



HAL
open science

Méthodes de Runge Kutta de rang supérieur à l'ordre

Claude Metzger

► **To cite this version:**

Claude Metzger. Méthodes de Runge Kutta de rang supérieur à l'ordre. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1967. Français. NNT: . tel-00280665

HAL Id: tel-00280665

<https://theses.hal.science/tel-00280665>

Submitted on 19 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ordre

THESE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

" MATHEMATIQUES APPLIQUEES "

par

Claude METZGER

Licencié ès Sciences

Méthodes de Runge Kutta de rang supérieur à l'ordre



Thèse soutenue le 11 octobre 1967, devant la Commission d'examen :

Monsieur J. KUNTZMANN Président

Messieurs G. HACQUES Examineur
P. J. LAURENT Examineur

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES :

M. MORET

M. WEIL

DOYEN :

M. BONNIER E.

PROFESSEURS TITULAIRES :

MM. NEEL Louis	Chaire de Physique Expérimentale
HEILMANN René	Chaire de Chimie
KRAVTCHENKO Julien	Chaire de Mécanique Rationnelle
CHABAUTY Claude	Chaire de calcul différentiel et intégral
BENOIT Jean	Chaire de Radioélectricité
CHENE Marcel	Chaire de Chimie Papetière
WEIL Louis	Chaire de Thermodynamique
FELICI Noël	Chaire d'Electrostatique
KUNTZMANN Jean	Chaire de Mathématiques Appliquées
BARBIER Reynold	Chaire de Géologie Appliquée
SANTON Lucien	Chaire de Mécanique des Fluides
OZENDA Paul	Chaire de Botanique
FALLÔT Maurice	Chaire de Physique Industrielle
KOSZUL Jean-Louis	Chaire de Mathématiques M.P.C.
GALVANI O.	Mathématiques
MOUSSA André	Chaire de Chimie Nucléaire
TRAYNARD Philippe	Chaire de Chimie Générale

Mme KOFLER L.	Botanique
MM. DEGRANGE Charles	Zoologie
PERAY-PEROULA J.C.	Physique
RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM. GIDON P.	Géologie et Minéralogie
GIRAUD P.	Géologie
PERRET R.	Servomécanismes
Mme BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme SOUTIF J.	Physique
MM. COHEN J.	Electrotechnique
DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
ANGLES-d'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
DUCROS P.	Minéralogie et Cristallographie
GLENAT R.	Chimie
LACAZE A.	Thermodynamique
BARRA J.	Mathématiques Appliquées
COUMES A.	Electronique
PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
ROBERT A.	Chimie Papetière
BIAREZ J.P.	Mécanique Physique
BONNET G.	Electronique
CAUQUIS G.	Chimie Générale
BONNETAIN L.	Chimie Minérale
DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
HACQUES Gérard	Calcul Numérique
POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. DODU J.	Mécanique des Fluides
LANCIA Roland	Physique Automatique
Mme KAHANE J.	Physique
MM. DEPORTES C.	Chimie
Mme BOUCHE L.	Mathématiques
MM. SARROT-RAYNAUD J.	Géologie Propédeutique
Mme BONNIER M.J.	Chimie
MM. KAHANE A.	Physique Générale
DOLIQUE J.M.	Electronique
BRIERE G.	Physique M.P.C.
DESPRE P.	Chimie S.P.C.N.
LAJZEROWICZ J.	Physique M.P.C.
VALENTIN P.	Physique M.P.C.
BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
LAURENT P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
CAUBET J.P.	Mathématiques Pures
PAYAN J.J.	Mathématiques
Mme BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
MM. LONGEQUEUE J.P.	Physique
NIVAT M.	Mathématiques Appliquées
SOHM J.C.	Electrochimie
ZADWORNY F.	Electronique
DURAND F.	Chimie Physique
CARLIER G.	Biologie Végétale
AUBERT G.	Physique M.P.C.
DELPUECH J.J.	Chimie Organique
PFISTER J.C.	Physique C.P.E.M.
CHIBON P.	Biologie Animale
IDELMAN S.	Physiologie Animale
BLOCH D.	Electrotechnique
BRUGEL L.	I.U.T.
SIBILLE R.	I.U.T.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Calcul, qui m'a confié l'idée générale des méthodes à étudier, m'a donné de précieux conseils et a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Monsieur le Professeur HACQUES, qui a dirigé mon travail et m'a toujours aidé avec sollicitude.

Monsieur le Professeur LAURENT, qui a accepté d'être membre du Jury.

Tous mes collègues du Laboratoire pour les bonnes idées dont ils n'étaient pas avares.

I - INTRODUCTION

On se propose d'étudier la stabilité de la méthode de résolution numérique d'un système différentiel mis sous forme canonique

$$y' = Y(y,t) \quad (I)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Les méthodes étudiées sont des méthodes à pas séparés du type Runge-Kutta. L'étude la plus générale a été faite pour des méthodes à pas liés. L'équation récurrente associée à une méthode à pas séparés étant un cas particulier de celle associée à une méthode à pas liés, on va d'abord rappeler les différentes notions de stabilité utilisées pour les méthodes à pas liés.

I - ETUDE GENERALE DE LA STABILITE

L'équation récurrente associée à une méthode à pas liés est donnée par

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^{\ell} \beta_j Y_{n-j} \quad \ell < k \quad (\text{II})$$

où $Y_{n-j} = Y(y_{n-j}, t_0 + (n-j)h)$.

y_0, \dots, y_k sont donnés par des conditions initiales.

Tous les auteurs, pour des questions de simplicité de calcul, étudient la stabilité pour des systèmes différentiels linéaires $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$. Certains auteurs supposent aussi $A < 0$ (ou les valeurs propres de la matrice A de partie réelle négative). La solution tend alors vers 0 et on peut étudier la propagation de l'instabilité.

Certains auteurs ([1], [2], [3], [4], [5]) étudient ces formules pour $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, mais nh restant constant. On obtient une équation réduite linéaire

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j}$$

Sa solution est donnée par

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{k+1} A_j z_j^{n+1}$$

où A_j sont des constantes à déterminer par les conditions initiales

les z_j sont les racines (supposées toutes distinctes) de l'équation caractéristique réduite associée

$$z^{k+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^{k-j}$$

Henrici, Richtmyer et Fraboul étudient le cas linéaire. L'équation récurrente devient :

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j} + hA \sum_{j=0}^{\ell} \beta_j y_{n-j} \quad (\text{III})$$

Dans le cas $h \rightarrow 0$, les racines z_j^* de l'équation caractéristique associée à (III) :

$$z^{k+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^{k-j} + hA \sum_{j=0}^l \beta_j z^{k-j} \quad (IV)$$

approchent par continuité les racines z_j .

Selon l'hypothèse de consistance, c'est-à-dire que le développement de Taylor de y_n solution de (III) coïncide avec le développement de Taylor de $y(t_n)$ solution de (I) au point t_n au moins jusqu'à l'ordre 1, la racine égale à 1 est alors d'ordre 1. C'est la racine essentielle, régulière (ou principale). La solution de (III) sera approchée par

$$y_n = e^{Anh} + \sum_{j=2}^{k+1} A_j z_j^n$$

La condition de stabilité impose que les racines z_2, \dots, z_{k+1} soient en module < 1 ; la contribution de ces racines à la solution y_n tendra vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Henrici et Richtmyer démontrent que sous ces conditions, la consistance et la stabilité entraînent la convergence, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(t) \\ nh = t$$

Cette étude est surtout intéressante pour prouver l'instabilité caractéristique d'une méthode : si une racine au moins z_j de l'équation caractéristique réduite

$$z^{k+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^{k-j}$$

est en module > 1 , alors la méthode est instable.

Certains auteurs ([5], [7]) dénoncent la faiblesse de ces méthodes : si A est positif, la solution de (I) tend vers l'infini et la croissance de la solution due aux racines parasites peut ne pas gêner la solution. Hamming définit une stabilité relative. L'erreur propagée étant la différence entre la solution de (I) au point t_n et la solution y_n de (II), une méthode sera dite relativement stable si le rapport de l'erreur propagée à la solution est en module inférieur à 1. Mais cette définition impose la connaissance de la vraie solution. Ralston propose une autre définition : soit $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$, $hA \in [\alpha, \beta]$. Si z_1 est la racine essentielle principale, la méthode à pas liés (II) sera dite relativement stable si $|\frac{z_j}{z_1}| < 1$ pour $j \neq 1$, c'est-à-dire que la croissance exponen-

tielle des racines parasites est plus faible que celle de la racine essentielle principale. Pour une bonne utilisation de ce critère, il faudrait connaître des relations entre modules de deux racines d'un polynôme.

D'autres auteurs enfin, ([1],[3],[5],[9]) étudient la stabilité pour un pas h constant, mais un nombre de points calculés $n \rightarrow \infty$. Pour une équation différentielle linéaire, l'équation récurrente sera (II) et l'équation caractéristique associée (IV). Si $z_j^*(h)$ sont les solutions de (IV) (supposées toutes distinctes), alors la solution sera :

$$y_{n+1} = \sum_j A_j^* z_j^{*n+1}(h)$$

si, pour $0 < h < h_0$, toutes les racines de (IV) sont en module < 1 , la méthode sera dite stable.

Si h_0 est tel que

(1) toutes les racines de (IV) sont en module < 1

(2) pour $\delta h_0 > 0$, une racine de (IV) au moins pour $h_0 + \delta h_0$ est en module > 1

alors h_0 sera le rayon de stabilité de la méthode.

Nous adopterons cette définition de la stabilité.

II - CAS DES METHODES A PAS SEPARES

On peut appliquer cette définition aux méthodes d'intégration à pas séparés : le calcul de la solution au point t_{n+1} ne fait intervenir que les calculs faits au point t_n ; l'équation récurrente sera de la forme

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n, h)$$

où f est appelée la fonction incrément.

Les méthodes de Runge-Kutta font intervenir dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ des calculs de la solution en q points intermédiaires $t_{nj} = t_n + \theta_j h$ où $0 \leq \theta_j < \theta_{j+1} \leq 1$ pour $j = 0, \dots, q-1$, $\theta_0 = 0$ et $\theta_q = 1$

$$y_{nj} = y_n + h \theta_j Y_n + h \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} (Y_{nk} - Y_n)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad j &= 1, \dots, q \\ y_{nq} &= y_{n+1} \\ Y_{nk} &= Y(y_{nk}, t_{nk}) \end{aligned}$$

q sera le rang de la méthode.

Faisons coïncider le développement de Taylor de y_{n+1} avec celui de la solution de $y' = Y(y, t)$, $y(t_n) = y_n$ jusqu'en h^p : p sera dit l'ordre de la méthode.

Dans le cas d'une équation linéaire $y' = Ay$, l'équation récurrente devient $y_{n+1} = B(hA) y_n$ où $B(hA)$ est un polynôme de degré q en hA . Pour $A < 0$, la condition de stabilité devient $|B(hA)| < 1$.

Dans le cas d'un système linéaire $(y') = A(y)$, l'équation récurrente s'écrit vectoriellement $(y)_{n+1} = B(hA) (y)_n$. Si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle négative, la condition de stabilité sera que toutes les valeurs propres de $B(hA)$ soient en module inférieures à 1. Si m_j est valeur propre de A, $B(hm_j)$ sera valeur propre de $B(hA)$. Une première méthode consiste à calculer le polynôme caractéristique de $B(hA)$. Jury ([10], [11]), Fraboul ([12]), Wilf ([13]) donnent des conditions, basées sur le critère d'Hurwitz, sur les coefficients d'un polynôme pour que toutes ses racines soient en module < 1 . Pour une matrice d'ordre 2, le polynôme caractéristique de $B(hA)$ étant $z^2 + \alpha z + \beta$, les conditions sont :

$$\begin{aligned} 1 + \alpha + \beta &> 0 \\ 1 - \alpha + \beta &> 0 \\ 1 - \beta &> 0 \end{aligned}$$

Pour une matrice d'ordre 3, le polynôme caractéristique de $B(hA)$ étant $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, on a à satisfaire,

$$\begin{aligned} 1 + \alpha + \beta + \gamma &> 0 \\ 1 - \alpha + \beta - \gamma &> 0 \\ |\gamma| &< 1 \\ \gamma^2 - 1 &< \alpha\gamma - \beta \end{aligned}$$

Cette méthode donne en général trop de conditions inutiles. Profitons du fait que chaque valeur propre de $B(hA)$ s'exprime en fonction d'une valeur propre de A . ([16]). Soit $m_j = r_j + is_j$ une valeur propre de A , et $B(hm_j) = P_j(h) + iQ_j(h)$ la valeur propre correspondante de $B(hA)$. Si m_k est la valeur propre conjuguée de m_j (on suppose que A est une matrice réelle), $m_k = r_j - is_j$, alors $B(hm_k) = P_j(h) - iQ_j(h)$, car le développement en puissance impaire de $-is_j$ change le signe du coefficient intervenant dans $Q_j(h)$, et une puissance paire de $-is_j$ fait rentrer ce terme dans $P_j(h)$.

Les conditions à vérifier seront

$$|P_j(h) + i Q_j(h)| < 1 \quad j = 1, \dots, \text{Ordre de } A.$$

Ne considérons que les valeurs propres m_j n'admettant pas de conjuguées :

$$P_{j_0}^2(h) + Q_{j_0}^2(h) < 1.$$

Nous étudierons ces conditions. Or remarquera que pour une matrice A réelle d'ordre 2, il n'y aura qu'une condition à vérifier.

III - METHODES DE RUNGE-KUTTA.

Dans ce travail, on étudiera la stabilité des formules de Runge-Kutta dont le rang est supérieur à l'ordre. On aura à notre disposition certains coefficients libres ; on pourra ainsi augmenter le rayon de stabilité et agir peut-être sur l'erreur de façon à pouvoir comparer la méthode étudiée à celle de rang égal à l'ordre.

a) Rappel de l'obtention du développement de la solution.

Calculons le développement en série de Taylor de la solution de $y' = Y(y,t)$, $y(t_n) = y_n$.

Soit

$$Y(y^*(t)) = Y(y_n(t) + \delta y_n(t))$$

où

$$y_n(t) = y(t_n) + \frac{(t-t_n)^2}{2} y''(t_n) + \frac{(t-t_n)^3}{3!} y'''(t_n) + \dots$$

En développant :

$$Y(y_n(t) + \delta y_n(t)) = Y(y_n(t)) + \frac{\delta Y}{\delta y} \Big|_{t_n} \delta y_n(t) + \dots$$

Considérons le développement en t de la solution :

$$Y(y_n(t)) = Y_n + (t-t_n) C_1 + \frac{(t-t_n)^2}{2} C_2 + \frac{(t-t_n)^3}{6} C_3 + \dots$$

$$\frac{\delta Y}{\delta y} = J_1 + (t-t_n) K_1 + \frac{(t-t_n)^2}{2} L_1 + \dots$$

D'où $Y(y_n(t)+\delta y_n(t)) = Y_n + (t-t_n)C_1 + \frac{(t-t_n)^2}{2} C_2 + \frac{(t-t_n)^3}{6} C_3 + \dots$

$$+ (J_1 + (t-t_n)K_1 + \dots) \frac{(t-t_n)^2}{2} y''(t_n) + \frac{(t-t_n)^3}{6} y'''(t_n) + \dots$$

$$Y(y_n(t)+\delta y_n(t)) = Y_n + (t-t_n)C_1 + \frac{(t-t_n)^2}{2} (C_2 + J_1 y''(t_n)) + \frac{(t-t_n)^3}{6} (C_3 + 3K_1 y''(t_n) + J_1 y'''(t_n)) + \dots$$

Or $y''(t_n)$ est le coefficient de $(t-t_n)$, $y'''(t_n)$ celui de $\frac{(t-t_n)^2}{2}$

$$Y(y^*(t)) = Y_n + (t-t_n)C_1 + \frac{(t-t_n)^2}{2} (C_2 + J_1 C_1) + \frac{(t-t_n)^3}{6} (C_3 + 3K_1 C_1 + J_1 C_2 + J_1^2 C_1) + \dots$$

En supposant la série uniformément convergente sur $[t_n, t_{n+1}]$, la solution du problème aura pour développement :

$$y^*(t) = y_n + (t-t_n)Y_n + \frac{(t-t_n)^2}{2} C_1 + \frac{(t-t_n)^3}{6} (C_2 + J_1 C_1) + \frac{(t-t_n)^4}{24} (C_3 + 3K_1 C_1 + J_1 C_2 + J_1^2 C_1) + \dots$$

L'erreur par pas sera donc la différence entre y_{n+1} et le développement de y^* au point t_{n+1} .

b) Etude particulière de la stabilité des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 1 et de rang quelconque, cf [9]

Pour un système différentiel linéaire $(y') = A(y)$, le système récurrent coïncidant à l'ordre 1 avec le développement de Taylor est

$$(y)_{n+1} = (Id + hA + \sum_{j=2}^q \alpha_j (hA)^j) (y)_n$$

soit

$$(y)_{n+1} = B(hA) (y)_n$$

Pour avoir stabilité, il faut que le polynôme $B(z)$ reste entre -1 et $+1$ pour z appartenant à l'intervalle $[z_0, 0]$. Ce polynôme est unique pour $|z_0|$ maximum : c'est un polynôme de Tchebischeff. Le polynôme de meilleure approximation de degré q (rang de la méthode) est $T_q(1 + \frac{z}{2})$ et z se trouve dans l'intervalle $[-2q^2, 0]$. Les cas $q = 2, 3, 4$ sont représentés figure I-1. Les courbes en pointillé représentent le polynôme de la méthode d'ordre et de rang $q = 2, 3, 4$ et Λ donne le rayon de stabilité maximum.

c) Fonctions étudiées

Nous étudierons donc les formules de Runge-Kutta de rang supérieur à l'ordre, d'abord dans le cas des équations différentielles linéaires. Pour un système différentiel linéaire dont la matrice admet uniquement des valeurs propres réelles, les conditions de stabilité reviennent à écrire autant de fois que l'ordre de la matrice les conditions écrites pour une équation différentielle ; aussi étudiera-t-on un système dont la matrice admet des valeurs propres imaginaires à partie réelle négative. On traitera également deux équations différentielles non linéaires dont on déterminera empiriquement le rayon de stabilité :

$$y' = -y^2, y(0) = 1 \text{ de solution } y = \frac{1}{1+t}$$

$$y' = -2ty^2, y(0) = 1 \text{ de solution } y = \frac{1}{1+t^2}$$

Pour chaque série d'exemples traités, on donnera une grille de coefficients de la méthode sous la forme :

θ_1				
θ_2	A_{21}			
...
θ_i	A_{i1}	A_{i2}	...	A_{ii-1}
...
θ_{q-1}	$A_{q-1,1}$	$A_{q-1,2}$...	$A_{q-1,q-2}$
	A_{q1}	A_{q2}	...	A_{qq-1} A_{qq-1}

d) Etude du coût relatif.

Nous introduisons une fonction-coût. Si la méthode de Runge-Kutta emploie q points intermédiaires, il y aura q calculs de fonctions y_{ij} , le temps de calcul sera de l'ordre de q unités, soit q horners.

On va tenter de mesurer les efficacités respectives des méthodes RK_{qp} de rang q et d'ordre p et de la méthode RK_{pp} de rang et d'ordre p . Soit $\Lambda(\frac{q}{p})$ le rayon de stabilité et $E(\frac{q}{p})$ l'erreur par pas d'une formule $\frac{q}{p}$. Pour un même pas h , on peut comparer les erreurs par pas de 2 méthodes RK_{qp} et $RK_{pp} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \epsilon_{qp}$ et $\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \epsilon_{pp}$. Pour h voisin de $\Lambda(RK_{qp})$, la quantité $E(RK_{qp})/E(RK_{pp})$ n'aura pas de sens, car la méthode RK_{pp} sera en général instable. Au voisinage de chacun des rayons de stabilité,

$\frac{\Lambda^{p+1}(RK_{qp})}{(p+1)!} \epsilon_{qp} / \frac{\Lambda^{p+1}(RK_{pp})}{(p+1)!} \epsilon_{pp}$ est le rapport des erreurs absolues qui peut être arbitrairement grand tout en ne tenant compte de la précision des méthodes. Aussi choisira-t-on comme mesure relative d'erreur $\frac{\epsilon_{qp}}{\epsilon_{pp}}$, le rapport des erreurs par pas pour un pas h donné.

On introduira ainsi le coût relatif d'une méthode RK_{qp} :

$$\frac{q}{p} * \frac{\Lambda(RK_{pp})}{\Lambda(RK_{qp})} * \frac{\epsilon_{qp}}{\epsilon_{pp}}$$

Pour chaque exemple étudié, on calculera le coût de la méthode.

CHAPITRE - II

METHODES DE RUNGE-KUTTA DE RANG 2

L'approximation par une méthode de Runge-Kutta de rang 2 de la solution de l'équation différentielle $y' = Y(y,t)$, $y(t_0) = y_0$ est

$$y_{i1} = y_i + h \theta_1 Y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h Y_i + hA_{21}(Y_{i1} - Y_i)$$

y_{i+1} est exacte à l'ordre 1.

Etude de la stabilité

En portant l'équation différentielle $y' = Ay$ dans le système, on obtient :

$$y_{i1} = (1+hA\theta_1) y_i$$

$$y_{i+1} = (1+hA+h^2A^2A_{21}\theta_1) y_i$$

Posons

$$\alpha = A_{21} \theta_1$$

$$u = hA$$

L'équation récurrente devient

$$y_{i+1} = (1 + u + \alpha u^2) y_i$$

La condition de stabilité sera

$$|1 + u + \alpha u^2| < 1.$$

A étant négatif, u sera négatif ; on aura les 2 conditions à satisfaire :

$$1 + u\alpha > 0 \quad (1)$$

$$2 + u + u^2\alpha > 0 \quad (2)$$

Soit

$$\alpha < -\frac{1}{u} \quad (1) \quad \text{et} \quad \alpha > -\frac{2}{u} - \frac{1}{u} \quad (2)$$

Etude de (2)

$$\frac{d(2)}{du} = \frac{4}{u^3} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^3}(u+4)$$

Pour u dans $[-\infty, -4]$, $\frac{d(2)}{du} > 0$, donc (2) est croissante.

Pour u dans $[-4, 0]$, $\frac{d(2)}{du} < 0$, donc (2) est décroissante.

α doit donc être compris entre les courbes (1) et (2) de la figure II-1 pour avoir stabilité.

On obtient la plus grande stabilité pour $\alpha = \frac{1}{8}$, soit $u = -8$, $h = \frac{-8}{A}$

Etude de l'erreur par pas.

Le développement de Taylor de la solution exacte est

$$y_{i+1}^* = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} C_1 + \dots$$

En développant la solution calculée jusqu'à l'ordre 2, il vient :

$$Y_{i1} - Y_i = h \theta_1 C_1 + \dots$$

soit :

$$y_{i+1} = y_i + h Y_i + h^2 A_{21} \theta_1 C_1 + \dots$$

L'erreur par pas est donc :

$$y_{i+1}^* - y_{i+1} = \left(\frac{1}{2} - A_{21} \theta_1\right) h^2 C_1 = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) h^2 C_1$$

La meilleure stabilité étant obtenue pour $\alpha = \frac{1}{8}$, on peut choisir $\theta_1 = 1$ et $A_{21} = \frac{1}{8}$ soit la grille des coefficients :

1	
	$\frac{1}{8}$

Traçons les courbes à erreur constante, c'est-à-dire

$$\frac{h^2}{2} C_1 |1-2\alpha| = E \text{ ou } h^2 = \frac{2E}{C_1 |1-2\alpha|}$$

On obtient les courbes tracées en pointillé figure II 1 . On voit donc que pour un rayon de stabilité donné Λ , on aura une erreur par pas plus petite en prenant le coefficient α défini par la condition (1). On obtiendra une erreur par pas plus petite et un rayon de stabilité plus grand que la méthode de rang 1 et d'ordre 1 dans la région hachurée.

Calcul du coût de la méthode.

Le rayon de stabilité de la méthode de rang 1 et d'ordre 1 est $\Lambda = 2$, son erreur par pas $\frac{h^2}{2} C_1$.

Le rayon de stabilité de la méthode de rang 2 et d'ordre 1 pour $\alpha = \frac{1}{8}$ est $\Lambda = 8$ et l'erreur par pas $\frac{h^2}{2} C_1 |1-2\alpha|$

Le coût relatif sera

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{8} = 0,375$$

Il y a gain pour cette méthode.

Vérification numérique.

Vérifions numériquement les résultats obtenus.

On a étudié l'équation différentielle $y' = -y$, $y(0) = 1$.

Sur la figure II-2, un point représente la stabilité et une croix l'instabilité.

Prenons par exemple le cas $\alpha = \frac{1}{10}$. Les essais numériques ont porté sur 200 valeurs de la fonction pour chaque pas h donné, et on a obtenu :

Stabilité pour $h = 2, 2.25, 2.5$;

Instabilité pour $h = 2.75, 3, 3.5, 4, 5, 5, 6.5, 6.75, 7$;

Stabilité pour $h = 7.25, 7.5, 7.75, 8, 8.5, 9, 9.5, 9.75$;

Instabilité pour $h = 10, 10.25$;

Comme exemple de résultats obtenus, pour $\alpha = \frac{1}{10}$:

$T_{h=2.0}$	Y	$T_{h=3.0}$	Y	$T_{h=8.0}$	Y	$T_{h=10.5}$	Y
0	1.0	0	1.0	0	1.0	0	1.0
2	-0.6	3	-1.1	8	-0.6	10.5	1.52
4	0.36	6	1.21	16	0.36	21	2.33
6	-0.216	9	-1.33	24	-0.216	31.5	3.55
8	0.1296	---	---	32	0.13	42	5.41
10	-0.0777	90	17.45	40	-0.078	---	---
---	---	---	---	---	---	105	68
20	$0.605 \cdot 10^{-2}$	---	---	200	$-0.28 \cdot 10^{-5}$	---	---
100	0.80810^{-11}	---	---	---	---	---	---

Pour $h = 2.0$, la solution oscille autour de 0, mais ces perturbations décroissent en module ; la solution est donc stable. Pour $h = 10.0$, la solution calculée est égale à 1 pour toute valeur de t , il y a donc instabilité.

Comparons la précision des résultats entre les méthodes de rang 2 d'ordre 1 et celle de rang 1 et d'ordre 1.

RK11 ($\alpha = 0$)

$$h = 1.5 \quad T = 75 \quad y = 0.888 \cdot 10^{-15} \quad y^* = 0.268 \cdot 10^{-32}$$

RK21 ($\alpha = \frac{1}{4}$)

$h = 1.5$	$T = 45$	$y = 0.752 \cdot 10^{-36}$	$y^* = 0.286 \cdot 10^{-19}$
$h = 2.5$	$T = 75$	$y = 0.75 \cdot 10^{-36}$	$y^* = 0.268 \cdot 10^{-32}$
$h = 3.0$	$T = 75$	$y = 0.888 \cdot 10^{-15}$	$y^* = 0.268 \cdot 10^{-32}$
$h = 3.5$	$T = 70$	$y = 0.1 \cdot 10^{-4}$	$y^* = 0.327 \cdot 10^{-30}$

RK21 ($\alpha = \frac{1}{8}$)

$h = 1.5$	$T = 75$	$y = 0.994 \cdot 10^{-33}$	$y^* = 0.268 \cdot 10^{-32}$
$h = 2.5$	$T = 75$	$y = 0.498 \cdot 10^{-4}$	$y^* = 0.268 \cdot 10^{-32}$
$h = 4.0$		$y \equiv 1.$	
$h = 7.0$	$T = 70$	$y = 0.931 \cdot 10^{-9}$	$y^* = 0.397 \cdot 10^{-30}$

RK22 ($\alpha = \frac{1}{2}$)

$h = 1.5$	$T = 75$	$y = 0.622 \cdot 10^{-10}$	$y^* = 0.268 \cdot 10^{-32}$
-----------	----------	----------------------------	------------------------------

La meilleure précision aurait dû être obtenue par la méthode de rang 2 et d'ordre 2 ; remarquons par exemple que la méthode de rang 1 et d'ordre 1 pour un pas de 1.5 (erreur par pas : $1.125 C_1$) peut rivaliser avec la méthode de rang 2 et d'ordre 1 où $\alpha = \frac{1}{4}$ et le pas 3.0 (erreur par pas : $2.25 C_1$).

Pour $y' = -y$, $y(0) = 1$, la précision de la méthode est, en première approximation, proportionnelle à l'erreur par pas. Ce résultat ne sera plus vrai pour les équations différentielles non linéaires.

Résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients variables ou une équation non linéaire conduit à faire localement l'étude du rayon de stabilité : sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on considère l'approximation linéaire de l'équation différentielle $Y(y, t) \approx Y(y_i, t_i) + (y - y_i) \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_i + (t - t_i) \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_i$ et on calcule le rayon de stabilité en bornant la dérivée $\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_i$. On recalcule en chaque point le nouveau rayon de stabilité. cf. [14].

On pourrait intégrer de cette manière l'équation différentielle à traiter. Nous nous bornerons à étudier empiriquement le rayon de stabilité global : on intégrera numériquement l'équation différentielle sur une centaine d'itérations et on déterminera expérimentalement les zones stables et instables, ainsi que les courbes les délimitant.

II - ETUDE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE D'ORDRE 2.

L'approximation vectorielle par une méthode de rang 2 est :

$$X_{i1} = X_i + h \theta_1 Z_i$$

$$X_{i+1} = X_i + h Z_i + hA_{21} (Z_{i1} - Z_i)$$

Etude de la stabilité

Etudions le système différentiel linéaire d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A doit avoir les valeurs propres de partie réelle négative ; or la somme de ces valeurs propres est $(a+d)$ et le produit $(ad-bc)$; on doit donc avoir $a+d < 0$ et $ad-bc > 0$.

Portons $X' = AX$ dans le système récurrent :

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= (\text{Id} + hA\theta_1) X_i \\ X_{i+1} &= (\text{Id} + hA + h^2 A^2 A_{21}^{-1} \theta_1) X_i \end{aligned}$$

Posons $\alpha = A_{21}^{-1} \theta_1$

$$X_{i+1} = (\text{Id} + hA + h^2 A^2 \alpha) X_i = B(hA) X_i$$

Pour avoir stabilité, il suffit que les valeurs propres de $B(hA)$ soient en module inférieures à 1.

Si $r_1 = a_1 + ib_1$ est valeur propre de A , la condition à vérifier sera

$$|1 + h(a_1 + ib_1) + h^2(a_1 + ib_1)^2 \alpha| < 1.$$

Soit :

$$(1 + ha_1 + h^2(a_1^2 - b_1^2)\alpha)^2 + h^2(b_1 + 2a_1 b_1 h\alpha)^2 < 1.$$

Pour une matrice A donnée et un α donné, on cherchera h^* qui ne permet plus de vérifier la condition, et on fera varier α de façon à déterminer α^* qui donne le plus grand rayon de stabilité.

Exemple numérique.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $-1+i$ et $-1-i$.

On aura à satisfaire

$$\begin{aligned} (1-h)^2 + h^2(1-2h\alpha)^2 &< 1 \\ (1-2h\alpha)^2 &< \frac{2-h}{h} \\ \frac{1}{2h} \left(1 - \sqrt{\frac{2-h}{h}}\right) &< \alpha < \frac{1}{2h} \left(1 + \sqrt{\frac{2-h}{h}}\right) \end{aligned}$$

La plus grande valeur de h pouvant être atteinte est 2 et elle est obtenue pour $\alpha = \frac{1}{4}$.

On obtient la courbe de stabilité tracée figure II-3. Elle a été vérifiée pour le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x(0) = y(0) = 1, \text{ qui a pour solution}$$

$x = (\cos t - \sin t) e^{-t}$ et $y = \cos t e^{-t}$. On a pris la détermination des coefficients faite au paragraphe I.

Etude du coût de la méthode.

Le rayon de stabilité de la méthode de rang 1, d'ordre 1 est obtenu pour $\alpha = 0$, soit $\Lambda = 1$ et celui de la méthode de rang 2 et d'ordre 1 pour $\alpha = 0,25$, soit $\Lambda = 2$. Le rapport des erreurs par pas est $|1-2\alpha| = \frac{1}{2}$.

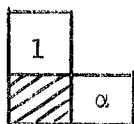
Le coût relatif est égal à

$$\frac{2}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 0,5$$

Il y a gain pour cette méthode.

III - ETUDE DE 2 EQUATIONS NON LINEAIRES

On a pris pour traiter ces deux exemples les coefficients donnés par l'étude au paragraphe I ; on a pris $\theta_1 = 1$, soit la grille



Le rapport des erreurs par pas est $|1-2\alpha|$.

$$- y' = -y^2, \quad y(0) = 1$$

On obtient la courbe de stabilité tracée figure II-4. Comparons la précision des résultats entre les différentes méthodes de Runge-Kutta :

RK11 ($\alpha = 0$)

$h = 0.7$ $T = 70$ $y = 0,01335$ $y^* = 0,01408$

RK21 ($\alpha = 0.98$)

$h = 0.7$	$T = 70$	$y = 0.0155$	$y^* = 0.01408$
$h = 1.2$	$T = 120$	$y = 0.01088$	$y^* = 0.008264$
$h = 1.6$	$T = 160$	$y = 0.006777$	$y^* = 0.006211$

RK22 ($\alpha = 0.5$)

$h = 1.2$	$T = 120$	$y = 0.008254$	$y^* = 0.008264.$
-----------	-----------	----------------	-------------------

L'erreur par pas de la méthode RK21 pour $\alpha = 0.98$, $h = 1.6$ est $1.23 C_1$ et celle de la méthode RK11 pour $\alpha = 0$, $h = 0.7$ est $0.245 C_1$; cependant la première méthode donne de meilleurs résultats que la seconde. Pour $\alpha = 0.98$, $h = 0.7$, l'erreur par pas est $0.235 C_1$, et la méthode est aussi précise que celle de rang 1 et d'ordre 1.

La méthode d'ordre 1 ($\alpha = 0$) donne $\Lambda = 1$, celle d'ordre 2 ($\alpha = \frac{1}{2}$) donne $1,5 < \Lambda < 1,55$, et le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\alpha = 0,98$, soit $1,7 < \Lambda < 1,75$.

Le coût relatif est :

$$\frac{2}{1} \times 0,96 \times \frac{1}{1,75} \neq 1,1$$

La méthode n'est pas rentable.

$$\underline{y' = -2t y^2, y(0) = 1}$$

On obtient la courbe de stabilité tracée figure II-5. La méthode d'ordre 1 ($\alpha = 0$) admet pour rayon de stabilité $0,65 < \Lambda < 0,7$, celle d'ordre 2 ($\alpha = \frac{1}{2}$) admet $0,95 < \Lambda < 1$. Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\alpha = 0,22$, soit $1,5 < \Lambda < 1,55$.

Le coût relatif de la méthode est

$$\frac{2}{1} \times 0,56 \times \frac{0,7}{1,55} \neq 0,5$$

Il y a gain pour cette méthode.

CHAPITRE-III

I - METHODE DE RUNGE-KUTTA DE RANG 3

L'approximation par une méthode de Runge-Kutta de rang 3 de la solution de l'équation différentielle $y' = Y(y,t)$, $y(t_0) = y_0$ est

$$y_{i1} = y_i + h\theta_1 Y_i$$

$$y_{i2} = y_i + h\theta_2 Y_i + hA_{21}(Y_{i1} - Y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hY_i + hA_{31}(Y_{i1} - Y_i) + hA_{32}(Y_{i2} - Y_i)$$

En développant par la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 3, on obtient :

$$\begin{aligned} Y_{i1} - Y_i &= Y(t_i + \theta_1 h, y_i + h\theta_1 Y_i) - Y_i \\ &= h\theta_1 C_1 + \frac{h^2 \theta_1^2}{2} C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{i2} - Y_i &= Y(t_i + \theta_2 h, y_i + h\theta_2 y_i + h^2 A_{21} \theta_1 C_1) - Y_i \\ &= h\theta_2 C_1 + \frac{h^2 \theta_2^2}{2} C_2 + h^2 A_{21} \theta_1 J_1 C_1 \end{aligned}$$

D'où

$$y_{i+1} = y_i + hY_i + h^2 (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) C_1 + h^3 \left(\frac{A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2}{2} C_2 + A_{32} A_{21} \theta_1 J_1 C_1 \right)$$

I - METHODE D'ORDRE 1

En portant $y' = Ay$ dans le système, on obtient :

$$y_{i1} = (1 + hA\theta_1) y_i$$

$$y_{i2} = (1 + hA\theta_2 + h^2 A^2 A_{21} \theta_1) y_i$$

$$y_{i+1} = (1 + hA + h^2 A^2 (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) + h^3 A^3 A_{32} A_{21} \theta_1) y_i$$

Posons $u = hA$

$$\beta = A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2$$

$$\alpha = A_{32} A_{21}\theta_1$$

La condition de stabilité s'écrira :

$$|1 + u + u^2 \beta + u^3 \alpha| < 1.$$

Soit, u étant négatif :

$$1 + \beta u + \alpha u^2 > 0$$

$$2 + u + \beta u^2 + \alpha u^3 > 0$$

En tirant α :

$$\alpha > -\frac{1}{u^2} - \frac{\beta}{u} \quad (1)$$

$$\alpha < -\frac{2}{u^3} - \frac{1}{u^2} - \frac{\beta}{u} \quad (2).$$

Etude de (1) - Figure III-1.

$$\frac{d(1)}{du} = \frac{2}{u^3} + \frac{\beta}{u^2}$$

qui s'annule pour $u = -\frac{2}{\beta}$

Etude de (2) - Figure III-2.

$$\frac{d(2)}{du} = \frac{6}{u^4} + \frac{2}{u^3} + \frac{\beta}{u^2} = \frac{1}{u^4} (6 + 2u + \beta u^2)$$

$6 + 2u + \beta u^2$ a pour discriminant $1 - 6\beta$.

D'où

$$\beta > \frac{1}{6}, \frac{d(2)}{du} > 0$$

la fonction est croissante

$0 < \beta < \frac{1}{6}$, 2 racines négatives pour $\frac{d(2)}{du}$

$\beta < 0$, 1 racine négative pour $\frac{d(2)}{du}$

La plage maximale est obtenue pour un β_0 dans l'intervalle $|0, \frac{1}{6}|$ figure II-3.

Pour déterminer la plage maximale du pas, c'est-à-dire pour u dans $|u_0, 0|$, $|u_0|$ maximal, on se sert de la méthode de Guillou et Lago : le polynôme de meilleure stabilité $1 + u + \beta u^2 + \alpha u^3$ sera le polynôme $T_3(1 + \frac{u}{9})$, soit

$$1 + u + \frac{4u^2}{27} + \frac{4u^3}{729}$$

On obtient les valeurs :

$$\alpha = \frac{4}{729}, \quad \beta = \frac{4}{27} \quad \text{et} \quad \Lambda = 18$$

La zone hachurée de la figure III-4 est la zone de stabilité.

Etude de l'erreur par pas.

Le développement de Taylor de la solution exacte est

$$y_{i+1}^* = y_i + hY_i + \frac{h^2}{2} C_1 + \frac{h^3}{6} (C_2 + J_1 C_1) + \dots$$

Le développement de la solution approchée est

$$y_{i+1} = y_i + hY_i + h^2 \beta C_1 + h^3 [(A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2) C_2 / 2 + \alpha J_1 C_1]$$

L'erreur par pas est :

$$y_{i+1}^* - y_{i+1} = \frac{h^2}{2} (1-2\beta) C_1 + \frac{h^3}{6} [C_2 (1-3(A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2)) + J_1 C_1 (1-6\alpha)]$$

On a les conditions de stabilité :

$$A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2 = \beta$$

$$A_{32} A_{21} \theta_1 = \alpha$$

Prenons comme condition supplémentaire :

$$A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2 = \frac{1-\mu}{3}$$

De la première et de la dernière, on tire :

$$A_{31} \times \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \theta_2 \\ \frac{1-\mu}{3} & \theta_2^2 \end{vmatrix} = \theta_2 \left(\beta \theta_2 - \frac{1-\mu}{3} \right)$$

$$A_{32} \times \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_1 & \beta \\ \theta_1^2 & \frac{1-\mu}{3} \end{vmatrix} = \theta_1 \left(\frac{1-\mu}{3} - \beta \theta_1 \right)$$

soit

$$A_{31} = \frac{\beta \theta_2 - \frac{1-\mu}{3}}{\theta_1 (\theta_2 - \theta_1)}$$

$$A_{32} = \frac{\frac{1-\mu}{3} - \beta \theta_1}{\theta_2 (\theta_2 - \theta_1)}$$

$$A_{21} = \alpha \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{\theta_2 - \theta_1}{\frac{1-\mu}{3} - \beta \theta_1}$$

On peut prendre comme formule optimale :

$$\theta_2 = 1, \alpha = \frac{4}{729}, \beta = \frac{4}{27}, \mu = 0$$

$$A_{31} = \frac{-5}{27 \theta_1 (1 - \theta_1)}$$

$$A_{32} = \frac{9 - 4\theta_1}{27 (1 - \theta_1)}$$

$$A_{21} = \frac{4(1 - \theta_1)}{27 \theta_1 (9 - 4\theta_1)}$$

Une grille possible de coefficients pourra être :

$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{4}{189}$	
	$-\frac{20}{27}$	$\frac{14}{27}$

Etude du coût de la méthode.

Le rayon de stabilité pour la méthode de Runge-Kutta de rang 3 et d'ordre 1 pour l'équation différentielle $y' = -y$ est 18 et l'erreur par pas est $\frac{h^2}{2} C_1(1-2\beta)$

Le coût sera donc :

$$\frac{3}{1} \times \frac{19}{27} \times \frac{2}{18} \neq 0,23$$

Il y a gain pour cette méthode.

Vérification numérique.

La vérification numérique a été faite pour $y' = -y+1$ $y(0) = 0$, de solution $1 - e^{-t}$. L'étude de $y' = -y$, $y(0) = 1$ peut provoquer des sous-passements de capacité, aussi avons nous étudié cette dernière équation différentielle. Les résultats concordent avec la théorie. Sur la figure III-5, un point représente une stabilité et une croix l'instabilité.

II - METHODES D'ORDRE 2

Dans l'étude précédente, on posera $\beta = A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2 = \frac{1}{2}$

soit :

$$\begin{aligned} y_{i1} &= y_i + h\theta_1 Y_i \\ y_{i2} &= y_i + h\theta_2 Y_i + hA_{21}(Y_{i1} - Y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hY_i + h \frac{1-2A_{32}\theta_2}{2\theta_1} (Y_{i1} - Y_i) + hA_{32}(Y_{i2} - Y_i) \end{aligned}$$

Etude de la stabilité.

L'équation récurrente devient, en portant $y' = Ay$:

$$y_{i+1} = \left(1 + hA + \frac{h^2 A^2}{2} + h^3 A^3 A_{32} A_{21} \theta_1\right) y_i$$

soit, en posant

$$hA = u \text{ et } A_{32} A_{21} \theta_1 = \alpha :$$

$$y_{i+1} = \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \alpha u^3\right) y_i$$

La condition de stabilité s'écrira :

$$|1 + u + \frac{u^2}{2} + \alpha u^3| < 1.$$

Comme u est négatif, on obtient les deux conditions :

$$1 + \frac{u}{2} + \alpha u^2 > 0 \quad (1)$$

$$2 + u + \frac{u^2}{2} + \alpha u^3 > 0 \quad (2)$$

En tirant α de ces 2 inégalités :

$$\alpha > -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{2u} \quad (1)$$

$$\alpha < -\frac{2}{u^3} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2u} \quad (2)$$

Etude de (1)

$$\frac{d(1)}{du} = \frac{2}{u^3} + \frac{1}{2u^2} = \frac{1}{u^3} \left(2 + \frac{u}{2}\right) \text{ qui admet } -4 \text{ comme zéro}$$

Etude de (2)

$$\frac{d(2)}{du} = \frac{6}{u^4} + \frac{2}{u^3} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^4} (6 + 2u + \frac{u^2}{2})$$

$$6 + 2u + \frac{u^2}{2} \text{ admet pour discriminant } 1 - 12 < 0$$

Cherchons le plus grand rayon de stabilité :

pour $u = -4$, (1) donne la valeur de α : $\frac{1}{16}$

On obtient Λ comme racine de (2) où $\alpha = \frac{1}{16}$:

$$\frac{1}{16} = -\frac{2}{u^3} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2u}$$

$$\text{soit } 2 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{16} = 0$$

D'où $u = -6,2607908$

On obtient la zone hachurée figure III-6 comme zone de stabilité.

Le polynôme de meilleure stabilité est représenté figure III-7.

On dispose de 4 coefficients $A_{32}, A_{31}, \theta_2, \theta_1$; A_{21} sera choisi pour satisfaire $A_{21} \cdot A_{32}^2 = \alpha$. Calculons l'erreur par pas.

Etude de l'erreur par pas.

En développant la solution de l'équation récurrente, on obtient, d'après l'étude faite pour l'ordre 1:

$$y_{i+1} = y_i + hY_i + \frac{h^2}{2}C_1 + h^3 \left[\frac{A_{31}\theta_1^2 + A_{32}\theta_2^2}{2} C_2 + A_{32} A_{21} \theta_1 J_1 C_1 \right].$$

L'erreur par pas est donc :

$$\frac{h^3}{6} \left[(1 - 3(A_{31}\theta_1^2 + A_{32}\theta_2^2)) C_2 + (1 - 6A_{32}A_{21}\theta_1) J_1 C_1 \right]$$

On a à satisfaire :

$$\text{la condition de stabilité } A_{32} A_{21} \theta_1 = \alpha \quad (1)$$

$$\text{la condition sur l'ordre } A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Prenons comme condition supplémentaire

$$1 - 3(A_{31}\theta_1^2 + A_{32}\theta_2^2) = \mu \quad (3)$$

En résolvant (2) et (3), on obtient :

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 \end{vmatrix} A_{31} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \theta_2 \\ \frac{1-\mu}{3} & \theta_2^2 \end{vmatrix} = \theta_2 \left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{1-\mu}{3} \right)$$

Soit

$$A_{31} = \frac{3\theta_2 - 2 + 2\mu}{6\theta_1 (\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 \end{vmatrix} A_{32} = \begin{vmatrix} \theta_1 & \frac{1}{2} \\ \theta_1^2 & \frac{1-\mu}{3} \end{vmatrix} = \theta_1 \left(\frac{1-\mu}{3} - \frac{\theta_1}{2} \right)$$

Soit :

$$A_{32} = \frac{2 - 3\theta_1 - 2\mu}{6 \theta_2 (\theta_2 - \theta_1)}$$

On obtient le coefficient A_{21} :

$$A_{21} = \frac{\alpha}{A_{32} \theta_1}, \text{ soit } A_{21} = 6\alpha \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2 - 3\theta_1 - 2\mu}$$

Pour le cas optimal, où $\alpha = \frac{1}{16}$, $\mu = 0$, $\theta_2 = 1$, on obtient les formules :

$$A_{31} = \frac{1}{6\theta_1(1-\theta_1)}$$

$$A_{32} = \frac{2 - 3\theta_1}{6(1-\theta_1)}$$

$$A_{21} = \frac{3}{8\theta_1} \frac{1 - \theta_1}{2 - 3\theta_1}$$

Une grille possible est :

$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{3}{4}$	
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

L'erreur par pas de la méthode de rang 3 et d'ordre 2 est

$$E = \frac{h^3}{6} [\mu C_2 + (1-6\alpha) J_1 C_1]$$

Traçons les courbes à erreur constante, pour $\mu = 0$:

$$E = J_1 C_1 \frac{h^3}{6} |1-6\alpha|$$

On obtient les courbes tracées en pointillé figure III-8. Pour un pas donné, on obtiendra la meilleure méthode pour α fixé par la condition (2), l'erreur par pas étant minimale.

Calcul du coût relatif.

L'erreur par pas de la méthode de rang 2 et d'ordre 2 est

$$\frac{h^3}{6} \left[\left(\frac{\theta_1}{4} - 1 \right) C_2 - J_1 C_1 \right]$$

Le rapport des bornes supérieures de ces erreurs est

$$\frac{|\mu| + |1-6\alpha|}{\left| \frac{\theta_1}{4} - 1 \right| + 1}$$

Le coût relatif sera

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{6,2} \times \frac{1}{3} \neq 0,16$$

Il y a gain pour cette méthode.

Vérification expérimentale.

La vérification numérique a été faite pour $y' = -y+1$, $y(0) = 0$. Les résultats sont notés figure III-9.

III - ETUDE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE D'ORDRE 2.

L'approximation vectorielle par une méthode de rang 3 est

$$X_{i1} = X_i + h\theta_1 Z_i$$

$$X_{i2} = X_i + h\theta_2 Z_i + hA_{21}(Z_{i1} - Z_i)$$

$$X_{i+1} = X_i + hZ_i + hA_{31}(Z_{i1} - Z_i) + hA_{32}(Z_{i2} - Z_i)$$

Etude de la stabilité.

Etudions le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

En portant $X' = AX$ dans le système, il vient :

$$X_{i1} = (Id + hA\theta_1) X_i$$

$$X_{i2} = (Id + hA\theta_2 + h^2 A^2 A_{21} \theta_1) X_i$$

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= (Id + hA + h^2 A^2 (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) + h^3 A^3 A_{32} A_{21} \theta_1) X_i \\ &= (Id + hA + h^2 A^2 \beta + h^3 A^3 \alpha) X_i \end{aligned}$$

Pour avoir la stabilité, il suffit que les valeurs propres de $B(hA)$ soient en module inférieures à 1. Si $r_1 = a_1 + ib_1$ est valeur propre de A , la condition à vérifier sera

$$|1 + h(a_1 + ib_1) + h^2 (a_1 + ib_1)^2 \beta + h^3 (a_1 + ib_1)^3 \alpha| < 1$$

En prenant le carré de la norme sur le corps des complexes :

$$\begin{aligned} &(1 + ha_1 + h^2 (a_1^2 - b_1^2) \beta + h^3 (a_1^3 - 3a_1 b_1^2) \alpha)^2 \\ &+ h^2 (b_1^2 + 2a_1 b_1 \beta + (3a_1^2 b_1 - b_1^3) \alpha h^2)^2 < 1. \end{aligned}$$

On traitera conjointement les méthodes d'ordre 1 et 2, celle d'ordre 2 correspondant à $\beta = \frac{1}{2}$.

Exemple numérique.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $-i+i$ et $-1-i$.

Méthode d'ordre 1.

La condition à remplir est

$$(1-h+2h^3\alpha)^2 + h^2(1-2\beta h+2\alpha h^2)^2 < 1.$$

Soit :

$$1-h-2(\alpha-\beta)h^2-2\beta^2h^3+4\alpha\beta h^4-4\alpha^2h^5 > 0.$$

On cherche α^* et β^* tels que la condition à remplir soit vérifiée pour h appartenant à la plus grande plage $[0, \Lambda]$. On obtient les coefficients $\alpha^* = 0,022$ et $\beta^* = 0,21$, soit $\Lambda = 4,86$.

La courbe de stabilité est tracée figure III-10. L'erreur par pas de la méthode est

$$\frac{h^2}{2} C_1 |1-2\beta|. \text{ Le coût relatif sera donc } \frac{3}{1} \times 0,58 \times \frac{1}{4,86} \neq 0,35$$

Il y a gain pour cette méthode.

Les résultats ont été testés pour le système différentiel $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x(0) = y(0) = 1$; les résultats sont portés figure III-10, où un point (resp. une croix) représente les coefficients rendant la méthode stable (resp. instable). La courbe tracée trait plein a pu être obtenue par un programme cherchant la plus grande plage de stabilité, et la résolution numérique du système différentiel a permis de compléter la courbe en tireté.

Méthode d'ordre 2.

Le rapport des erreurs $\frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{22}}$ est égal à $\frac{|\mu| + |1-6\alpha|}{|\frac{1}{4} - 1| + 1}$

En posant $\beta = \frac{1}{2}$, la condition à remplir sera :

$$1-h-h^2(2\alpha-1) - \frac{h^3}{2} + 2\alpha h^4 - 4\alpha^2 h^5 > 0.$$

On obtient le rayon de stabilité maximum pour $\alpha = 0,12$, ce dernier étant $\Lambda = 2,1$.
La courbe de stabilité est tracée figure III-11. Le coût relatif de la méthode est

$$\frac{3}{2} \frac{1,12}{7} \frac{1,5}{2,1} \neq 0,17$$

La méthode est rentable.

Les résultats obtenus par la résolution de

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x(0) = y(0) = 1$$

sont portés sur la figure III-11

IV - ETUDE DE 2 EQUATIONS NON LINEAIRES

Méthode d'ordre 1.

On a pris les coefficients déterminés par l'étude de l'équation différentielle au paragraphe I. On a pris $\theta_2 = 1$ et $\theta_1 = \frac{1}{2}$. On a pris arbitrairement $\beta = \frac{4}{27}$, d'après l'étude faite au paragraphe I. On obtient la grille de coefficients :

$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{27\alpha}{7-9\mu}$	
	$\frac{4}{27}(-5+9\mu)$	$\frac{4}{27}(7-9\mu)$

L'erreur par pas est $\frac{h^2}{2} C_1 |1-2\beta|$

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1$$

On obtient, en fonction de μ , les courbes tracées figure III-12.

Le rayon de stabilité maximum, pour $\mu = 0,9$, est obtenu pour $\alpha = + 0,02$, soit $3,8 < \Lambda < 3,9$.

Le coût est $\frac{3}{1} \times \frac{19}{27} \times \frac{1}{3,9} \neq 0,55$

Il y a gain pour cette méthode.

$$\underline{y' = -2t y^2, y(0) = 1}$$

On obtient en fonction de μ , les courbes tracées figure III-13. Le rayon de stabilité maximum, pour $\mu = 0,9$, est obtenu pour $\alpha = 0,003$, soit $2,35 < \Lambda < 2,4$.
Le coût est $\frac{3}{1} \times \frac{19}{27} \times \frac{0,7}{2,4} \neq 0,61$

Il y a gain pour cette méthode.

Méthode d'ordre 2

On a pris les coefficients déterminés par l'étude faite au paragraphe II. On a pris $\theta_2 = 1$ et $\theta_1 = \frac{1}{2}$, on obtient la grille de coefficients :

$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{12\alpha}{1-4\mu}$	
	$\frac{2+4\mu}{3}$	$\frac{1-4\mu}{6}$

Le rapport des erreurs par pas est $\frac{|\mu| + |1-6\alpha|}{|\frac{1}{4} - 1| + 1}$

$$\underline{y' = -y^2, y(0) = 1}$$

On obtient, en fonction de μ , les courbes de stabilité tracées figure III-14. Pour $\alpha = \frac{1}{6}$, on obtient la méthode d'ordre 3, qui a pour rayon de stabilité, pour $\mu = 0$: $1,2 < \Lambda < 1,3$.

Le rayon de stabilité maximum de la méthode est obtenu pour $\mu = 0$, $\alpha = \frac{1}{16}$, soit $2,95 < \Lambda < 3$.

Le coût est : $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1,55}{3} \neq 0,26$

Il y a gain pour cette méthode.

$$\underline{y' = -2t y^2, y(0) = 1}$$

On obtient en fonction de μ les courbes de stabilité tracées figure III-15.

Pour $\alpha = \frac{1}{6}$, on obtient la méthode d'ordre 3, de rayon de stabilité, pour $\mu = 0$:
 $0,95 < \Lambda < 1$.

Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\mu = -\frac{1}{8}$, $\alpha = \frac{1}{16}$, soit $1,4 < \Lambda < 1,45$

Le coût est $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{1,45} \approx 0,42$

La méthode est rentable.

CHAPITRE - IV

METHODES DE RUNGE-KUTTA DE RANG 4

L'approximation par une méthode de Runge-Kutta de rang 4 de la solution de l'équation différentielle $y' = Y(y,t)$, $y(t_0) = y_0$ est :

$$\begin{aligned} y_{i1} &= y_i + h\theta_1 Y_i \\ y_{i2} &= y_i + h\theta_2 Y_i + h A_{21} (Y_{i1} - Y_i) \\ y_{i3} &= y_i + h\theta_3 Y_i + h A_{31} (Y_{i1} - Y_i) + h A_{32} (Y_{i2} - Y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hY_i + h A_{41} (Y_{i1} - Y_i) + h A_{42} (Y_{i2} - Y_i) + h A_{43} (Y_{i3} - Y_i) \end{aligned}$$

En développant par la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 3, on obtient :

$$\begin{aligned} Y_{i1} - Y_i &= Y(t_i + \theta_1 h, y_i + h\theta_1 Y_i) - Y_i \\ &= h\theta_1 C_1 + \frac{h^2 \theta_1^2}{2} C_2 + \frac{h^3 \theta_1^3}{6} C_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{i2} - Y_i &= Y(t_i + \theta_2 h, y_i + h\theta_2 Y_i + h^2 A_{21} \theta_1 C_1) - Y_i \\ &= h\theta_2 C_1 + \frac{h^2 \theta_2^2}{2} C_2 + h^2 A_{21} \theta_1 C_1 J_1 + \frac{h^3 \theta_2^3}{6} C_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{i3} - Y_i &= Y(t_i + \theta_3 h, y_i + h\theta_3 Y_i + h^2 A_{31} \theta_1 C_1 + h^2 A_{32} \theta_2 C_1) - Y_i \\ &= h\theta_3 C_1 + \frac{h^2 \theta_3^2}{2} C_2 + h^2 (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) J_1 C_1 + \\ &\quad \frac{h^3 \theta_3^3}{6} C_3 + h^3 (A_{31} \theta_3 \theta_1 + A_{32} \theta_3 \theta_2) K_1 C_1 + \frac{h^3}{2} (A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2) J_1^2 C_2 \\ &\quad + h^3 A_{32} A_{21} \theta_1 J_1^2 C_1 \end{aligned}$$

En portant dans l'expression de y_{i+1} :

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} = & y_i + hY_i + h^2(A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3)C_1 \\
 & + \frac{h^3}{6} [3(A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2)C_2 + 6(A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2)J_1C_1] \\
 & + \frac{h^4}{24} [4(A_{41}\theta_1^3 + A_{42}\theta_2^3 + A_{43}\theta_3^3)C_3 + 12(A_{42}A_{21}\theta_1^2 + A_{43}A_{31}\theta_1^2 + A_{43}A_{32}\theta_2^2)J_1C_2 \\
 & + 24(A_{42}A_{21}\theta_2\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_3\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_3\theta_2)K_1C_1 + 24A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1J_1^2C_1]
 \end{aligned}$$

I - METHODE D'ORDRE 1

La méthode précédente est d'ordre 1.

Etude de la stabilité.

En portant $y' = Ay$ dans l'équation récurrente, il vient :

$$\begin{aligned}
 y_{i1} &= (1+hA\theta_1)y_i \\
 y_{i2} &= (1+hA\theta_2+h^2A^2A_{21}\theta_1)y_i \\
 y_{i3} &= (1+hA\theta_3+h^2A^2(A_{31}\theta_1+A_{32}\theta_2)+h^3A^3A_{32}A_{21}\theta_1)y_i \\
 y_{i+1} &= (1+hA+h^2A^2(A_{41}\theta_1+A_{42}\theta_2+A_{43}\theta_3)+h^3A^3(A_{42}A_{21}\theta_1+A_{43}A_{31}\theta_1+A_{43}A_{32}\theta_2) \\
 & \quad + h^4A^4A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1)y_i
 \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1 \\
 \beta &= A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 \\
 \gamma &= A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 \\
 u &= hA.
 \end{aligned}$$

D'où

$$y_{i+1} = (1+u+\gamma u^2 + \beta u^3 + \alpha u^4) y_i$$

La condition de stabilité impose :

$$|1 + u + \gamma u^2 + \beta u^3 + \alpha u^4| < 1$$

$$\text{soit } 2 + u + \gamma u^2 + \beta u^3 + \alpha u^4 > 0 \quad (2)$$

$$1 + \gamma u + \beta u^2 + \alpha u^3 > 0 \quad (1)$$

Pour déterminer les coefficients α, β, γ qui donnent le plus grand rayon de stabilité, on emploie la méthode décrite au premier chapitre : le polynôme $1 + u + \gamma u^2 + \beta u^3 + \alpha u^4$ restant le plus entre -1 et +1 est le polynôme de Tchebycheff :

$$T_4 \left(1 + \frac{u}{16}\right) = 1 + u + \frac{5u^2}{32} + \frac{u^3}{128} + \frac{u^4}{8192}$$

$$\alpha = \frac{1}{2^{13}} = \frac{1}{8192} \neq 0,00012207$$

$$\beta = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} \neq 0,0078125$$

$$\gamma = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} \neq 0,15625$$

On peut tracer, pour $\beta = \frac{1}{128}$ et $\gamma = \frac{5}{32}$, la courbe du pas fonction de α :

$$\alpha > -\frac{2}{u^4} - \frac{1}{u^3} - \frac{5}{32u^2} - \frac{1}{128u} \quad (2)$$

$$\alpha < -\frac{1}{u^3} - \frac{5}{32u^2} - \frac{1}{128u} \quad (1)$$

Etude de (1)

$$\frac{d(1)}{du} = \frac{3}{u^4} + \frac{5}{16u^3} + \frac{1}{128u^2} = \frac{1}{u^4} \left(3 + \frac{5u}{16} + \frac{u^2}{128}\right)$$

$$3 + \frac{5u}{16} + \frac{u^2}{128} \text{ a pour discriminant } \frac{25}{2^8} - \frac{3}{2^5} = \frac{1}{2^8}$$

$$\text{ses racines sont } \frac{-\frac{5}{16} \pm \frac{1}{16}}{\frac{2}{128}} = \begin{cases} -24 \\ -16 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \alpha_{\min} = \alpha(u = -16) = \frac{1}{2^{13}}$$

Etude de (2) - Figure IV-1

$$\frac{d(2)}{du} = \frac{8}{u^5} + \frac{3}{u^4} + \frac{5}{16u^3} + \frac{1}{128u^2} = \frac{1}{u^5} \left(8 + 3u + \frac{5u^2}{16} + \frac{u^3}{128} \right)$$

$8 + 3u + \frac{5u^2}{16} + \frac{u^3}{128}$ (4) a pour dérivée $3 + \frac{5u}{8} + \frac{3u^2}{128}$ qui admet 2 racines, $\frac{8}{3}(-5 \pm \sqrt{7})$.

La valeur de (4) pour $\frac{8}{3}(5 + \sqrt{7})$ est négative : $\frac{136}{27} - \frac{56}{27}\sqrt{7}$ et la valeur de (4) pour $\frac{8}{3}(-5 - \sqrt{7})$ est positive : $\frac{136}{27} + \frac{56}{27}\sqrt{7}$ donc $\frac{d(2)}{du}$ admet 3 zéros : $-4.6863, -8, -27.313709$.

Les valeurs de α pour la courbe (2) sont :

$$\alpha(-4.6863) = \alpha(-27.313709) = \alpha_{\min}$$

$$\alpha(-8) = 0$$

On aura stabilité dans la zone hachurée de la figure IV-2.

Etude de l'erreur par pas.

La formule de Taylor à l'ordre 3 nous donne pour la solution exacte :

$$y_{i+1}^* = y_i + hY_i + \frac{h^2}{2}C_1 + \frac{h^3}{6}(C_2 + J_1 C_1)$$

L'erreur par pas est donc :

$$y_{i+1}^* - y_{i+1} = h^2 \left[\frac{1}{2} - (A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3) \right] C_1 +$$

$$\frac{h^3}{6} \left[(1 - 3(A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2)) C_2 + \right.$$

$$\left. (1 - 6(A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2)) J_1 C_1 \right]$$

On a les conditions de stabilité à satisfaire :

$$A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1 = \alpha \quad (1)$$

$$A_{42} A_{21} \theta_1 + A_{43} A_{31} \theta_1 + A_{43} A_{32} \theta_2 = \beta \quad (2)$$

$$A_{41} \theta_1 + A_{42} \theta_2 + A_{43} \theta_3 = \gamma \quad (3)$$

On prendra comme condition supplémentaire

$$A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2 = \frac{1-\mu}{3} \quad (4)$$

De (3) et (4) on tire

$$\begin{aligned} A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 &= \gamma - A_{43}\theta_3 \\ A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 &= \frac{1-\mu}{3} - A_{43}\theta_3^2 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_2 \end{vmatrix} A_{41} = \begin{vmatrix} \gamma + A_{43}\theta_3 & \theta_2 \\ \frac{1-\mu}{3} - A_{43}\theta_3 & \theta_2 \end{vmatrix} = \theta_2 \left[\gamma\theta_2 - A_{43}\theta_3\theta_2 - \frac{1-\mu}{3} + A_{43}\theta_3^2 \right]$$

$$A_{41} = A_{43} \frac{\theta_3}{\theta_1} \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} + \frac{\gamma\theta_2 - \frac{1-\mu}{3}}{\theta_1(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_2 \end{vmatrix} A_{42} = \begin{vmatrix} \theta_1 & \gamma - A_{43}\theta_3 \\ \theta_2 & \frac{1-\mu}{3} - A_{43}\theta_3 \end{vmatrix} = \theta_1 \left[\frac{1-\mu}{3} - A_{43}\theta_3^2 - \gamma\theta_1 + A_{43}\theta_3\theta_1 \right]$$

$$A_{42} = -A_{43} \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{\gamma\theta_1 - \frac{1-\mu}{3}}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)}$$

De (1), on tire :

$$A_{21} = \frac{\alpha}{A_{43}A_{32}\theta_1}$$

En portant A_{42} et A_{21} , dans la condition (2), on obtient

$$-A_{43} \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\alpha}{A_{43}A_{32}} - \frac{\gamma\theta_1 - \frac{1-\mu}{3}}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)} \frac{\alpha}{A_{43}A_{32}} + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 = \beta$$

En multipliant par A_{43} :

$$A_{43}^2 (A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2) - A_{43}\beta + \frac{\alpha}{A_{32}} \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{\alpha}{A_{32}} \frac{\gamma\theta_1 - \frac{1-\mu}{3}}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)} = 0$$

Posons

$$A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2 = 0$$

Soit

$$A_{31} = -A_{32} \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

$$D'où \quad A_{43} = -\alpha \frac{\gamma\theta_1 - \frac{1-\mu}{3}}{\beta\theta_2(\theta_2-\theta_1)A_{32} + \alpha\theta_3(\theta_3-\theta_1)}$$

D'où la détermination des coefficients :

On choisit A_{32} non nul, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

$$\text{Si } \alpha = 0, \text{ alors } A_{43} = 0 \text{ et } A_{21} = -\frac{\beta\theta_2(\theta_2-\theta_1)}{\theta_1(\gamma\theta_1 - \frac{1-\mu}{3})}$$

Si $\alpha \neq 0$, alors on calcule A_{31} et A_{43} puis A_{41}, A_{42} et A_{21} .

Dans le cas optimal où $\alpha = \frac{1}{2^{13}}, \beta = \frac{1}{2^7}, \gamma = \frac{5}{2^5}, \mu = 0, \theta_3 = 1$, on obtient les formules :

$$A_{31} = -A_{32} \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

$$A_{43} = -\frac{15\theta_1^{-32}}{6144\theta_2(\theta_2-\theta_1)A_{32} + 96(1-\theta_1)}$$

$$A_{21} = \frac{1}{8192 A_{43} A_{32} \theta_1}$$

$$A_{41} = A_{43} \frac{1}{\theta_1} \frac{1-\theta_2}{\theta_2-\theta_1} + \frac{15\theta_2^{-32}}{96\theta_1(\theta_2-\theta_1)}$$

$$A_{42} = -A_{43} \frac{1}{\theta_2} \frac{1-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} - \frac{15\theta_1^{-32}}{96\theta_2(\theta_2-\theta_1)}$$

Une grille de coefficients possibles est

$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	0,0062181122		
1	-1,5	1	
	-1,7213141	1,350641	0,003926282

Calcul du coût de la méthode.

Le rayon de stabilité de cette méthode étant 32 et le rapport $\frac{\varepsilon_{41}}{\varepsilon_{11}}$ étant $|1-2\gamma|$, le coût relatif est égal à :

$$\frac{4}{1} \times \frac{11}{16} \times \frac{2}{32} \neq 0,17.$$

Il y a gain pour cette méthode.

La vérification numérique a été faite pour $y'=-y+1, y(0)=0$ - Figure IV 3

II - METHODE D'ORDRE 2.

Considérons les résultats obtenus pour l'ordre 1.
Pour obtenir une méthode d'ordre 2, il suffit d'imposer :

$$\gamma = A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 = \frac{1}{2}$$

Etude de la stabilité.

En portant $y' = Ay$ dans le système, on obtient :

$$\begin{aligned} y_{i1} &= (1+hA\theta_1)y_i \\ y_{i2} &= (1+hA\theta_2+h^2A^2A_{21}\theta_1)y_i \\ y_{i3} &= (1+hA\theta_3+h^2A^2(A_{31}\theta_1+A_{32}\theta_2)+h^3A^3A_{32}A_{21}\theta_1)y_i \\ y_{i+1} &= (1+hA+h^2A^2(A_{41}\theta_1+A_{42}\theta_2+A_{43}\theta_3)+h^3A^3(A_{42}A_{21}\theta_1+A_{43}A_{31}\theta_1+A_{43}A_{32}\theta_2) \\ &\quad +h^4A^4A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1)y_i. \end{aligned}$$

$$A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 = \frac{1}{2}$$

Posons

$$A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 = \beta$$

$$A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1 = \alpha$$

$$hA = u$$

On obtient

$$y_{i+1} = \left(1+u + \frac{u^2}{2} + \beta u^3 + \alpha u^4\right)y_i$$

La stabilité impose la condition

$$\left|1+u + \frac{u^2}{2} + \beta u^3 + \alpha u^4\right| < 1.$$

Soit

$$1 + \frac{u}{2} + \beta u^2 + \alpha u^3 > 0$$

$$2+u + \frac{u^2}{2} + \beta u^3 + \alpha u^4 > 0.$$

$$\alpha > -\frac{1}{u^3} - \frac{1}{2u^2} - \frac{\beta}{u} \quad (1)$$

$$\alpha < -\frac{2}{u^4} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{2u^2} - \frac{\beta}{u} \quad (2)$$

Traçons les courbes de α fonction de β .

Etude de (1) - Figure IV

$$\frac{d(1)}{du} = \frac{3}{u^4} + \frac{1}{u^3} + \frac{\beta}{u^2} = \frac{1}{u^4} (3+u+\beta u^2)$$

$3+u+\beta u^2$ a pour discriminant $1-12\beta$

$$\beta > \frac{1}{12}$$

$\frac{d(1)}{du}$ n'a pas de racines. La fonction est strictement croissante.

$$0 < \beta < \frac{1}{12}$$

$\frac{d(1)}{du}$ a 2 racines négatives, $\frac{-1+\sqrt{1-12\beta}}{2\beta}$ qui sont des extremas pour (1).

$\beta = 0$ Une racine négative pour $\frac{d(1)}{du}$: -3

$\beta < 0$ Une racine négative pour $\frac{d(1)}{du}$: $\frac{-1+\sqrt{1-12\beta}}{2\beta}$

Etude de (2)

$$\frac{d(2)}{du} = \frac{8}{u^5} + \frac{3}{u^4} + \frac{1}{u^3} + \frac{\beta}{u^2} = \frac{1}{u^5} (8+3u+u^2+\beta u^3)$$

Montrons que $8+3u+u^2+\beta u^3$ (3) n'admet au plus qu'une racine

$$\frac{d(3)}{du} = 3 + 2u+3\beta u^2 \text{ a pour discriminant } 1-9\beta.$$

$$\beta > \frac{1}{9}$$

$\frac{d(3)}{du}$ n'a pas de zéro, donc (3) a une seule racine.

$0 < \beta < \frac{1}{9}$ -Figure IV-5

Les deux racines de $\frac{d(3)}{du}$ sont $\frac{-1+\sqrt{1-9\beta}}{3\beta}$

Calculons la valeur Z du minimum de (3) :

$$Z = 8+3 \left(\frac{-1+\sqrt{1-9\beta}}{\beta} \right) + \left(\frac{-1+\sqrt{1-9\beta}}{9\beta} \right)^2 + \frac{(1+\sqrt{1-9\beta})^3}{27\beta^2}$$

$$= \frac{1}{27\beta^2} [8 \times 27\beta^2 - 27\beta + 2 - 2(1-9\beta)\sqrt{1-9\beta}]$$

Posons $1-9\beta = v$, soit $\beta = \frac{1-v}{9}$ avec $0 \leq v < 1$

$$Z = \frac{1}{27\beta^2} \left[\frac{8}{3} v^2 - \frac{7}{3} v + \frac{5}{3} - 2v\sqrt{v} \right]$$

Montrons que Z est positif, soit $6v\sqrt{v} < 8v^2 - 7v + 5$

Chaque membre de cette inégalité est positif, car $v \geq 0$ et le discriminant de $8v^2 - 7v + 5$ est $49 - 4 \times 40 < 0$.

En élevant au carré, on obtient l'égalité :

$$36 v^3 < 64v^4 + 49v^2 + 25 - 112v^3 + 80v^2 - 70v\sqrt{64v^4 - 148v^3 - 129v^2 - 70v + 25} > 0.$$

$$(v-1)(64v^3 - 84v^2 + 45v - 25) > 0.$$

$$(v-1)^2(64v^2 - 20v + 25) > 0.$$

ce qui est vérifié, car $64v^2 - 20v + 25$ a pour discriminant $100 - 25 \times 64 < 0$.

Donc (3) n'admet qu'une seule racine.

$\beta < 0$ - Figure IV-6

On refait le même calcul que pour le cas $0 < \beta \leq \frac{1}{9}$ mais $v \geq 1$.

Le minimum reste positif.

En traçant simultanément les courbes (1) et (2), on obtient la figure IV-7.

On obtient la plus grande plage de stabilité pour $0 < \beta < \frac{1}{12}$

Traçons les conditions pour $0 < \beta < \frac{1}{12}$. Figure IV-8.

On aura la plus grande stabilité pour $\alpha_{\min} = \alpha_{\max}$

On doit donc réaliser les conditions :

a) u_{\max} extremum de (1) $= \frac{1}{u^4} - \frac{1}{2u^2} - \frac{\beta}{u}$
 donc zéro de $\frac{d(1)}{du} = \frac{1}{u^5} (3+u+\beta u^2)$
 soit en prenant la plus petite des 2 racines : $u_{\max} = \frac{-1+\sqrt{1-12\beta}}{2\beta}$

b) u_{\min} extremum de (2) $= \frac{2}{u^4} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{2u^2} - \frac{\beta}{u}$
 donc zéro de $\frac{d(2)}{du} = \frac{1}{u^5} (8+3u+u^2+\beta u^3)$

c) Egalité du minimum de α de (1) (α_{\max}) et du maximum de α de (2) (α_{\min})

$$\alpha_{\max} = -\frac{1}{u_{\max}^3} - \frac{1}{2u_{\max}^2} - \frac{\beta}{u_{\max}} \quad \text{avec} \quad \alpha_{\min} = \alpha_{\max}$$

$$\alpha_{\min} = -\frac{2}{u_{\min}^4} - \frac{1}{u_{\min}^3} - \frac{1}{2u_{\min}^2}$$

On obtient donc le plan de calcul suivant :

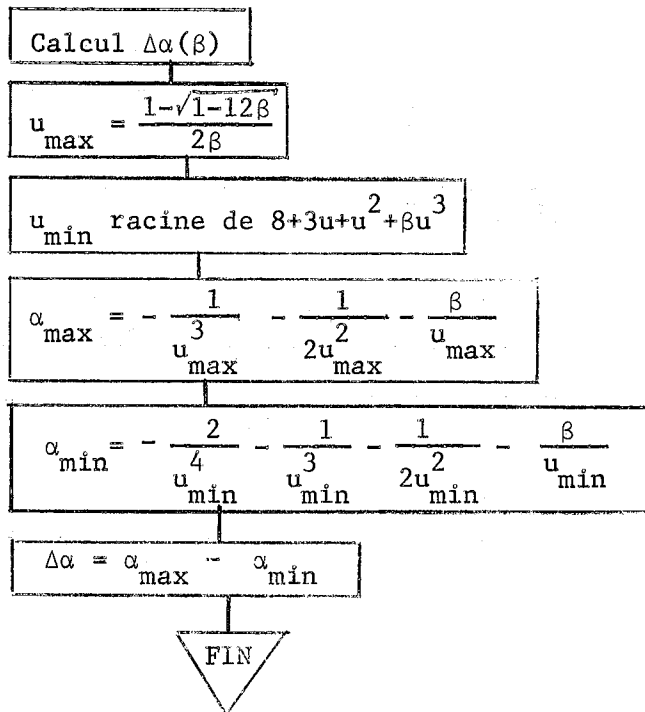
- a) : on se donne $[\beta_1, \beta_2]$, intervalle de recherche de β .
- b) : β est lu au 1^e passage et calculé par dichotomie ensuite.
- c) : on calcule $u_{\max} = \frac{-1+\sqrt{1-12\beta}}{2\beta}$
- d) : on calcule u_{\min} zéro de $8+3u+u^2+\beta u^3$

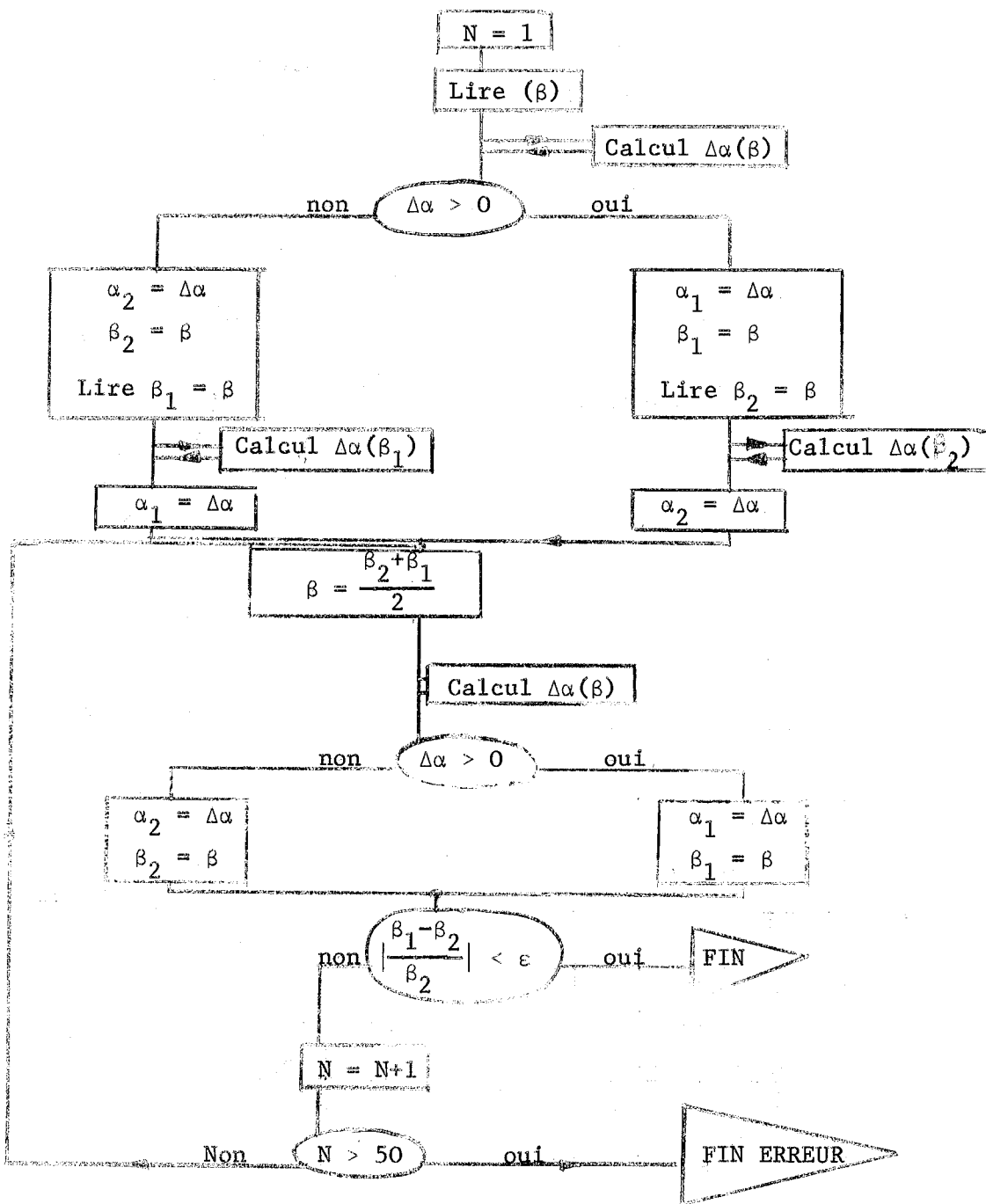
e) : $\alpha^* = -\frac{1}{u_{\max}^3} - \frac{1}{2u_{\max}^2} - \frac{\beta}{u_{\max}}$

f) : $\alpha^{**} = -\frac{2}{u_{\min}^4} - \frac{1}{u_{\min}^3} - \frac{1}{2u_{\min}^2} - \frac{\beta}{u_{\min}}$

g) : on recadre l'intervalle $[\beta_1, \beta_2]$ en $[\beta, \beta_2]$ ou $[\beta_1, \beta]$ suivant le signe de $\alpha^* - \alpha^{**}$ et on réitère à partir de b) jusqu'à trouver la précision nécessaire sur β .

ORGANIGRAMME





On obtient le programme ALGOL :

DEBUT

PROCEDURE NEWTON (N,XD,YD,EPS,EPSI,ITER,A,RC,RES,BØØL) ;

COMMENTAIRE Cette procédure calcule les racines d'un polynôme de degré N dont les coefficients sont rangés dans le tableau A. Le Résultat est dans le tableau RC, RES donne la précision obtenue sur la racine ;

REEL PROCEDURE CALCUL DALPHA(BETA) ; REEL BETA ;

DEBUT REEL UMIN,UMAX,ALPHAMIN,ALPHAMAX ;

UMAX := (1-RAC2(1-12*BETA))/(2*BETA) ;

A[0] := BETA ;

NEWTON (3,-10.0,0.0,8.0,0.0,0,A,RC,RES,BØØL) ;

UMIN := RC[0] ;

ALPHAMAX := -(1/UMAX+0.5)/UMAX+BETA)/UMAX ;

ALPHAMIN := -((2/UMIN+1)/UMIN+0.5)/UMIN+BETA)/UMIN ;

CALCUL D ALPHA := ALPHAMAX - ALPHAMIN

FIN CALCUL D ALPHA ;

ENTIER N ; BØØLEEN BØØL ;

REEL ALPHA1, ALPHA2, BETA, BETA1, BETA2, EPS, X ;

TABLEAU A[0:3] , RC, RES[0:5] ;

N := 1 ; BETA := RDØNNEE ; EPS := RDØNNEE ;

A[1] := 1 ; A[2] := 3 ; A[3] := 8 ;

DEBUT DU CALCUL :

X := CALCUL D ALPHA (BETA) ;

SI X > 0.0 ALØRS

DEBUT

ALPHA1 := X ; BETA1 := BETA ;

BETA2 := RDØNNEE ;

ALPHA2 := CALCUL D ALPHA (BETA2)

FIN

SINØN

DEBUT

ALPHA2 := X ; BETA2 := BETA ;

BETA1 := RDØNNEE ;

ALPHA1 := CALCUL D ALPHA (BETA1)

FIN ;

ITERATIØN :

BETA := (BETA2+BETA1)/2 ;

X := CALCUL D ALPHA (BETA) ;

SI X > 0.0 ALØRS

DEBUT ALPHA2 := X ;

BETA2 := BETA

FIN

SINØN

DEBUT ALPHA1 := X ;

BETA1 := BETA

FIN ;

SI ABS((BETA2-BETA1)/BETA2) < EPS ALØRS

ALLERA RESULTAT SINØN N := N+1 ;

SI N < 50 ALØRS ALLERA ITERATIØN ;

ECRIRE ('50 ITERATIØNS' , , ' BETA1 =', BETA1, ' BETA2 =', BETA2) ;

ALLERA FIN ;

RESULTAT : ECRIRE ('ALPHA =', ALPHA, ' BETA =', BETA) ;

FIN :

FIN ;

On trouve les résultats :

$\alpha = 0,0036084539$ $u_{\max} = - 4,7962761$

$\beta = 0,078084484$ $u_{\min} = 9,9868152$

Soit la courbe à la figure IV-9

Remarque :

L'équation récurrente est $y_{i+1} = (1 + u + \frac{u^2}{2} + \beta u^3 + \alpha u^4) y_i$.

Le polynôme de plus grande stabilité est :

$$1 + u + \frac{u^2}{2} + \beta u^3 + \alpha u^4 \quad (\text{figure IV-10}).$$

Etude de l'erreur par pas.

Référons-nous à l'étude faite pour la méthode de rang 4 et d'ordre 1, où on remplacera γ par $\frac{1}{2}$.

L'erreur par pas devient :

$$\frac{h^3}{6} \left[(1-3(A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2))C_2 + (1-6(A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2))J_1C_1 \right]$$

soit

$$\frac{h^3}{6} [\mu C_2 + (1-6\beta)J_1C_1].$$

D'où la détermination des coefficients :

$A_{32}, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont choisis

$$A_{31} = -A_{32} \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

Si $\alpha = 0$ alors $A_{43} = 0$

$$A_{21} = -6 \frac{\beta \theta_2 (\theta_2 - \theta_1)}{(3\theta_1 - 2(1-\mu))\theta_1}$$

Si $\alpha \neq 0$ alors

$$A_{43} = -\frac{\alpha}{6} \frac{3\theta_1 - 2(1-\mu)}{\beta \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) A_{32} + \alpha \theta_3 (\theta_3 - \theta_1)}$$

$$A_{21} = \frac{\alpha}{A_{43} A_{32} \theta_1}$$

$$A_{41} = A_{43} \frac{\theta_3}{\theta_1} \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} + \frac{3\theta_2 - 2(1-\mu)}{6\theta_1 (\theta_2 - \theta_1)}$$

$$A_{42} = -A_{43} \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{3\theta_1 - 2(1-\mu)}{6\theta_2 (\theta_2 - \theta_1)}$$

Pour le cas optimal où $\alpha = 0,003608455$, $\beta = 0,07808449$, $\mu = 0$, $\theta_3 = 1$, on obtient :

$$A_{31} = -A_{32} \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

$$A_{43} = -\frac{1}{6} \frac{3\theta_1^{-2}}{21,639313\theta_2(\theta_2-\theta_1)+(1-\theta_1)}$$

$$A_{21} = \frac{\alpha}{A_{43}A_{32}\theta_1}$$

$$A_{41} = A_{43} \frac{1}{\theta_1} \frac{1-\theta_2}{\theta_2-\theta_1} + \frac{3\theta_2^{-2}}{6\theta_1(\theta_2-\theta_1)}$$

$$A_{42} = -A_{43} \frac{1}{\theta_2} \frac{1-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} - \frac{3\theta_1^{-2}}{6\theta_2(\theta_2-\theta_1)}$$

Une grille possible sera

$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	0,39468176		
1	-1,5	1	
	0,1699112373	0,39568339	0,018285385

Coût de la méthode.

Le rayon de stabilité de la méthode est $\Lambda = 12$

L'erreur par pas de la méthode de rang 4 et d'ordre 2 est

$\frac{h^3}{6} [\mu C_2 + (1-6\beta)J_1 C_1]$ et celle de la méthode de rang 2 et d'ordre 2 est

$\frac{h^3}{6} [(\frac{\theta_1}{4} - 1) - J_1 C_1]$; le rapport $\frac{\epsilon_{42}}{\epsilon_{22}}$ est égal à $\frac{|\mu| + |1-6\beta|}{|\frac{\theta_1}{4} - 1| + 1}$

Le coût sera donc $\frac{4}{2} \times \frac{4,19}{15} \times \frac{2}{12} \neq 0,092$

Il y a gain pour cette méthode.

Vérification expérimentale.

On a vérifié les résultats théoriques pour $y' = -y+1$ $y(0) = 0$.
Les résultats sont donnés figure IV-11.

III - METHODE D'ORDRE 3.

Considérons les résultats obtenus pour l'ordre 1.
Pour obtenir une méthode d'ordre 3, il suffit d'imposer

$$\begin{aligned} \gamma &= A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 = \frac{1}{2} \\ \beta &= A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 = \frac{1}{6} \\ A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Etude de la stabilité.

En portant $y' = Ay$ dans le système, on obtient :

$$\begin{aligned} y_{i1} &= (1+hA\theta_1)y_i \\ y_{i2} &= (1+hA\theta_2 + h^2A^2A_{21}\theta_1)y_i \\ y_{i3} &= (1+hA\theta_3 + h^3A^2(A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2) + h^3A^3A_{32}A_{21}\theta_1)y_i \\ y_{i+1} &= (1+hA + h^2A^2(A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3) + h^3A^3(A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2) \\ &\quad + h^4A^4A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1)y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 &= \frac{1}{2} \\ A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 &= \frac{1}{6} \\ \text{Posons } A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1 &= \alpha \end{aligned}$$

On tient

$$y_{i+1} = (1+u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \alpha u^4)y_i$$

La stabilité impose la condition

$$\left| 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \alpha u^4 \right| < 1$$

Soit

$$1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + \alpha u^3 > 0$$

$$2 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \alpha u^4 > 0$$

$$\alpha > -\frac{1}{u^3} - \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{6u} \quad (1)$$

$$\alpha < -\frac{2}{u^4} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{6u} \quad (2)$$

En utilisant les résultats étudiés pour la méthode de rang 2, on voit que (1) est strictement croissante et que $\frac{d(2)}{du}$ admet une seule racine : $u = -4,3903492$; la valeur de α sera : $\alpha_m = 0,018455702$. La valeur maximale du pas sera obtenue comme racine de (1) pour $\alpha = \alpha_m$, soit $u = -6,0272598$.

En traçant les courbes (1) et (2), on obtient la figure IV-12.

Remarque :

Le polynôme de meilleure stabilité sera :

$$1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + 0,0184557u^4 \quad (\text{Figure IV-13}).$$

Déterminons les coefficients A_{ij} en cherchant des conditions sur l'erreur par pas.

Etude de l'erreur par pas.

La différence des développements de Taylor des solutions exactes et approchées, calculés jusqu'à l'ordre 4, donne l'erreur par pas suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{h^4}{4!} \{ [1 - 4(A_{41}\theta_1^3 + A_{42}\theta_2^3 + A_{43}\theta_3^3)] C_3 + 3[1 - 8(A_{42}A_{21}\theta_2\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_3\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_3\theta_2)] K_1 C_1 \\ & + [1 - 12(A_{42}A_{21}\theta_1^2 + A_{43}A_{31}\theta_1^2 + A_{43}A_{32}\theta_2^2)] J_1 C_2 \\ & + [1 - 24 A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1] J_1^2 C_1 \} \end{aligned}$$

On obtient les conditions

* pour obtenir une méthode d'ordre 3

$$A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2 = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 = \frac{1}{6} \quad (3)$$

* données par l'erreur par pas

$$A_{41}\theta_1^3 + A_{42}\theta_2^3 + A_{43}\theta_3^3 = \frac{1-\mu}{4} \quad (4)$$

$$A_{42}A_{21}\theta_2\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_3\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_3\theta_2 = \frac{1-\nu}{8} \quad (5)$$

$$A_{42}A_{21}\theta_1^2 + A_{43}A_{31}\theta_1^2 + A_{43}A_{32}\theta_2^2 = \frac{1-\varepsilon}{12} \quad (6)$$

* donnée par la stabilité

$$A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1 = \alpha \quad (7)$$

(a) $\theta_1 = 0$.

D'après (7), cela entraîne $\alpha = 0$.

Le système devient :

$$A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2 = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$A_{42}\theta_2^3 + A_{43}\theta_3^3 = \frac{1-\mu}{4} \quad (4)$$

$$A_{43}A_{32}\theta_2 = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$A_{43}A_{32}\theta_3\theta_2 = \frac{1-\nu}{8} \quad (5)$$

$$A_{43}A_{32}\theta_2^2 = \frac{1-\varepsilon}{12} \quad (6)$$

De (5) et (3), on obtient $\theta_3 = \frac{3(1-\gamma)}{4}$ et de (5) et (3), on obtient $\theta_2 = \frac{1-\varepsilon}{2}$

De (1) et (2), on tire dans ce cas

$$\begin{vmatrix} \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{3(1-\gamma)}{4} \\ (\frac{1-\varepsilon}{2})^2 & (\frac{3(1-\gamma)}{4})^2 \end{vmatrix} A_{42} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3(1-\gamma)}{4} \\ \frac{1}{3} & (3\frac{(1-\gamma)}{4})^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Soit } A_{42} = \frac{1-9\gamma}{6(1+2\varepsilon-3\gamma)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{3(1-\gamma)}{4} \\ (\frac{1-\varepsilon}{2})^2 & (\frac{3(1-\gamma)}{4})^2 \end{vmatrix} A_{43} = \begin{vmatrix} \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{1}{2} \\ (\frac{1-\varepsilon}{2})^2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$\text{Soit } A_{43} = \frac{1+3\varepsilon}{3(1+2\varepsilon-3\gamma)}$$

De (4), on tire la valeur de μ :

$$\mu = 1 - \frac{1}{1+2\varepsilon-3\gamma} \left[\frac{(1-9\gamma)(1-\varepsilon)^3}{12} + \frac{9(1+3\varepsilon)(1-\gamma)^3}{16} \right]$$

De (5), on tire la valeur de A_{32}

$$A_{32} = \frac{1-2\varepsilon-3\gamma}{(1+3\varepsilon)(1-\gamma)}$$

A_{21} sera pris quelconque

Ce cas est très particulier, on ne l'étudiera pas.

$$(b) A_{42} = 0$$

Le système devient :

$$A_{41}\theta_1 + A_{43}\theta_3 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$A_{41}\theta_1^2 + A_{43}\theta_3^2 = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$A_{41}\theta_1^3 + A_{43}\theta_3^3 = \frac{1-\mu}{4} \quad (4)$$

$$A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$A_{43}A_{31}\theta_3\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_3\theta_2 = \frac{1-\nu}{8} \quad (5)$$

$$A_{43}A_{31}\theta_1^2 + A_{43}A_{32}\theta_2^2 = \frac{1-\varepsilon}{12} \quad (6)$$

La résolution de (1) et (2) donne

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix} A_{41} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \theta_3 \\ \frac{1}{3} & \theta_3 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad A_{41} = \frac{3\theta_3 - 2}{6\theta_1(\theta_3 - \theta_1)}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_3 \\ \theta_1 & \theta_3 \end{vmatrix} A_{43} = \begin{vmatrix} \theta_1 & \frac{1}{2} \\ \theta_1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad A_{43} = \frac{2-3\theta_1}{6\theta_3(\theta_3 - \theta_1)}$$

En portant dans (4), on obtient la relation entre θ_1 et θ_3 :

$$3\theta_1\theta_3^{-2}(\theta_1 + \theta_3) + \frac{3}{2} = \frac{3\mu}{2}$$

Remarque : $\theta_3 = 1$ et $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$ vérifient cette relation.

De (3) et (5), on tire : $\theta_3 = \frac{3}{4}(1-\nu)$

De (5) et (6), on tire alors A_{31} et A_{32} :

$$A_{31} = \frac{1}{12A_{43}\theta_1}(-1+2\theta_2+\varepsilon) \quad \text{et} \quad A_{32} = \frac{1}{12A_{43}\theta_2}(1-2\theta_1-\varepsilon)$$

On tire la relation entre θ_1 et θ_3 : $\theta_1 = \frac{6(\mu-\nu)}{1-9\nu}$

On tire A_{21} de la relation (7) : $A_{21} = \frac{\alpha}{A_{43}A_{32}\theta_1}$

(c) $A_{43} = 0$

Ceci entraîne d'après (7) que $\alpha = 0$.

On obtient le système

$$A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$A_{41}\theta_1^3 + A_{42}\theta_2^3 = \frac{1-\mu}{4} \quad (4)$$

$$A_{42}A_{21}\theta_1 = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$A_{42}A_{21}\theta_2\theta_1 = \frac{1-\nu}{8} \quad (5)$$

$$A_{42}A_{21}\theta_1^2 = \frac{1-\varepsilon}{12} \quad (6)$$

De (1) et (2), on tire (cf. cas $A_{42} = 0$) :

$$A_{41} = \frac{3\theta_2^{-2}}{6\theta_1(\theta_2 - \theta_1)} \text{ et } A_{42} = \frac{2-3\theta_1}{6\theta_2(\theta_2 - \theta_1)}$$

En portant dans (4), on obtient la relation entre θ_2 et θ_1 :

$$6\theta_1\theta_2 - 2(\theta_1 + \theta_2) + \frac{3}{2} = \frac{3\mu}{2}$$

De (5) et (3) on tire $\theta_2 = \frac{3}{4}(1-\nu)$ et de (6) et (3) $\theta_1 = \frac{1-\nu}{2}$

De la relation entre θ_1 et θ_2 , on tire

$$\mu = \frac{1}{12} (1+3\nu-\varepsilon+\nu\varepsilon).$$

De (3), on tire

$$A_{21} = \frac{1}{A_{42}} \frac{1}{3(1-\varepsilon)}$$

Etudions le cas général :

(d) $A_{43} A_{42} \theta_1 \neq 0$

Le déterminant du système (1), (2), (4) est

$$\Delta = \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \frac{1}{\theta_1} & \frac{1}{\theta_2} & \frac{1}{\theta_3} \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_3^3 \end{vmatrix} = \theta_1 \theta_2 \theta_3 (\theta_3 - \theta_1) (\theta_3 - \theta_2) (\theta_2 - \theta_1)$$

Si $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, ce déterminant est non nul, et

$$\Delta * A_{41} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \theta_2 & \theta_3 \\ \frac{1}{3} & \theta_2 & \theta_3 \\ \frac{1-\mu}{4} & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix} = \frac{\theta_3 \theta_2 (\theta_3 - \theta_2)}{12} (6\theta_3 \theta_2 - 4(\theta_3 + \theta_2) + 3 - 3\mu)$$

En changeant le signe de $\Delta * A_{41}$ et en remplaçant θ_2 par θ_1 :

$$\Delta * A_{42} = \frac{\theta_3 \theta_1 (\theta_3 - \theta_1)}{12} (-6\theta_3 \theta_1 + 4(\theta_3 + \theta_1) - 3 + 3\mu)$$

En changeant le signe de $\Delta * A_{42}$ et en remplaçant θ_3 par θ_2 :

$$\Delta * A_{43} = \frac{\theta_2 \theta_1 (\theta_2 - \theta_1)}{12} (6\theta_2 \theta_1 - 4(\theta_2 + \theta_1) + 3 - 3\mu)$$

D'où

$$A_{41} = \frac{6\theta_3 \theta_2 - 4(\theta_3 + \theta_2) + 3 - 3\mu}{12\theta_1 (\theta_2 - \theta_1) (\theta_3 - \theta_1)}$$

$$A_{42} = \frac{-6\theta_3 \theta_1 + 4(\theta_3 + \theta_1) - 3 + 3\mu}{12\theta_2 (\theta_3 - \theta_2) (\theta_2 - \theta_1)}$$

$$A_{43} = \frac{6\theta_2 \theta_1 - 4(\theta_2 + \theta_1) + 3 - 3\mu}{12\theta_3 (\theta_3 - \theta_1) (\theta_3 - \theta_2)}$$

Résolvons le système (3), (5), (6). Son déterminant est :

$$D = \begin{vmatrix} A_{42} \theta_1 & A_{43} \theta_1 & A_{43} \theta_2 \\ A_{42} \theta_2 \theta_1 & A_{43} \theta_3 \theta_1 & A_{43} \theta_3 \theta_2 \\ A_{42} \theta_1^2 & A_{43} \theta_1^2 & A_{43} \theta_2^2 \end{vmatrix} = A_{43}^2 A_{42} \theta_1^2 \theta_2 (\theta_3 - \theta_2) (\theta_2 - \theta_1)$$

Il est non nul sous les hypothèses $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ et

$$A_{43} \cdot A_{42} \neq 0.$$

Calculons A_{21} , A_{31} et A_{32} :

$$D^*A_{21} = \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & A_{43}^{\theta_1} & A_{43}^{\theta_2} \\ \frac{1-\gamma}{8} & A_{43}^{\theta_3\theta_1} & A_{43}^{\theta_3\theta_2} \\ \frac{1-\epsilon}{12} & A_{43}^{\theta_1^2} & A_{43}^{\theta_2^2} \end{vmatrix} = \frac{A_{43}^2 \theta_2 \theta_1}{24} (\theta_2 - \theta_1) (4\theta_3 - 3 + 3\gamma)$$

$$D^*A_{31} = \begin{vmatrix} A_{42}^{\theta_1} & \frac{1}{6} & A_{43}^{\theta_2} \\ A_{42}^{\theta_2\theta_1} & \frac{1-\gamma}{8} & A_{43}^{\theta_3\theta_2} \\ A_{42}^{\theta_1^2} & \frac{1-\epsilon}{12} & A_{43}^{\theta_2^2} \end{vmatrix} = \frac{A_{43} A_{42}^2 \theta_2 \theta_1}{2} \left| \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} (3 - 4\theta_2 - 3\gamma) - \frac{\theta_3 - \theta_2}{6} (1 - 2\theta_1 - \epsilon) \right|$$

$$D^*A_{32} = \begin{vmatrix} A_{42}^{\theta_1} & A_{43}^{\theta_1} & \frac{1}{6} \\ A_{42}^{\theta_2\theta_1} & A_{43}^{\theta_3\theta_1} & \frac{1-\gamma}{8} \\ A_{42}^{\theta_1^2} & A_{43}^{\theta_1^2} & \frac{1-\epsilon}{12} \end{vmatrix} = \frac{A_{43} A_{42}^2 \theta_1^2}{12} (\theta_3 - \theta_2) (1 - 2\theta_1 - \epsilon)$$

D'où

$$A_{21} = \frac{1}{24A_{42}^{\theta_1}} \frac{4\theta_3 - 3 + 3\gamma}{\theta_3 - \theta_2}$$

$$A_{31} = \frac{1}{24A_{43}^{\theta_1}} \left[\frac{3 - 4\theta_2 - 3\gamma}{\theta_3 - \theta_2} - 2 \frac{1 - 2\theta_1 - \epsilon}{\theta_2 - \theta_1} \right]$$

$$A_{32} = \frac{1}{12A_{43}^{\theta_2}} \frac{1 - 2\theta_1 - \epsilon}{\theta_2 - \theta_1}$$

Réalisons la condition (7), en remplaçant A_{43} , A_{32} et A_{21} par leur valeur :

$$A_{43} A_{32} A_{21}^{\theta_1} = \alpha$$

$$\frac{1}{12\theta_1} \frac{1 - 2\theta_1 - \epsilon}{\theta_2 - \theta_1} \frac{1}{24A_{42}^{\theta_1}} \frac{4\theta_3 - 3 + 3\gamma}{\theta_3 - \theta_2} \theta_1 = \alpha$$

$$\frac{1}{24} \frac{1 - 2\theta_1 - \epsilon}{\theta_2 - \theta_1} \frac{4\theta_3 - 3 + 3\gamma}{\theta_3 - \theta_2} \frac{(\theta_3 - \theta_2) (\theta_2 - \theta_1)}{-6\theta_3\theta_1 + 4(\theta_3 + \theta_1) - 3 + 3\mu} = \alpha$$

Soit en tirant θ_1 :

$$\theta_1 = \frac{(4\theta_3 - 3)(24\alpha - 1 + \epsilon) + 3(24\alpha\mu - \gamma + \gamma\epsilon)}{2[4\theta_3(18\alpha - 1) - 3(16\alpha - 1 + \gamma)]}$$

L'étude de θ_1 dans l'intervalle $[0, \theta_3]$ en fonction de α, μ, γ et ϵ est ardue. On se contentera de le vérifier à chaque calcul.

Remarque : Dans le cas optimal où $\epsilon = \mu = \gamma = 0$, prenons $\theta_3 = 1$. Donc $\theta_1 = \frac{1}{2}$ et ceci entraîne $A_{42} = 0$. Le calcul général des coefficients n'est plus possible.

On obtient le calcul des coefficients :

(a) On choisit θ_3 dans $[0, 1]$.

$$(b) \theta_1 = \frac{(4\theta_3 - 3)(24\alpha - 1 + \epsilon) + 3(24\alpha\mu - \gamma + \gamma\epsilon)}{2[4\theta_3(18\alpha - 1) - 3(16\alpha - 1 + \gamma)]}$$

Si $\theta_1 \geq \theta_3$ ou $\theta_1 < 0$, on change θ_3 et on recommence en (b).

$$\theta_2 = \frac{\theta_3 + \theta_1}{2}$$

$$(c) A_{41} = \frac{6\theta_3\theta_2 - 4(\theta_3 + \theta_2) + 3 - 3\mu}{12\theta_1(\theta_2 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_1)}$$

$$A_{42} = \frac{-6\theta_3\theta_1 + 4(\theta_3 + \theta_1) - 3 + 3\mu}{12\theta_2(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$A_{43} = \frac{6\theta_2\theta_1 - 4(\theta_2 + \theta_1) + 3 - 3\mu}{12\theta_3(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)}$$

Si A_{42} ou A_{43} est nul, alors on change θ_3 et on recommence en (b).

$$(d) A_{21} = \frac{1}{24A_{42}\theta_1} \frac{4\theta_3 - 3 + 3\gamma}{\theta_3 - \theta_2}$$

$$A_{31} = \frac{1}{24A_{43}\theta_1} \left[\frac{3 - 4\theta_2 - 3\gamma}{\theta_3 - \theta_2} - 2 \frac{1 - 2\theta_1 - \epsilon}{\theta_2 - \theta_1} \right]$$

$$A_{32} = \frac{1}{12A_{43}\theta_2} \frac{1 - 2\theta_1 - \epsilon}{\theta_2 - \theta_1}$$

Pour le cas optimal, ou $\mu = \sqrt{\epsilon} = 0$, $\alpha = 0,018455702$, on obtient la grille de coefficients suivante :

0,57638312			
0,73819156	-0,3004301		
0,9	0,22153345	-0,20460518	
	1,1968298	-0,89224504	0,52090587

L'erreur par pas de la méthode est

$$\frac{h^4}{24} [\mu C_3 + 3\sqrt{\epsilon} K_1 C_1 + \epsilon J_1 C_2 + (1-24\alpha) J_1^2 C_1]$$

Traçons, figure IV-14, les courbes à erreur constante, pour $\mu = \sqrt{\epsilon} = \epsilon = 0$:

$$E = \frac{h^4}{24} J_1^2 C_1 |1-24\alpha|.$$

Pour un rayon de stabilité donné Λ , la meilleure méthode sera obtenue pour α défini par la condition (1) : $\alpha = \frac{-1}{(hA)^3} - \frac{1}{2(hA)^2} - \frac{1}{6(hA)}$, car l'erreur par pas sera minimale.

Etude du coût relatif.

L'erreur par pas de la méthode de rang 4 et d'ordre 3 est

$$\frac{h^4}{24} [\mu C_3 + 3\sqrt{\epsilon} K_1 C_1 + \epsilon J_1 C_2 + (1-24\alpha) J_1^2 C_1]$$

L'erreur par pas de la méthode de rang 3 et d'ordre 3 est

$$\frac{h^4}{24} \left[\left(\frac{4\theta_1^{-3}}{3} + A_{32} \theta_2^2 (\theta_2 - \theta_1) \right) C_3 + (4\theta_2 - 3) K_1 C_1 + (2\theta_1 - 1) J_1 C_2 - J_1^2 C_1 \right]$$

Les coefficients θ_1, θ_2 et A_{32} de la méthode de rang 3 et d'ordre 3 qui minimisent l'erreur par pas sont : $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_2 = \frac{3}{4}$, $A_{32} = \frac{2-3\theta_1}{6\theta_2(\theta_2-\theta_1)} = \frac{4}{9}$

Le rapport $\frac{\varepsilon_{43}}{\varepsilon_{33}}$ sera : $\frac{0,56}{1,3}$

Le coût relatif sera :

$$\frac{4}{3} \times \frac{0,56}{1,3} \times \frac{2,5}{6,03} \neq 0,24$$

Il y a gain pour cette méthode.

Vérification numérique.

On a vérifié les résultats théoriques pour $y' = -y+1$, $y(0) = 0$.
Les résultats figurent sur la courbe IV-15.

IV - ETUDE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE D'ORDRE 2

L'approximation vectorielle par une méthode de rang 4 est

$$X_{i1} = X_i + h\theta_1 Z_i$$

$$X_{i2} = X_i + h\theta_2 Z_i + hA_{21}(Z_{i1} - Z_i)$$

$$X_{i3} = X_i + h\theta_3 Z_i + hA_{31}(Z_{i1} - Z_i) + hA_{32}(Z_{i2} - Z_i)$$

$$X_{i+1} = X_i + hZ_i + hA_{41}(Z_{i1} - Z_i) + hA_{42}(Z_{i2} - Z_i) + hA_{43}(Z_{i3} - Z_i)$$

Etude de la stabilité.

Etudions le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Le système récurrent devient :

$$X_{i1} = (Id + hA\theta_1)X_i$$

$$X_{i2} = (Id + hA\theta_2 + h^2 A^2 A_{21} \theta_1)X_i$$

$$X_{i3} = (Id + hA\theta_3 + h^2 A^2 (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) + h^3 A^3 A_{32} A_{21} \theta_1)X_i$$

$$X_{i+1} = (Id + hA + h^2 A^2 (A_{41} \theta_1 + A_{42} \theta_2 + A_{43} \theta_3) + h^3 A^3 (A_{42} A_{21} \theta_1 + A_{43} A_{31} \theta_1 + A_{43} A_{32} \theta_2) + h^4 A^4 A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1)X_i$$

Posons :

$$A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3 = \gamma$$

$$A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2 = \beta$$

$$A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1 = \alpha$$

Donc

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= (\text{Id} + hA + h^2 A^2 \gamma + h^3 A^3 \beta + h^4 A^4 \alpha) X_i \\ &= B(hA) X_i \end{aligned}$$

La stabilité impose que les valeurs propres de la matrice $B(hA)$ soient en module inférieures à 1 ; si $r_1 = a_1 + ib_1$ est valeur propre de A , la condition s'écrira :

$$|1 + h(a_1 + ib_1) + h^2(a_1 + ib_1)^2 \gamma + h^3(a_1 + ib_1)^3 \beta + h^4(a_1 + ib_1)^4 \alpha| < 1$$

Soit, en prenant le carré de la norme sur \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} (1 + ha_1 + h^2(a_1^2 - b_1^2)\gamma + h^3(a_1^3 - 3a_1b_1^2)\beta + h^4(a_1^4 - 6a_1^2b_1^2 + b_1^4)\alpha)^2 \\ + h^2(b_1 + 2a_1b_1h\gamma + (3a_1^2b_1 - b_1^3)h^2\beta + (4a_1^3b_1 - 4a_1b_1^3)\alpha)^2 < 1. \end{aligned}$$

On traitera en même temps les méthodes d'ordre 1, 2 et 3 ; on prendra $\gamma = \frac{1}{2}$ pour obtenir l'ordre 2, et $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$ pour les méthodes d'ordre 3.

Exemple numérique.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $-1+i$ et $-1-i$.

Méthode d'ordre 1.

La condition à remplir est

$$(1 - h + 2h^3\beta - 4\alpha h^4)^2 + h^2(1 - 2\gamma h + 2\beta h^2)^2 < 1$$

soit

$$1 - h - 2h^2(\beta - \gamma) - 2h^3(-2\alpha + \gamma^2) - 4h^4(\alpha - \beta\gamma) - 4\beta^2h^5 + 8\alpha\beta h^6 - 8\alpha^2h^7 > 0.$$

On cherche α^* , β^* et γ^* tels que la condition à remplir soit vérifiée pour la plus grande plage possible du pas d'intégration h : $[0, \Lambda]$.

On trouve :

$$\alpha^* = 0.000875$$

$$\beta^* = 0.0024$$

$$\gamma^* = 0.023$$

$$\Lambda = 6,13$$

La courbe de stabilité est tracée figure IV-16. Le rapport des erreurs par pas est $|1-2\gamma|$. Le coût de la méthode est alors

$$\frac{4}{1} \times 0,54 \times \frac{1}{6,13} \neq 0,35$$

Il y a gain pour cette méthode.

Ces résultats ont été testés pour $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$x(0) = y(0) = 1$ et sont portés figure IV-16.

Méthode d'ordre 2.

On pose $\gamma = \frac{1}{2}$, soit

$$1-h-2h^2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)-2h^3\left(-2\alpha+\frac{1}{4}\right)-4h^4\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-4\beta^2h^5+8\alpha\beta h^6-8\alpha^2h^7 > 0$$

On cherche α^* et β^* donnant la plus grande plage de stabilité :

$$\alpha^* = 0,0085$$

$$\beta^* = 0,094$$

$$\Lambda = 4,38$$

La courbe de stabilité est tracée figure IV-17.

Le rapport des erreurs $\frac{\varepsilon_{42}}{\varepsilon_{22}}$ est égal à $\frac{|1-6\beta|}{|\frac{\theta}{4}-1|+1}$

Le coût de la méthode est

$$\frac{4}{2} \times \frac{3,52}{15} \times \frac{1,5}{4,38} \neq 0,16$$

Il y a gain pour cette méthode.

Ces résultats ont été testés pour $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x(0) = y(0) = 1$, et sont portés figure IV-17.

La courbe tracée trait plein a été obtenue par le programme et on a complété la courbe par l'étude du système différentiel.

Méthode d'ordre 3.

Pour obtenir une méthode d'ordre 3, on prend $\beta = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$.
On obtient la condition :

$$1 - h + \frac{h^2}{3} - (4\alpha + \frac{1}{2}) h^3 - h^4 (4\alpha - \frac{1}{3}) - \frac{h^5}{9} + \frac{4\alpha}{3} h^6 - 8\alpha^2 h^7 > 0$$

Le plus grand rayon de stabilité est obtenu pour

$$\alpha = 0,025, \text{ d'où } \Lambda = 2,25$$

Le rapport des bornes supérieures des erreurs $\frac{\varepsilon_{43}}{\varepsilon_{33}}$ est égal à

$$\frac{|\mu| + 3|\theta_1| + |\varepsilon| + |1 - 24\alpha|}{\left| \frac{4\theta_1 - 3}{3} + A_{32}\theta_2^2(\theta_2 - \theta_1) \right| + |4\theta_2 - 3| + |2\theta_1 - 1| + 1}$$

Ce rapport, pour $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_2 = \frac{3}{4}$, $A_{32} = \frac{4}{9}$, $\mu = \varepsilon = 0$, $\alpha = 0,025$, est égal à $\frac{0,4}{1,3}$

Le coût de la méthode est $\frac{4}{3} \times \frac{0,4}{1,3} \times \frac{1,67}{2,25} \approx 0,31$

La méthode est rentable.

Les résultats obtenus ont été testés pour $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$x(0) = y(0) = 1$$

Les résultats sont portés figure IV-18.

V - ETUDE DE 2 EQUATIONS NON LINEAIRES

Méthode d'ordre 1.

On a pris la détermination des coefficients faite au paragraphe I, ainsi que les coefficients $\beta = \frac{1}{128}$ et $\gamma = \frac{5}{32}$, arbitrairement.

Prenons $\theta_3 = 1$, $\theta_2 = \frac{3}{4}$, $\theta_1 = \frac{1}{2}$, on obtient la grille des coefficients :

$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3+1024\alpha}{49-64\mu}$	
1	-1,5	1	
	$\frac{64\alpha}{3}$	$\frac{49-64\mu}{3+1024\alpha} + \frac{-83+128\mu}{48}$	$-\frac{256}{9} \alpha \frac{49-64\mu}{3+1024\alpha} - \frac{-49+64\mu}{36}$
			$\frac{32}{3} \alpha \frac{49-64\mu}{3+1024\alpha}$

Le rapport $\frac{\epsilon_{41}}{\epsilon_{11}}$ est égal à $|1-2\gamma|$.

$y' = -y^2, y(0) = 1.$

On obtient, en fonction de μ , les courbes tracées figure IV-19. Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\mu = 0,9$ et $\alpha = 0,00002$, soit $4,4 < \Lambda < 4,5$.

Pour cette formule, le coût est $\frac{4}{1} \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{4,5} \neq 0,5$

Il y a gain pour cette méthode.

$y' = -2t y^2, y(0) = 1.$

On obtient, en fonction de μ , les courbes tracées figure IV-20.

Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\mu = 0,9$, $\alpha = 0$, soit $1,85 < \Lambda < 1,9$

Le coût est : $\frac{4}{1} \times \frac{9}{16} \times \frac{0,7}{1,9} \neq 0,82$. La méthode est rentable.

Méthode d'ordre 2.

On a pris la détermination des coefficients faite au paragraphe II. On a pris arbitrairement $\beta = 0,07808449$ ainsi que $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_2 = \frac{3}{4}$, $\theta_3 = 1$. On obtient la grille de coefficients :

$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2} \frac{0,23425347+8\alpha}{-1+4\mu}$		
1	-1,5	1	
	$-\frac{8\alpha}{3} \frac{-1+4\mu}{0,23425347+8\alpha} + \frac{1+8\mu}{3}$	$\frac{32\alpha}{9} \frac{-1+4\mu}{0,23425347+8\alpha} + \frac{4-16\mu}{9}$	$-\frac{4\alpha}{3} \frac{-1+4\mu}{0,23425347+8\alpha}$

Le rapport des erreurs $\epsilon_{42}/\epsilon_{22}$ est $(|\mu|+|1-6\beta|)/(|\frac{\theta_1}{4}-1|+1)$.

$$y' = -y^2 ; y(0) = 1$$

On obtient, en fonction de μ , les courbes tracées figure IV-21.

Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\mu = 0$,

$$\alpha = -0,004, \text{ soit } 3,5 < \Lambda < 3,6$$

Pour cette formule, on obtient comme coût $\frac{4}{2} \times \frac{4,32}{15} \times \frac{1,55}{3,6} \neq 0,24$

Il y a gain pour cette méthode.

$$y' = -2t y^2, y(0) = 1.$$

On obtient, en fonction de μ , les courbes figure IV-22.

Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\mu = 0, \alpha = 0$, soit $1,7 < \Lambda < 1,75$

Le coût est alors $\frac{4}{2} \times \frac{4,32}{1,5} \times \frac{1}{1,75} \neq 0,32$

Cette formule est rentable.

Méthode d'ordre 3.

On a pris la détermination des coefficients faite au paragraphe III.

Calculons le rapport $\frac{\epsilon_{43}}{\epsilon_{33}}$.

On a déterminé les coefficients de la méthode de rang 3 et d'ordre 3 au chapitre précédent ; choisissons $\theta_1 = \frac{1}{2}, \theta_{2\epsilon} = 1, A_{32} = \frac{1}{6}$.

Pour $\epsilon = \mu = \nu = 0$, le rapport $\frac{\epsilon_{43}}{\epsilon_{33}}$ est égal à

$$\frac{|1-24\alpha|}{|\frac{4\theta_1^{-3}}{3} + A_{32}\theta_2^2(\theta_2^{-\theta_1})| + |4\theta_2^{-3}| + |2\theta_1^{-1}| + 1} = \frac{|1-24\alpha|}{1,3}$$

$$\underline{y' = -y^2, y(0) = 1.}$$

Pour $\mu = \varepsilon = \gamma = 0$, on a pris $\theta_2 = 0.5$, $\theta_3 = 0.625$; on obtient la courbe tracée figure IV-23.

Pour $\theta_3 = 1.0$, on obtient en fonction de μ les courbes figure IV-24 et en fonction de ε , les courbes IV-25. Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\varepsilon = \mu = \gamma = 0$, et $\alpha = \frac{1}{40}$, soit $5,4 < \Lambda < 5,5$

Le coût relatif sera : $\frac{4}{3} \times \frac{0,4}{1,3} \times \frac{1,3}{5,5} \neq 0,1$.

Il y a gain pour cette méthode.

$$\underline{y' = -2t y^2, y(0) = 1.}$$

Pour $\varepsilon = \mu = \gamma = 0$, on a pris les coefficients $\theta_3 = 0.625$ et $\theta_2 = 0.5$; on obtient la courbe tracée figure IV-26.

Pour $\theta_3 = 1.0$, on obtient en fonction de μ les courbes tracées figure IV-27 et en fonction de ε celles de la figure IV-28.

Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\varepsilon = \mu = \gamma = 0$ et $\alpha = \frac{1}{50}$, soit $1,85 < \Lambda < 1,9$.

Le coût relatif est : $\frac{4}{3} \frac{13}{25 \times 1,3} \frac{1,0}{1,9} \neq 0,28$

Il y a gain pour cette méthode.

CHAPITRE - V

METHODE DE RUNGE-KUTTA DE RANG 5.

L'approximation par une méthode de Runge-Kutta de rang 5 de la solution de l'équation différentielle $y' = Y(y,t)$, $y(t_0) = y_0$ est

$$\begin{aligned} y_{i1} &= y_i + h\theta_1 Y_i \\ y_{i2} &= y_i + h\theta_2 Y_i + hA_{21}(Y_{i1} - Y_i) \\ y_{i3} &= y_i + h\theta_3 Y_i + hA_{31}(Y_{i1} - Y_i) + hA_{32}(Y_{i2} - Y_i) \\ y_{i4} &= y_i + h\theta_4 Y_i + hA_{41}(Y_{i1} - Y_i) + hA_{43}(Y_{i2} - Y_i) + hA_{43}(Y_{i3} - Y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hY_i + hA_{51}(Y_{i1} - Y_i) + hA_{52}(Y_{i2} - Y_i) + hA_{53}(Y_{i3} - Y_i) + hA_{54}(Y_{i4} - Y_i). \end{aligned}$$

En développant par la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 4, on obtient :

$$Y_{i1} - Y_i = h\theta_1 C_1 + \frac{h^2 \theta_1^2}{2} C_2 + \frac{h^3 \theta_1^3}{6} C_3 + \frac{h^4 \theta_1^4}{24} C_4$$

$$Y_{i2} - Y_i = h\theta_2 C_1 + h^2 \left(\frac{\theta_2^2}{2} C_2 + A_{21} \theta_1 J_1 C_1 \right)$$

$$+ h^3 \left(\frac{\theta_2^3}{6} C_3 + A_{21} \theta_2 \theta_1 K_1 C_1 + A_{21} \frac{\theta_1^2}{2} J_1 C_2 \right)$$

$$+ h^4 \left(\frac{\theta_2^4}{24} C_4 + A_{21} \frac{\theta_2^2 \theta_1}{2} L_1 C_1 + A_{21} \frac{\theta_2 \theta_1^2}{2} K_1 C_2 + A_{21} \frac{\theta_1^3}{6} J_1 C_3 \right)$$

$$Y_{i3} - Y_i = h\theta_3 C_1 + h^2 \left[\frac{\theta_3^2}{2} C_2 + (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) J_1 C_1 \right]$$

$$+ h^3 \left[\frac{\theta_3^3}{6} C_3 + \theta_3 (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) K_1 C_1 + \frac{1}{2} (A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2) J_1 C_2 + A_{32} A_{21} \theta_1 J_1^2 C_1 \right]$$

$$+ h^4 \left[\frac{\theta_3^4}{24} C_4 + \frac{\theta_3^2}{2} (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2) L_1 C_1 + \frac{1}{2} A_{32} A_{31} \theta_2 \theta_1 R \right]$$

$$+ \frac{\theta_3}{2} (A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2) K_1 C_2 + A_{32} A_{21} \theta_1 (\theta_3 + \theta_2) J_1 K_1 C_1$$

$$+ \frac{1}{6} (A_{31} \theta_1^3 + A_{32} \theta_2^3) J_1 C_3 + \frac{1}{2} A_{32} A_{21} \theta_1^2 J_1^2 C_2$$

$$\begin{aligned}
 Y_{i4} - Y_i &= h\theta_4 C_1 + h^2 \left[\frac{\theta_4^2}{2} C_2 + (A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3) J_1 C_1 \right] \\
 &+ h^3 \left[\frac{\theta_4^3}{6} C_3 + \theta_4 (A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3) K_1 C_1 \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} (A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2) J_1 C_2 + (A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{43}A_{32}\theta_2) J_1^2 C_1 \right] \\
 &+ h^4 \left[\frac{\theta_4^4}{24} C_4 + \frac{\theta_4^2}{2} (A_{41}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{43}\theta_3) L_1 C_1 \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} (A_{42}A_{41}\theta_2\theta_1 + A_{43}A_{41}\theta_3\theta_1 + A_{43}A_{42}\theta_3\theta_2) R \right. \\
 &+ \left. \frac{\theta_4}{2} (A_{41}\theta_1^2 + A_{42}\theta_2^2 + A_{43}\theta_3^2) K_1 C_2 \right. \\
 &+ \left. (A_{42}A_{21}\theta_1(\theta_4 + \theta_2) + A_{43}A_{31}\theta_1(\theta_4 + \theta_3) + A_{43}A_{32}\theta_2(\theta_4 + \theta_3)) J_1 K_1 C_1 \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{6} (A_{41}\theta_1^3 + A_{42}\theta_2^3 + A_{43}\theta_3^3) J_1 C_3 \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} (A_{42}A_{21}\theta_1^2 + A_{43}A_{31}\theta_1^2 + A_{43}A_{32}\theta_2^2) J_1^2 C_2 + A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1 J_1^3 C_1 \right]
 \end{aligned}$$

En portant dans l'expression de y_{i+1} :

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + hY_i + h^2 \left[A_{51}\theta_1 + A_{42}\theta_2 + A_{53}\theta_3 + A_{54}\theta_4 \right] C_1 \\
 &+ h^3 \left[\frac{1}{2} (A_{51}\theta_1^2 + A_{52}\theta_2^2 + A_{53}\theta_3^2 + A_{54}\theta_4^2) C_2 + (A_{52}A_{21}\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_1 + A_{53}A_{32}\theta_2 \right. \\
 &\quad \left. + A_{54}A_{41}\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_3) J_1 C_1 \right] \\
 &+ h^4 \left[\frac{1}{6} (A_{51}\theta_1^3 + A_{52}\theta_2^3 + A_{53}\theta_3^3 + A_{54}\theta_4^3) C_3 + (A_{52}A_{21}\theta_2\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_3\theta_1 \right. \\
 &\quad \left. + A_{53}A_{32}\theta_3\theta_2 + A_{54}A_{41}\theta_4\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_4\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_4\theta_3) K_1 C_1 \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} (A_{52}A_{21}\theta_1^2 + A_{53}A_{31}\theta_1^2 + A_{53}A_{32}\theta_2^2 + A_{54}A_{41}\theta_1^2 + A_{54}A_{42}\theta_2^2 + A_{54}A_{43}\theta_3^2) J_1 C_2 \right. \\
 &+ \left. (A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1 + A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2) J_1^2 C_1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + h^5 \left[\frac{1}{24}(A_{51}\theta_1^4 + A_{52}\theta_2^4 + A_{53}\theta_3^4 + A_{54}\theta_4^4)C_4 + \frac{1}{2}(A_{52}A_{21}\theta_2^2\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_3^2\theta_1 \right. \\
 & \quad \left. + A_{53}A_{32}\theta_3^2\theta_2 + A_{54}A_{41}\theta_4^2\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_4^2\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_4^2\theta_3)L_1C_1 \right. \\
 & + \frac{1}{2}(A_{52}A_{21}\theta_2^2\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_3^2\theta_1 + A_{53}A_{32}\theta_3^2\theta_2 + A_{54}A_{41}\theta_4^2\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_4^2\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_4^2\theta_3)K_1C_2 \\
 & + \frac{1}{6}(A_{52}A_{21}\theta_1^3 + A_{53}A_{31}\theta_1^3 + A_{53}A_{32}\theta_2^3 + A_{54}A_{41}\theta_1^3 + A_{54}A_{42}\theta_2^3 + A_{54}A_{43}\theta_3^3)J_1C_3 \\
 & + \frac{1}{2}(A_{53}A_{32}A_{31}\theta_2\theta_1 + A_{54}A_{42}A_{41}\theta_2\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{41}\theta_3\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{42}\theta_3\theta_2)R \\
 & + (A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1(\theta_3 + \theta_2) + A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1(\theta_4 + \theta_2) + A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1(\theta_4 + \theta_3) + A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2(\theta_4 + \theta_3))J_1K_1C_1 \\
 & \left. + \frac{1}{2}(A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1^2 + A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1^2 + A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1^2 + A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2^2)J_1^2C_2 + A_{54}A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1J_1^3C_1 \right]
 \end{aligned}$$

I - METHODE D'ORDRE 4.

Nous n'étudierons que les méthodes d'ordre 4. Le développement de Taylor de la solution exacte de $y' = Y(y,t)$, $y(t_i) = y_i$ au point t_{i+1} est donné par :

$$\begin{aligned}
 y_{i+1}^* & = y_i + hY_i + \frac{h^2}{2} C_1 + \frac{h^3}{6} (C_2 + J_1 C_1) + \frac{h^4}{24} (C_3 + 3K_1 C_1 + J_1 C_2 + J_1^2 C_1) \\
 & + \frac{h^5}{120} (C_4 + 6L_1 C_1 + 3R + 4K_1 C_2 + 7J_1 K_1 C_1 + J_1 C_3 + J_1^3 C_1 + J_1^2 C_2)
 \end{aligned}$$

Pour obtenir une méthode d'ordre 4, on devra donc satisfaire les conditions suivantes :

$$A_{51}\theta_1 + A_{52}\theta_2 + A_{53}\theta_3 + A_{54}\theta_4 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$A_{51}\theta_1^2 + A_{52}\theta_2^2 + A_{53}\theta_3^2 + A_{54}\theta_4^2 = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$A_{52}A_{21}\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_1 + A_{53}A_{32}\theta_2 + A_{54}A_{41}\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_3 = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$A_{51}\theta_1^3 + A_{52}\theta_2^3 + A_{53}\theta_3^3 + A_{54}\theta_4^3 = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$A_{52}A_{21}\theta_2\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_3\theta_1 + A_{53}A_{32}\theta_3\theta_2 + A_{54}A_{41}\theta_4\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_4\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_4\theta_3 = \frac{1}{8} \quad (5)$$

$$A_{52}A_{21}\theta_1^2 + A_{53}A_{31}\theta_1^2 + A_{53}A_{32}\theta_2^2 + A_{54}A_{41}\theta_1^2 + A_{54}A_{42}\theta_2^2 + A_{54}A_{43}\theta_3^2 = \frac{1}{12} \quad (6)$$

$$A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1 + A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2 = \frac{1}{24} \quad (7)$$

Etude de la stabilité.

Portons l'équation différentielle linéaire $y' = Ay$ dans l'équation récurrente :

$$y_{i1} = (1+hA\theta_1)y_i$$

$$y_{i2} = (1+hA\theta_2+h^2A^2A_{21}\theta_1)y_i$$

$$y_{i3} = (1+hA\theta_3+h^2A^2(A_{31}\theta_1+A_{32}\theta_2)+h^3A^3A_{32}A_{21}\theta_1)y_i$$

$$y_{i4} = (1+hA\theta_4+h^2A^2(A_{41}\theta_1+A_{42}\theta_2+A_{43}\theta_3)+h^3A^3(A_{42}A_{21}\theta_1+A_{43}A_{31}\theta_1+A_{43}A_{32}\theta_2)+h^4A^4A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1)y_i$$

$$y_{i+1} = (1+hA+h^2A^2(A_{51}\theta_1+A_{52}\theta_2+A_{53}\theta_3+A_{54}\theta_4)+h^3A^3(A_{52}A_{21}\theta_1+A_{53}A_{31}\theta_1+A_{53}A_{32}\theta_2+A_{54}A_{41}\theta_1+A_{54}A_{42}\theta_2+A_{54}A_{43}\theta_3)+h^4A^4(A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1+A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1+A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1+A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2)+h^5A^5A_{54}A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1)y_i.$$

Posons $\alpha = A_{54}A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1$

$u = hA.$

D'après les conditions (1), (3), et (7) imposées pour l'obtention de l'ordre, l'équation récurrente devient :

$$y_{i+1} = (1+u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \alpha u^5)y_i$$

La condition de stabilité impose :

$$|1+u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \alpha u^5| < 1$$

soit

$$1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + \frac{u^3}{24} + \alpha u^4 > 0 \quad (a)$$

$$2+u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \alpha u^5 > 0 \quad (b)$$

$$\alpha > -\frac{1}{u^4} - \frac{1}{2u^3} - \frac{1}{6u^2} - \frac{1}{24u} \quad (a)$$

$$\alpha < -\frac{2}{u^5} - \frac{1}{u^4} - \frac{1}{2u^3} - \frac{1}{6u^2} - \frac{1}{24u} \quad (b)$$

Etude de (a) - Figure V-1.

$$\frac{d(a)}{du} = \frac{1}{u^5} \left(4 + \frac{3u}{2} + \frac{u^2}{3} + \frac{u^3}{24} \right)$$

$$4 + \frac{3u}{2} + \frac{u^2}{3} + \frac{u^3}{24} \quad (c) \text{ a pour dérivée } \frac{3}{2} + \frac{2u}{3} + \frac{u^2}{8} \text{ qui a pour discriminant } \frac{4-27}{9 \times 4} < 0.$$

$\frac{d(c)}{du}$ est donc toujours positive, donc (c) n'admet qu'un seul zéro : -4,6887784

(a) admet donc un maximum pour $u = -4,6887784$ qui est atteint pour $\alpha = 0,0040869612$

Etude de (b).

$$\frac{d(b)}{du} = \frac{1}{u^6} \left(10 + 4u + \frac{3u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{24} \right).$$

$$10 + 4u + \frac{3u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{24} \quad (d) \text{ a pour dérivée } 4 + 3u + u^2 + \frac{u^3}{6} \quad (e)$$

$$\frac{d(e)}{du} = 3 + 2u + \frac{u^2}{2} \text{ qui admet pour discriminant } 1 - \frac{3}{2} < 0.$$

Donc (e) admet un seul zéro : -2,6258.

(d) admet un minimum en -2,6258 la valeur de cet extremum est 5,0.

Donc (b) est toujours croissante.

Traçons les courbes (a) et (b), on obtient la zône de stabilité dans la région hachurée figure V-3.

Remarque :

Le polynôme de meilleure stabilité sera :

$$P(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + 0,0040869612 u^5 \quad (\text{Figure V-4}).$$

Déterminons les coefficients A_{ij} en cherchant des conditions sur l'erreur par pas.

Etude de l'erreur par pas.

Nous allons chercher à résoudre les coefficients imposés par l'ordre, de (1) à (7), ainsi que l'équation de la stabilité (8), et essayer de minimiser la somme des valeurs absolues des termes de l'erreur par pas.

Résolvons (1), (2), et (4) pour trouver A_{51} , A_{52} , A_{54} ; le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_4 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_4^2 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_4^3 \end{vmatrix} = \theta_1 \theta_2 \theta_4 (\theta_4 - \theta_2) (\theta_4 - \theta_1) (\theta_2 - \theta_1)$$

D'où

$$\Delta^* A_{51} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - A_{53} \theta_3 & \theta_2 & \theta_4 \\ \frac{1}{3} - A_{53} \theta_3^2 & \theta_2^2 & \theta_4^2 \\ \frac{1}{4} - A_{43} \theta_3^3 & \theta_2^3 & \theta_4^3 \end{vmatrix} = \theta_2 \theta_4 (\theta_4 - \theta_2) \left[\frac{\theta_4 \theta_2}{2} - \frac{\theta_4 + \theta_2}{3} + \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3 (\theta_4 \theta_2 - (\theta_4 + \theta_2) + 1) \right]$$

$$\Delta^* A_{52} = \begin{vmatrix} \theta_1 \frac{1}{2} - A_{53} \theta_3 & \theta_4 \\ \theta_1^2 \frac{1}{3} - A_{53} \theta_3^2 & \theta_4^2 \\ \theta_1^3 \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3^3 & \theta_4^3 \end{vmatrix} = -\theta_1 \theta_4 (\theta_4 - \theta_1) \left[\frac{\theta_4 \theta_1}{2} - \frac{\theta_4 + \theta_1}{3} + \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3 (\theta_4 \theta_1 - (\theta_4 + \theta_1) + 1) \right]$$

$$\Delta^* A_{53} = \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \frac{1}{2} - A_{53} \theta_3 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \frac{1}{3} - A_{53} \theta_3^2 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3^3 \end{vmatrix} = \theta_1 \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) \left[\frac{\theta_2 \theta_1}{2} - \frac{\theta_2 + \theta_1}{3} + \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3 (\theta_2 \theta_1 - (\theta_2 + \theta_1) + 1) \right]$$

Soit

$$A_{51} = \frac{1}{\theta_1(\theta_4 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_1)} \left[\frac{\theta_4 \theta_2}{2} - \frac{\theta_4 + \theta_2}{3} + \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3 (\theta_4 \theta_2 - (\theta_4 + \theta_2) + 1) \right]$$

$$A_{52} = \frac{1}{\theta_2(\theta_4 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)} \left[\frac{\theta_4 \theta_1}{2} - \frac{\theta_4 + \theta_1}{3} + \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3 (\theta_4 \theta_1 - (\theta_4 + \theta_1) + 1) \right].$$

$$A_{54} = \frac{1}{\theta_4(\theta_4 - \theta_2)(\theta_4 - \theta_1)} \left[\frac{\theta_2 \theta_1}{2} - \frac{\theta_2 + \theta_1}{3} + \frac{1}{4} - A_{53} \theta_3 (\theta_2 \theta_1 - (\theta_2 + \theta_1) + 1) \right].$$

Il reste à résoudre 5 équations non linéaires à 6 inconnues. Prenons arbitrairement $A_{53} = 0$ et montrons que ces équations se résolvent aisément.

En tirant $U = A_{54} A_{41} \theta_1 + A_{54} A_{42} \theta_2 + A_{54} A_{43} \theta_3$ des équations (3) et (5), on obtient :

$$A_{52} A_{21} \theta_1 + U = \frac{1}{6}$$

$$A_{52} A_{21} \theta_2 \theta_1 + \theta_4 U = \frac{1}{8}$$

En éliminant U , on obtient

$$A_{21} = \frac{4\theta_4 - 3}{24A_{52}\theta_1(\theta_4 - \theta_2)}$$

Réolvons les équations (3) et (6) :

$$A_{54} A_{41} \theta_1 + A_{54} A_{42} \theta_2 = \frac{1}{6} - A_{52} A_{21} \theta_1 - A_{54} A_{43} \theta_3$$

$$A_{54} A_{41} \theta_1^2 + A_{54} A_{42} \theta_2^2 = \frac{1}{2} - A_{52} A_{21} \theta_1^2 - A_{54} A_{43} \theta_3^2$$

Le déterminant du système est $A_{54}^2 \theta_1 \theta_2 (\theta_2 - \theta_1)$

D'où

$$A_{41} = \frac{1}{A_{54} \theta_1 (\theta_2 - \theta_1)} \left[\frac{2\theta_2 - 1}{12} - A_{52} A_{21} \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) + A_{54} A_{43} \theta_3 (\theta_3 - \theta_2) \right]$$

$$A_{42} = \frac{1}{A_{54} \theta_2 (\theta_2 - \theta_1)} \left[\frac{1 - 2\theta_1}{12} - A_{54} A_{43} \theta_3 (\theta_3 - \theta_1) \right]$$

En portant la relation de stabilité : $A_{54}A_{43}A_{32} = \frac{\alpha}{A_{21}\theta_1}$ dans la relation (7), on peut tirer A_{31} :

$$A_{31} = \frac{1}{A_{54}A_{43}\theta_1} * \left[\frac{1}{24} - \frac{\alpha\theta_2}{A_{21}\theta_1} - A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1 \right].$$

On tirera A_{32} de la relation de stabilité :

$$A_{32} = \frac{\alpha}{A_{54}A_{43}A_{21}\theta_1}$$

Cherchons à minimiser l'erreur par pas, en jouant sur les coefficients $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ et A_{43} . Cette erreur par pas est égale à :

$$\begin{aligned} & \frac{h^5}{120} \left\{ \left[5(A_{51}\theta_1^4 + A_{52}\theta_2^4 + A_{53}\theta_3^4 + A_{54}\theta_4^4) - 1 \right] C_4 \right. \\ & + \left[60(A_{52}A_{21}\theta_2^2\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_3^2\theta_1 + A_{53}A_{32}\theta_3^2\theta_2 + A_{54}A_{41}\theta_4^2\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_4^2\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_4^2\theta_3) - 6 \right] L_1 C_1 \\ & + \left[60(A_{52}A_{21}\theta_2^2\theta_1 + A_{53}A_{31}\theta_3^2\theta_1 + A_{53}A_{32}\theta_3^2\theta_2 + A_{54}A_{41}\theta_4^2\theta_1 + A_{54}A_{42}\theta_4^2\theta_2 + A_{54}A_{43}\theta_4^2\theta_3) - 4 \right] K_1 C_2 \\ & + \left[20(A_{52}A_{21}\theta_1^3 + A_{53}A_{31}\theta_1^3 + A_{53}A_{32}\theta_2^3 + A_{54}A_{41}\theta_1^3 + A_{54}A_{42}\theta_2^3 + A_{54}A_{43}\theta_3^3) - 1 \right] J_1 C_3 \\ & + \left[60(A_{53}A_{32}A_{31}\theta_2\theta_1 + A_{54}A_{42}A_{41}\theta_2\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{41}\theta_3\theta_1 + A_{54}A_{43}A_{42}\theta_3\theta_2) - 3 \right] R \\ & + \left[120(A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1(\theta_3 + \theta_2) + A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1(\theta_4 + \theta_2) + A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1(\theta_4 + \theta_3) + A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2(\theta_4 + \theta_3)) \right. \\ & \left. - 7 \right] J_1 K_1 C_1 \\ & + \left[60(A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1^2 + A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1^2 + A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1^2 + A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2^2) - 1 \right] J_1^2 C_2 \\ & + \left[120(A_{54}A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1) - 1 \right] J_1^3 C_1 \left. \right\} \end{aligned}$$

Compte-tenu du coefficient $A_{53} = 0$ et d'après les conditions (3), (6), (7), et (8), on peut simplifier l'expression de l'erreur par pas, et la fonction que l'on aura à minimiser sera :

$$\begin{aligned} L = & \left| 5(A_{51}\theta_1^4 + A_{52}\theta_2^4 + A_{54}\theta_4^4) - 1 \right| + \left| 10\theta_4^2 - 60A_{52}A_{21}\theta_1(\theta_4^2 - \theta_2^2) - 6 \right| + \left| 5\theta_4 - 60A_{52}A_{21}\theta_1^2(\theta_4 - \theta_2) - 4 \right| + \\ & \left| 20(A_{52}A_{21}\theta_1^3 + A_{54}A_{41}\theta_1^3 + A_{54}A_{42}\theta_2^3 + A_{54}A_{43}\theta_3^3) - 1 \right| + \left| 60A_{54}(A_{42}A_{41}\theta_2\theta_1 + A_{43}A_{41}\theta_3\theta_1 + A_{43}A_{42}\theta_3\theta_2) \right. \\ & \left. - 3 \right| + \left| 5(\theta_4 + \theta_3) - 120A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1(\theta_3 - \theta_2) - 7 \right| + \left| \frac{5\theta_1}{2} - 60A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2(\theta_2 - \theta_1) - 1 \right| + \left| 120\alpha - 1 \right| \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0,004086912$, une grille de coefficients possibles est :

0.3				
0.5	$-\frac{25}{30}$			
0.6	0.32638536	-0.067259677		
0.8	0.30952382	-0.21428569	0.3	
	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{4,375}{9}$

La valeur de L pour ces coefficients est : 3,78.

Traçons les courbes à erreur constante, c'est-à-dire $L(\alpha) \times \frac{h^5}{120} = E$.

On obtient le tracé des courbes figure V-5.

On remarque que pour $\alpha = \frac{1}{120}$, E ne s'annule pas.

Pour un pas Δ donné, on obtiendra l'erreur par pas minimale pour le coefficient α défini par la condition (a) :

$$\alpha = -\frac{1}{(h\Delta)^4} - \frac{1}{2(h\Delta)^3} - \frac{1}{6(h\Delta)^2} - \frac{1}{24(h\Delta)}$$

Calcul du coût relatif.

L'erreur par pas de la méthode de rang 4 et d'ordre 4 est

$$\begin{aligned} & \frac{h^5}{120} \left\{ \left[5(A_{41}\theta_1^4 + A_{42}\theta_2^4 + A_{43}\theta_3^4) - 1 \right] C_4 + 6 \left[10 \left(\frac{\theta_3}{8} - A_{42}A_{21}\theta_2\theta_1(\theta_3 - \theta_2) \right) - 1 \right] L_1 C_1 \right. \\ & + 4 \left[15 \left(\frac{\theta_1}{8} + A_{43}A_{32}\theta_3\theta_2(\theta_2 - \theta_1) \right) - 1 \right] K_1 C_2 \\ & + \left[20 \left(\frac{\theta_1}{12} + A_{43}A_{32}\theta_2^2(\theta_2 - \theta_1) \right) - 1 \right] J_1 C_3 \\ & + \left[60A_{43}A_{32}A_{31}\theta_2\theta_1 - 3 \right] R + \left[5(\theta_3 + \theta_2) - 7 \right] J_1 K_1 C_1 \\ & \left. + \left[2.5\theta_1 - 1 \right] J_1^2 C_2 - J_1^3 C_1 \right\}. \end{aligned}$$

La grille de la méthode de rang 4 et d'ordre 4 employée est :

$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	1		
1	-1	1	
	0,375	0,375	0,125

Le rapport $\frac{\epsilon_{54}}{\epsilon_{44}}$ sera donc égal à $\frac{L}{7,59}$

Le coût relatif sera : $\frac{5}{4} \times \frac{3,78}{7,59} \times \frac{2,78}{6,06} \neq 0,29$

Il y a gain pour cette méthode.

Vérification expérimentale.

La vérification numérique a été faite pour $y' = -y + 1$.

Les résultats sont notés sur la figure V-6.

II - ETUDE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE D'ORDRE 2.

L'approximation vectorielle par une méthode de rang 5 est :

$$X_{i1} = X_i + h\theta_1 Z_i$$

$$X_{i2} = X_i + h\theta_2 Z_i + hA_{21}(Z_{i1} - Z_i)$$

$$X_{i3} = X_i + h\theta_3 Z_i + hA_{31}(Z_{i1} - Z_i) + hA_{32}(Z_{i2} - Z_i)$$

$$X_{i4} = X_i + h\theta_4 Z_i + hA_{41}(Z_{i1} - Z_i) + hA_{42}(Z_{i2} - Z_i) + hA_{43}(Z_{i3} - Z_i)$$

$$X_{i+1} = X_i + hZ_i + hA_{51}(Z_{i1} - Z_i) + hA_{52}(Z_{i2} - Z_i) + hA_{53}(Z_{i3} - Z_i) + hA_{54}(Z_{i4} - Z_i)$$

Etudions le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Portons l'équation $X' = AX$ dans le système récurrent :

$$\begin{aligned} X_{i1} &= (Id+hA\theta_1)X_i \\ X_{i2} &= (Id+hA\theta_2+h^2A^2A_{21}\theta_1)X_i \\ X_{i3} &= (Id+hA\theta_3+h^2A^2(A_{31}\theta_1+A_{32}\theta_2)+h^3A^3A_{32}A_{21}\theta_1)X_i \\ X_{i4} &= (Id+hA\theta_4+h^2A^2(A_{41}\theta_1+A_{42}\theta_2+A_{43}\theta_3)+h^3A^3(A_{42}A_{21}\theta_1+A_{43}A_{31}\theta_1+A_{43}A_{32}\theta_2) \\ &\quad +h^4A^4A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1)X_i \\ X_{i+1} &= (Id+hA+h^2A^2(A_{51}\theta_1+A_{52}\theta_2+A_{53}\theta_3+A_{54}\theta_4)+h^3A^3(A_{52}A_{21}\theta_1+A_{53}A_{31}\theta_1+ \\ &\quad A_{53}A_{32}\theta_2+A_{54}A_{41}\theta_1+A_{54}A_{42}\theta_2+A_{54}A_{43}\theta_3)+ \\ &\quad h^4A^4(A_{53}A_{32}A_{21}\theta_1+A_{54}A_{42}A_{21}\theta_1+A_{54}A_{43}A_{31}\theta_1+A_{54}A_{43}A_{32}\theta_2) \\ &\quad +h^5A^5A_{54}A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1)X_i. \end{aligned}$$

D'après les conditions imposées par l'obtention de l'ordre 4, le système récurrent devient égal à :

$$\begin{aligned} X_{i1} &= (Id+hA + \frac{h^2A^2}{2} + \frac{h^3A^3}{6} + \frac{h^4A^4}{24} + \alpha h^5A^5)X_i \\ &= B(hA)X_i. \end{aligned}$$

Pour avoir stabilité, il suffit que les valeurs propres de $B(hA)$ soient en module inférieurs à 1. $r_1 = a_1 + ib_1$ étant valeur propre de A , la condition à remplir sera :

$$|1+h(a_1+ib_1) + \frac{h^2}{2}(a_1+ib_1)^2 + \frac{h^3}{6}(a_1+ib_1)^3 + \frac{h^4}{24}(a_1+ib_1)^4 + h^5\alpha(a_1+ib_1)^5| < 1$$

Prenons le carré de la norme sur \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} \{1+ha_1 + \frac{h^2(a_1^2-b_1^2)}{2} + \frac{h^3}{6}(a_1^3-3a_1b_1^2) + \frac{h^4}{24}(a_1^4-6a_1^2b_1^2+b_1^4) + \alpha h^5(a_1^5-10a_1^3b_1^2+5a_1b_1^4)\}^2 \\ + h^2\{b_1+ha_1b_1 + \frac{h^2}{6}(3a_1^2b_1-b_1^3) + \frac{h^3}{24}(4a_1^3b_1-4a_1b_1^3) + \alpha h^4(5a_1^4b_1-10a_1^2b_1^3+b_1^5)\}^2 < 1 \end{aligned}$$

Exemple numérique.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $-1+i$ et $-1-i$.

La condition à remplir devient :

$$(1-h+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{6}+4\alpha h^5)^2+h^2(1-h+\frac{h^2}{3}-4\alpha h^4)^2 < 1.$$

$$2-2h+\frac{4h^2}{3}-\frac{2h^3}{3}-h^4(8\alpha-\frac{1}{3})-h^5(-16\alpha+\frac{2}{9})-h^6(8\alpha-\frac{1}{9})-\frac{h^7}{36}+\frac{4\alpha h^8}{3}-32\alpha^2 h^9 > 0$$

Le plus grand rayon de stabilité est obtenu pour $\alpha^* = 0,00525$, et $\Lambda = 2,52$, où une majoration de l'erreur par pas est $L = 3,84$. La courbe de stabilité est tracée figure V-7.

Le rapport des erreurs $\frac{\epsilon_{54}}{\epsilon_{44}}$ est égal à $\frac{L}{7,59}$

Le coût de la méthode est :

$$\frac{5}{4} \times \frac{3,84}{7,59} \times \frac{1,93}{2,52} \neq 0,48$$

La méthode est rentable.

Les résultats ont été testés pour $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x(0) = y(0) = 1$ qui a pour solution

$$x = (\cos t - \sin t)e^{-t} \text{ et } y = \cos t e^{-t}.$$

Les résultats sont portés figure V-7.

III - ETUDE DE 2 EQUATIONS NON LINEAIRES.

On a pris la détermination des coefficients faite au paragraphe I

$$\underline{y' = -y^2, y(0) = 1.}$$

On obtient la courbe de stabilité tracée figure V-8.

Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\alpha = 0,00225$, soit $2,65 < \Lambda < 2,7$ et $L = 4,276$.

Pour cette formule, le coût est $\frac{5}{4} \times \frac{4,276}{7,59} \times \frac{1,3}{2,7} \neq 0,33$

Il y a gain pour cette méthode.

$$\underline{y' = -2t y^2, y(0) = 1.}$$

On obtient la courbe de stabilité tracée figure V-9.

Le rayon de stabilité maximum est obtenu pour $\alpha = 0,0035$, soit $1,5 < \Lambda < 1,55$ et $L = 4,96$

Pour cette formule, le coût est : $\frac{5}{4} \cdot \frac{4,96}{7,59} \cdot \frac{1,05}{1,55} \neq 0,55$

Il y a gain pour cette formule.

CONCLUSION.

Traçons les tableaux des coûts obtenus :

Pour une équation différentielle linéaire $y' = -y$ ou $y' = -y+1$:

ordre rang	1	2	3	4
2	0.375			
3	0.23	0.16		
4	0.17	0.09	0.24	
5				0.29

Le système linéaire $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donne le tableau

ordre rang	1	2	3	4
2	0.5			
3	0.35	0.17		
4	0.35	0.16	0.31	
5				0.48

L'équation différentielle $y' = -y^2$ donne :

ordre rang	1	2	3	4
2	1.1			
3	0.55	0.26		
4	0.5	0.24	0.1	
5				0.33

Pour l'équation différentielle $y' = -2t y^2$, on a obtenu :

ordre rang	1	2	3	4
2	0.5			
3	0.61	0.42		
4	0.82	0.32	0.28	
5				0.55

On s'aperçoit que les coûts ne sont pas homogènes. L'équation différentielle linéaire $y' = -y$ donne les meilleurs résultats, car on a trouvé la meilleure méthode de rang et d'ordre donné. Il en est de même du système différentiel considéré, où les coûts les plus intéressants sont obtenus par les formules de rang 4 et 3 et d'ordre 2. Quant aux 2 équations différentielles non linéaires, on a déterminé empiriquement les coefficients : pour $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \beta, \gamma, \mu, \dots, \epsilon$ donnés, on a trouvé le coefficient α donnant le plus grand rayon de stabilité pour $\Lambda - \delta\Lambda$ et la zone d'instabilité pour $\Lambda + \delta\Lambda$ soit très net a présidé au choix de ces équations.

Par les résultats numériques obtenus, on voit que les méthodes de rang élevé et d'ordre faible P sont aussi précises que les méthode de rang et d'ordre p. Une méthode de rang 4 et d'ordre 2 intègre avec une meilleure précision que la méthode de rang 2 et d'ordre 2 ; c'est une des raisons qui nous a incité à comparer l'erreur par pas des méthodes pour un même pas d'intégration.

On n'a donc pas trouvé une seule classe de méthodes ayant meilleure stabilité ; mais pour chaque exemple, on a déterminé des formules de Runge-Kutta dont les rayons de stabilité sont supérieurs à celui des méthodes de même ordre, pour des coûts comparables sinon avantageux.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] CESCHINO-KUNTZMANN - 1963
Problèmes différentiels de conditions initiales - DUNOD.
- [2] RICHTUNYER - 1957
Difference Methods for Initial-Value Problems - Interscience Publis
- [3] HENRICI - 1962
Discrete variable Methods in Ordinary Differential equations - WILEY
- [4] DAHLQUIST - 1963
Stability questions for some numerical methods for ordinary differential equations
XV Proceedings of Symposia in Applied Mathematics PP. 147-158.
- [5] FRABOUL
Contribution a l'étude de la stabilité numérique des méthodes d'intégration des systèmes différentiels
Thèse - Nantes.
- [6] HAMMING - 1962
Numerical methods for Scientists and Engineers.
Mac Graw Hill pp. 183-222.
- [7] RALSTON - 1965
A first course in numerical analysis
Mac Graw Hill pp. 168-179 et 191-202.
- [8] MILNE - 1960
Stability of a numerical solution of differential equations
J. ACM-7 pp. 46-56.
- [9] GUILLOU-LAGO-LAURENT - 1960
Formule d'intégration à pas séparés à grand rayon de stabilité pour les équations différentielles
1^e Congrès de l'AFCALTI.

[10] JURY

Theory and application of the Z-Transform method
Wiley.

[11] JURY - 1962

A simplified stability criterion for linear discrete systems
IRE-Proceedings Vol 50 n°6 pp. 1493-1500

[12] FRABOUL - 1962

Un critère de stabilité pour l'intégration numérique des équations
différentielles
Chiffres pp. 55-63

[13] WILF - 1960

Maximally stable numerical integration
Journal Soc. Indust. in Applied Mathematics - Vol 8 pp. 537-540.

[14] COLLATZ - 1960

The numerical treatment of differential equations
Springer Verlag - Berlin

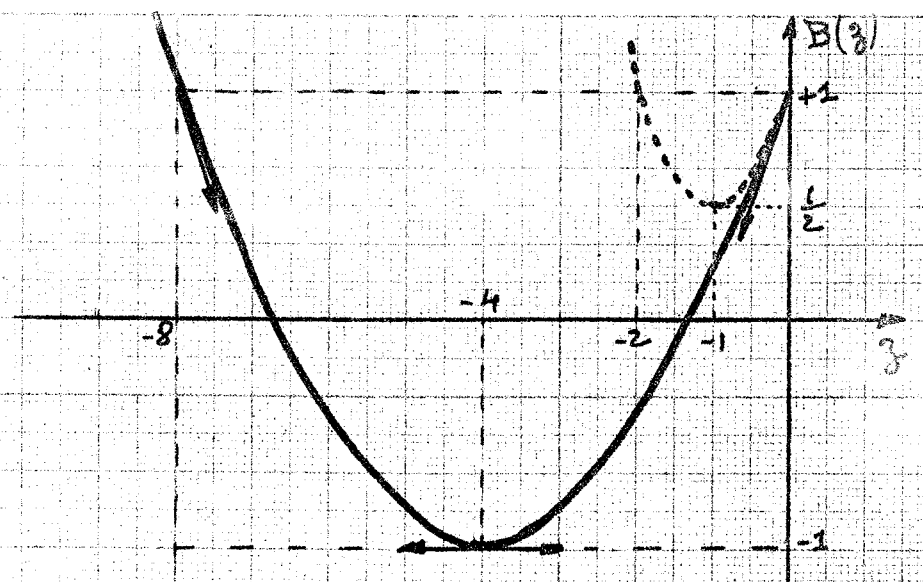
[15] MARTIN - PAULSON - SASHKIN - 1966

A general method of systematic interval computation for numerical
integration of initial-value problem.
Communications of ACM Vol 9 -n° 10.

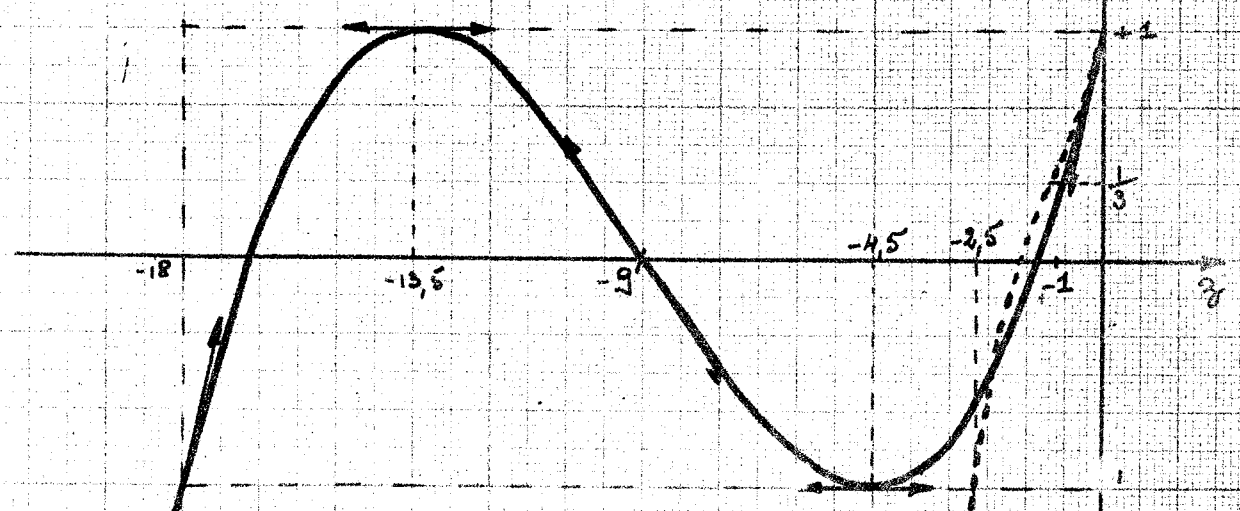
[16] LINIGER - 1960

Zur Stabilität der numerischen Integrationsmethoden für Differential-
gleichungen.
Thèse - Lausanne.

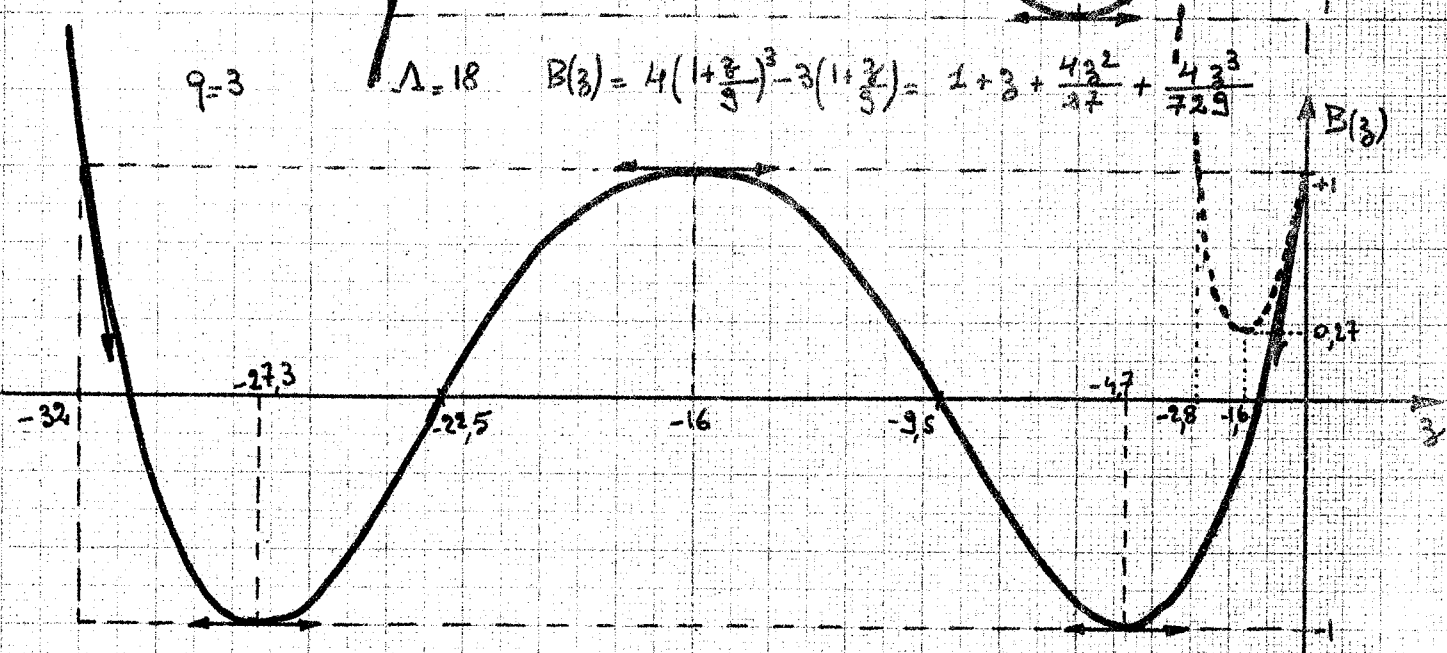
Figure I-1



$q=2 \quad \Lambda=8 \quad B(z) = 2\left(1 + \frac{z}{4}\right)^2 - 1 = 1 + z + \frac{z^2}{8}$



$q=3 \quad \Lambda=18 \quad B(z) = 4\left(1 + \frac{z}{9}\right)^3 - 3\left(1 + \frac{z}{9}\right) = 1 + z + \frac{4z^2}{27} + \frac{4z^3}{729}$



$q=4 \quad \Lambda=32 \quad B(z) = 8\left(1 + \frac{z}{16}\right)^4 - 8\left(1 + \frac{z}{16}\right)^2 + 1 = 1 + z + \frac{5z^2}{32} + \frac{z^3}{128} + \frac{z^4}{8192}$

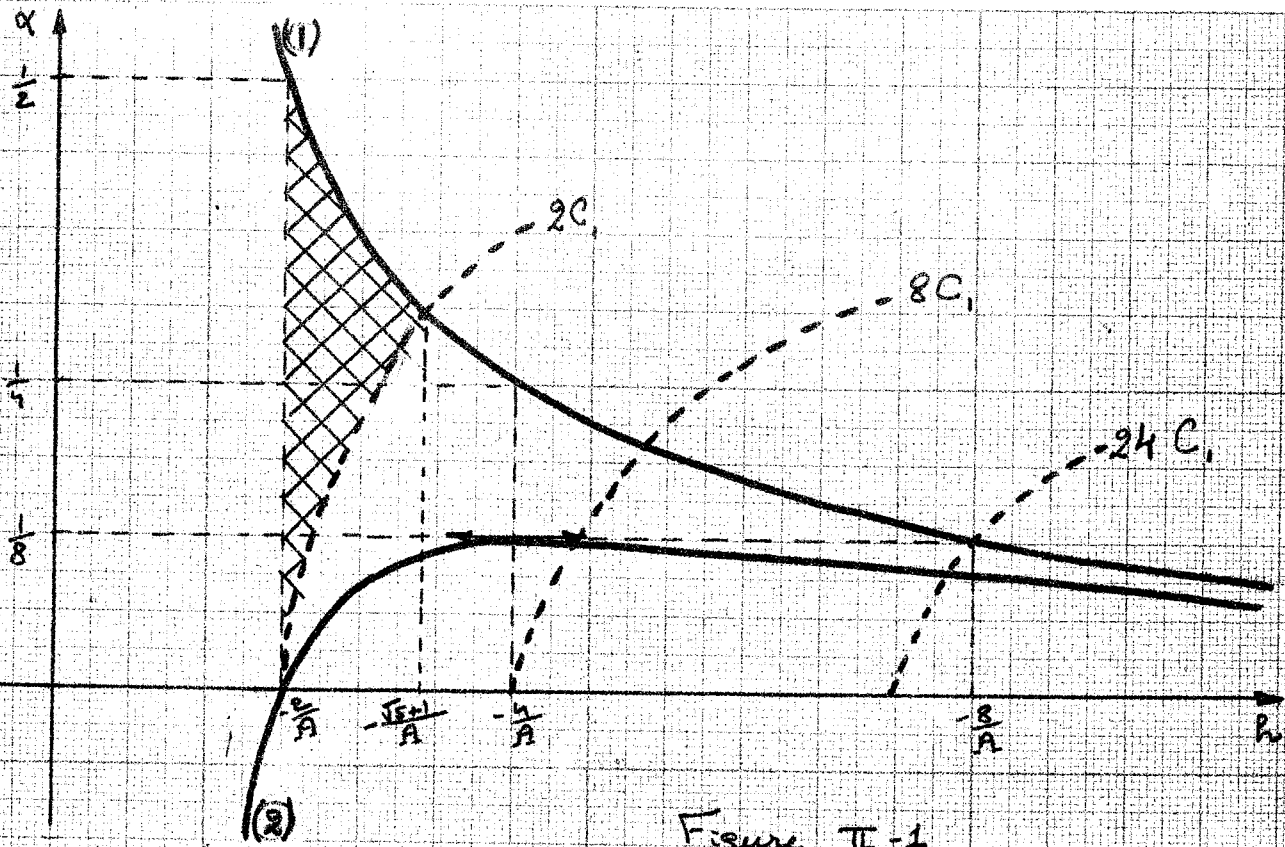


Figure II-1

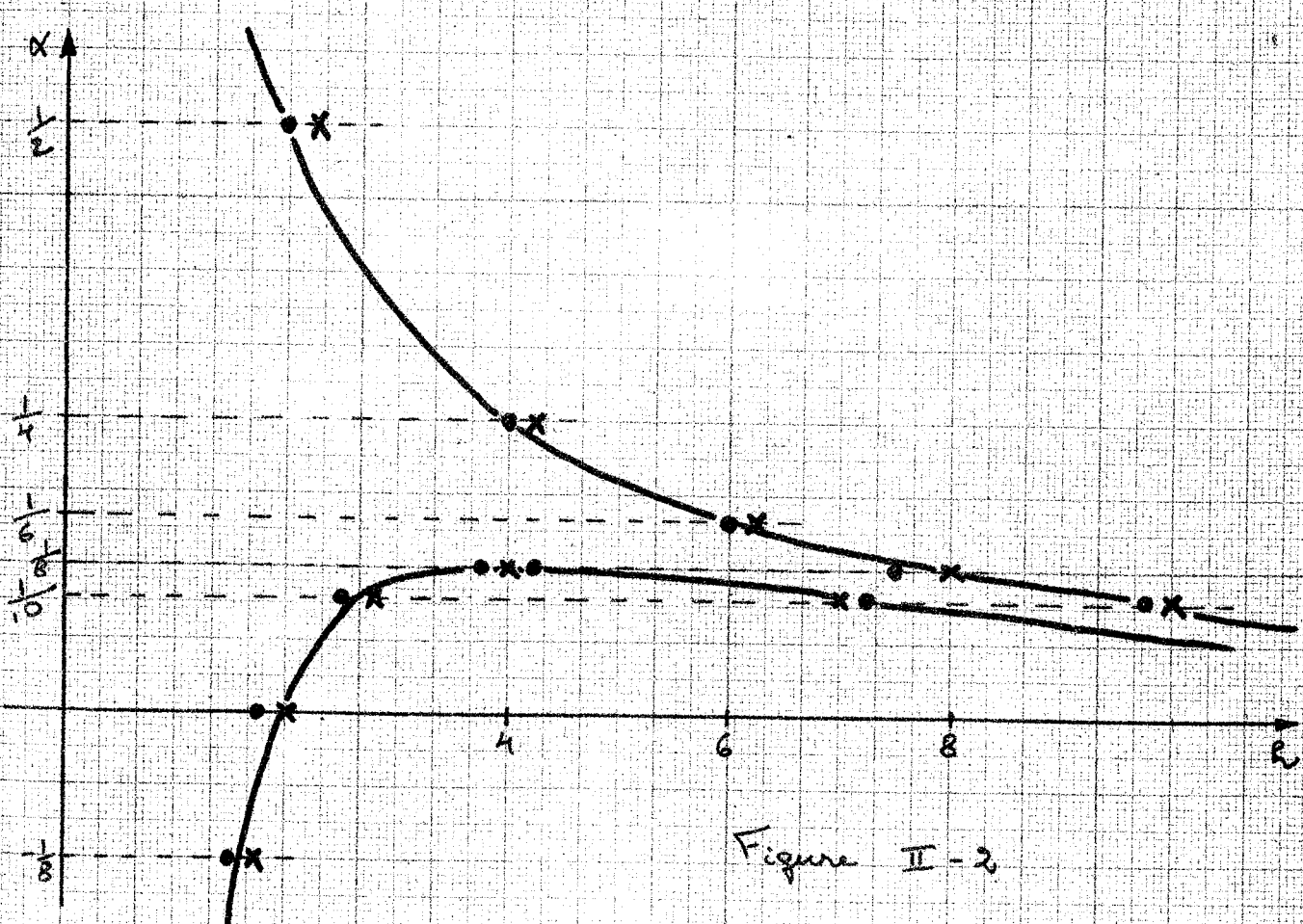


Figure II-2

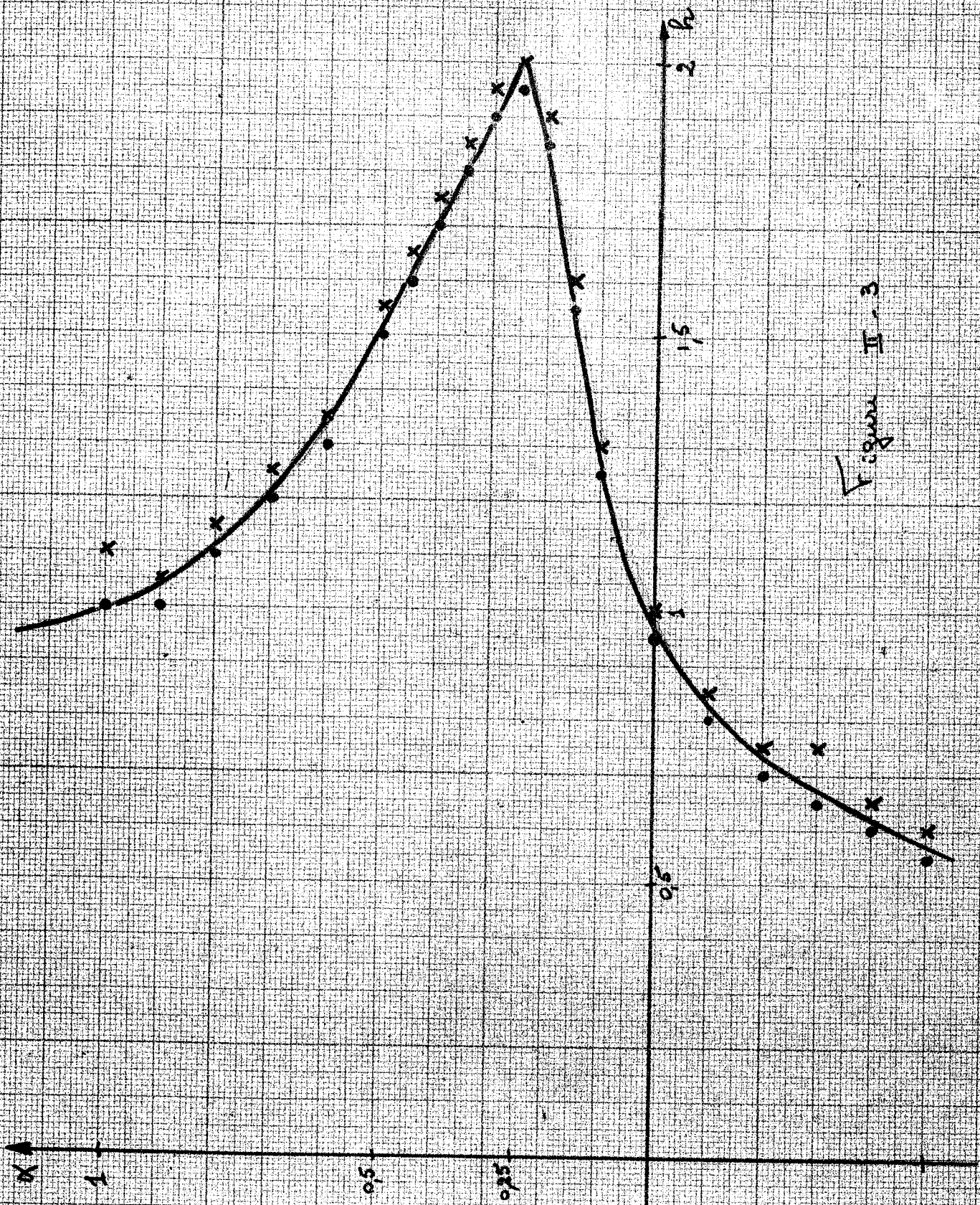


Figure II-3

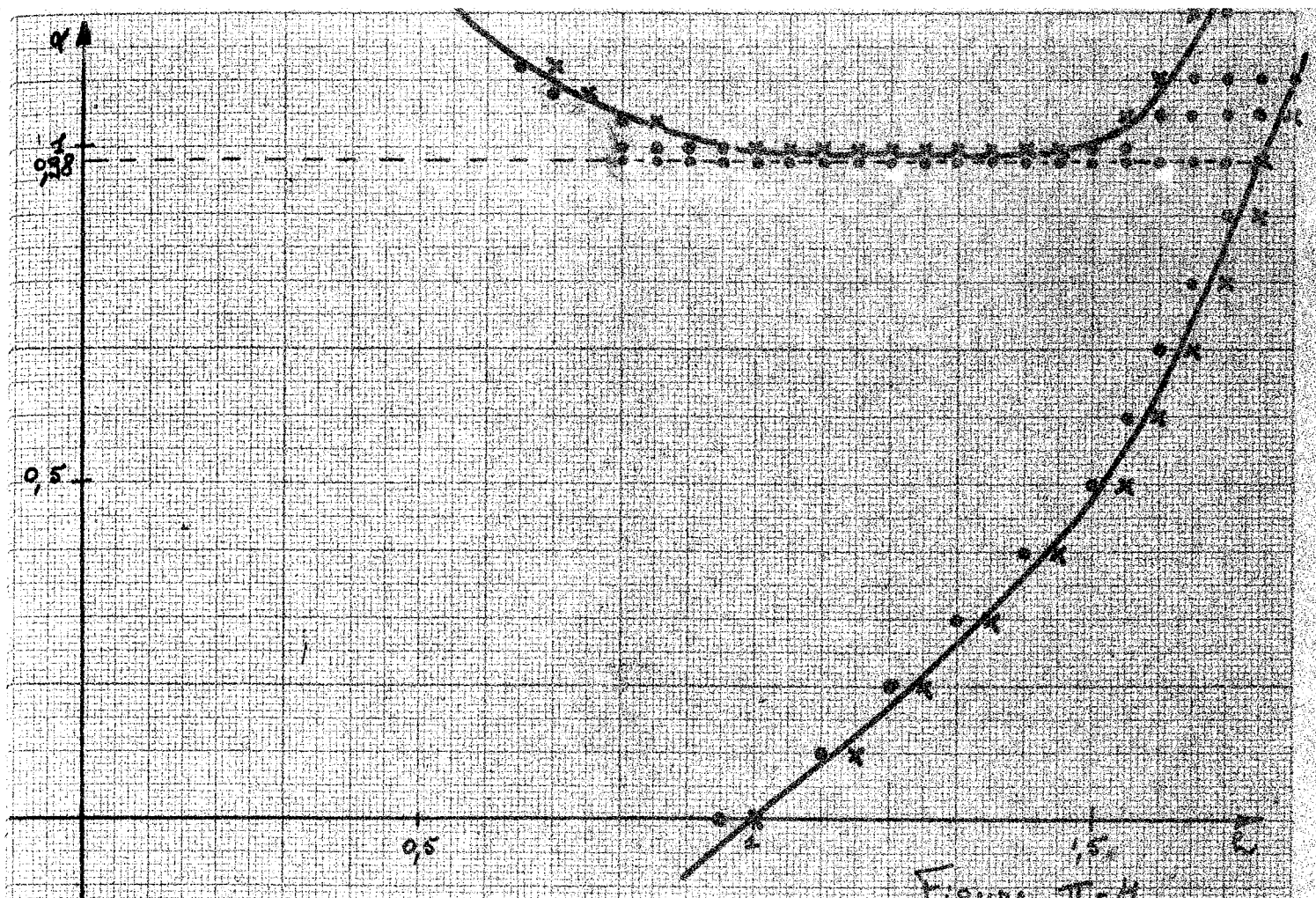


Figure II-4

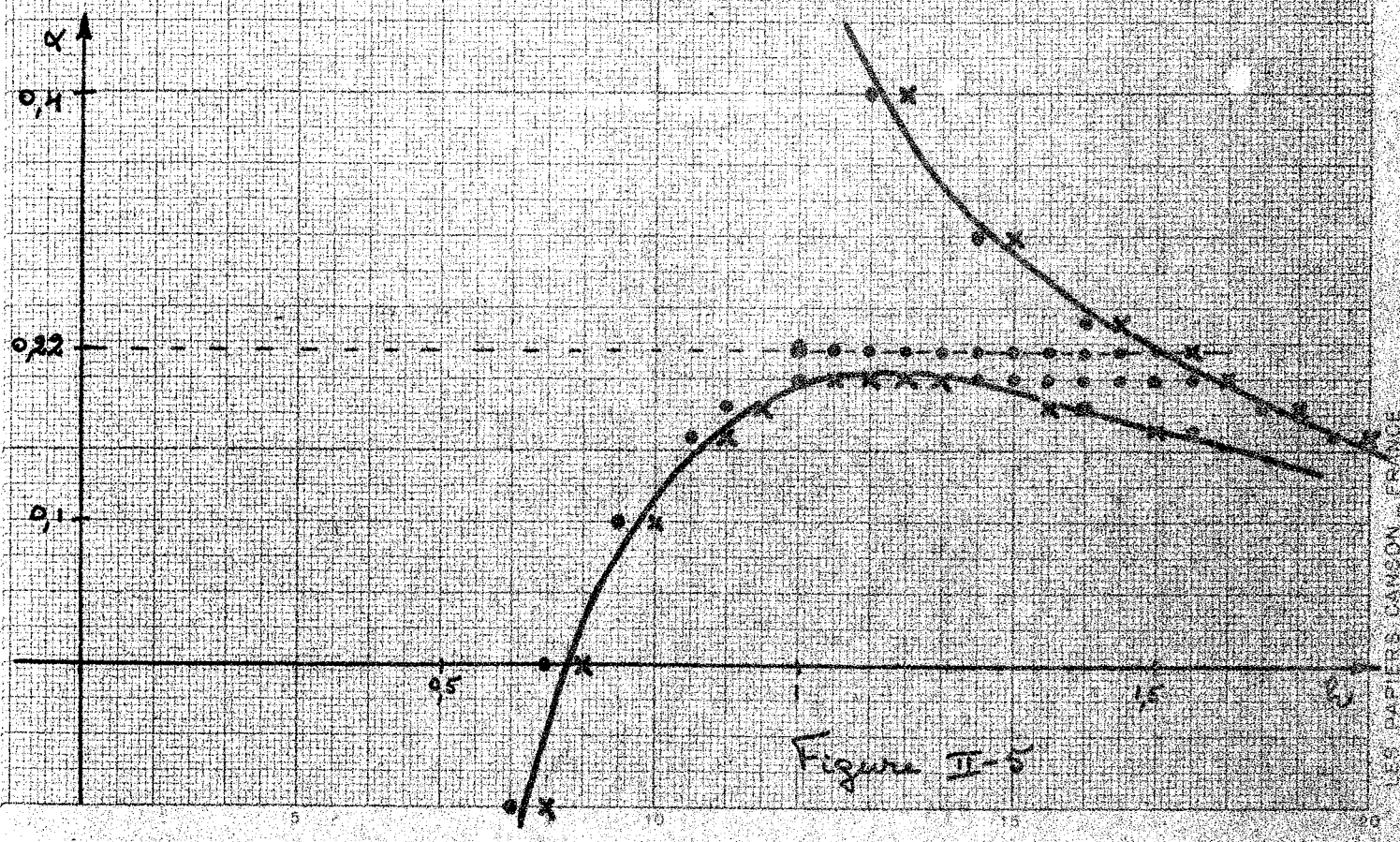


Figure II-5

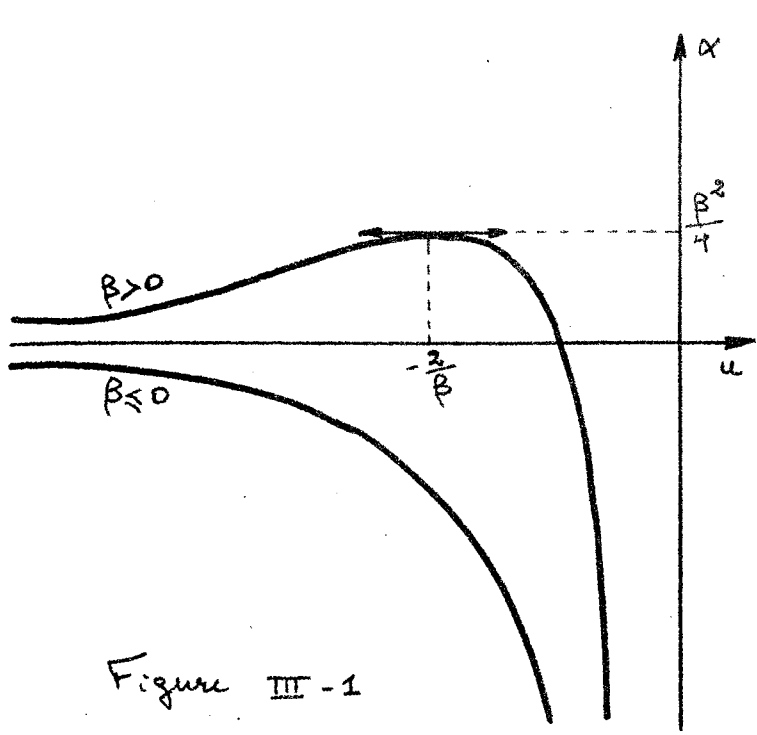


Figure III-1

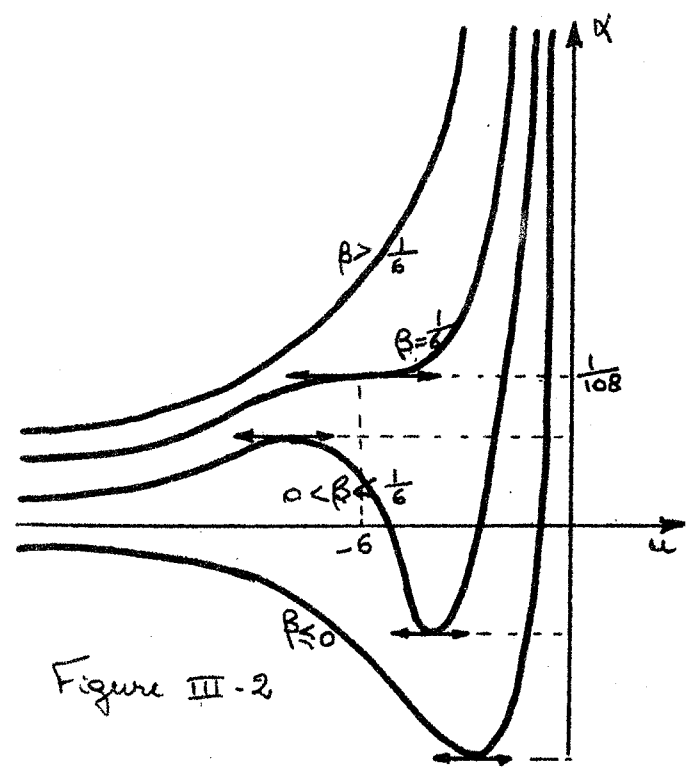


Figure III-2

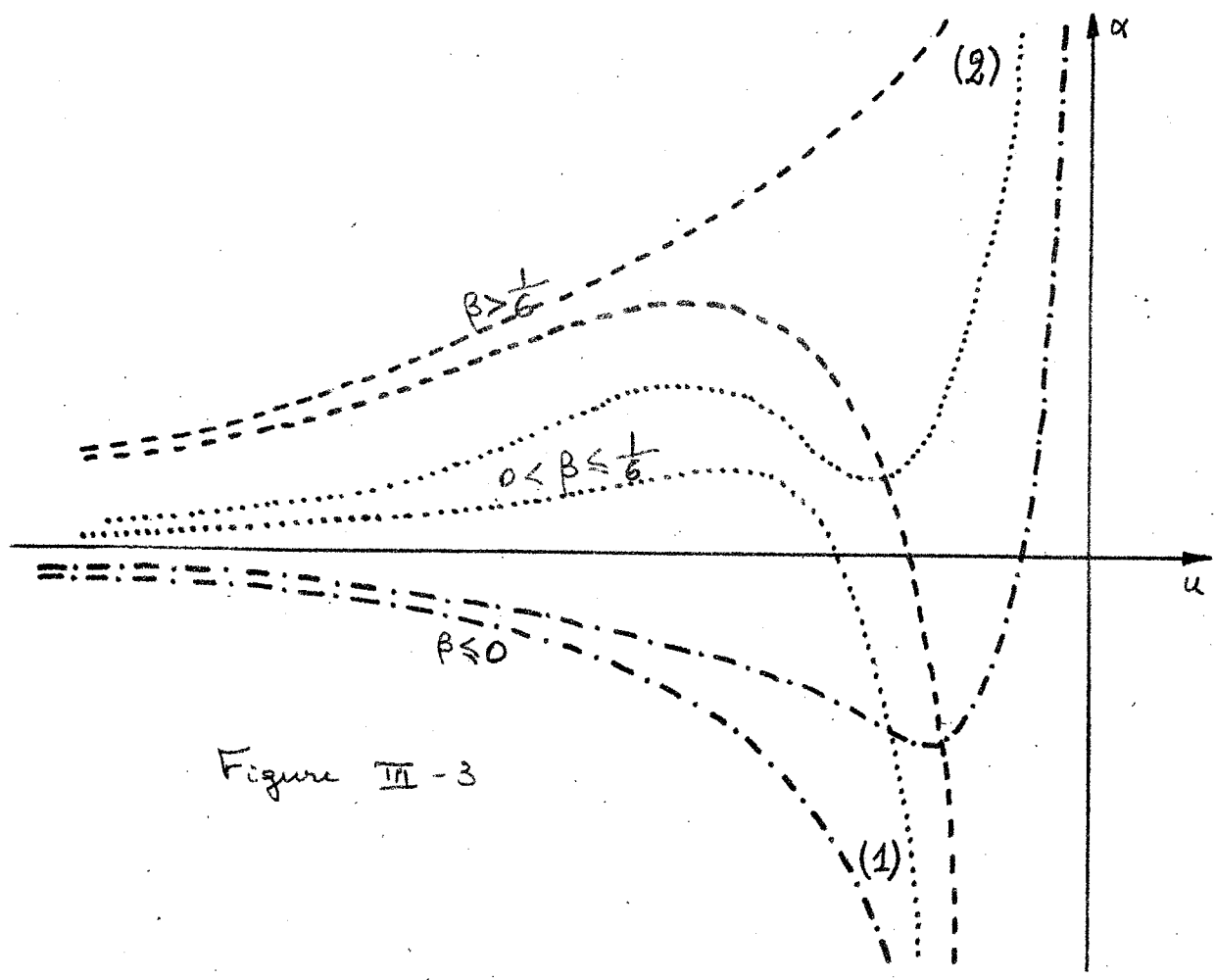


Figure III-3

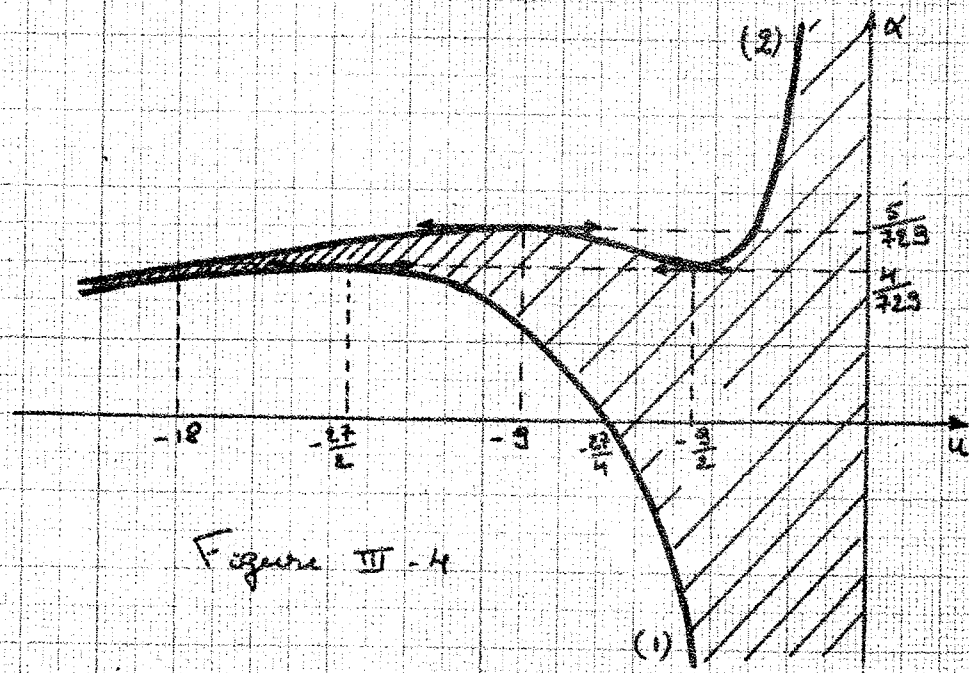


Figure III-4

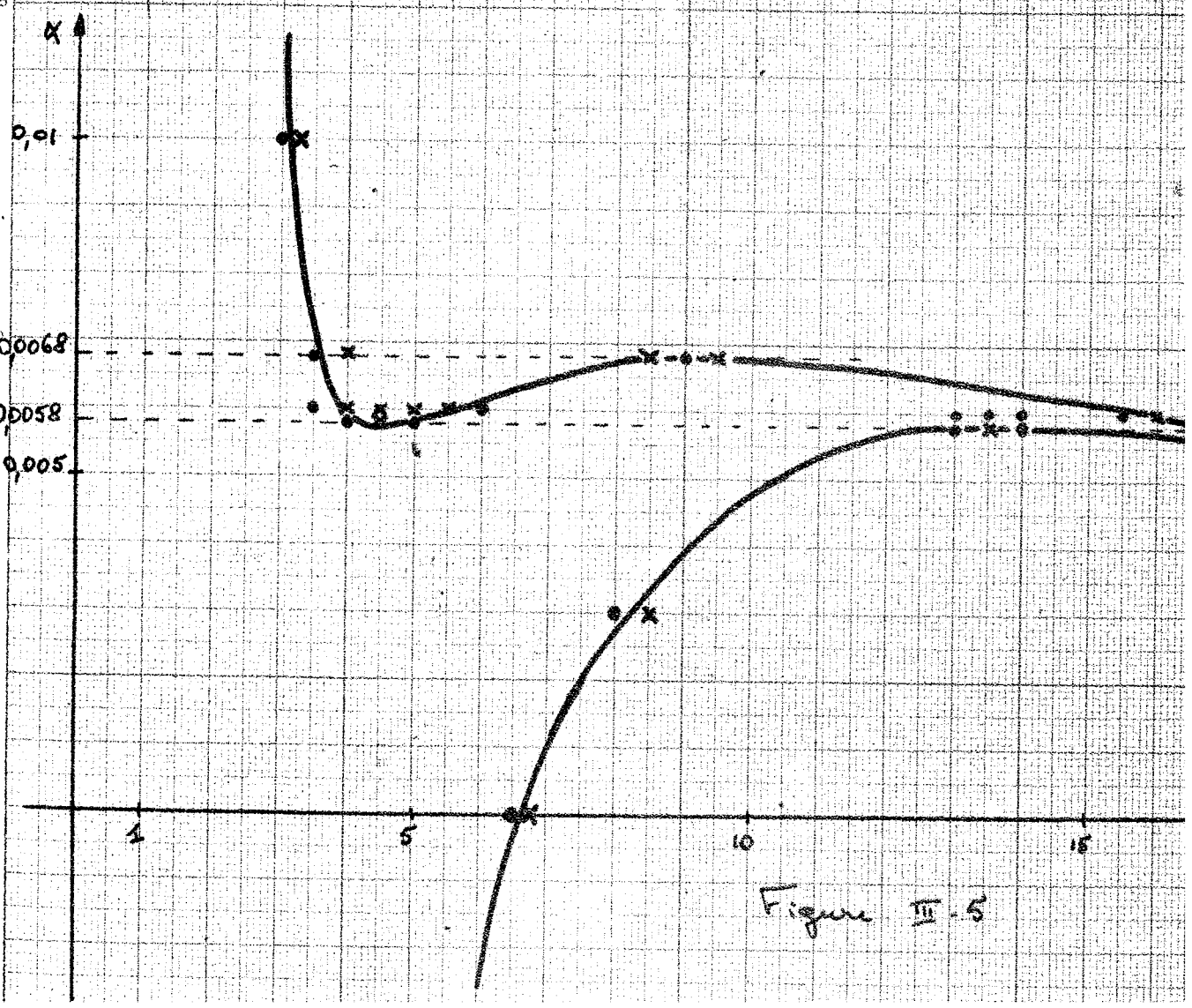
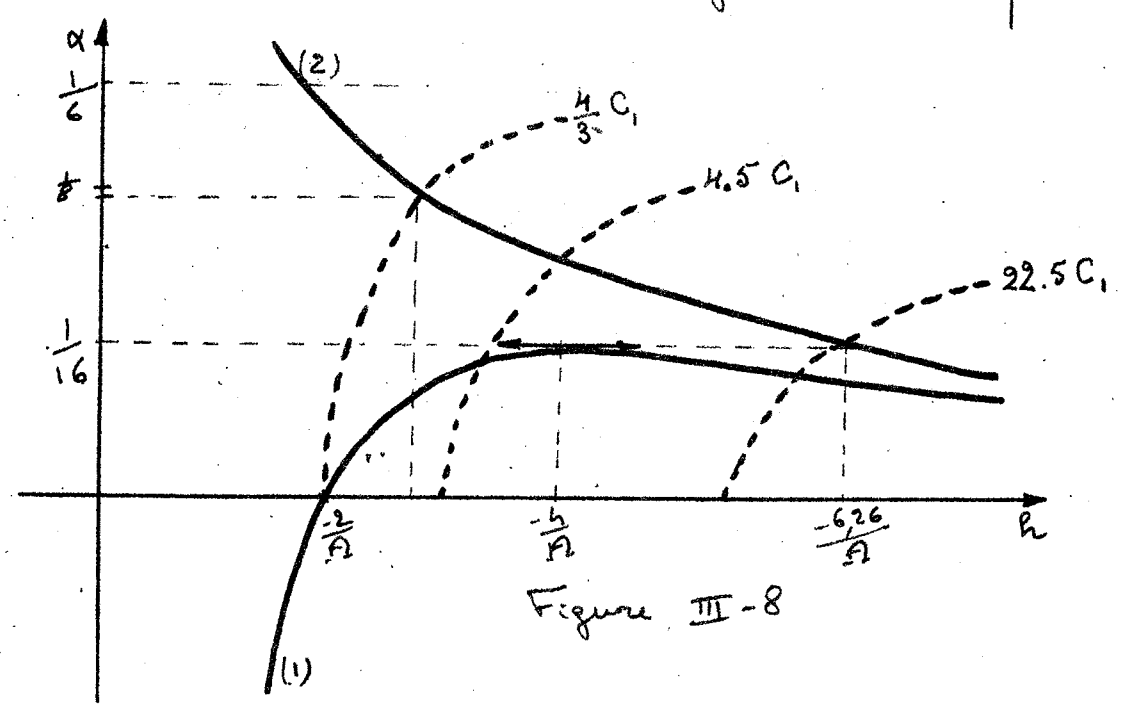
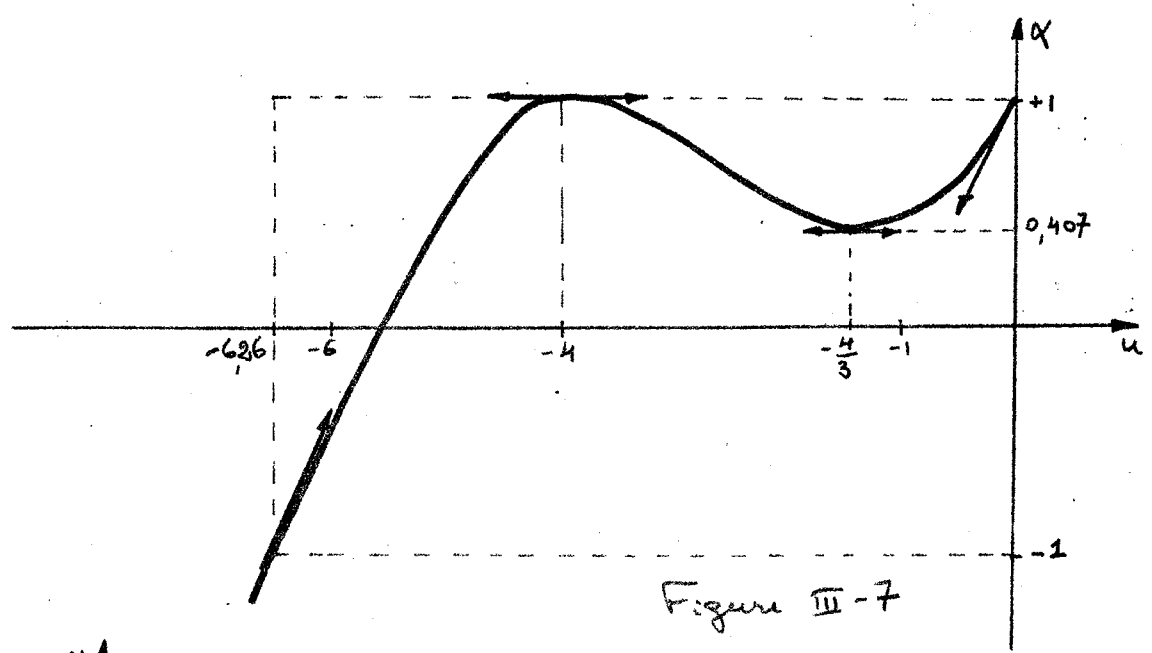
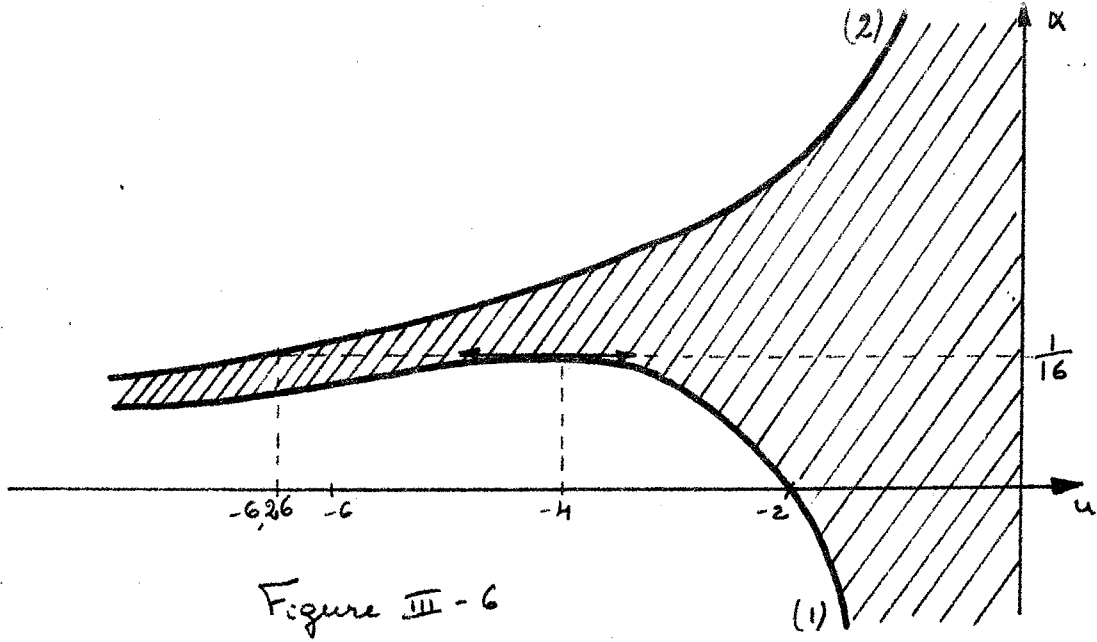


Figure III-5



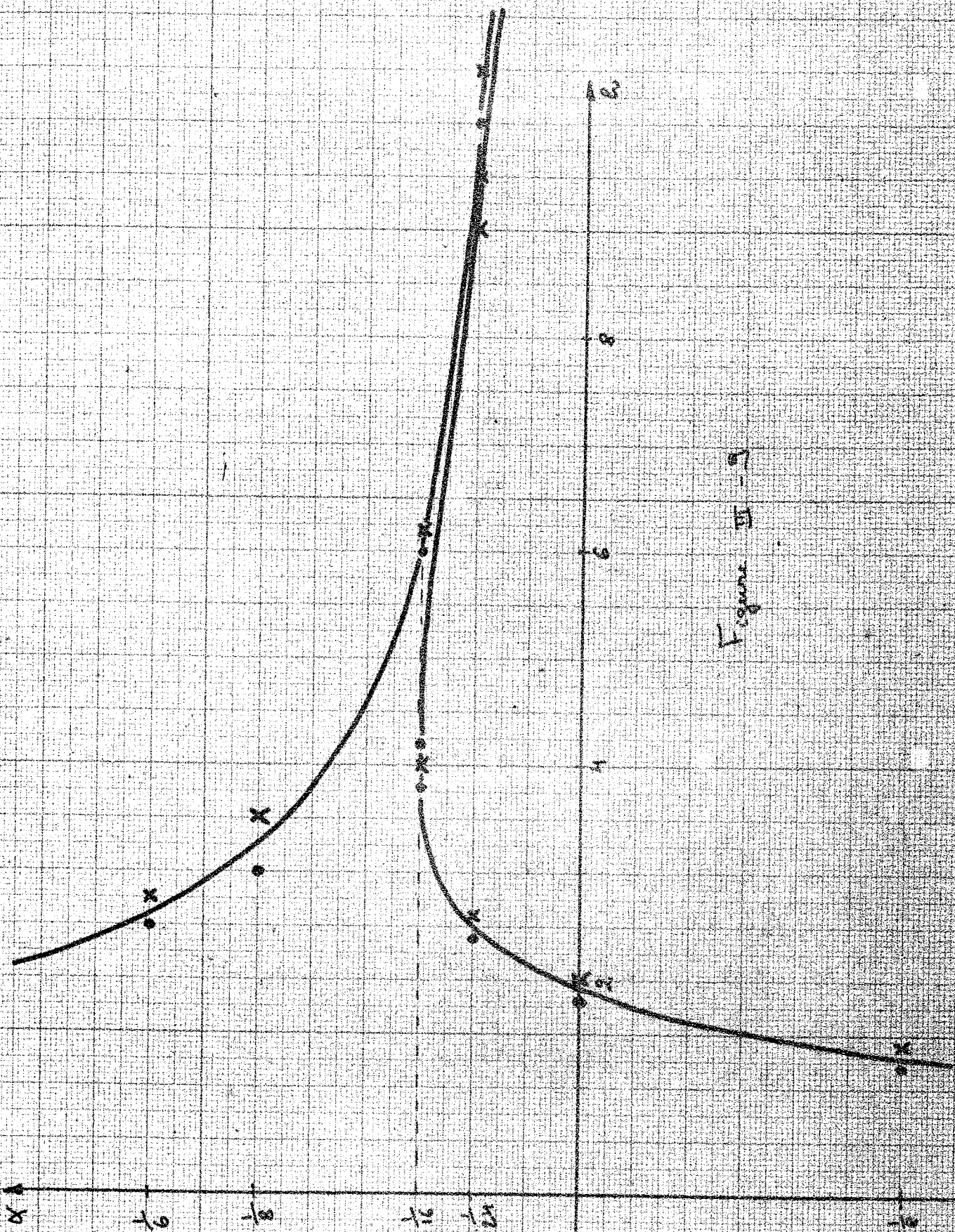


Figure III - 9

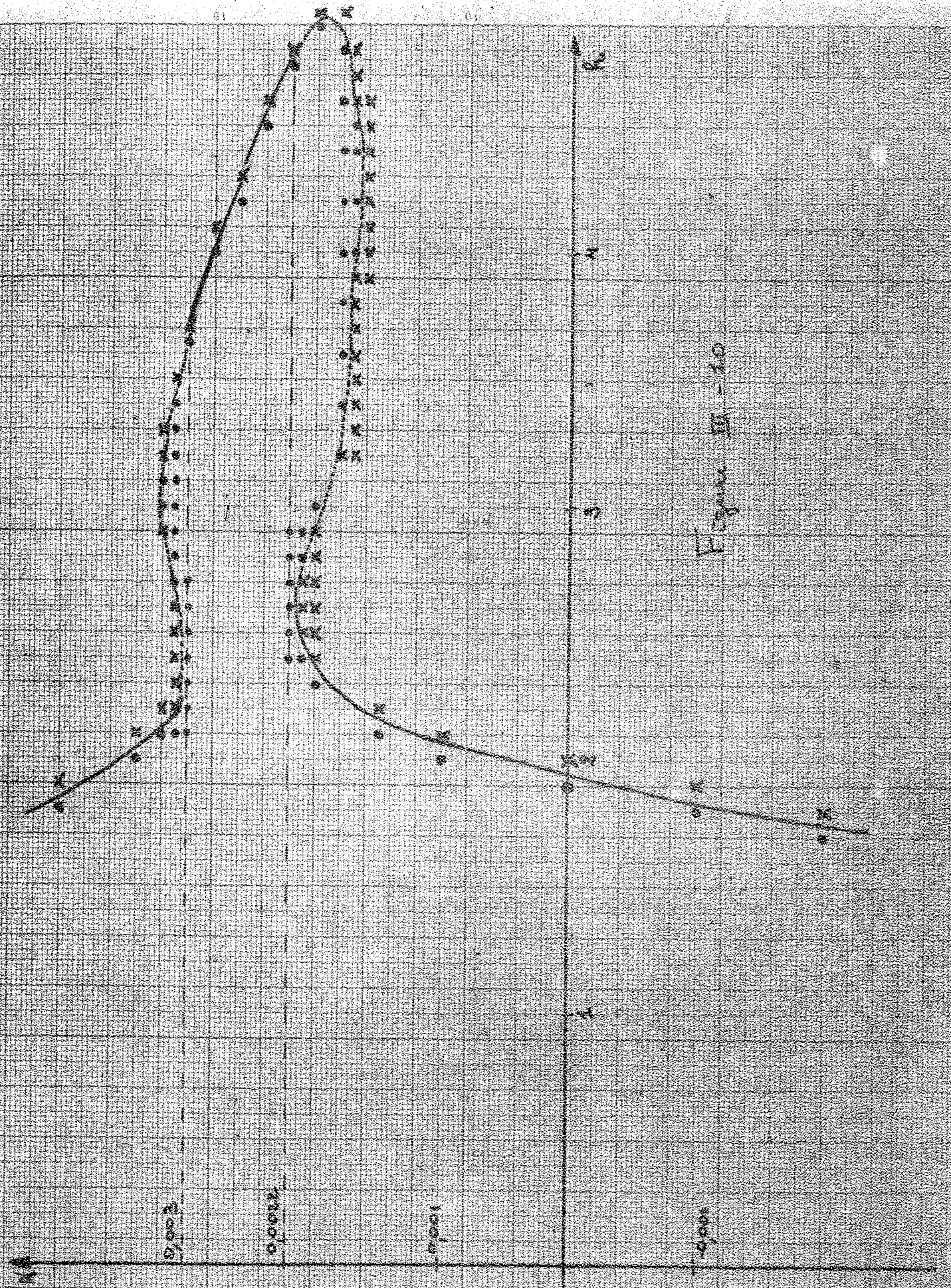


Figure II - 10

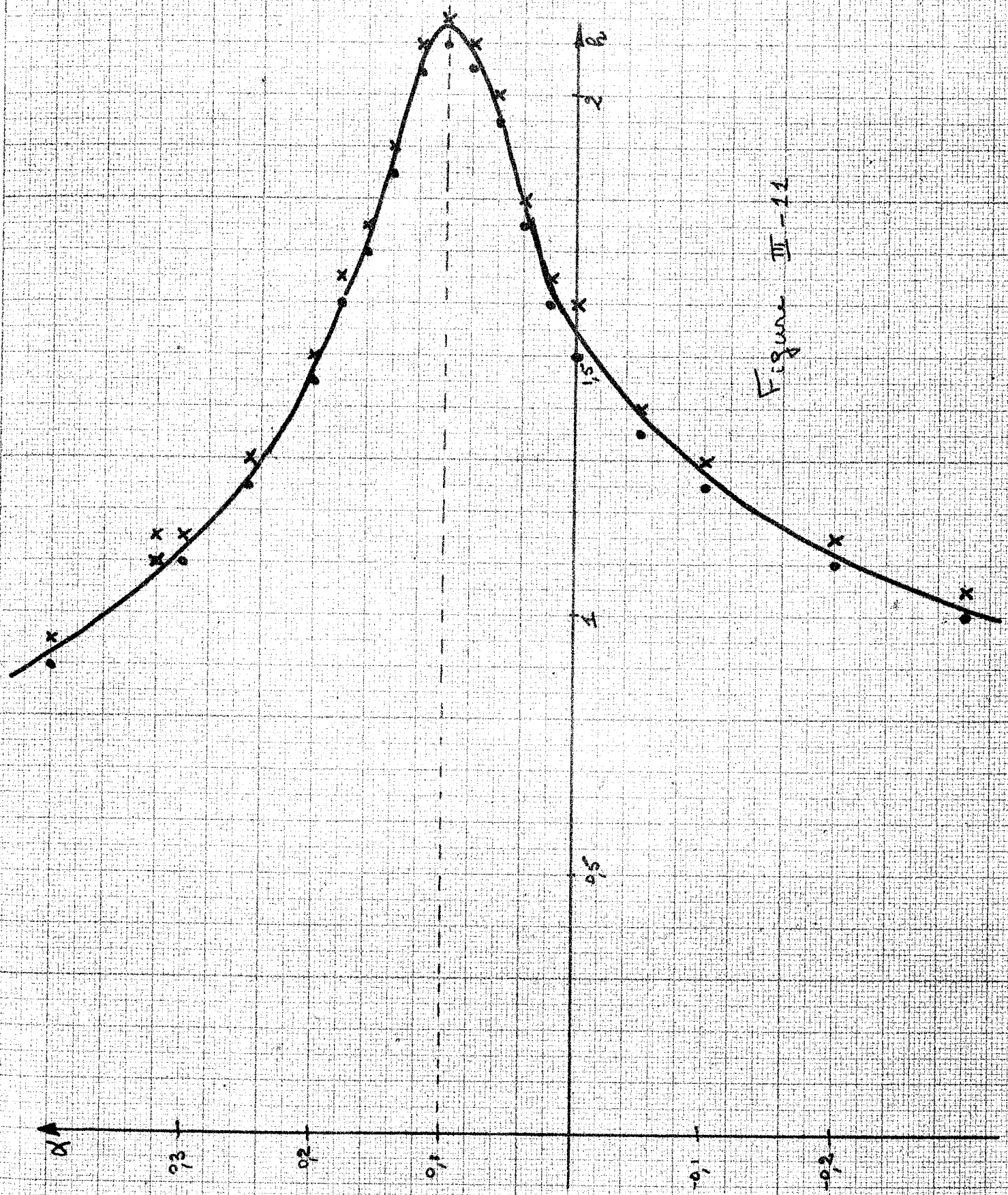
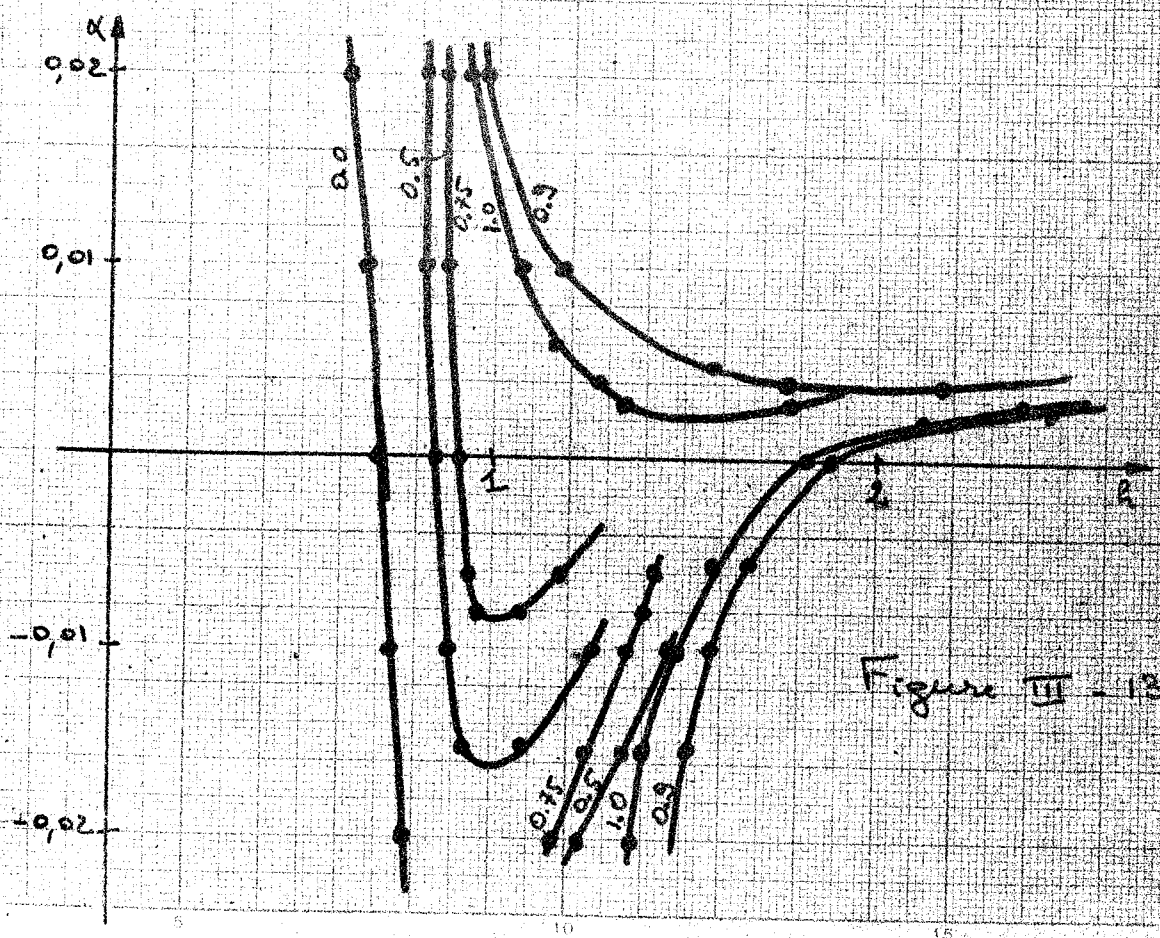
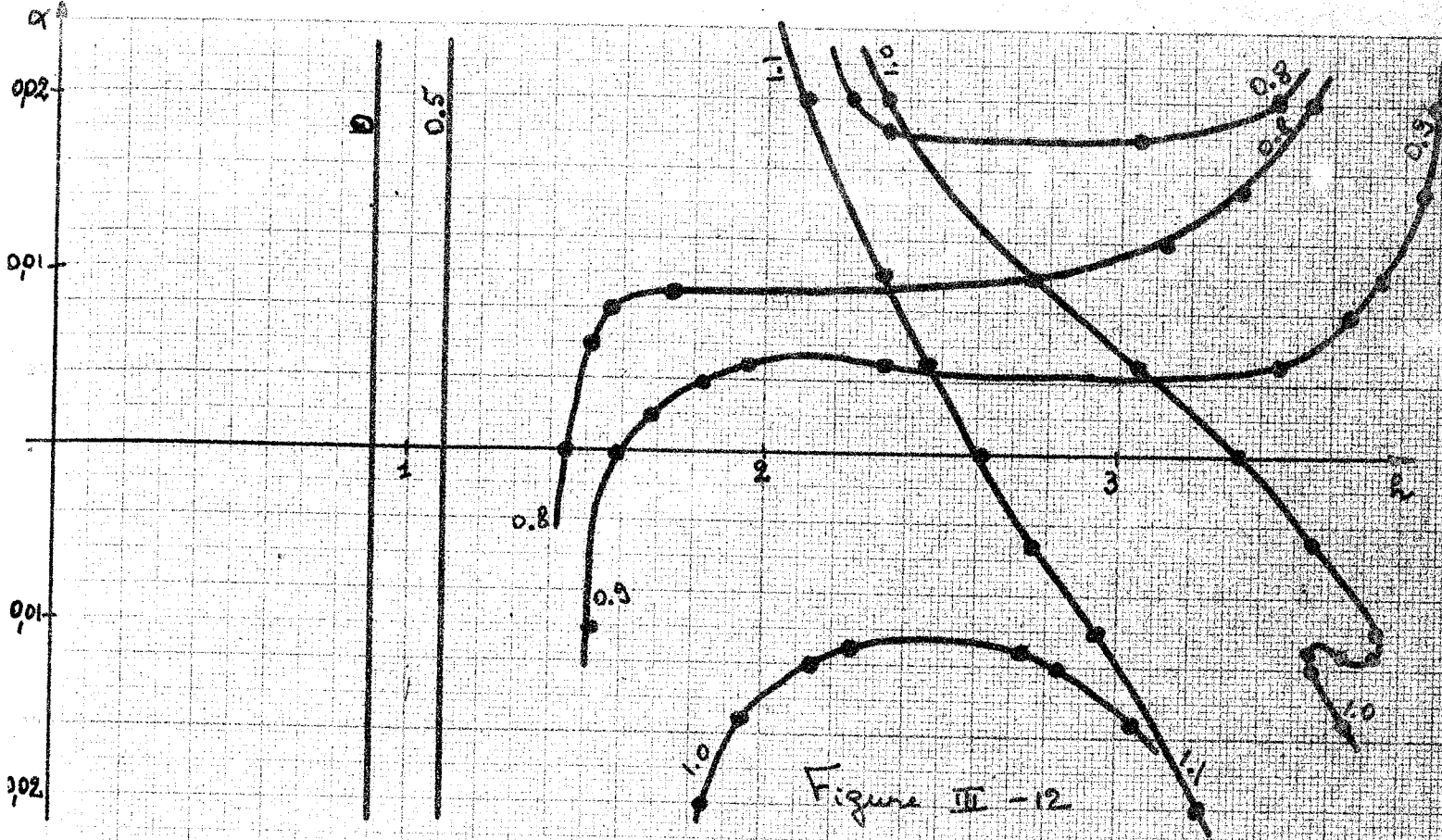
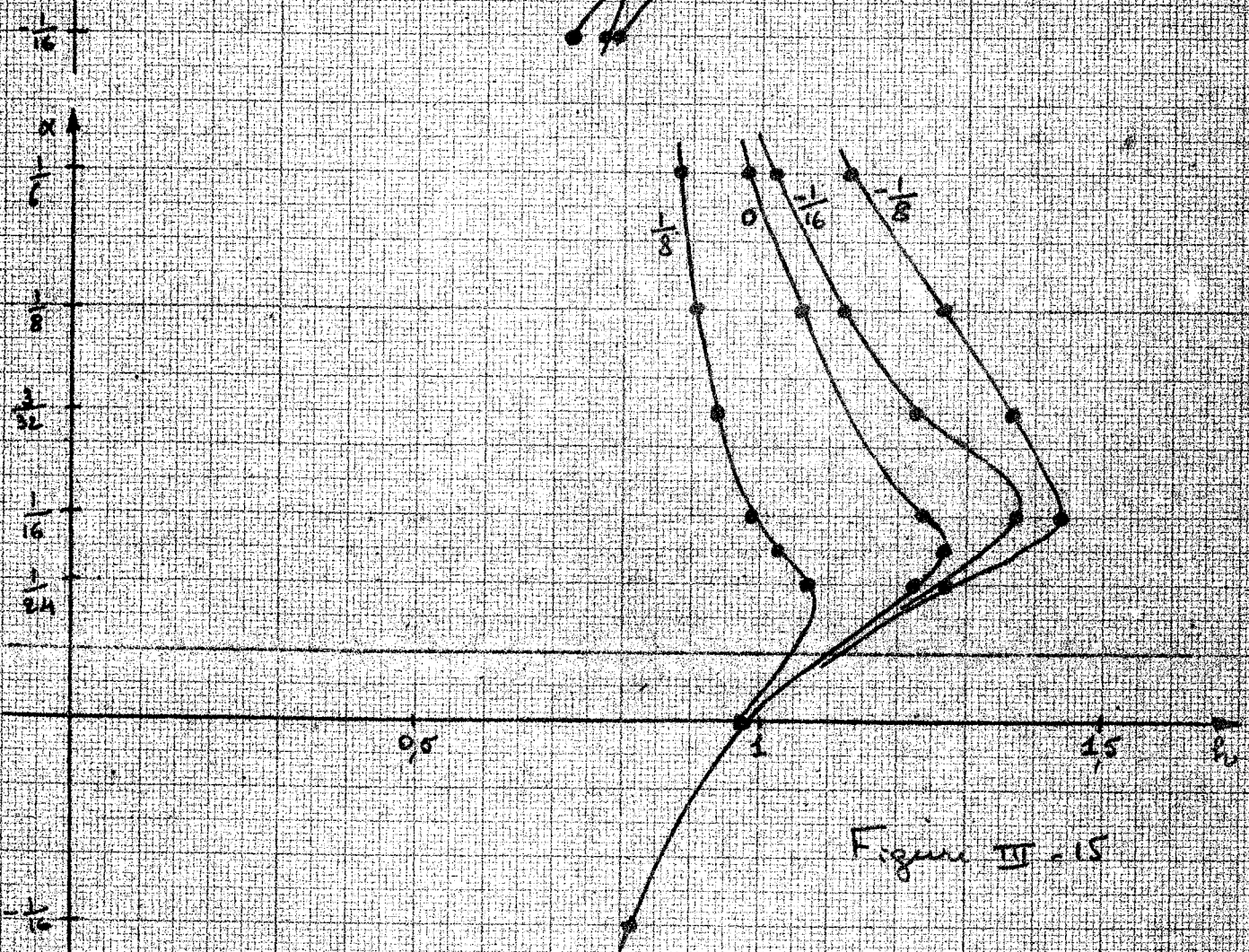
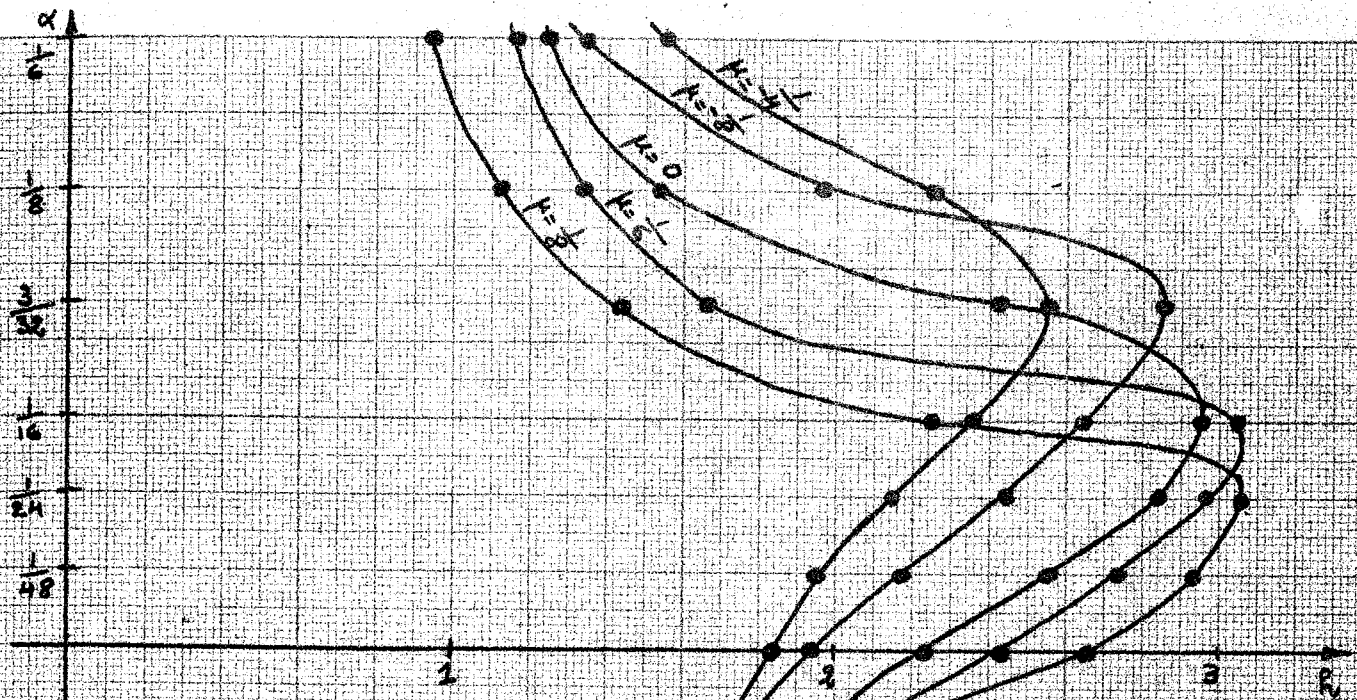


Figure III-11





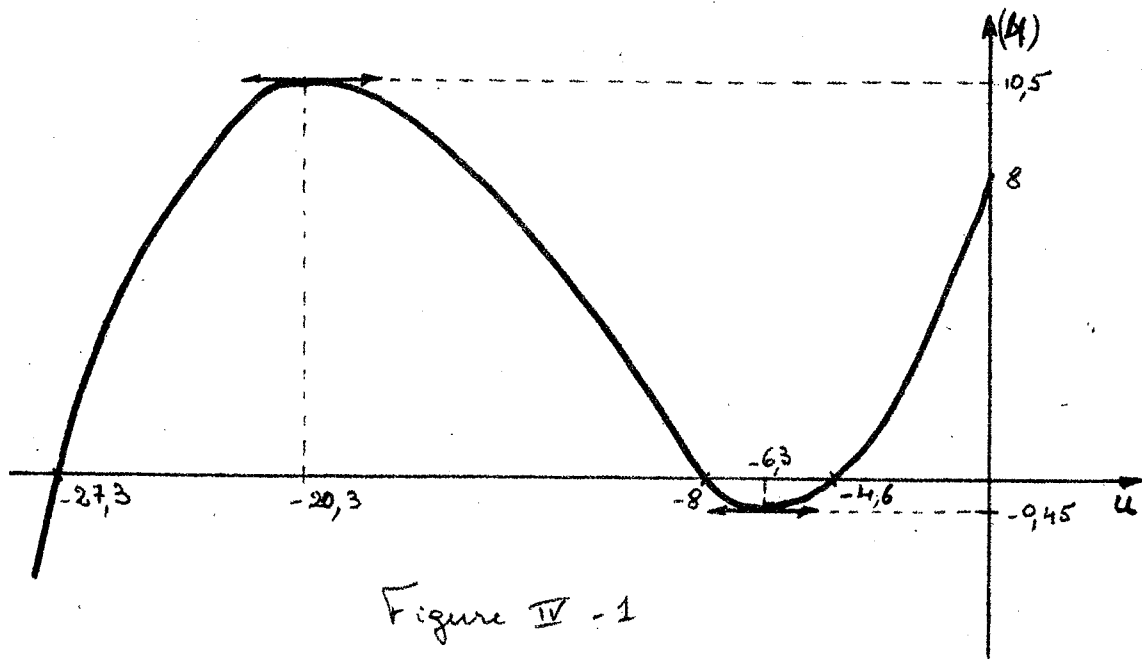
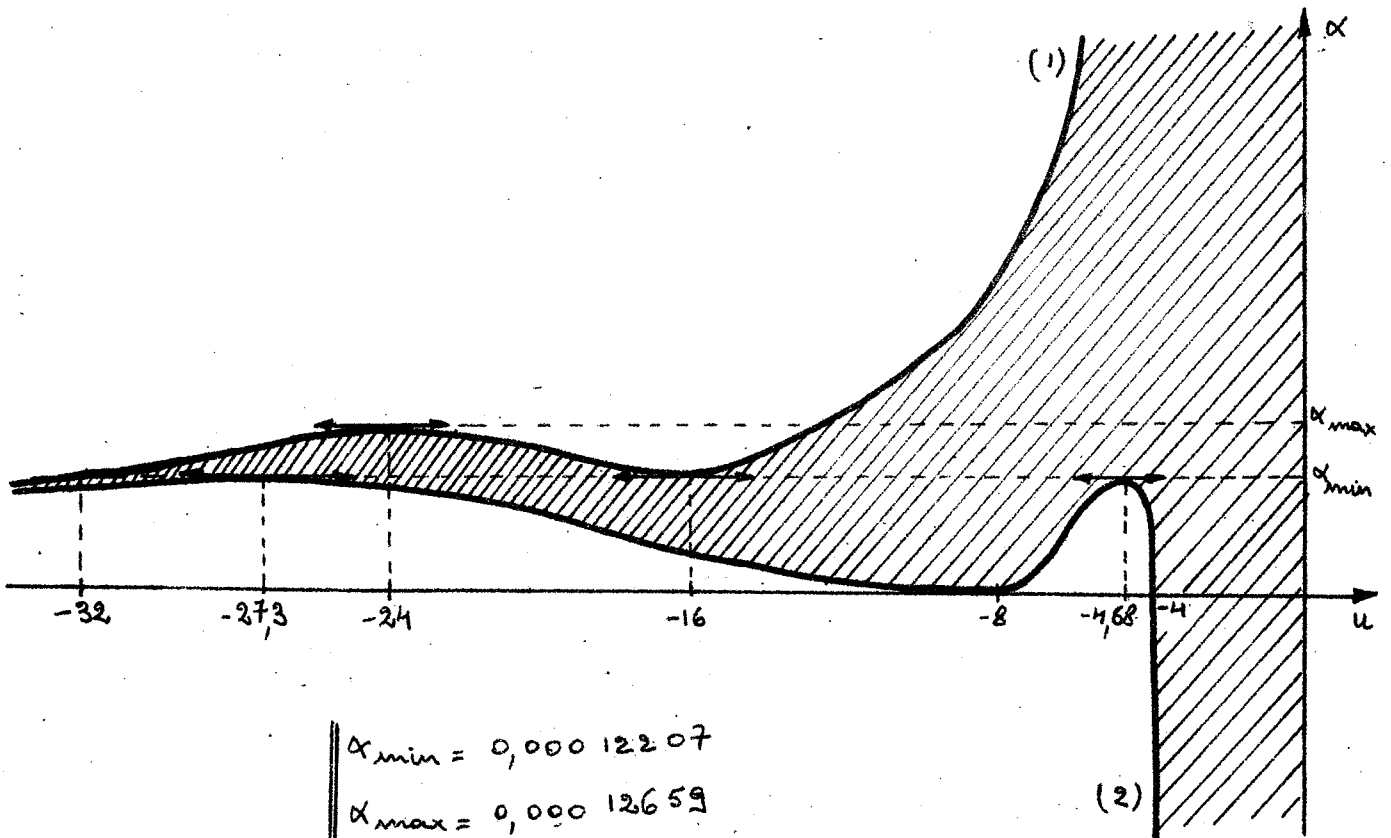


Figure IV - 1



$$\begin{aligned} \alpha_{min} &= 0,00012207 \\ \alpha_{max} &= 0,00012659 \end{aligned}$$

Figure IV - 2

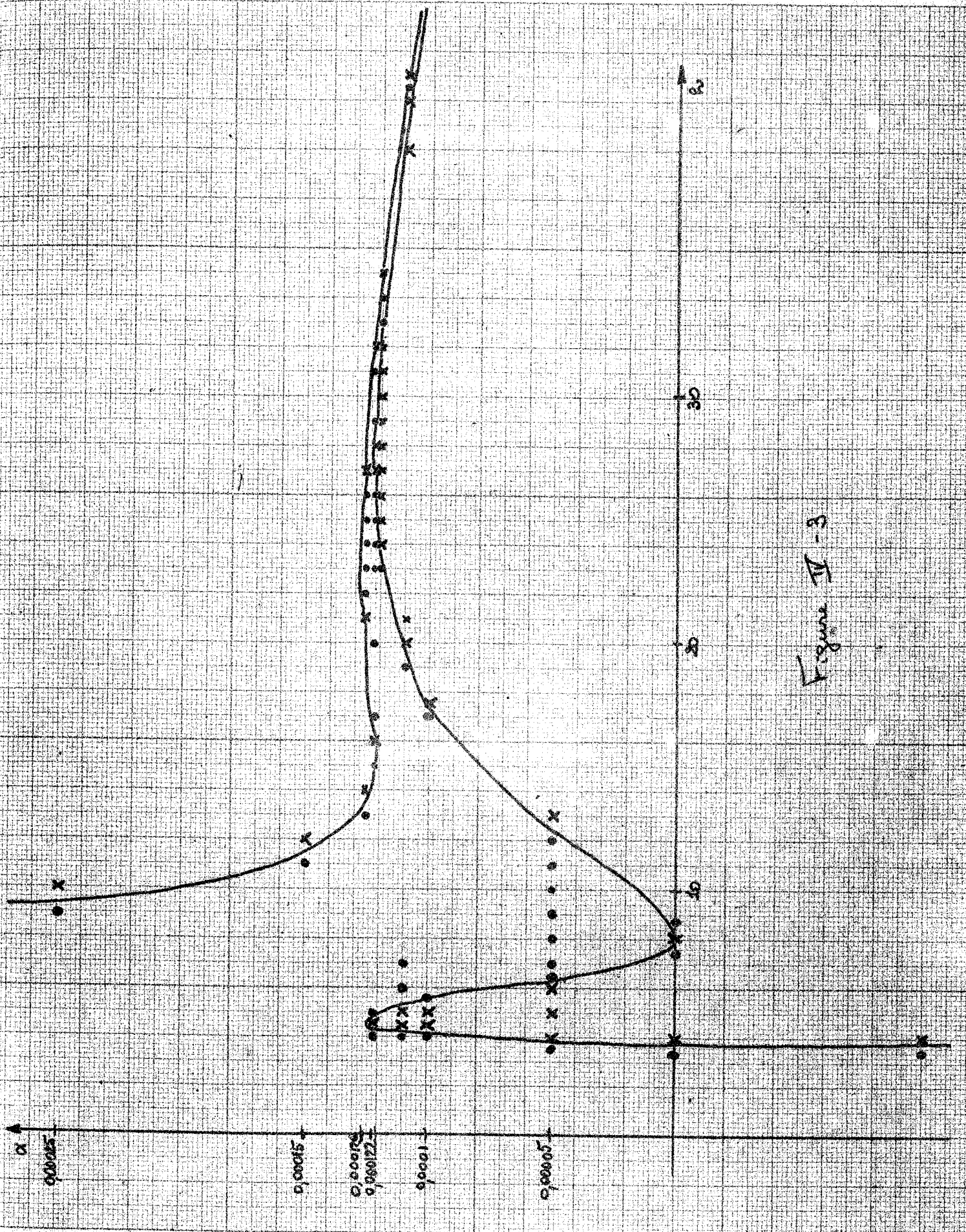
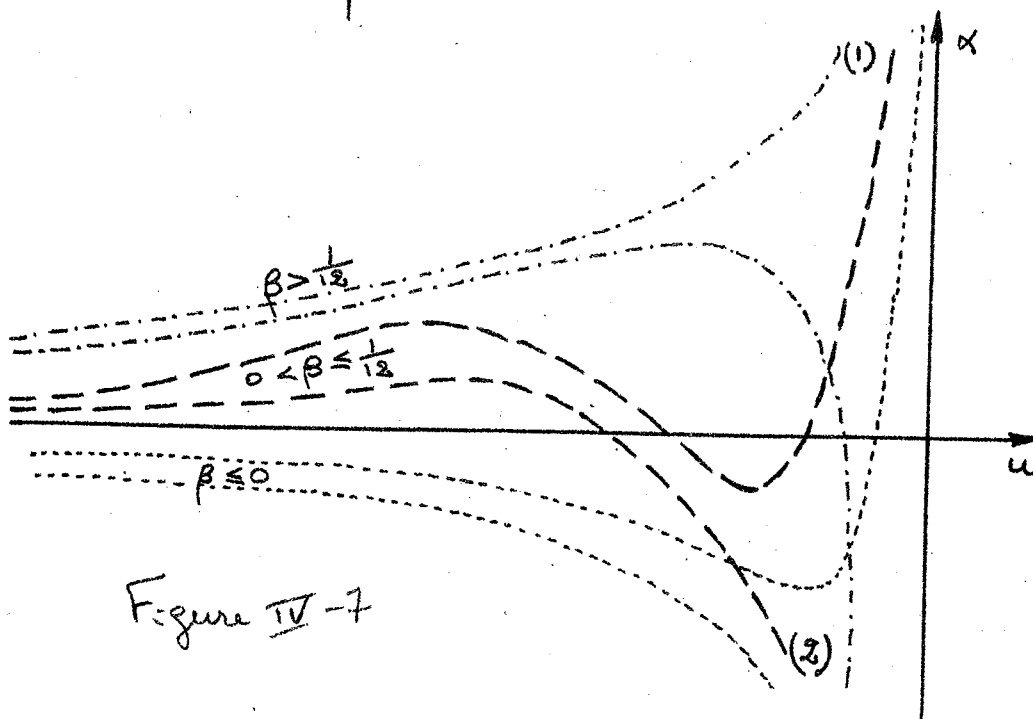
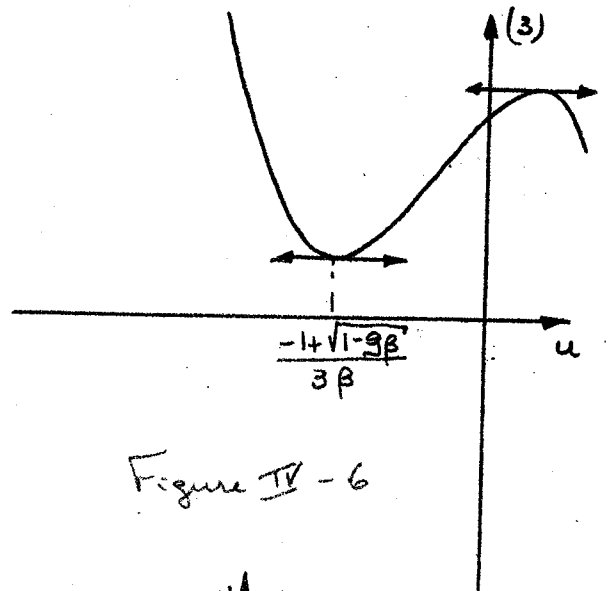
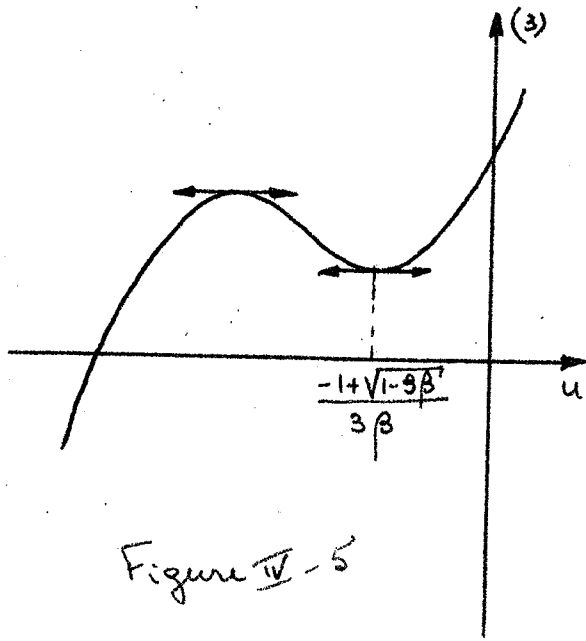
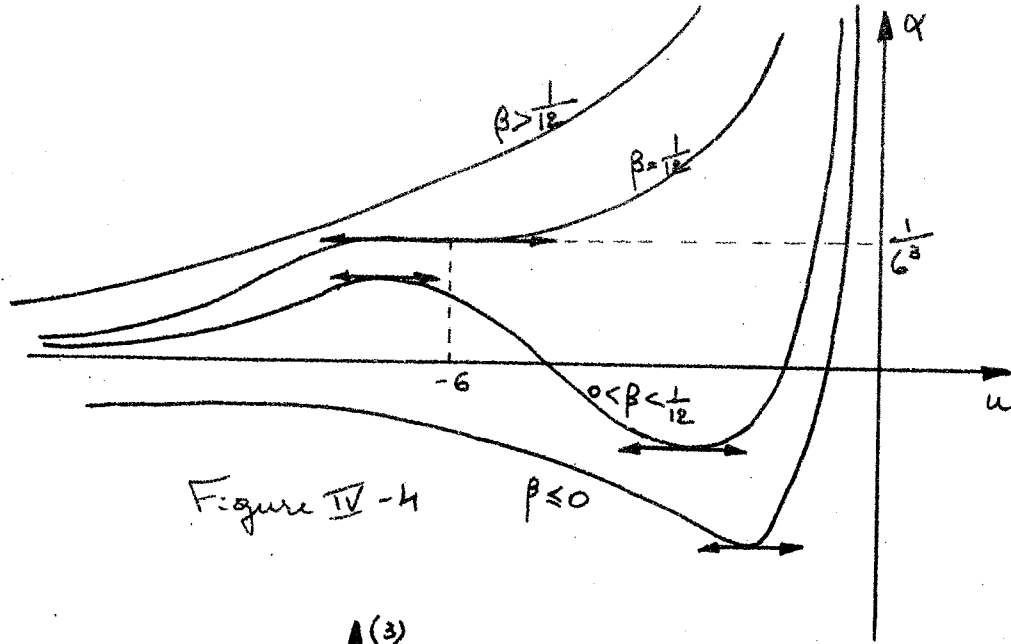
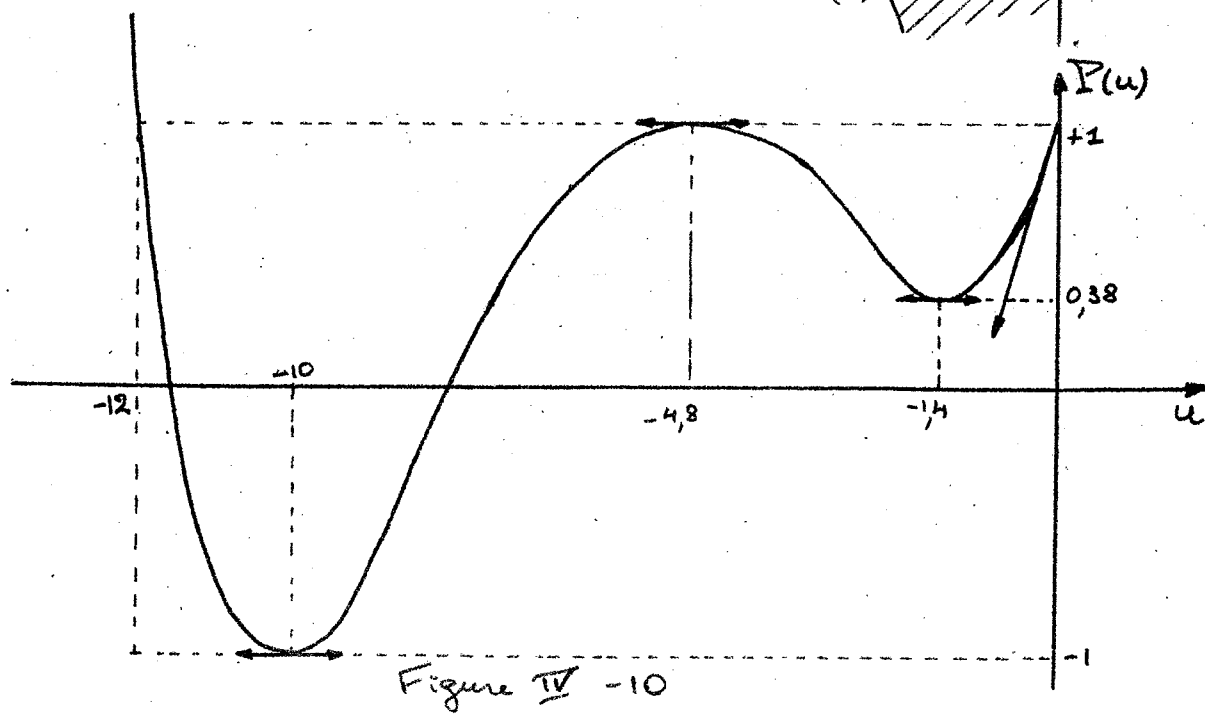
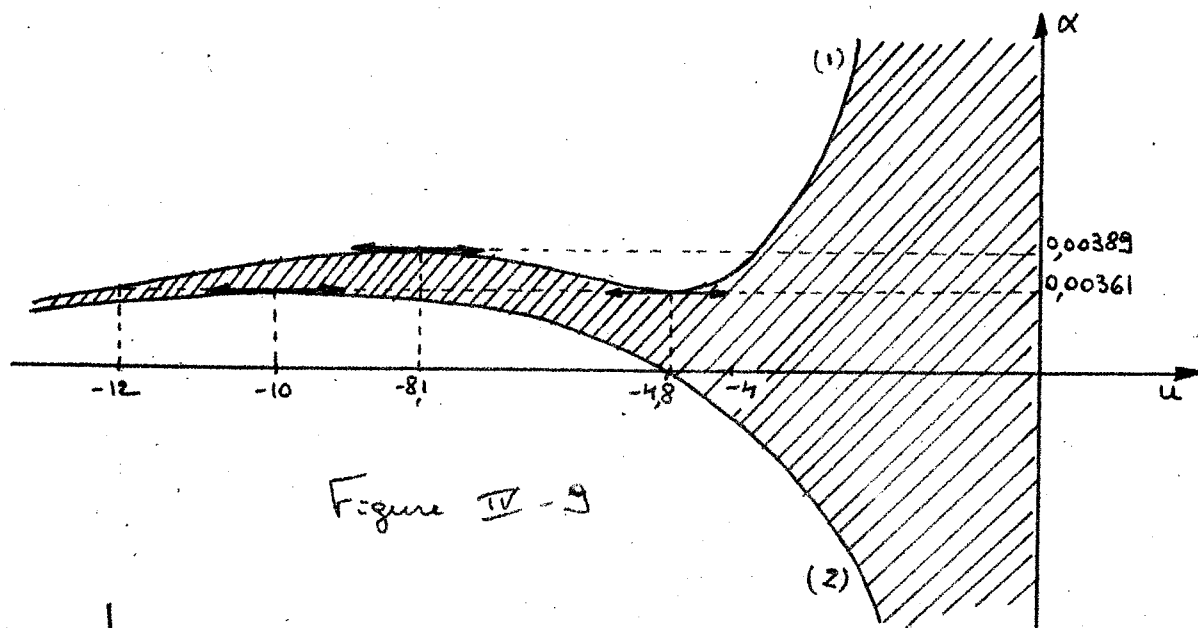
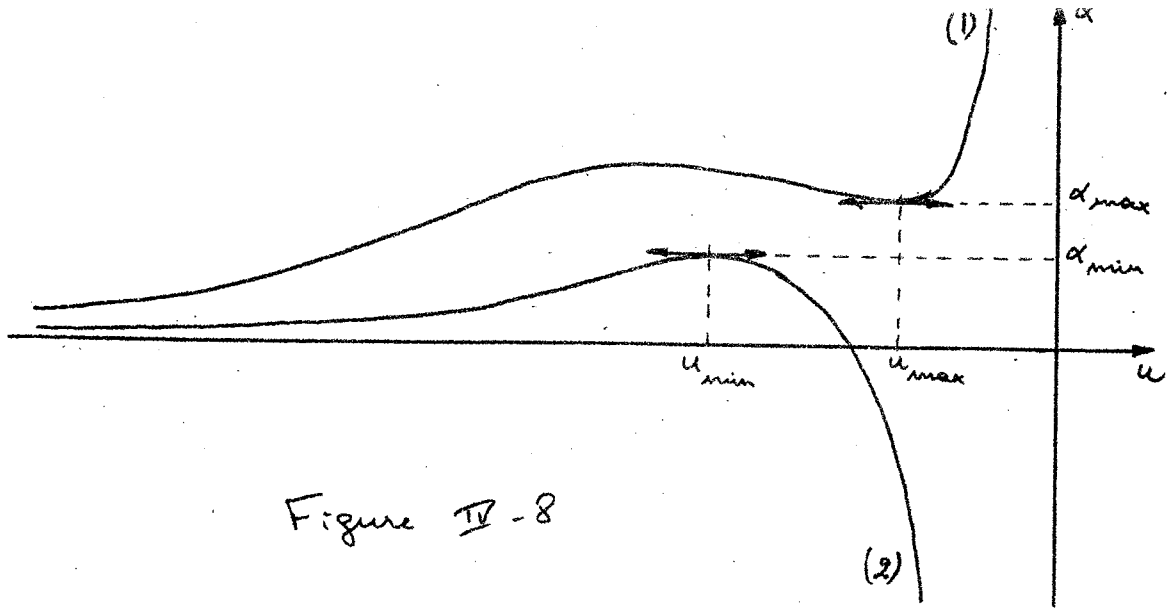


Figure II - 8





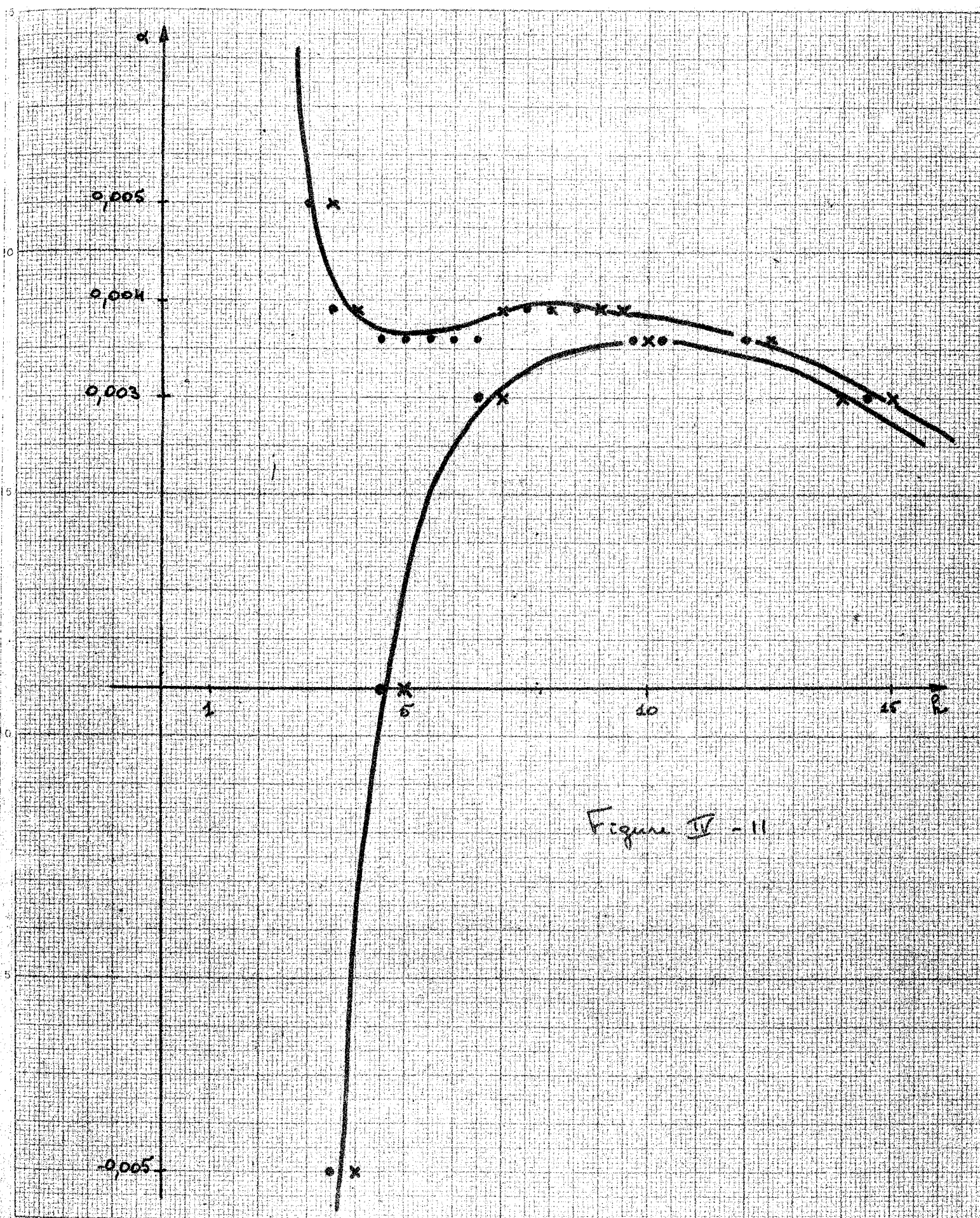
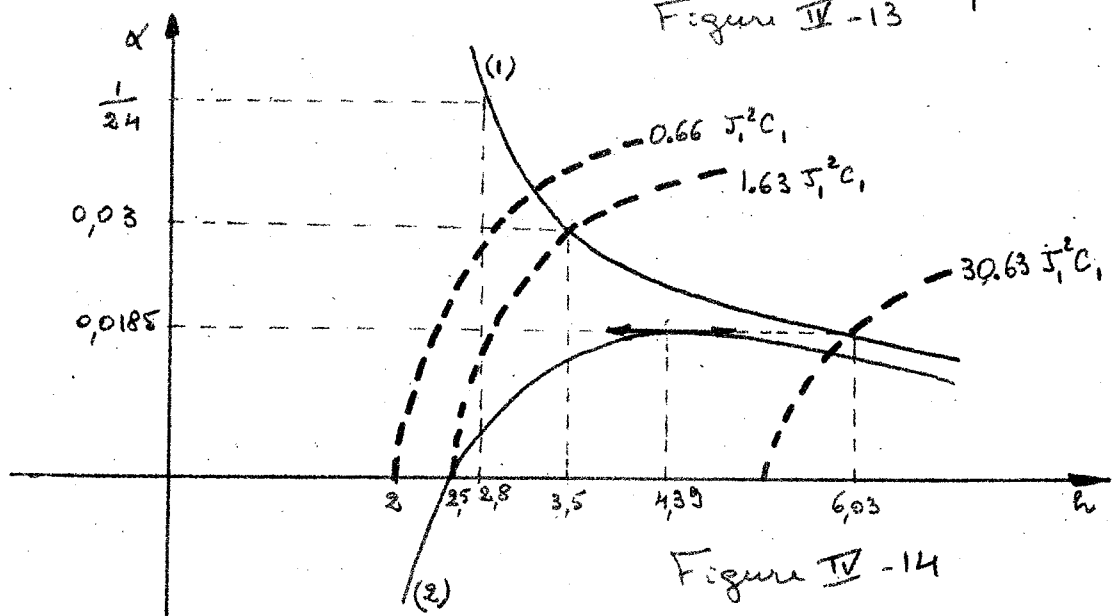
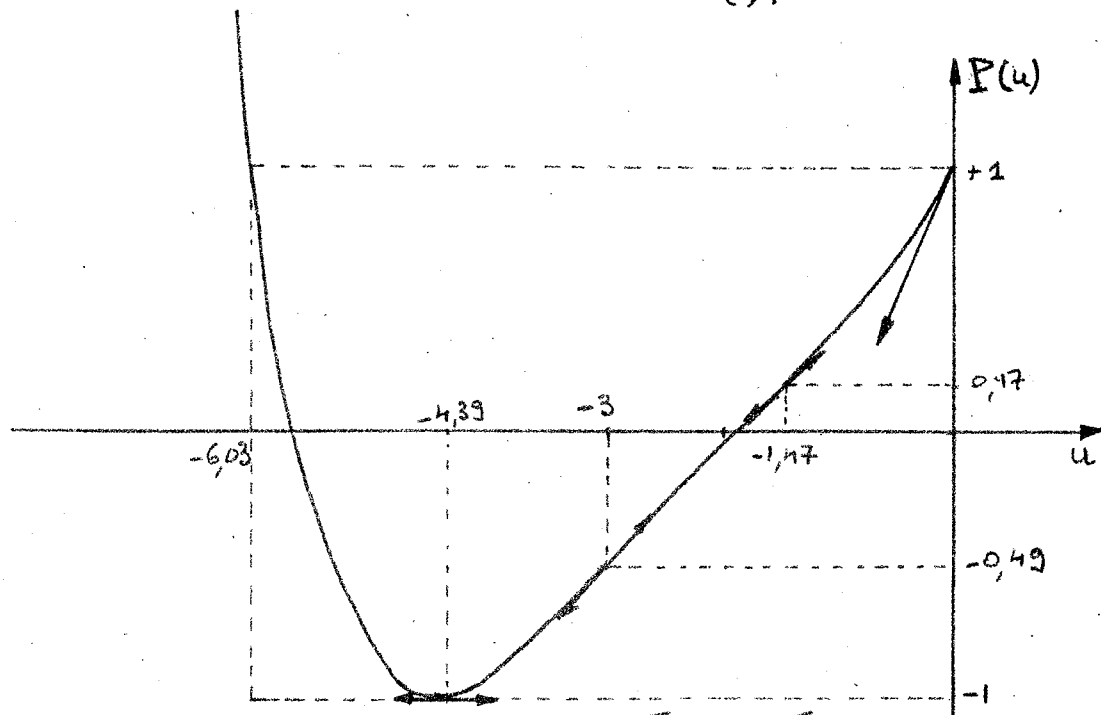
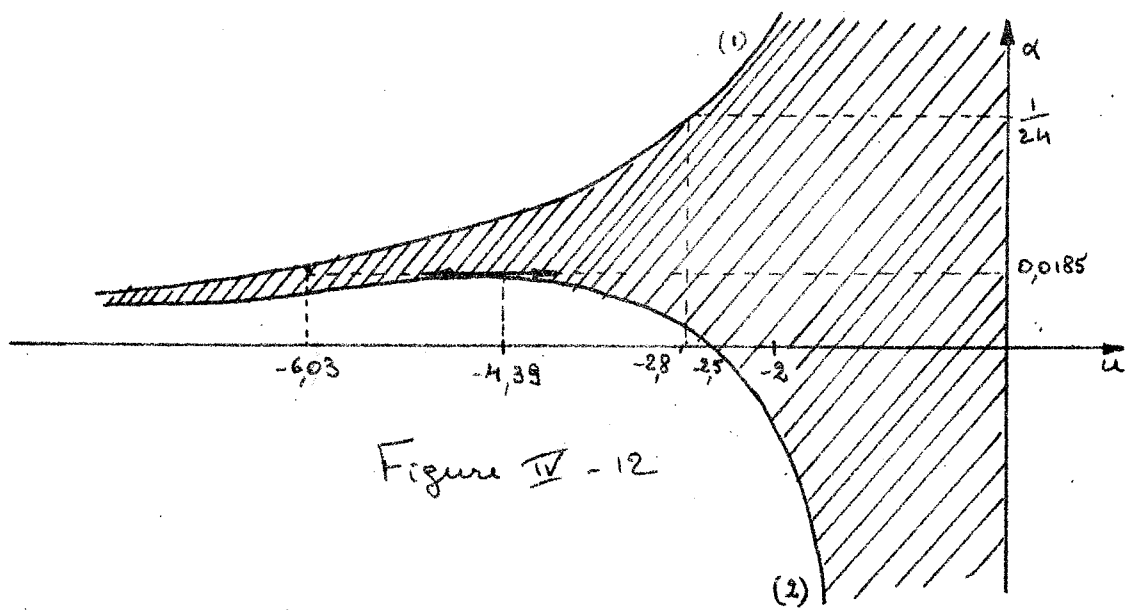


Figure IV - 11



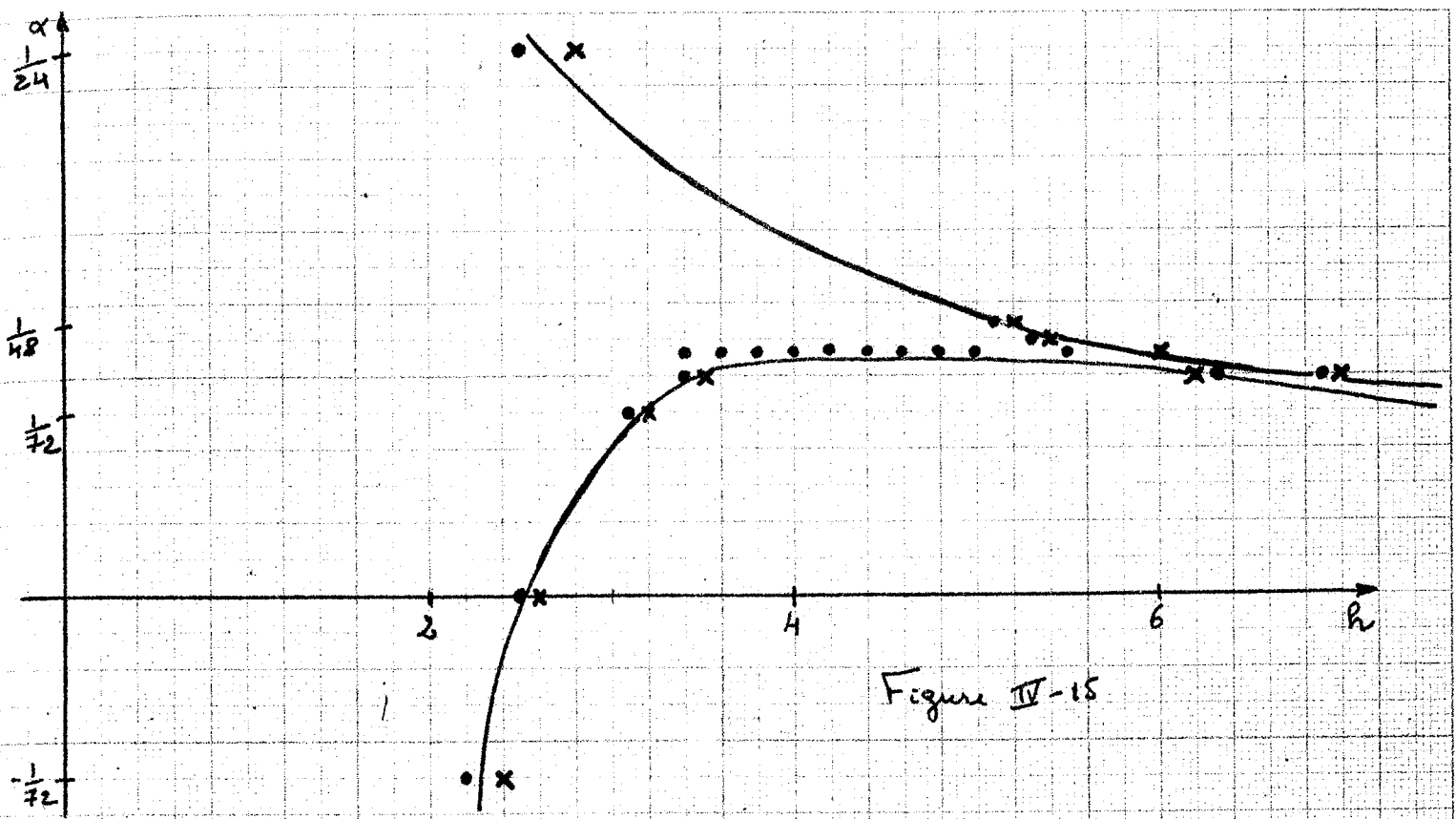


Figure IV-15

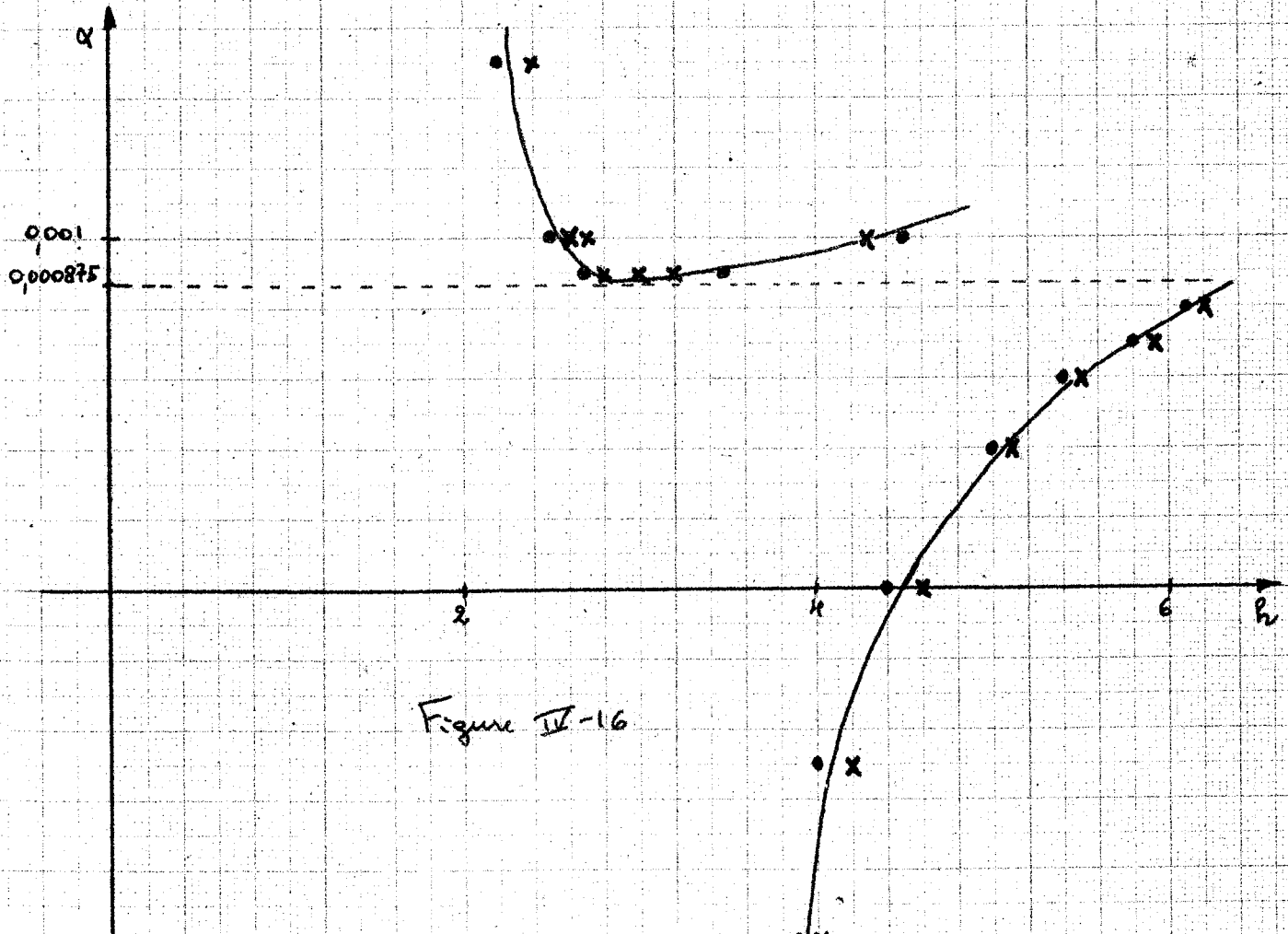


Figure IV-16

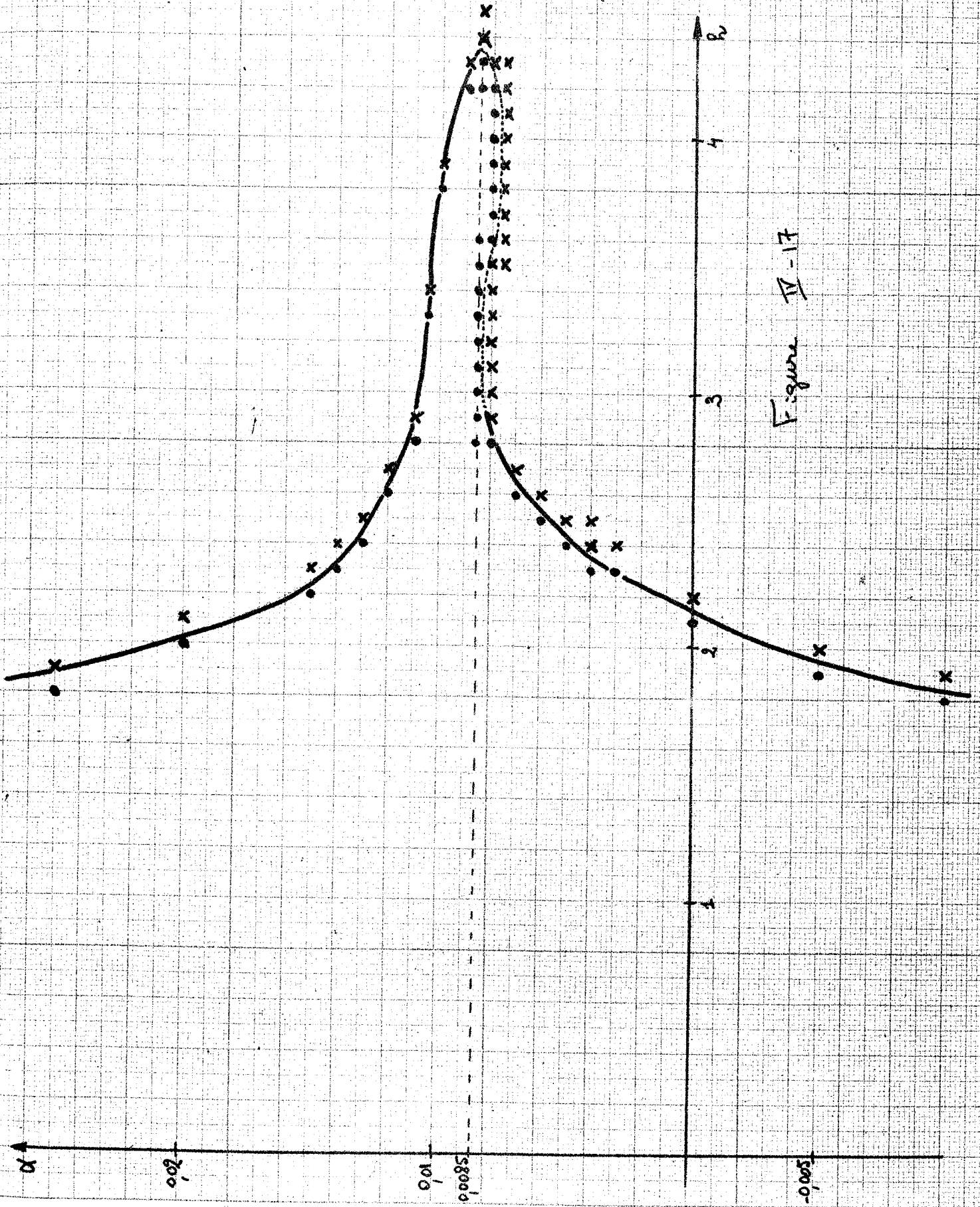


Figure IV-17

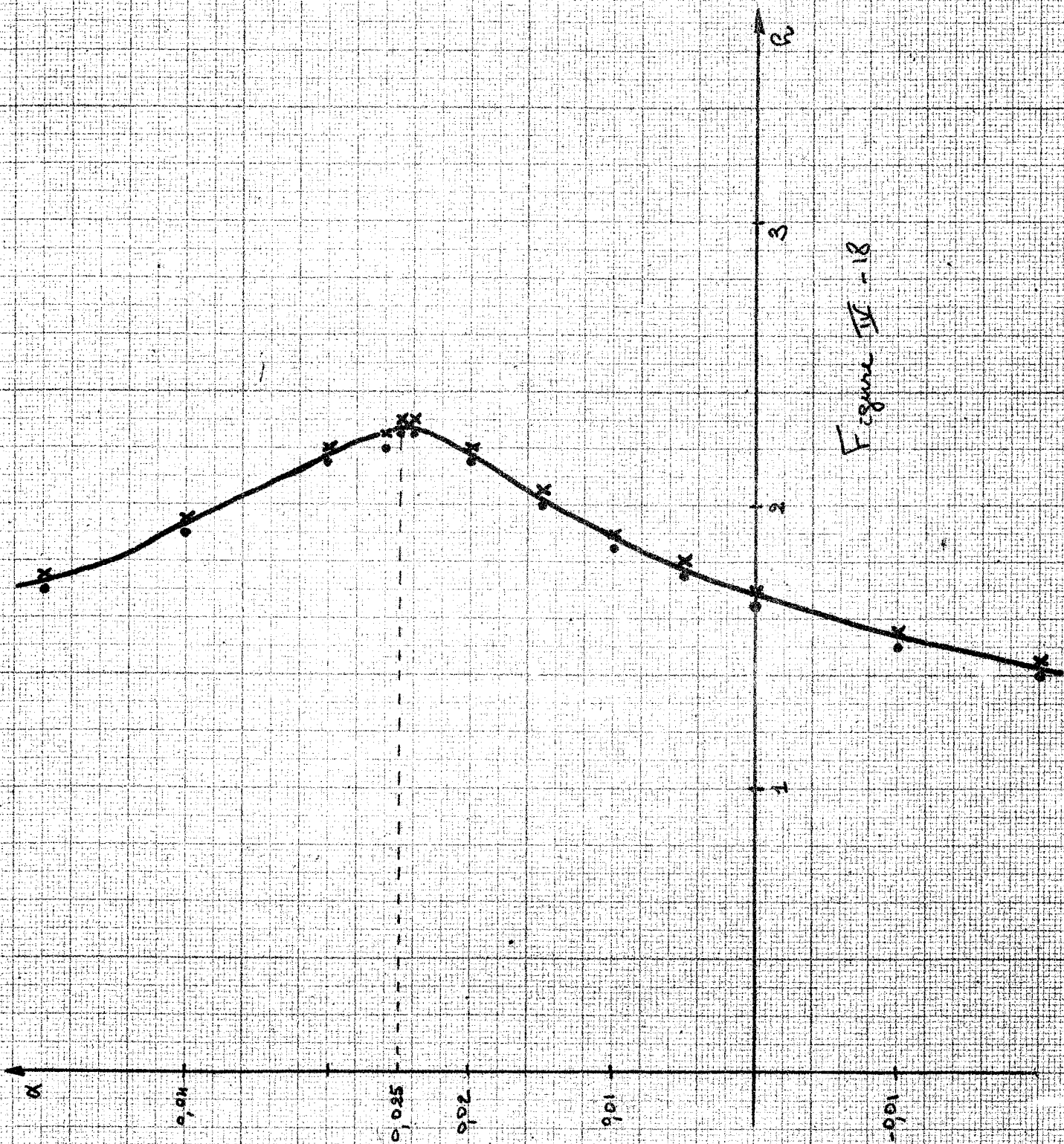
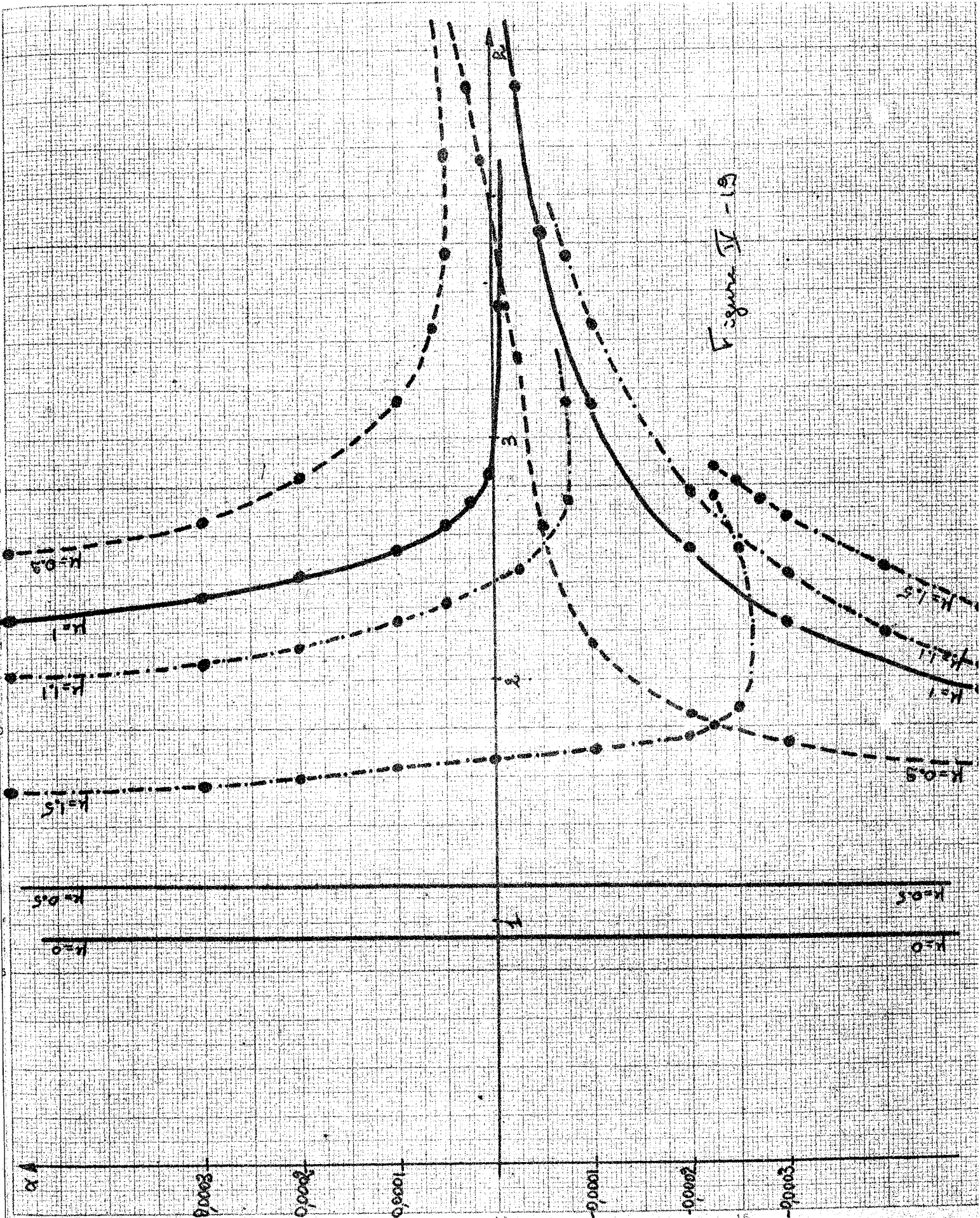
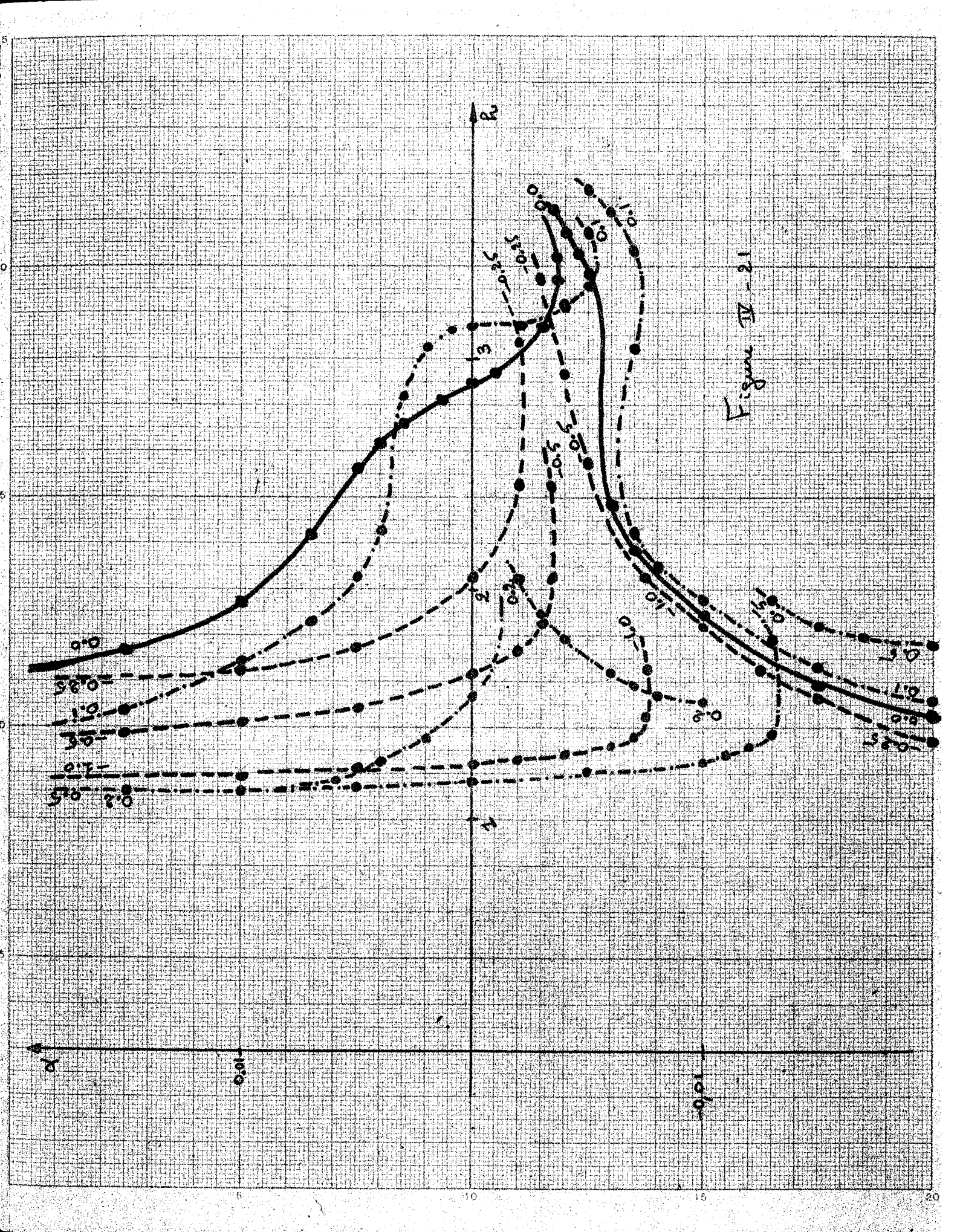


Figure IV - 18

Figure IV - 19





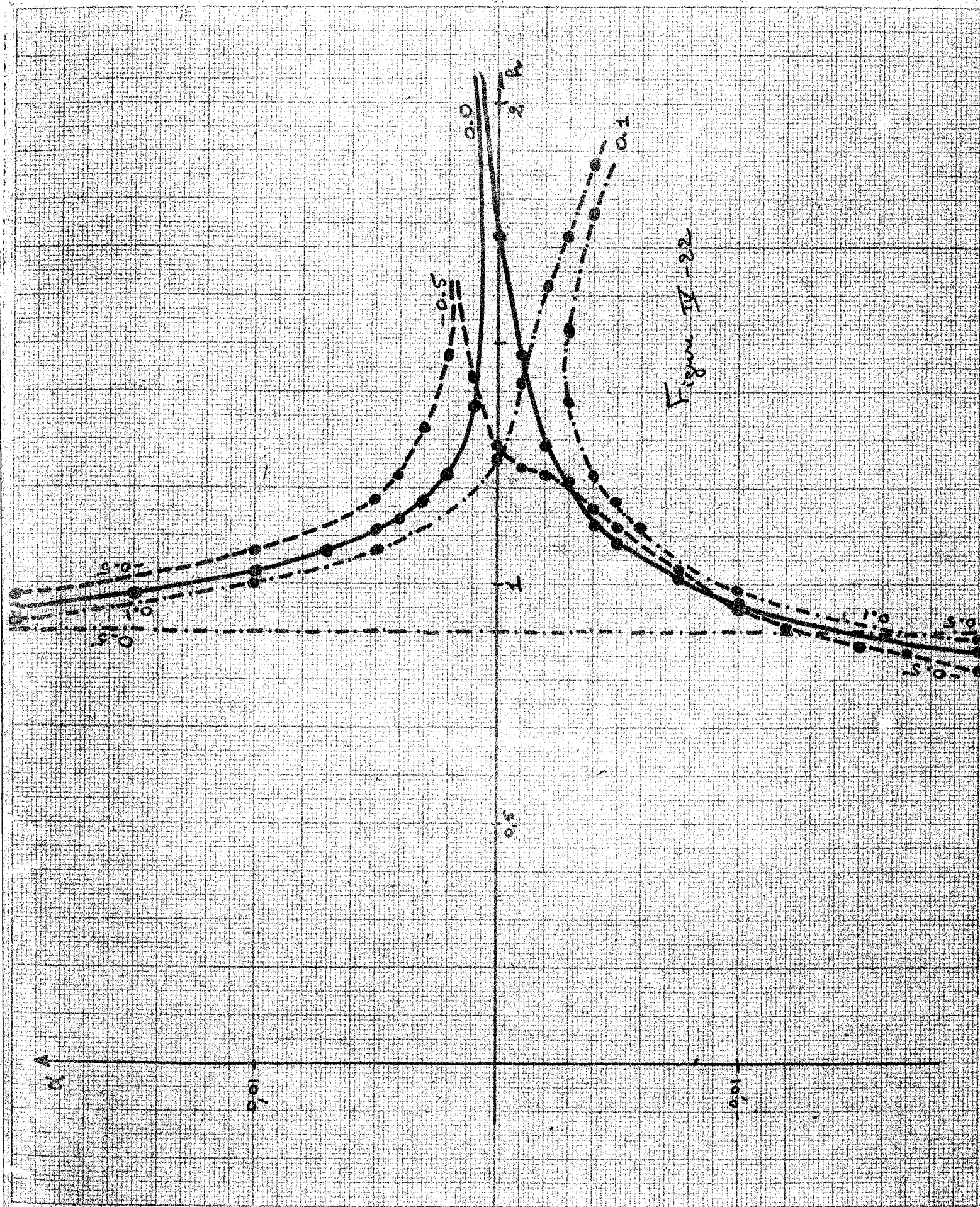


Figure II-22

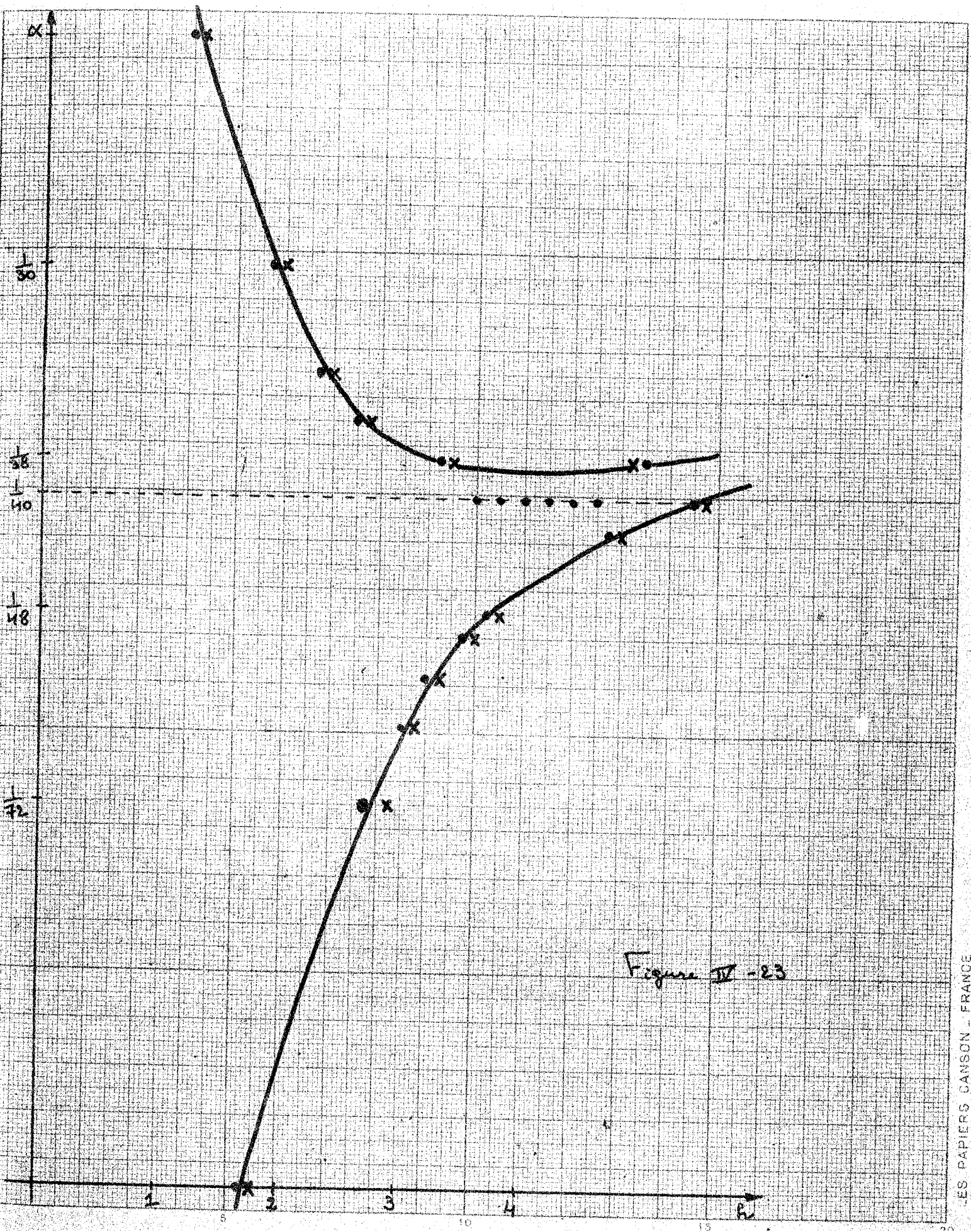


Figure IV - 23

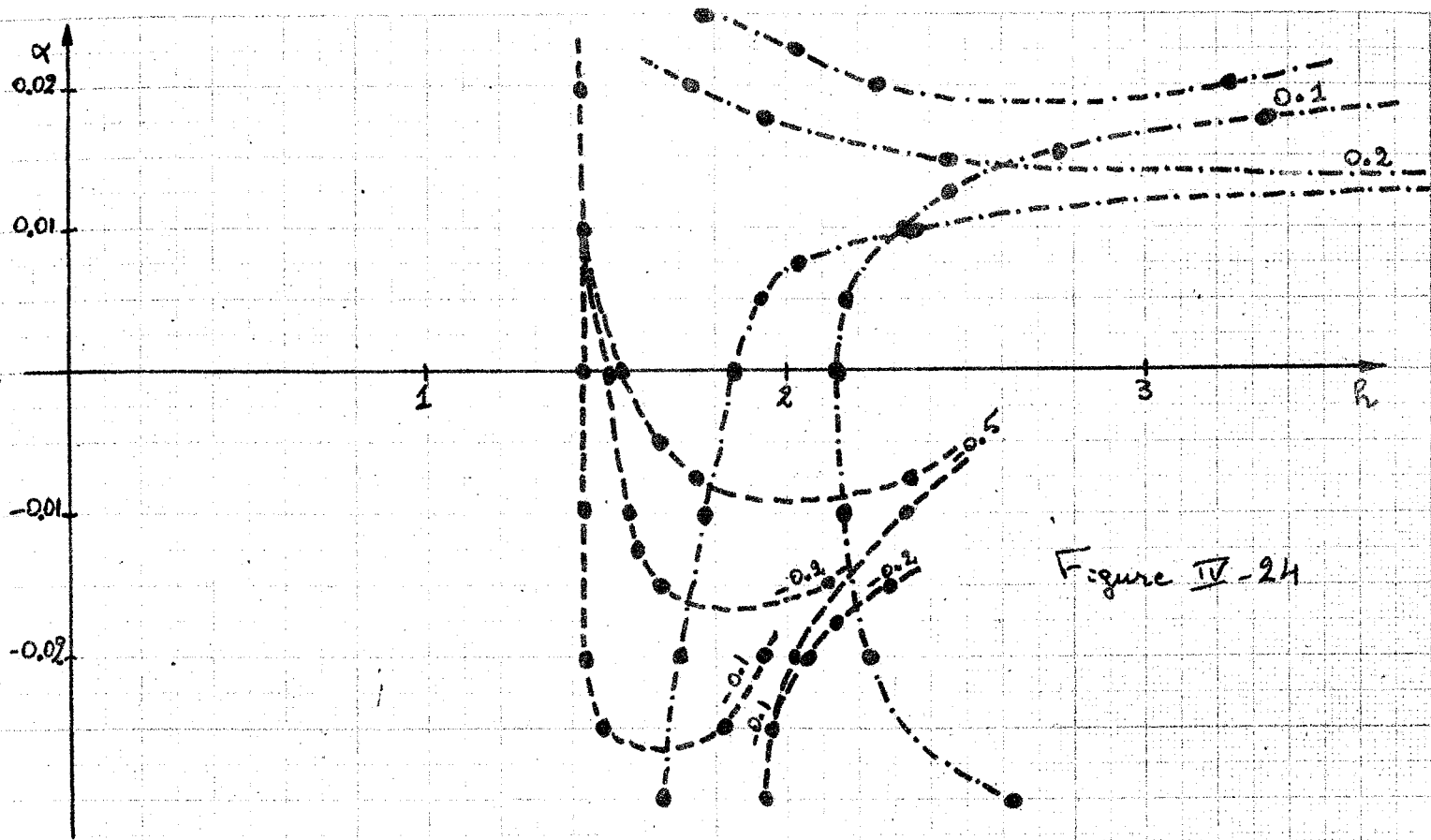


Figure IV-24

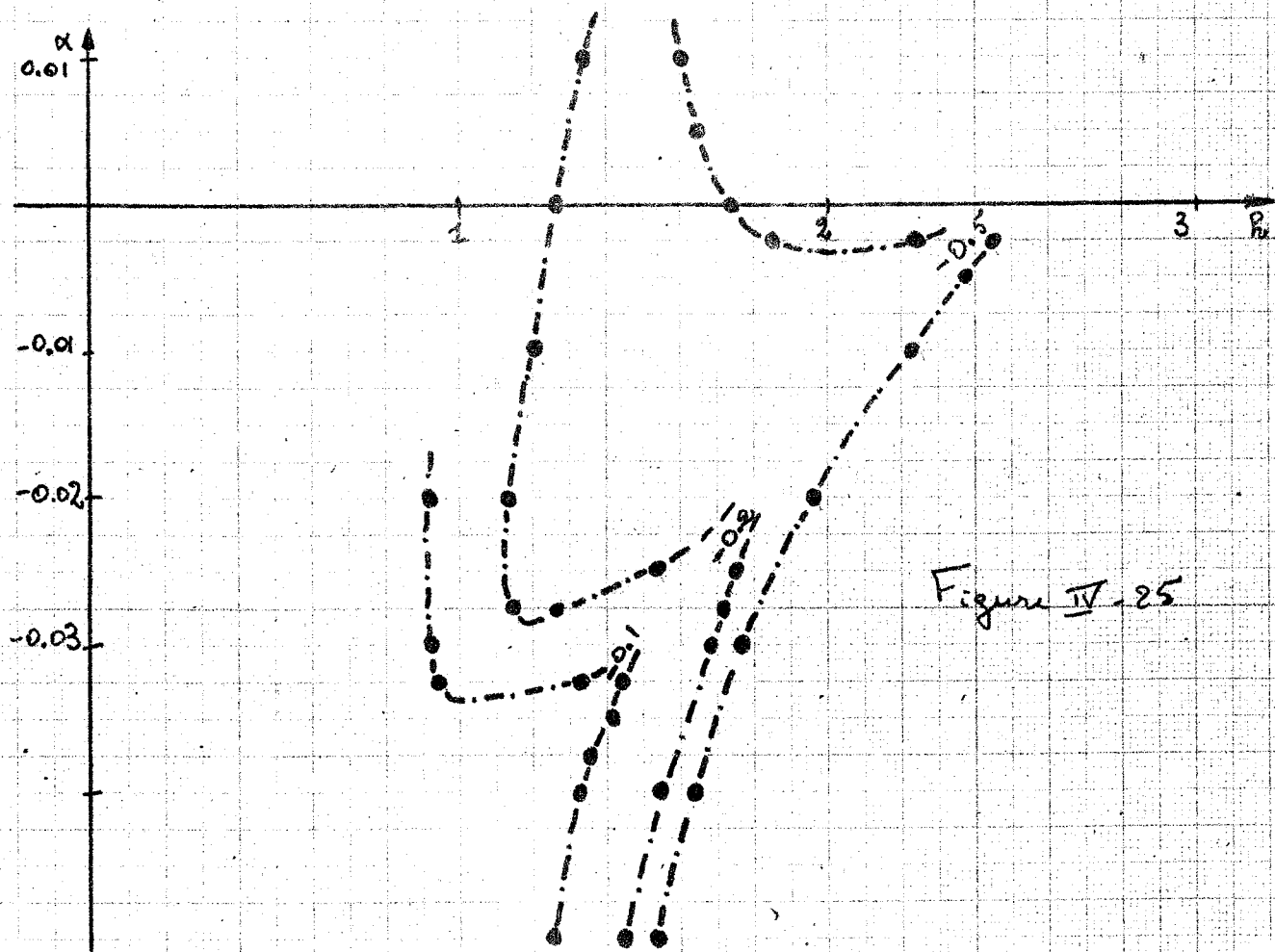


Figure IV-25

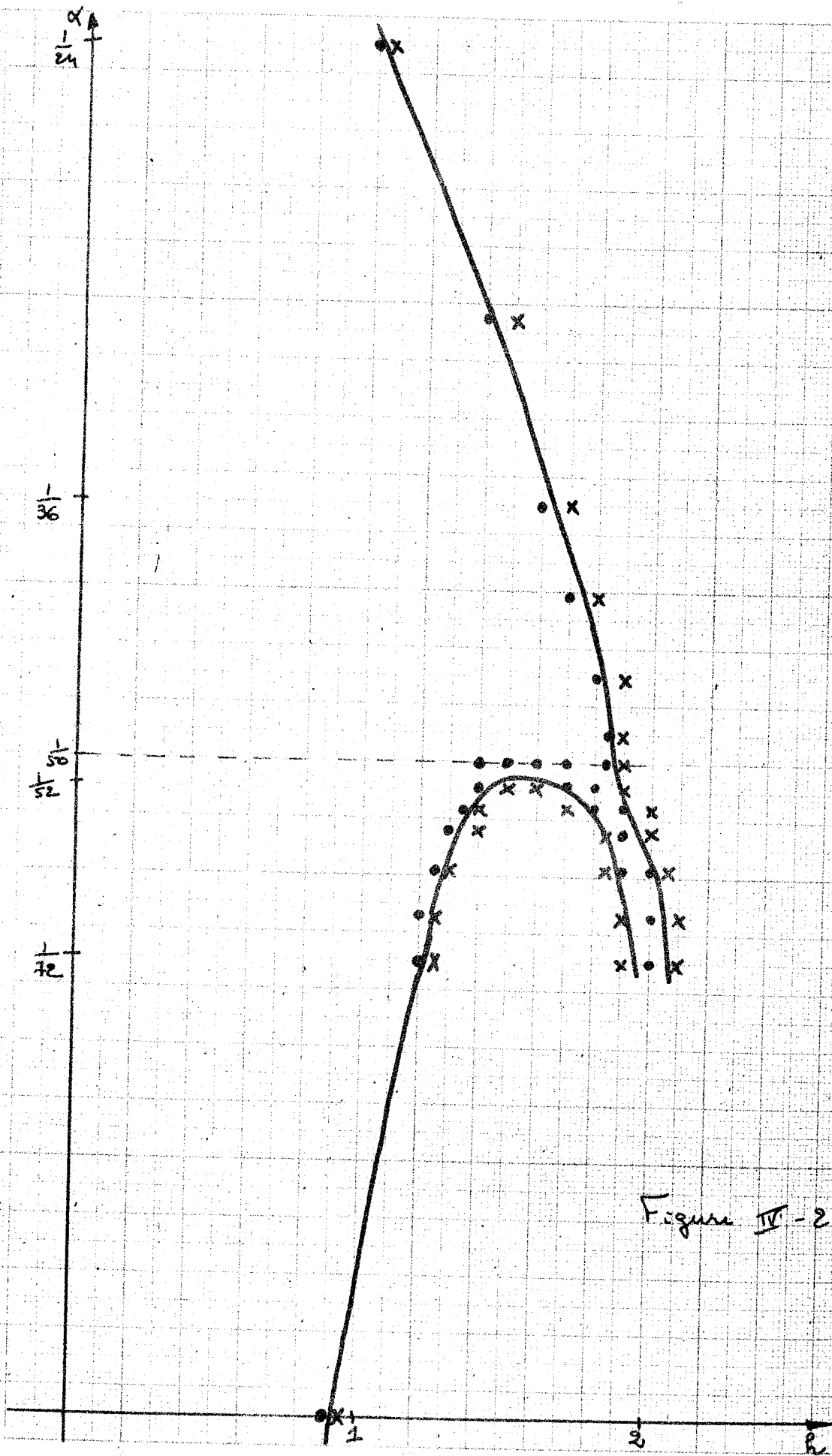
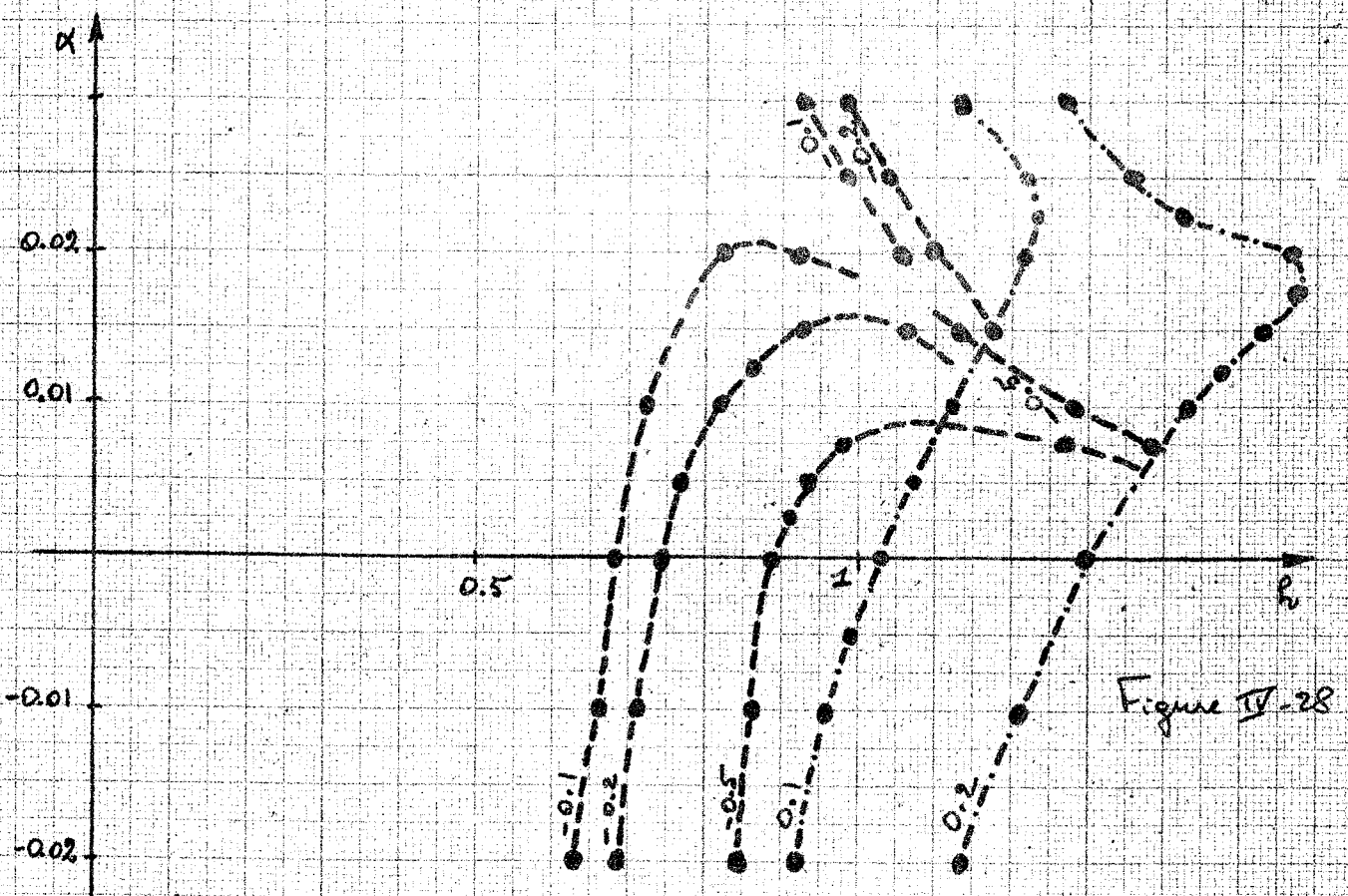
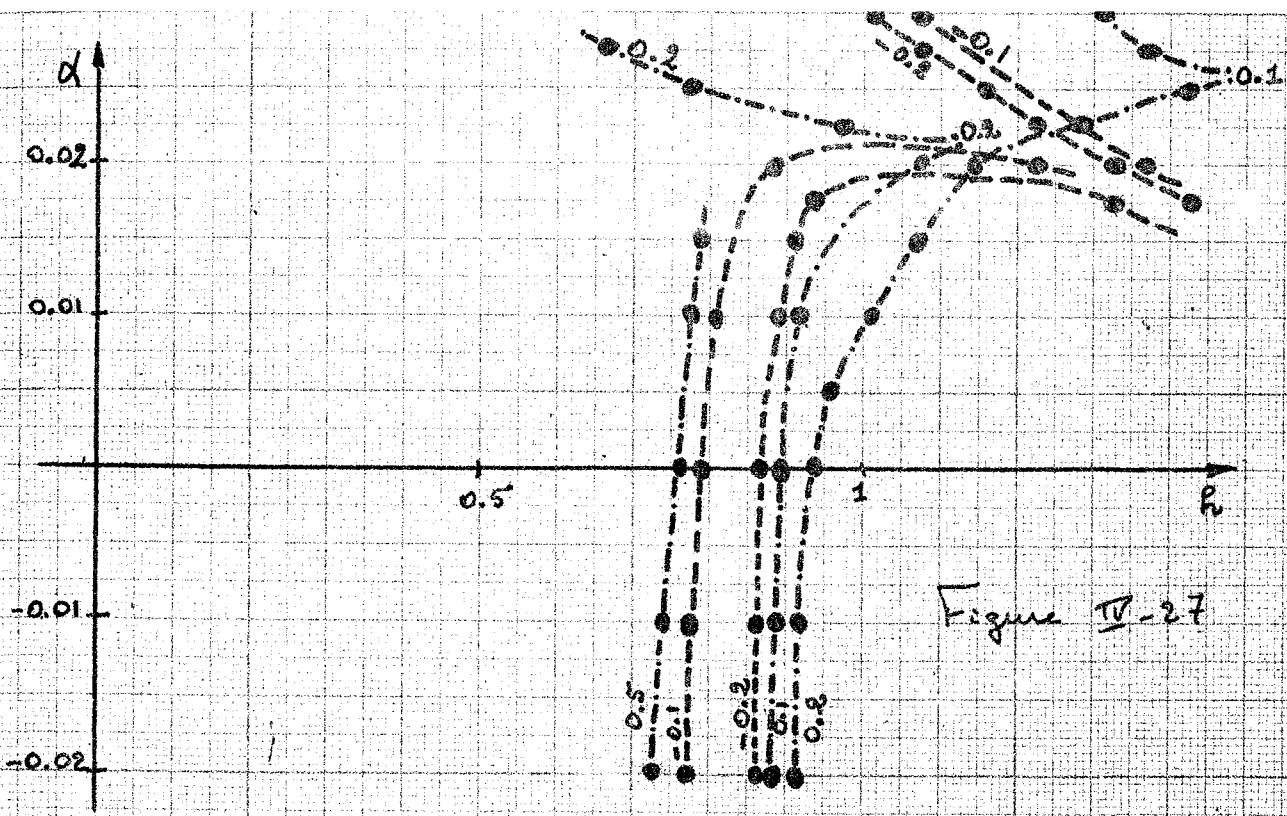


Figure IV-26



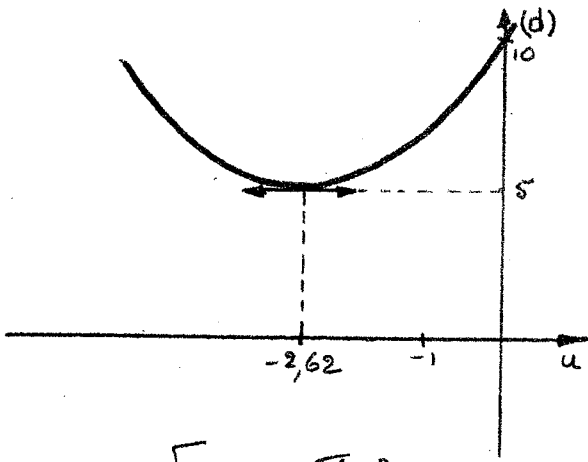


Figure V-2

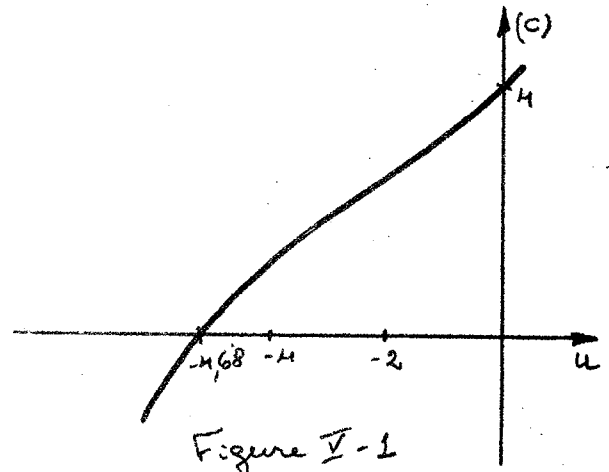


Figure V-1

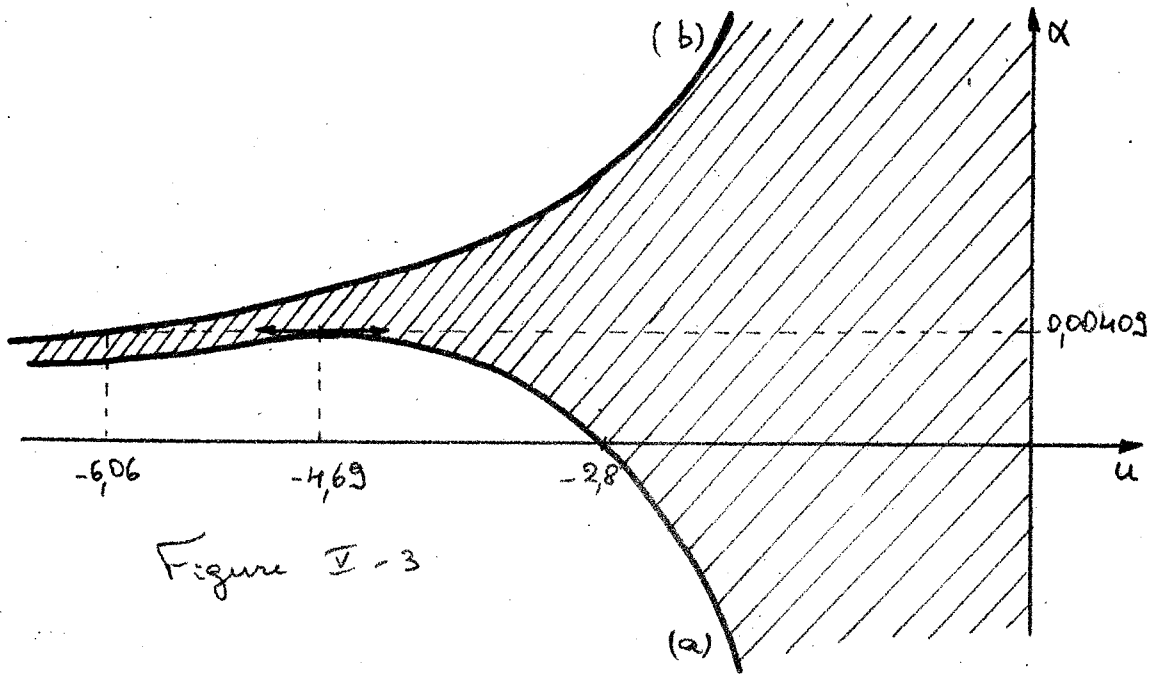
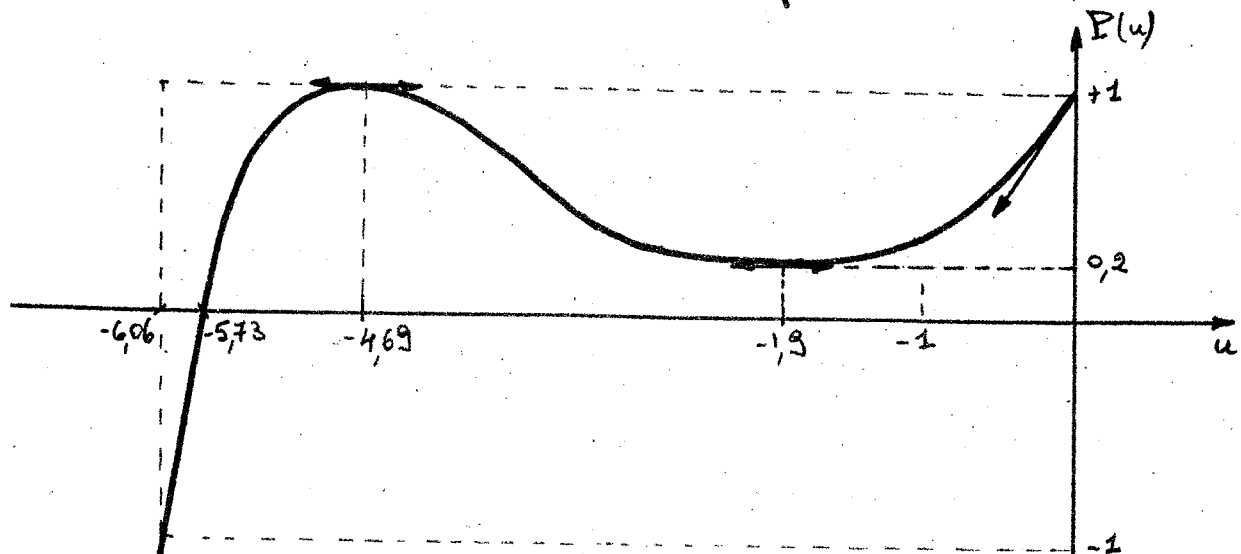
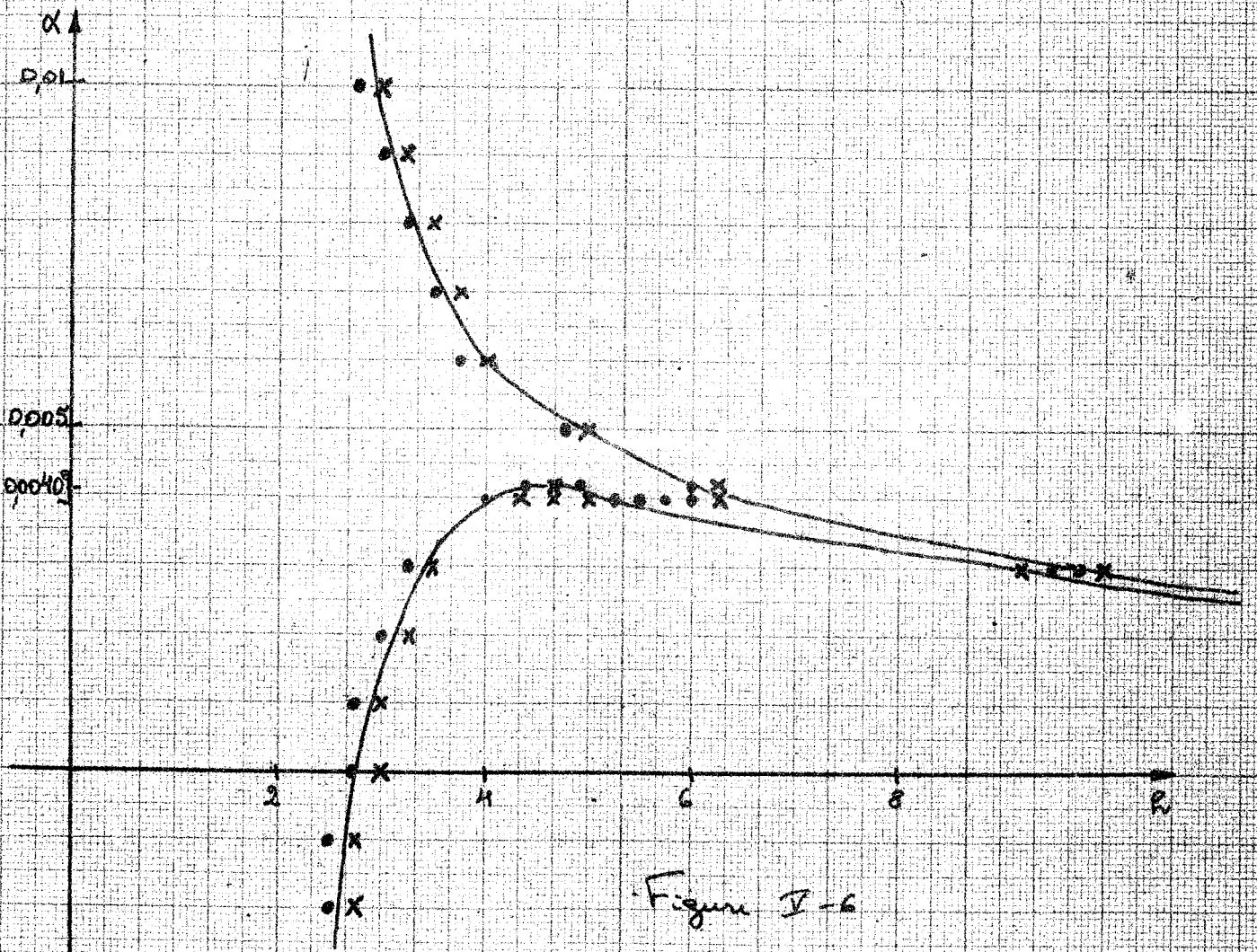
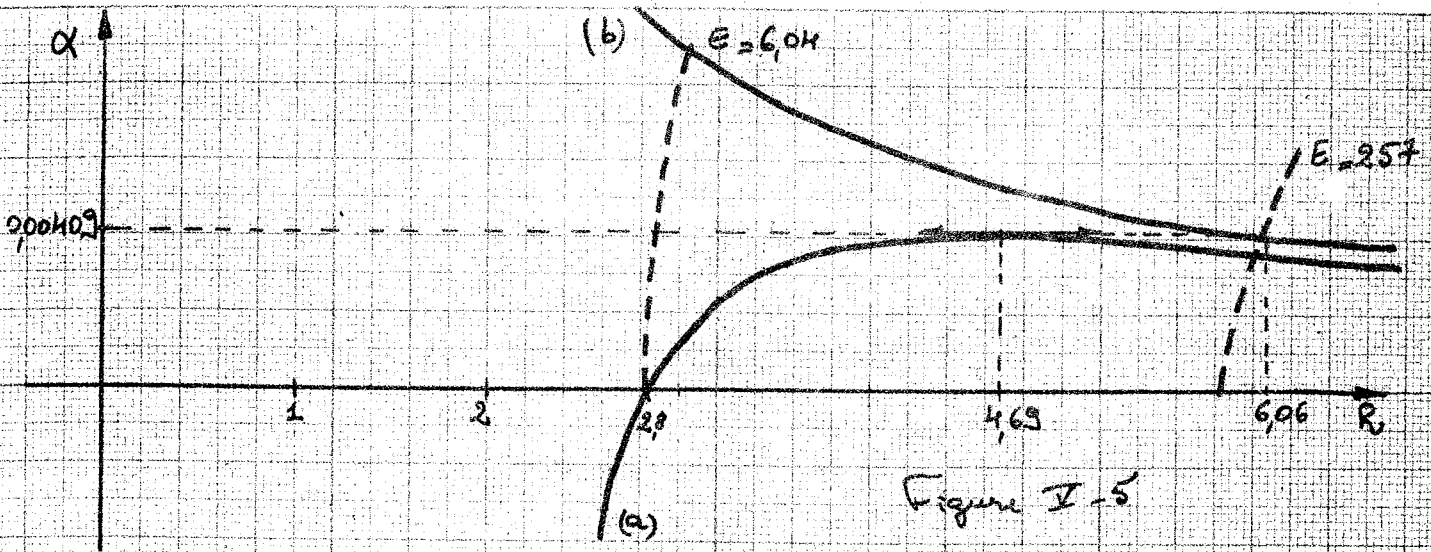


Figure V-3





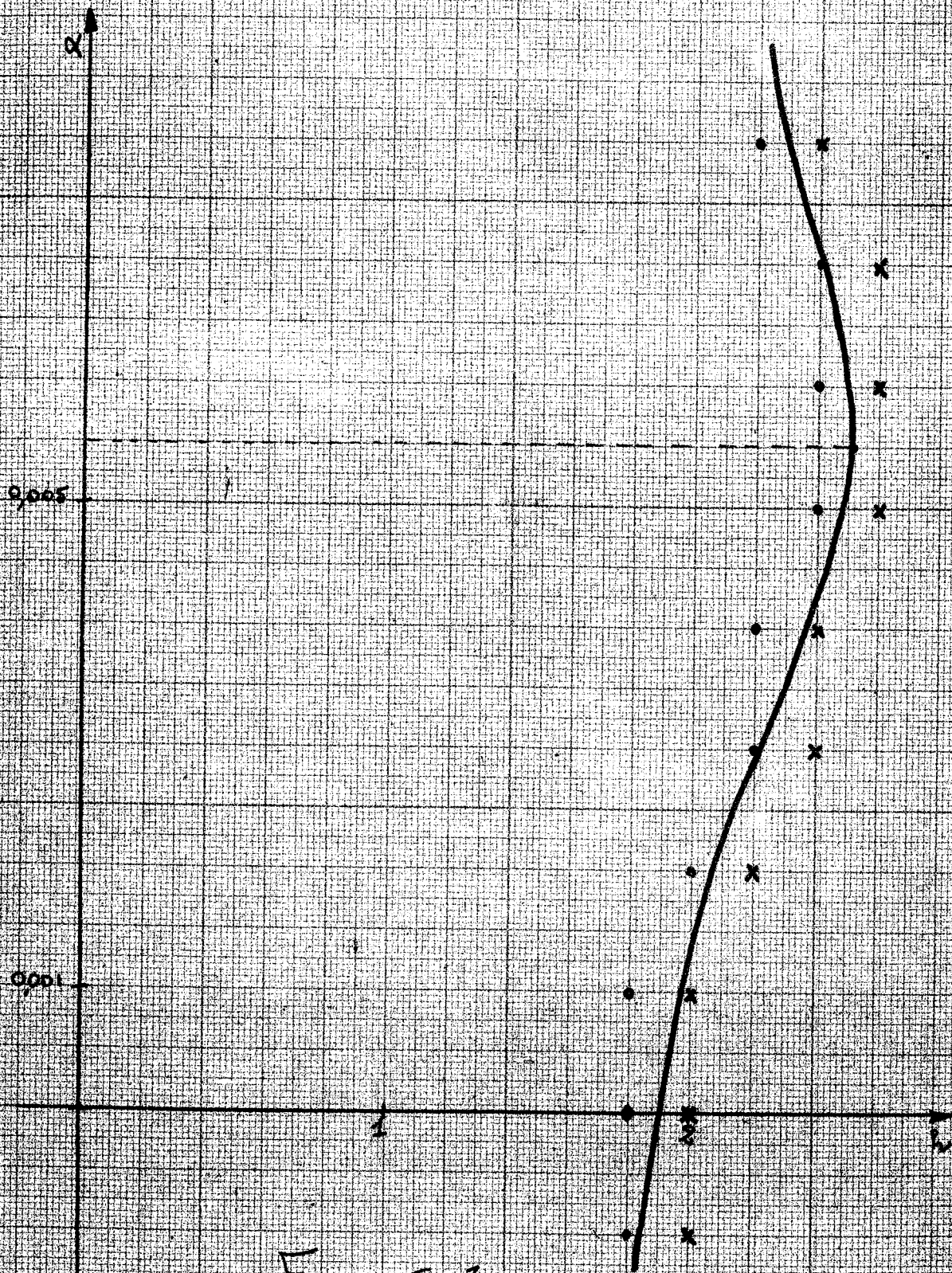


Figure V-7

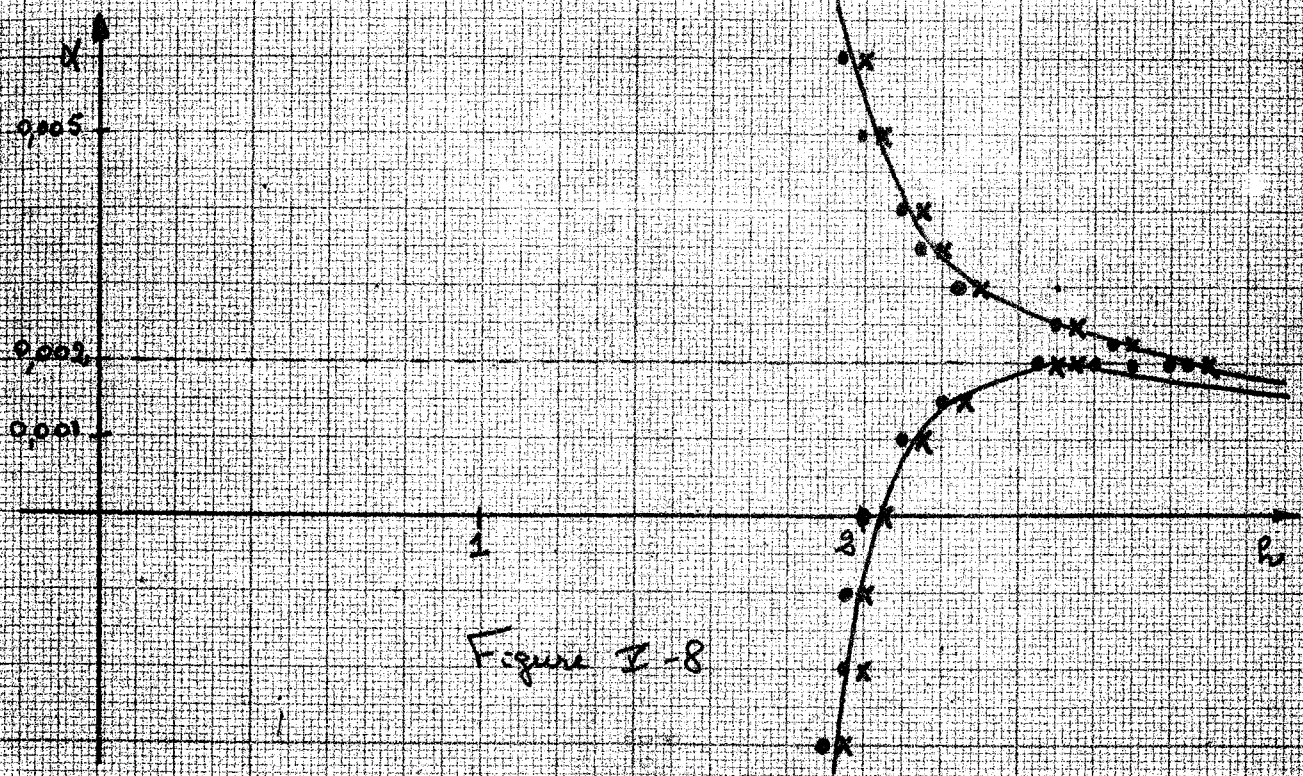


Figure I-8

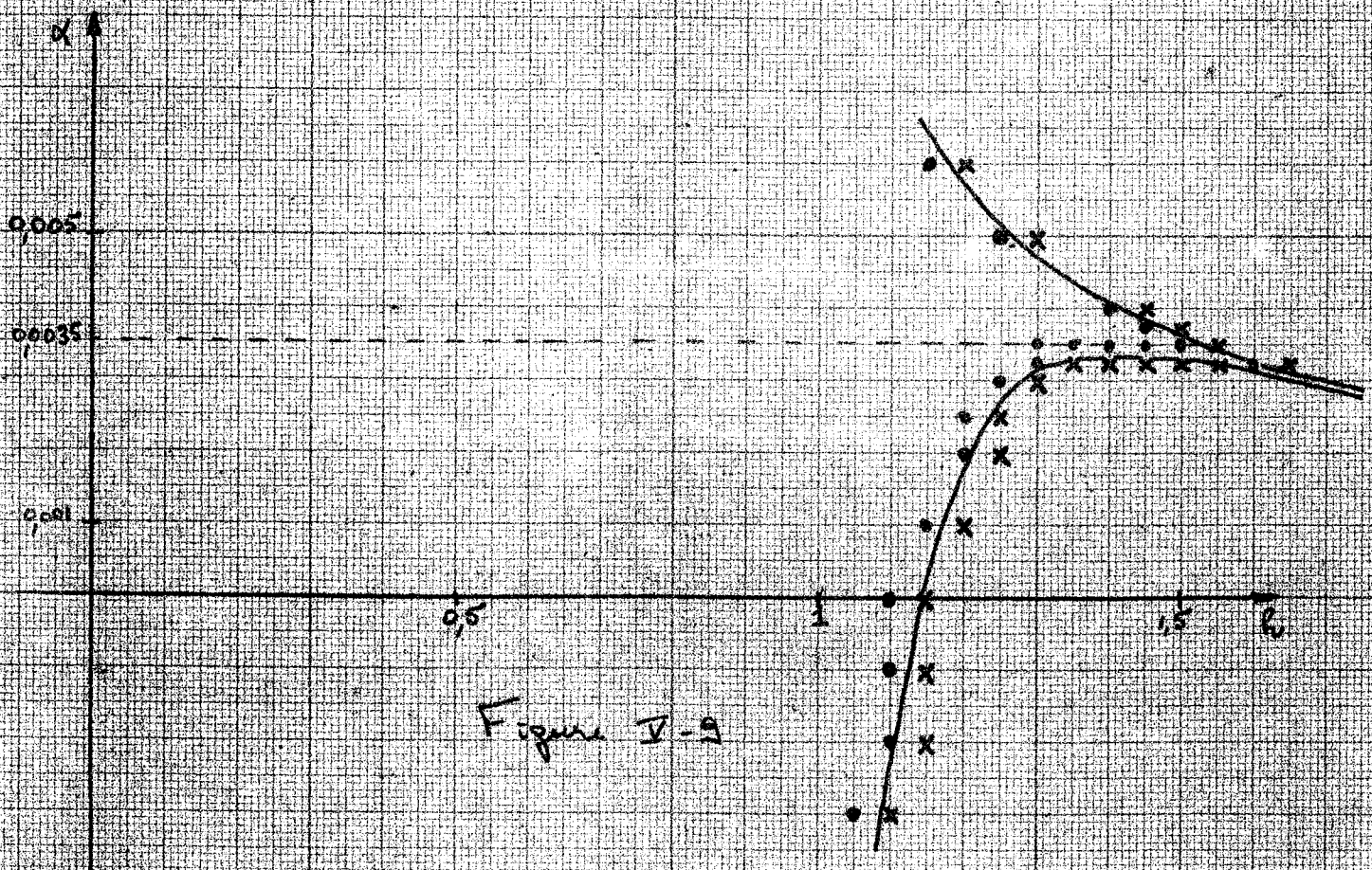


Figure V-9

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE