



**HAL**  
open science

# Sur des problèmes de décomposition d'un graphe, liés à l'implantation

Michel Chein

► **To cite this version:**

Michel Chein. Sur des problèmes de décomposition d'un graphe, liés à l'implantation. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1970. tel-00282270

**HAL Id: tel-00282270**

**<https://theses.hal.science/tel-00282270>**

Submitted on 27 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

**T H E S E S**

Présentées à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par

**Michel CHEIN**

---

Première Thèse :

**Sur des problèmes de décomposition  
d'un graphe, liés à l'implantation**

Deuxième Thèse :

LES AXIOMES DANS LES MATROIDES ET L'INDEPENDANCE LINEAIRE

---

Thèses soutenues le      Juin 1970, devant la commission d'examen

Monsieur KUNTZMANN	Président
Monsieur BENZAKEN	Examineur
Monsieur BERGE	Examineur
Monsieur PICARD	Examineur



# L I S T E   D E S   P R O F E S S E U R S

---

Doyen honoraire : Monsieur M. MORET  
Doyen : Monsieur E. BONNIER

## PROFESSEURS TITULAIRES

---

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Melle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle-Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire

MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme.	KOFLER Lucie	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I. U. T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMIER Pierre	Physique Nucléaire-Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme.	KAHANE Josette	Physique
Mme.	BONNIER Jane	Chimie
MM.	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. RODRIGUES Alexandre  
MORITA Susumu  
RADHAKRISHNA

Mathématiques Pures  
Physique Nucléaire  
Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. LANCIA Roland  
Mme. BOUCHE Liane  
MM. KAHANE André  
DOLIQUE Jean Michel  
BRIERE Georges  
DESRE Georges  
LAJZEHOWICZ Joseph  
LAURENT Pierre  
Mme. BERTRANDIAS Françoise  
MM. LONGEQUEUE Jean-Pierre  
SOHM Jean-Claude  
ZADWORNÝ François  
DURAND Francis  
CARLIER Georges  
PFISTER Jean-Claude  
CHIBON Pierre  
IDELMAN Simon  
BLOCH Daniel  
MARTIN-BOUYER Michel  
SIBILLE Robert  
BRUGEL Lucien  
BOUVARD Maurice  
RICHARD Lucien  
PELMONT Jean  
BOUSSARD Jean-Claude  
MOREAU René  
ARMAND Yves  
BOLLIET Louis  
KUHN Gérard  
PEFFEN René  
GERMAIN Jean-Pierre  
JOLY Jean-René  
Melle. PIERY Yvette  
BERNARD Alain  
MOHSEN Tahsin  
CONTE René  
LE JUNTER Noël  
LE ROY Philippe  
ROMIER Guy  
  
VIALON Pierre  
BENZAKEN Claude  
MAYNARD Roger

Physique Atomique  
Mathématiques  
Physique Générale  
Electronique  
Physique  
Chimie  
Physique  
Mathématiques Appliquées  
Mathématiques Pures  
Physique  
Electrochimie  
Electronique  
Chimie Physique  
Biologie végétale  
Physique  
Biologie animale  
Physiologie animale  
Electrotechnique I. P.  
Chimie (C. S. U. Chambéry)  
Construction mécanique (I. U. T.)  
Energétique I. U. T.  
Hydrologie  
Botanique  
Physiologie animale  
Mathématiques Appliquées (I. P. G.)  
Hydraulique I. P. G.  
Chimie I. U. T.  
Informatique I. U. T.  
Energétique I. U. T.  
Chimie I. U. T.  
Mécanique  
Mathématiques Pures  
Biologie animale  
Mathématiques Pures  
Biologie (C. S. U. Chambéry)  
Mesures Physiques I. U. T.  
Génie Electrique Electronique I. U. T.  
Génie Mécanique I. U. T.  
Techniques Statistiques quantitatives  
I. U. T.  
Géologie  
Mathématiques Appliquées  
Physique

MM.	DUSSAUD René	Mathématiques (C. S. U. Chambéry)
	BELORIZKY Elie	Physique (C. S. U. Chambéry)
Mme.	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique (C. S. U. Chambéry)
M.	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie
MM.	BLIMAN Samuel	E. I. E.
	BEGUIN Claude	Chimie Organique
	NEGRE Robert	I. U. T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	YAMADA Osamu	Physique du Solide
	NAGAO Makoto	Mathématiques Appliquées
	MAREZIO Massimo	Physique du Solide
	CHEECKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	ROZMARIN Georges	Chimie Papetière

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à :*

*Monsieur Le Professeur KUNTZMANN, qui a dirigé ce travail et qui, par son aide et ses conseils précieux, m'a permis de le mener à bien.*

*J'exprime à Monsieur le Professeur BERGE toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour m'avoir permis, en me donnant le sujet d'une deuxième thèse, d'élargir mes connaissances.*

*Je remercie très vivement Messieurs PICARD, Directeur de Recherches au C.N.R.S., et Monsieur BENZAKEN, Maître de Conférences d'avoir accepté de participer au Jury.*

*Je tiens aussi à remercier mes amis de l'Equipe de Logique pour les fructueux échanges d'idées qui ont jalonné ce travail, ainsi que Madame CURTET et toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation matérielle.*








INTRODUCTION



## INTRODUCTION

Considérons le schéma fonctionnel d'un réseau électrique. Les résistances sont symbolisées par : , les capacités par : , les connexions par des lignes qui peuvent se couper : , etc... Lorsqu'il s'agit de réaliser un tel réseau, les résistances sont des "boîtes" ayant certaines dimensions, les connexions ne peuvent pas se couper si elles sont réalisées par une technique de circuit imprimé, il faut respecter certaines gardes etc...

C'est l'ensemble des opérations qui permettent de passer d'un réseau fonctionnel à une image d'une réalisation effective de ce réseau que nous appelons : implantation.

Les systèmes logiques actuels, construits avec des technologies intégrées, se composent de boîtiers (réalisant un certain nombre de fonctions logiques) rangés sur des cartes, les cartes elles-mêmes pouvant être rangée dans des ensembles plus grands. Les connexions entre boîtiers étant réalisés par circuit imprimé (dépot d'une mince couche de métal sur un support isolant), ceci entraîne que 2 connexions ne peuvent pas se couper sur un même plan. Cette contrainte technologique a entraîné l'utilisation de circuits imprimés multi-couches.

Dans le cas de l'implantation d'un tel réseau on distingue généralement les étapes suivantes :

- 1) Décomposition du réseau en réseau réalisable sur une carte
- 2) Disposition des boîtiers du réseau sur une carte.
- 3) Répartition en couches des connexions
- 4) Tracé des connexions.

Nous étudions les problèmes de théorie des graphes issus de ces différentes étapes à l'exception du problème de la disposition des boîtiers

d'un réseau sur une carte, (nous l'abordons dans la 4<sup>ème</sup> partie du chapitre 4), dans la mesure, où il ne semble pas pouvoir se formuler d'une manière intéressante à l'aide de la théorie des graphes.

\* \* \*

Dans le chapitre 1 nous étudions certaines décompositions d'un graphe connexe en sous-graphes connexes. Ce problème intervient lorsque, ayant réalisé un réseau, il contient trop d'éléments pour être construit effectivement comme un seul réseau connexe. La contrainte est alors le nombre d'éléments d'un sous-réseau, qui est borné supérieurement, et on cherche à minimiser le nombre de passages entre sous-réseaux. En vue de résoudre ce problème nous avons introduit la notion de graphe régulièrement décomposable.

La 1<sup>ère</sup> partie est consacrée à la définition de la notion de coupure qui est un outil efficace pour l'étude des décompositions.

Dans la 2<sup>ème</sup> partie de ce chapitre nous étudions les propriétés générales d'un graphe régulièrement décomposable et nous établissons simplement les principales propriétés des graphes inarticulés. "Les propriétés des graphes inarticulés sont des théorèmes délicats", écrit BERGE ([2] p. 192); l'introduction de la notion de graphe régulièrement décomposable permet d'étudier simplement les graphes inarticulés, et notamment de retrouver le théorème de MENGER.

Dans la 3<sup>ème</sup> partie nous montrons comment l'étude de toutes les décompositions en  $k$  sous-graphes connexes (pour  $k$  petit), peut être simplifiée par l'utilisation de la notion de graphe régulièrement décomposable. Notons enfin que les graphes qui admettent certaines numérotations optimales, par exemple celle de HALES (voir DOHET [7]), sont des graphes régulièrement décomposables.

La 4<sup>ème</sup> partie est consacrée à l'établissement d'algorithmes et de programmes de décompositions optimales d'un graphe biparti. Nous avons plus particulièrement étudié les graphes bipartis dans la mesure où on peut associer à un réseau électrique un graphe biparti : les éléments élec-

triques constituant les sommets d'une classe et les équipotentielles les sommets de l'autre classe.

Enfin nous proposons dans la 5<sup>ème</sup> partie une amélioration importante de l'algorithme de MALGRANGE [4], qui permet notamment de rechercher des ensembles d'articulation minimaux d'un graphe.

\* \* \*

Dans le chapitre 2 nous étudions le problème de la décomposition d'un graphe non planaire en un nombre minimum de graphes partiels planaires. Outre son intérêt théorique ce problème a un intérêt pratique important. En effet, il correspond au problème de la réalisation des connexions d'un réseau en un nombre minimum de couches.

La notion d'épaisseur d'un graphe, définie comme étant le nombre minimum de graphes partiels planaires dont l'union est égale au graphe, a été introduite par TUTTE en 1963 [26]. On peut considérer que c'est le premier apport théorique important sur cette question, bien que le célèbre théorème de KURATOWSKI (1930), ou certaines recherches de KODRES, qui posa en 1961 le problème de la décomposition de  $K_{7,7}$  en 2 graphes partiels planaires, lui soient antérieurs.

Nous redonnons dans la 1<sup>ère</sup> partie de ce chapitre un certain nombre de résultats importants établis par TUTTE, avec parfois des démonstrations plus simples que les originales, et nous établissons des résultats nouveaux notamment les théorèmes du §1.3. qui concernent les ensembles d'articulation. (Les résultats déjà connus sont à chaque fois signalés par une référence). Le § 1.6. qui donne l'ensemble des résultats connus sur l'épaisseur de graphes particuliers et la liste des graphes t-minimaux connus, montrent bien, que l'étude de l'épaisseur des graphes n'en est qu'à ses débuts.

La 2<sup>ème</sup> partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de l'épaisseur des graphes réguliers. Les 3 premiers paragraphes sont consacrés au calcul de  $I_h$ , qui est le minimum de l'épaisseur d'un graphe h-régulier et dont la valeur est :  $I_{6q+r} = q+1$ , q et r entier  $s \geq 0, 0 \leq r \leq 5$ .

Dans le § 2.4. nous établissons une paire de bornes pour  $S_h$ , qui est le maximum de l'épaisseur d'un graphe h-régulier,

$$\underline{h+1 \leq S_{4h+r-1} \leq 2h+1}$$

et nous conjecturons que  $S_{4h+r-1} = h+1$ , h et r entiers  $\geq 0$ ,

La 3<sup>ème</sup> partie est consacrée à l'étude d'une nouvelle notion celle de graphe h-maximal, qui généralise la notion de graphe planaire maximal.

Les propriétés 1 et 2 du § 3.1. montrent l'intérêt de l'étude de ces graphes : pour l'étude des graphes t-minimaux dont la connaissance est importante pour essayer de généraliser le théorème de KURATOWSKI (voir le théorème 7 de 1.6), et pour étudier les graphes complets. Nous donnons §3.3. une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit h-maximal et nous réfutons une conjecture de HOBBS [18] : "les graphes  $K_{6t-7}$  sont t-minimaux pour  $t \geq 5$ ."

Si nous ne considérons plus l'étude de la décomposition d'un graphe non planaire en graphes partiels planaires mais l'étude d'une représentation donnée d'un graphe sur un plan le problème se ramène facilement au problème du coloriage des sommets d'un graphe.

Ceci nous a amené à étudier, dans la 2<sup>ème</sup> partie du chapitre 3, ce que nous avons appelé schéma rigide et qui est défini par un triplet (P,E,T), P étant un ensemble fini de points du plan (contacts), E un ensemble de parties de P (équipotentielles), et T l'ensemble des tracés des éléments de E, un élément de E ayant un tracé unique.

Dans la 3<sup>ème</sup> partie nous avons généralisé cette étude en considérant non plus un tracé unique par élément de E mais un nombre fini de tracés, ce qui nous a conduit à introduire la notion de schéma variable. La décomposition d'un schéma variable se ramène facilement à un problème de coloriage d'une partition des sommets d'un graphe, pour lequel nous proposons un algorithme dans la 4<sup>ème</sup> partie.

Il est important de noter que l'hypothèse de finitude, qui permet de trouver toutes les décompositions optima, est réaliste. Elle correspond par exemple, au cas d'un circuit imprimé où les connexions ne peuvent se faire que suivant un quadrillage donné.

La 1<sup>ère</sup> partie du 4<sup>ème</sup> chapitre est consacrée à l'étude et à la résolution du problème de Steiner, "relier  $n$  points du plan par un ensemble connexe de courbes simples de longueur minimum" dans le cas où la distance est la distance orthogonale  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . On ramène ce problème à la recherche d'un arbre de longueur minimum d'un graphe donné et passant par un ensemble déterminé de sommets.

La 2<sup>ème</sup> partie propose une méthode plus simple et plus efficace que celle de LERDA et MAJORANI [36] pour chercher une équipotentielle optimum entre  $n$  points d'un tableau partiellement rempli. On montre que ce problème peut se résoudre en utilisant un algorithme de recherche d'un arbre de longueur minimum d'un graphe, passant par un ensemble donné de sommets. On propose, dans la 3<sup>ème</sup> partie, un algorithme booléen pour résoudre ce problème.

L'utilisation de cet algorithme pour la résolution du problème étudié en 2<sup>ème</sup> partie a été programmé et il constitue l'un des modules de DESMAG, ensemble de programmes qui permet de réaliser automatiquement le dessin d'un masque de circuit intégré. [40].

Un grand nombre d'algorithmes permettent de déterminer si un graphe est planaire ou non. Certains d'entre eux, par exemple, celui de DEMOUCRON, PERTUISET, MALGRANGE [32] permettent d'obtenir une représentation planaire du graphe.

Dans la plupart des problèmes d'implantation les graphes seront représentés sur un quadrillage d'une manière optimale. Ce problème fait l'objet de la 4<sup>ème</sup> partie de ce chapitre. Les algorithmes proposés peuvent être considérés comme une approche globale au problème de l'implantation. En effet jusqu'à présent un processus d'implantation est coupé en



deux : affectation des éléments à certaines places puis tracé des connexions entre ces éléments. Mais, bien entendu, ces deux problèmes ne sont pas indépendants c'est pourquoi la voie ouverte par cette approche globale, semble intéressante.

TABLE DES MATIERES

-----



## CHAPITRE I

### DECOMPOSITION D'UN GRAPHE EN SOUS-GRAPHE CONNEXES

#### 1 . COUPURE D'UN ENSEMBLE FINI MUNI D'UNE RELATION BINAIRE SYMETRIQUE

- 1.1. Définitions.
- 1.2. Groupe des coupures  $G_C$ .
- 1.3. Base du groupe des coupures.

#### 2 . GRAPHE REGULIEREMENT DECOMPOSABLE

- 2.1. Définitions.
- 2.2. Décomposition.
- 2.3. Point d'articulation.
- 2.4. Une CNS.
- 2.5. Graphe inarticulé.
- 2.6. Squelette d'un graphe régulièrement décomposable.
- 2.7. Algorithme de reconnaissance d'un graphe régulièrement décomposable.
- 2.8. Quelques propriétés.

#### 3 . DECOMPOSITION D'UN GRAPHE CONNEXE EN k SOUS-GRAPHE CONNEXES

- 3.1. Borne supérieure du nombre de décompositions.
- 3.2. Propriété générale.
- 3.3. Propriété des décompositions ayant un graphe condensé régulièrement décomposable.
- 3.4. Etude pour  $k \leq 5$ .

#### 4 . RECHERCHE DES COUPURES SIMPLES

- 4.1. Graphe quelconque .
  - 4.1.1. Coupure et cocycle
  - 4.1.2. Algorithme .
- 4.2. Graphe biparti .
  - 4.2.1. Définitions.
  - 4.2.2. Coupure et ensemble d'articulation .

- 4.2.3. Algorithmes.
- 4.2.4. Programmes.
- 4.2.5. Connexité.

## 5 . RECHERCHE DES ENSEMBLES D'ARTICULATION MINIMAUX D'UN GRAPHE

- 5.1. Algorithme de recherche des sous-matrices premières.
  - 5.1.1. Treillis produit des ensembles de parties de 2 ensembles finis.
  - 5.1.2. Un sous-treillis, particulier.
  - 5.1.3. Recherche des éléments premiers.
- 5.2. Recherche des ensembles d'articulations minimaux sur un exemple.
- 5.3. Programme .

## CHAPITRE II

### DECOMPOSITION D'UN GRAPHE EN GRAPHE PARTIELS PLANAIRES

#### 1 . RESULTATS GENERAUX SUR L'ÉPAISSEUR D'UN GRAPHE

- 1.1. Définitions
- 1.2. Épaisseur d'un sous-graphe
- 1.3. Épaisseur et ensemble d'articulation
- 1.4. Épaisseur et degré
- 1.5. Bornes de l'épaisseur d'un graphe
- 1.6. Épaisseurs et graphes  $t$ -minimaux déterminés.

#### 2 . SUR L'ÉPAISSEUR DES GRAPHE REGULIERS

- 2.1. Calcul de  $I_h$ . ( $h \not\equiv 5 \pmod{6}$ ).
- 2.2. Construction de graphes réguliers à partir d'un graphe planaire
- 2.3. Calcul de  $I_h$ ,  $h \equiv 5 \pmod{6}$ 
  - 2.3.1.  $q = 0$  ou  $1$ .
  - 2.3.2. Une famille de graphes  $1$ -maximaux
  - 2.3.3. Construction d'un graphe  $(6q+5)$ -régulier d'épaisseur  $q+1$ .
- 2.4. Une paire de bornes pour  $S_h$ .

#### 3 . ETUDE DES GRAPHE T-MAXIMAUX

- 3.1. Propriétés générales
- 3.2. Propriétés des décompositions planaires
- 3.3. Une CNS.

## CHAPITRE III

### DECOMPOSITION D'UN SCHEMA EN UN NOMBRE MINIMUM DE SCHEMAS PLANAIRES

#### 1 . EQUIPOTENTIELLE.

- 1.1. Définitions .
- 1.2. Tracés simples et normaux .

#### 2 . SCHEMA RIGIDE.

- 2.1. Définition .
- 2.2. Le problème de la décomposition d'un schéma rigide.
- 2.3. Equivalence avec un problème de coloriage .

#### 3 . SCHEMA VARIABLE.

- 3.1. Définition .
- 3.2. Le problème de la décomposition d'un schéma variable .
- 3.3. Equivalence avec un problème de coloriage .

#### 4 . UN ALGORITHME BOOLEEN DE COLORIAGE D'UNE PARTITION DES SOMMETS D'UN GRAPHE .

- 4.1. Recherche des ensembles déconnectés maximaux d'un graphe.
- 4.2. Coloriage d'une partition des sommets d'un graphe .
- 4.3. Application à la décomposition d'un schéma variable .

CHAPITRE IV

SUR DES REPRESENTATIONS PARTICULIERES D'EQUIPOTENTIELLES  
ET DE GRAPHS PLANAIRES .

- 1 . RESOLUTION DU PROBLEME DE STEINER AVEC LA DISTANCE ORTHOGONALE .
  - 1.1. Définitions et propriétés élémentaires .
  - 1.2. Théorème d'existence .
  - 1.3. Résolution par la recherche d'un arbre minimum d'un graphe .
  
- 2 . UN ALGORITHME POUR RELIER N POINTS SUR UN QUADRILLAGE .
  - 2.1. Position du problème .
  - 2.2. graphe des croisements .
  - 2.3. graphe des liaisons .
  - 2.4. résolution par la recherche d'un arbre minimum d'un graphe .
  
- 3 . ALGORITHME BOOLEEN POUR LA RECHERCHE D'UN ARBRE MINIMUM PASSANT PAR DES SOMMETS DONNES .
  - 3.1. Algorithme .
  - 3.2. Simplification dans le cas d'un graphe articulé .
  - 3.3. Simplification dans le cas où la longueur d'une arête est constante.
  
- 4 . ALGORITHME DE DESSIN D'UNE REPRESENTATION PLANAIRE D'UN GRAPHE .
  - 4.1. Définitions .
  - 4.2. Placement d'un graphe sur un quadrillage .
  - 4.3. Représentation d'un graphe planaire les sommets étant disposés sur un cercle.
    - 4.3.1. Définitions .
    - 4.3.2. Algorithme par sommets .
    - 4.3.3. Algorithme par faces .
    - 4.3.4. Programme.





C H A P I T R E I

DECOMPOSITION D'UN GRAPHE EN SOUS-GRAPHE  
CONNEXES





## 1 . COUPURE D'UN ENSEMBLE FINI MUNI D'UNE RELATION BINAIRE SYMETRIQUE

### 1 . 1 . Définition

Soit  $E$  un ensemble fini,  $|E| = m$ , muni d'une relation binaire symétrique  $R(x,y), x,y \in E$ .

Une partie  $A \subset E$  est dite connexe par rapport à la relation  $R$  si la fermeture transitive forte de la restriction de  $R$  à  $A$  ne définit qu'une seule classe d'équivalence. Nous supposons par la suite que  $E$  est connexe (par rapport à  $R$ ).

On appelle coupure de  $E$  tout couple ordonné de parties complémentaires de  $E$ , que l'on notera  $(A ; \bar{A})$ . Une coupure est dite élémentaire si  $|A| = 1$ , elle est dite simple si  $A$  et  $\bar{A}$  sont connexes par rapport à  $R$ .

### 1 . 2 . Groupe des coupures : $G_C$

L'ensemble des coupures d'un ensemble  $E$ , muni de la loi  $\oplus$  définie par :

$$(A ; \bar{A}) \oplus (B ; \bar{B}) = ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) ; (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))$$

a une structure de groupe abélien :  $G_C$ .

En effet :  $\oplus$  est une loi interne qui est associative et commutative (du fait de l'associativité et de la commutativité de la différence de la somme symétriques).

$(\emptyset ; E)$  est élément neutre et chaque élément est son propre inverse :

$$(A ; \bar{A}) \oplus (A ; \bar{A}) = ((A \cap \bar{A}) \cup (\bar{A} \cap A) ; (A \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{A})) = (\emptyset ; E)$$

$G_C$  est isomorphe à l'ensemble des parties de  $E$ ,  $\mathcal{P}(E)$ , muni de l'opération différence symétrique. Nous représenterons une coupure seulement par son premier membre dans les cas où il ne risque pas d'y avoir de confusion. Les coupures  $A$  et  $\bar{A}$  seront dites complémentaires.

### 1 . 3 . Bases du groupe $G_C$

Le groupe  $G_C$  étant abélien de type fini, tous les systèmes d'élé-

ments linéairement indépendants maximaux sont des systèmes générateurs irréductibles ayant le même nombre d'éléments  $r$  rang de  $G_C$ .

PROPRIETE 1 : L'ensemble des coupures élémentaires est une base de  $G_C$ .

Démonstration : Si  $A$  est une partie de  $E$  contenant les éléments  $a_1, a_2, \dots, a_p$  on a  $A = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_p$ . Ce système est irréductible car si on enlève un élément on ne peut plus obtenir  $E$ .

PROPRIETE 2 : Les coupures simples forment un système générateur de  $G_C$ .

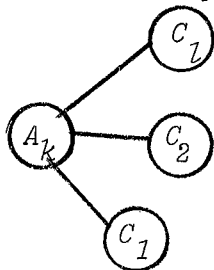
Démonstration : Soit  $(A;B)$  une coupure non simple de  $G_C$  et  $A_1, A_2, \dots, A_p$  et  $B_1, B_2, \dots, B_q$  les parties de  $E$  qui sont les composantes connexes de  $A$  et  $B$  par rapport à  $R$ . (On a  $p$  ou  $q \geq 2$  sinon  $(A;B)$  est simple).

Nous avons :

$$\bigcup_{i=1}^p A_i = A \quad \bigcup_{j=1}^q B_j = B \quad A \cup B = E \quad A \cap B = \emptyset$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad B_i \cap B_j \neq \emptyset$$

Si les coupures  $A_i$  sont simples, c'est à dire si les  $\bar{A}_i$  sont connexes, la propriété est démontrée. Supposons qu'il existe au moins un  $k$  tel que  $A_k$  ne soit pas simple et soient  $C_1, C_2, \dots, C_\ell$  les composantes connexes de  $A_k$  par rapport à  $R$ . Il existe un élément de  $A_k$  en relation avec un élément de  $C_i, \forall i$ , sinon un élément de  $C_i$  serait en relation avec un élément de  $C_j$ , puisque  $E$  est connexe, mais alors  $C_i$  et  $C_j$  seraient dans la même composante connexe de  $\bar{A}_k$  ce qui est absurde. La coupure  $(C_i; \bar{C}_i)$  est donc simple puisque  $\bar{C}_i = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_\ell \cup A_k$  est connexe.



Donc la coupure  $(A_k; \bar{A}_k)$  est égale à la disjonction des coupures simples  $(\bar{C}_1; C_1), (\bar{C}_2; C_2) \dots (\bar{C}_\ell; C_\ell)$

REMARQUE : Nous considérons  $(E; \emptyset)$  comme une coupure simple, il est donc inutile de considérer deux coupures simples complémentaires puisque  $(A; \bar{A}) \oplus (E; \emptyset) = (\bar{A}; A)$ . Donc si  $E$  a  $h$  coupures simples tout ensemble de  $\frac{h}{2}$  coupures simples contenant  $(E, \emptyset)$  et tel que 2 d'entre elles ne soient pas complémentaires est un système générateurs de  $G_C$ .

## 2 . GRAPHE REGULIEREMENT DECOMPOSABLE [5]

### 2 . 1 . Définitions

Sauf mention contraire, les notations utilisées seront celles de BERGE [2]. Le lecteur pourra se reporter à [2] pour les définitions des notions habituelles qui ne sont pas redonnées ici.

Un graphe  $G$  est défini par un ensemble de fini  $S$  (sommets) et un ensemble  $A$  de parties distinctes de 2 éléments distincts de  $S$ . Nous poserons  $|S| = n$  et  $|A| = m$ . La relation  $J(x,y)$  vérifiée lorsque  $(x,y) \in A$  est appelée relation de jointivité.  $J$  est donc symétrique et non réflexive.

On appellera coupure d'un graphe  $G$  connexe, une coupure de  $S$  muni de la relation  $J$ .

On notera  $G(S')$  le sous-graphe de  $G$  défini par  $S'$  et  $A'$ ,  $S' \subset S$  et  $A'$  étant la restriction de  $A$  à  $S'$ .

On notera  $G-A'$  le graphe partiel de  $G$  ayant  $A-A'$  ( $A' \subset A$ ) comme ensemble d'arêtes.

Nous appellerons puissance de  $S' \subset S$  le nombre de composantes connexes du sous-graphe  $G(S-S')$ .

### 2 . 2 . Décompositions

Nous considérerons deux types de décomposition d'un graphe connexe  $G$  en sous-graphes connexes.

Une décomposition de type 1 sera obtenue en supprimant un ensemble d'arêtes  $A' \subset A$ . Le résultat d'une telle décomposition est constitué de l'ensemble des sous-graphes connexes maximaux de  $G-A'$  :  $G(S_1), G(S_2), \dots, G(S_p), \dots$

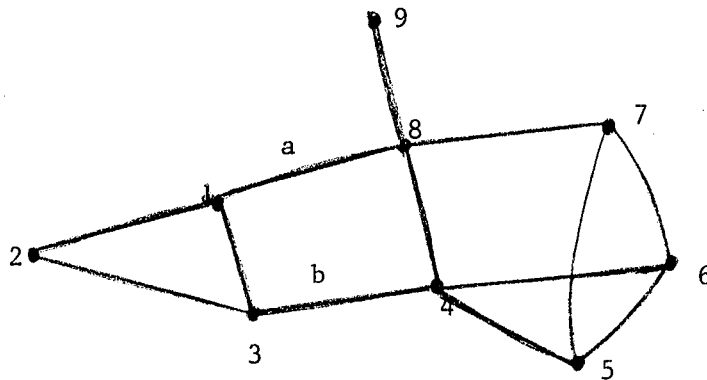
Une décomposition de type 2 sera obtenue en "éclatant" un ensemble de sommets  $S' \subset S$ . Le résultat d'une telle décomposition est constitué de l'ensemble des graphes connexes disjoints :

$G(S_i) \cup \{v u_i | v \in S_i, u \in S', v u \in A\}$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $G(S_i)$  étant l'ensemble des sous-graphes connexes maximaux de  $G(S-S')$ .

$(S_1, S_2, \dots, S_p, S')$  réalise une partition de  $S$ .

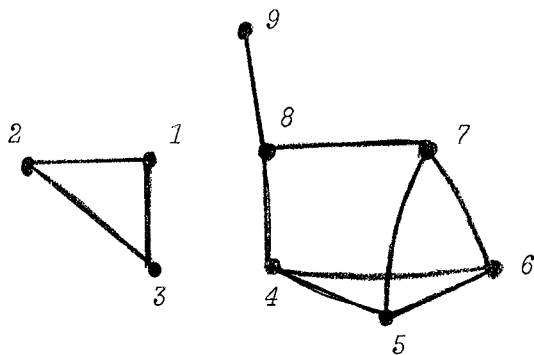
Nous appellerons graphe condensé associé à une partition  $(S_1, S_2, \dots, S_p) = S$ , le graphe ayant  $p$  sommets  $S_1, S_2, \dots, S_p$ ,  $S_i$  étant lié à  $S_j$ , s'il existe au moins une arête  $(xy) \in A$  avec  $x \in S_i$  et  $y \in S_j$ .

EXEMPLES :        Considérons le graphe  $G$  ci-dessous :



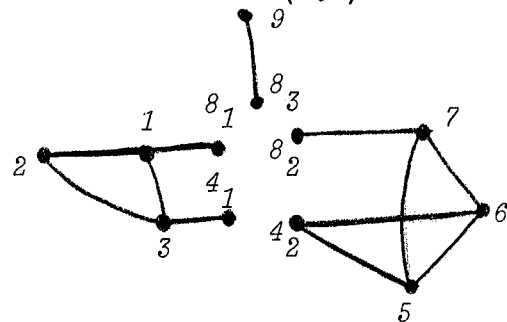
Décomposition de type 1 avec

$$A' = (a,b) :$$

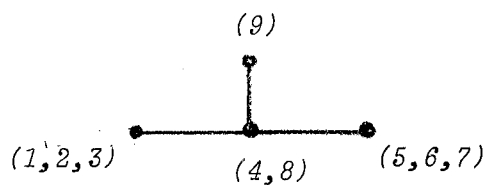


Décomposition de type 2 avec

$$S' = (4,8) :$$



Le graphe condensé associé à la partition  $(1,2,3), (5,6,7), (9), (4,8)$  est le suivant :



Un graphe connexe  $G$ , ayant  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  pour ensemble de sommets, est dit régulièrement décomposable entre  $s_1$  et  $s_n$  si on peut ordonner ses sommets de telle sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s_1; s_2 \dots s_n) \\ (s_1 s_2; \dots s_n) \\ (s_1 s_2 \dots s_{n-1}; s_n) \end{array} \right\} \quad \text{soient des coupures simples de } G.$$



Un graphe connexe  $G$  d'ordre  $n$  sera dit E-décomposable si pour tout entier  $e \in E \subset N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $G$  a un graphe partiel  $G_{q+1}$  ayant  $q+1$  composantes connexes  $G(S_i)$  avec :

$$\begin{cases} n = eq + r & r < e \\ |S_i| = e & i = 1, 2, \dots, q \\ |S_{q+1}| = r \end{cases}$$

Un graphe N-décomposable sera dit totalement décomposable.

### 2 . 3 . Point d'articulation

$s \in S$  est un point d'articulation de  $G$  si sa puissance est  $> 1$ , c'est-à-dire si  $G(S-s)$  est non connexe. Si  $s_1$  et  $s_2$  sont deux sommets qui appartiennent à des composantes connexes distinctes de  $G(S-s)$ , nous dirons que  $s$  sépare  $s_1$  et  $s_2$ .

Soient  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} = C$ , l'ensemble des points d'articulation d'un graphe connexe  $G$ . Le graphe  $G(S-C)$  ayant  $p$  composantes connexes  $G(S_1), G(S_2), \dots, G(S_p)$  on appelle squelette de  $G$  le graphe condensé associé à la partition suivante de  $S$  :

$$S = (S_1, S_2, \dots, S_p, s_1, s_2, \dots, s_k).$$

Nous utiliserons par la suite deux théorèmes classiques dont nous donnons ici les énoncés sans les démonstrations :

THEOREME 1 [2], p. 190) : Dans un graphe connexe un sommet  $s$  est point d'articulation si et seulement si il existe deux sommets  $a$  et  $b$  tels que toute chaîne reliant  $a$  et  $b$  passe par  $s$ .

THEOREME 2 [9] : Le squelette d'un graphe connexe est un arbre

2 . 4 . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit régulièrement décomposable.

THEOREME 3: Un graphe connexe G est régulièrement décomposable entre a et b si et seulement si quel que soit le sommet s, il existe une chaîne (asb) qui relie a et b en passant par s.

Démonstration La condition est nécessaire :

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que G est régulièrement décomposable entre a et b et qu'il n'existe pas de chaîne (asb),  $s \in S$ .  
Considérons la liste des coupures simples de G:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a; \dots b) \\ \dots \dots \dots \\ (a \dots s; \dots b) \\ (a \dots s \dots; b) \end{array} \right. = (H; \bar{H})$$

Il existe  $f \in H$  et  $g \in \bar{H}$  tels que  $\mathcal{J}(f, g)$  sinon G ne serait pas connexe. D'autre part dans  $G(\bar{H})$ , il existe une chaîne  $\nu$  joignant  $g$  à  $b$ . Donc il n'existe pas dans  $G(H)$  de chaîne (asf) sinon (asf) $\nu$  serait une chaîne de G joignant a et b en passant par s.

$G(H)$  est un graphe régulièrement décomposable entre a et f, ayant un nombre de sommets strictement inférieur à celui de G, et ne contenant pas de chaîne (asf).

En refaisant le même raisonnement à partir de  $G(H)$  nous arriverons ainsi à un graphe régulièrement décomposable ayant 3 sommets a, s et x les coupures simples de ce graphe sont :

$$\begin{array}{l} (a; sx) \\ (as; x) \end{array}$$

il existe donc une chaîne (asx) il y a donc contradiction.

La condition est suffisante.

Soit  $(a,b)$  un couple de sommets d'un graphe  $G$  tel que : quel que soit  $s \in S$  il existe une chaîne  $(asb)$  reliant  $a$  et  $b$  en passant par  $s$ . Nous allons montrer que  $G$  est régulièrement décomposable entre  $a$  et  $b$ .

1)  $(a; \dots b)$  est une coupure simple de  $G$ . En effet si  $G(S-a)$  est non connexe soit  $G(S_1)$  une de ses composantes ne contenant pas  $b$  alors pour tout  $s \in S_1$  il n'existe pas de chaîne  $(asb)$  (Théorème 1) (Figure 1)

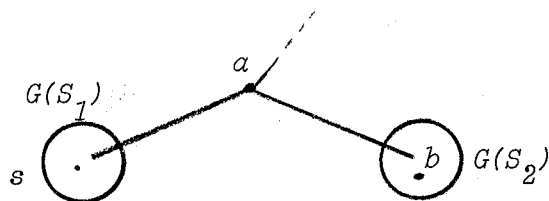


Figure 1

2) Considérons une coupure simple  $(a \dots; \dots b) = (H; \bar{H})$

S'il existe  $\alpha \in \bar{H}$  tel que :

- a)  $\alpha$  est adjacent à  $G(H)$
- b)  $G(\bar{H}-\alpha)$  est connexe

alors la coupure  $(H \cup \alpha; \bar{H}-\alpha)$  est une coupure simple de  $G$ . Supposons qu'il n'existe pas un tel sommet dans  $\bar{H}$ . Cela entraîne que tous les sommets de  $\bar{H}$  adjacents à  $G(H)$  sont des points d'articulations de  $G(\bar{H})$ . Considérons alors le squelette de  $G(\bar{H})$  un au moins de ses sommets pendants, par exemple  $S_1$ , ne contient pas  $b$ . Soit  $s \in S_1$  il n'existe pas chaîne  $(asb)$  (théorèmes 1 et 2) (figure 2).

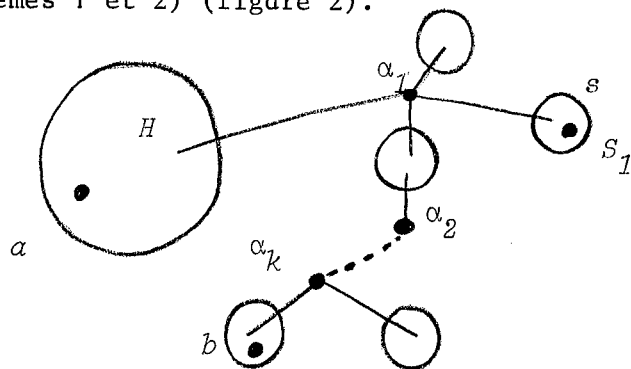


Figure 2

3) A partir de la coupure simple  $(a; \dots b)$  le raisonnement du §2 ci-dessus nous permet de construire une liste de coupures simples de  $G$  satisfaisant à la définition d'un graphe régulièrement décomposable.

COROLLAIRE 1 : Si un graphe  $G$  est régulièrement décomposable entre  $a$  et  $b$ , il a au plus deux sommets pendants qui sont éléments de  $(a,b)$

Démonstration : Supposons que  $G$  ait 3 sommets pendants  $a, b, c$ .

Il n'existe pas de chaîne  $(xay)$  quelque soient  $x, y \in S$ ,  $x \neq a$  et  $y \neq a$ . Si nous supposons que  $x=a$  par exemple, il n'existe pas de chaîne  $(aby)$  quel que soit  $y \neq b$ . Si  $y=b$  il n'existe pas de chaîne  $(acb)$ . (fig.3).

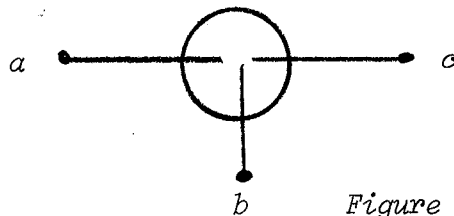


Figure 3

COROLLAIRE 2 : Si un graphe  $G$  est régulièrement décomposable entre  $a$  et  $b$  son squelette est une chaîne. De plus si  $S_1$  et  $S_2$  sont les sommets pendants de cette chaîne on a  $a \in S_1$  et  $b \in S_2$ .

Démonstration : Supposons que  $G$  ait un point d'articulation  $\alpha$  de puissance  $\geq 3$ . Il existe au moins une composante connexe  $G(S_1)$  de  $G(S-\alpha)$  qui ne contiennent ni  $a$  ni  $b$ . Dans ce cas quel que soit  $s \in S_1$  il n'existe pas de chaîne  $(asb)$  (figure 4).

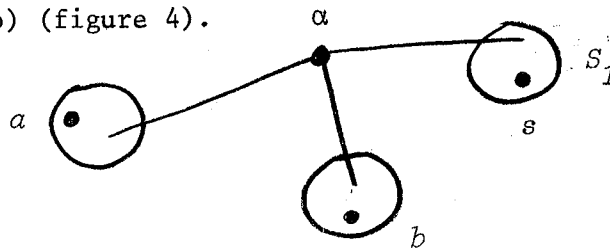


Figure 4

Supposons que  $G$  ait un squelette qui soit une chaîne et que  $a$  par exemple, ne soit pas élément d'un des sommets pendant  $S_1$  du squelette. Dans ce cas quel que soit  $s \in S_1$  il n'existe pas de chaîne  $(asb)$  (figure 5).

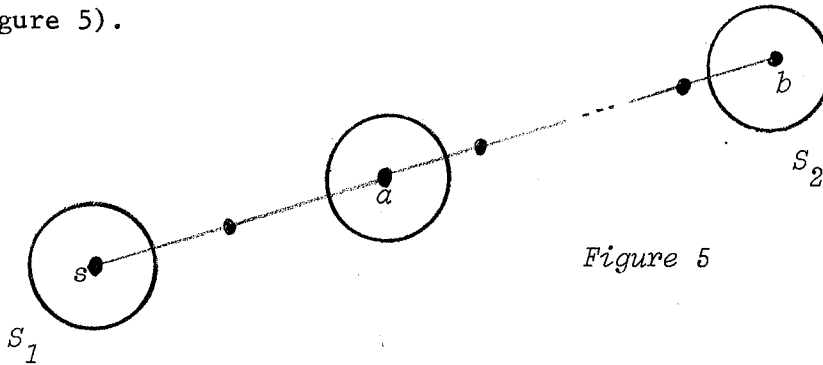


Figure 5

### 2 . 5 . Graphe inarticulé.

La notion de graphe régulièrement décomposable a été introduite pour simplifier la recherche des décompositions d'un graphe connexe en  $k$  sous-graphes connexes (cette étude fait l'objet de la 3<sup>ième</sup> partie de ce chapitre).

Nous allons montrer dans ce § que cette notion nous permet également d'étudier simplement les graphes inarticulés, c'est-à-dire les graphes connexes n'ayant aucun point d'articulation, et notamment de retrouver le théorème de MENGER ([2] p. 192), qui est le résultat de base pour l'étude des graphes inarticulés.

THEOREME 4 : Un graphe connexe est inarticulé si et seulement si il est régulièrement décomposable entre tout couple de sommets.

Démonstration : La condition est nécessaire. Si  $G$  a un point d'articulation  $C$  la coupure  $(C; \dots)$  n'est pas simple donc  $G$  n'est pas régulièrement décomposable entre  $C$  et  $x$ ,  $\forall x \in S$ ,  $x \neq C$ .

La condition est suffisante. Nous allons construire une liste de coupures simples satisfaisante à partir d'un couple quelconque  $(a, b)$ .

$(a; \dots b)$  est simple puisque le graphe est inarticulé. Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments dans le 1er membre.

Supposons que  $(H; \bar{H}) = (aa_1, \dots, a_r; \dots b)$  soit simple et posons  $G_1 = G(H)$ ,  $G_2 = G(\bar{H})$ . On note  $(b_i)_{i \in I}$  les sommets de  $\bar{H}$  adjacents à au moins un sommet de  $H$  et  $b_i \neq b \forall i \in I$ . (fig. 6). Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe aucun  $b_i$  tel que  $(Hb_i; \bar{H}-b_i)$  soit simple, c'est à dire que  $b_i$  est un point d'articulation de  $G_2$ .

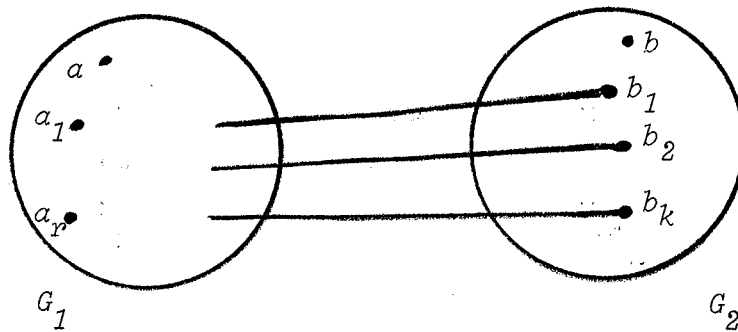


Figure 6

Considérons le squelette de  $G_2$  et soit  $S_1$  un sommet pendant de ce squelette. Il est adjacent à un sommet  $b_k$  sinon supposons que  $S_1$  soit adjacent à  $C \neq b_i, \forall i \in I$ , c'est alors un point d'articulation de  $G$  ce qui est absurde. Mais si  $S_1$  est adjacent à  $b_k$ ,  $b_k$  est un point d'articulation de  $G$  ce qui est absurde. (figure 7).

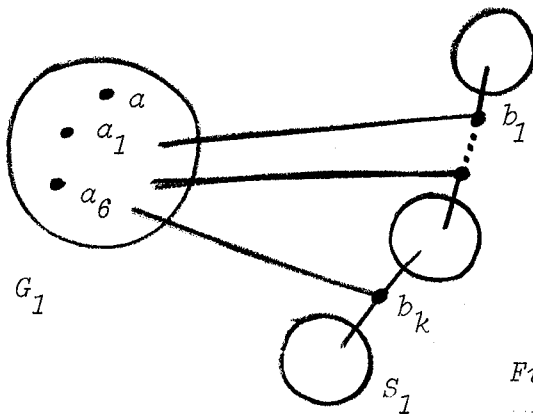


Figure 7

Nous pouvons maintenant établir sans difficulté les principales propriétés des graphes inarticulés. A titre d'exemple nous démontrons les théorèmes suivants :

THEOREME 5 : Un graphe G est inarticulé si et seulement si quels que soient 3 sommets a,b,c de S il existe une chaîne (abc)

Evident d'après les théorèmes 3 et 4.

THEOREME 6 : Par deux sommets quelconques d'un graphe inarticulé il passe un cycle.

Démonstration : Soit  $a, b \in S$ . Considérons  $c \in S$  avec  $J(a, c)$  d'après le théorème 5 il existe une chaîne  $\mu = (abc)$  donc  $\mu \cup (ac)$  est un cycle passant par a et b.

THEOREME DE MENGER : Si a et b sont deux sommets d'un graphe G inarticulé alors il existe deux chaînes disjointes reliant a et b.

Evident d'après le théorème 6.

## 2 . 6 . Squelette d'un graphe régulièrement décomposable

THEOREME 7 : Un graphe G est régulièrement décomposable entre a et b si et seulement si a) son squelette est une chaîne,  
b)  $S_1$  et  $S_2$  étant les sommets pendants du squelette on a  $a \in S_1$  et  $b \in S_2$ .

Démonstration : Le corollaire 2 établit la condition nécessaire, il ne reste qu'à démontrer que les conditions a) et b) sont suffisantes.

Considérons le squelette d'un graphe  $G$  vérifiant a) et b). Nous allons montrer que pour tout sommet  $s$  de  $S$  il existe une chaîne  $(asb)$ , ce qui entrainera (théorème 3) que  $G$  est régulièrement décomposable entre a et b.

On note  $S_1, A_1, A_2, \dots, A_k, S_2$  les sommets du squelette de  $G$  qui ne sont pas des points d'articulations de  $G$  (figure 8)

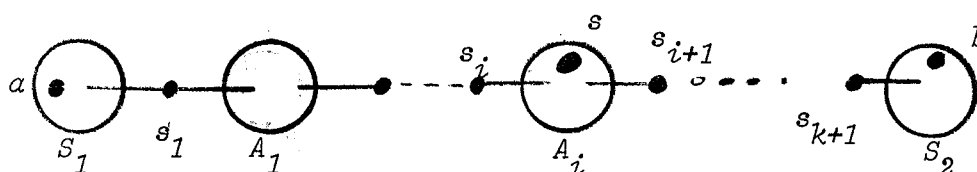


Figure 8

1) Si  $s \in S_1$  il existe une chaîne  $(asb)$ . En effet soit  $x \in S_1$  et  $x$  adjacent à  $s_1$ .  $G(S_1 - s_1)$  est inarticulé il existe donc une chaîne  $(asx)$  (théorème 5). Et on peut relier  $x$  à  $b$  par une chaîne. (Même démonstration si  $s \in S_2$ ).

2) Si  $s \in A_i$  il existe une chaîne  $(as_i) = \mu$  dans  $G(S_1 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{i-1} \cup s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_i)$  de même il existe une chaîne  $(s_{i+1}b) = \nu$  dans  $G(A_{i+1} \cup \dots \cup A_k \cup S_2 \cup s_{i+1} \cup \dots \cup s_{i+1})$ . D'autre part il existe une chaîne  $(xsy) = \eta$  dans  $G(A_i - s_i - s_{i+1})$  qui est inarticulé,  $x$  étant adjacent à  $s_i$  et  $y$  à  $s_{i+1}$ . La chaîne  $\mu \eta \nu$  relie  $a$  et  $b$  en passant par  $s$ .

## 2 . 7 . Algorithme de reconnaissance d'un graphe régulièrement décomposable

- ① Si le graphe  $G$  a plus de 2 sommets pendants il n'est pas régulièrement décomposable.
- ② Si  $G$  a un point d'articulation de puissance  $\geq 3$  il n'est pas régulièrement décomposable.



- ③ On note  $(s_i)_{i \in I}$  les points d'articulation de  $G$  et  $(S_1^i, S_2^i)$  les ensembles de sommets des composantes connexes engendrées par la suppression de  $s_i$ .

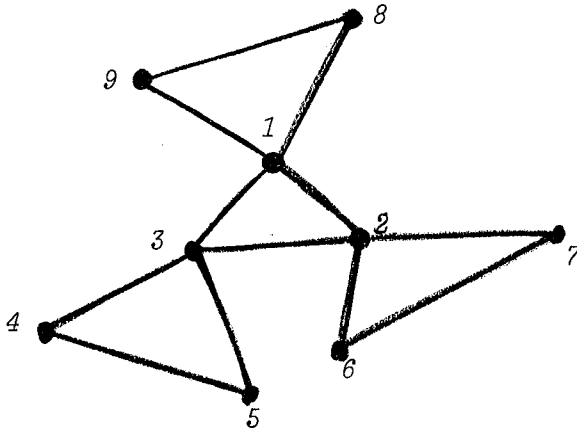
On pose :

$$A_k = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j=1 \text{ ou } 2}} S_j^i \quad B_k = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j=1 \text{ si } j=2 \\ j'=2 \text{ si } j=2}} S_{j'}^i$$

tout couple  $(a,b)$ ,  $a \in A_k$ ,  $b \in B_k$  est un couple de sommets tel que  $G$  soit régulièrement décomposable entre  $a$  et  $b$ .

- ④ ayant un couple de sommets extrêmes la démonstration du théorème 3 nous fournit une liste de coupures simples.

EXEMPLE :



Les points d'articulation sont 1,2,3 :

$$\begin{aligned} S_1^1 &= (8,9) & S_2^1 &= (2,3,4,5,6,7) \\ S_1^2 &= (6,7) & S_2^2 &= (1,3,4,5,8,9) \\ S_1^3 &= (4,5) & S_2^3 &= (1,2,6,7,8,9) \end{aligned}$$

Il n'existe aucun couple de sommets séparés par tous les points d'articulation car :

$$\bigcap_{i \in I} S_1^i = \emptyset \quad S_1^1 \cap S_2^2 \cap S_1^3 = S_2^1 \cap S_1^2 \cap S_2^3 = S_1^1 \cap S_2^2 \cap S_1^3 = \emptyset$$

2 . 8 . Quelques propriétés.

2 . 8 . 1 . Si un graphe G a une chaîne hamiltonienne, il est régulièrement décomposable. Entre les extrémités de la chaîne hamiltonienne.

Soit  $C=a_1a_2\dots a_n$  une chaîne hamiltonienne de G. Quel que soit l'entier  $r \leq n$  les sous-graphes de G engendrés par  $(a_1a_2\dots a_r), (a_{r+1}\dots a_{2r}), \dots (a_{(q+1)r}\dots a_n)$ , avec  $(q+1)r \geq n$ , sont connexes. Un graphe hamiltonien est donc totalement décomposable.

2 . 8 . 2 . Un graphe inarticulé n'est pas nécessairement totalement décomposable : le graphe de la figure 9 n'admet pas de 2-décomposition.

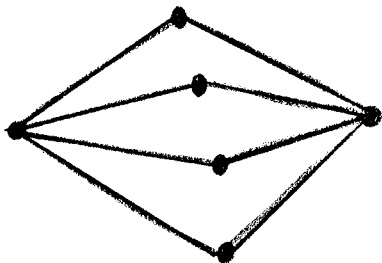


Figure 9

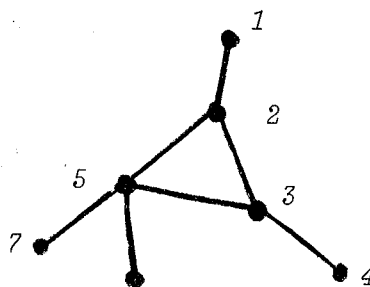
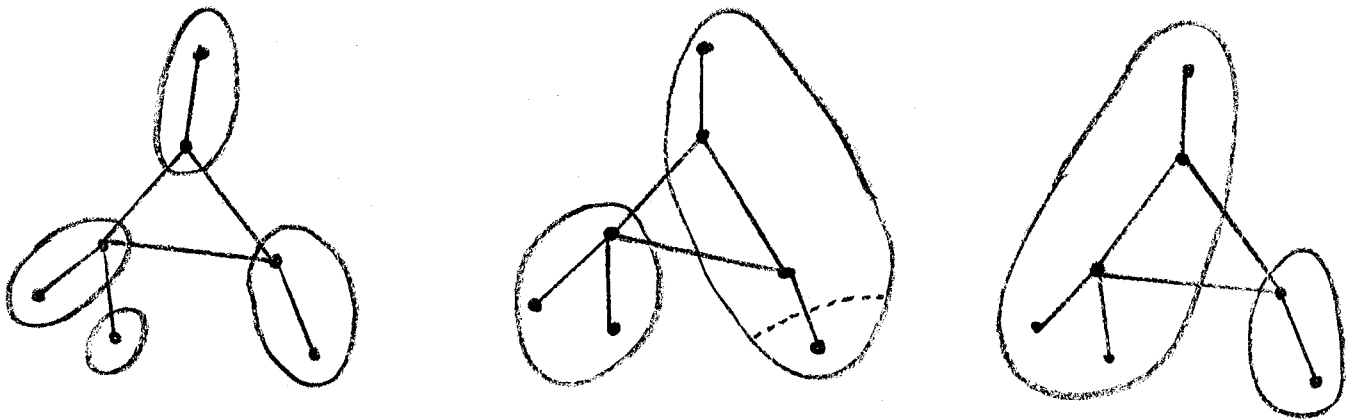


Figure 10

2 . 8 . 3 . Un graphe totalement décomposable n'est pas nécessairement régulièrement décomposable. Le graphe de la figure 10, qui est totalement décomposable (voir figure 11) a un point d'articulation de puissance 3: le sommet 5.



2-décomposition

$k=2$  (12,34,56,7)

3 et 4 décomposition

$k=3$  (123,567,4)

$k=4$  (1234,567)

5-décomposition

$k=5$ (12 567,34)

Figure 11

2 . 8 . 4 . Un graphe série-parallèle entre 2 sommets a et b est régulièrement décomposable entre a et b.

En effet si G est série-parallèle entre a et b, quelle que soit l'arête  $\alpha$  de  $A_G$  il existe une chaîne joignant a et b et contenant  $\alpha$  [1]. Donc quel que soit  $c \in S_G$  il existe une chaîne (acb), c'est à dire que G est régulièrement décomposable entre a et b (théorème 3). Le théorème 7 nous permet de retrouver que tout point d'articulation d'un graphe série-parallèle entre a et b sépare a et b, et qu'un graphe série-parallèle n'a pas de point d'articulation, de puissance  $\geq 3$ .

On obtient simplement une liste de coupures simples satisfaisant à la propriété de décomposabilité régulière en considérant les sommets à la distance 1 de a, puis 2 etc... (voir figure 12).

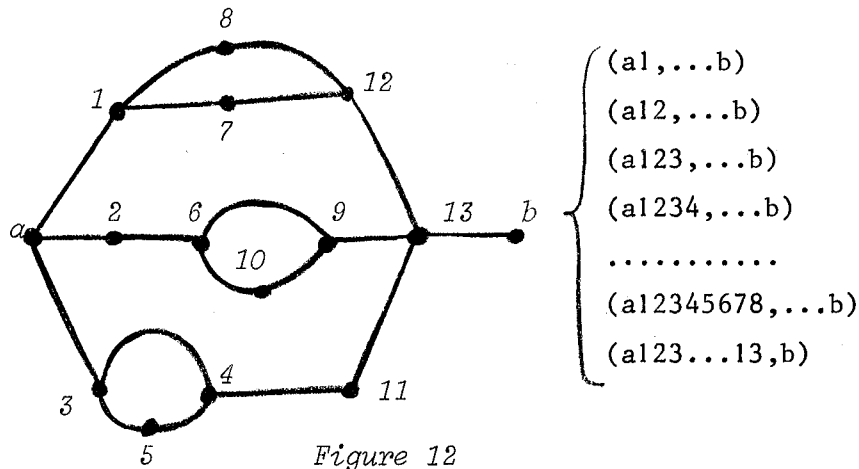


Figure 12

REMARQUE : Le graphe  $K_4$ , qui n'est pas série-parallèle, est régulièrement décomposable entre tout couple de sommets.

### 3 . DECOMPOSITION D'UN GRAPHE CONNEXE EN k SOUS-GRAPHE CONNEXES

#### 3 . 1 . Borne supérieure du nombre de décompositions

PROPRIETE 1 : Tout graphe connexe G ayant n sommets admet au moins une décomposition en k sous-graphes connexes quel que soit  $1 \leq k \leq n$ .

Démonstration : En effet G a au moins deux sommets qui ne sont pas charnières ([2] p. 192). Soit a l'un de ceux-ci :  
 (a ; S-a) est une coupure simple de G et on peut recommencer k-1 fois sur G-{a} puisque  $1 \leq k \leq n$ .

Considérons un graphe complet  $K_n$  et notons  $D_k^n$  le nombre de décompositions distinctes de  $K_n$  en k sous-graphes connexes.  $D_k^n$  est égal au nombre de k-partitions distinctes (pas par l'ordre) d'un ensemble de n objets :

$$(1) \quad D_k^n = \frac{1}{k} \sum_{q=k-1}^{n-1} C_n^q \times D_{k-1}^q$$

En effet soit  $M$  un ensemble de  $n$  objets et  $(A,B)$  une bipartition de  $M$  avec  $|A| = q$ ,  $n-1 \geq q \geq k-1$  et  $|B| = n-q$ . Il y a  $C_n^q$  façons de choisir  $A$  et  $D_{k-1}^q$  décompositions possibles de  $A$  en  $k-1$  sous-graphes connexes. Mais alors chaque  $k$ -partition sera obtenue  $k$  fois puisqu'on ne tient pas compte de l'ordre des termes.

$D_k^n$  est la borne supérieure exacte du nombre de décompositions puisqu'elle est atteinte pour un graphe complet.

Il est immédiat de vérifier que :

$$D_2^n = 2^{n-1} - 1$$

Ceci entraîne que :

$$D_3^n = \frac{1}{3} \sum_{q=2}^{n-1} C_n^q \times D_2^q = \frac{1}{3} \sum_{q=2}^{n-1} C_n^q (2^{q-1} - 1) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \sum_{q=2}^{n-1} C_n^q \cdot 2^q - \sum_{q=2}^{n-1} C_n^q \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (3^n - (1+2n+2^n)) - (2^n - (1+n+1)) \right]$$

$$D_3^n = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$$

Calculons  $D_4^n$  de la même manière :

$$D_4^n = \frac{1}{4} \sum_{q=3}^{n-1} C_n^q \times D_3^q = \frac{1}{4} \sum_{q=3}^{n-1} C_n^q \left( \frac{3^{q-1} - 2^{q+1}}{2} \right)$$

$$D_4^n = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} \sum_{q=3}^{n-1} C_n^q \cdot 3^q - \frac{1}{2} \sum_{q=3}^{n-1} C_n^q 2^q + \frac{1}{2} \sum_{q=3}^{n-1} C_n^q \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} \left\{ 4^n - (1+3n) \frac{3n(n-1)}{2} + 3^n \right\} - \left\{ 3^n - (1+2n) \frac{4n(n-1)}{2} + 2^n \right\} + \right. \\ \left. 2^n - (1+n) \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right]$$

$$D_4^n = \frac{1}{2} \left[ \frac{4^{n-1}}{3} - 3^{n-1} + 2^{n-1} - \frac{1}{3} \right] = \frac{4^{n-1} - 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 1}{6}$$

$$D_4^n = \frac{4^{n-1} - 3(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 1}{6}$$

Donnons quelques valeurs particulières :

$$D_2^{10} = 511$$

$$D_3^{10} = 9.330$$

$$D_4^{10} = 34.210$$

### 3 . 2 . Propriété générale

Toute partition de l'ensemble des sommets S, d'un graphe connexe G,  
 $P_{k+1} = \{A_1, A_2, \dots, A_{k+1}\}$  telle que  $G(A_i)$  est connexe pour  $i=1, 2, \dots, k+1$   
peut être obtenue à partir de k coupures simples de G,  $(C_i)_{i=1, 2, \dots, k}$ ,  
par la formule suivante :

$$(2) P_{k+1} = \{C_1, C_2 - C_1, \dots, C_k - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{k-1}), \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_k\}$$

Réciproquement à partir de k coupures simples  $(C_i)_{i=1, \dots, k}$  que l'on peut ordonner de telle sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 - C_1 \neq \emptyset \\ \dots \\ C_k - \bigcup_{i=1, \dots, k-1} C_i \neq \emptyset \\ \bigcap_{i=1, \dots, k} C_i \neq \emptyset \text{ et connexe} \end{array} \right.$$

on obtient une décomposition en au moins k+1 sous-graphes connexe de G.

Démonstration : Nous raisonnons par récurrence sur k, sur le graphe associé à la décomposition. Si k=1 la propriété est vraie ; en effet une coupure simple de G, différente de S, définit bien une décomposition de G en deux sous-graphes connexes.

Supposons la propriété vraie quel que soit  $p \leq k$  et soit  $P_{k+1}$  une décomposition de S satisfaisant les hypothèses de la propriété.

$$P_{k+1} = \{A_1, A_2, \dots, A_{k+1}\}.$$

On note  $G_C$  le graphe condensé associé à  $P_{k+1}$ .

Il existe au moins un élément  $A_i$  de  $G_C$  qui n'est pas point d'articulation. Supposons que ce soit  $A_{k+1}$ . La partition  $P_k = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  de  $G - \{A_{k+1}\}$  peut être obtenue à partir de k-1 coupures simples de  $G - \{A_{k+1}\}$ :  $(C_i)_{i=1, 2, \dots, k-1}$  d'après l'hypothèse de récurrence.

Si ces coupures sont également simples dans G en leur ajoutant  $A_{k+1}$  on a k coupures simples de G qui par (2) donnent  $P_{k+1}$ .

Si  $C_i$  est non simple dans G,  $A_{k+1}$  n'est adjacent qu'à des éléments de  $C_i$  donc  $(C_i, A_{k+1}, \bar{C}_i)$  est simple dans G. Si  $\ell$  est le plus petit entier

tel que  $C_\ell$  ne soit pas simple dans  $G$ , on considère la liste suivante de coupures simples de  $G$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i = C_i \quad i < \ell \\ H_\ell = A_{k+1} \\ H_{\ell+1} = A_{k+1} C_\ell \\ H_{i+1} = \begin{cases} A_{k+1} C_i & \text{si } C_i \text{ n'est pas simple dans } G \\ C_i & \text{autrement.} \end{cases} \quad i > \ell \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que l'on obtient bien  $P_{k+1}$  avec (2).

REMARQUE : Un grand nombre de suites distinctes de coupures simples satisfaisant à la condition précédente pourront donner la même décomposition. La décomposition en 3 de la figure 13 peut-être obtenue par :

$$\begin{aligned} (C_1, C_2 - C_1, \bar{C}_1, \bar{C}_2) &= (\bar{C}_2, \bar{C}_1 - \bar{C}_2, C_2 \cap C_1) = (\bar{C}_2, C_1 - \bar{C}_2, C_2 \cap \bar{C}_1) \\ &= (C_1, C_1 - \bar{C}_1 \cap C_2) = (C_1, C_2 \cap \bar{C}_1, \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \end{aligned}$$

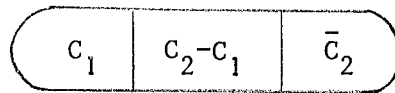


Figure 13

Pour  $k > 2$  il est difficile de savoir si deux suites distinctes conduiront aux mêmes décompositions ce qui fait que l'utilisation de (2) est rapidement limitée par  $k$  et le nombre de coupures simples de  $G$ .



3 . 3 . Propriété des décompositions ayant un graphe condensé régulièrement décomposable.

k coupures simples  $(C_i)_{i=1, \dots, k}$  d'un graphe G forment une chaîne si on peut les ordonner totalement par inclusion.

Toute décomposition en k+1 sous-graphes connexes ayant un graphe condensé régulièrement décomposable peut être obtenue par :

$$(3) \quad P_{k+1} = \{C_1, C_2 - C_1, \dots, C_k - C_{k-1}, \bar{C}_k\}$$

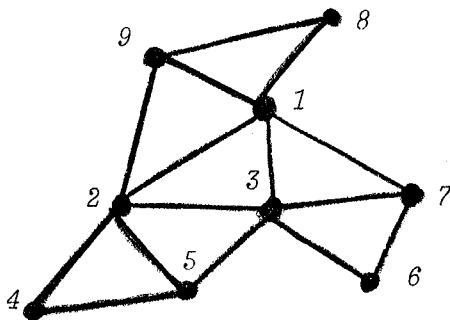
$(C_i)_{i=1, \dots, k}$  étant une chaîne de coupures simples

$$\bigcup_{i=1, \dots, k} C_i \neq S.$$

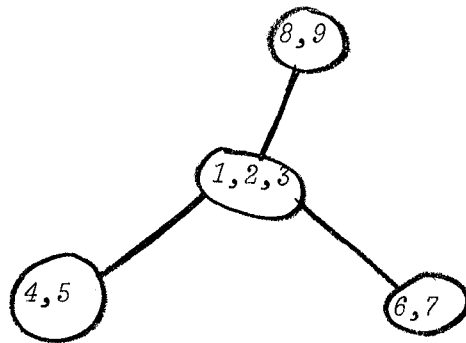
Démonstration : Si le graphe condensé a pour coupures simples :

$$\begin{cases} (a, \dots, b) \\ (aa_1, \dots, b) \\ \dots \\ (aa_1 \dots a_{k-1}, b) \end{cases} \quad \text{on prend} \quad \begin{cases} C_1 = a \\ C_2 = aa_1 \\ \dots \\ C_k = aa_1 \dots a_{k-1} \end{cases}$$

REMARQUE : Un graphe régulièrement décomposable peut conduire à une décomposition n'ayant pas un graphe condensé associé régulièrement décomposable (figure 14).



G est sans point d'articulation



G\_c a un point d'articulation de puissance = 3

Figure 14

La condition pour une suite de coupures simples d'être une chaîne est plus restrictive que la condition de la propriété générale (2). D'autre part il n'y a pas de test de connexité à faire, sur le dernier terme qui est égal à  $\bar{C}_k$  : ces raisons font que l'étude des décompositions ayant un graphe condensé associé régulièrement décomposable est plus simple que l'étude des autres décompositions.

Nous sommes ainsi amenés à scinder le problème initial en deux problèmes :

PROBLEME 1) étude des décomposition ayant un graphe condensé régulièrement décomposable.

PROBLEME 2) étude des autres décompositions.

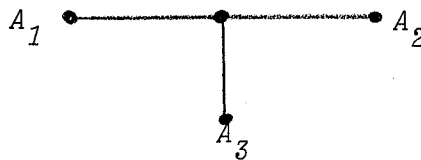
3 . 4 . Etude pour  $k \leq 5$  du problème 2.

Il est inutile de chercher tous les graphes connexes de  $k$  sommets non régulièrement décomposables. En effet les coupures simples d'un graphe partiel  $G'$  d'un graphe  $G$  sont des coupures simples de  $G$ .

Le seul arbre régulièrement décomposable étant la chaîne, on part d'un arbre à  $k$  éléments, différent de la chaîne, et on construit les graphes minimaux au sens des arêtes non régulièrement décomposable en lui ajoutant des arêtes.

k=3 Le seul arbre ayant 3 éléments est la chaîne : donc il n'y a pas de décomposition de type 2). Toutes les décompositions en 3 sous-graphes connexes d'un graphe connexe s'obtiennent par l'expression (3).

k=4 Le seul arbre différent de la chaîne est :



Il est immédiat de vérifier que c'est le seul graphe non régulièrement décomposable ayant 4 sommets.

Pour obtenir les décompositions ayant un graphe condensé isomorphe au graphe ci-dessus il suffit d'étudier les ensembles de 3 coupures simples  $A_1, A_2, A_3$  telles que :

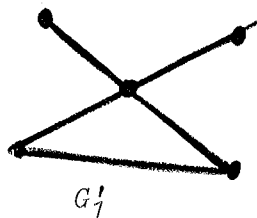
$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset \text{ et } A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq S_G$$

Les  $A_i$  n'étant pas liés entre eux.

k=5 Deux arbres sont différents de la chaîne,  $G_1$  et  $G_2$  :



un autre graphe minimal de 5 sommets est non régulièrement décomposable,  $G'_1$  :



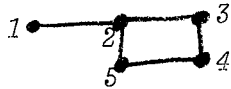
On peut encore étudier directement le problème 2 :

- On cherche 4 coupures simples disjointes 2 à 2, ayant une union différente de  $S_G$  et telles que 2 d'entre elles au plus soient liées ( $G_1$  et  $G'_1$ )

- On cherche 4 coupures simples, 3 d'entre elles étant disjointes 2 à 2 et non liées, la dernière étant liée à une seule des 3 autres et la contenant ( $G_2$ )

k=6 Il existe 5 arbres non régulièrement décomposables et conduisant à de nombreux graphes non régulièrement décomposables. La méthode devient lourde.

EXEMPLE : Nous cherchons toutes les décompositions en 3 sous-graphes connexes de G :



Liste des coupures simples distinctes et non complémentaires de G :

(1,2345) (3,1245) (4,1235) (5,1234) (12,345) (34,125) (45,123)

L'un des sous-graphes connexes de toute décomposition contient le sommet 1 et a au plus 3 sommets, ces sous-graphes sont engendrés par 1, 12, 123, 125. Dans chaque cas il ne reste plus qu'à partager le reste en 2 sous-graphes connexes. On a les chaînes des coupures simples suivantes :

(1,12) (1,123) (1,125) (1,1234) (1,1235) (1,1245) (12,123) (12,125)  
 (12,1234) (12,1235) (12,1245) (123,1234) (123,1235) (125,1235)

On obtient ainsi 11 décompositions contenant toutes les décompositions de G en 3 sous-graphes connexes :

(1,2,345)	(3,4,125)	(4,5,123)	(5,34,12)
(1,23,45)	(3,45,12)	<u>(4,35,12)</u>	
(1,25,34)			
(1,235,4)			
(1,234,5)			
(1,245,3)			

La décomposition soulignée est une décomposition en 4 sous-graphes connexes : G a 10 décompositions distinctes en 3 sous-graphes (Pour les trouver il suffit de faire un test de connexité sur  $C_2 - C_1$ ,  $C_1$  et  $\bar{C}_2$  étant connexes).

## 4 . RECHERCHE DES COUPURES SIMPLES

### 4 . 1 . Graphe quelconque

#### 4 . 1 . 1 . Coupure et cocycle.

Rappelons qu'un cocycle d'un graphe  $G$  est un sous-ensemble de  $A_G$  tel que sa suppression rend non connexe le graphe  $G$  et minimal pour cette propriété.

Il est immédiat de vérifier que cette définition est équivalente à la suivante :

$L \subset A_G$  est un cocycle de  $G$

si et seulement si le graphe  $G - \{L\}$  a exactement 2 composantes connexes.

PROPRIÉTÉ 1 : On peut associer à un cocycle deux coupures simples complémentaires, ceci d'une manière unique. Réciproquement à deux coupures simples complémentaires on peut associer un cocycle unique.

Démonstration : Si  $(A, \bar{A})$  et  $(\bar{A}, A)$  sont deux coupures simples complémentaires, l'ensemble des arêtes  $\omega(A)$  qui ont une extrémité dans  $A$  et l'autre dans  $\bar{A}$  est un cocycle. De telles arêtes existent sinon  $G$  ne serait pas connexe. La suppression de  $\omega(A)$  engendre les 2 sous-graphes connexes  $G(A)$  et  $G(\bar{A})$ .

Cette propriété permet de ramener la recherche des coupures d'un graphe à celle des cocycles.

#### 4 . 1 . 2 . Un algorithme booléen

De nombreux algorithmes existent pour rechercher les cocycles d'un graphe. Rappelons rapidement un algorithme classique exposé dans [9].

Si on appelle arbre complet d'un graphe  $G$  un sous-graphe de  $G$  qui est un arbre ayant  $S_G$  pour ensemble de sommets on a la propriété suivante :

PROPRIETE 2 : Un cocycle est un ensemble minimal d'arêtes contenant une arête de chaque arbre complet du graphe.

Démonstration : Un tel ensemble L d'arêtes fait perdre sa connexité au graphe lorsqu'on le supprime (sinon il existerait un arbre de G n'ayant aucune arête dans L). Aucun des sous-ensembles de L ne possède cette propriété : puisque dans ce cas il y a un arbre au moins pour lequel on enlève aucune arête le graphe reste connexe.

ALGORITHME : On représente chaque arbre complet du graphe par une somme de lettres, chacune représentant une arête. On fait le produit booléen des sommes ainsi obtenues pour tous les arbres complets. Après suppression des multiples chaque monôme restant définit un cocycle.

Pour obtenir les arbres complets d'un graphe on peut utiliser par exemple un algorithme d'énumération [9] ou l'algorithme de WANG [12]

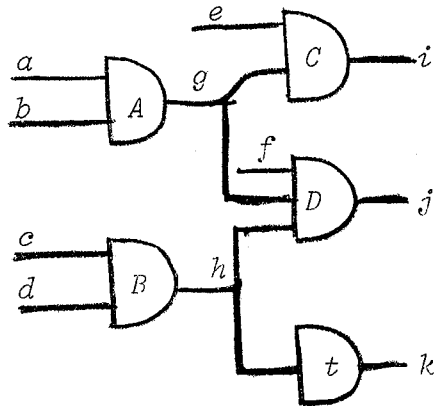
## 4 . 2 . Graphe biparti

### 4 . 2 . 1 . Définitions

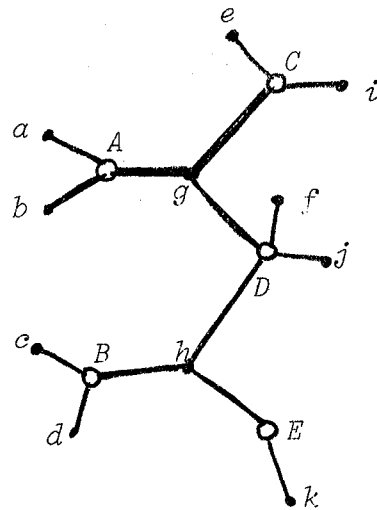
Un graphe G est biparti si l'ensemble des sommets  $S_G$  est bipartitionné en (X,M) de telle sorte que toute arête ait une extrémité dans X et l'autre dans M.

Par analogie avec les réseaux logiques et électriques nous appellerons noeuds les éléments de X et étoiles les éléments de M. Un réseau logique peut être représenté simplement par un graphe biparti les éléments du réseau (opérateurs logiques) étant des étoiles et des interconnexions entre éléments étant les noeuds.

EXEMPLE :



*réseau d'opérateurs*

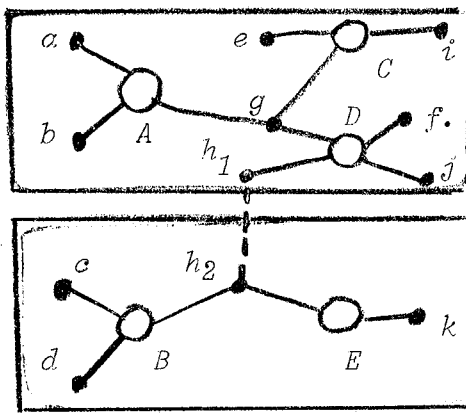


$$X = (a,b,c,\dots,k)$$

$$M = (A,B,C,D,E)$$

*graphe biparti*

Nous pouvons remarquer que dans le cas d'un réseau représenté par un graphe biparti les décompositions qui nous intéresseront seront celles correspondant à un éclatement d'un ensemble d'articulation. L'ensemble d'articulation étant constitué exclusivement de noeud car l'éclatement d'une étoilé (opérateur) est impossible physiquement et la suppression d'arête rend plus difficile les communications entre sous-réseaux. En reprenant l'exemple précédent une décomposition possible en deux sous-graphes connexes serait :



Une coupure d'un graphe biparti sera une coupure de l'ensemble  $M$  muni de la relation binaire symétrique  $R$  : deux étoiles sont en relation s'il existe au moins un noeud adjacent à ces deux étoiles.

4 . 2 . 2 . Coupure et ensemble d'articulation.

Considérons une coupure simple  $(A, \bar{A})$  d'un graphe biparti connexe  $G(X, M)$  et notons  $F$  l'ensemble des noeuds adjacents à au moins une étoile de  $A$  et à au moins une de  $\bar{A}$ .  $F$  est non vide puisque  $G$  est connexe.  $F$  est un ensemble d'articulation de  $G$  en effet, la suppression de  $F$  décompose  $G$  en deux sous-graphes connexes l'un contenant  $A$  l'autre  $\bar{A}$ , donc :

PROPRIETE 3 : A une coupure simple d'un graphe biparti on peut associer un ensemble d'articulation unique  $F \subset X$ .

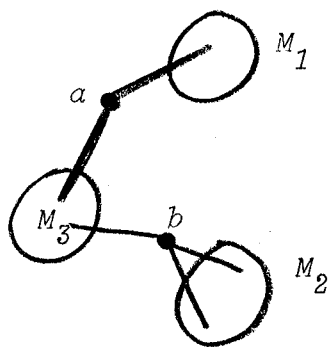
La réciproque est fausse car un ensemble d'articulation  $F \subset X$  peut être de puissance  $\geq 3$ . Dans ce cas nous pouvons associer un ensemble de coupures simples à un tel ensemble d'articulation.

En effet soit  $F = \{a, b, \dots, c\} \subset X$  un ensemble d'articulation de  $G$ . On note  $M_1, M_2, \dots, M_p, p \geq 3$ , la partition de  $M$  engendré par la suppression de  $F$  dans  $G$ . Il existe au moins 2 bipartitions de  $\{M_1, M_2, \dots, M_p\}$   $(M'_1, \bar{M}'_1)$  et  $(M'_2, \bar{M}'_2)$  telles que les graphes  $G(M'_1)$  et  $G(\bar{M}'_1)$  soient connexes. En effet considérons le graphe condensé  $G_C$  associé à la décomposition



$\{M_1, M_2, \dots, M_p\}$  c'est un arbre. Il a donc au moins 2 sommets pendants  $M_1$  et  $M_2$  par exemple, dans ce cas  $(M_1, M_2 \dots M_p)$  et  $(M_2, M_1 M_3 \dots M_p)$  sont deux coupures simples de  $G$  qui ne sont pas complémentaires si  $p \geq 3$ .

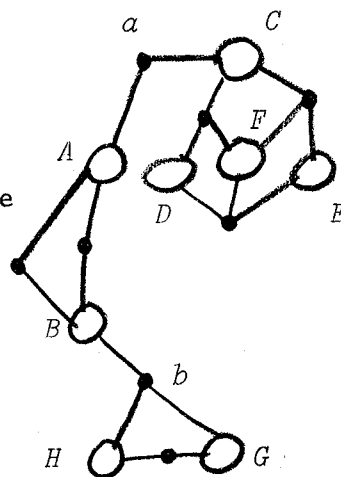
EXEMPLE :



$G_c :$

$M_1 = (C, D, E, F)$   $M_2 = (G, H)$   
 $M_3 = (A, B)$   
 $F = \{a, b\}$   
 $(M_1, M_2 M_3)$   
 $(M_2, M_1 M_3)$

$\left. \begin{array}{l} (M_1, M_2 M_3) \\ (M_2, M_1 M_3) \end{array} \right\}$  sont 2 coupures simples de  $G$



$G :$

REMARQUE S: 1) Un graphe biparti connexe  $G(X, M)$  avec  $|M| \geq 2$  a au moins un ensemble d'articulation inclus dans  $X$ . Il suffit de considérer l'ensemble des noeuds adjacents à une étoile quelconque et qui ne sont pas pendants. (Ce résultat est faux dans le cas de graphe quelconque,  $K_n$  n'a pas d'ensemble d'articulation).

2) Un graphe biparti sera donné par

$X = \{a, b, \dots, l\}$  ensemble des noeuds

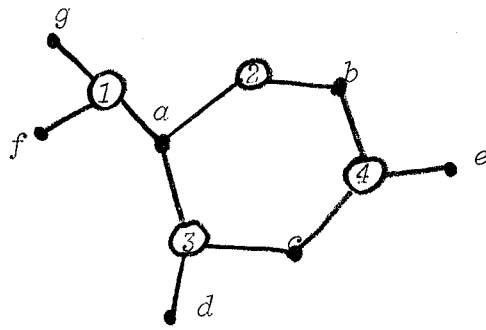
$M = \{1, 2, \dots, m\}$  ensemble des étoiles

$L = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$   $X_i$  étant l'ensemble des noeuds adjacents à l'étoile  $i$ . Cette représentation a deux avantages :

premièrement elle est souvent utilisée par les logiciens pour décrire

un réseau, deuxièmement elle se prête particulièrement bien au traitement par ordinateur en remplaçant  $L$  par une matrice booléenne ayant  $M$  pour indices de ligne,  $X$  pour indices de colonne et en écrivant  $X_i$  dans la ligne  $i$ .

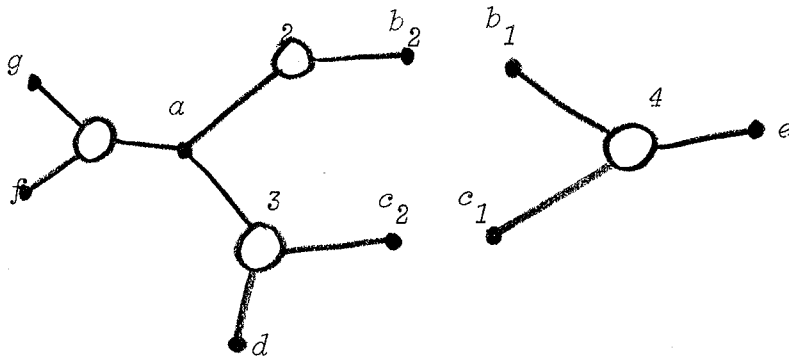
EXEMPLE :



$$L = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

#### 4 . 2 . 3 . Algorithmes

On supprime tous les noeuds pendants dans  $L$ ,  $L$  est alors le tableau des coupures élémentaires  $c$  et des ensembles d'articulation associés minimaux  $a_c$ . En effet il faut nécessairement fractionner tous les noeuds de  $a_c$  pour obtenir une décomposition du graphe ayant  $c$  pour sous-graphe connexe. Le fractionnement minimum est obtenu en dédoublant un noeud  $a$  de  $a_c$  en  $a_1$  pour  $c$  et  $a_2$  pour  $\bar{c}$ . En reprenant l'exemple précédent nous voyons qu'il est nécessaire de dédoubler  $b$  et  $c$  pour obtenir une décomposition de  $G$  ayant un sous-graphe connexe réduit à l'étoile 4 :



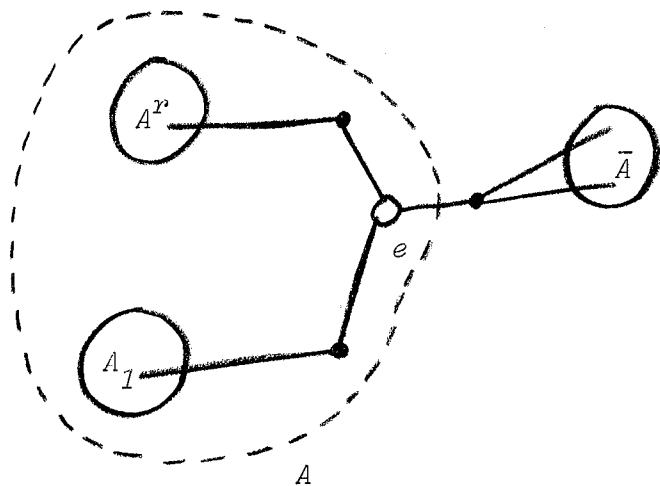
Un algorithme qui consisterait à générer toutes les coupures d'un graphe à partir de ses coupures élémentaires puis à ne conserver que les coupures simples et inutilisable. En effet une telle méthode nécessite le calcul de  $2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$  coupures et on doit effectuer  $2 \times 2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$  tests de connexité.

1<sup>er</sup> ALGORITHME Il est basé sur la propriété suivante :

PROPRIETE 4 : Toute coupure simple est la réunion de coupures simples disjointes inférieures et d'une étoile à laquelle elles sont toutes jointives.

Démonstration : Soit  $(A, \bar{A})$  une coupure simple de  $G(X, M)$ . Il existe au moins une étoile  $e \in A$  qui est liée à  $\bar{A}$ . La suppression de  $e$  engendre une partition  $A_1, A_2, \dots, A_r$  ( $r \geq 1$ ) de  $A$ ,  $(A_i, \bar{A}_i)$  est une coupure simple de  $G$  inférieure à  $(A, \bar{A})$ , c'est à dire  $A_i \subset A$ . Les coupures  $A_i$  sont disjointes, c'est à dire  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$  et l'on a :

$$A = \left\{ \bigcup_{i=1}^r A_i \cup e \right\}$$



Si  $X_i \cap X_j \neq \emptyset$  il existe une coupure  $(ij, \dots)$  ayant pour ensemble d'articulation associé :

$$X_i \cup X_j - \{\text{les noeuds adjacents uniquement à } i \text{ ou } / \text{ et } j\}$$

On obtient ainsi toutes les coupures séparant un sous-graphe connexe de 2 étoiles, on élimine celles qui ne sont pas simples en faisant un test de connexité sur le 2<sup>ème</sup> membre.

Plus généralement, pour obtenir les coupures simples ayant  $k$  étoiles dans leur premier membre on associe  $q$  coupures simples disjointes  $(C_i)_{i=1, \dots, q}$ , déjà obtenues ayant  $i_1, i_2, \dots, i_q$  éléments et une coupure élémentaire  $c_e$  de telle sorte que le sous-graphe ayant pour étoiles

$$\left\{ \bigcup_{i=1}^q C_i, c_e \right\} \text{ soit connexe.}$$

Cette méthode, étant assez difficile à mettre en oeuvre nous avons programmé l'algorithme suivant.

2<sup>ème</sup> ALGORITHME On complète le tableau L en cherchant comme précédemment les coupures séparant un sous-graphe connexe de 2 étoiles mais on n'élimine pas celles qui ne sont pas simples. A partir de ces coupures ayant 2 étoiles dans leur premier membre et des coupures élémentaires on forme celles ayant 3 étoiles dans leur premier membre et qui engendrent un sous-graphe connexe etc...

Si  $|M| = m = 2p+1$  on s'arrête lorsque l'on a obtenu les coupures ayant  $p$  étoiles dans leur premier membre.

Si  $m = 2p$  on s'arrête lorsque l'on a obtenu les coupures ayant  $p$  étoiles dans leur premier membre et contenant une même étoile.

Lorsque la liste des coupures et de leur ensemble d'articulation associé est complète, on élimine les coupures non simples en faisant un test de connexité sur  $\bar{A}$  si A est dans la liste.

En notant  $M_i$  l'ensemble des étoiles adjacentes, au noeud  $i$  et  $L_i$  la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $L$  on a :

① On supprime les noeuds pendants ( $|M_i| = 1$ ) et on forme le tableau  $T_1$  des coupures  $C_i$  ayant 1 étoile dans leur premier membre et de leur ensemble d'articulation associé  $E_i = L_i - \{\text{les noeuds pendants adjacents à l'étoile } i\}$

② On forme les coupures ayant 2 étoiles dans leur premier membre et leur ensemble d'articulation associé de la manière suivante :

Si  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$  et  $E_{ij} = E_i \cup E_j - K \neq \emptyset$  avec

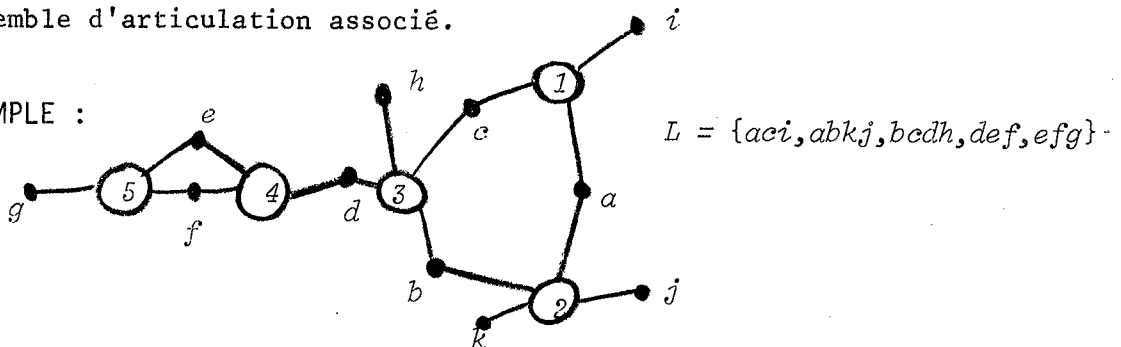
$K = \{\ell \in E_i \cup E_j \mid M_\ell \subset C_i \cup C_j\}$  alors on ajoute la coupure  $C_i \cup C_j$  ayant  $E_{ij}$  pour ensemble d'articulation associé : on obtient ainsi le tableau  $T_2$ .

③ A partir de  $T_{h-1}$  et de  $T_1$  on forme  $T_h$  en faisant comme en ② . On s'arrête à  $T_p$  si  $m = 2p+1$  et aux coupures de  $T_p$  contenant l'étoile 1 si  $m = 2p$ .

④ Si  $A$  est une coupure de l'un des  $T_i$  on la garde si  $G(\bar{A})$  est connexe sinon on la supprime.

En considérant les coupures simples ainsi obtenues et leurs complémentaires on obtient toutes les coupures simples du graphe ainsi que leur ensemble d'articulation associé.

EXEMPLE :



$T_1$		$T_2$	
$C_i$	$E_i$	$C_i$	$E_i$
1	ac	12	abc
2	ab	<del>13</del>	<del>abcd</del>
<del>3</del>	<del>bcd</del>	<del>23</del>	<del>abcd</del>
<del>4</del>	<del>def</del>	<del>34</del>	<del>bcdef</del>
5	ef	45	def

REMARQUE : Comme nous n'utilisons que  $T_{h-1}$  et  $T_1$  pour obtenir  $T_h$  si nous cherchons uniquement les coupures simples ayant certaines propriétés "régulières", après avoir formé  $T_h$  on peut éliminer toutes les coupures de  $T_{h-1}$  ne satisfaisant pas ces propriétés. Une propriété étant dite "régulière" si étant vérifiée pour une coupure  $(C; \bar{C})$  elle l'est pour toute coupure  $(C'; \bar{C}')$  telle que  $C' \subset C$ . (Il est immédiat de vérifier que la propriété pour une coupure d'avoir un ensemble d'articulation associé ayant un nombre minimum de noeuds n'est pas régulière).  
 Dans le cas de la décomposition d'un réseau de circuits intégrés en plaquettes de circuits imprimé, ces plaquettes peuvent supporter  $k$  circuits intégrés, on cherchera donc les coupures simples de  $k$  éléments ayant un ensemble d'articulation associé avec un nombre minimum d'éléments pour minimiser le nombre de connexions entre plaquettes.

#### 4 . 2 . 4 . Programmes

La procédure ARTI1 donne toutes les coupures simples d'un graphe connexe avec leurs ensembles d'articulations associés. La procédure ARTI2 donne : soit la première coupure simple ayant un nombre maximum d'étoiles parmi celles ayant un ensemble d'articulation associé ayant un nombre minimum de noeuds  $E(\frac{m}{2})$  étoiles ayant un ensemble d'articulation associé

ayant un nombre minimum de noeuds.

Les programmes sont écrits en ALGOL. ARTI1 à 1000 unités syntaxiques, ARTI2 en a 1067. Le nombre de noeuds du graphe est limité à 36 (nombre de bits d'une mémoire du 7 044) mais on peut facilement généraliser tous les programmes en considérant plusieurs mémoires en parallèles. Le nombre d'étoiles est limité à 100. On utilise les procédures en MAP suivantes :

entier procedure OU(A,B) ; valeur A,B ; entier A,B ;  
commentaire : union logique de A et B;

entier procedure ET(A,B);valeur A,B;entier A,B;  
commentaire: intersection logique de A et B;

entier procedure DJ(A,B);valeur A,B;entier A,B;  
commentaire: disjonction de A et B ;

entier procedure TD(A,I);valeur A,I;entier A,I;  
commentaire: translation de I positions vers la droite de A;

entier procedure TG(A,I);valeur A,I;entier A,I;  
commentaire: translation de I positions vers la gauche de A;

entier procedure BIT(A,I);valeur A,I; entier A,I;  
commentaire: I<sup>ième</sup> bit de A;

entier procedure POIDS (A);valeur A;entier A;  
commentaire: nombre de digits de A;

procedure NULTAB(A,K);valeur K; entier K; entier tableau A;  
commentaire: cette procedure annule les K premières mémoires de A;

procedure ARTI1 (F,M,N,AD,VA,H,TROP);valeur F,M,N;entier M,N,H;  
entier tableau F,AD,VA; étiquette TROP;  
commentaire: cette procedure calcule et range dans le tableau AD de H mémoire les premiers membres des coupures simples et dans VA leur ensemble d'articulation associé du graphe biparti connexe de M étalés et N noeuds

défini par le tableau F. On va en TROP si  $H > 1.000$  ;

procedure ARTI2(F,M,N,HS,AHS,TEST,TROP); valeur F,M,N; entier M,N,HS,AHS;  
entier tableau F; booleen TEST ; etiquette TROP;

commentaire: HS contient le premier membre de la coupure simple ayant un nombre maximum d'étoiles parmi celles ayant un ensemble d'articulation associé ayant un nombre minimum de noeuds si TEST est vrai, sinon HS contient le premier membre de la coupure simple ayant M/2 étoiles et un ensemble d'articulation associé minimum. AHS contient l'ensemble d'articulation associé à HS. On va en TROP si un tableau  $T_i$  a plus de 1000 éléments. Le graphe est représenté comme en ARTI1;

La procédure DECP décompose un graphe biparti connexe en 2 sous-graphes bipartis connexes en dédoublant les noeuds de l'ensemble d'articulation associé à une coupure simple donnée :

procedure DECP(F,M,N,HS,F1,M1,N1,F2,M2,N2); valeur F,M,N,HS;  
entier M,N,M1,N1,M2,N2,HS; entier tableau F,F1,F2;

commentaire : le graphe connexe (F,M,N) est décomposé en  $(F_1, M_1, N_1)$  et  $(F_2, M_2, N_2)$ , deux sous-graphes connexes,  $F_1$  ayant HS pour étoiles et  $F_2, M-HS$ . HS étant une coupure simple de F ;

#### 4 . 2 . 5 . Connexité

Si  $A = (a_{ij})$  est la matrice associée à un graphe G,  $a_{ij}=1$  si les sommets i et j sont adjacents,  $a_{ij}=0$  autrement, et  $a_{ii}=1$  on peut chercher les composantes connexes de G en formant la fermeture transitive de A soit, ce qui est beaucoup plus rapide, procéder par fusion de lignes de A.

Si deux lignes de A ont une intersection non vide, on remplace l'une de ces deux lignes par leur union et on supprime l'autre. On recommence sur la nouvelle matrice ainsi formée. Quand le processus s'arrête il reste des lignes chacune correspondant à une composante connexe de G, les éléments de cette composante étant indiqués par les 1 présents dans la ligne.



Nous avons programmé cette méthode dans le cas d'un graphe biparti en utilisant la représentation déjà définie. Le programme écrit en ALGOL a 265 unités syntaxiques et utilise les procédures en MAP : OU, ET et NULTAB.

procédure COMCNXE(F,M,IC,NC, SORT1); valeur M ; entier M,NC;

entier tableau F,IC ; étiquette SORT1 ;

commentaire : cette procédure range dans le tableau F entre

IC(I) et IC(I+1) la  $i^{\text{ième}}$  composante connexe du graphe biparti (F,M) ayant NC composantes connexes. On va en SORT1 si  $NC > 100$  ou si l'une des composantes a plus de 100 étoiles ;

Pour éliminer les coupures non simples obtenus par l'algorithme 2 de 2.3. il suffit de savoir si un graphe donné est connexe ou non.

Nous avons écrit une procédure prenant la valeur vrai si le graphe est connexe, faux autrement. Elle est basée sur la même méthode que la procédure précédente et a 120 unités syntaxiques. Elle utilise les procédures en MAP : ET, OU.

booleen procédure CONEX(F,M); valeur F,M ; entier M ; entier tableau F;

commentaire : CONEX est vrai si (F,M) est connexe, faux autrement ;

## 5 . RECHERCHE DES ENSEMBLES D'ARTICULATION MINIMAUX D'UN GRAPHE

La propriété 3 de 4.2.2. nous permet d'envisager l'étude des décompositions d'un graphe connexe (biparti) à partir de l'éclatement des sommets éléments d'un ensemble d'articulation du graphe.

On considère la matrice associée au graphe  $A = (a_{ij})$ . Si un sous-tableau de cette matrice ayant L,M pour ensemble de lignes et de colonnes est rempli de 0, la suppression de  $\overline{LUM}$  rend non connexe le graphe donc  $\overline{LUM}$  est un ensemble d'articulation du graphe G. ( $LUM \neq S$  sinon G ne serait pas connexe). La réciproque est évidente.

Donc le problème de la recherche des ensembles d'articulation minimaux sera simple une fois que l'on connaîtra les sous-tableaux maximaux (par rapport à l'inclusion) ou "premiers", n'ayant que des 0 pour éléments, il suffira de considérer parmi ces sous-tableaux ceux ayant un nombre maximum d'éléments.

Dans le cas d'un graphe biparti et en reprenant les conditions de 4.2.1 il faudra ne considérer que les sous tableaux formés exclusivement de noeuds.

### 5 . 1 . Algorithme de recherche des sous-matrices premières d'une matrice

Malgrange a proposé un algorithme pour résoudre ce problème, qui est exposé dans [10] p. 269, et en a donné un certain nombre d'applications, notamment en ce qui concerne l'étude des graphes : recherche des ensembles d'articulation minimaux, recherche des disques maximales, application d'un graphe dans un autre etc... [4]

L'algorithme proposé ici est une amélioration notable de celui proposé par Malgrange dans la mesure où le nombre d'opérations utilisées pour résoudre un problème donné est nettement inférieur. [6]

#### 5 . 1 . 1 . Treillis produit des ensembles de parties de 2 ensembles finis

Soient I et J deux ensembles finis  $\mathcal{P}(I)$  (resp.  $\mathcal{P}(J)$ ), ensemble des parties de I, muni de l'union et de l'intersection forme un treillis de Boole  $B_1$  (resp.  $B_2$ ) avec l'ordre habituel :

$$x_1 y \in B_1 \quad x \geq \cup y \iff x \cup y = x$$

Le dual  $B_2^*$  est également un treillis de Boole on notera son ordre  $\geq \cap$  :  $x, y \in B_2^* \quad x \geq \cap y \iff x \cap y = x$

Le produit cardinal  $(T, \geq 1) = (B_1, \geq \cup) \times (B_2^*, \geq \cap)$  est formé des éléments de  $B_1 \times B_2^*$  ordonnés par :  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2) \in T$

$$(x_1, y_1) \geq 1 (x_2, y_2) \iff x_1 \geq \cup x_2 \text{ et } y_1 \geq \cap y_2.$$

T est un treillis de Boole dont les opérations sont :

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \cup x_2, y_1 \cap y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \cap x_2, y_1 \cup y_2)$$

$$\text{avec } (x_1, y_1) \geq 1 (x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$$

Remarquons que les deux opérations de T sont précisément celles utilisées par Malgrange pour manipuler les sous-matrices.

L'élément nul de T est  $(\emptyset, J)$  en effet : quel que soit  $(x, y) \in T$ ,  $(\emptyset, J) \wedge (x, y) = (\emptyset \cap x, J \cup y) = (\emptyset, J)$

L'élément universel est  $(I, \emptyset)$  en effet :

$$(I, \emptyset) \vee (x, y) = (I \cup x, \emptyset \cap y) = (I, \emptyset) \quad \forall (x, y) \in T$$

L'ensemble S des atomes de T est l'ensemble suivant :

$$S = \{(\emptyset, J - y_i) \mid y_i \in J\} \cup \{(x_i, J) \mid x_i \in I\}$$

En effet :  $(\emptyset, J - y_i) \geq 1 (X, Y) \iff X = \emptyset \text{ et } J - y_i \subset Y$  pour avoir un ordre strict il faut  $Y = J$  le seul élément inférieur à  $(\emptyset, J - y_i)$  est donc bien l'élément nul. De même :

$(x_i, J) \geq 1 (X, Y) \iff x_i \supset X \text{ et } J \subset Y$  pour avoir un ordre strict il faut  $X = \emptyset$ .

Il reste à montrer que tout atome est élément de S. Cela provient du fait que tout élément V-irréductible d'un treillis de Boole est un atome et que :

l'ensemble des éléments V-irréductibles d'un treillis distributif de longueur finie n est d'ordre n (th. 5 p. 139 [3])

Or T est de longueur  $|I| + |J|$  car il contient la chaîne suivante :

$$(\emptyset, J) \prec (x_1, J) \prec (x_1, x_2, J) \prec \dots \prec (I, J) \prec (I, J - y_1) \prec \dots \prec (I, \emptyset)$$

or  $S = |I| + |J|$  donc S est bien l'ensemble des atomes de T.

### 5 . 1 . 2 . Un sous-treillis particulier de T.

Considérons une matrice  $A(i, j)$  I étant l'ensemble des lignes et J celui des colonnes. Notons  $T_1$  l'ensemble des sous-matrices de A remplies du même élément a.  $T_1$  est un sous-treillis de T si on admet que  $(X, \emptyset)$ ,  $X \subset I$  et  $(\emptyset, Y)$ ,  $Y \subset J$ , sont des éléments de  $T_1$ .

En effet quels que soient  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  éléments de  $T_1$  :

$$\left. \begin{aligned} (X_1, Y_1) \vee (X_2, Y_2) &= (X_1 \cup X_2, Y_1 \cap Y_2) \\ (X_1, Y_1) \wedge (X_2, Y_2) &= (X_1 \cap X_2, Y_1 \cup Y_2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{sont des sous-matrices de A} \\ \text{ne contenant que des a.} \end{array}$$

$T_1$  étant sous-treillis d'un treillis de Boole est distributif. Ses éléments V-irréductibles sont les éléments  $(\emptyset, J - y_i)$  pour tout  $y_i \in J$  et  $(x_i, Y_i)$ ,  $Y_i$  étant maximum (c'est à dire une ligne de a).

$$\text{En effet : } (x_i, Y_i) = (A, B) \vee (C, D) \Rightarrow \begin{cases} A = x_i \text{ ou } \emptyset \\ C = \emptyset \text{ ou } x_i \\ B = D = Y_i. \end{cases}$$

On obtient ainsi  $|I| + |J|$  éléments V-irréductibles ce sont donc les seuls d'après le théorème précédent. Nous dirons qu'un élément  $(X, Y)$  de  $T_1$  est premier s'il est maximal par rapport à l'inclusion c'est à dire s'il n'existe pas  $(X', Y')$  de  $T_1$  avec

$$X' \supset X \text{ et } Y' \supset Y.$$

### 5 . 1 . 3 . Recherche des éléments premiers de $T_1$ .

$T_1$  étant un treillis distributif, un élément de  $T_1$  a une expression irredondante unique sous forme d'union d'éléments V-irréductibles. Les éléments  $(\emptyset, J - y_i)$  n'interviennent pas dans l'expression irredondante

d'un élément premier de  $T_1$ . En effet soit  $(A,B) \in T_1$  et premier. On peut poser :

$$(A,B) = (X_1, Y_1) \vee (\emptyset, J-y_{i_1}) \vee \dots \vee (\emptyset, J-y_{i_s}) \text{ expression irrédundante.}$$

$$(X_1, Y_1) = \vee \{ \text{des éléments V-irréductibles de la forme } (x_i, Y_i) \}$$

$$(\emptyset, J-y_{i_1}) \vee \dots \vee (\emptyset, J-y_{i_s}) = (\emptyset, J-(y_{i_1} \cup y_{i_2} \cup \dots \cup y_{i_s}))$$

$$(X_1, Y_1) \vee (\emptyset, J-(y_{i_1} \cup \dots \cup y_{i_s})) = (X_1, C) \text{ donc } X_1 = A$$

$$C = Y_1 \cap (J-(y_{i_1} \cup \dots \cup y_{i_s})) = B$$

$(J-(y_{i_1} \cup \dots \cup y_{i_s})) \supset Y_1$  sinon  $(A,B)$  ne serait pas premier puisque inclus dans  $(A, Y_1)$ .

Les éléments premiers de  $T_1$  seront donc obtenus en formant toutes les unions de lignes ayant au moins une colonne non vide.

Appelons  $C_i$  les éléments V-irréductibles de  $T_1$  :

$$C_i = (x_i, Y_i)$$

On forme  $C_i \cup C_j, j > i, \text{ si } Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$

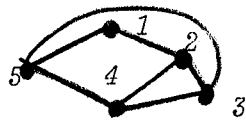
puis on forme  $C_i \vee C_j \vee C_k, k > j, \text{ si } Y_i \cap Y_j = Y_i, j \cap Y_k \neq \emptyset$

etc...

Les éléments maximaux de la liste ainsi obtenue sont les éléments premiers de  $T_1$ . Chaque élément n'est calculé qu'une fois.

### 5 . 2 . Recherche des ensembles d'articulation sur un exemple.

Considérons le graphe de 5 sommets :



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
 C_1 = (1,14) & C_1 \vee C_4 = (14,14) \text{ X} \\
 C_2 = (2,25) & C_2 \vee C_3 = (23,5) \\
 C_3 = (3,35) & C_2 \vee C_5 = (25,25) \text{ X} \\
 C_4 = (4,14) & C_3 \vee C_5 = (35,35) \text{ X} \\
 C_5 = (5,235) \text{ X} & C_2 \vee C_3 \vee C_5 = (235,5) \text{ X}
 \end{array}$$

les sous-matrices premières de zéros sont marqués d'une croix elles donnent les ensembles d'articulation : (235), (134), (124), (14), (14) est l'ensemble d'articulation de G ayant un nombre minimum d'éléments.

REMARQUE : En utilisant les idées de PICHAT [11] on voit qu'on peut étendre cet algorithme au cas de la recherche de  $n$ -rectangles maximaux d'un sous-treillis d'un treillis produit de  $n$  treillis de Boole.

### 5 . 3 . Programme

Le programme SOUSAUX a été écrit par Monsieur Vilcoq, chercheur à l'I.M.A.G., en PL1. Il permet d'obtenir toutes les sous-matrices premières d'une matrice en utilisant l'algorithme exposé ci-dessus.

La matrice est donnée sous forme d'un tableau de chaînes de bits, une chaîne représentant une ligne de la matrice. Les sous-matrices premières obtenues sont sorties sous la forme de 2 chaînes de bits, les digits présents dans la deuxième chaîne indiquant les colonnes.

Il nécessite 30 K octets sans compter les mémoires servant à stocker les sous-matrices. La version actuelle permet de traiter des matrices de dimension maximum  $32 \times 32$ , mais cette dimension peut facilement être augmentée. Sur le calculateur IBM 360/67 le temps de compilation est de 7 seconde. Pour une matrice de  $12 \times 12$  il a fallu 6,2 seconde pour obtenir ses 64 sous-matrices premières.



C H A P I T R E    I I

DECOMPOSITION D'UN GRAPHE EN GRAPHE PARTIELS

PLANAIRE

---





## 1 . RESULTATS GENERAUX SUR L'ÉPAISSEUR D'UN GRAPHE

### 1 . 1 . Définitions

$(G_1, G_2, \dots, G_\ell)$  est une  $\ell$ -décomposition planeaire d'un graphe  $G$  si :

(1) les  $G_i$  sont des graphes partiels planaires de  $G$

(2)  $A_{G_i} \cap A_{G_j} = \emptyset \quad \forall i \neq j$

(3)  $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i = G$

L'épaisseur  $\theta(G)$  d'un graphe  $G$  est le nombre minimum d'éléments d'une  $\ell$ -décomposition planeaire de  $G$ .

Si  $G'$  est un sous-graphe partiel de  $G$  on a :

$\theta(G') \leq \theta(G)$ .

Un graphe  $G$  est  $t$ -minimal si  $\theta(G) = t$  et  $\theta(G') = t'$ ,  $t' < t$ ,  
 $\forall G' \subset G$  et  $G' \neq G$ .

Un graphe  $G$  est  $h$ -maximal dans  $G'$  si :

(1)  $S_G = S_{G'}$

(2)  $\theta(G \cup \{a\}) = \theta(G) + 1, \forall a \in A_{G'} - A_G$

Si  $G$  est  $h$ -maximal dans  $G'$  alors  $G$  est  $h$  maximal dans  $G''$ , quelque soit  $G''$  graphe partiel de  $G'$  tel que

$$A_G \subset A_{G''} \subset A_{G'}$$

Un graphe  $G$  d'ordre  $n$  est  $h$ -maximal s'il est  $h$ -maximal dans  $K_n$ ,  
 $K_n$  étant le graphe complet ayant  $n$  sommets. Un graphe planeaire  $1$ -maximal,  
 est un graphe planeaire maximal au sens classique.

### 1 . 2 . Épaisseur d'un sous-graphe

PROPRIÉTÉ 1: Si  $\theta(G) = t$  et si  $G' \subset G$ , avec :  $\theta(G') = t'$ , alors

$$t - t' \leq \theta(G - G') \leq t.$$

Démonstration :  $G-G'$  étant un sous graphe partiel de  $G$  :  $\theta(G-G') \leq t$ .  
 Supposons que  $\theta(G-G') < t-t'$ . Par union d'une  $\theta(G-G')$  - décomposition  
 planaire de  $G-G'$  et d'une  $t'$ -décomposition planaire de  $G'$  on obtient  
 une décomposition planaire de  $G$  ayant un nombre d'éléments  
 $< t-t'+t' = t$  ce qui est absurde.

On obtient immédiatement comme conséquence de cette propriété:

PROPRIETE 2 : En supprimant d'un graphe  $G$  au plus 8 arêtes ou au plus  
 2 sommets on diminue  $\theta(G)$  d'au plus une unité.

Démonstration : Soit  $G'$  un sous-graphe partiel de  $G$  tel que  $|A_{G'}| \leq 8$   
 ou bien  $G' = G(S_G - S')$  avec  $|S'| \leq 2$  dans l'un de ces cas  $\theta(G') = 1$ , en  
 appliquant la propriété 1 avec  $t'=1$  on obtient bien le résultat annoncé.

La propriété 1 est une généralisation du théorème 3.1 de TUTTE [27].

PROPRIETE 3. [27] : Si  $k$  est un entier  $> 0$  tel que  $\theta(G) \geq k$ , alors  $G$  a un  
 sous-graphe partiel  $k$ -minimal.

Démonstration : Supposons  $\theta(G) = k$ . Dans ce cas si on ne peut enlever au-  
 cune arête  $a$  de telle sorte que  $\theta(G-\{a\}) = k$ ,  $G$  est  $t$ -minimal. Sinon  
 on enlève  $a$  et on recommence sur le graphe  $G-\{a\}$  jusqu'à ce qu'on obtienne  
 un graphe  $k$ -minimal. On fait le même raisonnement avec  $\theta(G) > k$  en considé-  
 rant  $G' \subset G$  avec  $\theta(G') = k$ .

### 1 . 3 . Epaisseur et ensemble d'articulation

Une pièce d'un graphe  $G$  étant un sous-graphe de  $G$  sans point d'ar-  
 ticulation et maximal pour cette propriété, nous pouvons généraliser le ré-  
 sultat bien connu sur les graphes planaires : "un graphe est planaire si et  
 seulement si toutes ses pièces sont planaires".

THEOREME 1 : Un graphe G est d'épaisseur t si et seulement si toute pièce de G est d'épaisseur  $\leq t$ , une pièce au moins étant d'épaisseur  $\underline{t}$ .

Si G est d'épaisseur t, tout sous-graphe partiel est d'épaisseur  $\leq t$ . Supposons que toutes les pièces de G soient d'épaisseur t et soit  $L^i = (L_1^i, L_2^i, \dots, L_t^i)$  une t-décomposition planaire de la pièce  $L^i$ . Le graphe  $G_1 = \cup L_1^i$  est planaire puisque  $L_1^i$  est soit une composante, soit une pièce de  $G_1$  et que  $L_1^i$  est planaire. Donc  $\theta(L^i) = t$  pour tout i entraîne que  $\theta(G) = t$ .

On en déduit immédiatement le théorème 3.3 de TUTTE [23] :

COROLLAIRE 1 : Un graphe t-minimal est inarticulé.

On appelle homomorphisme d'un graphe  $G(S,A)$  dans un graphe  $G'(S',A')$ , une application  $\varphi$  de  $S \rightarrow S'$  conservant la relation de jointivité c'est à dire telle que si  $(s_1, s_2) \in A$  alors  $(\varphi(s_1), \varphi(s_2)) \in A'$ .

L'opération  $\varepsilon_{ab}$  qui, à un graphe  $G(S,A)$  associe le graphe obtenu à partir de G en supprimant deux sommets a et b  $\in S$  et en ajoutant un nouveau sommet  $ab \notin S$  ainsi que les arêtes  $(ab, s_i)$  si  $(a, s_i) \in A$  ou  $(b, s_i) \in A$ , est appelée un homomorphisme élémentaire. On déduit immédiatement du théorème 1 :

COROLLAIRE 2 : Si  $\theta(G_1) = \theta(G_2) = t$  et  $S_{G_1} \cap S_{G_2} = \emptyset$  alors  $\theta(\varepsilon_{ab}(G_1 \cup G_2)) = t$   
 $\forall a \in S_{G_1}$  et  $\forall b \in S_{G_2}$ ,  $\varepsilon_{ab}$  étant l'homomorphisme élémentaire fusionnant a et b.

THEOREME 2 :  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  étant un ensemble d'articulation d'un graphe connexe  $G$ , considérons une décomposition de type 2 obtenue par éclatement de  $A$  :  $G = (G_1, G_2, G_A)$ , avec :

- $$\left\{ \begin{array}{l} - (A_{G_1}, A_{G_2}, A_{G_A}) \text{ est une partition de } A_G \\ - G_A = G(A) \\ - S_{G_1} \cap S_{G_2} \subset A \\ - \theta(G_1) \geq \theta(G_2) \end{array} \right.$$

alors  $\theta(G) \leq M = \max \{\theta(G_1), \theta(G_2) + k - 1\}$ . De plus si  $M = \theta(G_1)$  alors  $\theta(G) = \theta(G_1)$ .

Démonstration : La décomposition est représentée sur la figure 1 :

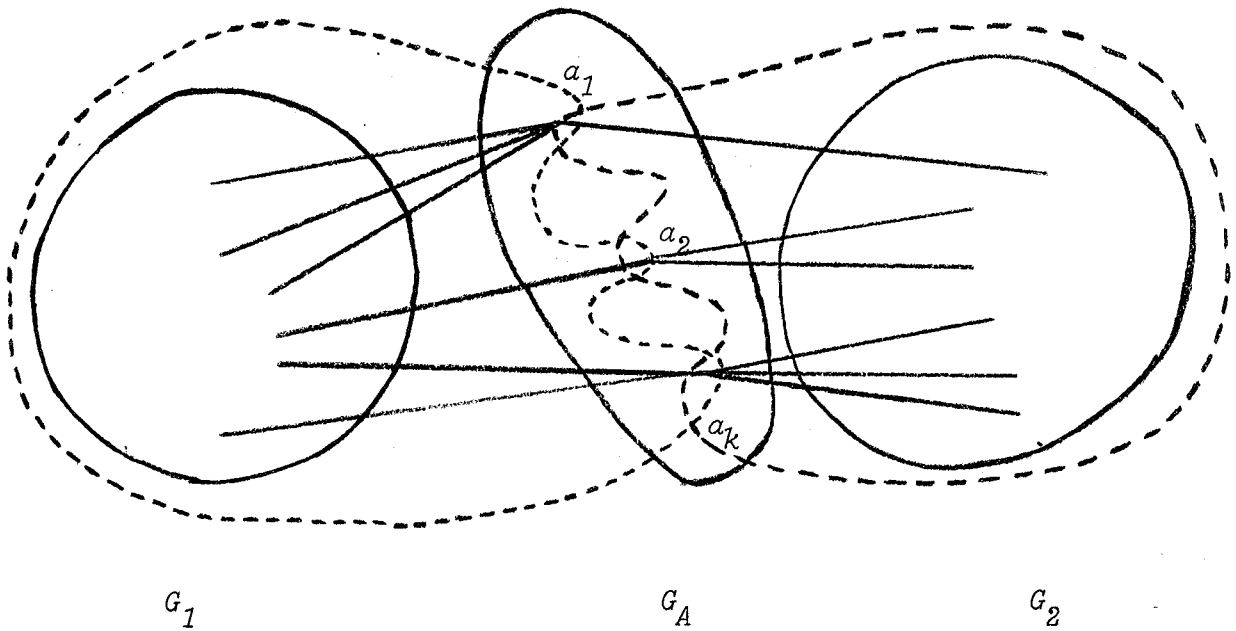


Figure 1

Considérons les graphes

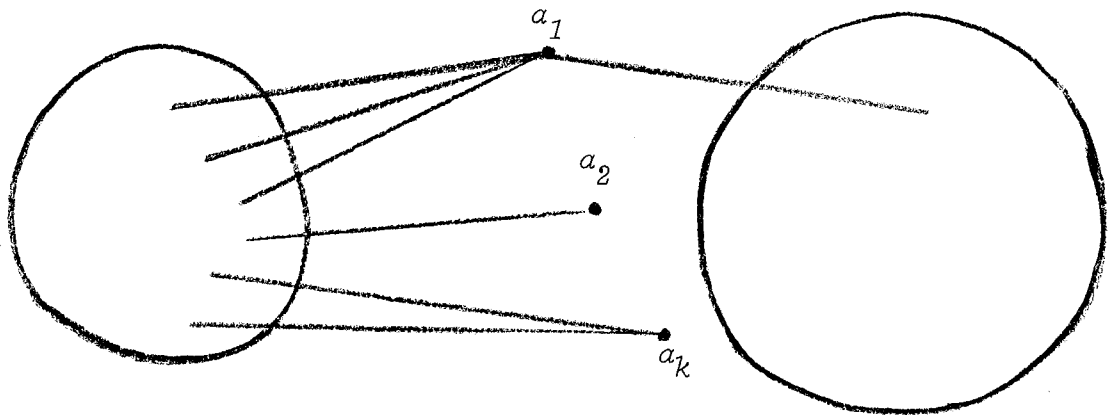
$$G'_2 = G_2 - \cup (a_i b_j)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots, k \\ \text{et} \\ (a_i b_j) \in A_{G_2} \end{array} \right.$$

et

$$G' = G_1 \cup G'_2.$$

$\theta(G') = \theta(G_1)$ . En effet il suffit d'appliquer le théorème 1 en remarquant que  $a_1$  est point d'articulation de  $G'$  (voir figure 2).



$G'$

Figure 2

La démonstration du théorème 1 nous permet de plus d'affirmer que l'on peut disposer les arêtes de  $G'_2$  dans  $\theta(G_2)$  plans d'une  $\theta(G_1)$  - décomposition plane de  $G'$ .

Dans chacun des  $\theta(G_1)$ - $\theta(G_2)$  plans restant on peut ajouter planairement un graphe  $A_i = \cup_j (a_i b_j)$

$$\forall (a_i b_j) \in A_{G_2}$$

Ceci étant possible car pour tout sommet  $s$  d'un graphe planaire on peut trouver une représentation planaire telle que  $s$  soit sur la frontière de la région infinie.

Il y a  $k-1$  tels graphes et  $G = G' \cup_{i=2}^k A_i$ . Donc si  $k-1 \leq \theta(G_1) - \theta(G_2)$

on obtiendra ainsi une  $\theta(G_1)$ -décomposition planaire de  $G$  or  $\theta(G_1) \leq \theta(G)$  donc  $\theta(G) = \theta(G_1)$ . Sinon en ajoutant  $k-1 - (\theta(G_1) - \theta(G_2))$  plans chacun contenant un  $A_i$  on obtiendra une décomposition planaire de  $G$  ayant  $\theta(G_2) + k-1$  plans.

On appelle arête d'attachement d'un sous-graphe  $G(S')$  d'un graphe  $G(S,A)$ , une arête  $(ab)$  avec  $a \in S'$  et  $b \in S-S'$ . On peut obtenir un théorème équivalent au théorème 2 en considérant le nombre d'arêtes d'attachement à la place du nombre de sommets d'un ensemble d'articulation.

THEOREME 3 : Si  $A$  est un ensemble d'articulation d'un graphe connexe  $G$  entraînant la partition :  $S_G = \{A, S_1, S_2\}$  et si l'on pose :

- $\theta(G(S_i \cup A)) = t_i$
  - $\theta(G(S_i)) = t'_i$
  - nombre d'arêtes d'attachement de  $G(S_i) = n_i$
- } pour  $i=1,2$

On a alors :

$$\theta(G) \leq \text{Max}(t_1, t'_2) \text{ si } n_2 \leq \text{Max}(t_1, t'_2)$$

$$\theta(G) \leq \text{Max}(t_2, t'_1) \text{ si } n_1 \leq \text{Max}(t_2, t'_1).$$

Démonstration : On a :  $A_G = A_{G(S_1 \cup A)} \cup A_{G(S_2)} \cup A_2$

et  $A_G = A_{G(S_2 \cup A)} \cup A_{G(S_1)} \cup A_1$

si  $A_i$  est l'ensemble des arêtes d'attachement de  $G(S_i)$ . Les graphes  $G(S_1 \cup A)$  et  $G(S_2)$  étant disjoints on a donc :

$$\theta(G(S_1 \cup A) \cup G(S_2)) \leq \text{Max}(t_1, t'_2)$$

De plus on peut ajouter planairement à chaque graphe d'une décomposition planaire de  $G(S_1 \cup A) \cup G(S_2)$  au moins une arête de  $A_2$ , car si  $(ab)$  est cette arête, avec  $a \in S_1 \cup A$  et  $b \in S_2$ , on peut trouver une représentation planaire du graphe partiel planaire de  $G(S_1 \cup A)$  avec  $a$  sur la frontière de la région infinie et de même pour  $b$  et  $G(S_2)$ .

Donc si  $n_2 \leq \text{Max}(t_1, t_2')$  le résultat est bien démontré. La démonstration est identique en utilisant la 2<sup>ème</sup> décomposition.

COROLLAIRE 3 : Si  $G$  est un graphe  $t$ -minimal tout cocycle de  $G$  a au moins  $t$  arêtes.

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $C$  est un cocycle de  $G$  ayant moins de  $t$  arêtes. La suppression de  $C$  engendre la partition  $S_1, S_2$  de  $S_G$  et  $G(S_1)$  et  $G(S_2)$  sont d'épaisseur  $\leq t-1$  puisque  $G$  est  $t$ -minimal en appliquant le théorème 3 on voit que  $\theta(G) \leq t-1$  ce qui est absurde.

REMARQUE : *Le corollaire 3 ci-dessus est identique au théorème principal de HOBBS et GROSSMAN [21].*

#### 1 . 4 . Epaisseur et degré

On note  $d_G(s)$ , ou  $d(s)$ , le degré du sommets  $s$  de  $G$ , c'est à dire le nombre d'arêtes incidantes à  $s$ . On pose :

$$\begin{aligned} d \min(G) &= \min (d(s) ; s \in S_G) \\ d \max(G) &= \max (d(s) ; s \in S_G). \end{aligned}$$



THEOREME 4 : [27] : Si G est un graphe t-minimal alors  $d_{\min}(G) \geq t$ .

Supposons que  $s \in S_G$  soit tel que  $d_G(s) < t$ . On a :  
 $\theta(G-\{s\}) = t-1$  puisque G est t-minimal et d'après la propriété 1. Considérons une (t-1)-décomposition planaire :  $(H_1, H_2, \dots, H_{t-1})$  de  $G-s$ .  
 $H_1 \cup (sx), \forall (sx) \in A_G$  est un graphe planaire. Comme s a au plus t-1 arêtes incidentes en les ajoutant planairement aux graphes  $H_i$  on obtient une (t-1)-décomposition planaire de G ce qui est absurde.

THEOREME 5 : Si le graphe G est tel que  $d_{\max} \leq h$  alors G est sous-graphe partiel d'un graphe h-régulier.

Démonstration

Si G est h-régulier le théorème est évident. Nous supposons donc qu'il existe  $n, n > 0$ , sommets de G dont le degré est  $< h$  :

$x_1, x_2, \dots, x_n$  avec  $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \dots \leq d(x_n)$ . Nous saturons les sommets  $x_i$  en ajoutant  $h-d(x_i)$  sommets pendants adjacents à  $x_i$ .

On obtient ainsi un graphe dont tous les sommets sont de degré h à l'exception de  $N = \sum_{i=1, \dots, n} (h-d(x_i))$  sommets pendants. On considère h sommets parmi ces N sommets pendants et un graphe complet  $K_h$  sur h nouveaux sommets. On fusionne les h sommets pendants avec les h sommets, de degré h-1, de  $K_h$ . C'est-à-dire que si l'on a choisi  $y_1, y_2, \dots, y_h$  parmi les N sommets et si les sommets de  $K_h$  sont  $s_1, s_2, \dots, s_h$  on fait les homomorphismes élémentaires  $s_i \rightarrow y_i s_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, h$ . On recommence jusqu'à ce que le nombre de sommets pendants soit  $r < h$ .

Si r est pair on enlève un couplage de  $\frac{r}{2}$  arêtes d'un graphe  $K_{h+1}$  sur h+1 nouveaux sommets, et on fusionne les sommets de degré h-1 de  $K_{h+1}$  avec les r sommets pendants. Si r est impair on fait de même avec un couplage de  $\frac{r-1}{2}$  arêtes et on obtient ainsi un graphe G' dont tous

les sommets sont de degré  $h$  sauf  $1, x$ , de degré  $1$ . On considère un graphe  $G''$  isomorphe à  $G' - \{x\}$  avec  $S_{G''} \cap S_{G'} = \emptyset$  et on fusionne le sommet de degré  $1$  de  $G'$  avec le sommet de degré  $h-1$  de  $G''$  on obtient ainsi un graphe  $h$ -régulier.

Rappelons, sans démonstration, le théorème de Petersen ([2], p183) :  
Un graphe  $2k$ -régulier peut être décomposé en  $k$  semi-facteurs disjoints

Le théorème 5 et celui de Petersen entraîne immédiatement :

PROPRIETE 4 : Si  $G$  est tel que  $d_{\max} \leq 2k$  alors  $\theta(G) \leq k$ .

THEOREME 6 [27] : Soit  $G$  d'épaisseur  $t$  alors  $d_{\max} \geq 2t-1$ . De plus si  $d_{\max} = 2t-1$  alors il y a plus de  $2t-2$  sommets de degré  $d_{\max}$ .

#### Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Si ce théorème est faux il existe un graphe  $G$  d'épaisseur  $t$  avec  $d_{\max} \leq 2t-1$  et il y a au plus  $2t-2$  sommets de degré  $d_{\max}$ .

En enlevant au plus  $2t-2$  arêtes de  $G$  on obtient un graphe  $G'$  ayant un degré  $\max < 2t-1$ . Soit  $S$  un ensemble minimal d'arêtes de  $G$ , tel que  $d_{\max}(G-S) < 2t-1$  et  $G' = G - \{S\}$ . D'après la propriété 3  $G'$  a une  $k$ -décomposition planaire  $(H_1, H_2, \dots, H_k)$  avec  $k \leq t-1$  et  $d_{\max}(H_i) \leq 2$  par tout  $i$ . On peut ajouter à  $H_1$ , 2 arêtes de  $S$  en conservant la planéarité puisqu'on obtient ainsi un graphe ayant au plus 4 sommets de degré  $> 2$ . Comme  $|S| \leq 2t-2$  on obtient ainsi une  $(t-1)$ -décomposition planaire de  $G$  ce qui est absurde.

#### 1.5. Bornes de l'épaisseur d'un graphe

Un graphe  $1$ -maximal est tel que toute représentation planaire a des faces qui sont toutes de longueur 3. Son dual a donc  $v+1$  sommets de degré 3 donc  $m = \frac{(v+1)3}{2}$  or  $v = m-n+1$  donc  $m=3n-6$ .

Donc un graphe d'épaisseur  $\theta$ , ayant  $n$  sommets et  $m$  arêtes, est tel que  $m \leq \theta(3n-6)$  ceci entraîne:

$$(1) \quad \theta \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil^*$$

En posant  $d_{\text{moy}} = \frac{m}{2g}$  et si  $g$  représente la ceinture c'est à dire la longueur du plus court cycle, TUTTE [27] a démontré :

$$(2) \quad \theta(G) > \left\lceil \frac{d_{\text{moy}}(g-2)}{2g} \right\rceil \left[ \text{et dans le cas d'un graphe } h\text{-régulier :} \right.$$

$$(3) \quad \theta(G) > \left\lceil \frac{h(g-2)}{2g} \right\rceil \left[ \right.$$

$g_h$  étant l'ensemble des graphes finis  $h$ -réguliers on pose :

$$I_h = \min \{ \theta(G) \mid G \in g_h \} \text{ et}$$

$$S_h = \max \{ \theta(G) \mid G \in g_h \} .$$

Le théorème 5 entraîne que :

$$(4) \quad \theta(G) \leq S_{d_{\text{max}}}$$

puisque  $G$  est sous graphe partiel de  $G' \in g_{d_{\text{max}}}$  et que  $\theta(G) \leq \theta(G') \leq S_{d_{\text{max}}}$ .

### 1 . 6 . Epaisseurs et graphes $t$ -minimaux déterminés

On peut considérer que les recherches sur l'épaisseur des graphes ont réellement commencées lorsqu'on a démontré que  $\theta(K_9) = 3$  ([13], [25], [28]). Depuis, l'essentiel des recherches a porté sur la détermination de l'épaisseur de graphes particuliers.

\*  $\lceil x \rceil$  représente l'enveloppe entière supérieure du réel  $x$

$\lfloor x \rfloor$  représente l'enveloppe entière inférieure du réel  $x$

Les résultats les plus importants sont les suivants :

$$(5) \quad \theta(K_n) = \left[ \frac{1}{6} (n+7) \right] \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} n \neq 4 \text{ (modulo 6)} \\ n \neq 9 \end{array}$$

En utilisant  $\theta(K_9) = 3 \implies \theta(K_{10}) = 3$ ,  $\theta(K_4) = 1$

$$\theta(K_{22}) = 4 \quad [21] \quad \text{et} \quad \theta(K_{28}) = 5 \quad [15] .$$

HOBBS pense que la formule (5) est toujours valable.

Cette idée est étayée par le fait que :

$$(6) \quad \theta_1(K_n) = \left[ \frac{1}{6} (n+4) \right] \quad \text{et} \quad \theta_2(K_n) = \left[ \frac{1}{6} (n+3) \right]$$

$\theta_h(G)$  étant l'épaisseur de genre  $h$ ,  $h > 0$ , de  $G$ . L'épaisseur de genre  $h$  d'un graphe  $G$  étant définie de la même manière que l'épaisseur d'un graphe en remplaçant "graphe partiel planaire" par "graphe partiel représentable sur une surface de genre  $h$ ". Les formules (6) ont été établies par RINGEL [26].

$$(7) \quad \theta(K_{m,n}) = \left\lfloor mn/2(m+n-2) \right\rfloor$$

sauf, peut-être, lorsque  $m$  et  $n$  sont impairs et qu'il existe un entier  $k$  tel que :  $n = \lfloor 2h(m-2)/(m-2k) \rfloor$  cette formule a été établie par BEINEKE [14]. KLEINERT [22] a démontré que :

$$(8) \quad \theta(Q_n) = 1 + \lfloor n/4 \rfloor$$

$Q_n$  étant l'hypercube à  $n$  dimensions.

graphes t-minimaux connus :

- (0) le seul graphe d'épaisseur nulle est le graphe vide
- (1) le seul graphe 1-minimal est constitué d'une arête
- (2) Tous les graphes homeomorphes à  $K_5$  et  $K_{3,3}$  sont 2-minimaux et ce sont les seuls.

- (3)  $K_9, K_{7,7}, K_{5,13}$  sont 3-minimaux mais il en existe une infinité d'autres non isomorphes
- (4)  $K_{2t-1, 4t^2-10t+7}$  est t-minimal [14]  
 $\forall t \geq 2$
- $K_{4t-5, 4t-5}$  est t-minimal [20]  
 $\forall t \geq 2$

L'étude des graphes t-minimaux est justifiée par la généralisation du théorème de Kuratowski :

THEOREME 7 : Un graphe est d'épaisseur h si et seulement si il contient un sous-graphe partiel homéomorphe à un graphe h-minimal et aucun homéomorphe à un graphe (h+1)-minimal.  
 (Pour  $h \geq 3$  on peut remplacer homéomorphe par isomorphe.)

## 2 . SUR L'ÉPAISSEUR DES GRAPHES RÉGULIERS

### 2 . 1 . Calcul de $I_h$ ( $h \not\equiv 5 \pmod{6}$ )

Rappelons un résultat important de BEINEKE [15] :

THEOREME 0 : Le graphe ayant  $6n$  sommets et régulier de degré  $6n-2$  est d'épaisseur n.

Nous noterons  $B_n$  ce graphe.

Un graphe h-régulier d'ordre n a  $\frac{nh}{2}$  arêtes. En utilisant (1) de 1.5.

nous obtenons :

$$I_h \geq \left\lceil \frac{nh}{6(n-2)} \right\rceil \quad \text{ce qui entraîne pour } h = 6q :$$

$$I_{6q} \geq \left\lceil \frac{nq}{n-2} \right\rceil \quad \text{or } \frac{nq}{n-2} > q \text{ on a donc : } I_{6q} \geq q+1$$

et ceci quel que soit l'entier  $q \geq 0$ , si nous posons  $I_0 = 1$ .

Ce résultat peut s'écrire : (1)  $I_{6q+r} \geq q+1$  ;  $q \geq 0$  et  $r \geq 0$ .

De plus  $B_n \in \mathcal{G}_{6n-2}$  donc  $I_{6n-2} \leq \theta(B_n) = n, (n \geq 1)$ .

Nous pouvons écrire cette inégalité de la manière suivante :

$$(2) \quad I_{6q+4} \geq q+1 ; q \geq 0.$$

D'autre part le théorème de Petersen entraîne que : (3)

$$(3) \quad I_{2h} \leq I_{2h+2}$$

de (1), (2) et (3) nous tirons :

$$I_{6q} = I_{6q+2} = I_{6q+4} = q+1$$

Lemme 1 :

$$I_{6q+r} = q+1 ; q \geq 0 \text{ et } r = 0,1,2,3,4$$

Démonstration :

Considérons le graphe  $B_{q+1}$  (avec  $q \geq 1$ ). Il est d'ordre  $6(q+1)$ , il est  $(6q+4)$  régulier et  $\theta(B_{q+1}) = q+1$ .

Ce graphe est le complément, à un isomorphisme près, de  $3(q+1)$  copies du graphe  $K_2$ . (Voir figure 3).

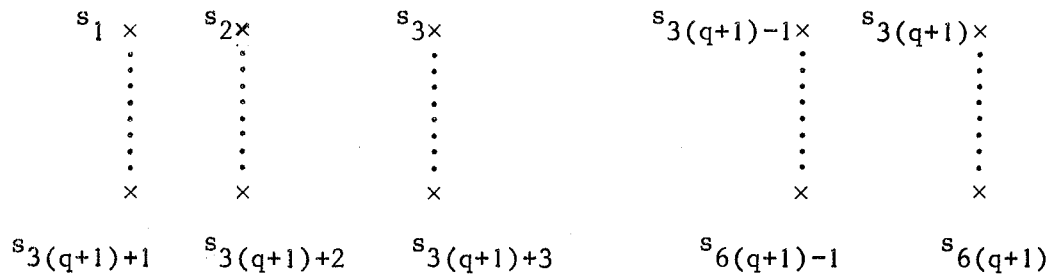


Figure 3

Les 3 ensembles d'arêtes suivants :

$$C_1 = \{(s_1 s_{3q+5}), (s_2 s_{3q+6}), \dots, (s_{3q+3} s_{3q+4})\}$$

$$C_2 = \{(s_1 s_{3q+6}), (s_2 s_{3q+7}), \dots, (s_{3q+3} s_{3q+5})\}$$

$$C_3 = \{(s_1 s_{3q+7}), (s_2 s_{3q+8}), \dots, (s_{3q+3} s_{3q+6})\}$$

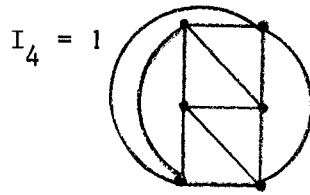
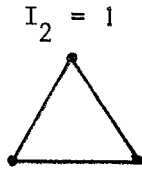
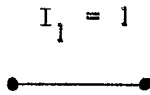
sont des couplages parfaits et disjoints de  $B_{q+1}$ .

Les graphes  $B_{q+1}^{-C_1}$ ,  $B_{q+1}^{-C_1} \cup C_2$ ,  $B_{q+1}^{-C_1} \cup C_2 \cup C_3$  sont donc respectivement éléments de  $\mathcal{G}_{6q+3}$ ,  $\mathcal{G}_{6q+2}$ ,  $\mathcal{G}_{6q+1}$ . De plus

$$\theta(B_{q+1}^{-C_1} \cup C_2 \cup C_3) \leq \theta(B_{q+1}^{-C_1} \cup C_2) \leq \theta(B_{q+1}^{-C_1}) \leq \theta(B_{q+1}) = q+1$$

On a donc, en utilisant (1) démontré le lemme sauf pour  $q=0$ ,  $r \not\equiv 5 \pmod{6}$ .

Nous avons posé  $I_0 = 1$ . La liste des graphes suivants termine la démonstration :



Lemme 2 :

$$I_{6q+5} = q+1 \text{ ou } q+2 ; q \geq 0$$

Démonstration :

(5) de 1.6. entraîne que  $\theta(K_{6q+6}) = q+2$  donc  $I_{6q+5} \leq q+2$ , (1) entraîne le résultat annoncé.

REMARQUE : Si  $I_{6q+5} = q+1$  on ne pourra pas obtenir ce résultat en partant de  $B_n (n=q+2)$ . En effet  $B_n$  a  $\frac{6n(6n-2)}{2} = n(18n-6)$  arêtes, en enlevant un graphe 5-régulier on enlève  $\frac{6n \times 5}{2} = 15n$  arêtes. Mais  $n(18n-6) - 15n = 18n^2 - 21n > (n-1)(18n-6) =$  nombre maximum d'arêtes d'un graphe d'ordre  $6n$  et d'épaisseur  $n-1$ . De plus s'il existe un graphe  $(6q+5)$ -régulier et d'épaisseur  $q+1$  il aura d'après (1) de 1.5, sommets avec :

$$q+1 \geq \left\lceil \frac{(6q+5)n}{6n-12} \right\rceil \implies n \geq 12(q+1)$$

Pour  $q=0$  et  $q=1$  nous avons déterminé un graphe  $(6q+5)$ -régulier, d'épaisseur  $q+1$  et avec  $n = 12(q+1)$ . (voir § 2.3).



2 . 2 . Construction de graphes réguliers a partir d'un graphe planaire.

THEOREME 1 : G étant un graphe planaire ayant  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  pour ensemble de sommets, et  $(p_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , étant r permutations distinctes de  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  telles que :

$$d(s_k) + \sum_{\forall \ell \in N} d(s_\ell) = h \quad \text{ceci } \forall k \in N$$

$$p_i(\ell) = k \text{ et } \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$$

on peut construire un graphe connexe h-régulier d'épaisseur  $\leq r+1$  .

Construction :

1) r=1

Montrons pour r=1 le principe de la construction.

Nous notons,  $(G_i), i \in N$ , les graphes isomorphes à G obtenus en numérotant  $s_j^i$  le sommet  $s_j$  de G, ceci  $\forall j \in N$ .

Le graphe  $H_1 = \bigcup_{i \in N} G_i$  est un graphe planaire.

On considère maintenant les n graphes  $G_i^1, i \in N$ , isomorphes à G obtenus de la manière suivante :

$G_1^1 = (s_{p_1(1)}^1, s_{p_1(2)}^2, \dots, s_{p_1(n)}^n)$ , cette notation signifiant que  $G_1^1$  est obtenu à partir de G en numérotant  $s_{p_1(i)}^i$  le sommet  $s_i$  de G, ceci  $\forall i \in N$

$$G_2^1 = (s_{p_1(1)}^n, s_{p_1(2)}^1, \dots, s_{p_1(n)}^{n-1})$$

...

$$G_n^1 = (s_{p_1(1)}^2, s_{p_1(2)}^3, \dots, s_{p_1(n)}^1)$$

Les entiers étant pris modulo  $n$  (avec  $n+1=1$ ) nous poserons :

$$G'_i = (s_{p_1(j)}^{n-i+1+j}), j \in N, \text{ ceci } \forall i \in N$$

Nous avons les propriétés suivantes :

$$a/ S_{G'_i} \cap S_{G'_j} = \emptyset, \quad i \neq j.$$

En effet  $S_{G'_i}$  a un seul sommet d'indice supérieur 1, par exemple, c'est  $s_{p_1(i)}^1$  de même  $S_{G'_j}$  a un seul sommet d'indice supérieur 1, c'est  $s_{p_1(j)}^1$  et  $p_1(i) \neq p_1(j)$  puisque  $p_1$  est une permutation de  $N$  et que  $i \neq j$ .

Ceci entraîne que le graphe  $H_2 = \bigcup_{i \in N} G'_i$  est planaire, puisque constitué de  $n$  graphes planaires disjoints.

$$b/ A_{H_1} \cap A_{H_2} = \emptyset.$$

En effet les arêtes de  $A_{H_1}$  sont de la forme  $(s_j^i, s_k^i)$  alors que celles de  $A_{H_2}$  sont de la forme  $(s_j^i, s_k^\ell)$  avec  $i \neq \ell$ .

Ceci entraîne que  $(H_1, H_2)$  est une 2-décomposition planaire du graphe  $H = H_1 \cup H_2$ .

c/  $H$  est un graphe  $h$ -régulier.

$$d_H(s_j^i) = d_{H_1}(s_j^i) + d_{H_2}(s_j^i) \text{ d'après b/}$$

$$\text{or } d_{H_1}(s_j^i) = d_{G'_i}(s_j^i) = d_G(s_j)$$

$$d_{H_2}(s_j^i) = d_{H_2}(s_{p_1(k)}^i) \text{ avec } p_1(k) = j \quad \text{et :}$$

$$d_{H_2}(s_{p_1(k)}^i) = d_G(s_k)$$

Donc :

$$d_H(s_j^i) = d_G(s_j) + d_G(s_k) = h \text{ d'après les hypothèses du théorème.}$$

d/ H est connexe.

Il suffit de remarquer que  $G'_i$  est connexe et que  $S_{G'_1} \cap S_{G'_i} \neq \emptyset \forall i \in N$ .

Ceci entraîne que  $H_1 \cup G'_i$  est connexe, donc H est connexe.

2) Cas général

Soient  $(G^{i_1, i_2, \dots, i_r})$ ,  $i_j = 1, 2, \dots, n$  et  $j = 1, 2, \dots, r$ ,  $n^r$

exemplaire du graphe G, ayant des ensembles de sommets disjoints 2 à 2.

L'ensemble des sommets de  $G^{i_1, i_2, \dots, i_r}$  étant représenté par

$$(s_j^{i_1, i_2, \dots, i_r}) \forall j \in N.$$

On considère les  $r+1$  graphes suivants :

1<sup>er</sup> graphe :  $H_1$  est le graphe union des  $n^r$  graphes  $G^{i_1, i_2, \dots, i_r}$  que

l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} G^{1,1,\dots,1,1} ; G^{1,1,\dots,1,2} ; \dots ; G^{1,1,\dots,1,n} \\ G^{1,1,\dots,2,1} ; G^{1,1,\dots,2,2} ; \dots ; G^{1,1,\dots,2,n} \\ \dots \dots \dots \\ G^{n,n,\dots,n,1} ; G^{n,n,\dots,n,2} ; \dots ; G^{n,n,\dots,n,n} \end{array} \right.$$

il y a  $n^{r-1}$  lignes, chaque ligne contenant  $n$  graphes.

En utilisant la représentation d'un graphe isomorphe à  $G$  par l'ensemble de ses sommets comme dans le cas  $r = 1$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s_j^{1,1,\dots,1,1}) ; (s_j^{1,1,\dots,1,2}) ; \dots ; (s_j^{1,1,\dots,1,n}) \\ (s_j^{1,1,\dots,2,1}) ; (s_j^{1,1,\dots,2,2}) ; \dots ; (s_j^{1,1,\dots,2,n}) \\ \dots\dots\dots \\ (s_j^{n,n,\dots,n,1}) ; (s_j^{n,n,\dots,n,2}) ; \dots ; (s_j^{n,n,\dots,n,n}) \end{array} \right.$$

(j variant de 1 à n)

2<sup>ème</sup> graphe :  $H_2$  est défini par le tableau suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,1,i}) ; (s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,1,n+1-i}) ; \dots ; (s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,1,1+i}) \\ (s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,2,i}) ; (s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,2,n+1-i}) ; \dots ; (s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,2,1+i}) \\ \dots\dots\dots \\ (s_{p_1(i)}^{n,n,\dots,n,i}) ; (s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,2,n+1-i}) ; \dots ; (s_{p_1(i)}^{n,n,\dots,n,1+i}) \end{array} \right.$$

(les entiers étant pris modulo  $n$  et  $i$  variant de 1 à  $n$ ).

(r+1)<sup>ème</sup> graphe :  $H_{r+1}$  est défini en remplaçant  $p_1$  par  $p_r$  dans  $H_2$  et en faisant varier en premier le premier indice supérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s_{p_r(i)}^{i,1,1,\dots,1}) ; (s_{p_r(i)}^{n+1-i,1,1,\dots,1}) ; \dots ; (s_{p_r(i)}^{1+i,1,\dots,1}) \\ (s_{p_r(i)}^{i,2,1,\dots,1}) ; (s_{p_r(i)}^{n+1-i,2,1,\dots,1}) ; \dots ; (s_{p_r(i)}^{1+i,2,1,\dots,1}) \\ \dots \dots \dots \\ (s_{p_r(i)}^{i,n,n,\dots,n}) ; (s_{p_r(i)}^{n+1-i,n,n,\dots,n}) ; \dots ; (s_{p_r(i)}^{1+i,n,n,\dots,n}) \end{array} \right.$$

a) les  $n^r$  exemplaires de  $G$  qui apparaissent dans un graphe  $H_i$  ont des ensembles de sommets disjoints 2 à 2.

En effet deux sommets ayant mêmes indices supérieurs, apparaissent dans une même ligne mais ils ont alors des indices inférieurs différents puisque  $p_i(j) \neq p_i(k)$  si  $j \neq k$ .

Cette propriété entraîne que tous les graphes  $H_i$  sont planaires.

$$b) A_{H_{r-i+2}} \cap A_{H_{r-j+2}} = \emptyset \quad (1 < i < j \leq r+1)$$

Une arête de  $H_{r-i+2}$  est de la forme :

$$(s_{p_{r-i+1}}^{i_1, i_2, \dots, i_{i-1}, p, i_{i+1}, \dots, i_r} \quad s_{p_{r-i+1}}^{i_1, i_2, \dots, i_{i-1}, q, i_{i+1}, \dots, i_r}) \text{ avec } p \neq q$$

pour une arête de  $H_{r-j+2}$  les indices supérieurs seront égaux sauf ceux en  $j^{\text{ième}}$  position comme  $i \neq j$  le résultat est bien démontré.

$$c) A_{H_1} \cap A_{H_i} = \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r+1\}$$

En effet une arête de  $H_1$  est constituée de deux sommets ayant même indices supérieurs ce qui n'est jamais le cas pour  $H_i, i > 1$ .

a) b) et c) entraînent que  $(H_1, H_2, \dots, H_{r+1})$  est une  $(r+1)$ -décomposition planaire du graphe  $H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{r+1}$ .

d)  $H$  est  $h$ -régulier.

$$d_H(s_1^{1,1,\dots,1}) = d_{H_1}(s_1^{1,1,\dots,1}) + d_{H_2}(s_1^{1,1,\dots,1}) + \dots + d_{H_{r+1}}(s_1^{1,1,\dots,1})$$

$$d_{H_1}(s_1^{1,1,\dots,1}) = d_G(s_1)$$

$$\text{pour } i > 1 \quad d_{H_i}(s_1^{1,1,\dots,1}) = d_{H_i}(s_{p_{i-1}(\ell)}^{1,1,\dots,1}) \text{ avec } p_{i-1}(\ell) = 1$$

$$\text{or } d_{H_i}(s_{p_{i-1}(\ell)}^{1,1,\dots,1}) = d_G(s_\ell) \text{ donc :}$$

$$d_H(s_1^{1,1,\dots,1}) = d_G(s_1) + \sum d_G(s_\ell) = h \text{ d'après les hypothèses.}$$

$\forall \ell \in N \text{ et } \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$   
tels que  $p_i(\ell) = 1$

e)  $H$  est connexe.

Considérons le premier graphe de la première ligne de  $H_2$  que l'on note  $H_2^{1,1}$ . Il est représenté par  $s_{p_1(i)}^{1,1,\dots,1,i}, \forall i \in N$ . Ce graphe rend

connexe la première ligne de  $H_1$  c'est-à-dire que :

$$H_2^{1,1} \cup H_1^{1,1} \cup H_1^{1,2} \cup \dots \cup H_1^{1,n} \text{ est connexe. En effet } H_2^{1,1} \text{ est}$$

connexe et  $S_{H_2}^{1,1} \cap S_{H_1}^{1,i} \neq \emptyset \quad \forall i \in N$

De même  $H_2^{2,1}$  rend connexe la deuxième ligne de  $H_1$  et le premier graphe de la dernière ligne de  $H_2 = H_2^{n^{r-1},1}$  rend connexe la dernière ligne de  $H_1$ .

Nous considérons les premiers graphes de deux lignes quelconques adjacentes de  $H_1$  ils sont de la forme :

$$(s_j^{i_1, i_2, \dots, i_{i-1}, 1, i_{i+1}, \dots, i_r}) \text{ et } (s_j^{i_1, i_2, \dots, i_{i-1}+1, 1, i_{i+1}, \dots, i_r})$$

Ces deux graphes donc, les deux lignes, sont rendus connexes par le graphe suivant :

$$(s_{P_{r-i+2}(i\dots)}^{i_1, i_2, \dots, i_{i-2}, j, 1, i_{i+1}, \dots, i_r})$$

qui est un graphe de  $H_{r-i+3}$ .

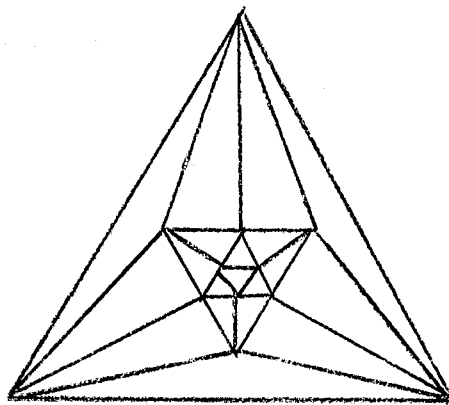
### 2 . 3 . Calcul de $I_h$ , $h \equiv 5 \pmod{6}$ .

$$2 . 3 . 1 . \underline{I_{6q+5} = q+1 \text{ pour } q = 0 \text{ et } q = 1}$$

a) Le graphe de la figure 4 est 5-régulier, planaire et a

$$12(q+1) = 12 \text{ sommets.}$$

Figure 4



b) On considère le graphe  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1$  et  $G_2$  étant isomorphes au graphe de la figure 5, les noms de sommets de  $G_1$  étant non entourés, ceux de  $G_2$  étant entourés. Il est facile de vérifier que  $A_{G_1} \cap A_{G_2} = \emptyset$

D'autre part  $G_1$  et  $G_2$  sont 1-maximaux donc  $G$  est 2-maximal. Il est 11-régulier et a  $24 = 12(q+1)$  sommets.

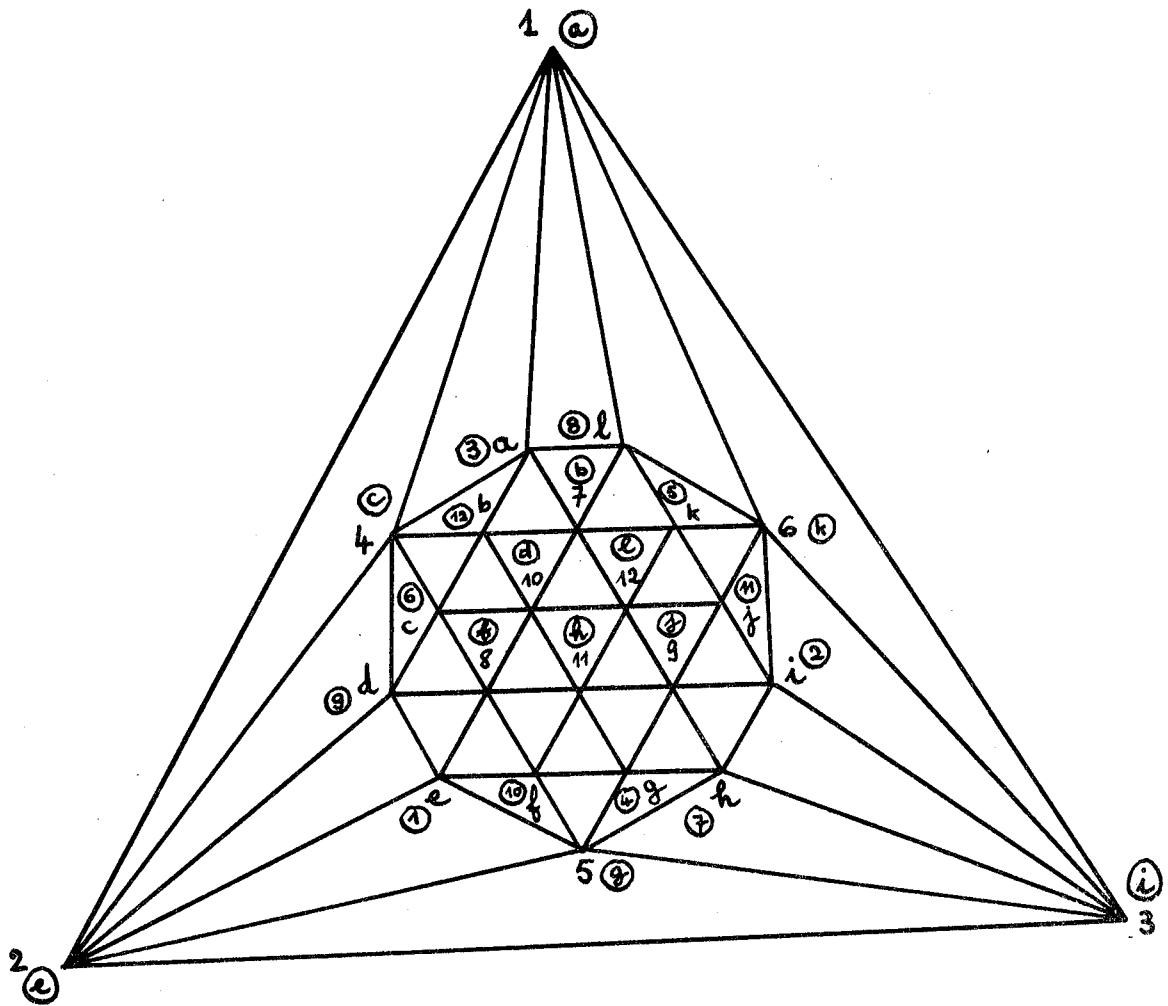


Figure 5



2 . 3 . 2 . Une famille de graphes 1-maximaux

Nous allons construire une famille de graphes  $G_n$ ,  $n \geq 0$ ,  $G_n$  étant 1-maximal et ayant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_n = 2n + 13 & \text{sommets de degré 5} \\ y_n = 8n + 22 & \text{sommets de degré 6} \\ z_n = 2n + 1 & \text{sommets de degré 7} \end{array} \right.$$

Considérons le graphe de la figure 6. Il est 1-maximal (toutes ses faces sont triangulaires) et a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 \text{ sommet de degré 7} & : z \\ 22 \text{ sommets de degré 6} & : (y_i) \\ 13 \text{ sommets de degré 5} & : (x_i) \end{array} \right.$$

En ajoutant des sommets et des arêtes, comme indiqué en pointillés sur la figure 7 nous conservons un graphe 1-maximal et nous faisons les opérations suivantes :

- nous transformons deux sommets de degré 6,  $y_{10}$  et  $y_{12}$ , en sommets de degré 7.

- nous ajoutons 5 sommets de degré 6,  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$

- nous transformons 5 sommets de degré 5 en sommets de degré 6 :  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

- nous ajoutons 7 sommets de degré 5 :  $u_1, u_2, \dots, u_7$

En faisant  $n$  fois cette opération nous obtenons  $G_n$  avec :

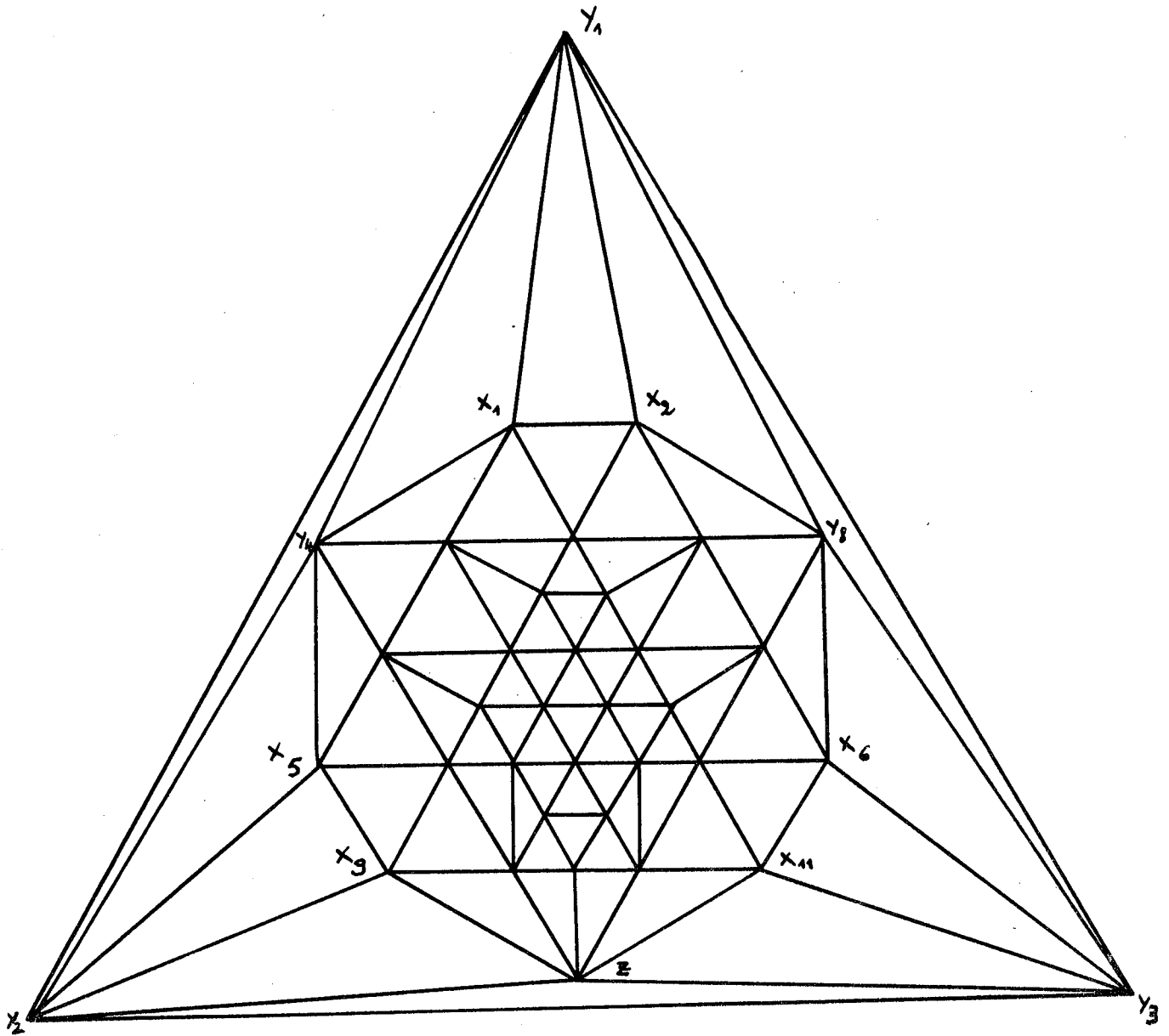


Figure 6

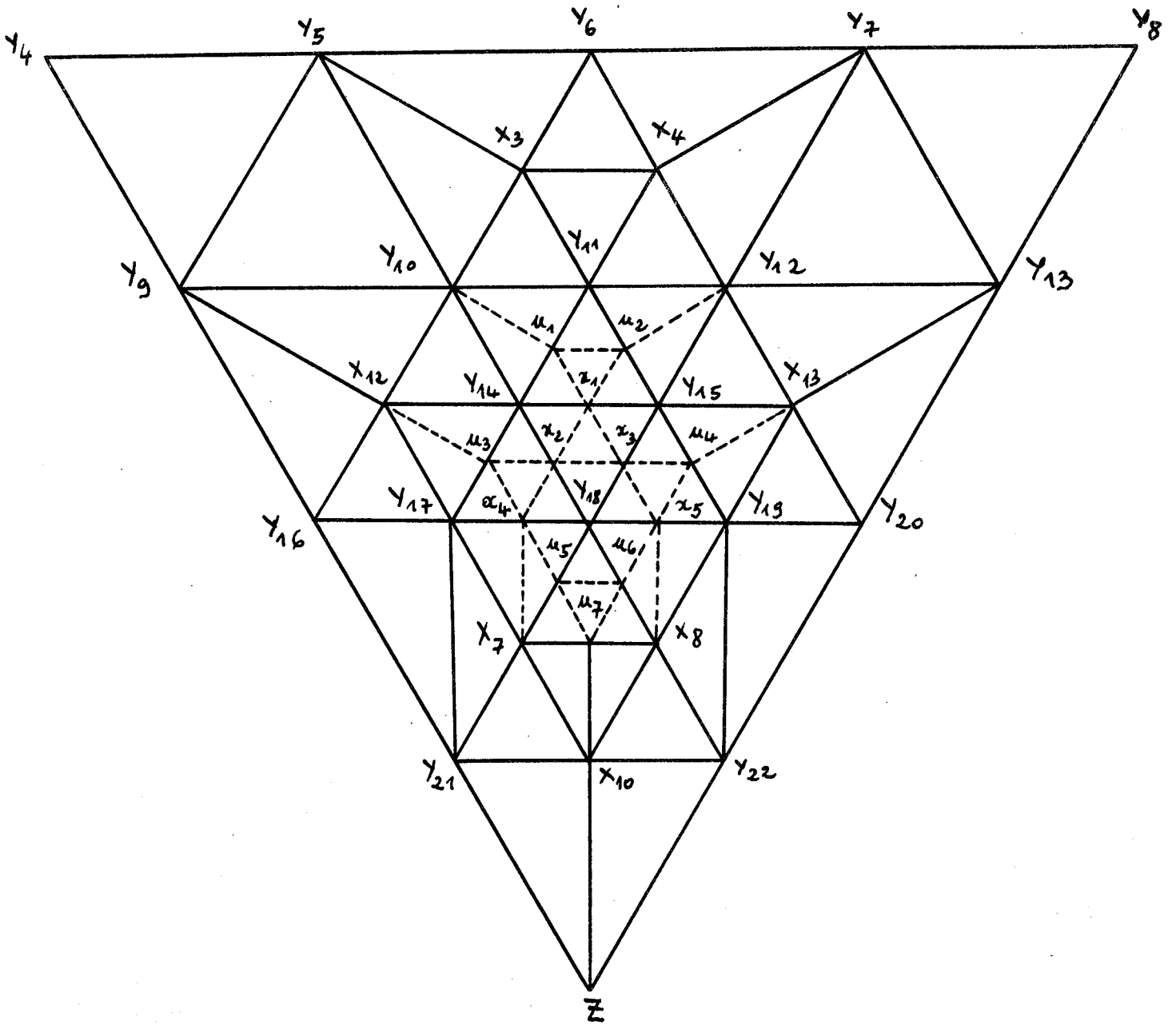


Figure 7

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 7-5 = x_{n-1} + 2 \text{ sommets de degré } 5 \\ y_n = y_{n-1} + 5+5 - 2 = y_{n-1} + 8 \text{ sommets de degré } 6 \\ z_n = z_{n-1} + 2 \text{ sommets de degré } 7 \end{cases}$$

avec  $x_0 = 13$ ,  $y_0 = 22$  et  $z_0 = 1$  on obtient bien le résultat annoncé.

2 . 3 . 3 . Construction d'un graphe  $(6q+5)$ -régulier d'épaisseur  $q+1$ .

Pour  $q=0$  et 1 nous venons de résoudre le problème (2.3.1).

a)  $q=2$

Nous considérons le graphe  $G_0$  de la famille définie précédemment en 2.3.2.  $G_0$  a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ sommet de degré } 7 \\ 22 \text{ sommets de degré } 6 \\ 13 \text{ sommets de degré } 5 \end{array} \right.$$

Soient  $l_1, l_2, l_3$  trois ensembles d'entiers ordonnés définis par :

$$l_1 = 7 \ 6 \ 6 \ \dots \ 6$$

$$l_2 = 5 \ 6 \ 6 \ \dots \ 6$$

$$l_3 = 5 \ \underbrace{5 \ 5 \ \dots \ 5}_{11 \text{ fois}}$$

11 fois

La matrice  $M$  définie par :

$$M = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_2 & l_3 & l_1 \\ l_3 & l_1 & l_2 \end{bmatrix}$$

est telle que si  $X = (x_i)_{i=1,36}$  est la première ligne de cette matrice, la 2<sup>e</sup> ligne de  $M$  est une permutation de  $X$  ainsi que la 3<sup>ème</sup>.


La ligne  $X$  contient un 7, vingt-deux 6 et treize cinq, donc  $X$  peut être considéré comme une numérotation des sommets de  $G_0$ , les deux autres lignes définissant deux permutations, vérifiant les conditions du théorème 1 car la somme des éléments d'une même colonne de  $M$  est constante et égale à 17. En appliquant le résultat du théorème 1 à partir de  $G_0$

on obtient donc un graphe 17-régulier et d'épaisseur  $\leq 3$ . Or d'après le lemme 2 l'épaisseur d'un tel graphe est égale à 3 ou 4 donc  $I_{17} = 3$ .

b) q=3

On applique le théorème 1 et le lemme 2 au graphe  $G_1$  en considérant les 3 permutations définies par les 3 dernières lignes de la matrice M :

$$M = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_2 & l_3 & l_4 & l_1 \\ l_3 & l_4 & l_1 & l_2 \\ l_4 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} l_1 = 7 \ 7 \ 7 \ 6 \ \dots \ 6 \\ l_2 = 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ \dots \ 6 \\ l_3 = 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ \dots \ 6 \\ l_4 = 6 \ 6 \ 6 \ 5 \ \dots \ 5 \end{array}$$

  
 9 fois

$$\sum_{i=1}^4 (m_{ij}) = 23 \quad \forall j$$

et la ligne  $l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4$  contient  $x_1 \ 5, y_1 \ 6, \text{ et } z_1 \ 7$  donc correspond à une numérotation des sommets de  $G_1$ .

On obtient ainsi  $I_{23} = 4$

Nous pouvons généraliser ces 2 constructions en distinguant q pair et q impair.

c) q=2k+1. Nous allons construire un graphe régulier de degré  $6(2k+1)+5$ . Pour cela nous considérons le graphe  $G_{2k-1}$  et les ensembles d'entiers ordonnés définis par :

$\ell_1 =$	7 7 7 7 7	6 6 6 6 6 6 6
$\ell_2 =$	7 7 7 7 7	. . . . .
	. . . . . 7	
	. . . . . 5	. . . . .
	. . . . . .	
	. . . . . .	
	. . . . . .	
$\ell_{k-1} =$	<u>7 7 7 7 5</u>	
	5 5 5 5 5	. . . . .
	5 . . . . 5	
	. . . . . 6	. . . . .
	. . . . . .	
	. . . . . .	
	. . . . . .	
$\ell_{2k-1} =$	<u>5 5 5 5 6</u>	
$\ell_{2k} =$	6 6 6 6 6	. . . . .
$\ell_{2k+1} =$	6 6 6 6 6	<u>6 6 6 6 6 6 6</u>
$\ell_{2k+2} =$	6 6 6 6 6	<u>5 5 5 5 5 5 5</u>
		7 colonnes

Et on considère la matrice ayant  $\ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots \ell_{2k+2}$  pour première ligne et les  $2k+1$  permutations circulaires.

Chaque ligne a :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{le nombre de 5 est} = 4k + 4 + 7 = 2(2k-1) + 13 = x_{2k-1} \\
 \text{le nombre de 6 est} = 12 + 7(2k+1) + 2k+2 - 7 = 2(2k-1) + 22 \\
 \hspace{15em} = y_{2k-1} \\
 \text{le nombre de 7 est} = 4(k-1) + 3 = 2(2k-1) + 1 = z_{2k-1}
 \end{array} \right.$$





$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le nombre de 7 est} = 4k + 1 = 2 \cdot 2k + 1 = z_{2k} \\ \text{Le nombre de 6 est} = 8 + 2k + 7(2k+2) = 8 \cdot 2k + 22 = y_{2k} \\ \text{Le nombre de 5 est} = 4(k+1) + 2 + 7 = 2 \cdot 2k + 13 = x_{2k} \end{array} \right.$$

On considère la matrice ayant  $\ell_1 \ell_2 \dots \ell_{2k+3}$  pour première ligne et les  $2k+2$  permutations circulaires pour autres lignes. La somme des éléments d'une même colonne est bien égale à  $6(2k+2)+5$  on peut donc appliquer le même raisonnement qu'en c).

Le lemme 1 et a), b), c) et d) entraînent :

THEOREME 2 :  $I_{6q+r} = q+1 ; q \geq 0, r = 0,1,2,3,4,5.$

Nous avons démontré en 1.5. que :

$\theta(G) \leq S_{d_{\max}}$ , le théorème 2 entraîne que  $\theta(G) \geq I_{d_{\min}}$ . En effet si  $d_{\min} = 6q+r$  avec  $0 \leq r \leq 5$  alors  $m \geq \lfloor (6q+r) \frac{n}{2} \rfloor$  donc  $m \geq 3qn$  ce qui entraîne d'après (1) de 1.5 que :

$$\theta(G) \geq \left\lceil \frac{3qn}{3n-6} \right\rceil \left[ \text{or } \frac{3qn}{3n-6} > q \text{ donc } \theta(G) \geq q+1, \right.$$

c'est à dire qu'on a établi le théorème suivant :

THEOREME 3 : Si  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$  sont les degrés minimum et maximum d'un graphe G on a :

$$I_{d_{\min}} \leq \theta(G) \leq S_{d_{\max}}.$$

2 . 4 . Une paire de bornes pour  $S_h$

Le théorème de Petersen entraîne les inégalités :

$$(4) \quad S_{2k} \leq S_{2k-2} + 1 \leq k \quad k \geq 1$$

puisque tout graphe  $2k$ -régulier peut être décomposé en  $k$  semi-facteurs disjoints.

D'autre part :

$$(5) \quad S_h \leq S_{h+1} \quad \forall h \geq 1$$

En effet supposons que  $S_h > S_{h+1}$  ceci signifie qu'il existe un graphe  $G \in \mathcal{g}_h$  avec  $\theta(G) > S_{h+1}$  mais  $G$  est sous-graphe partiel d'un graphe  $G'$  de  $\mathcal{g}_{h+1}$  il y a donc contradiction.

HOBBS et GROSSMAN ont démontré [20] que les graphes  $K_{4t-1, 4t-1}$  étaient  $(t+1)$ -minimaux. Ce résultat entraîne que :

$$(6) \quad \theta(K_{4t+3}) \leq \theta(K_{4t-1, 4t-1}) = t+1, \quad \forall t \geq 1$$

En effet  $4t+3 \not\equiv 4 \pmod{6}$  donc :

$$\theta(K_{4t+3}) = \left\lfloor \frac{4t+10}{6} \right\rfloor \quad \text{or} \quad \left\lceil \frac{4t+10}{6} \right\rceil \leq t+1$$

puisque  $\frac{4t+10}{6t+6} \leq 1$  dès que  $t \geq 2$ . Pour  $t = 1$  on a  $\theta(K_7) = 2$  et  $\theta(K_{3,3}) = 2$

donc (6) est bien démontré.

D'autre part  $\theta(G') \leq \theta(G)$  si  $G' \subset G$  et (6) entraînent :

$$(7) \quad \theta(K_{4t-1+r, 4t-1+r}) = t+1, \quad 3 \geq r \geq 0$$

(4) et (7) entraînent :

$h+1 \leq S_{4h-1+r} \leq 2h+1$ $h \geq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq 3$
--

Nous pensons que la borne inférieure est la valeur exacte de  $S_h$ .

3 - ETUDE DES GRAPHES t-MAXIMAUX

3 . 1 . Proprietes generales

PROPRIETE 1 Soit G un graphe t-maximal d'ordre n et une arête  $a \in A_{K_n} - A_G$  alors le graphe  $G \cup \{a\}$  contient un sous-graphe (t+1)-minimal.

Démonstration

En effet  $G \cup \{a\}$  est d'épaisseur t+1 d'après la définition d'un graphe t-max et en utilisant la propriété 3 de 1.2. la propriété énoncée est démontrée.

Cette propriété qui relie la notion de graphe t-maximal a celle de graphe (t+1)-minimal permet d'obtenir un certain nombre de renseignements sur les graphes t-maximaux en utilisant les propriétés concernant les graphes t-minimaux établies ou rappelées dans la première partie de ce chapitre. Nous ne les donnerons pas explicitement.

PROPRIETE 2 Il existe un graphe G d'ordre n t-maximal si et seulement si

$$\underline{e(K_n) \geq t+1}$$

Démonstration

Si G est t-max l'épaisseur d'un graphe partiel de G est inférieure ou égale à l'épaisseur de G or

$$e(G \cup \{a\}) = t+1$$

quelle que soit l'arête a de  $A_{K_n} - A_G$ , et  $G \cup \{a\}$  est graphe partiel de  $K_n$ .

Si  $e(K_n) = t+1$ ,

en supprimant des arêtes on peut obtenir un graphe partiel d'épaisseur t.

Si l'on ajoute un ensemble maximal d'arêtes en conservant l'épaisseur, on n'obtient pas  $K_n$  puisque  $e(K_n) = t+1$ .

PROPRIETE 3 - Un graphe  $t$ -maximal a au moins  $6t-2$  sommets (pour  $t \geq 3$ ).

Démonstration

La propriété 2 entraîne que le nombre minimum de sommets d'un graphe  $t$ -maximal  $G$  est strictement supérieure au nombre maximum de sommets d'un graphe complet d'épaisseur  $t$ . Donc,

$$\begin{aligned} n_G &> \max \{p \mid e(K_p) = t\} \\ &\geq \max \{p \mid [(p+7)/6] = t ; p \neq 9, p \neq 4 \pmod{6}\} \\ &\geq \max \{p \mid [(p+7)/6] < t+1 ; p \neq 9, p \neq 4 \pmod{6}\} \\ &= \max \{p \mid p \leq 6t-1 ; p \neq 9, p \neq 4 \pmod{6}\} \\ &= \max \{p \mid p \leq 6t-2 ; p \neq 9, p \neq 4 \pmod{6}\} \\ &= 6t-3. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,  $n_G \geq 6t-2$ .

Tout graphe 2-maximal a au moins 9 sommets puisque  $e(K_8) = 2$ . Comme l'épaisseur de  $K_9$  est 3, d'après 1.6., il existe des graphes 2-maximaux d'ordre 9 qui ont d'ailleurs une structure particulière. (Voir la propriété 4).

On voit ainsi qu'un graphe  $t$ -maximal a au moins  $6t-3$  sommets pour  $t \geq 1$ .

PROPRIETE 4 : Les graphes 2 maximaux d'ordre 9 sont isomorphes à

$$K_9 - \{a\}, a \in A_{K_9}.$$

Démonstration

$K_9$  étant 3-minimal, les graphes isomorphes à  $K_9 - \{a\}$  sont bien 2-maximaux et ce sont les seuls, sinon, soit  $G$  d'ordre 9 2-maximal ayant au moins 2 arêtes de moins que  $K_9$ , alors  $G \subset K_9 - \{a\} - \{b\}$ , donc  $K_9$  n'est pas 3-minimal puisque  $K_9 - \{a\}$  est 3-planaire.

THEOREME 1 - Tout graphe d'ordre supérieur à 3 t-maximal est 3-connexe  
(t ≥ 1).

Démonstration :

Supposons G t-maximal et 2-connexe, G peut se décomposer  
 $G = H \cup K$ , avec :

$$\begin{cases} S_H \cap S_K = \{a,b\}, S_H \text{ et } S_K \neq \{a,b\}, \\ A_H \cap A_K = \emptyset \end{cases}$$

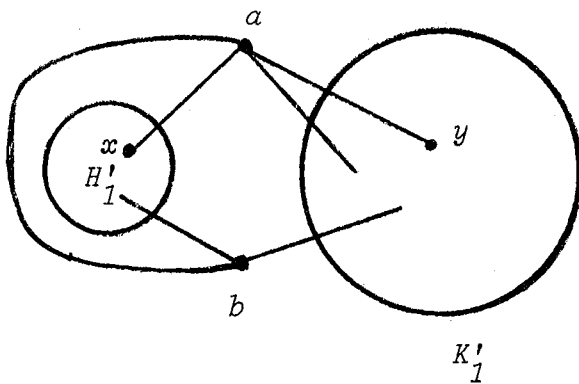
Considérons une t-décomposition planaire de  $G = \{G_1 G_2 \dots G_t\}$   
 et les décompositions induites sur H et K,  $H = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$  et  
 $K = \{K_1, K_2, \dots, K_t\}$

Supposons que  $A_{H_i} = \emptyset$  ceci entraîne que G n'admet plus  $\{a,b\}$   
 comme ensemble d'articulation ce qui est absurde. En effet  $S_{H_i} = S_H$  et  
 $S_{K_i} = S_K$  et sur le i<sup>ème</sup> plan on peut joindre planairement un sommet  
 x quelconque de  $S_{H_i}$  (qui est isolé) à un sommet y quelconque de  $S_{K_i}$ .

Considérons le graphe  $G_1$ . Si  $\{a,b\}$  n'est pas un ensemble  
 d'articulation de  $G_1$  c'est que  $H_1$  et  $K_1$  ne sont reliés par aucune arête,  
 on peut donc joindre planairement un sommet  $x \in S_{H_1} - \{a,b\}$  à un sommet  
 $y \in S_{K_1} - \{a,b\}$  donc  $\{a,b\}$  n'est pas ensemble d'articulation de G.

Si  $\{a,b\}$  est un ensemble d'articulation de  $G_1$ , on peut trouver  
 une représentation planaire de  $G_1$  telle que a et b soient sur la face  
 extérieure. Supposons qu'il n'existe pas de sommet  $x \in S_{H_1} - \{a,b\}$  sur  
 la face extérieure de cette représentation ceci entraîne que l'arête  
 (ab) fait partie de cette face extérieure et comme il n'existe pas  
 d'arêtes multiples, il existe  $y \in S_{K_1} - \{a,b\}$  sur la face extérieure

(Voir figure 8)



$$H'_1 = H_1 - \{a, b\}$$

$$K'_1 = K_1 - \{a, b\}$$

Figure 8

Comme  $\{a, b\}$  est un ensemble d'articulation de  $G_1$  nous pouvons mettre  $H'_1$  à l'extérieur ce qui permet de joindre planairement  $x$  à  $y$  ce qui entraîne que  $\{a, b\}$  n'est pas un ensemble d'articulation de  $G$ .

### 3 . 2 . Propriétés des décompositions planaires

THEOREME 2 : Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$   $t$ -maximal alors  $G$  admet une décomposition disjointe au sens des arêtes  $G = (G', G'')$  avec :

(1)  $G'$  est  $(t-1)$  maximal et  $S_{G'} = S_G$ .

(2)  $G''$  est 1-maximal dans  $\bar{G}'$  complément de  $G'$  dans  $K_n$ . ( $t \geq 2$ )

Démonstration :

Considérons une  $t$ -décomposition planaire quelconque de  $G = (G_1 G_2 \dots G_t)$ .

Posons  $G' = (G_1 G_2 \dots G_{t-1})$ . Si  $S_{G'} \neq S_G$ , il existe  $x \in S_G - S_{G'}$ .  
 Considérons une arête quelconque  $(xy)$  de  $G_t$  : on peut l'ajouter à  $G'$  sans augmenter son épaisseur puisque  $x$  est sommet pendant. On peut donc obtenir  $G = (G', G'')$ ,  $S_{G'} = S_G$ , et  $G''$  étant planaire. Si une arête  $a$  peut être ajoutée à  $G'$  sans augmenter son épaisseur, cela signifie que

$a \in A_{G''}$  sinon  $G$  n'est pas  $t$ -maximal. On peut donc rendre  $G'$   $(t-1)$ -maximal en lui ajoutant des arêtes de  $G''$ .  $G''$  reste donc planaire. D'autre part  $G'' \subset \bar{G}'$  sinon  $G'$  et  $G''$  auraient des arêtes communes. Si  $G''$  n'est pas  $1$ -maximal dans  $\bar{G}'$  cela signifie qu'on peut lui ajouter planairement une arête  $a$  mais alors  $G \cup \{a\}$  est d'épaisseur  $t$  ce qui est absurde.

La réciproque du Théorème 2 est fausse. En effet considérons le graphe  $G = (G_1, G_2)$  (fig 9).

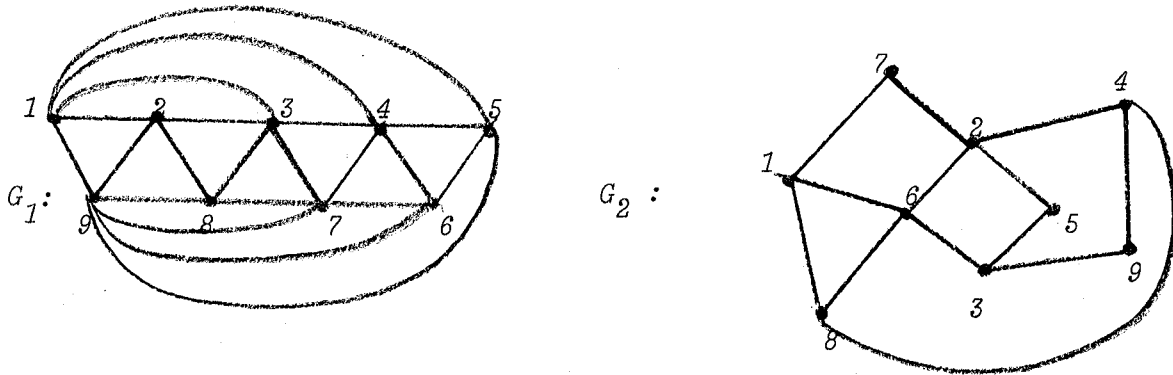


Figure 9

$$G = K_9 - (57) - (58)$$

donc  $G$  n'est pas  $2$ -maximal bien que  $G_1$  soit  $1$ -maximal et qu'il soit impossible d'ajouter planairement (57) ou (58) à  $G_2$ .

PROPRIETE 5 : Soit  $G$  un graphe  $t$ -maximal d'ordre  $n$ . Alors si un sommet  $x$  est soit isolé, soit sur un arbre dans l'un des plans d'une  $t$ -décomposition planaire quelconque de  $G$ , son degré est égal à  $n-1$ . ( $t \geq 2$ ).

Démonstration

En effet soit  $(G_1, G_2, \dots, G_t)$  une  $t$ -décomposition planeaire de  $G$ . Si  $x$  est isolé ou sur un arbre de  $G_i$  (c'est-à-dire une composante connexe de  $G_i$  qui est un arbre) alors sur  $G_i$  on peut joindre planeairement  $x$  à tous les autres sommets de  $G$ . Donc toutes ces arêtes sont éléments de  $A_G$  sinon  $G$  n'est pas  $t$ -maximal.

PROPRIETE 6 : Si  $G$  est un graphe  $t$ -maximal d'ordre  $n$  ayant une  $t$ -décomposition planeaire avec au moins  $2t$  sommets isolés ou sur des arbres alors  $m \geq (n+1)t + t(4t-5)$  ( $t \geq 2$ ).

Démonstration

En effet si  $G$  a  $x$  sommets isolés ou sur des arbres, le graphe  $G$  se décompose en un graphe complet à  $x$  sommets tous les sommets étant reliés à tous les autres sommets du graphe. Donc  $m \geq \frac{x(x-1)}{2} + x(n-x)$ , fonction qui est croissante en  $x$  quand  $1 \leq x \leq n-1$ . Or en posant  $x = 2t$  on a :

$$\begin{aligned} t(2t-1) + 2t(n-2t) &= (n+1)t + nt - 2t^2 - 2t \\ &\geq (n+1)t + 6t^2 - 3t - 2t^2 - 2t \text{ car } n \geq 6t-3. \end{aligned}$$

REMARQUE : *Le nombre de sommets isolés ou sur des arbres est très intéressant car c'est une borne inférieure pour le degré minimum du graphe.*

Soit  $D = (G_1, G_2, \dots, G_t)$  une  $t$ -décomposition planeaire de  $G$ . On appellera  $D_s$  décomposition saturée de  $G$  obtenue à partir de  $D$ , la décomposition obtenue de la manière suivante :

On dispose sur  $G_1, G_2, \dots, G_{t-1}$  un ensemble maximal d'arêtes de  $G_t$  de telle sorte que  $G'_1, G'_2, \dots, G'_{t-1}$  ainsi obtenu reste d'épaisseur  $t-1$  puis on recommence sur  $G'_1, G'_2, \dots, G'_{t-1}$  en saturant les  $t-2$  premiers plans avec les arêtes de  $G'_{t-1}$  etc...



PROPRIETE 7 : Si  $(G_1, G_2, \dots, G_t)$  est une  $t$ -décomposition plane saturée de  $G$ , graphe  $t$ -maximal, alors 2 composantes connexes, qui sont des arbres de  $G_i$  et  $G_j$ , sont disjointes au sens des sommets. (Ceci  $\forall i$  et  $j$ ). ( $t \geq 2$ ).

Démonstration

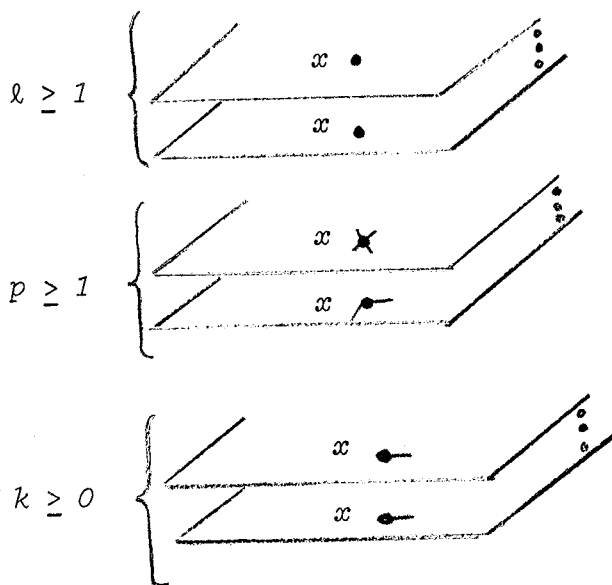
En effet, supposons que le sommet  $x \in S_{A_i^k}$ ,  $A_i^k$  étant un arbre de  $G_i$  apparaisse dans  $S_{A_j^l}$ ,  $A_j^l$  étant un arbre de  $G_j$  (avec  $i > j$ ). Alors une des arêtes incidentes à  $x$  dans  $G_i$  peut être représentée planairement sur  $G_j$  donc la décomposition n'est pas saturée.

THEOREME 3 : Si  $G$  est un graphe  $t$ -maximal d'ordre  $n$ , alors  $G$  admet une  $t$ -décomposition plane sans sommet isolé et où tous les arbres sont disjoints 2 à 2 au sens des sommets, sinon le degré minimum de  $G$  est  $\geq n-t+2$

Démonstration :

Considérons une  $t$ -décomposition saturée de  $G$ . Tous les arbres sont disjoints 2 à 2 au sens des sommets d'après la propriété 7. Si le sommet  $x$  est isolé dans l'un des plans  $P$  nous dirons que nous pouvons "déplacer" l'arête  $(xy)$  du plan  $P'$  où elle se trouve sur  $P$ , si on peut supprimer  $(xy)$  de  $P'$  et la mettre sur  $P$  ceci sans créer de sommet isolé et en conservant les arbres disjoints 2 à 2 (au sens des sommets).

Supposons qu'il soit impossible de rendre  $x$  non isolé par de tels déplacements. Nous allons alors montrer que le degré minimum de  $G$  est :



$d_{\min}(G) \geq n-t+2$ , ou plus exactement que le nombre de sommets de  $G$  de degré  $n-1$  est  $\geq n-t+2$ . Une fois que l'on a déplacé le maximum d'arêtes  $(xz)$  il reste  $l$  plans,  $l \geq 1$ , où  $x$  est isolé,  $p$  plans,  $p \geq 1$ , où le degré de  $x$  est  $\geq 2$  et  $k$  plans où le degré de  $x$  est 1. (voir fig. 10).

Figure 10

Considérons l'un des  $p$  plans  $Q$  où le degré de  $x$  est  $\geq 2$ , et soit  $y_i$  l'un des sommets adjacents à  $x$  dans  $Q$ .

(1)  $(xy_i)$  n'est pas un isthme.

(1.1) En supprimant  $(xy_i)$  on crée un arbre. Dans ce cas la composante connexe  $C$  de  $Q$  qui contient  $x$  a un seul cycle qui d'ailleurs contient  $(xy_i)$ . Donc on peut joindre planairement tout sommet de  $C$  planairement à tout sommet de  $G$  sur  $Q$ . Donc tous les sommets de  $C$  sont de degré  $n-1$ .

(1.2) On ne crée pas d'arbre en supprimant  $(xy_i)$ . Puisqu'on ne peut pas déplacer  $(xy_i)$  sur l'un des plans où  $x$  est isolé, c'est que  $y_i$  est sur un arbre dans l'un de ces plans et  $x$  sur un arbre. Dans ce cas  $d_G(y_i) = n-1$ .

(2)  $(xy_i)$  est un isthme.

Donc en supprimant  $(xy_i)$  on crée deux composantes connexes.

(2.1) On crée un arbre qui contient  $y_i$ . Dans ce cas, d'après la propriété 5  $d_G(y_i) = n-1$ , puisqu'on peut représenter planairement  $(xy_i)$  sur l'un des plans où  $x$  est isolé.  $y_i$  est alors un sommet qui est sur un arbre dans une  $t$ -décomposition planaire de  $G$ .

(2.2) On ne crée pas d'arbre contenant  $y_i$ . Dans ce cas s'il est impossible de déplacer  $(xy_i)$ , c'est que  $y_i$  est sur un arbre dans l'un des plans où  $x$  est isolé, donc  $d_G(y_i) = n-1$ . (Dans ce cas il ne peut y avoir qu'un plan où  $x$  est isolé sinon  $y_i$  apparaîtrait dans deux arbres ce qui est contraire aux hypothèses).

Nous avons donc démontré que tous les sommets adjacents à  $x$  étaient de degré  $n-1$  dans  $G$ . Or ce nombre est  $\geq n-1 - k$  or  $k \geq t-2$  puisque  $\ell \geq 1$  et  $p \geq 1$  donc  $d_{\min}(G) \geq n-t+2$  en effet  $d_{\min}(G) \geq n-1-k+1 \geq n-k \geq n-t+2$

THEOREME 4 : Tout graphe  $G$   $t$ -maximal d'ordre  $n$  a un nombre d'arêtes  
 $m > (n+1)t$ .

Démonstration :

Si  $G$  n'admet pas de décomposition planaire sans sommet isolé et où tous les arbres sont disjoints 2 à 2 d'après le théorème 3 :

$$m \geq \frac{n(n-t)}{2}$$

Dans le cas contraire soit  $(G_1, G_2, \dots, G_t)$  une décomposition planaire. On note  $G_i^! = G_i - \bigcup_k A_i^k$ ,  $A_i^k$  étant les composantes connexes de  $G_i$  qui sont des arbres.  $m_{G_i^!} - n_{G_i^!} \geq 2$  sinon  $G$  est un graphe complet. En effet si  $m_{G_i^!} - n_{G_i^!} < 2$  on peut joindre planairement sur  $G_i$  2 sommets quelconques

de  $G_i$ . Posons  $n_i! = |S_{G_i} - S_{G_i!}|$  le nombre d'arêtes des arbres de  $G_i$  est  $\geq \frac{n_i!}{2}$  et le nombre d'arêtes de  $G_i! \geq n - n_i! + 2$  donc :

$$m_G \geq \sum_i (n+2 - \frac{n_i!}{2}) = (n+1)t + (t - \frac{\sum_i n_i!}{2}).$$

Si  $2t \geq \sum_i n_i!$  le théorème est démontré.

Si  $2t < \sum_i n_i!$  alors le graphe  $G$  a la structure suivante :

$G = K_A \cup K_{A, \bar{A}} \cup G'$  avec  $|A| > 2t$  et d'après la propriété 6 le théorème est démontré. (Figure 11)

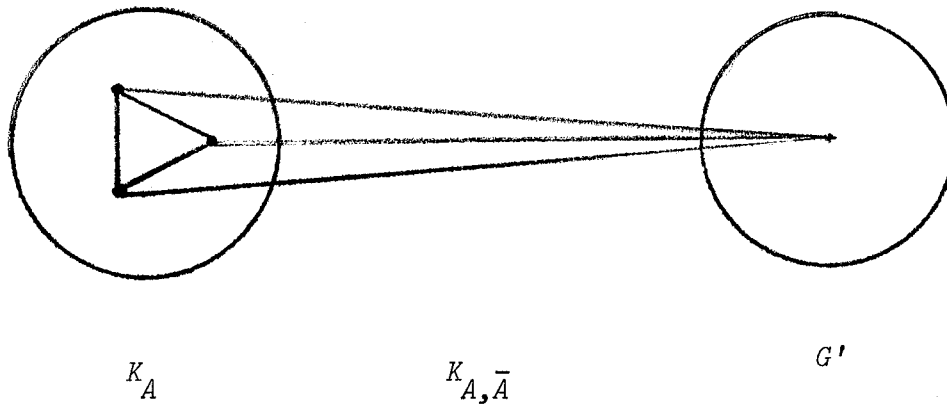


Figure 11

3 . 3 . Une condition nécessaire et suffisante

THEOREME 5 : Le graphe G est t-maximal si et seulement si, pour toute t-décomposition planaire de  $G = (G_1, G_2, \dots, G_t)$ , la condition suivante est vérifiée pour  $i = 1, 2, \dots, t$  :

Quel que soit  $B \subset A_{G_1}$  avec  $\theta(B \cup \{ \bigcup_{j \neq i} G_j \}) = t-1$ , les ensembles d'arêtes qui rendent  $G_i - B$  1-maximal sont inclus dans  $\bigcup_{j \neq i} A_{G_j}$ .

Démonstration :

C'est une condition nécessaire. En effet supposons que l'on puisse rendre  $G_1$  1-maximal, en enlevant des arêtes B que l'on peut ajouter à  $\bigcup_{i=2}^t G_i$  en conservant l'épaisseur de ce graphe et en ajoutant l'ensemble d'arêtes A contenant a  $\notin \bigcup_{i=2}^t A_{G_i}$ . Ceci entraîne que  $\{G_1 \cup A, G_2', \dots, G_t'\}$ , avec  $G_i' = G_i - A + B_i$  et  $B_i \subset B$ , est d'épaisseur t or ce graphe c'est  $G \cup \{a\}$  donc G n'est pas t-maximal.

Elle est suffisante en effet si on ajoute une arête a  $\notin \bigcup_{i=1}^t A_{G_i}$  à  $G_i$  par exemple on rend  $G_i$  non planaire sinon a serait  $\in \bigcup_{j \neq i} A_{G_j}$  donc  $\in \bigcup_{j=1}^t A_{G_j}$ .

REMARQUE : La condition du théorème 5 porte sur tous les ensembles B mais on peut ne la faire porter que sur les ensembles maximaux d'arêtes à enlever. Par exemple, considérons le graphe de la fig. 12 :  $G = g_1 \cup g_2$ .

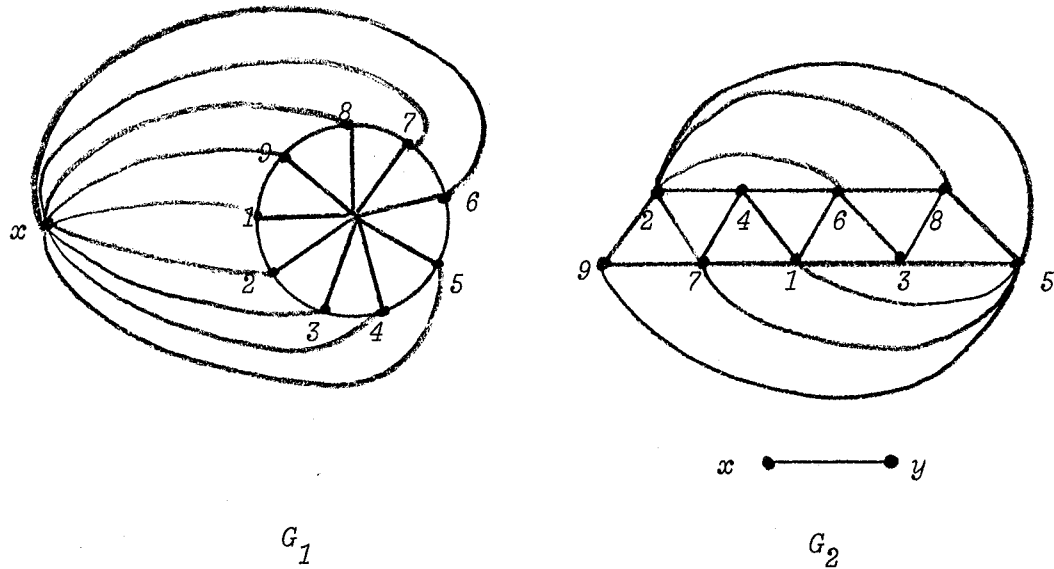


Figure 12

$g_1$  est 1-max donc  $g_1 \cup \{a\}$  est non planaire  $a \in A_{g_2}$

$g_2 \cup b$  est non planaire  $\forall b \notin A_{g_1}$ .

Cependant  $g_1 \cup g_2$  n'est pas 2-maximal. En effet on peut mettre (x9) sur  $g_2$  par exemple et ajouter (18) à  $g_1$ .

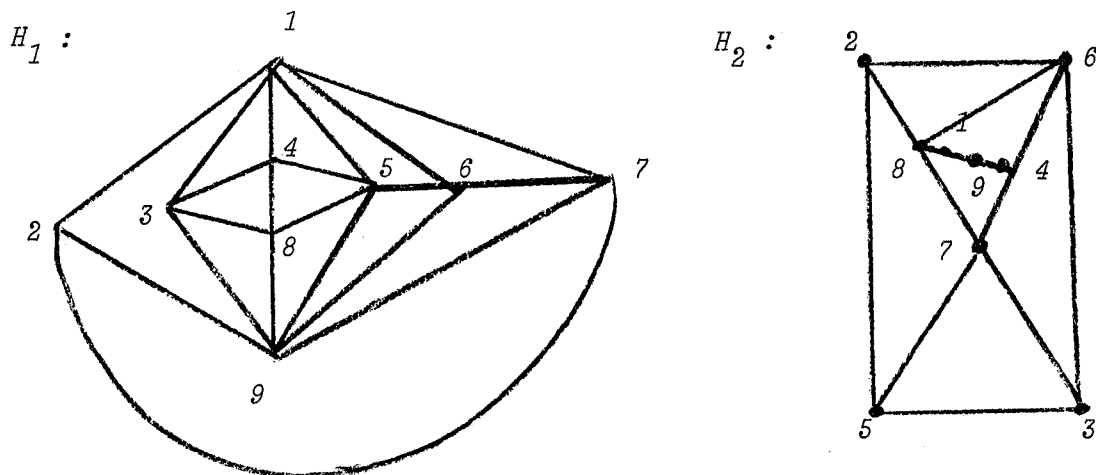
PROPRIETE 8 : Si  $H_1, H_2, \dots, H_t$  sont des graphes 1-maximaux d'ordre  $n, 2$  à  $2$  disjoints au sens des arêtes, alors  $G = \bigcup_{i=1}^t H_i$  est t-maximal.

Démonstration :

Le nombre d'arêtes de  $H_i$  est  $3n-6$  donc  $A_G = t(3n-6)$  ce qui entraîne que  $\theta(G) \geq \frac{t(3n-6)}{3(n-2)} = t$ . Donc  $G$  est d'épaisseur  $t$  ; d'autre part  $G$  est  $t$ -maximal, car si on pouvait lui ajouter une arête sans augmenter son épaisseur, l'un des graphes au moins, de toute décomposition, aurait

plus de  $3n-6$  arêtes donc serait non planaire. Toute décomposition planaire de  $G$  est un ensemble de  $t$  graphes 1-maximaux disjoints 2 à 2 au sens des arêtes.

La réciproque de cette propriété est fautive. En effet considérons une 2-décomposition planaire de  $K_9$ -a (fig. 13) :



$$K_9 = H_1 \cup H_2 \cup (24)$$

Figure 13

REMARQUES :

1) La propriété 8 permet d'envisager une méthode constructive pour étudier l'épaisseur des graphes complets. En effet s'il existe  $t$  graphes  $H_i$  1-maximaux d'ordre  $n$  avec  $A_{H_i} \cap A_{H_j} = \emptyset \forall i \neq j$  alors l'épaisseur de  $K_n$  est  $\geq t$ .

2) La conjecture de HOBBS [19] : "Les graphes  $K_{6t-7}$  sont  $t$ -minimaux pour  $t \geq 5$ " est fausse.

En effet cette conjecture est équivalente à la proposition suivante : les graphes  $K_{6t-7} - \{a\}$  sont  $(t-1)$ -maximaux, quel que soit  $a \in A_{K_{6t-7}}$ . Or

$$m \leq t(3n-6),$$

pour tout graphe d'épaisseur  $t$  ayant  $n$  sommets et  $m$  arêtes. En appliquant ce résultat à  $K_{6t-7} - \{a\}$  on obtient :

$$(6t-7)(3t-3)-1=18t^2-39t+20 \leq (t-1)(3(6t-7)-6) = 18t^2-45t+27$$

ce qui est absurde. ( $t \geq 5$ ).





C H A P I T R E    I I I  
D E C O M P O S I T I O N   D ' U N   S C H E M A   E N   U N   N O M B R E  
M I N I M U M   D E   S C H E M A S   P L A N A I R E S

-----



1 . EQUIPOTENTIELLE

1 . 1 . Définitions

Considérons un ensemble de points du plan,  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

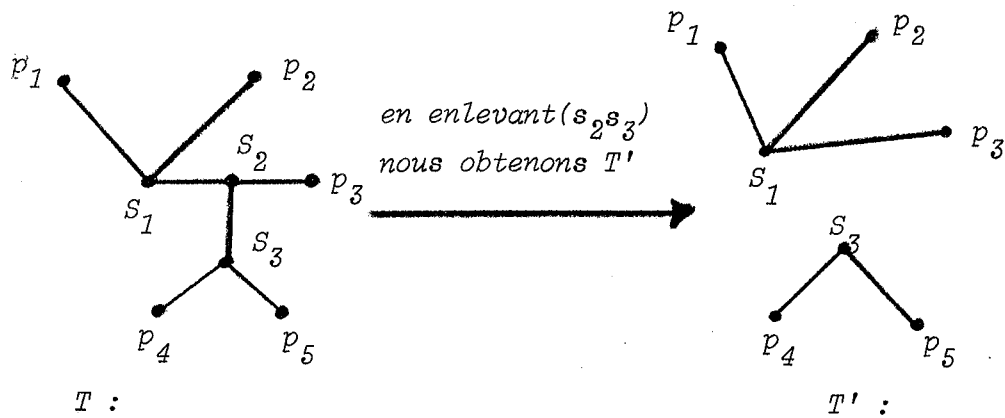
Une équipotentielle est un sous-ensemble de  $P$ , par exemple  $e = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ .

Nous appellerons tracé  $T$  d'une équipotentielle  $e = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ , un ensemble connexe de courbes simples du plan qui relie entre eux les points de  $e$ .

Un sous-tracé  $T'$  d'un tracé  $T$ , sera un tracé obtenu à partir de  $T$  en supprimant un certain nombre de courbes simples.

REMARQUE : Un sous-tracé d'un tracé d'une équipotentielle  $e$  n'est pas nécessairement un tracé de  $e$ , mais c'est une union de tracés d'équipotentielle  $e_i$  disjointes et incluses dans  $e$ .

EXEMPLE :  $e = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$



avec  $T' = T_1 \cup T_2$ ,  $T_1$  étant un tracé de  $e_1 = (p_1, p_2, p_3) \subset e$  et  $T_2$  un tracé de  $e_2 = (p_4, p_5) \subset e$ ,  $e_1$  et  $e_2$  étant disjointes.

Figure 1

A un tracé  $T$  nous pouvons associer, d'une manière unique, un graphe  $G(T)$  ayant pour ensemble de sommets les extrémités et les points d'intersection des courbes simples de  $T$ , deux sommets étant reliés par une arête s'il existe une courbe simple qui les relie et qui ne contient aucun autre sommet.

EXEMPLE :  $T$  de la figure 2 est un tracé de l'équipotentielle  $e = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ ,  $G(T)$  est son graphe associé.

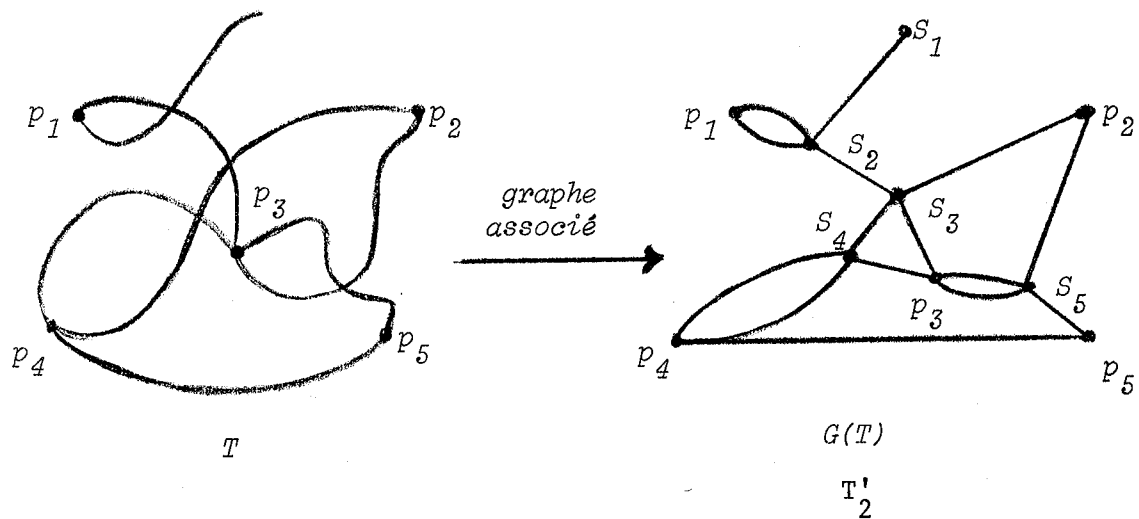


Figure 2

REMARQUES :

- 1) Le graphe associé à un tracé d'équipotentielle est un graphe planaire.
- 2) Lorsqu'il n'y aura aucun risque d'ambiguïté nous confondrons un tracé et son graphe associé.
- 3) La remarque concernant le sous-tracé  $T'$  d'un tracé  $T$  devient évidente si on considère les graphes associés. En effet les composants connexes de  $G(T')$  correspondent bien à des tracés d'équipotentielles disjointes.

1 . 2 . Tracés simples et normaux

Le tracé d'une équipotentielle  $e = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  est dit simple si  $G(T)$  est un arbre ayant  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  pour ensemble de sommets pendants. Le tracé d'une équipotentielle  $e = (p_1, p_2)$  est dit simple s'il est constitué d'une courbe simple d'extrémités  $p_1$  et  $p_2$ .

Le tracé d'une équipotentielle  $e = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  est dit normal si  $G(T)$  est un arbre ayant son ensemble de sommets pendants inclus dans  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ .

EXEMPLE :

$T$  de la figure 2 n'est ni simple, ni normal puisque  $G(T)$  n'est pas un arbre.  $T'_1$  ci-dessous est un tracé normal de  $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$  il n'est pas simple car  $p_3$  n'est pas sommet pendent et  $T'_2$  est simple :

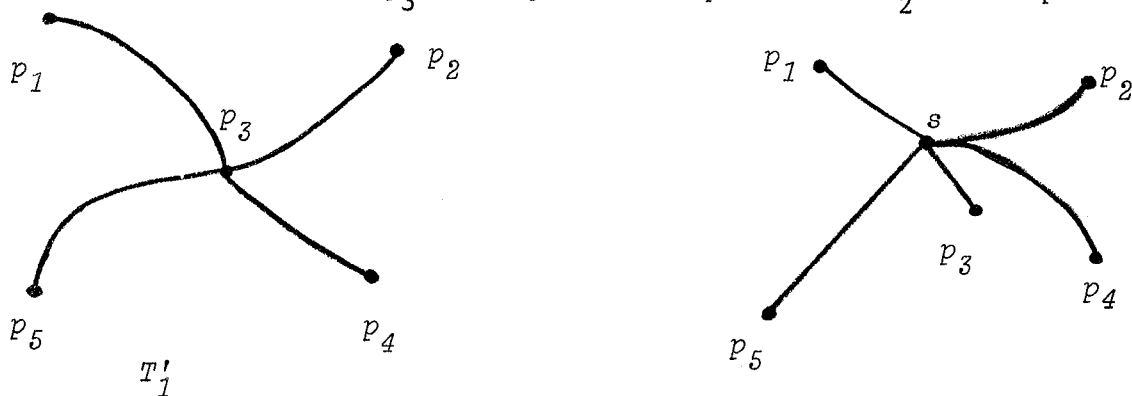


Figure 3

Nous ne considérerons que des tracés normaux dans toute la suite de ce chapitre. Ceci n'est pas une restriction trop gênante dans la mesure où un tracé de longueur minimum est normal.

D'une manière plus précise : nous dirons qu'une fonction longueur  $\ell$ , qui est une application de l'ensemble des tracés dans  $R$ , est croissante si l'on a :

$$\ell(T') < \ell(T), T' \text{ étant un sous-tracé de } T.$$

nous avons alors la propriété suivante :

PROPRIETE 1 [30] : Les tracés de longueur minimum d'une équipotentielle sont normaux. Ceci quelle que soit la fonction longueur croissante considérée.

Démonstration :

Considérons un tracé  $T$  de longueur minimum d'une équipotentielle  $e = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ , la longueur étant une fonction croissante. Si  $G(T)$  n'est pas un arbre on peut supprimer une arête sans détruire la connexité le sous-graphe  $G'$  obtenu correspond à un sous-tracé  $T'$  de  $T$ ,  $G' = G(T')$  donc  $\ell(T') < \ell(T)$  et  $T'$  est un tracé de  $e$ , ce qui est absurde, donc  $G(T)$  est un arbre.

De même si  $G(T)$  a un sommet pendant son élément de  $e$ , on peut supprimer son arête incidente en conservant la connexité.

PROPRIETE 2 : Un tracé normal admet une décomposition unique en sous-tracés simples maximaux et disjoints.

Démonstration :

Considérons un tracé normal  $T$  d'une équipotentielle  $e = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ .  $G(T)$  est un arbre ayant son ensemble de sommets pendants inclus dans  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ . Un sous-arbre connexe de  $G(T)$

n'ayant pour sommets pendants que des sommets de  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ , n'ayant aucun sommet non pendent élément de  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ , et maximal pour ces deux propriétés correspond à un élément de la décomposition cherchée. En effet un tel sous-arbre correspond à un sous-tracé simple maximal. D'autre part considérons deux sous-arbres de cette sorte  $G(T_1)$  et  $G(T_2)$  et supposons qu'ils ne soient pas disjoints. Si  $G(T_1)$  et  $G(T_2)$  n'ont en commun que des sommets non élément de  $e$  dans ce cas  $G(T_1) \cup G(T_2)$  est un sous-arbre qui vérifie les propriétés et ni  $G(T_1)$ , ni  $G(T_2)$  ne sont maximaux ce qui est absurde. Si  $G(T_1)$  et  $G(T_2)$  ont en commun au moins un sommet de  $e$ , ce sommet est non pendent dans  $G(T_1)$  par exemple ce qui est contraire aux hypothèses.

EXEMPLE : Le tracé normal  $T$  ci-dessous de l'équipotentielle  $e = (p_1, p_2, \dots, p_7)$  admet une décomposition en 3 tracés simples :

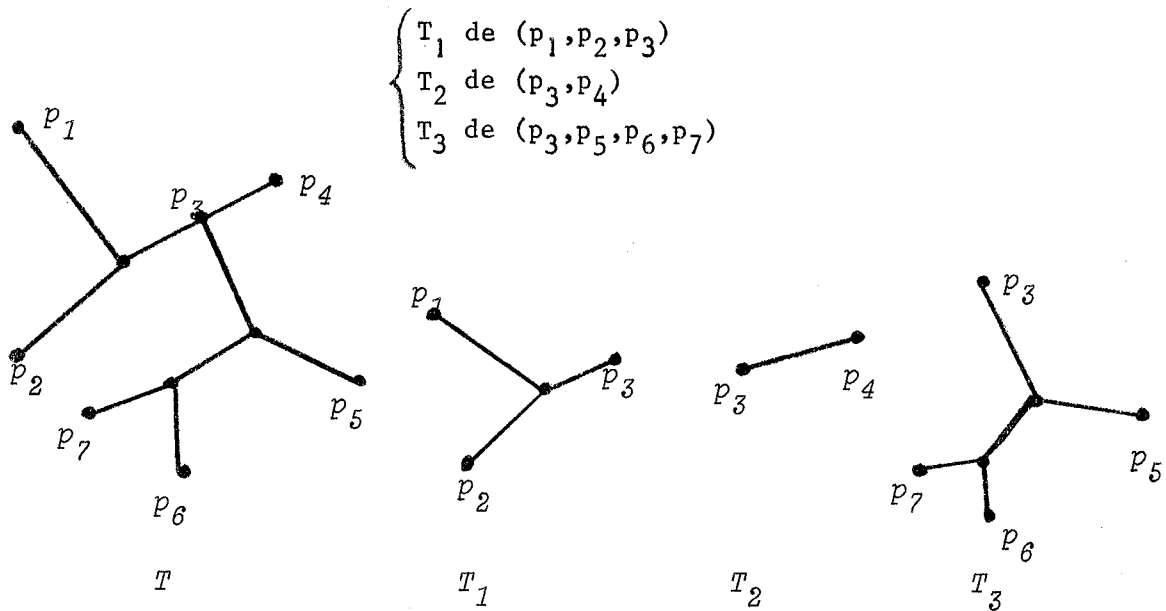


Figure 4



## 2 . SCHEMA RIGIDE

### 2 . 1 . Définitions

Dans le cas où le dessin d'une équipotentielle ne peut se faire que d'une manière unique, c'est-à-dire a un tracé unique connu, nous dirons que nous avons un schéma rigide.

Un schéma rigide S sera donc défini par un triplet :

$S = (P, E, T)$  avec :

- P est un ensemble de points du plan  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$
- E est un ensemble de parties de P :  $E \subset \mathcal{P}(P)$ , un élément de E étant constitué par les points de P qui sont sur une même équipotentielle,  $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ .
- T est l'ensemble des tracés (supposés normaux) des éléments de E,  $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ ,  $t_i$  étant le tracé (unique) de  $e_i$ .

un exemple de schéma rigide :

La figure 5 représente un schéma rigide S ayant 13 points :

$P = (p_1, p_2, \dots, p_{13})$ , les équipotentielles sont données par :

$E = ((p_1, p_4, p_{11}), (p_2, p_7, p_8, p_{13}), (p_3, p_{12}), (p_5, p_{12}), (p_6, p_{12}), (p_9, p_{12}), (p_{10}, p_{13}))$ .

Les tracés étant représentés sur la figure 5 :

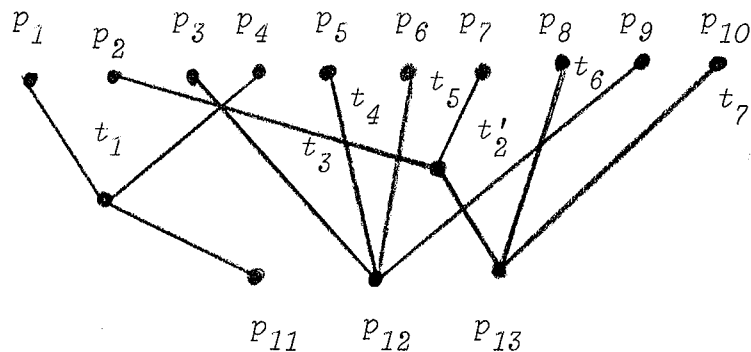


Figure 5

Tous les  $t_i$  sont simples sauf  $t_2$  qui se décompose en  $(t'_2, t''_2)$ .

Un schéma rigide sera dit simple si tous ses tracés sont simples.

La propriété 2 de 1.2. entraîne qu'à tout schéma rigide nous pouvons associer un schéma rigide simple d'une manière unique.

Le schéma rigide simple, associé au schéma rigide de la figure 5 sera obtenu en remplaçant dans  $E : (p_2, p_7, p_8, p_{13})$  par :

$\{(p_2, p_7, p_{13}), (p_8, p_{13})\}$  et en remplaçant dans  $T : t_2$  par  $\{t'_2, t''_2\}$ .

A partir de maintenant nous supposons donc que tous les schémas rigides considérés sont simples.

Un schéma partiel d'un schéma  $S$ , est obtenu à partir de  $S$  par la suppression d'un certain nombre d'équipotentielles et des tracés correspondants. Si  $S = (P, E, T)$  et  $S' = (P, E', T')$ , avec  $E' \subset E$  et,  $T'$  ensemble des tracés de  $T$  correspondant à  $E'$ , alors  $S'$  est un schéma partiel de  $S$ .

Un schéma rigide  $S$  sera dit planaire, si deux éléments quelconques de  $T$  ne se coupent qu'en des points de  $P$ .

## 2 . 2 . Décomposition d'un schéma rigide

Un schéma rigide  $S = (P, E, T)$  admet une  $k$ -décomposition planaire :

$(S_1, S_2, \dots, S_k)$  si les  $S_i$  sont des schémas partiels de  $S$  ayant les propriétés suivantes :

- (a)  $S_i$  est planaire, pour  $i = 1, 2, \dots, k$
- (b) si  $S_i = (P, E_i, T_i)$  l'ensemble  $(E_1, E_2, \dots, E_k)$  est une partition de  $E$ .

Par analogie avec la théorie des graphes nous appellerons épaisseur de  $S$ , notée  $\theta(S)$ , le plus petit nombre d'éléments d'une décomposition planaire de  $S$ .

Nous allons résoudre le problème suivant :

PROBLEME 1 :

" Trouver une  $\theta(S)$  - décomposition planaire d'un schéma rigide  $S$ ".

REMARQUES :

1) Dans les technologies "intégrées" actuelles, un système logique est réalisé par des cartes supportant des boîtiers de circuits intégrés.

Les contacts des boîtiers apparaissent sur l'une des faces de la carte. Avec la formalisation adoptée nous appellerons

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  l'ensemble de ces contacts.

Le réseau à réaliser est donné par un ensemble d'équipotentiels sur  $P$ , c'est-à-dire  $E$  dans la terminologie adoptée.

Ces equipotentiels sont réalisées par une technique de circuit imprimé c'est à dire qu'un conducteur est constitué d'un dépôt métallique sur la carte : on ne peut donc réaliser que des schémas planaires sur une seule couche.

La complexité des réseaux à utiliser a donc conduit à l'utilisation de plusieurs couches. Si les seules possibilités de contact électriques entre couches sont constituées par les points de  $P$ , le problème de la répartition des connexions en un nombre minimum de couches est équivalent au problème 1, dans le cas où chaque

connexion ne peut avoir qu'un tracé.

2) Le problème, plus intéressant, du choix du tracé des équipotentielles de telle sorte que le réseau ait un nombre minimum de couches sera étudié dans le §3.

3) La méthode de résolution proposée permettra d'obtenir toutes les  $\theta(S)$ -décompositions planaires d'un schéma  $S$ .

2 . 3 . Equivalence du problème 1 avec le problème du coloriage des sommets d'un graphe.

Etant donné un schéma rigide  $S = (P,E,T)$  on associe à  $S$  le graphe  $G(S)$ , ayant  $T$  pour ensemble de sommets, deux sommets étant reliés par une arête si les tracés correspondant se coupent en des points autres que ceux de  $P$ .

EXEMPLE :

Le graphe  $G(S)$  associé au schéma rigide (simple) de la figure 5 est le suivant :

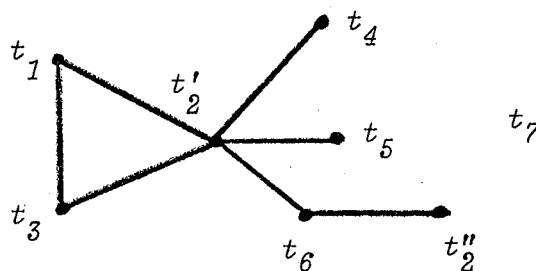


Figure 6

Deux sommets adjacents de  $G(S)$  correspondent à deux tracés qui doivent se trouver dans des plans différents.

Si on considère un coloriage des sommets de  $G(S)$  de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur et que le nombre de couleurs utilisées soit minimum, le problème d'un tel coloriage minimum est équivalent au problème 1.

En effet considérons un coloriage minimum, nous pouvons représenter dans un même plan les tracés correspondant aux sommets d'une même couleur et le nombre de couleurs étant minimum le nombre de plan est minimum. Réciproquement étant donné une  $\theta(S)$  - décomposition planaire, en coloriant les sommets de  $G(S)$  correspondant aux tracés d'un plan de cette décomposition d'une même couleur nous obtenons un coloriage minimum.

Nous avons ainsi ramené le problème 1 à un problème classique qui a de nombreuses solutions. Nous présentons dans le paragraphe 4 un algorithme booléen.

### 3 . SCHEMA VARIABLE

#### 3 . 1 . Définitions

Si nous avons pu étudier simplement le problème de la décomposition planaire dans le cas d'un schéma rigide, c'est parce que cela revenait à considérer une représentation unique d'un graphe.

Nous allons généraliser la méthode précédente en considérant un ensemble fini de représentations possibles, et nous déterminerons les représentations qui conduisent à un nombre minimum de couches planaires.

Cette hypothèse de finitude est réaliste. En effet dans l'étude des circuits imprimés, on est amené à décomposer la carte suivant un quadrillage. Les connexions n'ont alors que deux directions possibles, horizontale et verticale, et entre deux horizontales (ou verticales) adjacentes du quadrillage on ne peut faire passer qu'une connexion. La carte étant de dimensions finies, le nombre de tracés possibles d'une connexion ou d'une équipotentielle est également fini.

Un schéma variable sera défini par le triplet  $S = (P, E, \mathcal{C})$  avec :

- $P$  est un ensemble de points du plan,  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$
- $E$  est un ensemble de parties de  $P$ ,  $E = (e_1, e_2, \dots, e_n), e_i \subset E$

-  $\mathcal{C} = (T_1, T_2, \dots, T_n), T_i$  étant l'ensemble des tracés possibles,  $(t_i^1, t_i^2, \dots, t_i^{k(i)})$ , de  $e_i$ .

exemple de schéma variable :

Le schéma est à tracer sur un quadrillage de 10 lignes et 6 colonnes.

Il est déterminé par :

$P = (p_1, p_2, \dots, p_7)$ , un point  $p_i$  occupant une case du quadrillage,

$E = (e_1=(p_1, p_2), e_2=(p_1, p_3), e_3=(p_2, p_6), e_4=(p_2, p_7), e_5=(p_3, p_6), e_6=(p_4, p_5), e_7=(p_4, p_7))$

Les tracés possibles sont représentés sur la figure 8 avec les noms suivants :

$T_1 = (a, b), T_2 = (c, d), T_3 = e, T_4 = (f, g), T_5 = (k, l), T_6 = m, T_7 = n$

Ces tracés correspondent aux contraintes suivantes :

- on ne peut pas tracer une connexion sur un point  $p_i$
- il y a au plus un angle pour le tracé d'une connexion
- il y a au plus un tracé entre 2 horizontales (ou verticales) adjacentes.

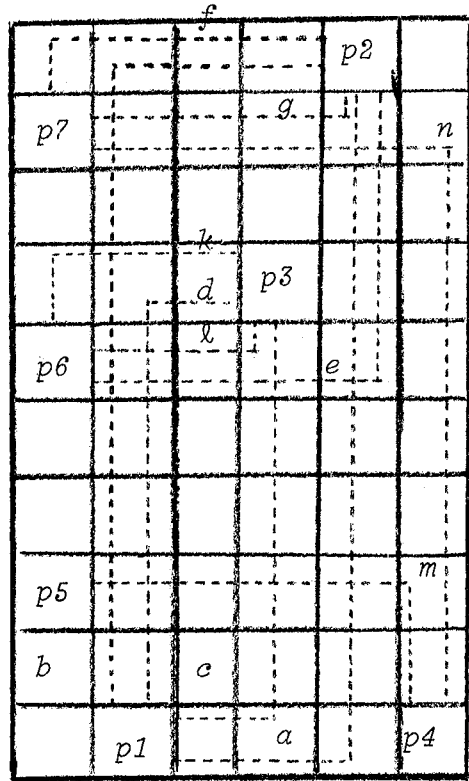


Figure 8

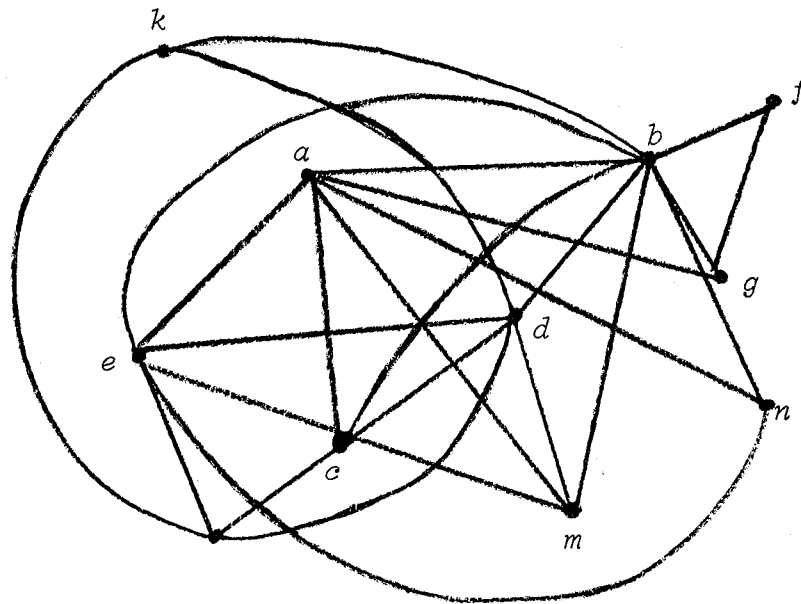


Figure 9

3 . 2 . Décomposition d'un schéma variable

Nous appellerons schéma rigide complet d'un schéma variable  $S = (P, E, \mathcal{E})$ , un schéma rigide défini par  $S' = (P, E, T)$ ,  $T$  étant obtenue à partir de  $\mathcal{E}$  en prenant un et un seul élément dans chaque  $T_i$ . Le nombre de schémas rigides complets d'un schéma variable est donc :

$$\prod_{i=1}^m |T_i|.$$

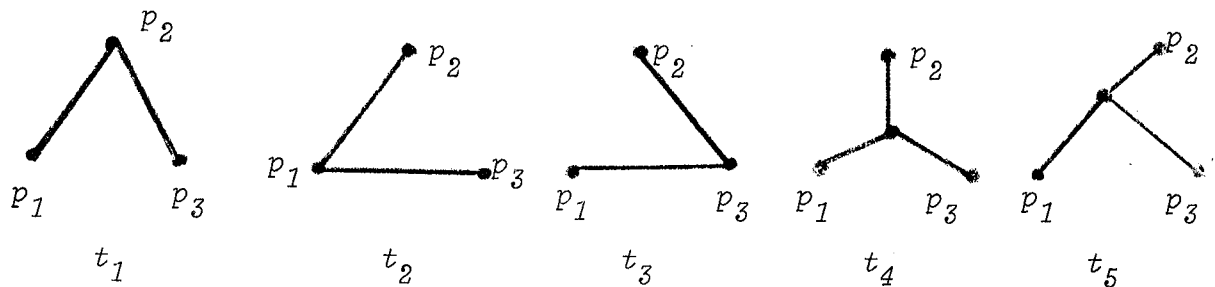
Le schéma de la figure 8 a 16 schémas rigides complets, l'un d'entre eux étant défini par :  $T = (a, c, e, f, k, m, n)$ .

Le problème de la décomposition d'un schéma variable peut alors se formuler de la manière suivante :

PROBLEME 2 : "Trouver une  $\theta(S_i)$ -décomposition planaire d'un schéma rigide complet d'un schéma variable  $S$ , avec  $\theta(S_i) = \min(\theta(S_j); S_j$  étant un schéma rigide complet de  $S$ )".

REMARQUES :

1) La résolution de ce problème permet donc de choisir la "meilleure" forme (en ce qui concerne le nombre des couches) d'une équipotentielle. Il suffit en effet de prendre pour  $T_i$  un ensemble fini de formes possibles pour  $e_i$ . Par exemple, considérons  $e_i = (p_1, p_2, p_3)$  on pourra prendre pour  $T_i$  :





2) La méthode proposée permettra d'obtenir tous les schémas rigides complets ayant une épaisseur minimale et toutes leurs décompositions minimales.

### 3 . 3 . Equivalence du problème 2 avec le problème du coloriage d'une partition des sommets d'un graphe.

On associe à un schéma variable  $S = (P, E, \mathcal{C})$  le graphe  $G(S)$  ayant  $\mathcal{C}$  pour ensemble de sommets, deux sommets étant adjacents si les tracés correspondant se coupent en des points autres que ceux de  $P$ , ou plus généralement ne peuvent pas être disposés sur une même couche. (La figure 9 représente le graphe  $G(S)$  associé au schéma  $S$  représenté par la figure 8).

Un schéma rigide complet est déterminé par un système de représentants de la partition  $\mathcal{C} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$  c'est à dire par un ensemble de sommets  $A$  de  $G(S)$  tel que :

$$A = (s_1, s_2, \dots, s_m), s_i \in T_i.$$

En utilisant le résultat de 2.3. nous avons donc l'équivalence entre le problème 2 et le problème suivant :

"Etant donnée une partition  $\mathcal{C} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$  de l'ensemble des sommets d'un graphe, trouver un système de représentants de cette partition ayant une coloration minimum".

#### REMARQUE :

Dans le cas particulier où la partition  $\mathcal{C} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$  est la partition triviale  $|T_i| = 1$  on retrouve le problème 1 nous n'étudierons donc dans le paragraphe suivant que le problème 2.

## 4 . UN ALGORITHME BOOLEEN POUR LE COLORIAGE D'UNE PARTITION DES SOMMETS D'UN GRAPHE.

### 4 . 1 . Recherche de tous les ensembles déconnectés maximaux d'un graphe

Considérons un graphe  $G(S_G, A_G)$ . Un ensemble de sommets  $S \subset S_G$

est déconnecté si quels que soient  $s_i \in S$  et  $s_j \subset S$  alors  $(s_i s_j) \notin A_G$ .

Nous noterons  $\Sigma_G = (S_1, S_2, \dots, S_r)$  l'ensemble des ensembles déconnectés maximaux du graphe G.

Nous munissons  $S_G$  d'un ordre total, par exemple :

$s_1 < s_2 < \dots < s_n$ . De plus nous attribuons à chaque sommet  $s_i$  une variable booléenne  $s_i$ . BENZAKEN ([29] P. 133) a établi le théorème suivant :

THEOREME 1: Les parties complémentaires des parties de  $S_G$  qui correspondent aux monômes premiers du produit booléen :

$$\Pi_1 = \prod_{i=2}^{n-1} (s_i + s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{k(i)}})$$

$s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{k(i)}}$  étant adjacents et inférieurs à  $s_i$ , sont

les ensembles déconnectés maximaux de G.

#### 4 . 2 . Coloriage d'une partition de l'ensemble des sommets d'un graphe

A partir de l'ensemble  $\Sigma_G$  obtenu par la méthode exposée ci-dessus il suffit d'appliquer une méthode de couverture.

On note  $(S_{i_j})$ ,  $j=1, \dots, k(i)$ , l'ensemble des éléments de  $\Sigma_G$  qui contiennent au moins un élément de  $T_i$ , et, on associe à chaque élément  $S_i$  de  $\Sigma_G$  une variable booléenne  $S_i$ . On a alors le théorème suivant :

THEOREME 2: Si  $S_1 S_2 \dots S_j$  est un monôme premier, ayant un nombre minimum de variables, du produit booléen :

$$\Pi_2 = \prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k(i)} S_{i_j}, \text{ alors toute partition } S_1^! S_2^! \dots S_j^!, \text{ avec}$$

$S_j^! \subset S_j$ , détermine un coloriage minimum de la partition  
 $(T_1, T_2, \dots, T_m)$ .

Démonstration :

Considérons un coloriage minimum de la partition  $\mathcal{C} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$  c'est à dire un ensemble de sommets  $A_1 A_2 \dots A_r$ ,  $A_i$  étant l'ensemble des sommets de couleur  $i$ , tel que  $\bigcup_{i=1}^r A_i$  soit un système de représentants de la partition  $\mathcal{C}$ , deux sommets adjacents n'étant pas de la même couleur et  $r$  étant minimum.

Il existe  $S_1, S_2, \dots, S_r \in \Sigma_G$  tels que  $A_i \subset S_i$  et  $S_i \not\subset S_j, \forall i \neq j$ . (sinon  $r$  n'est pas minimum).

$S_1 S_2 \dots S_r$  est bien un monôme premier ayant un nombre minimum de variables sinon supposons que  $S'_1 S'_2 \dots S'_p, p < r$ , soit un tel monôme, on peut en déduire un coloriage de la partition  $\mathcal{C}$  ayant  $p$  couleurs, ce qui est absurde.

4 . 3 . Application a la décomposition d'un schéma variable

Reprenons le schéma variable défini figure 8 et son graphe associé  $G$  (figure 9).

On ordonne les sommets de  $G$  en respectant les degrés :

$$b > a > c > d > e > m > l > n > g > k > f$$

les ensembles maximaux sont obtenus à partir du produit :

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & (b+acdemngkf)(a+cemng)(c+deml)(d+emlk)(e+ln) \\ & (m+n)(+k)(g+f) = acdefgkmm+abdegkm+abcegklm+ \\ & bcegklm,+abcdgln+bcdeglnm+abcdegkm+bcdegkmm+ \\ & abcdegkn+abcdgkln+abcdfln+abcdefkm+abcdefkn+abdeflm+abcefkkm. \end{aligned}$$

Ce qui donne les ensembles déconnectés maximaux suivants :

$S_1 = bl$	$S_2 = cfkn$	$S_3 = dfn$	$S_4 = adf$	$S_5 = efkm$
$S_6 = afk$	$S_7 = fln$	$S_8 = afl$	$S_9 = flm$	$S_{10} = efm$
$S_{11} = egkm$	$S_{12} = gln$	$S_{13} = glm$	$S_{14} = cgkn$	$S_{15} = dgn$

Le produit  $\Pi_2$  est alors donné par :

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & (s_1+s_4+s_6+s_8)(s_2+s_3+s_4+s_{14}+s_{15})(s_5+s_{10}+s_{11})(s_2+s_3+ \\ & s_4+s_5+s_6+s_7+s_8+s_9+s_{10}+s_{11}+s_{12}+s_{13}+s_{14}+s_{15})(s_1+s_6+s_7+s_8+s_9+s_{11}) \\ & +s_{12}+s_{13}+s_{14})(s_5+s_9+s_{10}+s_{11}+s_{13})(s_2+s_3+s_7+s_{12}+s_{14}+s_{15}) = \\ & s_4s_5s_{12}+s_4s_{10}s_{12}+s_4s_{11}s_2+s_4s_{11}s_3+s_4s_{11}s_7+s_4s_{11}s_{12}+\dots \end{aligned}$$

Une solution optimale aura donc 3 plans. Avec  $s_4s_5s_{12}$  on peut obtenir par exemple la décomposition minimum suivante :

				-2	
7					
6			-3		
5					
1					4

a,d,f,

				2	
7					
			3		
6					
5					
1					4

e,k,m,

				2	
7					
			3		
6					
5					
1					4

n,



C H A P I T R E    I V

SUR DES REPRESENTATIONS PARTICULIERES D'EQUIPOTENTIELLES  
ET DE GRAPHS PLANAIRES

-----



# 1 . RESOLUTION DU PROBLEME DE STEINER AVEC LA DISTANCE ORTHOGONALE

## 1 . 1 . Définitions et propriétés élémentaires

Considérons un ensemble de points du plan  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  et une équipotentielle  $E$  sur  $P$ . Le problème de Steiner est le suivant : "Trouver un tracé de  $E$  de longueur totale minimum".

Nous allons résoudre ce problème dans le cas où le tracé n'est pas quelconque mais est constitué par des segments de droites suivant deux directions orthogonales : horizontale et verticale.

On note  $GR(P)$  la grille obtenue en traçant les verticales et les horizontales issues des points de  $P$  et inscrites dans le rectangle dont les sommets sont les suivants :  $(\min abc(p_i), \min ord(p_i))$ ,  $(\min abc(p_i), \max ord(p_i))$ ,  $(\max abc(p_i), \min ord(p_i))$ ,  $(\max abc(p_i), \max ord(p_i))$ .

A cette grille on associe le graphe  $G(P)$  ayant pour sommets les points d'intersection de deux segments de la grille, deux sommets étant reliés s'ils sont extrémités d'un même segment.

Si on note  $E_m(P)$  un tracé de longueur minimum de l'équipotentielle sur  $P$  on a immédiatement :

PROPRIETE 1 :  $G(E_m(P))$  est un arbre dont les sommets pendants sont inclus dans  $P$ .

Démonstration : La longueur étant croissante (au sens de 1.2 du chap. 3) cette propriété n'est que la traduction de la propriété 1 du chapitre 3.

PROPRIETE 2 : Soit  $x$  un sommet non pendent du graphe  $H = G(E_m(P))$ . La suppression de  $x$  entraîne la décomposition de  $H$  en  $k$  composantes connexes  $H_i$ , avec  $2 \leq k \leq 4$ . On note  $P_i = P \cap S_{H_i}$  et on a alors :

$$E_m(P) = \bigcup_{i=1}^k E_m(x \cup P_i).$$



Démonstration :

H est un arbre d'après la propriété 1 et  $d_{\max}(H) \leq 4$  puisque  $H \subset G(P)$ . Donc la suppression d'un sommet  $x$  non pendent entraîne bien la décomposition de H en  $k$  composantes connexes avec  $2 \leq k \leq 4$ .

Considérons une décomposition de type 2 (2.2. Chap. 1) suivant  $x$  de  $E_m(P)$ , et notons  $E(x, P_i)$  les sous-tracés ainsi obtenus. On a  $\ell(E_m(P)) = \sum_{i=1}^k \ell(E(x, P_i))$  (voir figure 1). En remplaçant  $E(x, P_i)$  par un tracé de longueur minimum  $E_m(x, P_i)$  on obtient un tracé sur  $P$  de longueur  $\leq \ell(E_m(P))$  donc un tracé de longueur minimum.

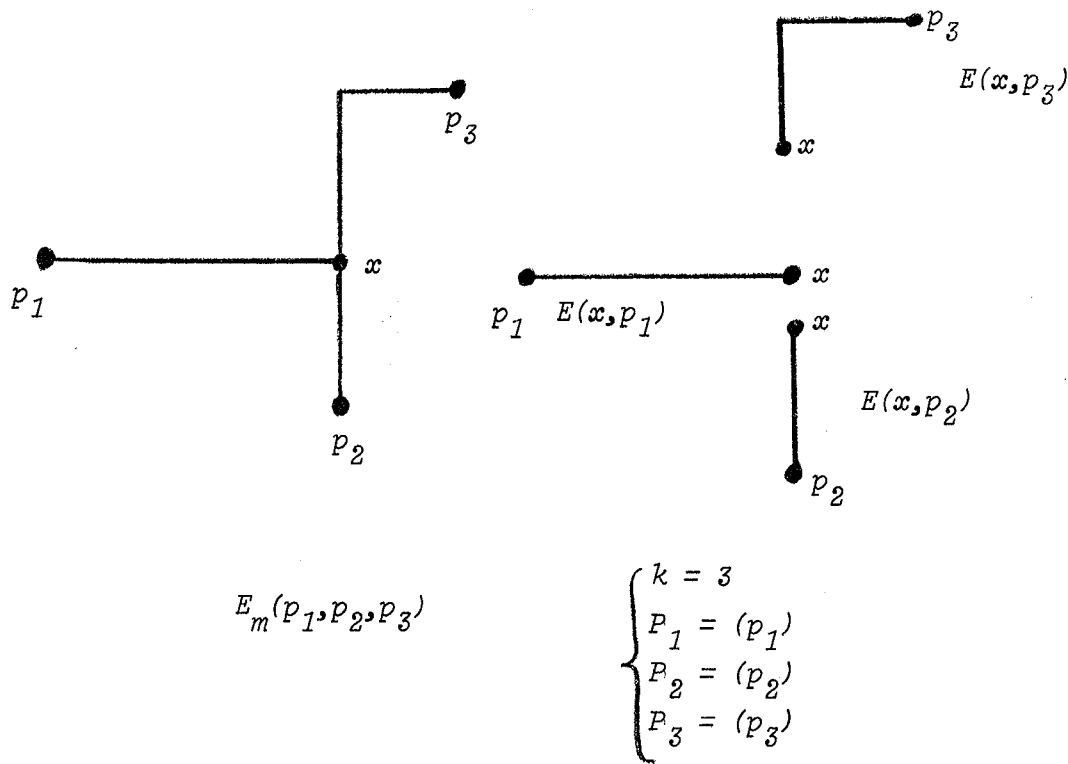


Figure 1

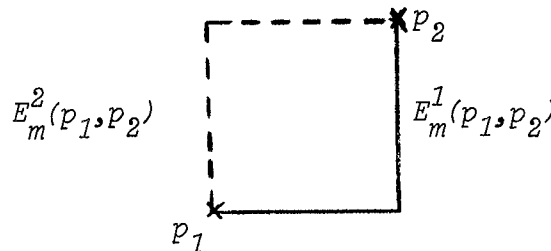
1 . 2 . Théorème d'existence

THEOREME 1 : Il existe un tracé de longueur minimum de  $E(P)$  dont le graphe associé est un sous-graphe partiel de  $G(P)$ .

Démonstration :

Nous raisonnons par récurrence sur le nombre  $n$  de points de  $P$ .

Pour  $n=2$  le résultat est évident, car on a alors deux tracés de longueur minimum qui sont les demi-périmètres du rectangle défini par les 2 points de  $P$  et les deux directions :



Nous supposons le résultat vrai pour  $|P| = k$ , quel que soit  $k \leq n-1$  et nous considérons  $|P| = n$  et un tracé minimum  $E_m(P)$  dont le graphe associé  $H$  n'est pas sous-graphe partiel de  $G(P)$ .

Si  $H \not\subset G(P)$  cela entraîne qu'il existe au moins un sommet  $x$  de  $H$  non élément de  $G(P)$ .

La suppression de  $x$  engendre au moins 2 composants connexes de  $H : H_1, H_2, \dots$  si l'on pose  $P_i = P \cap S_{H_i}$  on a  $|P_i| \leq n-1$  puisque  $i \geq 2$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et la propriété 2 ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe un tracé  $E_m(P)$  de longueur minimum sur  $G(P) \cup D \cup D'$ ,  $D$  et  $D'$  étant les droites orthogonales issues de  $x$ .

Considérons un segment AB de  $E_m(P)$  situé sur D par exemple. Nous allons remplacer  $E_n(P)$  par  $E'_m(P)$  de longueur  $\leq$  à celle de  $E'_m(P)$  et  $E'_m(P)$  ne contenant plus ce segment AB.

On note  $D_1$  la verticale de GR(P) à gauche de D et la plus proche de D ( $D_2$  la verticale à droite la plus proche de D). (voir figure 2).

A et B ne sont pas des sommets pendants de H, sinon  $E_m(P)$  ne serait pas optimale d'après la propriété 1.

Si  $n_i$  est le nombre de segments de  $E_m(P)$  joignant D à  $D_i$  ( $i=1,2$ ) on a  $n_i \geq 1$ .

En effet supposons  $n_1 = 0$ , par exemple. En rabattant AB sur  $D_2$  on conserve une équipotentielle sur P mais elle a une longueur inférieure à celle de  $E_m(P)$  de  $n_2 \times \Delta(D_2, D)$ , si  $\Delta(D_2, D)$  représente la distance entre D et  $D_2$ .

Si  $n_1 \geq n_2$  on rabat AB sur  $D_1$ , on supprime les  $n_1$  segments de  $E_m(P)$  qui joignaient D à  $D_1$  et on prolonge les  $n_2$  segments qui joignaient D à  $D_2$  jusqu'à  $D_1$ . La longueur du nouveau tracé  $E'_m(P)$  ainsi obtenu est donc :

$$\ell(E'_m(P)) = \ell(E_m(P)) - n_1 \times \Delta(D_1, D) + n_2 \times \Delta(D_1, D) \quad \text{donc}$$

$$\ell(E'_m(P)) \leq \ell(E_m(P)) \quad \text{puisque } n_1 \geq n_2 .$$

(voir figure 3).

En refaisant cette opération sur les segments de  $E'_m(P)$  de D et de D' on obtient bien le résultat annoncé.

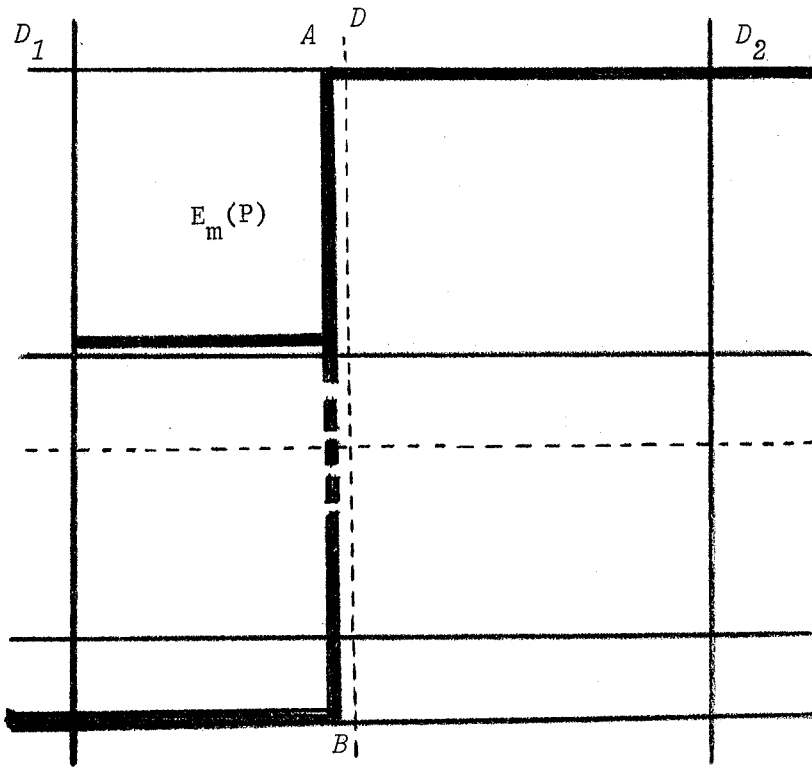


FIGURE 2

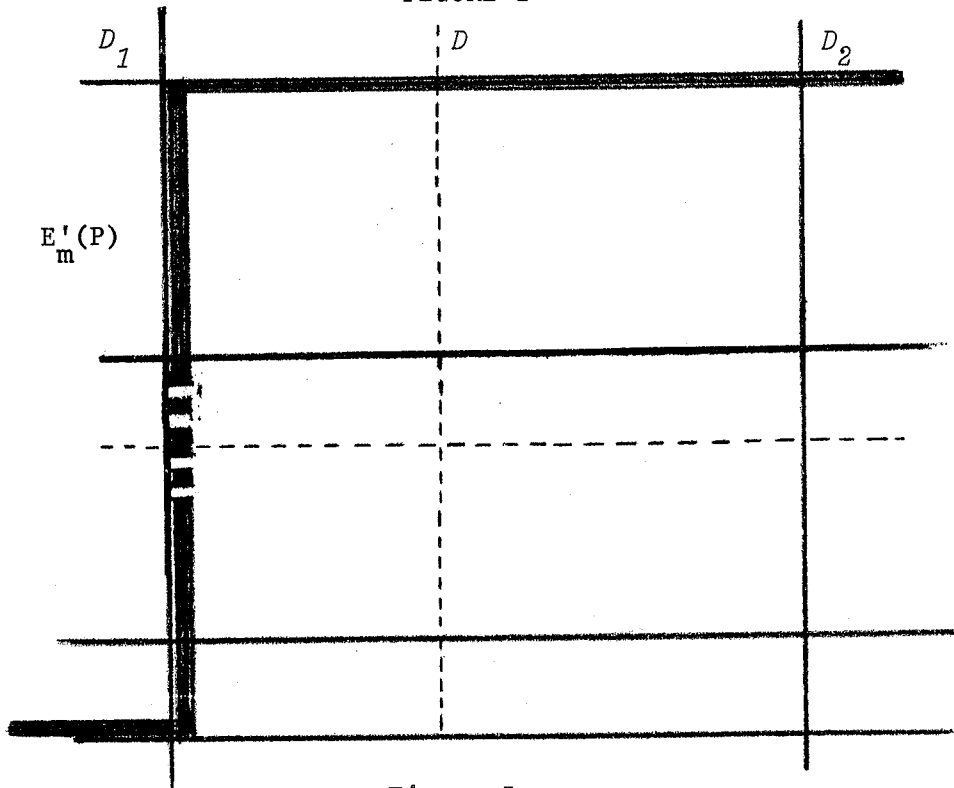


Figure 3

### 1 . 3 . Résolution par la recherche d'un arbre minimum d'un graphe

Considérons le graphe  $G(P)$  associé à la grille  $GR(P)$ . On peut valuer les arêtes de  $G(P)$  par la longueur du segment correspondant de  $GR(P)$ .

En utilisant la propriété 1 et le théorème 1, le problème de Steiner avec la distance orthogonale est donc équivalent au problème suivant :

"Etant donné un graphe  $G$  valué, trouver un arbre  $A$  de longueur minimum sous-graphe de  $G$ , et contenant un ensemble donné de sommets", qui est une généralisation du problème bien connu de "l'arbre minimum d'un graphe". ([40])

Nous proposons un algorithme booléen pour résoudre ce problème dans le paragraphe 3 de ce chapitre.

## 2 . UN ALGORITHME POUR RELIER N POINTS SUR UN QUADRILLAGE.

### 2 . 1 . Position du problème.

On cherche à relier  $N$  cases d'un quadrillage fini partiellement rempli, par une équipotentielle.

Les liaisons ne peuvent se faire que suivant les 2 directions orthogonales du quadrillage avec les contraintes suivantes :

- entre 2 horizontales (ou verticales) adjacentes il ne peut exister qu'une liaison au plus.

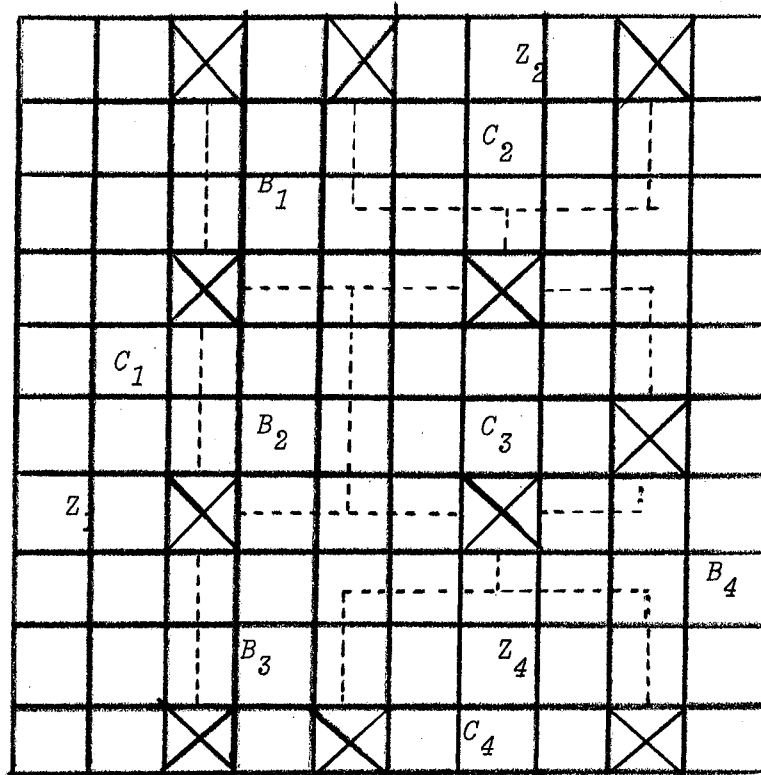
- les liaisons ne peuvent pas traverser des cases contenant : les  $N$  points à relier ou des angles de liaison ou certaines cases spécifiées (par une croix)

- une case contenant une partie horizontale (resp. vert.) de liaison ne peut être traversée que par une liaison verticale (resp. hori.).

On cherche à relier les  $N$  cases  $C_1, C_2, \dots, C_n$  par des liaisons respectant les contraintes ci-dessus, le nombre de croisements étant minimum

(voir figure 4). De plus parmi les différentes liaisons optimales possibles on cherchera une liaison ayant une longueur totale (nombre de cases utilisées) minimum.

EXEMPLE :



On veut tracer une équipotentielle sur C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub>, les liaisons sont représentées en traits interrompus.

Figure 4

2 . 2 . Graphe des croisements.

Soit  $\{e_i\}$  l'ensemble des cases du quadrillage. On considère la relation d'équivalence suivante :  $e_i$  est équivalent à  $e_j$  si on peut joindre  $e_i$  à  $e_j$  sans utiliser de case non vide. Nous appellerons composantes connexes du tableau ces classes d'équivalences.

Notons  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  les composantes connexes contenant au moins une des cases  $C_i$  à relier et  $B_1, B_2, \dots, B_q$  les autres. (voir figure 4).

Le graphe des croisements est le graphe ayant les  $Z_i$  et les  $B_i$  pour sommets, deux sommets étant adjacents si on peut aller d'une case de l'un à une case de l'autre en ne traversant qu'une case non vide (et en satisfaisant aux conditions de 2.1.)

Le graphe des croisements de l'exemple de la figure 4 est le suivant :

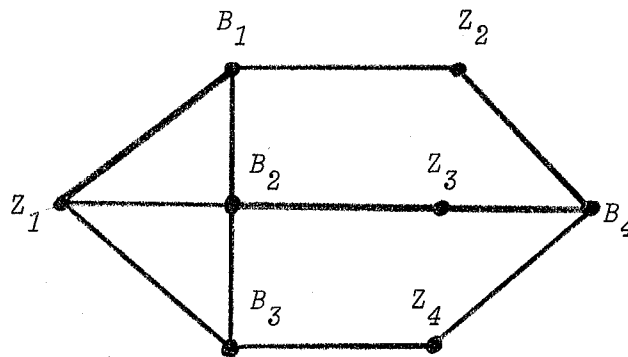


Figure 5

Chaque arête de ce graphe correspond à un croisement. Une chaîne de longueur minimum entre deux sommets de ce graphe indiquera les régions qu'il faut traverser pour joindre 2 cases avec un nombre minimum de croisements.

Un arbre de longueur totale minimum, sous-graphe partiel du graphe des croisements, et contenant  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  indiquera donc les composantes connexes à relier afin d'avoir un nombre minimum de croisements égal au

nombre d'arêtes de ce graphe.

Dans le cas de l'exemple précédent on a 3 arbres de longueur minimum :

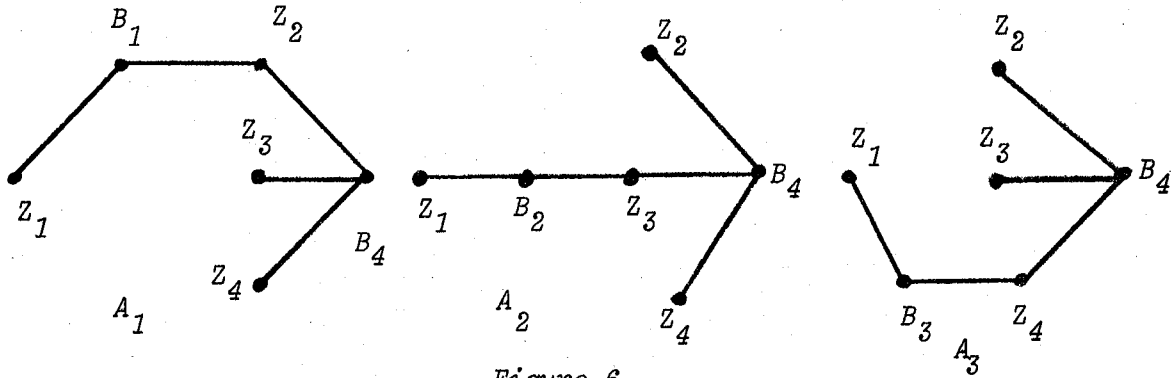


Figure 6

Un tel arbre est appelé arbre des croisements.

### 2 . 3 . Graphes des liaisons associés à un arbre des croisements

On considère une composante connexe du quadrillage comme un graphe, les sommets étant les cases, deux sommets étant adjacents si les cases correspondantes ont un côté commun.

On choisit un arbre des croisements. Un graphe des liaisons sera obtenu en joignant deux composantes connexes adjacentes de l'arbre des croisements par une seule arête joignant deux cases "frontières" formant un couple acceptable pour ces deux régions. Des cases frontières seront des cases d'une composante connexe adjacentes à une case non vide. Un couple de deux cases frontières de deux régions adjacents, est acceptable si on peut joindre ces cases, en ne traversant qu'une autre case, et en respectant les conditions de 2.1. (les arêtes ainsi ajoutées sont des isthmes du graphe des liaisons).

Généralement à un arbre des liaisons il correspondra plusieurs graphes des liaisons.



Dans le cas de l'exemple de la figure 4 et en choisissant l'arbre des croisement,  $A_1$  de la figure 6 on a deux graphes des liaisons possibles. L'un étant donné par la figure 7.

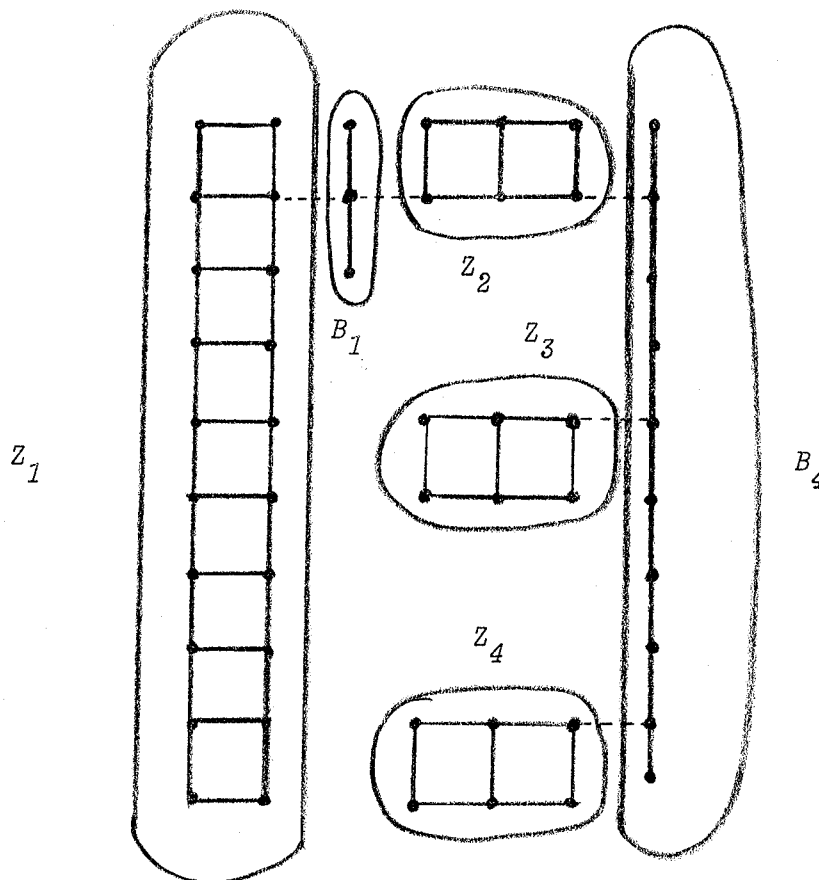


Figure 7

2 . 4 . Résolution par la recherche d'un arbre minimum d'un graphe

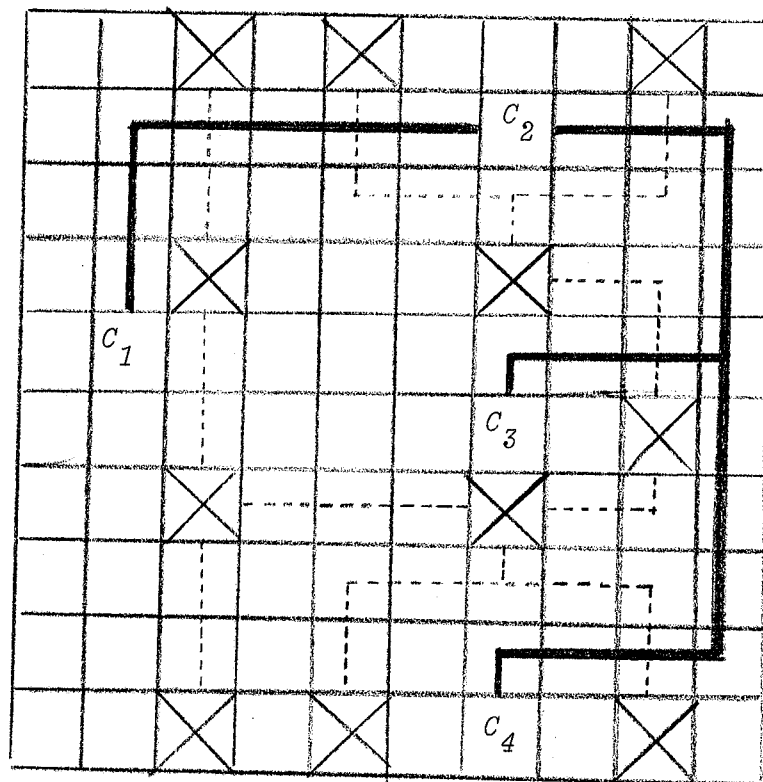
Comme pour le 1<sup>er</sup> paragraphe, le problème exposé en 2.1. peut se résoudre exclusivement à partir de la recherche d'un arbre de longueur minimum sous-graphe partiel d'un graphe G passant par un ensemble donné de sommets de G.

En effet :

Pour chaque graphe des liaisons  $G_i$  on cherche un arbre de longueur minimum contenant les sommets  $C_1, C_2, \dots, C_N$  correspondant aux cases à relier.

Parmi ceux-ci un arbre de longueur minimum détermine une liaison des  $N$  points avec un nombre de croisements minimum et parmi ceux-ci une longueur minimum.

Une solution optimale pour l'exemple précédent est ainsi :



Nous avons traité l'exemple donné dans [37]. Nous obtenons 2 arbres des croisements, 8 graphes des liaisons pour le premier et 4 pour le second.

En traitant l'un des graphes des liaisons nous obtenons 4 croisements et une longueur de 20 alors que LERDA et MADORANI obtiennent 4 croisements et une longueur de 28.

### 3 . ALGORITHME BOOLEEN POUR LA RECHERCHE D'UN ARBRE MINIMUM PASSANT PAR DES SOMMETS DONNES.

#### 3 . 1 . Algorithme

Soit  $G$  un graphe et  $S' = (s_1 s_2 \dots s_k) \subset S_G$ , on note  $a_1 a_2 \dots a_m$  l'ensemble  $A_G$ , l'arête  $a_i$  étant muni d'une certaine longueur  $l_i$ , réel strictement positif.

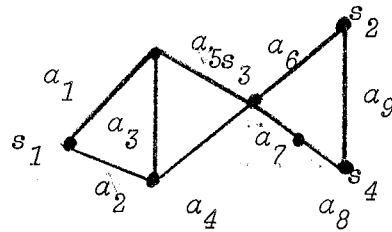
La longueur d'un sous-graphe de  $G$  étant égale à la somme des longueurs de ses arêtes, nous cherchons un sous-graphe partiel connexe de  $G$  qui contient  $S'$  et dont la longueur est minimum. Un tel graphe sera un arbre du fait de l'hypothèse  $l_i > 0$ .

Une chaîne de  $G$  est décrite sous forme d'un monôme booléen égal au produit des noms de ses arêtes.  $C(i, i+1)$  représentant la somme booléenne de tous les monômes correspondant aux chaînes de  $G$  joignant  $s_i$  à  $s_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, k-1$ , on considère le produit booléen:

$$\prod_{i=1}^{k-1} C(i, i+1) = A(S')$$

Tout arbre de  $G$  contenant  $S'$  est obtenu de cette manière, en faisant le produit on supprime donc tous les multiples d'un monôme. Parmi les monômes restant après simplification, on ne conserve que ceux qui ont une longueur totale minimum.

EXEMPLE :

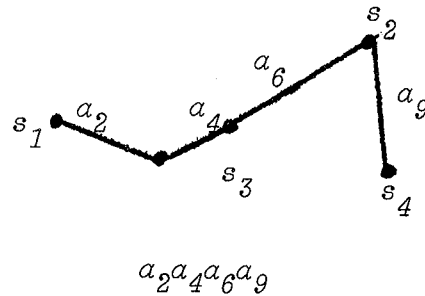
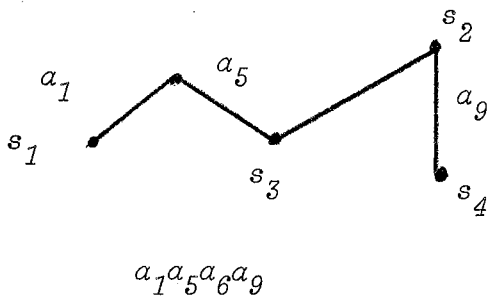


$$S' = (s_1 s_2 s_3 s_4)$$

$$A(S') = (a_1 a_5 a_6 + a_1 a_3 a_4 a_6 + a_1 a_5 a_7 a_8 a_9 + a_1 a_3 a_4 a_7 a_8 a_9 + a_2 a_4 a_6 + a_2 a_4 a_7 a_8 a_9 + a_2 a_3 a_5 a_6 + a_2 a_3 a_5 a_7 a_8 a_9) (a_6 + a_7 a_8 a_9) (a_6 a_9 + a_7 a_8)$$

$$A(S') = a_1 a_3 a_4 a_6 a_9 + a_1 a_5 a_7 a_8 a_9 + a_1 a_5 a_6 a_9 + a_1 a_3 a_4 a_7 a_8 a_9 + a_2 a_4 a_7 a_8 a_9 + a_2 a_4 a_6 a_9 + a_2 a_3 a_5 a_6 a_9 + a_2 a_3 a_5 a_7 a_8 a_9.$$

si toutes les arêtes sont de longueur 1, on a deux arbres minimaux :



### 3 . 2 . Simplification dans le cas d'un graphe articulé

Supposons que  $G$  ait un point d'articulation  $C$  et soient  $C_1, \dots, C_p$  les pièces associées à  $C$  (voir figure 8). Un arbre minimal contenant  $S'$  est égal à l'union d'un arbre minimal de  $C_i$  contenant  $S'_i = S' \cap S_{C_i}$ ,

pour tout  $i = 1, \dots, p$ , tel que  $S' \cap S_{C_i} \neq \emptyset$ . Si  $A(S'_i)$  représente la somme booléenne des monômes booléens correspondant aux arbres minimaux de  $C_i$  définis ci-dessus.  $\prod A(S'_i)$  contient tous les monômes correspondant à des arbres de longueur minimum contenant  $S'$ .

De même si  $G$  a un isthme  $\ell$ , d'extrémités  $C_1$  et  $C_2$  et si  $C_1, C_2, \dots, C_p$  sont les pièces de  $C_1$  ne contenant pas  $C_2$  et  $C'_1, C'_2, \dots, C'_q$  les pièces de  $C_2$  ne contenant pas  $C_1$  (voir figure 9) le produit booléen :

$\ell. \prod_i A(S'_i) \cdot \prod_i A(S''_i)$ , contient les monômes cherchés.

$A(S'_i)$  étant la somme des arbres minimaux de  $C_i$  contenant  $S' \cap S_{C_i}$

$A(S''_i)$  étant la somme des arbres minimaux de  $C'_i$  contenant  $S' \cap S_{C'_i}$

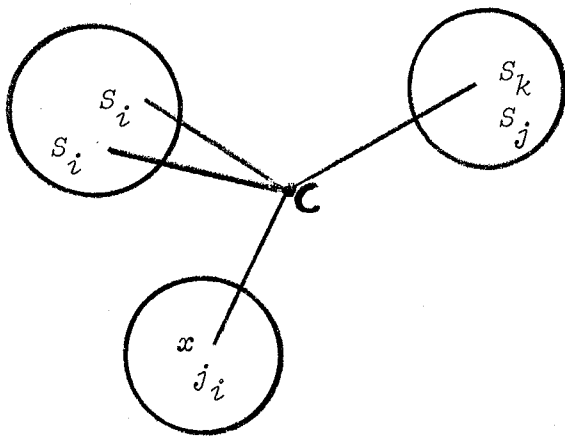


Figure 8

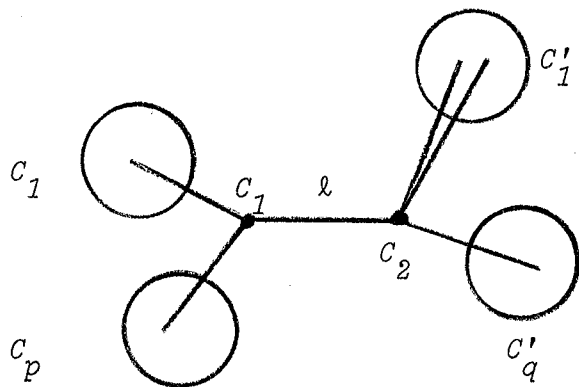
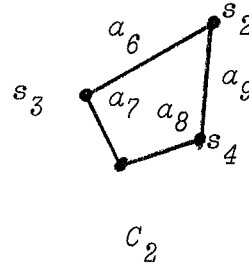
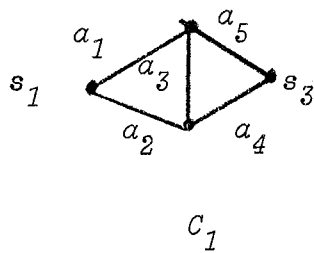


Figure 9

EXEMPLE :

Reprenons l'exemple précédent où  $s_3$  est un point d'articulation



$$A(S'_1) = a_1 a_5 + a_2 a_4$$

$$A(S'_2) = a_6 a_9$$

$$\text{d'où } A(S') = (a_1 a_5 + a_2 a_4) a_6 a_9 = a_1 a_5 a_6 a_9 + a_2 a_4 a_6 a_9$$

3 . 3 . Simplification dans le cas où la longueur d'une arête est constante

Dans le cas où  $l(a_i) = l$ , quelle que soit l'arête  $a_i \in A_G$ , un arbre de longueur minimum est alors un arbre ayant un nombre minimum d'arêtes

Si on ne cherche pas tous les arbres de longueur minimum mais un arbre seulement on peut dans ce cas simplifier le problème de la manière suivante. Considérons,  $G' = G(S')$ , sous graphe de  $G$  réduit aux sommets  $S'$ . On note  $C_1, C_2, \dots, C_r$  les composantes connexes.

On considère maintenant le graphe  $G_R$  obtenu à partir de  $G$  en réduisant les  $C_i, i=1, \dots, r$ , à un seul sommet.

Si  $A$  est un arbre de longueur minimum de  $G_R$  contenant les  $C_i$ , on en déduit un arbre de longueur minimum de  $G$ , contenant  $S'$ , en remplaçant chaque  $C_i$  par un de ses arbres complets.

En effet si  $|S_A| = p$ , l'arbre de  $G$  obtenu à partir de  $A$  contient  $q = p+k-r$  sommets si  $|S'| = k$ . Supposons qu'il existe un arbre  $A'$  contenant  $S'$  avec  $|S_{A'}| = q' < q$ .

On va construire à partir de  $A'$  un arbre  $A''$  de  $G_R$  ayant moins de sommets que  $A$  et passant par tous les  $C_i$ , ce qui est absurde.

Dans  $A'$  l'un au moins des  $C_i$  n'est pas un arbre de  $G$ , sinon en réduisant les  $C_i$  on obtiendrait un arbre  $A''$  ayant moins de  $p$  sommets et contenant tous les  $C_i$  ce qui est absurde. Supposons que ce soit  $C_1$ .

Le sous-graphe  $C_1$  de  $A'$  a alors au moins deux arêtes d'attachement dans  $A'$ , puisque  $A'$  est connexe et  $C_1$  non connexe (voir figure 10).

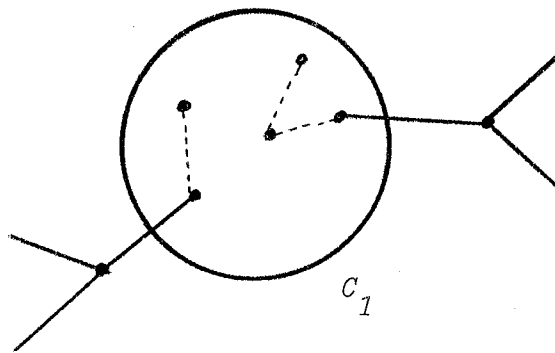
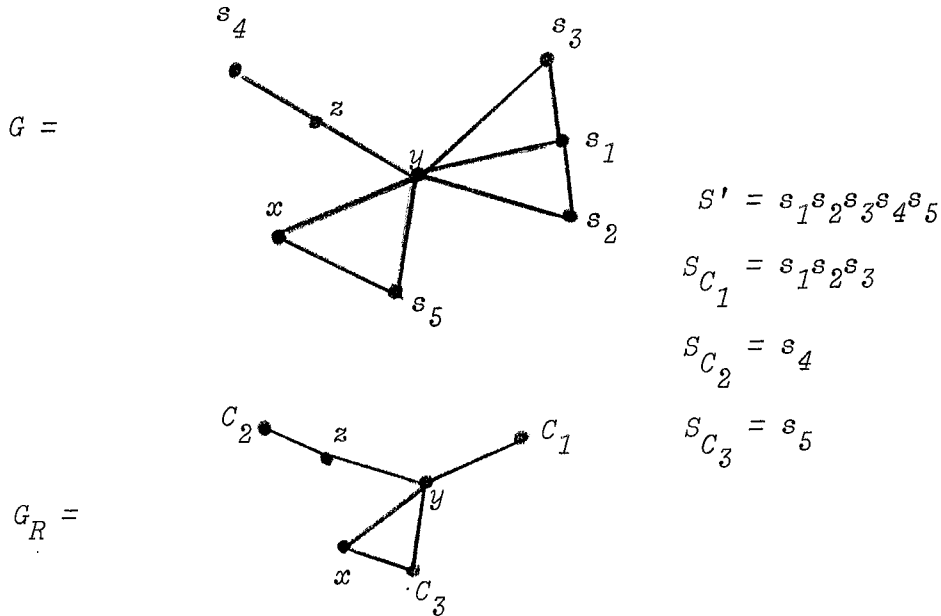


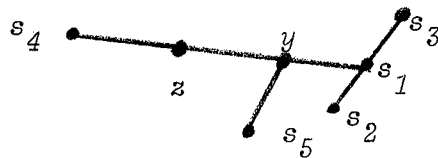
Figure 10

On peut alors supprimer une de ces arêtes et ajouter dans  $C_1$  une arête entre deux composantes connexes. En procédant de cette sorte on transforme  $C_1$  en un arbre et on n'ajoute pas d'arête, on obtient donc bien  $A''$ .

EXEMPLE :



yz est un isthme et  $C_1$  ne contient qu'un arbre on a donc en utilisant 3.2. et 3.3. immédiatement une solution minimale :



4 . ALGORITHMES DE DESSIN D'UNE MAILLE PLANAIRE D'UN GRAPHE.

4 . 1 . Définitions

Etant données deux représentations planaires d'un même graphe  $G$ , elles seront dites strictement équivalentes si elles ont les mêmes faces. (y compris la face extérieure).

Le plan étant muni de deux directions orthogonales privilégiées (horizontale et verticale) nous dirons qu'une représentation planaire d'un graphe  $G$  est cartésienne si les arêtes sont représentées par des lignes brisées dont les directions sont horizontales ou verticales.



$R_G$  étant une représentation planaire de  $G$ , une face de  $R_G$  est une face frontière si elle a au moins une arête en commun avec la face extérieure

Une maille planaire d'un graphe inarticulé  $G$  est une base de cycles de  $G$ ,  $M = (C_1, C_2, \dots, C_\nu)$ , telle que toute arête de  $G$  appartient à au plus 2 cycles de la base. On appelle bord extérieur de  $M$  le cycle  $E = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_\nu$ .

Une chaîne suspendue d'un graphe  $G$  est une chaîne de  $G$  :  $(as_1s_2\dots s_p b)$  telle que :  $d_G(s_i) = 2, \forall i = 1, 2, \dots, p$ .

#### 4 . 2 . Placement d'un graphe dans un quadrillage

Nous dirons que nous pouvons placer un graphe  $G$  dans un graphe  $G'$ , s'il est possible de "transformer"  $G$  en un graphe  $G^t$  homomorphe à  $G'$ .  $G^t$  étant obtenu à partir de  $G$  par une succession des opérations élémentaires suivantes :

- (i) insertion d'un sommet de degré 2 sur une arête (figure 11)

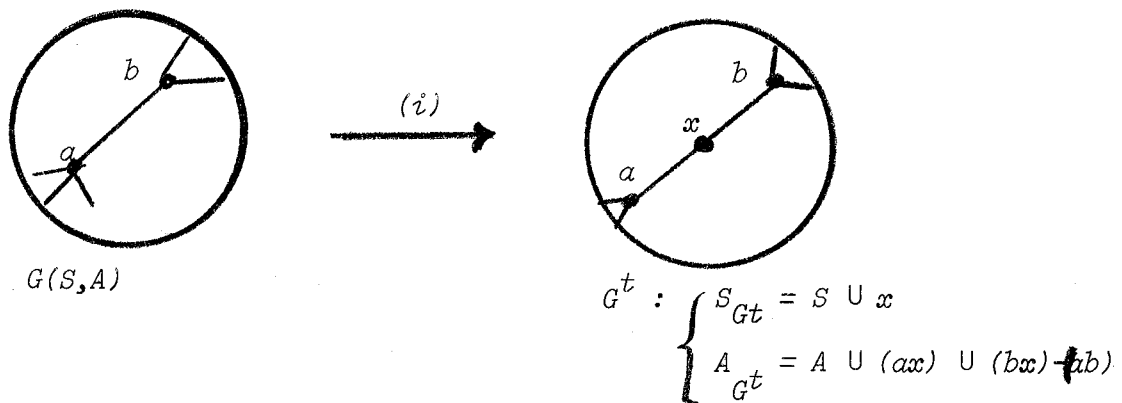
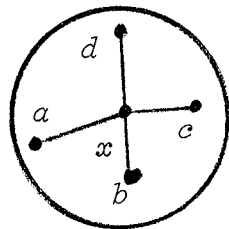


Figure 11

(ii) éclatement d'un sommet en 2 sommets (figure 12):



$G(S,A)$

(ii) →

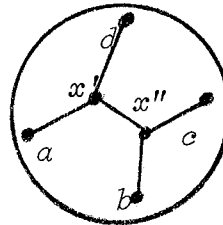


Figure 12

$$\left\{ \begin{array}{l}
 G^t : S_{G^t} = S \cup \{x', x''\} - x \\
 A_{G^t} = A \cup_{i \in I_1} (x'x_i) \cup_{i \in I_2} (x''x_i) \\
 \quad - \cup_{i \in I} (xx_i) \\
 (I_1, I_2) = \text{partition de } I, (xx_i) \in A
 \end{array} \right.$$

THEOREME 2 : Pour tout graphe planaire inarticulé G de degré maximum  
 $\leq 4$  il existe une représentation planaire cartésienne  
strictement équivalente à toute représentation planaire de  
G.

Démonstration :

Ce théorème se démontre par récurrence sur le nombre cyclomatique  $\nu$  du graphe G.

Si  $\nu = 1$  une représentation planaire de G est homéomorphe à un

cercle donc à un rectangle. Supposons le théorème vrai pour tout graphe de nombre cyclomatique  $\leq v-1$  et soit  $G$  un graphe de nombre cyclomatique  $v$  et satisfaisant aux hypothèses du théorème. Considérons une représentation planaire  $R_G$  de  $G$ . On supprime la courbe simple commune à la face extérieure et à une face frontière de  $R_G$ . On obtient alors  $R_{G'}$ , et on peut obtenir une représentation planaire cartésienne  $R'_G$  de  $G'$ , strictement équivalente à  $R_G$ , grâce à l'hypothèse de récurrence, puisque  $v(G') = v-1$

Les sommets  $s_1$  et  $s_2$  extrémités de la chaîne suspendue supprimée sont de degré  $\leq 3$ . Donc il reste une direction libre à partir de chacun de ces sommets.

1) Si les directions libres en  $s_1$  et  $s_2$  sont dirigées vers la région infinie (figu. 13), on peut relier  $s_1$  et  $s_2$  par une ligne brisée respectant les contraintes de direction et la face extérieure.

2) Supposons qu'en  $s_1$ , par exemple, la seule direction libre soit dirigée vers une région finie de  $R'_G$ . On numérote 1, 2 et 3 les arêtes ayant  $s_1$  pour extrémités, 1 et 3 étant sur la face extérieure. La direction libre est dirigée vers la région finie ayant les arêtes 2 et 3 dans sa frontière (figure 14).

On peut alors dessiner 2 de telle sorte que la direction de 2 au départ de  $s_1$  soit celle initialement libre, puis utiliser pour le départ de 1 le départ initial de 2 et libérer ainsi la direction dirigée vers la région infinie (figure 15).

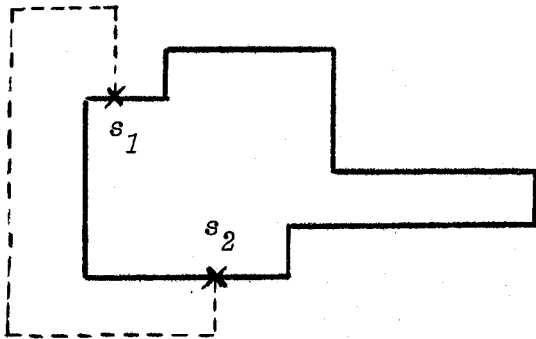


Figure 13

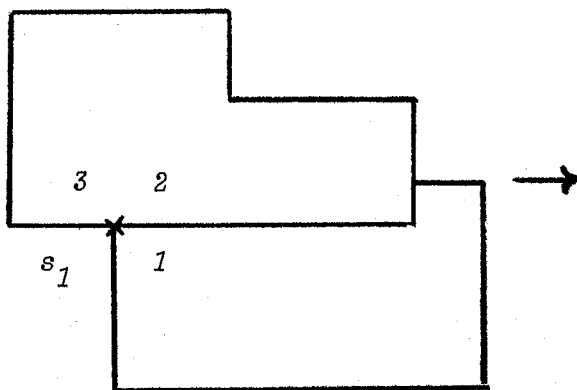


Figure 14

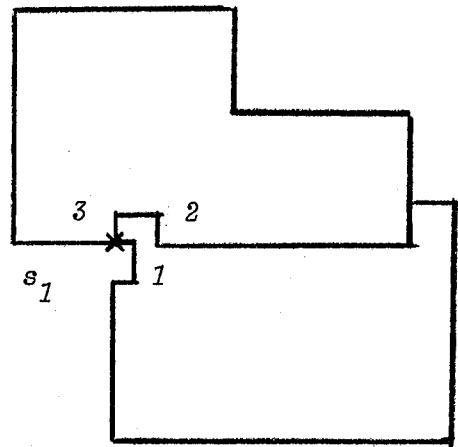


Figure 15

THEOREME 3 : Un graphe peut-être placé dans un quadrillage.

Démonstration :

Nous appelons quadrillage le graphe associé (au sens de 1.1) à un quadrillage fini.

Etant donné un graphe quelconque on peut le transformer, par une succession d'éclatements de sommets (ii) en un graphe de degré maximum  $\leq 4$ . Si le graphe ainsi obtenu n'a pas de point d'articulation le théorème 2 permet de démontrer qu'il admet une représentation cartésienne.

Dans le cas où le graphe est articulé il admet également une représentation cartésienne.

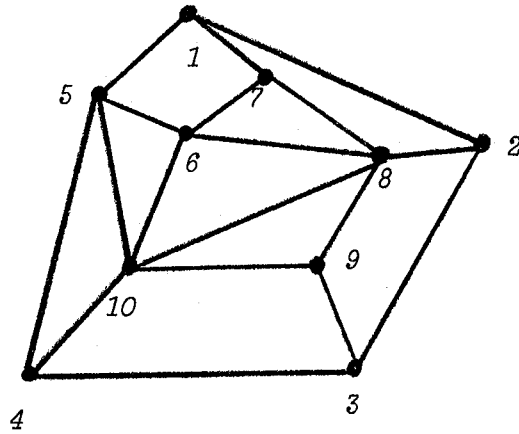
En effet un tel graphe admet une représentation planaire dans laquelle tous les points d'articulations sont sur la frontière de la région infinie. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 2 pour chaque pièce du graphe.

Une fois que l'on a obtenu une représentation planaire cartésienne du graphe il ne reste plus qu'à la placer sur un quadrillage ce qui peut se faire de la manière suivante :

- on ajoute des sommets à tous les angles
- "deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  sont sur une même horizontale" est une relation d'équivalence. Soient  $C_1, C_2, \dots, C_\ell$  les classes ainsi obtenues.
- si  $s_1$  et  $s_2$  sont sur une même verticale, on ordonnera  $s_1 > s_2$ , si l'ordonnée de  $s_1$  est supérieure à celle de  $s_2$ . Cette relation d'ordre induit un ordre total pour les classes  $C_1, C_2, \dots, C_\ell$ .
- on refait de même en échangeant vertical et horizontal.
- on ajoute des sommets de degré 2 sur des arêtes dont les extrémités sont dans 2 classes qui ne se couvrent pas de telle sorte que toute arête joigne 2 sommets situés dans 2 classes qui se couvrent.

EXEMPLE :

Considérons le graphe planaire suivant  $G$  (figure 16) :



On éclate les sommets 10 et 8 de degré  $> 4$  on obtient  $G^t$  (figure 17):

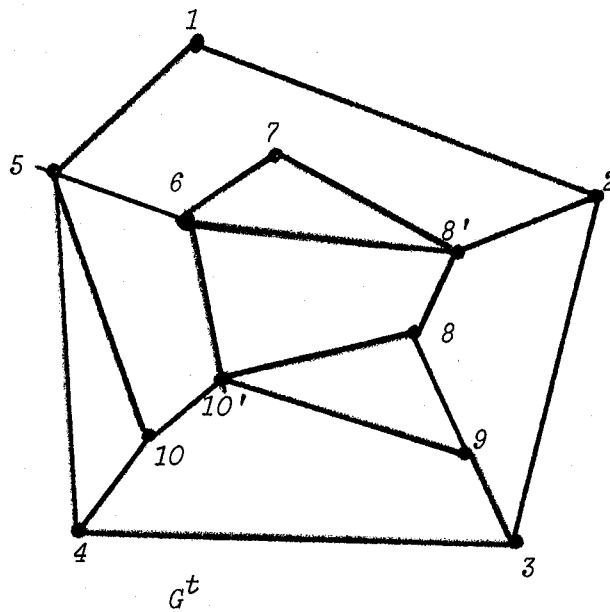


Figure 17

Considérons une représentation cartésienne de  $G^t$  strictement équivalente à celle de la figure 17 (figure 18) :

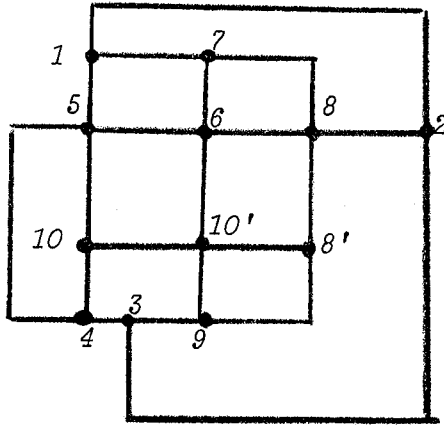


Figure 18

et enfin le placement sur le quadrillage (figure 19).

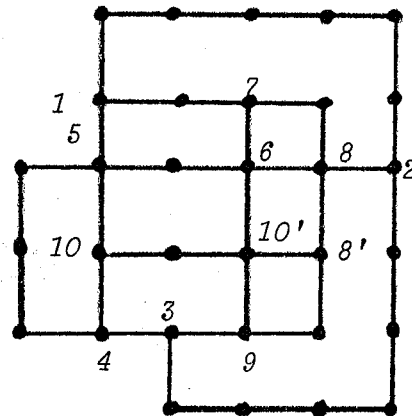


Figure 19

REMARQUE : La méthode proposée dans la démonstration du théorème 3 a pour but de démontrer la possibilité du déplacement dans un quadrillage.

Dans un problème réel on cherchera à minimiser le nombre d'angles ou la dimension du plus petit quadrillage complet contenant la représentation. (produit d'un nombre de classes "horizontales" par le nombre de classes "verticales").

#### 4 . 3 . Représentation d'un graphe planaire les sommets étant disposés sur un cercle.

##### 4 . 3 . 1 . Définitions et propriété des enveloppes

La plupart des algorithmes de reconnaissance d'un graphe planaire, notamment celui de DEMOUCRON et al [33], fournissent une maille planaire, ou permettent de l'obtenir facilement, chaque cycle étant donné par l'ensemble ordonné de ses sommets. Un tel ensemble sera le point de départ des algorithmes que nous proposons ci-dessous et qui permettent d'obtenir une représentation planaire du graphe les sommets étant disposés sur un cercle.

L'enveloppe  $E_s$  d'un sommet  $s$  d'une représentation planaire d'un graphe, est la frontière de la région qui contient  $s$  lorsque l'on supprime les chaînes suspendues incidentes à  $s$ . Si  $(C_i), i \in I$ , est l'ensemble des faces, données par l'ensemble de leurs arêtes, contenant  $s$  on a :

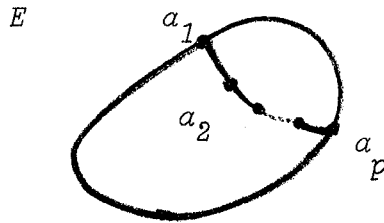
$$E_s = \bigoplus_{i \in I} C_i.$$

THEOREME 4 : Si  $G$  est un graphe planaire inarticulé et  $M$  une maille planaire de  $G$  de bord extérieur  $E$ , alors, si  $E_s \cap E = \emptyset$  quel que soit le sommet  $s \in S_G$  adjacent à  $E$ , toutes les faces de  $M$  ayant une intersection non vide avec  $E$  n'ont qu'une arête non élément de  $E$ .

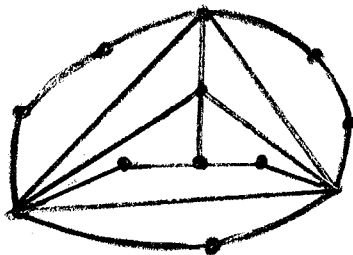


Démonstration

Nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une face  $F$  de  $M$  avec  $F \cap E \neq \emptyset$  et  $F-E$  non réduit à une arête. Posons  $F-E=(a_1 a_2 \dots a_p)$  avec  $p > 1$  et  $a_1$  et  $a_p$  sur  $E$ .  $a_2$  est adjacent à  $E$  et  $E_{a_2} \cap E \neq \emptyset$  ce qui est absurde.



REMARQUE : Si un graphe satisfait les hypothèses du théorème 4 et a plus de une face finie alors les faces frontières constituent un "polygone inscrit" dans  $E$ , tous les sommets de  $S_G$  autre que ceux de  $E$  étant à l'intérieur de ce "polygone" :



4 . 3 2 . Algorithme par sommets.

PRINCIPE : On dessine la face extérieure  $E$  comme un cercle. S'il existe un sommet  $s$  adjacent à  $E$  et tel que  $E_s \cap E \neq \emptyset$  on place  $s$  entre les sommets  $s_1$  et  $s_2$  de  $E \cap E_s$  et on remplace dans  $E$   $(s_1 s_2)$  par  $(s_1 s s_2)$  en créant éventuellement une arête fictive. S'il n'existe pas de sommet  $s$  adjacent à  $E$  avec  $E_s \cap E \neq \emptyset$  on rabat sur  $E$  l'une des arêtes  $\notin E$  d'une face frontière

(th. 4). Cet algorithme heuristique essaye d'optimiser la longueur totale des connexions mesurées sur la circonférence du cercle.

ALGORITHME :

① à partir de l'ensemble des faces  $(f_i)_i$  chercher  $E$  qui est égal à la disjonction  $\bigoplus_i f_i$ ,  $f_i$  étant considérée comme l'ensemble des arêtes qui la compose.

② chercher un sommet  $s$  adjacent à  $E$  ainsi que son enveloppe  $E_s$ . Si  $E_s \cap E \neq \emptyset$  alors deux cas peuvent se produire :

②<sub>1</sub> toutes les arêtes de  $E_s \cap E$  sont numérotées  $C_i$  alors on en choisit une quelconque, par exemple  $(s_1 s_2)$  que l'on note  $\sim_j$  (on fait alors progresser l'indice  $j$  de une unité,  $j := j+1$ ) on rabat  $s$  sur  $(s_1 s_2)$  en notant que l'arête  $\sim_j$  part de  $s_1$  à l'extérieur du cercle et passe dans le cercle après  $s$  pour rejoindre  $s_2$ . On remplace  $(s_1 s_2)$  dans  $E$  par les deux arêtes  $(s_1 s)$  et  $(s s_2)$  en créant éventuellement une arête fictive que l'on numérote.

②<sub>2</sub> il existe une arête de  $E_s \cap E$  non numérotée  $C_i$ , soit  $(s_1 s_2)$  par exemple. On note  $(s_1 s_2)_{e_{k|}}$  ( $k := k+1$ ), c'est à dire  $k^{\text{ième}}$  arête extérieure, on rabat  $s$  sur  $(s_1 s_2)$  et on remplace  $(s_1 s_2)$  dans  $E$  par  $(s_1 s)$  et  $(s s_2)$  en créant éventuellement une arête fictive.

③ Si  $E_s \cap E = \emptyset$ , chercher tous les sommets adjacents à  $E$ , s'il en existe un tel que l'intersection de son enveloppe avec  $E$  soit non vide aller en

② sinon aller en ④.

④ Il n'existe aucun sommet  $s$  adjacent à  $E$  avec  $E_s \cap E \neq \emptyset$ , il existe alors une face n'ayant qu'une arête  $(s_1 s_2) \in E$ . On rabat cette arête sur  $E$  en la numérotant  $C_i$  ( $i := i+1$ ) et on remplace dans  $E$  la chaîne  $(s_1 s_2)$  par l'arête

$(s_1, s_2)$  numérotée  $C_i$ . On numérote toutes les arêtes de la chaîne  $(s_1, s_2)$  de  $E$  par  $eg_k (k:=k+1)$

5) On recommence 2,3,4 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucun sommet intérieur à  $E$ .

6) Pour obtenir la représentation cherchée :

6<sub>1</sub>) tracer un cercle avec tous les sommets de  $G$  dans l'ordre obtenu en éliminant les arêtes n'existant pas et toutes les arêtes fictives.

6<sub>2</sub>) dessiner par des droites les arêtes de  $G$  numérotées  $C_i$  ou non numérotées. (En effet les arêtes  $C_i$  qui ne sont pas devenues  $\sim_j$  n'ont pas été recouvertes elles sont donc intérieurs).

6<sub>3</sub>) dessiner les arêtes extérieures,  $e_i$  et  $eg_i$ , en suivant la numérotation inverse et en traçant chaque nouvelle arête dans la région infinie.

6<sub>4</sub>) dessiner les arêtes  $\sim_j$ .

EXEMPLE :

On considère la maille planaire suivante, ayant 8 cycles, chaque cycle étant donné par la succession des sommets dans le sens direct :

$f_1 = 132$	$f_2 = 354$	$f_3 = 234$	$f_4 = 173$	$f_5 = 157$
$f_6 = 753$	$f_7 = 165$	$f_8 = 645$		

1) Nous notons les arêtes de la manière suivante :

(13) = a	(32) = b	(21) = c	(35) = d	(54) = e
(43) = f	(42) = g	(17) = h	(73) = i	(15) = j
(57) = k	(16) = l	(65) = m	(64) = n	

ainsi :

$$2) E = (abc) \oplus (def) \oplus (bfg) \oplus (ahi) \oplus (hkj) \oplus (kdi) \oplus (lmi) \oplus (nem) = cgl_n$$

en respectant l'ordre  $E = 1642$

3) le sommet 3 est adjacent à E :

$$E_3 = (abc) \oplus (def) \oplus (bfg) \oplus (ahi) \oplus (kdi) = kcegh$$

$$E_3 \cap E = cg \text{ on place 3 sur C par exemple}$$

E devient  $16423 = lngba$  C est numérotée  $e_1$

4) 7 est adjacent à E :

$$E_7 = (ahi) \oplus (hkj) \oplus (kdi) = adj$$

$$E_7 \cap E = a$$

$E \rightarrow 164237 = lng bih$  a est numérotée  $e_2$

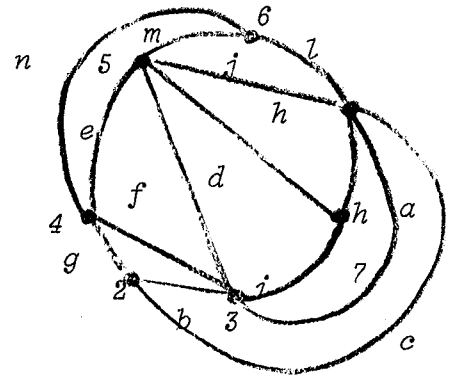
5) 5 est adjacent à E :

$$E_5 = (def) \oplus (hkj) \oplus (kdi) \oplus (lmj) \oplus (nem) = fhil_n$$

$$E_5 \rightarrow E = hin \text{ on place 5 sur n par exemple}$$

$E \rightarrow 1654237 = lmegbih$   $n \rightarrow e_3$

6) On obtient le dessin suivant :



### 4 . 3 . 3 . Algorithme par faces

PRINCIPE : Au lieu de rabattre sommet par sommet comme dans l'algorithme précédent, on cherche une face  $f$  ayant une intersection non vide avec  $E$  et on rabat sur  $E$  la chaîne  $f-E$ . Cet algorithme est donc plus rapide que le précédent mais il est également plus brutal, le nombre de représentations différentes que l'on peut obtenir est plus petit que dans le cas précédent. C'est cet algorithme qui a été programmé.

ALGORITHME

- ① à partir des  $f_i$  chercher E. (voir algorithme par sommets)
- ② chercher une face f avec  $f \cap E \neq \emptyset$ . S'il existe une face f telle que  $|f-E| > 1$  aller en ②
- ②<sub>1</sub> si  $|f-E| = 1$  soit  $(s_1 s_2)$  cette arête, on la numérote  $C_i (i:=i+1)$  les arêtes de la chaîne  $(s_1 s_2)$  de E sont numérotées  $e_j (j:=j+1)$ , on remplace dans E la chaîne  $(s_1 s_2)$  par l'arête  $(s_1 s_2)$ .
- ②<sub>2</sub> si  $|f-E| > 1$  on place tous les sommets de  $f-E = (s_1 s_2)$  entre les sommets adjacents  $(s_1 s_p)$  de la chaîne  $(s_1 s_2)$  de E.  $(s_1 s_p)$  est numérotée  $e_k (k:=k+1)$  dans E on remplace  $(s_1 s_p)$  par la chaîne  $f-E$ . Si l'arête  $(s_1 s_p)$  sur laquelle on rabat est numérotée  $C_i$ , on en cherche une non numérotée  $C_i$ . S'il n'y en a pas on rabat sur  $(s_1 s_p)$  qui devient  $\sim_l (l:=l+1)$ ,  $\sim_l$  devant être dessinée en partant de  $s_1$  vers l'extérieur du cercle et en passant à l'intérieur après le dernier sommet de la chaîne rabattue pour rejoindre  $s_p$ .
- ③ dessiner le graphe de la même manière que pour l'algorithme par sommets.

EXEMPLE : On considère la maille planaire donnée comme dans l'exemple précédent :

$$\begin{array}{lll}
 f_1 = 87 & 15 & 10 & f_2 = 78962 & f_3 = 105369 \\
 f_4 = 135 & & & f_5 = 172 & f_6 = 326 & f_7 = 143 \\
 f_8 = 124 & & & f_9 = 342 & & 
 \end{array}$$

1) La face extérieure E est 8910

2)  $E \cap f_1 \neq \emptyset$  et  $|f_1 - E| = 4$  on est donc dans le cas (22). On rabat sur (10,8) la face  $f_1$  on a donc :

$$(10,8) = e_1 \quad E = 8,9,10,5,1,7$$

3)  $E \cap f_2 \neq \emptyset$  et  $|f_2 - E| = 4$  on est dans le cas (22). On rabat sur (8,9) la face  $f_2$  on a :

$$(8,9) = e_2 \quad E = 8 \ 2 \ 6 \ 9 \ 10 \ 5 \ 1 \ 7$$

on ne rajoute à E que les sommets 2 et 6 de la face  $f_2$  puisque 7 est déjà placé.

4)  $E \cap f_3 \neq \emptyset$  et  $f_3 - E = 4$  cas (22)

on rabat sur (9,10) la face  $f_3$  soit :

$$(9,10) = e_3 \quad E = 8 \ 2 \ 6 \ 9 \ 3 \ 10 \ 5 \ 1 \ 7$$

5)  $E \cap f_4 \neq \emptyset$   $|f_4 - E| = 1$  cas (21)

on rabat sur (5,1) l'arête (3,1) ce qui donne :

$$(5,1) = eg_1$$

$$(3,1) = C_1$$

$$E = 8 \ 2 \ 6 \ 9 \ 3 \ 10 \ 5 \ 1 \ 7$$

6) les intersections de E avec  $f_5$  et  $f_6$  n'apportent pas de sommets nouveaux alors on passe à  $f_7$  :

$E \cap f_7 \neq \emptyset$  et  $|f_7 - E| = 2$  on doit rabattre  $f_7$  sur (3,1) numérotée  $C_1$  qui devient  $\sim_1$

$$E = 8 \ 2 \ 6 \ 9 \ 3 \ 10 \ 5 \ 4 \ 1 \ 7$$

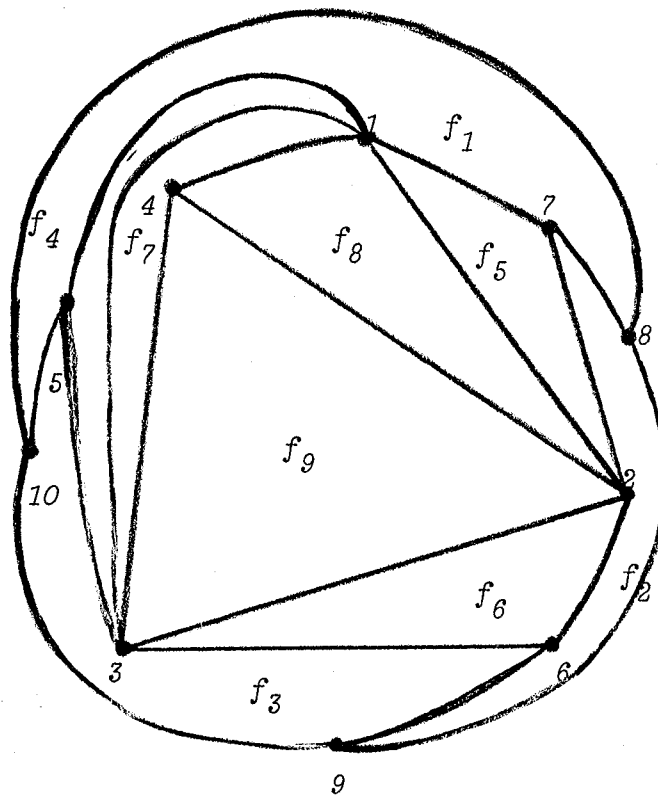
tous les sommets sont maintenant sur E il ne reste plus qu'à dessiner.

7) Dessin. On place sur un cercle les sommets de E dans l'ordre obtenu en éliminant les arêtes fictives : (8,2) (9,3) (3,10) et (5,4)

On place à l'extérieur et dans l'ordre les arêtes

$$e_{g_1} = (5,1) \quad e_3 = (9,10) \quad e_2 = (8,9) \quad e_1 = (10,8)$$

puis les arêtes intérieures qui sont des droites et enfin l'arête (1,3).



#### 4 . 3 . 4 . Programme [34]

C'est l'algorithme par faces qui a été programmé. Le programme place les sommets sur un rectangle et ceci pour deux raisons : dans les problèmes pratiques il s'agit en général de représenter un graphe sur un quadrillage (qui n'a souvent, dans le cas des plaquettes de circuits intégrés par exemple, que 2 lignes ; de toute façon un quadrillage peut se décomposer en une succession d'ensemble de 2 lignes) et d'autre part, étant donné que la sortie du programme devait se faire sur imprimante, nous nous sommes limités à tracer des segments de droite (vu la qualité des dessins obtenus il aurait même fallu se limiter à des segments suivant les deux directions orthogonales privilégiées).

Après avoir déterminé l'ordre des sommets sur le rectangle et les arêtes intérieures et extérieures, on affecte à chaque arête un pas suivant sa place par rapport au rectangle. Les arêtes appartenant au rectangle ayant un pas zéro, puis les arêtes extérieures, qui n'entourant aucune arête extérieure de pas non déterminé ont un pas 1 etc... Les arêtes  $\sim$  sont partagées en une arête extérieure et une arête intérieure et on ajoute un sommet fictif. Enfin si le graphe a  $n$  sommets on considère la meilleure (longueur totale des arêtes minimum) des  $n$  positions possibles des sommets sur le rectangle.

Ce programme étant un programme de dessin il est essentiellement fonction de l'organe de sortie utilisé, celui dont nous disposions étant peu approprié à ce genre de problème (une imprimante), nous renvoyons à [34] pour les détails du programme, ses limites, le temps de compilation et les exemples traités.





BIBLIOGRAPHIE

-----



BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE 1

- [1] BENZAKEN C. *Treillis serie-parallèle, C.R.A.S. t, 260, 24 Mai 1965, 5431-5434*
- [2] BERGE, C., *Théorie des graphes, Dunod, Paris 1958*
- [3] BIRKHOFF, G., *Lattice Theory, AMS Colloq. Publi., 1948*
- [4] BULL. *Publication, utilisation des calculateurs électroniques en recherche operationnelle.*
- [5] CHEIN, M., *Graphe régulièrement décomposable, R.I.R.O., 7(1968), 27-4-2*
- [6] CHEIN, M., *Algorithme de recherche des sous-matrices premières d'une matrice, Bulletin Math. Soc. Sciences Math. Rom., n° 1, T. 13 (1969) 413 (61) 1969 n° 4, 21-25 (1970) (MR 71 30)*
- [7] DOHET, L., *A propos de certains problèmes de numérotage des sommets d'un graphe, SEMA, note n° 68, 1967*
- [8] HARARY, F., NORMAN, R.Z., CARTWRIGHT, D., *Structural Models, John Wiley sons, 1965.*
- [9] KUNTZMANN, J., *Théorie des relations et des réseaux, cours, Grenoble*
- [10] KAUFMANN, A., *Introduction à la combinatoire en vue des applications Dunod 1968.*
- [11] PICHAT, E., *Algorithms for finding the maximal elements of a finite universal algebra, Proc. IFIP congres 1968, Edinbourgh.*
- [12] WANG, K.T., *On a new method of analysis of electrical networks, Memoire 2, National Research Institute of Engineering, Academia Sinica, 1934.*

CHAPITRE 2

- [13] BATTLE, J., HARARY, F., KODAMA, Y., *Every planar graph with nine points have a non planar complement, Bull, A.M.S., 68, 1962, 569-571.*
- [14] BEINEKE, L.W., *Complete Bipartite graphs : decomposition into planar subgraphs in "A seminar on graph Theory" (Harary Ed.), p.42-53 HOLT, N.Y., 1967.*

- [15] BEINEKE, L.W., *The decomposition of complete graphs into planar subgraphs, in "Graph Theory and Theoretical Physics" (Harary Ed.), p 139-153 ; Academic Press, N.Y. 1967*
- [16] CHEIN, M., *Le minimum de l'épaisseur des graphes  $h$ -homogènes, ( $h \neq 5 \pmod{6}$ ), C.R. Acad. Sci. Paris, t 269, p. 316-319 25 Oct. 69*
- [17] CHEIN, M., *Le minimum de l'épaisseur des graphes  $5 \pmod{6}$  - homogènes, C.R. Acad. Sc. Paris, t 269, p. 439-442, 22 sept. 1969*
- [18] HOBBS, A.M., *A Survey of thickness, in: "Recent progress in combinatoris" (Tutte Ed.), p. 255-264, Acad. Press, N.Y. 1969*
- [19] HOBBS, A.M., GROSSMAN, J.W., *A class of thickness-minimal graphs, J. Rev. Nat. Bur. St. Sect. B, 72B(1968), 145-153*
- [20] HOBBS, A.M., GROSSMAN, J.W., *Thickness and connectivity un graphes, J. Res. N.B.S. Sect B + 2B (1968), 239-244*
- [21] KLEINERT, M., *Die dicke des  $n$ -dimensionalen würfel-graphen, J. Comb. Theory, 3, 1967, 10-15.*
- [22] ORE, O., *The four color problem, Academic Press, N.Y., 1967.*
- [23] ORE, O., *Theory of graphs, AMS Colloq. Pub., 1962.*
- [24] PICARD, C., *Graphes complémentaires et graphes planaires, RIRO 8, (1964), 329-343.*
- [25] RINGEL, G., *Die toroidal Dicke des vollandie graphen, Math. Z. 87(1965), 19-26*
- [26] TUTTE, W.T., *The thickness of a graph, Indag. Math., 25, 1963, 567-577*
- [27] TUTTE, W.T., *The nonbipolar character of the complete 9-graph, Cana. Math. Bull., 6, 1963, 319-330.*
- CHAPITRE 3
- [28] BENZAKEN, C., *Contribution des structures algébriques ordonnées à la théorie des réseaux, Thèse, Grenoble, 1968.*
- [29] CHEIN, M., *Décomposition d'un schéma en un nombre minimum de schémas planaires, Colloque International sur la Microélectronique Avancée, Paris, Avril 1970 Chiron Ed.*

- [30] CHEIN, M., *Résolution du problème de Steiner dans un cas particulier, Automatisme, XIV, Oct. 1969, 529-530*
- [31] CHEIN, M., *Un algorithme pour relier N points, Calcolo, 5, 3-4(1968), 537-547.*
- [32] DEMOUCRON, G., MALGRANGE, Y., PERTUISET, R., *Graphes planaires : reconnaissance et construction de représentations planaires topologiques, SFRO, n° 30, 1964, 33-47*
- [33] FAVRE, MORIN, *Reconnaissance et dessin d'un graphe planaire, IMAG 1968.*
- [34] KUNTZMANN, J., *Théorie des réseaux, Cours, Grenoble 1969-70.*
- [35] LEE, C. Y., *An algorithm for path connection and its applications, IRE Trans. on E.C, sept. 1961, 346-353*
- [36] LERDA, F., MAJORANI, E., *An algorithm for connecting n points with a minimum number of crossings, Calcolo, 1, 1964, 257-265*
- [37] MAC LANE, S., *A combinatorial condition for planar graphs, Fund. Math. t. 28, 1937, 22-32*
- [38] MAJORANI, E., *Simplification of LEE's algorithm for special problems, Calcolo, 1, 1964, 246-256*
- [39] ROSENSTIEHL, P., *L'arbre minimum d'un graphe, Théorie des graphes, symposium Rome 1966, Dunod Ed. 1967, p. 357-368.*
- [40] SAILLARD, J. C., SARRET, M. J., *Le programme Desmag, Onde Electrique, Janvier 1969 (n° spécial).*

VU

Grenoble, le

*Le Président de la Thèse*

VU

Grenoble, le

*Le Doyen de la Faculté des Sciences*

Vu, et permis d'imprimer

*Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE*