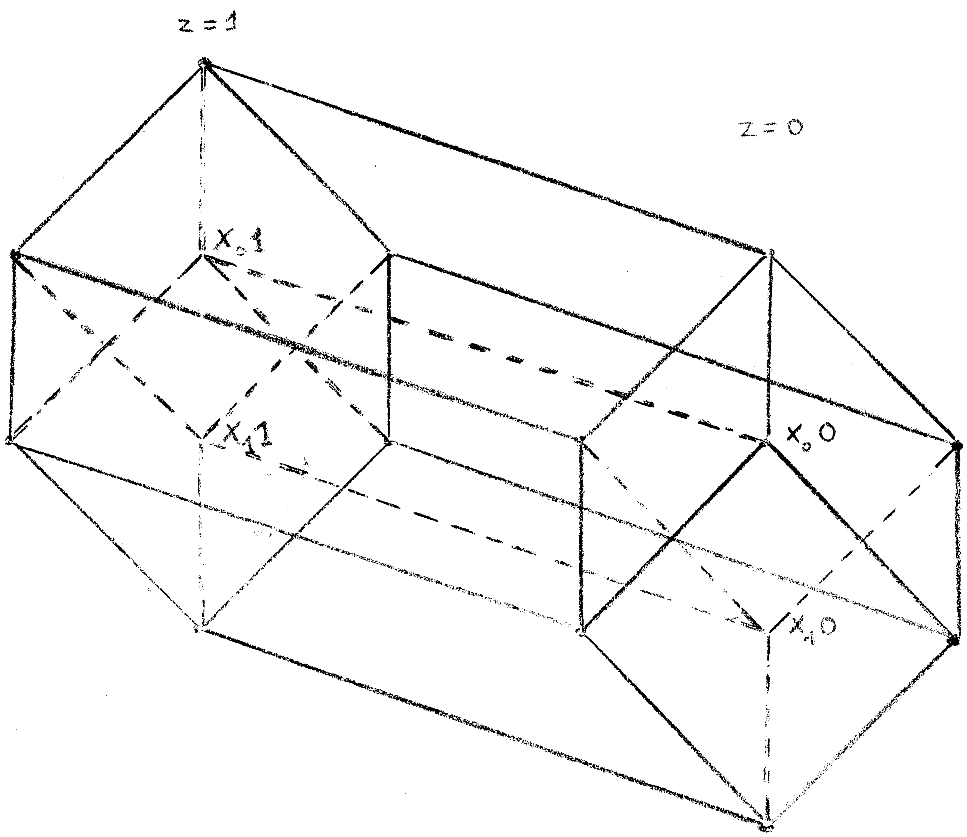
Soit $f(X_i, 0)\ f(X_i, 1) = 1$ ou $f(X_i, 0) = f(X_i, 1) = 1$.
Autrement dit la restriction de f à chacun des (n-1) cubes z = 0 et z = 1 contient au moins les points d'un tour du cube.

Si sur l'un des cubes z = 0 ou z = 1 la fonction ne contient pas d'autre point que le tour du cube considéré alors le problème est résolu. De même si la fonction prend la valeur 1 en chaque sommet de l'un des (n-1)-cubes z = 0 ou z = 1 alors elle est exactement le tour du cube sur l'autre, puisque si X_j n'est pas un point du tour de K_{n-1} alors $f(X_j, 0)\ f(X_j, 1) = 0$ soit si $f(X_j, 0) = 1$ par exemple, $f(X_j, 1) = 0$.

Dans le cas contraire il existe un point (X_β, Z_o), du n-cube ($Z_o = 0$ ou $Z_o = 1$) tel que $f(X_\beta, Z_o) = 1$. Soit par exemple $f(X_\beta, 0) = 1$. On a $f(X_\beta, 1) = 0$ puisque X_β n'est pas un point X_i du tour du (n-1)-cube K_{n-1}.

Comme f est supposée faiblement convexe, X_β est connexe au tour du cube x = 0.

<u>1er cas</u> : n = 4



Alors chacun des cubes z = 0 et z = 1 est un 3-cube. Donc tout point du cube qui n'appartient pas au tour du cube z = 0 est voisin de trois points du tour du cube z = 0. Il n'y a que deux points X_o et X_1 qui n'appartiennent pas au tour du cube z = 0. Si donc $f(X_o, 0) = 1$ on a $f(X_1, 0) = 0$ (puisque f ne peut valoir 1 en chaque sommet du cube z = 0, d'après nos hypothèses). De plus, on a $f(X_o, 1) = 0$ (d'après la forme collier de

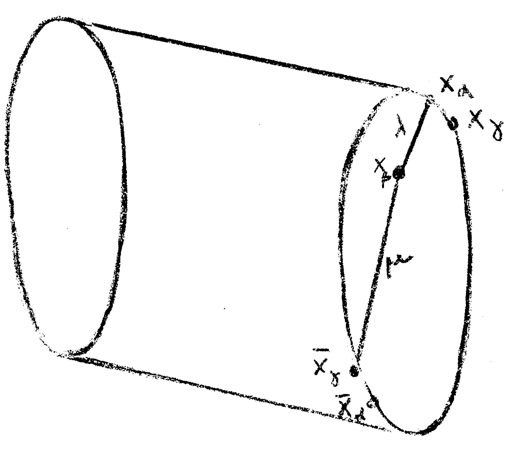
$\forall z\ f(X, Z)$ et les points $(X_o, 1)$ et $(X_1, 0)$ se trouvent donc totalement isolés dans $\bar{f}$ donc $\bar{f}$ n'est pas connexe ce qui est en contradiction avec les hypothèses du lemme.

On a donc établi que, dans le cas où $n = 4$, si la fonction faiblement biconvexe de 3 variables $g(X) = \forall z\ f(X, z)$ est de la forme tour du 3-cube alors $f(X, 0)$ ou $f(X, 1)$ est de la forme tour du 3-cube.

<u>2ème cas</u> : $n > 4$

Si la restriction de f au cube $z = 0$ n'est pas exactement le tour du cube $z = 0$ alors il y a un point X_β du cube $z = 0$, n'appartenant pas au tour du cube et tel que $f(X_\beta, 0) = 1$. Soit q le minimum de la distance de $(X_\beta, 0)$ aux points X_i du tour du $(n-1)$ cube $z = 0$.

Il existe au moins un point, soit X_α, du tour du cube $z = 0$ dont la distance à X_β réalise le minimum q. De par l'hypothèse de faible convexité il existe un chemin λ de longueur q entre X_α et X_β dans le cube $z = 0$.



Soit X_γ un point du tour du cube $z = 0$, voisin de X_α. Alors X_β est à distance $q+1$ de X_γ donc à distance $(n-1) - (q+1)$ du point opposé au point X_γ dans le $(n-1)$-cube $z = 0$. Soit $\bar{X}_\gamma$ le point opposé à X_γ dans le cube $z = 0$. Il y a un chemin μ de longueur $n - q - 2$ qui joint X_β à $\bar{X}_\gamma$ et ce chemin ne passe pas par X_α.

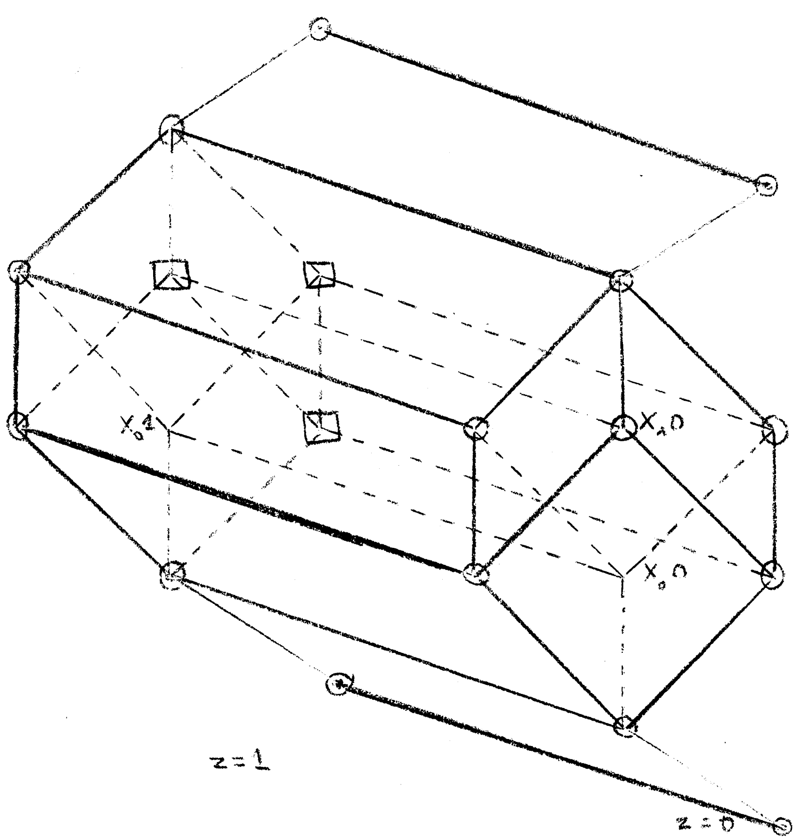
Considérons l'ensemble constitué des points X_α, $\bar{X}_\gamma$, X_β, des chemins λ et μ, ainsi que du chemin de longueur $n-2$ entre X_α et $\bar{X}_\gamma$, qui est contenu dans le tour du cube. Cet ensemble constitue un tour de $(n-2)$-cube.

Si donc il y a dans le (n-1)-cube z = 0 un point X_β n'appartenant pas à l'ensemble des points X_i du tour du cube, alors $f^{-1}(1)$ contient au moins les points d'un (n-2)-cube contenu dans le (n-1)-cube z = 0.

Si dans ce (n-2)-cube la fonction n'est pas exactement le tour du cube (c'est à dire s'il existe un point de $f^{-1}(1)$ n'appartenant pas à l'ensemble des points du tour du (n-2)-cube) alors $f^{-1}(1)$ contient au moins les points d'un n-3 cube contenu dans le (n-1)-cube z = 0, en appliquant la propriété mise en évidence plus haut.

Nous allons montrer que, dans les hypothèse du lemme, on met ainsi en évidence un p-cube sur lequel f a exactement la forme collier ($3 \leq p \leq n-1$).

En effet si nous supposons que dans le cube z = 0, on n'a pas trouvé de p-cube $p > 3$ sur lequel la fonction f ait exactement la forme collier alors on arrive, par application successive de la propriété précédente, à mettre en évidence dans le cube z = 0 un 3-cube sur lequel f contient au moins les points d'un tour du cube.



(Les sommets marqués d'un cercle sont les sommets sur lesquels f vaut 1. Les sommets où f vaut obligatoirement zéro sont marqués d'un carré).

On suppose donc qu'on a mis en évidence dans le (n-1)-cube $z = 0$ un 3-cube K_3 sur lequel la fonction f est au moins tour du cube. Si f est exactement tour du cube alors le résultat est atteint. Sinon il y a un point X_1 du 3-cube K_3 qui n'appartient pas au tour du 3-cube et tel que $f(X_1, 0) = 1$. Alors $f(X_1, 1) = 0$ en raison de la forme tour du cube de $g(X)$ sur K_{n-1}. Soit X_o le point opposé au point X_1 dans le 3-cube K_3. X_o n'appartient pas au tour du 3-cube. Etudions quelle est la valeur de $f(X_o, 1)$.

Si $f(X_o, 1) = 1$ alors $f(X_o, 0) = 0$ (puisque $g(X_o) = 0$) et $\bar{f}$ n'est donc pas faiblement convexe, puisque sur le 4-cube constitué de K_3 et du 3-cube homologue à K_3 dans le cube $z = 1$, il n'y a pas de chemin de $f^{-1}(0)$ entre certains points de $\bar{f}$, par exemple entre $(X_o, 0)$ et $(X_1, 1)$. Il est donc impossible dans nos hypothèses, que $f(X_o, 1)$ vaille 1.

Si $f(X_o, 1) = 0$ alors on peut mettre en évidence un tour de k-cube $(n-1 > k > 3)$ dans le cube $z = 1$.

En effet dans le (n-1)-cube $z = 1$ il y a forcément un point X_α n'appartenant pas au tour du (n-1)-cube $z = 0$ et tel que $f(X_\alpha, 1) = 1$, puisqu'on a supposé que ni $f(X, 1)$ ni $f(X, 0)$ n'étaient exactement tour du (n-1)-cube. Alors par faible convexité on met en évidence un tour de k-cube : il existe un point X_β du tour du (n-1)-cube $z = 0$ qui réalise le minimum de la distance de X_α au tour du cube, il existe un chemin entre X_α et X_β dans $f^{-1}(1)$ et un chemin entre X_α et l'opposé $\bar{X}_\gamma$ sur le (n-1)-cube d'un point X_γ voisin de X_β.

Ceci nous permet de conclure que si $\forall z$ $f(X, z)$ est tour du cube alors il existe un k-cube $3 \leq k \leq n-1$ sur lequel $f(X, 0)$ est tour du cube.

<u>Théorème 1</u>

<u>Soit une f fonction booléenne de n variables permutante sur tous les p-cubes, $p \leq n-1$. Si f est biconnexe et non permutante sur le n-cube alors f ou $\bar{f}$ est de la forme n-collier.</u>

En effet supposons f non permutante. Il existe alors une partition de U en x, y, C, D, telle que :

$$\forall x\ \forall C\ \exists y\ \exists D\ f = 1$$

$$\exists y\ \exists D\ \forall x\ \forall C\ f = 0$$

Si $\quad \forall x\ \exists y\ \forall C\ \exists D\ f = 0$ alors on a

$\forall C\ \exists y\ \exists D\ f = 1 \qquad$ (puisque $\forall x\ \forall C\ \exists y\ \exists D\ f = 1$)

et $\quad \exists y\ \forall C\ \exists D\ f \not\leq 1 \qquad$ (puisque $\forall x\ \exists y\ \exists D\ \forall C\ f = 0$)

et donc f est non permutante sur l'hypercube $x = x_o$ ($x_o = 0$ ou $x_o = 1$), c'est à dire que f est non permutante par rapport à $y \cup C \cup D$.

De même, si $\exists y\ \forall x\ \forall C\ \exists D\ f = 1$, f est non permutante par rapport à $x \cup C \cup D$.

Ces deux cas sont donc exclus, f étant supposée permutante sur tous les p-cubes $p \leq n-1$.

Il reste donc le cas où :

$$\forall x\ \exists y\ \forall C\ \exists D\ f = 1 = \forall x\ \exists y\ \exists D\ \forall C\ f$$

$$\exists y\ \forall x\ \forall C\ \exists D\ f = 0$$

mais alors la fonction de deux variables:

$g(x, y) = \forall C\ \exists D\ f(x, y, C, D)$ est non connexe, comme fonction non permutante de deux variables, et $\bar{g}(x, y)$ n'est pas non plus connexe, c'est à dire qu'on est dans le cas où

$\forall C\ \exists D\ f(x, y, C, D)$ est non connexe et

$\exists C\ \forall D\ \bar{f}(x, y, C, D)$ est non connexe.

Alors en appliquant successivement et dans l'ordre voulu les lemmes 1, 2 et 3 (dans nos hypothèses, il est impossible que nous ayons à appliquer le lemme 4) nous obtenons que f ou $\bar{f}$ est tour du n-cube.

Théorème 2

Soit f une fonction booléenne de n variables. Si f est faiblement biconvexe et si pour tout p, $2 < p \leq n$, ni f ni $\bar{f}$ ne sont de la forme p-collier alors f est permutante.

En effet dans nos hypothèses f est permutante sur tous les 2-cubes (f est faiblement biconvexe, donc connexe sur tous les 2-cubes, donc permutante sur tous les 2-cubes) donc, d'après le théorème 1 elle est permutante sur tous les 3-cubes. En appliquant de façon récurrente le théorème 1 on obtient donc que f est permutante sur le n-cube.

Théorème de caractérisation

Soit f une fonction booléenne de n variables. Pour que f soit permutante il faut et il suffit que f soit faiblement biconvexe et que, pour tout p, $2 < p \leq n$ ni f ni $\bar{f}$ ne soient de la forme p-collier.

CHAPITRE IV

REMARQUES SUR LA MONOTONIE PARTIELLE DES FONCTIONS PERMUTANTES

Propriété 1

Soit f une fonction booléenne de n variables. Si f n'est pas permutante alors il existe un q-cube $2 \leq q \leq n$ sur lequel f n'est monotone par rapport à aucune variable.

En effet, soit f une fonction non permutante. Alors ou bien il existe un p-cube sur lequel f (ou $\bar{f}$) est de la forme totalement disjointe

$$f = \prod_{j=1}^{p} \tilde{x}_{i_j} + \prod_{j=1}^{p} \bar{\tilde{x}}_{i_j} \quad \text{(où } \tilde{x} \text{ représente } x \text{ ou } \bar{x}\text{)},$$

ou bien il existe un r-cube ($r \geq 3$) sur lequel f (ou $\bar{f}$) est de la forme r-collier c'est à dire :

$$f = \sum_{\ell=1}^{r} \left(\prod_{j<\ell} \bar{\tilde{x}}_{i_j} \prod_{k>\ell} \tilde{x}_{i_j} + \prod_{j<\ell} \tilde{x}_{i_j} \prod_{k>\ell} \bar{\tilde{x}}_{i_k} \right)$$

Il existe donc un q-cube, $q \geq 2$, sur lequel f n'est monotone par rapport à aucune variable.

Il paraît donc intéressant de caractériser une fonction non permutante par l'existence d'un cube sur lequel elle n'est monotone d'aucune variable. Pour ce faire il faudrait montrer qu'une fonction de n variables, monotone par rapport à aucune de ces n variables, n'est pas permutante.

A l'ordre 2 la propriété est vraie. En effet les seules fonctions non monotones de deux variables sont la fonction $ab + \bar{a}\bar{b}$ et sa duale, elles ne sont pas permutantes.

Propriété 2

Soit f une fonction booléenne de 3 variables. Si f n'est monotone par rapport à aucune de ses variables alors f n'est pas permutante.

Soit $f(a, b, c) = a A + \bar{a} B$.

On considère $\forall af = AB$.

. Si $AB = 0$ alors f n'est pas permutante. En effet ni A ni B ne sont nulles (puisque f n'est pas monotone par rapport à a) donc $\exists b \exists c f = a + \bar{a} = 1$ donc $\forall a \exists b \exists c f = 1$ et $\exists b \exists c \forall a f = 0$, puisque $\forall a f = 0$.

. Si AB n'est pas monotone alors elle n'est pas permutante, puisque c'est une fonction de 2 variables, et f n'est donc pas permutante car il existe une quantification $q(b, c)$ de b et c telle que

$q(b, c) \forall af = 0$ et $q(c, b) \forall af = 1$.

. Si AB est monotone de ses variables et non nulle. Alors ou bien A ou B ne sont pas monotones et f n'est pas permutante sur l'un des 2-cubes $a = 0$ ou $a = 1$, ou bien A et B sont monotones de leurs variables. Dans ce cas A et B varient en sens inverse puisque f n'est monotone par rapport à aucune variable.

Soit $A = bC + D$
$B = \bar{b}F + E$

avec A croissante en C, B décroissante en C ; soit D croissante et E décroissante en C.

Mais alors $\forall bf = aD + \bar{a}E$ n'est monotone par rapport à aucune variable puisque les cas $D \geq E$ (ou $E \geq D$), $E = 0$ (ou $D = 0$) et $D = 1$ (ou $E = 1$) sont exclus :

on ne peut avoir $D \geq E$ puisque D est croissante et E décroissante, sauf dans le cas $E = 0$, mais alors comme B est non nulle, $B = \bar{b}\bar{c}$ et donc $AB = 0$ sauf si $D = 1$ auquel cas f est monotone en a.

Tentative de généralisation

Soit f une fonction booléenne de n variables. Supposons que f n'est monotone par rapport à aucune de ses n variables et que, pour tout p, $2 \leq p \leq n-1$ une fonction de p variables qui n'est monotone par rapport à aucune de ses variables n'est pas permutante.

Soit $f(a, X) = a\,A(X) + \bar{a}\,B(X)$

- Si AB = 0 alors f n'est pas permutante, car
  $\exists X\; f = a + \bar{a}$ (puisque ni A ni B ne sont nulles)

donc $\forall a\, \exists X\; f = 1$ et $\exists X\, \forall a\; f = 0$

- De plus si une des fonctions de n-1 variables suivantes : A, B, AB, A + B n'est monotone par rapport à aucune variable alors f n'est pas permutante, d'après l'hypothèse de récurrence.

- Reste à étudier le cas où A, B, A + B et AB sont monotones d'une variable au moins. Il semblerait que ce cas ne doive pas se présenter pour au moins une variable a bien choisie.

Exemple :

Soit f la fonction de 5 variables :

$f(a, b, c, d, e, h) = abc + \bar{d}\bar{e} + \bar{c}de + \bar{a}\bar{b}h + \bar{h}d\bar{a}$.

Si $f = a\,A + \bar{a}\,B$

on a A est monotone en b et h

B est monotone en c et b

AB est monotone en b et h

AB est non nulle

mais A + B n'est monotone d'aucune de ses variables.

Cette propriété se met en évidence pour certaines des variables a, b, c, d, e, h :

$\exists a$ f n'est monotone d'aucune variable

$\exists b$ f n'est monotone d'aucune variable

$\forall c$ f n'est monotone d'aucune variable

f n'est monotone d'aucune variable sur les cubes h = 1 et e = 1

En revanche la variable d est telle que

$\forall d$ f est non nulle

$\exists d$ f et $\forall d$ f sont monotones par rapport à une variable au moins

et f restreinte à chacun des cubes

$d = 0$ et $d = 1$ est monotone par rapport à une variable au moins.

CHAPITRE V

FONCTIONS ANTAGOSEPARABLES

I - DEFINITIONS

1 - Pseudo duale

Soit f une fonction booléenne de n variables. On considère la fonction f' de 2n variables obtenue en remplaçant chaque occurrence de la complémentée $\bar{x}$ de chaque variable x par une variable x' indépendante de x.

f' est une fonction croissante de ses 2n variables.

On appelle pseudo duale de f, notée $\overline{f}$, la fonction duale de la fonction f'.

Exemple

$$f(a, b, c) = ab + \bar{a}c$$
$$f'(a, b, c, a', b', c') = ab + a'c$$
$$\overline{f}(a, b, c, a', b', c') = f'^{*} = (a + b)\ (a' + c)$$
$$= aa' + ac + a'b + bc.$$

La fonction $\overline{f}$ est, bien sûr, croissante de ses 2n variables.

2 - Monômes antagonistes

On appelle monôme antagoniste de la pseudo duale $\overline{f}$ de f tout monôme de $\overline{f}$ qui contient, avec une variable quelconque x la variable x' associée à $\bar{x}$.

Dans l'exemple précédent le monôme aa' est le seul monôme antagoniste de $\overline{f}$.

3 - Fonction antagoséparable

On dit qu'une fonction booléenne f est antagoséparable (à antagonismes séparables) lorsqu'il existe une écriture de f, sous forme de somme de monômes premiers telle que, dans la pseudo duale $\overline{f}$ de f tous les monômes antagonistes disparaissent par absorption.

Exemples

1 - $f = ab + \bar{a}c$

$\overline{f}' = aa' + ac + a'b + bc$

mais on peut également écrire f sous forme de base complète.

$f = ab + \bar{a}c + bc$

alors

$\overline{f}' = (a + b)\ (a' + c)\ (b + c)$

$= aa'b + aa'c + ac + abc + a'b + a'bc + bc$

les monômes antagonistes aa'b et aa'c sont absorbés respectivement par les monômes a'b et ac et la pseudo duale s'écrit :

$\overline{f}' = ac + a'b + bc$

f admet donc une écriture, sous forme de somme de monôme premiers, telle que dans $\overline{f}'$ tous les monômes antagonistes sont absorbés. f est donc antagoséparable.

2 - En revanche la fonction $g = ab + \bar{a}\bar{b}$ n'est pas antagoséparable car

$\overline{g}' = (a + b)\ (a' + b') = aa' + ab' + a'b + bb'$

et il n'existe pas d'autre écriture de g sous forme de somme de monômes premiers.

II - PROPRIETES

1 - Toute fonction monotone est antagoséparable

En effet, dans l'écriture sous forme de somme de monômes premiers d'une fonction f monotone de ses variables, n'apparaissent pas simultanément une variable et sa complémentaire. En conséquence il n'apparaît pas simultanément dans la pseudo duale $\overline{f}'$ de f les variables x et x' et $\overline{f}$ ne peut contenir de monômes antagoniste.

2 - Pseudo duale d'un monôme, d'une somme de variables

- Soit $\lambda = \tilde{x}_{i_1}\ \tilde{x}_{i_2}\ \ldots\ \tilde{x}_{i_p}$ où $\tilde{x}_i$ représente x_i ou $\bar{x}_i$

alors $\overline{\lambda} = \tilde{\tilde{x}}_{i_1} + \tilde{\tilde{x}}_{i_2} + \ldots + \tilde{\tilde{x}}_{i_p}$ où $\tilde{\tilde{x}}_i$ représente x_i ou x_i'

- Soit $\mu = \tilde{x}_{i_1} + \tilde{x}_{i_2} + \ldots + \tilde{x}_{i_p}$ où $\tilde{x}_i$ représente x_i ou $\bar{x}_i$

alors $\overline{\mu}' = \tilde{\tilde{x}}_{i_1}\ \tilde{\tilde{x}}_{i_2} \ldots \tilde{\tilde{x}}_{i_p}$ où $\tilde{\tilde{x}}_i$ représente x_i ou x'_i

Remarque

Pseudo duale d'une somme de monômes

Soit $\lambda = x\alpha$ et $\mu = \bar{x}\alpha$ deux monômes. Alors $\lambda + \mu = \alpha$ donc $\overline{\lambda + \mu}' = \overline{\alpha}'$ puisque α est un monôme

Cependant $\overline{\lambda}' . \overline{\mu}' = (x + \overline{\alpha}')\ (x' + \overline{\alpha}') = \overline{\alpha}' + xx'$

Cette remarque nous interdit toute écriture de f différente d'une somme de monômes premiers. En effet soit $f = a\,A + \bar{a}\,B + C$. On ne peut écrire f sous la forme $f = a(A + C) + \bar{a}(B + C)$ sous peine de calculer une pseudo duale inexacte.

En revanche, si f est écrite sous forme de somme de monômes premiers :

$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ alors $\overline{f}' = \prod_{i=1}^{p} \lambda'^{*}_i$ où λ'^{*}_i désigne la pseudo duale, sous forme de somme de variables, du monôme λ_i.

3 - Pseudo duale d'un produit de monômes

Soient λ et μ deux monômes non nuls. Si λ et μ sont monotones de même sens de leurs variables (c'est à dire si $\lambda\mu \neq 0$) alors $\overline{\lambda\mu}' = \overline{\lambda}' + \overline{\mu}'$, puisque le monôme $\lambda\mu$ est un monôme non nul dont les variables appartiennent à l'union des variables de λ avec celle de μ. $\overline{\lambda}' + \overline{\mu}'$ est une somme de ces mêmes variables. Grâce à l'idempotence de l'addition nous obtenons bien $\overline{\lambda\mu}' = \overline{\lambda}' + \overline{\mu}'$.

Cependant si $\lambda\mu = 0$ alors $\overline{\lambda\mu}' = 1 > \overline{\lambda}' + \overline{\mu}'$.

4 - Si F est antagoséparable alors l'écriture de F sous forme de base complète vérifie la propriété d'absorption des monômes antagonistes

Soit F une fonction booléenne antagoséparable. Alors il existe une écriture g de F, sous forme de somme de monômes premiers telle que la pseudo duale $\overline{g}'$ de g possède la propriété d'absorption des monômes antagonistes.

Soit f l'écriture de F sous forme de base complète. Soit μ un monôme de f n'appartenant pas à l'ensemble des monômes de g. Chaque variable du monôme μ apparaît sous la même forme dans au moins un monôme de g.

Comme g + μ est une somme de monômes premiers on a $(g+\mu)'^{*} = g'^{*}\,\mu'^{*}$ où g'^{*} représente la pseudo duale de g sous la forme de produit de sommes de variables.

Si $g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ et $\mu = \prod_{i=1}^{r} \tilde{x}_{j_i}$ (où $\tilde{x}$ représente x ou $\bar{x}$)

on a $(g+\mu)'^{*} = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i'^{*} \; (\tilde{\tilde{x}}_{j_1} + \tilde{\tilde{x}}_{j_2} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{j_r})$ (où $\tilde{\tilde{x}}$ représente x ou x')

Comme chaque variable de μ apparaît dans un monôme de g, il existe $\lambda_{i_1}'^{*}$ (pseudo duale d'un monôme de g) tel que

$$\lambda_{i_1}'^{*} = \tilde{\tilde{x}}_{j_1} + K_1$$

alors

$$\lambda_{i_1}'^{*}\,\mu'^{*} = \tilde{\tilde{x}}_{j_1} + K_1\,(\tilde{\tilde{x}}_{j_2} + \tilde{\tilde{x}}_{j_3} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{j_r})$$

De même il existe $\lambda_{i_2}'^{*} = \tilde{\tilde{x}}_{j_2} + K_2$ et

$$\lambda_{i_1}'^{*}\,\lambda_{i_2}'^{*}\,\mu'^{*} = \tilde{\tilde{x}}_{j_1}\,\tilde{\tilde{x}}_{j_2} + \tilde{\tilde{x}}_{j_1} K_2 + \tilde{\tilde{x}}_{j_2} K_1 + K_1 K_2\,(\tilde{\tilde{x}}_{j_3} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{j_r})$$

Les termes $\tilde{\tilde{x}}_{j_1}\,\tilde{\tilde{x}}_{j_2}$, $\tilde{\tilde{x}}_{j_1} K_2$ et $\tilde{\tilde{x}}_{j_2} K_1$ appartiennent au produit $\lambda_{i_1}'^{*}\,\lambda_{i_2}'^{*}$ et donc donneront, par multiplication par $\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1\\ i\neq i_2}}^{p} \lambda_i'^{*}$, des termes de $\overline{g}'$.

Supposons maintenant que

$$\lambda_{i_1}'^{*}\,\lambda_{i_2}'^{*} \dots \lambda_{i_q}'^{*}\,\mu'^{*} = \sum_{i=1}^{s} \mu_i + K_1 K_2 \dots K_q\,(\tilde{\tilde{x}}_{j_{q+1}} + \tilde{\tilde{x}}_{j_{q+2}} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{j_r})$$

où les μ_i sont des termes de $\lambda'^{*}_{i_1} \lambda'^{*}_{i_2} \dots \lambda'^{*}_{i_q}$.

Alors il existe $\lambda'^{*}_{i_{q+1}} = \tilde{\tilde{x}}_{j_{q+1}} + K_{q+1}$ et on a

$$\lambda'^{*}_{i_1} \lambda'^{*}_{i_2} \dots \lambda'^{*}_{i_q} \lambda'^{*}_{i_{q+1}} \mu'^{*} = \sum_{i=1}^{s} \mu_i \tilde{\tilde{x}}_{j_{q+1}} + \sum_{i=1}^{s} \mu_i K_{q+1} + \tilde{\tilde{x}}_{j_{q+1}} K_1 K_2 \dots K_q$$

$$+ K_1 K_2 \dots K_q K_{q+1} (\tilde{\tilde{x}}_{j_{q+2}} + \tilde{\tilde{x}}_{j_{q+3}} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{j_r}).$$

Soit

$$\lambda'^{*}_{i_1} \lambda'^{*}_{i_2} \dots \lambda'^{*}_{i_q} \lambda'^{*}_{i_{q+1}} \mu'^{*} = \sum_{i=1}^{t} \nu_i + K_1 K_2 \dots K_{q+1} (\tilde{\tilde{x}}_{j_{q+2}} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{j_r})$$

où les ν_i sont des termes de $\lambda'^{*}_{i_1} \lambda'^{*}_{i_2} \dots \lambda'^{*}_{i_{q+1}}$.

Le produit $\lambda'^{*}_{i_1} \lambda'^{*}_{i_2} \dots \lambda'^{*}_{i_q}$ a donc bien la forme voulue et en appliquant le raisonnement à toutes les variables de μ'^{*} on obtient :

il existe r facteurs $\lambda'^{*}_{i_1}, \lambda'^{*}_{i_2}, \dots, \lambda'^{*}_{i_2}$ tels que $\lambda'^{*}_{i_1} \lambda'^{*}_{i_2} \dots \lambda'^{*}_{i_r} \mu'^{*} = \sum_{i=1}^{u} \nu_i$

où les ν_i sont des termes de $\lambda'^{*}_{i_1} \dots \lambda'^{*}_{i_r}$.

En conséquence $\prod_{i=1}^{p} \lambda'^{*}_{i} \mu'^{*}$ ne contient que des termes de $\prod_{i=1}^{p} \lambda'^{*}_{i}$ et donc aucun monôme antagoniste.

On applique alors le même procédé aux autres monômes de f qui ne sont pas des monômes de g et on obtient que $\overline{f}'$ ne contient aucun monôme antagoniste.

On a donc montré que si F possède une écriture g telle qe g a la propriété d'absorption des monômes antagonistes alors f, écriture de F sous forme de base complète possède cette même propriété.

Nous obtenons donc une simplification de la définition :

<u>Définition</u>

Une fonction booléenne f est dite <u>antagoséparable</u> lorsque son écriture sous forme de base complète est telle que la pseudo duale possède la propriété d'absorption des monômes antagonistes.

<u>5 - Pseudo duale d'une somme de fonctions</u>

Soient f et g deux fonctions booléennes et soient $\overline{f}'$ et $\overline{g}'$ leurs pseudo duales. On ne peut pas toujours exprimer la pseudo duale $\overline{f+g}'$ de f + g en fonction de $\overline{f}'$ et $\overline{g}'$. Cependant on a la relation $\overline{f+g}' \leq \overline{f}'\,\overline{g}'$. En effet on a pour chaque monôme λ_i de f et chaque monôme μ_i de g la relation $\overline{\lambda_i + \mu_i}' \leq \overline{\lambda_i}' \cdot \overline{\mu_i}'$, puisque si λ_i et μ_i n'ont aucune variable commune $\overline{\lambda_i + \mu_i}' = \overline{\lambda_i}'\,\overline{\mu_i}'$ et si $\lambda_i = x\alpha$ et $\lambda_i = \bar{x}\alpha\beta$ alors $\overline{\lambda_i + \mu_i}' < \overline{\lambda_i}'\,\overline{\mu_i}'$.

<u>6 - Pseudo duale d'un produit de fonctions</u>

Soient f et g deux fonctions booléennes et soient $\overline{f}'$ et $\overline{g}'$ leurs pseudo duales. On en peut pas toujours exprimer la pseudo duale $\overline{fg}'$ de fg en fonction de $\overline{f}'$ et $\overline{g}'$, cependant on a la relation $\overline{fg}' \geq \overline{f}' + \overline{g}'$.

En effet soient $f = \Sigma\lambda_i$, $g = \Sigma\mu_j$ (où λ_i et μ_j sont des monômes) alors $\overline{f}' = \Pi\lambda_i'^{*}$, $\overline{g}' = \Pi\mu_j'^{*}$ (où λ'^{*} représente la pseudo duale du monôme λ sous forme de somme de variables) et $\overline{fg}' = \overline{\Sigma\lambda_i\,\mu_j}' \geq \Pi(\overline{\lambda_i}' + \overline{\mu_j}')$ puisqu'il peut y avoir certains monômes λ_i de f dont le produit avec certains monômes μ_j de g soit nul.

<u>7 - Soit f une fonction booléenne de n variables. f est antagoséparable si et seulement si, pour toute variable biforme a de f on a</u> :

$$f = a\,A + \bar{a}\,B + AB \text{ (sous forme de base complète) avec } \overline{AB}' = \overline{A}' + \overline{B}'$$

Si $\overline{AB}' = \overline{A}' + \overline{B}'$ alors tous les monômes antagonistes en aa' sont absorbés dans $\overline{f}'$.

En effet $f = a\,A + \bar{a}\,B + AB$

$\overline{f}' = (a + \overline{A}')\ (a' + \overline{B}')\ \overline{AB}'$

$= (aa' + a\overline{B}' + a'\overline{A}' + \overline{A}'\overline{B}')\ \overline{AB}'$

$= aa'\ \overline{AB}' + a\ \overline{B}'.\overline{AB}' + a'\overline{A}'.\overline{AB}' + \overline{A}'.\overline{B}'.\overline{AB}'$

si $\overline{AB}' = \overline{A}' + \overline{B}'$ on a

$\overline{f}' = aa'\overline{A}' + aa'\overline{B}' + a\,\overline{B}'\overline{A}' + a\ \overline{B}' + a'\overline{A}' + a'\overline{A}'\overline{B}' + \overline{A}'\,\overline{B}'\,\overline{A}' + \overline{A}'\,\overline{B}'\,\overline{B}'$

$= a\ \overline{B}' + a'\overline{A}' + \overline{A}'\ \overline{B}'$ car tous les autres termes disparaissent par absorption.

Donc, si f n'est pas antagoséparable, il existe au moins une variable (forcément biforme) a telle qu'au moins un monôme antagoniste en aa' ne soit pas absorbé dans $\overline{f}'$. Il existe donc a tel que $f = a\ A + \bar{a}\ B + AB$ avec $\overline{AB}' \neq \overline{A}' + \overline{B}'$

. Réciproquement si f est antagoséparable et s'il existe a telle que, pour $f = a\ A + \bar{a}\ B + AB$, on ait $\overline{AB}' \neq \overline{A}' + \overline{B}'$ alors on aboutit à une contradiction.

En effet si $\overline{AB}' \neq \overline{A}' + \overline{B}'$ alors $\overline{AB}' > \overline{A}' + \overline{B}'$ (propriété 6) et donc $\overline{AB}' = \overline{A}' + \overline{B}' + u$. Les monôme de aa'u, dans la pseudo duale $\overline{f}'$ de f ne peuvent donc être absorbés.

On a $\overline{f}' = aa'u + a\ \overline{A}' + a\ \overline{B}' + \overline{A}'\,\overline{B}'$

pour que aa'u soit absorbé il faudrait donc que

$aa'u \leq a\ \overline{A}' + a'\overline{B}' + \overline{A}'\ \overline{B}'$

soit

$aa'u = aa'u\ (a\ \overline{A}' + a'\overline{B}' + \overline{A}'\,\overline{B}')$

$= aa'u\ \overline{A}' + aa'u\ \overline{B}' + aa'u\ \overline{A}'\,\overline{B}')$

$= aa'u\ (\overline{A}' + \overline{B}' + \overline{A}'\,\overline{B}')$

$= aa'u\ (\overline{A}' + \overline{B}')$

Il faudrait donc, pour que aa'u soit absorbé, que $aa'u \leq \overline{A}' + \overline{B}'$ ce qui est impossible puisque u n'est pas plus petit que $\overline{A} + \overline{B}$ et que $\overline{A}'$ et $\overline{B}'$ ne dépendent ni de a ni de a' (on peut annuler $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sans annuler u ni a ni a').

<u>8 - Si f est antagoséparable de ses n variables alors la fonction obtenue en fixant les valeurs de p variables quelconques est antagoséparable de ses n-p variables</u>

En effet soit f une fonction antagoséparable. Pour chaque variable biforme a on a $f = a\ A + \bar{a}\ B + AB$ avec $\overline{AB}' = \overline{A}' + \overline{B}'$.

Soit x une variable quelconque :

$A = x\,C + \bar{x}\,D + CD \qquad B = x\,E + \bar{x}\,F + EF$

On a $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

soit $\overline{x\,CE + \bar{x}\,DF + CDEF} = \overline{x\,C + \bar{x}\,D + CD} + \overline{x\,E + \bar{x}\,F + EF}$

ou, puisque les fonctions sont écrites sous forme de base complète,

$\overline{x\,CE}\;\overline{\bar{x}\,DF}\;\overline{CDEF} = \overline{x\,C}\;\overline{\bar{x}\,D}\;\overline{CD} + \overline{x\,E}\;\overline{\bar{x}\,F}\;\overline{EF}$

c'est à dire

$(x + \overline{CE})\;(x' + \overline{DF})\;\overline{CDEF} = (x + \bar{C})\;(x' + \bar{D})\;\overline{CD} + (x + \bar{E})\;(x' + \bar{F})\;\overline{EF}$

soit

$xx'\;\overline{CDEF} + x\;\overline{DF} + x'\,\overline{CE} + \overline{CE}\,\overline{DF} = x\;\bar{D} + x'\bar{C} + \bar{C}\;\bar{D} + x\;\bar{F} + x'\bar{E} + \bar{E}\;\bar{F}$

(puisque $\overline{DF}\,\overline{CDEF} = \overline{DF}$, étant donné que $\overline{CDEF} > \overline{CE} + \overline{DF} > \overline{DF}$).

On obtient donc en donnant à x la valeur 0 et à x' la valeur 1 :

$\overline{CE} = \bar{C} + \bar{E}$

et en donnant à x la valeur 1 et à x' la valeur 0 :

$\overline{DF} = \bar{D} + \bar{F}$

Si donc on fixe dans f une valeur quelconque de la variable x, soit par exemple $x = 1$, on a $f = a\,C + \bar{a}\,E + CE$, et $\overline{CE} = \bar{C} + \bar{E}$, donc f, sur le cube $x = 1$, est antagoséparable.

Nous avons donc montré que si f est antagoséparable alors f est antagoséparable sur les cubes $x = 0$ et $x = 1$. En conséquence une fonction antagoséparable sur le n-cube est antagoséparable sur tous les sous cubes du n-cube.

9 - Une fonction antagoséparable est permutante

En effet, si f n'est pas permutante il existe un sous cube de dimension p, du n-cube telle que f (ou $\bar{f}$) soit sur ce p-cube, ou bien totalement disjointe, ou bien de la forme tour du p-cube. De telles fonctions ne sont pas antagoséparables.

- Soit $f = \prod_{i=1}^{p} a_i + \prod_{i=1}^{p} \bar{a}_i$ (où $a_i = \tilde{x}_{j_i}$, $\tilde{x}$ représentant x ou $\bar{x}$)

f est écrite sous forme de base complète et $\overline{f'} = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} a'_i\right) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{p} a_i\, a'_j$

et les monômes antagonistes $a_i\, a'_i$ ne sont plus petits qu'aucun autre monôme $a_i\, a'_j$ de $\overline{f'}$.

- Soit f une fonction tour du p-cube. f s'écrit, sous forme de base complète :

$$f = \sum_{i=1}^{p} \left(\prod_{j<i} \bar{a}_j \prod_{k>i} a_k + \prod_{j<i} a_j \prod_{k>i} \bar{a}_k \right)$$

$$\overline{f'} = \prod_{i=1}^{p} \left[\sum_{j<i} a'_j + \sum_{k>i} a_k\right] \left[\sum_{j<i} a_j + \sum_{k>i} a'_k\right]$$

et un monôme de la forme $a_p\, a'_p\, a_1\, a'_1$ n'est plus petit qu'aucun autre monôme de $\overline{f'}$ (il est obtenu en multipliant le terme a_p de $\prod_{i=1}^{p-1} \left(\sum_{j<i} a'_j + \sum_{k>i} a_k \right)$ par le terme a'_1 de $\sum_{j<p} a'_j$, et le tout par le terme a'_p de $\prod_{i=1}^{p-1} \left(\sum_{j<1} a_j + \sum_{k>i} a'_k \right)$ et par le terme a_1 de $\sum_{j<p} a_j$. On voit qu'il n'y a aucun moyen d'obtenir un monôme plus grand que $a_p\, a'_p\, a_1\, a'_1$).

Nous avons donc montré que le tour du cube et la fonction totalement disjointe $\Pi a_i + \Pi \bar{a}_i$ ne sont pas antagoséparables. Si f n'est pas permutante il existe donc un p-cube sur lequel f n'est pas antagoséparable et donc f n'est pas antagoséparable (d'après la propriété 8).

Toute fonction antagoséparable étant permutante, le problème se pose de la caractérisation d'une fonction permutante par la propriété d'antagoséparation. Il est possible, dans quelques cas particuliers de montrer qu'une fonction permutante est antagoséparable.

10 - Toute fonction monotone par rapport à toutes ses variables sauf une est antagoséparable

Soit $f = a\,A + \bar{a}\,B + AB$ où A et B sont des fonctions monotones de même sens de leurs variables. Alors AB est monotone de toutes ses variables et donc $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ (propriété 6). En conséquence les monômes antagonistes en aa' (les seuls qui puissent apparaître dans $\overline{f}$) sont absorbés et donc f est antagoséparable.

Cette propriété peut être généralisée :

11 - Soit f une fonction booléenne de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. On désigne par U l'ensemble de ces n variables. S'il existe une partition de U en X, Y telle que $f = \sum_{a \in X} a g_a(Y) + \bar{a} h_a(Y)$, ou g_a et h_a sont des fonctions monotones par rapport à Y, toutes de même sens, alors f est antagoséparable.

On a en effet, pour tout a X, $\overline{g_a h_a} = \overline{g_a} + \overline{h_a}$; par conséquent chaque monôme antagoniste en a est absorbé dans $\overline{f}$.

Une fonction non antagoséparable possède donc au moins deux variables biformes et n'est pas de la forme $\Sigma\, a g_a + \bar{a} h_a$.

12 - Soit f une fonction booléenne monotone par rapport à toutes ses variables sauf deux. Si f est permutante alors f est antagoséparable.

$f = a\,A + \bar{a}\,B + AB$

avec $A = x\,C + \bar{x}\,D + CD$

$B = x\,E + \bar{x}\,F + EF$

Les fonctions C, D, E, F sont monotones de même sens de leurs variables.

f étant permutante on a $\forall a\, \exists x\ f = \exists x\, \forall a\ f$

Soit $(C + D)\ (E + F) = CE + DF$

soit $\overline{(C + D)\ (E + F)} = \overline{CE + DF}$

Comme C, D, E, F sont monotones de même sens l'égalité précédente s'écrit :

(1) $\overline{C}\,\overline{D} + \overline{E}\,\overline{F} = (\overline{C} + \overline{E})\ (\overline{D} + \overline{F})$

Etudions maintenant $\overline{AB}$

$\overline{AB} = (x + \overline{C} + \overline{E})\ (x' + \overline{D} + \overline{F})\ (\overline{C} + \overline{D} + \overline{E} + \overline{F})$

$= x\,\overline{D} + x\,\overline{F} + x'\overline{C} + x'\overline{E} + (\overline{C} + \overline{E})\ (\overline{D} + \overline{F})$

et on a

$\overline{A} + \overline{B} = (x + \overline{C})\ (x' + \overline{D})\ (\overline{C} + \overline{D}) + (x + \overline{E})\ (x' + \overline{F})\ (\overline{E} + \overline{F})$

$= x\,\overline{D} + x'\overline{C} + \overline{C}\,\overline{D} + x\,\overline{F} + x'\overline{E} + \overline{E}\,\overline{F}$

L'égalité (1) nous permet donc de conclure que $\overline{AB}' = \overline{A}' + \overline{B}'$

On montrerait de la même façon, en écrivant $f = x\alpha + \bar{x}\beta + \alpha\beta$ que

$\overline{\alpha\beta}' = \overline{\alpha}' + \overline{\beta}'$ et que donc f est antagoséparable.

13 - Une chaîne minimale entre deux points situés à distance p est antagoséparable

Soit, dans la base canonique, une chaîne f de longueur p. f peut s'écrire :

$$f = \lambda\left[a_1\, a_2 \dots a_p + \bar{a}_1\, a_2 \dots a_p + \bar{a}_1\, \bar{a}_2\, a_3 \dots a_p + \dots + \bar{a}_1\, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_p\right]$$

où λ représente un produit des n-p variables x_k et où $a_i = \tilde{x}_{j_i}$, $\tilde{x}$ représentant x ou $\bar{x}$.

En regroupant les termes deux à deux on obtient les monômes de la base complète de f :

$$f = \lambda\left[a_2\, a_3 \dots a_p + a_1\, a_3 \dots a_p + a_1\, a_2\, a_4 \dots a_p + \dots + a_1 \dots a_{p-2}\, a_p + \bar{a}_1\, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{p-1}\right].$$

Considérons maintenant la pseudo duale de cette chaîne. Nous allons montrer que les monômes antagonistes maximaux sont absorbés.

$$\overline{f}' = \overline{\lambda}' + (a_2 + a_3 + \dots + a_p)(a_1' + a_3 + \dots + a_p)(a_1' + a_2' + \dots + a_p)\dots (a_1' + a_2' + \dots + a_{p-1}').$$

$x_1\, x_1'$ n'apparait pas dans $\overline{f}$.

Les monômes maximaux contenant le produit antagoniste $a_2\, a_2'$ sont obtenus en prenant a_2 dans le premier terme, a_2' dans tous les termes à partir du troisième. Les monômes antagonistes en $a_2\, a_2'$ maximaux sont donc les monômes du produit :

$a_2\, a_2'\, (a_1' + a_3 + \dots + a_p)$

ce sont donc les monômes

$a_2\, a_2'\, a_1'$ et $a_2\, a_2'\, a_i$ $\qquad i \geq 3$.

Ces monômes seront absorbés par les monômes obtenus soit en prenant a_2 dans le premier terme et a_1' dans tous les termes suivants, soit en prenant x_i dans les i-1 premiers termes et a_2' dans les termes suivants.

Les monômes antagonistes $a_2\ a'_2\ a'_1$ et $a_2\ a'_2\ a_i \quad i \geq 3$ sont donc absorbés respectivement par les monômes $a_2\ a'_1$ et $a'_2\ a_i$.

Le raisonnement est absolument identique pour les monômes antagonistes en $a_j\ a'_j$ maximaux : le j ième terme de f ne contient pas a_j. Les monômes antagonistes en $a_j\ a'_j$ maximaux de $\overline{f}'$ sont les monômes $a_j\ a'_j\ a'_k$ pour $k < j$ et $a_j\ a'_j\ a_\ell$ pour $\ell > j$, absorbés respectivement par $a_j\ a'_k$ et $a'_j\ a_\ell$.

BIBLIOGRAPHIE

BENZAKEN C.

Contribution des structures algébriques ordonnées à la théorie des réseaux.
Thèse doct. Etat, Fac. Sciences Grenoble, 1968.

BERGE C.

Théorie des graphes et ses applications.
Paris, Dunod, 1963.

BERNARD J.

Préfermetures sur un ensemble ordonné.
Thèse 3ème cycle, Fac. Sciences Clermont-Ferrand, 1969.

CARVALLO M.

Monographie des Treillis et Algèbre de Boole.
Paris, Gauthier-Villars, 1962.

DUBREIL-JACOTIN M.L., LESIEUR L., CROISOT R.

Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.
Paris, Gauthier-Villars, 1953.

FRAISSE R.

Cours de logique mathématique.
Paris, Gauthier-Villars, 1967.

KUNTZMANN J.

Algèbre de Boole.
Paris, Dunod, 1965

LAPSCHER F.

Application de la notion de fermeture à l'étude des fonction booléennes.
Thèse doct. Etat, Fac. Sciences Grenoble, 1968.

PASTEL A.M.

Caractérisation géométrique des fonctions logiques permutantes.
C.R. Acad. Sc., t 270, 1970, 102-105.

PASTEL A.M.

Sur les fonctions logiques permutantes.
C.R. Acad. Sc., t 272, 1971, 1154-1156.

TISON P.

Théorie des consensus
Thèse docteur-ingénieur, Fac. Sciences Grenoble, 1965.

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE