Contribution à l'étude du contrôle optimal stochastique

François Brodeau

N° D'ORDRE

THÈSES

présentées à

LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

François BRODEAU

1ère THÈSE : CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU CONTROLE OPTIMAL STOCHASTIQUE.

2e THÈSE : TRANSFORMATION DE FOURIER-CARLEMAN ET APPLICATION A LA MULTIPLICATIONS DES DISTRIBUTIONS

Thèses soutenues le 22 Octobre 1968 devant la commission d'examen

Monsieur KUNTZMANN	**Président**
Monsienr NEVEU	**Invité**
Monsieur BARRA	**Examinateur**
Monsieur BERTRANDIAS	**Examinateur**

FACULTE DES SCIENCES
de
GRENOBLE

LISTE des PROFESSEURS

DOYEN HONORAIRE : Monsieur MORET

DOYEN : Monsieur BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	HEILMANN René	Chimie Organique
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI O.	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT	Mathématiques
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	PILLET E.	Physique Industrielle et Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire Théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET R.	Electrotechnique
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER R.	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique

DREYFUS Bernard	Thermodynamique
KLEIN Joseph	Mathématiques
VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
ARNAUD Paul	Chimie
SENGEL Philippe	Zoologie
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
BRISSONNEAU P.	Physique
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme KOFLER Lucie	Botanique
DEGRANGE Charles	Zoologie
PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
RASSAT André	Chimie Systématique
DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
DODU Jacques	Mécanique Appliquée I.U.T.
ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
LACAZE Albert	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. GIDON P.	Géologie et Minéralogie
GIRAUD P.	Géologie
PERRET R.	Servomécanisme
Mme BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme SOUTIF J.	Physique
COHEN Joseph	Electrotechnique
DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
GASTINEL Noël	Mathématiques Appliquées
GLENAT René	Chimie
BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
COUMES André	Electronique
PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
ROBERT André	Chimie Papetière
BIAREZ Jean	Mécanique Physique
BONNET Georges	Electronique
CAUQUIS Georges	Chimie Générale
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
DEPOMMIER Pierre	Physique Nucléaire et Génie Atomique
HACQUES Gérard	Calcul Numérique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme KAHANE Josette	Physique
Mme BONNIER J.M.	Chimie
VALENTIN Jacques	Physique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. NAPP-ZINN	Botanique
RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
STANDING Kenneth	Physique Nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
	DEPORTES C.	Chimie
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques
	SARROT-REYNAULD J.	Géologie Propédeutique
	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean-Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEROWICZ	Physique
	BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées
	LAURENT P.	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
	LONGEQUEUE J.P.	Physique
	SOHM Jean-Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND F.	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie Végétale
	AUBERT Georges	Physique
	DELPUECH Jean-Jacques	Chimie Organique
	PFISTER Jean-Claude	Physique
	CHIBON P.	Biologie Animale
	IDELMAN S.	Physiologie Animale
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie Animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I.P.
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées I.P.
	MOREAU René	Hydraulique I.P.
	BRUGEL L.	Energétique I.U.T.
	SIBILLE R.	Construction Mécanique I.U.T.
	ARMAND Yves	Chimie I.U.T.
	BOLLIET Louis	Informatique I.U.T.
	KUHN Gérard	Energétique I.U.T.
	GERMAIN Jean-Pierre	Construction Mécanique I.U.T.
	CONTE René	Thermodynamique
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
Mlle	PIERY Yvette	Biologie Animale
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YAMADA O.	Physique du Solide
	NATR Lubomir	Biologie Végétale
	NAYLOR Arch	Physique Industrielle
	SILBER Léo	Radioélectricité
	NOZAKI Akihiro	Mathématiques Appliquées
	RUTLEDGE Joseph	Mathématiques Appliquées
	DONOHO Paul	Physique Générale
	EGGER Kurt	Biologie Végétale

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Kuntzmann, Directeur du Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Que Monsieur le Professeur Neveu, de la Faculté des Sciences de Paris, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et sa participation au Jury.

Monsieur le Professeur Barra, de la Faculté des Sciences de Grenoble, a inspiré et dirigé l'étude qui constitue cette thèse. Je le prie de croire à l'expression de ma sincère reconnaissance pour l'aide qu'il m'a constamment apportée par ses nombreux conseils, critiques et suggestions.

Je remercie très sincèrement Monsieur Bertrandias, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble, d'avoir accepté de participer au Jury et de m'avoir permis, en me proposant le sujet d'une deuxième thèse, d'enrichir mes connaissances.

TABLE DES MATIERES

N.B. Dans le cas où il est fait référence à un paragraphe appartenant à un autre chapitre, le numéro de ce paragraphe est précédé du chiffre romain correspondant à ce chapitre. Il en est de même pour les références à certains expressions ou équations.

Chapitre I

Problèmes de contrôle; introduction

I. Formulation empirique des problèmes étudiés

Depuis dix ans les problèmes de contrôle, dits aussi problèmes de contrôle optimal, ont connu un grand développement par suite de leurs nombreuses applications théoriques et pratiques.

Nous consacrons ce premier paragraphe à une description sommaire et très schématique de ce que nous entendons par problèmes de contrôle.

On étudie un système physique Σ sur un intervalle de temps T; l'état du système à l'instant t est représenté par une variable x(t). On peut contrôler l'évolution de Σ en prenant en chaque élément t d'un sous-ensemble T' de T une décision d(t) ; la donnée de d pour tout élément de T' représente une stratégie de contrôle . Il est inutile de préciser ici les espaces dans lesquels x et d prennent leurs valeurs.

Une distinction essentielle intervient alors dans l'étude du modèle.

- soit l'évolution de Σ est connue, par l'intermédiaire d'une équation dite d'évolution , lorsqu'une stratégie est choisie et que l'état initial de Σ est donné. Dans ce cas on est en présence d'un problème qualifié de problème déterministe.
- soit l'évolution de Σ est perturbée par un phénomène aléatoire représenté par un processus aléatoire Z(t); le choix d'une stratégie permet encore de déterminer x(t), mais dans ce cas , par suite de la présence de Z dans l'équation d'évolution, x(t) est aussi en général un processus stochastique.

Tout problème correspondant à ce cas est qualifié de problème stochastique.

Dans les deux cas l'adoption d'une stratégie d entraîne un coût ou critère fonction de d, du x correspondant, de t, et éventuellement de Z. Ce coût étant en fait une fonction de d, le problème général de la théorie du contrôle consiste à déterminer, sur une classe de stratégies applicables à Σ , une stratégie rendant minimal le coût correspondant.

Il est important d'insister sur les différences fondamentales existant entre les problèmes déterministes et stochastiques :

a) Une différence essentielle intervient d'abord dans la notion de stratégie ; Dans un problème déterministe l'évolution du système ne dépendant d'aucun phénomène aléatoire, les stratégies peuvent être déterminées à priori avant le déroulement de l'épreuve. Dans un problème stochastique de telles stratégies sont au contraire peu réalistes puisqu'elles ne tiennent pas compte des réalisations du processus Z(t). Afin de donner un caractère réaliste à la notion de stratégie, il est nécessaire d'utiliser des stratégies adaptées ; une stratégie adaptée est une stratégie dont les réalisations à chaque instant $t(t \in T')$ sont conditionnées par l'évolution de Σ avant l'instant t, en particulier par les valeurs prises par Z(u) pour : $u \leqslant t$. L'application à Σ d'une stratégie adaptée ne peut donc se faire qu'au fur et à mesure du déroulement de l'épreuve.

Il faut remarquer que cette notion, qui n'a de sens qu'en évolution stochastique, représente un net enrichissement du concept de stratégie et que l'on est ainsi conduit naturellement à utiliser des stratégies qui sont des processus aléatoires. Sur des exemples simples, il est d'ailleurs facile de constater l'amélioration apportée par l'utilisation de stratégies adaptées.

b) Dans le cas d'un problème stochastique le processus Z introduit un espace fondamental Ω dont les éléments sont notés ω. L'introduction du paramètre ω, en l'absence d'hypothèses concernant l'espace Ω, conduit, en général, à une nette complication des modèles mathématiques et nécessite souvent des hypothèses plus restrictives que dans le cas déterministe. Il semble ainsi difficile d'utiliser les supports géométriques utilisés pour certains problèmes déterministes et, d'autre part, des raisonnements propres au calcul des probabilités doivent être employés.

c) si le problème étudié fait intervenir un processus Z, ce processus est,en général, incomplètement déterminé. Ce manque de connaissance, dont il n'y a évidemment pas l'équivalent dans les problèmes à caractère déterministe, limite, de façon souvent importante, l'étendue des problèmes qui peuvent être traités. On est ainsi amené dans la suite à se limiter à certaines classes de stratégies et à des critères particuliers. Toutefois dans le cas où des paramètres inconnus interviennent, il semble intéressant et enrichissant d'essayer d'utiliser ou d'adapter des méthodes de la statistique mathématique.

Les problèmes auxquels nous nous sommes consacrés sont tous des problèmes stochastiques et se répartissent en deux catégories :

Problèmes discrets dans le cas où T' est constitué par une suite dénombrable d'éléments de T.

Problèmes continus dans le cas où T' est identique à T.

Les méthodes de résolution qui ont été proposées jusqu'ici reposent en grande majorité sur des techniques développées systématiquement par Bellman dans le cadre du "principe d'optimalité". Dans cette étude nous nous sommes surtout efforcés de dégager des méthodes différentes en étendant aux problèmes étudiés des résultats inspirés du "principe du maximum" de Pontryagin ; le principe du maximum donne, dans le cas de problèmes continus de type déterministe, et sous des hypothèses très générales, une condition nécessaire pour qu'une stratégie soit solution du problème posé. D'autre part, afin d'aboutir dans certains cas particuliers à des résolutions numériques effectives, nous avons utilisé des procédés algorithmiques basés sur des méthodes directes de recherche d'extrêma ; ces méthodes qui sont en fait des méthodes de gradient connaissent actuellement un développement assez considérable dans les applications.

La fin du chapitre I est consacrée à une formultation mathématique des problèmes . Dans les chapitres II et III sont énoncées et démontrées des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas de problèmes discrets et continus, respectivement.

Le chapitre IV développe des applications du chapitre III; dans la première partie de ce chapitre, on aborde la question de l'existence de solutions pour les problèmes posés. Enfin le chapitre V est consacré à l'étude de méthodes algorithmiques.

2. Formalisme des modèles à évolution discrète

Il existe de nombreuses présentations de modèles discrets. Pour une introduction et une justification de l'emploi des applications de transition qui interviennent dans les équations de récurrence dites de Bellman citons Fortet [1] . Nous nous inspirons ici d'un travail de Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz [2] pour dégager un formalisme général faisant appel à des notions classiques de la théorique de la décision statistique séquentielle.

Nous étudions un système Σ en une suite d'instants notés : 0, 1, ... n,...

Définition du processus Z : Z est une suite $\{Z_n\}$, n = 0, 1,..., d'éléments aléatoires ; Z_n prend ses valeurs dans un espace mesurable donné $(\mathcal{Z}_n, \mathcal{Z}_n)$, (n = 0,1,...).

Dans toute la suite, on désigne par $(\mathcal{Z}_{o,p}, \mathcal{Z}_{o,p})$ l'espace mesurable :

$$\left(\prod_{o}^{p} \mathcal{Z}_i \, , \, \bigotimes_{o}^{p} \mathcal{Z}_i \right) \qquad p = 1,2,...$$

La loi de Z dépend d'un paramètre inconnu θ prenant ses valeurs dans un espace mesurable donné $(\Theta , \mathcal{C})$ et est définie par une suite $\{P_n\}$ donnée (n = 0,1,...) de probabilités de transition.

$P_n (n \geq 1)$ est une probabilité de transition définie sur

$(\Theta \times \mathcal{Z}_{o,n-1}, \mathcal{C} \otimes \mathcal{Z}_{o,n-1})$ et $(\mathcal{Z}_n, \mathcal{Z}_n)$.

P_o est une probabilité de transition définie sur $(\Theta, \mathcal{C})$ et $(\mathcal{Z}_o, \mathcal{Z}_o)$. $P_n(\theta, z_o, \ldots, z_{n-1};\ )$ régit l'observation de Z_n dans $\mathcal{Z}_n$ lorsque θ est la valeur du paramètre et que $Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}$.

Evolution de Σ Soit :

$\{(\Xi_n, \mathcal{X}_n)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ une suite donnée d'espaces mesurables dits espaces des états successifs de Σ. On note $\{X_n\}$ la suite des états de Σ.

-$\{(\Delta_n, \mathcal{D}_n)\}$ $(n = 0,1,\ldots)$ une suite donnée d'espaces mesurables dits espaces des décisions. On note $\{D_n\}$ la suite de décisions appliquées à Σ.

- $\{h_n\}$ $(n = 0,1,\ldots)$ une suite donnée d'applications ; pour chaque valeur de n h_n est une application mesurables de $(\Xi_n \times \Delta_n \times \mathcal{Z}_n, \mathcal{X}_n \otimes \mathcal{D}_n \otimes \mathcal{Z}_n)$ dans $(\Xi_{n+1}, \mathcal{X}_{n+1})$.

La suite $\{h_n\}$ définit l'évolution de Σ lorsque le choix d'une stratégie a été fait et que la distribution de X_o est connue.

Définition des stratégies

Définition : une stratégie est une suite $\{S_n\}$ $(n = 0,1,)$ de probabilités de transition où, pour $n \geq 1$, S_n est une probabilité de transition définie sur $(\Xi_o \times \ldots \times \Xi_n \times \Delta_o \times \ldots \times \Delta_{n-1} \times \mathcal{Z}_o \times \ldots \times \mathcal{Z}_{n-1}, \mathcal{X}_o \otimes \ldots \otimes \mathcal{Z}_{n-1})$ et $(\Delta_n, \mathcal{D}_n)$, et S_o une probabilité de transition définie sur $(\Xi_o, \mathcal{X}_o)$ et $(\Delta_o, \mathcal{D}_o)$

Nous noterons $S = \{S_n\}$ une telle stratégie.

Définition du critère

Soit $\{g_n\}$ $(n = 0,1,\ldots)$ une suite donnée d'applications ; pour chaque valeur de n, g_n est une application mesurable au sens de Lebesgue de $(\Xi_n \times \Delta_n \times \mathcal{Z}_n \times \Theta, \mathcal{X}_n \otimes \mathcal{D}_n \otimes \mathcal{Z}_n \otimes \mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$.

$g_n(x_n, d_n, z_n, \theta)$ représente le coût affecté à l'intervalle de temps $(n, n+1)$ lorsque θ est la valeur du paramètre et que $X_n = x_n$, $D_n = d_n$, $Z_n = z_n$.

Si $S = \{S_n\}$ est la stratégie adoptée et si $\{D_n\}$ et $\{X_n\}$ sont respectivement les suites correspondantes des décisions et des états, on définit pour chaque valeur de n la quantité $C_{n,S}(\theta, X_o)$ par :

$$C_{n,S}(\theta, X_o) = \int_{\Delta_o} S_o(X_o; d\, D_o) \int_{\mathcal{Z}_o} P_o(\theta; d\, Z_o) \int_{\Delta_1} S_1(X_o, X_1, D_o, Z_o; d\, D_1)$$

$$\int_{\mathcal{Z}_1} P_1(\theta, Z_o \,; d\, Z_1) \ldots \int_{\Delta_n} S_n(X_o, \ldots, X_n, D_o, \ldots, D_{n-1}, Z_o, \ldots, Z_{n-1}; d\, D_n)$$

$$\int_{\mathcal{Z}_n} g_n(\theta, X_n, D_n, Z_n)\, P_n(\theta, Z_o, \ldots, Z_{n-1} \,; d\, Z_n)$$

Cette formule, dont le deuxième membre doit être lu de droite à gauche et n'a de sens que si l'on tient compte de ce que X_i, pour toute valeur positive de i, est fonction de X_{i-1}, D_{i-1}, Z_{i-1} par l'intermédiaire de l'équation d'évolution :

2,1) $$X_i = h_{i-1}(X_{i-1}, D_{i-1}, Z_{i-1})$$

définit le coût moyen sur l'intervalle $(n, n+1)$ correspondant au choix de S lorsque θ est la valeur du paramètre et X_o l'état initial de Σ.

Si P est une probabilité associée à $(\Xi_o, \mathcal{X}_o)$, on définit alors le <u>coût</u> $R_S(\theta)$, lorsque cette expression à un sens, de la façon suivante :

$$R_S(\theta) = \int_{\Xi_o} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,S}(\theta, X_o) \right\} P(d\, X_o)$$

Le problème étudié est celui de la minimisation, sur une classe C donnée de stratégies, de $R_S(\theta)$ relativement à certains critères classiques.

Ces considérations seront abordées au paragraphe 4.

Compte tenu des relations 2,1) qui lient les variables X_n, D_n, Z_n,X_{n+1} des présentations différentes peuvent être adoptées. En introduisant de nouvelles variables d'état, on peut ainsi formuler de façon plus concise la présentation ci-dessus.

Toutefois il semble préférable, pour les développements ultérieurs, de conserver explicitement les trois catégories d'éléments aléatoires que sont X_n, D_n, Z_n. Ces trois variables jouent en effet des rôles différents : si X_n est déterminée par la connaissance de l'évolution du système jusqu'au temps n-1, par contre Z_n est définie par une loi de probabilité conditionnelle au passé du processus Z et c'est finalement seulement par l'introduction de D_n que la possibilité de choix, donc la possibilité de modifier l'évolution de Σ , intervient. Nous avons donc adopté ce formalisme de préférence à un autre parce que, permettant de dégager le rôle des divers éléments définissant le comportement de Σ, il nous a paru le mieux adapté aux applications développées dans la suite, bien que, dans certains cas, un formalisme différent soit préférable.

Remarquons enfin que l'on peut, comme cela est fait dans [2] , mais au prix d'une complication des notations, faire dépendre, de plus, la loi de Z_n de $X_o,\dots,X_n$ et $D_o,\dots,D_n$.

3. Relation avec la théorie de la décision statistique séquentielle

La formalisme introduit au paragraphe précédent présente une certaine analogie avec le formalisme de la décision statistique séquentielle tel qu'il a été formulé par Wald [3]. Néanmoins, comme nous allons le montrer, les deux modèles ont en fait peu de points communs car les buts poursuivis sont nettement différents. Le but du statisticien est de réaliser une estimation du paramètre inconnu θ, ce qui est sans objet dans un problème de contrôle. Un problème de décision statistique séquentielle diffère d'un problème de contrôle, tel que nous l'avons défini , par les principaux points suivants :

Processus Z : Dans le problème statistique le déroulement au cours du temps du processus Z n'est pas imposé ; on opère au contraire par expérimentations successives, une expérimentation étant l'observation de certains éléments de la suite $\{Z_n\}$.

Nature des stratégies : Les stratégies utilisées par le statiticien diffèrent essentiellement des stratégies de problèmes de contrôle par l'emploi d'une règle d'arrêt et la possibilité de choisir à chaque étape les variables sur lesquelles vont porter l'expérimentation suivante; enfin ce n'est qu'en cas d'arrêt après une expérimentation qu'une décision terminale, concernant, en général, une hypothèse relative à la loi de Z, est prise.

Variables d'états : il n'y a pas d'équivalent de cette notion dans les problèmes de décision statistique, cette notion étant liée à la nature même des problèmes de contrôle. Remarquons d'ailleurs que l'introduction de ces variables entraîne une nette complication de certaines notions : ainsi le coût associé à l'intervalle de temps (n, n+1) est une fonction de la stratégie $S = \{D_i\}$ choisie et de $\{Z_i\}$ par l'intermédiaire des équations 2,1) ; ce que nous écrivons dans toute la suite de la façon suivante :

$$g_n(X_n, D_n, Z_n,\theta) = G_n(X_o, D_o,\ldots,D_n, Z_o,\ldots,Z_n,\theta) \qquad (n \geq 1)$$

Par contre dans les deux catégories de problèmes, il s'agit de minimiser un coût ou risque, fonction de θ et de la stratégie adoptée. C'est cette similitude qui permet de comprendre l'analogie existant entre les deux modèles. Ces deux modèles peuvent en effet s'interpréter comme des cas particuliers d'un Jeu à deux personnes de somme nulle. Ce résultat, classique pour la décision statistique depuis le travail de Wald déjà cité, se justifie de la même façon pour le formalisme de la théorie du contrôle : l'un des joueurs, symbolisant la nature, choisit la véritable valeur de θ, l'autre choisit une stratégie S dans une classe C donnée ; enfin $R_S(\theta)$ représente la valeur (pay-off en anglais) du jeu relative au choix de θ et S.

L'analogie que nous venons de constater ne doit pas masquer les différences importantes existant entre les deux formalismes et que nous avons résumées ci-dessus. Le modèle de la théorie mathématique des jeux, utilisé pour l'interprétation commune, permet en effet une grande liberté dans le choix des éléments définissant le jeu : espaces de stratégies, fonction de risque....

Toutefois ces considérations justifient l'introduction dans la théorie du contrôle séquentiel de notions usuelles en statistique et laissent prévoir qu'une certaine analogie puisse se développer au niveau de résultats généraux. Cet aspect est développé dans les paragraphes suivants.

Remarques :

1. On peut utiliser une règle d'arrêt dans le modèle défini au § 2.

Une règle d'arrêt est définie par la donnée d'une suite $\{\phi_n\}$ (n = 0,1..) d'applications telles que, pour toute valeur de n, ϕ_n soit une application mesurable au sens de Lebesgue de :

$$\left(\prod_{i=0}^{n} \Xi_i \prod_{i=0}^{n} \Delta_i \prod_{i=0}^{n} \mathcal{Y}_i, \bigotimes_{i=0}^{n} \mathcal{X}_i \bigotimes_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i \bigotimes_{i=0}^{n} \mathcal{Z}_i\right)$$

dans $[0,1]$.

ϕ_n représente la probabilité d'arrêter au temps n+1 le contrôle de Σ .
Si l'on définit la suite $\{\psi_n\}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \psi_n = (1 - \phi_o) \ldots (1 - \phi_{n-1}) . \phi_n & n \geq 1 \\ \psi_o = \phi_o \end{cases}$$

on peut définir un critère correspondant au choix de $\{\phi_n\}$ et S en calculant, pour toute valeur de n, par intégrations successives, ainsi qu'il est fait pour $R_S(\theta)$, l'intégrale de l'élément aléatoire :

$$\psi_n(X_o,\ldots,X_n,\ D_o,\ldots,D_n,\ Z_o,\ldots,Z_n)\sum_{i=0}^{n} g_i(X_i,\ Y_i,\ Z_i,\theta\ )$$

considéré comme fonction mesurable de X_o, $D_o,\ldots,D_n$, $Z_o,\ldots,Z_n$ par l'intermédiaire des relations 2,1).

Il n'est pas classique d'utiliser une règle d'arrêt en théorie du contrôle. Cette notion, tout à fait réaliste dans certains problèmes, complique notablement les modèles et nous n'en ferons pas usage dans la suite.

2. Sous certaines hypothèses simplificatives les modèles de contrôle et de décision statistique séquentielle sont les mêmes. Mais les modèles obtenus sont, dans un cas comme dans l'autre, pratiquement dénués d'intérêt.

4. Règles d'optimalité et problèmes étudiés

Pour le modèle discret défini au § 2, on introduit les notions suivantes :

- on définit d'abord un préordre, dit préférence, sur C en posant :

$$S \subset S' \qquad \text{si } R_S(\theta) \leqslant R_{S'}(\theta) \qquad\qquad \forall\ \theta \in \Theta$$

- une stratégie S est dite admissible si aucune stratégie ne peut lui être préférée strictement, c'est-à-dire si :

$$\forall \quad S' \in C \quad (S' \neq S) \quad \text{on a} \qquad R_S(\theta) \leqslant R_{S'}(\theta)$$

l'inégalité étant stricte pour au moins une valeur de θ.

- Une classe $\mathcal{S} \subset$ C de stratégies est dite <u>complète</u> si pour tout S n'appartenant pas à $\mathcal{S}$ il existe un élément S' de $\mathcal{S}$ qui lui est préférable.

- une stratégie S satisfait au <u>critère du minimax</u> si :

$$\sup_{\theta \in \Theta} R_S(\theta) \leq \sup_{\theta \in \Theta} R_{S'}(\theta) \qquad \forall \; S' \in C$$

- l'introduction d'une mesure μ sur Θ permet de définir les notions de <u>μ-préférence</u>, de stratégie <u>μ-admissible</u> et de classe <u>μ-complète</u>; la <u>μ-préférence</u> étant définie par :

$$S \subset S' \qquad \text{si } R_S(\theta) \leq R_{S'}(\theta) \qquad \mu\text{-presque partout sur } \Theta$$

- une stratégie S est dite <u>stratégie de Bayes</u> relatives à une mesure μ définie sur Θ si :

$$\int_{\Theta} R_S(\theta)\, \mu\,(d\theta) \leq \int_{\Theta} R_{S'}(\theta)\, \mu\,(d\theta) \qquad \forall \; S' \in C$$

Un nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, on définit de même:

- <u>ε-préférence</u> : S est ε-préférable à S' si

$$R_S(\theta) < R_{S'}(\theta) + \varepsilon \qquad \forall \; \theta \in \Theta$$

- <u>Classes ε-complètes</u>

- stratégies satisfaisant au critère du <u>ε-minimax</u> ; S satisfait à ce critère si :

$$\sup_{\theta \in \Theta} R_S(\theta) < \sup_{\theta \in \Theta} R_{S'}(\theta) + \varepsilon \qquad \forall \; S' \in C$$

- <u>ε-stratégie de Bayes</u> relativement à μ; S est une telle stratégie si:

$$\int_{\Theta} R_S(\theta)\, \mu\,(d\theta) < \int_{\Theta} R_{S'}(\theta)\, \mu\,(d\theta)$$

Les notions définies à ε près, outre le fait qu'elles nécessitent des hypothèses moins restrictives pour affirmer l'existence de stratégies ou de classes de stratégies vérifiant les conditions imposées, permettent d'envisager des solutions approchées de problèmes relatifs aux premières règles d'optimalité introduites.

Dans le cas important où θ est connu, si l'on note R_S le coût associé à une stratégie S, on se borne à utiliser la notion de stratégie optimale ainsi définie :

S est une stratégie optimale si : $R_S \leqslant R_{S'}$, $\forall$ $S' \in C$.

Le formalisme du paragraphe 2, joint aux règles d'optimalité définies ci-dessus, est suffisamment général pour contenir la plupart des exemples relevant des domaines suivants :

Programmation dynamique stochastique

Le modèle que nous venons d'exposer a en fait été conçu en tant qu'essai de généralisation des principaux modèles existant de programmation dynamique stochastique. Signalons que, dans le plupart des cas, ces modèles sont tels lque :

- Ξ_n, Δ_n, ζ_n sont pour toute valeur de n des espaces de type $\mathbb{R}^p$
- θ est connu
- on se limite à des stratégies certaines.

Parmi les exposés présentant un caractère de généralité citions Fortet [1] , Dvoretzky — Kiefer - Wolfowitz [2] et [4] . Depuis le modèle économique introduit par Arrow - Harris - Marschak [5] , de nombreux exemples pratiques ont été traîtés, ainsi dans Bellman [6] et Arrow-Karlin - Scarf [7] .

Processus de décision séquentielle de type Markovien

Ces processus de décision ont fait l'objet de nombreux exposés parmi lesquels nous citons Blackwell [8] , Howard [9] , Derman [10] ; ils appartiennent à la catégorie de problèmes que l'on peut définir schématiquement, dans un cas simple, de la façon suivante :

Un système Σ , qui peut prendre un nombre fini d'états notés $0,1,\ldots,k$, est observé en une suite $\{n\}$ d'instants ($n = 0,1,\ldots$).

Soit :

- A un ensemble fini de décisions
- $\{q_{s,\, s'}(a)\}$ une famille de nombres positifs définie pour

$$s,\ s' \in [0,1,\ldots k] \qquad\qquad a \in A$$

et telle que :

$$\sum_{s'=0}^{k} q_{s,s'}(a) = 1 \qquad\qquad \forall\ a \in A,\ \forall\ s \in [0,1,\ldots,k]$$

- $\{C_n(s,a)\}$ une famille de nombres définie pour :

$$n \in \mathbb{N}, \quad s \in [0,1,\ldots,\ k] \qquad\qquad a \in A$$

Une stratégie de décision est représentée par une famille $\{d_n(s,\ a)\}$ de nombres positifs définie pour :

$$n \in \mathbb{N}, \quad s \in [0,1,\ldots,k] \qquad\qquad a \in A$$

et telle que :

$$\sum_{a \in A} d_n(s,\ a) = 1 \qquad\qquad \forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \forall s \in [0,1,\ldots,k]$$

$d_n(s,\ a)$ est la probabilité conditionnelle que la décision a soit prise à l'instant n sachant que Σ est dans l'état s.

Pour chaque élément a de A la matrice stochastique $((q_{s,s'}(a)))$ représente la matrice des probabilités de passage de l'état s à l'instant n à l'état s' à l'instant n+1, et ceci quel que soit n.

Enfin $c_n(s,a)$ est le coût enregistré à l'instant n lorsque Σ est dans l'état s et que la décision a est prise.

Le problème consiste à rendre minimale, sur une classe donnée de stratégies, l'espérance mathématique de coût : $E\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(s,a)\right\}$ associée au choix de chaque stratégie.

Ce problème, qui se généralise à des processus de décision non markoviens, entre dans le cadre du formalisme du § 2 par introduction d'une suite auxiliaire de variables aléatoires. Il n'est pas possible, et ce serait d'ailleurs sans intérêt, de citer ici les nombreux problèmes pratiques qui relèvent de ce formalisme. Nous tenons seulement à faire remarquer que les problèmes de contrôle tels que nous les avons définis englobent des problèmes qui n'ont apparemment rien de commun avec eux.

5. Cas particuliers

On examine dans ce paragraphe sous quelles hypothèses on peut obtenir des résultats permettant de se limiter à des classes moins vastes de stratégies.

On suppose que, pour toute valeur de n, les espaces Ξ_n et Δ_n sont des sous-ensembles d'espaces de type $\mathbb{R}^k$ et on utilise les fonctions G_n introduites au § 3.

a. Classes complètes de stratégies non aléatoires

Soit C la classe des stratégies correspondant à un problème de contrôle, on désigne par C^* l'ensemble des stratégies pour lesquelles $R_S(\theta)$ existe quel que soit θ.

Le résultat suivant, obtenu sous des conditions fréquemment satisfaites dans les applications, permet de conclure à l'existence de classes complètes de stratégies non-aléatoires.

Propriétés 5.1 : Sous les hypothèses suivantes :

1. Δ_n, $n = 0,1,\ldots$, est un ensemble convexe, borné
2. pour toute valeur de n, quels que soient θ, X_o, $Z_o,\ldots,Z_n$, G_n est une fonction convexe par rapport à chaque variable D_i séparément $(i = 0,1,\ldots,n)$
3. Quel que soit $S = \{S_n\}$ élément de C, pour toute valeur de n, S_n est une probabilité de transition définie sur $(\mathcal{X}_{o,n-1}, \mathcal{Z}_{o,n-1})$ et $(\Delta_n, \mathcal{D}_n)$.

quel que soit S élément de C^* il existe une stratégie non aléatoire préférable à S.

Démonstration

Soit S élément de C^* , $S = \{S_n\}$

la stratégie non aléatoire S' définie par la suite :

$$\left\{ \int_{\Delta_n} D\, S_n(Z_o,\ldots, Z_{n-1} \,;\, dD \right\} \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

est élément de C d'après l'hypothèse de convexité des ensembles Δ_n. On montre que S' est préférable à S.

Soit $\{H_i^n\}$ et $\{H'^n_i\}$ $(i = 0,\ldots,n)$ les suites d'éléments aléatoires définies, pour chaque valeur de n, par :

$$H_n^n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_n,Z_o,\ldots,Z_{n-1}) = \int_{\mathcal{X}_n} G_n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_n,Z_o,\ldots,Z_n)P_n(\theta,Z_o\ldots,Z_{n-1};dZ_n)$$

$$H'^n_n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_n,Z_o,\ldots,Z_{n-1}) = H_n^n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_n,Z_o,\ldots,Z_{n-1})$$

et pour $0 \leq i \leq n-1$

$$H_i^n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_i,Z_o,\ldots,Z_{i-1}) = \int_{\mathcal{X}_i} P_i(\theta,Z_o,\ldots,Z_{i-1};d\ Z_i)$$

$$\int_{\Delta_{i+1}} H_{i+1}^n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_{i+1},Z_o,\ldots,Z_i)S_{i+1}(Z_o,\ldots,Z_i;Z_i;d\ D_{i+1})$$

$$H'^n_i(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_i,Z_o,\ldots,Z_{i-1}) = \int_{\mathcal{X}_i} P_i(\theta,Z_o,\ldots Z_{i-1};d\ Z_i)$$

$$H'^n_{i+1}(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_i,\int_{\Delta_{i+1}} D\ S_{i+1}(Z_o,\ldots,Z_i,d\ D),Z_o,\ldots,Z_i)$$

en remarquant que H_o^n et H'^n_o ne dépendant que de θ, X_o et D_o.

L'hypothèse : $S \in C^*$, assure l'existence, moyennant des restrictions portant sur des ensembles de mesure nulle, des suites $\{H_i^n\}$. L'existence des suites $\{H'^n_i\}$ découle des résultats suivants.

On montre en effet, par récurrence décroissante par rapport à i, que :

5,1) $$\left|\begin{array}{l} H_i^n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_i,Z_o,\ldots Z_{i-1}) \geq H'^n_i(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_i,Z_o,\ldots,Z_{i-1}) \\ \\ \forall\ \ \theta,X_o,D_o,\ldots,D_i,\ Z_o,\ldots,Z_{i-1} \end{array}\right.$$

et que quels que soient $\theta,Z_o,\ldots Z_{i-1}$, H'^n_i est une fonction convexe par rapport à chaque variable D_j séparément $(j = 0,1,\ldots,i)$.

La propriété de convexité découle de l'hypothèse 2. D'autre part le fait que les espaces Δ_n soient bornés entraîne que les vecteurs

$$\int_{\Delta_i} D\ S_n(Z_o,\ldots,Z_{n-1}\ ;\ d\ D)$$

sont de norme euclidienne finie, quels que soient $Z_o,\ldots,Z_n$.

On peut donc appliquer l'inégalité de Jensen à H'^n_i :

$$\int_{\Delta_i} H'^n_i(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_i,Z_o,\ldots,Z_{i-1})\, S_i(Z_o,\ldots,Z_{i-1};\, d\, D_i) \geq$$

$$H'^n_i(\theta,X_o,D_o,D_{i-1},\int_{\Delta_i} D_i\, S_i\, (Z_o,\ldots,Z_{i-1};d\, D_i),Z_o,\ldots,Z_i)$$

Si on suppose vérifiée l'inégalité 5,1), on déduit de l'inégalité précédente et de la définition de la suite $\{H^n_j\}$ que l'inégalité 5,1) est vérifiée au rang i-1.

L'inégalité 5,1) appliquée à H^n_o et H'^n_o permet alors de montrer que :

$$\forall\, n \qquad C_{n,S}(\theta,X_o) \geq C_{n,S'}(\theta,X_o) \qquad \forall\, \theta,\, X_o$$

d'où l'on déduit le résultat cherché :

$$R_S(\theta) \geq R_{S'}(\theta) \qquad \forall\, \theta$$

Remarques :

1. Lorsque la classe C ne vérifie pas l'hypothèse 3 et qu'on utilise la notion plus générale de stratégie définie au § 2, le raisonnement ci-dessus n'est plus valable.

2. L'hypothèse imposée aux ensembles Δ_n d'être bornés peut être supprimée dans le cas où les fonctions G_n satisfont à des conditions du type suivant : G_n augmente indéfiniment lorsque la norme de $D_i (0 \leq i \leq n)$ augmente indéfiniment. Comme dans [11] on peut en effet encore utiliser l'inégalité de Jensen. Nous omettons ces conditions qui ne sont pas formulables simplement. Remarquons enfin que si de telles conditions ne sont pas vérifiées ou si les ensembles Δ_n ne sont pas bornés on peut construire des exemples simples, [11], où il n'existe pas de stratégie non aléatoire préférable à certaines stratégies.

Cas particulier : l'hypothèse 2 est réalisée dans le cas particulier suivant, important dans la pratique :
pour toute valeur de n, $g_n(\theta, X_n, D_n, Z_n)$ est, quels que soient θ et Z_n, une fonction convexe par rapport à X_n et D_n séparément

$h_n(X_n, D_n, Z_n)$ est une fonction de la forme :

$$\alpha_n(Z_n)\, X_n + \beta_n(Z_n)\, D_n + \gamma_n(Z_n)$$

En l'absence de conditions de convexité et dans le cas de stratégies du type le plus général on peut utiliser le résultat classique de Dvoretzky Wald et Wolfowitz : théorème 5.2. de [12] . Ce résultat tout à fait général de la théorie de la décision statistique séquentielle s'étend en effet, comme Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz l'ont remarqué, aux problèmes séquentiels de contrôle. Il n'est malheureusement utilisable que dans le cas où les espaces $\Delta_n (n = 0,1,\ldots)$ et Θ ne contiennent qu'un nombre fini d'éléments.

Il semble difficile d'énoncer des conditions moins restrictives permettant d'affirmer que la classe des stratégies certaines est complète. Dans [12] on présente des exemples simples pour lesquels il n'existe pas de stratégie certaine admissible ; des propriétés de compacité, par exemple pour l'ensemble des distributions possibles de $\{Z_i\}$, ne suffisent pas à entraîner l'existence, pour toute stratégie aléatoire, d'une stratégie certaine ε-préférable.

b. Statistiques exhaustives

Soit $(\Gamma_n, \mathcal{G}_n)$ $(n = 0,1,\ldots)$ une suite donnée d'espaces mesurables et $\{T_n\}$ une suite de statistiques telle que, pour toute valeur de n, T_n soit une application mesurable de $(\mathcal{X}_{o,n}, \mathcal{Z}_{o,n})$ dans $(\Gamma_n, \mathcal{G}_n)$.

On dit que la suite $\{T_n\}$ est une suite exhaustive de statistiques si, pour toute valeur de n, T_n est une statistique exhaustive.

Etant donnée une suite $\{T_n\}$ de statistiques, une stratégie $\{S_n\}$ est dite basée sur $\{T_n\}$, si, quel que soit n supérieur ou égal à 1, S_n est une probabilité de transition définie sur $(T_{n-1}, \mathcal{G}_{n-1})$ et $(\Delta_n, \mathcal{D}_n)$. Dans le cas où on se limite à une classe de stratégies satisfaisant à l'hypothèse 3 formulée dans la proposition 5.1, on peut envisager le problème de l'existence de classes complètes de stratégies basées sur une suite exhaustive $\{T_n\}$ donnée. Dans la théorie de la décision statistique séquentielle, voir [13] par exemple, ce problème est résolu en montrant que, sous certaines hypothèses, quelle que soit la stratégie $S = \{S_n\}$, il existe une stratégie $S' = \{S'_n\}$ adaptée à $\{T_n\}$ pour laquelle $R_S(\theta) = R_{S'}(\theta)$, $\forall\ \theta \in \Theta$.

Si on note $\mathcal{Z}'_{o,n}$ la σ-algèbre engendrée dans $\mathcal{Z}_{o,n}$ par T_n $(n = 0,1,\ldots)$ la suite $\{S'_n\}$ est définie de la façon suivante : pour toute valeur de n supérieure ou égale à 1, S'_n est, quels que soient D_n et θ, l'espérance mathématique de S_n conditionnelle à $\mathcal{Z}'_{o,n-1}$ pour la loi de probabilité sur $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ correspondant à θ.

Dans le cas des modèles de contrôle que nous étudions cette méthode ne permet pas, en général, de conclure à l'existence d'une classe complète de stratégies basées sur une suite exhaustive $\{T_n\}$. Ceci est dû à la façon fort complexe dont G_n, dans la plupart des exemples, dépend de $D_o,\ldots,D_n$, $Z_o,\ldots Z_n$. Toutefois dans les deux cas particuliers suivants :

- $$\int_{\Delta_n} G_n(\theta,X_o,D_o,\ldots,D_n,Z_o,\ldots Z_n)\ P_n(\theta,Z_o,\ldots,Z_{n-1}\ ;\ d\ Z_n)$$

dépend uniquement de $Z_o,\ldots,Z_{n-1}$ par l'intermédiaire de T_{n-1}.

- G_n se présente comme la somme de deux fonctions dont l'une dépend uniquement de $\theta,X_o,D_o,\ldots,D_n$ et l'autre de $\theta,Z_o,\ldots Z_n$, on peut envisager d'utiliser avec succès la méthode employée en statistique , méthode basée sur la propriété fondamentale des espérances mathématiques conditionnelles , [12] et [13] .

Il suffit de considérer des exemples simples où l'une des deux conditions précédentes n'est pas satisfaite pour comprendre qu'en général le problème posé n'a pas de sens.

Il semble que les seuls exemples, correspondant à d'authentiques problèmes de contrôle où la méthode s'applique, sont ceux où les fonctions h_n et g_n sont de la forme :

5,2)
$$g_n = a_n(\theta)\, X_n + b_n(\theta, D_n) + C_n(\theta, Z_n)$$
$$h_n = \alpha_n X_n + \beta_n(D_n) + \gamma_n(Z_n)$$

Dans ce cas G_n est de la forme :

$$G_n = \sum_{i=0}^{n} K_i^n(\theta, D_i) + \sum_{i=0}^{n} L_i^n(\theta, Z_i) + \lambda^n(\theta)\, X_o$$

Si pour toute application mesurable au sens de Lebesgue Y de $(\mathcal{Z}_{o,n-1}, \mathcal{D}_{o,n-1})$ dans $\mathbb{R}$ on note, correspondant à chaque élément θ de Θ, $E_\theta[Y]$ l'expression :

$$\int_{\mathcal{Z}_o} P_o(\theta\ ; dZ_o) \ldots \int_{\mathcal{Z}_{n-1}} Y\, P_{n-1}(\theta, Z_o, \ldots, Z_{n-2}\ ; d\, Z_{n-1})$$

lorsque Y est intégrable ; $C_{n,S}(\theta, X_o)$ s'écrit, pour un élément S de C^*

$$C_{n,S}(\theta, X_o) = \mu^n(\theta) + \lambda^n(\theta) + \sum_{i=0}^{n} E_\theta\Big[\int_{\Delta_i} K_i(\theta, D_i) S_i(Z_o, \ldots, Z_{i-1}\ ; d\, D_i)\Big]$$

où $\mu^n(\theta)$ et $\lambda^n(\theta)$ sont des fonctions de θ indépendantes de S.

De la définition de S'_i on déduit immédiatement :

$$E_\theta\Big[\int_{\Delta_i} K_i(\theta, D_i)\, S_i\, (Z_o, \ldots, Z_{i-1}; d\, D_i)\Big] = E_\theta\Big[\int_{\Delta_i} K_i(\theta, D_i) S'_i(T_{i-1}\ ; d\, D_i)\Big]$$

d'où $C_{n,S}(\theta, X_o) = C_{n,S}\,(\theta, X_o))$ $\qquad \forall\ n$

et $\qquad R_S\ (\theta) = R_{S'}(\theta) \qquad \forall\ \theta \in \Theta$

Donc si g_n et h_n sont de la forme 5,2),à toute stratégie S appartenant à C^* correspond une stratégie S' basée sur $\{T_n\}$ telle que :

$R_S(\theta) = R_{S'}(\theta) \quad , \quad \forall\, \theta \in \Theta$

Remarque : dans le cas où les fonctions $K_i^n\ (\theta, D_i)$ sont de plus convexes par rapport à D_i, des résultats analogues au théorème de Rao-Blackwell, dans le cas séquentiel, peuvent êtres obtenus. Ceci est par exemple le cas si les fonctions $b_n(\theta, D_n)$ sont convexes par rapport à D_n et si les fonctions $\beta_n(D_n)$ sont des applications linéaires.

Comme il ne semble pas que des méthodes particulières puissent être employées pour les problèmes de contrôle nous n'envisagerons plus dans la suite la question de l'utilisation de statistiques exhaustives, les modèles où les conditions 5,2) sont satisfaites s'avérant sans grand intérêt pour les développements ultérieurs.

6. Problèmes discrets effectivement étudiés au chapitre II

Nous commençons par indiquer sous quelles hypothèses on peut formuler des théorèmes d'existence de solutions découlant des résultats obtenus par Wald, [3] , dans l'étude des jeux de somme nulle.

a. Existence de solutions

Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz dans [2] ont énoncé des hypothèses qui permettent l'application des résultats de Wald. Nous énonçons ces hypothèses dans le cadre de notre formalisme. Une métrique est d'abord introduite dans l'espace Θ en posant :

$$\rho(\theta, \theta') = \sup_{S \in C} \left| R_S(\theta) - R_S(\theta') \right|$$

Cette définition permet des distances infinies ; mais ce cas est éliminé grace aux conditions imposées par la suite. Θ est alors muni de la σ-algèbre $\mathcal{C}$ de Borel engendrée par les ensembles ouverts pour la métrique associée à ρ.

On formule les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse I : il existe une constante K positive telle que :

$$R_S(\theta) \leq K \qquad \forall\ \theta \in \Theta\ ,\ \forall\ S \in C$$

Hypothèse II : l'espace Θ est conditionnellement compact pour la métrique définie par ρ .

On rappelle qu'un espace $\mathcal{H}$ est conditionnellement compact pour une métrique, si toute suite infinie d'éléments de $\mathcal{H}$ contient une suite partielle qui est une suite de Cauchy pour la métrique considérée.

Dans le cas d'un nombre fini de périodes, on remplace l'hypothèse I par : il existe une constante K positive telle que :

$$\int_{\mathcal{X}_o} C_{n,S}(\theta,X_o)\ P\ (d\ x_o) \leq K \qquad \forall\ \theta \in \Theta\ ,\ \forall\ S \in C\ ,\ \forall\ n\ [0,1,\ldots N]$$

L'hypothèse II peut être notablement allégée dans le cas fréquemment rencontré où les fonctions g_n ne dépendent pas de θ . Cette hypothèse peut en effet être remplacée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse II' : Θ est conditionnellement compact pour la métrique :

$$\rho_1(\theta,\theta') = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sup \int_{\mathcal{X}_n} |P_n(\theta,Z_o,\ldots,Z_{n-1}\ ;\ d\ Z_n) - P_n(\theta',Z_o,\ldots,Z_{n-1}\ ;\ d\ Z_n)|$$

La borne supérieure est prise sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{X}_{o,n-1}$.
L'hypothèse II', jointe à l'hypothèse I, entraîne l'hypothèse II.
Sous les hypothèses formulées, on peut énoncer le résultat :
pour tout nombre ε positif

- il existe au moins une stratégie satisfaisant au critère de ε-minimax
- pour toute mesure μ définie sur Θ il existe au moins une ε-stratégie de Bayes relative à μ.

- si $\mathcal{S}(\varepsilon,\mu)$ désigne la classe de toutes les ε-stratégies de Bayes relatives à μ et si $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble de toutes les mesures définies sur Θ, la classe

$$\mathcal{S}(\varepsilon) = \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}} \mathcal{S}(\varepsilon,\mu)$$

est ε-complète.

b. Les problèmes étudiés

On vient de constater que le formalisme des modèles discrets que nous avons présenté permet certains développements théoriques. Toutefois, notre but dans ce travail étant essentiellement de déterminer des méthodes permettant de résoudre effectivement des problèmes de la théorie du contrôle, ce formalisme ne sera pas utilisé par la suite dans toute sa généralité.

Nous nous proposons d'établir des conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les stratégies pour vérifier certains critères d'optimalité. Les techniques utilisées relèvent du calcul des variations. Par suite de l'absence d'une théorie autorisant un calcul de variation sur les probabilités de transition, nous nous limitons à des stratégies non aléatoires; ce qui est d'ailleurs souvent légitimé dans les applications par l'utilisation de la propriété 5.1.

D'autre part les techniques variationnelles ne sont efficaces que si le fait de modifier une stratégie à l'instant n, ne modifie pas cette stratégie aux instants suivants. Cette remarque nous conduit à n'utiliser que des stratégies adaptées uniquement au processus Z, donc des stratégies vérifiant l'hypothèse 3 de la propriété 5.1. Cette limitation à cette classe particulière de stratégies ne semble pas restreindre de façon notable la généralité du modèle correspondant si on consulte les résultats obtenus au § II,4. Elle présente de plus l'avantage de fournir un formalisme plus proche de celui de la théorie de la décision statistique séquentielle, ce qui permet par exemple, ainsi que nous l'avons vu au §5, d'obtenir des résultats concernant les classes complètes de stratégies non aléatoires ou l'emploi de statistiques exhaustives.

La méthode de résolution la plus fréquemment utilisée pour résoudre les problèmes discrets est la méthode dite de Bellman. Cette méthode est exposée succintement au §II,4, dans le but de la comparer à la méthode que nous développons et qui est d'ailleurs tout à fait différente.

Nous noterons, pour conclure la présentation des modèles discrets, que les développements auxquels nous ont conduit ces modèles au chapitre II sont assez réduits. Ceci paraît dû en grande partie à une certaine pauvreté même du formalisme lorsqu'on limite, de la façon que nous venons d'exposer, la classe des stratégies. Il semble donc que c'est seulement en employant un formalisme plus général et plus riche, comme celui que nous avons présenté dans ce chapitre d'introduction, que des résultats nouveaux pourront être acquis. C'est pourquoi nous avons tenu à définir un formalisme très général, formalisme dont les problèmes auxquels nous nous consacrons dans la suite ne sont que des cas particuliers.

7. Formalisme des modèles à évolution continue

Les modèles continus se présentent comme une extension des modèles discrets. Toutefois nous nous limitons pour ces modèles à une présentation ne faisant pas appel à des notions empruntées à la statistique mathématique. En particulier, on ne suppose pas que le processus Z, bien qu'en général incomplètement déterminé, dépende d'un paramètre inconnu et on n'utilise que des stratégies non aléatoires. De plus les différents éléments aléatoires considérés sont des fonctions aléatoires réelles.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{L}_T$ la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur T.

Dans toute la suite on désigne par fonction aléatoire réelle mesurable une application mesurable de $(\Omega \times T, \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}_T)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ où $\mathcal{L}$ est la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Soit Z une fonction aléatoire réelle mesurable donnée.

Le formalisme utilisé au chapitre III est défini de la façon suivante :

<u>Notion de stratégie</u> : une classe de stratégies est un sous-ensemble C de l'ensemble des fonctions aléatoires réelles mesurables déterminé par la donnée de contraintes et de conditions de mesurabilité dues au caractère adapté des stratégies.

Les contraintes imposées dans la suite appartiennent à l'une des deux catégories suivantes :

1. Soit pour tout élément t de T un intervalle donné I(t) de $\mathbb{R}$; Y est élément de C si :

$$\forall\, t \in T \quad , \quad \forall\, \omega \in \Omega \qquad Y(t) \in I(t)$$

2. Soit pour tout élément t de T une constante positive $\lambda(t)$; Y est élément de C si :

$$\forall\, t \in T \qquad \{ E \mid Y(t) \mid^2 \}^{1/2} \leqslant \lambda(t)$$

   lorsqu'une telle condition a un sens.

   On remarque que l'on est ici en présence d'un nouvel exemple d'une notion qui n'admet pas d'équivalent dans les problèmes déterministes.

Le caractère adapté des stratégies est ainsi défini :

Soit : - T_1 un sous-ensemble de T représentant l'ensemble des instants d'observation du processus Z

- $\mathcal{A}_t (t \in T)$ la σ-algèbre engendrée par Z(s pour

$$s \in T_1 \cap \{(s < t)\}$$

<u>Y est une stratégie adaptée à la famille ($\mathcal{A}_t$, $t \in T$) si pour tout élément t de T , Y(t) est mesurable par rapport à $\mathcal{A}_t$.</u>

Cette condition de mesurabilité représente bien la traduction mathématique du concept de stratégie adaptée introduit et justifié au § 1.

Pour les mêmes raisons que celles exposées au § 6 on ne considère que des stratégies adaptées au processus Z.

Evolution du système Σ

Soit : - h une fonction numérique donnée, définie et mesurable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$
- X(o) une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, représentant l'état initial de Σ.
- C une classe de stratégies.

A un élément Y de C correspond une fonction aléatoire réelle X, représentant l'état de Σ par l'intermidiaire de l'équation d'évolution suivante :

7,1) $$X(t) = X(o) + \int^{t} h\,[X(u),\, Y(u),\, Z(u),\, u]\, du$$

Critère :

Soit g une fonction numérique donnée, définie et mesurable sur $\mathbb{R}^4$. Le problème traité est de déterminer, sur une classe C donnée de stratégies, une ou plusieurs stratégies rendant minimale l'expression :

$$E\{\int^{T} g\,[X(t),\, Y(t),\, Z(t),\, t]\, dt$$

considérée comme fonction de la stratégie Y utilisée, X correspondant à Y par 7,1).

On ne précise pas ici sous quelles hypothèses un tel problème, qui comprend entre autres difficultés la question de la mesurabilité du processus X associé à Y, a un sens. Cet aspect est abordé au § III,1.

De plus, des contraintes peuvent être imposées aux fonctions aléatoires représentant l'état de Σ ; ainsi au §IV,6 est étudié un problème faisant intervenir une contrainte sur l'état final de Σ.

Les problèmes que nous nous proposons de résoudre pour les modèles continus sont les mêmes que ceux relatifs aux modèles discrets. Toutefois on pourra constater tout au long des chapitres que les modèles continus permettent, tout au moins étudiés sous l'angle sous lequel nous envisageons ces problèmes, des développements et des résultats incomparablement plus substantiels.

Cette remarque justifie le fait que l'on n'a pratiquement aucun intérêt à essayer de résoudre numériquement, à l'aide des méthodes développées dans la suite, un problème continu par une discrétisation préalable de ce problème.

Enfin, il est intéressant de noter pour conclure ce chapitre d'introduction que les théorèmes de maximum que nous obtenons dans le cas stochastique présentent une analogie certaine avec ceux qui ont été établis dans le cas déterministe les résultats coïncident d'ailleurs si dans le modèle stochastique on supprime le processus Z. Ceci explique pourquoi nous avons rencontré les mêmes difficultés à appliquer ces théorèmes à des exemples.

Il semble donc que, ainsi que cela a été constaté pour les problèmes déterministes, les théorèmes de maximum constituent un résultat à caractère essentiellement théorique et que des méthodes nouvelles doivent être développées si l'on veut disposer d'un moyen effectif de résoudre des problèmes de quelque importance.

Références

[1] Fortet — Propriétés des applications de transition des programmations dynamiques Clermont-Ferrand 1962.

[2] Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz — The inventory Problem : II Case of unknown distribution of demand Econometrica Vol. 20.1952-p.450-466.

[3] Wald — Statistical Decision Functions J. Wiley 1950.

[4] Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz — The inventory Problem : I case of known distribution of demand Econometrica Vol. 20 1952-p. 187-222.

[5] Arrow, Harris, Marschak — Optimal Inventory Policy Econometrica Vol.19 1951-p. 250-272.

[6] Bellman — Dynamic Programming Princeton 1957.

[7] Arrow, Karlin, Scarf — Studies in the mathematical theory of inventory and production Stanford University Press 1958.

[8] Blackwell — Discrete Dynamic Programming Ann. Math. Stat. - Vol 33 - 1962 - p.719

[9] Howard — Dynamic Programming and Markov Processes Techn. Press and Wiley - 1960.

[10] Derman — Markoviam sequential decision processes symposium in Stoch. Proc. in Math. Phys. and Engin. - New-York 1963.

[11] Ferguson — Mathematical Statistics Academic Press 1967.

[12] Dvoretzky, Wald, Wolfowitz — Elimination of randomization in certain statistical decisions procedures and zero-sum Two-Person Games Ann. Math. Stat. Vol 22 - 1951 - p. 1-21.

[13] R.R. Bahadur — Sufficiency and statistical decision functions - Ann. Math. Stat. Vol 25 1954 - p. 423-462.

* *Cette courte liste n'a pas la prétention de contenir tout ce qui se rapporte aux modèles de contrôle définis dans ce chapitre.*

Chapitre II

Théorèmes de maximum pour certains problèmes discrets

1. Introduction, hypothèses

Les modèles de programmation dynamique stochastique, en évolution discrète, ont fait l'objet de nombreuses études théoriques et pratiques. Ces études sont pratiquement toutes basées sur l'utilisation de relations de récurrence dérivées de ce qui est qualifié par Bellman [1] de "Principe d'Optimalité". Les hypothèses d'utilisation de cette méthode sont assez mal définies mais on doit constater que des résultats intéressants sont obtenus du point de vue de la résolution numérique.

Kushner et Schweppe [2] semblent avoir été les premiers à s'inspirer des travaux de Pontryagin et de son équipe [3] , dans le cas déterministe pour déduire sur un exemple stochastique une condition nécessaire d'optimalité.

Nous avons étendu [4] ces résultats, grâce à l'utilisation de techniques variationnelles, à certains problèmes définis au § 2 du chapitre I. Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus, sous une forme un peu plus générale.

On remarquera que, malgré une formulation différente du problème et une conception différente de la notion de stratégie, on est conduit aux mêmes modèles que ceux étudiés par Bellman.

Les notations sont celles du chapitre I § 3. Nous nous limitons au modèle défini par les hypothèses suivantes :

- L'étude est faite sur un nombre fini N donné ($N > 1$) de périodes
- Les éléments aléatoires $Z_o, \ldots Z_{N-1}$ sont des variables aléatoires définies sur un même espace (Ω, $\mathcal{A}$)
- La classe C_a des stratégies ne contient que des stratégies non aléatoires
- Pour toute valeur de n ($n = 0, 1, \ldots, N-1$)

  D_n ne dépend que de $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$

  g_n ne dépend pas de θ

  Δ_n est un intervalle fermé $U_n = [a_n, b_n]$ donné non vide de $\mathbb{R}$

  Ξ_n est l'espace $\mathbb{R}$

  g_n et h_n sont mesurables au sens de Lebesgue

Dans toute la suite nous noterons Y_n la variable aléatoire D_n.

Les résultats qui suivent ont été établis en imposant aux fonctions g_n et $h_n (n = 0, 1, \ldots, N-1)$ les hypothèses suivantes :

<u>H_1</u> $h_n(x,d,z)$ satisfait à une condition Lipschitz d'ordre 1 par rapport à x et d :

$$\forall \quad x, x' \,;\, d, \quad d' \in U_n, z \quad \text{on a :}$$

$$|h_n(x', d', z) - h_n(x, d, z)| \leqslant K \left[|x' - x| + |d' - d| \right]$$

<u>H_2</u> Les fonctions $h_n(x,d,z)$ et $g_n(x,d,z)$ sont continument dérivables par rapport à x et d et ces dérivées partielles notées respectivement : $h_n^1(x,d,z)$, $g_n^1(x,d,z)$, $h_n^2(x,d,z)$, $g_n^2(x,d,z)$ sont mesurables au sens de Lebesgue.

On peut donc écrire :

$$h_n(x',d,z) - h_n(x,d,z) = (x' - x)\, h_n^1(x,d,z) + (x' - x)\, L_n(x, x',d, z)$$

$$g_n(x',d,z) - g_n(x,d,z) = (x' - x)\, g_n^1(x,d,z) + (x' - x)\, M_n(x, x',d, z)$$

$$h_n(x,d',z) - h_n(x,d,z) = (d' - d)\, h_n^2(x,d,z) + (d' - d)\, Q_n(x, d,d', z)$$

$$g_n(x,d',z) - g_n(x,d,z) = (d' - d)\, g_n^2(x,d,z) + (d' - d)\, R_n(x, d,d', z)$$

<u>H_3</u> Les majorations uniformes suivantes sont imposées : Pour toutes les valeurs de x, x', d, d' appartenant à U_n, z, on a :

a. $\forall \ \varepsilon > 0 \qquad \exists \ r_1 > 0$ tel que :

$$|x' - x| \leqslant r_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |L_n(x,x',d,z)| \leqslant \varepsilon \\ |M_n(x,x',d,z)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

b. $\forall \ \varepsilon > 0 \qquad \exists \ r_2 > 0$ tel que :

$$|d' - d| \leqslant r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |Q_n(x,d,d',z)| \leqslant \varepsilon \\ |R_n(x,d,d',z)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Remarque : L'hypothèse H_1 entraîne que pour toute valeur de n :

$$\forall \; x, y, z \qquad \begin{cases} |h_n^1(x, y, z)| \leq K \\ |h_n^2(x, y, z)| \leq K \end{cases}$$

Les hypothèses imposées aux fonctions g_n et h_n peuvent être amoindries mais au prix d'une présentation plus compliquée des démonstrations qui suivent. Ces hypothèses ne sont pas aussi restrictives qu'il semble à première vue et sont satisfaites dans de nombreux exemples classiques. Il faut remarquer que les hypothèses utilisées dans le cas déterministe, voir Bustkovskii[5] par exemple, sont nettement moins restrictives puisqu'elles supposent seulement la continuité des dérivées premières ; ceci est conforme aux remarques faites dans l'introduction.

2. Théorèmes de maximum dans le cas où θ est inconnu

Pour toute fonction f de $Z_o, \ldots Z_{N-1}$ nous désignerons par $E_\theta [f]$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $f(Z_o, \ldots Z_{N-1})$ lorsque θ est la valeur du paramètre.

Nous appellerons perturbation compatible en n ($n \geq 1$) avec la stratégie $S = \{Y_i\}$, toute variable aléatoire V fonction de $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$ telle que $S' = \{Y_o, \ldots, Y_{n-1}, Y_n + V, Y_{n+1}, \ldots, Y_{N-1}\}$ soit une stratégie. Remarquons que l'ensemble de ces perturbations est non vide.

Cette définition s'adapte de façon évidente au cas n = 0 en remarquant que Y_o et V sont alors nécessairement des variables certaines.

Nous nous proposons de donner une condition nécessaire pour qu'une stratégie soit stratégie de Bayes. Lorsqu'une telle stratégie S existe, nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite.

H_4 : Par l'intermédiaire de S, pour toute valeur de n, g_n, g_n^1, g_n^2 sont des fonctions de $Z_o, \ldots Z_{n-1}$ telles que :

$$\int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, E_\theta |\, g_n| < +\infty$$

$$\int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, E_\theta |\, g_n^1| < +\infty$$

$$\int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, E_\theta |\, g_n^2| < +\infty$$

Cette hypothèse justifie les intégrations utilisées dans la suite.
Le résultat essentiel est constitué par le théorème suivant :

Théorème 2.1

Pour qu'une stratégie $S^o = \{Y_i^o\}$, à laquelle correspond la suite d'états $\{X_i^o\}$ soit une stratégie de Bayes relative à une mesure μ il est nécessaire qu'existe une suite $\{\psi_i\}$ (i=0,...N-1) de variable aléatoires définie par :

2,1)
$$\psi_{N-1} \equiv 0$$
$$\psi_{i-1} - \psi_i\, h_i^1\,(X_i^o, Y_i^o, Z_i) + g_i^1\,(X_i^o, Y_i^o, Z_i) = 0 \qquad (i = 1,\ldots,N-1)$$

et telle que pour n = 0, 1,..., N-1

2,2)
$$\int_{\Theta} \mu(d\theta)\, E_\theta \left[V \{ g_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n) - \psi_n\, h_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n)\} \right] \geqslant 0$$

pour toute perturbation V compatible en n avec S^o.

Démonstration

Remarquons d'abord que si V est compatible en n avec S^o, ε V, où ε est un nombre positif inférieur ou égal à 1, est aussi compatible.

Soit donc $\varepsilon \leqslant 1$ et V compatible en n avec S^o. On désigne par S^ε la stratégie : $(Y_o^o,\ldots,Y_{n-1}^o, Y_n^o + \varepsilon V, Y_{n+1}^o,\ldots Y_{N-1}^o) = \{Y_i^\varepsilon\}$

Par hypothèse on a :

2,3)
$$\int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, R_{S^o}\,(\theta) \leqslant \int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, R_{S^\varepsilon}\,(\theta)$$

Le principe de la démonstration consiste à donner, en utilisant la suite $\{\psi_i\}$, un développement limité par rapport à ε de l'expression:

2,4) $$\int \mu\,(d\theta) \left[R_{S^o}(\theta) - R_{S^\varepsilon}(\theta) \right]$$

Si $\{X_i^\varepsilon\}$ est la suite des états correspondants à S^ε 2,4) s'écrit :

2,5) $$\int_{\Theta} \mu\,(d\theta) \left[E_\theta \sum_{i=n}^{N-1} g_i\,(X_i^\varepsilon , Y_i^\varepsilon , Z_i) - g_i(\overset{o}{X}_i , \overset{o}{Y}_i , Z_i) \right]$$

Evaluons les différents termes figurant dans 2,5). On a :

$$g_n(X_n^\varepsilon, Y_n^\varepsilon, Z_n) - g_n(\overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n, Z_n) = g_n(\overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n + \varepsilon V, Z_n) - g_n(\overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n, Z_n)$$

et d'après H_2 :

$$g_n(X_n^\varepsilon, Y_n^\varepsilon, Z_n) - g_n(\overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n, Z_n) = \varepsilon V\, g_n^2(\overset{o}{X}_n,\overset{o}{Y}_n,Z_n) + \varepsilon V\, R_n(\overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n, Y_n^\varepsilon,Z_n)$$

Puisque U_n est borné, on peut d'après H_3, en prenant ε suffisamment petit, rendre l'expression :

$$\int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, E_\theta \left[V.R_n\,(\overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n, Y_n^\varepsilon, Z_n) \right]$$

arbitrairement petite, indépendamment de V.

L'hypothèse H_4 permet donc d'écrire :

2,6) $$\begin{aligned} &\int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, E_\theta \left[g_n(X_n^2, Y_n^\varepsilon, Z_n) - g_n(\overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n, Z_n) \right] \\ &= \varepsilon \int_{\Theta} \mu\,(d\theta)\, E_\theta \left[V\, g_n^2(\overset{o}{X}_n; \overset{o}{Y}_n, Z_n) \right] + o\,(\varepsilon) \end{aligned}$$

et si n = N-1 la démonstration est terminée ; supposons $n < N-1$.

Pour $i > n$, on a :

2,7) $$g_i(X_i^\varepsilon, Y_i^\varepsilon, Z_i) - g_i(\overset{o}{X}_i, \overset{o}{Y}_i, Z_i) = g_i(X_i^\varepsilon, \overset{o}{Y}_i, Z_i) - g_i(\overset{o}{X}_i, \overset{o}{Y}_i, Z_i)$$

L'hypothèse H_2 permet d'écrire 2,7) sous la forme :

2,8) $$\left(X^{\varepsilon}_{n+1} - X^{\circ}_{n+1}\right) V^n_i (.) + W^n_i (.)$$

où

$$V^n_i(.) = h^1_{n+1}(X^{\circ}_{n+1}, Y^{\circ}_{n+1}, Z_{n+1}) \dots h^1_{i-1}(X^{\circ}_{i-1}, Y^{\circ}_{i-1}, Z_{i-1}) g^1_i(X^{\circ}_i, Y^{\circ}_i, Z_i)$$

$$W^n_i (.) = (X^{\varepsilon}_i - X^{\circ}_i) M_i(X^{\varepsilon}_i, X^{\circ}_i, Y^{\circ}_i, Z_i) +$$

$$+ \sum_{p=2}^{i-(n+1)} (X^{\varepsilon}_{i-p} - X^{\circ}_{i-p}) L_{i-p}(X^{\circ}_{i-p}, X^{\varepsilon}_{i-p}, Y^{\circ}_{i-p}, Z_i) \, g^1_i(X^{\circ}_i, Y^{\circ}_i, Z_i) \, h^1_{i-1}(X^{\circ}_{i-1}, Y^{\circ}_{i-1}, Z_{i-1}) \dots$$

$$\dots \qquad h^1_{i-p+1}(X^{\circ}_{i-p+1}, Y^{\circ}_{i-p+1}, Z_{i-p+1}) + \dots$$

$$\dots \qquad + (X^{\varepsilon}_{i-1} - X^{\circ}_i) L_{i-1}(X^{\circ}_{i-1}, X^{\varepsilon}_{i-1}, Y^{\circ}_{i-1}, Z_i) \, g^1_i (X^{\circ}_i, Y^{\circ}_i, Z_i)$$

d'après H_1

$$\left|X^{\varepsilon}_{n+1} - X^{\circ}_{n+1}\right| = \left|h_n(X^{\circ}_n, Y^{\circ}_n + \varepsilon V, Z_n) - h_n(X^{\circ}_n, Y^{\circ}_n, Z_n)\right| \leq K \varepsilon |V|$$

et puisque pour $q \geq 2$

$$X^{\varepsilon}_{n+q} - X^{\circ}_{n+q} = h_{n+q-1}(X^{\varepsilon}_{n+q-1}, Y^{\circ}_{n+q-1}, Z_{n+q-1}) - h_{n+q-1}(X^{\circ}_{n+q-1}, Y^{\circ}_{n+q-1}, Z_{n+q-1})$$

on déduit facilement par récurrence en utilisant H_1 que :

$$|X^{\varepsilon}_{n+q} - X^{\circ}_{n+q}| \leq \varepsilon K^q \; |V| \qquad (q = 1, 2, \dots)$$

Les hypothèses H_3 et H_4, permettent de conclure que :

2,9) $$\int_{\Theta} \mu (d\theta) \, E_{\theta} \left[W^n_i (.)\right] = o(\varepsilon)$$

D'autre part on a :

$$X^{\varepsilon}_{n+1} - X^{o}_{n+1} = \varepsilon V\, h^2_n(X^{o}_n, Y^{o}_n, Z_n) + \varepsilon V\, Q_n\,(X^{o}_n, Y^{o}_n + \varepsilon V, Y^{o}_n, Z_n)$$

2,8) s'écrit donc :

2,10) $$\varepsilon\, V\, h^2_n\,(X^{o}_n, Y^{o}_n, Z_n)\, V^n_i(.) + \varepsilon V\, Q_n(X^{o}_n, Y^{o}_n + \varepsilon V, Y^{o}_n, Z_n)\, V^n_i(.) + W^n_i\,(.)$$

La définition par 2,1) de la suite $\{\psi_j\}$ montre que :

2,11) $$\sum_{i=n+1}^{N-1} V^n_i\,(.) = - \psi_n$$

Si l'on remarque alors que, d'après H_3 :

$$\int_{\Theta} \mu(d\theta)\, E_\theta \left[\varepsilon V\, Q_n\,(X^{o}_n, Y^{o}_n + \varepsilon V, Y^{o}_n, Z_n) \right] = o\,(\varepsilon)$$

on déduit alors en utilisant 2,9) , 2,10) et 2,11)

2,12) $$\int \mu(d\theta)\, E_\theta \left[\sum_{i=n+1}^{N-1} g_i(X^{\varepsilon}_i, Y^{\varepsilon}_i, Z_i) - g_i(X^{o}_i, Y^{o}_i, Z_i) \right]$$

$$= \varepsilon \int \mu(d\theta)\, E_\theta \left[- V\, \psi_n\, h^2_n\,(X^{o}_n, Y^{o}_n, Z_n) \right] + o\,(\varepsilon)$$

L'expression 2,5) calculée à l'aide de 2,6) et 2,12) donne le résultat du théorème.

Le théorème 2.1 est un théorème de maximum. Cette dénomination sera justifiée dans la suite par les conséquences que l'on tire de ce résultat dans les cas particuliers importants étudiés au § 3 de ce chapitre.

Dans le cas où l'on cherche une condition nécessaire pour qu'une stratégie soit admissible , on est conduit à un résultat de même nature où l'inégalité 2,2) est remplacée par :

$$\forall\, \theta \in \Theta$$

$$E_\theta \left[V\, \{ g^2_n\,(X^{o}_n, Y^{o}_n, Z_n) - \psi_n\, h^2_n\,(X^{o}_n, Y^{o}_n, Z_n) \} \right] \geq 0$$

la suite $\{\psi_i\}$ étant définie par 2,1)

Dans les paragraphes suivants nous développons des applications du théorème 2.1.

3. Théorèmes de maximum dans le cas où θ est connu

Lorsque θ est connu, les notions de stratégies de Bayes et de stratégies admissibles ne se justifiant plus, sont remplacées par la notion de <u>stratégie optimale</u> ; une stratégie optimale est une stratégie préférable à toute autre pour la valeur de θ .

Dans la suite nous n'utiliserons donc plus le symbole θ et remplaçons le symbole E_θ par E.

L'hypothèse H_4 est remplacée dans ce cas par les conditions suivantes : pour toute valeur de n

$$E \mid g_n \mid < + \infty \qquad\qquad E \mid g_n^1 \mid < + \infty \quad ;$$

de plus il existe une fonction G_n telle que : pour toutes les valeurs de x, y, z

$$|g_n (x, y, z)| \leqslant G_n (x, z) \quad ;$$

$$E(G_n) < + \infty$$

La démonstration du théorème 2.1 s'applique de façon évidente au nouveau modèle étudié et conduit au résultat suivant :

<u>Proposition 3.1</u> : <u>Pour qu'une stratégie $S^\circ = \{ Y_i^\circ \}$ à laquelle correspond $\{X_i^\circ\}$ soit optimale, il est nécessaire qu'existe une suite $\{\psi_i\}$ de variables aléatoires définie par 2,1) et telle que pour n = 0, 1, ..., N-1</u>

3,1) $$E \left[V \{ g_n^2 (X_n^\circ, Y_n^\circ, Z_n) - \psi_n h_n^2 (X_n^\circ, Y_n^\circ, Z_n) \} \right] \geq 0$$

<u>pour toute perturbation V compatible en n avec S°</u>

Nous allons montrer que la condition 3,1) conduit dans ce cas à un résultat plus fin .

On peut mettre 3,1) , pour $n \geq 1$, sous la forme :

3,2) $$E \left[E \left[V \{ g_n^2 (X_n^\circ, Y_n^\circ, Z_n) - \psi_n h_n^2 (X_n^\circ, Y_n^\circ, Z_n) \} \mid Z_0, \dots, Z_{n-1} \right] \right] \geq 0$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble mesurable de $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ pour lequel

$$E\left[V\left\{g_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n) - \psi_n h_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n)\right. \mid Z_o, \ldots, Z_{n-1}\right] < 0$$

$\mathcal{A}$ est de probabilité nulle ; en effet soit V' la variable aléatoire définie par :

$$V' = \begin{cases} V \text{ sur } \mathcal{A} \\ 0 \text{ sur } \complement\mathcal{A} \end{cases}$$

on constate d'abord que V' est aussi une perturbation compatible en n avec S^o. Ensuite de :

$$\begin{cases} E\left[V\left\{g_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n) - \psi_n h_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n)\right. \mid Z_o, \ldots, Z_{n-1}\right] < 0 \text{ sur } \mathcal{A} \\ \qquad\qquad '' \qquad\qquad = 0 \text{ sur } \complement\mathcal{A} \end{cases}$$

on déduit que, si $\mathcal{A}$ est de probabilité positive :

$$E\left[V\left\{g_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n) - \psi_n h_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n)\right\}\right] < 0$$

ce qui contredit 3.1).

On peut donc écrire que, compte tenu du fait que V est fonction de $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$

3,3) $$V.E\left[\left\{g_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n) - \psi_n h_n^2(X_n^o, Y_n^o, Z_n) \mid Z_o, \ldots, Z_{n-1}\right\}\right] \geq 0 \text{ p.s}$$

Remarquons que la connaissance des valeurs $z_o, \ldots, z_{n-1}$ prises par $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$ entraîne la connaissance des valeurs v, x_n^o, y_n^o prises par V, X_n^o, Y_n^o. Examinons alors les conséquences de 3,3) dans les trois cas possibles suivants :

1. $y_n^o = a_n$, nécessairement dans ce cas : $v \geq 0$

d'où

$$E\left[g_n^2(x_n^o, y_n^o, Z_n) - \psi_n . h_n^2(x_n^o, Y_n^o, Z_n)\right] Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\Big] \geq 0$$

2. $\overset{\circ}{y}_n = b_n$ alors $v \leq 0$ d'où

$$E\left[g_n^2 (\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_n, Z_n) - \psi_n h_n^2(\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_n, Z_n) \mid Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\right] \leq 0$$

3. $\overset{\circ}{y}_n \in \left]a_n, b_n\right[$. Dans ce cas v peut être de signe quelconque ; ce qui entraîne :

$$E\left[g_n^2(\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_n, Z_n) - \psi_n h_n^2(\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_n, Z_n) \mid Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\right] = 0$$

Les conséquences obtenues pour les cas 1, 2, 3 ne sont évidemment valables que moyennant une restriction relative à un ensemble de $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ de probabilité nulle.

D'autre part les propriétés des fonctions g_i et h_i permettent d'affirmer que :

p.s. $$E\left[g_n^2 (\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_n, Z_n) - \psi_n h_n^2 (\overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_n, Z_n) \mid Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\right]$$

$$= \left\{ E\left[g_n (\overset{\circ}{x}_n, y, Z_n) - \psi_n . h_n (\overset{\circ}{x}_n, y, Z_n) \mid Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\right] \right\}'_{y = \overset{\circ}{y}_n}$$

De l'examen des trois cas ci-dessus, on déduit alors immédiatement le théorème :

<u>Théorème 3.1</u> : <u>Pour qu'une stratégie $\overset{\circ}{S} = \{\overset{\circ}{Y}_i\}$ à laquelle correspond $\{\overset{\circ}{X}_i\}$ soit optimale il est nécessaire qu'existe une suite $\{\psi_i\}$ de variables aléatoires définie par 2,1) et telle que :</u>

1. <u>pour n = 1, ..., N-1, l'expression</u> :

3,4) $$E\left[g_n (\overset{\circ}{X}_n, y, Z_n) - \psi_n h_n (\overset{\circ}{X}_n, y, Z_n) \mid Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\right]$$

<u>considérée comme fonction de y définie sur U_n admette, sauf pour un ensemble de $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ de probabilité nulle,</u>

<u>soit un minimum local pour $y = \overset{\circ}{y}_n$ si $\overset{\circ}{y}_n$ est égal à a_n ou b_n, soit un extremum local pour $y = \overset{\circ}{y}_n$ si $\overset{\circ}{y}_n \in \left]a_n, b_n\right[$</u>

2. <u>pour n = 0, la même conclusion relativement à l'expression</u> :

$$E\left[g_o (x_o, y, Z_o) - \psi_o h_o(x_o, y, Z_o)\right]$$

<u>considérée comme fonction de y, soit satisfaite.</u>

Sous cette forme, on obtient bien l'équivalent, dans le cas d'évolution stochastique, des résultats connus dans le cas d'évolution déterministe ; l'expression :

$$H_n(x_n, y_n, z_n, \psi_n) = g_n(x_n, y_n, z_n) - \psi_n h_n(x_n, y_n, z_n) + \psi_n x_n$$

joue le rôle d'Hamiltonien puisque :

$$\frac{\partial H_n}{\partial \psi_n} = -(x_{n+1} - x_n)$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial x_n} = \psi_n - \psi_{n-1}$$

et les conclusions du théorème 3.1 peuvent être formulées à l'aide de H_n.

Le résultat énoncé ici a été présenté dans [4] sous des hypothèses plus restrictives. Dans le travail déjà cité de Kushner et Schweppe les même conclusions sont données lorsque les variables aléatoires Z_i sont indépendantes et dans le cas de la minimisation de $E[X_N]$; de plus la notion de stratégie est différente et on n'insiste pas sur le caractère local du minimum obtenu.

Contrairement au cas continu, qui, autorisant des perturbations arbitraires sur de courts intervalles de temps, conduit à des minima absolus, le résultat obtenu ici présente un caractère local. Il est toutefois inutile d'essayer d'améliorer ce résultat ; dans l'exemple suivant :

$$g_o(x, y, z) = a_o x^2 + b_o y^2 \qquad h_o(x, y, z) = \beta_o y^3 + z$$
$$g_1(x, y, z) = a_1 x^2 + b_1 y^2 \qquad b_o < 0,\ \beta_o > 0,\ a_1 > 0,\ b_1 > 0$$

où Z_o est une variable aléatoire centrée d'écart type donné σ_o et U_o un intervalle $[-\ell, +\ell]$, on montre directement que, si ℓ est choisi suffisamment grand, les solution optimales sont données par :

$$y_o^o = \pm \sqrt[4]{\frac{-b_o}{3a_1 \beta_o}} \quad , \quad y_1^o = 0$$

Or la fonction de y

$$E\left[g_o(x_o, y, Z_o) - \psi_o . h_o(x_o, y, Z_o)\right] = a_o x_o^2 + b_o y^2 + 2a_1 \beta_o^2 (y_o^o)^3 y^3 + 2a_1 \sigma_o$$

admet effectivement un minimum relatif lorsque $y = y_o^o$.

Dans le même exemple mais avec $h_o = \alpha_o x + \beta_o y + z$

et la condition supplémentaire : $b_o + a_1 \beta_o^2 > 0$

on montre que

$$E \left[g_o (x_o, y, Z_o) - \psi_o . h_o (x_o, y, Z_o) \right]$$

admet un maximum absolu pour $y = \overset{o}{y_o}$.

Dans les applications pratiques, la restriction dûe au caractère local de l'extrémum est toutefois peu gênante, les fonctions utilisées étant en général convexes; on en verra des applications au paragraphe 5.

Remarquons enfin que le cas où X_i, Y_i, Z_i sont des vecteurs aléatoires conduit à des résultats analogues. C'est uniquement pour des raisons de simplicité de présentation que nous nous sommes limités au cas de grandeurs scalaires.

4. Applications des résultats du § 3 et comparaison avec la méthode de Bellman

a. nature des stratégies optimales

On peut se limiter à chercher des stratégies optimales telles que, pour toute valeur de n, la condition du théorème 3.1 soit satisfaite pour toutes les valeurs de $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$.

Si on tient compte du fait que $\overset{o}{X}_n$ est une fonction mesurable de $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$, le théorème 3.1 montre que, pour toute valeur de n, $\overset{o}{Y}_n$ apparait comme fonction de $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$ par l'intermédiaire de $\overset{o}{X}_n$, $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$.

Il est alors intéressant d'examiner les cas particuliers suivants :

1. Les variables Z_i sont indépendantes

   On démontre alors par récurrence décroissante par rapport à n, en utilisant la définition de $\{\psi_i\}$ et le théorème 3.1 que, pour chaque valeur de n $(n = N-1, \ldots, 0)$,

$$\begin{cases} \psi_n \text{ est fonction de } Z_o, \ldots, Z_{N-1} \text{ par l'intermédiaire de } \overset{o}{X}_n, \overset{o}{Y}_n, Z_n, \ldots Z_{N-1} \\ \overset{o}{Y}_n \text{ est fonction de } Z_o, \ldots, Z_{n-1} \text{ par l'intermédiaire uniquement de } \overset{o}{X}_n. \end{cases}$$

   La notion de stratégie coïncide avec celle utilisée par Bellman [1] . On peut dire que $\overset{o}{X}_n$ représente au temps n un résumé exhaustif de l'évolution du système $\sum$.

2. <u>Les variables Z_i évoluent en chaîne de Markov d'ordre 1</u>

On démontre de la même façon que $\overset{o}{Y}_n$ est fonction de $Z_o,\dots,Z_{n-1}$ par l'intermédiaire de $\overset{o}{X}_n$ et Z_{n-1}.

On a donc cette fois, au temps n, un résumé exhaustif constitué par la donnée de $\overset{o}{X}_n$ et Z_n.

Ce résultat se généralise de façon évidente au cas d'une chaîne de Markov d'ordre quelconque.

b. <u>comparaison avec la méthode de Bellman</u>

La méthode de Bellman suppose l'existence , pour chaque valeur de n, d'une fonction représentant le minimum de l'espérance mathématique de coût entre les temps n et N conditionnelle à la donnée de l'évolution de Σ entre les temps 0 et n.(consulter Dvoretsky, Keefer and Wolfowitz [6] ou Fortet [7] par exemple).

Dans le cadre du formalisme du paragraphe 3 cette méthode introduit donc la suite $\{\phi_n\}$ de fonctions (n = 0, 1, ..., N-1) où ϕ_n est fonction des valeurs x_n, $z_o,\dots, z_{n-1}$ prises par X_n, Z_o, ..., Z_{n-1}.

Cette suite $\{\phi_n\}$, sous des hypothèses non précisées, satisfait à la relation de récurrence:

$$\text{4.1)}\quad \begin{cases} \phi_n(x,z_o,\dots,z_{n-1}) = \inf\limits_{y\in U_n}\left\{ E\left[g_n(x,y,Z_n)+\phi_{n+1}\left[h_n(x,y,Z_n),Z_o,\dots,Z_n\right]\,\middle|\, Z_o=z_o,\dots,Z_{n-1}=z_{n-1}\right]\right. \\ \phi_N \equiv 0 \qquad\qquad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Si pour chaque valeur de n, quels que soient x, $z_o,\dots, z_{n-1}$, il existe une valeur unique de y, notée y_n^*, réalisant dans 4,1) le minimum, et si de plus y_n^* considérée comme fonction de x est dérivable, on montre alors que ϕ_n admet une dérivée partielle par rapport à x notée ϕ_n^1.

De 4.1) on déduit :

$$\text{4.2)}\quad \phi_n^1(x,z_o,\dots,z_{n-1})=E\left[g_n^1(x,y_n^*,Z_n)+\phi_{n+1}^1\left[h_n(x,y_n^*,Z_n)Z_o,\dots,Z_n\right]h_n^1(x,y_n^*,Z_n)\,\middle|\, Z_o=z_o,\dots,Z_{n-1}=z_{n-1}\right]$$

Remarquons que, d'après la définition de la suite $\{\psi_i\}$ et la nature des stratégies, on peut écrire, pour toute valeur de n :

$$\psi_n = \psi_n(X^o_{n+1}, Z_o, \ldots, Z_{N-1})$$

On obtient le résultat suivant qui précise la relation existant entre les deux méthodes.

<u>Proposition 4.1</u> : <u>Pour n = 0,1, ..., N-1 on a :</u>

4.3) $$\underline{\phi^1_{n+1}(x^o_{n+1}, z_o, \ldots, z_n) = - E\left[\psi_n(X^o_{n+1}, Z_o, \ldots, Z_{N-1}) \middle| Z_o = z_o, \ldots, Z_n = z_n\right]}$$

En effet 4.1) permet de construire, par récurrence décroissante, une solution du problème. Cette solution est unique, d'après les hypothèses formulées, et notée $\{Y^o_n\}$. $\{\psi_n\}$ est alors la suite construite à l'aide de 2,1) par l'intermédiaire de $\{Y^o_n\}$ et de la suite $\{X^o_n\}$ correspondante.

Supposons 4.3) vérifié ; 4.2) permet d'écrire :

$$\phi^1_n(x^o_n, z_o, \ldots, z_{n-1}) = E\left[g^1_n(x^o_n, y^*_n, Z_n) - \right.$$

$$\left. h^1_n(x^o_n, y^*_n, Z_n) E\{\psi_n\left[(h_n(x^o_n, y^*_n, Z_n), Z_o, \ldots, Z_{N-1}\right] \middle| Z_o, \ldots, Z_n\} \middle| Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\right]$$

d'où

$$\phi^1_n(x^o_n, z_o, \ldots, z_{n-1}) = E\left[g^1_n(x^o_n, y^*_n, Z_n) - \ldots\right.$$

$$\left. \ldots h^1_n(x^o_n, y^*_n, Z_n) . \psi_n\left[h_n(x^o_n, y^*_n, Z_n), Z_o, \ldots, Z_{N-1}\right] \middle| Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}\right]$$

De la définition de la suite $\{\psi_i\}$ par 2.1) et du fait que $y^*_n = y^o_n$, on déduit immédiatement que 4,3) est vérifié au rang inférieur. Comme 4.3) est vraie pour n = N-1, la proposition est ainsi établie.

Dans le cas particulier de a.1, on a alors :

$$_n = {}_r(X^o_{n+1}, Z_{n+1}, \ldots, Z_{N-1})$$

et 4.3) devient :

$$\underline{\phi^1_{n+1}(x^o_{n+1}) = - E\left[\psi_n(x_{n+1}, Z_{n+1}, \ldots, Z_{N-1})\right]} \qquad (n = 0, \ldots, N-1)$$

Dans le cas particulier présenté ici, on peut conclure que les deux méthodes sont assez voisines l'une de l'autre. Ce résultat est confirmé par l'étude de l'exemple présenté au paragraphe suivant.

5. Application à un exemple

Nous consacrons ce paragraphe à l'étude de l'exemple défini par les données suivantes :

5.1) $$h_n(x,y,z) = \alpha_n x + \beta_n y + z$$

$$n = 0,1,\dots,N-1$$

5.2) $$g_n(x,y,z\theta) = a_n x^2 + b_n y^2$$

les quatre suites $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sont données, et l'on suppose de plus que, pour toute valeur de n,

$$a_n \geq 0, \qquad b_n \geq 0$$

Les variables aléatoires Z_i (i=0,1...N-1) sont indépendantes, centrées et d'écart type inconnu σ_i.

Ce problème est un des problèmes pratiques le plus important de la théorie du contrôle. Il a été résolu dans de nombreuses variantes, par la méthode de Bellman (consulter par exemple Aoki [8] et [9]). Nous allons montrer que les résultats des deux premiers chapitres permettent de préciser certains aspects de ce problèmes et de le résoudre explicitement dans certains cas.

On constate d'abord que, d'après la forme particulière des fonctions h_n et g_n, l'on se trouve dans un cas particulier envisagé au § 5 du chapitre I ; la classe des stratégies non aléatoires est complète et nous nous limiterons donc à l'utilisation de ces stratégies. Les hypothèses H_1, H_2, H_3, sont satisfaites et on peut utiliser le théorème 3.1. Ce théorème permet, à chaque étape, de déterminer $\overset{o}{Y}_n$ comme fonction de $\overset{o}{X}_n$, mais, à cause des contraintes imposées aux stratégies par la donnée des intervalles U_n, il n'est pas possibles d'exprimer simplement la correspondance entre $\overset{o}{X}_n$ et $\overset{o}{Y}_n$.

Nous allons donc étudier le cas sans contraintes.

Nous supposerons d'abord que le théorème 3.1 est encore valable et nous vérifierons ensuite par les conséquences qu'on peut tirer de ce théorème que son utilisation est légitime.

Pour $n = N-1$ l'expression 3.4) se réduit à :

$$a_{N-1} \overset{o}{x}_{N-1} + b_{N-1} y^2 \qquad ,$$

Cette expression n'admet qu'un extrémum sur $(-\infty, +\infty)$ pour $y = 0$

Nous poserons donc $\overset{o}{Y}_{N-1} = 0$

On en déduit :

$$\psi_{N-2} = -2a_{N-1} \overset{o}{X}_{N-1} = -2a_{N-1} \left[\alpha_{N-2} \overset{o}{X}_{N-2} + \beta_{N-2} \overset{o}{Y}_{N-2} + Z_{N-2} \right]$$

On est conduit au résultat suivant :

Proposition 5.1 : Si le problème sans contraintes admet une solution admissible , elle est unique et donnée par :

5.3)
$$\left| \begin{array}{l} \overset{o}{Y}_n = \theta_n \overset{o}{X}_n \\ \psi_n = u_n \overset{o}{X}_n + v_n \overset{o}{Y}_n + \displaystyle\sum_{i=n}^{N-1} \gamma_n^i Z_i \qquad n=0,1,\dots,N-1 \end{array} \right.$$

où les suites numériques $\{\theta_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ sont définies par récurrence à l'aide des relations :

5.4)
$$\left| \begin{array}{l} u_n = -2a_{n+1} \alpha_n + \alpha_{n+1} \alpha_n (u_{n+1} + v_{n+1} \theta_{n+1}) \\ v_n = -2a_{n+1} \beta_n + \alpha_{n+1} \beta_n (u_{n+1} + v_{n+1} \theta_{n+1}) \\ \theta_n = \dfrac{\beta_n u_n}{2 b_n - \beta_n v_n} \\ \theta_{N-1} = u_{N-1} = v_{N-1} = 0 \end{array} \right.$$

La demonstration se fait par récurrence décroissante ; 5.3) étant supposée vérifiée, 2.1) permet de mettre ψ_{n-1} sous la forme :

$$\psi_{n-1} = u_{n-1} \overset{o}{X}_{n-1} + v_{n-1} \overset{o}{Y}_{n-1} + \sum_{i=n-1}^{N-1} \gamma^{i}_{n-1} Z_i$$

et l'expression 3.4), au rang n-1, s'écrit :

$$E \left[a_{n-1}(\overset{o}{x}_{n-1})^2 + b_{n-1} y^2 - (u_{n-1}\overset{o}{X}_{n-1} + v_{n-1}\overset{o}{Y}_{n-1} + \sum_{i=n-1}^{N-1} \gamma^{i}_{n-1} Z_i)(\alpha_{n-1}\overset{o}{X}_{n-1} + \beta_{n-1} y + Z_{n+1}) \right.$$

$$\left. \middle| Z_o = z_o, \ldots, Z_{n-2} = z_{n-2} \right]$$

Compte tenu des hypothèses faites sur les variables aléatoires Z_i et du fait que $\overset{o}{X}_{n-1}$ et $\overset{o}{Y}_{n-1}$ sont déterminés par la donnée de $z_o, \ldots, z_{n-2}$ cette expression s'écrit encore :

5.5) $$a_{n-1}(\overset{o}{x}_{n-1})^2 + b_{n-1} y^2 - (u_{n-1}\overset{o}{x}_{n-1} + v_{n-1}\overset{o}{y}_{n-1})(\alpha_{n-1}\overset{o}{x}_{n-1} + \beta_{n-1} y) + \gamma^{n-1}_{n-1} \sigma^2_{n-1}$$

Puisque b_{n-1} est positif il n'y a aucune difficulté à chercher le minimum de 5.5) et les résultats de la proposition 5.1 peuvent ainsi être démontrés facilement en remarquant que la stratégie déterminée ne dépend pas de la suite $\{\sigma_i\}$.

Remarques :

1. L'emploi du théorème 3.1 est justifié, d'une part par le fait que $\overset{o}{X}_n$ se présente comme une combinaison linéaire des variables $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$ et qu'ainsi les hypothèses d'intégrabilité de H_4 sont satisfaites, d'autre part, par le fait que la forme particulière de h_n et g_n implique que H_3 est satisfaite pour toutes les valeurs de x, y, z. On peut en effet reprendre alors la démonstration du théorème 3.1 en utilisant une perturbation V au temps qui soit une variable aléatoire du second ordre.

2. Il n'y a unicité de la solution que dans le mesure où l'on identifie deux stratégies qui sont égales pour chaque valeur de n, sauf sur un ensemble de $\chi_{o,n-1}$ de probabilité nulle.

Remarquons que la stratégie $\{\overset{o}{Y}_n\}$ déduite de la proposition 5.1 est telle que, pour toute valeur de n, $\overset{o}{Y}_n$ est une combinaison linéaire de $Z_o, \ldots, Z_{n-1}$. $\overset{o}{Y}_n$ est donc une variable aléatoire du second ordre.

En l'absence de renseignements supplémentaires sur les variables Z_i

il semble donc raisonnable de se limiter à des stratégies composées de variables aléatoires du second ordre.

Nous introduirons les espaces de Hilbert suivants :

$\mathcal{H}_n$ est l'espace des fonctions définies sur $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ qui sont de carré sommable pour la loi du vecteur $(Z_o, \ldots, Z_{n-1})$.

$(n = 0, 1, \ldots N-1)$.

$\mathcal{H}$ la somme hilbertienne des espaces $\mathcal{H}_n$.

$\mathcal{H}$ définit donc la classe des stratégies auxquelles nous nous limitons :

$$S = \{Y_n\} \in \mathcal{H} \qquad \Leftrightarrow \qquad Y_n \in \mathcal{H}_n \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

A une stratégie $\{Y_n\} = S$ correspond une suite $\{X_n\}$ et on note

5.6) $$v(S) = E_\theta \left[\sum_{n=0}^{n-1} (a_n X_n^2 + b_n Y_n^2) \right]$$

où $$\theta = \{\sigma_i\}$$

Le problème que nous étudions, noté Problème (A), est donc celui de la minimisation sur $\mathcal{H}$ de la fonctionnelle $v(S)$ sachant que $\{X_n\}$ correspond à $\{Y_n\}$ par :

5.7) $$X_{n+1} = \alpha_n X_n + \beta_n Y_n + Z_n.$$

Remarquons d'abord que le problème a un sens puisque, pour toute valeur de n, X_n appartient à $\mathcal{H}_n$.

L'opérateur v possède des propriétés simples.

<u>Lemme 5.1</u> : <u>v est une application convexe et continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^+$</u>

La propriété de convexité découle de façon évidente du caractère linéaire de 5.6) et du caractère quadratique de $v(S)$.

Nous désignons par $\| \quad \|$, indifféremment, les normes de $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}$.

La continuité se démontre ainsi :

Si $S = \{Y_n\}$ et $S' = \{Y'_n\}$ sont deux éléments de $\mathcal{H}$ auxquels correspondent $\{X_n\}$ et $\{X'_n\}$ on déduit de 5.7)

$$\| X_{n+1} - X'_{n+1} \| \leq |\alpha_n| . \| X_n - X'_n \| + |\beta_n| . \| Y_n - Y'_n \|$$

et par conséquent il existe une constante λ positive telle que :

$$||X_n - X'_n|| \leqslant \lambda \; || S - S' || \qquad n = \cancel{0,1}...N-1$$

Le résultat se déduit immédiatement de :

$$v(S) - v(S') = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ a_n(||X_n||^2 - ||X'_n||^2) + b_n(||Y_n||^2 - ||Y'_n||^2) \right.$$

Le lemme permet alors d'énoncer le résultat suivant :

<u>Proposition 5.2</u> : <u>Le problème (A) admet au moins une solution</u>

Soit :
$$v_m = \inf_{S \in \mathcal{H}} v(S)$$

v_m existe évidemment puisque $v(S)$ est positif ou nul quel que soit S.
Soit $S_K = \{Y_n^K\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que :

$$v(S_K) \xrightarrow[K \to \infty]{} v_m$$

Il existe nécessairement une constante μ positive telle que :

$$||S_K|| \leqslant \mu \qquad\qquad K = 1, 2, \ldots.$$

On peut donc extraire de la suite $\{S_K\}$ une suite partielle notée $\{S_{K_1}\}$ qui converge faiblement vers un élément S_ℓ de $\mathcal{H}$.

Comme d'autre part, l'opérateur v est convexe et continu il est donc faiblement semi-continu inférieurement, c'est-à-dire que :

$$\underline{\lim} \; v\,(S_{k_1}) \geqslant v\,(S_\ell)$$

Il découle de la définition de v_m que :

$$\underline{\lim} \; v\,(S_{K_1}) = v_m = v(S_\ell)$$

et S_ℓ est solution du problème (A).

<u>Remarque</u> : On peut montrer comme cela sera fait au chapitre IV et V que les conditions : $b_n > 0$ entraînent que la suite $\{S_k\}$ converge fortement vers S_ℓ.

Les propositions 5.1 et 5.2 admettent le corollaire suivant :

Corollaire 5.1 Le problème (A) admet une solution unique qui est donnée par les résultats de la proposition 5.1 .

D'autre part la proposition 5.2 s'étend au cas du problème initial, c'est-à-dire au cas du problème restreint à la classe C des stratégies soumises aux contraintes imposées par la donnée des intervalles U_n. On remarque , en effet , que C est un sous-ensemble borné et convexe de $\mathcal{H}$. La démonstration de la proposition 5.2 s'adapte alors immédiatement si l'on peut affirmer que C est de plus fermé.

Pour démontrer ce dernier point , il suffit de montrer que pour toute valeur de n l'ensemble C_n des éléments de $\mathcal{H}_n$ qui sont à valeurs dans U_n est fermé. Ceci n'est pas tout à fait exact mais est vrai pour le sous-ensemble C'_n des éléments de $\mathcal{H}_n$ qui sont à valeurs dans U_n sauf pour un sous-ensemble de $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ de probabilité nulle :

Lemme 5.2 . C'_n est fermé dans $\mathcal{H}_n$

Soit en effet $\{Y_K\}$ une suite d'éléments de C'_n convergeant fortement vers un élément Y_ℓ de $\mathcal{H}_n$.
Désignons par A_p le sous-ensemble de $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ sur lequel on a :
soit $Y_\ell \geq b_n + \frac{1}{p}$, soit $Y_\ell \leq a_n - \frac{1}{p}$.

Pour toute valeur de K on a nécessairement

$$||Y_K - Y_\ell|| \geq \frac{1}{p} \Pr (A_p)$$

d'où $$\Pr (A_p) = 0 \quad \forall \; p$$

Si A désigne le sous-ensemble de $\mathcal{Z}_{o,n-1}$ pour lequel : $Y_\ell \notin U_n$

on a bien $\Pr (A) = 0$

Le lemme 5.2 suffit à démontrer l'existence d'une solution car on peut toujours dans la démonstration de la proposition 5.2 modifier la stratégie S_ℓ sur des ensembles de probabilité nulle sans modifier $v(S_\ell)$.

Remarque

Dans le cas du problème (A) la solution optimale $\{Y_n^o\}$ est de la forme

$$\begin{cases} Y_n^o = k_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_n^i Z_i & n \geq 1 \\ Y_o^o = k_o \end{cases}$$

et la suite $\{X_n^o\}$ correspondante est de la forme :

$$\begin{cases} X_n^o = h_n + \sum_{i=0}^{n-1} d_n^i Z_i & n \geq 1 \\ X_o^o = x_o \end{cases}$$

On est ainsi ramené, grâce aux théorème 3.1, au problème déterministe suivant :
déterminer les suites $\{k_n\}$ et $\{c_n^i\}$ rendant minimale l'expression

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ a_n \left(h_n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (d_n^i)^2 \sigma_i^2 \right) + b_n \left(h_n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (c_n^i)^2 \sigma_i^2 \right) \right\}$$

sachant que $\{h_n\}$ et $\{d_n^i\}$ sont obtenues à partir de $\{k_n\}$ et $\{c_n^i\}$ par les relations :

$$\begin{cases} h_{n+1} = \alpha_n h_n + \beta_n k_n \\ d_{n+1}^i = \alpha_n d_n^i + \beta_n c_n^i & i \leq n-1 \\ d_{n+1}^n = 1 \end{cases}$$

Au chapitre V nous développerons une méthode permettant de résoudre numériquement de tels problèmes.

Références

[1] R. Bellman : Dynamic Programming Princeton 1957 .

[2] Kushner and Schweppe : A maximum principle for stochastic control systems
Journal of Math. Anal. and Appl. VOl. 8 n° 2 1964.

[3] L.S. Pontryagin,...The Mathematical theory of optimal processes
Interscience 1962 (Traduction anglaise).

[4] F. Brodeau C.R. Acad. Sc. Paris t 259 p 4496 - 1964 .

[5] A.G. Butkovskii The necessary and sufficient conditions for optimality of
discrete control systems
Autom. i Telemek. Vol 24 n° 8 p 1056 - 1963 .

[6] Dvoretzky, Keefer and Wolfowitz The inventory problem - Econometrica 1952.

[7] Fortet . Proprietés des applications de transition des programmations
dynamiques. Clermond - Ferrand 1962.

[8] Aoki . Optimization of stochastic systems - Academic Press 1967.

[9] Brodeau Cours de Programmation Dynamique stochastique - Grenoble.

-oooOooo-

Chapitre III

Théorèmes de maximum pour les problèmes continus

1. Généralités

Les problèmes à évolution continue ont donné naissance à certains développements ; citons par exemple Krasovskii et Lidskii [1] ,Kushner [2] et plus récemment Mortensen [3] .

Parmi ces études, les unes, ainsi [1] et [3] , utilisent le "principe d'optimalité" et conduisent à des équations aux dérivées partielles donnant l'équivalent stochastique des équations de Hamilton-Jacobi. Kushner a entrepris de développer un aspect différent en dégageant des conditions nécessaires d'optimalité inspirées du "principe du maximum". Nous avons développé le même aspect dans le cadre d'un formalisme et sous des hypothèses sensiblement différentes . Les méthodes employées par nous sont différentes et conduisent à un théorème général dont l'adaptation à une certaine classe de stratégies permet d'obtenir un résultat de même nature que celui du théorème essentiel de Kushner.

Pour des raisons exposées dans l'introduction de ce travail, il semble difficile d'obtenir pour les modèles stochastique des résultats aussi fins et aussi généraux que ceux obtenus par Pontryagin [6] et Estenès [7] par exemple, pour les modèles déterministes. Le caractère aléatoire des trajectoires $X(t)$ rend délicate l'adaptation aux problèmes que nous étudions des notions géométriques aussi fructueuses que sont les notions de contingents vectoriels, cônes de déplacements intérieurs.. notions qui sont présentées dans un cadre très général dans Lobry [8] .

Dans ce chapitre , nous nous limitions à des fonctions aléatoires réelles $Z(t)$ qui sont du second ordre . Cette limitation, assez naturelle du point de vue pratique , nous conduit donc à développer une théorie du contrôle stochastique relative à des processus qui sont tous du second ordre.

Nous nous sommes inspirés de techniques de démonstrations exposées dans [9] par Pallu de la Barrière.

Utilisant les notations du chapitre I, les théorèmes donnant des conditions nécessaires d'optimalité ont été démontrés sous les hypothèses suivantes :

- l'intervalle de temps T est un intervalle fini $[0, T]$ donné.

- le processus Z(t) est continu en moyenne quadratique sur T ; la fonction de covariance de Z étant continue sur la diagonale du carré $T \times T$, il en résulte immédiatement que $E\{|Z(t)|^2\}$ est, comme fonction de t, uniformément borné sur T.

- la classe des stratégies est un sous-ensemble de l'ensemble C_M des fonctions aléatoires réelles, mesurables, à valeurs dans un ensemble borné F de $\mathbb{R}$; nous supposons pour simplifier certains coefficients, que F est inclus dans un intervalle de longueur inférieure ou égale à 1.

- l'état initial de Σ est représenté par une variable aléatoire donnée, du second ordre, X(0), définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

- l'état final X(T) est libre ; au chapitre IV nous envisagerons toutefois le cas de contraintes sur l'état final pour certains problèmes.

- les fonctions g et h vérifient les hypothèses suivantes :
  h_1 : h satisfait une condition de Lipschitz d'ordre 1 :

$\forall\ x, x'\ ;\ y, y' \in F\quad ;\quad z, z'\quad ;\quad t, t' \in T \qquad \exists\ K > 0$ telle que

$$|h(x',y',z',t') - h(x,y,z,t)| \leqslant K\left[|x'-x| + |y'-y| + |z'-z| + |t'-t|\right]$$

<u>h_2</u> : g satisfait à une condition moins restrictive :

$\forall\ x, x'\ ;\ y, y' \in F\quad ;\quad z, z'\quad ;\quad t, t' \in T \qquad \exists\ K > 0$ telle que

$$|g(x',y',z',t') - g(x,y,z,t)| \leqslant K\left[|x'-x| + |y'-y| + |z'-z| + |t'-t|\right]$$
$$\left[|x'+x| + |y'+y| + |z'+z| + |t'+t|\right]$$

(on utilise la même constante K afin de simplifier certains coefficients intervenant dans la suite).

<u>h_3</u> : $h(x, y, z, t)$ et $g(x, y, z, t)$ admettent des dérivées partielles par rapport à x, notées $h^1(x, y, z, t)$ et $g^1(x, y, z, t)$ respectivement. On suppose de plus que :

$\forall\ \ \varepsilon > 0 \qquad \exists\ \eta > 0$ tel que : $\forall\ y \in F,\ z,\ t \in T\ ,\ |x'-x| \leqslant \eta \Longrightarrow$

1,1) $|h(x', y, z, t) - h(x, y, z, t) - (x' - x)\, h^1(x, y, z, t)| \leqslant \varepsilon\ \ |x'-x|$

1,2) $|g(x', y, z, t) - g(x, y, z, t) - (x' - x)\, g^1(x, y, z, t)| \leqslant \varepsilon\ \ |x'-x|$

Enfin $h^1(x, y, z, t)$ et $g^1(x, y, z, t)$ sont mesurables sur R^4.

<u>Conséquences de ces hypothèses</u>

$\forall\ \ x, y \in F,\ z,\ t \in T$

<u>h_1</u> $\Longrightarrow$ 1,3) $|h^1(x, y, z, t)| \leqslant K$

<u>h_2</u> $\Longrightarrow$ 1,4) $|g^1(x, y, z, t)| \leqslant 2K\left[|x| + |y| + |z| + |t|\right]$

on suppose, par commodité, que : $h(o,o,o,o) = g(o,o,o,o) = 0$

et on pose : $H(x, z) = \left[|x| + |z| + \sup\limits_{y \in F} |y| + T\right]$

d'où $\forall$ x, z, $y \in F$, $t \in T$

$h_1 \Rightarrow$ 1,5) $|h(x,y,z,t)| \leqslant K \left[|x| + |y| + |z| + |t|\right] \leqslant H(x,z)$

$h_2 \Rightarrow$ 1,6) $|g(x,y,z,t)| \leqslant K \left[|x| + |y| + |z| + |t|\right]^2 \leqslant K \left[H(x,z)\right]^2$

et on remarque que 1,4) s'écrit :

1,7) $|g^1(x,y,z,t)| \leqslant 2K\, H(x,z)$

Ces hypothèses sont plus restrictives que celles utilisées dans le cas déterministe [6] où les fonctions f et g sont seulement continues et continuement dérivables par rapport à x. Il semble difficile d'utiliser dans le cas stochastique des hypothèses du même type sans imposer au processus Z(t) des conditions de régularité peu réalistes.

La condition de Lipschitz par rapport à y que vérifie f, et, de même, la condition de l'hypothèse h_2 par rapport à y sont superflues ; nous maintenons toutefois ces conditions qui, faisant jouer un rôle symétrique aux variables x, y, z, t, conduisent aux majorations 1,3) , 1,7).

Nous désignerons par L et L^2 l'ensemble des fonctions aléatoires intégrables et de carrés intégrables, respectivement, pour la mesure $\mathcal{P} \times \mu$, où μ est la mesure de Lebesgue sur T.
Pour toute variables U du second ordre nous noterons

$$\|U\| = (E|U|^2)^{1/2}$$

On montre d'abord que les hypothèses permettent d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation d'évolution :

1,8) $$X(t) = X(o) + \int_0^t h\left[X(u), Y(u), Z(u), u\right] du$$

Lemme 1.1 : Quelque soit $Y(t)$ élément de C_M, à tout processus $X(t)$ appartenant à L^2 correspond au moins un processus $J_x(t)$ tel que l'on ait presque sûrement, quelque soit t,

$$J_x(t) = \int_0^t h[X(u), Y(u), Z(u), u]\,du \qquad \text{(intégrale au sens de Lebesgue)}$$

$J_x(t)$ est de plus presque sûrement à trajectoires continues et tel que:

1,9) $$E\left|\sup_{t\in T} (J_x(t))^2\right| < +\infty$$

- En effet $h[X(u), Y(u), Z(u), u]$ est une fonction aléatoire mesurable, majorée, en valeur absolue, par $H[X(u), Z(u)]$ qui est élément de L. L'intégrale

$$\int_0^t h\,[X(u), Y(u), Z(u), u]\,du$$

existe donc presque sûrement quelque soit t, ce qui justifie ainsi la première assertion du lemme.

$J_x(t)$ étant presque-sûrement à trajectoires continues, d'après sa définition, est mesurable, ce qui résulte immédiatement, par exemple, des théorèmes 2.1 et 2.5 de Doob [10] .

Enfin de :

p.s. $$\sup_{t\in T} |J_x(t)| \leqslant \int_0^T H[X(u), Z(u)]\,du$$

on déduit, puisque $H\,[X(u), Z(u)]$ est élément de L^2.

p.s $$\sup_{t\in T} |J_x(t)| \leqslant \left(\int_0^T H[X(u), Z(u)]\,du\right)^2$$

$$\leqslant T \int_0^T \left(H^2\,[X(u), Z(u)]\,du\right)$$

d'où $$E\left[\sup_{t\in T} |J_x(t)|^2\right] \leqslant T \int_0^T E\left(H^2\,[X(u) Z(u)]\right) du < +\infty$$

1,9) est ainsi démontré, ce qui prouve d'ailleurs que $J_x(t)$ est aussi élément de L^2.

<u>Lemme 1.2 Quel que soit Y(t) élément de C_M il existe un processus mesurable X(t) satisfaisant presque sûrement à 1,8) tel que $||X(t)||$ soit uniformément bornée sur T ; la solution est unique dans le sens que deux solutions sont presque-sûrement égales.</u>

On utilise la méthode des approximations successives :

Soit $X_o(t) \equiv 0$; on définit la suite $\{X_n(t)\}_{n=1,\dots}$ de processus par :

$$X_{n+1}(t) = X(o) + J_{x_n}(t) \qquad (n = 1, 2,\dots)$$

Le lemme 1.1 montre que, quelque soit n, $X_n(t)$ est élément de L^2 presque sûrement à trajectoire continues.

Posons alors $\quad \Delta_n(t) = X_n(t) - X_{n-1}(t) \qquad\qquad n = 1, 2\dots.$

On a $\qquad \Delta_n(t) = J_{x_{n-1}}(t) - J_{x_{n-2}}(t)$

d'où, d'après h_1

1,10) $$|\Delta_n(t) = \Delta_n(t)| \leqslant K \int_o^t |\Delta_{n-1}(u)|\, du$$

et $$||\Delta_n(t)||^2 \leqslant K^2\, E\left[\int_o^T |\Delta_{n-1}(u)|\, du\right]^2 \leqslant K^2\, T\, E\left[\int_o^T |\Delta_{n-1}(u)|^2\, du\right]$$

or d'après le lemme 1.1 $\quad E\left[\sup_{t\in T}(\Delta_1(t))^2\right] = a < \infty$

on démontre immédiatement par récurrence que :

$$||\Delta_n(t)||^2 \leqslant a\, (K^2\, T)^{n-1}\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

il existe donc un nombre positif b tel que :

1,11) $$||\Delta_n(t)||^2 \leqslant \frac{b^{n-1}}{(n-1)\,!} \qquad\qquad t \in T$$

D'après 1,10) ; on peut alors écrire :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in T} |\Delta_{n+1}(t)| \geqslant 2^{-n}\right\} \leqslant \mathcal{P}\left\{K \int_o^T |\Delta_n(u)\, du \geqslant 2^{-n}\right\}$$

L'utilisation successive des inégalités de Tchebychev, de Schwarzet de 1,9) entraîne :

$$\mathcal{P}\{\sup_{t\in T} |\Delta_{n+1}(t)| \geq 2^{-n}\} \leqslant 4^n\, E\left[K^2 \int_0^T |\Delta_n(u)|\,du\right]^2$$

$$'' \qquad \leqslant 4^n K^2\, T\left[E\int_0^T |\Delta_n(u)|^2\,du\right]$$

$$'' \qquad \leqslant 4^n K^2 T^2 \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}$$

$\dfrac{4^n K^2 T^2 b^{n-1}}{(n-1)!}$ étant le terme général d'une série convergente il découle du lemme de Borel-Cantelli que :

$\sup_{t\in T} |\Delta_{n+1}(t)| \leqslant 2^{-n}$ presque sûrement, pour n suffisamment grand. On en déduit que presque sûrement $X_n(t)$ converge uniformément vers une limite $X(t)$.$X(t)$, étant limite uniforme de la suite $X_n(t)$, est presque sûrement à trajectoires continues, donc mesurable.

Sachant, d'après 1,11), que $||\Delta_n(t)||^2$ est le terme général d'une série convergente, la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t)$$

est convergente en moyenne quadratique pour tout t et donc X(t) est,presque sûrement, égal à la somme de cette série.

Alors de $||X(t)||^2 = ||\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t)||^2$

on déduit par une inégalité classique que :

$$\left\{\begin{array}{l} ||X(t)||^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^n.\ ||\Delta_n(t)||^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\, b^{n-1}}{(n-1)!} = c \\ t \in T \end{array}\right.$$

$||X(t)||$ est donc uniformément bornée en t sur T.

Montrons enfin que $X(t)$ satisfait presque sûrement à 1,8) :
l'hypothèse h_1 entraîne que, presque sûrement , $h[X_n(u), Y(u), Z(u), u]$ converge uniformément vers $h[X(u), Y(u), Z(u), u]$ lorsque n augmente indéfiniment.

Donc, presque sûrement, on a, pour toute valeur de t sur T :

$$\int_0^t h[X_n(u), Y(u), Z(u), u]\, du \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^t h[X(u), Y(u), Z(u), u]\, du$$

d'où il découle immédiatement que $X(t)$ satisfait presque sûrement à 1,8).

Unicité Si $X'(t)$ est une autre solution de 1), on démontre, par des techniques analogues, que pour tout entier n, suffisamment grand

$$||X(t) - X'(t)||^2 \leqslant \frac{a^n}{n!} \qquad t \in T$$

donc, pour chaque valeur de t, presque sûrement $X(t) = X'(t)$.
Mais, $X(t)$ et $X'(t)$ étant presque sûrement à trajectoires continues, $X(t)$ et $X'(t)$ coïncident presque sûrement pour toute valeur de t sur T : il suffit d'assurer la coïncidence des deux fonctions aléatoires sur un ensemble dénombrable de valeurs de t partout dense dans T.

Remarques :

1 - l'égalité :

$$X(t_1) = X(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} h(X(u), Y(u), Z(u), u)\, du$$

a lieu presque sûrement quels que soient t_1 et t_2, c'est-à-dire qu'il existe une partie Ω^* de Ω de probabilité 1, indépendante de t_1 et t_2, telle que:

$$\forall\ \omega \in \Omega^* \quad \text{on ait l'égalité précédente.}$$

2 - Deux solutions de 1,8) étant presque sûrement égales les valeurs correspondantes du critère :

1,2) $$E\left\{\int_0^T g[X(t), Y(t), Z(t), t]\, dt\right\}$$

sont égales. Il suffit donc de choisir une solution particulière de 1,8); ce qui sera fait implicitement dans toute la suite.

3 - La démonstration du lemme 1.2. montre que dans la majoration :

$$||X(t)||^2 \leqslant c \quad , \quad \text{la constante c est indépendante de } Y(t).$$

2. Théorème général

Comme nous l'avons déjà remarqué, on restreint en général le problème de la minimisation de 1,12) à des classes de stratégies moins vastes que C_M. Nous étudierons donc ce problème dans le cas où on se limite à un sous-ensemble C de C_M que l'on appellera :

Classe des stratégies admissibles et qui satisfait à la propriété suivante: quel que soit t_1 appartenant à T , il existe au moins une variable aléatoire π définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans F, telle que :

$$\forall \quad t_2 \in]t_1, T] , \forall \ Y(t) \in C$$

la stratégie Y'(t) définie par :

$$\begin{cases} Y'(t) = Y(t) & t \in \complement_T]t_1, t_2] \\ Y'(t) = \pi & t \in]t_1, t_2] \end{cases}$$

est aussi élément de C.

On appelera A_{t_1} la famille de ces variables aléatoires dites perturbations admissibles en t_1

Remarque : le mot "admissible" est utilisé dans ce chapitre avec une signification différente de la signification statistique employée aux chapitres I etII. Nous pensons toutefois qu'il n'y a pas risque de confusion

Nous démontrons un théorème qui est une condition nécessaire pour qu'un élément de C soit optimal. Ce théorème sera ensuite appliqué à certaines classes particulières de stratégies.

On a le théorème :

<u>Théorème 2,1</u> : <u>Une condition nécessaire pour qu'une stratégie admissible $Y^o(t)$ à laquelle correspond $X^o(t)$ soit optimale est qu'existe une fonction aléatoire réelle $\psi(t)$ satisfaisant presque sûrement à</u> :

$$2,1)\quad \psi(t) = \int_t^T \{-g^1[X^o(u), Y^o(u), Z(u), u] + h^1[X^o(u), Y^o(u), Z(u), u]\psi(u)\}du$$

<u>et telle que, pour presque tout t élément de T, la condition</u> :

$$2,2)\quad \begin{aligned} &E\left[g[X^o(t),\pi, Z(t), t]-\psi(t).\, h[X^o(t),\pi, Z(t), t]\right] \geq \\ &E\left[g[X^o(t), Y^o(t), Z(t), t]-\psi(t).\, h[X^o(t), Y^o(t), Z(t), t]\right] \end{aligned}$$

<u>soit satisfaite, quel que soit π élément de A_t</u>

<u>Introduction à la démonstration</u> :

Remarquons d'abord que, si $X(t)$ correspond à $Y(t) \in C$ par l'intermédiaire de 1,8), $g[X(t), Y(t), Z(t), t]$ est élément de L d'après 1,6), puisque $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont éléments de L^2 ; 1,12) a donc une valeur finie.

Supposons donc qu'existe un élément $Y^o(t)$ de C qui soit optimal, à $Y^o(t)$ correspond $X^o(t)$.

Soit $t_1 \in T$ et $\tau > 0$ tel que $t_1 + \tau < T$

On définit l'élément Y^P de C par

$$\left|\begin{array}{ll} Y^P(t) = Y^o(t) & t \in \complement_T \,]t_1, t_1+\tau[\\ Y^P(t) = \pi & t \in \,]t_1, t_1+\tau[\quad \pi \in A_{t_1} \end{array}\right.$$

D'après le lemme 1.2), à $Y^P(t)$ correspond $X^P(t)$. On remarque d'ailleurs que presque sûrement $X^P(t) = X^o(t)$ pour $0 \leq t \leq t_1$

Le fait que $Y^o(t)$ soit optimale entraîne que pour tout élément π de A_{t_1}.

$$E\left[\int_{t_1}^{T}\{g(X^P(t),Y^P(t),Z(t),t) - g(X^o(t),\ Y^o(t),\ Z(t),\ t)\}dt\right] \geq 0$$

L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\alpha(t_1,\ \tau) + \beta(t_1,\ \tau) \geq 0 \quad \text{où}$$

$$\alpha(t_1,\ \tau) = \int_{t_1}^{t_1+\tau}\{E\ [g(X^P(t),\ Y^P(t),\ Z(t),\ t) - g(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t]\}dt$$

$$\beta(t_1,\ \tau) = \int_{t_1+\tau}^{T}\{E\ [g(X^P(t),\ Y^o(t),\ Z(t),\ t) - g(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t]\}dt$$

La méthode de démonstration consiste à calculer les dérivées à droite de $\alpha(t_1,\ \tau)$ et de $\beta(t_1,\ \tau)$, considérées comme fonctions de τ , au point $\tau=0$.

Bien que le résultat qu'il énonce soit un résultat très connu de la théorie des fonctions nous énonçons, à titre de référence pour la suite, le lemme suivant :

Lemme 2.1 : Soit $f(t)$ une fonction définie et intégrable sur T. Pour presque tout t élément de T on a :

$$\frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau}(f(u) - f(t))\ du \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

I. Calcul de $\alpha(t_1,\ \tau)$

Ce calcul nécessite le lemme suivant :

Lemme 2.2 : presque sûrement :

$$|X^P(t) - X^o(t)| \leq e^{K\tau} - 1 \qquad \forall\ t \in [t_1,\ t_1+\tau]$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise la construction, telle qu'elle est faite au lemme 1.2 de $X^P(t)$ et $X^o(t)$ à partir du même processus $X_o(t) \equiv 0$, et on note $\{X_n^P\}$ et $\{X_n^o\}$ respectivement les suites des divers itérés.

Supposons que :

2,3) p.s. $|X_n^p(t)-X_n^o(t)| \leqslant K(t-t_1)+\ldots+K^n \frac{(t-t_1)^n}{n!} \qquad \forall\, t \in [t_1, t_1+\tau]$

de $X_{n+1}^p(t)-X_{n+1}^o(t) = \int_{t_1}^{t} \left(h[X_n^p(u),\pi,Z(u),u]-h[X_n^o(u),Y^o(u),Z(u),u]\right) du$

il découle, d'après h_1,

$$\text{p.s.}\ |X_{n+1}^p(t)-X_{n+1}^o(t)| \leqslant K \int_{t_1}^{t} \left(|X_n^p(u)-X_n^o(u)|+1\right) du \leqslant K(t-t_1)+\ldots+\frac{K^{n+1}(t-t_1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

L'inégalité 2,3), étant vraie pour n = 1, est donc vraie quel que soit n pour tout t élément de $[t_1, t_1+\tau]$.

On a donc démontré que, pour tout n,

$$\text{p.s.} \qquad |X_n^p(t)-X_n^o(t)| \leqslant e^{K\tau}-1 \qquad \forall\, t \in [t_1, t_1+\tau]$$

Le résultat du lemme découle alors immédiatement du fait que, presque sûrement, $X_n^p(t)$ et $X_n^o(t)$ convergent uniformément vers $X^p(t)$ et $X^o(t)$ respectivement.

On démontre alors le résultat :

Lemme 2.3

$$\alpha(t_1,\tau) = \left[E\left(g[X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1]-g[X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1]\right)\right]+R_1(t_1,\tau)$$

où $\frac{1}{\tau} R_1(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau\to 0]{} 0$ pour presque tout t_1 élément de T

En effet, d'après l'expression de $\alpha(t_1,\tau)$, $R_1(t_1,\tau)$ peut s'écrire :

$$R_1(t_1,\tau) = R_1'(t_1,\tau)+R_1''(t_1,\tau)$$

où

$$R'_1(t_1,\tau) = \int_{t_1}^{t_1+\tau} \left\{E\left[g(X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t)\right]-E\left[g(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t)\right]\right\} dt$$

$$R''_1(t_1,\tau) = \int_{t_1}^{t_1+\tau} \left(E\left[g(X^p(t),\pi,Z(t),t)-g(X^p(t_1),\pi,Z(t_1),t_1)\right]\right) dt$$

D'après 1,6) et le fait que $||X^o(t)||$ et $||Z(t)||$ sont des fonctions de t, uniformément bornées sur T, $E[g(X^o(t), Y^o(t), Z(t), t]$ est une fonction de t mesurable et bornée sur T.

Donc d'après le lemme 2.1 : $\frac{1}{\tau} R_1'(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$ pour presque tout t_1 élément de T.

R_1'' ne peut être traité de la même façon car $X^P(t)$ dépend implicitement de τ et, de plus, l'ensemble de mesure nulle introduit sur T dépend de π; on a un exemple ici d'une difficulté propre aux modèles stochastiques, difficulté qui, pour être surmontée, nécessite des hypothèses de régularité pour h et Z.

L'hypothèse h_2 permet d'écrire :

2,4) $$|R_1''(t_1, \tau)| \leq K \int_{t_1}^{t_1+\tau} \Big(E\{\big[|X^P(t) - X^P(t_1)| + |Z(t) - Z(t_1)| + |t - t_1|\big]\cdots$$

$$\big[|X^P(t) + X^P(t_1)| + 2|\pi| + |Z(t) + Z(t_1)| + |t + t_1|\big]\}\Big)dt$$

Or d'après la remarque 3 du § 1 $||X^P(t)||$ est uniformément bornée sur $[t_1, t_1, +\tau]$ indépendamment de π.

Il existe donc une constante B > 0, indépendante de π et τ, telle que :

$$E\{\big(|X^P(t) + X^P(t_1)| + 2|\pi| + |Z(t) + Z(t_1)| + |t+t_1|\big)^2\} \leq B^2 , \quad t\in[t_1,t_1+\tau]$$

De 2,4) on déduit donc, en décomposant le membre de droite en trois intégrales auxquelles on applique l'inégalité de Schwarz relativement au symbole E :

2,5) $$|R_1''(t_1, \tau)| \leq KE\{\int_{t_1}^{t_1+\tau} || X^P(t) - X^P(t_1) ||dt + \int_{t_1}^{t_1+\tau} ||Z(t)-Z(t_1)|| dt + \int_{t_1}^{t_1+\tau} (t-t_1)dt\}$$

or $$||X^P(t) - X^P(t_1)|| \leq ||X^P(t) - X^o(t)|| + ||X^o(t) - X^o(t_1)||$$

et, d'une part d'après le lemme 2.2

2,6) $$||X^p(t) - X^p(t_1)|| \leqslant e^{K\tau} - 1$$

d'autre part d'après 1,5)

$$||X^o(t) - X^o(t_1)||^2 \leqslant E\left\{\int_{t_1}^{t} H[X^o(u), Z(u)]du\right\}^2 \leqslant E\left\{\int_{t_1}^{t_1+\tau} H[X^o(u), Z(u)]\right\}^2$$

$$\leqslant E\left\{\tau\int_{t_1}^{t_1+\tau} H^2[X^o(u), Z(u)]du\right\} = \tau\int_{t_1}^{t_1+\tau} E\{H^2[X^o(u), Z(u)]\}du$$

$E[H^2(X^o(u), Z(u))]$ étant uniformément borné en t puisque $||X^o(u)||$ et $||Z(u)||$ possédent cette propriété, il existe donc une constante $D > 0$ telle que, compte tenu de 2,6), on puisse écrire :

2,7) $$||X^p(t) - X^p(t_1)|| \leqslant D\tau \qquad \forall\, t \in [t_1, t_1 + \tau]$$

Enfin Z(t) étant continue en moyenne quadratique, on a :

$$\forall \quad \varepsilon>0 \quad \exists \quad \tau_1 > 0 \text{ tel que } t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1 \Longrightarrow ||Z(t) - Z(t_1)|| \leqslant \varepsilon$$

donc si $\tau < \tau_1$ il résulte de 2,5) et 2,7) que :

$$|R_1''(t_1,\tau)| \leqslant KB\,[D\,\tau + \varepsilon + \tau]\tau$$

donc $\frac{1}{\tau} R_1''(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$. Ce qui achève de démontrer le lemme.

Remarque : Le résultat concernant $R_1'(t_1,\tau)$ ne peut être amélioré sans hypothèses de régularité supplémentaires sur $Y^o(t)$.

II. Calcul de $\beta(t_1,\tau)$

Ce calcul nécessite un certain nombre de lemmes préliminaires.

<u>Lemme 2.4</u> : <u>il existe une constante K' telle que presque sûrement</u>

$$\underline{|X^P(t) - X^o(t)| \leqslant K'\tau \qquad \forall\, t \in [t_1 + \tau,\ T]}$$

On commence par démontrer que :

2,8) $$\text{p.s.}\ |X^P(t)-X^o(t)| \leqslant |X^P(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau)|\, e^{K(t-t_1-\tau)} \qquad \forall\, t \in [t_1 + \tau,\ T]$$

la démonstration de 2,8) est identique à celle du lemme 2.2 si on utilise la relation :

p.s. $$X^P(t)-X^o(t) = X^P(t_1+\tau) - X^o(t_1+\tau) + \ldots\ldots$$

$$+\int_{t_1+\tau}^{t} \left(h[X^P(u),\ Y^o(u),\ Z(u),\ u] - h[X^o(u),\ Y^o(u),\ Z(u),\ u]\right) du$$

Puisque, d'après le lemme 2.2.

p.s. $$|X^P(t_1+\tau) - X^o(t_1+\tau)| \leqslant e^{K\tau}-1$$

2,8) s'écrit :

$$|X^P(t)-X^o(t)| \leqslant \left(e^{K\tau} - 1\right) e^{K(t-t_1-\tau)} \leqslant \left(e^{K\tau} - 1\right) e^{KT} \leqslant K\tau\, e^{2KT}$$

Ce qui entraîne le résultat du lemme.

Les deux lemmes suivants ont pour but de réaliser une approximation de $X^P(t)$ et $X^o(t)$ par les solutions correspondantes de l'équation 1,8) "linéarisée".

<u>Lemme 2.5</u> : <u>Soit $L_\tau(t)$ une fonction aléatoire satisfaisant presque sûrement à</u>

2,9) $$L_\tau(t) = X^P(t_1+\tau) - X^o(t_1+\tau) + \int_{t_1+\tau}^{t} L_\tau(u)\, h^1[X^o(u), Y^o(u), Z(u), u]\, du$$

<u>$\forall\ \varepsilon > 0$ il existe $\tau_2 > 0$ tel que : $\tau \leqslant \tau_2$ entraîne</u>

p.s. $X^P(t) - X^o(t) = L_\tau(t) + R(t, t_1, \tau)$ où $|R(t, t_1, \tau)| \leqslant W.\varepsilon.\tau$

<u>W étant une constante indépendante de τ .</u>

On remarque d'abord que la condition 1,3) entraîne pour chaque valeur de τ l'existence d'un processus $L_\tau(t)$ satisfaisant presque sûrement à 2,9) ; il suffit en effet de reprendre la démonstration des lemmes 1.1 et 1.2., notant $\{L_{n,\tau}(t)\}$ la suite des itérés correspondant à cette équation.

Enfin d'après 1,4)

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0$ tel que $|x' - x| \leq \eta \Rightarrow$

$$g(x',y,z,t) - g(x,y,z,t) = (x'-x)h^1(x,y,z,t)+\varepsilon(x',x,y,z,t)(x'-x)$$

où $$|\varepsilon(x',x,y,z,t)| \leq \varepsilon$$

Donc d'après le lemme 2.4, on peut écrire si $K'\tau \leq \eta$

$$2{,}10)\ \text{p.s}\ X^P(t)-X^o(t)=X^P(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau)+\int_{t_1+\tau}^{t} \left(X^P(u)-X^o(u)\right) h^1 [X^o(u),Y^o(u),Z(u),u]du+..$$

$$+\int_{t_1+\tau}^{t} \left(X^P(u) - X^o(u)\right) \varepsilon\left(X^P(u), X^o(u), Y^o(u), Z(u), u\right)du\ ,\ t \geq t_1 + \tau$$

Le principe de la démonstration du lemme consiste à comparer la suite $\{L_{n,\tau}(t)\}$ à la suite $\{X^P_n(t) - X^o_n(t)\}$ des itérés de l'équation 2,10)

Si $L_{o,\tau} \equiv 0$, on a :p.s.$X^P_1(t) - X^o_1(t) = L_{1,\tau}(t) = X^P(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau)$

On démontre alors par récurrence que pour $n \geq 2$

$$\text{p.s.}\quad X^P_n(t) - X^o_n(t) = L_{n,\tau}(t) + V_n(t,\tau)$$

2,11) où $|V_n(t,\tau)| \leq \varepsilon K'\tau(t-t_1-\tau)\left(1+\frac{K(t-t_1-\tau)}{2!}+\ldots+K^{n-2}\frac{(t-t_1-\tau)^{n-2}}{(n-1)!}\right).$

En effet supposant 2,11) vrai, des relations p.s. $\quad X^p_{n+1}(t) - X^o_{n+1}(t) = X^p(t_1+\tau) - X^o(t_1+\tau) + \ldots.$

$$+\int_{t_1+\tau}^{t}\left(X^p_n(u)-X^o(u)\right)h^1\left(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u\right)du+\int_{t_1+\tau}^{t}\left(X^p_n(u)-X^o_n(u)\right)\ \varepsilon(\cdot\quad)du$$

et

p.s. $\quad L_{n+1,\tau}(t) = X^p(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau)+\int_{t_1+\tau}^{t} L_{n,\tau}(u).h^1(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u)du$

on déduit que: p.s. $X^p_{n+1}(t)-X^o_{n+1}(t) = L_{n+1,\tau}(t)+V_{n+1}(t,\tau)$

$$\text{où } |V_{n+1}(t,\tau)| \leqslant \int_{t_1+\tau}^{t}|V_n(u,\tau)h^1\left(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u\right)|du+\varepsilon\int_{t_1+\tau}^{t}|X^p_n(u)-X^o_n(u)|du$$

l'utilisation de 1,3) et du résultat du lemme 2.4 montre, par un calcul d'intégration immédiat, que la propriété 2,11) s'étend au rang n+1

On a donc si $\tau < \tau_2$ où τ_2 est tel que $K'\ \tau_2 < \eta$

$$|V_n(t,\tau)| \leqslant \varepsilon\tau K'\left(e^{K(t-t_1-\tau)}-1\right) \leqslant \varepsilon\ \tau\ K'\left(e^{KT}-1\right) \leqslant W.\varepsilon.\tau.$$

La fin de la démonstration est identique à celle du lemme 2.2. Pour tout élément t_1 de T on désigne alors par $A(t,t_1)$ une fonction aléatoire satisfaisant presque sûrement à :

2,12) $$A(t,t_1) = 1 + \int_{t_1}^{t} A(u,t_1)h^1\left[X^o(u),Y^o(u),Z(u),u\right]du$$

L'existence de $A(t,t_1)$ est assurée par des considérations identiques à celles utilisées pour $L_\tau(t)$. On a le lemme :

<u>Lemme 2.6</u> : <u>presque sûrement</u>

$$L_\tau(t) = A(t,t_1)\ \left[X^p(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau)\right] + S(t,t_1,\tau)$$

<u>où $|S(t,t_1,\tau)| \leqslant W'\ \tau^2$</u> $\qquad$ <u>W' constante positive indépendante de τ.</u>

La méthode de démonstration est la même que celle du lemme précédent. L'équation 2,12) est résolue par approximations successives ; on note $\{A_n(t,t_1)\}$ la suite des itérés, lorsqu'on pose $A_o(t,t_1) \equiv 0$.

On démontre d'abord par récurrence que $\forall n$:

$$2,13)\text{p.s. } |A_n(t,t_1)| \leqslant 1+K(t-t_1)+\ldots+K^{n-1}\frac{(t-t_1)^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant e^{K(t-t_1)}, \ \forall\ t \geqslant t_1$$

on compare ensuite $L_{n,\tau}(t)$ et $A_n(t,t_1)$. On démontre par récurrence que:

$$L_{n,\tau}(t) = (X^P(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau))A_n(t,t_1)+S_n(t,t_1,\tau)$$

p.s.

$$|S_n(t,t_1,\tau)| \leqslant K'\tau(e^{K\tau}-1)(1+K(t-t_1)+\cdots+K^{n-2}\frac{(t-t_1)^{n-2}}{(n-2)!} \qquad n \geqslant 2$$

La démonstration de 2,5) ne présente aucune difficulté ; on utilise le fait que presque sûrement :

$$S_{n+1}(t,t_1,\tau) = -\int_{t_1}^{t_1+\tau}\Big(X^P(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau)\Big)A_n(u,t_1)h^1\Big(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u\Big)du$$

$$+\int_{t_1+\tau}^{t} S_n(u,t_1,\tau)h^1\Big(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u\Big)\,du$$

et la mojoration de S_n découle de 1,3) et 2,13)

Il existe donc bien une constante W' telle que

$$\text{p.s. } |S_n(t,t_1,\tau)| \leqslant W'\tau^2 \qquad \forall\ n, \quad \forall t \geqslant t_1+\tau$$

La conclusion est alors identique à celle des lemmes précédents nous démontrons alors un lemme donnant des inégalités utiles pour la suite

Lemme 2.7 : on a presque sûrement :

2,14) $$|A(t,t_1)| \leqslant e^{KT}$$

$$0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$$

2,15) $$|A(t,t_1) - A(t,t_2)| \leqslant Ke^{2KT}(t_2-t_1)$$

2,14) résulte immédiatement de 2,13)

Quant à 2,15) le résultat est obtenu comme dans les lemmes précédents,en utilisant des approximations successives de $A(t,t_1)$ et $A(t,t_2)$:

de $$|A_{n+1}(t,t_1)-A_{n+1}(t,t_2)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} A_n(u,\ t_n)h^1\,[X^o(u),\ Y^o(u),\ Z(u),\ u\,]du$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} |A_n(u,t_1) - A_n(u,t_2)|h^1\,[X^o(u),\ Y^o(u),\ Z(u),\ u\,]du$$

on déduit par récurrence, utilisant 2,13) et $|h^1\,[\ldots]| \leqslant K$, que

p.s. $$|A_n(t,t_1)-A_n(t,t_2)| \leqslant Ke^{KT}(t_2-t_1)\left[1+K(t_1-t_2)+\ldots+K^{n-2}\,\frac{(t-t_2)^{n-2}}{(n-2)!}\right]$$

2,15) se déduit alors immédiatement de la majoration ci-dessus par les techniques déjà utilisées.

On est alors en mesure d'exprimer $X^p(t)-X^o(t)$ à l'aide de la "résolvante" $A(t,t_1)$ de l'équation 1,8) "linéarisée" :

lemme 2.8. On a presque sûrement, pour $t \geqslant t_1 + \tau$

2,16) $X^P(t)-X^o(t)=\tau.A(t,t_1)\{h[X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1]-h[X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1]\}+R_2(t,t_1,\tau)$

où p.s. $R_2(t,t_1,\tau)=R(t,t_1,\tau)+S(t,t_1,\tau)+[R_3(t_1,\tau)+R_4(t_1,\tau)]A(t,t_1)$.

p.s.
$$R_3(t_1,\tau)=\int_{t_1}^{t_1+\tau}\Big[h[X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1]-h[X^o(u),Y^o(u),Z(u),z]\Big]du$$

$$R_4(t_1,\tau)=\int_{t_1}^{t_1+\tau}\Big[h[X^P(u),\pi,Z(u),u]-h[X^P(t_1),\pi,Z(t_1),t_1]\Big]du$$

En effet on a :

p.s. $X^P(t_1+\tau)-X^o(t_1+\tau)=\tau\Big[h[X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1]-h[X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1]\Big]+\ldots$

$$R_3(t_1,\tau)+R_4(t_1,\tau)$$

2,16) s'obtient alors immédiatement en utilisant successivement les lemmes 2.5. et 2.6.

Le lemme 2.8 permet alors de calculer $\beta(t_1,\tau)$; on définit une fonction aléatoire $\psi(t)$ par :

2,17) $$\psi(t)=-\int_t^T A(u,t)\, g^1\,[X^o(u),Y^o(u),Z(u),u]\,du$$

les inégalités 1,7) et 2,14) permettent de donner un sens à 2,17). Ces notions seront précisées au lemme 2.14) où il est démontré que $\psi(t)$ satisfait presque sûrement à 2,1).

On a le résultat permettant de calculer $\beta(t_1,\tau)$:

lemme 2.9

$\beta(t_1,\tau)=-\tau.E\Big[\psi(t_1)h(X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1)-\psi(t_1)h(X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1)\Big]+R_5(t_1,\tau)$

où: $\frac{1}{\tau}R_5(t_1,\tau)\underset{\tau\to 0}{\to}0$, pour presque tout t_1 élément de T.

En effet d'après h_4: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta' > 0$ tel que $|x'-x| \leq \eta' \Rightarrow$

$$g(x',y,z,t)-g(x,y,z,t)=(x'-x)g^1(x,y,z,t)+(x'-x)\varepsilon(x',x,y,z,t)$$

où $\quad |\varepsilon(x',x,y,z,t)| \leq \varepsilon \qquad\qquad \forall\ x,y,z,t$

donc, si on choisit τ_3 tel que : $K'\ \tau_3 \leq \eta'$ alors, pour toute valeur de τ inférieure ou égale à τ_3, on peut écrire, utilisant le résultat du lemme 2.4 et la définition de $\beta(t_1,\tau)$

$$\beta(t_1,\tau)=E\int_{t_1+\tau}^{T} (X^P(t)-X^o(t))g^1(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t\ dt + R_6(t_1,\tau)$$

où $|R_6(t_1,\tau)| \leq \varepsilon\ E \int_{t_1+\tau}^{T} |X^P(t)-X^o(t)|dt \leq K'\ T\ \varepsilon\ \tau$

Il résulte de cette inégalité que : $\frac{1}{\tau} R_6(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$

Le lemme 2.8 permet alors d'écrire :

$$\beta(t_1,\tau) = \tau E\Big[\int_{t_1+\tau}^{T} A(t,t_1)\big[h(X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1)$$

$$- h(X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1)\big]g^1(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t\ dt\Big]$$

$$+ R_7(t_1,\tau) + R_6(t_1,\tau)$$

où

2,18) $$R_7(t_1,\tau) = E\Big[\int_{t_1+\tau}^{T} R_2(t,t_1,\tau).g^1(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t)\ dt\Big]$$

On peut alors écrire:

$$\left\{\begin{aligned} \beta(t_1,\tau) = \tau.E\Big\{\int_{t_1}^{T} & A(t,t_1)\ \big[h(X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1) \\ & - h(X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1)\big]g^1(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t)\ dt \\ & + R_6(t_1,\tau) + R_7(t_1,\tau) + R_8(t_1,\tau) \end{aligned}\right.$$

où

2,19) $$R_8(t_1,\tau) = \tau.E\{\int_{t_1+\tau}^{t_1} A(t,t_1)\ [h(x^o(t_1),\ ,Z(t_1),\ t_1)\ldots$$
$$- h(X^o(t_1),\ Y^o(t_1),\ Z(t_1),t_1)]g^1(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t)dt\}$$

Le lemme 2.9 résulte alors de la définition de $\psi(t)$ par 2,17) si l'on démontre que :

$$\frac{1}{\tau} R_7(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0 \quad , \quad \frac{1}{\tau} R_8(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

Les lemmes suivants permettent de démontrer ces propriétés.

<u>Lemme 2.10</u> <u>$\forall\ t_1 \in T \quad \frac{1}{\tau} R_8(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$</u>

En effet de 2,19) on tire, utilisant l'hypothèse h_1, les inégalités 1,7) et 2,14)

$$|R_8(t_1,\tau)| \leq Ke^{KT}\tau.E\{\int_{t_1}^{t_1+\tau} G(X^o(t),Z(t))dt\} = Ke^{KT}\tau\int_{t_1}^{t_1+\tau} E[G(X^o(t),Z(t))]dt$$

$E[G(X^o(t),\ Z(t))]$ étant uniformément borné sur T, le résultat du lemme est immédiat.

L'utilisation du lemme 2.8 permet de décomposer $R_7(t_1,\tau)$ en la somme de 3 termes :

$$R_7(t_1,\tau) = T_1(t_1,\tau)+T_2(t_1,\tau)+T_3(t_1,\tau)$$

où

$$T_1(t_1,\tau) = E\{\int_{t_1+\tau}^{T} (g^1(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u)(R(u,t_1,\tau)+S(u,t_1,\tau))du\}$$

$$T_2(t_1,\tau) = E\{\int_{t_1+\tau}^{T} g^1(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u).R_3(t_1,\tau)A(u,t_1))du\}$$

$$T_3(t_1,\tau) = E\{\int_{t_1+\tau}^{T} g^1(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u).R_4(t_1,\tau)A(u,t_1)\ du\}$$

Lemme 2.11 $\forall\, \tau_1 \in T \qquad \frac{1}{\tau} T_1(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$

En effet d'après 1,7) et les lemmes 2.5 et 2.6 on peut écrire :

$$\tau < \tau_2 \Longrightarrow$$

$$|T_1(t_1,\tau)| \leqslant E\left\{\int_{t_1}^{T} G\Big(X^o(u),Z(u)\Big)\left(w\varepsilon\tau+w'\tau^2\right)\right\} \leqslant \left(w\varepsilon\tau+w'\tau\right)^2 \int_0^T E\{G[X^o(u),Z(u)]\}du$$

Cette inégalité permet de conclure immédiatement.

Lemme 2.12 : pour presque tout t_1 élément de T: $\frac{1}{\tau} T_2(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$

Nous adopterons, par commodité, les notations suivantes :

$$h(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t) = h(.,t), g^1(X^o(t),Y^o(t),Z(t),t) = g^1(.,t) \;;$$

compte tenu de ces notations et de l'expression de $R_3(t_1,\tau)$, $T_2(t_1,\tau)$ s'écrit :

$$T_2(t_1,\tau) = E\left\{\int_{t_1+\tau}^{T} g^1(.,u).A(u,t_1)du.\int_{t_1}^{t_1+\tau} (h(.,t_1) - h(.,v))\,dv\right\}$$

l'absence d'hypothèses de continuité sur $Y^o(t)$ nécessite comme au lemme 2.3 l'emploi du lemme 2.1. Pour ce faire nous devons décomposer $T_2(t_1,\tau)$ en posant :

$$T_2(t,\tau) = T'_2(t_1,\tau)+T''_2(t_1,\tau)+T'''_2(t_1,\tau)$$

où

$$\begin{cases} T'_2(t_1,\tau)=E\left\{\int_{t_1}^{t_1+\tau} h(.,t_1)dv\int_{t_1}^{T} g^1(.,u)A(u,t_1)du-\int_{t_1}^{t_1+\tau} h(.,v)dv\int_{v}^{T} g^1(.,u)A(u,v)du\right\} \\[2ex] T''_2(t_1,\tau)=E\left\{-\int_{t_1}^{t_1+\tau} h(.,t_1)dv\int_{t_1}^{t_1+\tau} g^1(.,u)A(u,t_1)du\right\}+E\left\{\int_{t_1}^{t_1+\tau} h(.,v)dv\int_{v}^{T} g^1(.,u)A(u,t_1)du\right\} \\[2ex] T'''_2(t_1,\tau)=E\left\{\int_{t}^{t_1+\tau} h(.,v)dv\int_{v}^{T} g^1(.,u)(A(u,v) - A(u,t_1))du\right\} \end{cases}$$

majoration de $T_2'(t_1,\tau)$

Si l'on pose $I(t)=E\left[h(.,t).\int_{t_1}^{T} g^{1}(.,u)A(u,t)du\right]$

$T_2'(t_1,\tau)$ s'écrit : $T_2'(t_1,\tau) = \int_{t_1}^{t_1+\tau} \left[I(t_1) - I(v)\right] dv$

or d'après 1,5), 1,7) et 2,14)

$$|I(t)| \leqslant E\left\{H\left[X^o(t),Z(t)\right].\int^{T} G(X^o(v),Z(v))\,dv\right\} e^{KT}$$

d'où

$$|I(t)| \leqslant \left[E\left[H^2\left(X^o(t),Z(t)\right)\right]\right]^{1/2} E\left[\left(\int_0^T G(X^o(v),Z(v)dv\right)^2\right]^{1/2} . e^{KT}$$

Le fait que $E\left[H^2(X^o(t),Z(t))\right]$ soit uniformément borné sur T entraîne la même propriété pour I(t). Le lemme 2.1 assure alors que :

$$\frac{1}{\tau}T'_2(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

pour presque toute valeur de t_1.

majoration de $T_2''(t_1,\tau)$

1,5), 1,7) et 2,14) entraînent que :

$$|T''_2(t_1,\tau)| \leqslant 2e^{KT}.E\left[\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t_1}^{t_1+\tau} G(X^o(u),Z(u)).H(X^o(v),Z(v))\,du\,dv\right]$$

$$|T_2'(t_1,\tau)| \leqslant 2e^{KT}\, E\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\left\{E\left[G(X^o(u),Z(u))H(X^o(v),Z(v))\right]\right\} du\,dv$$

$E\left\{G\left[X^o(u),Z(u)\right] .H\left[X^o(v),Z(v)\right]\right\}$ étant uniformément borné sur le

carré $\left|\begin{array}{l} 0 \leqslant u \leqslant T \\ 0 \leqslant v \leqslant T \end{array}\right.$ on a : $\frac{1}{\tau}\,T''_2(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$

majoration de $T_2'''(t_1,\tau)$

1,5), 1,7) et 2,14) entraînent que :

$$|T_2'''(t_1,\tau)| \leq Ke^{2KT} E\left\{\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t_1}^{T} G(X^o(u),Z(u))H(X^o(v),Z(v))\,(v-t_1)\,dv\,du\right.$$

d'où

$$|T_2'''(t_1,\tau)| \leq K\tau e^{2KT}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{o}^{T} E\left[G(X^o(u),Z(u))H(X^o(v),Z(v))\right]du\,dv$$

$$\text{donc } \frac{1}{\tau}T'''(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

Lemme 2.13

$$\forall\, t_1 \in T \qquad \frac{1}{\tau}\, T_3(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

$$T_3(t_1,\tau) = E\left[\int_{t_1+\tau}^{T} g^1(X^o(u),Y^o(u),Z(u),u)\,A(u,t_1)\,du.\right.$$

$$\left.\int_{t_1}^{t_1+\tau}\left[h(X^P(v),\pi,Z(v),v) - h(X^P(t_1),\pi,Z(t_1),t_1)\right]dv\right]$$

l'utilisation de h_1, de 1,7) et de 2,14) permet d'écrire :

$$|T_3(t_1,\tau)| \leq Ke^{KT}E\left[\int_o^T G(X^o(u),Z(u))du.\int_{t_1}^{t_1+\tau}\left[|X^P(v)-X^P(t_1)|+|Z(v)-Z(t_1)|+(v-t_1)\right]dv\right]$$

d'où

$$|T_3(t_1,\tau)| \leq Ke^{KT}\int_o^T\int_{t_1}^{t_1+\tau} E\Big[G(X^o(u),Z(u))(|X^P(v)-X^P(t_1)|+ \ldots\ldots$$

$$+|Z(v)-Z(t_1)|+(v-t_1))\Big]\,du\,dv.$$

Puisque $E\left[G(X^o(u),Z(u))\right]$ est uniformément borné sur T, on est alors ramené à une majoration du même type que celle de $R_1''(t_1,\tau)$

$$\text{donc } \frac{1}{\tau}\, T_3(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

- les lemmes 2.3 et 2.9 joints à la condition :

$$\alpha(t_1,\tau) + \beta(t_1,\tau) \geq 0 \qquad \tau \geq 0$$

permettent d'achever immédiatement la démonstration du théorème 2.1.
Il reste à démontrer le résultat :

<u>lemme 2.14</u> <u>presque sûrement $\psi(t)$ satisfait à 2,1)</u>

Le procédé de résolution par approximations successives, de l'équation:

$$A(t,u) = 1 + \int_u^t A(v,u)\, h^1[X^\circ(v),Y^\circ(v),Z(v),v]dv$$

montre que $A(t,u)$ satisfait à cette équation presque sûrement <u>quels que soient t et u</u>

Donc $A(t,u)$, qui est la résolvante d'une équation différentielle linéaire satisfait aussi à :

$$\text{p.s.} \quad A(t,u) = 1 + \int_u^t A(t,v)\, h^1(X^\circ(v),Y^\circ(v),Z(v),v)dv \qquad \forall \quad u \text{ et } t$$

utilisant la définition de $\psi(t)$ on peut alors écrire :

$$\text{p.s.}\ \psi(t) = -\int_t^T g^1(X^\circ(u),\ Y^\circ(u),\ Z(u),\ u)du - \ldots$$

$$-\int_t^T du \int_t^u A(u,v)h^1(X^\circ(v),Y^\circ(v),Z(v),v)g^1[X^\circ(u),Y^\circ(u),Z(u),u]dv$$

les majorations des fonctions intervenant dans l'intégrale double permettent une interversion de l'ordre d'intégration ; ce qui conduit à :

$$\text{p.s.} \quad \psi(t) = -\int_t^T g^1(X^\circ(u),Y^\circ(u),Z(u),u)du - \ldots$$

$$-\int_t^T h^1(X^\circ(v),Y^\circ(v),Z(v),v)dv\int_v^T g^1(X^\circ(u),Y^\circ(u),Z(u),u)A(u,v)du$$

et 2,1) résulte immédiatement de la définition de $\psi(t)$.

3. Applications du théorème 2.1 à deux classes de stratégies

Montrons comment le théorème 2.1 permet d'obtenir pour certaines classes de stratégies des résultats plus fins.

a. Cas où C est l'ensemble C_M

Pour toute valeur de t, A_t est alors l'ensemble A de toutes les variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et à valeurs dans F.

Soit Ⓗ l'ensemble de mesure nulle de T pour lequel la condition 2,2) n'est pas satisfaite ; on montre que, sauf pour t_1 élément de $\{T - Ⓗ\}$ on a presque sûrement :

3,1) $$g[X^o(t_1),\pi,Z(t_1), t_1] - \psi(t_1)\, h\,[X^o(t_1),\pi,Z(t_1), t_1] \geq$$

$$g[X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1] - \psi(t_1)\, h[X^o(t_1), Y^o(t_1),Z(t_1),t_1]$$

quel que soit π élément de A.

En effet sinon pour au moins un élement de $\{T - Ⓗ\}$ il existe un sous-ensemble mesurable $\mathcal{A}$ de Ω de mesure positive et une variable π' à valeur dans F tels que :
Sur $\mathcal{A}$:

3,2) $$g[X^o(t_1),\pi',Z(t),t_1] - \psi(t_1).h\,[X^o(t_1),\pi',Z(t_1),t_1] <$$

$$g[\ \text{"}\quad Y^o(t_1) \qquad \text{"} \quad \text{"} \qquad Y^o(t_1) \quad \text{"}\ ]$$

Soit alors π'' définie par : $\pi'' = \pi'$ sur $\mathcal{A}$
$\pi'' = Y^o(t_1)$ sur $\complement\mathcal{A}$

puisque sur $\complement\mathcal{A}$

3,3) $$g[X^o(t_1),\pi'',Z(t_1),t_1]- \psi(t_1).h\,[X^o(t_1),\pi'',Z(t_1),t_1] =$$

$$\text{"} \qquad Y^o(t_1) \qquad \text{"} \quad \text{"} \qquad Y^o(t_1) \quad \text{"}$$

On déduit de 3,2) et 3,3) par calcul des espérances mathématiques que pour π'' la condition 2,2) n'est pas satisfaite, ~~ce~~ qui est impossible. La condition 3,1) est donc vraie dans les conditions précisées.

On a donc le théorème :

Théorème 3.1. Une condition nécessaire pour qu'un élément $Y^o(t)$ de C_M auquel correspond $X^o(t)$ soit optimal est qu'existe $\psi(t)$ satisfaisant presque sûrement à 2,1) et telle que, pour presque tout τ élément de T, on ait presque sûrement :

$$g\left[X^o(t),\pi,Z(t),t\right] - \psi(t).h\left[X^o(t),\pi,Z(t),t\right] \geq$$

$$g\left[X^o(t),Y^o(t),Z(t),t\right] - \psi(t).h\left[X^o(t),Y^o(t),Z(t),t\right]$$

Quelle que soit π variable aléatoire à valeurs dans F.

b. Cas où C est une classe C_a de stratégies adaptées

Cet exemple important a été introduit au § I.7.

Soit C_a la classe de stratégies correspondant au sous-ensemble T_1 de T des temps d'observation ; on désigne par $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ la famille croissante de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$ définie par la donnée de T_1.

A_t est dans ce cas l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans F mesurables par rapport à $\mathcal{A}_{t^+}$, où $\mathcal{A}_{t^+}$ désigne la σ-algèbre intersection des $\mathcal{A}_s$ pour $s > t$.

Pour les applications, il suffit de se limiter au sous-ensemble A'_t de A_t constitué des éléments de A_t qui sont mesurables par rapport à $\mathcal{A}_t$.

On déduit du théorème 2.1, le théorème suivant :

Théorème 3.2 : Une condition nécessaire pour qu'un élément $Y^o(t)$ de C_a auquel correspond $X^o(t)$ soit optimal sur C_a est qu'existe $\psi(t)$ satisfaisant presque sûrement à 2,1) et tel que, pour presque toute valeur de t sur T , on ait presque sûrement

$$\text{3,4)}\quad \begin{aligned} &E\left[g\left[X^o(t),\pi,Z(t),t\right] - \psi(t)\, h\left[X^o(t),\pi,Z(t),t\right] \mid \mathcal{A}_t\right] \geqslant \\ &E\left[g\left[X^o(t),\, Y^o(t),Z(t),t\right] - \psi(t).h\left[X^o(t),Y^o(t),Z(t),t\right] \mid \mathcal{A}_t\right] \end{aligned}$$

quel que soit π élément de A'_t

Désignons encore par Θ l'ensemble de T pour lequel la condition 2,2) du théorème 2,1) n'est pas satisfaite.

Montrons que : $\forall\ t \in \left(T - \Theta\right)$ la condition 3,4) est satisfaite. En effet sinon il existe au moins $t_1 \in \left(T - \Theta\right)$ et $\pi^a \in A'_{t_1}$ tels que :

$$\text{3,5)}\quad \begin{aligned} &E\left[g\left[X^o(t_1),\pi^a,Z(t_1),t_1\right] -\psi(t_1).h\left[X^o(t_1),\pi^a,Z(t_1),t_1\right] \mid \mathcal{A}_{t_1}\right] < \\ &E\left[g\left[X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t_1\right] - \psi(t_1).h\left[X^o(t_1),Y^o(t_1),Z(t_1),t\right] \mid \mathcal{A}_{t_1}\right] \end{aligned}$$

sur un élément $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}_{t_1}$ de mesure non nulle. Soit la variable aléatoire π^b ainsi définie :

$$\pi^b = \begin{cases} \pi^a & \text{si } \omega \in \mathcal{B} \\ Y^o(t_1) & \text{si } \omega \in \complement \mathcal{B} \end{cases}$$

Il est évident que π^b est élément de A'_{t_1}.

Il résulte de 3,5) que :

$$3,6) \quad \begin{cases} \dfrac{E\left[g\left[X^\circ(t_1),\pi^b,Z(t_1),t_1\right] - \psi(t_1).h\left[X^\circ(t_1),\pi^b,Z(t_1),t_1\right] \mid \mathcal{a}_{t_1}\right]}{E\left[\quad '' \quad Y^\circ(t) \quad '' \quad '' \quad Y^\circ(t_1) \quad '' \mid \mathcal{a}_{t_1}\right]} < \quad \omega \in \mathcal{A} \\ \dfrac{E\left[g\left[X^\circ(t_1),\pi^b,Z(t_1),t_1\right] - \psi(t_1).h\left[X^\circ(t_1),\pi^b,Z(t_1),t_1\right] \mid \mathcal{a}_{t_1}\right]}{E\left[\quad Y^\circ(t_1) \quad '' \quad '' \quad Y^\circ(t_1) \quad '' \mid \mathcal{a}_{t_1}\right]} = \quad \omega \in \complement \mathcal{A} \end{cases}$$

On déduit de 3,6), par calcul des espérances mathématiques :

$$\frac{E\left[g\left[X^\circ(t_1),\pi^b,Z(t_1),t_1\right] - \psi(t_1).h\left[X^\circ(t_1),\pi^b,Z(t_1),t_1\right]\right]}{E\left[g\left[X^\circ(t_1),Y^\circ(t_1),Z(t_1),t_1\right] - \psi(t_1).h\left[X^\circ(t_1),Y^\circ(t_1),Z(t_1),t_1\right]\right]} <$$

ce qui est en contradiction avec le résultat du théorème 2.1. le théorème 3.2 est donc vrai quelque soit t élément de $\{T-\Theta\}$.

Remarque : l'utilisation du théorème 2.1 ne permet pas d'obtenir un résultat aussi fin que celui du théorème 3.I. En effet si on cherche, pour $\pi \in A'_{t_1}$, le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de Ω défini par :

$$\frac{g\left[X^\circ(t_1),\pi,Z(t_1),t_1\right] - \psi(t_1).h\left[X^\circ(t_1),\pi,Z(t_1),t_1\right]}{g\left[\quad Y^\circ(t_1) \quad '' \quad '' \quad Y^\circ(t_1) \quad ''\right]} <$$

$\mathcal{A}$ n'est pas forcément élément de $\mathcal{a}_{t_1}$. La variable π' définie par

$$\pi' = \begin{cases} \pi \text{ sur } \mathcal{A} \\ Y^\circ(t) \text{ sur } \complement \mathcal{A} \end{cases}$$

n'appartient donc pas à A'_{t_1} en général. On ne peut donc pas utiliser la méthode de démonstration du théorème 3.1.

Modifications d'hypothèses

Le théorème 2.1, et par conséquent les théorèmes qui en découlent, peuvent être démontrés sous des hypothèses différentes.

- Dans le cas où les fonctions g et h sont telles que les expressions :

3,7) $$1/\tau E \int_{t_1}^{t_1+\tau} \{h[X^P(t),\pi,Z(t),t] - h[X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1]\}\, dt$$

3,8) $$1/\tau E \int_{t_1}^{t_1+\tau} \{g[X^P(t),\pi,Z(t),t] - g[X^o(t_1),\pi,Z(t_1),t_1]\}\, dt$$

tendent vers zéro, lorsque τ tend vers zéro, pour tout élément t_1 de T, sauf sur un ensemble de mesure nulle de T qui ne dépend pas de π ,il est inutile de supposer que Z(t) est une fonction aléatoire continue en moyenne quadratique. Il suffit de supposer que $\|Z(t)\|$ est uniformément bornée sur T. En effet l'hypothèse de continuité pour Z n'est utilisée que dans la majoration de R''_1 et T_3, expression où interviennent 3,7) et 3,8).

Dans ces conditions il suffit que h satisfasse à une condition de Lipschitz uniquement par rapport à x, que l'hypothèse h_3 soit satisfaite et que les inégalités 1,4), 1,5) , 1,6), qui assurent l'existence des diverses intégrales utilisées dans la démonstration, soient aussi satisfaites.

Ces diverses hypothèses sont vérifiées dans le cas important où g et h sont de la forme :

$$\left|\begin{array}{l} h(x, y, z, t) = \alpha(t)x + \beta(t)y + \gamma(t)z \\ \\ g(x, y, z, t) = a(t)x^2 + b(t)y^2 \end{array}\right.$$

où α;β ; γ; a et b sont des fonctions de t mesurables et uniformément bornées sur T.

En effet 3,7), par exemple, s'écrit alors :

$$1/\tau \int_{t_1}^{t_1+\tau} \alpha(t)\, E\left[X^p(t) - X^o(t_1)\right] dt + 1/\tau \int_{t_1}^{t_1+\tau} \left[\alpha(t) - \alpha(t_1)\right] E(X^o(t_1))dt + \dots$$

$$1/\tau \int_{t_1}^{t_1+\tau} \left[\beta(t)-\beta(t_1)\right].E(\pi)dt + 1/\tau \int_{t_1}^{t_1+\tau} \left\{\gamma(t)\, E(Z(t)) - \gamma(t_1)\, E(Z(t_1))\right\}dt$$

et le résultat concernant cette expression découle des lemmes 2.1 et 2.2. Les mêmes techniques peuvent être appliquées à 3,8).

Les hypothèses portant sur les fonctions g et h, qui permettent d'assurer que les expressions 3,7) et 3,8) tendent vers 0 dans les conditions précisées, sont difficilement exprimables de façon simple ; sinon il serait avantageux de remplacer les hypothèses du § 1 par celles qui ont été formulées ici.

- Sans modifier les hypothèses concernant g et h, on peut remplacer celles imposées au processus Z par :

  . $||Z(t)||$ est uniformément borné sur T

  . Z est à accroissement non corrélés, c'est-à-dire que :

$\forall\, s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$ tels que $s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2$

$$E\left\{ [Z(t_2) - Z(s_2)][Z(t_1) - Z(s_1)] \right\} = E\left\{Z(t_2) - Z(s_2)\right\} - E\left\{Z(t_1) - Z(s_1)\right\}$$

On sait alors (consulter [9] par exemple) qu'existe une fonction F(t) bornée telle que :

3,9) $$E\left\{ \left| [Z(t) - E(Z(t))] - [Z(s) - E(Z(s))] \right|^2 \right\} = F(t) - F(s)$$

$$o \leqslant s \leqslant t \leqslant T$$

L'utilisation de 3,9) permet de montrer directement que :

$$\frac{1}{\tau} R''_1(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0 \quad , \quad \frac{1}{\tau} T_3(t_1,\tau) \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

pour presque tout t élément de T.

Il suffit en fait de le démontrer pour le terme :

$$U(t_1,\tau) = \int_{t_1}^{t_1+\tau} ||Z(t) - Z(t_1)|| \, dt$$

on majore d'abord $||Z(t) - Z(t_1)||$ par

$$\left|\left| [Z(t) - E(Z(t))] - [Z(t_1) - E(E(t_1))] \right|\right| + \left[|E(Z(t)) - E(Z(t_1))|^2 \right]^{1/2}$$

$$\leqslant (F(t) - F(t_1))^{1/2} + |E(Z(t)) - E(Z(t_1))|$$

d'où

$$U(t_1,\tau) \leqslant \int_{t_1}^{t_1+\tau} (F(t) - F(t_1))^{1/2} dt + \int_{t_1}^{t_1+\tau} |E(Z)) - E(Z(t_1))| dt$$

En appliquant à la première intégrale l'inégalité de Schwarz il vient:

$$U(t_1,\tau) \leqslant \sqrt{\tau} \cdot \left\{ \int_{t_1}^{t_1+\tau} (F(t)-F(t_1)) dt \right\}^{1/2} + \int_{t_1}^{t_1+\tau} |E(Z(t))-E(Z(t_1))| dt$$

La propriété découle alors immédiatement du lemme 2.1 si on remarque que F(t) et E(Z(t)) sont des fonctions de t uniformément bornées sur T.

- Les hypothèses peuvent être considérablement réduites dans le cas où l'on se limite à des <u>perturbations certaines</u> ; il suffit que $||Z(t)||$ soit uniformément bornée sur T et que les fonctions g et h vérifient des conditions de régularité moins restrictives. On peut alors démontrer un théorème qui est l'équivalent du théorème 2.1.

On utilise en effet, sauf pour $R''_1(t_1,\tau)$ et $T_3(t_1,\tau)$, la même démonstration.

Pour montrer que $\frac{1}{\tau} R_1''(t_1,\tau)$ et $\frac{1}{\tau} T_3(t_1,\tau)$ tendent vers zéro lorsque τ tend vers zéro, on utilise le lemme2.1,. L'ensemble de T pour lequel la propriété n'est pas vraie dépend en général de la perturbation π utilisée ; mais, puisque π est, dans ce cas, un élément de F, on peut déterminer une suite de perturbations partout dense dans F. Pour l'ensemble de ces perturbations la propriété est encore vraie, sauf sur un ensemble de mesure nulle de T. Si les propriétés de régularité de g et h permettent d'étendre le résultat, par passage à la limite, à toute perturbation, nous obtenons bien le théorème annoncé.

Ce théorème est insuffisant pour démontrer les théorèmes 3.1 et 3.2 et se révèle sans grande utilité pratique. Il permet toutefois de mieux saisir les difficultés propres aux modèles stochastiques.

4. Utilisation des résultats des § 2 et § 3

Montrons quelques applications simples des résultats des paragraphes 2 et 3. Sous les hypothèses formulées au § 1 on a :

lemme 4.1 : il existe deux constantes M et N telles que :

$$||X(t)|| \leqslant M \qquad ||\psi(t)|| \leqslant N \qquad t \in T$$

la première inégalité constitue en fait la remarque 3 du § 1, la deuxième se démontre de la même façon en utilisant le fait que ψ est solution de 2,1) et que les fonctions g^1 et h^1 satisfont aux inégalités 1,3) et 1,7).

lemme 4.2 : il existe deux constantes M' et N' telles que :

$$||X^o(t) - X^o(t')|| \leqslant M'|t-t'| \;,||\psi(t) - \psi(t')|| \leqslant N'|t-t'| \qquad t \in T$$

En effet :

$$\text{p.s.} \qquad X^o(t) - X^o(t') = \int_{t'}^{t} h[X^o(u), Y^o(u), Z(u), u]du$$

et d'après 1,5)

$$\text{p.s.} \qquad |X^o(t) - X^o(t')| \leq \int_{t'}^{t} H[X^o(u), Z(u)]\,du$$

le résultat concernant X^o se déduit immédiatement de l'inégalité précédente en utilisant le lemme 4.1 et les hypothèses faites sur Z.
Les mêmes techniques conduisent au résultat concernant ψ.
Restreignons nous à une classe C_a de stratégies adaptées qui soient de plus continues en moyenne quadratique sauf en un nombre fini d'éléments de l'intervalle T où l'on suppose qu'il y a seulement continuité en moyenne quadratique à droite. On démontre le résultat suivant :

Proposition 4.1 : Quel que soit t élément de T on a nécessairement :

4,1) $$E\left[g[X^o(t),\pi,Z(t),t] - \psi(t).h\,[X^o(t),\pi,Z(t),t]\right] \geq E\left[g[X^o(t),Y^o(t),Z(t),t] - \psi(t).h[X^o(t),Y^o(t),Z(t),t]\right]$$

Quel que soit $\pi \in A_t$

D'après le théorème 2.1 la condition 4,1) est vraie pour tout t élément de : $(T - \Theta)$ où Θ est un ensemble de mesure nulle de T.

Soit alors $\theta \in \Theta$; il existe une suite $\{u_i\}$ monotone décroissante d'éléments de $(T - \Theta)$ convergeant vers θ.

Quel que soit i on a donc :

4,2) $$E\left[g[X^o(u_i),\pi,Z(u_i),u_i] - \psi(u_i).h[X^o(u_i),\pi,Z(u_i),u_i]\right] \geq E\left[g[X^o(u_i),Y^o(u_i),Z(u_i),u_i] - \psi(u_i).h[X^o(u_i),Y^o(u_i),Z(u_i),u_i]\right]$$

L'hypothèse h_2 permet de montrer, en utilisant le fait que $X^o(t)$ et

$Z(t)$ sont des fonctions aléatoires continues en moyenne quadratique, que:

4,3) $E\left[g(X^o(u_i),\pi,Z(u_i),u_i)\right] \xrightarrow[i\to\infty]{} E\left[g\ X^o(\theta),\pi,Z(\theta)\cancel{,\theta)}\right]$

En utilisant en plus le fait que $Y^o(t)$ est continue à droite en moyenne quadratique on démontre de la même façon que :

4,4) $E\left[g(X^o(u_i),Y^o(u_i),Z(u_i),u_i)\right] \xrightarrow[i\to\infty]{} E\left[g(X^o(\theta),Y^o(\theta),Z(\theta),\theta)\right]$

De même l'utilisation de h_1 permet de montrer que

4,5) $E\left[\psi(u_i).h(X^o(u_i),\pi,Z(u_i),u_i)\right] \xrightarrow[i\to\infty]{} E\left[\psi(\theta).h(X^o(\theta),\pi,Z(\theta),\theta)\right]$

il suffit en effet d'écrire la différence des deux membres de 4,5) sous la forme :

$$E\left[(\psi(u_i) - \psi(\theta))\ h(X^o(u_i),\pi,Z(u_i),u_i)\right] +$$

$$E\left[\psi(\theta).\{h(X^o(u_i),\pi,Z(u_i),u_i) - h(X^o(\theta),\pi,Z(\theta),\theta)\}\right]$$

et d'utiliser en plus les résultats des lemmes 4.1 et 4.2 concernant ψ.

Enfin de même :

4,6) $E\left[\psi(u_i).h(X^o(u_i),Y^o(u_i),\ Z(u_i),u_i)\right] \xrightarrow[i\to\infty]{} E\left[\psi(\theta).h(X^o(\theta),Y^o(\theta),\ Z^o(\theta),\theta)\right]$

4,3) 4,4) 4,5) 4,6) permettent en passant à la limite dans 4,2) d'obtenir immédiatement le résultat du lemme.

Les conclusions du théorème 2.1, sont donc valables, dans ce cas, pour toute valeur de t. Ce résultat s'étend aux théorèmes déduits de ce théorème ; les théorèmes 3.1 et 3.2 sont aussi vrais pour toute valeur de t.

On peut appliquer ces résultats à l'exemple défini par :

$$\left|\begin{array}{l} h(x,y,z,t) = \alpha(t)x + \beta(t)y + z \\ g(x,y,z,t) = a(t)x^2 + b(t)y^2 \end{array}\right.$$

où les fonctions α, β, a et b sont définies et continues sur T, donc bornées. Comme nous l'avons déjà remarqué le théorème 2.1 est applicable à cet exemple ; la proposition 4.1. reste vraie car les conditions de continuité imposées aux fonctions α, β, a et b suffisent à prouver que 4,3) 4,4), 4,5) et 4,6) sont encore valables.

Si nous supposons que l'ensemble T_1 des temps d'observation est constitué par une suite finie strictement croissante $\{t_i\}$ d'instants $(i = 0,1,\dots,N)$ telle que $t_0 = 0$, $t_N = T$, et si les observations concernent uniquement le processus Z, la propriété suivante, où $\mathcal{A}_i$ désigne la σ-algèbre engendrée par $Z(t_0),\dots Z(t_i)$ $(i = 0,1,\dots,N-1)$, donne une condition nécessaire d'optimalité :

<u>Proposition 4.2</u> : <u>une condition nécessaire pour que $Y^o(t)$ soit une stratégie optimale est qu'existe $\psi(t)$ satisfaisant à 2,1) et telle que, pour tout t élément de T on ait presque sûrement</u> :

4,7)
$$E\left\{a(t)\left[X^o(t)\right]^2 + b(t)\pi^2 - \psi(t)\left[\alpha(t)X^o(t) + \beta(t)\pi + Z(t)\right]\Big|\mathcal{A}_i\right\} \geq E\left\{a(t)\left[X^o(t)\right]^2 + b(t)\left[Y^o(t)\right]^2 - \psi(t)\left[\alpha(t)X^o(t) + \beta(t)Y^o(t) + Z(t)\right]\Big|\mathcal{A}_i\right\}$$

$$t_i < t \leq t_{i+1}$$

<u>pour toute variable aléatoire π mesurable par rapport à $\mathcal{A}_i$</u>

Cette proposition découle de la proposition 4.1. de la même façon que le théorème 2.3 découle du théorème 2.1.

Nous allons utiliser la proposition 4.2 pour préciser certaines propriétés des stratégies optimales.

<u>Nature des stratégies optimales</u>

Nous supposons que F est un intervalle fermé $[\ell,m]$ de $\mathbb{R}$ et que b est une fonction positive de t ; il existe donc une constante $k > 0$, telle que :

$$k \leq b(t) \qquad t \in T$$

Enfin, nous supposons que $X(o) \equiv 0$.
On désigne par $u(t)$ la fonction ainsi définie :

$$u(t) = \frac{\beta(t)}{b(t)} \qquad t \in T$$

$u(t)$ est une fonction continue et bornée sur l'intervalle T.

Soit $Y^*(t)$ la fonction aléatoire réelle définie par :

$$\left| \begin{array}{ll} Y^*(t) = u(t)\, E[\psi(T) \mid \mathcal{A}_i] & \\ & \\ t_i < t \leq t_{i+1} & i = 0,1,\ldots,N-1 \end{array} \right.$$

<u>Lemme 4.3 : $Y^*(t)$ est continue en moyenne quadratique en tout point de l'intervalle T sauf éventuellement aux points t_i $(i = 0,1,\ldots,N-1)$ où il y a toutefois continuité à gauche</u>.

Soit en effet : $t_i < t < t_{i+1}$; pour tout élément t' de $]t_i, t_{i+1}[$ on peut écrire :

$$Y^*(t) - Y^*(t') = u(t)\, E[\psi(t) \mid \mathcal{A}_i] - u(t')\, E[\psi(t') \mid \mathcal{A}_i]$$

d'où

$$Y^*(t) - Y^*(t') = [u(t) - u(t')]\, E[\psi(t) \mid \mathcal{A}_i] + u(t')\, E[\psi(t) - \psi(t') \mid \mathcal{A}_i]$$

Des propriétés de projection des espérances conditionnelles, on déduit l'inégalité

$$\|Y^*(t) - Y^*(t')\| \leq |u(t) - u(t')| \cdot \|\psi(t)\| + |u(t')| \cdot \|\psi(t) - \psi(t')\|$$

Le résultat du lemme est alors la conséquence des lemmes 4.1 et 4.2 et des propriétés de la fonction $u(t)$.

Si $t = t_i$ on peut utiliser le même raisonnement avec $t_{i-1} < t' < t$, ce qui achève de démontrer le lemme.

Les résultats précédents permettent d'énoncer la proposition.

<u>Proposition 4.3: toute stratégie optimale $Y^o(t)$ est nécessairement définie de la façon suivante : pour tout élément t de T on a presque-sûrement</u> :

$$4,8)\quad \left|\begin{array}{lll} Y^o(t) = Y^*(t) & \text{si} & Y^*(t) \in [\ell, m] \\ Y^o(t) = \ell & \text{si} & Y^*(t) < \ell \\ Y^o(t) = m & \text{si} & Y^*(t) > m \end{array}\right.$$

<u>de plus $Y^o(t)$ est continue en moyenne quadratique</u>

La condition d'optimalité 4,7) peut en effet s'écrire :

$$b(t)\pi^2 - \beta(t)\pi\, E[\psi(t)|\,\mathcal{a}_i] \geq b(t)[Y^o(t)]^2 - \beta(t)\, Y^o(t)\, E[\psi(t)|\mathcal{a}_i]$$

la condition : $b(t) > 0$, entraîne immédiatement le résultat donné par 4,8).

Enfin la propriété de continuité s'établit ainsi : quels que soient les éléments t et t' de T on a :

$$|Y^o(t) - Y^o(t')| \leqslant |Y^*(t) - Y^*(t')|$$

d'où

$$||Y^o(t) - Y^o(t')|| \leqslant ||Y^*(t) - Y^*(t')||$$

Le résultat se déduit du lemme 4.3, en utilisant aux points t_i l'hypothèse de continuité à droite des stratégies.

Nous n'abordons pas ici la question de l'existence d'une solution qui sera abordée au chapitre suivant pour des problèmes voisins.

Nous allons conclure en montrant comment la détermination effective de la solution fournie par la proposition peut être envisagée. On remarque qu'en fait l'équation d'évolution et l'équation 2,1) permettent d'écrire respectivement, pour toute valeur de i :

$$E\left[X^{o}(t) \mid \mathcal{a}_i\right] = \int_{o}^{t} \left\{\alpha(u).\ E\left[X^{o}(u) \mid \mathcal{a}_i\right] + \beta(u)\ Y^{o}(u) + E\left[Z(u) \mid \mathcal{a}_i\right]\right\} du$$

$$E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right] = \int_{t}^{T} \left\{-2a(u)\ E\left[X^{o}(u) \mid \mathcal{a}_i\right] + \alpha(u)\ E\left[\psi(u) \mid \mathcal{a}_i\right]\right\} du$$

$$t_i < t \leqslant t_{i+1}$$

Le problème se réduit donc, pour chaque valeur de i, à déterminer les trois fonctions de $Z(t_o), \ldots Z(t_i)$ et de t que sont $E\left[X^{o}(t) \mid \mathcal{a}_i\right]$ $Y^{o}(t)$ et $E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right]$, à l'aide du sytème :

$$(S)\quad \left|\begin{array}{ll}
E\left[X^{o}(t) \mid \mathcal{a}_i\right] = \int_{o}^{t} \left\{\alpha(u)\ E\left[X^{o}(u) \mid \mathcal{a}_i\right] + \beta(u) Y^{o}(u) + E\left[Z(u) \mid \mathcal{a}_i\right]\right\} du & \\
E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right] = \int_{t}^{T} \left\{-2a(u)\ E\left[X^{o}(u) \mid \mathcal{a}_i\right] + \alpha(u)\ E\left[\psi(u) \mid \mathcal{a}_i\right]\right\} du & \\
Y^{o}(t) = u(t)\ E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right] & \text{si } u(t)\ E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right] \in [\ell, m] \\
Y^{o}(t) = \ell & \text{si } u(t)\ E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right] < \ell \\
Y^{o}(t) = m & \text{si } u(t)\ E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right] > m \\
\multicolumn{2}{c}{t_i < t \leqslant t_{i+1}}
\end{array}\right.$$

La résolution du système (S) nécessite la donnée supplémentaire de $E\left[Z(u) \mid \mathcal{a}_i\right]$.

Il est intéressant de noter que le système obtenu pour les fonctions aléatoires $E\left[X^{o}(t) \mid \mathcal{a}_i\right]$, $Y^{o}(t)$, $E\left[\psi(t) \mid \mathcal{a}_i\right]$ est semblable au système obtenu par l'application du principe du maximum au problème déterministe déduit de celui traité dans ce paragraphe par la suppression du processus $Z(t)$. Cette analogie sera confirmée dans le chapitre IV consacré à l'étude plus détaillée de certains exemples.

Références

[1] Krasovskii and Lidskii Analytical design of controllers in stochastic systems. P.M.M. - Vol 25 n° 3 - P.420 1961.

[2] Kushner On the stochastic maximum principle with average constraints Journal of Math. Anal. and Appl. 12 - p. 13 - 1965.

[3] Mortensen Optimal control of continuous-time stochastic systems - Thèse Berkeley U.S.A. - 1967.

[4] Brodeau C.R. Acad. Sc. Paris t. 262, p 1117 - 1966.

[5] Brodeau Théorèmes du maximum en théorie du contrôle stochastique - Institut de mathématiques appliquées de Grenoble - Avril 1966.

[6] Pontryagin The mathematical theory of optimal processes Interscience 1962.

[7] Estenes On variationnal theory and optimal control theory S.I.A.M. Journal on control. Ser.A. Vol. 3 n° 1 - 1965.

[8] C. Lobry Etude géométrique des problèmes d'optimisation en présence de contraintes - Thèse Grenoble 1967.

[9] Pallu de la Barrière Cours d'automatique théorique - Dunod Paris 1966.

[10] Doob Stochastic processes - J. Wiley .

Chapitre IV

Exemples de modèles à évolution continue

1. Les problèmes étudiés

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique d'une catégorie importante de problèmes de contrôle stochastique. Ces problèmes, définis par des lois d'évolution de caractère linéaire et des critères économiques de type quadratique, entrent dans le cadre du formalisme introduit au chapitre précédent. On peut donc utiliser les théorèmes de maximum que nous avons démontrés afin de caractériser les stratégies optimales. Les théorèmes de maximum ne donnant que des conditions nécessaires d'optimalité, nous consacrons d'abord un paragraphe à l'étude de l'existence à priori et de l'unicité de solutions pour les problèmes étudiés.

Nous dégageons ensuite, grâce aux théorèmes de maximum, des propriétés des stratégies optimales et indiquons comment la résolution effective de problèmes particuliers peut être envisagée.

La fin du chapitre est consacrée à l'étude de certaines extensions ; on envisage en particulier le cas où des contraintes sont imposées à l'état final du système.

Comme précédemment, nous nous limitons, dans le but de simplifier l'exposition, à des problèmes ne faisant intervenir que des grandeurs scalaires. Nous verrons d'ailleurs que la résolution de certains problèmes conduit tout naturellement à l'introduction de vecteurs.

L'essentiel des résultats des paragraphes 2,3,4 est donné dans [1] .

Les problèmes présentés sont des exemples de la théorie développée au chapitre précédent ; nous utiliserons donc les notations de ce chapitre.

Les fonctions g et h sont de la forme :

1,1)
$$\left| \begin{array}{l} g\ (x,\ y,\ z,\ t) = Q(t)\ x^2 + R(t)\ y^2 \\ h\ (x,\ y,\ z,\ t) = A(t)\ x + B(t)\ y + z \end{array} \right.$$

où Q, R, A, B sont des fonctions données de t, définies, mesurables, bornées sur l'intervalle T.
On suppose de plus que :

$$\forall\ t \in T \qquad Q(t) \geq 0 \quad , \quad R(t) \geq 0$$

La fonction aléatoire du second ordre Z(t) est telle que :

$$\sup_{t \in T} ||Z(t)|| < +\infty$$

Les stratégies Y(t) sont soumises à la contrainte :

1,2)
$$||Y(t)|| \leqslant \lambda$$

pour presque tout élément t de T ; λ est une constante positive donnée.
Nous supposons, pour simplifier l'exposé, que : X(o) = 0. Il n'y a aucune difficulté à étendre les résultats exposés dans la suite au cas où X(o) est une variable aléatoire donnée du second ordre.

Les observations sont faites uniquement sur les réalisations du processus Z(t). Deux catégories de problèmes sont envisagées :

a. L'ensemble T_1 des temps d'observation est l'intervalle T. On désigne par C_a la classe correspondante de stratégies.
Le problèmes, noté problème (G) dans toute la suite, est le plus fin de ceux que nous étudions.

b. L'ensemble T_1 des temps d'observation est constitué par une suite finie, donnée, strictement croissante $\{t_i\}$ (i = 0, 1,...,N) d'instants telle que :

$$t_o = 0 \quad , \quad t_N = T$$

On désigne par $\mathcal{A}_i$ la σ algèbre engendrée par $Z(t_o),\ldots Z(t_i)$ (i = 0,1...,N-1) dans Ω .

La classe des stratégies ainsi définie est notée C_a^d ; on rappelle que toute stratégie Y(t) est alors mesurable par rapport à $\mathcal{A}_i$ pour

$t_i < t \leq t_{i+1}$ $\qquad$ (i = 0, 1,...,N-1)

Le problème correspondant est appelé problème (D) dans toute la suite. Puisque, pour toute suite $\{t_i\}$, la classe C_a^d est contenue dans C_a, les problèmes (D) représentent une discrétisation du problème (G). Les problèmes (D), dont la résolution effective peut être entreprise, sous certaines hypothèses assez générales, permettent d'envisager une approximation du problème (G).
Cette possibilité d'approximation est développée au § 5.

2. Théorèmes d'existence de solutions pour les problèmes (D) et (G)

Pour les deux catégories de problème, à une stratégie Y correspond une fonction aléatoire X définie par :

2,1) $$X(t) = \int_0^t \{A(u)\, X(u) + B(u)\, Y(u) + Z(u)\}\, du$$

et le critère à minimiser est :

2,2) $$v\,[Y] = E \int_0^T \{Q(t)\, X^2(t) + R(t)\, Y^2(t)\}\, dt$$

Il est intéressant de bien mettre en évidence le fait que le critère dépend uniquement de Y par l'intermédiaire de 2,1) ; d'où la notation $v\,[Y]$. v est alors un opérateur défini sur des sous-ensembles de l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2\left[\Omega\times[0,T]\right]$ des fonctions aléatoires réelles U(t), $0 \leq t \leq T$, mesurables et telles que :

$$E \int_0^T |U(t)|^2\, dt < +\infty$$

Soit $\mathcal{H}$ cet espace de Hilbert.
Remarquons que C_a et C_a^d appartiennent au sous-ensemble C de $\mathcal{H}$ défini par :

$Y(t) \in C \iff ||Y(t)|| \leq \lambda$ $\qquad$ pour presque tout t élément de T .

C possède des propriétés très simples :

lemme 2,1 C est un sous-ensemble borné, convexe et fermé de $\mathcal{H}$.

La première propriété est évidente.
La deuxième découle immédiatement de l'inégalité de Minkowski.
Pour démontrer la troisième , on considère une suite $\{Y_n\}$ d'éléments de C qui converge, au sens de la norme de $\mathcal{H}$, vers un élément Y_ℓ de $\mathcal{H}$, lorsque n augmente indéfiniment.

De
$$\int_0^T ||Y_n(t) - Y_\ell(t)||^2 \, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

et
$$\Big| \, ||Y_n(t)|| - ||Y_\ell(t)|| \, \Big| \leqslant ||Y_n(t) - Y_\ell(t)||$$

on déduit :

2,3)
$$\int_0^T \Big| \, ||Y_n(t)|| - ||Y_\ell(t)|| \, \Big|^2 . \, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Puisque $||Y_n(t)|| \leqslant \lambda$ pour presque tout t élément de T , 2,3) entraîne que Y_ℓ possède la même propriété, donc appartient à C. C est donc fermé.

Dégageons une propriété, utile pour la suite, des classes C_a et C_a^d .

lemme 2.2 De toute suite d'éléments de C_a (respectivement C_a^d) on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers un élément de C_a (respectivement C_a^d).

Soit en effet $\{Y_n\}$ une suite d'éléments de C_a. $\{Y_n\}$ étant une suite d'éléments de C on peut extraire de cette suite une suite partielle notée $\{Y_{n'}\}$ convergeant faiblement vers un élément Y_ℓ de C .
Soit Y'_ℓ la fonction aléatoire définie par :

$$Y'_\ell(t) = E[\, Y_\ell(t) \,|\, \mathcal{A}_t] \qquad t \in T$$

Y'_ℓ est élément de C_a, car d'après les propriétés contractantes des espérances conditionnelles la contrainte 1,2) est satisfaite.

De la propriété :

$$\forall \ V \in \mathcal{H} \qquad \int_0^T E[\, \{Y_{n'}(t) - Y_\ell(t)\} \ V(t)] \, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

on déduit :

$$\int_0^T E\left[E[\, \{Y_{n'} - Y_\ell(t)\} V(t) \,|\, \mathcal{A}_t] \right] dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

d'où pour tout élément V de $\mathcal{K}$ mesurable, pour toute valeur de t, par rapport à $\mathcal{a}_t$

2,4) $$\int_0^T E\ [\{Y_{n'}(t) - Y'_\ell\ (t)\}\ V(t)]dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\{Y_{n'}\}$ converge faiblement vers Y'_ℓ , d'après 2,4), puisque pour tout élément V de $\mathcal{K}$ on peut écrire :

$$\int_0^T E\left[\{Y_{n'}(t) - Y'_\ell\ (t)\}\ V(t)\right] dt = \int_0^T E\left[\{Y_{n'}(t)-Y'_\ell\ (t)\}E\{V(t)\ \mathcal{a}_t\}\right]dt$$

La démonstration est ainsi terminée pour la classe C_a ; pour C_a^d la même démonstration s'applique en divisant l'intervalle T en les sous-intervalles $\left[t_i,\ t_{i+1}\right]$.

Etudions les propriétés de l'opérateur v ; il est facile de montrer que v définit une application continue et convexe de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}$. On peut alors démontrer des théorèmes d'existence de solutions par des techniques exposées par exemple, dans [2] . Néanmoins, nous préférons utiliser une approche directe, tenant compte de la forme particulière de v. La méthode que nous utilisons s'inspire de résultats obtenus par L. Cesari [3] et [4] dans le cas d'hypothèses plus générales, mais appliquées à des exemples à évolution déterministe. Ces résultats ont l'avantage de préciser la façon dont convergent vers une solution optimale certaines suites de stratégies. La propriété essentielle est la propriété de semi-continuité que traduit le lemme 2,3.

Nous nous consacrons uniquement au problème (G) ; les résultats obtenus s'appliquent facilement au problème (D).

Soit $v_o = \inf_{Y \in C_a} v\ [Y]$

v_o existe et est un nombre positif ou nul d'après les hypothèses et le fait que C_a est non vide.

<u>lemme 2,3 De toute suite $\{Y_n\}$ d'éléments de C_a telle que</u> :

$$v\ [Y_n] \xrightarrow[n \to \infty]{} v_o$$

<u>on peut extraire une sous-suite $\{Y_{n'}\}$ convergeant faiblement vers un élément Y^o de C_a</u> ;

de plus

$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists$ N tel que : $n > N \Rightarrow$

$$2,5) \quad v[Y_{n'}] - v[Y^o] \geq -\varepsilon + \int_0^T Q(t)\,||X_{n'}(t) - X^o(t)||^2\,dt + \int_0^T R(t)\,||Y_{n'}(t) - Y^o(t)||^2 dt$$

<u>où $X_{n'}$ et X^o correspondent respectivement à $Y_{n'}$ et Y^o par l'intermédiaire de 2,1)</u>

Démonstration : D'après le lemme 2.2, il existe effectivement une sous-suite $\{Y_{n'}\}$ de $\{Y_n\}$ convergeant faiblement vers un élément de C_a noté Y^o.
Evaluons la différence $v\,[Y_{n'}] - v|\,Y^o|$; D'une part :

$$2,6) \quad \int_0^T R(t)\{||Y_{n'}(t)||^2 - ||Y^o(t)||^2\}\,dt = 2U_{n'} + \int_0^T R(t).||Y_{n'}(t) - Y^o(t)||^2\,dt$$

$$\text{où } U_{n'} = \int_0^T R(t)\,E\,\{Y^o(t)[\,Y_{n'}(t) - Y^o(t)]\}\,dt$$

$R(t)Y^o(t)$ étant un élément de $\mathcal{H}$ il résulte de la propriété de convergence faible que U_n tend vers zéro lorsque n' augmente indéfiniment.
D'autre part, on peut écrire de la même façon :

$$2,7) \int_0^T Q(t)\{||X_{n'}(t)||^2 - ||X^o(t)||^2\}\,dt = 2\,V_{n'} + \int_0^T Q(t)\,||X_{n'}(t) - X^o(t)||^2\,dt$$

où

$$V_{n'} = \int_0^T Q(t)\,E\,\{X^o(t)|\,X_{n'}(t) - X^o(t)|\}\,dt$$

Or, d'après le caractère linéaire de 2,1) il existe une fonction bornée K(t,u) telle que pour toute stratégie Y la fonction aléatoire X correspondante puisse s'écrire :

$$2,8) \qquad X(t) = \int_0^T K(t,u)\,\{\,B(u)\,Y(u) + Z(u)\,\}\,du$$

2,8) permet d'écrire :

$$V_{n'} = \int_0^T [Y_{n'}(u) - Y^o(u)]\{\int_u^T Q(t)\,K(t,u)\,X^o(t)\,dt\,\}du$$

on conclue comme pour $U_{n'}$ que $V_{n'}$ tend vers zéro lorsque n' augmente indéfiniment.

De 2,6) et 2,7) on déduit immédiatement l'inégalité 2,5)

On obtient alors le résultat :

Théorème 2,1 : Le problème (G) admet au moins une solution : la stratégie déterminée au lemme 2,3 est optimale et de plus :

2,9) $$\lim_{n'\to\infty} \int_o^T R(t)|| Y_{n'}(t) - Y^o(t)||^2 dt = 0$$

D'après le lemme 2,3, il existe une suite $\{\varepsilon_{n'}\}$ de nombres positifs tendant vers zéro lorsque n' augmente indéfiniment, telle que :

$$v [Y_{n'}] \leqslant v_o + \varepsilon_{n'}$$

de2,5) on déduit que pour $n' \geqslant N$

$$v [Y^o] + \int_o^T Q(t)||X_{n'}(t) - X^o(t)||^2 dt + \int_o^T R(t)||Y_{n'}(t) - Y^o(t)||^2 dt \leqslant v_o + \varepsilon_{n'} + \varepsilon$$

d'où

$$v[Y^o] + \overline{\lim} \int_o^T Q(t)||X_{n'}(t) - X^o(t)||^2 dt + \overline{\lim} \int_o^T R(t)||Y_{n'}(t) - Y^o(t)||^2 dt \leqslant v_o + \varepsilon$$

et, ε étant arbitraire :

$$v[Y^o] + \overline{\lim} \int_o^T Q(t)||X_{n'}(t) - X^o(t)||^2 dt + \overline{\lim} \int_o^T R(t)||Y_{n'}(t) - Y^o(t)||^2 dt \leqslant v_o$$

Le fait que v_o soit optimal entraîne que :

$$\left| \begin{array}{l} v [Y_o] = v_o \\ \overline{\lim} \int_o^T Q(t)||X_{n'}(t) - X^o(t)||^2 dt = \overline{\lim} \int_o^T R(t)||Y_{n'}(t) - Y^o(t)||^2 dt = 0 \end{array} \right.$$

Y^o est donc optimale et puisque les $\overline{\lim}$ portent sur des quantités positives ou nulles, 2,9) est aussi démontré.

Remarque : Si il existe une constante positive m telle que :

$$Q(t) \geqslant m \qquad \forall \quad t \in \quad T$$

2,9) prouve que la suite $\{Y_{n'}\}$ converge fortement, au sens de la norme de $\mathcal{H}$, vers Y^o.

De façon évidente, en utilisant le lemme 2,2), on démontre pour le problème (D) un théorème identique au théorème 2,1) : la démonstration est exactement la même.

Problème de l'unicité : Si l'on admet que deux stratégies, différant seulement sur un ensemble de mesure nulle de $\Omega \times T$, sont identiques, on peut énoncer le résultat :

Théorème 2.2 Si Q et R sont des fonctions à valeurs positives, sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle de T, les problèmes (G) et (D) admettent une solution unique.

Le résultat provient de ce que, pour presque toute valeur de t, $Q(t)x^2$ et $R(t)y^2$ sont des fonctions strictement convexes de x et y respectivement . v est alors strictement convexe, ce qui permet de conclure.

Remarque : Tous les résultats précédents restent valables si l'on impose que la contrainte : $||Y(t)|| \leq \lambda$, soit satisfaite pour toute valeur de t. Il suffit en effet de modifier chaque stratégie optimales Y^o sur l'ensemble de mesure nulle de T pour lequel la contrainte n'est pas satisfaite ; la valeur de $v[Y^o]$ n'est pas modifiée et représente bien le minimum cherché pour le problème modifié.
C'est uniquement dans le but que l'ensemble $\bar{C}$ soit fermé que nous nous sommes imposés des contraintes satisfaites seulement pour presque toute valeur de t.

Etant assurés de l'existence d'au moins une solution nous pouvons aborder le problème de la détermination de ces solutions.

3. Utilisation des résultats du chapitre III pour la résolution du problème (D)

Par rapport aux problèmes étudiés au chapitre III la modification apportée aux hypothèses pour les modèles du § 1 réside dans le remplacement de la contrainte : $Y(t) \in F$, par la contrainte $||Y(t)|| \leq \lambda$. Par des techniques un peu différentes , on peut néanmoins obtenir un résultat identique à celui du théorème III - 2.1) ; il suffit de modifier les démonstrations des lemmes successifs du § III,2, en utilisant la méthode du lemme III.1.2) pour aboutir à des inégalités portant sur les normes des fonctions aléatoires introduites. Le principe de la démonstration est le même ; toutefois, les contraintes étant moins restrictives, il est nécessaire d'utiliser la forme particulière des fonctions f et g , en particulier le fait que g admet une dérivée seconde par rapport à x qui est constante.

Si on désigne par A_{t_n} $(n=0,1,\ldots,N-1)$ l'ensemble des variables aléatoires π mesurables par rapport à $\mathcal{A}_n$ et telles que : $||\pi|| \leq \lambda$, la particularisation au problème (D) du théorème III.2.1 conduit à la proposition suivante :

Proposition 3.1 : Une condition nécessaire pour que $Y^o(t)$, élément de C_a^d auquel correspond $X(t)$, soit optimale est qu'existe une fonction aléatoire $\psi(t)$ satisfaisant presque sûrement à

$$(3,1) \qquad \psi(t) = \int_t^T \left\{-2Q(u)\, X^o(u) + A(u)\, \psi(u)\right\} du$$

et telle que, pour presque tout t élément de $[0, T]$ on ait :

$$(3,2) \qquad \begin{cases} E\left[R(t)\, \pi^2 - B(t)\, \psi(t)\, \pi\right] \geq E\left[R(t)(Y^o(t))^2 - B(t)\, \psi(t)\, Y^o(t)\right] \\ \forall\, \pi \in A_{t_n} \qquad t_n < t \leq t_{n+1} \quad (n= 0,1,\ldots,N-1) \end{cases}$$

Il n'est pas possible ici d'améliorer le résultat de cette proposition pour obtenir un résultat analogue à celui du théorème III.3.2 dans le cas des stratégies adaptées. En effet si π_1 et π_2 sont éléments de A_{t_n}, la variable aléatoire π définie par :

$$\pi = \begin{cases} \pi_1 \text{ si } \omega \in \mathcal{B} \\ \pi_2 \text{ si } \omega \in \complement \mathcal{B} \end{cases} \qquad \mathcal{B} \in \mathcal{A}_n$$

n'est pas forcément élément de A_{t_n}.

Néanmoins, nous allons montrer que la proposition ci-dessus permet de résoudre théoriquement le problème de la recherche des stratégies optimales.

Nous supposerons dans toute la suite que : $R(t) > 0$, $t \in T$.

On introduit la fonction aléatoire auxilliaire $U(t)$, définie par

$$\begin{cases} U(t) = E\left[\psi(t) \mid \mathcal{A}_n\right] \\ t_n < t \leq t_{n+1} \end{cases} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

Y^o s'obtient à l'aide de $U(t)$ grâce au théorème suivant :

<u>Théorème 3,1.</u> <u>pour presque tout t élément de T on a :</u>

3,3) $$Y^o(t) = \begin{cases} \dfrac{B(t)}{2R(t)}\, U(t) & \text{si } \dfrac{|B(t)|}{2R(t)} . ||U(t)|| \leq \lambda \\ \lambda\, \dfrac{U(t)}{||U(t)||} & \text{si } \dfrac{|B(t)|}{2R(t)} . ||U(t)|| \geq \lambda \end{cases}$$

Soit $t_n < t \leq t_{n+1}$, on peut écrire :

$$E\left[\pi\, \psi(t)\right] = E\left[E\{\pi\, \psi(t) \,|\, \mathcal{A}_n\}\right] = E\left[\pi\, U(t)\right]$$

de même $$E\left[Y^o(t)\, \psi(t)\right] = E\left[Y^o(t)\, U(t)\right]$$

La condition 3,2) s'écrit donc : $\forall\, \pi \in A_{t_n}$

3,4) $$E\left[R(t)\, \pi^2 - B(t)\, \pi\, U(t)\right] \geq E\left[R(t)\, \{Y^o(t)\}^2 - B(t)\, Y^o(t)\, U(t)\right]$$

et le premier résultat de 3,3) est évident, il est d'ailleurs intéressant de noter que dans ce cas 3.2) s'écrit :

3,5) $$E\left[R(t)\, \pi^2 - B(t)\pi\, \psi(t) \,|\, \mathcal{A}_n\right] \geq E\left[R(t)\{Y^o(t)\}^2 - B(t)Y^o(t)\psi(t) \,|\, \mathcal{A}_n\right]$$

résultat analogue à celui du théorème III.3.2.

Examinons maintenant le cas où :

3,6) $$\frac{|B(t)|}{2R(t)}\, ||U(t)|| \geq \lambda$$

De $$\left| E\left[\pi . U(t)\right] \right| \leq ||\pi|| \,.\, ||U(t)||$$

on déduit :

3,7) $$R(t)\, ||\pi||^2 - |B(t)\, \left[\pi . U(t)\right] \geq R(t)\, ||\pi||^2 - |B(t)| \cdot ||\pi|| \cdot ||U(t)||$$

Or 3,6) entraîne que l'expression :

$$R(t)\, ||\pi||^2 - |B(t)| \cdot ||\pi|| \cdot ||U(t)||$$

considérée comme fonction de $||\pi||$ admet un minimum unique lorsque $||\pi|| = \lambda$, puisque $||\pi|| \leq \lambda$

L'égalité entre les deux membres de 3,7) n'étant obtenue que lorsque $\pi = \mu\, U(t)$, μ constante positive , on en déduit :

$$\begin{cases} Y^o(t) = \mu\, U(t) \\ ||Y^o(t)|| = \lambda \end{cases}$$

d'où $\mu = \dfrac{\lambda}{||U(t)||}$ et c'est la seule solution

On remarque que dans ce cas l'inégalité 3,5) n'est plus vérifiée, ce qui confirme que le résultat de la proposition 3,1 ne peut pas être amélioré.

La démonstration du théorème 3,1 dégage bien le fait que toute stratégie optimale se compose de deux catégories de fonctions aléatoires . La première catégorie rencontrée correspond à des portions de stratégies non soumises à la contrainte 1,2), la deuxième, au contraire, correspond à des portions de stratégies sous contrainte. Cela permet de décomposer toute stratégie optimale respectivement en "arcs" de type a et b.

Le théorème 3,1) indique seulement que 3,3) est vrai pour presque toute valeur de t. Néanmoins , on ne modifie pas v $[Y^o]$ en imposant à Y^o de satisfaire à cette condition pour toute valeur de t. Nous supposerons donc dans toute la suite que les stratégies optimales que nous considérons sont liées à la fonction aléatoire correspondante U(t) par la relation 3,3), satisfaite pour toute valeur de t.

Introduisons la fonction aléatoire W(t) définie à partir de $X_o(t)$ par :

$$\left| \begin{array}{l} W(t) = E\left[X^o(t) \mid \mathcal{A}_{n}\right] \\ t_n < t < t_{n+1} \end{array} \right. \qquad n = 0,1,\dots,N-1$$

La détermination de Y^o découle des résultats suivants :

<u>lemme 3.1</u> : <u>Pour $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, $(n = 0,1,\dots,N-1)$ W(t), U(t) et $Y_o(t)$ sont liés par le système</u>

$$(S_n) \left\{ \begin{array}{l} W(t) = W(t_{n+1}) + \displaystyle\int_{t_{n+1}}^{t} \left\{A(u)W(u) + B(u)\, Y^o(u) + E\left[Z(u)|\mathcal{A}_n\right]\right\} du \\[2ex] U(t) = U(t_{n+1}) + \displaystyle\int_{t_{n+1}}^{t} \left\{2Q(u)\, W(u) - A(u)\, U(u)\right\} du \\[2ex] Y^o(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{B(t)}{2R(t)}\, U(t) & \text{si } \dfrac{|B(t)|}{2R(t)}\, ||U(t)|| \leq \lambda \\[2ex] \lambda \dfrac{U(t)}{||U(t)||} & \text{si } \dfrac{|B(t)|}{2R(t)}\, ||U(t)|| \geq \lambda \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ce lemme découle des équations 2,1B,1B,3) et des propriétés des fonctions aléatoires ψ et X^o.

Les conditions imposées à X^o et ψ sont respectivement $X^o(0) = 0$ et $\psi(T) = 0$; c'est de là que proviennent les difficultés rencontrées pour la résolution des systèmes déduits des théorèmes de maximum, que ce soit dans le cas déterministe ou le cas stochastique. Nous avons préféré, ce qui semble le plus avantageux pour l'étude de nos modèles, déterminer W, U, Y^o dans le sens $T \to 0$; d'où la forme donnée au système (S_n). Une telle méthode nécessite évidemment la connaissance de $X^o(T)$.

Le lemme 3,1 nous indique que dans le cas d'un arc de type a nous aurons à résoudre un système de la forme :

3,8)
$$\left|\begin{aligned} W(t) &= W(\theta) + \int_\theta^t \left\{A(u)\, W(u) + \frac{B^2(u)}{2R(u)} U(u) + E[Z(u)\,|\,\mathcal{Q}_n]\right\} du \\ U(t) &= U(\theta) + \int_\theta^t \{2Q(u)\, W(u) - A(u)\, U(u)\}\, du \end{aligned}\right.$$

et dans le cas d'un arc de type b :

3,9)
$$\left|\begin{aligned} W(t) &= W(\theta) + \int_\theta^t \left\{A(u)\, W(u) + \lambda B(u) \frac{U(u)}{||U(u)||} + E\,[Z(u)\,|\,\mathcal{Q}_n]\right\} du \\ U(t) &= U(\theta) + \int_\theta^t \{2Q(u)\, W(u) - A(u)\, U(u)\}\, du \end{aligned}\right.$$

où θ est un élément de $]t_{n+1}, t_n]$.

Il faut s'assurer que les systèmes 3,8) et 3,9) admettent des solutions; ceci nous conduit à formuler l'hypothèse supplémentaire suivante : <u>les fonctions B et Q sont supposées continues sur T'</u> ; cette hypothèse est valable pour la fin du § 3 et le § 4.

On est alors assuré que : $\sup\limits_{t \in T'} \dfrac{B^2(t)}{R(t)} < +\infty$

et on peut conclure que le système 3,8) étant linéaire admet une solution et une seule prenant des valeurs données en une valeur fixée de t.

Le système 3,9) n'est pas classique par suite de la présence de $||U(u)||$; néanmoins ce système possède une propriété analogue à celle de 3,8).

Plus précisément on a le résultat :

<u>lemme 3.2 : Soit θ élément de $]t_n, t_{n+1}]$ et deux variables aléatoires du second ordre X et $\mathcal{Z}$, où $\mathcal{Z}$ est telle que :</u>

3,10) $$\frac{|B(\theta)|}{2R(\theta)} \|\mathcal{Z}\| > \lambda$$

<u>il existe un nombre h positif tel que sur l'intervalle $[\theta-h, \theta]$ le système 3,9) admette une solution et une seule satisfaisant aux conditions :</u>

$$\begin{cases} W(\theta) = X & \\ & \dfrac{|B(t)|}{2R(t)} \|U(t)\| \geq \lambda \\ U(\theta) = \mathcal{Z} & t \in [\theta-h, \theta] \end{cases}$$

Le problème n'a de sens que si $|B(\theta)| > 0$

Remarquons que les hypothèses faites sur R assurent l'existence d'une constante p telle que :

$$0 < p \leqslant \frac{R(t)}{|B(t)|}$$
$$t \in T$$

On détermine deux suites de fonctions $\{U_m(t)\}$ et $\{W_m(t)\}$ de la façon suivante :

3,11) $$\left|\begin{array}{l} W_m(t) = X + \displaystyle\int_\theta^t \left\{A(u)\, W_{m-1}(u) + \lambda B(u) \frac{U_m(u)}{\|U_m(u)\|} + E[Z(u)|\mathcal{A}_n]\right\} du \\ \\ U_m(u) = \mathcal{Z} + \displaystyle\int_\theta^t \left[2Q(u)\, W_{m-1}(u) - A(u)\, U_{m-1}(u)\right] du \end{array}\right.$$

avec la condition :

3,12) $$\|U_m(t)\| \geq 2\lambda p$$

Les deux suites de fonctions ne peuvent être effectivement construites que s'il existe un intervalle $[\theta-k, \theta]$,k nombre positif , pour lequel la condition 3,12) est vérifiée pour toute valeur de m.

Or si 3,12) est vérifiée sur $[t_n,\theta]$ pour toute valeur de m, on démontre qu'existe une constante K telle que :

$$\frac{\|W_m(t)\|}{\|U_m(t)\|} \leqslant K \qquad \forall \quad t \in [t_n,\theta] \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

En conséquence, il existe alors une constante K' telle que :

$$\|U_m(t) - \mathcal{Z}\| \leqslant K' \, |t - \theta| \,, \forall \quad t \in [t_n,\theta] \qquad (m = 0,1,\ldots)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\|U_m(t)\| \geqslant \|\mathcal{Z}\| - K' \, |t - \theta|$$

le nombre k doit donc être tel que :

$$\|\mathcal{Z}\| - K'k \geqslant 2 \lambda p$$

soit

$$\|\mathcal{Z}\| - 2 \lambda p \geqslant K'k$$

et d'après l'inégalité 3,10) il existe au moins un nombre k.
On est donc en mesure de construire les suites $\{U_m\}$ et $\{W_m\}$ sur $[\theta-k,\theta]$.
Etant assurés que la condition 3,12) est satisfaite, on démontre qu'existe une constante H positive pour laquelle :

3,13)
$$\left.\begin{array}{l} \|U_m(t) - U_{m-1}(t)\| \\ \\ \|W_m(t) - W_{m-1}(t)\| \end{array}\right. \leqslant \frac{H^m \, |t-\theta|^m}{(3.5..(2m+1))^{1/2}} \qquad \forall \ t \in [\theta-h,\theta] \qquad (m = 0,1,\ldots)$$

De 3,13) on déduit que les suites $\{U_m\}$ et $\{W_m\}$ convergent respectivement vers U et W solutions du système 3,9).
Comme $\|U(t)\|$ est alors une fonction continue de t, il en est de même de:

$$\frac{|B(t)|}{2R(t)} \|U(t)\|$$

et puisque d'après 3,10) $\dfrac{|B(\theta)|}{2R(\theta)} \|U(\theta)\| > \lambda$

on est assuré de l'existence de la constante h.

L'unicité découle alors par un raisonnement classique utilisé dans la méthode des approximations successives.
En conclusion, on peut énoncer le théorème :

Théorème 3.2 : il existe une solution et une seule de (S_n) prenant en t_{n+1} des valeurs données.

On peut en effet déterminer de proche en proche U et W sur l'intervalle $]t_n, t_{n+1}]$ en utilisant alternativement les systèmes 3,8) et 3,9); les raccordements d'arcs de types a et b ne présentent aucune difficulté d'après les propriétés de continuité des fonctions aléatoires U et W sur les intervalles de la forme : $]t_n, t_{n+1}]$.
Les techniques habituelles de prolongement permettent d'assurer que la solution de (S_n) ainsi déterminée est définie jusqu'en t_n. Les valeurs trouvées en t_n ne sont d'ailleurs que les limites à droite notées $U(t_n^+)$ et $W(t_n^+)$, les fonctions aléatoires U et W pouvant présenter des discontinuités aux points t_n. La détermination de U et W sur T nécessite donc le calcul des discontinuités aux points t_n.
Ces questions ainsi que l'utilisation des résultats de ce paragraphe vont être abordées au paragraphe suivant consacré à l'étude de quelques cas particuliers simples.

4. Résolution du problème (D) lorsque Z est une fonction aléatoire Gaussienne de covariance donnée

Soit $\Gamma(t, t')$ la fonction de covariance du processus Z.
On désignera dans toute la suite par $\{Z_i\}$ la suite des variables aléatoires $\{Z_{t_i}\}$ $(i = 0,1,..,N-1)$ et on supposera que Γ est telle que :

1. $E\,|Z_i|^2 = 1 \qquad , \qquad i = 0,1,\ldots N-1$
2. La matrice de covariance du vecteur aléatoire $(Z_0, Z_1, \ldots Z_{N-1})$ est régulière.

On sait alors qu'existent N fonctions de la variable t $\alpha_i(t)$ définies à l'aide de Γ telles que :

$$E\,[Z(t)\,|\,\mathcal{A}_n] = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t)\, Z_i$$

$$t_n < t \leq t_{n+1}$$

Les systèmes 3,8) et 3,9) deviennent respectivement :

4,1)
$$\begin{cases} W(t) = W(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{A(u)\, W(u) + \frac{B^2(u)}{2R(u)}\, U(u) + \sum_{i=0}^n \alpha_i(u)\, Z_i\right\} du \\ U(t) = U(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{2Q(u)\, W(u) - A(u)\, U(u)\right\} du \end{cases}$$

et

4,2)
$$\left| \begin{array}{l} W(t) = W(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{A(u)\, W(u) + \lambda B(u) \frac{U(u)}{||U(u)||} + \sum_{i=0}^n \alpha_i(u)\, Z_i\right\} du \\ U(t) = U(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{2Q(u)\, W(u) - A(u)\, U(u)\right\} du \end{array} \right.$$

Nous cherchons des solutions de ces systèmes sous la forme :

4,3)
$$\left| \begin{array}{l} U(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^n a_i(t)\, Z_i \\ W(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^n b_i(t)\, Z_i \end{array} \right.$$

La propriété 2 de Z montre que 4,1) et 4,2) admettent des solutions de la forme 4,3) si et seulement si les fonctions a_i et b_i, $(i=0,1\ldots n)$ satisfont respectivement aux systèmes :

4,4)
$$\left| \begin{array}{l} b_i(t) = b_i(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{A(u)\, b_i(u) + \frac{B^2(u)}{2R(u)}\, a_i(u) + \alpha_i(u)\right\} du \\ a_i(t) = a_i(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{2Q(u)\, b_i(u) - A(u)\, a_i(u)\right\} du \end{array} \right.$$

et

4,5)
$$\left| \begin{array}{l} b_i(t) = b_i(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{A(u)\, b_i(u) + \frac{\lambda\, B(u)\, .\, a_i(u)}{\left[\displaystyle\sum_{j,k=0} a_j(u)\, a_k(u) \Gamma(t_j,t_k)\right]^{1/2}} + \alpha_i(u)\right\} du \\ a_i(t) = a_i(\theta) + \displaystyle\int_\theta^t \left\{2Q(u)\, b_i(u) - A(u)\, a_i(u)\right\} du \end{array} \right.$$

De même que 3,8) et 3,9) les systèmes 4,4) et 4,5) possèdent des propriétés d'existence et d'unicité de solutions.

La recherche de solutions sous la forme 4,3) est légitimée par le résultat suivant ;

La recherche de solutions sous la forme 4,3) est légitimée par le résultat suivant :

Théorème 4,1 : Il existe une stratégie optimale Y^o de la forme :

4,6)
$$\left|\begin{array}{l} Y^o(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i(t)\, Z_i \\ t_n < t \leq t_{n+1} \end{array}\right. \qquad i = 0,1,\ldots,N-1$$

où c_i est une fonction uniquement de t, nulle sur $[0,t_i]$

Ce résultat sera démontré au chapitre suivant; il découle d'une méthode différente des méthodes utilisant un théorème de maximum.

Il est alors aisé de démontrer que si Y^o est de la forme 4,6), U et W sont de la forme 4,5).

La connaissance de W(T), c'est-à-dire la connaissance des N nombres $b_i(T)$ $(i = 0,1,\ldots N-1)$ permet, dans ces conditions, de déterminer U et W sur $[0,t]$. En effet, on peut construire la solution de (S_{N-1}) prenant en T les valeurs imposées ; on utilise successivement des solutions de 4,4) et 4,5).

4,4) est employée lorsque :

4,7)
$$\frac{|B(t)|}{2R(t)}\left[\sum_{j,k=0}^{N-1} a_j(t)\, a_k(t)\, \Gamma(t_j,t_k)\right]^{1/2} \leq \lambda$$

et 4,5) dans le cas contraire

Les arcs solutions de 4,4) et 4,5) se raccordent sans ambiguité puisque d'après les propriétés de continuité de U et W, il est facile de montrer que les fonctions a_i et b_i sont des fonctions continues sur l'intervalle $]t_{N-1},T]$

U et W étant déterminées sur $]t_{N-1},T]$, on connait donc $U(t^+_{N-1})$ et $W(t^+_{N-1})$.

$$\left|\begin{array}{l} U(t^+_{N-1}) = E\left[\psi(t_{N-1})\,|\,\mathcal{A}_{N-1}\right] \\ W(t^+_{N-1}) = E\left[X^o(t_{N-1})\,|\,\mathcal{A}_{N-1}\right] \end{array}\right.$$

on en déduit $U(t_{N-1})$ et $W(t_{N-1})$ grâce aux relations

$$U(t_{N-1}) = E\left[U(t_{N-1}^{+}) \mid \mathcal{A}_{N-2}\right]$$

$$W(t_{N-1}) = E\left[W(t_{N-1}^{+} \mid \mathcal{A}_{N-2}\right]$$

ce qui impose les valeurs de $a_i(t_{N-1})$ et $b_i(t_{N-1})$ $(i = 0,1,\ldots N-2)$
On peut alors déterminer U et W sur $]t_{N-2}, t_{N-1}]$ par la même méthode que celle utilisée sur $]t_{N-1}, T]$.
De proche en proche, la résolution de (S_n) est assurée pour toute valeur de n.
Les fonctions c_i sont obtenues à l'aide des fonctions a_i par les formules

$$c_i(t) = \frac{B(t)}{2R(t)} \; a_i(t) \quad \text{si 4,7) est vérifié}$$

$$c_i(t) = \frac{\lambda \; a_i(t)}{\left(\sum\limits_{j,k} a_j(t) \; a_k(t) \; \Gamma(t_j, t_k)\right)^{1/2}} \quad \text{dans le cas contraire}$$

on déduit de ces formules que les fonctions c_i sont continues, sauf, éventuellement, aux points $t_n (n > i)$ où il y a seulement continuité à gauche.

<u>Remarque</u>

1. Si $X(o)$ est une variable aléatoire donnée, non identiquement nulle, indépendante des variables Z_i, on est conduit à des résultats de même nature ; on cherche des fonctions aléatoires U, W, Y qui sont de la forme :

$$\left|\begin{array}{l} U(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(t) \; Z_i + p(t) \\ W(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i(t) \; Z_i + q(t) \\ Y(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i(t) \; Z_i + r(t) \\ t_n < t \leq t_{n+1} \end{array}\right. \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

où p, q, r sont des fonctions de la seule variable t.

2. Si les fonctions A et Q sont aussi continues et si le processus Z est continu m.q. les fonctions a_i et b_i sont dérivables sur chaque intervalles $]t_n, t_{n+1}[$. En effet les fonctions α_i sont aussi continues et les solutions des systèmes 4,4) et 4,5) sont alors dérivables.

cas particuliers :

a. Les variables Z_i sont indépendentantes deux à deux

On suppose donc que : $\Gamma(t_i, t_j) = 0 \quad \begin{cases} i,j = 0,1,..,N-1 \\ i \neq j \end{cases}$

Précisons les discontinuités aux points t_n des fonctions aléatoires U et W; on a :

$$U(t_n^+) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t_n^+) Z_i$$

et $$U(t_n) = E\left[U(t_n^+)|\mathcal{A}_{n-1}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t_n^+) Z_i$$

on en déduit : $a_i(t_n) = a_i(t_n^+) \qquad i = 0,1,..,n-1$

seule la fonction a_n peut présenter une discontinuité en t_n.

La conclusion est la même pour les fonctions b_i.

b. Les variables Z_i $(i = 0,1...N-1)$ évoluent en chaîne de Markov.

Montrons comment se complique l'étude des discontinuités des fonctions a_i et b_i.

$$U(t_n) = E\left[U(t_n^+)|\mathcal{A}_{n-1}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t_n^+) Z_i + a_n(t_n^+)\,\Gamma(t_n, t_{n-1})\, Z_{n-1}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} a_i(t_n) = a_i(t_n^+) & i = 0,1...,n-2 \\ a_{n-1}(t_n) = a_{n-1}(t_n^+) + a_n(t_n^+)\Gamma(t_n, t_{n+1}) & \end{cases}$$

On constate que cette fois la fonction a_n est continue partout sauf en t_n et t_{n+1}. On a un résultat identique pour les fonctions b_i.

La Méthode de calcul des discontinuités s'étend de façon évidente au cas où les variables Z_i évoluent en chaîne ~~de Markov~~ d'ordre supérieur à 1 et au cas général.

Résolution effective d'un problème

Les résultats de ce paragraphe peuvent être utilisés pour la résolution numérique d'un problème particulier grâce à la méthode découlant du théorème 4.1.

Remarquons d'abord que cette méthode permet en fait de ramener l'étude de nos problèmes à des problèmes déterministes puisqu'il ne s'agit plus que de déterminer des fonctions de la variable t.

Nous avons déjà mis en évidence le fait que la donnée de W(T), donc des N nombres $b_i(T)$ (i = 0,1..,N-1), permet théoriquement de résoudre le problème étudié. Le problème est donc résolu si nous savons déterminer les N nombres $b_i(T)$ de telle façon que l'utilisation de notre méthode conduise à une valeur de X(0) nulle, c'est-à-dire à une valeur de $b_o(0^+)$ nulle.

Malheureusement ce problème, d'après les nombreuses études faites sur des exemples déterministes, semble être à lui tout seul un problème aussi compliqué que celui de l'obtention des théorèmes de maximum. En effet, les considérations ci-dessus suggèrent d'adopter des méthodes de tir, mais ces méthodes deviennent rapidement inextricables pour des valeurs de N assez grandes. De plus,bien que le problème(D) admette, dans le cas où nous nous trouvons, une solution unique, il est difficile de démontrer l'existence d'une seule fonction aléatoire auxilliaire ψ. Il est un cas néanmoins où la méthode se simplifie de façon appréciable, c'est celui où la contrainte 1,2) est supprimée. Les systèmes (S_n) se réduisent à des systèmes linéaires 4,4) que l'on peut résoudre analytiquement ; compte tenu de la condition $b_o(0^+) = 0$ et des conditions qui régissent les transitions des fonctions a_i et b_i aux points t_n, nous avons montré, sur des exemples simples, que l'on peut déterminer analytiquement de façon unique les valeurs des nombres $b_i(T)$. Nous ne reproduisons pas ici ces calculs, longs et peu intéressants, car la suppression des contraintes sur les stratégies conduit à des problèmes peu réalistes, plus proches d'ailleurs du calcul des variations classique.

5. Approximation de certains problèmes (G) par des problèmes (D)

Nous montrons dans ce paragraphe que, lorsque Z est un processus Gaussien, continu m.q., la solution du problème (G) correspondant peut être approchée par une suite de stratégies solutions de problèmes (D).

On étudie d'abord une restriction du problème (G), notée (G_n), correspondant à un processus Z' défini à l'aide d'une suite finie croissante $\{t_i\}$ $(i = 0,1,\ldots n)$, où $t_0 = 0$, $t_n = T$, par

5,1) $$\left| \begin{array}{ll} Z(t) = \sum_{j=0}^{i} \alpha_j(t)\, Z_j & i = 0,1,\ldots,n-1 \\ t_i < t \leq t_{i+1} & \end{array} \right.$$

les variables aléatoires Z_j et les fonctions α_j satisfaisant aux hypothèses formulées au § 4 (il faut remarquer qu'on utilise la classe C_a de stratégies).

lemme 5.1 : toute solution Y^o du problème (G_n) est nécessairement de la forme :

$$\left| \begin{array}{ll} Y^o(t) = \sum_{j=0}^{i} C_j(t)\, Z_j & \\ t_i < t \leq t_{i+1} & i = 0,1,\ldots,n-1 \end{array} \right.$$

Démonstration : tout élément Y de la classe C_a des stratégies peut se décomposer de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{ll} Y(t) = \sum_{j=0}^{i} c_j(t)\, Z_j + G(t) & i = 0,1,\ldots,n-1 \\ t_i < t \leq t_{i+1} & \end{array} \right.$$

où G est une fonction aléatoire telle que :
pour tout élément t de $]t_i, t_{i+1}]$, la variable aléatoire G(t) est orthogonale à l'espace vectoriel engendré, dans l'espace de Hilbert des variables aléatoires du second ordre définies sur $(\Omega, \mathcal{A}_t)$, par $Z_o,\ldots Z_i$ $(i = 0,1,\ldots n-1)$.

On montre quà Y correspond, par l'équation d'évolution, une fonction aléatoire X qui admet une décomposition de même nature :

$$\left| \begin{array}{l} X(t) = \sum_{j=0}^{i} b_i(t)\ Z_i + F(t) \\ t_i < t \leqslant t_{i+1} \end{array} \right. \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

Il suffit en effet de vérifier, par les techniques utilisées aux paragraphes précédents, que l'on peut définir les fonctions b_i et F à l'aide des fonctions c_i et de G par :

5,2)
$$b_i(t) = \int_0^t \{A(u)\ b_i(u) + B(u)\ c_i(u) + \alpha_i(u)\}\ du$$

$$G(t) = \int_0^t \{A(u)\ G(u) + B(u)\ F(u)\}\ du$$

Remarquons alors que :

5,3)
$$\left| \begin{array}{l} ||Y(t)||^2 = ||\sum_{j=0}^{i} c_j(t)\ Z_j||^2 + ||G(t)||^2 \\ ||X(t)||^2 = ||\sum_{j=0}^{i} b_j(t)\ Z_j||^2 + ||F(t)||^2 \end{array} \right.$$

et puisque le critère $v_n\ [Y]$ est défini par :

$$v_n\ [Y] = \int_0^T \{Q(t)||X(t)||^2 + R(t)||\ Y(t)||^2\}\ dt$$

le résultat du lemme découle de 5,3), en tenant compte du signe de Q et R, si l'on remarque qu'à F = 0 l'équation 5,2) fait correspondre une fonction aléatoire G presque-sûrement nulle.

Le lemme 5.1 a donc pour conséquence que le problème (G_n) a même solution que le problème discrétisé (D_n) défini par la suite $\{t_i\}$ et la donnée de Z par 5,1).

Soit Z le processus définissant le problème (G). Puisque Z est continu m.q. la fonction de corrélation de Z, $\Gamma(t, t')$, est continue sur T × T, donc uniformément continue. A tout nombre positif ε_n on peut donc associer une suite $\{t_i^n\}$ $(i = 0,1,..,)$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l} ||Z(t) - Z_i|| \leq \varepsilon_n \\ t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n \end{array}\right.$$

$E\,[Z(t)|\mathcal{A}_i]$ étant la meilleure prédiction de $Z(t)$ on est assuré que :

$$\left|\begin{array}{l} ||E\,[Z(t)|\,\mathcal{A}_i] - Z(t)|| \leq \varepsilon_n \\ t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n \end{array}\right.$$

Si on pose, comme au § 4,

$$\left|\begin{array}{l} E\,[Z(t)|\mathcal{A}_i] = \sum\limits_{j=0}^{i} \alpha_j(t)\, Z_j \\ t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n \end{array}\right.$$

on voit qu'à tout nombre ε_n positif, on peut associer un problème (D_n) défini par une suite $\{t_i^n\}$ $(i = 0,...,)$ et un processus Z' de la forme 5,1) tel que :

$$\forall\ t \in T \qquad ||Z(t) - Z'(t)|| \leq \varepsilon_n$$

Soit Y un élément de C_a; a Y correspond X lorsqu'on utilise Z et X' lorsqu'on utilise Z'. On a d'ailleurs :

$$X(t) - X'(t) = \int_0^t \{A(u)\left[X(u) - X'(u)\right] + Z(u) - Z'(u)\}\, du$$

<u>lemme 5.2 : Il existe une constante positive H telle que, pour tout élément Y de C_a</u> :

$$\Big|\ v\,[\,Y\,] - v_n[\,Y\,]\ \Big| \leq H\, \varepsilon_n$$

On démontre d'abord, grâce aux techniques développées au § III,2, l'existence d'une constante K, indépendante de Y, pour laquelle :

$$\forall\ t \in T \qquad ||X(t) - X'(t)|| \leq K\, \varepsilon_n$$

Le résultat du lemme se déduit alors immédiatement de la forme de v.

On énonce alors, si Y^o désigne une solution ~~du~~ problème (G) et Y_n une solution du problème (D_n) , ou (G_n), défini ci-dessus :

Théorème 5.1 : la suite des problèmes (D_n) associée à une suite $\{\varepsilon_n\}$ $(n = 1,\ldots)$ convergeant vers zéro, est telle que :

$$v_n\left[Y_n\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} v\left[Y^o\right]$$

Démonstration : ε_n étant fixé, on a les ingéalités

$$5{,}4)\quad \left|\begin{array}{llll} \text{a)} & v\left[Y^o\right] \leqslant v\left[Y_n\right] & \text{c)} & v_n\left[Y_n\right] \leqslant v_n\left[Y^o\right] \\ \text{b)} & \left|v\left[Y^o\right] - v_n\left[Y^o\right]\right| \leqslant H\,\varepsilon_n & \text{d)} & \left|v\left[Y_n\right] - v_n\left[Y_n\right]\right| \leqslant H\,\varepsilon_n \end{array}\right.$$

de : $v\left[Y^o\right] - v_n\left[Y_n\right] = v\left[Y^o\right] - v_n\left[Y^o\right] + v_n\left[Y^o\right] - v_n\left[Y_n\right]$

on déduit, grâce à 5,4)b et 5,4) c, que :

$$v\left[Y^o\right] - v_n\left[Y_n\right] \leqslant 0 \implies 0 \leqslant v_n\left[Y^o\right] - v_n\left[Y_n\right] \leqslant \varepsilon_n H$$

de même, de :

$$v\left[Y^o\right] - v_n\left[Y_n\right] = v\left[Y^o\right] - v\left[Y_n\right] + v\left[Y_n\right] - v_n\left[Y_n\right]$$

on [redacted] déduit :

$$v\left[Y^o\right] - v_n\left[Y_n\right] \geqslant 0 \implies -\varepsilon_n H \leqslant v\left[Y^o\right] - v\left[Y_n\right] \leqslant 0$$

Dans les deux cas , on peut conclure que :

$$\left|v\left[Y^o\right] - v_n\left[Y_n\right]\right| \leqslant 2\,\varepsilon_n . H$$

ce qui démontre le théorème .

Si il existe une constante m positive telle que :

$\forall\ t \in T \qquad |R(t)| \geqslant m$ on déduit du § 2 le corollaire.

Corollaire : La suite $\{Y_n\}$ converge fortement vers Y^o

Le lemme 5.2. permet , en effet, d'affirmer que la suite $\{v\left[Y_n\right]\}$ converge aussi vers $v\left[Y^o\right]$ et qu'on peut ainsi utiliser un résultat du § 2.

L'essentiel de ce paragraphe réside donc dans le fait que, sous les hypothèses choisies, on peut approcher arbitrairement près, par une discrétisation de plus en plus fine de l'intervalle T, la valeur de $v\left[Y^o\right]$ par une suite $\left\{v_n\left[Y_n\right]\right\}$ correspondant à une suite de problèmes (D_n).

6. Cas de contraintes sur l'état final du système dans le cas du problème (G)

Jusqu'ici aucune contrainte n'a été imposée sur l'état final du système. Or de nombreux problèmes nécessitent de telles contraintes. Nous allons montrer comment, dans le cas du problème (G), la question peut être résolue en se ramenant à l'étude d'un problème sans contrainte sur l'état final. Cette démonstration utilise une idée développée par Dem'Yanov [5].

Pour toute stratégie Y(t), on désigne par X(t) la solution de l'équation d'évolution. Une contrainte sur l'état final est définie à l'aide d'une application $\mathcal{N}$ de l'ensemble des états terminaux X(T) dans R^+ par la condition :

6,1) $$\mathcal{N}\left[X(T)\right] \leqslant \mu$$

μ nombre positif donné tel qu'il existe au moins une stratégie pour laquelle la valeur de $\mathcal{N}(X(T))$ correspondante soit inférieure, strictement à μ.

Nous imposons à $\mathcal{N}$ d'être, en tant que fonction de la stratégie adoptée, une fonction convexe et continue.

De telles conditions sont, par exemple, satisfaites si :

$$\mathcal{N}\left[X(T)\right] = ||X(T)||$$

Nous noterons (G') le problème obtenu en limitant le problème (G) au sous-ensemble C' de C constitués des éléments de C tels que la condition 6,1) soit satisfaite.

Les propriétés de l'opérateur $\mathcal{N}$ entraînent que C' est un ensemble borné fermé et convexe. Le problème (G') a donc une solution.

Nous supposerons dans la suite que la solution du problème (G) ne satisfait pas à la contrainte 6,1) car sinon le problème (G') est évidemment résolu.

L'idée essentielle consiste à remplacer le critère $v[Y]$ par le critère $I_s[Y] = v[Y] + s\mathcal{N}[X(T)]$, où s est un nombre réel positif. On note (G_s) le problème déduit du problème (G) en remplaçant le critère v par I_s.
(G_s) est donc un problème sans contrainte sur l'état final.
Remarquons d'abord que, comme pour (G), (G_s), pour s fixé, admet au moins une solution.
Nous noterons Y^o_s, une telle solution, à laquelle correspond X^o_s.
Le théorème suivant permet de montrer comment la résolution de (G') peut être entreprise grâce à la résolution de problèmes (G_s):
<u>Théorème 6.1</u> : <u>Si pour toute valeur de s positive,</u> (G_s) <u>admet une solution unique</u> Y^o_s, <u>il existe au moins une valeur</u> s_o <u>positive pour laquelle</u> $\mathcal{N}[X^o_{s_o}(T)] = \mu$
Ce théorème montre en effet que $Y^o_{s_o}$ est aussi solution du problème (G') puisque pour tout élément Y de C' l'inégalité :

$$v[Y^o_{s_o}] + s_o\mathcal{N}[X^o_{s_o}(T)] \leqslant v[Y] + s_o\mathcal{N}[X(T)]$$

entraîne
$$v[Y^o_{s_o}] \leqslant v[Y]$$

La démonstration du théorème nécessite le lemme suivant :
<u>Lemme 6.1</u> : <u>Il existe au moins une valeur s positive telle que</u>
$$\mathcal{N}[X^o_s(T)] \leqslant \mu$$

En effet , supposons qu'il n'existe pas de nombre s positif tel que
$$\mathcal{N}[X^o_s(T)] \leqslant \mu$$

Donc
$$\forall\ s > 0 \qquad \mathcal{N}[X^o_s(T)] > \mu$$

On peut, par conséquent écrire :

6,2) $$I_s[Y^o_s] = v[Y^o_s] + s(\mu + r_s) \qquad \text{où } r_s > 0$$

Or, par hypothèse, il existe une stratégie Y telle que $\mathcal{N}[X(T)] < \mu$ d'où :

6,3) $$I_s[Y] = v[Y] + s(\mu - r) \qquad r > 0$$

6,2) et 6,3) entraînent :

6,4) $$I_s[Y] - I_s[Y^o_s] = v[Y] - v[Y^o_s] - s(r + r_s)$$

On déduit de 6,4) et du fait que v est uniformément bornée sur C, qu'en choisissant s suffisamment grand, on peut rendre négative l'expression: $I_s[Y] - I_s[Y^o_s]$, ce qui est contraire à l'hypothèse d'optimalité de Y^o_s. Le résultat du lemme est donc acquis.

Le théorème 6.1 est alors démontré si $\mathcal{N}[X^o_s(T)]$ en tant que fonction de s, définie pour : $s \geqslant 0$, est une fonction continue. Les deux lemmes suivants démontrent cette propriété.

Lemme 6.2 : $I_s[Y^o_s]$ est une fonction continue de s

En effet, sinon il existe au moins une valeur s_1 telle que :

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ tel que : } \forall\ \eta > 0 \qquad \exists\ s \text{ tel que :}$$

$$|s - s_1| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \left|I_s[Y^o_s] - I_{s_1}[Y^o_{s_1}]\right| \geqslant \varepsilon$$

Le nombre s_1 étant fixé, il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ tel que pour au moins une valeur de s suffisamment voisine de s_1, on puisse écrire :

6,5) soit : $v[Y^o_s] + s\,\mathcal{N}[X^o_s(T)] - v[Y^o_{s_1}] - s\,\mathcal{N}[X^o_{s_1}(T)] \geqslant \varepsilon/2$

6,6) soit : $v[Y^o_{s_1}] + s_1\,\mathcal{N}[X^o_{s_1}(T)] - v[Y^o_s] - s_1\,\mathcal{N}[X^o_s(T)] \geqslant \varepsilon/2$

6,5) est obtenue lorsque : $I_s[Y^o_s] - I_{s_1}[Y^o_{s_1}] \geqslant \varepsilon$

et 6,6) lorsque : $I_{s_1}[Y^o_{s_1}] - I_s[Y^o_s] \geqslant \varepsilon$;

6,5) $\Longrightarrow$ $I_s[Y^o_s] - I_s[Y^o_{s_1}] \geqslant \varepsilon/2$

6,6) $\Longrightarrow$ $I_{s_1}[Y^o_{s_1}] - I_{s_1}[Y^o_s] \geqslant \varepsilon/2$

dans les deux cas, on obtient une contradiction ; ce qui démontre le lemme.

Lemme 6.3 : $\mathcal{N}[X^o_s(T)]$ est une fonction continue de s.

Soit s^* une valeur fixée de s et $\{s_i\}$ une suite quelconque convergeant vers s^*. De même que dans l'étude des théorèmes d'existence de solution du problème (G), on peut extraire de $\{Y^o_{s_i}\}$ une sous-suite, notée aussi $\{Y^o_{s_i}\}$, convergeant faiblement vers un élément Y^* de C auquel correspond X^*.

Des propriétés de convexité des opérateurs v et $\mathcal{N}$ on déduit :

6,7) $$\left| \begin{array}{l} \underline{\lim}\ v\ [Y^o_{s_i}] \geqslant v\ [Y^*] \\ \underline{\lim}\ \mathcal{N}[X^o_{s_i}(T)] \geqslant \mathcal{N}[X^*(T)] \end{array} \right.$$

D'après le lemme 6,3, on sait que : $\lim_{s_i \to s^*} v\ [Y^o_{s_i}] + s_i \mathcal{N}[X^o_{s_i}(T)]$

existe et que :

6,8) $$\lim \{v\ [Y^o_{s_i}] + s_i \mathcal{N}[X^o_{s_i}(T)]\} = v[Y^o_{s^*}] + s^* \mathcal{N}[X^o_{s^*}(T)]$$

or :

6,9) $$\lim \{v\ [Y^o_{s_i}] + s_i \mathcal{N}[X^o_{s_i}(T)]\} \geqslant \underline{\lim}\, v[Y^o_{s_i}] + \underline{\lim}\ s_i \mathcal{N}[X^o_{s_i}(T)]$$

de 6,7) et 6,8) on déduit immédiatement du fait que $Y^o_{s^*}$ est optimale pour s^*:

$$I_{s^*}\ [Y^*] = I_{s^*}\ [Y^o_{s^*}]$$

Si le problème (G_{s^*}) admet une solution unique $Y^* = Y^o_{s^*}$

6,7) permet alors d'écrire :

6,10) $$\left| \begin{array}{l} \underline{\lim}\ v\ [Y^o_{s_i}] \geqslant v\ [Y^o_{s^*}] \\ \underline{\lim}\ \mathcal{N}[X^o_{s_i}(T)] \geqslant \mathcal{N}[X^o_{s^*}(T)] \end{array} \right.$$

La comparaison des inégalités 6,9) et 6,10) montre alors immédiatement que :

6,11) $$\left| \begin{array}{l} \underline{\lim}\ v\ [Y^o_{s_i}] = v\ [Y^o_{s^*}] \\ \underline{\lim}\ \mathcal{N}[X^o_{s_i}] = \mathcal{N}[X^o_{s^*}(T)] \end{array} \right.$$

Puisque les égalités 6,11) sont vraies pour toute suite $\{s_i\}$ convergeant vers s^* on peut conclure à la continuité des opérateurs

$$v\ [Y^o_s] \quad \text{et} \quad \mathcal{N}[X^o_s(T)].$$

Commentaire :

Les résultats obtenus permettent d'envisager la résolution de problèmes (G') si on sait résoudre, pour toute valeur de s positive, le problème (G_s) correspondant. Puisque : $\mathcal{J}[X_o^o(T)] > \mu$ il s'agit de déterminer, par encadrements successifs, une valeur s_o de s pour laquelle : $\mathcal{J}[X_{s_o}^o(T)] = \mu$ .Les conclusions de ce paragraphe s'appliquent évidemment au cas de problèmes (D). On est ainsi conduit à des problèmes notés (D_s).

De même que la résolution effective d'un problème (G) peut être envisagée par la résolution d'une suite de problèmes (D), une suite de problèmes (D_s) peut permettre de résoudre un problème (G_s).

Si la contrainte sur X(T) est définie par $\mathcal{J}[X(T)] = ||X(T)||^2$ il est alors possible de résoudre un problème (D_s) correspondant par la méthode exposée au § V.2. La justification de l'emploi de cette méthode est faite au § V.4.

Références

[1] F. Brodeau — C.R. Acad.Sc. Paris - t.264 - p. 405 Février 1967.

[2] A.V. Balakrishnan — Optimal control in Banach spaces J. Siam Control Ser. A. Vol. 3 - n° 1.

[3] L. Cesari — Semi continuita et convessita nel calcolo della variazioni. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 18 (1964).

[4] L. Cesari — Un theorema di esistenza in problemi di controlli ottimi Ann. Sc. Norm. sup. Pisa 19 (1965)

[5] Dem'yanov — Minimization of continous convex functionals in linear systems with continous convex constraints Autom.i. Telm.(1964) VOl.25 n° 11 p 1528 - 1537.

Résolution effective de problèmes à évolution continue

1. Généralités

La résolution effective directe d'un problème (G) étant difficilement concevable, nous nous limitons à l'étude de problèmes (D) dans la mesure où, d'après le § IV 5, de tels problèmes permettent une résolution approchée de certains problèmes (G).

Nous nous bornons d'ailleurs au cas où le processus Z est défini de la façon suivante :

1,1)
$$\left| \begin{array}{l} Z(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t)\, Z_i \\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{array} \right. \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

les variables aléatoires $\{Z_i\}$ $(i = 0,1,\ldots N-1)$ étant centrées, d'écart-type égal à 1, et orthogonales deux à deux. Dans le cas où les variables aléatoires ne sont pas orthogonales deux à deux, on peut toujours, en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, se ramener à ce cas. Les fonctions α_i sont définies mesurables et bornées sur l'intervalle T.

Pour un problème (D) correspondant à un processus Z défini par 1,1), il résulte du chapitre précédent que toute stratégie optimale $Y^o(t)$ est nécessairement de la forme suivante :

$$\left| \begin{array}{l} Y^o(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i(t)\, Z_i \\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{array} \right. \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

On en déduit immédiatement, compte tenu de 1,1), qu'à Y^o correspond par l'équation d'évolution une fonction aléatoire X^o de la forme :

$$\left| \begin{array}{l} X^o(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i(t)\, Z_i \\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{array} \right. \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

Nous sommes ainsi conduits à un problème de caractère déterministe qui se formule de la façon suivante : déterminer N fonctions $c_i(t)$ $(i=0,1,\dots,N-1)$ définies sur l'intervalle T telles que :

$$c_i(t) = 0 \qquad\qquad 0 \leq t \leq t_i$$

et vérifaiant la contrainte :

$$\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |c_i(t)|^2 \right\}^{1/2} \leq \lambda \qquad\qquad t \in T.$$

de façon à minimiser l'expression :

$$\int_0^T \sum_{i=0}^{N-1} \{Q(t)\, b_i^2(t) + R(t)\, c_i^2(t)\}\, dt$$

les N fonctions $b_i(t)$ étant définies à partir des fonctions $c_i(t)$ par les équations :

$$\left|\begin{array}{ll} b_i(t) = \int_0^t \{A(u)\, b_i(u) + B(u)\, c_i(u) + \alpha_i(u)\}\, du & t_i \leq t \\ b_i(t) = 0 & 0 \leq t \leq t_i \\ i = 0,1\dots,N-1 & \end{array}\right.$$

Si donc nous introduisons, pour chaque valeur de t, les éléments de $\mathbb{R}^N$ de composantes $\{b_i(t)\}$, $\{c_i(t)\}$, $\{\alpha_i(t)\}$, $i = 0,1,\dots N-1$, nous sommes en présence d'un problème vectoriel classique de la théorie du contrôle. Ce problème sera exposé et étudié au § 2 sous un aspect un peu plus général. Examinons au préalable les possibilités de résolution numérique. On peut d'abord espérer utiliser les résultats du chapitre IV qui sont d'ailleurs exactement les mêmes que ceux auxquels conduit le principe du maximum lorsqu'il est appliqué directement au problème déterministe que nous venons d'exposer. La difficulté essentielle de la méthode qui découle de ces résultats réside dans le fait que le système différentiel obtenu fait intervenir des conditions initiales pour le vecteur représentant l'état du système et terminales pour la fonction auxilliaire ($\psi(T) = 0$). Des méthodes de tir ont été proposées pour surmonter cet obstacle, mais elles ne semblent efficaces que dans les cas où la dimension N des vecteurs est petite. Une méthode utilisant la nature des stratégies optimales et conduisant à la notion de courbe de commutation, a été développée par Durand [1] dans le cas N=1. Ces méthodes sont de faibles intérêt pour nous puisque nous devons utiliser de grandes valeurs pour N

A la suite du travail de Neustadt et Paiewonsky [2] des procédés itératifs ont été proposés pour déterminer la valeur initiale de la fonction auxilliaire correspondant à une stratégie optimale. Ces méthodes nécessitent l'emploi de critères où la variable d'état ne figure pas et sont donc d'utilisation restreinte.

La méthode de Bellman conduit, dans le cas d'une évolution continue, à des équations aux dérivées partielles non classiques qu'il semble difficile de résoudre. C'est pourquoi nous préférons utiliser une méthode de gradient, qui est une extension d'une méthode due à Frank et Wolfe [3] . Ce travail [4], exécuté en commun avec A. Auslender, permet d'ailleurs la résolution numérique de problèmes stochastiques un peu plus généraux que celui présenté dans ce paragraphe.

2. Etude d'un problème de contrôle déterministe

a) position du problème

Soit T un nombre réel positif donné et r un entier positif donné; on désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^r$ qui sont de carré sommable.

f étant un élément de $\mathcal{H}$ on représentera, pour toute valeur de t, $f(t)$ par une matrice colonne notée aussi $f(t)$.

M étant une matrice quelconque, M^* désigne sa transposée.

On note ainsi le produit scalaire défini sur :

$$< f, g > = \int_0^T f^*(t).g(t)\, dt; \quad f, g \in \mathcal{H}$$

Soit C un sous-ensemble borné, fermé et convexe de $\mathcal{H}$; on appelle stratégie admissible tout élément de C.

On étudie un système physique Σ sur l'intervalle de temps $[0, T]$ noté aussi T. L'état de Σ à l'instant t est représenté par un vecteur $X(t)$ de $\mathbb{R}^m$, où m est un entier positif donné.

Si Y est la stratégie admissible appliquée à Σ, alors $X(t)$ est solution de :

(2,1) $$X(t) = X_o + \int_0^t [A(u)\, X(u) + B(u)\, Y(u) + Z(u)]\, du \qquad t \in T$$

$A(t)$, $B(t)$, $Z(t)$ sont, pour toute valeur de t sur T des matrices données, respectivement (m,m), (m,r) et $(m, 1)$; on suppose de plus que les éléments de ces tro matrices sont, en tant que fonction de t, des fonctions mesurables et bornées sur T.

Enfin X_0, qui représente l'état initial de $\sum$ est une matrice (m,1) donnée.

Le problème que nous étudions est de minimiser sur C la fonctionnelle :

2,2) $$v[Y] = \frac{1}{2}\left[X^*(T)\ S\ X(T) + \int_t^T \{X^*(t)\ Q(t)\ X(t) + Y^*(t)\ R(t)\ Y(t)\}\ dt\right]$$

où X correspond à Y par l'intermédiaire de 2,1).

S est une matrice carrée symétrique d'ordre m définie semi-positive.

Q(t) et R(t) sont, pour toute valeur de t sur T, des matrices carrées symétriques données, respectivement d'ordre m et r. Q(t) est définie semi-positive et R(t) définie positive.

Enfin Q et R satisfont aux mêmes hypothèses de mesurabilité que A,B et Z. Le problème, noté problème (L) dans toute la suite, a effectivement un sens puisque les hypothèses assurent que, Y étant choisi, 2,1) admet une solution unique définie sur T, et que d'autre part on a : $0 \leq v[Y] \leq \infty$

Dégageons des propriétés de la fonctionnelle v.

b) Propriétés de la fonctionnelle v

Proposition 2.1 : v est une application convexe de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette proposition découle facilement des faits suivants :

- Si X_1 et X_2 correspondent respectivement à Y_1 et Y_2 par 2,1), $aX_1+(1-a)X_2$ correspond à $aY_1 + (1-a)\ Y_2$ (a réel)
- $x^*\ S\ x$ est une application convexe de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$
  $x^*\ Q(t)\ x$ et $y^*R(t)y$ sont, pour toute valeur de t, des applications convexes de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^r$, respectivement, dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2 : v est une application différentiable au sens de Frechet et son gradient F est défini par :

2,3) $$F\,[Y] = R\ Y - B^*\ \psi$$

où ψ est une application de T dans $\mathbb{R}^m$ définie par :

2,4) $$\psi\ (t) = -\ S\ X(T) + \int_t^T \{A^*(u)\ \psi(u) - Q(u)\ X(u)\}\ du$$

X(t) correspondant à Y par 2,1)

Démonstration : Y et ΔY étant deux éléments de $\mathcal{H}$ évaluons $v[Y + \Delta Y]-v[Y]$. ΔY et $Y + \Delta Y$ correspondent, respectivement, par 2,1) X et $X + \Delta X$, où ΔX satisfait à :

2,5) $$\Delta X(t) = \int_0^t \{A(u)\ \Delta X(u) + B(u)\ \Delta Y(u)\}\ du$$

On peut écrire :

$$v[Y + \Delta Y] - v[Y] = X^*(T)\ S\ \Delta X(T) + \int_0^T \{X^*(t)\ Q(t)\Delta X(t) + Y^*(t)R(t)\Delta Y(t)\}dt$$
$$+ \omega(Y, \Delta Y)$$

où $\omega(Y,\Delta Y) = \frac{1}{2}[\Delta X(T)]^* S[\Delta X(T)] + \frac{1}{2}\int_0^T \{[\Delta X(t)]^* Q(t)[\Delta X(t)] + [\Delta Y(t)]^* R(t)[\Delta Y(t)]\}dt$

de 2,5) on déduit, en utilisant les hypothèses faites sur les matrices A,B, Q et R, qu'existe une constante H telle que :

2,6) $$|\omega\ (Y, \Delta Y)| \leq H\ ||\Delta\ ||^2$$

où $||\ \ ||$ désigne la norme de $\mathcal{H}$ associée au produit scalaire ; on a donc :

2,7) $$\frac{|\omega\ (Y, \Delta Y)|}{||\Delta Y||} \xrightarrow[||\Delta Y|| \to 0]{} 0$$

La définition de ψ par 2,4) permet d'écrire, en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\psi^*(T)\ \Delta X(T) = X^*(t)\ Q(t)\ \Delta X(t) + \psi^*(t)\ B(t)\ \ \Delta Y(t)$$

d'où

2,8) $$v[Y+\Delta Y] - v[Y] = \int_0^T \{Y^*(t)\ R(t) - \psi^*(t)\ B(t)\}\Delta Y(t)\ dt + \omega(Y, \Delta Y)$$

Le résultat découle alors immédiatement de 2,7) et 2,8).

Les propositions 2.1 et 2.2 donnent les propriétés essentielles pour utiliser la méthode que nous proposons. Il sera néanmoins utile, pour préciser certains modes de convergence, de montrer que v est, moyennant une hypothèse supplémentaire, un opérateur fortement convexe.
On rappelle la définition [voir [5] par exemple].

Définition : f est une application fortement convexe d'un espace de Banach B dans $\mathbb{R}$ si il existe un nombre réel $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall\ u_1, u_2 \in B, \quad \alpha \in [0,1]$$

2,9) $$f[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2] \leqslant \alpha f[u_1] + (1-\alpha) f(u_2) - \gamma\alpha(1-\alpha) \| u_1 - u_2 \|^2$$

Proprosition 2.3 S'il existe une constante positive a telle que : $y^* R(t)\, y \geq a \|y\|^2$ pour toute valeur de t, v est une application fortement convexe.

Il suffit de montrer que l'opérateur g défini sur $\mathcal{H}$ par :

$$g[Y] = \int_o^T Y^*(t)\, R(t)\, Y(t)\, dt$$

est fortement convexe.

Ceci découle immédiatement de l'hypothèse supplémentaire de coercivité faite sur R en remarquant que :

$$g[\alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2] = \alpha\, g[Y_1] + (1-\alpha)\, g[Y_2] - \alpha(1-\alpha)\int_o^T \{Y_1(t) - Y_2(t)\}^* R(t) \{Y_1(t) - Y_2(t)\} dt$$

Remarque : L'hypothèse faite sur R est satisfaite si les éléments de R sont, en tant que fonctions de t, des fonctions définies et continues sur T .

c) Algorithme de résolution

Il faut d'abord s'assurer que le problème admet au moins une solution : en effet d'une part v étant convexe et continu est faiblement semi-continu inférieurement ; d'autre part C est faiblement compact. Donc v atteint son minimum en au moins un élément de C.

L'algorithme proposé consiste à construire une suite $\{Y_n\}$ d'éléments de C de la façon suivante :

Y_o est choisi arbitraire

Y_n étant connu on détermine Y_{n+1} en deux étapes ;

1. On détermine $\overline{Y}_n$ rendant minimale sur C l'expression $\langle Y, F[Y_n] \rangle$,considérée comme fonction de Y.
2. Y_{n+1} est alors un élément de C réalisant le minimum de $v[Y_n + \alpha(\overline{Y}_n - Y_n)]$

considéré comme fonction de α définie sur l'intervalle $[0, 1]$.
Cet algorithme, noté (A), s'arrête si $< \overline{Y}_n - Y_n, F[Y_n] > = 0$, car on verra plus loin que, dans ce cas, Y_n est solution du problème.
Ce procédé permet de déterminer effectivement une suite $\{Y_n\}$.
En effet $< Y, F[Y_n]>$ est, comme fonction de Y, une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$; la phase 1 permet donc d'affirmer l'existence d'au moins un élément $\overline{Y}_n$.
$\overline{Y}_n$ étant déterminé on montre que $v[Y_n + \alpha(\overline{Y}_n - Y_n)]$ est, comme fonction de α, un polynôme du second degré. Le minimum de cette expression sur $[0,1]$ existe donc, ce qui assure l'existence de Y_{n+1} (cf. paragraphe d) .
On rappelle le résultat suivant extrait de [6] .

Lemme 2.1

Si $\lim < \overline{Y}_n - Y_n, F[Y_n] > = 0$, $\{Y_n\}$ est une suite minimisante ; c'est-à-dire que $\lim v[Y_n] = \min\limits_{Y \in C} v[Y]$

Démonstration : Soit Y_o un élément de C où v atteint son minimum. La propriété de convexité de v permet de montrer que :

$$v[Y] - v[Y_n] \geq < Y - Y_n, F[Y_n] > \qquad \forall\ Y \in \mathcal{H}$$

on en déduit :

$$v[Y_o] - v[Y_n] \geq < Y_o - Y_n, F[Y_n] \geq \min_{Y \in C} < Y - Y_n, F[Y_n] >$$

$$= \quad < \overline{Y}_n - Y_n, F[Y_n] >$$

Finalement :

$$0 \leq v[Y_n] - v[Y_o] \leq \ <Y_n - \overline{Y}_n, F[Y_n] >$$

ce qui démontre le lemme.
Ce résultat nous permet d'obtenir le théorème essentiel :

Théorème 2.1 : Toute suite $\{Y_n\}$ construite par (A) est minimisante et on peut d'ailleurs extraire de cette suite une sous-suite convergeant faiblement vers une solution du problème.

Démonstration : De la façon dont est construite $\{Y_n\}$ on déduit les deux conséquences :

2,10) $$< Y_n, F[Y_n] > \leqslant < Y, F[Y_n] >, \qquad \forall Y \in C$$

2,11) $$v[Y_{n+1}] \leqslant v[Y_n + \alpha(\overline{Y}_n - Y_n)], \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Il résulte de 2,11) que $v[Y_{n+1}] \leqslant v[Y_n]$, $n = 0,1,2\ldots$

Puisque $v[Y] \geqslant 0, \forall Y \in C$, on peut affirmer que la suite $\{v[Y_n]\}$ converge vers une limite notée v_o.

D'autre part C étant borné on peut extraire de $\{Y_n\}$ une sous-suite notée $\{Y_{n_1}\}$ convergeant faiblement vers un élément Y_e de $\mathcal{H}$. C étant convexe et fermé Y_e est élément de C. Puisque v est faiblement semi-continu inférieurement on a donc :

2,12) $$\underline{\lim}\, v[Y_{n_1}] = v_o \geq v[Y_e]$$

L'utilisation de 2,11) permet d'écrire :

$$v[Y_{n_1} + \alpha(\overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1})] - v[Y_{n_1}] \geqslant v[Y_{n_1+1}] - v[Y_{n_1}]$$

et puisque $v[Y_{n_1+1}] - v[Y_{n_1}] \xrightarrow[n_1 \to \infty]{} 0$

$$\underline{\lim} \left\{ v[Y_{n_1} + \alpha(\overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1})] - v[Y_{n_1}] \right\} \geq 0$$

d'où après 2,8) :

2,13) $$\underline{\lim} \left\{ \alpha < \overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1}, F[Y_{n_1}] > + \omega\left(Y_{n_1}, \alpha(\overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1})\right) \right\} \geqslant 0$$

or d'après 2,6) et le fait que C est borné, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|\omega(Y_{n_1}, \alpha(\overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1})| \leqslant k\, \alpha^2$$

l'inégalité 2,13) entraîne alors, en utilisant une valeur de α suffisamment petite

2,14) $\qquad \underline{\lim} < \overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1}, F[Y_{n_1}] > \; \geq 0$

d'autre part , d'après 2,10)

2,15) $\qquad < \overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1}, F[Y_{n_1}] > \; \leq 0$

La comparaison de 2,14) et 2,15) prouve que :

$$\underline{\lim} < \overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1}, F[Y_{n_1}] > = 0$$

Puisque nécessairement :

$$< \overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1}, F[Y_{n_1}] > \; \leq 0$$

on peut donc conclure que :

$\lim < \overline{Y}_{n_1} - Y_{n_1}, F[Y_{n_1}] >$ existe et est égale à 0.

D'après le lemme 2.1 $\{Y_{n_1}\}$ est une suite minimisante ; $v[Y_{n_1}]$ converge vers la valeur minimale v_m.

D'après la propriété de monotonie de la suite $\{ v[Y_n] \}$, $\{v[Y_n]\}$ converge aussi vers v_m et l'on a $v_o = v_m$

D'après 2,12) on a $v[Y_e] = v_m$; Y_e est donc solution du problème d'où le théorème.

Montrons comment les résultats de ce théorème peuvent être améliorés en utilisant les propriétés de convexité forte de l'opérateur v.

On énonce dans [6] le résultat suivant

<u>Lemme 2.2</u> : <u>Si f est une applicaiton fortement convexe d'un espace de Banach B dans $\mathbb{R}$ et admet en tout point de B un gradient F on a</u> :

2,16) $\forall u_1, u_2 \in B, \; f(u_1) - f(u_2) \geq F[u_2] \cdot (u_1 - u_2) + \gamma ||u_2 - u_1||^2$

Ce lemme a pour conséquence le résultat suivant :

<u>Théorème 2.2</u> <u>Si l'opérateur v est fortement convexe la suite $\{Y_n\}$ converge fortement vers Y_e</u> ; <u>Y_e est solution unique du problème</u> .

En effet l'inégalité 2,16) appliqué à v donne :

2,17) $\quad v[Y] - v[Y_e] \geq \; < Y - Y_e, F[Y_e] > + \gamma ||Y - Y_e||^2 , \; \forall Y \in C$

Or d'après le théorème 1 de [6] , puisque Y_e est solution du problème,

$$\min_{Y \in C} < Y - Y_e \, , F[Y_e] > = 0$$

2,17) entraîne donc :

2,18) $$v[Y_n] - v[Y_e] \geqslant \gamma \, ||Y_n - Y_e||^2$$

et puisque $$v[Y_n] \underset{n \to \infty}{\to} v[Y_e]$$

$$||Y_n - Y_e|| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

D'autre part, l'inégalité 2,18) étant valable pour tout Y_e solution du problème (L),on est assuré de l'unicité de Y_e.
Ce théorème admet comme conséquence que la suite $\{X_n\}$, associée à $\{Y_n\}$ par 2,1) , <u>converge en norme</u> vers X, associé à Y.

<u>d) Résolution numérique</u>

Trois exemples de sous-ensembles C sont envisagés.
Y étant élément de $\mathcal{H}$ nous désignons par Y^i ses composantes (i = 1,.... r)

a) C est le sous-ensemble C_1 des éléments Y tels que, pour presque toute valeur de t sur T

$$|Y^i(t)| \leqslant \lambda \qquad (i = 1,\dots,r)$$

b) C est le sous-ensemble C_2 des éléments Y tels que, pour presque toute valeur de t sur T

$$\left[\sum_{i=1}^{r} |Y^i(t)|^2 \right]^{1/2} \leqslant \mu$$

c) C est le sous-ensemble C_3 des éléments Y tels que :

$$||Y|| \leqslant \nu$$

λ , μ , ν sont des constantes positives données.
Il est facile de vérifier que C_1, C_2, C_3 sont des ensembles convexes, bornés et fermés.

Montrons comment, pour chacun de ces exemples, la construction d'une suite minimisante $\{Y_n\}$ peut être entreprise.

Supposons connu Y_n

1. <u>Détermination de $\overline{Y}_n$</u>

Il s'agit de minimiser $\int_0^T \sum_{i=1}^{r} Y^i(t).F^i\,[Y_n(t)]\,dt$

Dans le cas a) et b) le problème est équivalent à la minimisation de l'expression :

2,19) $$\sum_{i=1}^{r} Y^i(t).[F^i\,Y_n(t)]$$

pour presque toute valeur de t, dans la mesure où cette minimisation permet d'obtenir un élément de $\mathcal{H}$.

<u>cas a</u> Le résultat est immédiat ; on peut prendre :

$$\overline{Y}_n^{\,i}(t) = \left|\begin{array}{ll} -\lambda & \text{si } F^i\,[Y_n(t)] > 0 \\ +\lambda & \text{si } F^i\,[Y_n(t)] < 0 \\ \text{quelconque} & \text{si } F^i\,[Y_n(t)] = 0 \end{array}\right.$$

<u>cas b</u> On pose $Y = k\,F\,[Y_n] + W$

où k est une constante réelle et W un élément de $\mathcal{H}$ orthogonal à $F\,[Y_n]$.

2,19) s'écrit alors :

$$k \sum_{i=1}^{r} \left|\,F^i\,[Y_n(t)]\,\right|^2$$

cette quantité est minimale pour la plus petite valeur de k autorisée ; or on doit avoir

$$k^2 \sum_{i=1}^{r} \left|F^i\,[Y_n(t)]\right|^2 + \sum_{i=1}^{r} \left|W^i\right|^2 \leqslant \mu^2$$

la plus petite valeur de k est donc obtenue pour $\sum_{i=1}^{r} |W^i|^2 = 0$

et est égale à $$\frac{-\mu}{\left\{\sum_{i=1}^{r} \left|\,F^i[Y_n(t)]\right|^2\right\}^{1/2}}$$

d'où $\overline{Y}^i_n(t) = \dfrac{-\mu\, F^i\,[Y_n(t)]}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{r} |F^i\,[Y_n(t)]\,|^2\right\}^{1/2}}$ si $\sum\limits_{i=1}^{r} |F^i\,[Y_n(t)]\,|^2 > 0$

sinon $\overline{Y}_n(t)$ est indéterminé.

cas c Ce cas se traîte comme le cas b.

On trouve : $\overline{Y}^i_n(t) = \dfrac{-\nu\, F^i\left[Y_n(t)\right]}{\|\, F\,[Y_n]\,\|}$, si $\|F\,[Y_n]\,\|>0$

sinon $\overline{Y}_n$ est indéterminé.

2. détermination de Y_{n+1}

Soit U_1 et U_2 deux éléments de $\mathcal{U}$ auxquels correspondent par 2,1) V_1 et V_2.

On pose :

$$G(U_1,U_2) = \frac{1}{2}\left[V_1^*(T)SV_2(T) + \int_0^T\{V_1^{\,*}(t)\;Q(t)\;V_2(t) + U_1^*(t)\;R(t)\;U_2(t)\}\;dt\right]$$

Un calcul élémentaire montre que

2,20) $$v\left[Y_n + \alpha(\overline{Y}_n - Y_n)\right] = v\left[Y_n\right] + 2\alpha\{-v\left[Y_n\right] + G(\overline{Y}_n, Y_n)\} + \dots\dots$$
$$\dots\dots + \alpha^2\{v\left[\overline{Y}_n\right] + v\left[Y_n\right] - 2\,G(\overline{Y}_n, Y_n)\}$$

pour toute valeur de t ; R(t) étant une matrice définie-positive, on constate d'ailleurs que le coefficient de α^2 ne s'annule que lorsque $\overline{Y}_n = Y_n$. D'où deux cas :

-1- $<\overline{Y}_n - Y_n, F\left[Y_n\right]> = 0$ alors Y_n est solution du problème d'après le théorème 1 de [6] et la convexité de la fonction v(y) ; il est inutile de poursuivre.

-2- $<\overline{Y}_n - Y_n, F\left[Y_n\right]> \neq 0$ alors on peut facilement déterminer la valeur α_n de α rendant minimale sur $[0, 1]$ le second membre de 2,19).

Si on pose :
$$\bar{\alpha}_n = \frac{v\,[Y_n] - G(Y_n, \bar{Y}_n)}{v\,[\bar{Y}_n] + v\,[Y_n] - 2G(\bar{Y}_n, Y_n)}$$

on a : $\alpha_n = \min(1, \bar{\alpha}_n)$

le cas $\alpha_n = 0$ étant impossible puisqu'on aurait alors $<\bar{Y}_n - Y_n, F\,[Y_n]> = 0$

On peut ainsi envisager de résoudre certains exemples numériques.
Il est alors important de savoir arrêter la détermination des Y_n lorsqu'une précision fixée à l'avance pour v_m a été atteinte . Ceci découle de l'inégalité :

$$0 \leqslant v\,[Y_n] - v_m \leqslant <Y_n - \bar{Y}_n, F\,[Y_n]>$$

obtenue dans la démonstration du lemme 2.1.
A chaque étape le calcul de $<Y_n - Y_n, F\,[Y_n]>$ permet ainsi de savoir si la poursuite de l'algorithme doit ou ne doit pas être envisagée.
La méthode utilisée a été introduite par Frank et Wolfe [3] pour minimiser des fonctions convexes sur des polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$. Des conditions d'extension de cette méthode ont déjà été énoncées par Dem'janov et Rubinov [6] et Valladier [7] , mais elles ne s'appliquent pas ici.
Remarquons que cette méthode repose sur le fait que Y° est une solution du problème si et seulement si :

$$\min_{Y \in C} <Y - Y^o, F\,[Y^o]> = 0$$

D'après la définition de F cette condition s'écrit :

$$(2,21) \quad \min_{Y \in C} \int_0^T \Big(Y(t) - Y^o(t)\Big)^* \Big(R(t)\,Y^o(t) - B^*(t)\,\psi(t)\Big)\,dt = 0$$

Il est intéressant de constater que ψ n'est autre que la fonction auxiliaire, correspondant à Y° , introduite par le principe du maximum. Les conditions d'applications de ce principe peuvent être étendues au problème et conduisent, pour certains types de contraintes, à la condition nécessaire d'optimalité suivante :

$$2,22) \quad \min_{Y \in C} \int_0^T \{\frac{1}{2} [Y^*(t)R(t)\, Y(t) - (Y^o(t)^* R(t)\, Y^o(t)] - (Y(t)-Y^o(t))^* B^*(t)\psi(t)\} dt = 0$$

La condition 2,21) représente une linéarisation de 2,22)

En fait 2,22) se met sous la forme :

$$\min_{Y \in C} \left[\int_0^T (Y(t)-Y^o(t))^* (R(t)Y^o(t)-B^*(t)\psi(t)) dt + \int_0^T \frac{1}{2}(Y(t)-Y^o(t))^* R(t) (Y(t)-Y^o(t)) dt \right] = 0$$

et puisque pour tout élément Y

$$\int_0^T (Y(t)-Y^o(t))^* R(t) (Y(t)-Y^o(t))\, dt \geq 0$$

on en déduit immédiatement que la condition 2,21) entraîne la condition 2,22). 2.21) représente donc, pour le problème étudié, un résultat plus fin que celui fourni par 2,22) ; ceci est logique puisque 2,21) tient compte de la forme particulière de l'opérateur v et tout spécialement du fait que v est convexe.

Récemment Dem'janov [8] a publié une étude étendant à de nombreux problèmes de contrôle la méthode de Frank et Wolfe. D'autre part, A. Auslender [9] a généralisé cette méthode au problème de recherche de points stationaires pour des fonctionnelles définies dans un espace vectoriel topologique, ce qui permet de traiter des problèmes de contrôle à évolution non linéaire.

3. Programme de résolution du problème (L)

Le programme qui suit, écrit en Algol 60, permet de résoudre le problème (L) sous les conditions suivantes :

- les éléments des matrices A, B, Q, R, Z sont constants
- la contrainte imposée aux stratégies est du type b.

Ce programme a été expérimenté, de façon tout à fait satisfaisante à l'aide de plusieurs exemples, sur le calculateur I.B.M. 7044 du laboratoire de mathématiques appliquées de l'Université de Grenoble.

La procédure TRA permet de calculer les diverses intégrales rencontrées.

La procédure GQUA assure le calcul de la fonction G pour deux éléments de $\mathcal{H}$.

La procédure FONCT forme l'expression A X(t) + B Y(t) + Z.

La procédure RESYDIF assure l'intégration de l'équation d'évolution.

```
'DEBUT'
   'REEL'  T6,T7, H1  ,PARA,EPSI::
        'ENTIER'  N6,N1, M6,NBR ::
LIRE(N6,N1,M6,T6,H1,T7,PARA,EPSI,NBR) ::
'DEBUT'
   'ENTIER' TI,TL,L,K,K2,K3,I,COMPT,COMT ::
   'REEL' XF1,XD1,S1,V1,V2,V3,V4,V5,V6,ALPHA,BETA,TT   ,V7,V8,S2,S3,
 INTE,H2          ,SS1,SS2,SS3,SS4,SS5,SS6,SS7,SS8::
   'TABLEAU' A,Q,S.(1:N6,1:N6).,B.(1:N6,1:M6).,XX,Z.(1:N6,0:N1).,
      XXB.(1:N6,0:N1).,   TXX,TZ.(0:N1,1:N6).,TU.(0:N1,1:M6).,
FQUAD.(0:N1).,UB.(1:M6,0:N1).,FGRAD.(1:M6,0:N1).,
   GRAD.(1:M6,0:N1).,XB.(1:N6,0:N1).,
R.(1:M6,1:M6).,YD1,YF,X6,Z6,CONS1,CONS2.(1:N6).,U.(1:M6,0:N1).,
   F1.(1:N6,0:N1). ::
'PROCEDURE' TRA(F,N,H,INTE) ::
'ENTIER' N ::
     'REEL' H,INTE ::
'TABLEAU' F ::
'DEBUT' INTE:=0 :: 'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N-1 'FAIRE'
   INTE:=INTE+F.(L). ::
   INTE:=H*(INTE+(F.(0).+F.(N).)/2.0)
'FIN' ::
   'PROCEDURE' GQUA(U1,U2,X1,X2,P1,P2,P3,INTO) ::
   'TABLEAU' X1,X2,U1,U2 ::
   'ENTIER' P1,P2,P3 ::
   'REEL' INTO ::
'DEBUT'
   'TABLEAU' ITF.(0:P1). ::
S1:=0 :: 'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P3 'FAIRE'
     'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P3 'FAIRE'
     S1:=S1+X1.(K,P1).*S.(K,L).*X2.(L,P1). ::
'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' P1 'FAIRE' 'DEBUT'
 2:=S3:=0 ::
     'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P3 'FAIRE'
     'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P3 'FAIRE'
     S2:=S2+X1.(K,TI).*Q.(K,L).*X2.(L,TI). ::
'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P2 'FAIRE'
   'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P2 'FAIRE'
     S3:=S3+U1.(K,TI).*R.(K,L).*U2.(L,TI). ::
   ITF.(TI).:=S2+S3
'FIN' ::
   TRA (ITF,P1,H1,INTO)  :: INTO:=(INTO+S1)/2.0 ::
'FIN' ::
'PROCEDURE' FONCT(X,Y,DY) ::
           ' REEL' X ::
   'TABLEAU' Y,DY ::
           'DEBUT'
'SI' COMPT=1 'ALORS' 'DEBUT'
   'POUR' K2:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' 'DEBUT' S1:=0 ::
   'POUR' K3:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE'
     S1:=S1+A.(K2,K3).*Y.(K3). ::
   DY.(K2).:=S1+CONS1.(K2). 'FIN' 'FIN' 'SINON'
   'DEBUT' 'POUR' K2:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' 'DEBUT' S1:=0 ::
     'POUR' K3:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE'
     S1:=S1+A.(K3,K2).*Y.(K3). ::
```

```
   DY.(K2).:=S1-CONS2.(K2).  'FIN' 'FIN' ::
 'FIN' ::
     'PROCEDURE' RESYDIF(FONCT,XD,YD,H,N,XF,YF)::
                                              'VALEUR' XD,H,N ::
  'PROCEDURE' FONCT :: 'REEL' XD,H,XF :: 'ENTIER' N :: 'TABLEAU'
  YD,YF ::
  'DEBUT' 'TABLEAU' A.(1:5).,Z,W.(1:N). :: 'ENTIER' K,J ::
  A.(1).:=A.(2).:=A.(5).:=H/2.0 :: A.(3).:=A.(4).:=H ::
  XF:=XD :: 'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' YF.(K).:=W.(K).:=
  YD.(K). ::
  J:=1 ::
  ITER:FONCT(XF,W,Z) ::
  'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' YF.(K).:=YF.(K).+A.(J+1).*
  Z.(K)./3.0 ::
  'SI' J=4 'ALORS' 'ALLERA' TERM ::
  'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' W.(K).:=YD.(K).+A.(J).*
  Z.(K). ::
  XF:=XD+A.(J). :: J:=J+1 :: 'ALLERA' ITER ::
  TERM: 'FIN' ::
 H2:=(T7-T6)/N1 ::
MSMAT: MODELE(''(8(3X,F12.6))'') ::
'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' 'DEBUT'
   ENTREE(5,MSMAT,N6,A.(I,1).) ::
   SORTIE(6,MSMAT,N6,A.(I,1).) ::
   ENTREE(5,MSMAT,N6,Q.(I,1).) ::
   SORTIE(6,MSMAT,N6,Q.(I,1).) :: ENTREE(5,MSMAT,M6,R.(I,1).) ::
   SORTIE(6,MSMAT,M6,R.(I,1).) ::
   ENTREE(5,MSMAT,N6,S.(I,1).) ::
   SORTIE(6,MSMAT,N6,S.(I,1).) ::
   ENTREE(5,MSMAT,M6,B.(I,1).) ::
   SORTIE(6,MSMAT,M6,B.(I,1).)
'FIN' ::
   ENTREE(5,MSMAT,N6,X6.(1).) ::
   SORTIE(6,MSMAT,N6,X6.(1).) ::
'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
    'DEBUT'
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE' U.(K,TI).:=0.0::
   'POUR'  L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA'N6'FAIRE' F1.(L,TI).:=0.0 ::
   'FIN'  ::
   GAMMA: COMT:=COMT+1       ::
XF1:=T6 :: 'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' YF.(K).:=X6.(K). ::
COMPT:=1 ::
'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
   'DEBUT' XD1:=XF1 :: TT:=((T7-T6)/N1)*TI ::
'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' 'DEBUT'
XX.(K,TI).:=YD1.(K).:=YF.(K). :: CONS1.(K).:=F1.(K,TI). ::
   'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE'
   CONS1.(K).:=CONS1.(K).+B.(K,L).*U.(L,TI).
'FIN' ::
RESYDIF(FONCT,XD1,YD1,H1,N6,XF1,YF) ::
'FIN' ::
XF1:=T6 :: 'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' 'DEBUT'
   Z6.(L).:=0.0 :: 'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE'
   YF.(L).:=Z6.(L).:=Z6.(L).-S.(L,K).*XX.(K,N1).  ::
'FIN' ::
```

```
COMPT:=2 ::
'POUR' TI:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N1+1  'FAIRE' 'DEBUT'
   XD1:=XF1 :: TL:=N1+1-TI ::
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' 'DEBUT'
 Z.(K,TL).:=YD1.(K).:=YF.(K). :: CONS2.(K).:=0.0 ::
   'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE'
   CONS2.(K).:=CONS2.(K).+Q.(K,L).*XX.(K,TL). ::
   'FIN' ::
RESYDIF(FONCT,XD1,YD1,H1,N6,XF1,YF)::
'FIN' ::
     ECRIRE('('SOLEQUADIF')') ::
'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
    'DEBUT'
'POUR' K :=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE'
    'DEBUT'
    TXX.(TI, K).:=XX.(K,TI). ::        TZ.(TI,K).:=Z.(K,TI).::
    'FIN' ::
'POUR' L :=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE'
   TU.(TI,L).:= U.(L,TI).::
    'FIN' ::
     ECRIRE('('ETAT')') ::
   'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
   'DEBUT'
    SORTIE(6,MSMAT,N6,TXX.(TI,1).)::
   'FIN' ::
     ECRIRE('('VAR DUALE')') ::
'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
   'DEBUT'
    SORTIE(6,MSMAT,N6, TZ.(TI,1).)::
   'FIN' ::
      ECRIRE('('COMMANDE')') ::
'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
    'DEBUT'
    SORTIE(6,MSMAT,M6, TU.(TI,1).)::
   'FIN' ::
'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
'DEBUT' S2:=0 ::
  TT:=((T7-T6)/N1)*TI ::
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE' 'DEBUT'
     S1:=0 :: 'POUR' L:=1  'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE'
     S1:=S1-                     B.(L,K).*Z.(L,TI). ::
  'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6  'FAIRE'
        S1:=S1+ R.(K, I). *U.(I,TI).  ::
   GRAD.(K,TI).:=S1 ::
   S2:=S2+S1**2
'FIN' ::
  S2:=RAC2(S2) ::
'SI' S2 'SUPEG' EPSI 'ALORS' 'DEBUT'
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE'
   UB.(K,TI).:=-(PARA/S2)*GRAD.(K,TI). 'FIN' 'SINON' 'DEBUT'
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE'
   UB.(K,TI).:=0.0 'FIN' ::
FQUAD.(TI).:=0 ::
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE'
FQUAD.(TI).:=FQUAD.(TI).+(U.(K,TI).-UB.(K,TI).)*GRAD.(K,TI). ::
```

```
'FIN' ::
     · ECRIRE('('INDICFONCECON')')  ::
   TRA(FQUAD,N1,H2,INTE) :: ECRIRE(INTE) ::
   'SI' ABS(INTE) 'INFEG' EPSI'ALORS' 'ALLER A' ARRET ::
   XF1:=T6 :: 'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE'
      YF.(K).:=X6.(K). ::
   COMPT:=1 ::
   'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
   'DEBUT' XD1:=XF1 :: TT:=((T7-T6)/N1)*TI ::
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N6 'FAIRE' 'DEBUT'
   XB.(K,TI).:=YD1.(K).:=YF.(K).:: CONS1.(K).:=F1.(K,TI). ::
      'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE'
      CONS1.(K).:=CONS1.(K).+B.(K,L).*UB.(L,TI).
   'FIN' ::
   RESYDIF(FONCT,XD1,YD1,H1,N6,XF1,YF) ::
'FIN' ::
      ECRIRE('('VALEURECON')') ::
   GQUA (U,U,XX,XX,N1,M6,N6,SS1) ::
   GQUA (U,UB,XX,XB,N1,M6,N6,SS2) ::
   GQUA (UB,UB,XB,XB,N1,M6,N6,SS3) ::
    ECRIRE(SS1) ::
   ALPHA:=SS1+SS3-2*SS2 ::
    'SI' ABS(ALPHA) 'INFEG'EPSI 'ALORS' 'ALLERA' ARRET 'SINON'
   BETA:=(SS1-SS2)/ALPHA :: 'SI' BETA 'SUPEG' 1.0 'ALORS' BETA:=
    ALPHA:=1.0-BETA ::
   'POUR' TI:=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M6 'FAIRE'
   U.(K,TI).:=BETA*UB.(K,TI).+ALPHA*U.(K,TI). ::
 'SI' COMT 'INFEG 'NBR 'ALORS' 'ALLERA' GAMMA 'SINON' 'ALLERA' A
ARRET:
'FIN'
      'FIN' ::
FALGCL
```

4. Application de la méthode du paragraphe 2 à certains problèmes stochastiques

Nous allons montrer que l'algorithme exposé au § 2 peut s'appliquer à certains problèmes définis au chapitre IV et permet, en particulier de démontrer le théorème 4.1 de ce chapitre.

Les notations utilisées sont celles du chapitre IV. $\mathcal{H}$ désigne ici l'espace $\mathcal{L}^2[\Omega \times T]$.

On étudie le problème (D).

L'opérateur v correspondant à un tel problème est une application du sous-ensemble C_a^d de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés énoncées à la proposition IV.2.1.

On montre, par une démonstration calquée sur celle de la proposition 2.2, que v admet, pour tout élément Y de $\mathcal{H}$, un gradient F défini par :

$$F[Y] = 2RY - B\psi$$

où ψ est une fonction aléatoire solution de :

4,1) p.s. $$\psi(t) = \int_t^T \{A(u)\,\psi(u) - 2Q(u)\,X(u)\}\,du$$

X correspondant à Y par l'équation d'évolution, ψ est d'ailleurs la fonction aléatoire auxilliaire introduite par le théorème du maximum. On peut alors appliquer l'algorithme du § 2 et construire à partir d'un élément Y^o de C_a^d une suite $\{Y_n\}$ d'éléments de C_a^d.

Par utilisation du lemme 2.1 et des propriétés de C_a^d, on démontre, par un raisonnemnet identique à celui du théorème 2.1., que la suite $\{Y_n\}$ est minimisante.

Si de plus on suppose que pour tout élément de T il existe une constante m telle que :

4,2) $$R(t) \geq m > 0$$

l'opérateur v est alors fortement convexe et la suite $\{Y_n\}$ converge fortement vers une solution Y^o du problème.

Dans le cas où Z est une fonction aléatoire Gaussienne, c'est-à-dire sous les hypothèses du § IV.4, on a le résultat :

<u>Proposition 4.1</u> : <u>il existe une suite minimisante $\{Y_n\}$ de stratégies telles que, pour toute valeur de n :</u>

4,3) $$Y_n(t) = \sum_{i=0}^{N-1} C_i^n(t)\, Z_i$$

<u>où les fonctions $C_i^n(t)$ sont des fonctions uniquement de t, nulles pour : $t \leq t_i$ et bornées sur l'intervalle T.</u>

Démonstration : Supposons que Y_n soit effectivement de la forme 4,3).
Soit X_n et ψ_n les processus correspondant à Y_n par l'équation d'évolution et 4,1) , respectivement.
Etudions le passage de Y_n à Y_{n+1}
On détermine d'abord un élément $\overline{Y}_n$ de C_a^d rendant minimale sur C_a^d l'expression :

$$E \int_o^T \{Y(t) \left[R(t)\, Y_n(t) - B(t)\, \psi_n(t)\right]\} \, dt$$

Si $U_n(t)$ désigne l'élément de C_a^d défini sur T par :

$$\begin{aligned} & U_n(t) = E \left[\psi_n(t) \,|\, \mathcal{a}_i\right] \\ & & i = 0,1\ldots,N-1 \, . \\ & t_i < t \leq t_{i+1} \end{aligned}$$

on montre, à l'aide d'un raisonnement déjà utilisé au chapitre IV, que :

4,4) $$\overline{Y_n(t)} = -\lambda \frac{R(t)\, Y_n(t) - B(t)\, U_n(t)}{||R(t)\, Y_n(t) - B(t)\, U_n(t)||}$$

si $||R(t)\; Y_n(t) - B(t)\, U_n(t)|| \neq 0$,
sinon $\overline{Y_n(t)}$ est indéterminé
On sait, d'autre part, que si $W_n(t)$ est l'élément de C_a^d défini sur T par :

$$\left| \begin{aligned} & W_n(t) = E \left[X_n \,|\, \mathcal{a}_i\right] \\ & & i = 0,1\ldots,N-1 \\ & t_i < t \leq t_{i+1} \end{aligned} \right.$$

U_n et W_n sont solutions de

$$\left| \begin{aligned} & U_n(t) = \int_o^T \{A(u)\, U_n(u) - 2\, Q(u)\, W_n(u)\} \, du \\ & W_n(t) = \int_o^T \{A(u)\, W_n(u) + B(u)\, Y_n(u) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(u)\, Z_i\} \, du \\ & \\ & t_n < t \leq t_{n+1} \end{aligned} \right.$$

On déduit immédiatement de ce système, par les techniques employées au chapitre IV, que $W_n(t)$ et $U_n(t)$ sont aussi de la forme 4,3). D'après 4,4), on peut donc dans tous les cas déterminer un élément $\overline{Y}_n$ de C_a^d qui soit de la forme 4,3) ; Y_{n+1} est défini à l'aide de Y_n et $\overline{Y}_n$ par la relation :

$$Y_{n+1} = Y_n + \alpha_n(\overline{Y}_n - Y_n)$$

où α_n réalise sur l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ le minimum de l'expression :

$$v\left[Y_n + \alpha\,(\overline{Y}_n - Y_n)\right]$$

considérée comme fonction de α .
Y_{n+1} est donc de la forme souhaitée, ce qui achève la démonstration si on remarque que les fonctions C_i^n sont nécessairement bornées puisque $||Y_n|| \leqslant \lambda$.
Le théorème 4.1 du chapitre IV est contenu dans le résultat suivant :

<u>Proposition 4.2</u> : <u>Si la condition 4,2) est satisfaite , il existe une solution Y^o du problème qui est de la forme 4.3)</u>

En effet d'après la proposition 4.1, il existe une suite $\{Y_n\}$ de stratégies de la forme 4,3) qui converge fortement vers une solution.
Comme nous l'avons déjà remarqué , on peut se limiter au cas où les variables aléatoires Z_i sont orthogonales deux à deux . Dans ce cas la propriété de convergence forte entraîne que :

$$\int_o^T \sum_{i=0}^{N-1} |C_i^n(t) - C_i^m(t)|^2\, dt \xrightarrow[n,m\ \to\ \infty]{} 0 .$$

d'où pour chaque valeur de i

$$\int_o^T |C_i^n(t) - C_i^m(t)|^2\, dt \xrightarrow[n,m\ \to\ \infty]{} 0$$

La suite $\{C_i^n\}$ de fonctions converge donc fortement, dans l'espace des fonctions de carré sommable sur T, vers un élément C_i de cet espace :

$$\int_o^T |C_i^n(t) - C_i(t)|^2\, dt \xrightarrow[n\ \to\ \infty]{} 0$$

La fonction C_i est nulle pour $t \leq t_i$ et si l'on pose :

$$Y^o(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(t)\, Z_i$$

il est évident que la suite $\{Y_n\}$ converge fortement dans $\mathcal{H}$ vers Y^o, qui est alors nécessairement solution du problème étudié.

<u>Remarque</u> : La méthode utilisée peut être appliquée au cas où on ajoute le terme $s\ ||X\ (T)||^2$ à $v\ [Y]$ (s constante positive).
Le gradient est défini de la même façon, mais ψ est solution de :

$$\text{p.s} \qquad \Psi\ (t) = -s\ X(T) + \int_t^T \{A(u)\ \psi(u) - 2Q(u)\ X(u)\}\ du$$

L'équation satisfaite par W_n est inchangée ; U_n satisfait à :

$$\left| \begin{array}{l} U_n(t) = -\ s\ E\ [X(T)|\mathcal{A}_n] + \int_o^t \{A(u)\ U_n(u) - 2Q(u)\ W_n(u)\}\ du \\ \\ t_n < t \leq t_{n+1} \end{array} \right.$$

On démontre que si Y_n est de la forme 4,3), il en est de même pour W_n et ensuite pour U_n et on conclue, par le même raisonnement que précédemment, que Y_{n+1} peut être aussi choisi de la forme 4,3).
Le résultat de la proposition 4.2 reste vrai.
On justifie ainsi la possibilité de résoudre un problème (D_s) par l'algorithme proposé au § 2 dans le cas où $\mathcal{N}\ [X(T)] = ||\ X(T)||\ ^2$.

Références

[1] A. Durand

Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal à évolution linéaire et critère quadratique - Thèse Grenoble 1968.

[2] L.W Neustadt and B.H. Paiewonsky

On synthesizing optimal controls

[3] M. Frank ans P. Wolfe

An algorithm for quadratic programming. Naval Research Logistics Quaterly.(1956).

[4] A.Auslender et F. Brodeau

Extension d'un algorithme de Frank et Wolfe à un problème de contrôle. Grenoble Mai 1967.

[5] B.T. Poljak

Existence theorems and convergence of minimizing sequence in extremum problems with restrictions.

Soviet Math. 1966 - Tom.166 N° 2.

[6] V.F. Dem'janov and A.M. Rubinov

On the problem of minimization of a smooth functional with convex constraints - Soviet Mathematics 1965 - Tom 6 n° 1

[7] M. Valladier

Extension d'un algorithme de Frank et Wolfe
Revue Française de Recherche Opérationnelle n° 36 (1965)

[8] V.F. Dem'yanov

The solution of some optimal control problems
Electronic Sciences Laboratory, Univ. of South. Calif., Technical report - Oct. 1967

[9] A. Auslender

C.R. Acad. Sc. Paris - T. 266 - P. 226 - Janv. 1968.

VU,
Grenoble, le
Le Président de la Thèse

VU
Grenoble, le
Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE