Méthodes numériques pour l'obtention de fonctions-spline

Claude Carasso

N° d'ordre

THÈSE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

Mathématiques Appliquées

par

Claude Carasso

Licencié ès Sciences

Méthodes numériques pour l'obtention de Fonctions-Spline

Thèse soutenue le 28 mars 1966, devant la commission d'examen :

Monsieur J. KUNTZMANN	Président
Messieurs N. GASTINEL P.J. LAURENT	Examinateurs

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES M. FORTRAT P.
M. MORET L.

DOYEN M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL L.	MAGNETISME
	HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
	KRAVTCHENKO J.	MECANIQUE RATIONNELLE
	CHABAUTY C.	MATHEMATIQUES PURES
	PARDE M.	POTAMOLOGIE
	BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
	CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
	BESSON J.	ELECTROCHIMIE
	WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
	FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
	KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
	SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
	OZENDA P.	BOTANIQUE
	FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
	GALVANI O.	MATHEMATIQUES
	MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE ET RADIOACTIVITE
	TRAYNARD P.	CHIMIE GENERALE
	SOUTIF M.	PHYSIQUE GENERALE
	CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
	REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
	AYANT Y.	PHYSIQUE APPROFONDIE
	GALISSOT F.	MATHEMATIQUES PURES
Mlle	LUTZ E.	MATHEMATIQUES GENERALES
MM.	BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
	BOUCHEZ	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	LLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
	MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
	BONNIER E.	METALLURGIE
	DESSAUX G.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
	PILLET E.	ELECTROTECHNIQUE
	DEBELMAS J.	GEOLOGIE GENERALE
	GERBER R.	MATHEMATIQUES PURES
	PAUTHENET R.	ELECTROTECHNIQUE
	VAUQUOIS B.	CALCUL ELECTRONIQUE
	SILBER R.	MECANIQUE DES FLUIDES
	MOUSSIEGT J.	ELECTRONIQUE
	BARBIER J.C.	PHYSIQUE EXPERIMENTALE

MM.	BUYLE-BODIN M.	ELECTRONIQUE
	KOSZUL J.L.	MATHEMATIQUES
	DREYFUS B.	THERMODYNAMIQUE
	VAILLANT F.	ZOOLOGIE
	KLEIN J.	MATHEMATIQUES PURES
	SENGEL P.	ZOOLOGIE
	ARNAUD P.	CHIMIE
	BARJON R.	PHYSIQUE NULCEAIRE
	BARNOUD F.	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE

PROFESSEURS ASSOCIES.

MM.	WAGNER H.	BOTANIQUE
	NAPP-ZINN K.	BOTANIQUE

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme	KOFLER L.	BOTANIQUE
	DEPASSEL R.	MECANIQUE
	PERRET R.	SERVOMECANISME
Mme	BARBIER M.J.	ELECTROCHIMIE
MM.	COHEN J.	PHYSIQUE
	GIDON P.	GEOLOGIE
Mme	SOUTIF J.	PHYSIQUE GENERALE
MM.	GIRAUD P.	GEOLOGIE
	GASTINEL N.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	LACAZE A.	THERMODYNAMIQUE
	GLENAT R.	CHIMIE ORGANIQUE
	BRISSONNEAU P.	PHYSIQUE GENERALE
	DUCROS P.	MINERALOGIE
	ANGLES D'AURIAC	MECANIQUE DES FLUIDES
	ROBERT A.	CHIMIE PAPETIERE
	COUMES A.	ELECTRONIQUE
	PEBAY-PEROULA	PHYSIQUE
	DEGRANGE C.	ZOOLOGIE
	GAGNAIRE D.	CHIMIE PAPETIERE
	RASSAT A.	CHIMIE
	PERRIAUX J.	GEOLOGIE
	BARRA J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PROFESSEURS HONOAIRES

MM.	FORTIER A.	MECANIQUE DES FLUIDES
	BRELOT M.	MATHEMATIQUES
	WOLFERS F.	PHYSIQUE
	DORIER A.	ZOOLOGIE

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BIAREZ J.	MECANIQUE DES FLUIDES
	DODU J.	MECANIQUE DES FLUIDES

MM.	DOLIQUE J.M.	ELECTRONIQUE
	HACQUES G.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	LANCIA R.	PHYSIQUE AUTOMATIQUE
	POULOUJADOFF M.	ELECTROTECHNIQUE
	KAHANE A.	PHYSIQUE
Mme	BONNIER J.	CHIMIE
Mme	KAHANE J.	PHYSIQUE
MM.	DEPORTES C.	CHIMIE MINERALE
	DEPOMMIER P.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	CAUQUIS G.	CHIMIE GENERALE
	BONNET G.	PHYSIQUE
Mme	BOUCHE L.	MATHEMATIQUES
MM.	COLOBERT L.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
	PAYANT J.J.	MATHEMATIQUES
	CAUBET J.P.	MATHEMATIQUES
	LAURENT P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BERTRANDIAS J.P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BRIERE G.	PHYSIQUE
	LAJZEROWICZ J.	PHYSIQUE
	VALENTIN J.	PHYSIQUE
	DESRE P.	METALLURGIE
	BONNETAIN L.	CHIMIE MINERALE

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE

MM.	RADELLI L.	GEOLOGIE

Je tiens à exprimer ma plus vive gratitude à Monsieur LAURENT, Maître de Conférences, qui m'a donné l'idée de ce travail et qui, par ses conseils et encouragements, m'a aidé à le mener à bien.

Je remercie Monsieur le professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie Monsieur le professeur GASTINEL qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.

J'adresse enfin mes plus vifs remerciements à Monsieur ATTEIA dont les travaux ont servi de support à cette thèse, à Mademoiselle DEBARGUE pour la réalisation matérielle de cette tâche, ainsi qu'à tous les membres du laboratoire de calcul qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le mot "spline" désigne en anglais la latte flexible qu'utilisent les dessinateurs pour tracer une courbe "lisse" f passant par des points $(x_i y_i)$ $(i = 1, .., n)$ donnés. La latte est astreinte à passer par les points x_i au moyen d'un godet pivotant fixé en chacun de ces points. Ces godets sont munis d'une rainure dans laquelle passe la latte. Dans la position d'équilibre qu'elle prend, la latte minimise l'énergie de flexion

$$\int_{x_1}^{x_n} (f'')^2 \;/\; (1 + f'^2)^3 .$$

Lorsque $(1 + f'^2)^3$ est peu différent de un, la courbe que décrit la latte est une fonction-spline d'interpolation de degré trois (elle est formée de morceaux de polynômes de degré trois) ou d'ordre deux (elle minimise le carré de la dérivée seconde). Dans ce travail nous nous intéresserons à des fonctions-spline plus générales.

Le premier chapitre sera consacré à la définition mathématique et aux propriétés des fonctions-spline.

Dans le deuxième chapitre nous expliciterons deux fonctions-spline particulières ; la première étant celle que nous avons appelé fonction-spline d'Hermite, la seconde une fonction spline d'interpolation généralisée.

Dans les troisième, quatrième et cinquième chapitres nous présenterons des méthodes numériques et des procédures permettant d'obtenir la fonction-spline d'interpolation.

Dans le sixième chapitre nous exposerons des méthodes permettant d'obtenir les fonctions-spline du chapitre deux.

Enfin dans le septième chapitre nous montrerons quelques exemples d'applications des fonctions-spline à l'obtention des meilleures formules au sens de Sard [12] .

CHAPITRE 1

FONCTIONS-SPLINE.

DEFINITIONS ET PROPRIETES

§1-1 FONCTIONS-SPLINE D'INTERPOLATION

Les résultats exposés dans ce paragraphe sont dus à Schoenberg ([13]), De Boor ([6]), Ahlberg et Nilson ([1],[2],[3]).

A - Définitions :

$A \underset{df}{=} B$ voudra dire que A est défini par B

$f^{(m)}$ désignera la dérivée d'ordre m de la fonction f.

$\mathcal{A}(X,Y)$ désignera l'ensemble des applications de l'espace X dans l'espace Y.

$$C^m \underset{df}{=} \left\{ f \in A\ (R,R)\ :\ f^{(m)} \text{ est continue} \right\}$$

$S_{2k-1}\ (x_1,\dots,x_n) \underset{df}{=}$ ensemble des fonctions-spline de degré 2k-1 se raccordant aux abscisses $x_1,\dots x_n$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $k \geqslant 2$ et $n \geqslant k$ soit par définition

$$f \in S_{2k-1}\ (x_1,\dots,x_n) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\quad f \in C^{2k-2} \\ \\ 2)\quad \text{dans chacun des intervalles }]-\infty\ ,\ x_1]\ , \\ \quad [x_1,x_2]\ ,\dots,\ [x_{n-1},x_n]\ ,\ [x_n,+\infty[\ \text{ f est un} \\ \quad \text{polynôme de degré au plus égal à } 2k-1. \end{array}\right.$$

D'après la définition précédente on peut écrire :

$$f \in S_{2k-1}(x_1,\dots,x_n) \Longleftrightarrow f(x) = P_{2k-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (x - x_i)_+^{2k-1}$$

avec la convention :

$$(E)_+^m \underset{\text{df}}{=} \begin{cases} E^m & \text{si } E > o \\ o & \text{si } E \leqslant o \end{cases}$$

P_m (x) désigne un polynôme en x de degré au plus égal à m.

B - Propriétés :

lemme : Soient n abscisses $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et n ordonnées $y_1,\dots,y_n$.

Il existe une fonction-spline et une seule de $S_{2k-1}(x_1,\dots,x_n)$ ($n \geqslant k$, $k \geqslant 2$) notée s telle que :

(1-1) - $s(x_i) = y_i \qquad i = 1,\dots,n$

(1-2) - s (x) est un polynôme de degré k-1 pour $x \leqslant x_1$ et $x \geqslant x_n$

$\triangle = (x_i, y_i) \quad i = 1,\dots,n$

s (x) étant un polynôme de degré k-1 pour $x \leqslant x_1$ il peut s'écrire :

(1-3) $$s(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (x - x_i)_+^{2k-1}$$

La condition 1-1 (pour i = 2,...n) nous permet de déterminer les coefficients $\lambda_1, \lambda_2,\dots,\lambda_{n-1}$ en supposant connu le polynôme P_{k-1}. La condition 1-2 est satisfaite pour $x \leqslant x_1$ par l'écriture 1-3 ;

$s^{(\ell)}(x) \equiv o$ (pour $x \geqslant x_n$ et $\ell = k, \ldots, 2k-1$) et la condition $s(x_1) = y_1$ nous permettent de déterminer les coefficients du polynôme P_{k-1} et λ_n d'une manière unique.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on désignera par s la fonction-spline vérifiant les conditions (1-1) et (1-2). On l'appellera la fonction-spline de degré 2k-1 sur Δ .

Posons :

$$H^k [x_1,x_n] = \left\{ f \in C^{k-1}(x_1,x_n) \ : \ \int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(t)\right)^2 dt \quad < +\infty \right\} \text{ avec } k \geqslant 1$$

$$I_\Delta = \left\{ f \in \mathcal{F}([x_1,x_n],R) \ : \ f(x_i) = y_i \right\}$$

$$H^o [x_1,x_n] = L_2 [x_1,x_n] = \left\{ f \in \mathcal{F}(R,R) \ : \ \int_{x_1}^{x_n} \left(f(t)\right)^2 dt \quad +\infty \right\}$$

<u>Théorème 1-1-1 (De Boor [6])</u>

$$\int_{x_1}^{x_n} \left(s^{(k)}(t)\right)^2 dt = \mathrm{Min}\left\{ \left(\int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(t)\right)^2 dt \ \middle| \ f \in H^k [x_1,x_n] \cap I_\Delta \right\}$$

Démonstration :

soit $f \in H^k [x_1,x_n] \cap I_\Delta$, montrons que :

$$(1\text{-}4) \qquad 0 \leqslant \int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x) \right)^2 dx = \int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(x) \right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_n} \left(s^{(k)}(x) \right)^2 dx$$

Posons : $r = f - s$

On peut écrire :

$$\int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x) \right)^2 dx = \int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(x) \right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_n} \left(s^{(k)}(x) \right)^2 dx$$

$$- 2 \int_{x_1}^{x_n} r^{(k)}(x)\, s^{(k)}(x)\, dx$$

En intégrant k-1 fois par parties, on obtient :

$$(1\text{-}5) \qquad \int_{x_1}^{x_n} r^{(k)}(x)\, s^{(k)}(x)\, dx = \left[\sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j\, r^{(k-1-j)}(x)\, s^{(k+j)}(x) \right]_{x=x_1}^{x=x_n}$$

$$+ (-1)^{k-1} \int_{x_1}^{x_n} r'(x)\, s^{(2k-1)}(x)\, dx$$

D'après (1-2) on a :

$s^{(k+j)}(x_1) = s^{(k+j)}(x_n) = o$ pour $j = o, \ldots, k-2$

(1-5) peut alors s'écrire :

$$\int_{x_1}^{x_n} r^{(k)}(x)\; s^{(k)}(x)\; dx = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} r'(x)\; s^{(2k-1)}(x)\; dx$$

Mais d'après (1-3), $s^{(2k-1)}(x)$ est une constante égale à s_j^{2k-1} dans chacun des intervalles (x_j, x_{j+1}) $j = o, \ldots, n-1$, on a donc :

$$\int_{x_1}^{x_n} r^{(k)}(x)\; s^{(k)}(x)\; dx = (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{n-1} s_j^{2k-1} \left(r(x_{j+1}) - r(x_j) \right)$$

Mais d'après (1-1), $r(x_j) = o$ pour $j = 1, \ldots, n$ donc :

$$\int_{x_1}^{x_n} r^{(k)}(x)\; s^{(k)}(x)\; dx = o$$

et (1-4) est ainsi démontrée ; on a donc :

(1-6) $\displaystyle\int_{x_1}^{x_n} \left(s^{(k)}(x) \right)^2 dx \leqslant \int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(x) \right)^2 dx$ pour tout $f \in H^k[x_1, x_n] \cap I_\Delta$

C.Q.F.D.

On peut donc dire d'après le théorème précédent que la fonction-spline s représente la fonction la plus lisse (au sens de

$\int_{x_1}^{x_n} \left(s^{(k)}(x)\right)^2$ dx minimum) parmi les fonctions dont le graphe passe par les

n points (x_i, y_i) $(i = 1,\ldots,n)$ de R^2.

La fonction-spline s a d'autres propriétés d'approximation très intéressantes dont quelques unes sont contenues dans le théorème suivant (Schoenberg[16]) que nous citerons sans démonstration.

Théorème 1-1-2 :

Soit $f \in H^k[a,b]$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ tel que $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$
On note $\Delta = \left(x_i, f(x_i)\right)_{i=1,\ldots,n}$ et s_Δ la fonction-spline d'interpolation de degré $2k-1$ sur Δ. On pose $\|\Delta\| = \text{Max}\left[(x_1 - a), (b - x_n), (x_i - x_{i-1}) \text{ pour } i = 2,\ldots,n\right]$

On a alors :

1) $$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \int_a^b \left(s_\Delta^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\right)^2 = 0$$

2) $$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \left(\underset{x \in [a,b]}{\text{Max}} \left| s_\Delta^{(\ell)}(x) - f^{(\ell)}(x)\right|\right) = 0 \text{ pour } \ell = 0,\ldots,k-1$$

Nous verrons au septième chapitre une autre propriété très importante des fonctions-spline d'interpolation pour la meilleure approximation de fonctionnelles linéaires au sens de Sard ([12]).

§1-2 FONCTIONS-SPLINE GENERALISEES

A - Définitions :

Les résultats de ce paragraphe sont dus à Atteia ([4]).

Dans toute la suite X et Y désignerons des espaces de Hilbert séparables sur R, $(f,g)_x$ et $\|f\|_x$ représenterons respectivement le produit scalaire et la norme dans l'espace X. θ_x est l'élément neutre de X.

Posons :

$$\mathcal{L}\mathcal{C}(X,Y) \underset{df}{=} \{ f \in \mathcal{F}(X,Y) \ : \ f \text{ linéaire et continue} \}$$

$X_1 = \{ x \in X \ : \ T(x) = \theta_Y \}$ est appelé noyau de $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ dans l'espace X.

On a le théorème suivant :

Théorème 1-2-1- :

Soit $T \in \mathcal{L}\mathcal{C}(X,Y)$ telle que $T(X) = Y$ et soient n éléments k_j $(j = 1,\dots,n)$ de X linéairement indépendants. On suppose que si q est la dimension du noyau X_1 de T dans X alors $n \geq q$ et $X_1 \cap \{ x \in X \ : \ (k_j,x)_x = o \text{ pour } j = 1,\dots,n \} = \theta_x$

Alors, pour tout $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$, il existe un élément unique $s \in X$ tel que

$$\| T(s) \|_Y = \underset{f \in \emptyset_y}{\text{Min}} \left(\| T(f) \|_Y \right)$$

$$\text{avec } \emptyset_y = \{ f \in X \ : \ (k_j, f)_x = y_j, \ j = 1,\dots,n \}$$

Remarques :

a) D'après une propriété bien connue des espaces de Hilbert (voir Riesz et Nagy [20]), se donner n éléments k_j $(j = 1,\dots,n)$ de X revient à se donner n fonctionnelles K_j $(j = 1,\dots,n)$ sur X avec pour tout $f \in X$, $K_j\ (f) = (k_j, f)_x$.

b) Si on prend $X = H^k[x_1, x_n]$, $Y = L_2[x_1, x_n]$, $T = D^k$ l'application $f \in X \longrightarrow f^{(k)} \in Y$, K_j les applications $f \in X \longrightarrow K_j\ (f) = (k_j, f)_x = f\ (x_j)$ pour $j = 1,\dots,n$ (avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$) alors la fonction-spline généralisée s est identique à la fonction-spline d'interpolation (1-3). ($H^k[x_1, x_n]$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(f,g) = \sum_{i=o}^{k} \int_{x_1}^{x_n} f^{(i)} g^{(i)}$).

Nous appellerons fonction-spline d'interpolation généralisée une fonction-spline généralisée dans laquelle les fonctionnelles K_j $(j = 1,\dots,n)$ ne font intervenir que les valeurs de f (et de ses dérivées) en un point x_j.

B - Propriétés :

On désignera dans toute la suite du chapitre par σ_i la fonction-spline de l'ensemble $\left\{ f \in X \ : \ (k_j, f)_x = \delta_{i,j} \ , \ j = 1,\dots,n \right\}$ relative à T, i variant de 1 à n (nous appellerons les σ_i $(i = 1,\dots,n)$ les fonctions-spline de base).

On a le théorème suivant :

Théorème 1-2-2 :

La fonction-spline d'interpolation généralisée de $\emptyset_y$ relative à T s'écrit :

$$s = \sum_{i=1}^{n} y_i\ \sigma_i$$

Atteia a montré comment les fonctions-spline de base pouvaient servir en analyse numérique en énonçant le théorème 1-2-3 :

Soient $T \in \mathcal{L}\mathcal{C}(X,Y)$, (telle que $T(X)=Y$) $L \in \mathcal{L}\mathcal{C}(X,R)$ et $K_j \in \mathcal{L}\mathcal{C}(X,R)$ pour $j = 1,\dots,n$ des applications données. On se propose de chercher les coefficients A_j $(j = 1,\dots,n) \in R$ tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} A_j K_j$ soit la meilleure approximation de L (dans un sens que nous allons préciser).

Posons : $E = L - \sum\limits_{j=1}^{n} A_j K_j$ on a $E \in \mathcal{L}\mathcal{C}(X,R)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "E"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "G"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

• D'après le théorème de Sard ([12] p. 311), si l'on a $E(f)=o$ pour tout $f \in X$ tel que $Tf=\theta_X$ alors il existe $G \in \mathcal{L}\mathcal{C}(Y,R)$ tel que $Ef=G\big(T(f)\big)$ pour tout $f \in X$. Comme Y est un espace de Hilbert, il existe $g \in Y$ tel que

$$Ef = \big(g, T(f)\big)_Y \quad \text{(Riesz et Nagy [20]).}$$

On va chercher les scalaires A_j $(j = 1,\dots,n)$ tels que : $\|g\|_Y$ soit minimum. Ces scalaires sont déterminés par le théorème suivant :

<u>Théorème 1-2-3</u> :

Les scalaires A_j $(j = 1,\dots,n)$ rendant $\|g\|_Y$ minimums sont uniques. Ils sont définis par les relations :

$$A_j = L(\sigma_j) \quad j = 1,\dots,n.$$

Pour la démonstration de ce théorème voir Atteia [4].

Remarque :

Posons $X \underset{df}{=} H^k [a,b]$ et $Y = L_2 [a,b]$.

Les produits scalaires sur X et Y étant définis par :

$$(f,g)_Y \underset{df}{=} \int_a^b fg \qquad \text{et} \qquad (fg)_x = \sum_{i=o}^{k} \int_a^b f^{(i)} g^{(i)}$$

T étant l'application $D^k \in \mathcal{L}(X,Y)$ telle que $D^k f = f^{(k)}$.

D'après la relation (1-8) l'erreur peut s'écrire pour tout $f \in X$

$$Ef = \int_a^b f^{(k)}(x)\; g\;(x)\; dx \qquad (\text{on a bien } Ef = o \text{ pour } f^{(k)} = o)$$

On retrouve la formule de Sard ([12] p. 25) exprimant le reste Ef sous la forme d'une intégrale à noyau. Le noyau est ici la fonction g.

Dans notre cas les coefficients A_j $(j = 1,\dots,n)$ sont tels qu'ils rendent $\int_a^b g^2(x)\, dx$ minimum.

CHAPITRE 2

ECRITURE ANALYTIQUE DE DEUX FONCTIONS-SPLINE PARTICULIERES.

Nous avons vu au chapitre 1 que la fonction-spline d'interpolation d'ordre k (ou de degré 2k-1) passant par les points (x_i, y_i) $(i = 1,\dots,n$ et $x_1<x_2<\dots<x_n)$ pouvait s'écrire.

(2-1) $$s(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x - x_i)_+^{2k-1}$$

et devait vérifier les conditions :

(2-2) $$s(x_j) = y_j \qquad j = 1,\dots,n$$

(2-3) $$s^{(\ell)}(x) = o \qquad \text{pour } x \geq x_n \text{ et } \ell = k,\dots, 2k-1$$

Nous allons dans ce chapitre chercher une écriture analytique pour des fonctions-spline plus générales qui seront toutes relatives à l'opérateur $T = D^k$.

§2-1 FONCTIONS-SPLINE D'HERMITE

Nous allons chercher la fonction h vérifiant en $x_1, x_2, \dots, x_n$ (avec $x_1<x_2<x_3<\dots<x_n$) les relations :

(2-4) $$h(x_i) = y_i \qquad i = 1,\dots,n$$

(2-5) $$h'(x_i) = y'_i \qquad i = 1,\dots,n$$

(les nombres $y_1,\ldots,y_n$, $y'_1\ldots,y'_n$ étant donnés) et minimisant

$$J(h) = \int_{x_1}^{x_n} \left(h^{(k)}(t)\right)^2 dt \qquad (k\geqslant 3)$$

Posons

(2-6) $$\emptyset \underset{\overline{\overline{df}}}{} \left\{ f\in H^k\,[x_1,x_n] \;:\; f(x_i) = y_i \text{ et } f'(x_i) = y'_i \;(i = 1,\ldots,n)\right\}$$

On cherche (dans la terminologie de §1-2) la fonction-spline de $\emptyset$ relative à D^k (avec $X = H^k\,[x_1,x_n]$ et $Y = L_2\,[x_1,x_n]$).

On peut vérifier facilement que les hypothèses du théorème 1-2-1 sont satisfaites (avec $2n\geqslant k-1$). La fonction-spline d'Hermite h existe donc. Nous allons chercher son expression analytique en utilisant le calcul de variations (Gelfand et Fomin [7])

Ecrivons le développement de Taylor de $f\in H^k[x_1,x_n]$ (Smirnov [24])

(2-7) $$f(x) = \sum_{r=o}^{k-1} \frac{1}{r!}\,(x-a)^r\, f^{(r)}(a) + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f^{(k)}(t)\,(x-t)^{k-1}dt$$

a étant un point quelconque de l'intervalle $[x_1,x_n]$.

D'après (2-7) la fonction f sera parfaitement déterminée si on connait $f^{(k)}$ et $f^{(r)}(a)$ pour $r = o,\ldots,k-1$.

Nous devons trouver la fonction $f\in H^k[x_1,x_n]$ qui rend minimum :

(2-8) $$J(f^{(k)}) = \int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(t)\right)^2 dt$$

(en prenant $a = x_1$) et qui vérifie les conditions

$$(2\text{-}9)\quad \sum_{r=o}^{k-1} \frac{1}{r!}(x_j-x_1)^r f^{(r)}(x_1)+\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_1}^{x_j} f^{(k)}(t)(x_j-t)^{k-1}dt=y_j \quad j=1,\dots,n$$

$$(2\text{-}10)\quad \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(r-1)!}(x_j-x_1)^{r-1}f^{(r)}(x_1)+\frac{1}{(k-2)!}\int_{x_1}^{x_j} f^{(k)}(t)(x_j-t)^{k-2}dt=y'_j \quad j=1,\dots,n$$

(2-9) et (2-10) peuvent encore s'écrire en adoptant la convention :

$$(2\text{-}10')\qquad (E)_+^{\ell} = \begin{cases} E^{\ell} & \text{si } E > o \\ o & \text{si } E \leqslant o \end{cases}$$

et en posant

$$(2\text{-}11)\quad G_j\left(f^{(k)}, f^{(o)}(x_1), f^{(1)}(x_1),\dots,f^{(k-1)}(x_1),t\right)$$

$$= \frac{1}{(x_n-x_1)}\sum_{r=o}^{k-1} \frac{1}{r!}(x_j-x_1)^r f^{(r)}(x_1)+\frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(t)(x_j-t)_+^{k-1}$$

pour $j = 1,\dots,n$

et

$$(2\text{-}12)\quad G_j^{*}\left(f^{(k)}, f^{(o)}(x_1),\dots,f^{(k-1)}(x_1),t\right)= \frac{1}{(x_n-x_1)}\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(r-1)!}(x_j-x_1)^{r-1}f^{(r)}(x_1)$$

$$+\frac{1}{(k-2)!} f^{(k)}(t)(x_j-t)_+^{k-2}$$

pour $j = 1,\dots,n$

les conditions (2-9) et (2-10) s'écrivent

$$(2\text{-}13) \qquad \int_{x_1}^{x_n} G_j\left(f^{(k)}, f^{(o)}(x_1), \ldots, f^{(k-1)}(x_1), t\right) dt = y_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$(2\text{-}14) \qquad \int_{x_1}^{x_n} G_j^{*}\left(f^{(k)}, f^{(o)}(x_1), \ldots, f^{(k-1)}(x_1), t\right) dt = y'_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

Utilisons la méthode dite des "multiplicateurs de Lagrange" pour trouver une fonction f réalisant le minimum de J en (2-8) sous les conditions (2-13) et (2-14).(Voir Gelfand et Fomin [7] p. 45).

On doit avoir :

$$(2\text{-}15) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(f^{(k)}(t)\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\mu_j G_j + \mu_j^{*} G_j^{*}\right)\right] = o$$

pour y $= f^{(k)}(t), f^{(o)}(x_1), \ldots, f^{(k-1)}(x_1)$

Soit :

$$(2\text{-}16) \qquad 2f^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_j}{(k-1)!}(x_j - t)_+^{k-1} + \frac{\mu_j^{*}}{(k-2)!}(x_j - t)_+^{k-2}\right) = o$$

$$(2\text{-}17) \qquad \frac{1}{(x_n - x_1)} \sum_{j=1}^{n} \mu_j = o$$

$$(2\text{-}18) \qquad \frac{1}{(x_n - x_1)} \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_j}{r!}(x_j - x_1)^r + \frac{\mu_j^{*}}{(r-1)!}(x_j - x_1)^{r-1}\right) = o \qquad r = 1, \ldots, k-1$$

ou encore en faisant les changements de variables.

$$\rho_j = -\frac{1}{2(k-2)!}\,\mu_j \quad \text{et} \quad \rho_j^* = -\frac{1}{2(k-2)!}\,\mu_j^* \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

(2-19) $$f^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\rho_j}{(k-1)}\,(x_j-t)_+^{k-1} + \rho_j^*\,(x_j-t)_+^{k-2}\right)$$

(2-20) $$\sum_{j=1}^{n}\rho_j = o$$

(2-21) $$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\rho_j}{r}\,(x_j-x_1)^r + \rho_j^*\,(x_j-x_1)^{r-1}\right) = o \qquad r = 1,\ldots,k-1$$

Nous savons que si :

$\int_{x_1}^{x_n}\left(h^{(k)}(t)\right)^2 dt = \underset{g\in\emptyset}{\mathrm{Min}}\left(\int_{x_1}^{x_n}\left(g^{(k)}(t)\right)^2 dt\right)$ alors la fonction h vérifie

les conditions (2-19), (2-20) et (2-21)(voir [7] p. 45).

Nous savons d'autre part d'après le théorème 1-2-1 que la fonction h est unique. La fonction-spline d'Hermite h va donc vérifier les conditions (2-19), (2-20) et(2-21).

On a la relation

(2-21') $$(x_j-t)_+^{k-1} = (x_j-t)^{k-1} + (-1)^k(t-x_j)_+^{k-1}$$

$h^{(k)}$ peut donc s'écrire d'après (2-19)

$$h^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\rho_j}{k-1} (x_j-t)^{k-1} + \rho_j^* (x_j-t)^{k-2} \right) + (-1)^k \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\rho_j}{k-1} (t-x_j)_+^{k-1} - \rho_j^* (t-x_j)_+^{k-2} \right)$$

Posons :

$$Q_{k-1}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\rho_j}{k-1} (x_j-t)^{k-1} + \rho_j^* (x_j-t)^{k-2} \right)$$

D'après les relations (2-20) et (2-21) on a :

$Q_{k-1}^{(i)}(x_1) = o$ pour $i = o,\dots,k-1$

donc $Q_{k-1} = o$

On a donc :

$$\text{(2-22)} \quad h^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\rho_j}{k-1} (t-x_j)_+^{k-1} - \rho_j^* (t-x_j)_+^{k-2} \right)$$

En intégrant k fois on obtient :

$$\text{(2-23)} \quad h(t) = P_{k-1}(t) + (-1)^k \sum_{j=1}^{n} \left(\rho_j \frac{(k-2)!}{(2k-1)!} (t-x_j)_+^{2k-1} - \rho_j^* \frac{(k-2)!}{(2k-2)!} (t-x_j)_+^{2k-2} \right)$$

Si on fait le changement de variable

$$\lambda_j = (-1)^k \frac{(k-2)!}{(2k-2)!} \rho_j \quad \text{et} \quad \lambda_j^* = (-1)^{k+1} \frac{(k-2)!}{(2k-2)!} \rho_j^*$$

La fonction-spline d'Hermite s'écrit :

$$\boxed{h(t) = P_{k-1}(t) + \sum_{j=1}^{n} (t-x_j)_+^{2k-2} \left(\lambda_j^* + \frac{\lambda_j}{(2k-1)} (t-x_j)_+ \right)} \qquad (2\text{-}24)$$

Les λ_j et λ_j^* $(j = 1,\dots,n)$ doivent satisfaire les relations :

$$(2\text{-}25) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{r} (x_j - x_1) - \lambda_j^* \right) (x_j - x_1)^{r-1} = 0 \quad \text{pour } r = 1,\dots,k-1 \end{array}}$$

Remarquons que la fonction-spline d'Hermite h dépend de k+2n paramètres (k pour le polynômes P_{k-1} et 2n pour les coefficients λ_j et λ_j^*). Les conditions (2-25) nous donnent k conditions et on a 2n conditions d'interpolation :

$$h(x_i) = y_i \qquad i = 1,\dots,n$$

$$h'(x_i) = y'_i \qquad i = 1,\dots,n$$

qui nous permettent de déterminer d'une manière unique la fonction-spline d'Hermite (2-24).

§2-2 FONCTION-SPLINE BASEE SUR DES FONCTIONNELLES COMBINAISONS DE DERIVEES.

Etant donnés $K_{i,j} \in R$ ($i = 1,\dots,n$ et $j = o,\dots,k-1$), $(x_j,y_j) \in R^2$ ($j = 1,\dots n$) ($x_1<x_2<\dots<x_n$) nous allons chercher à exprimer analytiquement la fonction $\mathcal{l}$ de $H^k[x_1,x_n]$ telle que :

$$\int_{x_1}^{x_n} \left(\mathcal{l}^{(k)}(t)\right)^2 dt = \underset{f\in\emptyset}{\mathrm{Min}} \int_{x_1}^{x_n} \left(f^{(k)}(t)\right)^2 dt \tag{2-26}$$

$$\text{avec } \emptyset = \left\{ f \in H^k[x_1,x_n] \; : \; \sum_{j=o}^{k-1} K_{i,j} f^{(j)}(x_i) = y_i \text{ pour } i = 1,\dots,n \right\} \tag{2-27}$$

$n \geqslant k$ et $k \geqslant 2$.

Nous allons d'abord vérifier que les hypothèses du théorème 1-2-1 sont satisfaites :

1) $D^k\, H^k[x_1,x_n] = L_2\,[x_1,x_n]$ propriété connue des espaces $L_2\,[x_1,x_n]$ et $H^k\,[x_1,x_n]$ (voir Riesz et Nagy [20] p. 48).

2) Le noyau de D^k est l'ensemble des polynômes de degré k-1 qui est de dimension k;on a donc bien $n \geqslant k$.

3) Les n fonctionnelles $L_j \in \mathcal{L}\mathcal{C}(H^k[x_1,x_n],R)$ avec $L_i f = \sum_{j=o}^{k-1} K_{i,j} f^{(j)}(x_i)$ sont linéairement indépendantes.

En effet les fonctionnelles $\ell_{i,j} : f \longrightarrow f^{(j)}(x_i)$ $(i = 1,\dots,n \; ; \; j = 1,\dots,k-1)$ sont linéairement indépendantes donc les L_i $(i = 1,\dots,n)$ qui sont des combinaisons linéaires des $\ell_{i,j}$ sont linéairement indépendantes.(On suppose évidemment que $L_i \neq o$ quel que soit i).

4) Les $K_{i,j}$ $(i = 1,\dots,n \; ; \; j = o,\dots k-1)$ doivent vérifier la condition :

$$L_i \, P_{k-1} = o \text{ pour } i = 1,\dots,n \Longleftrightarrow P_{k-1} = o$$

où P_{k-1} désigne un polynôme de degré k-1.

La fonction-spline ℓ étant ainsi unique d'après le théorème 1-2-1 nous allons comme au paragraphe 2-1 utiliser le calcul de variations pour la déterminer.

La fonction-spline ℓ peut s'écrire (Smirnov [24])

$$\text{(2-28)} \quad \ell(x) = \sum_{r=o}^{k-1} \frac{1}{r!} (x-x_1)^r \ell^{(r)}(x_1) + \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_1}^{x} \ell^{(k)}(t) \, (x-t)^{k-1} \, dt$$

ou encore (voir 2-10')

$$\text{(2-29)} \quad \ell(x) = \sum_{r=o}^{k-1} \frac{1}{r!} (x-x_1)^r \ell^{(r)}(x_1) + \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_1}^{x_n} \ell^{(k)}(t).(x-t)_+^{k-1} \, dt$$

On en déduit :

$$\text{(2-29')} \quad \ell^{(i)}(x) = \sum_{r=i}^{k-1} \frac{1}{(r-i)!} (x-x_1)^{r-i} \ell^{(r)}(x_1) + \frac{1}{(k-1-i)!} \int_{x_1}^{x_n} \ell^{(k)}(t)(x-t)_+^{k-1-i} dt$$

ou encore :

$$(2\text{-}30)\quad \ell^{(i)}(x)=\sum_{r=o}^{k-1-i}\frac{1}{r!}(x-x_1)^r\ell^{(r+i)}(x_1)+\frac{1}{(k-1-i)!}\int_{x_1}^{x_n}\ell^{(k)}(t)(x-t)_+^{k-1-i}dt$$

La fonction $\ell(x)$ sera entièrement déterminée si on connait $\ell^{(k)},\ell^{(o)}(x_1),\dots,\ell^{(k-1)}(x_1)$. Elle doit satisfaire (2-26) et appartenir à l'ensemble $\emptyset$ (2-27), ce qui peut encore s'écrire en posant

$$(2\text{-}31)\quad G_i\left(\ell^{(k)},\ell^{(o)}(x_1),\dots,\ell^{(k-1)}(x_1),\ x\right)=$$

$$\sum_{j=o}^{k-1}K_{i,j}\left(\sum_{r=o}^{k-1-j}\frac{1}{r!}\frac{(x_i-x_1)^r}{(x_n-x_1)}\ell^{(r+j)}(x_1)+\frac{1}{(k-1-j)!}\ell^{(k)}(x)(x_i-x)_+^{k-1-j}\right)$$

pour $i = 1,\dots,n$

$$(2\text{-}32)\quad \int_{x_1}^{x_n}G_i\left(\ell^{(k)},\ell^{(o)}(x_1),\dots,\ell^{(k-1)}(x_1),x\right)=y_i\qquad i=1,\dots,n$$

On doit avoir (voir (2-15))

$$(2\text{-}33)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\ell^{(k)}(x)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ G_i\right]=o\ \text{pour}\ y=\ell^{(k)}(x),\ell^{(o)}(x_1),\dots,\ell^{(k-1)}(x_1).$$

Soit :

$$2\ell^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=o}^{k-1} \frac{K_{i,j}}{(k-1-j)!} (x_i - x)_+^{k-1-j} = o$$

On a $\left(\text{en utilisant (2-29')}\right)$:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \ell^{(r)}(x_1)} = \sum_{j=o}^{k-1} K_{i,j} \sum_{p=j}^{k-1} \frac{\partial}{\partial \ell^{(r)}(x_1)} \left(\frac{1}{(p-j)!} \times \frac{(x_i - x_1)^{p-j}}{(x_n - x_1)} \ell^{(p)}(x_1) \right)$$

(2-34) $$= \sum_{j=o}^{r} K_{i,j} \times \frac{(x_i - x_1)^{r-j}}{(r-j)!(x_n - x_1)}$$

Les conditions (2-33) peuvent donc s'écrire :

(2-35) $$\ell^{(k)}(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=o}^{k-1} \frac{\lambda_i K_{i,j}}{(k-1-j)!} (x_i - x)_+^{k-1-j}$$

et

(2-36) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=o}^{r} \frac{K_{i,j}}{(r-j)!} (x_i - x_1)^{r-j} = o \quad \text{pour } r = o, 1, \ldots, k-1$$

(2-35) peut encore s'écrire d'après (2-21')

(2-37) $$\ell^{(k)}(x) = Q_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=o}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-j}}{2(k-1-j)!} \lambda_i K_{i,j} (x - x_i)_+^{k-1-j}$$

avec

$$Q_{k-1}(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=o}^{k-1}\frac{\lambda_i\, K_{i,j}}{(k-1-j)!}(x_i-x)^{k-1-j}$$

D'après (2-36) on a $Q_{k-1}^{(i)}(x_1) = o$ pour $i = o,\dots k-1$ donc $Q_{k-1} = o$.

$\ell^{(k)}(x)$ s'écrit donc (en faisant le changement de variable $\frac{(-1)^{k-1}}{2}\lambda_i \longrightarrow \lambda_i$)

$$\ell^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum_{j=o}^{k-1}\frac{(-1)^j}{(k-1-j)!}K_{i,j}\,(x-x_i)_+^{k-1-j} \tag{2-38}$$

D'ou :

$$\boxed{\ell(x) = P_{k-1}(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=o}^{k-1}\frac{(-1)^j}{(2k-j-1)!}K_{i,j}\,(x-x_i)_+^{2k-j-1}} \tag{2-39}$$

Les λ_i $(i = 1,\dots,n)$ doivent satisfaire les relations :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=o}^{r}\frac{K_{i,j}}{(r-j)!}(x_i-x_1)^{r-j} = o \quad \text{pour } r = o, 1,\dots, k-1} \tag{2-40}$$

Remarquons que la fonction-spline ℓ dépend de $k+n$ paramètres et que nous avons $k+n$ conditions pour déterminer ces paramètres ;

n conditions "d'interpolation" pour la fonctionnelle, à savoir :

$$\sum_{j=o}^{k-1}K_{i,j}\,\ell^{(j)}(x_i) = y_i \qquad \text{pour } i = 1,\dots,n$$

et les k conditions (2-40) pour les $\lambda_1, \lambda_2,\dots,\lambda_n$.

CHAPITRE 3

DEUX METHODES POUR L'OBTENTION

NUMERIQUE DES FONCTIONS-SPLINE D'INTERPOLATION

Dans ce chapitre nous allons décrire deux méthodes suggérées par Gréville ([9]) pour obtenir les fonctions-spline d'interpolation d'ordre k.

Nous avons vu dans le chapitre 1 que la fonction-spline s'écrivait :

(3-1) $$s(x)= P_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ (x-x_i)_+^{2k-1}$$

avec :

(3-2) $$s(x) \text{ polynôme en } x \text{ de degré } k\text{-}1 \text{ pour } x \geqslant x_n.$$

Les deux méthodes qui vont suivre ont pour but de calculer directement les coefficients de la fonction (3-1). Dans la première méthode que nous avons appelé "méthode polynomiale", les k coefficients du polynôme P_{k-1} sont d'abord calculés et on en déduit les coefficients λ_i $(i = 1,\ldots,n)$. Dans la deuxième méthode ce sont au contraire les sauts de dérivées λ_i d'ordre 2k-1 aux points x_i $(i = 1,\ldots,n)$ qui sont d'abord obtenus ; nous avons appelé cette méthode : "méthode des sauts de dérivées".

§ 3-1 METHODE POLYNOMIALE.

A - Propriété :

On a la propriété suivante

Propriété 3-1-1

Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction s (voir (3-1)) se réduise à un polynôme de degré k-1 pour $x \geqslant x_n$ est que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ (x_i - a)^r = o \qquad \text{pour} \quad r = o, \ldots, k-1 \tag{3-3}$$

avec a constante arbitraire $\in$ R.

Démonstration

D'après (3-1) la fonction s peut s'écrire pour $x \geqslant x_n$

$$s(x) = P_{k-1}(x) + Q_{2k-1}(x)$$

avec :

$$Q_{2k-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ (x - x_i)^{2k-1}$$

Pour que le polynôme Q_{2k-1} de degré 2k-1 soit en fait de degré k-1, il faut et il suffit que ses dérivées d'ordre k jusqu'à 2k-1 s'annulent en un seul point x = a soit :

$$Q_{2k-1}^{(r)}(a) = o \quad \text{pour} \quad r = k,\dots,2k-1$$

ou :

$$\frac{(2k-1)!}{(r-1)!} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (a-x_i)^{2k-1-r} = o \text{ pour } r = k,\dots,2k-1$$

Ce qui est bien équivalent à la condition (3-3).

C.Q.F.D.

B - Exposé de la méthode

Ecrivons le polynôme P_{k-1} de (3-1) sous la forme :

$$P_{k-1}(x) = r_1 + r_2 (x-x_1) + r_3 (x-x_1)^2 + \dots + r_k (x-x_1)^{k-1}$$

Le problème est donc de trouver les coefficients r_i $(i = 1,\dots,k)$ et λ_i $(i = 1,\dots,n)$ tels que :

$$\text{(3-4)} \quad r_1 + \sum_{i=1}^{k-1} r_{i+1}(x_j-x_1)^i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (x_j-x_i)_+^{2k-1} = y_j \quad \text{pour } j = 1,\dots,n$$

et

$$\text{(3-5)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (x_i-x_1)^r = o \quad \text{pour } r = o,\dots,k-1$$

en prenant $a = x_1$ dans la propriété 3-1-1.

L'équation (3-4) peut encore s'écrire pour $j = 1$

$$r_1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = y_1 \quad \text{car d'après (3-5) on a} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = o$$

Le système à résoudre s'écrit :

$$
\begin{array}{|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{\longleftarrow n \text{ colonnes} \longrightarrow} & \multicolumn{1}{c}{\longleftarrow k \text{ colonnes} \longrightarrow} \\
\hline
\begin{matrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
c_{1,1} & o & & & & \\
c_{2,1} & c_{2,2} & o & & & \\
c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & o & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \cdots & c_{n-1,n-1} & o
\end{matrix} & X^T \\
\hline
X & o \\
\hline
\end{array}
\times
\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \hline r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \\ \hline o \\ o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix}
$$

En posant

$$C = (c_{i,j}) \text{ avec } c_{i,j} = \begin{cases} (x_{i+1}-x_j)^{2k-1} & \text{si } j \leqslant i \\ o & \text{si } j > i \end{cases} \qquad \text{pour } i,j = 1,\ldots,n-1$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ o & (x_2-x_1) & (x_3-x_1) & \cdots & (x_n-x_1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ o & (x_2-x_1)^{k-1} & (x_3-x_1)^{k-1} & \cdots & (x_n-x_1)^{k-1} \end{bmatrix}$$

X^T = transposée de la matrice X

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix} \qquad \ell = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & o & \cdots & o \\ & & \ddots & \vdots \\ C & & & o \end{bmatrix}$$

Le système linéaire peut alors s'écrire :

$$K\ell + X^T r = y \tag{3-6}$$

$$X\ell = o \tag{3-7}$$

On en tire :

$$\ell = K^{-1}y - K^{-1}X^Tr$$

En portant cette valeur de ℓ dans (3-7) on obtient :

$$X\ell = X\,K^{-1}y - X\,K^{-1}X^Tr = o$$

On pose : $A = X\,K^{-1}X^T \qquad B = X\,K^{-1}y$

On peut trouver la matrice r des coefficients de P_{k-1} en résolvant le système de k équations à k inconnues :

(3-8) $\qquad Ar = B$

Ayant calculé r en résolvant le système (3-8), on obtient les coefficients ℓ par :

(3-9) $\qquad \ell = K^{-1}\,(y - X^Tr)$

La matrice K^{-1} s'écrit :

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} o & & & \\ \vdots & C^{-1} & & 0 \\ \vdots & & & \\ o & & & \\ 1 & a_1 & a_2 \cdots\cdots\cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad C^{-1} = (c^*_{i,j}) \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots, n-1 \\ j = 1,\ldots, n-1 \end{array}$$

avec $a_j = -\sum_{i=j}^{n-1} c^*_{i,j}$

C - Procédure algol :

```
procédure METHODE POLYNOMIALE (X, Y, N, K) RESULTATS : (R, L) ;
valeur X, Y, N, K ; tableau X, Y, R, L ; entier N, K ;
commentaire cette procédure calcule dans les tableaux R [1:K] et L [1:N] les
coefficients de la fonction-spline d'ordre K passant par les N points
X, Y [1:N] (avec X [I] < X [I+1] et N > K). Cette fonction-spline s'écrit :
```

$$R_1 + R_2 \ (t-X_1) + \ldots + R_k \ (t-X_k) + \sum_{i=1}^{n} L_i \ (t-X_i)_+^{2k-1} \quad ;$$

```
début   procédure GRESOLSYSLINE (A, B, X, N, IMPØSSIBLE) ; ....
        voir annexe ..... ;
     tableau A [1:K,1:K] , C[1:N, 1:N] , B[1:K] , D[1:N] ; entier I,J,Q ; réel S;

          pour J:=2 pas 1 jusqu'à N faire
          début pour I:=1 pas 1 jusqu'à J-2 faire C[I,J] :=o ;
              pour I:=J-1 pas 1 jusqu'à N-1 faire
              début S:=o ; pour Q:=J-1 pas 1 jusqu'à I-1
                  faire S:=S - ( ( X [I+1] - X [Q] )↑ (2+k-1))×
                  C [Q, J] ;
                  C [I, J] := (S + si I=J-1 alors 1.o sinon. o)/
                 ( ( X [I+1] - X [I] ) ↑ (2×K-1) )
              fin
          fin ; pour I:=1 pas 1 jusqu'à N-1 faire C[I, 1] := o ;
          C [N, 1] :=1 ; pour J:=2 pas 1 jusqu'à N faire
          début S:=o ; pour Q:=J-1 pas 1 jusqu'à N-1 faire
                S:=S-C [Q,J] ; C [N,J] :=S
          fin ;
```

```
pour I:=1 pas 1 jusqu'à K faire
si I=1 alors
début B[I] := Y[I] ;
        pour J:=1 pas 1 jusqu'à K faire
        A[I,J] := si J=1 alors 1.0 sinon. 0
fin  sinon
début pour J:=1 pas 1 jusqu'à N faire
        si J=1 alors D[J] := (X[N] - X[1] ) ↑(I-1) sinon
        début S:=.0 ; pour Q:=2 pas 1 jusqu'à N faire
                S:=S + C[Q,J] x (X[Q] - X[1]) ↑(I-1) ;
                D[J] :=S
        fin ; S:=.0 ;
        pour Q:=1 pas 1 jusqu'à N faire
        S:=S + D[Q] x Y[Q] ; B[I] :=S ;
        pour J:=1 pas 1 jusqu'à K faire
        début S:=.0 ; pour Q:=1 pas 1 jusqu'à N faire
                S:=S + D[Q] x (si J=1 alors 1.0 sinon si
                Q=1 alors .0 sinon (X[Q] - X[1])↑(J-1)) ;
                A[I,J] :=S
        fin
fin ; GRESØLSYSLINE (A,B,R,K,IMP) ; aller à JO ;
IMP : ECRIRE ('IMP') ; aller à END ; JO :
pour I:=1 pas 1 jusqu'à N faire
si I=1 alors D[I] := Y[I] - R[I] sinon
        début S:=.0 ; pour J:= si I≠N alors 2 sinon 1
                pas 1 jusqu'à si I≠N alors I+1 sinon N faire
                S:=S + D[J] x C[I,J] ; C[I,1] := S
fin ;
        pour I:=1 pas 1 jusqu'à N faire L[I] := C[I,1] ;
END :
fin METHODE POLYNOMIALE ;
```

D - Efficacité de la méthode

Nous avons comparé les résultats obtenus à l'aide de la méthode polynomiale ci-dessus aux résultats exacts calculés en double précision (chaque opération se fait sur 16 chiffres significatifs) à partir de la méthode d'intégration du chapitre quatre.

Les résultats numériques obtenus (sur calculatrice I.B.M. 7044), nous ont permis de constater que la fonction-spline calculée à partir de la procédure précédente s'écarte nettement de la vraie fonction-spline pour $N \geqslant 8$ et $k=2$. Ce (mauvais) résultat était prévisible, car l'obtention de la fonction-spline par la méthode polynomiale nécessite l'inversion d'une matrice triangulaire inférieure d'ordre n qui est visiblement très mal conditionnée.

D'autre part, l'erreur commise sur les coefficients λ_i $(i=1,\ldots,n)$ croit rapidement avec l'indice i car, pour les obtenir par (3-9), on doit résoudre un système triangulaire inférieur ce qui entraine une propagation des erreurs, le calcul de λ_j faisant intervenir $\lambda_{j-1},\ldots,\lambda_1$.

Pour $k \geqslant 3$ les résultats ne présentent plus d'intérêt, l'erreur étant trop importante.

§3-2 METHODE DES SAUTS DE DERIVEES.

A - Exposé de la méthode :

Soit $H_x^k \in \mathcal{L}(R^n, R^{n-k})$ l'opérateur donnant les différences divisées d'ordre k d'un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$ par rapport à $x = (x_1 \dots, x_n) \in R^n$. (On suppose $n > k$)

On a par définition :

(3-10) $$H_x^k(u) = (\delta^{u}_{x_1,\dots,x_{k+1}}, \delta^{u}_{x_2,\dots,x_{k+2}}, \dots, \delta^{u}_{x_i,\dots,x_{k+i}}, \dots, \delta^{u}_{x_{n-k},\dots x_n}) \in R^{n-k}$$

où $\delta^{u}_{x_i,\dots,x_{k+i}}$ désigne la différence divisée d'ordre k du vecteur u de R^n par rapport aux points x_j $(j = i, \dots, k+i)$

On a par définition :

(3-11) $$\delta^{u}_{x_i,\dots,x_{k+i}} = \sum_{j=i}^{k+i} \frac{u_j}{\omega'(x_j)}$$

avec

$$\omega(x) = \prod_{j=i}^{k+i} (x-x_j)$$

L'opérateur linéaire H_x^k peut s'écrire sous la forme d'une matrice à n-k lignes et n colonnes :

$$\begin{array}{cc} \overset{n}{\longleftrightarrow} & \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & & & & \\ & \times & \times & \times & \times & \times & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} & \updownarrow \; n-k \end{array}$$

Si on pose :

$$H_x^k = (a_{i,j}) \text{ on a :}$$

$$(3\text{-}12) \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \text{ ou } j > i+k \\ \displaystyle\prod_{\substack{h=0 \\ i+h \neq j}}^{k} (x_j - x_{i+h})^{-1} & \end{cases} \qquad \text{pour} \quad \begin{array}{l} i = 1,\dots,n-k \\ j = 1,\dots,n \end{array}$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la fonction-spline que nous cherchons s'écrit :

$$(3\text{-}13) \qquad s(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, (x-x_j)_+^{2k-1}$$

et doit satisfaire les conditions :

$$(3\text{-}14) \qquad s(x_i) = y_i \qquad i = 1,\dots,n$$

$$(3\text{-}15) \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, (x_j - x_1)^r = 0 \qquad r = o,\dots,k-1$$

Posons $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in R^n$, on a la propriété suivante.

Propriété :

Il existe $\varphi \in R^{n-k}$ tel que $\lambda = H_X^{k^T} \varphi$

Démonstration :

Posons :

$$U = \left\{ y \in R^n : \text{il existe un polynôme } p_{k-1} \text{ de degré } k-1 \text{ tel que } p_{k-1}(x_i) = y_i \; i=1,\dots,n \right\}$$

D'après une propriété bien connue des différences divisées, on a :

$$H_X^k(y) = 0 \iff y \in U$$

donc U est le noyau de la transformation linéaire H_X^k dans R^n.
Posons $R^n = U \oplus S$, S désignant le complémentaire orthogonal de S (avec le produit scalaire $(x.y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$)

D'après la relation (3-15) on a λ orthogonal à U donc $\lambda \in S$. U étant de dimension k, S est de dimension n-k. La matrice H_X^k est de rang n-k dont les colonnes de $H_X^{k^T}$ forment une base pour S, il existe donc $\varphi \in R^{n-k}$ unique tel que :

(3-16) $$\lambda = H_X^{k^T} \varphi$$ C.Q.F.D.

Faisons agir l'opérateur de différences divisées H_X^k sur le vecteur $h = \left(s(x_1), \ldots, s(x_n) \right) \in R^n$, on obtient :

$$H_X^k \, h = H_X^k \, K \, \lambda \tag{3-17}$$

K et λ étant les mêmes matrices qu'au paragraphe précédent. En utilisant (3-16), (3-17) s'écrit :

$$H_X^k \, h = H_X^k \, K \, {H_X^k}^T \varphi$$

La fonction-spline (3-13) doit vérifier les conditions (3-14),

on a donc en posant $G = H_X^k \, K \, {H_X^k}^T$

$$G \varphi = H_X^k \, y \tag{3-18}$$

Notons que (3-18) représente un système linéaire de n-k équations à n-k inconnues qui sont les composantes du vecteur φ de R^{n-k}. D'après l'unicité du vecteur φ , ce système admet une solution unique. La matrice G est obtenue en prenant les différences divisées d'ordre k des colonnes de K et ensuite des lignes de la matrice ainsi obtenue.

Si on désigne par $\delta_{x_i, \ldots, x_{i+k}} f(x)$ la différence divisée d'ordre k de la fonction f sur les points $x_i, \ldots, x_{i+k}$, on a :

$$H_X^k \, K = (c_{i,j}) \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n-k \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \tag{3-19}$$

avec

(3-20) $$c_{i,j} = \delta_{x_i,\ldots x_{i+k}} (x-x_j)_+^{2k-1}$$

On a donc :

$$c_{i,j} = 0 \quad \text{pour} \quad i+k \leqslant j$$

Les éléments de G s'écrivent donc :

$$g_{i,j} = \delta_{x_j,\ldots,x_{j+k}} \varphi_i(t)$$

(3-21) $$\text{avec } \varphi_i(t) = \delta_{x_i,\ldots x_{i+k}} (x-t)_+^{2k-1}$$

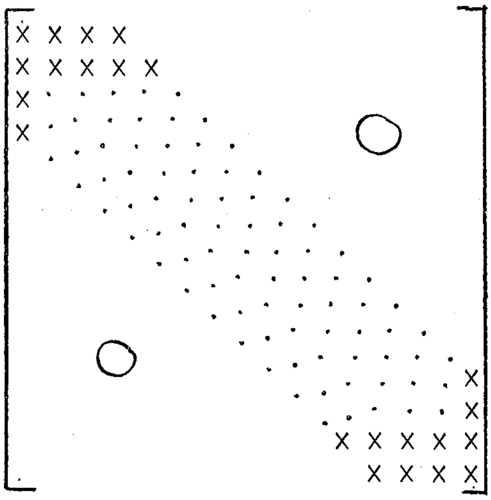
D'après la définition de la fonction φ_i, on a :

$$\varphi_i(t) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant x_{i+k}$$

On en déduit donc

$$g_{i,j} = 0 \quad \text{pour } j \geqslant i+k$$

La matrice G est donc une matrice symétrique (d'après l'expression de $g_{i,j}$) ne comportant que 2k-2 sous-diagonales non nulles.



La méthode des sauts de dérivée consiste à résoudre le système linéaire (3-18) et on a λ à l'aide de (3-16). Les conditions (3-14) permettent ensuite (surabondamment) de calculer les k coefficients de P_{k-1}.

B - Procédure algol et exemples numériques.

```
procédure SAUTS DE DERIVEES (N) ORDRE : (K) POINTS : (X,Y) COEF DU POLYNOME
:(C) SAUTS DE DERI (LAMBDA) ; valeur N,K,X,Y ;
entier N,K ; tableau X,Y,C,LAMBDA ;
commentaire cette procédure calcule dans C[1:K] et LAMBDA[1:N] les coefficients
de la fonction-spline 4-1 ;
début procédure GRESOLSYSLINE ... voir annexe ... ;
    reel procédure FI (I,T) ; valeur I,T ; entier I ; reel T ;
    commentaire cette reel procédure calcule la valeur que prend en T la
    fonction 4-21, on suppose 1 ≤ I ≤ N-K ;
    début tableau L[0:K] ; entier P,R ; si
        si T ≥ X[I+K] alors FI := .0 sinon
        début pour R := 0 pas 1 jusqu'à K faire
```

```
            L[R] := si X[I+R] > T alors (X[I+R]-T)↑(2×K-1)
            sinon .0 ; pour R := 1 pas 1 jusqu'à K faire
            pour P := 0 pas 1 jusqu'à K-R faire
            L[P] := (L[P+1]-L[P])/(X[I+P+R]-X[I+P]) ;
            FI := L[0]
      fin
fin FI ;
réel procédure DIF DIV (J,L) ; valeur J,L ; entier J ; tableau L ;
commentaire cette réel procédure calcule la différence divisée du tableau
L[0:K] sur les points X[J:J+k], on suppose 1 ⩽ J ⩽ N-K ;
début entier I,R ;
      pour R := 1 pas 1 jusqu'à K faire
      pour I := 0 pas 1 jusqu'à K-R faire
      L[I] := (L[I+1]-L[I])/(X[J+I+R]-X[J+I]) ;
      DIF DIV := L[0]
fin  DIF DIV ;
tableau G[1:N,1:si N-K ⩽ K alors K sinon N-K], H[1:N-K],
L[0:K], B[1:N] ;
entier V,I,J,R ; reel P,S ;
CONSTRUCTION DE G ET B :
pour I := 1 pas 1 jusqu'à N-K faire
début pour R := 0 pas 1 jusqu'à K faire
      L[R] := Y[I+R] ; B[I] := DIF DIV (I,L) ;
      pour J := I pas 1 jusqu'à
      si I+k-1 ⩽ N-K alors I+K-1 sinon N-K faire
      début pour R := 0 pas 1 jusqu'à K faire
            L[R] := FI (I,X[J+R]) ;
            G[J,I] := G[I,J] := DIF DIV (J,L)
      fin ;
      pour J := I+K pas 1 jusqu'à N-K faire G[J,I] := G[I,J] := .0
fin ; CALCUL DES FI :
```

```
GRESOLSYSLINE (G,B,H,N-K,IMP) ;
IMP : CONSTRUCTION H TRANSPOSE :
pour I := 1 pas 1 jusqu'à N faire
pour J := 1 pas 1 jusqu'à N-K faire
si J > I ∨ I > J+K alors G[I,J] := .0 sinon
début S := 1.0 ; pour R := 0 pas 1 jusqu'à I-J-1,I-J+1
      pas 1 jusqu'à K faire S := S/(X[I]-X[J+R]) ; G[I,J] := S
fin ; CALCUL DES LAMBDA :
pour I := 1 pas 1 jusqu'à N faire
début S := .0 ; pour J := 1 pas 1 jusqu'à N-K faire
      S := S+G[I,J]×H[J] ; LAMBDA[I] := S
fin ; CALCUL DES COEFFICIENTS DU POLYNOME :
pour I := 1 pas 1 jusqu'à K faire
début V := ENTIER ((N-1)/(K-1)); R := (I-1)×V+1 ;
      S := Y[R] ; pour J := 1 pas 1 jusqu'à R-1 faire
      S := S-LAMBDA[J]×(X[R]-X[J])↑(2×K-1) ;
      B[I] := S ; pour J := 1 pas 1 jusqu'à K faire
      G[I,J] := si J=1 alors 1.0 sinon X[R]↑(J-1) ;
fin ; GRESOLSYSLINE (G,B,C,K, ENNUI) ; ENNUI :
fin SAUTS DE DERIVEES ;
```

Nous donnons également une reel procédure permettant de calculer la valeur que prend en un point t la fonction-spline (3-1) dont les coefficients sont calculés à l'aide de la procédure ci-dessus.

```
reel procédure SPL SAUT DERI (N,K,X,C,LAMBDA,T) ;
valeur N,K,X,C,LAMBDA ; entier N,K ; tableau X,C,LAMBDA ;
reel T ;
début reel S,V,U ; entier J,P ;
      S := C[K]×T+C[K-1] ;
      pour J := K-2 pas 1 jusqu'à 1 faire
      S := S×T+C[J] ; J := 0 ;
      pour J := J+1 tant que T > X[J] ∧ J ≤ N faire
```

```
début V := U := (T-X[J])×(T-X[J]) ;
      pour P := 1 pas 1 jusqu'à K-2 faire V := V×U ;
      V := V×(T-X[J]) ;
      S := S+LAMBDA[J]×V
fin
fin SPL SAUT DERI ;
```

Remarque :

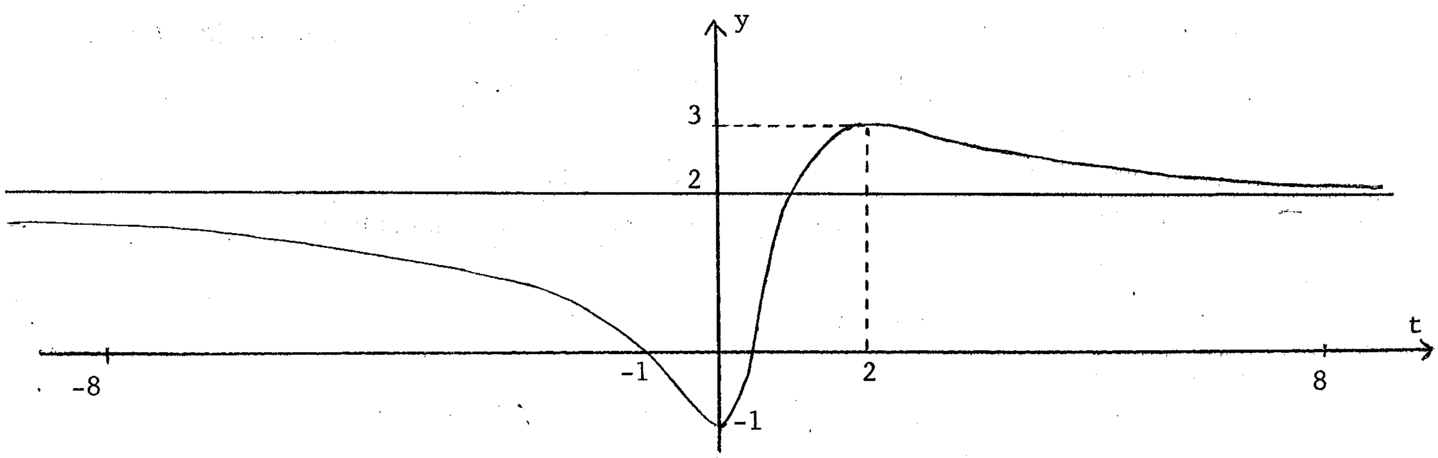
La procédure SAUTS DE DERIVEES calcule d'abord les sauts de dérivées d'ordre 2k-1 aux n points d'interpolation. Pour calculer les k coefficients du polynôme P_{k-1} (voir 3-1), on utilise k conditions d'interpolation $s(x_i) = y_i$ en répartissant uniformément les k points x_i sur les n points $x_1,\dots,x_n$ (voir à ce propos §4-2-C).

Pour étudier l'efficacité de la procédure ci-dessus, nous allons la comparer à la méthode d'intégration (en double précision) du chapitre quatre.

Considérons la fonction

$$y(t) = (2t^2 + t-1)/(t^2 - t+1)$$

dont le graphe a l'allure ci-dessous.



Soit $s_{n,k}$ la fonction-spline d'ordre k, calculée à partir des procédures SAUTS DE DERIVEES et SPL SAUT DERI, qui prend les valeurs $y(x_i)$ aux points x_i $(i=1,\dots,n)$ appartenant à l'intervalle $[-8,+8]$. On note $\bar{s}_{n,k}$ la même fonction-spline calculée à partir de la méthode d'intégration (voir chapitre quatre).

On note :

$$F_{n,k} = \|s_{n,k} - \bar{s}_{n,k}\| = \max_{t\in[x_1,x_n]} |s_{n,k}(t) - \bar{s}_{n,k}(t)|$$

On prendra n=5, pas de 3, jusqu'à 32 ; avec k=2,3. On obtient les résultats suivants (divisés par 10^{-7}).

n	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
k=2	6	63	171	213	245	330	475	425	1240	652
k=3	7	828	9043	6250	12143	20157	24287	42944	75012	74009

Pour $k \geqslant 4$ l'erreur devient trop importante et la méthode ne présente plus d'intérêt, dès que $n \geq 17$ (on a $F_{17,4} \simeq 1,6\times10^{-2}$).

CHAPITRE 4

METHODE D'INTEGRATION POUR LES

FONCTIONS-SPLINE D'INTERPOLATION

Cette méthode va consister à déterminer la dérivée d'ordre k de la fonction-spline d'interpolation d'ordre k dont le graphe passe par les n points (x_i,y_i) $(i=1,\dots,n)$ de R^2. La fonction-spline elle même s'obtiendra par intégration. On supposera toujours $n>k$.

§4-1 FONCTIONS-SPLINE D'ORDRE DEUX

Pour l'ordre deux, la fonction-spline s passant par les n+1 points (x_i,y_i) $(i=0,\dots,n)$ s'écrit (voir 1-3) :

$$(4\text{-}1) \qquad s(x)=ax+b+\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, (x-x_i)_+^3 \qquad (x_0<x_1<\dots<x_n)$$

(On rappelle que c'est parmi toutes les fonctions de $C^2[x_0,x_n]$ dont le graphe passe par (x_i,y_i) $(i=0,\dots,n)$ celle qui minimise $\int_{x_0}^{x_n}(s'')^2$)

A - Exposé de la méthode :

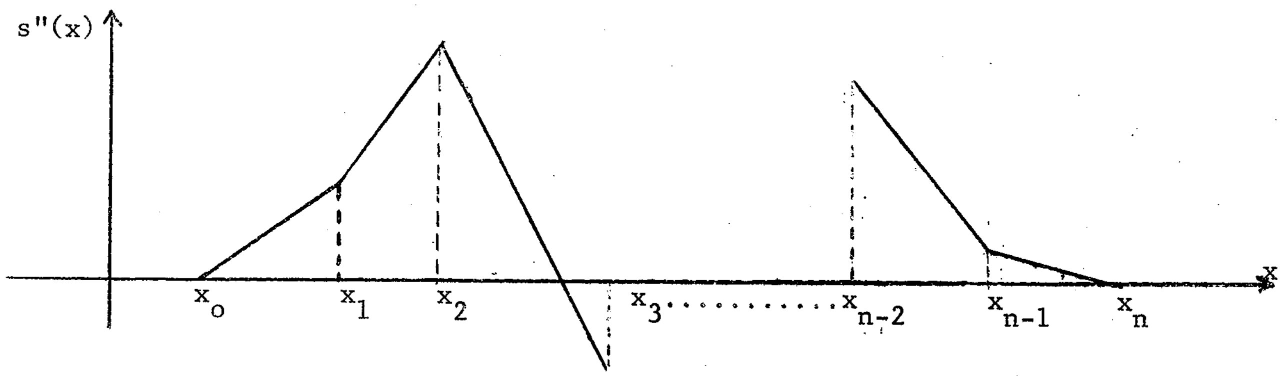
La fonction s de (4-1) est formée dans chaque intervalle $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\dots,n)$ de polynômes $P_i(x)$ de degré trois. Comme $s\in S_3(x_0,\dots,x_n)$ (voir §1-1), les polynômes $P_i(x)$ $(i=1,\dots,n)$ sont tels que :

(4-2) $P_i(x_i)=P_{i+1}(x_i)=y_i$ $(i=1,\ldots,n-1)$ et $P_1(x_0)=y_0$ $P_n(x_n)=y_n$

(4-3) $P_i^{(\ell)}(x_i)=P_{i+1}^{(\ell)}(x_i)$ pour $\ell = 1,2$ et $i=1,\ldots,n-1$

(4-4) $P_1''(x_0)=P_n''(x_n)=0$ d'après (1-2)

Comme $s \in C^2[x_0,x_n]$ et que $s(x)$ est formée de polynômes de degré trois, la fonction s'' a un graphe continu et formé de segments de droites.



Dans chaque intervalle $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots n)$ on a :

$$(4\text{-}5) \qquad s''(x)=s''(x_{i-1})\,\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}} + s''(x_i)\,\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},$$

La dérivée seconde de la fonction-spline (4-1) peut donc s'obtenir à partir des valeurs de s'' aux points x_i $(i=0,\ldots,n)$ (voir Ahlberg et Nilson [2]).

Posons : $M_j = s''(x_j)$ $j=0,\ldots,n$ et $\ell_j = x_j-x_{j-1}$ $j=1,\ldots,n$

On a d'après (4-4) $M_0 = M_n = 0$.

Nous avons donc n-1 coefficients M_j à déterminer.

La relation (4-5) s'écrit :

$$(4\text{-}6) \quad s''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{\ell_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{\ell_i} \qquad x \in [x_{i-1}\ x_i]$$

Intégrons deux fois, on obtient :

$$s(x) = \frac{M_{i-1}}{6\ell_i}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6\ell_i}(x - x_{i-1})^3 + Cx + D \qquad x \in [x_{i-1}\ x_i]$$

Les deux constantes d'intégration C et D sont déterminées par les deux conditions de continuité (voir (4-2)).

$$s(x_i) = y_i \qquad \text{et } s(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

D'où ; tout calcul fait :

$$(4\text{-}7) \quad s(x) = \frac{M_{i-1}}{6\ell_i}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6\ell_i}(x - x_{i-1})^3 + \left(\frac{y_i}{\ell_i} - \frac{M_i \ell_i}{6}\right)(x - x_{i-1})$$
$$+ \left(\frac{y_{i-1}}{\ell_i} - \frac{M_{i-1}\ell_i}{6}\right)(x_i - x) \qquad \text{pour } x \in [x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \dots, n$$

Pour déterminer les M_i (i=1,...,n-1), écrivons qu'aux points x_i (i=1,...,n-1) la fonction s' est continue.

Soit : $s'(x_i-) = s'(x_i+)$

Ce qui nous donne tout calcul fait :

$$\text{(4-8)} \quad \frac{\ell_i}{6} M_{i-1} + \frac{\ell_i+\ell_{i+1}}{3} M_i + \frac{\ell_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{\ell_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{\ell_i} \qquad i=1,\dots,n-1$$

On a ainsi un système de n-1 équations à n-1 inconnues qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\ell_1+\ell_2}{3} & \frac{\ell_2}{6} & & & \\ \frac{\ell_2}{6} & \frac{\ell_2+\ell_3}{3} & \frac{\ell_3}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\ell_{n-2}+\ell_{n-1}}{3} & \frac{\ell_{n-1}}{6} \\ & & & \frac{\ell_{n-1}}{6} & \frac{\ell_{n-1}+\ell_n}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{\ell_2} - \frac{y_1-y_0}{\ell_1} \\ \frac{y_3-y_2}{\ell_3} - \frac{y_2-y_1}{\ell_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{\ell_{n-1}} - \frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{\ell_{n-2}} \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{\ell_n} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{\ell_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Ce système tridiagonal se résout très facilement par la méthode d'élimination de Gauss (en tenant compte du fait que le système est tridiagonal).

B - Procédure algol

Nous proposons une procédure permettant de calculer les coefficients M_j $(j=0,\ldots,n)$, ce qui permet d'avoir une expression analytique de la fonction-spline au moyen de la relation (4-7).

```
procédure COEFSPLINETROIS (N,X,Y) résultats : (M) ;
valeur N,X,Y ; entier N ; tableau X,Y,M ;
commentaire cette procédure calcule et place dans le tableau M[0:N]
les valeurs des dérivées secondes en X[I] (I=0,...,N) de la fonction-spline
d'interpolation de degré trois prenant les N+1 valeurs Y[I] aux abscisses X[I],
I variant de 0 à N avec X[I]<X[I+1] et N≥3 ;
début entier I ; tableau D[1:N-1] ; reel A,B,C,E ;
      pour I:=N-1 pas -1 jusqu'à 1 faire
      début A:=X[I+1]-X[I] ; B:=X[I]-X[I-1] ; C:=Y[I+1]-Y[I] ;
            E:=Y[I]-Y[I-1] ; si I=N-1 alors
            début D[I]:=(X[I+1]-X[I-1])/3 ;
                  M[I]:=C/A-E/B
            fin sinon début D[I]:=(12×D[I+1]×(X[I+1]-X[I-1])-A×A)
                            /(36×D[I+1]) ;
                            M[I]:=C/A-E/B-A×M[I+1]/(6×D[I+1])
                      fin
      fin ; M[0]:=M[N]:=.0 ; pour I:=1 pas 1 jusqu'à N-1 faire
      si I=1 alors M[I]:=M[I]/D[I] sinon M[I]:=
      (6×M[I]-(X[I]-X[I-1])×M[I-1])/(6×D[I])
fin   COEFSPLINETROIS ;
```

Les coefficients M_j $(j=0,\ldots,n)$ ayant été calculés à l'aide de la procédure précédente, nous proposons une <u>réel</u> <u>procédure</u> permettant de calculer la valeur que prend la fonction-spline d'interpolation s au point t.

```
reel procédure SPL (N,X,Y,M,T) ; valeur N,X,Y,M,T ;
entier N ; tableau X,Y,M ; reel T ;
commentaire cette reel procédure calcule la valeur SPL que prend au point T
la fonction-spline d'interpolation d'ordre deux se raccordant aux points
X[0:N],Y[0:N] et ayant M[J] (J variant de 0 à N) pour dérivées secondes en
X[J]. On suppose X[0]≤T≤X[N] ;
début entier K ; reel A,B,C ;
        K:=1 ; JO : si T≤X[K] ou K=N alors
        aller à SUITE sinon
        début K:=K=1 ; aller à JO fin ;
        SUITE : A:=X[K]-X[K-1] ;
        B:=X[K]-T ; C:=T-X[K-1] ;
        SPL:=(M[K-1]×B×B×B+M[K]×C×C×C+
              (6×Y[K]-M[K]×A×A)×C+
              (6×Y[K-1]-M[K-1]×A×A)×B)/(6×A)
fin SPL ;
```

C - Précision de la méthode :

Afin d'apprécier la précision des procédures COEFSPLINETROIS et SPL, nous avons écrit ces procédures en effectuant tous les calculs en double précision (seize chiffres significatifs pour chaque opération).

Notons $sd_n(t)$ la fonction-spline calculée en double précision et $s(t)$ la fonction-spline normale ; ces deux fonctions étant calculées sur n points x_i de l'intervalle $[-8,+8]$ avec $y_i = y(x_i)$ $(i=0,\dots,n-1)$.

Posons :

$$F_n = ||s_n - sd_n|| = \max_{t \in [x_o, x_{n-1}]} |s_n(t) - sd_n(t)|$$

On obtient les résultats suivants pour différentes valeurs de n (les nombres sont divisés par 10^{-8}).

n	30	60	200	300	400	500
F_n	8,9	8,9	8,9	65,5	11,9	14,9

On voit que la méthode donne de très bons résultats, même pour un nombre de points n très élevé. La valeur de cette méthode tient au fait que le calcul de s(t) pour $t \in [x_i, x_{i+1}]$ ne fait intervenir que <u>deux</u> coefficients M_i et M_{i+1}. De plus le système linéaire à résoudre pour obtenir M_i $(i=0,\ldots,n)$ est simple et bien conditionné (diagonale prépondérante).

§4-2 FONCTIONS-SPLINE D'ORDRE QUELCONQUE

A - Exposé de la méthode :

On a la propriété suivante :

Propriété 4-2-1 :

Soit X un espace de Hilbert et φ_i (i=1,...,m) m éléments linéairement indépendants de X. Soient W l'espace engendré par les φ_i (i=1,...,m) et $W^{\perp}$ son complémentaire orthogonal.
Posons $\Delta = \{ c \in X : (\varphi_i \; c) = \alpha_i \quad i=1,\dots,m \}$ alors l'élément $c^* \in \Delta$ tel que $||c^*|| = \underset{c \in \Delta}{\mathrm{Min}} \; ||c||$ appartient à W.

Démonstration :

On a :

$$W^{\perp} = \{ \ell \in X : (\varphi_i, \ell) = 0 \quad i=1,\dots,m \}$$

Soit $c_1 \in \Delta$ on a :

$$\Delta = c_1 + W^{\perp} \quad \text{et } c^* \perp \iff c^* \perp W^{\perp} \quad \text{donc } c^* \in W$$

Propriété 4-2-2 :

La fonction-spline d'interpolation d'ordre k qui vérifie

(4-10) $s(x_i) = y_i \quad (i=1,\dots,n)$ est telle que :

(4-11) $$\int_{x_1}^{x_n} \varphi_i(t)\, s^{(k)}(t)\, dt = \delta_{x_i \dots x_{i+k}}\, y \quad \text{pour } i=1,\dots,n-k$$

avec $\varphi_i(t) = \frac{1}{(k-1)!} \delta_{x_i \ldots x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1}$

($\delta_{x_i \ldots x_{i+k}} f(x)$ désigne la différence divisée de la fonction f sur les points $x_i, \ldots, x_{i+k}$).

Démonstration :

Ecrivons le développement en série de Taylor de s :

$$s(x) = P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_1}^{x_n} (x-t)_+^{k-1} \, s^{(k)}(t) \, dt$$

Prenons la différence divisée de cette fonction sur les points $x_i, \ldots, x_{i+k}$ avec $i=1, \ldots, n-k$, il vient :

$$\delta_{x_i \ldots x_{i+k}} s(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_1}^{x_n} \delta_{x_i \ldots x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1} \, s^{(k)}(t) \, dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_n} \varphi_i \, (t) \, s^{(k)}(t) \, dt$$

Et d'après (4-10) :

$$\int_{x_1}^{x_n} \varphi_i \, (t) \, s^{(k)}(t) \, dt = \delta_{x_i \ldots x_{i+k}} y \quad \text{pour } i=1, \ldots, n-k$$

Propriété 4-2-3 :

> Les fonctions φ_i $(i=1,\ldots,n-k)$ sont linéairement indépendantes.

Démonstration :

On a :

(4-12) $\varphi_i(t) = 0$ pour $t \leqslant x_i$ ou $x_{i+k} \leqslant t$

car $t \leqslant x_i$ entraine que $(x-t)_+^{k-1} = (x-t)^{k-1}$ pour $x = x_i, \ldots, x_{i+k}$ et la différence divisée sur k+1 points d'un polynôme de degré k-1 est identiquement nulle donc $\varphi_i(t) = 0$; de même si

$x_{i+k} \leqslant t$ on a $(x-t)_+^{k-1} = 0$ pour $x = x_{i, \ldots,} x_{i+k}$ donc $\varphi_i(t) = 0$.

Montrons que :

$$\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \varphi_i = 0 \quad \text{sur } [x_1 \; x_n] \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-k} = 0$$

Soit $t \in]x_1 \; x_2[$ on a d'après (4-12)

$$\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \varphi_i(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) = 0$$

Comme $\varphi_1(t) > 0$ pour $t \in]x_1 \; x_{k+1}[$ on a $\lambda_1 = 0$.

Soit $t \in]x_2, x_3[$ on montre de même que

$$\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \varphi_i (t) = \lambda_1 \varphi_1 (t) + \lambda_2 \varphi_2(t) = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0$$

En répétant n-k fois ce calcul on obtient

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-k} = 0$ C.Q.F.D.

D'après la propriété 4-2-2 la fonction-spline d'interpolation s d'ordre k vérifiant $s(x_i) = y_i$ $(i=1,\ldots,n)$ est telle que

$$(s^{(k)}, \varphi_i) = \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} y \qquad \text{pour } i=1,\ldots,n-k$$

et

$$||s^{(k)}|| = \min_{c \in \Delta} ||c|| \; (\text{car } \forall c \in \Delta, \exists f \in H^k[x_1, x_n] : f(x_i) = y_i \text{ pour } i=1,\ldots,n)$$

avec $\Delta = \left\{ c \in L^2_{[x_1\ x_n]} : (c, \varphi_i) = \delta_{x_i \ldots x_{i+k}} y \quad \text{pour } i=1,\ldots,n-k \right\}$

La norme et le produit scalaire étant ceux de l'espace $L_2[x_1\ x_n]$.

D'après la propriété 4-2-1 (et en utilisant 4-2-2) on a :

$$s^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \varphi_j(t) \tag{4-13}$$

Les conditions 4-11 nous permettent de déterminer d'une manière unique les $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k}$. On a en effet :

$$(s^{(k)}, \varphi_i) = \delta_{x_i \ldots x_{i+k}} y \qquad i=1,\ldots,n-k$$

Soit

$$(4\text{-}14) \qquad \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j^* (\varphi_j, \varphi_i) = \delta_{x_i \ldots x_{i+k}} y \qquad \text{pour } i=1,\ldots,n-k$$

Propriété 4-2-4 :

$$(4\text{-}15) \qquad (\varphi_i, \varphi_j) = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} h(j,t) \qquad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n-k \\ j=1,\ldots,n-k \end{array}$$

$$(4\text{-}16) \qquad \text{avec} \quad h(j,t) = \delta_{x_j \ldots x_{j+k}} (t-x)_+^{2k-1}$$

Démonstration :

On a :

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{(k-1)!} \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=i}^{i+k} \frac{(x_p-t)_+^{k-1}}{\omega'_i(x_p)} \quad \text{avec } \omega_i(x) = \prod_{r=i}^{i+k} (x-x_r)$$

et

$$\varphi_j(t) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \delta_{x_j \ldots x_{j+k}} (t-x)_+^{k-1}$$

car $(x-t)_+^{k-1}=(x-t)^{k-1}+(-1)^k(t-x)_+^{k-1}$

$$\varphi_j(t) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{r=j}^{j+k} \frac{(t-x_r)_+^{k-1}}{\omega'_j(x_r)}$$

Donc :

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \int_{x_1}^{x_n} \varphi_i\ (t)\ \varphi_j\ (t)\ dt$$

$$(4\text{-}17) \quad = \frac{(-1)^k}{(k-1)!(k-1)!} \sum_{p=i}^{i+k} \sum_{r=j}^{j+k} \frac{1}{\omega'_i(x_p).\omega'_j(x_r)} \int_{x_1}^{x_n} (x_p-t)_+^{k-1}.(t-x_r)_+^{k-1}dt$$

Or (en intégrant par parties).

$$\int_{x_1}^{x_n} (x_p-t)_+^{k-1}.(t-x_r)_+^{k-1}dt = \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!} (x_p-x_r)_+^{2k-1}$$

4-17 s'écrit donc :

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \sum_{p=i}^{i+k} \frac{1}{\omega'_i(x_p)} \cdot \sum_{r=j}^{j+k} \frac{(x_p-x_r)_+^{2k-1}}{\omega'_j(x_2)}$$

et d'après la définition 4-16

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \sum_{p=i}^{i+k} \frac{h(j,x_p)}{\omega'_i(x_p)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\ \delta_{x_i,\ldots,x_i+k}h(j,t) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque :

D'après 4-12 on a :

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \text{pour} \quad j \geq i+k \quad (i,j=1,\ldots,n-k).$$

En posant $\lambda_j = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \lambda_j^*$ le système 4-14 s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \, \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} h(j,t) = \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} y \qquad i=1,\ldots,n-k \tag{4-18}$$

L'équation 4-13 devient :

$$s^{(k)}(t) = \frac{(2k-1)!}{(-1)^k} \cdot \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \, \delta_{x_j \ldots x_{j+k}} (t-x)_+^{k-1} \tag{4-18'}$$

Et en intégrant k fois :

$$s(t) = P_{k-1}(t) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \quad \delta_{x_j,\ldots,x_{j+k}} (t-x)_+^{2k-1} \tag{4-19}$$

Pour que la fonction (4-19) soit la fonction-spline d'interpolation cherchée, il faut vérifier que si on utilise (par exemple) les conditions $s(x_i) = y_i$ $(i=1,\ldots,k)$ pour déterminer le polynôme P_{k-1} de (4-19) alors on aura $s(x_i) = y_i$ pour $i=k+1,\ldots,n$.

En effet d'après la construction de s(t) on a :

$$(4\text{-}20)\qquad \int_{x_1}^{x_n} \varphi_i(t)s^{(k)}(t)dt = \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} s(x) = \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} y \quad \text{pour } i=1,\ldots,n\text{-}k$$

Comme $s(x_j) = y_j$ pour $j=1,\ldots,k$, l'équation (4-20) entraine (pour $i=1$) que $s(x_{k+1}) = y_{k+1}$. En répétant ce raisonnement pour $i=2,\ldots,n-k$, on vérifie que l'on a $s(x_i) = y_i$ pour $i=1,\ldots,n$.

B - Procédures algol :

On obtiendra les coefficients de la fonction-spline 4-19 en calculant d'abord les coefficients $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k}$ à l'aide du système linéaire de n-k équations à n-k inconnues 4-18 ; les coefficients du polynôme P_{k-1} seront ensuite obtenus en utilisant k conditions d'interpolation $s(x_i) = y_i$ $(i=1,\ldots,k)$.

Le système 4-18 peut s'écrire sous forme matricielle :

$$A\,\lambda = b$$

La matrice A est une matrice symétrique car ses éléments sont égaux à (φ_i,φ_j) (à un coefficient près), d'autre part d'après 4-12 on a $(\varphi_i,\varphi_j) = 0$ pour $j \geq i+k$. La matrice A aura donc l'allure ci-dessous :

$$\frac{(2k-1)!}{(-1)^k}\,A = \begin{bmatrix}
(\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_k) & & & \bigcirc \\
\vdots & \ddots & & \ddots & & \\
(\varphi_1,\varphi_k) & & \ddots & & \ddots & (\varphi_{n-2k+1},\varphi_{n-k}) \\
& \ddots & & \ddots & & \vdots \\
& \bigcirc & \ddots & & \ddots & \\
& & & (\varphi_{n-2k+1},\varphi_{n-k}) & \cdots & (\varphi_{n-k},\varphi_{n-k})
\end{bmatrix}$$

```
procédure INTE SPLINE (N) ORDRE : (K) PTS A INTERPOLER : (X,Y)
RESULTATS : (LAMBDA,C) ; valeur N,K,X,Y ; entier N,K ; tableau X,Y,LAMBDA,C ;
commentaire cette procédure calcule dans les tableaux LAMBDA[1:N-K] et C[1:K]
les coefficients de la fonction-spline 4-19 d'ordre k (n > k) et qui passe par
les n points X,Y[1:N]. On suppose X[I] < X[I+1] pour I=1,...,n-1 et k ≥ 2 ;
début procédure GRESOLSYSLINE (A,B,X,N,IMPOSS)...voir annexe... ;
    reel procédure H(J,T) ; valeur J,T ; entier J ; reel T ;
    commentaire cette procédure calcule la valeur que prend la fonction
    4-16 pour J et T donnés ;
    début tableau L[0:K] ; entier P,R ; reel S,U ;
        si T > X[J] alors
        début pour R := 0 pas 1 jusqu'à K faire
              si X[J+R] < T alors
              début U := S := (T-X[J+R])×(T-X[J+R]) ;
                    pour P := 1 pas 1 jusqu'à K-2 faire S := S×U ;
                    S := S×(T-X[J+R]) ; L[R] := S
```

```
                fin sinon L[R] := .0 ;
                pour R := 1 pas 1 jusqu'à K faire
                pour P := 0 pas 1 jusqu'à K-R faire
                si ABS (L[P+1]-L[P])=0 alors L[P] := 0
                sinon L[P] := (L[P+1]-L[P])/(X[J+P+R]-X[J+P]) ; H := L[0]
          fin sinon H := .0
    fin H ;
    reel procédure DIF DIV TA (J,L) ; valeur J,L ; entier J ;
    tableau L ;
    commentaire cette procédure calcule la différence divisée du tableau
    L[0:K] sur les points X[J:J+K] ;
    début entier I,R ;
          pour R := 1 pas 1 jusqu'à K faire
          pour I := 0 pas 1 jusqu'à K-R faire
          L[I] := si ABS (L[I+1]-L[I])=0 alors .0
          sinon (L[I+1]-L[I])/(X[J+I+R]-X[J+I]) ;
          DIF DIV TA := L[0]
    fin DIF DIV TA ;
    tableau A[1:si N-K ≤ K alors K sinon N-K, 1:si N-K ≤ K
    alors K sinon N-K], B[1:si N-K ≤ K alors K sinon N-K], L[0:K] ;
    entier I,J,R ; reel S ;
    CALCUL DES LAMBDAS :
    pour I := 1 pas 1 jusqu'à N-K faire
    début pour J := I pas 1 jusqu'à si I+K-1 ≤ N-K alors I+K-1 sinon N-K faire
          début pour R := 0 pas 1 jusqu'à K faire
                L[R] := H(I,X[J+R]) ;
                A[J,I] := A[I,J] := DIF DIV TA (J,L)
          fin ; pour J := I+K pas 1 jusqu'à N-K faire A[I,J] := A[J,I] := 0 ;
          pour R := 0 pas 1 jusqu'à K faire L[R] := Y[I+R] ;
          B[I] := DIF DIV TA (I,L)
    fin ;
```

```
        GRESOLSYSLINE (A,B,LAMBDA,N-K,IMP) ;
        aller à SUI ; IMP : ECRIRE ('IMP') ; SUI :
        pour I := 1 pas 1 jusqu'à K faire
        début S := Y[I] ; pour R := 1 pas 1 jusqu'à si
                I-1 ≤ N-K alors I-1 sinon N-K faire
                S := S-LAMBDA[R]×H(R,X[I]) ;
                B[I] := S ;
                pour J := 1 pas 1 jusqu'à K faire
                si J=1 alors A[I,J] := 1 sinon
                début S := X[I] ; pour R := 1 pas 1 jusqu'à J-2 faire
                        S := S×X[I] ; A[I,J] := S
                fin
        fin ;
        GRESOLSYSLINE (A,B,C,K,OS) ; OS :
fin INTE SPLINE ;
```

La reel procédure permettant d'utiliser les coefficients calculés à l'aide de la procédure précédente peut s'écrire.

```
reel procédure SPLINE INTE (K,N,X,C,LAMBDA,T) ; valeur K,N ;
commentaire cette procédure calcule la valeur que prend en T la fonction-spline
4-19 ayant pour coefficients C[1:K] et LAMBDA[1:N-K] ;
début reel procédure H(J,T) ; ... voir corps dans INTESPLINE ... ;
        reel S ; entier J ;
        S := C[K] ; pour J := K-1 pas -1 jusqu'à 1 faire
        S := S×T+C[J] ; J := 0 ;
        pour J := J+1 tant que T > X[J] ∧ J ≤ N faire
        S := S+LAMBDA[J]×H(J,T)
fin SPLINE INTE ;
```

C - Efficacité et conclusions :

Après avoir effectué avec la procédure "méthode d'intégration" les mêmes essais numériques que pour la procédure "sauts de dérivées" (voir 3-2B), on constate que ces deux méthodes donnent des résultats pratiquement équivalents.

Nous pouvons cependant constater que pour obtenir une fonction-spline de degré trois (k=2) passant par n points (avec $n \geq 20$ par exemple), ces deux méthodes sont nettement moins précises que la procédure "coefsplinetrois" du paragraphe 4-1-C.

Ce résultat n'est pas étonnant car pour obtenir la fonction-spline à l'aide des procédures "sauts de dérivées" et "méthode d'intégration" on opère en deux phases :

1) On calcule les coefficients λ_i ($i=1,\dots,n$ pour "sauts de dérivées" et $i=1,\dots,n-k$ pour "méthode d'intégration") correspondants à la dérivée $s^{(k)}$ d'ordre k de la fonction-spline.

2) On calcule les coefficients r_i ($i=1,\dots,k$) du polynôme P_{k-1} obtenu après intégration de $s^{(k)}$.

Les erreurs que l'on commet proviennent principalement de cette deuxième opération. En effet, pour obtenir les coefficients r_i du polynôme, on utilise k conditions d'interpolation parmi les n conditions $s(x_i) = y_i$ ($i=1,\dots,n$) ; deux stratégies sont alors possibles :

1) On utilise les k premiers points x_i ($i=1,\dots,k$). (C'est la méthode utilisée dans la procédure "méthode d'intégration" écrite ci-dessus).

On a alors une très bonne approximation de la fonction-spline au voisinage de ces points. Si st(t) désigne la vraie fonction-spline et s la fonction-spline ainsi calculée, la suite

$$F_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |s(x)-st(x)| \qquad i=1,\ldots,n-1$$

est alors une suite croissante ($F_i \leq F_{i+1}$)

2) On peut utiliser k points x_i aussi uniformément répartis que possible sur $[x_1, x_n]$ (méthode utilisée dans la procédure "sauts de dérivées" voir 3-2-C). Le maximum de la fonction F_i devient alors inférieur à celui obtenu en utilisant la première stratégie.

Ces erreurs proviennent en fait de l'écriture même de la fonction-spline sous la forme (dans la méthode d'intégration)

$$s(t) = P_{k-1}(t) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \, \delta_{x_j,\ldots,x_{j+k}} (t-x)_+^{2k-1} \qquad \text{(voir 4-19)}$$

Ainsi, le calcul de s(t) fait intervenir d'autant plus de coefficients λ_j que la variable t est plus élevée. Les erreurs de calcul inévitables commises sur les λ_j ($j=1,\ldots,n-k$) entrainent donc une erreur croissante avec t sur la fonction s(t).

Pour essayer d'obtenir la même (très bonne) précision qu'avec la procédure "COEFSPLINETROIS" (voir §4-1-B), il faut effectuer la deuxième phase "localement". Pour cela on va chercher à obtenir en chaque point x_i ($i=1,\ldots,n$) les dérivées d'ordre 1 à k-1 de la fonction-spline. (On pose $s^{(j)}(x_i) = y_i^j$ $i=1,\ldots,n$ et $j=1,\ldots,k-1$).

Deux stratégies sont alors possibles :

1) Stratégie A : Pour chaque point x_i (i=1,...,n-k) on obtient y_i^j (j=1,...,k-1) au moyen de l'expression 4-19 de la fonction-spline. Le polynôme P_{k-1} étant déterminé chaque fois en utilisant les k conditions d'interpolation $s(x_{i+r}) = y_{i+r}$ r=0,...,k-1, on a alors y_i^ℓ en dérivant la fonction-spline ainsi obtenue. Pour $n-k < i \leq n$ on dérive la fonction-spline calculée pour i=n-k.

2) Stratégie B : Au moyen de l'expression 4-18' on calcule les valeurs $y_i^k = s^{(k)}(x_i)$ pour i=1,...,n. Dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) la fonction-spline est un polynôme de degré 2k-1. On peut déterminer ce polynôme en utilisant les valeurs y_j et y_j^k de la fonction et de sa dérivée d'ordre k en des points x_j voisins de x_i. Nous allons développer cette méthode pour k=3.

Dans l'intervalle (x_{i-1}, x_{i+2}) (pour i=2,...,n-2) la fonction-spline peut s'écrire :

$$s(t) = P_5(t) + \lambda\ (t-x_i)_+^5 + \lambda'\ (t-x_{i+1})_+^5$$

On détermine les 8 coefficients (6 pour le polynôme et 2 pour λ et λ') de cette fonction au moyen des 8 conditions :

$$s^{(k)}(x_r) = y_r^k \quad \text{et} \quad s(x_r) = y_r \qquad \text{pour } r=i-1,\dots,i+2$$

On a alors y_i^1 et y_i^2 en dérivant le polynôme $P_5(t)$ au point x_i. Pour avoir y_i^1 et y_i^2 (i=1,n-1,n) il suffit de dériver les fonctions-spline obtenues dans les intervalles $[x_1, x_2]$ et $[x_{n-1}, x_n]$ (pour i=2 et i=n-2).

A partir des coefficients y_i^j et y_i ($i=1,\dots,n$ et $j=1,\dots,k-1$) on utilise une méthode d'interpolation (voir par exemple Golomb [8] p.190 et Heurtaux [27]) pour avoir (comme dans la procédure "coefsplinetrois") les polynômes $P_i(t)$ dans les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ($i=1,\dots,n-1$).

Cette méthode impose cependant de garder en mémoire $(k+1)\times n$ coefficients (en tenant compte des x_i et y_i ($i=1,\dots,n$)) ; alors que dans la procédure "INTE SPLINE" on ne conserve en mémoire que $2\times n$ coefficients ($n-k$ coefficients λ_i, k coefficients c_i, n coefficients x_i).

Nous proposons deux procédures (correspondant aux deux stratégies A et B ci-dessus) permettant d'obtenir la fonction-spline localement.

D - Méthodes d'intégration locale.

a) Stratégie A :

```
procédure METH INTE LOCA (K,N,X,Y,D) ; valeur K,N,X,Y ;
entier K,N ; tableau X,Y,D ;
commentaire cette procédure calcule dans le tableau D[1:N,0:K-1] les dérivées
d'ordre 0 à K-1 aux points X[1:N] de la fonction-spline prenant aux points
X[I] les valeurs Y[I] (ordre K) ;
début reel procédure DER POL (K,H,C,T) ; valeur K,H,C,T ;
    entier K,H ; tableau C ; reel T ;
    commentaire cette procédure calcule pour la valeur T la dérivée d'ordre H
    du polynôme de degré K-1 qui s'écrit C[1]+...+C[K]×T ↑ (K-1) ;
    début reel S,U ; entier I,J ;
        S := C[K] ; pour I := 1 pas 1 jusqu'à H faire S := S×(K-I) ;
        pour J := K-1 pas -1 jusqu'à H+1 faire
        début U := C[J] ;
```

```
            pour I := 1 pas 1 jusqu'à H faire U := U×(J-I) ; S := S×T+U
        fin ; DER POL := S
fin DER POL ;
procédure GRESOLSYSLINE...voir annexe... ;
reel procédure FI (I,H,T) ; valeur I,H,T ;
entier I,H ; reel T ;
commentaire cette procédure calcule pour la valeur T la dérivée d'ordre
H de la fonction 4-16 ;
début tableau L[O:K] ; entier P,R ; reel S,U ;
        si T > X[I] alors
        début pour R := 0 pas 1 jusqu'à K faire
            si X[I+R] < T alors
            début U := S := (T-X[I+R]) ;
                pour P := 1 pas 1 jusqu'à 2×K-H-2
                faire S := S×U ; L[R] := S
            fin sinon L[R] := .0
            pour R := 1 pas 1 jusqu'à K faire
            pour P := 0 pas 1 jusqu'à K-R faire
            L[P] := (L[P+1]-L[P])/(X[I+P+R)-X[I+P]) ; S := L[0] ;
            pour P := 1 pas 1 jusqu'à H faire S := S×(2×K-P) ; FI := S
        fin sinon FI := .0
fin FI ;
reel procédure DIF DIV TA...voir le corps de INTESPLINE... ;
tableau A[1:N,1: si N-K ≤ K alors K sinon N-K],
B[1:N], L[O:K], LAMBDA[1:N-K], C[1:K] ;
entier I,J,R,Q,V ; reel S ;
CALCUL DES LAMBDAS :
.................................................................
.... (voir dans le corps de POL INTE en remplaçant l'appel de procédure
.H(I,X[J+R]) par FI(I,0,X[J+R])) ............................ SUI :
STRATEGIE A :
```

```
    pour I := 1 pas 1 jusqu'à N faire
    début si I ≤ N-K+1 alors
          début pour J := 1 pas 1 jusqu'à K faire
                début S := Y[I+J-1] ;
                      pour Q := 1 pas 1 jusqu'à
                      si I+J-2 ≤ N-K alors I+J-2
                      sinon N-K faire
                      S := S-LAMBDA[Q]×FI(Q,O,X[I+J-1]); B[J] := S ;
                      pour Q := 1 pas 1 jusqu'à K faire
                      si Q=1 alors A[J,Q] := 1.0sinon
                      A[J,Q] := X[I+J-1] ↑ (Q-1)
                fin ; GRESOLSYSLINE (A,B,C,K,OS) ;
                OS :
          fin ;
          pour J := 1 pas 1 jusqu'à K-1 faire
          début S := DER POL (K,J,C,X[I]) ;
                pour Q := 1 pas 1 jusqu'à
                si I-1 ≤ N-K alors I-1 sinon N-K faire
                S := S+LAMBDA[Q]×FI(Q,J,X[I]) ;
                D[I,J] := S
          fin
    fin ; pour I := 1 pas 1 jusqu'à N faire D[I,0] := Y[I]
fin METH INTE LOCA (STRATEGIE A) ;
```

b) Stratégie B (k=3) :

Il suffit de faire les modifications suivantes à la procédure précédente :

- on remplace partout k par 3.
- on ajoute aux déclarations du bloc de procédure METH INTE LOCA : tableau Y3[1:N],AA,BB,CC[1:8] ; reel T,U,V ;
- on remplace la partie STRATEGIE A :........fin METH INTE LOCA ; par :

```
STRATEGIE B :
Y3[1] := Y3[N] := 0 ; Y3[2] := LAMBDA[1]×FI(1,3,X[1]) ;
pour I := 3 pas 1 jusqu'à N-1 faire
début S := 0 ; T := X[I] ;
      pour J := I-2,I-1 faire
      S := S+LAMBDA[J]×FI(J,3,T) ;
      Y3[I] := S
fin ;
pour I := 2 pas 1 jusqu'à N-2 faire
début pour R := 1 pas 1 jusqu'à 8 faire
      début BB[R] := si R ≤ 4 alors Y[I-2+R] sinon Y3[I-6+R] ;
            pour J := 1 pas 1 jusqu'à 8 faire
            si R ≤ 4 alors
            début si J=1 alors AA[R,J] := 1
                  sinon si J ≤ 6 alors AA[R,J] := X[I-2+R] ↑ (J-1)
                  sinon si J=7 et R ≥ 3 alors
                  AA[R,J] := (X[I-2+R]-X[I])↑ 5
                  sinon si J=8 et R=4 alors
                  AA[R,J] := (X[I+2]-X[I+1]) ↑ 5
                  sinon AA[R,J] := 0
            fin sinon
            si J=4 alors AA[R,J] := 6 sinon
            si J=5 alors AA[R,J] := 24×X[I-6+R] sinon
            si J=6 alors AA[R,J] := 60×X[I-6+R] ↑ 2 sinon
            si J=7 et R ≥ 7 alors
            AA[R,J] := 60×(X[I-6+R]-X[I]) ↑ 2 sinon
            si J=8 et R=8 alors
            AA[R,J] := 60×(X[I+2]-X[I+1])↑ 2
            sinon AA[R,J] := 0
      fin ; GRESOLSYSLINE(AA,BB,CC,8,OUF) ; OUF :
      D[I,0] := Y[I] ; pour R := 1,2 faire
      D[I,R] := DER POL (6,R,CC,X[I]) ;
      si I=2 alors
```

```
        début D[1,0] := Y[1] ; pour R := 1,2 faire
              D[1,R] := DER POL (6,R,CC,X[1])
        fin ;
        si I=N-2 alors
        pour J := N-1, N faire
        début D[J,0] := Y[J] ;
              D[J,1] := DER POL (6,1,CC,X[J])+5×CC[7]×(X[J]-X[N-2]) ↑ 4+ si
              J=N-1 alors .0 sinon 5×CC[8]×(X[J]-X[N-1]) ↑ 4 ;
              D[J,2] := DER POL (6,2,CC,X[J])+20×CC[7]×(X[J]-X[N-2]) ↑ 3+ si
              J=N-1 alors .0 sinon 20×CC[8]×(X[J]-X[N-1]) ↑ 3
        fin
fin
fin METH INTE LOCA (STRATEGIE B) ;
```

Nous proposons une procédure permettant de calculer la valeur que prend à l'abscisse t la fonction-spline ayant les coefficients $d_{i,j}$ ($i=1,\ldots,n$; $j=0,\ldots,k-1$) calculés à l'aide de l'une des procédures ci-dessus. Nous nous limitons à k=3,4 (pour k quelconque voir Heurtaux [27]).

```
reel procédure POL INTE (K,N,X,D,T) ; valeur K,N,X,D,T ;
entier K,N ; tableau X,D ; reel T ;
commentaire on suppose K=3 ou 4 et X[1] ≤ T ≤ X[N] ;
début reel procédure Q(P,K,A,B,X) ; valeur A,B,P,K,X ;
      entier P,K ; reel A,B,X ;
      si K=3 alors
      début si P=0 alors Q := ((6×X+3)×X+1)×(1-X) ↑ 3
            sinon si P=1 alors Q := X×(B-A)×(1+3×X)×(1-X) ↑ 3
            sinon Q := .5×X×X×(B-A)×(B-A)×(1-X) ↑ 3
      fin sinon si P=0 alors Q := (((20×X+10)×X+4)×X+1)×(1-X) ↑ 4
      sinon si P=1 alors Q := ((10×X+4)×X+1)×(B-A)×X×(1-X) ↑ 4
      sinon Q := (X ↑ 3×(1-X) ↑ 4×(B-A) ↑ 3)/6 ;
      entier P,I ; reel A,H,S,B ;
```

```
    I := 1 ; JO : si T ≤ X[I+1] alors aller à SUITE sinon
    début I := I+1 aller à JO fin ;
    SUITE : H := X[I+1]-X[I] ; A := T-X[I] ; B := X[I+1]-T ;
    S := .0 ; pour P := 0 pas 1 jusqu'à K-1 faire
    S := S+Q(P,K,X[I],X[I+1],A/H)×D[I,P]+
    (si P ÷ 2×2=P alors 1 sinon -1) ×Q(P,K,X[I],X[I+1],B/H)×D[I+1,P] ;
    POL INTE := S
fin POL INTE ;
```

Afin d'étudier l'efficacité des procédures "METH INTE LOCALE" et "POL INTE", nous les avons écrites en double précision. Soit $s^{*}_{k,n}$ la fonction-spline d'ordre k sur n points obtenue en double précision et $s_{k,n}$ la fonction-spline normale correspondante.

Pour $x_i \in [-8,+8]$ et $y_i = f(x_i)$ $(i=1,\dots,n$ et $f(x) = (2x^2+x-1)/(x^2-x+1)$ voir le graphe de f en §3-2), en posant

$$F_{k,n} = \max_{t \in [-8,+8]} |s_{k,n}(t)-s^{*}_{k,n}(t)|$$

On obtient les résultats suivants pour $F_{k,n}$ (divisés par 10^{-7}).

n	5	11	17	23	29	32
k=3 stratégie A	2	1262	26	21074	20855	14926
k=3 stratégie B	1	23	12	15	16	22
k=4 stratégie A	2	13813	10767	$F_{n,k} \geq 10^{-1}$		

On constate que la méthode d'intégration est dans tous les cas meilleure que les deux méthodes du chapitre trois. La stratégie B (et sa généralisation a un ordre k quelconque) est d'autre part plus efficace que la stratégie A. Cependant dès que k augmente, il faut résoudre pour chaque i ($i=1,\ldots,n$) un système linéaire d'ordre de plus en plus élevé (ordre $4(k-1)$ pour $k \geq 3$).

CHAPITRE 5

FONCTIONS-SPLINE D'INTERPOLATION A POINTS EQUIDISTANTS

Nous avons vu au chapitre 4 une méthode (dite d'intégration) pour obtenir numériquement les fonctions-spline d'ordre k se raccordant en des points x_i (i=1,...,n) quelconques. Nous allons étudier dans ce chapitre ce que la méthode d'intégration devient dans le cas où les points x_i (i=1,...,n) sont équidistants.

Nous utiliserons des fonctions L_p introduites pour la première fois par Schoenberg [13] puis utilisées sous d'autres formes par Ahlberg, Nilson [1] et Weinberger [19] . Ces fonctions L_p nous permettrons d'obtenir un algorithme de résolution particulièrement efficace basé sur une idée de Weinberger [19] .

§5-1 ETUDE DE FONCTIONS AUXILIAIRES

Nous reprenons dans ce paragraphe quelques passages de l'article [13] de Schoenberg.

A - Définition :

Nous désignerons par δ^k l'opérateur de différence centrale d'ordre k utilisant un pas égal à l'unité.

On a par définition (voir Kuntzmann [25]) :

(5-1) $$\delta^p f(x) = \sum_{u=0}^{p} C_p^u \, (-1)^u \, f(x + \frac{p}{2} - u)$$

et

(5-2) $$L_p(x) = \frac{1}{(p-1)!} \, \delta^p x_+^{p-1}$$

La fonction x_+^{p-1} étant telle que :

$$x_+^{p-1} = \begin{cases} x^{p-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Remarquons que la fonction L_p peut encore s'écrire :

(5-3) $$L_p(x) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j \left[x - (j - \frac{p}{2})\right]_+^{p-1}$$

avec $\lambda_j = \frac{1}{(p-1)!} \, C_p^j \, (-1)^j$

D'après (5-3) c'est donc une fonction-spline de degré p-1 se raccordant aux points $x_j = j - \frac{p}{2}$ $(j=0,\dots,p)$

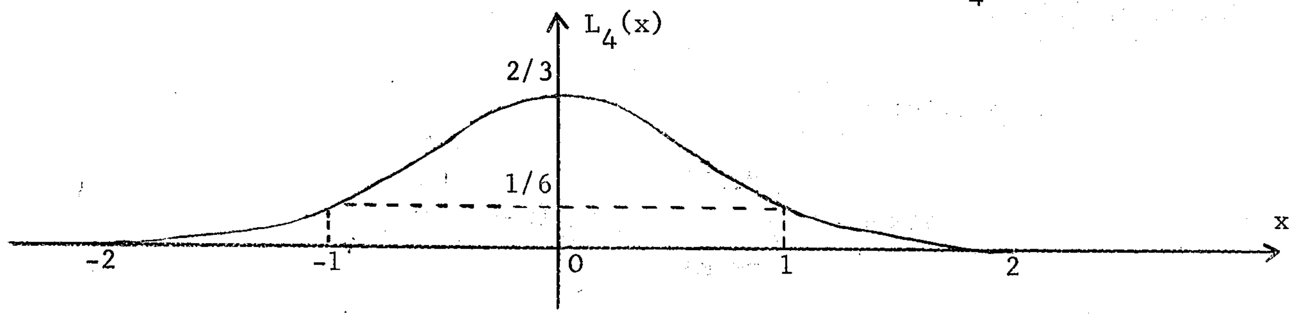
(5-3') Remarquons aussi que pour $x \geqslant \frac{p}{2}$ et $x \leqslant \frac{p}{2}$ on a $L_p(x) = 0$

En effet pour $x \geqslant \frac{p}{2}$ on peut écrire d'après (5-2)

$$L_p(x) = \frac{1}{(p-1)!}\ \delta^p\ x^{p-1} = 0$$

Car la différence centrale d'ordre p d'un polynôme de degré p-1 est identiquement nulle (Kuntzmann [25]).

On a par exemple la représentation graphique suivante pour $L_4(x)$



B - Propriétés :

Théorème 5-1-1 :

Soit $s(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ (x-i)_+^{2k-1}$ une fonction-spline d'interpolation d'ordre k se raccordant aux points i=0,...,n. Il existe une suite $\{\nu_j\}$ $(j= -k+1,\dots,n+k-1)$ unique telle que

$$s(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j\ L_{2k}\ (x-j) \tag{5-4}$$

Démonstration dans Schoenberg [13] page 72.

Propriété 5-1-2 :

La fonction-spline (5-4) est telle que

(5-5) $$\Delta^k s(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \Delta^k \nu_j L_{2k}(x-j)$$

Δ désigne l'opérateur de différence progressive d'ordre 1 (Kuntzmann [25]).

On a en effet :

$$s(x+1) = \sum_{r=-k+1}^{n+k-1} \nu_r \, L_{2k}(x+1-r)$$

Faisons le changement de variable j=r-1

$$s(x+1) = \sum_{j=-k}^{n+k-2} \nu_{j+1} \, L_{2k} \, (x-j)$$

soit :

$$\Delta s(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \Delta\nu_j \, L_{2k} \, (x-j)$$

et en répétant l'opération k fois on obtient la propriété.

Propriété 5-1-3 :

(5-6) $$L_p^{(j)}(x) = \delta^j L_{p-j}(x) \qquad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant p-1$$

On a en effet.

$$L'_p(x) = \delta^p \frac{d}{dx} \frac{1}{(k-1)!} x_+^{k-1} = \delta^p \frac{1}{(p-2)!} x_+^{p-2} = \delta L_{p-1}(x)$$

En dérivant j fois de cette façon on obtient (5-6).

Propriété 5-1-4 :

La fonction-spline (5-4) est telle que :

(5-7) $$s^{(p)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \delta^p \nu_j \, L_{2k-p} \, (x-j) \quad \text{si p est pair}$$

(5-8) $$s^{(p)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \delta^p \nu_{j+\frac{1}{2}} \, L_{2k-p} \, (x-j-\tfrac{1}{2}) \quad \text{si p est impair}$$

Voir démonstration dans Schoenberg [13] page 73.

Remarque :

Dans les formules (5-5), (5,6) et (5,7), on suppose les suites ν_j $(j \in Z)$ infinies en posant $\nu_j=0$ pour $j \leq -k$ et $j \geq n+k$.

§5-2 DESCRIPTION DE LA METHODE

Nous allons étudier une méthode permettant d'obtenir la fonction-spline d'interpolation s de degré 2k-1 dont le graphe passe par les n+1 points $(i,y_i) \in R^2$ $i=0,\dots,n$.

A - Propriété de la fonction-spline :

On supposera dans toute la suite $n \geqslant k+1$. (si $n \leqslant k$ il suffit de faire passer par les n points un polynôme de degré k-1).

Nous avons vu au chapitre 1 que la fonction-spline s devait satisfaire les conditions :

(5-9) $\qquad s(i) = y_i \qquad$ pour $i=0,\dots,n$

et

(5-10) $\qquad s(x)$ polynôme de degré k-1 pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant n$.

Montrons le théorème suivant :

<u>Théorème 5-2-1</u> :

> Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction-spline (5-4) se réduise à un polynôme de degré k-1 pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant n$ est qu'on ait :
>
> $\Delta^k \nu_j = 0 \qquad$ pour $j=-k+1,\dots,-1,n-k+1,\dots,n-1$.

Remarquons d'abord que la condition (5-10) est équivalente à la condition :

(5-11) $\qquad s^{(k)}(x) = 0 \qquad$ pour tout $x \in \,]-\infty,0] \cup [n,+\infty[$

L'opérateur Δ^k est l'opérateur de différences progressives de pas 1 d'ordre k (Kuntzmann [25]).

<u>Démonstration</u> :

On a :

$$s^{(k)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \frac{d^k}{dx^k} L_{2k}(x-j)$$

D'après (5-6) on peut encore écrire :

$$s^{(k)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \, \delta^k L_k(x-j)$$

Comme on a la relation :

$$\delta^k f(x) = \Delta^k f(x-\tfrac{k}{2})$$

On peut encore écrire :

$$s^{(k)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \, \Delta^k L_k(x-j-\tfrac{k}{2})$$

(Remarquons que la différence progressive est prise par rapport à x)

Soit d'après (5-5) :

(5-12) $$s^{(k)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \Delta^k \nu_j . L_k(x-j-\tfrac{k}{2})$$

Or par définition on a :

$L_k(x-j-\frac{k}{2}) = 0$ pour $|x-j-\frac{k}{2}| \geqslant \frac{k}{2}$ soit $j \geqslant x$ et $j \leqslant x-k$

Donc pour $x \leqslant 0$, (5-12) s'écrit :

$$s^{(k)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{-1} \Delta^k \nu_j . L_k \ (x-j-\frac{k}{2})$$

et pour $x \geqslant n$, (5-12) s'écrit :

$$s^{(k)}(x) = \sum_{j=n-k+1}^{n-1} \Delta^k \nu_j . L_k \ (x-j-\frac{k}{2})$$

Les fonctions L_k étant toujours positives on aura :

$s^{(k)}(x) = 0$ pour tout $x \in \,]-\infty,0] \cup [n,+\infty[$

si et seulement si

$\Delta^k \nu_j = 0$ pour $j=-k+1,\dots,-1,n-k+1,\dots,n-1$ C.Q.F.D.

La condition (5-9) s'écrit :

$$\sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \, L_{2k} \ (i-j) = y_i \qquad \text{pour } i=0,\dots,n$$

Faisons le changement de variable $p=j-i$

(5-13) $$\sum_{p=-k+1-i}^{n+k-1-i} \nu_{p+i} \, L_{2k} \ (p) = y_i \qquad \text{pour } i=0,\dots,n$$

En effet $L_{2k}\ (-x) = L_{2k}\ (x)$ car $(-x)_+^{2k-1} = -x^{2k-1} + x_+^{2k-1}$ donc

$\delta^{2k}(-x)_+^{2k-1} = \delta^{2k} x_+^{2k-1}$.

Comme $L_{2k}(p) = 0$ pour $p \leqslant -k$ et $p \geqslant +k$ (5-13) s'écrit :

$$\sum_{p=-k+1}^{k-1} \nu_{p+i} \, L_{2k}(p) = y_i \quad \text{pour } i=0,\ldots,n$$

On obtiendra donc la fonction-spline d'interpolation (5-4) satisfaisant les conditions (5-9) et (5-10) en calculant les n+2k-1 coefficients $\nu_{-k+1},\ldots,\nu_{n+k-1}$ satisfaisant les conditions :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{p=-k+1}^{k-1} \nu_{p+i} \, L_{2k}(p) = y_i & \text{pour } i=0,\ldots,n \\ \text{et} & \\ \Delta^k \nu_j = 0 & \text{pour } j=-k+1,\ldots,-1,n-k+1,\ldots,n-1 \end{array}} \quad \begin{array}{l}(5\text{-}14)\\ \\ (5\text{-}15)\end{array}$$

B - Calcul des coefficients ν_j :

L'équation (5-14) est une équation aux différences finies. Nous allons chercher une solution particulière de l'équation (5-14) qui satisfasse l'équation (5-15).

a) Solution de l'équation homogène :

Posons $\nu_p = h^p$, l'équation homogène (5-14) s'écrit :

$$I_i(h) = \sum_{p=-k+1}^{k-1} h^{p+i} \, L_{2k}(p) = 0 \quad \text{pour } i=0,\ldots,n \tag{5-16}$$

Ou encore :

$$I_i(h) = \sum_{p=0}^{2k-2} h^{p-k+1+i} L_{2k}(p-k+1) = h^{i-k+1} \sum_{p=0}^{2k-2} h^p L_{2k}(p-k+1)$$

Posons :

(5-17) $$Q_{2k-2}(h) = (2k-1)! \sum_{p=0}^{2k-2} h^p L_{2k}(p-k+1)$$

On aura donc :

(5-18) $$I_i(h) = \frac{1}{(2k-1)!} h^{i-k+1} Q_{2k-2}(h) = 0 \qquad \text{pour } i=0,\dots,n$$

Les solutions de l'équation (5-16) serons donc les racines du polynôme $Q_{2k-2}(h)$, car d'après (5-16) h=0 n'est pas racine de $I_i(h) = 0$.

Le polynôme $Q_{2k-2}(h)$ a des propriétés très intéressantes (Weinberger [19]) que nous allons étudier.

Posons :

(5-19) $$Q_\ell(h) = (\ell+1)! \sum_{i=0}^{\ell} h^i L_{\ell+2}\left(i-\frac{\ell}{2}\right)$$

On peut remarquer que pour $\ell=2k-2$ on retrouve bien le polynôme (5-17)

<u>Théorème 5-3-1</u> :

Le polynôme $Q_\ell(h)$ vérifie la relation de récurrence

(5-20) $$Q_\ell(h) = (\ell h+1)\, Q_{\ell-1}(h) - h(h+1)\, Q'_{\ell-1}(h) \qquad \ell=1,2,\dots$$

Démonstration :

• Montrons d'abord le lemme suivant :

> **Les** fonctions L_k vérifient la relation de récurrence :
>
> (5-21) $$(k-i)\, L_k\left(-\frac{k}{2}+i\right) + (1+i)\, L_k\left(-\frac{k}{2}+i+1\right) = k\, L_{k+1}\left(-\frac{k+1}{2}+i+1\right)$$
>
> **pour** $i=1,\dots,k$ et $k \in \mathbb{N}$

Explicitons le premier membre de (5-21)

$$I = (k-i)\, L_k\left(-\frac{k}{2}+i\right) + (1+i)\, L_k\left(-\frac{k}{2}+i+1\right)$$

Qui s'écrit encore d'après (5-3)

$$I = \frac{(k-i)}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{i-1} C_k^j\, (-1)^j\, (i-j)^{k-1} + \frac{(1+i)}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{i} C_k^j\, (-1)^j\, (i-j+1)^{k-1}$$

ou encore

$$I = \frac{(k-i)}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{i} C_k^{j-1}\, (-1)^{j-1}\, (i-j+1)^{k-1} + \frac{(1+i)}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{i} C_k^j\, (-1)^j\, (i-j+1)^{k-1}$$

On a les relations :

$$C_k^{j-1} = C_{k+1}^j\, \frac{j}{k+1} \qquad \text{et} \qquad C_k^j = C_{k+1}^j\, \frac{k+1-j}{k+1}$$

On peut donc écrire :

$$I = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{i} C_{k+1}^j\, (-1)^{j-1} (i-j+1)^{k-1} \times \frac{(k-i)j-(1+i)(k+1-j)}{k+1}$$

$$\frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{i} C_{k+1}^{j} (-1)^{j-1} (i-j+1)^{k-1} (j-i-1)$$

$$= k\, L_{k+1} \left(-\frac{k+1}{2} + i + 1\right) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Démontrons maintenant le théorème 5-3-1.

D'après (5-19) on a :

$$H = (\ell h+1)\, Q_{\ell-1}(h) - h(h-1)\, Q_{\ell-1}'(h)$$

$$= \ell! \sum_{i=0}^{\ell-1} (\ell-i)\, h^{i+1}\, L_{\ell+1}\left(\frac{\ell-1}{2} - i\right) + \ell! \sum_{i=0}^{\ell} (1+i)\, h^{i}\, L_{\ell+1}\left(\frac{\ell-1}{2} - i\right)$$

Utilisons (5-21) pour $k=\ell+1$, H s'écrit :

$$H = \ell! \left[L_{\ell+1}\left(\frac{\ell-1}{2}\right) + (\ell+1) \sum_{i=1}^{\ell} h^{i}\, L_{\ell+2}\left(\frac{\ell}{2} - i\right) \right]$$

Par définition des fonctions L_k on a :

$$L_{\ell+1}\left(-\frac{\ell+1}{2} + 1\right) = (\ell+1)\, L_{\ell+2}\left(-\frac{\ell+2}{2} + 1\right)$$

Donc :

$$H = \ell! \left[(\ell+1)\, L_{\ell+2}\left(\frac{\ell}{2}\right) + (\ell+1) \sum_{i=1}^{\ell} h^{i}\, L_{\ell+2}\left(\frac{\ell}{2} - i\right) \right]$$

$$= (\ell+1)! \sum_{i=0}^{\ell} h^{i}\, L_{\ell+2}\left(\frac{\ell}{2} - i\right) = Q_{\ell}(h).$$

et le théorème 5-3-1 se trouve démontré.

Théorème 5-3-2 :

> Les racines du polynôme $Q_\ell(h)$ sont toutes réelles, négatives et distinctes. Les racines de $Q_\ell(h)$ séparent celles de $Q_{\ell-1}(h)$.

Ce théorème a été cité sans démonstration par Weinberger [19].

Nous allons faire un raisonnement par récurrence.

Le théorème est vrai pour Q_1 (h) et Q_2 (h), en effet leurs racines sont -1 pour Q_1 (h) et -3,732 et -0,268 pour Q_2 (h).

Supposons que le polynôme $Q_{\ell-1}$ (h) ait ses ℓ-1 racines distinctes et négatives. Soient ξ_i $(i=1,\dots,\ell-1)$ avec $(\xi_{i-1} < \xi_i < 0)$ ces racines. Soient α_i $(i=1,\dots,\ell-1)$ avec $(\alpha_{i-1} < \alpha_i < 0)$ les racines de $Q'_{\ell-1}$ (h). On a toujours $\alpha_i \in]\xi_{i+1},\xi_i[\; i=\ell-2,\dots,1$.

D'après (5-20) on a :

$$Q_\ell(h) = K_1(\ell h+1)\ (h-\xi_1)\dots(h-\xi_{\ell-1})\ -K_2h(h+1)\ (h-\alpha_1)\dots(h-\alpha_{\ell-2})$$

Posons :

$$H(h) = \frac{K_1}{\ell}\ (h+\frac{1}{\ell})\ (h-\xi_1)\dots(h-\xi_{\ell-1})$$

$$G(h) = K_2h\ (h-1)\ (h-\alpha_1)\dots(h-\alpha_{\ell-2})$$

Les racines η_i $(i=1,\dots,\ell)$ de Q_ℓ sont les abscisses des points d'intersections des graphes de H et G.

① $-\frac{1}{\ell} \notin \,]\xi_{i+1}, \xi_i[$ alors $G(x)$ change une fois de signe.

dans $]\xi_{i+1}, \xi_i[$ donc il existe $\eta_{i+1} \in]\xi_{i+1}, \xi_i[$.

② $-\frac{1}{\ell} \in]\xi_{i+1}, \xi_i[$ alors $G(x)$ change de signe dans l'un ou l'autre des intervalles $]\xi_{i+1}, -\frac{1}{\ell}]$ et $[-\frac{1}{\ell}, \xi_i[$ il existe donc η_{i+1} tel que $G(\eta_{i+1}) = H(\eta_{i+1})$.

③ $-\frac{1}{\ell} = \xi_i$, $H(x)$ a alors une racine double et ne change pas de signe dans $[\xi_{i+1}, \xi_{i-1}]$, comme $G(x)$ change de signe dans chacun des intervalles $]\xi_{i+1}, \xi_i[$, $]\xi_i, \xi_{i-1}[$ il existe η_{i+1} et η_i dans chacun de ces intervalles tels que $G(\eta_{i+1}) = H(\eta_{i+1})$ et $G(\eta_i) = H(\eta_i)$.

④ $\xi_1 < -\frac{1}{\ell} < 0$; dans $]\xi_1, 0[$ $H(x)$ change de signe en $-\frac{1}{\ell}$ alors que $G(x)$ garde un signe constant, il existe donc $\eta_1 \in]\xi_1, 0[$ tel que $G(\eta_1) = H(\eta_1)$.

Comme il ne peut exister de racines positives pour $Q_\ell(x)$ (car tous ses coefficients sont positifs) et qu'on vient de montrer qu'il existe $\ell-1$ racines négatives η_i telles que :

$$\xi_{\ell-1} < \eta_{\ell-1} < \xi_{\ell-2} < \eta_{\ell-2} < \cdots < \xi_2 < \eta_2 < \xi_1 < \eta_1 < 0$$

on a forcément une racine $\eta_\ell \in]-\infty, \xi_{\ell-1}[$ telle que $\eta_\ell = \frac{1}{\eta_1}$ (car $Q_\ell(x)$ est un polynôme à coefficients symétriques).

Le théorème 5-3-2 est donc démontré.

Désignons par h_i $(i=1,\ldots,2k-2)$ les racines du polynôme Q_{2k-2}.
On suppose $h_1 < h_2 < h_3 < \ldots < h_{2k-2} < 0$ avec

(5-21') $$h_i = \frac{1}{h_{2k-1-i}} \qquad (i=1,\ldots,2k-2).$$

La solution particulière de l'équation homogène (5-14) s'écrit donc :

$$\nu_j = \sum_{p=1}^{2k-2} C_p^* \ h_p^j$$

La solution générale de l'équation (5-14) s'écrit alors :

(5-22) $$\nu_j = \nu_j^* - \sum_{p=1}^{2k-2} C_p^* \ h_p^j \qquad (j=-k+1,\ldots,n+k-1)$$

ν_j^* $(j=-k+1,\ldots,n+k-1)$ étant une solution particulière de l'équation (5-14).

b) Solution particulière de l'équation avec second membre.

Désignons par $\delta_{h_1,\ldots,h_{2k-2}}(f(x))$ la différence divisée de la fonction f sur les points $h_1,\ldots,h_{2k-2}$ et posons :

(5-23) $$\psi_p = \begin{cases} \delta_{h_1,\ldots,h_{2k-2}} \ x^{p+k-2} & \text{si } p+k-2 > 0 \\ 0 & \text{si } p+k-2 \leq 0 \end{cases}$$

(Remarquons que $\psi_p = 0$ pour $p \leqslant k-2$)

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.

(5-24)
$$\nu^*_j = \sum_{k=0}^{n} \psi_{j-h} \times \frac{y_j}{L_{2k}(-k+1)} \qquad j=-k+1,\ldots,n+k-1$$

est une solution de l'équation aux différences finies (5-14).

Démonstration :

Lemme :

On a la relation :

(5-25)
$$\sum_{p=-k+1}^{k-1} \psi_{p+i-j} \frac{L_{2k}(p)}{L_{2k}(-k+1)} = \delta_{i,j} \qquad i,j=0,\ldots,n$$

Considérons l'équation aux différences finies

(5-26)
$$\sum_{p=-k+1}^{k-1} \varphi_{i+p} \frac{L_{2k}(p)}{L_{2k}(-k+1)} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j \end{cases}$$

j représente une quantité fixée prenant les valeurs 0,1,...,n.
i représente la variable qui est un nombre entier variant de 0 a n.

(5-26) peut encore s'écrire :

$$\sum_{p=0}^{2k-2} \varphi_{i+p-k+1} \frac{L_{2k}(p-k+1)}{L_{2k}(-k+1)} = \delta_{i,j} \qquad i,j=0,\ldots,n$$

Faisons le changement de variable $x=i-k+1$, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{2k-2} \varphi_{x+p} \frac{L_{2k}(p-k+1)}{L_{2k}(-k+1)} = \delta_{x+k-1,j} \qquad \begin{array}{l} j=0,\ldots,n \\ x=-k+1,\ldots,n-k+1 \end{array}$$

ou en posant $a_p = \dfrac{L_{2k}(p-k+1)}{L_{2k}(-k+1)}$

(5-27) $$\varphi_x + a_1 \varphi_{x+1} + a_2 \varphi_{x+2} + \ldots + a_{2k-2} \varphi_{x+2k-2} = \delta_{x+k-1,j} \qquad j=0,\ldots,n$$

Les fonctions $h^x_1, h^x_2,\ldots,h^x_{2k-2}$ sont des solutions de l'équation aux différences finies homogène dérivée de (5-27).

Une solution particulière de (5-27) peut s'écrire (Guelfond [4] page 305).

(5-28) $$\varphi_x = \sum_{t=-k+1}^{x-1} \frac{\begin{vmatrix} h_1^{t+1} & h_2^{t+1} & \cdots & h_{2k-2}^{t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_1^{t+2k-3} & h_2^{t+2k-3} & \cdots & h_{2k-2}^{t+2k-3} \\ h_1^{x} & h_2^{x} & \cdots & h_{2k-2}^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_1^{t+1} & h_2^{t+1} & \cdots & h_{2k-2}^{t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_1^{t+2k-2} & h_2^{t+2k-2} & \cdots & h_{2k-2}^{t+2k-2} \end{vmatrix}} \cdot \delta_{t+k-1,j}$$

ou encore (on a des déterminants de Van Der Monde)

$$\varphi_x = \sum_{t=k+1}^{x-1} \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{2k-2} (-1)^r h^x{}_r \begin{vmatrix} h_1^{t+1} \dots & h_r^{t+1} & h_{r+1}^{t+1} \dots & h_{2k-2}^{t+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_1^{t+2k-3} & h_r^{t+2k-3} & h_{r+1}^{t+2k-3} \dots & h_{2k-2}^{t+2k-3} \end{vmatrix}}{(h_1\, h_2 \dots h_{2k-2})^{t+1} \prod_{i>p} (h_i - h_p)} . \delta_{t+k-1,j}$$

$$\varphi_x = \sum_{t=-k+1}^{x-1} \sum_{r=1}^{2k-2} (-1)^r h^x{}_r \frac{(h_1 \dots h_{r-1} h_{r+1} \dots h_{2k-2})^{t+1} \prod_{i>p,\, i,p\neq r} (h_i - h_p)}{(h_1 \dots h_{r-1} h_r h_{r+1} \dots h_{2k-2})^{t+1} \prod_{i>p} (h_i - h_p)} \delta_{t+k-1,j}$$

$$= \sum_{t=-k+1}^{x-1} \sum_{r=1}^{2k-2} h^x{}_r . h_r^{-t-1} . \frac{1}{\prod_{p=1,\, p\neq r}^{2k-2} (y_r - y_p)}) . \delta_{t+k-1,j}$$

Soit :

$$\varphi_x = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{2k-2} \frac{h_r^{x-j+k-2}}{\prod_{p=1,\, p\neq r}^{2k-2} (h_r - h_p)} & \text{si } -j + k - 2 + x \geq 0 \\ 0 & \text{si } j + k - 2 + x < 0 \end{cases}$$

Ce qui peut encore s'écrire d'après la définition des différences divisées.

$$(5\text{-}29) \qquad \varphi_x = \begin{cases} \delta_{h_1,\ldots,h_{2k-2}} t^{x-j+k-2} & \text{si } -j+k-2+x > 0 \\ 0 & \text{si } -j+k-2+x \leqslant 0 \end{cases}$$

D'après la définition (5-23)

$\varphi_x = \psi_{x-j}$ comme φ_x est solution de (5-26) on a :

$$\sum_{p=-k+1}^{k-1} \psi_{p+i-j} \frac{L_{2k}(p)}{L_{2k}(-k+1)} = \delta_{i,j} \qquad i,j=0,\ldots,n \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le théorème est une conséquence immédiate du lemme.
Vérifions que ν^*_j (dans (5-24)) est bien une solution de (5-14).

$$J = \sum_{p=-k+1}^{k-1} \nu^*_{p+i} L_{2k}(p) = \sum_{p=-k+1}^{k-1} \sum_{h=0}^{n} \psi_{p+i-j}\, y_h \frac{L_{2k}(p)}{L_{2k}(-k+1)}$$

et d'après (5-25)

$$J = \sum_{h=0}^{n} y_h\, \delta_{i,h} = y_i \qquad \text{pour } i=0,\ldots,n$$

c) Obtention des coefficients ν_j.

Posons :

(5-30) $$\eta_j = \sum_{r=1}^{2k-2} \frac{h_r^{j+k-2}}{(h_r-1)^k \prod_{\substack{t=1\\t\neq r}}^{2k-2} (h_r-h_t)} \qquad j \in Z$$

Montrons le théorème suivant :

Théorème :

La solution de l'équation aux différences finies (5-14) vérifiant (5-15) s'écrit :

(5-31) $$\nu_j = \sum_{r=1}^{j+k-3} \psi_{j-r} \frac{y_r}{L_{2k}(-k+1)} - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \eta_{j+i} - \frac{y_0}{L_{2k}(-k+1)} (\eta_{j+k}-\psi_j)$$

pour $j=-k+1,\dots,n+k-1$.

Les C_i $(i=1,\dots,k-1)$ sont les solutions du système de k-1 équations a k-1 inconnues :

(5-32) $$\sum_{j=1}^{k-1} \psi_{i+n-k+j} \, C_j = - \frac{y_0}{L_{2k}(-k+1)} \cdot \psi_{i+n} + \sum_{r=0}^{n} \frac{y_r}{L_{2k}(-k+1)} \Delta^k \psi_{i+n-k-r}$$

pour $i=1,\dots,k-1$.

Démonstration : La solution générale de (5-14) peut s'écrire :

(5-33) $$\nu_j = \nu^*_j - \sum_{r=1}^{2k-2} C^*_r \, h_r^j \qquad j=-k+1,\dots,n+k-1.$$

On doit chercher les 2k-2 constantes C^*_r (r=1,...,2k-2) telles que ν_j (j=-k+1,...,n+k-1) vérifie (5-15).

La condition (5-15) s'écrit :

(5-34) $$\Delta^k \nu_j = \Delta^k \nu_j^* - \sum_{r=1}^{2k-2} C^*_r \Delta^k h_r^j = 0 \text{ pour } j=-k+1,\dots,-1,n-k+1,\dots,n-1$$

Mais d'après (5-24), on a :

$$\Delta^k \nu_j^* = \Delta^k \sum_{h=0}^{n} \psi_{j-h} \frac{y_h}{L_{2k}(-k+1)}$$

(5-35) $$= \sum_{h=0}^{n} \frac{y_h}{L_{2k}(-k+1)} \Delta^k \psi_{j-h}$$

La différence progressive $\Delta^k \psi_{j-h}$ dépend des fonctions $\psi_{j-h}, \psi_{j-h+1}, \dots, \psi_{j-h+k}$; or d'après (5-23)

$\psi_p = 0$ pour $p \leq k-2$, on aura donc :

$\Delta^k \psi_{j-h} = 0$ pour $j-h+k \leq k-2$ avec h=0,...,n.

Soit :

(5-36) $\Delta^k \psi_{j-h} = 0$ pour j=-k+1,...,-2 quel que soit h entier de [0,n],

On aura donc, d'après (5-35) :

$\Delta^k \nu_j^* = 0$ pour j=-k+1,...,-2

(5-34) va donc s'écrire :

(5-37) $$\Delta^k \nu_j = - \sum_{r=1}^{2k-2} C^*_r \, \Delta^k \, h^j_r = 0 \text{ pour } j=-k+1,\dots,-2$$

(5-38) $$\Delta^k \nu^*_j - \sum_{r=1}^{2k-2} C^*_r \, \Delta^k \, h^j_r = 0 \text{ pour } j=-1,n-k+1,\dots,n-1$$

Faisons le changement de constante :

$$C^*_r = \frac{h_r^{k-r}}{(h_r-1)^k \prod\limits_{\substack{p=1,\dots,2k-2 \\ p\neq r}} (h_r-h_p)} \sum_{i=1}^{2k-2} C_i \, h^i_r$$

On a donc :

$$\sum_{r=1}^{2k-2} C^*_r \, h^j_r = \sum_{r=1}^{2k-2} \sum_{i=1}^{2k-2} C_i \frac{h_r^{i+j+k-2}}{(h_r-1)^k . \prod\limits_{\substack{p=1,\dots,2k-2 \\ p\neq r}} (h_r-h_p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2k-2} C_i \, \eta_{j+i}$$

(5-33) s'écrit alors :

(5-39) $$\nu_j = \nu^*_j - \sum_{i=1}^{2k-2} C_i \, \eta_{j+i}$$

On va donc chercher les C_i $(i=1,\dots,2k-2)$ vérifiant :

$$\sum_{r=1}^{2k-2} C_r \Delta^k \eta_{j+r} = 0 \quad \text{pour } j=-k+1,\dots,-2 \tag{5-40}$$

et

$$\Delta^k \nu^*_j - \sum_{r=1}^{2k-2} C_r \Delta^k \eta_{j+r} = 0 \quad \text{pour } j=-1,n-k+1,\dots,n-1 \tag{5-41}$$

D'après la définition (5-30) de η_j on a :

$\Delta^k \eta_{j+r} = \psi_{j+r}$ pour $j+r \geq -k+2$

La condition (5-40) peut donc s'écrire :

$$\sum_{r=1}^{2k-2} C_r \psi_{j+r} = 0 \quad \text{pour } j=-k+1,\dots,-2 \tag{5-42}$$

Comme $\psi_{j+r} = 0$ pour $j+r \leq k-2$

On aura $\psi_{j+r} = 0$ pour $r=1,\dots,k$ et $j=-k+1,\dots,-2$

On peut donc prendre

$c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_{2k-2} = 0$ pour vérifier (5-42).

L'équation (5-41) s'écrit alors :

$$\Delta^k \nu^*_j - \sum_{r=1}^{k} C_r \Delta^k \eta_{j+r} = 0 \quad j=-1,n-k+1,\dots,n-1.$$

Remplaçons ν_j^* par sa valeur (5-24) ; on obtient (en remarquant qu'on a toujours $j+r \geq -k+2$) :

(5-43) $$\sum_{r=0}^{n} \frac{y_r}{L_{2k}(-k+1)} \Delta^k \psi_{j-r} - \sum_{r=1}^{k} C_r \psi_{j+r} = 0$$

pour $j=-1,n-k+1,\dots,n-1$

Or on a :

$$(\Delta^k \psi_{j-r})_{j=-1} = \psi_{k-1} \cdot \delta_{0,r} \quad \text{pour } r=0,\dots,n$$

Donc pour $j=-1$, (5-43) s'écrit :

$$\frac{y_0}{L_{2k}(-k+1)} \psi_{k-1} = \sum_{r=1}^{k} C_r \psi_{r-1}$$

$$= C_k \psi_{k-1} \text{ car } \psi_{r-1} = 0 \text{ pour}$$

$r-1 \leq k-2$ ou $r \leq k-1$

(5-44) on a donc $C_k = \dfrac{y_0}{L_{2k}(-k+1)}$

Il nous reste à déterminer les constantes $c_1,c_2,\dots,c_{k-1}$.

Le système d'équations (5-42) s'écrit :

(5-45) $$\sum_{r=1}^{k-1} C_r \psi_{j+r} = -\frac{y_0}{L_{2k}(-k+1)} \cdot \psi_{j+k} + \sum_{r=0}^{n} \frac{y_r}{L_{2k}(-k+1)} \Delta^k \psi_{j-r}.$$

pour $j=n-k+1,\dots,n-1$

Faisons le changement de variable i=j-n+k ; (5-45) s'écrit :

$$(5\text{-}46)\qquad \sum_{r=1}^{k-1} c_r\,\psi_{i+n-k+r} = -\frac{y_0}{L_{2k}(-k+1)}\cdot\psi_{i+n} + \sum_{r=0}^{n}\frac{y_r}{L_{2k}(-k+1)}\,\Delta^k\,\psi_{i+n-k-r}$$

pour $i=1,\dots,k-1$

Le système de k-1 équations à k-1 inconnus (5-46) nous permet d'obtenir les coefficients $c_1,\dots,c_{k-1}$.

La solution de (5-14) et (5-15) s'écrit donc d'après (5-39)

$$\nu_j = \nu_j^* - \sum_{r=1}^{k-1} c_r\,\eta_{j+r} - \frac{y_0}{L_{2k}(-k+1)}\,\eta_{j+k} \quad \text{pour } j=-k+1,\dots,n+k-1$$

ou encore :

$$\nu_j = \sum_{r=1}^{j+k-3}\psi_{j-r}\,\frac{y_r}{L_{2k}(-k+1)} - \sum_{r=1}^{k-1} c_r\,\eta_{j+r} - \frac{y_0}{L_{2k}(-k+1)}\,(\eta_{j+k}-\psi_j)$$

pour $j=-k+1,\dots,n+k-1$

car $\psi_{j-r}=0$ pour $r \geqslant j+k-2$ C.Q.F.D.

§5-3 PROCEDURE ALGOL :

A - Procédure :

L'obtention numérique de la fonction-spline d'interpolation dont le graphe passe par les points (i,y_i) $(i=0,\dots,n)$ se fait en trois étapes. On cherche d'abord les racines h_i $(i=1,\dots,2k-2)$ du polynôme Q_{2k-2} (voir (5-17)).

On calcule ensuite les coefficients c_j $(j=1,\ldots,k-1)$ en résolvant le système linéaire (5-32) ; enfin les coefficients ν_j $(j=-k+1,\ldots,n+k-1)$ sont obtenus par la formule (5-31).

On peut remarquer que les racines du polynôme Q_{2k-2} peuvent être calculées définitivement pour différentes valeurs de k. Il suffit d'ailleurs de calculer k-1 racines d'après (5-21').

Nous donnons les valeurs obtenues pour k=2,3,4,5 (les racines de Q_{2k-2} ont été obtenues en utilisant la méthode de Newton).

k=2	-3.7320508			
k=3	-23.203854	-2.3224738		
k=4	-109.30521	-8.1596274	-1.8681796	
k=5	-471.40749	-23.136040	-4.9566167	-1.6447438

```
procédure SPLINE PTS EQUI (Y,N,K,NU) ; valeur Y,N,K ;
entier N,K ; tableau NU ;
commentaire cette procédure calcule dans NU[-K+1,N+K-1] les coefficients
de la fonction-spline (5-4) prenant les valeurs Y[I] aux points I (I varie
de 0 à N). On suppose 2 ≤ K ≤ 6 et N ≥ K+1 ;
début entier I ; tableau H[1:2xK-2] ; aiguillage AIG := E1,E2,E3,E4,E5 ;
    procédure GRESOLSYSLINE (A,B,X,N,IMP) ; ... voir annexe ... ;
    aller à AIG[K-1] ;
    E1:H[1] := -3.7320508 ; aller à OUF ;
    E2:H[1] := -23.203854 ; H[2] := -2.3224738 ; aller à OUF ;
    E3:H[1] := -109.30521 ; H[2] := -8.1596273 ; H[3] := -1.8681796 ;
    aller à OUF ; E4:[1] := -471.40749 ; H[2] := -23.136040 ;
    H[3] := -4.9566167 ; H[4] := -1.6447439 ; aller à OUF ;
    E5:H[1] := -1958.6430 ; H[2] := -59.989344 ; H[3] := -11.140867 ;
    H[4] := -3.6740380 ; H[5] := -1.5122482 ; OUF ;
    pour I := K pas 1 jusqu'à 2xK-2 faire H[I] := 1/H[2xK-1-I] ;
    début réel procédure ETA (J) ; valeur J ; entier J ;
        commentaire cette réelle procédure calcule la valeur de la fonction
        (5-30) ;
        début réel S,T ; entier I,R ;
            S := 0 ; pour I := 1 pas 1 jusqu'à 2xK-2 faire
            début T := 1 ; pour R := 1 pas 1 jusqu'à I-1,I+1 pas
                  1 jusqu'à 2xK-2 faire T := Tx(H[I]-H[R]) ;
                  S := S+H[I] ↑(J+K-2)/(Tx(H[I]-1)↑K)
            fin ; ETA := S
        fin ETA ;
        réel procédure DELTAPRO (K,F,X) ; valeur K,X ; entier K,X ;
        réel procédure F ;
        commentaire cette réelle procédure calcule la différence progressive
        de pas 1 et d'ordre K de la fonction F au point X ;
```

```
début tableau L[0:K] ; entier I,J ;
    pour I := 0 pas 1 jusqu'à K faire L[I] := F(X+I) ;
    pour J := 1 pas 1 jusqu'à K faire
    pour I := 0 pas 1 jusqu'à K-J faire
    L[I] := L[I+1]-L[I] ;
    DELTAPRO := L[0]
fin DELTAPRO ;
réel procédure PSI (P) ; valeur P ; entier P ;
commentaire cette procédure calcule la valeur de la fonction (5-23) ;
début entier I,J ; tableau L[1:2×K-2] ;
    si P ≤ -K+2 alors PSI := .0 sinon
    début pour I := 1 pas 1 jusqu'à 2×K-2 faire
          L[I] := H[I] ↑ (P+K-2) ;
          pour J := 1 pas 1 jusqu'à 2×K-3 faire
          pour I := 1 pas 1 jusqu'à 2×K-2-J faire
          L[I] := (L[I]-L[I+1])/(H[I]-H[I+J]) ;
          PSI := L[1]
    fin
fin PSI ;
réel T ; entier I,J ;
tableau FI[1:K-1,1:K-1],C,B[1:K-1] ;
pour I := 1 pas 1 jusqu'à K-1 faire
FI[I,1] := PSI (I+1+N-K) ;
pour J := 2 pas 1 jusqu'à K-1 faire
début pour I := 1 pas 1 jusqu'à K-2 faire
      FI[I,J] := FI[I+1,J-1] ;
      FI[K-1,J] := PSI (J+N-1)
fin ;
```

```
        pour I := 1 pas 1 jusqu'à K-1 faire
        début T := Y[0]×DELTAPRO (K,PSI,I+N-K) ;
              pour J := 1 pas 1 jusqu'à N faire
              T := T+Y[J]×DELTAPRO (K,PSI,I+N-K-J) ;
              B[I] := T+Y[0]×PSI(I+N) ;
        fin ; GRESOLSYSLINE (FI,B,C,K-1,IMPOSS) ;
        IMPOSS : pour J := -K+1 pas 1 jusqu'à N+k-1 faire
        début T := 0 ; pour I := 1 pas 1 jusqu'à J+K-3 faire
              T := T+PSI(J-I)×Y[I] ;
              pour I := 1 pas 1 jusqu'à K-1 faire
              T := T-C[I]×ETA(J+I) ;
              NU[J] := T-Y[0]×(ETA(J+K)-PSI(J))
        fin
    fin
fin SPLINE PTS EQUI ;
```

Remarques :

a) La fonction-spline ayant les coefficients ν_j $(j=-k+1,\ldots,n+k-1)$ calculés à l'aide de la procédure ci-dessus s'écrit :

$$s(t) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \, \delta^{2k} \, (t-j)_+^{2k-1}$$

ou encore

$$s(t) = (2k-1)! \sum_{j=i}^{q} \nu_j \, L_{2k} \, (t-j) \tag{5-47}$$

avec $i = \text{Max}\ (-k+1,\ \text{entier}\ (t-k)\ +1)$

et $q = \text{Min}\ (n+k-1,\ -\text{entier}\ (1-t-k))$

(entier (x) = plus grand entier $\leq x$).

b) Si on désire avoir à partir de 5-47 l'expression analytique de la fonction-spline s^* d'ordre k qui prend les valeurs y_i aux points $x_i = a+ih$ $(i=0,\ldots,n)$, il suffit d'"activer" la procédure SPLINE PTS EQUI (Y,N,K,NU) pour obtenir les coefficients ν_j. L'expression de la fonction-spline est alors :

(5-48) $$s^*(t) = s((t-a)/h)$$

B - <u>Efficacité</u> :

Les essais numériques effectués nous ont montré que la procédure ci-dessus ne donne pas de meilleurs résultats (en simple précision) que les méthodes d'intégration locale du chapitre quatre. L'erreur sur s(t) est d'autant plus grande que la variable t est plus près de x_n. Le calcul des ν_j (formule 5-31) fait en effet intervenir d'autant plus de fonctions ψ que j est plus élevé. L'erreur est donc maximum pour j=n+k-1.

La méthode demeure tout de même très intéressante, car les fonctions η_i, ψ_i et même $\Delta^k\ \psi_i$ qui interviennent dans les formules 5-31 et 5-32 peuvent être calculées une fois pour toute (et avec une grande précision), pour différentes valeurs de k et de i. L'obtention des coefficients ν_j (et par suite de la fonction-spline s) devient alors très simple à partir des formules 5-31, 5-4 et 5-48.

CHAPITRE 6

EXTENSION DE LA METHODE D'INTEGRATION AUX FONCTIONS-SPLINE GENERALISEES

Nous avons étudié dans les chapitres quatre et cinq deux méthodes numériques particulièrement efficaces pour obtenir les fonction-spline d'interpolation. Nous allons voir comment ces méthodes peuvent s'étendre au calcul des fonctions-spline généralisées. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux fonctions-spline obtenues au chapitre deux. Nous ferons une étude essentiellement théorique de l'extension de ces méthodes, en essayant de mettre à jour les problèmes numériques qui peuvent se poser pour leur mise en pratique effective.

§6-1 METHODE D'INTEGRATION APPLIQUEE AUX FONCTIONS-SPLINE D'HERMITE.

Nous développerons la méthode pour les fonction-spline d'Hermite d'ordre trois à titre d'exemple ; l'extension à un ordre k quelconque ne présentant pas de difficultés théoriques particulières.

A - Exposé de la méthode :

Comme dans le paragraphe 4-3 du chapitre 4 nous allons chercher à exprimer la dérivée d'ordre 3 de la fonction-spline d'Hermite.

Nous rappelons (voir chapitre 2) que la fonction-spline d'Hermite d'ordre 3 est parmi toutes les fonctions de $H^3[x_1,x_n]$ vérifiant

$s(x_i) = y_i$ et $s'(x_i) = y'_i$ $\quad i=1,\dots,n$

celle qui minimise $\displaystyle\int_{x_1}^{x_n} \left(s^{(3)}(t) \right)^2 dt.$

Propriété 6-1-1 :

La fonction-spline d'Hermite d'ordre k qui vérifie :

(6-1) $s(x_i) = y_i$ et $s'(x_i) = y'_i$ $(i=1,\dots,n)$

vérifie aussi les 2n-3 conditions suivantes

(6-2) $$\int_{x_1}^{x_n} \psi_i(t) s^{(3)}(t) dt = \delta_{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}} y' = \beta_i \quad \text{pour } i=1,\dots,n-2$$

et

(6-3) $$\int_{x_1}^{x_n} \Omega_i(t) s^{(3)}(t) dt = (y_i - y_{i+1}) + \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)(y'_i + y'_{i+1}) = \alpha_i$$

pour $i=1,\dots,n-1$

Avec :

(6-4) $\psi_i(t) = \delta_{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}} (x-t)_+$

et

(6-5) $\Omega_i(t) = \frac{1}{2} (x_{i+1} - t)_+ (t - x_i)_+$

Démonstration :

Le développement de Taylor d'ordre k de la fonction s' peut s'écrire :

$$s'(x) = s'(x_1) + s''(x_1)\ (x-x_1) + \int_{x_1}^{x_n} (x-t)_+ s^{(3)}(t)dt$$

Prenons la différence divisée de la fonction s' sur trois points x_i, x_{i+1}, x_{i+2} (i=1,...,n-2) on obtient d'après (6-1) :

$$\int_{x_1}^{x_n} \psi_i(t) s^{(3)}(t)dt = \delta_{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}} y' \quad \text{pour } i=1,\dots,n-2$$

ce qui démontre (6-2).

Ecrivons d'autre part le développement en série de Taylor autour du point x_i (i=1,...,n-1) de s et s', on a :

(6-6) $$s(x)-s(x_i)=s'(x_i)(x-x_i)+s''x_i)\ \frac{(x-x_i)^2}{2} + \int_{x_i}^{x} \frac{(x-t)^2}{2}\ s^{(3)}(t)dt$$

(6-7) $$s'(x)-s'(x_i)=s''(x_i)(x-x_i)+ \int_{x_i}^{x} (x-t)s^{(3)}(t)dt$$

En combinant ces deux équations on obtient :

$$(6\text{-}8) \qquad \frac{(x-x_i)}{2}\Big(s'(x) - s'(x_i)\Big) - \Big(s(x) - s(x_i)\Big) = - s'(x_i)\,(x-x_i)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x} \Big[(x-t)^2(x-x_i) - (x-t)^2\Big]\, s^{(3)}(t)\,dt$$

Soit pour $x=x_{i+1}$ en remplaçant $s(x_i)$ et $s'(x_i)$ par leur valeur et en simplifiant :

$$\int_{x_1}^{x_n} \Omega_i(t)\, s^{(3)}(t)\,dt = (y_i-y_{i+1}) + \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)\,(y'_i+y'_{i+1}) \quad \text{pour } i=1,\dots,n-1$$

C.Q.F.D.

On vérifie facilement (voir démonstration de la propriété 4-3-3) que les 2n-3 fonctions ψ_i et Ω_i sont linéairement indépendantes. En utilisant la propriété 4-3-1 on sait que la fonction g qui vérifie

$$\int_{x_1}^{x_n} \psi_i\,(t)\; g\,(t)\;dt = \beta_i \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-2$$

$$\int_{x_1}^{x_n} \Omega_i\,(t)\; g\,(t)\;dt = \alpha_i \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-1$$

et qui minimise $\displaystyle\int_{x_1}^{x_n} g^2(t)\,dt$ s'écrit :

(6-9) $$g(t) = \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \psi_j (t) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \Omega_j (t)$$

Vérifions que la primitive s d'ordre k de g vérifiant (par exemple) les conditions $s'(x_1) = y'_1$, $s'(x_2) = y'_2$ et $s(x_1) = y_1$ vérifie <u>toutes</u> les conditions (6-1).

D'après les réultats du paragraphe (4-3), la fonction s est telle que $s'(x_i) = y'_i$ d'autre part en utilisant (6-8) on a :

$$s(x_{i+1}) - s(x_i) = \frac{1}{2} (y'_{i+1}+y'_i) (x_{i+1}-x_i) - \int_{x_1}^{x_n} \Omega_i (t) g (t) dt$$

Soit d'après (6-3) :

(6-10) $$s(x_{i+1}) - s(x_i) = y_{i+1}-y_i \qquad i=1,\dots,n-1$$

Comme $s(x_1) = y_1$, on a aussi d'après (6-10)

$s(x_i) = y_i \qquad i=2,\dots,n$

La fonction s primitive d'ordre k de la fonction g vérifiant trois des conditions (6-1) est donc la fonction-spline d'Hermite cherchée, soit $s^{(3)}(t) = g(t)$.

B - <u>Algorithme</u> :

Les conditions (6-2) et (6-3) vont nous permettre de déterminer d'une manière unique les coefficients λ_i (i=1,...n-2) et μ_i (i=1,...,n-1)

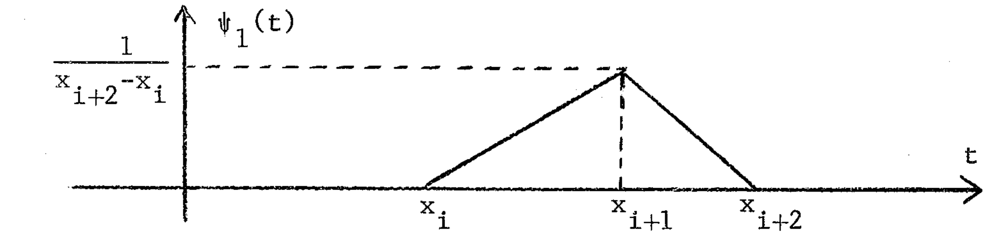
Les conditions (6-2) et (6-3) peuvent en effet s'écrire :

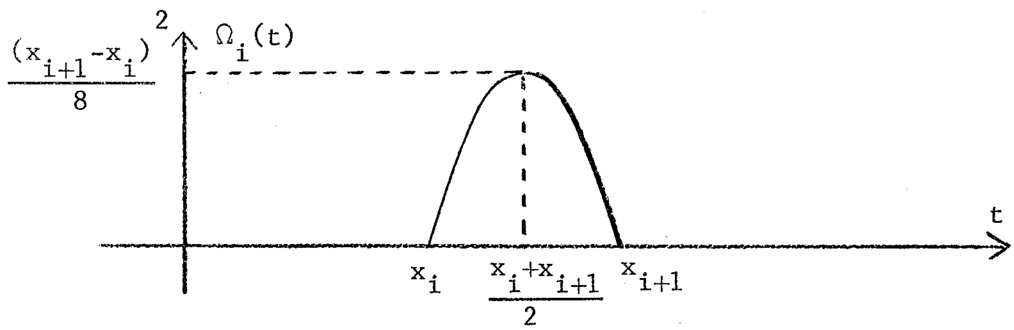
$$(6\text{-}11)\quad \left[\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \, (\psi_j,\psi_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \, (\Omega_j,\psi_i) = \beta_i & \text{pour } i=1,\dots,n-2 \\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \, (\psi_j,\Omega_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \, (\Omega_j,\Omega_i) = \alpha_i & \text{pour } i=1,\dots,n-1 \end{array}\right.$$

$$\text{avec } (h,g) = \int_{x_1}^{x_n} h(t) \, g(t) \, dt$$

Le système linéaire (6-11) est un système "symétrique" de 2n-3 équations à 2n-3 inconnues.

Remarquons que les fonctions ψ_i et Ω_i ont les graphes ci-dessous :





Soit

$$\psi_i(t) = \begin{cases} a_i(t-x_i) & \text{pour} \quad t \in [x_i, x_{i+1}] \\ a'_i(t-x_{i+2}) & \text{pour} \quad t \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad i=1,\dots,n-2$$

avec

$$a_i = \frac{1}{\ell_i(\ell_i+\ell_{i+1})} \qquad a'_i = \frac{-1}{\ell_{i+1}(\ell_i+\ell_{i+1})} \quad \text{et } \ell_i = x_{i+1}-x_i$$

$$\text{et } \Omega_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(x_{i+1}-t)\,(t-x_i) & \text{si } t \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On trouve :

$$(\psi_i, \psi_i) = \frac{1}{3(\ell_i+\ell_{i+1})}$$

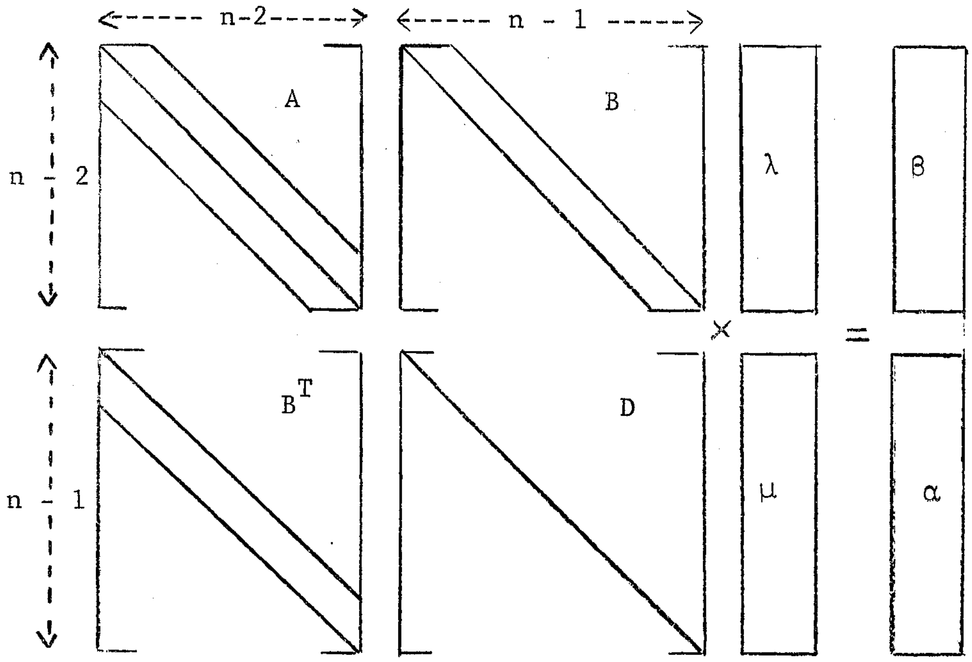
$$(\psi_i, \psi_{i+1}) = \frac{\ell_{i+1}^2}{6\ell_i(\ell_i+\ell_{i+1})^2}$$

$$(\psi_i, \Omega_i) = \frac{\ell_i^3}{24(\ell_i+\ell_{i+1})}$$

$$(\psi_i, \Omega_{i+1}) = \frac{\ell_{i+1}^3}{24(\ell_i+\ell_{i+1})}$$

$$(\Omega_i, \Omega_i) = \frac{\ell_i^5}{120}$$

Le système linéaire à résoudre a l'allure suivante :



Ou encore :

$$\begin{cases} A\,\lambda + B\,\mu = \beta \\ B^T\lambda + D\,\mu = \alpha \end{cases}$$

Soit en tirant μ de la deuxième équation :

$$\mu = D^{-1}\,(\alpha - B^T\lambda)$$

En portant dans la première équation on obtient

$$(A - BD^{-1}B^T)\ \lambda = \beta - BD^{-1}\alpha$$

(La matrice D^{-1} est très simple à obtenir car D est une matrice diagonale). La matrice :

$F = A - BD^{-1}B^T$ est symétrique et tridiagonale ses éléments sont (tout calcul fait) :

$$f_{i,i} = \frac{1}{8(\ell_i+\ell_{i+1})}\ ;\ f_{i+1,i} = f_{i,i+1} = \frac{\ell_{i+1}}{6(\ell_i+\ell_{i+1})}\left(\frac{\ell_{i+1}}{(\ell_i+\ell_{i+1})} - \frac{5}{4(\ell_{i+1}+\ell_{i+2})}\right)$$

pour $i=1,\ldots,n-2$

La matrice colonne

$$g = \beta - BD^{-1}\alpha$$

a pour éléments :

$$g_i = \beta_i - \frac{5}{(\ell_i+\ell_{i+1})}\left(\frac{\alpha_i}{\ell_i^2} + \frac{\alpha_{i+1}}{\ell_{i+1}^2}\right) \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-2$$

Il suffit de résoudre le système linéaire de n-2 équations à n-2 inconnues

$$F\,\lambda = g$$

avec F symétrique et tridiagonale pour obtenir les coefficients λ_i $(i=1,\dots,n-2)$.

Les coefficients μ_i $(i=1,\dots,n-1)$ s'obtiennent ensuite par :

$$\mu = D^{-1}\,(\alpha - B^T\lambda).$$

La fonction-spline d'Hermite cherchée s'écrit alors :

$$\boxed{s(x) = P_2(x) + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i\, R_i(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\, S_i(t)} \qquad (6\text{-}12)$$

Les fonctions $R_i(t)$ et $S_i(t)$ étant des fonctions telles que :

$$R_i^{(3)} = \psi_i \qquad \text{et } S_i^{(3)} = \Omega_i$$

Soit :

$$R_i(t) = \frac{1}{24}\,\delta_{x_i,x_{i+1},x_{i+2}}\,(t-x)_+^4 \qquad (6\text{-}13)$$

et

$$(6\text{-}14) \qquad s_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}\,(t-x_i)_+^5 + \frac{1}{48}\,(x_{i+1}-t)_+(t-x_i)_+^4 & \text{si } t \leqslant x_{i+1} \\ (x_{i+1}-x_i)^3\left[\frac{1}{24}\,(t-x_{i+1})^2 + \frac{1}{24}\,(x_{i+1}-x_i)(t-x_{i+1}) + \frac{1}{80}\,(x_{i+1}-x_i)^2\right] & \text{si } t > x_{i+1} \end{cases}$$

Le polynôme $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ étant déterminé par trois conditions de (6-1) (dont une au moins utilisant une des conditions $s(x_i) = y_i$).

B - <u>Procédure algol et exemple numérique</u> :

Nous proposons une procédure algol qui calcule les coefficients λ_i $(i=1,\ldots,n-2)$ et μ_i $(i=1,\ldots,n-1)$ ainsi que les coefficients cc_1, cc_2 et cc_3 du polynôme $P_2(x)$ (qui s'écrit $cc_1 + cc_2\, x + cc_3\, x^2$) en utilisant la méthode que l'on vient de décrire.

```
procédure SPLINE D'HERMITE (N,Y,YP,X,L,M,CC) ; valeur N,Y,YP ;
entier N ; tableau Y,YP,X,L,M,CC ;
commentaire cette procédure calcule dans les tableaux CC[1:3], L[1:N-2] et
M[1:N-1] les coefficients de la fonction-spline d'Hermite (6-12) prenant aux
points X[I] les valeurs Y[I] et les dérivées YP[I] (I variant de 1 a N).
On suppose X[I] < X[I+1] et N ≥ 4 ;
début procédure GRESOLSYSLINE ... voir annexe ... ;
    reel procédure S(I,T) ; valeur I,T ; entier I ; reel T ;
    commentaire cette réel procédure calcule la valeur que prend en T la
    fonction (6-14) ;
    début reel A ;
```

```
        si T ≤ X[I] alors S := .0 sinon
        si T ≤ X[I+1] alors début A := T-X[I] ;
        S := A×A×A×A((X[I+1]-T)/48+A/80) fin sinon
        début A := (X[I+1]-X[I]) ;
              S := A×A×A×(((T-X[I+1])×(T-X[I+1])+A×(T-X[I+1]))/24+A×A/80)
        fin
fin S ;
reel procédure R(I,T) ; valeur I,T ; entier I ; reel T ;
commentaire cette reel procédure calcule la valeur que prend en T la fonc-
tion (6-13) ;
début entier J ; tableau L[1:3] ; reel A ;
        si T ≤ X[I] alors R := .0 sinon
        début pour J := 1,2,3 faire
              si T > X[I+J-1] alors
              début A := T-X[I+J-1] ;
                    L[J] := A×A×A×A
              fin sinon L[J] := .0 ;
              pour J := 1,2 faire
              L[J] := (L[J+1]-L[J])/(X[I+J]-X[I+J-1]) ;
              R := (L[2]-L[1])/(24×(X[I+2]-X[I]))
        fin
fin R ;
reel A,B,C,D,E ; entier I,J ;
tableau F[1:N-2,1:N-2], G[1:N-2], AA[1:3,1:3], BB[1:3] ;
I := 1 ; D := (Y[I]-Y[I+1])+.5×(X[I+1]-X[I])×(YP[I]+YP[I+1]) ;
A := (X[I+1]-X[I]) ; B := (X[I+2]-X[I+1]) ;
JO : si I ≤ N-3 alors C := (X[I+3]-X[I+2]) ;
E := (Y[I+1]-Y[I+2])+.5×(X[I+2]-X[I+1])×(YP[I+1]+YP[I+2]) ;
F[I,I] := .125/(A+B) ;
si I ≤ N-3 alors
début F[I,I+1] := B×(B/(A+B)-1.25/(B+C))/(6×(A+B)) ;
      F[I+1,I] := F[I,I+1]
fin ;
```

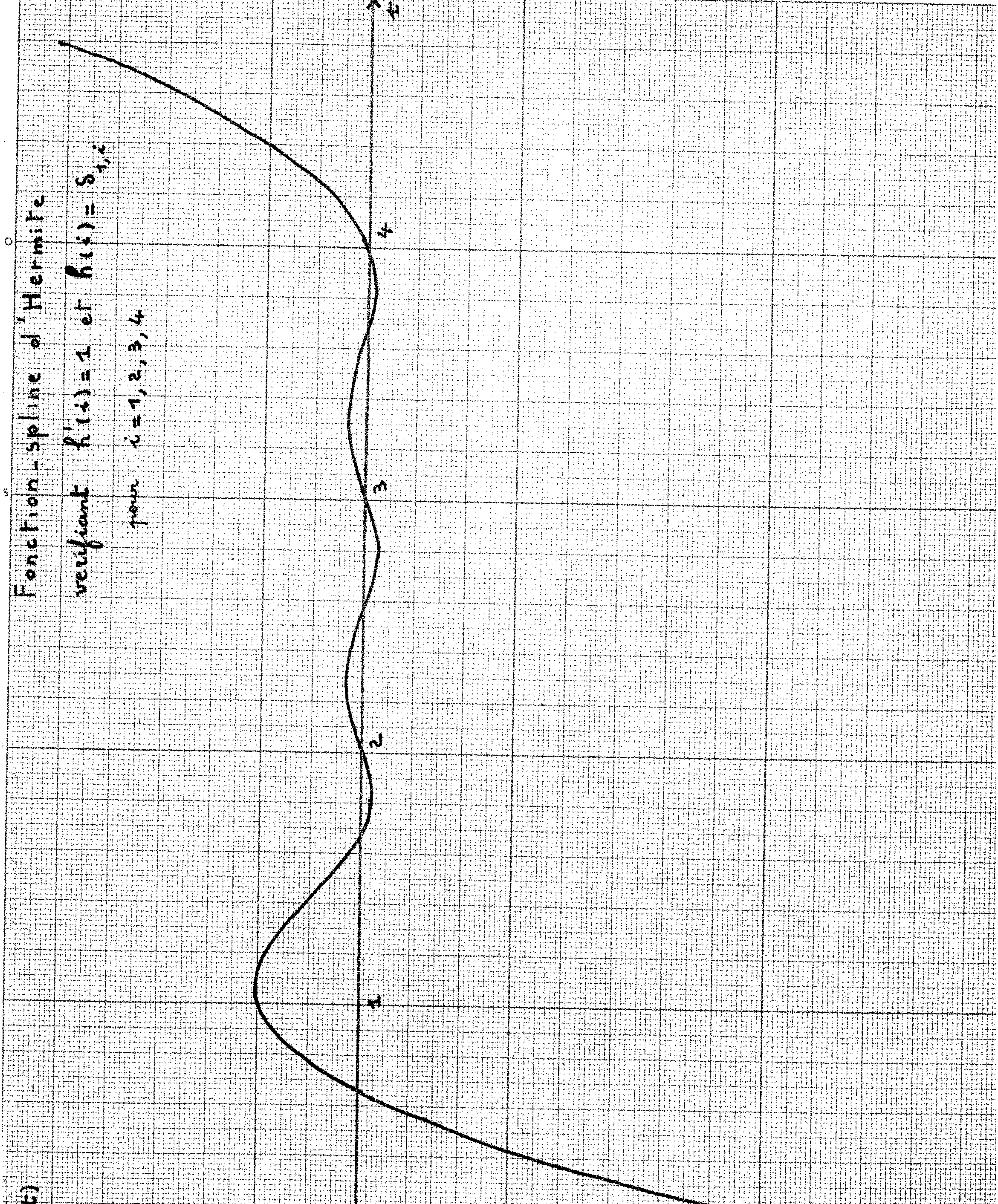
```
G[I] := ((YP[I+2]-YP[I+1])/B-(YP[I+1]-YP[I])/A)/(A+B)-5×(D/(A×A)+
E/(B×B))/(A+B) ;
si I ⩽ N-3 alors
début A := B ; B := C ; D := E ; I := I+1 ;
      aller à JO
fin ;
pour I := N-3 pas -1 jusqu'à 1 faire
début B := F[I,I+1]/F[I+1,I+1] ; F[I,I] := F[I,I]-B×F[I+1,I] ;
      si I≠1 alors
      F[I,I-1] := F[I,I-1]-B×F[I+1,I-1] ; G[I] := G[I]-B×G[I+1]
fin ;
pour I := 1 pas 1 jusqu'à N-2 faire
si I=1 alors L[I] := G[I]/F[I,I] sinon
L[I] := (G[I]-L[I-1]×F[I,I-1])/F[I,I] ;
pour I := 1 pas 1 jusqu'à N-1 faire
début A := X[I+1]-X[I] ; M[I] := 120×((Y[I]-Y[I+1])+.5×A×(YP[I]+
      YP[I+1]))/(A×A×A×A×A)-5×(si I > 1
      alors L[I-1]/(X[I+1]-X[I-1]) sinon .0)+
     (si I < N-1 alors L[I]/(X[I+2]-X[I]) sinon .0)/(A×A)
fin ;
pour I := 1,2,3 faire
début A := Y[I] ;
      pour J := 1 pas 1 jusqu'à N-2 faire
      A := A-L[J]×R(J,X[I]) ;
      pour J := 1 pas 1 jusqu'à N-1 faire
      A := A-M[J]×S(J,X[I]) ; BB[I] := S ;
      pour J := 1,2,3 faire
      AA[I,J] := si J=1 alors 1 sinon X[I] ↑ J-I
fin ; GRESOLSYSLINE (AA,BB,CC,3,IMP) ;
IMP :
fin SPLINE D'HERMITE ;
```

Nous donnons également une reel procédure permettant d'avoir la valeur de (6-12) en un point T.

```
reel procédure HERM SPL (N,X,L,M,CC,T) ; valeur N,X,L,M,CC ;
entier N ; tableau X,L,M,CC ; reel T ;
commentaire cette procédure calcule la valeur que prend en T la fonction-spline
d'Hermite (6-12) ayant pour coefficients L[1:N-2], M[1:N-1] et CC[1:3] ;
début reel procédure S(I,T) ; ... voir dans le corps de SPLINE D'HERMITE ... ;
      reel procédure R(I,T) ; ... voir dans le corps de SPLINE D'HERMITE ... ;
      entier I ; reel A ;
      A := (CC[3]×T+CC[2])×T+CC[1] ; I := 0 ;
      pour I := I+1 tant que X[I] < T ∧ I ⩽ N-2 faire
      A := A+L[I]×R(I,T)+M[I]×S(I,T) ; si T < X[N-1]
      alors A := A+M[N-1]×S(N-1,T) ; HERM SPL := A
fin HERM SPL ;
```

Nous donnons à titre d'exemple la fonction-spline d'Hermite telle que :

$s(i) = \delta_{1,i}$ et $s'(i) = 1$ pour $i=1,\ldots,4$ (voir page suivante).


Fonction-spline d'Hermite
vérifiant h'(i) = 1 et h(i) = S1,i
pour i = 1, 2, 3, 4
h(t)
t
1
2
3
4
0
5
10
15

§6-2 CONSTRUCTION NUMERIQUE D'UNE FONCTION-SPLINE D'INTERPOLATION GENERALISEE

(fonctionnelle $\sum_{r=0}^{k-1} K_r\, f^{(r)}(x_i)$.

Nous allons exposer une méthode permettant d'obtenir numériquement la fonction-spline d'interpolation du chapitre deux (§2-2) en se limitant au cas particulier où les fonctionnelles ponctuelles sont de la forme :

$$(6\text{-}15) \qquad L_i(f) = \sum_{j=0}^{k-1} K_j\, f^{(j)}(x_i) = y_i \qquad \text{pour } i=1,\ldots,n.$$

C'est à dire qu'on cherche la fonction s qui, parmi toutes les fonctions satisfaisant (6-15), minimise $\int_{x_1}^{x_n} (s^{(k)})^2$.

Les K_j $(j=0,\ldots,k-1)$ sont des reels donnés vérifiant les conditions du paragraphe 2-2.

A - Exposé de la méthode :

Nous allons chercher à exprimer la dérivée d'ordre k de la fonction-spline cherchée.

On a la propriété suivante :

Propriété 6-2-1 :

La fonction-spline d'interpolation s d'ordre k qui vérifie :

(6-16) $$\sum_{j=0}^{k-1} K_j \, s^{(j)}(x_i) = y_i \qquad \text{pour } i=1,\dots,n$$

vérifie aussi les n-k conditions suivantes :

(6-17) $$\int_{x_1}^{x_n} H_i(t)\, s^{(k)}(t)\, dt = \alpha_i \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-k$$

Avec :

(6-18) $$H_i(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{K_j}{(k-1-j)!}\, \delta_{x_i,\dots,x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1-j} \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-k$$

et

(6-19) $$\alpha_i = \delta_{x_i,\dots,x_{i+k}}\, y \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-k$$

(On pose $(x-t)_+^0 = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leqslant x \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$)

Démonstration :

Le développement de Taylor d'ordre k de s peut s'écrire :

$$s\ (t) = P_{k-1}\ (t) + \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_1}^{x_n} (x-t)_+^{k-1}\ s^{(k)}(t)\ dt$$

On peut donc écrire :

$$s^{(j)}(t) = P_{k-1-j}(t) + \frac{1}{(k-1-j)!} \int_{x_1}^{x_n} (x-t)_+^{k-1-j}\ s^{(k)}(t)dt \text{ pour } j=0,\dots,k-1$$

en posant $P_{k-1-j} = P_{k-1}^{(j)}$

Ou encore :

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k-1} K_j\ s^{(j)}(t)$$

(6-20) $$= Q_{k-1}(t) + \int_{x_1}^{x_n} r\ (t)\ s^{(k)}(t)\ dt$$

avec :

$$r(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{K_j}{(k-1-j)!}\ (x-t)_+^{k-1-j}$$

Prenons la différence divisée de (6-20) sur les points $x_i,\dots,x_{i+k}$. Comme d'après (6-16) on a $u(x_i) = y_i$ et que la différence divisée d'un polynôme de degré k-1 prise sur k+1 points est nulle, on peut écrire :

$$\int_{x_1}^{x_n} H_i\ (t)\ s^{(k)}(t)\ dt = \alpha_i \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-k$$

H_i et α_i étant définis par (6-18) et (6-19). C.Q.F.D.

D'après la propriété 4-2-1 appliquée à l'espace de Hilbert $L^2[x_1,x_n]$ on a :

(6-21) $$s^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j\ H_j\ (t)$$

Les fonctions H_j (j=1,...,n-k) sont en effet linéairement indépendantes (on peut le vérifier comme en 4-2-3).

On a la propriété suivante :

<u>Propriété 6-2-2</u> :

Soient S_i (i=1,...,n-k), n-k fonctions vérifiant

$$S_i^{(k)} = H_i \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-k$$

La fonction-spline d'interpolation définie par (6-15) s'écrit alors :

(6-22) $$s\ (t) = P_{k-1}\ (t) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i\ S_i\ (t)$$

Le polynôme P_{k-1} étant défini par k des n conditions (6-15).

Démonstration :

Nous savons déjà d'après la propriété 4-2-1 que la fonction (6-22) vérifie les conditions (6-17) et minimise $\int_{x_1}^{x_n} s^{(k)}(t)\,dt$.

Montrons que si P_{k-1} est déterminé par k conditions de (6-15) (les k premières par exemple) alors s vérifie toutes les conditions (6-15).

On a en effet :

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k-1} K_j\, s^{(j)}(t)$$

qui peut s'écrire :

$$u(t) = Q_{k-1}(t) + \int_{x_1}^{x_n} r(t)\, s^{(k)}(t)\,dt$$

On a (par définition de s) :

(6-23) $\delta_{x_1,\dots,x_{k+1}} u(t) = \alpha_1 = \delta_{x_1,\dots,x_{k+1}} y$

Comme $u(x_i) = y_i$ pour $i=1,\dots,k$, l'équation (6-23) entraine $u(x_{k+1}) = y_{k+1}$

On démontrera ainsi de proche en proche que

$u(x_i) = y_i$ pour $i=1,\dots,n$ C.Q.F.D.

B - Algorithme :

On va déterminer les coefficients λ_j $(j=1,\dots,n-k)$ au moyen des équations (6-17) et (6-18).

Si on désigne par (f,g) le produit scalaire dans $L^2[x_1,x_n]$, on a (6-17) qui s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \, (H_i,H_j) = \alpha_i \qquad \text{pour } i=1,\dots,n-k. \tag{6-24}$$

L'équation (6-24) représente un système linéaire symétrique de n-k équations à n-k inconnues.

On doit déterminer les éléments :

$$(H_i,H_j) = \int_{x_1}^{x_n} H_i(t)\, H_j(t)\, dt \qquad \text{pour} \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n-k \\ j=1,\dots,n-k \end{array}$$

D'après la définition (6-18) de $H_i(t)$ on a :

$H_i(t) = 0$ pour $t \notin \left]x_i, x_{i+k}\right[$

Donc :

$$(H_i,H_j) = 0 \qquad \text{pour} \quad j \geqslant i+k \tag{6-25}$$

Propriété 6-2-3 :

Pour $j < i+k$ et $i < j+k$ on a : $(1 \leqslant i,j \leqslant n-k)$

(6-26) $$(H_i,H_j)=\sum_{p=0}^{k-1} K_p \sum_{u=p}^{p+k-1} K_{u-p} \frac{(-1)^{k+p}}{(2k-1-u)!} \delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}} \varphi_{u,j}(t)$$

(6-27) avec : $$\varphi_{u,j}(t) = \delta_{x_j,\ldots,x_{j+k}} (x-t)_+^{2k-1-u}$$

Démonstration :

On a par définition, pour $j < i+k$ et $i < j+k$ (d'après (6-25) et parce que la matrice des (H_i,H_j) est symétrique) :

(6-28) $$(H_i,H_j)=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{k-1} K_p . K_r \frac{1}{(k-1-p)!(k-1-r)!}\int_{x_1}^{x_n} \delta_{x_i \ldots x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1-p} \cdot \delta_{x_j \ldots x_{j+k}} (x-t)_+^{k-1-r} dt$$

Par définition des différences divisées on a :

(6-29) $$\delta_{x_i \ldots x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1-p} = \sum_{v=i}^{i+k} \frac{(x_v-t)_+^{k-1-p}}{\omega'_i(x_v)}$$

avec $$\omega_i(x) = \prod_{u=i}^{i+k} (x-x_u)$$

D'autre part on a :

$$\delta_{x_j \ldots x_{j+k}} (x-t)_+^{k-1-r} = \delta_{x_j,\ldots,x_{j+k}} \left((x-t)^{k-1-r} + (-1)^{k-r} (t-x)_+^{k-1-r}\right)$$

$$= (-1)^{k-2} \delta_{x_j,\ldots,x_{j+k}} (t-x)_+^{k-1-r}$$

Car la différence divisée sur k+1 points d'un polynôme de degré inférieur ou égal à k-1 est nulle.

L'équation (6-28) s'écrit alors (en utilisant (6-29) :

$$\text{(6-30)} \quad (H_i,H_j) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-r} K_p K_r}{(k-1-p)!(k-1-r)!} \sum_{v=i}^{i+k} \sum_{u=j}^{j+k} \frac{1}{\omega'_i(x_v).\omega'_j(x_u)} \circ P(p,v,u,r)$$

avec :

$$P(p,v,u,r) = \int_{x_1}^{x_n} (x_v - t)_+^{k-1-p} \circ (t-x_u)_+^{k-1-r}$$

En intégrant par parties on trouve :

$$P(p,v,u,r) = (-1)^{p+r} \frac{(k-1-p)!(k-1-r)!}{(2k-1-p-r)!} (x_u - x_v)_+^{2k-1-p-r}$$

(6-15) s'écrit alors :

$$(H_i,H_j) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k+p} K_p K_r}{(2k-1-p-r)!} \sum_{v=i}^{i+k} \frac{1}{\omega'_i(x_v)} \sum_{u=j}^{j+k} \frac{(x_u - x_v)_+^{2k-1-p-r}}{\omega'_j(x_u)}$$

ou encore d'après (6-14) et (6-12') :

$$(H_i,H_j)=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k+p}K_pK_r}{(2k-1-p-r)!}\,\delta_{x_i\ldots x_{i+k}}\varphi_{p+r,j}(t)$$

Faisons le changement de variable p+r=u

$$(H_i,H_j)=\sum_{p=0}^{k-1}K_p\sum_{u=p}^{p+k-1}K_{u-p}\frac{(-1)^{k+p}}{(2k-1-u)!}\,\delta_{x_i\ldots x_{i+k}}\varphi_{u,j}(t)$$

C.Q.F.D.

On aura les coefficients λ_i $(i=1,\ldots,n-k)$ en résolvant le système :

$$A\,\lambda=\alpha$$

Avec A matrice (n-k,n-k) symétrique dont les éléments sont les (H_i,H_j) calculés à partir de (6-26), et α colonne de dimension n-k dont les éléments sont les α_i déterminés par (6-19).

On peut prendre pour fonctions S_i (voir (6-22)) les fonctions :

(6-31) $$S_i(t)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{K_j}{(2k-1-j)!}\,\delta_{x_i,\ldots,x_{i+k}}(x-t)_+^{2k-1-j}\qquad i=1,\ldots,n-k$$

Les coefficients c_i $(i=1,\ldots,k)$ du polynôme P_{k-1} de (6-22) sont déterminés par les conditions :

(6-32) $$\sum_{p=0}^{k-1}K_p.s^{(p)}(x_j)=y_j\qquad \text{pour } i=1,\ldots,k$$

Or

$$s^{(p)}(t) = P^{(p)}(t) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \, S_i^{(p)}(t)$$

$$= \sum_{r=p+1}^{k} \frac{(r-1)!}{(r-p-1)!} c_r t^{r-p-1} + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \sum_{j=0}^{k-1} \frac{K_j}{(2k-1-j-p)!} \varphi_{j+p,i}(t)$$

Les équations (6-32) peuvent s'écrire :

$$(6\text{-}33) \quad \sum_{p=0}^{k-1} K_p \sum_{r=p+1}^{k} \frac{(r-1)!}{(r-p-1)!} c_r x_j^{r-p-1} = y_j - \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_i K_j K_p}{(2k-1-j-p)!} \varphi_{j+p,i}(x_j)$$

Ou encore : (en posant p+j=u)

$$\sum_{r=1}^{k} c_r \sum_{p=0}^{r-1} K_p \frac{(r-1)!}{(r-p-1)!} x_j^{r-p-1} = y_j - \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{u=p}^{p+k-1} \frac{K_p . K_{u-p}}{(2k-1-u)!} \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \varphi_{u,i}(x_j)$$

pour $j=1,\dots,k$

Les coefficients c_r $(r=1,\dots,k)$ du polynôme P_{k-1} qui s'écrit :

$P_{k-1}(t) = c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}$ seront déterminés en résolvant le système de k équations à k inconnues qui s'écrit :

$$D.c = e$$

D étant une matrice carrée et e un vecteur de R^k ayant pour éléments

$$d_{i,j} = \sum_{p=0}^{j-1} K_p \frac{(j-1)!}{(j-p-1)!} x_i^{j-p-1} \qquad \begin{array}{l} i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k \end{array}$$

$$e_i = y_i - \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{u=p}^{p+k-1} \frac{K_p . K_{u-p}}{(2k-1-u)!} \sum_{v=1}^{n-k} \lambda_v \varphi_{u,v}(x_i) \qquad i=1,\dots,k$$

§6-3 CAS DE POINTS EQUIDISTANTS.

Nous allons montrer comment la méthode d'intégration à points équidistants du chapitre cinq peut s'étendre au cas de fonctions-spline d'interpolation généralisées.

Comme dans le paragraphe précédent, nous traiterons uniquement le cas de fonctionnelles ponctuelles de la forme :

$$(6\text{-}34) \qquad L_i(s) = \sum_{j=0}^{k-1} K_j \, s^{(j)}(i) = y_i \qquad \text{pour } i=0,\dots,n.$$

Le problème est donc d'obtenir numériquement la fonction-spline généralisée s qui vérifie (6-34) et qui minimise

$$\int_0^n (s^{(k)}(t))^2 \, dt$$

Les nombres K_j $(j=0,\dots,k-1)$ et y_i $(i=0,\dots,n)$ étant donnés (les K_j $(j=0,\dots,k-1)$ vérifiant les conditions du paragraphe 2-2).

A - Propriété de la fonction-spline s.

Nous avons vu au chapitre deux que la fonction-spline s s'écrit :

(6-35) $$s(t)=P_{k-1}(t)+\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{i=0}^{k-1} K_i \frac{(-1)^i}{(2k-i-1)!} (x-j)_+^{2k-i-1}$$

avec :

(6-36) $$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{i=0}^{\ell} \frac{K_i}{(\ell-i)!} j^{\ell-i} = 0 \quad \text{pour } \ell=0,\dots,k-1$$

Nous allons chercher une condition équivalente à la condition (6-36) en montrant la propriété suivante.

Propriété 6-3-1 :

> Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction s vérifie les conditions (6-36) est que s(t) se réduise à un polynôme de degré k-1 pour $t \geq n$.

Démonstration :

Posons :

$$H_{2k-1}(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{i=0}^{k-1} K_i \frac{(-1)^i}{(2k-i-1)!} (x-j)^{2k-i-1}$$

Pour $t \geq n$ la fonction s(t) s'écrit :

$$s(t) = P_{k-1}(t) + H_{2k-1}(t)$$

On a :

$$H_{2k-1}^{(u)}(t)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\sum_{i=0}^{2k-u-1}K_i\,\frac{(-1)^i}{(2k-i-u-1)!}\,(x-j)^{2k-i-1-u}\quad\text{pour } u=k,\dots,2k-1$$

posons $2k-u-1=\ell$ on a alors :

$$H_{2k-1}^{(2k-1-\ell)}(t)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\sum_{i=0}^{\ell}K_i\,\frac{(-1)^i}{(\ell-i)!}\,x-j)^{\ell-1}\quad\text{pour}\ell=0,\dots,k-1$$

et d'après (6-36)

$$H_{2k-1}^{(2k-1-\ell)}(0)=0\qquad\text{pour}\ell=0,\dots,k-1$$

ou $H_{2k-1}^{(u)}(0)=0$ pour $u=k,\dots,2k-1$. Donc H_{2k-1} est un polynôme de degré inférieur ou égal à k-1 et par suite s est un polynôme de degré k-1 pour $t \geq n$ C.Q.F.D.

Ainsi on doit trouver une fonction de la forme (6-35) vérifiant les conditions (6-34) et qui se réduise à un polynôme de degré k-1 sur $]-\infty,0]$ et $[n,+\infty[$.

B - Ecriture particulière de la fonction-spline.

Nous allons utiliser les fonctions-splines $L_m(t)$ étudiées au paragraphe 5-1 (voir Schoenberg [13]).

Introduisons la fonction :

(6-37) $$R_{2k}(t)=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\,K_i\,L_{2k}^{(i)}(t)$$

Montrons le théorème suivant :

Théorème 6-3-2 :

Il existe une suite réelle $\{\nu_j\}$ $(j=-k+1,\ldots,n+k-1)$ unique telle que la fonction-spline (6-35) s'écrive :

(6-38) $$s(t) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \, R_{2k}(t-j)$$

Démonstration :

lemme :

Il existe un polynôme Q_{k-1} de degré k-1 unique tel que :

(6-39) $$P_{k-1}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(2k-1)!} \, K_i \, Q_{k-1}^{(i)}(t)$$

Il suffit d'identifier les deux membres de (6-38) pour avoir les coefficients de Q_{k-1} cherchés.

Considérons la fonction :

$$\Pi_{2k}(t) = Q_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, (t-j)_+^{2k-1}$$

D'après le théorème 5-1-1 cette fonction admet une représentation unique sous la forme :

$$\Pi_{2k}(t) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j^{*} \, L_{2k}(t-j)$$

On a :

$$s(t) = P_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(2k-1-i)!} \; K_i \; (t-j)_+^{2k-1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(2k-1)!} K_i \, Q_{k-1}^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(2k-1)!} K_i \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{(2k-1-i)!} (t-j)_+^{2k-1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(2k-1)!} \; K_i \, \Pi_{2k}^{(i)}(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(2k-1)!} \; K_i \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j^{*} \, L_{2k}^{(i)}(t-j)$$

Posons : $\nu_j = \dfrac{\nu_j^{*}}{(2k-1)!}$

On a alors :

$$s(t) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \; K_i \; L_{2k}^{(i)}(t-j)$$

$$s(t) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \, R_{2k} \, (t-j)$$ C.Q.F.D.

Montrons la propriété suivante :

Propriété 6-3-2 :

Une condition suffisante pour que la fonction-spline (6-38) se réduise à un polynôme de degré (k-1) sur $]-\infty,0]$ et $[n,+\infty[$ est qu'on ait :

(6-40) $$\Delta^k \nu_j = 0 \qquad \text{pour } j=-k+1,\ldots,-1,n-k+1,\ldots,n-1$$

en posant $\nu_j = 0$ pour $j < -k+1$ et $j > n-1$

(Δ^k désigne l'opérateur de différence progressive de pas 1)

Démonstration :

On a d'après (6-37)

(6-41) $$R_{2k}^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \, K_i \, L_{2k}^{(i+k)}(t)$$

La propriété 5-1-3 nous permet d'écrire :

(6-42) $$L_{2k}^{(i+k)}(t) = \delta^{i+k} L_{k-i}(t) = \Delta^{i+k} L_{k-i}(t-\frac{i+k}{2})$$

($\delta^p f(t)$ est l'opérateur de différence centrale de pas 1 portant sur la fonction f).

On a donc :

$$s^{(k)}(t) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \; R_{2k}^{(k)}(t-j)$$

Et d'après (6-41) et (6-42)

$$s^{(k)}(t) = \sum_{j=-k+1}^{n+k-1} \nu_j \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \; K_i \; \Delta^{i+k} L_{k-i}(t-\frac{i+k}{2}-j)$$

En utilisant la propriété 5-1-2 et (5-3') on peut écrire :

$$s^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \; K_i \sum_{j=a}^{b} \Delta^{k+i}\nu_j . L_{k-i}(t-j-\frac{i+k}{2}) \tag{6-43}$$

en posant a = premier entier $>$ t-k et b = premier entier $<$ t-i.

On a d'autre part :

$$\Delta^k \nu_j = 0 \text{ pour } j=-k+1,\dots,-1 \iff \Delta^{k+i}\nu_j = 0 \text{ pour } n=-k+1,\dots,-1 \tag{6-44}$$

$$\text{et } i=0,\dots,k-1$$

Pour $t \leq 0$, (6-43) peut s'écrire :

$$s^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \; K_i \sum_{j=-k+1}^{-i-1} \Delta^{k+i}\nu_j . L_{k-i}(t-j-\frac{i+k}{2})$$

Donc d'après (6-44) les conditions (6-40) entrainent que s(t) est un polynôme de degré k-1 pour $t \leq 0$ (car $s^{(k)} = 0$).

De même on a :

(6-45) $\Delta^k \nu_j = 0$ pour $j = n-k+1, \ldots, n-1 \iff \Delta^{k+i} \nu_j = 0$ pour $j = n-k+1, \ldots, n-1$ et $i = 0, \ldots, k-1$

ce qui entraine que $s^{(k)} = 0$ pour $t \geq n$ donc $s(t)$ est un polynôme de degré $k-1$ pour $t \geq n$.

C.Q.F.D.

C - Obtention numérique des coefficients de la fonction-spline :

Pour obtenir les coefficients ν_j ($j=-k+1, \ldots, n+k-1$) de la fonction-spline (6-38) telle que la fonctionnelle au point i ($i=0, \ldots, n$) prenne la valeur y_i, on est ramené à la résolution du système linéaire suivant :

$$(6\text{-}46) \qquad \sum_{j=0}^{k-1} K_j \, s^{(j)}(i) = y_i \qquad i=0, \ldots, n$$

et

$$(6\text{-}47) \qquad \Delta^k \nu_j = 0 \qquad \text{pour } j=-k+1, \ldots, -1, n-k+1, \ldots, n-1$$

Ce qui nous donne $n+2k-1$ conditions pour déterminer les $n+2k-1$ coefficients ν_j.

L'équation (6-46) peut encore s'écrire en utilisant (6-38)

$$(6\text{-}48) \qquad \sum_{j=0}^{k-1} K_j \sum_{h=-k+1}^{n+k-1} \nu_h \, R_{2k}^{(j)}(i-h) = y_i \qquad i=0, \ldots, n$$

Posons-p=i-h on a alors :

$$(6\text{-}49) \qquad \sum_{j=0}^{k-1} K_j \sum_{p=-k+1-i}^{n+k-1-i} \nu_{p+i}\, R_{2k}^{(j)}(-p) = y_i \qquad i=0,\dots,n$$

Or

$L_{2k}(t) = 0$ pour $t \leq -k$ et $t \geq k$ (voir 5-3')

On a donc aussi

$R_{2k}(t) = 0$ pour $t \leq -k$ et $t \geq k$

L'équation (6-49) peut donc s'écrire :

$$(6\text{-}50) \qquad \sum_{p=-k+1}^{k-1} \nu_{p+i} \sum_{j=0}^{k-1} K_j\, R_{2k}^{(j)}(-p) = y_i \qquad \text{pour } i=0,\dots,n$$

Posons :

$$(6\text{-}51) \qquad A_p = \sum_{j=0}^{k-1} K_j\, R_{2k}^{(j)}(-p) \qquad \text{pour } p=-k+1,\dots,k-1$$

Le problème de l'obtention numérique des coefficients ν_j ($j=-k+1,\dots,n+k-1$) se ramène donc à la recherche des solutions des équations aux différences finies :

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{p=-k+1}^{k-1} A_p\,\nu_{p+i} = y_i \qquad i=0,\dots,n & \text{(6-52)} \\[2em]
\Delta^k \nu_j = 0 \qquad \text{pour } j=-k+1,\dots,-1,n-k+1,\dots,n-1 & \text{(6-53)}
\end{cases}
$$

<u>Propriété 6-3-3</u> :

> Les coefficients A_p sont symétriques.

<u>Démonstration</u> :

Les fonctions L_{2k} étant symétriques ($L_{2k}(t) = L_{2k}(-t)$) on a :

$$L_{2k}^{(h)}(t) = (-1)^h L_{2k}^{(h)}(-t)$$

Les coefficients A_p peuvent s'écrire :

$$A_p = \sum_{j=0}^{k-1} K_j\, R_{2k}^{(j)}(-p) = \sum_{j=0}^{k-1} K_j \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i K_i\, L_{2k}^{(i+j)}(-p)$$

ou encore :

$$A_p = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j K_i K_j\, L_{2k}^{(i+j)}(p) = A_{-p}$$

C.Q.F.D.

Les coefficients A_p $(p=-k+1,\dots,k-1)$ étant symétriques, le polynôme caractéristique de l'équation aux différences finies (6-52) sera à coefficients symétriques par rapport au terme central. La recherche des 2k-2 racines de ce polynôme se ramène au calcul des racines d'un polynôme de degré k-1. (voir Durand [28] p.140).

On peut appliquer la méthode du chapitre cinq (§5-2-A) pour résoudre le système d'équations (6-52) et (6-53). Cependant les racines $h_i(i=1,\dots,2k-2)$ du polynôme caractéristique de l'équation aux différences (6-52) peuvent être réelles, imaginaires ou multiples. Si les racines $h_i(i=1,\dots,2k-2)$ sont toutes distinctes, la solution du système s'écrit comme en (5-31) soit :

$$\nu_j = \sum_{r=1}^{j+k-3} \psi_{j-r} \cdot \frac{y_r}{A_{-k+1}} - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \, \eta_{j+i} - \frac{y_0}{A_{-k+1}} (\eta_{j+k} - \psi_j)$$

pour $j=-k+1,\dots,n+k-1$

Les c_i étant les solutions du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{k-1} \psi_{i+n-k+j} \, c_j = - \frac{y_0}{A_{-k+1}} \cdot \psi_{i+n} + \sum_{r=0}^{n} \frac{y_r}{A_{-k+1}} \Delta^k \psi_{i+n-k-r}$$

avec $i=1,\dots,k-1$.

Les fonctions ψ_i et η_i sont les mêmes qu'en (5-23) et (5-30) ; seules les racines $h_i(i=1,\dots,2k-2)$ sont différentes.

Même dans le cas où une des racines h_i est imaginaire les fonctions ψ_i et η_i sont réelles car $\bar{h}_i$ (h_i conjuguée) est aussi racine (les coefficients du polynôme caractéristiques sont en effet réels).

L'obtention numérique des coefficients ν_j peut donc se faire comme au chapitre cinq (§5-3) ; seul le calcul des racines $h_i (i=1,\ldots,2k-2)$ est plus délicat. Toutefois le polynôme dont elles sont racines n'a pratiquement jamais un degré très élevé ; il présente de plus l'avantage d'avoir des coefficients A_p symétriques.

CHAPITRE 7

UTILISATION DES FONCTIONS-SPLINE POUR L'APPROXIMATION DE FONCTIONNELLES LINEAIRES

§7-1 MEILLEURES FORMULES DE SARD.

Soit L une fonctionnelle linéaire continue définie sur $H^k[a,b]$. Sard ([12]) s'est intéressé au problème d'approximation suivant :

a) Etant donnés n points $x_1,\ldots,x_n \in [a,b]$ on cherche à déterminer les constantes B_i $(i=1,\ldots,n)$ telles que :

$$f \text{ polynôme de degré } \leq k-1 \Longrightarrow R(f) \underset{df}{=} L(f) - \sum_{i=1}^{n} B_i f(x_i) = 0$$

Ce qui nous donne k conditions pour déterminer les B_i $(i=1,\ldots,n)$.

b) D'après le théorème de Sard ([12] p. 311) la condition a) entraine qu'il existe $K \in L_2[a,b]$ tel que :

$$R(f) = \int_a^b K(t)\ f^{(k)}(t)\ dt$$

Si $n > k$, les B_i $(i=1,\ldots,n)$ doivent rendre minimum $\int_a^b (K(t))^2\ dt$

Nous appellerons les B_i $(i=1,\dots,n)$ les <u>coefficients de Sard d'ordre k de la fonctionnelle L sur Δ</u> $= \{x_1,\dots x_n\}$ et $\sum_{i=1}^{n} B_i f(x_i)$ <u>la meilleure approximation d'ordre k de L(f) sur Δ</u>.

Nous avons vu au chapitre un (théorème 1-2-3), une propriété importante des fonctions-spline. Appliquons le théorème 1-2-3 en posant $X = H^k[a,b]$, $Y = L_2[a,b]$, $T = D^k$, $K_i : f \in X \longrightarrow f(x_i) \in R$ $(i=1,\dots,n)$ (on suppose $n > k$ et $k \geq 2$).

Nous obtenons le corollaire suivant

<u>Corollaire 7-1-1</u> :

Les coefficients B_i $(i=1,\dots,n)$ d'ordre k d'une fonctionnelle linéaire continue L sur $\Delta = \{x_1,\dots,x_n\}$ sont les images par la fonctionnelle L des fonctions-spline de base σ_i d'ordre k sur Δ. Soit :

$$B_i = L(\sigma_i) \qquad i=1,\dots,n.$$

Les fonctions-spline de base d'ordre k sur Δ sont les fonctions-spline d'interpolation σ_i $(i=1,\dots,n)$ d'ordre k dont le graphe passe par les n points de R^2 : $(x_j,\delta_{i,j})$ $(j=1,\dots,n)$ ($\delta_{i,j}$= si i=j alors 1 sinon 0).

Nous allons voir dans les paragraphes suivants plusieurs applications de ce théorème.

§7-2 INTEGRATION D'UNE FONCTION DONNEE PAR POINTS.

A - Obtention de la meilleure approximation d'ordre deux

Supposons que l'on veuille calculer $I\,(f) = \int_a^b f(t)\,dt$, f étant une fonction dont on ne connait que les valeurs y_i prises en n+1 points x_i $(i=0,\ldots,n)$ (on suppose $a < b$, $x_i < x_{i+1}$ et $f \in [\alpha,\beta]$ avec $\alpha=\mathrm{Min}(x_0,a)$ et $\beta=\mathrm{Max}(x_n,b)$). On peut utiliser la méthode d'intégration (chapitre quatre) pour obtenir la fonction-spline s d'ordre deux sur (x_i,y_i) $(i=0,\ldots,n)$ et intégrer s. On aura ainsi la meilleure approximation d'ordre deux de I (f) sur $\Delta = \{x_1,\ldots x_n\}$.

La procédure COEFSPLINETROIS (voir §4-1-B) nous donne les valeurs M_i $(i=0,\ldots,n)$ de s" aux points x_i. L'expression de s(t) dans un intervalle $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$ est alors (voir 4-7) :

$$(7\text{-}1) \qquad s_i(t) = \frac{M_{i-1}}{6\ell_i}(x_i-t)^3 + \frac{M_i}{6\ell_i}(t-x_{i-1})^3 + \left(\frac{y_i}{\ell_i} - \frac{M_i\ell_i}{6}\right)(t-x_{i-1})$$

$$+ \left(\frac{y_{i-1}}{\ell_i} - \frac{M_{i-1}\ell_i}{6}\right)(x_i-t) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

avec $\ell_i = x_i-x_{i-1}$.

Pour $t \leq x_o$ et $t \geq x_n$ nous savons que la fonction-spline se réduit à un polynôme du premier degré soit :

$$s_o(t) = s'(x_o)\ (t-x_o) + y_o$$

$$s_{n+1}(t) = s'(x_n)\ (t-x_n) + y_n$$

Comme $s \in H^2[\alpha,\beta]$ on peut calculer $s'(x_1)$ et $s'(x_n)$ à partir de (7-1) pour i=1,n.

On obtient :

(7-2) $$s_o(t) = \left(\frac{y_1-y_o}{\ell_1} - M_1 \frac{\ell_1}{6}\right).(t-x_o) + y_o$$

et

(7-3) $$s_{n+1}(t) = \left(\frac{y_n-y_{n-1}}{\ell_n} + M_{n-1} \frac{\ell_n}{6}\right).(t-x_n) + y_n$$

D'après (7-1) on a :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} s_i\ (t)\ dt = \frac{\ell_i}{2}\ (y_i+y_{i-1}) - \frac{\ell_i^3}{24}\ (M_i+M_{i-1}) \qquad i=1,\ldots,n$$

Pour calculer I (s) nous devons envisager plusieurs cas :

(On pose $ps_i(t) = \displaystyle\int_\alpha^t s_i\ (x)\ dx \qquad i=0,\ldots,n+1$)

1) $\underline{b \leq x_o}$ on a alors :

$$I\ (s) = \int_a^b s_o\ (t)\ dt = ps_o\ (b) - ps_o\ (a)$$

2) $\underline{x_n \leq a}$:

$$I\ (s) = \int_a^b s_{n+1}\ (t)\ dt = ps_{n+1}\ (b) - ps_{n+1}\ (a)$$

3) $\underline{a \leq x_p \leq x_q \leq b}$ avec

$p = \text{Min}\ \{e : 0 \leq e \leq n\ ;\ a \leq x_e\}$ et $q = \text{Max}\ \{e : 0 \leq e \leq n\ ;\ x_e \leq b\}$

$$I\ (s) = \int_a^{x_p} s_p(t)dt + \sum_{i=p+1}^{q} \int_{x_{i-1}}^{x_i} s_i(t)dt + \int_{x_q}^{b} s_{q+1}(t)dt$$

$$= ps_p\ (x_p) - ps_p\ (a) + ps_{q+1}\ (b) - ps_{q+1}\ (x_q) +$$

$$\sum_{i=p+1}^{q} \left(\frac{\ell_i}{2}\ (y_i - y_{i-1}) - \frac{\ell_i^3}{24}\ (M_i + M_{i-1})\right)$$

4) $\underline{x_{p-1} \leq a < b \leq x_p}$

On a alors : $I\ (s) = \int_a^b s_p(t)dt = ps_p(b) - ps_p(a)$

B - Procédure algol et exemple numérique :

```
reel procédure INTEGRATION (N,X,Y,M,A,B) ; valeur N,X,Y,M,A,B ;
entier N ; tableau X,Y,M ; reel A,B ;
commentaire cette reel procédure calcule la valeur de la meilleure approxi-
mation d'ordre deux de l'intégrale entre A et B (A < B) d'une fonction f qui
prend aux points X[I] les valeurs Y[I] avec 0 ≤ I ≤ N (N ≥ 2). Le tableau
M[0:N] contient les valeurs des dérivées secondes en X[I] (0 ≤ I ≤ N) de la
fonction-spline d'ordre deux prenant aux abscisses X[I] les valeurs Y[I]. Ce
tableau est obtenu en activant la procédure COEFSPLINETROIS (N,X,Y,M). On suppose
X[I] < X[I+1] ;
début reel procédure PS (I,T) ; valeur I,T ; entier I ; reel T ;
    commentaire cette reel procédure calcule la valeur que prend en T une pri-
    mitive de s_i(t) (0 ≤ i ≤ N+1) (voir 7-1, 7-2 et 7-3) ;
    début reel Z,V,W ;
        si I=0 alors
        début Z := X[1]-X[0] ;
              PS := .5×((Y[1]-Y[0])/Z-M[1]×Z/6)×(T-X[0])×(T-X[0])+Y[0]×T
        fin sinon si I=N+1 alors
        début Z := X[N]-X[N-1] ;
              PS := .5×((Y[N]-Y[N-1])/Z+M[N-1]×Z/6)×(T-X[N])×
                     (T-X[N])+Y[N]×T
        fin sinon
        début Z := X[I]-X[I-1] ;
              V := X[I]-T ; W := T-X[I-1] ;
              PS := -.5×V×V×(M[I-1]×(V×V/(12×Z)-Z/6)+Y[I-1]/Z)
                     +.5×W×W×(M[I]×(W×W/(12×Z)-Z/6)+Y[I]/Z)
        fin
    fin PS ;
```

```
    reel S,Z ; entier I,P,Q ;
    si B ≤ X[0] alors
    INTEGRATION := PS(0,B)-PS(0,A) sinon
    si X[N] ≤ A alors
    INTEGRATION := PS(N+1,B)-PS(N+1,A) sinon
    début pour I := 0 pas 1 jusqu'à N faire
          si A ≤ X[I] alors début P := I ; aller à SUITE fin ;
          SUITE :
          pour I := N pas -1 jusqu'à 0 faire
          si X[I] ≤ B alors début Q := I ; aller à JO fin ;
          JO :
          si Q < P alors INTEGRATION := PS(P,B)-PS(P,A)
          sinon
          début S := PS(P,X[P])-PS(P,A)+PS(Q+1,B)-PS(Q+1,X[Q]) ;
                pour I := P+1 pas 1 jusqu'à Q faire
                début Z := X[I]-X[I-1] ;
                      S := S+.5×Z×(Y[I]+Y[I-1]-Z×Z×(M[I]+M[I-1])/12)
                fin ; INTEGRATION := S
          fin
    fin
fin INTEGRATION ;
```

Exemples

1) Utilisons la procédure précédente pour approcher $\int_0^{\pi} \sin(t)dt=2$ en posant $x_i = i\times\pi/n$ $(i=0,\dots,n)$.

On obtient :

n	4	8	12	16	20	24
I(s)	1,9986934	1,999302	1,9999865	1,9999957	1,9999982	1,9999991

2) $\int_0^1 e^{4x} \sin(2 x \pi)\, dx = -6{,}070\ 236$ avec

$x_i = i/n \qquad (i=0,\dots,n)$

On obtient :

n	10	30	60	90	190
I(s)	-6,001 393 6	-6,067 740 7	-6,069 924 4	-6,070 143 3	-6,070 225 3

§7-3 ETUDE DE L'INTERPOLATION.

Supposons que l'on veuille évaluer la valeur que prend une fonction f en un point fixe t connaissant les valeurs y_i prises par f aux abscisses x_i $(i=1,\dots,n)$. La meilleure approximation d'ordre k de $L(f) = f(t)$ est d'après le corollaire 7-1-1

$$\sum_{i=1}^{n} B_i\ f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} L\ (\sigma_i).f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} L(f(x_i).\sigma_i)$$

$$= s(t)$$

s désigne la fonction-spline d'interpolation d'ordre k prenant les valeurs y_i aux abscisses x_i $(i=1,\ldots,n)$.

§7-4 ETUDE DE LA DERIVATION APPROCHEE

A - Méthodes de calcul de la dérivée :

Nous avons vu au chapitre un (théorème 1-1-2) que la dérivée d'ordre ℓ $(\ell=1,\ldots,k-1)$ d'une fonction-spline d'interpolation s_n d'ordre k sur les points $(x_i,f(x_i))$ $(i=1,\ldots,n$ et $a \leq x_i \leq b$ pour tout i) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ et $\mathrm{Sup}\ [(x_1-a),(b-x_n),(x_i-x_{i-1})\ i=2,\ldots,n] \longrightarrow 0$ $(f \in H^k[a,b])$.

On a ainsi une méthode pour approcher la dérivée d'ordre ℓ d'une fonction f en un point $t_o \in [a,b]$.

On considérera les deux cas suivants :

1) on peut calculer la valeur de f(x) en tout point x de $[t_o-h,t_o+h] \subset [a,b]$.

2) on ne connait que les valeurs prises par f en n points x_i (i=1,...,n) de [a,b].

Dans le premier cas on utilisera des approximations $L_n(f)$ d'ordre 2 de f'(t) sur n points (uniformément répartis sur $[t_o-h,t_o+h]$) et on fera tendre n vers l'infini en arrêtant le calcul lorsque $(L_n-L_{n-1})/L_n \leq \epsilon$.

Dans le deuxième cas on aura la meilleure approximation d'ordre 2 de $f'(t_o)$ sur les points $x_1,\ldots,x_n$ en calculant $s'(t_o)$.

Pour calculer la dérivée d'ordre ℓ en t on peut utiliser une fonction-spline d'ordre $\ell+1$.

Nous donnons, à titre d'exemple, deux procédures permettant le calcul f'(t) dans les deux cas précédents, en utilisant une fonction-spline d'ordre deux. Le calcul se ferait de la même façon pour une dérivée d'ordre ℓ quelconque, on utiliserait alors la méthode d'intégration du chapitre quatre pour obtenir l'expression analytique d'une fonction-spline d'ordre $\ell+1$.

B - Dérivée en un point :

```
reel procédure DER PT SPL (F,A,H,ORDMAX,PREC,SORT,RES) ;
valeur A,H,ORDMAX,PREC ; reel procédure F ; booléen SORT ;
reel A,H,PREC ; entier ORDMAX ; tableau RES ;
commentaire cette procédure calcule la dérivée de F(x) pour X=A. On calcule F
en des abscisses prises dans l'intervalle [A-H,A+H]. On trouve une suite d'éva-
luations d'ordre croissant. Si l'écart relatif entre deux résultats successifs
est inférieur à PREC on arrête la calcul en donnant à SORT la valeur vrai.
```

Si l'on va jusqu'à l'ordre maximum on donne à SORT la valeur faux. Les résultats sont affectés au tableau RES[1:ORDMAX], le plus précis RES[J] (J < ORDMAX) étant affecté à SPL DERIVEE ;

```
début procédure COEFSPLINETROIS.....voir déclaration §4-1-B... ;
    entier U,V,J,I ; reel B,C,MA,MIR,Z ;
    U := 2 ; SORT := faux ; B := F(A-H) ; C := F(A) ; Z := H ;
    pour J := 1 pas 1 jusqu'à ORDMAX faire
    si J=1 alors
    début tableau X,Y,M[O:U] ;
          X[0] := A-Z ; X[1] := A ; X[2] := A+H ;
          Y[0] := B ; Y[1] := C ; Y[2] := F(A+H) ;
          COEFSPLINETROIS (U,X,Y,M) ;
          MA := RES[J] := (Y[1]-Y[0])/H+M[1]×H/3 ;
          H := H/2 ; V := U ; U := 2×U
    fin sinon
    début tableau X,Y,M[O:U] ;
          X[0] := A-Z ; Y[0] := B ; X[V] := A ; Y[V] := C ;
          pour I := 1 pas 1 jusqu'à V-1,V+1 pas 1 jusqu'à U faire
          début X[I] := X[I-1]+H ;
                Y[I] := F(X[I])
          fin ; COEFSPLINETROIS (U,X,Y,M) ;
          MIR := RES[J] := H×(M[V-1]+2×M[V])/6+(Y[V]-Y[V-1])/H ;
          si ABS((MIR-MA)/MIR) ≤ PREC
          alors aller à TERME ;
          H := H/2 ; V := U ; U := 2×U ; MA := MIR
    fin ; aller à AFFECT ;
    TERME : SORT := vrai ;
    AFFECT : DER PT SPL := MIR
fin DER PT SPL ;
```

Exemple :

Utilisons la procédure précédente pour calculer la dérivée en zéro de la fonction F(X)=1/(X-2) (cette dérivée vaut -.25).

On trouve les résultats numériques suivants :

H	I	MIR[I]
1	1	-.33333333
1/2	2	-.23333333
1/4	3	-.24928879
1/8	4	-.24999569
1/16	5	-.24999984
1/32	6	-.25000005

C - Dérivée d'une fonction donnée par points :

<u>reel</u> <u>procédure</u> SPL DERIVEE (N,X,Y,T) ; <u>valeur</u> N,X,Y,T ;
<u>entier</u> N ; <u>tableau</u> X,Y ; <u>reel</u> T ;
<u>commentaire</u> cette reelle procédure calcule la meilleure approximation d'ordre deux (au sens de Sard) de f'(t), sachant que $f(x_i) = y_i$ pour i=0,...,N, $t \in [x_o, x_N]$ et $x_i < x_{i+1}$;
<u>début</u> <u>procédure</u> COEFSPLINETROIS...voir §4-1... ;
    <u>tableau</u> M[0:N] ; <u>reel</u> H ; <u>entier</u> I ;
    I := 1 ; JO : <u>si</u> T ≤ X[I] <u>et</u> I ≤ N <u>alors</u> <u>aller à</u> SUI
    <u>sinon</u> <u>début</u> I := I+1 ; <u>aller à</u> JO <u>fin</u> ; SUI :
    COEFSPLINETROIS (N,X,Y,M) ; H := X[I]-X[I-1] ;
    SPL DERIVEE := -.5×(M[I-1]×(X[I]-T)×(X[I]-T)
    -M[I]×(T-X[I-1])×(T-X[I-1]))/H
    +(Y[I]-Y[I-1])/H+H×(M[I-1]-M[I])/6
<u>fin</u> SPL DERIVEE ;

Exemple :

Utilisons cette procédure sur la fonction sin x (dont la dérivée est cos x). Prenons $x_i = i \times \pi/n$ $y_i = \sin(x_i)$ $(i=0,\dots,n)$; posons

$$E_n = \max_{t \in [0,\pi]} |s'_{n-1}(t) - \cos(t)|$$

(s'_{n-1} étant la fonction calculée à l'aide de la procédure SPL DERIVEE sur n points). On obtient les résultats suivants (divisés par 10^{-7}) :

n	3	9	15	21	27	33
E_n	107210	3389	722	262	123	67

A N N E X E

```
procédure GRESOLSYSLINE (A) second membre : (B) solution : (X) ordre : (N)
sortie : (IMPOSSIBLE) ;
tableau A,B,X ; entier N ; étiquette IMPOSSIBLE ;
commentaire cette procédure résoud le système linéaire AX=B par la méthode
de Gauss. A est une matrice carrée d'ordre N. Si det (A)=0, la procédure ren-
voie à l'étiquette IMPOSSIBLE ;
début entier I,J,K ; reel R ;
    pour K := 1 pas 1 jusqu'à N-1 faire
    début NORMAL :
        début début si ABS (A[K,K]) = 0 alors aller à ECH DE LI ;
                    pour I := K+1 pas 1 jusqu'à N faire
                    début R := A[I,K]/A[K,K] ;
                        pour J := K+1 pas 1 jusqu'à N faire
                        A[I,J] := A[I,J]-R×A[K,J] ;
                        B[I] := B[I]-R×B[K]
                    fin
              fin ; aller à TOIRE ; ECH DE LI :
              début entier L,M ;
                    M := K+1 ;
                    pour L := M tant que ABS (A[L,K]) = 0 et
                    L ≤ N faire M := M+1 ;
                    si M=N+1 alors aller à IMPOSSIBLE ;
                    pour J := K pas 1 jusqu'à N faire
                    début R := A[K,J] ; A[K,J] := A[M,J] ;
                        A[M,J] := R
                    fin ; R := B[K] ; B[K] := B[M] ; B[M] := R ;
                    aller à NORMAL
              fin ; TOIRE :
        fin
    fin ;
```

```
      début entier I,J ; reel TX ;
            pour I := N pas -1 jusqu'à 1 faire
            début TX := 0 ; pour J := N pas -1 jusqu'à I+1 faire
                  TX := TX-X[J]×A[I,J] ;
                  si ABS(A[I,I]) = 0 alors aller à IMPOSSIBLE ;
                  X[I] := (B[I]+TX)/A[I,I]
            fin
      fin
fin GRESOLSYSLINE ;
```

B I B L I O G R A P H I E

[1] J.H.AHLBERG, E.N.NILSON and J.L.WALSH - Best approximation and convergence properties of higher-onder spline approximations. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 14, N°.2, March (1965) pp. 231 - 244.

[2] J.L.WALSH, J.H.AHLBERG and E.N.NILSON - Best approximation properties of the spline fit. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 11, N°.2 (1962) pp. 225 - 234.

[3] J.H.AHLBERG and E.N.NILSON - Convergence properties of the spline fit. J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, N°.1 (1963) pp. 95 - 104.

[4] M.ATTEIA - Généralisation de la définition et des propriétés des fonctions-spline. C.R.A.S. t. 260 (1965) pp. 3550 - 3553.

[5] G.BIRKHOFF and C. DE BOOR - Error bounds for spline interpolation. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 13, N°.5 (1964) pp. 827 - 835.

[6] C. DE BOOR - Best approximation properties of spline functions of odd degree. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 12, N°.5 (1963) pp. 747 - 749.

[7] I.M.GELFAND and S.V.FOMIN - Calculus of variations. Prentice Hall (1963).

[8] M.GOLOMB - Lecture on theory of approximation. Argonne National Laboratory (1962).

[9] T.N.E.GREVILLE - Numerical procedures for interpolation by Splines Functions. MRC Technical Summary Report, January (1964).

[10] J.C.HOLLADAY - A smoothest curve approximation. Math. Tables. Aids to Comp. , 11 (1957) pp. 233 - 243.

[11] P.J.LAURENT - Théorie de l'approximation. Cours de la faculté des sciences de Grenoble (1964).

[12] A.SARD - Linear approximation. American Mathematical Society (1963).

[13] I.J.SCHOENBERG - Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quart. Appl. Math., 4 (1946) pp. 45 - 99.

[14] I.J.SCHOENBERG and A.WHITNEY - On polya frequency functions. Trans. A.M.S., 74 (1953) pp. 246 - 259.

[15] I.J.SCHOENBERG - Spline functions, convex curves and mechanical quadrature. Bull. Amer. Math. Soc., 64 (1958) pp. 352 - 357.

[16] I.J.SCHOENBERG - Spline interpolation and the higher derivatives. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 51 (1964) pp. 24 - 28.

[17] I.J.SCHOENBERG - On trigonometric spline interpolation. J. of Math. and Mech., Vol. 13, N°.5 (1964) pp. 795 - 825.

[18] I.J.SCHOENBERG - On best approximations of linear operators. Kon. Nederlandse Akad. van Wetenschappen, Proccedings, Series A, 67 (1964) pp. 155 - 163.

[19] H.F.WEINBERGER - Optimal approximation for functions prescribed at equally spaced points. Journal of research of the National Bureau of Standards, Vol 65 B, N°2, (1961) pp. 99 - 104.

[20] RIESZ et NAGY - Leçons d'analyse fonctionnelle. Deuxième édition. Akadémiai Kiado Budapest (1953).

[21] M.ATTEIA - Fonctions-spline généralisées. C.R.A.S. t. 261 (1965) pp. 2149 - 2152.

[22] M.GOLOMB and H.F.WEINBERGER - Optimal approximation and error bounds. R.E.Langer ed Madison Wisconsin (1959) pp. 117 - 190.

[23] J.H.AHLBERG and E.N.NILSON - Orthogonality properties of spline functions. J. of Mathematical Analysis and Applications, 11 (1965) pp. 321 - 337.

[24] SMIRNOV - A course of higher mathematics. Volume 1. Pergamon Press.

[25] J.KUNTZMANN - Méthodes numériques, interpolation - dérivées. Editions Dunod (1959).

[26] M.ATTEIA - Thèse (à paraitre).

[27] Mme J.HEURTAUX - Tables de polynômes d'interpolation avec seulement deux abscisses distinctes. Chiffres, 1er année, (1958) pp. 25 - 34.

[28] E.DURAND - Solutions numériques des équations algébriques. Librairie Masson (1961).

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble