Elaboration automatique d’emplois du temps

Jean-François Desnos

▶ To cite this version:

N°d'ordre :

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR - INGENIEUR

par

Jean-François DESNOS

Ingénieur I.P.G.

ELABORATION AUTOMATIQUE D'EMPLOIS DU TEMPS

Thèse soutenue le 6 Novembre 1971 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	J. KUNTZMANN	Président
Messieurs	N. GASTINEL	Examinateurs
	J.C. HERZ	
	M. TERRENOIRE	

Mes remerciements vont à :

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury,

Monsieur le Professeur N. GASTINEL, qui a bien voulu prendre intérêt à mon travail et me conseiller à de nombreuses reprises,

Monsieur J.C. HERZ, Conseiller Scientifique IBM-France, qui a toujours accepté de me faire profiter de sa très large expérience des problèmes d'emploi du temps,

Monsieur M. TERRENOIRE, qui a consacré beaucoup de son temps à me guider, et dont les encouragements constants m'ont été particulièrement précieux,

Monsieur F. PECCOUD, qui est à l'origine de ce travail et l'a toujours suivi avec le plus grand intérêt,

Madame M. BONNET, qui a uni ses efforts aux miens pour la réalisation de ce projet, et Messieurs G. MAZARE et R. SCHNEIDER pour leur collaboration,

Mesdames et Messieurs les Chefs d'établissements et leurs adjoints avec qui nous avons travaillé, en particulier, Mademoiselle ENU, Madame GUTH-SCHNEIDER, Madame RANNAUD, Monsieur BELIARD, Monsieur KUHN et Monsieur VALLON.

Et tous ceux qui ont participé à la réalisation pratique de cette thèse.

J.F.D

T A B L E des M A T I E R E S

PRESENTATION

La préparation administrative de la rentrée dans un lycée comporte quatre phases successives :

1 - L'établissement des programmes scolaires, qui indiquent en particulier par semaine et pour chaque section les durées d'enseignement des disciplines prévues. Ces programmes et horaires sont susceptibles de changer chaque année et sont dans l'enseignement public, communs à la plupart des lycées.

Les trois phases suivantes sont effectuées dans le lycée.

2 - La répartition d'élèves en sections ; les élèves sont répartis en classes, ou ensembles d'élèves du même niveau de scolarité (exemple : classe terminale), puis en divisions, subdivisions des classes regroupant des élèves qui suivent la plupart des cours en commun. Pour certains enseignements (optionnels, facultatifs), on constitue ensuite des groupes, qui rassemblent des élèves pouvant provenir de plusieurs divisions de la même classe.

3 - La répartition des services des professeurs, c'est-à-dire l'affectation des professeurs aux divisions et groupes qui ont été formés.

4 - L'établissement de l'emploi du temps, qui est le problème qui nous occupe.

L'emploi du temps est effectué à partir des données rassemblées au cours des trois étapes précédentes. Le problème peut être présenté brièvement comme suit :

On dispose de professeurs, de groupes d'élèves et de salles en nombre fini, ainsi que d'un horaire, ou ensemble des heures ouvrables du lycée dans la semaine.

Une séance d'enseignement, qu'on appelle un cours, est caractérisée par un professeur, un groupe d'élèves, une liste de salles où la séance peut avoir lieu, ainsi qu'une durée.

On considère comme donné un ensemble de cours, résultat des phases de travail 1, 2 et 3.

Trouver un emploi du temps, c'est affecter à chaque cours un moment de l'horaire - "placer" le cours - et choisir une salle dans la liste des salles possibles pour ce cours.

Tous les cours doivent trouver place dans l'horaire, de telle façon qu'un élève, un professeur, ou une salle, ne soit occupé au même moment que par un cours au plus.

On peut alors, à partir du résultat, dresser des tableaux indiquant pour toute heure de la semaine :

- pour un élève : s'il est libre ou s'il suit un cours, et dans ce cas, quels sont la matière enseignée, le professeur, la salle.
- pour un professeur : s'il est libre ou s'il enseigne, le groupe d'élèves auquel il s'adresse, la matière enseignée et le local qu'il occupe.
- pour une salle, au cas où elle est occupée, le nom du professeur et du groupe d'élèves qui s'y trouvent.

L'emploi du temps proposé doit d'autre part satisfaire à un certain nombre de conditions, plus ou moins précises, et qui peuvent se résumer dans les deux points suivants :

1 - <u>L'emploi du temps doit être pédagogiquement bon</u>. Ceci est important dans l'enseignement secondaire, car les horaires sont chargés et les disciplines enseignées à un élève, nombreuses. On doit donc veiller à répartir les activités dans la semaine, équilibrer les journées entre elles, etc...

2 - <u>Les voeux des professeurs doivent être respectés</u> dans la mesure du possible. Il s'agit essentiellement de grouper les cours d'un même professeur, de ménager des journées ou des demi-journées de liberté, si possible en accord avec ses souhaits.

Un emploi du temps peut donc devenir, en fonction des contraintes posées très difficile, voire impossible à réaliser. Lorsqu'il s'agit d'un grand lycée (plus de 2 000 élèves, et très approximativement 2 000 cours), il est fréquent qu'un censeur expérimenté y travaille plusieurs semaines à temps complet.

La complexité de réalisation dépend pour une part de contraintes "matérielles" : programmes scolaires chargés, petit nombre de locaux, de professeurs, et pour le reste des choix effectués en matière de ventilation d'élèves en groupes et d'affectation de professeurs.

Ces choix sont essentiellement faits suivant des critères pédagogiques, mais on s'efforce de simplifier l'élaboration de l'emploi du temps, en établissant en particulier des sections d'élèves relativement indépendantes.

On peut d'ailleurs considérer des problèmes d'emploi du temps incluant la ventilation des élèves suivant leurs options ("sectionning" aux Etats-Unis), ou une affectation de professeurs liée à l'établissement de l'emploi du temps. Les emplois du temps de faculté peuvent par exemple viser à rendre compatibles le maximum d'options qui peuvent être choisies par un même étudiant.

Dans le cas des lycées, la phase de confection des emplois du temps est en principe indépendante des précédentes, mais des difficultés apparaissent lors d'un traitement par programme :

- Les contraintes pédagogiques, ou celles qui sont dues aux professeurs, ne peuvent être exprimées comme des conditions intangibles que doit vérifier une solution acceptable par le lycée. Elles doivent être exprimées avec une certaine souplesse. C'est au respect plus ou moins grand de ces conditions, ménageant les intérêts des élèves et ceux des professeurs, qu'on jugera de la qualité d'un emploi du temps, qui ne peut être

- Les données elles-mêmes peuvent être modifiées par le censeur en cas d'impasse au cours du traitement manuel. Il peut par exemple, transformer un cours de deux heures en 2 cours d'une heure ou permuter une partie des services de deux professeurs.

On doit donc viser à fournir une solution convenable susceptible de réajustements de la part du censeur. L'idéal serait sans doute l'installation d'un terminal dans chaque lycée, permettant au censeur d'entrer directement ses données et d'intervenir en cours d'exécution en cas de non satisfaction ou d'impossibilité.

L'exposé qui suit comporte deux parties :

Dans la première, nous donnons d'abord une formulation générale d'un problème d'emploi du temps.

Puis, nous proposons plusieurs cas particuliers, où on laisse de côté le problème des salles et où l'on considère une structure de groupes d'élèves simple.

Dans un premier cas, lorsque les cours ont tous une durée d'une heure, le théorème de Köning Hall montre, dans des conditions nécessaires simples, l'existence d'une solution. On propose alors un algorithme, à rapprocher de l'algorithme hongrois, qui permet d'obtenir un emploi du temps.

Dans deux autres cas, l'horaire étant restreint à 4 heures ou moins, on donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution, lorsque les cours peuvent durer plus d'une heure.

On expose enfin le problème des lycées, en présentant la forme des données telles qu'elles apparaissent actuellement et en précisant la liste des conditions que doit vérifier un emploi du temps de lycée.

La deuxième partie présente la méthode utilisée. La structure des données nous a conduit à opérer en deux temps : dans une première phase, on affecte à tout cours une salle et une salle et une demi-journée de l'horaire. Dans une deuxième phase, on cherche un emploi du temps pour chaque demi-journée.

I - FORMULATION

A partir d'ensembles d'élèves, de professeurs, de locaux, et d'un horaire, ou ensemble d'heures, nous définissons ici un ensemble de cours, puis un emploi du temps comme une application qui, à tout cours, fait correspondre un couple (local, période de temps).

Si cette application existe, on peut indiquer pour chaque heure :

- pour un élève ou un professeur donné, s'il apparaît dans un cours, et de quel cours il s'agit (emploi du temps d'un élève, emploi du temps d'un professeur).
- pour une salle donnée, à quel cours elle est affectée, si elle est occupée (emploi du temps d'une salle).

I.1. LES DONNEES

On suppose donnés cinq ensembles finis :

1 - **Un ensemble E** (ensemble des élèves) et a partitions $G^1,\dots,G^\alpha,\dots,G^a$ définies sur E.

On note :

$$G^\alpha = \left\{g_1^\alpha,\dots,g_{\rho(\alpha)}^\alpha\right\}$$

et $G = \left\{g_t^\alpha \mid \alpha = 1,\dots,a \;;\; t = 1,\dots,\rho(\alpha)\right\}$

Chaque G^α représente la formation de groupes d'élèves dans E, et G l'ensemble des groupes ainsi formés. On constitue donc des groupes suivant a critères distincts.

[En pratique, il existe actuellement une partition privilégiée : l'ensemble des divisions. Les élèves d'une même division suivent un certain nombre de cours en commun, mais pour de nombreux enseignements le groupe d'élèves n'est pas une division (langues, options, travaux dirigés, travaux pratiques).]

2 - <u>**Un ensemble P**</u> (ensemble de professeurs).

3 - <u>**Un ensemble Λ**</u> (ensemble de locaux).

On notera $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\Lambda)$ et $\mathcal{L} = \{\ell\}$

4 - <u>**Un ensemble T**</u> = $\{t_1, t_2, \ldots, t_q\}$ où $q \in \mathbb{N}$

T est l'ensemble des heures, ou **horaire**.

[T représente l'ensemble des heures ouvrables du lycée dans la semaine. t_k, k ième heure de l'horaire, représente un intervalle de temps unité, dont nous considérons que c'est effectivement l'heure].

T étant constitué d'intervalles de temps non adjacents : les <u>demi-journées</u>, nous définirons un <u>intervalle</u> comme une suite d'heures consécutives, et une <u>période</u> comme un intervalle contenu dans une demi-journée.

<u>*Définition*</u>. On appellera <u>intervalle</u> de T une partie de T, soit u, telle que :

$$u = \{t_r, t_{r+1}, \ldots, t_s\}$$

avec $r \geqslant 1$, $s \leqslant q$, $s-r > 0$

On note $U = \{u\}$.

<u>*Sont donnés*</u> ρ intervalles $T_1, T_2, \ldots, T_\rho$ de T formant une partition de T. Ces intervalles sont appelés <u>demi-journées</u>.

[en pratique, $\rho = 12$].

<u>*Définition*</u>. On appelle <u>période</u> un intervalle contenu dans une demi-journée. On note $\mathcal{J}$ l'ensemble des périodes :

$$\mathcal{J} = \left\{ i \in U \mid \exists!\ k \in [1,\rho] : i \subseteq T_k \right\}$$

5 - **Un ensemble** Δ (ensemble des durées)

Δ est l'ensemble des entiers de 1 à p.

On appelle durée d'une période i l'élement δ de Δ tel que : $\delta = |i|$ (où $|i|$ est le nombre d'éléments de i).

[en pratique, p = 4]

I.2. LE PROBLEME

On suppose donné un sous-ensemble C de :

$$G \times P \times \mathcal{L} \times \Delta$$

C est appelé l'ensemble des cours.

Un cours (g,p,ℓ,δ) signifie :

Le professeur p doit enseigner au groupe d'élèves g dans une salle λ choisie dans ℓ, et pendant la durée δ.

Le problème traité ici consiste :

1 - à affecter à chaque cours une période i de l'horaire (telle que $\delta = |i|$).

2 - à choisir pour chaque cours une salle de ℓ.

En s'assurant que deux cours placés simultanément sont compatibles : les groupes d'élèves sont disjoints, les professeurs et les salles distincts.

Définition : On appelle emploi du temps une application τ de C dans $\Lambda \times \mathfrak{I}$ telle que si on note :

$c = (g,p,\ell,\delta) \in C$ et $\tau(c) = (\lambda,i)$

on ait :

i) $\lambda \in \ell$, $|i| = \delta$

ii) si c, c' $\in$ C et $i \cap i' \neq \emptyset$

alors : $\begin{cases} g \cap g' = \emptyset \\ p \neq p' \\ \lambda \neq \lambda' \end{cases}$

Nous noterons :

$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ un élément de C et, si τ existe :

$\tau_1(c) = \lambda$, $\tau_2(c) = i$.

Nous supposons dans la suite l'existence d'une telle application.

Contre exemple

τ n'existe évidemment pas s'il existe un élève e de E tel que : si $C_e = \{c \in C \mid e \in c_1\}$

alors : $\sum_{c \in C_e} c_4 > q$

et de même pour un professeur.

Prenons ici un exemple où τ n'existe pas du fait de la partition de T en demi-journées.

Hypothèses : 1 - $a = 1$, $G^1 = \{g_1, g_2\} = G$

2 - $P = \{p_1, p_2, p_3\}$

3 - $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$; $\ell_1 = \{\lambda_1\}$, $\ell_2 = \{\lambda_2\}$

4 = $T = \{t_1, t_2, t_3\}$; $T_1 = \{t_1\}$, $T_2 = \{t_2, t_3\}$

$C = \{c^1, c^2, c^3, c^4\}$ où :

$$\left.\begin{array}{l} c^1 = (g_1, p_1, \ell_1, 2) \\ c^2 = (g_1, p_2, \ell_1, 1) \end{array}\right\} g_1, \ell_1 \qquad p_1$$

$$\left.\begin{array}{l} c^3 = (g_2, p_2, \ell_2, 1) \\ c^4 = (g_2, p_3, \ell_2, 2) \end{array}\right\} g_2, \ell_2 \qquad \left.\right\} p_2 \qquad p_3$$

On obtient, par exemple, le tableau suivant :

	T_1	T_2	
	t_1	t_2	t_3
g_1	p_1	p_1	p_2
g_2	p_2	p_3	p_3

où c^1 ne peut être placé ($\tau(c^1)$ n'existe pas) (Si l'on place c^1, on ne peut placer c^4).

I.3. EMPLOI DU TEMPS D'UN ELEVE, D'UN PROFESSEUR, D'UNE SALLE.

Supposant avoir trouvé un emploi du temps τ, on en déduit 3 applications :

- l'emploi du temps d'un élève,
- l'emploi du temps d'un professeur,
- l'emploi du temps d'une salle.

1) Horaires

a - Soit $e \in E$; on note $G_e = \{g \in G \mid e \in g\}$ (G_e est l'ensemble des groupes d'élèves auxquels e appartient),

et $C_e = \{c \in C \mid c_1 \in G_e\}$

(ensemble des cours où apparaît l'élève e).

b - On définit de même :

pour tout $p \in P$: $C_p = \{c \in C \mid c_2 = p\}$

(ensemble des cours assurés par le professeur p)

pour tout $\lambda \in \Lambda$: $C_\lambda = \{c \in C \mid \tau^1(c) = \lambda\}$

(ensemble des cours ayant lieu dans le local λ)

Définition : x appartenant indifféremment à E, P, ou Λ, on appelle horaire de x le sous-ensemble de T défini par :

$$H_x = \{t \in T \mid \exists c \in C_x : t \in \tau_2(c)\}$$

2) Emploi du temps d'un élève

Soit $e \in E$; pour tout $t \in H_e$, il existe c unique, appartenant à c_e, tel que :

$$t \in \tau_2(c)$$

donc :

$$\forall t \in H_e, \quad \exists! \; (c_2, \tau_1(c)) : c \in C_e, \; t \in \tau_2(c)$$

(à l'heure t, l'élève e a cours avec le professeur p dans la salle λ).

Définition : On appelle emploi du temps de e, pour tout $e \in E$, l'application :

$$\varphi_e : T \longrightarrow (P \times \Lambda) \cup \{\emptyset\}$$

telle que :

1 - $\forall t \in H_e, \quad \varphi_e(t) = (C_2, \tau_1(c))$

(avec $c \in C_e$ et $t \in \tau_2(c)$)

2 - $\forall t \in T - H_e, \quad \varphi_e(t) = \emptyset$

(l'élève e est libre à l'heure t)

3) Emploi du temps d'un professeur

Définition : Pour tout $p \in P$, on appelle emploi du temps de p l'application :

$$\varphi_p : T \longrightarrow (G \times \Lambda) \cup \{\emptyset\}$$

telle que :

1 - $\forall\ t \in H_p$: $\varphi_p(t) = (c_1, \tau_1(c))$

avec $c \in C_p$, $t \in \tau_2(c)$

(le professeur p fait cours à l'heure t au groupe d'élèves c_1 dans la salle $\tau_1(c)$)

2 - $\forall\ t \in T-H_p$ $\varphi_p(t) = \emptyset$

4) Emploi du temps d'une salle

Définition : pour tout $\lambda \in \Lambda$, on appelle emploi du temps de λ l'application :

$$\varphi_\lambda : T \longrightarrow (G \times P) \cup \{\emptyset\}$$

telle que :

1 - $\forall\ t \in H_\lambda$: $\varphi_\lambda(t) = (c_1, c_2)$

avec $c \in C_\lambda$ et $t \in \tau_2(c)$

2 - $\forall\ t \in T-H_\lambda$: $\varphi_\lambda(t) = \emptyset$

II - ETUDE DU PROBLEME SCHEMATISE

Avant de présenter plus en détail les données d'un emploi du temps de lycée, ainsi que les contraintes que τ doit vérifier dans la pratique, nous considèrerons un problème schématisé, où E et T ont une structure simple, le problème des salles n'étant pas traité. On supposera d'abord le nombre d'heures de T quelconque, tous les cours ayant une durée d'une heure. Puis on considèrera des cours de durée multiple d'une heure, lorsque T comporte 3 ou 4 heures.

II.1. COURS DE DUREE UNITE

Le problème le plus simple se ramène aux hypothèses suivantes :

1 - Sur E, on définit une seule partition $G = \{g_1, \dots, g_n\}$

2 - On ne prend pas en considération le problème des locaux (en associant par exemple une salle λ à tout groupe g de G).

3 - On considère dans T un seul intervalle qui est T lui-même.

4 - Tout cours dure une heure ($\Delta = \{1\}$)

Dans ces conditions, l'ensemble des cours est isomorphe à un sous-ensemble de $G \times P$. On considèrera donc un cours comme un couple (g_i, p_j), $g_i \in G$, $p_j \in P$, et l'emploi du temps comme une application :

$$\tau : G \times P \longrightarrow T$$

vérifiant :

$$\tau(c) = \tau(c') \Rightarrow \begin{cases} g \neq g' \\ \text{et} \\ p \neq p' \end{cases}$$

On identifie donc l'emploi du temps d'un élève et celui du groupe auquel il appartient.

Emploi du temps d'un groupe :

$\forall\ g \in G$ l'horaire de g est : $H_g = \{t \in T \mid \exists c \in C_g : \tau(c) = t\}$

et l'emploi du temps de g est l'application :

$$\varphi_g : T \longrightarrow P \cup \{\emptyset\}$$

telle que :

1 - $\forall t \in H_g$: $\varphi_g(t) = p$ (avec $\tau(g,p) = t$)

2 - $\forall t \in T - H_g$: $\varphi_g(t) = \emptyset$

P et G jouant des rôles symétriques, on en déduit l'emploi du temps d'un professeur qui est l'application :

$$\varphi_p : T \longrightarrow G \cup \{\emptyset\}$$

avec $\varphi_p(t) = g$ s'il existe un couple (g,p) tel que $\tau(g,p) = t$

et $\varphi_p(t) = \emptyset$ sinon.

n étant le nombre de groupes, si m est le nombre de professeurs, on peut représenter l'ensemble des cours par une matrice A à n lignes et m colonnes, telle que :

$a_{ij} = 0$ s'il n'y a pas de cours (g_i, p_j)

$a_{ij} = k$ si (g_i, p_j) doit se répéter k fois.

Puisque nous avons supposé que T comportait q heures, pour qu'il existe un emploi du temps, il est nécessaire que :

1 - $|C_g| \leqslant q \quad \forall g \in G$

2 - $|C_p| \leqslant q \quad \forall p \in P$

(un groupe g ou un professeur p n'apparait pas dans plus de q cours).

La matrice A doit donc vérifier :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} < q & i = 1,\dots,n \\ 2 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < q & i = 1,\dots,n \end{cases}$$

II.1.1. Existence d'un emploi du temps

Nous allons montrer par le théorème de Koning-Hall que les conditions $(\mathcal{P})$ sont des conditions suffisantes d'existence d'une application τ.

Dans un but de simplification, on peut, sans perte de généralité excessive, se ramener au cas où :

a - $m = n$

b - les inégalités 1) et 2) sont des égalités.

a - Si $m < n$, on peut ajouter n-m colonnes nulles à la matrice A, qui vérifie toujours $(\mathcal{P})$ (avec n-m professeurs fictifs).

b - Si $m = n$, supposons qu'il existe une ligne i_o telle que :

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i_oj} < q$$

alors, il existe au moins une colonne j_o telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij_o} < q$$

puisque $(\mathcal{P})$ est vérifiée.

Posons $r = q - \sum_{j=1}^{m} a_{i_oj}$ et $s = q - \sum_{i=1}^{n} a_{ij_o}$.

On peut alors ajouter t = min(r,s) à l'élément $a_{i_o j_o}$ en conservant pour A la propriété $(\mathcal{P})$. (création de t cours fictifs).

On procède ainsi jusqu'à ce que A vérifie la propriété :

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = q & \forall\ i = 1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = q & \forall\ j = 1,\dots,n \end{cases}$$

A l'heure k, on devra donc placer n cours compatibles entre eux, deux cours pouvant être placés à la même heure étant représentés par des éléments a_{ij} et $a_{i'j'}$ tels que :

$$i \neq i' \text{ et } j \neq j'$$

Pour toute heure k, on pourra représenter l'ensemble des cours tels que $\tau(c) = k$ par une matrice de permutation S_k extraite de A, avec :

$$S_1 + S_2 + \dots + S_k + \dots + S_q = A$$

(nous dirons qu'une matrice de permutation S est extraite de A si $a_{ij} - s_{ij} \geq 0$, $\forall i,j = 1,\dots,n$).

Si l'on peut extraire de A une matrice de permutation, soit S_q, on est ramené à trouver q-1 matrices de permutation $S_1,\dots,S_{q-1}$ telles que :

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{q-1} = A - S_q$$

Une solution existe donc, si pour q quelconque, on peut extraire de A une matrice de permutation, ce qu'on peut montrer à partir du théorème de Koning-Hall (cf. Berge [1])

Théorème : *Soit un graphe simple (G,P,Γ), où G et P représentent deux ensembles disjoints de sommets et Γ une application multivoque de G dans P. Il existe un couplage de G dans P, si et seulement si $|\Gamma G'| > |G'|$, pour tout sous-ensemble G' de G.*

Une forme équivalente à la matrice A des cours est un graphe où $G = \{g_i\}$ et $P = \{p_j\}$ représentent deux ensembles disjoints de sommets et tel qu'il existe un arc reliant g_i à p_j s'il existe au moins un cours (g_i, p_j).

Trouver une matrice de permutation contenue dans A revient alors à trouver un couplage de G dans P.

Soit G' un sous-ensemble de G; G' représente un ensemble L de lignes de A, $\Gamma G'$ étant un ensemble C de colonnes tel que :

$$j \in C \iff \exists\, i \in L \; : a_{ij} \neq 0$$

posons $|L| = r$ (nombre de lignes de L ou nombre de sommets de G').

Soit $r' = |C|$. On se propose de montrer que $r' > r$.

La somme des éléments des lignes de L est :

$$rq$$

La sommes des éléments des colonnes de C est par hypothèse :

$$s = r'q$$

et par construction de C :

$$s = t + rq$$

Donc :

$$r'q = t + rq \qquad \text{et} \qquad r' > r$$

Les hypothèses du théorème de Köning Hall sont donc vérifiées pour tout n et tout q.

II.1.2. Algorithme

Soit A une matrice de dimensions (n,n) vérifiant la propriété $(\mathcal{P}')$. La matrice déduite de A par permutation de deux lignes ou de deux colonnes quelconques vérifiant toujours $(\mathcal{P}')$, nous nous autoriserons cette opération autant de fois que nécessaire et continuerons à appeler A la matrice qui en résulte.

Supposons non nuls les p premiers éléments diagonaux de A : (Q) $a_{11} \neq 0, \ldots, a_{pp} \neq 0$ $(p \leqslant n)$.
Si $p = n$, on obtient immédiatement une matrice de permutation extraite de A : la matrice unité d'ordre n.

Si $p < n$, soit A_1 la sous-matrice extraite de A par intersection des p premières lignes et colonnes et B la sous-matrice extraite de A par intersection des n-p dernières lignes et colonnes.

On se propose, par une suite de permutation de deux lignes ou de deux colonnes dans A, d'obtenir pour B la propriété :

$$a_{p+1,p+1} \neq 0, \ \ldots, \ a_{n,n} \neq 0$$

en conservant pour A_1 la propriété (Q).

Si B contient un élément non nul, soit a_{ij}, on peut par deux permutations au maximum :

- p+1 et i (lignes)
- p+1 et j (colonnes)

obtenir dans A un élément $a_{p+1,p+1}$ non nul.

On considère alors A_1 de dimensions (p+1,p+1) et l'on itère jusqu'à tomber sur l'une des deux éventualités suivantes :

1 - $p = n$ auquel cas l'algorithme est terminé

2 - B est nulle, ce qui est le cas dans l'exemple suivant :

<u>*Exemple*</u> : n = 5, q = 2, p = 4

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & 1 \\ \hline & 1 & & & 1 \\ \hline 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & 1 & \\ \hline & & 1 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Il est alors possible, par une suite de permutations de 2 lignes ou de 2 colonnes sur A, d'obtenir une matrice B non nulle, en conservant pour A, la propriété (Q).

On appellera C la sous-matrice extraite de A par intersection des p premières lignes et des n-p dernières colonnes, D la sous-matrice extraite de A par intersection des n-p dernières lignes et des p premières colonnes.

$$\begin{array}{r} p \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} A_1 \\ \\ \end{array}} \right. \\ n-p \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} D \end{array}} \right. \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & C \\ & \\ \hline D & B \\ \hline \end{array}$$

Principe de l'algorithme

B étant nulle, C et D contiennent chacune des éléments dont la somme est (n-p)q (Puisque A vérifie ( ).
A partir d'un élément $a_{k_{ij}}$ non nul de C, on cherche une suite finie d'indices :

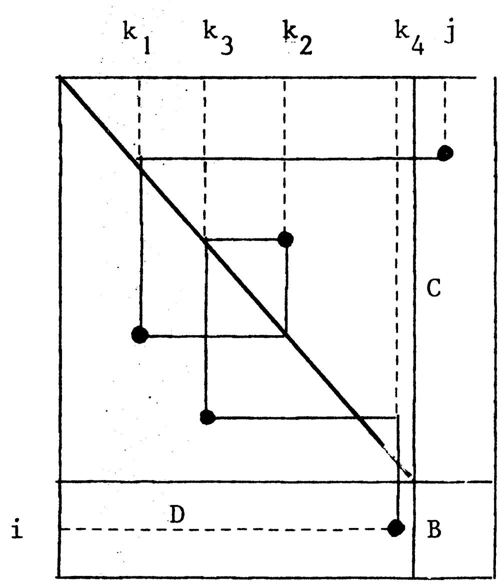
$K = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ vérifiant :

1 $\quad k \quad p \qquad \forall\, k \quad K$

2 $\quad k_i \neq k_j \qquad \forall\, i,j = 1,\dots,r \;,\; i \neq j$

3 $\quad a_{k_{i+1}k_i} \neq 0 \qquad \forall\, i = 1,\dots, -1$

4 $\quad \exists\, a_{ik_r} \neq 0$ tel que $i > p$ $(a_{ik_r} \quad D)$



Alors, en permutant successivement les colonnes de A :

$(j, k_1), (j, k_2), \dots, (j, k_r)$

on obtient une matrice B non nulle, A_1 conservant la propriété (Q).

Pour cela :

1 - On cherche une suite finie d'indices vérifiant 1 , 3 et 4 (indices non tous distincts).

2 - On extrait de cette suite une sous-suite d'indices tous distincts (simplification du chemin de C vers D).

1) <u>Recherche d'une suite d'indices non tous distincts</u>

On sélectionne dans A une suite d'éléments non nuls. A tout élément a_{ij} de A, on associe une fonction à valeurs entières $m(a_{ij})$, telle que :

$m(a_{ij}) = 0$ si a_{ij} n'a pas été choisi

$m(a_{ij}) = \alpha$ si a_{ij} a été choisi α fois.

On part d'un élément non nul choisi arbitrairement dans C, soit $a_{k_1 j}$.

A partir d'un élément $a_{k_\ell k_{\ell-1}}$ $(k_\ell \neq k_{\ell-1})$

on cherche un élément $a_{k_{\ell+1} k_\ell}$ $(k_{\ell+1} \neq k_\ell)$ (non nul)

vérifiant a), ou b) si a) n'est pas vérifié :

a) $k_{\ell+1} > p$ auquel cas on a trouvé une suite d'indices vérifiant 1 3 4

b) $m(a_{k_{\ell+1} k_\ell}) < a_{k_{\ell+1} k_\ell}$

on ajoute alors 1 à $m(a_{k_{\ell+1} k_\ell})$ et on itère le procédé à partir de $a_{k_{\ell+1} k_\ell}$

Si a) n'est pas vérifié, un élément $a_{k_{\ell+1} k_\ell}$ existe toujours, car on cherche un élément de la colonne k_ℓ à partir d'un élément de la ligne k_ℓ. Or à partir de $a_{k_\ell k_{\ell-1}}$, on a :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_\ell}}^{P} m(a_{k_\ell j}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k_\ell}}^{P} m(a_{ik_\ell})+1$$

A vérifiant $(\mathcal{P}')$, c'est-à-dire par conséquent :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k_\ell}}^{p} a_{k_{ij}} \leqslant \sum_{i=1}^{p} a_{ik_\ell}$$

(puisque la colonne k_ℓ de D est nulle).

La somme des éléments de A_1 étant finie, on forme donc ainsi une suite finie, ce qui montre qu'on atteint toujours un élément de D (éventualité a)).

De la suite des éléments choisis on déduit K.

2) Simplification du chemin

Si dans K appraît la sous-suite :

$$\{k_m, k_{i_1} \dots k_{i_s}, k_m\}$$

on la remplace par la sous-suite $\{k_m\}$ et ainsi jusqu'à obtention d'une suited'éléments distincts.

Remarques :

1 - S'il existe dans A_1 un ensemble de lignes X tel que :

$$Y = \Gamma X \in A_1$$

$$\text{et } \Gamma^{-1} Y = X$$

alors aucun élément choisi n'appartient à X ou Y.

2 - La somme des éléments de A_1 est :

$$nq - 2(n-p)q$$

lorsqu'on a trouvé un chemin de C vers D la somme des $m(a_{ij})$ est donc :

$$L \leqslant nq-2(n-p)q$$

(longueur du chemin de C vers D)

soit $L < (2p-n)q$

On peut en déduire que le cas $B = 0$ ne peut se produire que lorsque :

$$p > \frac{n}{2}$$

3 - Soit une matrice $A_{n,m}$ $(m < n)$ vérifiant $(\mathcal{P}')$. On peut en général construire plusieurs matrices $A'_{n,n}$ vérifiant $(\mathcal{P}')$

Exemple : $n = 4$, $m = 2$, $q = 3$

$$A = \begin{matrix} \underline{\underline{1}} & 0 \\ 1 & \underline{\underline{1}} \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

on peut en déduire :

$$A' = \begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad \text{et } A'' = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

A' et A" vérifiant $(\mathcal{P}')$

Si A' est l'une quelconque des matrices qui peuvent être construites à partir de A pour vérifier $(\mathcal{P}')$, on obtient facilement une solution

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_q \quad \text{pour } A$$

où $S_1, \ldots, S_q$ sont des sous-matrices de permutation, de dimension (n,m), obtenues à partir d'une solution pour A'.

L'inverse n'est pas vrai, et l'on voit sur l'exemple que les éléments a_{11} et a_{22} de A, qui forment pour A un ensemble d'éléments compatibles, ne peuvent apparaître ensemble dans une même matrice de permutation extraite de A'.

II.2. COURS DONT LA DUREE EST UN MULTIPLE D'UNE HEURE

Avec les hypothèses précédentes , on considère maintenant des cours de durée inférieure ou égale à 4. On a:

1 - $G = \{g_1,\ldots,g_n\}$

2 - $P = \{p_1,\ldots,p_n\}$

3 - On suppose toujours défini sur T un seul intervalle, qui est T lui-même. On peut alors considérer un emploi du temps comme une application :

$$\tau : G \times P \times \Delta$$

On considère deux cas particuliers :

<u>$q = 3$</u> (horaire de 3 heures)

<u>$q = 4$</u> (horaire de 4 heures).

On suppose que dans les deux cas la matrice $A_{n,n}$ des cours vérifie la propriété $(\mathcal{P}')$.

Un élément $a_{ij} > 1$, de A peut alors représenter indifféremment un ou plusieurs cours de durée multiple ou non.

1) Si <u>$q = 3$</u>

Le cas $a_{ij} = 3$ peut être immédiatement éliminé (a_{ij} est le seul élément non nul de la ligne i et de la colonne j).

Si $a_{ij} = 2$, a_{ij} peut représenter deux cours d'une heure ou un cours de 2 heures. Dans ce dernier cas, on notera $a_{ij}^{(2)}$ un tel élément de A.

2) Si <u>$q = 4$</u>

Le cas $a_{ij} = 4$ étant éliminé pour la même raison que précédemment, on notera :

$a_{ij}^{(3)}$ un élément représentant un cours de 3 heures,

$a_{ij}^{(2)}$ un élément représentant un cours de 2 heures (avec $a_{ij}^{(2)} = 2$)

Le fait que la matrice A vérifie la propriété $(\mathcal{P}')$ n'est alors plus suffisant pour assurer l'existence d'un emploi du temps $\mathcal{T}$. On peut en donner le contre-exemple suivant :

<u>*Exemple*</u> :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{array}$$

où tous les éléments valant 2 représentent des cours de 2 heures. Dressons le tableau groupes/heures suivant, dont les éléments sont des professeurs (cf. emploi du temps des groupes):

heures / groupes	t_1	t_2	t_3
g_1	p_2	p_4	p_3
g_2	p_3	p_3	p_1
g_3	p_1	p_2	p_2
g_4	p_4	p_1	p_4

On obtient une solution partielle, mais on voit qu'on ne peut placer le cours $(g_4,\ p_4, 2)$.

Nous indiquerons pour chaque cas une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe un emploi du temps :

a) <u>$q = 3$</u>

Les éléments de A peuvent représenter des cours de durée inférieure à 3.

Propriété (Q_3) : Il existe un emploi du temps si, et seulement si, de la matrice A des cours, on peut extraire une matrice de permutation S_2 telle que :

$$\forall a_{ij}^{(2)} \in A, \text{ on a } s_{2ij} = 1$$

b) <u>$q = 4$</u>

Les éléments de A peuvent représenter des cours de durée inférieure à 4.

Propriété (Q_4) Il existe un emploi du temps si, et seulement si, il existe deux matrices de permutation S_2 et S_3, S_2 étant extraite de A et S_3 de $A-S_2$, vérifiant :

(1) -

(1) - $\forall a_{ij}^{(3)} \in A$, on a : $s_{2ij} = s_{3ij} = 1$ (cours de 3 heures)

(2) - $\forall a_{ij}^{(2)} \in A$, $a_{ij} = 2$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $s_{2ij} = 1$ <u>ou</u> $s_{3ij} = 1$
- Il existe une matrice de permutation S_1 extraite de $A - S_2 - S_3$, telle que :

$$s_{1ij} = 1 \implies s_{2ij} = 1$$

a) <u>Démontrons la propriété (Q_3)</u>

Condition suffisante :

A tout cours de 2 heures on fait correspondre un couple d'heures ($\{t_1,t_2\}$, $\{t_2,t_3\}$, $\{t_1,t_3\}$). Pour montrer que τ existe, il suffit de montrer que ce couple est une période.

Soit S_2 vérifiant (1). Si S_2 représente l'ensemble des cours placés en t_2, on pourra faire correspondre à tout cours de 2 heures :

soit le couple $\{t_2,t_3\}$

soit le couple $\{t_1,t_2\}$

c'est-à-dire une période de T. La condition est donc suffisante.

Condition nécessaire :

Supposons qu'il n'existe pas S_2 vérifiant (1). Alors, pour tout triplet ordonné (S_1,S_2,S_3) de matrices de permutations extraites de A tel que :

$$S_1 + S_2 + S_3 = A$$

il existe $a_{ij}^{(2)}$ tel que : $s_{2_{ij}} = 0$

A cet $a_{ij}^{(2)}$, on ne peut donc faire correspondre une période de T.

La condition est donc nécessaire.

b) Démontrons la propriété (Q_4)

Condition suffisante

Soient S_1, S_2 et S_3 vérifiant la condition ; et $S_4 = A - S_1 - S_2 - S_3$. La matrice S_i représentera l'heure $t_i (i = 1,\dots,4)$.

) A tout cours $a_{ij}^{(3)}$, on fait correspondre les heures t_2 et t_3 donc : soit la période $\{t_1,t_2,t_3\}$, soit la période $\{t_2,t_3,t_4\}$

) A tout cours $a_{ij}^{(2)} = 2$, on fait correspondre :

- soit l'heure t_2 $(s_{2ij} = 1)$ et l'heure t_1, donc la période $\{t_1,t_2\}$
- soit la période $\{t_2,t_3\}$ $(s_{2ij} = s_{3ij} = 1)$
- soit la période $\{t_3,t_4\}$ $(s_{1ij} = s_{2ij} = 0)$

Condition nécessaire

α) Cours de 3 heures

Supposons qu'il n'existe pas S_2 et S_3 vérifiant (1). Pour tout quadruplet (S_1,S_2,S_3,S_4) vérifiant :

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = A, \text{ on a donc :}$$

$$\exists\ a_{ij}^{(3)} \in A : s_{2ij} = 0 \quad \text{ou } s_{3ij} = 0$$

à cet élément, on fait donc correspondre l'un ou l'autre des deux triplets :

$$\{t_1,t_3,t_4\} \qquad \text{ou} \qquad \{t_1,t_2,t_4\}$$

aucun des deux n'étant une période. (1) est donc nécessaire pour les cours de 3 heures.

β) Cours de 2 heures

Soit (S_1,S_2,S_3,S_4) un quadruplet quelconque de matrices de permutation vérifiant :

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = A$$

et soit $a_{ij}^{(2)}$ quelconque, appartenant à A.

- si $s_{2ij} = s_{3ij} = 0$, on lui fait correspondre le couple $\{t_1,t_4\}$.
  (S_1,S_2,S_3,S_4) ne forme pas une solution.

- Il faut donc : $s_{2ij} = 1$ et/ou $s_{3ij} = 1$
  1) si $s_{2ij} = 1$ et $s_{3ij} = 0$, il faut $s_{1ij} = 1$ $(\{t_1,t_2\})$
  2) si $s_{2ij} = 0$ et $s_{3ij} = 1$, il faut $s_{4ij} = 1$ donc $s_{1ij} = 0$ $(\{t_3,t_4\}$

La condition est donc nécessaire.

Exemple d'impossibilité

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

On donne ic-dessous une solution, où l'on suppose que a_{44} n'est pas un cours de 2 heures, dans le tableau groupes/heures suivant :

<table>
<tr><th>groupes \ heures</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">5</td><td>4</td><td>3</td></tr>
</table>

On voit qu'il est impossible que tous les éléments de valeur 2 dans A représentent des cours de 2 heures.

III - DONNEES ET CONTRAINTES D'UN LYCEE

III.1. STRUCTURE DES DONNEES

III.1.1. Matières

Pour une classe donnée, et souvent pour un groupe d'élèves donné, un programme d'enseignement prévoit par discipline (Français, Latin, Mathématiques, etc...) une durée globale de cours hebdomadaire.

Pour un triplet (g,p,ℓ) donné, il existera donc en général plusieurs cours de C tels que :

$$c_1 = g, \; c_2 = p, \; c_3 = \ell$$

Il est alors commode, en particulier pour l'expression des contraintes pédagogiques, de considérer l'ensemble des cours relatifs au même triplet (g,p,ℓ) et ayant trait au même enseignement. On appelle matière un tel ensemble de cours.

Définition :

Est donnée une partition M de C, soit

$M = \{m_1, \dots, m_k\}$ telle que :

$c, c' \in m \qquad c_1 = c'_1, \; c_2 = c'_2, \; c_3 = c'_3$

M est l'ensemble des matières.

Cette partition, établie par le censeur, n'est en aucun cas unique. Si, par exemple, il existe I cours (g,p,ℓ,δ_i) $i = 1,\dots,I$ représentant des cours de Mathématiques, on pourra distinguer le cas échéant plusieurs matières : Algèbre, Géométrie, etc,...

Si l'ensemble de cours $\{c^1,\dots,c^\Gamma\}$ constitue une matière, nous noterons :

$$m = (g,p,\ell,\mathcal{D}) \qquad \text{où } \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

III.1.2. Groupes d'élèves

Il y a, dans le cas réel des lycées, de nombreux critères de formation des groupes d'élèves. On ne peut donc se ramener au cas schématisé d'une seule partition $G = \{g_1,\ldots,g_n\}$ dans E.

Il fallait donc mettre sur pied un programme général, susceptible de traiter des groupes d'élèves établis de façon quelconque.

L'ensemble des divisions constitue cependant une partition privilégiée dans E puisque les élèves d'une même division suivent la plupart des cours en commun. Nous ramènerons donc le plus souvent possible le groupe d'élèves à une fraction de division, une division, ou même un ensemble de divisions. Ceci ne nuit pas à la généralité puisque, s'il existe dans E a partitions $G^1,\ldots,G^\alpha,\ldots,G^a$, l'une quelconque d'entre elles peut a priori être considérée comme un ensemble de divisions.

En fonction de la constitution du groupe g d'élèves apparaissant dans un cours, on distinguera trois types de cours :

1 - <u>Les cours simples</u> où g est une division. L'ensemble des divisions $D = \{d_1,\ldots,d_n\}$ constitue alors une partition privilégiée de E.

2 - <u>Les cours par demi-division</u> ou "cours par groupe".

Soit (c,c') un couple de cours tel que :

$c = (g_1,p,\ell,\delta)$, $c' = (g_2,p,\ell,\delta)$

avec : $g_1,\ g_2 \subset d \in D$

et $\{g_1,g_2\}$ forme une partition de D.

Si c et c' se rapportent au même enseignement on dira qu'ils constituent un couple de cours par groupe.

3 - <u>Les cours généralisés</u>

Soit $\mathcal{D}' = \{d_1,\ldots,d_k\}$ un ensemble de divisions et $\{g_1,\ldots,g_r\}$ une partition de D'telle qu'il existe dans C, r cours :

$$c^i = (g_i, p_i, \ell_i, \delta) \qquad i = 1,\ldots,r$$

les p_i étant distincts deux à deux.

Si ces r cours doivent être placés à la même période de l'horaire (on cherche τ vérifiant :

$$\tau_2(c^1) = \tau_2(c^2) = \ldots = \tau_2(c^r)\ )$$

on dira que le r-uplet $\overline{c} = (c^1,\ldots,c^r)$ est un cours généralisé.

On note : $\mathcal{P} = \{p_1,\ldots,p_r\}$

$L = \{\ell_1,\ldots,\ell_r\}$

et $\overline{c} = (D', \mathcal{P}, L, \delta)$

Ces 3 types de cours correspondent à 3 types d'enseignements :

1 - <u>**Les cours simples**</u> représentent la plupart des enseignements magistraux ou classiques : séances de Français, Histoire, Mathématiques, Philosophie, etc..., à l'exclusion des travaux pratiques et travaux dirigés (sauf effectif faible dans la division ; moins de 24 élèves). La division est donc actuellement un groupe d'élèves fondamental.

On classe parmi les cours simples, les cours facultatifs, destinés à l'ensemble des élèves d'une même division, mais auxquels ne sont tenus d'assister que ceux des élèves qui s'y sont inscrits en début d'année.

Un cours facultatif pour la division d est en fait un cours :

$$c = (g,p,\ell,\delta) \text{ tel que } g \subseteq d$$

g étant a priori quelconque, on considère par extension qu'il s'agit de la division toute entière.

On note cependant que tout élève non inscrit étant libre lorsqu'a lieu le cours, il est souhaitable de placer celui-ci en début ou fin de demi-journée pour éviter l'apparition possible d'un "trou" dans l'emploi du temps de ces élèves.

2 - Cours par demi-division

Pour les enseignements de type "Travaux Pratiques" ou "Travaux Dirigés", la division est dédoublée, c'est-à-dire qu'on forme deux groupes g_1 et g_2 approximativement égaux en nombre d'élèves et tels que $\{g_1, g_2\}$ forme une partition de la division.

Tous les élèves de la division suivant le même enseignement pour les disciplines considérées, il existe alors 2 matières de M, soit m_1 et m_2, telles que :

$$m_1 = (g_1, p, \ell, \mathcal{D})$$

$$m_2 = (g_2, p, \ell, \mathcal{D}).$$

On appellera matière par groupe un tel couple (m_1, m_2).

Couplages

Couplage de deux cours

Soient deux cours par groupe c et c' n'appartenant pas à la même matière par groupe et tels que :

$$c \;= (g, p, \ell, \delta) \qquad\qquad p \neq p'$$

$$c' = (g', p', \ell', \delta') \qquad\qquad \delta = \delta'$$

$$\exists\, d \in D : g, g' \subset d$$

On dit qu'on a couplé c et c' si on a trouvé τ vérifiant :

$$\tau_2(c) = \tau_2(c')$$

On peut alors considérer le couple (c, c') comme un cours généralisé $\overline{c} = (d, \mathcal{P}, L, \delta)$ où :

$$\mathcal{P} = \{p, p'\} \quad , \quad L = \{\ell, \ell'\}$$

Couplage de deux matières

Soit deux matières par groupe (m_1, m_2) et (m'_1, m'_2) concernant une même division d et vérifiant :

$$m_1 = (g_1, p, \ell, \mathcal{D}) \quad \text{où} \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

$$m_2 = (g_2, p, \ell, \mathcal{D})$$

$$m'_1 = (g_1, p', \ell', \mathcal{D})$$

$$m'_2 = (g_2, p', \ell', \mathcal{D})$$

On dit qu'on a couplé (m_1, m_2) et (m'_1, m'_2) si on a trouvé une application τ telle que : pour tout cours $c = (g, p, \ell, \delta)$ de m_1 (resp. m_2), il existe un cours $c' = (g', p', \ell', \delta)$ de m'_2 (resp. m'_1) tel que :

$$\tau_2(c') = \tau_2(c).$$

Coupler deux cours ou deux matières permet donc d'occuper en même temps deux demi-divisions complémentaires, ce qui est très souhaitable. On cherchera donc à coupler le plus possible les cours par groupe d'une quelconque division. Notons que le programme peut admettre comme données des cours par groupe déjà couplés par le censeur.

Remarque :

On constitue une matière par groupe (m_1, m_2) pour l'une ou l'autre des deux raisons suivantes :

- pour une raison d'effectif d'élèves dans d (plus de 24 élèves). On dira alors de g_1 et g_2 qu'ils sont des "groupes d'effectif"
- pour une raison pédagogique, qui vient s'ajouter le cas échéant à une raison d'effectif.

  (On constitue en T.D. de Mathématiques un groupe "fort" et un groupe "faible", en Education Physique un groupe "garçons" et un groupe "filles", etc...).

On parlera alors de groupes "de niveau". On s'accorde alors pour améliorer les couplages possibles, les facilités suivantes/

a) On ne cherche pas à coupler deux cours ou deux matières par groupe "de niveau". Ceci est entièrement justifié par le fait que le groupe "fort" d'une matière n'est en général pas identique au groupe "fort" d'une autre. De plus, on veut qu'en cours d'année un élève puisse passer, dans une matière, du groupe "faible" au groupe "fort" ou vice-versa.

b) Si (m_1,m_2) est une matière par groupe d'effectif dans la division d, on considère comme non définie dans les données la partition $\{g_1,g_2\}$ de d.

Si l'on couple (m_1,m_2) à une matière (m_1',m_2') par "groupe de niveau", on prendra pour $\{g_1,g_2\}$ la partition $\{g_1',g_2'\}$ de d qui apparaît dans (m_1',m_2').

3 - Cours généralisés

De tels cours représentent le plus souvent des enseignements optionnels, dont l'exemple le plus courant est celui des langues vivantes.

Pour suivre un cours à option en première langue vivante, par exemple, les élèves d'une division se répartissent dans des groupes distincts : Anglais, Allemand, Espagnol, etc... ; l'effectif des groupes ainsi formés étant souvent peu important, viennent s'adjoindre à ces groupes des élèves provenant d'autres divisions du même niveau.

On forme ainsi r groupes $g_1,\dots,g_r$ avec l'ensemble des élèves de k divisions $d_1,\dots,d_k$, et donc r cours :

$$c_i = (g_i,p_i,\ell_i,\delta) \qquad i = 1,\dots,r$$

où les p_i sont supposés distincts, et qui représentent chacun une option.

Il est de pratique courante de placer ces cours simultanément dans l'horaire, bien que ce ne soit pas une nécessité absolue.

Remarque :

On supposera que **l'ensemble** des élèves des k divisions sont concernés, c'est-à-dire qu'on ne placera à la même période de l'horaire aucun cours suivi par des élèves de $d_1, d_2, \ldots, d_k$ qui pourraient être libres. (cours généralisé facultatif).

Remarques sur la structure des données

1 - Emplois du temps des élèves

On suppose qu'un ensemble de cours formant un cours généralisé est donné sous la forme :

$$\bar{c} = (\varepsilon, \mathcal{P}, L, \delta)$$

c'est-à-dire qu'on ne connaît pas le groupe d'élèves g_i ($g_i \subseteq D'$) auquel est affecté le professeur p_i de $\mathcal{P}$. Ceci n'est pas gênant dans la mesure où il est très facile, à partir de l'emploi du temps des divisions, de retrouver l'emploi du temps des élèves les composant.

2 - La définition des cours n'est pas liée à la répartition actuelle des élèves en divisions.

Soit $\{g_1, \ldots, g_n\}$ la partition de E telle que si $e, e' \in g_i$ ($\forall i = 1, \ldots, n$), e et e' auront un emploi du temps identique. Si l'on appelle ensemble de divisions cette partition de E, et quel que soit l'ensemble C de cours donné, on pourra mettre les données sous forme de cours simples et de cours généralisés (mais non de cours par demi-division). Cette présentation est donc générale.

III.2. CONTRAINTES

Un emploi du temps τ quelconque n'étant en général pas satisfaisant (pour le lycée), nous énonçons ici, sans prétendre être exhaustif, les conditions auxquelles doit satisfaire un emploi du temps de lycée, qui ont été prises en compte par le programme. Si ces conditions sont dans l'ensemble vérifiées, l'emploi du temps obtenu doit être considéré comme étant de bonne qualité, mais il est en général impossible de les satisfaire toutes.

Les contraintes les plus importantes concernent le placement les uns par rapport aux autres des cours d'un même élève, ou d'une même division (contraintes pédagogiques), ou la répartition horaire des cours d'un même professeur (voeux).

Un autre type de contrainte consiste à rendre indisponibles à certaines heures un nombre quelconque d'élèves, professeurs, ou salles, ou encore à imposer la période de placement de certains cours (préaffectations).

L'horaire étant découpé en demi-journées, nous définirons une distance entre deux cours placés dans des demi-journées distinctes (espacement dans la semaine) puis une "distance" entre deux cours dans une demi journée (répartition des cours dans une demi-journée).

III.2.1. Définition (on suppose qu'il existe τ).

Distance

Soient deux cours c et c' de C tels que :

$$\tau_2(c) \subset T_m \subset \quad \text{et} \quad \tau_2(c') \subset T_n$$

Par abus de langage, on appellera distance de c et c', et l'on note d(c,c'), l'entier positif ou nul :

$$d(c,c') = |m-n|$$

(Il s'agit d'une pseudo-distance).

Trou

Soient c, $c' \varepsilon C$ tels que $d(c,c') = 0$

donc : $\exists T_m : \tau_2(c), \tau_2(c') \subsetneq T_m$.

On dit qu'il y a trou entre c et c' si :

$$\tau_2(c) \cup \tau_2(c') \notin \mathcal{I}$$

Si $\tau_2(c) = [t_i,\dots,t_k]$ et $\tau_2(c') = [t_{k'+1},\dots,t_j]$ avec $k' > k-1$, la durée du trou sera :

$$w = k'-k$$

(Lorsque les demi-journées sont de 4 heures ou moins, la durée du trou est de 0,1 ou 2).

On s'intéresse dans la suite à la distance, ou au trou, entre deux cours c et c' tels que si :

$$c = (g,p,\ell,\delta) \quad , \quad c' = (g',p',\ell',\delta)$$

alors :

$$g = g' \quad \text{et/ou} \quad p = p'$$

III.2.2. Contraintes pédagogiques

III.2.2.1. Placement des cours d'une matière dans la semaine.

1. Répartition

Soit une matière m de M, telle que $m = (c^1,\dots,c^\Gamma)$. Il est en général exclu que deux de ces Γ cours aient lieu dans une même demi-journée ou une même journée.

Est donc donnée pour toute matière m une constante $b_1(m)$ telle que τ doive vérifier :

$$\forall c,c' \varepsilon m : d(c,c') > b_1(m).$$

(cette condition est également exprimée pour les matières par groupe).

On prendra en pratique une constante b_1 fonction de r, nombre de cours de la matière m.

2. Succession

Cette contrainte est, à l'inverse de la précédente, spécifiée dans des cas particuliers : on veut que se suivent deux cours de deux matières distinctes ou non. Par exemple, un cours de Physique et un cours de T.P. de Physique, ou encore deux cours de T.P. de Physique.

On donne $\mathcal{M} \subset M \times M$ et b_2 tels que τ doive vérifier :

$$\forall (m,m') \in \mathcal{M} : d(c,c') < b_2(m,m')$$
$$\forall c \in m, \forall c' \in m'.$$

En pratique, on veut que deux cours se suivent, soit dans la même demi-journée, soit dans 2 demi-journées consécutives. Donc : $b_2 = 0$ ou $b_2 = 1$

3. Disjonction

C'est la contrainte inverse de la précédente : on veut que deux cours ne soient pas trop "proches". On donne :

$\mathcal{M}' \subseteq M \times M$ et b_3 tels que τ doive vérifier :

$\forall (m,m') \in \mathcal{M}', \forall c \in m, \forall c' \in m' : d(c,c') > b_3(m,m').$

On prendra : $b_3 = 1$ ou $b_3 = 2$.

On pourrait également, dans le désir d'équilibrer les journées entre elles, affecter à chaque matière un poids, croissant en fonction du degré d'attention demandé aux élèves pour en suivre les cours, et limiter pour chaque division la "charge" journalière (par exemple, la somme des poids des cours placés dans la journée). Pour ne pas multiplier les critères auxquels τ doit satisfaire, on exprimera cette condition à l'aide de disjonctions sur les cours des différentes matières d'une part, et par le choix d'heures préférentielles d'autre part.

III.2.2.2. Contraintes sur le placement de cours dans une demi-journée

On traite de cours et non plus de matières puisqu'il n'y a - restriction à la contrainte de succession - qu'un seul cours d'une même matière par demi-journée.

1 - Simultanéité de deux cours

On donne un ensemble $\mathcal{C} \subset C \times C$ de couple de cours, et l'on cherche τ vérifiant :

$$\tau_2(c) = \tau_2(c') \qquad \forall (c,c') \in \mathcal{C}$$

Cette contrainte est exprimée par la donnée de cours généralisés. Si l'on trouve un emploi du temps τ, cette condition sera donc toujours satisfaite.

2 - Minimisation des trous

On cherche à ne pas faire de trous dans les emplois du temps des élèves. Les trous de deux heures sont en tout cas proscrits.

Il est également important qu'à une heure quelconque t, le nombre d'élèves ayant un trou reste limité (problèmes de locaux et de surveillance).

3 - Bloquage des cours

Il est souhaitable d'éviter de faire venir des élèves au lycée pour un cours d'une heure, voire deux cours d'une heure dans une demi-journée (création possible de trous).

4 - Ordre des cours

Soient deux cours c et c' de C concernant le mêmegroupe d'élèves et τ tel que :

$$d(c,c') = 0$$

$$\forall t \; \varepsilon \; \tau_2(c) \quad \text{et} \quad \forall t' \; \varepsilon \; \tau_2(c')$$

On a : $t < t'$ ou $t' < t$.

Il n'existe pas de critère absolu permettant de dire laquelle des deux situations est préférable; certains cas sont cependant clairs : il vaut mieux placer l'éducation physique après les mathématiques plutôt qu'avant, par exemple.

On affectera pour cela à tout cours (ou à toute matière) un code indiquant s'il est préférable de le placer en début ou fin de demi-journée ; soit :

$$f(c) = \begin{cases} 0 & \text{fin de demi-journée} \\ \text{ou} & \\ 1 & \text{début de demi-journée.} \end{cases}$$

De même, il existe des cours qu'il vaut mieux placer systématiquement en début ou fin de demi-journée, en particulier pour éviter des trous

- cours facultatifs
- cours de 2 heures durant en fait 1h 1/2.
- cours par groupe non couplés

III.2.2.3. Conditions sur l'horaire

1) Heures interdites

Pour tout élève e, on donne une partie $\overline{H}_e$ de T, telle que τ doive vérifier :

$$H_e \subseteq \overline{H}_e$$

(de même pour les professeurs et pour les salles).

2) Heures préférentielles

On veut souvent éviter de placer des cours à certaines heures de la semaine (tard le soir, le jeudi, le samedi après-midi); ceci dépend des élèves auxquels on s'adresse.

On pourrait alors définir une fonction V, "valeur" des heures, telle que :

$$V : E \times T \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\forall e \in E$, $\forall t \in \overline{H}_e$: $(e,t) \xrightarrow{V} z = V(e,t)$ et chercher τ optimisant :

$$\sum_{e \in E} \sum_{t \in H_e} V(e,t)$$

(on donnera en fait, par division, une liste d'heures "non souhaitables").

3) Préaffectations

On donne un sous-ensemble C' de C et une application $\tau' : C' \longrightarrow \Lambda \times \mathfrak{J}$

τ' étant un emploi du temps.

On cherche τ vérifiant :

$$\tau(c) = \tau'(c) \qquad \forall c \in C'$$

Remarque : On pourra plus généralement donner une application I : $C' \longrightarrow \mathfrak{J}$, et chercher s'il existe τ vérifiant :

$$\tau_2(c) \subseteq I(c) \qquad \forall c \in C'$$

On considèrera en fait une application I très particulière en indiquant pour une matière quelconque :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{matin} \\ \text{soir} \\ \text{indifférent} \end{array}\right. \qquad \text{(sous forme de préférence).}$$

S'il existe c = (g,p,ℓ,δ) pour lequel on veut interdire une période i de T, et tel que :

$$i \subseteq \overline{H}_e, \quad \forall e \in g$$

$$i \subseteq \overline{H}_p$$

$$\exists \lambda \in \ell : \quad i \subseteq \overline{H}_\lambda$$

C'est-à-dire tel qu'on considère élèves, professeur et salle comme disponibles, il devient alors nécessaire de le préaffecter à une autre période.

III.2.3. Voeux des professeurs

Les voeux des professeurs pèsent d'un poids particulièrement important dans l'élaboration de l'emploi du temps. Un professeur ayant en moyenne à assurer une vingtaine d'heures de cours par semaine, l'aménagement de son horaire et de ses moments de liberté est donc pour lui prépondérant.

Certains de ces voeux sont impératifs : la liberté du lundi après-midi est demandée à l'exclusion de tout autre jour ; d'autres plus souples : une journée libre par semaine ou deux après-midi, par exemple.

Les voeux sont pris en compte dans la mesure du possible (le samedi est toujours très demandé) et il est certain que, si les voeux de tous ne peuvent être satisfaits, il existera une hiérarchie de fait dans le corps professoral.

Il convient cependant, pour tout professeur :

- de faire le moins possible de trous dans son horaire,
- de "bloquer" ces cours par demi-journée, c'est-à-dire de ne pas le faire venir au lycée pour 1 ou 2 heures de cours.

On considérera des voeux exprimés sous quatre formes sur une fiche individuelle :

1 - **Indisponibilités** (données par le censeur)

Pour tout p de P, on donne $\overline{H}_p \subseteq T$, et l'on cherche vérifiant : τ

$$H_p \subseteq \overline{H}_p$$

2 - **Voeux par heure**

Le professeur p peut indiquer les heures auxquelles il souhaite être libre :

soit : $\overline{H}'_p \subseteq \overline{H}_p$

3 - **Voeux par demi-journée**

Soit $J = \{T_1,\ldots,T_\rho\}$ (ensemble des demi-journées)

pour tout p est donnée une fonction V_p :

$$V_p : J \longrightarrow \mathbb{N}$$

telle que :

$V_p(T_r) = 3$ voeu de liberté prioritaire

$V_p(T_r) = 2$ voeu de liberté non prioritaire

$V_p(T_r) = 1$ souhaite faire cours

$V_p(T_r) = 0$ sans préférence.

4 - **Maximum journalier**

Tout professeur indique la durée maximale d'enseignement qu'il souhaite effectuer dans une journée (par défaut 7h) ; soit b(p) cette valeur pour le professeur p. On cherche un emploi du temps vérifiant :

$$| H_p \cap (T_r \cup T_{r+1}) | < b(p) \qquad \forall\, r = 1,3,5,\ldots,11 \quad \forall\, p \quad P$$

METHODE UTILISEE

I. PRESENTATION

1. PRINCIPE

On présente ici la méthode choisie pour la recherche d'un emploi du temps τ. Pour tout cours c de G, on doit chercher :

1) une période i de T

2) une salle λ de ℓ

τ existe si pour tout c de C, on a trouvé un couple $(\tau_1(c), \tau_2(c))$ satisfaisant aux contraintes posées sur c.

Du fait de la structure particulière des données :
- partition de C en matières
- partition de T en demi-journées,

et de l'expression d'un certain nombre de contraintes en termes de matières et de demi-journées, on utilise une méthode en deux phases successives :

1 - On cherche une première application qui, à tout cours de C fait correspondre une demi-journée, en vérifiant qu'il existe au moins une salle disponible dans ℓ. (Distribution des cours dans les demi-journées).

2 - Si cette application existe on cherche indépendamment un emploi du temps pour chaque demi-journée. Le problème est alors très réduit : T_j est un horaire restreint (on considère $|T_j| \leq 4$) ; il n'y a plus que les contraintes sur les affectations d'heures aux cours dans une demi-journée.

S'il existe une demi-journée qui n'a pas de solution, on revient à la première phase pour modifier en conséquence les affectations faites.

Le principe du découpage d'un horaire en journées a déjà été proposé ([10] en particulier), mais a été considéré comme un problème mineur, pouvant le cas échéant être traité préalablement à la main.

Le but étant ici de traiter un problème réel, et non de se ramener systématiquement à un problème schématisé et simplifié, le programme doit en considérer tous les aspects.

C'est pourquoi la distribution des cours par demi-journées est ici une partie importante du programme dont les principes de traitement sont sensiblement identiques à ceux de la seconde phase.

Le principe de la méthode est de serier les difficultés

- d'abord limiter pour tous les cours le nombre de possibilités, en conservant celles qui satisfont le mieux possible aux contraintes. On crée ainsi un canevas précis qui diminue très fortement l'aspect combinatoire du problème.

- ensuite chercher une (bonne) solution en étudiant éventuellement dans le cadre restreint obtenu toutes les possibilités qui subsistent

On utilise dans les deux parties un procédé itératif, consistant à placer successivement les matières dans les demi-journées (1ère phase) et les cours dans les périodes (2ème phase).

Dans la phase I, on fait correspondre à toute matière $m = (c^1, \ldots, c^r)$ de C un ensemble $\{T_1, \ldots, T_r\}$ de demi-journées et un ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ de salles. On réalise pour le traitement de chaque matière 4 opérations successives :

1 Le choix de la matière m à traiter
2 Le choix d'un ensemble de demi-journées où seront placés les cours de m.
3 Le choix d'une salle pour chaque cours de m.
4 La vérification de conditions nécessaires d'existence d'un emploi du temps partiel dans chaque demi-journée choisie.

Si les opérations 3 ou 4 ne sont pas possibles, on cherche un autre ensemble de demi-journées.

5 Si 2 ne peut être itéré (impossibilité, non respect des contraintes), une procédure de retour-arrière modifie les placements déjà effectués.

6 Si 5 n'aboutit pas, le problème est considéré comme n'ayant pas de solution : il faut, soit modifier les contraintes, soit modifier les données, soit faire les deux choses à la fois.

Dans la phase II, la suite d'opérations est pour chaque demi-journée semblable à celle de la phase I :

I Choix du cours à placer (sur des critères de "difficulté" de placement).

2 Choix d'une période

3 Choix d'une salle (pour les cours généralisés choix d'autant de salles qu'il y a de professeurs concernés).

4 Si, pour la période choisie, il n'existe pas de salle possible, on cherche à libérer une salle possible pour le cours, déjà affectée à un cours placé à cette période.

5 Si 4 est infructeux, ou si l'on ne peut choisir une période, une procédure de permutations modifie les choix 2 et 3 effectués sur les cours déjà placés.

6 Si la procédure 5 ne donne pas une solution partielle, il n'existe pas d'emploi du temps dans la demi-journée traitée. On choisit pour les cours impossibles un autre ensemble de demi-journées.

I.2. CHOIX D'UNE SALLE

Dans la phase I, on affecte à tout cours (g,p,ℓ,δ) de C une salle λ de ℓ. Ce choix de λ dans ℓ peut être remis en cause dans la phase II, en fonction des impossibilités qui peuvent se présenter.

On ne supposera pas que toute salle de ℓ peut être choisie indifféremment. Si $\ell = (\lambda_1,\dots,\lambda_p)$, on choisira de préférence la salle restant disponible d'indice le plus petit. Ce sera donc à l'utilisateur de définir ℓ de la façon la plus judicieuse possible.

On peut distinguer, en fonction de chaque cours ou de chaque matière :

- des salles "banales" sans installations particulières, où ℓ peut être
  . La salle réservée en priorité à une division, ou à un professeur,
  . L'ensemble des salles banales d'un bâtiment du lycée, ou d'un étage.
  . Un ensemble de "petites salles".

Ces caractéristiques pouvant se recouper.

- des salles "spécialisées" ou "semi-spécialisées".

Certaines d'entre elles sont réservées à des disciplines précises :gymnase, laboratoires, voire même à des divisions précises : salles de T.P. de Physique réservées aux Terminales Scientifiques par exemple.

D'autres sont réservées en priorité à certaines disciplines : salles d'Histoire (avec cartes), salles obscurissables, mais peuvent également être utilisées comme salles banales.

On pourrait alors considérer ℓ comme un ensemble $\{\ell_1,\dots,\ell_r\}$ de parties de Λ où les salles de ℓ_i sont équivalentes entre elles, tel que l'on préfère choisir une salle de ℓ_i à une salle de ℓ_j si $i < j$.

Cette distinction n'a pas été faite. On pourrait considérer dans la phase (I) un algorithme de permutation de salles répondant au problème suivant :

si $m = (g,p,\ell,\ )$ où $\ell = \{\ell_1,\ell_2\}$

$$\text{et} \quad = \delta_1,\dots,\delta_r$$

pour p donné ($p < r$) trouver τ tel que $\tau_1(c) \in \ell$, pour p cours de m sur r.

De même la "minimisation" des déplacements d'élèves ou de professeurs n'a pas été pris comme objectif supplémentaire.

I.3. NOTE CONCERNANT LES MATIERES

Lorsque ce sera possible, on considérera indifféremment dans la suite une matière proprement dite (élément de M), une matière par groupe (m_1,m_2) de $M \times M$, ou une matière généralisée $(D,\mathcal{P},L,\mathcal{D})$.

Un cours généralisé est une simple facilité d'écriture pour représenter plusieurs cours simultanés. Une matière simple, deux matières par groupe couplées initialement sont des cas particuliers de matières généralisées.

Une matière par groupe non couplée est considérée comme une matière simple intéressant l'ensemble des élèves d'une division.

Lorsqu'on cherche un couplage possible on revient évidemment à la notion de demi-division.

Une fois couplées, **deux matières par groupe** sont considérées comme une matière généralisée.

Dans une matière généralisée, on considérera symétriquement D et $\mathcal{P}$.

II. DISTRIBUTION DES COURS DANS LES DEMI-JOURNEES

II.1. PRESENTATION

On dira qu'on a placé une matière $m = (c^1, \dots, c^r)$ lorsqu'à chacun des cours de m, on aura affecté une demi-journée et une salle. Si au cours c, on a affecté la demi-journée T_j et la salle λ, on note : $\Pi_1^c = \lambda$, $\Pi_2^c = T_j$. Pour un cours généralisé où $\mathcal{P} = \{p_1, \dots p_m\}$, Π_1^c est une liste de m salles : $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Lorsqu'on a placé un certain nombre de matières de M (distribution partielle), on cherche, pour placer la matière m suivante r demi-journées $T_1, \dots, T_r$ de T vérifiant les conditions suivantes:

C1 - Conditions sur les heures

a - Disponibilités

On suppose que d'autres cours ont déjà été placés pour :

- les élèves de g (cours de C_e, $e \in g$)
- le professeur p (cours de C_p)
- les salles de ℓ (cours de C_λ, $\lambda \in \ell$).

Ceci définit le cas échéant des demi-journées impossibles pour les cours de m, en fonction de **leurs** durées.

b - Heures impossibles

Dans toute demi-journée, certaines heures peuvent être impossibles pour les cours de m : en raison de :

- **préaffectations**, de cours où apparaissent indifféremment des élèves de g, le professeur p ou des salles de ℓ.

Les préaffectations ne diminuent pas seulement les disponibilités, mais peuvent rendre la demi-journée impossible.

- **heures interdites** pour élèves de g, p ou salles de ℓ. Ces heures interdites jouent le même rôle que les préaffectations (cours préaffectés virtuels).

c - Heures non souhaitables

- voeux de liberté des professeurs
- heures pédagogiquement mauvaises.

Ces 3 types de critères conditionnent l'existence d'un ensemble de demi-journées possibles $T_{k_1}, \ldots, T_{k_r}$ pour placer les cours $c_1, \ldots, c_r$ (conditions a- et b-) et la qualité du placement (contrainte c-).

C2 - Conditions sur les demi-journées

On doit d'autre part placer globablement les cours de m (dans les demi-journées) en respectant les contraintes suivantes

a - Pour les élèves (contraintes pédagogiques)

- **répartition** des cours de m dans la semaine (conditions sur l'espacement des cours).
- **succession** ou **disjonction** des cours de m et des cours de matières déjà placées.

b - Pour les professeurs (voeux)

Demande de demi-journées de liberté. (voeux de code 2 et 3).

On cherche un ensemble de demi-journées vérifiant les conditions C2, et tel que pour chaque cours les conditions C1 soient vérifiées.

Un ensemble de demi-journées vérifiant C2 et C1-a sera dit "**a priori possible**". Il sera dit "**possible**" s'il vérifie de plus C1-b et C1-c.

II.2. DEFINITIONS

Pour définir un ensemble de demi-journées a priori possibles pour une matière m de M, on définit d'abord la disponibilité d'un cours c de m dans une demi-journée en fonction de la durée de c. Rappelons que pour un cours c déjà placé dans une demi-journée, on note Π_1^c la salle choisie dans ℓ, et Π_2^c la demi-journée choisie. Π_1^c et Π_2^c ne sont pas définis pour un cours non placé.

Sous-matière

Soit $m = (c^1, \ldots, c^r)$ où $c^i = (g, p, \ell, \delta_i)$ pour $i = 1, \ldots, r$

On appelle sous-matière de durée δ l'ensemble des cours de m tels que $\delta_i = \delta$.

Disponibilités

- Disponibilité initiale

On appelle **disponibilité initiale** de x dans la demi-journée T_j (x appartenant indifféremment à E, P, ou Λ) et on note $\theta_j^o(x)$, l'élément de Δ:

$$\theta_j^o(x) = |\overline{H}_x \cap T_j|$$

où $\overline{H}_x$ est, rappelons le, la partie de T représentant l'ensemble des heures possibles pour x. ($\theta_j(x)$ est le nombre d'heures disponibles pour x dans la demi-journée T_j, en fonction de la durée de T_j et des heures impossibles pour x).

- Disponibilité restante

x appartenant à E ou P, C_x est l'ensemble des cours où apparaît x. Soit C^j l'ensemble des cours déjà placés dans une demi-journée T_j. On note :

$$C_x^j = \{c \in C_x \mid \Pi_2^c = T_j\} \qquad \text{si } x \in E \text{ ou } x \in P$$

et

$$C_x^j = \{c \in C \mid \Pi_2^c = T_j,\ \Pi_1^c = x\} \qquad \text{si } x \in \Lambda$$

x appartenant indifféremment à E,P, ou Λ, on appelle <u>disponibilité restante</u> de x dans la demi-journée T_j, l'élément de Δ:

$$\theta_j(x) = \theta_j^o(x) - s$$

où

$$s = \sum_{c \in C_x^j} c_4 \qquad \text{en notant } c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \text{ un cours c de C}$$

(s est la somme des durées des cours où apparait x, placés dans la demi-journée T_j).

On appelle <u>disponibilité restante</u> d'un groupe g (respectivement d'un ensemble $\mathcal{P}$ de professeurs) le nombre :

$$\theta_j(g) = \min_{e \in g} \theta_j(e)$$

(respectivement $\theta_j(\mathcal{P}) = \min\limits_{p \in \mathcal{P}} \theta_j(p)$)

<u>Disponibilité restante d'un cours</u>

On traitera à part le cas d'<u>un cours par groupe</u>, le groupe g intervenant dans un tel cours étant le cas échéant indéterminé

On définira ici la disponibilité restante d'un cours généralisé, celle d'un cours simple s'en déduisant :
Si c est un cours généralisé : $c = (D, \mathcal{P}, L, \delta)$ avec $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_m)$ et $L = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$, on appelle <u>disponibilité restante de c</u> dans la demi-journée T_j, et on note $\theta_j(c)$ le nombre :

$$\theta_j(c) = \min\,(\theta_j(D),\ \theta_j(\mathcal{P}),\ \theta_j(L))$$

où $\theta_j(L)$ est défini comme suit :

$$\theta_j(\ell_i) = \max_{\lambda\, \varepsilon \ell_i} \theta_j(\lambda) \qquad \forall i = 1,\dots,m$$

et $$\theta_j(L) = \min_{i=1,\dots,m} \theta_j(\ell_i)$$

Structure a priori possible

On appellera **structure a priori possible** pour une matière $m = \{c^1,\dots,c^r\}$, un ensemble ordonné de r demi-journées, $T_{k_1},\dots,T_{k_\Gamma}$ vérifiant :

1 - les conditions C2

2 - la condition : $\theta_{kj}(c^j) > \delta_j \quad \forall j = 1,\dots,\Gamma$

(condition C1-a sur les disponibilités).

II.3. PLACEMENT D'UNE MATIERE

Pour placer une matière m, on cherche d'abord une structure a priori possible pour m. S'il n'en existe pas, il faut modifier les placements faits antérieurement ; on met alors en oeuvre l'algorithme de retour arrière. S'il en existe plusieurs, on choisira la meilleure, ou une des meilleures d'entre elles.

Pour trouver une structure, on cherche d'abord un ensemble de journées contenant un ensemble de demi-journées formant une structure a priori possible. Cette méthode est utilisée à la fois pour choisir la matière à placer, puis pour choisir une structure pour cette matière.

II.3.1. Détermination d'une structure a priori possible

On appelle journée, et on note u, un couple de demi-journées consécutives (T_k, T_{k+1}), où k est impair.

[Il y a donc 6 journées dans T; (T_1,T_2) et (T_{11},T_{12}), (samedi et lundi), seront considérés comme deux journées consécutives].

Soit une matière $m = (c^1,\dots,c^r)$ à placer. On suppose ici que m est soit une matière simple, soit une matière généralisée ; une matière par groupe non couplée sera considérée comme une matière simple, une matière par groupe couplée comme une matière généralisée, ce qui sera justifié plus loin.

On considère les contraintes suivantes :

1 - Répartition

On prendra en fonction de r, nombre de cours de m :

1 r = 1 aucune contrainte

2 r = 2 au moins une journée entre les deux demi-journées de placement des deux cours.

3 r = 3 étalement des cours sur 4 jours.

r = 4)

Si, pour r = 2 ou r = 3, la contrainte correspondante ne peut être satisfaite, c'est-à-dire s'il n'existe pas de structure a priori possible, on prendra la contrainte 4

2. Succession et disjonction

Deux cas peuvent se produire :

a - Il n'existe pas de contrainte de succession sur deux ou plusieurs cours de m entre eux. Dans ce cas, il peut exister une contrainte de succession (resp. disjonction)

sur les cours de m et d'une autre matière m'. On spécifie alors le nombre de cours de m et m' dont on veut qu'ils vérifient :

a.1 - pour la succession

: deux cours ($c \in m$, $c' \in m'$) dans la même demi-journée

: deux cours dans deux demi-journées consécutives.

a.2 - pour la disjonction

: deux cours non dans la même demi-journée

: deux cours non dans la même journée.

b - Il existe une contrainte de succession sur les cours de la même matière m Ceci vient en contradiction avec la contrainte de répartition qui s'applique à m, dont on ne tient alors pas compte.

3 - Professeurs

Si $m = (D, \mathcal{P}, L, \mathcal{D})$:

On éliminera les demi-journées telles que :

$$\exists p \in \mathcal{P} \quad : V_p(j) \geqslant 2$$

et les journées telles qu'il existe un professeur pour que le maximum journalier est atteint.

Toute demi-journée d'une structure sélectionnée doit donc vérifier :

$V_p(j) = 0$ (indifférent)

ou

$V_p(j) = 1$ (préférence pour faire cours).

D'autre part, pour éviter de placer dans une demi-journée un seul cours pour un professeur donné, on modifie les voeux initiaux de la manière suivante :

S'il existe $c = (g,p,\ell,\delta)$ tel que :

$$\Pi_2^c = T_j, \text{ on fait : } V_p(j) = 1.$$

Recherche d'un ensemble de journées

On cherche alors tous les ensembles de journées :

$$V = \{u_1,\ldots,u_n\} \qquad n < r$$

tels que :
Il existe une structure a priori possible :

$$s = \{T_{k_1},\ldots,T_{k_r}\} \text{ pour } m, \text{ vérifiant :}$$

$$\forall\ k = k_1,\ldots,k_r,\ \ \exists\ \ell\ \varepsilon\,[1,n]\ :\ T_k\ \varepsilon\ u_\ell$$

(Dans le cas a : pas de succession des cours de m entre eux, on a : $n = r$).
On note ϑ l'ensemble des V trouvés.

II.3.2. Choix d'une matière

Initialement : On détermine $|\vartheta|$ pour chaque matière m. Dans le cas d'une matière par groupe non couplée, on considère que le groupe d'élèves est la division toute entière.

On choisit arbitrairement l'une des matières qui sont telles que $|\vartheta|$ est minimal.

En cours d'algorithme : Lorsqu'on a placé une matière m, on détermine à nouveau $|\vartheta|$ pour l'ensemble M' des matières telles que :

$$\text{si } m' = (D', \mathcal{P}', L', \mathcal{D}')\ \varepsilon\ M'$$
$$\text{alors } D \cap D' \neq \emptyset \text{ ou } \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$$

[On considère que la contrainte de succession ou disjonction s'applique à deux matières m et m' vérifiant : $D \cap D' \neq \emptyset$].

II.3.3. Choix d'une structure

Ayant choisi la matière à placer, on détermine $\mathcal{V}$, et pour tout ensemble de journées V de $\mathcal{V}$, on considère les structures s contenues dans V choisies de la manière suivante :

1 - S'il y a une préférence : matin (resp. après-midi) sur le placement des cours de m, le nombre de demi-journée T_k de s, telles que k est impair (resp. pair) est maximal.

2 - Parmi celles-ci, on sélectionne l'une de celles qui vérifient :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \quad \sum_{T_j \in s} V_p(j) \quad \text{maximal.}$$

pour chaque V, on a donc sélectionné une structure. On choisit parmi celles-ci une structure à l'aide des critères 1 et 2 précédents.

II.3.4. Matières par groupe

On considère l'ensemble des matières par groupe d'une division d. On suppose qu'il existe des matières couplées, placées ou non, et qu'aucune des matières non couplées n'est placée. Soit à placer la première de ces matières par groupe non couplées, notée :

$$m = (m_1, m_2)$$

avec

$$m_1 = (g_1, p, \ell, \mathcal{D}_1)$$
$$m_2 = (g_2, p, \ell, \mathcal{D}_1)$$

où $\{g_1, g_2\}$ forme une partition de d et $\mathcal{D}_1 = (\delta_1, \dots, \delta_\Gamma)$

- si m est de type N(niveau) la partition $\{g_1, g_2\}$est définie, si m est de type E (effectif) elle est indéfinie.

On considère m comme une matière fictive :

$$m_f = (d, p, \ell, \mathcal{D})$$

où

$$\mathcal{D} = (\delta_1, \dots, \delta_\Gamma, \delta_1, \dots, \delta_\Gamma)$$

et on cherche pour m_f l'ensemble des structures a priori possibles, soit S. Si S est vide, on met en oeuvre l'algorithme de retour arrière. Sinon on cherche une autre matière par groupe de d à coupler avec m.

Pour cela :

On cherche l'ensemble des matières par groupe de d (écrites sous forme de matières fictives), soit :

$M'_f = m'_f$ avec $m'_f = (d, p', \ell', \mathcal{D}')$

vérifiant :

1 - $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$

2 - $p \neq p'$

3 - Il existe un ensemble non vide S' de structures a priori possibles pour m'_f, tel que :

a - $S \cap S' \neq 0$

b - pour $s \in S \cap S'$:

si $\Pi_2^c = \Pi_2^{c'} = T_j$ ($c \in m_f$, $c' \in m'_f$)

alors : * $S = S'$ (cours de même durée)

* $\Pi_1^c \neq \Pi_1^{c'}$ (on peut choisir des salles distinctes).

4 - Si m_f est de type N, m'_f n'est pas de type N.

Si M'_f est vide on considère m_f comme non susceptible d'être couplée, et on traite (m_1, m_2) comme la matière simple m_f.

Si M'_f n'est pas vide :

On crée l'ensemble de matières généralisées :

$\{(d, \mathcal{P}, L, \mathcal{D})\}$

où $\mathcal{P} = \{p, p'\}$

$L = \{\ell, \ell'\}$ $\qquad \forall\ m'_f \in M'_f$

chacune ayant un certain nombre de structures a priori possibles. On classe l'ensemble de ces structures dans un ordre de préférence décroissant, on classe d'abord les structures correspondant aux couplages type N-type E, à chaque structure correspondant une matière généralisée.

1 - On cherche une structure possible
2 - S'il n'en existe pas, on considère le cours généralisé correspondant à la meilleure structure (on a couplé les 2 matières) et on met en oeuvre l'algorithme de retour arrière.

II.4. STRUCTURES POSSIBLES

Une structure a priori possible n'est retenue que lorsqu'on a vérifié certaines conditions nécessaires d'existence d'une solution dans chacune des demi-journées choisies. On considère ici que pour une matière m_o, on teste la possibilité d'une structure a priori possible, donc la possibilité de placer un cours c^o dans une demi-journée T_j partiellement remplie.

Soit $C_j = \{c = (D, \mathcal{P}, L, \delta) \mid \Pi_2^c = T_j\}$

on considère ici un ensemble de cours généralisés où D est un ensemble quelconque de divisions $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$

On fait correspondre à C_j le graphe R_j construit de la manière suivante :

- à tout cours c de C_j, on fait correspondre un sommet de R_j. A deux cours distincts de C_j correspondent deux sommets distincts de R_j.

- deux sommets sont reliés par un arc s'ils correspondent à deux cours c et c' tels que :

$$D \cap D' \neq \emptyset$$
$$\text{où } \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$$

On fait ici jouer un rôle symétrique à D et $\mathcal{P}$, le problème des salles étant traité différemment.

A chaque cours c de C_j est associée la suite :

$$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_u) \qquad (u \leq 4)$$

où $\alpha \in A$ est un triplet (i,q,b) tel que :

1) i est une période vérifiant :

a) $|i| = \delta$, $i \in T_j \cap \overline{H}_D \cap \overline{H}_{\mathcal{P}}$

où $\overline{H}_D = \bigcap_{e \in D} \overline{H}_e$ et $\overline{H}_{\mathcal{P}} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{H}_p$

b) $\alpha, \alpha' \in A \implies i \cap i' = \emptyset$

2) q est un nombre booléen tel que :

q = 0 si la période i est "mauvaise" pour c

q = 1 si la période i est "bonne" pour c

Soit un cours généralisé $c = (D, \mathcal{P}, L, \delta)$

Rappelons que pour toute division d, est donnée une partie $\overline{H}'_d$ de T, qui est l'ensemble d'heures "non souhaitables" pour la division d. De même pour tout professeur p, est donnée une partie $\overline{H}'_p$ de T, qui est l'ensemble d'heures de l'horaire pendant lesquelles p souhaite être libre.

On dira alors qu'une heure t de T est déconseillée pour c, si :

$$t \in \bigcup_{d \in D} \overline{H}'_d \quad \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \overline{H}'_p$$

et nous dirons qu'une période i est "mauvaise" pour c s'il existe au moins une heure de i déconseillée pour c, et qu'une période i est "bonne" pour c dans le cas contraire.

3) b est un nombre booléen tel que :

b = 0 si la période i est impossible

b = 1 sinon

[b peut devenir nul par placement de cours dans T_j]

On considèrera deux sous-ensembles de $C_j \cup \{c^o\}$:

- l'ensemble des cours adjacents à c^o dans le graphe représentant $C_j \cup \{c^o\}$ (placements possibles relativement à D et $\mathcal{P}$).
- l'ensemble des cours utilisant des salles possibles pour c^o (placements possibles relativement à L).

II.4.1. Placements de c^o relativement à D et $\mathcal{P}$.

A c^o est associée la suite $A_o = \{\alpha_1^o, \dots, \alpha_{u(o)}^o\}$.

Soit $\{c^1, \dots, c^r\}$ l'ensemble des cours adjacents à c^o dans R_j. Au cours c^k $(k = 1, \dots, r)$, on associe la suite $A_k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_{u(k)}^k)$

on note : $\mathcal{A} = \{\alpha \mid \alpha \in A_k,\ k = 0, \dots, \Gamma\}$

On cherche l'ensemble B des suites :

$$\beta = (\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_\Gamma)$$

où $\alpha_k \in A_k \quad \forall\, k = 0, \dots, \Gamma$

vérifiant :

(1) $\forall\, \alpha \in \beta$, $\alpha = (i, q, b)$, on a : $b = 1$

(2) $\forall\, \alpha_k, \alpha_{k'} \in \beta$, $k \neq k'$, on a :

$$\text{si } i_k \cap i_{k'} \neq \emptyset \text{ alors : } \begin{array}{l} D_k \cap D_{k'} = \emptyset \\ \text{et} \\ \mathcal{P}_k \cap \mathcal{P}_{k'} = \emptyset \end{array}$$

(une suite vérifiant (1) et (2) représente une solution possible).

On cherche également la partie B' de B vérifiant :

(3) $\beta \in B' \Longrightarrow \quad q_o = q_1 = \dots = q_\Gamma = 1$
(bonnes solutions)

Si B' est vide, on cherche pour m_o une structure s telle que $T_j \notin s$.

Sinon, on cherche maintenant à affecter au cours un ensemble de salles.

1.4.2. Placements relatifs aux salles

Soit $c^o = (D_o, \mathcal{P}_o, L_o, \delta_o)$ avec $L_o = \{\ell_1, \dots, \ell_m\}$

Pour $k = 1, \dots, m$, on considère la partie $\bar{\ell}_k$ de ℓ_k telle que : $\forall\, \lambda \in \ell_k$, on a $\theta_j(\lambda) \geqslant \delta_o$

On cherche s'il existe un m-uplet :

$$(\lambda_1^o, \dots, \lambda_m^o) \ \varepsilon \ \overline{\ell}_1 \times \overline{\ell}_2 \times \dots \times \overline{\ell}_m$$

tel que : $\lambda_1 \neq \lambda_2 \dots \neq \lambda_m$, <u>possible pour c^o</u>.

1) On considère un tel m-uplet $(\lambda_i^o, \dots, \lambda_m^o)$ et l'ensemble $c^1, \dots, c^r$ des cours de C_j tels que :

$\forall\, i = 1, \dots, r \quad , \quad \exists\, k\ \varepsilon\ [1,m] \quad : \quad \lambda_k^o\ \varepsilon\ \Pi_1^{c^i}$

2) On cherche une suite :

$\beta = (\alpha^o, \dots, \alpha^\Gamma)$

vérifiant (1) (2) et (3) et telle que :

(4) $\forall\, \alpha^k\ \varepsilon\ \beta\ ,\ \alpha^k = (i,q,b)$

on a : $i \cap \overline{H}_\lambda = \emptyset \quad , \quad \forall\, \lambda\ \varepsilon\ \Pi_1^{c^k}$

(5) $\forall\, \alpha^k, \alpha^{k'}\ \varepsilon\ \beta\ ,\ k \neq k'$ avec :

$\alpha^k = (i,q,b) \quad \alpha^{k'} = (i',q,b)$

si $i \cap i' \neq \emptyset$ <u>alors</u> $\lambda \neq \lambda' \quad \forall\, \lambda\ \varepsilon\ \Pi_1^{c^k}$

$\forall\, \lambda'\ \varepsilon\ \Pi_1^{c^{k'}}$

Si une telle suite existe on dira que le m-uplet est possible pour c^o.

Le graphe correspondant est construit par superposition de deux graphes :

- le sous-graphe extrait de C_j représentant les cours $c^o, c^1, \dots, c^r$
- le graphe dont les sommets représentent $c^o, c^1, \dots, c^r$, deux sommets étant adjacents s'ils représentent deux cours utilisant au moins une salle en commun.

Lorsqu'on a trouvé un m-uplet $(\lambda_1^o, \dots, \lambda_m^o)$ possible pour c^o, on l'affecte à c^c

Si l'on n'en trouve pas, on cherche pour m_o une structure s telle que $T_j \notin s$.

II.5. ALGORITHME DE RETOUR ARRIERE

On suppose qu'il n'existe pas de structure possible pour la matière m_1. Si l'on a placé les matières $m_2, \dots, m_n$, on cherche une structure possible pour m_1 en modifiant les placements déjà faits.

On dira qu'on ôte une matière si l'on enlève ses cours des demi-journées choisies. Nous supposerons qu'il existe au moins une matière placée telle que si on l'ôte, il existe une structure possible pour m_1. S'il n'existe pas une telle matière, on estimera le problème sans solution.

Principe

1) *On choisit une structure pour m_1, qui, soit n'est pas possible, soit n' n'est pas a priori possible (on prend la meilleure structure).*
2) *On cherche s'il existe une matière à ôter (non déjà otée) telle que la structure choisie pour m_1 devienne possible.*
   - *s'il n'en existe pas, on choisit une autre structure pour m_1.*
   - *sinon, il peut exister plusieurs telles matières : m, m', m", ...*
3) *On considère celle d'entre elles qui a été placée en dernier lieu, soit m.*
4) *On itère en 1) avec m*
5) *Si m ne conduit pas à une solution, on itère en 3) avec $m' \neq m$.*
6) *Si aucune des matières trouvées en 2) ne conduit à une solution, on cherche une autre structure pour m_1.*
7) *Si on ne trouve pas d'autre structure pour m_1, on considère que le problème n'a pas de solutions avec les contraintes données.*

Notations

On appelle :

$S_j = \{s_j,\dots,s_j^{\rho(j)}\}$ l'ensemble des structures testées pour m_j.(On dira qu'une structure s a été testée pour la matière m si en cours d'algorithme, on a placé la matière m dans l'ensemble s de demi-journées de T.)

et $E_j = \{m_{j_1},\dots,m_{j_r}\}$ l'ensemble des matières ôtées telles que :

si on a ôté $m_{j'}$ ε E_j, alors la structure $s_j^{\rho(j)}$ est devenue possible pour m_j.

Initalement, on a :

$$S_j = \{s_j^o\}\ ,\ E_j = \emptyset \quad \forall\ j = 2,\dots,n$$

$$S_1 = \emptyset\ ,\ E_1 = \emptyset$$

1) Soit m_j la matière à placer. On a :

$S_j = \{s_j^o,\dots,s_j^{\rho(j)}\}$ et $E_j = \{m_{j_1},\dots,m_{j_\Gamma}\}$

Si $S_j = \emptyset$, on cherche une structure pour m_j

si $S_j = \{s_j^o\}$ de même dans les 2 cas, on va en 4).

2) Recherche d'une matière à ôter

(On cherche $m_{j'}$ à ôter telle que $s_j^{\rho(j)}$ devienne possible pour m_j).

$m_{j'}$ doit vérifier : $m_{j'} \neq m$, $m_{j'} \notin E_j$, $S_{j'} = \{s_{j'}^o\}$

Si $m_{j'}$ n'existe pas , on va en 4) (recherche d'une nouvelle structure).

3) Itération avec $m_{j'}$

On fait : $E_j = E_j \cup \{m_{j'}\}$, et $m_j = m_{j'}$

4) <u>Recherche d'une structure</u>

On cherche $s_j \notin S_j$ telle que :

a- Si s_j est possible, fin de l'algorithme : on a trouvé une solution.

b- Si s_j n'est pas possible, s_j vérifie :

$$\exists\, m_{j'}, \; m_{j'} \neq m_1 \quad , \; S_{j'} = \{s^o_{j'}\}$$

tel que : si on ôte $m_{j'}$, s_j est possible pour m_j

si s_j n'existe pas, on va en 6)

5) <u>On a trouvé une structure</u>

s_j existe. On fait : $S_j = S_j \cup \{s_j\}$

$$E_j = \{m_{j'}\}$$

$$m_j = m_{j'}$$

on va en 1).

6) <u>Il n'y a pas de structure s_j pour m_j</u>

- <u>Si $m_j = m_1$</u> fin d'algorithme : il n'y a pas de solution.

- <u>sinon</u> : soit $m_{j''}$ <u>la</u> matière ayant précédé m_j [$m_{j''}$ est la matière telle que pour lui trouver une structure possible, on a ôté m_j]

On fait : $S_j = \{s^o_j\}$

$$E_{j''} = E_{j''} \cup \{m_j\}$$

on va en 1) en faisant $m_j = m_{j''}$

III - EMPLOI DU TEMPS DE CHAQUE DEMI-JOURNEE

Dans la première phase, on a distribué l'ensemble des cours dans les demi-journées $T_1, \ldots, T$ de T, en respectant l'ensemble des contraintes s'exprimant en termes de demi-journées, et en vérifiant des conditions nécessaires d'existence d'un emploi du temps dans chaque demi-journée par la détermination pour chaque matière d'une structure possible.

Le problème est maintenant d'affecter à chaque cours une période, et de vérifier que les salles choisies dans la première phase sont disponibles à la période considérée, cette procédure étant effectuée pour chaque demi-journée. On est donc ramené à chercher 12 emplois du temps indépendants.

On considère ici une demi-journée T_j quelconque.

Les demi-journées n'ont pas toujours dans la pratique des caractéristiques identiques et il est en particulier fréquent que le nombre d'heures autorisées pour une division donnée soit de 4 le matin et de 3 seulement l'après-midi. Certaines demi-journées comporteront d'autre part, du fait des contraintes prises en compte dans la première phase, un nombre de cours relativement faible (par exemple jeudi matin, jeudi après-midi, samedi matin).

La méthode de placement est sensiblement identique dans son principe à celle de la première phase : on utilise une méthode empirique de placement successif des cours jusqu'à tomber sur un cours qu'il n'est pas possible de placer, auquel cas on appelle un programme de retour arrière, qui modifie les placements faits antérieurement.

Pour limiter le nombre d'appels à ce programme de secours, on sélectionne le cours à placer en fonction du nombre de périodes distinctes qu'il est possible de lui affecter, en choisissant d'abord les cours les plus difficiles à placer.

Une fois un cours sélectionné, on lui affecte une période qui vérifie les 2 conditions suivantes :

1 - Le placement effectué ne rend pas impossibles les cours non placés concernant les mêmes élèves et/ou les mêmes professeurs.

2 - Il existe, pour la période considérée, une salle disponible par professeur Si ce n'est pas le cas, on met en oeuvre une procédure de permutation des salles.

Si la première condition ne peut être vérifiée, on modifie les placements faits antérieurement (retour-arrière).

Si ces deux conditions sont vérifiées - il existe une période possible pour le cours - on cherche à satisfaire aux trois critères suivants :

- éviter une période déconseillée (le triplet α correspondant est tel que $q = 0$)
- éviter le création de <u>trous</u> dans les emplois du temps des élèves et des professeurs.
- si une division apparait dans deux cours c et c' tels que : $f(c) = 1$ et $f(c') = 0$ (c'est à placer de préférence en début de demi-journée et c' en fin de demi-journée), on cherche à ce que τ vérifie :

$$\forall t \;\varepsilon\; \tau_2(c) \quad , \quad \forall t' \;\varepsilon\; \tau_2(c') : t < t'$$

ce qui n'est évidemment pas forcément possible.

On appellera c^o le cours à placer, et on identifiera un cours et le sommet correspondant du graphe R^j. On notera :

a) $\{c^1,\ldots,c^r\}$, l'ensemble des cours adjacents à c^o dans R^j, et on appellera $R^j(c^o)$ le sous-graphe correspondant.

b) $\{c^1,\ldots,c^s\}$, avec $s < r$, l'ensemble des cours adjacents à c^o et non pladéjà placés.

III.1. Choix d'un cours - détermination des périodes restant possibles

A tout cours c^o de C^j est associée la suite :

$A^o = \{\alpha_1^o, \ldots, \alpha_{u(o)}^o\}$

où un élément α de A^o est un triplet :

$\alpha = (i,q,b)$

Un tel triplet α représente une période possible pour c^o si $b = 1$. Cette période ne contient pas d'heure "déconseillée" pour c^o si $q = 1$.

Initialement, lorsqu'aucun cours de C^j n'est placé, tout élément α de A^o est tel que $b = 1$, et ceci pour tout cours c^o de C^j (tout α représente une période qu'on ne s'interdit pas initialement).

Supposons choisir pour c^o une période i telle que :

$\alpha = (i,q,1)$.

Le choix de cette période rend impossible un certain nombre de périodes [au moins i elle-même si i n'était pas une période interdite à l'origine pour c^k ($k \in [1,s]$)] pour les cours $c^1,\ldots,c^s$ de $R^j(c^o)$ non déjà placés.

Nous déterminerons le nombre de périodes devenues impossibles pour $c^1,\ldots,c^s$ en deux temps : à partir de $R^j(c^o)$ et à partir de $R^j(c^k)$ pour $k = 1,\ldots,s$.

1 - A partir de $R^j(c^o)$

Soit $A^k = \{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{u(k)}^k\}$ la suite associée à c^k ($k = 1,\ldots,s$)

a - On cherche l'ensemble B des suites

$\beta = (\alpha^o,\alpha^1,\ldots,\alpha^s)$

où α^o est le triplet correspondant à la période i choisie pour c^o et $\alpha^k \in A^k$ pour $k = 1,\ldots,s$.

β vérifiant :

(1) $\forall\ \alpha\ \varepsilon\ \beta,\ \alpha = (i,q,b)$, on a : $b = 1$

(2) $\forall \alpha_k,\ \alpha_{k'}\ \ \varepsilon\ \beta$, $k \neq k'$ on a :

si $i_k \cap i_{k'} \neq \emptyset$ alors $D_k \cap D_{k'} = \emptyset$
$\mathcal{P}_k \cap \mathcal{P}_{k'} = \emptyset$

b - S'il existe $\alpha = (i,q,b)$ appartenant indifféremment à $A^1,\ldots,A^s$, qui n'apparait dans aucune suite β , α représente une période devenue impossible pour le cours c^k considéré :

on fait $b = 0$

2 - <u>Dans $R^j(c^k)$</u>

Pour tout c^k de $\{c^1,\ldots,c^s\}$, tel que la procédure précédente a fait apparaître une ou plusieurs périodes impossibles, on réitère une procédure semblable :

soient $c^{k_1},\ldots,c^{k_\ell}$ les cours non placés de $R^j(c^k)$

a' - On cherche l'ensemble B des suites :

$$\beta = (\alpha^k,\alpha^{k_1},\ldots,\alpha^{k_\ell})$$

où $\alpha^k\ \varepsilon\ A^k,\quad \alpha^{k_q}\ \varepsilon\ A^{k_q}\ (q = 1,\ldots,\ell)$

vérifiant les conditions (1) et (2) précédentes (a).

b' - Les périodes devenues impossibles sont celles qui n'apparaissent dans aucune suite β. On fait $b = 0$ dans les triplets correspondants.

Si en a- ou a'),on trouve un ensemble B vide, on dit que la période i ne convient pas pour c^0. On cherche pour c^0 une autre période. S'il n'en existe pas, ou si aucune ne convient, on dit que le cours c^0 est impossible et on met en oeuvre l'algorithme de retour arrière.

Le choix d'un cours à placer est dans ces conditions effectué comme suit :

- pour un cours c de C^j, on appelle :

N(c) le nombre d'éléments de la suite A associée à c, tels que b = 1.

M(c) le nombre d'éléments de A tels que q = 1 et b = 1.

- On considère le sous-ensemble C'^j des cours de C^j tels que :

$$c' \in C'^j \iff N(c') = \min_{c \in C^j} N(c)$$

et le sous-ensemble C''^j de C'^j tel que :

$$c'' \in C''^j \iff M(c'') = \min_{c \in C'^j} M(c)$$

III.2. Choix d'une période

Soit $c^o = (D_o, \mathcal{P}_o, L_o, \delta_o)$ le cours sélectionné. Il existe au moins un élément α de la suite A^o associée à c^o, tel que b = 1 ; sinon la procédure de retour arrière aurait été mise en oeuvre pour un cours adjacent placé antérieurement.

On cherche alors une période vérifiant les conditions(c'_1) et(c'_2)suivantes :

(c'_1) Il existe une salle disponible pour chaque professeur de $\mathcal{P}_o$(le problème des salles étant traité ci-dessous).

(c'_2) La période i choisie est telle que : pour tout cours c^k de $R^j(c^o)$, la suite A^k associée à c^k comporte au moins un élément α tel que b = 1.

S'il existe plusieurs périodes possibles on en choisit une en fonction des critères suivants :

(K_1) - 1) Si i est la période choisie, le triplet α correspondant de A est :

α = (i,1,1)

(i ne comporte pas d'heures déconseillées pour c^o).

2) pour tout c^k ($k = 1,\dots,s$), il existe au moins un élément α^k de A^k tel que :

$$\alpha^k = (i_k, 1,1)$$

(K_2) i ne crée pas de <u>trou</u> pour $c^o, c^1, \dots, c^s$

(K_3) i est en fonction du <u>type du cours</u>, la meilleure période, ou une des meilleurs périodes, pour les divisions de D_o.

Nous exposons ci-dessous quels sont les critères K2 et K3.

On sélectionne d'abord les périodes vérifiant K1(s'il en existe), puis parmi celles-ci les périodes vérifiant K2 (s'il en existe) puis parmi celles-ci les périodes vérifiant K3 (s'il en existe). On affecte alors au cours l'une quelconque des périodes sélectionnées.

<u>CRITERE K3</u> : qualité d'une période relativement au type d'un cours.

Soit $T_1 = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ la demi-journée considérée. On considère 3 sortes de cours :

1 - <u>**Cours de type 1**</u> : ce sont les cours qui sont soit :

- facultatifs
- de durée effective 1^h 1/2 (on considère alors une durée de 2 heures)
- des cours par groupes non couplés.

Les meilleures périodes sont alors les périodes i et i' telles que :

$$t_1 \in i \quad , \qquad t_4 \in i'$$

Si le cours est de durée 1 heure, les périodes t_2 et t_3 sont considérées comme de qualité identique.

2 - <u>**Cours de type 2**</u> : Ce sont les cours tels que f(c) = 1 (cours qu'il est préférable de placer en début de demi-journée).

La meilleure période est la période i telle que :

$$t_1 \in i.$$

Si le cours dure 1 heure, les périodes sont dans un ordre de qualité décroissante $\{t\}$, $\{t\}$ et $\{t\}$

3 - Cours de type 3

Ce sont les cours tels que $f(c) = 0$ (cours qu'il est préférable de placer en fin de demi-journée).

Pour un cours d'1 heure, les périodes sont dans un ordre de qualité décroissante :

$$\{t_4\}\ ,\ \{t_3\}\ ,\ \{t_2\}\ ,\ \{t_1\}.$$

CRITERE K2 : EXISTENCE DE TROUS

x étant indifféremment une division de D_o ou un professeur de $_o$, on dit qu'une période i choisie pour c^o ne crée pas un trou pour x, si l'une au moins des 4 conditions suivantes est vérifiée :

1) $\theta_j(x) = |\overline{H}_x \cap T_j|$

(la demi-journée T_j est "pleine" pour x)

2) Aucun cours où apparaît x n'est placé.

3) S'il n'existe pas de cours c^k non placé où apparaît x, alors :

$$\bigcup_{c\ \varepsilon\ C_x} \tau_2(c)\ \cup\ i\ \varepsilon\ J$$

(i "bouche" un trou pour x).

4) S'il existe un cours c^k où apparaît x non placé, et un seul cours $c^{k'}$ ou apparait x placé, alors :

A^k contient un triplet $(i^k,q,1)$ tel que :

$$\tau_2(c^{k'})\ \cup\ i\ \cup\ i^k\ \varepsilon\ J$$

Notons que si, ni la condition 1), ni la condition 2) ne sont vérifiées, deux cas peuvent se produire :

α) il existe au moins un cours où apparaît x qui est placé et pas de cours de c_x non placé [auquel cas on examine si 3) est vérifiée].

β) il existe au plus un cours c^k non placé où apparait x et alors, il existe un cours $c^{k'}$ et un seul, où apprait x, qui soit placé [on examine si 4) est vérifiée].

On dira que la période i ne crée pas un trou pour c^o, si elle ne crée pas un trou pour toute division d de D_o et pour tout professeur p de $\mathcal{P}_o$.

III.3. Affectation de salles

Dans la phase de distribution des cours dans les demi-journées, on attribue à tout cours c un ensemble de salles noté Π_1^c.

Si on note $c^o = (D_o, \mathcal{P}_o, L_o, \delta_o)$

$_o = \{p_1, \dots, p_m\}$ et $L_o = \{\ell_1, \dots, \ell_m\}$

on a : $\Pi_1^c = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$

où : - $\lambda_i \in \ell_i \quad i = 1, \dots, m$

- λ_i est attribuée au professeur p_i
- les salles de Π_i^c sont deux à deux distinctes
- $\theta_j(\lambda_i) \leqslant |\overline{H}_{\lambda_i} \cap T_j| \quad \forall\, i = 1, \dots, m$

On ne peut affecter les salles de Π_1^c au cours c si au moins l'une d'entre elle est occupée, pendant une ou plusieurs heures de la période i considérée, donc dans le cas suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \exists c \in C \\ \exists \lambda_k \in \Pi_1^c \end{array}\right\} : \tau_1(c) = \lambda_k \ \underline{\text{et}} \quad \tau_2(c) \cap i \neq \emptyset$$

Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ $(q < m)$ l'ensemble des salles de Π_1^c telles que cette condition soit vérifiée.

On considérera tout cours généralisé déjà placé comme un ensemble de cours de C placés simultanément.

Pour toute salle λ_i de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, on effectue la démarche suivante :

1 <u>On cherche s'il existe $\lambda \in \ell_i$</u> vérifiant les conditions suivantes :

<u>1-a</u> $\theta_j(\lambda) \geqslant \delta_o$ (disponibilité de λ suffisante)

<u>1-b</u> $\lambda \neq \lambda_k$ pour $k = q+1,\ldots,m$

<u>1-c</u> pour tout cours c déjà placé, on a :

<u>si</u> $\tau_1(c) = \lambda$ alors $\tau_2(c) \cap i = \emptyset$

S'il existe une telle salle λ, on remplace λ_i par λ dans Π

2 <u>S'il n'existe pas une telle salle λ</u> , on cherche s'il existe $\lambda' \in \ell_1$ telle que :

<u>2-a</u> λ' vérifie <u>1-a</u> et <u>1-b</u>

<u>2-b</u> λ' ne vérifie pas 1-c. Donc :

$\exists c = (g,p,\ell,\delta)$, $c \in \mathbf{C}^j$ tel que :

$\tau_1(c) = \lambda'$ et $\tau_2(c) \cap i \neq \emptyset$

Si c'est le cas, on cherche $\lambda'' \in \ell$ vérifiant :

2-c

- $\lambda'' \notin \{\lambda_{q+1},\ldots,\lambda_m\}$ (2-c-1)
- $\theta_j(\lambda'') \geqslant \delta$ (2-c-2)
- Il n'existe pas de cours c' déjà placé tel que :

$\tau_1(c') = \lambda''$ <u>et</u> $\tau_2(c') \cap \tau_2(c) \neq \emptyset$ (2-c-3)

Si l'on peut trouver un tel couple de salles (λ', λ''), on rempl ce λ_i par λ' dans Π_1^c et l'on fait : $\tau_1(c') = \lambda''$.

Sinon on cherche une autre période pour c^o.

Remarque :

On pourrait envisager une permutation de salles sur plus de deux cours ayant lieu simultanément. Le nombre de salles de l'ensemble ℓ d'un cours quelconque pouvant être très grand, ceci risquerait de prolonger considérablement le temps de calcul. Si les cours étaient tous de durée unité, il serait cependant possible de faire appel à un algorithme d'affectation par exemple l'algorithme hongrois.

III.4. Algorithme de retour arrière

Soit un cours c^o impossible. $\{c^1,\dots,c^s\}$ étant l'ensemble des cours de $R^j(c^o)$ non placés et $\{c^{s+1},\dots,c^r\}$ l'ensemble des cours de $R^j(c^o)$ déjà placés, on cherche pour c^o une période telle que :

1 - Il subsiste au moins une solution possible pour $c^1,\dots,c^s$.

2 - Le nombre de cours de l'ensemble $\{c^{s+1},\dots,c^r\}$ devenant impossibles est minimal. Soit $\{c^{s+1},\dots,c^\ell\}$ l'ensemble des cours devenus impossibles.

Il reste maintenant à trouver dans les mêmes conditions une période (et un ensemble de salles) pour chacun des cours $c^{s+1},\dots,c^r$.

Le cours c^o peut à nouveau devenir impossible : on cherchera alors à lui affecter une période distincte de celle précédemment choisie.

On notera :

I l'ensemble des cours devenus impossibles

J^k l'ensemble des périodes choisies pour le cours c^k.

Initialement I est vide, et J^k est vide pour tout cours c^k déjà placé. Si pour un cours c^k appartenant à I, on choisit la période i, on fait $J^k = J^k \cup \{i\}$.

L'algorithme est le suivant :

1 - On choisit un cours c^k dans I

2 - On cherche pour c^k une période i telle que :

- $i \in J^k$
- les cours de $R^j(c^k)$ non déjà placés ne sont pas rendus impossibles.
- le nombre de cours déjà placés devenant impossibles est minimum.

3 - Si une telle période i existe, on cherche si dans I, il existe des cours devenus possibles, et dans ce cas, on leur affecte une solution. Si I est vide, l'algorithme est terminé : il existe une solution partielle.

4 - S'il n'existe pas une telle période i, on considère qu'il n'existe pas d'emploi du temps dans la demi-journée T_j. On supprime alors le cours c^o de cette demi-journée.

Dans I, on ordonne partiellement les cours, et on choisit en 1) l'un des cours qui appartiennent à I depuis le plus grand nombre d'itérations.

CONCLUSION

Nous avons décrit une méthode heuristique, destinée à réaliser dans la pratique les emplois du temps de lycées.

A partir de données pré-établies, il n'est pas possible dans le cas général de déterminer si un emploi du temps existe ou non, et bien que dans les lycées le problème ait toujours une solution, quelquefois trouvée ou remaniée après la rentrée, il est fréquent qu'en cours d'élaboration manuelle des modifications de données soient nécessaires pour rendre le problème moins contraignant. La méthode proposée ici peut conduire à un échec même s'il existe une solution, puisqu'on ne cherche pas l'ensemble des combinaisons possibles, qui sont en nombre très grand.

Pour chercher une solution, on a adopté une méthode consistant à placer successivement les cours en cherchant à chaque placement une solution partielle et bien que ces placements soient effectués en deux temps, cette méthode est semblable à la méthode manuelle, qui est une méthode itérative, consistant à placer les cours dans l'horaire l'un après l'autre.

L'avantage d'une méthode manuelle est, indépendemment de l'expérience du censeur qui connait son lycée, une vue plus globale des difficultés, ce qui permet en particulier de prévoir l'ordre dans lequel devront être placés les cours pour avoir le plus de chances d'obtenir une solution avec des retours en arrière peu importants.

L'ordinateur prend par contre l'avantage lorsqu'il s'agit de tester un grand nombre de possibilités de placement, et de faire des permutations en cas de retour-arrière.

En ce qui concerne les contraintes auxquelles doit satisfaire un emploi du temps, elles résultent de décisions prises par le censeur, quelquefois lors du processus d'élaboration de l'emploi du temps lorsqu'il s'agit de compromis entre les intérêts des élèves et ceux des professeurs. Si l'on cherche à les déterminer explicitement dans les données sur des documents d'entrée, il faut cependant pouvoir y apporter des modifications en cours d'exécution.

Le programme qui a été écrit fonctionne sous le système CP/CMS de l'I.M.A.G. ce qui permet d'arrêter l'exécution au cas où une solution partielle n'est pas trouvée, de modifier les fichiers de données, puis de reprendre l'exécution au point où elle a été laissée. Ceci a été en particulier utilisé pour la phase de distribution dans les demi-journées.

Le programme est écrit en PL/1 et fait l'objet de tests sur plusieurs établissements de Grenoble. L'ensemble des programmes écrits est important (6000 instructions PL/1) et inclut des programmes de contrôle de validité des données.

On a considéré qu'une demi-journée était au maximum de 4 heures et l'horaire de 12 demi-journées soit une semaine. Le cas des cours de quinzaine n'a pas été traité.

Le bilan du traitement d'un lycée d'environ deux mille élèves peut se résumer comme suit :

- deux jours de transcription des données sur les documents d'entrée, par le responsable de l'emploi du temps,

- deux jours de perforation de cartes,

- quatre à cinq jours de traitement proprement dit sous CP/CMS, pour 1/2 heure d'unité centrale.

B I B L I O G R A P H I E

[1] C. BERGE — La théorie des graphes et ses applications

[2] J. CSIMA — Investigations on a time table problem
Thesis U of Toronto, Ontario, 1965.

[3] C.C. GOTLIEB — The construction of class-teacher time tables
Proc. IFIP Congress, Munich
North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1963, pp. 73-77

[4] J. CSIMA and C.C. GOTLIEB
Tests on a computer method for constructing school time tables
Comm. ACM. 7(1964) pp. 160-163

[5] S.J. APPLEBY, D.V. BLAKE and E.A. NEWMANN
Techniques for producing school time tables on a computer and their application to other scheduling problems.
Computer J. 3,5(1961), pp; 237-245

[6] E.D. BARRACLOUGH — The application of a digital computer to the construction of time-tables
Computer J.8., 1965, pp. 136-146

[7] M. DESVEAUX, Cie Thomson Houston
Processus heuristique d'affectations sans optimum global.
Congrès de Recherche Opérationnelle, Oslo, 1963

[8] M. LAUNAY — Application des méthodes d'assignation à la construction d'emplois du temps.
Faculté des Sciences de Caen, 1966

[9] J. LIONS — Matrix reduction Using the Hungarian Method for the Generation of school time tables
Comm. A.C.M.9,5, 1966

[10] J. LIONS — The Ontario School Scheduling program

[11] J. LIONS A counter-example for Gotlieb's Method for the Construction of School Time tables
Comm. ACM., 9, pp. 697, 1966

[12] D. LAZAK Notes on School time tables
Elektronische Datennerarbeitung, 10,9, 1968, pp. 415-428

[13] W. GRAUS Constructing Optimal Univ. time tables
Elektronische Daternnerarbeitung, 10,9, 1968, pp. 438-4

[14] J.C. HERZ Quelques considérations sur les problèmes d'emploi du temps
Revue Française de Recherche Opérationnelle, 1966

[15] J.C. HERZ Exposé et principe de résolution des problèmes d'emploi du temps scolaires.
Informatique en Sciences Humaines, janvier 1970

[16] J. LIONS A Generalization of a Method for the Construction of Class/Teacher time tables
Congrès IFIP, 1968

[17] KATES, PEAT, MARWICK and C°
Time tabling by computer for Schools in Ontario
Report to the Ontario Institute for Studies in Educatio
Toronto, 1967

[18] M. ALMOND An Algorithm for Constructing
University Time-tables
Computer J. 8, pp. 331-340, 1966

[19] H.C. JOHNSTON and K. WOLFENDEN
Computer aided Construction of School Time tables
IFIP, 1968

[20] J.C. HERZ Traitement sur ordinateur du planning d'un oral de concours
IBM-FRANCE, 1963

[21] R. GUNZNHAUSER et W. JUNGINGER
Uber eine Methode zur Erstellung von Schulstunden plänen
mit Hilfe einer Ziffernrechenanläge

[22] J. BERGHUIS, VAN DER HEIDEN and BAKKER
The Preparation of School Time tables by Electronic Computer
B.I.T., vol. 4, p. 106, 1964

[23] K. FISCHER Ein Programm zur Erstellung von Hochschulstundenplänen
Rechenzentrum der Universität Stuttgart

[24] N.L. LAWRIE Linear Programming as an Aid to School Timetabling
Proc. British Joint Comp. Conf. (may 1966), pp. 16-22

[25] J. LIONS The Construction of Time tables for Ontario Schools using a computer
O.C.D.E. 1969, pp. 147-160

[26] J.S. FOLKERS Research and Management Aspects of Time-table Automation for Schools and Universities.
O.C.D.E. 1969, pp. 217-241.