



HAL
open science

Contribution à l'étude de l'élasticité dans le cas de déformations planes petites et de rotations quelconques

Mounir Hajal

► **To cite this version:**

Mounir Hajal. Contribution à l'étude de l'élasticité dans le cas de déformations planes petites et de rotations quelconques. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1967. tel-00280648

HAL Id: tel-00280648

<https://theses.hal.science/tel-00280648>

Submitted on 19 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

319 917
T 0233144
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
SERVICE DE RECHERCHES
BIBLIOTHÈQUE
B. P. N° 7 - Téléphone 87.45.61
SAINT-MARTIN-D'HÈRES

110, Rue de la Chimie
Domaine Universitaire
38041 GRENOBLE Cedex 09
France

ATHEQUÉ - IMAG
M.J.K.

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Mounir HAJAL

Ingénieur E.C.L.

Licencié ès Sciences

PREMIERE THESE

Contribution à l'étude de l'élasticité
dans le cas de déformations planes petites
et de rotations quelconques

DEUXIEME THESE

Contribution à l'étude des milieux pulvérulents

Soutenues le 7 septembre 1967, devant la Commission d'Examen

M. J. KRAVTCHENKO

Président

MM. P. ANGLES D'AURIAC

A. GASTINEL

} *Examineurs*

GRENOBLE

AVANT-PROPOS

Les travaux exposés dans le présent mémoire ont été effectués au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble.

Je tiens à exprimer ma gratitude au Gouvernement français qui m'a accueilli dans ses universités et m'a fourni une aide matérielle précieuse.

Dans l'élaboration de ce travail, deux personnes jouèrent un rôle primordial, et ont droit à ma plus vive reconnaissance. Monsieur le Professeur J. KRAVTCHENKO, Directeur des Laboratoires de Mécanique des Fluides, à qui je dois ma formation théorique de mécanicien et auprès de qui j'ai bénéficié de précieux conseils et d'un encouragement constant. Monsieur le Professeur P. ANGLES d'AURIAC, qui dirigea effectivement mes recherches, et à qui je dois, de par ses conseils, ses critiques et la liberté qui me fut accordée dans l'orientation de mes travaux, ma formation de chercheur.

Que Monsieur le Professeur A. GASTINEL veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, et pour avoir accepté de faire partie de mon Jury.

SOMMAIRE

	Pages
Introduction	1
<u>1ère Partie</u> : Théorie mathématique de l'élasticité isotrope, dans le cas de déformations planes petites et de rotations quelconques.	
I. Hypothèses	4
II. Déformations	7
- Tenseur déformation	7
- Décomposition du tenseur déformation	10
III. Relations Contraintes-Déformation	11
- Loi de Hooke	11
IV. Equations de l'équilibre	13
- Equations de l'équilibre en contraintes	13
- Equations de l'équilibre en u et v	14
- Formes particulières des équations de l'équilibre	16
V. Solutions générales.....	19
- Solutions du type 1	19
- Solutions du type 2	20
- Solutions du type 3	22
VI. Contraintes. Conditions aux limites	24
- Contraintes	24
- Conditions aux limites en contraintes	25
VII. Problèmes aux limites en contraintes	29
- Conditions sur $y_1 = 0$ et $y_1 = h$	32
- Conditions sur $x_1 = 0$	42
- Position du problème	49
- Méthodes de résolution	54
<u>2ème Partie</u> : Applications aux corps de forme allongée.	
VIII. Corps de forme allongée	56
- Arcs	56
- Cas particulier. Arcs minces	59
- Domaine d'application	61
- Domaine de validité de la Résistance des Matériaux	63

	Pages
IX. Poutres	64
- Poutres à section symétrique	70
- Poutres à section symétrique de forme allongée	72
- Poutres à face plane	75
- Poutres à face plane de forme allongée	75
X. Exemple : arc circulaire	77
Bibliographie	83

-:-:-:-:-

INTRODUCTION

L'étude des contraintes et déformations, dans les corps peu déformables, se fait, généralement, à l'aide des théories de l'"Elasticité Classique" (Elasticité linéaire) et de la "Résistance des Matériaux".

L'"Elasticité Classique" suppose de petites rotations et n'est donc applicable qu'aux corps de forme massive. Quant à la "Résistance des Matériaux", elle n'est applicable qu'aux corps de forme allongée et sous certaines conditions de courbure et de variation de sections.

Bien que fondées sur des hypothèses restrictives, ces théories permettent d'étudier, avec une précision satisfaisante, la majorité des problèmes pratiques. Il est cependant des cas, situés en marge des domaines d'application de ces théories, pour lesquels celles-ci ne constituent plus qu'une approximation grossière. Il était donc intéressant de bâtir une théorie, applicable à tous les corps peu déformables sans restriction de forme. Celle-ci, mis à part son intérêt fondamental, nous permettra de dégager des formules simples, applicables aux cas précédemment mentionnés et formant ainsi la jonction entre l'"Elasticité Classique" et la "Résistance des Matériaux".

Dans la recherche d'une telle théorie, deux voies sont possibles :

- la première, empruntée par M. ANGLES d'AURIAC, consiste à établir les équations générales de l'Elasticité, puis, à les simplifier par l'introduction de l'hypothèse des petites

déformations. Dans les équations de l'équilibre indéfini, M. ANGLES d'AURIAC, substitue aux contraintes, leurs expressions en fonction de l'énergie de déformation (MURNAGHAN), puis il suppose, pour l'énergie, une forme spéciale, valable pour de petites déformations.

- la seconde voie consiste à introduire, dès le départ, l'hypothèse des petites déformations. Il est alors possible de décrire, de façon simple, les déformations, de les relier aux contraintes par la loi de HOOKE, valable dans cette hypothèse, et d'obtenir, par substitution dans les équations de l'équilibre indéfini, des formules applicables aux corps peu déformables de forme quelconque. Cette voie est celle suivie, en général, pour obtenir les équations de l'Elasticité Classique ; elle présente donc l'avantage d'être familière aux ingénieurs.

Dans la première partie de notre étude, nous avons appliqué ce dernier procédé, et établi des équations régissant le comportement de corps élastiques isotropes, dans le cas de déformations planes petites et de rotations quelconques. Nous avons, ensuite, trouvé des solutions générales, qui, jointes aux conditions aux limites en contraintes, ramènent le problème, à la résolution d'un système d'équations différentielles (équations VII, 13).

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressé aux corps de forme allongée. Pour ces corps, et sous certaines conditions de courbure et de variation de section, les équations différentielles VII,13, se réduisent à deux équations linéaires du second ordre (équations VIII,3). Bien que simples, ces formules élargissent sensiblement le domaine d'application de la Résistance des Matériaux. En particulier, elles s'appliquent à des corps pour lesquels le rapport épaisseur sur rayon de courbure est inférieur ou égal à $\frac{1}{3}$.

Ière PARTIE

THEORIE MATHEMATIQUE DE L'ELASTICITE ISOTROPE,
DANS LE CAS DE DEFORMATIONS PLANES PETITES
ET DE ROTATIONS QUELCONQUES.

CHAPITRE I

HYPOTHESES

Considérons un corps homogène et isotrope. Désignons par (x, y, z) les coordonnées d'un point matériel dans l'état initial (état neutre) et par (ξ, η, ζ) ses coordonnées dans l'état final (état d'équilibre du corps en présence de la sollicitation). Nous noterons par T la transformation $(x, y, z) \xrightarrow{T} (\xi, \eta, \zeta)$. Nous ferons deux hypothèses en ce qui concerne la transformation T .

- hypothèse des déformations planes

Cette hypothèse se traduit mathématiquement par :

$$\xi = \xi(x, y) ; \eta = \eta(x, y) ; \zeta = z .$$

- hypothèse des petites déformations (élasticité infinitésimale)

La transformation T peut être décomposée en un produit d'une rotation ω par une déformation pure. Dire que les déformations sont petites équivaut à dire que la transformation T est voisine de la rotation ω . Cette hypothèse se traduit par les relations suivantes :

$$I, I \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x} \approx \frac{\partial \eta}{\partial y} \approx \cos \omega \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \approx -\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx -\sin \omega \end{array} \right.$$

ou

$$I_{3,2} \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 &\approx \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \approx 1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &\approx 0 \end{aligned} \right.$$

Les relations $I_{3,1}$ nous permettent d'affirmer que les fonctions ξ et η ainsi que leurs dérivées premières sont respectivement voisines de deux fonctions harmoniques conjuguées α et β et de leurs dérivées premières. (Cette propriété ne s'étend pas nécessairement aux dérivées d'ordre supérieur à un).

Posons :

$$I_{3,3} \left\{ \begin{aligned} \xi &= \alpha + u \\ \eta &= \beta + v \end{aligned} \right.$$

NOUS aurons : $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ voisines de zéro.

Les fonctions α et β devront de plus satisfaire à :

$$I_{3,4} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= -\frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 \approx 1 \end{aligned} \right.$$

Nous poserons $\epsilon = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 - 1$; ϵ sera voisine de zéro.

La transformation T peut donc être décomposée en un produit d'une transformation conforme $[(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)]$ par une transformation infinitésimale $[(\alpha,\beta) \rightarrow (\xi,\eta)]$.

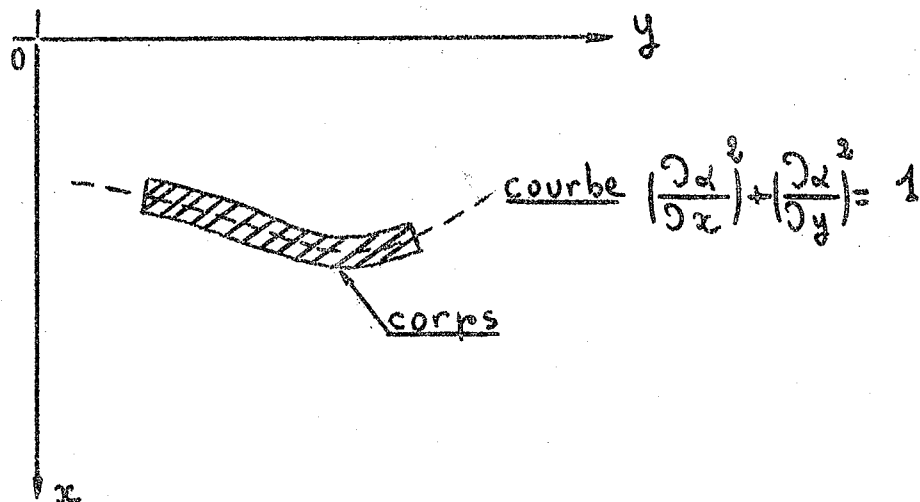


REMARQUES :

- Cette dernière décomposition de la transformation T ne diffère guère de celle faite en "élasticité classique". Dans ce dernier cas, l'état final étant voisin de l'état initial, les fonctions α et β sont remplacées par x et y .

- En général α et β sont différentes de x et y ; mais, alors, la condition $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 \approx 1$ impose que le corps,

dans l'état initial, soit dans le voisinage de la courbe définie par $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 = 1$; ce qui suppose, en général, que le corps ait une forme allongée.



CHAPITRE II

DEFORMATIONS

Tenseur déformation :

L'état de déformation autour d'un point dans l'état final (déformation après rotation) est défini par un tenseur symétrique D dit "tenseur déformation", soit :

$$D = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

Ces symboles, ainsi que leur interprétation géométrique, sont bien connus.

Si nous désignons par J le jacobien de la transformation T, soit :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

le tenseur déformation D sera donné par :

$$\text{II,1} \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \sqrt{J J^*} - I \end{array} \right.$$

I étant le tenseur unité et J^* la transposée de J.

En explicitant cette dernière formule et, en tenant compte de la petitesse des déformations (relations I,2), l'on obtient pour les composantes de D :

$$\text{II,2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\xi} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \\ \varepsilon_{\eta} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] \quad \gamma_{\xi\xi} = 0 \\ \varepsilon_{\zeta} = 0 \quad \gamma_{\eta\xi} = 0 \end{array} \right.$$

En remplaçant ξ et η par leurs expressions I,3, et, en négligeant les termes tels que $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$ la première

des relations II,2, par exemple, s'écrit :

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Or α et β étant harmoniques conjuguées, nous aurons :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = (1 + \varepsilon) \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} \quad ; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = (1 + \varepsilon) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$$

ε étant voisine de zéro, nous pourrions écrire :

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\partial u}{\partial \alpha}$$

Les relations II,2 prennent alors la forme :

$$II,3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \varepsilon_{\eta\eta} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] \\ \gamma_{\xi\zeta} = 0 \\ \gamma_{\eta\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

Pour en avoir une idée des "ordres" de ces approximations?

REMARQUES :

Les déformations résultant de la transformation $(x, y, z) \longrightarrow (\alpha, \beta, \zeta)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_{\alpha} = \frac{\varepsilon}{2} \\ \varepsilon'_{\beta} = \frac{\varepsilon}{2} \\ \varepsilon'_{\zeta} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma'_{\alpha\beta} = 0 \\ \gamma'_{\alpha\zeta} = 0 \\ \gamma'_{\beta\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

De même, les déformations résultant de la transformation infinitésimale $(\alpha, \beta, \zeta) \longrightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon''_{\xi\xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \varepsilon''_{\eta\eta} = \frac{\partial v}{\partial \beta} \\ \varepsilon''_{\zeta\zeta} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma''_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] \\ \gamma''_{\xi\zeta} = 0 \\ \gamma''_{\eta\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

L'état de déformation totale est le produit des états de déformation résultant des deux transformations précédentes.

Mais, (α, β, ζ) étant voisines de (ξ, η, ζ) , il est légitime de remplacer ce produit par la somme algébrique des déformations

à quel pt de vue

correspondantes, d'où les formules II,3. Ceci explique le caractère de linéarité des formules II,3 en ce qui concerne les dérivées de u et v par rapport à α et β .

Décomposition du tenseur déformation :

Le tenseur D peut être décomposé en la somme d'un tenseur isotrope D_i et d'un tenseur déviateur D_d :

$$D = D_i + D_d$$

avec :

$$D_i = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3} \end{vmatrix}$$

$$D_d = \begin{vmatrix} \frac{2\varepsilon_x - \varepsilon_y}{3} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \frac{2\varepsilon_y - \varepsilon_x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3} \end{vmatrix}$$

CHAPITRE III

RELATIONS CONTRAINTES - DEFORMATIONS

De même que pour les déformations, l'état de contrainte en un point (ξ, η, ζ) est défini par un "tenseur contrainte", noté C , décomposable en la somme d'un tenseur isotrope C_i et d'un tenseur déviateur C_d . Les notations employées, ainsi que la définition et la décomposition de l'état de contraintes, ne présentant aucun caractère d'originalité, nous nous limiterons, dans le présent chapitre, à relier les contraintes aux déformations par l'intermédiaire de la loi de HOOKE.

Loi de HOOKE :

Il est à remarquer que les déformations étant petites, la loi de HOOKE est applicable.

Cette loi exprime la proportionnalité des parties isotropes, et déviatoires, des tenseurs contrainte et déformation ; les coefficients de proportionnalité étant respectivement $(3\lambda + 2\mu)$ et 2μ . (λ et μ sont les coefficients de Lamé, caractéristiques du matériau utilisé).

Soit :

$$C_i = (3\lambda + 2\mu)D_i$$

$$C_d = 2\mu D_d$$

d'où les six relations suivantes :

$$\text{III,1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\xi} = \lambda (\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta}) + 2\mu \varepsilon_{\xi} \\ \sigma_{\eta} = \lambda (\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta}) + 2\mu \varepsilon_{\eta} \\ \sigma_{\zeta} = \lambda (\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\xi\eta} = 2\mu \gamma_{\xi\eta} \\ \tau_{\xi\zeta} = 0 \\ \tau_{\eta\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

En remplaçant les composantes de la déformation par leurs expressions tirées de II,3, nous obtenons les six relations contraintes - déformations cherchées, soit :

$$\text{III,2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\xi} = (\lambda + \mu) \varepsilon + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \sigma_{\eta} = (\lambda + \mu) \varepsilon + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \beta} \\ \sigma_{\zeta} = \lambda \left(\varepsilon + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \\ \tau_{\xi\eta} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ \tau_{\xi\zeta} = \tau_{\eta\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

CHAPITRE IV

EQUATIONS DE L'EQUILIBRE

Nous avons précédemment défini, et relié entre elles, les composantes des tenseurs déformation et contrainte. Ces composantes doivent, de plus, satisfaire aux équations de l'équilibre que nous allons écrire :

Equations de l'équilibre en contraintes :

Ces équations sont classiques ; elles s'écrivent dans le cas des déformations planes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + Y = 0 \end{cases}$$

X et Y étant les composantes suivant ξ et η de la force spécifique de volume.

Comme $d\xi$ et $d\eta$ sont voisines de $d\alpha$ et $d\beta$ respectivement, nous pourrons écrire :

IV,1

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \beta} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \alpha} + Y = 0 \end{cases}$$

*explication
ce que cela
signifie
avec et est
potentiel*

Equations de l'équilibre traduites en u et v :

En remplaçant, dans les équations IV,1, les contraintes par leurs expressions tirées de III,2, l'on obtient :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} + \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + X = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} + \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \right) + Y = 0 \end{cases}$$

Posons :

$$\theta = \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} = \varepsilon \xi + \varepsilon \eta + \varepsilon \zeta$$

θ est le coefficient de dilatation cubique (variation relative de volume).

Les équations ci-dessus s'écrivent alors :

$$\text{IV,2} \quad \begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + X = 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + Y = 0 \\ \theta = \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{cases}$$

Par la suite, nous supposerons $X = Y = 0$, ce qui revient à négliger les forces de volume devant les charges appliquées.

REMARQUE :

Considérons la transformation infinitésimale $(\alpha, \beta, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$; u et v sont les déplacements correspondant à cette transformation, et notons par θ' le coefficient de dilatation cubique, soit :

$$\theta' = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}$$

Le système d'équations IV,2 peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\lambda + \mu) \varepsilon] = 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta'}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} [(\lambda + \mu) \varepsilon] = 0 \end{cases}$$

Ces équations ne sont autres que les équations de Lamé, en présence de forces de volume dérivant d'un potentiel $V = (\lambda + \mu) \varepsilon$.

Vu la linéarité des équations IV,2, la solution générale sera la somme de la solution générale des équations de Lamé en l'absence de forces de volume et d'une solution particulière du système IV,2.

Forme particulière des équations de l'équilibre :

La solution générale des équations de Lamé, en l'absence de forces de volume, est connue, soit :

$$\text{IV, 3} \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \varphi_1 - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \varphi_3] \\ v' = \varphi_2 - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial \beta} [\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \varphi_3] \end{array} \right.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant des fonctions harmoniques de α et β . Il suffit donc de trouver une solution particulière des équations IV,2. Pour cela, nous chercherons des solutions de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ v = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial F}{\partial \beta} \end{array} \right.$$

En remplaçant dans IV,2, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\varepsilon - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\varepsilon - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right) \right] = 0 \end{array} \right.$$

soit :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = \varepsilon + c \frac{t}{r}$$

Nous choisirons la constante égale à zéro. Une forme particulière des équations IV,2 sera donc :

IV,4

$$\left\{ \begin{aligned} u &= - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ v &= - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} &= \varepsilon \end{aligned} \right.$$

mal écrit

La solution générale de IV,2 sera la somme d'une solution particulière de IV,4 et de la solution générale des équations de Lamé en l'absence de forces de volume (équations IV,3).

En fait, il est toujours possible de supposer

$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$, soit $u' = v' = 0$, et d'identifier ainsi les systèmes d'équations IV,2 et IV,4. En effet, la solution de IV,2 étant supposée unique pour des conditions aux limites données, il est possible de satisfaire ces conditions aux limites par ajustement des deux fonctions indéterminées qui interviennent dans la solution générale de IV,4, à savoir : ε et une fonction harmonique quelconque φ .

REMARQUE :

En "élasticité classique" (équations de Lamé), l'on suppose $\varepsilon = \varphi = 0$, d'où :

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \end{aligned}$$

ce qui suppose une forme finale voisine de la forme initiale.

Par contre, l'hypothèse $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, n'est nullement limitative. En particulier, il est possible de traiter les problèmes d'"élasticité classique" par les équations IV,4 aussi bien que par les équations de Lamé. La différence de forme entre ces équations provient de la définition des quantités u et v , qui, dans le cas de Lamé, sont les déplacements par rapport à l'état initial (x, y, z) et, qui, dans notre cas, sont les déplacements par rapport à l'état intermédiaire (α, β, ξ) précédemment défini.

Equations de l'équilibre écrite par rapport aux coordonnées initiales :

Les fonctions α et β étant harmoniques conjuguées, nous aurons :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)$$

$\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 \right]$ étant voisine de l'unité, le système IV,4 peut s'écrire :

$$\text{IV,5} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \\ v = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \varepsilon = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 - 1 \end{array} \right.$$

CHAPITRE V

SOLUTIONS GENERALES

L'objet du présent chapitre est de donner les solutions générales des équations IV,4 et IV,5, précédemment établies. Ces solutions exprimeront F en fonction de α et β , supposées connues, ou de x et y.

Rappelons que l'équation à laquelle doit satisfaire F s'écrit :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 - 1 = \varepsilon$$

ou :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = \varepsilon$$

Solutions 1 :

Remarquons que :

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left[\frac{A\alpha^2 + B\beta^2}{2(A+B)}\right]$$

et :

$$1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left[\frac{A_1 x^2 + B_1 y^2}{2(A_1 + B_1)}\right]$$

A, B, A₁ et B₁ étant des constantes.

Nous aurons donc :

$$v,1 \quad \left\{ F = \varphi + \frac{A\alpha^2 + B\beta^2}{2(A+B)} - \frac{A_1 x^2 + B_1 y^2}{2(A_1 + B_1)} \right.$$

φ désignant une fonction harmonique arbitraire.

Solutions 2 :

ε étant voisine de zéro, nous pourrons écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \text{Log}(1+\varepsilon) = \text{Log}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right] \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \varepsilon = \text{Log}(1+\varepsilon) \end{aligned} \right.$$

Or, α étant harmonique, il en sera de même de $\text{Log} \sqrt{1+\varepsilon}$ (si nous supposons $\text{Log} \sqrt{1+\varepsilon}$ analytique) ; et, nous pourrons donc écrire :

*pourquoi
parce que
log(1+ε)*

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Log} \sqrt{1+\varepsilon} &= \text{Re} \left[\frac{dA(z)}{dz} \right] \\ z &= x + iy \end{aligned} \right.$$

*a faire avec
not cela*

$\text{Re} \left[\frac{dA(z)}{dz} \right]$ désignant la partie réelle de la dérivée par rapport à z de la fonction (réelle ou complexe) A de la variable complexe z .

D'autre part, désignons par \bar{z} la conjuguée de z soit : $\bar{z} = x - iy$; et cherchons des solutions de la forme :

$$F(x,y) = \text{Re} \left[B(z, \bar{z}) \right]$$

Nous aurons :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re} \left[4 \frac{\partial^2 B(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} \right] = 2 \left[\frac{\partial^2 B}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \bar{z} \partial z} \right]$$

L'équation $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Log}(1 + \varepsilon)$ s'écrira :

$$\operatorname{Re} \left[4 \frac{\partial^2 B(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} - 2 \frac{dA(z)}{dz} \right] = 0$$

ou, en intégrant par rapport à z et \bar{z} :

$$\operatorname{Re} [B(z, \bar{z})] = \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{z}}{2} A(z) + C(z) + D(\bar{z}) \right]$$

soit :

$$V,2 \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x, y) = \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{z}}{2} A(z) + C(z) + D(\bar{z}) \right] \\ \operatorname{Log} \sqrt{1 + \varepsilon} = \operatorname{Re} \left[\frac{dA(z)}{dz} \right] = \varepsilon \end{array} \right. ?$$

C et D désignent des fonctions arbitraires.

??
..

tant de la même
reprise.

REMARQUE :

En partant de l'équation : $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = \varepsilon = \operatorname{Log}(1 + \varepsilon)$

et en posant : $\begin{cases} z = \alpha + i\beta \\ \bar{z} = \alpha - i\beta \end{cases}$

nous obtenons des solutions de la même forme que V,2, soit :

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta) = \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{z}}{z} A_1(z) + C_1(z) + D_1(\bar{z}) \right] \\ \operatorname{Log} \sqrt{1+\varepsilon} = \operatorname{Re} \left[\frac{dA_1(z)}{dz} \right] \end{cases}$$

C_1 et D_1 désignant des fonctions arbitraires.

Solutions 3 :

Comme précédemment, nous écrirons :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \varepsilon = \operatorname{Log}(1 + \varepsilon)$$

Supposons encore $\operatorname{Log}(1 + \varepsilon)$ analytique, et supposons connu son développement suivant les puissances croissantes de x ; ce développement étant uniformément convergent à l'intérieur d'un cercle R . Soit :

$$\operatorname{Log}(1 + \varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p(y) x^p$$

Or, $\operatorname{Log}(1 + \varepsilon)$ étant harmonique, il est possible d'exprimer toutes les fonctions $f_p(y)$ en fonction des dérivées de $f_0(y)$ et $f_1(y)$, et l'on obtient :

$$\operatorname{Log}(1 + \varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[f_0^{[2p]}(y) \frac{x^{2p}}{(2p)!} + f_1^{[2p]}(y) \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right]$$

$f_q^{[p]}$ désignant la $p^{\text{ème}}$ dérivée par rapport à y de $f_q(y)$.

La fonction F sera alors donnée par le développement suivant :

$$V,3 \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \varphi - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[f_0^{[2p-2]}(y) \frac{x^{2p}}{(2p)!} + f_1^{[2p-2]}(y) \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right] \end{array} \right.$$

φ désignant une fonction harmonique arbitraire.

De plus, à l'intérieur du cercle R, F sera analytique. En particulier, les dérivées de F seront données par les séries dérivées de la série définissant F.

Les fonctions $f_0(y)$ et $f_1(y)$ seront données en fonction de α et β par :

$$V,4 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0(y) = \left[\text{Log}(1+\epsilon) \right]_{x=0} = \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 - 1 \right]_{x=0} \\ f_1(y) = \left[\frac{\partial \text{Log}(1+\epsilon)}{\partial x} \right]_{x=0} = 2 \left[- \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right]_{x=0} \end{array} \right.$$

CHAPITRE VI

CONTRAINTES. CONDITIONS AUX LIMITES

Nous avons précédemment relié u et v à une fonction F et nous avons établi l'équation à laquelle devait satisfaire cette fonction (équation IV,4). Il nous faut maintenant exprimer les contraintes en fonction de F et établir les conditions aux limites en F .

Contraintes :

En remplaçant, dans les relations contraintes-déformations (équations III,2), ε , u et v par leurs expressions en fonction de F (équations IV,4), l'on obtient :

$$VI,1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\xi} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \\ \sigma_{\eta} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \\ \sigma_{\zeta} = \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\xi\eta} = -2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \tau_{\xi\zeta} = 0 \\ \tau_{\eta\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons qu'au facteur $2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$ près, F n'est autre que la fonction de contrainte, solution des équations de l'équilibre dans le cas de déformations planes. La fonction de

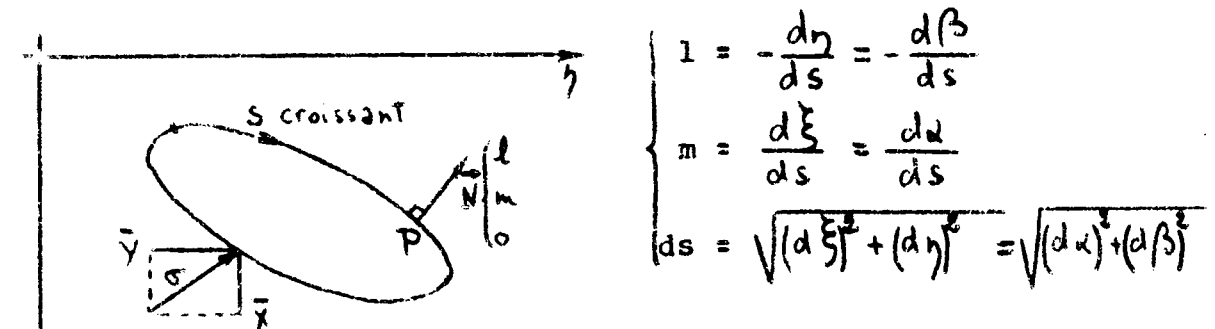
contrainte F n'est pas solution de l'équation d'Airy (fonctions biharmoniques), mais il est possible de montrer qu'elle satisfait à l'équation :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \left[e^{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right) \right] = 0$$

Cette dernière équation ne s'identifiant à l'équation d'Airy que si les coordonnées α et β sont voisines de x et y (élasticité classique).

Conditions aux limites en contraintes :

Considérons un point P situé sur le contour du solide et désignons par $\vec{N}(l, m, 0)$ la normale extérieure. Avec les conventions de la figure ci-contre, les cosinus directeurs $(l, m, 0)$ de la normale extérieure sont donnés par :



$$\left\{ \begin{aligned} l &= -\frac{d\eta}{ds} = -\frac{d\beta}{ds} \\ m &= \frac{d\xi}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \\ ds &= \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2} = \sqrt{(d\alpha)^2 + (d\beta)^2} \end{aligned} \right.$$

Désignons par \bar{X} et \bar{Y} les composantes, suivant ξ et η respectivement, de la contrainte appliquée au point P . Celle-ci devant équilibrer les contraintes intérieures, nous aurons :

$$V_{1,2} \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{X} &= l \sigma_{\xi} + m \tau_{\xi\eta} \\ \bar{Y} &= m \sigma_{\eta} + l \tau_{\xi\eta} \end{aligned} \right.$$

Remplaçons dans V,2, les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ par leurs expressions tirées de V,1 ; nous obtenons :

$$\begin{cases} \bar{x} = -2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \frac{d\beta}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\alpha}{ds} \right] \\ \bar{y} = +2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\beta}{ds} \right] \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} \bar{x} = -2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial F}{\partial \beta} \right] = 2\mu \frac{d\bar{y}}{ds} \\ \bar{y} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right] = -2\mu \frac{d\bar{x}}{ds} \end{cases}$$

Par intégration le long du contour, les équations VI,3 prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} u = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\mu} \int_0^s \bar{y}(s) ds + c_1 \\ v = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{1}{2\mu} \int_0^s \bar{x}(s) ds + c_2 \end{cases}$$

Remarquons que les intégrations, figurant dans les formules VI,4, s'effectuent le long du contour dans l'état final qui n'est connu que si les déplacements le sont. Il serait donc nécessaire de connaître ces derniers, ce qui constitue un cercle vicieux puisque c'est en partant des conditions aux limites VI,4 que nous espérons pouvoir les calculer. Pour lever cette difficulté, il est nécessaire d'écrire les formules précédentes en coordonnées (x,y) ; les intégrales étant alors

prises le long du contour initial connu a priori. Pour ainsi faire, remarquons que :

$$ds = \sqrt{(d\alpha)^2 + (d\beta)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2} \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 \right]$ étant voisine de l'unité, nous pourrions écrire :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds_\lambda$$

ds_λ étant l'élément de longueur sur le contour initial.

Les formules VI,4 s'écrivent alors :

$$VI,5 \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[\left(\int_0^{s_\lambda} \bar{Y} ds_\lambda + c^t \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \left(\int_0^{s_\lambda} \bar{X} ds_\lambda + c^t \right) \frac{\partial \beta}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[\left(\int_0^{s_\lambda} \bar{Y} ds_\lambda + c^t \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \left(\int_0^{s_\lambda} \bar{X} ds_\lambda + c^t \right) \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] \end{cases}$$

REMARQUE :

Les composantes \bar{X} et \bar{Y} dépendent à la fois de l'intensité de la contrainte appliquée, de son mode d'application et des déplacements. En général, elles ne seront pas connues a priori mais seront des fonctions données de x, y , de α, β et de leurs dérivées sur le contour. Il est cependant un cas pratique où \bar{X} et \bar{Y} sont connues en fonction de l'abscisse curviligne s_λ du contour initial ; à savoir le cas de contraintes appliquées, de supports et d'intensités donnés et dont les points d'application sont liés au solide dans sa déformation. Il est

alors possible d'effectuer les intégrales figurant dans les formules VI,5 et les conditions aux limites se réduisent à deux relations linéaires entre les dérivées premières de F , α et β .

Les formules VI,5 peuvent être mises sous forme complexe, soit :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[\left(\int_0^{s_i} \bar{\gamma} ds_i + c^{\text{te}} \right) + i \left(\int_0^{s_i} \bar{\chi} ds_i + c^{\text{te}} \right) \right] \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)$$

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(z) = \alpha + i\beta ; \quad z = x + iy ; \quad \bar{z} = x - iy \\ \Sigma(s_i) = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[\left(\int_0^{s_i} \bar{\gamma} ds_i + c^{\text{te}} \right) + i \left(\int_0^{s_i} \bar{\chi} ds_i + c^{\text{te}} \right) \right] \\ F(x, y) = \text{Re} \left[B(z, \bar{z}) \right] = \frac{1}{2} \left[B(z, \bar{z}) + \bar{B}(\bar{z}, z) \right] \end{array} \right.$$

Nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \frac{\partial F(z, \bar{z})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[B(z, \bar{z}) + \bar{B}(\bar{z}, z) \right] \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{dZ(z)}{dz} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\text{VI,6} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial F(z, \bar{z})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[B(z, \bar{z}) + \bar{B}(\bar{z}, z) \right] = \Sigma(s_i) \frac{dZ(z)}{dz} \end{array} \right.$$

CHAPITRE VII

PROBLEMES AUX LIMITES EN CONTRAINTES

Soit un corps, en état de déformation plane, soumis le long de son contour à des contraintes orientées suivant ξ et η et d'intensités \bar{X} et \bar{Y} connues.

Supposons qu'il nous soit possible de trouver une transformation conforme, transformant le domaine occupé par le corps en un domaine rectangulaire.

Soit :

$$z = x + i y \quad ; \quad z_1 = x_1 + i y_1$$

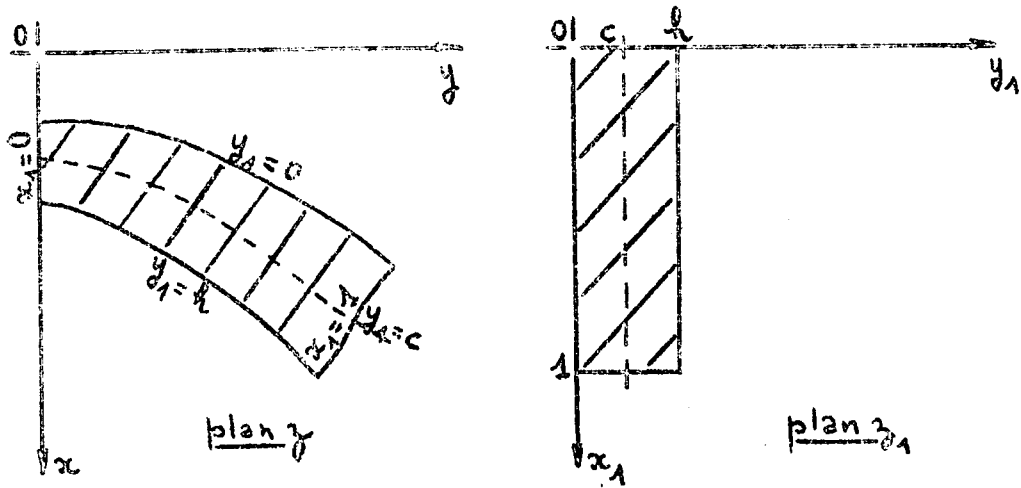
la transformation sera définie par :

$$z = f_1(z_1)$$

et le contour du corps sera décrit par :

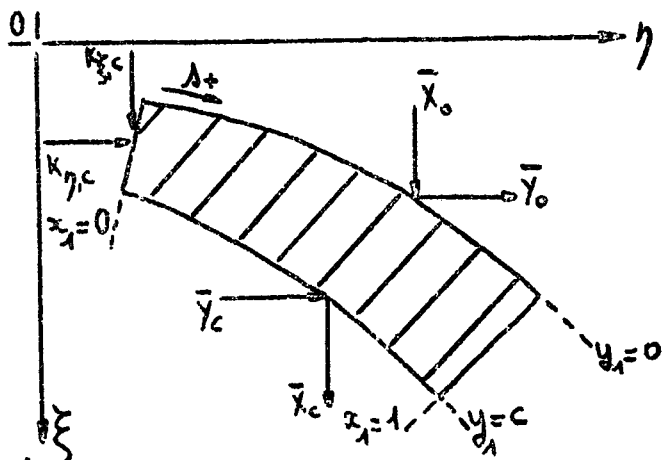
$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \quad ; \quad x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \quad ; \quad y_1 = h \end{array} \right.$$

h étant un nombre.



Nous dénommerons par section normale, toute section $x_1 = \text{cte.}$

Désignons par \bar{X}_0, \bar{Y}_0 les contraintes extérieures appliquées sur l'arc $y_1 = 0$, et par \bar{X}_c, \bar{Y}_c celles appliquées sur $y_1 = c$ (voir fig.)



Posons :

$$\left[\begin{aligned} \Sigma_0(x_1) &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \int_0^{x_1} (\bar{Y}_0 + i\bar{X}_0) \left| \frac{dz}{dz_1} \right| (x_1, 0) dx_1 \\ \Sigma_c(x_1) &= -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[\int_0^{x_1} (\bar{Y}_c + i\bar{X}_c) \left| \frac{dz}{dz_1} \right| (x_1, 0) dx_1 + K_c \right] \end{aligned} \right.$$

K_c est une constante complexe égale à :

$$K_c = K_{\eta,c} + i K_{\xi,c}$$

$K_{\xi,c}$ et $K_{\eta,c}$ = résultantes des contraintes suivant ξ et η respectivement, appliquées sur $x_1 = 0$ pour y_1 compris entre 0 et c.

Si les contraintes au contour sont connues, nous connaîtrons $\sum_c(x_1)$, $\sum_{\eta}(x_1)$ et K_c , (mais non $\sum_c(x_1)$).

Posons de plus :

$$F(x,y) = F_1(x_1,y_1)$$

$$A(z) = A_1(z_1)$$

$$C(z) = C_1(z_1)$$

$$D(z) = D_1(z_1)$$

$$Z(z) = \alpha + i\beta = z_1(z_1)$$

L'expression générale de $F(x,y)$ (formule V,2) s'écrit :

$$\text{VII,1} \quad F_1(x_1,y_1) = \text{Re} \left[\frac{\bar{b}_1(\bar{z}_1)}{2} A_1(z_1) + C_1(z_1) + D_1(\bar{z}_1) \right]$$

et sur une courbe $y_1 = c$, nous aurons : (formule VI,6) :

$$\text{VII,2} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 + ic \\ 2 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} = \sum_c(x_1) \frac{dZ(z_1)}{dz_1} \end{array} \right.$$

En remplaçant dans VII,2, $\frac{\partial f_1}{\partial z_1}$ par son expression dérivée de VII,1, et, en remarquant que sur $y_1 = c$, nous avons :

$$\bar{z}_1 = z_1 - 2ic ;$$

nous obtenons :

$$\text{VII,3} \left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 + ic \\ \frac{1}{2} \left[\bar{f}_1(z_1 - 2ic) \frac{dA_1(z_1)}{dz_1} + \frac{df_1(z_1)}{dz_1} \bar{A}_1(z_1 - 2ic) \right] + \\ + \frac{dC_1(z_1)}{dz_1} + \frac{d\bar{D}_1(z_1)}{dz_1} = \Sigma_c(z_1 - ic) \frac{dZ_1(z_1)}{dz_1} \end{array} \right.$$

Conditions aux limites sur $y_1 = 0$:

Les conditions sur $y_1 = 0$, seront identiquement satisfaites si :

$$\text{VII,4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_1(z_1)}{dz_1} + \frac{dD_1(z_1)}{dz_1} = \Sigma_0(z_1) \frac{dZ_1(z_1)}{dz_1} - \\ - \frac{1}{2} \left[\bar{f}_1(z_1) \frac{dA_1(z_1)}{dz_1} + \frac{df_1(z_1)}{dz_1} \bar{A}_1(z_1) \right] \end{array} \right.$$

$\Sigma_0(z_1)$ étant une fonction connue de z_1 .

Conditions sur $y_1 = h$:

Les conditions sur $y_1 = h$, seront satisfaites si f_1 , A_1 , Z_1 satisfont à :

$$\text{VII,5} \left\{ \begin{array}{l} \left[\bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(z_1 - 2ih) \right] \frac{dA_1(z_1)}{dz_1} + \left[\bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(z_1 - 2ih) \right] \frac{df_1(z_1)}{dz_1} + \\ + 2 \left[\Sigma_h(z_1 - ih) - \Sigma_0(z_1) \right] \frac{dZ_1(z_1)}{dz_1} = 0 \end{array} \right.$$

$\frac{dZ_1(z_1)}{dz_1}$ peut être exprimé en fonction de $\frac{dA_1(z_1)}{dz_1}$

En effet, par définition, nous avons :

$$\frac{dA(z)}{dz} = \text{Log} \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2} + i \overline{\text{Log} \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2}}$$

soit :

$$\frac{dA(z)}{dz} = \text{Log} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)$$

or :

$$\frac{dZ(z)}{dz} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

d'où :

$$\frac{dZ(z)}{dz} = e^{\frac{dA(z)}{dz}}$$

et :

$$\frac{dZ_1(z_1)}{dz_1} = \frac{df_1(z_1)}{dz_1} e^{\frac{1}{df_1} \cdot \frac{dA_1}{dz_1}}$$

La relation VII,5 s'écrit alors :

$$\text{VII,6} \left\{ \begin{aligned} & \left[\bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(z_1 - 2ih) \right] \frac{dA_1(z_1)}{dz_1} + \left[\bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(z_1 - 2ih) \right] \frac{df_1(z_1)}{dz_1} + \\ & + 2 \left[\sum_h (z_1 - ih) - \sum_0 (z_1) \right] \frac{df_1(z_1)}{dz_1} e^{\frac{1}{df_1} \cdot \frac{dA_1(z_1)}{dz_1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

Posons :

$$\text{VII,7} \left\{ \begin{aligned} \frac{d f_1(z_1)}{d z_1} &= f_2(z_1) + i f_3(z_1) \\ \frac{d A_1(z_1)}{d z_1} \frac{1}{\frac{d f_1(z_1)}{d z_1}} &= A_2(z_1) + i A_3(z_1) \\ \Sigma_1(z_1 - i h) - \Sigma_0(z_1) &= \Sigma_2(z_1) + i \Sigma_3(z_1) \end{aligned} \right.$$

$f_2, f_3, A_2, A_3, \Sigma_2, \Sigma_3$ étant des fonctions réelles de la variable complexe z_1 .

Nous aurons :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d \bar{f}_1(z_1)}{d z_1} &= f_2(z_1) - i f_3(z_1) \\ \frac{d \bar{A}_1(z_1)}{d z_1} &= [A_2(z_1) - i A_3(z_1)] [f_2(z_1) - i f_3(z_1)] \end{aligned} \right.$$

Nous supposons f_1 et A_1 développables dans le voisinage de tout point z_1 ; ce développement étant uniformément convergent à l'intérieur et sur un cercle de rayon $2h$ centré au point z_1 .

Si nous désignons alors par δ^p l'opérateur différentiel :

$$\delta^p = \frac{d^p}{d z_1^p} \quad ; \quad \text{avec} \quad \delta^0 = 1$$

nous aurons :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(z_1 - e i h) &= \frac{1 - e^{-e i h \delta}}{\delta} [f_2(z_1) - i f_3(z_1)] \\ \bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(z_1 - e i h) &= \frac{1 - e^{-e i h \delta}}{\delta} [A_2(z_1) - i A_3(z_1)] [f_2(z_1) - i f_3(z_1)] \end{aligned} \right.$$

l'équation VII,6 prend alors la forme :

$$\text{VII,8} \left\{ \begin{aligned} & (A_2 + i A_3) \frac{1 - e^{-2ih\delta}}{\delta} [f_2 - i f_3] + \\ & \frac{1 - e^{-2ih\delta}}{\delta} [(A_2 - i A_3)(f_2 - i f_3)] + \\ & + 2(\Sigma_2 + i \Sigma_3) e^{A_2} (\cos A_3 + i \sin A_3) = 0 \end{aligned} \right.$$

ou encore :

$$\text{VII,9} \left\{ \begin{aligned} & 2 A_2 \frac{1 - e^{-2ih\delta}}{\delta} [f_2 - i f_3] - \\ & - \sum_{p=1}^{\infty} \delta^p [A_2 - i A_3] \left\{ \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(2ih)^n}{n!} C_{n-1}^p \delta^{n-p-1} [f_2 - i f_3] \right\} + \\ & + 2(\Sigma_2 + i \Sigma_3) e^{A_2} (\cos A_3 + i \sin A_3) = 0 \end{aligned} \right.$$

C_n^p = nombre de combinaisons possibles de p objets pris dans un ensemble de n objets.

L'équation VII,9 peut être décomposée en deux relations, par séparation des fonctions réelles et imaginaires pures de z_1 , soit :

$$\text{VII,10} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1 - \cos 2h\delta}{h\delta} [f_2] + \frac{\sin 2h\delta}{h\delta} [f_3] \right] A_2 - \\ & - \sum_{p=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} & P_{2p} \frac{(2h)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p} [A_2] + P_{2p+1} \frac{(2h)^{2p+1}}{(2p+1)!} \delta^{2p+1} [A_2] + \\ & + Q_{2p} \frac{(2h)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p} [A_3] + Q_{2p+1} \frac{(2h)^{2p+1}}{(2p+1)!} \delta^{2p+1} [A_3] \end{aligned} \right] + \\ & + \frac{e^{A_2}}{h} (\Sigma_2 \cos A_3 - \Sigma_3 \sin A_3) = 0 \end{aligned} \right.$$

et une seconde équation se déduisant de VII,10 en remplaçant :

f_2 par $-f_3$, f_3 par f_2 , P par Q , Q par $-P$,

Σ_2 par Σ_3 , Σ_3 par $-\Sigma_2$.

Les fonctions P et Q sont données par :

$$\begin{aligned}
 & P_0 = 0 \\
 & Q_0 = 0 \\
 & P_{2p} = (-1)^{p+1} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left[\frac{(2h)^{2q}}{(2q)!} \frac{1}{2p+2q+1} \delta^{2q} [f_3] + \frac{(2h)^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{1}{2p+2q+2} \delta^{2q+1} [f_2] \right] \\
 & p \geq 1 \\
 & P_{2p+1} = (-1)^{p+1} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left[\frac{(2h)^{2q}}{(2q)!} \frac{1}{2p+2q+2} \delta^{2q} [f_2] - \frac{(2h)^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{1}{2p+2q+3} \delta^{2q+1} [f_3] \right] \\
 & p \geq 0
 \end{aligned}$$

Q_{2p} et Q_{2p+1} se déduisent respectivement de P_{2p} et P_{2p+1} en remplaçant f_2 par $-f_3$, f_3 par f_2 .

La déformation étant petite, les coefficients de Lamé : λ et μ sont nécessairement grands comparés aux contraintes dans le corps, donc $|\Sigma_c|$ est nécessairement petit comparé à f_2 ou f_3 . Il en résulte que $\frac{\Sigma_2}{h}$ et $\frac{\Sigma_3}{h}$ sont petits comparés aux fonctions P et Q. Des équations VII,10, l'on tire alors les conditions suivantes :

$$\text{VII,11} \left\{ \begin{array}{l} A_2 \simeq 0 \\ \frac{(2h)^p}{p!} \delta^p [A_2] \simeq 0 \quad p \gg 1 \\ \frac{(2h)^p}{p!} \delta^p [A_3] \simeq 0 \quad p \gg 1 \end{array} \right.$$

Seul A_3 peut différer de zéro, car elle n'intervient pas dans les équations VII,10. Or, nous verrons que A_3 n'est autre que la rotation d'une section normale $x_1 = \text{cte}$. Les relations VII,11 expriment donc que, dans le passage de l'état initial à l'état final, tous les points d'une section normale subissent approximativement la même rotation A_3 .

Posons :

$$\text{VII,12} \left\{ \begin{array}{l} A_2 = e^{A_2} (a_2 \cos A_3 + b_2 \sin A_3) \\ A_3 = e^{A_2} (a_3 \cos A_3 + b_3 \sin A_3) \end{array} \right.$$

a_2, b_2, a_3, b_3 étant des fonctions réelles de z_1 .

En dérivant p fois les relations VII,12, en multipliant par $\frac{(\varrho h)^p}{p!}$, et en tenant compte de VII,11, l'on obtient :

$$p \gg 1 \left\{ \begin{aligned} \frac{(\varrho h)^p}{p!} \delta^p [A_2] &= e^{A_2} \left[\delta^p [a_2] \cos A_3 + \delta^p [b_2] \sin A_3 \right] \frac{(\varrho h)^p}{p!} \\ \frac{(\varrho h)^p}{p!} \delta^p [A_3] &= e^{A_2} \left[\delta^p [a_3] \cos A_3 + \delta^p [b_3] \sin A_3 \right] \frac{(\varrho h)^p}{p!} \end{aligned} \right.$$

En remplaçant dans VII,10, et en égalant à zéro les coefficients de $\cos A_3$ et $\sin A_3$, l'on obtient un système de quatre équations différentielles linéaires par rapport à : a_2 , b_2 et leurs dérivées successives, et par rapport aux dérivées successives de a_3 et b_3 . La première équation de ce système s'écrit :

$$\text{VII,13} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1 - \cos \varrho h \delta}{h \delta} [f_2] + \frac{\sin \varrho h \delta}{h \delta} [f_3] \right) a_2 - \\ & - \sum_{p=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} & P_{2p} \frac{(\varrho h)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p} [a_2] + P_{2p+1} \frac{(\varrho h)^{2p+1}}{(2p+1)!} \delta^{2p+1} [a_2] + \\ & + Q_{2p} \frac{(\varrho h)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p} [a_3] + Q_{2p+1} \frac{(\varrho h)^{2p+1}}{(2p+1)!} \delta^{2p+1} [a_3] \end{aligned} \right] \\ & + \frac{\Sigma_2}{h} = 0 \end{aligned} \right. \quad +$$

Cette équation ne fait intervenir que a_2 et a_3 .

La seconde équation de ce système ne fait intervenir que a_2 et a_3 , et s'obtient en remplaçant dans VII,13 :

f_2 par $-f_3$, f_3 par f_2 , P par Q , Q par $-P$, Σ_2 par Σ_3 .

Les deux autres s'obtiennent en remplaçant dans les équations précédentes : a par b, Σ_2 par $-\Sigma_3$, Σ_3 par Σ_2 .

Nous avons ainsi ramené le problème à la résolution d'un système de quatre équations différentielles linéaires d'ordre infini. Ce système n'aura de sens, que si les séries, définies par (VII,13) et les équations qui s'en déduisent, sont convergentes.

Convergence :

Pour étudier la convergence de la série (VII,13), il suffit d'étudier la convergence des quatre séries dont elle est la somme, soit :

$$(1) \sum_{p=0}^{\infty} P_{2p} \frac{(zh)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p} [a_2] \quad ; \quad (2) \sum_{p=0}^{\infty} P_{2p+1} \frac{(zh)^{2p+1}}{(2p+1)!} \delta^{2p+1} [a_2]$$

$$(3) \sum_{p=0}^{\infty} Q_{2p} \frac{(zh)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p} [a_3] \quad ; \quad (4) \sum_{p=0}^{\infty} Q_{2p+1} \frac{(zh)^{2p+1}}{(2p+1)!} \delta^{2p+1} [a_3]$$

Etudions la convergence de la première série. Pour cela, remarquons que P_{2p} peut être majorée en module, en tout point z_1 , par :

$$|P_{2p}| \leq \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{q=0}^{\infty} \left[\frac{(zh)^{2q}}{(2q)!} |\delta^{2q} [f_3]| + \frac{(zh)^{2q+1}}{(2q+1)!} |\delta^{2q+1} [f_2]| \right]$$

Le développement de $f_1(z_1)$ (ou f_2 et f_3) étant uniformément convergent à l'intérieur et sur un cercle centré en z_1 et de rayon $2h$, nous aurons :

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left[\frac{(2h)^{2q}}{(2q)!} |\delta^{2q}[f_3]| + \frac{(2h)^{2q+1}}{(2q+1)!} |\delta^{2q+1}[f_2]| \right] \leq M$$

M étant fini.

Donc quand p tendra vers l'infini, P_{2p} tendra nécessairement vers zéro. Il nous sera donc possible de majorer, à partir d'une certaine valeur de p , soit $p = p_0$, les termes de la série (1) par :

$$\left| P_{2p} \frac{(2h)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p}[a_2] \right| \leq \left| \frac{(2h)^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p}[a_2] \right| ; \quad p \geq p_0$$

Or, la série figurant au second membre de l'inégalité ci-dessus, est nécessairement convergente, puisque le développement de A_1 (ou a_2, a_3, b_2, b_3) est uniformément convergent à l'intérieur et sur un cercle centré en z_1 et de rayon $2h$. Donc, la série (1) est uniformément convergente. Il est possible de démontrer, de la même façon, la convergence des séries (2), (3) et (4) donc, de la série VII,13 et des trois séries qui s'en déduisent.

Le système VII,13 possède donc un sens, et résolu, il permettra de déterminer a_2, a_3, b_2 et b_3 . Les solutions de ce système feront intervenir des constantes que nous déterminerons en écrivant les conditions aux limites sur $x_1 = 0$.

REMARQUE :

Sur $y_1 = 0$, nous avons $z_1 = x_1$ et :

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{dA_1(x_1)}{dx_1} \frac{1}{\frac{df_1(x_1)}{dx_1}} = A_2(x_1) + i A_3(x_1)$$

d'où :

$$\begin{cases} A_2(x_1) = \text{Log} \sqrt{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} \\ A_3(x_1) = \overline{\text{Log} \sqrt{1+\varepsilon}} \end{cases}$$

De plus,

$$\frac{dZ(z)}{dz} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} = e^{\frac{dA}{dz}} = e^{A_2(x_1)} (\cos A_3(x_1) + i \sin A_3(x_1))$$

$A_2(x_1)$ étant voisine de zéro, nous aurons :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_1, 0) = \cos A_3(x_1) \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_1, 0) = \sin A_3(x_1) \end{cases}$$

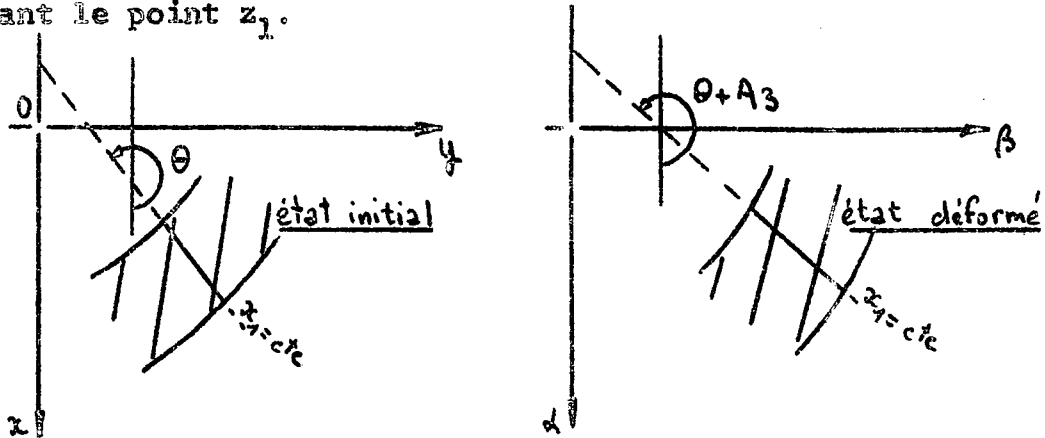
Si nous désignons par θ l'angle de la normale extérieure à la courbe $y_1 = 0$ avec l'axe des x (état initial), les cosinus directeurs de la normale extérieure à $y_1 = 0$ dans l'état déformé seront donnés par :

$$\begin{cases} l = -\frac{d\beta}{ds} = \cos(A_3 + \theta) \\ m = \frac{d\alpha}{ds} = \sin(A_3 + \theta) \end{cases}$$

Nous voyons que $A_3(x_1)$ n'est autre que l'angle de rotation de la normale extérieure à $y_1 = 0$ dans le passage de l'état initial à l'état final. Comme $h^p \delta^p [A_3]$ est voisin de zéro, nous aurons a fortiori $c^p \delta^p [A_3]$ voisin de zéro ($c \leq h$) et en tout point d'une section normale : (x_1, c) nous aurons :

$$A_3(z_1) \simeq A_3(x_1)$$

$A_3(z_1)$ n'est donc autre que la rotation de la section normale contenant le point z_1 .



D'autre part, sur $y_1 = 0$, $A_2(x_1) = \frac{\epsilon}{\epsilon_1}$ est l'allongement relatif dans le passage de l'état initial à l'état (α, β) .

Conditions sur $x_1 = 0$:

Désignons par \bar{X}'_0 et \bar{Y}'_0 les contraintes appliquées sur $x_1 = 0$; et posons :

$$\sum'_0(y_1) = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \int_0^{y_1} (\bar{Y}'_0 + i\bar{X}'_0) \left| \frac{dz_1}{dz_1} \right| (0, y_1) dy_1$$

Les conditions aux limites sur $x_1 = 0$, s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{z_1} = -\bar{z}_{z_1} = i y_1 \\ 2\mu \frac{\partial F_1}{\partial z_1} = \sum'_0(y_1) \frac{dz_1}{dz_1} \end{array} \right.$$

En tenant compte de VII,1 et VII,5, l'on obtient sur $x_1 = 0$:

$$\text{VII,14} \left\{ \begin{aligned} z_1 = -\bar{z}_1 = iy_1 \\ \left[\bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(-z_1) \right] \frac{dA_1(z_1)}{dz_1} \times \frac{1}{\frac{d\bar{f}_1(z_1)}{dz_1}} + \left[\bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(-z_1) \right] + \\ + 2 \left[\sum_0' (-iz_1) - \sum_0(z_1) \right] e^{\left(\frac{dA_1(z_1)}{dz_1} \times \frac{1}{\frac{d\bar{f}_1(z_1)}{dz_1}} \right)} = 0 \end{aligned} \right.$$

Les fonctions $\left[\bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(-z_1) \right]$ et $\left[\bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(-z_1) \right]$

étant impaires, nous aurons au point $z_1 = 0$:

$$\text{VII,15} \left\{ \begin{aligned} \bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(-z_1) = 0 & ; \bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(-z_1) = 0 \\ \delta^{2p} [\bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(-z_1)] = 0 & ; \delta^{2p} [\bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(-z_1)] = 0 \\ \delta^{2p+1} [\bar{f}_1(z_1) - \bar{f}_1(-z_1)] = \delta^{2p+1} [\bar{f}_1(z_1)] \\ \delta^{2p+1} [\bar{A}_1(z_1) - \bar{A}_1(-z_1)] = 2\delta^{2p+1} [\bar{A}_1(z_1)] \end{aligned} \right.$$

D'autre part, nous avons :

$$\frac{dA_1(z_1)}{dz_1} \times \frac{1}{\frac{d^p f_1(z_1)}{dz_1^p}} = A_2 + i A_3$$

et comme $\frac{h^p}{p!} S^p [A_2]$ et $\frac{h^p}{p!} S^p [A_3]$ sont voisines de zéro pour $p \gg 1$, nous aurons :

$$\text{VII,16} \quad \left\{ \frac{h^p}{p!} S^p \left[e \left(\frac{dA_1}{dz_1} \times \frac{1}{\frac{d^p f_1}{dz_1^p}} \right) \right] \approx 0 \right.$$

En dérivant n fois la formule VII,14, en égalant z_1 à zéro ($x_1 = y_1 = 0$), en multipliant par $\frac{h^n}{n!}$ et en tenant compte de VII,15 et VII,16, l'on obtient :

- pour $n = 1$

$$\text{VII,17} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ 2A_2 \left(\frac{p}{h} - i \frac{p}{h} \right) + h \int \left[\frac{\sum_0' (-i z_1) - \sum_0(z_1)}{h} \right] e^{A_2} (\cos A_3 + i \sin A_3) = 0 \end{array} \right.$$

- pour n pair, $n = 2p$, $p \gg 1$

$$\text{VII,18} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{2q+1} \left[\frac{h^{2q}}{(2q)!} S^{2q} \left[\frac{p}{h} - i \frac{p}{h} \right] \frac{h^{2p-2q-1}}{(2p-2q-1)!} S^{2p-2q-1} [A_2 + i A_3] \right] + \\ \frac{h^{2p}}{(2p)!} S^{2p} \left[\frac{\sum_0' (-i z_1) - \sum_0(z_1)}{h} \right] e^{A_2} (\cos A_3 + i \sin A_3) = 0 \end{array} \right.$$

- pour n impair, $n = 2p + 1$, $p \geq 1$

VII,19

$$\left. \begin{aligned}
 & z_1 = 0 \\
 & \sum_{q=0}^p \frac{1}{2^{p+1}} \frac{h^{2q}}{(2q)!} \int_{b_2-i b_3}^{b_2+i b_3} \frac{h^{2p-2q}}{(2p-2q)!} \int_{-2q}^{2q} \left[\frac{2p+2q+2}{2q+1} A_2 + i \frac{2p-2q}{2q+1} A_3 \right] + \\
 & + \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{2^{p+1}} \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \int_{b_2-i b_3}^{b_2+i b_3} \frac{h^{2p-2q-1}}{(2p-2q-1)!} \int_{-2q-1}^{2q-1} [A_2 - i A_3] + \\
 & + \frac{h^{2p+1}}{(2p+1)!} \int_{-2p-1}^{2p+1} \left[\frac{\sum_1 (-i z_1) - \sum_0 (z_1)}{h} \right] e^{A_2} (\cos A_3 + i \sin A_3) = 0
 \end{aligned} \right\}$$

En séparant dans les relations précédentes, les fonctions réelles et les fonctions imaginaires pures, nous obtenons un système de six équations en A_2 et A_3 . En remplaçant dans ce système A_2 et A_3 par leurs expressions VII,12, et en égalant à zéro les coefficients de $\cos A_3$ et $\sin A_3$, l'on obtient un système de douze équations en a_2, a_3, b_2, b_3 (six équations en a_2 et a_3 , et six équations en b_2 et b_3).

En posant :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_0^1 (-i z_1) - \sum_0 (z_1) = \sum_2^1 (z_1) + i \sum_3^1 (z_1) \\
 & \sum_2^1 \text{ et } \sum_3^1 \text{ étant des fonctions réelles de } z_1.
 \end{aligned} \right.$$

Le système s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & 2 a_2 \frac{\rho}{2} + h \sum \left[\frac{\Sigma_2^1}{h} \right] = 0 \\
 & \text{et, pour } p \geq 1 \\
 & \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{2^{q+1}} \left[\frac{h^{2q}}{(2q)!} \delta^{2q} \left[\frac{\rho}{h_2} \right] \frac{h^{2p-2q-1}}{(2p-2q-1)!} \delta^{2p-2q-1} [a_2] + \frac{h^{2q}}{2^q!} \left[\frac{\rho}{h_3} \right] \frac{h^{2p-2q-1}}{(2p-2q-1)!} \delta^{2q-1} [a_3] \right] \\
 & \quad + \frac{h^{2p}}{(2p)!} \delta^{2p} \left[\frac{\Sigma_2^1}{h} \right] = 0 \\
 & \text{VII, 20 } \left\{ \begin{aligned} & \sum_{q=0}^p \frac{1}{2^{p+1}} \left[\frac{h^{2q}}{(2q)!} \delta^{2q} \left[\frac{\rho}{h_2} \right] \frac{h^{2p-2q}}{(2p-2q)!} \delta^{2p-2q} \left[\frac{2p+2q+2}{2q+1} a_2 \right] + \frac{h^{2q}}{(2q)!} \delta^{2q} \left[\frac{\rho}{h_3} \right] \frac{h^{2p-2q}}{(2p-2q)!} \delta^{2p-2q} \left[\frac{2p-2q}{2q+1} a_3 \right] \right] + \\ & + \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{2^{p+1}} \left[\frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \delta^{2q+1} \left[\frac{\rho}{h_2} \right] \frac{h^{2p-2q-1}}{(2p-2q-1)!} \delta^{2p-2q-1} [a_2] - \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \delta^{2q+1} \left[\frac{\rho}{h_3} \right] \frac{h^{2p-2q-1}}{(2p-2q-1)!} \delta^{2p-2q-1} [a_3] \right] + \\ & \quad + \frac{h^{2p+1}}{(2p+1)!} \delta^{2p+1} \left[\frac{\Sigma_2^1}{h} \right] = 0 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Les trois autres équations en a, s'obtiennent en remplaçant dans les trois équations ci-dessus :

$$f_2 \text{ par } -f_3, f_3 \text{ par } f_2, \Sigma_2^1 \text{ par } \Sigma_3^1.$$

Les six équations en b s'obtiennent à partir des six équations en a, en remplaçant :

$$a \text{ par } b, \Sigma_2^1 \text{ par } -\Sigma_3^1, \Sigma_3^1 \text{ par } \Sigma_2^1.$$

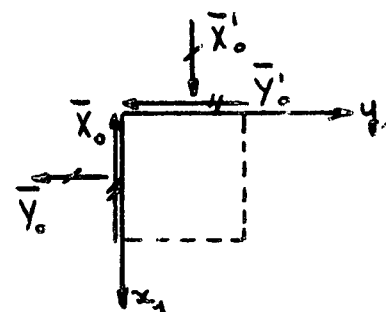
La première des équations VII,20 et les trois équations qui s'en déduisent par les transformations précédentes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_2 f_2 + h \delta \left[\frac{\Sigma'_2}{h} \right] = 0 \\ -2a_2 f_3 + h \delta \left[\frac{\Sigma'_3}{h} \right] = 0 \\ 2b_2 f_2 - h \delta \left[\frac{\Sigma'_3}{h} \right] = 0 \\ -2b_2 f_3 + h \delta \left[\frac{\Sigma'_2}{h} \right] = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} a_2 = \frac{\delta [\Sigma'_3]}{2f_3} = -\frac{\delta [\Sigma'_2]}{2f_2} \\ b_2 = \frac{\delta [\Sigma'_3]}{2f_2} = \frac{\delta [\Sigma'_2]}{2f_3} \end{array}$$

Ces équations exigent que :

$$\text{au point } z_1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta [\Sigma'_2] = \delta [\Sigma'_3] = 0 \\ a_2(0) = b_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$z_1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0(0) = \bar{Y}'_0(0) \\ \bar{Y}_0(0) = -\bar{X}'_0(0) \end{array} \right.$$


L'état de contrainte au point $z_1 = 0$ doit être déviatoire pur.

De plus, il est à remarquer que les équations VII,20 ne déterminent pas A_3 (a_3 et b_3). Cependant A_3 n'intervenant que par ses dérivées dans l'équation VII,13, nous pourrions fixer A_3 arbitrairement au point $z_1 = 0$; ce qui revient à effectuer une rotation d'ensemble du corps. Ceci ne change en rien l'état de contrainte et de déformation.

La seconde des relations VII,20 et les trois équations qui s'en déduisent par les transformations précédentes ne font intervenir que les dérivées d'ordre impair de a et b, et sont linéaires par rapport à ces dérivées. En faisant successivement $p = 1, 2, 3 \dots$ dans ces relations, il est possible de calculer les dérivées successives d'ordre impair de a et b.

En pratique, il suffit de calculer les dérivées d'ordre impair de a_3 . Celles de a_2 s'en déduisent en changeant f_2 en $-f_3$ et f_3 en f_2 ; et celles de b_2 et b_3 en changeant Σ_2^1 en $-\Sigma_3^1$ et Σ_3^1 en Σ_2^1 .

A titre d'exemple, nous avons calculé les dérivées première et troisième de a_3 au point $z_1 = 0$, soit :

$$\begin{aligned}
 \text{VII,22} \quad \left\{ \begin{aligned}
 S[a_3] &= -\frac{f_2 S^2[\Sigma_3^1] + f_3 S^2[\Sigma_2^1]}{2(f_2^2 + f_3^2)} \\
 S^3[a_3] &= -\frac{f_2 S^4[\Sigma_3^1] + f_3 S^4[\Sigma_2^1]}{4(f_2^2 + f_3^2)} + \frac{2f_2 f_3 S^2[P_1] - (f_2^2 - f_3^2) S^2[P_2]}{2(f_2^2 + f_3^2)} S^2[\Sigma_2^1] + \\
 &\quad + \frac{2f_2 f_3 S^2[P_3] + (f_2^2 - f_3^2) S^2[P_4]}{2(f_2^2 + f_3^2)} S^2[\Sigma_3^1]
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Connaissant les dérivées d'ordre impair de a et b, la troisième des équations VII,20 et les trois équations qui s'en déduisent, permettent de calculer les dérivées d'ordre pair de a et b. Il suffit pour cela, de faire successivement $p = 1, 2, 3 \dots$

Pour $p = 1$, par exemple, nous trouvons les dérivées secondes de a et b , soit :

$$\text{VII,23} \left\{ \begin{aligned} \delta^2[a_1] &= - \frac{P_2 \delta^3[\Sigma'_1] - P_3 \delta^3[\Sigma'_3] - \delta[P_2] \delta^2[\Sigma'_2] + \delta[P_3] \delta^2[\Sigma'_3]}{4(P_2^2 + P_3^2)} \\ \delta^2[a_3] &= - \frac{P_2 \delta^3[\Sigma'_3] + P_3 \delta^3[\Sigma'_2] + \delta[P_2] \delta^2[\Sigma'_3] + \delta[P_3] \delta^2[\Sigma'_2]}{2(P_2^2 + P_3^2)} \end{aligned} \right.$$

Les dérivées secondes de b_2 et b_3 s'obtiennent en remplaçant Σ'_2 par $-\Sigma'_3$ et Σ'_3 par Σ'_2 .

Position du problème :

Nous avons établi un système de quatre équations différentielles, linéaires en a_2 , a_3 , b_2 et b_3 (formules VII,13), valable en tout point du domaine occupé par le corps, et vérifiant les conditions aux limites sur $y_1 = 0$ et $y_1 = h$. Ce système se divise en deux groupes de deux équations : un premier groupe ne faisant intervenir que a_2 et a_3 , et un second groupe où n'intervient que b_2 et b_3 , et qui se déduit du premier en remplaçant a_2 par b_2 , a_3 par b_3 , Σ'_2 par $-\Sigma'_3$, et Σ'_3 par Σ'_2 .

Nous avons ensuite écrit les conditions aux limites sur $x_1 = 0$. Ceci nous a permis d'obtenir un système d'équations linéaires (formules VII,20) qui se divise encore en deux groupes : un premier groupe ne faisant intervenir que a_2 et a_3 et permettant le calcul des dérivées successives de a_2 et a_3 au point $z_1 = 0$, et un second groupe où n'intervient que b_2 et b_3 et qui se déduit du premier en remplaçant a_2 par b_2 , a_3 par b_3 , Σ'_2 par $-\Sigma'_3$, Σ'_3 par Σ'_2 .

Les équations différentielles VII,13 et les conditions aux limites VII,20, se scindant en deux groupes ne faisant intervenir respectivement que a_2, a_3 ou b_2, b_3 , il suffira de résoudre le problème pour a_2, a_3 . Pour obtenir b_2 et b_3 , il suffira de remplacer dans les expressions de a_2 et a_3 : \sum_2 par $-\sum_3$, \sum_3 par \sum_2 , \sum_2' par $-\sum_3'$ et \sum_3' par \sum_2' .

Le problème se résume donc à la recherche de deux fonctions a_2 et a_3 satisfaisant aux équations VII,13 et prenant, ainsi que leurs dérivées successives, au point $z_1 = 0$ des valeurs données (formules VII,20).

Les équations différentielles VII,13 sont d'ordre infini. Cependant, avec les hypothèses faites sur $A_1(z_1)$ et $f_1(z_1)$, nous avons montré que les séries VII,13 sont convergentes, et il nous est donc possible de limiter ces séries à un ordre n fini. Il est à remarquer que n est inconnu a priori, puisqu'il dépend de la rapidité de convergence du développement de $A_1(z_1)$, qui est inconnu a priori. A défaut de pouvoir fixer n , nous allons établir des conditions nécessaires qui fourniront une valeur minimale de n pour un corps de forme donné.

Sur $x_1 = 0$, divisons l'intervalle $0 \leq y_1 \leq h$ en n_0 intervalles de longueur $\frac{h}{n_0}$, et choisissons n_0 tel que $\frac{h}{n_0}$ soit voisine de zéro. Sur l'un quelconque de ces intervalles, si nous remplaçons la répartition réelle de contraintes par une répartition statiquement équivalente, le principe de Saint-Venant nous permet d'affirmer que les contraintes et les déplacements ne varieront que très peu à des distances grandes par rapport à $\frac{h}{n_0}$. En iterant la même opération sur les n_0 intervalles, il nous sera donc possible de remplacer toute répartition réelle de contraintes sur $x_1 = 0$, par une répartition statiquement

équivalente sur les n_0 intervalles considérés et produisant approximativement le même effet dans le corps (à l'exception du voisinage de $x_1 = 0$ qui nous intéresse peu en pratique). Or, pour obtenir une répartition statiquement équivalente sur les n_0 intervalles, il suffit de choisir une répartition dont les dérivées d'ordre supérieur à n_0 soient telles que :

$$\frac{h^p}{p!} s^p [\bar{x}'] \quad \text{et} \quad \frac{h^p}{p!} s^p [\bar{y}'] \quad \text{soient négligeables}$$

pour $p > n_0$, les dérivées d'ordre inférieur ou égal à n_0 étant alors déterminées par les conditions de moments et de résultantes sur les n_0 intervalles.

Revenons à l'équation VII,13 et limitons à un ordre n . Nous ne pourrions alors fixer que les $(n - 1)$ premières dérivées de a_2 et a_3 au point $z_1 = 0$. Cela signifie que deux répartitions de contraintes (\bar{X}', \bar{Y}') et (\bar{X}'', \bar{Y}'') ne différant que par leurs dérivées d'ordre supérieur ou égal à n au point $z_1 = 0$ (donc fixant les mêmes valeurs en $z_1 = 0$ pour les dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ de a_2 et a_3) fourniront la même solution et produiront donc le même effet en tout point du corps. Ceci n'est possible que si :

$$(1) \quad \frac{h^p}{p!} s^p [\bar{x}'], \frac{h^p}{p!} s^p [\bar{x}''], \frac{h^p}{p!} s^p [\bar{y}'], \frac{h^p}{p!} s^p [\bar{y}'']$$

sont négligeables, pour $p \gg n$.

Or, ces dernières conditions ne peuvent être satisfaites que si :

$$n \gg n_0 + 1$$

Ceci est une première condition nécessaire, à laquelle doit satisfaire n .

D'autre part, pour pouvoir limiter à l'ordre n , il est nécessaire que les termes tels que $\frac{h^p}{p!} S^p[a_2]$, $\frac{h^p}{p!} S^p[a_3]$ soient négligeables en tout point du corps pour $p > n$.

Donc, au point $z_1 = 0$, nous devons satisfaire ces dernières conditions et les conditions (1). Les relations VII,20 exigent alors que les termes tels que :

$$\frac{h^q}{q!} S^q[f_2] \frac{h^{p-q}}{(p-q)!} S^{p-q}[a_2] \text{ soient négligeables pour } p \gg n,$$

quand q varie entre 0 et p . Il devra en être de même pour les termes obtenus en remplaçant f_2 par f_3 ou a_2 par a_3 . Connaissant au point $z_1 = 0$, les dérivées successives de f_2 , f_3 , a_2 et a_3 , il est possible de trouver une valeur de n telle que les conditions précédentes soient satisfaites. Soit n_1 cette valeur, nous aurons $n \gg n_1$.

Nous obtenons ainsi une seconde condition nécessaire.

Il existe une troisième condition nécessaire faisant intervenir les contraintes appliquées sur $y_1 = 0$ et $y_1 = h$. En effet, si nous limitons à un ordre n , il est possible par dérivations successives des équations VII,13, d'obtenir un système d'équations où n'interviennent que des dérivées d'ordre supérieur à n de a_2 et a_3 . Or, $\frac{h^p}{p!} S^p[a_2]$, $\frac{h^p}{p!} S^p[a_3]$ étant négligeables pour $p > n$, nous obtiendrons ainsi des conditions sur les dérivées de Σ_2 et Σ_3 . La répartition de contraintes devra donc satisfaire à certaines conditions, que nous établirons ultérieurement dans des cas particuliers. Pour satisfaire ces conditions, nous verrons que n doit nécessairement être supérieur ou égal à une valeur n_2 ; n devra donc être supérieur ou égal à la plus grande des trois valeurs $(n_0 + 1)$, n_1 et n_2 .

Le problème se résume alors à la recherche de deux fonctions a_2 et a_3 satisfaisant aux équations VII,13 limitées à l'ordre n et prenant ainsi que leurs dérivées successives, au point $z_1 = 0$, des valeurs données par VII,20. Dans l'équation VII,20, il sera nécessaire de remplacer les contraintes réelles, représentées par Σ_2^1 et Σ_3^1 ; par une répartition de contraintes, sur $x_1 = 0$, statiquement équivalente sur les n_0 intervalles et dont les dérivées d'ordre supérieur à n_0 sont négligeables.

La connaissance de a_2, a_3, b_2 et b_3 permet de calculer les contraintes et les déplacements en tout point. En effet, a_2, a_3, b_2 et b_3 déterminent uniquement A_2 et A_3 (formules VII,12),

d'où :
$$\frac{dA_1}{dz_1} = (A_2 + iA_3)(f_2 + if_3)$$

$\frac{dA_1}{dz_1}$ permet :

- d'une part de calculer
$$\frac{dZ}{dy} = e \frac{dA_1}{dz_1} \times \frac{1}{\frac{df_1}{dz_1}} ; \text{ d'où}$$

par intégration :

$$Z = \alpha + i\beta$$

- d'autre part, par intégration, d'obtenir $A_1(z_1)$ d'où :

$$\left[\frac{dC_1(z_1)}{dz_1} + \frac{d\bar{D}_1(z_1)}{dz_1} \right] \text{ (formule VII,4), d'où } \frac{\partial F_1}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial F}{\partial z}$$

Les déplacements u et v par rapport à la position (α, β) , ainsi que les contraintes sur une courbe quelconque, sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u - iv = -2 \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{(formule VI,4)} \\ \Sigma(A_i) = 2 \frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{(formule VI,6).} \end{array} \right.$$

REMARQUE :

Les valeurs à donner à n_0 et n_1 dépendent évidemment de la précision recherchée. En ce qui concerne n_0 , il est généralement admis, en résistance des matériaux, que l'on peut remplacer une répartition de contrainte par une répartition statiquement équivalente, sur l'extrémité d'une poutre, si le rapport épaisseur sur longueur est de l'ordre de $1/10$ à $1/20$. Ceci nous permettra en général de choisir n_0 . Quant à n_1 il dépend de la forme de la poutre puisqu'il fait intervenir f_2 et f_3 (c'est-à-dire le rapport épaisseur sur rayon de courbure de la fibre moyenne et la variation de l'épaisseur).

Méthodes de résolution des équations VII,13 :

Ces équations étant linéaires, il existe de nombreux procédés d'intégration. Nous nous contenterons de les énumérer :

1°) Méthodes reposant sur le calcul des résidus : Galerkin, Ritz.

2°) Méthode des perturbations

3°) Méthode de réversion

4°) Méthode de Frobenius (polynomes à coefficients indéterminés)

5°) Méthode reposant sur la transformation de Laplace

6°) Méthode de Cauchy : calcul des dérivées successives au point $z_1 = 0$

7°) Méthodes numériques.

IIème PARTIE

APPLICATIONS AUX CORPS
DE FORME ALLONGEE.

CHAPITRE VIII

CORPS DE FORME ALLONGEE

Dans le présent chapitre, nous nous intéresserons aux arcs pour lesquels le rapport épaisseur maximum sur longueur est tel que les contraintes sur $x_1 = 0$ puissent être remplacées par une répartition statiquement équivalente, sans modifications notables des contraintes et déformations dans le corps. En pratique, cela est réalisé si ce rapport n'exède pas 1/10. Pour de tels arcs, nous aurons $n_0 = 1$, et Σ'_2, Σ'_3 seront remplacées par des polynomes du second degré, soit :

$$\delta^p[\Sigma'_2] = \delta^p[\Sigma'_3] = 0 \quad \text{pour } p \geq 3.$$

De plus, nous supposons :

- $h^2(\delta[f_2])^2, h^2(\delta[f_3])^2$ négligeables comparées à f_2^2 ou f_3^2
- $h^p \delta^p[f_2], h^p \delta^p[f_3]$ négligeables pour $p \geq 2$, comparées à f_2 ou f_3
- $h^2(\delta[\Sigma_2])^2, h^2(\delta[\Sigma_3])^2$ négligeables comparées à Σ_2^2 ou Σ_3^2
- $h^p \delta^p[\Sigma_2], h^p \delta^p[\Sigma_3]$ négligeables pour $p \geq 2$, comparées à Σ_2 ou Σ_3 .

Nous verrons, ultérieurement, la signification physique de ces hypothèses.

En tenant compte de ces hypothèses et des relations VII,22 et VII,23, nous voyons que pour $p \geq 2$, les quantités telles que :

$$\frac{h^q}{q!} \delta^q [f] \frac{h^{p-q}}{(p-q)!} \delta^{p-q} [a] \quad \text{sont négligeables.}$$

Nous aurons donc :

$$n = n_0 + 1 = n_1 = n_2 = 2.$$

En combinant alors les équations VII,13 et en posant :

$$\begin{cases} K_1 = f_2^2 + f_3^2 \\ K_2 = h (f_3 \delta [f_2] - f_2 \delta [f_3]) \end{cases}$$

l'on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & 2 a_2 (K_1 + K_2) - 2 h \delta [a_2] \frac{h}{3} \delta [K_1] - \frac{(2h)^2}{2!} \delta^2 [a_2] \left(\frac{K_1}{3} + \frac{K_2}{2} \right) - \\ & - 2 h \delta [a_3] \left(\frac{K_2}{2} + \frac{2K_1}{3} \right) + \frac{(2h)^2}{2!} \delta^2 [a_3] \frac{h}{4} \delta [K_1] + \\ & + \frac{1}{h} (\Sigma_2 f_3 + \Sigma_3 f_2) = 0 \\ & \text{VIII,1} \left[\begin{aligned} & a_2 h \delta [K_1] + 2 h \delta [a_2] \left(\frac{K_1}{2} + \frac{2K_2}{3} \right) - \frac{(2h)^2}{2!} \delta^2 [a_2] \frac{h}{4} \delta [K_1] - \\ & - 2 h \delta [a_3] \frac{h}{3} \delta [K_1] - \frac{(2h)^2}{2!} \delta^2 [a_3] \left(\frac{K_1}{3} + \frac{K_2}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{h} (\Sigma_2 f_2 - \Sigma_3 f_3) = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

En dérivant deux fois les équations VIII,1, et, en multipliant par h^2 , l'on montre que l'on peut négliger les quantités :

$$\left[\begin{array}{l} (K_1 + K_2) h^e \delta^e [a_2] \\ h \delta [K_1] h \delta [a_2] \\ (h \delta [K_1 + K_2]) h^e \delta^2 [a_3] \end{array} \right.$$

Les équations VIII,1 s'écrivent alors :

$$\text{VIII,2} \left\{ \begin{array}{l} 2 a_2 (K_1 + K_2) - 2 h \delta [a_3] \left(\frac{K_1}{2} + \frac{2 K_2}{3} \right) + \frac{1}{h} (\Sigma_2 f_3 + \Sigma_3 f_2) = 0 \\ a_2 h \delta [K_1] + 2 h \delta [a_2] \left(\frac{K_1}{2} + \frac{2 K_2}{3} \right) - 2 h \delta [a_3] \frac{h}{3} \delta [K_1] - \\ - \frac{(2h)^2}{2!} \delta^2 [a_3] \left(\frac{K_1}{3} + \frac{K_2}{2} \right) + \frac{1}{h} (\Sigma_2 f_2 - \Sigma_3 f_3) = 0 \end{array} \right.$$

En éliminant a_2 entre ces relations, et en remarquant que $h \delta [K_2]$ est négligeable comparée à K_1 , ainsi que K_2^e comparée à K_1^e , l'on obtient :

$$\text{VIII,3} \left\{ \begin{array}{l} \delta [a_3] (K_1 \delta [K_2 - K_1] - 2 K_2 \delta [K_1]) - \delta^e [a_3] (K_1^e + 3 K_1 K_2) - \\ - h (3 K_1 + 7 K_2) \delta \left[\frac{\Sigma_2 f_3 + \Sigma_3 f_2}{h^3} \right] + 6 (K_1 + 2 K_2) \frac{\Sigma_2 f_2 - \Sigma_3 f_3}{h^3} = 0 \\ 2 a_2 = \frac{1}{K_1 + K_2} \left[2 h \delta [a_3] \left(\frac{K_1}{2} + \frac{2 K_2}{3} \right) - \frac{\Sigma_2 f_3 + \Sigma_3 f_2}{h} \right] \end{array} \right.$$

Pour obtenir les relations en b_2 et b_3 , il suffit de remplacer dans VIII,3 :

$$\begin{aligned} a & \text{ par } b \\ \Sigma_2 & \text{ par } - \Sigma_3 \\ \Sigma_3 & \text{ par } \Sigma_2. \end{aligned}$$

Cas particulier. Arcs minces :

En plus des conditions indiquées au début du chapitre, supposons :

- K_2 négligeable comparée K_1 ,
- $h \delta [\Sigma_2], h \delta [\Sigma_3]$ négligeables comparées à Σ_2 ou Σ_3 .

La première des équations VIII,3 s'écrit :

$$\delta \left[(b_2^2 + b_3^2) \delta [a_3] \right] = 6 \frac{\Sigma_2 b_2 - \Sigma_3 b_3}{h^3}$$

De même :

$$\delta \left[(b_2^2 + b_3^2) \delta [b_3] \right] = -6 \frac{\Sigma_2 b_3 + \Sigma_3 b_2}{h^3}$$

D'où :

$$\text{VIII,4} \left\{ \delta \left[(b_2^2 + b_3^2) \delta [A_3] \right] = 6 \frac{(\Sigma_2 b_2 - \Sigma_3 b_3) \cos A_3 - (\Sigma_2 b_3 + \Sigma_3 b_2) \sin A_3}{h^3} \right.$$

Sur $y_1 = 0$ ($z_1 = x_1$), A_3 est l'angle de rotation de la normale extérieure dans le passage de l'état neutre à l'état déformé. Désignons par ρ_0 et ρ les rayons de courbure, de la courbe $y_1 = 0$, dans les états neutre et déformé respectivement, et par s_0 l'abscisse curviligne. Nous aurons, sur $y_1 = 0$,

$$\delta [A_3] = \frac{dA_3(x_1)}{dx_1} = \frac{dA_3}{ds_0} \frac{ds_0}{dx_1} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \sqrt{f_2^2 + f_3^2}$$

Désignons par T l'effort tranchant dans une section $x_1 = \text{cte}$, c'est-à-dire, la composante suivant la normale extérieure à $y_1 = 0$, dans l'état déformé, de la résultante des efforts appliqués à gauche de la section considérée. Nous aurons :

$$T = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}} \left[\left(\sum_2 f_2 - \sum_3 f_3 \right) \cos A_3 - \left(\sum_2 f_3 + \sum_3 f_2 \right) \sin A_3 \right]$$

Soit M le moment fléchissant, nous aurons :

$$T = \frac{dM}{ds_0}$$

En remplaçant dans VIII,4, l'on obtient :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = 3 \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{M}{\left(h \sqrt{f_2^2 + f_3^2} \right)^3}$$

L'arc étant mince, $h \sqrt{f_2^2 + f_3^2} = e$ est l'épaisseur d'une section normale, d'où :

$$\text{VIII,5} \quad \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = 3 \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{M}{e^3} \right.$$

Nous retrouvons la formule classique de la "Résistance des Matériaux" dans le cas de déformations planes.

REMARQUE :

En "Résistance des Matériaux", l'on considère le cas de contraintes planes. Il faut alors remplacer dans VIII,5, λ

par $\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ d'où :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI}$$

E : module de YOUNG

I : moment d'inertie.

Domaine d'application des formules VIII,3 :

Les conditions indiquées au début du chapitre, entraînent nécessairement les conditions suivantes :

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^2 \approx 0 ; \quad \left(h \frac{\delta[\kappa_1]}{\kappa_1}\right)^2 \approx 0 ; \quad h^p \frac{\delta^p[\kappa_2]}{\kappa_1} \approx 0 ;$$
$$h^{p+1} \frac{\delta^{p+1}[\kappa_1]}{\kappa_1} \approx 0 \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Sur $y_1 = 0$, désignons par θ_0 , l'angle de la normale extérieure avec l'axe des x, par s_0 l'abscisse curviligne et par ρ_0 le rayon de courbure dans l'état initial. Nous aurons sur $y_1 = 0$:

$$\left| \begin{array}{l} f_2(x_1) = \sqrt{\kappa_1(x_1)} \cos \theta_0(x_1) \\ f_3(x_1) = \sqrt{\kappa_1(x_1)} \sin \theta_0(x_1) \end{array} \right.$$

d'où :

$$K_2(x_1) = -h K_1 \frac{d\theta_0}{dx_1} = -\frac{h}{\rho_0} K_1^{3/2}$$

et :

$$\frac{K_2}{K_1} = -\frac{h}{\rho_0} \sqrt{K_1}$$

D'autre part, l'épaisseur $e(x_1)$ d'une section normale, s'écrit :

$$e(x_1) = \int_0^h |f_2 + i f_3|(x_1, y_1) dy_1$$

d'où :

$$\frac{e}{\rho_0} = -\frac{K_2}{K_1}(x_1) \int_0^h \frac{|f_2 + i f_3|(x_1, y_1)}{\sqrt{K_1(x_1)}} \frac{dy_1}{h}$$

L'intégrale reste assez proche de l'unité, de sorte que les conditions sur K_1 , K_2 et leurs dérivées, entraînent :

$$\text{VIII,6} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{e}{\rho_0}\right)^2 \simeq 0 ; \quad e^p \frac{d^p\left(\frac{e}{\rho_0}\right)}{ds_0^p} \simeq 0 \quad \text{pour } p \geq 1 \\ \left(\frac{de}{ds_0}\right)^2 \simeq 0 ; \quad e^{p-1} \frac{d^p e}{ds_0^p} \simeq 0 \quad \text{pour } p \geq 2. \end{array} \right.$$

Désignons par T_1 et T_2 l'effort tranchant et normal respectivement, dans toute section $x_1 = \text{cte}$. Les conditions sur Σ_2 et Σ_3 prennent la forme :

$$\text{VIII,7} \left\{ \left(\frac{e}{T} \frac{dT}{ds_0}\right)^2 \simeq 0 ; \quad \frac{e^p}{T} \frac{d^p T}{ds_0^p} \simeq 0 \quad \text{pour } p \geq 2 \right.$$

T désignant T_1 ou T_2 .

Les conditions VIII,6 et VIII,7 fixent le domaine de validité des équations VIII,3.

En pratique, une quantité sera voisine de zéro, si elle est inférieure à 5/100. Les formules VIII,3 seront donc valables :

- si les déformations sont planes
- si le rapport épaisseur maximum sur longueur moyenne $\leq \frac{1}{10}$
- si le rapport épaisseur sur rayon de courbure de la fibre moyenne ne varie pas rapidement et reste inférieur à $\frac{1}{5}$.
- si la variation de l'épaisseur reste inférieure à $\frac{1}{5}$.
- si $\frac{e}{T} \frac{dT}{ds_0} \leq \frac{1}{5}$

Domaine de validité de la Résistance des Matériaux :

Celle-ci suppose, en plus des conditions énumérées précédemment, que :

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_3} \approx 0$$

$h \delta [\Sigma_2]; h \delta [\Sigma_3]$ négligeables comparées à Σ_2 ou Σ_3

c'est-à-dire :

$$\frac{e}{e_0} \approx 0 ; \frac{e}{T} \frac{dT}{ds_0} \approx 0$$

La Résistance des Matériaux n'est donc valable que si, de plus :

- le rapport épaisseur sur rayon de courbure de la fibre moyenne est inférieur à $\frac{1}{20}$.

$$- \frac{e}{T} \frac{dT}{ds_0} \leq \frac{1}{20}$$

CHAPITRE IX

POUTRES

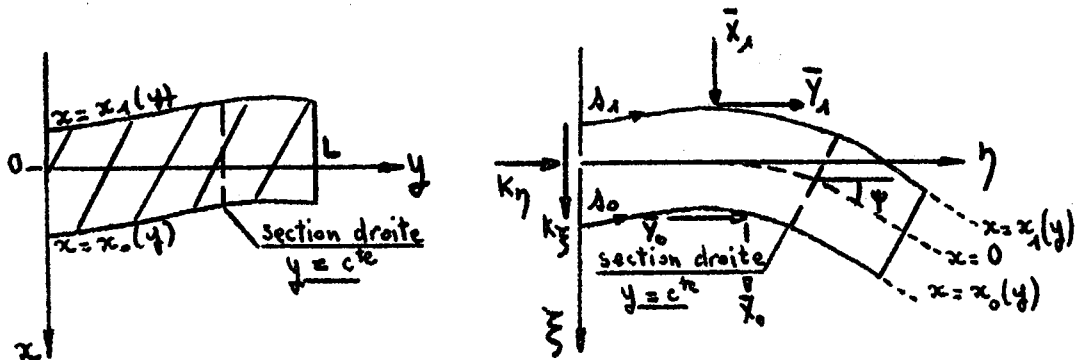
Soit un corps en état de déformation plane. Supposons que dans l'état initial nous ayons $0 \leq y \leq L$, et que l'axe $x = 0$ soit intérieur au corps. De tels corps seront dénommés "poutres".

Les formules établies précédemment pour les arcs (chapitre VIII) restent valables. Cependant, elles font intervenir deux fonctions f_2 et f_3 que nous pourrions difficilement déterminer si la forme de la poutre est quelconque. C'est pourquoi nous avons développé des formules faisant intervenir directement les caractéristiques géométriques du corps (épaisseur de la poutre).

Le contour du corps sera défini par :

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad ; \quad y = L \\ x = x_0(y) & \quad ; \quad x = x_1(y) \end{aligned}$$

Nous désignerons par A_0 , l'abscisse curviligne sur $x = x_0(y)$ et par A_1 celle sur $x = x_1(y)$ dans l'état final (ou initial, la déformation étant petite).



Comme précédemment, nous supposerons connues en fonction de x, y , les contraintes appliquées au contour. Soit (\bar{X}_0, \bar{Y}_0) les contraintes appliquées sur $x = x_0(y)$, et (\bar{X}_1, \bar{Y}_1) celles appliquées sur $x = x_1(y)$.

Posons :

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{0,\bar{x}} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \int_0^y \bar{X}_0(y) \frac{d\Delta_0}{dy} dy \\ \sigma_{0,\bar{y}} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \int_0^y \bar{Y}_0(y) \frac{d\Delta_0}{dy} dy \\ \sigma_{1,\bar{x}} = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[\int_0^y \bar{X}_1(y) \frac{d\Delta_1}{dy} dy + K_\xi \right] \\ \sigma_{1,\bar{y}} = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[\int_0^y \bar{Y}_1(y) \frac{d\Delta_1}{dy} dy + K_\eta \right] \end{array} \right.$$

K_ξ et K_η étant les résultantes des contraintes, suivant ξ et η respectivement, dans la section $y = 0$

L'expression générale de F s'écrit : (formule V,3) :

$$\text{IX,1} \quad \left\{ F = \varphi - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p P \left[f_0^{[2p-2]}(y) \frac{x^{2p}}{(2p)!} + f_1^{[2p-2]}(y) \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right] \right.$$

φ désignant une fonction harmonique arbitraire.

Les conditions aux limites sur $x = x_0(y)$ et $x = x_1(y)$ s'écrivent : (formules VI,5) :

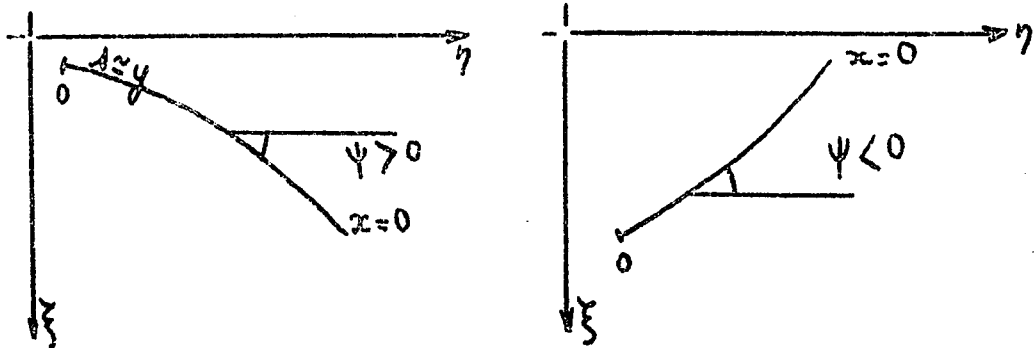
$$\text{IX,2} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{sur } x = x_0(y) \\
 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y) = \sigma_{0,y} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_0, y) - \sigma_{0,x} \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_0, y) \\
 \\
 \text{sur } x = x_1(y) \\
 \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) = \sigma_{0,y} \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x_0, y) - \sigma_{0,x} \frac{\partial \beta}{\partial y}(x_0, y) \\
 \\
 \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y) = -\sigma_{1,y} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_1, y) + \sigma_{1,x} \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_1, y) \\
 \\
 \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y) = -\sigma_{1,y} \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x_1, y) + \sigma_{1,x} \frac{\partial \beta}{\partial y}(x_1, y)
 \end{array} \right.$$

La déformation étant petite, une section droite $y = \text{cte}$ restera approximativement droite et nous pourrons écrire :

$$\left[\begin{array}{l}
 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_0, y) \simeq \frac{\partial \alpha}{\partial x}(0, y) \simeq \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_1, y) \\
 \\
 \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x_0, y) \simeq \frac{\partial \alpha}{\partial y}(0, y) \simeq \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x_1, y) \\
 \\
 \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_0, y) \simeq \frac{\partial \beta}{\partial x}(0, y) \simeq \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_1, y) \\
 \\
 \frac{\partial \beta}{\partial y}(x_0, y) \simeq \frac{\partial \beta}{\partial y}(0, y) \simeq \frac{\partial \beta}{\partial y}(x_1, y)
 \end{array} \right.$$

Si nous désignons par $\psi = \psi(y)$ l'angle de la courbe $x = 0$ avec l'axe η dans l'état déformé (voir fig.), nous aurons sur $x = 0$; $ds \simeq dy$ d'où :

$$\left[\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &\approx \frac{d\alpha}{dy} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(0,y) = -\frac{\partial \beta}{\partial x}(0,y) = \sin \psi \\ \frac{d\beta}{ds} &\approx \frac{d\beta}{dy} = \frac{\partial \beta}{\partial y}(0,y) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(0,y) = \cos \psi \end{aligned} \right.$$



et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{IX,3} \left\{ \begin{aligned} &\text{sur } x = x_0(y) \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y) = \sigma_{0,\eta} \cos \psi + \sigma_{0,\xi} \sin \psi \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) = \sigma_{0,\eta} \sin \psi - \sigma_{0,\xi} \cos \psi \\ &\text{sur } x = x_1(y) \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y) = -(\sigma_{1,\eta} \cos \psi + \sigma_{1,\xi} \sin \psi) \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y) = -(\sigma_{1,\eta} \sin \psi - \sigma_{1,\xi} \cos \psi) \end{aligned} \right.$$

D'autre part, l'expression de F (formule IX,1) fait intervenir deux fonctions $f_0(y)$ et $f_1(y)$ reliées à α et β par les formules (V,4), soit :

$$\left[\begin{aligned} f_0(y) &= \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] (0, y) \\ f_1(y) &= 2 \left[-\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right] (0, y) \end{aligned} \right.$$

$f_0(y)$ n'est autre que le double de l'allongement relatif, sur $x = 0$, dans le passage de l'état initial à l'état (α, β) .

Quant à la fonction $f_1(y)$ elle peut être exprimée en fonction de ψ , il suffit pour cela de remplacer les dérivées premières et secondes de α par leurs expressions, en fonction de ψ , dans la formule donnant f_1 ; l'on obtient :

$$f_1(y) = -2 \frac{d\psi}{dy} = -2 \frac{d\psi}{ds}$$

Cette dernière formule nous montre que $-\frac{1}{2} f_1(y)$ n'est autre que la courbure de la déformée de l'axe $x = 0$, que nous désignerons par $\frac{1}{\rho}$, soit :

$$f_1(y) = -2 \frac{d\psi}{dy} = -\frac{2}{\rho}$$

La formule IX,1 fait aussi intervenir une fonction harmonique arbitraire φ , que nous écrirons sous forme de développement par rapport à x , soit :

$$\varphi(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[\varphi_0^{[2p]}(y) \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \varphi_1^{[2p]}(y) \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right]$$

$\varphi_0(y)$ et $\varphi_1(y)$ étant deux fonctions arbitraires de y .

L'expression de $F(x, y)$ (formule IX,1) prend alors la forme :

$$\text{IX,4} \quad \left\{ F(x, y) = \varphi_0 + x \varphi_1 - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[\begin{array}{l} \left[p \varphi_0^{[2p-2]}(y) - \varphi_0^{[2p]}(y) \right] \frac{x^{2p}}{2^p} - \\ \left[2p \varphi_1^{[2p-1]}(y) + \varphi_1^{[2p]}(y) \right] \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{array} \right] \right.$$

En remplaçant dans IX,3 les dérivées partielles de F, par leurs valeurs tirées de IX,4, nous obtenons un système de quatre équations différentielles en φ_0 , φ_1 , f_0 et ψ soit :

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{0,\bar{y}} \cos \psi + \sigma_{0,\bar{x}} \sin \psi = \varphi_1 - \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[\begin{aligned} & \left[p f_0^{[2p-2]} - \varphi_0^{[2p]} \right] \frac{x_0^{2p-1}}{(2p-1)!} - \\ & - \left[2p \psi^{[2p-1]} + \varphi_1^{[2p]} \right] \frac{x_0^{2p}}{(2p)!} \end{aligned} \right] \\
 \\
 & \sigma_{0,\bar{y}} \sin \psi - \sigma_{0,\bar{x}} \cos \psi = \frac{d\varphi_0}{dy} + x_0 \frac{d\varphi_1}{dy} - \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[\begin{aligned} & \left[p f_0^{[2p-1]} - \varphi_0^{[2p+1]} \right] \frac{x_0^{2p}}{(2p)!} \\ & - \left[2p \psi^{[2p]} + \varphi_1^{[2p+1]} \right] \frac{x_0^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

et deux équations obtenues en remplaçant dans les précédentes :

$\sigma_{0,\bar{x}}$	par	$-\sigma_{1,\bar{x}}$
$\sigma_{0,\bar{y}}$	par	$-\sigma_{1,\bar{y}}$
x_0	par	x_1

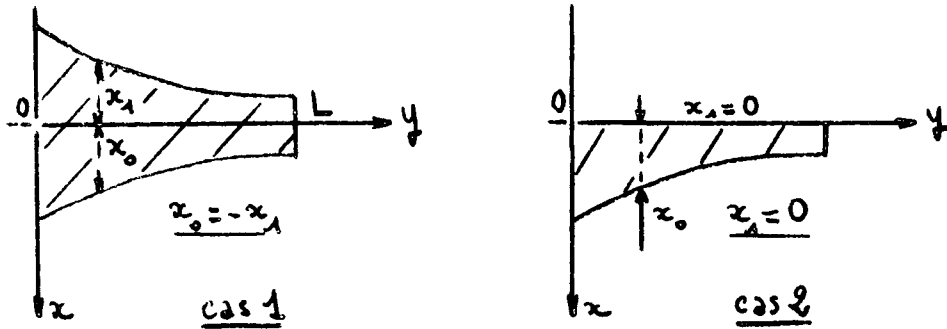
REMARQUE :

Comme nous l'avons fait remarquer au chapitre V, (solutions 3), F étant analytique à l'intérieur du cercle de convergence R, les séries apparaissant aux seconds membres des équations IX,5 seront uniformément convergentes à l'intérieur de R.

Les formules IX,5 sont équivalentes aux formules VII,13. Jointes aux conditions aux limites sur $y = 0$, elles permettent de connaître φ_0 , φ_1 , f_0 et ψ ; donc les déformations et les contraintes dans la poutre.

En fait, nous nous bornerons à trouver l'équation déterminant ψ , ce qui nous permettra d'obtenir la déformée de l'axe $x = 0$. De plus, nous nous limiterons à l'étude de deux cas particuliers d'intérêt pratique, à savoir :

- 1 - poutres à section symétrique, par rapport à $x = 0$.
($x_0(y) = -x_1(y)$)
- 2 - poutres à face plane = $x_1(y) = 0$



Cas particulier 1 : Poutres à section symétrique.

Désignons par $h(y)$ l'épaisseur de la poutre. Nous aurons :

$$x_0(y) = -x_1(y) = \frac{1}{2} h(y)$$

Dans le système IX,5, faisons la somme de la première et de la troisième équation, et retranchons la quatrième de la seconde équation, nous obtenons un système de deux équations en φ_1 et ψ , soit :

$$\text{IX,6} \left\{ \begin{aligned} & (\sigma_{0,\bar{y}} - \sigma_{1,\bar{y}}) \cos \psi + (\sigma_{0,\bar{x}} - \sigma_{1,\bar{x}}) \sin \psi = 2 \varphi_1 + \\ & \quad + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[(2p \psi^{[2p-1]} + \varphi_1^{[2p]}) \frac{h^{2p}(y)}{2^{2p}(2p)!} \right] \\ & (\sigma_{0,\bar{y}} + \sigma_{1,\bar{y}}) \sin \psi - (\sigma_{0,\bar{x}} + \sigma_{1,\bar{x}}) \cos \psi = h \frac{d\varphi_1}{dy} + \\ & \quad + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[(2p \psi^{[2p]} + \varphi_1^{[2p+1]}) \frac{h^{2p+1}(y)}{2^{2p+1}(2p+1)!} \right] \end{aligned} \right.$$

Posons :

$$\left[\begin{aligned} \psi &= \psi_2 \cos \psi + \psi_3 \sin \psi \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \cos \psi + \varphi_3 \sin \psi \end{aligned} \right.$$

De même qu'au chapitre VII (en ce qui concerne A_2 et A_3), les équations IX,6 se scindent en quatre équations, à savoir :

$$\text{IX,7} \left\{ \begin{aligned} & \sigma_{0,\bar{y}} - \sigma_{1,\bar{y}} = 2\varphi_2 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[(2p \psi_2^{[2p-1]} + \varphi_2^{[2p]}) \frac{h^{2p}}{2^{2p}(2p)!} \right] \\ & -(\sigma_{0,\bar{x}} + \sigma_{1,\bar{x}}) = h \frac{d\varphi_2}{dy} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[(2p \psi_2^{[2p]} + \varphi_2^{[2p+1]}) \frac{h^{2p+1}}{2^{2p+1}(2p+1)!} \right] \end{aligned} \right.$$

et deux autres équations qui s'obtiennent en remplaçant :

$$\left[\begin{array}{l} \psi_2 \text{ par } \psi_3 \\ \psi_3 \text{ par } \psi_2 \\ \sigma_{0,\bar{y}} \text{ et } \sigma_{1,\bar{y}} \text{ par } \sigma_{0,\bar{x}} \text{ et } \sigma_{1,\bar{x}} \text{ respectivement} \\ \sigma_{0,\bar{x}} \text{ et } \sigma_{1,\bar{x}} \text{ par } -\sigma_{0,\bar{y}} \text{ et } -\sigma_{1,\bar{y}} \text{ respectivement.} \end{array} \right.$$

Poutres à section symétrique de forme allongée :

Nous ferons les mêmes hypothèses que pour les arcs et nous supposons :

$$- \frac{h}{L} \leq \frac{1}{10}$$

$$- \left(\frac{dh}{dy} \right)^2 \text{ et } h^{p-1} \frac{d^p h}{dy^p} \text{ voisines de zéro pour } p \geq 2$$

$$- \left(h \frac{d\sigma}{dy} \right)^2 \text{ négligeables comparées à } \sigma^2$$

$$- h^p \frac{d^p \sigma}{dy^p} \text{ négligeables comparées à } \sigma \text{ pour } p \geq 2$$

σ désignant l'une quelconque des quantités $\sigma_{0,\bar{x}}$; $\sigma_{0,\bar{y}}$; $\sigma_{1,\bar{x}}$; $\sigma_{1,\bar{y}}$.

En appliquant la même méthode que pour les arcs (chapitre VIII), l'on montre que les équations IX,7 se réduisent à :

$$\text{IX,8} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{0,\bar{y}} - \sigma_{1,\bar{y}} = e \psi_2 - \frac{h^2}{e} \frac{d\psi_2}{dy} \\ -(\sigma_{0,\bar{x}} + \sigma_{1,\bar{x}}) = h \frac{d\psi_2}{dy} - \frac{h^3}{12} \frac{d^2\psi_2}{dy^2} \end{array} \right.$$

et deux autres équations obtenues en remplaçant :

$$\psi_2 \text{ par } \psi_3 ; \quad \psi_2 \text{ par } \psi_3$$

$$\sigma_{0,y} \text{ et } \sigma_{3,y} \text{ par } \sigma_{0,x} \text{ et } \sigma_{3,x} \text{ respectivement}$$

$$\sigma_{0,x} \text{ et } \sigma_{3,x} \text{ par } -\sigma_{0,y} \text{ et } -\sigma_{3,y} \text{ respectivement.}$$

En éliminant ψ_2 et ψ_3 entre ces équations, l'on obtient deux équations donnant ψ_2 et ψ_3 , soit :

$$\text{IX,9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left(h^3 \frac{d\psi_2}{dy} \right) = -\rho (\sigma_{0,x} + \sigma_{3,x}) - h \frac{d}{dy} (\sigma_{0,y} - \sigma_{3,y}) \\ \frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left(h^3 \frac{d\psi_3}{dy} \right) = \rho (\sigma_{0,y} + \sigma_{3,y}) - h \frac{d}{dy} (\sigma_{0,x} - \sigma_{3,x}) \end{array} \right.$$

Cas particulier 2 : Poutres à face plane :

Désignons par $h(y)$

l'épaisseur de la poutre. Nous aurons :

$$x_0(y) = h(y) ; \quad x_1(y) = 0$$

En égalant $x_1(y)$ à zéro dans la troisième et quatrième équation IX,5, l'on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} \psi_2(y) = - (\sigma_{3,y} \cos \psi + \sigma_{3,x} \sin \psi) \\ \frac{d\psi_0(y)}{dy} = \sigma_{3,x} \cos \psi - \sigma_{3,y} \sin \psi \end{array} \right.$$

En introduisant ces valeurs dans les deux premières équations IX,5 et, en tenant compte du fait que $h^p \frac{d^p \psi}{dy^p}$ est voisine de zéro pour $p \geq 1$, l'on obtient :

$$\text{IX,10} \left\{ \begin{aligned} A(y) \cos \psi + B(y) \sin \psi &= - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p \left[f_0^{[2p-2]} \frac{h^{2p-1}}{(2p-1)!} - e^{-\psi} \psi^{[2p-1]} \frac{h^{2p}}{(2p)!} \right] \\ C(y) \cos \psi + D(y) \sin \psi &= - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p \left[f_0^{[2p-1]} \frac{h^{2p}}{(2p)!} - e^{-\psi} \psi^{[2p]} \frac{h^{2p+1}}{(2p+1)!} \right] \end{aligned} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} A(y) &= \sigma_{0,\bar{y}} + \sigma_{3,\bar{y}} - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[\sigma_{3,\bar{x}}^{[2p-1]} \frac{h^{2p-1}}{(2p-1)!} - \sigma_{3,\bar{y}}^{[2p]} \frac{h^{2p}}{(2p)!} \right] \\ C(y) &= -(\sigma_{0,\bar{x}} + \sigma_{3,\bar{x}}) + h \frac{d\sigma_{3,\bar{y}}}{dy} - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[\sigma_{3,\bar{x}}^{[2p]} \frac{h^{2p}}{(2p)!} - \sigma_{3,\bar{y}}^{[2p+1]} \frac{h^{2p+1}}{(2p+1)!} \right] \end{aligned} \right.$$

B (y) et D (y) se déduisent de A (y) et C (y) respectivement en remplaçant :

$\sigma_{0,\bar{y}}$ et $\sigma_{3,\bar{y}}$ par $\sigma_{0,\bar{x}}$ et $\sigma_{3,\bar{x}}$ respectivement
 $\sigma_{0,\bar{x}}$ et $\sigma_{3,\bar{x}}$ par $-\sigma_{0,\bar{y}}$ et $-\sigma_{3,\bar{y}}$ respectivement.

Posons :

$$\left\{ \begin{aligned} \psi &= \psi_2 \cos \psi + \psi_3 \sin \psi \\ f_0 &= f_2 \cos \psi + f_3 \sin \psi \end{aligned} \right.$$

Comme précédemment, les équations IX,10 se scindent en quatre équations, à savoir :

$$\text{IX,11} \left\{ \begin{array}{l} A(y) = - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p \left[f_2^{[2p-2]} \frac{h^{2p-1}}{(2p-1)!} - \varphi_2^{[2p-1]} \frac{h^{2p}}{(2p)!} \right] \\ C(y) = - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p \left[f_2^{[2p-1]} \frac{h^{2p}}{(2p)!} - \varphi_2^{[2p]} \frac{h^{2p+1}}{(2p+1)!} \right] \end{array} \right.$$

et deux autres équations obtenues en remplaçant :

f_2 par f_3 ; φ_2 par φ_3 , A par B , C par D .

Poutres à face plane de forme allongée :

Nous supposons encore que :

$$- \frac{h}{L} \leq \frac{1}{10}$$

$$- \left(\frac{dh}{dy} \right)^2 \text{ et } h^{p-1} \frac{d^p h}{dy^p} \text{ voisines de zéro pour } p \geq 2$$

$$- \left(h \frac{d\sigma}{dy} \right)^2 \text{ négligeables comparées à } \sigma^2$$

$$- h^p \frac{d^p \sigma}{dy^p} \text{ négligeables comparées à } \sigma \text{ pour } p \geq 2$$

σ désignant l'une quelconque des quantités $\sigma_{0,\bar{x}}$;

$\sigma_{0,\bar{y}}$; $\sigma_{1,\bar{x}}$; $\sigma_{1,\bar{y}}$.

Il est alors possible de montrer que les équations IX,11 se réduisent à IX,12 :

$$\left[\begin{array}{l} A(y) = \sigma_{0,\bar{y}} + \sigma_{1,\bar{y}} + h \frac{d\sigma_{1,\bar{x}}}{dy} \\ C(y) = -(\sigma_{0,\bar{x}} + \sigma_{1,\bar{x}}) + h \frac{d\sigma_{1,\bar{y}}}{dy} \end{array} \right.$$

$$\text{IX,12} \left\{ \begin{array}{l} A(y) = h f_2 - h^2 \frac{d\psi_2}{dy} \\ C(y) = \frac{h^2}{2} \frac{df_2}{dy} - \frac{h^3}{3} \frac{d^2\psi_2}{dy^2} \end{array} \right.$$

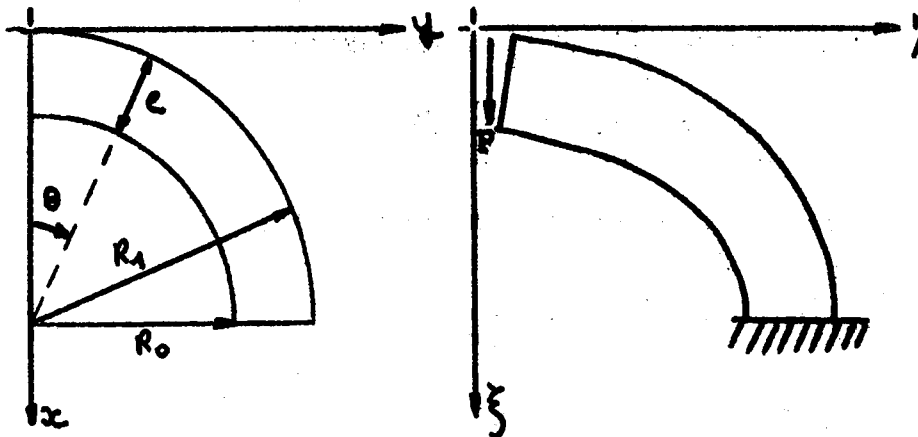
En éliminant f_2 entre ces équations, l'on obtient pour ψ_2 :

$$\text{IX,12} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left(h^3 \frac{d\psi_2}{dy} \right) = -\varrho (\sigma_{0,\bar{x}} + \sigma_{3,\bar{x}}) - h \frac{d}{dy} (\sigma_{0,\bar{y}} - \sigma_{3,\bar{y}}) + \frac{dh}{dy} (\sigma_{0,\bar{y}} + \sigma_{3,\bar{y}}) \\ \text{de même} \qquad \qquad \text{est donné par :} \\ \frac{1}{3} \frac{d}{dy} \left(h^3 \frac{d\psi_3}{dy} \right) = \varrho (\sigma_{0,\bar{y}} + \sigma_{3,\bar{y}}) - h \frac{d}{dy} (\sigma_{0,\bar{x}} - \sigma_{3,\bar{x}}) + \frac{dh}{dy} (\sigma_{0,\bar{x}} + \sigma_{3,\bar{x}}) \end{array} \right.$$

CHAPITRE X

Afin d'illustrer les formules précédentes, nous avons traité un exemple simple.

Soit un arc circulaire de rayon intérieur R_0 , de rayon extérieur R_1 , d'ouverture $\frac{\pi}{2}$, soumis à une extrémité à une force verticale P et encastrée à l'autre.



La transformation conforme $z = f_1(z_1)$ sera donnée par :

$$z = R_1 - R_0 e^{-i\frac{\pi}{2}z_1}$$

soit :

$$\begin{cases} x = R_1 - R_0 \cos \frac{\pi}{2} x_1 e^{\frac{\pi}{2} y_1} \\ y = R_0 \sin \frac{\pi}{2} x_1 e^{\frac{\pi}{2} y_1} \end{cases}$$

Par cette transformation tout cercle de rayon R se transformera en une droite $y_1 = \text{cte}$; et toute section normale $\theta = \text{cte}$ en une droite $x_1 = \text{cte}$.

En particulier : pour $R = R_0$ nous aurons $y_1 = 0$, et pour $R = R_1$,
 $y_1 = h = \frac{e}{\pi} \text{Log} \frac{R_1}{R_0}$.

Nous désignerons par e l'épaisseur de l'arc et par R_m le rayon de courbure moyen, soit :

$$\begin{cases} e = R_1 - R_0 \\ R_m = \frac{R_1 + R_0}{2} \end{cases}$$

Nous supposerons que $\frac{e}{R_m} \leq \frac{1}{5}$, de sorte que :

$$h = \frac{e}{\pi} \text{Log} \frac{R_1}{R_0} \approx \frac{e}{\pi} \frac{e}{R_m}$$

Les fonctions f_2 et f_3 seront données par :

$$\begin{cases} f_2(z_1) = \frac{\pi R_0}{2} \sin \frac{\pi}{2} z_1 \\ f_3(z_1) = \frac{\pi R_0}{2} \cos \frac{\pi}{2} z_1 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} K_1(z_1) = \frac{(\pi R_0)^2}{4} \\ K_2(z_1) = \frac{(\pi R_0)^2}{4} \frac{e}{R_m} \end{cases}$$

Les contraintes sur $R = R_0$ et $R = R_1$ étant nulles, nous aurons :

$$\left[\begin{array}{l} \Sigma_0(z_1) = 0 \\ \Sigma_h(z_1 - ih) = -\frac{i(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} P \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left[\begin{array}{l} \Sigma_2(z_1) = 0 \\ \Sigma_3(z_1) = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} P \end{array} \right.$$

Les équations VIII,3 s'écrivent alors :

$$\left[\begin{array}{l} \delta^2[a_3] = G \cos \frac{\pi}{2} z_1 \\ \delta^2[b_3] = -G \sin \frac{\pi}{2} z_1 \end{array} \right.$$

avec :

$$G = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} P \frac{\pi^2 R_m^2 (6 R_m^2 + 15 e R_m + 7 e^2)}{4 e^3 R_0 (R_m + 3e)}$$

Par intégration l'on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} a_3 = -\frac{4G}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} z_1 + G_1 z_1 + G_2 \\ b_3 = \frac{4G}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} z_1 + G'_1 z_1 + G'_2 \end{array} \right.$$

Pour calculer les constantes G_1, G_2, G'_1, G'_2 il est nécessaire d'écrire les conditions aux limites sur $x_1 = 0$.

Sur $x_1 = 0$, nous devons avoir :

$$\delta^2 [\Sigma'_2] = \delta^2 [\Sigma'_3] = 0$$

ce qui suppose que $\Sigma'_0(z_1)$ est une fonction linéaire de z_1 .

De plus, la résultante des contraintes \bar{X}'_0 devra être égale à P. L'on trouve alors pour \bar{X}'_0 :

$$\bar{X}'_0(x) = P \frac{R_m}{e} \frac{1}{R_1 - x}$$

Les contraintes sur $x_1 = 0$ sont donc réparties hyperboliquement.

Les formules VII, 22 s'écrivent alors :

$$\delta [a_3] = \delta [b_3] = 0 \quad \text{au point } z_1 = 0$$

d'où :

$$\begin{cases} G_1 = 0 \\ G'_1 = -\frac{2G}{\pi} \end{cases}$$

Pour obtenir G_2 et G'_2 , écrivons que pour $z_1 = 1$, nous devons avoir $A_3 = 0$, soit $a_3 = b_3 = 0$ (rotation nulle = encastrement),

d'où :

$$\begin{cases} G_2 = 0 \\ G'_2 = \frac{2G}{\pi^2} (\pi - 2) \end{cases}$$

$a_3(z_1)$ et $b_3(z_1)$ seront données par :

$$X_{,1} \left[\begin{array}{l} a_3(z_1) = -\frac{4G}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} z_1 \\ b_3(z_1) = \frac{4G}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} z_1 - \frac{2G}{\pi} z_1 + \frac{2G}{\pi^2} (\pi - 2) \end{array} \right.$$

Connaissant a_3 et b_3 , les formules VIII,3 nous permettent de calculer a_2 et b_2 d'où A_2 et A_3 . Par intégration il est alors possible de connaître les déplacements et les contraintes dans l'arc.

Nous n'avons pas effectué ce calcul car il ne peut s'effectuer que numériquement et ne présenterait un intérêt que pour des cas particuliers bien définis.

Il est cependant intéressant de comparer les formules $X_{,1}$ à la Résistance des Matériaux et à l'Elasticité.

Si nous supposons $\frac{e}{R_m}$ négligeable, les formules $X_{,1}$ deviennent :

$$X_{,2} \left[\begin{array}{l} a'_3(z_1) = -\frac{4G'}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} z_1 \\ b'_3(z_1) = \frac{4G'}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} z_1 - \frac{2G'}{\pi} z_1 + \frac{2G'}{\pi^2} (\pi - 2) \end{array} \right.$$

avec :

$$G' = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} P \frac{3\pi^2 R_m^2}{2e^3}$$

La résistance des Matériaux ne sera valable que si $\frac{G^2}{G}$ est voisine de l'unité.

L'erreur est de 5 % pour un rapport $\frac{e}{R_m} = \frac{1}{5}$, et de 2 % pour $\frac{e}{R_m} = \frac{1}{10}$.

En "Elasticité" l'on suppose les rotations petites, donc a_3 et b_3 voisines de zéro. L'Elasticité ne sera donc valable que si G est voisine de zéro :

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left(\frac{\pi^2 R_m^2 (6 R_m^2 + 15 e R_m + 7 e^2)}{4 e^3 R_m (R_m + 3e)} \right) = 0$$

Pour une erreur de 2 %, et un rapport $\frac{e}{R_m} = \frac{1}{5}$, nous devons avoir une contrainte moyenne sur l'extrémité de l'arc égale ou inférieure à :

$$5 \cdot 10^{-3} \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$$

et pour un rapport $\frac{e}{R_m} = \frac{1}{10}$, une contrainte moyenne égale ou inférieure à :

$$2 \cdot 10^{-4} \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$$

BIBLIOGRAPHIE

Elasticité.

- P. ANGLES d'AURIAC - "Contribution à l'étude de l'élasticité des corps très déformables".
Thèse Doctorat ès-Sciences, Paris, 1958.
- H. LE BOITEUX - "La mécanique des solides réels".
Ch. Béranger, Paris, 1960.
- A.J. LUR'E - "Three-dimensional problems of the theory of elasticity".
Interscience Publishers, N.Y., Londres, Sydney, 1964.
- A.E.H. LOVE - "A treatise on the mathematical theory of elasticity".
Dover Publications, N.Y. 1944.
- F.D. MURNAGHAN - "Finite deformation of an elastic solid".
John Wiley and Sons, N.Y. 1951.
- K.H. SWANIGER - "Analysis of deformation".
Chapman and Hall, Londres, 1954.
- S. TIMOSHENKO - "Théorie de l'élasticité".
Ch. Béranger, Paris, 1936.

Résistance des Matériaux.

- R. L'HERMITE - "Résistance des Matériaux théorique et expérimentale".
Dunod, Paris, 1954.
- S. TIMOSHENKO - "Résistance des Matériaux".
Ch. Béranger, Paris, 1947.

Equations différentielles et aux dérivées partielles.

- R. COURANT and D. HILBERT - "Methods of Mathematical Physics (2 volumes)".
Interscience Publishers, N.Y., Londres, 1962.
- W.J. CUNNINGHAM - "Analyse non linéaire".
Dunod, Paris, 1963.
- L.A. PIPES - "Operational methods in non-linear mechanics".
Dover Publications, Inc., N.Y. 1965.