



**HAL**  
open science

## Théorie des treillis en vue des applications

Guy Boulaye

► **To cite this version:**

Guy Boulaye. Théorie des treillis en vue des applications. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1970. tel-00282287

**HAL Id: tel-00282287**

**<https://theses.hal.science/tel-00282287>**

Submitted on 27 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

No d'ordre :

# **T H E S E S**

Présentées à

LA FACULTE DES SCIENCES A GRENOBLE

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT

par

**Guy BOULAYE**

Docteur Ingénieur I. E. G.

---

Première Thèse :

## **Contribution à la théorie des treillis**

Deuxième Thèse :

**MICROPROGRAMMATION, RELATIONS AVEC LA THEORIE DES GRAPHES**

---

Thèses soutenues le

devant la commission d'examen

Monsieur J. KUNTZMANN Président

Monsieur P. DUBREIL Invité

Monsieur G. B. GERACE Invité

Monsieur Cl. BENZAKEN Examineur



# L I S T E   D E S   P R O F E S S E U R S

---

Doyen honoraire : Monsieur M. MORET  
 Doyen : Monsieur E. BONNIER

## PROFESSEURS TITULAIRES

---

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Melle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle-Electrotechnique
	YOCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire

MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme.	KOFLER Lucie	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I. U. T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMIER Pierre	Physique Nucléaire-Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme.	KAHANE Josette	Physique
Mme.	BONNIER Jane	Chimie
MM.	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	MORITA Susumu	Physique Nucléaire
	RADHAKRISHNA	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques
MM.	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEHOWICZ Joseph	Physique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	LONGQUEUE Jean-Pierre	Physique
	SOHM Jean-Claude	Electrochimie
	ZADWORYN François	Electronique
	DURAND Francis	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	PFISTER Jean-Claude	Physique
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I. P.
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C. S. U. Chambéry)
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I. U. T.)
	BRUGEL Lucien	Energétique I. U. T.
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées (I. P. G.)
	MOREAU René	Hydraulique I. P. G.
	ARMAND Yves	Chimie I. U. T.
	BOLLIET Louis	Informatique I. U. T.
	KUHN Gérard	Energétique I. U. T.
	PEFFEN René	Chimie I. U. T.
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
Melle.	PIERY Yvette	Biologie animale
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	MOHSEN Tahsin	Biologie (C. S. U. Chambéry)
	CONTE René	Mesures Physiques I. U. T.
	LE JUNTER Noël	Génie Electrique Electronique I. U. T.
	LE ROY Philippe	Génie Mécanique I. U. T.
	ROMIER Guy	Techniques Statistiques quantitatives I. U. T.
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	MAYNARD Roger	Physique

MM. DUSSAUD René  
BELORIZKY Elie  
Mme. LAJZEROWICZ Jeannine  
M. JULLIEN Pierre  
Mme. RINAUDO Marguerite  
MM. BLIMAN Samuel  
BEGUIN Claude  
NEGRE Robert

Mathématiques (C. S. U. Chambéry)  
Physique (C. S. U. Chambéry)  
Physique (C. S. U. Chambéry)  
Mathématiques Pures  
Chimie  
E. I. E.  
Chimie Organique  
I. U. T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. YAMADA Osamu  
NAGAO Makoto  
MAREZIO Massimo  
CHEECKE John  
BOUDOURIS Georges  
ROZMARIN Georges

Physique du Solide  
Mathématiques Appliquées  
Physique du Solide  
Thermodynamique  
Radioélectricité  
Chimie Papetière

Les travaux qui font l'objet de cette thèse ont été effectués à l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de GRENOBLE.

Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de cet Institut, a inspiré ces recherches et n'a cessé de me prodiguer de précieuses et patientes indications. Je le prie de croire à ma profonde reconnaissance.

J'exprime à Monsieur DUBREIL, Professeur à la Faculté des Sciences de PARIS, toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du Jury.

Que Monsieur GERACE, Professeur à l'Université de PISE, veuille bien croire à ma reconnaissance pour m'avoir permis, en me donnant le sujet d'une deuxième thèse, d'élargir mes connaissances et de profiter de sa longue expérience en Informatique.

Je remercie très vivement Monsieur BENZAKEN, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de GRENOBLE, pour son aide précieuse et bienveillante.

Je m'en voudrais d'oublier Mademoiselle BICAÏS pour le soin constant qu'elle a apporté dans la préparation matérielle de cette thèse. Ma reconnaissance va également à tous les membres du service de tirage.



# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION

## CHAPITRE - I - NOTION D'EXTENSION DANS LES TREILLIS

- Extension d'un ensemble ordonné - Définition .....	1
- Extension et condition de chaîne .....	2
- Extension "latticielle" d'un treillis .....	7
- Treillis obtenus par extensions successives .....	11
- Conservation de la semi-modularité lors d'une extension .....	13
- Extension latticielle, distributivité et modularité.	18
- Treillis distributifs finis et extension .....	21
- Relation entre co-atomes, $\mathbf{U}$ -générateurs maximaux et extension, dans un treillis fini distributif ....	23
- Treillis complétés obtenus par extension .....	25
- Quelques propriétés des éléments complémentaires dans un treillis obtenu par extension .....	28
- Lorsqu'un treillis peut être obtenu, par extension, de différentes façons possibles (en nombre fini) ...	29
- Une propriété caractéristique des treillis complets générables par extension .....	32
- Extension et produit cartésien d'ensembles ordonnés	33
- Extension et treillis .....	34

## CHAPITRE - II - IMMERSION D'UN TREILLIS DANS UN AUTRE

### CODAGE BOOLEEN D'UN TREILLIS

- Codage d'un treillis - Codage booléen - Définition	35
- $\cup$ -codage - Définition .....	35
- $\cap$ -codage - Définition .....	35
- $\cap$ -codage booléen canonique .....	35
- Fonction booléenne caractéristique d'un treillis fini	39
- Codage canonique d'un treillis distributif fini ..	44
- Dimension minimale et conservation des opérations $\cup$ ou $\cap$ .....	44
- Fonctions attachées aux treillis obtenus par exten- sion .....	49

## CHAPITRE - III - QUESTIONS RELATIVES A LA MODULARITE OU LA SEMI-MODULARITE

- Fermetures associées aux opérations $\cup$ et $\cap$ dans un treillis .....	53
- Nature des invariants .....	54
- Recherche des invariants par des méthodes booléennes	58
- Treillis semi-modulaires .....	59
- Treillis $\cup$ semi-modulaires .....	60
- Treillis modulaires .....	61
- Indice d'un élément d'un treillis .....	62

#### CHAPITRE IV - TREILLIS ( $\alpha$ ) ET $\alpha$ -AFFAIBLIS

- Condition ( $\alpha$ ) pour un treillis fini .....	73
- Condition ( $\alpha$ ) affaiblie pour un treillis fini .....	73
- Treillis $\alpha$ -affaiblis et extension .....	79
- Propriétés des branches équivalentes dans un treillis $\alpha$ -affaibli .....	81
- Éléments complémentaires dans un treillis $\alpha$ -affaibli .	86

#### CHAPITRE V - QUESTIONS DE PLANARITE DANS LES TREILLIS

- Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné - Rappel ....	92
- Diagramme de Hasse plan .....	92
- Ensemble ordonné plan .....	92
- Complétion de Jordan-Dedekind pour un treillis fini ..	93
- Propriétés de la complétion .....	93
- Indice d'un élément de rang p dans un treillis J.D. complet .....	94
- Treillis plans - Définition .....	94
- Chaîne de bordure d'un treillis plan fini .....	95
- Extension et planarité .....	96
- Treillis $\alpha$ -affaiblis plans .....	97
- n-droite - Définition .....	98
- Relation d'ordre entre régions .....	98
- Dual $E^*$ d'un n-droite E .....	100
- Propriété du dual d'un n-droite .....	101
- Ensemble ordonné des régions d'un n-droite .....	101
- Propriété du treillis .....	102
- Nombre maximal d'éléments du treillis .....	102
- Codage booléen du treillis-fonction associée .....	102

CHAPITRE - VI - RELATIONS BINAIRES - RECURRENCES

- Algèbre abstraite - Rappels .....	103
- Homomorphismes et relation de congruence - Rappels .....	104
- Relation (t+1)-aire canonique sur une algèbre abstraite t-aire - Définition .....	105
- Récurrence - Définition .....	106
- Algèbre(s) unaire(s) associée(s) a une relation binaire R, itérable, définie sur un ensemble $\{x_i\}$ .....	107
- Treillis des homomorphismes de même catégorie d'une relation .....	114
- Classes d'équivalence d'homomorphisme pour une récurrence .....	115
- Conséquence d'un homomorphisme de relation binaire (itérable) sur les algèbres unaires associées ....	117

CHAPITRE VII - TREILLIS ATTACHES A DES RECURRENCES

- Congruence stricte pour une récurrence - Définition .....	122
- Prolongement des classes du cycle sur les arborescences y aboutissant .....	125
- Congruences régulières sur une récurrence comexe de cycle $\Gamma$ .....	126
- Treillis des congruences sur une récurrence comexe .....	127
- Congruences sur une récurrence cyclique ayant plusieurs cycles .....	131

CHAPITRE - VIII - SUR L'ENSEMBLE ORDONNE DES PARTIES CONNEXES D'UN

GRAPHE NON ORIENTE

Méthodes booléennes et questions de treillis

- Ensemble ordonné des parties connexes d'un graphe non orienté .....	137
- Opérations sur un graphe connexe fini (et non orienté)	139
- Opérations ) ( sur deux graphes connexes disjoints	144
- Opérations )( sur deux graphes connexes disjoints	145
- Propriétés de l'ensemble ordonné des parties connexes d'un graphe non orienté .....	146
- Fonction booléenne attachée à un graphe satisfaisant les hypothèses du théorème .....	150
- Chemins .....	151
- Cas particulier d'un arbre .....	151
- Homomorphisme sur un arbre .....	157
- Treillis des homomorphismes sur un arbre .....	157



## INTRODUCTION

L'étude des homomorphismes de relations (en particulier les récurrences finies) et d'algèbres séquentielles, nous a amenés à nous intéresser aux treillis. En effet, ces homomorphismes forment des treillis dont la connaissance est très utile dans la pratique. Par exemple, pour la décomposition des machines séquentielles. Ces treillis ont en général des propriétés algébriques assez faibles, en ce sens qu'ils sont en général ni distributifs, ni même modulaires.

Nous avons alors cherché à étudier ces treillis en nous attachant plus à leur caractère d'ensemble ordonné.

Une voie d'étude, qui semble avoir été fructueuse, a été d'étudier la propriété suivante :

*"Un treillis possède la propriété  $\alpha$  s'il est à longueur de chaînes et si cette longueur est égale au nombre des éléments  $\cup$ -irréductibles du treillis, ceux-ci étant tous atomiques".*

Puis, nous avons affaibli progressivement cette propriété. Un peu comme on procède classiquement : partant des treillis distributifs complétés, on affaiblit progressivement leurs propriétés.

Cette propriété  $\alpha$  est très liée à la notion d'extension que nous développons au chapitre premier.

Dans le chapitre 2, nous étudions l'immersion de treillis dans des treillis booléens attachant ainsi une fonction booléenne aux treillis immergés. Pour certaines propriétés et suivant l'immersion, la fonction booléenne peut-être caractéristique du treillis auquel elle est attachée.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à des questions relatives à la modularité ou la semi-modularité. En effet, quand on étudie les treillis du point de vue algébrique, certains types de treillis paraissent assez en marge. Le même phénomène se produit dans notre démarche et, ce sont alors les treillis modulaires qui paraissent en marge des autres, du point de vue de la notion d'extension. Toutefois, nous montrons au cours de ce chapitre, que les treillis modulaires ont une structure d'ensembles ordonnés, en strates, assez analogues à celui des treillis obtenus par extensions successives.

Au chapitre 4, nous étudions de façon assez exhaustive, les treillis  $\alpha$  et  $\alpha$ -affaiblis, c'est-à-dire ceux possédant la propriété  $\alpha$ , forte ou affaiblie. Il s'avère qu'un moyen efficace de reconnaître un tel treillis est de considérer la fonction booléenne attachée au treillis dual.

Au chapitre 5, nous abordons, assez brièvement, les questions de planarité dans les treillis. C'est un problème assez intéressant pour certaines questions pratiques.

Aux chapitres 6 et 7, nous étudions certaines propriétés sur les relations binaires et des treillis qui leur sont attachés. Nous définissons également la notion d'homomorphisme de relation. En effet, nous avons commencé à nous intéresser aux systèmes séquentiels et ces systèmes se définissent soit en termes de relation binaire, soit en termes d'algèbre séquentielle. Il nous a paru utile de définir, pour des relations binaires (puis,  $n$ -aires) une notion permettant des développements assez parallèles à ceux auxquels on est conduit par la notion d'homomorphisme du point de vue algébrique.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous rassemblons quelques résultats qui se rattachent plutôt à la théorie des graphes mais que nous avons été incités à aborder au cours de l'étude des relations. C'est aussi l'occasion de présenter une classe assez riche de treillis  $\alpha$ .

## CHAPITRE - I

### NOTION D'EXTENSION DANS LES TREILLIS

#### EXTENSION D'UN ENSEMBLE ORDONNE - DEFINITION

Nous dirons qu'un ensemble ordonné  $E_{n+1}$  est obtenu par extension à partir de l'ensemble ordonné  $E_n$  si  $E_{n+1}$  est un sous-ensemble de  $E_n \times \{0,1\}$  ;  $0 < 1$  :

$$E_n \times \{0\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$$

(par  $\{0,1\}$  et dans toute la suite, nous entendons  $\{0,1\}$  ;  $0 < 1$ ) et  $E_n$  sera dit ensemble initial de l'extension.

Remarque : Dualement, si  $E_n \times \{1\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$  nous dirons que  $E_{n+1}$  est obtenu par contre-extension.

#### Support de l'extension - Définition

Nous appelons support la partie :

$$S(E_{n+1}) = \{(x,0) ; x \in E_n, \exists (x,1) \in E_{n+1}\}$$

Nous dirons des éléments de  $S(E_{n+1})$  , qu'ils "participent à l'extension".

#### Partie étendue - Définition

Nous appelons ainsi la partie :

$$\xi(E_{n+1}) = \{(x,1) ; x \in E_n\} = E_{n+1} - E_n \times \{0\}$$

### Éléments homologues - Définition

Deux éléments sont dits "homologues", s'ils sont de la forme : l'un  $(a,0)$  et l'autre  $(a,1)$ .

Les éléments de  $\mathcal{E}(E_{n+1}) \cup S(E_{n+1})$  sont deux à deux homologues, tandis que les éléments de  $(E_{n+1} - [\mathcal{E}(E_{n+1}) \cup S(E_{n+1})])$  n'ont pas d'homologue.

Soit  $x$  un élément, on notera  $x^*$  son homologue (quand celui-ci existe). Si tout élément de  $H$  possède un homologue, on notera  $H^*$  l'ensemble de ces homologues.

Soit  $a \in E_n \times \{0\}$ ,  $a$  de la forme  $(a',0)$  et  
 $b, b \leq a \Rightarrow b$  de la forme  $(b',0)$ ,  $b' \leq a'$   
 $\Rightarrow b \in E_n \times \{0\}$ , donc :  
 $a \in E_n \times \{0\}, b \leq a \Rightarrow b \in E_n \times \{0\}$

Suivant une terminologie répandue, nous dirons aussi que  $E_n \times \{0\}$  est une partie héréditaire de  $E_{n+1}$ .

### Extension avec minimum

On dira que l'extension est avec minimum si son support possède un minimum.

### EXTENSION ET CONDITION DE CHAÎNE

Comme la condition de chaîne de JORDAN-DEDEKIND reviendra par la suite, indiquons que lorsqu'un ensemble ordonné satisfait cette condition, nous dirons qu'il "possède la propriété de JORDAN-DEDEKIND". D'un treillis qui possède cette propriété, nous dirons brièvement que c'est un "Treillis de JORDAN-DEDEKIND".

### Extension caténaire - Définition

Une extension sera dite caténaire si toute chaîne maximale du support est maximale dans l'ensemble initial.

### THEOREME

*Une extension conserve la propriété de JORDAN-DEDEKIND si et seulement si elle est caténaire.*

Preuve : La condition est suffisante.

Soit  $E_{n+1}$  un ensemble ordonné obtenu par extension à partir de l'ensemble  $E_n$  possédant la propriété.

Soit  $x \geq y$ ,  $\{x, y\} \subseteq E_{n+1}$ . Trois cas sont à considérer :

1 -  $\{x, y\} \subseteq E_n \times \{0\}$ , alors toutes les chaînes maximales entre  $x$  et  $y$  sont de même longueur puisque  $E_n$  possède la propriété et que tout élément d'une chaîne entre  $x$  et  $y$  appartient à  $E_n \times \{0\}$ .

2 -  $x \in \mathcal{E}(E_{n+1})$  et  $y \in E_n \times \{0\}$

Une chaîne maximale entre  $x$  et  $y$ , est de la forme :

$$x = a_0, a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n = y \text{ avec}$$

$$\{a_0, a_1, \dots, a_p\} \subseteq \mathcal{E}(E_{n+1})$$

$$\{a_{p+1}, \dots, a_n\} \subseteq E_n \times \{0\}$$

$$\forall a_i, i \in \{0, 1, \dots, p\}, \exists a_i^*, a_i^* \in E_n \times \{0\}, a_i^* < a_i$$

et la chaîne  $x^* = a_0^*, a_1^*, \dots, a_p^*$  est maximale dans  $E_n \times \{0\}$ . La longueur de la chaîne considérée, entre  $x$  et  $y$ , est égale à celle de la chaîne  $x^* = a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots, a_p^*, a_{p+1}^*, \dots, a_n^* = y$ , augmentée de 1 (la longueur de la chaîne  $x, x^*$ ).

Comme dans  $E_n \times \{0\}$ , les chaînes maximales entre  $x^*$  et  $y$  ont même longueur, il en résulte que les chaînes maximales entre  $x$  et  $y$  ont toute la même longueur.

$$3 - \{x, y\} \subseteq \mathcal{E}(E_{n+1})$$

Une chaîne maximale entre  $x$  et  $y$  est de la forme :

$$x = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = y \text{ et}$$

$$\forall i, i \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow a_i \in \mathcal{E}(E_{n+1}) \Rightarrow \exists a_i^*, a_i^* \in E_n \times \{0\}$$

et, comme l'extension est caténaire, la chaîne  $x^* = a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^* = y$  est maximale dans  $E_n \times \{0\}$ . Ainsi la longueur d'une chaîne entre  $x$  et  $y$  est égale à la longueur de la chaîne des homologues dans  $E_n \times \{0\}$  et comme dans ce dernier ensemble toutes les chaînes entre  $x^*$  et  $y^*$  sont de même longueur, il en est de même entre  $x$  et  $y$ .

La condition est nécessaire :

On suppose donc que  $E_{n+1}$  et  $E_n$  possèdent la propriété de JORDAN-DEDEKIND.

$$\text{Soit } \{x, y\} \subseteq \mathcal{E}(E_{n+1}), \quad x \geq y$$

Soit  $x^*$  et  $y^*$  les homologues de  $x$  et  $y$ .

$$(\{x^*, y^*\} \subseteq E_n)$$

Soit  $l$  la longueur des chaînes entre  $x^*$  et  $y^*$ . La longueur d'une chaîne entre  $x$  et  $y^*$  est donc  $l+1$  et la longueur d'une chaîne entre  $x$  et  $y$  est  $l$ , une telle chaîne est donc l'homologue d'une chaîne maximale dans  $S(E_{n+1})$  et, par suite, l'extension est caténaire.

### Autres propriétés relativement à d'autres conditions

- I -  $E_{n+1}$  est sous-ensemble à chaînes maximales de  $E_n \times \{0,1\}$  si et seulement l'extension est caténaire (c'est-à-dire, rappelons le, que  $S(E_{n+1})$  est sous-ensemble à chaînes maximales de  $E_n \times \{0\}$ ).
- II-  $E_{n+1}$  est convexe dans  $E_n \times \{0,1\}$  si et seulement si  $S(E_{n+1})$  est convexe dans  $E_n \times \{0\}$ .
- III- Un ensemble obtenu par extension à partir d'un ensemble satisfaisant :
- la condition de chaîne ascendante finie.
  - la condition de chaîne descendante finie
  - la condition de longueur finie (c'est-à-dire, dont toutes les chaînes sont de longueur finie et bornée par un nombre fixé)
- satisfait lui-même (respectivement) ces conditions, qui sont évidemment nécessaires.

### Nature de l'ensemble initial pour un treillis obtenu par extension

Soit le treillis  $T$  obtenu par extension à partir de l'ensemble initial  $E$  :

$$E \times \{0\} \subseteq T \subseteq E \times \{0,1\}$$

$E \times \{0\}$  étant partie héréditaire de  $T$  est fermé pour  $\cap$ .

Par ailleurs, soit  $(a,0) \in E \times \{0\}$  et  $(b,0) \in E \times \{0\}$

Supposons  $(a,0) \cup (b,0) = (c,1) \in \mathcal{E}(E_{n+1})$

$$\exists (c,0), (c,0) \prec (c,1)$$

or

$$(c,1) = (a,0) \cup (b,0) \Rightarrow c \geq a \text{ et } c \geq b \Rightarrow$$

$$(c,0) \geq (a,0) \text{ et } (c,0) \geq (b,0)$$

et par suite  $(c,1)$  n'est pas la borne supérieure de  $(a,0)$  et  $(b,0)$  ; celle-ci appartient donc à  $E \times \{0\}$  et  $E$  est donc un treillis. D'où :

### THEOREME

*Si  $T$  est un treillis, obtenu par extension à partir d'un ensemble origine  $E$ , ce dernier est lui-même un treillis, sous-treillis convexe de  $T$ .*

### Corollaire

Si  $T$  est distributif ou modulaire ou  $\cup$ -semi-modulaire ou  $\wedge$ -semi-modulaire, le treillis initial l'est également.

### THEOREME

*Un treillis  $T_{n+1}$ , obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ , est complet si et seulement si  $T_n$  est complet.*

### Preuve :

Si  $T_{n+1}$  est complet,  $T_n$  et toute partie de  $T_n$ , comme parties de  $T_{n+1}$ , possèdent une borne supérieure.  $T_n$  est donc complet.

Si  $T_n$  est complet,  $\text{Max}(T_n \times \{0\}) \in S(T_{n+1})$  car, sinon,  $\forall x \in \mathcal{E}(T_{n+1})$ ,  $x \cup \text{max}(T_n \times \{0\})$  n'existerait pas. Par suite  $T_{n+1}$  possède un maximum :  $(\text{max}(T_n \times \{0\}))^*$ .

Montrons maintenant que  $T_{n+1}$  est un  $\wedge$ -demi-treillis complet.

Soit  $E \subseteq T_{n+1}$ .

1 - Supposons  $E \subseteq \xi(T_{n+1})$

Considérons  $E^* \subseteq S(T_{n+1})$ .  $E^*$  appartient au treillis initial, donc possède une borne inférieure  $\text{Inf}(E^*)$ . Si  $\text{Inf}(E^*) \in S(T_{n+1})$ , alors  $E$  possède une borne inférieure :  $(\text{Inf}(E^*))^*$ . Si  $\text{Inf}(E^*) \notin S(T)$ ,  $\text{Inf}(E^*)$  est un minorant maximal de  $E$ , et puisque  $E$  appartient à un treillis, il ne peut y en avoir d'autre, et  $\text{Inf}(E^*)$  est borne inférieure de  $E$ .

2 - Supposons  $E$  de la forme  $E = F \cup G$ ,  $F \subseteq \xi(T_{n+1})$ ,  $G \subseteq T_n \times \{0\}$ .

D'après ce qui précède,  $F$  ( $F \neq \emptyset$  bien sûr) possède une borne inférieure  $m$ . Si  $m \in \xi(T_{n+1})$ , considérons  $\{m^*\} \cup G$  : appartenant à  $T_n \times \{0\}$ , complet, ce sous-ensemble possède une borne inférieure, elle-même borne inférieure de  $E$ . Si  $m \notin \xi(T_{n+1})$ , on considère alors  $\{m\} \cup G$  dont la borne inférieure dans  $T_n \times \{0\}$  est la borne inférieure de  $E$ .

Par suite  $T_{n+1}$  est un  $\cap$ -demi-treillis complet possédant un élément universel : c'est donc un treillis complet.

### EXTENSION "LATTICIELLE" D'UN TREILLIS

Dans le cas où l'ensemble origine,  $T_n$ , est un treillis, nous appelons "latticielle" une extension qui conserve la structure de treillis ; c'est-à-dire que l'ensemble obtenu,  $T_{n+1}$ , est lui aussi un treillis (mais  $T_{n+1}$  n'est pas obligatoirement un sous-treillis de  $T_n \times \{0,1\}$ ). Le théorème suivant caractérise une telle extension. Nous étudierons ensuite les extensions préservant la distributivité, la modularité, l' $\cap$  et l' $\cup$ -semi-modularité, la complémentarité.

### THEOREME

*Une extension est latticielle si et seulement si,  $T_n$  étant le treillis initial et  $T_{n+1}$  l'ensemble obtenu :*

1)  $\forall \{x,y\} \subseteq S(T_{n+1})$ , alors :

$$[S(T_{n+1}) \cap \text{Minor}(\{x,y\}) \neq \emptyset \Rightarrow x \wedge y \in S(T_{n+1})]$$

2)  $\forall \{x,y\} \subseteq T_n \times \{0\}$ , alors :

$$S(T_{n+1}) \cap \text{Major}(\{x,y\})$$

est non vide et possède un minimum.

I - Montrons que la condition est suffisante :

$\forall \{a,b\}$  de  $T_{n+1}$ ,  $a \wedge b$  existe-t-il ? Eliminons le cas où  $a$  et  $b$  sont comparables ; il y a 3 cas à considérer :

1 -  $\{a,b\} \subseteq T_n \times \{0\}$ , alors  $T_n \times \{0\}$  étant un treillis et partie héréditaire de  $T_{n+1}$ ,  $a \wedge b$ , dans  $T_{n+1}$ , existe : c'est  $a \wedge b$  dans  $T_n \times \{0\}$ .

2 -  $a \in \mathcal{E}(T_{n+1})$ ,  $b \in T_n \times \{0\}$ .

$a$  est de la forme  $(\alpha, 1) \Rightarrow \exists (\alpha, 0)$

$b$  est de la forme  $(\beta, 0)$

$a \wedge b \leq (\alpha \wedge \beta, 0)$  qui existe effectivement dans  $T_n \times \{0\}$ .

3 -  $\{a,b\} \subseteq \mathcal{E}(T_{n+1})$ , soient  $a^*$  et  $b^*$  les homologues de  $a$  et  $b$  :

$$\{a^*, b^*\} \subseteq S(T_{n+1}) \subseteq T_n \times \{0\}.$$

3-1 - Si  $S(T_{n+1}) \cap \text{Minor}(\{a^*, b^*\}) = \emptyset \Rightarrow$

$$\text{Minor}(\{a,b\}) = \text{Minor}(\{a^*, b^*\}) \Rightarrow$$

$$a \wedge b = a^* \wedge b^*$$

$$3-2 - S(T_{n+1}) \cap \text{Minor}(\{a^*, b^*\}) \ni a^* \cap b^* \Rightarrow$$

$$a^* \cap b^* \in S(T_{n+1}) \Rightarrow$$

$$(a^* \cap b^*)^* \in \text{Minor}(\{a, b\})$$

Il reste à montrer que, dans  $\text{Minor}(\{a, b\})$ ,  $(a^* \cap b^*)^*$  est maximal et unique maximal :

Soit  $z$ ,  $z \neq (a^* \cap b^*)^*$ ,  $z$  maximal dans  $\text{Minor}(\{a, b\})$  :

si  $z \in T_n \times \{0\} \Rightarrow z \leq a^* \cap b^* \Rightarrow z < (a^* \cap b^*)^* \Rightarrow z$  non maximal

si  $z \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow z^* \in \text{Minor}(\{a^*, b^*\}) \Rightarrow z^* \leq a^* \cap b^* \Rightarrow$

$z < (a^* \cap b^*)^* \Rightarrow z$  non maximal

et finalement  $(a^* \cap b^*)^*$  est donc maximal et unique maximal dans  $\text{Minor}(\{a, b\})$ .

Pour le cas où  $S(T_{n+1})$  ne compterait qu'un élément, soit  $x$  ce dernier,  $\forall \{a, b\}$ ,  $a \neq x$ ,  $b \neq x$ ,  $a \cap b$  existe et appartient à  $T_n \times \{0\}$ .

Si  $a = x$ ,  $\forall b$ ,  $x \cap b = x^* \cap b$  qui existe bien :  $x^* \in T_n \times \{0\}$ .

Ainsi  $T_{n+1}$  est un demi-treillis inférieur. (Mais  $T_{n+1}$  n'est sous-demi-treillis inférieur de  $T_n \times \{0, 1\}$  que si  $\forall \{x, y\} \subseteq S(T_{n+1}) \Rightarrow S(T_{n+1}) \cap \text{Minor}(\{x, y\}) \neq \emptyset$ )  
 Montrons maintenant que pour tout couple  $\{a, b\}$  de  $T_{n+1}$ , il existe une borne supérieure.

1) Si  $\{a, b\} \subseteq T_n \times \{0\}$ ,  $a$  et  $b$  ont un majorant commun minimal : leur borne supérieure dans  $T_n \times \{0\}$ .

2) Si  $\{a, b\} \subseteq \mathcal{E}(T_{n+1})$  :

$$\text{Major}(\{a, b\}) = [S(T_{n+1}) \cap \text{Major}(\{a^*, b^*\})]^*$$

3) si  $a \in \mathcal{E}(T_{n+1})$  et  $b \in T_n \times \{0\}$

$$a \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow \exists a^*, a^* \in T_n \times \{0\}$$

$$\text{Major}(\{a, b\}) = [S(T_{n+1}) \sqcap \text{Major}(\{a^*, b\})]^*$$

et pour 2) et 3)  $\text{Major}(\{a, b\})$  possède un minimum en vertu de la seconde hypothèse du théorème.

II - Montrons que la condition est nécessaire :

1) Soit  $\{a, b\} \subseteq S(T_{n+1})$

$$\Rightarrow \exists \{a^*, b^*\} \subseteq \mathcal{E}(T_{n+1}), \text{ par suite}$$

$$\text{ou bien } a^* \cap b^* \in \mathcal{E}(T_{n+1}), \text{ ou bien } a^* \cap b^* \in T_n \times \{0\}.$$

I-1) Supposons  $a^* \cap b^* \in \mathcal{E}(T_{n+1})$ . Par suite :  $\exists (a^* \cap b^*)^* \in S(T_{n+1})$

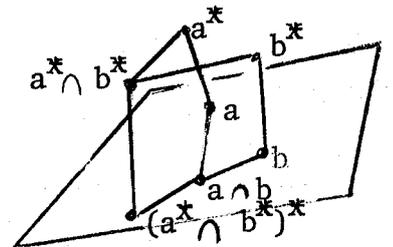
$$\text{et } a^* \cap b^* \leq \begin{matrix} a^* \\ b^* \end{matrix} \Rightarrow (a^* \cap b^*)^* \leq \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

$$(a^* \cap b^*)^* = \text{Max}[S(T_{n+1}) \sqcap \text{Minor}(a, b)]$$

Supposons  $(a^* \cap b^*)^* \neq a \cap b$

(donc  $(a^* \cap b^*)^* < a \cap b$ )

mais alors  $(a^* \cap b^*)^* \cup (a \cap b)$  n'existe pas car  $a^*$  et  $b^*$  sont 2 majorants minimaux de  $a^* \cap b^*$  et  $a \cap b$ , ce qui ne peut être dans un treillis, donc  $(a^* \cap b^*)^* = a \cap b$  et  $a^* \cap b^* = (a \cap b)^*$ , donc  $a \cap b \in S(T_{n+1})$ .



$$1-2) \quad a^* \cap b^* \notin \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\text{Minor}(\{a^*, b^*\}) \cap \mathcal{E}(T_{n+1}) = \emptyset \Rightarrow$$

$$\text{Minor}(\{a^*, b\}) \cap S(T_{n+1}) = \emptyset$$

Donc, finalement :

$$\forall \{a, b\} \in S(T_{n+1}) :$$

ou

$$\text{Minor}(\{a, b\}) \cap S(T_{n+1}) = \emptyset$$

ou bien

$$\text{Minor}(\{a, b\}) \cap S(T_{n+1}) \ni a \cap b$$

$$2) \quad \text{Considérons } \{a, b ; a < b\} \subseteq T_n \times \{0\}, a \in S(T_{n+1})$$

Soit  $B \subseteq S(T_{n+1}) \cap \text{Major}(b)$  si  $B$  est wide ou sans minimum,  $a^* \cup b$  n'existe pas. Par contre si  $B$  possède un minimum :

$$a^* \cup b = \text{Min}(B^*) = (\text{Min}(B))^*$$

Remarque : treillis complet

La seconde partie de la condition, exprimée dans le théorème précédent, est à remplacer par :

$$2') \quad \text{Max}(T_n \times \{0\}) \in S(T_{n+1})$$

### TREILLIS OBTENUS PAR EXTENSIONS SUCCESSIVES

Nous nous intéressons ici aux treillis (finis, d'ailleurs) obtenus par des extensions successives, la première portant sur le treillis à un seul élément.

THEOREME

Les treillis finis obtenus par extensions successives, chaque fois avec minimum à partir du treillis à un seul élément, sont les treillis dont la longueur est égale au nombre de leurs éléments  $\cup$ -irréductibles.

Preuve : Soit un treillis obtenu par extensions successives, chaque fois avec minimum, à partir du treillis  $T_0$  à un seul élément. A chaque extension, la longueur augmente de 1 de même que le nombre des  $\cup$ -irréductibles, puisqu'on rajoute un et un seul  $\cup$ -irréductible : le minimum de l'extension et que les  $\cup$ -irréductibles initiaux restent  $\cup$ -irréductibles.

Inversement, considérons un treillis  $T_n$  dont la longueur  $\ell(T_n)$  est exactement égale au nombre  $n$  de ses éléments  $\cup$ -irréductibles.

$$\ell(T_n) = n \Rightarrow \exists T_{n-1}, \quad \ell(T_{n-1}) = n-1$$

$$\text{Max}(T_{n-1}) \prec \text{Max}(T_n)$$

et  $T_{n-1}$  contient exactement  $(n-1)$   $\cup$ -irréductibles car, il ne peut en avoir moins, étant de longueur  $n-1$  ; il ne peut en avoir plus car  $\text{Max}(T_n)$  majore au moins un  $\cup$ -irréductible,  $g_n$ , non majoré par  $\text{Max}(T_{n-1})$ .

Soit alors  $x \geq g_n$ ,  $x \notin T_{n-1}$ ,  $x \neq g_n$ .

$x$  couvre un élément de  $T_{n-1}$ , en effet,  $x$  étant  $\cup$ -expressible est de la forme  $x = A \cup g_n$ ,  $A$ , union d'  $\cup$ -irréductibles autres que  $g_n$ , appartient à  $T_{n-1}$  et  $x \succ A$ . Par ailleurs,  $x$  ne couvre qu'un élément dans  $T_{n-1}$ , car, si  $x$  en couvrait deux, ces deux éléments auraient deux majorants minimaux : leur borne supérieure dans  $T_{n-1}$  et  $x$ . Ainsi  $T_n - T_{n-1}$  peut être considérée comme la partie étendue d'une extension faisant passer de  $T_{n-1}$  à  $T_n$ , extension avec élément minimum qui est justement  $g_n$ .

CONSERVATION DE LA SEMI-MODULARITE LORS D'UNE EXTENSION

Suivant qu'il s'agit d' $\cup$ -semi-modularité ou d' $\cap$ -semi-modularité, les conditions requises ne sont pas les mêmes d'où les deux théorèmes suivants :

THEOREME

*Une extension latticielle conserve l' $\cap$ -semi-modularité si et seulement si tout intervalle participant à l'extension est convexe.*

Preuve : La condition est suffisante :

Il faut montrer que  $\forall \{a,b\} \in T_{n+1}$ ,

$$\left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} a \cap b \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} a \cup b$$

Préliminairement, remarquons que l'hypothèse du théorème équivaut à :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, x \in S(T_{n+1}) \\ \forall y, y \geq x \\ y \in T_n \times \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow y \in S(T_{n+1})$$

en effet, l'extension étant latticielle :

$$\text{Major}(\{x,y\}) \cap S(T_{n+1}) \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\exists c \in S(T_{n+1}) \Rightarrow \{x,c\} \subseteq S(T_{n+1}) \Rightarrow y \in S(T_{n+1})$$

Nous considérons les 3 cas possibles pour  $\{a,b\}$  :

$$1) \quad \{a, b\} \subseteq T_n \times \{0\} \Rightarrow \{a \wedge b, a \cup b\} \subseteq T_n \times \{0\}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \} a \cup b \text{ puisque } T_n \text{ est } \wedge\text{-semi-modulaire.}$$

$$2) \quad \{a, b\} \subseteq \mathcal{E}(T_{n+1})$$

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \} a \cap b \Rightarrow a \cap b \in \mathcal{E}(T_{n+1}) : \text{ en effet, } a \cap b \text{ ne peut appartenir à}$$

$T_n \times \{0\}$  puisqu'un élément de  $T_n \times \{0\}$  n'est couvert que par un élément au plus de  $\mathcal{E}(T_{n+1})$ .

$a \cap b \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow a^* \cap b^* \in S(T_{n+1})$  (1<sup>ère</sup> condition nécessaire pour une extension latticielle)

$$\left. \begin{array}{l} a^* \cap b^* \in S(T_{n+1}) \\ a^* \cup b^* \geq a^* \cap b^* \end{array} \right\} \Rightarrow a^* \cup b^* \in S(T_{n+1})$$

or

$$a^* \cup b^* \in T_n \times \{0\} \Rightarrow a^* \cup b^* \} \begin{matrix} a^* \\ b^* \end{matrix} \Rightarrow a \cup b \} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

$$3) \quad a \in \mathcal{E}(T_n)$$

$$b \in T_n \times \{0\}$$

$$b \in T_n \times \{0\} \Rightarrow a \cap b \in T_n \times \{0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \cap b \in T_n \times \{0\} \\ a \} a \cap b \end{array} \right\} \Rightarrow a = (a \cap b)^* \Rightarrow a \cap b \in S(T_{n+1})$$

$$\left. \begin{array}{l} a \cap b \in S(T_{n+1}) \\ b \geq a \cap b \end{array} \right\} \Rightarrow b \in S(T_{n+1})$$

Considérons alors  $b^*$  :  $b^* \begin{cases} a \\ b \end{cases} \Rightarrow b^* = a \cup b$  et  $a \cup b \begin{cases} a \\ b \end{cases}$

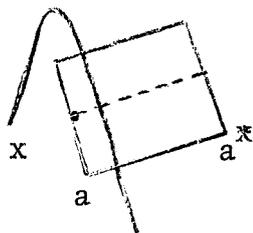
Ainsi  $T_{n+1}$  est  $\cap$ -semi-modulaire.

La condition est nécessaire :

Soit  $a \in S(T_{n+1})$

Supposons  $\exists x, x \not\leq a, x \in T_n \times \{0\}, x \notin S(T_{n+1})$

$a = x \cap a^*$ , car  $x \not\leq a, a^* \not\leq a$



Or :  $\begin{matrix} x \\ a \end{matrix} \begin{cases} a \cap x \neq x \cup a \end{cases} \begin{matrix} a \\ x \end{matrix}$ , donc  $T_{n+1}$  n'est

pas  $\cap$ -semi-modulaire, ce qui est contraire à

l'hypothèse d' $\cap$ -semi-modularité de  $T_{n+1}$ ,

donc  $x \in S(T_{n+1})$

Remarque : Si l'extension possède un minimum, alors le support est un sous-treillis convexe.

THEOREME

Une extension conserve l' $\cup$ -semi-modularité si et seulement si l'ensemble support est un sous- $\cap$ -demi-treillis (du treillis initial), dont toute chaîne est maximale.

Preuve : La condition est suffisante: il faut montrer que

$$\forall \{a,b\} \subseteq T_{n+1} \Rightarrow [a \cup b \begin{cases} a \\ b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{cases} a \cap b \end{cases}]$$

Considérons les 3 cas possibles pour  $\{a,b\}$  :

1 -  $\{a,b\} \subseteq T_n \times \{0\} \Rightarrow \{a \cap b, a \cup b\} \subseteq T_n \times \{0\} \Rightarrow$

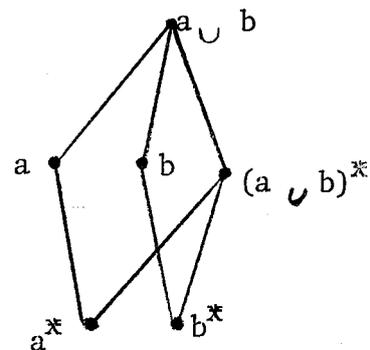
$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{cases} a \cap b \end{cases}$  puisque  $T_n$  est  $\cap$ -semi-modulaire.

2 -  $\{a, b\} \subseteq \mathcal{E}(T_{n+1})$

$$a \cup b \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

une chaîne  $((a \cup b)^*, a^*)$   
est maximale dans  $S(T_{n+1})$   
de même la chaîne  
 $((a \cup b)^*, b^*)$

$$\Rightarrow (a \cup b)^* \begin{cases} a^* \\ b^* \end{cases}$$



$$(a \cup b)^* \begin{cases} a^* \\ b^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^* \\ b^* \end{cases} \begin{cases} a^* \cap b^* \end{cases}$$

$T_n \times \{0\}$   $\cup$ -semi-modulaire

$$\begin{cases} a^* \\ b^* \end{cases} \begin{cases} a^* \cap b^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^* \cap b^* \in S(T_{n+1}) \\ (a^* \cap b^*)^* = a \cap b \end{cases} \Rightarrow$$

$S(T_{n+1})$  fermé pour  $\cap$

$$a \cap b \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

3 -  $a \in \mathcal{E}(T_{n+1}), b \in T_n \times \{0\}$ :

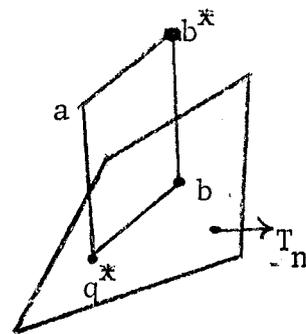
$$a \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow a \cup b \in \mathcal{E}(T_{n+1})$$

$$a \cup b \in \mathcal{E}(T_{n+1})$$

$$b \in T_n \times \{0\}$$

$$a \cup b \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \cup b = b^*$$



$$\left. \begin{array}{l} a \cup b = b^* \\ a \cup b \succ a \end{array} \right\} \Rightarrow b^* \succ a$$

$b^* \succ a \Rightarrow b \succ a^*$  donc finalement

$$a^* = a \cap b \text{ et } a \cap b \begin{cases} b \\ a \end{cases}$$

La condition est nécessaire :

En excluant le cas évident où  $\{a,b\} \subseteq T_n \times \{0\}$ , il y a deux cas à considérer :

1 - Soit  $\{a,b\} \subseteq \mathcal{E}(T_{n+1})$ ,  $a$  et  $b$  incomparables,  $a \cup b \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ .

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \prec a \cap b \Rightarrow a \cap b \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\text{Minor}(\{a^*, b^*\}) \cap S(T_{n+1}) \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$a^* \cap b^* \in S(T_{n+1})$$

Donc  $S(T_{n+1})$  est un sous- $\cap$ -demi-treillis. Montrons que toute chaîne de  $S(T_{n+1})$  est maximale dans  $T_n \times \{0\}$  : supposons une chaîne non maximale : soit

$$x \succ z > y, \quad \{x,y\} \subseteq S(T_{n+1}), \quad z \notin S(T_{n+1})$$

et

$$y \text{ maximal dans } \text{Minor}(y) \cap S(T_{n+1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^* = x \cup y^* \\ y = x \cap y^* \end{cases} \quad \text{or } x \cup y^* \begin{matrix} x \\ y^* \end{matrix} \not\succeq x \succ x \cap y^*$$

d'où la contradiction avec  $\cup$ -semi-modularité de  $T_{n+1}$ .

2 -  $a \in T_n \times \{0\}, b \in \mathcal{L}(T_{n+1}) \Rightarrow$

$a \cup b \in \mathcal{L}(T_{n+1}), a \cup b \not\subseteq a \Rightarrow a \cup b = a^*$

$a^* \not\subseteq b \Rightarrow a \not\subseteq b^*$

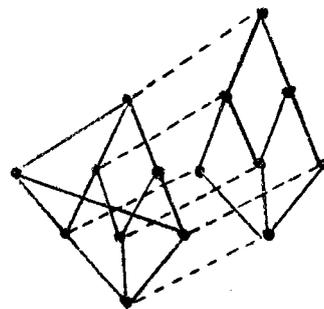
d'où la maximalité, dans  $T_n \times \{0\}$ , des chaînes de  $S(T_{n+1})$

Remarque :

On peut se demander si une extension telle que son support soit un sous- $\wedge$ -demi-treillis dont toute chaîne est maximale n'a pas, en fait, pour support, un sous-treillis.

L'exemple ci-contre montre que non.

(le treillis initial est le 3-cube).



### EXTENSION LATTICIELLE, DISTRIBUTIVITE ET MODULARITE

Nous nous proposons de caractériser les extensions qui conservent la distributivité ou la modularité. Puis nous établirons quelques résultats concernant les treillis distributifs. Préliminairement, démontrons le lemme :

#### LEMME

Soit un treillis  $T_{n+1}$  obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ . Alors,  $T_{n+1}$  est sous-treillis de  $T_n \times \{0,1\}$  si et seulement si le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.

#### Preuve

La condition est suffisante :

1)  $\forall \{a,b\} \subseteq T_n \times \{0\} \Rightarrow$

Dans  $T_n \times \{0,1\}$  :  $\{a \cup b, a \cap b\} \subseteq T_n \times \{0\} \subseteq T_{n+1}$ .

$$2) \quad \forall a \in \mathcal{E}(T_{n+1}) : a = (\alpha, 1) \quad a^* = (\alpha, 0)$$

$$\forall b \in T_n \times \{0\} : b = (\beta, 0)$$

Dans  $T_n \times \{0, 1\}$  :

$$a \wedge b = (\alpha, 1) \wedge (\beta, 0) = (\alpha \wedge \beta, 0) \in T_n \times \{0\} \Rightarrow \underline{a \wedge b \in T_{n+1}}$$

$$a \cup b = (\alpha, 1) \cup (\beta, 0) = (\alpha \cup \beta, 1)$$

L'extension étant latticielle :

$$\text{Maj}(b, a^*) \cap S(T_{n+1}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists c, \quad c \geq b \cup a^* \geq a^*, \quad c \in S(T_{n+1})$$

$$S(T_{n+1}) \ni c$$

$$S(T_{n+1}) \ni a^* \quad \left. \vphantom{S(T_{n+1})} \right\} \Rightarrow S(T_{n+1}) \ni b \cup a^* = (\alpha \cup \beta, 0)$$

S convexe

$$(\alpha \cup \beta, 0) \in S(T_{n+1}) \Rightarrow (\alpha \cup \beta, 1) \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow \underline{a \cup b \in T_{n+1}}$$

$$3) \quad \forall \{a, b\} \subseteq \mathcal{E}(T_{n+1})$$

Posons  $a = (\alpha, 1)$  et  $b = (\beta, 1)$

$$\exists (\alpha, 0) = a^* \text{ et } (\beta, 0) = b^*, \quad \{a^*, b^*\} \subseteq S(T_{n+1})$$

Dans  $T_n \times \{0, 1\}$ ,  $a \wedge b = (\alpha \wedge \beta, 1)$  et  $a \cup b = (\alpha \cup \beta, 1)$  et comme  $S(T_{n+1})$  est sous-treillis de  $T_n \times \{0\}$ , ces deux éléments appartiennent aussi à  $T_{n+1}$ .

La condition est nécessaire : nous devons montrer que si  $T_{n+1}$  est sous-treillis de  $T_n \times \{0, 1\}$  alors  $S(T_{n+1})$  est un sous-treillis convexe de  $T_n$  :

$$1) \quad \forall \{a, b\} \in \mathcal{E}(T_{n+1})$$

$$a = (\alpha, 1), \quad b = (\beta, 1), \quad a^* = (\alpha, 0), \quad b^* = (\beta, 0)$$

$T_{n+1}$  sous-treillis de  $T_n \times \{0\} \Rightarrow$

$$a \wedge b = (\alpha \wedge \beta, 1) = (\alpha \wedge \beta, 0)^* = (a^* \wedge b^*)^* \Rightarrow$$

$$a^* \wedge b^* \in S(T_{n+1})$$

On montrerait de même que :

$$(a^*, b^*) \in S(T_{n+1}) \Rightarrow a^* \cup b^* \in S(T_{n+1})$$

2) Montrons la convexité :

soit :  $a \not\leq c < b$

$$a, b, c \in T_n \times \{0\}$$

Supposons  $\{a, b\} \subseteq S(T_{n+1})$  et  $c \notin S(T_{n+1})$  et  $b$  minimal dans  $\text{Major}(c) \cap S(T_{n+1})$ .

$$\text{Or, } c = (\gamma, 0), \quad a = (\alpha, 0), \quad a^* = (\alpha, 1), \quad \gamma > \alpha$$

$$\text{Considérons } c \cup a^* = b^* = (\beta, 1), \quad \beta > \gamma \quad (1)$$

Mais,  $T_{n+1}$  étant sous-treillis de  $T_n \times \{0, 1\}$  :

$$a^* \cup c = (\gamma, 1) \quad (2)$$

d'où la contradiction entre (1) et (2)  $\Rightarrow c \in S(T_{n+1})$  et par suite  $S(T_{n+1})$  est convexe dans  $T_n \times \{0\}$ .

### THEOREME

*Une extension latticielle conserve la modularité ou la distributivité si et seulement si le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.*

Preuve : Montrons que la condition est suffisante :

Soit donc un treillis initial  $T_n$  distributif (ou modulaire) et  $T_{n+1}$  le treillis obtenu. D'après le lemme précédent,  $T_{n+1}$  est sous-treillis de  $T_n \times \{0,1\}$  donc distributif (ou modulaire) puisque  $T_n \times \{0,1\}$  est un produit de treillis distributifs (ou modulaires).

Montrons que la condition est nécessaire :

Puisque l'extension conserve la modularité :

- 1) Elle conserve l' $\cup$ -semi-modularité, donc  $S(T_{n+1})$  est fermé pour  $\cap$ .
- 2) Elle conserve l' $\cap$ -semi-modularité, donc  $S(T_{n+1})$  est fermé pour  $\cup$  et tout intervalle est convexe.

Et donc, finalement,  $S(T_{n+1})$  est un sous-treillis convexe de  $T_n \times \{0\}$ .

Remarque :

Nous montrerons ci-après que tout treillis distributif  $T_{n+1}$  s'obtient par extension à partir d'un treillis lui-même distributif  $T_n$  et,  $T_{n+1}$  est alors sous-treillis de  $T_n \times \{0,1\}$ . Nous retrouvons le résultat concernant la décomposition directe d'un treillis distributif : toute classe de congruence est un sous-treillis convexe.

## TREILLIS DISTRIBUTIFS FINIS ET EXTENSION

Préliminairement, démontrons le théorème :

### THEOREME

*Un treillis fini  $T_n$*

*-  $\cap$ -semi-modulaire*

*- dont la longueur est exactement égale au nombre de ses éléments  $\cup$ -irréductibles, est distributif.*

Preuve

La seconde hypothèse entraîne que  $T_n$  est obtenu par extensions successives avec minimum à partir du treillis  $T_0$  à un seul élément.

Chacune de ces extensions a pour treillis initial un sous-treillis convexe, donc lui-même  $\wedge$ -semi-modulaire : il s'agit donc d'extensions conservant l' $\wedge$ -semi-modularité et puisqu'elles sont avec minimum, cela entraîne que le support est chaque fois un sous-treillis convexe. Ces extensions conservent donc éventuellement la distributivité et comme  $T_0$  est distributif,  $T_n$  l'est.

Inversement, un treillis distributif satisfait les hypothèses du théorème :

La première hypothèse, par définition.

La seconde hypothèse, comme cela se montre facilement (lemmes page 139 de G. BIRKHOFF), et par suite :

THEOREME

*Les treillis distributifs finis sont les treillis obtenus par extensions successives à partir du treillis élémentaire à un seul élément, chaque extension ayant pour support un sous-treillis convexe.*

COROLLAIRE

Un treillis distributif de longueur  $n$  est sous-treillis du  $n$ -cube.

Preuve :

Soit  $T_n$  le treillis donné.  $\exists T_{n-1}$ , treillis distributif de longueur  $n-1$ , à partir duquel  $T_n$  est obtenu par extension.  $T_n$  est sous-treillis de  $T_{n-1} \times \{0,1\}$ .  
Demême pour  $T_{n-1}$ , etc... finalement  $T_n$  est sous-treillis de  $\{0,1\}^n$

Remarque

Naturellement, ce résultat est connu. L'originalité vient de l'avoir démontré en faisant appel à la notion d'extension.

RELATION ENTRE CO-ATOMES,  $\cup$ -GENERATEURS MAXIMAUX ET EXTENSION, DANS UN TREILLIS FINI DISTRIBUTIF

Soit  $T_n$  un treillis distributif fini de longueur  $n$  et

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n ; g_i > g_j \Rightarrow i > j\}$$

l'ensemble de ses  $\cup$ -générateurs et soit  $a_p$  un co-atome.

On sait que  $a_p$  est borne supérieure d'exactly  $n-1$   $\cup$ -générateurs et, par suite :

$$\exists g_p, g_p \in G, a_p = \text{Sup}(G - \{g_p\})$$

Considérons les sous-treillis :

$$T_p = \{x ; x \in T_n, x \leq a_p\}$$

et

$$\mathcal{E}_p = \{y ; y \in T_n, y \geq g_p\}$$

Alors

$$T_p \cap \mathcal{E}_p = \emptyset \text{ et } T_p \cup \mathcal{E}_p = T_n$$

$$\forall y, y \in \mathcal{E}_p, \exists y^*, y^* \in T_p, y \succ y^*, y^* \text{ unique,}$$

en effet,

$$\exists G_y, G_y \subseteq G, G_y \ni g_p, y = \text{Sup}(G_y) = g_p \cup \text{Sup}(G_y - \{g_p\})$$

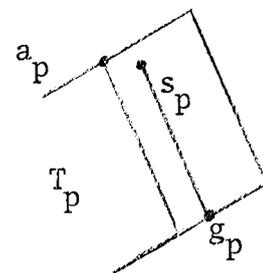
d'où

$$y \succ \text{Sup}(G_y - \{g_p\})$$

or :

$$G_y - \{g_p\} \subseteq T_p \Rightarrow \text{Sup}(G_y - \{g_p\}) \in T_p$$

donc  $y$  couvre un élément au moins dans  $T_p$  ; supposons que  $y$  couvre deux éléments  $y_1$  et  $y_2$  de  $T_p$  :



$$y \succ y_1, \quad y \succ y_2 \Rightarrow y = y_1 \cup y_2 \Rightarrow y \in T_p \Rightarrow y \notin \xi_p$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc tout élément de  $\xi_p$  couvre un et un seul élément de  $T_p$ , et  $T_n$  peut donc être considéré comme obtenu par extension, de minimum  $g_p^*$ , à partir de  $T_p$ . D'où :

PROPRIETE 1

Dans tout treillis distributif fini  $T_n$  de longueur  $n$ , chaque co-atome est maximum d'un treillis à partir duquel  $T_n$  peut être obtenu par une extension préservant la distributivité. Le minimum de l'extension est un élément  $\cup$ -irréductible maximal.

Inversement :

PROPRIETE 2

A chaque  $\cup$ -irréductible maximal correspond une possibilité d'obtenir  $T_n$  par extension.

En effet : à chaque  $\cup$ -irréductible  $g_p$  on peut associer le co-atome  $a_p = \text{Sup}(G-g_p)$  et on applique la propriété 1.

Enfin :

PROPRIETE 3

A deux co-atomes différents correspondent deux  $\cup$ -irréductibles maximaux différents.

En effet, soit  $a_p$  et  $a_q$  deux co-atomes :

$$a_p = \text{Sup}(G-\{g_p\}), \quad a_q = \text{Sup}(G-\{g_q\})$$

et

$$a_p \neq a_q$$

$$\Rightarrow G-\{g_p\} \neq G-\{g_q\} \Rightarrow g_p \neq g_q.$$

$T_n$  distributif

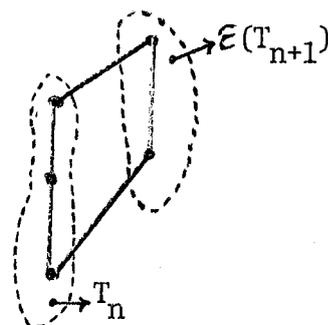
Finalement, en regroupant les résultats, on obtient :

THEOREME

Dans un treillis distributif fini, on peut mettre co-atomes et  $\mathcal{U}$ -irréductibles maximaux en correspondance bi-univoque, de telle sorte qu'à chaque couple  $(a_p, g_p)$  ainsi formé corresponde une possibilité d'obtenir le treillis donné par extension : le co-atome  $a_p$  est le sommet du treillis initial et l'élément  $\mathcal{U}$ -générateur  $g_p$  associé à  $a_p$  est l'homologue du minimum du support de l'extension.

TREILLIS COMPLEMENTES OBTENUS PAR EXTENSION

Soit  $T_{n+1}$  un treillis obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ . Si  $T_{n+1}$  est un treillis complémenté, cela signifie qu'il possède un maximum  $I_n$  et un minimum 0. Le maximum  $I_{n+1}$  est l'homologue d'un élément de  $T_n \times \{0\}$  maximum dans  $T_n \times \{0\}$ . Quant au minimum de  $T_{n+1}$ , c'est aussi un minimum pour  $T_n \times \{0\}$ . Ainsi, parler de  $T_{n+1}$  comme d'un treillis complémenté revient à supposer implicitement que  $T_n$  possède un maximum et un minimum. Par contre  $T_n$  n'est pas forcément complémenté. C'est le cas dans l'exemple ci-contre où  $T_{n+1}$  est complémenté alors que  $T_n$  ne l'est pas.



THEOREME

Un treillis  $T_{n+1}$  obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$  est complémenté si et seulement si :

- $T_n$  possède un maximum et un minimum
- $\forall x, x \in T_n \times \{0\}, \exists y, y \in S(T_{n+1}),$   
 $x \cap y = 0, (Major(x, y)) \cap S(T_{n+1}) = Max(T_n \times \{0\})$   
 (et alors  $x$  et  $y^*$  sont complémentaires).

Preuve : La condition est suffisante :

1)  $\forall x, x \in T_n \times \{0\}$ , soit  $y$  satisfaisant à l'hypothèse :

$$x \cap y^* = x \cap y = 0$$

$$x \cup y^* \in ((\text{Major}(x,y)) \cap S(T_{n+1}))^* = (\text{Max}(T_n))^* = \text{Max}(T_{n+1})$$

donc  $x$  et  $y^*$  sont complémentaires.

2) Vérifions que tout élément de  $\mathcal{E}(T_{n+1})$  possède un complémentaire :

Soit  $y^* \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow y \in S(T_{n+1}) \Rightarrow y \in T_n \times \{0\} \Rightarrow$

$\exists z, z \in S(T_{n+1})$ ,  $y$  et  $z^*$  sont complémentaires :

$$y^* \cup z \in ((\text{Major}(y,z)) \cap S(T_{n+1}))^* \Rightarrow$$

$$y^* \cup z = (\text{Max}(T_n) \times \{0\})^* = \text{Max}(T_{n+1})$$

par ailleurs :

$y^* \cap z = y \cap z = 0$  et par suite  $y^*$  et  $z$  sont complémentaires.

La condition est nécessaire :

Soit donc  $T_{n+1}$  complété  $\Rightarrow \exists I = \text{Max}(T_{n+1})$  et  $0$ .

$0 \in T_n \times \{0\}$  et  $(\text{Max}(T_{n+1}))^*$ , où  $I^*$  est maximum dans  $T_n \times \{0\}$

$\forall x \in T_n \times \{0\} \Rightarrow \exists z, x \cup z = I, \quad x \cap z = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} x \in T_n \times \{0\} \\ x \cup z = I \end{array} \right\} \Rightarrow z \in \mathcal{E}(T_{n+1}) \Rightarrow$$

$\exists y, z = y^*, \quad y \in S(T_{n+1})$

$\text{Major}(\{x,y\}) \cap S(T_{n+1}) \ni \text{Max}(T_n \times \{0\}) \quad (=I^*)$

Supposons  $\text{Major}(\{x,y\}) \triangleleft S(T_{n+1}) \ni t, \quad t < \text{Max}(T_n \times \{0\})$   
 $\Rightarrow I > t^* \geq x \cup y^* = x \cup z$ , contraire à l'hypothèse que  $x \cup z = I \Rightarrow$   
 $\text{Major}(\{x,y\}) \triangleleft S(T_{n+1}) = \text{Max}(T_n \times \{0\})$ .

Corollaire 1

Soit le treillis  $T_{n+1}$ , complété, obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ . Alors  $T_n$  possède un maximum et un minimum qui participent tous les deux à l'extension.

En effet, nous avons vu que  $\text{Max}(T_n)$  participe obligatoirement à l'extension dès lors qu'elle est latticielle.

Par ailleurs, si dans la condition du théorème,  $x$  est  $\text{Max}(T_n)$ , le seul élément  $y$  possible est 0.

Corollaire 2

Soit le treillis  $T_{n+1}$ , complété, obtenu par extension.  
Alors  $\mathcal{E}(T_{n+1})$  est un sous-treillis complété.

Preuve : D'après le corollaire précédent,  $\mathcal{E}(T_{n+1})$  possède un maximum et un minimum.

Soit  $x \in S(T_{n+1}) \Rightarrow \exists y \in S(T_{n+1})$

et

$$x \cap y = 0 \text{ et } ((\text{Major}(x,y) \triangleleft S(T_{n+1})) = \text{Max}(S(T_{n+1})))$$

d'où

$$x^* \cap y^* = 0^*$$

$$x^* \cup y^* = \text{Max}(T_{n+1})$$

QUELQUES PROPRIETES DES ELEMENTS COMPLEMENTAIRES DANS UN TREILLIS OBTENU PAR EXTENSION

Soit  $T_{n+1}$  un treillis obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ .  
On ne suppose pas  $T_{n+1}$  ni  $T_n$  complétés mais il possèdent chacun un élément universel et nul.

PROPRIETE 1

De deux éléments complémentaires, un au moins appartient à la partie étendue et, si l'extension est avec minimum, un seul.

En effet, si l'extension est avec minimum, un des deux complémentaires doit appartenir à  $T_n \times \{0\}$  sinon leur borne inférieure serait supérieure ou égale au minimum de la partie étendue, lui-même strictement supérieur à  $\text{Min}(T_{n+1})$ . De plus, si les deux éléments appartiennent à  $T_n \times \{0\}$ , leur borne supérieure aussi et ce ne peut donc pas être  $\text{Max}(T_{n+1})$ , ce qui entraîne aussi la propriété suivante :

PROPRIETE 2

Les complémentaires d'un élément du treillis initial appartiennent tous à la partie étendue.

Mentionnons enfin la propriété :

PROPRIETE 3

Les complémentaires d'un élément de la partie étendue comptent au moins un élément du treillis initial.

En effet, si l'extension est avec minimum, cela résulte de la propriété 1. Sinon, soit  $a$  et  $b$  deux complémentaires appartenant tous deux à  $\mathcal{E}(T_{n+1})$ ,  $b^*$  homologue de  $b$ , dans le treillis initial, est aussi complémentaire de  $a$ .

LORSQU'UN TREILLIS PEUT ETRE OBTENU, PAR EXTENSION, DE DIFFERENTES FACONS POSSIBLES (en nombre fini).

Notons  $T = (E_i \uparrow O_i)$  pour indiquer que  $T$  peut être considéré comme obtenu par extension à partir de  $O_i$  (sous-treillis convexe de  $T$ ), avec pour partie étendue  $E_i$ . S'il y a  $p$  façons différentes d'obtenir  $T$  par extension, on écrira :

$$T = (E_1 \uparrow O_1) = (E_2 \uparrow O_2) = \dots = (E_p \uparrow O_p)$$

Il est intéressant d'étudier l'intersection ensembliste des ensembles initiaux et l'union ensembliste des parties étendues.

$\bigcup_{i=1}^p E_i$  est l'ensemble des éléments de  $T$  qui font partie d'au moins une partie étendue.

$\bigcap_{i=1}^p O_i$  est l'ensemble des éléments qui ne font partie d'aucune partie étendue ou, si l'on préfère, qui appartiennent à tous les treillis initiaux. Cet ensemble a souvent une signification : dans le treillis des sous-arbres d'un arbre, c'est l'ensemble des sous-arbres de l'arbre obtenu en supprimant toutes les feuilles ; dans un treillis distributif, c'est le sous-treillis construit sur les  $\vee$ -générateurs non maximaux.

THEOREME

$\bigcap O_i$  contient, avec tout élément, tous ceux qui lui sont inférieurs et est fermée pour  $\cup$ . De plus, si  $T$  est complet :

$$\text{Max} \left( \bigcap_{i \in [1,p]} O_i \right) = \text{Inf} \left( \{ \text{Max}(O_i), i \in [1,p] \} \right)$$

Preuve

Chaque  $O_i$  est un sous-treillis convexe contenant avec tout élément, tous ceux qui lui sont inférieurs : leur intersection possède la même propriété.

Par ailleurs, si T est complet :

$$\forall i, i \in [1, p], \text{Max}(O_i) \text{ existe et de même :}$$

$$\text{Inf}(\{\text{Max}(O_i)\})$$

$$\forall x, x \in \bigcap O_i \Rightarrow x \leq \text{max}(O_i), \forall i \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l}
x \leq \text{Inf}(\{\text{Max}(O_i), i \in [1, p]\}) \\
\text{et, par ailleurs } \text{Inf}(\{\text{Max}(O_i)\}) \in \bigcap O_i
\end{array} \right\} \Rightarrow \text{Inf}(\{\text{Max}(O_i)\}) = \text{Max}(\bigcap O_i)$$

(ce qui montre d'ailleurs que  $\bigcap O_i \neq 0$ ).

D'autre part,  $\forall i, i \in [1, p] : \text{Max}(O_i) \leq \text{Max}(T)$ .

Enfin,  $\forall \{x, y\} \subseteq O_i ; y, x \leq \text{Inf}(\{\text{Max } O_i\}) \Rightarrow x \cup y \in \bigcap O_i$ .

Corollaire :

Un élément de  $\bigcup E_i$  couvre au plus un élément de  $\bigcap O_i$

THEOREME

Les éléments supérieurs à  $\text{Max}(\bigcap_i O_i)$  forment un treillis de Boole.

Preuve :

Pour simplifier, posons  $a_i = \text{Max}(O_i) \quad \forall i \in [1, p]$

et  $\Omega = \text{Max}(\bigcap_i O_i) = \text{Inf}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ .

T peut être considéré comme obtenu à partir du treillis  $O_p$  de maximum  $a_p$ . Dans cette extension,  $\Omega$  a pour homologue, dans  $E_p$ ,  $\Omega^* = \text{Inf}_{i \neq p} (a_i)$  et  $[\Omega, \text{Max}(T)]$  est un treillis de Boole si  $[\Omega, a_p]$  en est un. Or, à son tour,  $[\Omega, a_p]$ , dans une autre extension, peut être considéré comme obtenu à partir d'un sous-treillis  $[\Omega, a_i]$ ,  $a_i$  tel que  $a_i \cap a_p \neq a_p$  etc... on arrive à  $[\Omega, \Omega]$  qui est bien booléenn.

La démonstration montre aussi que tout co-atome  $\underline{\geq} \Omega$  est maximum d'un support d'extension.

Corollaire

Si  $\Omega$  n'est pas co-atome, il y a autant d'éléments couvrant  $\text{Max}(\bigcap_i O_i)$  qu'il y a de co-atomes.

THEOREME

$\bigcup_i E_i$ , contient avec tout élément, tous ceux qui lui sont supérieurs. Par ailleurs, un élément de  $\bigcup_i E_i$  est  $\cup$ -irréductible dans T si et seulement si il est minimal dans  $\bigcup_i E_i$ ; un tel élément est, de plus, maximal parmi les éléments  $\cup$ -irréductible de T.

Preuve :

Soit x minimal dans  $\bigcup_i E_i$ . Supposons  $\exists y, z, y \neq z \neq x, x = y \cup z \Rightarrow x \underline{\geq} y$  et  $x \underline{\geq} z$  et x minimal dans  $\bigcup_i E_i \Rightarrow \{x, y\} \subseteq \bigcap_i O_i \Rightarrow x \cup y \in \bigcap_i O_i \Rightarrow x \in \bigcap_i O_i$ , absurde, donc x est  $\cup$ -irréductible.

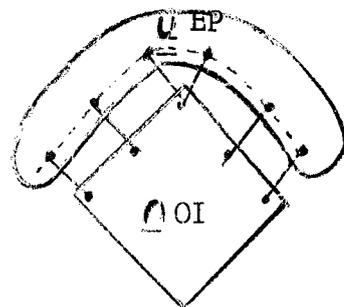
Soit  $x$ ,  $\cup$ -irréductible dans  $T$ ,  $x \in \underline{\cup}E_i$ ,  $x$  non-minimal dans  $\underline{\cup}E_i \Rightarrow$

$\exists E_j$   $x \in E_j$ ,  $x$  non minimal dans  $E_j$ , or nous avons remarqué que les seuls éléments  $\cup$ -irréductibles appartenant à une partie étendue étaient minimaux dans celle-ci, donc  $x$  est forcément minimal dans  $E_j$ , d'où la contradiction.

Par ailleurs, un  $\cup$ -irréductible  $x$  de  $T$ , appartenant à  $\underline{\cup}E_i$  est forcément maximal parmi les  $\cup$ -irréductibles de  $T$ . En effet,  $\underline{\cup}E_i$  est convexe et par suite soit  $y$ ,  $\cup$ -irréductible,  $y > x \Rightarrow y \in \underline{\cup}E_i \Rightarrow y$  minimal dans  $\underline{\cup}E_i \Rightarrow y \neq x$  d'où la contradiction.

### Commentaire

Le dessin ci-contre illustre comment se présente  $\underline{\cup}E_i$  et  $\underline{\cap}O_i$ . On retrouve d'une certaine façon la notion "couche" dont nous parlerons plus loin.



## UNE PROPRIETE CARACTERISTIQUE DES TREILLIS COMPLETS GENERABLES PAR EXTENSION

On peut exprimer de différentes façons qu'un treillis s'obtient par extension. Jusqu'à présent, la seule méthode directement utilisable et pratique que nous ayons trouvée est une méthode booléenne et nous en parlerons plus loin (on considère la fonction booléenne attachée au treillis dual : cette fonction est croissante pour au moins une variable).

### Extension et pondération de branches

(Nous avons introduit la notion de pondération des branches d'un treillis pour préciser le treillis des homomorphismes de récurrences [ ]).

Rappelons que nous nommons branche d'un treillis, un couple de deux éléments  $a$  et  $b$  avec :

$$a > b \text{ et } \exists x, a > x > b.$$

Nous attachons un poids à une telle branche.

Un treillis sera dit à branches pondérées s'il a la propriété suivante : la somme des poids de toutes les branches formant une chaîne maximale entre deux éléments  $p$  et  $q$  du treillis,  $p > q$ , est la même pour toutes les chaînes maximales (elle ne dépend donc que de  $p$  et de  $q$ ).

Soit  $T_{n+1}$  obtenu par extension à partir de  $T_n$ ,  $T_n$  étant à branches pondérées. Un moyen simple (mais ce n'est pas le seul) pour que  $T_{n+1}$  soit à branches pondérées est de donner à toute branche  $\{x^*, x\}$ ,  $x^* \in T_n$ ,  $x \in T_{n+1} - T_n$ , le même poids  $a$  et à une branche  $\{y, z\}$  de  $T_{n+1} - T_n$  le poids d'une chaîne d'extrémité  $y^*$  et  $z^*$  dans  $T_n$ .

### EXTENSION ET PRODUIT CARTESIEN D'ENSEMBLES ORDONNES

Soient  $S$  et  $T$  deux ensembles ordonnés obtenus par extension, respectivement, à partir des deux ensembles  $A$  et  $B$  :

$$A \times \{0\} \subseteq S \subseteq A \times \{0,1\}$$

$$B \times \{0\} \subseteq T \subseteq B \times \{0,1\}$$

d'où :

$$A \times \{0\} \times T \subseteq S \times T \subseteq A \times \{0,1\} \times T$$

Donc  $S \times T$  est obtenu (à un isomorphisme près) par extension à partir de  $A \times T$ . De même,  $S \times T$  peut être obtenu par extension à partir de  $B \times S$ .

Remarque :

Notons que

$$A \times B \times \{0,0\} \subseteq S \times T \subseteq A \times B \times \{0,1\}^2$$

et

$$\forall (x,y,m), x \in A, y \in B, m \in \{0,1\}^2, m \neq 0,0 \Rightarrow$$

$$\exists (x,y,1,1).$$

Ceci suggère naturellement des généralisations possibles pour la notion d'extension.

## EXTENSION ET TREILLIS

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à définir la notion d'extension et ses rapports avec les notions algébriques des treillis (distributivité, etc..) en fait nous l'avons surtout développé pour caractériser une classe de treillis difficilement caractérisables à partir de ces mêmes notions algébriques : il s'agit des treillis que nous avons nommés  $\alpha$  ou  $\alpha$ -affaiblis ; nous leur consacrerons un chapitre complet.

## CHAPITRE - II

### IMMERSION D'UN TREILLIS DANS UN AUTRE

#### CODAGE BOOLEEN D'UN TREILLIS

#### CODAGE D'UN TREILLIS - CODAGE BOOLEEN - DEFINITION

Nous appelons codage une application injective d'un treillis donné T (treillis "codé") dans un autre, S (treillis de codage).

Si le treillis de codage est un treillis de BOOLE, nous parlerons de codage booléen. D'une façon générale, nous désignerons un codage par h.

#### $\cup$ -CODAGE - DEFINITION

Nous appelons ainsi un codage  $h : T \xrightarrow{h} S$  tel que :

$$\forall \{x, y\} \subseteq T \Rightarrow h(x \cup y) = h(x) \cup h(y)$$

#### $\cap$ -CODAGE - DEFINITION

Nous appelons ainsi un codage  $h : T \xrightarrow{h} S$  tel que :

$$\forall \{x, y\} \subseteq T \Rightarrow h(x \cap y) = h(x) \cap h(y).$$

#### $\cap$ -CODAGE BOOLEEN CANONIQUE

Soit un treillis T fini et :

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

l'ensemble des  $\cup$ -irréductibles ( $\neq \min(T)$ ) de  $T$ .

Définissons le codage suivant : à tout élément  $x$  de  $T$ , associons

$G_x = \{g_i, g_i \in G, g_i \leq x\}$ , l'application

$$T \xrightarrow{h} P(G)$$

ainsi définie, immerge  $T$  dans  $P(G)$ , treillis de Boole de dimension  $n$ . Dans  $T$ ,  $x = \text{Sup } G_x$ ,  $G_x$  est maximal et  $h$  est croissante. Constatons que :

1)  $h$  est injective :

$$x = y \Leftrightarrow G_x = G_y \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{Sup } G_x = \text{Sup } G_y \\ \text{dans } T \quad \text{dans } T \end{matrix}$$

2)  $h$  est un  $\cap$ -homomorphisme, en effet :

$$G_{x \cap y} \subseteq G_x \cap G_y \text{ car } G_{x \cap y} \subseteq \begin{matrix} G_x \\ G_y \end{matrix}$$

car  $h$  est croissante

$$G_{x \cap y} \supseteq G_x \cap G_y \text{ car :}$$

$$\text{Sup}_T G_x \cap G_y \leq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{Sup}(G_x \cap G_y) \leq x \cap y$$

$$\Rightarrow G_x \cap G_y \subseteq G_{x \cap y} \text{ par croissante de } h$$

et donc finalement :

$$h(x \cap y) = G_{x \cap y} = G_x \cap G_y = h(x) \cap h(y)$$

Donc  $h$  est un  $\cap$ -codage booléen.

Dans la pratique, on peut définir les lettres  $g_1, g_2, \dots, g_n$  associées au  $\cup$ -irréductibles, considérer l'algèbre de Boole libre engendrée par ces lettres (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes booléens en  $g_i$ ) et, pour chaque  $G_x$ , définir le monôme canonique :

$$h(x) = \prod g_i \prod \bar{g}_j$$

$$g_i \in G_x, \quad g_j \notin G_x$$

enfin, attacher au treillis lui-même la fonction :

$$f(T) = \sum_{x \in T} h(x)$$

Notons que cette fonction possède les monômes :

$$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n \text{ et } g_1, g_2, \dots, g_n$$

De manière analogue, on définit le  $\cup$ -codage booléen canonique.

### THEOREME D'ISOMORPHISME

*Un  $\cup$ - ou  $\cap$ -codage conduit à un isomorphisme d'ordre entre le treillis  $T$  codé et son image dans le treillis  $S$  de codage.*

Preuve :

1) Considérons un  $\cap$ -codage  $h$  :

$$\forall \{a, b\} \subseteq T :$$

$$\begin{aligned} 1-1) \quad a \underline{\geq} b &\Rightarrow a \wedge b = b \Rightarrow h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) = h(b) \\ &\Rightarrow h(a) \underline{\geq} h(b). \end{aligned}$$

$$1-2) \quad h(a) \underline{\geq} h(b) \Rightarrow a \underline{\geq} b ?$$

$$h(a) = h(b) \Rightarrow a = b \text{ par injectivité}$$

$$h(a) > h(b) \Rightarrow h(a) \wedge h(b) = h(b) \Rightarrow$$

$$|\{h(a), h(b), h(a) \wedge h(b)\}| = 2 \Rightarrow$$

$$|h^{-1}\{h(a), h(b), h(a) \wedge h(b)\}| = 2 \text{ (par injectivité), } \Rightarrow$$

$$|\{a, b, a \wedge b\}| = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } a < b : \text{ absurde car} \\ \quad a < b \Rightarrow h(a) < h(b) \\ \text{soit } a > b : \text{ seule hypothèse valable.} \end{array} \right.$$

donc :

$$h(a) \underline{\geq} h(b) \Rightarrow a \underline{\geq} b.$$

2) Considérons maintenant un  $\cup$ -codage  $h$ , c'est-à-dire rappelons  $-1$ , compatible avec  $\cup$ . Par dualité :

$$a \underline{\leq} b \Leftrightarrow h(a) \underline{\leq} h(b).$$

### Corollaire

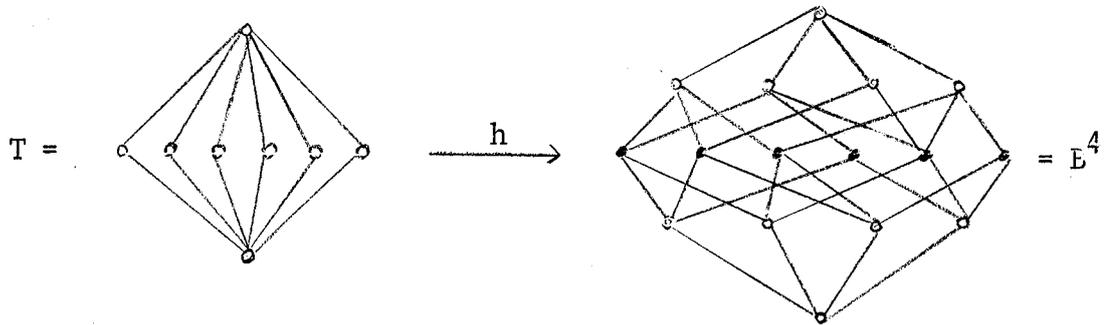
Par isotonie,  $\forall \{x, y\} \subseteq T :$

1 - Dans un  $\cup$ -codage  $h(x \cap y) \leq h(x) \cap h(y)$

2 - Dans un  $\cap$ -codage  $h(x \cup y) \geq h(x) \cup h(y)$ .

Remarque :

La réciproque du théorème est fautive : un codage conduisant à un isomorphisme entre ensembles ordonnés n'est pas forcément compatible avec l'une des opérations, comme le montre l'exemple :



FONCTION BOOLEENNE CARACTERISTIQUE D'UN TREILLIS FINI

THEOREME

*La fonction booléenne attachée par  $\cap$ -codage booléen canonique (ou  $\cup$ -...) à un treillis fini est caractéristique de ce treillis.*

Preuve :

Soit  $T$  un treillis et  $h(T)$  son image par  $\cap$ -codage booléen canonique.  $T$  et  $h(T)$  sont isomorphes.

Donc,  $h(T)$  ( $h(T) \in B^n$ ,  $n$  : nombre des  $\cup$ -irréductibles de  $T$ ) est caractéristique de  $T$  et de même

$$f(T) = \sum_i m_i, \quad m_i \in h(T)$$

Remarque 1 :

Il est nécessaire de préciser les variables ; par exemple :

$$f(A,B,C,D) = E+D = (A+\bar{A}) (B+\bar{B}) (\bar{C}+D)$$

Remarque 2 :

Etant donnée une fonction nous ne connaissons pas de condition suffisante pour qu'elle soit la fonction attachée à un treillis.

### Applications

Représentation de treillis et contrôle, au passage, de la structure de treillis si on n'a pas un treillis, un conflit naîtra, en ce sens que l'on tentera d'attribuer à un élément, un monôme booléen déjà attribué. Naturellement, il ne peut s'agir que d'un ensemble fini et on commencera par s'assurer qu'il possède un minimum et un maximum.

- Représentation aussi de Sup - ou Inf- demi treillis (arborescences, etc... très répandus en documentation, enquête d'opinion par exemple...).

- Recherches concernant les treillis par l'intermédiaire de la fonction caractéristique attachée. En particulier, il est facile de rechercher sur la fonction, plutôt que sur le treillis lui-même, si celui-ci est un produit de treillis, cela du fait du théorème suivant :

THEOREME

Soit  $T$  un treillis fini et  $f(T)$  la fonction qui lui est attachée dans un  $\wedge$ -codage booléen canonique. Alors :

$$T = T_1 \times T_2 \Rightarrow f(T) = f(T_1) \cdot f(T_2)$$

( $f(T_1)$  et  $f(T_2)$  dépendent de variables différentes).

Inversement, si  $f(T)$  est la fonction attachée au treillis par un  $\wedge$ -codage booléen canonique, et s'il existe pour  $f(T)$  une décomposition multiplicative disjointe  $f(T) = f_1 \cdot f_2$  alors :

$$\exists T_1, T_2 \quad f_1 = f(T_1), \quad f_2 = f(T_2)$$

et

$$T = T_1 \times T_2$$

Preuve :

1) Montrons que  $T = T_1 \times T_2 \Rightarrow f(T) = f(T_1) \cdot f(T_2)$

Soit  $G$  l'ensemble des  $\cup$ -irréductibles de  $T$

$G_1$  l'ensemble des  $\cup$ -irréductibles de  $T_1$

$G_2$  l'ensemble des  $\cup$ -irréductibles de  $T_2$

Alors

$$G = G_1 \times G_2$$

Soit

$$(x, y) \in T_1 \times T_2$$

$$T \xrightarrow{h} P(G) = T_1 \times T_2 \xrightarrow{h} P(G_1) \times P(G_2)$$

et, pour les monômes booléens :

$$m(x,y) = m(x) \cdot m(y)$$

où  $m(x)$  est obtenu à la suite de

$$T_1 \xrightarrow{h_1} P(G_1)$$

qui attache  $F(T_1)$  à  $T_1$  et  $m(y)$  est obtenu à la suite de

$$T_2 \xrightarrow{h_2} P(G_2)$$

qui attache  $F(T_1)$  à  $T_2$ .

Soit

$$x \in T_1, \quad \forall y, \quad (x,y) \in T_1 \times T_2 \Rightarrow$$

$$m(x,y) = m(x) \cdot m(y)$$

Considérons

$$f_x = \sum_{y \in T_2} m(x,y) = m(x) \cdot F(T_2)$$

Considérons maintenant

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{x,y \in T} m(x,y) = \sum_{x \in T_1} f(x) = F(T_2) \cdot \sum_{x \in T_1} m(x) \\ &= F(T_2) \times F(T_1) = f(T_1) \times f(T_2). \end{aligned}$$

2) Soit  $f(T)$  la fonction attachée au treillis  $T$ , après un  $\cap$ -codage booléen canonique. Supposons  $f(T) = f_1 \cdot f_2$ .

à  $f(T)$  est attaché un sous-ensemble  $E$ , du  $n$ -cube, isomorphe à  $T$

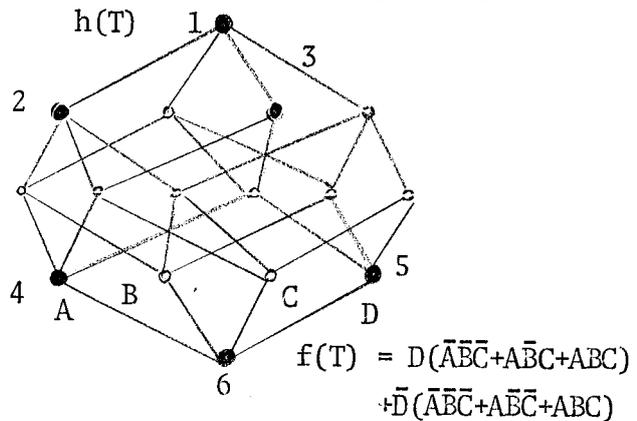
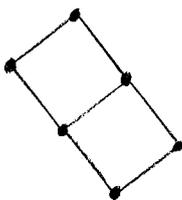
à  $f_1$  est attaché un sous-ensemble  $E_1$ , du  $(n-p)$ -cube

à  $f_2$  est attaché un sous-ensemble  $E_2$ , du  $p$ -cube,

et  $E = E_1 \times E_2$ . Comme  $E$  est isomorphe à un treillis,  $E_1$  et  $E_2$  sont des treillis et  $T$  est donc un produit de treillis.

Remarque :

Dans le sens réciproque, il suffit en fait de considérer un codage conduisant à un isomorphisme d'ordre, non nécessairement compatible avec une des opérations du treillis. Par contre, dans le sens direct, cela est nécessaire. D'ailleurs, voici un exemple d'un codage booléen, conduisant à un isomorphisme, d'un treillis qui est un produit de treillis : la fonction attachée n'est pas un produit de fonctions.



Choix entre  $\cup$ - et  $\cap$ -codage canonique

On peut être conduit à un choix selon que l'on désire conserver l'une des opérations  $\cap$  ou  $\cup$  ou l'autre. On peut aussi chercher une dimension minimal de l'hypercube de codage tout en satisfaisant l'isomorphisme. La question se pose uniquement pour des treillis dont le nombre des  $\cup$ -irréductibles est différent de celui des  $\cap$ -irréductibles.

### CODAGE CANONIQUE D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF FINI

Soit  $T$  un treillis distributif codé, par exemple, par  $\wedge$ -codage canonique  $h$  et  $G$  l'ensemble des irréductibles de  $T$ .

Soit  $x = \text{Sup}(G_x)$ ,  $G_x$  maximal dans  $G$   
et  $y = \text{Sup}(G_y)$ ,  $G_y$  maximal dans  $G$ .

Donc :

$$h(x \cup y) = G_x \cup G_y = h(x) \cup h(y).$$

L' $\wedge$ -codage canonique est donc compatible avec l'opération  $\cup$ . Résultat analogue pour l' $\cup$ -codage. Un codage canonique d'un treillis distributif est compatible avec les 2 opérations  $\cup$  et  $\wedge$ . Inversement, si un codage canonique d'un treillis  $T$  est compatible avec les 2 opérations, cela veut dire que  $h(T)$  est un sous-treillis du cube de codage, dont  $h(T)$  est distributif et  $T$  également, par isomorphisme. D'où :

#### THEOREME

*Un codage booléen canonique compatible avec les deux opérations  $\cup$  et  $\wedge$  est caractéristique d'un treillis distributif.*

### DIMENSION MINIMALE ET CONSERVATION DES OPERATIONS $\cup$ OU $\wedge$

#### THEOREME

*Un  $\wedge$ -codage booléen est de dimension au moins  $n$  ( $n$  : nombre des  $\cup$ -irréductibles du treillis à coder), et, pour cette dimension, le seul codage possible est le codage canonique.*

Preuve :

Soit  $A = \{a, b, c, \dots\}$  un ensemble fini de lettres,  $|A| = p$

$T$  un treillis fini à coder par  $\wedge$ -codage  $h$  :

$$T \xrightarrow{h} P(A)$$

$U$  l'ensemble des  $\cup$ -irréductibles de  $T$ ,  $|U| = n$

Posons  $\mathcal{C} = h(T)$  et  $\mathcal{U} = h(U)$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \subseteq P(A)$ .

1 - Montrons que  $p \geq n$ .

On peut supposer  $h(\max(T)) = A$  et  $h(\min(T)) = \emptyset$ , sinon il suffirait de considérer le sous-treillis de  $P(A)$  dans lequel se code en fait  $T$ .

Considérons  $a \in A$ , et soit  $\mathcal{C}_a$  l'ensemble des parties de  $\mathcal{C}$  qui contiennent  $a$ ,  $\mathcal{C}_a \ni h(\max(T)) \Rightarrow \mathcal{C}_a \ni A$  donc  $\mathcal{C}_a$  n'est pas vide.

Puisque  $h$  est un  $\wedge$ -codage,  $\mathcal{C}_a$  est stable pour  $\cap$  (qui est l'opération  $\cap$  dans  $P(A)$  ou  $\mathcal{C}$ ) et comme  $\mathcal{C}$  est fini,  $\mathcal{C}_a$  possède un minimum (pour la relation d'ordre dans  $\mathcal{C}$  ou  $P(A)$  : l'inclusion ensembliste).

Posons  $\pi_a = \text{Min}(\mathcal{C}_a)$  et soit  $\pi$  l'application :

$$A \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$$

telle que

$$\forall x, x \in A, \pi(x) = \pi_x$$

Montrons que  $\pi$  est injective :

$$\forall \tau \in \mathcal{C}_a \Rightarrow \tau \geq \pi_a \Rightarrow h^{-1}(\tau) \geq h^{-1}(\pi_a)$$

puisque  $h$  est isomorphisme d'ordre.

Soit

$$\left. \begin{array}{l} a, b, \in A, \pi_a = \pi_b \\ h^{-1}(\tau) \geq h^{-1}(\pi_a) \end{array} \right\} \Rightarrow h^{-1}(\tau) \geq h^{-1}(\pi_b) \Rightarrow$$

$$\tau \geq \pi_b \Rightarrow \tau \in \mathcal{C}_b$$

finalement,

$$\pi_a = \pi_b \Rightarrow \mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$$

Ceci veut dire que le groupe de lettres ab intervient, dans le codage, comme une seule lettre. Dans la suite, nous supposerons de telles réductions effectuées. Par conséquent, nous pouvons supposer  $\pi$  injective. Pour les autres lettres d'ailleurs, l'injectivité est évidente puisqu'elle est conséquence de celle de  $h$ .

Montrons que  $\pi(A) \supseteq \mathcal{U}$

$$\text{Soit } u \in U \Rightarrow \exists x \} u, \{x, u\} \subseteq T.$$

Par isomorphisme entre  $T$  et  $\mathcal{C}$ , il y a suppression d'au moins une lettre pour passer de l'écriture du codage de  $u$  à celui de  $x$ , soit a cette lettre :

$h(u)$  s'écrit  $a, T$  avec  $T$  ensemble de lettres de  $A$

posons  $\pi_a = a, N$  avec  $N$  ensemble de lettres de  $A$

$$\pi_a = \min(\mathcal{C}_a) \Rightarrow a, N \leq a, T$$

Considérons

$$a, N \cap a, T = a, N \cap T \in \mathcal{C} \Rightarrow$$

$$N \cap T = N \Rightarrow N \subseteq T \Rightarrow$$

$$N = T, \text{ ou bien } N \subset T$$

$$N \subset T \Rightarrow a, N \subset a, T \Rightarrow h^{-1}(a, N) < h^{-1}(a, T)$$

Or

$$\forall y, y \in T, y < u \Rightarrow h(y) \neq a \Rightarrow N \not\subset T,$$

il reste donc plus que

$$T = N \Rightarrow h(U) \in \pi(A) \Rightarrow$$

$$\pi(A) \supseteq \mathcal{U}, \text{ or } |\pi(A)| = |A| \Rightarrow$$

$$\underline{p \geq n}$$

2 - Supposons  $n = p$ , alors  $\pi$  est une bijection entre  $A$  et  $\mathcal{U}$  et, à chaque  $\cup$ -irréductible est attachée une lettre telle que cette lettre appartient au codage de l'  $\cup$ -irréductible en question. Pour toute lettre  $a \in A$ ,  $h^{-1}(\pi_a)$  est un  $\cup$ -irréductible de  $T$  ( $\pi$  étant bijection).

Soit  $\tau \in \mathcal{C}$ ,  $\tau = ab, \dots, m$  et  $\forall x \in \tau$   $h^{-1}(\pi_x)$  existe et est  $\cup$ -irréductible dans  $T$ .

$$\tau \supseteq \pi_a, \pi_b, \dots, \pi_m \Rightarrow h^{-1}(\tau) \supseteq h^{-1}(\pi_a), h^{-1}(\pi_b), \dots, h^{-1}(\pi_m)$$

Inversement, soit  $u \in U$ ,  $u \leq h^{-1}(\tau) \Rightarrow \tau \supseteq \pi_u$ .

Ainsi,  $\tau$  est formé des lettres attachées aux  $\cup$ -irréductibles inférieurs ou égaux à  $h^{-1}(\tau)$  et uniquement de celles-ci, avec bijection entre  $A$  et  $U$  :  $h$  est l'  $\cap$ -codage booléen canonique.

Remarque :

Il est bien nécessaire de préciser que l'on désire la dimension minimale sinon un codage peut être compatible avec  $\cap$  sans être canonique.

Détermination de la fonction attachée de l'intervalle entre deux éléments  $x$  et  $y$ ,  $x > y$  d'un treillis  $T$  de fonction attachée  $F$ .

Soit  $m(x,y)$  le monôme formé des lettres qui apparaissent sous la même forme dans  $h(x)$  et  $h(y)$  et compte tenu de cette forme. Par exemple, si

$$h(x) = \overline{abcd\bar{e}\bar{f}} \quad \text{et} \quad h(y) = \overline{abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}}, \quad m(x,y) = \overline{ab\bar{e}\bar{f}}.$$

Alors : la fonction attachée à l'intervalle  $[y,x]$  de  $T$  est  $F.m(x,y)$ .

Codage isomorphique

Nous appelons ainsi un codage tel que le treillis à coder et son image dans le treillis de codage soient isomorphes en tant qu'ensembles ordonnés. Un tel codage n'est pas forcément compatible avec les opérations  $\cup$  et  $\cap$ , ni même avec une seule.

THEOREME

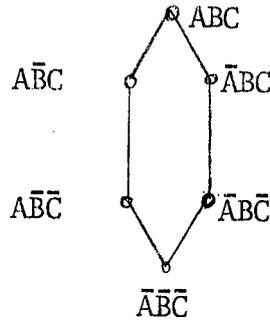
*Les treillis obtenu après  $n$  extensions successives, à partir du treillis à un seul élément, sont codables isomorphiquement dans le  $n$ -cube.*

Preuve :

Il est évident qu'un treillis obtenu par extensions successives est codable isomorphiquement dans le  $n$ -cube : à chaque extension, il suffit d'attacher une variable,  $X$ , et les monômes de l'ensemble origine sont en  $\bar{X}$ , ceux de l'extension proprement dite en  $X$ . Soit 2 homologues  $a$  et  $a^*$ ,  $a^* \succ a$  :  
si  $h(a) = m\bar{X}$   $h(a^*) = mX$  et on a bien sauvegardé l'isomorphisme :  $h(a^*) \succ h(a)$ .

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant :



### FONCTIONS ATTACHEES AUX TREILLIS OBTENUS PAR EXTENSION

Le théorème le plus simple, et de preuve immédiate est le suivant :

#### THEOREME

*Un treillis fini est obtenu par extension avec élément minimum si et seulement si sa fonction booléenne caractéristique obtenue par  $\cap$ -codage est décroissante pour au moins une variable.*

#### Preuve :

La preuve s'appuie sur le fait que l'extension n'introduit qu'un  $\cup$ -irréductible : le minimum de l'extension. A celui-ci, le codage canonique attache une variable,  $X$ . Chaque monôme canonique de l'extension est de la forme  $Xh_i$  et il couvre son homologue, dans le cube en  $\bar{X}$ , dont le codage est alors  $\bar{X}h_i$ .

Alors la fonction attachée  $F$  est de la forme :

$$F = G_1 X + F_1 \bar{X} \text{ avec } F_1 \supseteq G_1.$$

Inversement, soit  $F$  est une fonction de treillis, de la forme ci-dessus alors le treillis correspondant est obtainable par extension, comme nous allons le voir (mais il faut que  $F$  soit fonction de treillis et il est évident qu'une fonction peut être de la forme ci-dessus sans être fonction de treillis).

Considérons donc un treillis  $T$  dont la fonction attachée est de la forme ci-dessus.

Comme  $F$  est fonction de treillis  $F$  contient un monôme où toutes les lettres sont en écriture directe et par suite  $G_1$  aussi et  $F_1$  aussi puisque  $F_1 \supseteq G_1$ .

Soit  $m_1$  ce monôme de  $F_1$ .

À  $m_1 \cdot \bar{X}$  correspond  $h^{-1}(m_1 \bar{X}) \in T$  tel que  $h^{-1}(m_1 \bar{X}) \prec \text{Max}(T)$ .

Considérons alors  $\{y | y \leq h^{-1}(m_1 \bar{X})\} = T'$ .

Cet ensemble est un sous-treillis de  $T$  et par suite un treillis dont la fonction attachée est  $F_1$ , c'est donc que  $F_1$  est fonction de treillis. Et par ailleurs  $T$  est obtenu par extension à partir de  $T'$ .

### Cas général

L'étude est moins simple pour une extension sans élément minimum. Il y a alors plusieurs éléments minimaux qui sont autant d' $\cup$ -irréductibles et le codage attache une variable à chacun. Soit  $T_n$  le treillis, considérons le treillis dual  $T_n^*$ , alors  $T_n^*$  est obtenu par contre-extension. Dans  $T_n^*$ , la contre-extension n'introduit qu'un  $\cup$ -irréductible,  $X$ , car celle-ci est forcément avec élément minimum : l'homologue de  $\text{Min}(T_n^*)$ , qui, lui-même, correspond dans l'extension de  $T_n$ , à  $\text{Max}(T_n)$ .

Par suite, la fonction attachée à  $T_n^*$  est croissante en  $X$  et cela est caractéristique d'une contre-extension. D'où :

THEOREME

*Un treillis fini est obtenu par extension si et seulement si la fonction booléenne, obtenue par  $\cap$ -codage canonique, attachée au treillis dual est décroissante pour au moins une variable.*

Plus généralement :

THEOREME

*Les treillis finis obtenus par  $n$  extensions successives à partir du treillis à un seul élément sont ceux tels que, pour la fonction  $F$ , attachée au treillis dual, il existe un ordre des variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tel que :*

$$F = F_1 \bar{X}_1 + G_1 X_1, \text{ croissante en } X_1, G_1 \text{ de la forme}$$

$$G_1 = F_2 \bar{X}_2 + G_2 X_2, \text{ croissante en } X_2, G_2 \text{ de la forme}$$

$$G_2 = F_3 \bar{X}_3 + G_3 X_3, \text{ croissante en } X_3, G_3 \dots \dots \dots \text{ etc.}$$

Reconnaître un treillis fini auto-dual

Pour le treillis et son dual, on établit la fonction attachée dans l'un des deux codages canoniques.

A une permutation près sur les variables (en même nombre s'il y a auto-dualité), on doit obtenir la même fonction.



## CHAPITRE - III

### QUESTIONS RELATIVES A LA MODULARITE OU LA SEMI-MODULARITE

#### FERMETURES ASSOCIEES AUX OPERATIONS $\cup$ ET $\cap$ DANS UN TREILLIS

Soit  $T$  un treillis et deux éléments  $a$  et  $b$  de ce treillis.  
 Considérons  $I_\alpha = [a, a \cup b]$  et  $I_\beta = [a \cap b, b]$  et les applications :

$$f : I_\alpha \xrightarrow{f} I_\beta \quad \forall \alpha \in I_\alpha \quad f(\alpha) = \alpha \cap b$$

$$g : I_\beta \xrightarrow{g} I_\alpha \quad \forall \beta \in I_\beta \quad g(\beta) = \beta \cup a$$

Considérons  $f \circ g$  :

$$\forall \beta \in I_\beta, \quad f \circ g(\beta) = \beta^* = (\beta \cup a) \cap b$$

$f \circ g$  est une fermeture, en effet :

1 -  $\beta^* \geq \beta$  :

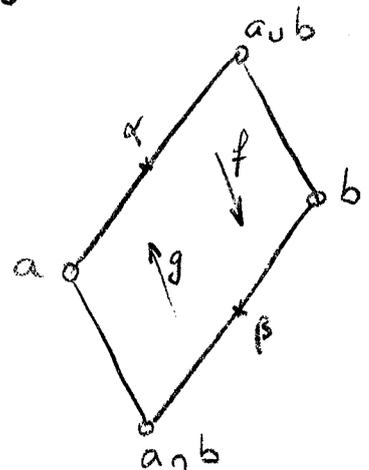
$$\left. \begin{array}{l} \beta \in [a \cap b, b] \Rightarrow \beta \leq b \\ \beta \leq \beta \cup a \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \leq (\beta \cup a) \cap b = \beta^*$$

2 -  $\beta_1 \geq \beta_2 \Rightarrow \beta_1^* \geq \beta_2^*$  (croissance de  $\cup$  et  $\cap$ )

3 -  $(\beta^*)^* = \beta^*$  :

$$\left. \begin{array}{l} \beta^* \geq \beta \Rightarrow \beta^* \cup a \geq \beta \cup a \\ \beta^* = (\beta \cup a) \cap b \Rightarrow \beta^* \leq \beta \cup a \Rightarrow \beta^* \cup a \leq \beta \cup a \end{array} \right\} \Rightarrow \beta^* \cup a = \beta \cup a \Rightarrow$$

$$(\beta^* \cup a) \cap b = (\beta \cup a) \cap b = (\beta^*)^* = \beta^*.$$



De même  $g \circ f$  est une fermeture pour la relation d'ordre duale de celle du treillis.

### THEOREME

*Si  $\alpha, \alpha \in I_\alpha$ , est un invariant pour  $g \circ f$ ,  $f(\alpha)$  est un invariant pour  $f \circ g$ . De même, si  $\beta$  est un invariant pour  $f \circ g$ ,  $\beta \in I_\beta, g(\beta)$  est un invariant pour  $g \circ f$ .*

Preuve :

Soit  $\alpha = g \circ f(\alpha) = (\alpha \wedge b) \wedge a \Rightarrow$

$$\alpha \wedge b = [(\alpha \wedge b) \vee a] \wedge b = f \circ g(\alpha \wedge b) ;$$

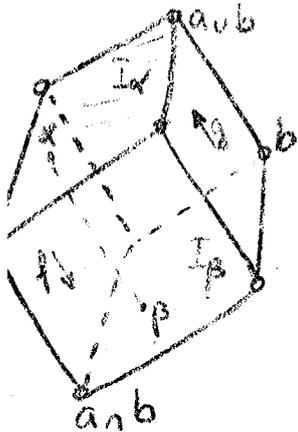
de même pour  $\beta = f \circ g(\beta)$ .

Remarque :  $f$  et  $g$  limitées aux invariants des deux fermetures, sont donc deux bijections inverses l'une de l'autre.

### NATURE DES INVARIANTS

Un élément  $\alpha, \alpha \in I_\alpha$ , est un invariant pour  $g \circ f$  si et seulement si  $(\alpha \wedge b) \vee a = \alpha$  ; c'est-à-dire que toute chaîne joignant  $\alpha$  à  $\alpha \wedge b$  n'a d'autre élément commun avec  $I_\alpha$  que  $\alpha$  lui-même. De même,  $\alpha \wedge b = f(\alpha)$ , donc invariant pour  $f \circ g$ , est le seul élément commun entre la chaîne ci-dessus et  $I_\beta$ .

Finalement, les couples d'invariants  $\alpha$  et  $\beta$ , sont les couples tels que



$$\alpha \geq \beta$$

$$\alpha \in I_\alpha, \beta \in I_\beta$$

$$[\beta, \alpha] \cap I_\alpha = \alpha \quad (\text{intersection ensembliste})$$

$$[\beta, \alpha] \cap I_\beta = \beta \quad (\text{intersection ensembliste})$$

Remarque : Il existe alors une (ou des) chaîne(s) de longueur minimale entre  $I_\alpha$  et  $I_\beta$  : cette longueur n'est pas une distance car l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée.

THEOREME

Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont invariants pour  $g \circ f$ ,  $\alpha_1 \cup \alpha_2$  aussi.

De même si  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont invariants pour  $f \circ g$ ,  $\beta_1 \cap \beta_2$  aussi.

Preuve :

Soit :

$$x \in [b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2), \alpha_1 \cup \alpha_2] \cap I_\alpha \Rightarrow x \geq b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2) \Rightarrow x \geq b \cap (\beta_1 \cup \beta_2) \\ \beta_1 \cup \beta_2 \leq b \Rightarrow b \cap (\beta_1 \cup \beta_2) = \beta_1 \cup \beta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq \beta_1 \cup \beta_2 \quad (I)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in I_\alpha \Rightarrow x \geq a \\ (I) \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq a \cup \beta_1 \cup \beta_2$$

$$\left. \begin{array}{l} a \cup \beta_1 \cup \beta_2 = (a \cup \beta_1) \cup (a \cup \beta_2) = \alpha_1 \cup \alpha_2 \\ x \in [b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2), \alpha_1 \cup \alpha_2] \Rightarrow x \leq \alpha_1 \cup \alpha_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \alpha_1 \cup \alpha_2$$

et par suite :

$$\underline{[b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2), \alpha_1 \cup \alpha_2] \cap I_\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2}$$

Soit  $y \in [b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2), \alpha_1 \cup \alpha_2] \cap I_\beta$ :

$$y \in [b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2), \alpha_1 \cup \alpha_2] \Rightarrow y \geq b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2)$$

$$y \in I_\beta \Rightarrow y \leq b$$

$$y \in [b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2), \alpha_1 \cup \alpha_2] \Rightarrow y \leq \alpha_1 \cup \alpha_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow y \geq b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2) \\ \Rightarrow y \leq b \\ \Rightarrow y \leq \alpha_1 \cup \alpha_2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2)$$

et par suite :

$$\underline{[b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2), \alpha_1 \cup \alpha_2] \cap I_\beta = b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2) = f(\alpha_1 \cup \alpha_2)}$$

Finalement, d'après ce que nous avons dit de la nature des couples d'invariants  $(\alpha_1 \cup \alpha_2)$  et  $b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2)$  forment un couple d'invariants.

On montrerait de même que si  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des invariants pour  $f \circ g$ ,  $\beta_1 \cap \beta_2$  est aussi un invariant pour  $f \circ g$ .

Montrons que, dans  $I_\beta$  réduit aux invariants de  $f \circ g$ ,  $f(\alpha_1 \cup \alpha_2)$  est une bonne supérieure pour  $\beta_1 = f(\alpha_1)$  et  $\beta_2 = f(\alpha_2)$ . On a :

$$(\alpha_1 \cup \alpha_2) \cap b \geq \begin{cases} \alpha_1 \cap b \\ \alpha_2 \cap b \end{cases} \Rightarrow (\alpha_1 \cup \alpha_2) \cap b \geq (\alpha_1 \cap b) \cup (\alpha_2 \cap b) = \beta_1 \cup \beta_2$$

donc  $(\alpha_1 \cup \alpha_2) \cap b$  majore  $\beta_1 \cup \beta_2$ .

Soit  $\beta$  invariant  $\beta \geq \begin{cases} \beta_1 \\ \beta_2 \end{cases}$

$$\beta \geq \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \Rightarrow \beta \geq \beta_1 \cup \beta_2$$

$$\beta \cup a \geq \beta_1 \cup \beta_2 \cup a \geq \alpha_1 \cup \alpha_2 \Rightarrow$$

$$\beta = (\beta \cup a) \cap b \geq (\alpha_1 \cup \alpha_2) \cap b$$

Ainsi,  $b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2)$  est un majorant de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  et, parmi les invariants majorant  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , il est inférieur ou égal à toute autre. Donc :

$$b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2) = \text{Sup}(\beta_1, \beta_2)$$

et rappelons que

$$b \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2) = f(\alpha_1 \cup \alpha_2) = f(g(\beta_1) \cup g(\beta_2))$$

De plus, l'ensemble des invariants de  $I_\beta$  possède un minimum :  $a \cap b$ , donc cet ensemble forme un treillis. Dans ce treillis, la borne inférieure est celle du treillis  $T$  tandis que la borne supérieure est donnée par :

$$\text{Sup}(\beta_1, \beta_2) = f(g(\beta_1) \cup g(\beta_2)).$$

On montrerait de même que les invariants de  $I_\alpha$  forment un treillis où la borne supérieure coïncide avec la borne supérieure dans le treillis  $T$ , tandis que :

$$\text{Inf}(\alpha_1, \alpha_2) = g(f(\alpha_1) \cap f(\alpha_2)).$$

Enfin, constatons que les bijections  $f$  et  $g$  inverses l'une de l'autre, réduites aux invariants sont des isomorphismes :

THEOREME

Les invariants des deux intervalles  $[a, a \cup b] = I_\alpha$  et  $[a \cap b, b] = I_\beta$  d'un treillis  $T$  forment deux treillis  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  isomorphes.

$T_\alpha$  est sous-demi-treillis supérieur de  $T$

$T_\beta$  est sous-demi-treillis inférieur de  $T$

$$\text{Sup}_{T_\beta} (\beta_1, \beta_2) = f(g(\beta_1) \cup g(\beta_2))$$

$$\text{Inf}_{T_\alpha} (\alpha_1, \alpha_2) = g(f(\alpha_1) \cap f(\alpha_2))$$

RECHERCHE DES INVARIANTS PAR DES METHODES BOOLEENNES

Un moyen est de rechercher les couples précédents.

Sur de gros treillis finis, une recherche booléenne peut être pratique. En effet, sur la fonction attachée au treillis, manipuler des intervalles est facile : c'est la multiplication de la fonction par un monôme. On peut chercher si  $\alpha, \alpha \in I_\alpha$ , est invariant de la façon suivante :

- chercher  $\alpha \cap b$  : immédiat si l'on procède par  $\cap$ -codage.
- s'assurer que  $[\alpha \cap b, \alpha] \cap I_\alpha$  se réduit à  $\alpha$  : le produit des fonctions attachées aux 2 intervalles doit se réduire au monôme canonique codage de  $\alpha$  (et,  $\alpha \cap b$  est invariant pour  $g \circ f$ , dans  $I_\beta$ ).

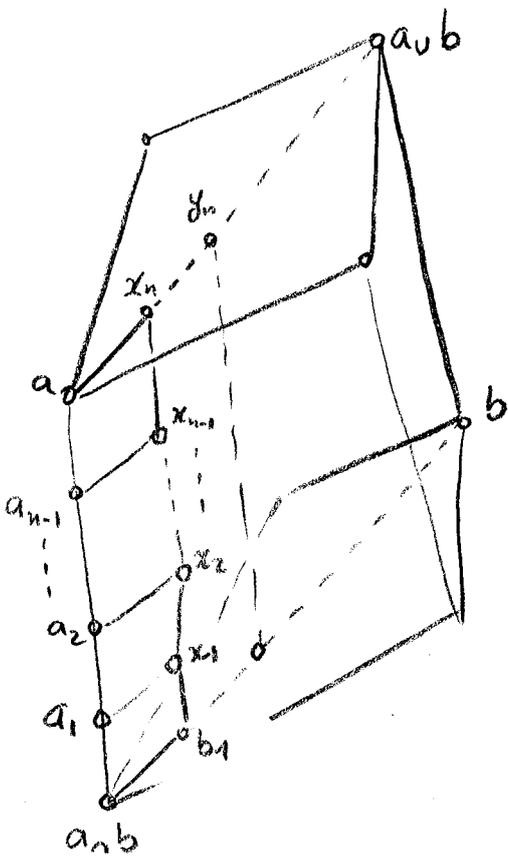
TREILLIS SEMI-MODULAIRES

THEOREME

Un treillis est  $\wedge$ -semi-modulaire si et seulement si pour tout couple  $\{a, b\}$  on trouve entre  $a$  (ou  $b$ ) et  $a \cup b$ , une chaîne maximale dont tous les éléments sont des invariants.

Preuve :

Montrons d'abord que si le treillis est  $\wedge$ -semi-modulaire, on trouve entre  $a$  et  $a \cup b$ , une chaîne maximale dont tous les éléments sont invariants.



soit  $b_1 : a \cap b \} b_1 \leq b$

et  $a_1 : a \cap b \} a_1 \leq a$

$a_1$   
 $\} a_1 \cap b_1 \Rightarrow \exists x_1$  tel que :  
 $b_1$

$$x_1 = a_1 \cup b_1 \quad x_1 \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ b_1 \end{array} \right.$$

Soit  $a_2 : a_1 \} a_2 \leq a \dots$  d'où  $x_2$  etc...

Finalement, on trouve  $x_n$  :

$$a \} x_n \leq a \cup b$$

et  $x_n$  est invariant (chaîne  $x_n \dots b_1$ ).

On recommence à partir de  $x_n$  et  $b_1$  d'où  $y_n$  :

$$y_n \{ x_n \{ a$$

etc... On remonte ainsi jusqu'à  $a \cup b$ .

Réciproquement, considérons un treillis tel que pour tout couple  $\{a, b\}$ , on trouve entre  $a$  (ou  $b$ ) et  $a \cup b$ , une chaîne maximale dont les éléments sont invariants. Soit alors  $a$  et  $b$  tels que  $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \{ a \cap b$ .

Considérons l'intervalle  $\llbracket a, a \cup b \rrbracket$ . Cet intervalle compte 2 invariants puisque  $|\llbracket a \cap b, b \rrbracket| = 2$ . Il y a donc une chaîne maximale de longueur 1 entre  $a$  et  $a \cup b$  donc  $a \cup b \{ a$ . On fait ensuite le même raisonnement en intervertissant les rôles de  $a$  et  $b$  ; d'où  $a \cup b \{ b$ .

Finalement :

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \{ a \cap b \Rightarrow a \cup b \{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

et le treillis est donc  $\cap$ -semi-modulaire.

### TREILLIS $\cup$ -SEMI-MODULAIRES

Raisonnement analogue, d'où :

### THEOREME

*Un treillis est  $\cup$ -semi-modulaire si et seulement si pour tout couple  $\{a, b\}$ , on trouve entre  $a(b)$  et  $a \cap b$ , une chaîne maximale dont tous les éléments sont invariants.*

Corollaire :

Dans un treillis  $\cup$ -semi-modulaire :

$$\left. \begin{array}{l} a \prec b \\ a \geq c \end{array} \right\} \Rightarrow c \prec b \cap c$$

dualement, dans un treillis  $\cap$ -semi-modulaire :

$$\left. \begin{array}{l} a \succ b \\ a \leq c \end{array} \right\} \Rightarrow c \succ b \cup c$$

En effet, cela découle de la démonstration précédente, si on considère le cas  $a \cup b \prec b$  qui entraîne  $a_{n-1} = a \cap b$ .  
Nous utiliserons la première propriété dans la démonstration sur les treillis  $\alpha$ -affaiblis.

TREILLIS MODULAIRES

En application des deux théorèmes précédents :

THEOREME

*Un treillis est modulaire si et seulement si pour tout couple (a,b), on trouve, entre a(b) et  $a \cap b$  d'une part, entre a(b) et  $a \cup b$  d'autre part, une chaîne maximale dont tous les éléments sont invariants.*

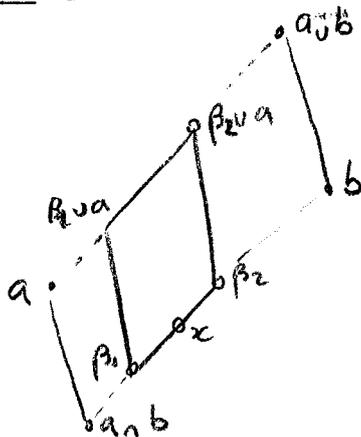
Commentaire :

Les trois théorèmes précédents sont des caractérisation moins "locales" que celles habituellement énoncées pour les treillis  $\cup$ -semi-modulaires,  $\cap$ -semi-modulaires et modulaires. Au sujet de ces derniers, on peut énoncer le théorème suivant :

THEOREME

Si un treillis est modulaire, tout élément d'une chaîne dont les extrémités sont des invariants est lui-même un invariant.

Preuve (par l'absurde)



Soit  $x \in I_\beta$ . Supposons  $x$  non invariant et soit  $\beta_2$  et  $\beta_1$  deux invariants encadrant au plus près ( $\beta_2 > x > \beta_1$ )  
 Alors le treillis possède le sous-treillis non modulaire à 5 éléments  $\{\beta_1 \cup a, \beta_2, x, \beta_1, \beta_1 \cup a\}$ , ce qui est contraire à l'hypothèse de modularité et par suite  $x$  est invariant.

Corollaire

$I_\alpha$  et  $I_\beta$  sont isomorphes.

(Cette propriété est connue, elle se trouve ainsi établie par une voie différente).

INDICE D'UN ELEMENT D'UN TREILLIS

L'indice d'un élément  $a$  d'un treillis, noté  $i(a)$  est la longueur de la plus longue suite d' $\cup$ -irréductibles inférieur ou égaux à  $a$ .

Ainsi, cette notion n'est pas toujours définie.

Dans les treillis atomiques, les atomes ont l'indice 1.

S'il existe le minimum du treillis est d'indice nul.

LEMME

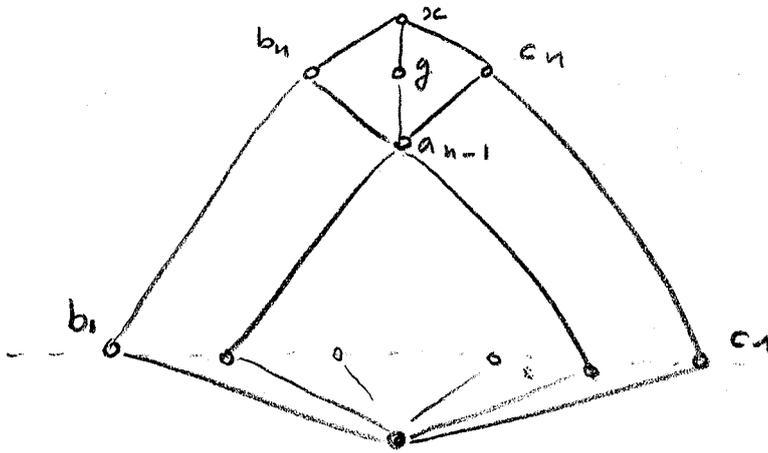
Dans un treillis modulaire atomique, les éléments d'indice  $\leq 1$  forment un sous-treillis convexe.

Preuve :

Nous montrerons d'abord la convexité et pour cela, qu'un élément ayant une représentation d'indice 1 ne peut couvrir un  $\mathcal{U}$ -irréductible d'indice 2.

Nous raisonnons par l'absurde en montrant que, si un élément ayant une représentation d'indice 1, couvrait un  $\mathcal{U}$ -irréductible d'indice 2, le treillis (modulaire) posséderait alors le sous-treillis non-modulaire classique à 5 éléments.

Soit  $x$  ayant une représentation d'indice 1. On peut donc écrire :



$$x = c_n \cup b_1 \quad b_1 \text{ atome, } b_1 \not\subseteq c_n$$

$$c_n \text{ union d'atomes, } c_n \} x$$

Soit  $b_n : x \} b_n \geq b_1$

et soit  $a_{n-1} = b_n \cap c_n$

Soit  $g \} x, g \mathcal{U}$ -irréductible

$$x = g \cup b_n \cup c_n \left\{ \begin{array}{l} g \\ b_n \\ c_n \end{array} \right. \Rightarrow \text{(par modularité) } g \text{ } \cup\text{-irréductible}$$

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ } \cup\text{-irréductible} \\ b_n \\ c_n \end{array} \right\} \Rightarrow g \cap b_n \cap c_n = a_{n-1}$$

Supposons

$$i(g) = 2 \Rightarrow$$

1) rang de  $x \geq 3$

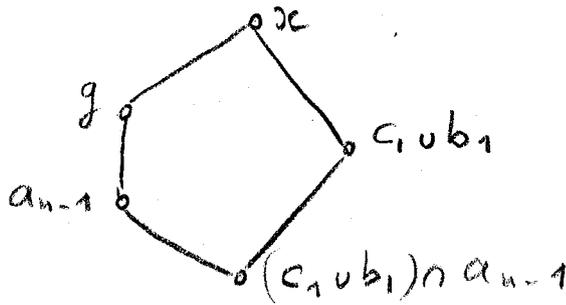
2)  $i(a_{n-1}) = 1 \Rightarrow a_{n-1}$  est union d'atomes  $\Rightarrow$

$$\text{rang de } a_{n-1} \geq 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} c_n \text{ union d'atomes} \\ c_n \not\subseteq a_{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c_1, \text{ atome, } c_1 \leq c_n, c_1 \not\leq a_{n-1}, c_1 \neq b_1$$

$$c_1 \cup b_1 \text{ est (par modularité) de rang 2}$$

Considérons :



c'est bien un sous-treillis:



Preuve :

Nous supposons que les éléments d'indice  $\leq i$  forment un sous-treillis convexe  $T_i$  (ce qui est vrai pour  $i=1$ , d'après le lemme) et nous allons montrer que c'est alors aussi le cas pour les éléments d'indice  $\leq i+1$ .

Soit  $x$  un élément ayant une représentation d'indice  $i+1$ , c'est-à-dire comportant au moins un  $U$ -générateur d'indice  $i+1$ .

1) Cas particulier d'une représentation ne comportant qu'un  $U$ -générateur,  $g$ , d'indice  $i+1$ .

Les autres générateurs de la représentation sont d'indice  $\leq i$  et leur union,  $A$ , est par suite de l'hypothèse d'indice  $\leq i$ .

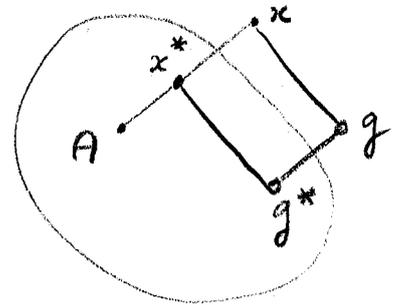
$$x = g \cup A$$

Considérons

$$g^* \prec g, g^* \in T_i$$

et

$$x^* = g^* \cup A \in T_i$$



$$x^* \cup g = (g^* \cup A) \cup g = A \cup (g \cup g^*) = A \cup g = x$$

$$\left. \begin{array}{l} x^* = g^* \cup A \Rightarrow x^* \geq g^* \\ g \succ g^* \end{array} \right\} \Rightarrow g^* = g \cap x^*$$

et  $g \succ g^*$  entraîne, du fait de l'isomorphisme des intervalles  $[g \cap x^*, g]$  et  $[x^*, x^* \cup g]$  dans un treillis modulaire :

$$x \succ x^*$$

Supposons maintenant que  $x$  soit d'indice  $(i+2)$  au moins :

$\exists g_2$  et  $g_3$ ,  $\cup$ -irréductibles avec :

$x > g_3 > g_2 \succ g_2^*$  avec  $g_2^* \in T_i$  et :

$$\{g_2, g_3, x\} \cap T_i = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} x \succ x^* \\ x^* \not\prec g_2^* \\ x > g_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^* \cup g_2 = x$$

Du fait de l'isomorphisme entre segments

$[x^*, x^* \cup g_2]$  et  $[x^* \cap g_2, g_2]$ , dans un modulaire :

$$x = x^* \cup g_2 \succ x^* \Rightarrow g_2 \succ x^* \cap g_2$$

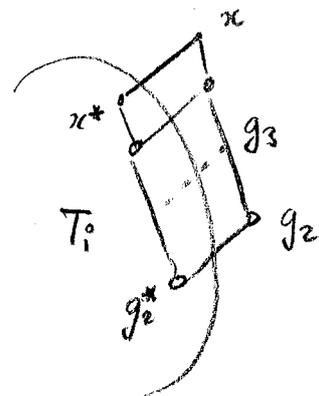
et comme  $g_2$  est  $\cup$ -irréductible :  $g_2 \succ g_2^* \Rightarrow$

$$x^* \cap g_2 = g_2^*$$

Considérons les segments

$$[g_2 \cap x^*, x^*] \text{ et } [g_2, g_2 \cup x^*],$$

il s'ensuit que  $g_3$  couvre un élément de  $T_i$  et comme il existe par ailleurs une chaîne  $(x, g_3, g_2)$  complètement extérieure à  $T_i$ ,  $g_3$  n'est pas  $\cup$ -irréductible ! donc  $x$  est d'indice  $i+1$  au plus.



2) Voyons maintenant le cas plus général d'un élément x ayant une représentation d'indice (i+1), comportant au moins deux U-irréductibles g<sub>1</sub> et g<sub>2</sub>, d'indice i+1.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} x &= g_1 \cup g_2 \dots \\ &= g_1 \cup A_2, \quad x \succ A_2 \geq g_2, \quad A_2 \not\leq g_1 \\ &= g_2 \cup A_1, \quad x \succ A_1 \geq g_1, \quad A_1 \not\leq g_2 \end{aligned}$$

d'où :

$$A_1 \cap A_2 \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \right. \quad (\text{car } x = A_1 \cup A_2 \succ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix})$$

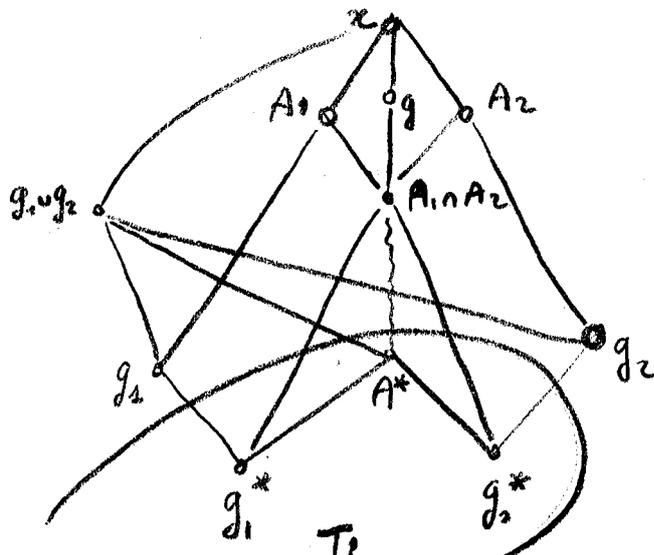
Supposons que x couvre un U-irréductible, g, d'indice i+2.

L'U-irréductibilité de g et la modularité entraînent que :

$$x \succ g \succ A_1 \cap A_2$$

$$x = A_1 \cup A_2 = [g_1 \cup (A_1 \cap A_2)] \cup [g_2 \cup (A_1 \cap A_2)]$$

soit  $x = (g_1 \cup g_2) \cup (A_1 \cap A_2)$  (1)



Montrons maintenant que :

$$(A_1 \cap A_2) \cap (g_1 \cup g_2) \neq \begin{cases} A_1 \cap A_2 \\ g_1 \cup g_2 \end{cases}$$

Nous avons :

$$A_1 \cap A_2 \not\leq_{g_1}^{g_2} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \not\leq g_1 \cup g_2 \quad (2)$$

Soit  $A^*$  :

$$A^* = g_1^* \cup g_2^* \text{ avec } g_1^* \not\leq g_1, g_2^* \not\leq g_2 \Rightarrow$$

$$\{A^*, g_1^*, g_2^*\} \subseteq T_i$$

$$g_1^* \cup g_2^* \leq g_1 \cup g_2 \Rightarrow \underline{A^* \leq g_1 \cup g_2}$$

Par ailleurs :

$$g_2 \cup (A_1 \cap A_2) = A_2 \not\leq A_1 \cap A_2$$

Du fait de l'isomorphisme (modularité) des segments

$$[A_1 \cap A_2, g_2 \cup (A_1 \cap A_2)] \text{ et } [g_2 \cap (A_1 \cap A_2), g_2] :$$

$$g_2 \cup (A_1 \cap A_2) \not\leq (A_1 \cap A_2) \Rightarrow g_2 \not\leq g_2 \cap (A_1 \cap A_2)$$

$$\Rightarrow g_2 \cap (A_1 \cap A_2) = g_2^*$$

De même :

$$g_1 \cap (A_1 \cap A_2) = g_1^*$$

d'où :

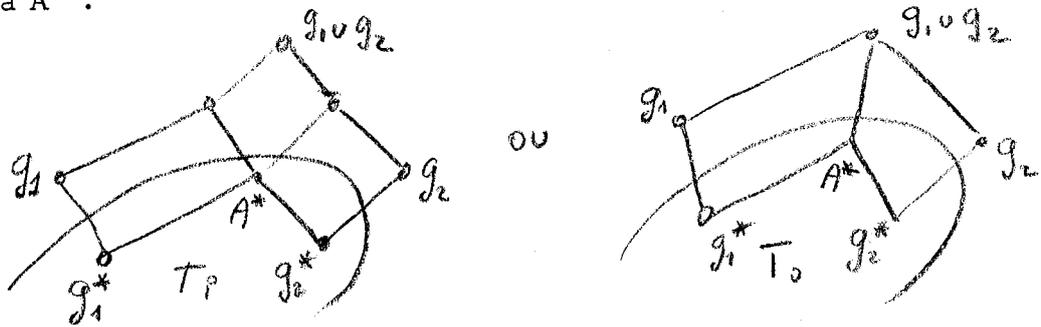
$$g_1^* \cup g_2^* \leq A_1 \cap A_2 \text{ ou } \underline{A^* \leq A_1 \cap A_2}$$

Ces résultats (soulignés) concernant  $A^*$ , vont nous permettre de montrer maintenant que :

$$A_1 \cap A_2 \leq g_1 \cup g_2 \quad (3)$$

pour cela nous considérons les rangs par rapport à  $A^*$ .

Du fait de l'isomorphisme entre segments,  $g_1 \cup g_2$  est de rang 1 ou 2 par rapport à  $A^*$  :



$A_1 \cap A_2$  est de rang au moins 1 car

$$\left. \begin{array}{l} g \succ (A_1 \cap A_2) \\ \text{Ind}(g) = i+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ind}(A_1 \cap A_2) = i+1$$

et

$$A^* \in T_i, A_1 \cap A_2 \notin T_i$$

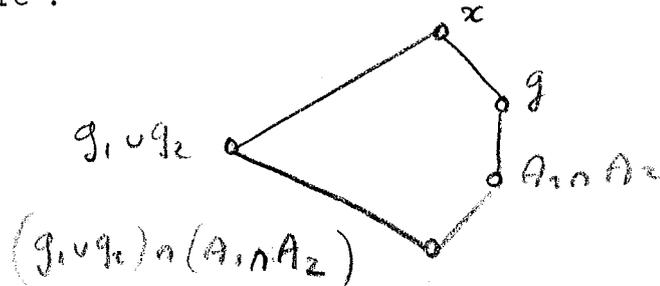
Si  $g_1 \cup g_2$  est de rang 1, et (2) excluant l'égalité entre  $g_1 \cup g_2$  et  $A_1 \cap A_2$  :

$$(g_1 \cup g_2) \cap (A_1 \cap A_2) = A^*$$

Si  $g_1 \cup g_2$  est de rang 2, la seule possibilité à envisager est  $g_1 \cup g_2 \succ A_1 \cap A_2 \succ A^*$

Mais alors  $g_1$  et  $A_1 \cap A_2$  ont deux majorants minimaux distincts :  $A_1$  et  $g_1 \cup g_2$ , ce qui est impossible donc (3) est bien vraie.

(1), (2), (3) entraînent que le treillis modulaire possède le sous-treillis non-modulaire :



ce qui est impossible donc  $x$  est d'indice  $(i+1)$  car l'existence de  $g$  est impossible.

3) Montrons maintenant, après la convexité, que les éléments d'indice  $< (i+1)$  forment un sous-treillis.

$$\left. \begin{array}{l} \forall(a,b), \quad i(a) \\ \quad \quad \quad \quad i(b) \end{array} \right\} \leq i+1$$

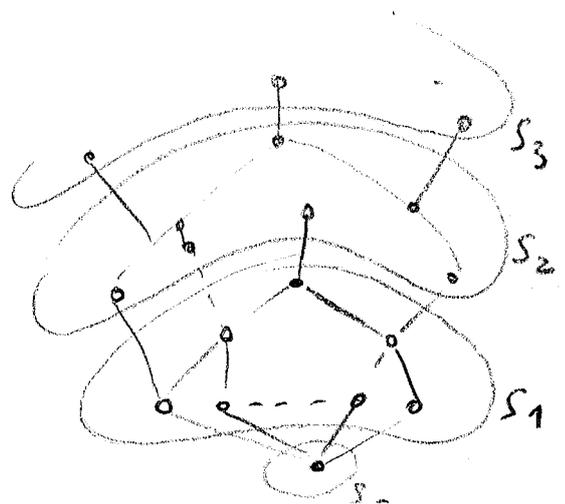
$$i(a \cap b) \leq i+1.$$

Par ailleurs,  $a \cup b$  a une représentation d'indice  $i+1$  et d'après ce qui précède,  $a \cup b$  ne peut pas alors être d'indice  $\geq i+2$ , donc  $a \cup b$  est d'indice  $i+1$ .

Commentaire

On aboutit à une sorte de statification du treillis suivant l'indice : l'élément nul est d'indice 0. Puis les éléments d'indice 1 forment une strate  $S_1$ . Puis, les éléments d'indice 2 forment une strate  $S_2$  etc...

Chaque strate est fermée pour l'union.



Corollaire 1

Dans un treillis modulaire

$$i(a \cup b) = \text{Max}(i(a), i(b)).$$

Corollaire 2

Dans un treillis modulaire, de deux éléments complémentaires, l'un au moins appartient à la strate d'indice maximum.

(fermeture des strates pour  $\cup$ ).

Corollaire 3

Dans un treillis modulaire complété tous les éléments sont d'indice 1 au plus.

(c'est-à-dire : les  $\cup$ -irréductibles sont atomiques, sinon il y aurait un élément d'indice 2 au moins et le maximum de la strate d'indice 1 n'aurait pas de complément).

Corollaire 4

Un élément d'une strate  $S_i$  est  $\cup$ -irréductible si et seulement s'il est minimum dans  $S_i$ .

(démonstration analogue à celle concernant  $\underline{\cup} E_i$  dans le chapitre sur l'"extension").

## CHAPITRE - IV

### TREILLIS $(\alpha)$ et $\alpha$ -AFFAIBLIS

Nous étudions ici une classe de treillis dont le premier exemple fut le treillis des sous-arbres d'un arbre. Ces treillis sont très liés à la notion d'extension que nous avons développée ; ils sont difficilement caractérisables algébriquement, ce qui s'explique par ce qu'un sous-treillis d'un treillis  $(\alpha)$  ou  $\alpha$ -affaibli n'est pas forcément  $(\alpha)$  ou  $\alpha$ -affaibli.

#### CONDITION $(\alpha)$ POUR UN TREILLIS FINI

Un treillis  $T_n$  fini est dit satisfaire la condition  $(\alpha)$  d'ordre  $n$  ou, plus simplement,  $T_n$  est dit  $(\alpha)$  d'ordre  $n$  si :

$\alpha-1$  :  $T_n$  possède exactement  $n$  U-irréductibles.

$\alpha-2$  : Toute chaîne maximale joignant  $\text{Min}(T_n)$  à  $\text{Max}(T_n)$  est de longueur  $n$ .

$\alpha-3$  : Les atomes sont les seuls éléments U-irréductibles de  $T_n$ .

#### CONDITION $(\alpha)$ AFFAIBLIE POUR UN TREILLIS FINI

Un treillis fini  $T_n$  est dit satisfaire la condition  $(\alpha)$  affaiblie d'ordre  $n$  ou, plus simplement,  $T_n$  est dit  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $n$  s'il ne satisfait que les deux premiers points de la définition précédente.

L'intérêt de ces deux définitions provient de ce que de nombreux treillis que nous avons étudiés satisfont l'une ou l'autre de ces deux conditions dont nous verrons qu'elles sont caractéristiques d'une classe assez nombreuse de treillis.

LEMME

Soit  $T$  un treillis et  $\{a,b\} \subseteq T$ ,  $a > b$ .

On peut adjoindre à  $T$  un élément étranger  $h$ , pour obtenir  $S$ , et prolonger l'ordre sur  $S$  de telle sorte que :

- 1)  $a > h > b$
- 2)  $S$  est un treillis où  $h$  est  $\cup$  et  $\cap$ -irréductible.
- 3)  $T$  est sous-treillis de  $S$ .

Preuve :

I - Précisons comment on prolonge sur  $S$  l'ordre attachée à  $T$  :

- 1) On conviendra que  $a > h > b$
- 2)  $\forall \{u,v\} \subseteq T$   
dans  $S$ ,  $u \geq v \Leftrightarrow u \geq v$  dans  $T$   
et dans  $S$ ,  $u = v \Leftrightarrow u = v$  dans  $T$
- 3)  $\forall \{h,u\}$ ,  $u \in T$  :  
dans  $S$   $h \geq u \Leftrightarrow b \geq u$  dans  $T$   
dans  $S$   $h \leq u \Leftrightarrow a \leq u$  dans  $T$
- 4) Enfin, convenons que  $x \geq x$ .

On vérifie alors que la nouvelle relation définie sur  $S$  est bien une relation d'ordre (c'est-à-dire, réflexive, transitive, antisymétrique).

II- Montrons que  $S$  est un treillis et, pour cela, vérifions que pour tout couple  $(x,y)$ , il existe une borne supérieure dans  $S$ .

1)  $\{x,y\} \not\leq h \Rightarrow$

Si  $\text{Major}(\{x,y\}) \not\leq h \Rightarrow \exists \text{Min}(\text{Major}(\{x,y\})) = x \cup y$  dans T

Si  $\text{Major}(\{x,y\}) \ni h \Rightarrow \text{Major}(\{x,y\}) \ni b \Rightarrow$

$\exists \text{Min}(\text{Major}(\{x,y\})) = \text{Min}(\text{Major}(\{x,y\})-h) =$

$\text{Min}(\text{Major-dans T}(\{x,y\})) = x \cup y$  dans T

2)  $\{x,y\} \ni h$ , soit  $x = h$

y et h comparables  $\Rightarrow$

si  $y > h \Rightarrow \exists x \cup y = y$

si  $y \leq h \Rightarrow \exists x \cup y = h$

y et h incomparables  $\Rightarrow$

$\exists h \cup y = a \cup y$  dans T.

Démonstration analogue pour montrer l'existence d'une borne inférieure.  
Par construction, h est bien  $\cup$  et  $\cap$ -irréductible.

III- Enfin, T est sous-treillis de S, comme cela ressort de la démonstration ci-dessus : dans le cas où  $\{x,y\} \not\leq h$  (donc  $\subseteq T$ ),  $x \cup y \in T$ , et de même  $x \cap y$ .

#### THEOREME

Tout treillis  $\alpha$ -affaibli d'ordre n est :

- sous-treillis d'un treillis S,  $(\alpha)$  d'ordre n,
- formé de chaînes maximales de S.

Réciproquement :

Si T est un treillis  $\alpha$ -affaibli d'ordre n et si a < b sont deux éléments dans T, de hauteur relative p, tout sous-treillis  $T_p$  de T, formé de chaînes maximales (dans T) de [a,b] vérifie la condition  $\alpha$ -affaiblie d'ordre p.

Preuve de la proposition directe : Nous allons montrer que pour tout treillis  $\alpha$ -affaibli, on peut construire un treillis  $(\alpha)$  dont le treillis donné est sous-treillis à chaînes maximales.

Soit  $T$  un treillis  $\alpha$ -affaibli mais non  $(\alpha)$ , d'ordre  $n$ . Soit  $g_i$  un  $\cup$ -irréductible non-atomique, il existe alors un élément  $b_j^i$ ,  $b_j^i < g_i$ ,  $b_j^i \in T$ .  
Considérons alors une chaîne descendante :

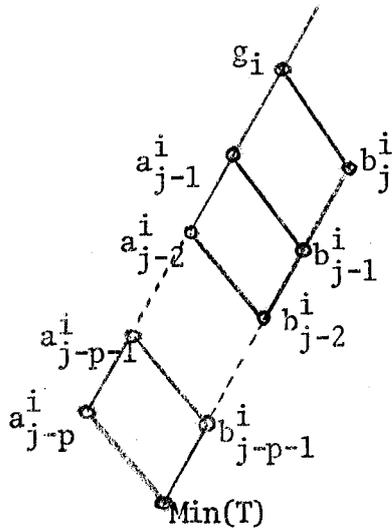
$$b_j^i \succ b_{j-1}^i \succ b_{j-2}^i \succ \dots \succ b_{j-p}^i = \text{Min}(T)$$

dont tous les éléments appartiennent à  $T$ .

Créons la chaîne :

$$g_i = a_j^i \succ a_{j-1}^i \succ a_{j-2}^i \succ \dots \succ a_{j-p}^i \succ \text{Min}(T)$$

de même longueur,  $p$ , et telle que :



$$\forall h, h \in [0, p] \Rightarrow$$

$$a_{j-h}^i \succ b_{j-h}^i$$

L'ensemble  $S$  obtenu est un treillis (application,  $p$  fois, du lemme) et il est  $(\alpha)$ , d'ordre  $n$ .  $T$  est sous-treillis de  $S$  et toute chaîne maximale de  $T$  est maximale dans  $S$ .

En tant qu' $\cup$ -irréductible,  $a_{j-p}^i$  permute avec  $b_j^i$ .

Preuve de la proposition inverse

Remarquons d'abord qu'il n'y a aucune perte de généralité en supposant le sous-treillis  $T_p$  considéré, sous-treillis d'un treillis  $(\alpha)$  d'ordre  $n$ , plutôt qu' $\alpha$ -affaibli de même ordre puisqu'un  $\alpha$ -affaibli est lui-même sous-treillis d'un  $(\alpha)$  de même ordre.

Soit donc  $T$  un treillis  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $n$  et  $a \ll b$  de hauteur relative  $p$ .

Soit  $T_p$  un sous-treillis formé de chaînes maximales de  $[a, b]$ . Par suite  $T_p$  est bien un treillis à longueur de chaîne et cette longueur est  $p$ .

Notons  $R(x)$  l'ensemble des  $\cup$ -irréductibles de  $T$  dont un élément  $x$  est union, union maximale.

Considérons les  $\cup$ -irréductibles de  $T_p$  pris en tant que treillis isolé (ces  $\cup$ -irréductibles ne le sont donc pas forcément dans  $T$ ).

Soit  $u$  un tel  $\cup$ -irréductible de  $T_p$ .

$$u \in T_p \Rightarrow R(u) \subseteq R(a)$$

soit

$$v \in T_p, v \prec u \quad (v \prec u \text{ aussi bien dans } T \text{ que dans } T_p)$$

$$\Rightarrow \exists w_u \in R(a), u = w_u \cup v \text{ et } R(u) = \{w_u \cup R_v\}$$

Ainsi, par ce procédé, à chaque  $\cup$ -irréductible de  $T_p$ , en commençant par les éléments couvrant  $b$ , on attache un élément de  $R(a) - R(b)$ .

Montrons maintenant qu'à deux  $\cup$ -irréductibles différents, on ne peut attacher le même élément. C'est-à-dire, montrons que  $u_1 \neq u_2 \Rightarrow w_{u_1} \neq w_{u_2}$

Supposons  $w_{u_1} = w_{u_2} \Rightarrow w_{u_1} \in R(u_1 \cap u_2)$  (rappel :  $u_1 \cap u_2 \in T_p$ ).

Soit :  $z, z \in T_p, u_1 \succ z \geq u_1 \cap u_2$  ( $z$  est unique)

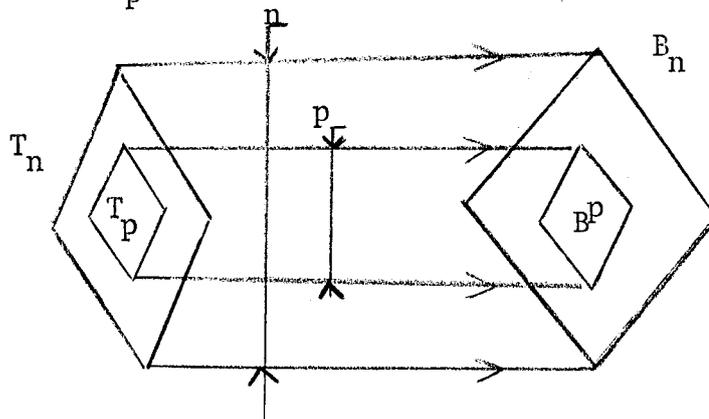
$$R_z \supseteq R(u_1 \cap u_2) \Rightarrow R_z \ni w_1$$

et par suite  $w_1$  n'a pu être attaché à  $u_1$ , ce qui est contraire à l'hypothèse, donc  $w_{u_1} \neq w_{u_2}$ . Ainsi, le nombre des  $\cup$ -irréductibles de  $T_p$  est égal à  $|R(a) - R(b)|$  comme c'est aussi sa longueur et que  $T_p$  satisfait la condition de JORDAN-DEDEKIND,  $T_p$  est  $\alpha$ -affaibli.

Autre démonstration, utilisant les résultats du chapitre sur le codage :

Immergeons  $T$  dans le  $n$ -cube par un  $\cap$ -codage canonique  $h$ , ce qui est possible et la dimension est nécessaire et suffisante.

Les éléments de  $T_p$  ont leur image dans un  $p$ -cube  $B^p$ .



Dans l'immersion de  $T_p$  dans  $B^p$ ,  $p$  est une dimension nécessaire et suffisante. Par ailleurs, cette application est compatible avec  $\cap$ , il s'agit donc d'un codage  $\cup$ -canonique puisque c'est le seul codage de dimension minimal compatible avec l'opération  $\cap$  et par suite  $T_p$  contient  $p$  éléments  $\cup$ -irréductibles. Finalement,  $T_p$  est  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $p$ .

Corollaire

Tout intervalle  $[\min(T), a]$  est  $\alpha$ -affaibli et, il est à remarquer que les  $\cup$ -irréductibles d'un tel intervalle, considéré isolément, le sont aussi dans  $T$ , par suite :

PROPRIETE 1

$a \succ b \Rightarrow \exists u_{ab}$ , unique,  $\cup$ -irréductible,  $\not\prec b$  et tel que  $R(a) = R(b) \cup \{u_{ab}\}$ , d'où aussi :

PROPRIETE 2

Tout élément de rang  $p$  d'un treillis  $\alpha$ -affaibli est borne supérieure d'exac-  
tement  $p$   $\cup$ -irréductibles.

Ce corollaire nous amène au théorème :

THEOREME

Dans un treillis  $\alpha$ -affaibli  $T$ ,  $\forall a, b, y$  de  $T$  :

$[a \succ b \text{ et } a \geq y] \Rightarrow \exists u_{ab}$ ,  $\cup$ -irréductible, unique, indépendant de  $y$ ,  
 $\underline{\prec} b$  et tel que  $y \leq b$  ou  $y \geq u_{ab}$ .

Preuve : D'après le corollaire précédent :

$$\exists u_{ab}, \text{ unique, } \underline{\prec} b \text{ et tel que } R(a) = R(b) \cup \{u_{ab}\}$$

Supposons :  $y \underline{\prec} b \Rightarrow a = y \cup b \Rightarrow$

$$\exists u_y, u_y \leq y, u_y \underline{\prec} b \Rightarrow R(a) \supseteq R(b) \cup \{u_y\}$$

Mais  $|R(a)| = |R(b)| + 1 \Rightarrow u_y$

est unique est indépendant de  $y \Rightarrow u_y = u_{ab}$

Si  $y \leq b \Rightarrow [b \not\underline{\prec} u_{ab} \Rightarrow y \not\underline{\prec} u_{ab}]$

TREILLIS  $\alpha$ -AFFAIBLIS ET EXTENSION

THEOREME

Les treillis  $\alpha$ -affaiblis sont les treillis générables par extensions (lat-  
ticielles) successives à partir du treillis à un seul élément; chaque  
extension étant caténaire et avec minimum.

Preuve

I - Les treillis  $\alpha$ -affaiblis s'obtiennent par extensions successives avec minimum puisque leur longueur est égale au nombre de leurs  $\cup$ -irréductibles. Il reste donc à vérifier que chaque extension est, de plus, caténaire. Or, supposons que l'une de ces extensions ne soit pas caténaire, le treillis obtenu après cette extension ne serait pas à longueur de chaîne et, par suite, ne serait pas  $\alpha$ -affaibli, ce qui est contraire à l'hypothèse.

II- Il est assez évident qu'un treillis obtenu par extensions successives, chaque fois caténaire et avec minimum, à partir du treillis réduit à un seul élément est un treillis  $\alpha$ -affaibli. Constatons que c'est le cas pour le treillis de longueur 1.

Par ailleurs, à chaque extension :

- la propriété de JORDAN-DEDEKIND est conservée
- la longueur augmenté de 1
- le nombre des  $\cup$ -irréductibles augmente de 1

lui aussi, puisque chaque fois, le seul  $\cup$ -irréductible introduit est le minimum de la partie étendue.

Corollaire 1

Soit  $T_n$  un treillis  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $n$  :

$\forall k$ , entier  $0 \leq k \leq n$ ,  $\exists k$   $\cup$ -irréductibles tels que le sous-treillis de  $T_n$ , construit sur ces  $k$   $\cup$ -irréductibles soit  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $k$ .

Preuve : Le treillis  $T_n$  étant obtenu par  $n$  extensions successives, considérons la  $k^{\text{ième}}$  : à ce stade, on a un sous-treillis du treillis définitif et il est  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $k$ .

Corollaire 2

Il y a autant de façons possibles d'obtenir par extension un treillis  $T_n$   $\alpha$ -affaibli que ce treillis compte de co-atomes ; chacun de ceux-ci est maximum d'un treillis  $\alpha$ -affaibli à partir duquel le treillis est obtenu.

Preuve : Le théorème précédent assure que pour tout élément  $a_{n-1}^i$  de rang  $n-1$ , il existe  $(n-1)$   $\cup$ -irréductibles dont il est borne supérieure (exactement).  
Considérons alors le  $n^{\text{ième}}$   $\cup$ -irréductible et l'ensemble des éléments qui lui sont supérieurs : on constate, par une démonstration reprenant celle du théorème analogue pour les treillis distributifs, que  $T_n$  est obtenu par extension à partir du sous-treillis  $T_{n-1}^i$  des éléments inférieurs ou égaux à  $a_{n-1}^i$ .

### Corollaire 3

Les co-atomes étant tous maximum d'une extension, du fait du théorème sur  $\text{Inf}(\text{Max } O_i)$  établi dans le 1<sup>er</sup> chapitre :

"Les majorants de la borne inférieure des co-atomes forment un treillis booléen". D'où aussi :

### Corollaire 4

Dans un treillis  $T$   $\alpha$ -affaibli d'ordre  $n$  possédant  $q$  co-atomes, le rang de  $\text{Max}(T - \cup E_i)$  est  $n-q$ .

### Corollaire 5

Un treillis  $\alpha$ -affaibli est  $\cup$ -semi-modulaire.

Preuve : Les caractéristiques des extensions successives, permettant d'obtenir tout treillis  $\alpha$ -affaibli, sont celles qui préservent l' $\cup$ -semi-modularité.

Remarque : La réciproque n'est pas vrai (  )

## PROPRIETES DES BRANCHES EQUIVALENTES DANS UN TREILLIS $\alpha$ -AFFAIBLI

Un treillis  $\alpha$ -affaibli étant  $\cup$ -semi-modulaire, on peut définir des branches équivalentes (voir cours d'Algèbre de Monsieur KUNTZMANN, polycopié daté d'octobre 1968, chapitre 3, page 32), comme nous le rappelons :

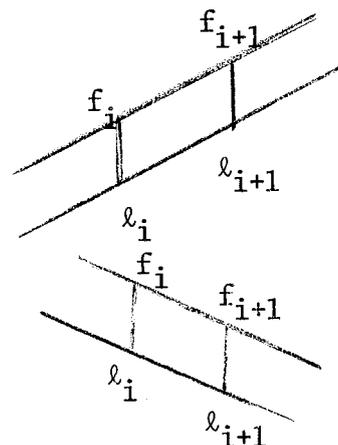
On dira que les branches  $(a,b)$  et  $(c,d)$ ,  $a \succ b$ ,  $c \succ d$ , sont équivalentes si ces branches sont confondues ou s'il existe une suite finie de branches :

$$(a,b) = (e_1, f_1), (e_2, f_2), (e_3, f_3), \dots, (e_n, f_n) = (c,d)$$

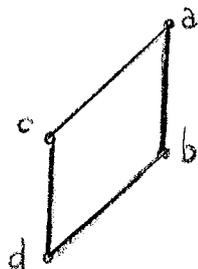
telle que :

$$\text{ou } \left\{ \begin{array}{l} f_i \cup e_{i+1} = f_{i+1} \\ f_i \cap e_{i+1} = e_i \end{array} \right.$$

$$\text{ou } \left\{ \begin{array}{l} e_i \cap f_{i+1} = e_{i+1} \\ e_i \cap f_{i+1} = f_i \end{array} \right.$$



Ce rappel fait, considérons deux branches équivalentes  $(a,b)$  et  $(c,d)$ ,  $a \succ b$ ,  $c \succ d$  et telles que de plus  $a \succ c$ , d'où  $a = b \cup c$ .



L'  $\cup$ -semi-modularité entraîne que  $d = c \cap d$  d'où

$$\left. \begin{aligned} R(a) &= R(b) \cup \{u_{ab}\} \\ &= R(c) \cup \{u_{ac}\} \\ &= R(d) \cup \{u_{bd}\} \cup \{u_{ab}\} \end{aligned} \right\} (1)$$

Or  $c \geq u_{ab} \Rightarrow R(c) \ni u_{ab}$  et d'après (1) :

$$u_{db} = u_{ac}$$

et par suite aussi :

$$u_{cd} = u_{ab}$$

Or, les branches  $(a,b)$  et  $(c,d)$  sont équivalentes, d'où, en poursuivant de proche en proche :

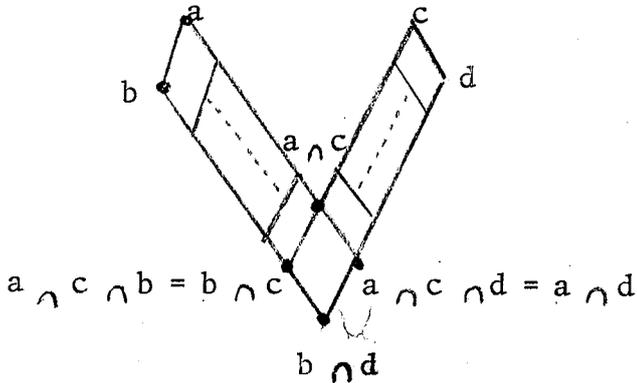
THEOREME

A des branches équivalentes est attaché le même  $\cup$ -irréductible.

Corollaire

Soit  $(a,b)$  et  $(c,d)$  deux branches équivalentes, alors  $[a \cap c, b \cap d]$  se réduit à une branche, équivalente aux deux branches  $(a,b)$  et  $(c,d)$ .

Preuve : Par  $\cup$ -semi-modularité,  $(a \cap c, a \cap c \cap d)$  est une branche équivalente à  $(c,d)$  et  $(a \cap c, a \cap c \cap b)$  est une branche équivalente à  $(a,b)$ .



Si  $(a,b)$  et  $(c,d)$  sont équivalentes, il est attaché à  $(a \cap c, b \cap c)$  et  $(a \cap c, a \cap d)$  le même  $\cup$ -irréductible et, par suite, ces branches sont confondues, d'où :

$b \cap c = b \cap d = a \cap d$  et  
 $a \cap c \succ b \cap d$ .

Signification des branches équivalentes, relativement au fait que le treillis s'obtient par extensions successives

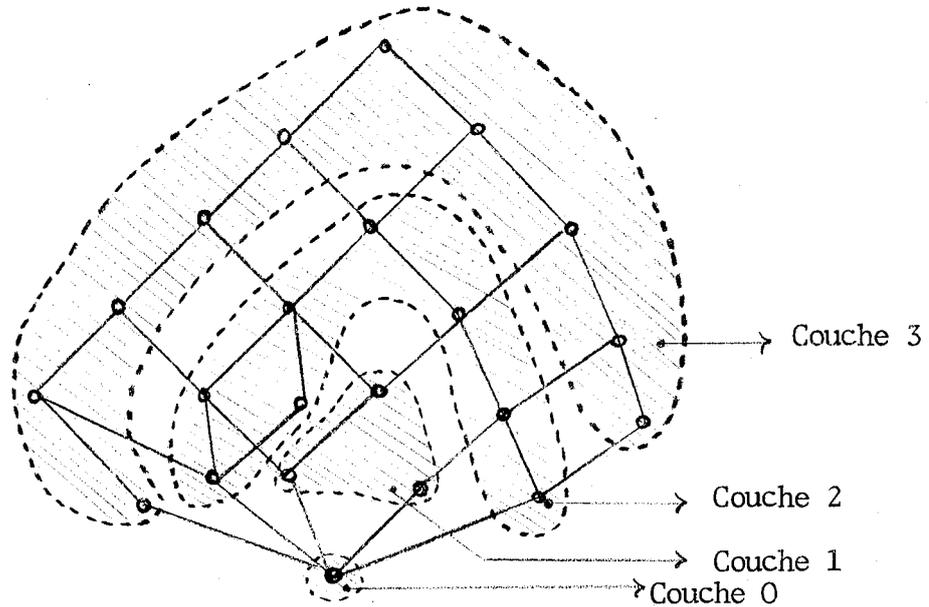
A une branche est attaché l' $\cup$ -irréductible introduit par l'extension créant la branche. Les branches équivalentes sont celles qui joignent deux homologues dans l'extension introduisant l' $\cup$ -irréductible attaché à ces branches.

Préordre associé à l'extension

Soit  $T_n$  un treillis  $\alpha$ -affaibli. Il peut s'obtenir de différentes façons par extension à partir d'un treillis de longueur  $n-1$ . Considérons l'union des parties étendues possibles,  $\cup E_i$  pour reprendre les mêmes notations que dans le chapitre sur la notion d'extension. Considérons  $T_n - \cup E_i$ .

Pour un treillis  $\alpha$ -affaibli,  $T_n - \bigcup E_i$  est facile à déterminer : c'est le sous treillis convexe dont le maximum est la borne inférieure des co-atomes. A son tour, ce treillis est  $\alpha$ -affaibli puisque sous-treillis à chaînes maximales, d'où pour lui aussi une dernière couche etc... Finalement, c'est tout le treillis  $T_n$  qui se trouve stratifié en diverses "couches".

Exemple :



A cette stratification est associé un préordre, notons le  $R$ , ainsi défini :

$xRy \Leftrightarrow x$  appartient à une couche d'ordre supérieur ou égal à l'ordre de la couche contenant  $y$ .

(il s'agit bien d'un préordre :  $\forall x, xRx$  et  $\forall x, y, z, xRy$  et  $yRz \Rightarrow xRz$ )

### Couche dans un treillis $\alpha$ -affaibli $T$

Précisons la notion de couche que nous venons d'introduire :

"La dernière couche, d'ordre le plus élevé, est l'ensemble :

$$\{x, x \leq \text{Max } T, x \not\leq \text{Inf}\{u, u \in \text{Max } T\}\}."$$

Toute couche,  $C_{p-1}$ , d'ordre  $p-1$ , se définit à partir de la couche  $C_p$ , d'ordre  $p$  :

$$C_{p-1} = \{x, x \leq \Omega_p, x \leq \text{Inf} \{y, y \in \Omega_p\}\}$$

avec

$$\Omega_p = \text{Inf} \{y, y \in \text{Max } C_p\}$$

La couche  $C_0$  se réduit à  $\text{Min}(T)$ .

Chaque couche  $C_i$  détermine un intervalle  $[\text{Min}(T), \text{Max}(C_i)]$  qui est lui-même un treillis  $\alpha$ -affaibli et, compte tenu des propriétés établies pour les treillis qui peuvent s'obtenir par extension de diverses façons, on établit les propriétés suivantes :

#### PROPRIETE 1

Chaque couche ne comporte que des  $U$ -irréductibles incomparables deux à deux et contient, avec tout couple d'éléments, leur borne supérieure.

#### PROPRIETE 2

Chaque élément d'une couche ne couvre qu'un élément au plus de la couche inférieure.

#### PROPRIETE 3

Pour chaque couple  $C_i$  ( $i \neq 0$ )

$[\text{Max}(C_{i-1}), \text{Max}(C_i)]$  est un treillis de Boole

(il y a ainsi entre  $\text{Min}(T)$  et  $\text{Max}(T)$ , une suite de treillis de Boole).

#### PROPRIETE 4

Dans une couche  $C_i$ , il y a autant de co-atomes relativement à  $\text{Max}(C_i)$

qu'il y a d' $U$ -irréductibles dans la couche (cela par application du théorème,

$a \succ b \Rightarrow \forall y, y \leq a \Rightarrow \exists u_{ab}, y \geq u_{ab}$  ou  $y \leq b$ ).

ELEMENTS COMPLEMENTAIRES DANS UN TREILLIS  $\alpha$ -AFFAIBLI

THEOREME

Dans un treillis  $\alpha$ -affaibli, les couples de complémentaires, autre que I et 0 s'il en existe, appartiennent à la dernière couche.

Preuve : Considérons  $\text{Max}(T_n - \bigcup E_i)$  qui est aussi la borne inférieure des co-atomes.

Alors :

$$\forall x, x \neq \text{max}(T_n)$$

$$x \cup \text{max}(T_n - \bigcup E_i) \leq \text{un co-atome}$$

$$\Rightarrow \forall y, y \in T_n - \bigcup E_i$$

$$x \cup y \leq \text{un co-atome}$$

et par suite, y ne peut avoir d'éléments complémentaires. Ne peuvent donc avoir d'éléments complémentaires que les éléments n'appartenant pas à  $T_n - \bigcup E_i$ , donc les éléments de la dernière couche.

Corollaire

Un élément, autre que 0, strictement inférieur à un  $\cup$ -irréductible ne peut avoir de complémentaire.

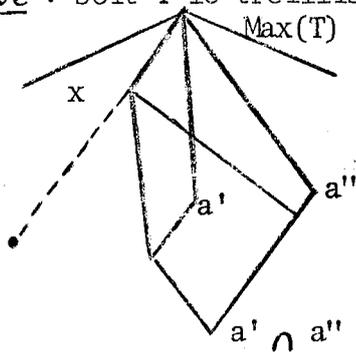
THEOREME

Dans un treillis  $\alpha$ -affaibli, les éléments complémentaires d'un même élément forment un sous-demi-treillis inférieur.

Preuve : Soit T le treillis et soit  $a'$  et  $a''$  ( $a' \neq a''$ ) deux complémentaires d'un même élément a.

Supposons  $(a' \cap a'') \cup a \neq \text{Max}(T) \Rightarrow$

$\exists x, (a' \cap a'') \cup a \leq x < \text{Max}(T)$ .



$$\text{Max}(T) \succ x \Rightarrow x \cap a' \prec a' \text{ et } x \cap a'' \prec a''$$

d'où par  $\cup$ -semi-modularité :

$$(x \cap a') \cap (x \cap a'') = a' \cap a'' \quad (i)$$

Or les branches  $(a', a' \cap x)$  et  $(a'', a'' \cap x)$  sont équivalentes (car toutes deux équivalentes à la branche  $(\text{Max}(T), x)$ ) et par suite :

$$a' \cap a'' \prec (a' \cap x) \cap (a'' \cap x)$$

d'où la contradiction avec (i), par suite,  $(a' \cap a'') \cup a = \text{Max}(T)$ , ce qui achève la démonstration.

#### THEOREME

*Un treillis  $\alpha$ -affaibli complémenté est booléen.*

#### Preuve :

Admettons la propriété vraie pour la longueur  $n$  et montrons qu'elle est vraie pour la longueur  $n+1$  (elle est vraie pour  $n=1$  ).

Considérons une extension  $\alpha$ -préservatrice sur un treillis booléen de dimension  $n$ ,  $B^n$ , et aboutissant à un treillis  $T_{n+1}$ . Cette extension porte sur au moins deux chaînes puisque  $T_{n+1} - B^n$  doit être complémenté, et de plus, pour satisfaire les conditions d'obtention d'un treillis complémenté, ces deux chaînes sont formées d'éléments 2 à 2 complémentaires dans  $B^n$ . Comme le support de l'extension doit être fermé pour  $\cap$ , il s'ensuit que tout atome participe à l'extension. Pour satisfaire à nouveau les conditions d'obtention d'un treillis complémenté (et aussi du fait que l'extension doit être caténaire), il s'ensuit que les co-atomes doivent participer et comme l'on ferme à nouveau par  $\cap$ , c'est tout le treillis qui participe à l'extension et on obtient donc le  $(n+1)$ -cube.

THEOREME

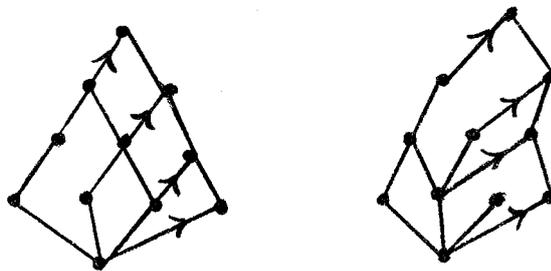
La cardinalité minimale d'un treillis  $(\alpha)$ ,  $T_n$ , de longueur  $n$  est

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Preuve : Un treillis  $(\alpha)$  s'obtient par extensions successives portant chaque fois sur des chaînes maximales de longueur maximale. On assurera la minimalité en choisissant un support d'extension ne comportant qu'une seule chaîne maximale. La cardinalité du treillis obtenu est ainsi :

$$\underbrace{1}_{T_0} + \underbrace{1 + 2}_{T_1} + \underbrace{3 + 4}_{T_2} + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 .$$

Notons que pour  $n \geq 4$ , il y a plusieurs treillis possibles ; pour  $n = 4$  il y en a 2 (à un isomorphisme près).



Parmi les treillis précédents, seul le demi-quadrillage correspond à un treillis de n-arbre (voir cette question) puisque c'est le seul cas où l'extension de  $T_{p-1}$  à  $T_p$  est isomorphe à l'ensemble des majorants d'un atome pour tout  $p$ ,  $p \leq n$  d'où :

#### Corollaire

La chaîne à  $n$  sommets est le  $n$ -arbre ayant le moins de sous-arbres.

#### Remarque

La cardinalité maximale d'un treillis  $T_n$  satisfaisant la condition (α) est  $2^n$ .

Au chapitre sur les parties connexes d'un ensemble connexe, nous mentionnons encore quelques propriétés des treillis  $\alpha$ .

#### Fonction booléenne attachée à un treillis $\alpha$ -affaibli

Soit  $F$  la fonction booléenne attachée au treillis. Considérons 2 monômes tels que leur borne supérieure les couvre chacun. Du fait de la condition de chaîne, ces 2 monômes sont de même rang  $p$ , et leur borne supérieure est de rang  $(p+1)$ . Par suite les deux monômes sont de la forme :

$$M.I.\bar{J} \text{ et } M.\bar{I}.J$$

( $M$  produit de lettres accentuées ou non) et leur borne supérieure de la forme :

$$M.I.J.$$

L'  $\cup$ -semi-modularité entraîne que la borne inférieure est couverte par  $M\bar{I}\bar{J}$  et  $M\bar{I}J$ , c'est donc :

$$M.\bar{I}.\bar{J}$$

et par suite :

$$F \geq M(I+J) \Rightarrow F \geq M \quad (1)$$

### Fonction attachée à un treillis distributif

Avec les conventions du paragraphe précédent, l' $\cap$ -semi-modularité se traduit par :

$$F \supseteq M(\bar{I} + \bar{J}) = M \subseteq F \quad (2)$$

Dans le cas de treillis à longueur de chaîne  $n$  et possédant  $n$   $\cup$ -irréductibles, (1) et (2) sont caractéristiques de, respectivement l' $\cup$ - et l' $\cap$ -semi-modularité et la fonction booléenne attachée à un treillis distributif satisfait simultanément (1) et (2).

Inversement, si un treillis satisfait simultanément (1) et (2), il est alors modulaire et nous montrons (voir "Extension dans les treillis") qu'un treillis modulaire  $T_n$   $\alpha$ -affaibli est distributif. La satisfaction simultanée de (1) et (2) est donc caractéristique d'un treillis distributif.

### Produit de treillis ( $\alpha$ ) ou $\alpha$ -affaiblis

Il est immédiat de vérifier que le produit de deux treillis  $\alpha$ -affaiblis est  $\alpha$ -affaibli. Mais, dans un produit de treillis  $\alpha$ -affaiblis, tous les treillis doivent être ( $\alpha$ ) pour que le produit le soit.

Inversement, soit un produit fini de treillis,  $T = T_1 \times T_2 \times \dots$ . Si  $T$  est  $\alpha$ -affaibli, que dire de  $T_1, T_2, \dots$ ? D'une part si  $T_1, T_2, \dots$  n'étaient pas à longueur de chaîne,  $T$  ne le serait pas. D'autre part, le nombre d' $\cup$ -générateurs de  $T_1$ , par exemple, ne peut être moindre que sa longueur. Il ne peut pas non plus être plus élevé, car ce serait aussi le cas pour  $T$  qui alors ne serait pas  $\alpha$ -affaibli, donc :

PROPRIETE

Si un produit de treillis est  $\alpha$ -affaibli, chacun des termes du produit est  $\alpha$ -affaibli.

De plus, si le produit est  $(\alpha)$ , les termes du produit sont aussi  $(\alpha)$ , car si l'un des termes n'était pas  $(\alpha)$  (mais  $\alpha$ -affaibli) le produit ne le serait pas.



## CHAPITRE - V

### QUESTIONS DE PLANARITE DANS LES TREILLIS

#### DIAGRAMME DE HASSE D'UN ENSEMBLE ORDONNE - RAPPEL

Les éléments de l'ensemble sont figurés par des points d'un même plan muni d'un axe vectical  $\vec{V}$ . La position des points dans le plan est telle que :

$$X > Y \Rightarrow \vec{XY} \cdot \vec{V} > 0$$

de plus, on joint par un segment de droite les points X et Y tels que  $X \succ Y$  (ou  $Y \prec X$ ) et seulement de tels couples ; ces segments de droites s'appellent aussi "branches". Il s'ensuit que  $X > Y$  si et seulement si on peut aller de Y à X par "un chemin constamment croissant".

Dans les applications de nombreux ensembles ordonnés se présentent naturellement comme des diagrammes de Hasse : notion de couches dans les réseaux d'opérateurs, arborescences des questionnaires, etc...

#### DIAGRAMME DE HASSE PLAN

Un diagramme de Hasse est dit plan s'il ne comporte aucune intersection de branches.

#### ENSEMBLE ORDONNE PLAN

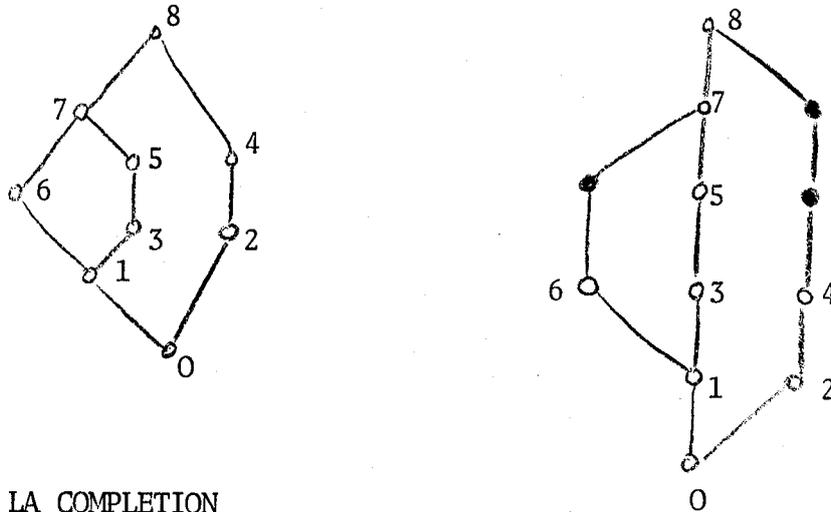
C'est un ensemble pour lequel il existe un diagramme de Hasse plan.

COMPLETION DE JORDAN-DEDEKIND POUR UN TREILLIS FINI

Nous appellerons ainsi une complétion du treillis l'amenant à posséder la condition de chaîne de JORDAN-DEDEKIND.

Dès lors, on pourra parler, pour un élément, de son rang par rapport au ZERO du treillis. La complétion est effectuée avec des éléments chacun à la fois  $\cup$  et  $\cap$ -irréductibles et, par suite, le treillis initial  $T$  est sous-treillis du treillis complété  $\bar{T}$ . La complétion est faite de telle sorte que les éléments initiaux aient un rang minimal et, par suite  $\bar{T}$  est unique pour  $T$  donné.

Exemple :

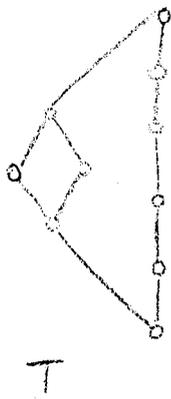


PROPRIETES DE LA COMPLETION

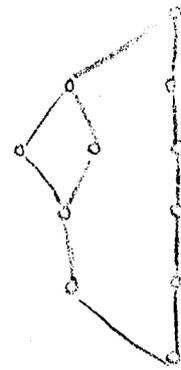
Pour la relation d'ordre entre treillis :

$$T \geq S \iff S \text{ est sous-treillis de } T$$

la complétion ci-dessus est idempotente ( $\forall T, \bar{\bar{T}} = \bar{T}$ ) et extensive ( $\bar{T} \geq T, \forall T$ ) mais non isotome ( $S \geq T \neq \bar{S} \geq \bar{T}$ ) comme le montre l'exemple :



$$\left. \begin{array}{l} S \geq T \\ \bar{S} \neq \bar{T} \end{array} \right\}$$



$$S = \bar{S}$$

D'un treillis  $T$  tel que  $\bar{\bar{T}} = T$ , nous dirons qu'il est "J-D-complet".

INDICE D'UN ELEMENT DE RANG p DANS UN TREILLIS J-D-COMPLET

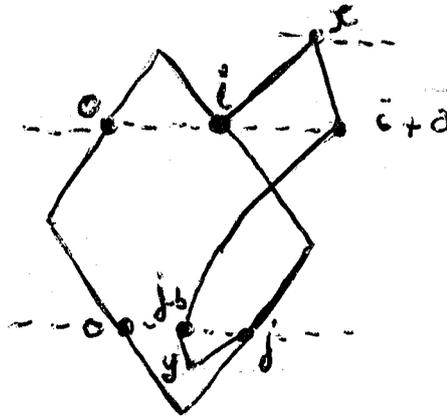
Considérons les éléments de rang  $p$ . Nous leur attachons les indices  $0, 1, 2, 3, \dots$

TREILLIS PLANS - DEFINITION

Un treillis  $T$  est plan si et seulement si, il existe pour  $\bar{T}$  une indexation telle que :  $\forall x \geq y \Rightarrow$  étant données deux chaînes maximales disjointes (sauf en  $x$  et  $y$ ), s'il y en a, reliant  $x$  et  $y$ , les indices des éléments de l'une sont constamment supérieures, à égalité de rang, aux indices des éléments de l'autre chaîne.

Commentaire

Cette caractérisation est une expression plus exploitable du fait que le treillis "peut être dessiné plan". Le raisonnement tenu est le suivant : quand on dessine un treillis sur une feuille de papier, on commence par exemple vers le bord gauche de la feuille et les éléments de la chaîne la plus à gauche seront d'indice nul. Puis on continue de dessiner en se déplaçant vers la droite sans jamais, si le treillis est plan, revenir à l'"intérieur" du périmètre déjà dessiné. Si on le faisait, on aurait deux chaînes avec inversion de l'ordre des indices :

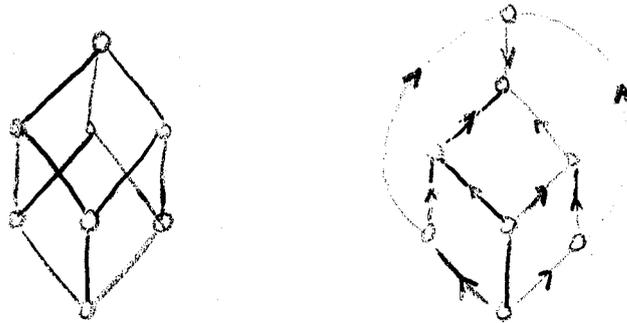


THEOREME (rappel)

Un ensemble ordonné fini  $T$ , dont un diagramme de Hasse est plan et qui possède un élément universel et un élément nul est un treillis.

Remarque :

Un graphe ordonné plan, et qui est un treillis, n'a pas forcément de diagramme de Hasse plan, comme le montre l'exemple du 3-cube.



CHAINE DE BORDURE D'UN TREILLIS PLAN FINI

Soit  $T$  un treillis plan fini. Une chaîne maximale  $\mathcal{C}$ , joignant  $\text{Min}(T)$  à  $\text{Max}(T)$  est dite "de bordure" si le diagramme de Hasse du treillis peut être dessiné plan de telle sorte que  $\mathcal{C}$  soit un bord du dessin. Il y a naturellement une seconde chaîne de bordure. Ainsi, un treillis plan possède au moins deux chaînes de bordure. Les deux chaînes de bordure d'un diagramme de Hasse donné sont dites "conjuguées" ; elles peuvent avoir des parties communes. Une chaîne de bordure peut avoir plusieurs conjuguées.

## EXTENSION ET PLANARITE

Notons, à ce sujet, le théorème suivant :

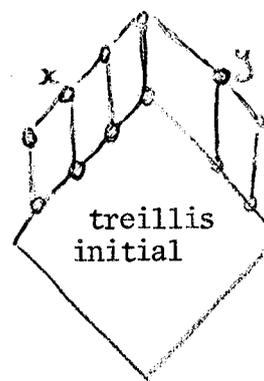
### THEOREME

*Pour qu'une extension d'un treillis plan conserve la planarité, il faut et il suffit que les éléments participant à l'extension appartiennent à deux chaînes de bordures conjuguées et que, de plus, si deux éléments (différents), appartenant l'un à l'une des deux chaînes et l'autre à l'autre chaîne, participent à l'extension, aucun de leurs minorants communs n'y participent.*

#### Preuve :

Si l'on considère la figure ci-contre, il est assez évident que la condition est suffisante : toute chaîne reliant des éléments du treillis initial à des éléments de la partie étendue contient un élément d'une chaîne de bordure initiale et l'homologue (dans l'extension) de cet élément.

Il s'ensuit d'ailleurs qu'un treillis, fini, plan, obtenu par extension, comporte 1, 2 ou 3 co-atomes.



Montrons que la condition est nécessaire. Remarquons d'abord qu'une chaîne de la partie étendue est sous-chaîne maximale d'une chaîne de bordure du nouveau treillis et qu'alors chaque élément de cette sous-chaîne est homologue d'un élément d'une chaîne de bordure du treillis initial. Soit maintenant deux éléments de la partie étendue.

Soit  $z$  l'un de leurs minorants communs et soit  $u \succ z$  dans le treillis initial. Supposons que  $z$  participe à l'extension, alors  $z^*$  a le même rang que  $u$  après complétion éventuelle. La chaîne  $x \dots z^* z$  est telle que  $z^*$  est d'indice, par exemple, inférieur à celui de  $u$ . Mais si l'on considère la chaîne  $y \dots z^* z$ ,  $z^*$  doit alors être indice supérieur à l'indice de  $u$ , ce qui est impossible donc  $z$  ne peut participer à l'extension.

### TREILLIS $\alpha$ -AFFAIBLIS PLANS

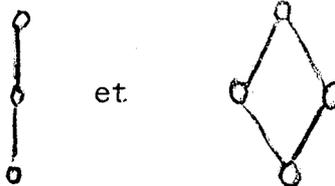
Nous allons d'abord établir le théorème :

#### THEOREME

*Un treillis  $\alpha$ -affaibli plan ne possède que deux chaînes de bordure au plus.*

Preuve :

Pour  $n = 2$  la propriété est vraie pour les deux seuls treillis  $\alpha$ -affaiblis possibles :



Admettons la propriété pour  $(n+1)$  et montrons qu'elle est vraie pour  $n$ . Soit donc  $T_n$  un treillis  $\alpha$ -affaibli plan, d'ordre  $n$ , obtenu par extension à partir du treillis  $T_{n-1}$   $\alpha$ -affaibli et plan et qui n'a donc que 2 chaînes de bordure, soient  $C_1$  et  $C_2$  celles-ci. D'une part l'extension est avec minimum et caténaire : pour conserver la propriété  $\alpha$ -affaiblie. D'autre part, l'extension ne peut porter que sur des éléments de  $C_1$  et  $C_2$  : pour conserver la planarité. Finalement, l'extension ne peut porter que sur des éléments n'appartenant qu'à une des deux chaînes. Le nombre de chaînes de bordure reste à deux. Cela fait aussi qu'il ne peut y avoir plus de 2 co-atomes.

### THEOREME

Le plus grand  $\alpha$ -affaibli plan d'ordre  $n$  est le demi-quadrillage d'ordre  $n$  et sa cardinalité est  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ .

#### Preuve :

Puisque l'extension doit porter sur une sous-chaîne maximale du treillis initial, celle-ci est de cardinalité maximale quand il s'agit d'une chaîne maximale joignant le minimum au maximum du treillis initial, chaîne de bordure, qui plus est. De cette façon, on obtient le demi-quadrillage.

### n-DROITE - DEFINITION

Ensemble de  $n$  droites tracées dans un plan muni d'une verticale  $\vec{V}$  parallèle à aucune de ces droites. Celles-ci partagent le plan en régions au sens habituel. Pour une droite  $D_i$  donnée, on peut dire si l'on est "en-dessus" ou "en-dessous" de celle-ci.

### RELATION D'ORDRE ENTRE REGIONS

Soit  $D_1, D_2, \dots, D_n$  les droites. La droite  $D_i$  partage le plan en 2 parties : la partie supérieure et la partie inférieure. A cette droite  $D_i$ , attachons la variable booléenne simple  $B_i$  qui vaudra 1 dans la partie supérieure et 0 dans la partie inférieure.

A une région  $R_j$ , on attache la valeur  $B(R_j)$  prise dans cette région par la variable booléenne à  $n$  composante  $(B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n)$ .

On attache alors à l'ensemble des régions, la relation :

$$R_i \geq R_j \iff B(R_i) \geq B(R_j).$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre :

1) - Antisymétrie :  $R_i = R_j \Rightarrow B(R_i) = B(R_j)$  par définition de  $B(R_i)$   
et inversement  $B(R_i) = B(R_j) \Rightarrow R_i = R_j$ , puisque, à supposer que  $R_i$  et  $R_j$   
soient bien des régions (car à toute valeur de  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ne correspond  
pas forcément une région), connaissant  $B(R_i)$  on détermine  $R_i$  sans ambiguïté.

2) - Transitivité : il faut montrer :

$$\left. \begin{array}{l} B(R_i) \geq B(R_j) \\ B(R_j) \geq B(R_k) \end{array} \right\} \Rightarrow B(R_i) \geq B(R_k)$$

Or,  $B(R_i) \geq B(R_j)$  : cela veut dire que, partant de la région  $R_i$ , il faut  
pour arriver en  $R_j$  passer en dessous d'un certain nombre de droites (tout  
en conservant la même position vis à vis des autres), puis  $B(R_j) \geq B(R_k)$   
indique que pour atteindre  $R_k$  il faut encore passer en dessous d'autres  
droites (alors qu'on ne repasse au-dessus d'aucune autre), donc  $R_i \geq R_k$ .

3) - Idempotence : pour  $R_i$  donnée  $B(R_i) \geq B(R_i)$  et on écrira  $R_i \geq R_i$ .  
Enfin notons que :

$$B(R_i) \succ B(R_j) \Leftrightarrow R_i \succ R_j.$$

En effet, on passe d'une région à celle qui la couvre immédiatement en  
franchissant (passer au dessus d') une seule droite donc :

$$R_i \succ R_j \Rightarrow B(R_i) \succ B(R_j).$$

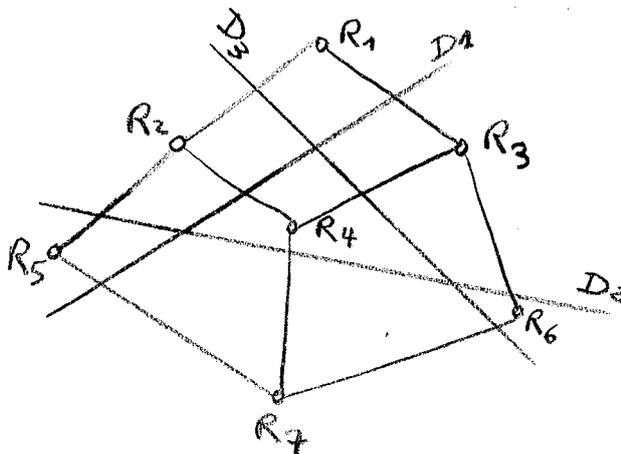
Inversement, soit  $B(R_i) \not\subset B(R_j)$  et en supposant que  $R_i$  et  $R_j$  sont des régions. Soit  $B_k$  valant 1 dans  $B(R_i)$  et 0 dans  $B(R_j)$ . Cela veut dire que  $R_i$  et  $R_j$  sont indissociables si l'on fait abstraction de  $D_k$  et forment donc alors la même région, région qui est partagée en deux lorsqu'on rajoute la droite  $D_k$ , d'où  $R_i \not\subset R_j$ .

### DUAL $E^*$ D'UN n-DROITE E

Nous définissons le dual  $E^*$  d'un n-droite E comme le graphe obtenu comme suit : dans chaque région  $R_i$ , prenons un point (du même nom pour simplifier). Joignons les points  $R_i$  et  $R_j$  si et seulement si les régions  $R_i$  et  $R_j$  ont un segment de droite (non nul) commun.

Nous employons ce terme de dual car c'est le terme usité en théorie des graphes. Il ne semble pas y avoir d'ambiguïté avec la notion de dualité que nous avons utilisé pour les ensembles ordonnés.

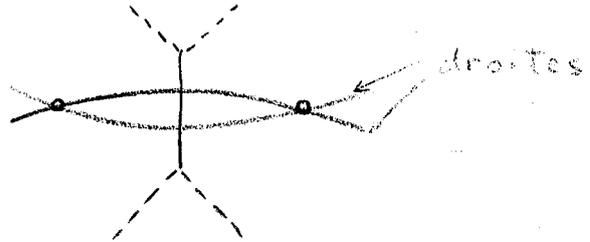
Exemple :



$E^*$  est plan. A chaque point d'intersection de droites correspond, dans  $E^*$ , un polygone dont le nombre des côtés est pair puisqu'un côté étant traversé par une et une seule droite, il faut compter 2 côtés par droites traversant le polygone où, d'ailleurs, ces deux côtés sont opposés.

Considérons deux polygones, du dual, ayant un côté commun : ils ne peuvent avoir que ce côté en commun, sinon, il y aurait deux droites distinctes se coupant en deux points distincts.

D'où finalement :



### PROPRIETE DU DUAL D'UN n-DROITE

Un polygone du dual d'un  $n$ -droite, possède un nombre pair de côtés et, deux polygones ont au plus un côté commun.

### ENSEMBLE ORDONNE DES REGIONS D'UN n-DROITE

La relation d'ordre entre régions est telle que les éléments couvrant directement, ou couverts directement par une région  $R_i$  sont les régions adjacentes à  $R_i$ . Par suite, à l'orientation près, le diagramme de l'ensemble ordonné des régions d'un  $n$ -droite  $E$  est le dual  $E^*$  de  $E$ .

Par ailleurs, l'ensemble ordonné des régions possède un maximum et un minimum : les deux régions contenant le point à l'infini dans la direction  $\vec{V}$  et  $-\vec{V}$ . De plus, le graphe de cet ensemble est plan, d'où :

### THEOREME

*Les régions d'un  $n$ -droite forment un treillis plan dont le diagramme, à l'orientation près, est invariant avec la verticale dont est muni le  $n$ -droite. Le diagramme est le dual du  $n$ -droite.*

### PROPRIETE DU TREILLIS

On passe d'une région à celle qui la couvre immédiatement en franchissant une et une seule droite. Par suite, les variables binaires correspondantes diffèrent par une et une seule composante, qui vaut 1 pour la région couvrante ; le treillis possède donc la propriété de JORDAN-DEDEKIND et sa longueur est  $n$ .

### NOMBRE MAXIMUM D'ELEMENTS DU TREILLIS

C'est le nombre maximum de région entre lesquelles un plan peut être divisé par  $n$  droites. Le nombre est  $\left[ \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right]$  (J. STEINER, Crelle's Journal, Vol. I). Dans ce cas, il n'existe pas de droite parallèle. Tous les éléments  $\cup$ -irréductibles sont atomiques. Le treillis est alors le demi-quadrillage (voir Chap. VII) et le nombre de ses éléments est  $\left( \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right)$ .

### CODAGE BOOLEEN DU TREILLIS-FONCTION ASSOCIEE

D'après ce que nous avons dit sur la caractérisation des régions par des variables booléennes, l'ensemble ordonné des régions d'un  $n$ -droite peut être plongé de manière unique sur le  $n$ -cube (à un isomorphisme près). A deux régions  $R_i \} R_j$  correspondent deux monômes  $m_i \} m_j$  du  $n$ -cube. Soit  $F$  la fonction somme de ces monômes : une telle fonction est connexe et appartient à la famille  $\alpha\beta$ . Remarquons bien qu'en général, ce codage n'est pas canonique et la fonction dont il est question ici n'est pas celle évoquée au chapitre sur le codage booléen des treillis. Cela provient de ce qu'un treillis de  $n$ -droite a en général plus de  $n$   $\cup$ -irréductibles.



## CHAPITRE - VI

### RELATIONS BINAIRES - RECURRENCES

Après quelques rappels, nous définissons puis nous étudions la relation  $(t+1)$ -aire associée à une algèbre abstraite  $t$ -aire, puis, les algèbres unaires associées à une même relation binaire. Ensuite, nous développons la notion d'homomorphisme pour une relation.

#### ALGÈBRE ABSTRAITE - RAPPELS

##### Définition

Rappelons qu'une algèbre abstraite  $A$  consiste en la donnée :

- d'un ensemble  $E := \{\dots x_i \dots\}$  d'éléments
- d'un ensemble  $F := \{\dots f_\alpha \dots\}$  d'opérations définies sur  $E$

et on note  $A = \langle E, F \rangle$  ou  $\langle \{x_i\}, \{f_\alpha\} \rangle$ .

Chaque opération  $f_\alpha$  porte sur un nombre  $n_\alpha$  (ou  $n_{f_\alpha}$ ) fini d'éléments de  $E$ . L'ensemble  $F$  n'est pas forcément fini. Cependant, nous nous intéresserons en fait seulement au cas où  $F$  est fini.

#### Algèbre abstraite $t$ -aire

On appelle ainsi le cas particulier où, pour tout  $\alpha$ ,  $n_\alpha = t = \text{constant}$ . Par la suite, nous examinerons plus précisément le cas d'un ensemble fini  $\{x_i\}$  et  $t=1$ . Une algèbre abstraite unaire sera alors la donnée d'une famille finie de récurrences sur un ensemble fini, ou d'applications de cet ensemble dans lui-même.

### HOMOMORPHISMES ET RELATION DE CONGRUENCE - RAPPELS

Soient deux algèbres abstraites :

$$A = \langle \{x_i\}, \{f_\alpha\} \rangle$$

$$B = \langle \{y_j\}, \{g_\beta\} \rangle$$

Le couple d'application  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$\{x_i\} \xrightarrow{\varphi} \{y_j\} \quad \{f_\alpha\} \xrightarrow{\psi} \{g_\beta\}$$

sera dit un homomorphisme, et B sera dite homomorphe de A si :

1)  $\psi$  est une bijection de  $\{f_\alpha\}$  sur  $\{g_\beta\}$

$$2) g_\mu = \psi(f_\lambda) \Rightarrow \begin{cases} n(g_\mu) = n(f_\lambda) \\ (f_\lambda(x_1 x_2 \dots x_{n_\lambda})) = g_\mu(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_{n_\lambda})) \end{cases}$$

l'équivalence d'homomorphisme correspondante sur A:

$$x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

est une relation de congruence. Inversement, étant donné une relation de congruence  $\theta$  sur les éléments d'une algèbre  $A = \langle \{x_i\}, f_1, f_2, \dots \rangle$ , l'algèbre

$$B := \langle \{x_i\}/\theta, f'_1, f'_2, \dots \rangle, \text{ où } f'_1, f'_2, \dots$$

sont les opérations induites entre classes d'équivalence, est homomorphe à A.

Nous venons de rappeler brièvement que les notions de congruence et d'homomorphisme sur une algèbre pouvaient être considérées comme les deux aspects d'un même concept ; nous voudrions maintenant montrer les liens entre une algèbre  $t$ -aire et des relations  $(t+1)$ -aires sur cette algèbre.

RELATION  $(t+1)$ -AIRE CANONIQUE SUR UNE ALGÈBRE ABSTRAITE  $t$ -AIRE - DEFINITION

Soit  $A := \langle \{x_i\}, f_1, f_2, \dots, f_p \rangle$  une algèbre  $t$ -aire. Chaque  $f_j$  peut être interprétée comme une relation  $(t+1)$ -aire, interne,  $R_j$  :

$$R_j(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+t+1}) \Leftrightarrow x_{i+t+1} = f_j(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+t})$$

Puisque  $f_j(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+t})$  est toujours défini, nous pouvons dire que  $R_j$  est itérable, en définissant l'itérabilité :  $R_j$  est itérable si pour tout  $\{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+t}\}$  tel que  $R_j(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+t+1})$ , il existe  $x_{i+t+2}$  tel que  $R_j(x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_{i+t+1}, x_{i+t+2})$ .

Considérons alors la somme, au sens des relations,  $R_1 + R_2 + \dots + R_p$ . C'est une relation  $(t+1)$ -aire,  $R$ , itérable.  $R$  sera dite relation  $(t+1)$ -aire canonique sur les éléments de l'algèbre  $t$ -aire donnée.

Inversement, étant donnée une relation  $(t+1)$ -aire, itérable, définie sur un ensemble  $\{x_i\}$  on peut essayer de chercher une algèbre  $t$ -aire définie sur cet ensemble et dont la relation donnée soit la relation canonique.

Après avoir précisé ce que nous entendons par récurrence, nous étudierons le cas d'une relation binaire.

RECURRENCE - DEFINITION

Précisons que nous entendons par récurrence, une relation de la forme :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

et,  $x_{n+1}$ , "successeur" de  $x_n$ , existe toujours. Les  $x_i$  sont supposés en nombre fini. On notera :

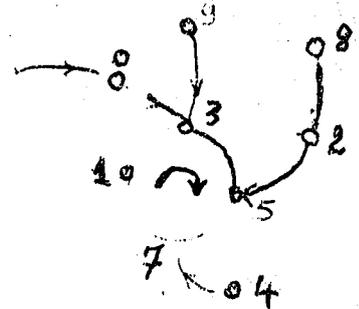
$$\hat{f}(x) = x \cup f(x) \cup f^2(x) \cup f^3(x) \cup \dots$$

Figurons les  $x_i$  par des points et traduisons  $x_{n+1} = f(x_n)$  par un arc orienté menant de  $x_n$  à  $x_{n+1}$ .

Si l'on se donne une valeur initiale  $x_0$ , on a un chemin  $x_0 x_1 \dots x_{j-1}$ , puis un cycle  $x_j \dots x_{n-1}$  et  $f(x_{n-1}) = x_j$ . Si tous les  $x_i$  n'ont pas été utilisés, on reprend le même procédé à partir d'un  $x'_0$  non encore utilisé. Le graphe d'une récurrence comporte un ou plusieurs cycles sur lesquels aboutissent des arborescences.

Par exemple :

- 1)  $\{x_i\}$  = les chiffres décimaux
- 2)  $x_{n+1} = x_n + 3$  modulo 9 si  $x_n$  est pair
- 3)  $x_{n+1} = x_n + 2$  modulo 9 si  $x_n$  est impair.



Sous-récurrence d'une récurrence

Soit R une récurrence définie sur E.  $R_1$  restriction de R à  $E_1 \subseteq E$  sera dite une sous-récurrence de R si et seulement si :

$$\forall x, x \in E_1 \Rightarrow f(x) \in E_1$$

(et il s'ensuit que  $\hat{f}(x) \in E_1$ )

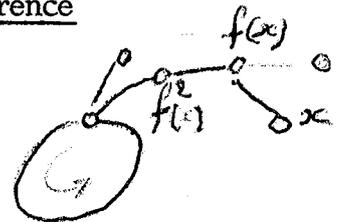
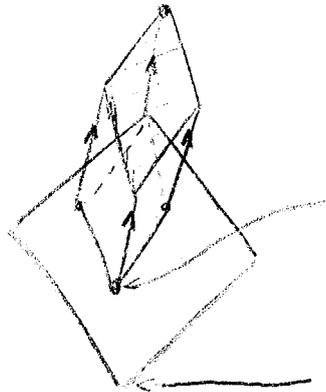
L'union et l'intersection de deux sous-réurrences, au sens des sous-ensembles correspondants, est encore une sous-réurrence et par suite, celles-ci forment un treillis, sous-treillis de  $P(E)$ , donc distributif.

Remarque sur le treillis des sous-réurrences d'une récurrence

Ce treillis est distributif et par suite obtainable par extensions successives.

On peut regarder à quoi correspond une extension.

Cette extension est assez naturelle lorsqu'on rajoute un élément,  $x$ , en position de famille. Le treillis est modifié de la façon



suivante : il subit une extension dont le support est constitué des récurrences contenant  $f(x)$ . Si l'élément rajouté est inséré dans un cycle, il n'y a pas de modification du treillis. Si l'élément  $x$  constitue un cycle à lui tout seul, c'est tout le treillis qui est support de l'extension : il est doublé.

ALGÈBRE(S) UNAIRE(S) ASSOCIÉE(S) À UNE RELATION BINAIRE R, ITERABLE, DÉFINIE SUR UN ENSEMBLE  $\{x_i\}$ .

Définissons d'abord une :

Récurrence compatible avec R :

C'est une récurrence  $x_{j+1} = f(x_j)$  (mais  $x_{j+1}$  et  $x_j$  ne sont pas forcément différents), telle que :

- 1)  $x_{j+1} = f(x_j)$  seulement si  $R(x_j, x_{j+1})$
- 2)  $\forall x_j, f(x_j) = x_{j+1}$  existe et est unique.

THEOREME

Toute relation binaire itérable  $R$  sur un ensemble  $\{x_i\}$  fini est somme de récurrences compatibles avec  $R$  et définies sur cet ensemble.

Preuve : Choisissons un élément de  $\{x_i\}$  et numérotons le 1. Puis un second élément, numéroté 2, tel que  $R(1,2)$  et écrivons  $2 = f(1)$ , puis un troisième élément, 3, tel que  $R(2,3)$  et écrivons  $3 = f(2)$ , etc... A un certain moment, après avoir employé  $p$  éléments, on retombe sur un élément déjà employé. Soit  $(p+1)$  un élément non encore utilisé. On recommence le même processus à partir de  $(p+1)$ . A un moment, on aura employé tous les éléments de  $\{x_i\}$ . La relation  $f$  est une récurrence sur  $\{x_i\}$ . Il est ainsi toujours possible d'extraire une récurrence compatible avec une relation binaire donnée. En répétant le procédé de plusieurs façons différentes, on obtient autant de récurrences différentes (dont finalement  $R$  sera la somme), et, étant donné  $\{x,y\}$  tel que  $R(x,y)$ , il est possible de former une récurrence  $f$  dans laquelle  $x$  sera numéroté  $q$  et  $y$  numéroté  $(q+1)$ . Donc toute "liaison"  $R(x,y)$  est exprimable dans une récurrence au moins.

Exemple : soit  $R$  donnée par le tableau suivant :

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$x_j, R(x_i, x_j)$	2	2	1	1	0	2
	3	5	4	4	3	4

Alors, par exemple,  $R = f_1 + f_2$  avec :

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$f_1(x_i)$	3	5	4	1	0	2
$f_2(x_i)$	2	2	1	4	3	4

### Remarques

- 1 - Si R est une récurrence, on retrouve comme seule récurrence compatible la récurrence elle-même.
- 2 - Si R n'est pas une récurrence, la "décomposition" n'est pas unique.
- 3 - Le nombre minimum de récurrences d'une décomposition est égal au nombre maximum de successeurs d'un éléments dans R.

### Algèbre unaire associée à R

Soit  $R = f_1 + f_2 + \dots + f_p$  définie sur  $\{x_i\}$ , l'algèbre unaire  $\langle \{x_i\}, f_1, f_2, \dots, f_p \rangle$  sera dite "associée" à R.

### Minimisation d'une algèbre abstraite unaire

Soit  $\langle \{x_i\}, f_1, f_2, \dots, f_p \rangle$  une algèbre abstraite unaire et  $R = f_1 + f_2 + \dots + f_p$  la relation binaire canonique associée. S'il existe :

$$\{f_{\alpha+1}, f_{\alpha+2}, \dots, f_{\alpha+j}\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$$

telle que  $f_{\alpha+1} + f_{\alpha+2} + \dots + f_{\alpha+j} = R$ , alors, on appellera minimisation de l'algèbre donnée le passage de celle-ci à l'algèbre  $\langle \{x_i\}, f_{\alpha+1}, f_{\alpha+2}, \dots, f_{\alpha+j} \rangle$ . Sinon, l'algèbre donnée est dite minimale. Autrement dit, une algèbre unaire est minimale si aucune de ses opérations unaires (récurrences) n'est superflues.

### Relation d'équivalence entre algèbres unaires sur un même ensemble E.

$$\langle E, \{f_\alpha\} \rangle \equiv \langle E, \{g_\beta\} \rangle \Leftrightarrow \sum f_\alpha = \sum g_\beta$$

C'est-à-dire que les deux algèbres ont même relation binaire canonique associée.

THEOREME

Le quotient de l'ensemble des algèbres unaires, sur un même ensemble E, par la relation d'équivalence est un sup-demi-treillis, sous-demi-treillis du treillis de BOOLE de dimension  $|E|^{|E|}$ .

Preuve : L'ensemble quotient n'est autre que l'ensemble des relations binaires itérables sur E. La somme de deux telles relations appartient aussi à l'ensemble cherché. Les éléments minimaux de l'ensemble sont les récurrences dont le nombre est celui des applications de E dans lui-même,  $|E|^{|E|}$  donc, pour E fini.

HOMOMORPHISME DE RELATION

Définition

Considérons une relation :

$$R(A, \dots, E)$$

$$A \in U_A, \dots, E \in U_E$$

Nous nommerons homomorphe de  $p^{\text{ème}}$  catégorie de la relation , une relation :

$$R'(A', \dots, E')$$

$$A' \in U'_A, \dots, E' \in U'_E$$

avec les conditions suivantes :

1) Il existe une application de

$$U_A \text{ sur } U'_A \text{ que nous noterons } A \rightarrow A'$$

$$U_E \text{ sur } U'_E \text{ que nous noterons } E \rightarrow E'$$

2) Si deux univers  $U_F$  et  $U_G$  sont identiques, ils subissent la même application.

3)  $R(A, \dots, E) \Rightarrow R'(A', \dots, E')$

4) Si  $A, \dots, B$  sont  $p$  variables privilégiées :

$$\begin{aligned} & [R'(A', \dots, B'C', \dots, E'), A \rightarrow A', \dots, B \rightarrow B'] \Rightarrow \\ & \exists \{C, D, \dots, E\}, [R(A, \dots, B, C, D, \dots, E), C \rightarrow C', D \rightarrow D', \dots, E \rightarrow E'] \end{aligned}$$

La correspondance entre univers ainsi définie se nommera homomorphisme de  $p^{\text{ième}}$  catégorie.

### Homomorphisme et division en classes disjointes

L'application  $A \rightarrow A'$  définit une division en classes disjointes dans  $U_A$ .  
Cherchons à quelles conditions des divisions en classes disjointes dans  $U_A, \dots, U_E$  définissent un homomorphisme.

Nous désignerons les ensembles de classes ainsi définies par  $U'_A, \dots, U'_E$ .

Si  $A, \dots, B$  sont les variables privilégiées, on doit avoir :

$$\begin{aligned} & [A_1 \equiv A_2, \dots, B_1 \equiv B_2 ; R(A_1, \dots, B_1, C_1, \dots, E_1)] \Rightarrow \\ & [\exists C_2 \equiv C_1, \dots, E_2 \equiv E_1 \quad R(A_2, \dots, B_2, C_2, \dots, E_2)] \end{aligned}$$

### Succession d'homomorphismes de même catégorie

Considérons, pour une relation

$$R(A, B, \dots, E)$$

un homomorphisme de  $p^{\text{ième}}$  catégorie donnant la relation :

$$R_1(A_1, B_1, \dots, E_1)$$

et pour cette nouvelle relation un homomorphisme  $H_{12}$  de  $p^{\text{ième}}$  catégorie (par rapport aux mêmes variables) donnant :

$$R_2(A_2, B_2, \dots, E_2)$$

La correspondante  $A \rightarrow A_2, \dots, E \rightarrow E_2$  est, comme on le voit aisément, un homomorphisme de  $p^{\text{ième}}$  catégorie que nous noterons  $H = H_1 \circ H_{12}$ .

Réciproquement, considérons pour une relation

$$R(A, B, \dots, E)$$

deux homomorphismes  $H_1$  et  $H_2$ , de  $p^{\text{ième}}$  catégorie par rapport aux mêmes variables, et tels que, pour tout élément, sa classe suivant  $H_2$  contienne sa classe suivant  $H_1$ . On écrira ceci  $H_2 > H_1$  et on dira que  $H_1$  est plus fin que  $H_2$ . Soit

$$R_1(A_1, \dots, E_1)$$

$$R_2(A_2, \dots, E_2)$$

les relations obtenues. Nous allons voir qu'on peut trouver un homomorphisme de  $R_1$  qui redonne  $R_2$ .

Considérons pour cela les classes de  $H_1$  qui sont contenues dans une même classe de  $H_2$ . Ceci définit dans  $H_1$  une division en classes disjointes. Montrons qu'il s'agit d'un homomorphisme. En effet :

$$R_1(A_1, \dots, E_1) \Rightarrow \exists (A, \dots, E), R(A, \dots, E)$$

et

$$R(A, \dots, E) \Rightarrow R_2(A_2, \dots, E_2)$$

et de plus

$$[R_2(A_2, \dots, B_2, C_2, \dots, E_2), A \rightarrow A_2, \dots, B \rightarrow B_2] \Rightarrow$$

$$\exists (C, \dots, D, E), [R(A, \dots, E), C \rightarrow C_2, \dots, E \rightarrow E_2]$$

on pourra choisir  $A, \dots, B$  tels que  $A \rightarrow A_1, \dots, B \rightarrow B_1$  par  $H_1$  et  $R(A, \dots, E)$  entraîne alors  $R_1(A_1, \dots, B_1, C_1, \dots, E_1)$ , ce qui démontre la propriété.

### Réunion d'homomorphisme de p<sup>i</sup>ème catégorie

Considérons les homomorphismes  $H_1$  et  $H_2$ , de même catégorie  $p$  par rapport aux mêmes variables, d'une relation  $R(A, \dots, E)$ .

On nommera réunion de  $H_1$  et  $H_2$ , noté  $H_1 \cup H_2$ , l'homomorphisme défini par la division en classes disjointes réunion des deux précédentes.

La classe d'un élément  $X$  s'obtient en formant la chaîne :

$$X = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = X'$$

telle que :  $P_i$  et  $P_{i+1}$  sont dans une même classe modulo  $H_1$   
 $P_{i+1}$  et  $P_{i+2}$  sont dans une même classe modulo  $H_2$

Montrons qu'il s'agit d'un homomorphisme.

Il suffit pour cela de vérifier :

$$[A \equiv A' \dots B \equiv B', R(A, \dots, B, C, \dots, E)] \Rightarrow$$

$$\exists (C', \dots, E', R(A' \dots B', C' \dots E')),$$

or ceci est vrai à chaque pas des chaînes parcourues par  $A \dots$  et  $B \dots$  pour arriver respectivement, à  $A', \dots, B'$ .

Intersection au sens des partitions, de deux homomorphismes de même catégorie

Cette intersection n'est pas forcément un homomorphisme (nous en verrons un exemple dans le cadre des homomorphismes d'une relation binaire) ; en effet :

$$[X \equiv Y, R(X,Z), R(Y,T)] \not\Rightarrow Z \equiv T$$

TREILLIS DES HOMOMORPHISMES DE P<sup>ème</sup> CATEGORIE D'UNE RELATION

Relation d'ordre entre homomorphismes

C'est la relation d'ordre au sens des partitions correspondantes. Comme l'union, au sens des partitions, de deux partitions d'homomorphisme est encore un homomorphisme, c'est aussi leur borne supérieure. Ainsi, l'ensemble de ces partitions est un demi-treillis supérieur. Mais cet ensemble possède un minimum : la partition en autant de classe qu'il y a d'éléments, partition qui correspond à l'isomorphisme. D'où la structure de treillis :

THEOREME

*Pour la relation d'ordre ci-dessus, les homomorphismes de même catégorie p, relatifs aux mêmes variables, forment un treillis où la borne supérieure est donnée par la réunion au sens des partitions correspondantes.*

Remarque sur la borne inférieure

Elle n'est pas forcément donnée par l'intersection des partitions, comme le confirme l'exemple suivant :

Soit la relation binaire R sur {1,2,3,4,5,6} :

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$x_j, R(x_i, x_j)$	3,5	4,6	1	2	1	2

Il y a deux homomorphismes de 1<sup>ère</sup> catégorie :

$$H_1 = \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\} \text{ et } H_2 = \{1,2\}, \{3,6\}, \{4,5\}$$

or l'intersection au sens des partitions :

$$\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

n'est pas un homomorphisme et la borne inférieure de  $H_1$  et  $H_2$  est en fait l'isomorphisme.

### CLASSES D'EQUIVALENCE D'HOMOMORPHISME POUR UNE RECURRENCE

Considérons une récurrence  $X_{n+1} = f(X_n)$  comme une relation binaire  $R(X_n, X_{n+1})$  et intéressons nous aux homomorphismes de 1<sup>ère</sup> catégorie, de variable privilégiée  $X_n$ . L'équivalence d'homomorphisme est telle que :

$$[R(X_n, X_{n+1}), X_n \equiv Y_n] \Rightarrow \exists Y_{n+1} \equiv X_{n+1}, R(Y_n, Y_{n+1})$$

Or, pour tout  $Y_n$ ,  $Y_{n+1} = f(Y_n)$  est unique et, par suite,  $X_n \equiv Y_n \Rightarrow f(X_n) = f(Y_n)$ . Un homomorphisme est donc un homomorphisme d'algèbre ( $f$  étant considéré comme une opération) et l'équivalence d'homomorphisme est une congruence d'où :

### THEOREME

*Dans le treillis des homomorphismes d'une récurrence, la borne inférieure est donnée par l'intersection au sens des partitions.*

Nous étudierons assez à fond ce treillis et, comme les démonstrations se feront surtout sur les partitions, nous parlerons plutôt de congruences que d'homomorphismes.

Lemma

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait, dans l'ensemble E sur lequel porte une récurrence f, une congruence admettant A pour classe,  $A \subseteq E$ , est que A satisfasse à la condition :

$$(R) \forall p > q \Rightarrow f^q(A) \supseteq f^p(A) \text{ ou } f^q(A) \cap f^p(A) = \emptyset$$

Preuve :

La condition est nécessaire :

Supposons

$$f^q(A) \cap f^p(A) \neq \emptyset$$

$$\exists x \in f^q(A) \cap f^p(A) \Rightarrow \exists y, x = f^{p-q}(y)$$

$$\forall z \in f^q(A) : z \equiv y \Rightarrow f^{p-q}(z) \equiv f^{p-q}(y) \Rightarrow$$

$$f^{p-q}(z) \equiv x \Rightarrow f^{p-q}(z) \in f^q(A)$$

et finalement :

$$(\forall z, z \in f^q(A) \Rightarrow f^{p-q}(z) \in f^q(A)) \Rightarrow f^q(A) \supseteq f^p(A)$$

La condition est suffisante. En effet, définissons la relation d'équivalence  $R_A$  suivante :

$$x \equiv y (R_A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) x = y \text{ ou} \\ 2) \{x, y\} \subseteq A \text{ ou } f(A) \text{ ou } f^2(A) \text{ ou } \dots \end{cases}$$

Les classes ainsi définies sont disjointes (d'après l'hypothèse (R)) et définissent une congruence et c'est la plus petite admettant A pour classe.

Remarque

Considérons la classe A précédente. Définissons la relation d'équivalence  $P_A$  suivante :

1) A est classe d'équivalence

2) Pour  $\{x,y\} \subseteq E$ ,  $\{x,y\} \cap A = \emptyset$

et

$$\hat{f}(x) \cap \hat{f}(y) \cap A \neq \emptyset$$

alors

$$x \equiv y \Leftrightarrow \exists p, \{f^p(x), f^p(y)\} \subseteq A$$

tandis que

$$f^{p-1}(x) \notin A \text{ et } f^{p-1}(y) \notin A$$

3)  $\{x_i \mid \hat{f}(x_i) \cap A = \emptyset\}$  est une classe d'équivalence.

Alors,  $P_A$  est une congruence et c'est même la moins fine des congruences admettant A pour classe, et par suite :

THEOREME

Lorsque  $A \subseteq E$ , satisfait la condition (R), les congruences admettant A pour classe sont celles du segment  $[R_A, P_A]$ , dans le treillis des congruences sur  $\langle E, f \rangle$ .

CONSEQUENCE D'UN HOMOMORPHISME DE RELATION BINAIRE (ITERABLE) SUR LES ALGEBRES UNAIRES ASSOCIEES [4]

Une partition d'homomorphisme, pour une algèbre unaire associée à une relation binaire itérable R, est aussi une partition d'homomorphisme pour la relation elle-même.

En effet, soit  $A = \langle E ; f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$  une algèbre unaire associée à  $R$  :  
 $R = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ .

Une partition d'homomorphisme pour  $A$  est telle que :

$$x \equiv y \Rightarrow f_i(x) \equiv f_i(y), \forall i \in [1, k]$$

Soit

$$u, R(x, u) \Rightarrow \exists j, j \in [1, k], u = f_j(x)$$

Montrons que

$$[x \equiv y, R(x, u)] \Rightarrow \exists v = u, R(y, v)$$

ce qui montrera que la partition est aussi partition d'homomorphisme pour  $R$  :

$$u = f_j(x) \Rightarrow f_j(x) \equiv f_j(y) \text{ et } R(y, f_j(y))$$

donc, pour  $v$ , il suffit de prendre  $f_j(y)$  (qui existe bien).

Inversement, une partition d'homomorphisme pour  $R$  étant donnée, il est possible de trouver une algèbre unaire associée pour laquelle la partition soit aussi partition d'homomorphisme : il suffit de construire des récurrences qui respectent les classes d'homomorphisme, selon le procédé suivant :

1)  $\forall x, \exists u, R(x, u)$

écrivons  $u = f(x)$

2)  $\forall y \equiv x [R(x, u), x \equiv y] \Rightarrow [\exists v, R(y, v), v \equiv u]$

écrivons  $v = f(y)$  (si  $x = y$ , on prendra  $u = v$ )

par suite, pour  $f : x \equiv y \Rightarrow f(x) \equiv f(y)$  par instruction.

On détermine par ce procédé, autant de récurrences qu'il est nécessaire pour couvrir  $R$ .

Intersection de deux homomorphismes  $H_1$  et  $H_2$

Si ces deux homomorphismes sont relatifs à la même algèbre associée, alors leur intersection au sens des partitions est aussi un homomorphisme pour la relation binaire. Inversement, si la borne inférieure de deux homomorphismes d'une relation binaire itérable  $R$  est donnée par l'intersection au sens des partitions, alors, ces deux homomorphismes sont définissables sur la même algèbre unaire associée. Pour le montrer, il suffit de montrer qu'on peut justement construire cette algèbre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]     Garett BIRKHOFF     *Lattice theory*  
                              *Am. Math. Soc. New York 1948.*
  
- [2]     Gabor SZASZ         *Introduction to lattice theory*  
                              *Academic Press, New-York and London 1963*
  
- [3]     Garett BIRKHOFF     *On the structure of abstract algebras*  
                              *Proc. Camb. Phil. Soc. 31 (1935) pp. 433-454.*
  
- [4]     Guy BOULAYE         *Homomorphisme de récurrence (Application à la*  
                              *minimisation des tableaux d'états).*  
                              *AUTOMATISME Tome XII Vol. 3 1969 . pp. 106-109*

## CHAPITRE - VII

### TREILLIS ATTACHES A DES RECURRENCES

Nous précisons ici le treillis des congruences sur une récurrence, ou une famille de récurrences définies sur le même ensemble.

#### Relation de pré-ordre entre éléments d'une récurrence

$$x \geq y \Leftrightarrow \exists n, \text{ entier } > 0, \quad y = f^n(x)$$

#### Récurrence cyclique - définition

Nous appelons récurrence cyclique une récurrence  $f$  telle que tout élément appartient à un cycle. C'est dire que :

$$\forall x \quad |f(x)| = |f^{-1}(x)| = 1$$

une récurrence cyclique connexe est réduite à un seul cycle.

#### Congruences pour une récurrence cyclique

Notons  $0, 1, 2, \dots$  et  $n-1$  les éléments successifs du cycle. Le treillis des congruences sur le cycle est isomorphe au treillis des congruences arithmétiques sur  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Dans ce dernier treillis, la relation d'ordre est définie :

$$a \geq b \Leftrightarrow a \text{ divise exactement } b.$$

Ce treillis est distributif, son maximum est  $1$ , son minimum  $n$ .

CONGRUENCE STRICTE POUR UNE RECURRENCE - DEFINITION

Une congruence  $\theta$  sera dite stricte si et seulement si :

$$x \equiv y(\theta) \Rightarrow \left[ (x \neq y) \Rightarrow \begin{cases} 1) \exists t, t \geq 1, & f^t(x) = f^t(y) = z \\ \text{et} \\ 2) x \text{ et } y \text{ ne sont pas \u00e9l\u00e9ment de cycle.} \end{cases} \right]$$

Ainsi, une classe plurale rassemble des \u00e9l\u00e9ments :

- 1) d'une m\u00eame arborescence
- 2) de m\u00eame rang par rapport \u00e0 la racine de l'arborescence.

On peut aussi dire que l'on d\u00e9finit une congruence stricte de la mani\u00e8re suivante : sur les \u00e9l\u00e9ments \u00e0 la distance maximale  $p$  de la racine d'une arborescence, on d\u00e9termine une partition ayant les classes  $A, B, C, \dots$ . Puis sur les \u00e9l\u00e9ments \u00e0 distance  $(p-1)$ , on d\u00e9termine une partition sup\u00e9rieure \u00e0 la partition  $f(A), f(B), \dots$ . Ainsi de suite, et cela pour chaque arborescence.

THEOREME :

*Les congruences strictes sur une r\u00e9currence forment un treillis.  $\wedge$ -semi-modulaire.*

Preuve :

Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux congruences strictes.  $C_1 \wedge C_2$  et  $C_1 \cup C_2$  sont des congruences ; montrons qu'elles sont strictes.

Soit  $x \equiv y (C_1 \wedge C_2)$ ,  $x \neq y$ . Que l'on consid\u00e8re  $C_1$  ou  $C_2$ ,  $x$  et  $y$  font donc partie d'une m\u00eame arborescence et ont m\u00eame rang par rapport \u00e0 la racine de cette arborescence. Donc  $C_1 \wedge C_2$  est stricte.

Soit  $x \equiv y (C_1 \cup C_2)$ ,  $x \neq y \Rightarrow$

$$\exists x = z_1, z_2, \dots, z_i \dots z_p = y$$

$$z_i \equiv z_{i+1} (C_1 \text{ ou } C_2) \Rightarrow$$

$x, z_2, \dots, z_{p-1}, y$  sont tous éléments d'une même arborescence et ont même rang par rapport à la racine, donc  $C_1 \cup C_2$  est également stricte.

Donc les congruences strictes forment un sous-treillis du treillis des partitions sur l'ensemble sur lequel est définie la récurrence.

S'il y a plusieurs arborescences, les congruences strictes forment un treillis qui est le produit cartésien des treillis relatifs chacun à une arborescence.

Montrons maintenant que le treillis des congruences strictes sur une arborescence satisfait la condition de chaîne de JORDAN-DEDEKIND.

Appelons "poids" d'une classe  $C_i$  d'une congruence la quantité :

$$p(C_i) = |C_i| - 1.$$

Et, appelons "poids" d'une congruence  $H$ , la somme  $p(H)$  des poids des classes qu'elle détermine. La congruence minimale, où chaque élément forme à lui seul une classe, a ainsi le poids nul.

Si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux congruences strictes sur une même arborescence, montrons que :

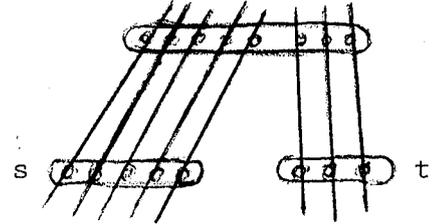
$$H_2 \succ H_1 \Rightarrow p(H_2) = p(H_1) + 1$$

Toute classe de  $H_1$  est contenue dans une classe de  $H_2$  et, pour passer de  $H_1$  à  $H_2$ , on réunit 2 et seulement 2 classes de  $H_1$  en une seule.

Soit  $s$  et  $t$  les cardinalités de ces classes.

Dans  $p(H_1)$  la contribution de ces classes est :

$$(s-1)+(t-1) = s+t-2.$$



Dans  $p(H_2)$ , les mêmes éléments contribuent pour le poids  $s+t-1$ . La contribution des autres éléments est la même dans  $p(H_1)$  et  $p(H_2)$  et donc :

$$p(H_2) = p(H_1)+1.$$

Toute chaîne d'extrémités  $G$  et  $H$ ,  $G \geq H$ , a pour longueur  $p(G) - p(H)$ .

En particulier, si le rang maximum dans l'arborescence  $A$  est  $n$ , la longueur d'une chaîne maximale est  $|A|-n-1$ . (Alors que, dans le treillis des partitions sur  $A$ , cette longueur est  $|A|-1$ ).

Montrons maintenant que le treillis est  $\cap$ -semi-modulaire.

Soit donc  $H_1$  et  $H_2$ , deux congruences strictes telles que :

$$\begin{array}{c} H_2 \\ \supset H_1 \triangle H_2 \\ H_1 \end{array}$$

Ceci ne peut se produire que dans un seul cas :  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_1 \cap H_2$  ont les mêmes classes partout sauf sur les éléments, d'un certain rang, d'une même arborescence où  $H_1 \triangle H_2$  possède les classes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ , et éventuellement d'autres classes, telles que l'on passe à  $H_1$  en réunissant par exemple  $C_1$  et  $C_2$  et l'on passe à  $H_2$  en réunissant  $C_2$  et  $C_3$ .

Considérons le poids de  $H_1 \cap H_2$  :

$$p(H_1 \cap H_2) = K + (|C_1| - 1) + (|C_2| - 1) + (|C_3| - 1)$$

D'où :

$$p(H_1) = K + (|C_1| + |C_2| - 1) + (|C_3| - 1)$$

$$p(H_2) = K + (|C_1| - 1) + (|C_2| + |C_3| - 1)$$

et par suite :

$$p(H_1 \cup H_2) = K + (|C_1| + |C_2| + |C_3| - 1)$$

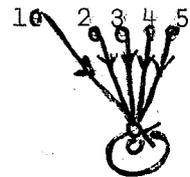
$$= p(H_1) + 1 = p(H_2) + 1$$

et donc :

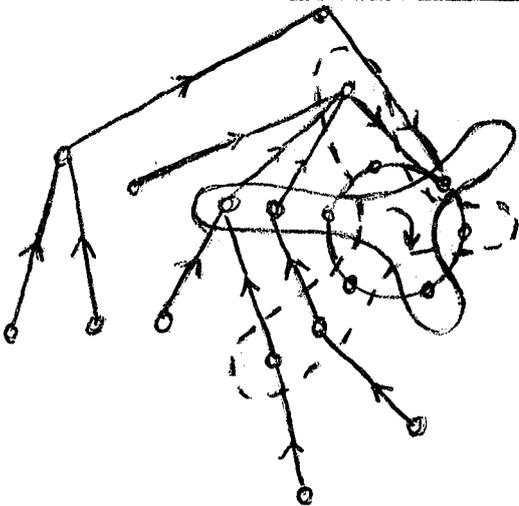
$$H_1 \cup H_2 \supset \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}$$

et le treillis est bien  $\cap$ -semi-modulaire (mais il n'est pas forcément modulaire, comme le montre l'exemple suivant :

Le treillis des congruences strictes sur la récurrence ci-contre est le treillis des partitions sur  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  qui n'est pas modulaire.



PROLONGEMENT DES CLASSES DU CYCLE SUR LES ARBORESCENCES Y ABOUTISSANT



Soit  $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$  des classes de congruences définies sur le cycle. On prolonge ces classes sur les arborescences aboutissant au cycle de la façon suivante : si  $X \in C_i$ , on met tout ou partie de  $f^{-1}(X)$  dans  $C_{i-1}$ . ( $f^{-1}(X)$  hors cycle). Ceci revient à replier plus ou moins les arborescences autour du cycle en respectant le sens d'itération.

CONGRUENCES REGULIERES SUR UNE RECURRENCE CONNEXE DE CYCLE  $\Gamma$ .

Nous désignons ainsi les congruences telles que :

$$\forall \{x, y\}, x \neq y, \quad x \equiv y \Rightarrow \exists z, z \in \Gamma, \quad z \equiv x \equiv y.$$

c'est-à-dire que, ou bien un élément est seul dans sa classe, ou bien il y a au moins un élément du cycle dans cette classe. Pour obtenir une congruence régulière :

-1 - on réalise des classes de congruences sur le cycle, soit

$$\{C_i\} = \{C_0, C_1, \dots, C_{p-1}\} \text{ ces classes.}$$

-2 - on prolonge plus ou moins ces classes sur les arborescences et :

$$\forall X \subseteq C_j \Rightarrow F(X) \in C_{j+1} \text{ (modulo } p)$$

Ceci revient à faire choix d'une sous-récurrance, la plus petite étant celle qui est réduite au cycle lui-même.

$$\text{-3 -} \quad \forall Y, Y \notin C_j \quad \forall j \in [0, p-1], \quad Y \equiv Z \Rightarrow Y = Z$$

c'est-à-dire que tout élément n'appartenant pas à la sous-récurrance précédente, constitue une classe à lui tout seul.

Par suite, une congruence régulière peut se noter  $(D_i, R_j)$  :

$D_i$  est un diviseur de la longueur du cycle

$R_j$  est une sous-récurrance, d'où :

THEOREME :

Les congruences régulières d'une récurrence connexe forment un treillis distributif isomorphe au produit cartésien de deux treillis :

- le treillis (distributif) des sous-multiples de la longueur du cycle (avec  $a \geq b \Leftrightarrow b$  divise  $a$ )
- le treillis (distributif) des sous-récurrences de la récurrence.

TREILLIS DES CONGRUENCES SUR UNE RECURRENCE CONNEXE

On obtient toute congruence de la manière suivante :

- 1 - on réalise une congruence régulière
- 2 - sur l'homomorphe obtenue, on réalise une congruence stricte (et, pour une même congruence régulière, les congruences strictes que l'on peut réaliser, ensuite, forment un treillis  $\wedge$ -semi-modulaire dont le minimum est la congruence régulière elle-même). En effet, ceci est une congruence des propriétés 1), 2), et 3), ci-dessous :

- 1) Si un élément  $x$  appartient à une classe définie sur le cycle  $\Gamma$ , tous ces descendants appartiennent à de telles classes :

$$x \equiv y, \quad y \in \Gamma \Rightarrow f(x) \equiv f(y) \text{ et } f(y) \in \Gamma$$

de même

$$f^2(x), f^3(x) \dots$$

- 2) Les classes contenant des éléments liés par la relation d'ordre sont celles définies sur le cycle (et donc prolongées plus ou moins sur les arborescences) :

Soit  $x \geq y$  ou  $y = f^t(x)$

$x \equiv y \Rightarrow f(x) \equiv f(y), \dots, f^t(x) \equiv f^t(y) \Rightarrow$

$x \equiv y \equiv f^t(y)$  etc...

$x \equiv f^t(x) \equiv f^{2t}(x) \equiv f^{3t}(x) \equiv \dots$

et par raison de finitude :  $\exists k, f^k(x) \in \Gamma$

En définitive :

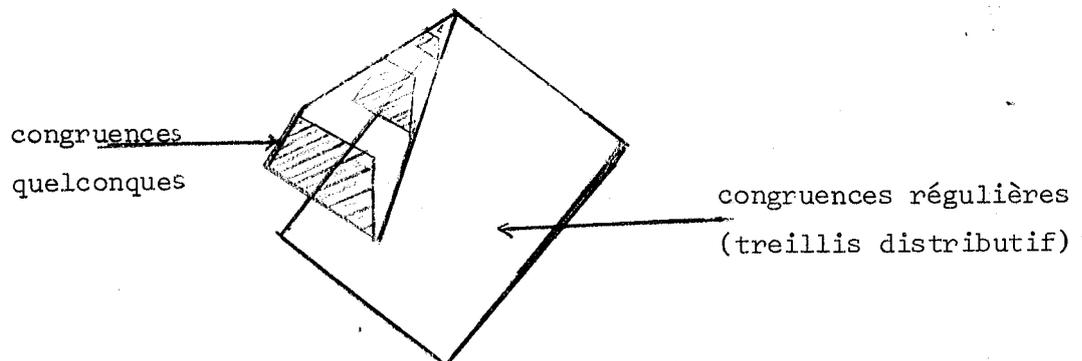
$$\left. \begin{array}{l} x \geq y \\ x \equiv y \end{array} \right\} \Rightarrow \exists z, z \in \Gamma, x \equiv y \equiv z$$

d'où aussi :

$$[x \equiv y, \nexists z, z \equiv x \equiv y, z \in \Gamma] \Rightarrow [x \not\geq y, x \not\leq y], \text{ d'où :}$$

3) Sur les parties non atteintes par les classes ci-dessus, on ne peut avoir que des classes ne rassemblant jamais deux éléments liés par la relation de préordre.

Ainsi, le treillis des congruences régulières constitue une sorte d'ossature du treillis général, selon le schéma :



Une congruence quelconque  $C$  sur une récurrence  $R$  peut se définir (et se noter) à l'aide du triplet  $(D_i, R_j, t_k)$  :

- $(D_i, R_j)$  désigne une congruence régulière
- $t_k$  désigne une congruence stricte sur l'homomorphe  $R/(D_i, R_j)$

### Construction des bornes supérieures et inférieures

Soient deux congruences  $C_1 = (D_1, R_1, t_1)$   
et  $C_2 = (D_2, R_2, t_2)$

Du fait de la forme du treillis :

$$C_1 \cup C_2 = (D_1 \cup D_2, R_1 \cup R_2, t_u), \text{ et}$$

$$C_1 \cap C_2 = (D_1 \cap D_2, R_1 \cap R_2, t_n)$$

Mais sur  $t_u$  et  $t_n$ , on a peu de renseignements.

### Poids d'une congruence sur une récurrence connexe $R$

Soit  $C_1 = (D_i, R_j, t_k)$  une congruence sur  $R$ . Appelons poids de  $C_1$  la quantité  $r(D_i, R_j) + p(t_k)$  où :

- 1)  $r(D_i, R_j)$  est le rang de la congruence régulière  $(D_i, R_j)$  dans le treillis (distributif) des congruences régulières sur  $R$ .
- 2) Comme défini plus haut,  $p(t_k)$  est égal à  $|R - R_j|$  diminué du nombre de classes sur  $R - R_j$ .

Soit  $C_2$  une seconde congruence telle que  $C_2 \succ C_1$ .

$C_2$  est de la forme

1)  $(D_u, R_j, t_k)$  avec  $D_u \succ D_i \Rightarrow p(C_2) = p(C_1) + 1$

ou de la forme :

2)  $(D_i, R_v, t_w)$ ,  $R_v \supseteq R_j$  et

si  $R_v = R_j$  :  $t_w \succ t_k$  et  $p(C_2) = p(C_1) + 1$

si  $R_v \neq R_j$  :  $t_w$  détermine sur  $R - R_v$ , les mêmes classes que  $t_k$ .

Par suite  $R_v - R_j$  est une seule classe de  $t_k$ , sinon  $C_2$  ne serait pas minimale.

Dans  $p(C_2)$ ,  $R_v - R_j \subseteq R_v$ , contribue au poids  $|R_v - R_j|$ , tandis que dans  $p(C_1)$ ,  $R_v - R_j$  étant une classe de congruence stricte contribue pour  $(|R_v - R_j| - 1)$ .

Donc  $p(C_2) = p(C_1) + 1$ . D'où :

THEOREME :

*Le treillis des congruences sur une récurrence connexe possède la propriété de longueur de chaîne de Jordan-Dedekind. Une chaîne maximale à même longueur qu'une chaîne maximale dans le treillis des congruences régulières sur la même récurrence  $R$ . Cette longueur est  $l(R_0) + |R - R_0|$ , si  $l(R_0)$  est la longueur d'une chaîne maximale dans le treillis des diviseurs de la longueur du cycle  $R_0$ .*

CONGRUENCES SUR UNE RECURRENCE CYCLIQUE AYANT PLUSIEURS CYCLES

Remarque préliminaire : soit  $n$  cycles de longueur  $q$ . Il y a  $q^{n-1}$  équivalences liant ces  $n$  cycles pour n'en donner qu'un de même longueur. En effet : soit  $N(n-1, q)$  le nombre des équivalences permettant de réduire  $(n-1)$ -cycles à un seul. Soit  $C_0, C_1, \dots, C_{q-1}$  les classes d'une telle équivalence (avec  $C_{i \bmod q} = f C_{i-1}$ ) et soit  $0, 1, \dots, q-1$ , avec  $i \bmod q = f_1(i-1)$  les éléments du  $n^{\text{ième}}$  cycle. Alors, l'élément 0 peut appartenir soit à  $C_0$ , soit à  $C_1$ , soit à  $C_2$ , etc... finalement  $q$  choix possible d'où :

$$N(n, q) = q \cdot N(n-1, q)$$

et comme

$$N(1, q) = 1 \Rightarrow$$

$$N(n, q) = q^{n-1}$$

Dans la suite nous ferons abstraction de ces symétries.

Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  les cycles.

A chaque classe  $C_i^j$  d'une partition  $P_i^j = \{C_1^j, C_2^j, \dots, C_p^j\}$ ,  $p \leq n$  sur  $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$  ou ce qui revient au même sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  correspond une famille de congruences formant un treillis  $T_i^j$  isomorphe au treillis des sous-multiples communs aux longueurs des cycles appartenant à  $C_i^j$ . Ce treillis est non vide puisqu'il contient au moins l'unité (et seulement l'unité si les longueurs des cycles appartenant à  $C_i^j$  sont premières entre elles).

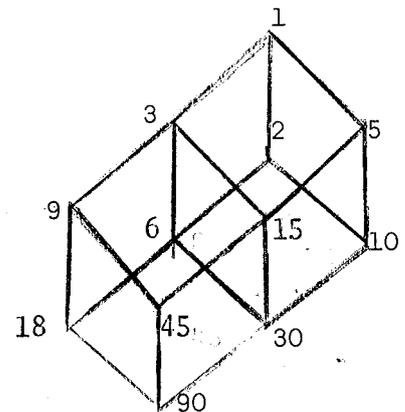
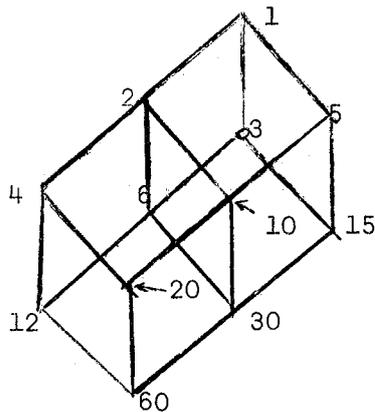
A chaque partition  $P_p^j$  correspond un treillis de congruences qui est <sup>produit</sup> cartésien des treillis  $T_1^j, T_2^j, \dots, T_p^j$  respectivement déterminés par les classes  $C_1^j, C_2^j, \dots, C_p^j$  de  $P_p^j$ . En particulier, à la partition minimale correspond le produit des  $n$  treillis des sous-multiples des longueurs de chaque cycle.

Ainsi le treillis des partitions sur  $\{1,2,\dots,n\}$ , constitue une sorte d'os-  
sature de base pour le treillis des congruences sur  $n$  cycles.

Soit  $u$  et  $v$  deux sous-multiples communs aux longueurs des cycles de la  
classes  $C_1$  d'une part et de la classe  $C_2$  d'autre part. C'est dire que les cycles  
de  $C_1$  peuvent, par homomorphisme, se fondre en un cycle de longueur  $u$  ou  $v$  .  
De même pour  $C_2$ . Le PPCM de  $u$  et  $v$ ,  $u \cap v$  , est aussi un sous-multiple commun  
aux longueurs des cycles de  $C_1$  et de  $C_2$ . D'autre part, si  $v$  est un sous-multiple  
des longueurs des cycles de  $C_1$  et de  $C_2$ , alors, un sous-multiple  $w$  de  $v$ ,  
 $w \geq v$ , est aussi un sous-multiple des longueurs des cycles de  $C_1$  et de  $C_2$ .  
Entre autre, avec  $u$  et  $v$ ,  $u \cup v$  convient. Par suite, le treillis relatif à  
 $C_1 \cup C_2$  est le plus grand filtre supérieur commun aux 2 treillis relatifs à  
 $C_1$  et  $C_2$  respectivement ; il peut être déduit à l'élément 1.

Ce treillis est distributif puisque sous-treillis de treillis distributifs.  
Le treillis des congruences correspondants à une même partition est distributif  
puisque produit de treillis distributifs.

Exemple pour 60 et 90 :

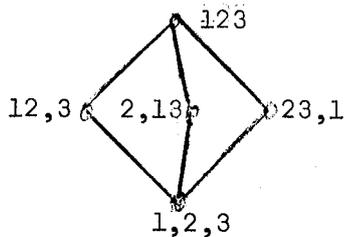


Il s'ensuit que l'on peut construire le treillis des congruences sur  $n$  cycles :

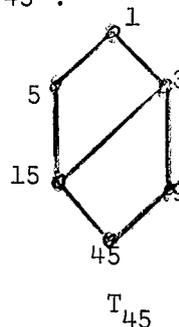
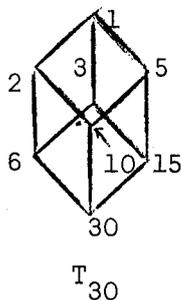
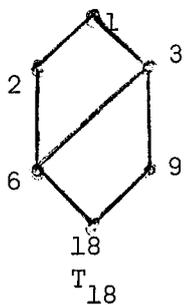
- à partir du treillis des partitions sur  $\{1,2,\dots,n\}$
- connaissant les longueurs (et donc les treillis de sous-multiples de chacune)  
des cycles.

Exemple : Pour 3 cycles de longueur 18, 30 et 45.

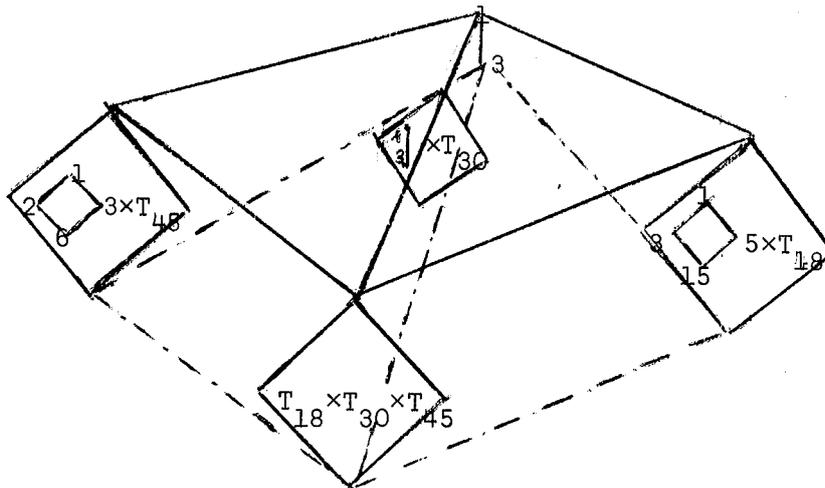
1) Treillis des partitions sur  $\{1,2,3\}$  :



2) Treillis des sous-multiples de 18, 30 et 45 :



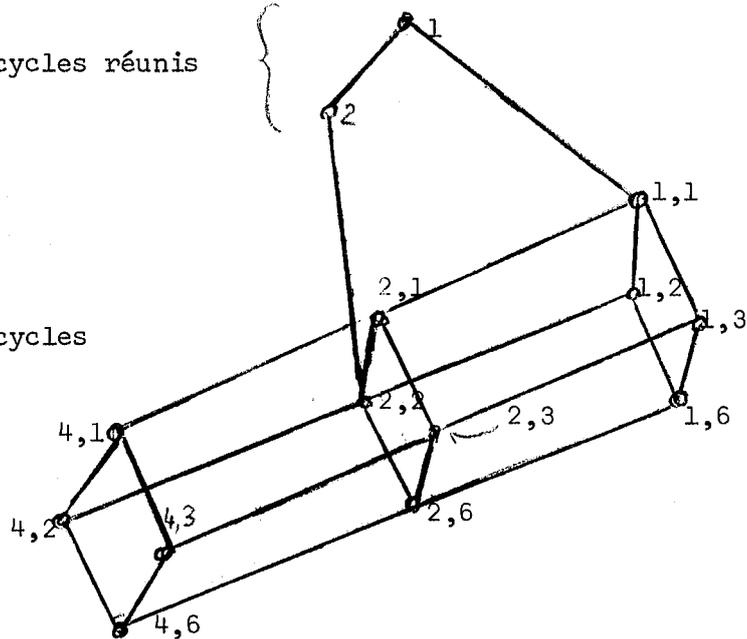
D'où le treillis cherché :



Remarque : Le treillis n'a pas la propriété de longueur de chaîne, comme le montre l'exemple suivant qui est le treillis des congruences sur deux cycles de longueur 4 et 6.

classes sur les cycles réunis

classes sur les cycles  
disjoints



Entre 1 et 2,2 on trouve une chaîne de longueur 3 (1-1,1-1,2-2,2) et une chaîne de longueur 2 (1-2-2,2).

### Congruence régulière sur une récurrence non connexe

Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  les cycles de la récurrence. Nous appelons congruence régulière une congruence telle que :

$$x \equiv y \quad x \neq y \Rightarrow \exists z, z \equiv x \equiv y, \quad z \in \Gamma_i$$

2 - x et y sont connexes, relatifs au même cycle  $\Gamma_i$ .

Ces congruences forment un treillis distributif puisque produit cartésien de treillis des congruences régulières sur chaque composante connexe (un cycle et ses arborescences).

### Congruence pseudo-connexe sur une récurrence non connexe

Nous appelons ainsi une récurrence telle que :

$$x \equiv y, \quad x \neq y \Rightarrow \exists z \text{ et } \Gamma_i, \quad z \equiv x \equiv y, \quad z \in \Gamma_i$$

on obtient donc une telle congruence en déterminant une congruence sur la sous-récurrence réduite aux cycles (et ces congruences forment un treillis distributif  $T$  : voir plus haut, congruences sur une récurrence cyclique) et en étendant plus ou moins les classes ainsi déterminées sur les arborescences, ce qui revient à faire choix d'une sous-récurrence.

Les congruences pseudo-régulières forment donc un treillis distributif puisqu'égal au produit cartésien du treillis  $T$  et du treillis des sous-réurrences de la récurrence.

### Congruences quelconques

Elles forment un treillis dont le précédent est l'ossature. De façon analogue au cas d'une récurrence connexe. En particulier, les congruences strictes sur le quotient de la récurrence par une congruence pseudo-régulière forment un treillis ayant la propriété de longueur de chaîne.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BIRKHOFF *Lattice theory.*  
Am. Math. Soc. N.Y. 1948 p. VII
- [2] M.A. HARRISON *Introduction to swtiching and automata theory*  
Mc. Graw Hill. N.Y. 1965.
- [3] G. BOULAYE *Homomorphismes de relation binaire.*  
*Application à la décomposition des automates.*  
*Séminaire de Logique de l'I.M.A.G. 20 décembre 1965 et*  
*AUTOMATISME tome XII, N° 3, 1967 pp. 106-109.*
- [4] G. BOULAYE *Relations binaires et systèmes séquentiels.*  
*Congrès de l'AFIRO - Lille Juin 1966.*

## CHAPITRE - VIII

### SUR L'ENSEMBLE ORDONNE DES PARTIES CONNEXES

#### D'UN GRAPHE FINI NON ORIENTE

#### Méthodes booléennes et questions de treillis

Nous étudions l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des parties connexes d'un graphe fini non orienté. Lorsque le graphe est un arbre, cet ensemble forme un treillis et c'est justement l'étude de ce treillis qui nous a conduit à la notion d'extension et à la définition des treillis ( $\alpha$ ) et  $\alpha$ -affaiblis.

Par le biais de l'ensemble de ses parties connexes, nous attachons une fonction booléenne, caractéristique, à un graphe fini non orienté.

Enfin, nous définissons diverses opérations binaires ou unaires sur de tels graphes et nous donnons les fonctions attachées aux résultats de ces opérations.

#### ENSEMBLE ORDONNE DES PARTIES CONNEXES D'UN GRAPHE NON-ORIENTE

Si  $X$  est l'ensemble des sommets du graphe et  $P(X)$  l'ensemble des parties de  $X$ , l'ensemble  $E$  (ordonné par l'inclusion) des parties connexes du graphe est un sous-ensemble de  $P(X)$ .

$E$  contient  $\text{Inf}(P(X))$  qui est la partie vide.

$E$  contient également tous les éléments de rang 1 de  $P(X)$  puisqu'il s'agit des parties réduites à un seul sommet et qu'elles sont toutes connexes.

Parmi les éléments de rang 2 de  $P(X)$ ,  $E$  contient ceux et seulement ceux qui correspondent à des arcs du graphe, puisque ce sont les composantes connexes à deux sommets.

Ces éléments de rang 2 sont caractéristiques du graphe et permettent de reconstruire tout l'ensemble  $E$ .

En effet :

$$\forall S, S \in P(X), r(S) \geq 3$$

$$S \in E \Leftrightarrow \exists S_1, S_2, S_1 \in E, S_2 \in E, \text{ tels que :}$$

$$r(S_1) \leq r(S) - 1$$

$$r(S_2) \leq r(S) - 1$$

$$S_1 \cup S_2 = S \quad S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$$

Il s'ensuit que l'ensemble  $E$  est caractéristique du graphe considéré. Il en est alors de même de la fonction booléenne obtenue en considérant  $E$  comme l'ensemble représentatif de cette fonction dans  $P(X)$ .

Voyons plus précisément comment on obtient cette fonction dans le cas fini (celui qui nous intéressera par la suite).

Supposons  $|X| = n$  fini.

A un élément  $X_i$  de  $P(X)$  correspond un monôme booléen  $m(X_i)$  dont la signification est simple : si un sommet  $A$  n'appartient pas à la partie  $X_i$ , la variable  $A$  figure dans ce monôme sous forme complétée ( $\bar{A}$ ), si  $A$  appartient à  $X_i$ , la variable  $A$  apparaît dans le monôme sous forme directe. Exemple : soit  $X = \{A, B, C, D, E, F\}$  à  $\{A, B, C\}$  correspond le monôme  $ABC\bar{D}\bar{E}\bar{F}$ . A l'ensemble  $X$  lui-même correspond le monôme où toutes les variables sont écrites sous forme directe.

L'ensemble des parties connexes est un sous-ensemble de  $P(X)$ , ordonné par l'inclusion. Au graphe  $G$  lui-même, on fait correspondre la fonction booléenne somme des monômes attachés à ses parties connexes, c'est-à-dire la fonction dont l'ensemble représentatif sur le  $n$ -cube est justement isomorphe à l'ensemble des parties connexes de  $G$ .

Un majorant commun à deux parties connexes est une partie connexe les incluant toutes deux. Mais, pour deux parties connexes il n'existe pas forcément de borne supérieure, comme le montre l'exemple suivant du cycle à 4 éléments  $ABCD$  où  $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$  et  $\overline{A\overline{B}C\overline{D}}$  ont deux majorants minimaux  $AB\overline{C}\overline{D}$  et  $\overline{A\overline{B}C}D$ .

Minorant commun : c'est une partie connexe contenue à la fois dans chaque partie. Ce peut être la partie vide. Deux parties connexes n'ont pas forcément une borne inférieure. Les parties  $AB\overline{C}\overline{D}$  et  $\overline{A\overline{B}C}D$ , dans le réseau ci-dessus, possèdent deux minorants maximaux  $\overline{A\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$  et  $\overline{A\overline{B}C}D$ .

Notons qu'un graphe est connexe si et seulement si la fonction attachée contient un monôme sans lettre accentuée (ce n'est pas forcément un monôme canonique).

Notons aussi, par exemple, que la fonction attachée à un graphe complet est la fonction unité puisque toute partie est connexe.

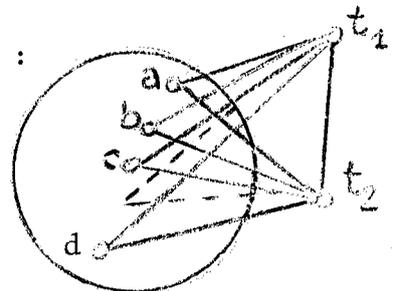
### OPERATIONS SUR UN GRAPHE CONNEXE FINI (ET NON ORIENTÉ) :

#### Dédoublement d'un sommet

Soit  $t$  jointif à  $(a,b,c,\dots)$ . Dédoubler  $t$ , en  $t_1$  et  $t_2$ , consistera à avoir 2 sommets  $t_1$  et  $t_2$  voisins des mêmes  $a,b,c,\dots$  et liés par une branche.

Soit  $f$  la fonction attachée avant dédoublement :

$$f = f_1 t + f_2 \overline{t}.$$



Après dédoublement, la fonction attachée au graphe est :

$$f_1(t_1+t_2)+f_2\bar{t}_1\bar{t}_2$$

En effet,  $f_2$  exprime les parties connexes ne contenant pas  $t$ , celles qui, après dédoublement, ne contiendront ni  $t_1$  ni  $t_2$ , d'où le terme  $f_2\bar{t}_1\bar{t}_2$  dans la nouvelle forme de la fonction.

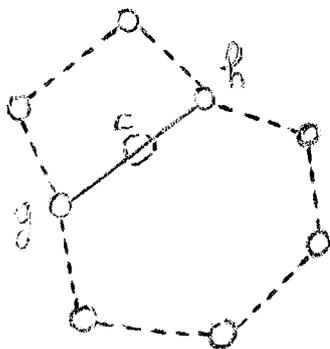
Quant aux parties connexes contenant  $t$ , celles-ci donnent naissance à des parties connexes contenant soit  $t_1$ , soit  $t_2$  soit les deux ; d'où le terme  $f_1(t_1+t_2)$  dans la nouvelle forme.

Enfin, constatons que dans  $f_1(t_1+t_2)$ , il est tenu compte de la partie connexe constituée seulement de  $t_1$  et  $t_2$ , puisque  $f_1$  contient un monôme où toutes les lettres sont barrées.

Fusion de deux sommets jointifs (soit  $h$  et  $k$  ces deux sommets).

Il faut annuler les monômes en  $\bar{h}k$  ou  $h\bar{k}$ , c'est-à-dire faire  $h = k$  dans la fonction attachée  $f$ . (Il n'y a donc pas lieu de mettre  $f$  sous une forme spéciale).

Rajouter un sommet,  $c$ , entre deux sommets voisins,  $h$  et  $g$ .



Soit  $ghf_3+g\bar{h}f_2+\bar{g}hf_1+g\bar{h}f_0$

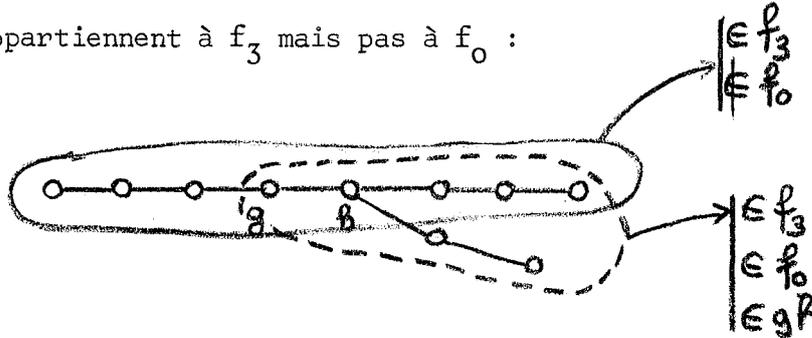
la fonction, avant introduction de  $c$  entre  $g$  et  $h$ .

- Les parties en  $g\bar{h}$  (ou  $g\bar{h}$ ) peuvent contenir ou non  $c$
- les parties en  $\bar{g}h$ , sauf celles se réduisant à  $c$ , deviennent des parties en  $\bar{g}h\bar{c}$
- pour les parties en  $gh$ , il faut tenir compte de ce que l'arc  $gh$  est indispensable ou non à la convexité.

Si l'arc est indispensable, ces parties en gh deviennent des parties en ghc.  
Sinon, ces parties restent en gh.

Les parties pour lesquelles l'arc gh est indispensable à la convexité sont :

- 1) Celles qui appartiennent à  $f_3$  mais pas à  $f_0$  :



- 2) Celles qui appartiennent à  $f_3$  et à  $f_0$  (c'est-à-dire que g ou h est une famille pour ces parties) mais n'appartiennent pas aux parties en  $gh$  (idem pour  $gh$ ).

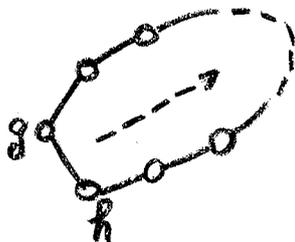
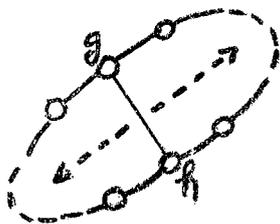
- 3) La branche gh elle-même, qui est éliminée en 1) et 2).

D'où le terme :

$$\begin{aligned} &ghc [f_3 \bar{f}_0 + f_3 f_0 \bar{f}_1 + f_3 f_0 \bar{f}_2 + ghc \bar{Z}] \\ &= ghcf_3 [\bar{f}_0 + \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{Z}] \end{aligned}$$

dans la formule finale (Z = somme des lettres autres que gh et c).

Par contre, si gh n'est pas indispensable à la connexité, c'est que dans la partie considérée, gh fait partie d'un cycle. Et dans ce cycle, g et h sont ou non voisins :



$$\left. \begin{array}{l} \in f_3 \\ \in f_2 \\ \in f_1 \\ \notin f_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f_3 f_2 f_1$$
  

$$\left. \begin{array}{l} \in f_3 \\ \in f_2 \\ \in f_1 \\ \in f_0 \end{array} \right\}$$

Par contre, de ces parties il faut retrancher la corde  $\bar{z}$  elle-même :

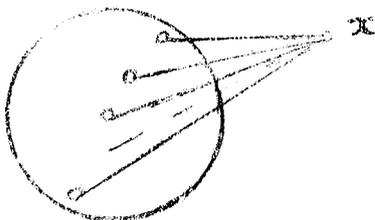
$$ghf_3f_2f_1 \ominus gh \bar{z}.$$

Enfin, il faut tenir compte des parties connexes du graphe  $g-c-h$  lui-même, d'où la fonction  $(\bar{g}+c+\bar{h})\bar{z}$ . Finalement, la fonction du graphe obtenu après insertion de  $c$  entre  $g$  et  $h$  est :

$$ghf_3|f_1f_2 \ominus \bar{z}| + ghcf_3|\bar{f}_2+\bar{f}_1+\bar{f}_0+\bar{z}| +$$

$$ghf_2+\bar{g}hf_1+\bar{g}hcf_0+|\bar{g}+c+\bar{h} \bar{z}$$

Suppression d'un sommet et ses arcs y aboutissant



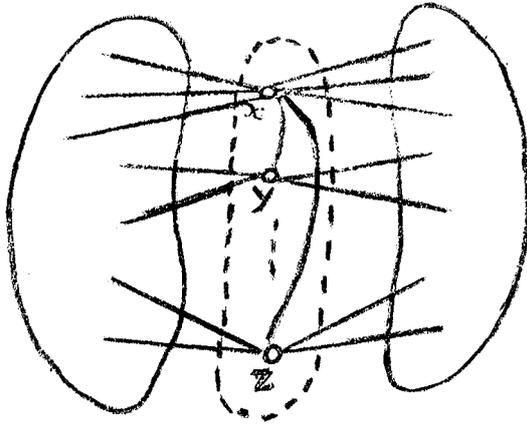
Soit  $xf_1+\bar{x}f_2$  la fonction attachée au graphe avant suppression de  $x$ . Après suppression de  $x$ , la fonction attachée est simplement  $f_2$ .

Remarque : Si  $x$  est point d'articulation,  $f_2$  ne contient pas de monôme où toutes les lettres figurent en écriture directe (et inversement).

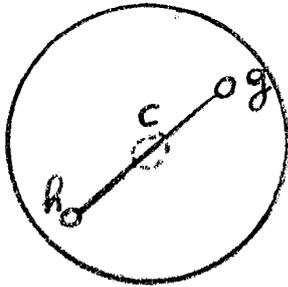
Plus généralement, si  $\{x,y,\dots,z\}$  est un ensemble d'articulation mettons la fonction sous la forme :

$$(x+y+\dots+z)f_1 + \bar{x}\bar{y}\dots\bar{z} f_2$$

alors  $f_2$  ne contient pas de monôme où toutes les lettres (autres que  $x,y,\dots,z$ ) figurent en écriture directe (et inversement).



Suppression d'une branche entre deux sommets g et h



Nous allons rajouter, un sommet c entre g et h, puis, supprimer c et les arcs ch et cg. Soit  $ghf_3 + \bar{g}hf_2 + \bar{g}hf_1 + \bar{g}hf_0$  la fonction attachée au graphe initial. Rajoutons c, d'où la fonction :

$$\begin{aligned} &ghf_3 [f_1 f_2 \oplus \bar{Z}] + ghc [\bar{f}_2 + \bar{f}_1 + \bar{f}_0 + \bar{Z}] f_3 + \\ &\bar{g}hf_2 + \bar{g}hf_1 + \bar{g}hc f_0 + [\bar{g} + c + \bar{h}] \bar{Z} \\ = &\bar{c} [\bar{g}_h f_3 (f_1 f_2 \oplus \bar{Z}) + \bar{g}hf_2 + \bar{g}hf_1 + \bar{g}hf_0 + \bar{g}\bar{Z} + \bar{h}\bar{Z}] + c \dots \end{aligned}$$

Supprimons c, il reste :

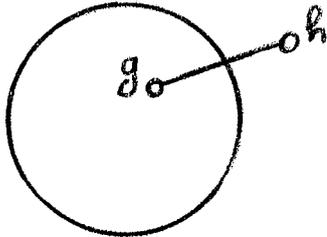
$$ghf_3 [f_1 f_2 \oplus \bar{Z}] + \bar{g}hf_2 + \bar{g}hf_1 + \bar{g}hf_0 + \bar{g}\bar{Z} + \bar{h}\bar{Z}.$$

Notons que  $\bar{g}h\bar{Z}$  est contenu dans  $\bar{g}hf_0$ ,  $\bar{g}h\bar{Z}$  dans  $\bar{g}hf_2$  et  $\bar{g}h\bar{Z}$  dans  $\bar{g}hf_1$ . Il reste donc :

$$ghf_3 (f_1 f_2 \oplus \bar{Z}) + \bar{g}hf_2 + \bar{g}hf_1 + \bar{g}hf_0$$

Z : somme des lettres autres que g, h et c.

Rajouter un sommet en position de famille



Soit  $f$ , la fonction initialement attachée au graphe. Les parties connexes en  $\bar{h}$  sont les mêmes qu'avant introduction de  $h$ , d'où le terme  $\bar{h}f$ . Les parties en  $h$ , mise à part celles ne contenant que  $h$ , ne peuvent être que des parties en  $g$ , d'où finalement la nouvelle fonction :

$$\bar{h}f + (fg + \bar{Z})h = fg + \bar{h}f + \bar{Z}h$$

(  $Z$ : somme des lettres du graphe initial).

Rajouter une branche ou un sommet voisin de plusieurs autres

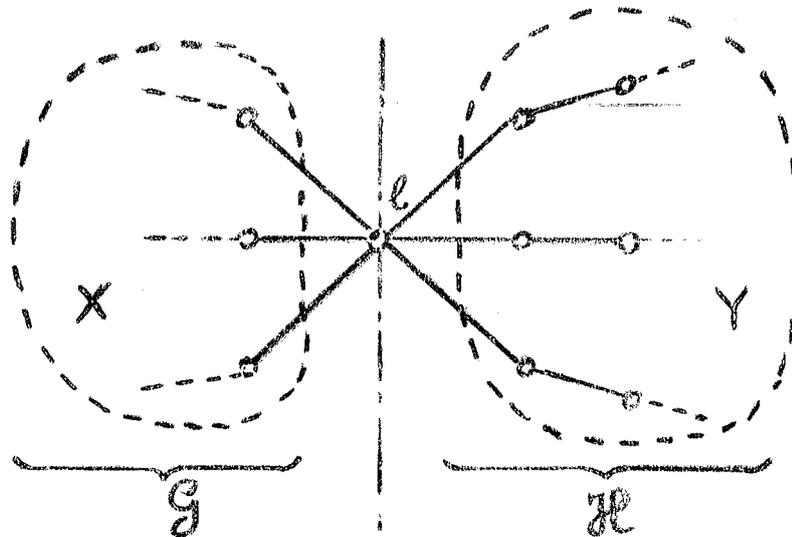
Ces deux opérations sont complexes et ne se traduisent pas simplement sur les fonctions attachées.

OPERATION )( SUR DEUX GRAPHES CONNEXES DISJOINTS

Nous appellerons ainsi la mise en commun d'un sommet par deux graphes connexes disjoints  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ , de fonctions associées  $G$  et  $H$ ,

Nous noterons  $\mathcal{G} )( \mathcal{H}$  le graphe obtenu et  $G )( H$  sa fonction booléenne associée.

Le résultat dépend bien sûr du sommet choisi dans chaque graphe pour ne faire plus qu'un sommet du graphe résultant. Nous supposerons pour simplifier que ce sommet porte le même nom,  $l$ , dans  $\mathcal{G}$  et dans  $\mathcal{H}$  (Fig. Ci-après).



Mettons G et H sous la forme :

$$G = \lambda G_1 + \bar{\lambda} G_2$$

$$H = \lambda H_1 + \bar{\lambda} H_2$$

Désignons par X et Y les sommes des variables autres que  $\lambda$  dans G et H respectivement.

Pour obtenir  $G \circ H$ , considérons d'une part, les sous-graphes de  $\mathcal{G}$  ( $\mathcal{H}$ ) qui contiennent  $\lambda$  et d'autre part ceux qui ne contiennent pas  $\lambda$ .

On obtient :

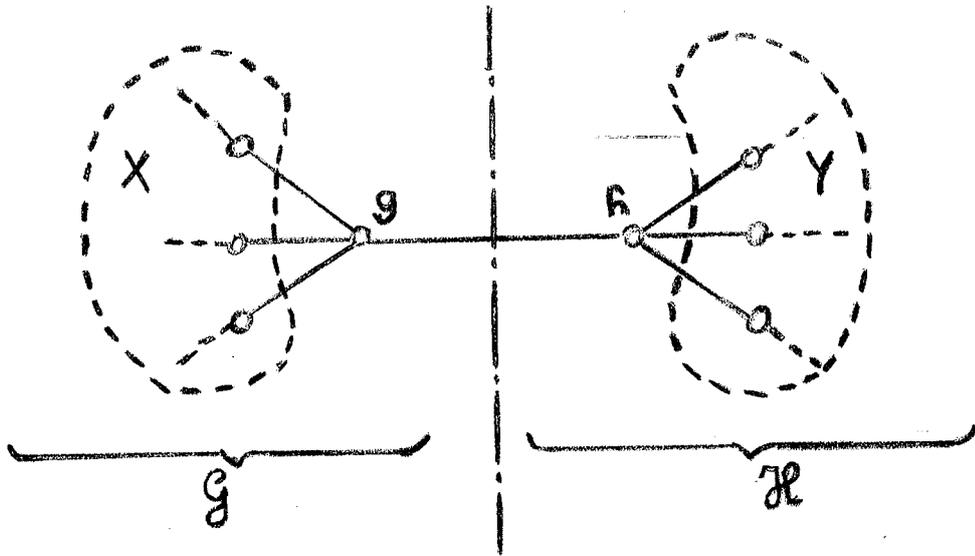
$$G \circ H = \lambda \cdot G_1 + H_1 + \bar{\lambda} (G_2 \cdot \bar{Y} + H_2 \bar{X})$$

OPERATION  $\circ$  SUR DEUX GRAPHES CONNEXES DISJOINTS

Soit  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  deux graphes connexes disjoints ;  $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$  est le graphe obtenu en établissant une granche entre g, sommet de  $\mathcal{G}$ , et h, sommet de  $\mathcal{H}$  (figure ci-après).

Nous noterons  $G \circ H$  la fonction associée à  $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ . Mettons G et H sous la forme :

$$G = gG_1 + \bar{g}G_2 \quad \text{et} \quad H = hH_1 + \bar{h}H_2$$



Désignons par X et Y la somme des variables respectivement autres que g dans G, et autres que h dans H.

Pour établir  $G \sim H$ , envisageons les sous-graphes de  $G \cup H$

- 1) ne contenant ni g ni h
- 2) contenant un et un seul des 2 sommets g et h
- 3) contenant à la fois g et h :

On obtient :

$$G \sim H = \bar{g}\bar{h}(G_2 \cdot \bar{Y} + H_2 \cdot \bar{X}) + g\bar{h}(G_1 \cdot \bar{Y}) + \bar{g}h(H_1 \cdot \bar{X}) + gh(H_1 \cdot G_1).$$

PROPRIETES DE L'ENSEMBLE ORDONNE DES PARTIES CONNEXES D'UN GRAPHE NON ORIENTE

THEOREME :

L'ensemble E, ordonné par l'inclusion, des parties connexes d'un graphe non orienté est un treillis si et seulement si les p éléments de tout cycle de longueur p forment un graphe complet à p sommets.

Preuve : S'il n'y a pas de cycle, le graphe est un arbre et on sait qu'alors  $E_n$  est un treillis [1].

Considérons le cas où il y a un cycle ou plusieurs satisfaisant toutes les hypothèses du théorème. Soit deux parties connexes non comparables A et B. Si l'intersection ensembliste  $A \cap B$  est vide ou ne contient qu'un sommet, elle est bien connexe. Considérons donc le cas où  $A \cap B$  contient au moins deux sommets.

Si  $A \cap B$  ne comporte aucun élément appartenant à un cycle, avec tout couple de sommets,  $A \cap B$  contient la chaîne qui les joint et par suite l'intersection est connexe. Ainsi, la non-connexité de  $A \cap B$  ne peut provenir que d'éléments de cycles. Supposons donc que l'intersection contienne au moins deux éléments de cycles ; soit a et b ceux-ci. Comme le cycle est un graphe complet, a et b sont jointifs et  $A \cap B$  est connexe.

Sous les hypothèses du théorème, les parties connexes forment donc une famille de Moore dans l'ensemble des parties, et par suite forment elles-mêmes un treillis.

Par contre, s'il existe un cycle dont 2 éléments ne sont pas jointifs, nous avons vu que l'intersection de deux parties connexes peut ne pas être connexe et qu'il peut alors exister deux minorants maximaux des deux parties.

Remarquons enfin que sous les hypothèses du théorème,  $\text{Sup}(A,B)$  est bien déterminée et si  $A \cap B = \emptyset$ , il existe une chaîne minimale joignant A et B et une seule.

THEOREME :

*Les treillis  $(\alpha)$ , où tout sous-treillis ne contenant pas le minimum est  $\mathcal{N}$ -semi-modulaire, sont les treillis des parties connexes des graphes finis non orientés où les éléments de tout cycle (s'il y en a), de longueur p, forment un graphe complet à p sommets.*

Preuve :

I - Montrons que les parties connexes d'un graphe ainsi particularisés, à n sommets, forment un tel treillis. Ces parties, d'après le théorème précédent,

forment un treillis. Soit  $T_n$  celui-ci. On passe d'une partie connexe, à une partie connexe immédiatement supérieure, en rajoutant un sommet à la première.  $T_n$  possède donc la propriété de longueur de chaîne et la longueur d'une chaîne maximale joignant  $\text{Min}(T_n)$  à  $\text{Max}(T_n)$  est  $n$ . Les seuls  $\mathcal{U}$ -irréductibles sont les atomes et ils sont en nombre  $n$  : ce sont les  $n$  parties réduite chacune à un des  $n$  sommets. Le treillis est donc  $(\alpha)$ . De plus, si l'intersection de deux parties connexes n'est pas vide, leur borne supérieure est donnée par l'union ensembliste. Un sous-treillis de  $T_n$ , ne contenant pas  $\text{Min}(T_n)$ , est donc sous-treillis de l'ensemble des parties du graphe, il est donc distributif et, a fortiori,  $\mathcal{O}$ -semi-modulaire.

II - Inversement, montrons qu'étant donné un tel treillis, on peut construire un graphe connexe et un seul dont le treillis est justement le treillis donné. Les notations booléennes allègent la démonstration.

Soient donc  $X_1, X_2, \dots, X_n$  les variables booléennes attachées aux  $n$  atomes du treillis. Ce seront aussi les  $n$  sommets du graphe que nous voulons construire. Les monômes booléennes attachés aux éléments de rang 2 du treillis sont de la forme  $S_i \cdot X_j \cdot \prod_{k \neq i, j} \bar{X}_k$ , indiquant que  $X_i$  et  $X_j$  sont reliés par un arc.

I - Vérifions que les éléments du treillis, de rang  $i$ ,  $i \geq 3$ , sont des parties connexes à  $i$  sommets du graphe construit (et la partie vide correspond au minimum du treillis).

Par construction, les éléments de rang 2 correspondent à des parties connexes à 2 éléments (ou sommets). Supposons la propriété vraie pour les éléments de rang  $(i-1)$  et montrons qu'elle est vraie pour les éléments de rang  $i$ . Soit un élément de rang  $i \geq 3$ ,  $X_1 X_2 \dots X_i \bar{X}_{i+1} \dots \bar{X}_n$ , il est union d'au moins 2 monômes de rang  $i-1$ , qui diffèrent par exactement 2 lettres, c'est-à-dire qu'il sont de la forme :

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} \bar{X}_i \dots \bar{X}_n$$

et

$$\bar{X}_1 X_2 \dots X_i \bar{X}_{i+1} \dots \bar{X}_n$$

indiquant que

$\{X_1 X_2 \dots X_{i-1}\}$  est une partie connexe

et  $\{X_2 \dots X_i\}$  aussi.

Ces 2 parties ont pour borne supérieure la partie connexe :

$\{X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i\}$

ce qui correspond bien au monôme

$X_1 X_2 \dots X_i \bar{X}_{i+1} \dots \bar{X}_n$

iii

Il faut maintenant vérifier qu'à toute partie connexe du n-graphe construit correspond un élément du treillis.

Admettons, ce qui est vrai pour 2 que toute partie connexe à (i-1) sommets soit représentée par un élément du treillis et montrons que toute partie connexe à i sommets est représentée. Cette dernière, P, est union d'au moins 2 parties  $P_1$  et  $P_2$  à (i-1) sommets dont l'intersection est à (i-2) sommets. Or, dans le

sous-treillis  $\{P_1, P_2, P_1 \cap P_2, P_1 \cup P_2\}$ , l' $\cap$ -semi-modularité entraîne que  $P_1 \cup P_2 \succ P_1 \cap P_2$  puisque  $P_1 \cap P_2 \prec P_1 \cup P_2$ . Donc  $P_1 \cup P_2$  est de rang i et c'est la

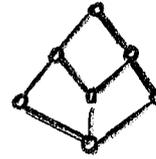
partie P considérée ci-dessus.

Enfin, on peut effectivement affirmer que les éléments de tout cycle (s'il y en a) forment un graphe complet sinon les parties connexes ne formeraient pas un treillis.

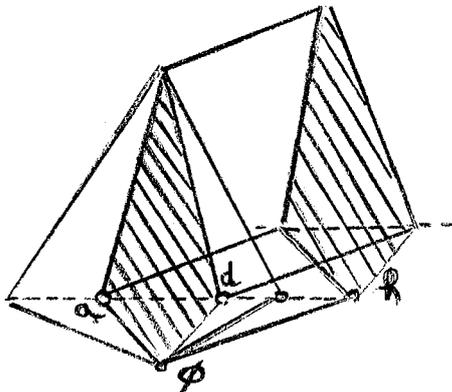
### COROLLAIRE

Dans ces treillis, tout sous-treillis  $\cap$ -semi-modulaire ne contenant pas le minimum est distributif.

Remarque : Un tel treillis n'est pas forcément lui-même  $\cap$ -semi-modulaire. Exemple :



FONCTION BOOLEENNE ATTACHEE A UN GRAPHE SATISFAISANT LES HYPOTHESES DU THEOREME CI-DESSUS



Soit  $h$  un sommet qui n'est pas point d'articulation, voisin de  $a, b, \dots, d$ . Soit  $f$  la fonction attachée au graphe  $H$  obtenu en supprimant  $h$ . L'ensemble représentatif de  $f$  est un treillis  $h$  est soit famille, soit appartient à une partie connexe qui est un graphe complet. Après suppression de  $h$ , le graphe satisfait encore les hypothèses du théorème.

Après introduction de  $h$ , la nouvelle fonction a pour ensemble représentatif, un treillis qui se déduit du précédent par extension. Le support de l'extension est constitué de la partie vide et des parties contenant un au moins des sommets  $a, b, \dots, d$  et est représenté par la fonction  $[(a+b+\dots+d)f+\bar{Z}]$ ,  $Z$  : somme des lettres autres que  $h$ . D'où la nouvelle fonction :

$$f\bar{h} + (a+b+\dots+d)f + \bar{Z}h$$

qui se simplifie un peu, puisque  $f\bar{h} \ni \bar{Z}h$ , d'où la forme définitive :

$f\bar{h} + (a+b+\dots+d)f + \bar{Z}$
---------------------------------------

Ce résultat généralise ce que nous avons trouvé pour un arbre (page 23 de [4]).

Remarque : La fonction attachée au graphe, en tant que graphe et selon le procédé du début de ce chapitre, est la même que celle attachée au treillis correspondant par  $\wedge$ -codage booléen canonique.

### CHEMINS

Dans un graphe, les chemins ont un rôle privilégié. Ils forment un ensemble ordonné par l'inclusion (au sens de l'inclusion ensembliste, en considérant pour chaque chemin l'ensemble de ses sommets), et nous allons établir à ce sujet un théorème reprenant l'hypothèse du précédent.

### THEOREME :

*Une condition nécessaire et suffisante pour que les chemins d'un graphe connexe forment un treillis pour l'inclusion est que :*

- 1) *Il existe un chemin hamiltonien,*
- 2) *Les sommets de tout cycle (s'il y en a) forment un graphe complet.*

*Preuve* : Les deux parties de la condition sont nécessaires. C'est évident pour la première. Pour la seconde il suffit de considérer à nouveau le cycle à 4 éléments. La condition est suffisante puisqu'alors l'intersection ensembliste est toujours un chemin et les chemins forment alors une famille de Moore dans l'ensemble des parties connexes, ensemble qui est lui-même un treillis en vertu de la seconde partie de la condition.

### CAS PARTICULIER D'UN ARBRE

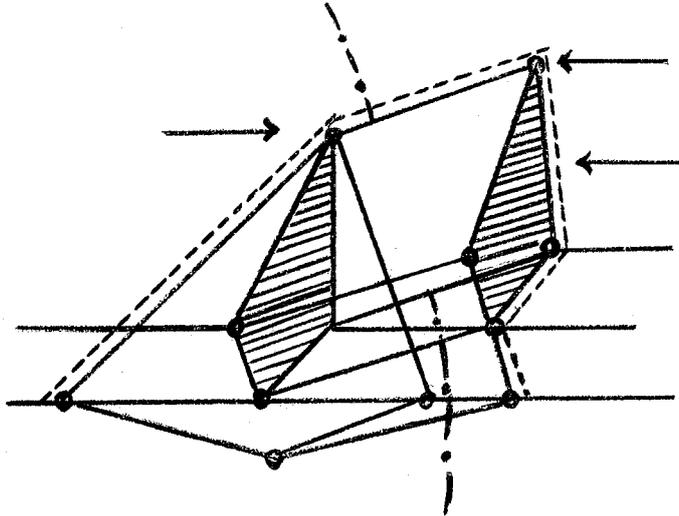
Rappelons deux définitions :

*arbre* : graphe connexe sans circuit. Nous dirons au moins provisoirement "n-arbre" pour "arbre à n-sommets".

*sous-arbre* : sous-graphe connexe d'un arbre (ainsi, la partie vide est un sous-arbre).

### Treillis des sous-arbres d'un n-arbre

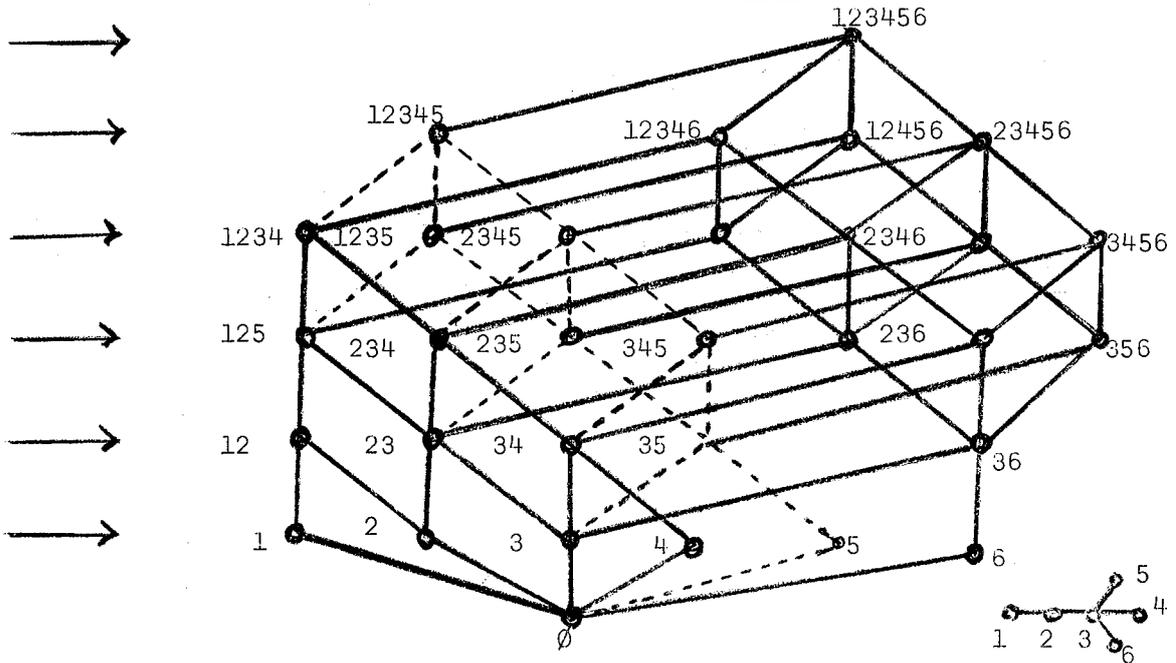
Les sous-arbres d'un n-arbre forment un treillis possédant les propriétés générales du treillis de parties connexes d'un graphe connexe où les sommets de tout cycle forment un graphe complet.



Notons particulièrement que :

Soit  $A = \{a_1, \dots, a_p, \dots, a_n\}$  un n-arbre éventuellement réduit à un sommet et  $T_n$  le treillis de ses sous-arbres. Ajoutons à  $A$  un sommet  $a_x, a_x$  étant voisin de  $a_p$ , et soit  $T_{n+1}$  le treillis des sous-arbres du  $(n+1)$ -arbre obtenu.  $T_{n+1}$  est obtenu par une extension de  $T_n$  isomorphe à l'ensemble  $\text{Major}(a_p)$  des majorants de  $a_p$  dans  $T_n$ . Pour obtenir  $T_{n+1}$ , on ajoute à  $T_n$  l'ensemble obtenu par translation d'un rang de  $\text{Major}(a_p)$ , ce qu'illustre la figure. Notons que  $\text{Major}(a_p)$  est un sous-treillis connexe de  $T_n$ .

Par suite, pour construire le treillis des sous-arbres d'un arbre, on commence par tracer le treillis des sous-arbres d'un assez long chemin de l'arbre : à l'élément nul près, c'est un demi-quadrillage. Puis on rajoute les uns après les autres les noeuds manquants en étendant chaque fois le treillis comme il est dit ci-dessus (voir l'exemple figure ci-après).



Bornes supérieure et inférieure du nombre  $N(n)$  des sous-arbres d'un  $n$ -arbre

On montre [3] que la chaîne à  $n$  sommets ou " $n$ -chaîne" est le  $n$ -arbre ayant le moins de sous-arbres et ils sont au nombre de :

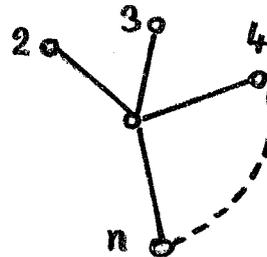
$$\left(1 + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

On montre également (ibid.) que, parmi les  $n$ -arbres, l'arbre ayant le plus de sous-arbres est celui de la figure ci-contre dont le nombre des sous-arbres est

$$(2^{n-1} + n).$$

et finalement :

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq N(n) \leq 2^{n-1} + n}$$



Remarquons que lorsque  $n$  croît indéfiniment,  $(\frac{2^{n-1}+n}{2^n}) \sim \frac{1}{2}$  et, par suite, l'ensemble représentatif des sous-arbres du  $n$ -arbre à  $(n-1)$  feuilles tend à n'occuper que la moitié du  $n$ -cube. Cet ensemble représentatif contient le  $(n-1)$  cube formé par les sous-arbres contenant le centre de l'arbre.

Remarque sur le centre de l'arbre

On pourrait penser que le centre de l'arbre (au sens habituel de sommet dont le maximum des distances aux autres sommets est minimum) est le sommet appartenant au plus grand nombre de sous-arbres. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant :

Soit l'arbre ci-contre, dont nous construisons, ci-dessous le treillis des sous-arbres.

Le centre est 3, or :

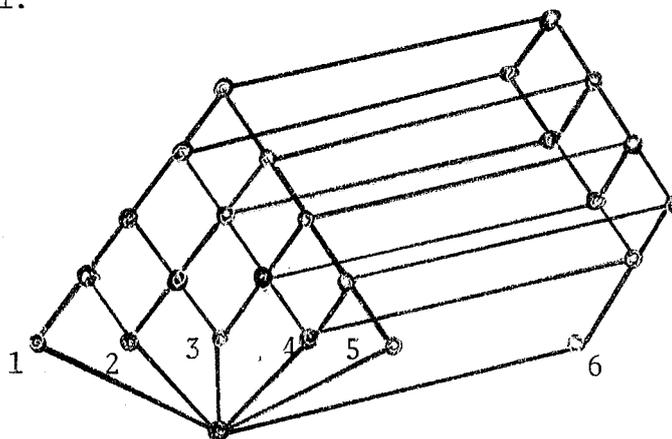


$$|\text{Major}(3)| = 15$$

et

$$|\text{Major}(4)| = 16 > 15$$

De même qu'il peut y avoir plusieurs centres, il peut y avoir plusieurs sommets tels que le nombre des sous-arbres auxquels ils appartiennent, séparément, soit maximal.



Dans le même ordre d'idée, on peut chercher quels sont les couples de sommets qui appartiennent tous les deux au plus grand nombre de sous-arbres.

Il est clair déjà que deux tels sommets A et B sont voisins. En effet, s'ils ne l'étaient pas, soit C un sommet intermédiaire. C appartient déjà à tous les p sous-arbres contenant à la fois A et B. Or C et B appartiennent au moins à (p+1) sous-arbres : les p précédents et la chaîne joignant C et B.

Rechercher ces couples revient donc à chercher les éléments de rang 2 du treillis du n-arbre, dont le nombre des majorants est maximal. Très souvent il y a un seul tel couple.

Plus généralement, les groupes de p sommets appartenant ensemble au nombre maximum des sous-arbres, sont donnés par les éléments de rang p dont le nombre des majorants est maximal.

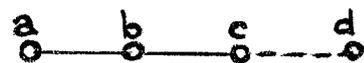
Quelques fonctions d'arbres particuliers

- La chaîne à 2 éléments a pour fonction attachée  $f_{(a,b)} = 1$ .



- Rajoutons un voisin c à b.

Appliquons la formule de la page



$$F(a,b,c) = 1 \cdot (b+\bar{c}) + \bar{a} = \bar{a} + b + \bar{c}$$

Rajoutons un voisin d à b:

$$\begin{aligned} F(abcd) &= (\bar{a} + b + \bar{c})(c + \bar{d}) + \bar{a}\bar{b} \\ &= \bar{a}c + \bar{a}\bar{d} + bc + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b} \end{aligned}$$

dont une base première est :

$$F(abcd) = bc + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}$$

Fonction attachée au n-arbre à (n-1) feuilles

On dit aussi "étoile" à (n-1) branches.

C'est la fonction  $t+m_1+m_2+\dots+m_{n-1}$  où  $t$  désigne le centre de l'arbre et où  $m_i$  est un produit de (n-2) lettres accentuées, autres que  $t$ . Soient  $a, b, c, \dots$  les feuilles. Nous désignerons cette fonction par  $\Psi(t, abc\dots)$

Dans  $B^n$  cette fonction comprend l'hyper-cube  $B^{n-1}$  en  $t$  et tous les monômes de rang  $\leq 1$ .

$$(2) \quad \Psi(t, abc\dots) = t + \sum_{i=1}^{n-1} m_i$$

- Pour
- $n = 2 \quad \Psi(t, a) = 1$
  - $n = 3 \quad \Psi(t, ab) = t + \bar{a} + \bar{b}$
  - $n = 4 \quad \Psi(t, abc) = t + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}$
  - $n = 5 \quad \Psi(t, abcd) = t + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$

Relation "entre" dans un n-arbre

Soit A, B et C trois sommets. Si C est entre A et B, C fait partie de tout sous-arbre contenant {A,B} d'où :

$$\text{Major}(A,B) = \text{Major}(A,C) \cap \text{Major}(A,B)$$

et

$$\text{Major}(A,B) \subseteq \text{Major}(AC) \cup \text{Major}(B,C) \subseteq \text{Major}(C)$$

(l'inclusion est même stricte si  $A \neq B$ ).

Inversement,  $\text{Major}(C) \supseteq \text{Major}(A,B)$  entraîne que tout sous-arbre contenant  $\{A,B\}$  contient aussi C, donc C est <sup>entre</sup>  $\sqrt{A}$  et B, ce que nous noterons  $\xi(A,C,B)$  et :

$$\underline{\xi(A,C,B) \Leftrightarrow \text{Major}(C) \supseteq \text{Major}(A,B)}$$

Remarque :  $A = B \Rightarrow A = B = C$

### HOMOMORPHISME SUR UN ARBRE

Soit  $A_1$  et  $A_2$  deux arbres et  $f$  une application de  $A_1$  sur  $A_2$ .  $f$  est un homomorphisme pour la structure d'arbre si :

$$\forall a,b,c, \xi(a,b,c) \Rightarrow \xi(f(a),f(b),f(c))$$

et  $f(a) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(b) = f(c), \quad \forall b \in \mathcal{E}(a,b,c)$

Par suite, une classe d'homomorphisme est une classe connexe, plus précisément : un sous-arbre. Inversement, à une partition en classe connexe correspond un homomorphisme, l'homomorphe étant l'ensemble quotient.

### TREILLIS DES HOMOMORPHISMES SUR UN ARBRE

On constate que la réunion et l'intersection de deux homomorphismes, au sens de la théorie des partitions, est encore un homomorphisme. Par suite, les homomorphismes forment un treillis, sous-treillis du treillis des partitions sur les éléments de l'arbre.

Soit maintenant un homomorphisme  $H$  sur un arbre fini. Formons l'homomorphisme  $H'$  selon le procédé constructif suivant :

- 1) Effectuons le recouvrement suivant de l'arbre : tout couple  $\{x,y\}$  de voisins immédiats, appartenant à deux classes différentes de  $H$ , forment une classe  $C_i^!$  et les éléments non utilisés forment chacun une classe unitaire.
- 2) Considérons la plus petite partition  $H'$  telle que toute classe du recouvrement précédent soit contenue dans une classe de partition  $H'$ . La partition  $H'$  est unique et, dans le treillis des partitions  $H$  et  $H'$  sont complémentaires, d'où :

THEOREME :

*Le treillis des homomorphismes à classes connexes sur un arbre fini à  $N$  noeuds est un treillis de Boole, de dimension  $(N-1)$ , sous treillis du treillis des partitions sur cet arbre.*

Conséquence d'un homomorphisme à classes connexes sur la fonction attachée à un  $n$ -arbre.

Nous remarquons sur les formules page 9, 10, que l'on est passé de la fonction attachée à  $\mathcal{G}$  -  $(\mathcal{H})$  à la fonction attachée à  $\mathcal{S}$  -  $(\mathcal{H})$  en faisant  $h=g$  dans la première.

Ceci montre qu'étant donné la fonction  $G$  associée à un  $n$ -arbre, on obtient la fonction  $G^0$  associée à un  $p$ -arbre ( $p \leq n$ ) homomorphe en réduisant à la même variable, dans  $G$ , les variables correspondant à des sommets qui sont dans la même classe. Nous dirons que  $G^0$  est homomorphe à  $G$ .

On sait [1] que les  $G^0$  forment un treillis de Boole d'ordre  $(n-1)$  ..

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BOULAYE *Sous-arbres d'un arbre et homomorphismes à classes connexes, I.C.C. Rome, Juillet 1966.*
- [2] J. KUNTZMANN *Cours de théorie des réseaux. Cours professé à la Faculté des Sciences de Grenoble, 1966-1967.*
- [3] G. BOULAYE *Immersion d'un treillis dans un autre. Codage booléen d'un treillis. Séminaires de Logique de l'I.M.A.G de l'Université de Grenoble 1967.*
- [4] G. BOULAYE *Sur l'ensemble ordonné des parties connexes d'un graphe connexe. R.I.R.O. 2ème année n° 7 - 1968 - pp. 13-25.*

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu, et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE