Théorie du contrôle optimal et calcul des variations

Marc Atteia

Atteia Marc

Théorie du contrôle optimal et calcul des variations.

La théorie du contrôle optimal s'est très rapidement développée depuis quelques années.

Différentes méthodes ont été proposées pour aborder ce problème. Nous développons ci-dessous une méthode due essentiellement à M. Hestenes [2]

I. Première formulation du problème du contrôle optimal :

<u>Définition 1.1 :</u> Nous appellerons arc x, l'application qui à $\forall\, t \in [t^1, t^2]$ fait correspondre le triplet : $x(t), u(t), b$.

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^q$, $b \in \mathbb{R}^r$.

Les composantes $x^i(t)$ $1 \leq i \leq n$ sont les fonctions d'état.

" " $u^k(t)$ $1 \leq k \leq q$ " " " de contrôle

" " b^σ $1 \leq \sigma \leq r$ " " paramètres de contrôle

Le problème du contrôle optimal (ou problème de Bolza)

Considérons <u>l'ensemble $\mathcal{B}$</u> des arcs x : $x(t), u(t), b$ $t \in [t^1, t^2]$ tels que :

(i) $\dot{x} = f(t, x(t), u(t), b)$

(ii) $\begin{cases} \varphi_\alpha(t, x(t), u(t), b) \leq 0 & 1 \leq \alpha \leq m' \\ \varphi_\alpha(t, x(t), u(t), b) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x(t^1) = X^1(b) & \text{avec} \quad t^1 = T^1(b) \\ x(t^2) = X^2(b) & \text{avec} \quad t^2 = T^2(b) \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} I_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ I_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p \end{cases}$

où

$$I_\gamma(x) = g_\gamma(b) + \int_{t^1}^{t^2} L_\gamma(t, x(t), u(t), b)\, dt \qquad 0 \leq \gamma \leq p$$

$g_\gamma(b)$ étant une application de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$.

<u>Le problème de Bolza consiste à minimiser $I_0(x)$ sur $\mathcal{B}$</u>

Nous le nommerons dans la suite problème (B_1)

<u>Remarque 1.1.</u> : Un cas particulier important du problème (B1) est le problème dans lequel $\dot{x} = u$. Nous le nommerons problème (B'1) et nous noterons $\mathcal{B}'$ l'ensemble des arcs qui satisfont alors aux conditions (i bis) (ii bis) (iii bis) et (iv bis) correspondant aux conditions (i), (ii), (iii), (iv) respectivement.

On peut réduire le problème (B1) au problème (B'1.) en introduisant les nouvelles fonctions d'état :

$$x^{n+k}(t) = \int_{t'}^{t} u^k(s)\, ds \qquad 1 \leq k \leq q$$

vérifiant les conditions : $x^{n+k}(t') = 0$, $x^{n+k}(t^2) = b^{r+k}$ $\quad 1 \leq k \leq q$

où $b^{r+1}, \dots, b^{r+q}$ sont de nouveaux paramètres de contrôle.

<u>Remarque 1.2</u> : . On peut modifier l'énoncé du problème (B1) de plusieurs façons :

1) en remplaçant les contraintes du "type inégalité" par des contraintes du type "égalité".

2) en éliminant les conditions isopérimétriques.

3) en éliminant b de f, φ_α et ψ_γ ; il suffit pour cela d'introduire r nouvelles fonctions d'état $x^{n+\sigma}(t)$ telles que :

$$\dot{x}^{n+\sigma} = 0 \quad , x^{n+\sigma}(t') = b^\sigma \quad , x^{n+\sigma}(t^2) = b^2 \qquad 1 \leq \sigma \leq r$$

Nous n'effectuerons aucune de ces transformations qui ne simplifient pas le problème posé.

II Conditions nécessaires du premier ordre et principe du maximum.

Hypothèse h1)

Nous supposerons dans la suite que les fonctions de t, x, u, b que nous considérons sont de classe C^1 sur un sous-ensemble ouvert $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^4$.

Hypothèse h2)

Les fonctions de contrôle ont un nombre fini de disconti--nuités de première espèce sur $[t^1, t^2]$.

Définition 2.1 : Ensemble $\mathcal{K}_0$ des éléments admissibles.

C'est le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ dont les éléments (t, x, u, b) vérifient les conditions :

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(t, x, u, b) \leq 0 & 1 \leq \alpha \leq m' \\ \varphi_\alpha(t, x, u, b) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$$

Définition 2.2 : Ensemble des arcs admissibles : $\mathcal{A}$.

C'est le sous-ensemble $\mathcal{A}$ des arcs

x : $x(t), u(t), b$ $\qquad t \in [t^1, t^2]$

tels que : $(t, x(t), u(t), b) \in \mathcal{K}_0$

Hypothèse h3) :

Nous supposons que la matrice :

$$\Phi = \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u^k} \quad \delta_{\alpha\beta}\varphi_\beta \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^q} & \varphi_1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u^q} & & & \varphi_m \end{pmatrix}$$

est de rang m en tout point $(t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{K}_0$.

<u>Lemme 2.1</u> : La matrice ϕ est de rang m en un point $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{b})$ si et seulement si la matrice :

$$\phi_0 = \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u^k}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\alpha_1}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{\alpha_1}}{\partial u^q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{\alpha_r}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{\alpha_r}}{\partial u^q} \end{pmatrix} \quad \text{est de rang } r.$$

les indices $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ étant ceux pour lesquels $\varphi_\alpha(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{b}) =$

<u>Demonstration</u> : En ordonnant differemment les lignes de ϕ_0 et de ϕ nous pouvons toujours supposer que $\alpha_i = i$ et que le déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u^r} \end{vmatrix} \neq 0$$

si ϕ_0 est de rang r.

<u>C. 1</u> : Si ϕ_0 est de rang r, le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \Delta_1 & 0 & & \\ & \varphi_{r+1} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \varphi_m \end{vmatrix} \neq 0$$

Δ_2 est un mineur de ϕ de rang m. ϕ est donc de rang m.

C.n. Supposons que ϕ soit de rang m et que ϕ_0 soit de rang inférieur à r $(r<q)$.

Comme
$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^q} & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & 0 & \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u^q} & & & 0 & & \\ \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial u^q} & & & & \varphi_{r+1} & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & & & \ddots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u^q} & & & & & \varphi_m \end{pmatrix}$$

il est très facile de vérifier que tous les mineurs de ϕ de rang m ont un déterminant nul, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Convention : Sauf mention spéciale, tout produit de deux ou plusieurs termes dans lequel un indice ou un exposant est répété sera mis à la place de la somme des produits correspondants aux différentes valeurs prises par l'indice considéré.

Théorème I :

Supposons que l'arc x : $x_0(t)$, $u_0(t)$, b_0 $\quad t \in [t^1, t^2]$ minimise $I_0(x)$ sur $\mathcal{B}$. Il existe alors des multiplicateurs

$$\lambda_0 \geq 0 \ , \ \lambda_\gamma \ , \ p_i(t) \ , \ \mu_\alpha(t) \ , \qquad 1 \leq \gamma \leq p \ , \ 1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq \alpha \leq m$$

qui ne sont pas tous nuls sur $[t^1, t^2]$ et deux fonctions :

$$H(x, t, u, b, p, \mu) = p_i f^i - \lambda_0 L_0 - \lambda_\gamma L_\gamma - \mu_\alpha \varphi_\alpha$$

$$G(b) = \lambda_0 g_0 + \lambda_\gamma g_\gamma \ ,$$

telles que :

1) $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda_\gamma \geq 0$ $\quad 1 \leq \gamma \leq p'$ et $\lambda_\gamma = 0$ si $I_\gamma(x_0) < 0$

2) $\mu_\alpha(t)$ est une fonction continue par morceaux admettant pour points de continuité, les mêmes points de continuité que ceux de $u_0(t)$.

De plus : $\quad \mu_\alpha(t) \geq 0 \qquad 1 \leq \alpha \leq m'$

$$\mu_\alpha(t)\, \varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0) = 0 \qquad \forall \ t \in [t^1, t^2]$$

(la sommation n'étant pas effectuée par rapport à α)

3) Les multiplicateurs $p_i(t)$ sont des fonctions continues ayant des dérivées premières continues par morceaux.

Il existe des constantes c_i $(1 \leq i \leq n)$ et c telles que sur l'arc x_0 :

$$-\int_{t^1}^{t} H_{x^i}\, ds + c_i = p_i(t) \quad , \quad \int_{t^1}^{t} H_t\, ds + c = H \quad , \quad H_{u^k} = 0 .$$

4) La condition de transversalité :

$$dG + \left[-H\, dT^s + p_i(T^s)\, dX^{is}\right]_{s=1}^{s=2} - \int_{t^1}^{t^2} H_{b^\sigma}\, db^\sigma\, dt = 0$$

est une identité en db^σ sur x

5) $H(t, x_0(t), u, l_0, p(t), 0) \leq H(t, x_0(t), u_0(t), l_0, p(t), 0)$

pour tout élément $(t, x_0(t), u, l_0) \in \mathcal{K}_0$.

<u>Remarque 2.1.</u> La formule $H = \int_{t'}^{t} H_t \, ds + c$, par exemple, est une abréviation de :

$$H(t, x_0(t), u_0(t), l_0, p(t), \mu(t)) = \int_{t'}^{t} H_t \,(s, x_0(s), u_0(s), l_0, p(s), \mu(s))\, ds + c$$

Les équations du 3) traduisent en particulier que sur toute portion de x_0 où $u_0(t)$ est continue :

$$\frac{dp_i}{dt} = -H_{x^i} \quad , \quad \frac{dH}{dt} = H_t \quad , \quad H_{u^k} = 0$$

<u>Remarque 2.2 :</u> Dans le cas particulier d'un problème de variations classique, les équations :

$\dot{p}_i = -H_{x^i}$, $\dot{x}^i = H_{p_i} = f^i$, H_{u^k} sont les <u>équations d'Euler</u>

L'inégalité 5) $H(t, x_0(t), u, l_0, p(t), 0) \leq H(t, x_0(t), u_0(t), l_0, p(t), 0)$ est alors la <u>condition de Weierstrass.</u>

<u>Remarque 2.3 :</u> Dans le cas où nous ne posons pas $\mu_\alpha = 0$, l'inégalité 5) devient :

$$H(\bar{t}, \bar{x}, u, l_0, \bar{p}, \bar{\mu}) + \bar{\mu}_\alpha \varphi_\alpha(\bar{t}, \bar{x}, u, l_0) \leq H(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, l_0, \bar{p}, \bar{\mu})$$

où $\bar{x} = x_0(\bar{t})$, $\bar{u} = u_0(\bar{t})$, $\bar{p} = p(\bar{t})$, $\bar{\mu} = \mu(\bar{t})$.

Théorème I'

Supposons que l'arc $x_0 : x_0(t), b_0 \quad t \in [t^1, t^2]$ minimise $I_0(x)$ sur $\mathcal{B}'$. Il existe donc des multiplicateurs

$$\lambda_0 \geq 0 \ , \ \lambda_\gamma \ , \ \mu_\alpha(t) \ , \qquad 1 \leq \gamma \leq p \qquad 1 \leq i \leq n \qquad 1 \leq \alpha \leq m .$$

qui ne sont pas tous nuls sur $[t^1, t^2]$ et deux fonctions

$$\begin{cases} F(t, x, \dot{x}, b, \mu) = \lambda_0 L_0 + \lambda_\gamma L_\gamma + \mu_\alpha \varphi_\alpha \\ G(b) = \lambda_0 g_0 + \lambda_\gamma g_\gamma \end{cases}$$

telles que :

1) $\lambda_\gamma \in \mathbb{R} \ , \ \lambda_\gamma \geq 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p' \quad$ et $\lambda_\gamma = 0$ si $I_\gamma(x_0) = 0$

2) $\mu_\alpha(t)$ est une fonction continue par morceaux admettant pour points de continuité les points de continuité de $\dot{x}_0(t)$.

De plus : $\quad \mu_\alpha(t) \geq 0 \qquad 1 \leq \alpha \leq m'$

$$\mu_\alpha(t) \ \ \varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0) = 0 \qquad \forall \ t \in [t^1, t^2]$$

(la sommation n'étant pas effectuée par rapport à α).

3) Il existe des constantes $c_i \ (1 \leq i \leq n)$ et c telles que sur l'arc x_0, μ_α étant égal à $\mu_\alpha(t)$ on ait :

$$F - \dot{x}^i F_{\dot{x}^i} = \int_{t^1}^{t} F_t \, ds + c \qquad F_{\dot{x}^i} = \int_{t^1}^{t} F_{x^i} \, ds + c_i$$

4) La condition de transversalité :

$$dG + \left[(F - \dot{x}^i F_{\dot{x}^i}) \, dT^s + F_{\dot{x}^i} \, dX^{is} \right]_{s=1}^{s=2} + \int_{t^1}^{t^2} F_{b^\sigma} \, db^\sigma dt = 0$$

est une identité en db^σ sur x_0.

5) En chaque point $(t, x, \dot{x}, u, \ell, \mu)$ de x_0 :

$$E(t, x, \dot{x}, u, \ell, \mu) \geq \mu_\alpha \varphi_\alpha(t, x, u, \ell)$$

pour tout élément $(t, x, u, \ell) \in \mathcal{K}_0$, E étant la fonction de Weierstrass définie ainsi :

$$E(t, x, \dot{x}, u, \ell, \mu) = F(t, x, u, \ell, \mu) - F(t, x, \dot{x}, \ell, \mu) - (u^i - \dot{x}^i)\, F_{\dot{x}^i}(t, x, \dot{x}, \ell, \mu)$$

Ce théorème se déduit facilement du théorème I.

Il suffit de remarquer que $H = p_i u^i - F(t, x, u, \ell, \mu)$

et que $H_{u^i} = p_i - F_{\dot{x}^i} = 0$, $H_{x^i} = -F_{x^i}$, $H_t = -F_t$, $H_{\ell^\sigma} = -F_{\ell^\sigma}$

Au moyen des transformations indiquées dans la remarque 1.1 le théorème I peut se déduire du théorème I'.

<u>Remarque 2.4 :</u> <u>Transformations qui permettent d'étudier uniquement le cas où l'intervalle $[t^1, t^2]$ a des bornes fixes.</u>

Introduisons une nouvelle fonction d'état $x^0(t)$ et une nouvelle fonction de contrôle $u^0(t)$ telles que :

$$\begin{cases} \dot{x}^0(t) = u^0(t) > 0 \\ x^0(t^1) = T^1(\ell) = X^{01}(\ell) \quad \text{avec} \quad t^1 = T^1(\ell_0) \\ x^0(t^2) = T^2(\ell) = X^{02}(\ell) \quad \text{avec} \quad t^2 = T^2(\ell_0) \end{cases}$$

Posons de plus : $x_0^0(t) = t$ ce qui implique $u_0^0(t) = 1$

et

$$\begin{cases} y(t) = (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ v(t) = (u^0(t), u^1(t), \dots, u^n(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y^1(\ell) = (X^{01}(\ell), X^{11}(\ell), \dots, X^{n1}(\ell)) \\ Y^2(\ell) = (X^{02}(\ell), X^{12}(\ell), \dots, X^{n2}(\ell)) \end{cases}$$

Posons enfin :

$$\begin{cases} M_\rho(y,v,b) = L_\rho(x^0,x,u,b)\,u^0 & 0 \le \rho \le p \\ \Psi_\alpha(y,v,b) = \varphi_\alpha(x^0,x,u,b)\,u^0 & \\ h^0(y,v,b) = u^0 & \\ h^i(y,v,b) = h^i(x^0,x,u,b)\,u^0 & 1 \le i \le n \end{cases}$$

Considérons l'ensemble $\mathcal{D}$ des arcs :

y : $\quad y(t),\ v(t),\ b \qquad t \in [t^1, t^2]$

Tels que :

$$\dot{y} = h(y,v,b)$$

$$\begin{cases} \Psi_\alpha \le 0 & 1 \le \alpha \le m' \\ \Psi_\alpha = 0 & m' < \alpha \le m \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t^1) = Y^1(b) \\ y(t^2) = Y^2(b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_\gamma(y) \le 0 & 1 \le \gamma \le p' \\ I_\gamma(y) = 0 & p' < \gamma \le p \end{cases}$$

où $\quad I_\gamma(y) = g_\gamma(b) + \int_{t^1}^{t^2} M_\gamma(y,v,b)\,dt \qquad 0 \le \gamma \le p.$

<u>L'arc y_0 minimise $I_0(y)$ sur $\mathcal{D}$</u>, car nous avons seulement modifié les variables d'intégration.

Le théorème I s'applique dans ce cas aussi.

En effet, posons :

$$N = p_j h^j - (\lambda_\rho M_\rho + \mu_\alpha \Psi_\alpha) = (p_0 + H)\,u^0$$

et $\quad \pi = (p_0, p_1, \dots, p_n)$

Puisque $N_{u^0} = p_0 + H = 0$, $p_0(t) = -H(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$ sur x_0.

De plus, sur x_0 :

$u^0 = 1$, $N_{x^0} = H_t$, $N_{x^i} = H_{x^i}$, $N_{b^\sigma} = H_{b^\sigma}$, $N_{u^k} = H_{u^k}$

On en déduit que les relations du type 3) et 4) du théorème I sont satisfaites.

La relation de type 4) s'écrit :

$$N(y_0(t), v, b_0, \pi(t), 0) \leq N(y_0(t), v_0(t), b_0, \pi(t), 0)$$

Mais $N(y_0(t), v_0(t), b_0, \pi(t), 0) = 0$, puisque $p_0 = -H$ sur x_0

Donc $(p_0(t) + H(t, x_0(t), u, b_0, 0))\, u^0 \leq 0$.

Il en résulte que la relation 4) du théorème 1 est vérifiée puisque u^0 est > 0.

III Une proposition essentielle.

Rappelons tout d'abord le théorème du rang :

<u>Théorème</u> : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, A un ouvert de E contenant un point $a \in E$, f une application continûment différentiable de A dans F dont le rang soit un nombre constant p.

Alors, il existe :

1°) Un voisinage ouvert $V \subset A$ du point a et un difféomorphisme h de V sur la boule unité I_n de $\mathbb{R}^n$

2°) Un voisinage ouvert $V' \supset f(U)$ du point $b = f(a)$ et un difféomorphisme h' de V' sur la boule unité I_m de $\mathbb{R}^m$ tels que : $f = h'^{-1} \circ g \circ h$,

où g est l'application : $(x_1, \ldots, x_n) \to (y_1, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0)$
de I_n dans I_m.

Nous allons déduire de ce théorème le lemme suivant :

<u>Lemme 3.1 :</u> Soit x_0 : $x_0(t)$, $u_0(t)$, b_0 $\quad t \in [t^1, t^2]$
un arc de $\mathcal{B}$ tel que la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u^k} & \delta_{\alpha\beta}\varphi_\beta \end{pmatrix}$$ soit de rang m en tout point

$(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$ $\quad t \in [t^1, t^2]$.

Il existe alors une fonction $U_0(t, x, b)$ définie sur un voisinage Ω de l'arc de $\mathbb{R}^{n+r+1}$:

$$(t, x_0(t), b_0) \qquad t \in [t^1, t^2]$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $(t, x, U_0, b) \in \mathcal{K}_0$

2) $U_0(t, x_0(t), b_0) = u_0(t) \qquad t \in [t^1, t^2]$

3) U_0 et ses dérivées partielles relativement à x^i et b^σ sont continues sauf pour les valeurs de t pour lesquelles $u_0(t)$ est discontinue.

En un point $\bar{t}$ de discontinuité de $u_0(t)$, ces fonctions ont des limites à droite et à gauche.

De plus, si nous posons :

$$\tau_i^k(t) = \frac{\partial U_0^k}{\partial x^i} \qquad [illegible]_\sigma^k(t) = \frac{\partial U_0^k}{\partial b^\sigma} \quad \text{sur } x_0,$$

alors pour $\forall t$ tel que $\varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0) = 0$

et pour $\forall \alpha$ $\quad \left\{ \varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} \tau_i^k = 0 \right.$ $\quad$ sur x_0

Demonstration :

a) Supposons tout d'abord que $m' = 0$ et que $u_0(t)$ soit continue sur $[t^1, t^2]$.

Alors $x_0(t)$ est continue et a une dérivée première continue sur $[t^1, t^2]$. D'autre part, φ_0 est de rang m en tout point $(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$ $\quad t \in [t^1, t^2]$.

Posons : $$w_\alpha^k(t) = \frac{\partial \varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0)}{\partial u^k} \qquad \alpha = 1, \dots, m \qquad k = 1, \dots, q$$

Ces fonctions sont continues sur $[t^1, t^2]$.

Il en résulte que le déterminant :
$$\Delta(t) = |w_\alpha^k(t)\, w_\beta^k(t)| \qquad 1 \leq \alpha \leq m \qquad 1 \leq \beta \leq m$$
est de rang m en tout point de $[t^1, t^2]$.

$\Delta(t)$ est le déterminant fonctionnel relativement à z_β des équations : $\varphi_\alpha(t, x, u_0(t) + w_\beta(t) z_\beta, b) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m$, en tout point de l'arc $\Gamma : (t, x_0(t), u_0(t), b_0) \quad t \in [t^1, t^2]$.

Posons : $$\psi_\alpha(t, x, z, b) = \varphi_\alpha(t, x, u_0(t) + w_\beta(t) z_\beta, b)$$

Puisque $\varphi_\alpha(t, x, u, b)$ est de classe C^1 (hypothèse h1), il en est de même de $\psi_\alpha(t, x, z, b)$.

De plus, $D_z \psi_\alpha$ est de rang m en tout point de Γ.

Posons encore : $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$, $E = \mathbb{R}^{m+n+r+1}$, $F = \mathbb{R}^{n+r+1}$.

Γ étant compact, il existe un ouvert Ω de E contenant Γ, dans lequel ψ est continûment différentiable et .

$D_z \psi$ est de rang constant m puisque ψ applique E

dans $\mathbb{R}^m$.

La restriction ω de ψ à Ω est donc une submersion.

On en déduit, en utilisant le théorème du rang, que $\omega^{-1}(0)$ est une sous-variété H de E de dimension $(n+r+1)$.

Puisque $D_z \omega \neq 0$ en tout point de Γ, il existe un ouvert $\Omega_0 \subset H$ et contenant Γ qui se projette suivant un ouvert Ω'_0 de F contenant Γ', projection de Γ.

Il existe donc une fonction $Z(t,x,b)$ continûment différentiable défini sur Ω'_0 et telle que $Z(t, x_0(t), b_0) = 0$

La fonction $U_0(t,x,b) = u_0(t) + w_\beta(t) Z_\beta(t,x,b)$ possède toutes les propriétés énoncées dans le lemme 3.1., comme on pourrait le vérifier facilement.

<u>b) Supposons $m' > 0$ et $u_0(t)$ continue sur $[t^1, t^2]$</u>

Posons
$$\begin{cases} \theta_\alpha(t,x,w,b) = \varphi_\alpha(t,x,u,b) + (v^\alpha)^2 = 0 & 1 \le \alpha \le m' \\ \theta_\alpha(t,x,w,b) = \varphi_\alpha(t,x,u,b) = 0 & m' < \alpha \le m \end{cases}$$

où, $v = (v^1, \dots, v^{m'})$ et $w = (u, v)$

Posons : $$\Theta = \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial w^k}\right) = \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial u^k} \quad \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial v^\beta}\right) \qquad 1 \le \alpha \le m \quad 1 \le k \le q \quad 1 \le \beta \le m'$$

De l'hypothèse faite sur ϕ on déduit que Θ est de rang m, en tout point $(t, x_0(t), w_0(t), b_0)$ $t \in [t^1, t^2]$

avec $v_0^\alpha(t) = [-\varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0)]^{\frac{1}{2}}$.

Il existe donc une fonction $W_0(t,x,b) = (U_0(t,x,b), V_0(t,x,b))$ défini dans un voisinage Ω' de Γ', ayant des dérivées partielles continues par rapport à x^i et b^σ dans Ω' et telle que :

$b_1)$ $W_o(t, x_o(t), b_o) = (u_o(t), v_o(t))$

ce qui implique : $U_o(t, x_o(t), b_o) = u_o(t)$.

$b_2)$ $\theta_\alpha(t, x, W_o, b) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m$ dans Ω'

ce qui implique : $\begin{cases} \varphi_\alpha(t, x, U_o, b) \leq 0 & 1 \leq \alpha \leq m' \\ \varphi_\alpha(t, x, U_o, b) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$

$b_3)$ $\theta_{\alpha x^i} + \theta_{\alpha u^k} \dfrac{\partial U_o^k}{\partial x^i} + \theta_{\alpha v^\beta} \dfrac{\partial V_o^\beta}{\partial x^i} = 0$ sur Γ'

ce qui implique : $\varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} \dfrac{\partial U_o^k}{\partial x^i} = 0 \quad m' < \alpha \leq m$ sur Γ'

De même, $\varphi_{\alpha b^\sigma} + \varphi_{\alpha u^k} \dfrac{\partial U_o^k}{\partial b^\sigma} = 0 \quad m' < \alpha \leq m$ sur Γ'.

<u>c) Supposons que $u_o(t)$ ait des discontinuités de première espèce aux points $t_1, \dots, t_{N-1}$ $(t_o = t' < t_1 < \dots < t_{N-1} < t^2 = t_N)$</u>

Dans chacun des intervalles $]t_{j-1}, t_j[$, $u_o(t)$, $x_o(t)$ et $\dot{x}_o(t)$ sont continues.

Posons :

$$\begin{cases} u_{oj}(t) = u_o(t) & t \in]t_{j-1}, t_j[\\ u_{oj}(t_{j-1}) = \lim\limits_{\substack{t \to t_{j-1} \\ t > t_{j-1}}} u_o(t) \\ u_{oj}(t_j) = \lim\limits_{\substack{t \to t_j \\ t < t_j}} u_o(t) \end{cases}$$

et $x_{oj}(t) = x_o(t) \qquad t \in [t_{j-1}, t_j]$

Notons Γ'_j l'arc $(t, x_{oj}(t), b_o) \qquad t \in [t_{j-1}, t_j]$

Des résultats des paragraphes a) et b) on déduit qu'à chaque arc $\Gamma_j^!$ on peut associer un ouvert de $\mathbb{R}^{n+r+1}$: $\Omega_j^! \supset \Gamma_j^!$ sur lequel est définie une fonction $U_{0j}(t,x,b)$ continûment différentiable et telle que :

$$U_{0j}(t, x_{0j}(t), b_0) = u_{0j}(t) \qquad t \in [t_{j-1}, t_j]$$

En tout point de $\Gamma_j^!$:

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} \dfrac{\partial U_0^k}{\partial x^i} = 0 & m' < \alpha \leq m \\ \varphi_{\alpha b^\sigma} + \varphi_{\alpha u^k} \dfrac{\partial U_0^k}{\partial b^\sigma} = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$$

Posons : $U_0(t,x,b) = U_{0j}(t,x,b) \qquad t \in [t_{j-1}, t_j] \quad (t,x,b) \in \Omega_j^!$

$U_0(t,x,b)$ possède les propriétés énoncées dans le lemme 3.1.

<u>Lemme 3.2 :</u> Soit $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b_0)$ un élément de K_0 tel que $\bar{x} = x_0(\bar{t})$. Il existe une fonction $U(t,x,b)$ définie dans un voisinage $\bar{\Omega}$ de $(\bar{t}, \bar{x}, b_0)$ telle que $(t,x,u,b) \in K_0$ et $U(\bar{t}, \bar{x}, b_0) = \bar{u}$.

La fonction U et ses dérivées partielles relativement à x^i et b^σ sont continues dans $\bar{\Omega}$.

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme 3.1. ou du théorème des fonctions implicites.

IV Deuxième formulation du problème du contrôle optimal.

Comme nous l'avons montré, ci-dessus, nous pourrons toujours supposer que t^1 et t^2 sont indépendants de b.

Hypothèse h4) :

L'intervalle $[t^1, t^2]$ a des bornes fixes.

Définition 4.1 : Ensemble des arcs permis $\mathcal{C}$:

C'est le sous-ensemble $\mathcal{C}$ des arcs de $\mathcal{A}$

$$x : \quad x(t), u(t), b \qquad t \in [t^1, t^2]$$

tels que
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u, b) \\ x(t^1) = X^1(b) \end{cases}$$

Le problème de Bolza consiste à minimiser $I_0(x)$ sur $\mathcal{C}$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} I_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ I_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p \\ x(t^2) = X^2(b) \end{cases}$$

Nous allons introduire maintenant $(p+n+1)$ nouvelles fonctions :

$$J_\rho(x) = G_\rho(b) + \int_{t^1}^{t^2} F_\rho(t, x, u, b)\, dt \qquad 0 \leq \rho \leq p+n$$

de telle façon que le problème de Bolza se réduise à minimiser $J_0(x)$ sur $\mathcal{C}$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} J_\rho(x) \leq 0 & 1 \leq \rho \leq p' \\ J_\rho(x) = 0 & p' < \rho \leq p+n \end{cases}$$

Ces fonctions seront telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} F_\rho (t, x, U_0(t,x,b), b) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma,$$

U_0 étant une fonction définie par le lemme 3-1.

Soit $\qquad \tau_j^k(t) = \dfrac{\partial U_0^k(t, x_0(t), b_0)}{\partial x^j}$

et posons :

$$\begin{cases} A_j^i(t) = \dfrac{\partial}{\partial x^j}\left[f^i(t,x,U_0,b)\right] = f^i_{x^j} + f^i_{u^k}\tau_j^k \\[2ex] B_{\gamma j}(t) = \dfrac{\partial}{\partial x^j}\left[L_\gamma(t,x,U_0,b)\right] = L_{\gamma x^j} + L_{\gamma u^k}\tau_j^k \end{cases},$$

les expressions au second membre étant calculées sur Γ.

Posons aussi :

$$\begin{cases} F_\gamma = L_\gamma - B_{\gamma j}x^j + q_{\gamma i}(t)\left(f^i - A_j^i x^j\right) \\[2ex] G_\gamma = g_\gamma - q_{\gamma i}(t^2)X^{i2} + q_{\gamma i}(t^1)X^{i1} \end{cases} \qquad 0 \le \gamma \le p$$

où les fonctions $q_{\gamma i}$ sont des solutions des problèmes différentiels :

$$\dot q_{\gamma j} + q_{\gamma i}A_j^i + B_{\gamma j} = 0 \qquad q_{\gamma j}(t^2) = 0 .$$

Si $x \in \mathcal{C}$: $\quad \dfrac{d}{dt}\left(q_{\gamma j}x^j\right) = -B_{\gamma j}x^j + q_{\gamma i}\left(f^i - A_j^i x^j\right)$

Donc :

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad 0 \le \gamma \le p \\ J_\gamma(x) = I_\gamma(x) - \left[q_{\gamma i}(t^2)X^{i2} - q_{\gamma i}(t^1)X^{i1}\right] + \int_{t^1}^{t^2} \frac{d}{dt}\left(q_{\gamma i}x^i\right)dt = I_\gamma(x)\end{gathered}}$$

Posons d'autre part :

$$\begin{cases} F_{p+i} = P_{ij}(t)\left(f^j - A_\ell^j x^\ell\right) \\[2ex] G_{p+i} = -\left[P_{ij}(t^2)X^{j2} - P_{ij}(t^1)X^{j1}\right] \end{cases} \qquad 1 \le i \le n ,$$

où les fonctions $P_{ij}(t)$ sont solutions des problèmes différentiels :

$$\dot{P}_{ij} + P_{il} A_j^l = 0 \qquad P_{ij}(t^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n \\ J_{p+i}(x) = G_{p+i} + \displaystyle\int_{t^1}^{t^2} \frac{d}{dt}\left(P_{ij}\, x^j\right) dt = x^i(t^2) - X^{i2}(b) \end{array}}$$

Et sur $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} I_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ I_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p \\ x(t^2) = X^2(b) \end{cases} \iff \begin{cases} J_\rho(x) \leq 0 & 1 \leq \rho \leq p' \\ J_\rho(x) = 0 & p' < \rho \leq p+n \end{cases}$$

Théorème II : Supposons que l'arc :

x_0 : $x_0(t)$, $u_0(t)$, b_0 $\qquad t \in [t^1, t^2]$

minimise $J_0(x)$ sur $\mathcal{E}$ en satisfaisant aux contraintes :

$$\begin{cases} J_\rho(x) \leq 0 & 1 \leq \rho \leq p' \\ J_\rho(x) = 0 & p' < \rho \leq p+n \end{cases}$$

Il existe alors des multiplicateurs : $\lambda_0 \geq 0$, λ_1, ..., λ_{p+n} qui ne sont pas tous nuls et deux fonctions :

$$F(t, x, u, b) = \lambda_\rho F_\rho \quad , \quad \bar{G}(b) = \lambda_\rho G_\rho \quad , \quad 0 \leq \rho \leq p+n$$

telles que :

1) $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda_\gamma \geq 0$ $\quad 1 \leq \gamma \leq p'$ et $\lambda_\gamma = 0$ si $J_\gamma(x_0) < 0$

2) $\forall\, t \in [t^1, t^2]$ et $\forall\, u$ tel que $(t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{K}_0$:

$$F(t, x_0(t), u, b_0) \geq F(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$$

3) La condition de transversalité :

$$d\bar{G} + \int_{t^1}^{t^2} \left(F_{u^k} s_\sigma^k + F_{b^\sigma} \right) db^\sigma \, dt = 0 \qquad \text{avec} \quad s_\sigma^k = \frac{\partial U_0^k(t, x_0(t), b_0)}{\partial b^\sigma}$$

est une identité en db^σ sur l'arc x_0.

La démonstration de ce théorème sera donnée au paragraphe VI

Nous allons énoncer maintenant un résultat complémentaire.

Théorème II' :

Considérons les fonctions F et $\bar{G}$ définies dans le théorème II.

Il existe des multiplicateurs $\mu_\alpha(t)$, continues en chaque point de continuité de $u_0(t)$ et telles que :

$$F_{u^k} + \mu_\alpha(t) \varphi_{\alpha u^k} = 0 \qquad \text{sur } x_0 .$$

De plus, $\mu_\alpha(t) \geq 0$ si $\alpha \leq m'$

$$\mu_\alpha(t) \varphi_\alpha = 0 \qquad \text{sur } x_0$$

(la sommation n'étant pas effectuée par rapport à α)

Si nous posons : $\bar{F} = F + \mu_\alpha(t) \varphi_\alpha$,

la condition de transversalité s'écrit :

$$d\bar{G} + \int_{t^1}^{t^2} \bar{F}_{b^\sigma} db^\sigma \, dt = 0 \qquad \text{sur } x_0 \text{ quel que}$$

soit db^σ.

Pour démontrer ce théorème, posons :

$$f(t,u) = F(t, x_0(t), u, b_0) \qquad , \bar{\varphi}_\alpha(t,u) = \varphi_\alpha(t, x_0(t), u, b_0)$$

$u = u_0(t)$ minimise $f(t,u)$ parmi tous les vecteurs u tels que :

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_\alpha(t,u) \leq 0 & \alpha \leq m' \\ \bar{\varphi}_\alpha(t,u) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases} \qquad t \in [t^1, t^2]$$

Il résulte de la règle des multiplicateurs de Lagrange — qui se déduit d'un résultat que nous établirons au paragraphe suivant — que pour $\forall\, t \in [t^1, t^2]$, il existe des multiplicateurs $\mu_0 \geqslant 0$, $\mu_\alpha(t)$ qui ne sont pas tous nuls tels que :

$$\begin{cases} \mu_0 f_{u^k} + \mu_\alpha(t)\, \bar{\varphi}_{\alpha u^k} = 0 \quad \text{si} \quad u = u_0(t) \\ \mu_\alpha(t) \geqslant 0 \quad \alpha \leq m' \\ \mu_\alpha(t)\, \varphi_\alpha = 0 \quad \text{sur } x_0 \quad (\text{la sommation} \\ \quad \text{n'étant pas effectuée par rapport à } \alpha) \end{cases}$$

Puisque la matrice ϕ, par hypothèse, est de rang m sur x_0, la condition $\mu_0 = 0 \Rightarrow \mu_\alpha(t) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m$.
Ainsi μ_0 est positif et l'on peut choisir μ_0 égal à 1.
Puisque ϕ est de rang m sur x_0, $\mu_\alpha(t)$ est continue en chaque point de continuité de $u_0(t)$.
On voit d'autre part que $\bar{F}_{u^k} = 0$ sur x_0.
Tenant compte des relations :

$$\varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k}\, r_i^k = 0 \qquad \varphi_{\alpha b^\sigma} + \varphi_{\alpha u^k}\, s_\sigma^k = 0 \qquad \text{sur } x_0,$$

on conclut que $\displaystyle\int_{t^1}^{t^2} \mu_\alpha(t) \{\varphi_{\alpha u^k}\, s_\sigma^k + \varphi_{\alpha b^\sigma}\}\, dt = 0$ sur x_0

et que $d\bar{G} + \displaystyle\int_{t^1}^{t^2} \bar{F}_{b^\sigma}\, db^\sigma\, dt = 0$ sur x_0 quel que soit db^σ.

Démonstration du théorème I au moyen des résultats établis dans les théorèmes II et II' :

Considérons les multiplicateurs λ_ρ introduits dans le théorème II et posons : $p_i(t) = -\lambda_{p+j} P_{ij}(t) - \lambda_\beta q_{\beta i}(t)$ $\quad 0 \leq \beta \leq p$.

Alors : $\dot{p}_j + p_i A^i_j = \lambda_\beta B_{\beta j}$.

De même si nous posons :

$$H(t, x, u, b, p, \mu) = p_j f^j - \lambda_\beta L_\beta - \mu_\alpha \varphi_\alpha$$

alors $H(t, x, u, b, p(t), \mu(t)) = -\dot{p}_{ij}(t) x^j - F - \mu_\alpha \varphi_\alpha = -\dot{p}_j x^j - \bar{F}$,

F et $\bar{F}$ étant les fonctions introduites dans les théorèmes II et II'.

Ainsi $\forall \ (t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{K}_0$:

$$H(t, x_0(t), u, b_0, p(t), 0) \leq H(t, x_0(t), u_0(t), b_0, p(t), 0) .$$

De plus le long de x_0 :

$$H_{u^k} = -\bar{F}_{u^k} = 0 \qquad \text{avec} \quad \mu_\alpha = \mu_\alpha(t).$$

Puisque $\mu_\alpha(t) = 0$ si $\varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0) < 0$,

$$\mu_\alpha(t) \{ \varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} \tau^k_j \} = 0 \qquad \text{sur } x_0 .$$

Comme $\dfrac{\partial}{\partial x^j} [F_\rho(t, x, U_0(t,x,b), b] = 0$ sur x_0 $\quad 0 \leq \rho \leq p+n$

et puisque $-\bar{F}_{u^k} = H_{u^k} = 0$, en posant $u = U_0(t,x,b)$,

on obtient par différentiation :

$$\dot{p}_i = -H_{x^i} - H_{u^k} \tau^k_i = -H_{x^i} \qquad \text{sur } x_0 .$$

Finalement, on déduit des définitions de $\bar{F}_\rho$ et G_ρ $\quad 0 \leq \rho \leq p+n$

que : $\bar{G} = G + p_i(t^2) X^{i2} - p_i(t^1) X^{i1}$ avec $G = \lambda_\beta g_\beta$.

De plus : $H_{\rho\sigma} = - F_{\rho\sigma}$ sur x_0 .

D'où il résulte que :

$$dG + p_i(t^2)\, dX^{i2} - p_i(t^1)\, dX^{i1} - \int_{t^1}^{t^2} H_{\rho\sigma}\, d\theta^\sigma\, dt = 0 \quad \text{sur } x_0$$

quel que soit $d\theta^\sigma$.

Ainsi est établi le théorème I.

V Un théorème fondamental du calcul des variations.

Nous considérons dans toute la suite que $\mathbb{R}^k$ est muni d'une structure d'espace Euclidien.

Notons J l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$:

$$\mathcal{C} \ni x \xrightarrow{J} J(x) = (J_0(x), \dots\dots, J_{p+n}(x)) \in \mathbb{R}^{p+n+1}$$

Soit $\Delta_n(0, 2\delta)$ le cube ouvert de $\mathbb{R}^n$, centré à l'origine et de côté 2δ.

Soit $\Delta_n^+(0, \delta)$, le sous-ensemble de $\Delta_n(0, 2\delta)$ dont les éléments ont des composantes positives ou nulles.

$\Delta_n^+(0,\delta)$ est un cube ayant l'origine pour sommet et de côté δ.

Notons X^n l'application de $\Delta_n(0, 2\delta)$ dans $\mathcal{C}$:

$$\mathbb{R}^n \supset \Delta_n(0, 2\delta) \ni \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \xrightarrow{X^n} X^n(\lambda) \in \mathcal{C}.$$

Designons par ϕ^n la restriction de l'application $J \circ X^n$ à $\Delta_n^+(0,\delta)$. ϕ^n est une application de $\Delta_n^+(0,\delta)$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$

Définition 5.1 :

Nous dirons que l'application ϕ^n de $\Delta_n^+(0,\delta)$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ est positivement différentiable à l'origine, s'il existe une application linéaire et continue L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ telle que :

$$\frac{1}{\|\lambda\|}\left[\phi^n(\lambda)-\phi^n(0)-L(\lambda)\right] \to 0 \quad \text{quand} \quad \Delta_n^+(0,\delta) \ni \lambda \to 0$$

Nous dirons alors que L est la dérivée de ϕ^n à l'origine.

Définition 5.2 : Ensemble tangent à $J(\mathcal{E})$ en $J(x_0)$.

Soit x_0 un élément de $\mathcal{E}$ et K un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n+1}$. On dira que K est un ensemble tangent à $J(\mathcal{E})$ en $J(x_0)$ si, à tout ensemble fini de N vecteurs $k_1, \ldots, k_N \in K$ — qui définit une application linéaire T^N de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ — on peut faire correspondre une application X^N de $\Delta_N^+(0,\delta)$ dans $\mathcal{E}$ et une application $\phi^N = J \circ X^N$ qui possèdent les propriétés suivantes :

1) $X^N(0) = x_0$

2) $\phi^N(\lambda)$ est continue sur $\Delta_N^+(0,\delta)$.

3) $\phi^N(\lambda)$ est positivement différentiable à l'origine où sa dérivée est égale à T^N.

Nous construirons au paragraphe VI un ensemble tangent à $J(\mathcal{E})$ en $J(x_0)$.

<u>Lemme 5.1 :</u> Si K est un ensemble tangent à $J(\mathcal{E})$ en $J(x_0)$, l'enveloppe convexe K^* de K possède la même propriété.

Soient $k_1^*, \dots, k_N^*$, N éléments de K^*

$$k_i^* = \sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij}\, k_{ij} \qquad \alpha_{ij} \geq 0 \qquad k_{ij} \in K .$$

Posons $M = \sum_{i=1}^{N} M_i$. Il existe une application de $\Delta_M^+(0, \delta)$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$: $X^M(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1M_1}, \dots, \lambda_{N1}, \dots, \lambda_{NM_N})$ qui possède les propriétés énoncées dans la définition 5.2.

Posons $\lambda_{ij} = \alpha_{ij}\, \mu_i$ (la sommation n'étant pas effectuée par rapport à i), $\delta_i' = \dfrac{\delta}{\sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij}}$ $\quad 1 \leq i \leq N$

et $\delta' = \inf_{1 \leq i \leq N} \delta_i'$.

Soit $Y^N(\mu) = Y^N(\mu_1, \dots, \mu_N) = X^M(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{NM_N})$

$Y^N(\mu)$ est une application de $\Delta_N^+(0, \delta')$ qui possède les propriétés énoncées dans la définition 5.2.

En particulier si S^N est l'application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$, définie par la donnée des vecteurs $k_1^*, \dots, k_N^*$

$$\left(\frac{d\psi^N}{d\mu}\right)_{\mu=0} = S^N \qquad \mu \in \Delta_n^+(0, \delta') \qquad \psi^N = J \circ Y^N$$

Théorème III

Soit K un ensemble tangent à $J(\mathcal{C})$ en $J(x_0)$.

Supposons que x_0 minimise $J_0(x)$ parmi tous les éléments $x \in \mathcal{C}$ qui satisfont aux contraintes :

$$\begin{cases} J_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ J_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p+n \end{cases}$$

Alors il existe des scalaires $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+n}$ qui ne sont pas tous nuls tels que :

$$\forall\, k = (k^0, \dots, k^{p+n}) \in \overline{K}^* \quad , \quad L(k) = \lambda_\rho k^\rho \geq 0$$

$\overline{K}^*$ étant la fermeture dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ du cône convexe K^* engendré par K.

De plus $\lambda_\gamma \geq 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p'$ avec $\lambda_\gamma = 0$ si $J_\gamma(x_0) < 0$

Remarque 5.1 : Le théorème III généralise la règle des multiplicateurs de Lagrange.

C'est de ce théorème que nous déduirons le principe du maximum et la condition de transversalité de Weierstrass.

Remarque 5.2 : Le fait que $\lambda_\gamma = 0$ si $J_\gamma(x_0) < 0$ signifie que J_γ ne joue aucun rôle dans la règle des multiplicateurs. Ceci s'explique intuitivement en notant que si $J_\gamma(x_0) < 0$, la condition $J_\gamma(x) < 0$, n'est pas une contrainte locale.

Remarque 5.3 : Soit $k \in K$ et X^1 l'application de $\Delta_1^+(0,\delta)$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ associée à k selon la définition 5.2. Posons : $\Psi = \lambda_0 (J_0 \circ X^1) + \dots + \lambda_{p+n} (J_{p+n} \circ X^1)$

$$\forall k \in K \qquad \left(\frac{d\Psi(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=0} \geq 0$$

La démonstration du théorème III résultera des trois lemmes qui nous établissons ci-dessous. Il sera suffisant de supposer $K^* = K$.

Définition 5.2 : Nous appellerons K^- le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n+1}$, composé des éléments $k = (k^0, \dots, k^{p+n})$ tels que :

$$\begin{cases} k^0 < 0 & \\ k^\gamma < 0 & \text{si } 1 \leq \gamma \leq p' \text{ et } J_\gamma(x_0) = 0 \\ k^\gamma = 0 & \text{si } p' < \gamma \leq p+n \end{cases}$$

K^- est un cône convexe.

Remarque 5.4 : Supposons que x_0 minimise $J_0(x)$ parmi tous les éléments $x \in \mathcal{C}$ qui satisfont aux contraintes.

$$\begin{cases} J_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ J_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p+n \end{cases}$$

Soit l un élément de K^- et S l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ qui lui est associé.

Quel que soit $\delta > 0$, il n'existe pas d'application Y^1 de $\Delta_1^+(0,\delta) \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$ telle que :

$$\left(\frac{d\Psi(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=0} = S \quad \text{avec } \Psi = J \circ Y^1 \quad \text{et} \quad \Psi_\rho(\mu) = 0 \qquad p' < \rho \leq p+n$$

Lemme 5.2 : Le théorème III est vrai si K^* et K^- sont séparés (au sens large) ou ce qui est équivalent si $K^* - K^- \neq \mathbb{R}^{p+n+1}$.

En effet, notons tout d'abord que si K^* et K^- sont séparés par un hyperplan H contenant l'origine, K^* et $-K^-$ sont dans le même demi-espace fermé limité par H. Donc $K^* - K^-$ n'engendre pas l'espace $\mathbb{R}^{p+n+1}$ tout entier. Inversement si $K^* - K^- \neq \mathbb{R}^{p+n+1}$, $K^* - K^-$ qui est un cône convexe, est situé tout entier dans l'un des deux demi-espaces fermés déterminés par un hyperplan H contenant l'origine. Il en résulte que K^* et K^- sont séparés (au sens large).

Il existe donc des scalaires λ_ρ $\quad 0 \leq \rho \leq p+n$

tels que : $\quad L(k) = \lambda_\rho k^\rho \geq 0 \qquad \forall\ k = (k^0, \ldots, k^{p+n}) \in K^*$

$$L(\ell) \leq 0 \qquad \forall\ \ell \in K^-$$

Notons $\bar{K}^*$ (resp. $\bar{K}^-$) la fermeture de K^* (resp. K^-) dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$.

$$\forall\ k \in \bar{K}^* \quad L(k) \geq 0 \quad , \quad \forall\ \ell \in \bar{K}^- \quad L(\ell) \leq 0$$

Considérons les vecteurs ℓ_γ $\quad 0 \leq \gamma \leq p'$ tels que : $\ell_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \neq \rho \\ -1 & \text{si } \gamma = \rho \end{cases}$

$\ell_\gamma \in \bar{K}^-$ $\quad 0 \leq \gamma \leq p'$. Donc $L(\ell_\gamma) = -\lambda_\gamma \leq 0$

et $\quad \lambda_\gamma \geq 0 \quad 0 \leq \gamma \leq p'$.

Si $\quad J_\gamma(x_0) < 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p'$, $\quad -\ell_\gamma \in K^-$.

Donc $L(-\ell_\gamma) = \lambda_\gamma \leq 0 \qquad 1 \leq \gamma \leq p'$

Il en résulte que $\lambda_\gamma = 0 \qquad 1 \leq \gamma \leq p'$ et $J_\gamma(x_0) < 0$.

Lemme 5.2 : Si aucun hyperplan ne sépare (au sens large) K^* et K^- ou ce qui est équivalent si $K^* - K^- = \mathbb{R}^{p+n+1}$, il existe $N = p+n+1-p'$ vecteurs linéairement indépendants $k_1, \dots, k_N \in K^*$ tels que :

1) $\ell = k_1 + \dots + k_N \in K^-$

2) la matrice $(k_j^\gamma) \qquad p' < \gamma \leq p+n \qquad 1 \leq j \leq N$ soit de rang $N-1$.

Remarquons tout d'abord que $K^* - K^- = \mathbb{R}^{p+n+1} \Rightarrow K^* \cap K^- \neq \emptyset$

Posons $V = \{ v \in \mathbb{R}^{p+n+1} : v^\gamma = 0 \quad p' < \gamma \leq p+n+1 \}$; $\dim(V) = p'+1$.

Notons ~~que~~ $K^- \subset V$.

Soit W la variété linéaire engendrée par $V^\perp$ et par un vecteur ℓ_0 quelconque appartenant à $K^* \cap K^-$; $\dim(W) = N$.

Il existe N vecteurs $h_1, \dots, h_N$ formant une base de W qui se projettent sur V suivant une base de V, c.à.d tels que la matrice $(h_j^\gamma) \quad 1 \leq j \leq N \,,\ p' < \gamma \leq p+n$ soit de rang $N-1$.

De plus on peut toujours supposer que $h_1, \dots, h_N$ sont tels que : $\ell_0 = \sum_{i=1}^{N} h_i$.

Mais $h_i = k_i - \ell_i \qquad k_i \in K^* \,,\ \ell_i \in K^-$

$$(k_j)^\gamma = (h_j^\gamma) \qquad 1 \le j \le N \qquad p' < \gamma \le p+n \qquad \text{car} \quad (l_j^\gamma) = 0$$

Ainsi $\quad l_0 = \sum_{i=1}^{N} k_i - \sum_{i=1}^{N} l_i$. $\quad$ Posons : $\; l = \sum_{i=1}^{N} k_i$.

Puisque $\; l_i \in K^-$, $\; \sum_{i=1}^{N} l_i \in K^-$ $\quad$ et $\quad l = l_0 + \sum_{i=1}^{N} l_i \in K^-$

Parmi les N vecteurs $k_1, \dots, k_N$, il y en a $N-1$ qui sont linéairement indépendants sinon la matrice (k_j^γ) ne serait pas de rang $N-1$.

Supposons que $\; k^N = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i k_i$

Comme $\; K^- \not\ni 0$, $\quad 0 \ne l = \sum_{i=1}^{N-1} (1+\lambda_i) k_i$.

Les scalaires $1+\lambda_i$ ne sont pas tous nuls ce qui est impossible car $\; \sum_{i=1}^{N-1} (1+\lambda_i) k_i^\gamma = 0 \;\Rightarrow\; 1+\lambda_i = 0 \quad 1 \le i \le N-1$.

Les vecteurs $k_1, \dots, k_N$ sont donc linéairement indépendants.

<u>Lemme 5.3</u> : Si K est un ensemble tangent à $J(\mathcal{C})$ en $J(x_0)$, K^* la fermeture convexe de K et s'il existe un élément x_0 qui minimise $J_0(x)$ parmi tous les éléments $x \in \mathcal{C}$ tels que

$$\begin{cases} J_\gamma(x) \le 0 & 1 \le \gamma \le p' \\ J_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \le p \end{cases}$$

alors $\quad K^* - K^- \ne \mathbb{R}^{p+n+1}$.

S'il n'en était pas ainsi, il existerait $N = p+n+1-p'$ vecteurs linéairement indépendants $k_1, \dots, k_N \in K^*$ tels que :

1) $\; l = k_1 + \dots + k_N \in K^-$

2) la matrice (k_j^γ) $p' < \gamma \leq p+n$ $1 \leq j \leq N$

soit de rang $N-1$.

Puisque $k_1, \dots, k_N \in K^*$, il existe une application $X^N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ de $\Delta_N^+(0,\delta) \subset \mathbb{R}^N$ dans $\mathcal{E}$ et une application $\phi^N = J \circ X^N$ de $\Delta_N^+(0,\delta)$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ qui ont les propriétés suivantes :

1) $X^N(0) = x_0$

2) $\phi^N(\lambda)$ est continue sur $\Delta_N^+(0,\delta)$

3) $\phi^N(\lambda)$ est positivement différentiable au point zéro où sa dérivée est identique à l'application T^N de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ définie par la matrice (k_j^γ) $1 \leq j \leq N$ $0 \leq \gamma \leq p+n$.

Posons $\lambda_j = \mu(1+y^j)$ $0 \leq \mu < \frac{\delta}{2}$ $|y^j| < 1$ $1 \leq j \leq N$

$$\phi^N(\lambda) = \phi^N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \phi^N[\mu(1+y^1), \dots, \mu(1+y^N)]$$

et,

$$\begin{cases} \psi_\rho^N(\mu, y) = \frac{1}{\mu} \{ \phi_\rho^N[\mu(1+y^1), \dots, \mu(1+y^N)] & \mu \neq 0 \\ \psi_\rho^N(\mu, y) = \ell^\rho + k_j^\rho y^j & \mu = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq p+n$$

$\psi_\rho^N(\mu, y)$ est continue au point $(0,0)$.

De plus $\psi_\rho^N(0,0) = 0$ $p' < \rho \leq p+n$.

On sait aussi que $\left(\frac{d\psi_\rho^N}{dy}\right)_{y=0} = T_\rho^N$

Choisissons maintenant N scalaires $k_1^{p+n+1}, \dots, k_N^{p+n+1}$ tels que la matrice :

$$\begin{pmatrix} k_1^{p'+1} & \cdots\cdots & k_N^{p'+1} \\ \vdots & & \vdots \\ k_1^{p+n+1} & \cdots\cdots & k_N^{p+n+1} \end{pmatrix}$$ soit de rang N.

Posons : $\Psi^N_{p+n+1}(\mu, y) = k_j^{p+n+1} y^j$, $\left(\dfrac{d\Psi^N_{p+n+1}}{dy}\right)_{y=0} = T^N_{p+n+1}$

et $\chi^N = (\Psi^N_{p'+1}, \dots, \Psi^N_{p+n+1})$, $\mathcal{E}^N = (T^N_{p'+1}, \dots, T^N_{p+n+1})$

$\chi^N(0,0) = 0$ $\left(\dfrac{d\chi^N}{dy}\right)_{y=0} = \mathcal{E}^N$ où $\mathcal{E}^N$ est un isomorphisme

de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^N$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application continue $y(\mu) = (y^1(\mu), \dots, y^N(\mu))$ définie pour $\forall \mu \in [0, \delta'[$ $0 < \delta' < \frac{\delta}{2}$ telle que :

1) $y(0) = 0$

2) $|y^j(\mu)| \leq \delta'' < 1$ si $0 \leq \mu < \delta'$ $1 \leq j \leq N$

3) $\omega_p^N(\mu) = \Psi_p^N(\mu, y(\mu)) = 0$ $p' < p \leq p+n$.

Posons : $Y(\mu) = X^N(\mu[1 + y^1(\mu)], \dots, \mu[1 + y^N(\mu)])$

Par construction, $\mathcal{J}_p[Y(\mu)] = \mu\ \omega_p^N(\mu) = 0$ $p' < p \leq p+n$

Plaçons nous maintenant dans le cas où $1 \leq \rho \leq p'$.

Supposons que : $J_\rho(x_0) = J_\rho[Y(0)] < 0$.

Comme $J_\rho[Y(\mu)]$ est continue au voisinage de zéro, il existe $\delta_1' > 0$ tel que : $J_\rho[Y(\mu)] < 0 \qquad 0 \leq \mu < \delta_1'$.

Supposons que : $J_\rho(x_0) = J_\rho[Y(0)] = 0$.

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \mu > 0}} \frac{J_\rho[Y(\mu)]}{\mu} = \ell^\rho < 0 .$$

Il existe donc $\delta_2' > 0$ tel que si $0 \leq \mu < \delta_2'$, $J_\rho[Y(\mu)] < 0$

Enfin, $\displaystyle\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \mu > 0}} \frac{J_0[Y(\mu)]}{\mu} = \ell^0 < 0$.

Il existe donc δ_3' tel que si $0 < \mu < \delta_3'$: $J_0[Y(\mu)] - J_0[Y(0)] < 0$

Si $\delta'' = \mathrm{Min}\,(\delta', \delta_1', \delta_2', \delta_3')$, pour $\forall \mu \in [0, \delta''[$,

il existe un élément $Y(\mu) \in \mathcal{C}$ tel que :

$$J_\rho[Y(\mu)] < 0 \qquad 1 \leq \rho \leq p'$$

$$J_\rho[Y(\mu)] = 0 \qquad p' < \rho \leq p+n$$

et $J_0[Y(\mu)] < J_0(x_0)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La démonstration du théorème III est ainsi terminée.

VI Démonstration du théorème II.

Désignons par K_1, l'ensemble des vecteurs $k = (k^0, k^1, \dots, k^{p+n})$ tels que :

$$\begin{cases} k^\rho = F_\rho(t, x_0(t), u, b_0) - F_\rho(t, x_0(t), u_0(t), b_0) \qquad 0 \leq \rho \leq p+n \\ t \in [t^1, t^2] \text{ est un point de continuité de } u_0(t). \\ (t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{K}_0 \end{cases}$$

Posons $$h^\rho_\sigma = \left[\frac{\partial}{\partial b^\sigma} \left\{ G_\rho(b) + \int_{t^1}^{t^2} F_\rho[t, x_0(t), U_0(t, x_0(t), b), b]\, dt \right\} \right]_{b = b_0}$$

$h^\rho_\sigma = G_{\rho b^\sigma} + \int_{t^1}^{t^2} \{ F_{\rho u^k} s^k_\sigma + F_{\rho b^\sigma} \}\, dt$ où l'intégrale est calculée le long de x_0 avec $s^k_\sigma = \dfrac{\partial U^k_0(t, x_0(t), b_0)}{\partial b^\sigma}$

Désignons par K_2, l'ensemble des vecteurs $k = (k^0, k^1, \dots, k^{p+n})$ tels que : $k^\rho = h^\rho_\sigma a^\sigma$, $a = (a^1, \dots, a^r)$ arbitraire, $0 \leq \rho \leq p+n$

<u>Lemme 6.1</u> : L'ensemble $K_1 \cup K_2 = K$ est un ensemble tangent à $J(\mathcal{C})$ en $J(x_0)$.

<u>Le théorème II est une conséquence immédiate de ce lemme et du théorème III.</u>

Le théorème III précise, en effet, qu'il existe des multiplicateurs $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+n}$ qui ne sont pas tous nuls tels que : $L(k) = \lambda_\rho k_\rho \geq 0 \quad \forall k \in \bar{K}^*$.

De plus $\lambda_\rho \geq 0$ $\quad 1 \leq \rho \leq p'$ avec $\lambda_\rho = 0$ si $J_\rho(x_0) < 0$.

Posons : $F = \lambda_\rho F_\rho$. Il en résulte immédiatement que :

$\forall\, (t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{K}_0$, $t \in [t^1, t^2]$ étant un point de continuité de $u_0(t)$: $F(t, x_0(t), u, b_0) \geq F(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$

Comme $u_0(t)$ n'admet qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce, l'inégalité ci-dessus est vraie pour

$\forall\, (t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{K}_0$ $\quad t \in [t^1, t^2]$.

Posons aussi : $\bar{G} = \lambda_\rho G_\rho$.

Sur x_0 : $\quad \bar{G}_{b^\sigma}\, a^\sigma + \int_{t^1}^{t^2} (F_{u^k}\, s^k_\sigma + F_{b^\sigma})\, a^\sigma\, dt \geq 0$

a étant arbitraire on en déduit que :

$$d\bar{G} + \int_{t^1}^{t^2} (F_{u^k}\, s^k_\sigma + F_{b^\sigma})\, db^\sigma = 0$$

Ainsi est établi le théorème II.

<u>Démonstration du lemme 6.1.</u>

Considérons un ensemble de $M+N$ vecteurs :

$k_1, \dots, k_N \in K_1$, $\quad l_1, \dots l_M \in K_2$ $\quad$ tels que :

$$\begin{cases} k_j^\rho = F_\rho(t_j, x_0(t_j), u_j, b_0) - F_\rho(t_j, x_0(t_j), u_0(t_j), b_0) & 0 \leq \rho \leq p+n \\ t^1 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N < t^2 \end{cases}$$

$$l_j^\rho = h^\rho_\sigma\, a_j^\sigma \qquad a_j^\sigma \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq \rho \leq p+n.$$

Considérons la fonction $U_0(t, x, b)$ dont les propriétés ont été énoncées dans le lemme 3.1.

Puisque l'arc Γ : $(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$ $\qquad t \in [t^1, t^2]$

est compact, U_0 est définie sur un ouvert Ω qui est la réunion de tous les cubes ouverts de centres $(t, x_0(t), b_0)$ et de côté 2δ suffisamment petit.

D'autre part, si δ est suffisamment petit, il existe, d'après le lemme 3.2 des fonctions $U_j(t,x,b)$ $1 \leq j \leq N$ définies sur les cubes ouverts $\Omega_j \subset \mathbb{R}^{n+r+1}$ de centres respectifs $(t_j, x_0(t_j), b_0)$ et de côté 2δ, telles que :

1) $(t, x, U_j(t,x,b), b) \in \mathcal{K}_0$

2) $U_j(t_j, x_0(t_j), b_0) = u_j$

3) les dérivées partielles de U_j par rapport à x^i et b^σ sont continues sur Ω_j.

Nous pourons choisir δ de façon que pour $j = 1, 2, \ldots, N$:

$$t_j \pm N\delta \in \,]t^1, t^2[$$

et que : $t_j + N\delta < t_i$ si $t_j < t_i$, $t_j - N\delta > t_i$ si $t_i < t_j$

Posons : $$\Delta_1(\lambda) = \begin{cases}]t_1, t_1 + \lambda_1[& \text{si } \lambda_1 \geq 0 \\ [t_1 + \lambda_1, t_1[& \text{si } \lambda_1 \leq 0 \end{cases} \qquad |\lambda_1| \leq \delta' < \delta$$

Notons $\Delta_{2,1}$ l'intervalle déduit de Δ_1 dans la translation d'amplitude $t_2 - t_1$: $\Delta_{2,1} = (\tau_2^1, \tau_2^2)$

Posons : $$\Delta_2(\lambda) = \begin{cases}]\tau_2^2, \tau_2^2 + \lambda_2] & \text{si } \lambda_2 \geq 0 \\ [\tau_2^1 + \lambda_2, \tau_2^1[& \text{si } \lambda_2 \leq 0 \end{cases} \qquad |\lambda_2| \leq \delta' < \delta$$

et $\Delta_{2,2} = \Delta_{2,1} \cup \Delta_2$.

$\Delta_{j-1,2}$ étant donné, notons $\Delta_{j,1}$ l'intervalle déduit de $\Delta_{j-1,2}$ dans la Translation d'amplitude $t_j - t_{j-1}$.

$\Delta_{j,1} = (\tau_j^1, \tau_j^2)$

Posons :
$$\Delta_j(\lambda) = \begin{cases}]\tau_j^2, \tau_j^2 + \lambda_j] & \text{si } \lambda_j \geq 0 \\ [\tau_j^1 + \lambda_j, \tau_j^1[& \text{si } \lambda_j \leq 0 \end{cases} \qquad |\lambda_j| \leq \delta' < \delta$$

et $\Delta_{j,2} = \Delta_{j,1} \cup \Delta_j$.

On définit ainsi une suite d'intervalles $\Delta_1(\lambda), \ldots, \Delta_N(\lambda)$ disjoints.

Notons $N(\lambda)$ le complémentaire de $\bigcup_{p=1}^{N} U_p$ dans $[t^1, t^2]$

Posons d'autre part, $b^\sigma(\mu) = b_0^\sigma + \mu_i a_i^\sigma$ $\qquad |\mu_i| \leq \delta' < \delta$

et
$$U(t, x, \lambda, \mu) = \begin{cases} U_j[t, x, b(\mu)] & t \in \Delta_j(\lambda) \\ U_0[t, x, b(\mu)] & t \in N(\lambda) \end{cases}$$

<u>Nous allons étudier maintenant la solution du problème différentiel</u> :

$$(P) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, U(t, x, \lambda, \mu), b(\mu)) & t \in [t^1, \theta^2] \\ x(t^1) = X^1[b(\mu)] \end{cases}$$

Désignons par $D_1, \ldots, D_N$ les N intervalles ~~considérés~~ $\Delta_1, \ldots \Delta_N$ rangés de façon que pour $\forall\, \theta_i \in D_i$ et $\forall\, \theta_j \in D_j$, $\theta_i < \theta_j$ si et seulement si $i < j$.

Posons $D_j = (\theta_j^1, \theta_j^2)$.

Si $\Delta_k = D_\ell$ nous posons : $V_\ell(t, x, b) = U_k(t, x, b)$.

Nous savons que le problème différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, U_0(t,x,b_0), b_0) & t \in [t^1, t^2] \\ x(t^1) = X^1(b_0) \end{cases}$$

admet la solution $x_0(t)$.

Considérons le problème différentiel

$$(P_{01}) \begin{cases} \dot{x} = f[t, x, U_0(t, x, b(\mu)), b(\mu)] & t \in [t^1, \theta_1^1) \\ x(t^1) = X^1(b(\mu)) \end{cases}$$

Puisque f et U_0 ont des dérivées premières continues par rapport à x^i et b^σ et que X^1 est continûment différentiable par rapport à b, nous savons qu'il existe un nombre $\delta'' > 0$, $\delta'' < \delta'$ tel que si $|\mu_k| < \delta''$ $1 \leq k \leq M$ le problème (P_{01}) admette une solution $x_{01}(t, \mu)$ continûment différentiable par rapport à μ.

De même le problème différentiel :

$$(P_1) \begin{cases} \dot{x} = f[t, x, V_1(t, x, b(\mu)), b(\mu)] & t \in D_1 \\ x(\theta_1^1) = x_{01}(\theta_1^1, \mu) \end{cases}$$

admet une solution $x_1(t, \lambda, \mu)$ continûment différentiable par rapport à (λ, μ) si $|\lambda_1| < \delta''$, $|\mu_k| < \delta''$ $1 \leq k \leq M$ dès que δ'' est suffisamment petit.

Plus généralement, le problème différentiel

$$(P_{0j}) \begin{cases} \dot{x} = f[t, x, U_0(t, x, b(\mu)), b(\mu)] & t \in (\theta_{j-1}^2, \theta_j^1) \\ x(\theta_{j-1}^2) = x_{j-1}(\theta_j^2, \lambda, \mu) \end{cases}$$

admet une solution $x_{0j}(t, \lambda, \mu)$ continûment différentiable

par rapport à (λ, μ) si $|\lambda_i| < \delta''$ $1 \le i \le j-1$,
$|\mu_k| < \delta''$ $1 \le k \le M$ dès que δ'' est suffisamment petit.

De même le problème différentiel :

$$(P_j) \begin{cases} \dot{x} = f[t, x, V_j(t, x, b(\mu)), b(\mu)] & t \in D_j \\ x(\theta_j^1) = x_{oj}(\theta_j^1, \lambda, \mu) \end{cases}$$

admet une solution $x_j(t, \lambda, \mu)$ continûment différentiable par rapport à (λ, μ) dès que $|\lambda_i| < \delta''$ $1 \le i \le j$
$|\mu_k| < \delta''$ $1 \le k \le M$, si δ'' est suffisamment petit.

La fonction
$$x(t, \lambda, \mu) = \begin{cases} x_{oj}(t, \lambda, \mu) & t \in (\theta_{j-1}^2, \theta_j^1) \\ x_j(t, \lambda, \mu) & t \in D_j \end{cases}$$

avec $\theta_0^2 = t^1$ et $\theta_{N+1}^1 = t^2$ est une solution du problème (P) continûment différentiable par rapport à (λ, μ) dès que $|\lambda_i| < \delta''$ $1 \le i \le N$, $|\mu_k| < \delta''$ $1 \le k \le M$, si δ'' est assez petit.

Posons $\Lambda = (\lambda, \mu)$ et $u(t, \Lambda) = U(t, x(t, \Lambda), \Lambda)$

Si δ'' est assez petit $(t, x(t, \Lambda), u(t, \Lambda), b(\mu)) \in \mathcal{K}_0$.

De plus $x(t, 0) = x_0$.

Notons X^{M+N}, l'application qui à $\forall\ \Lambda \in \Delta^+_{M+N}(0, \delta'')$ fait correspondre l'arc $x(t, \Lambda) \in \mathcal{C}$.

$X^{M+N}(0) = x_0$.

<u>Considérons l'application $\phi^{M+N} = J \circ X^{M+N}$.</u>

$$\begin{cases} \phi^{M+N}(\Lambda) = \bar{G}[b(\mu)] + \displaystyle\int_{t^1}^{t^2} F[t, x(t, \Lambda), U(t, x(t, \Lambda), b(\mu)), b(\mu)]\, dt \\ \Lambda \in \Delta^+_{M+N}(0, \delta'') \end{cases}$$

Nous allons montrer que $\phi^{M+N}_{(\Lambda)}$ est continue sur $\Delta^+_{M+N}(0,\delta'')$ et positivement differentiable à l'origine.

En effet, $\int_{t'}^{t^2} = \int_{N(\lambda)} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta_i}$

avec $\int_{\Delta_i} = \int_{T_i}^{T_i+\lambda_i}$ $\qquad T_i = t_i + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1}$

Comme F est continument differentiable sur $\Delta_{M+N}(0,2\delta'')$ on voit facilement que chacune des intégrales $\int_{\Delta_i}$ ainsi que $\int_{N(\lambda)}$ sont positivement differentiable à l'origine

Puisque $\bar{G}$ est continûment differentiable par rapport à ℓ, $\phi^{M+N}(\Lambda)$ est positivement differentiable à l'origine.

Remarque importante : On pourrait défini sur $\Delta_{M+N}(0,2\delta'')$ l'application $\psi^{M+N} = J_0\, Y^{M+N}$, Y^{M+N} étant l'application qui à $\forall\ \Lambda \in \Delta_{M+N}(0,2\delta'')$ fait correspondre l'arc $x(t,\Lambda) \in \mathcal{C}$.

Cette application est continue sur $\Delta_{M+N}(0,2\delta'')$ mais n'est pas differentiable à l'origine.

Calculons $\left(\dfrac{d\,\phi^{M+N}(\Lambda)}{d\Lambda}\right)_{\Lambda=0}$.

Supposons $\lambda_i = 0 \quad 1 \le i \le N \qquad \mu_k = 0$ si $j \ne k \quad 1 \le k \le M$

Alors $\phi^{M+N}(\Lambda) = \bar{G}[\ell(\mu)] + \int_{t'}^{t^2} F\cdot[t, x(t,\Lambda), U_0(t, x(t,\Lambda), \ell(\mu)), \ell(\mu)]\,dt$

Comme $\dfrac{\partial F(t, x, U_0(t, x, b_0), b_0)}{\partial x^i} = 0$ sur x_0 $t \in [t^1, t^2]$

$$\left(\frac{d\,\phi^{M+N}(\Lambda)}{d\mu_j}\right)_{\mu_j = 0} = h_\sigma\, a_j^\sigma = l_j$$

D'autre part, supposons que $\lambda_j = 0$ $1 \le j < i$, $i < j \le N$

et $\mu_k = 0$ $1 \le k \le M$

$$\phi^{M+N}(\Lambda) = A(\Lambda) + B(\Lambda) \quad \text{où}$$

$$A(\Lambda) = \bar{G}(b_0) + \int_{t_i}^{t_i + \lambda_i} F[t, x(t, \Lambda), U_i(t, x(t, \Lambda), b_0), b_0]\, dt$$

$$B(\Lambda) = \bar{G}(b_0) + \int_{N(\lambda)} F[t, x(t, \Lambda), U_0(t, x(t, \Lambda), b_0), b_0]\, dt$$

Du théorème des accroissements finis il résulte que :

$$\left(\frac{d[A(\Lambda)]}{d\lambda_i}\right)_{\lambda_i = 0} = F(t_i, x_0(t_i), u_i, b_0)$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\partial F(t, x, U_0(t, x, b_0), b_0)}{\partial x^i} = 0$ sur x_0

on obtient facilement que :

$$\left(\frac{d[B(\Lambda)]}{d\lambda_i}\right)_{\lambda_i = 0} = - F(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i), b_0)$$

c. q. f. d.

Quelques remarques :

Notons que pour définir un ensemble tangent à $J(\mathcal{C})$ en $J(x_0)$, il suffit, étant donné un ensemble quelconque de N vecteurs linéairement indépendants de K, de savoir lui associer une application X^N de $\Delta_N^+(0,\delta)$ qui possède les propriétés énoncées dans la définition 5.2.

Il est important aussi de constater que la méthode proposée par M. Hestenes permet de réduire le problème le plus général du contrôle optimal à un problème de séparation de cônes convexes qui est simple dans $J(\mathcal{C})$, alors qu'il est souvent plus difficile dans $\mathcal{C}$.

Bibliographie

[1] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mishchenko : The Mathematical Theory of optimal process.

[2] M.R. Hestenes : On variational Theory and optimal contrôl theory : J. SIAM Control Ser. A Vol. 3 No. 1 (1965)

[3] Pallu de la Barrière : Cours d'automatique théorique Dunod (1966)