Prévision et décision en programmation linéaire stochastique

J.-M. Lemarie

N° D'ordre

THÈSE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

" MATHEMATIQUES APPLIQUEES "

par

J. M. Lemarie

PREVISION ET DECISION EN PROGRAMMATION LINEAIRE STOCHASTIQUE

Thèse soutenue le 22 Juin 1967, devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN Président

BARRA
GASTINEL
Examinateurs

N° D'ordre

THÈSE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

" MATHEMATIQUES APPLIQUEES "

par

J. M. Lemarie

PREVISION ET DECISION EN PROGRAMMATION LINEAIRE STOCHASTIQUE

Thèse soutenue le 22 Juin 1967, devant la Commission d'Examen

MM.	KUNTZMANN	Président
	BARRA	Examinateurs
	GASTINEL	

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES :

M. MORET
M. WEIL

DOYEN :

M. BONNIER E.

PROFESSEURS TITULAIRES :

MM.	NEEL Louis	Chaire de Physique Expérimentale
	HEILMANN René	Chaire de Chimie
	KRAVTCHENKO Julien	Chaire de Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Chaire de calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Chaire de Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chaire de Chimie Papetière
	WEIL Louis	Chaire de Thermodynamique
	FELICI Noël	Chaire d'Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Chaire de Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Chaire de Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Chaire de Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Chaire de Botanique
	FALLOT Maurice	Chaire de Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Chaire de Mathématiques M.P.C.
	GALVANI O.	Mathématiques
	MOUSSA André	Chaire de Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chaire de Chimie Générale

	SOUTIF Michel	Chaire de Physique Générale
	CRAYA Antoine	Chaire d'Hydrodynamique
	REULOS R.	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chaire de Chimie
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT	Mathématiques
Melle	*LUTZ Elisabeth*	Mathématiques
MM.	*BLAMBERT Maurice*	Chaire de Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Chaire de Minéralogie et Pétrographie
	BONNIER Etienne	Chaire d'Electrochimie et d'Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Chaire de Physiologie Animale
	PILLET E.	Chaire de Physique Industrielle et Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Chaire de Physique Nucléaire Théorique
	DEBELMAS Jacques	Chaire de Géologie Générale
	GERBER R.	Mathématiques
	PAUTHENET R.	Electrotechnique
	VAUQUOIS B.	Chaire de Calcul Electronique
	BARJON R.	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Chaire de Physique
	SILBER R.	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Chaire d'Electronique
	DREYFUS B.	Thermodynamique
	KLEIN J.	Mathématiques
	VAILLANT F.	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNOUD Paul	Chaire de Chimie M.P.C.
	SENGEL P.	Chaire de Zoologie
	BARNOUD F.	Chaire de Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU P.	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chaire de Chimie Physique

Mme KOFLER L.	Botanique
MM. DEGRANGE Charles	Zoologie
PEBAY-PEROULA J.C.	Physique
RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM. GIDON P.	Géologie et Minéralogie
GIRAUD P.	Géologie
PERRET R.	Servomécanismes
Mme BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme SOUTIF J.	Physique
MM. COHEN J.	Electrotechnique
DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
ANGLES-d'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
DUCROS P.	Minéralogie et Cristallographie
GLENAT R.	Chimie
LACAZE A.	Thermodynamique
BARRA J.	Mathématiques Appliquées
COUMES A.	Electronique
PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
ROBERT A.	Chimie Papetière
BIAREZ J.P.	Mécanique Physique
BONNET G.	Electronique
CAUQUIS G.	Chimie Générale
BONNETAIN L.	Chimie Minérale
DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
HACQUES Gérard	Calcul Numérique
POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

MAITRES DE CONFERENCES :

MM.	DODU J.	Mécanique des Fluides
	LANCIA Roland	Physique Automatique
Mme	KAHANE J.	Physique
MM.	DEPORTES C.	Chimie
Mme	BOUCHE L.	Mathématiques
MM.	SARROT-RAYNAUD J.	Géologie Propédeutique
Mme	BONNIER M.J.	Chimie
MM.	KAHANE A.	Physique Générale
	DOLIQUE J.M.	Electronique
	BRIERE G.	Physique M.P.C.
	DESPRE P.	Chimie S.P.C.N.
	LAJZEROWICZ J.	Physique M.P.C.
	VALENTIN P.	Physique M.P.C.
	BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
	LAURENT P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
	CAUBET J.P.	Mathématiques Pures
	PAYAN J.J.	Mathématiques
Mme	BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
MM.	LONGEQUEUE J.P.	Physique
	NIVAT M.	Mathématiques Appliquées
	SOHM J.C.	Electrochimie
	ZADWORNY F.	Electronique
	DURAND F.	Chimie Physique
	CARLIER G.	Biologie Végétale
	AUBERT G.	Physique M.P.C.
	DELPUECH J.J.	Chimie Organique
	PFISTER J.C.	Physique C.P.E.M.
	CHIBON P.	Biologie Animale
	IDELMAN S.	Physiologie Animale
	BLOCH D.	Electrotechnique
	BRUGEL L.	I.U.T.
	SIBILLE R.	I.U.T.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

Monsieur le Professeur Kuntzmann, Directeur du laboratoire de calcul de l'Université de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Monsieur Barra, Professeur, qui a dirigé ce travail et n'a ménagé ni sa peine ni ses conseils pour le mener à bien ce dont je l'en remercie tout particulièrement.

Monsieur Gastinel, Professeur, qui a accepté d'être membre du Jury.

Madame Cogne et Monsieur Mounet pour le soin qu'ils ont apporté dans la réalisation matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

Pages

Pages

Pages

INTRODUCTION

Une théorie générale de la programmation linéaire stochastique est difficile à élaborer de part la diversité des attitudes et formulations possibles en face d'un programme linéaire où les coefficients de la matrice des contraintes, du second membre, de la fonction économique sont des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé.

On a tenté ici de définir sans ambiguité les deux attitudes "à postériori" et "à priori" qu'on peut avoir en face d'un tel programme, attitudes qui conduisent à deux formulations mathématiques très différentes du même problème. Rappelons en effet qu'un programme linéaire classique peut être défini comme le problème d'extrêmum suivant : si $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax + b \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$ désigne un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$, déterminer s'il existe le sous ensemble $\hat{p}$ de P sur lequel la forme linéaire $c^t x$ est minimum.

A étant une matrice réelle (p×n), b un vecteur (p×1) et c un vecteur (n×1) (^{t}) désignant l'opération de transposition.

Si ce problème admet une solution bornée, on désigne par $Z = c^t \hat{x}$ ($\hat{x}$ élément de $\hat{p}$) la valeur optimale de la fonction économique $c^t x$.

Supposons que les coefficients (a_{ij}) $i = 1, 2, \ldots p$ $j = 1, 2, \ldots n$; b_i : $i = 1, 2, \ldots p$ et c_j : $j = 1, 2, \ldots n$ soient des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité donné, alors le triplet (A,b,c) peut être considéré comme un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^s$ $s = np + p + n = (n+1)(p+1) - 1$; si la loi de probabilité de (A,b,c) est connue ou est en présence d'un <u>programme linéaire stochastique</u> (P.L.S).
deux attitudes sont alors possibles en face d'un tel programme.

1 - L'attitude à Postériori qui conduit à un problème de prévision.

Après que le hasard ait déterminé la valeur de l'échantillon (A,b,c) de $\mathbb{R}^s$ on résoud le programme linéaire déterministe pour cet échantillon, et on se propose de déduire de la loi de probabilité de (A,b,c) des informations sur $\hat{P}$ et Z, on est donc conduit à un problème de prévision.

2 - L'attitude "à priori" qui conduit à un problème de décision.

Avant que le hasard ne détermine la valeur de l'échantillon (A,b,c), on doit choisir un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sur la connaissance de la loi de probabilité de (A,b,c) ; x sera choisi de manière à satisfaire l'inégalité : $x \geqslant o$ mais pour x choisi, le vecteur de $\mathbb{R}^p$: $Ax + b$ est aléatoire et n'est pas nécessairement presque sûrement négatif, il y a donc un risque qu'il faudra prendre en considération dans le choix de x. D'autre part, x étant choisi, $c^t x$ est une variable aléatoire, il faut donc définir un critère d'optimalité qui tienne compte à la fois du risque que le système des contraintes : $Ax + b \leqslant o$ ne soit pas satisfait et de la variable aléatoire coût : $c^t x$.

Illustrons sur l'exemple du problème de transport stochastique suivant la différence de nature des deux formulations auquelles on aboutit pour un P.L.S. donné.

m usines $U_1, U_2, \ldots, U_m$ fabriquent le même produit ; ce produit doit être transporté vers n destinations : $D_1, D_2, \ldots D_n$. En D_j se manifeste une demande d_j ; le coût unitaire de transport de l'usine U_i à la destination D_j est donné et égal à C_{ij}.

Si chaque usine U_i à un plafond de production égal à S_i et si on désigne par x_{ij} la quantité de produit transporté de l'usine U_i à la destination D_j le problème est alors de déterminer les x_{ij} $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$

tels que : $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ soit minimisé sous les contraintes :

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant S_i \quad i = 1, 2, \ldots m.$$

$$(1') \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

$$(2) \quad x_{ij} \geqslant o \quad i = 1, 2, \ldots m \; ; \; j = 1, 2, \ldots n.$$

Supposons par exemple que les demandes d_j $j = 1, 2 \ldots n$ soient des variables aléatoires de lois de probabilité données.

L'attitude à postériori est celle de l'entrepreneur qui <u>après</u> que le hasard se soit produit prend la décision optimale et qui actuellement cherche à <u>prévoir</u> la valeur de cette décision et du coût qui en résultera.

<u>L'attitude "à priori"</u> il faut choisir les x_{ij} $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$, avant que le hasard ne détermine la valeur des d_j $j = 1, 2, \ldots n$; une fois les x_{ij} choisis le hasard fournit la valeur des d_j et par conséquent les contraintes

$$(1)' \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

ne sont pas en général satisfaites.

On pourra par exemple choisir les x_{ij} de manière à satisfaire (1) et (2) et minimiser

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} + E\left\{ \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - d_j \right) \right\}$$

où les fonctions $\varphi_j(u)$, convexes et positives représentent la pénalité imposée par la non satisfaction de la contrainte

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

On voit sur ce simple exemple que l'attitude "à priori" conduit à un problème de décision qui pourra se formuler de plusieurs façons suivant la nature de nos informations (pénalités, origine économique des contraintes, etc...) et notre attitude en face du risque.

Ce travail a été divisé en trois parties, les deux premières étant respectivement consacrées à l'étude des problèmes de prévision et des problèmes de décision.

La troisième partie concerne les algorithmes et programmes ALGOL des problèmes :

- de programmation quadratique (Wolfe)
- de programmation semiquadratique
- particuliers traités dans la première et la deuxième partie.

Les deux premiers programmes apparaissant souvent comme outils nécessaires à la résolution des problèmes de décision en P.L.S.

Première partie

LES PROBLEMES DE PREVISION

C H A P I T R E I

GENERALITES SUR LES PROBLEMES DE PREVISION EN P.L.S

I.1- DEFINITION DU PROBLEME DE TYPE I.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé ; à toute épreuve ω de Ω est associée l'échantillon $(A,b,c)_\omega$ de l'espace $\mathbb{R}^s$, $s = p\times n + p+n$ A,b,c étant des matrices réelles de dimensions respectives $p\times n$, $p\times 1$, $n\times 1$.

$(A,b,c)_\omega$ définit le programme linéaire classique noté : $\mathcal{P}(A,b,c)$:

$$\inf \; \{c^t x \mid Ax + b \leqslant o \quad (1) \; ; \; x \geqslant o \quad (2)\}$$

Définition 1.1.1. : nous dirons que le programme $\mathcal{P}(A,b,c)$ est défini si le polyèdre convexe $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax + b \leqslant o \; ; \; x \geqslant o\}$ n'est pas vide.

Définition 1.1.2. : le programme $\mathcal{P}(A,b,c)$ sera dit bien défini si $\mathcal{P}(A,b,c)$ est défini et si le problème d'extrêmum : $\inf \{c^t x \mid x \in P\}$ admet une solution bornée.

Soit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ la droite réelle achevée, considérons l'application de $\bar{\mathbb{R}}^s$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ définie par :

$$(A,b,c) \longrightarrow Z = \begin{cases} +\infty \text{ si } \mathcal{P}(A,b,c) \text{ non défini} \\ -\infty \text{ si } \mathcal{P}(A,b,c) \text{ défini sans être bien défini} \\ \min\{c^t x \mid x \in P\} \text{ si } \mathcal{P}(A,b,c) \text{ est bien défini} \end{cases}$$

Si (A,b,c) est une variable aléatoire de $\bar{\mathbb{R}}^s$ on a alors :

<u>**Théorème 1.1.1.**</u> : <u>l'application : $\omega \longrightarrow Z$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{Q})$</u> pour le démontrer nous nous appuierons sur les deux lemmes suivants en remarquant que toute matrice $A(m\times n)$ peut être considérée comme un vecteur de $\mathbb{R}^{m\times n}$ on a :

<u>**Lemme 1**</u> : <u>Si $B(q\times q-1)$ et $\beta(q\times 1)$ sont deux matrices réelles alors</u> $\{(B,\beta) \in \mathbb{R}^{q\times q-1} \times \mathbb{R}^q : B^k \times B^{k+1} < o,\ k = 1, 2, \ldots q-1\ \ \sum_{k-1}^{q} \beta_k \mid B^k \mid > o\}$ <u>est une partie borelienne de $\mathbb{R}^{q(q-1)} \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{q^2}$ où B^k désigne le déterminant d'ordre $q-1$ obtenu à partir de B en supprimant la $k^{\text{ième}}$ ligne</u>.

<u>**Démonstration**</u> : pour tout $k = 1, 2, \ldots q$ les applications $\varphi_k : B \in \mathbb{R}^{q(q-1)} \to B^k \in \mathbb{R}$ sont mesurables, il en sera donc de même de $B \in \mathbb{R}^{q(q-1)} \longrightarrow B^k \times B^{k+1}$ et de $(B,\beta) \longrightarrow \sum_{k=1}^{q} \beta_k \mid B^k \mid$ par conséquent le sous ensemble de $\mathbb{R}^{q^2}$: $\{(B,\beta) \in \mathbb{R}^{q^2} : B^k \cdot B^{k+1} < o\ \ k = 1 — q-1\ \ \sum_{k=1}^{q} \beta_k \mid B^k \mid > o\}$ est un borelien de $\mathbb{R}^{q^2}$.

Lemme 2 : <u>Si $D(m\times r)$, $\delta(m\times 1)$ sont deux matrices réelles et si</u>

$E = \{x \in \mathbb{R}^r : \sum_{j=1}^{r} D_{ij}\, x_j \geqslant \delta_i \quad i = 1 \text{—} m\}$ <u>alors le sous ensemble de $\mathbb{R}^{m(r+1)}$</u> :

$\{(D,\delta) \in \mathbb{R}^{m(r+1)} : E = \emptyset\}$ <u>est une partie borelienne de $\mathbb{R}^{m(r+1)}$</u>.

Démonstration : <u>D'après le théorème 11 de</u> [10] une condition nécessaire et suffisante pour que E soit vide est qu'il existe deux sous ensembles d'indices $I \subset [1\text{—}m]$, $J \subset [1,\ldots r]$ avec :

card (I) = q, $q \leqslant m$

card (J) = q-1, les sous matrices $D_{I,J} = (D_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ et $\delta_I = (d_i)$, $i \in I$ vérifiant :

$$D^k_{I,J} \times D^{k+1}_{I,J} < o \quad k = 1,\, 2\ldots q-1 \;;\quad \sum_{k=1}^{q} \delta_{i_k} \mid D^k_{I,J} \mid < o.$$

où $D^k_{I,J}$ est le déterminant d'ordre q-1 obtenu à partir de $D_{I,J}$ en supprimant la $k^{\text{ème}}$ ligne.

La condition $E = \emptyset$ est donc équivalente à :

(D,δ) est un élément de

$$\bigcup_{2\leqslant q\leqslant m} \; \bigcup_{I,J} \{(D,d) : D^k_{I,J}\, D^{k+1}_{I,J} < o,\; k = 1,\text{—},q-1 \;;\; \sum_{k=1}^{q} \delta_{i_k} \mid D^k_{I,J} \mid < o\}$$

d'après le lemme 1 cet ensemble étant une union finie d'ensembles boreliens de $\mathbb{R}^{m\cdot(r+1)}$ est donc une partie borelienne de $\mathbb{R}^{m\times(r+1)}$.

Démonstration du théorème : une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $\omega \longrightarrow Z$ soit une variable aléatoire réelle est que l'application $(A,b,c) \longrightarrow Z$ soit une application mesurable de $\bar{\mathbb{R}}^s$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les sous ensembles de $\mathbb{R}^s$:

$Z^{-1}(\{+\infty\})$ $Z^{-1}(\{-\infty\})$ et $Z^{-1}(M)$ pour tout intervalle M de $\mathbb{R}$ soient des parties boreliennes de $\mathbb{R}^s$. Soient $M = [z_1,z_2] \subset \mathbb{R}$ $z_1 < z_2$ et

$P = \{x \in R^n : Ax + b \leqslant o, x \geqslant o\}$, $Q = \{y \in \mathbb{R}^p : A^t y + c \geqslant o, y \geqslant o\}$,

$P_M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax + b \leqslant o, x \geqslant o, z_1 \leqslant c^t x \leqslant z_2\}$

alors $Z^{-1}(\{+\infty\}) = \{(A,b,c) \in \bar{\mathbb{R}}^s : P = \emptyset\}$

$$= \{(A,b) \in \bar{\mathbb{R}}^{(n+1)P} : P = \emptyset\} \times \bar{\mathbb{R}}^n$$

$$Z^{-1}(\{-\infty\}) = \{(A,b,c) \in \bar{\mathbb{R}}^s : P \neq \emptyset, Q = \emptyset\}$$

$$Z^{-1}([z_1,z_2]) = \{(A,b,c) \in \mathbb{R}^s : P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset, P_{[z_1,z_2]} \neq \emptyset\}$$

d'après le lemme 2, ces sous ensembles de $\bar{\mathbb{R}}^s$ sont des parties boreliennes de $\bar{\mathbb{R}}^s$ et le théorème est bien démontré.

L'application : $\omega \longrightarrow Z$ étant variable aléatoire réelle, on se propose de déterminer la loi de Probabilité de cette variable aléatoire connaissant la loi de probabilité de la variable aléatoire (A,b,c), on définit ainsi le problème de type I.

Il faut remarquer dès à présent que ce problème est en rapport très étroit avec celui de la programmation linéaire paramétrique, puisqu'en toute généralité on considère dans ce dernier (A,b,c) comme un paramètre et on recherche la fonction $(A,b,c) \longrightarrow Z$.

Avant d'aborder l'étude du problème de type I il est intéressant de rappeler quelques propriétés élémentaires de la fonction $(A,b,c) \longrightarrow Z$.

I.2- PROPRIETES ELEMENTAIRES DE LA FONCTION $(A,b,c) \longrightarrow Z$.

Soit $BD = \{(A,b,c) \in \bar{\mathbb{R}}^s : \mathcal{P}(A,b,c)$ bien défini$\}$

Proposition I.2.1. : sur BD, la fonction $(A,b,c) \longrightarrow Z$ est antisymétrique, c'est-à-dire : $Z(A,b,c) = - Z(-A^t,-c,-b)$.

Démonstration : d'après les théorèmes de dualité de [4]

$$\begin{aligned} Z(A,b,c) &= \operatorname{Sup} \{b^t y \mid A^t y + c \geqslant o \quad y \geqslant o\} \\ &= -\inf \{-b^t y \mid - A^t y - c \leqslant o \quad y \geqslant o\} \\ &= -Z(-A^t,-c,-b). \end{aligned}$$

Définissons sur $\bar{\mathbb{R}}^s$ la relation d'ordre :

$(A^o,b^o,c^o) \leqslant (A^1,b^1,c^1) \iff \{a^o_{ij} \leqslant a^1_{ij} \quad \begin{matrix} i=1,2,\ldots p \\ j=1,2,\ldots n \end{matrix}$; $b^o_i \leqslant b^1_i$ pour $i = 1, 2,\ldots p$; $c^o_j \leqslant c^1_j \quad j = 1, 2,\ldots n\}$ on a alors :

Proposition I.2.2. : la fonction $(A,b,c) \longrightarrow Z$ est monotone non décroissante [6].

Démonstration :

1) $b^o \leqslant b^1 \Longrightarrow z(A^o,b^o,c^o) \leqslant z(A^o,b^1,c^o)$ en effet le polyèdre
$P_1 = \{x \in R^n : A^o x + b^1 \leqslant o, x \geqslant o\}$ est contenu dans le polyèdre
$P_o = \{x \in R^n : A^o x + b^o \leqslant o, x \geqslant o\}$ et par conséquent

$$\inf_{x \in P_o} c^{o^t} x \leqslant \inf_{x \in P_1} c^{o^t} x \Longrightarrow Z(A^o,b^o,c^o) \leqslant Z(A^o,b^1,c^o)$$

2) $c^o \leqslant c^1 \Longrightarrow Z(A^o,b^o,c^o) \leqslant Z(A^o,b^o,c^1)$ la démonstration est immédiate en utilisant le résultat ci-dessus et la proposition I.2.1.

3) $A^o \leqslant A^1 \Longrightarrow Z(A^o,b^o,c^o) \leqslant Z(A^1,b^o,c^o)$ en effet le polyèdre $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o,\ A^1x + b \leqslant o\}$ est contenu dans le polyèdre $P_o = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ x \geqslant o,\ A^ox + b \leqslant o\}$ car la matrice A^1 peut s'écrire $A^1 = A^o + M$ avec $M \geqslant o$ et si x appartient au polyèdre P_1 alors $A^ox \leqslant - b^o - Mx \leqslant - b^o$ car $Mx \geqslant o$ et par conséquent x appartient à P_o donc $\inf \{c^{ot}x \mid x \in P_o\} \leqslant \inf \{c^{ot}x \mid x \in P_1\}$ finalement en utilisant 1), 2) et 3) on a bien le résultat annoncé.

Lorsque A est une matrice fixe, la fonction $(b,c) \longrightarrow Z$ possède les propriétés suivantes :

Si $BD_A = \{(b,c) \in \mathbb{R}^{p+n},\ \mathcal{P}(A,b,c)$ bien défini$\}$ on a :

Proposition I.2.3. : BD_A est le cône polyèdral convexe de $\mathbb{R}^{p+n}$ produit des cônes respectivement orthogonaux aux cônes :

$$\Gamma = \{y \in R^p : y \leqslant o,\ y^tA \leqslant o\} \text{ et}$$

$$C = \{x \in R^n : x \geqslant o,\ Ax \geqslant o\}$$

Démonstration : On peut conduire cette démonstration en utilisant les résultats de [4] relatifs à la correspondance entre deux problèmes duaux d'un même programme.

En effet :

b appartient au cône $\Gamma^* \Longleftrightarrow$ il existe $x \in \mathbb{R}^n$: tel que $x \geqslant o$, $Ax + b \leqslant o$ et donc $P = \{x \in R^n,\ Ax + b \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ n'est pas vide de même c appartient à $C^* \Longleftrightarrow\ Q = \{y \geqslant o\ \ y^tA + c \leqslant o\}$ n'est pas vide et comme on a l'équivalence $P \neq \emptyset,\ Q \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A,b,c)$ bien défini on a bien le résultat annoncé.

En particulier si $C = o$, le polyèdre P est borné et si P n'est pas vide $\mathcal{B}(A,b,c)$ est bien défini quelque soit c.

<u>Proposition I.2.4.</u> : <u>sur BD_A, $(b,c) \longrightarrow Z$ est une fonction concave de c pour b fixé et convexe de b pour c fixé.</u>

<u>Démonstration</u> : soient α, β deux nombres réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$, montrons alors que si les couples (b,c_1) et (b,c_2) appartiennent à BD_A alors :

$$Z(b,\alpha c_1+\beta c_2) \geqslant \alpha\ Z(b,c_1) + \beta\ Z(b,c_2).$$

Désignons par $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}$ les solutions optimales respectives des problèmes :

$$\inf_{x\in P_A} c_1^t x, \quad \inf_{x\in P_A} c_2^t x, \quad \inf_{x\in P_A}(\alpha c_1^t+\beta c_2^t)\ x \text{ avec}$$

$P_A = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o\ \ Ax + b \leqslant o\}$; on note que $\hat{x}$ existe bien car BD_A étant convexe, le couple $(b,\alpha c_1+\beta c_2)$ appartient à BD_A on a alors :

$c_1^t\ \hat{x}_1 \leqslant c_1^t\ \hat{x}$ puisque $\hat{x}_1$ est la solution optimale du problème : $\inf_{x\in P} c_1^t x$, de même $c_2^t\ \hat{x}_2 \leqslant c_2^t\ \hat{x}$ par conséquent

$$\alpha\ c_1^t\ \hat{x}_1 + \beta\ c_2^t\ \hat{x}_2 \leqslant (\alpha c_1^t+\beta c_2^t)\ \hat{x}$$

$\alpha\ Z(b,c_1) + \beta\ Z(b,c_2) \leqslant Z(b,\alpha c_1+\beta c_2)$ et $(b,c) \longrightarrow Z$ est bien concave de c pour b fixé. On démontrerait en utilisant le résultat ci-dessus et la proposition I.2.1. que $(b,c) \longrightarrow Z$ est une fonction convexe de b pour c fixé.

Proposition I.2.5. :

1) Pour tout nombre positif λ :
$Z(A,b,\lambda c) = Z(A,\lambda b,c) = \lambda Z(A,b,c)$

2) $(b,c) \longrightarrow Z$ est une fonction bilinéaire par morceaux de ses deux arguments.

Démonstration :

Si $\lambda > o$

$$Z(A,b,\lambda c) = \inf \{(\lambda c^t)\, x \mid x \in P\}$$
$$= \lambda \inf \{c^t x \mid x \in P\} = \lambda Z(A,b,c)$$

on démontrerait de même en utilisant la proposition I.2.1 que $Z(A,\lambda b,c) = \lambda Z(A,b,c)$. Soit b fixe et montrons que $c \longrightarrow Z$ est une forme linéaire par morceaux de c. En effet d'après un théorème de programmation linéaire [3'], si x_1 est un point extrémal du polyèdre convexe fixe P, il existe un cône polyèdral convexe de $\mathbb{R}^n$: Q_1 tel que c appartient à $Q_1 \Longleftrightarrow c^t x_1 = \inf \{c^t x \mid x \in P\}$ donc pour tout c appartenant à Q_1 : $c \longrightarrow Z$ est linéaire ; on a de même en utilisant la proposition I.2.1 $b \longrightarrow Z$ pour c fixé est une forme linéaire par morceaux.

I.3- LA SOLUTION THEORIQUE DU PROBLEME DE TYPE I.

A tout programme $\mathcal{P}(A,b,c)$: $\inf \{c^t x \mid Ax + b \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ écrit sous forme canonique est associé le programme équivalent écrit sous forme standard : $\mathcal{P}'(\bar{A},b,\bar{c})$: $\inf \{\bar{c}^t y \mid \bar{A}y + b = o,\ y \geqslant o\}$ obtenu en posant :

$$y(n+p,1) = \binom{x}{t} \ ; \ \bar{A}(p,n+p) = (A,I) \text{ et } c^t(1,n+p) = (c,o).$$

D'après [4] : a tout triplet (A,b,c) de BD est associé de manière unique le polyèdre convexe $\hat{F}$ face optimale du polyèdre $\bar{P} = \{y \in \mathbb{R}^{n+P} : \bar{A}y + b = o \quad y \geq o\}$ et $\hat{F}$ peut être défini par une partie J (non nécessairement unique) de l'ensemble $[1,2,..n+p]$ telle que :

① card (J) = n + p - r - q où r est le rang du système $\bar{A}y + b = o$ et où $q \geq o$

②
$$\hat{F} = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+p} : \begin{array}{l} \bar{A}y + b = o \\ y_j = o \quad j \notin J \\ y_j \geq o \end{array} \right.$$

a pour dimension q.

Comme (A,b,c) appartient à BD, $\hat{F}$ n'est pas vide et donc $\hat{F}$ admet des points extrémaux.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des parties I de $[1,m+p]$ telles que :

1) card (I) = n + p - r

2) I appartient à $\mathcal{F} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}y + b = o \\ y_i = o \quad i \in I \\ y \geq o \end{array} \right.$ représente un point extrémal de $\hat{F}$.

La correspondance $\hat{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ est univoque il en sera de même de la correspondance $(A,b,c) \longrightarrow \mathcal{F}$.

<u>**Définition I.3.1.**</u> : <u>la famille $\mathcal{F}$ sera appelée famille des bases optimales (F.B.O) associée à (A,b,c)</u>.

Définition I.3.2. : deux triplets (A,b,c) et (A',b',c') de BD seront équivalents si ils admettent même famille de bases optimales. La classe d'équivalence d'un triplet (A,b,c) sera appelée une structure. (Généralisation de la notion de structure introduite dans [6]).

Remarque I.3.1. : on peut prolonger la relation d'équivalence définie ci-dessus aux triplets (A,b,c) de $\mathbb{R}^s$-BD par :
(A,b,c) équivalent à (A',b',c') si $\mathcal{P}(A,b,c)$ et $\mathcal{P}'(A,b,c)$ ne sont pas définis ; (on notera $S_{+\infty}$ la structure associée), ou $\mathcal{P}(A,b,c)$ et $\mathcal{P}(A',b',c')$ sont définis sans être bien définis ($S_{-\infty}$ sera la structure correspondante).

Remarque I.3.2. : Le nombre de familles sous-ensembles d'indices de $[1,2,\ldots n+p]$ étant fini, on a un nombre fini : $\bar{k}$ de structures.

Si I est un sous-ensemble d'indices de $[1,2,\ldots n+p]$ on désignera par $\bar{I}$ le sous-ensemble complémentaire, par $\bar{A}_{r,I}$ la matrice des éléments $(\bar{a}_{ij})$ $i = 1, 2,\ldots r$; $j \in I$, par $\bar{c}_I$ la matrice des éléments $(\bar{c}_j)$ $j \in I$ et par b_r la matrice des éléments (b_i) $i = 1, 2, — r$.

On a alors :

Proposition I.3.1. : la loi de probabilité de la variable aléatoire Z est définie par :

1) $P(Z=\{+\infty\}) = P(S_{+\infty})$

2) $P(Z=\{-\infty\}) = P(S_{-\infty})$

3) $P(-\infty<Z<z) = \sum_{k=1}^{K} P(S_k \cap -\bar{c}_{\bar{I}}^{t}\, \bar{A}_{r,\bar{I}}^{-1}\, b_r<z)$

S_k étant la structure associée à la famille de bases optimales $\mathcal{F}_k$, I étant un représentant de $\mathcal{F}_k$.

<u>Démonstration</u> : les parties 1 et 2 de la proposition sont évidentes, pour démontrer 3, il suffit de remarquer que les structures S_k : $k = 1, 2, \ldots \bar{k}$, forment une partition de BD et que pour tous les éléments d'une même structure, le point extrémal défini par une partie I quelconque de $\mathcal{F}_k$ est optimal ; la valeur de la fonction économique en ce point étant égale à $-\bar{c}^t_{\bar{I}}\,\bar{A}^{-1}_{r,\bar{I}}\,b_r$ [4] le point extrémal optimal ayant pour coordonnées $x_i = o$, $i \in I$; $x_{\bar{I}} = A^{-1}_{r,I}\,b_r$.

<u>Corollaire</u> : <u>si $S_{+\infty} \cup S_{-\infty}$ est un ensemble négligeable et si</u> $f(\bar{A},b,\bar{c})$ <u>désigne la densité de probabilité du triplet $(\bar{A},b,\bar{c})$ alors si le second membre existe</u>

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{K} \int_{S_k} -\bar{c}^t_{\bar{I}}\,\bar{A}^{-1}_{r,\bar{I}}\,b_r \times f(\bar{A},b,\bar{c})\, d(\bar{A},b,\bar{c})$$ <u>où I est un élément de $\mathcal{F}_k$.</u>

<u>Démonstration</u> : si $P(S_{+\infty} \cup S_{-\infty}) = o$, (A,b,c) appartient à BD <u>presque sûrement</u> et

$$E\left(Z \mid (A,b,c) \in S_k\right) = \frac{1}{P(S_k)} \times \int_{S_k} -\bar{c}^t_{\bar{I}}\,\bar{A}^{-1}_{r,\bar{I}}\,b_r\, f(\bar{A},b,\bar{c})\, d(\bar{A},b,\bar{c})$$

comme les S_k, $k = 1, 2, \ldots \bar{k}$ forment une partition de BD on a

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{K} E\left(Z \mid (A,b,c) \in S_k\right) \times P(S_k)$$

<u>Remarque I.3.3.</u> :

1) Les structures S_k sont des domaines de $\mathbb{R}^s$ de nature assez complexe, en général S_k n'est pas convexe, et la détermination pratique des structures sera particulièrement difficile.

2) Si n et p sont supérieurs à quelques unités le nombre de ces structures devient très rapidement grand.

3) Le problème de type I reste donc en toute généralité insoluble sur le plan pratique.

Cependant si l'hypothèse suivante est vérifiée, le calcul de la loi de probabilité de Z se simplifie.

Hypothèse I.3.1. : soit BD-N l'ensemble des triplets (A,b,c) de BD tels que :

1 le rang du système $\bar{A}y + b = o$ est égal à p

2 la base optimale associée à $(\bar{A},b,\bar{c})$ est unique.

N est un ensemble négligeable.

Remarque I.3.4. : l'hypothèse I.3.1 n'est qu'une hypothèse qui permet de simplifier le calcul de la loi de probabilité de Z.
De plus N peut être défini par :

(A,b,c) appartient à BD-N $\Longleftrightarrow$ $\hat{F}$ est réduit au point extrémal simple de $\bar{P}$: $\hat{y} = \begin{matrix} y_I = o \\ y_{\bar{I}} = \bar{A}_I^{-1}\, b, \end{matrix}$ si I est la base optimale.

I.4- SIMPLIFICATION DU CALCUL DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE TYPE I DANS LE CAS OU L'HYPOTHESE I.3.1. EST VERIFIEE.

Si (A,b,c) appartient à BD-N, $\hat{F}$ est réduit à un point extrémal simple de $\bar{P}$, la famille des bases optimales associées à (A,b,c) ne comporte qu'un seul élément : I tel que :

1 Card (I) = n + p - p = n où P est le rang du système $\bar{A}y + b = o$

2 Le système $\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}y + b = o \\ y_i = o \quad i \in I \\ y \geqslant o \end{array} \right\}$ admet une solution unique :

$y_i = o \quad i \in I, \; y_{\bar{I}} = \bar{A}_{\bar{I}}^{-1}\, b$.

Si H est le sous-ensemble de $[1,2,\ldots k]$ tel que h appartient à $H \Longleftrightarrow \mathcal{I}_h = \{I_h\}$ alors :

Les structures S_h ; ($h \in H$) forment une partition de BD-N et on a :

Proposition I.4.1. : si

$$D_{I_h} = \left\{ (A,b,c) \in BD : \bar{A}_{\bar{I}_h}^{-1}\, b < o \; ; \quad \bar{c}_{\bar{I}_h}^{t}\, \bar{A}_{I_h}^{-1}\, \bar{A}_{I_h} - \bar{c}_{I_h}^{t} \leqslant o \right\}$$

alors : $P(S_h) = P(D_{I_h})$

Démonstration : d'après [4] : une condition nécessaire et suffisante pour que I_h soit une base optimale est que (A,b,c) soit un élément de D_{I_h} , comme l'ensemble N des triplets (A,b,c) qui admettent plus d'une base optimale est négligeable on a bien pour tout h appartenant à H : $P(S_h) = P(D_{I_h})$.

Proposition I.4.2. : la loi de probabilité de la variable aléatoire Z est définie par :

1 $P(Z=+\infty) = P(S_{+\infty})$

2 $P(Z=-\infty) = P(S_{-\infty})$

3 $P(-\infty<Z<z) = \sum_{h \in H} P\left(D_{I_h} \cap -\bar{c}_{\bar{I}_h}^{t}\, \bar{A}_{\bar{I}_h}^{-1}\, b<z\right)$

avec card $(H) = \dfrac{(n+p)!}{n!\; p!}$

Démonstration : pour démontrer 3, il suffit d'utiliser les résultats de la proposition I.3.1 en remarquant que si $\mathcal{F}_k$ est une famille de bases optimales comportant plus d'un élément, la structure S_k associée à $\mathcal{F}_k$ est un ensemble négligeable et que par conséquent il suffit de considérer les structures du type S_h $h \in H$ le nombre de ces structures étant égal $\frac{(n+p)!}{n!\,p!}$
finalement en utilisant la proposition I.4.1 on a bien le résultat annoncé.

Remarque I.4.1. : l'hypothèse I.3.1 permet de ne prendre en compte qu'un nombre beaucoup plus réduit de sous-ensembles de $\mathbb{R}^s$: $D_{\{I_h\}}$ et de les définir d'une façon précise. Il faut cependant remarquer que $\bar{h}$ peut être très élevé pour peu que n et p soient supérieurs à quelques unités, de plus le calcul de $P(D_{I_h} \cap -\bar{c}^t_{I_h} \bar{A}^{-1}_{I_h} b<z)$ sera en général très délicat.

Pour ces raisons, on pourra dans certains cas utiliser les approximations suivantes.

I.5- APPROXIMATIONS.

I.5.1. : l'approximation normale [6]

soit $(A^o,b^o,c^o) = (EA,Eb,Ec)$ si ces moyennes existent et soit J_o la base optimale correspondante (qu'on supposera unique). On assimile alors $(A,b,c) \longrightarrow Z$ à la forme bilinéaire :

$$Z = -(\bar{c}^o+\Delta\bar{c})^t_{\bar{J}_o}\ (\bar{A}^o+\Delta\bar{A})^{-1}_{\bar{J}_o}\ (b^o+\Delta b)$$

avec

$$\Delta\bar{A} = \bar{A} - \bar{A}^o \ ;\ \Delta b = b - b^o \ ;\ \Delta\bar{c} = \bar{c} - \bar{c}^o$$

si ces dernières quantités sont petites, on peut écrire au deuxième ordre près :

$$(\bar{A}^o+\Delta\bar{A})^{-1}_{\bar{J}_o} = (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o} - (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o}\ (\Delta\bar{A})_{\bar{J}_o}\ (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o}$$

et dans ces conditions

$$Z = z(A^o,b^o,c^o) + (\Delta\bar{c})^t_{\bar{J}_o} (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o} b_o - \bar{c}^t_{\bar{J}_o} (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o} (\Delta\bar{A})_{\bar{J}_o} (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o} b_o$$

$$+ \bar{c}^t_{\bar{J}_o} (\bar{A}^o_{\bar{J}_o})^{-1} \Delta b$$

Comme $y^o = - (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o} b^o$ est le point extrémal optimal (supposé unique) du programme :

$$\inf \{\bar{c}^{o^t} y \mid \bar{A}^o y + b^o = o \quad y \geqslant o\}, \text{ et que } u^o = - \bar{c}^t_{\bar{J}_o} (\bar{A}^o)^{-1}_{\bar{J}_o} \text{ est la}$$

solution duale correspondante on aura si $(A^o,b^o,c^o) \longrightarrow Z = z^o$

$$Z = z^o - \Delta\bar{c}^t_{\bar{J}_o} y^o - u^o_{\bar{J}_o} \Delta\bar{A}_{\bar{J}_o} y^o_{\bar{J}_o} - u^o_{\bar{J}_o} \Delta b$$

finalement $E(Z) = z^o$ et <u>si les variables aléatoires</u> $\bar{c}_j$, b_i, $\bar{a}_{ij}$ $\begin{array}{l} i = 1\ldots p \\ j = 1,\ldots\ n+p \end{array}$ <u>sont indépendantes en probabilité dans leur ensemble,</u>

$$\sigma^2 = \sigma^2(Z) = \sum_{j\in\bar{J}_o} y_j^{o^2} \sigma^2(\bar{c}_j) + \sum_{i\in\bar{I}_o} u_i^{o^2} \sigma^2(b_i) + \sum_{i,j\in\bar{I}_o\times\bar{J}_o} u_i^o y_j^o \sigma^2(\bar{a}_{ij})$$

les composantes u_i étant nulles pour tout i de I_o.

<u>D'après le théorème central limite, la variable aléatoire Z peut être considérée comme distribuée suivant une loi normale</u> $N(z_o,\sigma)$<u>, on ne peut évidemment préciser la validité de cette approximation</u>.

I.5.2. : <u>Inégalités de Bienaymé Tchebycheff</u>

Les résultats qui sont présentés dans ce paragraphe sont dûs principalement à Courtillot [6].

Hypothèse : <u>la distribution du triplet (A,b,c) est telle que les matrices des écarts type $\sigma(A)$, $\sigma(b)$, $\sigma(c)$ existent ainsi que les matrices $E(A)$, $E(b)$, $E(c)$.</u>

Soit $p(t)$ le nombre réel de l'intervalle $[o1]$ défini pour $t \geqslant o$ par :

$$p(t) = \text{Prob}\left[(EA,Eb,Ec) - t(\sigma A,\sigma b,\sigma c) \leqslant (A,b,c) \leqslant (EA,Eb,Ec) + t(\sigma A,\sigma b,\sigma c)\right]$$

1^er^ cas : <u>les k composantes aléatoires du triplet (A,b,c) sont indépendantes en probabilité.</u>

D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebycheff on déduit :

$p(t) \geqslant \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^k$ et la proposition suivante nous donne des précisions sur le support de l'aléatoire Z.

Proposition I.5.2.1. : <u>si la distribution du triplet (A,b,c) satisfait à l'hypothèse précédente et si les k composantes sont indépendantes en probabilité alors</u> :

$$\Pr\left[z\left(E(A,b,c)-t\sigma(A,b,c)\right) \leqslant Z \leqslant z\left(E(A,b,c)+t\sigma(A,b,c)\right)\right] \geqslant p(t) \geqslant \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^k$$

La démonstration est immédiate et découle de la propriété de "croissance" (proposition I.2.2) de la fonction $(A,b,c) \longrightarrow z$ l'événement $\left[E(A,b,c) - t\sigma(A,b,c) \leqslant (A,b,c) \leqslant E(A,b,c) + t\sigma(A,b,c)\right]$ impliquant :

$$z\left(E(A,b,c) - t\sigma(A,b,c)\right) \leqslant Z \leqslant z\left(E(A,b,c) + t\sigma(A,b,c)\right)$$

On note que ce résultat est intéressant dans la mesure où k est assez petit, d'autre part lorsque le type de loi est précisé, on peut donner de p(t) une valeur exacte, si par exemple la loi est normale alors avec les mêmes hypothèses que pour la proposition ci-dessus :

$$\underline{p(t) = \{2N(t)-1\}^k} \quad \text{avec}$$

$$\underline{N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp - u^2/2 \; du}$$

<u>2ème cas</u> : <u>les composantes du triplet (A,b,c) ne sont plus indépendantes en probabilité</u>.

Lorsque le triplet (A,b,c) a pour loi de probabilité, une loi normale non singulière on a :

Proposition I.5.2.2. [6] <u>si (A,b,c) suit une loi normale non singulière dans $\mathbb{R}^s$ alors</u> $p(t) \geq Pr\,[\chi_s^2 < t^2]$ <u>avec</u> χ_s^2 <u>variable χ^2 à s degrés de liberté</u>.

Démonstration : Soit U = (A,b,c) vecteur aléatoire gaussien non singulier de $\mathbb{R}^s$ de loi $N(U^o,\Lambda)$, la densité de probabilité du vecteur U est donnée par

$$f(u) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} (\det \Lambda)^{-\frac{1}{2}} \exp - \frac{1}{2} (u-U^o)^t \, \Lambda^{-1} \, (u-U^o)$$

avec

Λ la matrice des éléments $\lambda_{ij} = E\{[u_i-u_i^o][u_j-u_j^o]\}$ i = 1, 2,...s ; j = 1, 2,...s.

Dans $\mathbb{R}^s$, la forme $U^t \Lambda U$ est définie positive et de même signe que $U^t \bar{\Lambda}^{-1} U$ par suite le domaine : $S = \{U \in \mathbb{R}^s : U^t \Lambda^{-1} U \leqslant t^2\}$ est un ellipsoïde, les plans $U_i = U_i^o \mp t \Lambda_{ii}$ sont tangents à S et Pr $[(U-U_o^o)^t \Lambda^{-1} (U-U^o) \leqslant t^2]$ est un minorant de p(t).

Or d'après un théorème classique des probabilités, si $U-U^o$ suit une loi $N(o,\Lambda)$ non singulière dans $\mathbb{R}^s$, la variable aléatoire $(U-U^o)^t \Lambda^{-1} (U-U^o)$ suit une loi du χ^2 à s degrés de liberté (proposition IV de [2]) et finalement $p(t) \geqslant \Pr [\chi_s^2 \leqslant t^2]$.

I.6- <u>DEFINITION ET ETUDE DU PROBLEME DE TYPE II.</u>

I.6.1. <u>Définition du problème de type II.</u>

En conservant les notations du chapitre I,

$(A,b,c) \longrightarrow (\bar{A},b,\bar{c})$ —— $\hat{F} = \{\inf^{-1} \bar{c}^t y \mid \bar{A}y + b = o \; ; \; y \geqslant o\}$ définit une application univoque de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathcal{P}(R^{n+p})$ ensemble des parties de R^{n+p}, $\hat{F}$ pouvant être éventuellement vide, ou non réduit à un point. Si (A,b,c) est un triplet aléatoire de $\mathbb{R}^s$, $\hat{F}$ est un polyèdre convexe aléatoire de $\mathbb{R}^{n+p}$, <u>le problème II sera celui de déduire de la loi de probabilité de (A,b,c) supposée connue, des informations sur le caractère aléatoire de $\hat{F}$.</u>

Ces informations sur $\hat{F}$ pourront être de deux types suivant que l'hypothèse I.3.1. est vérifiée ou non.

<u>Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, $\hat{F}$ n'est pas presque sûrement réduit à un élément</u> de $\mathbb{R}^{n+p}$ et la seule information qu'on pourra fournir sur le caractère aléatoire de $\hat{F}$ sera fournie par les nombres : $P[S_{-\infty}]$, $P[S_{+\infty}]$, $P[S_k]$, k = 1, 2,...$\bar{k}$. Dans le cas contraire, certains résultats peuvent être dégagés.

I.6.2. Etude du problème II dans le cas où l'hypothèse I.3.1 est vérifiée.

Sur BD-N l'application composée

$(A,b,c) \longrightarrow (\bar{A},b,\bar{c}) \longrightarrow y = \inf^{-1}\{\bar{c}^t y \mid \bar{A}y + b = o,\ y \geqslant o\}$ est univoque, et à tout triplet (A,b,c) de S_h : h appartenant à H (voir I.4) est associé une base optimale unique I_h (la famille des bases optimales associée à (A,b,c) est réduite à la partie I_h) on a alors :

Proposition I.6.2. : Si $N \cup S_\infty \cup S_{-\infty}$ est un ensemble négligeable : $\hat{Y}$ existe presque sûrement et pour tout y élément de $\mathbb{R}^{n+p}$: si

$$D_{I_h}(y) = \{(A,b,c) \in D_{I_h} : \bar{A}_{I_h}^{-1} b < y\} \text{ alors}$$

$$P[\hat{Y} < y] = \sum_{h \in H} P\{D_{I_h}(y)\}$$ où les D_{I_h} sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}^s$ définis dans l'énoncé de la proposition I.4.1, en effet si (A,b,c) appartient à $\mathbb{R}^s - (N \cup S_{+\infty} \cup S_{-\infty})$ $\hat{Y}$ existe, la correspondance $(A,b,c) \longrightarrow \hat{Y}$ est univoque et on a vu (Proposition I.4.1) que pour tout h appartenant à H : $P(S_h) = P(D_{I_h})$, comme d'autre part les ensembles S_k pour k n'appartenant pas à H sont par hypothèse négligeables ($S_k \subset N$, $k \notin H$) alors pour tout h de H on a :

$$(A,b,c) \text{ appartient à } S_h \Longleftrightarrow \hat{Y}_{I_h} = o \text{ et } \hat{Y}_{\bar{I}_h} = \bar{A}_{\bar{I}_h}^{-1} b \text{ et :}$$

$$P[\hat{Y} < y] = \sum_{h \in H} P\{D_{I_h}(y)\}$$

Remarque I.6.2. : l'hypothèse $N \cup S_{+\infty} \cup S_{-\infty}$ peut s'avérer difficile à vérifier, il faut cependant noter que :

1) <u>N est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^s$ d'intérieur vide dans R^s</u> et que par conséquent une <u>condition suffisante</u> pour que $P(N) = o$ est que la loi de probabilité du triplet aléatoire (A,b,c) ne soit pas singulière.

2) <u>D'autre part une condition suffisante pour que</u> $P(S_{+\infty} \cup S_{-\infty}) = o$ <u>est qu'il existe deux couples : (A^1,b^1) (A^2,c^2) tels que</u> :

- $P[(A,b) \leqslant (A^1,b^1)] = 1$
- $P[(A,c) \leqslant (A^2,c^2)] = 1$

<u>les polyèdres convexes</u> $\{x \in R^n : A^1x + b^1 \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ <u>et</u> $\{y \in \mathbb{R}^p : A^{2t}y + c^{2t} \leqslant o,\ y \geqslant o\}$ <u>ne soient pas vides puisque dans ces conditions $\mathcal{P}(A,b,c)$ sera presque sûrement bien défini.</u>

CHAPITRE II

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES PARTICULIERS

II.1- LE NOMBRE DE MODALITES DU TRIPLET ALEATOIRE (A,b,c) EST FINI.

Soit $\bar{\ell}$ le nombre de modalités du triplet (A,b,c), se donner la loi de probabilité de (A,b,c) revient à se donner pour tout $\ell = 1, 2, \ldots \bar{\ell}$

$$p_\ell = P\left[(A,b,c) = (A,b,c)^\ell\right]$$

Supposons que pour tout ℓ : $\ell = 1, 2, \ldots \bar{\ell}$ $\mathcal{P}(A,b,c)_\ell$ soit bien défini alors si $(A,b,c)_\ell \longrightarrow Z_\ell = \inf\{c^{\ell t}x \mid A^\ell x + b^\ell \leqslant 0,\ x \geqslant 0\}$

$$H(z) = P\left[Z < z\right] = \sum_{\ell \in I_z} p_\ell$$

où I_z est un sous-ensemble d'indices de $[1,2,\ldots\bar{\ell}]$ tel que : ℓ appartient à $I_z \Longleftrightarrow z_\ell < z$.

Si de plus $(A,b,c)^\ell \longrightarrow \hat{x}^\ell = \inf^{-1}\{c^t x \mid A^\ell x + b^\ell \leqslant 0,\ x \geqslant 0\}$ est unique et si pour tout $\ell \neq k$: $\hat{x}^\ell \neq x^k$ alors $P\left[\hat{x} = \hat{x}^\ell\right] = p_\ell$

Du point de vue pratique il faut donc résoudre $\bar{\ell}$ programmes linéaires et si $\bar{\ell}$ est supérieur à quelques unités cette méthode ne pourra guère être envisagée.

Remarque II.1.1. : Une approximation de la loi de Z peut être réalisée en ne considérant ε étant donné positif, que la partie H de $[1,2,\ldots\ell]$ telle que $\sum_{\ell \notin H} p_\ell \leqslant \varepsilon$.

Remarque II.1.2. : l'application $(A,b,c) \longrightarrow Z$ n'étant pas continue, l'étude précédente ne pourra servir de moyen d'approximation de la loi de probabilité de la variable aléatoire Z, lorsque (A,b,c) est un triplet aléatoire de $\mathbb{R}^s$ de loi de probabilité quelconque.

II.2- LA MATRICE A EST FIXE (CAS FREQUENT) (PROBLEME DE TRANSPORT PAR EXEMPLE).

L'hypothèse I.3.1 devient :

Si $BD_A - N_A$ est l'ensemble des couples (b,c) de BD_A tels que :

1) le rang du système $\bar{A}y + b = o$ est égal à p.

2) la base optimale associée au couple $(b,\bar{c})$ est unique.

N_A est un ensemble négligeable.

Dans ces conditions on a :

Proposition II.2.1. : si

$$D_{A,I} = \{(b,c) \in BD_A : \bar{A}_I^{-1}\, b \leqslant o,\ \bar{c}_I^t\, \bar{A}_I^{-1}\, \bar{A}_I - \bar{c}_I^t \leqslant o\}$$

et si $\mathcal{G}$ est la famille des parties I de $[1,n+p]$ card (I) = n alors :

1 $P\left[-\infty < Z < +\infty\right] = P(BD_A) = P(\Gamma^* \times C^*)$

2 $P\left[-\infty < Z < z\right] = \sum_{I \in \mathcal{Y}} q_I(z)$ avec

$q_I(z) = P\left[-\bar{c}_{\bar{I}}^{t}\ \bar{A}_{\bar{I}}^{-1}\ b < z \cap D_{A,I}\right]$

Démonstration : la première partie résulte directement de la proposition I.2.3 puisque $BD_A = \Gamma^* \times C^*$ la seconde n'étant que la particularisation des conclusions de la proposition I.4.2 au cas où A est une matrice fixe.

Remarque II.2.1. : les domaines $D_{A,I}$ pour tout I élément de $\mathcal{Y}$ sont des cônes polyédraux convexes de $\mathbb{R}^{n+p}$ et recouvrent BD_A.

II.2.1. : Le couple (A,b) est fixe, c est un vecteur, aléatoire de $\mathbb{R}^n$.

Le polyèdre $\bar{P} = \{y \in \mathbb{R}^{n+p} : \bar{A}y + b = o \quad y \geqslant o\}$ est fixe supposons $\bar{P}$ non vide, si $c \in C^*$ à toute face non vide F de $\bar{P}$, on peut associer le cône polyèdral convexe ouvert de $\mathbb{R}^n$: $S_F \subset C^*$ tel que :

$c \in S_F \Longleftrightarrow$ F est la face optimale de $\bar{P}$. Les S_F, (F face de $\bar{P}$) forment une partition de C^* (ce sont les structures définies en I.3).

Proposition II.2.1.1. : la loi de probabilité de la variable aléatoire Z est définie par :

$$P[Z = -\infty] = 1 - P(C^*)$$

$$P[-\infty < Z < z] = \sum_{F \in \mathcal{F}} P[c^t y_F < z \cap c \in S_F]$$

où y_F est un représentant de F et où $\mathcal{F}$ est la famille des faces non vides de $\bar{P}$.

<u>Démonstration</u> : les cônes S_F, $F \in \mathcal{F}$ forment une partition de C^* et l'application de S_F dans $\mathbb{R}$: $c \longrightarrow Z$ est la forme linéaire $Z = c^t y_F$ où y_F est un élément quelconque de F.

<u>Remarque II.2.1.1.</u> : <u>supposons le rang du système $\bar{A}y + b = o$ de rang p</u> (on peut toujours s'y ramener) et soit :

<u>$M = \{c \in C^* \subset R^n : \mathcal{P}'(\bar{c})$ admet plus d'une base optimale$\}$</u> <u>alors si M est négligeable on ne considère que les structures associées aux points extrémaux.</u>

On est donc pratiquement amené à investir tous les points extrémaux de $\bar{P}$, si le nombre de ces points extrémaux est trop important, il pourra être suffisant lorsque le vecteur aléatoire c est fortement concentré autour de sa valeur moyenne c^o de donner une approximation de la loi de probabilité de Z par l'un ou l'autre des procédés suivants :

1) Utiliser <u>l'approximation normale (I.5.1)</u>.

2) N'investir que le point extrémal y^o solution du programme $\mathcal{P}'(c^o)$ et les points extrêmaux voisins y^h : $h \in H$, ($h \in H \Longleftrightarrow$ il existe une arête de $\bar{P}$ joignant y^o à y^h ; si c n'est pas trop dispersé cela pourra être suffisant [7]. Ce dernier procédé à l'avantage sur son précédent d'apprécier la valeur de l'estimation proposée.

II.2.2. : <u>Le couple (A,c) est fixe, b est aléatoire.</u>

La recherche de la loi de probabilité de la variable aléatoire Z se ramène à l'étude du cas précédent en considérant le problème dual associé au programme $\mathcal{P}(A,b,c)$ ou plus simplement en utilisant la propriété d'antisymétrie de l'application $(A,b,c) \longrightarrow Z$ (proposition I.2.1).

II.3- CAS PARTICULIERS RESOLUS EN UTILISANT LES ALGORITHMES DE PROGRAMMATION LINEAIRE PARAMETRIQUE.

II.3.1. : Intérêt des algorithmes de P.L.P.

Il existe, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, un rapport très étroit entre le problème de prévision en P.L.S. et les problèmes de programmation linéaire paramètrique (P.L.P.). La connaissance de la fonction $(A,b,c) \longrightarrow Z = \inf\{c^t x \mid Ax + b \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$ permet évidemment, de déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z ; actuellement on ne sait pratiquement résoudre que les problèmes de P.L.P. à un seul paramètre ([1], [4]).

Soit Θ une variable aléatoire réelle de loi de probabilité connue, et considérons les trois P.L.S. suivants :

1. $\mathcal{P}_1$: $\inf\{c^t x \mid Ax + b + \Theta d \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$
2. $\mathcal{P}_2$: $\inf\{(c^t + \Theta e^t)\ x \mid Ax + b \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$
3. $\mathcal{P}_3$: $\inf\{c^t x \mid (A+\Theta B)\ x + b \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$

où $A,B(p\times n)$; $b,d(p\times 1)$; $c,c(n\times 1)$ sont des matrices connues et données.

Les problèmes de prévision de type (I), attachés à ces trois programmes sont susceptibles d'une résolution simple à partir des trois P.L.P. qui leurs sont associés : $\lambda \in \mathbb{R}$ déterminer $\lambda \longrightarrow z$

1'. $\mathcal{P}'_1$: $z = \inf\{c^t x \mid Ax + b + \lambda d \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$
2'. $\mathcal{P}'_2$: $z = \inf\{(c+\lambda e)^t\ x \mid Ax + b \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$
3'. $\mathcal{P}'_3$: $z = \inf\{c^t x \mid (A+\lambda B)\ x + b \leqslant o \ ; \ x \geqslant o\}$

On s'intéressera ici, plus particulièrement à la recherche d'un algorithme de résolution du problème de type I associé à $\mathcal{P}_1$.

La résolution du problème de type I correspondant à $\mathcal{P}_2$ se déduisant de celle de $\mathcal{P}_1$ par dualité, et on pourra d'autre part utiliser un algorithme tel que celui exposé par Béréanu dans [5] pour résoudre le problème de type I associé à $\mathcal{P}_3$.

II.3.2. Etude détaillée du problème de type I associé à $\mathcal{P}_1$. Algorithme de résolution [4].

II.3.2.1. : Rappels et notations.

On se propose de rechercher la loi de probabilité de Z valeur de la fonction économique correspondante du problème :

$Z = \inf\{c^t x \mid Ax + b + \Theta d \leqslant o \; ; \; x \geqslant o\}$ on notera $z \longrightarrow H = \Pr[Z < z]$ la fonction de répartition de Z, Θ étant une variable aléatoire réelle de loi de probabilité donnée par : $t \in \mathbb{R} \longrightarrow F = P(\Theta < t)$.

Avec les notations utilisées précédemment,
$Z = \inf\{\bar{c}^t y \mid \bar{A}y + b + \Theta d = o \; ; \; y \geqslant o\}$.
soit :

$$\mathcal{P}_1 : \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \varphi = \inf\{\bar{c}^t y \mid \bar{A}y + b + \lambda d = o \; ; \; y \geqslant o\}$$

le PLP associé, alors si pour $\lambda = o$ ce programme possède une solution bornée, d'après le théorème fondamental de [1] (chapitre VI) ; il existe au moins une suite finie de nombres λ_i : $\lambda_{i+1} > \lambda_i \quad i = 1, 2, \ldots K-1$ telle que pour tout i : $1 \leqslant i < K$ la fonction $\lambda \longrightarrow \varphi$ soit une forme linéaire de λ sur le segment $[\lambda_i \; \lambda_{i+1}]$.

- Pour $\lambda > \lambda_K$ on a deux éventualités :

1) pour tout λ : $\lambda > \lambda_K$, le polyèdre
$P = \{y \in R^{n+p}, \; \bar{A}y + b + \lambda d = o, \; y \geqslant o\}$ est vide

2) pour tout λ : $\lambda > \lambda_K$, la fonction $\lambda \longrightarrow \varphi$ est une forme linéaire en λ.

- pour $\lambda < \lambda_1$ on a les mêmes éventualités.

II.3.2.2. : Calcul de $z \longrightarrow H = Pr[Z < z]$.

ε étant un nombre donné positif, on peut toujours trouver deux nombres réels τ_1, τ_2 tels que : $Pr[\tau_1 \leqslant \Theta < \tau_2] \geqslant 1 - \varepsilon$.

Si le seuil ε est imposé, nous ferons l'hypothèse que les programmes linéaires correspondants aux valeurs de $\lambda = \tau_1$, $\lambda = \tau_2$ admettent une solution (nécessairement bornée). En vertu de cette hypothèse, il existe d'après le théorème énoncé précédemment, une suite croissante et finie de nombres :

$$t_1 = \tau_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_i < \dots < t_{\bar{i}} = \tau_2 \text{ telle que :}$$

1) $Pr[t_1 \leqslant \Theta < t_{\bar{i}}] \geqslant 1 - \varepsilon$.

2) pour tout $i = 1, 2, \dots \bar{i} - 1$, la fonction $t \longrightarrow \varphi$ est linéaire sur l'intervalle $[t_i\ t_{i+1}]$.

Alors en posant $z \longrightarrow q_i = P[Z < z \cap t_i \leqslant \Theta < t_{i+1}]$ $i = 1, 2, \dots \bar{i} - 1$, la fonction de répartition de Z s'écrit :

$$z \longrightarrow H = P(Z < z) = \sum_{i=1}^{\bar{i}-1} q_i.$$

Si pour $t = t_i \longrightarrow \varphi = \varphi_i$ pour $i = 1, 2, \dots. \bar{i}$ les fonctions $z \longrightarrow q_i$ seront particulièrement simples à calculer par :

$$z \longrightarrow q_i = \begin{cases} o & \text{si } z \leqslant \inf(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ \Pr\left[t_i \leqslant \theta < t_{i+1}\right] & \text{si } z > \operatorname{Sup}(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ \Pr\left[t_i \leqslant \theta < \bar{\varphi}^{1}(z)\right] & \text{si } \varphi_i < \varphi_{i+1} \text{ et } \varphi_i < z \leqslant \varphi_{i+1} \\ \Pr\left[\bar{\varphi}^{1}(z) < \theta \leqslant t_{i+1}\right] & \text{si } \varphi_i > \varphi_{i+1} \text{ et } \varphi_{i+1} < z \leqslant \varphi_i \end{cases}$$

Le calcul de $z \longrightarrow \bar{\varphi}^{1}$ étant trivial puisque pour tout z de l'intervalle $]\inf(\varphi_i, \varphi_{i+1}), \operatorname{Sup}(\varphi_i, \varphi_{i+1})] : z \longrightarrow \bar{\varphi}^{1}$ est linéaire.

II.3.2.3. : Exemple.

Considérons le problème de transport donné dans l'introduction avec les notations :

- Usines : U_1, U_2, U_3, U_4
- Destinations : $D_1, D_2, \ldots D_j, \ldots D_8$
- Capacités de production : $S_1, \ldots, S_i, S_4$
- Coût de transport de l'usine U_i à la destination D_j : $c_{ij} \begin{cases} i=1,2,3,4 \\ j=1,2\ldots8 \end{cases}$
- Quantité transportée de U_i à D_j : x_{ij}
- Demandes : $d_1 + \theta e_1, d_2 + \theta e_2, \ldots d_j + \theta e_j, \ldots d_f + \theta e_8$
- θ variable aléatoire normale $N(-0.5, 1)$

Si $P(\theta)$ désigne le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^{32}$:

$$x : \left\{ \begin{array}{ll} (1) & x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, — 4 \; ; \; j = 1, 2, \ldots 8 \\ (2) & \sum_{j=1}^{8} x_{ij} \leqslant d_i \quad i = 1, 2, \ldots 4 \\ (3) & \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = d_j + \theta e_j \quad j = 1, 2, \ldots 8 \end{array} \right\}$$

On recherche la loi de probabilité de

$$Z = \inf \sum_{j=1}^{8} \sum_{i=1}^{4} c_{ij} \, x_{ij} \mid x \in P(\theta)$$

avec les données suivantes :

S :

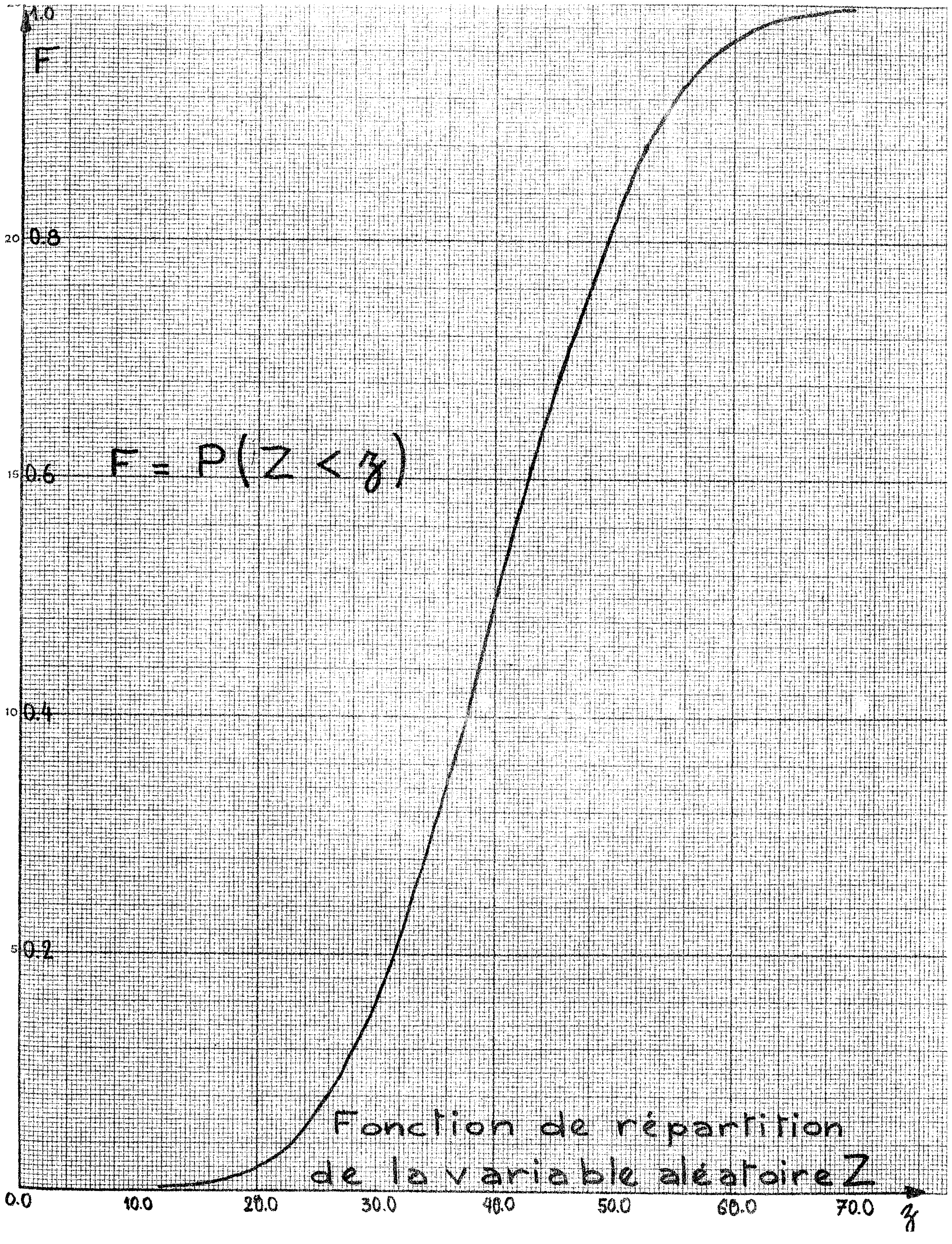
1	2	3	4
20.0	130.0	150.0	200.0

1	2	3	4	5	6	7	8	
25.0	28.0	30.0	30.0	27.0	35.0	50.0	70.0	d_j

1	0.15	0.05	0.4	0.25	0.25	0.15	0.025	0.10	
2	0.25	0.30	0.90	0.05	0.30	0.1	0.15	0.2	c_{ij}
3	0.3	0.25	0.4	0.1	0.1	0.9	0.7	0.4	
4	1.0	1.0	0.1	0.6	0.5	0.4	0.25	0.25	

5.0	5.0	6.0	6.0	5.0	7.0	8.0	13.0	e_j

<u>Résultats</u> : obtenus par la procédure PREVIS associée au programme linéaire paramètrique de [1].



1.0
F
0.8
F = P(Z < z)
0.6
0.4
0.2
Fonction de répartition
de la variable aléatoire Z
0.0
10.0
20.0
30.0
40.0
50.0
60.0
70.0
z

CONCLUSIONS.

Lorsqu'on aborde le problème de prévision en P.L.S. des difficultés importantes apparaissent dans la recherche des solutions des problèmes de type I et de type II.

Difficultés d'ordre théorique : elles n'interviennent que dans les problèmes de type II, l'application $(A,b,c) \longrightarrow \hat{P} = \inf^{-1}\{c^t x \mid x \geqslant o,\ Ax+b \leqslant o\}$ n'étant pas en général semi continue supérieurement. ($\hat{P}$ non nécessairement compact).

Difficultés d'ordre pratique : elles sont nombreuses dans le cas général.

- le nombre de structures est très élevé

- le calcul d'une probabilité sur ces structures ne peut guère être envisagé (les études mathématiques comme le remarque Fortet dans [7] concernant les matrices et déterminants aléatoires sont peu nombreuses et de portée très limitée en raison de leur extrême complexité).

- Même dans le cas où A est une matrice fixe et où $P(N_A) = o$ le calcul de la probabilité d'une structure conduit au problème du type suivant : déterminer P(Q) ou Q est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^{n+2p}$ ce calcul ne sera peut être pas trop compliqué lorsque la loi de probabilité de (b,c) sera de type fini ou gaussien.

Les seuls problèmes de type I susceptibles actuellement de posséder une solution pratiquement accessible sont ceux où :

1) <u>le nombre de modalités du triplet (A,b,c) est fini</u>, ce cas est assez peu réaliste et ne peut guère être envisagé comme moyen d'approximation.

2) <u>on a la possibilité de les résoudre en utilisant des algorithmes de P.L.P.</u> dans cette voie, la construction de nouveaux algorithmes (programmes à deux paramètres) permettra d'agrandir le champ de résolution des problèmes de prévision en programmation linéaire stochastique.

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AUX PROBLEMES DE PREVISION EN PROGRAMMATION LINEAIRE STOCHASTIQUE.

[1] AUSLENDER. A., La méthode géométrique en programmation linéaire. Application à l'étude de la dégénérescence et de problèmes paramètriques. Thèse, Faculté des Sciences de Grenoble.

[2] BARRA. J.R., Vecteurs aléatoires gaussiens. Application à la statistique mathématique. Cours de l'I.P.G.

[3] BARRA. J.R., LEMARIE. J.M., Polyèdres convexes. Cours de l'I.P.G.

[4] BARRA. J.R., AUSLENDER. A., Cours de programmation linéaire. Cours de l'I.P.G.

[5] BEREANU., On stochastic linear programming distribution problems, A single random variable.

[6] COURTILLOT., Contribution à la théorie de la programmation linéaire et à la programmation stochastique.

[7] FORTET. R., Programmes linéaires stochastiques (Groupe de travail M.P.E.).

[8] HALMOS. P.R., Measure theory (the University series).

[9] IOSIFESCU. M., THEODORESCU., Calcul des probabilités sur la programmation linéaire.

[10] KY FAN., On systems of linear Inequalities. (Linear Inequalities and related systems).

[11] SENGUPTA., MILLHAM., TINTNER., On the stability of solutions under error in stochastic linear programming. (Metrica. disch. 1965 - 9 - N°1).

[12] TINTNER., A note on stochastic linear programming. (Econometrica Vol 28 - 2. Ap 1960).

[13] TINTNER., Stochastic linear programming with application to agricultural Economics. (Proceedings of the 2nd synposium on linear programming Washington D.C. 1955 - 1).

$2^{\text{ème}}$ Partie

LE PROBLEME DE DECISION

C H A P I T R E I

GENERALITES SUR LES PROBLEMES DE DECISION EN P.L.S.

1.1- DEFINITION DU PROBLEME DE DECISION EN P.L.S.

En conservant les notations de la $1^{\text{ère}}$ partie on désigne par : $\mathcal{P}(A,b,c)$ le programme $\inf\{c^t x \mid (1)\ Ax + b \leqslant o\ ;\ (2)\ x \geqslant o\}$; si le triplet (A,b,c) est aléatoire de loi de probabilité donnée, nous définissons un programme linéaire stochastique, et le problème de décision associé à ce programme, est celui du choix à priori d'une décision x de $\mathbb{R}^n$.

L'étude de ce problème comporte deux stades :

1) Recherche d'un critère de décision c'est-à-dire établissement d'un préordre sur l'ensemble des décisions x de $\mathbb{R}^n$.

2) Construction d'un algorithme permettant de déterminer le sous ensemble optimal pour le critère établi au premier stade.

Si on se pose "ex abrupto" un tel problème, sans autre information que la connaissance de la loi de probabilité du triplet aléatoire (A,b,c), le critère établi au premier stade ne pourra qu'être très subjectif (on ne saura rien sur les conséquences d'une décision n'appartenant pas au polyèdre des contraintes définies par (1) et (2)).

Aussi afin d'éviter ce caractère, nous supposerons avoir une certaine quantité d'informations, notamment sur les conséquences des décisions n'appartenant pas au polyèdre des contraintes, la possibilité ou non de prendre des décisions ultérieures, éventuellement, leurs coûts, etc..., informations pouvant être fournies, par une étude préliminaire de l'origine "économique" des contraintes. D'autre part, si on ne veut pas perdre de vue le côté pratique du problème de décision, il faut, dans le choix du critère, tenir compte à un certain niveau, de la personnalité psychologique de celui qui prendra la responsabilité de la décision (attitude en face du risque du décideur ; pessimisme ou optimisme etc...).

Aussi ne doit-on pas s'étonner en consultant [13], [14], [16], [19], [20], [26] etc..., que de nombreux modèles ont été adoptés, on s'est proposé ici de formuler le problème de décision en P.L.S. d'une manière assez générale, formulation conduisant à l'étude de deux modèles de décision MI et MII contenant comme cas particuliers les modèles proposés ci-dessus.

Dans toute la suite nous désignerons par :

- $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.
- $(\mathbb{R}^s,\mathcal{B}^s)$: $s = np + p + n$, l'espace euclidien à s dimensions muni de sa σ algèbre des boreliens. (espace mesurable des échantillons).
- $G : \omega \longrightarrow [A(\omega), b(\omega), c(\omega)]$ une variable aléatoire
- $D = \{x \in \mathbb{R}^n\}$ l'espace des décisions
- $S = \mathbb{R}^s \times D$ sera l'ensemble des situations, une situation s de S sera donc définie par le couple (e,x) $e = (A,b,c) \in \mathbb{R}^s$: $x \in D$.

1.2- STRUCTURE NON ARCHIMEDIENNE DES PROBLEMES DE PROGRAMMATION AVEC CONTRAINTES.

Définition I.2.1. : si k est un nombre entier positif nous désignerons par $(\mathbb{R}^k, \overset{L}{\geqslant})$, l'espace euclidien à k dimensions muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire si y et y' sont deux éléments de $\mathbb{R}^k$:

$y \overset{L}{\geqslant} y' \Longleftrightarrow$ pour tout $i \leqslant k$ tel que $y_i < y'_i$ il existe $j < i$ tel que $y_j > y'_j$.

Considérons le programme linéaire :

$\inf\{c^t x \mid Ax + b \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ ce problème d'optimisation définit implicitement un préordre sur l'espace des décisions : $D=\{x \in \mathbb{R}^n\}$ et plus généralement sur l'ensemble des situations S on peut par exemple associer à toute situation : $s = (A,b,c,x)$, un élément de $(\mathbb{R}^2, \overset{L}{\geqslant})$ $u = \binom{u_1}{u_2}$ avec $u_1 = I_P(x)$, $u_2 = (-c^t x)$, où I_P est l'indicatrice du polyèdre convexe $P = \{x \geqslant o\ ;\ Ax + b \leqslant o\}$:

$$I_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un élément de } P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on définit ainsi un préordre sur l'ensemble des situations par : s "préférable ou indifférent à" s' si et seulement si $u(s) \underset{L}{\geqslant} u(s')$. Si (A,b,c) est fixe, le problème de programmation linéaire est alors équivalent au problème d'optimisation lexicographique :

$$\sup_{\overset{L}{\geqslant}}\{u(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Si ce point de vue est d'un intérêt limité pour les programmes linéaires certains, il peut servir dans ce cas des programmes linéaires stochastiques de base pour définir un critère d'optimalité sur D qui tienne compte de la structure économique de chaque problème. Le fait que la décision d'un programme linéaire soit assujettie à satisfaire "à tout prix" certaines contraintes peut se retrouver dans la structure de l'ensemble des situations, certaines contraintes pouvant être prioritaires. (voir [16] par exemple). Deux modèles de décision pourront être proposés suivant que l'axiome I.2.1 est vérifié ou non.

Axiome I.2.1. : il existe un nombre entier k et une application de S dans $(\mathbb{R}^k, \overset{L}{\geqslant})$: $U : (A,b,c,x) \longrightarrow u \in (R^k, \overset{L}{\geqslant})$ tels que : pour tout x élément de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i = 1, 2, — k$ l'application : $(A,b,c) \longrightarrow u_i(x)$ soit mesurable $\mathcal{B}^s$.

Remarque I.2.1. : l'application U induit un ordre sur S : s et s' étant deux éléments de S, s "sera préférable ou indifférent" à s' si et seulement si $u(s) \overset{L}{\geqslant} u(s')$.

Définition I.2.2. : si l'axiome I.2.1 est vérifié le vecteur u(s) sera appelé "utilité" de la situation s.

Lorsque la structure économique du problème permet de définir l'"utilité" de chaque situation, on propose le modèle de décision MI dans le cas contraire à la suite de Charnes et Cooper, [14], [15], [16] on pourra proposer un modèle de décision basé sur le concept des "domaines de confiance" : le modèle MII.

CHAPITRE II

LE CONCEPT D'UTILITE VECTORIELLE ADAPTE

AU PROBLEME DE DECISION EN P.L.S. LE MODELE MI

2.1- ETABLISSEMENT D'UN ORDRE DE PREFERENCE SUR L'ESPACE DES DECISIONS.

A tout élément x de D correspond univoquement d'après l'axiome I.2.1 un élément u(x) de $(\mathbb{R}_k, \underset{}{\overset{L}{\geqslant}})$ dont les composantes : $u_i(x)$, $i = 1, 2, — k$ sont par l'intermédiaire de G des variables aléatoires de fonctions de répartition respectives : $F_x^i : v \in R \longrightarrow P_x[u_i < v]$.
A tout x de D est donc associé dans l'espace des applications de $\mathbb{R}^k$ dans :

$C_k = \{y \in \mathbb{R}^k : o \leqslant y_i \leqslant 1 \quad i = 1, 2 — k\}$ la fonction vectorielle F_x de composantes F_x^i $i = 1, 2, \ldots k$.

Définition 2.1.1. : si x et x' sont deux éléments de D, on dira que x est "uniformément meilleur" que x' et on notera x (UM) x' si et seulement si

$$F_x(u) \underset{L}{\leqslant} F_{x'}(u) \quad \text{pour tout} \quad u \in (\mathbb{R}^k, \underset{L}{\geqslant})$$

On vérifie immédiatement que (UM) est transitif et reflexif mais en général non total.

Définition 2.1.2. : une décision x de D sera dite admissible si pour tout x' : $x'(UM)x \Longrightarrow x(UM)x'$ (aucune autre décision x' n'est strictement uniformément meilleure).

Deux décisions n'étant pas toujours comparables pour (UM), il n'existe pas de méthode de décision qui soit généralement applicable, le critère restant subjectif au comportement du décideur en face d'une situation ou le risque intervient.

Le modèle de décision MI sera défini par le critère de Laplace ou de l'espérance mathématique.

Soit H(x) le vecteur de $(\mathbb{R}^k, \overset{L}{\geqslant})$ de composantes
$H_i(x) = \int t \, d\, F_i(x) \quad i = 1, 2, \ldots k.$

Si ces dernières quantités existent on a :

Définition 2.1.3. : x et x' étant deux éléments de l'espace des décisions tels que H(x) et H(x') existent, le critère de Laplace ou de l'espérance mathématique est défini par le préordre : x "est préférable en moyenne à" x' et on note : x(P.M)x' si et seulement si $H(x) \underset{L}{\geqslant} H(x')$.

Le sous-ensemble optimal $\hat{D}$ s'il existe sera alors défini par :

$$\hat{x} \in \hat{D} \Longleftrightarrow H(\hat{x}) \underset{L}{\geqslant} H(x) \text{ pour tout } x \text{ de } D$$

Remarque 2.1.1. : si $\hat{x}$ est un élément de $\hat{D}$ alors $\hat{x}$ est une décision admissible. Le modèle de décision MI défini par le critère de Laplace conduit au problème d'optimisation suivant :

$$\underset{(\mathbb{R}^k, \overset{L}{\geqslant})}{\mathrm{Sup}} \{H(x) \mid x \in D\}$$

Si ce problème admet une solution on a :

<u>Proposition 2.1.1.</u> : <u>le sous-ensemble optimal</u> $\hat{D} = \mathrm{Sup}^{-1}\{H(x) \mid x \in D\}$ <u>s'il n'est pas vide est défini par</u> :

$$\hat{D} = D_k$$
$$D_i = \mathrm{Sup}^{-1}\{H_i(x) \mid x \in D_{i-1}\},\ i = 1, 2, \text{—}\ k$$
$$D_o = D$$

<u>Démonstration</u> : on peut conduire la démonstration en procédant par récurrence sur k.

Si k = 1 le résultat est immédiat car :

$\hat{D} = \mathrm{Sup}^{-1}\{H_1(x) \mid x \in D\} \overset{\text{def}}{=\!=} D_1$. Supposons alors la proposition vraie pour k - 1 et soit $x \longrightarrow H \in (\mathbb{R}^k, \overset{L}{\geqslant})$ la fonction à maximiser ; par hypothèse :

$\hat{D} = \mathrm{Sup}^{-1}\{H(x) \mid x \in D\}$ n'est pas vide, H peut s'écrire sous la forme du couple $\big(G(x), H_k(x)\big)$, $G(x) \in (\mathbb{R}^{k-1}, \overset{L}{\geqslant})$, $H_k(x) \in (\mathbb{R}, \geqslant)$.

Soit alors $D^* = \{\mathrm{Sup}^{-1}\{G(x) \mid x \in D_o\}\}$. D^* n'est pas vide car dans le cas contraire, pour tout x appartenant à D_o, il existerait y appartenant à D_o tel que $G(y) \underset{L}{>} G(x)$ ce qui impliquerait $\big(G(y), H_k(y)\big) \underset{L}{>} \big(G(x), H_k(x)\big)$ soit encore $H(y) \underset{L}{>} H(x)$ et $\hat{D}$ serait vide, ce qui est absurde.

D^* n'étant pas vide, d'après l'hypothèse de récurrence :

$D^* = D_{k-1} \neq \emptyset \mid D_i = \mathrm{Sup}^{-1}\{H_i(x) \mid x \in D_{i-1}\}$ pour $i = 1, 2, \ldots k-1$; $D_o = D$.

Soit $D_k = \mathrm{Sup}^{-1}\{H(x) \mid x \in D_{k-1}\}$ il faut montrer que $\hat{D} = D_k$.

1) $\hat{D} \subset D_k$, en effet car si y n'appartient pas à D_k on a les deux éventualités :

a) y n'appartient pas à D_{k-1} et comme D_{k-1} n'est pas vide, il existe x appartenant à D_{k-1} tel que $G(x) \underset{L}{\geq} G(y)$ ce qui implique $\left(G(x)\ H_k(x)\right) \underset{L}{\geq} \left(G(y),\ H_k(y)\right)$ soit $H(x) \underset{L}{\geq} H(y)$ et y n'appartient pas à $\hat{D}$.

b) y appartient à D_{k-1} et il existe x appartenant à D_{k-1} tel que $H_k(x) > H_k(y)$ et dans ce cas comme $G(x) = G(y)$:

$\left(G(x),\ H_k(x)\right) \underset{L}{\geq} \left(G(y),\ H_k(y)\right)$ soit $H(x) \underset{L}{\geq} H(y)$ et y n'appartient pas à $\hat{D}$.

2) $D_k \subset \hat{D}$ en effet, soit y n'appartenant pas à $\hat{D}$, comme $\hat{D}$ n'est pas vide, il existe x appartenant à $\hat{D}$ tel que $H(x) \underset{L}{\geq} H(y)$ soit encore :

$\left(G(x),\ H_k(x)\right) \underset{L}{\geq} \left(G(y),\ H_k(y)\right)$ on a alors deux éventualités :

1- $G(x) \underset{L}{\geq} G(y)$ et y n'appartient pas à D_{k-1} et donc non plus à D_k.

2- $G(x) = G(y)$ et $H_k(x) > H_k(y)$ x étant optimal comme $G(x) = G(y)$ y appartient à D_{k-1} sans appartenir à D_k car $H_k(x) > H_k(y)$, et finalement $\hat{D} = D_k$ ce qui achève la démonstration.

Pour définir l'utilité d'une situation s de S, chaque P.L.S. particulier doit être replacé dans son contexte économique, le préordre sur S pouvant changer d'un problème à l'autre ; on peut donc proposer un nombre très élevé de cas particuliers du modèle MI, nous ne mentionnerons ici que les plus importants.

2.2- LES CAS PARTICULIERS DU MODELE MI.

2.2.1. : Généralisation de la FAT formulation, le modèle MI1 :

considérons le P.L.S. défini au § 1.1 et soit $P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x \geqslant o \; ; \; Ax + b \leqslant o\}$ le polyèdre convexe des contraintes, si

$$x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow I_{P(A,b)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P(A,b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est l'indicatrice de $P(A,b)$, le préordre sur S est défini par le vecteur utilité : u appartenant à $(\mathbb{R}^2, \overset{L}{\geqslant})$ de composantes

$$u_1 = I_{P(A,b)}(x)$$

$$u_2 = -c^t x$$

Si nous choisissons comme critère celui de l'espérance mathématique, on est conduit au problème d'optimisation :

$$\underset{(\mathbb{R}^2, \overset{L}{\geqslant})}{\mathrm{Sup}}\{H(x) \mid x \in \mathbb{R}^n_+\} \text{ avec } H_1(x) = P[Ax + b \leqslant o] \text{ et } H_2(x) = -E(c^t x),$$

en utilisant les notations de la proposition 1.1.3.1, on a s'ils existent :

$$D_1 = \mathrm{Sup}^{-1}\{P[Ax + b \leqslant o] \mid x \geqslant o\}$$

$$D_2 = \mathrm{Sup}^{-1}\{-E(c^t x) \mid x \in D_1\} \text{ ou}$$

$$D_2 = \inf{}^{-1}\{E(c^t x) \mid x \in D_1\}$$

Remarque 2.2.1.1. : ce modèle généralise la "FAT formulation" [25], puisque dans cette dernière si $Q = \bigcap_{(A,b) \in \mathcal{R}} P(A,b)$ n'est pas vide ($\mathcal{R}$ représentant l'ensemble des réalisations du couple (A,b)), on minimise $E(c^t x)$ sur le sous-ensemble convexe Q.

Remarque 2.2.1.2. : si Q n'est pas vide alors :

1- $\operatorname{Sup}\{P[Ax + b \leqslant o] \mid x \geqslant o\} = 1$

2- Q est contenu dans D_1.

2.2.2. : Le problème à deux étages [20] le modèle MI.2 :

2.2.2.1. : Définition du problème à deux étages : (A,b,c) étant un triplet aléatoire de $\mathbb{R}^s$, $s = np + p + n$, $T(m,n)$, $d(m,1)$ $M(p,r)$ et $f(r,1)$ étant des matrices fixes et données, on considère le problème de décision associé au P.L.S. : $\inf\{c^t x \mid x \geqslant o \; ; \; Tx + d \leqslant o \; ; \; Ax + b = o\}$.

Soient $P = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; Tx + d \leqslant o, \; x \geqslant o\}$ supposé non vide et $K(A,b) = \{x \in P : \text{il existe } y \in \mathbb{R}^r, \; y \geqslant o, \; Ax + b + My = o\}$ on vérifie facilement que $K(A,b)$ est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$

$$\text{si } x \longrightarrow I_{K(A,b)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x \in K(A,b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est l'indicatrice de K(A,b), on associe à toute situation s = (A,b,c,x) de S le vecteur utilité de $(\mathbb{R}^2, \overset{L}{\geqslant})$: u de composantes :

$$u_1 = I_{K(A,b)}(x) \; ; \; u_2 = -c^t x - \inf\{f^t y \mid Ax + b + My = o \quad y \geqslant o\}$$

en choisissant pour critère de décision celui de l'espérance mathématique on est conduit au problème d'optimisation lexicographique :

$$\underset{(\mathbb{R}^2, \overset{L}{\geqslant})}{\operatorname{Sup}} H(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad H_1(x) = P[K_x]$$

où $K_x = \{(A,b) \in \mathbb{R}^{(n+1)p} : x \in K(A,b)\}$ et

$H_2(x) = - E(c^t x) - E(\inf\{f^t y \mid Ax + b + My = o, \; y \geqslant o\})$ ($f^t y$ représente la pénalité imposée par le choix d'une décision corrective y).

Remarque 2.2.2.1. : si $\alpha = \text{Max}\{P[K_x] \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ existe, on a deux éventualités :

1- $\alpha < 1$ alors le problème à deux étages sera résolu lorsqu'on aura déterminé

$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : P[K_x] = \alpha]$ car

$E[\inf\{f^t y \mid Ax + b + My = o,\ y \geqslant o\}] = +\infty$, ($P[K_x] < 1$ pour tout x) et D_1 est optimal au sens suivant : D_1 est contenu dans P et pour tout élément x de D_1 la probabilité pour qu'on puisse prendre une décision corrective y est maximale.

2- $\alpha = 1$ alors $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : P(K_x) = 1\}$. La détermination de D_1 pourra être délicate, cependant si l'image par M du cône polyédral convexe : $\{y \in \mathbb{R}^r,\ y \geqslant o\}$ est tout l'espace $\mathbb{R}^P$ alors on a visiblement

$D_1 = P = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ x \geqslant o ;\ Tx + d \leqslant o\}$ ce sera par exemple le cas lorsque M(p,2p) sera du type (I,-I) et le problème à deux étages est alors réduit à la recherche de

$$\inf\{E(c^t x) + E[\inf\{f^t y \mid Ax + b + My = o,\ y \geqslant o\}] \mid x \in P\}$$

ce cas a été étudié très en détail par Dantzig [20], Madansky [23], Wets [31], Williams [32] qui ont montré que ce problème se réduit à un problème de programmation convexe lorsque c est indépendant de x et lorsque A est une matrice fixe et qui suivant les hypothèses faites sur la loi de probabilité de b peut se réduire à un programme quadratique ou même linéaire.

Le modèle M.I.2 est certainement parmi les modèles de décision proposés en P.L.S. jusqu'à ce jour l'un des plus élaborés.

2.2.3. : Le modèle MI3 : considérons le P.L.S. :
$\inf\{c^t x \mid Ax + b = o \; ; \; x \geqslant o\}$ où (A,b,c) est un triplet aléatoire de loi de probabilité donnée, et soit $y \in \mathbb{R}^p \longrightarrow \| y \| \in \mathbb{R}^+$ une norme sur $\mathbb{R}^p$. On associe à toute situation $s = (A,b,c,x)$ de S, le vecteur utilité de $(\mathbb{R}^2, \overset{L}{\geqslant})$: u de composantes

$$u_1 = - \| Ax + b \|$$
$$u_2 = - c^t x$$

Si le critère de décision choisi est celui de l'espérance mathématique, on a s'il existe :

$$E[U] = \begin{cases} - E \| Ax + b \| \\ \\ - E(c^t x) \end{cases}$$

on obtient alors :

$$D_1 = \{x \geqslant o, \; x = \operatorname{Sup}^{-1} E \| Ax + b \| \}$$

Supposons alors <u>que la loi du triplet (A,b,c) soit indépendante de x</u>, dans ces conditions : pour tout (A,b) l'application :

$x \longrightarrow \| Ax + b \|$ est convexe, il en est donc de même de $x \longrightarrow E \| Ax + b \|$, et par conséquent : D_1 est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. La décision optimale sera donc obtenue en minimisant la forme linéaire $c^{ot} x = (Ec)^t x$ sur le domaine convexe D_1.

Cas particulier du modèle MI2 et moindres carrés.

<u>La matrice A sera supposée non aléatoire, et le couple (b,c) indépendant de x</u>.

2.2.3.1. : Norme de la valeur absolue, le modèle MI2a :

Soit $y \in \mathbb{R}^P \longrightarrow \| y \| = \sum_{i=1}^{P} | y_i |$ la norme de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^P$ et soit Δ_i^M l'intervalle médian de la variable aléatoire b_i. Si $B^M = \prod_{i=1}^{P} \Delta_i^M$ alors la quantité $E \| Ax + b \| = \sum_{i=1}^{P} E \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \right|$ sera minimum sur le polyèdre convexe $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geqslant o, - Ax \in B^M\}$ si celui ci n'est pas vide, (c'est une généralisation de la propriété caractéristique de la médiane).
Et dans cette hypothèse :

$D_2 = \inf^{-1}\{E(c^t x) \mid D_1\}$ est le sous-ensemble optimal d'un programme linéaire déterministe.

2.2.3.2. : Moindres carrés modèle MI2b : soit $\| \|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^P$ le vecteur utilité u de $(\mathbb{R}^2, \overset{L}{\geqslant})$ est défini par $u_1 = - \| Ax + b \|^2$, $u_2 = - E(c^t x)$.

Si on prend pour critère de décision celui de l'espérance mathématique on est conduit à maximiser H(x) avec

$$H_1 = - E \| Ax + b \|^2$$
$$H_2 = - E(c^t x)$$

Supposons que $(b^o, c^o) = \{E(b), E(c)\}$ existe. Alors si la loi de probabilité de (b,c) est indépendante de x, d'après la propriété caractéristique de la moyenne : $E \| Ax + b \|^2$ est minimum lorsque $\| Ax + b^o \| = o$ et dans ces conditions, s'il n'est pas vide le sous-ensemble :
$\{x \in \mathbb{R}^n, x \geqslant o, Ax + b_o = o\} = D_1$ et la solution optimale du problème de décision sera celle du programme linéaire déterministe obtenu en remplaçant toutes les variables aléatoires par leur espérance mathématique. Le critère utilisé justifiant ainsi cette procédure (solution espérance mathématique).

CHAPITRE III

LE CONCEPT DES "DOMAINES DE CONFIANCE"

LE MODELE MII

3.1- DEFINITION DU DOMAINE DE CONFIANCE.

Soit $\mathcal{P}$(A,b,c) le P.L.S. :

$$\inf\{c^t x \mid Ax + b \leqslant o \quad (1) \; ; \; x \geqslant o \quad (2)\}.$$

S'il n'est pas possible d'associer à toute situation s de S une utilité u de $(\mathbb{R}^k, \overset{L}{\geqslant})$ on ne peut employer le modèle MI et on envisagera le problème de décision d'une manière différente, c'est ce qu'ont fait Charnes, Cooper, Thompson [14], [15], [16] en traitant séparément le caractère aléatoire des contraintes de celui du coût. L'attitude prise en face du risque que le système des contraintes défini par (1) ne soit pas satisfait se traduit par le choix d'un domaine de décision non aléatoire de $\mathbb{R}^n$ (équivalent déterministic). Le choix d'une décision sur ce domaine ne dépendant que du coût aléatoire $(c^t x)$.

Le système des contraintes (1) s'écrit $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \leqslant o$

i = 1, 2, —— p.

Une manière simple de tenir compte du risque que la ième contrainte : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \leqslant o$ ne soit pas satisfaite est de s'imposer à priori un choix de x qui rende la probabilité de cet évènement inférieure à un nombre donné à priori.

Plus précisément, soit β un élément de l'hypercube unité de $\mathbb{R}^P$: $C = \{\beta \in \mathbb{R}^P \quad o \leqslant \beta_i \leqslant 1\}$ si : $p : x \longrightarrow p(x) \in C$ est l'application qui à tout x de $\mathbb{R}^n$ fait correspondre l'élément $p(x)$ de C de composantes

$$p_i(x) = P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \leqslant o\right) \quad i = 1, 2, — P.$$

Les décisions x seront alors choisies dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$:

$$D_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geqslant o \quad p(x) \geqslant \beta\}$$

On a remplacé le polyèdre convexe aléatoire $P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geqslant o, Ax + b \leqslant o\}$ par le domaine de confiance D_β, β étant choisi de manière à tenir compte de la plus ou moins grande importance que l'on veut attacher à chaque contrainte du programme.

3.2- CONDITIONS SUFFISANTES POUR QUE LE DOMAINE DE CONFIANCE SOIT CONVEXE.

Pour des raisons pratiques évidentes, il est intéressant de donner des conditions suffisantes pour que D_β soit un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.2.1. [14] : une condition suffisante pour que le domaine de confiance D_β soit convexe est que pour tout $i = 1, 2,\ldots p$

- le vecteur a_i^* de $\mathbb{R}^{n+1}$ ayant pour composantes

$$a_{ij}^* = a_{ij} \qquad j = 1, 2,\ldots n.$$

$$a_{in+1}^* = b_i$$

soit gaussien

- $\beta_i \geqslant \frac{1}{2}$

De plus si a_i^* est gaussien : $N(m_i,\Lambda^i)$ alors

$$D_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant o, \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, x_j + m_{in+1} + q_i \Big(\sum_{j=1,k=1}^{n,n} x_j\, \Lambda^i_{jk}\, x_k + 2 \sum_{k=1}^{n} \Lambda^i_{n+1,k}\, x_k + \Lambda^i_{n+1,n+1}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant o \quad i = 1, 2,\ldots p\}$$

avec $q_i = \bar{N}^1(\beta_i)$ et $u \longrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left(\frac{-v^2}{2}\right) dv$

pour démontrer cette proposition, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme : si V est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^q$ $N(m,\Lambda)$ et si α est un nombre réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$ alors l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^q : P[V^t y \leqslant o] \geqslant \alpha\}$ est un cône convexe.

<u>Démonstration</u> : d'après [2], V : $N(m,\Lambda)$ étant gaussien, $V^t y$ est une variable aléatoire gaussienne $N(m^t y,\ y^t \Lambda y)$ et si on pose

$U = \dfrac{V^t y - m^t y}{\sqrt{y^t\ \Lambda\ y}}$ la variable aléatoire U est normale centrée et réduite, si

$$u \longrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left(\frac{-v^2}{2}\right) dv \quad \text{alors } P\left[V^t y \leqslant o\right] = P\left[U \leqslant \frac{-\ m^t y}{\sqrt{y^t\ \Lambda\ y}}\right] \quad \text{et}$$

$$P\left[V^t y \leqslant o\right] \geqslant \alpha \iff \bar{N}^1(\alpha) \leqslant \frac{-\ m^t y}{\sqrt{y^t\ \Lambda\ y}} \iff m^t y + q\sqrt{y^t\ \Lambda\ y} \leqslant o \text{ avec } q = \bar{N}^1(\alpha)$$

La fonction $y \longrightarrow \sqrt{y^t\ \Lambda\ y}$ est convexe puisque Λ est définie positive ou nulle et si $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ alors $q \geqslant o$ et l'ensemble : $\{y \in \mathbb{R}^q : P\left[V^t y \leqslant o\right] \geqslant \alpha\}$ est bien convexe, de plus c'est visiblement un cône.

<u>Démonstration de la proposition</u> : D_β est l'intersection du cône polyédral convexe $\mathbb{R}^n_+$ et des p sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$:

$$D^i(\beta_i) : \{x \in \mathbb{R}^n : p_i = P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j + b_j \leqslant o\right] \geqslant \beta_i\}.$$

D'après le lemme, les hypothèses sont suffisantes pour que $D_i(\beta_i)$ soit convexe et comme l'intersection d'un nombre fini d'ensembles convexes est convexe on a bien le résultat annoncé.

<u>Corollaire</u> : <u>une condition suffisante pour que D_β soit un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ est que</u> :

1 : $\underline{\beta_i = \frac{1}{2}}$ $\quad i = 1, 2,\ldots p \quad$ ou :

2 : A soit fixe et que b soit gaussien alors :

$$D_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j + b_i^o + q_i\ \sigma_i \leqslant o \quad i = 1, 2, \text{—} p\}$$

avec $b_i^o = E(b_i)$ et $\sigma(b_i) = \sigma_i$

En effet dans le premier cas $\beta_i = \frac{1}{2} \Longrightarrow q_i = o$ et

$D_\beta = \{x : x \geqslant o,\ \Sigma\ m_{ij}\ x_j + m_{i,n+1} \leqslant o \quad i = 1, 2, \text{—} p\}$ dans le second si A est non aléatoire D_β devient d'après la proposition précédente le polyèdre convexe

$$D_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j + b_i^o + q_i\ \sigma_i \leqslant o \quad i = 1, 2 \text{—} p\}$$

On peut montrer plus généralement : si A est fixe et si $u \longrightarrow F_i = P[b_i \leqslant u]$, $i = 1, 2 \text{—} p$.

Proposition 3.3.2. : si $\underline{u}_i = \inf u \mid F_i(u) = \beta_i$ pour $i = 1, 2, \text{—} p$ le domaine de confiance D_β est le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$:

$$D_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j + \underline{u}_i \leqslant o \quad i = 1, 2 \text{—} p\}$$

Démonstration : pour tout $i = 1, 2, \text{—} p$

$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j + b_i \leqslant o\right] = F_i\left(- \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j\right)$ la fonction $u \longrightarrow F_i$ étant non dé-

croissante : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j + \underline{u}_i \leqslant o \Longrightarrow F_i\left(- \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j\right) \geqslant \beta$

ou $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j + b_i \leqslant o\right] \geqslant \beta_i$

Remarque 3.3.1. : lorsque le couple (A,b) est distribué suivant une loi de probabilité quelconque on peut si les moyennes, variances et covariances sont connues, déterminer en utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebycheff un domaine de décision Γ_β tel que :

Γ_β soit un convexe de $\mathbb{R}^n$ contenu dans D_β

Γ_β du type semi quadratique.

3.3- LES MODELES DE DECISION DU TYPE MII.

Le choix d'une décision dans D_β dépendra uniquement de la variable aléatoire coût : $c^t x$, citons les cinq possibilités suivantes :

- Le modèle MII1 on minimise : $x \longrightarrow h = E(c^t x)$ sur D_β, c'est le cas le plus simple et lorsque le vecteur aléatoire c est indépendant de x, h est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

- Le modèle MII2 [26] : soit u, un nombre réel donné à priori, on minimise $x \longrightarrow h = \sigma(c^t x)$ en s'imposant : $x \in D_\beta$, $E(c^t x) \leqslant u$; c'est le problème du contrôle de la variance pour un coût moyen maximal donné.

- Le modèle MII3 [16] : si λ est un nombre positif donné on minimise : $x \longrightarrow h = E(c^t x) + \lambda\, \sigma\, (c^t x)$ sur D_β.

- Le modèle MII4 [22] : t : seuil de probabilité étant un nombre donné de l'intervalle $[0,1]$ on recherche $\inf\{g \mid \text{Prob}\left[c^t x < g\right] \geqslant t \ ; \ x \in D_\beta\}$

- Le modèle MII5 [13] : soit u un nombre réel donné on maximise sur D_β la fonction $x \longrightarrow h = \text{Prob}\left[c^t x < u\right]$.

3.3.1. : **Le modèle MII1** : si D_β est un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$ la solution du problème

P.II.1 $\quad \inf\{E(c^t x) \mid x \in D_\beta\}$ sera celle d'un programme non linéaire.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1- D_β polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$

2- le vecteur aléatoire c est indépendant de x.

P.II.1. sera un problème de programmation linéaire déterministe.

3.3.2. : **Le problème du contrôle de la variance pour un coût moyen maximum donné : le modèle MII2** [26] :

x sera optimal s'il est solution du problème :

P.II.2 $\quad \inf\{\sigma^2(c^t x) \mid x \in D_\beta \; E(c^t x) \leqslant u\}$

Nous supposerons les hypothèses suivantes satisfaites :

H1 : D_β est le polyèdre convexe non vide de $\mathbb{R}^n$: $\{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o\}$

H2 : c est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ indépendant de x, de moyenne c_o et de matrice de covariance V finies. Dans ces conditions on a :

Proposition 3.3.2.1. : le problème P.II.2 est équivalent au problème de programmation quadratique :

$$\inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij}\, x_i\, x_j \;\middle|\; x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o \;;\ c_o^t x \leqslant u \right\}$$

<u>Démonstration</u> : d'après H2 : $E(c^t x) = c_o^t x$ et

$$\sigma^2(c^t x) = E(c^t x)^2 - (c_o^t x)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E(c_i c_j - c_{oi} c_{oj})\, x_i\, x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij}\, x_i\, x_j .$$

d'où le résultat.

Il est difficile à priori de faire un choix convenable de la borne supérieure du coût moyen : u, et <u>il sera intéressant d'étudier suivant les valeurs de u la fonction</u> :

$$u \longrightarrow f = \inf\{x^t\, V\, x \mid x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o \quad c_o^t x \leqslant u\}$$

<u>Proposition 3.3.2.2.</u> :

- <u>le domaine de définition de la fonction $u \longrightarrow f$ est l'intervalle</u> $[u_{min} + \infty[$ où $u_{min} = \inf\{c_o^t x \mid x \geqslant o \quad A'x + b' \leqslant o\}$.

- <u>la fonction $u \longrightarrow f$ est non croissante et il existe un nombre u_{max} tel que pour tout $u \geqslant u_{max}$: f est constante</u>.

<u>Démonstration</u> : si le problème $\inf\{c_o^t x \mid x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o\}$ a une solution optimale finie x_{min} alors en posant $u_{min} = c_o^t x_{min}$: pour tout $u < u_{min}$, le polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o,\ c_o^t x \leqslant u\}$ est vide. D'autre part si $u_2 > u_1 \geqslant u_{min}$, le polyèdre $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ x \geqslant o \ ;\ A'x + b' \leqslant o \ ;\ c_o^t x \leqslant u_1\}$ est contenu dans le polyèdre $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ x \geqslant o \ ;\ A'x + b' \leqslant o \ ;\ c_o^t x \leqslant u_2\}$

et par conséquent $\displaystyle \inf_{x \in P_2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i\, V_{ij}\, x_j \leqslant \inf_{x \in P_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i\, V_{ij}\, x_j$

Pour démontrer l'existence du nombre u_{max}, il suffit de remarquer que le programme $\inf\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij}\, x_i\, x_j \mid A'x + b' \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ possède nécessairement une solution finie : x_{max} posons alors $u_{max} = c_o^t x_{max}$ et :

1- $u \geqslant u_{max} \Longrightarrow f(u) \leqslant f(u_{max})$ f étant non croissante).

2- $f(u_{max}) = f(+\infty)$ et par conséquent pour tout $u \geqslant u_{max}$: $f(u) = f(u_{max})$.

Proposition 3.3.2.3. : la fonction $u \longrightarrow f$ est une fonction convexe de u.

Soient deux nombres réels u_1, u_2 supérieurs à u_{min} ;α,β deux nombres positifs tels que $\alpha + \beta = 1$ montrons que si

$$u_1 \longrightarrow f_1 \ ;\ u_2 \longrightarrow f_2 \ ;\ \alpha u_1 + \beta u_2 \longrightarrow f \text{ alors } f \leqslant \alpha f_1 + \beta f_2.$$

Soit $\mathcal{P}(u)$ le programme $\inf\{x^t\, V\, x \mid x \in P(u)\}$ P(u) étant le polyèdre convexe

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant o \ ;\ A'x + b' \leqslant o \ ;\ c_o^t x \leqslant u\}$$

et soient
$$x_1 = \inf^{-1} \{x^t\, V\, x \mid x \in P(u_1)\},$$
$$x_2 = \inf^{-1} \{x^t\, V\, x \mid x \in P(u_2)\},$$
$$\hat{x} = \inf^{-1} \{x^t\, V\, x \mid x \in P(\alpha u_1 + \beta u_2)\};$$

alors $\alpha x_1 + \beta x_2$ appartient à $P(\alpha u_1 + \beta u_2)$, en effet le polyèdre convexe $P(+\infty)$ contient x_1, x_2 et donc $\alpha x_1 + \beta x_2$, de plus $c_o(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha c_o^t x_1 + \beta c_o^t x_2 \leqslant \alpha u_1 + \beta u_2$. Comme $\hat{x}$ est la solution optimale de $\mathcal{P}(\alpha u_1 + \beta u_2)$ alors :

(1) $\hat{x}^t V \hat{x} \leqslant (\alpha x_1 + \beta x_2)^t V(\alpha x_1 + \beta x_2)$ en ajoutant au deux membres de l'inégalité (1) la quantité positive ou nulle :

$$\alpha\beta \left(\sqrt{x_1^t V x_1} - \sqrt{x_2^t V x_2}\right)^2 \quad \text{il vient}$$

$$\hat{x}^t V \hat{x} \leqslant \alpha^2 x_1^t V x_1 + \beta_2 x_2^t V x_2 + 2\alpha\beta x_1^t V x_2 + \alpha\beta x_1^t V x_1$$

$$+ \alpha\beta x_2^t V x_2 - 2\alpha\beta \sqrt{x_1^t V x_1 \, x_2^t V x_2}$$ et en utilisant l'inégalité de Schwartz : $x_1^t V x_2 \leqslant \sqrt{x_1^t V x_1 \cdot x_2^t V x_2}$ on obtient :

$\hat{x}^t V \hat{x} \leqslant \alpha(\alpha+\beta) x_1^t V x_1 + \beta(\alpha+\beta) x_2^t V x_2$ et puisque $\alpha + \beta = 1$:

$\hat{x}^t V \hat{x} \leqslant \alpha x_1^t V x_1 + \beta x_2^t V x_2$ et l'application $u \longrightarrow f$ est bien convexe.

L'algorithme de programmation quadratique exposé dans la 3ème partie, chapitre I permet de déterminer pour tout u de l'intervalle $[u_m, u_M]$ la solution optimale.

<u>Exemple</u> :

D_β est le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^6$ ensemble des $x \in \mathbb{R}^6$ de composantes x_i $i = 1, 2, \ldots 6$ telles que

$$\begin{array}{rcl}
x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots 6 & & \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \geqslant & 1.0 \\
2 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \leqslant & 10.0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 5 x_4 + x_5 - x_6 & \leqslant & 20.0 \\
x_1 + x_2 & \leqslant & 30.0 \\
x_6 & \geqslant & 0.5
\end{array}$$

$\vec{c}$ étant un vecteur gaussien $N(\vec{c}_o, V)$ avec

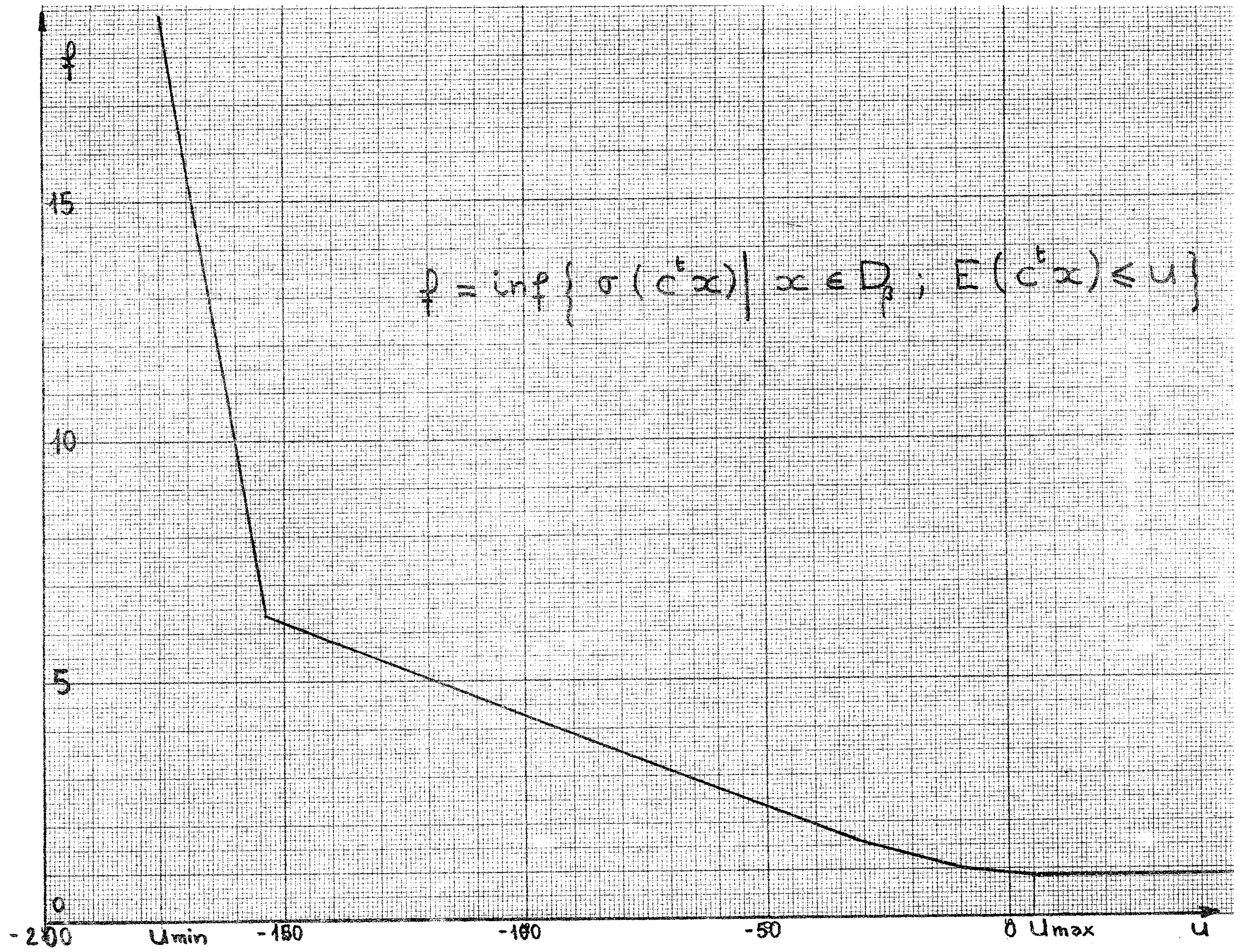
$$c_o^t = (-30, 20, -15, 16, -18, 10)$$

la matrice de covariance V étant donnée et égale à :

$$V = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.5 & & & & \\ 0.5 & 1.0 & \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} & \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} \\ & & 1.8 & 2.0 & & \\ \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} & 2.0 & 3.0 & \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} \\ & & & & 3.5 & 1.0 \\ \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} & \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} & 1.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

Résultats :

	u	$\sigma(c^t\hat{x})$	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$\hat{x}_6$
u_{min}	- 175.0	18.985	0.0	0.0	0.0	0.0	10.0	0.5
	- 170.0	15.905	0.6521580	"	0.3623082	"	8.333368	0.5
	- 165.0	12.92	1.304335	"	0.724629	"	6.666693	0.5
	- 160.0	10.13	1.956513	"	1.086951	"	5.00002	0.5
	- 150.0	6.25	3.2608679	"	1.8115933	"	1.666670	0.5
	- 130.0	5.345	3.0911619	"	1.717312	"	0.916969	0.5
	- 110.0	4.597	2.6417719	"	1.4676511	"	0.762893	0.5
	- 90.0	3.833	2.1923817	"	1.21799	"	0.6088166	0.5
	- 70.0	3.073	1.74299	"	0.968328	"	0.45474	0.5
	- 50.0	2.322	1.2936015	"	0.7186675	"	0.300663	0.5
	- 30.0	1.596	0.8442114	"	0.469006	"	0.146586	0.5
	- 10.0	0.945	0.3913043	"	0.2173914	"	"	0.5
	0.0	0.816	0.16477272	0.1420455	0.1931818	"	"	0.5
u_{max}	6.070083	0.805	0.08411215	0.2523365	0.16355141	"	"	0.5



$f = \inf\{\sigma(c^t x) \mid x \in D_\beta ;\ E(c^t x) \leq u\}$
f
15
10
5
0
-200
Umin
-150
-100
-50
0 Umax
u

3.3.3. : Le modèle MII3 : rappelons qu'il s'agit de déterminer pour tout $\lambda \geqslant o$ le vecteur $\hat{x}(\lambda)$ solution optimale du problème PII3 :

$$\inf\{E(c^t x) + \lambda\ \sigma(c^t x) \mid x \in D_\beta\}$$

Hypothèses :

H1 : D_β est le polyèdre convexe de R^n : $\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ x \geqslant o\ ;\ A'x + b' \leqslant o\}$

H2 : c est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ indépendant de x de moyenne c_o et de matrice de covariance V finies

H3 : l'ensemble $D_\beta \cap \{x : Vx = o\}$ est vide.

Dans ces conditions H_2 implique : $E(c^t x) = c_o^t x$ et $\sigma^2(c^t x) = x^t\ Vx$, la fonction $x \longrightarrow \sqrt{x^t\ Vx}$ est convexe et d'après H_3 elle est différentiable sur D_β puisque : pour tout $x \in D_\beta$: $x^t\ Vx > o \Longrightarrow \sqrt{x^t\ Vx} > o$ et la fonction :

$x \longrightarrow c_o^t x + \lambda\ (x^t\ Vx)^{\frac{1}{2}}$ est convexe et différentiable pour tout $\lambda \geqslant o$, le problème PII3 est donc un problème de programmation à fonction économique différentiable et convexe et à contraintes linéaires équivalent au problème de :

Programmation semi quadratique PSQ :

$\inf\{c_o^t x + \lambda\ (x^t\ Vx)^{\frac{1}{2}} \mid x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o\}$ dont la solution sera déterminée par l'algorithme de P.S.Q. proposé au chapitre I 3ème partie.

Exemple :

D_β est le polyèdre convexe de R^6 ensemble des x de composantes x_i i = 1, 2,...6 telles que :

$$x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots 6$$

$$4\, x_1 - x_2 + 2\, x_3 + 3\, x_4 - 5\, x_5 + 6\, x_6 \geqslant 2.0$$

$$x_1 + 3\, x_2 - 4\, x_3 + 5\, x_4 - x_5 + 2\, x_6 \geqslant 13.0$$

$$3\, x_1 + 7\, x_2 + x_3 - 2\, x_4 + x_5 - 9\, x_6 \geqslant 7.0$$

$$5\, x_1 - 3\, x_2 + 8\, x_3 - 4\, x_4 + 6\, x_5 + x_6 \geqslant 0.0$$

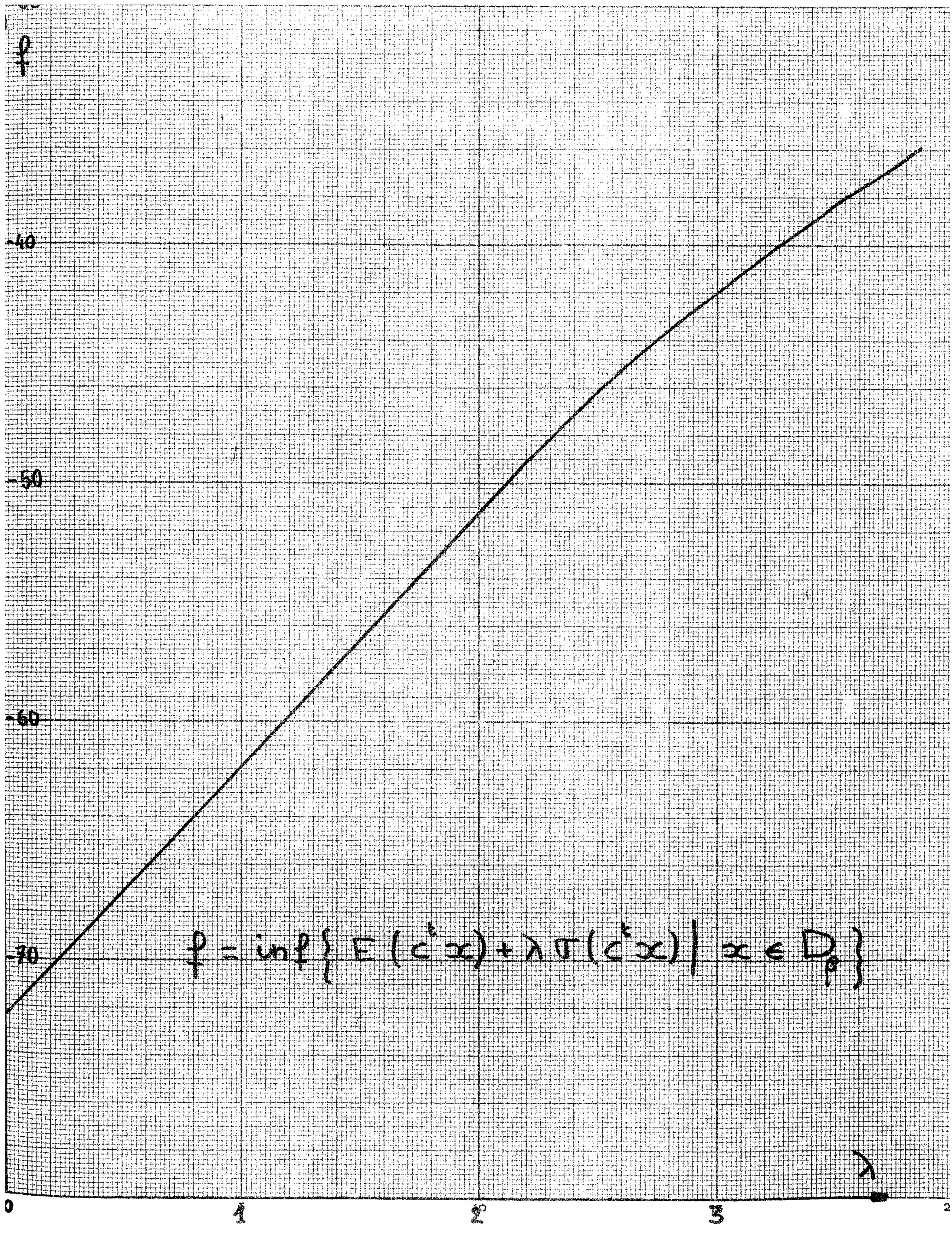
$$x_1 + 2\, x_2 + x_3 + x_4 + 2\, x_5 + x_6 \leqslant 15.0$$

$\vec{c}$ étant un vecteur aléatoire de moyenne $c_o = (-1.0, -3.0, -7.0, -5.0, -2.0, -8.0)$ et de matrice de covariance V donnée et égale à :

$$V = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 2.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & 0.0 & 0.01 \\ 0.05 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.01 & 0.0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Résultats : $x_1 = x_5 = o$ pour tout λ : $o \leqslant \lambda \leqslant 3.9$

λ	f	x_2	x_3	x_4	x_6
0	- 72.653086	1.8845366	5.4230034	5.8076908	0.0
2.3	- 48.140365	1.8845366	5.4230034	5.8076908	0.0
2.4	- 47.112595	2.2075929	5.0550973	5.1795431	0.34996797
2.5	- 46.165314	2.4822726	4.7422842	4.6454587	0.64752934
2.6	- 45.275930	2.6919289	4.5035217	4.2378054	0.87465054
2.7	- 44.429951	2.8589063	4.3133630	3.9131362	1.0555377
2.8	- 43.61778	2.9960535	4.1571757	3.6464885	1.2041097
2.9	- 42.832692	3.1113595	4.0258620	3.4222687	1.3290211
3.0	- 42.069796	3.2100916	3.9134232	3.2302953	1.4359777
3.1	- 41.325402	3.2958845	3.8157197	3.0634804	1.5289175
3.2	- 40.596660	3.3713404	3.7297884	2.9167647	1.6106591
3.3	- 39.881321	3.4383786	3.6534433	2.7864163	1.6832818
3.4	- 39.177576	3.4984509	3.5850312	2.6696123	1.7483583
3.5	- 38.48395	3.5526788	3.523275	2.5641721	1.8071035
3.6	- 37.799239	3.6019448	3.4671693	2.4683797	1.8604736
3.7	- 37.122409	3.6469545	3.4159110	2.3808634	1.9092327
3.8	- 36.452608	3.6882796	3.3688489	2.3005114	1.9540003
3.9	- 35.789102	3.7263892	3.3254486	2.2264115	1.9952845


f
-40
-50
-60
-70
0
1
2
3
λ
$f = \inf\{ E(c^t x) + \lambda\,\sigma(c^t x) \mid x \in D_p \}$

Pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 2.3$, la solution optimale reste la même et donc
$\lambda \longrightarrow f = \inf c^{ot}x + \lambda\, \sigma(c^t x)\ x \in D_\beta$ est une forme linéaire de λ sur $[0,\ 2.3]$

Graphe de la fonction $\lambda \longrightarrow f$ pour $\lambda \in [0,\ 3.9]$: voir page précédente.

3.3.4. : **Le modèle MII4** : rappelons que le problème d'optimisation associé au modèle MII4 formulé par S. Kataoka [22] est :

P.II.4 : $f = \inf\{g \mid \text{Prob}[c^t x < g] = t,\ x \in D_\beta\}$ t étant un nombre donné de l'intervalle $[0,1]$.

Hypothèses :

H1 : D_β est le polyèdre convexe :
$\{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o \quad A'x + b' \leqslant o\}$

H2 : c est un vecteur aléatoire indépendant de x gaussien $N(c_o, V)$

H3 : $t \geqslant \frac{1}{2}$

H4 : pour tout x appartenant à D_β, $Vx \neq o$

Si $u \longrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \exp\left(\frac{-v^2}{2}\right) dv$ et si les hypothèses précédentes sont vérifiées alors :

Proposition 3.3.4.1. [22] : le problème P.II.4 est équivalent au problème d'extrémum :

$$\text{P.II.4a} : \inf\{c^{ot}x + q\sqrt{x^t Vx} \mid x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o\} \text{ avec } q = N^{-1}(t).$$

En effet d'après H_2, $c^t x$ est une variable aléatoire normale $N(c^{ot}x,\ x^t Vx)$ par conséquent, puisque pour tout x appartenant à D_β : $x^t Vx > o$ d'après H_4 :

$$\mathrm{Prob}\left[c^t x < g\right] = \mathrm{Prob}\left[\frac{c^t x - c^{ot} x}{\sqrt{x^t\, V\, x}}\right] < \frac{g - c_o^t x}{\sqrt{x^t\, Vx}} = N\left(\frac{g - c_o^t x}{\sqrt{x^t\, Vx}}\right)$$

et donc $\mathrm{Prob}\left[c^t x < g\right] = t \Longleftrightarrow N\left(\frac{g - c^{ot} x}{\sqrt{x^t\, Vx}}\right) = t$ soit encore

$g = c_o^t x + N^{-1}(t)\,\sqrt{x^t\, Vx}$ comme $t \geqslant \frac{1}{2}$: $N^{-1}(t) = q \geqslant o$ et la fonction $x \longrightarrow g = c^{ot} x + q\,\sqrt{x^t\, Vx}$ est une fonction convexe et différentiable sur D_β et P.II.4 est d'après H_1 équivalent au problème de PSQ :

$\inf\{c^{ot} x + q\,\sqrt{x^t\, Vx} \mid x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o\}$ avec $q = N^{-1}(t)$ et l'algorithme de PSQ paramètrique permet de déterminer la solution optimale du problème pour les valeurs de t d'une grille quelconque de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (cf programme DECIS 3ème partie II.4).

Exemple :

Données :

D_β est le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^5$ ensemble des x de composantes x_i $i = 1, 2, \ldots 5$ tels que :

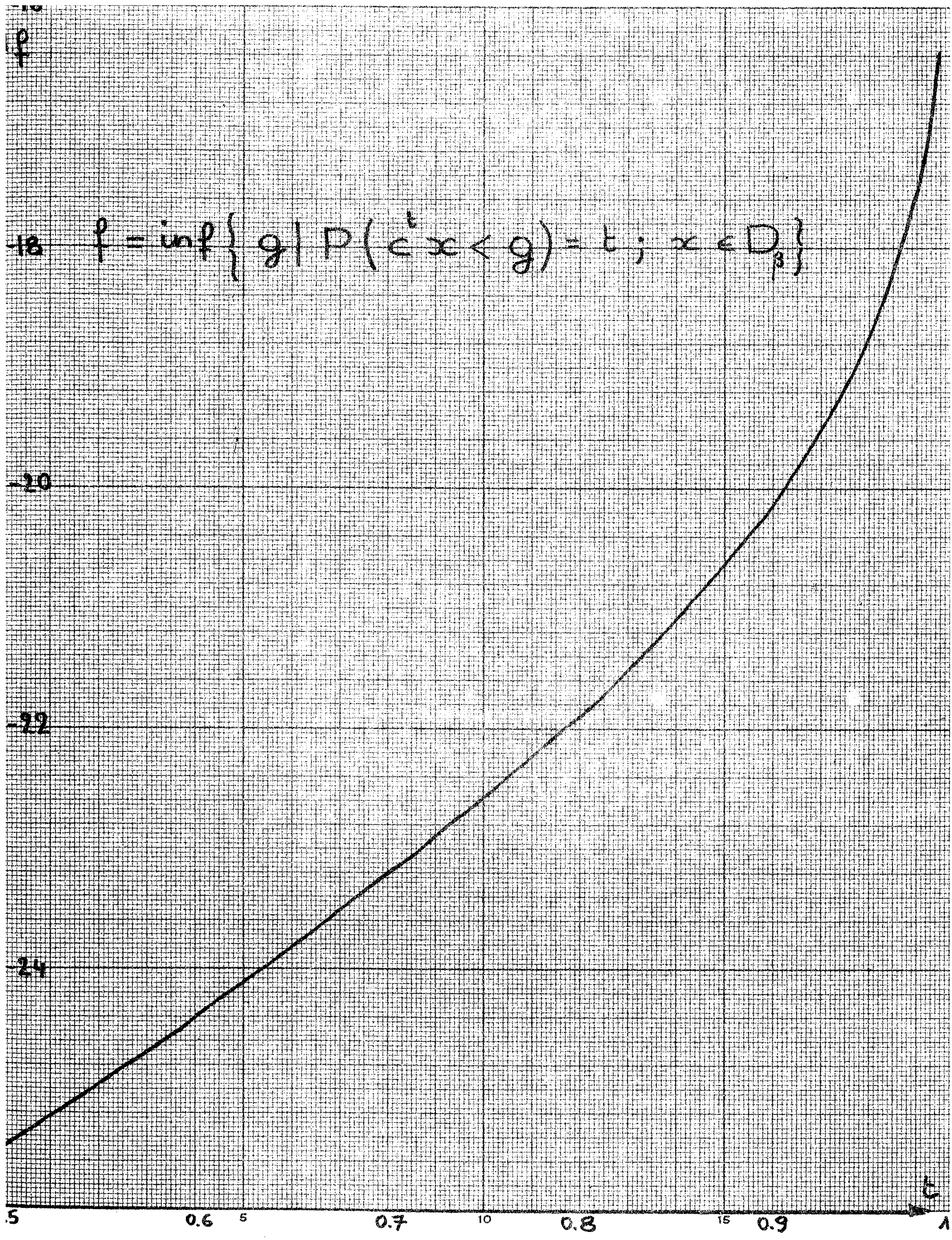
$$\begin{aligned} x_i &\geqslant o \quad i = 1, 2, \ldots 5 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 + 5\,x_5 &= 15 \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 5\,x_4 + 5\,x_5 &= 13 \\ 2\,x_3 + 6\,x_4 + 3\,x_5 &\geqslant 6 \end{aligned}$$

c étant un vecteur gaussien $N(c^o, V)$ avec $c^{ot} = (-1, -3, -5, -4, -9)$ la matrice de covariance V étant donnée égale à :

$$V = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0.1 & 0.08 & 0.06 \\ 0 & 0.1 & 2.0 & 0.2 & 0.15 \\ 0 & 0.08 & 0.2 & 1.5 & 0.1 \\ 0 & 0.06 & 0.15 & 0.1 & 3.0 \end{bmatrix}$$

Résultats :

Pour tout t de l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ $\hat{x}_1 = o$, les autres résultats sont donnés dans le tableau suivant.



f
-18
$f = \inf \{ g \mid P(c^t x < g) = t \; ; \; x \in D_\beta \}$
-20
-22
-24
t
.5
0.6
5
0.7
10
0.8
15
0.9
1

t	f	x_2	x_3	x_4	x_5
0.5	- 25.53339	0.0	0.6666633	0.0	2.4666748
0.52	- 25.31115	"	"	"	"
0.54	- 25.08834	"	"	"	"
0.56	- 24.86441	"	"	"	"
0.58	- 24.63875	"	"	"	"
0.60	- 24.39592	"	"	"	"
0.62	- 24.17972	"	"	"	"
0.64	- 23.94497	"	"	"	"
0.66	- 23.70566	"	"	"	"
0.68	- 23.46090	"	"	"	"
0.70	- 23.21300	"	0.7813681	0.0860283	2.3577046
0.72	- 22.96456	"	0.8823392	0.1617562	2.2617816
0.74	- 22.71251	"	0.9624906	0.2218695	2.1856374
0.76	- 22.45416	"	1.0282551	0.2711926	2.1231607
0.78	- 22.18689	"	1.0836346	0.3127271	2.0705499
0.80	- 21.90782	"	1.1312849	0.3484647	2.0252819
0.82	- 21.61352	"	1.1730576	0.3797940	1.9855977
0.84	- 21.29978	"	1.2102974	0.4077238	1.9502196
0.86	- 20.96091	"	1.2440401	0.4330307	1.9181639
0.88	- 20.58972	0.0798474	1.2611932	0.4458954	1.8699288
0.90	- 20.17918	0.2132809	1.2660719	0.4495543	1.8119210
0.92	- 19.71091	0.3364749	1.2705762	0.4529325	1.7583641
0.94	- 19.151387	0.04544249	1.2748888	0.4561669	1.7070870
0.96	- 18.42847	0.5736645	1.2792486	0.4594366	1.6552492
0.98	- 17.32366	0.7083107	1.2841716	0.4631288	1.5967137
0.99	- 16.33912	0.7968993	1.2874107	0.4655580	1.5582010

3.4.5. Programme de risque minimal. Le modèle MII5.

Béréanu dans [13], définit le programme de risque minimal au niveau u du P.L.S. comme étant le vecteur $\hat{x}(u)$ s'il existe solution de

$$\operatorname{Max}\left\{Q(x,u) = P\left[c^t x \leqslant u\right] \mid x \in D_\beta\right\}$$

Algorithme de Béréanu [13].

Hypothèses :

H1 : D_β est le polyèdre convexe non vide :

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o\right\}$$

H2 : c est un vecteur gaussien indépendant de x de moyenne c^o et de matrice de covariance V.

H3 : l'ensemble $D_\beta \cap \{x : Vx = o\}$ est vide.

Proposition 3.4.5.1. [13] : le programme de risque minimal au niveau u du P.L.S. est un programme optimal du problème de programmation non linéaire :

$$\text{P.II.5a} : \operatorname{Sup}\left\{\left[u - c^{ot}x\right] (x^t\ Vx)^{\frac{1}{2}} \mid x \geqslant o,\ A'x + b' \leqslant o\right\}$$

En effet, c est d'après l'hypothèse H_2 un vecteur aléatoire gaussien $N(c^o, V)$ et donc $c^t x$ est une variable aléatoire normale $N(c^{ot}x, x^t\ Vx)$ et puisque pour tout $x \in D_\beta$ $Vx \neq o$, $x^t\ Vx$ est strictement positif sur D_β par conséquent :

$$P\left[c\ x < u\right] = P\left[\frac{c^t x - c^{ot}x}{\sqrt{x^t\ Vx}} < \frac{u - c^{ot}x}{\sqrt{x^t\ Vx}}\right]$$

$\dfrac{c^t x - c^{ot} x}{\sqrt{x^t Vx}}$ étant une variable aléatoire normale centrée réduite de loi N(0,1), sa fonction de répartition est strictement croissante et on maximise Q(x,u) en maximisant $(u - c^{ot}x)(x^t Vx)^{-\frac{1}{2}}$ et tout programme optimal de P.II.5a :

$\text{Sup}\{(u - c^{ot}x)(x^t Vx)^{-\frac{1}{2}} \mid A'x + b' \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ est un programme optimal de P.II.5 : $\text{Sup}\{P\left[c^t x < u\right] \mid A'x + b' \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ et vice versa.

<u>Remarques</u> : le problème P.II.5a est un problème de programmation non linéaire, la fonction $x \longrightarrow (u - c^{ot}x)(x^t Vx)^{-\frac{1}{2}}$ n'est d'ailleurs pas concave, d'autre part il est difficile de faire à priori un choix convenable du niveau u et il serait intéressant de déterminer <u>pour toute valeur de u</u> :

1) <u>le programme de risque minimal au niveau u du P.L.S. : $\hat{x}(u)$</u>

2) la fonction $u \longrightarrow q = \text{Sup}\{P\left[c^t x < u\right] \mid x \in D_\beta\}$ ce calcul ne peut guère être envisagé en utilisant le programme non linéaire P.II.5a, cependant on peut remarquer une certaine analogie entre les modèles MII4 et MII5, les résultats qui vont maintenant suivre permettront de la préciser, et seront la base d'un algorithme de résolution du problème P.II.5.

<u>Comparaison des modèles MII4 et MII5.</u>

Les hypothèses H2, H3 et H4 : $\inf\{c^{ot}x \mid x \in D_\beta\}$ admet une solution finie étant supposées vérifiées considérons les deux problèmes :

1- Déterminer la fonction :

$$t \longrightarrow f = \inf\{g \mid P\left[c^t x < g\right] = t,\ x \in D_\beta\}$$

2- Déterminer la fonction :

$u \longrightarrow q = \text{Sup}\{P\left[c^t x < u\right] \mid x \in D_\beta\}$ et montrons que <u>pour tout t de l'intervalle</u> $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ <u>les fonctions</u> $t \longrightarrow f$, $u \longrightarrow q$ <u>sont réciproques</u>.

<u>**Proposition 3.4.5.2.**</u> : <u>Si t appartient à l'intervalle</u> $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ <u>alors le problème</u>

$$f = \inf\{g \mid P\left[c^t x < g\right] = t,\ x \in D_\beta\}$$ <u>possède une solution finie</u>.

En effet d'après la proposition 3.4.5.1 on minimise g en minimisant $c^{ot}x + N^{-1}(t)\sqrt{x^t\ Vx}$ soit $x^*(\frac{1}{2})$ tel que $c^{ot}\ x^*(\frac{1}{2}) = \inf\{c^{ot}x \mid x \in D_\beta\}$; d'après H4 : $x^*(\frac{1}{2})$ existe et de plus pour tout x élément de D_β : $c^{ot}x \geqslant c^{ot}\ x^*(\frac{1}{2})$ ce qui implique puisque $N^{-1}(t) \geqslant o$ et $x^t\ Vx \geqslant o$: pour tout x élément de D_β : $c^{ot}x + N^{-1}(t)\sqrt{x^t\ Vx} \geqslant c^{ot}\ x^*(\frac{1}{2})$ et pour tout t : $\frac{1}{2} \leqslant t < 1$, le problème $\inf\{c^{ot}x + N^{-1}(t)\sqrt{x^t\ Vx} \mid x \in D_\beta\}$ admet une solution finie, il en sera donc de même de :

$$\inf\{g \mid P\left[c^t x < g\right] = t,\ x \in D_\beta\}$$

<u>**Proposition 3.4.5.3.**</u> : <u>pour tout t :</u> $\frac{1}{2} \leqslant t < 1$, <u>les fonctions</u> $t \longrightarrow f$ <u>et</u> $u \longrightarrow q$ <u>sont réciproques</u>.

En effet si $\lambda = N^{-1}(t) \geqslant o$, $f = \inf\{c^{ot}x + \lambda\sqrt{x^t\ Vx} \mid x \in D_\beta\}$ et $\gamma = \text{Sup}\{\frac{f - c^{ot}x}{\sqrt{x^t\ Vx}} \mid x \in D_\beta\}$, montrons que $\lambda = \gamma$.

Par définition de f, pour tout x appartenant à D_β : $f \leqslant c^{ot}x + \lambda \sqrt{x^t\ Vx}$

Soit $\lambda \geqslant \frac{f - c^{ot}x}{\sqrt{x^t\ Vx}}$ et donc $\lambda \geqslant \mathrm{Sup}\left\{\frac{f - c^{ot}x}{\sqrt{x^t\ Vx}} \mid x \in D_\beta\right\}$ et par conséquent $\lambda \geqslant \gamma$.

Supposons $\lambda > \gamma$ alors par définition de γ :

pour tout x de D_β : $\frac{f - c^{ot}x}{\sqrt{x^t\ Vx}} \leqslant \gamma$ ce qui implique :

(1) pour tout x de D_β, $c^{ot}x + \gamma \sqrt{x^t\ Vx} \geqslant f$ et d'après la proposition 3.4.5.3. il existe $x^*(t)$ appartenant à D_β tel que :

$c^{ot}\ x^*(t) + \lambda \sqrt{x^*(\overset{t}{t})V\ x^*(t)} = f$ et si $\gamma < \lambda$ comme $x^{t*}(t)\ V\ x^*(t) > o$ on aurait : $c^{ot}\ x^*(t) + \gamma \sqrt{x^*(\overset{t}{t})\ V\ x^*(t)} < f$ ce qui contredit (1) et donc $\gamma \geqslant \lambda$ soit finalement $\gamma = \lambda$ ce qui achève la démonstration.

On a immédiatement comme corollaire :

<u>**Corollaire**</u> : <u>si pour tout</u> t : $\frac{1}{2} \leqslant t < 1$, <u>$X^*(t)$ est le sous-ensemble optimal du problème</u> : $f = \inf\left\{g \mid \mathrm{Prob}\left[c^tx < g\right] = t,\ x \in D_\beta\right\}$ <u>et $X^{**}(f)$ est le sous-ensemble optimal du problème</u> $\mathrm{Sup}\left\{\mathrm{Prob}\ c^tx < f \mid x \in D_\beta\right\}$ <u>alors $X^*(t) = X^{**}(f)$</u>.

<u>**Application**</u> :

Soit u un nombre réel tel qu'il existe x appartenant à D_β : $\mathrm{Prob}\left[c^tx < u\right] \geqslant \frac{1}{2}$. Si les hypothèses précédentes sont vérifiées on peut déterminer la solution du problème

P.II.5 : $\mathrm{Sup}\left\{\mathrm{Prob}\left[c^tx < u\right] \mid A'x + b' \leqslant o,\ x \geqslant o\right\}$ en calculant la solution optimale du problème P.II.4 pour des valeurs successives du paramètre t et en procédant par dichotomie.

Exemple :

D_β est le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^6$ ensemble des x de composantes x_i $i = 1, 2, \ldots 6$ tels que :

$$x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots 6$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \geqslant 5.0$$

$$2\, x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 \leqslant 10.0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 20.0$$

$$x_2 + 2\, x_3 + x_4 - x_5 + 3\, x_6 \leqslant 30.0$$

$$c^o = (-4.0,\ -2.0,\ -1.0,\ 3.0,\ 5.0,\ -2.0)$$

$$V = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 2.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$\left(c : \text{vecteur aléatoire gaussien } N(c^o, V)\right)$.

Si $u = -6.0$ on obtient en approchant u par dichotomie.

$$\hat{x}_1 = 2.6974237$$
$$\hat{x}_2 = 0.0$$
$$\hat{x}_3 = 2.5100693$$
$$\hat{x}_4 = 0.0$$
$$\hat{x}_5 = 0.0$$
$$\hat{x}_6 = 0.20749415 \quad \text{et}$$

$$P\left[c^t \hat{x} < -6.0\right] = 0.950561$$

CONCLUSIONS.

Lorsque la structure économique du problème permet de définir un ordre total sur l'ensemble des situations : S, il est naturel d'employer la théorie générale de "l'Utilité" en remarquant que le concept "d'Utilité vectorielle" définie comme homomorphisme de S dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$ ordonné lexicographiquement est particulièrement bien adapté à la programmation avec contraintes. Définir un préordre sur l'ensemble des décisions revient alors à définir une relation de préférence sur l'espace des lois de probabilité du vecteur aléatoire Utilité. Le critère de l'espérance mathématique, le plus couramment employé définit le modèle de décision MI.

Lorsque "l'information" est insuffisante pour ordonner totalement l'ensemble des situations S, on peut cependant construire un modèle de décision : MII basé sur le concept des "domaines de confiance" en traitant séparément le caractère aléatoire des contraintes de celui de la variable aléatoire coût.

Du point de vue pratique, nous avons vu que certains des modèles du type MI ou MII conduisaient à une recherche très simple de la décision optimale (MI2a, MI2b, MII1) obtenue en résolvant un programme linéaire classique. A l'opposé de ceux-ci certains modèles beaucoup plus élaborés conduisent à des problèmes de programmation non linéaire dont la résolution peut s'avérer très délicate.

Entre ces deux extrêmes, il existe un certain nombre de modèles qui permettent de formuler correctement le problème de décision et dont la solution est accessible en résolvant un programme quadratique ou semi quadratique, (MI2, MII2, MII3, MII4, MII5).

Ce caractère quadratique ou semi quadratique du problème provenant :

de l'introduction de la variance comme caractéristique des variables aléatoires traitées, ou dans certains cas du caractère gaussien de ces variables.

Enfin, il semble très utile d'améliorer les méthodes de résolution des problèmes de programmation non linéaire, les progrés effectués dans cette voie permettront d'agrandir le champ de résolution effective des problèmes de décision en P.L.S.

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE A LA DEUXIEME PARTIE.

[14] BEALE. E.M.L., "The use of quadratic programming in stochastic linear programming" (Rand Co. Paper P 2404 Aug 15. 1961).

[15] BEREANU., "Programme de risque minimal en programmation linéaire stochastique" (Note transmise par M. Raoul Levy).

[16] CHARNES. A., COOPER. W., "Chance constrained programming" (Mgt. Sc. Vol 6, 1959).

[17] CHARNES. A., COOPER. W., SYMONDS., "Cost Horizons and certainty equivalents : an approach to stochastic programming of Heating oil production" (Mg. Sc. Vol 4, N°3, 1958).

[18] CHARNES. A., COOPER. W., THOMPSON., "Programming and related approaches to cost effectiveness".

[19] CHIPMAN., "The fondations of utility" (Econometrica 1960. 28 p 193-224).

[20] DANTZIG. G.B., "Linear programming under uncertainty" (Man. Sc. 1955).

[21] DANTZIG. G.B., RERGUSON., "Allocation of Aircraft under incertain demand" (Man. Sc. 1956).

[22] DANTZIG. G.B., MADAWSKY. A., "On the solution of "two stage" linear programming under uncertainty" (Rand-Report. R.M. 2751. 1961).

[23] FREUND. R.J., "Introduction of risk into a programming model" (Econometrica 24, 1956).

[24] KATAOKA. S., "A stochastic programming model" (Econometrica Vol 31, 1963).

[25] MADANSKY. A., Inequalities for stochastic linear programming problems" (Man. Sc. Vol 6, 1960).

[26] MADANSKY. A., "Bounds of expectation of a convex function of a multivariate raudom variable" (Rand. co).

[27] MADANSKY. A., "Linear programming under uncertainty" (Recent advances in Mathematical programming 1963).

[28] MARKOWITZ., "Portfolio selection, an efficient diversification of investinents".

[29] REITERS. S., "Surrogates for incertain decision problems. Minimal information for decision waking".

[30] SAMIRENDRA. M.S., "Stochastic programming" (O.P. Book Thesis University of California 1963).

[31] SZWARC., "The transportation problem with stochastic demand" (Man. Sc. 1964, N°11).

[32] THEIL., "Some reflexions on static programming under uncertainty" (Intern. Center for Man. Sc. Rep N°6013, 1960).

[33] WETS. R., "Programming under uncertainty".

[34] WILLIAMS. A.C., "A stochastic transportation problem" (O.R. 11. 1963).

Troisième partie

ALGORITHMES ET PROGRAMMES ALGOL

C H A P I T R E I

ALGORITHMES DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE ET SEMI QUADRATIQUE

1.1- L'ALGORITHME DE WOLFE DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE.

1.1.1. : Définition et Préliminaires.

Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, A(m×n) ; b(m×1) des matrices réelles.

Les contraintes du problème sont :

$$(1)\quad x_j \geqslant o \quad j = 1, 2,\dots n \; ; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad (i = 1, 2,\dots m)$$

Soit c(n×1) une matrice réelle et Q(n×n) une matrice réelle symétrique définie positive ou nulle, le problème de programmation quadratique sera défini par : Déterminer pour λ nombre positif donné la solution si elle existe de :

$$\text{PQ} \qquad (2) \qquad \inf\left\{f(\lambda,x) = \lambda\, c^t x + \frac{1}{2}\, x^t\, Qx \;\middle|\; \begin{matrix} x \geqslant o \\ Ax = b \end{matrix}\right\}$$

On note que ce problème se présente dans un nombre de problèmes plus généraux tels que :

- Problèmes de décision en P.L.S. (voir $2^{ème}$ partie)

- Programmes convexes (approximation par des fonctions de type quadratique).

- Théorie de l'approximation (moindres carrés avec contraintes).

- Programmes semi quadratiques etc...

L'algorithme de résolution de ce problème, proposé par Wolfe [34] est analogue à celui du simplexe utilisé en programmation linéaire. Il se présente sous deux formes suivant que l'on veuille déterminer la solution pour λ fixé ou pour tout $\lambda \geqslant o$.

	forme I	forme II
conditions	$\lambda = o$ ou Q définie positive strictement	Q définie positive ou nulle
Solution obtenue pour :	λ fixé	tout $\lambda \geqslant o$
taille du programme linéaire équivalent	m + n équations m + 3n variables	m + n équations m + 3n + 1 variables
Estimation du nombre de changements de base	2(m+n)	4(m+n)

1.1.2. : **Théorème fondamental**. voir [34] pour sa démonstration.

Si $x \geqslant o$ et $Ax = b$ et s'il existe un vecteur $v(n\times 1)$, $v \geqslant o$ et $u(m\times 1)$ tel que :

(3) $v^t x = o$

(4) $Qx - v + A^t u + \lambda c = o$ alors x est la solution du problème (2)

[(3) et (4) représentent les conditions de Kuhn et Tucker de (2)].

1.1.3. : Description de l'algorithme.

(1) forme I.

a) Si z_1, z_2 et w sont des vecteurs ayant respectivement n, n et m composantes on débute avec l'ensemble des contraintes :

(5) $Ax \qquad\qquad + w = b$

(6) $Qx - v + A^t u + z^1 - z^2 = - \lambda c$

(7) $x, v, z^1, z^2, w \geqslant o$

Comme $b \geqslant o$ (on peut toujours avoir $b \geqslant o$ sans perte de généralité) ; une base initiale du système peut être formée à partir des vecteurs w, z^1, z^2, on utilise alors la méthode du simplexe pour minimiser Σw_i en gardant $v = o$ et $u = o$ (première phase).

b) Au cours de la seconde phase, si le polyèdre défini par (1) n'est pas vide on minimise la forme linéaire (8) : $\Sigma z_i^1 + \Sigma z_i^2$ avec la condition : pour $k = 1, 2,\dots n$, si x_k est dans la base on n'admet pas v_k et vice versa.

La forme (8) doit s'annuler en au plus $\binom{3n}{n}$ itérations et d'après le théorème fondamental la base terminale est la solution optimale (on peut montrer que l'on peut toujours à chaque changement de base satisfaire la condition $v^t x = o$).

(2) <u>forme II</u>.

Ayant procédé au calcul de la solution optimale par la forme I pour $\lambda = o$, on considère le système :

$$Ax = b$$

$$Qx - v + A^t u + \mu c = o \;;\; \mu,\, x,\, v \geqslant o$$

c) La base terminale de la phase 2 (forme I) servant de base de départ on minimise alors la forme linéaire $-\mu$ en conservant toujours la relation d'exclusion $V^t x = o$.

Si pour $\mu = o$ on ne peut faire de changement de base alors il existe x tel que $f(\lambda,x) \to -\infty$ pour tout $\lambda > o$.

Dans le cas contraire on définit une suite finie de nombres : $o = \mu_o < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{kmax}$ et de vecteurs : $x^o, x^1, x^2, \ldots\, x^{kmax}, x^\infty$ tels que :

$$1 - \quad \mu_k < \lambda < \mu_{k+1} \text{ alors : } x = \frac{\mu_{k+1} - \lambda}{\mu_{k+1} - \mu_k}\, x^k + \frac{\mu - \mu_k}{\mu_{k+1} - \mu_k}\, x^{k+1}$$

$$2 - \quad \lambda > \mu^{kmax} \text{ alors : } x = x^{kmax}\,(\lambda - \mu_{kmax})\, x^\infty$$

Le programme quadratique correspondant à la forme II de l'algorithme de Wolfe est écrit en ALGOL (Voir chapitre II).

1.1.4. : <u>Exemple</u>.

P est le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^6$, ensemble des x de composantes $x_i \quad i = 1, 2, \ldots 6$ tels que :

$$x_i \geqslant o \quad i = 1, 2, \ldots 6$$

(1) $\quad 4\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 - 5\,x_5 + 6\,x_6 \geqslant 2$

(2) $\quad x_1 - 3\,x_2 - 4\,x_3 + 5\,x_4 - x_5 + 2\,x_6 \geqslant 13$

(3) $\quad 3\,x_1 + 7\,x_2 + x_3 - 2\,x_4 + x_5 - 9\,x_6 \geqslant 7$

(4) $\quad 5\,x_1 - 3\,x_2 + 8\,x_3 - 4\,x_4 + 6\,x_5 + x_6 \geqslant o$

on minimise :

$$f(\lambda,x) = -\lambda\,(x_1 + 3\,x_2 + 7\,x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 + 8\,x_6) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} x_i^2$$

Résultats :

λ	0.0	0.0551771	0.1913644	0.7480801	MU =	0.05568358
F	3.0247050	2.0703429	- 0.9568486	- 35.959548		
x_1	1.3207978	1.2316863	0.7441067	1.6513060	x_1^∞ =	0.11213520
x_2	1.3255160	1.4455872	1.9840462	4.3517669	x_2^∞ =	0.29877116
x_3	0.0	0.0	0.7423605	5.5376362	x_3^∞ =	0.40860228
x_4	1.4666100	1.3909477	1.6102072	3.1382494	x_4^∞ =	0.24078345
x_5	0.4698765	0.5390331	0.3265339	1.7972357	x_5^∞ =	0.13018439
x_6	0.419740	0.5079231	0.7743472	3.2749623	x_6^∞ =	0.27611372

1.2- ALGORITHME DE PROGRAMMATION SEMI QUADRATIQUE.

1.2.1. : Définitions et hypothèses.

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent on définit le problème de programmation semi quadratique (PSQ) comme étant le problème d'optimisation suivant

$$\text{PSQ} \quad (1) \quad F(\lambda) = \inf\left\{f(\lambda,x) = c^t x + \lambda\, (x^t\, Qx)^{\frac{1}{2}} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \geqslant o \\ Ax + b \leqslant o \end{array}\right\}$$

Nous ferons les hypothèses

H1 : $P = \{x \in \mathbb{R}^n \; x \geqslant o,\ Ax + b \leqslant o\}$ non vide.

H2 : pour tout x appartenant à P : $x^t\, Qx > o$ équivalente à : pour tout x appartenant à P : $Qx > o$.

H3 : le problème $\inf\{c^t x \mid Ax + b \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ a une solution optimale finie : x^o.

On se propose de rechercher pour toute valeur du paramètre $\lambda \geqslant o$, le programme optimal $x(\lambda)$ et la fonction $\lambda \longrightarrow F$.

Les hypothèses H1 et H3 sont suffisantes pour que le problème admette une solution finie. En effet :

Proposition 1.2.1. : pour tout $\lambda \geqslant o$, le problème PSQ admet une solution optimale finie.

Conduisons la démonstration par l'absurde et supposons qu'il existe x^1 tel que :

$c^t\, x^1 + \lambda\, (x^1\, Q\, x^1)^{\frac{1}{2}} < c^t\, x^o$ alors λ étant positif ou nul, $c^t\, x^1 < c^t\, x^o$ et x^1 serait un programme optimal de $\inf\{c^t x \mid Ax + b \leqslant o,\ x \geqslant o\}$ tel que $c^t\, x_1 < c^t\, x^o$ ce qui est absurde par définition de x^o.

La méthode utilisée ici s'inspire de l'algorithme proposé par S. Kataoka [22] et n'en diffère que dans sa phase finale.

1.2.2. : Conditions de Kuhn et Tucker du programme PSQ.

La fonction à minimiser étant convexe (Q définie positive ou nulle), les contraintes étant linéaires, il existe un minimum qui satisfait les conditions de Kuhn et Tucker suivantes [22]. Il existe x appartenant à $\mathbb{R}^n$ et u appartenant à $\mathbb{R}^m$ tels que :

$$(2) \qquad x \geqslant o,\ u \geqslant o$$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\, u_i + c_j + \lambda\, (x^t\, Qx)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} Q_{ij}\, x_i \begin{cases} \geqslant o \text{ si } x_j = o \\ = o \text{ si } x_j > o \end{cases}$$

pour $j = 1, 2, \ldots n$

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j + b_i \begin{cases} \leqslant o \text{ si } u_i = o \\ = o \text{ si } u_i > o \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

ces conditions sont nécessaires et suffisantes à l'optimum.

1.2.3. : Programme quadratique associé.

Pour résoudre le programme PSQ considérons le programme quadratique associé :

$$PQ\ (R) : \inf\left\{c^t x + \frac{\lambda}{2R} x^t Qx \;\middle|\; \begin{matrix} x \geqslant o \\ Ax + b \leqslant o \end{matrix}\right\}$$

où R est un paramètre strictement positif on a alors :

Proposition 1.2.3.1. [22] : si $\hat{x}(R)$ est la solution du programme PQ(R) et satisfait la condition $R = \sqrt{\hat{x}^t(R)\, Q\, \hat{x}(R)}$ alors $\hat{x}(R)$ est aussi la solution du problème PSQ et réciproquement.

En effet, écrivons les conditions de Kuhn et Tucker du problème PQ(R) :

Il existe des vecteurs x appartenant à $\mathbb{R}^n$ et u appartenant à $\mathbb{R}^m$ tels que :

$$(2)' \quad x \geqslant o,\ u \geqslant o$$

$$(3)' \quad \sum_{i=1}^{n} A_{ij} u_i + c_j + \frac{\lambda}{R} \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} x_i \begin{cases} \geqslant o \text{ si } x_j = o \\ = o \text{ si } x_j > o \end{cases}$$

pour $j = 1, 2, \ldots n$

$$(4)' \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j + b_i \begin{cases} \geqslant o \text{ si } u_i = o \\ = o \text{ si } u_i > o \end{cases}$$

pour $i = 1, 2, \ldots m$.

Si $R = \sqrt{\hat{x}^t(R)\ Q\ \hat{x}(R)}$ alors les conditions (2)', (3)', (4)' sont respectivement équivalentes aux conditions (2) (3) (4) du problème PSQ ; inversement pour toute solution optimale du problème PSQ : x^* en posant $R = \sqrt{x^{*t}\ Q\ x^*}$ x^* satisfait aux conditions (2)', (3)' et (4)' du problème PQ(R).

<u>Considérons alors le programme quadratique paramètrique PQP'(μ)</u> :

$$\inf\{c^t x + \frac{\mu}{2} x^t\ Qx \mid x \geqslant o,\ Ax + b \leqslant o\}$$

la solution optimale $x(\mu)$ existe toujours (même démonstration que pour la proposition 1.2.1).

On a :

<u>Proposition 1.2.3.2.</u> : <u>si $x(\mu)$ est la solution optimale du programme PQP'(μ) alors $x(\mu)$ est aussi la solution optimale du problème PSQ pour la valeur du paramètre λ égale à $\mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$</u>.

En effet si $\lambda = \mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$, $x(\mu)$ est par définition solution du problème :

$$\inf\{c^t x + \frac{\mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}}{2R} x^t\ Qx \mid x \geqslant o,\ Ax + b \leqslant o\}$$

pour $R = \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$ et d'après la proposition 1.2.3.1 c'est aussi la solution du problème :

$$\inf\{c^t x + \mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}\ (x^t\ Qx)^{\frac{1}{2}} \mid x \geqslant o,\ Ax + b \leqslant o\}.$$

Pour déterminer la solution optimale du problème PSQ pour tout $\lambda \geqslant 0$, il est donc nécessaire que le domaine de variation de la fonction $\mu \geqslant 0 \longrightarrow \lambda = \mu \sqrt{x^t\ Qx}$ soit l'intervalle $[0, \infty[$. D'après H2, cette condition est vérifiée en effet :

<u>Lemme 1</u> : <u>La fonction $\mu \longrightarrow \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$ est monotone non croissante</u>.

En effet soient x^1 et x^2 les solutions optimales respectives des programmes PQP'(μ_1) et PQP'(μ_2) on a alors les inégalités :

$$(5) \quad c^t\ x^1 + \frac{\mu_1}{2}\ x^{1t}\ Q\ x^1 \leqslant c^t\ x^2 + \frac{\mu_1}{2}\ x^{2t}\ Q\ x^2$$

$$(6) \quad c^t\ x^2 + \frac{\mu_2}{2}\ x^{2t}\ Q\ x^2 \leqslant c^t\ x^1 + \frac{\mu_2}{2}\ x^{1t}\ Q\ x^1$$

en ajoutant membre à membre nous obtenons :

$$(7) \quad \frac{\mu_1}{2}\left[x^{1t}\ Q\ x^1 - x^{2t}\ Q\ x^2\right] + \frac{\mu_2}{2}\left[x^{2t}\ Q\ x^2 - x^{1t}\ Q\ x^1\right] \leqslant 0$$

Soit $(\mu_1 - \mu_2)\ (x^{1t}\ Q\ x^1 - x^{2t}\ Q\ x^2) \leqslant 0$ et donc si $\mu_1 < \mu_2$ alors $x^{1t}\ Q\ x^1 \geqslant x^{2t}\ Q\ x^2$ et la fonction $\mu \longrightarrow x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)$ est monotone non croissante, il en sera donc de même de $\mu \longrightarrow \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$.

<u>Lemme 2</u> : <u>La fonction $\mu \longrightarrow \lambda = \mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$ est continue non décroissante</u>.

En effet pour tout $\mu \geqslant 0$ l'application $\mu \longrightarrow \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$ est continue puisque $\mu \longrightarrow x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)$ est continue, il en sera donc de même de $\mu \longrightarrow \mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$.

Pour montrer la non décroissance, conduisons la démonstration par l'absurde et supposons qu'il existe deux nombres μ_1 et μ_2 : $o \leq \mu_1 < \mu_2$ tels que si x^1 et x^2 sont les solutions optimales respectives des problèmes PQP'(μ_1) et PQP'(μ_2) on ait $\mu_1 \sqrt{x^{1t} Q x^1} > \mu_2 \sqrt{x^{2t} Q x^2}$.

D'après la proposition 3, x^1 et x^2 sont respectivement les solutions optimales du problème PSQ pour $\lambda_1 = \mu_1 \sqrt{x^{1t} Q x^1}$ et $\lambda_2 = \mu_2 \sqrt{x^{2t} Q x^2}$ et donc

$$(8) \quad c^t x^1 + \lambda_1 \sqrt{x^{1t} Q x^1} \leq c^t x^2 + \lambda_1 \sqrt{x^{2t} Q x^2}$$

$$(9) \quad c^t x^2 + \lambda_2 \sqrt{x^{2t} Q x^2} \leq c^t x^1 + \lambda_2 \sqrt{x^{1t} Q x^1}$$

en ajoutant membre à membre il vient

$(\lambda_1 - \lambda_2)\,(\sqrt{x^{1t} Q x^1} - \sqrt{x^{2t} Q x^2}) \leq o$ l'hypothèse $\lambda_1 > \lambda_2$ implique d'après (9)

(10) $\sqrt{x^{1t} Q x^1} - \sqrt{x^{2t} Q x^2} \leq o$, mais d'après le lemme 1 :

$\mu_1 < \mu_2 \Longrightarrow$ (11) $\sqrt{x^{1t} Q x^1} \geq \sqrt{x^{2t} Q x^2}$ et en rapprochant (10) et (11) on aurait :

$\sqrt{x^{1t} Q x^1} = \sqrt{x^{2t} Q x^2} > o$ d'après H_2, et puisque

$\mu_1 < \mu_2$: $\lambda_1 = \mu_1 \sqrt{x^{1t} Q x^1} < \lambda_2 = \mu_2 \sqrt{x^{2t} Q x^2}$ d'où la contradiction.

<u>**Proposition 1.2.3.3.**</u> : <u>le domaine de variation de la fonction $\mu \longrightarrow \lambda = \mu \sqrt{x^t(\mu)\, Q\, x(\mu)}$ est pour $\mu \geq o$ la demi droite réelle $\lambda \geq o$.</u>

<u>**Démonstration**</u> : pour $\mu = o$, $\lambda = o$ et d'après le lemme 2, $\mu \longrightarrow \mu \sqrt{x^t(\mu)\, Q\, x(\mu)}$ est continue et non décroissante il suffit donc de montrer que $\lim_{\mu\to\infty} \mu \sqrt{x^t(\mu)\, Q\, x(\mu)} = +\infty$ montrons plus précisément que pour tout $\mu \geq o$: $\mu \sqrt{x^t(\mu)\, Q\, x(\mu)} \geq \mu c$ c étant une constante positive.

En effet d'après H2 pour tout x : élément du polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant o \quad Ax + b \leqslant o\}$: $x^t\, Qx > o$ alors si :
$x(\infty) = \inf^{-1}\{x^t\, Qx \mid x \geqslant o,\ Ax + b \leqslant o\}$ on a $x^t(\infty)\, Q\, x(\infty) > o$ et en posant $c = \sqrt{x^t(\infty)\, Q\, x(\infty)}$ on a bien le résultat annoncé.

Pour λ donné, on déterminera une solution optimale du problème PSQ lorsqu'on aura déterminé μ solution de l'équation :

$$(12) \qquad \lambda = \mu \sqrt{x^t_\mu\, Q\, x_\mu}$$

le théorème suivant montre que (12) est une équation en μ de degré deux au plus. En effet les résultats du §1 du présent chapitre permettent d'écrire :

Lemme : Il existe une suite finie de nombres $o < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots < \mu_i \leq \mu_{i+1} \ldots < \mu_k$ valeurs caractéristiques du paramètre et des vecteurs $x^1, x^2, \ldots x^i, \ldots x^k, x^\infty$ tels que pour tout $i = 1, 2, \ldots k$:

- x^i est la solution optimale de PQP'(μ_i)
- si $\mu \in [\mu_i, \mu_{i+1}]$ alors $x(\mu)$ solution optimale de PQP'(μ)

s'écrit : $x(\mu) = \dfrac{1}{\mu_{i+1} - \mu_i}\left[\dfrac{\mu_{i+1}}{\mu}(\mu - \mu_i)\, x^{i+1} + \dfrac{\mu_i}{\mu}(\mu_{i+1} - \mu)\, x^i\right]$

- Si $\mu > \mu_k$ alors $x(\mu) = \dfrac{1}{\mu}(\mu - \mu_k)\, x^\infty + \dfrac{\mu_k}{\mu}\, x^k$

  (x^∞ solution optimale de $\inf\{x^t\, Qx \mid x \geqslant o,\ Ax + b \leqslant o\}$

- Si $o \leqslant \mu < \mu_1$: $x(\mu) = x^1$

ce lemme n'est que, lorsque H2 est satisfaite la traduction des résultats de programmation quadratique paramétrique au cas où le paramétre μ apparaît comme facteur multiplicatif de $\frac{1}{2} x^t Qx$.

Désignons par $x_*(\lambda)$ une solution optimale de $PSQ(\lambda)$, et soit $\lambda_i = \mu_i \sqrt{x^{i} Q x^{i'}}$ $i = 1, 2, \dots k$ d'après le lemme 2 de la proposition 4 la suite des λ_i $i = 1, 2, \dots k$ est non décroissante ; on a alors :

Théorème 1.2.3.1. : pour tout $\lambda \geqslant o$ on a une des cinq éventualités suivantes :

1) $\lambda = \lambda_i < \lambda_{i+1}$: $x_*(\lambda) = x$

2) $\lambda = \lambda_i = \lambda_{i+1}$: le sous-ensemble optimal de $PSQ(\lambda)$ contient l'arête $[x^i, x^{i+1}]$

3) $o \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$: $x_*(\lambda) = x^1$

4) il existe i : tel que $\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$ alors $x_*(\lambda) = x(\mu)$ où μ est la solution unique de l'équation du second degré :

$$(13)\quad \lambda_{i+1}^2 (\mu - \mu_i)^2 + 2\, \mu_{i+1}\, \mu_i\, (\mu - \mu_i)\, (\mu_{i+1} - \mu)\, x^{i+1^t} Q\, x^i + \lambda_i^2 (\mu_{i+1} - \mu)^2 = \lambda^2 (\mu_{i+1} - \mu_i)^2$$

comprise dans l'intervalle $[\mu_i \quad {}_{i+1}]$.

5) $\lambda > \lambda_k$ alors $x_*(\lambda) = x(\mu)$ où μ est la solution unique de l'équation :

$$(14) : (\mu - \mu_k)^2\, x^{\infty t} Q\, x^{\infty} + 2\, \mu\, (\mu - \mu_k)\, x^{\infty t} Q\, x^k = \lambda^2 - \lambda_k^2$$ comprise dans l'intervalle $[\mu_k \ \infty[$.

<u>pour tout $\lambda \geqslant o$</u> $F(\lambda) = c^t x_*(\lambda) + \frac{\lambda^2}{\mu}$

<u>**Démonstration**</u> : la fonction $\mu \longrightarrow \mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x(\mu)}$ étant continue non décroissante telle que $\lim_{\mu\to\infty} \mu \sqrt{x^t(\mu)\ Q\ x^*(\mu)} = +\infty$ l'équation

(15) $\lambda = \mu \sqrt{x_*^t(\mu)\ Q\ x_*(\mu)}$ a toujours une solution pour $\lambda \geqslant o$. On a alors les éventualités suivantes :

1) <u>$\lambda = \lambda_i < \lambda_{i+1}$</u> alors par définition de λ_i, μ_i est la racine de l'équation (15) et donc d'après la proposition 12.3.2. $x_*(\lambda) = x(\mu_i) = x^i$.

2) <u>$\lambda = \lambda_i = \lambda_{i+1}$</u> alors x^i et x^{i+1} sont optimaux et la fonction $f(\lambda,x) = c^t x + \lambda \sqrt{x^t\ Qx}$ étant convexe, l'arête $[x^i,\ x^{i+1}]$ est optimale.

3) <u>$o \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$</u> alors $o \leqslant \mu \leqslant \mu_1$ et $x_*(\lambda) = x(\mu) = x^1$ (lemme).

4) <u>il existe i tel que $\lambda_i \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{i+1}$</u> et donc : $\mu_i < \mu < \mu_{i+1}$ dans cet intervalle :

$$x(\mu) = \frac{1}{\mu_{i+1} - \mu_i} \left[\frac{\mu_{i+1}}{\mu} (\mu - \mu_i)\ x^{i+1} + \frac{\mu_i}{\mu} (\mu_{i+1} - \mu)\ x^i \right]$$

et l'équation (15) devient après calculs :

$$\lambda_{i+1}^2 (\mu - \mu_i)^2 + 2\ \mu_{i+1}\ \mu_i\ (\mu - \mu_i)\ (\mu_{i+1} - \mu)\ x^{i+1^t}\ Q\ x^i + \lambda_i^2\ (\mu_{i+1} - \mu)^2 = \lambda^2\ (\mu_{i+1} - \mu_i)^2$$

qui n'admet qu'une seule racine comprise entre μ_i et μ_{i+1}, si μ est cette racine on a :

$x_*(\lambda) = x(\mu)$

5) $\underline{\lambda > \lambda_k}$ alors $\mu > \mu_k$ et d'après le lemme :

$$x(\mu) = \frac{1}{\mu}(\mu - \mu_k)\, x^{\infty} + \frac{\mu_k}{\mu}\, x^k$$

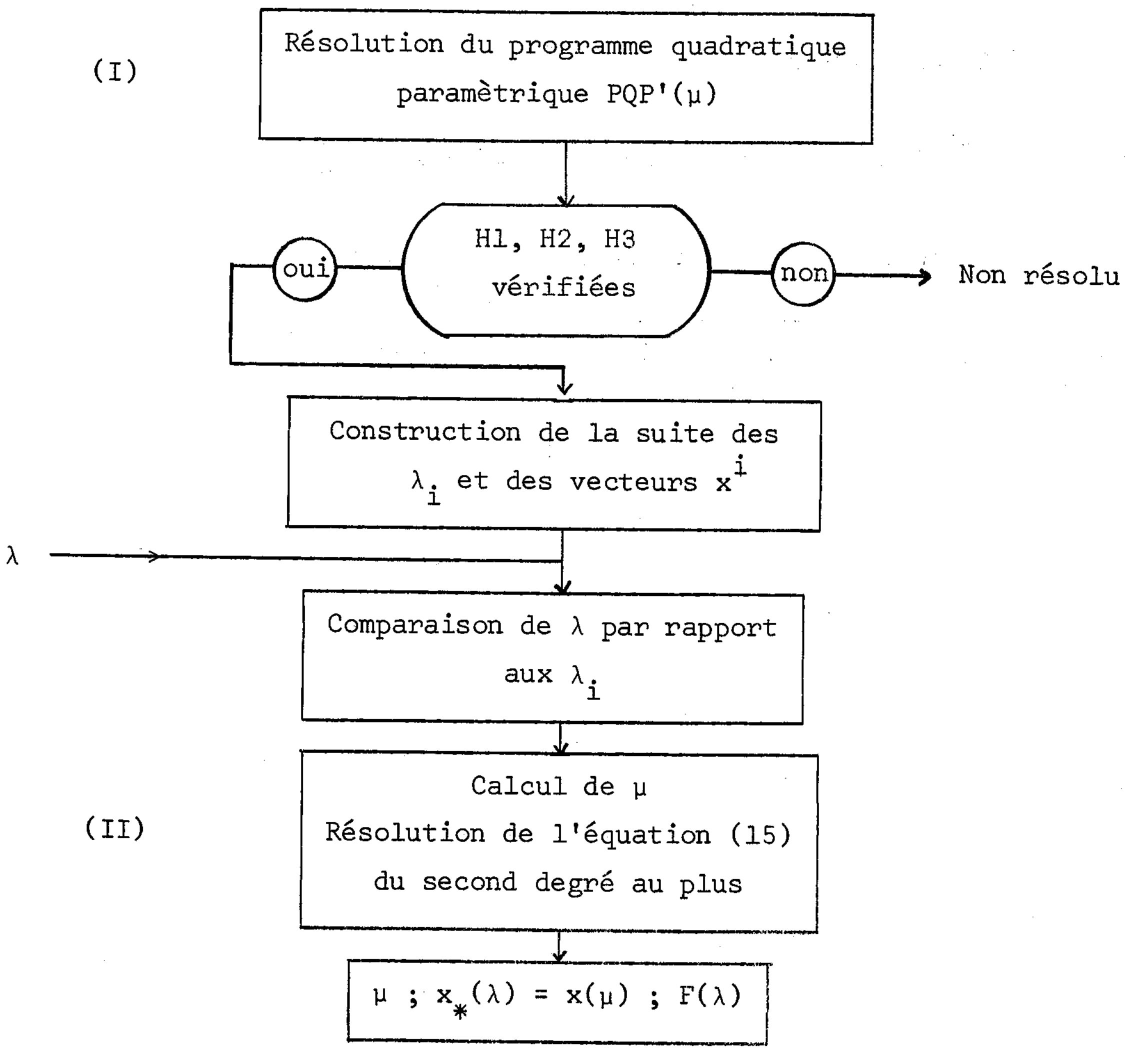
en reportant dans (15) on obtient :

$$(\mu - \mu_k)^2\, x^{\infty t}\, Q\, x^{\infty} + 2\,\mu\,(\mu - \mu_k)\, x^{\infty t}\, Q\, x^k = \lambda^2 - \lambda_k^2$$

équation qui n'admet qu'une seule racine supérieure à μ_k ; d'autre part :

$$F(\lambda) = c^t x_*(\lambda) + \lambda\sqrt{x^t(\mu)\; Q\; x(\mu)} = c^t x_*(\lambda) + \frac{\lambda^2}{\mu}$$

1.2.4. : Organigramme de résolution du problème PSQ(λ).



Remarque :

Si l'algorithme précédent est directement inspiré de celui de Kataoka [22], on note cependant qu'il diffère essentiellement par l'utilisation systématique dans la partie II (voir organigramme) du caractère "linéaire par morceaux" de la solution du problème PQP(μ) ; ce qui permet une fois ce problème résolu de déterminer très rapidement la solution optimale (résolution d'une équation du second degré), alors que Kataoka propose de résoudre (12) par un processus itératif.

L'algorithme proposé est donc plus particulièrement adapté à la résolution du problème PSQ(λ) pour un grand nombre de valeurs du paramètre λ au prix de la satisfaction de l'hypothèse H2 : Différenciabilité de la fonction $f(\lambda,x)$ sur tout le polyèdre convexe :

$\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; Ax + b \leqslant o, \; x \geqslant o\}$; condition plus forte que celle imposée par Kataoka :

$$\frac{d\left(\sqrt{x(R)\, Q\, \hat{x}(R)}\right)}{dR} \geqslant 1 \text{ pour un } R \text{ suffisamment petit.}$$

1.2.5. : Exemple.

P est le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^6$, ensemble des x de composantes x_i $i = 1, 2,\ldots 6$ tels que :

$$x_i \geqslant o \quad i = 1, 2,\ldots 6$$

$$(1) \qquad x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 + 2\,x_5 + x_6 \leqslant 15.0$$

$$(2) \qquad 4\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 - 5\,x_5 + 6\,x_6 \geqslant 2.0$$

$$(3) \qquad 3\,x_1 + 7\,x_2 + x_3 - 2\,x_4 + x_5 - 9\,x_6 \geqslant 7.0$$

$$(4) \qquad 5\,x_1 - 3\,x_2 + 8\,x_3 - 4\,x_4 + 6\,x_5 + x_6 \geqslant 0.0$$

$$(5) \qquad x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + 5\,x_4 - x_5 + 2\,x_6 \geqslant 13.0$$

On minimise :

$$f(\lambda,x) = -(x_1 + 3\,x_2 + 7\,x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 + 8\,x_6) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}\, x_i\, x_j \right)^{\frac{1}{2}} \text{ sur } P$$

avec :

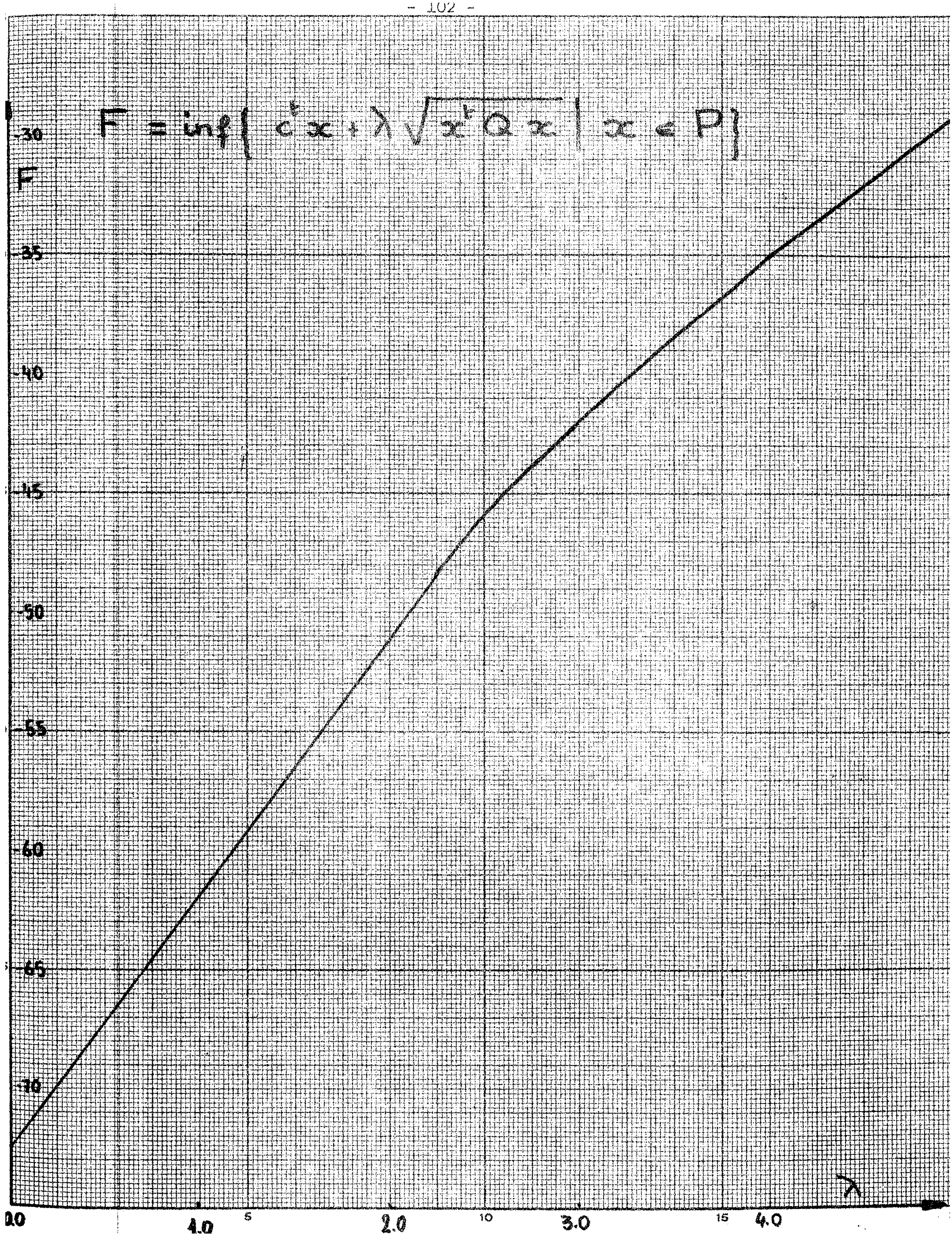
$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 2.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0.01 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

<u>Résultats</u> :

Pour $\lambda_i = i \times 0.5$ $i = 0, 1, 2 \ldots 10$ on obtient $x_5 = o$ pour tout $\lambda : o \leqslant \lambda \leqslant 5.0$ et :

λ	$F(\lambda)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
0.0	- 72.65308	0.0	1.8845366	5.4230034	5.8076908	0.0
0.5	- 67.32423	"	"	"	"	"
1.0	- 61.99538	"	"	"	"	"
1.5	- 56.66653	"	"	"	"	"
2.0	- 51.33768	"	"	"	"	"
2.5	- 46.16531	"	2.4822726	4.7422842	4.6454587	0.64752934
3.0	- 42.06980	"	3.2100916	3.9134232	3.2302953	1.4359777
3.5	- 38.48395	"	3.5526788	3.5232749	2.5641721	1.8071035
4.0	- 35.13127	"	3.7616726	3.2852668	2.1578067	2.0335072
4.5	- 32.01308	1.3433960	3.3793770	2.9183647	1.7443572	2.2350706
5.0	- 29.18719	2.389860	3.0570406	2.6605061	1.4700081	2.3654980

Graphe de la fonction $\lambda \longrightarrow F = \inf\{c^t x + \lambda \sqrt{x^t\ Qx} \mid x \in P\}$


$F = \inf\{ c^t x + \lambda \sqrt{x^t Q x} \mid x \in P \}$
F
-30
-35
-40
-45
-50
-55
-60
-65
-70
λ
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5
10
15

CHAPITRE II

PROGRAMMES ALGOL

On trouvera dans ce chapitre les programmes ALGOL de résolution des problèmes :

1 - De prévision : Procédure PREVIS. (Algorithme chapitre 1ère partie).

2 - De programmation quadratique paramétrique : PQP, par la méthode de Wolfe (algorithme en 3ème partie §1.1).

3 - De programmation semi quadratique : PSQ (algorithme et organigramme en 3ème partie §1.2).

4 - De décision : DECIS (modèle MII4 §3.3.4).

Le programme quadratique a été écrit en utilisant les procédures de base du simplexe écrites par Auslender [35]. Tous ces programmes ont été testés sur l'ordinateur 7044 du laboratoire de calcul de l'Université de Grenoble.

II.1- PROCEDURE PREVIS.

```
PROCEDURE PREVIS(A,B,N,PAS,EPSILON,Y,GAUSS,ISUP) ;
  VALEUR N,PAS,ISUP ;
 ENTIER N,ISUP ;
 REEL EPSILON,PAS ;
TABLEAU A,B,Y,GAUSS ;
DEBUT
REEL VSUP,VINF,V ;
   ENTIER I,J,ISTAR ;

PROCEDURE PROBABILITE(TETA1,FONCT1) ;
   REEL TETA1,FONCT1 ;
   DEBUT
REEL EPSI ;
SI TETA1 SUPEG MOY ALORS EPSI:=0
SINON DEBUT EPSI:=1 ;
  TETA1:=2*MOY-TETA1 FIN ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA ISUP FAIRE
SI TETA1 < Y[I] ALORS DEBUT
FONCT1:=GAUSS[I-1]+(TETA1-Y[I-1])*
(GAUSS[I]-GAUSS[I-1])/(Y[I]-Y[I-1]) ;
ALLERA  STOP
FIN SINON
DEBUT SI I=ISUP ALORS
DEBUT FONCT1:=1 ;
ALLERA  STOP FIN
FIN ;
STOP: FONCT1:=ABS(FONCT1-EPSI) FIN ;

PROCEDURE INVERSION(V1,ISTAR1) ;
   ENTIER ISTAR1 ;
   REEL V1 ;
   DEBUT
   REEL TETA,ALPHA,BETA,GAMMA,FONCT ;
   ENTIER K ;
TETA:=B[1] ;
      PROBABILITE(TETA,FONCT) ;
BETA:=FONCT ;
TETA:=B[N] ;
      PROBABILITE(TETA,FONCT) ;
ALPHA:=FONCT ;
SI V1 INFEG A[1] ALORS
   POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA ISTAR1 FAIRE
DEBUT
   SI V1 SUPEG A[K] ALORS
   DEBUT TETA:=B[K-1]+(B[K]-B[K-1])*(V1-A[K-1])/
      (A[K]-A[K-1]) ;
SAUTLIGNE ;
      PROBABILITE(TETA,FONCT) ;
```

```
BETA:=FONCT ; ALLERA  BIS
   FIN
      FIN ;
BIS: POUR K:=ISTAR1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   SI V1 INFEG A[K] ALORS
   DEBUT TETA:=B[K-1]+(B[K]-B[K-1])*(V1-A[K-1])/
      (A[K]-A[K-1]) ;
      PROBABILITE(TETA,FONCT) ;
   ALPHA:=FONCT ; ALLERA  STOPP
   FIN ;
STOPP: GAMMA:=ALPHA-BETA ;
  ECRIRE(V1,GAMMA)
FIN ;
VSUP:=VINF:=A[1] ; ISTAR:=1 ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT SI VSUP < A[I] ALORS VSUP:=A[I] ;
   SI VINF > A[I] ALORS
   DEBUT VINF:=A[I] ; ISTAR:=I
   FIN
FIN ;

SI PAS > EPSILON
ALORS
   DEBUT
    SAUTLIGNE ;
                V:=VINF ;
   ECRIRE( "    VARIABLE " , "       PROBA " ) ;
DEPART:
SI V SUPEG VSUP+0.1*PAS ALORS
ALLERA  ARRET
SINON
DEBUT
INVERSION(V,ISTAR) ;
V:=V+PAS ;
ALLERA  DEPART
FIN FIN
SINON ECRIRE( " NONRESOLU " ,PAS) ;
ARRET: FIN ;
```

II.2- PROGRAMME QUADRATIQUE PARAMETRIQUE : PQP.

```
DEBUT
ENTIER STA,STB ;
STB:=EDONNEE ;
POUR STA:=1 PAS 1 JUSQUA STB FAIRE
DEBUT SAUTPAGE ; HEURE ; ECRIRE( " PROBLEME " ,STA) ;
DEBUT REEL S,S1,RD1 ;
ENTIER M,N1,N3,K1,K2,L,L1,H,T,I,J,N,RD2,N5,K3,K4,K5 ;
LIRE(M,N,K1,K2,K3) ;
LIRE(K4,K5) ;
   T:=0 ; H:=(4*M+4*N)*(4*N+3*M+1) ;
DEBUT
TABLEAU A1[-2:M+N,-2:4*N+3*M+1],D1[-2:M+N] ;
  TABLEAU VE[1:N],QE[1:N,1:N] ;
ENTIER TABLEAU B1[-2:4*N+3*M+1],
   E1,G1[-2:M+N],F1[1:4*N+3*M+1] ;

   PROCEDURE SIMQUAD(M,N1,N3,N5,H,T,A,B,G,D,F,N) ;
   VALEUR M,N1,N3,N5,H,N ;
   ENTIER M,N1,N3,N5,H,T,N ;
   TABLEAU A,D ;
   ENTIER TABLEAU B,G,F ;
      DEBUT
         ENTIER AD,BETA,BD,I,J,K,EPSI,NC,ND ;
   ENTIER V,W ;
  V:=0 ; W:=0 ;
         TABLEAU X[1:M+N],BT[-2:4*N+2*M+1] ;
   REEL VALEUR,NORME1,NORME2,NORME3,
    NORME4,MAGUY ;

         PROCEDURE COMPARAISON1(AB1,BETA1,U1,S1,NA1,NB1) ;
         VALEUR S1,NA1,NB1 ;
         ENTIER AB1,BETA1,U1,S1,NA1,NB1 ;
      DEBUT
   REEL GAMMA1 ; GAMMA1:=-1.0Δ-7*NORME3 ;
      U1:=0 ;
         POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA NB1 FAIRE
         SI B[K] INFEG NA1 ALORS
      DEBUT
         SI A[S1,B[K]] < GAMMA1 ALORS
         DEBUT
         GAMMA1:=A[S1,B[K]] ;
         BETA1:=K ; AB1:=B[K]
         FIN SINON U1:=U1+1
      FIN
      FIN ;

   PROCEDURE ENTREE1(AD1,ALPHA1) ;
   ENTIER AD1,ALPHA1 ;
```

```
   DEBUT ENTIER S,U ;
S:=-2 ; COMPARAISON1(AD1,ALPHA1,U,S,N5,N+N3) ;
      SI U=N+N3 ALORS
      DEBUT
   SI D[-2] INFEG -1.0Δ-7*NORME4 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " POLYEDRE VIDE " ) ;
         ALLERA  ARRET
         FIN SINON
         DEBUT V:=0 ;
         POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
         SI G[I] > 4*N+2*M+1 ALORS
         V:=V+1 ;
         SAUTLIGNE ; ECRIRE( " VAR ARTIF1 " ,V) ;
         SAUTLIGNE ;
    ECRIRE
  ( "        NOITER " , "     FONCTART2 " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "        VECTENT " , "      VECTSORT " ) ;
   SAUTLIGNE ; ECRIRE(T,,-D[-1]) ;
         SI V ≠ 0 ALORS
      DEBUT SAUTLIGNE ; ECRIRE( " DEGENERE1 " ) ;
      FIN ;
      ALLERA  TETA2
         FIN
      FIN
      FIN ;

   PROCEDURE SORTIE1(X1,BD1) ;
      TABLEAU X1 ;
      ENTIER BD1 ;
      DEBUT
REEL DELTA1 ;
TABLEAU Y[1:M+N] ;
      ENTIER VS ;
      DELTA1:=5.0Δ8 ; VS:=0 ;
   SI T INFEG M+N ALORS MAGUY:=1.0Δ-5*NORME1
   SINON MAGUY:=1.0Δ-4 ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI X1[I] < MAGUY ALORS VS:=VS+1
         SINON
      DEBUT Y[I]:=D[I]/X1[I] ;
         SI Y[I] < DELTA1 ALORS
         DEBUT DELTA1:=Y[I] ; BD1:=I
         FIN
      FIN ;
      SI VS=M+N ALORS
         DEBUT SI EPSI=1 ALORS
            DEBUT SAUTLIGNE ;
            ECRIRE( " IMPOSSW " )
            FIN ;
      SI EPSI=2 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
```

```
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    ECRIRE(I,X1[I] ) ;
ECRIRE( " IMPOSSZ " )
         FIN ;
         SI EPSI=3 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
    POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI G[I]=F[AD] ALORS
      DEBUT
      BT[BETA]:=0  ;    ALLERA  PHASE2
        FIN ;
         ECRIRE( " SOLUTION INF " ) ;
   ECRIRE( " COORD " , " AR INF " ) ;
    ECRIRE( " MU= " ,-A[0,AD]) ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    SI G[I] INFEG N ALORS
     ECRIRE(         G[I],-X1[I] ) ;
         FIN ; ALLERA  ARRET
         FIN
      FIN ;

   PROCEDURE REDEFINITION(AC1,BC1,ETA1,NC1) ;
      ENTIER AC1,BC1,ETA1,NC1 ;
      DEBUT
   TABLEAU Z1[-2:M+N],Z2[-2:NC1] ;
         ENTIER COMPT ;
         REEL VD,PIVOT ;
         COMPT:=0 ; VD:=D[BC1] ;
         PIVOT:=A[BC1,AC1] ;
  POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      DEBUT Z1[I]:=A[I,AC1] ;
         SI  I ≠ BC1 ALORS
         DEBUT D[I]:=D[I]-Z1[I]*VD/PIVOT ;
      POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA NC1 FAIRE
      DEBUT Z2[J]:=A[BC1,J] ;
      A[I,J]:=A[I,J]-Z2[J]*Z1[I]/PIVOT
      FIN
      FIN
      FIN ;
      D[BC1]:=VD/PIVOT ;
      POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA NC1 FAIRE
      A[BC1,J]:=A[BC1,J]/PIVOT ;
      B[ETA1]:=G[BC1] ; G[BC1]:=AC1 ;
   SI EPSI=2 OU EPSI=3 ALORS
   DEBUT
  SI V ≠ 0 ET B[ETA1] > 4*N+2*M+1 ALORS  V:=V-1 ;
  SI W ≠ 0 ET B[ETA1] > 2*N+2*M+1 ALORS W:=W-1 ;
   SI V ≠ 0 ALORS ECRIRE( " VART1= " ,V) ;
   SI W ≠ 0 ALORS ECRIRE( " VART2= " ,W) ;
   FIN  ;
      T:=T+1 ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
```

```
      SI ABS(D[I]) < 5.0Δ-6 ALORS
      COMPT:=COMPT+1 ;
   SI EPSI ≠ 3 ALORS
     ECRIRE(T ,-D[-3+EPSI] ,COMPT, AC1,B[ETA1])  SINON
     ECRIRE(T , D[-3+EPSI] ,COMPT, AC1,B[ETA1]) ;
 SI EPSI ≠ 1 ALORS
  POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
  SI B[K] > NC1 ALORS
 DEBUT
 POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE  B[J]:=B[J+1] ;
  ND:=ND-1 ;         FIN ;
      SI EPSI=3 ALORS
      DEBUT SAUTLIGNE ;
    VALEUR:=0.0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    SI (G[I] INFEG N ET G[J] INFEG N) ALORS
    VALEUR:=VALEUR+D[I]*QE[G[I],G[J]]*D[J] ;
     VALEUR:=VALEUR/2.0  ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    SI G[I] INFEG N ALORS
    VALEUR:=VALEUR+D[0]*D[I]*VE[G[I]] ;
    ECRIRE( ,, " PARAMETRE= " ,+D[0], " FONCTECO= " ,VALEUR) ;
    SAUTLIGNE ;
   ECRIRE( " COORD OPTIMALES " ,, "        VALEUR " ) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI G[I] INFEG N ALORS
  ECRIRE(G[I],,D[I]) ;
      SAUTLIGNE ;
      SI T=H ALORS
      DEBUT SAUTLIGNE ;
      ECRIRE( " REINVERSER " ) ;
      ALLERA  ARRET
         FIN
FIN FIN ;

   PROCEDURE COMPARAISON2(AB2,BETA2,U2,S2,NA2,NB2) ;
      VALEUR S2,NA2,NB2 ;
      ENTIER AB2,BETA2,U2,S2,NA2,NB2 ;
      DEBUT REEL GAMMA2 ;
   GAMMA2:=(-1.0Δ-7)*( SI EPSI=2 ALORS NORME2 SINON
         NORME1 )* ( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON T/10.0 ) ;
  U2:=0 ;
      POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA NB2 FAIRE
 SI BT[K] =0 ALORS  U2:=U2+1 SINON
      DEBUT SI A[S2,BT[K]] < GAMMA2
         ALORS
         DEBUT GAMMA2:=A[S2,BT[K]] ;
      BETA2:=K ; AB2:=BT[K]
      FIN SINON U2:=U2+1
      FIN
      FIN ;
```

```
  PROCEDURE ENTREE2(AD2,ALPHA2) ;
  ENTIER AD2,ALPHA2 ;
  DEBUT
ENTIER SS,UU  ;
 REEL GAMMA3,GAMMA4 ;
     SS:=-3+EPSI ;
 GAMMA3:=(1.0Δ-7)*NORME3*( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON
 T/10.0) ;
 GAMMA4:=(1.0Δ-7)*NORME2*( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON
 T/10.0) ;
 SI V ≠ 0 ALORS
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA  ND FAIRE
SI A[-2,BT[K]] > GAMMA3 ALORS BT[K]:=0 ;
 SI W ≠ 0 ALORS
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA  ND FAIRE
SI A[-1,BT[K]] > GAMMA4 ALORS BT[K]:=0 ;
     COMPARAISON2(AD2,ALPHA2,UU,SS,NC,ND) ;
     SI UU=ND ALORS
        DEBUT
        SI EPSI=2 ALORS
DEBUT SI D[-1] < (-1.0Δ-7)*NORME4 ALORS
 DEBUT
SAUTLIGNE ; ECRIRE( " IMPOSSZ " , " OU NON RESOLU " ) ;
ECRIRE( " MATRICE " ) ; SAUTLIGNE ;
ECRIRE( " INDILIGNE " , " INDICOLON " , " VALEUR " ) ;
POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
    SI ABS(A[I,J]) > 5.0Δ-6 ALORS
ECRIRE(I,J,A[I,J]) ;
ECRIRE( " VECT DE BASE " ) ;
POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     ECRIRE(I,G[I],D[I]) ;
ECRIRE( " VECTEUR " , " INCOMPATIBLE " ) ;
ECRIRE( " INDICE1 " , " INDICE2 " ) ;
POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
SI F [J] ≠ 0 ALORS
        ECRIRE(J, , ,F [J]) ;
            ALLERA  ARRET
         FIN SINON
         DEBUT W:=0 ;
         POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     SI G[I] > 2*N+2*M+1 ALORS
     W:=W+1 ;
     SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " VAR ARTIF2 " ,W) ;
         SAUTLIGNE ;
   ECRIRE
  ( "         NOITER " , "      PARAMETRE " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "        VECTENT " , "       VECTSORT " ) ;
  ECRIRE(T,,-D[0]) ;
    VALEUR:=0.0 ;
```

```
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    SI (G[I] INFEG N ET G[J] INFEG N) ALORS
    VALEUR:=VALEUR+D[I]*QE[G[I],G[J]]*D[J] ;
     VALEUR:=VALEUR/2.0 ;
    ECRIRE( " PARAM=0 " , " FONCTECO= " ,VALEUR) ;
   ECRIRE( " COORD OPTIMALES " ,, "        VALEUR " ) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI G[I] INFEG N ALORS
  ECRIRE(G[I],,D[I])  ;
         SI W ≠ 0 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEGENERE2 " ) ;
      FIN ;
                  ALLERA  TETA3
      FIN
      FIN ;
         SI EPSI=3 ALORS
         DEBUT
   SI D[0] < (1.0△-7)*NORME4 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
      ECRIRE( " SOLUTION INF " , " POUR " , " TOUTE " , " VALEUR " ,
           " POSITIVE " , " DU " , " PARAMETRE " ) ;
         ALLERA  ARRET
         FIN SINON
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " TERMINE " ) ;
         ALLERA  ARRET
         FIN
      FIN
         FIN
      FIN ;

   PROCEDURE COMPAT(AE1,BE1,IOTA1) ;
      ENTIER AE1,BE1,IOTA1 ;
      DEBUT BOOLEEN BOOL ;
     BOOL:= VRAI ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI I ≠ BE1 ALORS
     DEBUT
      SI F[AD]=G[I] ALORS
      DEBUT
      BOOL:= FAUX ;
ALLERA  STOP
        FIN
      FIN ;
STOP: SI NON BOOL ALORS
      DEBUT BT[IOTA1]:=0 ; ALLERA  PHASE2
    FIN ;
    FIN ;

  NORME1:=0.0 ;
```

```
   POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
  SI ABS(A[I,J]) > NORME1 ALORS NORME1:=ABS(A[I,J]) ;
   NORME2:=NORME1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
 SI ABS(A[-1,J]) > NORME2 ALORS NORME2:=ABS(A[-1,J]) ;
   NORME3:=NORME2 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
 SI ABS(A[-2,J]) > NORME3 ALORS NORME3:=ABS(A[-2,J]) ;
   NORME4:=NORME3 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
 SI ABS(D[I]) > NORME4 ALORS NORME4:=ABS(D[I]) ;
SI N5=4*N+2*M+1 ALORS
    DEBUT
    ECRIRE( " PARAMETRE=0 " , " FONCT=0 " , " 0 EST SOLUTION " ) ;
     POUR I:=M+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    DEBUT
     G[I]:=N1+I-M ;
     POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 2*N+2*M+1 FAIRE
     A[I,J]:=-A[I,J] ;
    FIN ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    B[N+I]:=2*N+M+I ;
     ALLERA   TETA3
     FIN
         SINON
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEPART " , " PHASE1 " ) ;
    ECRIRE
  ( "        NOITER " , "     FONCTART1 " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "       VECTENT " , "      VECTSORT " ) ;
         FIN ;
   PHASE1: EPSI:=1 ; ENTREE1(AD,BETA) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      X[I]:=A[I,AD] ;
      SORTIE1(X,BD) ;
      REDEFINITION(AD,BD,BETA,N5) ;
         ALLERA  PHASE1 ;
TETA2: EPSI:=2 ; NC:=4*N+2*M+1 ;
  ND:=3*N+M+V ;
SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEPART " , " PHASE2 " ) ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 2*N+2*M-N1 FAIRE
B[N+N3+I]:=N1+I ;
      DEPART1: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
      SI B[K] > NC ALORS
DEBUT
POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE
               B[J]:=B[J+1] ;
               ALLERA  DEPART1
         FIN ;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
```

```
          BT[K]:=B[K] ;
    PHASE2: ENTREE2(AD,BETA) ;
       POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
       X[I]:=A[I,AD] ;
       SORTIE1(X,BD) ;
       COMPAT(AD,BD,BETA) ;
       REDEFINITION(AD,BD,BETA,NC) ;
       POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
       DEBUT
       BT[I]:=B[I] FIN ;
                           ALLERA  PHASE2 ;
    TETA3: EPSI:=3 ; NC:=2*N+2*M+1 ;
  ND:=N+M+V+W+1 ; SAUTLIGNE ;
          ECRIRE( " DEPART " , " PHASE3 " ) ;
    DEPART2: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
       SI B[K] > NC ALORS
       DEBUT POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE
                B[J]:=B[J+1] ;
                ALLERA  DEPART2
FIN ;
  B[ND]:=2*N+2*M+1 ;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
                  BT[K]:=B[K] ;
             ALLERA  PHASE2 ;
      ARRET: FIN ;

   POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
DEBUT D1[I]:=0.0 ;
E1[I]:=0 ;
   POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE A1[I,J]:=0.0
   FIN ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   DEBUT
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
     QE[I,J]:=0.0 ; VE[I]:=0.0
    FIN ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
F1[I]:=0 ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K1 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; D1[I]:=RDONNEE
FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K2 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; J:=EDONNEE
   SI D1[I] SUPEG 0.0 ALORS A1[I,J]:=RDONNEE
   SINON A1[I,J]:=-RDONNEE
   FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K3 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ;
   SI D1[I] < 0.0 ALORS E1[I]:=-EDONNEE
```

```
   SINON E1[I]:=EDONNEE FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K4 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; J:=EDONNEE ;
    QE[I,J]:=RDONNEE ;
    A1[M+I,J]:=QE[I,J] FIN ;
 POUR  I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI D1[I] < 0.0 ALORS D1[I]:=-D1[I] ;
   A1[-2,-2]:=A1[-1,-1]:=A1[0,0]:=1.0 ;
   G1[-2]:=-2 ; G1[-1]:=-1 ; G1[0]:=0 ;
   L:=L1:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   B1[I]:=I ;
POUR I:=N+1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE B1[I]:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
   SI E1[I]=1 ALORS DEBUT
L:=L+1 ;
A1[I,N+L]:=1.0 ;
G1[I]:=N+L FIN
SINON DEBUT SI E1[I]=-1
   ALORS DEBUT L:=L+1 ; L1:=L1+1 ;
A1[I,N+L]:=-1.0 ;
B1[N+L1]:=N+L FIN FIN ;
   N1:=N+L ; N3:=N+L1 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT A1[M+I,N1+I]:=-1.0 ;
F1[I]:=N1+I ; F1[N1+I]:=I FIN ;
L:=L1:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
SI E1[I] ≠ 0 ALORS DEBUT
L1:=L1+1 ;
L:=L+1 ; POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  A1[M+J,N+N1+L]:=A1[I,J]*E1[I] ;
F1[N+L1]:=N+N1+L ;
F1[N+N1+L]:=N+L1
   FIN
SINON DEBUT L:=L+1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A1[M+J,N+N1+L]:=A1[I,J] ; L:=L+1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A1[M+J,N+N1+L]:=-A1[I,J] FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K5 FAIRE
DEBUT
   I:=EDONNEE ;
    VE[I]:=RDONNEE ;
                  A1[M+I,2*N+2*M+1]:=VE[I]
   FIN ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT A1[M+I,2*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[M+I,3*N+2*M+1+I]:=-1.0 ;
B1[N3+I]:=3*N+2*M+1+I ;
G1[M+I]:=2*N+2*M+1+I ;
```

```
   A1[-2,3*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[-1,2*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[-1,3*N+2*M+1+I]:=1.0 FIN ;
L:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
SI E1[I] ≠ 1 ALORS
DEBUT L:=L+1 ; A1[I,4*N+2*M+1+L]:=1.0 ;
G1[I]:=4*N+2*M+1+L FIN ;
N5:=4*N+2*M+1+L ;
A1[0,2*N+2*M+1]:=-1.0 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N1 FAIRE
DEBUT S:=0.0 ;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI E1[I] ≠ 1 ALORS
   S:=S-A1[I,J] ;
   A1[-2,J]:=S FIN ;
S1:=0.0 ; POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
   SI E1[I] ≠ 1 ALORS S1:=S1-D1[I] ;
   D1[-2]:=S1 ;
ECRIRE( " VALEUR PARAM " ) ;
ECRIRE(M,N,N1,N3,N5) ;
SIMQUAD(M,N1,N3,N5,H,T,A1,B1,G1,D1,F1,N)
   FIN FIN FIN
FIN ;
```

II.3- PROGRAMME SEMI QUADRATIQUE P.S.Q.

```
DEBUT
ENTIER STA,STB ;
STB:=EDONNEE ;
POUR STA:=1 PAS 1 JUSQUA STB FAIRE
DEBUT SAUTPAGE ; HEURE ; ECRIRE( " PROBLEME " ,STA) ;
      SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ;
DEBUT REEL S,S1,RD1 ,VSUP,PAS,PARAM ;
ENTIER M,N1,N3,K1,K2,L,L1,H,T,I,J,N,RD2,N5,K3,K4,K5 ,
    P,PSUP ;
    P:=0 ;
LIRE(M,N,K1,K2,K3) ;
  LIRE(K4,K5,PSUP,VSUP,PAS) ;
   T:=0 ; H:=(4*M+4*N)*(4*N+3*M+1) ;
DEBUT
TABLEAU A1[-2:M+N,-2:4*N+3*M+1],D1[-2:M+N] ,A2[0:PSUP,-3:N] ;
  TABLEAU VE[1:N],QE[1:N,1:N] ;
ENTIER TABLEAU B1[-2:4*N+3*M+1],
   E1,G1[-2:M+N],F1[1:4*N+3*M+1] ;

   PROCEDURE SIMQUAD(M,N1,N3,N5,H,T,A,B,G,D,F,N) ;
   VALEUR M,N1,N3,N5,H,N ;
   ENTIER M,N1,N3,N5,H,T,N ;
   TABLEAU A,D ;
   ENTIER TABLEAU B,G,F ;
      DEBUT
         ENTIER AD,BETA,BD,I,J,K,EPSI,NC,ND ;
   ENTIER V,W ;
  V:=0 ; W:=0 ;
         TABLEAU X[1:M+N],BT[-2:4*N+2*M+1] ;
   REEL VALEUR,NORME1,NORME2,NORME3,
    NORME4,MAGUY ;

         PROCEDURE COMPARAISON1(AB1,BETA1,U1,S1,NA1,NB1) ;
         VALEUR S1,NA1,NB1 ;
         ENTIER AB1,BETA1,U1,S1,NA1,NB1 ;
      DEBUT
   REEL GAMMA1 ; GAMMA1:=-1.0Δ-7*NORME3 ;
      U1:=0 ;
         POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA NB1 FAIRE
         SI B[K] INFEG NA1 ALORS
      DEBUT
         SI A[S1,B[K]] < GAMMA1 ALORS
         DEBUT
         GAMMA1:=A[S1,B[K]] ;
         BETA1:=K ; AB1:=B[K]
         FIN SINON U1:=U1+1
      FIN
      FIN ;
```

```
   PROCEDURE ENTREE1(AD1,ALPHA1) ;
   ENTIER AD1,ALPHA1 ;
   DEBUT ENTIER S,U ;
S:=-2 ; COMPARAISON1(AD1,ALPHA1,U,S,N5,N+N3) ;
      SI U=N+N3 ALORS
      DEBUT
   SI D[-2] INFEG -1.0Δ-7*NORME4 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " POLYEDRE VIDE " ) ;
      ALLERA  STOPFINAL
         FIN SINON
         DEBUT V:=0 ;
         POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
         SI G[I] > 4*N+2*M+1 ALORS
         V:=V+1 ;
         SAUTLIGNE ; ECRIRE( " VAR ARTIF1 " ,V) ;
         SAUTLIGNE ;
    ECRIRE
  ( "        NOITER " , "     FONCTART2 " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "      VECTENT " , "     VECTSORT " ) ;
   SAUTLIGNE ; ECRIRE(T,,-D[-1]) ;
         SI V ≠ 0 ALORS
      DEBUT SAUTLIGNE ; ECRIRE( " DEGENERE1 " ) ;
      FIN ;
      ALLERA  TETA2
         FIN
      FIN
      FIN ;

   PROCEDURE SORTIE1(X1,BD1) ;
      TABLEAU X1 ;
      ENTIER BD1 ;
      DEBUT
REEL DELTA1 ;
TABLEAU Y[1:M+N] ;
      ENTIER VS ;
      DELTA1:=5.0Δ8 ; VS:=0 ;
   SI T INFEG M+N ALORS MAGUY:=1.0Δ-5*NORME1
   SINON MAGUY:=1.0Δ-5 ;
   SI EPSI=3 ALORS  MAGUY:=1.0Δ-4 ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI X1[I] < MAGUY ALORS VS:=VS+1
         SINON
      DEBUT Y[I]:=D[I]/X1[I] ;
         SI Y[I] < DELTA1 ALORS
         DEBUT DELTA1:=Y[I] ; BD1:=I
         FIN
      FIN ;
      SI VS=M+N ALORS
         DEBUT SI EPSI=1 ALORS
            DEBUT SAUTLIGNE ;
```

```
            ECRIRE( " IMPOSSW " )  ;
    ALLERA  STOPFINAL
            FIN ;
       SI EPSI=2 ALORS
          DEBUT SAUTLIGNE ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     ECRIRE(I,X1[I] ) ;
            ECRIRE( " IMPOSSZ " )  ;
    ALLERA  STOPFINAL
          FIN ;
          SI EPSI=3 ALORS
          DEBUT SAUTLIGNE ;
     POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
       SI G[I]=F[AD] ALORS
       DEBUT
       BT[BETA]:=0  ;    ALLERA  PHASE2
         FIN ;
          ECRIRE( " SOLUTION INF " ) ;
    ECRIRE( " COORD " , " AR INF " ) ;
     ECRIRE( " MU= " ,-A[0,AD]) ;
    POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     SI G[I] INFEG N ALORS
      ECRIRE(          G[I],-X1[I] ) ;
    POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     SI G[I] INFEG N ET
       ABS(X1[I]) > 1.0Δ-5*
     ( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON T/10.0) ALORS
     ALLERA  STOPFINAL
          FIN ; ALLERA  ARRET
          FIN
       FIN ;

    PROCEDURE REDEFINITION(AC1,BC1,ETA1,NC1) ;
       ENTIER AC1,BC1,ETA1,NC1 ;
       DEBUT
    TABLEAU Z1[-2:M+N],Z2[-2:NC1] ;
          ENTIER COMPT ;
          REEL VD,PIVOT ;
          COMPT:=0 ; VD:=D[BC1] ;
          PIVOT:=A[BC1,AC1] ;
   POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
       DEBUT Z1[I]:=A[I,AC1] ;
          SI I ≠ BC1 ALORS
          DEBUT D[I]:=D[I]-Z1[I]*VD/PIVOT ;
       POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA NC1 FAIRE
       DEBUT Z2[J]:=A[BC1,J] ;
       A[I,J]:=A[I,J]-Z2[J]*Z1[I]/PIVOT
       FIN
       FIN
       FIN ;
       D[BC1]:=VD/PIVOT ;
       POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA NC1 FAIRE
```

```
      A[BC1,J]:=A[BC1,J]/PIVOT ;
      B[ETA1]:=G[BC1] ; G[BC1]:=AC1 ;
   SI EPSI=2 OU EPSI=3 ALORS
   DEBUT
  SI V ≠ 0 ET B[ETA1] > 4*N+2*M+1 ALORS  V:=V-1 ;
  SI W ≠ 0 ET B[ETA1] > 2*N+2*M+1 ALORS W:=W-1 ;
   SI V ≠ 0 ALORS ECRIRE( " VART1= " ,V) ;
   SI W ≠ 0 ALORS ECRIRE( " VART2= " ,W) ;
   FIN  ;
      T:=T+1 ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI ABS(D[I]) < 5.0Δ-6 ALORS
      COMPT:=COMPT+1 ;
   SI EPSI ≠ 3 ALORS
     ECRIRE(T ,-D[-3+EPSI] ,COMPT, AC1,B[ETA1])  SINON
     ECRIRE(T , D[-3+EPSI] ,COMPT, AC1,B[ETA1]) ;
 SI EPSI ≠ 1 ALORS
  POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
  SI B[K] > NC1 ALORS
 DEBUT
 POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE  B[J]:=B[J+1] ;
  ND:=ND-1 ;         FIN ;
      SI EPSI=3 ALORS
   DEBUT
   SI D[0] > 1.0Δ-6
   ALORS
    DEBUT
    P:=P+1 ;
    A2[P,-3]:=1/D[0] ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI G[I] INFEG N ALORS
A2[P,G[I]]:=D[I] ;
    FIN ;
      SI T=H ALORS
      DEBUT SAUTLIGNE ;
      ECRIRE( " REINVERSER " ) ;
    ALLERA  STOPFINAL
         FIN
FIN FIN ;

   PROCEDURE COMPARAISON2(AB2,BETA2,U2,S2,NA2,NB2) ;
      VALEUR S2,NA2,NB2 ;
      ENTIER AB2,BETA2,U2,S2,NA2,NB2 ;
      DEBUT REEL GAMMA2 ;
   GAMMA2:=(-1.0Δ-7)*( SI EPSI=2 ALORS NORME2 SINON
         NORME1 )* ( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON T/10.0) ;
  U2:=0 ;
      POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA NB2 FAIRE
 SI BT[K] =0 ALORS  U2:=U2+1 SINON
      DEBUT SI A[S2,BT[K]] < GAMMA2
         ALORS
         DEBUT GAMMA2:=A[S2,BT[K]] ;
```

```
      BETA2:=K ; AB2:=BT[K]
      FIN SINON U2:=U2+1
      FIN
      FIN ;

   PROCEDURE ENTREE2(AD2,ALPHA2) ;
   ENTIER AD2,ALPHA2 ;
   DEBUT
 ENTIER SS,UU  ;
      SS:=-3+EPSI ;
  REEL GAMMA3,GAMMA4 ;
  GAMMA3:=(1.0Δ-7)*NORME3*( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON
  T/10.0) ;
  GAMMA4:=(1.0Δ-7)*NORME2*( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON
  T/10.0) ;
  SI V ≠ 0 ALORS
 POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA  ND FAIRE
 SI A[-2,BT[K]] > GAMMA3 ALORS BT[K]:=0 ;
  SI W ≠ 0 ALORS
 POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA  ND FAIRE
 SI A[-1,BT[K]] > GAMMA4 ALORS BT[K]:=0 ;
      COMPARAISON2(AD2,ALPHA2,UU,SS,NC,ND) ;
      SI UU=ND ALORS
         DEBUT
         SI EPSI=2 ALORS
 DEBUT SI D[-1] < (-1.0Δ-7)*NORME4 ALORS
  DEBUT
 SAUTLIGNE ; ECRIRE( " IMPOSSZ " , " OU NON RESOLU " ) ;
ECRIRE( " MATRICE " ) ; SAUTLIGNE ;
ECRIRE( " INDILIGNE " , " INDICOLON " , " VALEUR " ) ;
POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
    SI ABS(A[I,J]) > 5.0Δ-6 ALORS
ECRIRE(I,J,A[I,J]) ;
ECRIRE( " VECT DE BASE " ) ;
POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      ECRIRE(I,G[I],D[I]) ;
ECRIRE( " VECTEUR " , " INCOMPATIBLE " ) ;
ECRIRE( " INDICE1 " , " INDICE2 " ) ;
POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
SI F [J] ≠ 0 ALORS
        ECRIRE(J, , ,F [J]) ;
    ALLERA  STOPFINAL
         FIN SINON
         DEBUT W:=0 ;
         POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI G[I] > 2*N+2*M+1 ALORS
      W:=W+1 ;
      SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " VAR ARTIF2 " ,W) ;
         SAUTLIGNE ;
    ECRIRE
```

```
 ( "        NOITER " , "     PARAMETRE " , "   NBRE COORD=0 " ,
"        VECTENT " , "      VECTSORT " ) ;
  ECRIRE(T,,-D[0]) ;
        SI W ≠ 0 ALORS
        DEBUT SAUTLIGNE ;
        ECRIRE( " DEGENERE2 " ) ;
     FIN ;
    VALEUR:=0.0 ;
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI (G[I] INFEG N ET G[J] INFEG N) ALORS
   VALEUR:=VALEUR+D[I]*QE[G[I],G[J]]*D[J] ;
    VALEUR:=VALEUR/2.0 ;
   ECRIRE( " PARAM=0 " , " FONCTECO= " ,VALEUR) ;
    P:=P+1 ;
     POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   DEBUT
     SI G[I] INFEG N ALORS
   A2[P,G[I]]:=D[I]
   FIN ;
                ALLERA  TETA3
     FIN
     FIN ;
        SI EPSI=3 ALORS
        DEBUT
  SI D[0] < (1.0∆-7)*NORME4 ALORS
        DEBUT SAUTLIGNE ;
     ECRIRE( " SOLUTION INF " , " POUR " , " TOUTE " , " VALEUR " ,
           " POSITIVE " , " DU " , " PARAMETRE " ) ;
  ALLERA  STOPFINAL
        FIN SINON
        DEBUT SAUTLIGNE ;
        ECRIRE( " TERMINE " ) ;
        ALLERA  ARRET
        FIN
     FIN
        FIN
     FIN ;

  PROCEDURE COMPAT(AE1,BE1,IOTA1) ;
     ENTIER AE1,BE1,IOTA1 ;
     DEBUT BOOLEEN BOOL ;
    BOOL:= VRAI ;
     POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     SI I ≠ BE1 ALORS
    DEBUT
     SI F[AD]=G[I] ALORS
     DEBUT
     BOOL:= FAUX ;
ALLERA  STOP
       FIN
     FIN ;
```

```
STOP: SI NON BOOL ALORS
      DEBUT BT[IOTA1]:=0 ; ALLERA  PHASE2
    FIN ;
    FIN ;

  NORME1:=0.0 ;
   POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
  SI ABS(A[I,J]) > NORME1 ALORS NORME1:=ABS(A[I,J]) ;
   NORME2:=NORME1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
 SI ABS(A[-1,J]) > NORME2 ALORS NORME2:=ABS(A[-1,J]) ;
   NORME3:=NORME2 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
 SI ABS(A[-2,J]) > NORME3 ALORS NORME3:=ABS(A[-2,J]) ;
   NORME4:=NORME3 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
 SI ABS(D[I]) > NORME4 ALORS NORME4:=ABS(D[I]) ;
SI N5=4*N+2*M+1 ALORS
    DEBUT
    ECRIRE( " PARAMETRE=0 " , " FONCT=0 " , " 0 EST SOLUTION " ) ;
    P:=P+1 ;
     POUR I:=M+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    DEBUT
     G[I]:=N1+I-M ;
     POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 2*N+2*M+1 FAIRE
     A[I,J]:=-A[I,J] ;
    FIN ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    B[N+I]:=2*N+M+I ;
     ALLERA   TETA3
     FIN
         SINON
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEPART " , " PHASE1 " ) ;
    ECRIRE
  ( "        NOITER " , "     FONCTART1 " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "       VECTENT " , "      VECTSORT " ) ;
         FIN ;
   PHASE1: EPSI:=1 ; ENTREE1(AD,BETA) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      X[I]:=A[I,AD] ;
      SORTIE1(X,BD) ;
      REDEFINITION(AD,BD,BETA,N5) ;
         ALLERA  PHASE1 ;
TETA2: EPSI:=2 ; NC:=4*N+2*M+1 ;
  ND:=3*N+M+V ;
SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEPART " , " PHASE2 " ) ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 2*N+2*M-N1 FAIRE
B[N+N3+I]:=N1+I ;
      DEPART1: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
```

```
      SI B[K] > NC ALORS
DEBUT
POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE
                B[J]:=B[J+1] ;
                ALLERA  DEPART1
         FIN ;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
         BT[K]:=B[K] ;
   PHASE2: ENTREE2(AD,BETA) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      X[I]:=A[I,AD] ;
      SORTIE1(X,BD) ;
      COMPAT(AD,BD,BETA) ;
      REDEFINITION(AD,BD,BETA,NC) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
      DEBUT
      BT[I]:=B[I] FIN ;
                         ALLERA  PHASE2 ;
   TETA3: EPSI:=3 ; NC:=2*N+2*M+1 ;
  ND:=N+M+V+W+1 ; SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEPART " , " PHASE3 " ) ;
   DEPART2: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
      SI B[K] > NC ALORS
      DEBUT POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE
                B[J]:=B[J+1] ;
                ALLERA  DEPART2
FIN ;
  B[ND]:=2*N+2*M+1 ;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
                    BT[K]:=B[K] ;
            ALLERA  PHASE2 ;
      ARRET: FIN ;

PROCEDURE QUASIM(N,S,A,V) ;
VALEUR N,S ;
   ENTIER N,S ;
   TABLEAU A ;
REEL V ;
   DEBUT
ENTIER I,J ;
   TABLEAU X[1:N] ;
   REEL FONCT,AA,BB,CC,MU,ALPHA1,ALPHA2,BETA1,BETA2,DELTA,GAMMA1,
GAMMA2 ;

PROCEDURE RESOL(AA1,BB1,CC1,MU1,MUI1) ;
REEL AA1,BB1,CC1,MU1,MUI1 ;
DEBUT
   REEL RAC ;
   SI BB1*BB1-AA1*CC1 SUPEG 0 ALORS
   DEBUT RAC:=RAC2(BB1*BB1-AA1*CC1) ;
      MU1:= SI -(BB1+RAC)/AA1 < MUI1 ALORS
         (RAC-BB1)/AA1 SINON -(BB1+RAC)/AA1
```

```
   FIN
SINON ALLERA  STOP
FIN ;

PROCEDURE IMPRESS(X1,FONCT1,PARA1) ;
TABLEAU X1 ;
REEL FONCT1,PARA1 ;
DEBUT
        ECRIRE( " PARAMETRE= " ,PARA1, " FONCTION= " ,FONCT1) ;
ECRIRE( "    INDOPT " , "    VECTOPT " ) ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   SI X1[J] ≠ 0.0 ALORS
ECRIRE(J,X1[J])
   FIN ;

    SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ;
SI V INFEG A[1,-3]*RAC2(A[1,-2]) ALORS
   DEBUT POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      X[J]:=A[1,J] ;
      FONCT:=RAC2(A[1,-2]) ;
      FONCT:=V*FONCT ;
         POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      FONCT:=FONCT+X[J]*A[0,J] ;
      IMPRESS(X,FONCT,V) ;
ALLERA  STOP
     FIN ;
POUR I:=2 PAS 1 JUSQUA S-1 FAIRE
SI V INFEG A[I,-3]*RAC2(A[I,-2]) ALORS
   DEBUT ALPHA1:=A[I-1,-3] ;
           ALPHA2:=A[I,-3] ;
           BETA1:=A[I-1,-2] ;
           BETA2:=A[I,-2] ;
           DELTA:=A[I-1,-1] ;
           GAMMA1:=ALPHA1*ALPHA1*BETA1 ;
           GAMMA2:=ALPHA2*ALPHA2*BETA2 ;
           AA:=GAMMA1+GAMMA2-2.0*ALPHA1*ALPHA2*DELTA ;
BB:=-(ALPHA1*GAMMA2+ALPHA2*GAMMA1
-DELTA*(ALPHA1+ALPHA2)*ALPHA1*ALPHA2) ;
           CC:=ALPHA1*ALPHA1*GAMMA2+ALPHA2*ALPHA2*GAMMA1-2.0*ALPHA1*
            ALPHA1*ALPHA2*ALPHA2*DELTA-V*V*(ALPHA2-ALPHA1)*
            (ALPHA2-ALPHA1) ;
   RESOL(AA,BB,CC,MU,ALPHA1) ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   DEBUT X[J]:=ALPHA2*(MU-ALPHA1)*A[I,J]+ALPHA1*(ALPHA2-MU)*
         A[I-1,J] ;
      X[J]:=X[J]/(MU*(ALPHA2-ALPHA1))
   FIN ;
   FONCT:=V*V/MU ; POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   FONCT:=FONCT+X[J]*A[0,J] ;
   IMPRESS(X,FONCT,V) ; ALLERA  STOP
      FIN ;
SI V > A[S-1,-3]*RAC2(A[S-1,-2]) ALORS
```

```
   DEBUT ALPHA1:=A[S-1,-3] ; BETA1:=A[S-1,-2] ;
      BETA2:=A[S,-2] ; DELTA:=A[S-1,-1] ;
      AA:=BETA2 ; BB:=ALPHA1*(DELTA-BETA2) ;
      CC:=ALPHA1*ALPHA1*(BETA1+BETA2-2*DELTA)-V*V ;
      RESOL(AA,BB,CC,MU,ALPHA1) ;
      POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      DEBUT X[J]:=(MU-ALPHA1)*A[S,J]+ALPHA1*A[S-1,J] ;
         X[J]:=X[J]/MU
      FIN ;
   FONCT:=V*V/MU ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   FONCT:=FONCT+X[J]*A[0,J] ;
   IMPRESS(X,FONCT,V)
     FIN ;
STOP: FIN ;

   POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
DEBUT D1[I]:=0.0 ;
E1[I]:=0 ;
   POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE A1[I,J]:=0.0
   FIN ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   DEBUT
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
     QE[I,J]:=0.0 ; VE[I]:=0.0
    FIN ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
F1[I]:=0 ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K1 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; D1[I]:=RDONNEE
FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K2 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; J:=EDONNEE
   SI D1[I] SUPEG 0.0 ALORS A1[I,J]:=RDONNEE
   SINON A1[I,J]:=-RDONNEE
   FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K3 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ;
   SI D1[I] < 0.0 ALORS E1[I]:=-EDONNEE
   SINON E1[I]:=EDONNEE FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K4 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; J:=EDONNEE ;
    QE[I,J]:=RDONNEE ;
    A1[M+I,J]:=QE[I,J] FIN ;
 POUR  I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI D1[I] < 0.0 ALORS D1[I]:=-D1[I] ;
   A1[-2,-2]:=A1[-1,-1]:=A1[0,0]:=1.0 ;
   G1[-2]:=-2 ; G1[-1]:=-1 ; G1[0]:=0 ;
```

```
   L:=L1:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   B1[I]:=I ;
POUR I:=N+1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE B1[I]:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
   SI E1[I]=1 ALORS DEBUT
L:=L+1 ;
A1[I,N+L]:=1.0 ;
G1[I]:=N+L FIN
SINON DEBUT SI E1[I]=-1
   ALORS DEBUT L:=L+1 ; L1:=L1+1 ;
A1[I,N+L]:=-1.0 ;
B1[N+L1]:=N+L FIN FIN ;
   N1:=N+L ; N3:=N+L1 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT A1[M+I,N1+I]:=-1.0 ;
F1[I]:=N1+I ; F1[N1+I]:=I FIN ;
L:=L1:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
SI E1[I] ≠ 0 ALORS DEBUT
L1:=L1+1 ;
L:=L+1 ; POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  A1[M+J,N+N1+L]:=A1[I,J]*E1[I] ;
F1[N+L1]:=N+N1+L ;
F1[N+N1+L]:=N+L1
   FIN
SINON DEBUT L:=L+1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A1[M+J,N+N1+L]:=A1[I,J] ; L:=L+1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A1[M+J,N+N1+L]:=-A1[I,J] FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K5 FAIRE
DEBUT
   I:=EDONNEE ;
    VE[I]:=RDONNEE ;
                    A1[M+I,2*N+2*M+1]:=VE[I]
   FIN ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT A1[M+I,2*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[M+I,3*N+2*M+1+I]:=-1.0 ;
B1[N3+I]:=3*N+2*M+1+I ;
G1[M+I]:=2*N+2*M+1+I ;
   A1[-2,3*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[-1,2*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[-1,3*N+2*M+1+I]:=1.0 FIN ;
L:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
SI E1[I] ≠ 1 ALORS
DEBUT L:=L+1 ; A1[I,4*N+2*M+1+L]:=1.0 ;
G1[I]:=4*N+2*M+1+L FIN ;
N5:=4*N+2*M+1+L ;
A1[0,2*N+2*M+1]:=-1.0 ;
```

```
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N1 FAIRE
DEBUT S:=0.0 ;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI E1[I] ≠ 1 ALORS
   S:=S-A1[I,J] ;
   A1[-2,J]:=S FIN ;
S1:=0.0 ; POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
   SI E1[I] ≠ 1 ALORS S1:=S1-D1[I] ;
   D1[-2]:=S1 ;
ECRIRE( " VALEUR PARAM " ) ;
    ECRIRE(M,N,N5,PAS,VSUP) ;
   POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA PSUP FAIRE
    POUR J:=-3 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
     A2[I,J]:=0.0 ;
SIMQUAD(M,N1,N3,N5,H,T,A1,B1,G1,D1,F1,N) ;
   PSUP:=P ;
 POUR I:=-3 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      POUR P:=1 PAS 1 JUSQUA ENTIER((PSUP+0.1)/2.0) FAIRE
    DEBUT
    A2[0,I]:=A2[P,I];
    A2[P,I]:=A2[PSUP-P+1,I] ;
   A2[PSUP-P+1,I]:=A2[0,I]
    FIN ;
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   A2[0,I]:=VE[I] ;
  POUR P:=1 PAS 1 JUSQUA PSUP FAIRE
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   SI QE[I,J] ≠ 0 ALORS
    A2[P,-2]:=A2[P,-2]+A2[P,I]*QE[I,J]*A2[P,J] ;
  POUR P:=1 PAS 1 JUSQUA PSUP-1 FAIRE
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   SI QE[I,J] ≠ 0 ALORS
    A2[P,-1]:=A2[P,-1]+A2[P,I]*QE[I,J]*A2[P+1,J] ;
    PARAM:=0.0 ;
   SAUTPAGE ;
    ECRIRE( " DEPART " , " PHASE4 " ) ;
    HEURE ;
    SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ;
   DEPART:
   QUASIM(N,PSUP,A2,PARAM) ;
  PARAM:=PARAM+PAS ;
    SI PARAM INFEG VSUP ALORS
    ALLERA  DEPART ;
   STOPFINAL: FIN ;
   FIN FIN
   FIN ;
```

II.4- PROGRAMME DECIS (MODELE MII4).

```
DEBUT
    ENTIER  LSUP1,LSUP2,I,J ;
     REEL PASO1 ;
     LIRE(LSUP1,PASO1 ) ;
    LSUP2:=LSUP1*4 ;
   DEBUT
   TABLEAU TABUL[0:LSUP2] ;
  TABUL[0]:=0.0 ;
  J:=1 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA LSUP1 FAIRE
    DEBUT
 LIRE(TABUL[J],TABUL[J+1],TABUL[J+2],TABUL[J+3]) ; J:=J+4
   FIN ;
  POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA LSUP2 FAIRE
 TABUL[I]:=TABUL[I]+0.5 ;
ENTIER STA,STB ;
STB:=EDONNEE ;
POUR STA:=1 PAS 1 JUSQUA STB FAIRE
DEBUT SAUTPAGE ; HEURE ; ECRIRE( " PROBLEME " ,STA) ;
      SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ;
DEBUT REEL S,S1,RD1 ,VSUP,PAS,PARAM,PROB ;
    REEL REP1 ;
ENTIER M,N1,N3,K1,K2,L,L1,H,T,I,J,N,RD2,N5,K3,K4,K5 ,
    P,PSUP ;
    P:=0 ;
   LIRE(PROB,VSUP,PAS) ;
LIRE(M,N,K1,K2,K3) ;
    LIRE(K4,K5,PSUP) ;
   T:=0 ; H:=(4*M+4*N)*(4*N+3*M+1) ;
DEBUT
TABLEAU A1[-2:M+N,-2:4*N+3*M+1],D1[-2:M+N] ,A2[0:PSUP,-3:N] ;
  TABLEAU VE[1:N],QE[1:N,1:N] ;
ENTIER TABLEAU B1[-2:4*N+3*M+1],
   E1,G1[-2:M+N],F1[1:4*N+3*M+1] ;

   PROCEDURE SIMQUAD(M,N1,N3,N5,H,T,A,B,G,D,F,N) ;
   VALEUR M,N1,N3,N5,H,N ;
   ENTIER M,N1,N3,N5,H,T,N ;
   TABLEAU A,D ;
   ENTIER TABLEAU B,G,F ;
      DEBUT
         ENTIER AD,BETA,BD,I,J,K,EPSI,NC,ND ;
   ENTIER V,W ;
  V:=0 ; W:=0 ;
         TABLEAU X[1:M+N],BT[-2:4*N+2*M+1] ;
   REEL VALEUR,NORME1,NORME2,NORME3,
    NORME4,MAGUY ;
```

```
        PROCEDURE COMPARAISON1(AB1,BETA1,U1,S1,NA1,NB1) ;
        VALEUR S1,NA1,NB1 ;
        ENTIER AB1,BETA1,U1,S1,NA1,NB1 ;
     DEBUT
  REEL GAMMA1 ; GAMMA1:=-1.0Δ-7*NORME3 ;
     U1:=0 ;
        POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA NB1 FAIRE
        SI B[K] INFEG NA1 ALORS
     DEBUT
        SI A[S1,B[K]] < GAMMA1 ALORS
        DEBUT
        GAMMA1:=A[S1,B[K]] ;
        BETA1:=K ; AB1:=B[K]
        FIN SINON U1:=U1+1
     FIN
     FIN ;

  PROCEDURE ENTREE1(AD1,ALPHA1) ;
  ENTIER AD1,ALPHA1 ;
  DEBUT ENTIER S,U ;
S:=-2 ; COMPARAISON1(AD1,ALPHA1,U,S,N5,N+N3) ;
     SI U=N+N3 ALORS
     DEBUT
  SI D[-2] INFEG -1.0Δ-7*NORME4 ALORS
        DEBUT SAUTLIGNE ;
        ECRIRE( " POLYEDRE VIDE " ) ;
     ALLERA  STOPFINAL
        FIN SINON
        DEBUT V:=0 ;
        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
        SI G[I] > 4*N+2*M+1 ALORS
        V:=V+1 ;
        SAUTLIGNE ; ECRIRE( " VAR ARTIF1 " ,V) ;
        SAUTLIGNE ;
    ECRIRE
 ( "        NOITER " , "     FONCTART2 " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "      VECTENT " , "       VECTSORT " ) ;
  SAUTLIGNE ; ECRIRE(T,,-D[-1]) ;
        SI V ≠ 0 ALORS
     DEBUT SAUTLIGNE ; ECRIRE( " DEGENERE1 " ) ;
     FIN ;
     ALLERA  TETA2
        FIN
     FIN
     FIN ;

  PROCEDURE SORTIE1(X1,BD1) ;
     TABLEAU X1 ;
     ENTIER BD1 ;
     DEBUT
REEL DELTA1 ;
TABLEAU Y[1:M+N] ;
```

```
      ENTIER VS ;
      DELTA1:=5.0Δ8 ; VS:=0 ;
   SI T INFEG M+N ALORS MAGUY:=1.0Δ-5*NORME1
   SINON MAGUY:=1.0Δ-5 ;
   SI EPSI=3 ALORS  MAGUY:=1.0Δ-4 ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI X1[I] < MAGUY ALORS VS:=VS+1
         SINON
      DEBUT Y[I]:=D[I]/X1[I] ;
         SI Y[I] < DELTA1 ALORS
         DEBUT DELTA1:=Y[I] ; BD1:=I
         FIN
      FIN ;
      SI VS=M+N ALORS
         DEBUT SI EPSI=1 ALORS
            DEBUT SAUTLIGNE ;
            ECRIRE( " IMPOSSW " )  ;
   ALLERA  STOPFINAL
            FIN ;
      SI EPSI=2 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    ECRIRE(I,X1[I] ) ;
            ECRIRE( " IMPOSSZ " )  ;
   ALLERA  STOPFINAL
         FIN ;
         SI EPSI=3 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
    POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI G[I]=F[AD] ALORS
      DEBUT
      BT[BETA]:=0  ;    ALLERA  PHASE2
        FIN ;
         ECRIRE( " SOLUTION INF " ) ;
   ECRIRE( " COORD " , " AR INF " ) ;
    ECRIRE( " MU= " ,-A[0,AD]) ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    SI G[I] INFEG N ALORS
     ECRIRE(         G[I],-X1[I] ) ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    SI G[I] INFEG N ET
      ABS(X1[I]) > 1.0Δ-5*
    ( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON T/10.0) ALORS
    ALLERA  STOPFINAL
         FIN ; ALLERA  ARRET
         FIN
      FIN ;

   PROCEDURE REDEFINITION(AC1,BC1,ETA1,NC1) ;
      ENTIER AC1,BC1,ETA1,NC1 ;
      DEBUT
   TABLEAU Z1[-2:M+N],Z2[-2:NC1] ;
```

```
        ENTIER COMPT ;
        REEL VD,PIVOT ;
        COMPT:=0 ; VD:=D[BC1] ;
        PIVOT:=A[BC1,AC1] ;
 POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     DEBUT Z1[I]:=A[I,AC1] ;
        SI I ≠ BC1 ALORS
        DEBUT D[I]:=D[I]-Z1[I]*VD/PIVOT ;
     POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA NC1 FAIRE
     DEBUT Z2[J]:=A[BC1,J] ;
     A[I,J]:=A[I,J]-Z2[J]*Z1[I]/PIVOT
     FIN
     FIN
     FIN ;
     D[BC1]:=VD/PIVOT ;
     POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA NC1 FAIRE
     A[BC1,J]:=A[BC1,J]/PIVOT ;
     B[ETA1]:=G[BC1] ; G[BC1]:=AC1 ;
  SI EPSI=2 OU EPSI=3 ALORS
  DEBUT
 SI V ≠ 0 ET B[ETA1] > 4*N+2*M+1 ALORS  V:=V-1 ;
 SI W ≠ 0 ET B[ETA1] > 2*N+2*M+1 ALORS W:=W-1 ;
  SI V ≠ 0 ALORS ECRIRE( " VART1= " ,V) ;
  SI W ≠ 0 ALORS ECRIRE( " VART2= " ,W) ;
  FIN  ;
     T:=T+1 ;
     POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     SI ABS(D[I]) < 5.0Δ-6 ALORS
     COMPT:=COMPT+1 ;
  SI EPSI ≠ 3 ALORS
    ECRIRE(T ,-D[-3+EPSI] ,COMPT, AC1,B[ETA1])  SINON
    ECRIRE(T , D[-3+EPSI] ,COMPT, AC1,B[ETA1]) ;
SI EPSI ≠ 1 ALORS
 POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
 SI B[K] > NC1 ALORS
DEBUT
POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE  B[J]:=B[J+1] ;
 ND:=ND-1 ;         FIN ;
     SI EPSI=3 ALORS
     DEBUT
  SI D[0] > 1.0Δ-6
  ALORS
   DEBUT
   P:=P+1 ;
   A2[P,-3]:=1/D[0] ;
     POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
     SI G[I] INFEG N ALORS
A2[P,G[I]]:=D[I] ;
   FIN ;
     SI T=H ALORS
     DEBUT SAUTLIGNE ;
     ECRIRE( " REINVERSER " ) ;
```

```
    ALLERA  STOPFINAL
         FIN
FIN FIN ;

   PROCEDURE COMPARAISON2(AB2,BETA2,U2,S2,NA2,NB2) ;
      VALEUR S2,NA2,NB2 ;
      ENTIER AB2,BETA2,U2,S2,NA2,NB2 ;
      DEBUT REEL GAMMA2 ;
   GAMMA2:=(-1.0Δ-7)*( SI EPSI=2 ALORS NORME2 SINON
         NORME1 )* ( SI T INFEG 10 ALORS 1.0  SINON T/10.0 ) ;
  U2:=0 ;
      POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA NB2 FAIRE
 SI BT[K] =0 ALORS  U2:=U2+1 SINON
      DEBUT SI A[S2,BT[K]] < GAMMA2
         ALORS
         DEBUT GAMMA2:=A[S2,BT[K]] ;
      BETA2:=K ; AB2:=BT[K]
      FIN SINON U2:=U2+1
      FIN
      FIN ;

   PROCEDURE ENTREE2(AD2,ALPHA2) ;
   ENTIER AD2,ALPHA2 ;
   DEBUT
 ENTIER SS,UU  ;
      SS:=-3+EPSI ;
  REEL GAMMA3,GAMMA4 ;
  GAMMA3:=(1.0Δ-7)*NORME3*( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON
  T/10.0) ;
  GAMMA4:=(1.0Δ-7)*NORME2*( SI T INFEG 10 ALORS 1.0 SINON
  T/10.0) ;
  SI V ≠ 0 ALORS
 POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA  ND FAIRE
 SI A[-2,BT[K]] > GAMMA3 ALORS BT[K]:=0 ;
  SI W ≠ 0 ALORS
 POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA  ND FAIRE
 SI A[-1,BT[K]] > GAMMA4 ALORS BT[K]:=0 ;
      COMPARAISON2(AD2,ALPHA2,UU,SS,NC,ND) ;
      SI UU=ND ALORS
         DEBUT
         SI EPSI=2 ALORS
 DEBUT SI D[-1] < (-1.0Δ-7)*NORME4 ALORS
  DEBUT
 SAUTLIGNE ; ECRIRE( " IMPOSSZ " , " OU NON RESOLU " ) ;
ECRIRE( " MATRICE " ) ; SAUTLIGNE ;
ECRIRE( " INDILIGNE " , " INDICOLON " , " VALEUR " ) ;
POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
    SI ABS(A[I,J]) > 5.0Δ-6 ALORS
ECRIRE(I,J,A[I,J]) ;
ECRIRE( " VECT DE BASE " ) ;
POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
```

```
      ECRIRE(I,G[I],D[I]) ;
ECRIRE( " VECTEUR " , " INCOMPATIBLE " ) ;
ECRIRE( " INDICE1 " , " INDICE2 " ) ;
POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
SI F [J] ≠ 0 ALORS
        ECRIRE(J, , ,F [J]) ;
    ALLERA  STOPFINAL
         FIN SINON
         DEBUT W:=0 ;
         POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI G[I] > 2*N+2*M+1 ALORS
      W:=W+1 ;
      SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " VAR ARTIF2 " ,W) ;
         SAUTLIGNE ;
    ECRIRE
  ( "         NOITER " , "      PARAMETRE " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "       VECTENT " , "       VECTSORT " ) ;
   ECRIRE(T,,-D[0]) ;
         SI W ≠ 0 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEGENERE2 " ) ;
      FIN ;
     P:=P+1 ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    DEBUT
      SI G[I] INFEG N ALORS
    A2[P,G[I]]:=D[I]
    FIN ;
                  ALLERA  TETA3
      FIN
      FIN ;
         SI EPSI=3 ALORS
         DEBUT
   SI D[0] < (1.0Δ-7)*NORME4 ALORS
         DEBUT SAUTLIGNE ;
      ECRIRE( " SOLUTION INF " , " POUR " , " TOUTE " , " VALEUR " ,
            " POSITIVE " , " DU " , " PARAMETRE " ) ;
   ALLERA  STOPFINAL
         FIN SINON
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " TERMINE " ) ;
         ALLERA  ARRET
         FIN
      FIN
         FIN
      FIN ;

   PROCEDURE COMPAT(AE1,BE1,IOTA1) ;
      ENTIER AE1,BE1,IOTA1 ;
      DEBUT BOOLEEN BOOL ;
     BOOL:= VRAI ;
```

```
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      SI I ≠ BE1 ALORS
     DEBUT
      SI F[AD]=G[I] ALORS
      DEBUT
      BOOL:= FAUX ;
ALLERA  STOP
        FIN
      FIN ;
STOP: SI NON BOOL ALORS
      DEBUT BT[IOTA1]:=0 ; ALLERA  PHASE2
    FIN ;
    FIN ;

  NORME1:=0.0 ;
   POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
  SI ABS(A[I,J]) > NORME1 ALORS NORME1:=ABS(A[I,J]) ;
   NORME2:=NORME1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
 SI ABS(A[-1,J]) > NORME2 ALORS NORME2:=ABS(A[-1,J]) ;
   NORME3:=NORME2 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
 SI ABS(A[-2,J]) > NORME3 ALORS NORME3:=ABS(A[-2,J]) ;
   NORME4:=NORME3 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
 SI ABS(D[I]) > NORME4 ALORS NORME4:=ABS(D[I]) ;
SI N5=4*N+2*M+1 ALORS
    DEBUT
    P:=P+1 ;
     POUR I:=M+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    DEBUT
     G[I]:=N1+I-M ;
     POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 2*N+2*M+1 FAIRE
     A[I,J]:=-A[I,J] ;
    FIN ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    B[N+I]:=2*N+M+I ;
     ALLERA   TETA3
     FIN
         SINON
         DEBUT SAUTLIGNE ;
         ECRIRE( " DEPART " , " PHASE1 " ) ;
    ECRIRE
  ( "       NOITER " , "     FONCTART1 " , "   NBRE COORD=0 " ,
 "       VECTENT " , "      VECTSORT " ) ;
         FIN ;
   PHASE1: EPSI:=1 ; ENTREE1(AD,BETA) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      X[I]:=A[I,AD] ;
      SORTIE1(X,BD) ;
      REDEFINITION(AD,BD,BETA,N5) ;
```

```
          ALLERA  PHASE1 ;
TETA2: EPSI:=2 ; NC:=4*N+2*M+1 ;
  ND:=3*N+M+V ;
SAUTLIGNE ;
          ECRIRE( " DEPART " , " PHASE2 " ) ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 2*N+2*M-N1 FAIRE
B[N+N3+I]:=N1+I ;
      DEPART1: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
      SI B[K] > NC ALORS
DEBUT
POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE
               B[J]:=B[J+1] ;
               ALLERA  DEPART1
          FIN ;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
          BT[K]:=B[K] ;
   PHASE2: ENTREE2(AD,BETA) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
      X[I]:=A[I,AD] ;
      SORTIE1(X,BD) ;
      COMPAT(AD,BD,BETA) ;
      REDEFINITION(AD,BD,BETA,NC) ;
      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
      DEBUT
      BT[I]:=B[I] FIN ;
                         ALLERA  PHASE2 ;
   TETA3: EPSI:=3 ; NC:=2*N+2*M+1 ;
  ND:=N+M+V+W+1 ; SAUTLIGNE ;
          ECRIRE( " DEPART " , " PHASE3 " ) ;
   DEPART2: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N5 FAIRE
      SI B[K] > NC ALORS
      DEBUT POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N5-1 FAIRE
               B[J]:=B[J+1] ;
               ALLERA  DEPART2
FIN ;
  B[ND]:=2*N+2*M+1 ;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA ND FAIRE
                 BT[K]:=B[K] ;
             ALLERA  PHASE2 ;
      ARRET: FIN ;

PROCEDURE QUASIM(N,S,A,V) ;
VALEUR N,S ;
   ENTIER N,S ;
   TABLEAU A ;
REEL V ;
   DEBUT
ENTIER I,J ;
   TABLEAU X[1:N] ;
   REEL FONCT,AA,BB,CC,MU,ALPHA1,ALPHA2,BETA1,BETA2,DELTA,GAMMA1,
GAMMA2 ;
```

```
PROCEDURE RESOL(AA1,BB1,CC1,MU1,MUI1) ;
REEL AA1,BB1,CC1,MU1,MUI1 ;
DEBUT
   REEL RAC ;
   SI BB1*BB1-AA1*CC1 SUPEG 0 ALORS
   DEBUT RAC:=RAC2(BB1*BB1-AA1*CC1) ;
      MU1:= SI -(BB1+RAC)/AA1 < MUI1 ALORS
         (RAC-BB1)/AA1 SINON -(BB1+RAC)/AA1
   FIN
SINON ALLERA  STOP
FIN ;

PROCEDURE IMPRESS(X1,FONCT1,PARA1) ;
TABLEAU X1 ;
REEL FONCT1,PARA1 ;
DEBUT
  ECRIRE(  " PROBABILITE= " ,PROB, " FONCTION= " ,FONCT1) ;
ECRIRE( "    INDOPT " , "    VECTOPT " ) ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   SI X1[J] ≠ 0.0 ALORS
ECRIRE(J,X1[J])
   FIN ;

SI V INFEG A[1,-3]*RAC2(A[1,-2]) ALORS
   DEBUT POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      X[J]:=A[1,J] ;
      FONCT:=RAC2(A[1,-2]) ;
      FONCT:=V*FONCT ;
         POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      FONCT:=FONCT+X[J]*A[0,J] ;
      IMPRESS(X,FONCT,V) ;
ALLERA  STOP
     FIN ;
POUR I:=2 PAS 1 JUSQUA S-1 FAIRE
SI V INFEG A[I,-3]*RAC2(A[I,-2]) ALORS
   DEBUT ALPHA1:=A[I-1,-3] ;
         ALPHA2:=A[I,-3] ;
         BETA1:=A[I-1,-2] ;
         BETA2:=A[I,-2] ;
         DELTA:=A[I-1,-1] ;
         GAMMA1:=ALPHA1*ALPHA1*BETA1 ;
         GAMMA2:=ALPHA2*ALPHA2*BETA2 ;
         AA:=GAMMA1+GAMMA2-2.0*ALPHA1*ALPHA2*DELTA ;
BB:=-(ALPHA1*GAMMA2+ALPHA2*GAMMA1
-DELTA*(ALPHA1+ALPHA2)*ALPHA1*ALPHA2) ;
         CC:=ALPHA1*ALPHA1*GAMMA2+ALPHA2*ALPHA2*GAMMA1-2.0*ALPHA1*
          ALPHA1*ALPHA2*ALPHA2*DELTA-V*V*(ALPHA2-ALPHA1)*
          (ALPHA2-ALPHA1) ;
   RESOL(AA,BB,CC,MU,ALPHA1) ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   DEBUT X[J]:=ALPHA2*(MU-ALPHA1)*A[I,J]+ALPHA1*(ALPHA2-MU)*
         A[I-1,J] ;
```

```
      X[J]:=X[J]/(MU*(ALPHA2-ALPHA1))
   FIN ;
   FONCT:=V*V/MU ; POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   FONCT:=FONCT+X[J]*A[0,J] ;
   IMPRESS(X,FONCT,V) ; ALLERA  STOP
      FIN ;
SI V > A[S-1,-3]*RAC2(A[S-1,-2]) ALORS
   DEBUT ALPHA1:=A[S-1,-3] ; BETA1:=A[S-1,-2] ;
      BETA2:=A[S,-2] ; DELTA:=A[S-1,-1] ;
      AA:=BETA2 ; BB:=ALPHA1*(DELTA-BETA2) ;
      CC:=ALPHA1*ALPHA1*(BETA1+BETA2-2*DELTA)-V*V ;
      RESOL(AA,BB,CC,MU,ALPHA1) ;
      POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      DEBUT X[J]:=(MU-ALPHA1)*A[S,J]+ALPHA1*A[S-1,J] ;
         X[J]:=X[J]/MU
      FIN ;
   FONCT:=V*V/MU ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   FONCT:=FONCT+X[J]*A[0,J] ;
   IMPRESS(X,FONCT,V)
     FIN ;
STOP: FIN ;

   POUR I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
DEBUT D1[I]:=0.0 ;
E1[I]:=0 ;
   POUR J:=-2 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE A1[I,J]:=0.0
   FIN ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   DEBUT
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
     QE[I,J]:=0.0 ; VE[I]:=0.0
    FIN ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE
F1[I]:=0 ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K1 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; D1[I]:=RDONNEE
FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K2 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ; J:=EDONNEE
   SI D1[I] SUPEG 0.0 ALORS A1[I,J]:=RDONNEE
   SINON A1[I,J]:=-RDONNEE
   FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K3 FAIRE
DEBUT
I:=EDONNEE ;
   SI D1[I] < 0.0 ALORS E1[I]:=-EDONNEE
   SINON E1[I]:=EDONNEE FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K4 FAIRE
DEBUT
```

```
I:=EDONNEE ; J:=EDONNEE ;
    QE[I,J]:=RDONNEE ;
    A1[M+I,J]:=QE[I,J] FIN ;
 POUR  I:=-2 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI D1[I] < 0.0 ALORS D1[I]:=-D1[I] ;
   A1[-2,-2]:=A1[-1,-1]:=A1[0,0]:=1.0 ;
   G1[-2]:=-2 ; G1[-1]:=-1 ; G1[0]:=0 ;
   L:=L1:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   B1[I]:=I ;
POUR I:=N+1 PAS 1 JUSQUA 4*N+3*M+1 FAIRE B1[I]:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
   SI E1[I]=1 ALORS DEBUT
L:=L+1 ;
A1[I,N+L]:=1.0 ;
G1[I]:=N+L FIN
SINON DEBUT SI E1[I]=-1
   ALORS DEBUT L:=L+1 ; L1:=L1+1 ;
A1[I,N+L]:=-1.0 ;
B1[N+L1]:=N+L FIN FIN ;
   N1:=N+L ; N3:=N+L1 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT A1[M+I,N1+I]:=-1.0 ;
F1[I]:=N1+I ; F1[N1+I]:=I FIN ;
L:=L1:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
SI E1[I] ≠ 0 ALORS DEBUT
L1:=L1+1 ;
L:=L+1 ; POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  A1[M+J,N+N1+L]:=A1[I,J]*E1[I] ;
F1[N+L1]:=N+N1+L ;
F1[N+N1+L]:=N+L1
   FIN
SINON DEBUT L:=L+1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A1[M+J,N+N1+L]:=A1[I,J] ; L:=L+1 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A1[M+J,N+N1+L]:=-A1[I,J] FIN ;
   POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K5 FAIRE
DEBUT
   I:=EDONNEE ;
    VE[I]:=RDONNEE ;
                   A1[M+I,2*N+2*M+1]:=VE[I]
   FIN ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT A1[M+I,2*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[M+I,3*N+2*M+1+I]:=-1.0 ;
B1[N3+I]:=3*N+2*M+1+I ;
G1[M+I]:=2*N+2*M+1+I ;
   A1[-2,3*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[-1,2*N+2*M+1+I]:=1.0 ;
A1[-1,3*N+2*M+1+I]:=1.0 FIN ;
```

```
L:=0 ;
   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
SI E1[I] ≠ 1 ALORS
DEBUT L:=L+1 ; A1[I,4*N+2*M+1+L]:=1.0 ;
G1[I]:=4*N+2*M+1+L FIN ;
N5:=4*N+2*M+1+L ;
A1[0,2*N+2*M+1]:=-1.0 ;
   POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N1 FAIRE
DEBUT S:=0.0 ;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
   SI E1[I] ≠ 1 ALORS
   S:=S-A1[I,J] ;
   A1[-2,J]:=S FIN ;
S1:=0.0 ; POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
   SI E1[I] ≠ 1 ALORS S1:=S1-D1[I] ;
   D1[-2]:=S1 ;
ECRIRE( " VALEUR PARAM " ) ;
   ECRIRE(M,N,N5) ;
   POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA PSUP FAIRE
    POUR J:=-3 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
     A2[I,J]:=0.0 ;
SIMQUAD(M,N1,N3,N5,H,T,A1,B1,G1,D1,F1,N) ;
    SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ;
   PSUP:=P ;
 POUR I:=-3 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      POUR P:=1 PAS 1 JUSQUA ENTIER((PSUP+0.1)/2.0) FAIRE
    DEBUT
    A2[0,I]:=A2[P,I];
    A2[P,I]:=A2[PSUP-P+1,I] ;
   A2[PSUP-P+1,I]:=A2[0,I]
    FIN ;
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   A2[0,I]:=VE[I] ;
  POUR P:=1 PAS 1 JUSQUA PSUP FAIRE
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   SI QE[I,J] ≠ 0 ALORS
    A2[P,-2]:=A2[P,-2]+A2[P,I]*QE[I,J]*A2[P,J] ;
  POUR P:=1 PAS 1 JUSQUA PSUP-1 FAIRE
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
   SI QE[I,J] ≠ 0 ALORS
    A2[P,-1]:=A2[P,-1]+A2[P,I]*QE[I,J]*A2[P+1,J] ;
                SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ;

   PROCEDURE INVERGAUSS(VAL,PASO,LSUP,REP) ;
    REEL VAL,PASO,REP ;
   ENTIER LSUP ;
     DEBUT
   ENTIER I ;
    POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA LSUP FAIRE
  SI VAL < TABUL[I+1] ALORS ALLERA  BEGIN ;
```

```
     BEGIN: REP:=I*PASO+(VAL-TABUL[I])*
      (PASO/(TABUL[I+1]-TABUL[I])) ;
    FIN ;

     SAUTPAGE ;
ECRIRE( "    DEPART " , " PHASE4 " ) ;
     SAUTLIGNE ; SAUTLIGNE ;
    ECRIRE(PROB,VSUP,PAS) ;
    DEPART:
   INVERGAUSS(PROB,PASO1,LSUP2,REP1) ;
   PARAM:=REP1 ;
    QUASIM(N,PSUP,A2,PARAM) ;
    PROB:=PROB+PAS ;
   SI PROB INFEG VSUP ALORS
     ALLERA  DEPART ;
    STOPFINAL: FIN ;

    FIN FIN FIN
    FIN ;
```

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE A LA TROISIEME PARTIE.

[35] AUSLENDER. A., "Algorithmes des programmes linéaires et paramètriques". (Laboratoire de calcul de l'Université de Grenoble 1964).

[36] WOLFE., "The simplex method for quadratic Programming".

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE