# Sur une notion de monotonie conduisant à une extension de l'application de la méthode variationnelle dans l'étude des systèmes d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles : opérateurs paramonotones

Jean-Claude Miellou

Nº d'Ordre :

Année 1970

# THESE

présentée

## A LA FACULTE DES SCIENCES A GRENOBLE

pour obtenir

**LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT**

par

***Jean-Claude MIELLOU***

*Docteur de 3ème Cycle*

**SUR UNE NOTION DE MONOTONIE CONDUISANT A UNE EXTENSION DE L'APPLICATION DE LA METHODE VARIATIONNELLE DANS L'ETUDE DES SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES : OPERATEURS PARAMONOTONES**

**Soutenue le 19 Octobre 1970, devant la Commission d'Examen**

| | | |
|---|---|---|
| MM. | J. KUNTZMANN, | *Président* |
| | N. GASTINEL, | *Examinateur* |
| | J. ROBERT, | *Invité* |
| | P.J. LAURENT, | *Examinateur* |

# LISTE DES PROFESSEURS

Doyen honoraire : Monsieur M. MORET

Doyen : Monsieur E. BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES -

| | | |
|---|---|---|
| MM | NEEL Louis | Physique Expérimentale |
| | KRAVTCHENKO Julien | Mécanique Rationnelle |
| | CHABAUTY Claude | Calcul différentiel et intégral |
| | BENOIT Jean | Radioélectricité |
| | CHENE Marcel | Chimie Papetière |
| | FELICI Noel | Electrostatique |
| | KUNTZMANN Jean | Mathématiques Appliquées |
| | BARBIER Reynold | Géologie Appliquée |
| | SANTON Lucien | Mécanique des Fluides |
| | OZENDA Paul | Botanique |
| | FALLOT Maurice | Physique Industrielle |
| | KOSZUL Jean-Louis | Mathématiques |
| | GALVANI Octave | Mathématiques |
| | MOUSSA André | Chimie Nucléaire |
| | TRAYNARD Philippe | Chimie Générale |
| | SOUTIF Michel | Physique Générale |
| | CRAYA Antoine | Hydrodynamique |
| | REULOS René | Théorie des Champs |
| | BESSON Jean | Chimie Minérale |
| | AYANT Yves | Physique Approfondie |
| | GALLISSOT François | Mathématiques |
| Melle | LUTZ Elisabeth | Mathématiques |
| MM. | BLAMBERT Maurice | Mathématiques |
| | BOUCHEZ Robert | Physique Nucléaire |
| | LLIBOUTRY Louis | Géophysique |
| | MICHEL Robert | Minéralogie et pétrographie |
| | BONNIER Etienne | Electrochimie et Electrométallurgie |
| | DESSAUX Georges | Physiologie animale |
| | PILLET Emile | Physique Industrielle-Electrotechnique |
| | YOCCOZ Jean | Physique Nucléaire Théorique |
| | DEBELMAS Jacques | Géologie Générale |
| | GERBER Robert | Mathématiques |
| | PAUTHENET René | Electrotechnique |
| | MALGRANGE Bernard | Mathématiques Pures |
| | VAUQUOIS Bernard | Calcul Electronique |
| | BARJON Robert | Physique Nucléaire |
| | BARBIER Jean-Claude | Physique |
| | SILBER Robert | Mécanique des Fluides |
| | BUYLE-BODIN Maurice | Electronique |
| | DREYFUS Bernard | Thermodynamique |
| | KLEIN Joseph | Mathématiques |
| | VAILLANT François | Zoologie et Hydrobiologie |
| | ARNAUD Paul | Chimie |

| | | |
|---|---|---|
| MM | SENGEL Philippe | Zoologie |
| | BARNOUD Fernand | Biosynthèse de la Cellulose |
| | BRISSONNEAU Pierre | Physique |
| | GAGNAIRE Didier | Chimie Physique |
| Mme | KOFLER Lucie | Botanique |
| MM | DEGRANGE Charles | Zoologie |
| | PEBAY-PEROULA Jean-Claude | Physique |
| | RASSAT André | Chimie Systématique |
| | DUCROS Pierre | Cristallographie Physique |
| | DODU Jacques | Mécanique Appliquée I. U. T. |
| | ANGLES D'AURIAC Paul | Mécanique des Fluides |
| | LACAZE Albert | Thermodynamique |
| | GASTINEL Noël | Analyse Numérique |
| | GIRAUD Pierre | Géologie |
| | PERRET René | Servo-mécanisme |
| | PAYAN Jean-Jacques | Mathématiques Pures |

PROFESSEURS SANS CHAIRE -

| | | |
|---|---|---|
| M. | GIDON Paul | Géologie |
| Mme | BARBIER Marie-Jeanne | Electrochimie |
| Mme | SOUTIF Jeanne | Physique |
| MM | COHEN Joseph | Electrotechnique |
| | DEPASSEL R. | Mécanique des Fluides |
| | GLENAT René | Chimie |
| | BARRA Jean | Mathématiques Appliquées |
| | COUMES André | Electronique |
| | PERRIAUX Jacques | Géologie et Minéralogie |
| | ROBERT André | Chimie Papetière |
| | BIARREZ Jean | Mécanique Physique |
| | BONNET Georges | Electronique |
| | CAUQUIS Georges | Chimie Générale |
| | BONNETAIN Lucien | Chimie Minérale |
| | DEPOMIER Pierre | Physique Nucléaire- Génie Atomique |
| | HACQUES Gérard | Calcul Numérique |
| | POLOUJADOFF Michel | Electrotechnique |
| Mme | KAHANE Josette | Physique |
| Mme | BONNIER Jane | Chimie |
| MM | VALENTIN Jacques | Physique |
| | REBECQ Jacques | Biologie |
| | DEPORTES Charles | Chimie |
| | SARROT-REYNAULD Jean | Géologie |
| | BERTRANDIAS Jean-Paul | Mathématiques Appliquées |
| | AUBERT Guy | Physique |

PROFESSEURS ASSOCIES -

| | | |
|---|---|---|
| MM | RODRIGUES Alexandre | Mathématiques Pures |
| | MORITA Susumu | Physique Nucléaire |
| | RADHAKRISHNA | Thermodynamique |

MAITRES DE CONFERENCES -

| | | |
|---|---|---|
| M. | LANCIA Roland | Physique Atomique |
| Mme | BOUCHE Liane | Mathématiques |
| MM | KAHANE André | Physique Générale |
| | DOLIQUE Jean-Michel | Electronique |
| | BRIERE Georges | Physique |
| | DESRE Georges | Chimie |
| | LAJZEHOWICZ Joseph | Physique |
| | LAURENT Pierre | Mathématiques Appliquées |
| Mme | BERTRANDIAS Françoise | Mathématiques Pures |
| MM | LONGEQUEUE Jean-Pierre | Physique |
| | SOHM Jean-Claude | Electrochimie |
| | ZADWORNY François | Electronique |
| | DURAND Francis | Chimie Physique |
| | CARLIER Georges | Biologie végétale |
| | PFISTER Jean-Claude | Physique |
| | CHIBON Pierre | Biologie animale |
| | IDELMAN Simon | Physiologie animale |
| | BLOCH Daniel | Electrotechnique I.P. |
| | MARTIN-BOUYER Michel | Chimie (C. S. U. Chambéry) |
| | SIBILLE Robert | Construction mécanique (I. U. T.) |
| | BRUGEL Lucien | Energétique I. U. T. |
| | BOUVARD Maurice | Hydrologie |
| | RICHARD Lucien | Botanique |
| | PELMONT Jean | Physiologie animale |
| | BOUSSARD Jean-Claude | Mathématiques Appliquées (I. P. G.) |
| | MOREAU René | Hydraulique I. P. G. |
| | ARMAND Yves | Chimie I. U. T. |
| | BOLLIET Louis | Informatique I. U. T. |
| | KUHN Gérard | Energétique I. U. T. |
| | PEFFEN René | Chimie I. U. T. |
| | GERMAIN Jean-Pierre | Mécanique |
| | JOLY Jean-René | Mathématiques Pures |
| Melle | PIERY Yvette | Biologie animale |
| MM | BERNARD Alain | Mathématiques Pures |
| | MOHSEN Tahsin | Biologie (C. S. U. Chambéry) |
| | CONTE René | Mesures Physiques I. U. T. |
| | LE JUNTER Noël | Génie Electrique Electronique I. U. T. |
| | LE ROY Philippe | Génie Mécanique I. U. T. |
| | ROMIER Guy | Techniques Statistiques quantitatives I. U. T. |
| | VIALON Pierre | Géologie |
| | BENZAKEN Claude | Mathématiques Appliquées |
| | MAYNARD Roger | Physique |
| | DUSSAUD René | Mathématiques (C. S. U. Chambéry) |
| | BELORIZKY Elie | Physique (C. S. U. Chambéry) |
| Mme | LAJZEROWICZ Jeannine | Physique (C. S. U. Chambéry) |
| M. | JULIEN Pierre | Mathématiques Pures |
| Mme | RINAUDO Marguerite | Chimie |
| MM | BLIMAN Samuel | E. I. E. |
| | BEGUIN Claude | Chimie Organique |
| | NEGRE Robert | I. U. T. |

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES -

| | | |
|---|---|---|
| MM | YAMADA Osamu | Physique du Solide |
| | NAGAO Makoto | Mathématiques Appliquées |
| | MAREZIO Massimo | Physique du Solide |
| | CHEECKE John | Thermodynamique |
| | BOUDOURIS Georges | Radioélectricité |
| | ROZMARIN Georges | Chimie Papetière |

A l'occasion de cette soutenance de thèse, je tiens à exprimer à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, et à Monsieur le Professeur GASTINEL, Directeur du Centre de Calcul de cet Institut, ma très profonde gratitude.

Monsieur KUNTZMANN m'a initié à la recherche en dirigeant mon 3ème cycle, et m'a fait prendre conscience de la possibilité de découvrir en Mathématiques. Ce premier contact favorable m'a souvent aidé, par la suite, à surmonter les instants de doute que traverse tout chercheur.

Monsieur GASTINEL, à qui je dois mon initiation à l'utilisation [redacted] de l'analyse fonctionnelle en analyse numérique, a dirigé le présent travail, dont le point de départ a été, d'une part les travaux de mon Camarade François ROBERT en analyse numérique linéaire, et d'autre part l'intérêt que j'ai constamment porté à la formulation variationnelle dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Par ailleurs, l'exposé fait par Monsieur GASTINEL au Colloque d'analyse numérique d'Aussois a joué un rôle déterminant pour l'obtention des résultats abstraits du Chapitre II de cette thèse ; car il a attiré mon attention sur un type de passage à la limite, peu usité actuellement, et qui joue un rôle essentiel pour la résolution des problèmes non linéaires au paragraphe 3 de ce chapitre.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur LIONS car, si je n'ai pas travaillé au sein de son équipe, j'ai néanmoins profondément subi l'influence de l'effort fourni par lui-même et ses élèves, dans le domaine des équations aux dérivées partielles, et dont témoignent ses nombreux cours, articles, ouvrages de synthèses, ainsi qu'une bonne part des thèses soutenues en France sur ce sujet.

Je le remercie également d'avoir, à plusieurs reprises, donné son avis sur mon travail, et d'avoir en particulier joint un rapport à celui de Monsieur GASTINEL concernant cette thèse.

Je remercie bien vivement Monsieur le Professeur Jacques ROBERT et Monsieur Pierre-Jean LAURENT de me faire l'honneur de participer à ce Jury.

Les cours d'analyse numérique de Monsieur Pierre-Jean LAURENT m'ont souvent aidé dans la préparation de mon enseignement alors que je débutais dans cette activité.

En prenant part pour moitié à l'enseignement de D. E. A., et en prenant la responsabilité de la préparation à l'Agrégation pour la partie analyse numérique, Monsieur Jacques ROBERT m'a permis de recueillir, sans trop de difficultés, les enseignements laissés vacants par le départ de Monsieur RIGAL. Par ailleurs, le séminaire que nous avons animé en commun a servi de banc d'essai aux premiers tâtonnements qui devaient aboutir à cette thèse. D'autre part, les exposés faits au cours de ce séminaire par Alain FOUGERES, Assistant de Mathématiques à Besançon, m'ont permis de prendre contact avec les travaux de H. BREZIS, dont les résultats ont souvent constitué pour moi un modèle très utile dans l'étude des problèmes non linéaires.

Je voudrais profiter de cette circonstance pour remercier Messieurs les Doyens JACQUEMAIN et THIEBAUD, ainsi que Monsieur le Professeur CHATELET, Directeur du Service de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon, qui ont donné les moyens de renouveler (modestement, faute de crédits d'investissement) notre matériel de calcul de façon à permettre au Laboratoire d'Informatique de survivre.

Durant ces trois années, j'ai bénéficié de l'aide et des avis de Monsieur Georges LAMBERT, Conseiller Administratif à la Faculté des Sciences de Besançon qui, ainsi que Monsieur le Professeur CHATELET, ont guidé mes premiers pas dans la fonction administrative. Je les en remercie bien vivement.

Je tiens à exprimer aussi combien j'ai pu apprécier les qualités techniques et le dévouement du personnel du Laboratoire d'Informatique qui assure pratiquement -sinon en titre- le service d'un Centre de Calcul à l'échelon universitaire, avec des moyens en matériel beaucoup trop réduits.

Que Madame FORSTER, Secrétaire au Laboratoire d'Informatique, trouve ici l'expression de tous mes remerciements pour le travail de dactylographie diligent et efficace exécuté à propos de cette thèse.

## TABLE DES MATIERES

### CHAPITRE I

### H-SYSTEMES. METHODES ITERATIVES

## CHAPITRE II

Pages

## OPERATEURS PARAMONOTONES

Pages

# INTRODUCTION

Ce travail est composé de deux chapitres, suivant approximativement l'ordre dans lequel se sont effectuées nos recherches.

Le Chapitre I, intitulé "H-Systèmes variationnels - Méthodes itératives" est consacré à l'étude de l'analogue de diverses méthodes étudiées par F. ROBERT [46], dans le cas des Blocs-matrices (méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel, de sur-relaxation par Bloc) dans le cas ou chacun des Blocs est remplacé par un opérateur (ou éventuellement un système d'opérateurs(*)), auquel on associe, selon une méthode bien classique un problème variationnel.

En utilisant une notion de minorante distincte de celle utilisée dans le cas des Blocs-matrices, par François ROBERT, on obtient des résultats de convergence, pour les algorithmes du type Jacobi, Gauss-Seidel, sur-relaxation, pour des problèmes d'inéquations variationnelles sous une condition plus générale que la V-ellipticité classique.

Ceci s'étend au cas plus général de la perturbation d'un graphe maximal monotone, par un H-système d'opérateurs.

---

(*) Dans ces questions, le mot système se trouve employé selon trois acceptions différentes :

1/ Au sens habituel de système d'équations ou d'inéquations.

2/ L'expression "système d'opérateurs" qu'il conviendrait peut être de remplacer par "matrice d'opérateurs", de façon à lever l'ambiguité avec 1/, de manière analogue à ce qui se fait en algèbre linéaire de dimension finie.

3/ Le mot système intervient encore dans un sens différent des précédents dans la terminologie du contrôle optimal de systèmes physiques ou autres.

Des résultats de ce chapitre, on peut retenir deux conclusions :

- La première, théorique, montre que la condition classique de V-ellipticité, ou, plus généralement de coercivité (Cf. de FIGUEIREDO [20] pour une étude complète de cette question), peut être affaiblie dans le cas des systèmes d'équations et d'inéquations variationnelles, stationnaires et d'évolution. On vérifie également que les applications que nous étudions ne sont pas pseudo-monotones ou de type M au sens de BREZIS, (Cf. § IX, Chap. I).

- La seconde conclusion, pratique, et ayant au moins autant d'importance à nos yeux, car intéressant directement l'application des mathématiques à l'Informatique, est de fournir des conditions de convergence d'algorithmes, applicables, après discrétisation convenable, au contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Nous avons, du même point de vue pratique, jugé important d'adapter l'algorithme de F. ROBERT - J. SCHROEDER de contrôle des erreurs à notre situation.

Malheureusement, le matériel 1130, 8K disque, dont, faute de crédits d'investissements, nous devons jusqu'à présent nous contenter, ne nous laisse pas la possibilité d'aborder dans des conditions normales, de tels types de problèmes du point de vue expérimental, qui est essentiel en ces questions.

Pour aborder maintenant le contenu du Chapitre II, il me semble utile de rappeler un résultat classique énoncé par FIEDLER et PTAK [18].

<u>THEOREME</u> -

*Soit $N$ une matrice à coefficients diagonaux positifs, et coefficients hors diagonaux négatifs ou nuls, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

I *il existe un vecteur $x \geq 0$ tel que $Nx \geq 0$*

II *il existe un vecteur $x > 0$ tel que $Nx > 0$*

III *il existe une matrice diagonale $D$ dont les éléments diagonaux sont positifs telle que $ND\, e > 0$ (ou $e$ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1).*

IV il existe une matrice diagonale $D$ dont les éléments diagonaux sont positifs, telle que la matrice $W = ND$ est une matrice à diagonale dominante.

V pour toutes matrice diagonale $R$ telle que $R \geq N$ l'inverse $R^{-1}$ existe, et le rayon spectral de $R^{-1}(P-N)$ est $< 1$, ou $P$ est la diagonale de $N$.

VI si $B$ est une matrice à coefficients diagonaux positifs, et hors diagonaux négatifs ou nuls, telle que :
$B \geq N$, alors $B^{-1}$ existe.

VII toute valeur propre réelle de $N$ est positive.

VIII tous les déterminants mineurs principaux de $N$ sont positifs.

IX il existe une suite strictement croissante d'ensembles d'indices $0 \neq J_1 \subset J_2 \subset J_3 \quad CJ_n = n$ telle que les déterminants mineurs principaux de $N(J_i)$ soient positifs.

X il existe une matrice de permutation $P$, telle que $PAP^{-1}$ peut être écrite sous la forme $RS$ ou $R$ est triangulaire inférieure, à éléments diagonaux $>0$, et hors diagonaux $\leq 0$, et $S$ triangulaire supérieure à éléments diagonaux $> 0$, et hors diagonau $\leq 0$.

XI l'inverse $N^{-1}$ existe et $N^{-1} \geq 0$.

XII la partie réelle de chaque valeur propre est positive.

XIII pour tout vecteur $x \neq 0$, il existe un indice $k > 0$, tel que $x_k y_k > 0$ pour $y = Ax$.

- Une matrice vérifiant les conditions de l'énoncé précédent est appelée M-Matrice.

On peut considérer que le Chapitre I a été consacré à une mise en oeuvre étendue de la propriété V, qui assure en particulier la convergence de la méthode de Jacobi (en choisissant R = P dans V).

Le Chapitre II s'appuie essentiellement sur une généralisation de la propriété XIII des M-matrices, on peut donner à ce sujet une indication très simple :

Les matrices définies positives sont un cas particulier des M-matrices. Considérons donc une matrice N définie positive, on a :

i/ $(Nx,x) > 0 \quad \forall x \in R^n$

ce qui implique, par un raisonnement de compacité très simple qu'il existe $\alpha > 0$, tel que :

ii/ $(Nx,x) \geq \alpha||x||_2^2$ où $|| \; ||_2$ est la norme euclidienne de $R^n$.

Remplaçons maintenant $R^n$ par V, espace de Hilbert, et N par $A \in \mathscr{L}(V,V)$, la condition de V-ellipticité de A s'exprime par :

iii/ $(Av,v) \geq \alpha||v||_V^2 \quad \forall v \in V$

d'où i/ est un cas particulier de iii/.

De même la propriété XIII, apparaît comme cas particulier d'une notion plus générale, que nous pouvons suggérer de manière analogue à ii/ : en appelant $\Pi_j$ le projecteur orthogonal sur le $j^{\text{ième}}$ axe de $R^n$ :

$i_1$/ $\max\limits_{j=1,\dots,r} y_j x_j = \max\limits_{j=1,\dots,r} (Nx,\Pi_j x) \geq \alpha \; ||x||^2$

où cette inégalité $i_1$/ s'obtient à partir de XIII par un raisonnement de compacité comme précédemment pour ii/.

On aboutit ainsi à une extension de la notion de V-ellipticité qui permet de généraliser un certain nombre de résultats bien classiques : Lemme de Lax-Milgram, inégalité de Garding, alternative de Riez Fredholm, théorème des projections, théorèmes d'isomorphismes pour les équations abstraites d'évolution, généralisation de la notion de système fortement elliptique, etc... avec application aux systèmes paraboliques généraux, et plus particulièrement, nous développons le cas des systèmes paraboliques faiblement couplés (intervenant dans les mathématiques de la diffusion), et qui constitue, avec le contrôle optimal, le deuxième type d'application que nous avons pu dégager de cette Théorie.

Pour traiter des problèmes non linéaires, nous avons été amenés à définir la notion plus large de para-monotonie, à propos de laquelle nous donnons divers théorèmes de perturbation d'opérateurs monotones (éventuellement multivoques) maximaux.

Je conjecture d'ailleurs que certaines améliorations de nos résultats sont encore possibles de ce côté (n'ayant pu jusqu'à présent prendre connaissance des actes du colloque sur l'Analyse non linéaire tenu à Chicago en 1968, il nous a peut être manqué des éléments pour optimiser complètement nos théorèmes d'existence non linéaires).

Citons un certain nombre de problèmes classiques, que nous n'avons pas eu le temps de reprendre dans les termes que nous proposons :

- Le problème général de la coercivité (dans le cas linéaire) où nous n'avons traité que le cas particulier des inégalités de Garding.

- Problèmes de régularité en les variables d'espaces, et corrélativement problèmes non homogènes.

- Il conviendrait d'aborder également un certain nombre de résultats d'approximation, sujet sur lequel nous restons très succinct.

Indiquons encore que les propriétés V et XIII, ne sont à coup sûr pas les seules dignes d'une extension à l'analyse fonctionnelle. En particulier, les résultats d'HAUGAZEAU, pour les problèmes aux dérivées partielles, de KRASNOSELSKII et d'autres auteurs, dans le cas d'équations intégrales peuvent apparaître comme des extensions à l'analyse fonctionnelle d'une propriété du type XI

Je conjecture d'ailleurs la possibilité d'étendre certains résultats d'HAUGAZEAU au cas des systèmes faiblement couplés dont nous avons déjà parlé précédemment.

Enfin, nous avons laissé de côté ce qui concerne le couplage de problèmes du type NAVIER STOKES, qui est une question tout à fait d'actualité. Mais nous ignorons si le développement correspondant, en admettant qu'il soit possible, aurait de réelles applications.

# C H A P I T R E   I

## H-SYSTEMES VARIATIONNELS - METHODES ITERATIVES

# I - POSITION DU PROBLEME, RAPPEL DE THEOREMES D'EXISTENCE CLASSIQUES -

- Soit $\{V_i\}$ $i = 1,\dots,r$ où $r$ est un entier $>0$ une famille d'espaces de Hilbert, réels, de produit scalaire $((,))_i$.

Soit $V = \prod_{i=1,\dots,r} V_i$, qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{r} ((u_i,v_i)).$$

Soit $\{a_{i,j}(u_i,v_j)\}$, pour $i,j = 1,\dots,r$ une famille de formes bilinéaires bornées sur $V_i \times V_j$.

- Nous appelerons $a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}(u_i,v_j)$ qui est une forme bilinéaire bornée sur $V \times V$.

Nous noterons, de plus, par $a_{\cdot j}(u,v_j)$ la somme $\sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(u_i,v_j)$ qui est une forme bilinéaire bornée sur $V \times V_j$, pour $j = 1,\dots,r$.

(1.1) Soit $f = \{f_1,\dots,f_r\}$ avec $f_j \in V_j'$ dual de $V_j$, $j=1,\dots,r$.

(On suppose que le "produit scalaire" permettant de mettre $V_j$ et $V_j'$ en dualité est indépendant de $j$, on le note $(,)$, et soit :

$(f,v) = \sum_{j=1}^{r} (f_j,v_j) \quad \forall v \in V$.

Nous considérons successivement deux problèmes :

## PREMIER PROBLEME -

Trouver $u \in V$ solution de :

(1.2) $$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in V.$$

DEUXIEME PROBLEME -

Soit $\{X_j\}$, $j=1,\dots,r$ une famille de convexes non tous vides, $X_j \subset V_j$ étant fermé, pour $j=1,\dots,r$.

(1.3) $$\text{Soit } X = \prod_{j=1,\dots,r} X_j$$

Nous énonçons le second problème sous la forme trouver $u \in X$, tel que :

(1.4) $$a(u,v-u) \geq (f,v-u) \quad \forall v \in X.$$

Remarquons que si l'on prend $X = V$, on retrouve le problème (I.2).

Rappelons les deux résultats classiques concernant ces problèmes qui sont respectivement le lemme de Lax-Milgram, et le théorème de Stampacchia sur les formes bilinéaires coercives sur un ensemble convexe.

THEOREME I.1- (Lemme de Lax-Milgram)

*La forme bilinéaire $a(u,v)$ bornée sur $V\times V$, étant $V$-elliptique, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité :*

(1.5) $$a(u,u) \geq \alpha ||u||_V^2 \quad \forall v \in V,$$

*alors $a(u,v)$ peut être représentée par un isomorphisme $A$ de $V$ sur $V'$ dual de $V$ : on a $a(u,v) = (Au,v)$ $\forall u,v \in V$* (où (,) désigne la forme bilinéaire mettant en dualité V et V').

Pour la démonstration, nous renvoyons, par exemple, à LIONS - MAGENES [37] Vol. I, Chap. 2 , p. 216.

Comme conséquence, on obtient la solution du problème (1.2) sous l'hypothèse de V-ellipticité pour $a(u,v)$.

**THEOREME I.2** - (Théorème de Stampacchia)

*Sous l'hypothèse de V-ellipticité (hypothèse (I.5)), le problème (I.4) a une solution $u \in X$, unique :*

Pour la démonstration, voir LIONS [35] Chap. I, p. 14.

**REMARQUE I.1** -

Les deux énoncés précédents, sont indépendants de l'hypothèse que V a une structure d'espace produit des espaces $V_j$, et, en particulier, dans l'énoncé du Théorème I.2, on peut prendre pour X, un convexe fermé quelconque, alors que nous particularisons dans l'étude qui suit X à être un produit de convexes $X_j$.

## II - RAPPEL SUR LES M-MATRICES, B-MATRICES, H-MATRICES -

(Cf. [18], [53], [46], et la bibliographie de ces publications pour l'étude de ces matrices).

**DEFINITION I.1** -

*On appelle Z-matrice, ou matrice de la classe Z, toute matrice dont les coefficients diagonaux sont >0, et dont les coefficients hors diagonaux sont ≤0.*

Nous rappelons, avec leur numérotation "d'origine", les propriétés des M-matrices qui nous sont utiles ici.

**THEOREME I.3** - (Cf. Fiedler et Ptak [18])

*N étant une Z-matrice, de type (r,r), les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- V) *Considérons la matrice de Jacobi, $J$, associée à $N$ :*

$$J = \begin{vmatrix} 0 & & -\frac{n_{j,i}}{n_{j,j}} & \\ & 0 \ddots & & \\ -\frac{n_{i,j}}{n_{j,j}} & & \ddots 0 & \\ & & & 0 \end{vmatrix}$$ *; le rayon spectral de $J$ $\rho(J)$ est $< 1$.*

- XI) $N^{-1}$ *existe, et a tous ses coefficients positifs ou nuls.*
- XIII) $\forall x \in R^r_+$, *il existe un indice $J$, tel que :*

$$y_j x_j > 0, \text{ où } y = Nx.$$

DEFINITION I.2 -

*Une Z-matrice vérifiant les conditions du Théorème I.3 sera appelée une M-matrice.*

DEFINITION I.3 -

*Une matrice $N$, de type $(r,r)$, dont les coefficients sont de signe quelconque sera appelée une B-matrice, si la propriété suivante est vérifiée :*
$\forall x \in R^r$ $x \neq 0$, *il existe un indice $j$, tel que :*

$$y_j x_j > 0, \text{ où } y = Nx.$$

DEFINITION I.4 -

*Une matrice $N$ sera appelée une H-matrice si la matrice*

$$N = \begin{vmatrix} \ddots n_{j,j} & \\ -|n_{i,j}| & \ddots \end{vmatrix}$$ *est une M matrice.*

## III - INTRODUCTION DE NOUVELLES NOTIONS : FORMES BILINEAIRES MINORANTES VECTORIELLES, MATRICES V-MINORANTES, ET H-SYSTEMES -

DEFINITION I.5 -

*Nous dirons que la forme bilinéaire sur $R^r \times R^r$ associée à la matrice $N = \begin{vmatrix} n_{i,j} \end{vmatrix}$ est une minorante vectorielle de la forme bilinéaire $a(u,v)$, si la condition suivante est vérifiée :*

$$(3.1)\quad \left|\begin{array}{l} \forall u = \{u_1,\dots,u_r\} \in V \quad \text{on a :} \\ a_{\cdot j}(u,u_j) \geq \sum_{i=1}^{r} n_{i,j}\ ||u_i||_i\ ||u_j||_j \quad \forall j=1,\dots,r \end{array}\right.$$

En appelant $\Pi_j$ l'opérateur de projection orthogonale dans V, sur $V_j$, et $\tilde{\Pi}_j$ l'opérateur de projection orthogonale dans $R^r$ sur le $j^{\text{ième}}$ axe (3.1) est équivalent à

$$(3.1)^* \qquad a(u,\Pi_j a) \geq (Nx(u),\ \tilde{\Pi}_j x(u)) \quad \forall j=1,\dots,r$$

$$\text{ou} \quad x(u) = \{||u_1||_1,\dots,||u_j||_j,\dots,||u_r||_r\}.$$

DEFINITION I.6 -

*Toute matrice N vérifiant (2.1) sera appelée une V-minorante de a(u,v).*

DEFINITION I.7 -

*Toute V-minorante de a(u,v) qui est une Z-matrice sera appelée une Z-minorante de a(u,v).*

*Toute V-minorante de a(u,v) qui est une M-matrice sera appelée une M-V-minorante.*

LEMME I.4 -

*Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme bilinéaire a(u,v) admette une Z-V-minorante N, de coefficients $n_{i,j}$, est que :*

$$(3.2) \qquad a_{jj}(v_j,v_j) \geq n_{jj}\ ||v_j||^2 \qquad \forall v_j \in V_j$$

$$(3.3) \qquad \forall i,j \qquad i\neq j \qquad |a_{i,j}(v_j,v_j)| \leq -n_{i,j}\ ||v_i||\ \ ||v_j||$$

DEMONSTRATION -

- La condition est nécessaire -

Soit $N = |n_{ij}|$ la M-V-minorante de a(u,v), $\forall v_j \in V_j$, on considère l'élément $v^j = \{0,\dots,0,v_j,0,\dots,0\}$.

Puisque N est M-V-minorante on a, en particulier :

$$a_{\cdot j}(v^j,v_j) \geq n_{jj}\ ||v_j||_j^2$$

Or $\qquad a_{\cdot j}(v^j,v_j) = a_{jj}(v_j,v_j)$

d'où $\qquad a_{jj}(v_j,v_j) \geq n_{jj}\ ||v_j||_j^2$

Soit $u = \{u_1,\dots,u_k,\dots,u_r\} \in V \qquad u_k \in V_k$

Soit $x \in R_+^r \quad x = \{x_1,\dots,x_k,\dots,x_r\}$ et $u_x = \sum_{k=1}^{r} x_k u_k$

Formons $a_{.j}(u_x, x_j u_j) \geqslant n_{jj} ||x_j u_j||^2 + \sum_{k \neq j} n_{k,j} ||x_k u_k||_k \; ||x_j u_j||_j$

Or, par linéarité $a_{.j}(u_x, x_j u_j) = x_j \; a_{.j} \; (u_x, u_j)$, et comme $x_j > 0$, par hypothèse, on obtient :

(2.4) $\qquad a_{.j}(u_x, u_j) \geqslant n_{jj} ||x_j u_j||_j \; ||u_j||_j + \sum_{k \neq j} n_{k,j} ||x_k u_k||_k \; ||u_j||_j$

avec $a_{.j}(u_x, u_j) = \sum_{k=1}^{r} a_{k,j}(x_k u_k, u_j)$

Soit $i \neq j$. Je choisis $x_i = 1$.

$\forall \varepsilon > 0$ donné, je prends $\forall k \neq i$ (donc aussi pour $k=j$) $\quad x_k < \varepsilon$ .

$a_{.j}(u_x, u_j) - a_{ij}(u_i, u_j) = \sum_{k \neq i} x_i a_{kj} \; (u_k, u_j)$

Soit $K_1 = \left| \sum_{k \neq i} a_{kj} \; (u_k, u_j) \right|$

$|a_{.j}(u_x, u_j) - a_{i,j}(u_i, u_j)| \leqslant \varepsilon K.$

D'où, en utilisant (1.9) :

$a_{i,j}(u_i, u_j) + K_1 \varepsilon \geqslant n_{jj} ||x_j u_j||_j \; ||u_j||_j + \sum_{k \neq j} n_{k,j} ||x_k u_k||_k \; ||u_j||_j = S$

ou $\left| n_{i,j} ||u_k||_k \, ||u_j||_j - S \right| \leqslant \varepsilon ( n_{jj} ||u_j||_j - \sum_{k \neq i} n_{k,j} ||u_k||_k ) \, ||u_j||_j = \varepsilon K_2.$

D'où $a_{i,j}(u_i, u_j) + K_1 \varepsilon \geqslant n_{i,j} ||u_i||_i \; ||u_j||_j - \varepsilon K_2$, et ceci $\forall \varepsilon > 0$.

D'où : $\quad a_{i,j}(u_i, u_j) \geqslant n_{i,j} \; ||u_i||_i \; ||u_j||_j$

où $n_{i,j} \leqslant 0$, or la même inégalité est vérifiée si on remplace $u_j$ par $-u_j$, d'où :

$$| a_{i,j}(u_i, u_j) | \leqslant - n_{i,j} ||u_i||_i \, || u_j ||_j$$

- <u>La condition est suffisante</u> -

Il suffit de vérifier que $N$ est une V-minorante.

Soit $u = \{u_1,\dots,u_r\} \in V$.

Or : $a_{.j}(u,u_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(u_i,u_j) \geq a_{jj}(u_j,u_j) - \sum_{i\neq j} |a_{i,j}(u_i,u_j)|,\ j=1,\dots,r$

d'où, en utilisant (3.2), (3.3) :

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(u_i,u_j) \geq n_{jj} \,||u_j||_j^2 + \sum_{i\neq j} n_{i,j} ||u_i||_i \,||u_j||_j$$

donc la matrice $N$ est bien une V-minorante de $a(u,v)$.

q.e.d.

<u>NOTATIONS</u> -

Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire bornée sur $V \times V$, admettant une Z-V-minorante :

Nous notons par :

$$]\!(u_i,v_i)\,[_i = \frac{a_{ii}(u_i,v_i) + a_{ii}(v_i,u_i)}{2} \qquad \forall u_i,v_i \in V_i,\quad i=1,\dots,r$$

Puisque $a(u,v)$ admet une Z-V-minorante $](,)[_i$ est un produit scalaire sur $V_i$, dont la norme associée $]|\ |[_i$ est strictement équivalente à la norme de $V_i$.

$$\text{Soit } \tilde{n}_{i,j} = \sup_{\substack{]|u_i|[_i = 1 \\ ]|v_j|[_j = 1}} |a_{ij}(u_i,v_j)|$$

et soit $\tilde{N}$ la matrice de coefficients diagonaux égaux à 1, et de coefficients hors diagonaux $\tilde{n}_{i,j}$.

<u>THEOREME I.5</u> - (Analogue d'un résultat de F. Robert [47], dans le cas de la notion de minorante d'une matrice par blocs).

*$a(u,v)$ étant une forme bilinéaire bornée sur $V \times V$, admettant une Z-V-minorante, une condition nécessaire, et suffisante pour qu'il existe sur $V$ une structure d'espace de Hilbert, compatible avec sa structure d'espace produit $\prod_{i=1,\dots,r} V_i$, dont la norme associée soit strictement équivalente à la norme de $V$, telle que, relativement à cette structure $a(u,v)$ admette une M-V minorante, est que $\tilde{N}$ soit une M-V-minorante relativement*

DEMONSTRATION -

La condition est évidemment suffisante, il suffit de munir chacun des espaces $V_i$ du produit scalaire : $]( , )[_i$.

La condition est nécessaire :

Pour ne pas multiplier les notations, on suppose que $a(u,v)$, admet une M-V-minorante relativement à la structure initialement donnée sur V, et nous montrons que cela entraîne la même propriété relativement à la structure associée aux produits scalaires $]( , )[_i$ $i=1,\dots,r$.

D'après notre hypothèse, et le lemme I.4, on a :

$$(3.3) \qquad ](v_j,v_j)[_j = a_{jj}(v_j,v_j) \geq n_{jj}\ ||v_j||^2 \qquad \forall v_j \in V_j$$

Par suite, nous pouvons utiliser le lemme de Lax Milgram, pour "représenter" la forme bilinéaire $]( , )[_j$ sur $V_j \times V_j$, par un isomorphisme $V_j$ elliptique, autoadjoint de $V_j$ sur $V_j$. Soit $\tilde{A}_j$ cet isomorphisme, qui admet une racine carrée $\tilde{A}_j^{1/2}$ qui est également un isomorphisme de $V_j$ sur $V_j$. Nous noterons par $\tilde{A}_j^{-1/2}$ l'inverse de $\tilde{A}_j^{1/2}$ :

Soit i,j avec $i \neq j$, nous considèrons les "représentations" de $a_{ij}(u_i,v_j)$ :

$$a_{ij}(u_i,v_j) = ](B_{ij}\ u_i,v_j)[_j = ((A_{ij}\ u_i,v_j))_j$$

Or $$](B_{ij}u_i,v_j)[_j = ((\tilde{A}_j B_{ij}u_i,v_j))_j$$

et, par conséquent :

$$B_{ij} = \tilde{A}_j^{-1}\ A_{ij}$$

Nous voulons évaluer $$]|B_{ij}|[_{i,j} = \sup_{v_i \in V_i} \frac{]|B_{ij}v_i|[_j}{]|v_i|[_i}$$

Or : $$\frac{]|B_{ij}v_i|[_j}{]|v_i|[_i} = \frac{]|\tilde{A}_j^{\frac{1}{2}}\ A_{ij}v_i|[_j}{]|\tilde{A}_i^{1/2}\ v_i|[_i}$$

$$= \frac{||\tilde{A}_j^{-1/2} A_{ij} v_i||_j}{||\tilde{A}_i^{1/2} v_i||_i} = \frac{||\tilde{A}_j^{-1/2} A_{ij} \tilde{A}_i^{-1/2} A_i^{1/2} v_i||_j}{||\tilde{A}_i^{1/2} v_i||_i}$$

et, comme $\tilde{A}_i^{1/2}$ est un isomorphisme de $V_i$ sur $V_i$

$$]|B_{ij}|[_{i,j} = \sup_{w_i \in V_i} \frac{||\tilde{A}_j^{-1/2} A_{i,j} \tilde{A}_i^{-1/2} w_i||_j}{||w_i||_i}$$

d'où l'inégalité :

$$]|B_{ij}|[_{i,j} \leq ||\tilde{A}_j^{-1/2}||_j \; ||A_{ij}||_{i,j} \; ||\tilde{A}_i^{-1/2}||_i$$

où $||A_{i,j}||_{i,j} = \operatorname{Sup}_{v_i \in V_i} \frac{||A_{ij} v_i||_j}{||v_i||_i}$ et $||A_k^{-1/2}||_k = \sup_{v_k \in V_k} \frac{||A_k^{-1/2} v_k||_k}{||v_k||_k}$

or, puisque a(u,v) admet N, comme M-V-minorante, et, en appliquant le <u>lemme</u> I.4 (partie condition nécessaire), on obtient :

$$||A_{i,j}||_{i,j} \leq - n_{i,j}$$

En utilisant (3.3), on a : $||\tilde{A}_k^{-1/2}||_k \leq n_{kk}^{-1/2}$ $\quad k=1,\ldots,r$

d'où : $\quad ]|B_{i,j}|[_{i,j} \leq n_{jj}^{-1/2} (-n_{i,j}) \; n_{ii}^{-1/2} \qquad \forall i,j \qquad i \neq j$

En appliquant maintenant le <u>lemme</u> I.4 (partie condition suffisante) on obtient que, relativement à la structure d'espace produit, où les $V_i$ sont munis des produits scalaires $](,)[_i$, a(u,v) admet pour Z-V-minorante, la matrice :

$$d^{-1/2} \; N \; d^{-1/2},$$

où $d^{-1/2}$ est la matrice diagonale, de coefficients diagonaux $n_{jj}^{-1/2}$.

En effet, les coefficients diagonaux de $d^{-1/2}$ N $d^{-1/2}$, sont égaux à 1, et ses coefficients hors diagonaux sont :

$$n_{jj}^{-1/2} \; n_{i,j} \; n_{ii}^{-1/2}$$

Mais, par hypothèse N est une M-matrice, on vérifie par exemple, en utilisant la condition XIII, de la définition des M-matrices, qu'il en va de même pour $d^{-1/2}\ N\ d^{-1/2}$. En effet, soit $x \in R^r_+$ $d^{-1}x \in R^r_+$, soit $\tilde{y} = N\ d^{-1/2}x$, il existe un indice j, tel que : $\tilde{y}_j\ n_{jj}^{-1/2}\ x_j > 0$, or $n_{jj}^{-1/2}\ \tilde{y}_j$ est la $j^{\text{ième}}$ composante de $y_j = d^{-1/2}\ N\ d^{-1/2}x$, d'où le résultat.

REMARQUE I.1 -

Dans le cas ou les espaces sont construits sur le corps des complexes C, indiquons rapidement quelles modifications il convient d'introduire pour que les énoncés ci-dessus restent valables :

On définit une forme bilinéaire minorante de a(u,v), la matrice associée à cette forme bilinéaire étant N, de coefficients $n_{i,j}$, par :

$$\text{Re}\ a_{.j}(u,u_j) \geq \sum_{i=1}^{r} n_{i,j}\ ||u_i||_i\ \ ||u_j||_j \qquad j=1,\dots,r$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une Z-V-minorante N devient :

$$\text{Re}\ a_{jj}(u_j,u_j) \geq n_{jj}\ ||u_j||_j^2 \qquad \forall v_j \in V_j \qquad j=1,\dots,r$$

$$\text{et}\ |\text{Re}\ a_{ij}(u_i,u_j)| \leq -n_{i,j}\ \ ||u_i||_i\ ||u_j||_j$$

$$\forall u_i,u_j \in V_i \times V_j \qquad \forall i,j=1,\dots,r \text{ avec } i \neq j.$$

Pour obtenir l'analogue complexe du Théorème I.5, qui s'énonce de la même façon, il suffit d'utiliser les modifications précédentes, en considérant les produits scalaires (Hermitiques) :

$$](u_i,v_i)[_i = \frac{a_{ii}(u_i,v_i)+\overline{a_{ii}(v_i,u_i)}}{2} \qquad \forall u_i,v_i \in V_i$$

Tous les résultats du reste du chapitre, que nous énoncerons dans le cas réel, s'énoncent également dans le cas complexe, moyennant les notations indiquées ci-dessus, et le fait de travailler sur les parties réelles chaque fois que l'on traite d'inéquations variationnelles, et, dans le cas des équations, chaque fois que l'on veut mettre en oeuvre une M-V-minorante.

**PROPOSITION I.6 -**

*Une forme bilinéaire symétrique, admettant une M-V-minorante est V-elliptique.*

**DEMONSTRATION -**

Soit N la M-V-minorante.

D'après le lemme I.4 :

$$|a_{i,j}(u_i,v_j)| \leqslant -n_{i,j}\ ||u_i||_i\ ||v_j||_j$$

comme a(u,v) est symétrique : $a_{i,j}(u_i,v_j) = a_{j,i}(v_j,u_i)$

donc également : $|a_{i,j}(u_i,v_j)| \leqslant -n_{j,i}\ ||u_i||_i\ ||v_j||_j$

Soit $p_{i,j} = \min(|n_{i,j}|,|n_{j,i}|) \quad \forall i,j \quad i \neq j$

Posons $n'_{i,j} = n'_{j,i} = -p_{i,j}$

Considérons la matrice :

$$N' = \begin{vmatrix} \ddots & & \\ & n_{jj} & & n'_{j,i} \\ n'_{i,j} & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{vmatrix}$$

est encore une M-matrice (les coefficients négatifs sont inférieurs ou égaux à ceux de N), et elle est symétrique ; or, une M-matrice symétrique est définie positive.

Par suite, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\sum_{i,j=1}^{r} n_{i,j} \, ||u_i||_i \, ||u_j||_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{r} ||u_i||_i^2 = \alpha ||u||_V^2$$

or $a(u,u) = \sum_{j=1}^{r} a_{.j}(u,u_j) \geq \sum_{i,j=1}^{r} n_{i,j} ||u_i||_i \, ||u_j||_j$

et par suite $a(u,u) \geq \alpha ||u||_V^2$

q.e.d.

DEFINITION I.8 -

*Une forme bilinéaire $a(u,v)$, admettant une M-V-minorante, et qui n'est pas V-elliptique, sera dite fortement dissymétrique.*

PROPOSITION I.7 -

*Si $a(u,v)$ admet une M-V-minorante, alors, pour tout $u \in V$, tel que $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$, avec $u_i \neq 0$, $i=1,\ldots,r$, alors la matrice $A_u$, de coefficient $a_{i,j}(u_i,u_j)$ est une H-matrice.*

DEMONSTRATION -

Nous considérons la matrice $\tilde{A}_u$, obtenue en conservant les coefficients diagonaux de $A_u$, et de coefficients hors diagonaux $-|a_{ij}(u_i, u_j)|$
Pour $x \in R_+^r$, formons $y = \tilde{A}_u x$ :

$$\forall j=1,\ldots,r \quad x_j y_j = -\sum_{i \neq j} |a_{i,j}(u_i,u_j)| \, x_i x_j + a_{jj}(u_j,u_j) x_j^2 .$$

En utilisant le lemme I.4 :

$$x_j y_j \geq \sum_{i=1}^{r} n_{ij} \, x_i x_j ||u_i||_i \, ||u_j||_j = \sum_{i=1}^{r} n_{i,j} ||x_i u_i||_i ||x_j u_j||_j \; \forall j=1,\ldots,r$$

d'où le résultat en utilisant la propriété XIII de la définition des M-matrices.

q.e.d.

DEFINITION I.9 -

*Nous appellerons H-système d'équations variationnelles (respectivement d'inéquations variationnelles), le problème (1.2), (respectivement (1.4)), où la forme bilinéaire $a(u,v)$ admet une M-V-minorante.*

## IV - ALGORITHMES ITERATIFS -

Nous traitons du cas des systèmes d'inéquations : problème (I.4), qui, comme nous l'avons déjà indiqué, est plus général que le cas des équations variationnelles : problème (I.2).

- Nous faisons les deux hypothèses :

(4.1) $a(u,v)$ est bornée sur $V \times V$.

(4.2) $a(u,v)$ admet une M-V-minorante.

Nous faisons également les hypothèses (1.1), (1.3).

REMARQUE I.2 -

L'hypothèse (4.2) a pour rôle de remplacer l'hypothèse habituelle de V-ellipticité.

Ier Algorithme : METHODE DE JACOBI -

Soit $w \in V$, donné, on considère l'application $u = T_o w$, où $u = \{u_1,\ldots,u_n\}$ est solution du problème.

(4.3) $$a_{jj}(u_j,v_j-u_j) \geq -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} a_{ij}(w_i,v_j-u_j) + (f_j,v_j-u_j)_o \qquad \forall v_j \in V_j \qquad j=1,\ldots,r$$

Par l'hypothèse (4.2), et le lemme I.4, nous savons que $a_{jj}(u_j,v_j)$ est $V_j$-elliptique, et comme $a(u,v)$ est bornée, il en va de même de $a_{jj}(u_j,v_j)$, et de $a_{ij}(u_i,v_j)$, donc par le théorème de Stampacchia, nous savons qu'il existe $u_j$, unique solution de (4.3), $\forall_j=1,\ldots,r$, d'où l'existence de $u = T_o w$.

2ème Algorithme : METHODE DE GAUSS-SEIDEL -

On considère l'application $u = T_1 w$, w donné $\in V$ définie, par induction de la façon suivante :

- Pour $j = 1$

On cherche $u_1$, solution de

$$a_{11}(u_1, v_1 - u_1) \geq - \sum_{i=2}^{r} a_{i,j}(w_i, v_1 - u_1) + (f_1, v_1 - u_1)$$

l'existence de $u_1$ est, avec nos hypothèses, assurée comme dans le cas de l'algorithme 1, par le lemme I.4, et le théorème de Stampacchia.

Supposons que $u_1, \ldots, u_{j-1}$ sont connus, on détermine $u_j$ par l'inéquation :

$$(4.4) \qquad a_{jj}(u_j, v_j - u_j) \geq - \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}(u_i, v_j - u_j) - \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(w_i, v_j - u_j) + (f_j, v_j - u_j) \qquad \forall v_j \in X_j$$

L'existence de $u_j$ étant assurée par la connaissance de $f_j$, des $w_i$, des éléments $u_i$, pour $i=1,\ldots,j,\ldots,L$, nos hypothèses, le lemme I.4, et le théorème de Stampacchia.

3ème Algorithme : METHODE DE SUR-RELAXATION -

Par l'hypothèse (4.2), $a(u,v)$ admet une M-V-minorante N, de coefficients $n_{i,j}$. Nous appelons :

$$b_{jj}(u_j, v_j) = a_{jj}(u_j, v_j) - n_{jj}((u_j, v_j))_j$$

et $$\Pi^{\omega}_{jj}(u_j, v_j) = \omega b_{jj}(u_j, v_j) + n_{jj}((u_j, v_j))_j$$

par le lemme I.4 $\Pi^{\omega}_{jj}(u_j, v_j)$ est $V_j$-elliptique, on a :

$$\Pi^{\omega}_{jj}(v_j, v_j) = \omega(a_{jj}(v_j, v_j) - n_{jj}||v_j||^2_j) + n_{jj}||v_j||^2_j$$

$$\geq n_{jj}||v_j||^2_j, \quad \forall v_j \in V_j, \quad j=1,\ldots,r$$

Par ailleurs, si a(u,v) est bornée, $\Pi_{jj}(u_j,v_j)$ l'est également, ce qui nous permet d'appliquer, comme précédemment, le théorème de Stampacchia.

$w = \{w_1,\ldots,w_n\}$ étant donné, on détermine $u = T_\omega w$ par :

$$\Pi_{11}^{\omega}(u_1,v_1-u_1) \geq (1-\omega)n_{11}((w_1,v_1-u_1))_1 - \omega \sum_{i=2}^{r} a_{i1}(w_i,v_1-u_1)$$

$$+ \quad \omega(f_1,v_1-u_1), \quad \forall v_1 \in X_1$$

$u_1$ existe, et est unique. Supposons maintenant connus $u_1,\ldots,u_{j-1}$, on détermine $u_j$ par :

$$\Pi_{jj}^{\omega}(u_j,v_j-u_j) \geq -\omega \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}(u_i,v_j-u_j) + (1-\omega)n_{jj}((w_j,v_j-u_j))_j \tag{4.5}$$

$$- \omega \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(u_j,v_j-u_j) + \omega(f_j,v_j-u_j) \quad \forall v_j \in X_j, \ j=2,\ldots$$

$u_j$ existe, et est unique, par le théorème de Stampacchia, d'où l'algorithme $u = T_\omega w$.

## V - THEOREMES DE POINTS FIXES POUR LES TRANSFORMATIONS $T_0,T_1,T_\omega$ ; RESULTATS DE CONVERGENCE POUR LES ALGORITHMES ITERATIFS ASSOCIES ; RESULTATS D'EXISTENCE POUR LES H-SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES

Rappelons, sous une forme simplifiée, correspondant aux besoins de notre problème, les notions de norme vectorielle, de majorante d'une transformation non linéaire, et leur application à un résultat de point fixe (lemme I.9) indispensable pour la suite.

DEFINITION I.10 - (Cf. [46] F. Robert pour une définition générale)

*Nous dirons que l'application qui à $v \in V$ fait correspondre $x(v) \in R_+^r$, telle que :*

*1) $x(v) = 0 \iff v = 0$*

*2) $x(v) + x(v') - x(v+v') \in R_+^r \ \forall v, v' \in V$ inégalité triangulaire*

*3) $x(\lambda v) = |\lambda| x(v) \quad \forall \lambda \in R.$*

*est une norme vectorielle sur V.*

Nous utiliserons ici exclusivement la norme vectorielle $v \to x(v)$ définie par $x_j(v) = ||v_j||_j$ pour $j=1,\dots,r$ qui satisfait bien aux propriétés 1), 2), 3) ci-dessus.

DEFINITION I.11 - (Cf. [46], [23], [30], pour cette définition et des applications en algèbre et en analyse).

*T étant une application non linéaire de V dans lui-même, nous dirons que t est une majorante de T relativement à la norme vectorielle x si :*

$$tx(v_1-v_2) - x(T(v_1)-T(v_2)) \in R^r_+ \qquad \forall v_1, v_2 \in V.$$

PROPOSITION I.8 -

*Soit T une application non linéaire de V dans V, admettant une majorante linéaire t, relativement à la norme vectorielle x, alors T est continue de V fort dans V fort.*

DEMONSTRATION -

Considérons une norme $\phi$ sur $R^r$ telle que :

(5.1) $\quad \forall x,y \in R^r_+ \quad x-y \in R^r_+$ implique $\phi(x) \leqslant \phi(y)$

(la norme euclidienne, et, plus généralement, les normes de Holder vérifient cette propriété).

t étant une matrice de type (r,r), t est continue relativement à $\phi$, et nous notons :

$$S_{\phi,\phi}(t) = \operatorname*{Sup}_{y \in R^r} \frac{\phi(ty)}{\phi(y)}$$

Soit $\psi = \phi_o x$. On vérifie aisément que $\psi$ est une norme sur V, strictement équivalent à la norme de V (parce que $\phi$ norme sur $R^r$ est strictement équivalente à toute norme sur $R^r$, donc à la norme euclidienne).

Puisque t est une majorante de T, on a, par définition :

$$tx(u-v) - x(Tu-Tv) \in R_+^r \qquad \forall\, u,v \in V.$$

d'où, d'après (5.1) :

$$\phi(tx(u-v)) \geq \phi(x(Tu-Tv)) = \psi(Tu-Tv)$$

mais $\quad \phi(tx(u-v)) \leq S_{\phi,\phi}(t)\ \phi(x(u-v)) = S_{\phi,\phi}(t)\ \psi(u-v)$

d'où $\quad \psi(Tu-Tv) \leq S_{\phi,\phi}(t)\ \psi(u-v)$

q.e.d.

LEMME I.9 - (Cf. [23], [30] pour des résultats du même type, dans un cadre plu général).

*Soit $T$ une application non linéaire de $V$, dans $V$, admettant une majorante linéaire $t$, relativement à la norme vectorielle $x$. Si le rayon spectral de $t$, soit $\rho(t)$ est $< 1$, alors $T$ admet un point fixe $u \in V$.*

DEMONSTRATION -

Soit $u^o \in V$, on considère les itérés successifs :

$$u^1 = Tu^o \qquad u^p = Tu^{p-1}$$

On a : $\quad tx(u^p-u^{p-1}) - x(Tu^p-Tu^{p-1}) \in R_+^r$

ou encore :

(5.2) $\quad tx(u^p-u^{p-1}) - x(u^{p+1}-u^p) \in R_+^r$

Soit z la solution dans $R_+^r$ de :

$$(I - t)z = x(u^1-u^o) \quad \text{où } I \text{ est l'identité dans } R^r.$$

Puisque $\rho(t)$ est $< 1$ ; I-t est inversible, et :

(5.3) $\quad z = (I + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots)\ x(u^o - u^1)$

ou la série écrite au second membre de (5.3) est convergente dans $R^r$. Plus précisément, il existe, d'après un théorème de Householder-Ostrowski, une norme $\phi$ sur $R^r$, telle que t soit contractante relativement à cette norme.

Formons, pour $n > m \quad x(u^n - u^m)$

Par l'inégalité triangulaire en norme vectorielle, on a :

$$x(u^n-u^{n-1}) + \ldots + x(u^{n+1}-u^m) - x(u^n-u^m) \in R_+^r$$

Or, par (5.2), on obtient :

$$(t^m + \ldots + t^n)x\ (u^1 - u^o) - (x(u^n - u^{n-1}) + \ldots + x(u^{m+1}-u^m) \in R_+^r$$

D'où : $(t^m + \ldots + t^n)\ (u^1 - u^o) - x(u^n - u^m) \in R_+^r$

Or, d'après le théorème de Householder-Ostrowski déjà cité, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon$ tel que $\forall n,m > N_\varepsilon$, chacune des composantes de $(t^m + \ldots + t^n)\ (u^1 - u^o)$, soit $\leqslant \varepsilon$.

Par suite $\{u^n\}$ est une suite de Cauchy dans V, et comme T est continue de V fort dans V fort, on peut passer à la limite dans l'équation

$$u^{n+1} = Tu^n$$

d'où $u = Tu$ u étant la limite de $u^n$ dans V.

REMARQUE I.2 -

Les deux énoncés précédents restent valables, si on considère une application non linéaire T d'un ensemble X dans lui-même, où X est un ensemble fermé de V.

LEMME I.10 -

*Si T vérifie les conditions de l'énoncé du Lemme I.9, alors l'algorithme itératif défini par $u^1 = Tu^o \ldots\ u^{p+1} = Tu^p$ est convergeant dans V fort quelque soit $u^o \in V$.*

DEMONSTRATION -

Résulte immédiatement de la démonstration du Lemme I.9.

Pour étudier les algorithmes de Gauss-Seidel, et de sur-relaxation nous utiliserons le théorème de Stein Rosenberg, sous la forme énoncée par F. Robert [46], p. VII-8.

THEOREME I.11 - (de Stein-Rosenberg)

*Soit Q et R deux matrices non négatives. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(5.4) $\rho(R + Q) < 1$

(5.5) $\rho(R) < 1$, et $\rho((I-R)^{-1}Q) < 1$

*Si elles sont vérifiées, on a alors :*

(5.6) $\rho((I-R)^{-1}Q) \leqslant \rho(R+Q) < 1$

(5.7) $(I-R)^{-1} \geqslant 0$

THEOREME I.12 -

*Les hypothèses (1.1), (1.2), (4.1), (4.2), étant vérifiées, les algorithmes $T_0$ et $T_1$ admettent un point fixe u, solution unique du problème (1.4).*

*- $\forall\, \omega$ tel que $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho}$ où $\rho = \rho(J) < 1$ est le rayon spectral de la matrice de Jacobi associée à la M-V-minorante N. $T_\omega$ admet un point fixe qui est la solution unique u du problème.*

*- De plus, sous les hypothèses précédentes, les algorithmes itératifs de Jacobi, de Gauss-Seidel, et de sur-relaxation, associés à $T_0$, $T_1$, $T_\omega$ convergent dans V fort vers u.*

DEMONSTRATION -

Unicité de la solution du problème (1.4) -

Supposons que ce problème admette deux solutions distinctes $u_1$, $u_2$, on en déduit :

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i,j}\,(u_i^1 - u_i^2,\; u_j^1 - u_j^2) \leq 0 \qquad \forall j = 1,\dots,r$$

Puisque, par l'hypothèse (4.2), a(u,v) admet une M-V-minorante N, on a :

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i,j}\; \|u_i^1 - u_i^2\|_i\; \|u_j^1 - u_j^2\|_j \leq 0 \qquad \forall j = 1,\dots,r$$

où les $\|u_i^1 - u_i^2\|_i$ ne sont pas tous nuls, en contradiction avec la propriété XIII, de définition des M-matrices (Cf. définition I.2).

Existence de u, et convergence des algorithmes -

On vérifie sans peine, à partir des inégalités de définition des algorithmes : (4.3), (4.4), (4.5), qu'un point fixe de $T = T_0$, $T_1$ ou $T_\omega$ est solution du problème (1.4). Nous allons donc montrer successivement que, avec nos hypothèses, chacune des transformations $T_0$, $T_1$, $T_\omega$ vérifie les conditions de l'énoncé du lemme I.9, d'où l'existence du point fixe u solution du problème (1.4).

Ces transformations vérifient alors également les conditions de l'énoncé du Lemme I.10, d'où la convergence forte des algorithmes associés.

Algorithme I - METHODE DE JACOBI -

Soit $w^1, w^2 \in V$. Formons $u^1 = T_o w^1$ et $u^2 = T_o w^2$.

Ecrivons (4.3) pour $\{u^1, w^1\}$, $\{u^2, w^2\}$ on obtient au rang j :

(5.8) $$a_{jj}(u_j^1, v_j - u_j^1) \geq - \sum_{i \neq j} a_{i,j}(w_i^1, v_j - w_j^1) + (f_j, v_j - u_j^1) \quad \forall v_j \in X_j$$

(5.9) $$a_{jj}(u_j^2, v_j - u_j^2) \geq - \sum_{i \neq j} a_{i,j}(w_i^1, v_j - u_j^2) + (f_j, v_j - u_j^2) \quad \forall v_j \in X_j$$

On remplace $v_j$ par $u_j^2$ dans (5.8), et $v_j$ par $u_j^1$ dans (5.9), en additionnant membre à membre ces deux inégalités, après les avoir multiplié par -1, on obtient :

$$a_{jj}(u_j^1 - u_j^2, u_j^1 - u_j^2) \leq - \sum_{i \neq j} a_{i,j}(w_i^1 - w_i^2, u_j^1 - u_j^2) \quad \forall j=1,\ldots,r$$

Posons $\delta u = u^1 - u^2$ ; $\delta w = w^1 - w^2$.

Cette dernière inégalité s'écrit :

$$a_{jj}(\delta u_j, \delta u_j) + \sum_{i \neq j} a_{i,j}(\delta w_i, \delta u_j) \leq 0 \quad \forall j=1,\ldots,k$$

ou encore, puisque, par l'hypothèse (4.2), N est M-V-minorante, et en utilisant le lemme I.4 :

$$n_{jj} \; ||\delta u_j||_j^2 + \sum_{i \neq j} n_{i,j} \; ||\delta w_i||_i \; ||\delta u_j||_j \leq 0 \quad \forall j=1,\ldots,r$$

ou encore :

(5.10) $$||\delta u_j||_j \leq \sum_{i \neq j} - \frac{n_{i,j}}{n_{j,j}} \; ||\delta w_i||_i \quad \forall j=1,\ldots,r$$

Posons :

$$t_o = J = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 \ddots & -\dfrac{n_{i,j}}{n_{i,i}} \\ -\dfrac{n_{i,j}}{r_{j,j}} & \ddots 0 & \\ & & 0 \end{vmatrix}$$

Les inégalités (5.10) s'expriment en norme vectorielle par :

$t_1\ x(\delta w) - x(\delta u) \in R_+^r$

ou encore :

$t_1\ x(w_1 - w_2) - x(T(w_1) - T(w_2)) \in R_+^r \quad \forall w_1, w_2 \in V.$

et par suite $t_1$ est une majorante de $T_1$, relativement à la norme vectorielle x.

Or, puisque, par l'hypothèse (4.2), N est une M-matrice par la propriété V des M-matrices : $\rho(t) = \rho(J) < 1$.

Nous sommes donc dans les conditions d'application des lemmes I.9 et I.10.

METHODE DE GAUSS-SEIDEL -

Soit $w_1, w_2 \in V$, formons : $u^1 = T_1 w^1$ et $u^2 = T_1 w^2$

Ecrivons (4.4) pour $\{u_1, w_1\}$ et $\{u^2, w^2\}$ :

$$\text{(5.11)} \quad \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(u_i^1, v_j - u_j^1) \geq - \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(w_i^1, v_j - u_j^1) + (f_j, v_j - u_j^1), \forall v_j \in X_j$$

$$\text{(5.12)} \quad \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(u_i^2, v_j - u_j^2) \geq - \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(w_i^1, v_j - u_j^1) + (f_j, v_j - u_j^1), \forall v_j \in X_j$$

où on remplace $v_j$ par $u_j^2$ dans (5.11) et $v_j$ par $u_j^1$ dans (5.12).

On multiplie par -1 les deux membres des inégalités obtenues, et on ajoute membre à membre d'où, en posant :

$\delta u = u^1 - u^2, \qquad \delta w = w^1 - w^2$

$$\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(\delta u_i, \delta u_j) + \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(\delta w_i, \delta u_j) \leq 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, r$$

On en déduit, en utilisant l'hypothèse (4.2), c'est-à-dire l'existence d'une M-V-minorante pour (u,v), et le lemme I.4 que :

$$\sum_{i=1}^{j} n_{i,j} ||\delta u_i|| \ ||\delta u_j||_j + \sum_{i=j+1}^{r} ||\delta w_i||_i \ ||\delta u_j||_j \leq 0 \qquad j=1,\ldots,r.$$

c'est-à-dire, si $||\delta u_j||_j \neq 0$, on a :

$$(5.13)\qquad \sum_{i=1}^{j} n_{i,j}\,||\delta u_i||_i \;-\; \sum_{i=j+1}^{r} n_{i,j}\,||\delta w_i||_i$$

qui est également vérifiée si $||\delta u_j||_j=0$ puisque les coefficients $n_{i,j}$ sont négatifs pour $i \neq j$, donc (5.13) a lieu $\forall j=1,\dots,r$.

Soit L la matrice de coefficients :

$$\begin{cases} l_{i,j} = -\dfrac{n_{i,j}}{n_{j,j}} & \text{pour } i \leqslant j \\[2ex] l_{i,j} = 0 & \text{pour } i \geqslant j \end{cases}$$

et U la matrice de coefficients

$$\begin{cases} u_{i,j} = -\dfrac{n_{i,j}}{n_{j,j}} & \text{pour } i>j \\[2ex] u_{i,j} = 0 & \text{pour } i \leqslant j \end{cases}$$

Les inégalités (5.13) pour $j=1,\dots,r$ peuvent encore s'écrire en norme vectorielle :

$$(5.14)\qquad Ux(\delta w) - (I-L)\,x(\delta u) \;\in R_+^r$$

Considérons l'application :

$$t_1 = (I-L)^{-1}U$$

U et L sont $\geqslant 0$ $\rho(L+U) = \rho(J) < 1$, par <u>l'hypothèse</u> (4.2), et la propriété V, de définition des M-matrices ; d'où, par le <u>théorème de Stein-Rosenberg</u> :

$$\rho(t_1) \leqslant \rho(L+U) < 1$$

or $(I-L)^{-1}$ est $\geqslant 0$ par (5.7), d'où (5.14) s'écrit aussi :

$$t_1 x(\delta w) - x(\delta u) \in R_+^r$$

c'est-à-dire : $t_1 x(w_1-w_2) - x(T_1(w_1) - T_1(w_2)) \in R_+^r$ avec $\rho(t_1) < 1$

Nous sommes donc dans les conditions d'application <u>des Lemmes</u> I.9 et I.10.

- Algorithme 3 : METHODE DE SUR-RELAXATION -

Comme précédemment, on forme $u^1 = T_\omega w^1$ ; $u^2 = T_\omega w^2$ ; $\delta w = w^1 - w^2$ ; $\delta u = u^1 - u^2$.

On obtient, à partir de (4.5) :

$$\Pi^\omega_{jj}(\delta u_j,\delta u_j) + \omega \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}(\delta u_i,\delta u_j) - (1-\omega)n_{jj}((\delta w_j,\delta u_j))_j$$

$$+ \omega \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(\delta w_i,\delta u_j) \leq 0 \qquad j=1,\dots,r.$$

d'où, en utilisant l'hypothèse (4.2), **la lemme I.4, et l'inégalité** de Schwartz pour le produit scalaire $((,))_j$, on obtient :

$$n_{jj}||\delta u_j||_j^2 + \omega \sum_{i=1}^{j-1} n_{i,j}||\delta u_i||_i||\delta u_j||_j + \omega \sum_{i=j+1}^{r} n_{i,j}||\delta w_i||_i||\delta u_j||_j$$

$$- n_{jj}|1-\omega|\,||\delta w_j||_j||\delta u_j||_j \leq 0 \qquad j=1,\dots,r$$

ou encore : si $||\delta u_j||_j \neq 0$.

$$||\delta u_j||_j + \omega \sum_{i=1}^{j-1} \frac{n_{i,j}}{n_{jj}} ||\delta u_i||_i \leq |1-\omega|\,||\delta w_j||_j \tag{5.15}$$

$$- \omega \sum_{i=j+1}^{r} \frac{n_{i,j}}{n_{jj}} ||\delta w_i||_i \qquad j=1,\dots,r$$

inégalité qui est évidemment vérifiée si $||\delta u_j||_j = 0$.

Nous considérons à nouveau les matrices triangulaires :

$$L = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 0 \\ -\frac{n_{i,j}}{n_{jj}} & & \ddots\; 0 & \\ & & & 0 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 0 & & -\frac{n_{i,j}}{n_{i,i}} \\ & 0\ddots & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

Considérons l'application

$$t_\omega = (I-\omega L)^{-1}\,(|1-\omega|I + \omega U)$$

où L et U sont $\geq 0$, en appliquant le théorème de Stein-Rosenberg, on obtien que :

Si $\rho(\omega(L+U) + |1-\omega| I) < 1$, alors

$\rho(t\omega) < 1$, ce qui est réalisé, si $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(J)}$ en utilisant l'hypothèse (4.2), et la propriété V de définition des M-matrices.

Les inégalités (5.15) s'expriment par :

$$(|I-\omega| I + \omega U)\, x(\delta w) - (I - \omega L)\, x(\delta u) \in R_+^r$$

or, par le théorème de Stein-Rosenberg $(I - \omega L)^{-1} \geq 0$, d'où, de l'inégalité vectorielle précédente, on obtient :

$$t_\omega x(\delta w) - x(\delta u) \in R_+^r$$

c'est-à-dire :

$$t_\omega x(w_1 - w_2) - x(T_\omega w_1 - T_\omega w_2) \in R_+^r$$

d'où, puisque $\rho(t) < 1$ pour $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(J)}$, nous sommes dans les conditions d'application des Lemmes I.9, et I.10.

q.e.d.

COROLLAIRE I.13 -

*Les hypothèses (1.1), (1.2), (4.1), (4.2), étant vérifiées, les algorithmes $T_0$ et $T_1$ admettent un point fixe u, solution unique du problème (1.2).*

DEMONSTRATION -

Il suffit de prendre $X_j = V_j$ dans le Théorème I.12.

Nous résumons les résultats d'existence obtenus dans le Théorème I.12, et le Corollaire I.13, par le

COROLLAIRE I.14 -

*Un H-système d'équations ou d'inéquations variationnelles a une solution unique.*

## VI - CONSEQUENCES PRATIQUES, ET ALGORITHMES DE F. ROBERT ET J. SCHROEDER DE CONTROLE DES ERREURS, POUR LES SYSTEMES D'INEQUATIONS -

Nous étudierons, au chapitre III, la discrétisation des H-systèmes avec le résultat suivant :

Si le problème (I.4) vérifie les hypothèses (1.1), (1.3), (4.1), (4.2), le problème discrétisé associé, faisant intervenir un espace $V_h$, de dimension finie, vérifie les mêmes hypothèses relativement à $V_h$.

Les divers algorithmes précédemment étudiés peuvent alors être mis en pratique, le rôle joué précédemment, par le théorème de Stampacchia, est alors tenu par des algorithmes intermédiaires de résolution d'inéquations variationnelles $V_j$-elliptiques ($V_j$ de dimension finie). En particulier, si les formes bilinéaires $a_{jj}(u_j,v_j)$ sont symétriques, à chaque itération on est amené à résoudre r problèmes de minimisation d'une forme quadratique définie positive sur un convexe, pour l'étude des algorithmes correspondant nous renvoyons à : AUSLENDER [2], CEA [14], et HAUGAZEAU [27], et SIBONY [50]

L'algorithme de F. ROBERT-J. SCHROEDER de contrôle des erreurs :

Soit donc T l'une des transformations $T_o$, $T_1$, $T_\omega$, vérifie respectivement les conditions du **Théorème** I.12, et t la transformation $t_o$, $t_1$ ou $t_\omega$, correspondant à T.

Nous considérons :

- Une itération principale -

$u^o$ étant donné dans V, on calcule les itérés successifs, par :

$u^{n+1} = Tu^n$ où $u^n \in X$, dès que $n \geq 1$.

Soit $p_o$ un entier que l'on se fixe, on commence par effectuer $p_o$ itérations "principales" (le choix de $p_o \geq 1$ est assez arbitraire, le critère utilisé pouvant être que le coût en temps d'exécution machine des $p_o$ itérations principales, ne soit pas prohibitif), soit $u_{p_o}$ la solution obtenue après $p_o$ itérations "principales", $u^{p_o}$ étant "relativement proche" de la solution exacte u, sans être nécessairement une "bonne" approximation de u, solution exacte du problème (1.4).

- Majoration de la norme vectorielle de l'erreur -

Nous notons l'erreur $\varepsilon^n = u-u^n$, où u est la solution exacte du problème (I.4).

On fait le changement de variable : $w = v-u^{p_o}$, et,

soit $Y = X - \{u^{p_o}\}$

Le problème (I.4) devient alors :

$$(6.1) \qquad a(\varepsilon^{p_o}, w-\varepsilon^{p_o}) \geq (f, w-\varepsilon^{p_o}) - a(u^{p_o}, w-\varepsilon^{p_o}) \quad \forall w \in Y.$$

On peut écrire :

$$a(u^{p_o}, w-\varepsilon^{p_o}) = \sum_{j=1}^{r} \left( \sum_{i=1}^{r} A_{i,j}\, u_i^{p_o},\ w_j - \varepsilon_j^{p_o}\right)$$

ou, avec nos hypothèses de continuité pour $a(u,v)$, les opérateurs $A_{ij}$ de $V_i$ dans $V_j'$ "représentent" les formes bilinéaires $a_{i,j}(u_i, v_j)$ :

$a_{i,j}(u_i, v_j) = (A_{i,j}\, u_i, v_j)$, par le théorème de représentation de Riez.

Posons $g_j = f_j - \sum_{i=1}^{r} A_{i,j}\, u_i^{p_o}$

l'erreur $\varepsilon^{p_o}$ est alors solution du H-système :

$$a(\varepsilon^{p_o}, w-\varepsilon^{p_o}) \geq (g, w)$$

En choisissant dans cette inéquation :

$$w - \varepsilon^{p_o} = \{0, \ldots, -\varepsilon_j^{p_o}, \ldots\}$$

nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(\varepsilon^{p_o}, \varepsilon_j^{p_o}) \leq (g_j, \varepsilon_j^{p_o})$$

ou encore, en utilisant l'hypothèse (4.2) (existence d'une M-V-minorante).

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i,j} ||\varepsilon_i^{p_o}||_i\, ||\varepsilon_j^{p_o}||_j \leq ||g_j||_j^{*}\, ||\varepsilon_j^{p_o}||_j \qquad j=1,\ldots,r$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i,j}||\varepsilon_i^{p_o}||_i \leqslant ||g_j||_j^* \qquad j=1,\ldots,r$$

c'est-à-dire : $x(g) - Nx(\varepsilon^{p_o}) \in R_+^r$

Soit $z^o$ la solution de

(6.2) $\qquad Nz^o = x(g)$,

du fait que, par hypothèse, N est une M-matrice, $N^{-1} \geqslant 0$ (propriété XI des M-matrices), et par l'inégalité $Nz^o - Nx(\varepsilon^{p_o}) \in R_+^r$, on obtient :

(6.3) $\qquad z^o - x(\varepsilon^{p_o}) \in R_+^r$

qui est une <u>majoration en norme vectorielle de $\varepsilon^{p_o}$</u>, c'est-à-dire une majoration de chacune des "composantes" de $||\varepsilon_i^{p_o}||_i$ par $z_i^o$.

## - <u>Relation entre deux itérés successifs du vecteur erreur $\varepsilon^n$</u> -

En utilisant le fait que u est point fixe de la transformation T, on obtient une inégalité, en "<u>norme vectorielle</u>" pour deux vecteurs erreurs successifs.

Nous allons expliciter cela, dans le cas de l'algorithme $T_1$ de Gauss-Seidel, la démonstration et le résultat se transposant sans peine dans le cas de $T_o$ et $T_\omega$.

On considère les inéquations :

(6.4) $$\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(u_i^p, v_j-u_j^p) \geqslant \sum_{i=j+1}^{r} -a_{i,j}(u_i^{p-1}, v_j-u_j^p) + (f_j, v_j-u_j^p),$$
$$\forall v_j \in X_j, \quad j=1,\ldots,r$$

(6.5) $$\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(u_i, v_j-u_j) \geqslant \sum_{i=j+1}^{r} -a_{i,j}(u_i, v_j-u_j) + (f_j, v_j-u_j),$$
$$\forall v_j \in X_j, \quad j=1,\ldots,r.$$

En remplaçant $v_j$, par $u_j$, dans (6.4), et $v_j$ par $u_j^p$ dans (6.5), et, en additionnant, membre à membre, ces inéquations, après avoir multiplié par $-1$, chacun de leurs deux membres, on obtient finalement :

$$\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(\varepsilon_i^p, \varepsilon_j^p) + \sum_{i=j+1}^{p} a_{i,j}(\varepsilon_i^{p-1}, \varepsilon_j^p) \leqslant 0 \qquad j=1,\ldots,p$$

En utilisant l'existence d'une M-V-minorante, et, le lemme I.4, on obtient finalement l'inégalité vectorielle :

$$Ux(\varepsilon^{p-1}) - (I-L)\, x(\varepsilon^p) \in R_+^r$$

et, comme par le théorème de Stein-Rosenberg $(I-L)^{-1} \geqslant 0$, on en déduit :

$$t_1 x(\varepsilon^{p-1}) - x(\varepsilon^p) \in R_+^r$$

On aura d'une manière générale, pour $t=t_o$, $t_1$, ou $t_\omega$, avec nos hypothèses :

$$(6.6) \qquad tx(\varepsilon^{p-1}) - x(\varepsilon^p) \in R_+^r$$

- L'itération secondaire -

$z^o$ étant déterminé par (6.2) : $Nz^o = x(g)$ ; nous calculons :

$$z^1 = tz^o, \ldots \qquad z^n = tz^{n-1}$$

or, nous savons que $\rho(t) < 1$ (pour $t=t_o$, $t_1$, $t_\omega$ $(0<\omega<\frac{2}{1+\rho(t_o)})$ ), donc $z^n \to 0$, quand $n \to \infty$. Posons $n=p-p_o$, pour $p > p_o$, on a :

$$z^{p-p_o} = t^{p-p_o}\, z^o.$$

Remarquons ici que pour $t = t_o$, $t_1$, $t_\omega$ on a $t \geqslant 0$, cela est immédiat pour $t_o$, et résulte du théorème de Stein-Rosenberg pour $t_1$, $t_\omega$. En effet, par (5.7) on a $(I-\omega L)^{-1} \geqslant 0$, or $\omega U \geqslant 0$ également, donc $t_\omega = (I-\omega L)^{-1}\ \omega U \geqslant 0$.

En utilisant de plus, la majoration (6.3), en "norme vectorielle"

$$z^o - x(\varepsilon^{p_o}) \in R_+^r$$

On obtient donc :

$$tz^{o} - tx(\varepsilon^{p_o}) \in \mathbb{R}^r_+$$

or, d'après (6.6) :

$$tx(\varepsilon^{p_o}) - x(\varepsilon^{p_o+1}) \in \mathbb{R}^r_+$$

d'où :

$$tz_o = x(\varepsilon^{p_o+1}) \in \mathbb{R}^r_+$$

et, par induction, on obtient :

$$(6.7) \qquad z^{p-p_o} - x(\varepsilon^{p}) \in \mathbb{R}^r_+ .$$

En conclusion, $u^{p_o}$ étant calculé par $p_o$ "itérations principales", $z^{o}$ étant une majoration en norme vectorielle de l'erreur $\varepsilon^{p_o}$ (majoration déterminée à l'aide de $u^{p_o}$ précédemment calculé) ; par l'itération secondaire, qui réclame un nombre minime de calculs, on obtient à partir de $z^{o}$, les vecteurs $z^{n}$, qui convergent vers 0, quand n croit.

Donc, pour $\eta > 0$ donné ($\eta$ choisi "petit"), il existe un entier $p_1$ tel que :

$$\max_{j=1,\dots,r} z_j^{p_1-p_o} < \eta .$$

(6.7) nous indique que nous avons ainsi déterminé le nombre d'itérations principales qui restent à effectuer pour être assuré que :

$$\max_{j=1,\dots,r} ||u_j - u_j^{p}|| \leq \eta .$$

Ce nombre est $p_1-p_o$, on aura d'autre part $||u_j-u_j^{p_o}||_j \leq z_j^{p_1-p_o}$ ce qui permet d'avoir une précision différenciée selon chaque "composante" de l'erreur.

Nous voyons ici l'intérêt d'utiliser, en pratique, l'algorithme de sur-relaxation, dont on sait que, pour de "bonnes" valeurs de $\omega$ , il converge plus vite que l'algorithme de Gauss-Seidel, et a fortiori de Jacobi $(\rho(t_\omega) < \rho(t_1) < \rho(t_o) = \rho(J))$.

Nous remarquons ici, que l'itération secondaire, revient justement à appliquer l'algorithme correspondant (Jacobi, Gauss-Seidel, sur-relaxation) à un système linéaire dont la matrice est la M-V-minorante N.

## VII - EXTENSION A UNE CLASSE D'OPERATEURS NON LINEAIRES -

### a/ Existence globale -

Soit $V = \prod_{i=1,\dots,r} V_i$, où les $V_i$ sont des espaces de Banach réflexifs :

Nous considérons, pour $i,j = 1,\dots,r$ une famille d'opérateurs $A_{i,j}$, de $V_i$ dans $V_j'$, dual de $V_j$. On suppose que les opérateurs "non diagonaux", sont linéaires, et que :

(7.1) $\quad ||A_{i,j}|| \leq C_{i,j} \qquad \forall i,j$ avec $i \neq j$

On suppose les opérateurs diagonaux hemicontinus et monotones, vérifiant de plus :

(7.2) $\quad (A_{jj}\, u_j - A_{jj}\, v_j,\, u_j - v_j) \geq \alpha_{jj}\, ||u_j - v_j||^2,$

et nous faisons l'hypothèse :

(7.3) $$N = \begin{vmatrix} \ddots & & -C_{i,j} \\ & \alpha_{jj} & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$ est une M-matrice.

Soit $X_j$, $j=1,\dots,r$, des convexes fermés de $V_j$, $j=1,\dots,r$.

(7.4) Soit $X = \prod_{j=1,\dots,r} X_j$

Soit :

(7.5) $f = \{f_1,\dots,f_r\}$, avec $f_j \in V_j'$

Nous considérons le problème :

Trouver $u \in X$, tel que :

(7.6) $$\sum_{i=1}^{r} (A_{i,j}\, u_i,\, v_j - u_j) \geq (f_j,\, v_j - u_j) \quad \forall v_j \in X_j \qquad j=1,\dots,r$$

et le problème :

trouver $u \in V$, tel que :

(7.7) $$\sum_{i=1}^{r} A_{i,j}\, u_i = f_j \qquad j=1,\dots,r$$

DEFINITION I.12 -

*Si les hypothèses (7.1), (7.2), (7.3), (7.4), (7.5), sont vérifiées nous dirons que (7.6) est un H-système non linéaire d'inéquations variationnelles.*

DEFINITION I.13 -

*Si les hypothèses (7.1), (7.2), (7.3), (7.5) sont vérifiées, nous dirons que (7.7) est un H-système non linéaire, d'équations variationnelles.*

- Les algorithmes -

Nous définissons les opérateurs $T_o$, $T_1$ comme dans le cas linéaire, où l'on remplace $a_{i,j}(u_i, v_j)$ par $(A_{i,j}\ u_i, v_j)$ $\forall i,j=1,\dots,r.$; le rôle du Théorème de Stampacchia étant joué par un théorème de Hartmann-Stampacchia [26].

Par contre, on ne peut définir $T_\omega$ (et obtenir des résultats analogues à ceux des paragraphes précédents), sans supposer les espaces $V_j$, $j=1,\dots,r$, hilbertiens.

Résultats d'existence -

Nous pouvons énoncer :

THEOREME I.15 -

*Sous les hypothèses (7.1),(7.2),(7.3),(7.4),(7.5), les algorithmes $T_o,T_1$ admettent un point fixe $u$, qui est la solution unique du problème (7.6). De plus, sous les hypothèses précédentes, les algorithmes itératifs de Jacobi, et de Gauss-Seidel associés à $T_o,T_1$, convergent fortement dans $V$ vers $u$.*

DEMONSTRATION -

La démonstration du théorème I.12 se transcrit directement, avec les remarques suivantes :

- Chaque fois que l'on utilise, dans le cas des formes bilinéaires, la V-ellipticité de $a_{ij}(u_j,v_j)$, on utilisera ici :

$$(A_{jj}u_j - A_{jj}v_j, u_j-v_j) \geq \alpha_{jj} \, ||u_j-v_j||_j^2$$

- on n'a plus besoin du lemme I.4, l'hypothèse (4.2) étant ici remplacée par les hypothèses (7.1), (7.2), (7.3).

COROLLAIRE I.16 -

*Un H-système non linéaire d'équations variationnelles a une solution unique.*

DEMONSTRATION -

On fait $X_j = V_j$ $j=1,\ldots,r.$ et on utilise le Théorème I.15

- Le cas Hilbertien -

On peut alors définir la méthode de sur-relaxation, comme précédemment :

Si $J = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 \ddots & \\ -\dfrac{C_{i,j}}{\alpha_{jj}} & & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix}$ du fait que N est une M-matrice : $\rho(J) < 1$, alors on a :

THEOREME I.17 -

*Pour* $0<\omega<\dfrac{2}{1+\rho(J)}$ $T_\omega$ *admet un point fixe u qui est la solution unique du problème (7.6). De plus, l'algorithme itératif de sur-relaxation associé à* $T_\omega$ *converge fortement dans V.*

<u>L'algorithme de contrôle des erreurs de F. Robert-J. Schroeder</u> s'applique aux méthodes de Jacobi, et de Gauss-Seidel, strictement de la même façon que dans le cas $A_{jj}$ linéaire.

Dans le cas Hilbertien, il en va de même pour la méthode de sur-relaxation.

b/ <u>Existence locale</u> -

On suppose maintenant les opérateurs $A_{i,j}$ non linéaires, pour $i \neq j$, mais lipschitziens, c'est-à-dire, que l'on remplace la <u>condition</u> (7.1), par :

(7.8) $$||A_{i,j}\, u_i - A_{i,j}\, v_i||_i \leq C_{i,j}\, ||u_i - v_i||.$$

Il n'y a aucune difficulté à étendre <u>le théorème</u> I.15 en remplaçant <u>l'hypothèse</u> (7.1), par (7.8) ; il en va de même, pour <u>le théorème</u> I.17, dans le cas Hilbertien. Cependant, dans le cas où $A_{i,j}$ est effectivement non linéaire, on ne peut vérifier l'hypothèse (7.8) sur $V_i$ tout entier, on est amené à faire une <u>hypothèse</u> du type :

<u>$X_i$ borné dans $V_i$</u> (Cf. exemple I.2, § VIII).

D'où, pour ce qui concerne de tels H-systèmes, on ne peut généraliser le <u>corollaire</u> I.16, sans hypothèse supplémentaire sur f ; d'où un résultat d'existence locale de la solution (qui peut s'expliciter grâce au <u>Théorème</u> 16, Chapitre II).

## VIII - EXEMPLES D'APPLICATIONS A DES SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS DIFFERENTIELLES ET AUX DERIVEES PARTIELLES -

EXEMPLE I.1 -

Soit $\mu$, $\eta$ deux constantes positives, nous considérons le système différentiel avec conditions aux limites homogènes de Dirichlet.

$$(8.1)\quad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{d^2u_1}{dx^2} + \eta\dfrac{d^2u_2}{dx^2} = f_1(x), \qquad x\in]0,\Pi[ \\ \mu\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - \dfrac{d^2u_2}{dx^2} = f_2(x), \qquad x\in]0,\Pi[ \\ u_1(0) = u_1(\Pi) = u_2(0) = u_2(\Pi) = 0 \\ \text{où } f_1(x),\ f_2(x) \in L^2\,]0,\Pi[. \end{array}\right.$$

Pour passer à la formulation variationnelle de ce problème, nous formons :

$$a_{11}(u_1,v_1) = \int_0^\Pi \frac{du_1}{dx}\frac{dv_1}{dx}\,dx \ ;\ a_{21}(u_2,v_1) = -\eta\int_0^\Pi \frac{du_2}{dx}\frac{dv_1}{dx}\,dx$$

$$a_{12}(u_1,v_2) = -\mu\int_0^\Pi \frac{du_1}{dx}\frac{dv_2}{dx}\,dx \ ;\ a_{22}(u_2,v_2) = \int_0^\Pi \frac{du_2}{dx}\frac{dv_2}{dx}\,dx$$

$$a_{.j}(u,v_j) = a_{1j}(u_1,v_j) + a_{2j}(u_2,v_j) \qquad j=1,2$$

$$\text{et}\quad a(u,v) = a_{.1}(u,v_1) + a_{.2}(u,v_2)$$

Soit $V_j = H_o^1\,]0,\Pi[ \quad j=1,2.$

ou l'on munit $H_o^1\,]0,\Pi[$, non de sa norme habituelle, mais de la norme associée au produit scalaire $\int_0^\Pi \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$, cette norme étant équivalente à la première mentionnée, par l'inégalité de Friedrich.

Alors, la formulation variationnelle du problème (8.1) est trouver $u\in V$, tel que :

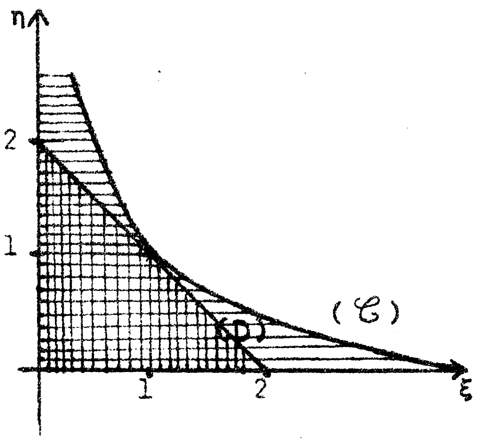
(8.2) $a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V$

$$\text{où} \quad (f,v) = \int_0^{\Pi} f_1(x)\ v_1(x)\ dx + \int_0^{\Pi} f_2(x)\ v_2(x)\ dx.$$

Le problème (8.2) étant équivalent à :

$$(8.3) \quad \left| \begin{array}{lll} a_{.1}(u,v_1) = \int_0^{\Pi} f_1(x)\ v_1(x)\ dx & & \forall v_1(x) \in H_o^1 ]0,\Pi[ \\ a_{.2}(u,v_2) = \int_0^{\Pi} f_2(x)\ v_2(x)\ dx & & \forall v_2(x) \in H_o^1 ]0,\Pi[ \end{array} \right.$$

Sur le graphique, ci-dessous, nous indiquons, en fonctions des paramètres $\mu$, $\eta$ les zones :




- Où $a(u,v)$ est V-elliptique : c'est la zone hachurée verticalement, c'est-à-dire la portion du cône $R_+^2$, qui est en dessous (strictement) de la droite (D), d'équation $\mu+\eta=$ 2. ? = ?

Dans cette zone le lemme de Lax Milgram (théorème I.1), nous donne l'existence d'une solution unique $u \in V$ du problème (8.3).

- Où $a(u,v)$ admet une M-V-minorante : c'est la zone hachurée horizontalement, c'est-à-dire la portion du cône $R_+^2$ située en dessous strictement de la courbe (𝒞) d'équation $\mu\eta=1$.

La partie de cette zone comprise entre (𝒞) et (D), correspond aux valeurs de $\eta,\mu$, pour lesquelles le problème (8.3) est un H-système fortement dissymétrique, qui ne peut être résolu par le lemme de Lax-Milgram, le résultat correspondant d'existence et d'unicité étant fourni par les corollaires I.13, I.14.

EXEMPLE I.2 -

Nous considérons un système différentiel associant une équation et une inéquation, alors que l'opérateur comporte un terme non linéaire en dehors de la diagonale ; on cherche $u_1(x) \in H_o^1]0,\Pi[$, $u_2(x) \in X_2$ (convexe fermé de $H_o^1]0,\Pi[$, défini ci-dessous).

$$(8.4)\quad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{d^2u_1}{dx_2} + (u_2(x))^p = f_1(x) \\ -\eta\displaystyle\int_0^{\Pi} \frac{du_1}{dx}\left(\frac{dv_2(x)}{dx} - \frac{du_2(x)}{dx}\right)dx + \int_0^{\Pi} \frac{du_2(x)}{dx}\left(\frac{dv_2(x)}{dx} - \frac{du_2(x)}{dx}\right)dx \end{array}\right.$$

$$\geq \int_0^{\Pi} f_2(x)\ (v_2(x)-u_2(x))dx \quad \forall v_2(x) \in X_2$$

$X_2$ étant défini par l'inégalité :

$$(8.5)\qquad \left(\int_0^{\Pi} \left(\frac{du_2(x)}{dx}\right)^2 dx\right)^{1/2} \leq \frac{1}{C}\left(\frac{\mu}{\Pi^2 p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

où $\mu$ est un nombre positif $< \frac{1}{\eta}$.

et où C est la norme de l'injection de $C_o[0,\Pi]$ dans $H_o^1]0,\Pi[$.

Vérifions que nous sommes alors dans les conditions d'application des résultats du paragraphe I.7, partie b/, en effet :

Soit $v(x)$, $w(x) \in X_2$,

$$|u(x)^p - w(x)^p| \leq p \max_{x\in[0,\Pi]} (|u(x)|,|v(x)|)^{p-1}\ |u(x)-v(x)|$$

or, puisque $u(x)$, $v(x) \in X_2$ :

$$\max_{x\in]0,\Pi[} (|u(x)|,|v(x)|) \leq C\left(\frac{\mu}{\Pi^2 p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

d'où :

$$\int_0^{\Pi} (u(x)^p - w(x)^p)\,\phi(x)dx \leq \frac{\mu}{\Pi^2}\int_0^{\Pi} (v(x)-w(x))\ \phi(x)dx$$

$$\leq \frac{\mu}{\Pi^2}\left(\int_0^{\Pi} (v(x)-w(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\Pi} \phi(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \mu\left(\int_0^{\Pi} \left(\frac{dv(x)}{dx} - \frac{dw(x)}{dx}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\Pi} \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall \phi(x) \in H_o^1]0,\Pi[.$$

La dernière inégalité écrite étant obtenue en appliquant l'inégalité de Friedrich, à la fois à $v(x) - w(x)$, et à $\phi(x)$, d'où, puisque $\eta\mu<1$, l'existence de la solution du problème (8.4) par le b/, du § I.7.

EXEMPLE I.3 -

Dans cet exemple ce sont les conditions aux limites qui conduisent à un H-système fortement dissymétrique :

Soit $\Omega$ un domaine n dimensionnel de frontière $\partial\Omega$ , variété indéfiniement différentiable de dimension n-1.

On considère le système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites.

$$(8.6)\quad \left|\begin{array}{ll} -\Delta u_1 + u_1 + \mu u_2 = f_1(x) & x\in\Omega \\ -\Delta u_2 + u_2 = f_2(x) & x\in\Omega \\ u_{1/\Gamma} = 0 & \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial n} + \eta\dfrac{\partial u_1}{\partial n} = 0 & \end{array}\right.$$

Dont la formulation variationnelle est : trouver $u_1\in H^1_o(\Omega)$ et $u_2\in H^1(\Omega)$ solution de :

$$(8.7)\quad \left|\begin{array}{ll} a_{11}(u_1,v_1) + a_{12}(u_2,v_1) = \int_\Omega f_1,v_1\, dx & \forall v_1\in H^1_o(\Omega) \\ a_{21}(u_1,v_2) + a_{22}(u_2,v_2) = \int_\Omega f_2,v_2\, dx & \forall v_2\in H^1_o(\Omega) \end{array}\right.$$

avec :

$$a_{11}(u_1,v_1) = \int_\Omega (\text{grad } u_1 \text{ grad } v_1 + u_1v_1)dx$$

$$a_{12}(u_2,v_2) = \mu\int_\Omega u_2,v_1\, dx$$

$$a_{22}(u_2,v_2) = \int_\Omega (\text{grad } u_2 \text{ grad } v_2 + u_2v_2)dx$$

$$a_{21}(u_1,v_2) = \eta\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial n}\, v_2\, d\sigma$$

Or : $$\left|\int_\Gamma \frac{\partial u_1}{\partial n} v_2\, d\sigma\right| \leq \left\|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

Or, en vertu de résultats classiques sur les traces de la frontière des éléments de $H^m(\Omega)$, (Cf. [37] Chap. I, Th. 8.3), il existe des constantes $C_1$, $C_2$, telles que :

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_1 \|u_1\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\|v_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_2 \|v_2\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où : $|a_{21}(u_1,v_2)| \leq \mu\, C_1\, C_2\, \|u_1\|_1\, \|v_2\|_2$

et comme $|a_{12}(u_2,v_1)| \leq \eta\, \|u_2\|_2\, \|v_1\|_1$

on obtient, par le corollaire I.16, l'existence d'une solution unique $\{u_1,u_2\}$ du problème (8.6), pour $\mu\eta \leq \frac{1}{C_1C_2}$

EXEMPLE I.4 -

Soit $\Omega$ un domaine n dimensionnel de frontière $\partial\Omega$ variétés indéfiniment différentiable de dimension n-1.

Nous considérons les formes bilinéaires

$$a_{i,j}(u_i,v_j) = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}^{i,j}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} + a_o^{i,j}\, u_i(x)\, v_j(x)\, dx$$

pour $i,j=1,\dots,r$

Nous faisons les hypothèses :

(8.8) $\quad a_{k,l}^{i,j}(x) \in C^1(\bar\Omega)$

(8.9) $\quad \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}^{j,j}(x)\, \xi_k\, \xi_l \geq \alpha_{jj} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \quad \forall \xi \in R^n \quad \forall x \in \Omega \quad j=1,\dots,r$

et $a_o^{j,j}(x) \geq \alpha_{jj} \quad \forall x \in \Omega$

Soit $M_a^{i,j}(x)$ la matrice de type (n,n), de coefficients $a_{k,l}^{i,j}(x)$.

Nous notons comme d'habitude par :

$$S_{2,2}(M) = \sup_{y\in R^n} \frac{|My|_2}{|y|_2}$$ où $|\ |_2$ note la norme euclidienne sur $R^n$,

et nous appelons :

$$C_{i,j} = \max\left(\sup_{x\in\Omega} \delta_{2,2}\left(M^{i,j}(x)\right), \sup_{x\in\Omega} A_o^{i,j}(x)\right)$$

on a évidemment :

$$|a_{i,j}(u_i,v_j)| \leq C_{i,j} \, ||u_i||_1 \, ||v_j||_1$$

où $|| \; ||_1$ désigne la norme de $H^1(\Omega)$.

(8.10) et, nous supposons que la matrice $N = \left| -C_{i,j} \quad \alpha_{j,j} \right|$ est une M-matrice.

THEOREME I.17 -

*Soit* $V_i = H^1(\Omega) \quad i=1,\ldots,r$

$X_i = \{v_i ; v_i \in H^1(\Omega) \quad v_i \geq 0 \text{ pp } x \in \partial\Omega\} \quad i=1,\ldots,r$

*Soit* $f = \{f_1,\ldots,f_r\}$ *avec* $f_j \in L^2(\Omega) \quad j=1,\ldots,r$ ; *alors il existe* $u = \{u_1,\ldots,u_r\}$ *unique* $\in X = \prod_{j=1,\ldots,r} X_j$ *solution de :*

(8.11) $\quad a(u,v-u) \geq (f,v-u) \quad \forall v \in X$

où (8.11) est formellement équivalent au système :

(8.12)
$$\left|\begin{array}{l} -\sum_{k,l=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{k,l}^{i,j}(x)\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) + a_o^{i,j}(x)\, u_i(x) = f_j \qquad j=1,\ldots,r \\ u_j(x) \geq 0 \quad \text{sur } \partial(\Omega) \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}^{i,j}(x) \dfrac{\partial u_i}{\partial x_l} \cos(n,x_k) \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u_j\left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}}\right) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

DEMONSTRATION -

Avec nos hypothèses, et par le théorème I.12, nous savons qu'il existe $u = \{u_1,\ldots,u_n\} \in X = \prod_{i=1,\ldots,r} X_i$, solution de :

$$a_{\cdot j}(u,v_j-u_j) \geq \int_\Omega f_j(x)(v_j(x)-u_j(x))dx \qquad \forall v_j \in X_j$$

Or, puisque $u_j(x) \in X_j \subset H^1(\Omega)$

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_l} \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad a^{i,j}_{k,l} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_l} \in L^2(\Omega)$$

Par suite, la trace sur $\Gamma$ de ces fonctions $\in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme $\partial_\Omega$ est une variété indéfiniment différentiable, $\cos(n,x_k)$ est une fonction indéfiniment différentiable sur $\partial_\Omega$, donc :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{A_{i,j}}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

Du fait que X est un cône, (8.11) équivaut à :

$$(8.12) \qquad a_{.j}(u,v_j) \geq \int_\Omega f\, v_j \, dx \qquad j=1,\dots,r$$

$$(8.13) \qquad a_{.j}(u,v_j) = \int_\Omega f\, u_j \, dx \qquad j=1,\dots,r$$

D'où, en prenant $v = \pm\ \phi_j \in \mathcal{D}(\Omega) \subset X_j$, $j=1,\dots,r$

On obtient :

$$\sum_{i=1}^{r} A_{i,j}\, u_i = f_j \qquad \text{ou} \quad A_{i,j} = \sum_{k,l} -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a^{i,j}_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) + a^{i,j}_o$$

En appliquant (formellement, puisque $u_j \in H^1(\Omega)$) la formule de Green à $a_{i,j}(u_i,v_j)$ :

$$a_{i,j}(u_i,v_j) = \int_\Omega (A_{i,j} u_i)\, v_j \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_{A_{i,j}}}\, v_j \, d\sigma$$

d'où :

$$a_{.j}(u,v_j) - \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}}\, v_j \, d\sigma = \int_\Omega f_j v_j \, dx \qquad j=1,\dots,r$$

et par (8.12), on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}}\, v_j \, d\sigma \geq 0 \qquad \forall v_j \in X_j \qquad j=1,\dots,r$$

avec égalité si $v_j = u_j$

ce qui implique tout d'abord que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}} \geq 0$

De plus : $\displaystyle\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}} \right) u_j \, d\sigma = 0$

donc, comme :

$$\left( \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}} \right) u_j \geq 0$$

Cela entraîne : $\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_{A_{i,j}}}\right) u_j = 0 \qquad j=1,\dots,r$

q.e.d.

REMARQUE I.2 -

Les formes bilinéaires $a_{i,j}(u_i,v_j)$ étant définies comme précédemment, on peut considérer d'autres exemples de convexes (Cf. [36] et sa bibliographie).

Le théorème I.12 permet par exemple de résoudre le problème (1.4) avec les convexes du type suivant :

(8.14) $V_j = H_o^1(\Omega) \quad X_j = \{v_j \mid v_j \in H_o^1(\Omega) \quad v_j \geq 0 \text{ pp dans } \Omega\}.$

(8.15) $V_j = H_o^1(\Omega) \quad X_j = \{v_j \mid v_j \in H_o^1(\Omega), \quad \Psi_1 \leq v_j \leq \Psi_2 \quad \text{pp. dans } \Omega, \ \Psi_1, \Psi_2 \text{ donnés}\}.$

(8.16) $V_j = H_o^1(\Omega) \quad X_j = \{v_j \mid v_j \in H_o^1(\Omega), \ |\text{grad } v_j(x)| \leq 1 \quad \text{pp. } x \in \Omega\}.$

De plus on peut, dans un même problème (1.4), avoir tous les exemples de convexes envisagés.

Mais l'interprétation des problèmes résolus, est plus délicate que dans le théorème I.17.

Les systèmes aux dérivées partielles du second ordre, dont les coefficients vérifient les hypothèses (8.8),(8.9),(8.10), contiennent comme cas particulier certains systèmes "faiblement couplés", dont nous rappelons la définition :

**DEFINITION I.14** - (Cf. [45] et sa bibliographie).

*On dit qu'un système elliptique du second ordre est faiblement couplé, si les coefficients :*

$$a_{k,l}^{i,j}(x) = 0 \qquad \forall i,j = 1,\dots,r \quad \text{avec } i \neq j$$

*Les coefficients $a_0^{i,j}(x)$ étant $\neq 0$*

REMARQUE I.4 - Dans le cas des systèmes faiblement couplés, le Théorème I.1 se démontre complémentement car alors $A_{jj}u_j \in L^2(\Omega)$, d'où $u_j(x) \in H^2(\Omega)$ ce qui permet de justifier l'emploi de la formule de Green.

REMARQUE I.5 -

Un système du second ordre **vérifiant** les hypothèses (8.8),(8.9), (8.10), ne peut être un opérateur du type de ceux intervenant en Théorie de l'Elasticité, en effet, dans cette théorie on considère :

$$u = \{u_1, \dots, u_r\}$$

- des opérateurs élémentaires $s_{i,j}\ u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$

et une forme bilinéaire :

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{r} a_{i,j,k,l}\, s_{i,j}(u)\, s_{k,l}(v)\, dx$$

On peut effectivement mettre $a(u,v)$ sous la forme :

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}\,(u_i, v_j)$$

Explicitons cela, dans le cas $r=2$, et des coefficients constants.

$$a_{11}(u_1,v_1) = \int_\Omega \Big( \Big(a_{1111}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{(a_{1112}+a_{1121}}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$+ \frac{(a_{1211}+a_{2111})}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{1}{4}(a_{1212} + a_{2121} + a_{1221} + a_{2112})\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big)\, dx_1\, dx_2$$

$$a_{22}(u_2,v_2) = \int_\Omega \Big( \Big(a_{2222}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \Big(\frac{a_{2221}+a_{2212}}{2}\Big)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{a_{2122}+a_{1122}}{2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{1}{4}(a_{1212} + a_{2121} + a_{1221} + a_{2112})\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Big)\, dx_1\, dx_2$$

$$a_{21}(u_2,v_1) = \int_\Omega \Big(\frac{a_{1211}+a_{2111}}{2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + a_{2221}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{1}{4}(a_{1212} + a_{2121} + a_{1221} + a_{2112})\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$+ \Big(\frac{a_{2221}+a_{2212}}{2}\Big)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)\, dx_1\, dx_2$$

$$a_{12}(u_1,v_2) = \int_\Omega \left( \left(\frac{a_{2122}+a_{1222}}{2}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + a_{1122}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right.$$

$$+ \frac{1}{4}(a_{1212}+a_{2121}+a_{1221}+a_{2112})\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

$$\left. + \left(\frac{a_{1112}+a_{1121}}{2}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) dx_1\, dx_2$$

Posons $\rho = \frac{1}{4}(a_{1212}+a_{2121}+a_{1221}+a_{2112})$, on vérifie que $\alpha_{jj} \leq \rho$ $j=1,2$ et $c_{i,j} \geq \rho$. Or la matrice :

$$N = \begin{vmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{vmatrix}$$

n'est pas une M-matrice.

## I.9 - LES OPERATEURS ETUDIES DANS CE CHAPITRE SONT-ILS PSEUDO-MONOTONES ? DE TYPE M ? CONTRE EXEMPLES -

Rappelons tout d'abord les définitions des applications pseudo-monotones, et de type M, données par H. Brezis dans [4] (dans un cadre plus général que ci-dessous).

Soit V un espace de Banach, de dual V.

**DEFINITION I.14 -**

*On dit qu'une application A de V dans V' est pseudo-monotone si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *Pour tout filtre $u_i$ porté par un ensemble faiblement compact de X, tel que $u_i$ converge faiblement vers u, dans X, et $\limsup\, (Au_i, u_i-u) \leq 0$, on a :*

  $(Au, u-v) \leq \liminf\, (Au_i, u_i-v) \quad \forall v \in X$
- *Pour tout $v \in X$, l'application $(Au, u-v)$ est bornée inférieurement sur les sous-ensembles compacts de X.*

DEFINITION I.15 -

*On dit qu'une application $A$ de $V$ dans $V'$ est de type $M$, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *Pour tout filtre $u_i$ porté par un ensemble faiblement compact de $V$, tel que $u_i$ converge faiblement vers $u$ dans $V$, $Au_i$ converge faiblement vers $f$ dans $V'$, et $\lim\sup\,(Au_i, u_i) \leq (f,u)$, on a : $Au = f$.*
- *Les restrictions de $A$, aux sous-espaces vectoriels de dimension finie, sont continues.*

Soit $l^2$ l'espace des suites de nombres réels de carré sommable.
Soit I l'opérateur identité dans $l^2$.
Soit $V_1 = l^2$ $\quad V_2 = l^2 \quad V = V_1 \times V_2$

- PREMIER CONTRE-EXEMPLE -

Une application admettant une M-V-minorante, et qui n'est pas pseudo-monotone.

- Soit A la transformation, qui à $u = \{u_1, u_2\} \in V$ fait correspondre l'élément :

$$Au = \{A_{11}u_1 + A_{12}u_2 \,;\, A_{21}u_1 + A_{22}u_2\} \,;$$

où $A_{11} = I \,;\, A_{22} = I \,;\, A_{12} = -\eta I \,;\, A_{21} = -\mu I$

$\eta$ et $\mu$ étant des nombres positifs.

L'application A offre une grande analogie avec celle considérée da **l'exemple I.1, paragraphe 8.** De façon précise, on passe des formes bilinéaires considérées dans l'exemple I.1 (formules 8.3) à l'opérateur A indiqué ci-dessus, en mettant en correspondance $H_0^1\,]0,\Pi[$ et $l^2$ par l'isométrie qui à tout élément de la forme $\frac{\sin ix}{i}$ (avec $i \in N$) fait correspondre $e_i = \{0,\dots,0,\overset{i\text{ème position}}{1},0,\dots,0\}$ $e_i \in l^2$. En effet, $\{-\frac{\sin ix}{i}\}$ constitue une base orthonormée de $H_0^1\,]0,\Pi[$ pour le produit scalaire $\int_0^{\Pi} \frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx}\,dv$

l'isométrie ainsi définie fait correspondre à chacune des formes bilinéaires $a_{i,j}(u_i,v_j)$ $i,j = 1,2$ la matrice infinie $A_{i,j}$ telle que nous l'avons écrite plus haut.

Donc A admet pour Z-V-minorante la matrice : $N = \begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ -\eta & 1 \end{vmatrix}$

- Pour $\eta + \mu < 1$, N est définie positive, et par suite $a(u,v)$ est V-elliptique, et A est monotone, donc pseudo-monotone également.

Prenons maintenant $\eta = 3$, et $\mu = 0$.

N est alors une M-matrice, et A admet une M-V-minorante.

Soit X le cône des éléments positifs de $l^2 \oplus l^2$. Montrons que A n'est pas pseudo-monotone relativement à X.

Soit $x,y \in R^+$

$$\text{et } u = \{xe_1,\ ye_1\} \quad X$$

Soit $u_i = \{xe_1+e_i,\ ye_1+e_i\} \in X$

$u_i$ converge faiblement dans V vers u lorsque $i \to +\infty$

$Au_i = \{(x-3y)e_1 - 2e_i,\ ye_1 + e_i\}$

$(Au_i,\ u_i-u) = -2 + 1 = -1$

D'où $\limsup\ (Au_i,\ u_i-u) < 0$.

Supposons A pseudo-monotone, cela implique :

$\forall v \in X \quad (Au,\ u-v) \leq \liminf\limits_{i \to +\infty} \ (Au_i,\ u_i-v)$

Du fait que A est linéaire continue, et que $u_i$ converge faiblement vers u, $Au_i$ converge faiblement vers Au, et, par suite, si A est pseudo-monotone :

$$(Au,\ u) \leq \liminf_{i \to \infty} \ (Au_i,\ u_i)$$

Or : $(Au,\ u) = (x-3y)\ x+y^2$

$(Au_i,\ u_i) = (x-3y)\ x+y^2 -2+1 = (Au,\ u)-1$

D'où la contradiction : A n'est pas pseudo-monotone.

On remarque ici, que A étant linéaire, continue de V faible dans V faible, est nécessairement de type M.

- DEUXIEME CONTRE-EXEMPLE -

Une application admettant une M-V-minorante, **et qui n'est pas de** type M.

- Soit P le projecteur de $l^2$ sur la boule unitaire de $l^2$ (à $u \in l^2$ P **fait** correspondre $Pu = \frac{u}{||u||_{l^2}}$ si $||u|| > 1$, et $Pu = u$ si $||u|| \leq$

P est un opérateur monotone hemicontinu de $l^2$ dans $l^2$.

Soit $V = l^2 \oplus l^2$ et B l'opérateur de V dans V, ainsi défini :

$B_{11} \equiv I + \lambda P$ ; $B_{12} = -\eta I$ ; $B_{21} = 0$ ; $B_{22} = I$

L'opérateur B admet pour M-V-minorante, la matrice $\begin{vmatrix} 1 & -\eta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

B entre dans le cadre des opérateurs non linéaires étudiés au **paragraphe 7.**

Soit $u_i = \{e_0 + e_i, e_0 + e_i\} \in V$

lorsque $i \to \infty$ $u_i$ converge faiblement dans V; vers $u = \{e_0, e_0\}$.

$Bu_i = \{(1-\eta + \frac{1}{2})(e_0 + e_i), e_0 + e_i\}$

Soit $g = \lim\limits_{i\to\infty} Bu_i = \{(1-\eta + \frac{1}{2}) e_0, e_0\}$

$$(Bu_i, u_i) = (1-\eta + \frac{1}{2}) ||e_0 + e_i||^2_{e^2} + ||e_0 + e_i||^2_{e^2}$$

$$= 2(1-\eta + \frac{1}{2}) + 2 = 4 - 2\eta + \frac{1}{2}$$

$$(g, u) = 2 - \eta + \frac{1}{2}$$

Pour $\eta \geq 2 + \frac{1}{2}$ $(Bu_i, u_i) \leq (g, u)$

et cependant $Bu = \{(1-\eta) e_0, e_0\}$

tandis que $g = \lim\limits_{i\to\infty} Bu_i = \{(1-\eta + \frac{1}{2}) e_0, e_0\}$

$g \neq Bu$ donc, B n'est pas de type M.

## I.10 - PERTURBATION D'UN GRAPHE MONOTONE MAXIMAL DIAGONAL -

Nous utiliserons l'énoncé suivant, qui est un corollaire de résultats de Browder [1], et Rockafellar [48].

COROLLAIRE I.18 -

*Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire V-elliptique de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, et M un opérateur multivoque de domaine $D(M) \subset \mathcal{V}$, dans $2^{\mathcal{V}'}$, maximal monotone, alors $\mathcal{A}$ + M est une bijection.*

- Soit $\mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i$

et $a(u,v) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(u_i, v_j)$

où nous supposons que :

(10.1) a(u,v) est bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

(10.2) a(u,v) admet une M-V-minorante

- Soit $\mathcal{A}_{i,j}$ l'opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}'_j)$ représentant la forme bilinéaire a(u,v).

(10.3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } M = \{M_1, \dots, M_r\} \text{, une famille d'opérateurs multivoques de} \\ \mathcal{V}_j \text{ dans } 2^{\mathcal{V}'_j} \text{ monotones maximaux, pour } j=1,\dots,r. \end{array} \right.$

(10.4) Soit $f = \{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{V}' = \prod_{j=1,\dots,r} \mathcal{V}'_j$

Soit à résoudre le système d'équations :

(10.5) $$f_j - \sum_{i=1}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\, u_i \in M_j\, u_j \qquad j=1,\dots,r$$

Les algorithmes itératifs -

Ier Algorithme - Méthode de Jacobi -

On considère l'application $u = T_o w$, w donné dans $\mathcal{V}$, définie de la manière suivante :

(10.6) $$f_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\, w_i \in \mathcal{A}_{jj}\, u_j + M_j\, u_j \qquad j=1,\dots,r.$$

D'après les hypothèses (10.1), (10.2), (10.3), (10.4), et le corollaire I.18, $\exists u_j$ solution unique, de cette équation, et

$u = \{u_1, \dots, u_r\} = T_o w.$

Notons que (10.6) peut encore s'écrire sous la forme $\exists u_j \in \mathcal{V}_j$, et $\chi u_j \in M u_j$, tels que :

$$(10.7) \qquad \mathcal{A}_{jj}\, u_j + \chi_j\, u_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\, w_i + f_j \qquad j=1,\dots,r$$

2ème algorithme - Méthode de Gauss-Seidel -

On considère l'application $u = T_1 w$, $w$ donné dans $\mathcal{V}$, ainsi définie

Déterminons $u_1 \in \mathcal{V}_1$ par :

$$(10.8) \qquad f_1 - \sum_{i=2}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\, w_i \in \mathcal{A}_{11}\, u_1 + M_1\, u_1$$

$u_1$ existe et est unique d'après le corollaire I.18, et les hypothèses (10.1), (10.2), (10.3), (10.4). Supposons $u_1, \dots, u_{j-1}$ connus, on obtient $u_j$ par :

$$(10.9) \qquad f_j - \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{A}_{i,j}\, u_i - \sum_{i=j+1}^{r} \mathcal{A}_{i,j} w_i \in \mathcal{A}_{jj}\, u_j + M_j u_j \qquad j=2,\dots,r$$

$u_j$ existe et est unique par le corollaire I.18, d'où $u = \{u_1, \dots, u_r\}$.

Nous pouvons réécrire (10.9), sous la forme :

$\exists u_j \in \mathcal{V}_j$, et $\chi_j\, u_j \in M_j\, u_j$ tels que :

$$(10.10) \qquad \mathcal{A}_{jj}\, u_j + \chi_j\, u_j = f_j - \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{A}_{i,j}\, u_i - \sum_{i=j+1}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\, w_i$$

3ème algorithme - Méthode de Sur-Relaxation -

Nous appellerons $J_j$ l'opérateur de dualité de $\mathcal{V}_j$ sur $\mathcal{V}'_j$ ($J_j$ est linéaire puisque $\mathcal{V}_j$ est un espace de Hilbert).

Rappelons que $N$ étant la M-V-minorante de $a(u,v)$, de coefficients $\{n_{i,j}\}$. Nous avons déjà appelé au § IV :

$$b_{jj}\,(u_j, v_j) = a_{jj}(u_j, v_j) - n_{jj}((u_j, v_j))_j$$

et $\quad \Pi^{\omega}_{jj}(u_j, v_j) = \omega\, b_{jj}(u_j, v_j) + n_{jj}((u_j, v_j))_j$

(10.11) $\quad \Pi^{\omega}_{jj}(u_j,v_j)$ est bornée sur $\mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_j$.

D'après le <u>lemme</u> I.4 $\quad \Pi^{\omega}_{jj}\ (u_j,v_j)$ est V-elliptique

(10.12) $\quad$ et on a : $\Pi^{\omega}_{jj}(v_j,v_j) \geq n_{jj}\ \|v_j\|^2_j$.

Soit $R^j_\omega \in \mathcal{L}(V_j,V'_j)$ l'opérateur représentant la forme bilinéaire $\Pi^{\omega}_{jj}(v_j,v_j)$.

On considère l'application : $u = T_\omega w$, $w \in \mathcal{V}$, donné, ainsi définie, on obtient $u_1$ par :

$$\omega f_1 + (1-\omega)\ J_1 \omega_1 - \omega \sum_{i=2}^{r} \mathcal{A}_{i1} w_i \in R^1_\omega\ u_1 + \omega M_1\ u_1$$

où, d'après (10;1), (10.2), (10.3), (10.4), et le <u>corollaire</u> I.18, $u_1$ existe et est unique.

$u_1,\ldots,u_{j-1}$ étant connus, on détermine de la même manière $u_j$ par :

(10.13) $$\omega f_j + (1-\omega)\ J_j w_j - \omega \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{A}_{i,j} u_i - \omega \sum_{i=j+1}^{r} \mathcal{A}_{i,j} u_i \in R^j_\omega u_j + \omega\ M_j u_j$$

Nous pouvons réécrire (10.13 ) sous la forme : il existe $u_j \in \mathcal{V}_j$ et $\chi_j\ u_j \in M_j(u_j)$ tels que :

(10.14) $$\omega\ \chi_j\ u_j + R^j_\omega u_j = f_j + (1-\omega)\ J_j w_j - \omega \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{A}_{i,j} u_i - \omega \sum_{i=j+1}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\ u_i$$

On a alors le :

<u>THEOREME I.19</u> -

*Les hypothèses (10.1), (10.2), (10.3), (10.4), étant vérifiées, les algorithmes $T_0$, $T_1$ admettent un point fixe u, solution unique du problème (10.5).*

*- $\forall\ \omega$ tel que $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho}$ ou $\rho = \rho(t) < 1$ est le rayon spectral de la matrice de Jacobi associée à la M-V-minorante N, $T_\omega$ admet u comme point fixe.*

*- De plus, sous les hypothèses précédentes, les algorithmes itératifs de Jacobi, Gauss-Seidel, sur-relaxation, associés à $T_0$, $T_1$, $T_\omega$ convergent dans V fort vers u.*

DEMONSTRATION -

On peut écrire, pour l'algorithme $T_o$ (respectivement $T_1$, $T_\omega$), la majoration (5.10) (respectivement (5.13), (5.15)).

Nous allons le vérifier dans le cas de l'algorithme $T_1$ (situation qui s'étend sans difficulté au cas de $T_o$ et $T_\omega$ en se reportant à ce que nous avons fait lors du Théorème I.12).

En effet, soit $u_j^1 = T_1\, w_j^1$ ; $u_j^2 = T_1\, w_j^2$

et $\delta w_j = u_j^1 - u_j^2$ ; $\delta u_j = u_j^1 = u_j^2$.

A partir des équations (10.10) écrites pour $\{u_j^1, w_j^1\}$ et $\{u_j^2, w_j^2\}$, et par soustraction membre à membre, on obtient :

$$(10.15) \qquad (\chi_j u_j^1 - \chi_j u_j^2,\ u_j^1 - u_j^2) + \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(\delta u_i, \delta u_j) + \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(\delta w_i, \delta u_j) \leq 0$$

$$\forall j = 1,\dots,r$$

d'où, puisque $M_j$ est monotone, le premier terme du premier membre de ( ) est $\geq 0$.

Et par suite on a :

$$\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(\delta u_i, \delta u_j) + \sum_{i=j+1}^{r} a_{i,j}(\delta w_i, \delta u_j) \leq 0 \qquad \forall j=1,\dots,r$$

D'où, puisque $\mathcal{A}$ admet une M-V-minorante, en utilisant le lemme I.4 on a :

$$\sum_{i=1}^{j} n_{i,j}||\delta u_i||_i ||\delta u_j||_j + \sum_{i=j+1}^{r} ||\delta w_i||_i ||\delta u_j||_j \leq 0 \qquad j=1,\dots,r$$

qui donne bien (5.13).

- Les inégalités (5.10), (5.13), (5.15) étant acquises, la suite de la démonstration est strictement identique à celle du Théorème I.12.

- Sur une modification de la notion de minorante -

Soit à résoudre un système de la forme :

$$(10.16) \qquad f - \sum_{i=1}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\, u_i \in M_j\, u_j \qquad j=1,\dots,r$$

Soit $\mathcal{J} \in \mathcal{P}\{1,\dots,r\}$ un sous ensemble d'indices de $\{1,\dots,r\}$.

Supposons que pour $j \in \mathcal{J}$ on ait : $M_j = L_j$, opérateur linéaire univoque pour simplifier, maximal, de domaine dense.

Soit $D(L_j) = \{v_j \in v'_j \mid$ avec $L_j v_j \in \mathcal{V}'_j\}$

Supposons que pour $i \in \mathcal{I}$

$$\mathcal{A}_{i,j} \in \mathcal{L}\,(D(L_i) \cap \mathcal{V}_i\,;\mathcal{V}'_j)$$

alors, on ne peut plus utiliser le <u>Théorème I.19</u>. Indiquons brièvement comment il est possible de procéder :

(10,17) $\left\{\begin{array}{l}\text{Nous supposons que a(u,v) admet une Z-V-minorante, ce qui entraîne} \\ \text{par le lemme I.4, et un Théorème d'isomorphisme classique (Cf.} \\ \text{Lions-Magenès [37], T.1, Chap. 3).}\end{array}\right.$

que $(\mathcal{A}_{jj}+L_j)^{-1} \in \mathcal{L}\,(\mathcal{V}'_j; D(L_j) \cap \mathcal{V}_j)$

Soit $k_{jj} = \left(\|(\mathcal{A}_{jj} + L_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}\,(\mathcal{V}'_j;\mathcal{V}_j \cap D(L_j))}\right)^{-1}$

$\forall i \in \mathcal{I}$ soit $k_{i,j} = -\|\mathcal{A}_{i,j}\|_{\mathcal{L}\,(\mathcal{V}_i \cap D(L_i);\mathcal{V}'_j)}$

Nous considérons la Z minorante "mixte" : $\tilde{N}_a$ de coefficients :

$\tilde{n}_{jj} = k_{jj}$ pour $j \in \mathcal{I}$

$\tilde{n}_{i,j} = k_{i,j}$ pour $i \neq j$ et $i \in \mathcal{I}$

$\tilde{n}_{jj} = \alpha_{jj}$ pour $j \notin \mathcal{I}$

$\tilde{n}_{i,j} = C_{i,j}$ pour $i \neq j$ $i \notin \mathcal{I}$

On a alors l'analogue du Théorème I.19, si :

(10.18) $\tilde{N}_a$ est une M-matrice.

<u>REMARQUE</u> -

Si $\mathcal{I} = \{1,\dots,r\}$ on retrouve un résultat classique d'Ostrowski [44], Cf. également F. Robert [47].

## I.11 - UNE APPLICATION AU CONTROLE OPTIMAL DE SYSTEMES GOUVERNES PAR UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES PARABOLIQUES -

RAPPEL ET NOTATIONS - (Cf. Lions [35], Chap. 3, n° 1,2,3).

Les espaces -

Soit V et H deux espaces de Hilbert, réels, de norme respectivement $\|\ \|_V$ et $|\ |_H$, et de produit scalaire $((,))_V$ $(,)_H$.

On suppose que :

(11.1) $\begin{cases} V \subset H \subset V' \text{ les injections étant continues, et chaque espace étant} \\ \text{dense dans le suivant.} \end{cases}$

On considère un espace de Hilbert réel $\mathcal{U}$, (dit espace des contrôles) de dual $\mathcal{U}'$, et un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, de dual $\mathcal{H}'$.

Les opérateurs -

(11.2) $\begin{cases} \text{Soit } [0,T] \text{ un intervalle de la droite réelle.} \\ \text{Soit } A(t) \text{ une famille mesurable, uniformément bornée de } \mathcal{L}(V,V'), \\ \text{et } a(t;u,v) \text{ la famille de forme bilinéaire associée.} \end{cases}$

- $A^*(t)$ sera l'adjoint de $A(t)$.

(11.3) $\begin{cases} \text{On suppose } a(t;u,v) \text{ uniformément V-elliptique, c'est-à-dire} \\ a(t;v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad \text{p.p. } t \in [0,T]. \end{cases}$

Soit $\Lambda$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$.
Soit $\Lambda_a$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$.

(11.4) $\begin{cases} \text{Soit } C \in \mathcal{L}(L^2[0,T;V];\mathcal{H}) \\ \quad B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};L^2[0,T;V']) \\ \quad N \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U}'), \text{ et N étant V-elliptique :} \end{cases}$

(11.5) $(Nu,u)_* \geq \nu\|u\|^2_{\mathcal{U}}$ ou $(\ )_*$ désigne le produit scalaire mettant en dualité $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$

Soit $J(v) = \|Cy(v) - Zd\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv,v)_*$, où Zd est donné dans $\mathcal{H}$ la fonctionnelle à minimiser pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$ convexe fermé de $\mathcal{U}$. $y(v)$ satisfaisant au problème (11.6) indiqué ci-après.

Nous rappelons l'énoncé suivant (Cf. [35], Théorème 2.1, p. 128) où la variable p dénote l'état adjoint).

THEOREME I.20 -

*On suppose que les hypothèses (11.1), (11.2), (11.3), (11.4), sont vérifiées, le contrôle optimal u est caractérisé par le système d'équations aux dérivées partielles :*

(11.6) $$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + A(t)\, y(t) = f(t) + B(t)\, u(t) \\ y(0) = y_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

(11.7) $$\begin{cases} -\frac{dp}{dt} + A^*(t)\, p(t) = C^* \Lambda (Cy - Zd) \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

(11.8) $$\begin{cases} (B^* p + Nu, v-u)_* \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

Nous effectuons maintenant les changements de notations suivants :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=123} \mathcal{V}_i$$

avec : $$\left| \begin{array}{l} \mathcal{V}_1 = L^2[0,T;V] \\ \mathcal{V}_2 = L^2[0,T;V] \\ \mathcal{V}_3 = \mathcal{U} \end{array} \right.$$

(11.9) Soit $$\left| \begin{array}{l} u_1 = y \in \mathcal{V}_1 \\ u_2 = p \in \mathcal{V}_2 \\ u_3 = u \in \mathcal{U} \end{array} \right.$$

(11.10) Soit $$\left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_{11} = \text{le champ d'opérateur } t \to A(t) \\ \mathcal{A}_{22} = \text{le champ d'opérateur } t \to A^*(t) \\ \mathcal{A}_{33} = N \end{array} \right.$$

(11.11)
Soit $\mathcal{A}_{31} = - B$

Soit $\mathcal{A}_{12} = - C^* \Lambda\, C$

Soit $\mathcal{A}_{23} = B^*$

$$(11.12)\quad \begin{cases} \text{Soit } M_1 = L_1 = \dfrac{d}{dt} \\ \text{avec } D(L_1) = \{v_1 \mid v_1 \in L^2[0,T;V] ; \dfrac{dv_1}{dt} \in L^2[0,T;V'] ; v_1(0) = 0\} \end{cases}$$

$$(11.13)\quad \begin{cases} \text{Soit } M_2 = L_2 = -\dfrac{d}{dt} \\ \text{avec } D(L_2) = \{v_2 \mid v_2 \in L^2[0,T;V] ; \dfrac{dv_2}{dt} \in L^2[0,T;V'] ; v_2(T) = 0\} \end{cases}$$

(11.14) Soit $M_3 = \partial\Psi_{\mathcal{U}_{ad}}$ opérateur sous différentielle de la fonction indicatrice de $\mathcal{U}_{ad}$.

Rappelons que en utilisant des résultats de Lions-Magenès [37], chap. 1, il est possible en changeant dans (11.6), f en un élément g, de se ramener au cas $y_0 = 0$, et nous nous plaçons dans ce cas.

Nous appelons :

$$(11.15)\quad \begin{cases} f_1 = g \\ f_2 = -C^* \Lambda Zd \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

Alors, en tenant compte de (11.9),..., (11.15), le système (11.6), (11.7), (11.8), s'écrit :

$$(11.16)\quad \begin{cases} (L_1 + \mathcal{A}_{11})u_{11} + \mathcal{A}_{31}u_3 = f_1 \\ \mathcal{A}_{12}u_1 + (L_2 + \mathcal{A}_{22})u_2 = f_2 \\ \mathcal{A}_{23}u_2 + \mathcal{A}_{33}u_3 \in M_3u_3 \end{cases}$$

où $L_1$ et $L_2$ sont des opérateurs linéaires univoques, monotones maximaux (Cf. Lions [36], chap. 3), et $M_3$, opérateur sous différentielle de la fonction indicatrice du convexe $\mathcal{U}_{ad}$ est classiquement un opérateur éventuellement multivoque, maximal monotone.

Par ailleurs, d'après les hypothèses (11.3), (11.5), $\mathcal{A}_{11}$, $\mathcal{A}_{22}$, $\mathcal{A}_{33}$ sont V-elliptiques.

En utilisant également (11.2), (11.4), on en déduit que si a(u,v) est la forme bilinéaire associée au système d'opérateur $\mathcal{A}_{i,j}$ intervenant dans (11.16), a(u,v) est bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, et a(u,v) admet une Z-V-minorante (la matrice $N_a$ ci-dessous).

Soit
$$C_{12} = ||\mathcal{A}_{12}|| = ||C^* \quad C|| = \rho_1$$
$$C_{23} = ||\mathcal{A}_{23}|| = ||B|| = \rho_2$$
$$C_{31} = ||\mathcal{A}_{31}|| = ||B|| = \rho_2$$

PROPOSITION I.21 -

*Une condition suffisante pour que $a(u,v)$ admette une M-V-minorante est :*

(11.17) $\alpha^2 \upsilon - \rho_1 \rho_2^2 > 0$

DEMONSTRATION -

En effet $a(u,v)$ admet pour Z-V-minorante la matrice :

$$N_a = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & -\rho_2 \\ -\rho_1 & \alpha & 0 \\ 0 & -\rho_2 & \upsilon \end{vmatrix}$$

Or une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une M-matrice est que ses déterminants mineurs principaux, soient positifs, d'où (11.17).

COROLLAIRE I.22 -

*Sous la condition (11.17), les applications $T_0$, $T_1$, $T_\omega$ (où $\omega$ vérifie $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho}$, $\rho$ étant le rayon spectral de la matrice de Jacobi associée à $N_a$) admettant un point fixe $u$, solution du système (11.16), ou de manière équivalente, du système (11.6), (11.17), (11.18).*

*De plus, sous les hypothèses précédentes, les algorithmes itératifs associés à $T_0$, $T_1$, $T_\omega$ convergent dans $\mathcal{V}$ fort où*

$$\mathcal{V} = \prod_{i=123} \mathcal{V}_i$$

*avec :*
$$\mathcal{V}_1 = L^2[0,T;V]$$
$$\mathcal{V}_2 = L^2[0,T;V]$$
$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{U}$$

Nous allons expliciter la condition (11.17), sur un exemple donné dans Lions [35].

<u>Exemple</u> - (Cf. exemple (3,2.1) [35], p. 136-137, Chap. 3)

$$\text{Soit } V = H^1(\Omega)$$
$$Q = \Omega \times [0,T]$$
$$\Sigma = \partial\Omega \times [0,T]$$
$$\mathcal{U} = L^2(\Sigma)$$

Soit $a(t;u_1,v_1)$ une famille mesurable de formes bilinéaires uniformément born sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, et vérifiant la condition :

(11.18) $$a(t;v_1,v_1) \geq \alpha \, ||v_1||^2 \qquad \forall\, v_1 \in H^1(\Omega)$$

Soit $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U})$ et vérifiant :

$$(Nu,u) \geq \nu \, ||u||^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in \mathcal{U}.$$

$\forall v \in H^1(\Omega)$ soit $\tau v$ la trace de $v$ sur $L^2(\partial\Omega)$, rappelons un résultat classique (Cf. Lions-Magenès [37], Chap. 1), à savoir qu'il existe une constante $k > 0$, telle que :

(11.19) $$||\tau v||_{L^2(\partial\Omega)} \leq k \, ||v||_{H^1(\Omega)}$$

Nous considérons le système

(11.20) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t),v_1) + a(t;y(t),v_1) = (f(t),v_1)_{L^2(\Omega)} + (u(t),\tau v_1)_{\partial\Omega} \\ \hfill \forall\, v_1 \in H^1(\Omega) \\ y(0) = y_0 \text{ donné dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

(11.21) $$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}(p(t),v_2) + a^*(t;p(t),v_2) = \displaystyle\int_\Omega (y-Z_d)v_2 \, dx \qquad \forall v_2 \in H^1(\Omega) \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

(11.22) $$\int_\Sigma (\tau p + Nu)\,(v_3-u)\, d\sigma \geq 0 \qquad \forall v_3 \in \mathcal{U}_{ad}$$

(11.20), (11.21), (11.22), sont la réécriture avec des notations très peu différentes des équations (3.16), (3.22), (3.23), de [35], p. 136-137, Chap. 3, n° 3, qui correspond au problème de la minimisation de :

$$J(v) = \int_q (y(v) - Z_d)^2 \, dx \, dt + (Nv,v)_{L^2(\Sigma)}$$

on y vérifie (11.20), et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ ensemble convexe fermé de $L^2(\Sigma)$

On a :

$$(Bu, v_1) = \int_\Sigma (u, \tau v_1) d\sigma$$

$$|(Bu, v_1)| \leq \left| \int_\Sigma (u, \tau v_1) d\sigma \right| \leq \left(\int_\Sigma (u)^2 d\sigma\right)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\tau v_1|^2 d\sigma\right)^{1/2}$$

et d'après (11.19) :

$$|(Bu, v_1)| \leq \left(\int_\Sigma |u|^2 d\sigma\right)^{1/2} \times k \, ||v_1||_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$$

et par suite :

(11.23) $\quad ||B|| = \rho_2 = k.$

- C est l'injection de $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ dans $L^2(Q)$, $\mathcal{H} = L^2(Q)$ et $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ donc $\Lambda$ est l'identité dans $L^2(Q)$, donc $||C^*\Lambda C|| = ||C||^2 = 1.$

Par suite, la condition (11.17) s'exprime ici par :

(11.24) $\quad \alpha^2 \nu - k^2 > 0.$

<u>Deuxième problème de contrôle optimal</u> -

Observation de l'état final : les notations sont les mêmes que précédemment, sauf que l'on appelle :

$W[0,T]$ l'espace des éléments
$\{v | v \in L^2[0,T;V] ; \frac{dv}{dt} \in L^2[0,T;V']\}$

Nous utiliserons les résultats suivants : corollaires de résultats plus généraux de Lions-Magenès [37], T.1, Chap. 1, n° 3 et 4.

<u>PROPOSITION I.23</u> -

*Soit $T_r$ l'opérateur qui à $v \in W[0,T]$ fait correspondre $T_r(v) = v(T) \in H$.*
*$T_r \in \mathcal{L}(W[0,T];H)$*

<u>PROPOSITION I.24</u> -

*Il existe un opérateur $Re \in \mathcal{L}(H; W[0,T])$ tel que :*
*$T_r \, Re \, h = h.$*

Soit $D \in \mathscr{L}(H;H)$

$$(11.23) \qquad J(v) = |Dy(T;v) - Z_d| + (Nv,v)_{\mathcal{U}}$$

la fonctionnelle à minimiser pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$ convexe fermé de $\mathcal{U}$, et y satisfaisant :

$$(11.24) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)\ y(t) = f(t) + Bv \\ y(0) = y_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

où l'on suppose les hypothèses (11.2), (11.3), vérifiées.

$$(11.25) \quad \begin{cases} \text{Soit } \mathscr{C} \quad y(t) = Dy(t) \text{ ou } D \in \mathscr{L}(H;H) \\ \qquad B \in \mathscr{L}(\mathcal{U} ; L^2[0,T;V']) \\ \qquad N \in \mathscr{L}(\mathcal{U} ; \mathcal{U}') \end{cases}$$

N étant V-elliptique :

(11.26) $\quad (Nu,u) \geq \upsilon ||u||^2_{\mathcal{U}}$ ou $(\quad)_*$ désigne la dualité entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$

Rappelons le Théorème 2.2 de Lions [35], Chap. 3, p. 130 :

THEOREME I.25 -

*On suppose que (11.1), (11.3), (11.25), (11.26), sont vérifiées, et que J(v) est donné par (11.23), alors le contrôle optimal u est déterminé par :*

$$(11.27) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)\ y(t) = f(t) + Bu \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$(11.28) \quad \begin{cases} -\dfrac{dp}{dt} + A^*(t)\ p = 0 \\ p(T) = p^*(Dy(T) - z_d) \end{cases}$$

$$(11.29) \qquad (B^*p + Nu, v-u)_* \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, u \in \mathcal{U}_{ad}$$

Nous pouvons transformer (11.28), sous la forme suivante :

$$(11.30) \quad \begin{cases} -\dfrac{dp-q}{dt} + A^*(t)\ (p-q) = \dfrac{dq}{dt} - A^*(t)\ q(t) \\ \text{où } q = \text{Re } D^*D(T_r y - z_d) \end{cases}$$

Soit p-q = w

le système (11.27), (11.28), (11.29), se réécrit :

$$(11.31)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)\, y(t) = f(t) + Bu \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$(11.32)\quad \begin{cases} -\dfrac{dW}{dt} + A^*(t)\, W(t) = Ky - Z_d \\ W(0) = 0 \qquad Zd = \dfrac{dq_d}{dt} - A^*(t)q_d \end{cases}$$

$$\text{où } q_d = \mathrm{Re}\, D^* D(-z_d)$$

$$(11.33)\quad (B^*W + B^*\, \mathrm{Re}\, D^*D(T_r y - z_d) + Nu,\ v-u)_* \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \qquad u \in \mathcal{U}_{ad}$$

avec $K = \mathcal{L}(W[0,T];\mathcal{V}')$.

Nous effectuons maintenant les changements de notations :

$$(11.34)\quad \begin{vmatrix} \mathcal{V}_1 = L^2[0,T;\mathcal{V}] \\ \mathcal{V}_2 = L^2[0,T;\mathcal{V}] \\ \mathcal{V}_3 = \mathcal{U} \end{vmatrix}$$

$$(11.35)\quad \begin{vmatrix} u_1 = y \in \mathcal{V}_1 \\ u_2 = W \in \mathcal{V}_2 \\ u_3 = u \in \mathcal{V}_3 \end{vmatrix}$$

Nous reprenons (11.10), (11.12), (11.13), (11.14). Restent inchangés également

$$(11.36)\quad \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{31} = -B \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_3;\ \mathcal{V}'_1) \\ \mathcal{A}_{23} = B^* \in \mathcal{L}\ (\mathcal{V}_2;\ \mathcal{V}'_3) \end{vmatrix}$$ (ce qui est possible car $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = L^2[0,T;$

$$(11.37)\quad \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{12} = K \in \mathcal{L}\ (\mathcal{V}_1 \cap D(L_1);\mathcal{V}'_2) \\ \mathcal{A}_{13} = B^*\, \mathrm{Re}\, D^*\, D\, T_r \in \mathcal{L}\ (\mathcal{V}_1 \cap D(L_1);\mathcal{V}'_3) \end{vmatrix}$$

D'où le système (11.31), (11.32), (11.33) est de la forme :

$$(11.38)\quad \left|\begin{array}{llll} (L_1 + \mathcal{A}_{11})\, u_1 & & + \mathcal{A}_{31}\, u_3 & = f_1 \\ \mathcal{A}_{12}\, u_1 & + (L_2 + \mathcal{A}_{22}) u_2 & & = f_2 \\ f_3 - \mathcal{A}_{13}\, u_1 & - \mathcal{A}_{32}\, u_2 & - \mathcal{A}_{33}\, u_3 & \in M_3\, u_3 \end{array}\right.$$

où

$$(11.39)\quad \left|\begin{array}{l} f_1 = g \\ f_2 = Z_d \text{ (indiqué en (11.32 ))} \\ f_3 = B^* \operatorname{Re} D^* D\, z_d \end{array}\right.$$

Du fait des propriétés de $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{13}$, Cf. (11.37), nous sommes amenés à utiliser une minorante "mixte" $\tilde{N}_a$ (Cf. la fin du § IO), pour l'ensemble d'indice $\mathcal{J} = \{1\}$ .

On obtient alors pour $\tilde{N}_a$ étant une M-matrice, des résultats d'existence, mais surtout un procédé constructif (après discrétisation convenable) pour le système (11.38), donc pour (11.27), (11.28), (11.29).

On peut, de manière analogue à ce que nous avons fait pour $N_a$, expliciter $\tilde{N}_a$ en fonction des constantes de coercivité des opérateurs diagonaux, et des normes des différentes opérateurs considérés.

# C H A P I T R E II

## OPERATEURS PARAMONOTONES

# I - NOTATIONS, DEFINITIONS ET EXEMPLES

## I.1 - QUELQUES DEFINITIONS -

- Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif, et $\mathcal{V}'$ son dual fort.

Nous considérons l'espace $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$ (resp. $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}')$ des endomorphismes de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}'$), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties finies.

Notation -

- Soit $\Gamma$ une application (en général non linéaire) de $D(\Gamma)\subset\mathcal{V}\theta\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$

$$\forall w\in D(\Gamma)\subset \mathcal{V}\theta\mathcal{V} \xrightarrow{\Gamma} \Gamma_w\in\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$$

- Soit t l'application qui à $\Gamma_w\in\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$, fait correspondre sa transposée $\Gamma_w^*\in\mathcal{L}_\sigma(V', V')$

- Soit $\Gamma^* = t_o\Gamma$

$$\forall w\in D(\Gamma) \xrightarrow{\Gamma^*} \Gamma_w^*\in\mathcal{L}\,(V',V')$$

(D'une façon générale, si T est une application, D(T) est le domaine de T).

DEFINITION 1 -

*On appelle application de type P, une application de $D(\Gamma)\subset\mathcal{V}\theta\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$ telle que :*

*P1/ L'adhérence dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$ de l'image de $D(\Gamma)$ par $\Gamma$ : $\overline{\Gamma(D(\Gamma))}$, est un ensemble compact de $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$.*

*P2/ L'adhérence dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}')$ de l'image de $D(\Gamma)$ par $\Gamma^*$ : $\overline{\Gamma(D(\Gamma))}$, est un ensemble compact de $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}')$.*

*P3/ Il existe une base de filtre* $\Phi$ *, formée d'espaces de dimension finie de* $\mathcal{V}$*, telle que :*

*i/* $\forall E \in \Phi$ *, et* $\forall \Gamma_w \in t_o^{-1}\ \overline{\Gamma^*(D(\Gamma))}$ *on ait :* $\Gamma_w(E) \subset E$.

*ii/* $\forall E_n$*, espace de dimension finie de* $\mathcal{V}$*, il existe* $E \in \Phi$*, avec* $E_n \subset E$.

**DEFINITION 1-Bis -**

*On appelle application de type P fini : n, une application* $\Gamma$*, de domaine* $D(\Gamma) \subset \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ *dans* $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$*, telle que :*

*P'1/ L'image de* $D(\Gamma)$ *par* $\Gamma$ *est un ensemble de n éléments de* $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$.

*P'2/ (ON REMARQUE QUE LORSQUE P'1 EST VERIFIEE, L'IMAGE DE* $D(\Gamma)$ *PAR* $\Gamma^*$ *EST EGALEMENT UN ENSEMBLE FINI DE N ELEMENTS DE* $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}')$*).*

*P'3/ Identique à P3 de la définition 1.*

**DEFINITION 1-Ter -**

*Une application* $\Gamma$ *de domaine* $D(\Gamma) \subset \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$*, a valeurs dans* $\mathcal{L}_\sigma(\dot{\mathcal{V}},\mathcal{V})$*, sera dite "à valeurs dans les projecteurs", si* $\Gamma_w$ *est un projecteur dans* $\mathcal{V}$*,* $\forall w \in D(\Gamma)$.

**NOTATION -**

Soit $\Delta$ l'ensemble des fonctions continues de $R^+$ dans $R^+$, monotones, croissantes, nulles à l'origine, et telles que leurs fonctions inverses soient continues au voisinage de l'origine.

**DEFINITION 2 -**

*Une application A, de domaine* $D(A) \subset \mathcal{V}$*, à valeurs dans* $\mathcal{V}'$*, sera dite paramonotone, relativement à* $\Gamma$*, application de type P, de domaine :* $D(\Gamma) = D(A) \oplus D(A)$*, s'il existe une fonction* $\delta \in \Delta$ *, telle que :*

(1.1) $\quad (Au-Av,\ \Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \delta(||u-v||) \quad \forall u,v \in D(A)$

*(OU LE PREMIER MEMBRE EST REEL).*

DEFINITION 2-Bis -

*Une application A, de domaine $D(A)\subset \mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathcal{V}'$, sera dite quasiparamonotone (on notera Q-PARAMONOTONE), relativement à $\Gamma$, application de type P, de domaine $D(\Gamma) = D(A) - D(A)$, si il existe une fonction $\delta\in\Delta$, et un opérateur non-linéaire compact C, de $\overline{D(A)}$ dans $\mathcal{V}'$, tels que :*

$$(1.2)\qquad (Au-Av,\Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \delta(||u-v||)-|(Cu-Cv,\Gamma_{u-v}(u-v))|$$

$$\forall u,v\in D(A)$$

*(OU LE PREMIER MEMBRE EST REEL).*

DEFINITION 3 -

*On dira que l'opérateur A, de domaine $D(A)\subset \mathcal{V}$ est para-coercif, relativement à $\Gamma$, application de type P, de domaine*

*$D(\Gamma) = D(A)\ \theta\ D(A)$*

*s'il existe $u_o\in D(A)$, tel que :*

$$(1.3)\qquad \lim_{||u||\to\infty} \frac{(Au,\Gamma_{u-u_o}(u-u_o))}{||u||} = +\infty$$

## I.2 - EXEMPLES -

EXEMPLE I -

Soit $r\in N$, ensemble des entiers naturels, et soit $\mathcal{V} = R^r$.

Rappelons tout d'abord qu'une matrice N, de type (r,r) est, par définition, une B-matrice si :

$$(1.4)\qquad \forall x\in R^r\ \exists j \qquad 1\leq j\leq r, \text{ tel que :}$$

$$y_jx_j > 0 \qquad \text{où } y = Nx.$$

Considérons maintenant l'application $\tilde{\Gamma}$, qui à $\forall x\in R^r$, fait correspondre l'indice jmax tel que $y_{jmax}x_{jmax} = \max_{j=1,\dots,r} y_jx_j > 0$, d'après (1.4).

- Soit $\tilde{\Pi}$ l'application qui à $j\in\{1,\dots,r\}$ fait correspondre l'opérateur $\Pi_j$ de projection de $R^n$ sur le jième axe.

Considérons maintenant l'application :

$\Gamma = \tilde{\Pi} \circ \tilde{\gamma}$

alors $\forall x \in R^r \xrightarrow{\Gamma} \Gamma_x \in \Pi_{jmax}$

et

(1.5) $\quad (Nx, \Gamma_x x) = y_{jmax} \; x_{jmax} > 0.$

En utilisant la compacité de la sphère unité, associée à la norme euclidienne, on déduit de (1.5) :

(1.6) $\quad (Nx, \Gamma_x x) \geq \alpha |x|_2^2 \qquad \forall x \in R^r$

ou $|\;|_2$ est la norme euclidienne de $R^r$. Nous venons de vérifier la :

**PROPOSITION 1** -

*Toute B-matrice est paramonotone, par rapport à une application de type P, fini r.*

*ON REMARQUE QUE $\Gamma$ EST ICI A "VALEURS DANS LES PROJECTEURS".*

**EXEMPLE 2** -

Soit $r \in N$, et $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i$

ou les $\mathcal{V}_i$ sont des espaces de Banach réels pour $i = 1,\dots,r$, avec $\mathcal{V}_i \wedge \mathcal{V}_j = 0$ $\forall i,j$ tels que $i \neq j$.

Soit $||\;||_i$ la norme sur $\mathcal{V}_i$.

On suppose que $\mathcal{V}$ est somme directe topologique des $\mathcal{V}_i$.

Soit $\mathcal{V}'_i$ le dual de $V_i$ $i=1,\dots,r$. On munit $\mathcal{V}$ de la norme $||v||_{\mathcal{V}} = (\sum_{i=1}^{r} ||v_i||_i^2)^{1/2}$.

Soit $\{\mathcal{A}_{i,j}\}$ une matrice d'opérateurs où $\mathcal{A}_{i,j}$ applique $D(\mathcal{A}_{i,j}) \subset \mathcal{V}_i$ dans $\mathcal{V}'_j$.

Soit $D_i = \bigcap_{j=1,\dots,r} D(\mathcal{A}_{i,j})$, on suppose que $D_i \neq \emptyset$ $\forall i=1,\dots,r$,

et Soit $D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1,\dots,r} D_i$.

Alors la matrice d'opérateurs $\{\mathcal{A}_{i,j}\}$ nous permet de définir un opérateur $\mathcal{A}$, de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{V}'$.

$\forall u \in D(\mathcal{A})\; \mathcal{A}u = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} \mathcal{A}_{i,j} u_i$ ou $u_i \in D_i$ $\quad \forall i=1,\dots,r$ et on suppose que :

(1.7) $\quad \max_{j=1,\dots,r} \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,j} u_i - \mathcal{A}_{i,j} v_i, u_j - v_j) \geq \alpha (\sum_{i=1}^{r} ||u_i - v_i||_i^2) = \alpha ||u-v||_{\mathcal{V}}^2$

PROPOSITION 2 -

*L'opérateur $\mathcal{A}$ de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{V}'$ associé à la matrice d'opérateurs $\{\mathcal{A}_{i,j}\}$, vérifiant la condition (1.7) est un opérateur paramonotone de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{V}'$, par rapport à une application $\Gamma$, de type P, fini : r "à valeurs dans les projecteurs".*

DEMONSTRATION - (Remarquer l'analogie avec la proposition 1).

Considérons tout d'abord l'application $\tilde{\Gamma}$ qui à $w=v-u \in D(\mathcal{A}) \ominus D(\mathcal{A})$ fait correspondre l'indice jmax, défini par

$$\sum_{i=1,\dots,r} (\mathcal{A}_{ijmax}u_i - \mathcal{A}_{i,jmax}v_i, u_{jmax}-v_{jmax}) =$$

$$\max_{j=1,\dots,r} \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,j}u_i - \mathcal{A}_{i,j}v_i, u_j - v_j)$$

- Soit $\tilde{\Pi}$ l'application qui à $j \in \{1,\dots,r\}$ fait correspondre l'opérateur de projection $\Pi_j$ de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_j$.

On considère maintenant l'application : $\Gamma = \tilde{\Pi} \circ \tilde{\Gamma}$

Vérifions que $\Gamma$ est une application de type P fini : r

P'1 se vérifie immédiatement puisque :

$$\Gamma(D(\mathcal{A})-D(\mathcal{A})) = \{\Pi_j\} \quad j=1,\dots,r$$

(et cela entraîne évidemment que P1 et P2 sont vérifiées).

Vérification de P3 -

Nous considérons sur chacun des espaces $\mathcal{V}_i$, l'ensemble $\mathcal{F}_i$ de tous les espaces de dimension finie : $\Phi$ sera formé des espaces de dimension finie de la forme :

$$E = \bigoplus_{i=1,\dots,r} \tilde{E}_i, \quad \forall \tilde{E}_i \in \mathcal{F}_i$$

alors $\Gamma_w E = \Pi_j(E) = \tilde{E}_j \subset E \quad \forall w \in D(\Gamma)$ et i/ de P3 est vérifiée.

Soit $E_n$ un espace de dimension finie de $\mathcal{V}$, et soit $\{v_1,\dots,v_n\}$ une base de $E_n$. Considérons les espaces $\tilde{E}_j \in \mathcal{F}_j$ $j=1,\dots,r$ engendrés par $\{\Pi_j v_1,\dots,\Pi_j v_n\}$, où $\Pi_j$ est l'opérateur de projection de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_j$, et on a :

$$E_n \subset \bigoplus_{j=1,\dots,r} \tilde{E}_j = E \in \Phi \text{ ; puisque :}$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{r} \Pi_j v_i \in E \qquad \forall i=1,\dots,r,$$ il en va de même de toute combinaison linéaire des $\mathcal{V}_i$. Nous avons donc vérifié ii/ de la propriété P3 des applications de type P.

Donc $\Gamma$ est une application de type P fini : r.

Par ailleurs, formons : $(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,\Gamma_{u-v}(u-v)) = (\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,\Pi_{j\max}(u-v)) =$
$\max_{j=1,\dots,r} \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,j}\, u_i-\mathcal{A}_{i,j}\, v_i,\ u_j-v_j) \geq \alpha\|u-v\|^2_{\mathcal{V}}$, d'après l'hypothèse (1.7).

q.e.d.

- Notons que, en particulier, les H-systèmes étudiés au chapitre I, vérifient la condition (1.7).

- POUR OBTENIR UN ENSEMBLE D'APPLICATION <u>QUASI-PARAMONOTONE</u>, IL SUFFIT DE CONSIDERER L'OPERATEUR $B = \mathcal{A} + C$, OU $\mathcal{A}$ VERIFIE LES CONDITIONS PRECEDENTES, ET C EST COMPLETEMENT CONTINU (COMPACT).

<u>EXEMPLE 3</u> -

(Il s'agit du premier exemple d'application paramonotone, relativement à une application de type P, non fini ; à ce sujet voir également les <u>exemples</u> 4 et 5).

Soit $\mathcal{V} = l^2$ espace des suites de nombres réels de carré sommable.

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(N)$ des parties de N. $\forall s \in \mathcal{P}(N)$, soit $\Pi_s$ l'opérateur de $l^2$ sur le sous-espace engendré par les éléments $\{e_i\}$ $i \in s$, où :

$$e_i = \{0,\dots, 0, 1, 0,\dots\}$$

Soit S l'ensemble des opérateurs $\Pi s$.

<u>PROPOSITION 3</u> -

*Tout ensemble* $\in \mathcal{P}(S)$, *ensemble des parties de S, est compact dans* $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$.

DEMONSTRATION -

Soit $So \subset S$.

Soit $\{\Pi_n\}$ une suite d'éléments de So, on peut extraire de $\{\Pi_n\}$ une sous suite $\{\Pi_{n_1}\}$, telle que $\Pi_{n_1}\ _1$ converge dans $l^2$ (c'est-à-dire plus précisément que $\Pi_{n_1} e_1 = 0$ ou $e_1$, à partir d'un certain rang).

De $\{\Pi_{n_1}\}$, on peut extraire une sous-suite $\{\Pi_{n_2}\}$, telle que $\Pi_{n_2} e_2$ converge dans $l^2$, et ainsi de suite, on extrait $\{\Pi_{n_{i-1}}\}$ une sous suite $\{\Pi_{n_i}\}$ telle que : $\Pi_{n_i} e_j = 0$ ou $e_j$, à partir d'un certain rang donc, en particulier, converge dans $l^2$ fort.

On forme à partir de là une suite diagonale $\tilde{\Pi}_p$ telle que :

$$\tilde{\Pi}_1 \in \{\Pi_{n_1}\} \quad \tilde{\Pi}_2 \in \{\Pi_{n_2}\} \quad \ldots. \quad \tilde{\Pi}_i \in \{\Pi_{n_i}\}$$

$\lim\limits_{i \to \infty} \tilde{\Pi}_i e_j = e_j$ ou 0 à partir d'un certain rang.

Soit

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in \mathcal{V} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < +\infty \right)$$

Soit $u = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j$ où :

$$\eta_j = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } \lim \tilde{\Pi}_i e_j = 0 \\ \xi_j \text{ si } \lim \tilde{\Pi}_i e_j = e_j \end{array} \right.$$

$\forall \varepsilon > 0$ soit $v_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} \xi_i e_i$ où $n_\varepsilon$ est choisi de telle sorte que

$||v_\varepsilon - v|| \leq \varepsilon$. On a alors, en posant $u_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} \eta_i e_i$

$$||u_\varepsilon - u|| \leq ||v_\varepsilon - v|| \leq \varepsilon.$$

Formons $\tilde{\Pi}_i v - u = \tilde{\Pi}_i v - \tilde{\Pi}_i v_\varepsilon + \tilde{\Pi}_i v_\varepsilon - u_\varepsilon + u_\varepsilon - u$.

$$||\tilde{\Pi}_i v - u|| \leq ||\tilde{\Pi}_i v_\varepsilon - u_\varepsilon|| + ||\tilde{\Pi}_i (v - v_\varepsilon)|| + ||u_\varepsilon - u||$$

où les deux derniers termes sont inférieurs à $\varepsilon$ (car $||\tilde{\Pi}_i|| = 1 \quad \forall i$).

Reste $||\tilde{\Pi}_i v_\varepsilon - u_\varepsilon|| = 0$ à partir d'un certain rang.

Donc $\lim\limits_{i \to \infty} ||\tilde{\Pi}_i v - u|| = 0$

q.e.d.

- Soit maintenant N une matrice de type (r,r) qui soit une B-matrice (Cf. exemple 1), et soit $A_1$ la matrice infinie sur $l^2$, diagonale par blocs, chacun des blocs diagonaux étant constitué par la matrice N.

$$A_1 = \begin{pmatrix} N & & 0 \\ & N & \\ 0 & & N & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Soit $V_m \subset l^2$ le sous espace dont les éléments sont de la forme :

$$v_m = \sum_{i=m_r+1}^{(m+1)r} \eta_i \; e_i$$

à $v_m \in V_m$, faisons correspondre $\bar{v}_m \in R^r$

$$\bar{v}_m = \{\eta_{mr+1}, \; \eta_{mr+2}, \ldots, \; \eta_{m(r+1)}\}$$

Nous considérons l'application $\tilde{\Gamma}^m$ qui à $v_m \in V_m$ fait correspondre :

$$\tilde{\Gamma}^m_m = mr + j^m max$$

où $j^m max$ est défini par (Cf. exemple 1) :

$$(N\,\bar{v}_m, \; \bar{\Pi}_{j}max \; \bar{v}_m) = \max_{j=1,\ldots,r} \; (N\bar{v}_m, \bar{\Pi}_j \bar{v}_m).$$

$\bar{\Pi}_j$ étant le projecteur orthogonal sur le $j^{ième}$ axe de $R^r$.

Soit $V_m^{\perp}$ le complémentaire orthogonal de $V_m$.

Soit $\Pi j_m$ le projecteur orthogonal de $l^2$ sur $V_m^{\perp} \oplus e_{mr} + j^m max$.

$$\forall v \in l^2 \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

et soit $\Gamma_v = \bigcirc_{m=1}^{\infty} \Pi_{j_m}$

Soit $S_o$ l'ensemble $\Gamma(l^2)$ $S_o \subset S$, qui est compact dans $\mathscr{L}_\sigma(l^2, l^2)$, d'après la proposition 3, (et il en va de même pour $\Gamma^*(l^2) = S_o$).

Donc $\Gamma$, ainsi définie, vérifie bien les propriétés P1 et P2 de la définition 1. Pour ce qui est de la propriété P3, on a ici une variante, qui s'exprime ainsi :

Soit $\Phi$ l'ensemble des espaces de la forme :

$$E_m = \bigoplus_{p=1,\ldots,n} V_p$$

Soit $E_n$ le sous espace engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$ où $n \in N$, ensemble des entiers naturels : $l^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

On a évidemment : $\forall n \in N$, il existe $E_m \in \Phi$ tel que :

$E_n \subset E_m$ d'où ii/, et on vérifie immédiatement i/ :

$\Gamma_v(E_m) \subset E_m \quad \forall E_m \in \Phi \quad \forall v \in l^2$

De plus :

$(A_1 v, \Gamma_v v) \geq \alpha_1 \, ||v||^2$ (d'après (1.6) de l'exemple 1).

Soit maintenant $A_2$ une application linéaire continue de $l^2$ dans $l^2$, telle que :

$$||A_2|| \leq \frac{\alpha_1}{2} = \alpha.$$

Soit $A = A_1 + A_2$.

On a $\forall v \in l^2 \ (Av, \Gamma_v v) \geq \alpha ||v||^2$

où $\Gamma$ est une application de type P (non fini), à valeurs "dans les projecteurs).

- Les exemples précédents, sont rattachés à la classe d'application envisagée au a/ de l'introduction. De plus, la para-coercivité est ici conséquence du fait que $\delta = Ct^2$ (on a ainsi une para-monotonie "forte" qui impose la para-coercivité). Il n'en va pas de même dans le 2/ de l'exemple suivant, qui est pris dans les références bibliographiques citées en b/ de l'Introduction.

EXEMPLE 4 -

1/ Zarantonello [55], a introduit la classe d'applications suivante

H étant un espace de Hilbert complexe, on considère $\mathcal{A}$, opérateur non linéaire de H dans H, vérifiant :

(1.8) $\quad |(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v)| \geq \alpha ||u-v||^2 \qquad \forall u,v \in H. \quad \alpha > 0$

Nous remarquons que, nous pouvons écrire (1.8) sous la forme :

(1.9) $\quad (\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, \Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \alpha ||u-v||^2$

où $\Gamma_{u-v} = \dfrac{(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v, u-v)}{|(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v)|}$

On a bien alors :

$$(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v, \Gamma_{u-v}(u-v)) = \frac{\overline{(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v)}}{|(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v)|} \ (\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v)$$

$$= |(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v)|$$

PROPOSITION 4 -

*L'application $\Gamma$, ainsi définie, est de type P.*

DEMONSTRATION -

$\forall w \in H$ $\Gamma_w$ est un nombre complexe, et on a : $|\Gamma_w| \leq 1$.

Or, le disque unité du plan complexe est compact.

On en déduit que $\overline{\Gamma(D(\Gamma))}$ est compacte dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$, donc $P_1$ est vérifiée.

Du fait que $\Gamma_w^* = \overline{\Gamma_w}$ (nombre complexe conjugué du nombre $\Gamma_w$), on vérifie de même $P_2$.

- $\Gamma_w$ étant un nombre complexe, laisse invariant tout sous espace (complexe) de $\mathcal{V}$, donc, en particulier, les sous espaces de dimension finie, et dans $P_3$ on peut prendre pour $\Phi$ , l'ensemble des sous espaces (sur le corps de complexes), de dimension finie et $P_3$ est vérifiée.

q.e.d.

Alors (1.8) (en le réécrivant sous la forme (1.9)) signifie seulement que A est paramonotone par rapport à $\Gamma$ , définie ci-dessus, application de type P.

2/ Browder [8 ], [9 ], [10], envisage des applications du type suivant : $\mathcal{V}$ est un espace de Banach complexe, et $\mathcal{A}$ est une application de $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$ antidual de $\mathcal{V}$ vérifiant :

(1.10) $\quad |(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,\ u-v)| \geq \phi(||u-v||)\ ||u-v||$

ou $\phi(t)$ est une fonction continue à valeurs réelles, monotone croissante, telle que $\phi(0) = 0$. On remarque alors :

$\delta(t) = \phi(t)\ t \in \Delta$.

Aussi, en utilisant la proposition 4, on obtient (1.10) implique que $\mathcal{A}$ est paramonotone relativement à une application $\Gamma$ (celle étudiée au 1/), de type P.

La condition (1.10) n'implique toutefois pas la para-coercivité.

Considérons dans [9 ], l'hypothèse :

(1.11) $\quad |(\mathcal{A}u,u)| \geq C(||u||)\ ||u|| \quad \forall u \in \mathcal{V}$

ou $C(r)$ est une fonction à valeurs réelles, de domaine $R^+$, telle que $\lim_{r\to\infty} C(r) = +\infty$.

(1.11) entraîne : $\displaystyle\lim_{||u||\to\infty} \frac{(\mathcal{A}u,\Gamma_u u)}{||u||} = +\infty$

où $\Gamma_u = \dfrac{(\mathcal{A}u,u)}{|(\mathcal{A}u,u)|}$

ce qui est bien la para-coercivité au sens de la définition 3.

EXEMPLE 5 -

On peut combiner les exemples 2 et 4 de la façon suivante : on reprend les notations de l'exemple 2, mais en supposant maintenant les espaces $\mathcal{V}_i$ complexes, et on remplace l'hypothèse (1.7) par :

$$(1.12) \qquad \max_{j=1,\dots,r} \left| \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,j}u_i - \mathcal{A}_{i,j}v_i,\ u_j - v_j) \right| \geq$$

$$\alpha \left( \sum_{i=1}^{r} ||u_i - v_i||_i^2 \right) = \alpha\, ||u-v||_{\mathcal{V}}^2 \qquad \forall u,v \in D(\mathcal{A})$$

PROPOSITION 5 -

*L'opérateur $\mathcal{A}$ de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{V}'$ antidual de $\mathcal{V}$ associé à la matrice d'opérateurs $\{\mathcal{A}_{i,j}\}$, vérifiant la condition (1.12) est paramonotone de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{V}'$, relativement à une application $\Gamma$ de type P.*

DEMONSTRATION -

On met en évidence les applications $\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{\Pi}$.

- $\tilde{\Gamma}$, qui à $w \in D(\mathcal{A}) \ominus D(\mathcal{A})$, fait correspondre jmax défini par :

$$\left| \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,jmax}u_i - \mathcal{A}_{i,jmax}v_i,\ u_{jmax} - v_{jmax}) \right| =$$

$$\max_{j=1,\dots,r} \left| \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,j}u_i - \mathcal{A}_{i,j}v_i,\ u_j - v_j) \right|$$

- u et $v \in D(\mathcal{A})$ étant fixés, soit $\tilde{\Pi}$ l'application qui à j fait correspondre :

$$\tilde{\Pi}_j = \frac{\bar{z}}{|z|}\ \Pi_j \quad \text{où}$$

- $\Pi_j$ est le projecteur canonique de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_j$
- $\bar{z}$ est le nombre complexe : $(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v,\ \Pi_j(u-v))$

Considérons maintenant l'application :

$$\Gamma = \tilde{\Pi} \circ \tilde{\Gamma}$$

On obtient :

$$(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v,\ \Gamma_{u-v}(u-v)) = \max_{j=1,\dots,r} \left| \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,j}u_i - \mathcal{A}_{i,j}v_i,\ u_j - v_j) \right|$$

$$\geq \alpha ||u-v||_{\mathcal{V}}^2 \ \text{(d'après (1.12))}.$$

Il nous reste à vérifier que $\Gamma$ est de type P.

Soit d le disque unité du plan complexe.

$\Gamma(D(\Gamma))$ (respectivement $\Gamma^*(D(\Gamma))$ est isomorphe à un ensemble $\gamma$ (resp. $\gamma^*$), contenu dans $d^r$.

La fermeture dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$ (resp. $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}')$) de $\Gamma(D(\Gamma))$ (resp. $\Gamma^*(D(\Gamma))$ est isomorphe à $\bar{\gamma}$ (resp. $\bar{\gamma}^*$) adhérence de $\gamma$ (resp. $\gamma^*$) dans $d^r$ (pour la topologie de $R^{2r}$).

D'où la vérification de $P_1$ et $P_2$ résulte du fait que $d^r$ est isomorphe à un borné de $R^{2r}$.

On obtient $P_3$ par un raisonnement analogue à celui fait dans la proposition 2.

q.e.d.

ON REMARQUE QUE LES APPLICATIONS $\Gamma$ DES EXEMPLES 4 ET 5 NE SONT PAS "A VALEURS DANS LES PROJECTEURS".

## II - OPERATEURS DIAGONAUX, CONVEXES DIAGONALEMENT COMPATIBLES AVEC UNE APPLICATION $\Gamma$ DE TYPE P.

### II.1 - DEFINITIONS ET PROPRIETES ELEMENTAIRES -

DEFINITION 4 -

*- Un opérateur (respectivement un opérateur multivoque) M, monotone, de $D(M) \subset \mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$ (respectivement dans $2^{\mathcal{V}'}$), sera dit monotone diagonal, relativement à $\Gamma$, application de type P, si on a :*

(2.1) $\quad (u^*-v^*,\Gamma_w(u-v)) \geq 0 \quad \forall u,v \in D(M), \quad \forall w \in D(\Gamma)$
$\quad \forall u^* \in M(u), \quad v^* \in M(v).$

*- Un opérateur K de $D(K) \subset \mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}$, monotone, vérifiant :*

(2.2) $\quad (Ku^*-Kv^*,\Gamma^*_w(u^*-v^*)) \geq 0 \quad \forall u^*,v^* \in D(K) \quad \forall w \in D(\Gamma)$

*sera dit monotone diagonal par rapport à $\Gamma^*$.*

DEFINITION 5 -

*Soit X un convexe fermé de $\mathcal{V}$, $\Psi_X$ sa fonction indicatrice, et $\partial\Psi_X$ l'opérateur sous-différentielle de $\Psi_X$.*

*X sera dit diagonalement compatible avec $\Gamma$ , application de type P, si :*

(2.3) - $\Gamma_w X$ est fermé $\quad \forall w \in D(\Gamma)$

(2.4) - $\Gamma_w^* \, \partial\Psi_X(u) \quad \partial\Psi_X(u) \qquad \forall u \in X, \ \forall w \in D(\Gamma)$

(2.5) - $\forall E \in \Phi \quad X \wedge E$ vérifie (2.4).

PROPOSITION 6 -

*soit $\Psi_X^w$ la fonction indicatrice de $\Gamma_w(X)$, et $\partial\Psi^w{}_X$ sa sous différentielle. (2.3) étant vérifiée, la propriété (2.4) de la définition 5 est équivalente à :*

(2.6) $\quad \partial\Psi_X^w(\Gamma_w u) \supset \partial\Psi_X(u) \qquad \forall u \in X, \quad \forall w \in D(\Gamma).$

DEMONSTRATION -

1/ (2.4) $\Longrightarrow$ (2.6)

Soit $u \in X$ et $f \in \partial\Psi_X(u)$, on a : $(f,u-v) \leqslant 0 \quad \forall v \in X$, et, d'après (2.4), on en déduit :

$(\Gamma_w^* f, \ u-v) \leqslant 0 \qquad \forall v \in X, \ \forall w \in D(\Gamma)$

c'est-à-dire : $(f, \Gamma_w u - \omega) \leqslant 0 \quad \forall \ \in \Gamma_w X, \quad \forall w \in D(\Gamma)$

donc $f \in \partial\Psi_X^w(\Gamma_w u), \ \forall w \in D(\Gamma)$, d'où (2.6).

2/ (2.6) $\Longrightarrow$ (2.4)

Supposons le contraire, c'est-à-dire que, (2.6) étant vérifiée, il existe $w \in D(\Gamma) \quad u \in X, \ f \in \partial\Psi_X(u)$ et $\mathcal{v}_0 \in X$, tels que :

$(\Gamma_w^* f, \ u-\mathcal{v}_0) > 0$, d'où $(f, \ \Gamma_w u - \omega_0) > 0$

où $\omega_0 \in \Gamma_w(X)$ ; donc $f \notin \partial\Psi_X^w(\ \Gamma_w u)$

q.e.d.

PROPOSITON 7 -

*Si $X$, convexe fermé de $\mathcal{V}$, est diagonalement compatible avec $\Gamma$, application de type P, l'opérateur (à valeurs multivoques) $\partial\Psi_X$ est monotone maximal, diagonal par rapport à $\Gamma$.*

DEMONSTRATION -

Le fait que $\partial\Psi_X$ est monotone maximal est une propriété classique des opérateurs sous différentielles (Cf. [49]).

Soit $u, v \in X$, et $u^* \in \partial\Psi_X(u)$ et $v^* \in \partial\Psi_X(v)$.

D'après la propriété (2.6), et la proposition $u^* \in \partial\Psi_X^w(\Gamma_w u)$ et $v^* \in \partial\Psi_X^w(\Gamma_w v)$. Mais $\partial\Psi_X^w$, opérateur sous différentielle de la fonction indicatrice du convexe $\Gamma_w(X)$ (fermé d'après (2.3)), est un opérateur monotone donc :

$$(u^*-v^*, \Gamma_w u - \Gamma_w v) \geq 0 \qquad \forall u,v \in X, \ \forall w \in D(\Gamma)$$

et, puisque $\Gamma_w \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$

$$(u^*-v^*, \Gamma_w(u-v)) \geq 0 \qquad \forall u,v \in X, \quad u^* \in \partial\Psi_X(u), \ v^* \in \partial\Psi_X(v)$$

et ceci $\forall w \in D(\Gamma)$

q.e.d.

PROPOSITION 8 -

*Soit $X_1$ et $X_2$ deux convexes vérifiant les propriétés (2.3) et (2.4), alors s'il existe un point de $X_1 \wedge X_2$, qui soit intérieur, soit à $X_1$, soit à $X_2$, alors $X_1 \wedge X_2$ vérifie également (2.4).*

DEMONSTRATION -

On remarque que : $\Psi_{X_1 \wedge X_2} = \Psi_{X_1} + \Psi_{X_2}$

Puisqu'il existe un point intérieur soit à $X_1$, soit à $X_2$, il résulte d'un corollaire de résultats plus généraux de Rockafellar [48], que :

$$(2.7) \qquad \partial(\Psi_{X_1} + \Psi_{X_2}) = \partial\Psi_{X_1} + \partial\Psi_{X_2}$$

Formons : $\Gamma_w^* \, \partial\Psi_{X_1 \wedge X_2} = \Gamma_w^* \, \partial\Psi_{X_1} + \Gamma_w^* \, \partial\Psi_{X_2} \subset \partial\Psi_{X_1} + \partial\Psi_{X_2}$

la dernière inclusion étant obtenue en appliquant (2.4) à $X_i$, i=1,2.

D'où, en appliquant (2.7) :

$$\Gamma_w^* \partial\Psi_{X_1 \wedge X_2} \subset \partial\Psi_{X_1 \wedge X_2}$$

q.e.d.

COROLLAIRE 9 -

*Si X est un corps convexe (i.e. un convexe d'intérieur non vide), vérifiant (2.3) et (2.4), et $0 \in \overset{o}{X}$, alors X a également la propriété (2.5).*

DEMONSTRATION -

Puisque $0 \in \overset{o}{X}$, il suffit de vérifier que $\forall E \in \Phi$, vérifie (2.4).

Puisque E est un sous espace vectoriel : $\partial\Psi_E = E^{\perp}$, ensemble des éléments de $g \in v'$, tels que $(g,v) = 0 \quad \forall v \in E$.

Or, par la propriété $P_3$ des applications de type P : $\Gamma_w(E) \subset E$.

Donc $(g, \Gamma_w v) = 0 \quad \forall v \in E, \quad \forall w \in \mathcal{V}, \quad \forall g \in E^{\perp}$

Par suite $\Gamma_w^* g \in E^{\perp} = \partial\Psi_E, \quad \forall g \in \partial\Psi_E$

d'où le résultat par la proposition 8.

## II.2 - EXEMPLE DE CONVEXE DIAGONALEMENT COMPATIBLE AVEC UNE APPLICATION $\Gamma$, DE TYPE P.

Plaçons-nous dans le cadre de l'exemple 2, d'application $\Gamma$ de type P, donné au § 1, dont nous reprenons les notations :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i$$

Soit $\{X_i\}$ i=1,...,r une famille de convexes tels que :

$X_i$ soit un convexe fermé de $\mathcal{V}_i$, i=1,...,r ; et soit $X = \bigoplus_{i=1,\dots,r} X_i$.

PROPOSITION 10 -

*X est diagonalement compatible avec $\Gamma$.*

DEMONSTRATION -

Soit $f \in \partial\Psi_X(u)$, pour $u \in X$, ce qui s'écrit encore :

(2.8) $\quad (f, u-v) \leq 0 \quad \forall v \in X$

ou $u = \sum_{i=1}^{r} u_i$ ; $v = \sum_{i=1}^{r} v_i$, avec $u_i, v_i \in X_i$

et $(f, u-v) = \sum_{i=1}^{r} (f_i, u_i - v_i)$

Soit $j \in \{1,\ldots,r\}$ , en choisissant $v_i = u_i$, pour $i \neq j$ dans (2.8), on obtient :

$$(f_j, v_j - u_j) \leq 0 \quad \forall v_j \in X_j \quad \forall j = 1,\ldots,r$$

Or, par constructions de l'application $\Gamma$, $\forall w \in \mathcal{V}$

$$(f, \Gamma_w(u-v)) = (f_j, u_j - v_j), \text{ pour un certain indice } j.$$

D'où : $(\Gamma_w^* f, u-v) = (f, \Gamma_w(u-v)) \leq 0 \quad \forall v \in X, \forall w \in D(\Gamma)$

et $\Gamma_w^* f \in \partial\Psi_X(u)$.

On a bien vérifié (2.4).

Comme $\Gamma_w(X) = X_j$ pour un certain indice $j$, on a bien (2.3).

Vérification de (2.5) -

On considère les convexes $\tilde{X}_i = X_i \cap E_i$ ou $E_i \in \mathcal{F}_i$ ensemble des espaces de dimension finie de $\mathcal{V}_i$.

Soit $E = \bigoplus_{i=1,\ldots,r} E_i \qquad \tilde{X} = \bigoplus_{i=1,\ldots,r} \tilde{X}_i \subset E.$

On peut alors reprendre pour $E$ et $\tilde{X}$ le raisonnement fait plus haut pour $\mathcal{V}$ et $X$.

q.e.d.

DEFINITION 6 -

*Nous dirons qu'un espace de Banach $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$ application de type $P$, s'il existe une norme sur $\mathcal{V}$, strictement équivalente à la norme de $\mathcal{V}$, dont la boule unité associée soit un convexe diagonalement compatible avec $\Gamma$ .*

EXEMPLES

PROPOSITION 11 -

*L'espace $R^r$ (respectivement $\mathcal{V}$) est diagonalement compatible avec l'application $\Gamma$, mise en évidence dans l'exemple 1 (respectivement exemple 2) d'application de type P.*

DEMONSTRATION -

Le cas de l'exemple 1 est un cas particulier de 2 que nous traitons en considérant la norme $\| \ \|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,r} \| \ \|_i$

La boule unité $B_\infty$ associée à $\| \ \|_\infty$ est le convexe $\bigoplus\limits_{i=1,\dots,r} B_i$ où $B_i$ est la boule unité associée à $\| \ \|_i$ dans $V_i$.

D'après la proposition 10, $B_\infty$ est un convexe diagonalement compatible avec $\Gamma$.

Par ailleurs $\| \ \|_\infty$ est strictement équivalente avec $\| \ \|_{\mathcal{V}} = (\sum\limits_{i=1}^{r} \| \ \|_i^2)^{1/2}$ d'où le résultat.

## II.3 - PROPRIETES DE DIAGONALITE DANS LE CAS DES APPLICATIONS DE TYPE P, "A VALEURS DANS LES PROJECTEURS" -

DEFINITION 7 -

*Un graphe M de $\mathcal{V}\times\mathcal{V}'$ ($\mathcal{V}$ espace de Banach de dual $\mathcal{V}'$), sera dit stable par $\Gamma$, application de domaine $D(\Gamma)\subset\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}$, dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$ (Cf. définition 1-ter) si :*

$$\forall w\in D(\Gamma), \quad \forall \{y,x\}\in M \qquad \{\Gamma_w^* y, \Gamma_w x\} \in M$$

PROPOSITION 12 -

*Un graphe monotone M, stable par $\Gamma$, application de type P, "à valeurs dans les projecteurs", est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.*

DEMONSTRATION -

Soit $\{u^*,u\}$ et $\{v^*, v\} \in M$. Formons $(u^* - v^*, \Gamma_w(u-v)) =$

$(\Gamma_w^* u^* - \Gamma_w^* v^*, \Gamma_w u - \Gamma_w v)$ puisque $\Gamma_w$ est un projecteur.

Or puisque M est stable par $\Gamma$, le second membre de la dernière égalité est $\geq 0$, $\forall w \in D(\Gamma)$. Donc, M est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.

q.e.d.

PROPOSITION 13 -

*$\Gamma$ étant une application de type P, "à valeurs dans les projecteurs", une condition nécessaire et suffisante pour qu'un convexe X, ayant la propriété (2.3), vérifie la propriété (2.4), est que le graphe de $\partial\Psi_X$, opérateur sous différentielle de la fonction indicatrice de X, soit stable par $\Gamma$.*

DEMONSTRATION -

1/ (2.5) $\Longrightarrow$ stabilité du graphe de $\partial\Psi_X$

Soit $u^* \in \partial\Psi_X(u)$, par (2.5) $\Gamma_w^* u^* \in \partial\Psi_X(u)$

D'où : $(\Gamma_w^* u^*, u-v) \leq 0 \quad \forall v \in X$

Or, puisque $\Gamma_w$ est un projecteur :

$$(\Gamma_w^* u^*, u-v) = (\Gamma_w^* u^*, \Gamma_w u) - (\Gamma_w^* u^*, v) = (\Gamma_w^* u^*, \Gamma_w u - v) \leq 0 \qquad \forall v \in X$$

et, par suite, $\Gamma_w^* u^* \in \partial\Psi_X(\Gamma_w u)$.

2/ Stabilité du graphe de $\partial\Psi_X \Longrightarrow$ (2.5)

Soit $u^* \in \partial\Psi_X(u)$, par hypothèse :

$\Gamma_w^* u^* \in \partial\Psi_X(\Gamma_w u)$ donc :

$(\Gamma_w^* u^*, \Gamma_w u - v) \leq 0 \quad \forall v \in X, \ \forall w \in D(\Gamma)$

Or, puisque $\Gamma_w$ est un projecteur, on a :

$(\Gamma_w^* u^*, \Gamma_w u - v) = (\Gamma_w^* u^*, u-v) \leq 0 \ \forall v \in X \quad \forall w \in D(\Gamma)$ et $\Gamma_w^* u^* \in \partial\Psi_X(u)$.

q.e.d.

PROPOSITION 14 -

*Soit L une application linéaire de domaine $D(L) \subset \mathcal{V}$, et dense dans $\mathcal{V}$, stable par $\Gamma$, application de domaine $D(\Gamma) \subset \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$, dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ "à valeurs dans les projecteurs", alors $L^*$, adjointe de L est stable par $\Gamma$.*

DEMONSTRATION -

Puisque L est stable par $\Gamma$, $\forall u \in D(L)$, et $\forall w \in D(\Gamma)$, on a :

$\{\Gamma_w^* Lu, \Gamma_w u\} \in$ graphe de L. D'où $\forall u \in D(L)$, et $\forall w \in D(\Gamma)$ $\Gamma_w u \in D(L)$, et de plus $\Gamma_w^* L = L\Gamma_w$

Donc $\forall u \in D(L)$, et $\forall v \in D(L^*)$, où $L^*$ est l'adjointe de L, on a :

$$(Lu, \Gamma_w v) = (\Gamma_w^* Lu, v) = (L\Gamma_w u, v) = (u, \Gamma_w^* L^* v)$$

Puisque, par hypothèse, D(L) est dense dans $\mathcal{V}$, on en déduit que

$$\Gamma_w^* L^* v = L^* \Gamma_w v \quad \forall v \in D(L^*), \ \forall w \in D(\Gamma)$$

C'est-à-dire que : $\forall v \in D(L^*)$ $\forall w \in D(\Gamma)$ $\Gamma_w v \in D(L^*)$

et de plus : $\Gamma_w^* L^* = L^* \Gamma_w$

et, par suite, $L^*$ est stable par $\Gamma$.

q.e.d.

- SUR LE PROLONGEMENT MAXIMAL D'UN GRAPHE MONOTONE, STABLE PAR RAPPORT A $\Gamma$, APPLICATION DE TYPE P.

Nous nous replaçons dans le cadre de l'exemple 2 du paragraphe 1, dont nous reprenons les notations.

Soit $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i$ où $\mathcal{V}_i$ est un espace de Banach de dual $\mathcal{V}_i'$.

Rappelons que tout élément de l'image de l'application $\Gamma$, de type P, définie dans cet exemple, est projecteur canonique de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_j$, pour un certain indice j, et que $\Gamma$ est donc bien "à valeurs dans les projecteurs".

PROPOSITION 15 -

*Soit G un graphe monotone de $\mathcal{V}\times\mathcal{V}'$ stable par l'application $\Gamma$, définie à l'exemple 2 du § 1, alors il existe un prolongement maximal monotone $\bar{G}$ de G, tel que $\bar{G}$ soit stable par $\Gamma$.*

DEMONSTRATION -

Le fait que G soit stable par $\Gamma$ , s'exprime ici par $G_i = G\wedge\mathcal{V}_i\times\mathcal{V}'_i$ est monotone. Soit maintenant $\bar{G}_i$ un prolongement maximal monotone de $G_i$ dans $\mathcal{V}_i\times\mathcal{V}'_i$, qui existe, d'après le lemme de Zorn.

Soit $\bar{G} = \bigcup_{i=1,\dots,r} \bar{G}_i$ ; supposons que $\bar{G}$ ne soit pas maximal monotone, et que, par conséquent, il existe $\{x,x^*\}\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}'$ et $\notin$ G tel que :

$$(2.9)\qquad (x^* - v^*, x-v) \geq 0 \quad \forall v, v^*\in G$$

$$\text{ou}\quad x = \sum_{i=1}^{r} x_i \qquad x_i\in V_i \text{ pour } i = 1,\dots,r$$

$$x^* = \sum_{i=1}^{r} x_i^* \qquad x_i^*\in V_i^* \text{ pour } i = 1,\dots,r$$

Soit $J_1$ l'ensemble, éventuellement vide, des indices i pour lesquels $\{x_i^*,x_i\}\in\bar{G}_i$.

Soit $J_2$ le complémentaire de $J_1$ dans $\{1,\dots,r\}$; $J_2$ est, par hypothèse, non vide, car sinon $\{x,x^*\}$ appartiendrait à $\bar{G}$.

Nous choisissons $\{v_o, v_o^*\}\in\bar{G}$ de la manière suivante :

- Pour $i\in J_1$ : on prend $\{v_i^o,v_i^{o*}\} = \{x_i,x_i^*\}\in\bar{G}_i$, par définition de $J_1$.

- Pour $i\in J_2$ : puisque $\bar{G}_i$ est maximal monotone, et que $\{x_i,x_i^*\}\notin G_i$, par définition de $J_2$, il existe $\{v_i^o,v_i^{o*}\}\in\bar{G}_i$ tels que :

$$(2.10)\qquad (x_i^* - v_i^{o*}, x_i - v_i^o) < 0$$

Formons : $v^o = \sum_{i=1}^{r} v_i^o$ et $v^{o*} = \sum_{i=1}^{r} v_i^{o*}$

On a bien $\{v_o, v_o^*\}\in\bar{G}$ puisque $\{v_i^o,v_i^{o*}\}\in\bar{G}_i \quad \forall i=1,\dots,r$

Formons : $(x^*-v^{o*}, x-v^o) = \sum_{i\in J_2} (x_i^*-v_i^{o*}, x_i-v_i^o) < 0$

d'après (2.10), ce qui eet contraire à (2.9).

q.e.d.

# III - RESULTATS D'EXISTENCE -

## III.1 - UN RESULTAT D'EXISTENCE LOCALE -

Soit V un espace de Hilbert, soit V' l'antidual de V.

Soit $\phi(t)$ une application de $R^+$ dans $R^+$, monotone croissante, telle que $\phi(0) = 0$ (alors la fonction $\delta(t) = t\,\phi(t) \in \Delta$).

**THEOREME 16** - (Généralisation d'un Théorème de Zarantonello [55], Cf. exposé de N. Gastinel [24]).

*Soit A un opérateur de domaine $D(A) = Br$, boule fermée de rayon r, de V, dans V', demi continu, tel que :*

*- A soit paramonotone relativement à une application $\Gamma$, de type P, c'est-à-dire :*

$$(Au-Av,\Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \delta(||u-v||) \quad \forall u,v \in D(A)$$

*où $\delta(t) = t\,\phi(t) \in \Delta$*

*- On suppose de plus que : $||A(0)||^* \leq \frac{\phi(r)}{C}$*

*où C est la borne supérieure de la norme dans $\mathcal{L}(V',V')$ des éléments de $\Gamma^*(D(\Gamma))$ (C existe par le théorème de la borne uniforme).*

*Alors, l'équation $Au = 0$ a une solution unique, appartenant à Br.*

**DEMONSTRATION** -

- On suppose V de dimension finie. $u,v \in Br$, on a :

$$(Au-Av,\Gamma_{(u-v)}u-v) \geq \phi(||u-v||)\,||u-v||$$

D'où, par l'inégalité de Schwartz

$$\phi(||u-v||) \leq C||Au - Av||^* \tag{3.1}$$

A partir de (3.1), le reste de la démonstration du cas, V de dimension finie, est identique à [55], [24], nous le reproduisons pour faciliter la lecture.

A est donc biunivoque de Br, sur A(Br), et d'inverse continue, c'est un homéomorphisme. Vérifions que $A(Br) \supset B^*(A(0),\frac{\phi(r)}{C})$ (Boule fermée de V', de centre A(0), et de rayon $\frac{\phi(r)}{C}$). Si cette inclusion n'était pas vraie, il existerait alors $y_o \in E^*(A(0), \frac{\delta(r)}{C})$ et $\notin A(Br)$. Sur le segment d'extrémités $A(0)$ et $y_o$, il existe un point $y_1$, de la frontière de $A(Br)$, qui est l'image d'un point $u_1$, de la frontière de $Br$ (puisque $A$ est un homéomorphisme).

On a $Au_1 = y_1$, avec $||u_1|| = r$

et $||Au_1 - A(0)||^* < \frac{\delta(r)}{C}$

Or, par (3.1) $||Au_1 - A(0)||^* > \frac{1}{C}\,\delta(r)$, d'où la contradiction.

- V de dimension quelconque -

Soit $E_n \notin \Phi$ ( $\Phi$ est défini dans la propriété $P_3$ des applications de type P).

Soit $j_n$ l'injection de $E_n$ dans $V$, et $j_n^*$ sa transposée. Puisque $V$, $V'$ sont des Hilberts :

$$||j_n^* A(0) J_n||^* \leq ||A(0)||^*$$

et, en appliquant le résultat obtenu en dimension finie, il existe $u_n$, unique $\in E_n \wedge B_r$ tel que $J_n^* A J_n u_n = 0$.

Comme $Br$ est faiblement compacte d'une part, et que d'autre part, d'après la propriété $P_2$ des applications de type P $\Gamma^*(D(\Gamma))$ est compacte dans $\mathscr{L}_\sigma(V',V')$, selon $\tilde{\Phi}$, ultrafiltre plus fin que $\Phi$, on a :

(3.2) $\quad - \lim\limits_{E_n \in \tilde{\Phi}}$ faible $u_n = u \in Br$

(3.3) $\quad - \lim\limits_{E_n \in \tilde{\Phi}} \Gamma^*_{u_n - u}$ dans $\mathscr{L}_\sigma(V',V')$ existe, et appartient à $\overline{\Gamma^*(D(\Gamma))}$.

Formons $Y_n = (Au_n - Au, \Gamma_{u_n - u}(u_n - u))$

$\forall E_n \in \tilde{\Phi}$ avec $u \in E_n$, on a, d'après i/ de la propriété $P_3$ des applications de type P :

$$\Gamma_{u_n - u}(u_n - u) \in E_n \quad \text{et donc } (Au_n, \Gamma_{u_n - u}(u_n - u)) = 0$$

d'où $\forall E_n \in \tilde{\Phi}$ avec $u \in E_n$ on a :

$$Y_n = -(Au, \Gamma_{u_n - u}(u_n - u)) = -(\Gamma^*_{u_n - u} Au, u_n - u)$$

En utilisant, maintenant (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\lim_{E_n \in \tilde{\Phi}} Y_n = 0$$

D'après l'hypothèse A-paramonotone, on a : $\delta(||u_n-u||) \leqslant Y_n$ ou $\delta \in \Delta$ et, par suite, $u_n$ converge fortement vers u selon $\tilde{\Phi}$. A étant demi continu, on en déduit que $Au_n$ converge faiblement selon $\tilde{\Phi}$ vers Au, et comme, par ailleurs $Au_n$ converge faiblement vers 0, on obtient Au = 0.

Unicité : Soit $u_1$ et $u_2$ deux solutions distinctes, on a :

$$\delta(||u_1 . u_2||) \leqslant (Au_1 - Au_2, \Gamma_{u_1-u_2}(u_1-u_2)) = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

q.e.d.

REMARQUES -

- Dans le cas A quasi-paramonotone, la difficulté est d'obtenir le résultat en dimension finie : Cf. Browder [10], pour un résultat de ce type dans le cas particulier de l'exemple 4, avec un raisonnement par homotopie, et degré topologique.

- Le Théorème 16 est applicable dans les cas où l'on n'a pas plus de renseignements que les hypothèses faites dans les exemples 4 et 5 du § 1, et où il est par conséquent difficile d'associer à $\Gamma$, une notion de diagonalité, notion qui va jouer un rôle essentiel dans la suite.

## III.2 - PERTURBATION D'UN OPERATEUR (EVENTUELLEMENT MULTIVOQUE), MONOTONE MAXIMAL, DIAGONAL, PAR UN OPERATEUR (QUASI)PARAMONOTONE.

Ière Méthode -

Rappelons tout d'abord deux résultats classiques :

THEOREME 17 - (Rockafellar [48])

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif, et soient $T_1$ et $T_2$ deux opérateurs monotones maximaux de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ si :*

$$D(T_1) \wedge \overset{o}{D}(T_2) \neq 0 \quad \text{alors } T_1 + T_2 \text{ est maximal monotone.}$$

LEMME 18 - (Debrunner et Flor [15])

*Soit E un espace de dimension finie, et X un convexe compact de E.*

*Soit $\phi$ une application continue de X dans E', et G un graphe monotone de $X \times E'$. Alors il existe $u \in X$, tel que :*

$$(\phi(u) + w, v-u) \geqslant 0 \qquad \forall \{v, w\} \in G$$

Nous pouvons énoncer le :

**THEOREME 19** -

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach, réflexif diagonalement compatible avec $\Gamma$, application de type P.*

*Soit M un graphe maximal, monotone, diagonal de domaine D(M), tel que $\overset{o}{D}(M) \neq \emptyset$.*

*On suppose que $D(\Gamma) = \overline{D(M)} \;\; \theta \;\; \overline{D(M)}$.*

*Soit A une application quasi-paramonotone, demi-continue de $\overline{D(M)}$ dans $\mathcal{V}'$.*

*On suppose de plus qu'il existe $u_o \in \overline{D(M)}$, tel que :*

$$\lim_{||v|| \to +\infty} \frac{(Av+Mv, \Gamma_{v-u_o} v-u_o)}{||v||} = +\infty$$

*Alors $\forall f \in \mathcal{V}'$, $\exists u \in D(M)$ tel que : $f \in Au+Mu$ (surjectivité).*

*Si A est paramonotone, alors u est unique.*

Nous utiliserons le :

**LEMME 20** -

*Soit B un opérateur (éventuellement multivoque) maximal, monotone de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.*

*On suppose que $0 \in \overset{o}{D}(B)$.*

*$J_E$ étant l'injection canonique d'un sous-espace E de $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$ d'adjointe $J_E^*$. Alors $J_E^* \, B \, J_E$ est maximal monotone de E dans E', dual de E.*

**DEMONSTRATION** -

Supposons que $J_E^* \, B \, J_E$ ne soit pas maximal monotone, il existerait alors un élément $u^* \in E'$ et $u \in E$ tels que $\{u^*, u\} \notin$ graphe de $J_E^* \, B \, J_E$ et que :

(3.4) $\qquad (u^* - J_E^* \, B \, J_E \, v, \, u-v) \geq 0 \qquad \forall v \in D(B) \wedge E$

En tenant compte du fait que $J_E^* \, \partial\Psi_E \, J_E \, v = 0 \quad \forall v \in E$, on peut réécrire (3.4) sous la forme :

$$(u^*, u-v) - (Bv + \partial\Psi_E v, \, u-v) \geq 0 \quad \forall v \in D(B) \wedge E,$$

où $u^* \in E'$ est donc une fonctionnelle linéaire continue sur E, qui peut être prolongée à $\mathcal{V}$ tout entier par le théorème de Hahn-Banach, avec conservation de la norme, soit $\tilde{u}^* \in \mathcal{V}'$ le prolongement obtenu, qui vérifie :

$$u^* = J_E^* \tilde{u}^*, \text{ puisque :}$$

$$\forall w \in E \quad (u^*, w) = (\tilde{u}^*, w).$$

On en déduit que :

$$(\tilde{u}^* - Bv - \partial\Psi_E v, u-v) \geq 0$$

or, par hypothèse $0 \in \overset{\circ}{D(B)} \wedge E$, et nous pouvons appliquer le théorème de Rockafellar donc : $B + \partial\Psi_E$ est maximal monotone ; d'où $\{\tilde{u}^*, u\} \in$ graphe de $B + \partial\Psi_E$, c'est-à-dire $\tilde{u}^* \in Bu + \partial\Psi_E u$ où $u \in E$. D'où :

$$J_E^* \tilde{u}^* = u^* \in J^* B J_E u + J_u^* \partial\Psi_E J_E u = J_E^* B J_E u$$

contrairement à l'hypothèse $J_E^* B J_E$ non maximal.

q.e.d.

DEMONSTRATION DU THEOREME 19 -

Par une translation convenable, on se ramène au cas où $0 \in \overset{\circ}{D}(M)$. Par hypothèse $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$ ; appelons Bn la boule de rayon n, associée à la norme correspondante sur $\mathcal{V}$, diagonalement compatible avec $\Gamma$.

Soit $E_i \in \Phi$, que nous choisissons tel que $u_o \in E_i$. Soit $M_n = M + \partial\Psi_{Bn}$ (où $\partial\Psi_X$ note la sous différentielle de la fonction indicatrice du convexe X) comme $0 \in \overset{\circ}{D(M)} \wedge B_n$, d'après le Théorème 17 (de Rockafellar) $M_n$ est un opérateur maximal monotone.

Si d'autre part, $\phi(v) = J_i^* f - J_i^* A J_i v$ ; A étant demi continu de $\overline{D(M)}$ dans $\mathcal{V}'$, $\phi(v)$ est continue de $\overline{D(M)} \wedge B_n \wedge E_i$ dans E', d'où, par le lemme 18 (de Debrunner et Flor) : $\exists u_{n,i} \in \overline{D(M)} \wedge B_n \wedge E_i$ tel que :

$$(3.5) \qquad (f - Au_{n,i}) + M_n J_i v, v - u_{n,i}) \geq 0 \qquad \forall v \in D(J_i^* M_n J_i)$$

$$\text{où } D(J_i^* M_n J_i) = D(M) \wedge B_n \wedge E_i$$

Comme $0 \in \overset{\circ}{D}(M_n) \subset \overset{\circ}{D}(M) \wedge \overset{\circ}{B}_n$, et puisque $M_n$ est maximal, d'après le lemme 19, $J_i^* M_n J_i$ est maximal monotone.

D'où (3.5) implique que :

$\{J_i^*(f - Au_{n,i}), u_{n,i}\} \in$ graphe de $J_i^* M_n J_i$ ce qui s'écrit encore :

(3.6) $\quad J_i^*(f-Au_{n,i}) \in J_i^* M_n J_i u_{n,i}$ et $u_{n,i} \in D(M) \wedge B_n \wedge E_i$

ou encore, il existe $\chi_{u_{n,i}} \in M(u_{n,i})$ et $\eta_{u_{n,i}} \in \partial\Psi_{B_n}(u_{n,i})$ tels que :

$$J_i^* \chi_{u_{n,i}} + J_i^* \eta_{u_{n,i}} + J_i^* Au_{n,i} - J_i^* f = 0$$

Pour n assez grand $\partial\Psi_{B_n}(u_o) = 0$ (quand $u_o$ est intérieur à $B_n$).

Puisque $B_n$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$ , d'après la proposition 7, $\partial\Psi_{B_n}$ est opérateur monotone diagonal par rapport à $\Gamma$ , d'où en particulier, pour n assez grand :

$$(\eta_{u_{n,i}}, \Gamma_{u_{n,i}-u_o}(u_{n,i}-u_o)) \geq 0$$

et par conséquent, en utilisant le fait que $u_o \in E_i$, et i/ de la propriété $P_3$ des applications de type P.

$$\frac{(\chi_{u_{n,i}}+Au_{n,i}, \Gamma_{u_{n,i}}\, u_{n,i}-u_o)}{||u_{n,i}||} \leq$$

$$\frac{(\chi_{u_{n,i}}+Au_{n,i}+\eta_{u_{n,i}}, \Gamma_{u_{n,i}-u_o}(u_{n,i}-u_o))}{||u_{n,i}||} = \frac{(f,\Gamma_{u_{n,i}-u_o}(u_{n,i}-u_o)}{||u_{n,i}||}$$

Supposons que $||u_{n,i}|| \to \infty$ , alors, par hypothèse, le premier membre $\to +\infty$, mais, du fait que, par la propriété $P_1$ des applications de type P, et le théorème de la borne uniforme $||\Gamma_v||$ est uniformément borné, le dernier membre est borné, d'où la contradiction, et donc $||u_{n,i}||$ est borné, et par compacité on peut extraire une sous suite, encore appelée $u_{n,i}$ convergeant dans $E_i$ vers un élément $u_i$. $J_i^*f-J_i^*A\, u_{n,i}$ converge dans $E_i'$ vers $J_i^*f-J_i^*Au_i$.

Du fait que $u_{n,i}$ reste dans un borné de $E_i$ : pour n assez grand $\partial\Psi_{B_n} u_{n,i} = 0$. Alors $M_n u_{n,i} = M\, u_{n,i}$ ; aussi pour n assez grand, (3.6) s'écrit :

$$J_i^*(f-Au_{n,i}) \in J_i^* M J_i u_{n,i}$$

où, par hypothèse, M est maximal monotone, et $0 \in \overset{o}{D}(M)$ , donc, par le lemme 19, $J_i^* M J_i$ est maximal monotone, donc, propriété classique des opérateurs monotones maximaux : son graphe est fermé. On en déduit :

(3.7) $\quad J_i^*(f-Au_i) \in J_i^* M J_i u_i$

Nous avons obtenu le résultat souhaité en dimension finie.

- Obtention du résultat dans $\mathcal{V}$ -

Estimation a priori :

$\forall E_i \in \Phi$ avec $u_o \in E_i$, on a :

$$\frac{(Au_i + \chi_{u_i}, \Gamma_{u_i - u_o}(u_i - u_o))}{\| u_i \|} \leq \frac{(f, \Gamma_{u_i - u_o}(u_i - u_o))}{\| u_i \|}$$

ou $\chi_{u_i} \in Mu_i$ ; et on conclut comme précédemment, dans le cas des estimations à priori pour $\| u_{n,i} \|$.

Puisque $\mathcal{V}$ est réflexif, selon $\tilde{\Phi}$, ultrafiltre plus fin que $\Phi$ :

(3.8) - $u_i$ converge faiblement vers $u$.

(3.9) - d'après la propriété de compacité $P_2$, des applications de type P

$\forall E_i \in \tilde{\Phi}$ : $\lim\limits_{E_i \in \tilde{\Phi}}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}', \mathcal{V}')$ de $\Gamma^*_{u_i - u_j} = \Gamma^*_{u_i}$

où $\Gamma^*_{u_i} \in \overline{\Gamma^*(D(\Gamma))}$

- $\forall E_i$, $E_j \in \tilde{\Phi}$ avec $u_o$, $u \in E_i \subset E_j$

Formons : (avec $\chi_{u_i} \in Mu_i$ ; $\chi_{u_j} \in Mu_j$)

$$Y_{i,j} = ((Au_i + \chi_{u_i} - J_i^* f) - (Au_j + \chi_{u_j} - f), \Gamma_{u_i - u_j}(u_i - u_j))$$
$$= ((Au_i + \chi_{u_i} - f, \Gamma_{u_i - u_j}(u_i - u_j))$$

Cette dernière égalité étant obtenue, en utilisant l'équation (3.7) dans $E_j$, et i/ de la propriété $P_3$ des applications de type P.

On a encore :

$$Y_{i,j} = (\Gamma^*_{u_i - u_j}(Au_i + \chi_{u_i} - f), u_i - u_j)$$

En utilisant (3.8) et (3.9), on obtient :

$$\lim_{E_j \in \tilde{\Phi}} Y_{i,j} = (\Gamma^*_{u_i}(Au_i + \chi_{u_i} J_i^* B), u_i - u) = (Au_i - \chi_{u_i} - f, \Gamma_{u_i}(u_i - u)) = 0$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant le fait que $u \in E_i$, et i/ de la propriété $P_3$ des applications de type P.

Par ailleurs, puisque A est quasi-paramonotone par rapport à $\Gamma$, et M monotone diagonal :

$$Y_{i,j} \geq \delta(\| u_i - u_j \|) - |(Cu_i - Cu_j, \Gamma_{u_i - u_j}(u_i - u_j))|$$

D'où, en utilisant la semi-continuité inférieure de la norme pour la topologie faible, et le fait que l'opérateur C est compact :

$$0 \geq \delta(||u_i-u||) - (Cu_i-Cu,\Gamma_{u_i}(u_i-u))$$

et, en passant à la limite dans cette dernière inégalité, pour $E_i \in \Phi$ : $Cu_i$ converge fortement vers Cu, et $\Gamma_{u_i}(u_i-u)$ reste borné dans $\mathcal{V}$.

D'où : $\lim_{E_i \in \tilde{\Phi}} \delta(||u_i-u||) = 0$

et puisque $\delta \in \Delta$, selon $\tilde{\Phi}$ $u_i$ converge fortement vers u.

D'où, A étant demi continu, $Au_i$ converge faiblement vers Au, et $\chi\, u_i$ converge faiblement vers f-Au.

Par une propriété classique de fermeture du graphe d'un opérateur monotone maximal (Cf. Browder [12], lemme 14), on obtient que $\chi_u \in M(u)$, d'où $f \in Au + Mu$.

Unicité - On suppose A paramonotone.

Soit deux solutions $u_1$ et $u_2$ distinctes, on aurait pour $\chi u_1 \in Mu_i$ et $\chi u_2 \in M(u_2)$.

$$\delta(||u_1-u_2||) \leq (Au_1+\chi_{u_1}-f - Au_2-\chi_{u_2}-f, \Gamma_{u_1-u_2}(u_1-u_2)) = 0$$

d'où $u_1=u_2$. q.e.d.

REMARQUE -

L'hypothèse $\overset{o}{D}(M) \neq \emptyset$ est assez restrictive en particulier, il semble difficile d'appliquer ce résultat à des problèmes abstraits d'évolution.

Par contre, on peut appliquer le Théorème 19 à certaines inéquations stationnaires, comportant de plus des fonctions convexes semi-continues inférieurement, de domaine d'intérieur non vide, et convenablement "diagonales".

2ème METHODE -

(Par passage à "l'équation intégrale").

Le rôle joué dans la première méthode par le lemme de Debrunner et Flor peut être tenu ici, par un résultat de Browder que nous énonçons ici, sous une forme simplifiée.

LEMME 21 -

*Soient E un espace de dimension finie, X un convexe compact de E, $\mathcal{A}$ une application continue de X dans E.*

*Alors, pour tout $f \in E'$, il existe $u \in X$, tel que :*

$$(f - \mathcal{A}u, v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in X$$

Soit $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ deux espaces de Banach, $\mathcal{W}$ étant réflexif. Soit $\mathcal{V}'$ le dual de $\mathcal{V}$, et $\mathcal{W}'$ le dual de $\mathcal{W}$, avec les inclusions :

$\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \subset \mathcal{W}'$, les injections étant continues, et chaque espace étant dense dans le suivant.

Soit $\| \;\|_{\mathcal{V}}$ (respectivement $\| \;\|_{\mathcal{W}}$) la norme de $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$) et $\| \;\|^*_{\mathcal{V}}$ (resp. $\| \;\|^*_{\mathcal{W}}$) la norme de $\mathcal{V}'$ (resp. $\mathcal{W}'$).

THEOREME 22 -

*Soit $\Gamma$ une application de type P, relativement à $\mathcal{W}$.*

*Soit X un convexe faiblement compact de $\mathcal{W}$, diagonalement compatible avec $\Gamma$, avec $D(\Gamma) = X \theta X$.*

*Soit $A = A_1 + L$ où :*

*- $A_1$ est un opérateur demi continu de X, muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$, paramonotone relativement à $\mathcal{V}$, c'est-à-dire :*

$\exists \delta \in \Delta$ *avec :*

$$(A_1 u - A_1 v, \Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \delta(\|u-v\|_{\mathcal{V}}) \qquad \forall u, v \in X$$

*- C est un opérateur compact de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}'$ (donc A vérifie une propriété du type quasi-paramonotonie).*

*- Soit M un opérateur, monotone, diagonal par rapport à $\Gamma$, hemicontinu de X dans $\mathcal{W}'$.*

*Alors,* $\forall f \in \mathcal{W}'$ $\quad \exists u \in X$, *tel que :*

*-* $(Au + Mu - f, v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in X$

*- u est unique si A est paramonotone.*

DEMONSTRATION -

Par une translation convenable, on se ramène au cas où $0 \in X$.

Soit $Bu = Au + Mu - f$.

Du fait que $A_1$ est demi continu de $X$, muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$, que $C$ est compact de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}'$, et que $M$ est monotone hemicontinue de $X$ dans $\mathcal{W}'$, $B$ est continu sur les traces sur $X, \subset \mathcal{W}$, des espaces de dimension finie.

Soit $E_n \in \Phi$ ($\Phi$ a été introduit dans la propriété $P_3$ des applications de type P, Cf. définition 1), par le lemme 20 $\exists u_n \in E_n$, tel que :

(3.10) $\qquad - (Bu_n, v-u_n) \leq 0 \quad \forall v \in E_n \wedge X$

Puisque X est faiblement compact, $\overline{\Gamma^*(D(\Gamma))}$ est compact dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{W}', \mathcal{W}')$, et que C est compact de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}'$, selon un ultrafiltre $\tilde{\Phi}$, plus fin que $\Phi$.

(3.11) $\qquad$ - $u_n$ converge faiblement vers $u$ dans $\mathcal{W}$.

(3.12) $\qquad$ - $\Gamma^*_{u_n-u}$ Bu, converge fortement vers $\Gamma^*_x Bu$ dans $\mathcal{W}'$.

(3.13) $\qquad$ - $Cu_n$ converge fortement vers $Cu$ dans $\mathcal{W}'$.

$\forall E_n \in \tilde{\Phi}$ avec $u \in E_n$, formons :

$$Y_n = (Bu_n - Bu, \ \Gamma_{u_n-u}(u_n-u))$$

Par (3.10), et le fait que X est diagonalement compatible avec $\Gamma$, on a :

$$(Bu_n, \Gamma_{u_n-u}(u_n-u)) \leq 0.$$

D'où :

$$\text{i/ } Y_n \leq -(Bu, \Gamma_{u_n-u}(u_n-u)) = -(\Gamma^*_{u_n-u}Bu, u_n-u)$$

En utilisant l'hypothèse de quasi-paramonotonie de A, et le fait que M est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$, on obtient :

$$\text{ii/ } \delta(||u_n-u||) - |(Cu_n-Cu, \Gamma_{u_n-u}(u_n-u))| \leq Y_n$$

Passons à la limite, selon $\tilde{\Phi}$ :

- En utilisant (3.11), (3.12), on obtient :

$$\lim_{E_n \in \tilde{\Phi}} - (\Gamma^*_{u_n-u} Bu, u_n-u) = 0$$

- D'après (3.13), et le théorème de la borne uniforme appliqué à $||\Gamma_{u_n-u}||_{\mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W})}$, et à $||u_n-u||_{\mathcal{W}}$, on a :

$$\lim_{E_n \in \tilde{\Phi}} |(Cu_n - Cu, \Gamma_{u_n-u} (u_n-u))| = 0$$

D'où, en tenant compte des inégalités i/ et ii/

$$\lim_{E_n \in \tilde{\Phi}} \delta(||u_n-u|| \quad ) = 0$$

et, comme $\delta \in \Delta$, selon $\tilde{\Phi}$, $u_n$ converge fortement vers u dans $\mathcal{V}$.

$A_1$ est demi continue de X, muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$, d'où : selon $\tilde{\Phi}$, $A_1 u_n$, converge faiblement vers $A_1u$ dans $\mathcal{V}'$.

Par suite, en tenant compte de l'inclusion $\mathcal{V}' \subset \mathcal{W}'$, $Au_n$ converge faiblement vers Au dans $\mathcal{W}'$.

En prenant v = u dans (3.10), on obtient :

$(Bu_n, u_n-u) \leq 0$

C'est-à-dire : $(Mu_n, u_n-u) \leq (A_1u_n, u_n-u) + (Cu_n - f, u_n-u)$

où l'on a :

$$-\lim_{E_n \in \tilde{\Phi}} (A_1u_n, u_n-u) = 0$$

car $u_n$ converge fortement vers u dans $\mathcal{V}$, et $A_1u_n$ converge faiblement vers $A_1u$ dans $\mathcal{V}'$, et reste donc borné dans $\mathcal{V}'$.

$$-\lim_{E_n \in \tilde{\Phi}} (Cu_n - f, u_n-u) = 0$$

car, selon $\tilde{\Phi}$, $Cu_n-f$ converge fortement vers Cu-f dans $\mathcal{W}'$, et $u_n-u$ converge faiblement vers 0, dans $\mathcal{W}$.

D'où :

$$\lim_{E_n \in \tilde{\Phi}} \mathrm{Sup} \; (Mu_n, u_n - u) \leq 0$$

M étant monotone, hemicontinu, est pseudo monotone, on a donc :

$$(Mu, u-v) \leq \liminf_{E_n \in \tilde{\Phi}} \; (Mu_n, u_n - v)$$

Or, $\forall v \in X$, et $\forall E_n \in \tilde{\Phi}$, tel que $v \in E_n$
on a :

$$(Mu_n, v-u_n) \leq (Au_n - f, v-u_n)$$

D'où

$$-(Mu, v-u) \leq \limsup_{E_n \in \tilde{\Phi}} \; (Au_n - f, v-u_n)$$

$$= (Au - f, v-u)$$

<u>Unicité</u> -

Soit $u_1$, $u_2$ deux solutions distinctes du problème considéré.

Du fait que X est diagonalement compatible avec $\Gamma$, on obtient :

$$-(Bu_1, \Gamma_{u_2-u_1}(u_2-u_1)) \leq 0$$

$$+(Bu_2, \Gamma_{u_2-u_1}(u_2-u_1)) \leq 0$$

En ajoutant membre à membre ces deux inégalités, du fait que A est paramonotone, par rapport à $\mathcal{V}$, et M est monotone diagonale par rapport à $\Gamma$, on a :

$$\delta(||u_2-u_1||) \leq (Bu_2-Bu_1, \Gamma_{u_2-u_1}(u_2-u_1)) \leq 0$$

D'où : $\qquad u_2 = u_1$

q.e.d.

<u>REMARQUE</u> -

L'hypothèse $A_1$ paramonotone est inutile, pour obtenir l'existence, si l'injection de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{V}$ est compacte, on obtient alors directement la convergence forte de $u_n$ dans $\mathcal{V}$.

Dans la suite du §3.2, on fera $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, mais nous reprendrons le cas $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$ pour traiter de la méthode de régularisation elliptique.

<u>COROLLAIRE 23</u> -

*Soient* $\mathcal{V}$ *un espace de Banach réflexif, et* $X \subset \mathcal{V}$*, un convexe faiblement compact, et d'intérieur non vide, tel que* $0 \in \mathring{X}$*.*

*Soit* $\Gamma$ *une application de type P, telle que* $D(\Gamma) = X \theta X$*.*

*On suppose X diagonalement compatible avec* $\Gamma$*.*

*Soit A un opérateur, demi continu de X, muni de la topologie induite par* $\mathcal{V}$*, dans* $\mathcal{V}'$*, quasi-paramonotone, relativement à* $\Gamma$*.*

*Soit M un opérateur monotone, diagonal, par rapport à* $\Gamma$ *, hemi-continu de X dans* $\mathcal{V}'$*, et tel que* $M(0) = 0$*.*

*On suppose de plus qu'il existe* $u_0 \in X$*, tel que :*

$$(Au + Mu, \Gamma_{u-u_0}(u-u_0)) > 0 \qquad \forall u \in \partial X$$

*où* $\partial X$ *est la frontière de X. Alors il existe* $u \in \mathring{X}$*, tel que :*

$$Au + Mu = 0$$

*Si A est para-monotone, alors la solution u est unique.*

<u>DEMONSTRATION</u> -

Puisque X est faiblement compact, d'après le <u>Théorème 22</u>, il existe $u \in X$, tel que :

$$(3.12) \qquad -(Au + Mu, v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in X.$$

D'où, puisque X est diagonalement compatible avec $\Gamma$ , application de type P :

$$-(Au + Mu, \Gamma_{u-u_0}(v-u)) \leq 0 \qquad \forall v \in X$$

Par suite, prenant $v = u_0$, on obtient :

$$(Au + Mu, \Gamma_{u-u_0}(u-u_0)) \leq 0$$

Donc $u \in \mathring{X}$, d'où :

$$Au + Mu = 0$$

<u>Unicité</u> -

Se vérifie comme au <u>Théorème 19</u>.

<u>THEOREME 24</u> -

*Soit* $\mathcal{V}$ *un espace de Banach réflexif, diagonalement compatible avec* $\Gamma$ *, application de type P. On suppose de plus qu'il existe un opérateur de dualité J (<u>monotone, hemicontinu, univoque, puisque</u>* $\mathcal{V}$ *<u>est réflexif</u>), de* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathcal{V}'$*, diagonal par rapport à* $\Gamma$ *.*

*- Soit A un opérateur borné, demi-continu, de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, quasi-paramonotone, par rapport à $\Gamma$.*

*- Soit K un opérateur, hemicontinu de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}$, monotone diagonal par rapport à $\Gamma^*$, tel que $K(0) = 0$.*

*On suppose que pour tout $u_o \in \mathcal{V}$*

$$\lim_{||u||\to\infty} \frac{(Au, {}_{u-u_o}(u-u_o))}{||u||} = +\infty$$

*alors I étant l'identité dans $\mathcal{V}$, I + KA est surjectif. Si de plus A est paramonotone, alors I + KA est bijectif de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}$.*

REMARQUE -

La condition de paracoercivité que nous tutilisons ici est moins générale que celle utilisée précédemment (ou il suffisait qu'il existe u $u_o \in \mathcal{V}$ tel que.... etc...).

On peut par exemple obtenir la condition ci-dessus dans le cas suivant :

Soit C un opérateur compact de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, tel que :

$$\lim_{||u||\to\infty} \frac{||Cu||^*}{||u||} = 0$$ (prendre par exemple $Cu = u^{1/2}$ dans un espace $H^1(\Omega)$).

Soit A vérifiant la condition de quasi-paramonotonie :

$(Au-Av, \Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \alpha||u-v||^2 - |(Cu-Cv, \Gamma_{u-v}(u-v))|$

Soit $\beta$ tel que $0 < \beta < \alpha$

$\forall u_o \in$ v on a :

$$\frac{(Au, \Gamma_{u-u_o}(u-u_o))}{||u||} \geq (\alpha - \beta)\frac{||u-u_o||^2}{||u||} + \left(\beta - \frac{k||Cu||^*}{||u-u_o||}\right)\frac{||u-u_o||^2}{||u||^2}$$

$$- \frac{|Cu_o, \Gamma_{u-u_o}(u-u_o)|}{||u||} + \frac{|(Au_o, \Gamma_{u-u_o}(u-u_o)|}{||u||}$$

où $k = \sup ||\Gamma_{u-u_o}||$ qui existe par le Théorème de la borne uniforme. Tous les termes du second membre sont bornés, à l'exception du premier qui tend vers $+\infty$, quand $||u|| \to +\infty$.

REMARQUE -

Les hypothèses $\mathcal{V}$ est un espaces de Banach diagonalement compatible avec $\Gamma$, et, il existe un opérateur de dualité J monotone, diagonal, par rapport à $\Gamma$, sont probablement liées :

La première implique l'existence d'un "opérateur de dualité multivoque", monotone diagonal, peut-on à partir de là, construire un opérateur de dualité univoque monotone diagonal ?

EXEMPLE -

Nous nous replaçons dans le cadre de l'exemple 2 et de la proposition 10, dont nous reprenons les notations :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i \quad \text{où } \mathcal{V}_i \text{ est un espace de Banach réflexif } \forall i=1,\dots,r$$

Nous savons, d'après la proposition 10, que $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec l'application $\Gamma$, construite dans l'exemple 2.

Les espaces $\mathcal{V}_i$ étant réflexifs, il existe des opérateurs de dualité $J_i$ de $\mathcal{V}_i$ dans $\mathcal{V}_i'$.

Soit J l'opérateur de dualité de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ associé aux $J_i$ par :

$$(Ju,v) = \sum_{i=1}^{r} (J_i u_i, v_i)_i$$

J est bien un opérateur de dualité :

$$(Ju,u) = \sum_{i=1}^{r} (J_i u_i, u_i) = \sum_{i=1}^{r} ||u_i||_i^2 = ||u||^2$$

Formons :

$$(Ju - Jv, \Gamma_w(u-v)) = (J_j u_j - J_j v_j,\ u_j - v_j) \geq 0$$

$$\forall u,v \in \mathcal{V}, \quad \forall w \in D(\Gamma).$$

donc cet opérateur de dualité J est bien diagonal par rapport à $\Gamma$.

LEMME 25 -

*Soit M un opérateur (éventuellement multivoque), de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ monotone diagonal, par rapport à $\Gamma$, et admettant un inverse $M^{-1}$ univoque, alors $M^{-1}$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma^*$ (Cf. Définition 4).*

DEMONSTRATION -

Par hypothèse M est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$, c'est-à-dire :

$$(u^* - v^*, \Gamma_w(u-v)) \geq 0 \qquad \forall u,v \in D(M),\ u^* \in M(u),\ v^* \in M(v), \text{ et } \forall w \in D(\Gamma).$$

Puisque M est inversible, le premier membre de cette inégalité s'écrit :

$$(u^* - v^*, \Gamma_w(M^{-1}u^* - M^{-1}v^*)) = (M^{-1}u^* - M^{-1}v^*, \Gamma_w^*(u^* - v^*)) \geq 0$$

$$\forall u^*, v^* \in \mathcal{V} \quad \forall w \in D(\Gamma).$$

Donc $M^{-1}$ est bien monotone diagonal par rapport à $\Gamma^*$.

q.e.d.

Démonstration du Théorème 24 -

Soit $J^* = J^{-1}$ inverse de l'opérateur de dualité de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, $J^*$ est un opérateur de dualité de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}$, monotone diagonal par rapport à $\Gamma^*$, d'après le lemme 25.

Soit $K_\varepsilon = K + \varepsilon J^*$

$K_\varepsilon$, comme somme de deux opérateurs, monotones, hemicontinus, diagonaux par rapport à $\Gamma^*$, vérifie également ces propriétés.

On sait (Cf. [4], Corollaire 19) que $K_\varepsilon^{-1}$ existe, est monotone, borné, demi-continu, de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, et, d'après le lemme 25, $K_\varepsilon^{-1}$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.

Soit $f \in \mathcal{V}$, vous voulons résoudre l'équation : $u + KAu = f$.

Nous considérons l'équation perturbée :

(3.14) $\quad u_\varepsilon + K_\varepsilon A u_\varepsilon = f.$

et, comme $K(0) = K_\varepsilon^{-1}(0) = 0$, et donc (3.14) est équivalent à :

(3.15) $\quad K_\varepsilon^{-1}(u_\varepsilon - f) + Au_\varepsilon = 0$

Soit $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - f$, et $T(\omega_\varepsilon) = A(\omega_\varepsilon + f)$

(3.15) s'écrit :

(3.16) $\quad K_\varepsilon^{-1}(\omega_\varepsilon) + T(\omega_\varepsilon) = 0$

Du fait que $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$, il existe une boule unité $B_1$, associée à une norme $\phi$ sur $\mathcal{V}$, strictement équivalente à $|| \ ||_{\mathcal{V}}$, telle que $B_1$ soit diagonalement compatible avec $\Gamma$.

Il en va de même pour toute boule $B_\rho$, homothétique à $B_1$, de rayon $\rho$.

En utilisant la propriété de para-coercivité de A, on obtient :

$$\omega_0 \in \mathcal{V} \quad \lim_{||\omega|| \to \infty} \frac{(T\omega, \Gamma_{\omega-\omega_0}(\omega-\omega_0))}{||\omega||} = +\infty$$

où l'on choisit $\omega_0 = 0$ (c'est-à-dire $u_0 = f$). En utilisant le fait que $K_\varepsilon^{-1}$ est monotone diagonale, par rapport à $\Gamma$, et que $K_\varepsilon^{-1}(0) = 0$, on a :

$$\lim_{||\omega|| \to +\infty} \frac{(K_\varepsilon^{-1}(\omega) + T\omega, \Gamma_\omega \omega)}{||\omega||} \geq \lim_{||\omega|| \to \infty} \frac{(T\omega, \Gamma_\omega \omega)}{||\omega||} = +\infty$$

Donc, il existe une boule $B_\rho$, indépendante de $\varepsilon$, pour $\rho$ assez grand, telle que :

$(K_\varepsilon^{-1}(\omega) + T(\omega), \Gamma_\omega \omega) > 0 \qquad \forall \omega \in \partial B_\rho$ (frontière de $B_\rho$)

Nous sommes dans les conditions d'application du Corollaire 23, nous savons donc qu'il existe $\omega_\varepsilon \in B_\rho$ solution de (3.16), donc $u_\varepsilon$ solution de (3.14).

$B_\rho$ est un borné de $\mathcal{V}$, indépendant de $\varepsilon$, donc $\omega_\varepsilon$, et par suite $u_\varepsilon$ restent dans un borné de $\mathcal{V}$ quand $\varepsilon \to 0$.

Passage à la limite -

$u_\varepsilon$ étant borné, A étant un opérateur borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, $J^*Au_\varepsilon$ est borné dans $\mathcal{V}$, et, par suite, $\varepsilon JAu_\varepsilon \to 0$ dans $\mathcal{V}$ fort, quand $\varepsilon \to 0$.

D'où, d'après (3.14), $u_\varepsilon + KAu_\varepsilon - f \to 0$ dans $\mathcal{V}$ fort quand $\varepsilon \to 0$.

- En utilisant la réflexivité de $\mathcal{V}$, la propriété de compacité $P_1$ de $\Gamma$, application de type P, et le fait que $Au_\varepsilon$ reste dans un borné de $\mathcal{V}'$, on met en évidence un ultrafiltre $\mathcal{U}$, plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $R^+$, tel que :

(3.17) $\lim\limits_{\varepsilon_1 \in \mathcal{U}} u_{\varepsilon_1} = u$ dans $\mathcal{V}$ faible

(3.18) $\lim\limits_{\varepsilon_1 \in \mathcal{U}} Au_{\varepsilon_1} = g$ dans $\mathcal{V}'$ faible

Soit $\varepsilon_2, \varepsilon_1 \in \mathcal{U}$ et notons $\Gamma_{\varepsilon_2,\varepsilon_1} = \Gamma_{u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1}}$

(3.19) $\lim\limits_{\varepsilon_1 \in \mathcal{U}} \Gamma_{\varepsilon_2,\varepsilon_1} = \Gamma_{\varepsilon_2}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{V})$

où $\Gamma_{\varepsilon_2} \in \overline{\Gamma(D(\Gamma))}$ compact de $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

Formons :

$$Y_{\varepsilon_2,\varepsilon_1} = (Au_{\varepsilon_2} - Au_{\varepsilon_1}, \Gamma_{\varepsilon_2,\varepsilon_1}((u_{\varepsilon_2} + KAu_{\varepsilon_2} - f) - (u_{\varepsilon_1} + KAu_{\varepsilon_1} - f))$$

En utilisant (3.17), (3.18), (3.19), et le fait que :

$\lim\limits_{\varepsilon_1 \in \mathcal{U}} u_{\varepsilon_1} + KAu_{\varepsilon_1} - f = 0$ dans $\mathcal{V}$ fort, on obtient :

$$Y_{\varepsilon_2} = \lim_{\varepsilon_1 \in \mathcal{U}} Y_{\varepsilon_2,\varepsilon_1} = (Au_{\varepsilon_2} - g, \Gamma_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2} + KAu_{\varepsilon_2} - f)$$

Nous pouvons écrire également $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ sous la forme :

$$Y_{\varepsilon_2,\varepsilon_1} = (Au_{\varepsilon_2}-Au_{\varepsilon_1},\ \Gamma_{\varepsilon_2,\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}-u_{\varepsilon_1}))+(KAu_{\varepsilon_2}-KAu_{\varepsilon_1},\Gamma^*_{\varepsilon_2,\varepsilon_1}(Au_{\varepsilon_2}-Au_{\varepsilon_1}))$$

et, comme K est diagonal par rapport à $\Gamma^*$, et A quasi-paramonotone par rapport à $\Gamma$, on obtient :

$$Y_{\varepsilon_2,\varepsilon_1} \geq \delta(||u_{\varepsilon_2}-u_{\varepsilon_1}||) - |(Cu_{\varepsilon_2}-Cu_{\varepsilon_1},\Gamma_{\varepsilon_2,\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2}-u_{\varepsilon_1}))|$$

En utilisant le fait que C est compact, ainsi que (3.17), (3.19), et la semi continuité inférieure de la norme, pour la topologie faible, on obtient :

$$Y_{\varepsilon_2} \geq \delta(||u_{\varepsilon_2}-u||) - |(Cu_{\varepsilon_2}-Cu,\ \Gamma_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}-u))|$$

Or :

$$|Y_{\varepsilon_2}| \leq ||Au_{\varepsilon_2}-g||^*||\Gamma_{\varepsilon_2}||\ ||u_{\varepsilon_2}+KAu_{\varepsilon_2}-f||.$$

Par le théorème de la borne uniforme $||\Gamma_{\varepsilon_2}||$ est uniformément borné, $||Au_{\varepsilon_2}-g||^*$ également puisque $u_{\varepsilon_2}$ est borné dans $\mathcal{V}$, et que A est un opérateur borné.

Comme $\lim\limits_{\varepsilon_2\in\mathcal{U}} ||u_{\varepsilon_2}+KAu_{\varepsilon_2}-f|| = 0$, on en déduit :

$$\lim_{\varepsilon_2\in\mathcal{U}} Y_{\varepsilon_2} = 0.$$

Par ailleurs, comme C est compact, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon_2\in\mathcal{U}} |(Cu_{\varepsilon_2}-Cu,\ \Gamma_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}-u))| = 0$$

D'où $\lim\limits_{u_\varepsilon\in\mathcal{U}} \delta(||u_\varepsilon-u||) = 0$

et comme $\delta\in\Delta$, selon l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ :

- $u_\varepsilon$ converge fortement vers u dans $\mathcal{V}$.
- A étant demi-continu, $Au_\varepsilon$ converge faiblement vers Au.
- $KAu_\varepsilon = f - u_\varepsilon - \varepsilon JAu_\varepsilon$ converge fortement vers f-u.

D'où $\lim\limits_{\varepsilon\in\mathcal{U}} (KAu_\varepsilon,\ Au_\varepsilon) = (f-u,\ Au)$

Mais, K étant monotone hemicontinue, est de type M, selon Brézis ([3], [4]), donc, d'après la propriété de définition des applications de type M, on obtient :

$$KAu = f-u \quad \text{et} \quad u + KAu = f.$$

Unicité -

On suppose A paramonotone, et soient $u_1$ et $u_2$ deux solutions distinctes de $u + KAu = f$.

On aurait :

$$u_1 + KAu_1 = u_2 + KAu_2.$$

Ou encore : $Z = (u_1 - u_2 + KAu_1 - KAu_2, \Gamma^{*}_{u_1-u_2}(u_1 - u_2)) = 0$

Or :

$$Z = (Au_1 - Au_2, \Gamma_{u_1-u_2}(u_1-u_2)) + (KAu_1-KAu_2, \Gamma^{*}_{u_1-u_2}(Au_1-Au_2))$$

En utilisant les hypothèses : A-paramonotone, et K-monotone diagonal par rapport à $\Gamma^{*}$, on obtient :

$$0 = Z \geq \delta(||u_2-u_1||) \Longrightarrow u_2 = u_1$$

q.e.d.

THEOREME 26 -

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif, diagonalement compatible avec , application de type P. On suppose de plus qu'il existe un opérateur de dualité J de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, diagonal par rapport à $\Gamma$.*

*- Soit A un opérateur borné, demi-continu, de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, quasi-paramonotone, par rapport à $\Gamma$.*

*- On suppose que $\forall u_0 \in \mathcal{V}$ :*

$$\lim_{||u|| \to \infty} \frac{(Au, \Gamma_{u-u_0}(u-u_0))}{||u||} = +\infty$$

*Soit M un graphe monotone, maximal, diagonal par rapport à $\Gamma$. Alors A + M est surjectif, au sens que : $\forall f \in \mathcal{V}'$ $\exists u \in \mathcal{V}$, tel que $f \in Au + Mu$.*

*Si de plus A est paramonotone, alors u est unique.*

DEMONSTRATION -

Par une translation convenable dans $\mathcal{V}$, on se ramène, au cas où $0 \in D(M)$, et ensuite par une deuxième translation dans $\mathcal{V}'$ cette fois, on se ramène à $M(0) = 0$.

Considérons maintenant l'équation perturbée :

(3.20) $\quad f \in (\lambda J + M)\, u_\lambda + Au_\lambda$

où J est l'opérateur de dualité, diagonal par rapport à $\Gamma$.

Puisque M est un graphe monotone maximal, on sait (Cf. Rockafellar [48] ) que $(\lambda J + M)^{-1}$ est un opérateur monotone univoque, demi continue de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}$. Donc (3.20) est équivalente à :

$$u_\lambda + (\lambda J + M)^{-1} (Au_\lambda - f) = 0$$

Soit $Bu = Au - f$.

- B est un opérateur quasi-paramonotone par rapport à $\Gamma$, qui vérifie la même condition de para-coercivité que A.

- J et M sont diagonaux par rapport à $\Gamma$, donc, d'après le lemme 25 $(\lambda J + M)^{-1}$ est diagonal par rapport à $\Gamma^*$, et $(\lambda J + M)^{-1}(0) = 0$.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème 24, d'où l'existence de $u_\lambda$ solution de (3.20).

Estimations à priori -

On peut écrire (3.20) sous la forme :

$\exists\ \chi_\lambda \in Mu_\lambda$ tel que :

$Au_\lambda + \chi_\lambda + \lambda Ju_\lambda - f = 0$

En utilisant les propriétés suivantes :

- $M + \lambda J$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.
- $0 \in (M + \lambda J)(0)$

on obtient :

$$\frac{(Au_\lambda , \Gamma_{u_\lambda} u_\lambda )}{||u_\lambda||} \leq \frac{(Au_\lambda + \chi_\lambda + \lambda Ju_\lambda, \Gamma_{u_\lambda} u_\lambda)}{||u_\lambda||} = \frac{(f, \Gamma_{u_\lambda} u_\lambda)}{||u_\lambda||}$$

Si, quand $\lambda \to 0$, $||u_\lambda|| \to \infty$, on constate que le second membre de l'inégalité ci-dessus reste borné car :

$$|(f, \Gamma_{u_\lambda} u_\lambda)| \leq ||f||^* . k\, ||u_\lambda||$$

où $k = \sup_\lambda ||\Gamma_{u_\lambda}||$ qui existe par la propriété $P_1$ des applications de type P, et le Théorème de la borne uniforme.

D'où, en utilisant l'hypothèse de paracoercivité : $|| u_\lambda ||$ est borné indépendamment de $\lambda$.

Passage à la limite -

Lorsque $\lambda \to 0$, $u_\lambda$ étant borné, $\lambda J u_\lambda$ converge fortement vers 0 dans $\mathcal{V}'$, et par suite :

(3.21) $$Au_\lambda^{\bullet} + \chi_\lambda - f \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{V}' \text{ fort.}$$

En utilisant la réflexivité de $\mathcal{V}$, et la propriété $P_2$ des applications de type P, on met en évidence l'existence d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$, plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $R^+$, tel que :

(3.22) $$\lim_{\lambda \in \mathcal{U}} u_\lambda = u \quad \text{dans } \mathcal{V} \text{ faible}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{U}$ posons $\Gamma_{\lambda_1,\lambda_2} = \Gamma_{u_{\lambda_1}-u_{\lambda_2}}$

(3.23) $$\lim_{\lambda_2 \in \mathcal{U}} \Gamma^*_{\lambda_1,\lambda_2} = \Gamma^*_{\lambda_1} \quad \text{dans } \mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}')$$

où $\Gamma^*_{\lambda_1} \in \overline{\Gamma^*(D(\Gamma))}$, qui, par hypothèse est un compact de $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}')$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{U}$, formons :

$$Y_{\lambda_1,\lambda_2} = (\Gamma^*_{\lambda_1,\lambda_2}((Au_{\lambda_1} + \chi_{\lambda_1} - f) - (Au_{\lambda_2} + \chi_{\lambda_2} - f)),\ u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2})$$

En utilisant (3.21), (3.22), (3.23), on obtient que :

(3.24) $$Y_{\lambda_1} = \lim_{\lambda_2 \in \mathcal{U}} Y_{\lambda_1,\lambda_2} = (Au_{\lambda_1} + \chi_{\lambda_1} - f,\ \Gamma_{\lambda_1}(u_{\lambda_1} - u))$$

On peut réécrire $Y_{\lambda_1,\lambda_2}$ sous la forme :

$$Y_{\lambda_1,\lambda_2} = (Au_{\lambda_1} - Au_{\lambda_2}, \Gamma_{\lambda_1,\lambda_2}(u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2})) + (\chi_{\lambda_1} - \chi_{\lambda_2}, \Gamma_{\lambda_1,\lambda_2}(u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}))$$

En utilisant les hypothèses :

- A quasi-paramonotone.
- M, monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.

On obtient :

$$Y_{\lambda_1,\lambda_2} \geq \delta(\|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|) - |(Cu_{\lambda_1} - Cu_{\lambda_2}, \Gamma_{\lambda_1,\lambda_2}(u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}))|$$

On utilise ici :

- la semi continuité inférieure de la norme pour la topologie faible (3.22), (3.23), et l'hypothèse C, compacte, d'où l'on déduit :

$$Y_{\lambda_1} \geq \delta(||u_{\lambda_1}-u||) - |(Cu_{\lambda_1}-Cu, \Gamma_{\lambda_1}(u_{\lambda_1}-u)|$$

or $\lim\limits_{\lambda_1 \in \mathcal{U}} Y_{\lambda_1} = 0$, par (3.21), (3.24) et le fait que

$||\Gamma_{\lambda_1}(u_{\lambda_1}-u)|| \leq k\ ||u_{\lambda_1}-u||$ ou $k = \sup\limits_{\lambda_1} ||\Gamma_{\lambda_1}||$ qui existe par le

<u>Théorème de la borne uniforme</u>, <u>et la propriété</u> $P_2$, <u>des applications de type P.</u>

D'autre part :

$$Z_{\lambda_1} = |(Cu_{\lambda_1}-Cu, \Gamma_{\lambda_1}(u_{\lambda_1}-u))| \leq ||Cu_{\lambda_1}-Cu||^{*}.\ k\ ||u_{\lambda_1}-u||.$$

Comme C est compact :

$$\lim_{\lambda_1 \in \mathcal{U}} ||Cu_{\lambda_1} - Cu||^{*} = 0$$

d'où $\lim\limits_{\lambda_1 \in \mathcal{U}} Z_{\lambda_1} = 0$

et par suite, $\lim\limits_{\lambda_1 \in \mathcal{U}} \delta(||u_{\lambda_1} - u||) = 0$ , et comme $\delta \in \Delta$ , selon $\mathcal{U}$ ,

$u_{\lambda_1}$ converge fortement vers u.

A étant demi continu on a :

$$\lim_{\lambda_1 \in \mathcal{U}} Au_{\lambda_1} = Au \text{ dans } \mathcal{V}' \text{ faible}$$

Par suite $\lim\limits_{\lambda_1 \in \mathcal{U}} \chi_{\lambda_1} = (f - Au)$ dans $\mathcal{V}'$ faible ; or, par une propriété classique de fermeture des opérateurs multivoques monotones maximaux (Cf. Browder [12], <u>lemme 14</u>), on obtient que la convergence forte de $u_{\lambda_1}$ vers u, et la convergence faible de $\chi_\lambda$ vers f-Au, implique :

$$f - Au \in M(u), \text{ ou encore :}$$

$f \in Au + Mu$, et u est solution du problème considéré.

<u>Unicité</u> -

Nous renvoyons, pour la démonstration de l'unicité, en supposant $\mathcal{A}$ paramonotone, au raisonnement du <u>Théorème 19.</u>

q.e.d.

<u>COROLLAIRE 27</u> -

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach diagonalement compatible avec* $\Gamma$ *, application de type P, à valeurs dans les projecteurs. On suppose qu'il existe un opérateur de dualité J de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, stable par* $\Gamma$ *.*

*Soit $\mathcal{A}$ un opérateur quasi-paramonotone relativement à $\Gamma$, demi continu et borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.*
*On suppose que :* $\forall u_o \in \mathcal{V}$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} \frac{(\mathcal{A}u, \Gamma_{u-u_o}(u-u_o))}{||u||} = +\infty$$

*Soit $L$ un opérateur, univoque, linéaire, de $D(L) \subset \mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$. On suppose $L$ maximal monotone, et stable par $\Gamma$. Alors $\mathcal{A} + L$ est surjectif de $\mathcal{V} \wedge D(L)$ sur $\mathcal{V}'$. Si $\mathcal{A}$ est paramonotone $\mathcal{A} + L$ est une bijection de $\mathcal{V} \wedge D(L)$ sur $\mathcal{V}'$.*

DEMONSTRATION -

On applique le théorème 26, dans le cas particulier ou $L = M$ est univoque.

q.e.d.

Pour les deux corollaires suivants, nous nous plaçons dans le cadre de l'exemple 2 d'application de type P, de manière à pouvoir appliquer la proposition 15.

COROLLAIRE 28 -

*Soit $\mathcal{A}$ un opérateur demi continu et borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, quasi paramonotone par rapport à $\Gamma$, application de type P fini, définie lors de l'exemple 2 § 1.*

*Soit $L$ un opérateur, univoque, linéaire, stable par $\Gamma$ ;*

*Soit $L^*$ l'adjointe de $L$.*

*On suppose que :* $\forall u_o \in \mathcal{V}$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} \frac{(\mathcal{A}u, \Gamma_{u-u_o}(u-u_o))}{||u||} = +\infty$$

*Alors* , $\forall f \in \mathcal{V}'$, $\exists u \in \mathcal{V}$ *solution de*

$$(u, Lv) + (\mathcal{A}u, v) = (f, v) \qquad \forall v \in D(L)$$

DEMONSTRATION -

Etant, par hypothèses, dans la situation de l'exemple 2, § 1, d'application de type P, nous savons, d'après la proposition 11, que $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$.

De plus, si $J_i$ est un opérateur de dualité de $\mathcal{V}_i$ sur $\mathcal{V}'_i$, l'opérateur $J = \{J_1, \ldots, J_i, \ldots, J_r\}$ est un opérateur de dualité de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, stable par $\Gamma$.

Soit $\bar{L}$ une extension maximale de L, qui existe, d'après la proposition 15.

Soit $\bar{L}^*$ l'adjointe de $\bar{L}$. Par un lemme de Brezis (que nous rappelons plus loin, Cf. Lemme 41 ), $\bar{L}^*$ est maximale monotone. Par la proposition 14, $\bar{L}^*$ est également stable par $\Gamma$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème 26 : $\exists u \in \mathcal{V}$, solution de

$$\mathcal{A} u + \bar{L}^* u = f,$$

ou encore u vérifie :

$$(\mathcal{A} u, v) + (u, \bar{L} v) = (f, v) \qquad \forall v \in D(\bar{L})$$

Donc, en particulier :

$$(\mathcal{A} u, v) + (u, \bar{L} v) = (f, v) \qquad \forall v \in D(\bar{L})$$

COROLLAIRE 29 -

*Soit X un corps convexe de $\mathcal{V}$ (i.e. $\overset{o}{X} \neq \emptyset$), diagonalement compatible avec* $\Gamma$.

*Soit $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses du corollaire 28.*

*Soit L un opérateur linéaire ou non linéaire, monotone, stable par $\Gamma$, tel que :*

$$D(L) \wedge \overset{o}{X} \neq \emptyset$$

*alors, $\forall f \in V'$, il existe $u \in X$, tel que :*

$$(\mathcal{A} u, v-u) + (Lv, v-u) \geq (f, v-u) \qquad \forall v \in X.$$

DEMONSTRATION -

Etant dans la situation de l'exemple 2, V dest diagonalement compatible avec $\Gamma$, et il existe J opérateur de dualité, stable par $\Gamma$.

Par la proposition 14, il existe $\bar{L}$, extension maximale de L, stable par $\Gamma$. Puisque $D(L) \wedge \overset{o}{X} \neq \emptyset$, à fortiori :

$$D(\bar{L}) \wedge \overset{o}{X} \neq \emptyset.$$

Soit $\partial\Psi_X$ la sous-différentielle de la fonction indicatrice de X.

$\tilde{L} + \partial\Psi_X$ est un opérateur monotone, stable par $\Gamma$ , donc diagonal, par le Théorème 17 (de Rockafellar) $\tilde{L} + \partial\Psi_X$ est maximal.

Par application du Théorème 26, il existe : $u \in X \wedge D(\tilde{L})$, tel que

$$f \in Au + \tilde{L}u + \partial\Psi_X(u)$$

ou encore, tel que :

$$f - Au - \tilde{L}u \in \partial\Psi_X(u).$$

C'est-à-dire :

$$(f - Au - \tilde{L}u,\ v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in X$$

Mais comme $\tilde{L}$, extension maximale de L est monotone, on a en particulier :

$$\forall v \in D(L) \qquad (Lv - \tilde{L}u,\ v-u) \geq 0,$$

d'où :

$$(Au,\ v-u) + (Lv,\ v-u) \geq (f,\ v-u) \qquad \forall v \in D(L) \wedge X$$

q.e.d.

3ème Méthode - La méthode de régularisation elliptique -

Nous reprenons les notations considérées à propos du Théorème 22.

Soit $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ deux espaces de Banach, réflexifs.

Soit $\mathcal{V}'$ le dual de $\mathcal{V}$, et $\mathcal{W}'$ le dual de $\mathcal{W}$, avec les inclusions : $\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \subset \mathcal{W}'$ les injections étant continues, et chaque espace étant dense dans le suivant.

Nous énonçons un Corollaire du Théorème 22.

COROLLAIRE 30 -

*On suppose $\mathcal{W}$, diagonalement compatible avec $\Gamma$ , application de type P, relativement à l'espace $\mathcal{W}$ , avec $D(\Gamma) = \mathcal{W} \theta \mathcal{W}$.*

*On suppose de plus que $\Gamma\ (D(\Gamma))$ est contenu dans un borné de $\mathcal{L}\ (\mathcal{V},\mathcal{V})$.*

*Soit $\mathcal{A}$ un opérateur, borné, demi continu de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, quasi)paramonotone au sens suivant : $\exists\, \delta \in \Delta$ , et un opérateur compact de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, soit C tel que :*

$$(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, \Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \delta(||u-v||_{\mathcal{V}}) - |(Cu-Cv, \Gamma_{u-v}(u-v))| \qquad \forall u,v \in \mathcal{W}.$$

Soit M un opérateur, monotone, diagonal par rapport à $\Gamma$, hemi-

*continu de* $\mathcal{W}$ *dans* $\mathcal{W}'$.

*On fait de plus les hypothèses :*

(3.25) $M(0) = 0$

(3.26) $$\lim_{\|v\|_{\mathcal{V}} \to \infty} \frac{(\mathcal{A}v, \Gamma_v v)}{\|v\|_{\mathcal{V}}} = +\infty$$

(3.27) $$\lim_{\substack{v \in \mathcal{W} \\ \|v\|_{\mathcal{W}} = \|v\|_{\mathcal{V}}}} (Mv, v) = +\infty$$

$\forall f \in \mathcal{V}'$, $\exists u \in \mathcal{V}$, tel que :

$$\mathcal{A}u + Mu = f.$$

*Si de plus* $\mathcal{A}$ *est paramonotone, alors u est unique.*

DEMONSTRATION -

Puisque $\mathcal{W}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$, appelons $B_1$, la boule unité correspondante de $\mathcal{W}$, diagonalement compatible avec $\Gamma$.

Soit $B_n$, la boule homothétique de $B_1$, de rayon n, qui est également diagonalement compatible avec $\Gamma$.

$B_n$ est faiblement compacte dans $\mathcal{W}$, aussi, d'après le Théorème 21 :

$\forall f \in \mathcal{V}' \subset \mathcal{W}'$, $\exists u_n \in B_n$, solution de :

(3.28) $$-(\mathcal{A}u_n + Mu_n - f, v-u_n) \leq 0 \qquad \forall v \in B_n$$

Puisque $B_n$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$, on a :

$$-(\mathcal{A}u_n + Mu_n - f, \Gamma_{u_n}(v-u_n)) \leq 0 \qquad \forall v \in B_n$$

On choisit v = 0 dans l'inéquation précédente, d'où :

$$(Au_n, \Gamma_{u_n} u_n) + (Mu_n, \Gamma_{u_n} u_n) \leq (f, \Gamma_{u_n} u_n)$$

M étant monotone diagonale, et telle que M(0) = 0, on a :

$$(Mu_n, \Gamma_{u_n} u_n) \geq 0.$$

d'où : $\dfrac{(\mathcal{A}u_n, \Gamma_{u_n}u_n)}{||u_n||_{\mathcal{V}}} \leq \dfrac{(f, \Gamma_{u_n}u_n)}{||u_n||_{\mathcal{V}}}$

Supposons que $||u_n||_{\mathcal{V}} \to +\infty$

Puisque $\Gamma(D(\Gamma))$ est inclus, par hypothèse, dans un borné de $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, et que $f\in\mathcal{V}'$, par l'inégalité de Schwartz, le second membre reste borné, donc le premier membre est borné supérieurement, donc par (3.26), $||u_n||_{\mathcal{V}}$ reste borné, d'où la contradiction, et par suite $||u_n||_{\mathcal{V}}$ est borné.

Revenons à (3.28), où nous choisissons $v = 0$, ce qui s'écrit :

(3.29) $\quad (Mu_n, u_n) \leq (\mathcal{A}u_n, u_n) + (f, u_n)$

où, par hypothèse, $\mathcal{A}$ est borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, et $f\in\mathcal{V}'$, donc, puisque $u_n$ est borné dans $\mathcal{V}$, le second membre de (3.29) reste borné, d'où, par l'hypothèse (3.27) :

$||u_n||_{\mathcal{V}} - ||u_n||_{\mathcal{V}}$ reste borné, et par suite, $||u_n||_{\mathcal{U}}$ est borné.

Donc, pour $n_o$, assez grand, $u_{n_o} = u$, est intérieur à $B_{n_o}$.

Soit alors $v\in\mathcal{V}$, formons :

(3.30) $\quad -(\mathcal{A}u + Mu - f, v-u) = -\frac{1}{t}(\mathcal{A}u + Mu - f, u + t(v-u) - u)$

Soit $\bar{v} = u + t\,(v-u)$

Puisque $u\in \overset{o}{B}_{n_o}$, pour t assez petit $\bar{v} \in \overset{o}{B}_{n_o}$. Donc le second membre de (3.30) est $\leq 0$, et, par suite, le premier aussi, quelque soit $v\in\mathcal{V}$.

D'où $\quad \mathcal{A}u + Mu = f.$

<u>Unicité</u> -

Voir la démonstration faite pour le <u>Théorème 19</u>.

q.e.d.

Rappelons le résultat suivant, dû à Brezis ([5], Cf. [36] également).

<u>LEMME 31</u> -

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif, strictement convexe, ainsi que son dual, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

*- L est un opérateur linéaire de $D(L) \subset \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, maximal monotone, à domaine dense dans $\mathcal{V}$ .*

*- L est un opérateur linéaire non borné, de domaine $D(L) \subset \mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathcal{V}'$, L étant fermé, de domaine dense dans $\mathcal{V}$, et tel que :*

$$(Lv,v) \geq 0 \quad \forall v \in D(L), \text{ et } (L^* v,v) \geq 0 \qquad \forall v \in D(L^*).$$

*De plus, lorsque L vérifie l'une des assertions précédentes, l'adjoint $L^*$ de L, les vérifie également.*

REMARQUE -

On sait que $\mathcal{V}$ étant réflexif, on peut trouver une norme équivalente (strictement) à celle de $\mathcal{V}$ , telle que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ soient strictement convexes (Cf. Brezis - Crandall - Pazy [7]).

THEOREME 32 -

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif, de dual $\mathcal{V}'$.*

*Soit L un opérateur linéaire de D(L), sous espace dense de $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathcal{V}'$, L étant maximal monotone, et $0 \in D(L)$.*

*On munit D(L) de la norme du graphe, qui en fait un espace de Banach.*

*Soit $\Gamma$ , une application de type* ***P, à valeurs dans les projecteurs,*** *relativement aux espaces $\mathcal{V}$ et D(L), de domaine $D(\Gamma) = \mathcal{V} \theta \mathcal{V}$.*

*On fait de plus les hypothèses de diagonalité :*

(3.31) *$\mathcal{V}$ et D(L) sont diagonalement compatibles avec $\Gamma$ .*

(3.32) *l'opérateur de dualité J de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$ .*

(3.33) *L est stable par $\Gamma$ .*

*Soit $\mathcal{A}$ un opérateur borné, demi continu, de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, quasi-paramonotone par rapport à $\Gamma$ , avec l'hypothèse :*

$$(3.34) \qquad \lim_{||v||_{\mathcal{V}} \to \infty} \frac{(\mathcal{A} v, \Gamma_v v)}{||v||_{\mathcal{V}}} = +\infty$$

*Alors, $\forall f \in \mathcal{V}'$, il existe $u \in D(L)$ solution de :*

$$(3.35) \qquad \mathcal{A} u + Lu = f$$

*Si de plus, $\mathcal{A}$ est paramonotone, alors $\mathcal{A} + L$ est une bijection de D(L) sur $\mathcal{V}'$.*

DEMONSTRATION - (Comparer à [36], p. 316, Cf. aussi [6]).

1/ On approche l'équation (3.35) par

(3.36) $\quad \varepsilon L^{*} J^{-1} Lu_{\varepsilon} + Lu_{\varepsilon} + \mathcal{A} u_{\varepsilon} = f$

Existence de la solution de (3.36) -

D(L) muni de la norme du graphe $||v||_{\mathcal{V}} + ||Lv||_{\mathcal{V}}^{*}$ est un espace de Banach réflexif, de dual D(L)', et comme D(L) est dense dans $\mathcal{V}$, on peut identifier D(L)' à un surespace de $\mathcal{V}'$.

Pour $u,v \in D(L)$, on pose :

$\Pi_{\varepsilon}(u,v) = \varepsilon(J^{-1}(Lu), Lv) + (Lu,v) + (\mathcal{A}u,v)$

Soit $(M_{\varepsilon} u,v) = \varepsilon(J^{-1}(Lu), Lv) + (Lu,v)$

$M_{\varepsilon}$ est un opérateur de D(L) dans D(L)'.

Considérons le problème :

(3.37) $\quad M_{\varepsilon} u_{\varepsilon} + \mathcal{A} u_{\varepsilon} = f$

que nous allons résoudre, par le corollaire 30.

$M_{\varepsilon}$ est un opérateur borné, hemi continu, et monotone de D(L) sur D(L)'.

Vérifions que $M_{\varepsilon}$ est, de plus, monotone diagonal, par rapport à $\Gamma$, et, pour cela, nous devons former :

(3.38) $\quad (M_{\varepsilon}u - M_{\varepsilon}v, \Gamma_{w}(u-v)) = \varepsilon(J^{-1}(Lu)-J^{-1}(Lv), L\Gamma_{w}(u-v)) + (L(u-v), \Gamma_{w}(u-v))$

où $L\Gamma_{w}(u-v) = L\Gamma_{w}u - L\Gamma_{w}v$, par linéarité.

En utilisant l'hypothèse (3.33), L est stable par $\Gamma$. On a donc $\forall w \in D(\Gamma)$ :

$\{\Gamma_{w}^{*} Lu, \Gamma_{w}u\} \in$ graphe de L, ce qui s'exprime encore par :

$\forall u \in D(L)$, $\forall w \in D(\Gamma)$ on a :

$\Gamma_{w}u \in D(L)$, et $L(\Gamma_{w}u) = \Gamma_{w}^{*}Lu$

(Dans le cas L, multivoque, que nous ne traitons pas ici, on aurait :

$\forall \chi_{u} \in Lu, \quad \Gamma_{w}^{*} \chi_{u} \in L(\Gamma_{w}u))$.

Le premier terme du second membre de (3.38) vérifie alors :

$\varepsilon(J^{-1}(Lu) - J^{-1}(Lv), L\Gamma_{w}(u-v)) = \varepsilon(J^{-1}(Lu)-J^{-1}(Lv), \Gamma_{w}^{*}L(u-v))$

où $\Gamma_{w}^{*}L(u-v) = \Gamma_{w}^{*} Lu - \Gamma_{w}^{*} Lv$, par linéarité ; or par l'hypothèse (3.32),

$J$ est monotone diagonal, par rapport à $\Gamma$ , donc, d'après le lemme 25, $J^{-1}$ est monotone diagonal, par rapport à $\Gamma^*$, et, par suite, le premier terme du second membre de (3.38) est $\geq 0$, $\forall w \in D(\Gamma)$.

Quant au second terme, puisque $L$ est monotone stable, par $\Gamma$ , $L$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$, d'après la proposition 12.

Donc :

$$(L(u-v), \Gamma_w(u-v)) \geq 0 \qquad \forall w \in D(\Gamma), \quad \forall u,v \in D(L)$$

Par suite $M_\varepsilon$ est bien monotone diagonal par rapport à $\Gamma$ .

Dans l'énoncé du corollaire 30, remplaçons $w$ par $D(L)$, $M$ par $M_\varepsilon$, le autres éléments de cet énoncé conservant la même signification que dans la situation précédente.

Parmi les hypothèses du corollaire 30, il reste à vérifier (3.27) ou encore, puisque $||v||_{\mathcal{W}} - ||v||_{\mathcal{V}} = ||v||_{D(L)} - ||v||_{\mathcal{V}} = ||Lv||^*_{\mathcal{V}}$

que :

$$\lim_{||Lv||^*_{\mathcal{V}} \to \infty} (M_\varepsilon v, v) = +\infty$$

ce qui est vrai, puisque $J^{-1}$ opérateur de dualité de $\mathcal{V}'$ sur $\mathcal{V}$, est coercif, et que le second terme de $(M_\varepsilon v, v) = \varepsilon(J^{-1}Lv, Lv) + (Lv,v)$ est positif, puisque $L$ est monotone linéaire. Donc il existe $u_\varepsilon \in D(L)$, solution de (3.37) qui est équivalent à :

$$\Pi_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (f,v) \qquad \forall v \in D(L)$$

Par suite :

$$v \to \varepsilon(J^{-1}(Lu_\varepsilon), Lv) = (f - \mathcal{A} u_\varepsilon - Lu_\varepsilon \ , v)$$

est continue sur $D(L)$, muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$.

Donc $J^{-1}(Lu_\varepsilon) \in D(L^*)$, et (3.37) équivaut à (3.36).

Estimations à priori -

On forme :

$$(\mathcal{A} u_\varepsilon, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon) + (M_\varepsilon u_\varepsilon, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon) = (f, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon)$$

du fait que $0 \in D(L)$, puisque $D(L)$ est un sous espace de $\mathcal{V}$, et que $M_\varepsilon$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$ , on a :

$$(M_\varepsilon u_\varepsilon ; \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon) \geq 0$$

d'où :

$$\frac{(\mathcal{A} u_\varepsilon, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon)}{||u_\varepsilon||_{\mathcal{V}}} \leq \frac{(f, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon)}{||u_\varepsilon||_{\mathcal{V}}} \tag{3.39}$$

Du fait que $\Gamma$ est une application de type P, relativement à $\mathcal{V}$, par le Théorème de la borne uniforme $||\Gamma_{u_\varepsilon}||_{\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})} \leq$ Cte.

Supposons que $||u_\varepsilon||_{\mathcal{V}} \to +\infty$, le second membre de (3.39) reste alors borné, d'où, par l'hypothèse (3.34) $||u_\varepsilon||_{\mathcal{V}} \leq C_1$ $C_1 > 0$ indépendant de $\varepsilon$.

Vérifions que $Lu_\varepsilon$ reste dans un borné de $\mathcal{V}'$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

$J^{-1}Lu_\varepsilon \in D(L^*)$, on peut donc écrire :

$$\varepsilon(L^*J^{-1}(Lu_\varepsilon), J^{-1}(Lu_\varepsilon)) + (Lu_\varepsilon, J^{-1}(Lu_\varepsilon)) + (\mathcal{A}u_\varepsilon, J^{-1}(Lu_\varepsilon)) =$$
$$= (f, J^{-1}(Lu_\varepsilon)) ;$$

or, d'après le lemme 31 (de Brezis), $L^*$ est $\geq 0$.

D'où :

$$||Lu_\varepsilon||^{*2}_{\mathcal{V}} + (\mathcal{A}u_\varepsilon, J^{-1}Lu_\varepsilon) \leq (f, J^{-1}(Lu_\varepsilon))$$

et, puisque $u_\varepsilon$ appartient à un borné de $\mathcal{V}$, et que $\mathcal{A}$ est borné :

$$||\mathcal{A}u_\varepsilon||^*_{\mathcal{V}} \leq c^{te} \quad \text{et par suite :}$$

$$||\mathcal{A}u_\varepsilon||^*_{\mathcal{V}} \text{ reste borné quand } \varepsilon \to 0.$$

<u>Passage à la limite en $\varepsilon$</u>.

Puisque $\mathcal{V}$ est réflexif, et que L est fermé, D(L), muni de la norme du graphe est un espace de Banach réflexif, et les estimations à priori obtenues, nous indiquent que $u_\varepsilon$ reste dans un borné de D(L) quand $\varepsilon \to 0$.

En tenant compte également des propriétés $P_1$ et $P_2$ des applications de type P, nous mettons en évidence un ultrafiltre $\mathcal{U}$, plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $R^+$, tel que :

(3.40) $$\lim_{\varepsilon \in \mathcal{U}} u_\varepsilon = u \text{ dans } D(L) \text{ faible.}$$

(3.41) $$\lim_{\varepsilon \in \mathcal{U}} \Gamma_{u_\varepsilon - u} = \Gamma_x \text{ dans } \mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$$

(3.42) $$\lim_{\varepsilon \in \mathcal{U}} \Gamma^*_{u_\varepsilon - u} = \Gamma^*_x \text{ dans } \mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}',\mathcal{V}').$$

Pour simplifier les notations nous appellerons :

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_{u_\varepsilon - u} \quad \text{dans la suite.}$$

Formons :

$$Y_\varepsilon = ( (\mathcal{A}u_\varepsilon + Lu_\varepsilon + \varepsilon L^* J^{-1}Lu_\varepsilon - f) - (\mathcal{A}u + Lu - f), \Gamma_\varepsilon (u_\varepsilon - u) )$$

Remarquons que :

$\mathcal{A}u + Lu - f$ a un **sens**, car $u \in D(L)$ et $\mathcal{A}$ est défini sur $\mathcal{V}$ qui contient $D(L)$. En tenant compte de (3.36), on a :

$$(3.43) \qquad Y_\varepsilon = (\mathcal{A}u + Lu - f, \Gamma_\varepsilon (u_\varepsilon - u) )$$

Par ailleurs, on peut réécrire $Y_\varepsilon$ sous la forme :

$$Y_\varepsilon = \overset{(a)}{(\mathcal{A}u_\varepsilon - \mathcal{A}u, \Gamma_\varepsilon(u_\varepsilon - u))} + \overset{(b)}{(L(u_\varepsilon - u), \Gamma_\varepsilon(u_\varepsilon - u))}$$

$$+ \overset{(c)}{\varepsilon(J^{-1}Lu_\varepsilon, L\Gamma_\varepsilon(u_\varepsilon - u) )}$$

$Y_\varepsilon$ = (a) + (b) + (c), dans l'ordre d'écriture des termes.

**Le terme (c) s'écrit :**

$$\overset{(c_1)}{\varepsilon(J^{-1}(Lu_\varepsilon) - J^{-1}(Lu), L\Gamma_\varepsilon (u_\varepsilon - u))} + \overset{(c_2)}{\varepsilon(J^{-1}Lu, L\Gamma_\varepsilon (u_\varepsilon - u))}$$

ou encore, en tenant compte de l'hypothèse (3.33), à savoir L est stable par $\Gamma$ , on a :

$$L\Gamma_\varepsilon (u_\varepsilon - u) = \Gamma_\varepsilon^* L(u_\varepsilon - u)$$

d'où $(c_1) = \varepsilon (J^{-1}(Lu_\varepsilon) - J^{-1}(Lu), \Gamma_\varepsilon^*(Lu_\varepsilon - Lu))$

est $\geqslant 0$

car J étant monotone diagonal par rapport à $\Gamma$, $J^{-1}$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma^*$.

Par ailleurs :

(b) est $\geqslant 0$ puisque L étant monotone, **stable par** $\Gamma$ , est monotone diagonale.

En utilisant l'hypothèse $\mathcal{A}$ quasi-**paramonotone, on a** :

$$\delta(||u_\varepsilon - u||) \leqslant (a) + |(Cu_\varepsilon - Cu, \Gamma_\varepsilon(u_\varepsilon - u))|$$

D'où finalement, en tenant compte de (3.43), on obtient :

$$\delta(||u_\varepsilon - u|| \quad ) + \varepsilon(J^{-1}Lu, \Gamma_\varepsilon^*(Lu_\varepsilon - Lu)) \leqslant |(Cu_\varepsilon - Cu, \Gamma_\varepsilon(u_\varepsilon - u))|$$

$$+ (\mathcal{A}u + Lu - f, \Gamma_\varepsilon(u_\varepsilon - u))$$

ou encore :

$$\delta(\|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{V}}) \leqslant \underbrace{(\Gamma_\varepsilon^*(\mathcal{A}u+Lu-f)u_\varepsilon - u)}_{(\alpha)} - \underbrace{\varepsilon(Lu_\varepsilon - Lu,\ \Gamma_\varepsilon J^{-1}Lu)}_{(\beta)} + \underbrace{|(Cu_\varepsilon - Cu, \Gamma_\varepsilon(u_\varepsilon - u))|}_{(\gamma)}$$

$\delta(\|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{V}}) \leqslant \alpha + \beta + \gamma$ dans l'ordre d'écriture des termes du second membre. En tenant compte de (3.40) et de (3.42) :

$$\lim_{\varepsilon \in \mathcal{U}} \alpha = 0$$

En tenant compte de (3.40), et de (3.41) :

$$\lim_{\varepsilon \in \mathcal{U}} \beta = 0$$

Par le théorème de la borne uniforme $\|\Gamma_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})} \leqslant$ cte indépendante de $\varepsilon$, et en tenant compte de (3.40), et du fait que C est compact, par l'inégalité de Schwartz :

$$\lim_{\varepsilon \in \mathcal{U}} \gamma = 0$$

Donc, puisque $\delta \in \Delta$, $u_\varepsilon$ converge, selon $\mathcal{U}$, fortement vers u dans $\mathcal{V}$.

$\mathcal{A}$ étant demi continu $\mathcal{A}u_\varepsilon$ converge faiblement vers $\mathcal{A}u$ dans $\mathcal{V}'$.

Comme $\|Lu_\varepsilon\|^*_{\mathcal{V}}$ est borné.

$\varepsilon L^*J^{-1}Lu_\varepsilon$ converge faiblement vers 0 dans $D(L^*)$, d'où à la limite :

$$\mathcal{A}u + Lu = f$$

<u>Unicité</u> -

Si $\mathcal{A}$ est paramonotone, l'unicité se vérifie comme pour le <u>Théorème 19</u>.

<u>REMARQUE</u> -

Comme dans le cas des opérateurs pseudo-monotones (Cf [36], Théorème 1.2, Chap. 3 ), il est possible d'améliorer l'énoncé précédent de la façon suivante.

L'opérateur $\mathcal{A}$ est de la forme :

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + C$ ou

- $\mathcal{A}_1$ est paramonotone de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, borné, demi-continu.

- C est un opérateur de D(L) dans $\mathcal{V}'$ compact en tant qu'opérateur de D(L) dans D(L)'.

De plus, il existe une fonction $\rho \to g(\rho)$ de $R^+$ dans $R^+$, bornée sur tout compact de $R^+$, et il existe un nombre $\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, tels que :

(3.44) $\qquad ||Lu||^*_{\mathcal{V}} \leq g(||u||_{\mathcal{V}}) + \theta\, ||Lu||^*_{\mathcal{V}} \qquad \forall u \in D(L)$

Par ailleurs, les autres hypothèses du Théorème 32 sont conservées.

La démonstration du Théorème correspondant s'alourdit du fait qu'il faut y intégrer la démonstration du corollaire 30, qui ne peut se faire à part.

En utilisant la para-coercivité de $\mathcal{A}$ on obtient d'abord l'estimation $||u_{\varepsilon,n}||_{\mathcal{V}} \leq$ cte indépendante de $\varepsilon$, $n$ ; où $n$ = rayon de la boule $B_n$ dans la démonstration du Corollaire 30.

Puis, par (3.44)

$$||Lu_{\varepsilon,n}||^*_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{1-\theta} \quad g(||u_{\varepsilon,n}|| \quad ) \leq \text{cte}$$

$u_{\varepsilon,n}$ étant solution d'une inéquation dans une boule $B_n$ convenable, par le Théorème 21, on vérifie ensuite que pour $n_o$ assez grand, $u_{\varepsilon,n_o}$ est solution d'une équation. Le reste de la démonstration est pratiquement inchangé.

Par ailleurs, il semble que cet énoncé modifié n'ait pas l'intérêt de permettre de résoudre des équations du type **NAVIER STOKES**, ce qui est possible pour l'énoncé correspondant, concernant les opérateurs pseudo-monotones.

## III.3 - RESOLUTION DIRECTE D'INEQUATIONS D'EVOLUTION ABSTRAITE -

Introduisons tout d'abord une variante de la notion de compatibilité introduite par H. Brezis dans [4], entre un convexe et un opérateur linéaire.

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques en dualité. Soient X un sous ensemble de E, et $\Gamma$ une application de $X \theta X$ dans $\mathcal{L}(E,E)$, où l'on note par $\Gamma_w$ l'image de $w \in D(\Gamma)$ par $\Gamma$, et $\Gamma^*_w$ sa transposée dans $\mathcal{L}(F,F)$.

DEFINITION 8 -

*Soit $D(L)$ un sous espace vectoriel de $E$, on dit qu'une application, linéaire, et monotone de $D(L)$, dans $F$, est compatible avec $X$ et $\Gamma$, si, pour tout $u \in X$, il existe une suite régularisante $u_n$ d'éléments de $D(L) \cap X$, telle que :*

*a/ $u_n$ converge fortement vers $u$.*

*b/ $\limsup\limits_{\substack{n \to \infty \\ w \in D(\Gamma)}} (Lu_n, \Gamma_w(u_n - u)) \leq 0$.*

EXEMPLE -

Plaçons nous dans le cadre de l'exemple 2 d'application $\Gamma$ de type P, donné au § 1, dont nous reprenons les notations :

Soit $\mathcal{V} = \bigoplus\limits_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i \qquad F = \bigoplus\limits_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}'_i$

Les opérateurs $\Gamma_w$ sont les projections canoniques de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_j$, pour $j \in \{1,\dots,r\}$.

$\forall i = \{1,\dots,r\}$ Soient $X_i$ un sous ensemble de $\mathcal{V}_i$, et $L_i$ une transformation linéaire de $D(L_i) \subset X_i$, dans $\mathcal{V}'_i$.

On suppose que :

(3.45) $X_i$ et $L_i$ sont compatibles au sens de Brezis [4], c'est-à-dire que :

$\forall u_i \in X_i$, $\exists$ une suite régularisante $u_{n,i}$ telle que :

$a_1$/ $u_{n,i}$ converge fortement vers $u_i$

$b_1$/ $\lim\limits_{n \to \infty} (L_i u_{n,i}, u_{n,i} - u_i) \leq 0$

Soit $X = \bigoplus\limits_{i=1,\dots,r} X_i$, et soit L la transformation linéaire, monotone, diagonale par rapport à $\Gamma$ définie par :

$$(Lu, v) = \sum_{i=1}^{r} (L_i u_i, v_i)$$

en faisant l'hypothèse (3.45) à $\forall u = \{u_1,\dots, u_i,\dots, u_r\} \in X$, on peut associer $u_n = \{u_{n,1},\dots, u_{n,i},\dots, u_{n,r}\}$, avec $u_{n,i}$ vérifiant $a_1$/ et $b_1$/.

Formons $(Lu_n, \Gamma_w (u_n-u)) = (L_j u_{n,j}, u_{n,j}-u_j)$ pour un certain $j \in \{1,\dots,r\}$.

Par $b_1$/ on a bien :

$$\lim_{\substack{\mathcal{W}\in D(\Gamma)\\ n\to\infty}} \sup (Lu_n, \Gamma_w(u_n-u)) = \lim_{\substack{j\in\{1,\dots,r\}\\ n\to\infty}} \sup (Lu_{n,j}, u_{n,j}-u_j) \leq 0$$

Par suite $X = \bigoplus_{i=1,\dots,r} X_i$, L et $\Gamma$ sont bien compatibles au sens de la définition 8.

THEOREME 33 -

*Soit $X$, un convexe de $E$, $L$ une application linéaire, et monotone diagonale par rapport à $\Gamma$, de $D(L)$ dans $F$.*

*On suppose que $L$, $X$, $\Gamma$ sont compatibles.*

*Soit $A$ une application de $X$ dans $F$, telle que :*

$$(Au - Av, \Gamma_{u-v}(u-v)) > 0 \qquad \forall u,v\in X, \qquad u \neq v,$$

*alors pour tout $f\in F$, l'inéquation :*

$$(3.46) \qquad (f,\Gamma_w(v-u)) - (Au,\Gamma_w(v-u)) - (Lv,\Gamma_w(v-u)) \leq 0$$

$$\forall v\in D(L)\cap X, \quad \forall w\in D(\Gamma) = X \ominus X \text{ admet au plus une solution.}$$

DEMONSTRATION -

Soient x et y deux solutions de (3.46), on a :

$$(f,\Gamma_{(x-y)}(v-x)) - (Ax,\Gamma_{(x-y)}(v-x)) - (Lv,\Gamma_{(x-y)}(v-x)) \leq 0 \qquad \forall v\in D(L)\cap X$$

$$(f,\Gamma_{(x-y)}(v-y)) - (Ay,\Gamma_{(x-y)}(v-y)) - (Lv,\Gamma_{(x-y)}(v-y)) \leq 0 \qquad \forall v\in D(L)\cap X$$

Soit $u = \frac{x+y}{2}$, et $u_n$ la suite régularisante associée à u, on choisit $v = u_n$, et, par addition membre à membre des deux inégalités précédentes, on obtient :

$$2(f,\Gamma_{x-y}(u_n-u)) - (Ax,\Gamma_{x-y}(u_n-x)) - (Ay,\Gamma_{x-y}(u_n-y)) - 2(Lu_n,\Gamma_{x-y}(u_n-u)) \leq 0$$

Puisque $\Gamma_{x-y}\in \mathcal{L}(E,E)$, et $u_n$ converge fortement vers u, quand $n\to\infty$

$$(f, \Gamma_{x-y}(u_n-u)) \to 0$$

D'après b/ de la définition 8 :

$$\lim_{n\to\infty} (Lu_n, \Gamma_{x-y}(u_n-u)) \leq 0$$

on en déduit :

$$(Ax - Ay, \Gamma_{x-y}(x-y)) \leq 0 \Longrightarrow x = y$$

q.e.d.

Ce résultat généralise le Théorème 38 de Brezis [4], le principe de la démonstration étant le même, quant à l'utilisation de la notion de compatibilité entre L et X.

THEOREME 34 -

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif, diagonalement compatible avec $\Gamma$, application de type P fini r, de domaine $D(\Gamma) = X \oplus X$, où X est un convexe fermé, diagonalement compatible avec $\Gamma$, et tel que $0 \in X$.*

*Soit D(L) un sous espace vectoriel dense de $\mathcal{V}$, $\Phi$ étant la base de filtre, formée d'espaces de dimension finie, associée à $\Gamma$, dans la propriété $P_3$ de la définition des applications de type P.*

*On suppose $\forall E \in \Phi$ on a : $E \subset D(L)$.*

*Soit L une application de D(L) dans $\mathcal{V}'$, linéaire, monotone diagonale par rapport à $\Gamma$, telle que L, X, et $\Gamma$ soient compatibles au sens de la définition 8.*

*Soit $\mathcal{A}$ une application de X dans $\mathcal{V}'$, dual de $\mathcal{V}$, demi continue de X, muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$.*

*On suppose que $\mathcal{A}$ vérifie la propriété de quasi-paramonotonie.*

$$(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, \Gamma_{u-v}(u-v)) \geq \alpha\|u-v\|^2_{\mathcal{V}} - |(Cu - Cv, \Gamma_{(u-v)}(u-v))|$$

*où C est un opérateur compact de X, muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$, et ou la fonction $\delta(t) = \alpha t^2 \in \Delta$.*

(3.47) $$\lim_{\substack{u \in X \\ \|u\| \to +\infty}} \frac{(\mathcal{A}u, \Gamma_u u)}{\|u\|} = +\infty.$$

*alors, pour tout $f \in \mathcal{V}'$, il existe $u \in X$, solution de :*

(3.48) $$-(\mathcal{A}u, (v-u)) - (Lv, (v-u)) + (f, (v-u)) \leq 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X$$

*Si de plus $\mathcal{A}$ est paramonotone, alors u est unique.*

DEMONSTRATION -

Soit $E_i \in \Phi$, et soient $j_i$ l'injection de $E_i$ dans $\mathcal{V}$, et $J_i^*$ son adjointe.

Nous considérons l'opérateur :

$J_i^* \mathcal{A} J_i + J_i^* L J_i - J_i^* f$ de $E_i \subset D(L)$ dans $E_i^*$ espaces de dimension finie.

Puisque $\mathcal{A}$ est demi continu, et que L est linéaire, cet opérateur est continu.

$\mathcal{V}$ étant diagonalement compatible avec $\Gamma$, soit $B_1$ la boule unité de $\mathcal{V}$, diagonalement compatible avec $\Gamma$, de rayon 1, et soit $B_p$ la boule homothétique de $B_1$, de rayon p, qui est également diagonalement compatible avec $\Gamma$.

Nous sommes en mesure d'appliquer le lemme 21, d'où, il existe $u_{i,p} \in E_i \wedge X \wedge B_p$, tel que :

$$(3.49) \qquad -(\mathcal{A}u_{i,p}, v-u_{i,p}) - (Lu_{i,p}, v-u_{i,p}) + (f, v-u_{i,p}) \leq 0 \quad \forall v \in E_i \wedge X \wedge B_p$$

Revenons aux propriétés (2.4) et (2.5) de la définition d'un convexe diagonalement compatible avec $\Gamma$, application de type P.

D'après la propriété (2.5) $X \wedge E_i$ vérifie la propriété (2.4), et comme $0 \in X \wedge E_i \wedge \overset{\circ}{B}_p$ d'après la proposition 8, $X \wedge E_i \wedge B_p$ vérifie (2.4), c'est-à-dire $\forall w \in D(\Gamma) \quad \Gamma_w^* \, \partial\Psi_{X \wedge E_i \wedge B_p}(v) \subset \partial\Psi_{X \wedge E_i \wedge B_p}(v) \quad \forall v \in X \wedge E_i \wedge B_p$.

Nous appliquons ce résultat à (3.49), d'où :

$$(3.50) \qquad -(\mathcal{A}u_{i,p}, \Gamma_w(v-u_{i,p})) - (Lu_{i,p}, \Gamma_w(v-u_{i,p})) + (f; \Gamma_w(v-u_{i,p})) \leq 0$$

$$\forall v \in E_i \wedge X \wedge B_p \quad \forall w \in D(\Gamma).$$

Dans l'inéquation (3.50), choisissons v = 0, et $w = u_{i,p}$, on obtient

$$(\mathcal{A}u_{i,p}, \Gamma_{u_{i,p}} u_{i,p}) + (Lu_{i,p}, \Gamma_{u_{i,p}} u_{i,p}) \leq (f, \Gamma_{u_{i,p}} u_{i,p})$$

comme D(L) est un sous espace, on a L(0) = 0. Par suite, L étant monotone diagonale par rapport à $\Gamma$, on a :

$$\frac{(\mathcal{A}u_{i,p}\ \Gamma_{u_{i,p}} u_{i,p})}{||u_{i,p}||} \leq \frac{(f, \Gamma_{u_{i,p}} u_{i,p})}{||u_{i,p}||}$$

d'où, en utilisant l'hypothèse (3.47), par un raisonnement utilisé, à plusieur reprises précédemment, on obtient que $||u_{i,p}|| \leq k$, $k > 0$, indépendant de $B_p$ et de $E_i$.

En faisant tendre, tout d'abord, p vers l'infini, en utilisant la compacité de la boule de rayon k dans $E_i$, espace de dimension fini, et la continuité de l'opérateur $J_i^* \mathcal{A} J_i + J_i^* L J_i - J_i^* f$, on obtient, à partir de (3.49), qu'il existe $u_i \in E_i \cap X$, tel que :

$$(3.51) \qquad -(\mathcal{A}u_i, v-u_i) - (Lu_i, v-u_i) + (f, v-u_i) \leqslant 0 \qquad \forall v \in E_i \cap X$$

Puisque X, L et $\Gamma$ sont compatibles au sens de la <u>définition</u> 8, soit $\{u_n\}$ la suite vérifiant les propriétés a/ et b/ correspondantes.

$||u_i||_{\mathcal{V}}$ étant borné, indépendamment de $E_i$, et $\mathcal{V}$ étant réflexif, d'une part, et en utilisant d'autre part la propriété $P_2$ ($P_2'$ plus exactement), des applications de type P, fini, on met en évidence un ultrafiltre $\tilde{\Phi}$, plus fin que $\Phi$, tel que :

(3.52) selon $\tilde{\Phi}$ $u_i$ converge faiblement vers u dans $\mathcal{V}$.

(3.53) $\forall n \in \mathbb{N}$, selon $\tilde{\Phi}$, $\Gamma^*_{u_n-u_i}$ converge dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}', \mathcal{V}')$ vers $\Gamma^*_{w_i} \in \Gamma^*(D(\Gamma))$.

Formons, pour $E_i \in \tilde{\Phi}$ tel que $u_n \in E_i$

$$Y_{n,i} = ((\mathcal{A}u_n + Lu_n - f) - (\mathcal{A}u_i + Lu_i - f), \; \Gamma_{u_n-u_i}(u_n-u_i))$$

En tenant compte de (3.51), et du fait que X est diagonalement compatible avec $\Gamma$, on obtient :

$$(3.54) \qquad Y_{n,i} \leqslant ((\mathcal{A}u_n + Lu_n - f), \; \Gamma_{u_n-u_i}(u_n-u_i)).$$

Par ailleurs, nous pouvons réécrire $Y_{n,i}$ sous la forme :

$$Y_{n,i} = (\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u_i, \Gamma_{(u_n-u_i)}(u_n-u_i)) + (L(u_n-u_i), \Gamma_{u_n-u_i}(u_n-u_i))$$

En utilisant l'hypothèse de quasi-paramonotonie faite pour $\mathcal{A}$, et l'hypothèse L monotone diagonale par rapport à $\Gamma$, on obtient :

$$Y_{n,i} \geqslant \alpha ||u_n-u_i||^2 - |(Cu_n - Cu_i, \Gamma_{u_n-u_i}(u_n-u_i))|$$

$$\geqslant \alpha(||u_n-u|| - ||u_i-u||)^2 - |(Cu_n - Cu_i, \Gamma_{u_n-u_i}(u_n-u_i))|$$

D'où, en tenant compte de (3.54), on obtient :

$$\alpha ||u-u_i||^2 \leqslant \alpha ||u_n-u||^2 + 2\alpha ||u_n-u|| \; ||u_i-u||$$

$$+ (\Gamma^*_{u_n-u_i}\mathcal{A}u_n, u_n-u_i) +$$

$$+ (\Gamma^*_{u_n-u_i} Lu_n, u_n-u_i) + |(Cu_n - Cu_i, \Gamma_{(u_n-u_i)}(u_n-u_i))|$$

$u_n$ étant fixé, passons à la limite selon $\tilde{\Phi}'$ , en tenant compte du fait que, $||u_i-u||$ est uniformément borné, de (3.52), et (3.53), et de la compacité de l'opérateur C, on a :

(3.55) $$\limsup_{E_i\in\Phi} \alpha||u-u_i||^2_{\mathcal{V}} \leq \beta||u_n-u||_{\mathcal{V}} + (\Gamma^*_{w_n}\mathcal{A}u_n,\ u_n-u)$$

$$+(\Gamma^*_{w_n}\ Lu_n,\ u_n-u) - (\Gamma^*_{w_n}\ (Cu_n-Cu),\ u_n-u)$$

Or, puisque X, L et $\Gamma$ sont compatibles d'après la propriété a/ de la définition 8, $u_n$ converge fortement vers u, comme $\mathcal{A}$ est demi continu $\mathcal{A}u_n$ converge faiblement vers $\mathcal{A}u$, et donc $\mathcal{A}u_n$ est borné dans $\mathcal{V}'$ ; de même $||\Gamma^*_{w_n}||$ est uniformément borné. On en déduit que les deux premiers termes du second membre convergent vers 0, ainsi que le dernier d'ailleurs, quand $n \to \infty$ .

D'autre part, d'après la propriété b/ de la définition 8, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} (\Gamma^*_{w_n}\ Lu_n,\ u_n-u) = \limsup_{n\to\infty} (Lu_n,\Gamma_{w_n}(u_n-u)) \leq 0$$

D'où :

$$\limsup_{E_i\in\Phi} \alpha||u-u_i||^2 \leq 0$$

(3.56) et $u_i$ converge fortement, selon $\tilde{\Phi}$ , vers u dans $\mathcal{V}_i$.

(3.57) $\mathcal{A}$ étant demi continue, selon $\tilde{\Phi}$ , $\mathcal{A}u_i$ converge faiblement vers $\mathcal{A}u$

En tenant compte de la monotonie de l'opérateur L, on obtient à partir de (3.51) :

$$-(\mathcal{A}u_i,\ v-u_i) - (Lv,\ v-u_i) + (f,\ v-u_i) \leq 0 \qquad \forall v\in X\wedge E_i$$

D'où, en passant à la limite selon $\tilde{\Phi}$ , et en utilisant (3.56), (3.57), on obtient :

$$-(\mathcal{A}u,\ v-u) - (Lv,\ v-u) + (f,\ v-u) \leq 0 \qquad \forall v\in X.$$

UNICITE -

En tenant compte du fait que $X\wedge E_i$ vérifie la propriété (2.4), de la définition 5, des convexes diagonalement compatibles avec $\Gamma$ , on obtient à partir de (3.51) que $u_i$ est solution de :

$$-(\mathcal{A}u_i,\ \Gamma_w(v-u_i)) - (Lu_i,\ \Gamma_w(v-u_i)) + (f,\ \Gamma_w(v-u_i)) \leq 0$$

$$\forall v\in X\wedge E_i \qquad \forall w\in D(\Gamma)$$

Sous les hypothèses (3.70), (3.71), (3.72), (3.73), je conjecture que $\forall f_1, f_2 \in V'_1 \times V'_2 \quad \exists u_1, u_2$ solution de

$$S \quad \left| \begin{array}{l} f_1 \in A_1 u_1 + M_1 u_1 + C_{21} u_1 \\ f_2 \in C_{12} u_2 + A_2 u_2 + M_2 u_2 \end{array} \right.$$

En effet, bien que n'ayant pas connaissance actuellement de la démonstration spécifique du Théorème 1 de [6], des résultats voisins ont été néanmoins démontrés, dans [4], [36], qui me permettent de penser, après avoir, grâce à (3.73), obtenu des estimations à priori, pour une solution approchée par une méthode convenable (passage au filtre des espaces de dimension finie, perturbation convenable) grace à l'hypothèse de compacité pour les $C_{i,j}$.

On obtient que $C_{i,j}\, u_j^{\lambda}$ converge fortement dans $V'_j$, ce qui permet ensuite d'effectuer séparément les passages à la limite pour chacune des équations de (S), par la méthode de Brézis pour la première, par celle exposée précédemment du § 3.2, dans ce texte, pour la seconde.

Il y a vraisemblablement des possibilités analogues pour la méthode des perturbations elliptiques.

# IV - EQUATIONS LINEAIRES STATIONNAIRES COMPORTANT UN OPERATEUR PARAMONOTONE -

## IV.1 - THEOREME D'EQUIVALENCE. PROPRIETE DE L'ADJOINTE. APPLICATION A UNE GENERALISATION DU LEMME DE LAX-MILGRAM -

Soient $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert, réel, $\Gamma$ une application de dans $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, "à valeurs dans les projecteurs".

Nous considérons les systèmes de propriétés I et II.

En tenant compte de l'hypothèse : L est monotone diagonale par rapport à $\Gamma$ , on obtient que $u_i$ est solution de :

(3.58) $$-(\mathcal{A}u_i, \Gamma_w(v-u_i)) - (Lv, \Gamma_w(v-u_i)) + (f, \Gamma_w(v-u_i)) \leq 0$$
$$\forall v \in X \cap E_i \qquad \forall w \in D(\Gamma)$$

En passant à la limite selon $\tilde{\Phi}$ , dans (3.58), et en utilisant (3.56), (3.57), on a :

$$-(\mathcal{A}u, \Gamma_w(u-v)) - (Lv, \Gamma_w(u-v)) + (f, \Gamma_w(u-v)) \leq 0$$
$$\forall v \in X \cap D(L)$$

d'où l'unicité, si $\mathcal{A}$ est paramonotone, par le théorème 33.

q.e.d.

## III.4 - METHODE DE PENALISATION -

Rappelons (Cf. [36], chap. 3 § 5.2) que $\mathcal{V}$ étant un espace de Banach, et X un convexe fermé de $\mathcal{V}$, que l'on appelle opérateur de pénalisation attaché à X, tout opérateur de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ vérifiant :

(3.59) $\beta$ est monotone, borné, et hemi continu de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.

(3.60) $\{ v \mid v \in \mathcal{V} \ ; \quad \beta(v) = 0 \} = X.$

Existence de tels opérateurs, le résultat qui suit est une variante du Th. 5.1, Chap. III de [36].

THEOREME 35 -

*Soient $\mathcal{V}$ un espace de Banach, réflexif, et $\Gamma$ une application de type P, telle qu'il existe un opérateur de dualité J de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, monotone diagonal par rapport à $\Gamma$ .*

*Soit X un convexe fermé de $\mathcal{V}$, diagonalement compatible avec $\Gamma$ .*

*Alors, si $P_X$ désigne l'opérateur de projection de $\mathcal{V}$ sur X, l'opérateur $\beta$ , donné par : $\beta(u) = J(u - P_X u)$, est un opérateur de pénalisation, monotone, diagonal, par rapport à $\Gamma$.*

DEMONSTRATION -

Utilisons le résultat suivant, démontré dans [37], p. 370, qui s'énonce :

$\bar{u} = P_X u$ est caractérisé par :

$\bar{u} \in X$ et $(J(u-\bar{u}),\ x-\bar{u}) \leqslant 0 \qquad \forall x \in X$

Comme X est diagonalement compatible avec $\Gamma$, on en déduit aussitôt que :

$$(3.61) \qquad (J(u-\bar{u}),\ \Gamma_w(x-\bar{u})) \leqslant 0 \qquad \forall x \in X, \quad \forall w \in D(\Gamma).$$

Vérifions que $\beta$, ainsi défini est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.

En effet, de (3.61), on déduit :

$(J(u-P_X u, \Gamma_w(P_X u - P_X v)) \geqslant 0 \qquad \forall w \in D(\Gamma)$

et $\quad (J(v-P_X v, \Gamma_w(P_X u - P_X v)) \geqslant 0 \qquad \forall w \in D(\Gamma)$

D'où, par addition membre à membre :

$$(3.62) \qquad (J(u-P_X u) - J(v-P_X v),\ \Gamma_w(P_X u - P_X v)) \geqslant 0 \qquad \forall u,v \in \mathcal{V},\ \forall w \in D(\Gamma)$$

Formons :

$$(\beta(u)-\beta(v),\ \Gamma_w(u-v)) = (J(u-P_X u) - J(v-P_X v),\ \Gamma_w(u-v)) =$$

$$=(J(u-P_X u) - J(v-P_X v),\ \Gamma_w(u-P_X u + P_X v - v + P_X u - P_X v)$$

$$= (J(u-P_X u) - J(v-P_X v),\ \Gamma_w((u-P_X u) - (v-P_X v))$$

$$+ (J(u-P_X u) - J(v-P_X v),\ \Gamma_w(P_X u - P_X v))$$

où le premier terme est $\geqslant 0$, parce que J est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$, et le second également par (3.62), et ceci $\forall u,v \in V \quad \forall w \in D(\Gamma)$, d'où le résultat, puisque $J(0) = 0$.

q.e.d.

PROPOSITION 36 -

*On suppose que $0 \in X$, alors $(\beta(u),u) = 0$ entraîne $\beta(u) = 0$.*

DEMONSTRATION -

$$(\beta(u),u) = J(u-P_X(u),u) = (J(u-P_X u), u-P_X u) + (J(u-P_X(u), P_X u).$$

or :

$$(J(u-P_Xu),\ u-P_Xu) = ||u-P_Xu||^2_{\mathcal{V}}$$

d'où : $$(J(u-P_Xu)\ P_Xu) = -\ ||u-P_Xu||^2_{\mathcal{V}}$$

mais, comme $0 \in X$, d'après la caractérisation de $P_Xu$ :

$$(J(u-P_Xu),\ P_Xu) \geq 0$$

d'où $||u-P_Xu|| = 0$

q.e.d.

En utilisant la méthode de pénalisation, on obtient le résultat suivant :

<u>THEOREME 37</u> -

*Soient $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif, de dual $\mathcal{V}'$, et $\Gamma$ une application de type P.*

*Soit X un convexe fermé de $\mathcal{V}$, diagonalement compatibles avec $\Gamma$, tel que $0 \notin X$.*

*On suppose que J, opérateur de dualité de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.*

*Soit L une application linéaire de D(L), sous espace de $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$, monotone, maximale, diagonale par rapport à $\Gamma$, telle que X, L, $\Gamma$ soient compatibles, au sens de la <u>définition 8</u>.*

*Soit $\mathcal{A}$ une application de $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$, quasi-paramonotone par rapport à $\Gamma$, bornée, demi continue.*

*On suppose que $\mathcal{A}$ vérifie :*

$$\lim_{||u|| \to +\infty} \frac{(\mathcal{A}u, \Gamma_u u)}{||u||} = +\infty \tag{3.63}$$

*alors, pour tout $f \in v'$, il existe $u \in X$, tel que :*

$$-(\mathcal{A}u,\ v-u) - (Lv,\ v-u) + (f,\ v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in D(L)_\wedge X.$$

<u>DEMONSTRATION</u> -

Nous allons faire la démonstration, en supposant acquis l'énoncé du <u>Corollaire 27</u> (on pourrait la faire également à partir du <u>Théorème 32</u>, obtenu par la méthode de régularisation elliptique avec quelques modifications dans l'énoncé du <u>Théorème 37</u>, sans inconvénients d'ailleurs pour les exemples de systèmes d'inéquations aux dérivées partielles que nous résoudrons par ces méthodes).

On sait, par le Théorème 35, qu'il existe un opérateur de pénalisation $\beta$ , relatif à X, monotone diagonal par rapport à $\Gamma$.

On considère l'équation "pénalisée" :

$$(3.64)\quad \left| \begin{array}{l} Lu_\varepsilon + \mathcal{A}(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\ \beta(u_\varepsilon) = f \qquad \varepsilon > 0 \\ u_\varepsilon \in D(L) \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A} + \frac{1}{\varepsilon}\ \beta$

$\beta$ étant borné et monotone hemi continu, est demi-continu, par suite $\mathcal{A}_\varepsilon$ est borné, demi-continu. De plus comme $\beta$ est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$ , $\mathcal{A}_\varepsilon$ est quasi-paramonotone, et vérifie également la condition de para-coercivité (3.63).

L étant monotone, maximale, diagonale par rapport à $\Gamma$ , nous pouvons appliquer le corollaire 27, d'où l'existence de $u_\varepsilon$ solution de (3.64).

Formons :

$$(\mathcal{A}u_\varepsilon, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon) + (Lu_\varepsilon, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\ (\beta(u_\varepsilon), \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon) = (f, \Gamma_{u_\varepsilon} u_\varepsilon)$$

Les deux derniers termes du premier membre sont $\geq 0$, puisque L et $\beta$ sont monotones diagonaux, et que $L(0) = 0$, et également, comme $0 \in X$, $\beta(0) = 0$.

D'où, en utilisant (3.63), on obtient que $u_\varepsilon$ reste dans un borné de $\mathcal{V}$, quand $\varepsilon \to 0$.

$\mathcal{V}$ étant réflexif, selon $\tilde{\Phi}$, ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $R^+$.

(3.65) $u_\varepsilon$ converge faiblement vers u dans $\mathcal{V}$.

(3.66) et en tenant compte de la propriété $P_2$ des applications de type P, $\Gamma^*_{u_\varepsilon}$ converge dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V}', \mathcal{V}')$

Par ailleurs $\mathcal{A}u_\varepsilon$ reste dans un borné de $\mathcal{V}'$, puisque $\mathcal{A}$ est borné, et, comme $L \in \mathcal{L}$ (v ; $D(L^*)'$) on déduit de (3.64) que $\beta(u_\varepsilon) \to 0$, dans $D(L^*)'$, quand $\varepsilon \to 0$.

Mais, $\beta$ étant un opérateur borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, $\beta(u_\varepsilon)$ est borné dans $\mathcal{V}'$, d'où $\beta(u_\varepsilon)$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{V}'$, quand $\varepsilon \to 0$.

Pour $v \in X$, formons :

$$(Lu_\varepsilon, u_\varepsilon - v) + (\mathcal{A}u_\varepsilon, u_\varepsilon - v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v) = (f, u_\varepsilon - v)$$

Du fait que $\beta(v) = 0 \quad \forall v \in X$

$$(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v) \geq 0 \quad \forall v \in X$$

et, par suite, on a :

$$(3.67) \qquad (Lu_\varepsilon, u_\varepsilon - v) + (\mathcal{A}u_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leq (f, u_\varepsilon - v) \qquad \forall v \in X$$

L, X, et $\Gamma$ étant compatibles au sens de la définition 8, soit $u_n$, la suite régularisante vérifiant les propriétés a/ et b/ correspondantes.

Soit $\Gamma_{\varepsilon,n} = \Gamma_{u_\varepsilon - u_n}$

Formons :

$$Y_{\varepsilon,n} = ( (\mathcal{A}u_\varepsilon + Lu_\varepsilon - f) - (\mathcal{A}u_n + Lu_n - f), \Gamma_{\varepsilon,n} (u_\varepsilon - u_n))$$

$$\leq -( (\mathcal{A}u_n + Lu_n - f, \Gamma_{\varepsilon,n}(u_\varepsilon - u_n))$$

Nous pouvons réécrire $Y_{\varepsilon,n}$ sous la forme :

$$Y_{\varepsilon,n} = (\mathcal{A}u_\varepsilon - \mathcal{A}u_n, \Gamma_{\varepsilon,n} (u_\varepsilon - u_n)) + (L(u_\varepsilon - u_n), \Gamma_{\varepsilon,n} (u_\varepsilon - u_n))$$

En utilisant les hypothèses $\mathcal{A}$ quasi-paramonotones, et L monotone diagonal, par rapport à $\Gamma$, on obtient :

$$\delta(||u_\varepsilon - u_n||) \leq (\mathcal{A}u_n - f, \Gamma_{\varepsilon,n}(u_\varepsilon - u)) + (\mathcal{A}u_n - f, \Gamma_{\varepsilon,n}(u - u_n))$$

$$+ (Lu_n, \Gamma_{\varepsilon,n}(u_\varepsilon - u)) + (Lu_n, \Gamma_{\varepsilon,n} (u - u_n))$$

$$+ |(Cu_\varepsilon - Cu_n, \Gamma_{\varepsilon,n}(u - u))| + |(Cu_\varepsilon - Cu_n, \Gamma_{\varepsilon,n}(u - u_n))|$$

ou encore :

$$(3.68) \qquad \delta(||u_\varepsilon - u_n||) \leq \overset{(a)}{(\Gamma^*_{\varepsilon,n}(Lu_n + \mathcal{A}u_n - f), u_\varepsilon - u))} + \overset{(b)}{(\Gamma^*_{\varepsilon,n}(Cu_\varepsilon - Cu_n), u_\varepsilon - u)}$$

$$+ \overset{(c)}{(Lu_n, \Gamma_{\varepsilon,n}(u - u_n))} +$$

$$+ \overset{(d)}{(||\mathcal{A}u_n||^* + ||Cu_\varepsilon||^* + ||Cu_n||^*)||\Gamma_{\varepsilon,n}||.||u_n - u||}$$

Nous numérotons dans l'ordre de lecture par (a), (b), (c), (d), les termes du second membre de (3.68).

Puisque $\delta \in \Delta$, $\forall \eta > 0$, $\exists k > 0$, tel que :

$$\delta(t) < k \Longrightarrow t < \frac{\eta}{2}$$

Soit $\rho = \sup (||\mathcal{A} u_n||^* + ||Cu_\varepsilon||^* + ||Cu_n||^*)||\Gamma_{\varepsilon,n}||$ qui existe, puisque, d'une part $\mathcal{A}$ et C sont des opérateurs bornés de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, ($\mathcal{A}$ par hypothèse, et C par compacité), et, d'autre part, $\Gamma_{\varepsilon,n}$ est uniformément borné, dans $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ par la propriété $P_1$ des applications de type P, et le Théorème de la borne uniforme.

Or, puisque L, X, $\Gamma$ sont compatibles, on peut trouver $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_o$ $\forall \varepsilon \in \tilde{\Phi}$, on ait :

$$||u_n - u|| \leq \min\left(\frac{k}{4\rho}, \frac{\eta}{2}\right)$$

et $$(Lu_n, \Gamma_{\varepsilon,n}(u_n - u)) \leq \frac{k}{4}$$

Choisissons $n = n_o$

On a alors :

$$(c) + (d) \leq \frac{k}{2}$$

et $||u_{n_o} - u|| \leq \frac{\eta}{2}$

Par ailleurs, d'après (3.65), (3.66) et le fait que C est compact il existe $\varepsilon_o \in \tilde{\Phi}$ tel que $\forall \varepsilon \in \tilde{\Phi}$ avec $\varepsilon < \varepsilon_o$, on a :

$$(\Gamma^*_{\varepsilon,n_o}(Lu_{n_o} + \mathcal{A} u_{n_o} - f), u_\varepsilon - u) + |(\Gamma^*_{\varepsilon,n}(Cu_\varepsilon - Cu_n), u_\varepsilon - u)| \leq \frac{k}{2}$$

Par suite $\forall \varepsilon \in \tilde{\Phi}$ avec $\varepsilon < \varepsilon_o$

$$\delta(||u_\varepsilon - u_{n_o}||) \leq k$$

Donc : $||u_\varepsilon - u_{n_o}|| \leq \frac{\eta}{2}$

et $||u_\varepsilon - u|| \leq ||u_\varepsilon - u_{n_o}|| + ||u_{n_o} - u|| \leq \eta$

Donc, selon $\tilde{\Phi}$ $u_\varepsilon$ converge fortement vers u. Du fait que L est monotone à partir de (3.67), on obtient :

(3.69) $\quad (Lv, u_\varepsilon - v) + (\mathcal{A} u_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leq (f, u_\varepsilon - v) \qquad \forall v \in D(L) \wedge X$

Comme $u_\varepsilon$, selon $\tilde{\Phi}$, converge fortement vers u, et que $\mathcal{A}$ est continu de $\mathcal{V}$ fort dans $\mathcal{V}'$ faible, on a, à la limite :

$$(Lv, u-v) + (\mathcal{A} u, u-v) \leq (f, u-v) \qquad \forall v \in D(L) \cap X$$

q.e.d.

## III.5 - SUR LE COUPLAGE D'APPLICATIONS PSEUDO-MONOTONES, ET PARAMONOTONES -

Soit $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux espaces de Banach réflexifs :

- $A_1$ une application pseudo-monotone de $D(A_1) \subset \mathcal{V}_1$ dans $\mathcal{V}'_1$.
- $A_2$ une application quasi paramonotone de $D(A_2) \subset \mathcal{V}_2$ dans $\mathcal{V}'_2$.
- Soit $M_i$, i=1,2 des graphes maximaux monotones de $\{V_i \times V'_i\}$ i=1,2.

(3.70) On suppose que $A_1$ et $M_1$ vérifient les conditions du Théorème 1 de [6].

(3.71) On suppose que $A_2$ et $M_2$ vérifient les conditions de l'un des Théorèmes 19 ou 26.

Soit maintenant $C_{i,j}$ des opérateurs de $\mathcal{V}_i$ dans $\mathcal{V}'_j$ ; pour i,j = 1,2 avec $i \neq j$.

Ier cas - L'un des opérateurs $C_{i,j} = 0$. On applique successivement les résultats de [6], et les nôtres, d'où l'existence de :

Solutions $\{u_1, u_2\}$ au système :

$$(S) \quad \left| \begin{array}{l} f_1 \in A_1 u_1 + M_1 u_1 + C_{21} u_1 \\ \\ f_2 \in C_{12} u_2 + A_2 u_2 + M_2 u_2 \end{array} \right.$$

2ème cas -

(3.72) On suppose les opérateurs $C_{i,j}$ compacts de $V_i$ dans $V'_j$, et on fait une hypothèse de "para-coercivité" de la forme :

$\exists u_o^1 \in V_1$, tel que $\quad \forall u_o^2 \in V_2$

$$(3.73) \quad \lim_{(||u_1||_1 + ||u_2||_1) \to \infty} \max \frac{(A_1 u_1 + M_1 u_1 + C_{21} u_2, u_1 - u_o^1), (A_2 u_2 + M_2 u_2 + C_{12} u_1, \Gamma u_2 - u_o^2\ u_2 -}{(||u_1||_1 + ||u_2||_1)}$$

$$= + \infty$$

| | |
|---|---|
| I | $a_1$/ *L'opérateur de dualité J de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$ dual de $\mathcal{V}$ est stable par* $\Gamma$ .<br>$b_1$/ *Il existe une base de filtre* $\Phi$ , *formée d'espaces de dimension finie de $\mathcal{V}$, telle que :*<br>*i/* $\forall E \in \Phi$ , *et* $\forall w \in \mathcal{V}$ : $\Gamma_w(E) \subset E$<br>*ii/* $\forall E_n$ *espace de dimension finie de $\mathcal{V}$, il existe* $E \in \Phi$ , *avec* $E_n \subset E$.<br>$c_1$/ *Il existe un corps convexe X de $\mathcal{V}$, équilibré, tel que :*<br>*j/ la fonctionnelle de Minkowski de X :*<br>$\|v\|_X = \inf_{t>0,\ t^{-1} v \in X} t$ *soit une norme strictement équivalente à la norme de $\mathcal{V}$.*<br>*jj/* $\partial\Psi_X$ *(opérateur sous différentielle de la fonction indicatrice de X) est stable par* $\Gamma$ . |
| II | $a_2$/ $\mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i$   $\mathcal{V}_i$ *espaces de Hilbert*<br>$b_2$/ $\Gamma$ *est une application de type P fini ;* $\Gamma(\mathcal{V}) = \{\Pi_1,\dots,\Pi_r\}$ *où les* $\Pi_i$ *sont les projections canoniques de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_i$.* |

RELATIONS DE CES PROPRIETES AVEC CELLES UTILISEES PRECEDEMMENT ET DEFINIES AU § 1 et 2.

POUR LE SYSTEME DE PROPRIETES I -

$a_1$/ a été utilisée pour obtenir la majeure partie des résultats de § 3.2, et ceux du § 3.3.

$b_1$/ est la propriété $P_3$ de définition des applications de type P (Cf. Définition 1, § 1).

$c_1$/ est une propriété du type : " $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$ ", affaiblie ; d'après la proposition 13 jj/ est équivalent à (2.4) de la définition 5 qui comprend en outre les propriétés (2.3) et (2.5).

Or (2.5) est une conséquence du fait que X est un corps convexe, et du corollaire 9 ; et (2.3) est conséquence de ce que $\Gamma$ est à valeur dans les projecteurs. Donc le système de propriété I, implique que $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$.

POUR LE SYSTEME DE PROPRIETES II -

Il ne fait que reprendre la situation de l'exemple 2 d'application de type P, qui nous a ensuite fourni tour à tour :

- un exemple d'espace diagonalement compatible avec $\Gamma$ (Cf. proposition 11 ),
- un exemple de situation où il existe un opérateur de dualité J monotone diagonal par rapport à $\Gamma$ (Cf. exemple p. ).

Le but du Théorème 38 qui va suivre, est de démontrer que la définition 9 étant vérifiée, il y a équivalence entre les systèmes de propriétés I et II.

Aussi, la majeure partie des Théorèmes du § 3.2, et celui du § 3.4, ne peuvent être appliqués dans une situation autre que cette de l'exemple 2, § 1.

Bien évidemment, on n'a pas cette limitation dans le cas des résultats des § 3.1, 3.3, et peut être pour la Ière méthode du § 3.2. Toutefois, le problème indiqué p. , qui, s'il était résolu dans le sens indiqué, permettrait par ailleurs de réduire le système de propriétés I aux propriétés (I.b) et (I.c).

DEFINITION 9 -

*Soient $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert, $\Gamma$ une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, "à valeurs dans les projecteurs", et $a(u,v)$ une forme bilinéaire bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ . Nous dirons que le triplet $\{\mathcal{V}, a(u,v), \Gamma\}$ vérifie une condition de para-V-ellipticité si il existe une constante $\alpha > 0$, telle que :*

$$a(v,\Gamma_v v) \geq \alpha\ ||v||^2 \qquad \forall v \in \mathcal{V}$$

THEOREME 38 -

*Etant donné un triplet $\{\mathcal{V}, a(u,v), \Gamma\}$ vérifiant une condition de para-V-ellipticité, alors les systèmes de propriétés I et II sont équivalents.*

DEMONSTRATION -

1/ I $\Longrightarrow$ II.

L'opérateur de dualité J de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$ étant stable par $\Gamma$, on a : $J\Gamma_w = \Gamma_w^* J$.
Donc, pour tout u, v$\in\mathcal{V}$:

$$((\Gamma_w u,v))_{\mathcal{V}} = ((J\Gamma_w u,v) = (\Gamma_w^* Ju,v) = (Ju,\Gamma_w v) = ((u,\Gamma_w v))_{\mathcal{V}}$$

Par suite $\Gamma_w$ qui est un projecteur, est un projecteur orthogonal.

Nous pouvons supposer qu'il existe deux sous espaces $\Gamma_{w_1}(\mathcal{V})$ et $\Gamma_{w_2}(\mathcal{V})$ (fermés puisque les $\Gamma_w$ sont des projecteurs), tels que $\Gamma_{w_1}(\mathcal{V})$ et $\Gamma_{w_2}(\mathcal{V})$ soient distincts. Car, dans le cas contraire, on serait dans le cas de la V-ellipticité classique avec : $\Gamma_w$ = identité dans $\mathcal{V}$, $\forall w\in\mathcal{V}$, et II est alors bien vérifié.

Pour simplifier les notations appelons :

$$\mathcal{V}_1 = \Gamma_{w_1}(\mathcal{V}) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_2 = \Gamma_{w_2}(\mathcal{V})$$

Si $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ où $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$, on vérifie immédiatement que $\Gamma_{w_1}$ et $\Gamma_{w_2}$ commutent. Nous allons vérifier que, dans le cas contraire, il en va encore de même :

Soit :

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2 \oplus F_1 \qquad \text{où } F_1 = (\mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2)^{\perp} \wedge \mathcal{V}_1$$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2 \oplus F_2 \qquad \text{où } F_2 = (\mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2)^{\perp} \wedge \mathcal{V}_2$$

avec $F_1 \neq 0$ et $F_2 \neq 0$.

Supposons donc que :

(4.1) $\Gamma_{w_1}$ et $\Gamma_{w_2}$ ne commutent pas ; appelons $N_{w_i}$ = noyau de $(\Gamma_{w_i})$ i=1,2.

Soit $\tilde{F}_1 = F_1 \wedge (F_1 \wedge N_{w_2})^{\perp}$

et $\tilde{F}_2 = F_2 \wedge (F_2 \wedge N_{w_1})^{\perp}$

on a $\tilde{F}_1$ ou $\tilde{F}_2 \neq 0$ car sinon $F_1$ et $F_2$ sont orthogonaux, et $\Gamma_{w_1}$ et $\Gamma_{w_2}$ commutent, contrairement à (4.1).

On a :

(4.2) $$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \oplus F_1 \cap N_{w_2} \oplus \tilde{F}_1$$

où ces trois espaces sont mutuellement orthogonaux.

Soit donc, par exemple : $\tilde{F}_1 \neq 0$.

$\tilde{F}_1$ est orthogonal à $N_{w_1}$, et donc aussi à $N_{w_1} \cap F_2$. Par ailleurs, $\Gamma_{w_2}$ est projecteur orthogonal sur $F_2$. Donc $\Gamma_{w_2}(\tilde{F}_1)$ est également orthogonal à $N_{w_1} \cap F_2$.

Comme, par construction, $\tilde{F}_1$ n'appartient pas à $N_{w_2}$, on a :

(4.3) $$\forall f_1 \in \tilde{F}_1 \qquad \Gamma_{w_2} f_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{w_2} f_1 \in \tilde{F}_2$$

On vérifie alors, de la même manière que :

$$\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2} f_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2} f_1 \in \tilde{F}_1$$

et, par induction :

(4.4) $$(\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2})^n f_1 \neq 0 \quad (\Gamma_w \circ \Gamma_{w_2})^n f_1 \in \tilde{F}_1 \qquad \forall n \in N$$

Par ailleurs, considérons $\partial X \cap \mathcal{V}_1$, qui est non vide car X est une boule de $\mathcal{V}$, et soit $u \in \partial X \cap \mathcal{V}_1$.

Soit $f \in \partial\Psi_{X \cap \mathcal{V}_1}(u)$, c'est-à-dire :

(4.5) $$f \in \mathcal{V}'_1 = J\mathcal{V}_1 \text{ et } (f, u-v) \quad 0 \qquad \forall v \in X \cap \mathcal{V}_1$$

comme d'après la propriété **$C_1$/ (jj/)**, $\partial\Psi_X$ **est stable par rapport à $\Gamma$, on en** déduit que $\Gamma_{w_1}(X)$ est inclus dans X, donc dans $X \cap \mathcal{V}_1$ de (4.5), et puisque $u \in \mathcal{V}_1$, on déduit $(f, u- \Gamma_{w_1} v) \leq 0 \qquad \forall v \in X$

Or, $u = \Gamma_{w_1} u$ et $\Gamma_{w_1}$ est projecteur orthogonal dans $\mathcal{V}$, donc $\Gamma^*_{w_1}$ est projecteur orthogonal dans $\mathcal{V}'$ sur $\mathcal{V}'_1$, on a :

$$(\Gamma^*_{w_1} f, u-v) \leq 0 \qquad \forall v \in X$$

avec $\Gamma^*_{w_1} f = f$ donc $f \in \partial\Psi_X(u)$.

Plus particulièrement, soit $u_1 \in F_1 \cap \partial X$ qui est non vide, puisque X est une boule de $\mathcal{V}$, et, soit $g \in \partial\Psi_{X \cap \mathcal{V}_1}(u_1)$, et donc, d'après ce que nous venons de voir $g \in \mathcal{V}_1$ et $g \in \partial\Psi_X(u_1)$, on a :

(4.6) $g \neq 0$ puisque $u_1 \in \partial X$

Supposons que g soit orthogonal à $\tilde{F}_1$, on aurait :

$(g, u_1 - v) \leqslant 0 \quad \forall v \in X \qquad$ et $(g, u_1) = 0$

D'où $(g,v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in X$

et comme X est une boule de $\mathcal{V}$ : $g = 0$, contrairement à (4.6).

Par suite, d'après (4.2) :

$J^{-1}g = \xi + \eta + \zeta$ avec $\xi \in \mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2 \qquad \eta \in F_1 \wedge N_{w_2} \qquad \zeta \in \tilde{F}_1$

$\zeta\ \zeta \neq 0$. Formons $\Gamma_{w_2} J^{-1} g = \xi + \Gamma_{w_1} \zeta$

Or, d'après (4.3), $\Gamma_{w_2} \zeta \neq 0$ et $\Gamma_{w_2} \zeta \in \tilde{F}_2$ ; et par (4.4), on obtient que : $(\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2})^n J^{-1} g \neq 0 \qquad \forall n \in N$

et également par (4.4) : $(\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2})^n u_1 \neq 0 \qquad \forall n \in N$

où $g \in \partial\Psi_X(u_1)$.

Par la <u>propriété</u> $b_1$/ il existe $E \in \Phi$, tel que $u_1$, $J^{-1}g \in E$, et d'après i/ de la <u>propriété</u> $C_1$/, jj/ de la <u>propriété</u> $C_1$/, le <u>corollaire</u> 9 et la <u>propriété</u> 13 : $\partial\Psi_{X \wedge E}$ opérateur sous différentielle, de la fonction indicatrice de $X \wedge E$, dans E, est stable par $\Gamma$ . Donc :

$$J(\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2})^n J^{-1} g \in \partial\Psi_{X \wedge E} ((\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2})^n u_1)$$

comme le premier membre est $\neq 0$, on en déduit que :

(4.6) $(\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2})^n u_1 \in \partial X \wedge E$

Soit $E_1 = \tilde{F}_1 \wedge E$ et $E_2 = \tilde{F}_2 \wedge E$

Par construction $\tilde{F}_1 \wedge \tilde{F}_2 = 0$, donc $E_1 \wedge E_2 = 0$ et, comme $E_1$, $E_2$ sont de dimension finie, on a :

$$\sup_{\mathcal{V}_1 \subset E_1, \mathcal{V}_2 \subset E_2} \frac{|(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)|}{||\mathcal{V}_1||\ ||\mathcal{V}_2||} \leqslant \tau < 1$$

et $\quad ||(\Gamma_{w_1} \circ \Gamma_{w_2})^n u_1|| \leqslant \tau^{2n} \ ||u_1||$

en contradiction, grâce à (4.6), avec le fait que, d'après j/ de la propriété $C_1$/ $||\ \ ||_X$ est strictement équivalente à la norme de $\mathcal{V}$.

Donc $\Gamma_{w_i}$ et $\Gamma_{w_j}$ commutent, pour tout $w_i\, w_j \in \mathcal{V}$, et $\Gamma_{w_i} \circ \Gamma_{w_j}$ est un projecteur orthogonal. Etant donné un nombre fini p d'espaces $\Gamma_{w_i}(\mathcal{V})$, linéairement indépendants, nous considérons le noyau $\eta_p$ de $\underset{i=1,\dots,p}{\bigcirc} \Gamma_{w_i}$ et soit $w_p = \eta_p \underset{i=1,\dots,p}{\oplus} \Gamma_{w_i}(\mathcal{V})$.

On a $w_p = \underset{i=1,\dots,p}{\oplus} \mathcal{V}_i$ où $\mathcal{V}_i = \underset{\substack{j=1,\dots,p \\ j\neq i}}{\bigcirc} \Gamma_{w_j}(w_p)$

d'après l'hypothèse d'indépendance linéaire, à savoir : $\Gamma_{w_i}(\mathcal{V}) \neq \underset{\substack{j\neq i \\ j=1,\dots,p}}{\oplus} \Gamma_{w_i}(\mathcal{V})$

on a : $_i \neq 0 \quad \forall = 1,\dots,p$.

Soit $\Pi_i = \underset{\substack{j=1,\dots,p \\ j\neq i}}{\bigcirc} \Gamma_{w_j}$

Les opérateurs $\Pi_i$ ont les propriétés des éléments de $\Gamma(\mathcal{V})$ données en I, c'est-à-dire i/ de la propriété $b_1$/ et jj/ de la propriété $b_2$/.

Soit $f = \sum_{i=1}^{p} f_i$ avec $f_i \neq 0$ $f_i \in \mathcal{V}_i$.

Soit d'après $b_1$/, E espace de dimension finie appartenant à $\Phi$, tel que f et $f_i \in E$ $i=1,\dots,p$. E étant de dimension finie, il existe $u \in \partial X_\wedge E$, tel que $Jf \in \partial\Psi_{X\wedge E}(u)$.

$$u = u_o + \bar{u} \quad \text{avec } \bar{u} \in w_p \quad \text{et } u_o \in w_p^{\perp} \wedge E$$
$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i$$

Puisque $f_i \neq 0$, d'après jj/ de la propriété $b_1$/, $u_k \in \partial X_\wedge E$ et $||u_k||_X = ||u||_X = 1$.

Par ailleurs, on a :

$$||u||^2 = ||u_o||^2 + \sum_{k=1}^{p'} ||u_k||^2$$

Puisque, d'après la propriété $c_1$/ $||\ ||_X$ et $||\ ||$ sont strictement équivalentes, il existe donc des constantes $\beta$ et $\gamma$, telles que :

$$\gamma ||v||_X \leq ||v|| \leq \beta ||v|| \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

D'où

$$\beta^2 ||u||_X^2 = \beta^2 \geq ||u||^2 = ||u_o||^2 + \sum_{k=1}^{p'} ||u_k||_X^2 \geq p\gamma^2$$

D'où :

$$p \leq \frac{\beta^2}{\gamma^2}$$

On en déduit l'existence d'un nombre fini $p \leq \dfrac{\beta^2}{\gamma^2}$ de sous espace $\Gamma_{w_i}(\mathcal{V})$ linéairement indépendants.

Montrons que :

(4.7) $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1,\dots,p} \Gamma_{w_i}(\mathcal{V})$

En effet, dans le cas contraire, soit u un élément $\neq 0$, et orthogonal à tous les $\Gamma_{w_i}(\mathcal{V})$, on a, d'après la propriété de para-V-ellipticité,

$a(u, \Gamma_u u) \geq \alpha \; ||u||^2 > 0$

et d'autre part,

$||\Gamma_u u||^2 = ((u, \Gamma_u u)) = 0$ d'où $\Gamma_u u = 0$, et $a(u, \Gamma_u u) = 0$, d'où la contradiction, et (4.7) est démontré.

Soit $\mathcal{V}_{p+1} = W_p^{\perp}$ ($W_p$ a été défini précédemment) et $r = p+1$.

On a : $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i$ avec $\mathcal{V}_i \wedge \mathcal{V}_j = 0$ ; les $\mathcal{V}_i$ étant orthogonaux entre eux. $\forall v \in \mathcal{V}$ on peut exprimer $\Gamma_v$ par $\Gamma_v = \sum_{i \in S_v} \Pi_i$ avec $\Pi_i$ projecteur orthogonal de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_i$ et $S_v$ est une partie de $\{1,\dots,r\}$ ;

et $a(u, \Gamma_u u) = \sum_{j \in S_u} a(u, \Pi_j u) \leq r \max_{j=1,\dots,r} a(u, \Pi_j u)$

et par conséquent :

(4.8) $\max_{j=1,\dots,r} a(u, \Pi_j u) \geq \frac{\alpha}{r} ||u||^2$

ce qui implique bien que l'on peut considérer $\Gamma$, comme étant à valeurs dans les projecteurs $\Pi_i$ $i=1,\dots,r$.

2/ II $\Longrightarrow$ I.

Puisque les opérateur $\Pi_j$ sont des projecteurs orthogonaux, donc autoadjoints, on a :

$(J\Pi_j u, v) = ((\Pi_j u, v)) = ((u, \Pi_j v)) = (Ju, \Pi_j v) = (\Pi_j^* Ju, v)$ et donc $J\Gamma_w = \Gamma_w^* J$

et J est stable par $\Gamma$, d'où $a_1/$.

D'après la <u>proposition</u> 2, $\Gamma$ est une application de type P et donc en particulier la propriété $P_3$ des applications de type P, c'est-à-dire $b_1/$ est vérifiée.

Soit B la boule unité de $\mathcal{V}$ pour la norme $|| \; ||$, et $X_i = B \wedge \mathcal{V}_i$

$X = \bigoplus_{i=1,\dots,r} X_i$ forme, d'après les propositions 10 et 11 un corps convexe diagonalement compatible avec $\Gamma$, dont, d'après la <u>proposition</u> 13, $c_1/$ est vérifié.

q.e.d

Rappelons le :

DEFINITION 10 -

*On appelle forme bilinéaire adjointe de $a(u,v)$, la forme bilinéaire $a^*(u,v)$ définie par la relation :*

$$a^*(u,v) = a(v,u) \qquad \forall u,v \in \mathcal{V}.$$

THEOREME 39 -

*Si le triplet $\{\mathcal{V}, a(u,v), \Gamma\}$ vérifie une condition de para-V-ellipticité, et l'un des systèmes de propriétés I, II, alors, il existe une application $\tilde{\Gamma}$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V})$ telle que le triplet $\{\mathcal{V}, a^*(u,v), \tilde{\Gamma}\}$ vérifie également une condition de para-V-ellipticité, et les systèmes de propriétés I et II. De plus $\tilde{\Gamma}(\mathcal{V}) = \Gamma(\mathcal{V})$.*

Avant de démontrer le Théorème 39, rappelons la définition des B-matrices, ou matrices de la classe P, selon Fiedler et Ptak [19].

DEFINITION 11 -

*Une matrice N, de type (r,r) est une B-matrice si l'une des propriétés équivalentes ci-dessous est vérifiée :*

- $B_1$ $\max\limits_{j=1,\dots,r} (Nx, \bar{\Pi}_j x) > 0 \quad \forall x \in R^r \; x \neq 0.$
  où $\bar{\Pi}_j$ est le projecteur orthogonal sur le $j^{\text{ème}}$ axe de $R^r$.

- $B_2$ tous les déterminants mineurs principaux de N sont positifs.

- $B_3$ $N^{-1}$ existe et à tous ses coefficients $\geq 0$.

LEMME 40 -

*Si N est une B-matrice, il existe une constante $\alpha > 0$, telle que :*

$$\max_{j=1,\dots,r} (Nx, \bar{\Pi}_j x) \geq \alpha \; |x|_2^2 \qquad \forall x \in R^r \tag{4.9}$$

où $|\;|_2$ est la norme euclidienne de $R^r$.

DEMONSTRATION -

Appelons $S_2$ la sphère euclidienne unité de $R^r$.

Supposons que (4.9), soit faux. Il existerait une suite d'éléments $x_n$ de $S_2$, telle que :

$$(4.10) \qquad \max_{j=1,\ldots,r} (Nx_n, \bar{\Pi}_j x_n) \to 0.$$

$S_2$ étant bornée, fermée dans $R^r$, est compacte. On peut donc extraire de $x_n$ une sous suite, encore appelée $x_n$, telle que :

$$x_n \to \bar{x} \in S_2$$

Les fonctions $(Nx, \Pi_j x)$ étant continues par rapport à x, on déduit de (4.10) que :

$$\max_{j=1,\ldots,r} (N\bar{x}, \bar{\Pi}_j \bar{x}) = 0 \qquad \text{ou } \bar{x} \in S_2$$

contrairement à la propriété $B_1$ de définition des B-matrices.

q.e.d.

LEMME 41 -

*Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des B-matrices de type (r,r) vérifiant :*

$$(4.11) \qquad \max_{j=1,\ldots,r} (Nx, \bar{\Pi}_j x) \geq \alpha |x|_2^2$$

$$(4.12) \qquad \text{et} \quad ]|N|[ \; = \; \sup_{x \neq 0} \frac{|Nx|_2}{|x|_2} \leq c$$

*où $\alpha$, $c$ sont des constantes positives données, avec $\alpha < c$.*
*Alors il existe une constante $\alpha' > 0$, telle que $\forall N \in \mathcal{M}$*

$$(4.13) \qquad \max_{j=1,\ldots,r} (N^* x, \bar{\Pi}_j x) \geq \alpha' |x|_2^2$$

*où $N^*$ est l'adjointe de N.*

DEMONSTRATION -

Commençons par vérifier que l'ensemble $\mathcal{M}$ est fermé.

Pour x fixé, les fonctions $(Nx, \bar{\Pi}_j x)$ sont des fonctions continues des coefficients de N.

Donc, la fonction $\phi(N,x) = \max_{j=1,\ldots,r} (Nx, \bar{\Pi}_j x)$ est une fonction continue des coefficients de N.

Soit $\phi_\alpha(x)$ l'image de $R^{n^2}$ par la fonction réciproque de $\phi(N,x)$ de l'intervalle fermé $[\alpha, +\infty[$. D'après la continuité de $\phi(N,x)$ $\phi_\alpha(x)$ est fermé. Soit $\Psi_{(c)}$ l'image dans $R^{r^2}$ par la fonction réciproque de $]|N|[$, de l'intervalle $[0,c]$, qui est fermé. Or $]|N|[$ est une fonction continu des coefficients de N, donc $\Psi_{(c)}$ est fermé. Appelons encore $S_2$ la sphère euclidienne de $R^r$. On a :
$\mathcal{M} = \Psi_{(c)} \cap \left( \bigcap_{x \in S_2} \Phi_{(\alpha)}(x) \right)$ est fermé comme intersection d'un nombre

quelconque de fermés de $R^r$.

- Supposons maintenant l'assertion de notre énoncé fausse.

Il existerait une suite $\{N_n, x_n\}$ d'éléments de $\mathcal{M} \times S_2$ telle que :

(4.14) $$\max_{j=1,\dots,r} (N_n^* x_n, \Pi_j x_n) \to 0$$

Or, en utilisant également (4.12), on remarque que $\mathcal{M} \times S_2$ est un ensemble borné, fermé de $R^{r^2} \times R^r$ donc $\mathcal{M} \times S_2$ est compact. On peut donc extraire une sous suite, encore appelée $\{N_n, x_n\}$, d'éléments de $\mathcal{M} \times S_2$, convergeant vers $\{\tilde{N}, \tilde{x}\}$ dans $R^{r^2} \times R^r$, et vérifiant (4.14).

Des propriétés de continuité de $\phi(N^*, x) = \max\limits_{j=1,\dots,r} (N^* x, \Pi_j x)$ par rapport aux arguments de N et x, et de (4.14), on déduit que :

(4.15) $$\max_{j=1,\dots,r} (\tilde{N}^* \tilde{x}, \Pi_j \tilde{x}) = 0.$$

Or, puisque $\tilde{N} \in \mathcal{M}$, $\tilde{N}$ est une B-matrice, ce qui entraîne, en utilisant $B_2$ (ou $B_3$) de la définition 11, que $\tilde{N}^*$ est une B-matrice, ce qui est en contradiction avec (4.15).

q.e.d.

DEMONSTRATION DU THEOREME 39 -

Puisque, par hypothèse le système de propriétés I, ou le système de propriétés II est vérifié, d'après le Théorème 38 et l'hypothèse de para-V-ellipticité, les systèmes de propriétés I et II sont vérifiés.

Nous allons utiliser le système de propriétés II.

On a donc, d'après $a_2/$, $b_2/$ :

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i \quad \text{où} \quad \mathcal{V}_i = \Pi_i(\mathcal{V})$$

Rappelons encore que $\mathcal{V}_i$ et $\mathcal{V}_j$ sont orthogonaux $\forall i,j$ avec $i \neq j$.

Nous avons, par l'hypothèse de para-V-ellipticité :

$$\max_{j=1,\dots,r} a(u, \Pi_j u) \quad a(u, \Gamma_u u) \geq \alpha \|u\|^2_{\mathcal{V}}$$

où la première de ces deux inégalités est obtenue en remarquant que $\Gamma_u$ est nécessairement l'un des opérateurs $\Pi_i$ (Cf. (4.8)).

Nous sommes donc strictement dans la situation de l'exemple 2, §1, d'application de type P, dans un cas linéaire.

Soit un élément $u \in \mathcal{V}$.

Je peux écrire : $u = \sum_{i=1}^{r} u_i$ avec $u_i \in \mathcal{V}_i$

En ne retenant que l'ensemble $\mathcal{J}$ des indices $\subset \{1,\ldots,r\}$ pour lesquels $u_i \neq 0$, on a : $u = \sum_{i\in\mathcal{J}} u_i$

Soit $\lambda$ le vecteur de composantes $\lambda_i = ||u_i||$ $i\in\mathcal{J}$ et

$e_i = \dfrac{u_i}{||u_i||}$ $i\in\mathcal{J}$ .

Considérons les matrices N de coefficients $\eta_{i,j} = a(e_i,e_j)$ pour $i,j\in\mathcal{J}$ , et $N^*$ adjointe de N, $N^*$ ayant pour coefficient :

$$n^*_{i,j} = a^*(e_i,e_j) = a(e_j,e_i) \qquad \forall i,j\in\mathcal{J} .$$

Nous avons en vue d'appliquer le lemme 41. Pour cela, nous commençons par étudier la matrice N

Soit $\bar{\mathcal{V}} = \sum_{i\in\mathcal{J}} \xi_i e_i$ avec $\xi_i \in R$ pour $i\in\mathcal{J}$

$\bar{v}\in\mathcal{V}$ et $||\bar{v}||^2 = ||\sum_{i\in\mathcal{J}} \xi_i e_i|| = \sum_{i\in\mathcal{J}} \xi_i^2$

Soit $\xi$ le vecteur de composantes $\xi_i$ $i\in\mathcal{J}$ .

Si $\bar{\Pi}_j$ est le projecteur sur le $j^{\text{ième}}$ axe dans l'espace de dimension finie $\leqslant r$, correspondant ; on a :

$$\max_{j\in\mathcal{J}} (N\xi, \bar{\Pi}_j\xi) = \max_{j\in\mathcal{J}} a(\bar{v}, \Pi_j\bar{v}) \geqslant \alpha\, ||\bar{v}||^2 = \alpha\sum_{i\in\mathcal{J}} \xi_i^2$$

D'autre part, la définition 9, de para-V-ellipticité, présuppose, dans son énoncé, que la forme a(u,v) est bornée sur $V\times V$. Donc, il existe une constante $c > 0$, telle que :

$$|a(u,v)| \leqslant c\, ||u||\, ||v||$$

ou encore si $\bar{u} = \sum_{i\in\mathcal{J}} \eta_i e_i$ $\quad \bar{v} = \sum_{j\in\mathcal{J}} \eta_j e_j$

d'où $|a(\bar{u},\bar{v})| \leqslant c||\bar{u}||\ ||\bar{v}|| = c(\sum_{i\in\mathcal{J}} \eta_i^2)^{1/2} (\sum_{j\in\mathcal{J}} \xi_j^2)^{1/2}$

et $a(\bar{u},\bar{v}) = (N\eta,\xi)$

où $\eta$ , $\xi$ sont les vecteurs de composantes $\eta_i$ (respectivement $\xi_i$) pour $i\in\mathcal{J}$

Donc : $|(N\eta,\xi)| \leqslant c(\sum_{i\in\mathcal{J}} \eta_i^2)^{1/2} (\sum_{j\in\mathcal{J}} \xi_j^2)^{1/2}$

et par suite : $]|N|[ = \sup \dfrac{|N\xi|_2}{|\xi|_2} \leqslant c.$

Donc $N \in \mathcal{M}_{\alpha,c}$ défini dans le <u>lemme 41</u> notons que, dans le <u>lemme 41</u>, N est une matrice de type (r,r), ici N est une matrice de type (r',r'), où r' dépend de u : r' est le nombre d'indices de l'ensemble d'indices).

Donc d'après le <u>lemme 41</u>, il existe une constante $\alpha'(r')$, telle que :

$$\max_{j\in\mathcal{J}} (N^{*}\xi, \Pi_j \xi) \geq \alpha'(r') \; |\xi|_2^2 \qquad \forall \xi \in R^{r'}$$

$$\text{Soit } \tilde{\alpha} = \min_{r'=1,\dots,r} \alpha'(r')$$

$\tilde{\alpha}$ est un nombre > 0, comme chacun des $\alpha'(r')$, $\tilde{\alpha}$ ne dépend que de $\alpha$ et c.

Et on a :

$$\max_{j\in\mathcal{J}} (N^{*}\xi, \Pi_j \xi) \geq \tilde{\alpha} \; |\xi|_2^2 \qquad \xi \; R^{r'}$$

D'où en particulier :

$$\max_{j\in\mathcal{J}} (N^{*}\lambda, \Pi_j \lambda) \geq \tilde{\alpha} \; ||u||^2$$

c'est-à-dire : $\max_{j\in\mathcal{J}} a^{*}(u, \Pi_j u) \geq \tilde{\alpha} \; ||u||^2$

où $\tilde{\alpha}$ est une constante ne dépendant que de $\alpha$ et c.

On a bien : $\Gamma(\mathcal{V}) = \tilde{\Gamma}(\mathcal{V}) = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r\}$.

q.e.d.

<u>DEFINITION 10</u> -

*Soient a(u,v) une forme bilinéaire bornée sur* $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ *, et* $\Gamma$ *une application de* $\mathcal{V}$ *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ *telles que le triplet* $\{\mathcal{V}, a(u,v), \Gamma\}$ *est para-V-elliptique, si de plus le système de propriétés II (ou I) est vérifié nous dirons que a(u,v) est de type* $\mathcal{V}$*-elliptique.*

L'énoncé suivant est une variante du classique lemme de Lax-Milgramm

<u>COROLLAIRE 42</u> -

*Une forme bilinéaire bornée sur* $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ *, de type V-elliptique, peut être représentée par un isomorphisme* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathcal{V}'$ *dual de* $\mathcal{V}$ *.*

$$a(u,v) = (\mathcal{A}u, v) \qquad \forall u,v \in \mathcal{V}$$

<u>Ière démonstration</u> -

Du fait que a(u,v) est bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ , en utilisant le théorème de représentation de Riez, on vérifie aisément que $\mathcal{A}$ existe, et est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$.

Puisque $\mathcal{A}$ est de type $\mathcal{V}$-elliptique, on sait que $\Gamma$ est à valeurs dans les projecteurs orthogonaux, d'où, en utilisant l'inégalité de Schwartz, et la para-V-ellipticité :

$$||\mathcal{A}u||^* \, ||u|| \geq ||\mathcal{A}u||^* ||\Gamma_u u|| \geq (\mathcal{A}u, \Gamma_u u) = a(u,\Gamma_u u) \geq \alpha ||u||^2$$

et on obtient : $||\mathcal{A}u||^* \geq \alpha \, ||u|| \quad \forall u \in \mathcal{V}$.

Soit $\mathcal{A}^*$ l'opérateur adjoint de $\mathcal{A}$. On vérifie que $(\mathcal{A}^* u,v) = a^*(u$ et, par le théorème 39, et le raisonnement que nous venons d'effectuer pour $\mathcal{A}$, on obtient :

$$||\mathcal{A}^* u|| \geq \tilde{\alpha} \, ||u|| \qquad \forall u \in \mathcal{V}.$$

Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ admettent l'inverse continu, et, par le théorème de l'image fermée de Banach, $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$.

2ème Démonstration -

On utilise le système de propriétés II, et on applique le corollaire 27, dans le cas où $\mathcal{A}$ est linéaire, et L est l'opérateur à valeurs nulles dans $\mathcal{V}'$, $\forall v \in D(L) = \mathcal{V}$.

$\mathcal{A}$ étant linéaire est bien continue, et bornée, paramonotone et para-coercive par rapport à $\Gamma$.

3ème Démonstration -

On utilise le Théorème 16.
$\forall f \in \mathcal{V}'$, soit $\bar{\mathcal{A}}u = \mathcal{A}u - f$.

Par la définition de la para-V-ellipticité, on a, dans le cas présent :

$$\delta(t) = (t\phi(t) = \alpha \, t^2 \text{ et donc } \phi(t) = \alpha t.$$

aussi, comme $\Gamma$ est à valeurs dans les projecteurs orthogonaux, on a : $||\Gamma_v|| \leq 1 \quad \forall v \in \mathcal{V}$, et, nous pouvons choisir une boule $B_r$ avec :

$$\phi(r) = \alpha \, r \geq ||\bar{\mathcal{A}}(o)||^* = ||f||^*$$

$\bar{\mathcal{A}}$ étant linéaire, est demi-continue de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, d'où l'existence de u, unique, dans $B_r$, solution de $\bar{\mathcal{A}}(u) = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{A}u = f$.

On vérifie aisément l'unicité de la solution u dans tout l'espace.

## IV.2 - LE CAS DES ESPACES COMPLEXES -

Dans les définitions des notions de para-monotonie, para-V-ellipticité nous avons jusqu'à présent, soit supposé les espaces réels, soit supposé que $(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, \Gamma_{u-v}(u-v))$ était réel, par un choix convenable de $\Gamma$ (Cf. exemples 4 et 5, § 1).

Nous procédons maintenant un peu différemment en nous limitant, pour simplifier, au cadre des opérateurs linéaires.

DEFINITION 11 -

*$\mathcal{V}$ étant un espace de Hilbert sur le corps des complexes, et $\Gamma$ étant une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, vérifiant le système de propriétés II, nous dirons que la forme sesquilinéaire ( $a(u,v)$, est de type $\mathcal{V}$-elliptique si :*

$$Re \;\; a(v, \Gamma_v v) \geq \alpha ||v||^2_{\mathcal{V}} \qquad \forall v \in \mathcal{V}$$

Le Théorème 39 se généralise dà la situation présente, en remarquant que :

si $u = \sum_{i \in \mathcal{J}} u_i$ $\mathcal{J}$ étant une partie de $\{1,\ldots,r\}$ , on écrit : $u = \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i e_i$

où $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$ , et $\lambda_i = ||u_i||$

On a :

$$Re \;\; a(u, \Gamma_u u) = \max_{j \in \mathcal{J}} \; Re \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i a^*(e_i, e_j)$$

$$= \max_{j \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \; Re \;\; a^*(e_i, e_j)$$

on considère la matrice $N^*$, de coefficients : Re $a^*(e_i,e_j)$ ; $N^*$ est l'adjointe de la matrice N de coefficients : Re $a(e_i, e_j)$, puisque :

$$Re \;\; a^*(e_i,e_j) = \overline{Re \; a(e_j,e_i)} = Re \; a(e_j,e_i)$$

à partir de là, on peut appliquer, de manière inchangée, le lemme 41, d'où la généralisation du Théorème 39.

Par suite, en utilisant la Ière démonstration (on peut aussi employer la 3ème démonstration), on obtient l'analogue du corollaire 42 qui s'énonce :

COROLLAIRE 43 -

*Soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert sur le corps des complexes, et $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$, de type $\mathcal{V}$-elliptique, au sens de la définition 11, alors $a(u,v)$ peut être représentée par un isomorphisme $\mathcal{A}$ de $\mathcal{V}$, sur $\mathcal{V}'$ ($\mathcal{V}'$ étant l'antidual de $\mathcal{V}$) :*

$$a(u,v) = (\mathcal{A}u,v) \qquad \forall u,v\in\mathcal{V}.$$

## IV.3 - OPERATEURS NON BORNES - (Cf. Lions [33], [34], pour le cas V-elliptique classique).

- Soit $\mathcal{V}$, H deux espaces de Hilbert complexes avec $\mathcal{V}\subset H\subset\mathcal{V}'$ ou $\mathcal{V}'$ est l'antidual de $\mathcal{V}$, les injections étant continues, et chaque espace étant dense dans le suivant.

Etant donnée une forme sesquilinéaire bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$, rappelons la définition de l'opérateur non borné A, à valeurs dans H, associé.

DEFINITION 12 -

*On définit D(A) par l'espace des $u\in\mathcal{V}$, tels que la forme antilinéaire :*

(4.16) $\qquad v\to a(u,v)$

*soit continue sur $\mathcal{V}$, pour la topologie induite par H.*

Remarque -

$0\in D(A)$ qui peut éventuellement être réduit à $\{0\}$. Si $u\in D(A)$ comme $\mathcal{V}$ est dense dans H, la forme (4.16) se prolonge par continuité en une forme antilinéaire continue sur H, et H étant un espace de Hilbert, on voit donc que : pour $u\in D(A)$, il existe $Au\in H$, unique, tel que :

$$a(u,v) = (Au,v) \qquad \forall v\in\mathcal{V}.$$

On vérifie aisément que l'application $u\to Au$ est linéaire.

DEFINITION 13 -

*On désigne par A l'opérateur du domaine D(A), défini par (4.16), ou l'opérateur A est défini par la donnée du triplet $\{\mathcal{V}, H, a(u,v)\}$.*

COROLLAIRE 44 -

*$a(u,v)$ étant une forme sesquilinéaire bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ de type V-elliptique, au sens de la définition 11, alors $\forall f\in H$, il existe $u\in D(A)$, unique solution de*

$$Au = f.$$

DEMONSTRATION -

Puisque $H\subset\mathcal{V}'$ avec injection continue, $f\in\mathcal{V}'$ donc il existe, d'après le corollaire 43, u unique solution de :

(4.17) $\quad a(u,v) = (f,v)_H \qquad \forall v\in\mathcal{V}$

comme $v \to (f,v)_H$ est une forme antilinéaire continue sur H, on a bien $u\in D(A)$ et :

(4.18) $\quad Au = f.$

Inversement, si u est solution de (4.18), u est solution de (4.17), d'où l'unicité.

REMARQUE -

L'opérateur $\mathcal{A}$ isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$ apparaît comme une extension de A, on a en effet pour tout $u\in D(A)$ :

$$Au = \mathcal{A}u.$$

PROPOSITION 45 -

*Sous les hypothèses du corollaire 44 D(A) est dense dans H et A est un opérateur fermé.*

DEMONSTRATION -

Supposons qu'il existe $f\in H$ avec $(u,f) = 0$, pour tout $u\in D(A)$ d'après l'extension du Théorème 39 au cas complexe, donnée au début du § 4.2, $a^*(u,v) = \overline{a(v,u)}$ est également de type V-elliptique, au sens de la définition 11, donc, par le corollaire 44 $\exists u_o$ (unique) dans $D(A^*)$ domaine de $A^*$, opérateur non borné associé à $\{\mathcal{V}, H, a^*(u,v)\}$ tel que :

$A^*u_o = f.$

Alors $(u,f) = (u, A^*u_o) = \overline{(A^*u_o, u)} = \overline{a^*(u_o, a)} = a(u, u_o) = (Au, u_o) = 0.$

Comme par le corollaire 44, A applique D(A) sur H, on en déduit que $u_o = 0$, donc $f = 0$, et D(A) est dense dans H.

Montrons maintenant que A est fermé. Soit $u_n \in D(A)$, avec $u_n \to u$ dans H, et $f_n = Au_n \to f$ dans H.

Nous avons vu que A est la restriction à D(A) de l'opérateur $\mathcal{A}$ isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, donc $\mathcal{A}^{-1}$ étant continu $u_n = \mathcal{A}^{-1} f_n$ converge vers $u = \mathcal{A}^{-1} f$ ; et $\mathcal{A}u = f$, mais puisque $f \in H$ $u \in D(A)$.

q.e.d.

COROLLAIRE 46 -

*D(A) muni de la norme du graphe :*

$$|u|_A = (|u|^2 + |Au|^2)^{1/2}$$

*est un espace de Hilbert, et A est un isomorphisme de D(A) sur H.*

## IV.4 - ALTERNATIVE DE RIEZ FREDHOLM -

THEOREME 47 -

*Soit a(u,v) une forme sesquilinéaire bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, telle qu'il existe $\lambda_o > 0$, tel que la forme sesquilinéaire $a(u,v) + \lambda_o(u,v)_H$ soit de type V-elliptique.*

*On suppose de plus que l'injection de V dans H est compacte (complètement continue) alors l'alternative de Riez-Fredholm est valable pour l'équation :*

$$(4.19) \quad \left| \begin{array}{ll} Au + \lambda u = f & \text{f donné dans H} \\ u \in D(A) & \end{array} \right.$$

DEMONSTRATION - (d'après [34] p. ).

Si A est l'opérateur non borné défini par le triplet {V, H, a(u,v)}, on vérifie aisément que l'opérateur non borné défini par $\{V, H, a(u,v) + \lambda(u,v)_H\}$ est $A + \lambda I$, où I est l'identité dans H, avec $D(A + \lambda) = D(A)$.

Puisque $a(u,v) + \lambda_o(u,v)$ est de type V-elliptique, d'après le corollaire 44, l'équation :

$$\left| \begin{array}{l} (A + \lambda_o)u = f \\ u \in D(A) \end{array} \right.$$

a une solution unique $u = G(\lambda_o)f$, où $G(\lambda_o) \in \mathcal{L}(H; D(A))$.

Comme l'injection de $\mathcal{V}$ dans H, donc celle de D(A) dans H, est compacte, l'opérateur $G(\lambda_o)$ considéré dans $\mathcal{L}(H,H)$ est compact.

Mais (4.19) équivaut à :

$(A + \lambda_o)u + (\lambda - \lambda_o)u = f,$

c'est-à-dire :

$u + (\lambda-\lambda_o)\ G(\lambda_o)u = G(\lambda_o)f.$

On résoud cette équation dans H (ce qui entraîne que $u \in D(A)$ puisque $u = G(\lambda_o)f - (\lambda-\lambda_o)\ G(\lambda_o)u)$ et comme $G(\lambda_o)$ est compact dans H, le Théorème 47 est démontré.

## IV.5 - LE CAS DES H-SYSTEMES -

PROPOSITION 48 -

*Une forme sesquilinéaire, bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, admettant une M-V-minorante, est de type V-elliptique.*

DEMONSTRATION -

On constate immédiatement tout d'abord que $a_1/$ du système de propriété II est vérifiée. En se rapportant à la définition 7, Chap. I, on a :

(4.20) $\quad \text{Re}\ a(u,\Pi_j u) \geq \sum_{i=1}^{r} n_{i,j} ||u_i||_i\ ||u_j||_j$

où N est une M-matrice.

Or les M-matrices sont un cas particulier des B-matrices, donc, d'après le lemme 40, $\exists\,\alpha > 0$, tel que :

$$\max_{j=1,\dots,r} \sum_{i=1}^{r} n_{i,j} ||u_i||_i\ ||u_j||_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{r} ||u_i||_i^2 = \alpha ||u||_{\mathcal{V}}^2$$

d'où, par (4.20) :

$$\max_{j=1,\dots,r} \text{Re}\ a(u, \Pi_j u) \geq \alpha ||u||_{\mathcal{V}}^2$$

q.e.d.

On suppose $\mathcal{V} \subset H \subset \mathcal{V}'$ chaque espace étant dense dans le suivant, les injections étant continues.

COROLLAIRE 49 -

*S'il existe une constante* $\lambda_o$, *telle que* $a(u,v) + \lambda_o(u,v)_H$ *admette une M-V-minorante, et si l'on suppose de plus l'injection de V dans H compacte, alors l'alternative de Riez Fredholm est valable pour l'équation :*

$$\left| \begin{array}{ll} Au + \lambda u = f & \forall f \in H \\ u \in D(A) & \end{array} \right.$$

*où A est l'opérateur non borné associé au triplet* $\{V, H, a(u,v)\}$.

## IV.6 - SYSTEMES DE TYPE FORTEMENT ELLIPTIQUE -

$\Omega$ est un ouvert de $R^n$

$\beta$ , $\gamma$ noterons des multi entiers.

$$\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \qquad \gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

$$|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n \qquad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$$

Nous considérons un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients constants, de la forme :

$$B_{i,j} = \sum_{\substack{|\beta| = m_i \\ |\gamma| = m_j}} D^\gamma a_{i,j}^{\beta,\gamma} D^\beta$$

Soit $\xi \in R^n$ $\quad \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

et $\eta \in C^r$ $\quad \eta = \{\eta_1, \dots, \eta_r\}$

DEFINITION 14 -

*Le système d'opérateurs* $\{B_{i,j}\}$ *sera dit de type fortement elliptique, si* $\forall \xi \in R^n$ *et* $\forall \eta \in C^r$ *avec* $\xi , \eta \neq 0$ ; *on a :*

$$(4.21) \quad \max_{j=1,\dots,r} \quad \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma} \xi^{\beta+\gamma} \eta_i \bar{\eta}_j > 0$$

LEMME 50 -

*(4.21) étant vérifiée, il existe une constante* $\alpha > 0$, *telle que :*

$$(4.22) \quad \max_{j=1,\dots,r} \quad \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma} \xi^{\beta+\gamma} \xi^{\beta+\gamma} \eta_i , \bar{\eta}_j \geq C \sum_{j=1}^{r} |\eta_j|^2 |\xi|_2^{2m_j}$$

*où* $|\xi|_2$ *est la norme euclidienne de* $\xi$ *dans* $R^n$.

REMARQUE -

Dans les premiers membres de (4.21), (4.22), on utilise pour les multi indices $\beta$, $\gamma$, la notation classique qui consiste à omettre les sommations pour les indices répétés. Mais nous n'appliquons pas cette notation aux indices i et j, qui ne sont donc indices de sommations que si $\sum_{i=1}^{r}$ (respectivement $\sum_{j=1}^{r}$) est placé devant l'expression à sommer.

DEMONSTRATION -

Puisque $\xi \neq 0$ on a $|\xi|_2 \neq 0$

d'où :

$$a_{i,j}^{\beta,\gamma}\ \xi^{\beta+\gamma} = a_{i,j}^{\beta,\gamma}\left(\frac{\xi}{|\xi|_2}\right)^{\beta+\gamma} |\xi|_2^{m_i + m_j}$$

Posons : $\xi' = \dfrac{\xi}{|\xi|_2}$ et soit $\eta'_i = \eta_i |\xi_2|^{m_i}$ $\quad i=1,\dots,r$

Par hypothèse $\xi$, $\eta \neq 0$, et on en déduit que : $\xi'$, $\eta' \neq 0$ et :

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma}\ \xi^{\beta+\gamma}\ \eta_i,\ \eta_j = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma}\ \xi'^{\beta+\gamma}\ \eta'_i\ \bar{\eta}'_j$$

avec $|\xi'|_2 = 1$ ; appelons $SR_2$ l'ensemble des $\xi'$ vérifiant cette dernière propriété.

Posons $\phi(\xi', \eta') = \max\limits_{j=1,\dots,r} \ \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma}\ \xi'^{\beta+\gamma}\ \eta'_i\ \eta'_j$

(4.22) s'écrit :

(4.23) $\quad \phi(\xi', \eta') \geq C \sum_{j=1}^{r} |\eta'_j|^2$ ; avec $\xi' \in SR_2$

Il est alors équivalent de vérifier (4.23), ou :

(4.24) $\quad \phi(\xi', \eta') \geq C \qquad \forall \xi' \in SR_2 \qquad \forall \eta' \in SC_2$

où $SC_2$ est l'ensemble des vecteurs de $C^r$, tels que :

$$\sum_{j=1}^{r} |\eta'_j|^2 = 1$$

Supposons l'assertion de notre énoncé fausse, il existerait une suite $\{\xi'_n, \eta'_n\} \in SR_2 \times SC_2$, telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\xi'_n, \eta'_n) = 0$$

or, $SR_2 \times SC_2$ est un fermé borné de $R^n \times C^r$, donc un compact de $R^n \times C^r$.

Donc il existe une sous suite, encore appelée $\{\xi'_n , \eta'_n\}$ convergeant vers $\{\tilde{\xi} , \tilde{\eta}\} \in SR_2 \times SC_2$ avec $\lim_{n\to\infty} \phi(\xi'_n, \eta'_n) = 0$

Or la fonction $\phi(\xi,\eta)$ étant continue des arguments $\xi$, et $\eta$, on en déduit :

$$\phi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \max_{j=1,\dots,r} \quad \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma} \tilde{\xi}^{\beta+\gamma} \tilde{\eta}_i, \bar{\tilde{\eta}}_j = 0$$

ou $\{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\} \in SR_2 \times SC_2$ et sont donc $\neq 0$, contrairement à l'hypothèse (4.21).

q.e.d.

On suppose que $\Omega$ est un ouvert borné de $R^n$.

Nous notons par :

$$|u_i|_{m_i} = \int_r \sum_{|\beta|=m_i} |D^\beta u_i|^2 \, dx$$

et

$$||u||_{m_i} = \int_r \sum_{|\beta|\leq m_i} |D^\beta u_i|^2 \, dx$$

et si $m = \{m_1, \dots, m_r\}$

$$|u|_m = \left(\sum_{i=1}^{r} |u_i|^2_{m_i}\right)^{1/2} ; \quad ||u||_m = \left(\sum_{i=1}^{r} ||u_i||^2_{m_i}\right)^{1/2} .$$

$\Omega$ étant borné, on peut utiliser l'inégalité de Friedrichs, à partir de laquell on vérifie que :

$|| \; ||_{m_i}$ et $| \; |_{m_i}$ sont équivalentes sur l'espace $\mathcal{V}_i = H_o^{m_i}(\Omega)$ (complète de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $|| \; ||_{m_i}$), et donc, également les normes $|| \; ||_m$ et $| \; |_m$ sont équivalentes sur $\mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} H_o^{m_i}(\Omega)$.

Nous associons au système d'opérateur $\{A_{i,j}\}$ la forme sesquilinéaire :

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}(u_i, v_j)$$

où $a_{i,j}(u_i, v_j) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\beta|= m_i \\ |\gamma|= m_j}} a_{i,j}^{\beta,\gamma} \, D^\beta u_i \, D^{\bar{\gamma}} v_j \, dx$

Nous avons supposé les coefficients $a_{i,j}^{\beta,\gamma}$ constants, aussi, on vérifie immédiatement que $a(u,v)$ est borné sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ .

THEOREME 51 -

*Soit* $\mathcal{V} = \prod_{i=1,\ldots,r} H_o^{m_i}(\Omega)$, *le système* $B_{i,j}$ *étant de type fortement elliptique, à coefficients constants, alors* $a(u,v)$ *est de type V-elliptique (au sens de la définition 11).*

DEMONSTRATION -

Soit $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_r\} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^r$

Nous notons par $\hat{\imath}$ la racine carrée de $-1$, dont la partie imaginaire est positive, ceci en vue d'utiliser la transformée de Fourier.

$$\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(\phi_i, \phi_j) = \mathrm{Re} \int_\Omega \sum_{\substack{i=1 \\ |\beta| = m_i \\ |\gamma| = m_j}}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma} D^\beta \phi_i \overline{D^\gamma \phi_j}\, dx =$$

$$= \mathrm{Re} \frac{1}{(2\Pi)^n} \int_{R^n} \sum_{\substack{i=1 \\ |\beta| = m_i \\ |\gamma| = m_j}}^{r} a_{i,j}^{\beta,\gamma} \quad \xi^{\beta+\gamma}((-\hat{\imath})^{m_i} \phi_{\hat{\imath}})((-\hat{\imath})^{m_j} \phi_j)\, d\xi.$$

où $\phi_{\hat{\imath}}$ est la transformée de Fourier $\forall i=1,\ldots,r$ ; aussi en utilisant le lemme 50, et le Théorème de Fourier-Plancherel, on obtient :

$$\max_{j=1,\ldots,r} \quad \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(\phi_i, \phi_j) \geq \frac{C}{(2\Pi)^n} \int_{R^n} \sum_{j=1}^{r} |\hat{\phi}_j|^2 \, |\xi|^{2m_j} \, d\xi$$

$$= C_1 \int_{R^n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{|\beta| = m_j} \frac{m_j!}{\beta!} |D^\beta \phi_j|^2 \, dx$$

$$\geq \alpha |\phi|_m^2$$

on termine la démonstration, en utilisant le fait que $a(u,v)$ étant borné sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, est, par linéarité, bicontinue, et le fait que $|\mathcal{D}(\Omega)|^n$ est dense dans $\mathcal{V}$, on obtient ainsi l'inégalité de Para-V-ellipticité $\forall v \in \mathcal{V}$.

q.e.d.

## IV.7 - UNE VARIANTE DE L'INEGALITE DE GARDING -

Soit $\mathcal{V} = \prod_{j=1,\dots,r} H_o^{m_j}(\Omega)$

**THEOREME 52 -**

*Soit $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, vérifiant la condition de type V-ellipticité.*

(4.25) $$\max_{j=1,\dots,r} \operatorname{Re} a(u, u_j) \geq \alpha\, |u|_m^2$$

*Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour toute forme sesquilinéaire bornée $b(u,v)$, sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ vérifiant :*

(4.26) $$|b(u, \Pi_j v)| \leq \rho\, ||u||_{m_j}\, ||v||_{m_j - 1} \qquad \forall u, v \qquad j=1,\dots,r$$

*on peut trouver un réel $\lambda^o > 0$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda^o$ on a :*

(4.27) $$\max_{j=1,\dots,r} \operatorname{Re}(a(u, \Pi_j u) + b(u, \Pi_j u) + \lambda\, |u_j|^2_{L^1(\Omega)} \geq \alpha_1 ||u||_m^2$$

**DEMONSTRATION -**

Nous appelons, selon nos notations antérieures $\Gamma$ , l'application de $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ défini par (4.25), et soit $H = [L^2(\Omega)]^r$, on remarque que $(u, \Gamma_u u)_H = |\Gamma_u u|_H^2 = |u_j|^2_{L^2(\Omega)}$ pour un certain indice j dépendant de u.

On a, d'après (4.26) :

(4.28) $$\operatorname{Re}\,(a(u,\Gamma_u u) + b(u,\Gamma_u u) + \lambda\, |\Gamma_u u|_H^2)$$

$$\geq a(u,\Gamma_u u) - \rho ||u||_m\, ||\Gamma_u u||_{m-1} + \lambda |\Gamma_u u|_H^2$$

En tenant compte du fait que $|u|_m$ et $||u||_m$ sont équivalentes on a :

$$\rho ||u||_m\, ||\Gamma_u u||_{m-1} \leq \rho_1 |u|_m\, ||\Gamma_u u||_{m-1} \leq \frac{\varepsilon\rho_1}{2} |u|_m^2 + \frac{\rho_1}{2} ||\Gamma_u u||_{m-1}^2$$

et, en utilisant (4.25), (4.28), on obtient :

$$\operatorname{Re}\, a(u,\Gamma_u u) + b(u,\Gamma_u u) + \lambda |\Gamma_u u|_H^2$$

$$\geq (\frac{\alpha - \varepsilon\rho_1}{2})\, |u|_m^2 + \frac{\alpha}{2} |u|_m^2 - \frac{\rho_1}{2\varepsilon} ||\Gamma_u u||_{m'}^{?} + \lambda |\Gamma_u u|_H^2$$

où l'on choisit $\varepsilon < \frac{\alpha}{\rho_1}$ , et soit $\alpha_1 = \frac{\alpha - \varepsilon\rho_1}{2} > 0$.

Par l'inégalité de Garding, classique, nous savons qu'il existe $\lambda_j^o$, tel que :

$$\frac{\alpha}{2} |u_j|^2_{m_j} - \frac{\rho_1}{2\varepsilon} ||u_j||^2_{m_j-1} + \lambda_j^o |u_j|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall u_j \in H_o^{m_j}(\Omega) \qquad \forall j=1,\dots,r$$

Soit $\lambda^o = \max\limits_{j=1,\dots,r} \lambda_j^o$

Du fait que $\Gamma_u$ est un projecteur canonique de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_j = H_o^{m_j}(\Omega)$ on a :

$$|u|^2_m \geq |\Gamma_u u|^2_m$$

D'où : $\forall \lambda \geq \lambda_o$

$$\frac{\alpha}{2} |u|^2_m - \frac{\rho_1}{2\varepsilon} ||\Gamma_u u||^2_{m-1} + \lambda |\Gamma_u u|^2_H \geq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{V},$$

et par conséquent :

$$\mathrm{Re}\,(a(u,\Gamma_u u) + b(u, \Gamma_u u) + (u,\Gamma_u u)_H) \geq \alpha_1 |u|^2_m$$

q.e.d.

## IV.8 - LE PROBLEME DE DIRICHLET -

Nous conservons les notations précédentes. Soit B un opérateur aux dérivées partielles, de la forme :

$$B = B_1 + B_2 \qquad (B_{i,j} = B^1_{i,j} + B^2_{i,j}, \quad \forall i,j = 1,\dots,r)$$

où $B_1$ et $B_2$ sont des systèmes d'opérateurs donnés par :

$$B^1_{i,j} = \sum_{\substack{|\beta| = m_i \\ |\gamma| = m_j}} (-1)^{m_j} D^\gamma a^{\beta,\gamma}_{i,j}(x) D^\beta \qquad i,j = 1,\dots,r$$

$$B^2_{i,j} = \sum_{\substack{|\beta| \leq m_j \\ |\gamma| \leq m_j - 1}} D^\gamma b^{\beta,\gamma}_{i,j}(x) D^\beta \qquad i,j = 1,\dots,r$$

(4.29) où les coefficients $a^{\beta,\gamma}_{i,j}(x)$ et $b^{\beta,\gamma}_{i,j}(x)$ sont supposés indéfiniment différentiables.

Pour $u,v \in \prod\limits_{j=1,\dots,r} H_o^{m_j}(\Omega) =$ appelons $a_1(u,v) = \sum\limits_{i,j=1}^{r} a_{i,j}(u_i,v_j)$ la forme sesquilinéaire associée au système d'opérateur $B_1$(par "intégration par partie" (Formule de Green) dans le cas des données nulles à la frontière), et $\qquad b(u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} b_{i,j}(u_i,v_j)$

la forme sesquilinéaire associée au système d'opérateurs $B_2$.

Du fait que les coefficients des opérateurs ont été supposés indéfiniment différentiables, la forme sesquilinéaire :

$$a(u,v) = a_1(u,v) + b_1(u,v)$$

est bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$.

REMARQUE SUR LES DIFFERENTS OPERATEURS CONSIDERES -

Par une démarche bien classique (Cf. [33], [34]), au système d'opérateurs B, on associe tout d'abord la forme sesquilinéaire a(u,v) à laquelle on fait correspondre l'opérateur $\mathcal{A}$ , borné de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ (ou bien si $\mathcal{V}\subset H\subset\mathcal{V}'$ avec des hypothèses convenables ; la restriction A de $\mathcal{A}$ à D(A), ou A est un opérateur non borné de $\mathcal{V}$ dans H).

On peut alors se poser la question : quelle distinction établir entre B et $\mathcal{A}$ (ou A) ?

On remarque que l'opérateur B étant donné, on peut envisager d'autres choix d'espaces $\mathcal{V}$, que celui que nous avons fait :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} H_0^{m_i}(\Omega)$$

On peut considérer $\mathcal{V}_1 = \prod_{i=1,\dots,r} H^{m_i}(\Omega)$, et des espaces compris entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$, puisque $\mathcal{V}\subset\mathcal{V}_1$.

La forme sesquilinéaire a(u,v) étant bornée sur $\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_1$, à tout sous espace W, fermé pour la topologie de $\mathcal{V}_1$, avec $\mathcal{V}\subseteq W\subseteq\mathcal{V}_1$, on fait correspondre $\mathcal{A}_W$ et $A_W$ dépendant de W.

Néanmoins, revenant au cas $W = \mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} H_0^{m_i}(\Omega)$, remarquons que, par construction, les restrictions à $[D(\Omega)]^r$ de $\mathcal{A}$ (ou A), et de B, sont identiques, où $[D(\Omega)]^r$ est une partie dense de $\mathcal{V}$ , aussi quoique cela ait un caractère formel (qu'il faudrait préciser à l'aide de résultats supplémentaires de régularité), nous identifierons, dans l'énoncé suivant B et A, opérateur non borné, associé au triplet $\{a(u,v);\mathcal{V}; H\}$ où $H = [L^2(\Omega)]^r$, où, par abus de language, nous définirons D(A) comme l'ensemble des $u\in\prod_{i=1,\dots,r} H_0^{m_i}(\Omega)$ tels que $\sum_{i=1}^{r} B_{i,j}\, u_i\in L^2(\Omega) \quad \forall j=1,\dots,r.$

COROLLAIRE 53 -

*Sous l'hypothèse (4.29), et $a_1(u,v)$ étant supposée de type V-elliptique, ou bien le problème homogène :*

$$Bu = 0 \qquad u \in \prod_{i=1,\dots,r} H_o^{m_i}(\Omega)$$

*a une solution non nulle ;*

*ou bien* $\forall f \in = \{f_1, f_2, \dots, f_r\} \in [L^2(\Omega)]^r$ *le système :*

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{r} B_{i,j}\, u_i = f_j \\ u \in \prod_{i=1,\dots,r} H_o^{m_i}(\Omega) \end{array} \right.$$

*a une solution unique.*

DEMONSTRATION -

D'après le Théorème 52, il existe une constante $\lambda^o$, positive, telle que :

$$a(u,v) + \lambda(u,v)_H = a_1(u,v) + b(u,v) + \lambda(u,v)_H$$

soit de type V-elliptique ; d'où le résultat, par le Théorème 47.

q.e.d.

## IV.9 - SYSTEMES ELLIPTIQUES FAIBLEMENT COUPLES -

On considère le système aux dérivées partielles : $\Omega$ étant un ouvert borné de $R^n$.

$$(4.30) \qquad -\Delta u_j^\lambda + \lambda \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(x)\, u_i^\lambda = g_j(x) \quad x \in \Omega \qquad j=1,\dots,r$$

$$(4.31) \qquad u_j^\lambda(x) = 0 \qquad x \in \partial(\Omega) \qquad j=1,\dots,r$$

et on fait l'hypothèse :

$$(4.32) \quad \max_{j=1,\dots,r} \int_\Omega \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(x)\, v_i(x), v_j(x)\, dx \geq \alpha \sum_{i=1}^{r} |v_j|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in [L^2(\Omega)]^r$$

avec $a_{i,j}(x) \in L^\infty(\Omega)$

THEOREME 54 -

*Sous l'hypothèse (4.32),* $\forall g = \{g_1, \dots, g_r\} \in [L^2(\Omega)]^r$, $\forall \lambda > 0$, *il existe* $u_\lambda = \{u_1, \dots, u_r\} \in [H^2(\Omega) \wedge H_o^1(\Omega)]^r$ *solution unique de (4.30), (4.31).*

REMARQUE -

En appliquant la théorie classique (Cf. par exemple [29], p. 660) des équations intégrales comportant un opérateur complètement continu, on montre que le problème (4.30), (4.31), a une solution unique, sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de $\lambda$, qui correspondent aux valeurs propres du problème homogène associé. Le théorème 54 montre donc que sous l'hypothèse (4.32), ces valeurs propres sont toutes négatives.

DEMONSTRATION -

Soit $G = \int_\Omega G(x,t)dx$ l'opérateur de Green associé au problème de Dirichlet homogène pour le laplacien.

Considérons l'opérateur $K = \{K_1,\ldots,K_r\}$ où $K_j = G$ $j=1,\ldots,r$ et soit :

$$\mathcal{A} = \left| \begin{matrix} a_{11} & & a_{1r} \\ & a_{ij} & \\ & & a_{rr} \end{matrix} \right|$$

opérateur de $[L^2(\Omega)]^r$ dans $[L^2(\Omega)]^r$. On transforme le problème (4.30), (4.31) en un problème de la forme :

$$u + \lambda K Au = f$$

où $f = \{f_1,\ldots,f_r\}$ avec $f_j = G g_j$ $j=1,\ldots,r$

L'opérateur G est un opérateur monotone, pour le vérifier considérons le problème $\left| \begin{array}{lll} -\Delta W = h & x\in\Omega & h\in L^2(\Omega) \\ W = 0 & x\in\partial\Omega & \end{array} \right.$

On a $(-\Delta W, W) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 dx \geq 0$

or $(-\Delta W, W)_{L^2(\Omega)} = (h, Gh)_{L^2(\Omega)}$ et donc G est linéaire (complètement) continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et monotone. Donc, si on pose $\mathcal{V} = [L^2(\Omega)]^r$

K est un opérateur monotone diagonal de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, par rapport à $\Gamma$ application de type P fini r, définie par l'hypothèse (4.32), $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire paramonotone par rapport à $\Gamma$. Pour la fonction $\delta = ct^2$, ce qui entraîne la propriété de para-coercivité ; d'où, par le Théorème 24, $\forall\, \lambda > 0$, l'existence de $u_\lambda$ solution de (4.30), (4.31) $u_\lambda \in [L^2(\Omega)]^r$.

Or (4.30) peut s'écrire :

$$- \Delta u_j^\lambda = g_j(x) - \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(x)\, u_i^\lambda(x)$$

où le second membre $\in L^2(\Omega)$, il est alors classique (Cf. par exemple **Nirenberg** [43]) que $u_j^\lambda \in H^2(\Omega) \wedge H_o^1(\Omega) \quad \forall j=1,\ldots,r.$

q.e.d.

# V - EQUATIONS ABSTRAITES D'EVOLUTIONS LINEAIRES - (I)

## V.I - SUR LE THEOREME DES PROJECTIONS - (Comparer à J.L. Lions [33], chap.III)

Soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert, sur le corps des complexes et $\mathcal{V}'$ l'antidual de $\mathcal{V}$. Soit (,) le produit scalaire dans $\mathcal{V}$, et $|\ |_{\mathcal{V}}$ la norme associée.

Soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ un espace préhilbertien, pour le produit scalaire ((,)), la norme associée étant $||\ ||$.

On suppose que l'injection de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$ est continue :

(5.1) $\quad |w|_{\mathcal{V}} \leqslant C_1\, ||w||$ , $C_1$ constante > 0, $\forall w \in \mathcal{W}$

(5.2) $\quad$ On considère une application $\Gamma$ , de domaine $\mathcal{W}$ à valeurs dans un ensemble bornée de $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$.

On notera par $\Gamma_w$ l'image par $\Gamma$ d'un élément $\forall w \in W$.

Soit $\mathcal{M} = \sup\ ||\Gamma_w||_{\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})}$, qui existe par (5.2).

Soit E(u,v) une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$, avec les hypothèses :

(5.3) $\quad$ Pour tout $v \in \mathcal{W}$ , la forme linéaire $u \to E(u,v)$ est continue sur $\mathcal{V}$.

(5.4) $\quad \forall w \in \mathcal{W}$ $E(\Gamma_w w, w)$ est réel, et de plus, il existe une constante $\alpha > 0$, telle que :
$E(\Gamma_w w, w) \geqslant \alpha\, ||w||^2 \qquad \forall w \in \mathcal{W}$

(5.5) $\quad$ Soit $w \to g(w)$ une forme antilinéaire, continue sur $\mathcal{W}$.
Nous noterons par : $]|g|[ \; = \sup\ |g(w)| \quad w \in \mathcal{W} \quad ||w|| = 1.$

THEOREME 55 -

*On suppose que les hypothèses (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) sont vérifiées. Alors il existe* $u \in \mathcal{V}$ *tel que :*

$E(u,w) = g(w)$ *pour tout* $w \in \mathcal{W}$, *et de plus on a la majoration :*

$$(5.6) \qquad |u|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\mathcal{M} c_1}{\alpha} \, ]|g|[$$

DEMONSTRATION -

(Comparer à [33], Théorème 11, page 37 ).

La fonctionnelle $u \to E(u,w)$ étant continue sur $\mathcal{V}$ , il existe $Rw \in \mathcal{V}$, tel que :

$$E(u,w) = (u, Rw) \qquad \forall w \in \mathcal{W}$$

- On vérifie tout d'abord que R applique biunivoquement $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{V}$. En effet, si Rw = 0, alors :

$$(\Gamma_w w, Rw) = E(\Gamma_w w, w) = 0$$

ce qui, d'après (5.4), entraîne $||w|| = 0$.

- Montrons maintenant que l'inverse $R^{-1}$ de R est continue de R(w), muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{W}$.

En effet, posant $Rw = a$, $w = R^{-1}a$, on a alors les relations :

$$(5.7) \qquad \alpha||w||^2 \overset{(1)}{\leq} E(\Gamma_w w, w) \overset{(2)}{=} (\Gamma_w w, Rw) \overset{(3)}{\leq} |\Gamma_w w|_{\mathcal{V}} \, |Rw|_{\mathcal{V}} \overset{(4)}{\leq} \mathcal{M}|w|_{\mathcal{V}} |Rw|_{\mathcal{V}}$$

$$\overset{(5)}{\leq} \mathcal{M} c_1 ||w|| \; |Rw|_{\mathcal{V}}$$

où nous numéroterons dans l'ordre par (1), (2), (3), (4), (5), les inégalités et égalités ci-dessus.

où (1) résulte de (5.4),

(2) résulte de (5.3),

(3) résulte de l'inégalité de Schwartz,

(4) est obtenu par (5.2),

(5) est obtenu par (5.1).

D'où : $$||R^{-1}a|| \leq \frac{\mathcal{M} c_1}{\alpha} |a|_{\mathcal{V}}$$

A partir de là, la suite de la démonstration est identique à [ ], Théorème 11, page 37, nous la reproduisons pour faciliter la lecture.

On prolonge $R^{-1}$ par $\hat{R}$, application linéaire continue de $\overline{R(w)}$ (adhérence de $R(w)$ dans $\mathcal{V}$) dans $\hat{w}$ (complété de $w$, pour la norme $\|\ \|_w$).

La forme antilinéaire $w \to g(w)$ se prolonge par continuité à $\hat{w}$, donc :

$g(w) = ((\xi_g, w))$, ou $\xi_g \in \hat{w}$.

L'équation $E(u,w) = g(w)$ $\forall w \in \mathcal{W}$, équivaut à :

$(u, Rw) = ((\xi_g, w))$ $\forall w \in \mathcal{W}$

ou encore à :

(5.8) $\quad (u,a) = ((\xi_g, R^{-1}a)) \qquad \forall a \in R(w)$

Soit $P$ l'opérateur de projection orthogonale dans $\mathcal{V}$, sur $\overline{R(\mathcal{W})}$.

Soit $R_1 = \hat{R}P \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \hat{\mathcal{W}})$, soit $R^*_1$ son adjointe :

$R^*_1 \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{W}}; \mathcal{V})$, et il est équivalent de résoudre (5.8), où :

$(u,a)_{\mathcal{V}} = ((\xi_g, R_1 a)) = (R^*_1 \xi_g, a)$ $\forall a \in R(w)$, et par suite, une solution du problème est :

$$u = R^*_1 \xi_g$$

De plus : $\|R^*_1\|_{\mathcal{L}(\hat{\mathcal{W}}; \mathcal{V})} = \|R_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}; \hat{\mathcal{W}})} \leq \|R^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{W})}$

puisque la norme de $P$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ est 1.

Or, par les inégalités (5.7) : $\|R^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{W})} \leq \dfrac{m\, c_1}{\alpha}$, d'où la majoration (5.6).

q.e.d.

REMARQUE -

Nous avons simplement remplacé dans le Théorème 11, Chap. III, de [33], l'hypothèse :

(5.9) $\quad |E(w,w)| \geq \alpha \|w\|^2 \qquad \forall w \in \mathcal{W}$

par (5.4).

On constate que (5.9), entre bien dans le cadre de (5.4), en considérant l'application $\Gamma$, définie par :

$\forall w \in \mathcal{W} \quad \Gamma^o_w = \dfrac{\overline{E(w,w)}}{|E(w,w)|}$ d'où $\|\Gamma^o_w\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})} \leq 1$ et si (5.9) est vérifié pour cette application $\Gamma^o$, on a bien :

$$E(\Gamma^o_w w, w) = \frac{|E(w,w)|^2}{|E(w,w)|} = |E(w,w)| \geq \alpha \|w\|^2$$

## V.2 - THEOREMES D'ISOMORPHISME -

### THEOREME 56 -

*$\mathcal{V}$ étant un espace de Hilbert réel, de dual $\mathcal{V}'$, et $\Gamma$ une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, telle que l'un des systèmes de propriétés I ou II (Cf.IV.1, l'énoncé de ces deux systèmes de propriétés) soit vérifié.*

*Soient $a(u,v)$ une forme bilinéaire bornée sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$, de type V-elliptique, et $\mathcal{A}$ l'opérateur "représentant" $a(u,v)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V}')$.*

*Soit $L$ une application linéaire, maximale, monotone, de $D(L)$ sous espace dense de $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$, $L$ étant stable par $\Gamma$.*

*Alors $\mathcal{A} + L$ est un isomorphisme de $\mathcal{V}_\wedge D(L)$ sur $\mathcal{V}'$.*

Ière démonstration -

Par le Théorème 38, nous pouvons nous placer dans le système de propriétés II, c'est-à-dire : r étant un entier $\geq 1$ :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i \quad ; \quad \Gamma(\mathcal{V}) = \{\Pi_1,\dots,\Pi_r\}$$

$\Pi_i$ projections canoniques de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}_i$ ; et puisque $a(u,v)$ est de type V- élliptique, par le Théorème 39 on a :

$$(5.10) \qquad \max_{j=1,\dots,r} a(\Pi_j v,v) = a(\tilde{\Gamma}_v v,v) \geq \bar{\alpha}\ ||v||^2 \qquad \forall v\in\mathcal{V}$$

En utilisant le lemme 31 (de Brezis), on voit que $L^*$ étant fermé, $D(L^*)$ est alors un espace de Hilbert, dense dans $\mathcal{V}$.

En vue d'appliquer le Théorème 55, posons $\mathcal{W} = D(L^*)$ et

$E(u,v) = a(u,v) + (u, L^*v) \quad \forall u\in\mathcal{V},\ v\in\mathcal{W}.$

Puisque L est stable par $\Gamma$, d'après la proposition 14, $L^*$ est stable par $\tilde{\Gamma}$, comme $L^*$ est aussi monotone, $L^*$ est monotone diagonale par rapport à $\tilde{\Gamma}$, et, en utilisant (5.10), on a :

$$(5.11) \qquad E(\Gamma_v v,v) = a(\tilde{\Gamma}_v v,v) + (\tilde{\Gamma}_v v,L^*v) \geq \bar{\alpha}\ ||v||^2 \qquad \forall v\in\mathcal{W}.$$

Nous sommes donc dans les conditions d'application du Théorème 55, et $\forall f\in\mathcal{V}'$, il existe $u\in\mathcal{V}$, solution de :

$$(5.12) \qquad E(u,v) = (f,v) \qquad \forall v\in\mathcal{W} = D(L^*)$$

D'où : $\quad (u, L^*v) = (f - \mathcal{A}u,v)$ est une forme bilinéaire continue sur $D(L^*)$, pour la topologie de $\mathcal{V}$, et comme $D(L^*)$ est dense dans $\mathcal{V}$, $u \in D(L)$, et on a bien $\mathcal{A}u + Lu = f$.

Unicité -

Si elle n'était pas vérifiée, il existerait $\bar{u} \neq 0$, solution de :

$$\mathcal{A}\bar{u} + L\bar{u} = 0$$

d'où encore :

$$a(\bar{u}, \Gamma_{\bar{u}}\bar{u}) + (L\bar{u}, \Gamma_{\bar{u}}\bar{u}) = 0$$

Or L étant monotone, stable par $\Gamma$, est monotone diagonale par la proposition 12, et par suite, le second terme du premier membre est positif ou nul.

Par suite :

$$a(\bar{u}, \Gamma_{\bar{u}}\bar{u}) \leqslant 0$$

comme $a(u,v)$ est de type V-elliptique, on a : $\bar{u} = 0$.

q.e.d.

2ème DEMONSTRATION -

Par le Théorème 38, le système de propriétés I est vérifié, ce qui nous permet d'appliquer le Corollaire 27, en remarquant que :

- $\mathcal{A}$ étant linéaire borné, est bien demi continue de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.

- Puisque $a(u,v)$ est de type V-elliptique, on a bien :

$$\lim_{||v|| \to +\infty} \frac{a(v, \Gamma_v v)}{||v||} \geqslant \lim_{||v|| \to +\infty} \alpha\, ||v|| = +\infty$$

q.e.d.

3ème DEMONSTRATION -

Par le Théorème 32, sur la régularisation elliptique.

- L étant stable par $\Gamma$, et en utilisant le système de propriétés II, on voit que :

$L = \{L_1, \dots, L_r\}$ où les $L_i$, restrictions de L à $\mathcal{V}_i$ sont des opérateurs maximaux, monotones de $\mathcal{V}_i$ dans $\mathcal{V}'_i$, de domaine $D(L_i)$.

D'où $D(L) = \prod_{i=1,\dots,r} (D(L_i)$ est un espace diagonalement compatible avec $\Gamma$, et par suite l'hypothèse (3.31) du Théorème 32 est vérifiée, la vérifiaation des autres hypothèses du Théorème 32 s'effectue comme pour celle du Corollaire 27 dans la 2ème démonstration.

q.e.d.

PROPOSITION 57 -

*Sous les hypothèse du Théorème 56, $\forall f \in \mathcal{V}'$, la solution u, du problème : $\mathcal{A} u + Lu = f$, vérifie :*

(5.12) $||u|| \leq \frac{1}{\bar{\alpha}} ||f||$ *$\bar{\alpha}$ dépendant uniquement de $\alpha$, c, r, ou :*

- *$\alpha$ = constante de para V-ellipticité de $a(u,v)$.*
- *$c = ||\mathcal{A}|| = \sup\limits_{\substack{u,v \in \mathcal{V} \\ ||u||=||v||=1}} |a(u,v)|$*
- *$r \in N$, est définie dans le système de propriétés II.*

DEMONSTRATION -

D'après le Théorème 39, on a (5.11) où $\bar{\alpha}$ , ne dépend que de $\alpha$, c, r, or, dans la Ière démonstration du Théorème 56, on a obtenu u comme solution de (5.12), c'est-à-dire, en employant le Théorème 55 ; or comme $\tilde{\Gamma}\{v\} = \{\Pi_1, \ldots, \Pi_r\}$ et que les $\Pi_j$ étant des projecteurs orthogonaux, on a : $||\Pi_j||_{\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})} = 1$, et de (5.6), on en déduit (5.12).

q.e.d.

COROLLAIRE 58 -

*Sous les hypothèses du Théorème 56, $\mathcal{A} + L$ est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $D(L^*)'$.*

DEMONSTRATION -

On note tout d'abord que par la proposition 14, et le lemme de Brezis les propriétés de L et $L^*$, respectivement par rapport à $\Gamma$ et $\tilde{\Gamma}$ sont les mêmes. Et, en utilisant le système de propriétés II, et le Théorème 39, $\mathcal{A}^* + L^*$ vérifie les conditions du Théorème 56, donc $\mathcal{A}^* + L^*$ est un isomorphisme de $D(L^*)$ sur $\mathcal{V}'$, d'où le résultat par transposition.

q.e.d.

On peut, en suivant le développement de Lions-Magenès [37], T.1, Chap. III, interpoler. On suppose $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, $\mathcal{V}$ dense dans $\mathcal{V}'$.

On a alors, sous les hypothèses du Théorème $D(L) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \subset D(L^*)'$, et on peut définir les espaces intermédiaires (Cf. Lions-Magenès [37], T.1, chap. 1, § 2) : $[D(L), \,]_\theta$ et $[\mathcal{V}', D(L^*)']_\theta$ ; où $\theta$ est un réel avec $0 \leq \theta \leq 1$.

Du Théorème 56, et du Corollaire 58, on déduit le :

COROLLAIRE 59 -

*Sous les hypothèses du Théorème 56,* $\mathcal{A} + L$ *est un isomorphisme de* $[D(L),\mathcal{V}]_\theta$ *sur* $[\mathcal{V}', D(L^*)']_\theta$, *pour tout* $\theta$ *tel que* $0 \leq \theta \leq 1$.

## VI - EQUATIONS ABSTRAITES D'EVOLUTIONS (II)
## ETUDE DE LA REGULARITE, SOLUTIONS DE DISTRIBUTIONS ET ULTRADISTRIBUTIONS A VALEURS VECTORIELLES.

### VI.1 - NOTATIONS ET RAPPELS SUR LES VECTEURS DE LA CLASSE $M_k$ -

(D'après Lions - Magenès [37], T. III, Chap. 9)

Soit $\{M_k\}$, $k=0,1,2,\ldots$ une suite de nombres réels et positifs, tels que :

(6.1) $\qquad M_k^2 \leq M_{k-1}\ M_{k+1} \qquad \forall k \geq 1$

(condition de convexité logarithmique de la suite).

(6.2) $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} < +\infty$

(condition de non quasi-analyticité).

(6.3) Il existe une constante $\eta > 0$, telle que : $M_{k+1} \leq \eta^k M_k \quad \forall k$

(condition suffisante de stabilité par rapport à la dérivation).

(6.4) Il existe une constante $C_1$ telle que :

$\binom{k}{j} M_{k-j}\ M_j \leq C_1\ M_k \qquad \forall k$ et $\forall j$ avec $0 \leq j \leq k$.

Exemples de suites $\{M_k\}$ vérifiant (6.1),...,(6.4), encore appelées : suites de Gevrey :

(6.5) $\qquad M_k = (k!)^s$, $M_k = k^{ks}$ $\qquad M_k = \Gamma(sk+1)$ où $s$ est réel $> 1$,

et $\Gamma$ est la fonction d'Euler.

- Soient E un espace de Banach réflexif de norme $\| \ \|$ , et G(t) un semi-groupe continu de E dans E, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} G(t) \in \mathcal{L}(E,E) & \forall t \geq 0 \\ \forall e \in E, \text{ la fonction } t \to G(t)e \text{ est continue de } t \geq 0 \to E \ ; \\ G(o) = I \\ G(t)G(s) = G(t+s) & \forall t,s \geq 0 \end{cases}$$

Soit $-\Lambda$ le générateur infinitésimal du semi-groupe G(t).

On a :

$D(\Lambda)$ = domaine de $\Lambda = \{e \mid \lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(G(h)e-e)$ est un élément de $E\}$.

Alors $\Lambda e = \lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(G(h)e-e)$

Domaines des puissances de $\Lambda$ .

La fonction $t \to G(t)\, u_o$ est une fois continuement différentiable de $t \geq 0 \to E$, si, et seulement si $u_o \in D(A)$, et alors :

$$\frac{d}{dt} G(t)\, u_o = -G(t)\, \Lambda u$$

En itérant ce procédé, posons :

$$D(\Lambda^k) = \{e \mid e \in D(\Lambda),\ \Lambda e \in D(\Lambda), \ldots, \Lambda^{k-1} e \in D(\Lambda)\}$$

espace de Banach, pour la norme :

$$(6.6) \qquad \sum_{j=0}^{k} \|\Lambda^j e\|$$

Alors :

$D(\Lambda^k)$ est l'espace des vecteurs e tels que $t \to G(t)\, e$ soit k fois continuement différentiable de $t \geq 0$, dans E.

On considère également :

$$D(\Lambda^\infty) = \bigcap_{k=0}^{\infty} D(\Lambda^k)$$

espace de Fréchet pour la suite de normes (6.6), $D(\Lambda^\infty)$ est l'espace des vecteurs e tels que $t \to G(t)e$ soit indéfiniment différentiable de $t \geq 0 \to E$.

Rappelons que $D(\Lambda^\infty)$ est dense dans E.

DEFINITION 15 -

*On appelle vecteur de classe* $M_k$, $\{M_k\}$ *étant une suite logarithmiquement convexe, tout élément* $e \in E$, *pour lequel existent des constantes* $C$, $\xi$ *telles que :*

$$||\Lambda^k e|| \leq C \quad \xi^k \, M_k \qquad \forall h$$

*Les vecteurs de classe* $M_k$ *constituent l'espace, éventuellement réduit à* $\{0\}$, $D(\Lambda^\infty \,;\, M_k)$.

THEOREME 60 - (Théorème 7.1, Chap. 9 de [37], T. III).

*Si l'on suppose que la suite* $\{M_k\}$, *vérifie (6.1) et (6.2), l'espace* $D(\Lambda^\infty \,;\, M_k)$ *est dense dans* $E$.

SITUATION TRANSPOSEE -

Soit $G^*(t)$ le semi groupe adjoint de $G(t)$ dans $\mathcal{L}(E';E')$. Si $-\Lambda^*$ est le générateur infinitésimal de $G^*(t)$, $\Lambda^*$ est l'adjoint au sens des opérateurs non bornés, de l'opérateur $\Lambda$ dans $E$, de domaine $D(\Lambda)$.

On introduit alors $D(\Lambda^{*\infty}; M_k)$ comme précédemment, en remplaçant $\Lambda$ par $\Lambda^*$.

On suppose que la suite $\{ M_k \}$ vérifie (6.1), (6.2), (6.3), aussi, d'après le Théorème 60 $D(\Lambda^{*\infty} \,;\, M_k)$ est dense dans $E'$, aussi, par dualité considérons $D(\Lambda^{*\infty} \,;\, M_k)$.

On obtient les inclusions suivantes :

$$(6.6) \qquad D(\Lambda^\infty; M_k) \subset D(\Lambda^\infty) \subset D(\Lambda^q) \subset E \subset D(\Lambda^{*q})' \subset D(\Lambda^{*\infty})' \subset D(\Lambda^{*\infty}; M_k)'$$

où $D(\Lambda^{*q})'$ est le dual fort de $D(\Lambda^{*q})$ $\quad \forall q \leq \infty$ .

Rappelons encore le résultat de structure suivant :

THEOREME 61 -

*$\forall f$ de $D(\Lambda^\infty \,;\, M_k)'$ peut se représenter, de façon non unique par :*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k e \qquad \Lambda^0 = \text{identité}$$

*où* $e_k \in E \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k M_k \, ||e_k|| < \infty \qquad \forall \xi$

## VI.2 - RESULTATS GENERAUX DE REGULARITE, ET TRANSPOSITION -

- Soient les espaces de Hilbert $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$, avec $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$ les injections étant continues, et chaque espace étant dense dans le suivant.

(6.7) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit } G(s) \text{ un semi groupe continu et borné, dans } \mathcal{V} \text{ et } \mathcal{V}'\text{, et donc} \\ \text{aussi dans } \mathcal{H}\text{, tel que :} \\ \|G(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq 1 \qquad \forall s \geq 0\end{array}\right.$

- Soit $-\Lambda$ le générateur infinitésimal de $G(s)$, appelons $D(\Lambda;\mathcal{V}')$ ; $D(\Lambda;\mathcal{H})$ ; $D(\Lambda;\mathcal{V})$ son domaine dans les espaces $\mathcal{V}'$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$.

- L'espace $D(\Lambda;\mathcal{V}')$ étant muni de la norme $\left(\|v\|^2_{\mathcal{V}'} + \|\Lambda v\|^2_{\mathcal{V}'}\right)^{1/2}$ est un espace de Hilbert, car $\Lambda$ est fermé, même chose pour $D(\Lambda;\mathcal{H})$ ; $D(\Lambda;\mathcal{V})$.

Rappelons Cf. [37], T.1, Chap. III, Lemmes I.2, I.3 :

(6.8) $-\mathcal{V} \wedge D(\Lambda;\mathcal{V}') \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$ chaque espace étant dense dans le suivant.

(6.9) $-(\Lambda\mathcal{V},\mathcal{V}) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{V} \wedge D(\Lambda;\mathcal{V}')$.

Soit $\Gamma$ une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{V}) \wedge \mathcal{L}(\mathcal{H};\mathcal{H}) \wedge \mathcal{L}(\mathcal{V}';\mathcal{V}')$ telle que le système de propriété II, soit vérifié, relativement à $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$.

C'est-à-dire, plus précisément :

(6.10) $$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_i \\ \mathcal{H} = \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{H}_i \\ \mathcal{V}' = \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}'_i\end{array}\right.$$

où $\mathcal{V}'_i$ est le dual de $\mathcal{V}_i$

avec $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{H}_i \subset \mathcal{V}'_i$

(6.11) $\Gamma_w = \{\Pi_1, \dots, \Pi_i, \dots, \Pi_r\}$

où $\Pi_i$ est le projecteur canonique de $\mathcal{V}$ (respectivement $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$) sur le ième espace $\mathcal{V}_i$ (resp. $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{V}'_i$).

Hypothèses de diagonalité pour G(s) -

(6.12) On suppose que G(s) est stable par $\Gamma$ , c'est-à-dire $G(s)\Gamma_w = \Gamma_w G(s)$ $\forall s \geq 0$ $\forall w \in \mathcal{V}$, ou encore $G(s) = \{G_1(s), \ldots, G_i(s), \ldots, G_r(s)\}$

ou $G_i(s)$ vérifie les hypothèses (6.7) relativement à $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{V}'_i$.

Alors, on vérifie sans peine que :

$\Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_i, \ldots, \Lambda_r\}$

où $\Lambda_i$ est le générateur infinitésimal de $G_i(s)$. Par suite $\Lambda\,\Gamma_w = \Lambda_j v_j$ pour un certain indice j, et $\Lambda_j v_j = \Gamma_w \Lambda v$ , donc :

(6.13) $\Lambda$ est stable par $\Gamma$ .

Enoncé des principaux résultats -

a(u,v) étant une forme bilinéaire bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , on dénote comme précédemment par $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{V}')$ l'opérateur représentant a(u,v) i.e

$$a(u,v) = (\mathcal{A}u,v) \qquad \forall u,v \in \mathcal{V}.$$

COROLLAIRE 62 -

*a(u,v) étant une forme bilinéaire bornée sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , les hypothèses (6.10), (6.11), (6.12) étant vérifiées et a(u,v) étant de type V-elliptique, alors : $\mathcal{A} + \Lambda$ est un isomorphisme de $\mathcal{V} \wedge D(\Lambda\,;\mathcal{V})$ **sur** $\mathcal{V}'$, et il existe une constante $\bar{\alpha}$ , telle que $\forall f \in \mathcal{V}'$, la solution u de*

$$\mathcal{A}u + \Lambda u = f$$

*vérifie :*

$$(6.14) \qquad \|u\| \leq \frac{1}{\bar{\alpha}} \|f\|$$

DEMONSTRATION -

Il suffit de prendre dans le Théorème 56 $L = \Lambda$

Par (6.13), $\Lambda$ est stable par $\Gamma$ . Par (6.8), (6.9), $\Lambda$ est monotone ; à domaine dense. En passant au semi-groupe adjoint $G^*(s)$ qui est également de contraction dans $\mathcal{H}$ , on obtient que $\Lambda^*$ est également monotone, donc, d'après le lemme de Brezis $\Lambda$ est maximal monotone.

D(L) étant muni de la norme :

$$||v||_1 = (||\Lambda v||^2_{\mathcal{V}'} + ||v||^2_{\mathcal{V}})^{1/2}$$

et $\mathcal{V}_\wedge D(\Lambda;\mathcal{V}')$ étant muni de la norme :

$$||v||_2 = (||v||^2_{\mathcal{V}} + ||\Lambda v||^2_{\mathcal{V}'} + ||v||^2_{\mathcal{V}'})^{1/2}$$

On déduit des inégalités :

$$||v||^2_{\mathcal{V}} + ||\Lambda v||^2_{\mathcal{V}'} \leq ||v||^2_{\mathcal{V}} + ||\Lambda v||^2_{\mathcal{V}'} + ||v||^2_{\mathcal{V}'} \leq 2(||v||^2_{\mathcal{V}} + ||\Lambda v||^2_{\mathcal{V}'})$$

que $||\ ||_1$ et $||\ ||_2$ sont équivalentes et $D(L) = \mathcal{V}_\wedge D(\Lambda;\mathcal{V}')$.

Quant à la majoration (6.14), essentielle dans ce qui suit, elle résulte de la <u>proposition</u> 57.

q.e.d.

On obtiendra de même, à partir des <u>corollaires</u> 58 et 59, le :

<u>COROLLAIRE 63</u> -

*Sous les hypothèses du <u>Corollaire 62</u>* $\mathcal{A} + \Lambda$ *est un isomorphisme de :*

$$[\mathcal{V}_\wedge D(\Lambda;\mathcal{V}'),\mathcal{V}]_\theta \to [\mathcal{V}',(\mathcal{V}_\wedge D(\Lambda^*;\mathcal{V}'))']_\theta$$

*pour tout* $\theta$, *avec* $0 \leq \theta \leq 1$.

Rappelons Cf. [37] , T. III, p. 167, $D_{0,M_k}$ étant l'espace des fonctions $s \to \phi(s)$ scalaires, indéfiniment différentiables, à support compact dans $\Omega$ , telle qu'il existe deux nombres positifs $C$ et $\xi$ (dépendants de $\phi$ ), tels que :

$$\sup_{s\in]0+\infty[} |D^k\phi(s)| \leq C\ \xi^k\ M_k$$

Il existe une suite régularisante $\rho_n \in D(0,M_k)$, c'est-à-dire :

$$\rho_n \in D_{0,M_k} \quad \text{et} \quad \rho_n \to \delta \text{ au sens des mesures sur } [0,+\infty[.$$

On utilise les notations suivantes :

- Si $B_1$ et $B_2$ sont des opérateurs, on pose :

$$[B_1, B_2] = B_1B_2 - B_2B_1$$

- $\forall \phi$ fonction scalaire, à support compact. On désigne par $G(\phi)$ l'opérateur dans $\mathcal{V}'$, (resp. $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$) donné pour $f \in \mathcal{V}'$ (resp. $\mathcal{V}$ ; $\mathcal{H}$) par :

$$G(\phi)f = \int_0^\infty G(s)\ f\ .\ \phi\ (s)\ ds.$$

THEOREME 64 -

*Sous les hypothèses du corollaire 62, et de plus $\mathcal{A}$ vérifiant :*

$$||[\mathcal{A}, G(\rho'_n)]\, v||_{\mathcal{V}'} \leq C\ ||u||_{\mathcal{V}} \qquad \forall v \in \mathcal{V} \text{ (C constante indépendante de n)}$$

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(D(\Lambda ; \mathcal{V}) ;\ D(\Lambda ; \mathcal{V}'))$$

*$\forall f \in D(\Lambda ; \mathcal{V}')$ la solution u de $\mathcal{A}u + \Lambda u = f$ appartient à l'espace $D(\Lambda ; \mathcal{V}) \wedge D(\Lambda^2 ; \mathcal{V}')$.*

DEMONSTRATION -

La démonstration est strictement identique à celle du Théorème 9.1 Chap. III, de [37]. Le corollaire 62, remplaçant le Théorème I.1, Chap. 3 de [37], T. 1, et la majoration (6.14) jouant le rôle de l'estimation habituellement obtenue en utilisant la V-ellipticité classique.

q.e.d.

Comme il en va de même pour tous les énoncés de ce paragraphe, nous ferons correspondre, pour la démonstration de chacun d'eux, l'énoncé correspondant de Lions-Magenès [37], T. III, chap. 9.

THEOREME 65 - (Analogue du Théorème 9.2, de [37], T. III, chap. 9)

*Sous les hypothèses du Corollaire 62, et en supposant de plus que :*

$$(6.15) \qquad ||[\mathcal{A}, G(\rho_n^{(k)})]\ v||_{\mathcal{V}'} \leq C_k(||v||_{\mathcal{V}} + ||\Lambda v||_{\mathcal{V}} + \ldots + ||\Lambda^{k-1} v||_{\mathcal{V}})$$

$$\forall v \in D(\Lambda^{k-1} ; \mathcal{V}) \text{ et } \mathcal{A} \in \mathcal{L}(D(\Lambda^j ; \mathcal{V}) ;\ D(\Lambda^j ; \mathcal{V}'))$$

$$0 \leq j \leq k-1$$

*Pour tout $f \in D(\Lambda^k ; \mathcal{V}')$*
*On a $u \in D(\Lambda^k ; \mathcal{V}) \wedge D(\Lambda^{k+1} ; \mathcal{V}')$.*

COROLLAIRE 66 - (Analogue du Corollaire 9.1, de [37], T. III, Chap. 9)

*Sous les hypothèses du Corollaire 62, et (6.15), ayant lieu $\forall k$, (sans uniformité en k ; $C_k$ dépendant de k), si*

$$f \in D(\Lambda^{\infty}_{;} \mathcal{V}')$$

*on a :*

$$u \in D(\Lambda^{\infty}_{;} \mathcal{V})$$

THEOREME 67 - (Analogue du Théorème 9.3, de [37], T. III, Chap. 9).

*On considère une suite* $\{M_k\}$, *vérifiant (6.1),...,(6.4). On fait les hypothèses du Corollaire 62, et on suppose qu'il existe C et L telles que :*

$$||[\mathcal{A}, G(\rho_n^{(k)})]u||_{\mathcal{V}'} \leq C \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} L^{k-j} M_{k-j} ||\Lambda^j u||_{\mathcal{V}}$$

(6.16) $\forall u \in D(\Lambda^{k-1}; \mathcal{V})$, *et* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(D(\Lambda^j; \mathcal{V}); D(\Lambda^j; \mathcal{V}'))$, $0 \leq j \leq k-1$.

*L'inégalité (6.16) étant satisfaite* $\forall k$.

$\mathcal{A} + \Lambda$ *est un isomorphisme de* $D(\Lambda^{\infty}; M_k; \mathcal{V})$ *sur* $D(\Lambda^{\infty}; M_k; \mathcal{V}')$.

TRANSPOSITION -

THEOREME 68 - (Cf. § 9.3, de [37], T. III, Chap. 9).

*Sous les hypothèses du Théorème 67,* $\mathcal{A} + \Lambda$ *est un isomorphisme de :*

$$(D(\Lambda^{\infty}, M_k; \mathcal{V}'))' \text{ sur } (D(\Lambda^{\infty}, M_k; \mathcal{V}))'$$

DEMONSTRATION -

En utilisant le Théorème 39, on voit que $\mathcal{A}^*$ vérifie aussi les hypothèses du Corollaire 62 (Para-V-ellipticité). Par le lemme de Brezis et la proposition 14 $\Lambda^*$ est monotone maximale, stable par rapport à $\widetilde{\Gamma}$. Donc les hypothèses du Corollaire 62 sont satisfaites, de même que (6.16), donc, d'après le Théorème 67 $\mathcal{A}^* + \Lambda^*$ est un isomorphisme de $D(\Lambda^{*\infty}, M_k; \mathcal{V})$ sur $D(\Lambda^{*\infty}, M_k; \mathcal{V}')$, d'où le résultat par transposition.

q.e.d.

# VII - APPLICATIONS ET EXEMPLES -

## VII.1 - SYSTEMES LINEAIRES PARABOLIQUES GENERAUX -

Soit $\Omega$ ouvert de $R^n$.

On considère des espaces $V_i$ tels que

$$H_o^{m_i}(\Omega) \subset V_i \subset H^{m_i}(\Omega) \qquad \forall i=1,\ldots,r$$

$V_i$ étant fermé pour la topologie de $H^{m_i}(\Omega)$ et une famille formes bilinéaires (sesquilinéaires dans le cas complexe) $a_{i,j}(t,u_i,v_j)$, bornées indépendamment de t sur $V_i \times V_j$, pour $i,j=1,\ldots,r$.

Soit $a(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}(t;u_i,v_j)$

$a(t;u,v)$ est alors une forme bilinéaire bornée, **indépendamment de t,** sur $V \times V$, où $V = \prod_{i=1,\ldots,r} V_i$.

Soit $H = [L^2(\Omega)]^r$ ; $V' = \prod_{i=1,\ldots,r} V_i'$ (dual de $V_i$)

Soit $\mathcal{V} = L^2[0,T;V]$ ; on sait que $\mathcal{V}' = L^2[0,T;V']$

et soit $\mathcal{H} = L^2[0,T;H]$ pour $0 < T \leqslant +\infty$

Appelons $A_{i,j}(t) = \mathcal{L}(V_i, V'_j)$ l'opérateur représentant la forme bilinéaire $a_{i,j}(t;u_i,v_j)$.

$$a_{i,j}(t;u_i,v_j) = (A_{i,j}(t)\,u_i,\ v_j)$$

On considère le système d'équations :

$$(7.1)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} A_{i,j}(t)\,u_i(t) + \dfrac{\partial u_j}{\partial t}(t) = f_j(t) \\ \text{où } f_j(t) \in L^2[0,T\,;L^2(\Omega)] \qquad j=1,\ldots,r \\ u_j(0) = u_{o,j} \quad \text{donné dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

(On peut considérer des cas plus généraux :

$f_j(t) \in L^2[0,T;V'_j]$, $f_j(t) \in$ aux espaces $\Xi$'définis dans Lions-Magenès [37], Chap. 3, puis selon les propriétés de régularité de $a(t;u,v)$ $f_j$ distribution, ou ultra-distribution à valeurs vectorielles (Cf. Chap. 9, de [37])).

Les résultats de Lions-Magenes [37], T. 1, Chap. 3, et T III, Chap. 9 s'appliquent au système (7.1), sous couvert de l'hypothèse a(t;u,v) est coercive (uniformément en t), c'est-à-dire qu'il existe $\lambda > 0$, tel que :

$$(7.2) \qquad a(t;v,u) + \lambda |v|_H^2 \geq \alpha ||v||_V^2 \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0,T].$$

ce qui entraîne que la forme bilinéaire :

$$a_\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v)_{\mathcal{H}} = \int_0^T a(t;u(t),v(t)\,dt + \lambda \int_0^T (u(t),v(t))_H dt$$

vérifie la condition de V-ellipticité (peut être $\mathcal{V}$-ellipticité conviendrait mieux).

$$(7.3) \qquad a_\lambda(v,v) = a(v,v) + \lambda |v|_{\mathcal{H}}^2 \geq \alpha ||v||_{\mathcal{V}}^2 \qquad \forall v \in \mathcal{V}.$$

- Les résultats obtenus précédemment aux § 5 et 6 nous permettent de remplacer (7.3) par ce que nous avons appelé une condition "du type V-ellipticité" (ou encore de para-V-ellipticité), pour $a_\lambda(u,v)$, condition s'énonçant par :

$$\exists \lambda > 0 \quad \text{tel que :}$$

$$(7.4) \qquad \max_{j=1,\dots,r} \int_0^T \sum_{i=1}^r a_{i,j}(t;u_i(t),u_j(t))dt + \lambda \int_0^T |u_j(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$

$$\geq \alpha \sum_{j=1}^r \int_0^T ||u_j||_{V_j}^2\,dt = \alpha ||u||_{\mathcal{V}}^2$$

Une condition suffisante pour que (7.4) soit vérifiée étant que, par exemple : a(t;u,v) admette une M-V-minorante uniforme, c'est-à-dire :

$$(7.5) \quad \left| \begin{array}{l} \exists \lambda > 0 \quad a_{jj}(t;\ \ _j,\ \ _j) + \lambda |\mathcal{V}_j|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha_{jj} ||\mathcal{V}_j||^2_{V_j} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall \mathcal{V}_j \in V_j, \quad \forall t \geq 0 \\ |a_{i,j}(t;u_i,v_j)| \leq C_{i,j} ||u_i||_{V_i} \, ||v_j||_{V_j} \qquad \forall i,j \qquad i \neq j \\ \text{où la matrice } N = \left| \begin{matrix} \alpha_{jj} & -C_{i,j} \\ & \ddots \end{matrix} \right| \text{ est une M-matrice indépen-} \end{array} \right.$$

dante de t.

On peut envisager des cas plus généraux que (7.5), en considérant des formes bilinéaires issues de systèmes "de type fortement elliptiques", définis au § 4.6.

LES RESULTATS OBTENUS -

A partir des Théorèmes des § 5 et 6, on obtient des résultats d'existence, de solution dans $\mathcal{V}_\Lambda D(\Lambda;\mathcal{V})$ (ici $\Lambda = \frac{\partial}{\partial t}$ (avec un domaine convenable) dans $[\mathcal{V}_\Lambda D(\Lambda;\mathcal{V}'),\mathcal{V}]_\theta$ espaces s'interprêtant comme dans [37] Chap. 3).

Puis des résultats de régularité dans des classes de fonctions, à valeurs vectorielles, différentiables (respectivement indéfiniment différentiables, de Gevrey), par rapport à t, et par application des théorèmes de transposition on obtient des résultats d'existences plus généraux, dans des espaces de distributions, et d'ultradistributions à valeurs vectorielles, sous nos nouvelles conditions "du type V-ellipticité". On obtient ainsi l'analogue des résultats de Lions-Magenès [37], Chap. 9 (n° 1 et 9, concernant les problèmes paraboliques).

Plutôt que de détailler toutes ces situations, nous allons donner quelques résultats dans un cadre plus particulier, mais qui a l'intérêt d'être lié à des types d'équations provenant de la Physique Mathématique.

## VII.2 - SYSTEMES PARABOLIQUES FAIBLEMENT COUPLES -

(Cf. Protter-Weinberger [45], Chap. 3, Sec. 8 et la bibliographie de cet ouvrage).

Il s'agit de problèmes dont les équations sont de la forme :

$\Omega$ étant un ouvert de $R^n$

$$(7.6) \qquad \frac{\partial u_{j(x,t)}}{\partial t} - \Delta u_{j(x,t)} + \sum_{i=1}^{r} b_i(x,t)\, u_i(x,t) = f_j(x,t) \quad x\in\Omega \quad \forall t>0$$

plus des conditions aux limites, et une condition initiale.

Nous ne ferons pas usage de la possibilité éventuellement offerte par le changement de fonction inconnue classique :

$$(7.7) \qquad u_j(x,t) = e^{\lambda t} w_j(x,t)$$

de se ramener, grâce aux inégalités de coercivité (inégalité de Garding, dans le cas du problème de Dirichlet), au cas d'une équation opérationnelle parabolique, comportant un opérateur V-elliptique, au sens classique ; car un tel changement de fonction inconnue a pour effet de modifier le comportement à l'infini du problème, ce qui n'est pas toujours souhaitable.

Par ailleurs, si l'on recherche des solutions périodiques, (7.7) ne laisse pas cette propriété invariante.

Aussi nous nous proposons de traiter d'équations du type (7.6), sous des conditions "du type V-ellipticité" (c'est-à-dire une condition de para-monotonie pour un opérateur linéaire, sans effectuer le changement de fonction inconnu (7.7).

Nous considèrerons un problème (avec des équations un peu plus générales que (7.6)), de la forme suivante :

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $R^n$, de frontière $\partial\Omega$ variété indéfiniment différentiable de dimension n-1.

Soient les <u>équations</u> :

$$(7.8)\qquad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} - \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\beta} a^j_{\beta,\gamma} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_\gamma} + \sum_{i=1}^{r} b_{i,j}(x,t) u_i(x,t) = f_j(x,t)$$

$$j=1,\dots,r$$

où

$$(7.9)\qquad b_{i,j}(x,t),\ a^j_{\beta,\gamma}(x,t) \in L^\infty(\Omega\times[0,+\infty[)\quad i,j=1,\dots,r\ ;\ \beta,\gamma=1,\dots,n.$$

et

$$(7.10)\qquad f_j(x,t) \in L^2(\Omega \times [0,+\infty[)\quad j=1,\dots,r$$

<u>avec les conditions aux limites</u> :

On suppose que la frontière peut se mettre sous la forme :

$$\partial\Omega = \Sigma_j^{(1)} + \Sigma_j^{(2)}\qquad j=1,\dots,r.$$

avec :

(7.11) $\Sigma_j^{(1)}$ étant ou bien vide, ou bien de capacité >0, pour $j=1,\dots,r$

et si $\tau v(x)$ désigne la trace de $v(x)$ sur $\partial\Omega$, on impose :

$$(7.12)\qquad \tau u_j(x,t) = 0 \qquad \forall x \in \Sigma_1^{(j)} \qquad t>0 \qquad j=1,\dots,r$$

$$(7.13)\qquad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial \upsilon_{A_j}} + \sum_{i=1}^{r} t_{i,j}(x,t)\,\tau u_i = g_j(x,t)\ \forall x\in \Sigma_2^{(j)}\quad t>0,\ j=1,\dots,r.$$

ou $\dfrac{\partial v(x)}{\partial \upsilon_{A_j}} = \Sigma\ a^j_{\beta,\gamma}\ (x,t)\ \dfrac{\partial v(x)}{\partial x_\gamma}\ \cos(\eta,x_\beta)$

$\cos(n,x_\beta)$ étant le $\beta^{\text{ième}}$ cosinus directeur de la "normale extérieure" à $\partial\Omega$, n. Avec les hypothèses :

(7.14) $\quad g_j(x,t) \in L^2(\partial\Omega \times [0, +\infty[)$

(7.15) $\quad t_{i,j}(x,t) \in L^\infty(\partial\Omega \times [0, +\infty[)$.

Condition initiale -

(7.16) $\quad u_j(0) = u_{j,0}$ donné dans $L^2(\Omega)$.

ESPACES CONSIDERES -

Une Notation : Si $\mathcal{U}$ est un espace de Hilbert, nous noterons $L^2(\mathcal{U})$ l'espace $L^2([0, +\infty[ ; \mathcal{U})$.

Soit $V_j$ le sous espace de $H^1(\Omega)$ tel que la trace $\tau u_j$, qui appartient à $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (Cf. Lions-Magenès [37], T.1) soit nulle sur $\Sigma_j^{(1)}$ (cela a une sens si $\Sigma_1^{(j)}$ est de capacité > 0, Cf. l'hypothèse (7.11)).

Soit $\mathcal{V}_j = L^2(V_j)$

On notera $V = \prod_{i=1,\dots,r} V_j$

$\mathcal{V} = \prod_{i=1,\dots,r} \mathcal{V}_j = L^2(V)$

Soit $H = [L^2(\Omega)]^r$ et $\mathcal{H} = L^2(H)$ et $\mathcal{H}_j = L^2(L^2(\Omega)) \qquad j=1,\dots,r$

La forme bilinéaire $a(u,v)$ :

Soient $\forall j = 1,\dots,r$

$$a_{jj}(t;u_j,v_j) = \int_\Gamma \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} a^j_{\beta,\gamma}(x,t) \frac{\partial u^j(x)}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v^j(x)}{\partial x_\beta} + b_{i,j}(x,t) u^j(x) v^j(x)\, dx$$

$$+ \int_{\Sigma_j^{(2)}} t_{jj}(x,t)\, \tau u_j(x) \tau v_j(x)\, d\sigma, \quad \forall u_j, v_j \in V_j$$

et soient $\forall i,j = 1,\dots,r$ avec $i \neq j$.

$$a_{i,j}(t;u_i,v_j) = \int_\Omega b_{i,j}(x,t)u^i(x)v^j(x)\,dx + \int_{\Sigma_j^{(2)}} t_{i,j}(x,t)\,\tau u_i(x)\,\tau v_j(x)\,d\sigma$$

$$\forall u_i \in V_i,\ \forall v_j \in V_j$$

Nous poserons également, pour $i,j=1,\dots,r$.

$$a_{jj}(u_j,v_j) = \int_0^{+\infty} a_{jj}(t;u_j(t),v_j(t))\,dt \qquad \forall u_j,v_j \in \mathcal{V}_j$$

$$a_{i,j}(u_i,v_j) = \int_0^{+\infty} a_{i,j}(t;u_i(t),v_j(t))\,dt \qquad \forall u_i \in \mathcal{V}_i \qquad \forall v_j \in \mathcal{V}_j$$

Sous les hypothèses (7.9), (7.15),

(7.17) $\left|\begin{array}{l} a_{jj}(u_j,v_j) \text{ est bornée sur } \mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_j \text{ et} \\ a_{i,j}(u_i,v_j) \text{ est bornée sur } \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j \qquad \forall i,j=1,\dots,r \end{array}\right.$

Si $a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}(u_i,v_j)$

Nous supposerons $a(u,v)$ de type V-elliptique, c'est-à-dire :

(7.18) $$\max_{j=1,\dots,r} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(u_i,u_j) \geq \alpha \|u\|^2_{\mathcal{V}}$$

Une condition suffisante pour que (7.18) soit satisfaite est que les hypothèses (7.19), (7.20), (7.21), (7.22), soient vérifiées :

(7.19) $$\sum_{\beta,\gamma=1}^{n} a^j_{\beta,\gamma}(x,t)\eta_\beta\,\eta_\gamma \geq \alpha_{jj} \sum_{\beta=1}^{n} \eta_\beta^2 \quad \text{p.p.}\{x,t\} \in \Omega\times[0,+\infty[$$

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^n,\ \forall j=1,\dots,r.$$

Soit $m = \operatorname{Sup} \dfrac{|Tu|_{L^2(\Gamma)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}}$, m existe (Cf. Lions-Magenès [37], T.1, Chap. 1).

On suppose que :

(7.20) $$b_{jj}(x,t) - m|t_{jj}(x,t)| \geq \alpha_{jj} \quad \text{p.p.}\{x,t\}\in\Omega\times[0,+\infty[ \quad \forall j=1,\dots,r$$

(7.21) $$|b_{i,j}(x,t)| + m|t_{i,j}(x,t)| \leq C_{i,j} \quad \text{p.p. } \{x,t\}\in \Omega\times[0,+\infty[\ \forall i,j=1,\dots,r \quad i\neq j$$

ou la matrice :

(7.22) $N = |\ \alpha_{jj} \quad -C_{i,j}\ |$ est une M-matrice.

Sous les hypothèses (7.19), (7.20), (7.21), (7.22), $a(u,v)$ admet une M-V-minorante (on remarque les résultats du Chapitre I s'appliquant dans ce cas), d'où (7.18).

Opérateurs associés aux formes bilinéaires -

$a_{i,j}(t;u_i,v_j)$ :

Soit $A_{i,j}(t) \in \mathcal{L}(V_i, V'_j)$ l'opérateur "représentant" $a_{i,j}(t;u_i,v_j)$ :

$$a_{i,j}(t;u_i,v_j) = (A_{i,j}(t)\, u_i, v_j) \quad \forall u_i \in V_i,\ v_j \in V_j,\ \text{p.p. } t \geq 0.$$

Le second membre -

Soit $\mathcal{F}_j(t)$ la forme linéaire sur $V_j(t)$ définie par :

$$\mathcal{F}_j(t)\,[v_j] = \int_\Omega f_j(x,t) v_j\, dx + \int_{\Sigma_2} g_j(x,t)\, \tau v_j\, d\sigma$$

Sous les hypothèses (7.10), (7.14), $\mathcal{F}_j(t)\,[v_j]$ est continue sur $V_j$ p.p. $t \geq 0$, donc $\mathcal{F}_j(t)\,[v_j] = (F_j(t), v_j)$, où $F_j(t) \in V'_j$ p.p. $t \geq 0$, avec nos hypothèses :

(7.23) l'application $t \to F_j(t) \in L^2(V'_j)$

au problème (7.8), (7.12), (7.13), (7.16), nous associons le problème :

$$(7.24) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_j(t)}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{r} A_{i,j}(t)\, u_j(t) = F_j(t) \\ u_j(0) = u_{j,0} \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

(7.25) Supposons tout d'abord $u_{j,0} = 0$ (nous rappelerons plus loin comment on peut se ramener à ce cas là).

Semi groupe associé à l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ -

Nous prenons :

$$(7.26) \quad \forall j=1,\dots,r \quad G_j(s)\, v_j(t) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } 0 < t < s \\ v_j(t-s) \text{ si } s < t \end{array} \right.$$

$G(s)$ est un semi groupe de contractions dans $v'_j$, $v_j$ et $\mathcal{H}_j$ de générateur infinitésimal :

$$(7.27) \quad \begin{cases} \Lambda_j\, v_j = \dfrac{dv_j}{dt} \\ \text{ou } D(\Lambda_j, \mathcal{V}'_j) = \{v_j \mid v_j \in \mathcal{V}'_j,\ \dfrac{dv_j}{dt} \in \mathcal{V}'_j,\ v_j(0) = 0\}. \end{cases}$$

$$(7.28) \quad \begin{cases} \text{Soit } \Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r\} \\ \text{et } D(\Lambda ; \mathcal{V}') = \prod_{i=1,\ldots,r} D(\Lambda_j ; \mathcal{V}'_j) \end{cases}$$

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ l'opérateur représentant $a(u,v)$ et soit $F \in L^2(V')$ le champ de vecteurs donné par $t \to F(t)$.

En tenant compte de (7.17), (7.18), (7.25) et (7.28), nous pouvons appliquer le <u>Corollaire 62</u>, au problème :

$$(7.29) \qquad \Lambda u + \mathcal{A} u = F$$

d'où l'existence de $u \in \mathcal{V}_\wedge D(\Lambda ; \mathcal{V}')$, unique solution du problème (7.29).

- Le cas $u_{0,j} \neq 0 \qquad j=1,\ldots,r$

D'après Lions-Magenès [37], T.1, Chap. 1, n° 4, il existe $w_j$ dans $\mathcal{V}_j$, tel que :

$$w_j(0) = u_{j,0} \in L^2(\Omega)$$

$$(7.30) \quad \begin{cases} \text{et } w_j(t) \in L^2\left[0, +\infty \,;\, V_j\right] \\ \dfrac{dw_j(t)}{dt} \in L^2\left[0, +\infty \,;\, V'_j\right] \end{cases}$$

alors u-w doit vérifier :

$$\frac{d}{dt}(u_j(t)-w_j(t)) + \sum_{i=1}^{r} A_{i,j}(t) \ (u_i(t)-w_i(t)) = F_j(t) - \sum_{i=1}^{r} A_{i,j}(t) w_i(t) + \frac{dw_j}{dt} )$$

du fait de (7.30), le second membre appartient à $L^2(V'_j)$, et, par suite $u_j(t) - w_j(t)$ satisfait à un problème de type (7.22) avec conditions initiales nulles.

Nous avons donc démontré le :

<u>THEOREME 69</u> -

*Sous les hypothèses (7.9), (7.10), (7.11), (7.14), (7.15),* $\exists\, u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ *unique, tel que :*

$u_j(t) \in L^2(V_j)$, $\dfrac{du_j(t)}{dt} \in L^2(V'_j)$, *solution du problème* *(7.8), (7.12), (7.13), (7.16).*

D'après le choix fait pour $V_j$, on a : $\tau u_j(x,t) = 0$, sur $\Sigma_j^{(1)}$ $j=1,\dots,r$, d'où (7.12) est vérifiée.

En intégrant, formellement(*) par partie, chacune des sommes :

$$\forall v_j \in V_j \qquad \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(t;u_j(t),v_j) = \int_\Omega \Big[-\sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\beta} a^j_{\beta,\gamma} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_\gamma} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} b_{i,j}(x,t)u_i(x,t)v_j(x)\Big]dx + \int_{\Sigma_j^{(2)}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial \upsilon_{A_{i,j}}} v_j(x)\, d\sigma.$$

On en déduit que $\{u_1,\dots,u_r\}$ satisfont également, dans un sens généralisé les conditions aux limites (7.13).

<u>Problème périodique</u> -

On se place sur un intervalle fini $[0,T]$ . On conserve, sur cet intervalle $[0,T]$ les équations (7.8), les conditions aux limites (7.12), (7.13), les hypothèses (7.9), (7.10), (7.11), (7.14), (7.15) sur l'intervalle $[0,T]$ , mais on remplace la condition initiale (7.16) par

(7.31) $\quad u(0) = u(T) \quad$ (condition de périodicité).

On conserve le choix des espaces $V_j$, les formes bilinéaires $a_{i,j}(t;\, u_i,v_j)$, on remplace $\mathcal{V}_j=L^2(V_j)$ par $\mathcal{V}_j = L^2\,[0,T;\, V_j]$, et on pose maintenant :

$$a_{i,j}(u_i,v_j) = \int_0^T a_{i,j}(t;\, u_i,v_j)\, dt$$

(*) A partir des résultats de Lions-Magenès [37], T.1, Chap. 4, dans le cas où $\Sigma_j^{(1)}$ (ou $\Sigma_j^{(2)}$ ) est vide, on obtient avec des hypothèses supplémentaires de régularité des coefficients, que la composante $u_j(x,t) \in H^2(\Omega)$, et $\frac{\partial u}{\partial \upsilon_{A_j}} \in L^2(\partial\Omega) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et l'intégration par partie correspondante, perd son caractère formel, et pour le rang j indique, l'équation (7.8), et la condition aux limites (7.13) sont explicitement obtenues.

forme bilinéaire bornée, sur $\mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j$ (par les hypothèses (7.9), (7.15)).

Soit $a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}(u_i, v_j)$

où l'on reprend l'hypothèse (7.18) que nous réécrivons :

$$(7.32) \qquad \max_{j=1,\dots,r} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(u_i, u_j) \geq \alpha \|u\|^2_{\mathcal{V}}$$

Les $A_{i,j}(t)$ étant définis comme précédemment, on considère alors le problème :

$$(7.33) \quad \begin{cases} \dfrac{du_j(t)}{dt} + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} A_{i,j}(t)\, u_j(t) = F_j(t) & t \in [0,T] \\ u_j(0) = u_j(T) \end{cases}$$

Soit F l'élément de $L^2[0,T;V']$ définis par $t \to F_j(t)$ pour $t \in [0,T]$

Le point important, par rapport à la situation précédente, est de changer le choix des semi groupes $G_j(s)$, définis ici, par :

$$(7.34) \qquad G_j(s)\, v_j(t) = \begin{cases} v_j(t-s+T) & \text{si } 0 < t < s \\ v_j(t-s) & \text{si } s < t < T \end{cases}$$

On a alors :

$$(7.35) \quad \begin{cases} \Lambda_j v = \dfrac{d}{dt}\, v_j(t) \\ \text{avec} \\ D(\Lambda_j; \mathcal{V}'_j) = \{v_j \mid v_j \in \mathcal{V}'_j ; \dfrac{dv_j}{dt} \in \mathcal{V}'_j \text{ et } v_j(0) = v_j(T)\} \end{cases}$$

Soit $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ et $D(\Lambda; \mathcal{V}') = \prod_{i=1,\dots,r} D(\Lambda_j; \mathcal{V}'_j)$

Soit $a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}(u_i, v_j)$ et $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, tel que $a(u,v) = (\mathcal{A} u, v)$.

D'après le <u>corollaire 62</u>, $\exists$ u unique $\in \mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}')$ solution de

$$\Lambda u + \mathcal{A} u = F.$$

D'où, en utilisant la propriété (7.33) de $D(\Lambda; \mathcal{V}')$, on a démontré le :

<u>THEOREME 70</u> -

*Sous les hypothèses (7.9), (7.10), (7.11), (7.14), (7.15), $\exists\, u = \{u_1, \dots, u_r\}$ unique, avec $u_j(t) \in L^2[0,T;V_j]$, $\dfrac{du_j(t)}{dt} \in L^2[0,t;V'_j]$ solution du problème (7.33).*

Les conditions aux limites s'interprètent comme dans le cas du Théorème 69, et donnent formellement la résolution des équations (7.8), avec les conditions aux limites (7.12), (7.13), et la condition de périodicité (7.31).

Régularité en t du problème périodique -

$M_k$ étant une suite de Gevrey, on suppose qu'il existe des constantes C et $\xi$ , telles que :

$$(7.36)\quad \left|\begin{array}{llll} \max\limits_{t\in[0,T]} \sup\limits_{x\in\Omega} \left|\dfrac{d^k}{dt^k} a^j_{\beta,\gamma}(t,x)\right| & \leq & C\ \xi^k M_k & \forall k\in N \\ \max\limits_{t\in[0,t]} \sup\limits_{x\in\Omega} \left|\dfrac{d^k}{dt^k} b_{i,j}(x,t)\right| & \leq & C\ \xi^k M_k & \forall k\in N \\ \max\limits_{t\in[0,t]} \sup\limits_{x\in\Omega} \left|\dfrac{d^k}{dt}\ t_{i,j}(x,t)\right| & \leq & C\ \xi^k M_k & \forall k\in N \end{array}\right.$$

$$(7.37)\quad \left|\begin{array}{lll} a^{j\,(k)}_{\beta,\gamma}(0,x) = a^{j(k)}_{\beta,\gamma}(T,x) & & \forall k\in N \\ b^{(k)}_{i,j}(0,x) = b^{(k)}_{i,j}(T,x) & & \forall k\in N \\ t^{(k)}_{i,j}(0,x) = t^{(k)}_{i,j}(T,x) & & \forall k\in N \end{array}\right.$$

On suppose qu'il existe également des constantes d, $\eta$, telles que $\forall j = 1,\ldots,r$ :

$$(7.38)\quad \left|\begin{array}{lll} \displaystyle\int_0^T \left|f^{(k)}_j(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} & \leq d_j\ \eta^k_j\ M_k & \forall k=1,\ldots,r \\ \displaystyle\int_0^T \left|g^{(k)}_j(t)\right|^2_{L^2(\partial\Omega)} dt & \leq d_j\ \eta^k_j\ M_k & \forall k=1,\ldots,r \end{array}\right.$$

(On pourrait améliorer cela en remplaçant $L^2(\partial\Omega)$ par $H^{-1/2}(\partial\Omega)$,

avec :

$$(7.39)\quad \left|\begin{array}{ll} f^{(k)}_j(0) = f^{(k)}_j(T) & \forall k=1,\ldots,r \\ g^{(k)}_j(0) = g^{(k)}_j(T) & \forall k=1,\ldots,r \end{array}\right.$$

Des hypothèses (7.38), (7.39), on déduit que : F est une fonction de classe $M_k$ (Cf. Définition 15, § 6.1), de $[0,T] \to V'$, pour $\Lambda$ = générateur infinitésimal du semi groupe associé au problème périodique (Cf. (7.34), (7.35))

De l'hypothèse (7.36), on déduit que $\mathcal{A}$ opérateur représentant a(u,v) est de classe $M_k$ de $[0,T] \to \mathcal{L}(V;V')$, et de (7.37), on déduit que :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(D(\Lambda^k; \mathcal{V}); D(\Lambda^k; \mathcal{V}')) \qquad \forall k \in N.$$

Donc, d'après le Théorème 65, on obtient le :

THEOREME 71 -

*Sous les hypothèses (7.9), (7.10), (7.11), (7.14), (7.15), (7.36), (7.37), (7.38), (7.39), la solution u du problème (7.33) est de classe $M_k$ de $[0,T]$ dans $\mathcal{V}$, c'est-à-dire, il existe des constantes $C_2$, $\mu > 0$, telles que :*

$$\int_0^T ||u_j^{(k)}(t)||^2_{V_j} \, dt \leq C_2 \, \mu^k M_k \qquad \forall k \in N$$

$$u_j^{(k)}(0) = u_j^{(k)}(T) \qquad \forall k \in N$$

Transposition -

On obtient, en reprenant sur a(u,v), f(t), g(t), les hypothèses du Théorème 65, et en utilisant le Théorème 68, l'existence et l'unicité de u, solution de :

$$(7.40) \qquad \forall j=1,\dots,r : \int_0^T \left[-(u_j(t),\phi_j'(t)) + \sum_{i=1}^r a_{i,j}(t;u_i(t),\phi_j(t))\right]dt$$

$$= \int_0^T (f_j(t),\phi_j(t))dt + \int_0^T (g_j(t),\tau\phi_j(t))_{\partial\Omega}\, dt$$

$$- (h_0^j, \phi_j(0)) \quad \text{où } h_0^j \in L^2(\Omega) \text{ (On peut améliorer cela).}$$

$\forall \phi_j \in D(\Lambda^{*\infty}; M_k, \mathcal{V}_j)$ c'est-à-dire telle qu'il existe C, $\xi > 0$, avec :

$$(7.41) \quad \left| \begin{aligned} &\left(\int_0^T ||\phi_j^{(k)}(t)||^2_{V_j} \, dt\right)^{1/2} \leq C \, \xi^k M_k \\ &\phi_j^{(k)}(0) = \phi_j^{(k)}(T) \end{aligned} \right.$$

d'où l'existence d'une solution u de problèmes où la condition de "périodicité" s'exprime par :

$$u_j(T) - u_j(0) = h_0^j$$

## VIII - INDICATION SUR LES APPLICATIONS AUX PROBLEMES NON LINEAIRES DES RESULTATS DU § 3 - Remarques sur l'approximation des problèmes comportant un opérateur paramonotone.

### VIII.1 - PROBLEMES NON LINEAIRES (Exemples) -

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié, par les méthodes abstraites, des paragraphes précédents de ce chapitre, que des exemples de problèmes linéaires, ou, d'une façon générale, les résultats étaient obtenus soit directement par des méthodes linéaires, soit comme corollaire de résultats plus généraux, d'analyse non linéaire.

Nous allons, très brièvement (et incomplètement) passer en revue les possibilités spécifiques des résultats d'analyse non linéaire du § 3, qui correspondent essentiellement à deux types de situations, dont nous avons pris le précaution dans nos énoncés qu'elles ne s'excluent pas l'une l'autre.

a/ Perturbation par un opérateur (éventuellement multivoque) monotone sur la diagonale -

Ier EXEMPLE - (en relation avec un exemple donné dans Brezis, Grandall, Pazy [7], § 3).

Nous considérons $\mathcal{V} = [L^2(\Omega)]^r$, et $\mathcal{A}$ opérateur linéaire de "type V-elliptique" de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$. C'est-à-dire tel que :

$$(8.1) \qquad \max_{j=1,\dots,r} \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{A}_{i,j}\, u_i, u_j)_{L^2(\Omega)} \geqslant \alpha\, \|u\|_{\mathcal{V}}$$

Soit $\beta_j \subset R \times R$ un ensemble maximal montone dans $R \times R$, pour $j=1,\dots,r$

Soit $f = \{f_1,\dots,f_r\} \in [L^2(\Omega)]^r$. Nous considérons le problème :

$$(8.2) \qquad f_j \in -\Delta u_j + \beta u_j + \sum_{i=1}^{r} \mathcal{A}_{i,j}\, u_i$$

avec $u_j(x) = 0$ sur $\partial\Omega$ . Alors en utilisant les résultats de [7], (Th. 2.1), on obtient $A_j = -\Delta + \beta_j$ est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$, de domaine contenu dans $H^2(\Omega) \wedge H^1_0(\Omega)$. D'où, par le Théorème 26, l'existence de $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ solution du système non linéaire (8.2), ou de plus $u \in [H^2(\Omega) \wedge H^1_0(\Omega)]^r$.

Nous avons ainsi obtenu une solution forte d'un système non linéaire elliptique faiblement couplé.

2ème EXEMPLE -

On peut obtenir comme corollaire du Théorème 26, les résultats obtenus au Chapitre I, sur les inéquations varationnelles, et, en particulier une résolution directe, du premier problème de contrôle optimal, sous des conditions plus générales que celles du Chap. I, car la condition

$$(8.3) \qquad \max_{j=1,\ldots,r} \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(u_i, v_j) \geq \alpha \|u\|^2_{\mathcal{V}}$$

est plus générale que le fait que a(u,v) admette une M-V-minorante (déjà en dimension finie, les B-matrices forment une classe plus générale que les M-matrices).

Mais évidemment, dans le cas de (8.3), on n'a plus nécessairement la convergence des procédés itératifs du Chap. I. Or, dans le cas des problèmes de contrôle optimal, dont la solution peut être obtenue indirectement (même si (8.3) n'est pas vérifiée d'ailleurs) les procédés itératifs du Chapitre I, auxquels, après discrétisation convenable, on associe des méthodes de calcul effectives, ont beaucoup plus d'importance que le résultat d'existence par notre méthode.

On peut également à partir des résultats du § 3 (Théorème 26 ou Théorème 34) obtenir une généralisation au cas des systèmes, sous nos hypothèses, des Théorèmes de Lions-Stampacchia [38], Théorème 7.1, Brezis [4], Théorème 55 sur les inéquations paraboliques.

Mais les applications de ces résultats supplémentaires restent à déterminer.

b/ Perturbation par un opérateur compact d'un opérateur paramonotone -

C'est ce qui donne naissance à la notion d'opérateur quasi-paramonotone.

Pour trouver des exemples, on peut utiliser les Théorèmes d'immersion de Sobolev.

J'ai néanmoins l'impression que la condition $\delta \in \Delta$, dans la définition de la paramonotonie (Définition 2 § 1) implique pratiquement le cadre Hilbertien(*). Or, dans le cadre hilbertien, on est très limité quant à la "croissance à l'infini" des fonctions intervenant dans la définition de ces opérateurs compacts : croissance inférieure ou égale à celle d'une fonction linéaire.

## VIII.2 - SUR L'APPROXIMATION DES PROBLEMES STATIONNAIRES COMPORTANT UN OPERATEUR PARAMONOTONE -

Remarquons tout d'abord que la démonstration des Théorèmes d'existence du § 3, est basée, comme il est classique en cette matière, sur une approximation par des problèmes posés en dimension finie, la méthode utilisée, pour les passages à la limite conduit à mettre en évidence, à priori, une convergence forte des solutions des problèmes approchés vers un élément qui s'avère être la solution exacte du problème considéré.

Il y a donc lieu de penser que ce résultat de convergence forte, va être conservé si l'on se place dans le cadre de la méthode de Galerkin, ou, plus généralement, dans un cadre technique du type de ceux étudiés par Cea [13] , Aubin [1], qui conduisent à des approximations utilisables en analyse numérique.

(*) Nous avons dans les § 1,2,3 conservé le cadre plus général des espaces de Banach, surtout parce qu'il a été utilisé, dans des situations ayant des points communs avec les nôtres par Browder [8], [9], [10] , , malheureusement, ces références ne contiennent pas d'exemples d'application !.

La différence essentielle entre de telles approximations, et celles considérées dans les Théorèmes d'existence, tient au fait que, d'un point de vue pratique, il est impossible d'utiliser une base de filtre formée de tous les espaces de dimension finie d'un espace de dimension infinie.

En effet, on ne peut envisager la mise en oeuvre effective que d'un nombre fini d'espaces de dimension finie, dépendant d'un paramètre $h \in R_+^n$, dit "paramètre de discrétisation", et on se pose la question de l'intérêt du choix de h "petit" pour se rapprocher de la solution exacte.

On est alors amené à faire deux sortes d'hypothèses supplémentaires à celles mises en oeuvre, dans le Théorème d'existence :

1/ Les espaces considérés sont supposés séparables (sinon, on retomberait dans une difficulté du type de celle rencontrée en prenant tous les espaces de dimension finie), et on met en évidence une famille dénombrable d'espaces $E_h$, de dimension finie, permettant d'approcher convenablement tout point de l'espace considéré lorsque $h \to 0$.

Dans le cas d'inéquations, on aura besoin de manière analogue d'une "bonne" convergence d'une famille de convexes $X_h \subset E_h$, vers le convexe X.

2/ L'opérateur associé au problème exact devra être supposé borné, même pour les problèmes stationnaires, et selon les propriétés imposées en 1/, devra vérifier des hypothèses supplémentaires de continuité.

A titre d'exemple, considérons l'approximation de la solution du problème :

(8.4) $- (Au, v-u) \leq (f, v-u) \quad \forall v \in X \qquad X \subset \mathcal{V} \quad$ ou $\quad u \in X$.

avec les hypothèses :

(8.5) - $\mathcal{V}$ est un espace de Banach réflexif et séparable.

(8.6) - $f \in \mathcal{V}'$ dual fort de $\mathcal{V}$.

(8.7) - $\Gamma$ est une application de type P, relativement à $\mathcal{V}$.

(8.8) - $\mathcal{V}$ est diagonalement compatible avec $\Gamma$.

(8.9) - Il existe un opérateur de dualité $\mathcal{J}$, de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, montone diagonal par rapport à $\Gamma$.

(8.10) - X est un convexe fermé de $\mathcal{V}$, diagonalement compatible avec $\Gamma$.

(8.11) - A est un opérateur borné, et demi-continu de D(A) $(X \subset D(A))$ muni de la topologie induite par $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{V}'$.

(8.12) - On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est para-monotone par rapport à $\Gamma$ .

(8.13) - Avec la propriété de para-coercivité

$$\lim_{||u|| \to +\infty} \frac{(Au, \Gamma_u u)}{||u||} = +\infty$$

L'existence de u, solution de (8.4), sous les hypothèses (8.5),..., (8.13), s'obtient comme corollaire du Théorème 26, où l'on perturbe l'opérateur monotone maximal, diagonal (par (8.10)), $\partial\Psi_X$, opérateur sous différentielle de X, par A.

LES APPROXIMATIONS -

a) La méthode de Galerkin classique -

Soit $\{E_n\}$ une famille dénombrable d'espaces de dimension finie, emboités, $E_n \subset E_{n+1}$, tels que :

(8.14) $$\mathcal{V} = \overline{\cup_n E_n}$$

Soit $X_n = X \wedge E_n$

On suppose que $X_n$ converge vers X (Cf. J.L. JOLY [28]) au sens de :

(8.15) $\forall x \in X, \quad \exists \{x_n\}$ avec $x_n \in X_n$, tel que :

$x_n$ converge fortement vers x dans $\mathcal{V}$.

- Le problème en dimension finie -

On cherche $u_n \in X_n$, solution de :

(8.16) $$(Au_n, v-u_n) + (f, v-u_n) \leq 0 \qquad \forall v \in X_n$$

On sait, par le lemme de Browder (lemme 20 ) qu'une telle **solution** existe, car, par l'hypothèse (8.11), A est continu de $X_n$ dans $E'_n$.

En utilisant l'hypothèse de paramonotonie de A, ainsi que le fait que X est monotone diagonal par rapport à $\Gamma$, on vérifie que $u_n$ est unique.

THEOREME 72 -

*Sous les hypothèses (8.5),..., (8.15), $u_n$ converge fortement dans $\mathcal{V}$ vers u solution du problème (8.4).*

DEMONSTRATION -

De manière analogue à ce que nous avons fait à plusieurs reprises dans le § 3, en utilisant les hypothèses (8.8), (8.13), on obtient que $u_n$ reste dans un borné de $\mathcal{V}$.

Puisque $\mathcal{V}$ est réflexif, on peut extraire une sous suite, encore appelée $u_n$, convergeant faiblement vers $u \in X$ (puisque X est un convexe fermé).

D'après l'hypothèse (8.15), soit $x_n \in X_n$ et convergeant fortement vers u.

Pour $m > n$, formons :

$$Y_{n,m} = (Au_n - Au_m, \Gamma_{n,m}(u_n - u_m)) \quad \text{ou} \quad \Gamma_{n,m} = \Gamma_{u_n - u_m}$$

en utilisant (8.16), et le fait que X est diagonalement compatible avec $\Gamma$, on a :

$$(8.17) \quad -(Au_m, \Gamma_{n,m}(u_n - u_m)) \leq (f, \Gamma_{n,m}(u_n - u_m))$$

On écrit :

$$(Au_n, \Gamma_{n,m}(u_n - u_m)) = -(Au_n, \Gamma_{n,m}(x_n - u_n)) + (Au_n, \Gamma_{n,m}(x_n - u_m))$$

d'où

$$(8.18) \quad (Au_n, \Gamma_{n,m}(u_n - u_m)) \leq (f, \Gamma_{n,m}(x_n - u_n)) + (Au_n, \Gamma_{n,m}(x_n - u_m))$$

D'où, en utilisant la para-monotonie de A (8.17), (8.18), on obtient :

$$(8.19) \quad \delta(||u_n - u_m||) \leq Y_{n,m} \leq (f, \Gamma_{n,m}(x_n - u_m)) + (Au_n, \Gamma_{n,m}(x_n - u_m))$$

Le dernier membre de (8.19) s'écrit : $(\Gamma^{*}_{n,m} f, x_n - u_m) + (\Gamma^{*}_{n,m} Au_n, x_n - u_m)$

Pour $m \to +\infty$, en utilisant la propriété $P_1$, des applications de type P, il existe une sous suite, de $\{\Gamma^{*}_{n,m}\}$ encore appelée $\{\Gamma^{*}_{n,m}\}$ telle que :

- $\Gamma^*_{n,m} f$ converge fortement vers $\Gamma^*_{w_n} f$

- $\Gamma^*_{n,m} Au_n$ converge fortement vers $\Gamma^*_{w_n} Au_n$

(8.20) où $||\Gamma^*_{w_n}|| \leq C$ constante indépendante de n, par le Théorème de la borne uniforme.

En utilisant la semi continuité inférieure de la norme, pour la topologie faible et (8.19), on obtient :

$$\delta(||u_n - u||) \leq (f, \Gamma_{w_n}(x_n - u)) + (Au_n, \Gamma_{w_n}(x_n - u))$$

$$\leq C||f|| \ ||x_n - u|| + C\ ||Au_n|| \ ||x_n - u||$$

Donc, du fait que A est borné, et par (8.15) : $\lim_{n\to\infty} \delta(||u_n - u||) = 0$, et comme $\delta \in \Delta$, $u_n$ converge fortement vers u.

q.e.d.

b/ Nous utilisons maintenant un formalisme plus général (Cf. Aubin [1]).

On associe à $\mathcal{V}$ une famille de triplets $\{E_h, p_h, r_h\}$ ou les $E_h$ sont des espaces de dimension finie, avec les hypothèses :

(8.21) $\begin{cases} p_h \text{ est injectif de } E_h \text{ dans } \mathcal{V}. \\ r_h \text{ est surjectif de } \mathcal{V} \text{ dans } E_h. \end{cases}$

Soit $X_h = r_h X$, on suppose que :

(8.22) $\{p_h(X_h)\}$ est diagonalement compatible $\forall h>0$, avec $\Gamma(h \in R^k_+)$

(8.23) $\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} p_h X_h = X, \text{ au sens suivant :} \\ - \forall x \in X, \quad \exists \{x_h\} \text{ avec } x_h \in X_h \text{ tel que } \lim\limits_{h\to 0} \text{ forte } p_h x_h = x. \\ - \forall \{u_h\} \text{ tel que } u_h \in X_h, \text{ et } \lim\limits_{h\to 0} \text{ faible } p_h u_h = u, \text{ alors } u \in X. \end{cases}$

(8.24) $\left\{\begin{array}{l}\text{Outre les hypothèses déjà indiquées pour A, on suppose A continu de} \\ \text{X, muni de la topologie forte induite par } \mathcal{V}\text{, dans } \mathcal{V}'\text{ fort.}\end{array}\right.$

- Le problème en dimension finie -

Soit à résoudre :

(8.25) $\quad -(Ap_h u_h, p_h r_h v - p_h u_h) \leq (f, p_h r_h v - p_h u_h) \qquad \forall v \in X$

qui a une solution d'après ( 8.21), ( 8.24 ), et le lemme de Browder.

THEOREME 73 -

*Sous les hypothèses (8.5) à (8.13), et (8.21) à (8.24), lorsque $h \to 0$, $p_h u_h$ converge vers $u$, solution du problème (8.4), dans $\mathcal{V}$ fort.*

DEMONSTRATION -

On obtient, comme précédemment, que $p_h u_h$ reste dans un borné de $\mathcal{V}$.

- Passage à la limite -

Appelons $\Gamma_h = \Gamma_{x_h - p_h u_h}$, où, par l'hypothèse (8.23), $x_h$ converge fortement vers u, et formons :

$$Y_h = (Ax_h - Ap_h u_h, \Gamma_h(x_h - p_h u_h)) \leq (f, \Gamma_h(x_h - u_h)) + (Ax_h, \Gamma_h(x_h - p_h u_h))$$

$$Y_h \leq \overset{(1)}{(f, \Gamma_h(x_h, p_h u_h))} + \overset{(2)}{(Au, \Gamma_h(x_h - p_h u_h))} + \overset{(3)}{(Ax_h - Au, \Gamma_h(x_h - p_h u_h))}$$

$Y_h \leq (1) + (2) + (3)$ (dans l'ordre d'écriture).

$(1) = (\Gamma_h^* f, (x_h - p_h u_h))$

$\lim\limits_{h \to 0} (1) = 0$ car selon un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $R_+^h$.

- $\Gamma_h^*$ f converge fortement dans $\mathcal{V}'$.

- et $x_h - p_h u_h$ converge faiblement vers 0.

(2) se traite comme (1).

Pour (3), on utilise l'hypothèse (8.24). D'où $Ax_h$ converge fortement vers Au, et par suite $\lim\limits_{h\to 0}$ (3) = 0.

En utilisant maintenant le fait que A est paramonotone par rapport à $\Gamma$, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \delta(||p_h u_h - p_h x_h||) = 0$$

d'où le résultat, puisque $\delta \in \Delta$, et que $p_h x_h$ converge fortement vers u, lorsque $h \to 0$.

q.e.d.

REMARQUE -

Les démonstrations et résultats précédents s'étendent sans difficultés au cas quasi-paramonotone.

- Sur l'approximation des formes bilinéaires admettant une M-V-minorante -

Soit $V = \prod\limits_{j=1,\dots,r} V_j$ un espace de Hilbert, et a(u,v) une forme bilinéaire bornée sur V × V.

On associe à chacun des espaces $V_j$ une famille de triplets $\{V_h^j, p_h^j, r_h^j\}$- ou les $V_h^j$ sont des espaces de dimension finie,

$p_h^j$ est injectif de $V_h^j$ dans $V^j$

$r_h^j$ est surjectif de $V^j$ sur $V_h^j$.

On munit $V_h^j$ du produit scalaire :

$$((p_h^j u_h^j, p_h^j u_h^j))_j = ((u_h^j, v_h^j))_{h,j}$$

$\forall u_h^i \in V_h^i$ ; $u_h^j \in V_h^j$ et $\forall i,j \leqslant r$.

On pose :

$$a_h^{i,j}(u_h^i, v_h^j) = a_{i,j}\,(p_h^j u_h^i, p_h^j u_h^j)$$

et

$$a_h^j(u_j, v_h^j) = \sum_{i=1}^{r} a_h^{i,j}(u_h^i, v_h^i) \qquad j=1,\dots,r$$

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{j=1}^{r} a_h^j\,(u_h, v_h^j)$$

PROPOSITION 74 -

*Si $a(u,v)$ admet une M-V-minorante, soit $N$ alors $a_h(u_h,v_h)$ admet $N$ pour M-V-minorante.*

DEMONSTRATION -

Nous formons :

$$a_h^j(u_h,v_h^j) = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(p_h u_h^i, p_h u_h^j)$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i,j}(p_h^i u_h^i, p_h^j u_h^j) \geq \sum_{i=1}^{r} n_{i,j} ||p_h^i u_h^i||_i \, ||p_h^j u_h^j||_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} n_{i,j} ||u_h^i||_{h,i} \, ||u_h^j||_{h,j}$$

q.e.d.

La proposition 74 est très importante pour l'emploi en Analyse Numérique des résultats du Chapitre I.

## B I B L I O G R A P H I E

[1] - AUBIN - Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels.
*Bulletin de la Société Mathématique de France. Mémoire n° 12, 1967.*

[2] - AUSLANDER - Méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes.
*Thèse. Grenoble 1969.*

[3] - BREZIS - Les opérateurs monotones.
*Doctorat 3ème cycle. 1966.*

[4] - BREZIS - Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.
*Annales de l'Institut Fourier, 18, (1968), pp. 115-175.*

[5] - BREZIS - On some degenerate non linear parabolic equations.
*Proc. symposium on non linear functionnal analysis; Chicago, avril 1968.*

[6] - BREZIS - Perturbations non linéaires d'opérateurs maximaux monotones.
*C. R. A. S., t. 269, (6 Octobre 1969).*

[7] - BREZIS - CRANDALL - PAZY - Perturbations of non linear maximal monotone sets in Banach space.
*Communications on Pure and applied Mathématics. Vol. XXIII, pp. 123-144 (1970).*

[8] - BROWDER - Remarks on non linear functionnal equations.
*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., V. 51 (1964), pp. 985-989.*

[9] - BROWDER F. E. - Remarks on non linear functionnal equations (II), (III).
*Illinois Jour. Math., V. 9 (1965), (II) pp. 608-616 ; (III) pp. 617-622.*

[10] - BROWDER F. E. - Further remarks on non linear functionnal equations.
*Illinois Journ. Math., V. 10 (1966).*

[11] - BROWDER F. E. - Non linear maximal monotone operators in Banach spaces.
*Math. Annalen 175 (1968), pp. 89-113.*

[12] - BROWDER F. E. - Problèmes non linéaires.
*Les presses de l'Université de Montréal. Eté 1965.*

[13] - CEA J. - Approximations variationnelle des problèmes aux limites.
*Annales de l'Institut Fourier, 14, 2, (1964), pp. 345-444.*

[14] - CEA J. - Méthodes numériques d'optimisation.
*Ecole d'Eté C.E.A. - E.D.F. (1969).*

[15] - DEBRUNNER H. ET FLOR P. - Ein Erweiterungssatz fur monotone Mengen.
*Archives Math. 15, (1964), pp. 445-447.*

[16] - DIGUGLIELMO A. - *Exposé au Colloque d'Analyse Numérique de Super-Besse. (1970).*

[17] - EIDEL'MAN S.D. - Parabolic systems.
*North Holland. Wolters. Noordhof (1969).*

[18] - FIEDLER - PTAK - On matrices with positive off diagonal elements and positive principal minors.
*Czec. Math. J. 12 (87), pp. 382-400 (1962).*

[19] - FIEDLER - PTAK - "Some generalization of positive definiteness and monotonicity".
*Num. Math. 9, pp. 163-172 (1966).*

[20] - De FIGUEIREDO - The Coerciveness problem for forms over vector valued functions.
*Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), pp. 63-94.*

[21] - GARDING L. - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations.
*Math. Scand., 1 (1953), pp. 55-72.*

[22] - GASTINEL N. - Analyse Numérique linéaire.
*Hermann (1966).*

[23] - GASTINEL N. - *Séminaire d'Analyse Numérique. I. M. A. G., 1966-1967.*

[24] - GASTINEL N. - Opérateurs $\delta$-monotones.
*Exposé au Colloque d'Analyse Numérique d'Aussois. 1969.*

[25] - GLOWINSKI - *Exposé au Colloque d'Analyse Numérique de Super-Besse (1970)*

[26] - HARTMAN Ph. - G. STAMPACCHIA - On some non linear elliptic differential functional equations.
*Acta Math., 115 (1966), pp. 271-310.*

[27] - HAUGAZEAU - *Thèse. Paris 1968.*

[28] - JOLY - *Thèse Grenoble 1970.*

[29] - KANTOROVICH - AKILOV - Functional analysis in normed spaces.
*Pergamon - 1964.*

[30] - KANTOROVICH - VULIK - PINSKER - Analyse fonctionnelle dans les espaces ordonnés (en russe).
*Moscou 1950.*

[31] - KACHUROVSKI - Sur les opérateurs monotones, et les fonctionnelles convexes.
*Ouspechi Mat. Nauk. XV (94), (1960), pp. 213-215.*

[32] - LAX MILGRAM - Parabolic equations, Contribution to the Theory of partial differential equations.
*Annals of Math. Studies, n° 33, Princeton (1954), pp. 167-190.*

[33] - LIONS J.L. - Equations différentielles opérationnelles, et problèmes aux limites.
*Springer Verlag (1961).*

[34] - LIONS J.L. - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.
*Presses de l'Université de Montréal (1962).*

[35] - LIONS J.L. - Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.
*Dunod - Gauthier-Villars (1968).*

[36] - LIONS J.L. - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
*Dunod - Gauthier-Villars (1969).*

[37] - LIONS J.L. - MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes et applications.
*T. 1, II, (1968), t. III (1970), Dunod.*

[38] - LIONS J.L. - STAMPACCHIA - Variational Inequalities.
*Communications on Pure and applied Math., Vol. XX, pp. 493-519, (1967).*

[39] - MIELLOU - H-systèmes d'inéquations variationnelles.
*Colloque d'Analyse Numérique de Super-Besse (1970).*

[40] - MIELLOU - *Séminaire d'Analyse Numérique - Analyse Fonctionnelle.*
*Besançon (1969 - 1970).*

[41] - MINTY - Monotone (non linear) operators in Hilbert spaces.
*Duke Math. Journal 29 (1962), pp. 341-346.*

[42] - MORIN M. - Méthodes de calcul des fonctions splines dans un convexe.
*Thèse 3ème cycle, 1969.*

[43] - NIRENBERG L. - Remarks on strongly elliptic partial differential equations.
*Comm. Pure Appl. Math. Vol. 8, (1955), pp. 648-675).*

[44] - OSTROWSKI - Iterative solution of linear systems of functionnal equations.
*J. of Math. Anal. and Appl.*

[45] - PROTTER - WEINBERGER - Maximum principles in differential equations.
*Printice Hall, 1967.*

[46] - ROBERT F. - Etude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire.
*Thèse Grenoble (1968).*

[47] - ROBERT F. - Recherche d'une M-matrice parmi les minorantes d'un opérateu linéaire.
*Num. Math. 9, pp. 189-199, (1966).*

[48] - ROCKAFELLAR - On the maximality of sums of non linear monotone operators *(a paraître)*.

[49] - ROCKAFELLAR - Characterization of the subdifferentials of convex functions *Pacific J. of Math. 17, (1966), pp. 497-510.*

[50] - SIBONY - *Thèse Paris*, 1969.

[51] - SOBOLEV - Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la Physique Mathématique.
*Leningrad (1950). (trad. anglaise Amer. Math. Soc.).*

[52] - STAMPACCHIA - Formes bilinéaires coercives sur un ensemble convexe.
*C. R. A. S., PARIS 258 (1964), pp. 4413-4416.*

[53] - VARGA R.S. - Matrix iterative analysis.
*Prentice Hall, 1962.*

[54] - VIZIK - Sur les systèmes fortement elliptiques d'équations différentielles.
*Math. Sbornik, 29 (1951), pp. 615-676.*

[55] - ZARANTONELLO - The closure of the numerical range contains the spectrum.
*Bull. Amer. Math. 70 (2964), pp. 781-787.*

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Grenoble