



HAL
open science

EXPLORATION DES GRAPHS ARETES-COLOREES : TOPOLOGIE, ALGORITHMES, COMPLEXITE ET (NON)-APPROXIMABILITE

Abdelfattah Abouelaoualim

► **To cite this version:**

Abdelfattah Abouelaoualim. EXPLORATION DES GRAPHS ARETES-COLOREES : TOPOLOGIE, ALGORITHMES, COMPLEXITE ET (NON)-APPROXIMABILITE. Informatique [cs]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00281533

HAL Id: tel-00281533

<https://theses.hal.science/tel-00281533>

Submitted on 23 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

N° D'ORDRE: 8775

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité: INFORMATIQUE

par

Abdelfattah ABOUELAOUALIM

Sujet:

Exploration des graphes arêtes-colorées : topologie, algorithmes, complexité et (*non*)-approximabilité.

Soutenue le 27 septembre 2007

après avis de:

- M. Evripidis Bampis, Professeur à l'Université d'Evry. Rapporteur.
- M. Mohamed El Haddad, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Tanger (Maroc). Rapporteur.

devant la commission d'examen:

- M. Marek Karpinski, Professeur à l'Université de Bonn (Allemagne). Examineur.
- M. Hao Li, Directeur de recherche CNRS (LRI, Orsay). Examineur.
- M. Yannis Manoussakis, Professeur à l'Université Paris-Sud XI. Directeur de thèse.

Remerciements

*C'est pas pour dire, les copains, mais le patron,
quand même, quel type...*
— Marcel Gotlib

Je ne peux commencer ce remerciement sans penser à toi qui m'as initié et encouragé, Mama Essediya, ça y est, ton fils n'est plus étudiant. Papa, Abdelhaq, Simohamed, Nourelhouda, je tiens à vous dire tous, ma petite famille, que c'est beaucoup grâce à votre présence constante dans mon esprit que j'ai pu surmonter les difficultés que vous connaissez.

Malgré la distance temporelle et géographique, j'aimerais remercier tous les amis d'enfance et ceux que j'ai rencontré pendant les études en particulier Bouhachmoud, Rouidni, Ajjane, Gaddani, Annous, Asout, Imoussaten, Benjohra, Chafiq, Sedki, Hassnaoui et Aouad. Ce sont avant tout de magnifiques personnalités que j'ai eu le privilège de découvrir.

Quant à vous, Adrein, collègue de bureau, Julien, mécanique quantique, Marc, complexité de kolmogorov, Mohamed Yahya Ould Mohamed Salem, game theory, leurs disciples de mon laboratoire d'adoption, c'est avec plaisir que les circonstances m'ont permis de me joindre à vous, et à vous Sophie Laplante, la gentille, et Christoph dürr, le caricaturiste à ses deux filles, merci, vous deux, de m'avoir aidé.

Merci à vous, Miklos et Frédéric, les bienveillants de l'équipe. Quant à toi, Lalo, ami et co-auteur, aux discussions intéressantes, merci infiniment pour tes encouragements et ta bonne humeur ... tu avais raison quand tu me disais que je vais sûrement finir par soutenir ma thèse!

Merci à l'équipe Algo/C++ de l'IUT, l'équipe Architecture des ordinateurs ainsi que de C/C++ du DEUST en particulier Cécile Balkanski, Yassine Bellik, Eric Petitjean, Mehdi Ammi, Cecile Germain et Nouari Kbaili avec qui j'ai eu le plaisir d'enseigner.

Bampis Evripidis, Professeur à l'Université d'Evry, et Mohamed El Haddad, Professeur à l'ENSAT de Tanger au Maroc, merci d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail avec une grande disponibilité et un intérêt encourageant. Marek Karpinski, Professeur à l'Université de bonn, j'ai été très honoré de vous avoir dans mon jury. Hao Li, Directeur de recherche au CNRS, ça a été un grand plaisir de soutenir sous votre présidence.

Yannis Manoussakis, je tiens à t'exprimer ma profonde gratitude, tu étais un directeur de thèse si peu dirigiste, plutôt un guide, tu m'as donné la chance de découvrir la recherche scientifique et de mener à bien cette thèse.

Ce travail n'est pas seulement le mien, mais aussi de ceux qui sont dans les autres coins du monde. Je tiens à remercier, ainsi, mon cher ami Carlos Martinhon pour la collaboration scientifique fructueuse qui s'est très vite établie entre nous. Ton dynamisme et ton expérience m'ont tellement aidé et je t'en suis reconnaissant. Chandra Das, merci pour ta minutie, avec toi les longues démonstrations n'ont pas pu être ennuyeuses après la nième lecture. Rachid Saad, même à travers les e-mails tu as su être indispensable par tes contributions pertinentes. Sans oublier, bien sûr, les maîtres : Lalo, Marek et Yannis.

Un grand merci à l'université Paris-Sud, le Laboratoire de Recherche en Informatique et tous leurs staffs. Par la même occasion, merci à toutes les écoles et les universités dans lesquelles j'ai effectué mes études ainsi qu'à tous mes professeurs ... en particulier de mathématiques.

J'adresse ma grande gratitude à ma grande famille, en particulier mes grands-parents, mes oncles Simohamed et Abdelhadi ainsi que ma tante Amina pour leurs aides morales et matérielles.

Enfin, comme j'ai commencé ce remerciement, je vais le finir par toi Mama, merci Mama.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
I GÉNÉRALITÉS & ÉTAT DES LIEUX.	7
1 Généralités et notions préliminaires	9
1.1 Graphes arêtes-colorées	9
1.1.1 Terminologie	9
1.1.2 Définitions	10
1.2 Théorie de la complexité	14
1.2.1 Optimisation combinatoire	17
1.2.2 Classes d'approximation	19
1.2.3 Inapproximation	20
1.3 Conclusion	21
2 État de l'art	23
2.1 Cycles hamiltoniens proprement-arêtes-colorées	23
2.2 Chaînes hamiltoniennes proprement-arêtes-colorées	29
2.3 Connexité : couleur-connexité et cyclique-connexité	30
2.3.1 $s - t$ chaînes proprement-arêtes-colorées	30
2.3.2 Cycles <i>non hamiltoniens</i> proprement-arêtes-colorées	33
2.4 (x, y) chaînes/cycles	37
2.5 Marches eulériennes proprement-arêtes-colorées	39
2.6 Sous-graphes hétérochromatiques	40
2.6.1 Arbres hétérochromatiques	40
2.6.2 Chaînes/cycles hétérochromatiques	43
2.7 \mathcal{NP} -complétude	45
2.8 Conclusion	48

II	CONTRIBUTIONS.	51
3	Facteurs, Cycles et Chaînes proprement-arêtes-colorées	53
3.1	Facteur proprement-arêtes-colorées	54
3.2	Le i -degré minimum dans les graphes (<i>simples</i>) arêtes-colorées	56
3.2.1	Le i -degré minimum supérieur ou égal à 1	56
3.3	Le i -degré minimum dans les multigraphes arêtes-colorées	61
3.3.1	Le i -degré minimum supérieur ou égal à 1	61
3.3.2	Le i -degré minimum très grand	64
3.4	Graphe aléatoire	74
3.5	Conclusion	75
4	Arbres couvrants arêtes-colorées	77
4.1	Arbres couvrants proprement-arêtes-colorées	77
4.1.1	1-arbre-cycle-proprement-arêtes-colorées	77
4.1.2	\mathcal{NP} -complétude	81
4.1.3	Inapproximation	83
4.2	Arbres couvrants faiblement-arêtes-colorées	85
4.2.1	\mathcal{NP} -complétude	85
4.2.2	Inapproximation	87
4.3	Conclusion	88
5	$s-t$ chaînes/marches proprement-arêtes-colorées	89
5.0.1	Une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées	89
5.1	La plus courte chaîne/marche proprement-arêtes-colorées	94
5.2	La plus longue $s - t$ chaîne/marche proprement-arêtes-colorées	97
5.3	Les paires de sommets interdits dans une $s - t$ chaîne	101
5.4	Conclusion	102
6	k-chaînes/marches proprement-arêtes-colorées	103
6.1	\mathcal{NP} -complétude dans des graphes quelconques	103
6.2	\mathcal{NP} -complétude dans les graphes sans cycles ni marches fermées tous proprement-arêtes-colorées	106
6.3	Quelques approximations et résultats polynomiaux	111
6.4	Conclusion	116
	Perspectives et Conclusion	117

Introduction

Dans la pratique, énormément de problèmes concrets peuvent être modélisés par un graphe. Par exemple, une carte géographique est typiquement un graphe dans lequel on serait amené à chercher des chemins courts entre les villes, ou à passer par toutes les routes ou toutes les villes...etc. Cela explique pourquoi la théorie des graphes est certainement le domaine le plus populaire des mathématiques discrètes malgré son jeune âge.

En général, cette théorie est partitionnée en deux branches : la branche des graphes non-orientés et la branche des graphes orientés. Pendant longtemps, les graphes non-orientés ont été les plus étudiés. Pourtant, ils peuvent être considérés comme une sous-classe des graphes orientés puisqu'une arête peut être représentée par deux arcs opposés. Mais, l'importance théorique et pratique des graphes orientés s'est imposée dans les vingt dernières années. Et on parle maintenant de plus de trois mille publications concernant les graphes orientés.

Malheureusement, les problèmes pratiques ne cessent de devenir de plus en plus compliqués et leurs représentations de plus en plus difficiles à satisfaire par certains graphes. D'où l'importance d'ajouter de nouveaux concepts dans leurs définitions pour augmenter leur représentativité de la réalité. Dans cette thèse, nous traitons les graphes c -arêtes-colorées qui sont une généralisation des graphes orientés. Un graphe c -arêtes-colorées est un graphe non-orienté dont les arêtes sont colorées par un nombre donné de couleurs c inférieur ou égal au nombre des arêtes bien sûr. Cette définition engendre énormément de nouvelles questions plus toutes les questions qu'on pourrait poser dans le cas des graphes classiques.

Les graphes arêtes-colorées trouvent beaucoup de champ d'application notamment en biologie moléculaire pour modéliser les séquences d'ADN. Le livre de Pevzner [P00] y consacre un chapitre et propose une série de problèmes ouverts. A titre d'exemple aussi, dans [A89], l'auteur ramène le problème de la recherche d'un carré latin à un problème de cycle hamiltonien alterné dans un graphe complet arêtes-colorées. Les carrés latins sont des matrices carrés qui vérifient certaines propriétés mathématiques et qui sont utilisées

surtout dans la modélisation en statistique appliquée et les plans d'expériences. En théorie, parmi les choses qu'on pourrait citer, les tournois bipartis qui sont intimement liés aux graphes complets 2-arêtes-coloriés. R. Häggkvist et Y. Manoussakis [HM89] ont montré que tout tournoi biparti peut être considéré comme un graphe complet 2-arêtes-coloriés.



Dans ce travail, nous nous intéressons principalement à la notion de la coloration propre comme contrainte que nous nous imposons pour extraire des structures classiques telles que les chaînes, les cycles et les arbres. En effet, la coloration propre consiste à avoir chaque paire d'arêtes adjacentes, dans la structure que nous cherchons, de couleurs différentes. Quand il s'agit d'un nombre de couleurs égal à deux on parle, alors, de structures alternées.

Il va de soit, quand on étudie les graphes, de songer à caractériser des structures classiques. Leur utilité évidente dans la pratique, a fait couler beaucoup d'encre dès les débuts de la théorie des graphes. Mais, avec des couleurs dans nos graphes, l'étude devient un peu plus difficile et pousse à varier les techniques de démonstration pour obtenir des résultats satisfaisants. En ce qui nous concerne, après avoir consacré un chapitre à la caractérisation de certaines structures en jouant sur la topologie des graphes, nous nous sommes orientés vers la construction des algorithmes, l'étude de la complexité et l'approximabilité.



Nous classons les problèmes que nous avons étudiés en deux catégories : ceux qui ont nécessité des caractérisations avec des techniques de la théorie des graphes, et ceux qui ont fait appel à des techniques d'algorithmique et de complexité.

Dans le **premier chapitre**, nous rappelons les principales définitions nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse. Nous précisons notamment les définitions concernant la NP -complétude et la non-approximation.

Dans le **second chapitre**, nous donnons un recueil des principaux résultats de la littérature liés aux graphes arêtes-coloriés.

Le **troisième chapitre** commence par présenter un résultat caractérisant les facteurs dans les graphes quelconques ce qui généralise les résultats cités dans l'état de l'art. Ensuite, moyennant le paramètre i -degré (le nombre des arêtes monochromatiques incidentes à un sommet donné), nous donnons quelques bornes inférieures garantissant l'existence de cycles de longueurs prédéfinis. Et enfin, dans un graphe aléatoire, nous donnons une condition garantissant, avec une grande probabilité, l'existence d'un cycle hamiltonien.

Dans le **quatrième chapitre**, nous présentons une caractérisation des arbres couvrants proprement-arêtes-colorées et nous donnons des résultats de NP -complétude et d'inapproximabilité pour les arbres couvrant proprement-arêtes-colorées et les arbres couvrants faiblement-arêtes-colorées.

Le **cinquième chapitre** présente une variété de résultats algorithmiques et de complexité concernant les chaînes et les marches entre deux sommets donnés. En effet, ce chapitre traite le problème de la plus courte chaîne/marche et le plus court cycle proprement-arêtes-colorées. Dans des graphes particuliers, on propose une procédure polynomiale pour trouver la plus longue chaîne/marche proprement-arêtes-colorées. Et enfin, une caractérisation des graphes arêtes-colorées sans marches fermées proprement-arêtes-colorées sera donnée.

Le **sixième chapitre** continue dans le même esprit du cinquième chapitre et propose une étude de NP -complétude du problème de trouver au moins un nombre donné de chaînes/marches entre deux sommets donnés. Enfin, concernant les versions d'optimisation de ces problèmes, nous donnons deux procédures gloutonnes avec garantie de performance.

Enfin, nous terminons ce document en dressant un bilan de nos travaux et envisageons de nouvelles pistes de recherche.

Première partie

GÉNÉRALITÉS & ÉTAT DES LIEUX.

CHAPITRE 1

Généralités et notions préliminaires

Avoir entendu sans retenir ne fait pas de la science.

— Dante Alighieri

Pour le lecteur non familier avec ce domaine de recherche, nous donnons, dans ce chapitre, les principales notions nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse. Nous commençons par une terminologie et nous rappelons quelques définitions de la théorie des graphes arêtes-colorées. Ensuite, nous rappelons quelques notions de la complexité et de l'approximation.

1.1 Graphes arêtes-colorées

1.1.1 Terminologie

Soit $I_c = \{1, 2, \dots, c\}$ un ensemble donné de couleurs, $c \geq 2$. G^c dénote un graphe arêtes-colorées simple tel que chaque arête est colorée par une couleur $i \in I_c$ sans que deux arêtes parallèles joignent la même paire de sommets. S'il s'agit d'un graphe simple non arêtes-colorées nous le noterons simplement G . S'il s'agit d'un multigraphe arêtes-colorées, *c.à.d.* qui admet des arêtes parallèles joignant deux sommets, nous le noterons \mathcal{G}^c . Pour les graphes complets arêtes-colorés, on écrit K_n^c à la place de G^c . S'il s'agit d'un multigraphe complet arêtes-colorées on écrit \mathcal{K}_n^c . Si un graphe biparti arêtes-colorées est simple on écrit B^c , s'il est multigraphe on écrit \mathcal{B}^c . Si un graphe biparti complet arêtes-colorées est simple on écrit $K_{n,n}^c$, s'il est multigraphe on écrit $\mathcal{K}_{n,n}^c$. Pour simplifier et sans perdre de généralité, nous définissons les notions seulement pour le cas des graphes G^c .

Les deux ensembles des sommets et des arêtes de G^c sont notés $V(G^c)$ et $E(G^c)$, respectivement. L'*ordre* de G^c est le nombre de ses sommets, noté n . La *taille* de G^c est le nombre de ses arêtes, noté m . Pour une couleur donnée i , $E^i(G^c)$ dénote l'ensemble des arêtes de G^c dont la couleur est i . Quand il n'y a pas de risque d'ambiguïté, nous écrivons V , E et E^i à la place de $V(G^c)$, $E(G^c)$ et $E^i(G^c)$, respectivement. Si H est un sous-graphe

de G^c , alors $N_H^i(x)$ dénote l'ensemble des sommets de H , adjacents à x par des arêtes de couleur i . Le i – degré (degré-couleur) de x dans H , noté par $d_H^i(x)$, correspond à $|N_H^i(x)|$, c.à.d., la cardinalité de $N_H^i(x)$. Pour simplifier, nous écrivons $N^i(x)$ (resp. $d^i(x)$) à la place de $N_{G^c}^i(x)$ (resp. $d_{G^c}^i(x)$). Notons par $\Delta(G^c) = \max_{x \in V(G^c), i \in I_c} \{d_{G^c}^i(x)\}$, le i – degré (degré-couleur) maximum de G^c pour tout $i \in I_c$. Pour chaque sommet $v \in V(G^c)$, notons $CN_{G^c}(v)$ l'ensemble des couleurs adjacentes à v , c.à.d. $CN_{G^c}(v) = \{c(e) : e \text{ arête incidente à } v\}$. Pour un sommet v , on note $c_H(v)$ le nombre des arêtes incidentes à v de couleurs différentes et dont l'autre extrémité est dans $V(H)$. Si $c_H(v) \leq 1$ on dit que v est monochromatique par rapport à H . On remarque que $cn_{G^c}(v) = |CN_{G^c}(v)|$. Pour simplifier, nous écrivons $c(v)$ au lieu de $cn_{G^c}(v)$ et $CN(v)$ au lieu de $CN_{G^c}(v)$. Aussi, on dit qu'un graphe G^c est isomorphe à un graphe H (et note $G^c \cong H$) si, et seulement si il existe une bijection $f : V(G^c) \rightarrow V(H)$ telle que $uv \in E(G^c)$ si, et seulement si, $f(u)f(v) \in E(H)$.

Une arête incidente à x et y est notée xy , sa couleur est $c(xy)$ et son coût (si elle a un coût) est $\text{coût}(xy)$. Le coût d'un sous-graphe est la somme des coûts de ses arêtes. Un sous-graphe de G^c contenant au moins deux arêtes est dit proprement-arêtes-colorées, si chaque deux arêtes adjacentes dans ce sous-graphe ont deux couleurs différentes. Une chaîne proprement-arêtes-colorées n'admet pas de répétition de sommets et chaque deux arêtes successives, dans cette chaîne, ont deux couleurs différentes. Une marche proprement-arêtes-colorées n'admet pas de répétition d'arêtes et chaque deux arêtes successives, dans cette marche, ont deux couleurs différentes. La longueur d'une chaîne (resp. marche) est le nombre de ses arêtes. Soient deux sommets s et t dans G^c , on définit (si elle existe) une $s - t$ chaîne (resp. marche) telle qu'une chaîne (resp. marche) d'extrémités s et t . Parfois, s sera appelé la *source* et t la *destination* de la chaîne (resp. marche). De même, notons (x, y) chaîne (resp. marche) d'extrémités s et t , une $s - t$ chaîne (resp. marche) de longueur $x + y$ telle que les x premières arêtes ont une couleur et les y arêtes suivantes ont une autre couleur. Un (x, y) cycle est un cycle de longueur $x + y$ telle que les x premières arêtes ont une couleur et les y arêtes suivantes ont une autre couleur. Une chaîne/marche proprement-arêtes-colorées est dite fermée si ses extrémités coïncident et sa première et sa dernière arête ont deux couleurs différentes. Une chaîne fermée proprement-arêtes-colorées est appelée un cycle proprement-arêtes-colorées. Une marche est dite eulérienne si elle passe par toutes les arêtes du graphe. On dit qu'une chaîne est hamiltonienne si elle passe par tous les sommets. De même on dit qu'un cycle est hamiltonien s'il passe par tous les sommets.

Aussi, pour un sous-graphe donné Q induit par un graphe G non arêtes-colorées, une contraction de Q dans G consiste à remplacer Q par un nouveau sommet, soit z_Q , tel que chaque sommet x dans $G - Q$ est connecté à z_Q par une arête si, et seulement si, il existe une arête xy dans G pour un certain sommet y dans Q .

1.1.2 Définitions

Définition 1.1 (*coupe-sommet, coupe-arête*)

Dans un graphe connexe, un coupe-sommet (resp. une coupe-arête) est un sommet (resp.

une arête) que si on l'enlève, alors le graphe ne sera plus connexe.

┘

Définition 1.2 (sommets séparateurs de couleurs)

Dans un graphe G^c , x est un sommet séparateur de couleurs si, et seulement si, x est un coupe-sommets monochromatique par rapport à chacun des sous-graphes connexes G^c qu'on peut obtenir par enlèvement de x .

┘

Définition 1.3 (arête séparatrice de couleurs)

Dans un graphe G^c , e est une arête séparatrice de couleurs si, et seulement si, e est une coupe-arête dont les deux extrémités sont des sommets monochromatiques par rapport à chacun des sous-graphes connexes de G^c qu'on peut obtenir par enlèvement de e .

┘

Définition 1.4 (compatibilité avec un couplage)

Un cycle (resp. une chaîne) dans un graphe G^c est compatible avec un couplage M si, et seulement si, les arêtes de ce cycle (resp. cette chaîne) sont pris alternativement de M et de $G^c - M$.

┘

Les facteurs proprement-arêtes-colorées sont intimement liés aux cycles hamiltoniens en voici la définition :

Définition 1.5 (facteur proprement-arêtes-colorées)

Un facteur F est un ensemble de cycles sommets-disjoints qui couvrent tous les sommets du graphe. On dit que le facteur F est proprement-arêtes-colorées si, et seulement si, tous les cycles qui le constituent le sont aussi (quand il s'agit de deux couleurs on parle d'un facteur alterné).

┘

Définition 1.6 (un graphe s -régulier)

Soit $s \geq 0$, un graphe s -régulier est un graphe dont tous les sommets ont un degré égal à s .

┘

Remarque 1 Un facteur est un graphe 2-régulier.

S'il n'existe pas un facteur proprement-arêtes-colorées, il reste toujours une chance d'avoir des structures proprement-arêtes-colorées, qui couvrent tout le graphe, formées de chaînes et de cycles. En particulier s'ils existent de m -chaînes-cycles-proprement-arêtes-colorées.

Définition 1.7 (*m -chaînes-cycles-proprement-arêtes-colorées*)

Soient $m \geq 0$ et G^c , un m -chaînes-cycles-proprement-arêtes-colorées est un sous-graphe de G^c constitué de m chaînes proprement-arêtes-colorées et un certain nombre de cycles proprement-arêtes-colorées tous sommets-disjoints. Un sous-graphe 0-chaînes-cycles-proprement-arêtes-colorées ($m = 0$) n'est autre qu'un facteur proprement-arêtes-colorées.

┘

Remarque 2 *Un sous-graphe 1-chaînes-cycles-proprement-arêtes-colorées est appelé aussi un presque-facteur proprement-arêtes-colorées.*

Soient X et Y deux sous-ensembles de $V(G^c)$, alors XY désigne l'ensemble des arêtes entre les sommets de X et Y . Si toutes les arêtes de XY ont la même couleur, cette couleur sera noté $c(XY)$. Soit C un cycle alterné de longueur $2p$, $p \geq 2$, parfois il est pratique de diviser les sommets de C en deux ensembles $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ tel que $C = x_1y_1x_2y_2 \dots x_py_p$ et $c(x_iy_i) \neq c(y_ix_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \dots, p$.

Définition 1.8 (*dominance entre cycles alternés*)

On dit qu'un cycle alterné C_1 domine un autre cycle alterné C_2 et on note $(C_1 \Rightarrow C_2)$ si, et seulement si, $c(X_1C_2) \neq c(Y_1C_2)$. On note $C_1 \Leftrightarrow C_2$ le fait que ni $C_1 \Rightarrow C_2$ ni $C_2 \Rightarrow C_1$.

┘

La notion de la couleur-connexité a à la fois les vertus de la connexité classique et la coloration propre.

Définition 1.9 (*couleur-connexité*)

Deux sommets $x, y \in V(G^c)$ sont couleur-connexes s'ils existent deux $x - y$ chaînes alternées $P = xx' \dots y'y$ et $P' = xu' \dots v'y$ telles que $c(xx') \neq c(xu')$ et $c(y'y) \neq c(v'y)$. On dit que G^c est couleur-connexes si chaque deux sommets sont couleur-connexes.

┘

Un cycle alterné est évidemment *couleur-connexes* ce qui montre que la notion de *couleur-connexité* est très importante pour étudier les problèmes de cycles alternés et en particulier, si elle est une relation d'équivalence. Pour cela, nous proposons la définition suivante :

Définition 1.10 (*graphe commode*)

G^c est commode si la couleur-connexité est une relation d'équivalence pour les sommets de G^c . Si G^c est commode, une classe d'équivalence de la couleur-connexité sera appelée une composante couleur-connexes de G^c .

┘

Mais, il se peut qu'un graphe ne soit pas commode, la figure 1.1 montre un graphe dont les sommets 1 et 2 sont couleur-connexes au sommet 4 mais ne sont pas couleur-connexes entre eux.

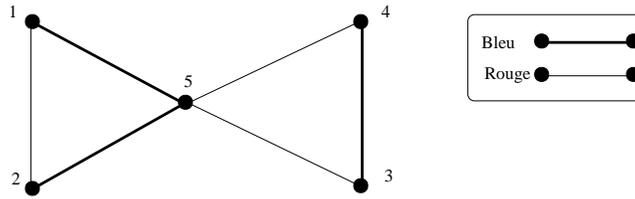


FIG. 1.1 – Graphe non commode .

Soit $\mathcal{P} = \{H_1, H_2, \dots, H_p\}$ un ensemble de sous-graphes du multigraphe arêtes-colorées \mathcal{G}^c . Le graphe *intersection* $\Omega(\mathcal{P})$ de \mathcal{P} a comme ensemble de sommets celui de \mathcal{P} et comme ensemble des arêtes $\{H_i H_j : V(H_i) \cap V(H_j) \neq \emptyset, 1 \leq i < j \leq p\}$.

Définition 1.11 (*cyclique-connexité*)

Dans un multigraphe 2-arêtes-colorées \mathcal{G}^2 , deux sommets $x, y \in V(\mathcal{G}^2)$ sont cyclique-connexes si \mathcal{G}^2 a une collection de cycles alternés $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ telle que x et y appartiennent à certains cycles dans \mathcal{P} et le graphe intersection $\Omega(\mathcal{P})$ est connexe.

┘

Soit \mathcal{G}^2 un multigraphe 2-arêtes-colorées (*c.à.d.* entre deux sommets, il peut y avoir au plus deux arêtes) avec l'ensemble des sommets $V(\mathcal{G}^2) = \{v_1, v_2, \dots, v_h\}$ et $h \geq 2$. On dit que le multigraphe 2-arêtes-colorées L^2 est un *multigraphe extension* de \mathcal{G}^2 si l'ensemble des sommets de L^2 est partitionné en h sous-ensembles V_1, V_2, \dots, V_h tels que pour chaque paire i, j ($1 \leq i < j \leq h$) et chaque paire $x \in V_i$ et $y \in V_j$, le nombre d'arêtes entre x et y est le même entre v_i et v_j et si \mathcal{G}^2 a seulement une arête entre v_i et v_j , alors $c(V_i V_j) = c(v_i v_j)$. On remarque que si \mathcal{G}^2 est complet, alors L^2 l'est aussi. Notons par \mathcal{ECM} , l'ensemble des multigraphes extensions complets des multigraphes complets 2-arêtes-colorées.

Dans les chapitres qui viennent nous aurons besoin de quelques notions sur les graphes orientés. Soient $D(V, A)$ un graphe orienté et 2 sommets $u, v \in V$, on note par \vec{uv} un arc de A . De même, on définit $N_D^+(x) = \{y \in V_D : \vec{xy} \in A\}$ les *voisins-sortants* de x dans D ,

et par $N_D^-(x) = \{y \in V_D : y\vec{x} \in A\}$ les *voisins-entrants* de x dans D . Enfin, on note par $N_D(x) = N_D^+(x) \cup N_D^-(x)$ les *voisins* de $x \in V(D)$. Parfois, nous colorons les arcs de D . Dans ce cas, on note par $c(\vec{xy})$ la couleur d'un arc $\vec{xy} \in A$.

1.2 Théorie de la complexité

La théorie de la complexité a vu le jour dans les années soixante avec notamment les travaux de Cobham [COB64] et Edmonds [EDM65] dans lesquels la notion de calcul en temps polynomial a été introduite. Puis, elle s'est vraiment développée dans les années soixante-dix après la formalisation des différentes classes de complexité [COO71, KAR72]. L'analyse de la complexité d'un problème permet de le classer dans une catégorie de problèmes identifiés et est un bon guide pour sa résolution. Dans cette section, nous présentons les concepts fondamentaux de la théorie de la complexité. La présentation ne fait que souligner certains éléments nécessaires à la compréhension de certains travaux de cette thèse. Pour avoir des compléments d'information sur ces notions, le lecteur pourra consulter [GJ79] ou [LD96]. Après un rappel de la définition de la complexité d'un algorithme, nous introduisons les classes P et NP . Ensuite, nous donnons la définition d'un problème d'optimisation.

Dans le cadre de la théorie de la complexité, nous nous limitons aux *problèmes* dits de *décision*, à savoir les problèmes qui ont une réponse binaire. Nous dirons, pour simplifier, que ces problèmes consistent à répondre "oui" ou "non" à une question déterminée. Un tel problème peut être vu comme une fonction $f : A \rightarrow \{\text{"oui"}, \text{"non"}\}$ où A est le domaine des données (ou instances), notées x , du problème. Il y a bien sûr de nombreuses façons de représenter le domaine A mais dans le cadre de cet exposé nous laissons cet aspect de côté. Ce qui nous intéresse, c'est de connaître le temps nécessaire pour calculer $f(x)$ en fonction de la taille, que nous noterons $|x|$, d'un codage de la donnée x . L'efficacité d'un algorithme qui calcule $f(x)$ pour une donnée x de taille n ($|x| = n$) est mesurée par le nombre $T(n)$ d'étapes qui lui sont nécessaires pour réaliser le calcul. En fait, on ne s'intéressera qu'à un ordre de grandeur asymptotique de $T(n)$. Ainsi, on dira que $T(n) = O(g(n))$ s'il existe une constante réelle c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $T(n) \leq cg(n)$. La complexité en temps¹ d'un algorithme est obtenue en bornant le temps de calcul pour toutes les données possibles : on parle alors de *complexité en pire cas*. On dira qu'un algorithme est de complexité, en temps, polynomiale s'il existe un réel k tel que $T(n) = O(n^k)$ soit une borne sur le nombre d'étapes pour toutes les données possibles.

Pour pouvoir évaluer ce temps, il faut disposer d'un formalisme permettant de décrire un algorithme. La théorie de la complexité utilise un modèle théorique de machine, connue sous le nom de *machine de Turing déterministe*, pour formaliser ce concept. D'autres

¹Il existe aussi une notion de complexité en espace qui mesure la quantité de mémoire nécessaire pour exécuter un algorithme. Mais, habituellement on ne s'intéresse pas à cette complexité ; c'est pourquoi, lorsqu'on parle de complexité d'un algorithme, on sous-entend qu'il s'agit de sa complexité en temps.

modèles, comme celui de la machine de Turing déterministe à k bandes ou celui de la “Machine à Accès Aléatoire” ont été proposés. Tous ces modèles sont équivalents du point de vue de la complexité en temps des algorithmes : un algorithme ayant une complexité polynomiale l’aura quel que soit le modèle de machine considéré. On peut donc considérer l’un ou l’autre de ces modèles sans rien changer aux résultats théoriques sur la complexité d’un algorithme. On peut même faire abstraction de ces modèles formels et penser uniquement en terme de langage de programmation qui permet effectivement d’implémenter un algorithme sur une machine donnée.

La complexité en temps est une bonne mesure de l’efficacité des algorithmes. On peut remarquer que si l’on dispose d’un algorithme de complexité de l’ordre de $O(2^n)$, où n est la taille de l’instance, alors le temps nécessaire à son exécution pour une instance de taille 100 sur un ordinateur exécutant un million d’instructions par seconde sera de plusieurs milliards de siècles. On se rend immédiatement compte que les algorithmes de complexité en temps exponentielle ne sont pas utilisables dès que la taille des données dépasse quelques unités. C’est pour cela que les problèmes “faciles” sont définis comme ceux admettant un algorithme de complexité polynomiale. Nous devons dès à présent limiter la portée de cette définition dans la mesure où certains algorithmes polynomiaux sont tout aussi inutilisables que des algorithmes de complexité exponentielle. Cela vient de la définition qui ne s’intéresse qu’au comportement asymptotique d’un algorithme. Ainsi, un algorithme de complexité $2^{100}n$ n’est pas du tout pratique, même pour $n = 1$, alors qu’il est de complexité linéaire puisque $2^{100}n = O(n)$. Pour atténuer notre remarque, il convient de noter que beaucoup de problèmes polynomiaux “intéressants” admettent des algorithmes polynomiaux réellement utilisables (plus court chemin dans un graphe, couplage de poids maximum, flot maximum, ...).

Malgré les défauts de la définition de la complexité d’un algorithme, il n’en reste pas moins que cette mesure est très abondamment utilisée pour classer les problèmes selon leur difficulté théorique. Différentes classes de complexité ont été définies, dont nous ne présentons que les principales, à savoir les classes P et NP . Les définitions que nous proposons sont plutôt intuitives et n’ont pas la prétention de se substituer aux définitions formelles que l’on pourra consulter dans [GJ79] par exemple.

Définition 1.12 *La classe P est l’ensemble des problèmes de décision qui admettent, pour les résoudre sur une machine de Turing déterministe, un algorithme de complexité en temps polynomiale.*

┘

Pour montrer qu’un problème est polynomial, il suffit donc d’exhiber un algorithme polynomial pour ce problème. Il est à noter que la classe P regroupe bien des problèmes et non des algorithmes, ce qui n’aurait pas de sens. De très nombreux problèmes de toute nature appartiennent à cette classe.

Pour définir la classe NP , nous avons besoin d'introduire un autre formalisme de machine abstraite. Il s'agit de la *machine de Turing non déterministe* qui est un modèle non réaliste dans lequel il est possible d'effectuer des calculs de manière non déterministe.

Définition 1.13 *La classe NP (Non-deterministic Polynomial) regroupe tous les problèmes qui admettent, pour les résoudre sur une machine de Turing non déterministe, un algorithme de complexité en temps polynomiale.*

┘

Les machines de Turing non déterministes peuvent être simulées par des machines de Turing déterministes en un temps exponentiel. À partir des définitions que nous avons données, nous pouvons conclure que $P \subseteq NP$. Il n'est encore, à ce jour, pas démontré que l'inclusion est stricte.

Pour introduire une autre classe, qui joue un rôle central dans la théorie de la complexité, nous avons besoin de définir ce qu'est une réduction.

Définition 1.14 *Soient $\pi_1 : D_{\pi_1} \rightarrow \{\text{“oui”}, \text{“non”}\}$ et $\pi_2 : D_{\pi_2} \rightarrow \{\text{“oui”}, \text{“non”}\}$ deux problèmes de décision.*

*On appelle **réduction** du problème π_2 en π_1 (que l'on note $\pi_2 \times \pi_1$), une fonction $t : D_{\pi_2} \rightarrow D_{\pi_1}$ telle que :*

- $\forall x_2 \in D_{\pi_2}$ la réponse est “oui” si et seulement si elle l'est aussi pour $x_1 = t(x_2)$.
- $\forall x_2 \in D_{\pi_2}$, $t(x_2)$ est calculable en un temps polynomial en la taille de x_2 .

┘

Définition 1.15 *Soit π_1 un problème de décision.*

π_1 est **NP-complet** si $\pi_1 \in NP$ et $\forall \pi \in NP$, $\pi \times \pi_1$.

┘

La classe des problèmes NP -complets (que nous noterons NPC dans la suite) regroupe, en un certain sens, les problèmes les plus difficiles de la classe NP . En 1971, Cook [COO71] a démontré un théorème qui allait donner toute sa force à la théorie de la complexité. Il a montré que tous les problèmes NP -complets peuvent se résoudre à l'aide d'un algorithme polynomial si seulement l'un d'entre eux peut l'être. Pour cela, il a considéré le problème de la satisfiabilité des formules booléennes qui est en quelque sorte l'archétype des problèmes NP -complets. Pour respecter la vérité historique, il faut rappeler qu'en 1973, Levin [LEV73], un chercheur russe, a établi la notion de *problèmes de recherche universels*, qui est similaire à celle de NP -complétude, et a donné six exemples de tels problèmes incluant celui de la satisfiabilité. C'est Karp [KAR72] qui a introduit les notations standards P et NP . Il a aussi mis en évidence l'importance de la notion de

NP -complétude en montrant que vingt problèmes “naturels” sont NP -complets. L’impact de tous ces travaux a été très retentissant puisque dans les années qui suivirent, la liste des problèmes NP -complets s’est considérablement allongée; le fameux livre de Garey et Johnson datant de 1979 [GJ79] en mentionnait déjà plus de 300. Aujourd’hui, on compte plusieurs milliers de problèmes NP -complets de toute nature. Ainsi, la question théorique fondamentale, à savoir la classe NP est-elle contenue dans la classe P , occupe-t-elle une grande place en informatique théorique². La réponse à cette question, d’un intérêt fondamental incontestable et qui continue de passionner de nombreux chercheurs à travers le monde, aurait néanmoins un retentissement très faible sur la résolution pratique des problèmes. En effet, étant donné le nombre de problèmes de toutes catégories appartenant à la classe NPC , il est largement conjecturé une réponse négative à cette question malgré l’apparition régulière de “preuves” qui s’avèrent fausses³. On peut même ajouter que si la réponse à cette question est positive comme semblent pourtant le penser quelques chercheurs, il est peu vraisemblable que l’on puisse en tirer des algorithmes efficaces en pratique. En effet, comme nous l’avons rappelé, l’efficacité théorique d’un algorithme repose uniquement sur une évaluation asymptotique du nombre d’opérations élémentaires nécessaires pour résoudre une instance de taille donnée d’un problème. Ainsi, un algorithme de complexité linéaire en fonction de la taille des données sera-t-il considéré comme un algorithme très efficace en théorie même en présence d’une constante multiplicative ou additionnelle très grande. C’est pourtant, en pratique, un algorithme inutilisable.

1.2.1 Optimisation combinatoire

Jusqu’à présent, nous avons présenté les classes de complexité P et NP qui regroupent chacune des problèmes de décision. Ces problèmes, bien que très nombreux et utiles sont limités par le fait qu’ils n’apportent qu’une réponse binaire. On peut élargir le champ des applications possibles en considérant des problèmes qui consistent à rechercher une solution parmi un ensemble très grand de solutions possibles. En fait, un problème d’optimisation combinatoire est un problème où il faut optimiser (minimiser ou maximiser) une certaine fonction (dite de *coût* ou *objectif*) sur un ensemble fini de configurations. Ce genre de problème apparaît très souvent dans l’organisation des activités humaines. On peut citer par exemple la création des emplois du temps des élèves et des professeurs dans une école, l’organisation des étapes de production dans une entreprise ou le choix du trajet des facteurs.

Lorsque l’ensemble des solutions qui vérifient un problème est muni d’une mesure,

²Ce problème fait partie d’une liste de sept problèmes de mathématiques dressée en 2000 par le *Clay Mathematics Institute* (à l’image de ce qui avait été fait en 1900 par Hilbert), à l’occasion de l’année mondiale des mathématiques, dont la résolution est pourvue d’un prix de 1M\$ [AUG00].

³Cette situation particulière n’est d’ailleurs pas loin de rappeler la conjecture de Fermat qui a passionné des milliers de mathématiciens, professionnels et amateurs, avant d’être définitivement résolue en 1994 par Wiles [WIL94, WIL95].

c'est-à-dire une fonction qui associe un nombre à chaque solution, on peut chercher à déterminer la ou les solutions qui rendent cette valeur optimale. Il s'agira alors d'un problème d'optimisation. Plus formellement, un problème d'optimisation est défini comme suit :

Définition 1.16 *Un problème d'optimisation P est un quadruplet $(\mathcal{I}, sol, val, but)$ tel que :*

- \mathcal{I} est l'ensemble des instances de P ;
- Pour chaque instance $I \in \mathcal{I}$, $sol(I)$ est l'ensemble des solutions réalisables ;
- La fonction val associe à chaque solution réalisable une valeur réelle. On l'appelle la **fonction objectif** ;
- $but \in \{max, min\}$ détermine s'il s'agit de maximiser ($but=max$) ou minimiser ($but=min$) la fonction val .

Un optimum d'un problème d'optimisation est un élément $y^* \in sol(I)$ tel que :

$$\begin{cases} val(y^*) = \max\{val(y), y \in sol(I)\} & \text{si } but=max \\ val(y^*) = \min\{val(y), y \in sol(I)\} & \text{si } but=min \end{cases}$$

La valeur de la fonction val pour l'optimum sera notée $OPT(I)$.

┘

La classe NPO ($NP - Optimisation$) est définie de la façon suivante :

Définition 1.17 *Soit $P=(\mathcal{I}, sol, val, but)$ un problème d'optimisation. P est dans la classe NPO si :*

- le problème de savoir si y appartient à $sol(I)$, pour tout $I \in \mathcal{I}$, est décidable en temps polynomial ;
- la fonction val est calculable en temps polynomial ;
- il existe un polynôme p tel que pour tout $y \in sol(I)$, $|y| \leq p(|I|)$.

┘

Remarque 3 *À tout problème d'optimisation, on peut associer un problème de décision de façon canonique. Dans le cas d'un problème de minimisation, le problème de décision sera de la forme :*

“Étant donné un seuil k , décider s'il existe une solution de valeur inférieure à k .”

Cette remarque explique l'abus de langage que l'on rencontre souvent et qui consiste à dire qu'un problème d'optimisation est NP -complet alors que c'est le problème de décision associé qui l'est. Pour les problèmes d'optimisation, on doit plutôt utiliser le terme NP -difficile ou NP -dur. En fait, plus généralement, un problème est NP -difficile s'il n'appartient pas à la classe NP mais admet une réduction en un problème NP -complet.

1.2.2 Classes d'approximation

Un algorithme d'approximation est un algorithme polynomial qui donne une solution réalisable dont le coût est borné par un multiple du coût de la solution optimale. Ainsi, on a la garantie que la solution trouvée par l'algorithme d'approximation ne sera pas trop éloignée de la solution optimale.

Il est clair que si un problème de la classe NPO peut être résolu en temps polynomial, alors le problème de décision qui lui est associé peut lui aussi être résolu en temps polynomial. En conséquence, sous l'hypothèse $P \neq NP$, aucun problème de la classe NPO , dont le problème de décision associé est NP -complet, ne peut être résolu en temps polynomial. Certains problèmes admettent malgré tout des algorithmes polynomiaux qui donnent des solutions approchées. En fait, il existe différents niveaux d'approximabilité que nous allons définir dans la suite.

Définition 1.18 *Un algorithme d'approximation A pour un problème d'optimisation combinatoire $P = (\mathcal{I}, sol, val, but)$ de la classe NPO est un algorithme polynomial qui, pour toute instance I de P , donne une solution $y \in sol(I)$. Nous noterons $A(I)$ la valeur $val(y)$.*

┘

Remarquons qu'il est raisonnable d'imposer dans la définition qu'un algorithme d'approximation soit polynomial car en temps exponentiel, on peut trouver la solution optimale d'un problème de NPO .

D'après la définition, n'importe quel algorithme polynomial qui donne une solution à un problème d'optimisation de NPO est un algorithme d'approximation. Pour que cette notion d'approximation soit intéressante, il faut que la solution trouvée par l'algorithme d'approximation soit suffisamment proche de la solution optimale du problème initial. Il nous faut donc un moyen pour mesurer la qualité des solutions obtenues par un tel algorithme. Ceci est fourni par ce qu'on appelle le *rapport de performance*.

1.2.2.1 Rapport de performance

Définition 1.19 *Soit A un algorithme d'approximation pour un problème d'optimisation P . Le rapport de performance $R_A(I)$ de l'algorithme A sur l'instance I est défini ainsi :*

$$R_A(I) = \frac{A(I)}{OPT(I)}$$

dans le cas où P est un problème de minimisation. Dans le cas où P est un problème de maximisation, le rapport de performance est défini ainsi :

$$R_A(I) = \frac{OPT(I)}{A(I)}$$

┘

Le rapport est toujours supérieur à 1 et plus le rapport est proche de 1, meilleure est l'approximation. Maintenant, nous pouvons définir le rapport de performance dans le pire cas de l'algorithme A .

Définition 1.20 *Le rapport de performance R_A d'un algorithme d'approximation A pour un problème d'optimisation P est :*

$$R_A = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid R_A(I) < r, \forall I \in \mathcal{I}\}$$

┘

Définition 1.21 *La classe APX est l'ensemble des problèmes de NPO pour lesquels il existe un algorithme d'approximation A et un réel r tels que :*

$$R_A \leq r$$

┘

1.2.3 Inapproximation

Parfois, trouver des bonnes approximations à des problèmes d'optimisation NP -dur n'est pas plus facile que de trouver les solutions exactes. Dans ce cas, au lieu d'essayer de trouver une approximation, il vaut mieux essayer de prouver qu'il est difficile de trouver une bonne approximation. On parle alors, d'inapproximation. En général, pour prouver un résultat d'inapproximation il faut faire une réduction du problème de satisfiabilité (ou un tout autre problème NP -complet). Dans cette thèse nous utilisons une technique de réduction dite du fossé (gap-preserving reduction) et nous nous limitons aux cas des problèmes de maximisation.

Dans ce qui suit nous définissons la technique du fossé, ensuite nous commentons cette définition.

Définition 1.22 *Soient P et P' deux problèmes de maximisations. Une réduction, par la technique du fossé, de P de paramètres (v, r) vers P' de paramètres (v', r') , est un algorithme polynomial A tel que pour chaque instance I de P , l'algorithme A produit une instance $I' = A(I)$ de P' . Les optimums de I et I' , soient $OPT(I)$ et $OPT(I')$ respectivement, satisfont la propriété suivante :*

$$OPT(I) \geq v \Rightarrow OPT(I') \geq v'$$

$$OPT(I) < \frac{v}{r} \Rightarrow OPT(I') < \frac{v'}{r'}$$

┘

Sachant que r et r' sont supérieurs ou égaux à 1, les paramètres (v,r) et (v',r') sont en fonctions de $|I|$ et $|I'|$ (les tailles des instances) respectivement.

Nous espérons prouver l'inapproximabilité de P' . Supposons que nous avons une réduction polynomiale B du problème de satisfiabilité SAT vers P telle que pour chaque formule booléenne f :

$$f \in SAT \Rightarrow OPT(B(f)) \geq v$$

$$f \notin SAT \Rightarrow OPT(B(f)) < \frac{v}{r}$$

Ensuite utilisant la définition 1.22 on remarque que la fonction composée $A \circ B$ est une réduction de SAT vers P' telle que :

$$f \in SAT \Rightarrow OPT(A(B(f))) \geq v'$$

$$f \notin SAT \Rightarrow OPT(A(B(f))) < \frac{v'}{r'}$$

La fonction composée $A \circ B$ montre que le fait de réaliser un rapport d'approximation égal à r' est NP -dur. Autrement dit, r' est un rapport d'inapproximation. Cela veut dire aussi qu'étant donnée une solution au moins égale à v' de l'instance I' , une solution au moins égale à v de l'instance I peut être trouvée en un temps polynomial.

1.3 Conclusion

Nous avons présenté les différentes notions que l'on retrouvera dans les chapitres suivants. Ces notions sont récurrentes dans la majorité des travaux de recherche dans les graphes arêtes-colorées et vont des définitions faisant appel à la théorie des graphes à celles de la complexité.

Cette diversité des outils qu'utilise l'étude des graphes arêtes-colorées montre la richesse des questions qu'on peut aborder dans ce domaine. En particulier, l'étude de l'inapproximabilité de certains problèmes d'optimisation qui ont été traités pour la premières fois dans cette thèse.



CHAPITRE 2

État de l'art

*Toute science crée une nouvelle ignorance.
Tout apport nouveau crée un nouveau néant.*

— Henri Michaux

Dans ce chapitre, nous exposons les résultats les plus marquants depuis l'année 1968 jusqu'à l'année 2007. Un bon nombre de ces résultats nous ont aidé à perfectionner nos techniques de démonstration et, aussi, inspiré pour orienter nos recherches et poser de nouvelles questions. Ce sont les années quatre-vingt-dix qui ont connu, de la part des chercheurs, un réel intérêt pour les graphes arêtes-colorées. Les chercheurs, notamment Y. Manoussakis, A. Benkour, R. Saad., J. Bang-Jensen, G. Gutin et d'autres, se sont intéressés à des questions très diverses allant des problèmes structurels classiques, tels que la caractérisation des cycles hamiltoniens proprement-arêtes-colorées, aux problèmes d'algorithmique et à la NP -complétude. Mais, tous ces chercheurs ont plus ou moins travaillé sur la conjecture de B. Bollobás et P. Erdős [BE76] publiée en 1976 qui demeure ouverte et ne cesse de susciter l'intérêt des spécialistes de plus en plus nombreux à s'intéresser aux graphes arêtes-colorées.

2.1 Cycles hamiltoniens proprement-arêtes-colorées

Il est clair que les facteurs alternés sont intimement liés aux cycles hamiltoniens. D'ailleurs, un facteur alterné constitué d'un seul cycle alterné n'est autre qu'un cycle hamiltonien alterné. M. Bánkfalvi et Z. Bánkfalvi [BB68] se sont intéressés à une question plus précise à savoir quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe K_{2p}^2 contient un facteur ayant un nombre minimum de cycles alternés. Le théorème suivant nous donne cette condition :

Théorème 2.1 [BB68] *Soit K_{2p}^2 un graphe complet 2-arêtes-colorées avec l'ensemble des sommets $V(K_{2p}^2) = \{x_1, x_2, \dots, x_{2p}\}$. Supposons que $d^r(x_1) \leq d^r(x_2) \leq \dots \leq d^r(x_{2p})$. Le graphe K_{2p}^2 contient un facteur alterné avec un nombre minimum m de cycle alterné si, et*

seulement s'il existe m nombres k_i , $2 \leq k_i \leq p-2$, tels que pour chaque i , $i = 1, 2, \dots, m$, nous avons :

$$d^r(x_1) + d^r(x_2) + \dots + d^r(x_{k_i}) + d^b(x_{2p}) + d^b(x_{2p-1}) + d^b(x_{2p-2}) + \dots + d^b(x_{2p-k_i+1}) = k_i^2.$$

┘

Si nous avons un facteur alterné qui a plus d'un seul cycle alterné, il est intéressant de savoir si le nombre de ses cycles est le minimum. Si ce n'est pas le cas, nous serons amenés à penser que, peut être, on peut contracter les cycles de ce facteur en un nombre minimum et, peut être, en un seul cycle hamiltonien alterné. A. Benkouar, Y. Manoussakis, V. T. Paschos et R. Saad [BMPS96] ont donné la caractérisation suivante des facteurs contenant un nombre minimum de cycles alternés :

Corollaire 2.1.1 [BMPS96] *Soit $F = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, $m \geq 2$, un facteur alterné de K_n^2 . Si $C_i \Rightarrow C_j$, $c(X_i X_i) = c(X_i C_j)$ et $c(Y_i Y_i) = c(Y_i C_j)$, $1 \leq i < j \leq m$, alors F est constitué d'un nombre minimum de cycles (avec ces conditions on dit que F est une structure de Bánkfalvi).*

┘

L'existence d'un facteur alterné est nécessaire pour trouver un cycle hamiltonien alterné dans un K_n^2 . Pour trouver un tel facteur, il faut faire appel à un algorithme de couplage maximum (en $O(n^{2.5})$ d'après [EK75]) et l'appliquer une première fois pour trouver un couplage M_r dans le sous-graphe de K_n^2 induit par les arêtes de couleur rouge et une deuxième fois pour trouver un couplage M_b dans le sous-graphe de K_n^2 induit par les arêtes de couleur bleue. Si M_r et M_b ne sont pas parfaits, alors il est évident que K_n^2 ne contient pas un facteur alterné. Sinon, l'union de M_r et M_b formera un facteur alterné. Les deux théorèmes suivants illustrent cela :

Théorème 2.2 [BMPS96] *Dans un \mathcal{G}^c multigraphe c -arêtes-colorées, on peut construire un facteur alterné ou un presque facteur alterné en $O(n^{2.5})$.*

┘

Théorème 2.3 [BMPS96] *Il existe un algorithme en $O(n^{2.5})$ pour trouver, s'il existe, un cycle hamiltonien alterné dans un graphe complet 2-arêtes-colorées K_n^2 .*

┘

R. Saad [S96] donne dans le théorème suivant une caractérisation d'un cycle alterné hamiltonien dans un K_n^2 :

Théorème 2.4 [S96] *Soit K_n^2 un graphe complet 2-arêtes-colorées d'ordre n . K_n^2 contient un cycle alterné hamiltonien si, et seulement si :*

- (i) *Il admet un facteur alterné ou,*
- (ii) *Chaque deux sommets sont connectés par une chaîne alternée non nécessairement simple.*

┘

E. Bampis, Y. Manoussakis et Y. Milis [BMM99] ont donné une caractérisation de l'existence d'un cycle hamiltonien alterné dans un K_n^2 , ainsi qu'un algorithme parallèle pour le trouver. Pour ce faire, les auteurs se sont basés sur la définition 1.8 de la dominance des cycles (page 12) et les deux définitions 2.1 et 2.2, en graphes orientés, suivantes :

Définition 2.1 [BMM99] *Soit $F = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ un facteur alterné de K_n^2 . Un graphe orienté **correspondant** à F est un graphe orienté D tel que l'ensemble des sommets $V(D) = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ correspond aux cycles de F et l'ensemble des arcs $A(D)$ est défini tel que :*

- *Si $C_i \Rightarrow C_j$, alors $c_i \vec{c}_j \in A(D)$.*
- *Sinon, si $C_1 \not\Rightarrow C_2$, alors $c_i \vec{c}_j \in A(D)$ et $c_j \vec{c}_i \in A(D)$. Dans ce cas on dit que c_i et c_j sont connectés par un arc symétrique.*

┘

Dans le théorème 2.5 on montre que si D est fortement connexe, alors K_n^2 admet un cycle hamiltonien alterné. Si D n'est pas fortement connexe dont D_1, D_2, \dots, D_k sont les composantes fortement connexes telles que pour chaque deux sommets $v \in D_i, u \in D_j, 1 \leq i < j \leq k$, l'arc uv n'existe pas. Pour la composante fortement connexe D_1 , notons par C_{D_1} le cycle alterné résultant de la contraction des cycles correspondants à D_1 , et par $X_{C_{D_1}}$ et $Y_{C_{D_1}}$ la partition des sommets des C_{D_1} . Soit C_i^r le cycle alterné correspondant à $c_i \in D_r, 1 \leq r \leq k$. Sans perdre généralité, supposons que $c(X_i^{r-1}C_s^r) = \text{rouge}$ pour chaque sommet $c_s \in D_r, 2 \leq r \leq k$.

Définition 2.2 [BMM99] *La première composante fortement connexe D_1 de D est une "bonne composante" si une des assertions suivantes est vraie :*

- (i) *Il y a un cycle $C_s^r, 2 \leq r \leq k$, tel que pour un certain cycle C_i^1 de D_1 , $c(X_i^1C_s^r) = \text{bleu}$.*
- (ii) *$X_{C_{D_1}} \neq \cup_{c_i \in D_1} X_i$ et $Y_{C_{D_1}} \neq \cup_{c_i \in D_1} Y_i$.*

(iii) Il y a au moins une arête bleue (resp. rouge) dans $X_{C_{D_1}} X_{C_{D_1}}$ (resp. $Y_{C_{D_1}} Y_{C_{D_1}}$).

┘

Théorème 2.5 [BMM99] *Un graphe complet 2-arêtes-colorées K_n^2 admet un cycle hamiltonien alterné si, et seulement si, il contient un facteur alterné et l'une des assertions suivantes est vraie :*

(i) D est fortement connexe.

(ii) D_1 est une bonne composante.

┘

Enfin les auteurs de [BMM99] donnent des algorithmes parallèles pour trouver un cycle hamiltonien alterné.

Théorème 2.6 [BMM99] *Un cycle hamiltonien alterné dans un graphe complet 2-arêtes-colorées peut être trouvé :*

(i) Par un algorithme déterministe en un temps $O(\log^4 n)$ et $O(n^2)$ processeurs si un facteur alterné est donné.

(ii) Par un algorithme d'approximation en un temps $O(\log^3 n)$ et $O(n^{5.5})$ processeurs si un facteur alterné n'est pas donné.

┘

Les graphes qui sont couverts par des cycles proprement-arêtes-colorées, non forcément sommets-disjoints comme c'est le cas pour les cycles d'un facteur, ont été étudiés récemment par Fleischner et Szeider [FSz05]. Les auteurs ont donné une caractérisation de ces graphes et montré qu'on peut décider en temps polynomial si un graphe est couvert par une telle collection de cycles proprement-arêtes-colorées.

Les auteurs de [BMS92] donnent une condition nécessaire pour trouver un cycle alterné de n'importe quelle longueur.

Théorème 2.7 [BMS92] *Soit K_n^2 un graphe 2-arêtes-colorées qui admet un cycle hamiltonien alterné, alors il admet des cycles alternés de toutes les longueurs paires inférieures à n , sauf si K_n^2 est isomorphe à l'un des deux graphes complets Q_1 et Q_2 de la figure 2.1.*

┘

Les graphes complets Q_1 et Q_2 de la figure 2.1 sont définis comme suit :

- ❶ Q_1 est un graphe complet dont l'ensemble des sommets est partitionné en quatre parties A, B, C et D de cardinalités égales à $n/4$. En plus, ses arêtes sont colorées comme suit : $c(BD) = c(CD) = c(AB) = c(AC) = \text{bleu}$ et $c(AD) = c(AA) = c(BB) = c(CC) = c(DD) = c(BC) = \text{rouge}$.
- ❷ Q_2 est un graphe complet dont l'ensemble des sommets est partitionné tel que Q_1 . En plus, ses arêtes sont colorées comme suit : $c(AB) = c(DD) = c(BD) = c(CD) = c(BB) = \text{bleu}$ et $c(AC) = c(AD) = c(AA) = c(CC) = c(BC) = \text{rouge}$.

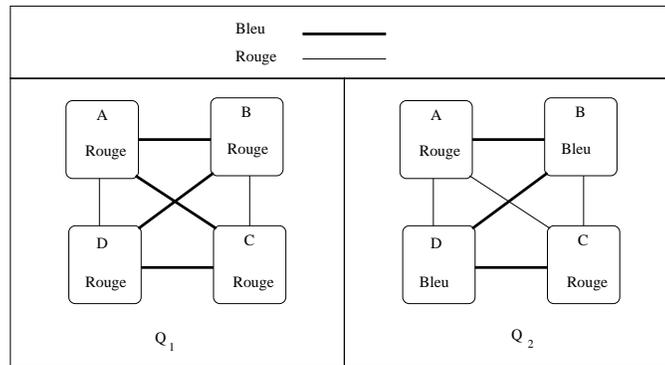


FIG. 2.1 – Toutes les arêtes entre les blocs A, B, C et D existent.

A. G. Chetwynd et A. J. W. Hilton [CH92] donnent un résultat équivalent au théorème 2.1 de M. Bánkfalvi et Z. Bánkfalvi [BB68] illustré dans le théorème suivant :

Théorème 2.8 [CH92] *Un graphe complet biparti 2-arêtes-colorées $K_{n,n}^c = (U, W, E)$ tel que U et W ($|U| = |W| = n$) sont les sous-ensembles de sommets qui représentent les parties de $K_{n,n}^c$. $K_{n,n}^c$ admet un cycle hamiltonien alterné si, et seulement si, $K_{n,n}^c$ admet un facteur alterné et pour chaque $k = 2, \dots, n-1$ et chaque deux sous-ensembles X et Y vérifiant $X \subset U, Y \subset W$ et $|X| = |Y| = k$ nous avons :*

$$\min \left\{ \sum_{x \in X} d_i(x) + \sum_{y \in Y} d_{3-i}(y) : i = 1, 2 \right\} > k^2.$$

┘

C.C. Chen et E. Daykin [CD76] ont étudié le problème de trouver un nombre constant positif d tel que si $\Delta(K_n^c) \leq dn$, alors K_n^c admet un cycle hamiltonien alterné. En effet, les auteurs, dans [CD76], prouvent que si $d = \frac{1}{17}$, alors K_n^c admet des cycles alternés de toutes les longueurs de 3 à n . B. Bollobás et P. Erdős [BE76] ont prouvé le même

résultat mais avec $d = \frac{1}{69}$. Par la même occasion, B. Bollobás et P. Erdős ont proposé une conjecture qui a, sans doute, intéressé beaucoup de spécialistes. Bien que cette conjecture est encore ouverte, le fait d'essayer de la résoudre se termine toujours par démontrer des résultats.

Conjecture 1 [BE76] *Tout K_n^c avec $\Delta(K_n^c) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, admet un cycle hamiltonien alterné.*

Le théorème suivant de N. Alon et G. Gutin [AG97] présente la meilleure valeur asymptotique de d connu jusqu'à maintenant :

Théorème 2.9 [AG97] *Quelque soit $\epsilon > 0$ il existe un entier $n_0 = n_0(\epsilon)$ tel que pour tout $n > n_0$, un graphe K_n^c vérifiant :*

$$\Delta(K_n^c) \leq (1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon)n \quad (= (0.2928... - \epsilon)n)$$

contient des cycles alternés de toutes les longueurs de 3 à n .

┘

C.C. Chen et E. Daykin [CD76] ont obtenu $d = \frac{1}{25}$ pour un graphe $K_{n,n}^c$. Cette valeur a été améliorée asymptotiquement dans [AG97] par ce résultat :

Théorème 2.10 [AG97] *Quelque soit $\epsilon > 0$ il existe un entier $n_0 = n_0(\epsilon)$ tel que pour tout $n > n_0$, un graphe $K_{n,n}^c$ vérifiant :*

$$\Delta(K_{n,n}^c) \leq (1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon)n \quad (= (0.2928... - \epsilon)n)$$

contient des cycles alternés de toutes les longueurs de 4 à $2n$.

┘

Dans le même contexte, A.J.W. Hilton [H90] a démontré les résultats suivants en se basant, dans ses preuves, sur le corollaire de C.St.J.A. Nash-Williams [NW69] du théorème de A. Ghouila-Houri [GH60] :

Théorème 2.11 [H90] *Soit B^c , avec $c \geq 2$, un graphe biparti arêtes-colorées et r -régulier d'ordre $2n$ et $r \geq \frac{n}{2} + 1$. Si $1 \leq k < c$ et le sous-graphe induit par les couleurs $k+1, \dots, c$ est s -régulier avec $\frac{n}{2} \leq s \leq r - 1$ et d'ordre $2n$, alors B^c a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées.*

┘

Corollaire 2.11.1 [H90] *Soit $K_{n,n}^c$, avec $c \geq 2$. Si le sous-graphe induit par chaque couleur est s-régulier avec $1 \leq s$ et d'ordre $2n$, alors $K_{n,n}^c$ a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées.*

┘

Le théorème 2.11 donne le meilleur résultat possible. Si n est pair et le sous-graphe induit par $k+1, \dots, c$ est s-régulier avec $\frac{n}{2} - 1 = s$, alors B^c n'a pas un cycle hamiltonien alterné. Pour voir cela, on suppose que $k = 1$ et avec les arêtes de couleur 1 on trouve, par le théorème de König, un couplage parfait M dans G^c et que ce dernier est formé de deux copies de $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}^c$. Alors, les sommets de $B^c \setminus F$ ont des degrés égaux à $\frac{n}{2} - 1$ et ses arêtes sont colorées par $2, \dots, c$. Il est clair que B^c n'a pas de cycle hamiltonien alterné.

Dans le cas d'un multigraphe biparti complet 2-arêtes-colorées, J. Bang-Jensen et G. Gutin [JG97] ont montré le résultat suivant qui fait appel à la notion de couleur-connexité :

Théorème 2.12 [JG97] *Un multigraphe biparti complet 2-arêtes-colorées $\mathcal{K}_{n,n}^c$ admet un cycle hamiltonien alterné si, et seulement s'il est couleur-connexé et admet un facteur alterné. Il existe un algorithme en $O(n^{2.5})$ pour trouver, s'il existe, un cycle hamiltonien alterné dans $\mathcal{K}_{n,n}^c$.*

┘

Y. Manoussakis et al. [MSTV96] ont essayé une toute autre approche pour garantir l'existence d'un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées dans n'importe quel K_n^c . En effet, ils ont donné une borne inférieure au nombre de couleurs garantissant l'existence d'un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées :

Théorème 2.13 [MSTV96] *Si $c \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$, alors K_n^c admet un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées.*

┘

2.2 Chaînes hamiltoniennes proprement-arêtes-colorées

Dans le paragraphe précédent les auteurs de [BMPS96], ont donné un résultat algorithmique en temps polynomial pour trouver un cycle hamiltonien alterné dans un graphe complet 2-arêtes-colorées. Dans le résultat suivant, les mêmes auteurs ont donné une caractérisation d'une chaîne hamiltonienne alternée :

Théorème 2.14 [BMPS96] *Un graphe complet 2-arêtes-colorées K_n^2 a une chaîne hamiltonienne alternée si et seulement si K_n^2 a :*

- (i) Un facteur alterné ou,
- (ii) Un presque-facteur alterné ou,
- (iii) Un nombre impaire de sommets et deux couplages de cardinalité $\frac{n-1}{2}$, un dont les arêtes sont rouges et l'autre dont les arêtes sont bleus.

└

Une autre approche adoptée dans [MSTV96] consiste à avoir un nombre suffisant de couleurs pour garantir l'existence d'une chaîne hamiltonienne proprement-arêtes-colorées dans K_n^c .

Théorème 2.15 [MSTV96] *Si $c \geq \frac{1}{2}(n-3)(n-4) + 2$. Alors il existe $n_0 = n_0(c)$ tel que pour tout $n \geq n_0$, K_n^c admet une chaîne hamiltonienne proprement-arêtes-colorées.*

└

Finalement, Olof Barr [B98] a donné le résultat suivant :

Théorème 2.16 [B98] *Soit K_n^c un graphe c -arêtes-colorées qui ne contient aucun triangle monochromatique. Alors, K_n^c contient une chaîne hamiltonienne proprement-arêtes-colorées.*

└

2.3 Connexité : couleur-connexité et cyclique-connexité

2.3.1 $s - t$ chaînes proprement-arêtes-colorées

Il est intéressant de savoir s'il existe des chaînes alternées entre deux sommets donnés. W.S. Chow et al. [CMMST93] ont montré un résultat polynomial pour trouver une $s - t$ chaîne 2-arêtes-colorées qui passe par un sommet donné :

Théorème 2.17 [CMMST93] *Soient K_n^2 un graphe complet 2-arêtes-colorées et 3 sommets distincts $s, t, z \in V(K_n^2)$. Il existe un algorithme en $O(n^3)$ pour trouver (si elle existe) une $s - t$ chaîne alternée passant par z .*

└

Soit P_i une chaîne, notons $e_{i,f}$ et $e_{i,l}$ la première et la dernière arête de P_i . Y. Manoussakis [M95] a étudié l'existence de deux $s - t$ chaînes alternées sommets-disjointes dans K_n^2 :

Théorème 2.18 [M95] *Dans K_n^2 , si elles existent deux $s - t$ chaînes alternées P_1 et P_2 telles que la somme $|V(P_1)| + |V(P_2)|$ est minimale et $c(e_{1,f}) \neq c(e_{2,f})$, alors, l'une des deux chaînes P_1 et P_2 est de longueur au plus égale à 3.*

┘

Théorème 2.19 [M95] *Soit K_n^2 un graphe complet 2-arêtes-colorées. Il existe un algorithme en $O(n^2)$ qui trouve, si elles existent, deux $s - t$ chaînes alternées sommets-disjointes P_1 et P_2 , dans K_n^2 , telles que $c(e_{1,f}) \neq c(e_{2,f})$.*

┘

Théorème 2.20 [M95] *Soit K_n^2 un graphe complet 2-arêtes-colorées. On peut décider en $O(n^{4.5})$ si elles existent deux $s - t$ chaînes alternées sommets-disjointes P_1 et P_2 , dans K_n^2 , telles que $c(e_{i,f}) = c(e_{i,l})$ et $c(e_{i,f}) \neq c(e_{3-i,f})$, $i = 1, 2$.*

┘

Pour plus de deux couleurs, l'auteur montre des résultats équivalents pour les chaînes proprement-arêtes-colorées sommets-disjointes :

Théorème 2.21 [M95] *Soit χ_q une couleur donnée. Dans K_n^c , elle existe une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées $P' : (s =)x'_0x'_2 \dots x'_i \dots x'_p x'_{p'+1} (= t)$ avec $c(x'_0x'_1) = \chi_q$ si, et seulement si, elle existe une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées $P : (s =)x_0x_2 \dots x_i \dots x_px_{p+1} (= t)$ telle que $p \leq p'$, $c(x_0x_1) = \chi_q$, $N^q(s) \cap \{x_2, \dots, x_p\} = \emptyset$ et $c(x_{p+1}x_i) = c(x_{i-1}x_i)$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, p - 1$.*

┘

Les théorèmes suivants évoquent le cas de plus de deux chaînes proprement-arêtes-colorées sommets-disjointes avec des algorithmes polynomiaux :

Théorème 2.22 [M95] *Pour un entier $p \geq 1$, il existe un algorithme en $O(n^p)$ qui trouve, si elles existent, $s_i - t_i$ chaînes proprement-arêtes-colorées sommets-disjointes, dans K_n^c , pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$.*

┘

Théorème 2.23 [M95] *Pour un entier $p \geq 1$, il existe un algorithme en $O((n^7 / \log n)^{1/2})$ qui trouve, si elles existent, $s_i - t_i$ chaînes proprement-arêtes-colorées arêtes-disjointes, dans K_n^c , pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$.*

┘

Théorème 2.24 [M95] *Il existe un algorithme en $O(n^{2.5})$ pour trouver, dans K_n^c , le nombre maximum des $s - t$ chaînes proprement-arêtes-colorées sommets-disjointes.*

┘

Théorème 2.25 [M95] *Soient m un entier positif tel que $2 \leq m \leq 4$. Il existe un algorithme en $O(n^2)$ pour trouver (si elle existe), dans K_n^c , une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur au moins égale à m .*

┘

Les $s - t$ chaînes alternées pour le cas des multigraphes 2-arêtes-colorées \mathcal{G}^2 ont été étudiés par J. Bang-Jensen et G. Gutin [JG98]. Pour ce faire, les auteurs ont fait appel aux définitions 1.9 et 1.10 (page 12).

Propriété 2.1 [JG98] *Deux sommets s et t dans un multigraphe 2-arêtes-colorées \mathcal{G}^2 sont couleur-connexe si, et seulement si, \mathcal{G}^2 a quatre $s - t$ chaînes alternées, $P_i^j = sv_i^j \dots u_i^j t$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$), telles que $c(sv_1^j) = c(u_2^j t) = j$ pour $j = 1, 2$.*

┘

La propriété suivante donne un algorithme en $O(m)$, ($m = E(\mathcal{G}^2)$), pour trouver une $s - t$ chaîne alternée dans un multigraphe connexe 2-arêtes-colorées :

Propriété 2.2 [JG98] *Soient \mathcal{G}^2 un multigraphe connexe 2-arêtes-colorées et deux sommets distincts $s, t \in V(\mathcal{G}^2)$. Pour un choix arbitraire de deux couleurs $i, j \in \{1, 2\}$, il existe un algorithme en $O(m)$ pour trouver une $s - t$ chaîne alternée $P = (s = x_1)x_2 \dots (x_k = t)$, si elle existe, telle que $c(x_1x_2) = i$ et $c(x_{k-1}x_k) = j$.*

┘

Pour trouver les composantes couleur-connexes la propriété suivante donne un algorithme en $O(n^2m)$:

Propriété 2.3 [JG98] *Soit $\mathcal{G}^2 = (V, E)$ un multigraphe commode 2-arêtes-colorées. Alors on peut vérifier si \mathcal{G}^2 est couleur-connexe en $O(nm)$ et trouver les composantes couleur-connexes de \mathcal{G}^2 en $O(n^2m)$.*

┘

Dans un graphe simple quelconque, S. Szeider [Sz03] montre qu'il existe une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées en temps linéaire.

Problème: Π1

Instance: Soient G^c un graphe c -arêtes-colorées et $s, t \in V(G^c)$.

Question: Existe-t-il, dans G^c , une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées ?

Théorème 2.26 [Sz03] *Le problème Π1 peut être résolu en temps linéaire.*

┘

2.3.2 Cycles *non hamiltoniens* proprement-arêtes-colorées

Comme la connexité forte pour les graphes orientés, la couleur-connexité et la cyclique-connexité sont très importantes pour étudier l'existence des cycles proprement-arêtes-colorées dans les (multi)graphes arêtes-colorées. En 1996, R. Saad [S96] a introduit pour la première fois la notion de la couleur-connexité, mais J. Bang-Jensen et G. Gutin [JG98] l'ont développé et pu généraliser un résultat de R. Saad et démontrer les résultats suivants :

Théorème 2.27 [JG98] *Si deux sommets s et t dans un multigraphe 2-arêtes-colorées G^2 sont cyclique-connexes, alors ils sont couleur-connexes.*

┘

Les notions de la cyclique-connexité et de la couleur-connexité sont équivalentes pour les multigraphes complets 2-arêtes-colorées.

Théorème 2.28 [JG98] *Un multigraphe complet 2-arêtes-colorées K_n^2 est cyclique-connexe si, et seulement s'il est couleur-connexe.*

┘

La figure 1.1 page 13 nous montre que la couleur-connexité n'est pas toujours une relation d'équivalence ce qui n'est pas le cas pour la cyclique-connexité dans un multigraphe 2-arêtes-colorées.

Théorème 2.29 [JG98] *La cyclique-connexité est une relation d'équivalence par rapport aux sommets d'un multigraphe 2-arêtes-colorées.*

┘

Les multigraphes extensions complets 2-arêtes-colorées ont certaines particularités par rapport à la couleur-connexité et la cyclique-connexité. Les auteurs de [JG98] ont prouvé les résultats suivants :

Théorème 2.30 [JG98] *Soient $\mathcal{G}^2 \in \mathcal{ECM}$ un multigraphe extension complet 2-arêtes-colorées, $s, t \in V(\mathcal{G}^2)$ et $i, j \in \{1, 2\}$. Si chaque $s - t$ chaîne alternée qui commence par une arête de couleur i et finit par une arête de couleur j a au moins cinq sommets, alors s et t sont cyclique-connexes.*

┘

Théorème 2.31 [JG98] *Soient $\mathcal{G}^2 \in \mathcal{ECM}$ un multigraphe extension complet 2-arêtes-colorées, $s, t \in V(\mathcal{G}^2)$. Si les deux sommets s et t sont couleur-connexes, alors ils sont cyclique-connexes.*

┘

Théorème 2.32 [JG98] *Soit $\mathcal{G}^2 \in \mathcal{ECM}$ un multigraphe extension complet 2-arêtes-colorées. Alors \mathcal{G}^2 est commode.*

┘

Théorème 2.33 [JG98] *La longueur du plus long cycle alterné dans un multigraphe couleur-connexe complet 2-arêtes-colorées \mathcal{G}^2 est égale au nombre de sommets d'un cycle maximum (non nécessairement alterné) de \mathcal{G}^2 . Soit donné un cycle maximum (non nécessairement alterné) dans un multigraphe couleur-connexe \mathcal{G}^2 tel que $\mathcal{G}^2 \in \mathcal{ECM}$. Alors, on peut construire le plus long cycle alterné en $O(n^3)$.*

┘

Le théorème 2.33 représente une généralisation du résultat suivant publié dans [S96] :

Corollaire 2.33.1 [S96] *La longueur du plus long cycle alterné dans un graphe couleur-connexe complet 2-arêtes-colorées K_n^2 est égale au nombre de sommets d'un cycle maximum (non nécessairement alterné) de K_n^2 .*

┘

Ici, le cycle maximum est celui qui a le maximum de sommets parmi tous les cycles. Le résultat suivant utilise un algorithme en $O(n^3)$ pour trouver un couplage parfait dans les multigraphes :

Théorème 2.34 [JG98] *Dans un multigraphe 2-arêtes-colorées \mathcal{G}^2 , on peut construire le cycle maximum en $O(n^3)$.*

┘

Les théorèmes 2.32, 2.33, et 2.34 impliquent le résultat suivant :

Théorème 2.35 [JG98] *Dans un multigraphe $\mathcal{G}^2 \in \mathcal{ECM}$, on peut construire un plus long cycle alterné en $O(n^4)$.*

┘

Par ailleurs, dans les graphes arêtes-colorées, l'existence des sommets monochromatiques et des sommets séparateurs de couleurs donne une idée précise sur l'existence des cycles proprement-arêtes-colorées. J. Grossman et R. Häggkvist [GH83], ont donné la caractérisation suivante :

Théorème 2.36 [GH83] *Soit G^2 sans sommets monochromatiques. Alors, ou bien G^2 a un sommet séparateur de couleurs, ou bien G^2 a un cycle proprement-arêtes-colorées.*

┘

La compatibilité des cycles avec les couplage, comme on va le voir dans les chapitres suivants, est une propriété très importante pour trouver des cycles alternés. Le résultat suivant, pour un graphe quelconque, donne une condition nécessaire pour avoir un cycle compatible avec un couplage parfait donné :

Théorème 2.37 [GH83] *Soit M un couplage parfait dans un graphe G . Si M ne contient aucune coupe-arête par rapport à G , alors G contient un cycle compatible avec M .*

┘

Pour les graphes eulériens et les graphes réguliers 2-arêtes-colorées, les auteurs ont donné les deux résultats suivants :

Théorème 2.38 [GH83] *Soit G^2 un graphe eulérien 2-arêtes-colorées dont chaque sommet est incident à un nombre impair d'arêtes de chaque couleur. Alors, G^2 admet un cycle alterné.*

┘

Théorème 2.39 [GH83] *Soit G^2 un graphe 2-arêtes-colorées dont les sous-graphes monochromatiques sont à la fois réguliers et non-triviaux. Alors, G^2 admet un cycle alterné.*

┘

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 2.36 pour $c \geq 2$:

Théorème 2.40 [Y97] *Soit G^c avec $c \geq 2$ et sans sommets monochromatiques. Alors, ou bien G^c a un sommet séparateur de couleurs, ou bien G^c a un cycle proprement-arêtes-colorées.*

┘

Dans [JG97], on peut déduire comment le théorème 2.40 peut être utilisé pour vérifier l'existence d'un cycle alterné. En effet, on enlève tous les sommets séparateurs de couleurs. Enfin, nous aurons ou bien un graphe avec un seul sommet ou bien un graphe qui contient un cycle alterné.

Les techniques développées par S. Szeider [Sz04], basées sur les transformations des graphes, ont été à l'origine du résultat suivant :

Problème: Π2

Instance: Soient G^2 et $X \subseteq V(G^2)$.

Question: Existe-t-il, dans G^2 , un cycle C proprement-arêtes-colorées qui passe par tous les sommets de X ?

Problème: Π3

Instance: Soient G^c avec $c \geq 2$ et $X \subseteq V(G^c)$.

Question: Existe-t-il, dans G^c , un cycle C proprement-arêtes-colorées qui passe par tous les sommets de X ?

Propriété 2.4 [Sz04] (i) Les théorèmes 2.36 et 2.40 sont équivalents. (ii) Les problèmes Π2 et Π3 sont équivalents.

┘

En utilisant, la même approche du théorème 2.13 pour les graphes complets c -arêtes-colorées, et en faisant appel au le nombre de couleurs différentes $c(v)$ incidentes à chaque sommet v dans G^c , H. Li et G. Wang [1LW06] ont démontré récemment les résultats suivants pour les graphes simples c -arêtes-colorées :

Théorème 2.41 [1LW06] Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées d'ordre $n \geq 3$. Si $c(v) \geq \frac{n+1}{3}$ pour tout $v \in V(G^c)$, alors G^c admet un cycle proprement-arêtes-colorées dont chaque couleur apparaît au plus deux fois.

┘

Théorème 2.42 [1LW06] Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées d'ordre $n \geq 3$. Si $c(v) \geq \frac{37n-17}{75}$ pour tout $v \in V(G^c)$, alors G^c admet au moins un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur 3 ou 4.

┘

Théorème 2.43 [1LW06] *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées. Si $c(v) \geq d \geq \frac{n}{2}$ pour tout $v \in V(G^c)$, alors G^c admet un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur au moins $\lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$.*

┘

2.4 (x, y) chaînes/cycles

Une autre manière pour voir l'alternance des couleurs dans une chaîne (resp. un cycle) consiste à avoir un nombre x d'arêtes de même couleur suivies d'un nombre y d'arêtes d'une autre couleur c'est ce qu'on appelle les (x, y) chaînes (resp. cycle). Le résultat suivant, établi par W.S. Chow et al. [CMMST93], caractérise une (x, y) chaîne d'extrémités s et t qui passe par une ou deux sommets donnés :

Théorème 2.44 [CMMST93] *Soient $K_{n \geq 4}^2$ un graphe complet 2-arêtes-colorées et 4 sommets distincts $s, t, Z_1, Z_2 \in V(K_n^2)$.*

(i) *Soient x et y deux nombres entiers, il existe, dans $K_{n \geq 4}^2$, une (x, y) chaîne d'extrémités s et t qui passe par Z_1 si, et seulement si, $K_{n \geq 4}^2$ contient deux arêtes distinctes e_1 et e_2 , différentes de st , telles que e_1 est adjacente à s , e_2 est adjacente à t et $c(e_1) \neq c(e_2)$.*

(ii) *Soient x et y deux nombres entiers, il existe, dans $K_{n \geq 4}^2$, une (x, y) chaîne d'extrémités s et t qui passe par Z_1 et Z_2 si, et seulement si, $K_{n \geq 4}^2$ contient deux arêtes distinctes e_1 et e_2 qui vérifient (i), et en plus, $K_{n \geq 4}^2$ n'est pas isomorphe (sans tenir compte des couleurs) à G_0, G_1 et G_2 de la figure 2.2.*

┘

Y. Manoussakis et al. [MST96] ont démontré les deux caractérisations suivantes :

Théorème 2.45 [MST96] *Soient x et y deux entiers positifs tels que $x \geq y$. Il existe $n_0(s) \geq 1$ tel que pour $n \geq n_0(s)$, K_n^2 contient un (x, y) cycle si, et seulement si :*

(i) *K_n^2 contient une chaîne monochromatique de longueur y de chaque couleur, et*

(ii) *Dans le cas où x et y sont impairs, K_n^2 ne contient pas un sous-graphe biparti complet induit par une des deux couleurs.*

┘

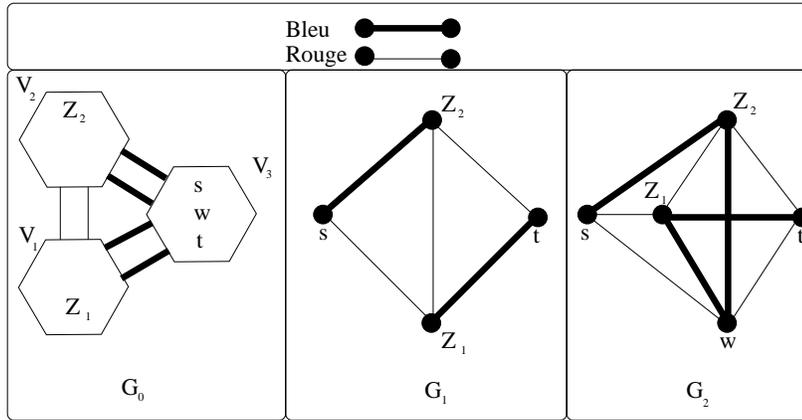


FIG. 2.2 – G_0, G_1 et G_2 n'admettent pas des (x, y) chaînes d'extrémités s et t passant par Z_1 et Z_2 .

Théorème 2.46 [MST96] Soit K_n^2 un graphe 2-arêtes-colorées qui admet un cycle hamiltonien monochromatique. Alors K_n^2 contient aussi un $(x, 1)$ cycle, pour

- (i) chaque nombre pair x , $2 \leq x \leq n - 2$, et
- (ii) chaque nombre impair x , $3 \leq x \leq n - 2$, sauf si n est pair et K_n^2 contient un sous-graphe biparti complet induit par une des deux couleurs et dont les parties ont un nombre égal de sommets.

┘

Pour les petits cycles de longueur égale à 4, les auteurs de [MST96] ont montré le résultat suivant :

Théorème 2.47 [MST96] Soit K_n^2 un graphe 2-arêtes-colorées.

- (i) Pour $n \geq 4$, K_n^2 contient un $(3, 1)$ cycle si, et seulement si, K_n^2 ne contient pas un sous-graphe biparti complet induit par une des deux couleurs.
- (ii) Pour $n \geq 6$, K_n^2 contient un $(2, 2)$ cycle si, et seulement si, pour chaque couleur, K_n^2 contient un sommet dont le degré est au moins égal à 2.
- (iii) Pour $n \geq 4$, K_n^2 contient un cycle alterné de longueur 4 si, et seulement si, pour tout ordre x_1, x_2, \dots, x_n des sommets de K_n^2 , il existe i, j et k tels que $i \leq j \leq k$ et $c(x_i x_k) \neq c(x_j x_k)$.
- (iv) Pour $n \geq 6$, K_n^2 contient un cycle monochromatique de longueur 4.

┘

Le résultat de Gyárfás [G83] énonce que tout graphe 2-arêtes-colorées K_n^2 contient soit un cycle monochromatique soit un $(x, n - x)$ cycle pour un certain entier x . Manoussakis, Spyrtos et Tuza [MST96] ont montré qu'il existe seulement une famille de K_n^2 qui ne contient pas un $(x, n - x)$ cycle pour un certain entier x . Les graphes K_n^2 de cette famille sont ceux qui contiennent un sous-graphe biparti complet induit par une des deux couleurs et dont les parties ont un nombre égal de sommets.

Théorème 2.48 [MST96] *Soit K_n^2 un graphe 2-arêtes-colorées, avec $n \neq 5$. K_n^2 contient un $(x, n - x)$ cycle (hamiltonien) avec $1 \leq x \leq n - 1$, sauf si n est pair et K_n^2 contient un sous-graphe biparti complet induit par une des deux couleurs et dont les parties ont un nombre égal de sommets.*

┘

2.5 Marches eulériennes proprement-arêtes-colorées

Les marches eulériennes ont des applications en génétique qui ont été montrées par P. A. Pevzner [P95] dans son étude des transformations qui permettent d'obtenir une marche eulérienne à partir d'une autre dans un multigraphe 2-arêtes-colorées. L'étude de P. A. Pevzner a été précédée par les travaux de H. Fleischner, G. Sabidussi et E. Wegner [FSW92] qui ont été, quant à eux, intéressés uniquement par l'aspect théorique de la question.

Néanmoins, en 1968, A. Kotzig [K68] a donné la caractérisation suivante des marches eulériennes :

Théorème 2.49 [K68] *Soit \mathcal{G}^c un multigraphe c -arêtes-colorées d'ordre n et de taille m . Il existe une marche eulérienne proprement-arêtes-colorées dans \mathcal{G}^c si et seulement si \mathcal{G}^c est connexe et pour chaque sommet x et chaque couleur i , le degré total de x est pair et $d_i(x) \leq \sum_{j \neq i} d_j(x)$.*

┘

Le résultat de A. Kotzig a été exploité d'un point de vue algorithmique par A. Benkour, Y. Manoussakis, V. T. Paschos et R. Saad [BMPS96] :

Théorème 2.50 [BMPS96] *Soit \mathcal{G}^c un multigraphe c -arêtes-colorées d'ordre n et de taille m . Il existe un algorithme en $O(\max\{nm, n^2 \log n\})$ pour trouver une marche eulérienne proprement-arêtes-colorées dans \mathcal{G}^c si et seulement si \mathcal{G}^c est connexe et pour chaque sommet x et chaque couleur i , le degré total de x est pair et $d_i(x) \leq \sum_{j \neq i} d_j(x)$.*

┘

2.6 Sous-graphes hétérochromatiques

Dans la dernière décennie, un intérêt particulier a été porté à l'égard des sous-graphes hétérochromatiques. H-L. Fu et D.E. Woolbright [FW98] ont montré que si le graphe complet K_{2n} ($n \geq 3$) est arêtes-colorées tel que chaque couleur induit un couplage parfait, alors il admet un couplage parfait hétérochromatique (*c.à.d.* chaque deux arêtes ont deux couleurs différentes). Shor [Sh82] a montré que tout carré Latin d'ordre n a une transversale partielle de longueur au moins égale à $n - 5.53(\log n)^2$, *c.à.d.* chaque graphe $K_{n,n}$ biparti complet arêtes-colorées et proprement-arêtes-colorées avec n couleur admet un couplage hétérochromatique avec au moins $n - 5.53(\log n)^2$ arêtes. Schiermeyer [Sch03] a déterminé un nombre suffisant de couleurs pour l'existence des k -couplages hétérochromatiques ($k \geq 2$) dans un graphe complet arêtes-colorées K_n ($n \geq 3k + 3$). D'autres résultats relatifs à ce sujet peuvent être trouver dans [ET90, FGLS93, RT92, Sch03].

Dans les deux paragraphe suivants nous exposons des résultats sur les arbres, les cycles et les chaînes hétérochromatiques.

2.6.1 Arbres hétérochromatiques

Un arbre dont chaque deux arêtes (adjacentes ou pas) ont deux couleurs différentes est dit hétérochromatique.

Théorème 2.51 [BH96] *Soit K_{2n}^c ($n \geq 3$) tel que chaque couleur induit un couplage parfait. Alors, K_{2n}^c admet deux arbres couvrants arêtes-disjoints hétérochromatiques.*

┘

Théorème 2.52 [KKS02] *Soit K_{2n}^c ($n \geq 3$) tel que chaque deux arêtes adjacentes de $E(K_{2n}^c)$ ont deux couleurs différentes (*c.à.d.* proprement-arêtes-colorées). Alors, K_{2n}^c admet trois arbres couvrants arêtes-disjoints hétérochromatiques.*

┘

Théorème 2.53 [ABS91] *Soit K_{2n}^c ($n \geq 3$) tel que chaque couleur induit un sous-graphe biparti complet. Alors, K_{2n}^c admet un arbre couvrant hétérochromatique.*

┘

Théorème 2.54 [Su06] *Un graphe c -arêtes-colorées G^c d'ordre n admet un arbre couvrant hétérochromatique si, et seulement si, pour chaque ensemble de r couleurs ($1 \leq r \leq n - 2$), la suppression de toutes les arêtes colorées par ces r couleurs donne un graphe d'au plus $r + 1$ composantes.*

┘

Le théorème suivant répond, en utilisant le théorème 2.54, à la question posée en 2002 par J. Pach :

Théorème 2.55 [Su06] *Un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c admet un arbre couvrant hétérochromatique si le nombre des arêtes de même couleur est au plus $\frac{n}{2}$.*

┘

Théorème 2.56 [AA07] *Un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c admet un arbre couvrant hétérochromatique si le nombre des arêtes de même couleur est au plus $\frac{n+3}{2}$.*

┘

Corollaire 2.56.1 [AA07] *Un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c admet un arbre couvrant hétérochromatique si le nombre des arêtes de même couleur est au plus $\frac{n+1}{2}$.*

┘

La borne supérieure ($\frac{n+3}{2}$) du théorème 2.56 est la meilleure possible pour $n \geq 10$. Pour voir cela, supposons que $V(K_n^c) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $c(v_1v_2) = 1$, $c(v_1v_3) = 2$, $c(v_2v_3) = 3$ et les autres arêtes sont colorées arbitrairement en utilisant les couleurs $4, \dots, n-1$ telles que chaque couleur apparaît au plus $\frac{n+4}{2}$ fois. Il est évident qu'il n'existe pas d'arbre couvrant hétérochromatique.

Théorème 2.57 [AA07] *Si le nombre des arêtes de même couleur est au plus $\frac{n+1}{2}$, un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c ($n \geq 5$) admet un arbre couvrant hétérochromatique différent d'une étoile (c.à.d. différent d'un graphe biparti qui a une de ses parties ayant un seul sommet).*

┘

Théorème 2.58 [BH96] *Si K_{2n}^c , ($n > 2$ et $c = 2n - 1$), est un graphe complet arêtes-colorées tel que chaque deux arêtes adjacentes ont deux couleurs différentes, alors il admet deux arbres couvrants hétérochromatiques arêtes-disjoints.*

┘

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 2.58 :

Théorème 2.59 [AA07] *Si le nombre des arêtes de même couleur est au moins égal à 2 et au plus $\frac{n+1}{2}$ et T est un arbre couvrant hétérochromatique différent d'une étoile dans un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c , alors il existe un arbre couvrant hétérochromatique T' dans K_n^c tel que T' et T sont arêtes-disjoints.*

┘

Corollaire 2.59.1 [AA07] *Si le nombre des arêtes de même couleur est au moins égal à 2 et au plus $\frac{n+1}{2}$, un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c ($n \geq 5$) admet deux arbres couvrants hétérochromatiques arêtes-disjoints.*

┘

Dans le corollaire précédent la borne inférieure 2 est importante. Pour voir cela dans K_n^c ($n \geq 5$), considérons qu'une couleur apparaît une seule fois et les autres couleurs apparaissent $\frac{n+1}{2}$ fois et $c = n - 1$. Il est évident que chaque deux arbres couvrants hétérochromatiques ont au moins une arête en commun.

Quand la borne inférieure est égale à 1 le théorème suivant utilise une borne supérieure égale à $\frac{n}{2}$ pour avoir le même résultat que le corollaire précédent :

Théorème 2.60 [AA07] *Si le nombre des arêtes de même couleur est au moins égal à 1 et au plus $\frac{n}{2}$, un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c ($n \geq 5$) admet deux arbres couvrants hétérochromatiques arêtes-disjoints.*

┘

Théorème 2.61 [AA07] *Si K_n^c ($n \geq 3$) avec $c \geq \binom{n-2}{2} + 2$, alors il existe un arbre couvrant hétérochromatique.*

┘

Si les arêtes d'un graphe sont colorées par c couleurs, la séquence (a_1, a_2, \dots, a_c) sera appelée la distribution des couleurs de ce graphe telle que a_i est le nombre des arêtes de même couleur i , $i = 1, \dots, c$.

Théorème 2.62 [BH01] *Si $(a_1, a_2, \dots, a_{2n-1})$ est la distribution des couleurs de $K_{n,n}^c$ ($c = 2n - 1$) telle que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2n-1}$, alors $K_{n,n}^c$ contient un arbre couvrant hétérochromatique si, et seulement si, pour chaque entier k avec $k \leq 2n - 1$,*

$$\sum_{i=1}^k a_i > \frac{k^2}{4} .$$

┘

Théorème 2.63 [C02] *Si K_{2n+1}^c , ($c = 2n + 1$), est un graphe complet proprement-arêtes-colorées, ayant n arbres couvrants hétérochromatiques utilisant chacun $2n$ couleurs et isomorphe entre eux (l'isomorphisme ne prend pas en compte les couleurs des arêtes), alors il existe aussi un graphe complet $K_{(2n+1)2^r}^c$, ($c = (2n + 1)2^r$), proprement-arêtes-colorées, ayant n arbres couvrants hétérochromatiques utilisant chacun $(2n + 1)2^r - 1$ couleurs et isomorphe entre eux (l'isomorphisme ne prend pas en compte les couleurs des arêtes), pour tout $(n, r) \neq (1, 2)$.*

┘

2.6.2 Chaînes/cycles hétérochromatiques

Une chaîne (resp. cycle) *hétérochromatique* est une chaîne (resp. cycle) proprement-arêtes-colorées dont chaque couleur apparaît une seul fois. Dès 1983, un problème de cycle hamiltonien hétérochromatique dans un graphe complet arêtes-colorées fut évoqué par P. Erdős, J. Nešetřil et V. Rödl [ENR83]. Ensuite, ce même problème a été étudié plus en détail par G. Hahn et C. Thomassen [HT86] puis par A.M. Frieze et B.A. Reed [FR93] et enfin Albert, Frieze et Reed [AFR05]

le nombre de couleurs différentes $cn_{G^c}(v)$ incidentes à chaque sommet v dans G^c est un paramètre qui revient fréquemment dans l'étude des chaînes/cycles hétérochromatiques. Dans les théorèmes 2.64 et 2.65, He Chen et Xueliang Li [CL05] ont donné des conditions sur ce paramètre pour avoir une chaîne hétérochromatique :

Théorème 2.64 [CL05] *Soient G^c un graphe arêtes-colorées et k un entier tel que $3 \leq k \leq 7$. Supposons que $cn_{G^c}(v) \geq k$ pour chaque sommet $v \in V(G^c)$. Alors G^c admet une chaîne hétérochromatique de longueur au moins égale à $k - 1$.*

┘

Théorème 2.65 [CL05] *Soient G^c un graphe arêtes-colorées et k un entier tel que $k \geq 8$. Supposons que $cn_{G^c}(v) \geq k$ pour chaque sommet $v \in V(G^c)$. Alors G^c admet une chaîne hétérochromatique de longueur au moins égale à $\lceil \frac{3k}{5} \rceil + 1$.*

┘

Le théorème suivant de H.J. Broersma, X. Li, G.J. Woeginger, et S. Zhang [BLWZ05] donne une condition sur le nombre de couleur c pour avoir une chaîne hétérochromatique.

Théorème 2.66 [BLWZ05] *Soit G^c un graphe arêtes-colorées d'ordre n tel que $c \geq n$. Alors G^c admet une chaîne hétérochromatique de longueur au moins égale à $\lceil \frac{2c}{n} \rceil + 1$.*

┘

Les auteurs de [BLWZ05] donnent également un résultat pour avoir une chaîne hétérochromatique qui commence par n'importe quel sommet :

Théorème 2.67 [BLWZ05] *Soient G^c un graphe arêtes-colorées et k un entier. Supposons que $cn_{G^c}(v) \geq k$ pour chaque sommet $v \in V(G^c)$. Alors pour chaque sommet z , G^c admet une chaîne hétérochromatique qui commence par z de longueur au moins égale à $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$.*

┘

Les deux théorèmes suivants donnent des conditions sur les ensembles des couleurs différentes incidentes à chaque paire de sommets pour avoir des chaînes hétérochromatiques :

Théorème 2.68 [BLWZ05] *Soit G^c un graphe arêtes-colorées d'ordre $n \geq 4$. Supposons que $|CN(u) \cup CN(v)| \geq k > 1$ pour chaque paire de sommets $u, v \in V(G^c)$. Alors G^c admet une chaîne hétérochromatique de longueur au moins égale à $\lceil \frac{k}{3} \rceil + 1$.*

┘

Remarquons que si, pour chaque paire de sommets u et v , les couleurs incidentes à u sont différentes de celle incidentes à v , le nombre de couleurs est forcément très grand. En plus, on aura $|CN(u) \cup CN(v)| = cn_{G^c}(u) + cn_{G^c}(v)$.

Théorème 2.69 [BLWZ05] *Soient G^c un graphe arêtes-colorées et k un entier. Supposons que $|CN(u) \cup CN(v)| \geq n - 1$ pour chaque paire de sommets $u, v \in V(G^c)$. Alors G^c admet au moins une chaîne hétérochromatique de longueur égale à 3 ou bien 4.*

┘

Très récemment, en 2006, Hao Li et Guanghi Wang [2LW06] ont étudié l'existence des cycles hétérochromatiques à partir du nombre $cn_{G^c}(v)$ de couleurs différentes incidentes à chaque sommet v dans G^c . Les auteurs ont pu démontrer une multitude de résultats selon la borne inférieure de $cn_{G^c}(v)$:

Théorème 2.70 [2LW06] *Soit G^c un graphe arêtes-colorées d'ordre $n \geq 3$. Supposons que $cn_{G^c}(v) \geq \frac{n+1}{2}$ pour chaque sommet $v \in V(G^c)$. Alors G^c admet un cycle hétérochromatique.*

┘

Théorème 2.71 [2LW06] *Soit G^c un graphe arêtes-colorées d'ordre $n \geq 3$. Supposons que $cn_{G^c}(v) \geq \frac{4\sqrt{7}}{7}n + 3 - \frac{4\sqrt{7}}{7}$ pour chaque sommet $v \in V(G^c)$. Alors G^c admet un cycle hétérochromatique de longueur 3 ou bien 4.*

┘

Théorème 2.72 [2LW06] *Soit G^c un graphe arêtes-colorées d'ordre $n \geq 3$. Supposons que $cn_{G^c}(v) \geq \frac{\sqrt{7}+1}{6}n$ pour chaque sommet $v \in V(G^c)$. Alors G^c admet un cycle hétérochromatique de longueur 3.*

┘

Théorème 2.73 [2LW06] *Soit G^c un graphe arêtes-colorées d'ordre $n \geq 3$. Supposons que $cn_{G^c}(v) \geq k \geq \frac{3n}{4} + 1$ pour chaque sommet $v \in V(G^c)$. Alors G^c admet un cycle hétérochromatique de longueur l avec $l \geq k - \frac{3n}{4} + 2$.*

┘

2.7 \mathcal{NP} -complétude

Dans ce paragraphe, nous présentons des problèmes avec des contraintes plus fortes. Le théorème 2.17 prouvé par W.S. Chow et al. [CMMST93] concerne le cas où il s'agit d'un K_n^2 . Le théorème suivant prouvé par les mêmes auteurs traite le même problème mais pour le cas d'un graphe 2-arêtes-colorées G^2 :

Problème: Π_4

Instance: Soient G^2 un graphe 2-arêtes-colorées et 3 sommets distincts $s, t, z \in V(G^2)$.

Question: Existe-t-il, dans G^2 , une $s - t$ chaîne alternée qui passe par z ?

Théorème 2.74 [CMMST93] *Le problème Π_4 est NP-complet.*

┘

Le problème Π_5 présente une version adjacente du problème Π_4 pour K_n^c mais avec une contrainte plus forte sur les couleurs.

Problème: Π_5

Instance: Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, avec l'ensemble des couleurs $I_c = \{1, 2, \dots, c\}$ $c \geq 4$, 3 sommets distincts $s, t, z \in V(K_n^c)$ et une permutation $q = (\chi_1 \chi_2 \dots \chi_c)$ des couleurs de I_c .

Question: Existe-t-il, dans K_n^c , une $s - t$ chaîne alternée qui passe par z , telle que sa séquence des couleurs est une succession, d'un certain nombre de fois, de la permutation q ?

Théorème 2.75 [CMMST93] *Le problème Π_5 est NP-complet.*

┘

Le problème Π_6 présente une contrainte plus forte que celui traité dans le théorème 2.23 du paragraphe 2.3.1.

Problème: Π_6

Instance: Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, avec l'ensemble de couleurs $I_c = \{1, 2, \dots, c\}$ $c \geq 4$ et 4 sommets distincts $s_1, t_1, s_2, t_2 \in V(K_n^c)$.

Question: Existe-t-il, dans K_n^c , deux $s_i - t_i$ chaînes proprement-arêtes-colorées P_i , telles que la séquence des couleurs de chacune est une succession, d'un certain nombre de fois, de la séquence $(1, 2, \dots, c)$?

Théorème 2.76 [M95] *Le problème Π_6 est NP-complet.*

┘

Les auteurs de [BMPS96] ont étudié la contrainte suivante : soit p un entier positif, dans K_n^c , un $(\chi_1\chi_2 \dots \chi_k)$ -cycle (resp. une $(\chi_1\chi_2 \dots \chi_k)$ -chaîne), avec $k \leq c$, est un cycle (resp. une chaîne) de longueur pk dont la séquence $(\chi_1\chi_2 \dots \chi_k)$ de couleurs se répète p fois.

Problème: Π_7

Instance: Soit K_n^3 un graphe complet 3-arêtes-colorées.

Question: Existe-t-il un $(\chi_1\chi_2\chi_3)$ -cycle hamiltonien dans K_n^3 ?

Théorème 2.77 [BMPS96] *Le problème Π_7 est NP-complet.*

┘

Le problème Π_8 généralise le cas de Π_7 pour un nombre de couleur au moins égal à 4 :

Problème: Π_8

Instance: Soient p et c deux entiers positifs, $c \geq 4$, et K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées tel que $n = cp$.

Question: Existe-t-il un $(\chi_1\chi_2 \dots \chi_c)$ -cycle hamiltonien dans K_n^c ?

Théorème 2.78 [BMPS96] *Le problème Π_8 est NP-complet.*

┘

La version en optimisation du problème Π_8 est donnée dans le corollaire suivant :

Corollaire 2.78.1 [BMPS96] *Trouver le plus long $(\chi_1\chi_2 \dots \chi_c)$ -cycle (chaîne) dans K_n^c est NP-difficile.*

┘

La même question de $\Pi 8$ pour chercher une chaîne au lieu d'un cycle est donnée par le résultat suivant :

Problème: $\Pi 9$

Instance: Soient p et c deux entiers positifs, $c \geq 4$, et K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées tel que $n = cp + 1$.

Question: Existe-t-il une $(\chi_1\chi_2 \dots \chi_c)$ -chaîne hamiltonienne P (resp. $(\chi_1\chi_2 \dots \chi_c)$ -chaîne hamiltonienne P' avec des extrémités données) dans K_n^c ?

Théorème 2.79 [BMPS96] *Le problème $\Pi 9$ est NP-complet.*

┘

Le problème d'optimisation suivant consiste à maximiser l'apparition des couleurs (au moins p fois) dans un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées :

Problème: $\Pi 10$

Instance: Soient p et c deux entiers positifs, $c \geq 3$, et K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées tel que $n = cp$.

Question: Existe-t-il un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées tel que chaque couleur apparaît au moins p fois dans K_n^c ?

Théorème 2.80 [BMPS96] *Le problème $\Pi 10$ est NP-difficile.*

┘

Dans les paragraphes 2.3.1 et 2.4 nous avons exposé des résultats de caractérisation qui traitent des cycles et chaînes qui passent par un ou deux sommets). Le résultat suivant traite le cas d'un $(\chi_1\chi_2\chi_3)$ -cycle qui passe par le maximum de sommets d'un ensemble S :

Problème: $\Pi 11$

Instance: Soit K_n^3 un graphe complet 3-arêtes-colorées et $S \subset V(K_n^3)$ de 6 sommets.

Question: Existe-t-il, dans K_n^3 , un $(\chi_1\chi_2\chi_3)$ -cycle contenant les sommets de S ?

Théorème 2.81 [BMPS96] *Le problème Π11 est NP-difficile.*

┘

Beaucoup d'auteurs ont étudié les chaînes sommets-disjointes en particulier celles qui ont des extrémités donnés. Nous avons exposé les résultats de Y. Manoussakis [M95] sur les chaînes sommets-disjointes qui ont les mêmes extrémités s et t . Y. Manoussakis et al. [MST96] ont étudié le cas de deux chaînes sommets-disjointes dont les extrémités sont distinctes :

Problème: Π12

Instance: Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, avec l'ensemble de couleurs $I_c = \{1, 2, \dots, c\}$ $c \geq 4$, 4 sommets distincts $s_1, s_2, t_1, t_2 \in V(K_n^c)$ et une permutation $q = (\chi_1 \chi_2 \dots \chi_c)$ des couleurs I_c .

Question: Existe-t-il, dans K_n^c , deux chaînes alternées, d'extrémités $s_1 - t_1$ et $s_2 - t_2$ respectivement, dont les sommets sont disjoints et la séquence de couleurs de chacune est une succession, d'un certain nombre de fois, de la permutation q ?

Théorème 2.82 [MST96] *Le problème Π12 est NP-complet.*

┘

2.8 Conclusion

Résumons les résultats exposés dans ce chapitre. Nous avons montré les résultats qui ont été fait concernant les cycles hamiltoniens proprement-arêtes-colorées et nous avons montré leurs relations avec certaines structures telles que les facteurs dans plusieurs genres de graphes ; ensuite, nous avons donné un certain nombre de résultat qui ont été fait concernant les chaînes proprement-arêtes-colorées puis les $s-t$ chaînes proprement-arêtes-colorées, les cycles *non hamiltonien* proprement-arêtes-colorées, les (x, y) chaînes/cycles, les marches eulériennes proprement-arêtes-colorées, les sous-graphes hétérochromatiques et enfin un nombre de résultats de *NP*-complétude sur les graphes arêtes-colorées.

Après cet exposé d'état de l'art, nous espérons que le lecteur ait une idée général sur ce qu'a été les questions traitées en graphes arêtes-colorées. En même temps, nous espérons avoir répondu à une nécessité didactique de faire un travail récapitulatif et même historique de documentation.

Un certain nombre de problèmes ouverts et de conjectures ont été proposés dans les articles qui nous ont servit de bibliographie. Dans les chapitres suivants, nous présentons

des solutions à certains de ces questions ouvertes même si la plus part de nos résultats sont des réponses à nos propres questions. Enfin, nous donnons plus tard un récapitulatif des problèmes qui restent ouverts et d'autres que nous avons proposé nous mêmes.



Deuxième partie
CONTRIBUTIONS.

CHAPITRE 3

Facteurs, Cycles et Chaînes proprement-arêtes-colorées

*L'existence est une suite de notes de bas de page pour un
chef-d'œuvre vaste, obscur et inachevé.*

— Vladimir Nabokov

Le contenu de ce chapitre a été publié dans [ADFKMMS06] en collaboration avec K. Ch. Das, W. Fernandez de la Vega, M. Karpinski, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon et R. Saad. Nous avons vu dans l'état de l'art, en particulier le paragraphe 2.1, que les facteurs proprement-arêtes-colorées ont été étudiés, notamment dans [BB68], [BMPS96], [HM89] et [BMM99]. Et nous avons vu, aussi, leur utilité pour trouver des structures particulières telles que les chaînes et les cycles hamiltoniens. Mais, toutes ces études ont été faites sur les graphes complets arêtes-colorées. Dans le paragraphe 3.1, nous présentons des résultats concernant les facteurs, les chaînes et les cycles tous proprement-arêtes-colorées dans les graphes arêtes-colorées quelconques. Ensuite, dans le paragraphe 3.2 (resp. 3.3), nous utiliserons la notion de degré-couleur (i -degré), qui est le nombre des arêtes monochromatiques incidentes à un même sommet, pour étudier l'existence des chaînes et des cycles proprement-arêtes-colorées dans un graphe G^c (resp. multigraphe \mathcal{G}^c). Dans l'état de l'art, nous avons vu que les auteurs de [1LW06] ainsi que les auteurs de [MSTV96], ont utilisé le nombre $cn(v)$ des arêtes de couleurs différentes incidentes au sommet v . Ce qui est manifestement une manière différente de voir les choses. En effet, si par exemple, le i -degré est une constante pour tous les sommets et toutes les couleurs, il garantira une distribution équilibrée des arêtes et des couleurs dans le graphe ce qui n'est pas le cas avec le nombre $cn(v)$ si lui aussi était une constante. Enfin, en revenant à des résultats classiques publiés dans [HALL36] et [AV79], nous donnons un résultat sur le cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées dans un graphe aléatoire.

3.1 Facteur proprement-arêtes-colorées

Le théorème suivant est un résultat algorithmique montrant que le problème de trouver un facteur proprement-arêtes-colorées est équivalent au problème de trouver un facteur dans un graphe non-arêtes-colorées.

Théorème 3.1 *Pour tout nombre $c \geq 2$, de couleurs, trouver un facteur proprement-arêtes-colorées dans G^c est équivalent à trouver un facteur dans un graphe non-arêtes-colorées.*

┘

Preuve :

A partir de G^c , définissons un nouveau graphe non-arêtes-colorées G comme suit : remplaçons chaque sommet x de G^c par un cycle de $2c$ sommets $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_c, y_c$ où c est le nombre de couleurs des arêtes incidentes à x dans G^c . Ensuite, ajoutons un sommet z_x et les arêtes entre z_x et y_i , pour chaque $i = 1, 2, \dots, c$. Enfin, pour chaque $i = 1, 2, \dots, c$, les arêtes de couleur i adjacentes à x dans G^c sont représentées par des arêtes adjacentes à x_i dans G . Supposons d'abord que G^c admet un facteur proprement-arêtes-colorées. Alors, chaque facteur proprement-arêtes-colorées de G^c peut être facilement transformé en un facteur dans G . En effet, soit x un sommet de G^c , il existe une chaîne dans G d'extrémités x_i et x_j couvrant tous les sommets $x_1, y_1, \dots, x_c, y_c, z_x$. Supposons, maintenant, que G admet un facteur F . Par définition de G , il y a deux possibilités : ou bien, un cycle de F contenant la chaîne $x_i, y_i, z_x, y_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-2}, \dots, x_{i+1}$, *c.à.d.*, d'extrémités x_i et x_{i+1} (modulo c) couvrant tous les sommets $x_1, y_1, \dots, x_c, y_c, z_x$; ou bien pour certains i, j (modulo c), le cycle $y_{i-1}, z_x, y_j, x_{i+1}, \dots, x_{i-1}$ appartient à F alors que la chaîne x_i, y_i, \dots, x_j appartient à un autre cycle de F . Dans les deux cas, par une contraction des sommets adéquats, il est facile de trouver un facteur proprement-arêtes-colorées dans G^c . \square

Sachant que trouver un couplage maximum peut être fait en un temps polynomial, le théorème précédent peut être exploité comme suit :

Corollaire 3.1.1 *Un facteur proprement-arêtes-colorées peut être trouver dans G^c en un temps $O(M)$, où $O(M)$ est la meilleure complexité connue pour trouver un couplage parfait dans un graphe avec $O(cn)$ sommets.*

┘

Preuve :

On sait maintenant, d'après le théorème 3.1, que le problème de trouver un facteur dans un graphe G^c peut être réduit à un problème de trouver un couplage parfait dans un graphe G (G est défini dans la preuve du théorème 3.1). Puisque G a $O(cn)$ sommets,

le résultat s'en suit. □

Comme nous avons vu dans le chapitre 2, si nous ne trouvons pas un facteur proprement-arêtes-colorées, il sera utile de pouvoir trouver un presque-facteur proprement-arêtes-colorées.

Corollaire 3.1.2 *Le problème de trouver un presque-facteur proprement-arêtes-colorées dans G^c peut être réduit au problème de trouver un facteur dans un graphe non-arêtes-colorées.*

└

Preuve :

Supposons que le rouge, le bleu et le vert trois couleurs qui ne sont pas utilisées dans G^c . Maintenant, à partir de G^c définissons un nouveau graphe G' comme suit : Ajoutons deux nouveaux sommets x et y dans G^c et toutes les arêtes entre x (resp. y) et G^c et aussi l'arête xy . Imposons que la couleur de toutes les arêtes entre x et G^c soit rouge, et que la couleur de toutes les arêtes entre y et G^c soient bleue, et enfin que la couleur de l'arête xy soit verte. Clairement, chaque facteur dans G' représente un presque-facteur dans G^c , puisque l'arête xy appartient nécessairement à un certain cycle dans le facteur de G' . □

Comme nous allons voir dans le chapitre 4, un presque facteur impliquera l'existence d'un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées.

On sait que le problème de trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne) est NP-complet pour un graphe non-arêtes-colorées quelconque. Le corollaire suivant peut aider à faire une réduction d'une méthode connue d'optimisation (heuristique ...etc) pour le problème de trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne) dans un graphe non-arêtes-colorées quelconque au cas d'un graphe arêtes-colorées.

Corollaire 3.1.3 *Trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne) proprement-arêtes-colorées dans G^c se réduit à trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne) dans un graphe non-arêtes-colorées quelconque.*

└

Preuve :

Dans la preuve du théorème 3.1, il suffit de voir que si G^c admet un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne) proprement-arêtes-colorées, alors G admet un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne). □

3.2 Le i -degré minimum dans les graphes (*simples*) arêtes-colorées

3.2.1 Le i -degré minimum supérieur ou égal à 1

Commençons par un théorème qui concerne les chaînes proprement-arêtes-colorées dans un graphe 2-arêtes-colorées avec un degré-couleur minimum égal à d .

Théorème 3.2 *Soit G^2 un graphe 2-arêtes-colorées tel que pour tout sommet x , $d^i(x) \geq d \geq 1$, $i \in \{1, 2\}$. Alors, G^2 admet une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur au moins égale à $\min\{n - 1, 2d\}$.*

┘

Preuve :

Pour simplifier, nous supposons que les deux couleurs de G^2 sont le rouge et le bleu. Aussi, nous introduisons quelques notations limitées à cette preuve. Pour tout cycle proprement-arêtes-colorées C et toute arête uv avec $u \notin V(C)$ et $v \in V(C)$, il existe seulement une façon (ou bien dans le sens d'une horloge ou inversement par rapport au plan du cycle C) pour former une chaîne proprement-arêtes-colorées en joignant l'arête uv au cycle C . On note cette chaîne, de longueur $|C| + 1$, par uvC .

Par raisonnement contradictoire, supposons que la conclusion du théorème est fautive. Soit, donc, P la plus longue chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $r < 2d \leq n - 1$. Soient x et y les extrémités de P . On dira que l'arête xz de G^2 (resp. yz) est externe si elle est colorée différemment par rapport à l'unique arête de P incidente à x (resp. y). Clairement, puisque P est la plus longue chaîne proprement-arêtes-colorées, il n'y a aucune arête xz ou yz avec $z \in V(G^2) \setminus V(P)$ qui est externe. En outre, le nombre des arêtes externes est au moins $2d$, puisque $d^i(x) \geq d \geq 1$ et $d^i(y) \geq d \geq 1$, $i \in \{1, 2\}$.

S'il existe un cycle proprement-arêtes-colorées C de longueur $r + 1$ dont les sommets sont contenus dans $V(P)$ cela veut dire que $V(C) = V(P)$. Et, donc, les voisins de chaque sommet de C sont, tous, dans $V(C)$ sinon on pourra avoir une chaîne proprement-arêtes-colorées plus longue que P . Mais, si au moins un sommet t a tous ses voisins dans $V(C)$, cela veut dire que $|V(C)| \geq 2d$ ce qui est contradictoire avec le fait que la longueur r de P est inférieure à $2d$. Maintenant, avec ces remarques préliminaires, nous allons essayer de prouver l'assertion suivante :

Assertion 1 : Il existe une partition de $V(P)$ ou bien en deux cycles proprement-arêtes-colorées ou bien en deux cycles proprement-arêtes-colorées C_1 et C_2 et un sommet u . En plus, dans le dernier cas, u est incident aux deux cycles avec deux arêtes de couleurs différentes.

Preuve de l'Assertion 1 :

Nous distinguons deux cas dépendants de la parité de r .

Cas 1 : r est impair.

Posons $P : x_1y_1x_2 \cdots x_py_p$ pour un certain entier $p \geq 1$, tel que $x = x_1$ et $y = y_p$ et $r = 2p - 1$. Supposons que x_1y_1 est rouge. On observe que chaque arête externe est incidente à

un sommet d'une certaine arête $y_i x_{i+1}$, $i \leq p-1$ de couleur bleue. Puisqu'il y a au moins $2d > 2(p-1)$ arêtes externes et seulement $p-1$ arêtes bleues $y_i x_{i+1}$, $i \leq p-1$, dans P , alors il y a au moins une arête $y_i x_{i+1}$ qui est incidente à au moins trois arêtes externes. Donc, ou bien les arêtes $\{x_1 y_{i+1}, x_i y_p\}$ sont toutes les deux externes, ou bien c'est les arêtes $\{x_1 x_i, y_{i+1} y_p\}$ qui le sont. Par conséquent, ou bien le cycle $x_1 y_1 \dots x_i y_p x_p y_{p-1} \dots y_{i+1} x_1$ est proprement-arêtes-colorées, ce qui est impossible en prenant compte des remarques précédentes, ou bien les cycles $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_i x_1$ et $y_{i+1} x_{i+1} \dots x_p y_p y_{i+1}$ forment une partition de $V(P)$ en cycles proprement-arêtes-colorées, ce que veut l'assertion.

Cas 2 : r est pair.

Posons $P : x_1 y_1 x_2 \dots x_p y_p x_{p+1}$, avec $p \leq d-1$, et supposons que $x_1 y_1$ est rouge. Pour chaque sommet y_i , $i \leq p-1$, une des arêtes $x_1 x_{i+1}$, $x_i x_{p+1}$ ne doit pas être externe, sinon le cycle $x_1 x_{i+1} x_{i+2} \dots x_{p+1} x_i \dots x_1$ serait un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur $r-1$. De même, pour chaque sommet x_j , $j > 1$, ou bien une des arêtes $x_1 y_{j-1}$, $y_j x_{p+1}$ n'est pas externe, ou bien le sommet x_j avec les cycles $x_1 y_{j-1} \dots y_1 x_1$ et $y_j x_{j+1} \dots x_{p+1} y_j$ forment une partition comme le veut l'assertion. Observons en outre, que ni l'arête $x_1 y_1$ ni $y_p x_{p+1}$ n'est externe puisque le graphe est simple. Par conséquent, si notre assertion n'était pas vraie, le nombre des paires de sommets dans P qui ne forment pas des arêtes externes serait au moins $2(p-1) + 2 = 2p$. Cela nous donnera moins de $2p-1$ arêtes externes parmi $2(2p)-1$ arêtes possibles, qui sont incidentes à ou bien x ou bien y (hormis xy). Cela est inférieur à $2d$ ce qui est absurde. L'assertion est prouvée.

Revenons à la preuve du théorème. Considérons une partition comme celle donnée dans l'Assertion 1. Le plus petit des deux cycles dans la partition est noté par C_1 . Une arête uv est dite étrangère si l'un de ses sommets est dans C_1 et l'autre sommet est dans $G^2 - P$. Encore une fois nous distinguons deux cas dépendants de la parité de r .

Cas a : r est impair.

Soient $C_1 = x_1 x_2 \dots x_k x_1$ et $C_2 = y_1 y_2 \dots y_t$ deux cycles proprement-arêtes-colorées qui partitionnent $V(P)$ comme dans l'Assertion 1. Supposons que $k \leq d$. Puisque les deux cycles sont des sous-graphes du graphe induit par $V(P)$, il y a au moins une arête entre C_1 et C_2 . On peut supposer que $x_1 y_1$ est cette arête, et que les arêtes $x_1 y_1$ et $x_1 x_2$ sont bleues. Ainsi, la chaîne $x_2 x_3 \dots x_k x_1 y_1 C_2$ est proprement-arêtes-colorées de longueur r . Par conséquent, il n'y a pas d'arête étrangère de couleur bleue incidente à x_2 (sinon une chaîne plus longue en résulterait). Nous avons prouvé ces résultats :

Résultat 1 : Il n'y a pas d'arête étrangère bleue incidente à x_2 .

Par conséquent, puisque le degré-bleu de x_2 est supérieur à $k-1$, alors il y a au moins une arête bleue $x_2 y_j$, pour un certain $j \in \{1, \dots, t\}$.

Résultat 2 : Il n'y a pas d'arête étrangère de couleur rouge incidente à x_3 .

L'existence de telle arête étrangère rouge impliquerait qu'un certain sommet u dans $G^2 - P$ est incident à une arête rouge $x_3 u$ et une autre arête bleue uv , avec $v \notin C_1$. L'existence de v est assurée par le degré-rouge de u qui est supérieur à $k-1$. Maintenant, si $v \notin C_2$, nous obtenons la chaîne de longueur $r+1$: $vu x_3 x_4 \dots x_1 y_1 C_2$, absurde. D'autre part, si $v = y_q \in C_2$, nous obtenons la chaîne de longueur $r+1$: $x_2 x_1 x_k \dots x_3 u y_q C_2$, ce qui est impossible encore une fois.

A partir du résultat 2 et notre supposition $k \leq d$, on conclut qu'il y a une arête rouge x_3y_i . Alors, la chaîne $P' = x_2x_1x_kx_{k-1} \cdots x_3y_iC_2$ est une autre chaîne de longueur r avec x_2 comme extrémité. Par conséquent, x_2 n'est pas incident à une arête étrangère rouge. Cela plus le résultat 1 montre que tous les voisins de x_2 sont dans $V(P)$. Comme G^2 est simple, nous avons au moins $2d$ de tels voisins, ce qui prouve le cas a.

Cas b : r est pair.

Soit $C_1 = x_1x_2 \cdots x_kx_1$, $C_2 = y_1y_2 \cdots y_t$ et u_1 les cycles proprement-arêtes-colorées et le sommet, respectivement, qui partitionnent $V(P)$ et comme dans la preuve de l'assertion 1, supposons que C_1 est le plus petit cycle des deux cycles, *c.à.d.*, $k \leq d$. En outre, supposons que u_1 est incident à C_1 avec une arête rouge, soit u_1x_1 , et à C_2 avec une arête bleue, soit u_1y_1 . Supposons, sans perdre de généralité, que x_1x_2 est bleue et y_1y_2 est rouge. D'où, la chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $r : x_kx_{k-1} \cdots x_1u_1y_1C_2$. On observe que cette chaîne commence par x_k avec une arête bleue. Par conséquent, il n'y a pas d'arête étrangère rouge incidente à x_k , sinon une plus longue chaîne proprement-arêtes-colorées s'en résulterait. Nous venons de montrer que :

Résultat 3 : Il n'y a pas d'arête étrangère rouge incidente à x_k .

Puisque le degré-rouge de x_k est supérieur à $k-1$ et x_kx_{k-1} est bleue, alors il y a au moins une arête rouge de la forme x_ky_i . Maintenant, nous revendiquons le résultat suivant :

Résultat 4 : Il n'y a pas d'arête étrangère bleue incidente à x_{k-1} .

La preuve étant similaire à celle du résultat 2, nous en donnons seulement un résumé. Supposons que nous avons une arête bleue $x_{k-1}v$, avec $v \notin V(P)$. A partir de la condition du degré-rouge sur v avec le fait que ni vx_k ni vx_{k-1} n'est rouge, alors il doit y avoir une arête rouge vw , avec $w \notin V(C_1) \cup \{u_1\}$. Ou bien $w \notin V(C_2)$ ou bien $w \in V(C_2)$. Dans le premier cas où $w \notin V(C_2)$, nous avons une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $r+1$ (on écrit : $wvx_{k-1} \cdots x_1u_1y_1C_2$), alors que dans le second cas, $w \in V(C_2)$, nous avons une autre chaîne P' de longueur r et qui commence par le sommet x_k avec la couleur rouge $x_kx_1 \cdots x_{k-1}wC_2$. Ainsi, les deux cas mènent à une contradiction, et le résultat est prouvé.

On conclut qu'il y a au moins une arête bleue $x_{k-1}y_j$. Ensuite, s'il n'y a aucune arête étrangère bleue incidente à x_k , cela veut dire, en prenant compte du résultat 3, que tous les voisins de x_k (qui sont du nombre de $2d$ au moins) sont dans P , contradiction. Ainsi, on peut supposer qu'une certaine arête x_ku_k ($u_k \in V(G^c) \setminus V(P)$) est bleue. On observe, en outre, que u_k ne peut pas être adjacent à un voisin z par une arête rouge tel que $z \notin V(P)$, car si un tel voisin z existe, cela donnerait une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $r+1 : zu_kx_kx_1 \cdots x_{k-1}wC_2$. A partir de la condition sur le degré de x_k , on conclut qu'il doit y avoir un voisin y_j adjacent par une arête rouge à u_k tel que $y_j \notin V(C_2)$.

Récapitulons, nous avons commencé par le sommet u_1 et procédant sur le petit des deux cycles, nous avons prouvé l'existence d'un autre sommet u_k similaire à u_1 . En répétant les mêmes étapes à nouveau nous avons le résultat 5 :

Résultat 5 : Pour chaque sommet x_i de C_1 , il y a deux sommets $u_i \in V(G^2) \setminus V(P)$ et $z_i \in C_2$ tels que :

(1) si i est impair, alors x_iu_i est une arête rouge de G^2 et u_iz_i est une arête bleue.

(2) si i est pair, alors $x_i u_i$ est une arête bleue de G^2 et $u_i z_i$ est une arête rouge. Soit $X = \{x_i | i = 1 \text{ mod } 2\}$, et $Y = \{x_i | i = 0 \text{ mod } 2\}$. On observe que chaque sommet x_i de X est l'extrémité d'une chaîne maximum qui commence par x_i avec une arête rouge. De même, chaque sommet x_i de Y est l'extrémité d'une chaîne maximum qui commence par x_i avec une arête bleue. On observe qu'aucune arête bleue $x_i x_j$ a ses deux sommets dans X , car cela donnerait la chaîne proprement-arêtes-colorées : $x_{i-1} x_{i-2} \cdots x_{j+1} x_j x_i x_{i+1} \cdots x_{j-1} u_{j-1} z_{j-1} C_2$, de longueur r et commence par $x_{i-1} \in Y$ avec une arête rouge, impliquant que x_{i-1} a $2d$ voisins dans P , contradiction. Donc, Y n'a aucune arête rouge incidente. En plus, il n'y a aucune arête bleue entre X et $G^c - P$, et aucune arête rouge entre Y et $G^2 - P$ (puisque une telle arête augmentera une chaîne maximum).

Ainsi, chaque sommet x_i de X n'a plus que $|Y| - 1 = \frac{k}{2} - 1$ arêtes bleues dans C_1 , ce qui explique le fait que toutes les arêtes $x_i X$ sont rouge et une arête, au moins, de $x_i Y$ est rouge. En plus, il n'y a aucune arête bleue entre X et $G^2 - P$. De même, chaque sommet x_j de Y n'a plus que $|X| - 1 = \frac{k}{2} - 1$ arêtes rouges dans C_1 , et il n'y a aucune arête rouge entre Y et $G^2 - P$.

D'autre part, chaque sommet x_i a au moins d arêtes bleues dans P , avec $d \geq \frac{r}{2} = \frac{k+t}{2}$. Donc, chaque sommet x_j de Y a au moins $\frac{|C_2|}{2} = \frac{t}{2}$ arêtes rouges avec les sommets de C_2 , alors que x_1 a au moins $\frac{t}{2} + 1$ arêtes bleues avec les sommets de C_2 (car $x_1 u_1$ est bleue). D'où le résultat suivant :

Résultat 6 : Il y a un sommet y_i de C_2 tel qu'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (i) $x_1 y_i$ est une arête rouge, $x_2 y_{i+2}$ est une arête bleue et i est impair.
- (ii) $x_1 y_{i+2}$ est une arête rouge, $x_2 y_i$ est une arête bleue et i est pair.

Avant de commencer la preuve, notons que les conditions donnent une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $r+1$. Dans le cas (i), par exemple, cette chaîne est : $u_1 x_1 y_i y_{i-1} \cdots y_{i+2} x_2 x_3 \cdots x_k u_k$. Si $u_k = u_1$, cette chaîne est un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur $r+1$. Maintenant, prouvons le résultat 6.

Nous appelons une portion de longueur 2 du C_2 un 2-segment. Pour tout 2-segment $s = y_i y_{i+1} y_{i+2}$, on dit que l'arête uv est conforme avec s si elle est une des arêtes citées dans les conditions du résultat 6. Notons qu'une arête rouge $x_1 y_j$ est conforme avec seulement un seul 2-segment. De même, une arête bleue $x_2 y_j$ est conforme avec un 2-segment. Considérons la fonction f telle que $f(s, e) = 1$ si l'arête e est conforme avec s , et $f(s, e) = 0$ sinon. Pour chaque s , notons par $|s|$ le nombre des arêtes conformes avec s . Maintenant, en faisant la somme double de $f(s, e)$, nous avons : $\sum_s \sum_e f(s, e) = \sum_s |s| = d_{C_2}^r(x_1) + d_{C_2}^b(x_2) > |C_2| = t$. Donc, il y a un s avec qui au moins deux arêtes conformes, ce qui prouve le résultat 6 et le théorème aussi. \square

Le corollaire suivant généralise le théorème précédent au cas des graphes c -arêtes-colorées avec $c \geq 2$.

Corollaire 3.2.1 *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées, $c \geq 2$. Si pour chaque sommet x , $d^i(x) \geq d \geq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, c\}$, alors G^c admet une chaîne proprement-arêtes-*

colorées de longueur $\min\{n - 1, 2\lfloor \frac{c}{2} \rfloor d\}$.

┘

Preuve :

Identifions toutes les couleurs de numéro impair à la couleur de numéro 1 et toutes les couleurs de numéro pair à la couleur de numéro 2. Le graphe 2-arêtes-colorées résultant a un degré minimum égal à $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor d$. Par conséquent, il admet une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $\min\{n - 1, 2\lfloor \frac{c}{2} \rfloor d\}$, comme le graphe initial G^c . \square

Nous pensons que le corollaire ci-dessus n'est pas loin d'être le meilleur possible. En effet, pour des entiers strictement positifs c et d , soit G^c un graphe c -arêtes-colorées de $cd + 1$ sommets et tel que chaque classe de couleur a un degré d . Soit maintenant un graphe G_*^c c -arêtes-colorées constitué d'au moins trois copies de G^c ayant exactement un sommet en commun. Bien que le degré-couleur de G_*^c soit d , il n'admet aucune chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur supérieur à $2cd$.

Nous donnons le théorème suivant qui exploite l'existence d'un cycle alterné de deux couleurs de longueur $2p < n$ pour trouver des cycles de toutes longueurs jusqu'à $2p$ ou $2p + 1$.

Théorème 3.3 *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées, $c \geq 2$. Supposons que G^c contient un cycle proprement-arêtes-colorées C de deux couleurs rouge et bleue et de longueur $2p < n$. Supposons, en plus, qu'il y a un sommet x dans $G^c - C$ tel que ses degrés-couleurs (rouge/bleue) vérifient $d_C^r(x) > p$ et $d_C^b(x) > p$ pour $c = 2$, ou bien pour les couleurs rouge et verte $d_C^r(x) > p$ et $d_C^v(x) > p$, pour $c \geq 3$.*

i) Si $c = 2$, alors G^c admet des cycles proprement-arêtes-colorées de toutes les longueurs pairs $2, 4, \dots, 2p$ passant à travers x .

ii) Si $c \geq 3$, alors G^c admet des cycles proprement-arêtes-colorées de toutes les longueurs $2, 3, 4, \dots, 2p + 1$ passant à travers x .

┘

Preuve :

Posons $C : x_1 y_1 \dots x_p y_p x_1$. Supposons, sans perdre de généralité, que toutes les arêtes $x_i y_i$ (modulo p) sont rouges, et les arêtes qui restent $y_i x_i$ (modulo p) de C sont bleues. Soit $X = \{x_i | x_i \in V(C) i = 1, 2, \dots, p\}$ et $Y = \{y_i | y_i \in V(C) i = 1, 2, \dots, p\}$. Pour deux couleurs données $s, t \in \{r, b, v\}$, on considère la somme des degrés couleurs $d_C^s(x) + d_C^t(x)$ et on la récrit de la forme $d_X^s(x) + d_Y^s(x) + d_X^t(x) + d_Y^t(x) = d_X^s(x) + d_X^t(x) + d_Y^s(x) + d_Y^t(x)$. Par définition,

$$d_X^s(x) + d_X^t(x) + d_Y^s(x) + d_Y^t(x) > 2p \text{ (*)} .$$

D'après (*), il s'en suit que, ou bien $d_X^s(x) + d_X^t(x) > p$ ou bien $d_Y^s(x) + d_Y^t(x) > p$. Supposons, sans perdre de généralité, que

$$d_X^s(x) + d_X^t(x) > p \quad (**)$$

Maintenant, prouvons les deux cas (i) et (ii).

Preuve de (i) : On considère (**), en posant $s = r$ (rouge) et $t = b$ (bleu) on a $d_X^r(x) + d_X^b(x) > p$. Supposons, maintenant, par contradiction que pour un certain entier pair k , $2 \leq k \leq 2p$, il n'existe pas de cycle proprement-arêtes-colorées de longueur k qui passe à travers x dans G^c . Cela veut dire que pour tout $i = 1, 2, \dots, p$ (modulo p), allant dans le sens de l'horloge sur le cycle, si l'arête $x_i x$ (si elle existe) est bleue, alors l'arête $x_{i+\frac{k}{2}-1} x$ (si elle existe) n'est pas rouge. Sinon, le cycle $xx_i y_i \dots x_{\frac{k}{2}-1} x$ devrait être proprement-arêtes-colorées de longueur pair k , contradiction par rapport à notre supposition. Ainsi, $d_{x_i}^b(x) + d_{x_{\frac{k}{2}-1}}^r(x) = 0$ ou 1 . Il s'en suit que $p < d_X^b(x) + d_X^r(x) = \sum_{i=1}^p \text{(modulo } p) d_{x_i}^b(x) + d_{x_{\frac{k}{2}-1}}^r(x) \leq p$, contradiction. Cela, termine la preuve de ce cas.

Preuve de (ii) : Supposons, maintenant, par contradiction que pour un certain entier k , $2 \leq k \leq 2p + 1$, il n'existe pas de cycle proprement-arêtes-colorées de longueur k qui passe à travers x dans G^c . Si k est pair, alors on termine la preuve en utilisant les mêmes arguments que dans le cas (i). Pour k impair, il s'en suit de (*) que, ou bien $d_X^r(x) + d_Y^v(x) > p$ ou bien $d_Y^r(x) + d_X^v(x) > p$. Supposons, sans perdre de généralité, que $d_X^r(x) + d_Y^v(x) > p$. En allant dans le sens contraire de l'horloge sur le cycle, on observe que pour tout $i = p, p-1, \dots, 2, 1$ (modulo p), si l'arête $x_i x$ (si elle existe) est bleue, alors l'arête $y_{i-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x$ (si elle existe) n'est pas rouge. Sinon le cycle $xx_i y_{i-1} \dots x_{i+1-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} y_{i-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x$ devrait être proprement-arêtes-colorées de longueur k , contradiction par rapport à notre supposition, $d_{x_i}^r(x) + d_{y_{i-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}^v(x) = 0$ ou 1 . Il s'en suit que $p < d_X^r(x) + d_Y^v(x) = \sum_{i=1}^p \text{(modulo } p) d_{x_i}^r(x) + d_{y_{i-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}^v(x) \leq p$, contradiction. Cela, termine la preuve du Théorème. \square

Le théorème ci-dessus servira dans la preuve du Théorème 3.6.

3.3 Le i-degré minimum dans les multigraphes arêtes-colorées

3.3.1 Le i-degré minimum supérieur ou égal à 1

Le théorème suivant ramène le corollaire 3.2.1 aux cas des multigraphes. Pour cela, définissons un multigraphe 2-arêtes-colorées H_s comme suit : Soit un entier $s \geq 1$, considérons un arbre arbitraire avec s sommets t_1, t_2, \dots, t_s . Ensuite, on remplace chaque sommet t_i par un multigraphe complet 2-arêtes-colorées T_i avec $d+1$ sommets, pour un certain nombre entier $d \geq 2$. Pour $s = 1$, le graphe H_1 est par définition le graphe T_1 . Sinon, pour $s \geq 2$, H_s est obtenu en assemblant tous les T_i de façon à ce que T_i et T_j aient précisément un seul sommet en commun si, et seulement si, $t_i t_j$ est une arête de l'arbre.

Théorème 3.4 Soit \mathcal{G}^c un multigraphe c -arêtes-colorées, $c \geq 2$. Supposons que pour chaque sommet x , $d^i(x) \geq d \geq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, c\}$. Alors, \mathcal{G}^c admet ou bien une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur au moins égale à $\min\{n-1, 2d\}$ ou bien, sinon, un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur $\min\{n, d+1\}$. Sauf si \mathcal{G}^c est isomorphe à H_1 , dans ce cas il admet un cycle de longueur d .

┘

Preuve :

Supposons que les arêtes de \mathcal{G}^c sont colorées par deux couleurs, rouge et bleue. Supposons, aussi, que \mathcal{G}^c n'admet pas une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur plus grande ou égale à $\min\{n, 2d\}$, sinon c'est ce qu'on cherche. Nous devons montrer que \mathcal{G}^c admet un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur au moins égale à $\min\{n, d+1\}$ sauf si $\mathcal{G}^c \cong H_1$. Soit P une chaîne maximum proprement-arêtes-colorées dans \mathcal{G}^c . Par hypothèse, la longueur de P est au plus $2d-1$, c.à.d., P a au plus $2d$ sommets. Posons $R = \mathcal{G}^c - P$. Selon la parité de la longueur de P , posons $P : x_1 y_1 x_2 \dots x_p y_p$ ou sinon $P : x_1 y_1 x_2 \dots x_p y_p x_{p+1}$ pour un certain nombre entier $p \geq 1$. Supposons, sans perdre de généralité, que toute arête $x_i y_i$, $1 \leq i \leq p$, est rouge et toute arête $y_i x_{i+1}$ est bleue. On observe qu'il n'y pas de sommet $z \in R$ tel que l'arête $x_1 z$ est rouge, sinon la chaîne $z x_1 y_1 x_2 y_2 \dots$ devrait être plus longue que P , cela est contradictoire avec le choix de P . Même constatation concernant l'autre extrémité de P . Considérons, maintenant, les arêtes bleues incidentes à x_1 . Puisque l'autre extrémité de chacune de ces arêtes appartient nécessairement à P , il s'en suit que P a au moins $d+1$ sommets.

Supposons d'abord que la longueur de P est impair. Faisons les trois remarques suivantes :

Remarque 1 : Pour toute arête bleue $y_i x_{i+1}$, $1 \leq i \leq p-1$, de P , les arêtes $x_1 x_{i+1}$, $y_p y_i$ (si elles existent) ne peuvent pas être bleues toutes les deux. Sinon, le cycle proprement-arêtes-colorées $x_1 x_{i+1} y_{i+1} x_{i+2} \dots y_p y_i x_i y_{i-1} x_{i-2} \dots x_1$ devrait être de longueur plus grande que $2p \geq d+1$. Ainsi, $d_{\{x_{i+1}, y_i\}}^b(x_1) + d_{\{x_{i+1}, y_i\}}^b(y_p) \leq 3$. Puisqu'il y a $p-1$ arêtes bleues dans P , il s'en suit que $\sum_{i=1}^{p-1} [d_{\{x_{i+1}, y_i\}}^b(x_1) + d_{\{x_{i+1}, y_i\}}^b(y_p)] \leq 3(p-1) = 3p-3$.

Remarque 2 : Il n'y a pas d'arête bleue $x_1 y_i$, $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil \leq i \leq p$. Sinon, le cycle $x_1 y_1 \dots y_i x_1$ devrait être celui qu'on cherche. De même, il n'a y pas d'arête bleue $x_i y_p$, $1 \leq i \leq p - \lceil \frac{d+1}{2} \rceil + 1$.

Remarque 3 : Pour $i > j$ et $2(j+p-i+1) \geq d+1$, les arêtes $x_1 x_i$ et $y_p y_j$, si elles existent, ne peuvent pas être bleues toutes les deux, sinon le cycle proprement-arêtes-colorées $x_1 x_i y_i \dots y_p y_j x_{j-1} \dots x_1$ devrait être de longueur supérieure à $d+1$. Notons qu'au moins deux de tels indices i, j existent, puisque P a une longueur au plus égale à $2d-1$, par hypothèse.

A partir des remarques 1, 2 et 3, il s'en suit que

$$\begin{aligned} d_P^b(x_1) + d_P^b(y_p) &\leq 3p-3 - 2\left(p - \lceil \frac{d+1}{2} \rceil\right) - \left(p - \lceil \frac{d+1}{2} \rceil\right) \\ &= 3\lceil \frac{d+1}{2} \rceil - 3 \end{aligned}$$

Rappelons aussi que $d_R^b(x_1) = d_R^b(y_p) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} d^b(x_1) + d^b(y_p) &= d_P^b(x_1) + d_P^b(y_p) + d_R^b(x_1) + d_R^b(y_p) \\ &\leq 3\lceil \frac{d+1}{2} \rceil - 3, \end{aligned}$$

contradiction, puisque $d^b(x_1) + d^b(y_p) \geq 2d$ et $d \geq 1$.

Supposons, maintenant, que la longueur de P est pair. Considérons d'abord le cas où $2p + 1 \geq d + 2$. Comme précédemment, on observe que :

1. Si les deux arêtes x_1x_i , $x_{p+1}x_{i-1}$, $3 \leq i \leq p + 1$ existent dans \mathcal{G}^c , alors ou bien x_1x_i n'est pas bleue ou bien $x_{p+1}x_{i-1}$ n'est pas rouge.
2. Il n'y a pas d'arêtes bleues x_1y_i ou d'arêtes rouges $y_{p-i+1}x_{p+1}$, $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil \leq i \leq p$.
3. Ou bien l'arête x_1x_i n'est pas bleue ou bien l'arête $x_{p+1}x_j$ n'est pas rouge, pour tout $i > j$ vérifiant $2(j + p - i + 1) \geq d + 1$.

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} d_P^b(x_1) + d_P^r(x_{p+1}) &\leq 3p - 3 - 2\left(p - \lceil \frac{d+1}{2} \rceil\right) - \left(p - \lceil \frac{d+1}{2} \rceil\right) \\ &= 3\lceil \frac{d+1}{2} \rceil - 3 \end{aligned}$$

contradiction, puisque $d^b(x_1) + d^r(x_{p+1}) \geq 2d$ et $d \geq 1$.

Supposons maintenant $2p + 1 = d + 1$. Puisqu'il n'y a pas d'arête bleue x_1z , $z \in R$, et le degré-bleu minimum de x_1 est d , il s'en suit que toute arête x_1w , $w \in V(P) - \{x_1\}$ est bleue. En particulier, l'arête x_1y_p est bleue. Ainsi $C : x_1y_1 \cdots y_px_1$ est un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur égale à d . Soit $R' = \mathcal{G}^c - C$, supposons d'abord que R' est un stable (les sommets ne sont pas adjacents entre eux). Alors, tout sommet z de R' est adjacent à n'importe quel sommet de C avec deux arêtes parallèles, rouge et bleue. Si R' a au moins deux sommets, z et z' par exemple, alors la chaîne $zx_1y_px_p \cdots y_1z'$ est plus longue que P , absurde. Si, d'une autre part, R' contient un singleton, alors soit z l'unique sommet de R' . Si $c = 2$, alors \mathcal{G}^c est isomorphe à H_1 et donc a un cycle de longueur d . Sinon, si $c \geq 3$, considérons une arête, soit zx_i , $x_i \in V(C)$, avec une couleur autre que le rouge et le bleu. Alors, le cycle $zx_iy_{i-1}x_{i-1} \cdots y_1z$ est de longueur égale à $d + 1$.

Il reste à examiner le cas où R' n'est pas un stable, *c.à.d.*, R' a au moins une arête, soit xy . Choisissons xy avec la propriété que ou bien x ou bien y , soit x , est adjacent à au moins un sommet, soit w , de C (il est facile de vérifier que les sommets x, y, w existent dans \mathcal{G}^c). On observe que, si pour un certain sommet w de C , $c(xw) \neq c(xy)$, alors on peut facilement joindre P' à C pour avoir une chaîne plus longue que P , contradiction par rapport au fait que P est maximum. Il s'en suit que toutes les arêtes entre x et $V(C) \cup \{y\}$ sont de même couleur. A cause de la contrainte du degré-couleur, il existe un certain sommet z de R' , distinct de y , tel que $c(xz) \neq c(xy)$. Alors, en joignant adéquatement le segment zxw au cycle C nous obtenons encore une chaîne plus longue que P , contradiction. Cela complète la preuve du théorème. \square

Nous pensons que le théorème 3.4 peut être amélioré. En effet, soient d , c et k des entiers quelconques, $d \geq 1$, $c \geq 3$ et $k \geq 3$. Considérons un multigraphe arêtes-colorées formé de k copies de multigraphes complets c -arêtes-colorées d'ordre $d + 1$ et un degré-couleur minimum égal à d qui s'intersectent en un sommet commun. Le multigraphe résultant n'a ni un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur $d + 2$ ni une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $2d$, bien que son degré-couleur minimum est d .

3.3.2 Le i -degré minimum très grand

Le théorème 3.4 est amélioré dans le théorème 3.5, donné dans ce paragraphe, qui parle des cycles hamiltoniens dans les multigraphes avec un degré-couleur très grand. Pour ce faire, nous prouvons deux lemmes pour préparer la démonstration du théorème 3.5.

Lemme 3.1 *Soit \mathcal{G}^c un multigraphe c -arêtes-colorées de n sommets tel que tout sommet a un degré-couleur minimum supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. Alors, \mathcal{G}^c admet un couplage parfait de chaque couleur i fixée, pour n pair, et un presque couplage parfait pour n impair.*

┘

Preuve :

Choisissons une couleur, soit le rouge, et après, considérons un sous-graphe G couvrant tous les sommets de \mathcal{G}^c induit par les arêtes rouges de \mathcal{G}^c . Clairement, le degré minimum dans G est au moins $\frac{n-1}{2}$. En utilisant le célèbre théorème de Dirac [Di52], G a une chaîne hamiltonienne et par conséquent la conclusion du lemme s'en suit trivialement. \square

Pour une couleur donnée i , Soit M_i le couplage de \mathcal{G}^c de couleur i . Regardons ce qui se passe si le degré-couleur minimum est supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$. En fait, en utilisant la définition 1.4 (p. 11) de la compatibilité avec un couplage, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit \mathcal{G}^c un multigraphe c -arêtes-colorées, $c \geq 2$, avec un degré-couleur minimum $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Alors, \mathcal{G}^c a un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieur ou égale à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ compatible avec un couplage maximum M_i de \mathcal{G}^c de couleur $i \in \{1, 2, \dots, c\}$ fixée.*

┘

Preuve :

Supposons, sans perdre de généralité, que les arêtes de \mathcal{G}^c sont colorées par les couleurs rouge et bleue. Sinon, à la place de \mathcal{G}^c , on peut considérer le sous-graphe qui couvre les sommets de \mathcal{G}^c induit par les arêtes rouges et bleues. Fixons une couleur, soit le rouge. Clairement, \mathcal{G}^c a un couplage parfait de couleur rouge pour n pair et un couplage presque-parfait pour n impair, d'après le lemme 3.1. Notons M_r ce couplage rouge maximum. Soit $P : p_1 p_2 \dots p_p$ une chaîne de longueur maximum compatible avec M_r . Nous allons prouver

ce lemme par contradiction. Pour cela, supposons que \mathcal{G}^c n'a pas de cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure ou égale à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Nous distinguons deux cas dépendants de la parité de n . Soit R le sous-graphe de \mathcal{G}^c induit par $V(\mathcal{G}^c) - V(P)$.

Cas (a) : n est pair.

Supposons d'abord que la dernière arête de P n'est pas rouge. Comme \mathcal{G}^c a un couplage parfait rouge, pour un certain sommet z dans R , l'arête $p_p z$ appartient à M_r . Mais, donc, la chaîne $p_1 p_2 \dots p_p z$ est plus longue que P et compatible avec M_r , contradiction. Il s'en suit que la première et la dernière arête de P sont de couleur rouge et ainsi la longueur de P est impair. En outre, il n'y a pas d'arête bleue $p_p z$ pour tout $z \in V(R)$, sinon la chaîne $p_1 p_2 \dots p_p z$ devrait être compatible avec M_c et plus longue que P , contradiction. Considérons, maintenant, les arêtes incidentes à p_1 . Puisque la seconde extrémité de chacune de ces arêtes appartient nécessairement à P , il s'en suit que le nombre de sommets de P est au moins égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, ce qui veut dire $p \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Notons que pour toute arête bleue $p_i p_{i+1}$, $i = 2, 4, \dots, p-2$, de P , ou bien $p_1 p_{i+1} \in E^b$ ou bien $p_p p_i \in E^b$ mais pas les deux en même temps, sinon le cycle proprement-arêtes-colorées $p_1 p_{i+1} p_{i+2} \dots p_p p_i p_{i-1} p_{i-2} \dots p_1$ devrait être de longueur supérieur à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Ici le nombre des arêtes bleues dans P est égal à $\frac{p}{2} - 1$. Soit $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2r - 1$ ou $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2r$, où r est un entier positive. Nous distinguons deux sous-cas dépendants de la parité de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Sous-cas (i) : $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2r - 1$ pour un certain nombre entier $r \geq 1$.

Les sommets $p_{2r}, p_{2r+2}, p_{2r+4}, \dots, p_p$ ne sont pas la seconde extrémité des arêtes bleues incidentes à p_1 , sinon nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. De même, les sommets $p_1, p_3, p_5, \dots, p_{p-2r+1}$ ne sont pas la seconde extrémité des arêtes bleues incidentes à p_p , sinon nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieur à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Donc,

$$\begin{aligned} d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) &\leq 2(p-1) - \left(\frac{p}{2} - 1\right) - 2\left(\frac{p}{2} - r + 1\right) \\ &= \frac{p}{2} + 2r - 3. \end{aligned}$$

On observe aussi que $d_R^b(p_1) = d_R^b(p_p) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) &= d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) + d_R^b(p_1) + d_R^b(p_p) \\ &\leq \frac{p}{2} + 2r - 3 \\ &= \frac{p}{2} + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 < n, \end{aligned}$$

ce n'est pas possible.

Sous-cas (ii) : $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2r$.

Les sommets $p_{2r+2}, p_{2r+4}, p_{2r+6}, \dots, p_p$ ne sont pas la seconde extrémité des arêtes bleues incidentes à p_1 , sinon nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. De même, les sommets $p_1, p_3, p_5, \dots, p_{p-2r-1}$ ne sont pas la seconde extrémité des arêtes bleues incidentes à p_p , sinon nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées de

longueur supérieure à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Donc, nous avons

$$\begin{aligned} d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) &\leq 2(p-1) - \left(\frac{p}{2} - 1\right) - 2\left(\frac{p}{2} - r\right) \\ &= \frac{p}{2} + 2r - 1. \end{aligned}$$

Comme $d_R^b(p_1) = d_R^b(p_p) = 0$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) &= d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) + d_R^b(p_1) + d_R^b(p_p) \\ &\leq \frac{p}{2} + 2r - 1 \\ &= \frac{p}{2} + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 < n, \end{aligned}$$

ce n'est pas possible.

Cas (b) : n est impair.

Si $p_{p-1}p_p \in E^r$, alors nous utilisons les mêmes arguments que dans le Cas (a). Supposons alors que $p_{p-1}p_p \notin E^r$. Nous avons le nombre de sommets de P est supérieur ou égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Regardons d'abord si le nombre de sommets de P est égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ ou non. Supposons que le nombre des sommets de P est égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, *c.à.d.*, $p = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Alors, $p_{p-1}p_i \in E^b$, $i = 1, 2, \dots, p$ et ($i \neq p-1$), sinon une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ existe. Puisque la première arête p_1p_2 est rouge et la dernière arête $p_{p-1}p_p$ est bleue, alors p doit être impair, et on écrit $p = 2q + 1$, où q est un entier positif. Maintenant, on considère une arête rouge $xy \in M_r$, $x, y \notin V(P)$. Puisque $d^b(x) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, le sommet x , soit p_{2i} ou p_{2i+1} , est incident à au moins un sommet de la chaîne P par une arête bleue. Quand $xp_{2i} \in E^b$, nous avons une chaîne proprement-arêtes-colorées $p_{2i+1}p_{2i+2} \cdots p_{p-1}p_1p_2 \cdots p_{2i-1}p_{2i}xy$ de longueur supérieure à p . Quand $xp_{2i+1} \in E^b$, nous avons la chaîne proprement-arêtes-colorées $p_{2i}p_{2i-1} \cdots p_2p_1p_{p-1}p_{p-2} \cdots p_{2i+2}p_{2i+1}xy$ de longueur supérieure à p . Donc, notre supposition est fautive et donc le nombre des sommets de P est supérieur à ou égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$.

Maintenant, on enlève la dernière arête bleue de la chaîne et on essaye de trouver la somme des degrés-couleurs bleus de p_1 et p_{p-1} comme dans le Cas (a). Évidemment, $d_R^b(p_1) = d_R^b(p_p) = 0$.

Quand $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ est impair, nous avons

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) &= d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) + d_R^b(p_1) + d_R^b(p_p) \\ &\leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 \\ &< n, \end{aligned}$$

ce n'est pas possible.

Quand $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ est pair, nous avons

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) &= d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) + d_R^b(p_1) + d_R^b(p_p) \\ &\leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \\ &< n, \end{aligned}$$

ce n'est pas possible.

Par conséquent, aucun cas n'est possible. Donc, notre supposition est fautive d'où le résultat. \square

Maintenant, nous sommes en mesure de proposer le théorème suivant sur les conditions du degré suffisant pour qu'un multigraphe arêtes-colorées ait un cycle proprement-arêtes-colorées. Notre résultat ressemble à ceux obtenus par Dirac [Di52] pour les graphes non-arêtes-colorées.

Théorème 3.5 *Soit \mathcal{G}^c un multigraphe c -arêtes-colorées d'ordre n avec un degré-couleur minimum supérieur ou égal à $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.*

i) Si $c = 2$, alors \mathcal{G}^c a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées quand n est pair et un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur $n - 1$, quand n est impair.

ii) Si $c \geq 3$, alors \mathcal{G}^c a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées.

┘

Preuve :

Montrons le premier Cas (i). La preuve est par contradiction. D'abord, considérons que n est pair. Pour une couleur donnée, soit le rouge, choisissons un couplage maximum rouge $M_r = \{x_i y_i, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ tel que :

(1) Un cycle maximum $C : c_1 c_2 \cdots c_{2t-1} c_{2t} c_{2t+1} \cdots c_{2w} c_{2w+1} c_{2w+2} \cdots c_{2l-1} c_{2l} c_{2l+1} \cdots c_{m-1} c_m c_1$, $t \leq w \leq l$, $2l + 2 \leq m$, compatible avec M_r . Avec notre hypothèse et d'après le lemme 3.2, nous avons $\frac{n}{2} + 1 \leq m \leq n - 2$.

(2) considérons une chaîne maximum $P : p_1 p_2 \cdots p_p$ de $\mathcal{G}^c - C$ compatible avec M_r et soit R le sous-graphe défini par $\mathcal{G}^c - (C \cup P)$.

Puisque P est compatible avec M_r , ou bien les arêtes $p_i p_{i+1}$, $i = 1, 3, \dots, p - 1$ ou bien les arêtes $p_i p_{i+1}$, $i = 2, 4, \dots, p - 2$ de P appartiennent à M_r . Nous devons d'abord prouver que, en fait, chaque arête $p_i p_{i+1}$, pour chaque indice impair $i = 1, 3, \dots, p - 1$, est dans M_r . Pour faire cela, il suffit de montrer par contradiction que l'arête $p_{p-1} p_p$ est dans M_r . Si possible, supposons que l'arête $p_{p-1} p_p$ n'est pas dans M_r . On observe que, puisque le sommet p_p est incident à une certaine arête de M_r , alors il existe un sommet p_{p+1} tel que $p_p p_{p+1} \in M_r$. Évidemment, $p_{p+1} \in R$, puisque tous les sommets dans $C \cup P$ sont incidents à une certaine arête de M_r . Mais, alors, la chaîne $p_1 p_2 \cdots p_p p_{p+1}$ est plus longue que P , contradiction avec le fait que P est maximum. D'où la longueur de P est impair. Considérons, maintenant, des arêtes colorées avec une couleur quelconque différente de la couleur rouge, soit bleue, incidentes à p_1 . On dit que les sommets sont pair ou bien impair en se basant sur leur indice dans le cycle. Donc, le sommet c_m dans le cycle est pair puisque le C est proprement-arêtes-colorées avec deux couleurs, le rouge et le bleu (*c.à.d.* cycle alterné). Maintenant, on définit un segment sur le cycle proprement-arêtes-colorées C comme suit :

Soient les arêtes bleues incidentes à p_1 et p_p dans le cycle proprement-arêtes-colorées C telles qu'on trouve un cycle proprement-arêtes-colorées $p_1 c_{2l} c_{2l-1} c_{2l-2} \cdots c_{2t+2} c_{2t+1} p_p p_{p-1} \cdots p_2 p_1$

de longueur inférieure à m et le segment $c_{2l+1}c_{2l+2}c_{2l+3} \cdots c_{2t-2}c_{2t-1}c_{2t}$ est maximum et p_1 n'est pas incident aux sommets $c_{2l+2}, c_{2l+4}, c_{2l+6}, \dots, c_{2t-4}, c_{2t-2}, c_{2t}$ et p_p n'est pas incident aux sommets $c_{2l+1}, c_{2l+3}, c_{2l+5}, \dots, c_{2t-5}, c_{2t-3}, c_{2t-1}$ par des arêtes bleues. Trois cas se présentent : (a) il n'y a pas ce segment dans C , (b) il y a un seul segment comme celui là dans C , (c) il y a plus qu'un seul segment comme celui là dans C .

Cas (a) : il n'y a pas ce segment dans C .

Examinons le nombre des arêtes bleues incidentes à p_1 et p_p dans le cycle proprement-arêtes-colorées C . Puisqu'il n'y a pas ce segment dans le cycle proprement-arêtes-colorées C , toutes les arêtes bleues sont formées en allant de p_1 et p_p aux mêmes types de sommets (*c.à.d.* ou bien pair ou bien impair) dans le cycle proprement-arêtes-colorées C . Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que toutes ces arêtes sont incidentes aux sommets pairs. D'abord, supposons que les arêtes bleues incidentes à p_1 et p_p ne sont pas incidentes aux mêmes sommets pairs. Supposons que c_{2w+1} est un certain sommet impair dans le cycle proprement-arêtes-colorées C adjacent à un sommet, soit c_{2w} , et adjacent aussi à ou bien p_1 ou bien p_p et $c(c_{2w+1}c_{2w})$ est une arête bleue. Sans perdre de généralité, on peut supposer que c_{2w} et p_p sont adjacents et forment une arête bleue.

Maintenant, considérons les arêtes bleues incidentes à p_1 et c_{2w+1} dans la chaîne P . Comme $c_{2w}p_p \in E^b$, le sommet c_{2w+1} peut être adjacent au maximum aux sommets p_2, p_4, \dots, p_p ; sinon un cycle proprement-arêtes-colorées $p_p c_{2w} c_{2w-1} \cdots c_{2w+2} c_{2w+1} p_{2s+1} p_{2s+2} \cdots p_p$ (si $c_{2w+1} c_{2s+1} \in E^b$) de longueur supérieure à m existe. Nous avons ou bien $c_{2w+1} p_{2s} \in E^b$ ou bien $p_1 p_{2s+1} \in E^b$, mais pas les deux sinon un cycle proprement-arêtes-colorées $p_p c_{2w} c_{2w-1} \cdots c_{2w+2} c_{2w+1} p_{2s} p_{2s-1} \cdots p_1 p_{2s+1} p_{2s+2} \cdots p_p$ de longueur supérieure à m existe. Donc, $d_P^b(c_{2w+1}) + d_P^b(p_1) \leq p$. Encore une fois considérons les arêtes bleues incidentes à p_1 et c_{2w+1} dans C . Nous avons ou bien $c_{2w+1} c_{2z-1} \in E^b$ ou bien $p_1 c_{2z} \in E^b$, mais pas les deux sinon un cycle proprement-arêtes-colorées $p_1 c_{2z} c_{2z+1} \cdots c_{2w+2} c_{2w+1} c_{2z-1} c_{2z-2} \cdots c_{2w} p_p p_{p-1} \cdots p_2 p_1$ de longueur supérieure à m existe. De ce résultat nous avons $d_C^b(c_{2w+1}) + d_C^b(p_1) \leq c - 1$ puisque p_1 est adjacent au maximum aux sommets pairs dans le cycle C . Donc,

$$\begin{aligned} d^b(c_{2w+1}) + d^b(p_1) &= d_C^b(c_{2w+1}) + d_C^b(p_1) + d_P^b(c_{2w+1}) + d_P^b(p_1) + d_R^b(c_{2w+1}) + d_R^b(p_1) \\ &\leq c - 1 + p + d_R^b(c_{2w+1}), \text{ puisque } d_R^b(p_1) = 0 \\ &< n, \end{aligned}$$

ce n'est pas possible.

Ensuite, on considère qu'au moins un sommet de C , soit c_{2w} , auquel p_1 et p_p sont tous les deux adjacents par des arêtes bleues et $c(c_{2w+1}c_{2w})$ est une arête bleue. Dans ce cas $d_p^b(c_{2w+1}) = 0$, sinon un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à m existe. Aussi, nous avons $d_p^b(p_1) \leq p - 1$ et $d_c^b(c_{2w+1}) + d_c^b(p_1) \leq c$ (comme précédemment). Donc,

$$\begin{aligned} d^b(c_{2w+1}) + d^b(p_1) &= d_c^b(c_{2w+1}) + d_c^b(p_1) + d_p^b(c_{2w+1}) + d_p^b(p_1) + d_R^b(c_{2w+1}) + d_R^b(p_1) \\ &\leq c + p - 1 + d_R^b(c_{2w+1}), \text{ puisque } d_R^b(p_1) = 0 \\ &< n, \text{ ce n'est pas possible.} \end{aligned}$$

Cas (b) : il y a un seul segment dans C .

Dans ce cas notons S ($c_{2l+1}c_{2l+2} \cdots c_{m-1}c_m c_1 c_2 \cdots c_{2t-1}c_{2t}$) ce segment dans C . Notons par $S' = S \cup \{c_{2l}, c_{2t+1}\}$. Les arêtes bleues définies ayant d'extrémités p_1 et p_p et les autres extrémités des sommets formant toute arête bleue des $\frac{c-s-2}{2}$ arêtes de la portion $C - S'$ du cycle proprement-arêtes-colorées C sont au plus deux, ou bien p_1 et p_p sont adjacents au même seul sommet ou bien un des sommets p_1 et p_p est adjacent aux sommets formant ces arêtes bleues, sinon nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à m . Donc, nous avons $d_{C-S'}^b(p_1) + d_{C-S'}^b(p_p) \leq c - s - 2$. De même, pour les sommets c_{2l+1} et c_{2t} , nous avons $d_{C-S'}^b(c_{2l+1}) + d_{C-S'}^b(c_{2t}) \leq c - s - 2$. Aussi, nous avons $d_R^b(c_{2l+1}) + d_R^b(c_{2t}) \leq 2(n - c - p)$. Donc,

$$\begin{aligned}
 d^b(p_1) + d^b(p_p) + d^b(c_{2l+1}) + d^b(c_{2t}) &= d_{C-S'}^b(p_1) + d_{C-S'}^b(p_p) + d_{C-S'}^b(c_{2l+1}) \\
 &\quad + d_{C-S'}^b(c_{2t}) + d_{S'}^b(p_1) + d_{S'}^b(c_{2t}) + d_{S'}^b(p_p) \\
 &\quad + d_{S'}^b(c_{2l+1}) + d_P^b(p_1) + d_P^b(c_{2t}) + d_P^b(p_p) \\
 &\quad + d_P^b(c_{2l+1}) + d_R^b(c_{2l+1}) + d_R^b(c_{2t}), \\
 &\quad \text{puisque } d_R^b(p_1) = d_R^b(p_p) = 0 \\
 &\leq 2(n - s - p) - 4 + d_{S'}^b(p_1) + d_{S'}^b(c_{2t}) + d_{S'}^b(p_p) \\
 &\quad + d_{S'}^b(c_{2l+1}) + d_P^b(p_1) + d_P^b(c_{2t}) + d_P^b(p_p) \\
 &\quad + d_P^b(c_{2l+1}). \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Trois cas se présentent (i) $p_1 c_{2l+1} \in E^b$ et $p_p c_{2t} \in E^b$ (ii) ou bien $p_1 c_{2l+1} \in E^b$ ou bien $p_p c_{2t} \in E^b$, (iii) ou bien ni $p_1 c_{2l+1} \in E^b$ ni $p_p c_{2t} \in E^b$.

Sous-cas (i) : $p_1 c_{2l+1} \in E^b$ et $p_p c_{2t} \in E^b$.

Dans ce sous-cas $p_1 c_{2t+1} \notin E^b$, $p_p c_{2l} \notin E^b$, $c_{2l+1} c_{2t+1} \notin E^b$ et $c_{2t} c_{2l} \notin E^b$; sinon, nous avons un cycles proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à m . Puisque $p_1 c_{2l+1} \in E^b$ et $p_p c_{2t} \in E^b$, nous avons $p_1 c_{2t} \notin E^b$, $p_1 c_{2t+1} \notin E^b$, $p_p c_{2l} \notin E^b$ et $p_p c_{2l+1} \notin E^b$, sinon un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à m existe. Maintenant, considérons les arêtes bleues incidentes à p_1 et c_{2t} dans S' du cycle C . Par définition du segment du cycle C , le sommet p_1 peut être adjacent au maximum aux sommets c_{2l+1} , c_{2l+3} , c_{2l+5}, \dots , c_{2t-5} , c_{2t-3} , c_{2t-1} . Nous avons ou bien $p_1 c_k \in E^b$ ou bien $c_{2t} c_{k-1} \in E^b$ ($k = 2l + 3, 2l + 5, \dots, 2t - 3, 2t - 1$), mais pas les deux sinon un cycles proprement-arêtes-colorées $p_1, p_2, \dots, p_p, c_{2t+1} c_{2t+2} \cdots c_{2l} c_{2l+1} c_{2l+2} \cdots c_{k-2} c_{k-1} c_{2t} c_{2t-1} \cdots c_k p_1$ de longueur supérieure à m existe. Donc, nous avons $d_{S'}^b(p_1) + d_{S'}^b(c_{2t}) \leq s + 2$. De même, nous avons $d_{S'}^b(p_p) + d_{S'}^b(c_{2l+1}) \leq s + 2$. Maintenant, considérons les arêtes bleues incidentes à p_1 et c_{2t} dans P . Le sommet c_{2t} peut être au maximum adjacent aux sommets p_2, p_4, \dots, p_p dans P , sinon un cycle proprement-arêtes-colorées $p_p c_{2t+1} c_{2t+2} \cdots c_{2l} c_{2l+1} \cdots c_{2t-1} c_{2t} p_{2s+1} p_{2s+2} \cdots p_p$ (si $c_{2t} c_{2s+1} \in E^b$) de longueur supérieure à m existe. Nous avons ou bien $c_{2t} p_k \in E^b$ ou $p_1 p_{k+1} \in E^b$ ($k = 2, 4, \dots, p - 2$), mais pas les deux sinon un cycle proprement-arêtes-colorées $p_p c_{2t+1} c_{2t+2} \cdots c_{2l} c_{2l+1} \cdots c_{2t-1} c_{2t} p_k p_{k-1} \cdots p_1 p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_p$ de longueur supérieure

à m existe. Donc, $d_P^b(p_1) + d_P^b(c_{2t}) \leq p$. De même, nous avons $d_P^b(p_p) + d_P^b(c_{2l+1}) \leq p$. En utilisant ces résultats dans (3.1) nous avons :

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) + d^b(c_{2l+1}) + d^b(c_{2t}) &\leq 2n, \\ &< 2(n+1), \text{ ce n'est pas possible.} \end{aligned}$$

Sous-cas (ii) : ou bien $p_1c_{2l+1} \in E^b$ ou bien $p_p c_{2t} \in E^b$.

Sans perdre de généralité, supposons que $p_1c_{2l+1} \in E^b$. Dans ce sous-cas $p_p c_{2l} \notin E^b$, $p_p c_{2l+1} \notin E^b$, $p_1 c_{2t} \notin E^b$, $c_{2l}c_{2t} \notin E^b$, sinon nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à m ; mais il est peut être possible que $p_1c_{2t+1} \in E^b$ et $c_{2l+1}c_{2t+1} \in E^b$. Pareille que dans le sous-cas (i) nous avons $d_{S'}^b(p_1) + d_{S'}^b(c_{2t}) \leq s+3$, $d_{S'}^b(p_p) + d_{S'}^b(c_{2l+1}) \leq s+2$, $d_P^b(p_1) + d_P^b(c_{2t}) \leq p-1$, $d_P^b(p_p) + d_P^b(c_{2l+1}) \leq p$. En utilisant ces résultats dans (3.1) nous avons :

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) + d^b(c_{2l+1}) + d^b(c_{2t}) &\leq 2n \\ &< 2(n+1), \text{ ce n'est pas possible.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sous-cas (iii) : ni $p_1c_{2l+1} \in E^b$ ni $p_p c_{2t} \in E^b$.

Dans ce sous-cas il est peut être possible que $p_1c_{2t+1} \in E^b$, $p_p c_{2l} \in E^b$, $c_{2l+1}c_{2t+1} \in E^b$ et $c_{2t}c_{2l} \in E^b$. Pareille que dans le sous-cas (i) $d_{S'}^b(p_1) + d_{S'}^b(c_{2t}) \leq s+3$, $d_{S'}^b(p_p) + d_{S'}^b(c_{2l+1}) \leq s+3$, $d_P^b(p_1) + d_P^b(c_{2t}) \leq p-1$ et $d_P^b(p_p) + d_P^b(c_{2l+1}) \leq p-1$. En utilisant ces trois résultats dans (3.1) nous avons :

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) + d^b(c_{2l+1}) + d^b(c_{2t}) &\leq 2n \\ &< 2(n+1), \text{ ce n'est pas possible.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cas (c) : plus qu'un seul segment (défini précédemment) existe dans le cycle C .

Supposons que nous avons deux segments S_1 ($c_{2l+1}c_{2l+2} \cdots c_{2t-1}c_{2t}$) de longueur s_1 et S_2 ($c_{2z+1}c_{2z+2} \cdots c_{2w-1}c_{2w}$) de longueur s_2 dans le cycle C ($c_1c_2 \cdots c_{2t-1}c_{2t}c_{2t+1} \cdots c_{2z-1}c_{2z}c_{2z+1} \cdots c_{2w}c_{2w+1}c_{2w+2} \cdots c_{2l}c_{2l+1}c_{2l+2} \cdots c_m c_1$). Notons par $S'_1 = S_1 \cup \{c_{2l}, c_{2t+1}\}$ et $S'_2 = S_2 \cup \{c_{2z}, c_{2w+1}\}$. Le nombre des arêtes bleues dans la portion $C - S'_1 - S'_2$ du cycle C est $\frac{c-s_1-s_2-4}{2}$. Donc nous avons $d_{C-S'_1-S'_2}^b(p_1) + d_{C-S'_1-S'_2}^b(p_p) \leq c - s_1 - s_2 - 4$. Maintenant, le nombre des arêtes bleues dans le segment S_1 est $\frac{s_1}{2} - 1$ et les arêtes bleues dans le S_1 sont $c_{2l+2}c_{2l+3}$, $c_{2l+4}c_{2l+5}$, \cdots , $c_{2l-4}c_{2l-3}$, $c_{2t-2}c_{2t-1}$. Par définition du segment, le sommet p_1 est adjacent au maximum aux sommets $c_{2l+1}, c_{2l+3}, \cdots, c_{2t-3}c_{2t-1}$ du segment S_1 et le sommet p_p est adjacent au maximum aux sommets $c_{2l+2}, c_{2l+4}, \cdots, c_{2t-2}c_{2t}$ du segment S_1 . Pour chaque arête bleue $c_k c_{k+1}$ ($k = 2l+2, 2l+4, \cdots, 2t-2$) du segment S_1 , ou bien $p_1 c_{k+1} \in E^b$ ou bien $p_p c_k \in E^b$; mais pas les deux sinon nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées $p_1 c_{k+1} c_{k+2} \cdots c_{2t} c_{2t+1} c_{2t+2} \cdots c_{2l} c_{2l+1} \cdots c_{k-1} c_k p_p p_{p-1} \cdots p_2 p_1$ de longueur supérieure à m . Aussi, nous avons ou bien $p_1 c_{2l+1} \in E^b$ ou bien $p_p c_{2l} \in E^b$; mais pas les deux, sinon un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à m existe.

Aussi, nous avons ou bien $p_p c_{2t} \in E^b$ ou bien $p_1 c_{2t+1} \in E^b$; mais pas les deux, sinon un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur supérieure à m existe. En utilisant ces résultats on conclut que $d_{S'_1}^b(p_1) + d_{S'_1}^b(p_p) \leq \frac{s_1}{2} + 3$. De même, pour le segment S_2 , nous avons $d_{S'_2}^b(p_1) + d_{S'_2}^b(p_p) \leq \frac{s_2}{2} + 3$. De plus, nous avons $d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) \leq 2p - 2$ et $d_R^b(p_1) = d_R^b(p_p) = 0$. Maintenant nous avons :

$$\begin{aligned} d^b(p_1) + d^b(p_p) &= d_{S'_1}^b(p_1) + d_{S'_1}^b(p_p) + d_{S'_2}^b(p_1) + d_{S'_2}^b(p_p) + d_{C-S'_1-S'_2}^b(p_1) + d_{C-S'_1-S'_2}^b(p_p) \\ &\quad + d_P^b(p_1) + d_P^b(p_p) \\ &\leq c - \frac{s_1 + s_2}{2} + 2p \\ &\leq c + p, \text{ puisque } s_1 \geq p, s_2 \geq p \\ &< n + 1, \text{ ce n'est pas possible.} \end{aligned}$$

Ensuite, considérons que n est impair. Dans ce cas, nous allons montrer que ce graphe \mathcal{G}^c a un cycle proprement-arêtes-colorées d'ordre $n - 1$. Supposons que cela n'est pas possible, on peut trouver un plus long cycle proprement-arêtes-colorées de longueur m , $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq m \leq n - 3$, compatible avec M_r . Ensuite on trouve une chaîne plus longue $P : p_1 p_2 \cdots p_p$ de $\mathcal{G}^c - C$ compatible avec M_r et soit R le graphe défini par $\mathcal{G}^c - (C \cup P)$. Ici, nous considérons deux couleurs rouge et bleue seulement. Deux sous-cas se présentent (a) $c(p_1 p_2) = c(p_{p-1} p_p)$ et (b) $c(p_1 p_2) \neq c(p_{p-1} p_p)$.

Sous-cas (a) : $c(p_1 p_2) = c(p_{p-1} p_p)$.

Sans perdre de généralité on peut supposer que $c(p_1 p_2)$ est rouge. De même, quand l'ordre de \mathcal{G}^c est pair on peut montrer que ce sous-cas n'est pas possible.

Sous-cas (b) : $c(p_1 p_2) \neq c(p_{p-1} p_p)$.

Dans ce sous-cas on suppose que $c(p_1 p_2)$ est rouge et $c(p_{p-1} p_p)$ est bleue. Ensuite, considérons que les deux sommets p_1, p_{p-1} et la nouvelle chaîne $P' : p_1 p_2 \cdots p_{p-1}$. Ensuite, on trouve les segments dans le cycle C à partir des sommets p_1 et p_{p-1} . S'il n'y a pas de segment ou s'il y a un segment ou plus qu'un segment, alors on peut voir facilement que ce sous-cas n'est pas possible, même preuve quand l'ordre de \mathcal{G}^c est pair. Donc, on remarque que aucun cas n'est possible que ça soit pour n pair ou impair. Donc la contradiction complète l'argument et la preuve du théorème quelque soit le nombre des sommets. D'où la preuve du cas (i)

Montrons le deuxième Cas (ii). On considère le sous-graphe H qui couvre tous les sommets de \mathcal{G}^c induit par toutes les arêtes de deux couleurs, soit rouges et bleues, *c.à.d.*, $V(H) = V(\mathcal{G}^c)$ et $E(H) = E^r(\mathcal{G}^c) \cup E^b(\mathcal{G}^c)$. Si n est pair, alors H a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées (rouge et bleu alternés), Ainsi la conclusion s'en suit pour \mathcal{G}^c . Supposons par conséquent que n est impair. D'après le cas (i), il existe un certain sommet z dans H tel que $H - z$ a un cycle proprement-arêtes-colorées (rouge et bleu alternés), soit $C : x_1 y_1 \cdots x_{\frac{n-1}{2}} y_{\frac{n-1}{2}}$ couvrant les $n - 1$ sommets de $H - z$. Supposons que toutes les

arêtes $x_i y_i$ (modulo $\frac{n-1}{2}$) sont rouges, et toutes les autres arêtes $y_i x_i$ (modulo $\frac{n-1}{2}$) de C sont bleues. On choisit une arête rouge quelconque $x_i y_i$. Supposons d'abord que le nombre des arêtes rouges et, disons vertes (*c.à.d.*, n'importe quelle autre troisième couleur non utilisée dans le cycle), entre $\{x_i, y_i\}$ et z sont au moins 3. Alors ou bien l'arête $z x_i$ est rouge et l'arête $z y_i$ est verte ou bien $z x_i$ est verte et l'arête $z y_i$ est rouge. Mais ou bien le cycle $x_1 y_1 \cdots x_i z y_i \cdots x_{\frac{n-1}{2}} y_{\frac{n-1}{2}} x_1$ ou bien le cycle $y_1 x_1 \cdots y_i z x_i \cdots y_{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n-1}{2}} y_1$ est hamiltonien proprement-arêtes-colorées. Supposons par conséquent que le nombre des arêtes rouges et vertes est inférieur ou égal à deux. Puisqu'il y a $\frac{n-1}{2}$ arêtes rouges dans C , il s'en suit que $d^r(z) + d^g(z) \leq 2 \frac{n-1}{2} = n - 1$, contradiction puisque $d^r(z) + d^g(z) \geq n + 1$. D'où le théorème. \square

Notons que les conditions du théorème précédent ne sont pas loin d'être les meilleures possibles. En effet, soit k et c deux entiers quelconque, $k \geq 1, c \geq 2$. Considérons un multigraphe de $2k+1$ sommets, constitué de deux multigraphes complets c -arêtes-colorées d'ordre $k+1$ chacun, ayant précisément un sommet en commun. Un tel graphe n'a pas de cycle hamiltonien bien que son degré-couleur minimum soit $k (= \frac{n-1}{2})$.

A partir du théorème 3.5 nous obtenons une série de corollaires pour les chaînes hamiltoniennes proprement-arêtes-colorées.

Corollaire 3.5.1 *Soit \mathcal{G}^c un multigraphe c -arêtes-colorées, $c \geq 3$. Supposons que $\forall x \in V(\mathcal{G}^c), d^i(x) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ pour chaque couleur $i \in \{1, 2, \dots, c\}$. Alors \mathcal{G}^c a une chaîne hamiltonienne proprement-arêtes-colorées.*

┘

Preuve :

On considère un nouveau graphe H obtenu à partir de \mathcal{G}^c en additionnant un nouveau sommet x et toutes les arêtes possibles entre x et \mathcal{G}^c pour chaque couleur $i \in \{1, 2, \dots, c\}$. Ensuite, il n'est pas difficile de voir que H vérifie toutes les conditions du Théorème 3.5 et par conséquent il contient un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées. Enfin, une chaîne hamiltonienne dans \mathcal{G}^c peut être obtenue en enlevant x de ce cycle hamiltonien de H . \square

Les conditions du corollaire précédent ne sont pas loin d'être les meilleures possibles. On peut voir cela dans un multigraphe de $2k$ sommets, constitué de deux multigraphes complets c -arêtes-colorées d'ordre k chacun, sans sommet en commun. Un tel graphe n'a pas de cycle hamiltonien bien que son degré-couleur minimum soit $k - 1 (= \frac{n-2}{2})$.

Dans le corollaire suivant nous nous sommes intéressés aux chaînes hamiltoniennes proprement-arêtes-colorées avec des extrémités données.

Corollaire 3.5.2 *Soient x, y deux sommets données dans \mathcal{G}^c , $c \geq 2$. Supposons que $\forall v \in V(\mathcal{G}^c), d^i(v) \geq \lceil \frac{n+3}{2} \rceil$ pour chaque couleur $i \in \{1, 2, \dots, c\}$. Alors \mathcal{G}^c a une chaîne hamiltonienne proprement-arêtes-colorées d'extrémités x et y .*

┘

Preuve :

Supposons d'abord que n est impair. Soit H un nouveau multigraphe 2-arêtes-colorées, de deux couleurs rouge et bleue, obtenu à partir de \mathcal{G}^c comme suit : on contracte x et y en un nouveau sommet z dans H , c.à.d., $V(H) = V(\mathcal{G}^c) - \{x, y\} \cup \{z\}$. En plus, pour chaque sommet w dans $V(\mathcal{G}^c) - \{x, y\}$ ajoutons l'arête wz dans H si l'arête wx (respectivement wy) est rouge (respectivement bleue) dans \mathcal{G}^c . Enfin, on enlève toutes les arêtes dans le sous-graphe induit par $V(\mathcal{G}^c) - \{x, y\}$ qui sont de couleur autre que rouge et bleue. Ensuite, il est facile de voir que H a $n - 1$ sommets et son degré-couleur minimum est supérieur ou égal à $\lceil \frac{n+3}{2} \rceil - 1 \lceil \frac{(n-1)+1}{2} \rceil$. Ainsi, il satisfait toutes les conditions du Théorème 3.5 et par conséquent il contient un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées. Ensuite une chaîne hamiltonienne entre x et y dans \mathcal{G}^c peut être obtenu en enlevant z de ce cycle hamiltonien de H et le remplaçant par x et y .

Supposons, maintenant, que n est pair. Soit, donc, H un nouveau multigraphe 2-arêtes-colorées obtenu à partir de \mathcal{G}^c en enlevant les sommets x, y . Enlevons, aussi, toutes les arêtes dans $\mathcal{G}^c - \{x, y\}$ qui sont de couleurs autres que le rouge et le bleu. Alors, l'ordre de H est $n - 2$ et son degré-couleur minimum est $\lceil \frac{n+3}{2} \rceil - 1 = \frac{n}{2} = \frac{n-2}{2} + 1 = \lceil \frac{(n-2)+1}{2} \rceil - 1$. Ainsi, H a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées C . Soit $C : x_1 y_1 \cdots x_p y_p x_1$, où $p = \frac{n-2}{2}$. Supposons, sans perdre de généralité, que toutes les arêtes $x_i y_i$ (modulo p) sont rouge, et les arêtes restantes $y_i x_i$ (modulo p) de C sont bleues. On choisie une arête rouge quelconque $x_i y_i$, on observe que si l'arête $x x_i$ (si elle existe) est rouge, alors l'arête $y y_i$ (si elle existe) n'est pas rouge. Sinon, la chaîne $x x_i y_{i-1} \cdots y_i y$ devrait être celle que nous cherchons. De même, une des deux arêtes $y x_i$ et $x y_i$ (si elles existent) n'est pas rouge. Ainsi, $d_{\{x_i, y_i\}}^r(x) + d_{\{x_i, y_i\}}^r(y) \leq 2$. Puisqu'il y a p de telles arêtes rouges $x_i y_i$ dans C , il s'en suit que $d_C^r(x) + d_C^r(y) = \sum_{i=1}^p \text{(modulo } p) d_{\{x_i, y_i\}}^r(x) + d_{\{x_i, y_i\}}^r(y) \leq 2p \leq 2 \frac{n-2}{2} = n - 2$. Cependant, cela est une contradiction, puisque $d_C^r(x) + d_C^r(y) = d^r(x) + d^r(y) - d_y^r(x) - d_x^r(y) \geq 2 \lceil \frac{n+3}{2} \rceil - 2 = n + 2$. \square

Les conditions du corollaire précédent ne sont pas loin d'être les meilleures possibles. On peut voir cela dans un multigraphe de $2k + 2$ sommets, constitué de deux multigraphes complets c -arêtes-colorées d'ordre $k + 2$ chacun, avec précisément deux sommets en commun x et y . Un tel graphe n'a pas de cycle hamiltonien bien que son degré-couleur minimum soit $k + 1$. Aussi, il serait intéressant d'étudier les questions du corollaire dans le cas d'un graphe (simple) complet arêtes-colorées.

Dans le théorème suivant, nous montrons que sous les conditions du Théorème 3.5, \mathcal{G}^c a des cycles de plusieurs longueurs.

Théorème 3.6 *Soit \mathcal{G}^c un graphe c -arête-colorées, $c \geq 2$. Supposons que $\forall x \in V(\mathcal{G}^c)$, $d^i(x) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ pour chaque couleur $i \in \{1, 2, \dots, c\}$.*

i) Si $c = 2$, alors \mathcal{G}^c admet des cycles de toutes les longueurs pairs.

ii) Si $c \geq 3$, alors \mathcal{G}^c admet des cycles de toutes les longueurs.

┘

Preuve :

Supposons, d'abord, que n est impair. D'après le théorème 3.5 on a \mathcal{G}^c admet un cycle proprement-arêtes-colorées C de longueur $n - 1$ avec deux couleurs, rouge et bleue par exemple. Soit x un sommet de \mathcal{G}^c n'appartenant pas à C . Ensuite, il est facile de voir que x et C , vérifient les conditions du théorème 3.3. D'où le résultat.

Supposons, maintenant, que n est pair. On choisi un sommet quelconque x et on se donne le graphe $H \cong \mathcal{G}^c - x$. Puisque n est pair, l'ordre de H , *c.à.d.* le nombre $n - 1$, est impair. En plus, le degré-couleur minimum de tous les sommets de H est supérieur ou égal à $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 1 = \frac{n}{2} + 1 - 1 = \frac{n}{2} = \frac{(n-1)+1}{2} = \lceil \frac{(n-1)+1}{2} \rceil$. D'après le théorème 3.5, H admet un cycle proprement-arêtes-colorées C de longueur $n - 2$. En utilisant ce fait et le théorème 3.3 on termine l'argument puisque tous les i-degrés de x dans C vérifient $d_C^i(x) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 1 \geq \frac{n}{2} > \frac{n-2}{2}$. D'où le théorème. \square

Notons que la condition sur le i-degré du théorème 3.6 ne peut pas être relaxées comme il est montré pour les multigraphes biparties complets proprement-arêtes-colorées $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}^c$. Bien que de tels graphes ayant un degré-couleur minimum $\frac{n}{2}$, il n'a pas de cycle de longueur impair. Notons, aussi, que le cas $c = 2$ ne peut pas être possible pour avoir les cycles de toutes les longueurs, puisque un graphe 2-arêtes-colorées n'a pas de cycles proprement-arêtes-colorées de longueur impair.

3.4 Graphe aléatoire

Nous terminons ce chapitre par le résultat suivant sur les graphes arêtes-colorées aléatoires.

Théorème 3.7 *Soient C une constante suffisamment grande et $\mathcal{G}^{(b)} = \mathcal{G}^{(b)}(2n, p)$, $\mathcal{G}^{(r)} = \mathcal{G}^{(r)}(2n, p)$ deux graphes aléatoires indépendants qui ont le même ensemble de sommets $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ et avec la même probabilité d'existence d'une arête $p = Cn^{-1} \log n$. Les arêtes de $\mathcal{G}^{(b)}$ sont de couleur bleue, et les arêtes de $\mathcal{G}^{(r)}$ sont de couleur rouge. Alors, le graphe $\mathcal{G}^c = \mathcal{G}^{(b)} \cup \mathcal{G}^{(r)}$ a, avec une grande probabilité, un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées.*

┘

Preuve :

D'après le théorème de Hall [HALL36] appliqué pour une constante suffisamment grande C , nous avons le fait que $\mathcal{G}^{(b)}$ a, avec une grande probabilité, un couplage parfait. Supposons que cela est le cas et soit $\{\{2k + 1, 2k + 2\} : 0 \leq k \leq n - 1\}$ ce couplage. Nous allons montrer que, avec une grande probabilité, \mathcal{G}^c admet un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées qui utilise toutes les arêtes $\{2k+1, 2k+2\}$ dans le sens $2k+1 \rightarrow 2k+2$. Les arêtes qui restent sont les rouges. Pour cela, on définit le graphe orienté $D = (V(D), A(D))$

avec $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et les arêtes rouges. On prend d'abord $A(D) = \emptyset$ et après, pour chaque $0 \leq k < \ell \leq n - 1$, on procède comme suit :

- On regarde si l'arête $\{2k + 2, 2\ell\}$ appartient à $\mathcal{G}^{(r)}$. Si oui, alors on met l'arc (v_k, v_ℓ) dans $A(D)$.
- On regarde si l'arête $\{2k + 1, 2\ell + 2\}$ appartient à $\mathcal{G}^{(r)}$. Si oui, alors on met l'arc (v_ℓ, v_k) dans $A(D)$.

Notons que, D est indépendant de $\mathcal{G}^{(b)}$. On sait, d'après [AV79], que si un graphe orienté a une probabilité de ses arcs égale à $Cn^{-1} \log n$, il a un circuit hamiltonien avec une grande probabilité pour une constante suffisamment grande C . La probabilité d'existence d'un arc dans D est la même que celle de l'existence d'une arête dans $\mathcal{G}^{(r)}$ et est $Cn^{-1} \log n$. Ainsi, D a un circuit hamiltonien, avec une grande probabilité. Soit $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$ ce circuit hamiltonien de D , il est évident qu'en remplaçant chaque sommet v_{i_j} par l'arête $(2i_j + 1, 2i_j + 2)$ on a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées de \mathcal{G}^c avec la même grande probabilité. D'où le théorème. \square

3.5 Conclusion

Nous résumons les résultats démontrés dans ce chapitre. Nous avons donné une transformation des graphes arêtes-colorées aux graphes non-arêtes-colorées permettant d'étudier de manière équivalente l'existence d'un facteur proprement-arêtes-colorées et par la même occasion l'existence des chaînes et cycles hamiltoniens. Comme conséquence à cette transformation, tous les résultats polynomiaux concernant les facteurs, les chaînes et les cycles hamiltoniens dans des instances de graphes particuliers non-arêtes-colorées sont exportables dans les mêmes types d'instances de graphes arêtes-colorées. Ensuite, nous avons donné des différentes bornes inférieures au i -degré minimum pour garantir l'existence des chaînes et des cycles proprement-arêtes-colorées de longueurs prédéfinis dans les graphes, les multigraphes et les graphes aléatoires tous arêtes-colorées. En particulier, nous avons prouvé qu'un multigraphe d'ordre n avec au moins trois couleurs et un i -degré supérieur ou égal à $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ admet un cycle proprement-arêtes-colorées de toutes les longueurs y compris le cas hamiltonien. Cette étude nous a permis, aussi, de caractériser une chaîne hamiltonienne entre deux sommets donnés.

Nous avons vu, par ailleurs, que les théorèmes 3.4 et 3.5 et les corollaires 3.2.1 et 3.5.2 sont susceptibles d'être améliorés. Nous proposerons en fin de ce document des conjectures et problèmes qui seraient des améliorations.



CHAPITRE 4

Arbres couvrants arêtes-colorées

*Il a toujours pensé qu'une idée de plus
n'était pas une addition.*

— Henri Michaux

Le contenu de ce chapitre sera publié dans un article actuellement en cours de rédaction en collaboration avec K. Ch. Das, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon et R. Saad. Dans l'état de l'art, nous avons exposé des résultats concernant les arbres dans les graphes arêtes-colorées (2.6.1, p. 40). Et nous avons remarqué que, jusqu'à maintenant, les spécialistes se sont focalisés sur les arbres hétérochromatiques. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés aux arbres dits couvrants proprement-arêtes-colorées et les arbres couvrants faiblement-arêtes-colorées. Dans un premier temps, nous donnons une caractérisation des graphes complets arêtes-colorées qui admettent un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées et nous donnons des résultats de NP-complétude et d'inapproximabilité pour les mêmes types d'arbres. Et enfin, Nous donnons des résultats de NP-complétude et d'inapproximabilité pour les arbres couvrants faiblement-arêtes-colorées.

4.1 Arbres couvrants proprement-arêtes-colorées

Définition 4.1 *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées quelconque. T est un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans G^c si, et seulement si, $V(T) = V(G^c)$ et chaque deux arêtes adjacentes dans $E(T)$ ont deux couleurs différentes.*

└

4.1.1 1-arbre-cycle-proprement-arêtes-colorées

Nous proposons, ici, de généraliser la notion du facteur proprement-arêtes-colorées, présentée dans les chapitres précédents, à la notion de m -arbre-cycle-proprement-arêtes-

colorées.

Définition 4.2 (*m*-arbre-cycle-proprement-arêtes-colorées)

Soit G^c , un *m*-arbre-cycle-proprement-arêtes-colorées est un sous-graphe de G^c constitué de *m* arbres proprement-arêtes-colorées et un certain nombre de cycles proprement-arêtes-colorées tous sommets-disjoints.

┘

Ici, nous nous intéressons seulement au cas où $m = 1$. On remarque, aussi, qu'un presque facteur proprement-arêtes-colorées est un 1-arbre-cycle-proprement-arêtes-colorées.

Dans le but de prouver le théorème 4.1 nous donnons le suivant :

Lemme 4.1 Soient K_n^c un graphe complet *c*-arêtes-colorées, T un arbre proprement-arêtes-colorées et C un cycle proprement-arêtes-colorées, tels que C et T sont sommets-disjoints et $V(K_n^c) = V(T) \cup V(C)$. Alors, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée, K_n^c admet un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées :

(i) Ils existent $x \in V(C)$ et $t, t' \in V(T)$ tels que l'arête $tt' \in E(T)$ et $(c(tx) \neq c(tt')$ et t est une feuille de T) ou $(c(t'x) \neq c(tt')$ et t' est une feuille de T).

(ii) Ils existent $x \in V(C)$ et $t \in V(T)$ tels que $c(tx) \neq c(tt') \forall t' \in N_T(t)$.

(iii) Ils existent $t, t' \in V(T)$ tels que l'arête $tt' \in E(T)$ et $c(tC) = c(tt') = c(t'C)$.

┘

Preuve :

Supposons que $C = x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k x_1$. Soient $t, t' \in V(T)$ tels que l'arête $tt' \in E(T)$ et T_1 (resp. T_2) le sous-arbre de $T - tt'$ avec la racine t (resp. t').

Si la condition (i) est vérifiée : Supposons que $x_i \in V(C)$ vérifie cette condition, (i modulo k). Sans perdre de généralité, supposons que $c(tx_i) \neq c(tt')$ et t est une feuille de T . Puisque C est un cycle proprement-arêtes-colorées, donc ou bien $c(tx_i) \neq c(x_i x_{i+1})$ ou bien $c(tx_i) \neq c(x_{i-1} x_i)$. Sans perdre de généralité, supposons que $c(tx_i) \neq c(x_i x_{i+1})$. Alors K_n^c admet l'arbre couvrant proprement-arêtes-colorées suivant : $T \cup \{tx_i x_{i+1} \dots x_k x_1 \dots x_{i-1}\}$. D'où le résultat du lemme.

Si la condition (ii) est vérifiée : Supposons que $x_i \in V(C)$ vérifie cette condition, (i modulo k). Puisque C est un cycle proprement-arêtes-colorées, donc ou bien $c(tx_i) \neq c(x_i x_{i+1})$ ou bien $c(tx_i) \neq c(x_{i-1} x_i)$. Sans perdre de généralité, supposons que $c(tx_i) \neq c(x_i x_{i+1})$. Alors K_n^c admet l'arbre couvrant proprement-arêtes-colorées suivant : $T \cup \{tx_i x_{i+1} \dots x_k x_1 \dots x_{i-1}\}$. D'où le résultat du lemme.

Si la condition (iii) est vérifiée : Il y a deux cas (a) et (b) :

(a) S'il existe $x_i \in V(C)$, (i modulo k), tel que $c(x_i x_{i+1}) = c(tt')$. Alors K_n^c admet l'arbre couvrant proprement-arêtes-colorées suivant : $T_1 \cup \{tx_i x_{i-1} \dots x_{i+2} x_{i+1} t'\} \cup T_2$. D'où le

résultat du lemme.

(b) S'il n'y pas d'arête de $E(C)$, qui a la couleur $c(tt')$. Alors K_n^c admet l'arbre couvrant proprement-arêtes-colorées suivant $:T_1 \cup \{tx_1x_2 \cdots x_{k-1}x_kt'\} \cup T_2$. D'où le résultat du lemme. \square

Utilisant le lemme précédent, nous donnons l'algorithme suivant qui trouve un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées pour un K_n^c , à partir d'un arbre T et un cycle C tous les deux proprement-arêtes-colorées tels que C et T sont sommets-disjoints et $V(K_n^c) = V(T) \cup V(C)$:

Algorithme 4.1 ARBRE COUVRANT PROPUREMENT-ARÊTES-COLORÉES

Input : Un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c , un arbre T et un cycle C tous les deux proprement-arêtes-colorées tels que C et T sont sommets-disjoints et $V(K_n^c) = V(T) \cup V(C)$.
Output : Un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans K_n^c .

- 1 **début** Soit $V \leftarrow \phi$
- 2 Choisir $t \in V(T) \setminus V$ et $V \leftarrow t$
- 3 **si** t est une feuille de T
- 4 **alors** notons t' le voisin de t
- 5 **sinon** aller à 2
- 6 **fin si**
- 7 **si** $\exists x \in V(C)$ tel que $c(tx) \neq c(tt')$
- 8 **alors** la première condition du lemme 4.1 est vérifiée, aller à fin
- 9 **sinon** $\forall x \in V(C)$ on a $c(tx) = c(tt')$ (*c.à.d.* $c(tC) = c(tt')$)
- 10 **si** $c(tC) = c(tt') = c(t'C)$
- 11 **alors** la troisième condition du lemme 4.1 est vérifiée, aller à fin
- 12 **sinon** $\exists x \in V(C)$ tel que $c(t'x) \neq c(tt')$
- 13 **si** t' est une feuille de T
- 14 **alors** la première condition du lemme 4.1 est vérifiée, aller à fin
- 15 **sinon** t' n'est pas une feuille de T
- 16 **si** $\exists x \in V(C)$ tel que $\forall t'' \in N_T(t') \setminus \{t\}$ $c(t'x) \neq c(t't'')$
- 17 **alors** puisque d'après 12 on a aussi $c(t'x) \neq c(t't)$, la deuxième condition du lemme 4.1 est vérifiée, aller à fin
- 18 **sinon** $\forall x \in V(C)$ tel que $\exists t'' \in N_T(t') \setminus \{t\}$ $c(t'x) = c(t't'')$ (*c.à.d.* $c(t'C) = c(t't'')$)
- 19 **faire** $t \leftarrow t'$ et $t' \leftarrow t''$, aller à 10
- 20 **sinon** aller à fin
- 21 **fin si**
- 22 **fin si**
- 23 **fin si**
- 24 **fin si**
- 25 **fin**

L'algorithme 4.1 trouve toujours un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées car la boucle provoquée par le saut de la ligne 19 à la ligne 10 est finie puisque l'arbre et le

cycle sont finis. Mieux encore, la complexité totale de l'algorithme est $O(|V(T)||V(C)|)$. Cela, nous permet d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.2 *Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, T un arbre proprement-arêtes-colorées et C un cycle proprement-arêtes-colorées, tels que C et T sont sommets-disjoints et $V(K_n^c) = V(T) \cup V(C)$. Alors, il existe un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans K_n^c et on peut le trouver en $O(|V(T)||V(C)|)$.*

┘

Plus généralement, pour un K_n^c contenant un 1-arbre-cycle-proprement-arêtes-colorées, nous donnons le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, T un arbre proprement-arêtes-colorées et C_1, C_2, \dots, C_k des cycles proprement-arêtes-colorées, tels que C_1, C_2, \dots, C_k et T sont tous deux à deux sommets-disjoints et $V(K_n^c) = V(T) \cup V(C_1) \cup V(C_2) \cup \dots \cup V(C_k)$. Alors, il existe un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans K_n^c et on peut le trouver en $O((k-1)^2 s^2)$ avec $s = \max \{V(T), V(C_i) \mid i : 1, \dots, k\}$.*

┘

Preuve :

Par récurrence sur k . Le cas $k = 1$, est résolu par le lemme 4.2. Hypothèse de récurrence : supposons qu'à partir de C_1, C_2, \dots, C_{k-1} et T on a un arbre proprement-arêtes-colorées T' tel que $V(T') = V(C_1) \cup V(C_2) \cup \dots \cup V(C_{k-1}) \cup V(T)$. Maintenant, il suffit d'appliquer le lemme 4.2 sur T' and C_k . \square

Notons, pour une couleur $i \in I_c$, G_i est le sous-graphe de G^c tel que toutes ses arêtes ont la même couleur i .

Théorème 4.2 *Soit p un entier pair, et G^c un graphe c -arêtes-colorées avec $c = \frac{n}{p}$. Si pour chaque couleur i le sous-graphe G_i est $\frac{p}{2}$ -arête-connexe, alors G^c admet un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées.*

┘

Preuve :

Soit X un sous-ensemble de sommets et notons par \bar{X} l'ensemble des arêtes dont les extrémités sont dans X et $V(G^c) \setminus X$. Construisons un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées T de G^c tel que chaque couleur apparaît le même nombre de fois, en choisissant à chaque fois une arête d'une manière gloutonne. Pour cela, nous procédons par un algorithme Prim comme suit :

Algorithme 4.2 PRIM

```

1  début T := ∅;
2  pour k := 1 à  $\frac{p}{2}$ 
3    pour j := 1 à n/p
4    si |E(T)| < n - 1
5      alors Pour un certain  $x \in X$  trouver une arête  $e = xy$  dans  $\bar{X}$  tel que  $T \cup \{e\}$  est
        un arbre proprement-arêtes-colorées; (*)
6      faire  $X := X \cup \{y\}$ ;
7      faire  $T := T \cup \{e\}$ ;
8    fin si
9  fin pour
10 fin pour
11 fin

```

Remarquons qu'à la fin de la k ème itération T a k arêtes de chaque couleur couvrant $2k$ sommets, c'est à dire $\frac{2kn}{p}$ sommets, au total, sont couvrènt par les arêtes de toutes couleurs confondues. Comme G_i est $\frac{p}{2}$ -arête-connexe et $k \leq \frac{p}{2}$, alors l'existence de l'arête e en (*) est garantie. A la fin de la $\frac{p}{2}$ ème itération, nous aurons $\frac{2pn}{2p} = n$ sommets couvrènt. D'où le résultat. \square

4.1.2 \mathcal{NP} -complétude

Théorème 4.3 *Le problème de trouver un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans un graphe 2-arêtes-colorées G^2 est NP-complet.*

┘

Preuve :

La preuve est simple à partir du problème des chaînes hamiltoniennes alternées dans un graphe 2-arêtes-colorées qui est connu comme étant NP-complet. Un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées avec deux couleurs n'est autre qu'une chaîne hamiltonienne alternée, d'où le résultat. \square

On peut penser que si le nombre de couleurs du graphe est suffisamment grand, alors on peut trouver un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées en un temps polynomial. Mais, ce n'est pas le cas. Voir le théorème suivant :

Théorème 4.4 *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées et le nombre des couleurs $c > 2$. Le problème de trouver un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans G^c est NP-complet.*

┘

Preuve :

Construisons l'instance suivante : soient un graphe G_1^2 2-arêtes-colorées et G_2^c un graphe c -arêtes-colorées et $c > 2$. G_1^2 et G_2^c sont sommets-disjoints bien sûr. Ajoutons une arête entre un sommet de G_1^2 et un sommet de G_2^c de couleur différente de celles utilisées dans G_1^2 mais utilisée dans G_2^c . Clairement, s'il existe un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans le graphe résultant $G_1^2 \cup G_2^c$ alors il existe un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans le graphe G_1^2 . Or trouver un un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées dans le graphe G_1^2 est *NP*-complet, d'où le résultat d'après le théorème 4.3. \square

deuxième preuve du théorème 4.4 : Nous proposons une deuxième preuve au théorème 4.4 en se basant sur la réduction du problème 3SAT. Cette preuve nous sera utile dans le paragraphe juste après.

Preuve :

La réduction est faite à partir de 3SAT. Soit F une fonction logique d'une instance de 3SAT avec n variables et m clauses. Construisons une instance I d'arbre proprement-arêtes-colorées en quatre étapes :

1. A chaque variable x_i de F , on associe m composantes $H_{i,j}$, $j : 1 \dots m$, comme dans la figure 4.1, avec $c(y_{i,j}z_{i,j}) = \text{verte}$, $c(z_{i,j}t_{i,j}) = \text{rouge}$, $c(t_{i,j}x_{i,j}) = \text{bleue}$, $c(z_{i,j}f_{i,j}) = \text{bleue}$ et $c(f_{i,j}x_{i,j}) = \text{rouge}$. Le sommet $x_{i,j}$ de $H_{i,j}$ sera identifié à une variable x_i s'il est présent dans clause c_j .
2. les nm composantes de l'étape 1 sont indépendantes deux à deux. chacune d'elles contient 5 sommets, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$, $t_{i,j}$, $f_{i,j}$ et $x_{i,j}$.
3. Nous associons un sommet c_j à chaque clause c_j de F .
4. A chaque fois qu'une variable x_i (resp. \bar{x}_i) apparaît positivement (resp. négativement) dans une clause c_j , nous créons l'arête $x_{i,j}c_j$ avec la couleur rouge (resp. bleue).

Maintenant, nous allons prouver que F est satisfiable si, et seulement si, la construction de la figure 4.1 admet un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées. Pour voir cela, faisons les remarques suivantes :

- Remarque 1 : Si les clauses de F sont uniformes, tous les sommets qui représentent ces clauses dans l'instance I sont monochromatique (*c.à.d.*, toutes leurs arêtes incidentes ont la même couleur). Par conséquent, dans n'importe quel arbre proprement-arêtes-colorées T de I tous les sommets qui représentent les clauses doivent être des feuilles.
- Remarque 2 : Pour n'importe quel arbre proprement-arêtes-colorées T de I , la chaîne d'extrémités $y_{i,j}$ et $x_{i,j}$ est soit $y_{i,j}z_{i,j}t_{i,j}x_{i,j}$ soit $y_{i,j}z_{i,j}f_{i,j}x_{i,j}$. On observe que l'arête $t_{i,j}x_{i,j}$ a une couleur différente de celle de l'arête $f_{i,j}x_{i,j}$.

Maintenant, le sens suffisant de notre preuve découle des remarques 1 et 2. En effet, soit T un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées de l'instance I . Pour chaque variable x_i , on dit que x_i est vraie (resp. fausse) si la chaîne $y_{i,j}z_{i,j}t_{i,j}x_{i,j}$ (resp. $y_{i,j}z_{i,j}f_{i,j}x_{i,j}$) existe dans l'arbre T . Comme cette chaîne finie par la couleur bleue (resp. rouge) en $x_{i,j}$, elle peut être augmentée seulement aux sommets représentants les clauses satisfaites par x_i

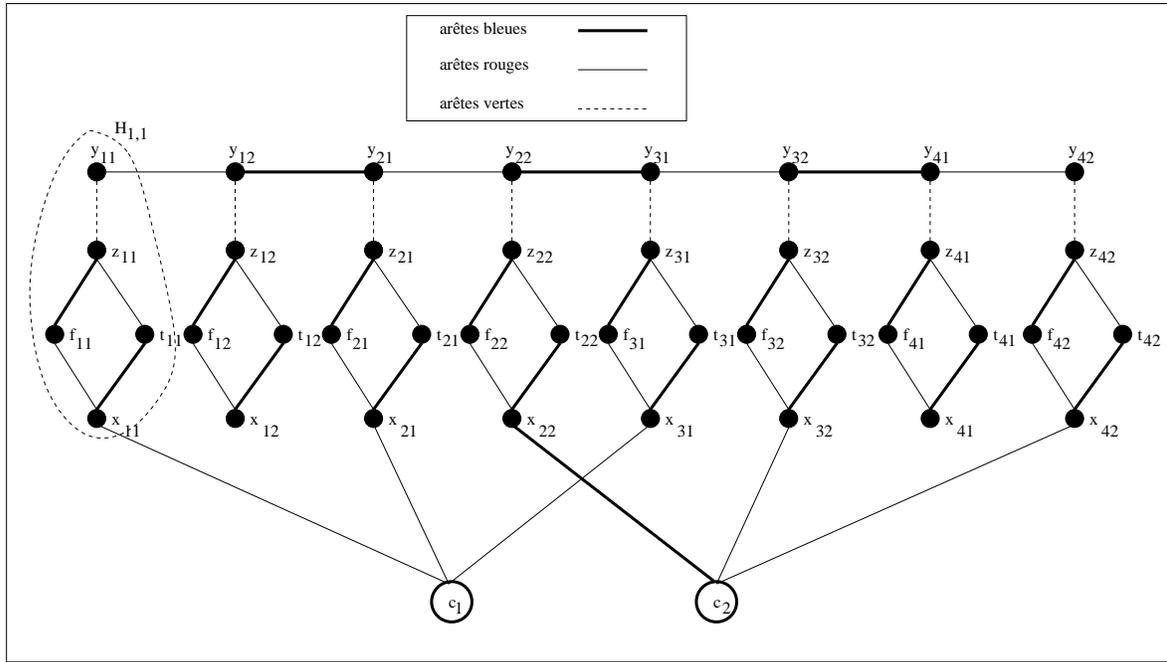


FIG. 4.1 – Cette construction représente $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

(resp. \bar{x}_i). Puisque tous les sommets représentant les clauses sont des feuilles de l'arbre T , les clauses de F doivent être toutes satisfaites. Le sens nécessaire de notre preuve est évident par construction de l'instance I . \square

4.1.3 Inapproximation

Dans ce qui suit, nous présentons une étude d'inapproximabilité du problème MST. Le problème MST est un problème d'optimisation qui a pour objectif de maximiser le nombre des sommets couverts par un arbre T proprement-arêtes-colorées. On rappelle que dans cette étude nous faisons appel à la technique dite du fossé que nous avons expliqué dans le premier chapitre (paragraphe 1.2.3, page 20).

Maintenant, nous allons donner un résultat concernant le problème MST. Pour cela, nous nous sommes basés sur l'instance I précédemment décrite dans la deuxième preuve du théorème 4.4 (voir figure 4.1). Pour commencer, montrons le lemme suivant qui donne une relation entre $Opt(I)$ le nombre maximum de sommets couverts par un arbre T proprement-arêtes-colorées et $Opt(F)$ le nombre maximum des clauses satisfaites dans la formule logique F qui a un nombre n de variables et un nombre m de clauses.

Lemme 4.3 $Opt(I) = Opt(F) + 5mn$.

┘

Preuve :

Dans la figure 4.1, chaque sommet $x_{i,j}$ est associé à une composante $H_{i,j}$ de cinq sommets. Puisque le nombre des sommets $x_{i,j}$ est exactement le nombre des variables multiplier par le nombre des clauses, c'est à dire nm , alors, le nombre des sommets de toutes les composantes $H_{i,j}$ est $5nm$. Donc, $Opt(I) = 5nm + (\text{nombre maximum des sommets } c_i \text{ couvèrent par } T)$ et chaque sommet c_i représente une clause dans F, alors $Opt(I) = Opt(F) + 5nm$. \square

Théorème 4.5 *Le problème MST est non approximable avec un ratio $127/128 + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ à moins que $P = NP$.*

┘

Preuve :

Considérons une fonction logique F avec n variables et m clauses. Supposons que F contient exactement 3 variables par clause. Nous proposons, pour utiliser la technique du fossé, de faire une réduction du célèbre problème MAX-3SAT. Nous devons, donc, montrer que :

- (1) Si $Opt(F) \geq m$ alors $Opt(I) \geq f(n, m)$ où $f(n, m) = 5mn + m$ et,
- (2) Si $Opt(F) < (7/8 + \epsilon)m$ alors $Opt(I) < (127/128 + \epsilon)f(n, m)$, pour $\epsilon \geq 0$.

La première condition découle directement de $Opt(I) = Opt(F) + 5mn$ (lemme 4.3). Ensuite, considérons $Opt(F) < (7/8 + \epsilon)m$. A partir de cette inégalité et du lemme 4.3 on a :

$$\begin{aligned} Opt(I) &< (7/8 + \epsilon)m + f(n, m) - m && \text{(puisque } f(n, m) = 5mn + m) \\ &< (\epsilon - 1/8)m + f(n, m) \\ &< (\epsilon - 1/8)m^2 + f(n, m) && \text{(puisque } m \geq 1) \end{aligned}$$

Ensuite, à partir de la définition du problème 3-SAT on a $3 \leq n \leq 3m$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(n, m) &\leq 15m^2 + m \\ &\leq 16m^2 && \text{(puisque } m \geq 1) \end{aligned}$$

Ainsi, pour $0 < \epsilon < 1/8$, on a :

$$Opt(I) < (\epsilon - 1/8)f(n, m)/16 + f(n, m) = (\epsilon/16 - 1/128 + 1)f(n, m)$$

Enfin, $Opt(I) < (127/128 + \epsilon')f(n, m)$ où $\epsilon' = \epsilon/16$. \square

4.2 Arbres couvrants faiblement-arêtes-colorées

Définition 4.3 Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées quelconque. T est un arbres couvrants faiblement-arêtes-colorées dans G^c si, et seulement si, T a une racine r , $V(T) = V(G^c)$, entre la racine r et chaque feuille de T il y a une chaîne proprement-arêtes-colorées et les chaînes commencent toujours par la même couleur à partir d'un sommet quelconque (mais ce n'est pas nécessairement le cas pour la racine r) vers une feuille quelconque (voir l'exemple de la figure 4.2).

┌

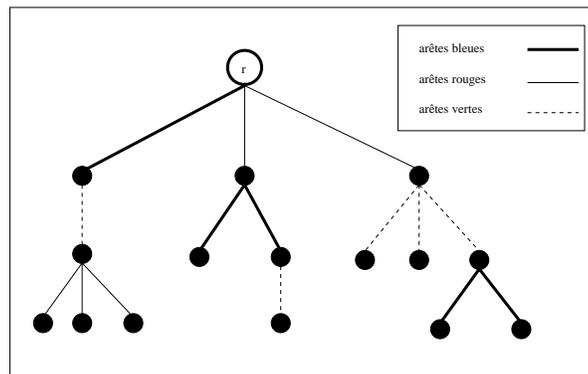


FIG. 4.2 – Exemple d'arbre faiblement-arêtes-colorées de racine r et avec trois couleurs.

4.2.1 \mathcal{NP} -complétude

Théorème 4.6 *Le problème de trouver un arbre faiblement-arêtes-colorées est NP-complet.*

┌

Preuve :

La réduction est faite à partir de 3SAT. Soit F une formule logique d'une instance de 3SAT avec n variables et m clauses. Construisons une instance I d'arbre faiblement-arêtes-colorées en quatre étapes :

1. A chaque variable x de F , on associe une composante H_x comme dans la figure 4.3, avec $c(rt) = \text{rouge}$, $c(tx) = \text{bleue}$, $c(rf) = \text{bleue}$, $c(fx) = \text{rouge}$. Le sommet r de H_x sera considéré comme une racine. Le sommet x de H_x sera identifié à une variable x .
2. les n composantes de l'étape 1 ont un sommet commun, qui est la racine r . Tous les autres sommets sont à l'intérieur des composantes.

3. Nous associons un sommet c à chaque clause c de F .
4. A chaque fois qu'une variable x (resp. \bar{x}) apparaît positivement (resp. négativement) dans une clause C , nous créons l'arête xc avec la couleur rouge (resp. bleue).

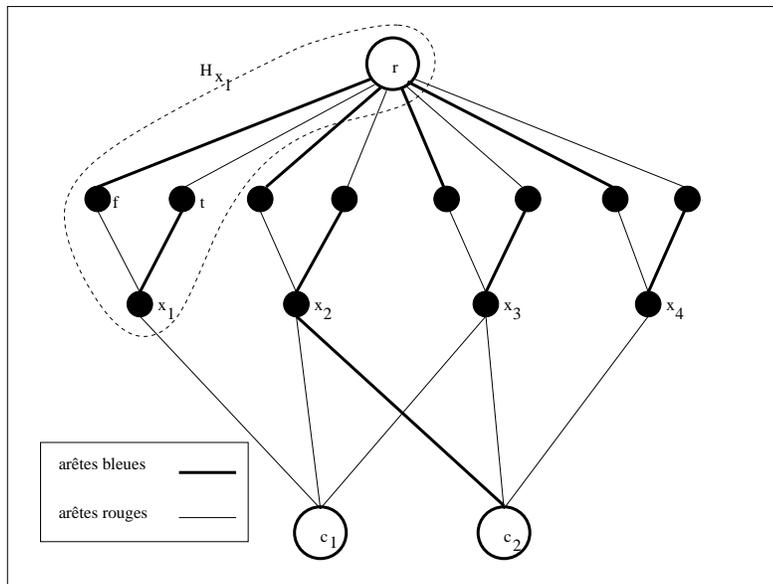


FIG. 4.3 – Cette construction représente $F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

Maintenant, nous allons prouver que F est satisfiable si, et seulement si, la construction de la figure 4.3 admet un arbre couvrant faiblement-arêtes-colorées de racine R . Pour voir cela, faisons les remarques suivantes :

- Remarque 1 : Si les clauses de F sont uniformes, tous les sommets qui représentent ces clauses dans l'instance I sont monochromatique (*c.à.d.*, toutes leurs arêtes incidentes ont la même couleur). Par conséquent, dans n'importe quel arbre faiblement-arêtes-colorées T de I tous les sommets qui représentent les clauses doivent être des feuilles.
- Remarque 2 : Pour n'importe quel arbre faiblement-arêtes-colorées T de I , la chaîne d'extrémités r et x est soit rtx soit rfx . On observe que l'arête tx a une couleur différente de celle de l'arête fx .

Maintenant, le sens suffisant de notre preuve découle des remarques 1 et 2. En effet, soit T un arbre faiblement-arêtes-colorées de l'instance I . Pour chaque variable x , on dit que x est vraie (resp. fausse) si la chaîne rtx (resp. rfx) existe dans l'arbre T . Comme cette chaîne finie par la couleur bleue (resp. rouge) en x , elle peut être augmentée seulement aux sommets représentant les clauses satisfaites par x (resp. \bar{x}). Puisque tous les sommets représentant les clauses sont des feuilles de l'arbre T , les clauses de F doivent être toutes satisfaites. Le sens nécessaire de notre preuve est évident par construction de l'instance I . \square

4.2.2 Inapproximation

Dans ce qui suit, nous présentons une étude d'inapproximabilité du problème MWT. Le problème MWT est un problème d'optimisation qui a pour objectif de maximiser le nombre des sommets couvèrent par un arbre T faiblement-arêtes-colorées de racine r .

Pour étudier le problème MWT, nous nous sommes basés sur l'instance I précédemment décrite dans la preuve du théorème 4.6 (voir figure 4.3). Pour commencer, montrons le lemme suivant qui donne une relation entre $Opt(I)$ le nombre maximum de sommets couvèrent par un arbre T faiblement-arêtes-colorées de racine r et $Opt(F)$ le nombre maximum des clauses satisfaites dans la formule logique F qui a un nombre n de variables et un nombre m de clauses.

Lemme 4.4 $Opt(I) = Opt(F) + 3n + 1$.

┘

Preuve :

Dans la figure 4.3, chaque sommet x_i est associé à une composante H_{x_i} de quatre sommets, le quatrième sommet est toujours le même quelque soit x_i et c'est la racine r . Puisque le nombre des sommets x_i est exactement le nombre des variables de la formule F, c'est à dire n , alors, le nombre des sommets de toutes les composantes H_{x_i} est $3n + 1$. Comme $Opt(I) = \sum_{i=1}^n H_{x_i} + (\text{nombre maximum des sommets } c_i \text{ couvèrent par } T)$ et chaque sommet c_i représente une clause dans F, alors $Opt(I) = Opt(F) + 3n + 1$. \square

Théorème 4.7 *Le problème MWT est non approximable avec un ratio $87/88 + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ à moins que $P = NP$.*

┘

Preuve :

Considérons une fonction logique F avec n variables et m clauses. Supposons que F contient exactement 3 variables par clause. Nous proposons, pour utiliser la technique du fossé, de faire une réduction du célèbre problème MAX-3SAT. Comme il a été prouvé par Hastad [Ha97], le problème MAX-3SAT est non approximable avec un ratio $7/8 + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ à moins que $P = NP$. Nous devons, donc, montrer que :

- (1) Si $Opt(F) \geq m$ alors $Opt(I) \geq f(n, m)$ où $f(n, m) = 3n + m + 1$ et,
- (2) Si $Opt(F) < (7/8 + \epsilon)m$ alors $Opt(I) < (87/88 + \epsilon)f(n, m)$, pour $\epsilon \geq 0$.

La première condition découle directement de $Opt(I) = Opt(F) + 3n + 1$ (lemme 4.4). Ensuite, considérons $Opt(F) < (7/8 + \epsilon)m$. A partir de cette inégalité et du lemme 4.4 on a :

$$Opt(I) < (7/8 + \epsilon)m + f(n, m) - m \quad (\text{puisque } f(n, m) = 3n + m + 1)$$

Par conséquent : $Opt(I) < (\epsilon - 1/8)m + f(n, m)$.

Ensuite, à partir de la définition du problème 3-SAT on a $3 \leq n \leq 3m$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(n, m) &\leq 3n + m + n/3 \\ &= 10n/3 + m \leq 11m \end{aligned}$$

Ainsi, pour $0 < \epsilon < 1/8$, on a :

$$Opt(I) < (\epsilon - 1/8)f(n, m)/11 + f(n, m) = (\epsilon/11 - 1/88 + 1)f(n, m)$$

Enfin, $Opt(I) < (87/88 + \epsilon')f(n, m)$ où $\epsilon' = \epsilon/11$. □

4.3 Conclusion

Nous avons montré qu'un K_n^c , qui contient un 1-arbre-cycle-proprement-arêtes-colorées, admet un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées. Ensuite, nous avons montré que le problème de trouver un arbre couvrant proprement-arêtes-colorées est NP -complet et que le problème MST est non approximable avec un ratio $127/128 + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ à moins que $P = NP$. Enfin, nous avons montré que le problème de trouver un arbre couvrant faiblement-arêtes-colorées est NP -complet et que le problème MWT est non approximable avec un ratio $87/88 + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ à moins que $P = NP$.

Nous avons vu que nous pouvons utiliser des techniques très hétérogènes pour aborder ces problèmes, allant de la caractérisation à l'inapproximation passant par l'algorithmique et la complexité. Et nous pensons qu'il reste encore beaucoup de questions à se poser. A la fin de ce document, nous allons en donner quelques questions ouvertes.



CHAPITRE 5

S-t chaînes/marches proprement-arêtes-colorées

*Toute œuvre scientifique (achevée) n'a d'autre sens
que celui de faire naître de nouvelles questions :
elle demande donc à être (dépassée) et à vieillir.
Dans les sciences, non seulement notre destin,
mais encore notre but à tous
est de nous voir un jour dépassés.*

— Max Webber

Le contenu de ce chapitre a été publié dans [ADFMMS07] en collaboration avec K. Ch. Das, L. Faria, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon et R. Saad. Nous étudions l'aspect algorithmique de plusieurs versions des problèmes des chaînes/marches entre deux sommets s et t dans G^c . D'abord, nous étudions la version $s - t$ chaînes/marches. Des algorithmes polynomiaux sont prouvés pour la majorité de ces cas, en particulier : la Plus Courte Chaîne/Marche, le Plus Court Cycle tous proprement-arêtes-colorées, la Chaîne proprement-arêtes-colorées entre deux sommets donnés avec des Paires de Sommets Interdits, et la Plus Longue Chaîne/Marche proprement-arêtes-colorées pour des instances particulières. Nous caractérisons, aussi, les graphes arêtes-colorées sans marches fermées proprement-arêtes-colorées.

5.0.1 Une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées

Nous rappelons les deux résultats 2.40 (p. 35) et 2.26 (p. 33) qui seront utilisés dans ce chapitre. Le premier, prouvé par Yeo [Y97], caractérise les graphes arêtes-colorées sans cycles proprement-arêtes-colorées.

Théorème 5.1 [Y97] *Soit G^c avec $c \geq 2$ et sans sommets monochromatiques. Alors, ou bien G^c a un sommet séparateur de couleurs, ou bien G^c a un cycle proprement-arêtes-colorées.*

┘

Le deuxième résultat est celui de Szeider [Sz03], et qui peut être reformulé comme suit :

Théorème 5.2 [Sz03] *Soient s et t deux sommets dans un graphe G^c c -arêtes-colorées, $c \geq 2$. Alors, ou bien nous pouvons trouver une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées ou bien, sinon, nous pouvons affirmer qu'une telle chaîne n'existe pas dans G^c , et ce, en un temps linéaire par rapport à la taille du graphe.*

┘

Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées, l'idée essentielle de la preuve de ce théorème (décrite dans les travaux antérieurs de Edmonds, voir par exemple le Lemme 1.1 dans [M95]), est de réduire le problème des chaînes proprement-arêtes-colorées dans G^c à celui des couplages dans un graphe non-arêtes-colorées qu'on définit. Désormais, nous appelons ce dernier graphe *le graphe d'Edmonds-Szeider* et est défini comme suit :

Définition 5.1 (le graphe d'Edmonds-Szeider)

Soient s et t deux sommets dans G^c , posons $W = V(G^c) \setminus \{s, t\}$. Ensuite, pour chaque $x \in W$, on définit d'abord un graphe G_x avec l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes, respectivement :

$$V(G_x) = \bigcup_{i \in I_c} \{x_i, x'_i \mid N^i(x) \neq \emptyset\} \cup \{x''_a, x''_b\} \text{ et}$$

$$E(G_x) = \{x''_a x''_b\} \cup \left(\bigcup_{i \in I_c} \bigcup_{x'_i \in V_x} (\{x_i x'_i\} \cup (\bigcup_{j=a,b} \{x'_i x''_j\})) \right).$$

Enfin, le graphe d'Edmonds-Szeider (qui est non-arêtes-colorées) $G(V, E)$ est construit de la manière suivante :

$$G(V) = \{s, t\} \cup \left(\bigcup_{x \in W} V(G_x) \right), \text{ et}$$

$$G(E) = \left(\bigcup_{i \in I_c} (s x_i \mid s x \in E^i(G^c)) \cup (x_i t \mid x t \in E^i(G^c)) \cup (x_i y_i \mid x y \in E^i(G^c)) \right) \cup \left(\bigcup_{x \in W} E(G_x) \right).$$

┘

La relation intéressante entre G^c et G est qu'étant donné un couplage parfait M dans $G \setminus \{s, t\}$, on peut affirmer qu'une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées existe dans G^c si, et seulement s'il existe une chaîne augmentante P compatible avec M entre s et t dans G . Rappelons qu'une chaîne P est augmentante et compatible avec le couplage M si pour chaque paire d'arêtes adjacentes dans P , exactement une seule appartient à M et que la première et la dernière arête de P n'appartiennent pas à M . Puisque, trouver une chaîne augmentante dans G peut être fait en un temps linéaire $O(|E(G)|)$ (voir [T83], p.122) et $O(|E(G)|) = O(|E(G^c)|)$, alors le même temps d'exécution est nécessaire pour trouver une chaîne proprement-arêtes-colorées dans G^c .

Soient deux sommets distincts s et t dans G^c , nous nous intéressons dans ce paragraphe au problème de trouver un algorithme polynomial pour trouver (si elle existe) une $s - t$

chaîne ou marche proprement-arêtes-colorées dans G^c . Notons que le problème de $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées a été résolu initialement par Edmonds pour deux couleurs (voir par exemple le Lemme 1.1 dans [M95]) et après il a été généralisé par Szeider [Sz03] pour un nombre quelconque de couleurs. Nous présentons, ici, une variété de problèmes des chaînes/marches proprement-arêtes-colorées, à savoir le problème de trouver une $s - t$ marche, marches fermées, la plus courte $s - t$ chaîne/marche, la plus longue $s - t$ chaîne/marche ...etc.

On cherche à donner un algorithme polynomial pour trouver une $s-t$ marche proprement-arêtes-colorées. En particulier, nous prouvons que le problème de $s - t$ marche peut être réduit au problème de $s - t$ chaîne. Comme a été démontré que le dernier problème est polynomial [Sz03], la conclusion s'en suit facilement. Commençons par le résultat simple et fondamental suivant :

Lemme 5.1 (*Lemme fondamental*) *Soient deux sommets s et t de G^c , supposons qu'il y a une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées T dans G^c . En plus, supposons qu'au moins un sommet (différent de s et t) est visité trois fois ou plus dans cette marche. Alors, il existe une autre $s - t$ marche T' dans G^c telle qu'aucun sommet n'est visité plus que deux fois dans T' .*

┘

Preuve :

Posons $T = e_1 e_2 \cdots e_k$, où e_i sont les arêtes de la marche. Soit $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ l'ensemble des sommets de T . Soit λ_i le nombre de fois que le sommet a_i est visité dans T , pour chaque $i = 1, 2, \cdots, r$. Soit $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$. Parmi toutes les possibilités, choisissons T , telle que le nombre λ est le plus petit possible et aussi le moins de sommet a_i avec $\lambda_i = \lambda$. Si $\lambda \leq 2$ nous n'avons rien à montrer. Supposons, donc, que $\lambda \geq 3$. Ainsi, il existe un certain sommet, soit a_p , $1 \leq p \leq r$, qui est visité au moins trois fois dans T . Supposons que $\lambda = 3$, la preuve est presque identique pour les valeurs supérieures. Écrivons la marche de cette manière $T = e_1 e_2 \cdots e_i e_{i+1} \cdots e_j e_{j+1} \cdots e_f e_{f+1} e_{f+2} \cdots e_k$ telle que :

- i) a_p est le sommet commun entre les paires d'arêtes e_i, e_{i+1} , (respectivement e_j, e_{j+1} et e_f, e_{f+1}) et
- ii) a_p n'appartient pas à l'ensemble des sommets du graphe induit par les arêtes du segment $e_{f+2} \cdots e_k$. Notons que les arêtes e_i et e_{j+1} sont de même couleur, sinon la marche $e_1 e_2 \cdots e_i e_{j+1} \cdots e_f e_{f+1} e_{f+2} \cdots e_k$ violera notre choix initial de la marche T dans laquelle a_p est visité le moins de fois. De même, les arêtes e_i et e_{f+1} sont de même couleur. Par contre la marche $e_1 e_2 \cdots e_i e_f, e_{f-1} e_{f-2} \cdots e_{j+2} e_{j+1} e_{f+1} e_{f+2} \cdots e_k$ viole le choix de T . Ceci termine la preuve du lemme. \square

Par conséquent, pour aborder le problème des $s - t$ marches proprement-arêtes-colorées, il suffit de considérer seulement celles qui ont des sommets visités deux fois au plus. Pour cela, on transformera les problèmes des marches et des chaînes comme suit. Soient G^c , et un entier $p \geq 2$, considérons $p - H^c$ un graphe arêtes-colorées (que

nous convenons d'appeler *le graphe chaîne-marche*) obtenu à partir de G^c comme suit. Remplaçons chaque sommet x de G^c par p nouveaux sommets x_1, x_2, \dots, x_p . En plus, pour chaque arête xy de G^c de couleur, disons j , ajoutons deux nouveaux sommets v_{xy} et u_{xy} et les arêtes $x_i v_{xy}, u_{xy} y_i$, $p = 1, 2, \dots, p$, toutes de couleur j et enfin ajoutons l'arête $v_{xy} u_{xy}$ d'une nouvelle couleur $j' \notin \{1, 2, \dots, c\}$. Pour simplifier, dans la suite le sous-graphe arêtes-colorées de $p - H^c$ induit par les sommets x_i, v_{xy}, u_{xy}, y_i et associé à l'arête xy de G^c sera noté H_{xy}^c . Aussi, quand $p = 2$, on écrit H^c à la place de $p - H^c$. Alors, nous avons la relation suivante entre G^c et $p - H^c$, pour $p = 2$:

Théorème 5.3 *Soient deux sommets s et t dans G^c , il existe une $s-t$ marche proprement-arêtes-colorées dans G^c si, et seulement si il existe une $s_1 - t_1$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans H^c .*

└

Preuve :

Soient, dans G^c , s et t deux sommets donnés. Supposons d'abord qu'il existe une marche proprement-arêtes-colorées, soit $T = e_1, e_2, \dots, e_k$ entre s et t dans G^c , où e_i sont des arêtes de la marche et s est l'extrémité gauche de e_1 et t est l'extrémité droite de e_k . D'après le lemme 5.1, on peut choisir T telle qu'aucun sommet est visité plus que deux fois dans T . Soit H^c comme a été défini précédemment, nous allons montrer comment construire une chaîne proprement-arêtes-colorées P entre s_1 et t_1 dans H^c . En fait, pour chaque arête $e_i = xy$ de T , on considère le sous-graphe associé H_{e_i} dans H^c , et ensuite on remplace l'arête e_i par une autre à partir de l'un des segments $x_1 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_1$ ou $x_1 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_2$ ou $x_2 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_1$ ou $x_2 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_2$ dans H^c .

Réciproquement, chaque $s_1 - t_1$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans H^c utilise une des sous-chaînes $x_1 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_1$ ou $x_1 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_2$ ou $x_2 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_1$ ou $x_2 v_{xy}, v_{xy} u_{xy}, u_{xy} y_2$ dans chaque sous-graphe H_{xy}^c de H^c . Maintenant, il est facile de voir qu'une $s_1 - t_1$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans H^c correspondra à une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées T dans G^c où aucun sommet n'est visité plus que deux fois dans T . \square

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 5.2 et du Théorème 5.3.

Corollaire 5.3.1 *Considérons deux sommets distincts s et t dans un graphe c -arêtes-colorées G^c . Alors, ou bien on peut trouver une $s-t$ marche proprement-arêtes-colorées ou bien sinon décider qu'une telle marche n'existe pas dans G^c en un temps linéaire par rapport à la taille de G^c .*

└

Preuve :

Pour trouver une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées dans G^c , il suffit de construire H^c comme précédemment et ensuite le théorème 5.2 pour trouver une $s_1 - t_1$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans H^c , à condition qu'une telle chaîne existe. Clairement, le

graphe H^c a $O(km)$ arêtes où m est le nombre des arêtes de G^c et k est petite constante. A condition d'avoir une $s_1 - t_1$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans H^c , la marche proprement-arêtes-colorées correspondante dans G^c est obtenu seulement en changeant les segments adéquats de la chaîne dans H^c par leurs arêtes associées dans G^c . \square

On conclut ce paragraphe par quelques résultats sur les marches fermées dans les graphes arêtes-colorées. En particulier, nous caractérisons les graphes sans marches fermées proprement-arêtes-colorées. On rappelle que le problème de voir si G^c ne contient pas un cycle proprement-arêtes-colorées a été initialement résolu par Grossman et Häggkvist [GH83] pour les graphes 2-arêtes-colorées et ensuite par Yeo [Y97] pour un nombre quelconque de couleurs (voir le théorème 2.40 donné auparavant). Dans les deux cas, les auteurs ont utilisé le concept de sommet séparateur de couleur (voir les définitions 1.1 et 1.2, page 10). Ici, en introduisant le concept des arêtes séparatrices de couleurs, nous obtenons le théorème 5.4 :

Définition 5.2 (*arête séparatrice de couleurs*)

Dans un graphe G^c , e est une arête séparatrice de couleurs si, et seulement si, e est une coupe-arête (voir la définition 1.1, p. 10) dont les deux extrémités sont des sommets monochromatiques par rapport à chacun des sous-graphes connexes de G^c qu'on peut avoir par l'enlèvement de e .

┘

Théorème 5.4 *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées, tel que chaque sommet de G^c est incident à au moins deux arêtes de deux couleurs différentes. Alors, ou bien G^c a une arête séparatrice de couleurs ou bien G^c a une marche fermée proprement-arêtes-colorées.*

┘

Preuve :

Soit G^c , considérons de nouveau le graphe chaîne-marche H^c , associé à G^c comme il est défini avant dans le théorème 5.3. On observe que si un sommet x de G^c est incident à deux arêtes de couleurs différentes dans G^c , alors les deux sommets x_1 et x_2 seront incidentes à des arêtes de couleurs différentes dans H^c . En plus, pour chaque arête xy de G^c , nous avons par définition de H^c que les sommets v_{xy} et u_{xy} sont incidents à des arêtes de couleurs différentes. Par conséquent, on conclut que si chaque sommet de G^c est incident à au moins deux arêtes de couleurs différentes dans G^c , alors chaque sommet de H^c sera incident à au moins deux arêtes de couleurs différentes dans H^c . Alors, il s'en suit d'après le théorème 2.40 que H^c a ou bien un sommet séparateur de couleurs ou bien un cycle proprement-arêtes-colorées. Maintenant, supposons d'abord que H^c a un sommet séparateur de couleurs. Si ce sommet est l'un des sommets : $v_{xy} \in H_{xy}$, alors il est facile de voir que u_{xy} est un autre sommet séparateur de couleurs de H^c . Par conséquent, l'arête $v_{xy}u_{xy}$ est séparatrice de couleur dans H^c . Cela implique que l'arête xy de G^c associée à H_{xy}^c est aussi une arête séparatrice de couleur dans G^c .

Supposons maintenant que H^c a un cycle proprement-arêtes-colorées. Alors, on conclut que G^c a une marche proprement-arêtes-colorées si, et seulement si, nous avons un cycle proprement-arêtes-colorées dans H^c .

D'après ce qui précède il s'en suit que si chaque sommet de G^c est incident à au moins deux arêtes de couleurs différentes, alors G^c a ou bien une arête séparatrice de couleurs ou bien une marche proprement-arêtes-colorées, d'où le résultat. \square

Concernant l'aspect algorithmique de ce problème, pour examiner l'existence d'une marche fermée proprement-arêtes-colorées dans un temps polynomial, il suffit d'éliminer toutes les arêtes séparatrices de couleurs et tous les sommets monochromatiques dans G^c . Notons que toutes ces arêtes et sommets peuvent être éliminer sans détruire aucune marche fermée proprement-arêtes-colorées. De cette façon, si le graphe résultant n'est pas le graphe vide, alors il contient une marche fermée proprement-arêtes-colorées.

5.1 La plus courte chaîne/marche proprement-arêtes-colorées

Soient s et t dans G^c (non nécessairement distincts), dans ce paragraphe nous nous sommes intéressés aux plus courtes $s - t$ chaînes et marches proprement-arêtes-colorées. En associant des coûts convenables aux arêtes au graphe d'Edmonds-Szeider (non-arêtes-colorées) $G = (V, E)$ défini au début de ce chapitre, d'abord on montre comment trouver, si elle existe, la plus courte chaîne proprement-arêtes-colorées entre s et t dans G^c . Alors, cette procédure sera utilisée après pour définir la plus courte marche proprement-arêtes-colorées entre s et t dans G^c . En fin du paragraphe, nous montrons comment trouver le plus court cycle et la plus courte marche fermée proprement-arêtes-colorées.

Pour le problème de la plus courte chaîne, on donne l'algorithme suivant :

Algorithme 5.1 LA PLUS COURTE $s - t$ CHAÎNE PROPUREMENT-ARÊTES-COLORÉES

Input : Un graphe c -arêtes-colorées G^c , deux sommets $s, t \in V(G^c)$.

Output : Si elle existe, la plus courte $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées P dans G^c .

```

1  soit  $W = V(G^c) \setminus \{s, t\}$ ;
2  pour chaque  $x \in W$  construire  $G_x$  comme il est dans la définition 5.0.1;
3  Construire le graphe d'Edmonds-Szeider  $G$  associé à  $G^c$ ;
4  soit  $E' = \cup_{x \in W} E(G_x)$ ;
5  pour  $pq \in E(G) \setminus E'$  faire  $\text{coût}(pq) \leftarrow 1$ ;
6  pour  $pq \in E'$  faire  $\text{coût}(pq) \leftarrow 0$ ;
7  si  $G$  contient un couplage parfait alors
8  - Trouver un couplage de poids minimum  $M$  dans  $G$ ;
9  - Utilisant  $M$ , trouver  $P$  dans  $G^c$ ;
10 fin si;
```

L'idée de l'algorithme 5.1 est de pénaliser toutes les arêtes, de G , associées aux arêtes

dans le graphe original G^c . Dans ce sens, un couplage parfait M maximisera le nombre d'arêtes de $E(G_x)$ (avec un coût égal à 0) associé à $x \in V(G^c) \setminus \{s, t\}$.

Soit M un couplage parfait donné. Pour obtenir P à l'étape 9, nous contractons seulement tous les sous-graphes G_x en un seul sommet x et éliminons les arêtes restantes qui n'appartiennent pas à M . Notons par exemple, que tous les sommets qui n'appartiennent pas à la $s-t$ chaîne associée dans G^c sont isolés, sinon M ne devrait pas être un couplage parfait de poids minimum.

En plus, observons que la complexité totale de l'algorithme 5.1 est déterminée par la complexité du couplage parfait de poids minimum (étape 9). Une multitude d'algorithmes peuvent être trouvés dans la littérature. Celui de Gabow [G90], donne une complexité égale à $O(n(m + n \log n))$ qui est une des meilleures en fonction de n et m , mais d'autres complexités sont possibles quand les poids des arêtes sont des entiers. Le lecteur désirent en savoir plus sur les couplages, nous lui suggérons de voir [G95].

Formellement, nous écrivons :

Théorème 5.5 *L'algorithme 5.1 trouve toujours, si elle existe, la plus courte $s-t$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans G^c .*

┘

Preuve :

Soit M un couplage parfait de poids minimum dans G et P la chaîne qui lui est associée dans G^c (obtenue après l'étape 9). Par contradiction, supposons que P n'est pas la plus courte chaîne proprement-arêtes-colorées dans G^c . Alors, il existe une autre $s-t$ chaîne proprement-arêtes-colorées P' dans G^c avec $\text{coût}(P') < \text{coût}(P)$. En plus, supposons que tous les sommets restants qui n'appartiennent pas à P' sont isolés. Maintenant, observons que $\text{coût}(pq) = 1$ pour chaque $pq \in E(G) \setminus E'$ et $\text{coût}(pq) = 0$ pour chaque $pq \in E'$. Ainsi, on peut facilement construire un nouveau couplage M' dans G , tel que les arêtes, avec un coût unitaire, sont associées aux arêtes dans la $s-t$ chaîne P' . Les arêtes restantes de M' auront un coût égal à zéro. Dans ce sens, puisque $\text{coût}(P') < \text{coût}(P)$ nous obtenons $\text{coût}(M') < \text{coût}(M)$, contradiction. Par conséquent, P est la plus courte chaîne proprement-arêtes-colorées dans G^c . \square

Maintenant, pour résoudre le problème de la plus courte marche, il suffit d'utiliser l'algorithme précédent comme suit : Soient s et t dans G^c , construire le graphe chaîne-marche H^c associé à G^c . Ensuite, trouver la plus courte s_1-t_1 chaîne proprement-arêtes-colorées P dans H^c par le précédent algorithme. Alors, en utilisant la chaîne P de H^c , on construit la plus courte $s-t$ marche proprement-arêtes-colorées dans G^c . D'où notre algorithme :

Algorithme 5.2 LA PLUS COURTE $s-t$ MARCHE PROPUREMENT-ARÊTES-COLORÉES

Input : Un graphe c -arêtes-colorées G^c , deux sommets $s, t \in V(G^c)$.

Output : Si elle existe, la plus courte $s-t$ marche proprement-arêtes-colorées T dans G^c .

- 1 Construire le graphe chaîne-marche H^c associé à G^c ;
 - 2 Utilisant Alg. 5.1, trouver la plus courte $s_1 - t_1$ chaîne P dans H^c ;
 - 3 Trouver la marche T associée à la chaîne P avec $\text{coût}(T) = \frac{\text{coût}(P)}{3}$;
-

Pour voir pourquoi l'algorithme 5.2 fonctionne, rappelons que chaque sous-graphe H_{xy}^c de H^c est associé à une certaine arête xy de G^c . De plus, on observe qu'une chaîne proprement-arêtes-colorées P_{x_i, x_j} entre x_i et x_j dans H_{xy}^c contient exactement 3 arêtes. Ainsi, pour obtenir T dans G^c à partir de P dans H^c , il suffit de changer chaque segment P_{x_i, x_j} de P par l'arête correspondante xy dans G^c . Ainsi, la validité de l'algorithme 5.2 est garantie par les Théorèmes 5.3 et 5.5.

Pour finir ce paragraphe nous donnons deux résultats algorithmiques concernant les plus courts cycles et les plus courtes marches fermées proprement-arêtes-colorées. En effet, nous allons adapter les idées précédemment décrites pour construire de tels plus courts cycles et plus courtes marches proprement-arêtes-colorées dans G^c , s'ils existent, comme suit. Pour un sommet quelconque x de G^c , on construit un graphe $G(x)$ associé à x en transformant convenablement x en deux sommets, disons s_x et t_x , et ajoutons c sommets supplémentaire x_1, \dots, x_c . Les sommets s_x et t_x correspondront à une source et une destination temporaires de $G(x)$, et les sommets x_1, \dots, x_n sont définis de façon à ce que les $s_x - t_x$ chaînes proprement-arêtes-colorées dans $G(x)$ correspondront aux cycles proprement-arêtes-colorées dans G^c passant par le sommet $x \in V(G^c)$. Par conséquent, il suffit de répéter ce processus pour chaque sommet x de G^c en sauvegardant la solution du coût minimum à chaque itération. Formellement, on écrit :

$$V(G(x)) = (V(G^c) \setminus \{x\}) \cup \{s_x, t_x, x_1, \dots, x_c\} \text{ et}$$

$$E(G(x)) = (E(G^c) \setminus \{xy : y \in N_{G^c}(x)\}) \cup (\bigcup_{i \in I_c} \{x_i y : y \in N_{G^c}^i(x)\}) \cup (\{s_x, t_x\} \times \{x_1, \dots, x_c\}).$$

Dans la construction de $E(G(x))$ ci-dessus on fixe $c(x_i y) = i$ pour chaque couleur $i \in I_c$. En plus, nous colorons chaque arête de $\{s_x, t_x\} \times \{x_1, \dots, x_c\}$ avec une nouvelle couleur $c+1$. Après cette construction, nous cherchons la plus courte chaîne proprement-arêtes-colorées entre s_x et t_x dans $G(x)$. Ce processus est répété pour les sommets restants de G^c . Notons qu'une $s_x - t_x$ chaîne proprement-arêtes-colorées P_x dans $G(x)$ de longueur $|P_x|$ est associée à un cycle proprement-arêtes-colorées C_x dans G^c passant par x de longueur $|C_x| = |P_x| - 2$. Ainsi, nous avons l'algorithme suivant :

Algorithme 5.3 LE PLUS COURT CYCLE PROPUREMENT-ARÊTES-COLORÉES

Input : Un graphe c -arêtes-colorées G^c .

Output : S'il existe, le plus court cycle proprement-arêtes-colorées dans G^c .

- 1 $N_{edges} \leftarrow \infty$; {le nombre minimum des arêtes de la $s_x - t_x$ chaîne dans $G(x)$ }
- 2 **pour** chaque $x \in V$ **faire**
- 3 Construire $G(x)$ en utilisant s_x et t_x comme *source* et *destination* ;

- 4 Utilisant Alg. 5.2, trouver (si elle existe) la plus $s_x - t_x$ chaîne P_x dans $G(x)$;
 - 5 **si** $|P_x| < N_{edges}$ **alors** $SP \leftarrow P_x$ et $N_{edges} \leftarrow |P_x|$;
 - 6 **si** $N_{edges} < \infty$ **alors**
 - 7 Utilisant SP , trouver le plus court cycle proprement-arêtes-colorées dans G^c de longueur $N_{edges} - 2$;
-

Formellement, nous donnons le théorème suivant :

Théorème 5.6 *Soit G^c , l'algorithme 5.3 trouve toujours le plus court cycle proprement-arêtes-colorées dans G^c ou sinon affirme que G^c n'a aucun cycle proprement-arêtes-colorées du tout.*

┘

D'une façon analogue à l'algorithme 5.2, la validité de l'algorithme 5.3 est garantie par les Théorèmes 5.3 et 5.5.

Concernant la plus courte marche, il suffit de changer $G(x)$ par un nouveau graphe $G'(x)$, de la façon suivante. Soit $G_A(x) = G(x) \setminus \{s_x, t_x, x_1, \dots, x_c\}$ un sous-graphe de $G(x)$. Construisons le graphe chaîne-marche H_A , associé à $G_A(x)$ (voir le début du paragraphe 5.0.1). Enfin, pour obtenir $G'(x)$ ajouter les sommets $\{s_x, t_x, x_1, \dots, x_c\}$ à $G_A(x)$ et définissons $c(pq) = c + 1$ pour chaque arête $pq \in \{s_x, t_x\} \times \{x_1, \dots, x_c\}$. Dans ce cas, toutes les arêtes $x_i y$ (pour $i \in I_c$) de couleur i dans $G(x)$ sont remplacées par 2 arêtes $x_i y_1, x_i y_2$ dans $G'(x)$ avec la même couleur. Maintenant, il est facile de voir que les $s_x - t_x$ marches proprement-arêtes-colorées dans $G'(x)$ correspondent aux marches fermées proprement-arêtes-colorées passant par x dans G^c et vice-versa. Dans l'algorithme 5.3, il suffit de changer $G(x)$ par $G'(x)$ et répéter le même processus. Enfin, la validité de cet algorithme est garantie par les Théorèmes 5.3 et 5.5.

5.2 La plus longue $s - t$ chaîne/marche proprement-arêtes-colorées

Le problème de trouver la plus longue $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans un graphe quelconque c -arêtes-colorées est évidemment NP-complet, puisqu'il généralise le problème des chaînes hamiltoniennes dans un graphe quelconque. Ici, nous proposons une procédure en temps polynomial pour trouver la plus longue $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans les graphes qui ne contiennent pas de cycle proprement-arêtes-colorées. Dans les graphes sans marches fermées proprement-arêtes-colorées et telles que le degré-couleur minimal $d^c(v)$ associé à $v \in V(G^c)$ est au moins p (p est une constante), on donne une procédure en temps polynomial pour trouver la plus longue $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées. Nous traitons, aussi, un cas plus général quand le degré-couleur minimal est quelconque.

En fin de ce paragraphe, nous donnons une généralisation de la technique du codage des couleurs (introduite par [AYZ95]), pour trouver (si elles existent) les $s - t$ chaînes ou marches proprement-arêtes-colorées de longueur $k = O(\log n)$.

Théorème 5.7 *Supposons que G^c n'a aucun cycle proprement-arêtes-colorées. Alors, nous pouvons toujours trouver en un temps polynomial, la plus longue $s - t$ chaîne ou sinon affirmer qu'une telle chaîne n'existe pas dans G^c .*

┘

Preuve :

Soient $W = V(G^c) \setminus \{s, t\}$ et $E' = \cup_{x \in W} E(G_x)$ (voir la définition 5.1). Maintenant, construisons le graphe d'Edmonds-Szeider non-arêtes-colorées G associé à G^c et définissons $\text{coût}(pq) = 1$ pour chaque arête $pq \in E(G) \setminus E'$, et $\text{coût}(pq) = 0$ pour chaque $pq \in E'$. Trouvons (si possible) le couplage parfait de poids maximum M dans G , sinon nous ne pourrions pas avoir une chaîne proprement-arêtes-colorées entre s et t (voir [GMG86] pour la complexité du problème du couplage parfait de poids maximum). Maintenant, soit M , pour déterminer sa $s - t$ chaîne associée P dans G^c , on construit un nouveau graphe non-arêtes-colorées G' en contractant toutes les arêtes des sous-graphes G_x en un seul sommet x . Il est facile de voir que G' contiendra une $s - t$ chaîne, des cycles et des sommets isolés, associés respectivement à une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées, des cycles proprement-arêtes-colorées et des sommets isolés dans G^c . Par hypothèse, G^c ne contient pas des cycles proprement-arêtes-colorées. En plus, chaque arête avec un coût unitaire dans M est associée à une arête dans P et vice-versa. Alors, puisque M est un couplage maximum, sa chaîne associée P sera la plus longue $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans G^c . \square

Observons dans le problème ci-dessus que, puisque chaque sommet est visité au plus une fois et nous n'avons pas de cycles proprement-arêtes-colorées, alors tous les sommets qui n'appartiennent pas à la plus longue chaîne seront isolés. Cependant, même si on traite le graphe chaîne-marche associé à G^c , le même argument ne peut pas être utilisé pour déterminer la plus longue $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées. Dans ce cas, nous ne connaissons pas exactement combien de fois un sommet donné sera visité dans la plus longue $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées. Notons que le lemme 5.1 ne peut pas être appliquée à ce cas. Néanmoins, nous avons le résultat suivant concernant la plus longue $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées :

Théorème 5.8 *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées sans aucune marche fermée proprement-arêtes-colorées et deux sommets $s, t \in V(G^c)$. Alors, nous pouvons trouver en temps polynomial, la plus longue $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées dans G^c , si elle existe.*

┘

Preuve :

Soit G^c , construisons le graphe chaîne-marche $p - H^c$ pour $p = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ (comme il a été vu dans le paragraphe 5.0.1). Notons que, aucun sommets ne peut être visité plus que fois dans G^c . Pour voir cela, il suffit de remarque que même si le graphe G^c était complet, chaque sommet x aura $n - 1$ arête incidente ce qui veut dire que x a la possibilité d'être visité p fois au plus.

Maintenant, en utilisant les mêmes argument que celle utilisés dans le théorème 5.3, nous pouvons montrer que chaque marche fermée proprement-arêtes-colorées dans G^c est associée à un cycle proprement-arêtes-colorées dans $p - H^c$. Donc, puisque G^c ne contient pas une marche fermée proprement-arêtes-colorées (par hypothèse), alors $p - H^c$ n'a pas de cycle proprement-arêtes-colorées. En plus, notons que $p - H^c$ a $O(n^2)$ sommets. Ainsi, d'après le théorème 5.7 on peut trouver (si elle existe) la plus longue chaîne proprement-arêtes-colorées, soit P , entre s_1 et t_1 dans $p - H^c$ en un temps polynomial. Par conséquent, la marche associée dans G^c , soit T , sera la plus longue $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées avec un $\text{coût}(T) = \frac{\text{coût}(P)}{3}$ □

Nous donnons par la suite un résultat sur la plus longue chaîne utilisant des notions des algorithmes randomisés. On considère un graphe arêtes-colorées G^c . Nous montrons comment construire (si elle existe) une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans G^c de longueur $k = O(\log n)$ en un temps polynomial randomisé. En fait, c'est une simple généralisation de la technique du codage des couleurs [AYZ95] pour trouver une chaîne ou marche aléatoire de longueur k dans un graphe (ou graphe orienté) non-arêtes-colorées.

Dans notre cas, une coloration aléatoire des sommets de $W = V(G^c) \setminus \{s, t\}$ (utilisant l'ensemble des couleurs $L_{k-1} = \{1, 2, \dots, k - 1\}$) est obtenu à chaque étape. On dit qu'une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées est *multicolore* si chaque sommet de cette chaîne a une couleur différente de celle des autres sommets. Supposons que les couleurs 0 et k sont données respectivement à s et t . Notons que $(k - 1)! / (k - 1)^{(k-1)}$ représente la probabilité qu'une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur k devient multicolore. Le résultat suivant montre comment, en plusieurs étapes, on trouve une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées dans G^c (si une existe).

Lemme 5.2 *On considère G^c un graphe c -arêtes-colorées, deux sommets s et t de G^c , et $l : W \rightarrow L_{k-1}$ une coloration de tous les sommets de W . Si elle existe, une chaîne multicolore proprement-arêtes-colorées entre s et t de longueur k dans G^c peut être trouvée en $O(c(k - 1)2^{(k-1)}m)$ dans le pire des cas.*

┘

Preuve :

Comme dans [AYZ95], la preuve est basée sur une approche de programmation dynamique. Supposons que à la i ème itération (pour $i = 1, \dots, k - 1$) nous avons trouver pour chaque sommet $v \in W$, les ensembles de couleurs possibles pour avoir une $s - v$ chaîne multicolore proprement-arêtes-colorées de longueur i . Soit $L_v(i)$ tous ces ensembles de couleurs. En plus, sauvegardons la couleur de la dernière arête dans la chaîne proprement-arêtes-colorées associée à un certain ensemble $L \in L_v(i)$ (représentée ici par $\text{last}(L, s, v)$).

A chaque étape, on vérifie tous les paires $(L, last(L, s, v))$ (notons qu'au plus $c\mathcal{C}_i^{k-1}$ paires sont possibles) et chaque arête $(v, u) \in E$. Ainsi, si $c(u) \notin L$ (où $c(u)$ est la couleur du sommet u) et $c(vu) \neq last(L, s, v)$, nous ajoutons $c(u)$ à la collection de u correspondante à la chaîne de longueur $i + 1$. Enfin, dans la dernière étape, puisque $c(t)$ appartient évidemment à chaque sous-ensemble L associé à la collection de certain sommet $x \in W$, il suffit de vérifier si $xt \in E$ et $c(xt) \neq last(L, s, x)$. Par conséquent, G^c contient une $s - t$ chaîne multicolore proprement-arêtes-colorées de longueur k (en utilisant les couleurs de L), si, et seulement si, la collection finale associé à t est non vide. Ainsi, le nombre maximum des étapes nécessaires pour chaque ensemble L sera égal à $c(k - 1)2^{(k-1)}m$ qui est clairement $O(c(k - 1)2^{(k-1)}m)$. \square

Donc, si $\alpha = (k - 1)^{(k-1)}/(k - 1)!$, nous avons l'algorithme randomisé polynomial suivant pour trouver une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur k dans G^c :

Algorithme 5.4 $s - t$ CHAÎNE PROPUREMENT-ARÊTES-COLORÉES DE LONGUEUR k

Input : Un graphe c -arêtes-colorées G^c , deux sommets $s, t \in V(G^c)$.

Output : Si elle existe, une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur k dans G^c .

début

- 1 $l \leftarrow 0$;
- 2 **répéter**
- 3 Aléatoirement, donner $k - 1$ couleurs à tous les sommets de $V(G^c) \setminus \{s, t\}$;
- 4 $l \leftarrow l + 1$;
- 5 **jusqu'à ce que** (une $s - t$ chaîne multicolore proprement-arêtes-colorées de longueur k soit trouvée) ou $(l = \alpha)$;

fin

Théorème 5.9 Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées et deux sommets $s, t \in V(G^c)$. Alors, l'algorithme 5.4 trouve, si elle existe, une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $k = O(\log n)$ en un temps randomisé polynomial.

┘

Preuve :

Initialement, observons que $(k - 1)!/(k - 1)^{(k-1)}$ représente la probabilité qu'une $s - t$ chaîne de longueur k devient multicolore à chaque étape. Supposons que cet événement est représenté par A (bonne coloration) et son complément par \bar{A} (mauvaise coloration). De plus, la probabilité de la mauvaise coloration dans les α marches est proche de $(1 - \frac{1}{\alpha})^\alpha \leq \frac{1}{e}$. Alors, $Pr(A) > 1/e$ après α répétitions.

Maintenant, par l'approximation de la formule de Stirling, il s'en suit que $\alpha < e^{k-1}$. Ainsi, d'après le lemme précédent, la complexité totale sera égale à $O((k - 1)2^{(k-1)}|E|.e^{k-1})$. Par conséquent, nous avons une procédure en $O(mn^{O(c)})$ si on considère $k = c.\log n$, où c est une constante. \square

Corollaire 5.9.1 *Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées. Alors, on peut trouver, si elle existe, une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées dans G^c de longueur $k = O(\log n)$ en un temps randomisé polynomial.*

┘

Preuve :

Nous construisons seulement le graphe chaîne-marche H^c et on trouve, si possible, une chaîne proprement-arêtes-colorées entre s_1 et t_1 de longueur $3k$ dans H^c . \square

5.3 Les paires de sommets interdits dans une $s - t$ chaîne

Soient G^c un graphe c -arêtes-colorées, deux sommets s, t et un ensemble $S = \{\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \dots, \{s_k, t_k\}\}$ de k paires de sommets de G^c . Dans le problème des k paires de sommets interdits dans une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées (PPKFP pour faire court), l'objectif est de trouver une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées contenant au plus un sommet de chaque paire dans S . Utilisant une simple transformation attribuée à Häggkvist [M95], nous prouvons le résultat suivant dans un graphe c -arêtes-colorées :

Théorème 5.10 *Le problème PPKFP est NP-complet.*

┘

Preuve :

Le PPKFP appartient évidemment à NP. Pour montrer que PPKFP est NP-complet, nous construisons une réduction à partir du problème *Path with Forbidden Pairs* - PFP [?]. Soit un graphe orienté $D(V, A)$, une paire de sommets s, t et un ensemble $S = \{\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \dots, \{s_k, t_k\}\}$ de k paires de sommets, l'objectif dans le problème PFP est de trouver un $s - t$ chemin dans D qui contient au plus un sommet de chaque paire dans S ou sinon affirmer que de tel chemin n'existe pas dans D . Dans notre réduction, on construit un graphe c -arêtes-colorées $G^c(V', E)$ avec $V' = V \cup \{P_{\vec{x}\vec{y}}^1, \dots, P_{\vec{x}\vec{y}}^{c-1} : \vec{x}\vec{y} \in A\}$. Pour simplifier la notation, pour chaque $\vec{x}\vec{y} \in A$ on considère $x = P_{\vec{x}\vec{y}}^0$ et $y = P_{\vec{x}\vec{y}}^c$. Maintenant, l'ensemble des arêtes E est construit de la façon suivante : chaque arc $\vec{x}\vec{y} \in A$ est remplacé par les arêtes $P_{\vec{x}\vec{y}}^j P_{\vec{x}\vec{y}}^{j+1}$ pour $j = 0, \dots, c-1$ avec $c(P_{\vec{x}\vec{y}}^j P_{\vec{x}\vec{y}}^{j+1}) = j+1$. L'ensemble S des paires de sommets interdits dans G^c reste le même. Après cela, il est facile de voir que les chemins que nous cherchons dans D correspondent aux chaînes que nous cherchons dans G^c et vice-versa. \square

En outre, notons que si k est constant, le problème PPKFP peut être facilement résolu en temps polynomial. En effet, à chaque étape i de cet algorithme, on construit un

nouveau graphe $G_i = (V_i, E_i)$ avec $V_i = V \setminus P_i$ où $P_i = \{p_1^i, \dots, p_k^i\}$ et $p_j^i = s_j$ ou t_j (pour $j = 1, \dots, k$), et $E_i = E(V_i)$. pour chaque sous-graphe G_i on trouve une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées (si une existe) utilisant le graphe d'Edmonds-Szeider. On peut facilement vérifier que 2^k combinaisons possibles de l'ensemble P_i sont nécessaire. De cette façon, la complexité totale sera égale à $O(2^k p(n, m))$ où $p(n, m)$ est la complexité de la plus courte $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées définie précédemment.

5.4 Conclusion

Résumons les résultats de ce chapitre. Nous avons donné un résultat fondamental pour trouver une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées en se basant sur des transformations de graphes notamment les graphes que nous avons appelé le graphe d'Edmonds-Szeider et le graphe chaîne-marche. Ensuite, nous avons donné des algorithmes polynomiaux pour trouver la plus courte chaîne/marche proprement-arêtes-colorées et le plus court cycle proprement-arêtes-colorées. Dans les graphes sans cycles et/ou ni marches fermée proprement-arêtes-colorées, nous avons donné des résultats pour trouver en temps polynomial la plus longue chaîne/marche proprement-arêtes-colorées entre deux sommets donnés s et t . Aussi, avec un algorithme randomisé polynomial, nous avons trouvé une chaîne proprement-arêtes-colorées entre deux sommets donnés s et t et aussi une marche proprement-arêtes-colorées entre deux sommets donnés s et t . Enfin, nous avons montré que le problème des k paires de sommets interdits dans une $s - t$ chaîne proprement-arêtes-colorées (PPKFP) est NP -complet.

Dans le chapitre suivant, nous continuons dans la démarche de ce chapitre pour étudier les problèmes de décision associés au problème du nombre maximum de chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées (MPVDP) et au problème du nombre maximum de marches arêtes-disjointes proprement-arêtes-colorées (MPEDT).



CHAPITRE 6

K-chaînes/marches proprement-arêtes-colorées

S'il n'y a pas de solution, c'est qu'il n'y a pas de problème.

— proverbe Shadok

Le contenu de ce chapitre a été publié dans [ADFMMS07] en collaboration avec K. Ch. Das, L. Faria, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon et R. Saad. Soit k -PVDP et k -PEDT les problèmes de décision associés respectivement au problème du nombre maximum de chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées (MPVDP) et au problème du nombre maximum de marches arêtes-disjointes proprement-arêtes-colorées (MPEDT), *c.à.d.*, soient donnés un graphe c -arêtes-colorées G^c , deux sommets $s, t \in V(G^c)$ et un entier $k \geq 2$, nous voulons déterminer si G^c contient au moins k chaînes sommets-disjointes (respectivement, marches arêtes-disjointes) proprement-arêtes-colorées entre s et t . D'abord, dans le paragraphe suivant nous montrons que les deux problèmes k -PVDP et k -PEDT sont NP-complets même pour $k = 2$ et $c = O(n^2)$. En particulier, dans les graphes qui ne contiennent aucun cycle (respectivement, marche fermée) proprement-arêtes-colorées avec $c = O(n)$ couleurs, nous prouvons que k -PVDP (respectivement, k -PEDT) est NP-complet pour un certain $k \geq 2$. Ensuite, à la fin du chapitre, nous donnons quelques résultats d'approximation et des algorithmes polynomiaux pour des cas particuliers concernant à la fois le problème MPVDP et le problème MPEDT.

6.1 \mathcal{NP} -complétude dans des graphes quelconques

Dans le théorème 6.2 énoncé plus tard nous prouvons que 2-PVDP et 2-PEDT sont NP-complets pour les graphes 2-arêtes-colorées. Pour préparer la preuve de ce théorème, nous allons démontrer un résultat concernant les marches fermées orientées dans les graphes orientés.

Soient u et v deux sommets donnés dans un graphe orienté D . Décider si D contient ou pas un cycle orienté passant par les deux sommets u et v est connu comme étant NP-complet [FHW80]. Ici, nous allons appeler et noter ce problème par le problème des cycles orientés sommets-disjoints VDOC (*Vertex-Disjoint Oriented Cycle*). Dans le théorème suivant nous prouvons que décider si D contient ou non une marche fermée orientée passant par les sommets u et v est aussi NP-complet. Nous appelons et notons ce dernier problème par le problème de la marche fermée orientée arcs-disjoints ADOCT (*Arc-Disjoint Oriented Closed Trail*).

Théorème 6.1 *Le problème ADOCT est NP-Complet.*

┘

Preuve :

Le problème ADOCT appartient évidemment à la classe NP. Pour montrer que ADOCT est NP-complet, nous définissons une réduction à partir du problème suivant. Soient quatre sommets p_1, q_1, p_2 et q_2 dans D , nous espérons déterminer si ils existent deux marches orientées arcs-disjoints entre $p_1 - q_1$ et entre $p_2 - q_2$ dans D . Ici, ce problème sera nommé et noté le problème 2-marches arcs-disjoints 2-ADT (*2-Arc Disjoint Trail problem*). Comme il est prouvé dans [FHW80] le 2-ADT est NP-complet.

En particulier, soit donné un graphe orienté D , nous allons montrer comment construire en un temps polynomial un autre graphe orienté D' avec une paire de sommets u, v dans D' tels qu'ils existent 2-marches arcs-disjoints entre $p_1 - q_1$ et entre $p_2 - q_2$ dans D si, et seulement s'il existe une marche orientée fermée passante par les deux sommets u et v dans D' .

Avant de construire D' posons $S = \{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, $S' = \{p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ et $S'' = \{p''_1, p''_2, q''_1, q''_2\}$. L'idée est de faire «exploder» (ou disons transformer) d'une manière adéquate chaque sommet p_i (resp. q_i) dans S en deux nouveaux sommets p'_i et p''_i (resp. q'_i et q''_i) appartenant à S' et S'' , respectivement. Ainsi, nous avons :

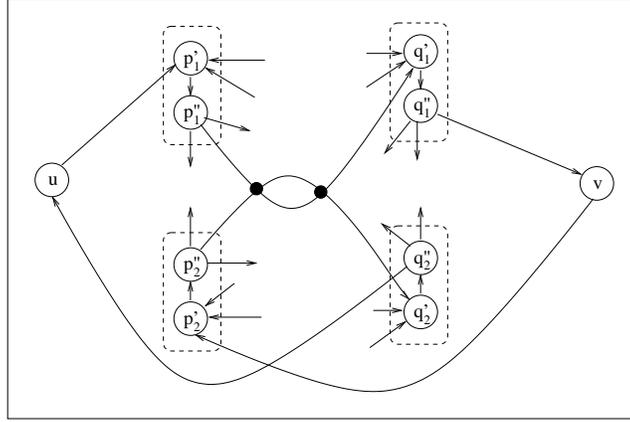
$$V(D') = (V(D) \setminus S) \cup S' \cup S'' \cup \{u, v\},$$

et

$$\begin{aligned} A(D') = & \left(A(D) \setminus \left\{ \bigcup_{x \in S} \{x\vec{y}, y\vec{x} : y \in N_D(x)\} \right\} \right) \cup \left(\bigcup_{x'' \in S''} \{x''\vec{w} : w \in N_D^+(x'')\} \right) \cup \\ & \cup \left(\bigcup_{x' \in S'} \{x'\vec{w} : w \in N_D^-(x')\} \right) \cup \{u\vec{p}'_1, p'_1\vec{p}''_1, p'_2\vec{p}''_2, q'_1\vec{q}''_1, q'_1\vec{v}, v\vec{p}'_2, q'_2\vec{q}''_2, q'_2\vec{u}\}. \end{aligned}$$

Avec les définitions en haut, considérons deux marches arcs-disjoints $p_1 - q_1$ et $p_2 - q_2$, soit T_1 et T_2 respectivement, dans D . Alors, il est facile de voir que la séquence :

$$T = (u, p'_1, p''_1, T_1, q'_1, q''_1, v, p'_2, p''_2, T_2, q'_2, q''_2, u)$$


 FIG. 6.1 – Réduction 2-ADT α ADOC

définie une marche fermée passant par u et v dans D' (voir figure 6.1).

Réciproquement, considérons une marche fermée passant par u et v dans D' . Notons que, nous avons exactement un arc sortant et un arc entrant incidents à u et v . Il s'en suit que, toutes les marches fermées passant par u et v , contiennent aussi tous les sommets de S' et S'' et chaque paire de sommets (p'_i, p''_i) et (q'_i, q''_i) , pour $i = 1, 2$, doivent être visités exactement une fois. Cela est possible si, et seulement si, nous avons une marche entre p'_1 et q''_1 , et p'_2 et q''_2 dans D' . Si nous éliminons $u, v \in D'$, et nous contractons toutes les paire de sommets (p'_i, p''_i) pour obtenir p_i , et (q'_i, q''_i) pour obtenir q_i , $i = 1, 2$, nous aurons 2 marches arcs-disjoints $p_1 - q_1$ et $p_2 - q_2$ dans D . \square

Maintenant, nous avons le résultat suivant :

Théorème 6.2 *Soit G^2 un graphe 2-arêtes-colorées et 2 sommets $s, t \in V(G^2)$. Alors, les problèmes 2-PVDP et 2-PEDT sont tous les deux NP-Complets.*

┘

Preuve :

Nous pouvons facilement savoir en un temps polynomial que les deux problèmes 2-PVDP et 2-PEDT sont dans NP. Pour montrer qu'ils sont NP-complets, nous proposons une réduction en temps polynomial des problèmes VDOC et ADOCT, respectivement. Considérons deux sommets u et v dans un graphe orienté D . Nous allons montrer comment construire, en un temps polynomial, un graphe 2-arêtes-colorées G^2 et une paire de sommets $a, b \in V(G^2)$, tels qu'il existe un cycle (respectivement, marche fermée) passant par u et v dans D si, et seulement s'ils existent 2 $a - b$ chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées (respectivement, 2 $a - b$ marches arêtes-disjointes proprement-arêtes-colorées) dans G^2 . Définissons, d'abord, à partir de D un autre graphe orienté D' en remplaçant u par deux nouveaux sommets s_1, s_2 avec $N_{D'}^-(s_2) = N_D^-(u)$,

$N_{D'}^+(s_1) = N_D^+(u)$. De même, remplaçons t_1, t_2 et $N_{D'}^-(t_2) = N_D^-(v)$, $N_{D'}^+(t_1) = N_D^+(v)$. Enfin, ajoutons les arcs (s_2, s_1) et (t_2, t_1) dans D' . Maintenant, pour définir G^c remplaçons chaque arc $\vec{x}\vec{y}$ de D' par un segment xzy où z est un nouveau sommet et les arêtes xz, zy sont colorées rouge et bleue, respectivement. Enfin, on définit $z = a$ pour z entre s_1 et s_2 , et $z = b$ pour z entre t_1 et t_2 . On observe maintenant qu'il y a un cycle sommet-disjoint (respectivement, marche fermée arcs-disjoints) contenant u et v dans D si, et seulement s'il existe deux $a - b$ chaînes sommets-disjointes (respectivement, $a - b$ marches arêtes-disjointes) proprement-arêtes-colorées dans G^2 . \square

Théorème 6.3 *Les problèmes 2-PVDP et 2-PEDT sont tous les deux NP-complets même pour les graphes avec $O(n^2)$ couleurs.*

└

Preuve :

Les problèmes 2-PVDP et 2-PEDT dans les graphes avec $O(n^2)$ couleurs sont évidemment dans la classe NP. Maintenant, soit un graphe 2-arêtes-colorées G^2 avec n sommets, on définit un graphe complet K_n^c avec toutes ses arêtes de couleurs différentes deux à deux et une arête supplémentaire xy avec $x \in V(K_n^c)$, $y \in V(G^2)$ et de couleur $c(xy) = c + 1$. Par conséquent, le nouveau graphe résultant G_α^{c+1} avec les arêtes $E(G_\alpha^{c+1}) = E(G^2) \cup E(K_n^c) \cup \{xy\}$ aura $n^2 + 1$ couleurs différentes et $2n$ sommets. Donc, $2s - t$ chaînes/marches proprement-arêtes-colorées dans G_α^{c+1} (avec $c = O(n^2)$ couleurs) correspondront aux 2 chaînes/marches proprement-arêtes-colorées dans G^2 (avec 2 couleurs) et vice-versa. Ainsi, d'après le théorème précédent (restreint à deux couleurs), on conclut que les problèmes 2-PVDP et 2-PEDT sont tous les deux NP-complets même pour les graphes avec $O(n^2)$ couleurs. \square

6.2 \mathcal{NP} -complétude dans les graphes sans cycles ni marches fermées tous proprement-arêtes-colorées

Maintenant, on prouve que k -PVDP et (respectivement k -PEDT) pour $k \geq 2$, sont NP-complets même pour les graphes 2-arêtes-colorées sans cycles ni marches fermées proprement-arêtes-colorées. On conclut ce paragraphe en généralisant ces résultats pour les graphes avec $O(n)$ couleurs.

Rappelons que, comme on a vu dans le chapitre 5, l'existence ou la non existence de cycles ou marches fermées dans les graphes arêtes-colorées peut être vérifiée en un temps polynomial. Notre preuve est basée sur quelques idées similaire à celles utilisées par Karp [K75] pour les chaînes sommets-disjointes entre k paires de sommets dans les graphes non-orientés et non-arêtes-colorées (ce problème est usuellement connu dans la littérature sous le nom de *k-linked problem*).

Théorème 6.4 *Soit G^2 un graphe 2-arêtes-colorées sans cycles ni marches fermées tous proprement-arêtes-colorées. Soient deux sommets s et t dans G^2 , décider s'il existe ou non deux $s - t$ chaînes sommets-disjointes (respectivement, deux $s - t$ marches arêtes-disjointes) proprement-arêtes-colorées dans G^2 est NP-complet.*

┘

Preuve :

Commençons d'abord par la version sommets-disjointes. Le problème (noté k -PVDP) est évidemment dans NP. Pour montrer que k -PVDP est NP-complet on construit une réduction utilisant le problème de satisfiabilité. On considère une expression booléenne $B = \bigwedge_{l=1}^k C_l$ dans la Forme Normale Conjonctive avec k clauses et n variables x_1, \dots, x_n . Nous allons montrer comment construire un graphe 2-arêtes-colorées $G^2(V, E)$ et deux sommets s, t et sans cycles proprement-arêtes-colorées, tel que si B est vraie, cela correspondra à k $s - t$ chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées dans G^2 , et réciproquement, k $s - t$ chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées dans G^2 impliquera que B est vraie. L'idée est de construire un ensemble de k source-puits s_l, t_l de sommets supplémentaires, chaque paire de sommets correspond à une clause C_l . Chaque variable x_j est associé à un graphe (*gril*) 2-arêtes-colorées G_j . Alors le graphe G^2 est obtenu en joignant adéquatement tous ces graphes (grils) entre eux et ajoutant, ensuite, deux nouveaux sommets s et t .

Supposons qu'on a la formule B , on considère une variable booléenne x apparaissant dans la forme positive dans les clauses i_1, i_2, \dots, i_p et dans la forme négative dans les clauses j_1, j_2, \dots, j_q . Chaque apparition de x dans la forme positive (négative) est associé à une chaîne horizontale $s_{i_a} - t_{i_a}$ (chaîne verticale $s_{j_b} - t_{j_b}$) dans le gril G_x telle que toutes les arêtes consécutives entre les sommets s_{i_a} et t_{i_a} pour $a = 1, \dots, p$ (respectivement, entre s_{j_b} et t_{j_b} pour $b = 1, \dots, q$) ont des couleurs différentes. Chaque $s_{i_a} - t_{i_a}$ chaîne proprement-arêtes-colorées a un sommet en commun avec chaque $s_{j_b} - t_{j_b}$ chaîne proprement-arêtes-colorées. On dit que le gril G_x satisfait la *propriété de blocage* s'il n'y a aucune chaîne proprement-arêtes-colorées entre s_{i_a} et t_{j_b} , ou respectivement, entre s_{j_b} et t_{i_a} pour un certain $a = 1, \dots, p$ et $b = 1, \dots, q$ (voir l'exemple de la figure 6.2). Dans la première étape, tous les grils G_{x_j} , $j = 1, \dots, n$, sont construits en satisfaisant la propriété de blocage. Notons que, plusieurs façons de colorer les arêtes de G_x en satisfaisant la propriété de blocage sont possible. On peut choisir n'importe laquelle.

Maintenant, on dira que l'ensemble des grils satisfassent la *contrainte des couleurs* si toutes les arêtes incidentes à s_l et t_l , $l = 1, \dots, k$, dans toutes les apparitions de s_l et t_l dans les différents grils, ont la même couleur. Tous les grils G_{x_j} pour $j = 1, \dots, n$, doivent être construits pour satisfaire la propriété du blocage et aussi la contrainte des couleurs. Ce pendant, notons que la contrainte des couleurs peut ne pas être vérifiée après la première étape. Pour résoudre ce problème, supposons sans perdre de généralité, que toutes les arêtes incidentes à s_l dans les grils doivent être rouges si l est impair, et bleues si l est pair. De même, supposons que toutes les arêtes incidentes à t_l (dans les grils) doivent être bleues si l est impair, et rouges si l est pair.

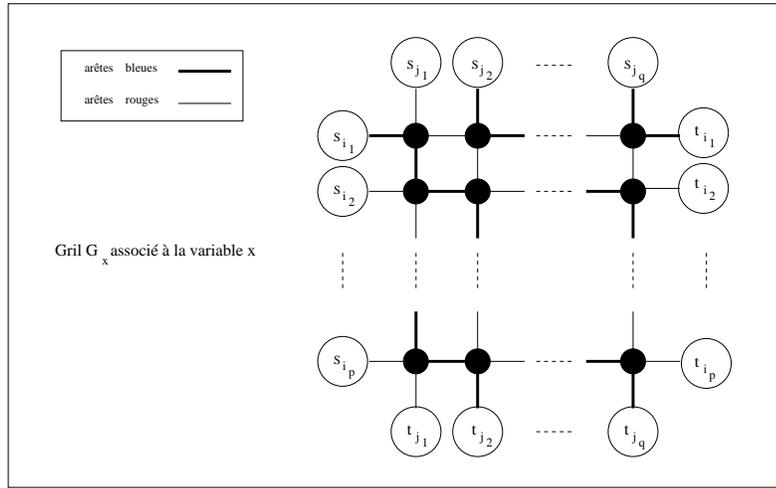


FIG. 6.2 – Propriété de blocage

Par conséquent, supposons que l'arête $s_l w$ (pour $w \in N_{G_{x_j}}(s_l)$) doit être *bleue*. Si $c(s_l w) = \textit{bleue}$ après la première étape, il y a rien à faire. Sinon, nous ajoutons un nouveau sommet p entre s_l et w et on fixe $c(s_l p) = \textit{bleue}$ et $c(pw) = \textit{rouge}$. Nous appliquons cette procédure pour chaque arête incidente à s_l (pour $l = 1, \dots, k$) dans les différents sous-graphes G_{x_j} pour $j = 1, \dots, n$. Enfin, nous répétons la même transformation pour chaque t_l et G_{x_j} avec $l = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n$. Notons que, à la fin de cette procédure, nous aurons tous les grils satisfaisants la propriété de blocage et aussi la contrainte des couleurs (voir figure 6.3(a)).

Maintenant, la totalité de la construction du graphe G^2 est faite en deux étapes. D'abord, nous identifions les s_l (respectivement, t_l) appartenant aux grils G_{x_j} , comme un seul sommet s'_l (respectivement, t'_l). Nous répétons cette procédure pour chaque $l = 1, \dots, k$. Soit G' ce nouveau graphe. Notons qu'à cause de la contrainte des couleurs, toutes les arêtes incidentes à s'_l (respectivement t'_l) dans G' doivent avoir la même couleur.

Dans la seconde étape, nous ajoutons une source s et une destination t , et des nouvelles arêtes ss'_l et $t'_l t$ pour $l = 1, \dots, k$. Par conséquent, pour construire k chaînes proprement-arêtes-colorées entre s et t dans ce nouveau graphe, toutes les arêtes ss'_l (respectivement $t'_l t$) doivent être colorées avec des couleurs différentes, autres que celles incidentes à s_l ou t_l dans G' (voir figure 6.3(b)). Soit G'' ce nouveau graphe.

Maintenant, notons que nous pouvons avoir $c(ss'_a) \neq c(ss'_b)$ (de même $c(t'_a t) \neq c(t'_b t)$) pour certains $a, b \in \{1, \dots, k\}$ avec $a \neq b$. En plus, par construction de nos grils, nous pouvons avoir une chaîne proprement-arêtes-colorées entre s'_a et s'_b dans un des grils, soit G_{x_j} pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$. Par conséquent, dans ce cas, nous pouvons avoir un cycle proprement-arêtes-colorées à travers s (ou t) dans G'' (ce qui n'est pas permis par hypothèse). Pour éviter cela dans la construction de G^2 , il suffit d'ajouter des sommets supplémentaires p_i entre s et s'_i (respectivement, des sommets supplémentaires q_i entre t et t'_i) et changer convenablement les couleurs des arêtes sp_i (respectivement $q_i t$) tels que les arêtes incidentes à s (respectivement t), aient la même couleur. De cette manière, le

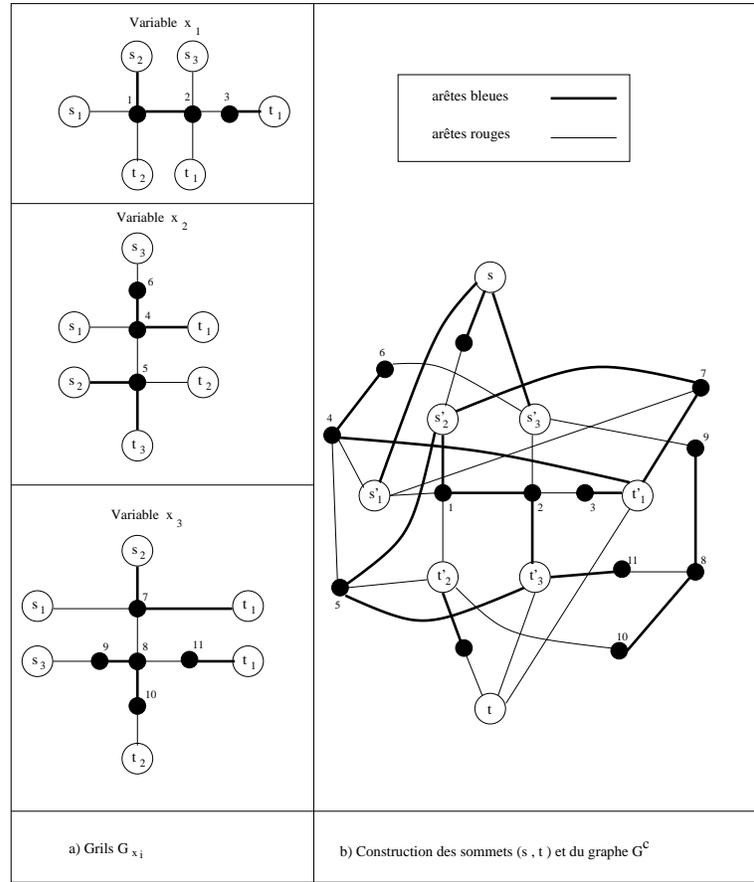


FIG. 6.3 – Réduction utilisant $B = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$. (a) Pour satisfaire la contrainte des couleurs, nous colorons toutes les arêtes incidentes à s_1, s_3, t_2 et t_1, t_3, s_2 , respectivement, avec le *rouge* et le *bleu*. (b) Pour construire G^2 nous ajoutons s et t , et 2 sommets supplémentaires. Toutes les arêtes incidentes à s et t sont *bleues* et *rouges* respectivement.

nouveau graphe résultant G^2 ne contiendra pas de cycles proprement-arêtes-colorées.

Ainsi, quand B est vraie, nous obtenons un ensemble de k $s-t$ chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées de la manière suivante. Si la variable x_j est vraie, on sélectionne la chaîne horizontale dans le gril G_{x_j} entre les sommets s_{i_a} et t_{i_a} (pour $a = 1, \dots, p$); si x_j est fausse, on sélectionne la chaîne verticale entre s_{j_b} et t_{j_b} (pour $b = 1, \dots, q$). Notons que, si x_j ou bien \bar{x}_j apparaît dans la clause C_l , et est vraie, nous avons une chaîne entre les sommets s'_l et t'_l dans G' (et par conséquent, entre s et t dans G^2). Par conséquent, si B est vraie, nous aurons k chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées entre s et t dans G^2 , chacune d'elles passe par s'_l et t'_l pour $l = 1, \dots, k$.

Réciproquement, on considère un ensemble de k $s-t$ chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées dans G^2 . On observe dans le gril G_{x_j} que, si nous avons une chaîne proprement-arêtes-colorées entre les sommets s_{i_a} et $t_{i_{a'}}$ pour $a \in \{1, \dots, p\}$ et $a' \leq a$,

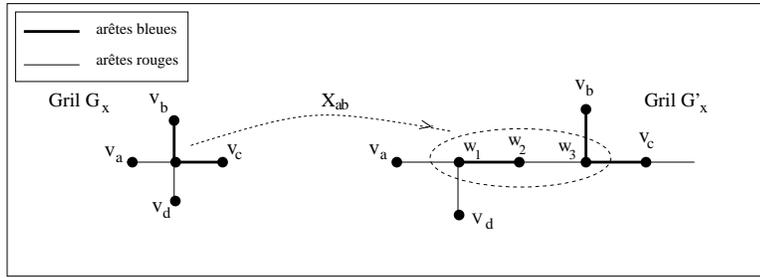


FIG. 6.4 – Transformation pour le problème k -PEDT.

la clause C_{i_a} et la variable x_j seront vraies. De même, si nous avons une chaîne entre s_{j_b} et $t_{j_{b'}}$ pour $b \in \{1, \dots, q\}$ et $b' \leq b$, la clause C_{j_b} sera vraie et la variable x_j sera fausse. Ainsi, k chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées correspondront aux k clauses vraies dans B . Par conséquent, pour un entier quelconque $k \geq 2$, nous avons prouvé que le problème k -PVDP est NP-complet dans un graphe 2-arêtes-colorées sans cycles proprement-arêtes-colorées.

Maintenant, nous nous retournons vers la version arêtes-disjointes (k -PEDT) de ce problème. Pour montrer que k -PEDT est NP-Complet, nous ne pouvons pas utiliser les mêmes arguments qu'en haut. Notons que, nous pouvons avoir 2 chaînes arêtes-disjointes proprement-arêtes-colorées entre s et t dans G^2 correspondants à une chaîne verticale et une chaîne horizontale dans un certain gril G_x . Autrement dit, nous pouvons avoir un sommet dans l'intersection des deux chaînes. Si cela arrive, nous ne pouvons pas déterminer la valeur de x dans B . Pour résoudre ce problème, il suffit de changer chaque sommet (représenté par X_{ab}) dans l'intersection des chaînes $s_{i_a} - t_{i_a}$ pour $a = 1, \dots, p$ (chaîne horizontale) et $s_{j_b} - t_{j_b}$ pour $b = 1, \dots, q$ (chaîne verticale) dans le gril G_x par 3 nouveaux sommets w_1, w_2 et w_3 comme il est décrit dans la figure 6.4.

En plus, supposons que les sommets v_a, X_{ab} et v_c appartiennent aux chaînes $s_{i_a} - t_{i_a}$ et les sommets v_b, X_{ab} et v_d appartiennent à la chaîne $s_{j_b} - t_{j_b}$ (dans G_x). En outre, sans perdre de généralité, on considère $c(v_a X_{ab}) = c(X_{ab} v_d) = \text{rouge}$ et $c(v_b X_{ab}) = c(X_{ab} v_c) = \text{bleue}$. Dans ce cas, nous transformons X_{ab} aux sommets w_1, w_2, w_3 et on fixe $c(w_1 w_2) = \text{bleue}$ et $c(w_1 w_3) = \text{rouge}$ (voir la figure 6.4). Notons que ce nouveau graphe à partir des grils, soit G'_x , satisfait la propriété de blocage et aussi la contrainte des couleurs. En plus, dans G'_x , si nous avons une chaîne entre s_{i_a} et t_{i_a} (pour un certain $a \in \{1, \dots, p\}$) passant par v_a et v_c , nous ne pouvons pas avoir une chaîne entre s_{j_b} et t_{j_b} (pour un certain $b \in \{1, \dots, q\}$) passant par v_b et v_d (sinon, les deux chaînes ne seraient pas arêtes-disjointes). Si nous répétons cette construction à chaque gril G_x dans G^2 (pour obtenir des nouveaux grils G'_x), on conclut que le problème k -PEDT est NP-complet dans les graphes sans cycles proprement-arêtes-colorées.

Enfin, pour généraliser ce résultat aux graphes 2-arêtes-colorées sans marches fermées proprement-arêtes-colorées, il suffit de répéter la construction précédente et remplacer une ou plus d'une arête quelconque $xy \in G^2$ par un segment arêtes-colorées xzy où z est un nouveau sommet entre x et y , et 2 sommets supplémentaires p, q avec les arêtes zp ,

pq et qz . Ces arêtes sont colorées de la manière suivante : $c(xy) = c(xz) = c(zy) = c(pq)$ et $c(xy) \neq c(zp) = c(qz)$. De cette manière, k $s - t$ marches arêtes-disjointes proprement-arêtes-colorées dans ce nouveau graphe G^2 (avec les couleurs *rouge* et *bleue*) seront associées à une combinaison vraie de B et vice versa. \square

Théorème 6.5 *Le problème k -PVDP (respectivement, k -PEDT) est NP-complet même pour les graphes avec $O(n)$ couleurs et sans cycles (respectivement, marches fermées) proprement-arêtes-colorées.*

┘

Preuve :

Le problème k -PVDP (respectivement, k -PEDT) dans les graphes avec n couleurs et sans cycles (respectivement, marches fermées) proprement-arêtes-colorées est évidemment dans la classe NP. Soient G^2 un graphe 2-arêtes-colorées sans cycles (respectivement, marches fermées) proprement-arêtes-colorées et deux sommets $s, t \in V(G^2)$. En utilisant G^2 , on construit un nouveau graphe G_α^c avec $c = n$ couleurs et sans cycles (respectivement, marches fermées) proprement-arêtes-colorées tel que k $s - t$ chaînes (resp. marches) sommets-disjointes (resp. arêtes-disjointes) dans G^c correspondent à k $s - t$ chaînes (resp. marches) sommets-disjointes (resp. arêtes-disjointes) dans G_α^c et vice versa.

D'abord, on considère un graphe complet $G_1 = K_n$ non arêtes-colorées. Choisissons un sommet quelconque $x \in V(G_1)$ et une couleur $c(xy) = 1$ pour chaque $y \in N_{G_1}(x)$. Soit $G_2 = G_1 \setminus \{x\}$ le nouveau graphe non-arêtes-colorées. Choisissons un nouveau sommet $x \in V(G_2)$ et une couleur $c(xy) = 2$ pour chaque $y \in N_{G_1}(x)$. Répétons la procédure précédente pour chaque graphe non-arêtes-colorées G_i pour $i = 1, \dots, n - 1$. Soit K_n^c avec $c = n - 1$, le graphe complet arêtes-colorées résultant. Évidemment, K_n^c ne contient ni cycles ni marches fermées proprement-arêtes-colorées. Enfin, ajoutons une nouvelle arête pq avec $p \in V(G^2)$, $q \in V(K_n^c)$ et une nouvelle couleur $c(pq) = n$. Notons, que le nouveau graphe G_α^c d'arêtes $E(G_\alpha^c) = E(G^2) \cup E(K_n^c) \cup \{xy\}$ ne contient ni cycles alternés ni marches fermées alternées et a n couleurs différentes. Par conséquent, d'après le théorème précédent (pour les graphes 2-arêtes-colorées), le problème k -PVDP (respectivement, k -PEDT) dans les graphes avec n couleurs et sans cycles (respectivement, marche fermées) proprement-arêtes-colorées est NP-complet. \square

6.3 Quelques approximations et résultats polynomiaux

Soient deux sommets s et t dans un graphe G^c nous voulons traiter le problème de trouver le nombre maximum des $s - t$ marches arêtes-disjointes proprement-arêtes-colorées - MPEDT (respectivement, le nombre maximum des $s - t$ chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées - MPVDP) dans G^c . Dans la suite, nous décrivons

une procédure gloutonne pour le problème MPEDT, basée sur la détermination des plus courtes $s - t$ marches proprement-arêtes-colorées. Son rapport de performance découle des mêmes arguments utilisés pour le problème des chaînes arêtes-disjointes entre k paires de sommets dans les graphes (non-orientés) [CK03, GKRSY99, K96]. On finira ce paragraphe en présentant quelques résultats polynomiaux pour des instances particulières des deux problèmes.

Algorithme 6.1 PROCÉDURE GLOUTONNE POUR LE PROBLÈME MPEDT

Input : Un graphe c -arêtes-colorées G^c et deux sommets s, t de G^c .

Output : Un ensemble X d'arêtes correspondant au nombre maximum possible de $s - t$ marches arêtes-disjointes proprement-arêtes-colorées.

début

- 1 $X \leftarrow \emptyset; E \leftarrow E(G^c)$
 - 2 **répéter**
 - 3 Utilisant Alg. 5.2 (chapitre 5), trouver la plus courte $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées T dans G^c ;
 - 4 $X \leftarrow X \cup E(T)$;
 - 5 $E(G^c) \leftarrow E(G^c) \setminus E(T)$;
 - 6 **jusqu'à ce que** (aucune $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées n'est trouvée);
- fin**
-

Maintenant, on considère les définitions suivantes : on dit qu'une marche T_1 *touche* une marche T_2 , ou bien, que T_2 est *touchée* par T_1 si, et seulement si, T_1 et T_2 ont une arête commune. Si Γ est l'ensemble de toutes les $s - t$ marches proprement-arêtes-colorées, on définit $I \subseteq \Gamma$ comme étant le sous-ensemble des marches obtenu par la procédure gloutonne et $J \subseteq \Gamma$ le sous-ensemble des marches associé à la solution optimale.

Théorème 6.6 *L'algorithme 6.1 a un rapport de performance égal à $O(1/\sqrt{m})$.*

┘

Preuve :

Soit $T \in \Gamma$ une marche quelconque dans G^c . On dit qu'une marche $T \in \Gamma$ est *courte* si $|E(T)| \leq \sqrt{m}$, et *longue* sinon. Par conséquent, pour une marche $T \in J_{long}$ nous avons $|E(T)| \geq (\sqrt{m} + 1)$ et $|J_{long}|(\sqrt{m} + 1) \leq m$. Ainsi, sans perdre de généralité, si on considère $|I| \geq 1$, il s'en suit que $|J_{long}| < \sqrt{m} < |I|\sqrt{m}$.

En plus, on peut dire que chaque marche $T_j \in J_{short} \setminus I$ est touchée par une marche $T_i \in I_{short}$, sinon (si $T_i \in I_{long}$) au moment où T_i a été choisie, T_j a été disponible et plus courte que T_i et devrait être trouvée par la procédure gloutonne. Ainsi, si T_i est la marche la plus courte qui touche T_j nous avons $|E(T_i)| \leq |E(T_j)| \leq \sqrt{m}$.

Maintenant, on observe que toutes les marches dans I_{short} ont au plus $|I_{short}|\sqrt{m}$ arêtes et chaque $P_j \in J_{short} \setminus I$ est touchée par au moins une arête de I_{short} . En outre, puisque toutes les marches T_j sont arêtes-disjointes, il s'en suit qu'aucune arête dans I_{short} ne peut toucher plus qu'une marche T_j . Ainsi, $|J_{short} \setminus I| \leq |I_{short}|\sqrt{m} \leq |I|\sqrt{m}$.

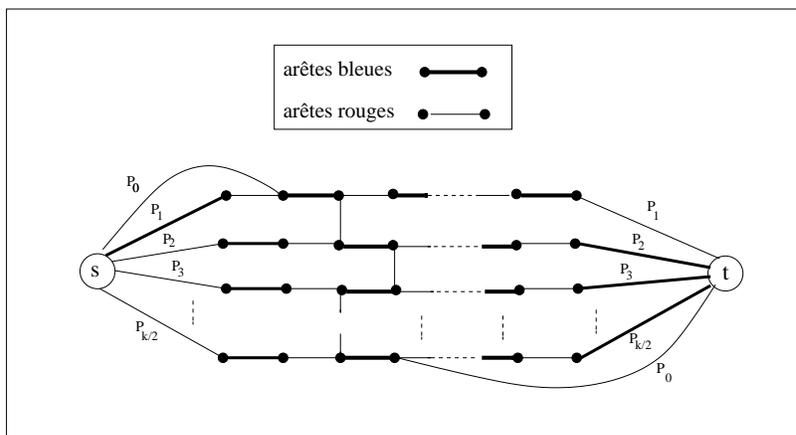


FIG. 6.5 – Soit G^2 un graphe 2-arêtes-colorées. On suppose $|E(T_i)| = k + 2$ pour $i = 1, \dots, k/2$. Le rapport entre l’algorithme 5.4 (chapitre 5) et la solution optimale est $2/k$.

Enfin, nous avons $|J| = |J_{short}| + |J_{long}| < |(J_{short} \setminus I) \cup I| + |I|\sqrt{m} \leq (2\sqrt{m} + 1)|I|$ ce qui garanti un rapport de performance de $O(1/\sqrt{m})$ pour le problème MPEDT. \square

Pour donner une idée sur la détermination de la valeur \sqrt{m} donnée ci-dessus, on suppose qu’une marche T_1 touche k chaînes de $J \setminus I_1$ à la première étape de l’algorithme 6.1. Notons qu’une arête de T_1 peut toucher au plus une autre chaîne de J et donc T_1 a une longueur au moins égale à k . Puisque T_1 est la plus courte $s - t$ marche, toutes les autres marches dans $J \setminus I_1$ ont aussi au moins k arêtes. Par conséquent, $k^2 \leq m$, donc $k = \sqrt{m}$. Cette idée peut être appliquée par induction pour les étapes qui restent dans la procédure gloutonne.

Dans la figure 6.5, on considère un graphe 2-arêtes-colorées G^2 avec $|E(T_i)| = k + 2$ pour $i = 1, \dots, k/2$. Dans ce cas, puisque $|E(T_0)| = k + 1$ (la plus courte $s - t$ marche), l’algorithme 6.1 va considérer d’abord T_0 , qui touche $k/2$ $s - t$ marches proprement-arêtes-colorées. Clairement, la solution optimale est obtenu en choisissant les marches $T_1, \dots, T_{k/2}$. Ainsi $2/k$ est le rapport entre la procédure gloutonne et la solution optimale tel que $k \leq \sqrt{m}$.

Nous nous tournons, maintenant, vers la version sommets-disjoints du problème ci-dessus. A savoir, trouver le nombre maximum de $s - t$ chaînes sommets-disjointes proprement-arêtes-colorées dans G^c . Nous pouvons facilement modifier l’algorithme 6.1 pour résoudre MPVDP. Dans ce cas, après la détermination de la plus courte $s - t$ chaîne P (à la place de la marche T), il suffit d’éliminer tous les sommets appartenant à $P \setminus \{s, t\}$. Nous appelons cette nouvelle procédure GLOUTONNE-VD. Utilisant les mêmes idées décrites dans le théorème 6.6, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 6.7 *La procédure Gloutonne-VD a un rapport de performance égal à $O(1/\sqrt{n})$ pour le problème MPVDP.*

┘

Nous terminons ce paragraphe avec quelques résultats polynomiaux pour des graphes particuliers. D'abord, nous introduisons la définition suivante : soit un graphe arêtes-colorées G^c , on dit qu'un cycle $C_x : xa_1 \cdots a_j x$ est un *cycle (marche fermée) presque proprement-arêtes-colorées à travers x dans G^c* si, et seulement si, $c(xa_1) = c(xa_j)$ et les deux $x - a_1$ et $x - a_j$ chaînes (respectivement marches) proprement-arêtes-colorées. Si $c(xa_1) \neq c(xa_j)$, alors C_x définit un *cycle (marche fermée) proprement-arêtes-colorées à travers x* . Dans la suite, nous montrons comment résoudre le problème MPVDP (MPEDT) en un temps polynomial pour les graphes sans cycles (respectivement, marches fermées) proprement-arêtes-colorées ou presque proprement-arêtes-colorées à travers s ou t . Notons que pour vérifier si un graphes arêtes-colorées G^c contient ou pas un cycle (marche fermée) proprement-arêtes-colorées ou presque proprement-arêtes-colorées à travers x , il suffit de définir un graphe G_x^c à partir de G^c en remplaçant x par deux nouveaux sommets x_a et x_b en posant $N_{G_x^c}(x_a) = N_{G^c}(x)$ et $N_{G_x^c}(x_b) = N_{G^c}(x)$. Maintenant, utilisant le théorème 5.2 (p. 90) (respectivement, le corollaire 5.3.1) on trouve, si possible, une $x_a - x_b$ chaîne (marche) proprement-arêtes-colorées dans G_x^c . Clairement, si une telle $x_a - x_b$ chaîne (marche) n'existe pas dans G_x^c , alors il n'existe pas de cycles (marches fermées) (presque) proprement-arêtes-colorées à travers x dans G^c .

D'abord, considérons la version de décision associée au problème MPVDP. Soit une constante $k \geq 1$, nous allons montrer comment construire une procédure polynomiale pour le problème k -PVDP dans le graphes sans cycles (presque) proprement-arêtes-colorées à travers s ou t .

Théorème 6.8 *On considère une constante $k \geq 1$ et un graphe c -arêtes-colorées G^c sans cycles (presque) proprement-arêtes-colorées à travers s ou t . Alors, le problème k -PVDP peut être résolu en un temps polynomial.*

┘

Preuve :

Supposons, sans perdre de généralité, que nous n'avons pas de cycles (presque) proprement-arêtes-colorées à travers le sommet s dans G^c . Notons que les marches fermées (presque) proprement-arêtes-colorées (avec des répétitions de sommets) à travers s sont permises. Pour $k = 1$, le problème peut être résolu en temps polynomial par l'algorithme d'Edmonds-Szeider. Pour $k \geq 2$, nous construisons un graphe supplémentaire non-arêtes-colorées G' de la façon suite. Comme on a fait dans le paragraphe 5.0.1 du chapitre 5, on définit d'abord $W = V(G^c) \setminus \{s, t\}$, et les graphe non-arêtes-colorées G_x pour chaque $x \in W$ (voir la définition 5.1 du graphe d'Edmonds-Szeider, p.90). Maintenant, soit $S_k = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T_k = \{t_1, \dots, t_k\}$ et procédons comme suit :

$$V(G') = S_k \cup T_k \cup \left(\bigcup_{x \in W} V(G_x) \right), \text{ et}$$

$$E(G') = \bigcup_{j=1, \dots, k} \left(\bigcup_{i \in I_c} \{s_j x_i \mid s x \in E^i(G^c)\} \cup \{x_i t_j \mid x t \in E^i(G^c)\} \right) \cup$$

$$\left(\bigcup_{i \in I_c} \{x_i y_i \mid x y \in E^i(G^c)\} \right) \cup \left(\bigcup_{x \in W} E(G_x) \right).$$

On trouve un couplage parfait M (s'il existe) dans G' et on contracte chaque sous-graphe G_x en un seul sommet x . Soit G'' ce nouveau graphe. On observe que toutes les chaînes dans G'' sont définies par des arêtes appartenant à $M \cap E(G'')$. En plus, on ne peut avoir une chaîne entre s_i et s_j dans G'' (sinon, nous devrions avoir un cycle (presque) proprement-arêtes-colorées à travers s dans G^c). De cette manière, toutes les chaînes dans G'' commencent au sommet $s_i \in S_k$ et finissent à certain sommet $t_j \in T_k$. Enfin, on construit un graphe non-arêtes-colorées G''' en contractons S_k et T_k respectivement aux sommets s et t . Notons que, les $s - t$ chaînes dans G''' sont associées aux $s - t$ chaînes proprement-arêtes-colorées dans G^c et vice-versa. Par conséquent, si la construction du couplage parfait M dans G' est possible (ce qui est faisable en temps polynomial), nous obtenons k $s - t$ chaînes proprement-arêtes-colorées dans G^c . \square

Puisque le problème du couplage parfait peut être résolu en un temps polynomial, nous pouvons facilement construire une procédure polynomiale pour le problème MPVDP dans les graphes sans cycles (presque) proprement-arêtes-colorées à travers s ou t . Pour faire cela, il suffit de répéter toutes les étapes décrites dans le théorème 6.8 pour $k = 1, \dots, n - 2$ jusqu'à avoir un certain graphe non-arêtes-colorées G' qui ne contient pas de couplages parfaits.

L'idée ci-dessus peut être généralisée pour le problème MPEDT dans les graphes sans marches fermées (presque) proprement-arêtes-colorées à travers s ou t . D'abord, considérons la version de décision associée à ce problème.

Théorème 6.9 *On considère une constante $k \geq 1$ et un graphe c -arêtes-colorées G^c sans marches fermées (presque) proprement-arêtes-colorées à travers s ou t . Alors, le problème k -PEDT peut être résolu en un temps polynomial.*

┘

Preuve :

Soit G^c , on construit le graphe chaîne-marche $p - H^c$ (comme il est décrit dans le paragraphe 5.0.1, p. 92) pour $p = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$. Notons qu'aucun sommet ne peut être visité plus de p fois dans G^c même s'il appartient à différentes $s - t$ marches proprement-arêtes-colorées. Pour voir cela, on considère un sommet $x \in G^c$ et une $s - t$ marche proprement-arêtes-colorées de longueur 2 qui passe par x , toutes les autres marches proprement-arêtes-colorées à travers x auront au moins 4 arêtes (chacune d'elles contient 2 nouveau sommets dans G^c).

Supposons, sans perdre de généralité, que nous n'avons aucune marche fermée (presque) proprement-arêtes-colorées qui passe à travers s dans G^c . Maintenant, utilisant le théorème 5.3, nous pouvons facilement prouver que G^c contient une marche (presque) proprement-arêtes-colorées qui passe à travers s si, et seulement si, H^c contient un (presque) proprement-arêtes-colorées qui passe à travers s' . Par conséquent, nous n'avons aucun cycle (presque) proprement-arêtes-colorées qui passe à travers s' dans H^c . Ainsi, d'après le théorème 6.8 on peut trouver (en un temps polynomial) k chaînes proprement-arêtes-colorées entre s'

et t' dans le graphe H^c . Maintenant, en contractant chaque sous-graphe H_{xy}^c dans H^c en une arête xy dans G^c nous obtenons k $s-t$ marches proprement-arêtes-colorées dans G^c . \square

Comme pour le problème MPVDP, pour faire une procédure polynomial pour le problème MPEDT, il suffit de répéter toutes les étapes ci-dessus (dans le théorème 6.9) pour $k = 1, \dots, n - 2$ jusqu'à avoir un certain graphe non-arêtes-colorées associé à H^c et qui ne contient aucun couplage parfait.

6.4 Conclusion

Résumons les résultats de ce chapitre. Nous avons montré que le problème ADOCT dans un graphe orienté est NP -complet et les problèmes 2-PVDP et 2-PEDT sont NP -complets dans un graphe avec 2 couleurs et aussi avec un nombre de couleurs égal à $O(n^2)$. Ensuite, nous avons montré que k -PVDP et (respectivement k -PEDT) pour $k \geq 2$, sont NP -complets pour les graphes 2-arêtes-colorées sans cycles ni marches fermées proprement-arêtes-colorées et nous avons généralisé ces résultats pour les graphes avec $O(n)$ couleurs. Nous avons, aussi, donné deux procédures gloutonnes pour les problèmes MPEDT et MPVDP avec un rapport de performance égal à $O(1/\sqrt{m})$ et à $O(1/\sqrt{n})$ respectivement. Et enfin, nous avons donné des algorithmes polynomiaux pour les problèmes k -PVDP et k -PEDT dans des instances particulières de graphes.

A la fin de ce document nous allons donner un problème très proche aux questions que nous avons traité dans ce chapitre et qui reste ouvert. Enfin, il est souhaitable, comme perspective, d'essayer de trouver des bons rapports d'approximation, éventuellement d'in-approximation, pour les problèmes MPVDP et MPEDT.



Perspectives et Conclusion

Je pense souvent qu'il devrait y avoir un signe typographique spécial pour désigner un sourire – une sorte de marque concave, une parenthèse renversée sur le dos, signe que j'aimerais pouvoir utiliser en réponse à votre question.

— Vladimir Nabokov

Voici venu le moment de mettre un terme à ce document. Mais pas à ce travail, inachevé comme il se doit. Conclusions, oui ; mais avant tout perspectives. Les graphes arêtes-colorées, malgré qu'ils étaient abordés depuis plus de trente ans, ils sont encore insuffisamment étudiés et exploités dans les applications. Nous donnons, sobrement, une liste des problèmes ouverts qui ne constituent qu'une brève synthèse des questions essentielles.

Dans la littérature

Problème 1 [M95] *Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées et deux sommets $s, t \in V(K_n^c)$. Pour deux entiers donnés, $m \geq 1, p \geq 1$, existe-t-il un algorithme polynomial pour trouver, dans K_n^c , un ensemble de p $s - t$ chaînes alternées sommets-disjoints telles que la somme de leurs longueurs soit au moins égale à m ?*

Problème 2 [M95] *Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées et deux sommets $s, t \in V(K_n^c)$. Existe-t-il un algorithme polynomial pour trouver le nombre maximum des $s - t$ chaînes alternées arêtes-disjointes dans K_n^c ?*

Problème 3 [M95] *Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées et deux sommets $s, t \in V(K_n^c)$. Pour deux entiers donnés, $m \geq 1, p \geq 1$, existe-t-il un algorithme polynomial pour trouver, dans K_n^c , un ensemble de p $s - t$ chaînes alternées sommets-disjoints telles que chaque couleur apparaît au moins m fois dans tous ces p chaînes ?*

Problème 4 [M95]

Instance: Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, avec l'ensemble des couleurs $I_c = \{1, 2, \dots, c\}$, p sommets distincts $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_p, t_p \in V(K_n^c)$ et un entier positif q .

Question: Existe-t-il, dans K_n^c , p chaînes alternées, d'extrémités $s_i - t_i$, $i : 1, \dots, p$, telles que chaque couleur apparaît au moins q dans chaque chaîne ?

Problème 5 [JG98] Déterminer les bornes supérieures b_1 et b_2 telles que si $K_{n,n}^c$ satisfait $\Delta(K_{n,n}^c) \leq b_1$ (resp. $\Delta(K_{n,n}^c) \leq b_2$), alors il admet un cycles hamiltonien alterné (resp. admet les cycles alterné de toutes les longueurs pairs).

Problème 6 [BMPS96] Soient x et y deux sommets données dans un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c , $c \geq 2$. Existe-t-il un algorithme polynomial pour trouver (si elle existe) une chaîne hamiltonienne proprement-arêtes-colorées entre x et y dans K_n^c ?

Problème 7 [CMMST93]

Instance: Soient K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, avec l'ensemble des couleurs $I_c = \{1, 2, \dots, c\}$ et $c \geq 4$, 3 sommets distincts $s, t, x \in V(K_n^c)$ et un entier positif q .

Question: Existe-t-il, dans K_n^c , une $s - t$ chaîne alternée qui passe par x et telle que chaque couleur apparaît au moins q fois ?

Conjecture 2 [CL05] Soient G^c un graphe c -arêtes-colorées et un entier $k \geq 3$. Supposons que $d^i(v) \geq k$ pour chaque couleur i et chaque sommets $v \in V(G^c)$. Alors G^c admet une chaîne hétérochromatique de longueur au moins égale à $k - 1$.

Conjecture 3 [AA07] Si $n > 2$ et K_{2n}^c est proprement-arêtes-colorées avec $c = 2n - 1$, alors l'ensemble des arêtes $E(K_{2n}^c)$ peut être partitionné en n arbres hétérochromatiques couvrant les sommets de K_{2n}^c .

Troisième chapitre

Problème 8 Soit x un sommet dans un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c , $c \geq 2$. Existe-t-il un algorithme polynomial pour trouver (si elle existe) une chaîne proprement-arêtes-colorées qui commence par x dans K_n^c telle que la couleur de la première arête soit donnée ?

Problème 9 Soient x, y deux sommets dans un graphe complet c -arêtes-colorées K_n^c , $c \geq 2$. Existe-t-il un algorithme polynomial pour trouver (si elle existe) une chaîne hamiltonienne proprement-arêtes-colorées entre x et y dans K_n^c telle que la couleur de la première ou la dernière arête (ou les deux, la première et la deuxième arête) soient données ?

Conjecture 4 Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées, $c \geq 2$. Si pour chaque sommet x , $d^i(x) \geq d \geq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, c\}$, alors G^c admet une chaîne proprement-arêtes-colorées de longueur $\min\{n - 1, 2cd\}$.

Conjecture 5 Soit G^c un graphe c -arêtes-colorées, $c \geq 2$. Si pour chaque sommet x , $d^i(x) \geq d \geq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, c\}$.

i) Si $c = 2$, G^c admet un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur $\min\{n, 2d\}$.

ii) Si $c = 3$, G^c admet un cycle proprement-arêtes-colorées de longueur $\min\{n, cd + 1\}$.

Conjecture 6 Le théorème 3.5 reste vrai si en remplace $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ par $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Conjecture 7 Soit K_n^c un graphe complet c -arêtes-colorées, $c \geq 3$. Si les sous-graphes de K_n^c induits par chaque couleurs sont tous régulier et ont le même degré, alors K_n^c a un cycle hamiltonien proprement-arêtes-colorées.

Quatrième chapitre

Conjecture 8 Le problème MST peut être résolu en temps polynomial dans un graphe arêtes-colorées sans cycle proprement-arêtes-colorées.

Conjecture 9 Dans un K^n , nous pouvons trouver, en temps polynomial, un m -arbres-cycles-proprement-arêtes-colorées.

Cinquième chapitre et Sixième chapitre

Problème 10 Soient G^2 un graphe 2-arêtes-colorées sans cycles proprement-arêtes-colorées, deux sommets $s, t \in V(G^2)$ et une constante $k \geq 2$. Existe-t-il, dans G^2 , k $s - t$ chaînes sommets/arêtes disjoints proprement-arêtes-colorées ?

Conclusion

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à des questions très diverses. Nous avons essayé dans un premier temps de caractériser des structures classiques telles que les chaînes et les cycles proprement-arêtes-colorées en jouant sur le paramètre du degré-couleur et ainsi sur la topologie des graphes. En suite, nous avons abordé des questions concernant les arbres couvrant arêtes-colorées par une approche algorithmique, de complexité et d'approximation. Nous avons, aussi, moyennant les transformations des graphes, pu résoudre une multitude de problème concernant les $s - t$ chaînes/marches proprement-arêtes-colorées, et ce, en proposant des algorithmes polynomiaux et des rapports d'approximation. Et enfin, nous avons traité algorithmiquement les problèmes de k chaînes/marches proprement-arêtes-colorées et nous avons proposé des résultats de NP -complétude et d'approximation.

Mais, il reste encore, beaucoup de labeur et de plaisir, de déconvenues et de trouvailles dans le monde des graphes arêtes-colorées. Ces années de thèse m'ont donné envie de continuer la visite de celui-ci ; j'espère que ces pages ont eu, lecteur, le même effet.



BIBLIOGRAPHIE

Dans l'ensemble, les livres furent son expérience.

— Henri Michaux

- [ADFKMMS06] A. Abouelaoualim, K. Ch. Das, W. Fernandez de la Vega, M. Karpinski, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon and R. Saad. *cycles and paths in edge-colored graphs with given degrees*. J. Graph Theory, Submitted.
- [ADFMMS07] A. Abouelaoualim, K. Ch. Das, L. Faria, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon and R. Saad, *Paths and Trails in edge-colored graphs*. Algorithmica, Submitted.
- [AMO93] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin. Network Flows : Theory, Algorithms and Applications. *Prentice Hall*, 1993.
- [AA07] S. Akbari and A. Alipour. *Multicolored Trees in complete graphs*. J. Graph Theory, **54** (2007) 221-232.
- [AFR05] M. Albert, A.M. Frieze and B.A. Reed. *Multicolored Hamilton cycles*. Electronic J. Combin. **2** (1995), Research Paper R10.
- [ABS91] N. Alon, R.A. Brualdi and B.L. Shader. *Multicolored forest in bipartite decompositions of graphs*. J. Comb. Theory Ser. **B53** (1991), 143-148.
- [AG97] N. Alon and G. Gutin. *Properly colored hamilton cycles in edge colored complete graphs*. Random Structures and Algorithms, **11** (1997) 179-186.
- [AYZ95] N. Alon, R. Yuster, and U. Zwick. Color-coding. *Journal of the ACM*, 42(4) :844-856, 1995.
- [AM90] D. Amar and Y. Manoussakis. *Cycles and paths of many lengths in bipartite digraphs*. J. Combin. Th. Ser. B, **50** (1990) 254-264.
- [A89] L.D. Andersen. *Long alternating cycles in properly edge colored complete graphs*. Mathematica scandinavica, (1989) 5-14.

- [AZ05] M. Andrews, L. Zhang. Hardness of Undirected Edge-Disjoint Paths Problem. *Technical Report*, Bell Laboratories, 2005.
- [AV79] D. Angluin and L.G. Valiant. *Fast probabilistic algorithms for hamiltonian circuits and matchings*. J. Comput. System Sci. **18** (1979) 155-193.
- [AUG00] J.-F. Augereau. Mathématiques : sept questions à 1 million de dollars. *Le monde*, page 28, 25 mai 2000.
- [BB68] M. Bánkfalvi and Z. Bánkfalvi. *Alternating Hamiltonian circuit in two-colored complete graphs*. Theory of Graphs (Proc. Colloq. Tihany 1968), Academic Press, New York, 11-18.
- [BMM99] E. Bampis, Y. Manoussakis and Y. Milis. *On the parallel complexity of the alternating hamiltonian cycle problem*. RAIRO on Operations Research, **33**(4) (1995) 421-437.
- [B98] O. Barr. *Properly coloured hamiltonian paths in edge coloured complete graphs without monochromatic triangles*. Ars. Combinatoria, **50** (1998) 316-318.
- [BMPS96] A. Benkouar, Y. Manoussakis, V.T. Paschos and R. Saad. On the complexity of some hamiltonian and eurlian problems in edge-colored complete graphs. *RAIRO - Operations Research*, **30**, 417-438, 1996.
- [BMS92] A. Benkouar, Y. Manoussakis and R. Saad. *Alternating cycles in 2-edge colored complete graphs*. Paris XI Orsay University. Internal Report, **nb 683** (1992).
- [BMS03] A. Benkouar, Y. Manoussakis, R. Saad. The number of 2-edge-colored complete graphs with unique hamiltonian proprement-arêtes-coloréescycle. *Discrete Mathematics*, **263**, **1-3**, 1-10, 2003.
- [Be87] C. Berge. *Graphes*. Gauthier Villars, (1987).
- [BE76] B. Bollobás and P. Erdős. Hamiltonian cycles *Israel Journal of Mathematics*. **23**, 126-131, 1976.
- [BRE74] R. Brent. *The parallel evaluation of general arithmetic expressions*. J. ACM **21** (1974) 201-206.
- [BH96] R.A. Brualdi and S. Hollingsworth. *Multicolored trees in complete graphs*. J. Comb. Theory Ser. B**68** (1996), 310-313.
- [BH01] R.A. Brualdi and S. Hollingsworth. *Multicolored forests in complete bipartite graphs*. Disrete Math. **240** (2001), 239-245.
- [BLWZ05] H.J. Broersma, X. Li, G.J. Woeginger, and S. Zhang. *Paths and cycles in colored graphs*. Australas. J. Combin. **31** (2005), 299-311.
- [CD76] C.C. Chen and E. Daykin. *Graphs with Hamiltonian cycles having adjacent lines different colors*. J. Combin. Th. (B) **21** (1976) 135-139.
- [CK03] C. Chekuri, S. Khanna. Edge disjoint paths revisited. In *Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pp. 628-637, 2003.

- [CKS03] C. Chekuri, S. Khanna, F.B. Shepherd. An $O(\sqrt{n})$ approximation an integrality gap for disjoint paths and unsplittable flow. In *Theory of Computing*, **2**, pp. 137-146, 2006.
- [C02] Gregory M. Constantine. *Multicolored parallelisms of isomorphic spanning Trees*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **5** (2002) 121-126.
- [CL05] He Chen and Xueliang Li. *Long heterochromatic paths in edge-colored graphs*. The Electronic Journal of Combinatorics, **12** no. 33 (2005).
- [CH92] A.G. Chetwynd and A.J.W. Hilton. *Alternating hamiltonien cycles in two colored complete bipartite graphs*. J. Graph Theory, **16** (1992) 153-158.
- [CMMST93] W.S. Chow, Y. Manoussakis, O. Megalakaki, M. Spyrtatos and Z. Tuza. *Paths through fixed vertices in edge-colored graphs*. Preprint U. de Paris-Sud, Orsay, L.R.I., no. 836, (1993).
- [COB64] A. Cobham. The intrinsic computational difficulty of functions. In Y. Bar-Hillel, editor, *Proceedings of the International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, pages 24–30. North-Holland, Amsterdam, 1964.
- [COB64] A. Cobham. The intrinsic computational difficulty of functions. In Y. Bar-Hillel, editor, *Proceedings of the International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, pages 24–30. North-Holland, Amsterdam, 1964.
- [COO71] S.A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In ACM, editor, *Conference record of third annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 151–158, New York, USA, 1971. ACM Press.
- [Di52] Dirac, G.A. *Some theorems on abstract graphs*. Proc. London Math. Soc., **2** (1952) 69-81.
- [D87] D. Dorniger. On permutations of chromosomes. In *Contributions of General Algebra*, **5**, 95-103, 1987.
- [D94] D. Dorniger. Hamiltonian circuits determining the order of chromosomes. *Disc. Appl. Math*, **50**, 159-168, 1994.
- [DT87] D. Dorniger, W. Timischl. Geometrical constraints on Bennett's predictions of chromosome order. *Heredity*, **58**, 321-325, 1987.
- [EDM65] J. Edmonds. Minimum partition of a matroid into independent subsets. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69(1):67–72, 1965.
- [ENR83] P. Erdős, J. Nešetřil and V. Rödl. *Some problems related to partitions of edges of a graph*. Graph and Other Combinatorial Topics, Teubner, Leipzig. (1983), 54-63.
- [ET90] P. Erdős and Z. Tuza. *Rainbow hamiltonian paths and canonically colored subgraphs in infinite complete graphs*. Math. Pannonica, **1**(1) (1990) 5-13.

- [EK75] S. Even et O. Kariv. *An $O(n^{2.5})$ algorithm for maximum matching in general graphs*. In proceedings of the 16th annual symposium on foundations of computer science, (Berkeley, 1975) 100-112.
- [FGLS93] R.J. Faudree, A. Gyárfás, L. Lesniak and R.H Schelp. *Rainbow coloring the cube*. J. Graph Theory, **7**(5) (1993) 607-612.
- [FGGGJR] J. Feng, H.-E. Giesen, Y. Guo, G. Gutin, T. Jensen and A. Rafiey. Characterization of edge-colored complete graphs with properly colored Hamilton paths. To appear in J. Graph Theory
- [FSW92] H. Fleischner, G. Sabidussi and E. Wegner. *Transforming eulerian trails*. Discrete Math. **109** (1992), 103-116.
- [FSz05] H. Fleischner and S. Szeider. *On Edge-colored graphs covered by properly colored cycles*. Graphs and Combinatorics, **21** no. 3 (2005) 301-306.
- [FHW80] S. Fortune, J. Hopcroft, J. Wyllie. The Directed Subgraph Homeomorphism Problem. *Theoretical Computer Science*, **10**, 111-121, 1980.
- [FR93] A.M. Frieze and B.A. Reed. *Polychromatic hamilton cycles*. Discrete Math. **118** (1993), 69-74.
- [FW98] H-L. Fu and D.E. Woolbright. *On the existence of rainbows in 1-factorization of K_{2n}* . J. Comb. Des., **6** (1998) 1-20.
- [G90] H.N. Gabow. Data structures for weighted matching and nearest common ancestors with linking. *Proceeding of the First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 321-325, New York, 1990.
- [GT91] H.N. Gabow, R.E. Tarjan. Faster scaling algorithms for general graph matching problems. *Journal of ACM*, **38**, pp. 815-853, 1991.
- [GMG86] Z. Galil, S. Micali, H.N. Gabow. An $O(EV \log V)$ Algorithm for Finding a Maximal Weighted Matching in General Graphs. *Network Models*, SIAM Journal on Computing, **V.15, N.1** (1986) 120-130.
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability, A guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman & Co., San Francisco, 1979.
- [G95] A.M.H. Gerards. Matching. *Network Models*, (M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma, and G.L. Nemhauser, editors) North Holland, Amsterdam, 1995.
- [GH60] A. Ghouila-Houri. *Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien*. C. R. Acad. Sci. Paris, 156 (1960) 495-497.
- [GH83] J. Grossman and R. Häggkvist. Cycles in Edge-Partitioned Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **34** (1983) 77-81.
- [G83] A. Gyárfás. *Vertex coverings by monochromatic paths and cycles*. J. Graph Theory, **7** (1983) 131-135.
- [GKRSY99] V. Guruswami, S. Khanna, R. Rajaraman, B. Shepherd, M. Yannakakis. Near-Optimal Hardness Results and Approximation Algorithms for Edge-Disjoint Paths and Related Problems. *Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1999) 19-28.

-
- [Ha97] J. Håstad. *Some optimal inapproximability results*. In Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, El Paso, Texas, (1997) 1-10.
- [HAG96] R. Häggkvist. A talk at Int. Combinatorics and Graph Theory. At Balaton, Hungary, July 15-19, 1996.
- [HM89] R. Häggkvist and Y. Manoussakis. *Cycles and paths in bipartite tournaments with spanning configurations*. *Combinatorica*, **9**(1) (1989) 33-38.
- [HALL36] P. Hall. *On representatives of subsets*. *J. London Math. Soc.* **10** (1936) 26-30.
- [HT86] G. Hahn and C. Thomassen. *Path and cycle sub-Ramsey numbers and edge-coloring conjecture*. *Discrete Math.* **62** 1 (1986), 29-33.
- [H90] A. J. W. Hilton. *Alternating Hamiltonian circuits in edge-coloured bipartite graphs*. *Discrete Applied Mathematics*, **35** (1990) 271-273.
- [HK87] T.C. Hu and Y.S. Kuo. Graph folding and programmable logical arrays. *Networks*, **17** (1987) 19-37.
- [JG97] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Paths and cycles in edge coloured multigraphs : a survey. *Discrete Mathematics*, 165-166, 39-60, 1997.
- [JG98] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Cycles and trails in 2-edge-coloured complete multigraphs. *Discrete Mathematics*, 188, 61-72, 1998.
- [JG02] J. Bang-Jensen, G. Gutin. *Digraphs : Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2002.
- [K75] R.M. Karp. On the Computational Complexity of Combinatorial Problems. *Networks*, **5**(1975) 45-68.
- [KAR72] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, New York, 1972. Plenum Press.
- [KKS02] A. Kaneko, M. Kano and K. Suzuki. *Three edge-disjoint Multicolored Spanning Tree in Complete Graphs*. preprint (2002).
- [K96] J.M. Kleinberg. *Approximation Algorithms for Disjoint Path Problems*. *PhD. Thesis*, MIT, 1996.
- [K68] A. Kotzig. *Moves without forbidden transitions in a graph*. *Math. Fyz. Časopis*. **18** (1968), 76-80.
- [LD96] R. Lassaigne and M. de Rougemont. *Logique et complexité*. Editions Hermès, Paris, 1996.
- [LEV73] L. Levin. Universal search problems (in russian). *Problemy Peredachi Informatsii*, 9(3):265–266, 1973. English translation in Trakhtenbrot, B. A. : A survey of Russian approaches to Perebor (brute-force search) algorithms. *Annals of the History of Computing*, 6: 384–400, 1984.
- [1LW06] Hao Li and Guanghi Wang. *Color degree and heterochromatic cycles in edge-colored graphs*. To appear, (2006).

- [2LW06] Hao Li and Guanghi Wang. *Color degree and heterochromatic cycles in edge-colored graphs*. To appear, (2006).
- [M95] Y. Manoussakis. Paths in Edge-Colored Complete Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **56** (1995) 297-309.
- [MST96] Y. Manoussakis, M. Spyratos and Z. Tuza. *Cycles of given color patterns*. J. of Graph Theory, **33**(4) (1996) 153-162.
- [MSTV96] Y. Manoussakis, M. Spyratos, Z. Tuza and M. Voigt. *Minimal coloring for properly colored subgraphs*. Graph and Combinatorics, **12** (1996) 345-360.
- [NW69] C.St.J.A. Nash-Williams. *Hamiltonian circuits in graphs and digraphs*. G. Chartrand and S. F. Kapoor, eds., The Many Facets of Graph Theory, (Springer, Berlin, 1969) 237-243.
- [P95] P.A. Pevzner. DNA physical mapping and properly edge-colored eulerian cycles in colored graphs. *Algorithmica*, **13** (1995) 77-105 .
- [P00] P.A. Pevzner. Computational Molecular Biology : An Algorithmic Approach. *MIT Press*, 2000.
- [RT92] V. Rödl and Z. Tuza. *Rainbow subgraphs in properly edge-colored graphs*. Random Struct. Algorithms, **3**(2) (1992) 175-182.
- [S96] R. Saad. Finding a longest properment-arêtes-coloréeshamiltonian cycle in an edge colored complete graph is not hard. *Combinatorics, Probability and Computing*, **5** (1996) 297-306.
- [Sch03] I. Schiermeyer. *Rainbow colouring*. Not. S. Afr. Math Soc., **34**(1) (2003) 51-59.
- [Sh82] P.W. Shor. *A lower bound for the length of a partial transversal in a Latin square*. J. Comb. Theory Ser., **A33** (2002) 1-8.
- [Su06] Kazuhiro Suzuki. *A Necessary and sufficient condition for the existence of a heterochromatic spanning tree in a graph*. Graphs and Combinatorics. **22** (2006), 261-269.
- [Sz03] S. Szeider. Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions. *Discrete Applied Mathematics*, **126/2-3**(2003) 239-251.
- [Sz04] S. Szeider. *On theorems equivalent with kotzig's result on graphs with unique 1-facteur*. J. of Ars Comb., **73** (2004).
- [T83] R.E. Tarjan. Data Structures and Network Algorithms. *SIAM - Philadelphia* 44 1983 .
- [WIL94] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. Preprint, 1994.
- [WIL95] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, 142:443-551, 1995.
- [Y97] A. Yeo. A Note on Alternating Cycles in Edge-coloured Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **69** (1997) 222-225 .