Etude de certains noyaux et théorie des fonctions "spline" en analyse numérique

Marc Atteia

ÉTUDE DE CERTAINS NOYAUX ET THÉORIE DES FONCTIONS "SPLINE" EN ANALYSE NUMÉRIQUE

par

Marc ATTEIA

Docteur de 3e cycle

PUBLICATIONS

DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DE GRENOBLE

1966

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur KUNTZMANN qui, par son enseignement de l'Analyse numérique m'a donné le goût du Calcul et qui m'a guidé au début de ce travail m'accordant toujours sa bienveillante attention.

Je remercie Monsieur LIONS pour les conseils qu'il m'a donnés en cours de thèse et qui m'ont été très profitables.

Je remercie vivement Monsieur GASTINEL pour l'esprit d'équipe qu'il suscite au Laboratoire de Calcul et dont les conseils et les encouragements ont été pour moi une aide inestimable.

Je remercie Monsieur LAURENT pour les critiques et les suggestions qu'il a formulées sur une partie de ce travail.

Je voudrais aussi remercier tous mes camarades du Laboratoire de Calcul qui m'ont aidé, en particulier MM. CARASSO, JOLY et MIELLOU.

INTRODUCTION

La résolution numérique d'équations linéaires (équations différentielles ou aux dérivées partielles, équations intégrales), la dérivation et l'intégration approchées, l'interpolation conduisent en général au même problème : déterminer l'approximation de formes linéaires.

Si E^* est le dual fort d'un espace de Banach E défini sur $\mathbf{R}$, f^* un élément de E^*, $\tilde{f}_1^*$ et $\tilde{f}_2^*$ deux approximations de f^*, on considère habituellement que $\tilde{f}_2^*$ est plus précise que $\tilde{f}_1^*$ si le noyau de $f^* - \tilde{f}_2^*$ contient celui de $f^* - \tilde{f}_1^*$.

Cependant, on ne peut augmenter la dimension du noyau de $f^* - \tilde{f}_1^*$ sans que croisse très vite la complexité des calculs et de ce fait diminue la précision du résultat final.

L'étude que nous présentons a pour but -après avoir montré de quelle façon peut être représentée la fonctionnelle d'erreur $f^* - \tilde{f}_1^*$- d'établir comment, en introduisant un facteur de lissage, on peut obtenir des formules optimales d'approximation qui, pour plusieurs raisons, sont meilleures que les formules classiques.

Au chapitre I sont établies les propriétés classiques du noyau de Green d'un problème différentiel linéaire. Nous en déduisons la forme générale d'une fonctionnelle linéaire et continue sur $C^n(0,1)$ et $H^n(0,1)$ et l'écriture sous forme intégrale du reste dans l'approximation de certaines fonctionnelles.

Le cas de plusieurs variables est étudié au chapitre V où nous considérons l'opérateur D^k appliqué à l'espace de Hilbert $H^k(\Omega)$ (Ω ouvert de $\mathbf{R}^n$).

Le chapitre II donne la définition d'une formule discrète théorique et montre comment de cette formule se déduisent toutes les formules d'approximation discrètes que l'on utilise.

De cette propriété résultent en particulier deux applications :

Une méthode de résolution numérique de certains problèmes différentiels linéaires et la détermination au chapitre III du conditionnement normalisé des matrices associées à un type de problèmes différentiels linéaires.

La recherche de formules optimales d'approximation est faite ensuite dans deux directions.

Le chapitre IV développe un procédé aux différences finies à pas variable qui est appliqué à l'intégration d'une fonction et à la résolution d'un problème différentiel linéaire.

Les chapitres VI, VII, VIII sont consacrés aux fonctions "spline".

Le chapitre VI traite des fonctions "spline" polynomiales d'interpolation. Il énonce leurs principales propriétés et contient des procédures Algol permettant de calculer ces fonctions.

Le chapitre VII donne une définition générale des fonctions "spline" et établit leurs propriétés.

Le chapitre VIII fournit plusieurs applications de la notion de fonction "spline" et développe la théorie des fonctions "spline" d'ajustement.

CHAPITRE I

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE : CAS D'UNE VARIABLE - NOYAU DE GREEN

1 - PROPRIETES D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL LINEAIRE

Utilisant les notations classiques, nous poserons : $\underline{C^p[0,1]}$: espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,1]$ qui sont continues et admettent des dérivées continues jusqu'à l'ordre p.

Pour :

$$\forall y \in C^p[0,1] \quad , \quad \nu_p(y) = \sum_{k=0}^{p} \operatorname*{Max}_{x \in [0,1]} |y^{(k)}(x)|$$

est une norme sur $C^p[0,1]$. Muni de cette norme $C^p[0,1]$ est un espace de Banach.

Considérons l'opérateur différentiel linéaire T_1 qui applique $C^n[0,1]$ dans $C^\circ[0,1]$:

$$C^n[0,1] \ni y \xrightarrow{T_1} T_1\, y \equiv D^n y + q_1 D^{n-1} y + \ldots + q_n y = s \in C^\circ[0,1]$$

où D^k est l'opérateur de dérivation d'ordre k et où :

$$q_i \in C^\circ[0,1] \quad , \qquad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

a) $\underline{T_1 \text{ est une application linéaire bornée}}$.

En effet, $\nu_0[T_1\, y] \leqslant M_1\, \nu_n(y)$ où $M_1 \leqslant \operatorname{Max}\,[1\,,\ \nu_0(q_i)\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n]$. T_1 applique $C^n[0,1]$ sur $C^\circ[0,1]$ car l'équation $T_1\, y = s$ admet une solution $\in C^n[0,1]$ et vérifiant les conditions :

$y(x_0) = a_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$ si $x_0 \in [0,1]$. (théorème général d'existence des solutions, [20] Part 2).

b) $\underline{\text{Notons } N_1 \text{ le noyau de } T_1}$

$N_1 = \{y \in C^n[0,1] \;:\; T_1\, y = \theta\}$, θ élément neutre de $C^\circ[0,1]$.

N_1 est un espace de Banach (avec la norme induite par ν_n) qui est de dimension n. (Propriété des solutions fondamentales [20] Part 2).

2 - CONDITIONS ASSOCIEES A UN OPERATEUR DIFFERENTIEL LINEAIRE -

a) Définition.

Nous appellerons "condition" (associée à l'opérateur T_1), toute fonctionnelle linéaire continue définie sur $C^{n-1}[0,1]$.

Considérons n "conditions" $y_1^*, \ldots, y_n^*$ dont les restrictions : $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sur N_1 sont linéairement indépendantes.

$v_1^*, \ldots, v_n^*$ forment une base de N_1^*, ensemble des fonctionnelles linéaires et continues définies sur N_1.

On peut toujours trouver n vecteurs linéairement indépendants $v_1, \ldots, v_n \in N_1$ tels que :

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \qquad ([50])$$

Notons T_2 l'application linéaire :

$$C^n[0\ ,1] \ni y \xrightarrow{T_2} T_2\, y = \begin{bmatrix} y_1^*(y) \\ \vdots \\ y_n^*(y) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

Si $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n$ nous choisirons pour norme de r :

$$\|r\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |r_i|$$

b) T_2 applique $C^n[0\ ,1]$ sur $\mathbf{R}^n$, car T_2 applique N_1 sur $\mathbf{R}^n$.

c) Notons N_2 le noyau de T_2. C'est un sous-espace linéaire fermé de $C^n[0\ ,1]$, donc un espace de Banach avec la norme induite par ν_n.

$N_2 = \{y \in C^n[0\ ,1] : T_2\, y = 0\}$, 0 élément neutre de $\mathbf{R}^n$.

$N_1 \cap N_2 = \theta_n$ où θ_n est l'élément neutre de $C^n[0\ ,1]$.

3 - PROBLEME DIFFERENTIEL LINEAIRE -

a) Définition.

On appelle problème différentiel linéaire, le système d'équations fonctionnelles :

$$\begin{cases} T_1\ y = s \\ T_2\ y = r \end{cases} \qquad (1)$$

s L_1 la restriction de T_1 à N_2 et L_2 celle de T_2 à N_1.

une transformation linéaire continue qui applique biunivoquement N_1 sur $\mathbf{R}^n$.

) $C^n[0\ ,1]$ est la somme directe de N_1 et N_2.

En effet, soit $y \in C^n[0\ ,1]$. $T_1\, y = s$, $T_2\, y = r$.

$\exists y_1$ unique $\in N_1$ tel que $L_2\, y_1 = r$.

Posons : $y_2 = y - y_1$.

$$T_1\, y_2 = s, \quad T_2\, y_2 = 0 \Longrightarrow y_2 \in N_2, \quad L_1\, y_2 = s.$$

c) L_1 est une transformation linéaire bornée qui applique biunivoquement N_2 sur $C^0[0\ ,1]$.

d) Les applications linéaires L_1^{-1} et L_2^{-1} sont continues.

Ce sont les inverses d'applications continues d'un espace de Banach sur un autre espace de Banach, ([11]).

e) L_2^{-1} est une application complètement continue de $\mathbf{R}^n$ sur N et L_1^{-1} une application complètement continue de $C^0[0\ ,1]$ dans $C^{n-1}[0\ ,1]$.

Démontrons que L_1^{-1} est complètement continue.

En effet, si $L_1\, y = s$, $\nu_n(y) \leqslant m_1\, \nu_0(s)$. Or si $\nu_0(s) \leqslant \mu_1$,

$$\nu_n(y) \leqslant m_1\ \mu_1 \Longrightarrow \nu_0(y^{(k)}) \leqslant m_1\ \mu_1 \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

Mais :

$$|y^{(k)}(x_2) - y^{(k)}(x_1)| = |\int_{x_1}^{x_2} y^{(k+1)}(t)\ dt| \leqslant m_1\ \mu_1\ |x_2 - x_1| \quad \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

Les fonctions $y^{(k)}(x)$, $x \in [0\ ,1]$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ sont équicontinues et uniformément bornées. D'après le théorème d'Arzela, de toute suite $\{y_m\} \in N_2 \subset C^{n-1}[0\ ,1]$ nous pouvons extraire une suite partielle convergeant vers $z \in C^{n-1}[0\ ,1]$ au sens de la norme ν_{n-1}.

4 - L'ESPACE VECTORIEL $H^n[0\ ,1]$

Considérons sur $C^n[0\ ,1]$, la forme bilinéaire :

$$(y\ ,\ z)_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 y^{(k)}(x)\ z^{(k)}(x)\ dx.$$

La forme quadratique $(y\ ,\ y)_n$ associée étant définie positive $(y\ ,\ z)_n$ définit un produit scalaire.

Posons :

$$\|y\| = \{(y\ ,\ y)_n\}^{\frac{1}{2}}\ ;$$

$\|y\|_n$ est une semi-norme.

Muni de ce produit scalaire et de cette semi-norme, $C^n[0\ ,1]$ est un espace préhilbertien.

Le complété de $C^n[0\ ,1]$ relativement à la semi-norme que nous venons de définir est isomorphe à $H^n[0\ ,1]$, espace vectoriel des fonctions définies sur $[0\ ,1]$, admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n-1$ et dont la dérivée d'ordre n appartient à $\mathcal{L}^2[0\ ,1]$. $H^n[0\ ,1]$ est aussi l'espace des distributions sur $[0\ ,1]$ dont toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre $n, \in \mathcal{L}^2[0\ ,1]$. ([20], Part 2).

5 - PROLONGEMENT DES OPERATEURS T_1 ET T_2

a) Remarquons d'abord que $\|T_1\ y\|_0 \leqslant M\|\ y\|_n$

où $$M \leqslant (n+1) \operatorname*{Max}_{x \in [0,1]} [1\ ,\ |q_i(x)|\ :\ 1 \leqslant i \leqslant n]$$

Donc si $\{y_m\}$ est une suite de Cauchy dans $H^n[0\ ,1]$, $\{T_1\ y_m\}$ est une suite de Cauchy dans $H^0[0\ ,1] = \mathcal{L}^2[0\ ,1]$.

D'autre part :

$$\lim_{m \to \infty} \|y_m - z_m\|_n = 0 \Longrightarrow \lim_{m \to \infty} \|T_1\ y_m - T_1\ z_m\|_0 = 0$$

Puisque pour $\forall u \in H^n[0\ ,1]$, $\exists$ une suite d'éléments $\{y_m\}$ dans $C^n[0\ ,1]$ telle que $\lim\limits_{m \to \infty} \|y_m - u\|_n = 0$, on peut poser la <u>définition</u> : $\boxed{S_1\ u = \lim\limits_{m \to \infty} T_1\ y_m \text{ dans } \mathcal{L}^2[0\ ,1].}$

<u>S_1 est un opérateur linéaire continu qui applique $H^n[0\ ,1]$ sur $\mathcal{L}^2[0\ ,1]$</u>.

b) Montrons que :

$$\operatorname*{Max}_{x \in [0,1]} |y^{(k)}(x)| \leqslant \|y^{(k)}\|_1\ ,\quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$|y^{(k)}(t_2) - y^{(k)}(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} y^{(k+1)}(\tau)\ d\tau \leqslant \|y^{(k+1)}\|_0$$

Donc :

$$\operatorname*{Max}_{x \in [0,1]} |y^{(k)}(x)| - \operatorname*{Min}_{x \in [0,1]} |y^{(k)}(x)| \leqslant \|y^{(k+1)}\|_0$$

Mais :

$$\underset{x \in [0,1]}{\text{Min}} \; |y^{(k)}(x)| \leqslant \int_0^1 |y^{(k)}(t)| \, dt \leqslant \| y^k \|_0$$

D'où :

$$\underset{x \in [0,1]}{\text{Max}} \; |y^{(k)}(x)| \leqslant \| y^{(k)} \|_0 + \| y^{(k+1)} \|_0$$

Si y_i^* est une condition associée à T_1,

$$|y_i^*(y)| \leqslant m_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \| y^{(k)} \|_1 \right) \leqslant 2 \; m_i \| y \|_n$$

y_i^* peut donc être prolongée de façon unique sur $H^n[0,1]$; notons u_i^* son prolongement.

D'après le théorème de représentation de Riesz :

$$u_i^*(u) = (w_i \, , u)_n \qquad u, \; w_i \in H^n[0,1]$$

De même qu'au paragraphe précédent, nous pouvons poser la définition :

$$\boxed{S_2 \, u = \lim_{m \to \infty} T_2 \, y_m \quad \text{dans} \; \mathbf{R}^n,}$$

S2 est un opérateur linéaire continu de $H^n[0,1]$ sur $\mathbf{R}^n$

c) Notons Δ_1 le noyau de S_1 : $\Delta_1 = \{u \in H^n[0,1] : S_1 u = \Theta\}$ où Θ est l'élément neutre de $\mathcal{L}^2[0,1]$.

Δ_1 est de dimension n. ([20])

Si $\hat{N}_1$ est le complété de N_1 dans $H^n[0,1]$, $\hat{N}_1 \subset \Delta_1$.

D'autre part, si $v_1, \ldots, v_n$ sont n vecteurs linéairement indépendants de N_1, ils sont aussi linéairement indépendants dans $\hat{N}_1$. En effet,

$$\sum_i \lambda_i \, v_i = \Theta_n \Longrightarrow \sum_i \lambda_i \, v_i = \theta_n \Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

puisque $\sum_i \lambda_i v_i \in N_1 \in C^n[0,1]$. ($\Theta_n$ élément neutre de $H^n[0,1]$). Donc : $\hat{N}_1 = \Delta_1$. Les vecteurs v_i forment une base de Δ_1. Notons Δ_2 le noyau de S_2 : $\Delta_2 = \{u \in H^n[0,1] : S_2 \, u = 0\}$. 0, élément neutre de $\mathbf{R}^n$.

Si $\hat{N}_2$ est le complété de N_2 dans $H^n[0,1]$, $\hat{N}_2 \subset \Delta_2$. $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Theta_n$.

En effet, si $u \in \Delta_1$, $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, v_i$.

Si $u \in \Delta_2$,

$$\left(w_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i \, v_i\right)_n = 0, \; 1 \leqslant j \leqslant n \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i (w_j, v_i)_n = 0, \; 1 \leqslant j \leqslant n \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \, y_j^*(v_i) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall_i \quad \text{et} \quad u = \Theta_n.$$

Remarquons que Δ_2 est le complémentaire orthogonal du sous-espace vectoriel $W_1 \subset H^n[0,1]$ qui est engendré par les éléments $w_i \in H^n[0,1]$.

6 - PROPRIETES DES RESTRICTIONS DE S_1 A Δ_2 ET DE S_2 A Δ_1

Notons Λ_1 la restriction de S_1 à Δ_2 et Λ_2 celle de S_2 à Δ_1.

a) Λ_2 est une application linéaire continue et biunivoque de Δ_1 sur $\mathbf{R}^n$.

En effet, Λ_2 applique continûment N_1 sur $\mathbf{R}^n$. Elle est biunivoque car $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Theta_n$.

On montre comme au paragraphe 3 que :

b) $H^n[0, 1] = \Delta_1 \oplus \Delta_2$.

c) Λ_1 est une application linéaire continue et biunivoque de Δ_2 sur $H^n[0, 1]$.

d) Λ_1^{-1} et Λ_2^{-1} sont continues.

c) Λ_1^{-1} est une application complètement continue de $\mathcal{L}^2[0, 1]$ dans $C^{n-1}[0, 1]$.

7 - EXISTENCE DU NOYAU DE GREEN D'UN PROBLEME DIFFERENTIEL LINEAIRE

Considérons le problème différentiel :

$$\begin{cases} S_1 u = s \\ S_2 u = r \end{cases} \tag{2}$$

Ce problème admet une solution unique : $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \Delta_1$ et $u_2 \in \Delta_2$.

THEOREME - L'application qui à $\forall s \in \mathcal{L}^2[0, 1]$ fait correspondre la valeur de $u_2^{(p)}$ au point $x \in [0, 1]$ quand $0 \leqslant p \leqslant n-1$ est une fonctionnelle linéaire continue définie sur $\mathcal{L}^2[0, 1]$.

En effet :

$$\underset{x \in [0,1]}{\mathrm{Max}} |u_2^{(p)}(x)| < \| u_2^{(p)} \|_1 \leqslant \| u_2^{(p)} \|_n \leqslant K_1 \| s \|_0$$

quand $0 \leqslant p \leqslant n-1$.

Il existe donc une fonction de t, $G_p(x, t) \in \mathcal{L}^2[0, 1]$ telle que :

$$\forall s \in \mathcal{L}^2[0, 1] \quad u_2^{(p)}(x) = \int_0^1 G_p(x, t)\, s(t)\, dt \quad 0 \leqslant p \leqslant n-1$$

De même :

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i G_i(x) \quad \text{si} \quad r = (r_1, \dots, r_n).$$

D'où :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i G_i(x) + \int_0^1 G_0(x, t)\, s(t)\, dt.$$

$G_0(x, t)$ (resp. $G_1(x), \dots, G_n(x)$) est le noyau de Green relatif à l'opérateur Λ_1 (resp. Λ_2).

8 - PROPRIETES DU NOYAU DE GREEN

a) Le problème :

$$\begin{cases} T_1 y = 0 \\ y_i^*(y) = 0 & \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \end{cases}$$

admet la solution $u_1(x) = G_j(x)$.

Donc $\forall j$ $G_j(x) \in N_1 \subset C^n[0, 1]$ et $y_i^*(G_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

b) Considérons le problème :

$$\begin{cases} S_1 y(t) = Y_0(t, x) \\ S_2 y = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad Y_0(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < x \\ 0 & \text{si } t \geqslant x \end{cases} \quad \text{(échelon)}$$

Il admet pour solution :

$$\begin{cases} Z_0(x\,,\ t) = \int_0^t G_0(x\,,\ \tau)\ d\tau \\ Z_0(\underline{x}\,,\ t) \in \Delta_2 \end{cases}$$

$Z_0(x\,,\ t)$ étant une solution particulière de l'équation :

$$S_1[Z_0(\underline{x}\,,\ t)] = Y_0(\underline{x}\,,\ t), \qquad S_1\,[Z_0(\underline{x}\,,\ t)] = 0 \quad \text{si} \quad x \in\,]t\,,\ 1]$$

d'où :

$$Z_0(x\,,\ t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)\ v_i(x) \qquad \forall x \in\,]t\,,\ 1].$$

Puisque $Z_0(\underline{x}\,,\ t) \in C^{n-1}[0\,,1]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)\ v_i^{(p)}(x) = \int_0^t G_p(x\,,\ \tau)\ d\tau \qquad 0 \leqslant p \leqslant n-1$$

On en déduit que :

$$\beta_i\ (t) = \int_0^t b_i(\tau)\ d\tau$$

D'où :

$$G_0(x\,,\ t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\ v_i(x) \quad \text{si} \quad x > t \quad b_i(t) \in \mathcal{L}^2\,[0\,,1].$$

En résolvant le problème :

$$\begin{cases} S_1\ y(t) = Y_0\,(x\,,\ t) \\ S_2\ y = 0 \end{cases}$$

on montre de même que :

$$G_0(x\,,\ t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\ v_i(x) \quad \text{si} \quad x < t \quad a_i(t) \in \mathcal{L}^2\,[0\,,1].$$

Des relations $\sum_{i=1}^{n} \beta_i\,(t)\ v_i^{(p)}(x) = \int_0^t G_p(x\,,\ \tau)\ d\tau\,,\ 0 \leqslant p \leqslant n-1$, on en déduit aussi que :

$$G_{p+1}(x\,,\ t) = \frac{\partial}{\partial x}\,[G_p(x\,,\ t)] \qquad 0 \leqslant p \leqslant n-2.$$

D'autre part :

$$u_2(x) = \int_0^1 G_0(x\,,\ t)\ s(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \left[\int_0^x b_i(t)\ s(t)\ dt + \int_x^1 a_i(t)\ s(t)\ dt \right]$$

En dehors d'un ensemble de mesure nulle $I_1 \subset [0\,,1]$ et $\forall s \in H^n\,[0\,,1]$:

$$u_2'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\,[G_0(x\,,\ t)]\ s(t)\ dt + \left\{ \sum_{i=1}^{n} [b_i(x) - a_i(x)]\ v_i(x) \right\} s(x) = \int_0^1 G_1(x\,,\ t)\ s(t)$$

d'où l'on conclue que :

$$\sum_{i=1}^{n} [b_i(x) - a_i(x)]\ v_i(x) = \Theta$$

De même on montrerait plus généralement que :

$$\sum_{i=1}^{n} [\, b_i(x) - a_i(x)]\; v_i^{(p)}(x) = \Theta \qquad 0 \leqslant p \leqslant n-2$$

En outre :

$$\Lambda_1 \; u_2(x) = \int_0^1 \Lambda_1 \, [\, G_0(\underline{x}\, , \; t)] \; s(t) \; dt + \left\{ \sum_{i=1}^{n} [b_i(x) - a_i(x)] \; v_i^{(n-1)}(x) \right\} \; s(x) = s(x)$$

Donc en dehors de I_1, $\sum_{i=1}^{n} [b_i(x) - a_i(x)]\; v_i^{(n-1)}(x) = 1$:

$$u_i^*(u_2) = (w_i \; , \; u_2)_n = \int_0^1 \left[\sum_{p=0}^{n} w_i^{(p)}(x) \; u_2^{(p)}(x) \right] dx = 0$$

$$u_2^*(u_2) = \int_0^1 \left\{ \sum_{p=0}^{n} \left[w_i^{(p)}(x) \, . \int_0^1 \frac{\partial^p}{\partial x^p} \, (G_0(x\, , \; t) \; s(t) \; dt \right] + w_i^{(n)}(x) \; s(x) \right\} dx = 0$$

$$u_i^*(u_2) = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n} w_i^{(p)}(x) \left[\sum_{j=i}^{n} v_j^{(p)}(x) \; \left(\int_0^x b_j(t) \; s(t) \; dt + \int_x^1 a_j(t) \; s(t) \; dt \right) \right] + w_i^{(n)}(x) \; s(x) \Bigg\} \; dx = 0$$

$$u_i^*(u_2) = \int_0^1 \left\{ \int_t^1 \sum_{p=0}^{n} w_i^{(p)}(x) \, . \left[\sum_{j=1}^{n} v_j^{(p)}(x) \; b_j(t) \right] dx + \int_0^t \sum_{p=0}^{n} w_i^{(p)}(x) \, . \left[\sum_{j=1}^{n} v_j^{(p)}(x) \; a_j(t) \right] dx \right.$$
$$\left. + \; w_i^{(n)}(t) \right\} \; s(t) \; dt = 0$$

$$u_i^*(u_2) = \int_0^r \left\{ \int_0^1 \sum_{p=0}^{n} \left[w_i^{(p)}(x) \; \frac{\partial^p}{\partial x^p} (G_0(x\, , \; t)) \right] dx \; + \; w_i^{(n)}(t) \right\} \; s(t) \; dt = 0$$

pour $\forall s \in \mathcal{L}^2[s\, , \, 1]$.

Notons $G_0^\delta(x\, , \; t)$ la distribution correspondant à $G_0(x\, , \; t)$. Si nous considérons les dérivées au sens des distributions au lieu des dérivées au sens ordinaire :

$$u_i^*[G_0^\delta(\underline{x}\, , \; t)] = 0$$

pour presque tout $t \in [0\, , \, 1]$.

Définition - Nous appellerons noyau de Green relatif à l'opérateur Λ_1, le noyau $G(x\, , \; t)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i)
$$G(x\, , \; t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(t) \; v_j(x) & x \geqslant t \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(t) \; v_j(x) & x > t \end{cases}$$

(ii) $\dfrac{\partial^p}{\partial x^p}$ $[G(x\, , \; t)]$ est continue par rapport à x pour $x = t$ et $0 \leqslant p \leqslant n-2$

$$\lim_{\substack{x \to t \\ x > t}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} [G(x\, , \; t)] - \lim_{\substack{x \to t \\ x < t}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} [G(x\, , \; t)] = 1$$

(iii) $u_i^*[G^\delta(x\, , \; t)] = 0$ pour presque tout $t \in [0\, , \, 1]$.

$G^\delta(x\, , \; t)$ distribution correspondant à $G(x\, , \; t)$.

9 - PROPRIETES DUALES

a) Considérons une fonctionnelle $f^* \in (C^n[0\, , \, 1])^*$:

$$f^*(y) = f^*(y_1 + y_2) = f^*(y_1) + f^*(y_2)$$

Notons f_1^* (resp. f_2^*) la restriction de f^* à N_1 (resp. N_2)

$$f_1^* \in N_1^*, \; f_2^* \in N_2^*$$

Des propriétés établies au paragraphe 3, il résulte que si L_1^* (resp. L_2) sont les transfor-formations adjointes de L_1 (resp. L_2) l'équation : $L_1^* \; k_2^* = f_2^*$ (resp. $L_2^* \; k_1^* = f_1^*$) admet une solution unique $k_2^* \in (C^\circ [0,1])^*$ (resp. $k_1^* \in \mathbf{R}^n$), ([20], Part 1, [50]). En outre L_1^* et L_2^* sont complètement continues.

$$\forall y \in C^n [0,1] \quad \text{et} \quad \forall f^* \in (C^n [0,1])^*$$

$f^*(y) = k_1^* (L_2 y_1) + k_2^* (L_1 y_2)$ où $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in N_1$, $y_2 \in N_2$ et plus précisément :

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^{n} k_1^i \; y_i^* (y_1) + \int_0^1 L_1 \; y_2(t) \; dk_2(t) \quad \text{où} \quad k_2(t)$$

est une fonction à variation bornée sur $[0,1]$ que nous pouvons choisir telle que : $k_2(0) = 0$.

Considérons maintenant les fonctions :

$$Y_0^\nu(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant t \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant t + \frac{1}{\nu} \\ 1 + (t - x) & \text{si} \quad t < x < t + \frac{1}{\nu} \end{cases}$$

Nous supposerons ν assez grand pour que :

$$t + \frac{1}{\nu} < 1 .$$

Notons $Z_0^\nu(x, t)$ la solution du problème $\begin{cases} T_1 \; y(x) = Y_0^\nu(x, t) \\ T_2 \; y = 0 \end{cases}$

$$f_2^* [Z_0^\nu(\underline{x}, t)] = k_2^* \{L_1 [Z_0^\nu(\underline{x}, t)]\} = \int_0^1 Y_0^\nu(x, t) \; dk_2(x) = \int_0^{t^-} dk_2(x) + \int_{t^+}^{t+\frac{1}{\nu}} [1 + \nu \; (t - x)] \; dk_2(x)$$

Mais :

$$\int_{t^+}^{t+\frac{1}{\nu}} [1 + \nu(t - x)] \; dk_2(x) = [1 + (t - x)]_{t+}^{t+\frac{1}{\nu}} + \int_{t+}^{t+\frac{1}{\nu}} k_2(x) \; dx = - k_2 \left(t + \frac{1}{\nu}\right) + \nu \int_t^{t+\frac{1}{\nu}} k_2(x) \; dx$$

Or :

$$\lim_{\nu \to \infty} k_2\left(t + \frac{1}{\nu}\right) = k_2(t + 0)$$

et :

$$\left| \nu \int_t^{t+\frac{1}{\nu}} k_2(x) \; dx - k_2(t + 0) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty \quad [37]$$

Donc :

$$\lim_{\nu \to \infty} f_2^* [Z_0^\nu(\underline{x}, t)] = \int_0^t dk_2(x)$$

$$= \begin{cases} k_2(t - 0) & \text{en un point de discontinuité} \\ k_2(t) & \text{en un point de continuité} \end{cases}$$

Ainsi : $\forall y \in C^n[0,1]$ et $\forall f^* \in (C^n[0,1])^*$

$$f^*(y) = \sum_{j=1}^{n} f_1^*(G_j)\, y_j^*(y_1) + \int_0^1 L_1\, y_2(t)\, d\left\{\lim_{\nu\to\infty} f_2^*\left[\int_0^1 G(x,\tau)\, Y_0^\nu(\tau, t)\, d\tau\right]\right\} \tag{1}$$

b) Considérons une fonctionnelle $f^* \in (H^n[0,1])^*$

$$\exists f \in H^n[0,1] : \quad f^*(u) = (f, u)_n \qquad \forall u \in H^n[0,1])$$

$$f^*(u) = (f, u)_n = (f, u_1)_n + (f, u_2)_n \qquad \text{car} \qquad u = u_1 + u_2, u_1 \in \Delta_1, \ u_2 \in \Delta_2$$

$$f^*(u) = (f_1, u_1)_n + (f_2, u_2)_n \qquad f_1 \in \Delta_1, \qquad f_2 \in \Delta_2$$

$$f^*(u) = (k_1, \Lambda_2 u_1)_{\mathbf{R}^n} + (k_2, \Lambda_1 u_2)_0$$

De même qu'au paragraphe précédent on peut montrer que si k_1^i est la $i^{\text{ème}}$ composante de k_1 :

$$k_1^i = \sum_{j=1}^{n} k_1^j\, u_j(G_i) = (f_1, G_i)_n$$

et (2)

$$k_2(t) = \frac{d}{dt}\,(f_2(\underline{x}),\ Z_0(\underline{x}, t))_n = (f_2(x),\ G^\delta(\underline{x}, t))_n$$

10 - NOYAU REPRODUISANT ET NOYAU DE GREEN

Considérons l'application qui à $\forall\, u \in H^n[0,1]$ $(n \geqslant 1)$ fait correspondre la valeur $u(x)$ de u au point $x \in [0,1]$.

Puisque $|u(x)| \leqslant \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}} |u(x)| \leqslant \|u\|_1 \leqslant \|u\|_n$, l'application considérée est une fonctionnelle linéaire et continue sur $H^n[0,1]$. $\exists h_x(t) \in H^n[0,1] : u(x) = (h_x, u)_n$. $h_x(t)$ est le noyau reproduisant de $H^n[0,1]$, ([4]).

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où $W_1 = \Delta_1$ (cf I.5). Alors Δ_2 est le complémentaire orthogonal de Δ_1.

$$h_x = h_{x,1} + h_{x,2} \qquad h_{x,1} \in \Delta_1 \qquad h_{x,2} \in \Delta_2$$

$h_{x,1}$ et $h_{x,2}$ sont les noyaux reproduisants de Δ_1 et Δ_2 respectivement. Ainsi :

$$u_2(x) = (h_{x,2}, u_2)_n = (G(x, \underline{t}),\ \Lambda_1 u_2(\underline{t}))_n$$
$$= (\Lambda_1^* G(x, \underline{t}),\ u_2(\underline{t}))_n$$

D'où :

$$G(x, t) = \Lambda_1^{*-1}(h_{x,2}(t))$$

11 - QUELQUES APPLICATIONS IMMEDIATES

a) <u>Développement en série de Mac-Laurin.</u>

Considérons une fonction $f \in C^n[0,1]$. Elle est solution unique du problème différentiel :

$$\begin{cases} T_1 y = \dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)} \\[2mm] y_i^*(y) = \left(\dfrac{d^i y}{dx^i}\right)_{x=0} = f^{(i)}(0) \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0).G_i(x) + \int_0^1 G(x\,,\,t)\; f^{(n)}(t)\; dt \qquad (3)$$

On montre facilement que :

$$G_i(x) = \frac{x^i}{i!} \quad \text{et} \quad G(x\,,\,t) = \begin{cases} o & \text{si } x < t \\ \dfrac{(x-t)^{n-1}}{\overline{n-1}\,!} & \text{si } x \geqslant t \end{cases}$$

D'où la formule de Mac-Laurin avec reste intégral.

b) Formule d'interpolation au moyen de polynômes de Lagrange.

Considérons une fonction $f \in C^n\,[0\,,\,1]$. Elle est solution unique du problème différentiel :

$$\begin{cases} T_1 y \equiv \dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)} \\ y_i^*(y) \equiv (y)_{x=x_i} = f(x_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

On obtient la formule d'interpolation classique de Lagrange avec reste intégral en montrant que dans (3) :

$$G_i(x) = \frac{F(x)}{F'(x)\;(x - x_i)} \quad , \; F(x) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x - x_i)$$

et :

$$G(x\,,\,t) = \frac{1}{\overline{n-1}\,!} \left\{ (x-t)_+^{n-1} - \sum_{i=1}^{n} G_i(x)\;(x_i - t)_+^{n-1} \right\} \quad \text{où} \quad t_+^{n-1} = \begin{cases} t^{n-1} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

c) Reste d'une formule d'intégration à n points.

Considérons le problème différentiel posé au b).

Supposons que $x_1 = 0 \quad x_n = 1$.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 10,

$$\int_0^1 f(t)\; dt = \sum_{i=1}^{n} f(x\;).\int_0^1 G\;(t)\; dt + \int_0^1 f^{(n)}(t)\; \left(\int_0^1 G(x\,,\,t)\; dx\right) dt.$$

12 - REMARQUE IMPORTANTE

Tous les résultats précédents pourraient s'étendre, de même, au cas des systèmes différentiels ou d'opérateurs aux dérivées partielles elliptiques avec certaines conditions aux limites.

CHAPITRE II

APPROXIMATION DE FORMES LINÉAIRES RELATIONS DISCRÈTES EXACTES APPLICATIONS

1 - APPROXIMATION DE FORMES LINEAIRES

Considérons un espace de Banach E défini sur $\mathbf{R}$ et une fonctionnelle linéaire et continue $f^* \in E^*$ dual fort de E.

En analyse numérique, le problème de l'approximation de f^* consiste, en général, dans le choix de N fonctionnelles $f_i^* \in E^*$ et de N coefficients $\lambda_i \in \mathbf{R}$ tels que $|f^*(x) - \sum_i \lambda_i f_i^*(x)|$ soit voisin de zéro quand x appartient à un certain sous-ensemble A de E.

Ce problème se présente sous deux aspects :

α) $f^*(x) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \; f_i^*(x) = R_h^*(x)$ où h dépend d' f_i^* et de N.

On cherche dans quelles conditions $\lim_{h \to 0} R_h^*(x) = 0 \;\; \forall x \in A$.

β) $f^*(x) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i^*(x) = R_\lambda^*(x)$.

On cherche pour quel choix des coefficients λ_i, $R_\lambda^*(\overset{*}{x})$ est minimal, x appartenant à A.

Dans ce chapitre et les suivants nous développerons ces deux points de vue.

2 - RELATION DISCRETE EXACTE ENTRE (n + 1) VALEURS D'UNE SOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE D'ORDRE n

Considérons l'équation différentielle :

$$T_1 \, y \equiv D^n \, y + q_1 \, D^{n-1} \, y + \ldots + q_n y = s$$

où $q_1, \ldots, q_n \in C^n[0, 1]$ et $s \in \mathcal{L}^2[0, 1]$.

Notons u une solution de cette équation : $u \in H^n[0, 1]$. Considérons, d'autre part, les n fonctionnelles linéaires et continues sur $H^n[0, 1]$ $(n \geqslant 1)$:

$$u_i^*(y) \equiv y(x_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad 0 < x_1 < x_2 \quad \ldots < x_n \leqslant 1$$

Posons :

$$h_M = \max_{1 \leqslant j \leqslant n-1} (x_{j+1} - x_j) \;, \quad h_m = \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} (x_{j+1} - x_j)$$

Considérons enfin le problème différentiel :

$$\begin{cases} T_1 \, y = s \\ u_i^*(y) = u(x_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \tag{1}$$

THEOREME : Il existe des subdivisions $\{x_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de $[0, 1]$ pour lesquelles le système (1) admet la solution unique $y = u$.

Posons :

$$\widetilde{W} = \begin{vmatrix} v_1(x_1) & \dots & v_1(x_n) \\ \vdots & & \\ v_n(x_1) & \dots & v_n(x_n) \end{vmatrix}$$

$$v_i(x_k) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(x_k - x_1)^p}{p!} v_i^{(p)}(x_1) + \int_{x_1}^{x_k} \frac{(x_k - t)^{n-1}}{\overline{n-1\,!}} v_i^{(n)}(t)\, dt.$$

Posons :

$$\bar{v}_i(x_k) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(x_k - x_1)^p}{p!} v_i^{(p)}(x_1) \quad \text{et} \quad e_i(x_k) = \int_{x_1}^{x_k} \frac{(x_k - t)^{n-1}}{\overline{n-1\,!}} v_i^{(n)}(t)\,dt$$

$$\widetilde{W} = \begin{vmatrix} v_1(x_1) & \bar{v}_1(x_2) & \dots & \bar{v}_1(x_n) \\ \vdots & & & \\ v_n(x_1) & \bar{v}_n(x_2) & \dots & \bar{v}_n(x_n) \end{vmatrix} + e(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1) = W_1 + e(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1)$$

Notons :

$$W_{i_1 \dots i_j \dots i_k} \qquad (2 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1),$$

le déterminant obtenu en remplaçant dans W_1 la colonne de rang i_j par la colonne $[e_p(x_{i_j})]$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

$$e(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \quad \sum_{2 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} W_{i_1 \dots i_k}$$

$$\widetilde{W}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_1) & \dots & \dfrac{(x_2 - x_1)^{n-1}}{\overline{n-1\,!}} \\ \vdots & & & \\ 1 & (x_n - x_1) & \dots & \dfrac{(x_n - x_1)^{n-1}}{\overline{n-1\,!}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_1(x_1) & v_2(x_1) & \dots & v_n(x_1) \\ v_1'(x_1) & v_2'(x_1) & \dots & v_n'(x_1) \\ \vdots & & & \\ v_1^{(n-1)}(x_1) & v_2^{(n-1)}(x_1) & \dots & v_n^{(n-1)}(x_1) \end{vmatrix}$$

$\widetilde{W} = K(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1)\, W(x_1) + e(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1)$ où $W(x_1)$ est le Wronskien de $v_1, \dots, v_n$ en x_1.

Or :

$$|e_i(x_k)| \leqslant \frac{\| v_i^{(n)} \|_o}{n-1\,!} \times \left\{ \int_{x_1}^{x_k} (x_k - t)^{2n-2}\, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\| v_i^{(n)} \|_o}{\overline{n-1\,!}} \; \frac{(x_k - x_1)^{n-\frac{1}{2}}}{2n+1}$$

Lorsque $h_M \longrightarrow 0$, $\dfrac{h_M}{h_m}$ restant borné, $e(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1)$ est un infiniment petit d'ordre $\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{1}{2}$ et $K(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1)$ un infiniment petit d'ordre $\dfrac{n(n-1)}{2}$, par rapport à h_M.

Puisque par hypothèse, $W(x_1) \neq 0$, $\widetilde{W}$ est donc différent de zéro dès que h_M est assez petit. Alors, le système :

$$\begin{cases} T_1 y = \Theta \\ u_i^*(y) = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

admet la solution unique $y = \Theta_n$.

On en déduit que le système (1) qui admet la solution $y = u$ admet cette seule solution.

THEOREME -

Si $h_M = \text{Max}\,(x_{i+1} - x_i)$ est assez petit,

$$\forall x \in [0\,,1] \qquad u(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, u(x_i) - \int_0^1 G(x\,,t)\, s(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

où $T_1\, g_i = \theta$, $g_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

et où $G(x\,,t)$ est le noyau de Green du problème homogène associé au problème (1).

La formule (2) sera appelée, dans la suite, formule discrète théorique à $(n+1)$ points.

3 - FORMULE DISCRETE THEORIQUE ET FORMULES D'INTEGRATION APPROCHEE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE

THEOREME - Dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, les formules d'intégration approchée classiques à 3 points peuvent être considérées comme des approximations de la formule discrète théorique, correctes jusqu'à un certain ordre.

Ce résultat se généralise sans difficulté au cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre n.

Considérons l'équation différentielle :

$$M(y) \equiv y'' + q(x)\,y' + q(x)\,y = s(x) \qquad x \in [0\,,1]\,. \tag{3}$$

Divisons l'intervalle $[0\,,1]$ en n parties égales de longueur $h = \frac{1}{n}$ par les points de la subdivision :

$$\{x_i\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} : 0 = x_1 < x_2 \quad \ldots\ldots < x_n = 1$$

Nous supposerons que toute solution de (3) pourra être dérivée autant de fois que cela sera nécessaire, et que h est suffisamment petit pour qu'une formule du type (2) existe entre trois points successifs x_{j-1}, x_j, x_{j+1}.

Nous écrivons alors la formule discrète théorique sous la forme suivante :

$$g_{j-1,j+1}(x_j)\; y(x_{j+1}) - y(x_j) + k_{j-1,j+1}(x_j)\; y(x_{j-1}) - m_{j-1,j+1}(x_j) = 0$$

où $m_{j-1,j+1}(x_j) = \int_0^1 G_{j-1,j+1}(x_j\,,t)\; s(t)\; dt$.

a) Choisissons pour représentation de (3) :

$$\frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h} + q_1(x_j)\,\frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h} + q_2(x_j)\; y(x_j) = s(x_j)$$

Nous appellerons formule discrète approchée l'expression :

$$M_h\,[y(x_j)] \equiv \frac{2 - hq_1(x_j)}{2\,[2 - h^2\, q_2(x_j)]}\, y(x_{j+1}) - y(x_j) + \frac{2 + hq_1(x_j)}{2\,[2 - h^2\, q_2(x_j)]}\, y(x_{j-1}) - \frac{h^2 s(x_j)}{2 - h^2\, q_2(x_j)}$$

$$M_h\,[y(x_j)] = \frac{h^4}{12\,[2 - h^2\, q_2(x_j)]}\,[y^{(4)}(x_j) + 2q_1(x_j)\; y^{(3)}(x_j)] + 0(h^5)$$

Or :

$$M_h\,[g_{j-1,j+1}(x_j)] = \frac{2 - hq_1(x_j)}{2\,[2 - h^2\, q_2(x_j)]} - g_{j-1,j+1}(x_j)$$

Donc :

$$g_{j-1,j+1}(x_j) = \frac{2 - hq_1(x_j)}{2[2 - h^2 q_2(x_j)]} - h^4 \frac{g^{(4)}_{j-1,j+1}(x_j) + 2q_1(x_j)\, g^{(3)}_{j-1,j+1}(x_j) + \ldots}{12[2 - q_2(x_j)\, h^2]}$$

On obtient deux formules analogues pour $k_{j-1,j+1}(x_j)$ et $m_{j-1,j+1}(x_j)$. D'autre part, si v et w sont deux solutions linéairement indépendantes de (3) :

$$g_{j-1,j+1}(x_j) = \frac{v(x_j)\, w(x_{j+1}) - v(x_{j+1})\, w(x_j)}{v(x_{j-1})\, w(x_{j+1}) - v(x_{j+1})\, w(x_{j-1})} \tag{3}$$

Or :

$$M_h[v(x_j)] = h^4 \alpha(x_j) \quad \text{et} \quad M_h[w(x_j)] = h^4 \beta(x_j) \tag{4}$$

$\alpha(x_j)$ et $\beta(x_j)$ sont des quantités uniformément bornées par rapport à tout point de $\{x_i\}$ lorsque h tend vers zéro.

Multiplions la première des deux relations (4) par $-w(x_{j-1})$ et la deuxième par $v(x_{j-1})$. On obtient :

$$g_{j-1,j+1}(x_j) = \frac{2 - hq_1(x_j)}{2[2 - h^2 q_2(x_j)]} + h^4 \frac{\alpha(x_j)\, w(x_{j+1}) - \beta(x_j)\, v(x_{j+1})}{v(x_{j-1})\, w(x_{j+1}) - v(x_{j+1})\, w(x_{j-1})}$$

En développant $v(x_{j-1})\, w(x_{j+1}) - v(x_{j+1})\, w(x_{j-1})$ par la formule de Taylor, on constate que :

$g_{j-1,j+1}(x_j)$ coïncide avec $\dfrac{2 - hq_1(x_j)}{2[2 - h^2 q_2(x_j)]}$ jusqu'à l'ordre 2 inclus.

Cependant, la formule discrète théorique coïncide, jusqu'à l'ordre 3 inclus, avec la formule discrète approchée puisque :

$$g_{j-1,j+1}(x_j)\, y(x_{j+1}) - y(x_j) + k_{j-1,j+1}(x_j)\, y(x_{j-1}) - m_{j-1,j+1}(x_j) - M_h[y(x_j)]$$
$$= - \frac{h^4}{12[2 - h^2 q_2(x_j)]} [y^{(4)}(x_j) + 2q_1(x_j)\, y^{(3)}(x_j)] + 0(h^5)$$

b) Supposons que $q_1(x) \equiv 0$ quand $x \in [0, 1]$.

Choisissons pour représentation de (3) la formule de type hermitique :

$$y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}) - \frac{h^2}{12}[y''(x_{j+1}) + 10\, y''(x_j) + y''(x_{j-1})]$$

et pour formule discrète approchée :

$$N_h[y(x_j)] \equiv \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}) - \frac{h^2}{12}[y''(x_{j+1}) + 10\, y''(x_j) + y''(x_{j-1})]}{2\left[1 - \frac{5}{6} h^2 q_2(x_j)\right]} = - \frac{h^6 [y^{(6)}(x_j) + 0(h^7)]}{480\left[1 - \frac{5}{6} h^2 q_2(x_j)\right]}$$

De même qu'en a) on peut montrer que :

$$g_{j-1,j+1}(x_j) = \frac{1 + \frac{h^2}{12} q_2(x_{j-1})}{2\left[1 - \frac{5}{6} h^2 q_2(x_j)\right]} + \frac{\frac{h^2}{240} g^{(6)}_{j-1\, j+1}(x_j) + \ldots}{2\left[1 - \frac{5}{6} h^2 q_2(x_j)\right]}$$

et l'on obtient deux formules analogues à celles-ci pour $k_{j-1,j+1}(x_j)$ et $m_{j-1,j+1}(x_j)$.

En remplaçant dans (5) $y''(x_j)$, $y''(x_{j-1})$ et $y''(x_{j+1})$ par leurs valeurs en fonctions de y et s, on constate que les coefficients de la formule discrète théorique coïncident jusqu'à l'ordre 4 inclus avec ceux de la formule discrète approchée. Mais la formule discrète théorique coïncide jusqu'à l'ordre 5 inclus avec la formule discrète approchée.

c) Il apparaît donc que les méthodes classiques d'intégration d'un problème différentiel linéaire par "discrétisation" se réduisent au calcul d'une valeur approchée de chacun des coefficients intervenant dans la formule discrète théorique.

On obtiendra donc les meilleures formules discrètes approchées, en résolvant avec la plus grande précision possible, les problèmes différentiels qui nous donnent :

$$g_{j-1,j+1}(x_j), \quad k_{j-1,j+1}(x_j) \quad \underline{\text{et}} \quad m_{j-1,j+1}(x_j).$$

Exemple 1 : Cas où $q_1(x)$, $q_2(x)$ et $s(x)$ sont analytiques autour de tout point de l'intervalle $[0,1]$.

Alors,

$$g^{(n)}_{j-1,j+1}(x) = a_n(x)\; g_{j-1,j+1}(x) + b_n(x)\; g_{j-1,j+1}(x)$$

a_n et b_n dépendent uniquement de q_1, q_2 ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(n-2)$.

On peut obtenir dans ce cas $g_{j-1,j+1}(x)$, $k_{j-1,j+1}(x)$ et $m_{j-1,j+1}(x)$ sous forme de série.

Exemple 2 : Résolution d'un problème différentiel linéaire avec conditions aux limites du type $y(0) = \alpha, y(1) = \beta$.

Nous effectuons le calcul approché de la solution du problème posé aux points d'une subdivision $\{x_i\}$ de $[0,1]$ en utilisant, en chaque point de $\{x_i\}$:

α) une formule discrète approchée classique à 3 points.

β) une formule discrète approchée à 3 points dont les coefficients $\bar{g}_{j-1,j+1}(x_j)$, $\bar{k}_{j-1,j+1}(x_j)$, $\bar{m}_{j-1,j+1}(x_j)$ sont obtenus de la façon suivante :

On divise $[0,1]$ à l'aide d'une subdivision $\{x'_k\} \supset \{x_i\}$ telle que les points de $\{x'_k\}$ divisent $[x_j, x_{j+1}]$ en p intervalles $(p \geqslant 2)$.

On détermine $\bar{g}_{j-1,j+1}(x_j)$ (resp. $\bar{k}_{j-1,j+1}(x_j)$, $\bar{m}_{j-1,j+1}(x_j)$) en calculant, au moyen d'une formule classique à 3 points, aux points de $\{x'_k\}$ qui appartiennent à $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ la solution approchée du problème différentiel dont $g_{j-1,j+1}(x)$ (resp. $k_{j-1,j+1}(x)$, $m_{j-1,j+1}(x)$) est solution.

4 - RELATION DISCRETE THEORIQUE ENTRE $(n+p+1)$ VALEURS D'UNE SOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE D'ORDRE n

Considérons l'opérateur différentiel T_1 admettant pour noyau Δ_1. Soient $v_1, \ldots, v_n$, n vecteurs de base de Δ_1 et $\{x_i \;;\; 1 \leqslant i \leqslant n+p\}$ une subdivision de $[0,1]$.

$$\forall v \in \Delta_1, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in \mathbf{R} \Longrightarrow v(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i(x_k) \qquad 1 \leqslant k \leqslant n+p$$

Supposons que :

$$\tilde{W} = \begin{vmatrix} v_1(x_1) & \ldots & v_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ v_n(x_1) & \ldots & v_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Si p = 0, il existe pour tout x donné $\in [0,1]$, une relation linéaire et homogène entre $v(x_1), \ldots, v(x_n)$, $v(x)$, dont les coefficients sont indépendants de v et déterminés de manière unique.

Cette relation peut s'écrire sous la forme (2).

Définition - Si $p \geqslant 0$ nous appellerons relation discrète théorique entre $(n+p+1)$ valeurs $u(x_1), \ldots, u(x_{n+p})$, $u(x)$ d'une solution u de l'équation $T_1 y = s$, une relation de la forme :

$$u(x) - \sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i(x)\; u(x_i) = \sigma(x)$$

où $\alpha_i(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ et telle que $\forall v \in \Delta_1$ et $\forall x \in [0,1]$:

$v(x) - \sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i(x)\ v(x_i) = 0$. En général, pour x fixé, les coefficients $\alpha_i(x)$ dépendront de p arbitraires.

Puisque $u \in H^n[0,1]$ $(n \geqslant 1)$, $u(x) - \sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i(x)\ u(x_i)$ est, pour x fixé, une fonctionnelle linéaire et continue définie sur $H^n[0,1]$.

Donc $\exists w_x \in H^n[0,1]$: $u(x) - \sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i(x)\ u(x_i) = (w_x\ ,\ u)_n$.

Notons W_2 le complémentaire orthogonal de Δ_1 dans $H^n[0,1]$.

$$w_x = w_{x,1} + w_{x,2}\ ,\quad w_{x,1} \in \Delta_1\ ,\quad w_{x,2} \in W_2$$

De même, $u = u_1 + u_2$ $\quad u_1 \in \Delta_1$, $u_2 \in W_2$.

Or par hypothèse $(w_x\ ,\ u_1)_n = (w_{x,1}\ ,\ u_1)_n = 0$.

Donc $(w_x\ ,\ u)_n = (w_{x,2}\ ,\ u_2)_n$.

Notons Λ_1' la restriction de T_1 à W_2 : $w_{x,2} = \Lambda_1'^{*}\ \gamma_x$ où $\gamma_x \in H^{\circ}[0,1]$.

$$(w_x\ ,\ u)_n = (\Lambda_1'^{*}\ \gamma_x\ ,\ u_2)_n = (\gamma_x\ ,\ T_1 u)_o = \sigma(x)$$

Nous allons montrer comment l'on peut calculer $\sigma(x)$ d'une autre manière. Associons à l'équation $T_1\, y = s$ un problème différentiel quelconque :

$$\begin{cases} T_1\, y = s \\ T_2\, y = r \end{cases}$$

admettant une solution unique. Notons Λ_1 la restriction de T_1 à Δ_2, noyau de T_2. Soit $G(x\ ,\ t)$ la fonction de Green associée à Λ_1 ; alors :

$$\sigma(x) = \int_0^1 K(x\ ,\ t)\ T_1\, u(t)\ dt$$

où :

$$K(x\ ,\ t) = G(x\ ,\ t) - \sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i(x)\ G(x_i\ ,\ t)$$

On peut se demander si, parmi tous les jeux de coefficients $\alpha_i(x)$ (x étant fixé), il en existe un qui minimise $\int_0^1 [K(x\ ,\ t)]^2\ dt$. Nous montrerons au chapitre IV qu'il existe un tel jeu de coefficients. La relation qui lui sera associée sera appelée la meilleure relation entre $u(x_1),\ldots,\ u(x_{n+p})$, $u(x)$.

5 - EXTENSION DES RESULTATS PRECEDENTS AU CAS DE L'EQUATION DE LAPLACE

Ω étant un ouvert de $\mathbf{R}^2$, considérons l'équation :

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u(x\ ,\ y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x\ ,\ y)}{\partial y^2} = f(x\ ,\ y) \quad \text{sur} \quad \Omega$$

et un quadrillage de Ω par les droites d'équations :

$$x = x_i\ ,\qquad y = y_j \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Considérons, d'autre part, l'opérateur différentiel $M(z) \equiv \dfrac{d^2 z(t)}{dt^2}$.

Notons $G_{ij}(x\ ,\ t)$ le noyau de Green du problème :

$$M(z) = 0 \qquad z(t_i) = z(t_j) = 0$$

et $g_{ij}(t)$ (resp. $k_{ij}(t)$) les deux fonctions telles que $M(g_{ij}) = 0$ (resp. $M(k_{ij}) = 0$) et que $g_{ij}(t_i) = 1$, $g_{ij}(t_j) = 0$ (resp. $k_{ij}(t_i) = 0$, $k_{ij}(t_j) = 1$). Supposons que $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Des résultats du § 2, on déduit que :

$$g_{i-1,i+1}(x)\ u(x_{i-1}, y) - u(x, y) + k_{i-1,i+1}(x)\ u(x_{i+1}, y) = \int_{y_{j-1}}^{x_{i+1}} G_{j-1,j+1}\ \frac{\partial^2 u(t, y)}{\partial t^2}\ dt$$

$$g_{j-1,j+1}(y)\ u(x, y_{j-1}) - (x, y) + k_{j-1,j+1}(y)\ u(x, y_{j+1}) = \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} G_{j-1,j+1}\ \frac{\partial^2 u(x, v)}{\partial v^2}\ dv$$

Or,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [g_{j-1,j+1}(y)\ u(t, y_{j-1}) - u(t, y) + k_{j-1,j+1}(y)\ u(t, y_{j+1})]\ G_{i-1,i+1}(x, t)\ dt$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} G_{j-1,j+1}(y, v)\ \frac{\partial^2 u(t, v)}{\partial v^2}\ dv \right\} G_{i-1,i+1}(x, t)\ dt$$

$$= \iint_{D_{ij}} G_{j-1,j+1}(y, v)\ G_{i-1,i+1}(x, t)\ \frac{\partial^2 u(t, v)}{\partial v^2}\ dv\ dt$$

$$= \iint_{D_{ij}} G_{j-1,j+1}(y, v)\ G_{i-1,i+1}(x, t) \left[-\frac{\partial^2 u(t, v)}{\partial t^2} + f(t, v) \right] dv\ dt$$

$$= -\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} [g_{i-1,i+1}(x)\ u(x_{i-1}, v) - u(x, v) + k_{i-1,i+1}(x)\ u(x_{i+1}, v)]\ G_{j-1,j+1}(y, v)\ dv$$

$$+ \iint_{D_{ij}} G_{j-1,j+1}(y, v)\ G_{i-1,i+1}(x, t)\ f(t, v)\ dv\ dt$$

où D_{ij} est le rectangle $]x_{i-1}, x_{i+1}[\times]y_{j-1}, y_{j+1}[$.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\iint_{D_{ij}} G_{j-1,j+1}(y, v)\ G_{i-1,i+1}(x, t)\Delta u(t, v)\ dv\ dt \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [g_{j-1,j+1}(y)\ u(t, y_{j-1}) - u(t, y) + k_{j-1,j+1}(y)\ u(t, y_{j+1})]\ G_{i-1,i+1}(x, t)\ dt \\
&+ \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} [g_{i-1,i+1}(x)\ u(x_{i-1}, v) - u(x, v) + k_{i-1,i+1}(x)\ u(x_{i+1}, v)]\ G_{j-1,j+1}(y, v)\ dt
\end{aligned}}$$

Il est facile de montrer que l'écriture de formules de résolution approchées de l'équation de Laplace, se ramène à l'obtention d'approximations de la formule discrète théorique ci-dessus.

Etant donné le problème différentiel

$$(\pi) \quad \begin{cases} y^{(2)}(x) + q_1(x)y'(x) + q_2(x)y(x) = s(x) & x \in [0,1] \\ y(0) = y_0 \quad , \quad y(1) = y_1 \end{cases}$$

Nous proposons ci-dessous un programme qui permet la résolution de (π) comme cela est indiqué au paragraphe de ce chapitre.

```
début
   procédure GRESOLSYSLINE (A,B,X,N, IMPOSSIBLE) ;
             (Procédure contenue en Bibliothèque)
   réel procédure Q1(X) ;
             ..................................
   réel procédure Q2(X) ;
             ..................................
   réel procédure S(X) ;
             ..................................
   réel procédure S1(X) ; valeur X ; réel X
   S1 := 0.0
   réel procédure S2(X) ;
             ..................................
   procédure SYSAP (Q1,Q2,S,X0,Y0,Y1,H,M,Y) ;
   valeur X0,Y0,Y1,H ;
   réel procédure Q1,Q2,S ; réel X0,Y0,Y1,H ;
   tableau Y ;
   entier M ;
   début tableau A[1 : M - 1,1 : M - 1], C[1 : M - 1] ;
         entier J,J ;
         pour J := pas 1 jusqua M - 1 faire
              début réel F1,F2,G ;
                    F1 := (2 - H × Q1(X0 + I × H))/(4 - 2 × H↑2 × Q2(X0 + I × H)) ;
                    F2 := (2 + H × Q1(X0 + I × H))/(4 - 2 × H↑2 × Q2(X0 + I × H)) ;
                    G  := (H↑2 × S(X0 + J × H))/(2 - H↑2 × Q2(X0 + I × H)) ;
                    C[I] := si I = 1 alors G - Y0 × F1
                    sinon si I = M - 1 alors G - Y1 × F2
                    sinon G ;
                    pour J := pas 1 jusqua M - 1 faire
                    A[I,J] := si I - J = 0 alors - 1.0
                    sinon si I - J = 1 alors F1
                    sinon si I - J = -1 alors F2
              sinon 0.0 fin ;
              GRESOLSYSLINE (A,C,Y,M - 1, IMPOSSIBLE) ;
              pour I := 1 pas 1 jusqua M - 1 faire
              ECRIRE (I,Y[I]) fin SYSAP ;
              tableau D [1 : 20], B[1 : 20, 1 : 20], U[1 : 20], V[1 : 20] ;
```

```
réel X0,Y0 ; Y1 ;
entier M,N,I,J ;
      X0 := Y1 := 0.0 ;
      Y0 := 1.0 ;
      M := 10 ; N :=5 ;
SYSAP (Q1,Q2,S,0.0,1.0,0.0,1/M,M,U) ;
pour I := 1 pas 1 jusqua M - 1 faire
            début réel D1,D2,E ;
            SYSAP (Q1,Q2,S1,X0 + (I - 1)/M,0.0,1.0,1/(M × N),2 × N,U) ;
            D2 := U[N] ;
            SYSAP (Q1,Q2,S1,X0 + (I - 1)/M,1.0,0.0,1/(M × N),2 × N,U) ;
            D1 := U[N] ;
            SYSAP (Q1,Q2,S2,X0 + (I - 1)/M,0.0,0.0,1/(M × N),2 × N,U) ;
            E  := U[N] ;
            D[I] : = si I = s alors E - Y0 × D2
            sinon si I = M - 1 alors E - Y1 × D2
            sinon E ;
            pour J :=1 pas 1 jusqua M - 1 faire
            B[I,J] := si I - J = 0 alors - 1,0
                  sinon si I - J = 1 alors D1
                  sinon si I - J = - 1 alors D2
                  sinon 0.0 fin ;
            GRESOLZYSLINE (B,D,V,M - 1, IMPOSSIBLE) ;
            pour I := 1 pas 1 jusqua M - 1 faire
            ECRIRE (I,V[I] ;
            IMPOSSIBLE : ECRIRE ('PIVOT NUL') ;
            fin ;
```

Exemple :

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 2x \\ y(0) = 1, \ y(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = x + e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{(1 + \sqrt{e}) \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt}{\int_0^1 e^{\frac{t^2}{2}} dt} \right)$$

x	SOLUTION EXACTE	ERREUR METHODE CLASSIQUE	ERREUR NOUVELLE METHODE
0,1	0,874091	+0,000025	+0,000002
0,2	0,742746	+0,000069	+0,000005
0,3	0,610617	+0,000119	+0,000007
0,4	0,482292	+0,000170	+0,000011
0,5	0,362106	+0,000209	+0,000007
0,6	0,253992	+0,000230	+0,000012
0,7	0,161339	+0,000226	+0,000012
0,8	0,086888	+0,000188	+0,000011
0,9	0,032676	+0,000114	+0,000006

CHAPITRE III

CONDITIONNEMENT NORMALISÉ DES MATRICES ASSOCIÉES A CERTAINS PROBLÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES CAS D'UNE VARIABLE

1 - PROBLEME DISCRET THEORIQUE ASSOCIE A UN PROBLEME DIFFERENTIEL LINEAIRE

Dans ce paragraphe, nous utiliserons les mêmes notations qu'au chapitre I.

Considérons le problème différentiel linéaire :

$$\begin{cases} S_1 u \equiv D^n u + q_1 D^{n-1} u + \dots + q_n u = s & n \geqslant 1 \\ S_2 u \equiv [u_i^*(u)] = r \end{cases} \qquad (1)$$

qui vérifie les hypothèses : h1).

α) $q_i \in C^0\,[0\,,1]$ $\quad 1 \leqslant i \leqslant n$.

β) u_i^* est le prolongement sur $H^n\,[0\,,1]$ d'une fonctionnelle linéaire et continue définie sur $C^{n-1}\,[0\,,1]$; $[u_i^*(u)] \in \mathbf{R}^n$.

γ) S_1(resp. S_2) est une application linéaire et continue de $H^n\,[0\,,1]$ sur $H^0\,[0\,,1]$ (resp. $\mathbf{R}^n$).

δ) Les fonctionnelles $u_i^*(i \leqslant 1 \leqslant n)$ sont linéairement indépendantes sur Δ_1, noyau de S_1.

a) <u>Notons $\{x_j\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant m,\ m > n\}$ une subdivision de $[0\,,1]$ telle que</u>

$$\text{h2)} \qquad \begin{array}{c}\forall j \\ 0 \leqslant j \leqslant m-n+1\end{array} \qquad \widetilde{W}(x_j) = \begin{vmatrix} v_1(x_j) & \dots\dots\dots\dots & v_1(x_{j+n-1}) \\ \vdots & & \\ v_n(x_j) & \dots\dots\dots\dots & v_n(x_{j+n-1}) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2)$$

où $v_1,\dots,v_n$ sont n vecteurs de base de Δ_1.

Nous savons que si $h_M = \underset{0 \leqslant j \leqslant m-1}{\mathrm{Max}}\ (x_{j+1} - x_j)$ est assez petit, l'hypothèse h2) est vérifiée (cf. Ch. I).

D'autre part, $\forall v \in \Delta_1$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \Longrightarrow (w\,,v)_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (w\,,v_i)_n,\quad \forall w \in H^n\,[0\,,1].$$

Il en résulte que :

$$\forall w \in H^n[0\,,1] \qquad \begin{vmatrix} (w\,,v)_n & v(x_j) & \dots\dots & v(x_{j+n-1}) \\ (w\,,v_1)_n & v_1(x_j) & \dots\dots & v_1(x_{j+n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (w\,,v_n)_n & v_n(x_j) & \dots\dots & v_n(x_{j+n-1}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

puisque $v(x_j) = (h_{x_j}\,,v)_n$ où h_x est le noyau reproduisant de $H^n\,[0\,,1]$. On déduit de (3) que pour $0 \leqslant j \leqslant m-n$, il existe une relation linéaire et homogène entre $v(x_j),\dots,\ v(x_{j+n})$:

$$v(x_{j+n}) + \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{n-i}(x_{j+n}\ ;\ x_j)\ \ v(x_{j+i}) = 0 \qquad (4)$$

Considérons l'application linéaire de $H^n[0,1]$ sur $\mathbb{R}^{m+1}$ qui à $\forall u \in H^n[0,1]$ fait correspondre le vecteur $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ de composantes $u(x_0), \ldots, u(x_m)$.

Posons :

$$
\begin{aligned}
&{}^t\tilde{\tau} = [0, \ldots, 0, \; \chi_n(x_{j+n}\,;\,x_j) \;\ldots\; \chi_1(x_{j+n}\,;\,x_j), \; 1, \; 0, \ldots, 0] \\
&(\tilde{\tau}_j, \tilde{v}_i)_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0 \qquad \text{pour } \; 1 \leqslant i \leqslant n \quad 0 \leqslant j \leqslant m-n
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Considérons la matrice $(m-n+1) \times (m+1)$ dont le $j^{\text{ème}}$ vecteur - ligne est le vecteur ${}^t\tilde{\tau}_{j-1}$. Elle définit une application linéaire $\tilde{S}_1$, de $\mathbb{R}^{m+1}$ dans $\mathbb{R}^{m-n+1}$. $\tilde{S}_1$ est surjective. Etant donné un vecteur $\tilde{\sigma} \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ de composantes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-n}$ on peut toujours trouver un vecteur $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ de composantes $u_0, \ldots, u_m$ tel que : $\tilde{S}_1 \tilde{u} = \tilde{\sigma}$.

En effet, choisissons arbitrairement $u_0, \ldots, u_{n-1}$. L'équation $(\tilde{\tau}_0, \tilde{u})_{\mathbb{R}^{m+1}} = \sigma_0$ nous permet de calculer de manière unique u_n.

De même, si $u_0, \ldots, u_{j+n-1}$ sont connus, l'équation $(\tilde{\tau}_0, \tilde{u})_{\mathbb{R}^{m+1}} = \sigma_j$ nous permet de calculer de manière unique u_{j+n}.

Il en résulte que le noyau $\tilde{\Delta}_1$ de $\tilde{S}_1$ est de dimension n. Comme l'hypothèse h2) implique que les vecteurs $\tilde{v}_i$ sont linéairement indépendants, ces vecteurs forment une base de $\tilde{\Delta}_1$. Il est facile de vérifier aussi que les vecteurs $\tilde{\tau}_j$ sont linéairement indépendants. Ils forment donc avec les vecteurs $\tilde{v}_i$ une base de $\mathbb{R}^{m+1}$.

b) D'autre part, si $u_i^*(u) = (w_i, u)_n$ il résulte de (3) que :

$$u_i^*(v) = (w_i, v)_n = (z_i, v)_{\mathbb{R}^{m+1}} \quad \forall v \in \Delta_1$$

Considérons la matrice $n \times (m+1)$ dont le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne est le vecteur ${}^t\tilde{z}_i$. Elle définit une application linéaire $\tilde{S}_2$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ dans $\mathbb{R}^n$. Cette application est surjective.

Il suffit pour le montrer de remarquer que :

$$
\begin{vmatrix}
(\tilde{z}_1, \tilde{v}_1)_{\mathbb{R}^{m+1}}, \ldots, (\tilde{z}_n, \tilde{v}_1)_{\mathbb{R}^{m+1}} \\
\vdots \\
(\tilde{z}_1, \tilde{v}_n)_{\mathbb{R}^{m+1}}, \ldots, (\tilde{z}_n, \tilde{v}_n)_{\mathbb{R}^{m+1}}
\end{vmatrix}
\neq 0 \quad \text{car} \quad
\begin{vmatrix}
(w_1, v_1)_n, \ldots, (w_n, v_1)_n \\
\vdots \\
(w_1, v_n)_n, \ldots, (w_n, v_n)_n
\end{vmatrix}
\neq 0
$$

Le noyau $\tilde{\Delta}_2$ de $\tilde{S}_2$ est donc de dimension $m-n+1$.

c) $(\tilde{z}_i, \tilde{v})_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0 \Longleftrightarrow (w_i, v)_n = 0 \Longrightarrow v = \Theta_n \Longrightarrow \tilde{v} = 0.$

Donc :

$$\tilde{\Delta}_1 \cap \tilde{\Delta}_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}^{m+1} = \tilde{\Delta}_1 \oplus \tilde{\Delta}_2$$

d) Notons $\tilde{\Lambda}_1$ la restriction de $\tilde{S}_1$ à $\tilde{\Delta}_2$.

$\tilde{\Lambda}_1$ applique biunivoquement $\tilde{\Delta}_2$ sur $\mathbb{R}^{m-n+1}$.

Il existe donc une matrice $(m+1) \times (m-n+1)$: $\tilde{G} = [\tilde{G}(x_i, x_j)]$ telle que : $\tilde{\Lambda}_1 \tilde{G} = I_{m-n+1}$ où I_p est une matrice unité de type $p \times p$.

De (5) il résulte que :

$$
\begin{vmatrix}
\tilde{G}(x_j, x_q) & \tilde{G}(x_{j+1}, x_q) \ldots & \tilde{G}(x_{j+n}, x_q) \\
v_1(x_j) & v_1(x_{j+1}) & v_1(x_{j+n}) \\
\vdots & & \vdots \\
v_n(x_j) & v_n(x_{j+1}) & v_n(x_{j+n})
\end{vmatrix}
= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq q-1 \\ 1 & \text{si } j = q \end{cases}
$$

Par analogie avec le noyau de Green d'un problème différentiel, nous poserons :

$$\tilde{G}(x_j\,,\,x_q) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{lq} v_l(x_j) & \text{si } j < q \\ \sum_{l=1}^{n} \tilde{b}_{lq} v_l(x_j) & \text{si } j \geqslant q \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \tilde{b}_{lq} - \tilde{a}_{lq} = \tilde{c}_{lq}$$

D'où :

$$\sum_{l=1}^{n} c_{lq}\, v_l(x_{q+k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, 1, \ldots, (n-2) \\ 1 & \text{si } k = n-1 \end{cases} \tag{6}$$

A cause de l'hypothèse h2), le système (6) admet toujours une solution et une seule.

D'autre part :

$$(\tilde{z}_i\,,\,\tilde{G})_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n \Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} z_{ij}\, \tilde{G}(x_j\,,\,x_q) = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \forall q. \Longrightarrow \sum_{j=i}^{m} z_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{lq} v_l(x_j) \right) =$$

$$= \sum_{j=q}^{m} z_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_{lq}\, v_l(x_j) \right) \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \forall q \Longrightarrow \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{lq} (\tilde{z}_i\,,\,\tilde{v}_l)_{\mathbb{R}^{m+1}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_{lq} \left(\sum_{j=q}^{m} z_{ij}\, v_l(x_j) \right) \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \forall q.$$

Le système, ci-dessus, dont le déterminant est différent de zéro, nous permet de déterminer de manière unique les coefficients $\tilde{a}_{lq}$ et $\tilde{b}_{lq} = \tilde{a}_{lq} + \tilde{c}_{lq}$.

e) Notons $\tilde{\Lambda}_2$ la restriction de $\tilde{S}_2'$ à $\tilde{\Delta}_1$.

$\tilde{\Lambda}_2$ applique biunivoquement $\tilde{\Delta}_1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe donc une matrice $\tilde{K}$ de type $(m+1) \times n$ telle que : $\tilde{\Lambda}_2\, \tilde{K} = I_n$.

Considérons les vecteurs $g_i \in \Delta_1$ tels que $(w_i\,,\,g_j)_n = \delta_{ij}$.

Puisque $(\tilde{z}_i\,,\,\tilde{g}_j)_{\mathbb{R}^{m+1}} = \delta_{ij}$, ${}^t\tilde{g}_i$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur ligne de $\tilde{K}$.

2 - CONVERGENCE VERS LA SOLUTION EXACTE D'UNE SOLUTION APPROCHEE D'UN PROBLEME DIFFERENTIEL AVEC CONDITIONS AUX LIMITES

Considérons le problème différentiel :

$$\begin{cases} M(y) \equiv y^{(n)}(x) + q_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + q_n(x)\, y(x) = s(x) & x \in [0\,,1] \\ U_i(y) \equiv \sum_{p=0}^{n-1} [\alpha_{ij}\, y^{(p)}(0) + \beta_{ij}\, y^{(p)}(1)] = r_i & 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \tag{7}$$

qui vérifie les hypothèses h3) :

α) $q_i \in C^0\,[0\,,1] \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad , \quad s \in C^0[0\,,1]$.

β) $M(y) = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes :

$$v_1\,, \ldots,\, v_n \in C^n\,[0\,,\,1].$$

γ) Le problème (7) admet une solution unique.

a) Ecriture du système discret théorique associé au problème (7).

Comme au paragraphe 1, posons :

$$\chi_{n-i}(x\ ;\ x_j) = (-1)^{n-i} \frac{\begin{vmatrix} v_1(x_j) & \dots & v_1(x_{j+i-1}) & v_1(x_{j+i+1}) & \dots & v_1(x_{j+n-1}) & v_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_n(x_j) & \dots & v_n(x_{j+i-1}) & v_n(x_{j+i+1}) & \dots & v_m(x_{j+n-1}) & v_n(x) \end{vmatrix}}{\widetilde{W}(x_j)}$$

Posons d'autre part :

$$\theta_{ip}(x\ ;\ x_j) = \frac{d^p\,[\chi_i(x\ ;\ x_j)]}{dx^p}$$

Alors :

$$\begin{cases} y^{(p)}(0) = \tau_p(0\ ;\ 0) - \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_{ip}(0\ ;\ 0)\ y(x_{n-i}) \\ y^{(p)}(1) = \tau_p(1\ ;\ x_{m-n+1}) - \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_{ip}(1\ ;\ x_{m-n+1})\ y(x_{m-i+1}) \end{cases} \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

et :

$$U_i(y) \equiv \sum_{p=0}^{n-1} [\alpha_{ip}\, y^{(p)}(0) + \beta_{ip}\, y^{(p)}(1)] = \gamma_i = \alpha_{io}\, y(0) + \beta_{io}\, y(1) + \sum_{p=1}^{n-1} \Big\{ \alpha_{ip} \Big[\tau_p(0\ ;0) - \sum_{j=1}^{n} \theta_{jp}(0\ ;\ 0)\ y(x_{n-j}) \Big]$$
$$+ \beta_{ip} \Big[\tau_p(1\ ;\ x_{m-n+1}) - \sum_{j=1}^{n} \theta_{jp}(1\ ;\ x_{m-n+1})\ y(x_{m-j+1}) \Big] \Big\}$$

Les valeurs de la solution du problème (7) aux points de la subdivision $\{x_j\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant m,\ m > n\}$ vérifient le système linéaire :

$$\boxed{\begin{cases} N[\tilde{y}(x_j)] \equiv y(x_{j+n}) + \chi_1(x_{j+n}\ ;\ x_j)\ y(x_{j+n-1}) + \dots + \chi_n(x_{j+n}\ ;\ x_j)\ y(x_j) = \sigma(x_{j+n}\ ;\ x_j) \\ V_i(\tilde{y}) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n-1} [\lambda_{ik}\, y(x_k) + \mu_{ik}\, y(x_{m-k})] = h_M^{n-1}\, [\gamma_i + \rho_i(0) + \rho\,(1)]\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}} \qquad (8)$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda_{ik} = -\,h_M^{n-1} \Big(\sum\limits_{p=1}^{n-1} \alpha_{ip}\, \theta_{n-k,p}(0\ ;\ 0) \Big) \\ \mu_{ik} = -\,h_M^{n-1} \Big(\sum\limits_{p=1}^{n-1} \beta_{ip}\, \theta_{n-k,p}(1\ ;\ x_{m-n+1}) \Big) \end{cases} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$\begin{cases} \lambda_{io} = h_M^{n-1} \Big[\alpha_{io} - \sum\limits_{p=1}^{n-1} \theta_{n,p}(0\ ;\ 0)\ \alpha_{ip} \Big] \\ \mu_{io} = h_M^{n-1} \Big[\beta_{io} - \sum\limits_{p=1}^{n-1} \theta_{n,p}(1\ ;\ x_{m-n+1})\ \beta_{ip} \Big] \end{cases}$$

$\sigma(x_{j+n}\ ;\ x_j) = \int_0^1 G(x_{j+n}\ ,\ t\ ;\ x_j)\ s(t)\ dt$ où $G(x\ ,\ t\ ;\ x_j)$ est le noyau de Green du problème :

$$\begin{cases} M(z) = 0 \\ z(x_{j+i}) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

$$\tau_p(x\ ;\ x_j) = \frac{[d^p\ \sigma(x\ ;\ x_j)]}{dx^p} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \rho_i(0) = -\sum\limits_{p=1}^{n-1} \alpha_{ip}\ \tau_p(0\ ;\ 0) \\ \rho_i(1) = -\sum\limits_{p=1}^{n-1} \beta_{ip}\ \tau_p(1\ ;\ x_{m-n+1}) \end{cases}$$

Nous écrirons le système (8) sous la forme matricielle : A Y = a.

$$A = \begin{bmatrix} \chi_n(x_n\,;\,x_0) & \dots & \chi_1(x_n\,;\,x_0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi_n(x_{n+1}\,;\,x_1) & \dots & \chi_1(x_{m+1}\,;\,x_1) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots\ 0 & \chi_n(x_m\,;\,x_{m-n}) & \dots & \chi_1(x_m\,;\,x_{m-n}) & & 1 \\ \lambda_{10} & \dots & & & & \dots & \mu_{1,n-1} \\ \vdots & & & & & & \\ \lambda_{n0} & & & & & \dots & \mu_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

b) Comportement de $\chi_{n-i}(x\,;\,x_j)$, $\theta_{n-i,p}(0\,;\,0)$, $\theta_{n-i,p}(1\,;\,x_{m-n+1})$ lorsque $h_M \longrightarrow 0$.

Nous supposerons maintenant que $\dfrac{h_M}{h_m}$ reste borné lorsque $h_M \longrightarrow 0$, avec $h_M = \underset{0 \leq j \leq m-1}{\mathrm{Min}} (x_{j+1} - x_j)$.

Posons comme au chapitre II :

$$K(x_2, \dots, x_n\,;\,x_1) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & \dots & \dfrac{(x_2 - x_1)^{n-1}}{n-1\,!} \\ & & \\ (x_n - x_1) & \dots & \dfrac{(x_n - x_1)^{n-1}}{n-1\,!} \end{vmatrix}$$

Il est facile de montrer que :

$$\chi_{n-i}(x\,;\,x_j) = -\frac{K(x_{j+1}, \dots, x_{j+i-1}, x, x_{j+i+1}, \dots, x_{j+n-1}\,;\,x_j)\,[W(x_j) + \varepsilon(x\,;x_j\,;\,W)]}{K(x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1}\,;\,x_j)\,[W(x_j) + \varepsilon(x_{j+n-1}\,;\,x_j\,;\,W)}$$

où $W(x_j)$ est le wronskien de $v_1, \dots, v_n$ au point x_j. Donc :

$$\chi_{n-i}(x\,;\,x_j) = -\frac{(x - x_j)\dots\dots(x - x_{j+i-1})\,(x_{j+i+1} - x)\dots\dots(x_{j+n-1} - x)\ \ [1 + \eta(x\,;\,x_j\,;\,\chi_{n-i})}{(x_{j+1} - x_j)\dots\dots(x_{j+i} - x_{j+i-1})\,(x_{j+i+1} - x_{j+i})\dots\dots(x_{j+n-1} - x_{j+i})}$$

De plus :

$$|\eta(x\,;\,x_j\,;\,\chi_{n-i})| \leqslant \omega(h_M\,;\,\chi_{n-i}) \quad \text{avec} \quad \lim_{h_M \to 0} \omega(h_M\,;\,\chi_{n-i}) = 0$$

Posons maintenant :

$$\nu_{n-i,p}(x\,;\,x_j) = \begin{vmatrix} v_1(x_j) & \dots & v_n(x_j) \\ v_1(x_{j+1}) & & v_n(x_{j+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1(x_{j+n-1}) & \dots & v_n(x_{j+n-1}) \\ v_1^{(p)}(x) & \dots & v_n^{(p)}(x) \end{vmatrix}$$

Or :

$$v_i(x_{j+k}) = \sum_{p=0}^{n-2} \frac{(x_{j+k} - x_j)^p}{p!}\, v_i^{(p)}(x_j) + \frac{(x_{j+k} - x_j)^{n-1}}{n-1!}\, v_i^{(n-1)}(\xi_{i,j+k}),\quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,\quad \xi_{i,j+k} \in]\,x_j, x_{j+k}[$$

Posons :

$$\sum_{p=0}^{n-2} \frac{(x_{j+k} - x_j)^p}{p!}\, v_i^{(p)}(x_j) = \bar{v}_i(x_{j+k}) \quad \text{et} \quad \frac{(x_{j+k} - x_j)^{n-1}}{n-1\,!}\, v_i^{(n-1)}(\xi_{i,j+k}) = e_{i,j+k}$$

$$\nu_{n-i,p}(x\ ;\ x_j) = \begin{vmatrix} v_1(x_j) & \dots\dots\dots\dots & v_n(x_j) \\ \bar{v}_1(x_{j+1}) + e_{1,j+1} & \dots\dots\dots\dots & \bar{v}_n(x_{j+1}) + e_{n,j+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{v}_1(x_{j+i-1}) + e_{1,j+i-1} & \dots\dots\dots & \bar{v}_n(x_{j+i-1}) + e_{n,j+i-1} \\ \bar{v}_1(x_{j+i+1}) + e_{1,j+i+1} & \dots\dots\dots & \bar{v}_n(x_{j+i+1}) + e_{n,j+i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{v}_1(x_{j+n-1}) + e_{1,j+n-1} & \dots\dots\dots & \bar{v}_n(x_{j+n-1}) + e_{n,j+n-1} \\ v_1^{(p)}(x) & \dots\dots\dots\dots & v_n^{(p)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\nu_{n-i,p}(x\ ;\ x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 1 & (x_{j+1} - x_j) & \dots & \dfrac{(x_{j+1} - x_j)^{n-2}}{\overline{n-2}\,!} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & (x_{j+i-1} - x_j) & \dots & \dfrac{(x_{j+i-1} - x_j)^{n-2}}{\overline{n-2}\,!} & 0 \\ 1 & (x_{j+i+1} - x_j) & \dots & \dfrac{(x_{j+i+1} - x_j)^{n-2}}{\overline{n-2}\,!} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & (x_{j+n-1} - x_j) & \dots & \dfrac{(x_{j+n-1} - x_j)^{n-2}}{\overline{n-2}\,!} & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_1(x_j) & \dots\dots & v_n(x_j) \\ v_1'(x_j) & \dots\dots & v_n'(x_j) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-2)}(x_j) & \dots & v_n^{(n-2)}(x_j) \\ v_1^{(p)}(x) & \dots\dots & v_n^{(p)}(x) \end{vmatrix} + e_{n-i,p}(x\ ;\ x_j) .$$

$$\nu_{n-i,p}(x\ ;\ x_j) = K(x_{j+1}, \dots, x_{j+i-1}, x_{j+i+1}, \dots, x_{j+n-1}\ ;\ x_j)\, W_p(x\ ;\ x_j) + e_{n-i,p}(x\ ;\ x_j)$$

LEMME - Par rapport à h_M, K est un infiniment petit d'ordre $\dfrac{(n-1)\ (n-2)}{2}$ et $e_{n-i,p}$ est une somme finie de déterminants égaux au produit d'un infiniment petit d'ordre $\dfrac{(n-1)\ (n-2)}{2} + 1$ au moins par une quantité uniformément bornée quels que soient $x_j, \dots, x_{j+n-1}$, $x \in [0, 1]$.

Comme :

$$W_p(x\ ;\ x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant p \leqslant n-2 \\ W(x_j) & \text{si} \quad p = n-1 , \end{cases}$$

$$\theta_{n-i,p}(x\ ;\ x_j) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-i}\ \overline{n-1}\,!\ \varepsilon_p(x_{j+n-1}, x_j, \nu)}{(x_{j+i} - x_j) \dots (x_{j+i} - x_{j+i-1})\ (x_{j+i+1} - x_{j+1}) \dots (x_{j+n-1} - x_{j+i})} & \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant n-2 \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n-1}\ \overline{n-1}\,!\ [1 + \varepsilon_{n-1}(x_{j+n-1}\ ;\ x_j\ ;\ \nu)]}{(x_{j+i} - x_j) \dots (x_{j+i} - x_{j+i-1})\ (x_{j+i+1} - x_{j+i}) \dots (x_{j+n-1} - x_{j+i})} & \text{si} \quad p = n-1 \end{cases}$$

$$|\varepsilon_p(x_{j+n-1}\ ;\ x_j\ ;\ \nu)| \leqslant \omega_p(h_M\ ;\ \nu) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h_M \to 0} \omega_p(h_M\ ;\ \nu) = 0 \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

On en déduit :

$$\theta_{n-i,p}(0\ ;\ 0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-i}\ (n-1)!\ \varepsilon_p(x_{n-i}\ ;\ 0\ ;\ W)}{x_i \ldots (x_i - x_{i-1})\ (x_{i+1} - x_i) \ldots (x_{n-1} - x_i)} & 1 \leqslant p \leqslant n-2 \\ \dfrac{(-1)^{n-i}(n-1)!\ [1 + \varepsilon_{n-1}(x_{n-1}\ ;\ 0\ ;\ W)]}{x_i \ldots (x_i - x_{i-1})\ (x_{i+1} - x_i) \ldots (x_{n-1} - x_i)} & p = n-1 \end{cases} \qquad \lim_{h_M \to 0} \varepsilon_p(x_{n-1}\ ;\ 0\ ;\ W) = 0$$

Si $1 \leqslant p \leqslant n-2$

$$\theta_{n-i,p}(1;x_{m-n+1}) = \frac{(-1)^{n-1}\ \overline{(n-1)}!\ \ \varepsilon_p(x_{m-n+1}\ ;\ 1\ ;\ W)]}{(x_{m-n+i+1} - x_m)\ (x_{m-n+i+1} - x_{m-n+1}) \ldots (x_{m-n+i+1} - x_{m-n+i})\ (x_{m-1} - x_{m-n+i+1}) \ldots (x_{m-n+i+2} - x_{m-n+i+1})}$$

Si $p = n-1$

$$\theta_{n-i,p}(1;x_{m-n+1}) = \frac{(-1)^{n-1}\ \overline{(n-1)}!\ [1 + \varepsilon_{n-1}(x_{m-n+1}\ ;1\ ;W)]}{(x_{m-n+i+1} - x_m)\ (x_{m-n+i+1} - x_{m-n+1}) \ldots (x_{m-n+i+1} - x_{m-n+i})\ (x_{m-1} - x_{m-n+i+1}) \ldots (x_{m-n+i+2} - x_{m-n+i+1})}$$

avec :

$$\lim_{h_M \to 0} \varepsilon_p(x_{m-n+1}\ ;\ 1\ ;\ W) = 0 \qquad 1 \leqslant p < n-1$$

$\theta_{n-i,n-1}(0\ ;\ 0)$ et $\theta_{n-i,n-1}(x_{m-n+1}\ ;\ 1)$ sont donc par rapport à h_M des infiniment grands d'ordre $(n-1)$. C'est pourquoi nous avons fait apparaître h_M^{n-1} dans le second membre de V_i .

c) Ecriture de la matrice de résolution approchée du problème (7).

Supposons maintenant que la subdivision $\{x_j\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant m,\ m > n\}$ soit une subdivision de $[0,1]$ de pas h, telle que $x_o = 0,\ x_m = 1$.

Considérons une fonction $y(x) \in C^n\ [0\ ,\ 1]$.

$$y(x_{j+p}) = y(x_j) + (ph)\,y'(x_j) + \ldots + \frac{(ph)^n}{n!}\ [y^{(n)}(x_j) + \varepsilon_n(x_{j+p}\ ;\ x_j\ ;\ y)] \qquad 0 \leqslant p \leqslant n$$

Si :

$$\omega_n(h\ ;\ y) = \mathrm{Sup}\ \{|y^{(n)}(t_1) - y^{(n)}(t_2)|\ ;\ t_1,\ t_2 \in [0\ ,\ 1]\ ,\ |t_2 - t_1| \leqslant nh\} \qquad |\varepsilon_n(x_{j+p}\ ;\ x_j\ ;\ y)| \leqslant \omega_n(h\ ;\ y).$$

De plus :

$$\lim_{h \to 0} \omega_n(h\ ;\ y) = 0.$$

On peut représenter $y^{(r)}(x_j)\ (1 \leqslant r \leqslant n)$ au moyen d'une combinaison linéaire des valeurs de $y(x_{j+p})$, $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\begin{cases} y^{(r)}(x_j) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} B_p^r(n\ ,\ h)\ y(x_{j+p}) - \sum_{p=1}^{n} B_p^r(n\ ,\ h)\ \frac{(ph)^n}{n!}\ \varepsilon_n(x_{j+p}\ ;\ x_j\ ;\ y) \\ \text{où} \ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} B_p^r(n\ ,\ h)\ p^q = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ q \neq r \\ \dfrac{1}{h^r} & \text{si}\ \ q = r \end{cases} \quad 1 \leqslant q \leqslant n\ ,\ \sum_{p=0}^{n} B_p^r(n\ ,\ h) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Posons : } B_p^r(n\ ,\ h) = \frac{A_p^r(n)}{h^r} \qquad 0 \leqslant p \leqslant n \qquad \text{avec}\ \ B_p^o(n\ ,\ h) = A_p^o(n) = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ p \neq 0 \\ 1 & \text{si}\ \ p = 0 \end{cases}$$

$$M\ [y(x_j)] = \sum_{p=0}^{n} \left[B_p^n(n\ ,\ h) + \sum_{r=1}^{n} q_r(x_j)\ B_p^{n-r}(n\ ,\ h) \right] y(x_{j+p}) - \left\{ \sum_{p=1}^{n} \frac{(ph)^n}{n!}\ \varepsilon_n(x_{j+p}\ ;\ x_j\ ;\ y)\ [B_p^n(n,\ h) + \sum_{r=1}^{n} q_r(x_j)\ B_p^{n-r}(n\ ,h)] \right\} = s(x_j)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{p=0}^{n}\left[A_p^n(n)+\sum_{r=1}^{n} q_r(x_j)\, A_p^{n-r}(n)\, h^r\right] y(x_{j+p}) = h^n \left\{ s(x_j) + \sum_{p=1}^{n}\frac{p^n}{n!}\,\varepsilon_n(x_{j+p}; x_j ; y)\left[A_p^n(n)+\sum_{r=1}^{n} q_r(x_j) A_p^{n-r}(n)\, h^r\right]\right\}$$

Or $\forall p\ A_p^n(n) \neq 0$. Comme $q_r \in C^0\,[0\,,1]$, $q_r(x)$ est uniformément borné sur $[0\,,1]$. Donc si h est suffisamment petit,

$$D_p(n\,;x_j) = A_p^n(n) + \sum_{r=1}^{n} q_r(x_j)\ A_p^{n-r}(n)\ h^r \neq 0$$

Posons :

$$C_{n-1}(n\,;x_j) = \frac{D_1(n\,;x_j)}{D_n(n\,;x_j)} \Longrightarrow C_0(n\,;x_j) = 1$$

et :

$$\varepsilon_n(h\,;x_j\,;y) = \frac{1}{n!\ D_n(n\,;x_j)}\left[\sum_{p=1}^{n} p^n\,\varepsilon_n(x_{j+p}\,;x_j\,;y)\ D_p(n\,;x_j)\right] = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n} p^n\,\varepsilon_n(x_{j+p}\,;x_j\,;y)\ C_{n-p}(n\,;x_j),$$

$|\varepsilon_n(h\,;x_j\,;y)| \leqslant M_n(h)\ \omega_n(h\,;y)$. Si h est assez petit, $M_n(h) < +\infty$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_n(h\,;x_j\,;y) = 0$.

Ainsi :

$$\left\{ y(x_{j+n}) + \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(n\,;x_j)\ y(x_{j+p}) = \frac{h^n}{D_n(n\,;x_j)}\,s(x_j) + h^n\ \varepsilon_n(h\,;x_j\,;y)\right.$$

On peut aussi représenter $y^{(r)}(x_j)\,(1 \leqslant r \leqslant n)$ au moyen d'une combinaison linéaire des valeurs de $y(x_{j-p})$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$:

$$y^{(r)}(x_j) = \frac{(-1)^r}{h^r}\left\{\sum_{p=0}^{n} A_p^r(n\,,h)\ y(x_{j-p}) - \sum_{p=0}^{n}(-1)^n\,\frac{(ph)^n}{n!}\,A_p^r(n\,,h)\ \varepsilon_n(x_{j-p}\,;x_j\,;y)\right\}$$

Par analogie avec les formules discrètes théoriques utilisées ci-dessus nous utiliserons $y(x_0), y(x_1), \ldots, y(x_{n-1})$ pour représenter $y^{(p)}(0)\,(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ et $y(x_{m-n+1}), \ldots, y(x_m)$ pour représenter $y^{(p)}(1)\ (1 \leqslant p \leqslant n-1)$.

Ainsi :

$$U_i(y) \equiv \sum_{r=0}^{n-1}[\alpha_{ir}\,y^{(r)}(0) + \beta_{ir}\,y^{(r)}(1)] = \gamma_i = \sum_{r=0}^{n-1}\left\{\frac{\alpha_{ir}}{h^r}\left[\sum_{p=0}^{n-1} A_p^r(n-1)\,y(x_p)\right] + (-1)^r\frac{\beta_{ir}}{h^r}\left[\sum_{p=0}^{n-1} A_p^r(n-1)\ y(x_{m-p})\right]\right\}$$

$$+\sum_{r=0}^{n-1}\left\{-\frac{\alpha_{ir}}{\overline{n-1}!\ h^r}\left[\sum_{p=1}^{n-1}(ph)^{n-1}\ A_p^r(n-1)\ \varepsilon_{n-1}(x_p\,;0\,;y)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{r+n}\,\beta_{ir}}{\overline{n-1}!\ h^r}\left[\sum_{p=1}^{n-1}(ph)^{n-1}\ A_p^r(n-1)\ \varepsilon_{n-1}(x_{m-p}\,;x_m\,;y)\right]\right\}$$

Posons :

$$\left\{\begin{aligned} e_{n-1,i}(h\,;0\,;y) &= \sum_{r=0}^{n-1}\frac{\alpha_{ir}}{\overline{n-1}!\ h^r}\left[\sum_{p=1}^{n-1}(ph)^{n-1}\ A_p^r(n-1)\ \varepsilon_{n-1}(x_p\,;0\,;y)\right] \\ e_{n-1,i}(h\,;1\,;y) &= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+n-1}\ \frac{\beta_{ir}}{\overline{n-1}!\ h^r}\left[\sum_{p=1}^{n-1}(ph)^{n-1}\ A_p^r(n-1)\ \varepsilon_{n-1}(x_{m-p}\,;1\,;y)\right]\end{aligned}\right.$$

On montre facilement que $\lim\limits_{h\to 0}\ e_{n-1,i}(h\,;0\,;y) = \lim\limits_{h\to 0}\ e_{n-1,i}(h\,;1\,;y) = 0$.

Posons aussi :

$$\begin{cases} k_{ip} = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_{ir} \; A_p^r(n-1) \; h^{n-r-1} \; , \; l_{ip} = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_{ir} \; A_p^r(n-1) \; h^{n-r-1} \end{cases}$$

$$h^{n-1} \, U_i(y) = \sum_{p=0}^{n-1} [k_{ip} \; y(x_p) + l_{ip} \; y(x_{m-p})] - h^{n-1} \, [e_{n-1,i} \, (h \, ; \, 0 \, ; \, y) + e_{n-1,i} \, (h \, ; \, 1 \, ; \, y)] = h^{n-1} \gamma_i$$

Le système linéaire qui nous permet d'obtenir une solution approchée du problème (7) aux points de la subdivision $\{x_j\}$ peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{array}{ll} N_h(y_j) \equiv y_{j+n} + \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(n \, ; \, x_j) \; y_{j+p} = \dfrac{h^n}{D_n(n \, ; \, x_j)} \, s(x_j) & 0 \leqslant j \leqslant m-n \\ V_i(\bar{y}) \equiv \sum_{p=0}^{n-1} [k_{ip} \; y_p + l_{ip} \; y_{m-p}] = h^{n-1} \; \gamma_i & 1 \leqslant i \leqslant n \end{array}} \qquad (9)$$

Nous écrirons aussi ce système sous forme matricielle : $B \, \bar{Y} = b$ où :

$$B = \begin{bmatrix} C_n(n\,;x_0) & C_{n-1}(n\,;x_0) & \cdots & C_1(n\,;x_0) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_n(n\,;x_1) & \cdots & \cdots & C_1(n\,;x_1) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_n(n\,;x_{m-n}) & \cdots & \cdots & C_1(n\,;x_{m-n}) & 1 \\ k_{10} & \cdots & & & & & \cdots & l_{1,n-1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ k_{n0} & \cdots & & & & & \cdots & l_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

d) <u>Relation entre le noyau de Green du problème discret théorique $G(x_i \, , \, x_q)$ et le noyau de Green du problème continu $G(x \, , \, t)$ lorsque le pas $h_M \longrightarrow 0$.</u>

D'après les définitions données au paragraphe précédent :

$$c_l(x_q) = \frac{(-1)^{n-l-1}}{W(x_q)} \begin{vmatrix} v_1(x_q) & v_2(x_q) & \cdots & v_{l-1}(x \;) & v_{l+1}(x_q) & \cdots & v_n(x_q) \\ \vdots & & & & & & \\ v_1^{(n-2)}(x_q) & v_2^{(n-2)}(x_q) & \cdots & v_{l-1}^{(n-2)}(x_q) & v_{l+1}^{(n-2)}(x_q) & \cdots & v_n^{(n-2)}(x_q) \end{vmatrix} = \frac{\nu_{lq}}{W(x_q)}$$

$$c_{lq} = \frac{(-1)^{n-l-1}}{\widetilde{W}(x_q)} \begin{vmatrix} v_1(x_q) & v_2(x_q) & \cdots & v_{l-1}(x_q) & v_{l+1}(x_q) & \cdots & v_n(x_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(x_{q+n-2}) & v_2(x_{q+n-2}) & \cdots & v_{l-1}(x_{q+n-2}) & v_{l+1}(x_{q+n-2}) & \cdots & v_n(x_{q+n-2}) \end{vmatrix}$$

$$\tilde{c}_{lq} = \frac{K(x_{q+1},\ldots, \; x_{q+n-2} \; ; \; x_q) \; [\nu_{lq} + \varepsilon \, (x_{q+n-2} \; ; \; x_q \; ; \; \nu_{lq}]}{K(x_{q+1},\ldots, \; x_{q+n-1} \; ; \; x_q) \; [W(x_q) + \varepsilon \, (x_{q+n-1} \, ; x_q \, ; \; W)]}$$

$$\begin{cases} \tilde{c}_{lq} = \dfrac{\overline{n-1\,!}}{(x_{q+n-1} - x_q) \; \ldots \; (x_{q+n-1} - x_{q+n-2})} \, [c_l(x_q) + \eta(x_{q+n-1} \; ; \; x_q \; ; \; c_l)] \\ |\eta(x_{q+n-1} \; ; \; x_q \, ; \; c_l)| \leqslant \eta \, (c \; ; \; h_M) \qquad \lim\limits_{h_M \to 0} \eta \, (c \; ; \; h_M) = 0 \end{cases}$$

D'autre part, puisque $V_i[\tilde{G}] = 0$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \lambda_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} \tilde{b}_{lq} v_l(x_k) \right] + \mu_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} \tilde{b}_{lq} v_l(x_{m-k}) \right] \right\} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_{lq} v_l(x_k) \right] & 1 \leqslant q \leqslant n-1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_{lq} v_l(x_k) \right] & n \leqslant q \leqslant m-n+1 \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_{lq} v_l(x_k) \right], \quad 1 \leqslant q \leqslant m-n+1 \quad \text{car} \quad \sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_{lq} v_l(x_{q+k}) = 0 \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2$$

Comme :

$$U_i[G(\underline{x}, x_q)] = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} [\lambda_{ik} G_1(x_k, x_q) + \mu_{ik} G_2(x_{m-k}, x_q)] = 0$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \lambda_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} b_l(x_q) v_l(x_k) \right] + \mu_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} b_l(x_q) v_l(x_{m-k}) \right] \right. = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{ik} \left[\sum_{l=1}^{n} c_l(x_q) v_l(x_k) \right] \quad \forall q$$

Ainsi, quand $h_M = h = h_m$:

$$\sum_{l=1}^{n} [h^{n-1} \tilde{b}_{lq} - b_l(x_q)] V_i(v_l) = \sum_{l=1}^{n} \eta(h ; x_q ; c_l) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{ik} v_l(x_k) \right] \quad \forall q$$

Puisque λ_{ik}, μ_{ik}, $v_l(x_j)$ sont uniformément bornés lorsque $h \longrightarrow 0$,

$$\begin{cases} b_{lq} = \dfrac{1}{h^{n-1}} [b_l(x_q) + \eta(h ; x_q ; b_l)] \\ |\eta(h ; x_q ; b_l)| \leqslant \eta(h ; b), \ \lim\limits_{h \to 0} \eta(h ; b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_{lq} = \dfrac{1}{h^{n-1}} [a_l(x_q) + \eta(h ; x_q ; a_l)] \\ |\eta(h ; x_q ; a_l)| \leqslant \eta(h ; a), \ \lim\limits_{h \to 0} \eta(h ; a) = 0 \end{cases}$$

et :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{G}(x_j, x_q) = \dfrac{1}{h^{n-1}} [G(x_j, x_q) + \eta(h ; x_q ; G)] \\ |\eta(h ; x_q ; G)| \leqslant \eta(h ; G), \ \lim\limits_{h \to 0} \eta(h ; G) = 0 \end{cases}}$$

Posons :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} G(x_0, x_1) \ \ldots\ldots\ldots \ G(x_0, x_{m-n+1}) & G_1(x_0) \ \ldots\ldots\ldots & G_n(x_0) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ G(x_m, x_1) \ \ldots\ldots\ldots \ G(x_m, x_{m-n+1}) & G_1(x_m) \ \ldots\ldots\ldots & G_n(x_m) \end{bmatrix}$$

où $M[G_i] = 0$ et $U_j[G_j] = \delta_{ij}$. On en déduit le

LEMME - $h^{n-1} A^{-1} = \Gamma + H$, chacun des termes de H étant borné par $\eta(h ; G)$.

e) Comportement de la matrice B^{-1} lorsque $h \longrightarrow 0$.

Calculons le produit matriciel $B\ A^{-1}$.

$$N_h[\tilde{G}(x_j\,,\ x_q)] = \begin{cases} 1 + \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{lq}\ N_h[v_l(x_j)] & \text{si} \quad q = j+1 \\ \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{lq}\ N_h[v_l(x_j)] & \text{si} \quad j+1 < q \leqslant m+n-1 \\ \sum_{l=1}^{n} \tilde{b}_{lq}\ N_h[v_l(x_j)] & \text{si} \quad 1 \leqslant q \leqslant j \end{cases}$$

$$N_h[\tilde{G}(x_j\,,\ x_q)] = \begin{cases} 1 + h^n \left(\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{lq}\ \varepsilon_n(h\,;\,x_j\,;\,v_l)\right) & \text{si} \quad q = j+1 \\ h^n \left(\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{lq}\ \varepsilon_n(h\,;\,x_j\,;\,v_l)\right) & \text{si} \quad j+1 < q \leqslant m+n-1 \\ h^n \left(\sum_{l=1}^{n} \tilde{b}_{lq}\ \varepsilon_n(h\,;\,x_j\,;\,v_l)\right) & \text{si} \quad 1 \leqslant q \leqslant j \end{cases}$$

$$N_h[\tilde{G}(x_j\,,\ x_q)] = \begin{cases} 1 + h \sum_{l=1}^{n} \{\varepsilon_n(h\,;\,x_j\,;\,v_l)\ [a_l(x_q) + \eta(h\,;\,x_q\,;\,a_l)]\} & \text{si} \quad q = j+1 \\ h \sum_{l=1}^{n} \{\varepsilon_n(h\,;\,x_j\,;\,v_l)\,[a_l(x_q) + \eta(h\,;\,x_q\,;\,a_l)]\} & \text{si} \quad j+1 < q < m+n-1 \\ h.\sum_{l=1}^{n} \{\varepsilon_n(h\,;\,x_j\,;\,v_l)\,[b_l(x_q) + \eta(h\,;\,x_q\,;\,b_l)]\} & \text{si} \quad 1 \leqslant q \leqslant j \end{cases}$$

D'autre part :

$$N_h \left[\frac{G_1(x_j)}{h^{n-1}} \right] = h\ \varepsilon_n(h\,;\,x_j\,;\,G_1)$$

$$V_{ih}\,[\tilde{G}] = \sum_{l=1}^{n} \left\{ \tilde{b}_{lq}\ V_i\,(v_l) - \tilde{c}_{lq} \left[\sum_{p=0}^{n-1} k_{ip}\, v_l(x_p) \right] \right\}$$

$$U_i\,[G(x\,,\,x_q)] = \sum_{p=0}^{n-1} [k_{ip}\,G_1(x_p\,,\,x_q) + l_{ip}\,G_2(x_p\,,\,x_q)] - h^{n-1}\,[e_{n-1,i}\,(h\,;\,0\,;\,G_1) + e_{n-1,i}\,(h\,;\,1\,;\,G_2)] = 0$$

D'où :

$$\sum_{l=1}^{n} \left\{ b_l(x_q)\ V_{ih}\,(v_l) - c_l(x_q) \left[\sum_{p=0}^{n-1} k_{ip}\ v_l(x_p) \right] \right\} = h^{n-1}\ [e_{n-1,i}\,(h\,;\,0\,;\,G_1) + e_{n-1,i}\,(h\,;\,1\,;\,G_2)]$$

Et :

$$V_{ih}[\tilde{G}] = e_{n-1,i}(h\,;0\,;\,G_1) + e_{n-1,i}(h\,;1\ ;\ G_2) + \sum_{l=1}^{n} \left\{ \eta\,(h\,;\,x_q\,;\,b_l)\ \frac{V_{ih}(v_l)}{h^{n-1}} - \eta\,(h\,;\,x_q\,;\,c_l)\,\frac{1}{h^{n-1}} \left[\sum_{p=0}^{n-1} k_{ip}\ v_l(x_p) \right] \right\}$$

Mais :

$$\left| \frac{V_{ih}\,(v_l)}{h^{n-1}} \right| < A_i(h\,;\,v_l) \quad \left| \frac{1}{h^{n-1}} \left[\sum_{p=0}^{n-1} k_{ip}\ v_l(x_p) \right] \right| < B_i(h\,;\,v_l)$$

avec :

$$\lim_{h \to 0} A_i(h\,;\,v_l) < +\infty\ ,\ \lim_{h \to 0} B_i(h\,;\,v_l) < +\infty$$

Donc :

$$V_{ih}\ [G] = e_i(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h \to 0}\ e_i(h) = 0$$

De plus,

$$V_{ih}\left[\frac{G_1}{h^{n-1}}\right] = \begin{cases} 1 + e_{n-1,i}(h\,;\,0\,;\,G_1) + e_{n-1,i}(h\,;\,1\,;\,G_1) & \text{si} \quad i \neq 1 \\ e_{n-1,i}(h\,;\,0\,;\,G_1) + e_{n-1,i}(h\,;\,1\,;\,G_1) & \text{si} \quad i \neq 1 \end{cases}$$

Ainsi : $BA^{-1} = I - E$. Notons $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ le terme générique de E.

Nous venons de montrer que :

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{cases} h\,\omega_{ij}^{(1)} & \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-n \\ \omega_{ij}^{(1)} & \text{si} \quad m-n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

avec :

$$\operatorname*{Max}_{i,j} |\omega_{ij}^{(1)}| \leqslant \omega(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

Notons $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ le terme générique de E^p ; alors :

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \begin{cases} h\omega_{ij}^{(2)} & \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-n \\ \omega_{ij}^{(2)} & \text{si} \quad m-n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname*{Max}_{i,j} |\omega_{ij}^{(2)}| \leqslant \dfrac{(m-n+1)\,h^2\omega^2 + nh\,\omega^2}{h} & \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-n \\ \operatorname*{Max}_{i,j} |\omega_{ij}^{(2)}| \leqslant (m-n+1)\,h\,\omega^2 + n\,\omega^2 & \text{si} \quad m-n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases} \Longrightarrow \operatorname*{Max}_{i,j} |\omega_{ij}^{(2)}| \leqslant (1+n)\,\omega^2$$

On peut montrer par récurrence que :

$$\varepsilon_{ij}^{(p)} = \begin{cases} h\,\omega_{ij}^{(p)} & \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-n \\ \omega_{ij}^{(p)} & \text{si} \quad m-n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Max} |\omega_{ij}^{(p)}| \leqslant (1+n)^{p-1}\,\omega^p$$

Si h est assez petit, $\omega(1+n) = \alpha < 1$. La série E^p est alors convergents. Posons :

$$C = \sum_{p=1} E^p$$

avec :

$$c_{ij} = \begin{cases} h\,\omega_{ij} & \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-n \\ \omega_{ij} & \text{si} \quad m-n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases} \qquad \operatorname*{Max}_{i,j} |\omega_{ij}| \leqslant \frac{\omega(h)}{1-\alpha}$$

D'où : $(I-E)^{-1} = I + C$ et $B^{-1} = A^{-1}(I+C)$. Mais $A^{-1} = \dfrac{\Gamma + H}{h^{n-1}}$

Donc : $h^{n-1}\,B^{-1} = \Gamma + H + (\Gamma + H)\,C$.

Si $A = [a_{ij}]$, posons $\|A\|_\infty = \operatorname*{Max}_{i,j} |a_{ij}|$.

Nous savons que si h est assez petit, $\|\Gamma + H\|_\infty < +\infty$.

Comme :

$$\|(\Gamma + H)\,C\|_\infty \leqslant \frac{1+n}{1-\alpha}\,\|\Gamma + H\|_\infty\,.\,\omega(h), \quad \|(\Gamma + H)\,C\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad h \longrightarrow 0.$$

D'où le

LEMME -

$$h^{n-1}\,B^{-1} = \Gamma + \bar{H} \qquad \lim_{h\to 0} \|\bar{H}\|_\infty = 0$$

f) Convergence de la solution du problème (9) vers celle du problème (7).

$$B\,\bar{Y} = b,\ A\,Y = a \Longrightarrow Y - \bar{Y} = A^{-1}\,a - B^{-1}\,b = \frac{(\Gamma + H)\,a - (\Gamma + \bar{H})\,b}{h^{n-1}} \longrightarrow Y - \bar{Y} = \Gamma\,\frac{a-b}{h^{n-1}} + \frac{H\,a - \bar{H}b}{h^{n-1}}$$

De même que ci-dessus on verrait facilement que :

$$\|Y - \bar{Y}\|_\infty \leqslant \|\Gamma\|_\infty \times \left\|\frac{a-b}{h^{n-1}}\right\|_\infty \times k_1 + \|H\|_\infty \times k_2 + \|\bar{H}\|_\infty \times \left\|\frac{b}{h^{n-1}}\right\|_\infty \times k_3$$

k_1, k_2, k_3 indépendants de h dès que h est assez petit,

$$\left\|\frac{a}{h^{n-1}}\right\|_\infty \quad \text{et} \quad \left\|\frac{b}{h^{n-1}}\right\| \quad \text{bornés dès que } h \text{ est assez petit.}$$

$$\lim_{h\to 0} \left\|\frac{a-b}{h^{n-1}}\right\| = 0$$

THEOREME -

$$\lim_{h\to 0} \|Y - \bar{Y}\|_\infty = 0$$

3 - CONDITIONNEMENT NORMALISE DES MATRICES A ET B LORSQUE LE PAS D'INTEGRATION TEND VERS ZERO

Définition - On appelle conditionnement normalisé d'une matrice carrée régulière $A = [a_{ij}]$, le nombre :

$$C(A) = \frac{N(A)}{\mu_0(A)} \times \frac{1}{\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \|A^{-1}\,e_i\|} \times \frac{1}{\underset{E}{\mathrm{Max}}\ \|{}^tA\ E\|}$$

où $N(A) = \left\{\sum_{i,j} (a_{ij})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$, $\mu_0(A) = \underset{i}{\mathrm{Min}} \left\{\sum_{p} (a_{ip})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$.

e_i, colonne dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne qui est égal à 1.

$E = [\varepsilon_i]$, colonne dont tous les éléments sont égaux à + 1 ou − 1.

a) Conditionnement normalisé de A.

$$N(A) = \left\{\sum_{j=0}^{m-n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi^2_{n-i}(x_{j+n}\ ;\ x_j) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{n-1} (\lambda^2_{kp} + \mu^2_{kp}) + m - n + 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_0(A) = \mathrm{Min}\left\{\left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \chi^2_{n-i}(x_{j+n}\ ;\ x_j)\right]^{\frac{1}{2}},\ 0 \leqslant j \leqslant m-n\ ;\ \left[\sum_{p=0}^{n-1} (\lambda^2_{kp} + \mu^2_{kp})\right]^{\frac{1}{2}},\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$$

D'après ce que nous avons montré ci-dessus :

$$\lim_{h\to 0} \chi(x_{j+n}\ ;\ x_j) = (-1)^{n-i}\ C^i_n\,.$$

De même :

$$\lim_{h\to 0} h^{n-1}\ \theta_{n-i,p}(0\ ;\ 0) = \begin{cases}(-1)^{n-i}\ C^i_{n-1} & \text{si } p = n-1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant n-2\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0} h^{n-1}\ \theta_{n-i,p}(1\ ;\ x_{m-n+1}) = \begin{cases}(-1)^{n-i}\ C^i_{n-1} & \text{si } p = n-1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant n-2\end{cases}$$

$$\| {}^t AE \| = \sum_{j=0}^{n-1} [\varepsilon_0 \chi_{n-j}(x_n ; x_0) + \varepsilon_1 \chi_{n-j+1}(x_{n+1} ; x_1) + \dots + \varepsilon_j \chi_n(x_{j+n} ; x_j) + \varepsilon_{m-n+1} \lambda_{1,j} + \dots + \dots + \varepsilon_m \lambda_{n,j}]^2$$

$$+ \sum_{j=n}^{m-n} [\varepsilon_{j-n} + \varepsilon_{j-n+1} \chi_1(x_{j+1} ; x_{j+n-1}) + \dots + \dots + \varepsilon_j \chi_n(x_{j+n} ; x_j)]^2 + \sum_{j=m-n+1}^{m-1} [\varepsilon_{j-n} + \varepsilon_{j-n+1} \chi_1(x_{j+1} ; x_{j+n-1})$$

$$+ \dots\dots + \varepsilon_{m-n} \chi_{m-j}(x_n ; x_{m-n}) + \varepsilon_{m-n+1} \mu_{1,j-m+n-1} + \dots + \varepsilon_m \mu_{n,j-m+n-1} + \varepsilon_{m-n} + \varepsilon_{m-n+1} \mu_{1,n-1} + \dots$$

$$+ \varepsilon_m \mu_{n,n-1}]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Posons :

$$A_j = [\varepsilon_{j-n} + \varepsilon_{j-n+1} \chi_1(x_{j+1} ; x_{j-n+1}) + \dots + \varepsilon_j \chi_n(x_{j+n} ; x_j)]^2 \quad \text{et} \quad \| {}^t A\, E \| = \left\{ \sum_{j=n}^{m-n} A_j + R_A \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque χ_i est du signe de $(-1)^i$, lorsque h est assez petit, $M_j = \operatorname{Max}_E A_j$ est atteint lorsque $\varepsilon_j = (-1)^j$; alors $M_j > 1$. R_A est une somme finie de termes bornés lorsque $h \longrightarrow 0$. Max R_A est donc borné lorsque $h \longrightarrow 0$, indépendamment de E, par un nombre R. Donc :

$$\left\{ \sum_{j=n}^{m-n} M_j + R_A \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \operatorname{Max}_E \| {}^t A\, E \| < \left\{ \sum_{j=n}^{m-n} M_j + R \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{lorsque } h \longrightarrow 0 \qquad \sum_{j=n}^{m-n} M_j \longrightarrow \infty \qquad \text{et} \qquad \frac{\operatorname{Max}_E \| {}^t A\, E \|}{\left\{ \sum_{j=n}^{m-n} M_j \right\}^{\frac{1}{2}}} > 1$$

De même si on pose : $N_j = 1 + \chi_1^2(x_{j+1} ; x_{j-n+1}) + \dots + \chi_n^2(x_{j+n} ; x_j)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{N(A)}{\left(\sum_{j=n}^{m-n} N_j \right)} = 1.$$

De plus :

$$\lim_{h \to 0} M_j = (1 + C_n^1 + \dots + C_n^n)^2 = 2^{2n} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} N_j = 1 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

D'autre part :

$$\| A^{-1} e_i \| = \begin{cases} \left\{ \sum_{j=0}^{m} [\tilde{G}(x_j ; x_i)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant m - n + 1 \\ \dfrac{1}{h^{n-1}} \left\{ \sum_{j=0}^{m} [G_l(x_j)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } m - n + 2 \leqslant i \leqslant m + 1 \quad \text{avec} \quad l = i - m + n - 1 \end{cases}$$

Or :

$$\sum_{j=0}^{m} [\tilde{G}(x_j, x_i)]^2 = \frac{1}{h^{2n-2}} \sum_{j=0}^{m} [G(x_j, x_i) + \eta(h ; x_i ; G)]^2$$

Si h est assez petit, $\sum_{j=0}^{m} [\tilde{G}(x_j, x_i)]^2 \simeq \dfrac{1}{h^{2n-1}} \displaystyle\int_0^1 [\tilde{G}(x, x_i)]^2\, dx$ et :

$$\| A^{-1} e_i \| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{h^{n-1/2}} \left\{ \displaystyle\int_0^1 [G(x, x_i)]^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant m - n + 1 \\ \dfrac{1}{h^{n-1/2}} \left\{ \displaystyle\int_0^1 [G_l(x)]^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } m - n + 2 \leqslant i \leqslant m + 1 \quad \text{avec} \quad l = i - m + n - 1 \end{cases}$$

Puisque :

$$\lim_{h\to 0} \lambda_{ik} = (-1)^{n-k-1} C_{n-1}^{k} \alpha_{i,n-1} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \mu_{ik} = (-1)^{n-k-1} C_{n-1}^{k} \beta_{i,n-1}$$

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{ik}^2 + \mu_{ik}^2) = \sum_{k=0}^{n-1} (C_{n-1}^{k})^2 (\alpha_{i,n-1}^2 + \beta_{i,n-1}^2) = (\alpha_{i,n-1}^2 + \beta_{i,n-1}^2)\, C_{2n-2}^{n-1}$$

et :

$$\boxed{C(A) \simeq \frac{h^{n-\frac{1}{2}}}{2^n} \; \frac{1}{\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}} \left\{ 1 \; ; \left[\frac{\alpha_{i,n-1}^2 + \beta_{i,n-1}^2}{2(2n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} . \; \underset{j,i}{\mathrm{Max}} \; \{ \|G(x, x_j)\|_2 \; ; \; \|G_i\|_2 \}}} \qquad (10)$$

THEOREME : Le conditionnement C(A) est d'autant meilleur que le noyau de Green a un maximum plus faible et que les coefficients de la dérivée d'ordre le plus élevé, dans les conditions aux limites sont plus petits.

En outre, C(A) est d'autant moins bon que le degré de l'équation à intégrer est plus élevé et que le pas d'intégration est plus petit.

b) Conditionnement normalisé de B.

Des deux équations :

$$\begin{cases} v_1(x_{j+n}) + \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(n \; ; x_j) \; v_1(x_{j+p}) = h^n \; \varepsilon_n(h \; ; x_j \; ; v_1) \\ v_1(x_{j+n}) + \sum_{p=0}^{n-1} \chi_{n-p}(x_{j+n} \; ; x_j) \; v_1(x_{j+p}) = 0 \end{cases}$$

On déduit que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} [C_{n-p}(n \; ; x_j) - \chi_{n-p}(x_{j+n} \; ; x_j)] \; v_1(x_{j+p}) = h^n \; \varepsilon_n(h \; ; x_j \; ; v_1)$$

$$|\varepsilon_n(h \; ; x_j \; ; v_1)| \leqslant \varepsilon_n(h \; ; v_1) \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon_n(h \; ; v_1) = 0$$

$$\text{et :} \quad \begin{cases} C_p(n \; ; x_j) - \chi_p(x_{j+n} \; ; x_j) = h \; \eta_p(h \; ; x_j) \\ |\eta_p(h \; ; x_j)| \leqslant \eta_p(h) \qquad \lim_{h\to 0} \eta_p(h) = 0 \end{cases}$$

En outre :

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda_{ip} \; v_1(x_p) = \sum_{p=0}^{n-1} k_{ip} \; v_1(x_p) + h^{n-1} \; e_{n-1,i}(h \; ; 0 \; ; v_1) \\ \sum_{p=0}^{n-1} \mu_{ip} \; v_1(x_{m-p}) = \sum_{p=0}^{n-1} l_{ip} \; v_1(x_{m-p}) + h^{n-1} \; e_{n-1,i}(h \; ; 1 \; ; v_1) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \lambda_{ip} - k_{ip} = \eta_{ip}(h \; ; 0) \qquad \lim_{h\to 0} \eta_{ip}(h \; ; 0) = 0 \\ \mu_{ip} - l_{ip} = \eta_{ip}(h \; ; 1) \qquad \lim_{h\to 0} \eta_{ip}(h \; ; 1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi $A = B + D$ et $\lim_{h\to 0} \|D\|_\infty = 0$.

Comme $h^{n-1} B^{-1} = \Gamma + H$ avec $\lim_{h\to 0} \|\bar{H}\|_\infty = 0$.

THEOREME -

$$\lim_{h\to 0} [C(A) - C(B)] = 0$$

CHAPITRE IV

AMÉLIORATION DE LA SOLUTION APPROCHÉE DE CERTAINS PROBLÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES PAR UN PROCÉDÉ AUX DIFFÉRENCES FINIES A PAS VARIABLE

1 - REPRESENTATION APPROCHEE DE LA DERIVEE D'ORDRE n D'UNE FONCTION, EN UN POINT FIXE, AU MOYEN DE (n + 1) VALEURS DE CETTE FONCTION EN DES POINTS IRREGULIEREMENT ESPACES

a) Considérons une fonction $y(x) \in C^{n+p}[0,1]$.

Nous supposerons dans la suite $p > 1$.

$x \in [0,1]$ étant fixé considérons n nombres réels $l_1, \ldots, l_n$ tels que :

$$0 \leqslant x + l_p \leqslant 1, \quad l_p \neq 0 \quad 1 \leqslant p \leqslant n$$

et que :

$$l_i \neq l_j \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Alors :

$$y(x + l_p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_p^k}{k!} y^{(k)} + R_n(x + l_p)$$

où $R_n(x + l_p) = \dfrac{l_p^{n+1}}{n+1\,!} y^{(n+1)}(x) + \dfrac{l_p^{n+2}}{n+2\,!} [y^{(n+2)}(x) + \varepsilon_{n+2}(x, l_p)]$

Posons :

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & \frac{l_1^2}{2!} & \cdots & \frac{l_1^n}{n!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_n & \frac{l_n^2}{2!} & \cdots & \frac{l_n^n}{n!} \end{bmatrix} ; \; W = \begin{bmatrix} y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{bmatrix} ; \; R = \begin{bmatrix} R_n(l_1) \\ \vdots \\ R_n(l_n) \end{bmatrix} ; \; Z = \begin{bmatrix} y(x + l_1) - y(x) \\ \vdots \\ y(x + l_n) - y(x) \end{bmatrix}$$

$A\,W + R = Z \Longrightarrow W = A^{-1}\,[Z - R]$.

La i^e composante de $-A^{-1} R$ est l'erreur que l'on fait en utilisant, pour représenter $y^{(i)}(x)$, la combinaison linéaire des nombres $y(x)$, $y(x + l_1), \ldots, y(x + l_n)$, qui est fournie par la i^e composante de $A^{-1} Z$.

b) <u>Calcul explicite de $A^{-1} Z$.</u>

Posons $A^{-1} Z = Y \quad {}^tY = [\eta_1, \ldots, \eta_n]$.

Y s'obtient en résolvant le système linéaire $A\,Y = Z$, c'est-à-dire en déterminant les coefficients $\eta_1, \ldots, \eta_n$ du polynôme :

$$P(u) \equiv \eta_1 + \frac{\eta_2}{2!} + \ldots + \frac{\eta_n}{n!} u^{n-1}$$

tel que :

$$P(l_p) = y(x + l_p) - y(x) = z_p \qquad 1 \leqslant p \leqslant n$$

Posons $D_p = (l_p - l_1) \ldots (l_p - l_{p-1})\,(l_p - l_{p+1}) \ldots (l_p - l_n)$.

$$P(u) \equiv \sum_{p=1}^{n} z_p \frac{(u - l_1)\ldots(u - l_{p-1})\,(u - l_{p+1}) \ldots (u - l_n)}{D_p}$$

$$P(u) \equiv \sum_{p=1}^{n} \frac{z_p}{D_p} [u^{n-1} - S_1(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_n)\, u^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} S_{n-1}(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_n)]$$

où $S_{n-k}(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_n) = \sum\limits_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} l_{i_1} \ldots l_{i_k}$, $i_j \in I_p$

et $I_p = \{1, \ldots, p-1, p+1, \ldots n\}$.

Donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1(x) = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{z_p}{D_p} (-1)^{n-1} S_{n-1}(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{n-1}(x) = -(n-1)! \left\{ \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{z_p}{D_p} S_1(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_n) \right\} \\ \eta_n(x) = n! \left\{ \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{z_p}{D_p} \right\} \end{array}\right. \qquad (1)$$

c) <u>Détermination explicite de $A^{-1}R$.</u>

Posons $A^{-1} R = \Omega$ avec ${}^t\Omega = [\omega_1, \ldots, \omega_n]$.

On obtient $\omega_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ en remplaçant dans la formule qui nous donne $\eta_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les nombres z_p par les nombres $u_p = \dfrac{R_n(x + l_p)}{l_p}$.

Ainsi :

$$\omega_i(x) = (-1)^{n-i}\ i! \left\{ \sum_{p=1}^{n} \frac{u_p}{D_p} S_{n-i}(l_1, \ldots, l_{p-1}, l_{p+1}, \ldots, l_n) \right\} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

et :

$$\omega_n(x) = n! \left\{ \sum_{p=1}^{n} \frac{u_p}{D_p} \right\} = n! \left\{ \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{D_p} \left[l_p^n \frac{y^{(n+1)}(x)}{\overline{n+1}\,!} + l_p^{n+1} \frac{y^{(n+2)}(x) + \varepsilon_{n+2}(x, l_p)}{\overline{n+2}\,!} \right] \right\}.$$

Calculons $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{l_p^n}{D_p}$.

Considérons le polynôme $Q(u) \equiv \alpha_1 + \alpha_2 u + \ldots + \alpha_n u^{n-1}$ tel que :

$$Q(l_p) = l_p^n \qquad 1 \leqslant p \leqslant n.$$

Il est clair que $\alpha_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{l_p^n}{D_p}$ d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent.

Si $Q_1(u) \equiv \alpha_1 + \alpha_2 u + \ldots + \alpha_n u^{n-1} - u^n$, $Q_1(l_p) = 0 \quad 1 \leqslant p \leqslant n$.

Donc :

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} l_i .$$

D'autre part,

$$\alpha_{n-1} = - \sum_{p=1}^{n} \frac{(l_1 + \dots + l_{p-1} + l_{p+1} + \dots + l_n)}{D_p} l_p^n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j$$

Calculons maintenant $\beta_{n-1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{l_p^{n+1}}{D_p}$

$$\alpha_n^2 = \sum_{p=1}^{n} \frac{(l_1 + \dots + l_n)\, l_p^n}{D_p} = - \alpha_{n-1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{l_p^{n+1}}{D_p}$$

D'où :

$$\beta_{n-1} = \Big(\sum_{i=1}^{n} l_i\Big)^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j .$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \omega_n(x) = n!\left\{\Big(\sum_{i=1}^{n} l_i\Big) \dfrac{y^{(n+1)}(x)}{\overline{n+1}\,!} + \Big(\sum_{i=1}^{n} l_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j\Big) \dfrac{y^{(n+2)}(x)}{\overline{n+2}\,!}\right\} + \varepsilon_{n+2}(x\,;\,\omega_n) \\ \varepsilon_{n+2}(x\,;\,\omega_n) = n!\left\{\sum_{p=1}^{n} \dfrac{l_p^{n+1}}{\overline{n+2}\,!\, D_p}\, \varepsilon_{n+2}(x\,,\,l_p)\right\} \end{cases}} \qquad (2)$$

Déterminons de même $\omega_{n-1}^{(x)}$.

$$\omega_{n-1}(x) = - \overline{(n-1)}\,! \left\{\sum_{p=1}^{n} \frac{l_1 + \dots + l_{p-1} + l_{p+1} + \dots\ l_n}{D_p} \left[l_p^n \frac{y^{(n+1)}(x)}{\overline{n+1}\,!} + l_p^{n+1} \frac{y^{(n+2)}(x) + \varepsilon_{n+2}(x\,,\,l_p)}{\overline{n+2}\,!} \right] \right\}$$

Calculons :

$$\beta_{n-2} = \sum_{p=1}^{n} (l_1 l_p + \dots + l_{p-1} l_p + l_{p+1} l_p + \dots + l_n l_p) \frac{l_p^n}{D_p}$$

Puisque $\alpha_{n-2} = \sum_{p=1}^{n} S_2(l_1, \dots, l_{p-1}, l_{p+1}, \dots, l_n) \frac{l_p^n}{D_p} = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} l_i l_j l_k$,

$$\alpha_{n-2} + \beta_{n-2} = \sum_{p=1}^{n} \Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j\Big) \frac{l_p^n}{D_p} = \Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j\Big) \alpha_n$$

et :

$$\beta_{n-2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} l_i\Big) \Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j\Big) - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} l_i l_j l_k .$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} \omega_{n-1}(x) = - \overline{(n-1)}\,! \left\{ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j \dfrac{y^{(n+1)}(x)}{\overline{n+1}\,!} \right. \\ \left. + \left[\Big(\sum_{i=1}^{n} l_i\Big) \Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} l_i l_j\Big) - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} l_i l_j l_k \right] \dfrac{y^{(n+2)}(x)}{\overline{n+2}\,!} \right\} + \varepsilon_{n+2}(x\,;\,\omega_{n-1}) \\ \varepsilon_{n+2}(x\,;\,\omega_{n-1}) = - \overline{(n-1)}\,! \sum_{p=1}^{n} \dfrac{l_1 + \dots + l_{p-1} + l_{p+1} + \dots + l_n}{D_p}\, l_p^{n+1}\, \dfrac{\varepsilon_{n+2}(x\,;\,l_p)}{\overline{n+2}\,!} \end{cases}} \qquad (3)$$

On déterminerait de même $\omega_{n-2}(x), \dots, \omega_1(x)$

2 - AMELIORATION DE LA SOLUTION APPROCHEE DE CERTAINS PROBLEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES

a) Considérons le problème différentiel III-7 :

$$(P)\begin{cases} M(y) \equiv y^{n)}(x) + q_1(x)\ y^{(n-1)}(x) + \dots + q_n(x)\ y(x) = s(x) & x \in [0,1] \\ U_i(y) \equiv \sum_{p=0}^{n-1} [\alpha_{ip} y^{(p)}(0) + \beta_{ip} y^{(p)}(1)] = r_i & 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

qui vérifie les hypothèses h1) :

α) $q_i \in C^p\,[0,1] \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad s \in C^p\,[0,1]. \qquad p > 1.$

β) $M(y) = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes $v_1, \dots, v_n \in C^{n+p}\,[0,1]$.

γ) Le problème 7) admet une solution unique $\in C^{n+p}\,[0,1]$.

Notons $\{x_j\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant m \quad m > n\}$ une subdivision de $[0,1]$. Si, au point x_j, nous approchons $y^{(i)}(x_j)$ par $\eta_i(x_j)$, l'équation $M(y) = s$ devient en ce point :

$$\eta_n(x_j) + q_1(x_j)\ \eta_{n-1}(x_j) + \dots + q_{n-1}(x_j)\ \eta_1(x_j) + q_n(x_j)\ y(x_j) = s(x_j) + \rho(x_j, y)$$

où :

$$\rho(x_j, y) = \omega_n(x_j) + q_1(x_j)\ \omega_{n-1}(x_j) + \dots + q_{n-1}(x_j)\ \omega_1(x_j)$$

b) Etude de l'ordre du terme d'erreur $\rho(x_j, y)$.

Afin d'étudier l'ordre du terme d'erreur $\rho(x_j, y)$ nous poserons pour $x \in [0,1]$: $x = \Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\,du$ et nous assujettirons φ à vérifier les conditions suivantes :

α) $\varphi \in C^1\,[0,1]$.

β) $\varphi(u) > 0 \qquad \forall u \in [0,1]$.

Alors Φ est une application biunivoque de $[0,1]$ sur lui-même. Φ admet une application réciproque ψ : $t = \psi(x)$.

$$\psi \in C^2\,[0,1] \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\psi(x)}$$

A une subdivision $\{t_i\}$ qui divise $[0,1]$ en n intervalles, ψ fait correspondre une subdivision $\{x_i\}$ de $[0,1]$ telle que :

$$\begin{cases} t_i = \psi(x_i) & i = 1, \dots, n-1 \\ 0 = \psi(0) & 1 = \psi(1) \end{cases}$$

Alors si $h = \operatorname*{Inf}_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (t_{i+1} - t_i)$ et si x_{j_p} est un point voisin de x_j tel que $x_{j_p} - x_j = l_{j_p}$:

$$\begin{cases} l_{j_p} = \int_{t_j}^{t_j + m_p h} \varphi(u)\,du = m_p h\ \varphi(t_j) + \dfrac{(m_p h)^2}{2!}\,[\varphi'(t_j) + \varepsilon(t_j, m_p h)]\ , \ m_p \text{ entier} \neq 0 \\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(t_j, m_p h) = 0 \end{cases}$$

On a aussi :

$$l_{j_p} = m_p\, h\, \varphi(\tau_{j_p}) \qquad t_j \leqslant \tau_{j_p} \leqslant t_j + m_p h$$

Posons $y^{(n+p)}[\Phi(t)] = f_{n+p}(t)$ et $q_i[\Phi(t)] = a_i(t)$.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} l_{j_p} = \Big(\sum_{p=1}^{n} m_p\Big)\, h\,\varphi(t_j) + \Big(\sum_{p=1}^{n} m_p^2\Big)\frac{h^2}{2!}\,\varphi'(t_j) + h^2\,\varepsilon_1(h), & \displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0 \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} l_{j_p}^2 = \Big(\sum_{p=1}^{n} m_p^2\Big)\, h^2\,\varphi^2(t_j) + \Big(\sum_{p=1}^{n} m_p^3\Big)\, h^3\varphi(t_j)\,\varphi'(t_j) + h^3\,\varepsilon_2(h), & \displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0 \\ \displaystyle\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} l_{j_p} l_{j_q} = \Big(\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} m_p m_q\Big)\, h^2\,\varphi^2(t_j) + \Big(\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} m_p m_q (m_p + m_q)\Big)\frac{h^3}{2}\,\varphi(t_j)\,\varphi'(t_j) & \\ \qquad + h^3\,\varepsilon_3(h)\ , \quad \displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0. & \end{cases}$$

D'autre part, si $D_{j_p} = (l_{j_p} - l_{j_1}) \dots (l_{j_p} - l_{j_{p-1}})\,(l_{j_p} - l_{j_{n+1}}) \dots (l_{j_p} - l_{j_n})$:

$$\frac{l_{j_p}^{n+1}}{D_{j_p}} = \frac{m_p^{n+1}}{h^{n-1}}\ \frac{h^{n+1}\,[\varphi(\tau_{j_p})]^{n+1}}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant q<p \\ p<q\leqslant n}} \Big\{(m_p - m_q)\,\varphi(t_j) + \frac{h}{2}\,[m_p^2\,\varphi'(t_{j_p}) - m_q^2\,\varphi'(t_{j_q})]\Big\}}$$

$\dfrac{l_{j_p}^{n+1}}{D_{j_p}} = h^2\,\lambda_p(t_j\,,\,h)$. Des hypothèses α) et β) il résulte que $\lambda_p(t_j\,,\,h)$ est borné lorsque h est assez petit.

Donc :

$$\varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,\omega_n) = \frac{h^2}{(n+1)\,(n+2)}\sum_{p=1}^{n}\lambda_p(t_j\,,\,h)\ \varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,l_{j_p})$$

$$\varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,\omega_n) = h^2\ \varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,h\,,\,\omega_n), \qquad \lim_{h\to 0}\ \varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,h\,,\,\omega_n) = 0$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} \omega_n(x_j) = h\,\dfrac{f_{n+1}(t_j)}{n+1}\left[\Big(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} m_p\Big)\,\varphi(t_j) + \frac{h}{2}\,\Big(\sum_{p=1}^{n} m_p^2\Big)\ \varphi'(t_j) + h\,\varepsilon_1(h)\right] \\ \quad + \dfrac{h^2 f_{n+2}(t_j)}{(n+1)\,(n+2)}\left[\Big(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} m_p^2 + \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} m_p m_q\Big)\ \varphi^2(t_j) + \varepsilon_4(h)\right] + h^2\,\varepsilon_{n+2}(x_j\,,\ h, \omega_n) \\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\ \varepsilon_1(h) = \lim_{h\to 0}\ \varepsilon_4(h) = \lim_{h\to 0}\ \varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,h\,,\,\omega_n) = 0. \end{cases}} \tag{4}$$

De plus,

$$\sum_{1\leqslant p<q<r\leqslant n} l_{j_p}\,l_{j_q}\,l_{j_r} = \Big(\sum_{1\leqslant p<q<r\leqslant n} m_p m_q m_r\Big)\ h^3\ \varphi^3(t_j) + h^3\ \varepsilon_5(h)\ , \ \lim_{h\to 0}\varepsilon_5(h) = 0$$

$$\varepsilon_{n+2}(x_j\,,\omega_{n-1}) = -\,(n-1)!\ \Big\{\sum_{p=1}^{n}\ (l_{j_1} + \dots + l_{j_{p-1}} + l_{j_{p+1}} + \dots + l_{j_n})\ h^2\ \lambda_p(t_j\,,\,h)\ \frac{\varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,l_{j_p})}{(n+2)!}\Big\}$$

$$\varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,\omega_{n-1}) = -\,\frac{h^3}{n(n+1)\,(n+2)}\sum_{p=1}^{n}\mu_p(t_j\,,\,h)\ \lambda_p(t_j\,,\,h\,,\,\omega_n)\ \varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,l_{j_p})\quad ,\quad \lim_{h\to 0}\ \mu_p(t_j\,,\,h) = 0.$$

Donc :

$$\varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,\omega_{n-1}) = h^3\ \varepsilon_{n+2}(x_j\,,\,h\,,\,\omega_{n-1}), \qquad \lim_{h\to 0}\ \varepsilon_{n+2}(x_j\,,h\,,\,\omega_{n-1}) = 0.$$

Et :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\omega_{n-1}(x_j) = -h^2 \frac{f_{n+1}(t_j)}{n(n+1)} \left[\Big(\sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n} m_p\, m_q \Big)\, \varphi^2(t_j) + \Big(\sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n} m_p\, m_q (m_p + m_q) \Big) \frac{h}{2}\, \varphi(t_j)\, \varphi'(t_j) + h\, \varepsilon_3(h) \right] \\
&- h^3 \frac{f_{n+2}(t_j)}{n(n+1)\,(n+2)} \left[\Big(\sum_{p=1}^{n} m_p \Big) \Big(\sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n} m_p\, m_q \Big)\, \varphi^3(t_j) - \Big(\sum_{1 \leqslant p < q < r \leqslant n} m_p\, m_q\, m_r \Big)\, \varphi^3(t_j) + \varepsilon_6(h) \right] \qquad (5) \\
&+ h^3\, \varepsilon_{n+2}(x_j, h, \omega_{n-1}) \\
&\lim_{h \to 0} \varepsilon_3(h) = \lim_{h \to 0} \varepsilon_6(h) = \lim_{h \to 0} \varepsilon_{n+2}(x_j, h, \omega_n) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\rho(x_j, y) = h \Big(\sum_{p=1}^{n} m_p \Big)\, \varphi(t_j) \frac{f_{n+1}(t_j)}{n+1} + h^2 \Bigg\{ f_{n+1}(t_j) \left[\Big(\sum_{p=1}^{n} m_p^2 \Big) \frac{\varphi'(t_j)}{2(n+1)} - a_1(t_j) \Big(\sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n} m_p\, m_q \Big) \frac{\varphi^2(t_j)}{n(n+1)} \right] \\
+ f_{n+2}(t_j) \Big(\sum_{p=1}^{n} m_p^2 + \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n} m_p\, m_q \Big) \frac{\varphi^2(t_j)}{(n+1)\,(n+2)} \Bigg\} + h^2\, \varepsilon(x_j, h, \rho)\,, \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(x_j, h, \rho) = 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Si $\varphi(t) \equiv 1$, $\rho(x_j, y)$ est au maximum d'ordre deux en h, lorsque :

$$\sum_{p=1}^{n} m_p = 0 \quad (8)$$

Examinons comment (8) peut être réalisée.

Si $n = 2p$, (8) sera réalisée si $m_{2k-1} = -k$, $m_{2k} = k$ $\qquad 1 \leqslant k \leqslant p$.

Si $n = 2p+1$, posons $m_{2k-1} = t_{i-k} - t_i$, $m_{2k} = t_{i+k} - t_i$ et $m_{2p+1} = t_{i-p-1} - t_i$ $\qquad 1 \leqslant k \leqslant p$

(8) sera réalisée si :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p+1} (t_{i-k} - t_i) + \sum_{k=1}^{p} (t_{i+k} - t_i) = 0 \qquad p+1 \leqslant i \leqslant n-p \\
&t_o = 0\,, \quad t_n = 1\,.
\end{aligned}
\right.
$$

c'est-à-dire si :

$$t_{i-p-1} + t_{i-p} + \dots + t_{i-1} + t_{i+1} + \dots + t_{i+p} - (2p+1)\, t_i = 0$$

Cherchons des solutions de cette équation aux différences, de la forme $t_i = r^i$. Elles sont telles que :

$$g(r) \equiv r^{2p+1} + r^{2p} + \dots + r^{p+2} - (2p+1)\, r^{p+1} + r^p + \dots + r + 1 = 0$$

Notons que $g(1) = 0$:

$$g(r) \equiv \frac{r^{2p+2} - 1}{r-1} - 2(p+1)\, r^{p+1} = \frac{r^{2p+2} - 2(p+1)\, r^{p+2} + 2(p+1)\, r^{p+1} - 1}{r-1} = \frac{g_1(r)}{r-1}$$

$$g_1'(r) = (2p+2)\, r^p\, [r^{p+1} - (p+2)\, r + p+1].$$

Posons $v(r) = r^{p+1}$ $\quad w(r) = (p+2)\, r - (p+1)$.

Comme $v(1) = w(1)$ et $v'(1) < w'(1)$ il existe un nombre $r_o > 1$ tel que $v(r_o) - w(r_o) = 0$

r	$-\infty$	0		1		r_o		r_1		$+\infty$
$g_1'(r)$		0		0	$-$	0	$+$			
$g_1(r)$	$+\infty$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit qu'il existe un nombre $r_1 > 1$ tel que $g(r_1) = 0$.

Ecrivons t_i sous la forme : $t_i = A + B\, r_1^i$.

Or $A + B = 0$ et $A + B\, r_1^n = 1$.

Donc :

$$t = \frac{r_1^i - 1}{r_1^n - 1}.$$

Ayant choisi $m_1, \ldots m_n$ de telle sorte que $\sum_{p=1}^{n} m_p = 0$ nous allons montrer que l'on peut déterminer $\varphi(t)$ de façon que $\rho(x_j, y)$ soit d'ordre supérieur à deux relativement à h.

Définition - On dira que $\{x_j\}$ est une subdivision optimale de $[0, 1]$ pour la résolution approchée du problème (P) si $\rho(x_j, y)$ est d'ordre supérieur à deux relativement à h.

c) Détermination théorique d'une subdivision optimale.

Posons :

$$\sum_{p=1}^{n} m_p^2 = \alpha_1, \quad \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n} m_p\, m_q = \alpha_2$$

Pour que $\{x_j\}$ soit optimale il faut et il suffit que :

$$f_{n+1}(t_j) \left[\alpha_1 \frac{\varphi'(t_j)}{2} - a_1(t_j).\alpha_2 \frac{\varphi^2(t_j)}{n} \right] + f_{n+2}(t_j)\ (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\varphi^2(t_j)}{n+2} = 0 \qquad (7)$$

c_1) Supposons maintenant que y(x) vérifie l'hypothèse : $y^{(3)}(x)$ ne s'annule pas dans $[0, 1]$.

$$\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(n+2)\,\alpha_1} \frac{f_{n+2}(t_j)}{f_{n+1}(t_j)} + \frac{\varphi'(t_j)}{\varphi^2(t_j)} = \frac{2\,\alpha_2}{n\,\alpha_1}\, a_1(t_j)$$

Or :

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Log}\left|\frac{1}{\psi'(x)}\right|\right) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \quad \text{et} \quad \frac{f_{n+2}(t)}{f_{n+1}(t)} = \frac{y^{(n+2)}(x)}{y^{(n+1)}(x)} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{Log}\left|y^{(n+1)}(x)\right|\right)$$

Si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in [0, 1] \\ \psi'(x) = K\, |y^{(n+1)}(x)|^{\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{(n+2)\alpha_1}}\ e^{\frac{2\alpha_2}{n\alpha_1}\int_0^x q_1(v)\, dv} = \dfrac{1}{\varphi(t)} \end{array}} \qquad (9)$$

la condition (8) sera réalisée.

Puisque $\int_0^1 d\psi = 1$:

$$K = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \left\{ \left| y^{(n+1)}(v) \right|^{\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{(n+2)\alpha_1}}\ e^{-\frac{2\alpha_2}{n\alpha_1}\int_0^v q_1(w)\, dw} \right\} dv}$$

Connaissant $\psi(x) = t$ on en déduit facilement une subdivision optimale de $[0, 1]$.

c_2) Supposons que y(x) vérifie l'hypothèse, $y^{(3)}(x)$ s'annule en un nombre fini de points dans $[0, 1]$. Il est encore possible de déterminer $\psi(x)$ comme on l'a fait ci-dessus. $t = \psi(x)$ est une fonction positive monotone croissante dans $[0, 1]$. Elle admet une fonction inverse $x = \Phi(t)$ qui est dérivable dans tous intervalle qui ne contient pas de point où $y^{(n+1)}(x)$ s'annule. Alors :

$$\Phi'(t) = \varphi(t) = \psi'(x).$$

Si l'on choisit ainsi $\varphi(t)$, la condition (7) sera réalisée en tous les points t_j tels que $f_{n+1}(t_j) \neq 0$.

d) Détermination pratique d'une subdivision optimale.

On pourra conduire les calculs de la manière suivante :

- Calcul de $\bar{y}$, solution approchée du problème (P) aux points d'une subdivision $\{t_i\}$ de $[0,1]$.

On utilisera un procédé aux différences finies à pas constant si la dérivée d'ordre le plus élevé dans M(y) est paire, à pas variable si elle est impaire (voir ci-dessus).

- Calcul de $\bar{y}^{(n+1)}(t_i)$ connaissant $\bar{y}^{(p)}(t_i)$ $\quad 0 \leqslant p \leqslant n-1$.

On utilisera la relation linéaire :

$$\bar{y}^{(n+1)}(x) = L\,[\bar{y}^{(n-1)}(x), \dots, \bar{y}'(x), \bar{y}(x), x]$$

sachant que l'on a exactement $y^{(n+1)}(x) = L\,[y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x]$.

- Calcul de $\bar{\psi}'(t_i)$, obtenu en remplaçant dans la formule (9) $y^{(n+1)}(t_i)$ par :

$$\bar{y}^{(n+1)}(t_i) \quad \text{et} \quad Q_1(t_i) = \int_0^{t_i} \frac{q_1(v)}{2}\, dv$$

par une valeur approchée $\bar{Q}_1(t_i)$ si $Q_1(t_i)$ n'est pas calculable exactement.

- Calcul de $\bar{\psi}(t_i)$ et de $\bar{x}_i = \bar{\Phi}(t_i)$.

e) Représentation des conditions aux limites.

Si nous utilisons des formules à n points pour représenter les valeurs des dérivées d'ordre $\leqslant (n-1)$ qui interviennent dans les conditions aux limites nous ferons, en général, une erreur d'ordre 1 relativement à h, dans la représentation des conditions aux limites.

Pour que cette erreur soit d'ordre supérieur à deux relativement à h, il nous faudra représenter les valeurs des dérivées qui interviennent dans les conditions aux limites, à l'aide de formules à (n+2) points.

3 - UN AUTRE EXEMPLE D'APPLICATION DE LA METHODE PRECEDENTE : FORMULE OPTIMALE DE QUADRATURE

a) Considérons une fonction $f(t) \in C^4(I)$ (I étant un intervalle de la droite numérique) et trois points $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$. On sait que (cf. Ch. I paragraphe 2 b) :

$$f(x) = G_1(x)\,.\,f(x_1) + G_2(x)\,.\,f(x_2) + G_3(x)\,.\,f(x_3) + \int_{x_1}^{x_3} G(x,t)\, f^{(3)}(t)\, dt$$

où :

$$G(x,t) = \frac{1}{2!}\,\{(x-t)_+^2 - G_1(x)\,(x_1-t)_+^2 - G_2(x)\,(x_2-t)_+^2 - G_3(x)\,(x_3-t)_+^2\}$$

Si l'on choisit pour valeur approchée de $\int_{x_1}^{x_3} f(x)\, dx$ le nombre :

$$f(x_1)\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_1(x)\, dx + f(x_2)\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_2(x)\, dx + f(x_3)\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_3(x)\, dx$$

on fait une erreur $e = \int_{x_1}^{x_3} f^{(3)}(t)\left[\int_{x_1}^{x_3} G(x_1 t)\, dx\right] dt.$

$$\int_{x_1}^{x_3} G(x, t)\, dx =$$

$$\frac{1}{2!}\left\{\int_t^{x_3}(x-t)^2\, dx - (x_1-t)_+^2 \cdot \int_{x_1}^{x_3} G_1(x)\, dx - (x_2-t)_+^2 \cdot \int_{x_1}^{x_3} G_2(x)\, dx - (x_3-t)_+^2 \cdot \int_{x_1}^{x_3} G_3(x)\, dx\right\}$$

Or :

$$\int_{x_1}^{x_3}(x_1-t)_+^2\, f^{(3)}(t)\, dt = 0$$

$$\frac{1}{2!}\int_{x_1}^{x_3}(x_2-t)_+^2\quad f^{(3)}(t)\, dt = -\frac{(x_2-x_1)^3}{3!}\, f^{(3)}(x_1) + \frac{(x_2-x_1)^4}{4!}\,[f^{(4)}(x_1)+\varepsilon_2] \qquad \lim_{x_2\to x_1}\varepsilon_2 = 0$$

$$\frac{1}{2!}\int_{x_1}^{x_3}(x_3-t)_+^2\quad f^{(3)}(t)\, dt = -\frac{(x_3-x_1)^3}{3!}\, f^{(3)}(x_1) + \frac{(x_3-x_1)^4}{4!}\,[f^{(4)}(x_1)+\varepsilon_3] \qquad \lim_{x_3\to x_1}\varepsilon_3 = 0$$

et :

$$\frac{1}{2!}\int_t^{x_3}(x-t)^2\, dx = \frac{(x_3-t)^3}{3!}$$

Donc :

$$e = \left[-\frac{(x_3-x_1)^4}{4!} + \frac{(x_2-x_1)^3}{3!}\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_2(x)\, dx + \frac{(x_3-x_1)^3}{3!}\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_3(x)\, dx\right] f^{(3)}(x_1)$$

$$+\left[\frac{(x_3-x_1)^5}{5!} - \frac{(x_2-x_1)^4}{4!}\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_2(x)\, dx - \frac{(x_3-x_1)^4}{4!}\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_3(x)\, dx\right] f^{(4)}(x_1) + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \left[\frac{(x_3-x_1)^5}{5!} - \frac{(x_3-x_1)^4}{4!}\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_3(x)\, dx\right]\varepsilon_3 - \left[\frac{(x_2-x_1)^4}{4!}\cdot\int_{x_1}^{x_3} G_2(x)\, dx\right]\varepsilon_2$$

Or :

$$\int_{x_1}^{x_3} G_2(x)\, dx = \frac{(x_3-x_1)^3}{3!\,(x_2-x_1)\,(x_3-x_2)}, \qquad \int_{x_1}^{x_3} G_3(x)\, dx = \frac{(x_3-x_1)\,(2x_3+x_1-3x_2)}{3!\,(x_3-x_2)}$$

D'où :

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} e = \frac{(x_3-x_1)^3}{x_3-x_2}&\left\{\left[\frac{(x_3-x_1)\,(x_2-x_3)}{4!} + \frac{(x_2-x_1)^2}{(3!)^2} + \frac{(x_3-x_1)\,(2x_3+x_1-3x_2)}{(3!)^2}\right] f^{(3)}(x_1)\right.\\ &\left.-\left[\frac{(x_3-x_1)^2\,(x_2-x_3)}{5!} + \frac{(x_2-x_1)^3}{3!\;4!} + \frac{(x_3-x_1)^2\,(2x_3+x_1-3x_2)}{3!\;4!}\right] f^{(4)}(x_1) + \varepsilon\right\}\\ \text{avec}\quad \varepsilon = &\left[\frac{(x_3-x_1)^2\,(x_3-x_2)}{5!} - \frac{(x_3-x_1)^2\,(2x_3+x_1-3x_2)}{3!\;4!}\right]\varepsilon_3 - \frac{(x_2-x_1)^3}{3!\;4!}\,\varepsilon_2 \end{aligned}\right.} \qquad (10)$$

b) Afin d'étudier l'ordre du terme d'erreur e posons :

$$\forall x \in [x_1, x_3] \qquad x = x_1 + \int_{t_1}^{t}\varphi(u)\, du = \Phi(t) \qquad t > t_1$$

où :

α) $\varphi \in C^1\,[t_1,\ t_1+2h]$.

β) $\varphi(t) > 0 \quad \forall t \in [t_1,\ t_1+2h]$.

γ) $\Phi(t_1+h) = x_2,\quad \Phi(t_1+2\ h) = x_3$.

Alors :

$$t = \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi'(x) = \frac{1}{\varphi(t)}$$

$$x_2 - x_1 = h\varphi(\tau_2) = h\varphi(t_1) + \frac{h^2}{2!}[\varphi'(t_1) + \varepsilon_2(h)], \quad t_1 < \tau_2 \leqslant t_1 + h, \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

$$x_3 - x_1 = h\varphi(\tau_3) = 2h\varphi(t_1) + 2h^2[\varphi'(t_1) + \varepsilon_3(h)], \quad t_1 < \tau_3 \leqslant t_1 + 2h, \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0$$

Si nous posons $f^{(3)}[\Phi(t)] = f_3(t)$ et $f^{(4)}[\Phi(t)] = f_4(t)$:

$$e = -\frac{h^2}{2}\frac{\varphi(\tau_2)}{\varphi(\tau_3)}\Big\{[h^2\varphi^2(t_1)(4-12+8) + h^3\varphi(t_1)\varphi'(t_1)(4-30+28]\frac{f_3(t_1)}{3!\,4!} - h^3\varphi^3(t_1)(20-96+80)\frac{f_4(t_1)}{4!\,5!} + h^3\eta(h)\Big\}$$

$$\boxed{e = -\frac{h^5}{2}\frac{\varphi(\tau_2)}{\varphi(\tau_3)}\frac{\varphi(t_1)}{3!\,5!}\{10\,.\,\varphi'(t_1)\cdot f_3(t_1) - \varphi^2(t_1)\,f_4(t_1) + \eta_1(h)\} \quad \lim_{h\to 0}\eta_1(h) = 0} \tag{11}$$

Notons tout d'abord que si $\varphi(t) \equiv 1$, la formule d'intégration approchée que nous obtenons est celle de Simpson, l'erreur étant d'ordre h^4.

Pour que l'erreur soit d'ordre supérieur à h^4, il suffit que :

$$\boxed{10\,\varphi'(t_1)\,f_3(t_1) - \varphi^2(t_1)\,f_4(t_1) = 0} \tag{12}$$

De même qu'au paragraphe précédent, on montrerait que si au voisinage de t_1 :

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{\psi'(x)} = \mu\left|f^{(3)}(x)\right|^{\frac{1}{10}}} \tag{13}$$

la condition (12) est vérifiée.

Supposons que l'on veuille intégrer f sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ sachant que :

$$f \in C^3(I) \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

En utilisant la relation (13) on pourra déterminer une subdivision de :

$$I : \{x_i \leqslant 1 < i \leqslant 2m+1\}$$

et sur chaque intervalle :

$$[x_{2j-1},\ x_{2j+1}] \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

une formule d'intégration approchée à 3 points qui nous donnera un résultat plus précis que la formule de Simpson appliquée aux intervalles $[t_{2j-1},\ t_{2j+1}]$ $1 \leqslant j \leqslant m$ d'une subdivision de :

$$I : \{t_i \quad 1 \leqslant i \leqslant 2m+1\}$$

ayant un pas constant.

PROCEDURE ALGOL ET RESULTATS NUMERIQUES

Nous proposons ci-dessous une procédure de résolution à pas variable du problème différentiel (π) (Ch II p 16).

Cette procédure nous a permis de traiter les exemples indiqués ci-dessous par la méthode développée dans ce chapitre.

```
procédure VARSYSAP (Q1, Q2, S, X0, Y0, Y1, H, M, Y) ;
valeur X0, Y0, Y1, H ;
réel procédure Q1, Q2, S ;
réel X0, Y0, Y1 ;
entier M ;
tableau H, Y ;
      début tableau A [1 : M - 1,1: M - 1], C [1 : M - 1] ;
            réel U ; entier I, J ;
            U : = X0 ;
            pour I : = 1 pas 1 jusqua M-1 faire
                  début réel F1, F2, G, D ;
                        U : = U + H [I] ;
                        D = 2 - Q1(U) × (H[I + 1] - H[I]) - Q2(U) × H[I] × H[I + 1] ;
                        F1 :=H[I + 1] × (2 - Q1(U) × H[I + 1])/((H[I] + H[I + 1]) × D) ;
                        F2 :=H[I] × (2 + Q1(U) × H[I])/((H(I) + H[I + 1]) × D) ;
                        G  :=(H[I] × H[I + 1] × S(U))/D ;
                        C [I] : = si I = 1 alors G - Y0 × F1
                              sinon si I = M - 1 alors G - Y1 × F2
                              sinon G ;
                              pour J : = 1 pas 1 jusqua M - 1 faire
                        A[J ,J] : = si I - J = 0 alors -1.0
                              sinon si I - J = 1 alors F1
                              sinon si I - J = -1 alors F2
                              sinon 0.0 fin ;
                        GRESOLSYSLINE (A, C, Y, M-1, IMPOSSIBLE) ;
                        pour J : = 1 pas 1 jusqua M-1 faire
                        ECRIRE (I, Y [I]) ;
                        fin VARSYSAP ;
```

Exemples :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + xy' + y = 2x \\ y(0) = 1 \quad y(1) = 0 \end{array}\right. \qquad y = x + e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{(1+\sqrt{e}) \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt}{\int_0^1 e^{\frac{t^2}{2}}\, dt} \right)$$

x	SOLUTION EXACTE	ERREUR PAS CONSTANT	x	ERREUR PAS VARIABLE
0,1	0,874091	+0,000025	0,95	-0,000019
0,2	0,742746	+0,000069	0,190	-0,000025
0,3	0,610617	+0,000119	0,285	-0,000022
0,4	0,482292	+0,000170	0,380	-0,000016
0,5	0,362106	+0,000209	0,475	-0,000014
0,6	0,253992	+0,000230	0,570	-0,000023
0,7	0,161339	+0,000226	0,670	+0,000002
0,8	0,086888	+0,000188	0,770	-0,000002
0,9	0,032676	+0,000114	0,880	+0,000015

Exemples :

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = - \frac{1}{x} \qquad\qquad y = \frac{1}{38}\left(19x - 5x^2 + \frac{36}{x}\right)$$

$$y(2) = y(3) = 0$$

x	SOLUTION EXACTE	ERREUR PAS CONSTANT	x	ERREUR PAS VARIABLE
2,1	0,0186089	+0,0000125	2,085	+0,0000014
2,2	0,0325358	+0,0000206	2,170	+0,0000009
2,3	0,0420479	+0,0000250	2,260	+0,0000016
2,4	0,0473684	+0,0000267	2,350	+0,0000003
2,5	0,0486842	+0,0000259	2,445	-0,0000022
2,6	0,0461539	+0,0000234	2,5475	-0,0000026
2,7	0,0399123	+0,0000193	2,650	-0,0000044
2,8	0,0300753	+0,0000140	2,755	-0,0000060
2,9	0,0167423	+0,0000074	2,870	-0,0000054

CHAPITRE V

RECHERCHE DES DISTRIBUTIONS PRIMITIVES A n VARIABLES NOYAU DE GREEN

1 - L'ESPACE $H^k(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Utilisant les notations classiques, nous appellerons :

$\mathcal{D}$: l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies sur $\mathbf{R}^n$, indéfiniment dérivables et à support compact.

$\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support $\subset \Omega$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$, l'espace vectoriel des distributions définies sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Si $\dfrac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}$ est un opérateur différentiel, nous poserons :

$$J = (j_1, \dots, j_n) \quad \text{et} \quad |J| = j_1 + \dots + j_n .$$

Nous noterons $\partial^J u$, une dérivée-distribution quelconque de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition - $H^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^J u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ pour } |J| \leqslant k\}$.

Remarquons que $H^0(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)$.

$H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on définit le produit scalaire de deux éléments quelconques f, g et la norme de f de la façon suivante :

$$(f, g)_k = \sum_{|J| \leqslant k} \int_\Omega \partial^J f(x)\, \partial^J g(x)\, dx \quad \text{où} \quad x \in \mathbf{R}^n$$

et :

$$\|f\|_k = \{(f, f)_k\}^{\frac{1}{2}}$$

2 - EXISTENCE D'UN NOYAU REPRODUISANT DANS $H^k(\Omega)$

Supposons que Ω soit un ouvert $\subset \mathbf{R}^n$ vérifiant l'hypothèse h1) Ω est borné et sa frontière est une surface régulière dont aucun point n'est intérieur à la fermeture de Ω.

Soit u une distribution $\in H^k(\Omega)$.

D'après un théorème dû à Sobolev, si $m < k - \frac{n}{2}$, toutes les dérivées distribution de u, d'ordre au plus égal à m, sont continues dans la fermeture de Ω, ([46], [20] Part 2).

De plus, il existe une constante K dépendant de Ω, de k et de n, mais indépendante de u telle que :

$$\operatorname{Ess\,Sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \leqslant K \, \|u\|_k$$

Si $k > \frac{n}{2}$ l'application : $u \longrightarrow u(x)$, $x \in \Omega$ est une fonctionnelle linéaire continue définie sur $H^k(\Omega)$.

Alors $\exists h_x \in H^k(\Omega) : u(x) = (h_x, u)_k \qquad x \in \Omega$.

h_x est le noyau reproduisant de $H^k(\Omega)$. ([4]).

3 - DISTRIBUTIONS PRIMITIVES A n VARIABLES. POSITION DU PROBLEME

a) Variable maximale. Ensemble total.

Une dérivée d'une distribution u de n variables $x_1, .., x_n$ est caractérisée par un système de n entiers $\geqslant 0$ qui sont ses ordres partiels de dérivation relativement à chacune des variables.

A tout système d'entiers qui caractérise une dérivée-distribution de u, nous associerons le monôme en $x_1 \dots x_n$ qui a ces entiers pour exposants.

Ainsi à $\dfrac{\partial^k u}{x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}}$ nous ferons correspondre $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$.

où $j_1, \dots, j_n$ sont des entiers $\geqslant 0$.

Définition 1 - Considérons un ensemble $\mathcal{M}$ de monômes tous différents et un monôme quelconque $M \in \mathcal{M}$.

On dira que x_1 est une variable maximale pour M si le degré de x_1 dans M est égal au maximum des degrés de x_1 dans chacun des monômes $\in \mathcal{M}$.

On dira que x_i $(i \neq 1)$ est variable maximale pour :

$$M \equiv x_1^{j_1} \dots x_{i-1}^{j_{i-1}} \; x_i^{j_i} \; x_{i+1}^{j_{i+1}} \dots x_n^{j_n}$$

si j_i est égal au maximum des degrés de x_i dans chacun des monômes $\in \mathcal{M}$ où $x_1, x_2, \dots x_{i-1}$ ont respectivement pour degré $j_1, j_2, \dots, j_{i-1}$, ([29]).

Définition 2 - On dira qu'un ensemble de monômes $\mathcal{M}$ est total si chacun des produits que l'on peut former avec un monôme quelconque $\in \mathcal{M}$ et l'une de ses variables non maximales est identique à un monôme $\in \mathcal{M}$ ou au produit d'un monôme $\in \mathcal{M}$ par un certain nombre de ses variables maximales, ([29]).

Exemple : L'ensemble $\mathcal{M}_k$ formé de tous les monômes de la forme $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ où $|J| = k$ est total.

Remarquons tout d'abord que x_n est une variable maximale pour tout monôme $\in \mathcal{M}_k$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait des monômes $\in \mathcal{M}_k$ de degré $\neq$ de k.

Considérons un monôme $M \in \mathcal{M}_k$ et x_i une de ses variables non maximales.

Si $i = 1$, on peut écrire M sous la forme : $M \equiv x_1^{j_1} S_1$ où S_1 est un monôme par rapport à $x_2, \dots, x_n$.

Si $i > 1$, on peut écrire M sous la forme : $M \equiv R_i \, x_i^{j_i} \, S_i$ où R_i (resp. S_i) est un monôme par rapport à $x_1, \dots, x_{i-1}$(resp $x_{i+1}, \dots, x_n$). Notons s_i le degré de S_i $(1 \leqslant i)$.

Puisque x_i n'est pas maximale pour M, s_i est > 0.

Il existe dans S_i, au moins une variable x_k $(i + 1 \leqslant k \leqslant n)$ maximale pour M et de degré $j_k > 0$. Ce sera x_n si $j_n > 0$ ou bien x_{n-p} si $j_n = j_{n-1} = \dots = j_{n-p+1} = 0$, $j_{n-p} > 0$ puisque $n - p$ est supérieur à i, s_i étant > 0.

Notons S'_i le monôme obtenu à partir de S_i, en retranchant une unité à l'exposant de x_k dans S_i et posons :

$$N \equiv x_1^{j_1+1} S'_1 \quad \text{si} \quad i = 1 \qquad , \qquad N \equiv R_i \, x_i^{j_i+1} S'_i \quad \text{si} \quad i > 1.$$

$N \in \mathcal{M}_k$ et x_k, étant maximale pour M est maximale pour N.

De plus $M \, x_i \equiv N \, x_k$. (1).

Il en résulte donc que $\mathcal{M}_k$ est un ensemble de monômes total.

b) Notons $[H^\circ(\Omega)]^q$ le produit cartésien de $H^\circ(\Omega)$, q fois par lui même.

$[H^\circ(\Omega)]^q$ peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert en définissant le produit scalaire de deux éléments $f = (f_1, \ldots, f_q)$ et $g = (g_1, \ldots, g_q) \in [H^\circ(\Omega)]^q$ par :

$$((f, g))_q = \int_\Omega (f_1 g_1 + \ldots + f_q g_q)(x)\, dx$$

et la norme de f par :

$$|||f|||_q = \{((f, f))\}^{\frac{1}{2}}$$

Soit m le nombre de monômes par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ qui sont distincts et de degré k.

Considérons l'application linéaire T_1 de $H^k(\Omega)$ dans $[H^\circ(\Omega)]^m$ qui a $\forall u \in H^k(\Omega)$ fait correspondre le vecteur $T_1\, u \in [H^\circ(\Omega)]^m$ admettant pour composantes toutes les dérivées-distribution de u qui sont distinctes et d'ordre k.

$$H^k(\Omega) \ni u \xrightarrow{T_1} T_1\, u = \{\partial^J u \; : \; |J| = k\} \in [H^\circ(\Omega)]^m .$$

D'après l'exemple du paragraphe ci-dessus, l'ensemble de monômes $\mathfrak{M}_k$ associé à l'ensemble des dérivées distribution qui caractérise l'opérateur T_1, est un ensemble total.

c) Système total d'équations aux dérivées partielles d'ordre k.

Supposons que le système d'équations : $T_1 u = f$ (2) où $f \in [H^\circ(\Omega)]^m$ admette une solution $w \in H^k(\Omega)$.

Si $\mathfrak{M}_k$ est l'ensemble de monômes associé à T_1, à tout monôme $M \in \mathfrak{M}_k$ correspond une dérivée de w qui est égale à une composante de f que nous noterons f_M.

A chacune des relations du type (1), associons la relation (3) :

$$\frac{\partial f_M}{\partial x_i} = \frac{\partial f_N}{\partial x_k}$$

où les dérivées considérées sont prises au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Notons ($\mathcal{C}$) l'ensemble des relations ainsi obtenues.

THEOREME - ($\mathcal{C}$) constitue un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution du système d'équations : $T_1 u = f$.

Il est évident, en effet, que si $T_1 u = f$ admet la solution w,

$$\frac{\partial f_M}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_N}{\partial x_k}$$

sont égaux à une même dérivée de w correspondant aux monômes Mx_i (ou Nx_k).

Nous démontrerons plus loin la réciproque.

Définition - Notons A_k, l'ensemble des fonctions $f \in [H^\circ(\Omega)]^m$ dont les composantes vérifient les conditions ($\mathcal{C}$).

THEOREME - A_k est un sous-espace linéaire fermé dans $[H^\circ(\Omega)]^m$.

En effet, soit $f^{[p]}$ une suite convergente d'éléments de A_k admettant pour limite un élément $g \in [H^\circ(\Omega)]^m$.

$$< \frac{\partial g_M}{\partial x_i} - \frac{\partial g_N}{\partial x_k}, \psi > = < \frac{\partial g_M}{\partial x_i} - \frac{\partial f_M^{[p]}}{\partial x_i}, \psi > + < \frac{\partial f_N^{[p]}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_N}{\partial x_k}, \psi >$$

$$= - \int_\Omega (g_M - f_M^{[p]}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \int_\Omega (f_N^{[p]} - g_N) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \; \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Donc $\forall p$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\left| < \frac{\partial g_M}{\partial x_i} - \frac{\partial g_N}{\partial x_k}, \psi > \right| \leqslant \| g_M - f_M^{[p]} \|_o \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_o + \| g_N - f_N^{[p]} \|_o \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_o$$

D'où :

$$< \frac{\partial g_M}{\partial x_i} - \frac{\partial g_N}{\partial x_k}, \psi > = 0 \quad , \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow g \in A_k$$

T_1 applique donc $H^k(\Omega)$ dans A_k fermé.

Définition - Nous appellerons système total d'équations aux dérivées partielles d'ordre k par rapport à n variables, tout système $T_1 u = f$ où $f \in A_k$. Nous noterons $S_t(k, n)$ l'ensemble de tels systèmes.

4 - EXISTENCE D'UNE SOLUTION POUR TOUT SYSTEME $\in S_t(k, n)$

a) Supposons que Ω soit un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ vérifiant l'hypothèse : h2) Ω est simplement connexe et de mesure finie.

Considérons le système différentiel : $\frac{\partial u}{\partial x_i} = t_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ où $t_1, \ldots, t_n$ sont n distributions $\in \mathcal{D}'(\Omega)$.

THEOREME - Si $t_1, \ldots, t_n$ sont n distributions $\in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que :

$$< \frac{\partial t_i}{\partial x_j} - \frac{\partial t_j}{\partial x_i}, \psi > = 0 \; , \; \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n \tag{4}$$

(Ω, vérifiant l'hypothèse h2), le système $\frac{\partial s}{\partial x_i} = t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ admet une infinité de solutions $\in \mathcal{D}'(\Omega)$ et qui diffèrent entre elles d'une constante.

Notons d'une manière générale ω_p toute forme C^∞, de degré p à support compact contenu dans Ω et $\mathcal{E}(\Omega)$, l'espace vectoriel de toutes les formes ω_p de degré $p \leqslant n$, muni d'une topologie convenable ([36]).

Une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$ est un courant. Les distributions $t_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sont des courants de degré zéro définis sur Ω. On identifie, en effet, t_i et le courant T_i tel que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad < t_i, \psi > = << T_i, \omega_n >> \qquad \omega_n = \psi dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

et :

$$<< T_i, \omega_p >> = 0 \; , \; 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

S étant un courant quelconque, on définit son bord bS en posant :

$$<< bS, \omega >> = << S, d\omega >> \qquad \forall \omega \in \mathcal{E}(\Omega)$$

On appelle différentielle de S le courant dS défini par dS = wbS, l'opérateur w étant défini par la condition $wT = (-1)^p T$ si T est un courant homogène de degré p.

$$\forall \omega \in \mathcal{E}(\Omega), << \frac{\partial T}{\partial x_i}, \omega >> = - << T, \frac{\partial \omega}{\partial x_i} >>$$

On dit qu'un courant T est homologue à zéro, s'il existe un courant S tel que dS = T.

De Rham a démontré le théorème suivant :

Pour qu'un courant T soit homologue à zéro, il faut et il suffit que $<< T, \omega >> = 0$ pour toute forme ω qui est C^∞, à support compact et fermée, c'est-à-dire telle que $d\omega = 0$ ([36]).

Considérons le courant $T = \sum_{i=1}^{n} T_i \, dx^i$.

T est de degré 1, c'est-à-dire que $\ll T, \omega_p \gg = 0$ quand $p \neq n-1$. De plus,

$$\ll \frac{\partial T_i}{\partial x_j} - \frac{\partial T_j}{\partial x_i}, \omega \gg = 0, \ \forall \omega \in \mathcal{E}(\Omega) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

En effet $\ll \frac{\partial T_i}{\partial x_j} - \frac{\partial T_j}{\partial x_i}, \omega_p \gg = 0$ quand $p \neq n-1$ puisque $\frac{\partial T_i}{\partial x_j}$ est un courant de degré zéro et :

$$\begin{cases} \ll \frac{\partial T_i}{\partial x_j} - \frac{\partial T_j}{\partial x_i}, \omega_n \gg = < \frac{\partial t_i}{\partial x_j} - \frac{\partial t_j}{\partial x_i}, \psi > = 0 \quad \forall \omega_n \\ \omega_n = \psi dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

Considérons maintenant une forme ω_{n-1} telle que $d\omega_{n-1} = 0$. D'après l'hypothèse faite sur Ω, il existe une forme ω_{n-2} telle que $\omega_{n-1} = d\omega_{n-2}$, ([47]).

Or :

$$\ll T, \omega_{n-1} \gg = \ll T, d\omega_{n-2} \gg = \ll dT, \omega_{n-2} \gg = \ll \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial T_j}{\partial x_i} - \frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) dx^i \wedge dx^j, \omega_{n-2} \gg = 0$$

Comme $\ll T, \omega_p \gg = 0 \quad \forall p \neq n-1$, il en résulte qu'il existe un courant S défini sur Ω tel que $dS = T$. T étant le degré 1, il en est de même de bS et $bS = -dS$.

Soit s une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie de la façon suivante :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \xrightarrow{s} < s, \psi > = \ll S, \omega_n \gg = \ll S, d\omega_{n-1} \gg = \ll bS, \omega_{n-1} \gg = - \ll T, \omega_{n-1} \gg$$

où :

$$\omega_n = \psi dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

s est une distribution $\in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que :

$$< \frac{\partial s}{\partial x_i}, \psi > = - < s, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} > = - \ll S, \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \gg = \ll \frac{\partial S}{\partial x_i}, \omega_n \gg = \ll T_i, \omega_n \gg = < t_i, \psi > \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

c'est-à-dire $\exists s \in \mathcal{D}'(\Omega) : \frac{\partial s}{\partial x_i} = t_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$.

D'autre part, comme tout courant fermé pair de degré zéro est égal à une constante, toutes les solutions du système considéré seront de la forme $s + c$ où c est une constante arbitraire.

5 - RECHERCHE DES DISTRIBUTIONS PRIMITIVES A n VARIABLES. EXISTENCE D'UNE SOLUTION $\in H^k(\Omega)$ POUR UN SYSTEME D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU TYPE $S_t(k, n)$

a) Notons $[\mathcal{D}'(\Omega)]^q$ le produit cartésien de $\mathcal{D}'(\Omega)$, q fois par lui-même, et soit m le nombre de monômes par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$ qui sont distincts et de degré k.

<u>Considérons l'application linéaire L_1 de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $[\mathcal{D}'(\Omega)]^m$ qui à $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ fait correspondre le vecteur $L_1 u \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^m$ admettant pour composantes toutes les dérivées-distribution de u qui sont distinctes et d'ordre k.</u>

<u>T_1 est la restriction de L_1 à $H^k(\Omega)$.</u>

Considérons le système d'équations $L_1 u = g$, $g \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^m$. Comme ci-dessus, notons $\mathfrak{M}_k$ l'ensemble total des monômes associés à L_1. Nous supposerons que dans tout monôme $\in \mathfrak{M}_k$ les variables $x_1, \dots, x_n$ sont rangées dans l'ordre des indices croissants.

Si $M \equiv x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \in \mathfrak{M}_k$ est le monôme associé à la dérivée :

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}$$

nous poserons :

$$\partial^{M} u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} = g_{j_1 \dots j_n} = g_M$$

<u>Définition</u> - D'autre part, notons B_k l'ensemble des distributions $g \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^m$ dont les composantes vérifient toutes les relations :

$$< \frac{\partial g_M}{\partial x_i} - \frac{\partial g_N}{\partial x_k}, \psi > = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{3'}$$

où x_i n'est pas maximale pour M et où x_k est maximale pour N ; $B_k \supset A_k$.

De même que ci-dessus, <u>nous appellerons système total d'équations aux dérivés partielles d'ordre k par rapport à n variables, tout système du type $L_1 u = g$ où $g \in B_k$ et nous noterons $\sum_t(k,n)$ l'ensemble de tels systèmes</u>.

THEOREME - Tout système $\in \sum_t(k,n)$ admet une infinité de solutions $\in \mathcal{D}'(\Omega)$, si Ω vérifie l'hypothèse h2.

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

a1) Remarquons tout d'abord que si un système $\sum \in \sum_t(k,n)$ admet une solution $u_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, toute solution de $\sum$ est de la forme $u_1 + P_{k-1}(x)$, $P_{k-1}(x)$ étant un polynôme de degré $(k-1)$ par rapport à l'ensemble des variables $x_1 \dots x_n$.

En effet, si u_1 et $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sont deux solutions de $\sum$:

$$\frac{\partial^k (u_1 - u_2)}{\partial x_1^{j_1} \dots\dots \partial x_n^{j_n}} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{avec} \quad |j| = k$$

Puisque sur une variété connexe, tout courant fermé pair de degré zéro est égal à une fonction constante, on en déduit par récurrence que $u_1 - u_2$ est un polynôme de degré $k-1$ par rapport à $x_1 \dots x_n$.

a2) Supposons maintenant que tout système $\in \sum_t(k-1, n)$ admette une infinité de solutions $\in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nous allons montrer qu'il en est de même pour tout système $\in \sum_t(k, n)$.

Considérons un tel système :

$$\sum \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} = g_{j_1 \dots j_n} \\ |j| = k \qquad g \in B_k \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution $\in \mathcal{D}'(\Omega)$, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un vecteur $v \in B_1$ de composantes $v_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ qui soient respectivement solution des systèmes :

$$\textstyle\sum_i : \dfrac{\partial^{k-1} v_i}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_i^{l_i} \dots \partial x_n^{l_n}} = g_{l_1 \dots l_i + 1 \dots l_n} \qquad |l| = k - 1$$

Alors, une des solutions du système $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ $\quad 1 \leqslant i \leqslant n$ sera une solution de $\sum$ qui appartiendra à $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Or $\sum_i \in \sum_t (k-1, n)$ quand $1 \leqslant i \leqslant n$.

En effet, supposons que la variable x ne soit pas maximale pour $M_1 \equiv x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \in \mathcal{M}_{k-1}$. Puisque $\mathcal{M}_{k-1}$ est total, il existe un monôme $N_1 \in \mathcal{M}_{k-1}$ et une variable x_q $(q > p)$ maximale pour N_1 telle que $M_1 x_p \equiv N_1 x_q$.

Considérons les monômes $M \equiv M_1 x_i$ et $N \equiv N_1 x_i$ qui $\in \mathcal{M}_k$. x_p n'est pas maximale pour M ; si $q \geqslant i$, x_q est maximale pour N, car s'il n'en était pas ainsi, elle ne serait pas maximale pour N_1. De plus $M x_p \equiv N x_q$.

Posons $g_M = h_{M_1}$ pour tout M tel que $M \equiv M_1 x_i$.

On sait donc que toutes les relations du type :

$$\frac{\partial h_{M_1}}{\partial x_p} - \frac{\partial h_{N_1}}{\partial x_q} = \frac{\partial g_M}{\partial x_p} - \frac{\partial g_N}{\partial x_q} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

sont vérifiées si $q \geqslant i$.

Il en est de même si $q < i$ et si x_q est maximale pour N. Supposons $q < i$ et x_q non maximale pour N.

Il existe alors un monôme $P \in \mathcal{M}_k$ et une variable $x_r (r > q)$ maximale pour P telle que $N x_q = P x_r$.

Il en résulte que :

$$\frac{\partial h_M}{\partial x_p} = \frac{\partial g_M}{\partial x_p} = \frac{\partial g_P}{\partial x_r} = \frac{\partial g_N}{\partial x_q} = \frac{\partial h_{N_1}}{\partial x_q} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

Donc $\sum_i \in \sum_t (k-1, n) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$.

Considérons, d'autre part, n solutions $v_1, \ldots, v_n$ de $\sum_1, \ldots, \sum_n$ respectivement. Nous savons que :

$$\frac{\partial^{k-1} v_i}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_i^{l_i} \ldots \partial x_j^{l_j} \ldots \partial x_n^{l_n}} = g_{l_1 \ldots l_i + 1 \ldots l_j \ldots l_n} \qquad |l| = k-1$$

Supposons que $l_j \geqslant 1$ et posons alors $l_j = l'_j + 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{k-2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_i^{l_i} \ldots \partial x_j^{l'_j} \ldots \partial x_n^{l_n}} = g_{l_1 \ldots l_i + 1 \ldots l'_j + 1 \ldots l_n} \\ \qquad = \dfrac{\partial^{k-2}\left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_i^{l_i} \ldots \partial x_j^{l'_j} \ldots \partial x_n^{l_n}} \\ \text{où} \quad l_1 + \ldots + l_i + \ldots + l'_j + \ldots + l_n = k-2 \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{\partial^{k-2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}{\partial x_1^{r_1} \ldots\ldots \partial x_n^{r_n}} = 0, \ |r| = k-2$$

et :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = Q_{k-3}(x \ ; \ i, \ j)$$

qui est un polynôme de degré $(k-3)$ par rapport à l'ensemble des variables $x_1, \ldots, x_n$. Or si w_i est une solution quelconque de $\sum_i$, $w_i = v_i + P_{k-2}(x \ ; \ i)$.

Nous allons montrer que l'on peut déterminer n solutions $w_1, \ldots, w_n$ de $\sum_1, \ldots, \sum_n$ respectivement telles que :

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{5}$$

En effet, posons $w_1 = v_1$ (alors $P_{k-2}(x\ ;\ 1) = 0$).

Mais :

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \equiv Q_{k-3}(x\ ;\ i,\ j) + \frac{\partial}{\partial x_j} P_{k-2}(x\ ;\ i) - \frac{\partial}{\partial x_i} P_{k-2}(x\ ;\ j) \equiv 0 \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P_{k-2}(x\ ;\ j) \equiv Q_{k-3}(x\ ;\ i,\ j) + \frac{\partial}{\partial x_j} P_{k-2}(x\ ;\ i) \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

De l'identité $\frac{\partial}{\partial x_1} P_{k-2}(x\ ;\ 2) \equiv Q_{k-3}(x\ ;\ i,\ j)$ on déduit que l'on peut déterminer une solution w_2 de $\sum_2$ telle que $\frac{\partial w_1}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Supposons que l'on ait déterminé q solutions $w_1 \dots w_q$ de $\sum_1, \dots, \sum_q$ respectivement $(q < n)$ telles que :

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0 \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant q \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{D}'(\Omega)$$

w_{q+1} doit être telle que :

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_{q+1}} - \frac{\partial w_{q+1}}{\partial x_i} = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant q$$

c'est-à-dire que :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_i} [P_{k-2}(x\ ;\ q+1)] \equiv Q_{k-3}(x\ ;\ i,\ q+1) + \frac{\partial}{\partial x_{q+1}} P_{k-2}(x\ ;\ i) \equiv R_{k-3}(x\ ;\ i) \\ 1 \leqslant i \leqslant q \end{array}\right.$$

On pourra déterminer $P_{k-2}(x\ ;\ q+1)$ si et seulement si :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [R_{k-3}(x\ ;\ i)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [R_{k-3}(x\ ;\ j)] = 0 \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant q.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} [R_{k-3}(x\ ;\ i)] &\equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left[Q_{k-3}(x\ ;\ i,\ q+1) + \frac{\partial}{\partial x_{q+1}} P_{k-2}(x\ ;\ i)\right] \\
&\equiv \frac{\partial}{\partial x_j} [Q_{k-3}(x\ ;\ i,\ q+1) + \left[Q_{k-3}(x\ ;\ j,\ i) + \frac{\partial}{\partial x_i} P_{k-2}(x\ ;\ j)\right] \\
&\equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\cancel{\frac{\partial v_i}{\partial x_{q+1}}} - \frac{\partial v_{q+1}}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_{q+1}}\left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \cancel{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_i} P_{k-2}(x\ ;\ j)\right] \\
&\equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial v_j}{\partial x_{q+1}} - \frac{\partial v_{q+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_{q+1}} P_{k-2}(x\ ;\ j)\right] \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} [R_{k-3}(x\ ;\ j)]
\end{aligned}$$

On pourra donc déterminer par récurrence n solutions $w_1, \dots, w_n$ de $\sum_1, \dots, \sum_n$ respectivement telles que les conditions (5) soient vérifiées.

Ainsi une solution du système $\frac{\partial u}{\partial x_i} = w_i$ $(1 \leq i \leq n)$ est une solution de Σ.

b) *THEOREME* - Si Ω est un ouvert de Nikodym, simplement connexe et de mesure finie, T_1 applique $H^k(\Omega)$ <u>sur</u> A_k.

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles $T_1 u = f$ où $f \in A_k$.

Alors $f \in B_k$ et le système $T_1 u = f$ admet une solution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Si Ω est un ouvert de Nikodym, par exemple un ensemble étoilé par rapport à l'un de ses points, on en déduit successivement que toutes les dérivées d'ordre $k-1$, $k-2, \dots 2, 1, 0$ de u appartiennent à $\mathcal{L}^2(\Omega)$ c'est-à-dire $u \in H^k(\Omega)$ ([19]).

6 - PROBLEME AUX DERIVEES PARTIELLES. NOYAU DE GREEN. APPLICATIONS

a) <u>Considérons le système d'équations S</u> $\in S_t(k, n)$

$$S : T_1 u = f, \quad f \in A_k.$$

Notons Δ_1 le noyau de T_1. Δ_1 est l'ensemble des polynômes par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$ qui sont de degré inférieur ou égal à $k-1$.

Soit μ le nombre de vecteurs de base de Δ_1 : $\mu = \chi(n, k)$. Considérons μ fonctionnelles $u_1^*, \dots, u_\mu^*$ linéaires et continues sur $H^k(\Omega)$, dont les restrictions sur Δ_1 sont linéairement indépendantes. <u>Notons T_2 l'application linéaire de $H^k(\Omega)$ dans $\mathbf{R}^\mu$</u> :

$$H^k(\Omega) \ni u \xrightarrow{T_2} T_2 u = \begin{bmatrix} u_1^*(u) \\ \vdots \\ u_\mu^*(u) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^\mu$$

<u>T_2 est continue et applique Δ_1 sur $\mathbf{R}^\mu$.</u>

Notons Δ_2 le noyau de T_2 dans $H^k(\Omega)$: $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \theta_{H^k}(\Omega)$ où $\theta_{H^k}(\Omega)$ est l'élément neutre de $H^k(\Omega)$.

<u>Définition</u> -

$$\begin{cases} T_1 u = f \\ T_2 u = r \in \mathbf{R}^\mu \end{cases}$$

constitue un problème aux dérivées partielles. On dira que ce problème est total si $f \in A_k$.

LEMME - Si Λ_1 (resp. Λ_2) est la restriction de T_1 à Δ_2 (resp. de T_2 à Δ_1) Λ_1 et Λ_2 sont inversibles et leurs inverses sont continues ([11], [49]).

THEOREME - Si Ω vérifie l'hypothèse h1) et si $k > \frac{n}{2}$, l'application qui à $\forall f \in A_k$ fait correspondre la valeur $u_2(x)$ de $u_2 \in \Delta_2$ au point $x \in \Omega$ est une fonctionnelle linéaire et continue définie sur $A_k \in [H^\circ(\Omega)]^m$.

En effet,

$$\sup_{x \in \Omega} |u_2(x)| \leq K \; \|u_2\|_k \leq K \; \|\Lambda_1^{-1}\| \;\; |||f|||_m$$

Il existe donc un élément $G(x, t) \in A_k$ tel que :

$$u_2(x) = ((G(x, \underline{t}), \; f(\underline{t})))_m.$$

De même si :

$$r = (r_1 \ldots r_\mu) \in \mathbb{R}^\mu \quad u_1(x) = \sum_{i=1}^{\mu} r_i\, G_i(x) \quad \text{où} \quad G_i \in \Delta .$$

et :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\mu} r_i\, G_i(x) + ((G(x, \underline{t}), \; f(\underline{t}))_m$$

b) On verrait comme au chapitre I que la transformation adjointe Λ_1^* de Λ_1 existe, qu'elle est continue, inversible et que son inverse est continue. Λ_1^* applique A_K sur Δ_2. Si Δ_2 est le complémentaire orthogonal de Δ_1 dans $H^k(\Omega)$ et si h_x est le noyau reproduisant de $H^k(\Omega)$:

$$h_x = h_{x,1} + h_{x,2} \; , \quad h_{x,1} \in \Delta_1 , \quad h_{x,2} \in \Delta_2$$

Cette décomposition est unique et $G(x, t) = \Lambda_1^{*-1}\,[h_{x,2}(t)]$.

Comme au chapitre I, on pourrait déduire des résultats précédents, l'écriture d'une fonctionnelle linéaire et continue sur $H^k(\Omega)$, et exprimer -sous certaines conditions- le reste de la formule de Taylor, de formules d'interpolation etc., sous forme "intégrale".

CHAPITRE VI

LES FONCTIONS "SPLINE" POLYNOMIALES D'INTERPOLATION

A.1 - INTRODUCTION

En analyse numérique les polynômes jouent un rôle fondamental pour plusieurs raisons.

Une raison essentielle est fournie par le théorème d'approximation de Weierstrass, une autre est la simplicité des calculs quand on opère sur des polynômes.

Nous avons vu dans les chapîtres précédents comment on pouvait définir l'approximation de certaines fonctionnelles en utilisant, localement, un développement de Taylor tronqué qui est une approximation polynômiale.

Cependant, les polynômes présentent des inconvénients du point de vue numérique dès que leur degré est assez élevé. On sait depuis longtemps aussi que l'interpolation d'une fonction f(x) en des points équidistants, sur un intervalle donné, au moyen des polynômes de Lagrange, ne converge pas toujours vers f(x) lorsque le nombre de ces points augmente indéfiniment.

Etudiant le lissage des courbes afin d'obtenir des dérivées d'ordre élevé régulières, Schoenberg ([38], [39]) a été conduit à considérer non plus des polynômes mais des fonctions dont le graphe est formé d'un nombre fini d'arcs de polynômes et qu'il a appelé fonction "spline" (f.s.).

Nous verrons dans ce chapître et dans les suivants l'intérêt que présente l'utilisation des f.s. en analyse numérique. Précisons l'origine du nom "spline".

En anglais, ce mot désigne un outil très simple du dessinateur. C'est une baguette flexible que l'on fait passer par certains points d'une courbe que l'on veut tracer, sans imposer, en ces points, la pente de la baguette.

Une théorie élémentaire de l'élasticité montre que la baguette en position d'équilibre dessine en première approximation une ligne composée d'arcs de cubiques dont la dérivée troisième seulement est discontinue aux points par lesquels on a imposé à la baguette de passer.

2 - INTERPOLATION D'UNE FONCTION DONNEE PAR DES FONCTIONS "SPLINE" COMPOSEES D'ARCS DE POLYNOMES

Etant donné une fonction f(x) arbitraire, il est toujours possible de l'interpoler en $(k+1)$ points quelconques $x_1, \ldots, x_{k+1}$ au moyen du polynôme de degré k :

$$P_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{k+1} l_i(x)\, f(x_i)$$

où $l_1(x), \ldots, l_{k+1}(x)$ sont les polynômes de Lagrange de degré k tels que : $l_j(x_i) = \delta_{ij}$.

Supposons maintenant que $f(x) \in H^{(k+1)}[a, b]$, $[a, b]$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant les points $x_1, \ldots, x_{k+1}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k+1} l_i(x)\, f(x_i) + \int_a^b G(x, t)\, f^{(k+1)}(t)\, dt.$$

où G(x, t) est le noyau de Green du problème différentiel :

$$\begin{cases} y^{(k+1)}(x) = 0 & x \in [a, b] \\ y(x_i) = 0 & 1 \leqslant i \leqslant k+1 \end{cases}$$

On peut chercher à améliorer l'approximation de f(x) par $P_k(x)$ sur [a, b], en déterminant une approximation de $\int_a^b G(x, t)\, f^{(k+1)}(t)\, dt$ au moyen de la somme :

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, G(x, t_j) \qquad a < t_1 < \ldots < t_n < b$$

de façon que :

$$s_0(x) = \sum_{i=1}^{k+1} l_i(x)\, f(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, G(x, t_j)$$

interpole f(x) aux points $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, t_1, \ldots t_n \in [a, b]$.

Définition - Schoenberg ([39]) a appelé f.s. de degré k, admettant les nœuds $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ les fonctions s(x) telles que :

a) Dans chaque intervalle $]-\infty, t_1[, [t_1, t_2[, \ldots, [t_n, +\infty[$, s(x) est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

b) $s(x) \in C^{k-1}(\mathbf{R})$.

Ainsi le noyau de Green que nous avons défini ci-dessus est une f.s. de degré k admettant pour seul nœud le point t ; de même $s_0(x)$ est une f.s. de degré k admettant les nœuds $t_1, \ldots, t_n$.

Toute f.s. de degré k admettant les nœuds $t_1, \ldots, t_n$ est déterminée de manière unique par la donnée du polynôme $Q_k(x)$ de degré $\leqslant k$ auquel elle est identique pour $x < t_1$ et par la donnée des sauts $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de sa dérivée kième aux points $t_1, \ldots, t_n$ respectivement.

On peut l'écrire sous la forme :

$$s(x) = Q_k(x) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, (x - t_j)_+^k \qquad \text{avec} \qquad x_+^k = \begin{cases} x^k & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1 - Propriétés.

- L'ensemble des f.s. de degré k admettant pour nœuds des points fixes $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ forme un espace vectoriel de dimension (n + k + 1) qui contient l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant$ k.

En effet, les (n + k + 1) fonctions $1, x, \ldots, x^k, (x - t_1)_+^k, \ldots (x - t_n)_+^k$ sont linéairement indépendantes.

- Par intégration (resp. dérivation) d'une f.s. de degré k on obtient une f.s. de degré (k + 1) (resp. (k - 1)).

- *THEOREME* - Toute fonction $\in C^k$ [a, b] peut être approchée uniformément ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre k par des f.s. de degré k et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k.

En effet, considérons une fonction $f \in C^k$ [a, b]. $f^{(k)}(x) \in C^0$ [a, b] peut être approchée uniformément sur [a, b] par une fonction en escalier $h_k(x)$ continue à droite et admettant pour points de discontinuité les points $t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$.

Considérons le problème différentiel :

$$\begin{cases} s^{(k)}(x) = h_k(x) & x \in [a, b] \\ s^{(p)}(a) = f^{(p)}(a) & 0 \leqslant p \leqslant k-1 \end{cases}$$

Il admet pour solution dans [a, b] :

$$s(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{k-1}}{k-1!}\, f^{(k-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{k-1!}\, h_k(t)\, dt.$$

$s(x)$ est une f.s. de degré k admettant pour nœuds les points $t_1, \ldots, t_n$.

D'autre part,

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{k-1}}{k-1!}\, f^{(k-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{k-1!}\, f^{(k)}(t)\, dt.$$

Donc :

$$f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-p-1}}{k-p-1!}\, [f^{(k)}(t) - h_k(t)]\, dt \qquad 0 \leqslant p \leqslant k-1$$

$$|f^{(p)}(x) - s^{(p)}(x)| \leqslant \frac{(b-a)^{k-p}}{k-p-1!} \sup_{t \in [a,\, b]} |f^{(k)}(t) - h_k(t)| \qquad 0 \leqslant p \leqslant k-1$$

Et en posant $\| g \|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,\, b]} |g(x)|$,

$$\|f^{(p)} - s^{(p)}\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^{k-p}}{k-p-1!}\, \| f^{(k)} - h_k \|_\infty \qquad 0 \leqslant p \leqslant k-1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, h_k : \| f^{(p)} - s^{(p)} \|_\infty \leqslant \varepsilon$$

- *COROLLAIRE* - Toute fonction $\in C^\circ\, [a, b]$ peut être approchée uniformément par une f.s. de degré k.

Il suffit, en effet, de remarquer que d'après le théorème de Stone-Weierstrass,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall f \in C^\circ\, [a, b],\ \exists \text{ un polynôme } p_f(x) : \| f - p_f \|_\infty \leqslant \varepsilon$$

THEOREME - Etant donné une fonction arbitraire $f(x)$, il est possible de l'interpoler en $(n + k + 1)$ abscisses où elle est définie soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+k+1}$, au moyen d'une f.s. de degré k admettant les nœuds $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ si et seulement si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$x_1 < t_1 < x_{k+2},\ x_2 < t_2 < x_{k+3}, \ldots,\ x_n < t_n < x_{n+k+1} \tag{1}$$

Ce théorème a été établi par Schoenberg ([44]) comme une conséquence d'une propriété de la fonction fréquence de Polya.

Remarque Importante : Les inégalités précédentes sont vérifiées si les nœuds $t_1, \ldots, t_n$ sont choisis parmi les points d'interpolation $x_2, \ldots, x_{n+k}$.

3 - PROPRIETES MINIMALES DES f.s. DE DEGRE IMPAIR

Nous énoncerons dans ce paragraphe et dans le suivant un certain nombre de théorèmes dont on trouvera la démonstration au chapître suivant.

Notons $S_{2k-1}(\Delta)$ l'ensemble des f.s. $s(x)$ de degré $(2k-1)$ admettant pour nœuds les points de la subdivision :

$$\Delta = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\} \in \mathbf{R}\ ,$$

et telles que dans chacun des intervalles $]-\infty,\ x_1\,[$ et $[x_n,\ +\infty[$, $s(x)$ soit un polynôme de degré $\leqslant k-1$.

THEOREME - Etant donné n nombres réels $y_1, \ldots, y_n$ et un entier k tel que $n \geqslant k$, il existe une f.s. et une seule $\sigma(x) \in S_{2k-1}(\Delta)$ telle que :

$$\sigma(x_i) = y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Notons que si $n = k$, $\sigma(x)$ est le polynôme de degré $(k-1)$ ayant au point x_i la valeur y_i pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

f.s. de base : Ce sont les n fonctions linéairement indépendantes : $\sigma_i(x) \in S_{2k-1}(\Delta)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ telles que $\sigma_i(x_j) = \delta_{ij}$ $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

$$\sigma(x_i) = y_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \Longrightarrow \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \sigma_i(x).$$

Première propriété minimale.

Soit $[a, b]$ un intervalle contenant Δ et $f(x)$ une fonction $\in H^k [a, b]$.

Considérons la f.s. $\sigma(x) \in S_{2k-1}(\Delta)$ qui interpole f aux points de Δ.

$$\forall s \in S_{2k-1}(\Delta) \qquad \int_a^b [s^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)]^2 \, dx \geqslant \int_a^b [\sigma^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)]^2 \, dx$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $s(x) = \sigma(x) + P_{k-1}(x)$ où $P_{k-1}(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant k-1$.

Deuxième propriété minimale.

Pour toutes les fonctions $\varphi \in H^k [a, b]$ qui interpolent f aux points de Δ :

$$\int_a^b [\varphi^{(k)}(x)]^2 \, dx \geqslant \int_a^b [\sigma^{(k)}(x)]^2 \, dx$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $\varphi(x) = \sigma(x)$.

Troisième propriété minimale.

Considérons la fonctionnelle linéaire :

$$g^*(f) = \sum_{p=0}^{k-1} \int_a^b f^{(p)}(x) \, dg_p(x)$$

où g_p est une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, pour $0 \leqslant p \leqslant k-1$.

On peut poser le problème de l'approximation linéaire de $g^*(f)$ de la façon suivante :

a) La subdivision Δ étant donnée et $n \geqslant k$, on cherche à déterminer des nombres réels B_q tels que $\tilde{g}^*(f) = \sum_{q=1}^{n} B_q f(x_q)$ soit égale à $g^*(f)$ pour toute fonction f appartenant à l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant k-1$.

b) D'après un théorème dû à Sard ([37]) on sait que :

$$g^*(f) - \tilde{g}^*(f) = \int_a^b K(t) \, f^{(k)}(t) \, dt,$$

K étant indépendante de f.

Si $n = k$, les coefficients B_q sont déterminés de manière unique.

Si $n > k$, K dépend de $(n-k)$ paramètres.

S'il existe un jeu de coefficients A_q $(1 \leqslant q \leqslant n)$ tels que $\int_a^b [K(t)]^2 \, dt$ soit minimal lorsque $B_q = A_q$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$ on dira que $\sum_{q=1}^{n} A_q f(x_q)$ est la meilleure approximation de $g^*(f)$.

THEOREME - La meilleure approximation de $g^*(f)$ par $\sum_{q=1}^{n} B_q f(x_q)$ est obtenue lorsque $B_q = g^*(\sigma_q)$.

Ce théorème établi par Schoenberg a montré le lien qui existait entre deux théories qui s'étaient développées parallèlement, celle des f.s. polynômiales et la théorie de la meilleure approximation de Sard, ([37]).

4 - PROPRIETES DE CONVERGENCE DES f.s.

- Soit $[a, b]$ un intervalle contenant la subdivision :

$$\Delta_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{et} \quad \|\Delta_n\| = \text{Max}\,(x_1 - a,\ x_{i+1} - x_i,\ b - x_n\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

Si $\sigma_{\Delta_n}(x) \in S_{2k-1}(\Delta_n)$ est la f.s. qui interpole une fonction $f \in H^k\,[a, b]$ aux points de Δ_n :

$$\text{(i)} \qquad \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \int_a^b [\sigma_{\Delta_n}^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)]^2\,dx = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sigma_{\Delta_n}^{(p)}(x) = f^{(p)}(x)$$

uniformément sur $[a, b]$ pour $p = 0, 1, \ldots, (k-1)$.

B - DETERMINATION NUMERIQUE DES f.s.. POLYNOMIALES D'INTERPOLATION

1 - METHODE DES SAUTS DE DERIVEE

Toute f.s. polynômiale d'interpolation de degré $2k-1$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma(x) = \sum_{p=0}^{k-1} a_p\, x^p + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,(x - x_j)_+^{2k-1} \tag{2}$$

Elle est telle que :

$$\begin{cases} \sigma(x_p) = y_p & 1 \leqslant p \leqslant n \quad (3) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_j - x_1)^q = 0 & 0 \leqslant q \leqslant k-1 \quad (4) \end{cases}$$

La connaissance des coefficients $a_0, \ldots, a_{k-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ détermine complètement $\sigma(x)$.

La méthode la plus simple de calcul de ces coefficients consiste à résoudre un système linéaire déduit directement de (3) et (4).

Mais ce système est mal conditionné et l'on obtient de mauvais résultats dès que $n \geqslant 6$ pour $k = 2$.

Nous allons indiquer maintenant une méthode qui donne de meilleurs résultats.

Notons δ_x^k l'application linéaire qui a tout vecteur $\tilde{u} \in \mathbf{R}^n$, ayant pour composantes $(u_1, \ldots, u_n)$ fait correspondre le vecteur $\delta_x^k u \in \mathbf{R}^{n-k}$ de composantes : $(\delta(\tilde{u}\ ;\ x_1, \ldots, x_{k+1}), \ldots, \delta(\tilde{u}\ ;\ x_{n-k}, \ldots, x_n))$ où :

$$\delta(\tilde{u}\ ;\ x_i, \ldots, x_{k+i}) = \sum_{j=i}^{k+i} \frac{u_j}{\omega'(x_j)} \qquad \text{avec} \qquad \omega(x) = \prod_{j=i}^{k+i} (x - x_j)$$

Notons H la matrice associée à l'opérateur δ_x^k, et $\tilde{\lambda}$ le vecteur $\in \mathbf{R}^n$ de composantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

LEMME - $\exists \tilde{\mu} \in \mathbf{R}^{n-k} : \tilde{\lambda} = {}^t H \tilde{\mu}$.

Posons :

$$U = \{\tilde{u} \in \mathbf{R}^n\ :\ u_i = P_{k-1}(x_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$P_{k-1}(x)$, polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$.

On sait que $H\,\tilde{u} = 0 \Longleftrightarrow \tilde{u} \in U$.

Notons S le complémentaire orthogonal de U dans $\mathbf{R}^n$, muni du produit scalaire :

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i \tilde{v}_i \qquad \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbf{R}^n.$$

S est de dimension $(n - k)$.

D'après (4) $\tilde{\lambda} \in S$. Comme H est de rang $(n - k)$, ses colonnes forment une base de S et $\tilde{\lambda} = {}^tH\,\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} \in \mathbf{R}^{n-k}$. Notons $\tilde{\sigma}$ le vecteur de composantes $(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$ et $\tilde{y}$ le vecteur de composantes $(y_1, \ldots, y_n)$.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ (x_2 - x_1)^{2k-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ (x_3 - x_1)^{2k-1} & (x_3 - x_2)^{2k-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ (x_n - x_1)^{2k-1} & (x_n - x_2)^{2k-1} & \cdots & (x_n - x_{n-1})^{2k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$H\tilde{\sigma} = H\,K\,\tilde{\lambda} = H\,K\,{}^tH\,\tilde{\mu} = G\,\tilde{\mu}$

$$H\tilde{\sigma} = H\,\tilde{y} \Longrightarrow G\,\tilde{\mu} = H\,\tilde{y} \tag{5}$$

G est une matrice symétrique dont les éléments g_{ij} sont tels que $g_{ij} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant j - k$.

Nous donnons ci-dessous une procédure algol ([17]) qui calcule successivement $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ et les coefficients $a_0, \ldots, a_{k-1}$.

2 - METHODE D'INTEGRATION

a) Considérons une f.s. de degré trois.

Sa dérivée seconde est formée de segments de droite.

Dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $\quad 1 \leqslant i \leqslant n - 1$:

$$\sigma''(x) = \sigma''(x_i)\,\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + \sigma''(x_{i+1})\,\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Posons :

$$\sigma''(x_j) = M_j \quad 1 \leqslant j \leqslant n \qquad \text{et} \qquad l_j = x_{j+1} - x_j \quad 1 \leqslant j \leqslant n - 1$$

On sait que $M_1 = M_n = 0$ (cf. ch. VI. A.3).

En intégrant deux fois $\sigma''(x)$ et en tenant compte des conditions de continuité, il est facile de montrer que $M_2, \ldots, M_{n-1}$ sont solutions du système linéaire ([48]) :

$$\begin{bmatrix} \frac{l_2+l_3}{3} & \frac{l_3}{6} & & & \\ \frac{l_3}{6} & \frac{l_3+l_4}{3} & \frac{l_4}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{l_{n-2}+l_{n-1}}{3} & \frac{l_{n-1}}{6} \\ & & & \frac{l_{n-1}}{6} & \frac{l_{n-1}+l_n}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_3-y_2}{l_3} - \frac{y_2-y_1}{l_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{l_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\sigma(x) = \frac{M_i}{6l_{i+1}}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6l_{i+1}}(x-x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{l_{i+1}} - M_{i+1}\frac{l_{i+1}}{6}\right)(x-x_i) + \left(\frac{y_i}{l_{i+1}} - M_i\frac{l_{i+1}}{6}\right)(x_{i+1}-x)$$

pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$

Cette méthode donne de très bons résultats.

Nous allons en donner une généralisation dans le cas où $\sigma(x)$ est une f.s. de degré $2k-1$ ([17).

b) Développons la f.s. de degré $2k-1$, $\sigma(x)$, en utilisant la formule de Taylor :

$$\sigma(x) = P_{k-1}(x) + \frac{1}{\overline{k-1}\,!}\int_{x_1}^{x_n} (x-t)_+^{k-1} \quad \sigma^{(k)}(t)\,dt.$$

On en déduit que :

$$\delta(\tilde{\sigma}\ ;\ x_i, \ldots, x_{i+k}) = \int_{x_1}^{x_n} g_i(t)\ \sigma^{(k)}(t)\ dt \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-k$$

où $g_i(t)$ est la différence divisée d'ordre k du vecteur de composantes :

$$((x_i - t)_+^{k-1}, \ldots, (x_{i+k}-t)_+^{k-1})$$

par rapport à $x_i, \ldots, x_{i-k}$

$$\int_{x_1}^{x_n} g_i(t)\ .\ \sigma^{(k)}(t)\ dt = \delta(\tilde{y}\ ;\ x_i, \ldots, x_{i+k}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-k \tag{6}$$

Il est facile de voir que les fonctions $g_i(t)$ sont linéairement indépendantes sur $[x_1, x_n]$.

Il suffit pour cela de remarquer que :

$$g_i(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant x_i \quad \text{ou} \quad t \geqslant x_{i+k}$$

D'autre part, dans l'espace de Hilbert, $\mathcal{L}^2[x_1, x_n]$, $\sigma^{(k)}(x)$ minimise $\|u\|_{\mathcal{L}^2[x_1, x_n]}$ parmi tous les éléments $u \in \mathcal{L}^2[x_1, x_n]$ tels que :

$$(g_i, u)_{\mathcal{L}^2[x_1, x_n]} = \delta(\tilde{y}\ ;\ x_i, \ldots, x_{i+k}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-k \tag{7}$$

En effet, tout élément $u \in \mathcal{L}^2[x_1, x_n]$ vérifiant les conditions (7) peut être considéré comme la dérivée $k^{\text{ième}}$ d'une fonction $s \in H^k[x_1, x_n]$ telle que $s(x_i) = y_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n$.

Il en résulte que :

$$\sigma^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j\ g_j(t)$$

A partir des conditions (4) on peut calculer $\mu_1, \ldots, \mu_{n-k}$ donc on peut déterminer $\sigma^{(k)}(t)$.

Il suffit pour cela d'inverser la matrice symétrique :

$$A = [a_{ij}] \quad \text{où} \quad a_{ij} = \begin{cases} (g_i,\ g_j)_{\mathcal{L}^2[x_1, x_n]} & j < i + k \\ 0 & j \geqslant i + k \end{cases}$$

On peut déterminer complètement $\sigma(t)$ en utilisant l'une des deux méthodes suivantes :

α) On intègre k fois $\sigma^{(k)}(t)$ et on calcule les k constantes d'intégration en écrivant que :

$$\sigma(x_{i_j}) = y_{i_j} \qquad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

les points x_{i_j} étant régulièrement répartis sur $[x_1,\ x_n]$.

β) Dans chaque intervalle $[x_i,\ x_{i+k-1}]$ $(1 \leqslant i \leqslant n - k + 1)$, on détermine $\sigma(x)$.

On en déduit $\sigma'(x_i), \ldots, \sigma^{(k-1)}(x_i)$ et on calcule dans chaque intervalle $[x_j,\ x_{j+1}]$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ les coefficients du polynôme $P_j(x)$ de degré $2k - 1$ tel que :

$$P_j^{(q)}(x_i) = \sigma^{(q)}(x_i) \qquad i = j,\ j+1 \qquad 0 \leqslant q \leqslant k-1 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

Nous indiquons ci-dessous les procédures Algol correspondant aux différentes méthodes que nous avons citées.

PROCEDURES ALGOL

Nous donnons ci-dessous une procédure permettant de calculer les coefficients $M_j (j = 0 \ldots, n)$. Ch. VI B.2.a).

```
Procédure COEFSPLINETROIS (N, X, Y) résultats : (M) ;
valeur N, X, Y ; entier N ; tableau X, Y, M ;
commentaire cette procédure calcule et place dans le tableau M[0 : N] les valeurs des dérivées
secondes en X[I](I = 0,..., N) de la fonction-spline d'interpolation de degré trois prenant les N + 1
valeurs Y[I] aux abscisses X[I], [I] variant de 0 à N avec X[I] < X [I + 1] et N ⩾ 3 ;
début entier I ; tableau D [1 : N - 1] ; réel A, B, C, E ;
    pour I : = N - 1 pas -1 jusqua 1 faire
    début A : = X [I + 1] - X[I]; B : = X [I] - X [I - 1] ; C : = Y [I + 1] - Y [I] ;
          E : = Y [I] - Y[I - 1] ; si I = N - 1 alors
          début D [I] : = (X[I + 1] - X [I - 1])/3 ;
                M[I] : = C/A - E/B
          fin sinon début D[I] : = (12 × D [I + 1] × (X [I + 1] - X [I - 1]) - A × A)
                           /(36 × D [I + 1]) ;
                           M[I] : = C/A - E/B- A × M [I + 1]/(6 × D [I + 1])
                    fin
          fin ; M[0] : = M[N] : = 0 ; pour I : = 1 pas 1 jusqua N - 1 faire
          si I = 1 alors M[I] : = M[I]/ D [I] sinon
          M[I] :=(6 × M[I] - (X [I] - X [I - 1]) × M [I - 1])/(6 × D [I])
fin COEFSPLINETROIS ;
```

Méthode d'intégration locale.

```
procédure METH INTE LOCA (K, N, X, Y, D) ; valeur K, N, X, Y ;
entier K, N ; tableau X, Y, D ;
commentaire cette procédure calcule dans le tableau D[1 : N, 0:K - 1] les dérivées d'ordre 0 à K - 1
aux points X [1 : N] de la fonction-spline prenant aux points X [I] les valeurs Y[I] (d'ordre K) ;
début réel procédure DER POL (K, H, C, T) ; valeur K, H, C, T ;
    entier K, H ; tableau C ; réel T ;
    commentaire cette procédure calcule pour la valeur T la dérivée d'ordre H du polynôme de
    degré K-1 qui s'écrit C [1] + ... + C [K] × T↑(K - 1) ;
    début réel S, U ; entier I, J ;
          S : = C [K] ; pour I : = 1 pas 1 jusqua H faire S :=S × (K - 1)
          pour J : = K - 1 pas -1 jusqua H + 1 faire
          début U : = C [J] ;
          pour I : = 1 pas 1 jusqua H faire U := U × (j - I) ;
                                            S := S × T + U
```

```
     fin ; DER POL : = S
fin DER POL ;
procédure GRESOLSYSLINE...
réel procédure FI (I, H, T) ; valeur I, H, T ;
entier I, H ; réel T ;
commentaire cette procédure calcule pour la valeur T la dérivée d'ordre H de la fonction 4 - 16 ;
début tableau L[0 : K] ; entier P, R ; réel S, U ;
     si T>X [I] alors
     début pour R : = 0 pas 1 jusqua K faire
          si X [I + R] < T alors
          début U : = S : = (T - X [I + R]) ;
               pour P : = 1 pas jusqua 2×K-H-2
               faire S : = S × U ; L [R] : = S
          fin sinon L[R] : = 0
          pour R : = 1 pas 1 jusqua K faire
          pour P : = 0 pas 1 jusqua K - R faire
          L[P] : = (L [P + 1] - L [P])/(X[I + P + R]) - X [I + P]) ; S : = L[0] ;
          pour P : = 1 pas 1 jusqua H faire S :=S×(2×K - P) ;
                                            FI : = S
     fin sinon FI : = 0
fin FI ;

réel procédure DIF DIV TA (J, L) ; valeur J, L ; entier J ;
tableau L ;
commentaire cette procédure calcule la différence divisée du tableau L [0 : K] sur les points
X [J : J + K] ;
début entier I, R ;
     pour R : = 1 pas 1 jusqua K faire
     pour I : = 0 pas 1 jusqua K-R faire
     L[I] : = si ABS (L[I + 1] - L [I]) = 0 alors 0
     sinon (L[I + 1] - L[I])/(X[J + I + R] - X [J + I]) ;
     DIF DIV TA : = L[0]
fin DIF DIV TA ;
CALCUL DES LAMBDAS :
pour I : = 1 pas 1 jusqua N-K faire
début pour J : = pas 1 jusqua si I + K - 1 ≤ N - K alors I + K - 1 sinon N - K faire

     début pour R : = 0 pas 1 jusqua K faire
          L [R] : = FI(I, 0, X[J + R]) ;
          A [J, I] : = A[I, J] : = DIF DIV TA (J, L)
     fin ; pour J : = I + K pas 1 jusqua N - K faire A[I, J] : = A[J, I] : = 0 ;
     pour R : = 0 pas 1 jusqua K faire L[R] : = Y[I + R] ;
     B[I] : = DIF DIV TA (I, L)
fin ;
GRESOLSYSLINE (A, B, LAMBDA, N-K, IMP) ;
aller à SUI ; IMP : ECRIRE ('IMP') ; SUI :
pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire
début si I < N-K+1 alors
     début pour J : = 1 pas 1 jusqua K faire
          début S : = U[I + J - 1] ;
               pour Q : = 1 pas 1 jusqua
               si I + J - 2 < N - K alors I + J - 2
               sinon N - K faire
               S : = S-LAMBDA [Q] × FI(Q, 0, X[I+J - 1]) ; B[J] : = S ;
               pour Q : = 1 pas 1 jusqua K faire
               si Q = 1 alors A [J, Q] : = 1.0 sinon
               A [J, Q] : = X [I + J - 1] (Q - 1)
          fin ; GRESOLSYSLINE (A, B, C, K, OS) ;
          OS
     fin ;
     pour J : = 1 pas 1 jusqua K - 1 faire
     début S : = DER POL (K, J, C, X [I]) ;
```

```
                    pour Q : = 1 pas 1 jusqua
                    si I - 1 < N - K alors I - 1 sinon N-K faire
                    S : = S + LAMBDA [Q] × FI(Q, J, X [I]) ;
                    D [I, J] : = S
               fin
          fin ; pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire D [I, 0] : = Y [I]
     fin METH INTE LOCA (STRATEGIE A) ;
```

CHAPITRE VII

FONCTIONS "SPLINE" GÉNÉRALISÉES

Les premières fonctions "spline" étudiées ont été les f.s. polynômiales d'interpolation.

En 1946 Schoenberg les introduisait dans l'étude du lissage des courbes ([38]). Holladay en 1957 démontrait les propriétés de courbure minimum de certaines f.s. d'interpolation de degré trois. En 1962-1963 Walsh, Ahlberg et Nilson ([48]) étendaient ces propriétés aux f.s. périodiques de degré trois et établissaient leurs propriétés minimales et certaines propriétés de convergence.

De Boor et Schoenberg ([15]), un peu plus tard, énonçaient les mêmes propriétés pour des f.s. non périodiques et de degré impair.

En 1964 Schoenberg ([42]) introduisait les f.s. trigonométriques et Walsh, Ahlberg et Nilson ([2]), ([3]) énonçaient certaines propriétés minimales et les propriétés de convergence de f.s. d'interpolation relatives à des opérateurs différentiels de la forme :

$$L \equiv p_0(x)\ D^n + p_1(x)\ D^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x)\ D + p_n(x)$$

où :

$$p_k(x) \in C^n[0\ ,\ 1] \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

Greville avait étudié peu avant le cas d'opérateurs différentiels à coefficients constants.

En 1959 Golomb et Weinberger établissaient deux propriétés minimales des f.s. définies dans un espace de Hilbert, ([25]). Leur point de vue qui était très voisin de celui des auteurs que nous avons cités semble avoir été ignoré.

Dans ce chapître, nous généralisons la définition des f.s. donnée par Schoenberg. Le point de vue que nous adoptons nous permet d'établir, très simplement, les résultats déjà connus et de les généraliser. Nous donnons en particulier la forme générale des f.s. à n variables définies sur certains ouverts de $\mathbf{R}^n$.

Dans le cas des f.s. relatives à un opérateur différentiel ou aux dérivées partielles T nous montrons le lien qui existe entre la f.s. et un noyau de Green de T.

1 - DEFINITION DES FONCTIONS "SPLINE" GENERALISEES

Soit H un espace de Hilbert séparable défini sur le corps des réels $\mathbf{R}$. Si f, g $\in$ H, $(f,\ g)_H$ représentera le produit scalaire de ces deux éléments et $\|f\|_H$ la norme de f. On notera aussi θ_H l'élément neutre de H.

Dans la suite tout sous-espace linéaire fermé appartenant à un espace de Hilbert H sera considéré comme un espace de Hilbert admettant la norme et le produit scalaire induits par ceux de H.

Considérons deux espaces de Hilbert séparables X et Y définis sur $\mathbf{R}$ et une application linéaire et continue T de X sur Y.

Notons X_1 le noyau de T et X_2 le complémentaire orthogonal de X_1 dans X : $X = X_1 \oplus X_2$ - le symbole $\oplus$ désignant la somme directe de deux ensembles.

T etant continue, T^* existe.

$$\forall x \in X \quad \text{et} \quad \forall y \in Y \quad (Tx, y)_Y = (x, T^* y)_X$$

T^* est linéaire, continue et applique biunivoquement Y sur X_2. Considérons aussi N fonctionnelles linéaires et continues définies sur X, linéairement indépendantes et représentées par les éléments $k_i \in X$. Ces fonctionnelles engendrent un sous-espace linéaire $K \subset X$. Notons Ψ son complémentaire orthogonal : $X = K \oplus \Psi$.

Hypothèses - Nous supposerons que :

a) X_1 est de dimension q.

b) $N \geqslant q$.

c) $\Psi \cap X_1 = \theta_X$.

Premier problème - Φ_α désignant l'ensemble des éléments $\varphi \in X$ tels que :

$$(k_i, \varphi)_X = \alpha_i \quad 1 \leqslant i \leqslant N \quad \alpha_i \in \mathbf{R}$$

nous cherchons s'il existe un élément $\sigma \in \Phi_\alpha$ tel que :

$$\| T\sigma \| = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \Phi_\alpha} \| T\varphi \|_Y$$

Si $\varphi_o \in \Phi_\alpha$ $\forall \varphi \in \Phi_\alpha$, $\varphi = y_o + \psi$, $\psi \in \Psi$.

En particulier, si $\{s_j\}$ désigne la base de K telle que :

$$(k_i, s_j) = \delta_{ij}, \quad s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j . s_j \in \Phi_\alpha \cap K.$$

Et $\forall \varphi \in \Phi_\alpha$, $\varphi = s + \psi$, $\psi \in \Psi$.

LEMME - $T\Psi$ est un sous-espace linéaire fermé de Y.

En effet, considérons une suite $h_n \in T\Psi$ qui converge vers $h \in Y$. $h_n = T\Psi_n$, $\psi_n \in \Psi$.

Puisque T applique X sur Y, il existe, d'après un théorème de Banach ([11]), une suite d'éléments de X, $x_n = T\psi_n$ qui converge vers un élément $x \in X$ tel que $h = Tx$.

$$\forall n \qquad T(\psi_n - x_n) = \theta_Y \Longrightarrow x_n = \psi_n + a_n,\ a_n \in X_1$$

Puisque $k_i = k_{i,1} + k_{i,2}$, $k_{i,1} \in X_1$, $k_{i,2} \in X_2$

$$(k_i, x_n)_X = (k_i, a_n)_X = (k_{i,1}, a_n)_{X_1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} (k_{i,1}, a_n)_{X_1} = (k_i, x)_X$$

Comme $\Psi \cap X_1 = \theta_X$, il existe parmi les éléments $k_{i,1}$, $(1 \leqslant i \leqslant N)$ q éléments linéairement indépendants.

Ainsi, la suite a_n convergeant faiblement dans X_1, qui est de dimension finie q, converge aussi fortement dans cet espace.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in X_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n = x - a = \psi \in \Psi.$$

Puisque T est continue $T\psi_n = h_n \longrightarrow T\psi = h$. c.q.f.d.

Remarquons maintenant que $T\Phi_\alpha$ se déduit de $T\Psi$ par la translation d'amplitude Ts. Si a est la projection de Ts sur $T\Psi$, il existe un élément unique $\psi_s \in \Psi$ tel que $T\psi_s = a$.

Posons $\sigma = s - \psi_s$, $\sigma \in \Phi_\alpha$.

$T\sigma$ est la projection unique de θ_Y sur $T\Phi_\alpha$ et $\| T\sigma \|_Y = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \Phi_\alpha} \| T\varphi \|_Y$

Définition - σ est la f.s. de Φ_α relative à T.

Fonctions "Spline" de base - Les éléments $\sigma_j = s_j - \psi_{s_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ sont linéairement indépendants.

En effet,

$$\theta_X = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \sigma_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j s_j - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_{s_j} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{N} \lambda_j s_j = \theta_X \Longrightarrow \lambda_j = 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Les vecteurs σ_j engendrent un sous-espace linéaire $S \subset X$ de dimension N.

THEOREME - $\sigma = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma_j$ est l'élément unique de Φ_α tel que :

$$\| T\sigma \|_Y = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \Phi_\alpha} \| T\varphi \|_Y$$

L'unicité de σ résulte de l'hypothèse c).

COROLLAIRE - $\forall x_1 \in X_1, \sum_{j=1}^{N} (k_j, x_1)_X \sigma_j = x_1$; en effet, si $\sum_{j=1}^{N} (k_j, x_1)_X \sigma_j = x'_1$,

$$(k_j, x'_1)_X = (k_j, x_1)_X \quad 1 \leqslant j \leqslant N \Longrightarrow \| Tx'_1 \|_Y \leqslant \| T x_1 \|_Y$$

et comme $\|T x_1\|_Y = 0$, $\quad \|T x'_1\|_Y = \|T x_1\|_Y \Longrightarrow x'_1 = x_1$.

2 - PREMIERES PROPRIETES DES FONCTIONS "SPLINE"

a) Puisque $T\sigma$ est orthogonal à $T\Phi_\alpha$ donc à $T\Psi$,

$$(T\sigma, T\psi)_X = 0, \forall \psi \in \Psi \Longleftrightarrow (T^* T\sigma, \psi)_X = 0, \forall \psi \in \Psi \Longrightarrow T^* T S \subset K \cap X_2$$

Inversement, si $T^* T \rho_o \in K \cap X_2$, alors $(T \rho_o, T\psi)_Y = 0, \forall \psi \in \Psi$.

Donc :

$$\| T \rho_o \|_Y = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \Phi_{\rho_o}} \| T_\varphi \|_Y, \quad \Phi_{\rho_o} = \{\varphi \in X : (k_j, \varphi) = (k_j, \rho_o)_X, 1 \leqslant j \leqslant N\}$$

et :

$$\rho_o = \sum_{j=1}^{N} (k_j, \rho_o)_X \sigma_j \in S$$

D'où :

$$\boxed{T^* T S = K \cap X_2}$$

b) Etant donné $x \in X$ considérons :

$$\sigma_x = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma_j \quad \text{où} \quad \alpha_j = (k_j, x)_X$$

$$\| T \sigma_x \|_Y = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \Phi_x} \| T\varphi \|_Y \quad \Phi_x = \{\varphi \in X : (k_j, \varphi)_X = (k_j, x)_X \quad 1 \leqslant j \leqslant N\}$$

$$x - \sigma_x \in \Psi \Longrightarrow (T(x - \sigma_x), T\sigma_j)_Y = 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant N$$

et :

$$\boxed{\| T(x - \sigma_x) \|_Y = \operatorname*{Min}_{\rho \in S} \| T(x - \rho) \|_Y}$$

3 - DEUXIEME PROBLEME

h étant un élément quelconque $\in X$ on veut l'approcher par un élément :

$$k = \sum_{j=1}^{N} A_j \ k_j$$

tel que $e = h - k$ vérifie :

$$(e \, , \, x_1)_X = 0 \qquad \forall x_1 \in X_1$$

Alors $e \in X_2$ et $\forall x \in X$, $(e \, , \, x)_X = (g \, , \, Tx)_Y$ avec $e = T^* g$.

Nous cherchons "la meilleure approximation de h" si elle existe, c'est-à-dire le vecteur k tel que $\|g\|_Y$ soit minimal.

THEOREME - Parmi tous les coefficients A_i tels que $e \in X_2$, les coefficients $A_i = (h \, , \, \sigma_i)_X$ sont les seuls à minimiser $\|g\|_Y$.

En effet, puisque $e = h - \sum_{j=1}^{N} A_j \ k_j \in X_2$, e parcourt l'intersection de $h - K$ avec X_2 et g décrit un translaté de $T^{*-1}(K \cap X_2)$ c'est-à-dire un translaté de TS.

Pour que $\|g\|_Y$ soit minimal, il faut et il suffit que g soit orthogonal à TS, c'est-à-dire que e soit orthogonal à S. Pour cela, il faut et il suffit que :

$$(e, \ \sigma_i)_X = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

c'est-à-dire que :

$$\left(h - \sum_{j=1}^{N} A_j \ k_j \, , \, \sigma_i \right)_X = (h \, , \, \sigma_i)_X - A_i = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

En se restreignant à certains éléments de X, Golomb a établi une autre propriété minimale des fonctions "spline" ([25]) :

THEOREME - Soit :

$$C_\alpha(r) = \{x \in \Phi_\alpha \ : \ \|Tx\|_Y \leqslant r, \ \ r > 0\}$$

$h \in X$, $(h, \sigma)_X$ est le milieu du segment de $\mathbf{R}$ décrit par les nombres $(h \, , x)_X$ ou $x \in C_\alpha(r)$.

Remarquons tout d'abord que $C_\alpha(r)$ étant convexe, $(h \, , \, x)_X$ décrit un intervalle de $\mathbf{R}$ lorsque x décrit $C_\alpha(r)$.

D'autre part, $(h \, , \, x)_X - (h \, , \, \sigma)_X = (h \, , \, \psi)_X$ où $x - \sigma = \psi \in \Psi$.

Puisque :

$$x \in C_\alpha(r) \, , \quad \|T(\sigma + \psi)\|_Y^2 = \|T\sigma\|_Y^2 + \|T\psi\|_Y^2 \leqslant r^2$$

et :

$$\|T\psi\|_Y \leqslant (r^2 - \|T\sigma\|_Y^2)^{\frac{1}{2}} = a.$$

La propriété cherchée est alors une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME - Il existe $\psi^* \in \Psi$ tel que $\|T\psi^*\|_Y \leqslant a$ et :

$$(h \, , \, \psi^*)_X = \sup_{\|T\phi\|_Y \leqslant a} |(h \, , \, \psi)_X|$$

En effet, comme $\Psi \cap X_1 = \theta_X$, T applique biunivoquement Ψ sur $T\Psi$. Ψ (resp. $T\Psi$) étant un sous-espace linéaire fermé de X (resp. Y) la restriction V de T à Ψ est un isomorphisme, la transformation adjointe V^* de V existe et c'est aussi un isomorphisme.

Notons h^o la projection de h sur Ψ.

$$\operatorname*{Sup}_{\|T\psi\|_Y \leqslant a} |(h\,,\,\psi)_X| = \operatorname*{Sup}_{\|V\varphi\|_{T\psi} \leqslant a} |(h\,,\,\psi)_X| = \operatorname*{Sup}_{\|V\varphi\|_{T\psi} \leqslant a} |(h^o\,,\,\psi)_\psi| = \operatorname*{Sup}_{\|V\varphi\|_{T\psi} \leqslant a} |(V^{*-1}\,h^o\,,\,V\psi)$$

$\psi^* = a \dfrac{(V^*\ V)^{-1}\ h^o}{\|V^{*-1}\ h^o\|_{T\psi}}$ est l'élément cherché de Ψ.

4 - PROPRIETES DUALES

Considérons la transformation W telle que :

$$Wx = T^{*-1}\ x_2 \quad \text{où} \quad x = x_1 + x_2\,,\ x_1 \in X_1\,,\ x_2 \in X_2\,,$$

et soit :

$$\Gamma_a = \{\gamma \in X\ :\ (\sigma_{i,2}\,,\ \gamma)_X = a_i \in \mathbf{R} \qquad 1 \leqslant i \leqslant N\}$$

THEOREME (Joly) $k = \sum_{i=1}^{N} a_i\,k_i$ est élément unique de Γ_a tel que :

$$\|W\,k\|_Y = \operatorname*{Min}_{\gamma \in \Gamma_a} \|W\,\gamma\|_Y$$

Remarquons d'abord que $k \in X_2$.
En effet, si γ est un élément quelconque $\in \Gamma_a$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} a_i\ k_i\,,\ x_1\Big)_X = \sum_{i=1}^{N} (\sigma_{i,2},\ \gamma)_X \,.\, (k_i\,,\ x_1)_X = \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i\,,\ \gamma_2)_X \,.\, (k_i\,,\ x_1)_X = (\gamma_2\,,\ x_1)_X = 0$$

Notons $B = \{\beta \in X\ :\ (\sigma_{i,2}\,,\ \beta)_X = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant N\}$

$$(Wk,\ W\beta)_Y = \Big(T^{*-1}\ \Big(\sum_{i=1}^{N} a_i\ k_i\Big),\ T^{*-1}\ \beta_2\Big)$$

Puisque $T^*\ TS = T^*\ TS_2 = K \cap X_2$ (S_2 étant la projection de S sur X_2),

$$(Wk,\ W\beta)_Y = (T\,\sigma_2,\ T^{*-1}\ \beta_2)_Y \qquad \sigma_2 \in S_2$$

et :

$$(Wk,\ W\beta)_Y = (\sigma_2,\ \beta_2)_X = \Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\ \sigma_{i,2}\,,\ \beta_2\Big) = 0$$

Donc Wk est orthogonal à B et aussi à Γ_a qui est un hyperplan translaté de B   c.q.f.d.

Remarque 1.

L'existence et l'unicité de la f.s. peuvent être établies aussi quand on considère, au lieu d'un nombre fini, une infinité dénombrable de fonctionnelles linéaires et continues représentées par des éléments k_i, $i \geqslant 1$ linéairement indépendants.

En effet, notons Ψ^i le complémentaire orthogonal de k_i dans X. Posons :

$$\Psi = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Psi^i \quad \text{et} \quad \Phi_\alpha = \{\varphi \in X\ :\ (k_i,\ \varphi)_X = \alpha_i \in \mathbf{R} \qquad i \geqslant 1\}.$$

Supposons que $\Psi \cap X = \theta_X$ et que Φ_α ne soit pas vide.

On montrerait comme ci-dessus que $T\Psi$ est fermé, donc aussi $T\Phi_\alpha$ et qu'il existe un élément unique $\sigma \in \Phi_\alpha$ tel que :

$$\|T\sigma\|_Y = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \Phi_\alpha} \|T\varphi\|_Y\,.$$

Remarque 2.

Considérons deux applications linéaires et continues T_1 (resp. T_2) de X sur Y (resp. Z) et de noyaux X_1 (resp. Ψ).

Posons $\Phi_\alpha = \{\varphi \in X : T_2\varphi = \alpha \in Z\}$.

Supposons :

(i) X_1 de dimension finie ou $T\Psi$ fermé.

(ii) Φ_α non vide et $\Phi_\alpha \cap X_1$ vide.

(iii) $\Psi \cap X_1 = \theta_X$.

On peut établir comme ci-dessus l'existence et l'unicité d'une f.s. σ telle que :

$$\|T_1\,\sigma\|_Y = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \Phi_\alpha} \|T_1\varphi\|_Y .$$

B - EXEMPLES DE FONCTIONS "SPLINE"

Nous utiliserons ci-dessous les mêmes notations qu'au paragraphe A de ce chapitre.

1 - FONCTION "SPLINE" RELATIVE A UN OPERATEUR DIFFERENTIEL

a) Considérons les espaces $X = H^q\,[0,1]$, $Y = \mathcal{L}^2\,[0,1]$, et un opérateur différentiel T qui applique X sur Y (Cf. Ch. I). La f.s. σ relative à T et aux fonctionnelles k_i ($1 \leqslant i \leqslant N$), est telle que : $T^*\,T\,\sigma \in K \cap X_2$ c'est-à-dire :

$$T^*\,T\sigma = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,k_i \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,k_{i,1} = \theta_X$$

Donc :

$$T^*\,T\sigma = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,k_{i,2}.$$

Posons :

$$\gamma_i = T^{*-1}\,k_{i,2} \in Y, \qquad T\,\sigma = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,\gamma_i .$$

Si G(t, u) est le noyau de Green du problème différentiel :

$$Tx = \theta_X \qquad x \in X_2.$$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_1(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_0^1 G(t,u)\,\gamma_i(u)\,du \\ \sigma_1 \in X_1 \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,k_{i,1} = 0 \end{cases}}$$

On détermine complètement σ en écrivant que $(k_i, \sigma)_X = \alpha_i \quad 1 \leqslant i \leqslant N$.

Remarquons de plus que :

$$\int_0^1 G(t,u)\,\gamma_i(u)\,du = \left(k_i(z), \int_0^1 G(t,u)\,G(z,u)\,du\right)_X$$

b) Propriétés de convergence.

THEOREME : Soit $\Delta = \{t_1, \ldots, t_n\}$ une subdivision de $[0,1]$.

Posons :

$$\| \Delta_n \| = \text{Max } (t_1 , t_{i+1} - t_i , 1 - t_n ; 1 \leqslant i \leqslant n - 1)$$

Si $\sigma_{\Delta_n}(t)$ est la f.s. qui interpole une fonction $x \in H^q [0 , 1]$ aux points de Δ :

(i) $\lim\limits_{\|\Delta_n\| \to 0} \|T(\sigma_{\Delta_n} - x)\|_Y = 0.$

(ii) $\lim\limits_{\|\Delta_n\| \to 0} \sigma_{\Delta_n}^{(p)}(t) = x^{(p)}(t)$ uniformément sur $[0 , 1]$ pour $p = 0, 1, \ldots, (q - 1)$.

Considérons une suite infinie de subdivisions de $[0 , 1]$: $\Delta_m = \{t_{im} : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ et les fonctionnelles k_i^m telles que :

$$(k_i^m , x)_X = x(t_{im}) \qquad \forall x \in X.$$

Notons K^m le sous-espace vectoriel de X engendré par les vecteurs $k_1^m, \ldots, k_m^m$ et Ψ^m le complémentaire orthogonal de K^m dans X.

Supposons tout d'abord que : $\forall m$, $K_{m+1} \supset K_m$.

Nous allons montrer que si $\lim\limits_{m \to \infty} \|\Delta_m\| = 0$, la fermeture de $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m \cap X_2$ est X_2.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

$$\forall \psi_2 \in X_2 \quad \forall m \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, k_i^m , \psi_2\right)_X = 0$$

les coefficients λ_i étant tels que :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, k_i^m , x_1\right)_X = 0 \qquad \forall x_1 \in X_1 .$$

Notons $v_1 , \ldots , v_q$, q éléments formant une base de X_1.

Il existe des coefficients λ_i qui ne sont pas tous nuls tels que :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=j}^{j+q} \lambda_i \, v_p(t_{im}) = 0 \\ &\sum_{i=j}^{j+q} \lambda_i \, \psi_2 (t_{im}) = 0 \end{aligned} \right. \qquad 1 \leqslant p \leqslant q \qquad 1 < j \leqslant m - q$$

Si $\| \Delta_m \|$ est suffisamment petit, le système ci-dessus, linéaire par rapport aux coefficients λ_i a un déterminant non nul.

On en déduit que :

$$\begin{vmatrix} v_1(t_{jm}) & \ldots\ldots & v_1(t_{j+q,m}) \\ \vdots & & \\ v_q(t_{jm}) & \ldots\ldots & v_q(t_{j+q,m}) \\ \psi_2(t_{jm}) & \ldots\ldots & \psi_2(t_{j+q,m}) \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\exists w_j \in X_1 : \psi_2(t_{im}) = w_j(t_{im}) \qquad j \leqslant i \leqslant j + q$$

Puisque X_1 est de dimension q et que w_j coïncide avec ψ_2 en $(q + 1)$ points, $\psi_2(t_{im}) = w(t_{im})$ $1 \leqslant i \leqslant m$; $w \in X_1$, lorsque $\| \Delta_m \|$ est suffisamment petit.

Posons : $$\psi = \psi_2 - w$$

$$\psi(t_{im}) = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Or :

$$\forall t \in [t_{im}, t_{i+1,m}], |\psi(t)| = \left|\int_{t_{im}}^{t} \psi'(z)\, dz\right| \leqslant \left(\int_{t_{im}}^{t} dz\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_{t_{im}}^{t} [\psi'(z)]^2\, dz\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\Delta_m\| . \|\psi\|_q$$

Comme ceci est vrai quel que soit m, $\psi(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Donc :

$$\psi = \theta_X \qquad \text{et} \qquad \psi_2 = w = \theta_X .$$

<u>Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où les ensembles K ne sont pas emboîtés.</u>

Considérons une suite de points distincts $\{\theta_j : j \geqslant 1\}$ dense dans $[0, 1]$. Notons a_j l'élément de X tel que :

$(a_j, x)_X = x(\theta_j)$ et A_n l'espace vectoriel engendré par les éléments $a_1, \ldots, a_n$. Supposons que $A_{n+1} \supset A_n$ (cas d'une suite obtenue par dichotomie de $[0, 1]$, par exemple).

On sait que :

$$\forall x_2 \in X_2, \forall \eta \geqslant 0, \exists n, \forall m > n \quad \|x_2 - g_m\|_X \leqslant \eta$$

g_m étant la projection de x_2 sur A_m telle que :

$$g_m = \sum_{j=1}^{m} \mu_j\, a_j$$

avec :

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j\, a_{j,1} = \theta_X .$$

m étant fixé, à tout point θ_j on peut associer un point $t'_j \in \{t_{ip}\}$ qui pour p suffisamment élevé sera aussi voisin de θ_j qu'on le voudra et tel aussi que :

$$t'_j \neq t'_1 \quad \text{si} \quad j \neq 1.$$

Nous noterons χ_j la fonctionnelle correspondante : $(\chi_j, x)_X = x(t'_j)$.

Posons :

$$\rho_{ip} = \begin{cases} \mu_j & \text{si } t_{ip} = t'_j \qquad q+1 \leqslant j \leqslant m \\ \lambda_j & \text{si } t_{ip} = t'_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant q \\ 0 & \text{si } t_{ip} \neq t'_j \end{cases}$$

les coefficients λ_j étant déterminés par les relations :

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_{ip}\, v_r(t_{ip}) = 0 \qquad 1 \leqslant r \leqslant q.$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j\, v_r(t'_j) = -\sum_{j=q+1}^{m} \mu_j\, v_r(t'_j) \qquad 1 \leqslant r \leqslant q .$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{q} (\lambda_j - \mu_j)\, v_r(t'_j) = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j\, v_r(t'_j) = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j\, [v_r(t'_j) - v_r(\theta_j)] \qquad 1 \leqslant r \leqslant q$$

Les équations ci-dessus nous montrent que, m étant fixé, $\lambda_j - \mu_j$ est aussi voisin de zéro qu'on le désire à condition que p soit suffisamment élevé.

Or :

$$\| x_2 - \sum_{i=1}^{p} \rho_{ip} \, k_i^p \|_X = \sup_{\|z\|=1} \left| \left(x_2 - \sum_{i=1}^{p} \rho_{ip} \, k_i^p , \, z \right)_X \right| .$$

Mais :

$$\left| \left(x_2 - \sum_{i=1}^{p} \rho_{ip} \, k_i^p , \, z \right)_X \right| = \left| \left(x - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, a_j \, , \, z \right)_X + \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \, a_j - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, \chi_j - \sum_{j=q+1}^{m} \mu_j \, \chi_j \, , \, z \right)_X \right| \Longrightarrow \left| \left(x_2 - \sum_{i=1}^{p} \rho_{ip} \, k_i \, , \, z \right)_X \right|$$

$$\leqslant \eta + \left| \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, [z(\theta_j) - z(t'_j)] \right| + \left| \sum_{j=1}^{q} (\mu_j - \lambda_j) \, z(t'_j) \right|$$

Comme :

$$| z(\theta_j) - z(t'_j) | = \left| \int_{\theta_j}^{t'_j} z'(t) \, dt \right| \leqslant | t'_j - \theta_j |^{\frac{1}{2}} \, \| z \|_X$$

et comme d'autre part :

$$| z(t'_j) | \leqslant A \, \| z \|_X \qquad \text{(Cf. Ch. I),}$$

on en déduit que l'on peut choisir m et p de façon que :

$$\| x_2 - \sum_{i=1}^{p} \rho_{ip} \, k_i^p \|_X \leqslant \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall x_2 \in X_2 \, , \; \forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n \, , \forall m > n \; : \; \| x_2 - h_m \|_X \leqslant \varepsilon$$

où h_m est la projection de x_2 sur $K_m \cap X_2$.

Donc :

$$\forall \eta > 0 \, , \forall y \in Y \, , \exists n \, , \forall m > n \, , \exists \gamma_m \in T^{*-1} (K_m \cap X_2) : \; \| \gamma_m - y \|_Y \leqslant \eta \, ,$$

puisque T^{*-1} est continue et applique X_2 sur Y.

Comme : $$TS_m = T^{*-1} (K_m \cap X_2)$$

$$\exists s_m \in S_m \; : \; T \, s_m = \gamma_m \, .$$

et :

$$\forall \eta > 0 \, , \forall x \in X \, , \exists n \, , \; \forall m > n \, , \; \exists s_m \in S_m \; : \; \| Ts - Tx \|_Y \leqslant \eta$$

Si σ_{Δ_m} est la fonction "spline" relative à l'opérateur T qui interpole x aux points de la subdivision $\{t_{im}\}$ on sait que :

$$\| T \sigma_{\Delta_m} - Tx \|_Y \leqslant \| Ts_m - Tx \|_Y \leqslant \eta \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Démontrons la deuxième partie de ce théorème :

Posons :

$$\psi_m = \sigma_{\Delta_m} - x \, , \qquad \psi_m(t_{im}) = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant m \, .$$

$$\psi_m = \psi_{1,m} + \psi_{2,m} \, , \quad \psi_{1,m} \in X_1 \, , \quad \psi_{2,m} \in X_2 \, .$$

Comme la restriction L de T à X_2 est un isomorphisme,

$$\| \psi_{2,m} \|_X \leqslant \| L^{-1} \| \quad \| T \psi \|_Y$$

Lorsque $m \longrightarrow \infty$ $\| T\psi_m \|_Y \longrightarrow 0$ et $\psi_{2,m}(t)$ tend uniformément vers zéro sur $[0,1]$, ainsi que ses dérivés jusqu'à l'ordre $(q-1)$.

D'autre part :

$$\psi_{1,m} = \sum_{r=1}^{q} a_r^m \, v_r \qquad v_r \in X_1 \qquad a_r^m \in \mathbf{R}$$

Considérons q points $\theta_1, \ldots, \theta_q \in [0,1]$ tels que le déterminant :

$$\widetilde{W} = \begin{vmatrix} v_1(\theta_1) & \ldots\ldots & v_1(\theta_q) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ v_q(\theta_1) & \ldots\ldots & v_q(\theta_q) \end{vmatrix} \neq 0$$

Pour m suffisamment grand, on peut trouver q points.

$t_1', \ldots, t_q' \in \Delta_m$ assez voisins de $\theta_1, \ldots, \theta_q$ (respectivement) pour que le déterminant du système :

$$\sum_{r=1}^{q} a_r^m \, v_r \, (t_j') = -\psi_{2,m}(t_j') \qquad 1 \leqslant j \leqslant q,$$

soit aussi voisin de $\widetilde{W}$ qu'on le désire.

Il en résulte que :

$$\lim_{m \to \infty} a_r^m = 0 \qquad 1 \leqslant r \leqslant m$$

et que :

$$\| \psi_{1,m} \|_X \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad m \longrightarrow \infty.$$

Donc :

$$\| \psi_m \|_X \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad m \longrightarrow \infty.$$

Dans un segment contenant q points successifs de Δ_m, ψ_m s'annule au moins q fois et sa dérivé p$^{\text{ième}}$ au moins $(q-p)$ fois, $1 \leqslant p \leqslant q-1$. Soit θ un point de ce segment où $\psi_m^{(q-1)}(\theta) = 0$.

$$|\psi_m^{(q-1)}(t)| = \left| \int_\theta^t \psi_m^{(q)}(u) \, du \right| \leqslant |t-\theta|^{\frac{1}{2}} \, \| \psi_m^{(q)} \|_Y \leqslant q \, \| \Delta_m \| \, . \, \| \psi_m^{(q)} \|_Y$$

et $\lim_{m \to \infty} \psi_m^{(q-1)}(t) = 0$ uniformément pour $t \in [0,1]$.

On en déduit facilement que :

$$\lim_{m \to \infty} \psi_m^{(q-p)}(t) = 0$$

uniformément pour $t \in [0,1]$ et $1 \leqslant p \leqslant q$.

2 - FONCTION "SPLINE" RELATIVE A UN OPERATEUR AUX DERIVEES PARTIELLES

Considérons les espaces $X = H^k(\Omega)$, $Y = A_k \in [H(\Omega)]^m$ et l'application T_1 de X sur Y qui ont été définis au chapitre V.

Considérons N fonctionnelles linéaires et continues définies sur X linéairement indépendantes et représentées par les éléments $l_i \in X$. Ces fonctionnelles engendrent un sous-espace vectoriel de X.

Notons Ψ son complémentaire orthogonal.

Si Δ_1 est le noyau de T_1 de dimension p et Δ_2 son complémentaire orthogonal dans X, nous supposerons que :

$$N \geqslant p \quad \text{et} \quad \Psi \cap \Delta_1 = \theta_X .$$

Notons :

$$\Phi_\alpha = \{\varphi \in X : (l_i , \varphi)_k = \alpha_i \in \mathbf{R} \quad 1 \leqslant i \leqslant N\}$$

Il en résulte :

$$\exists \sigma \text{ unique } \in \Phi_\alpha : \quad |||T_1 \sigma|||_m = \min_{\varphi \in \Phi_\alpha} |||T_1 \varphi|||_m$$

Comme on l'a fait au paragraphe précédent on pourrait montrer que :

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_1(t) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, ((G(t, u), \gamma_j(\underline{u})))_m . \\ \sigma_1 \in \Delta_1 \qquad \sum_{j=1}^{N} l_{j,1} = \theta_X \end{cases}$$

où :

$$l_j = l_{j,1} + l_{j,2} , \; l_{j,1} \in \Delta_1 , \; l_{j,2} \in \Delta'_2 \quad \text{et} \quad l_{j,2} = \Lambda_i^* \gamma_j$$

$G(t, u)$ est le noyau de Green relatif à Λ_1 qui est orthogonal à Δ_1 quand on le considère comme fonction de x.

Les propriétés de convergence établies ci-dessus pourraient être démontrées aussi dans ce cas.

CHAPITRE VIII

SUR CERTAINES APPLICATIONS DES FONCTIONS "SPLINE"

A.1 - INTERPOLATION ET APPROXIMATION DES FORMES LINEAIRES

A cause de leurs propriétés minimales, les f. s. polynômiales donnent, en général, de meilleurs résultats que les polynômes dans l'interpolation des fonctions et l'approximation des formes linéaires.

De nombreuses formules optimales d'interpolation et d'approximation de dérivées ou d'intégrales, ont été déterminées par Sard ([37]).

Golomb et Weinberger ([25]) ont établi aussi certaines formules optimales et donné des majorations précises de l'erreur.

En utilisant d'autres opérateurs que l'opérateur différentiel D^n on pourra déterminer des fonctions "spline" qui seront utiles en Analyse Numérique.

2 - APPROXIMATION DE FONCTIONNELLES LIEES A LA SOLUTION DE CERTAINS OPERATEURS LINEAIRES

a) Soit L une application linéaire et continue d'un espace de Hilbert X dans un espace de Hilbert Z.

Supposons que le problème :

$$\begin{cases} L\,u = g & u \in X \quad g \in Z \\ (l_{i,u}) = \beta_i & l_i \in X \quad 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

admette une solution u et une seule.

Supposons aussi que l'on veuille déterminer une approximation de la valeur d'une fonctionnelle linéaire et continue définie sur X, appliquée à u et représentée par un élément $l \in X$ (par exemple la valeur de la solution u en un point t).

Choisissons parmi toutes les fonctionnelles définies sur Z, certaines d'entre elles, linéairement indépendantes, représentées par des éléments $h_j \in Z$, $(1 \leqslant j < p.)$, (par exemple les fonctionnelles telles que les nombres $(h_j\,,\ g)_Z$ puissent être calculés avec précision).

Puisque L est continue : $(h_j\,,\ Lv)_Z = (l_{j+n}\,,\ v)_X \qquad \forall v \in X.$

La donnée des éléments $h_j \in Z$ correspond à la donnée d'éléments $l_{j+n} \in X$ qui définissent p fonctionnelles linéaires supplémentaires sur X.

Nous savons que :

$$(l_{j+n}\,,\ u)_X = (h_j\,,\ g)_Z \qquad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Supposons aussi que les p fonctionnelles $l_1, \dots, l_{n+p}$ soient linéairement indépendantes.

Le système :

$$\begin{cases} (l_i\,,\ u)_X \ = \beta_i & 1 \leqslant i \leqslant n \\ (l_{j+n}\,,\ u)_X = (h_j\,,\ g)_Z & 1 \leqslant j \leqslant p \end{cases}$$

n'est pas équivalent, en général, au problème posé.

Cependant, si les fonctionnelles h_j sont convenablement choisies, on peut obtenir une bonne approximation de 1, en déterminant, comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, la meilleure approximation de 1 au moyen d'une combinaison linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n+p} \lambda_j\ l_j\,.$$

$\sum_{j=1}^{n+p} \lambda_j\ l_j$ sera telle que :

$$\Big(1 - \sum_{j=1}^{n+p} \lambda_j\ l_j\,,\ x\Big)_X = 0 \qquad \forall x \in X_1$$

X_1 étant un sous-espace linéaire de X de dimension $k < n + p$ (par exemple, l'ensemble des polynomes de degré inférieur ou égal à $k-1$).

3 - UTILISATION DES f.s. DANS LA RESOLUTION D'UN PROBLEME VARIATIONNEL PAR LA METHODE DE GALERKIN

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}$ et V un sous-espace vectoriel fermé dans $H^1(\Omega)$ muni de la topologie induite par $H^1(\Omega)$, avec $H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$. Notons θ_V. l'élément neutre de V.

Considérons sur V la forme bilinéaire a(u, v) vérifiant les hypothèses h1)

$$+\ a(u\,,\ v) \leqslant c\ \|u\|_V\ \|v\|_V \qquad c > 0 \qquad \forall u\,,\ v \in V.$$

$$++\ a(u\,,\ u) \geqslant \alpha\ \|u\|_V^2 \qquad \alpha > 0 \qquad \forall u \in V$$

$a(u\,,\ v) = (\mathcal{A} u\,,\ v)_V = (u\,,\ \mathcal{A}^* v)_V$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont des isomorphismes de V sur lui-même.

Soit $f \in H^0(\Omega)$: on sait que :

$$\exists \tilde{u} \text{ unique } \in V :\ a(\tilde{u}\,,\ v) = (f\,,\ v)_{H^0(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

Nous ferons maintenant les hypothèses suivantes h2) :

(i) $\tilde{u} \in H^q(\Omega)$ $(q \geqslant 2)$. Cette propriété se déduit dans de nombreux cas du théorème de Friedrichs ([48]).

(ii) V admet une base formé d'éléments $w_i \in H^q(\Omega)$ $(i \geqslant 1)$.

Notons W_n le sous-espace vectoriel de $H^q(\Omega)$ engendré par les éléments $\{w_1, \dots, w_n\}$ et W la fermeture de $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ dans $H^q(\Omega)$. $W \subset V$ algébriquement et topologiquement.

De plus $\tilde{u} \in W$.

Si $u,\ v \in W \quad a(u\,,\ v) \leqslant c\ \|u\|_V \cdot \|v\|_V \leqslant c\ \|u\|_W \cdot \|v\|_W$.

Donc $a(u\,,\ v) = (A\,u\,,\ v)_W = (u\,,\ A^* v)_W \quad \forall u\,,\ v \in W$.

Et puisque $|a(u\,,\ v)| = |(\mathcal{A} u\,,\ v)_V| \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|u\|_W \cdot \|v\|_W$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(W;W)} \leqslant \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(V;V)} \qquad \text{et} \qquad \|A^*\|_{\mathcal{L}(W;W)} \leqslant \|\mathcal{A}^*\|_{\mathcal{L}(V;V)}$$

A est une application de W dans lui-même.

Posons :

$$k_i = A^*\ w_i \qquad i \geqslant 1 \qquad k_i \in W.$$

Les éléments k_i sont linéairement indépendants.

En effet,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; k_i = \theta_W \Longrightarrow \left(w, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; k_i\right)_W = 0 \qquad \forall w \in W$$

$$\Longrightarrow \left(Aw, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; w_i\right)_W = \left(\alpha w, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; w_i\right)_V$$

$$= a\left(w, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; w_i\right) = 0 \qquad \forall w \in W$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; a\,(w_j \, , \; w_i) = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{puisque} \quad \det\,[a(w_j \, , \; w_i)] \neq 0$$

Notons K^n le sous-espace vectoriel de W engendré par $k_1, \ldots, k_n$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} K^n$ est dense dans W.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

Il existerait $w \in W$, $w \neq \theta_W$ tel que :

$$(w \, , \; k_i)_W = 0 \quad i \geqslant 1 \Longrightarrow (Aw, \; w_i)_W = (\alpha w \, , \; w_i)_V = 0 \quad i \geqslant 1 \Longrightarrow \alpha w = \theta_V \Longrightarrow w = \theta_W .$$

Posons $\Psi^n = \{ \psi \in W \; : \; a(\psi, \; w_i) = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$

$$W = \Psi^n \oplus K^n .$$

Soit L un opérateur différentiel linéaire qui applique continûment $H^q(\Omega)$ sur $H^o(\Omega)$.

Notons T la restriction de L à W, X_1 le noyau de T et X_2 son complémentaire orthogonal dans W.

Supposons que les hypothèses h3) soit vérifiées.

(iii) L applique W sur un sous-espace vectoriel fermé $E \subset H^o(\Omega)$.

(iv) X_1 est de dimension finie r.

(v) $\Psi^n \cap X_1 = \theta_W$ si $n \geqslant r$.

Alors la transformation T^* adjointe de T existe et c'est un isomorphisme de X_2 sur lui-même.

Posons :

$$\Phi_f^n = \{\varphi \in W \; : \; a(\varphi \, , \; w_i) = (f \, , \; w_i)_{H^o(\Omega)} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Des hypothèses h1, h2, h3, on déduit comme au chapitre VII que $T\Psi^n$ est fermé dans E et qu'il existe un élément $\sigma^n \in W$ unique tel que :

$$\|T \, \sigma^n\|_{H^o(\Omega)} = \min_{\varphi \in \Phi_f^n} \|T\varphi\|_{H^o(\Omega)}$$

σ^n est une f.s.

THEOREME - $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma^n = \tilde{u}$ fortement dans W.

Dem - Notons σ_j^n les f.s. relatives à T telles que :

$$a(\sigma_j^n, \; w_i) = \delta_{ij} \qquad 1 \leqslant i \; , j \leqslant n$$

Les éléments σ_j^n sont linéairement indépendants car :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; \sigma_j^n = \theta_W \Longrightarrow a\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; \sigma_j^n \, , \; w\right) = 0 \qquad \forall w \in W \Longrightarrow a\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; \sigma_j^n, \; w_i\right) = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \Longrightarrow \lambda_j = 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

Soit S^n l'espace vectoriel engendré par les f.s. σ_j^n.

Il est facile de montrer que : $\sigma^n = \sum_{i=1}^{n} (f, w_i)_{H^o(\Omega)} \cdot \sigma_j^n$ et que $T^* \; T \; S^n = K^n \cap X_2$ (Cf. Ch. VII).

D'autre part, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (K^n \cap X_2)$ est dense dans X_2.

En effet, puisque $\bigcup_{n=1}^{\infty} K^n$ est dense dans W :

$$\forall w_2 \in X_2, \; \forall \varepsilon > 0, \; \exists n, \exists k \in K^n : \; \| w_2 - k \|_W \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire si $k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; k_i$:

$$\| w_2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; k_{i,2} \|_W + \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; k_{i,1} \|_W \leqslant \varepsilon \qquad \text{avec} \quad k_i = k_{i,1} + k_{i,2}, \; k_{i,1} \in X_1, \; k_{i,2} \in X_2 .$$

De l'hypothèse (iv) on déduit qu'il existe r scalaires μ_i qui ne sont pas tous nuls et tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; k_{i,1} = w_1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \; k_{i,1} .$$

Posons : $\mu_i = 0$, $i > r$ et $\rho_i = \lambda_i - \mu_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \; k_{i,1} = \theta_W \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \rho_i \; k_i \in \bigcup_{p=1}^{n} (K^p \cap X_2).$$

Ainsi :

$$\| w_2 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \; k_i \|_W = \| w_2 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \; k_{i,2} \|_W = \| w_2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; k_{i,2} - \sum_{i=1}^{r} \mu_i \; k_{i,2} \|_W \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{r} |\mu_i| \cdot \| k_{i,2} \|_W$$

Pour n suffisamment grand $\|w_1\|_W$ est aussi petit qu'on le veut. Il en est donc de même de μ_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ et de :

$$\sum_{i=1}^{r} |\mu_i| \cdot \| k_{i,1} \|_W .$$

<u>Puisque T^{*-1} est continue et applique X_2 sur lui-même $\bigcup_{n=1}^{\infty} TS^n$ est dense dans E.</u>

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n, \forall m > n, \exists s^m \in S^m : \; \| Ts^m - Tu \|_{H^o(\Omega)} \leqslant \varepsilon$$

Or :

$$\| T \sigma^m - Tu \|_{H^o(\Omega)} \leqslant \| Ts^m - Tu \|_{H^o(\Omega)} \leqslant \varepsilon$$

Posons $\sigma^m - u = \psi^m \in \Psi^m$:

$$\lim_{m \to \infty} T \psi^m = \theta_{H^o(\Omega)} \quad \text{fortement dans } H^o(\Omega).$$

Comme $\Psi^m \cap X_1 = \theta_W$ dès que $m \geqslant r$:

$$\lim_{m \to \infty} \psi^m = \theta_W \quad \text{fortement dans W . c.q.f.d.}$$

B - FONCTIONS "SPLINE" D'AJUSTEMENT

1 - Nous ferons dans toute la suite les mêmes hypothèses qu'au début du chapitre VII.

Considérons l'ensemble $Z = Y \times \mathbf{R}^N$

Si $u = (y, \dots, a_i, \dots)$ $y \in Y$ $a_i \in \mathbf{R}$ $1 \leqslant i \leqslant N$

et $v = (t, \dots, b_i, \dots)$ $t \in Y$ $b_i \in \mathbf{R}$ $1 \leqslant i \leqslant N$

sont deux éléments quelconques de Z nous poserons :

$$(u, v)_Z = (y, t)_Y + \rho \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\, b_i \right), \quad \rho \text{ scalaire positif.}$$

et :

$$\| u \|_Z = \{ (u, u)_Z \}^{\frac{1}{2}}$$

Avec le produit scalaire et la norme ainsi définis, Z est un espace de Hilbert.

Considérons l'application L :

$$X \ni x \xrightarrow{L} Lx = (Tx, \dots, (k_i, x)_X \dots) \in Z$$

a) L est continue car :

$$\| L x \|_Z \leqslant \left\{ \| T \|^2 + \sum_{i=1}^{N} \| k_i \|_X^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \| x \|_X$$

b) L applique biunivoquement X sur V = LX :

$$\left. \begin{array}{l} Lx_1 = Lx_2 \Longrightarrow L(x_1 - x_2) = \theta_Z \\ (k_i, x_1 - x_2)_X = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant N \end{array} \right\} \Longrightarrow x_1 - x_2 \in \Psi \cap X \Longrightarrow x_1 = x_2$$

c) V est un sous-espace linéaire fermé dans Z.

Si $x_n \in X$ et si $Lx_n = u_n = (y_n, \dots, a_{in}, \dots) \longrightarrow u = (y, \dots, a_i, \dots)$ dans Z quand $n \longrightarrow \infty$, alors $\| Tx_n - y \|_Y \longrightarrow 0$ et $(k_i, x_n)_X - a_i \longrightarrow 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Puisque T est continue et applique X sur Y,

$$\exists f_n \in X : T f_n = y_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} f_n = f \in X \ ([11])$$

Donc $Tf = y$. Or :

$$T(x_n - f_n) = \theta_Y \Longrightarrow x_n - f_n = b_n \in X_1$$

Mais $(k_i, x_n)_X = (k_i, f_n)_X + (k_i, b_n)_X \longrightarrow a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$ quand $n \longrightarrow \infty$. Donc :

$$(k_i, b_n)_X \longrightarrow a_i - (k_i, f)_X$$

pour $1 < i < N$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Puisque X est de dimension finie et $N > q$, $b_n \longrightarrow b \in X_1$ quand $n \longrightarrow \infty$. De plus,

$$(k_i, b)_X = a_i - (k_i, f)_X \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

et $x_n \longrightarrow b + f = x \in X$ quand $n \longrightarrow \infty$, avec $T x = y$ et $(k_i, x)_X = a_i$ $1 \leqslant i \leqslant N$. Il en résulte que :

d) L^{-1} est continue.

e) L^* existe : $\forall x \in X$, $\forall u \in V$. $(Lx, u)_Z = (x, L^* u)_X$.

f) L^* applique biunivoquement V sur X :

Si $u = Lx$, $L^* u = L^* Lx = T^* T x + \rho \left[\sum_{i=1}^{N} (k_i, x)_X . k_i \right]$.

2 - FONCTIONS "SPLINE" D'AJUSTEMENT.

- Etant donné $a = (\theta_Y, \ldots, \alpha_i, \ldots) \in Z$ il existe un élément et un seul s_a tel que :

$$\|Ls_a - a\|_Z = \operatorname*{Min}_{x \in X} \|Lx - a\|_Z$$

Si p_a est la projection de a sur V : $s_a = L^{-1} p_a$; s_a est la f.s. d'ajustement relative à T et au point a.

a) Notons σ_a la f.s. ordinaire relative à T (Cf. Ch. VII) telle que : $(k_i, \sigma_a)_X = (k_i, s_a)_X$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$.

$$\|T \sigma_a\|_Y \leqslant \|Ts_a\|_Y$$

Mais :

$$\|Ls_a - a\|_Z \leqslant \|L\sigma_a - a\|_Z .$$

D'où :

$$\|Ls_a - a\|_Z = \|L \sigma_a - a\|_Z \quad \text{et} \quad \underline{s_a = \sigma_a}$$

b) Fonctions "spline" de base.

Posons $a_i = (\theta_Y, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \ldots 0)$.

Notons p_i la projection de a_i sur V et $s_i = L^{-1} p_i$; $a = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i$ se projette sur V en $p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i$ et inversement p peut être considéré comme la projection de a sur V.

$$\forall x \in X, \ (p_i - a_i, Lx)_Z = 0 \Longrightarrow (L^* L s_i, x)_X = (a_i, Lx)_Z = (k_i, x)_X$$

Donc $L^* L s_i = \rho k_i$. Or $L^* L$ applique biunivoquement X sur lui-même.

Les éléments s_i sont donc linéairement indépendants.

Ils engendrent un espace $\hat{S}$ à N dimensions appartenant à l'espace des fonctions "spline" S (Cf. Ch. VII).

Comme S est de dimension N, $\hat{S} = S$.

COROLLAIRE -

$$\forall x_1 \in X_1 \quad \sum_{i=1}^{N} (k_i, x_1)_X . s_i = x_1$$

c) Notons s_∞ la f.s. relative à l'opérateur T telle que $(k_i, x)_X = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ et $\overset{*}{s}_0$ l'élément de X_1 qui minimise :

$$\sum_{i=1}^{N} [(k_i, x)_X - \alpha_i]^2.$$

On montre facilement que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\rho \to \infty} s_\rho = s_\infty \\ \lim\limits_{\rho \to 0} s_\rho = s_0 \end{cases}$$

où s_ρ est la f.s. d'ajustement relative à T et au scalaire ρ.

3 - AUTRES PROPRIETES DE MINIMISATION DES f.s. D'AJUSTEMENT

a) *THEOREME* - Si $C_a(r) = \{x \in X : \|Lx - a\|_Z \leqslant r\}$, pour $\forall h \in X$, $(h, s_a)_X$ est le milieu du segment de **R** décrit par les nombres $(h, x)_X$, x appartenant à $C_a(r)$.

Dem - $(h, x)_X - (h, s_a)_X = (g, Lx - Ls_a)_Z$ avec $h = L^* g \quad g \in V$.

Or :

$$|(g, Lx - Ls_a)_Z| \leqslant \|g\|_Z \cdot \|Lx - Ls_a\|_Z \leqslant \|g\|_Z \cdot \{\|Lx - a\|_Z^2 - \|Ls_a - a\|_Z^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Donc $(h, x)_X \in [c, d]$ avec :

$$c = (g, Ls_a)_Z - \|g\|_Z \cdot \{r^2 - \|Ls_a - a\|_Z^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$d = (g, Ls_a)_Z + \|g\|_Z \cdot \{r^2 - \|Ls_a - a\|_Z^2\}^{\frac{1}{2}}$$

D'autre part, si $\bar{x}$ est un élément où $|(g, Lx)_Z|$ atteint sa borne supérieure quand $\|Lx\|_Z = 1$:

$$\|g\|_Z = \sup_{\|Lx\|_Z = 1} |(g, Lx)_Z| = (g, L\bar{x})_Z \quad \text{où} \quad \|L\bar{x}\|_Z = 1$$

Si :

$$x_1 = s_a - \bar{x}\,\{r^2 - \|Ls_a - a\|_Z^2\}, \quad \|Lx_1 - a\|_Z^2 = r^2 \quad \text{et} \quad (g, Lx_1)_Z = c$$

De même, si $x_2 = s_a + \bar{x}\,\{r^2 - \|Ls_a - a\|_Z^2\}^{\frac{1}{2}}$:

$$\|Lx_2 - a\|_Z^2 = r^2 \quad \text{et} \quad (g, Lx_2)_Z = d$$

D'où :

$$(h, s_a)_X = \frac{c + d}{2}$$

b) $h \in X$, $k_i \in X$ et les scalaires α_i, $(1 \leqslant i \leqslant N)$ étant donnés, nous allons chercher à approcher $(h, x)_X$ pour $\forall x \in X$ au moyen d'une combinaison linéaire : $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i \alpha_i$, les coefficients c_i étant tels que :

$$\Big(h - \sum_{i=1}^{N} c_i k_i, x_1\Big)_X = 0 \quad \forall x_1 \in X_1$$

Alors, s'il existe $x_1 \in X_1$ tel que : $\alpha_i = (k_i, x_1)_X$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$:

$$(h, x_1)_X - \sum_{i=1}^{N} c_i \alpha_i = 0$$

En général, on a $\forall x \in X$:

$$(h, x)_X - \sum_{i=1}^{N} c_i \alpha_i = \Big(h - \sum_{i=1}^{N} c_i k_i, x\Big)_X + \sum_{i=1}^{N} c_i [(k_i, x)_X - \alpha_i]$$

$$= (\gamma, Tx)_Y + \sum_{i=1}^{N} c_i [(k \;, x)_X - \alpha_i] = (G, Lx - a)_Z$$

où :

$$h - \sum_{i=1}^{N} c_i \; k_i = T^* \, \gamma \qquad \text{et} \qquad G = \left(\gamma, \ldots, \frac{c_i}{\rho}, \ldots\right)$$

Définition - $a = (\theta_Y, \ldots, \alpha_i, \ldots)$ étant donné, nous dirons que $\sum_{i=1}^{N} c_i \, \alpha_i$ est la meilleure approximation de $(h, x)_X$ pour $\forall x \in X$ lorsque les scalaires c_i seront tels que $\|G\|_Z$ soit minimale.

THEOREME - Quel que soit a, on obtient la meilleure approximation de $(h, x)_X$ si et seulement si $c_i = (h, s_i)_X$.

Dem - Considérons G_1 et G_2 tels que :

$$(h, x)_X - \sum_{i=1}^{N} c_i \, \alpha_i = (G_1, Lx - a)_Z \qquad \text{et} \qquad (h, x)_X - \sum_{i=1}^{N} d_i \, \alpha_i = (G_2, Lx - a)_Z$$

Posons $c_i - d_i = \rho r_i$ et $k_{i,2} = T^* e_i$ sachant que $k_i = k_{i,1} + k_{i,2}$, $k_{i,1} \in X_1$ et $k_{i,2} \in X_2$:

$$G_1 - G_2 = \left(-\rho \left[\sum_{i=1}^{N} r_i \; s_i\right], \ldots, r_i, \ldots\right)$$

Puisque $T^* \; T \, S = K \cap X_2$ (Cf. Ch. VII), $\rho \left[\sum_{i=1}^{N} r_i \; e_i\right] = T \, s$, $s \in S$ et :

$$G_1 - G_2 = Ls - b \;, \; b = (\theta_Y, \ldots, \beta_i, \ldots)$$

où $\beta_i = (k_i, s)_X - r_i$.

Or nous savons que :

$$T \, s_i = \rho \left[\sum_{i=1}^{N} r_{ij} \; s_j\right]$$

Donc :

$$\rho \, k_i = L^* \; L s_i = T^* \; T s_i + \rho \left[\sum_{j=1}^{N} (k_j, s_i)_X . \; k_j\right] = -\rho \left[\sum_{j=1}^{N} r_{ij} \; k_{j,2}\right] + \rho \left[\sum_{j=1}^{N} (k_j, s_i)_X . \; k_j\right]$$

$$= \rho \left[\sum_{j=1}^{N} (-r_{ij} + (k_j, s_i)_X) . \; k_j\right]$$

car :

$$\sum_{j=1}^{N} r_{ij} \; k_{j,1} = \theta_X$$

Si $\beta_{ij} = (k_j, s_i)_X - r_{ij}$ et $b_i = (\theta_Y, \ldots, \beta_{ij}, \ldots)$:

$$k_i = \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} \; k_j \qquad \text{d'où} \qquad \beta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \Longrightarrow b_i = a_i$$

Donc si :

$$s = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \; s_i = s_a, \qquad r_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \; r_{ji} \qquad \text{et} \qquad \beta_i = \alpha_i .$$

Et $b = a$. G décrit un tranlaté de l'espace vectoriel U engendré par les vecteurs $L \, s_i - a_i$ $1 \leqslant i \leqslant N$.

$\|G\|_Z$ sera minimale si G est orthogonal à U.

Ceci aura lieu quand $c_i = (h, s_i)_X$.

Alors $(g, Ls_i - a_i)_X = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant N \Longrightarrow (G, Ls_a - a)_X = 0$.

Remarque importante.

La théorie des f.s. d'ajustement peut être faite aussi comme la théorie des f.s. ordinaires dans les cas plus généraux indiqués dans les remarques 1 et 2 du chapitre VII.

4 - AUTRE ENONCE DU PROBLEME DE L'AJUSTEMENT AU MOYEN DE f.s.

Posons :

$$W_y = \{x \in X : \|T x\|_Y \leqslant y\}$$

et

$$E_a^2(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} [(k_i, x)_X - \alpha_i]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

s_∞ étant la f.s. définie ci-dessus, cherchons s'il existe un élément $\tilde{x} \in W_y$ tel que :

$$E_a(\tilde{x}) = \operatorname*{Min}_{x \in W_y} E_a(x) \qquad \text{pour} \qquad 0 < y < \|T s_\infty\|_Y$$

Considérons :

$$U_y = S \cap W_y$$

U_y est un ensemble non vide puisque $U_y \supset X_1$.

U_y est convexe et fermé.

D'autre part :

$$E_a(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} [(k_i, x)_X - (k_i, s_\infty)_X]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = F(x - s_\infty)$$

où :

$$F(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} [(k_i, x)_X]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Il est facile de montrer que $F(x)$ vérifie l'identité de la médiane et que c'est une norme sur S.

Il existe donc un élément et un seul $\tilde{s} \in S$ tel que :

$$E_a(\tilde{s}) = \operatorname*{Min}_{s \in U_y} E_a(s)$$

$\tilde{s}$ est le point de U_y qui est à la plus courte distance de s_∞.

De plus, $\|T\tilde{s}\|_Y = y$. En effet, s'il n'en était pas ainsi il existerait un élément $\sigma = \lambda\,\tilde{s} + \mu\, s_\infty \in S$ avec $\lambda > 0, \mu > 0$ et $\lambda + \mu = 1$, tel que $\|T\sigma\|_Y = y$.

Comme la boule de centre s_∞ et d'équation $F(s - s_\infty) \leqslant E_a(\tilde{s})$ est strictement convexe, en aurait : $E_a(\sigma) = F(\sigma - s_\infty) < E_a(\tilde{s})$ ce qui est impossible.

Supposons maintenant qu'il existe un élément $\tilde{x} \neq \tilde{s}$, tel que :

$$E_a(\tilde{x}) = E_a(\tilde{s}) \qquad \tilde{x} \in W_y .$$

Notons $\tilde{\sigma}$ la f.s. telle que $(k_i, \tilde{\sigma})_X = (k_i, \tilde{x})_X$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$.

Puisque $\tilde{x} \in W_y$ et que $\|T\tilde{\sigma}\|_Y \leqslant \|T\tilde{x}\|_Y$ $\quad \tilde{\sigma} \in U_y$:

$$E_a(\tilde{\sigma}) = E_a(\tilde{s}) \qquad \tilde{\sigma} = \tilde{s}$$

Il en résulte que $(k_i, \tilde{x})_X = (k_i, \tilde{s})_X$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$ et que $y = \|T\tilde{s}\|_Y \leqslant \|T\tilde{x}\|_Y \leqslant y$ c'est-à-dire que $\|T\tilde{x}\|_Y = y$. D'après la propriété d'unicité de la f.s. : $\tilde{x} = \tilde{\sigma}$.

THEOREME - Il existe un élément unique $\tilde{s} \in W_y$ tel que $E_a(\tilde{s}) = \operatorname*{Min}_{x \in W_y} E_a(x)$; $\tilde{s}$ est une f.s. et $\|T\tilde{s}\|_Y = y$.

La procédure LISPLINE 1(N, X, Y, K, EPS, Z) permet de calculer les valeurs ajustées Z, en N points d'abscisses X, par la minimisation de :

$$\varepsilon \int_{x_1}^{x_n} [f^{(k)}(x)]^2 \, dx + \sum_{i=1}^{N} [f(x_i) - y_i]^2$$

Y est le tableau des valeurs y_i

```
Procédure LISPLINE 1(N, X, Y, K, EPS, Z) ;
Valeur N, X, Y, K, EPS ;
entier N, K ; réel EPS ; tableau X, Y, Z ;
début
      Procédure GRADCONJUGUE (A, X, XO, N, ECART) ;
      (Procédure en bibliothèque)
      Procédure COEFSAUDERISPLN (X, Y, N, K, LAMBDA) ;
      tableau X, Y, LAMBDA ; entier N, K ;
      commentaire Cette procédure calcule dans le tableau LAMBDA [1 : N] les sauts de dérivées
      de la spline-fonction d'interpolation de degré 2xK - 1 et passant par les N points X [I], Y[I] ;
      début entier I, J, H ; tableau A [1 : N, 1 : N], L [1 : N], MU, B [1 : N - K], G [1 : N - K] ;
      Procédure GRESOLSYSLINE (A, B, X, N, IMPOSSIBLE) ;
      (Procédure en bibliothèque)
      Procédure DIFDIV (X, Y, N, K, G) ;
      Tableau X, Y, G ; entier N, K ;
            Début tableau L [1 : N] ; entier [I, J]
            si K > N alors aller a END ;
            Pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire L[I] : = Y [I] ;
            Pour J : = 1 pas 1 jusqua K faire
            Pour I : = 1 pas 1 jusqua N - J faire
            L[I] : = (L[I] - L[I + 1])/(X[I] - X [I + J]) ;
      Pour I : = 1 pas 1 jusqua N - K faire
      G[I] : = L[I] ;
      aller a JO ;
END : ECRIRE ('IMDIFDIV pour', K)
JO : fin DIFDIV ;
      Pour J : = 1 pas 1 jusqua N faire
            début pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire
                  L[I] : = si J >.I alors 0.0
                        sinon (X[I] - X [J]) ↑ (2 × K - 1) ;
                  DIF DIV (X, L, N, K, G) ;
                  pour I : = 1 pas 1 jusqua N - K faire
                  A [I, J] : = G [I] fin ;
      Pour I : = 1 pas 1 jusqua N-K faire
            début pour J : = 1 pas 1 jusqua N faire
                  L [J] : = A [I, J] ;
                  DIF DIV (X, L, N, K, G) ;
                  pour J : = 1 pas 1 jusqua N-K faire
                  A [I, J] : = G [J] fin ;
      DIF DIV (K, Y, N, K, B) ;
      GRESOLSYSLINE (A, B, MU, N-K, IMPOSS) ;
      PourI: = 1 pas 1 jusqua N faire
            Pour J : = 1 pas 1 jusqua N - K faire
            début A [I, J] : = 1.0 ;
                  si J > I V I > J + K
            alors A [I, J] : = A [I, J] - 1.0
            sinon pour H : = 0 pas 1 jusqua I - J - 1, I - J + 1 pas 1
            jusqua K faire
            A [I, J] : = A [I, J] / (X [I] - X [J + M]) fin ;
      Pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire
            début LAMBDA [I] : = 0.0 ;
```

```
                pour J : = 1 pas 1 jusqua N - K faire
                LAMBDA [I] : = LAMBDA [I] + MU [J] × A [I, J] fin ;
IMPOSS : fin COEFSAUDERISPLN ;
      entier I, J, U ;
      tableau YBASE, LAMBDA [1 : N], A[1 : N, 1 : N] ;
      U : = 1 ;
      Pour I : = 1 pas 1 jusqua 2 × K - 1 faire U : = U × I ;
BASE : Pour J : = 1 pas 1 jusqua N faire
      début pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire
            Y BASE [I] : = si I = J alors 1.0 sinon .0 ;
            COEFSAUDERISPLN (X, Y BASE, N, K, LAMBDA) ;
            pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire
            A [J, I] : = LAMBDA [I] fin ;
K IMPAIR : si K > (K÷2) × 2 alors
      début pour J : = 1 pas 1 jusqua N faire
            A [J, I] : = - A [J, I] fin ;
REGLAGE : Pour J : = 1 pas 1 jusqua N faire
            Pour I : = 1 pas 1 jusqua N faire
            A [I, J] : = U × EPS × A [I, J] ;
      Pour J : = 1 pas 1 jusqua N faire
      A[J, J] : =1.0 + A [J, J] ;
MINIMUM : GRADCONJUGUE (A, Y, Z, Y, N,₁₀ - 8) fin LISPLINE 1 ;
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.H. AHLBERG and E.N. NILSON - Convergence properties of the spline fit J. Soc. Indust. Appl. Math. 11 (1963) 95 - 104.

[2] J.H. AHLBERG, E.N. NILSON and J.L. WALSH - Properties of generalized splines Proc. Nat. Acad. Sc. (USA) Vol. 52 n° 6 (1964) 1412 - 1419.

[3] J.H. AHLBERG, E.N. NILSON and J.L. WALSH - Best approximation and convergence properties of higher order spline approximations. J. of Math. and Mech. Vol. 14 n° 2 (1965) 231 - 244.

[4] N. ARONZAJN - Theory of reproducing kernels. Trans. Am. Math. Soc. vol. 68 (1950) 337 - 404.

[5] M. ATTEIA - Une nouvelle méthode pour l'écriture d'approximations discrètes des solutions des problèmes linéaires différentiels ou aux dérivées partielles. C.R.A.S. t. 256 (1963) 4147 - 4149.

[6] M. ATTEIA - Sur l'approximation d'un problème différentiel linéaire avec conditions aux limites. C.R.A.S. t. 257 (1963) 1434 - 1437.

[7] M. ATTEIA - Conditionnement normalisé des matrices associées à un problème différentiel linéaire avec conditions aux limites. Actes du Congrès de l'AFCALTI (1964) 173 - 178.

[8] M. ATTEIA - Généralisation de la définition et des propriétés des "spline" fonctions. C.R.A.S. t. 260 (1965) 3550 - 3553.

[9] M. ATTEIA - "Spline" fonctions généralisées. C.R.A.S. t. 261 (1965) 2149 - 2152.

[10] M. ATTEIA - Existence et détermination des fonctions "spline" à plusieurs variables. C.R.A.S. t. 262 (1966) 575 - 578.

[11] S. BANACH - Théorie des opérations linéaires. Chelsea Publishing Co (1955).

[12] G. BIRKHOFF and C. DE BOOR - Error Bounds for cubic spline interpolation. J. Math. Mech. Vol. 13 (1964) 827 - 835.

[13] G. BIRKHOFF and C. DE BOOR - Piecewise polynomial interpolation and approximation Proc. of the symposium on approximation. General Motors (1964) Elsevier Publishing Co. 164 - 190.

[14] L. BOLLIET, N. GASTINEL, P.J. LAURENT - Manuel Algol Hermann (1964).

[15] C. DE BOOR - Best approximation properties of spline fonctions of odd degree J. Math. Mech. 12 (1963) 747 - 750.

[16] N. BOURBAKI - Espaces vectoriels topologiques. Ch. I à V Hermann.

[17] CARASSO - Méthodes numériques pour l'obtention de fonctions-spline. Thèse Grenoble (Mars 1966).

[18] COURANT and HILBERT - Méthods of mathematical Physics Interscience Publishers (1953).

[19] J. DENY et J.L. LIONS - Les espaces du type de Beppo Levi Annales de l'Institut Fourier tome V. 305 - 370.

[20] DUNFORD. SCHWARTZ - Linear operators. Part 1 and 2. Interscience Publishers (1963).

[21] T. FORT - Finite differences and difference equations in the real domain Clarendon Press (1948).

[22] L. FOX - Numerical solutions of ordinary and partial differential equations. Pergamon Press (1962).

[23] N. GASTINEL - Matrices du 2ème degré et normes générales en Analyse Numérique. Thèse Grenoble (décembre 1960).

[24] M. GOLOMB - Lectures on theory of approximation. Argonne National Laboratory (1962).

[25] M. GOLOMB and H.F. WEINBERGER - Optimal approximation and error bounds. R. Langer Editor : On numerical approximation. Univ of Wisconsin Press. (1959) 117 - 190.

[26] I.M. GUELFAND et G.E. CHILOV - Les distributions.Dunod (1962).

[27] P. HENRICI - Discrete variable methods in ordinary differential equations.J. Wiley (1962).

[28] E.L. INCE - Ordinary differential equations. N.Y. Dover (1956).

[29] M. JANET - Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Journal de Math. (1920).

[30] KANTOROVITCH and AKILOV - Functional Analysis in normed spaces.Pergamon Press (1964).

[31] KOPAL - Numerical Analysis. Chapman and Hall (1965).

[32] J. KUNTZMANN - Méthodes numériques. Interpolation. Dérivées. Dunod (1959).

[33] LANCZOS - Linear differential operators.

[34] J.L. LIONS - Equations différentielles et opérationnelles.Springer-Verlag (1961).

[35] MILTON E. ROSE - Finite difference schemes for differential equations.

[36] G. DE RHAM - Variétés différentiables. Hermann.

[37] SARD - Linear approximation. Am. Math. Soc. (1963).

[38] I.J. SCHOENBERG - Quart. Appl. Maths. 4 (1946) 45 - 99 et 112 - 141.

[39] I.J. SCHOENBERG - Spline interpolation and the higher derivatives Proc. Nat. Ac. (USA) Vol. 51 (1964) 24 - 28.

[40] I.J. SCHOENBERG - Spline interpolation and best quadrature formulae. Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 70 (1964) 143 - 148.

[41] I.J. SCHOENBERG - On best approximation of linear operators. Kon. Nederlandse Akad. Van Wetensehappen Proo. Series A 67 (1964) 153 - 163.

[42] I.J. SCHOENBERG - On trigonometric spline interpolation. J. Math. Mech. Vol. 13 (1964) 795 - 825.

[43] I.J. SCHOENBERG - Spline function and the problem of graduation. Proc. of the Nat. Acad. Sc. (USA) Vol. 52 (1964) 947 - 950.

[44] I.J. SCHOENBERG and A. WHITNEY - Sur la positivité des déterminants de translation des fonctions de fréquence de Polya avec une application au problème d'interpolation par des fonctions "spline". C.R.A.S. 1949.

[45] L. SCHWARTZ - Théorie des distributions. Tomes I et II. Hermann.

[46] SOBOLEV - Applications of functional Analysis in Mathematical Physics. Am. Math. Soc. (1963).

[47] S. STERNBERG - Lectures on Differential Geometry. Prentice Hall (1964).

[48] J.L. WALSH, J.H. AHLBERG and E.N. NILSON - Best approximation properties of the spline fit. J. Math. Mech. Vol. 11 (1962) 225 - 234.

[49] K. YOSIDA - Functional Analysis. Springer Verlag (1965).

[50] A.C. ZAANEN - Linear Analysis. North Holland Puthishing Co (1960).

TABLE DES MATIÈRES

Pages

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 296
1966