



HAL
open science

Applications des calculatrices numériques en électrotechnique

Jean-Claude Sabonnadière

► **To cite this version:**

Jean-Claude Sabonnadière. Applications des calculatrices numériques en électrotechnique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT: . tel-00279837

HAL Id: tel-00279837

<https://theses.hal.science/tel-00279837>

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

UNIVERSITE DE GRENOBLE

FACULTE DES SCIENCES

APPLICATIONS DES CALCULATRICES NUMERIQUES

EN ELECTROTECHNIQUE

-:-:-:-:-

T H E S E

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE SPECIALITE
(Mathématiques Appliquées)

-:-:-:-:-

Présentée par

Jean-Claude SABONNADIÈRE

Ingénieur I. E. C. -

Licencié ès Sciences

-:-:-:-:-

Thèse soutenue le : 25 Juin 1965

Devant la Commission d'examens

MM. J. KUNTZMANN

Président

N. GASTINEL

M. POLOUJADOFF

Examineurs

B. CRUGNOLA

N° d'ordre :

UNIVERSITE DE GRENOBLE

FACULTE DES SCIENCES

APPLICATIONS DES CALCULATRICES NUMERIQUES

EN ELECTROTECHNIQUE

-:-:-:-:-

T H E S E

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE SPECIALITE
(Mathématiques Appliquées)

-:-:-:-:-

Présentée par

Jean-Claude SABONNADIÈRE

Ingénieur I. E. C. -

Licencié ès Sciences

-:-:-:-:-

Thèse soutenue le : 25 Juin 1965

Devant la Commission d'examens

MM. J. KUNTZMANN

Président

N. GASTINEL

M. POLOUJADOFF

Examineurs

B. CRUGNOLA

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur FORTRAT P.
Monsieur MORET L.

DOYEN

Monsieur WEIL Louis

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	Magnétisme et Physique du Solide
HEILMANN R.	Chimie Organique
KRAVTCHENKO J.	Mécanique Rationnelle
CHABAUTY	Calcul Différentiel et intégral
PARDE	Potamologie
BENOIT	Radioélectricité
CHENE	Chimie Papetière
BESSON	Electrochimie
WEIL	Thermodynamique
FELICI	Electrostatique
KUNTZMANN	Mathématiques Appliquées
BARBIER R.	Géologie Appliquée
SANTON	Mécanique des Fluides
OZENDA	Botanique
FALLOT	Physique Industrielle
GALVANI	Mathématiques
MOUSSA	Chimie Nucléaire
TRAYNARD	Chimie
SOUTIF	Physique
CRAYA	Hydrodynamique
REULOS	Théorie des Champs
AYANT	Physique Approfondie
GALLISSOT	Mathématiques Appliquées
Melle LUTZ	Mathématiques
MM. BLAMBERT	Mathématiques
BOUCHEZ	Physique Nucléaire
LLIBOUTRY	Géophysique
MICHEL	Géologie et Minéralogie
BONNIER	Electrochimie
DESSAUX	Physiologie Animale
PILLET	Electrotechnique
DEBELMAS	Géologie
GERBER	Mathématiques
PAUTHENET	Electrotechnique
VAUQUOIS	Mathématiques Appliquées
BUYLE-BODIN	Electronique

KOSZUL	Mathématiques
SILBER	Mécanique des Fluides
DREYFUS	Thermodynamique
VAILLANT	Zoologie
MOUSSIEGT	Electronique
BARBIER J.C.	Physique
KLEIN	Mathématiques
ARNAUD	Chimie
SENGEL	Zoologie
BARJON	Physique Nucléaire
BARNOUD	Bio-Synthèse de la Cellulose

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme KOFLER	Botanique
MM. GIRAUD	Géologie
GIDON	Géologie et Minéralogie
PERRET	Servomécanismes
Mme BARBIER	Electrochimie
Mme SOUTIF	Physique
MM. COHEN	Electrotechnique
BRISSONNEAU	Physique
DEPASSEL	Mécanique
GASTINEL	Mathématiques Appliquées
LACAZE	Thermodynamique
GLENAT	Chimie
DUCROS	Minéralogie et Cristallographie
ANGLES D'AURIAC	Mécanique des Fluides
DEGRANGE	Zoologie
BARRA	Mathématiques Appliquées
COUMES	Electronique
GAGNAIRE	Chimie Papetière
PERRIAUX	Géologie
RASSAT	Chimie Systématique
ROBERT	Chimie Papetière
PEBAY-PEROULA	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. WAGNER	Botanique
NAPP-ZINN	Botanique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BIAREZ	Mécanique Physique
DODU	Mécanique des Fluides
HACQUES	Calcul Numérique

	LANCIA	Physique Automatique
Mme	KAHANE	Physique
MM.	POLOJADOFF	Electrotechnique
	DEPOMMIER	Physique Nucléaire
	DEPORTES	Chimie
Mme	BOUCHE	Mathématiques
MM.	DOLIQUE	Electronique
	SARROT-REYNAULD	Géologie
	CAUQUIS	Chimie Générale
	BONNET	Physique Expérimentale
Mme	BONNIER	Chimie
MM.	KAHANE	Physique Générale
	COLOBERT	Physiologie Animale
	PAYAN	Mathématiques
	BRIERE	Physique Expérimentale
	VALENTIN	Physique Générale
	LAJZEROWICZ	Physique Générale
	DESRE	Métallurgie
	BONNETAIN	Chimie Minérale

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE

RADELLI	Géologie
---------	----------

Ce travail a été effectué sous la direction
éclairée de :
Monsieur le Professeur KUNTZMANN

Nous lui présentons nos respectueux remerciements.

Nous présentons nos plus vifs sentiments de
reconnaissance à :
Monsieur POLOUJADOFF - Maître de Conférences,

qui nous a constamment guidé lors de l'élaboration
de ce travail, de ses conseils précieux.

Nous présentons à :
Monsieur le Professeur GASTINEL

Nos profonds remerciements pour son aide et pour
avoir bien voulu honorer le jury de sa présence.

Nous adressons nos remerciements sincères à :
Monsieur CRUGNOLA, Directeur du centre de calcul de la Savoisiennne.
D'avoir bien voulu apporter sa participation au jury.

Nous remercions,
Mademoiselle LAFOSSE

Pour la réalisation pratique de cette thèse.

Nous tenons à remercier tous nos camarades du
Laboratoire de Calcul qui nous ont aidé et particulièrement LECARME
pour ses conseils en programmation.

-:-:-:-:-:-:-

P L A N

	Pages
Introduction	1
Chapitre I Exemples d'application des calculatrices en électrotechnique	4
Chapitre II Calcul d'un transformateur économiquement optimum	14
Chapitre III Etude d'un algorithme adapté au calcul des régimes transitoires dans les machines tournantes	79
Chapitre IV Contribution à l'élaboration du modèle mathématique d'une ligne triphasee à constantes réparties, représentable par un ensemble discret d'éléments.	98
Conclusion	130

INTRODUCTION

L'apparition des calculatrices Electroniques dans le domaine scientifique a permis, par les possibilités qu'elle apporte, une évolution des méthodes usuelles d'investigation employées dans les sciences physiques et en électrotechnique en particulier.

Jusqu'à ces derniers temps, seuls des spécialistes bivalents pouvaient, en tant que physiciens, poser le problème et, en tant que mathématiciens appliqués, effectuer une résolution directement sur machine. La dotation des calculatrices de langages symboliques, tel qu'Algol, facilement assimilables et d'emploi pratique pour des physiciens viendra bientôt accélérer cette évolution.

Nous allons essayer de voir et de montrer ce que l'utilisation de telles machines peut apporter à l'électrotechnique.

Nous distinguerons pour cela en électrotechnique (comme dans toute science physique) trois domaines d'application des calculatrices. Ces domaines se différencient par la nature même des travaux effectués dans chacun d'eux. Ce sont :

- Le domaine Industriel
- Les recherches théoriques fondamentales,
- Les applications pratiques des résultats théoriques (exploitation des formules établies..)

Dans l'industrie, abstraction faite des problèmes de gestion qui ne sont pas spécifiques à l'électrotechnique, l'utilisation des calculatrices porte sur deux points principaux :

- Le calcul automatique des machines électriques
- L'amélioration de la qualité du matériel
(amélioration qui provient d'un meilleur calcul de ce dernier)

Dans le domaine des recherches théoriques il est possible, sans rien changer aux lois générales de l'électricité qui sont la représentation mathématique des phénomènes physiques,

d'en modifier l'étude et même de la compléter. Ces modifications peuvent se faire d'une part grâce à l'élimination d'approximations nécessitées jusqu'alors par la complexité des calculs qui n'est alors plus un obstacle, et d'autre part par l'établissement de modèles mathématiques, des circuits à étudier. Ces modèles mathématiques tout en représentant le phénomène d'une manière précise sont d'une grande souplesse d'utilisation : en effet, on peut sans difficulté envisager des variations de leurs paramètres, si nombreux soient-ils, ce qui conduit à une étude plus complète et plus précise.

Quant à l'application pratique des résultats des recherches théoriques, le champ d'utilisation des calculatrices est pratiquement illimité, ne serait-ce que par le calcul numérique des formules explicites dont l'exploitation est fastidieuse par les moyens habituels.

Dans les divers domaines que nous venons de définir nous avons choisi de nombreux exemples d'utilisation des calculatrices sur des travaux effectués soit dans l'industrie, soit dans la recherche.

Nous avons regroupé tous ces exemples dans notre premier chapitre sous la forme d'une bibliographie commentée.

Dans les autres chapitres nous avons traité nous-mêmes les applications :

- a) A la construction du matériel électrique, avec le calcul d'un transformateur optimum.
- b) L'étude des régimes transitoires dans les machines tournantes.
- c) L'étude des surtensions à la fermeture des lignes de transport.

CHAPITRE I

DIVERS PROBLEMES TRAITES

EN ELECTROTECHNIQUE

A L'AIDE DE CALCULATRICES

Design of armature Coils for large

A-C Motors.

R M. Sexton - S A BAUK
Transaction of AIEE

Vol. 77 - 1958 page 1257

2) Alternateurs

Emploi du calculateur électronique pour
l'étude et la spécification des alternateurs hydrauliques.

M.G. Ruelle

Bulletin SFE 1961 p. 427

Après quelques généralités sur le calcul électronique en général, l'auteur à l'aide d'un organigramme montre le déroulement du calcul d'un alternateur, à partir de données de deux sortes : données clients
données ingénieurs

3) Transformateurs

Application du calcul électronique au
matériel électrique

B. Crugnola

Bulletin SFE 1961 p. 597

Cet article est un résumé de l'application du calcul électronique aux transformateurs.

L'auteur montre la possibilité de mettre au point des méthodes d'optimisation du prix des appareils, méthodes compatibles avec un calcul entièrement automatique.

A titre d'exemple il est donné le tableau des résultats du calcul d'un appareil de caractéristiques définies.

Calcul mécanographique des transformateurs
de puissance.

D. Durrande

Bulletin SFE - 1961 p. 587

Cet article très général donne un aperçu des méthodes employées dans le calcul des transformateurs, méthodes consistant en la recherche des formules analytiques de courbes pour éviter le stockage en mémoire de tableaux de valeurs. (Ces méthodes à notre avis sont surtout valables sur des machines à faible capacité de mémoire). L'auteur traite ensuite des méthodes de calcul, familières en analyse numérique (itérations, approximations) et des calculs avec décision.

Power transformer Design and Estimate
cost Program with I.B.M. 650 Digital Computer

L.I Mac Kinnon

Transaction of AIEE

Vol. 77, 1958 p. 1262

Cet article écrit en langue anglaise, traite surtout des problèmes de prix de revient de l'entreprise de construction de transformateurs sans s'attarder aux problèmes techniques.

B - Problèmes relatifs à l'exploitation

Note sur le calcul des réseaux en échelle.

J. Robert (Québec)

L'onde Electrique Avril 1964

P. 403

Exposé d'une méthode permettant le calcul des réseaux discrets (quadripôles) en régime permanent. Calcul par récurrence des impédances et admittances du réseau.

Emploi de machines mathématiques pour
la résolution de problèmes relatifs au transport et à la
distribution de l'énergie électrique.

W. Frey

Revue Brown Boveri 1960

n° 5/6 p. 284

Aperçu sur les réseaux de transport et de distribution. Principes du traitement mathématique des problèmes. Exemples d'étude sur machine.

Méthode d'étude des réseaux électriques.

E. Faessler

Revue Brown Boveri t. 48 - 1961

5/6 p. 313

Considérations théoriques sur le calcul des réseaux. Emploi d'un modèle de réseau, applications des méthodes numériques pour la détermination de la répartition de la puissance et l'étude de la stabilité, comparaison des méthodes analogiques et numériques.

L'emploi de calculatrices numériques pour
l'exploitation de résultats de mesures effectuées sur des turbo-
machines thermiques.

G. Dibelins- E. Tarnocry

Revue Brown Boveri t. 48 - 1961

5/6 p. 321

Dans cet article les auteurs montrent l'intérêt de l'emploi de calculatrices pour l'exécution des calculs relatifs au dépouillement des résultats de mesures. Ces calculs étant effectués par combinaisons de sous-programmes.

Analyse du fonctionnement asynchrone
des machines à poles saillants, à l'aide d'un ordinateur élec-
tronique.

L. Carpentier - G. Ruelle

Revue Alsthom - Avril 1957 n° 109

C) Problèmes relatifs à la recherche et à ses applications
pratiques.

Calcul numérique des fonctions topologiques
en transformée de Laplace.

R. Boite

publication intérieure - Faculté Polytechnique de Mons

Application de la théorie des graphes au calcul des
réseaux électriques.

Calcul des fonctions de transfert des quadripoles.

Méthode permettant de déterminer à l'aide
d'une calculatrice numérique les efforts électrodynamiques lors
d'un court-circuit.

Cristoffel - Kurster

Revue Brown Boveri 1960 n° 5/6

Calculation of power transformer design
characteristics with a digital computer.

Asea Research 6 Mars 1963

Application des fonctions de Bessel au calcul des
efforts électrodynamiques dans un transformateur et leur résolution
sur machine. Calcul des flux et des réactances de fuite.

Emploi d'une calculatrice numérique pour l'étude de la stabilité dynamique des machines synchrones.

W. Frey - P. Althanner
Revue Brown Boveri t. 5/6
1961 p. 356

Considérations théoriques sur les problèmes de stabilité, étude du cas des alternateurs synchrones alimentant un réseau par l'intermédiaire d'un circuit passif représenté par un quadripole, programme de résolution du système d'équations.

Le calcul au moyen d'une calculatrice des phénomènes apparaissant sur les lignes.

W. Frey - P. Althanner
Revue Brown Boveri 1961
5/6 p. 344

Mise sous forme numérique de la méthode de Bergeron. Résolution de l'intersection de droites dans des intervalles de temps discrets.

Elimination d'une cause de vibration des turboalternateurs par une répartition des conducteurs creux dans les encoches du rotor déterminée à l'aide d'une calculatrice numérique.

Nejdhöfer G.
Revue Brown Boveri t. 48 - 1961
5/6 p. 339

Exposé des causes de vibrations; méthode permettant à l'aide d'une calculatrice numérique de répartir les conducteurs dans les encoches du rotor de manière à obtenir un échauffement uniforme.

Mathematical analysis and solution of
a transmission line transient.

Robert Uram - R W Miller

Transactions of IEEE nov. 1964

Résolution des problèmes de régimes transitoires sur
les lignes triphasées par intégration d'une équation aux dérivées
partielles.

Analysis for the boundary problem of
Polyphases transmission lines considering the initials condition.

Masao Kide Yosthio Inagaki

Journal of institute of electrical
engeneering of Japan.

Février 1964 t. 84 p. 273

Etude théorique du problème aux limites d'une ligne
polyphasée en tenant compte des conditions initiales.

Méthode permettant de déterminer à l'aide
d'une calculatrice numérique, les efforts électrodynamiques agissant
sur les enroulements de transformateurs lors des court-circuits

Cristoffel M. - A. Kurster

Revue Brown Boveri 1960 n° 5/6

p. 321

Exposé de la méthode permettant le calcul sans trop de
simplifications. Etablissement des équations et leur résolution sur
machine.

Digital computer solution of distributed
parameter problems in electric machinery.

D.T. Bewley - L.M. Harvey

Transactions of A.I.E.E. 1958 p.1252

Cet article donne deux exemples de calcul sur machine de problèmes comportant des paramètres dont les composants varient à la fois dans le temps et l'espace.

a) Réduction des variations de la perméance dans l'entrefer d'une machine tournante.

b) Calcul du cisaillement, des moments, et des diagrammes de déformation d'un arbre tournant.

Méthode de calcul des tensions de rétablissement aux bornes d'un disjoncteur.

M. Macaire - Auffaure.- E.D.F.

Détermination de l'impédance $Z(p)$ du réseau, recherche de l'original $VC(t)$ par la méthode de Mellin-Fourrier.

Current asymmetry in reactance-resistance
circuits.

Eric T.B. Gross

Raymond L. Kuntgendorf

Transaction of A.I.E.E. n° 51

dec. 1960

Calcul de la composante continue du courant de régime transitoire d'un circuit R - L.

Nous avons nous-mêmes traité ou envisagé les problèmes suivants :

- Calcul du couple d'un moteur asynchrone en faisant varier les divers paramètres.
- Calcul des zéros de l'intensité de régime transitoire d'un circuit R - L.
- Calcul d'un développement en série de Fourier de la tension aux bornes d'un alternateur.
- Calcul du champ dans l'entrefer d'une machine par une méthode de Monte-Carlo.

Tous ces problèmes dont certains peuvent être résolus très facilement sur machine tandis que leur résolution par les méthodes habituelles est fastidieuse voire impossible, montrent l'utilité des calculateurs dans ces domaines.

CHAPITRE II

CALCUL AUTOMATIQUE

D'UN TRANSFORMATEUR ECONOMIQUEMENT

OPTIMUM

Nous présentons nos remerciements aux constructeurs de matériel électrique qui ont apporté leur aide à l'élaboration de ce chapitre :

La Compagnie Electromécanique (Centre de Recherches et d'études Lyonnais).

Pour la construction de l'organigramme

Les Etablissements MERLIN et GERIN

Pour la méthode d'optimisation

La Savoisiennne (transformateurs C.G.E.)

Pour ses conseils.

SOMMAIRE :

I - INTRODUCTION

II - METHODE D'OPTIMISATION

- Exposé physique
- Développement mathématique
- Adaptation

III - ORGANISATION DU CALCUL AUTOMATIQUE DU TRANSFORMATEUR

- Calcul initial
- calcul définitif
 - circuit magnétique
 - induction
 - enroulements
 - Basse tension
 - Haute tension
 - pertes et rendement
 - réfrigération

IV - CONCLUSION

A V E R T I S S E M E N T

Le calcul présenté ci-après est applicable à un transformateur triphasé à colonnes dont la puissance ne dépasse pas 2000 KVA. Les raisons de cette particularisation sont exposées dans la conclusion.

-:-:-:-:-

I N T R O D U C T I O N

Dans les écoles d'Ingénieurs et en particulier à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique de Grenoble, il n'est enseigné jusqu'à présent qu'une seule méthode de calcul de transformateurs.

Cette méthode se présente sous deux formes dont le point commun est de n'être utilisable que par un esprit humain expérimenté et doué d'intuition et non par une machine à calculer ne travaillant que suivant un processus logique préétabli.

Quelles sont ces deux formes? D'une part un calcul par similitude à partir d'une machine de caractéristiques électriques voisines dont l'ingénieur modifie certaines dimensions et propriétés pour l'adapter à son problème; d'autre part un calcul à partir de données arbitraires fixées par l'expérience ou l'intuition et menée de manière empirique par essais et corrections jusqu'au résultat requis. Ce mode de calcul est tout à fait logique si l'on considère que jusqu'à ces derniers temps et souvent encore à l'heure actuelle les industriels comme les élèves effectuent leurs projets à l'aide de la règle à calcul ou de la machine de bureau.

L'avènement des machines à calculer digitales apporte un élément nouveau à cette technique; en effet les constructeurs de plus en plus nombreux, par l'acquisition ou la location d'ensembles électroniques à calcul rapide, commencent à modifier leurs vues sur le calcul des machines électriques en général et des transformateurs en particulier.

Ces Ensembles furent d'abord et sont encore aujourd'hui très souvent utilisés pour le traitement de volumineux problèmes de gestion inhérents à toute grande entreprise (les calculs techniques n'en étant qu'un sous-produit).

Cependant si l'on considère les avantages du calcul électronique appliqué à la construction des machines électriques nous voyons que :

- d'une part, en effectuant à grande vitesse les opérations arithmétiques et de routine, ce mode de calcul permet un gain de temps appréciable en "heure ingénieur",

- d'autre part, certains ingénieurs de bureau d'étude dégagés de ces problèmes simples mais fastidieux pourraient être employés à l'étude des problèmes d'amélioration du matériel ou tout simplement de recherche pure et leur rendement intellectuel s'en trouverait ainsi amélioré.

Devant ce double avantage, des entreprises de plus en plus nombreuses n'ont pas hésité, malgré l'inconvénient du prix, à utiliser des calculateurs pour les problèmes de construction de machines électriques.

Or il est à notre avis indispensable, pour une Ecole d'Ingénieurs à vocation industrielle, de mettre constamment son enseignement en mesure de former des ingénieurs adaptés aux techniques nouvelles utilisées dans l'Industrie.

Il serait donc nécessaire d'aborder dans le cours de construction, les problèmes posés par le calcul automatique des machines électriques. Par la suite il serait souhaitable que les élèves puissent se familiariser avec les calculateurs au cours de séances d'application. Dans ce but, le travail ci-après pourrait être abordé par les élèves dans le cours de construction électrique, à la fin de celui-ci. Ainsi les élèves auraient les connaissances nécessaires à l'assimilation de ce que nous

allons proposer et qui constitue, en quelque sorte, une synthèse de tout le cours de construction de transformateurs.

Le Professeur pourrait alors se contenter d'exposer seulement quelques parties de l'organigramme qui mettent en lumière les problèmes de décisions à certains niveaux du calcul, et en particulier certaines parties qui diffèrent des procédés de calcul manuel par un ordonnancement logique des opérations pour être applicable sur calculateur.

En disséquant ainsi les opérations suivant un processus logique, les élèves pourraient mieux assimiler ce qui aurait été traité en cours d'année.

On pourrait à titre d'application, moyennant un enseignement préalable de "langage-machine" ou plutôt d'un langage symbolique tel ALGOL, faire programmer aux élèves, répartis en équipes, le calcul de certaines parties du transformateur (circuit magnétique, bobinages,...)

Nous allons présenter le calcul d'un transformateur optimum, à titre d'exemple :

CALCUL D'UN TRANSFORMATEUR ECONOMIQUEMENT OPTIMUM

Dans l'industrie comme dans les projets d'élèves les transformateurs se calculent encore souvent de manière empirique .

Les Grandeurs de départ utilisées faisaient intervenir des formules et des coefficients, résultats de mesures et d'essais propres à chacun qui constituaient, et constituent encore, l'expérience de chacun.

Nous allons montrer comment, grâce à l'emploi de calculatrices, il est possible, par un emploi judicieux des données fournies par l'expérience, d'éliminer une partie de cet empirisme.

Si nous considérons le prix de revient de l'appareil, par rapport au prix des matières (fer et cuivre) utilisées, nous voyons qu'il ne pouvait être estimé qu'une fois l'appareil calculé; donc au départ les ingénieurs n'avaient que peu d'informations sur sa valeur..... Ils essayaient de diminuer le prix de revient en procédant par similitude avec d'autres appareils, effectuant quelques retouches qui constituaient leur apport personnel à l'expérience de l'entreprise; cependant ils n'avaient aucune certitude que leur appareil représentât le prix minimum pour la série, compte tenu des contraintes physiques.

L'emploi de machines à calculer incite les constructeurs à mettre au point certaines méthodes susceptibles de fournir, moyennant certaines hypothèses, les caractéristiques géométriques d'un appareil dont le prix de revient des parties actives serait minimum, compte tenu des prix respectifs de la tôle magnétique et du fil de cuivre.

Nous allons présenter une de ces méthodes dites d'optimisation: celle mise au point par les Etablissements "MERLIN-GERIN" de Grenoble.

Cette méthode permet de trouver les caractéristiques d'un transformateur dont le prix des parties actives est minimum: mais elle nécessite une intervention humaine pour exploiter les résultats; nous allons voir comment, en la modifiant sensiblement, il est possible de l'adapter comme sous-programme d'un programme plus général qui, à partir des données du client, fournit la feuille de spécification à transmettre à l'atelier. Ce programme, une fois les caractéristiques géométriques de l'appareil déterminées, cherchera suivant ces grandeurs à quel type de construction l'appareil se réfère et dans ce type quelle variante doit être utilisée.

Nous donnerons par la suite, l'organigramme complet du calcul d'un appareil dont nous aurons fixé le type (triphasé à 3 colonnes) et la variante (bobinages concentriques).

Mais voyons tout d'abord la méthode d'optimisation des parties actives du transformateur :

S y m b o l e s e t N o t a t i o n s

N ₁	: nombre de Spires Primaires	
I ₁	: intensité de Spires Primaires	(Ampères)
P	: puissance apparente	(KVA)
U ₁	: tension primaire/entre phase	(Volts)
U ₂	: tension secondaire/ " "	"
C	: tension induite	"
B	: induction	(Gauss)
S	: section des noyaux	(cm ²)
α ₁	: coefficient couplage primaire	3 étoile
β ₁	: " " secondaire	1 triangle
		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ zig-zag
f	: fréquence	(Hertz)
S _{ct}	: section cuivre totale	(cm ²)
δ	: densité de courant	(A/cm ²)
∇	: section d'un conducteur	(cm ²)
ω ₁	: rapport entre section et diamètre des Noyaux	
γ	: coefficient de foisonnement des tôles	
γ	: coefficient d'utilisation (S noyau / S cercle)	
η	: coefficient de désaturation de culasse	
S _c	: section de culasse	(cm ²)
H _h	: hauteur d'isolant horizontale	(cm)
H _v	: " " verticale	(cm)
P _b	: coefficient de foisonnement des bobinages	
θ	: Hauteur culasse / section noyau = η/ω ₁	
J	: Hauteur moyenne de culasse	(cm)
a	: distance noyaux bobinages	(cm)
b	: distance inter-bobinages	(cm)
f,g	: canaux à l'intérieur des bobinages.	(cm)

D_N	: Diamètre des noyaux	(cm)
D_1	: Diamètre intérieur des bobinages	(cm)
D_2	: " extérieur " "	"
D_m	: " moyen " "	"
$\sum e$: somme des intervalles à l'intérieur des bobinages	"
P_N	: Poids des noyaux	(Kg)
P_1	: Poids des culasses	"
P_2	: " "	"
P_3	: " "	"
P_4	: " "	"
P_5	: " "	"
P_c	: poids total des culasses	"
P_{fe}	: poids de fer	"
P_{cu}	: poids de cuivre	"
W_{cu}	: pertes dans le cuivre	(Watts)
W_{fe}	: " " " fer	(Watts)
	tension de court-circuit	(Volts)
D_d	: distances terminales	(cm)
H	: hauteur des noyaux	(cm)
ψ	: coefficient dépendant du nombre de spires sur les prises	
W_N	: pertes spécifiques dues au flux parallèle	(Watt/kg)
W_T	: " " " " " perpendiculaire	"
B_N	: Induction due au flux parallèle	Gauss
B_T	: Induction due au flux perpendiculaire	"
RI	: Chute ohmique	(Volts)
L_{WI}	: Chute inductive	"

Couplage	Δ	Y	Z
K_1, K'_2	1	2	3
K_1, K_2	1	$\sqrt{3}$	3/2
h_2	1	1	2
h_3	← $\sqrt{3}$ →		
h_4	$\sqrt{3}$	1	1

$$K_1 = \frac{\text{V entre bornes}}{\text{V par colonne}}$$

h_2 = Nombre de couches minimum

$$h_4 = \frac{\text{I ligne}}{\text{I enroulement}}$$

Méthode d'optimisation des parties actives

d'un transformateur

Cette méthode, mise au point par les Etablissements Merlin et Gerin consiste, à partir d'un transformateur de caractéristiques électriques données, à chercher quelles seront la section et la hauteur de noyaux qui conduisent à un prix minimum de matières premières (cuivre et fer).

I - Exposé du problème.

Pour un transformateur de caractéristiques électriques données (puissance, tensions primaire et secondaire, couplage) il y a diverses conditions à respecter qui sont fixées par les règles de l'UTE ou par des conditions de fonctionnement à respecter (Marche en parallèle, Marche à demi ou pleine charge..etc.). Ces conditions peuvent se résumer au nombre de quatre qui sont :

- 1°) Les pertes fer : ces pertes qui sont nuisibles au rendement ne doivent pas dépasser un taux prescrit en marche, donc une valeur donnée lors du calcul : nous les nommerons w_f .
- 2°) Les pertes dans le cuivre, qui sont d'une part nuisibles au rendement et d'autre part la cause principale des échauffements, doivent rester en deçà d'un seuil impératif: nous les nommerons W_{cu} .
- 3°) Le courant à vide, source des pertes dites à "vide": il doit être le plus faible possible : nous l'appellerons I_0 .
- 4°) La tension de Court-circuit, détermine la tension en charge vis à vis de la tension à vide : elle doit respecter une valeur prescrite ($U_{cc} \%$).

Si l'on étudie ces grandeurs avec précision, on constate que les contraintes (tension de court-circuit et courant à vide) sont facilement ajustables, c'est à dire ne nécessitent que peu de modifications pour être respectées.

Il faut donc chercher surtout à respecter les conditions imposées par les "pertes fer" et les "pertes cuivre" : elles peuvent être ramenées à des fonctions de quatre variables fondamentales et de coefficients numériques. Les quatre variables sont :

- a) l'Induction
- b) la densité de courant
- c) la Section des noyaux
- d) la Hauteur des noyaux.

Nous aurons donc deux équations à quatre inconnues non linéaires:

$$(1) W_f = f_1 (H, \rho, B, S,)$$

$$(2) W_{cu} = f_2 (H, S, B, S,)$$

Nous adjoindrons à ces équations une contrainte qui sera celle du prix minimum, le prix de revient des matières premières pouvant s'exprimer de la manière suivante :

$$\text{Prix} : \text{Poids Cu} \times \alpha + \text{Poids fe} \times \beta$$

α et β représentant les prix unitaires respectifs du fer et du cuivre. Le problème reviendra alors à chercher une solution de comptabilité des équations (1) et (2) qui rende le prix minimum. Pour cela nous exprimons le prix ainsi :

$$\text{Prix} = f_3 (H, S, B, S,)$$

A) Définition et détermination de la section de cuivre.

Nous allons définir une grandeur que nous allons appeler section de cuivre totale (Sct) : ce sera la surface de cuivre et la section droite des bobinages (voir fig.1)

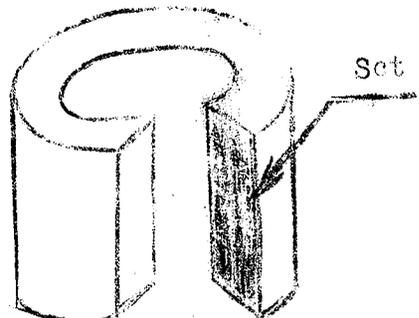


fig. 1

Calcul de Sct.

en ramenant toutes les grandeurs suivantes à un côté du transformateur (primaire par exemple) la mise en équation, avec les notations ci-dessus, devient la suivante :

$$N_1 = U_1 / (\alpha_1 \times e) \quad (1) \quad \text{Volts/ Volts}$$

$$I_1 = P / (B_1 \times U_1) \quad (2) \quad \text{Ampères} = \text{VA/ Volts}$$

$$N_1 I_1 = P / ((\alpha_1 \times \beta_1) \times U_1) \quad (3)$$

et la formule de Boucherot

$$e = 4.44 \times f \times B \times S \times 10^{-8} \quad \text{Volts} \quad (E \text{ Gauss } S \text{ cm}^2)$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{e = 222 \times B \times S \times 10^{-8}} \quad (4)$$

d'où les ampères tours

$$N_1 I_1 = P / (\alpha_1 \times \beta_1 \times 222 \times B \times S \times 10^{-8})$$

$$\text{d'où } Sct = NV \text{ et } \delta = \frac{I}{V} = \frac{NI}{NV} \text{ d'où } NV = \frac{NI}{\delta}$$

$$\boxed{Sct = \frac{P \times 10^{-8}}{\alpha_1 \times \beta_1 \times B \times S \times \delta \times 222}}$$

compte tenu du coefficient K_1 qui traduit l'existence éventuelle de prises.

B) Evaluation du poids de fer.

Pour calculer le poids de fer nous allons diviser le circuit magnétique en différentes parties, comme l'indique le schéma ci-dessous où les proportions relatives n'ont peut-être pas toujours été respectées.

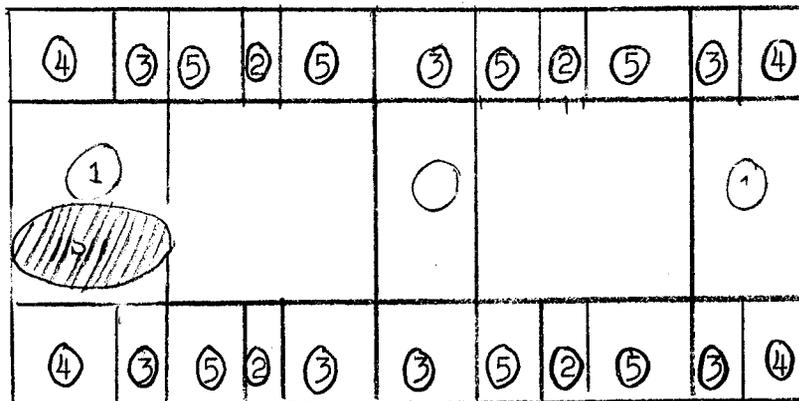


fig. II

- Légende :
- ① Noyaux
 - ② parties de circuit magnétique situées au dessus de l'intervalle isolant. (Vides interbobinages et canaux à l'intérieur des bobinages)
 - ③ parties des culasses à l'aplomb des noyaux
 - ④ parties transitoires à flux perpendiculaire
 - ⑤ parties de culasse à la verticale des bobinages

Nous allons donc calculer les poids respectifs des différentes parties, en kg.

a) Poids des Noyaux (①)

$$P_n = 3 \times S \times H \times 7,65 \times 10^{-3} \quad (7,65 = \text{densité des tôles})$$

$$= 23,1 \times S \times H \times 10^{-3}$$

b) Poids des culasses

Le diamètre des noyaux est $D_N = \omega \sqrt{S}$ avec $\omega = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma}$

avec γ = coefficient de foisonnement des noyaux, γ = coefficient d'utilisation % cercle. la section de culasse sera $S_c = \eta S$ avec η comme coefficient désaturation les culasses

(1,1 < η < 1,2) d'où

Parties (3) : $P_3 = 4 \times D_N \times \eta S \times 7,65 \times 10^{-3}$

$$P_3 = 4 \omega_1 \eta S^{3/2} \times 7,65 \times 10^{-3}$$

Parties (2) : $P_2 = 4 H_h \times S \times 7,65 \times 10^{-3}$

H_h = largeur d'isolant horizontal;

Parties (5) : P_5 dépend de l'épaisseur des bobinages que nous nommerons \sum_e et qui sera évaluée comme suit

$\sum_e = Sct / (H - H_v) \times \rho$ (H_v = hauteur isolant verticales, ρ coefficient de foisonnement des bobinages) d'où

$$P_5 = 8 \times \frac{Sct}{(H - H_v) \rho} \times \eta S \times 7,7 \times 10^{-3}$$

Parties (4) : Soit J la hauteur de culasse nous avons

$$J = \frac{Sc}{Dn} = \frac{DS}{\omega_1 \sqrt{S}} = \theta \sqrt{S} \text{ d'où}$$

$$P_4 = 2 \theta \sqrt{S} \times S \times 7,7 \times 10^{-3}$$

Cependant pour être plus précis dans notre évaluation nous devons faire une correction car nous avons inclus dans les parties (3) des régions où il existe une fraction de flux perpendiculaire au sens des cristaux; nous ajoutons à "parties (4)" 50% de leur valeur qui sera retirée de (3)

d'où

$$P_3 = (4 \times 7,7 \times \omega_1 \eta S^{3/2} - 7,7 \theta S^{3/2}) \times 10^{-3}$$

$$P_4 = 3 \theta \sqrt{S} \times S \times 7,7 \times 10^{-3}$$

$$P_c = (30,8 \eta \omega_1 - 7,7 \theta) \times 10^{-3} S^{3/2} + 30,8 \times 10^{-3} \eta H_h \times S + 9250 \eta / p \times \left(\frac{PK_1}{P\delta} \cdot \frac{1}{H - H_v} \right) + 23,1 \times 10^{-3} \theta S^{3/2}$$

$$P_c = (30,8\eta\omega_j + 15,40) \times 10^{-3} S^{3/2} + 30,8 \times 10^{-3} \eta H_n \times S$$

$$+ 9250 \eta / p \times \left(\frac{PK_1}{B\delta} \times \frac{1}{H-H_v} \right)$$

$$P_n = 23,1 \times 10^{-3} \times H \times S$$

$$P_{ie} = (0,0308\omega_j + 0,0154) S^{3/2} + (0,0231 \times H + 0,0308 \eta H_n) S$$

$$+ 9250 \times \frac{\eta}{p} \times \frac{1}{H - H_v} \times \frac{PK_1}{B\delta}$$

$$P_{ie} = f_1 (H, S, B, \delta)$$

C) Calcul du poids de cuivre

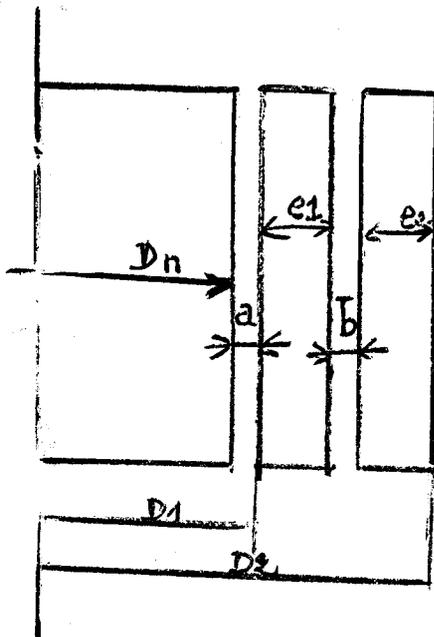


fig. III

Les bobinages autour du noyaux peuvent être représentés par un schéma analogue à la figure III avec, comme légende :

a : distance noyaux bobinages
 b : " basse tension
 haute tension

D₁ : diamètre intérieur du bobinage

D₂ : diamètre extérieur du bobinage

D_N : diamètre du noyau

f, g : vides à l'intérieur des

bobinages, le poids de cuivre calculé sur les prix maximum sera trouvé en écrivant donc

$$P_{cu} = 3 \times \pi \times D_m \times S_{ct} \times 8,9 \times 10^{-3}$$

avec 8,9 : Densité du cuivre

D_m : Diamètre moyen $D_m = \frac{(D_1 + D_2)}{2}$

$$a, b, f, g, \sum e = Sct / (H - H_v) \rho \text{ d'où}$$

$$D_m = \omega_1 \sqrt{S} + 2a + b + f + g + \sum e \text{ car}$$

$$D_1 = D_N + 2a$$

$$D_2 = D_1 + 2b + 2f + 2g$$

$$\text{d'où } D_m = \rho (DN + 2a + b + f + g) / \rho + \sum c$$

donc

$$P_{cu} = \frac{83,83 \times 10^5}{666} \left[\frac{PK \times \omega_1}{B\delta \times \sqrt{S}} + (2a + b + f + g) \frac{PK}{B\delta S} + \frac{1}{(H - H_v)} \left(\frac{PK_1}{B\delta S} \right)^2 \times \frac{10^8}{666} \right]$$

$$P_{cu} = \frac{83,83 \times 10^5}{222 \times \alpha_1 \times \beta_1} \left(\frac{PK_1}{B\delta S} \right) \left[\omega_1 \sqrt{S} + (2a + b + f + g) + \frac{1}{p (H - H_v)} \frac{PK_1 \times 10^8}{S B \delta \times 222 \alpha_1 \times \beta_1} \right]$$

$$\text{soit } P_{cu} = f_2 (H, S, B, \delta)$$

D. Calcul des Pertes.

a) Pertes dans le cuivre. (Calcul des pertes "joule" en faisant abstraction des pertes par courant de Foucault et dans les connexions).

$$RI^2 = 3\pi \times D_m \times N \times 2,1 \times 10^{-6} \times I^2 / \sigma \text{ (formule } R = \rho \times l / S)$$

$$2,1 \times 10^{-6} = \text{résistivité du cuivre à } 75^\circ\text{c}$$

(multiplions et divisons par σ nous ferons apparaître N et δ)

$$\sum RI^2 = 3\pi \times D_m \times N \sigma \times 2,1 \times 10^{-6} \times \delta^2$$

$$\text{mais } 3\pi \times D_m \times N \sigma = \text{Valeur de cuivre} = P_{cu} / (8,9 \times 10^{-3})$$

donc

$$\sum RI^2 = W_{cu} = \left(P_{cu} / (8,9 \times 10^{-3} \times \Psi_1) \right) \times 2,1 \times 10^{-6} \times \delta^2$$

Ψ_1 tient compte du fait que le poids de cuivre est calculé sur les prix à $\pm A$ %. alors que les pertes doivent être calculées sur le prix moyen :

$$W_{cu} = \frac{9,008}{1 \alpha_1 \beta_1} \left(\frac{PK_1}{B S} \right) \left(\omega_1, \sqrt{S + (2a+b+f+g)} + \frac{1}{\varphi (H-H_v)} \frac{PK_1 \times 10^8}{\alpha_1 \beta_1 \times 222 \times B \delta S} \right)$$

b) Calcul des pertes dans le fer.

Les pertes se décomposent en :

$$W_f = P_N \times W_N(B) + P_{CN} \times W_N(B/\gamma) + P_{CT} \times W_T(B/\gamma)$$

W_N et W_T sont les pertes spécifiques respectivement sous des flux parallèles et perpendiculaires.

Ces valeurs en fonction de l'induction sont données par des courbes résultant de mesures et d'essais effectués sur des échantillons, et non par un formalisme mathématique rigoureux.

Nous nous contenterons donc de formules mathématiques approchées qui devront réaliser une excellente approximation dans les régions de travail au détriment, si cela est nécessaire, de plages éloignées de ces conditions.

Les Etablissements MERLIN et GERIN

utilisent les fonctions suivantes :

$$W_N = B^{3,5} / 7800 \quad 12,5 < B < 18 \text{ KG}$$

$$W_T = B^2 / 71 \quad 11 < B < 16,5 \text{ KG}$$

Mais ceci n'est pas général et d'autres constructeurs utilisent des fonctions différentes par leur formalisme (polynomes, exponentielles) pour avoir de plus grandes facilités de programmation ou plus d'exactitude dans certaines plages utiles.

II Résolution du problème par la méthode "Merlin Gerin"

Nous avons donc ramené le problème à la résolution du système suivant :

$$f_1(H, S, B, \delta) = W_f \quad (1)$$

$$f_2(H, S, B, \delta) = W_{cu} \quad (2)$$

$$\text{Prix} = \text{Inf} (f_3(H, S, B, \delta))$$

Nous avons donc un système d'équations non linéaires des quatre variables fondamentales et de coefficients numériques tels que $(\gamma, \omega, \varphi, \psi, a, b, \dots, d_c)$ connus.

Pour résoudre ce système nous allons étudier la surface

Prix = (H, S) qui à l'allure indiquée sur la figure IV, c'est-à-dire vaguement la forme d'une cuvette:

le minimum de prix sera le fond de la cuvette; les courbes de niveau seront donc fermées à l'intérieur les unes

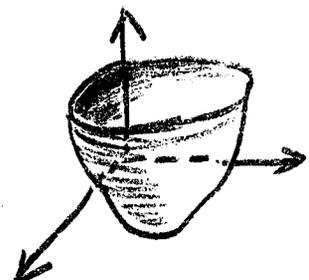


fig. IV

des autres et vers le minimum nous trouverons les courbes les

plus petites.

Nous allons donc déterminer les courbes de niveau : pour cela nous nous fixons un couple de valeurs de H, S et nous résolvons le système formé de (1) et de (2).

Ce système :

$$V \begin{cases} f_1 (H_i, S_i, B, \delta) = W_f & V (1) \\ f_2 (H_i, S_i, B, \delta) = W_{cu} & V (2) \end{cases}$$

Nous donnera un couple de valeurs de B et δ qui, une fois déterminé, est porté dans l'égalité

$$\text{Prix} = f_3 (H_i, S_i, B_i, \delta_i)$$

Pour résoudre ce système V nous allons

procéder de la manière suivante : nous traçons la courbe

$$(B, \delta) = W_f \quad \text{et la courbe}$$

$$(B, \delta) = W_{cu}$$

le couple de valeurs de B et δ qui vérifie simultanément ces deux équations est donné par le point d'intersection de ces deux courbes (cf figure V). Sur la

figure V nous avons tracé la courbe

$$(B, \delta) = W_{fe} \quad \text{dont l'équation (1)}$$

du système V et la courbe (B, δ)

$= W_{cu}$, d'équation (2) du système V.

Le point A $\begin{cases} B_i \\ S_i \end{cases}$ est à la fois solu-

tion de l'équation (1) et de l'équation (2) donc du système V.

Pour la résolution du système V, plusieurs méthodes peuvent

être employées; la plus rapide étant une méthode d'itération

par approche (en escalier ou colimaçon suivant la forme des

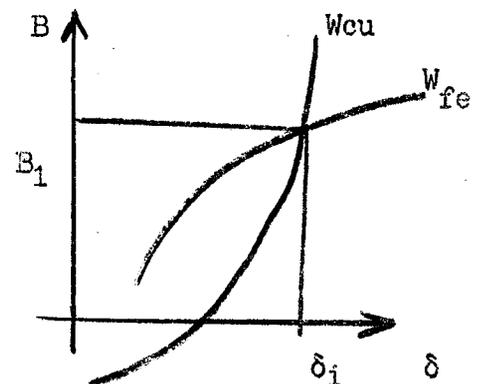
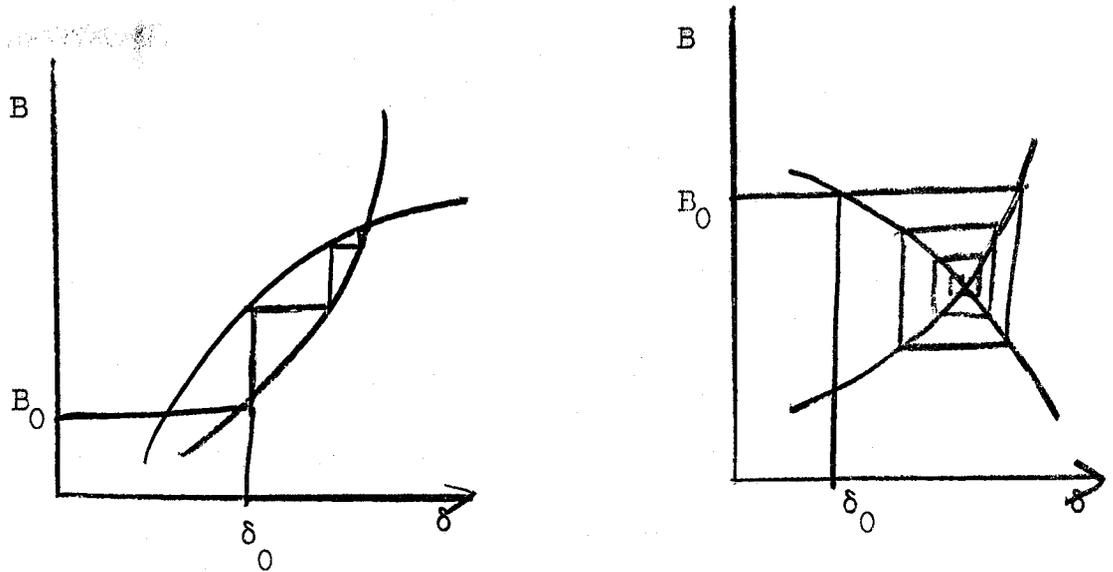


fig. V

des courbes) avec un pas variable



Une fois la résolution effectuée nous

possédons les éléments B_i, S_i nécessaires au calcul de

valeurs de H_i, S_i et nous effectuons pour chaque couple de

valeurs les calculs du prix, de

l'induction, de la densité de

courant et même de la tension

de court-circuit. Nous obtenons

ainsi le tracé des courbes

" Isoprix", "Isoinduction",

"Isodensité et nous pouvons

alors définir une zone de

travail par rapport à l'induction, à la densité de courant

et à la tension de court-circuit. Dans cette zone de tra-

vail nous pouvons non seulement déterminer le prix minimum mais

aussi les variations de Prix par rapport aux diverses gran-

deurs et surtout $\frac{\partial \text{Prix}}{\partial H}$ et $\frac{\partial \text{Prix}}{\partial S}$ qui donnent des

renseignements précieux sur l'évolution du prix au voisinage du minimum.

Explication de la figure VI-

les axes sont H et S qui dans une certaine zone sont divisés

en n n points $H_i, S_j, i = 1 \dots \dots \dots n, j_1 = 1 \dots \dots \dots n$

La résolution du système nous a donné δ d'où les courbes

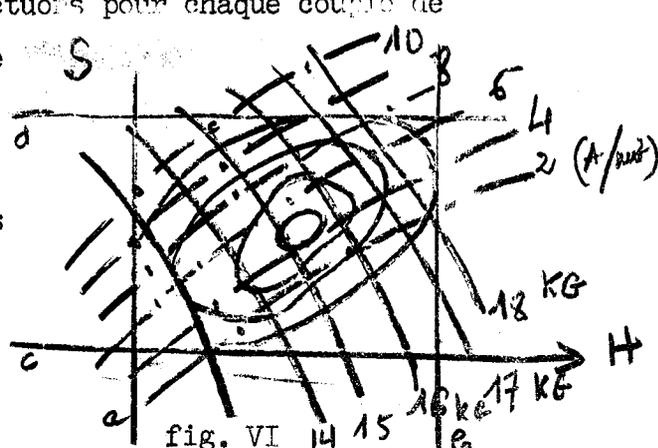


fig. VI 14 15 16 17 KG e

"isodensité" qui sont les courbes en pointillé et B, d'où les courbes isoinduction en trait plein. Dans le cas présenté ici le minimum du prix (courbes fermées) se trouve en dehors de la zone de travail (17kg, 3 A/m²) nous prendrons donc un point voisin du minimum tel que

$$\frac{\partial \text{Prix}}{\partial H} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \text{Prix}}{\partial S} \quad \text{soit le plus faible possible. De}$$

toute façon nous saurons avec une assez grande précision le prix de revient optimal du transformateur réalisable.

En conclusion nous voyons que nous avons déjà à ce stade un volume considérable de calculs à effectuer : pour chaque point I,J (et il y en a N²), nous devons effectuer la résolution d'un système d'équations transcendantes ce qui demande un nombre M d'itérations. Nous voyons que si l'on prend 20 valeurs de H, 20 valeurs de S et en supposant que l'on ait (ce qui n'est pas sûr) un résultat satisfaisant avec 50 itérations, cela représentera 20 × 20 × 50 = 20 000 itérations, chaque itération représentant un nombre assez grand d'opérations arithmétiques ou transcendantes. Il est clair qu'un tel travail ne peut être accompli d'une manière rentable que par une machine très puissante comme l'IBM 7044 ou une GAMMA 60. Evidemment l'emploi de machines plus petites n'est pas exclu mais le temps de calcul est plus long d'une part et le travail ne sera alors plus entièrement automatique d'autre part.

Il apparait donc que :

1°) Cette méthode excellente si elle est employée très peu souvent devient vite onéreuse si elle est employée comme sous-programme d'un calcul complet.

2°) Ce calcul ne tient pas compte de la contrainte de la tension court-circuit; donc si cette grandeur, par suite de la demande du client, est relativement basse, on risque dans la suite du calcul d'être obligé de modifier certaines caractéristiques électriques et de s'éloigner ainsi de l'optimum. Si la suite du calcul est effectuée manuellement cela n'a pas trop d'importance car un ingénieur expérimenté agira en conséquence pour s'en rapprocher à nouveau, mais dans le cas d'un calcul automatique itératif, le procédé risque de ne plus converger à cause d'un point de départ trop éloigné de la solution.

On peut remédier à ces inconvénients. En effet comme nous allons le montrer la tension de court-circuit peut se mettre sous la forme $f_3 (H,S,B,\delta)$.

Nous aurons alors 3 équations à 4 inconnues et la 4ième équation nous sera fournie en écrivant que le prix doit être minimum.

Or le Prix s'écrit :

$$\text{Prix} = \alpha_{fe} \times P_{fer} + \alpha_{cu} \times P_{cu}$$

$$\text{Prix} = \alpha_{fe} \times \Psi (H,S,B,\delta) + \alpha_{cu} \times \Psi_1 (H,S,B,\delta)$$

$$\left| \begin{array}{l} f_1 (H,S,B,\delta) = Wf \\ f_2 (H,S,B,\delta) = Wcu \\ f_3 (H,S,B,\delta) = Ucc \end{array} \right.$$

Nous pouvons entre les trois dernières équations éliminer H,S, et δ et avoir

Prix = G (B), en écrivant que le prix est minimum nous trouvons

$$\frac{\partial \text{Prix}}{\partial B} = 0 \text{ qui nous donne } B_0 \text{ donc } H_0, S_0, \delta_0$$

Donc un point optimum.

Ce point devant être à l'intérieur du domaine de grandeurs admises pour B et δ .

Mise de la tension de court-circuit en fonction de H, S, B, δ .

Calcul de la tension de court-circuit.

Cette grandeur est exprimée en "pour cent" de la tension normale et l'on a :

$$U_{cc} \% = \sqrt{(RI \%)^2 + L I \%)^2}$$

$$\text{avec } RI \% = \text{chute ohmique pour cent} = \frac{\text{Pertes}}{\text{Puissance en } V_A} \times 100$$

LwI % = chute selfique pour cent que l'on calcule ainsi :

$$LwI \% = \frac{I \omega L}{U / \alpha_1} \quad \text{avec } I \omega L = \frac{4M}{10^7} \times \frac{N^2 \times \pi \times Dm \left(\frac{e}{3} + b + f + g \right) \omega NI}{H - Dd} \times 100$$

d'où :

$$\begin{aligned} I \omega L \% &= \frac{4\pi}{10^7} \times \frac{\pi \times Dm \left(\sum \frac{e}{3} + b + f + g \right) \omega NI}{(H - Dd) 222 B S 10^{-8}} \times 100 \\ &= \frac{4\pi}{10} \times \frac{\pi \times Dm \left(\sum \frac{e}{3} + b + f + g \right) \omega \times P \times 10^8}{\alpha_1 \times \beta_1 (H - Dd) \times (222 \times B \times S)^2} \times 100 \end{aligned}$$

Avec évidemment $Dm = \omega \sqrt{S} + 2a + b + f + g + \sum e$ et

$$\sum e = \frac{PK_1 \times 10^8}{222 \times B \times S \times \delta \times \alpha_1 \times \beta_1 (H - H_0) e}$$

d'où

$$LwI \% = \frac{4\pi}{10} \pi \times \left(\omega \sqrt{S} + 2a + b + f + g + \frac{PK_1 \times 10^8}{(222 \times B \times S \times \delta \times \alpha_1 \times \beta_1) (H - H_0) e} \right)$$

$$\left(\frac{PK_1 \times 10^8}{222 \times B \times S \times \delta \times \alpha_1 \times \beta_1 (H - H_0) e} + b + f + g \right) \times P \omega \times 10^8$$

$$\left(\alpha_1 \times \beta_1 \times (H - Dd) \times (222 \times B \times S)^2 \right)$$

nous avons donc $(RI)\% = \frac{W_{cu}}{P}$

$$U_{cc} \% = \sqrt{\left(\frac{W_{cu}}{P}\right)^2 10^4 + (L I \%)^2} = f_3 (H, S, B, \delta).$$

Nous allons donc maintenant appliquer cette méthode d'optimisation au calcul automatique du transformateur.

CALCUL AUTOMATIQUE DU TRANSFORMATEUR

Le but de cette partie est de montrer comment la méthode d'optimisation précédemment décrite peut-être utilisée dans un programme complet de calcul automatique de transformateur. Pour cela, nous décrirons l'ordonnement du calcul : c'est-à-dire la suite d'opérations arithmétiques et logiques que l'on impose à la machine dans le but de choisir les résultats qui correspondent aux caractéristiques de construction d'un transformateur et qui sont celles inscrites sur une feuille de calcul. Pour décrire cette suite d'opérations nous pensons qu'un organigramme clair, accompagné au besoin d'un petit schéma, est plus aisé à comprendre qu'une fastidieuse énumération. Chaque fois qu'il sera possible nous donnerons donc un organigramme du calcul.

Organisation Générale du calcul.

Le calcul débutera, après l'introduction des données, (tensions, Puissance, couplage, fréquence), sur des bases aussi réalistes que possible mais empiriques.

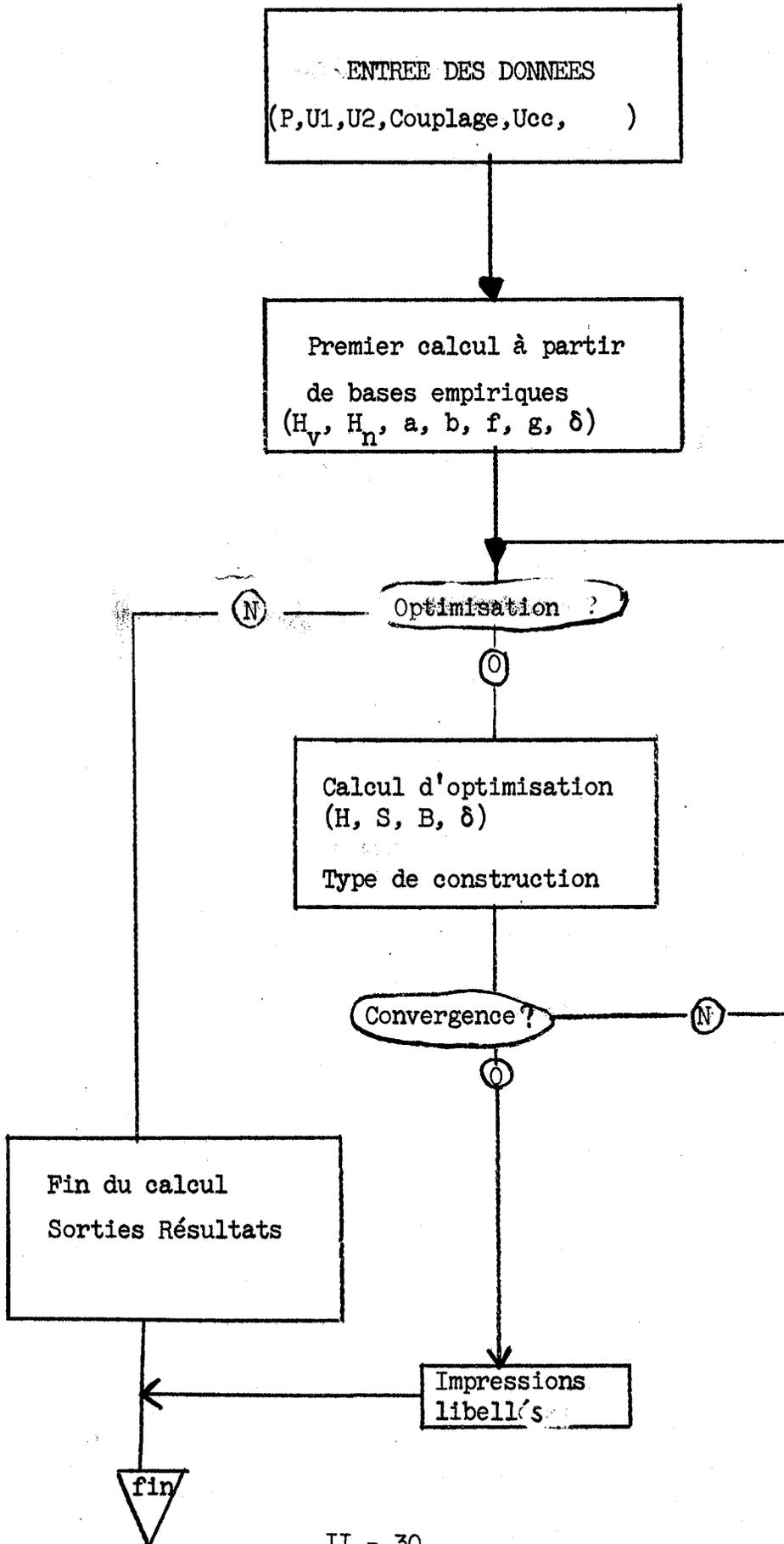
Ne bénéficiant pas de toute la longue expérience d'une entreprise nous nous sommes forgés en quelque sorte une expérience d'Ingénieur de calcul de transformateurs. Cette expérience nous l'avons acquise par la consultation de nombreux documents de transformateurs réellement construits pour nous faire une idée aussi précise que possible des caractéristiques électriques de l'appareil. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet de manière plus précise.

Une fois effectué le démarrage du calcul, nous calculons les données nécessaires au calcul d'optimisation. Ensuite, nous pouvons immédiatement faire le calcul d'optimisation pour déterminer : la hauteur, la section, l'induction et la densité de courant, données nécessaires au calcul qui est

alors repris avec ces nouvelles valeurs. Si les caractéristiques nécessaires à l'optimisation n'ont alors pas variées (à la précision requise) par rapport au calcul précédent, c'est que le transformateur est optimum; sinon on le réoptimise jusqu'à coïncidence (relative) des caractéristiques. Néanmoins ce procédé risque de devenir très coûteux lorsqu'il nécessite un grand nombre d'optimisations, il devient alors nécessaire de limiter le calcul au bout de cinq optimisations (le prix de revient de l'appareil étant alors trop augmenté par le temps de calcul par rapport au gain effectué sur le prix des matières premières.)

Une fois le transformateur optimum, ou considéré comme tel, nous terminons le calcul par la détermination des caractéristiques électriques comme I_0 , xI , RI , rendement..... Puis nous calculons les échauffements et choisissons un mode de refroidissement.

Toute cette description est schématisée dans l'organigramme ci-joint (cf page suivante).



B) Déroulement du Calcul.

1) Démarrage du calcul.

Nous avons dû, pour le démarrage du calcul, utiliser des documents (prêtés par les Ets Merlin Gerin et par la Compagnie Electromécanique), et, sur ces documents nous avons fait des statistiques pour approcher le plus possible les caractéristiques d'un appareil réel. Les principales caractéristiques de départ sont soit les dimensions du circuit magnétique, soit la section des noyaux et leur hauteur.

a) Section. Pour la détermination de la section nous avons relevé sur les documents à notre disposition le rapport section/ $\sqrt{\text{puissance}}$, compte tenu de la puissance et du mode de refroidissement : nous avons ainsi obtenu un ensemble de valeurs que nous reproduisons dans le tableau I. Cet ensemble de valeurs porté sur un graphique, nous a donné une répartition de points (cf courbe II); de l'ensemble de ces points nous avons obtenu pour chaque puissance considérée une plage de valeurs de S/\sqrt{P} d'où nous avons pu extraire deux courbes :

- l'une de ces courbes est relative aux appareils dont la haute tension est supérieure à 20 kilovolts,
- l'autre à ceux dont la tension y est inférieure

Considérons l'ensemble des points représentatifs des appareils pour lesquels la tension est supérieure à 20 kilovolts. Nous voyons que c'est sensiblement une bande rectiligne. Nous avons décidé de prendre une approximation linéaire qui sera donnée par une droite passant par les milieux de la bande; pour obtenir l'équation de cette droite nous avons procédé par

une méthode des moindres carrés en affectant à certains points (points correspondant à des appareils dont la tension est voisine de 20KV) un "poids" moindre par rapport aux autres. Voici d'ailleurs quelques valeurs relevées et les poids attribués à ces valeurs (Courbe II)

S/VP	P _{kva}	Wi
13,65	1 000	2
13,4	1 600	2
12,6	1 800	1
12	3 150	1
10,7	4 000	2
9,7	5 000	2

*
*

* Valeurs correspondant à des appareils dont la Haute tension est très voisine de 20 KV/ relativement aux autres, nous avons ainsi obtenu l'expression suivante :

$$S/\sqrt{P} = 14,5 - 9,04 \times 10^{-4} P$$

d'où
$$S = 14,5 \sqrt{P} - 9,04 \times 10^{-4} P^{3/2} \quad (S \text{ en cm}^2, P \text{ (KVA)})$$

Pour les points représentatifs des appareils dont la tension est inférieure à 20 KV nous avons fait le même travail de relevé et de construction de courbe. Nous avons remarqué que la courbe affectait la forme d'une exponentielle, nous avons recherché quelle serait la courbe exponentielle qui nous donnerait la meilleure approximation et nous avons trouvé la formule suivante :

$$S/\sqrt{P} = 9 + e^{100/P}$$

courbe qui nous donne entière satisfaction comme le montre la comparaison des tableaux ci-dessous. Le tableau (a) correspondant aux valeurs réelles et (b) aux valeurs approximées de quelques points.

	P _{KVA}	S/√P
(a)	80	12,25
	100	11,5
	160	11,2
	250	10,4
	400	10,15
	800	10,1
	1 250	10
	1 600	10

	P	S/√P
(b)	80	12,5
	100	11,7
	160	10,85
	250	10,49
	400	10,28
	800	10,25
	1 250	10,08
	1 600	10,06

D'autre part cette formule est d'emploi commode grâce à sa simplicité et elle donne une précision plus que suffisante comme on peut le constater sur la courbe III. De S on

déduit $D = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{S} \times \frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma}$, qui va maintenant nous servir.

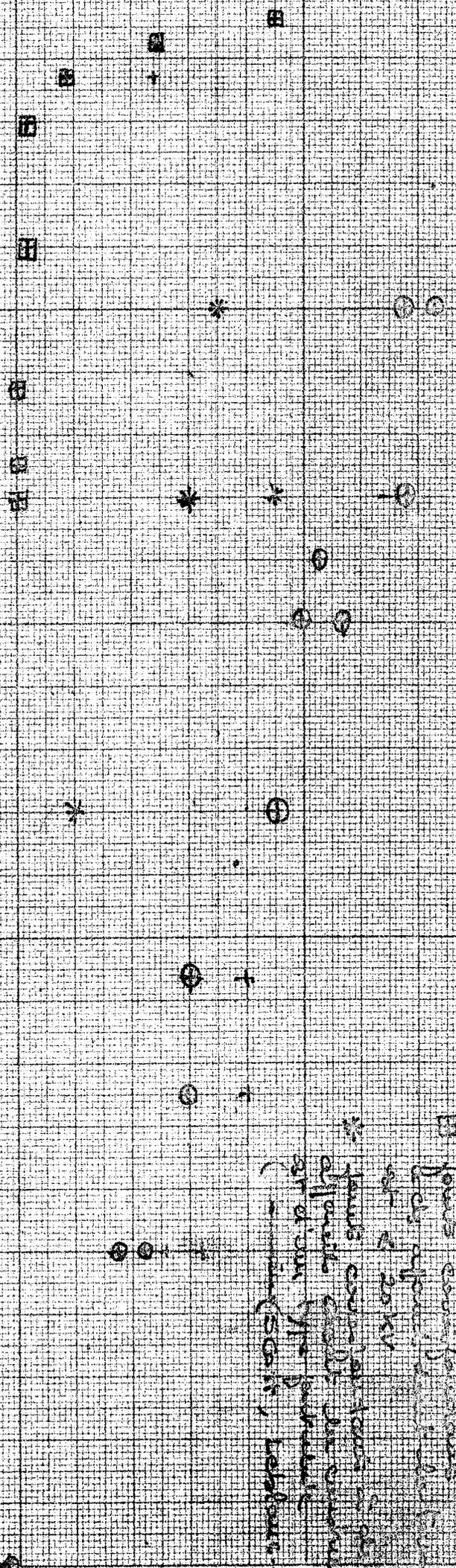
b) Hauteur. Pour la hauteur des noyaux nous avons procédé de même en calculant le rapport H/D que nous avons trouvé constant à 0,01 près, donc nous avons adopté comme formule de

départ $H = 2,75 \times D$ D étant le diamètre des noyaux.

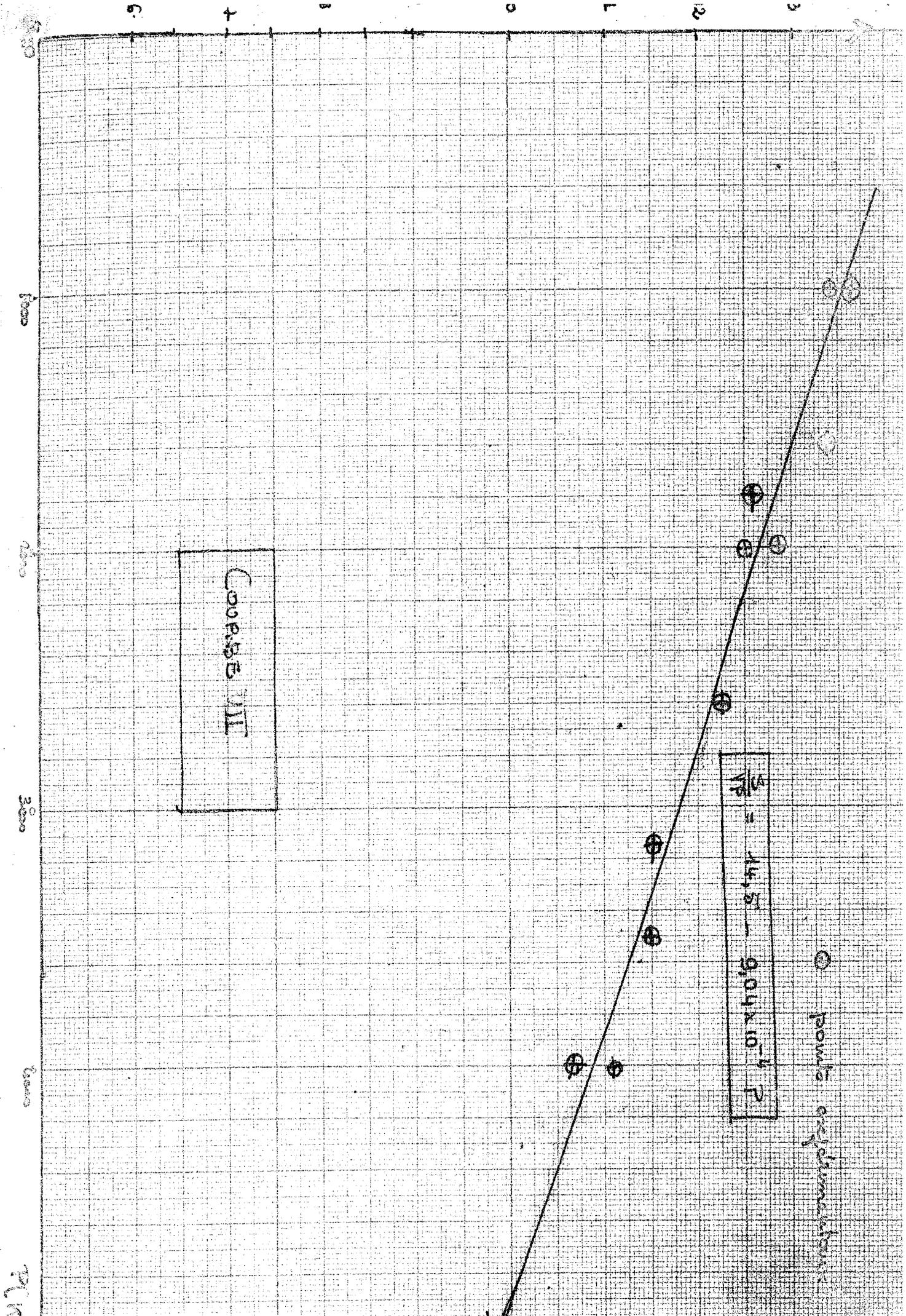
A partir de ces grandeurs et des données des caractéristiques de l'appareil nous sommes en mesure de déterminer exactement la forme du circuit magnétique; c'est ce que nous expliquons dans les pages suivantes avec schéma et organigramme à l'appui.

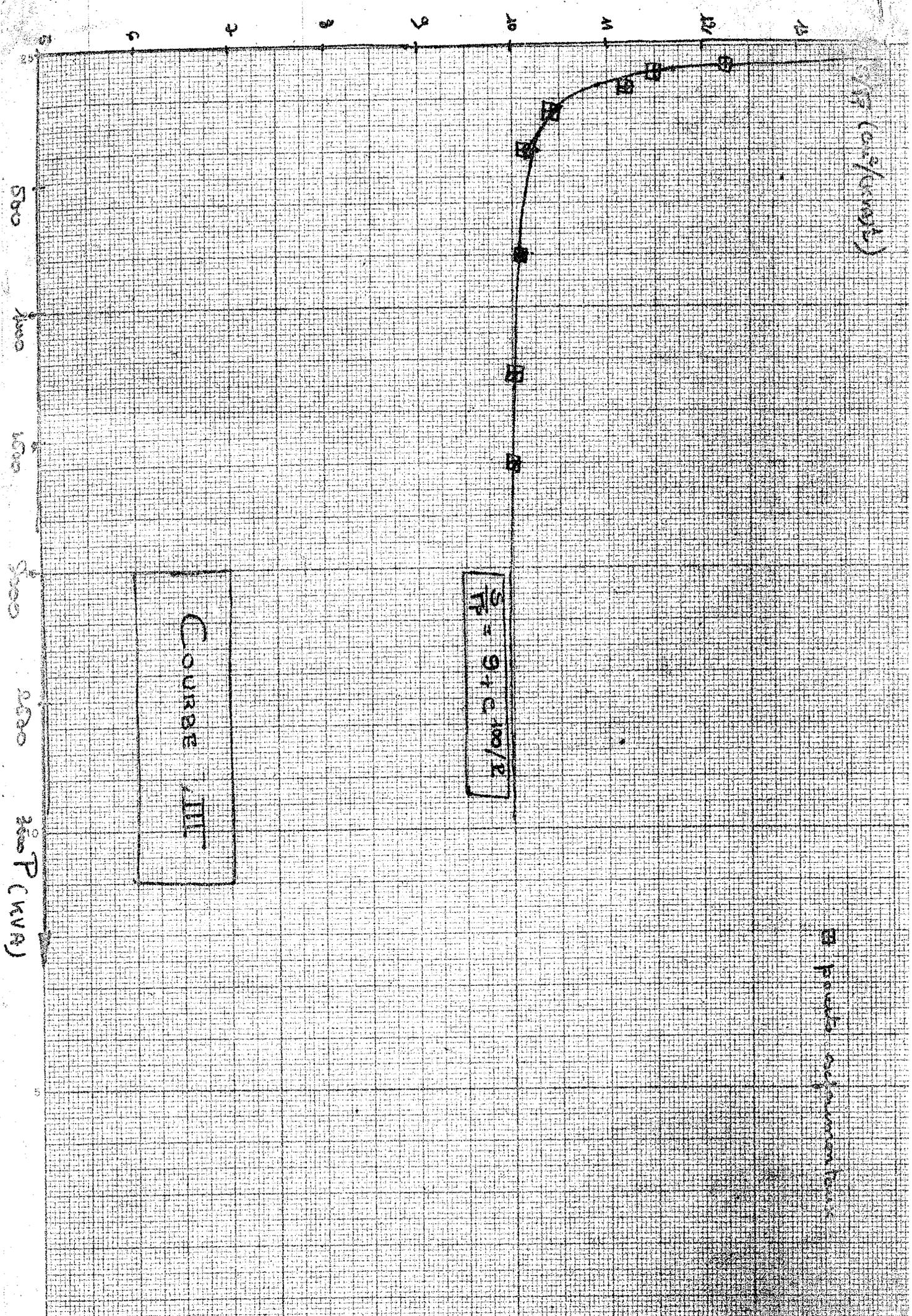
SAS (cont'd)

COORBB II

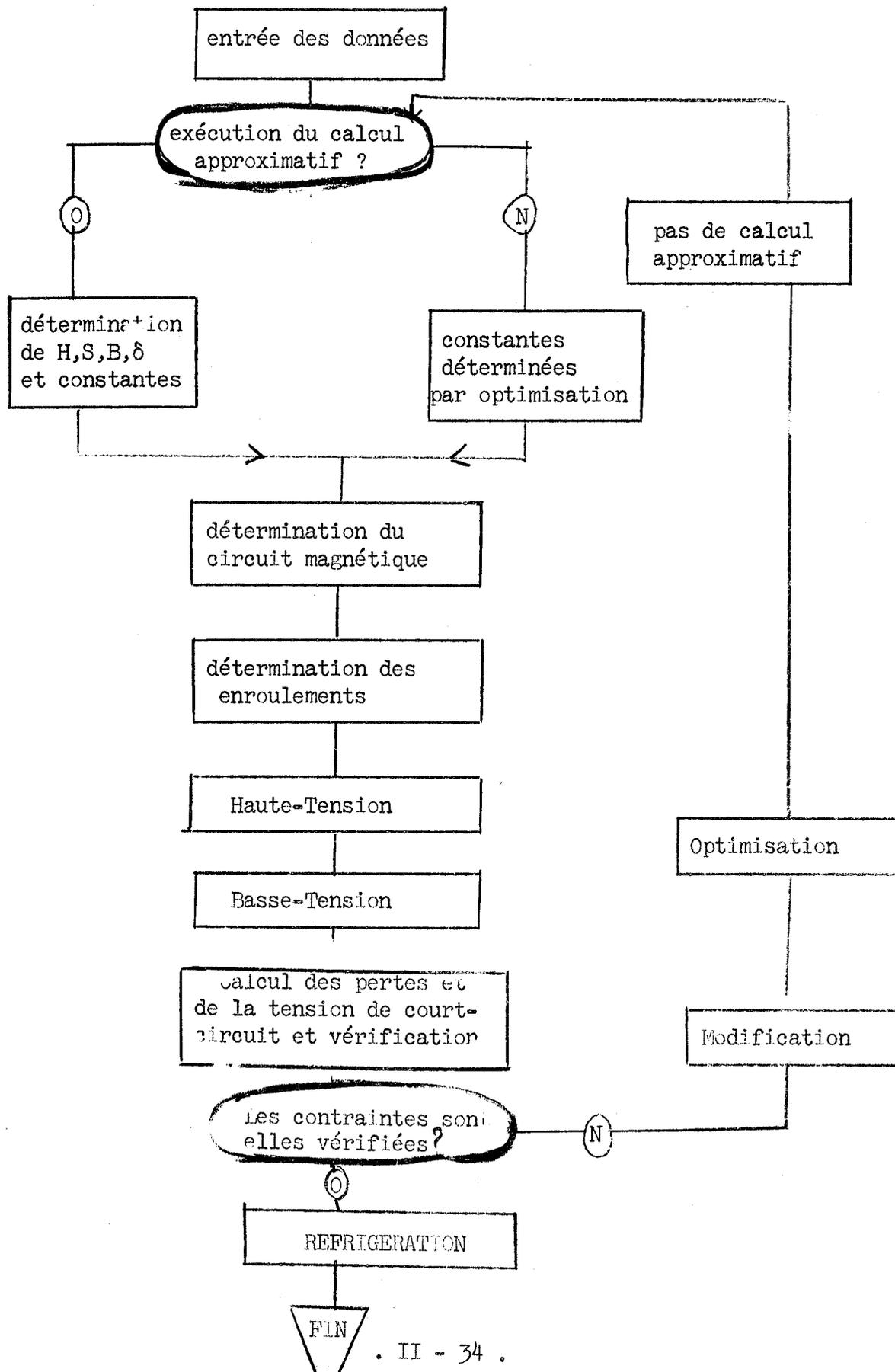


○ points corresponding to
 in the field
 □ points corresponding to
 data reported in
 of 2 rows
 * points corresponding to
 all points (SAS) are summed
 in division type procedure
 (min(SAS), max(SAS))





Déroulement du calcul :



2). Détermination du Circuit Magnétique.

Le circuit magnétique et principalement les noyaux ont la forme suivante (fig. VII) où sont marqués les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ comme ici dans le cas de 3 gradins. Dans notre cas nous allons jusqu'à 5 gradins. Pour choisir le nombre de gradins nous adoptons une échelle de Puissances : nous avons décidé d'adopter N gradins pour

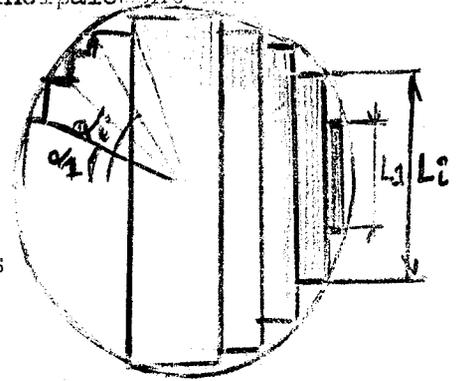


fig. VII

$P_i < P < P_i + 1$. Suivant le tableau donné par Mr. Dormont [1]. Le programme de calcul donne le nombre de tôles ainsi que leur largeur. (Les largeurs trouvées devront être comprises dans les limites de tôles normalisées, on choisira alors la tôle normalisée la plus près de L_i (fig. VII)) Les nombres que nous donnons pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ sont optimum et ont été donnés par WEISSMANN dans (2) Mais les nombres trouvés ici ne correspondent pas toujours aux largeurs normalisées des tôles découpées en atelier; Or ce sont ces dernières grandeurs qu'il faut considérer dans un projet effectif. Il y a donc un processus de recherche à imaginer, pour, surface et diamètre extérieur fixés, remplir l'intérieur du cercle de manière à obtenir cette surface.

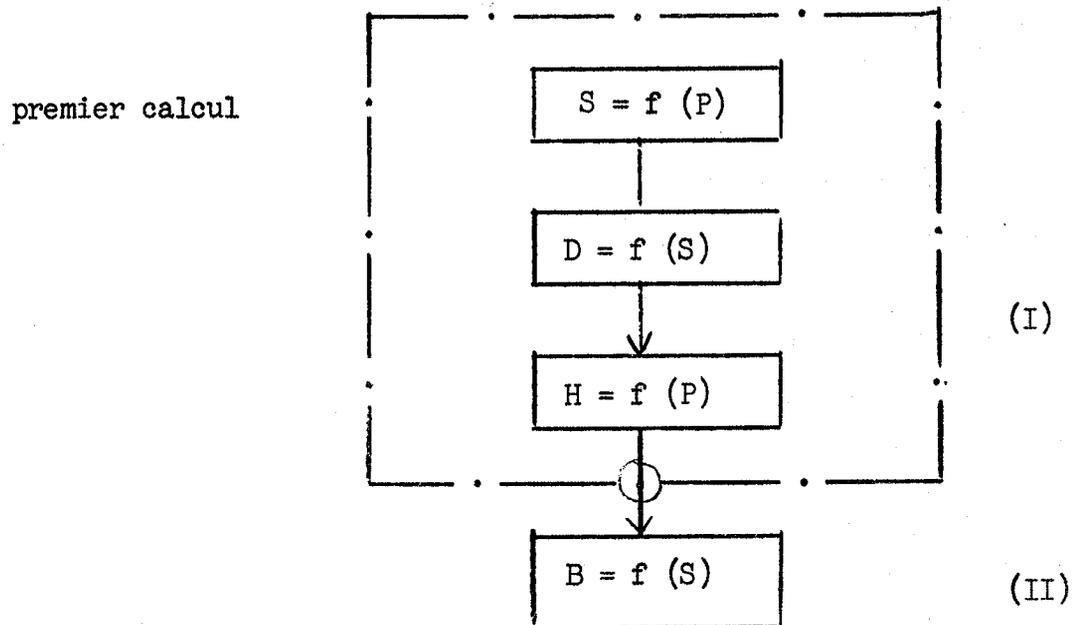
Fixons les largeurs des n-1 premiers gradins choisis dans les largeurs normalisées, chacune d'elles étant le plus voisine possible des largeurs trouvées par le calcul, et essayons de placer la dernière de manière à obtenir la section désirée. Si cela n'est pas possible nous changeons la n-2^{ème} largeur et nous essayons à nouveau toutes les combinaisons possibles jusqu'à obtenir la section désirée.

En effet une largeur étant fixée il est possible de calculer la surface occupée $S = L_i \times (\sqrt{D^2 - L_i^2} -$

$\sum_{k=1}^i \sqrt{D^2 - L_k^2})$. Il est possible donc, les n-1 largeurs étant

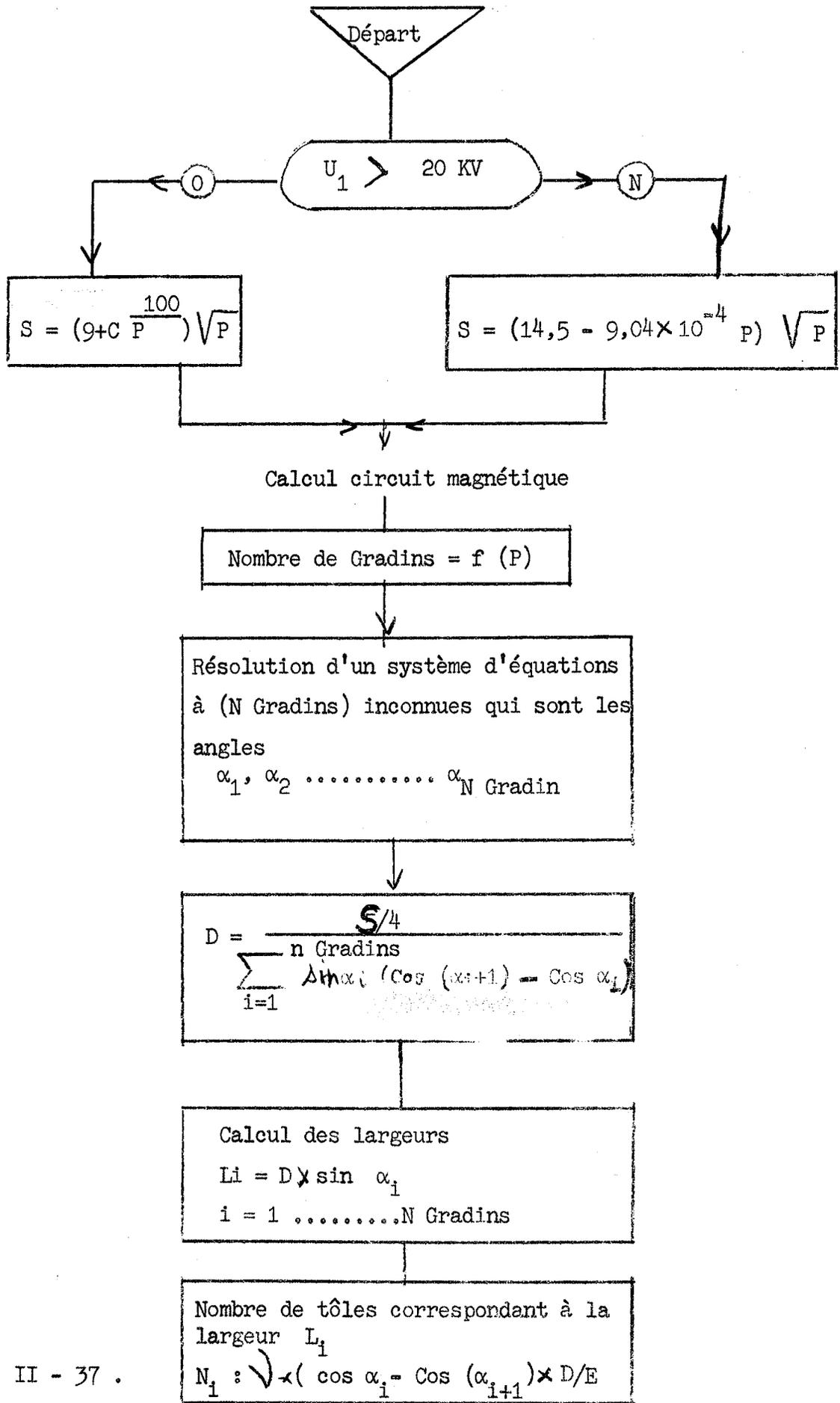
fixées, de vérifier si parmi les largeurs restantes, il en est une susceptible de donner le remplissage désiré.

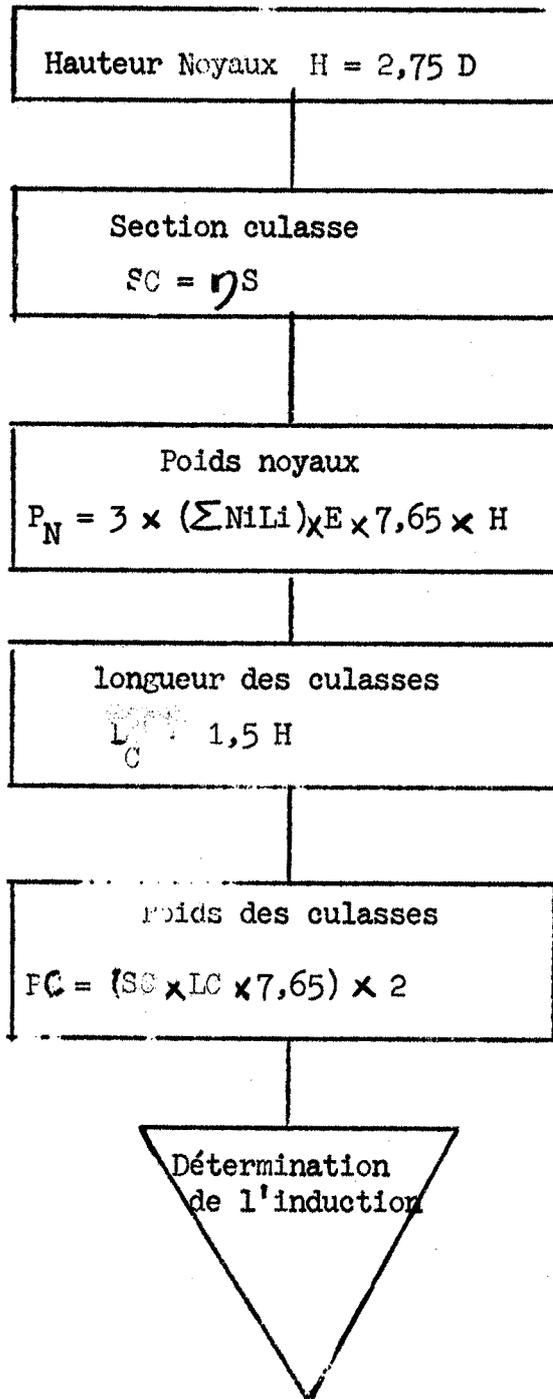
A partir de ces déterminations nous calculons approximativement le poids des noyaux et le poids des culasses pour une première détermination des pertes ($B = 15 \text{ KG}$). Si le transformateur a été optimisé, nous ne calculons ces valeurs que pour le calcul du poids total de l'appareil car les poids de cuivre et de fer calculés pour les pertes sont connus (si la somme globale est la même, les calculs intermédiaires sont différents). L'organigramme que nous donnons à la page suivante se situe ainsi dans l'organigramme général



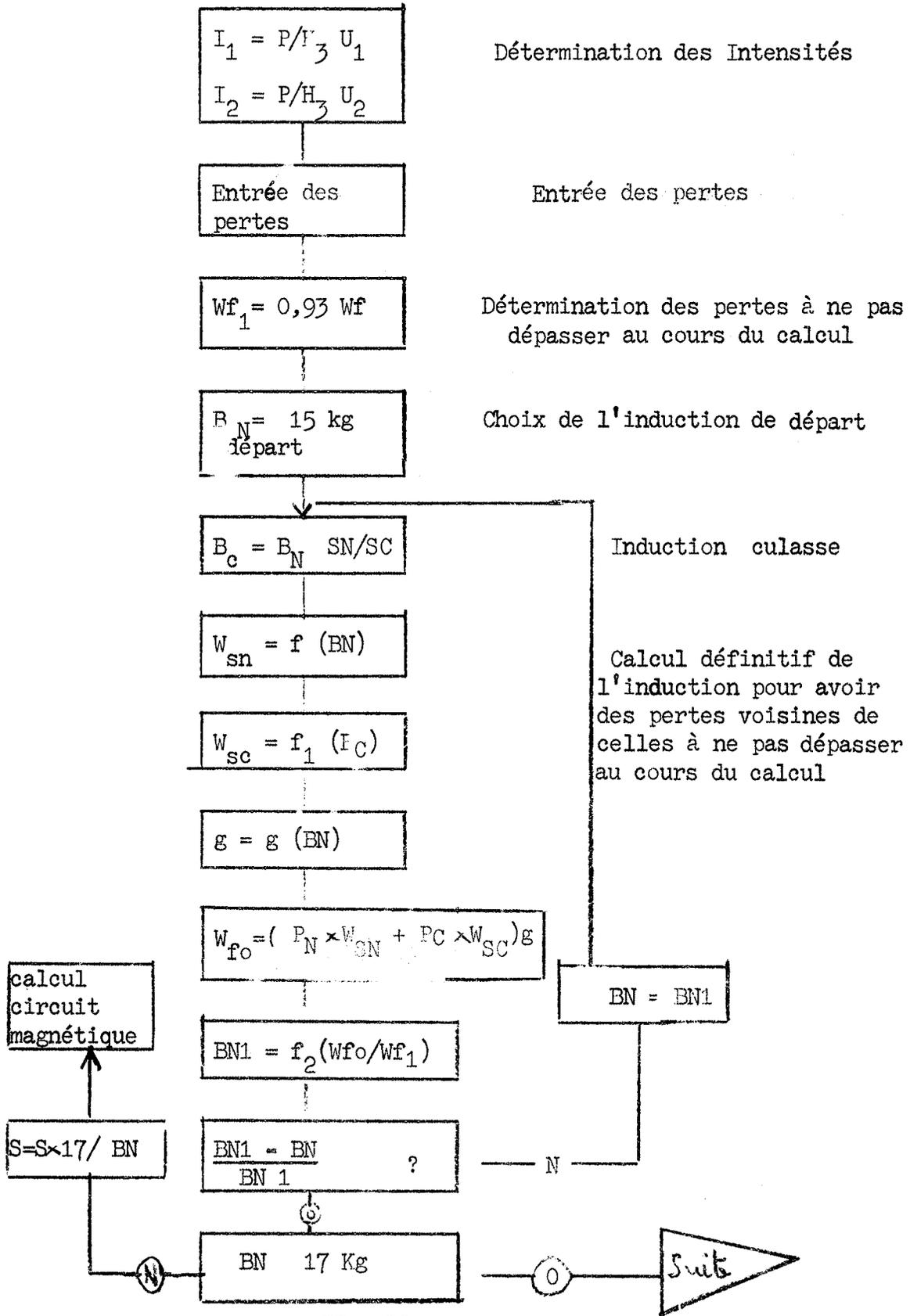
- On en tire : Nombre de tôles à découper
: Largeur de ces tôles
: Nombre de gradins
: Poids total de fer.

Détermination du Circuit Magnétique

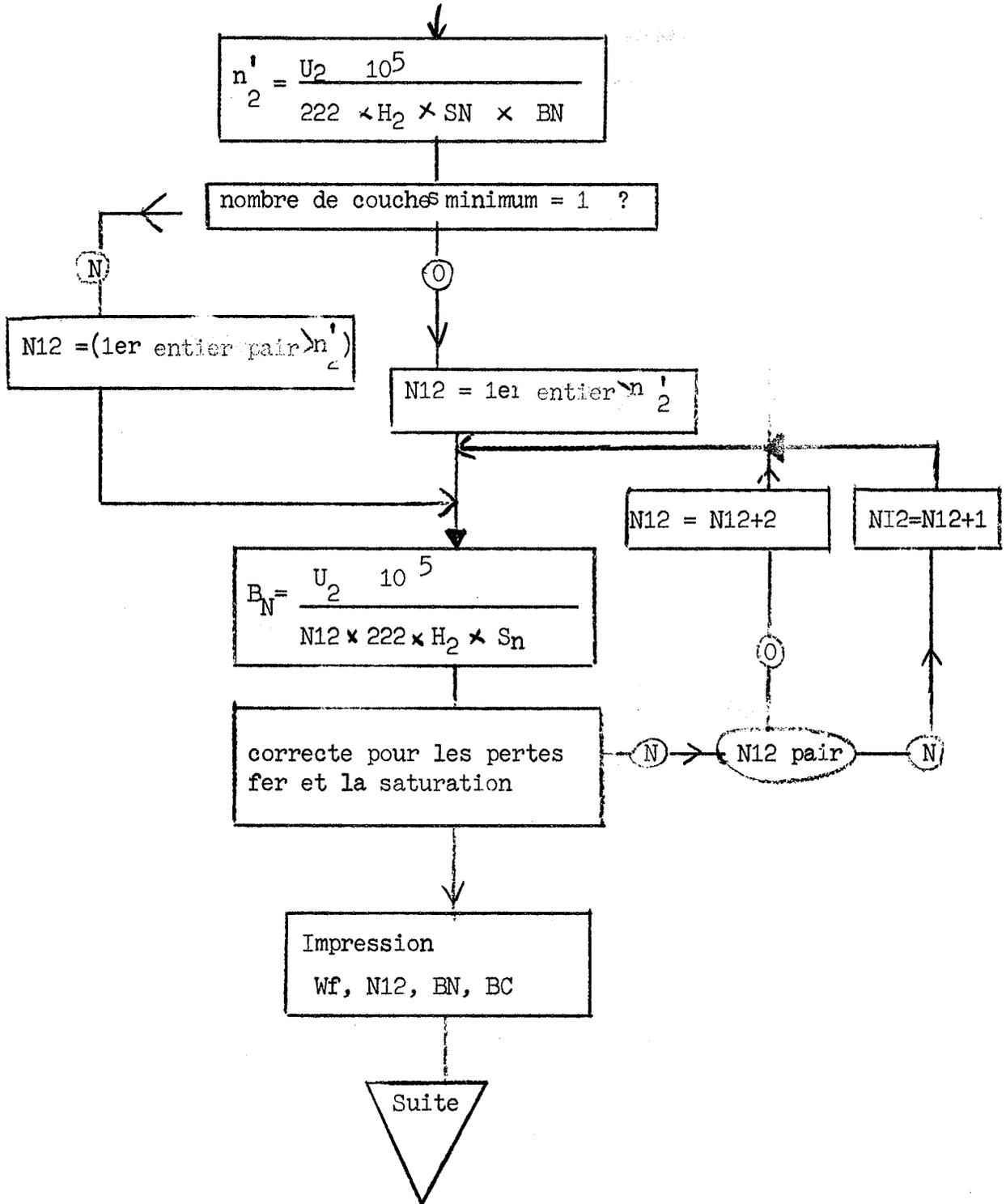




Première détermination de l'Induction



Détermination du nombre de Spires secondaires



3) Calcul des Enroulements.

Ce calcul consiste, les données de caractère électrique étant connues (intensité, densité de courant admise au départ, nombre de couches minimum, nombre de spires) à donner les dimensions des fils et leur disposition en tenant compte de la hauteur des noyaux, et des distances d'isolement à respecter. Dans les deux cas, celui de la basse tension et celui de la haute tension, nous procéderons de manière analogue: nous chercherons la place disponible en hauteur et largeur ainsi que les dimensions exactes des conducteurs à employer (dimensions normalisées) et nous essayerons, compte tenu des distances d'isolement à respecter, de placer le nombre de spires dans la place disponible. Les problèmes étant cependant différents pour l'enroulement haute tension et l'enroulement basse tension, les dimensions des conducteurs et les distances d'isolement variant beaucoup d'un cas à l'autre, nous les étudierons différemment et nous donnerons deux organigrammes distincts. Ces organigrammes seront exécutés par la machine successivement dans l'ordre où nous les étudierons.

Nous déterminerons d'abord les grandeurs dont la connaissance est nécessaire pour les deux enroulements; ce sont :

- Les courants dans les enroulements eux-mêmes, courants différents des courants en ligne.
- Les distances terminales qui sont la différence entre la longueur des bobinages et de la hauteur des noyaux (voir ci-contre); ces distances terminales sont identiques pour les deux enroulements pour assurer une meilleure répartition des

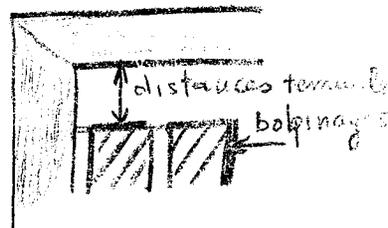
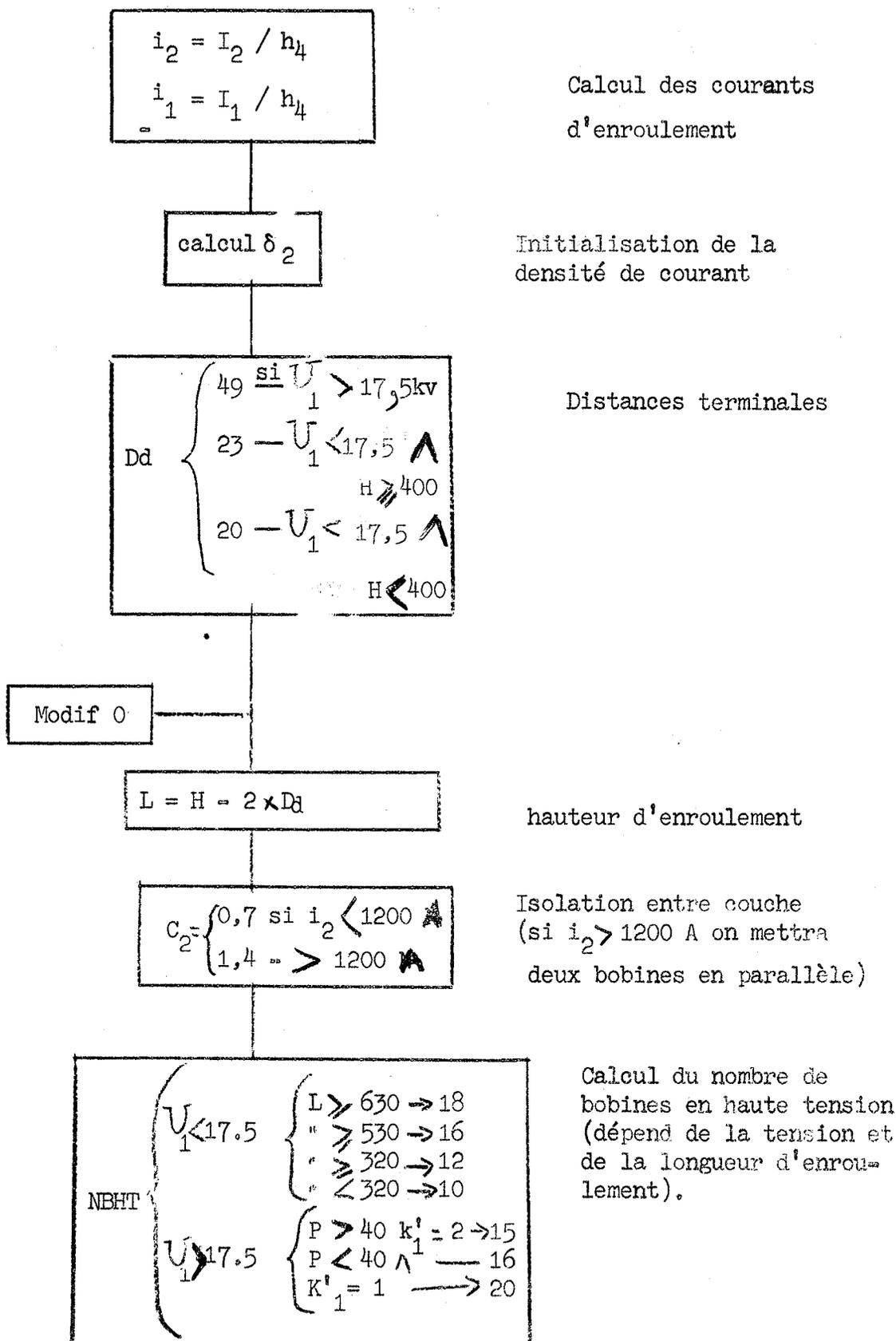


fig. VIII
flux le long des bobinages (répartition uniforme)
et pour assurer une meilleure tenue mécanique aux efforts électrodynamiques.

- Les nombres de bobines en Haute et Basse tension malgré des conditions différentes pour les deux enroulements. En effet du côté H.T. le nombre de bobines dépend entre autre essentiellement de la différence de potentiel à admettre entre les conducteurs d'une bobine et entre deux bobines successives en série (ceci pour ne pas dépasser la rigidité diélectrique de l'isolant ou de l'air suivant le cas); du côté B.T. ce nombre dépend entre autre essentiellement du courant d'enroulement car les bobines seront en série ou en parallèle pour respecter la densité de courant admise.

Après la détermination de ces grandeurs qui figurent en tête de l'organigramme de calcul des enroulements, commence l'étude proprement dite du bobinage basse tension.



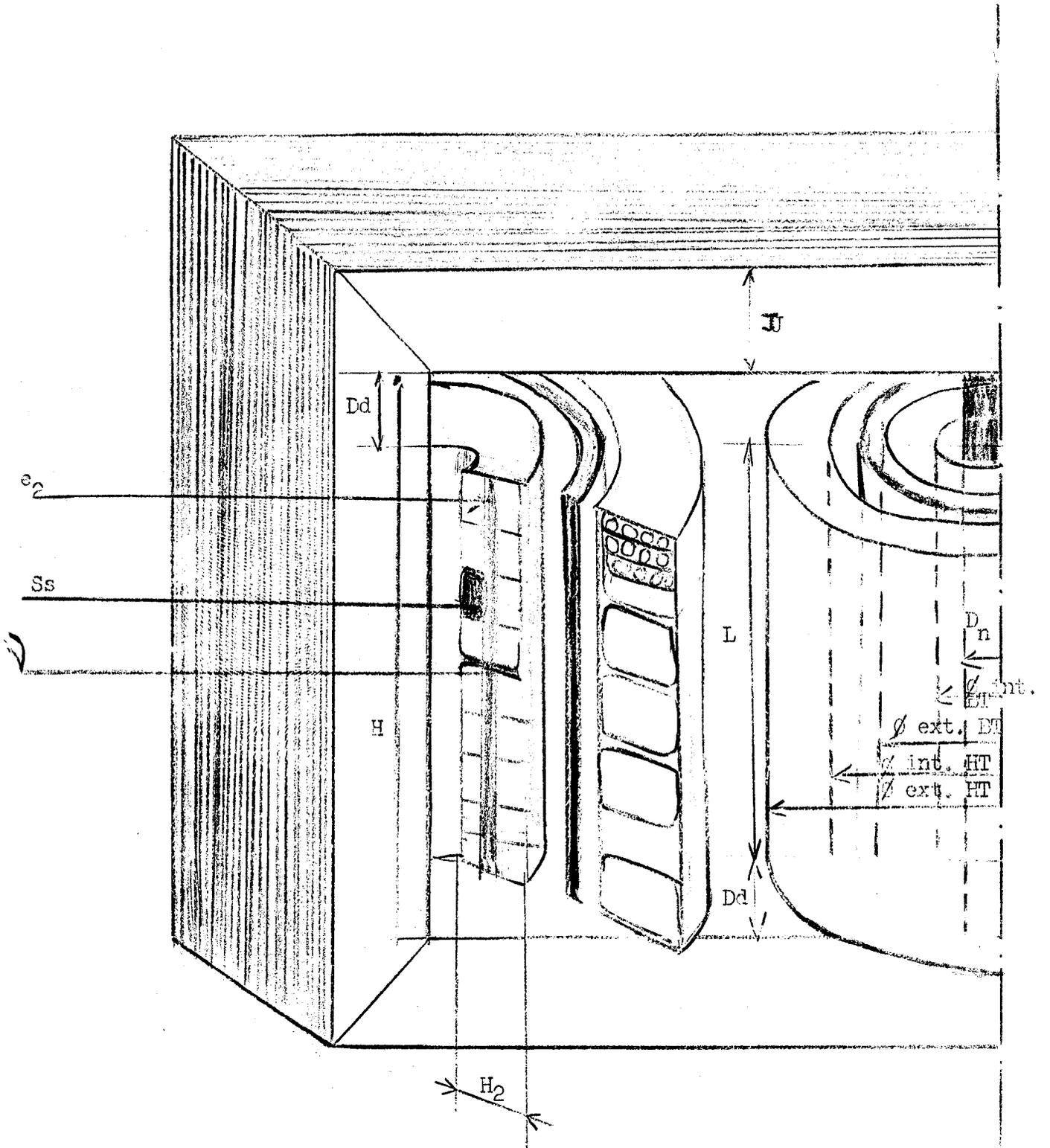


fig. IX

Circuit magnétique et bobinages

Calcul de la basse tension :

$$\text{NBP} = \begin{cases} 1 \rightarrow i_2 < 1200 \\ 2 \rightarrow i_2 > 1200 \end{cases}$$

Nombre de bobines en parallèle

$$\text{NMCP} = K_1' = 1, \text{ ou } 2 \text{ alors } 1 \text{ sinon } 2$$

Nombre minimum de couches en parallèle
(| Δ Y 1
| Z 2

$$S_2 = i_2 / S_2$$

Section de l'enroulement Basse Tention

Hauteur radiale

$$H_2' = S_2 (N_2 + 1) / L$$

Hauteur radiale

$$\text{NMCS} = \begin{cases} H_2' < 11 \rightarrow 1 \\ H_2' \geq 11 \rightarrow 2 \end{cases}$$

Nombre minimum de couches en série (calculé d'après la hauteur radiale)

si NMCS x NMCP x NBP = 1
NC = alors 1
sinon 2

Nombre de couches

$$n = \frac{N_{12}}{NC}$$

Nombre de spires par couche

MODIF 1

$$LB = \frac{L - \gamma (NBP - 1)}{NBP + 0,9}$$

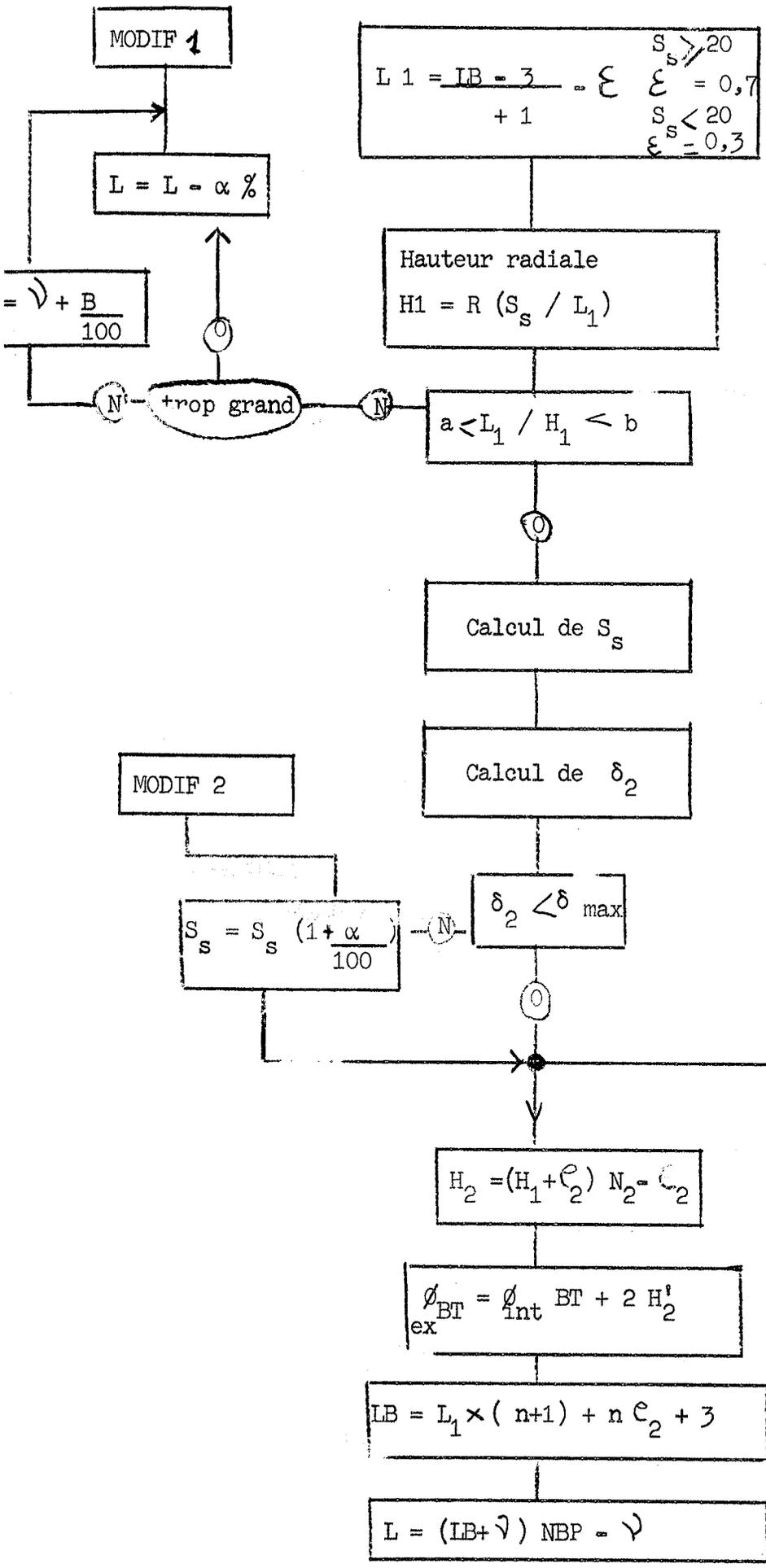
Longueur d'une bobine (γ = intervalle entre bobines)

MODIF 2

.II-45.

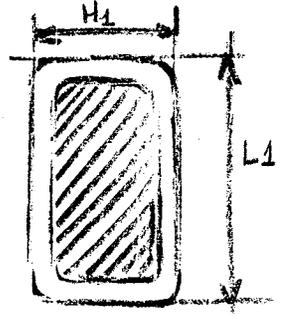
$$S_s = \frac{S_2}{NBP}$$

Section de la spire de l'enroulement secondaire



Hauteur d'un conducteur (voir schéma)

Hauteur radiale du conducteur trouvée dans la série normalisée



Conducteur

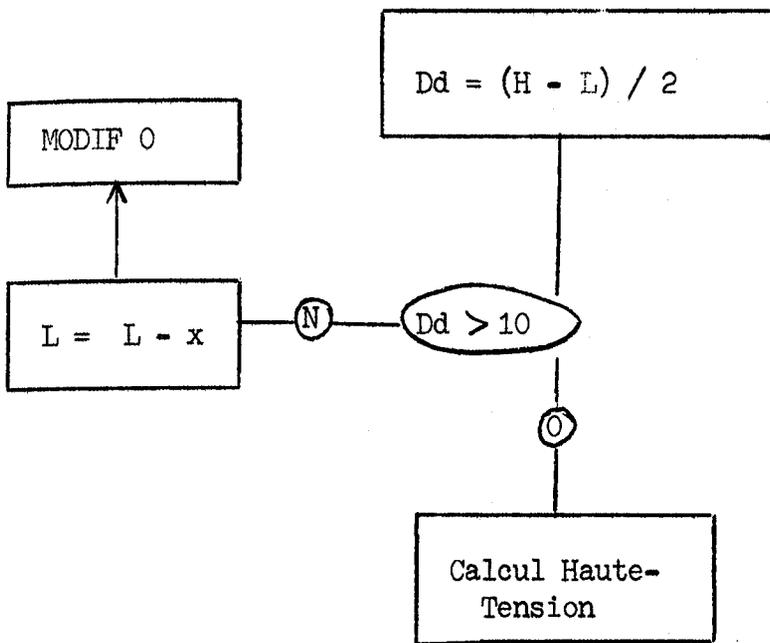
Calcul de la nouvelle section de la spire et de la densité de courant avec correction si cela est nécessaire.

Détermination définitive de la hauteur radiale

Diamètre extérieur de la basse tension (le diamètre intérieur étant le diamètre du noyau plus un coefficient d'isolateur
 $\phi_{int BT} = D_N + H$

Hauteur de la bobine

Hauteur définitive d'enroulement



Distances terminales
définitives

Si la distance terminale
n'est pas suffisante on
reprend le calcul en
modifiant la hauteur
d'enroulement.

b) Enroulement Haute tension.

L'enroulement haute tension se présente sous forme de bobines de $\frac{1}{2}$ m/m séparées par des intervalles pour le refroidissement et la tenue diélectrique de l'ensemble.

Ces intervalles peuvent se présenter sous deux formes: les cales ^(a) ou les chapeaux ^(b) (cf figure IX).

La différence entre cales et chapeaux sera dictée par le diamètre des conducteurs utilisés.

On utilisera des cales pour un diamètre des fils supérieur à 0,65 m/m et des chapeaux pour un diamètre $< 0,65$ m/m. Nous allons d'abord déterminer les dimensions du fil (nu et isolé)

et nous calculerons ensuite les bobines normales et les bobines de choc ainsi que le nombre de spires à 5 %. Nous pensons que l'organigramme ci-contre sera suffisamment clair pour donner une idée de l'ordonnancement du calcul.

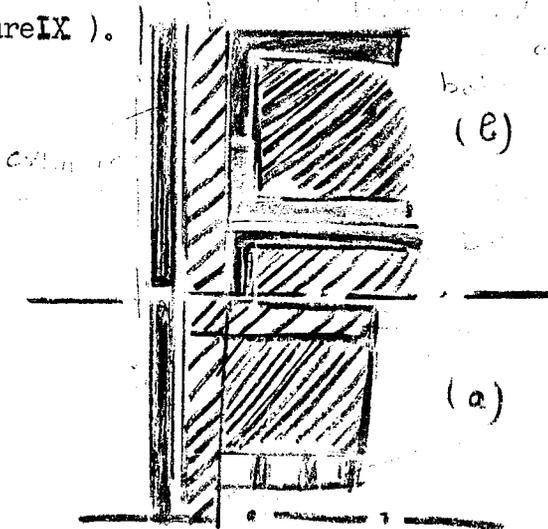
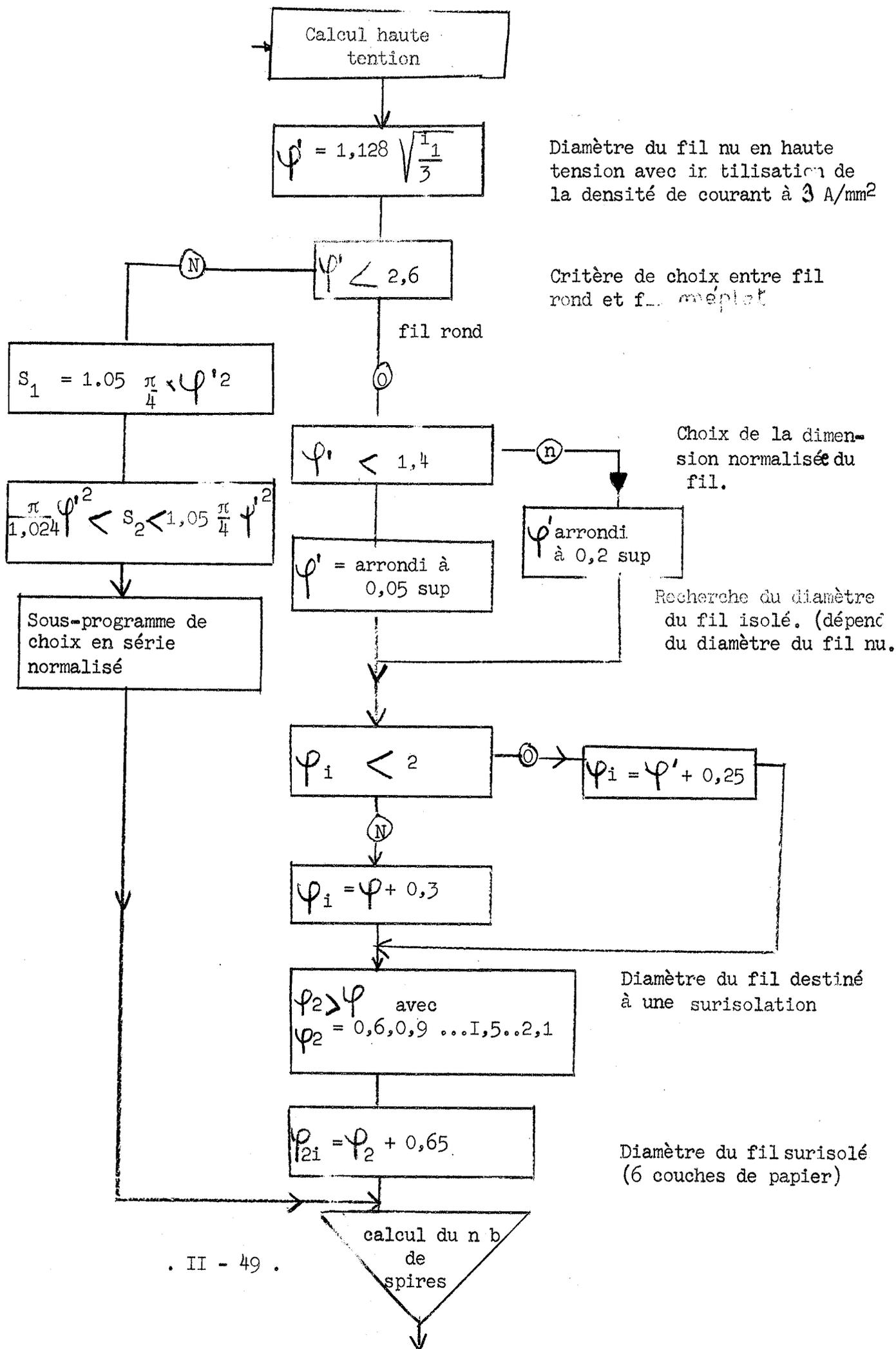


fig.IX



Calcul du Nombre de spires

$$N_1 = N_2 \times \frac{U_1}{U_2}$$

Calcul du nombre de spires

$$a = \text{donnée ou } 0,05$$

Valeur des prises sur la haute tension.

$$N_1' = a N_1$$

Nombre de spires correspondant à ces prises

$$\alpha = \begin{cases} 0,22 \leftarrow K_1' = 1 \\ 0,15 \leftarrow K_1' = 2 \end{cases}$$

Coefficient pour nombre de spires surisolées

$$N_1'' = \begin{cases} 1 & W < 63 \\ 2 & W \geq 63 \end{cases}$$

Nombre de bobines de prises

$$\begin{aligned} C &= 2 \text{ si } \varphi \leq 0,7 \\ C &= 1 \text{ si } \varphi > 0,7 \end{aligned}$$

Détermination du mode adopté pour les intervalles:
 $C = 1$ (cales)₁ $C = 2$ chapeaux

$$\begin{aligned} C_1 &= 1,4 \text{ si } C = 2 \\ C_1 &= 5 \text{ si } C = 1 \end{aligned}$$

Intervalles entre bobines de la haute tension

$$D_1 = C_1 (N-1)$$

Somme des intervalles entre bobines.

($N =$ nombre de bobines Haute tension)

$$e_1 = \begin{cases} 0,06 \text{ si } \varphi \leq 1,3 \\ 0,1 \text{ si } \varphi > 1,3 \end{cases}$$

Epaisseur de papier entre les couches.

$$C'_1 = \begin{cases} N (4e_1 + 0,15) + 3 \leftarrow C = 2 \\ N (1e_1 + 0,3) \leftarrow C = 1 \end{cases}$$

Diminution de la longueur d'enroulement occupée par le papier et les disques de prise.

$$\gamma_f = \begin{cases} 1,03 & \text{si } \varphi \leq 0,7 \wedge C = 2 \\ 1 & \text{si } \varphi > 0,7 \end{cases}$$

Coefficient de foisonnement axial du fil

$$n_1 = \frac{H - 2Dd - d_1 - C'_1}{\gamma_f \times \varphi_i}$$

Nombre maximum de spires par couche

$$N'_3 = N - N''_1 - 2$$

Nombre de bobines normales (soit le nombre total de bobines moins les bobines de prise moins les deux bobines d'extrémité).

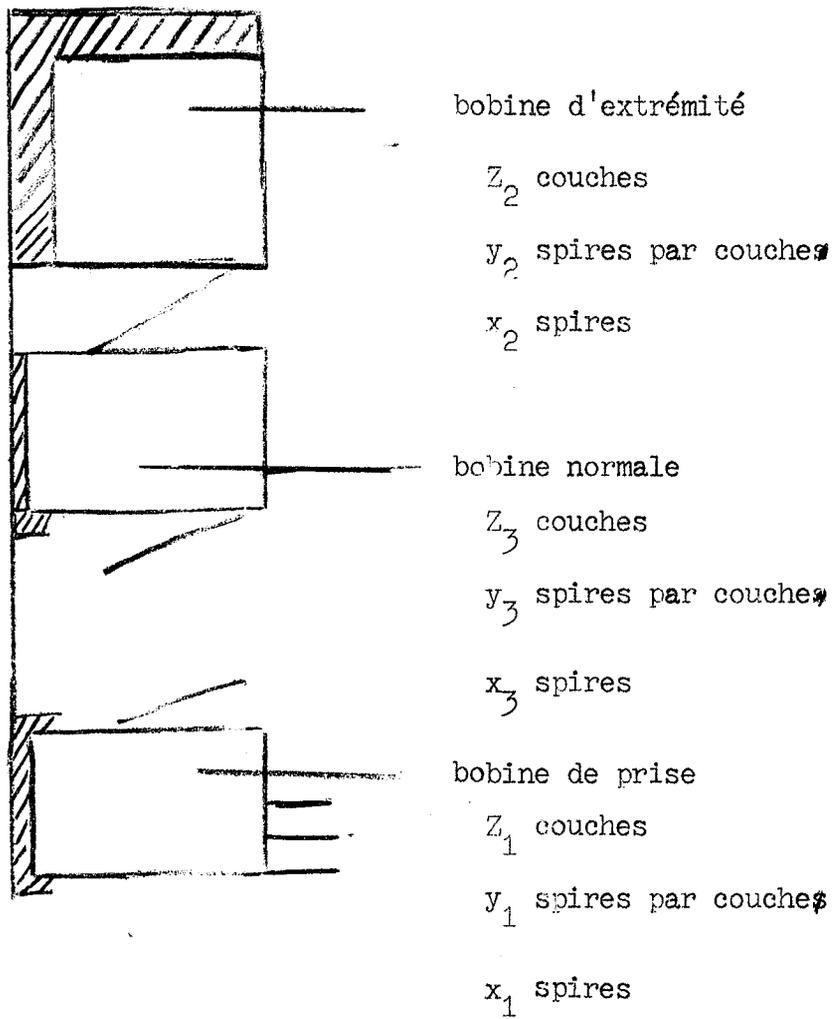
$$N''_1 = N_1 \times \begin{cases} 0,005 \\ 0,01 \end{cases}$$

Nombre de spires de réglage pour la marche en parallèle (soit 0,5 à 1 %).

$$n'_1 = \frac{N_1 + N'_1 + N''_1 + 1}{n_1}$$

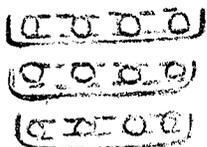
Nombre minimum de couches en haute tension (soit rapport du nombre de spires au nombre maximum de spires par couche).

Haute-Tension - Bobine



Disposition des conducteurs

chapeaux



cales

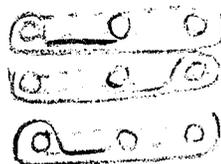
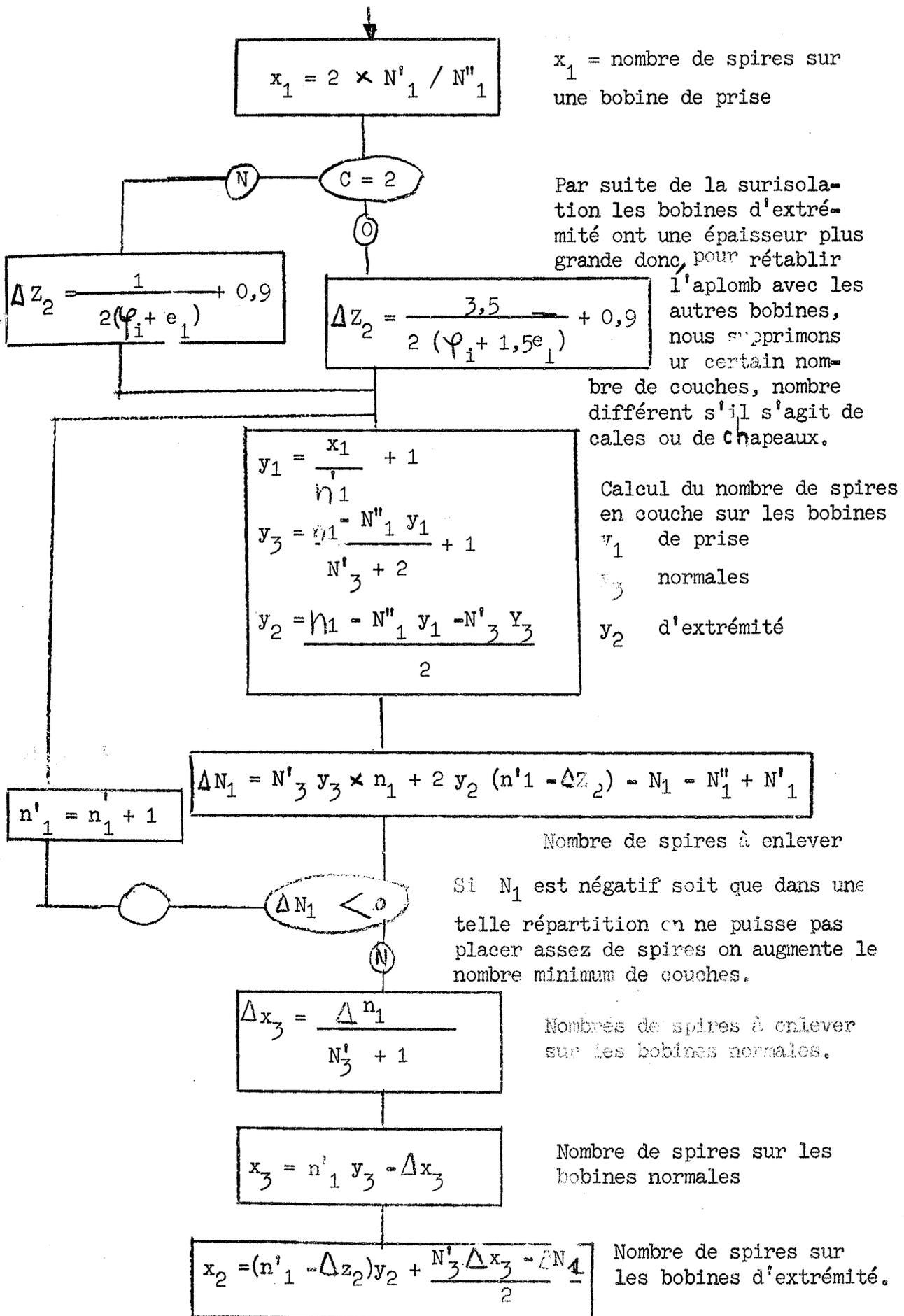


fig. X



$$N_{11} = 2x_2 + N'_3 x_3 - N''_1$$

$$N_{12} = 2x_2 + N'_3 x_3 - N''_1 + N'_1$$

$$N_{13} = 2x_2 + N'_3 x_3 - N''_1 + 2N'_1$$

Nombre de spires sur
les prises à :
U + a%
U
U - a%

$$N1 = N13 + N''_1$$

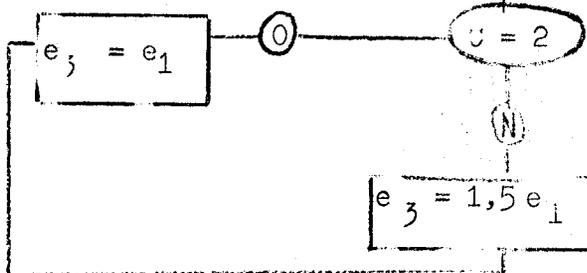
Nombre total de spires

$$Z_1 = \frac{x_1 - 1}{y_1} + 1$$

$$Z_2 = \frac{x_2 - 1}{y_2} + 1$$

$$Z_3 = \frac{x_3 - 1}{y_3} + 1$$

Nombre de couches sur
les bobines respective-
ment de Z₁ de prise ;
Z₂ d'extrémité
Z₃ normales



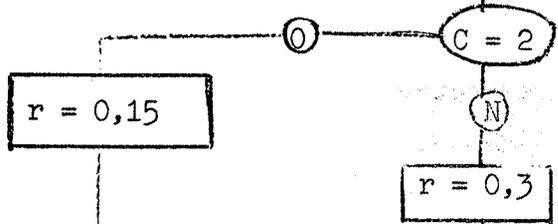
Distance entre deux couches
(différente suivant que l'on
a adopté le mode sur chapeaux
ou sur cales)

$$H'_1 = Z_1 (\varphi_i + e_3) + 0,3$$

$$H'_2 = Z_2 (\varphi_i + e_3) + 0,3$$

$$H'_3 = Z_3 (\varphi_i + e_3) + 0,3$$

Hauteur radiale des bobines.
On ajoute 0,3 pour l'épais-
seur de ruban, mais rien
pour le foisonnement (C₃ a
été majoré dans le cas des
cales)



Epaisseur de ruban comptant
dans la longueur axiale

$$l'_1 = y_1 \times \gamma_f \times \psi_i + 4e_1 + r$$

$$l'_2 = y_2 \times \gamma_f \times \psi_i + 4e_1 + r$$

$$l'_3 = y_3 \times \gamma_f \times \psi_i + 4e_1 + r$$

Longueur d'enroulement des bobines de prise d'extrémité et normales, (nombre de spires par couche multiplié par le diamètre du fil isolé compte tenu du foisonnement. On ajoute 4 épaisseurs de papier plus le ruban.)

$$L'_1 = 2l'_2 + N'_1 l'_1 + N'_3 l'_3 + 0,5$$

Longueur totale d'enroulement.

C = 2 ?

N

0

$$L''_1 = 2 \cdot 0,7$$

$$L''_2 = H - 2 Dd - L'_1 - (N-1)L''_1$$

Epaisseur minimum des intervalles
 L''_2 épaisseur des disques ou épaisseur maximum de cales.

$$L''_1 = \frac{H - 2 Dd - L'_1}{N - 1}$$

$$L''_2 = L''_1 + 1$$

Nombre d'intervalle N - 1

4) - Calcul des coefficients nécessaires à l'optimisation test de convergence.

A ce stade nous sommes en mesure de calculer tous les coefficients nécessaires au calcul d'optimisation. Nous allons donc calculer les grandeurs H_h, H_v, \dots

Il nous manque à l'heure actuelle la distance entre haute et basse tension pour déterminer l'entraxe.

Nous allons calculer cette distance relativement à une tension d'essai.

$U_s =$ donnée par le client

Tension d'essai

Distance entre HT - BT
KV essai D.
21 6,5 + Σ
31 9 + Σ
: : + Σ
3m par 10 KV essai

Distance entre les enroulements de la haute et la basse tension.

$\phi_{int} = \phi_{in} + 2 \text{ dist.}$
HT BT

Diamètre intérieur de la haute tension.

$\phi_{ext.} = \phi_{int} + 2x \text{ Max } (H'_1, H'_3)$
HT HT

Diamètre extérieur de la haute tension.

Distance entre Hautes tensions
10 kv \rightarrow 2000 v essai
15 kv \rightarrow 2500

Distance entre les enroulements haute tension de deux colonnes voisines.

$$E = \phi + DH_{\text{ext.HT}}$$

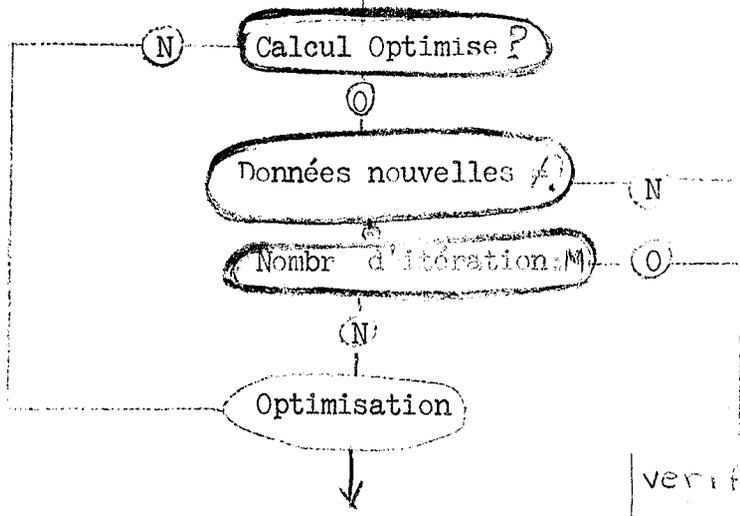
Détermination de l'entraxe

$$L_C = 2 (E + D)$$

Longueur culasse

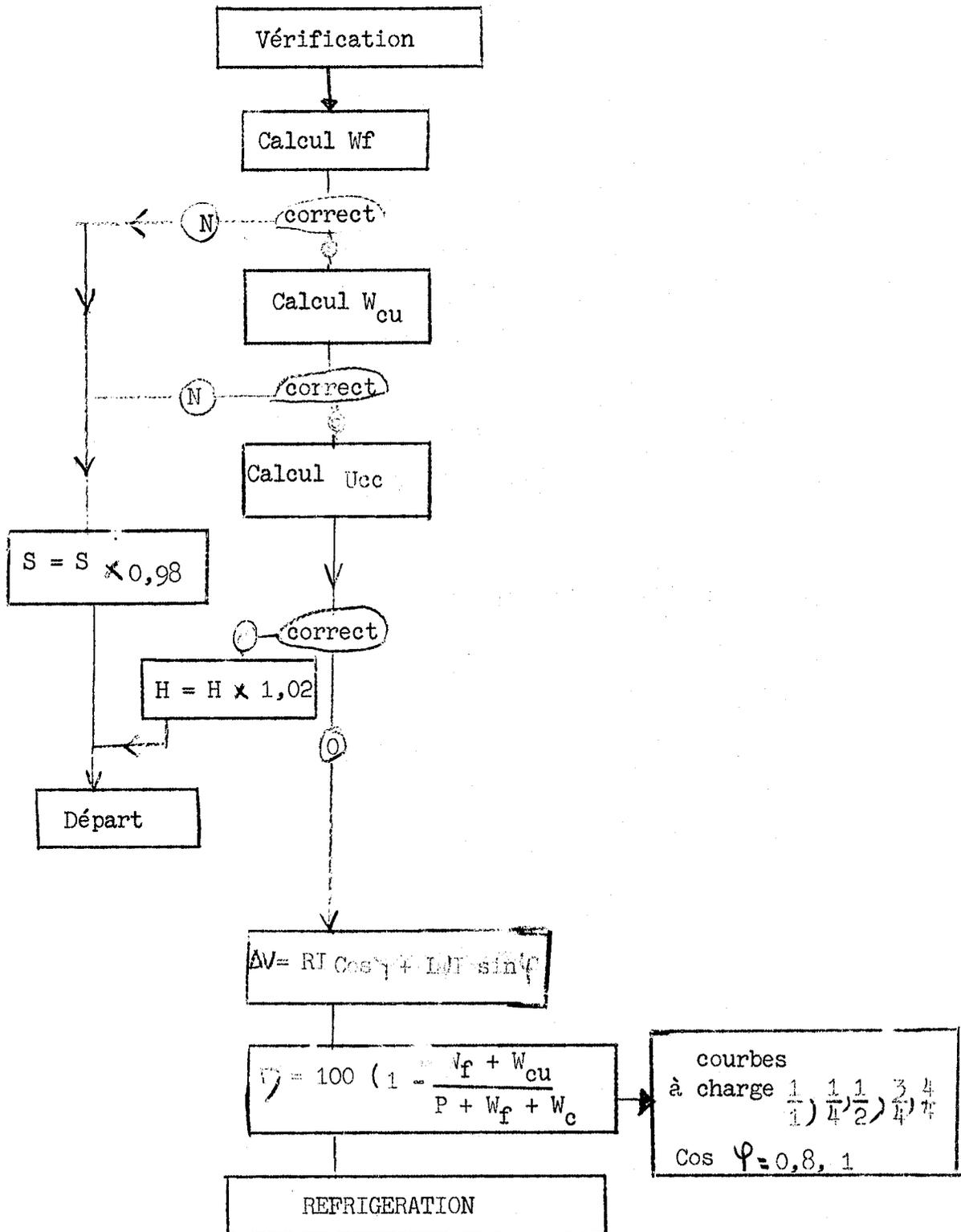
$$\begin{aligned} \omega_1 &= D / \sqrt{S} \\ \phi &= f \text{ xé} \\ V_{1h} &= e_2 (N_2 - 1) + e \\ V_{2h} &= \phi_{\text{int HT}} \phi_{\text{ext BT}} \\ V_{3h} &= (\text{Max } (Z_1, Z_2, Z_3) - 1) \times e_3 \\ V_{4h} &= D_4 \\ H_h &= \sum V_{ih} \\ H_v &= 2 Dd + l''_1 x''_1 \\ a &= e \\ b &= |V_{2h}| \\ f &= e_2 (N_2 - 1) \\ g &= (\text{Max } (Z_1, Z_2, Z_3) - 1) e_3 \end{aligned}$$

Coefficients nécessaires à l'optimisation



Tests pour savoir si l'on doit optimiser ou non.

Nous allons aborder maintenant le calcul définitif des pertes de la chute de tension pour le calcul du rendement à des $\cos \varphi$ différents pour donner au client les caractéristiques exactes de l'appareil.



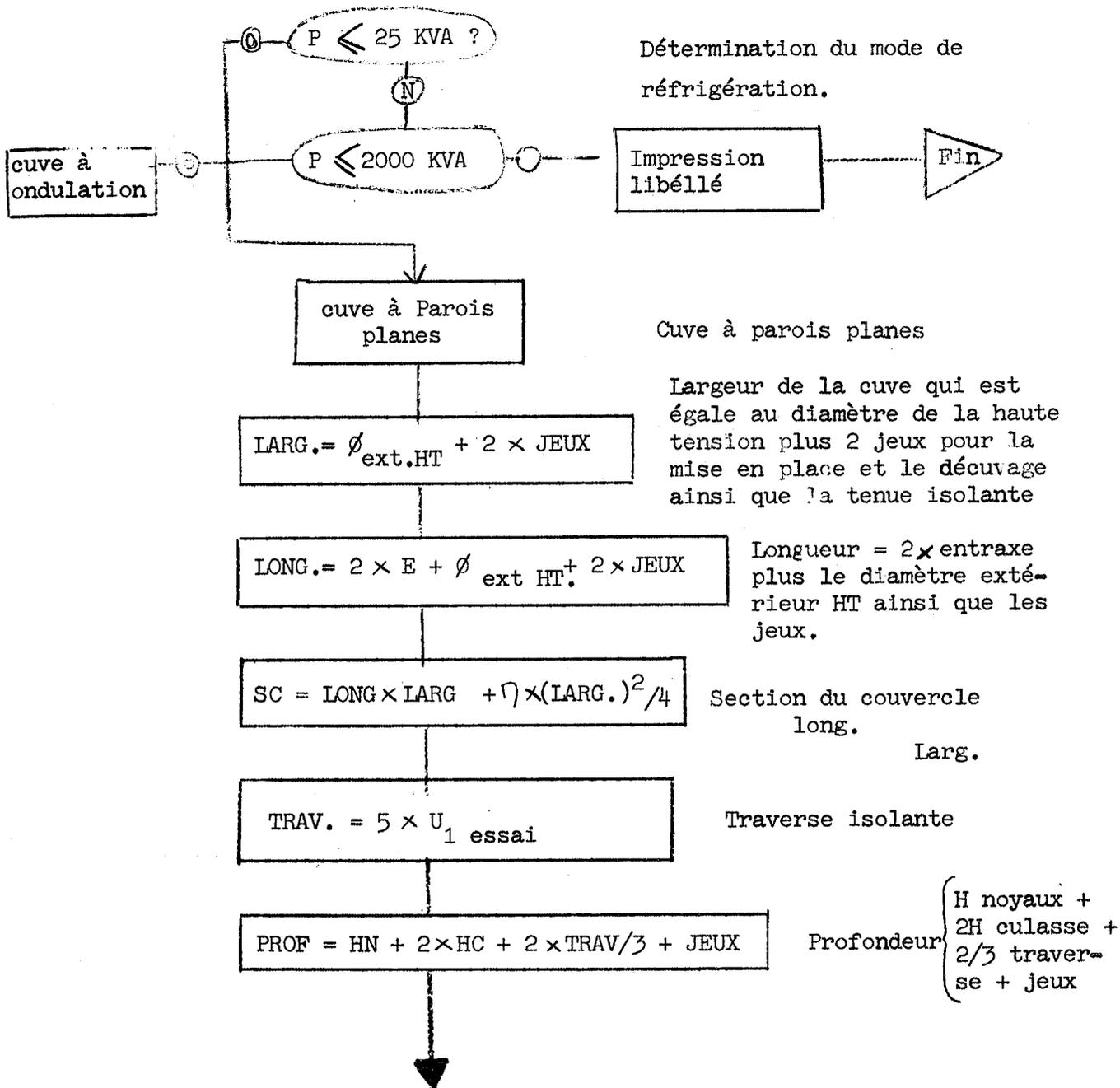
5)- REFRIGERATION.

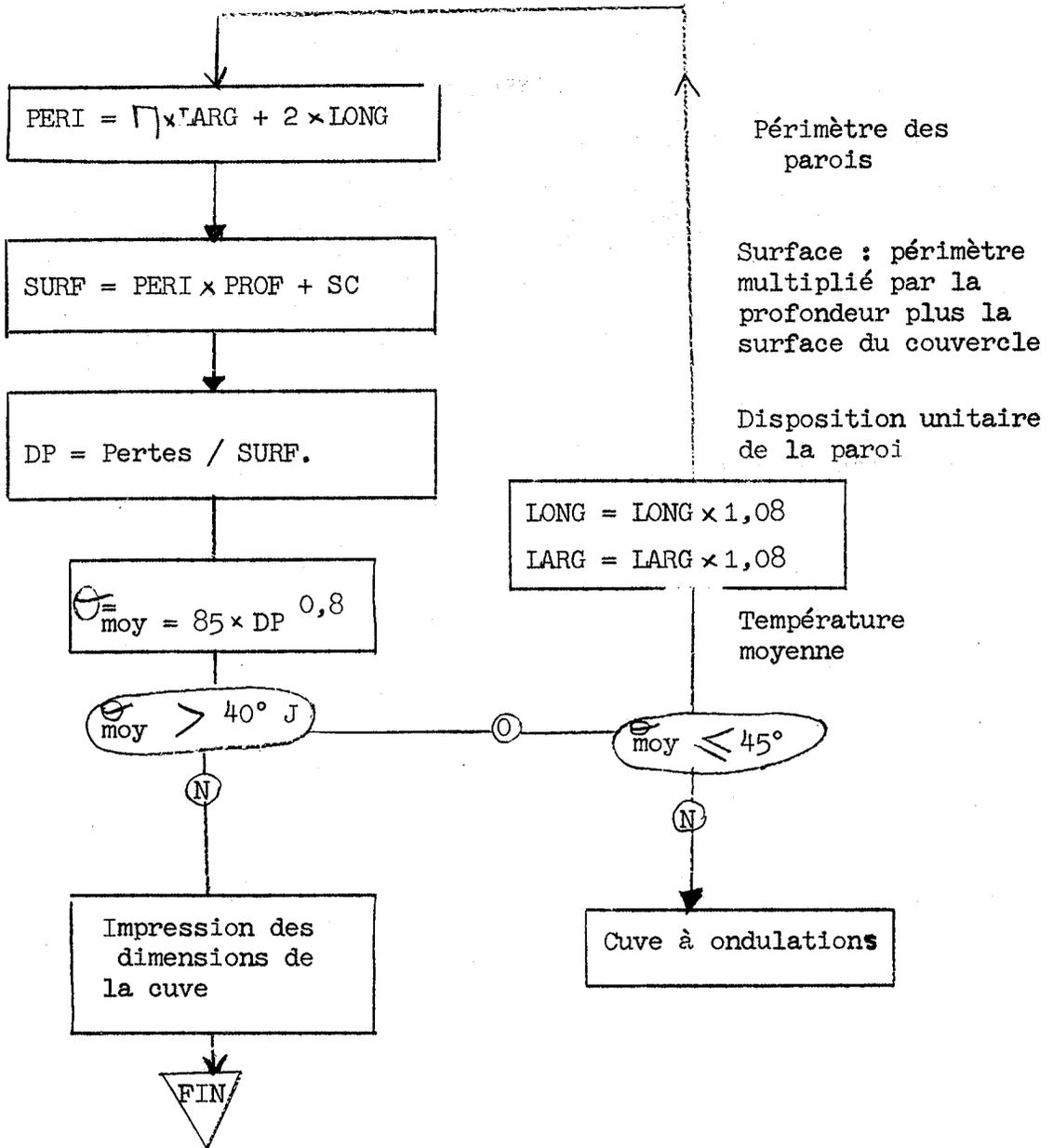
Nous abordons le calcul de la réfrigération c'est à dire l'évacuation de la chaleur provoquée par les pertes. L'intervalle de puissance où notre appareil est défini est tel que nous n'avons à utiliser que des cuves à parois planes ou à ondulations. Dans le cas de pertes trop fortes à évacuer, où même l'utilisation avec des ondulations de grande profondeur n'est plus suffisante, nous provoquons l'impression d'un libellé indiquant d'employer un autre mode de réfrigération.

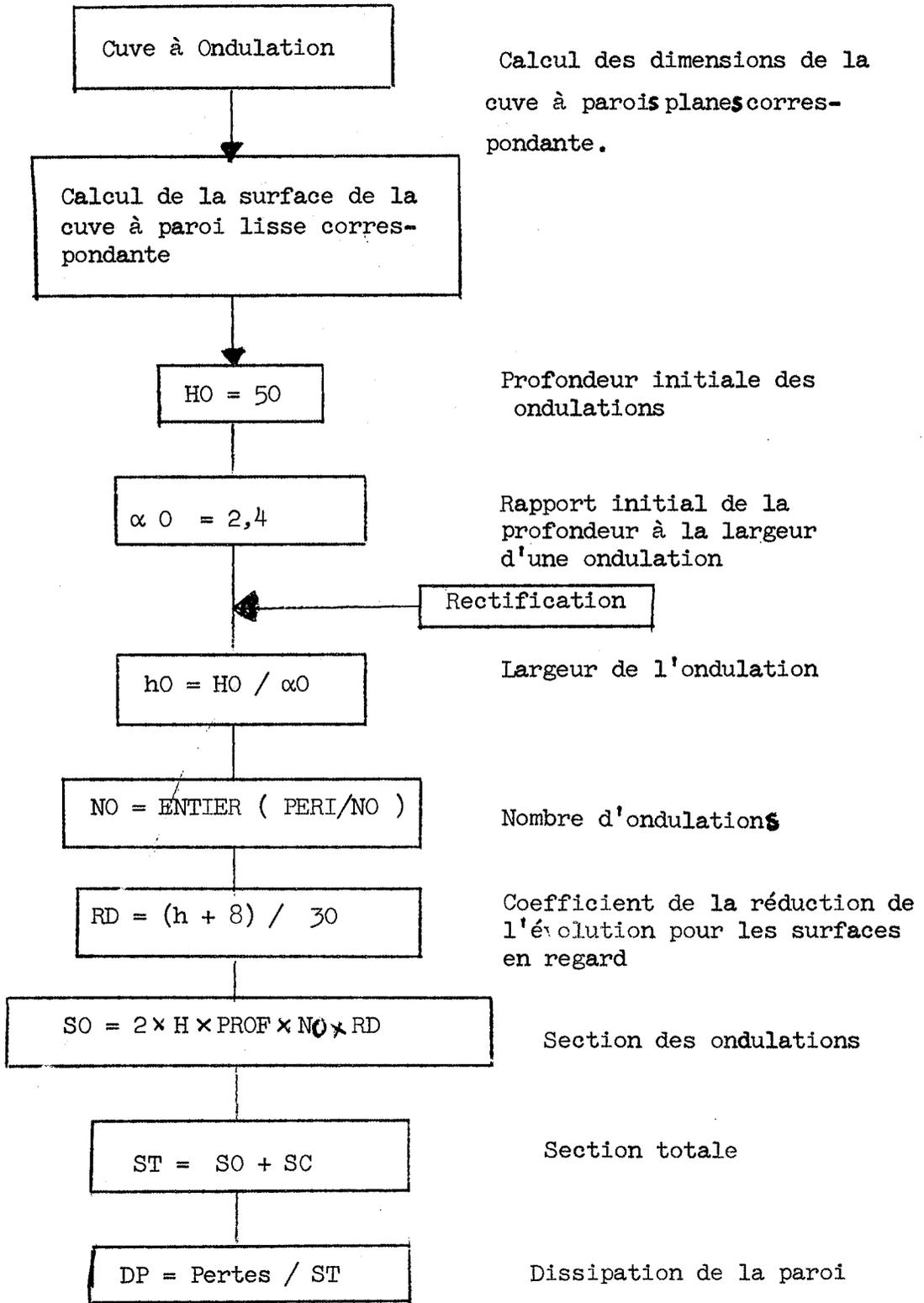
D'après la puissance le programme définit le mode de réfrigération qu'il va utiliser :
jusque 25 KVA cuve à parois planes, de 25 à 2000 KVA cuve à ondulations.

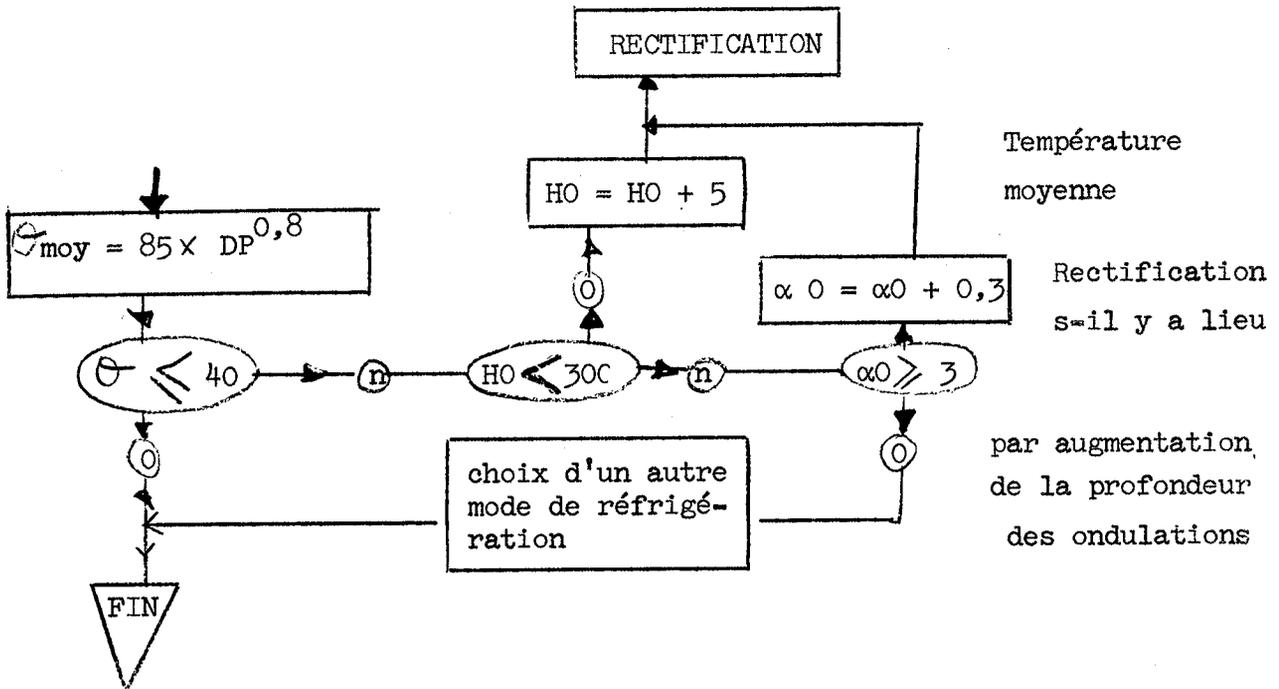
Ensuite le programme calcule les dimensions de la cuve correspondante pour ne pas dépasser une température dans l'huile de 40°C. Si les pertes sont telles que l'on soit à la limite de la cuve à parois planes ou de la cuve à ondulations le programme recherche s'il peut adopter la solution définie au départ sinon il échange automatiquement de mode de refroidissement.

Réfrigération









C o n c l u s i o n

Nous avons essayé au cours de ce chapitre de présenter une méthode de calcul automatique de transformateur.

Nous avons volontairement exposé ce problème dans le cas un peu particulier d'un appareil triphasé à 3 colonnes avec enroulement concentrique sous forme de bobines en série ou en parallèle dans une plage de puissance définie.

Ce travail n'est donc pas général; mais envisager la programmation d'un appareil quelconque aurait considérablement allongé l'exposé au détriment de sa clarté sans apporter beaucoup d'éléments nouveaux: en effet la programmation des transformateurs avec enroulements de type différent se traduit par des organigrammes de silhouette identique à celui que nous présentons.

D'autre part, le calcul de transformateur de grande puissance ne peut être, à notre avis, abordé qu'après une grande expérience dans le calcul normal de ces appareils, donc que dans le cadre d'une entreprise (ce qui n'était pas notre cas).

Si nous avons essayé de présenter un travail compatible avec des contraintes techniques et économiques d'un projet industriel, nous n'avons pas cependant perdu de vue la vocation pédagogique de notre sujet.

C'est ce souci constant qui nous a conduit à éviter systématiquement les problèmes qui, sans apporter beaucoup d'éléments nouveaux à notre exposé, en auraient augmenté le volume et par là même diminué la clarté.

-:-:-:-:-

B I B L I O G R A P H I E - Chapitre II

- (1) Dormont : Calcul et construction des machines électriques statiques. Transformateur. Cours de l'E.S.E.-
- (2) Khulmann : Design of Electrical apparatus.

CHAPITRE - III

ETUDE D'UN ALGORITHME ADAPTE AU CALCUL DES REGIMES

TRANSITOIRES DANS LES MACHINES TOURNANTES.

I - Analyse physique du problème.

Le calcul du régime transitoire d'un alternateur triphasé aboutit généralement à la résolution de systèmes différentiels.

Ces systèmes différentiels dont nous empruntons des exemples à la thèse de Mr. Pillet (1) et au cours de Mr. Poloujadoff (2) sont établis de la manière suivante :

- soit un alternateur triphasé que nous supposerons non amorti.
 - Appelons U^a, U^b, U^c , les tensions aux bornes des bobines statoriques et i^a, i^b, i^c , les courants traversant ces bobines qui ont même résistance: R et même self inductance : L (leurs mutuelles inductances étant égales et de valeur M).
 - Appelons de même U^e la tension aux bornes de l'inducteur traversé par le courant i^e , de résistance R_e et de self inductance L_e .
 - soient M_{ac}, M_{be}, M_{ce} , les mutuelles inductances entre le circuit inducteur et les différentes bobines. Ces mutuelles inductances, varient sinusoidalement avec le temps et ayant même valeur maximum M_e , peuvent s'écrire :

$$M_{ac} = M_e \cos (\omega_r t + \varphi)$$

$$M_{be} = M_e \cos (\omega_r t + \varphi - \frac{2\pi}{3})$$

$$M_{ce} = M_e \cos (\omega_r t + \varphi - \frac{4\pi}{3})$$

ω_r étant la pulsation rotorique

φ le décalage initial

Avec les notations ainsi définies les équations de fonctionnement électrique régies par la loi d'Ohm s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 U^a &= R i^a + L \frac{di^a}{dt} + M \left(\frac{di^b}{dt} + \frac{di^c}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (M_e \cos(\omega_r t + \varphi) i^e) \\
 U^b &= R i^b + L \frac{di^b}{dt} + M \left(\frac{di^a}{dt} + \frac{di^c}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (M_e \cos(\omega_r t + \varphi - \frac{2\pi}{3}) i^e) \\
 U^c &= R i^c + L \frac{di^c}{dt} + M \left(\frac{di^a}{dt} + \frac{di^b}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (M_e \cos(\omega_r t + \varphi - \frac{4\pi}{3}) i^e) \\
 U^e &= R_e i^e + L_e \frac{di^e}{dt} + \frac{d}{dt} (M_e (\cos(\omega_r t + \varphi) i^a + \cos(\omega_r t + \varphi - \frac{2\pi}{3}) i^b + \\
 &\cos(\omega_r t + \varphi - \frac{4\pi}{3}) i^c)
 \end{aligned}$$

Ce système d'équations à coefficients périodiques peut évidemment être résolu par l'une des méthodes classiques de résolution numérique permettant d'obtenir, pour des valeurs discrètes du temps, la valeur des courants respectifs i^a , i^b , i^c .

Mais dans le cas considéré, il est surtout intéressant de connaître les différentes intensités sous la forme de fonctions du temps. Ces fonctions sont des sommes de produits d'exponentielles et de fonctions trigonométriques, ($i = \sum_{i=1}^n$

$e^{p_i t} \cos(a_i t + \varphi_i)$). Les valeurs des coefficients du temps dans les exponentielles (p_i) représentant les inverses des constantes de temps de la machine ont une importance fondamentale dans l'étude d'un régime transitoire.

Dans ce but l'application de la transformation de Laplace donne, en posant :

$$\begin{aligned}
 y^a &= \mathcal{L}(u^a) & x^a &= \mathcal{L}(i^a) \\
 y^b &= \mathcal{L}(u^b) \quad \text{et} & x^b &= \mathcal{L}(i^b) \\
 y^c &= \mathcal{L}(u^c) & x^c &= \mathcal{L}(i^c) \\
 y^e &= \mathcal{L}(u^e) & x^e &= \mathcal{L}(i^e)
 \end{aligned}$$

$$y^a = (R+pL) x^a + pM(x^b+x^c) + p\frac{Me}{2} (\mathcal{E}^{-1}x_{+1}^e + \mathcal{E}x_{-1}^e)$$

$$y^b = (R+pL) x^b + pM(x^a+x^c) + p\frac{Me}{2} (a\mathcal{E}^{-1}x_{+1}^e + a^2\mathcal{E}x_{-1}^e)$$

$$y^c = (R+pL) x^c + pM(x^a+x^b) + p\frac{Me}{2} (a^2\mathcal{E}^{-1}x_{+1}^e + a\mathcal{E}x_{-1}^e)$$

$$y^e = (R+pLe) x^e + p\frac{Me}{2} (\mathcal{E}^{-1}x_{+1}^a + \mathcal{E}x_{-1}^a + a\mathcal{E}^{-1}x_{+1}^b + a^2\mathcal{E}x_{-1}^b + a^2\mathcal{E}^{-1}x_{+1}^c + a\mathcal{E}x_{-1}^c)$$

en considérant que

$$x_{\pm 1} = \int_0^{\infty} e^{-(p \pm j\omega_r)t} i(t) dt$$

$$\mathcal{E} = e^{j\varphi}$$

$$a = e^{\frac{j2\pi}{3}} \text{ d'où } a = e^{j(\varphi + \frac{2\pi}{3})}, a^2 = e^{j(\varphi - \frac{2\pi}{3})}$$

effectuons sur les variables statoriques le changement de variable qui consiste à passer en composantes symétriques; soit à poser :

$$\begin{pmatrix} Y^o \\ Y^d \\ Y^i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} Sx \begin{pmatrix} y^a \\ y^b \\ y^c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X^o \\ X^d \\ X^i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} S \begin{pmatrix} x^a \\ x^b \\ x^c \end{pmatrix} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

il vient :

$$Y^o = (R + p(L + 2M)) X^o$$

$$Y^d = (R + p(L - M)) X^d + p\frac{Me}{2} \mathcal{E} x_{-1}^e$$

$$Y^i = (R + p(L - M)) X^i + p\frac{Me}{2} \mathcal{E}^{-1} x_{+1}^e$$

$$y^e = (Re + pLe) x_e + \frac{3pMe}{2} (\mathcal{E}^{-1} X_{+1}^d + \mathcal{E} X_{-1}^i)$$

remplaçons dans la deuxième et la troisième équation p respectivement par $p + j\omega_r$ et $p - j\omega_r$, le système ci-dessus devient :

$$Y^0 = (R + p(L + 2M)) X^0$$

$$Y_{+1}^d = (R + (p+j\omega_r)(L-M)) X_{+1}^d + (p+j\omega_r) \frac{Me}{2} \mathcal{E} x^e$$

$$Y_{-1}^i = (R + (p-j\omega_r)(L-M)) X_{-1}^i + (p-j\omega_r) \frac{Me}{2} \mathcal{E} x^e$$

$$y_e = (R_e + pLe) x^e + \frac{3pMe}{2} (\mathcal{E}^{-1} X_{+1}^d + \mathcal{E} X_{-1}^i)$$

qui peut s'écrire matriciellement.

$$\begin{array}{c} Y^0 \\ Y_{+1}^d \\ Y_{-1}^i \\ y_e \end{array} = \begin{array}{cccc} R + p(L+2M) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R+(p+j\omega_r)(L-M) & 0 & \frac{Me}{2}(p+j\omega_r)\mathcal{E} \\ 0 & 0 & R+(p-j\omega_r)(L-M) & \frac{Me}{2}(p-j\omega_r)\mathcal{E} \\ 0 & \frac{3}{2} p M_e \mathcal{E}^{-1} & \frac{3}{2} p M_e \mathcal{E} & R_e + pLe \end{array} \begin{array}{c} X^0 \\ X_{+1}^d \\ X_{-1}^i \\ x_e \end{array}$$

De la même manière en considérant un alternateur triphasé mais amorti, nous aboutirions à un système d'équations linéaires par rapport aux variables $X^0 \dots X_{+1}^d \dots \dots \dots$ etc, système représentable matriciellement ainsi :

$$Y = A \cdot X \text{ avec}$$

$R+p(L+2M)$	0	0	0	0	0	0
0	$r_{R+(p+j\omega_r)}(L-M)$	$(p+j\omega_r)\epsilon^2(L-M)$	$1/2(p+j\omega_r)\epsilon M_e$	$1/2(p+j\omega_r)\epsilon M_l$	$-\frac{j}{2}(p+j\omega_r)\epsilon M_t$	
0	$(p-j\omega_r)\omega_r \epsilon^{-1}(L-M)$	$R+(p-j\omega_r)(L-M)$	$1/2(p-j\omega_r)\epsilon^{-1}M_e$	$1/2(p-j\omega_r)\epsilon^{-1}M_l$	$\frac{j}{2}(p-j\omega_r)\epsilon^{-1}M_t$	
0	$3/2 p M_e \epsilon^{-1}$	$3/2 p + \epsilon^{+1}$	$R_e + p L_e$	$p M_e l$	0	0
0	$3/2 p M_l \epsilon^{-1}$	$3/2 p M_l \epsilon^{+1}$	$p M_e l$	$R_l + p L_e$	0	0
0	$3/2 p M_t \epsilon^{-1}$	$3/2 p M_t \epsilon^{+1}$	0	0	$R_t + p L_t$	

Il convient alors de résoudre formellement ce système, puis de trouver les racines du déterminant pour effectuer une décomposition en éléments simples qui nous donnera les intensités en fonction du temps, sous la forme recherchée, par le théorème d'Heaveside.

Les exemples précités sont valables avec certaines approximations mais dans des problèmes plus généraux on est amené à la résolution de systèmes d'ordre plus élevé; il est alors fastidieux de résoudre formellement (et sans erreur) le système établi; il est par contre, à notre avis, impossible de résoudre le déterminant dans un temps raisonnable sans l'aide d'une calculatrice.

En vue de la résolution sur machine de ce type de problème nous présentons un ensemble de programmes qui :

étant donné une matrice Z d'ordre N dont les éléments sont des polynômes $Z_{ij}(p)$ à coefficients complexes (le degré maximum de tous les polynômes étant M) permet :

- Le calcul du déterminant $F(p)$ de cette matrice
- La résolution formelle du système $Y : ZX$ et l'option de X : colonne de fractions rationnelles en p
- La résolution de l'équation algébrique polynomiale $F(p) = 0$
- La décomposition en éléments simples de X et la transformation de Heaveside $I(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(p))$

II - Aspects théoriques.

1) Principe de résolution et calcul du déterminant.

L'algorithme que nous présentons ici est une généralisation à des matrices polynomes de la méthode de triangularisation de Gauss pour les matrices numériques.

Considérons une matrice polynome $Z(p) = Z_{ij}(p)$

Définissons comme Mr. Gastinel (3) deux opérations à l'aide desquelles nous établirons notre algorithme.

O1 : multiplication d'une ligne de $Z(P)$ par une constante $\neq 0$

O2 : multiplication d'une ligne de $Z(P)$ par un polynôme arbitraire et addition à une autre ligne.

l'opération O1 multiplie le déterminant par une constante

l'opération O2 ne change pas le déterminant.

A l'aide de ces deux opérations nous allons modifier la matrice Z de manière à ce qu'elle ait la forme triangulaire supérieure (ou même diagonale sous certaines conditions) dont le déterminant sera le produit des éléments diagonaux.

Considérons donc la matrice $Z(p)$ dont le degré du polynôme de degré maximum est M . Supposons que $Z_{11}(p)$ soit un terme de plus bas degré (q) de la première colonne. Soit $Z_{i1}(p)$ le $i^{\text{ème}}$ terme de cette colonne de degré l . Il existe deux polynômes Q_{i1} et r_{i1} tels que $Z_{i1} = Q_{i1} Z_{11} + r_{i1}$ avec $0 \leq \text{degré } r_{i1} \leq q$. Multiplions donc la première ligne par $-Q_{i1}(p)$ et ajoutons la à la $i^{\text{ème}}$: il reste en $i^{\text{ème}}$ ligne le terme $Z_{i1}(p)$ et en $i^{\text{ème}}$ ligne le terme r_{i1} de degré $\leq q$; en échangeant les deux lignes et en tenant compte du signe nous obtenons une matrice de même déterminant que Z mais nous avons abaissé le degré du 1^{er} et $i^{\text{ème}}$ terme de la première colonne.

Au bout d'un nombre fini d'opérations analogues le $i^{\text{ème}}$ terme sera nul. En effectuant ces opérations sur tous les termes de la première colonne nous obtenons une matrice $Z^{(1)}$ avec $\det(Z^{(1)}) = \det(Z)$ et de la forme :

$$Z^{(1)}(p) = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(1)} & \dots & Z_{1n}^{(1)} \\ 0 & Z_{22}^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & Z_{i2}^{(1)} & Z_{in}^{(1)} \end{pmatrix}$$

En opérant de la même manière sur toutes les lignes nous obtenons finalement $Z^{(n)}(p)$ avec :

$$Z^{(n)} = \begin{vmatrix} Z_{11}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & Z_{1n}^{(1)} \\ 0 & Z_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & Z_{nn}^{(n)} \end{vmatrix}$$

dont le déterminant $\det(Z^{(n)}) = \det Z = \prod_{i=1}^n Z_{ii}^{(i)}$

La résolution du système pourra être effectuée de deux manières différentes :

a) Considérer la matrice Z comme une matrice N,N+1 et résoudre un système triangulaire supérieur après triangularisation

b) Appliquer la méthode de Cramer en écrivant $X_i = \frac{F_j(p)}{F(p)}$ où $F_i()$ est le déterminant obtenu en remplaçant dans le déterminant de Z(p) la i^{ème} colonne par Y qui est la colonne du second membre.

Nous avons, pour des commodités de programmation, adopté la seconde méthode qui utilise N fois le calcul du déterminant.

2) Résolution de l'équation algébrique polynomiale
 $F(p) = 0$

A l'algorithme précédent nous avons joint une méthode de recherche des racines d'un polynôme à coefficients complexes par la méthode de Newton.

Soit $P_n(z) = \sum_{k=0}^n (ar_k + i ai_k) z^{n-k}$ un polynôme à coefficients complexes. Sa dérivée sera :

$$P'_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) (ar_k + i ai_k) z^{n-k-1}$$

à partir de $z_0 = 1+i$ nous allons former une suite d'itérés de la manière suivante :

$$z_{k+1} = z_k - \frac{P_n(z_k)}{P'_n(z_k)}$$

$$\text{Soit } z_{r,k+1} = z_{r,k} - \frac{P_{r,n}(z_k) P'_{r'}(z_k) + p_{in}(z_n) P'_{in}(z_k)}{P'_{rn^2}(z_k) + P'_{ni^2}(z_k)}$$

$$z_{ik+1} = z_{ik} - \frac{P_{in}(z_n) P'_{rn}(z) - P_{rn}(z) P'_{in}(z)}{P'_{rn^2}(z_k) + P'_{in^2}(z_k)}$$

où P_{rn} , P_{in} sont respectivement les parties réelle et imaginaire de P_n .

L'arrêt de l'itération pourra avoir lieu dans trois cas.

a) Si au bout de p itérations on n'a pas pu avoir

$$\left(|z_{rk+1} - z_{rk}| + |z_{ik+1} - z_{ik}| \right) / \left(|z_{rk}| + |z_{ik}| \right) < 10^{-q}$$

on arrête l'itération car on n'aura pas convergence.

- Si ce test est vérifié on opérera comme suit.

b) Nous continuerons à itérer en demandant que

$$\left(|P_{rn}| + |P_{in}| \right) / \left(|a_{ro}| + |a_{io}| \right) < 10^{-n}.$$

- Si au bout de m itérations ceci n'est pas vérifié nous abaissons n d'une unité en remettant m à zéro, si n devient positif on arrête l'itération.

c) Si le test est vérifié nous avons alors une racine z_j . Pour effectuer le test b; nous avons calculé le polynome; ce calcul a été fait par le schéma de Horner si bien que, lorsque le dernier terme du schéma de Horner (donc le polynôme) est nul, les termes restants non nuls sont les coefficients du polynôme résiduel qui ne contient pas z_j ; nous continuons ensuite avec le degré abaissé d'une unité.

Lorsque nous avons trouvé toutes les racines par cette méthode nous reprenons chaque racine; pour chacune des

racines nous calculons la valeur de $P_n(z)$ correspondante; si cette valeur n'est pas zéro (à la précision requise) nous améliorons cette racine à partir de sa valeur par la méthode de Newton, sinon nous passons à la racine suivante :

Pour les tests nous avons choisi par expérience

$$p = 400 \quad q = 2 \quad n = 7 \quad m = 15$$

III Programmes et Résultats.

A chacun des trois algorithmes précédemment présentés nous avons fait correspondre un programme écrit sous forme de procédure Algol pour une utilisation plus souple.

Le calcul du déterminant et l'inversion de matrice ont été regroupés en deux procédures qui doivent être déclarées dans des blocs de même niveau, ce sont les procédures POLYDETER et POLYCOMPLINVE

1)

Procédure POLYDETER (AR, AI, NCOL, N, COER, COEI, NP1);

Valeur AR, AI, NCOL, N;

réel, Tableau AR, AI, COER, COEI;

entier N, NCOL, NP1;

commentaire : Cette procédure assure le calcul du déterminant complexe dont les coefficients sont placés dans COER pour la partie réelle et COEI pour la partie imaginaire, de la matrice dont les éléments sont des polynômes placés dans les tableaux à trois dimensions AR pour la partie réelle AI pour la partie imaginaire. AR [I, J, 1] , AI [I, J, 1] étant le terme constant et AR [I, J, N] , AI [I, J, N] le terme de plus haut degré.

N indique le degré du polynôme de plus haut degré,

NCOL l'ordre de la matrice.

Les tableaux AR, AI devront être déclarés AR, AI [I: N, 1: N
1: N x NCOL + 1] et COER, COEI [1: N x NCOL + 1] ,

AR et AI sont conservés. ;

```

'DEBUT' 'REEL' SAR,SAI,SBR,SBI,TR,TI FF
'ENTIER' I,J,K,J1,J2,J3,J4,J5,J6,J7,J8,J9,J10,
J11,M FFMF=N*NCOL+1 FF 'DEBUT'
'REEL' 'TABLEAU' C1R,C1I,C2R,C2I.(1FM). FF
'ENTIER' 'TABLEAU' MAT.(1FNCOL,1FNCOL). FF
'ENTIER' 'PROCEDURE' MAX(A,B) FF 'ENTIER' A,B FF
MAXF='SI' A'SUPEG'B 'ALORS' A 'SINON' B FF
'PROCEDURE' MULTCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
'DEBUT' C1F=A1*B1-A2*B2 FF
C2F=A1*B2+A2*B1
'FIN' MULTCOMP FF
'PROCEDURE' DIVCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
'DEBUT' C1F=(A1*B1+A2*B2)/(B1**2+B2**2) FF
C2F=(A2*B1-A1*B2)/(B1**2+B2**2) FF
'FIN' DIVCOMP FF
DEPARTF 'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE'
'DEBUT' 'POUR' JF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE'
'DEBUT' MAT.(I,J).F=0 FF
'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
'DEBUT' 'SI' AR.(I,J,K). 'NONEG' 0 'OU' AI.(I,J,K). 'NONEG' 0 'ALORS'
MAT.(I,J).F=K
'FIN'
'FIN'
'FIN' FF J1F=1 FF
LOFJ9F=OFF 'POUR' IF=J1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE'
'DEBUT' 'SI' MAT.(I,J1). 'INFER' 0 'ALORS' 'ALLERA' SORTIE
'SINON' 'SI' MAT.(I,J1).=0 'ALORS' 'ALLERA' L1
'SINON' J9F=J9+1 FF J3F=I FF
L1F 'FIN' FF 'SI'
(J9-1) 'SUPER' 0 'ALORS' 'ALLERA' L2 'SINON'
'SI' (J3-J1) 'INFER' 0 'ALORS' 'ALLERA' SORTIE 'SINON' 'SI' (J3-J1)=0
'ALORS' 'ALLERA' L12 'SINON'
'POUR' JF=J1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE'
'DEBUT' J2F=MAX(MAT.(J3,J).,MAT.(J1,J).) FF
J4F=MAT.(J3,J). FF MAT.(J3,J).F=MAT.(J1,J). FF
MAT.(J1,J).F=J4 FF
'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' J2 'FAIRE'
'DEBUT' SARF=AR.(J3,J,K). FF AR.(J3,J,K).F=AR.(J1,J,K). FF
AR.(J1,J,K).F=-SAR FF
SAIF=AI.(J3,J,K). FF AI.(J3,J,K).F=AI.(J1,J,K). FF
AI.(J1,J,K).F=-SAI FF
'FIN' 'FIN' FF 'ALLERA' L12 FF
L2F J3F=J1+1 FF 'POUR' IF=J3 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL
'FAIRE' 'DEBUT'
L3F 'SI' MAT.(I,J1). 'INFER' 0 'ALORS' 'ALLERA' SORTIE
'SINON' 'SI' MAT.(I,J1).=0 'ALORS' 'ALLERA' L11
'SINON' 'SI' MAT.(J1,J1). 'INFER' 0 'ALORS' 'ALLERA' SORTIE
'SINON' 'SI' MAT.(J1,J1).=0 'ALORS' 'ALLERA' L4
'SINON' 'SI' MAT.(I,J1). =MAX(MAT.(I,J1).,MAT.(J1,J1).) 'ALORS'
'ALLERA' L5 FF
L4F 'POUR' JF=J1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE' 'DEBUT'
J2F=MAX(MAT.(J1,J).,MAT.(I,J).) FF J4F=MAT.(J1,J). FF
MAT.(J1,J).F=MAT.(I,J). FF MAT.(I,J).F=J4 FF
'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' J2 'FAIRE'
'DEBUT' SARF=AR.( I ,J,K). FF AR.( I ,J,K).F=AR.(J1,J,K). FF
AR.(J1,J,K).F=-SAR FF
SAIF=AI.( I ,J,K). FF AI.( I ,J,K).F=AI.(J1,J,K). FF

```

```

AI.(J1,J,K).F=-SAI FF
  'FIN' 'FIN' FF 'ALLERA' L3 FF
L5F J7F=MAT.(I,J1). FF J5F=MAT.(J1,J1). FF J6F=J7-J5 FF
DIVCOMP(AR.(I,J1,J7).,AI.(I,J1,J7).,AR.(J1,J1,J5).,AI.(J1,J1,J5).,
SBR,SBI) FF
'SI' SBR**2+SBI**2-16 'INFEG' O 'ALORS' 'ALLERA' L6
  'SINON' 'SI' J6 'INFER' O 'ALORS' 'ALLERA' SORTIE
  'SINON' 'SI' J6=0 'ALORS' 'ALLERA' L4 FF
L6F 'POUR' JF=J1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE'
  'DEBUT' J5F=MAT.(J1,J). FF
  'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' J5 'FAIRE'
  'DEBUT' J7F=K+J6 FF
  'SI' (J7-M) 'SUPER' O 'ALORS' 'ALLERA' L10 FF
  MULTCOMP(SBR,SBI,AR.(J1,J,K).,AI.(J1,J,K).,TR,TI) FF
'SI' (AR.(I,J,J7).-TR)**2+(AI.(I,J,J7).-TI)**2 -4F*-16 'INFEG' O
  'ALORS' 'ALLERA' L8FF
AR.(I,J,J7).F=AR.(I,J,J7).-TR FF
AI.(I,J,J7).F=AI.(I,J,J7).-TI FF
  'ALLERA' L9 FF
L8F AR.(I,J,J7).F=AI.(I,J,J7).F=0 FF
L9F 'FIN' 'FIN' FF
L10F 'POUR' JF=J1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE' 'DEBUT'
  J7F=MAX(MAT.(I,J).,MAT.(J1,J).+J6) FF MAT.(I,J).F=0 FF
  'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE' 'DEBUT'
'SI' AR.(I,J,K). 'NONEG' O 'OU' AI.(I,J,K). 'NONEG' O 'ALORS'
MAT.(I,J).F=K FF
FF 'FIN' FF 'FIN' FF
L11F 'FIN' FF 'ALLERA' L0 FF
L12F J1F=J1+1 FF 'SI' (J1-NCOL) 'INFER' O 'ALORS' 'ALLERA' L0 FF
  'POUR' JF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' NCOL 'FAIRE'
  'DEBUT' J2F=MAT.(J,J). FF
  'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' J2 'FAIRE' 'DEBUT'
C1R.(K).F=AR.(J,J,K). FF C1I.(K).F=AI.(J,J,K). 'FIN' FF
L13F 'SI' (J-1) 'INFER' O 'ALORS' 'ALLERA' SORTIE
  'SINON' 'SI' J-1=0 'ALORS' 'ALLERA' L14
  'SINON' 'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' NP1 'FAIRE' 'DEBUT'
C2R.(K).F=COER.(K). FF C2I.(K).F=COEI.(K). FF 'FIN' FF
  'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE' 'DEBUT'
COER.(K).F=COEI.(K).F=0 'FIN' FF
  'SI' J2 'INFER' O 'ALORS' 'ALLERA' SORTIE 'SINON' 'SI' J2=0 'ALORS'
  'ALLERA' L15 'SINON' 'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' J2
  'FAIRE' 'DEBUT' 'POUR' J10F=1 'PAS' 1 'JUSQUA' NP1 'FAIRE'
  'DEBUT' J11F=K+J10-1 FF
MULTCOMP(C1R.(K).,C1I.(K).,C2R.(J10).,C2I.(J10).,
TR,TI) FF
COER.(J11).F=COER.(J11).+TR FF
COEI.(J11).F=COEI.(J11).+TI FF
  'FIN' 'FIN' FF NP1F=J11 FF 'ALLERA' L15 FF
L14F 'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' J2 'FAIRE'
  'DEBUT' COER.(K).F=C1R.(K). FF COEI.(K).F=C1I.(K). 'FIN' FF
NP1F=J2 FF
L15F 'FIN' FF 'FIN' FF
SORTIEF 'FIN' POLYDETER FF

```

Procédure POLYCOMPLEXEINV (AR, AI, NCOL, N, DETR, DETI, INVR, INVI,
NT, NT1);

valeur AR, AI, NCOL, N;

réel Tableau AR, AI, INVR, INVI, DETR, DETI;

entier Tableau NT;

entier N, NCOL, NT1 ;

Commentaire . Cette procédure qui doit être déclarée dans un bloc de niveau au plus égal à celui de POLYDETER calcule dans INVR, INVI les coefficients du numérateur de l'inverse de AR, AI le dénominateur commun à tous les termes étant dans DETR, DETI. Le tableau NT contient le degré maximum du polynôme INVR, INVI d'indices correspondants et NT1 le degré du déterminant INVR, INVI doivent avoir les mêmes dimensions que AR, AI soit {1: N, 1:N, 1:NCOL * N + 1.} La matrice AR, AI est conservée;

```

'DEBUT' 'ENTIER' I,J,K,L,M,NT1 FF
MF= N * NCOL + 1 FF
'DEBUT' 'REEL' 'TABLEAU' CR,CI.(1FM).,BR,BI.(1FN,1FM). FF
POLYDETER(AR,AI,NCOL,N,DETR,DETI,NT1) FF
'POUR' LF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT' 'POUR' JF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT' 'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
'DEBUT' BR.(I,K).F=AR.(I,J,K). FF BI.(I,K).F=AI.(I,J,K).
'FIN' FF
'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
'DEBUT' AR.(I,J,K).F=AI.(I,J,K).F=0 'FIN' FF
AR.(L,J,1).F=1.0 FF
POLYDETER(AR,AI,NCOL,N,CR,CI,NT.(L,J).) FF
'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' NT.(L,J). 'FAIRE'
'DEBUT' INVR.(J,L,K).F=CR.(K). FF INVI.(J,L,K).F=CI.(K). 'FIN'
FF 'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'POUR' KF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
'DEBUT' AR.(I,J,K).F=BR.(I,K).FF AI.(I,J,K).F=BI.(I,K). 'FIN'
'FIN' BOUCLE DE J FF
'FIN' BOUCLE DEL FF
'FIN' 'FIN' COMPLEXRINV FF

```

Procédure NEWTONCOMPLEX (CR, CI, RR, RI, PREC, M, DIV);

Valeur CR, CI, M;

réel tableau CR, CI, RR, RI;

entier M; étiquette DIV;

Commentaire : cette procédure calcule les racines du polynôme de degré M dont les coefficients complexes sont dans CR pour la partie réelle et CI pour la partie imaginaire. Les racines seront trouvées dans RR pour la partie réelle RI pour la partie imaginaire la $i^{\text{ème}}$ racine étant $RR [I] + j RI [I]$ trouvée avec la précision $PREC[I]$ c'est à dire que $P_n(RR)/a_n < 10^{-PREC[I]}$.

Les coefficients du polynôme sont conservés.

```

'DEBUT' 'TABLEAU' AR,AI,BR,BI,FR,FI,DFR,DFI.(OFM).,RAR,RAI.(1FM).FF
'REEL' ZR,ZI,S,ZOR,ZOI,ZKR,ZKI,XR,XI FF
'ENTIER' I,P,Q,R,K,N,X FF 'BOOLEEN' B,C,BOOL FF
'PROCEDURE' MULTCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
'DEBUT' C1F=A1*B1-A2*B2 FF
        C2F=A1*B2+A2*B1
'FIN' MULTCOMP FF
'PROCEDURE' DIVCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
'DEBUT' C1F=(A1*B1+A2*B2)/(B1**2+B2**2) FF
        C2F=(A2*B1-A1*B2)/(B1**2+B2**2) FF
'FIN' DIVCOMP FF
'PROCEDURE' HORNERCOMPLEXE(N,AR,AI,ZR,ZI,PR,PI) FF
'VALEUR' ZR,ZI FF 'TABLEAU' AR,AI,PR,PI FF 'REEL' ZR,ZIFF
'ENTIER' N FF
'DEBUT' 'REEL' RR,RI FF 'ENTIER' IFF
        'PROCEDURE' MULTCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
'DEBUT' C1F=A1*B1-A2*B2 FF
        C2F=A1*B2+A2*B1
'FIN' MULTCOMP FF
PR.(0).F=AR.(0). FF PI.(0).F=AI.(0). FF
'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT'
MULTCOMP(PR.(I-1).,PI.(I-1).,ZR,ZI,RR,RI) FF
PR.(I).F=AR.(I).+RR FF
PI.(I).F=AI.(I).+RI
'FIN'
'FIN' HORNERCOMPLEXE FF
        'AIGUILLAGE' AIGF=REEL,IMAG FF ZORF=ZOIF=1.OFF
SF=0 FF 'POUR' IF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE' SF=S+ABS(CI.(I).) FF
XF=SIGNE(ABS(S))+1 FF
BOOLF= 'VRAI' FF RECF
BF=CF= 'VRAI' FF RF=0 FF NF=M FF
'POUR' IF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' 'DEBUT' AR.(I).F=CR.(I).
AI.(I).F=CI.(I). 'FIN' FF
'ALLERA' ITER FF
REELF 'SI' RI.(N+1)./RR.(N+1). 'INFER' F*-1 'ALORS'
'DEBUT' ZORF=RR.(N+1).+RI.(N+1). FF ZOIF=RR.(N+1).-RI.(N+1). FF
'ALLERA' SAUT FF 'FIN' FF
ZORF=RR.(N+1). FF ZOIF=-RI.(N+1). FF
SAUTF 'ALLERA' ITER FF
IMAGF ZORF=RR.(N+1). FF ZOIF=RI.(N+1). FF
ITERF HORNERCOMPLEXE(N,AR,AI,ZOR,ZOI,FR,FI) FF
'POUR' IF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N-1 'FAIRE'
'DEBUT' BR.(I).F=(N-I)*AR.(I). FF
        BI.(I).F=(N-I)*AI.(I). FF
'FIN' FF
HORNERCOMPLEXE(N-1,BR,BI,ZOR,ZOI,DFR,DFI) FF
DIVCOMP(FR.(N).,FI.(N).,DFR.(N-1).,DFI.(N-1).,XR,XI) FF
ZKRF=ZOR-XR FF ZKIF=ZOI-XI FF
'SI' 'NON' B 'ALORS' 'ALLERA' ACC FF
'SI' (ABS(ZKR-ZOR)+ABS(ZKI-ZOI))/(ABS(ZKR)+ABS(ZKI)) 'INFER' F*-2
'ALORS' 'ALLERA' CONV FF
RF=R+1 FF 'SI' R'SUPER'400'ALORS' 'ALLERA' DIV FF
RACF ZORF=ZKR FF ZOIF=ZKI FF 'ALLERA' ITER FF
CONVF PF=QF=0 FF BF= 'NON' B FF
ACCF QF=Q+1 FF

```

```

'SI' (ABS(FR.(N).)+ABS(FI.(N).))/(ABS(AR.(N).)+ABS(AI.(N).))
'INFEG' 10**(+P-7) 'ALORS' 'ALLERA' ADEG FF
'SI' Q'SUPER' 15 'ALORS' 'DEBUT' PF=P+1 FF QF=0 'FIN' FF
  'ALLERA' RAC FF
  ADEGF RR.(N).F=ZKR FF RI.(N).F=ZKI FF PREC.(N).F=ABS(P-7) FF
'SI' 'NON' BOOL 'ALORS' 'ALLERA' JOJO FF
'SI' N=2 'ALORS' 'DEBUT'
DIVCOMP( FR.(1).,FI.(1).,-FR.(0).,-FI.(0).,RR.(1).,RI.(1).) FF
'ALLERA' SORTIE 'FIN' FF
  NF=N-1 FF
  'POUR' IF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT' AR.(I).F=FR.(I). FF AI.(I).F=FI.(I). 'FIN' FF
  AR.(N+1).F=AI.(N+1).F=0.0 FF
  BF='VRAI' FF 'ALLERA' AIG.(X). FF
DIVF 'SI' 'NON' C 'ALORS' 'ALLERA' INSC FF
  DIVCOMP(1.0,0.0,ZOR,ZOI,ZOR,ZOI) FF
'SI' X=2 'ALORS' DIVCOMP(-AR.(1)./N,-AI.(1)./N,AR.(0).,AI.(0).,ZOR,ZOI) FF
  CF='NON' C FF 'ALLERA' ITER FF
INSCF ECRIRE('('DIVERGENCE')) FF
  SORTIE F
'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE' 'DEBUT'
  RAR.(I).F=RR.(I). FF RAI.(I).F=RI.(I). FF
'FIN' FF
  IF=1 FF
  TOPF HORNERCOMPLEXE (N,CR,CI, RAR.(I)., RAI.(I)., FR,FI) FF
'SI' ABS(FR.(N)./CR.(N).)+ABS(FI.(N)./CI.(N).) 'INFEG' F*-7
'ALORS' 'ALLERA' Y A BON FF
  ZORF= RAR.(I). FF ZOIF= RAI.(I). FF BOOLF= 'FAUX' FF 'ALLERA' RECFF
JOJOF RAR.(I).F=RR.(N). FFRAI.(I).F=RI.(N).FF
Y A BONF IF=I+1FF 'SI' I'INFEG' M 'ALORS' 'ALLERA' TOP FF
'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE' 'DEBUT' RR.(I).F=RAR.(I).FF
  RI.(I).F=RAI.(I). 'FIN' FF
'FIN' FF

```

Procédure HEAVESIDE (NR, NI, DR, DI, M, M1, RAR, RAI, OM, EO,
TERR, TERI);

valeur NR, NI, DR, DI, M, M1, OM, EO, RAR, RAI;

réel tableau NR, NI, DR, DI, RAR, RAI, TERR, TERI

entier M, M1; réel OM, EO;

Commentaire : Cette procédure calcule les coefficients TERR
pour la partie réelle TERI pour la partie imaginaire de la fonc-
tion $EO \times N(P) / (P - JOM) D(P)$ où les coefficients de $N(P)$ degré
M1 sont dans NR, NI et ceux de $D(P)$ de degré M dans DR, DI.
Les coefficients des numérateurs et dénominateurs sont conservés.

```

'DEBUT' 'TABLEAU' TR,TI.(OFM1)..,T1R,T1I.(OFM)..,D1R,D1I.(OFM-1)..,
TDR,TDI.(OFM-1). FF
'REEL' ZR,ZI FF 'ENTIER' N FF
      'PROCEDURE' MULTCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
'DEBUT' C1F=A1*B1-A2*B2 FF
      C2F=A1*B2+A2*B1
'FIN' MULTCOMP FF
'PROCEDURE' DIVCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
  'DEBUT' C1F=(A1*B1+A2*B2)/(B1**2+B2**2) FF
      C2F=(A2*B1-A1*B2)/(B1**2+B2**2) FF
  'FIN' DIVCOMP FF
'PROCEDURE' HORNERCOMPLEXE(N,AR,AI,ZR,ZI,PR,PI) FF
'VALEUR' ZR,ZI FF 'TABLEAU' AR,AI,PR,PI FF 'REEL' ZR,ZIFF
'ENTIER' N FF
'DEBUT' 'REEL' RR,RI FF 'ENTIER' IFF
      'PROCEDURE' MULTCOMP(A1,A2,B1,B2,C1,C2) FF
'REEL' A1,A2,B1,B2,C1,C2 FF
'DEBUT' C1F=A1*B1-A2*B2 FF
      C2F=A1*B2+A2*B1
'FIN' MULTCOMP FF
PR.(0).F=AR.(0). FF PI.(0).F=AI.(0). FF
'DEBUT'
MULTCOMP(PR.(I-1)..,PI.(I-1)..,ZR,ZI,RR,RI) FF
PR.(I).F=AR.(I).+RR FF
PI.(I).F=AI.(I).+RI
'FIN'
'FIN' HORNERCOMPLEXE FF
HORNERCOMPLEXE(M1,NR,NI,0.0,OM,TR,TI) FF
HORNERCOMPLEXE(M,DR,DI,0.0,OM,T1R,T1I) FF
DIVCOMP(EO*TR.(M1)..,EO*TI.(M1)..,T1R.(M)..,T1I.(M)..,TERR.(0)..,
TERI.(0).) FF
'POUR' NF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' M-1 'FAIRE'
'DEBUT' D1R.(N).F=(M-N)*DR.(N). FF
      D1I.(N).F=(M-N)*DI.(N).
'FIN' FF
'POUR' NF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
'DEBUT'
HORNERCOMPLEXE(M1,NR,NI,RAR.(N)..,RAI.(N)..,TR,TI) FF
HORNERCOMPLEXE(M-1,D1R,D1I,RAR.(N)..,RAI.(N)..,TDR,TDI) FF
MULTCOMP(RAR.(N)..,RAI.(N)..-OM,TDR.(M-1)..,TDI.(M-1)..,ZR,ZI) FF
DIVCOMP(EO*TR.(M1)..,EO*TI.(M1)..,ZR,ZI,TERR.(N)..,TERI.(N).)
'FIN' FF
'FIN' HEAVESIDE FF

```

Nous avons testé l'ensemble de ces deux programmes, l'exemple simple d'une matrice 3,3 tirée du cours de Mr. Poloujadoff et nous avons obtenu les résultats suivants : *temps : 5 s.*

$$\begin{aligned} \text{Racine} &= 30,1628 + i 2,7379 \quad 10^{-5} \\ &= 10,9357 + i 298,996 \\ &= 10,9357 - i 298,996 \end{aligned}$$

Valeurs approximatives données dans le cours de Mr. Poloujadoff

$$\begin{aligned} &= 30 \\ &= 11 + i 300 \\ &= 11 - i 300 \end{aligned}$$

Nous avons par ailleurs appliqué notre méthode au calcul des valeurs propres d'une matrice d'ordre 7 à coefficients complexes :

$$A = \begin{bmatrix} 9+10i & 2+34i & 61+5i & 24+7i & 57+6i & 4+24i & 5+2i \\ 3+5i & 41+62i & 5+81i & 58+67i & 24+51i & 5+2i & 8+6i \\ 24+31i & 31+5i & 4+61i & 24+14i & 3+21i & 1+i & 2+4i \\ 3+41i & 12+3i & 5+24i & 10+2i & 10+8i & 2+41i & 5+6i \\ 9+7i & 5+8i & 5+4i & 2+5i & 21+i & 8+9i & 2+3i \\ 41+5i & 21+43i & 2+71i & 51+24i & 34+2i & 5+7i & 6+21i \\ 31+5i & 52+41i & 21+32i & 5+7i & 6+8i & 24+5i & 31+42i \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique a pour termes :

$$\begin{aligned} a_7 &= -0,32604 \cdot 10^{+12} - i 0,15004 \cdot 10^{11} \\ a_6 &= -0,33045 \cdot 10^{11} - i 0,18660 \cdot 10^{11} \\ a_5 &= -0,17851 \cdot 10^9 + i 0,11119 \cdot 10^{10} \\ a_4 &= -0,28027 \cdot 10^8 + i 0,94450 \cdot 10^7 \\ a_3 &= -0,51929 \cdot 10^5 - i 0,88599 \cdot 10^6 \\ a_2 &= 0,70170 \cdot 10^4 - i 0,37950 \cdot 10^4 \\ a_1 &= 0,12100 \cdot 10^3 + i 0,18900 \cdot 10^3 \\ a_0 &= -0,10000 \cdot 10^1 - i 0,22352 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont :

- 48,6317 - i	26,1069
- 44,3458 + i	5,3242
49,6717 + i	14,5141
18,4435 + i	31,8871
26,9196 + i	1,8045
12,4685 + i	6,1593
106,4740 + i	151,4177

et sont exactes, trouvées en 18 s.

Le temps de calcul est comparable à celui d'autres méthodes
sur le même exemple (Méthode de Grenstadt 17 s, Algorithme QR : 144 sec)

B I B L I O G R A P H I E - Chapitre III

- (1) E. Pillet. : Contribution à l'étude des machines tournantes
: à courant alternatif - Thèse
- (2) M. Poloujadoff. : Régimes transitoires dans les machines.
: Cours professé à l'E.N.S.E.G.
- (3) N. Gastinel. : Analyse numérique linéaire
: Cours de l'université de Grenoble.

CHAPITRE IV

CONTRIBUTION A L'ETABLISSEMENT DU MODELE MATHEMATIQUE
D'UNE LIGNE LONGUE A CONSTANTES REPARTIES, REPRESENTABLE
PAR UN ENSEMBLE DISCRET D'ELEMENTS.

SOMMAIRE :

Les points principaux de cette étude sont les suivants :

- Ecriture des équations du réseau d'"octopoles" représentant la ligne, par la méthode des mailles qui nous permet d'obtenir un ensemble d'équations différentielles dont les inconnues sont les courants et les tensions.

- Mise sous forme matricielle du système obtenu et réduction du nombre d'inconnues aux tensions seulement par l'intermédiaire de la transformation de Laplace.

- "Diagonalisation par "blocs" de la matrice obtenue, par application des composantes symétriques.

- Résolution des trois systèmes indépendants ainsi obtenus. Application de la transformation de Heaveside et obtention des tensions recherchées sous forme de somme de fonctions sinusoidales amorties.

- Présentation du programme de résolution et comparaison des résultats obtenus par cette méthode avec ceux obtenus par l'analyseur transitoire de l'E.D.F. sur une ligne donnée.

I - Equations du réseau.

Le réseau que nous nous proposons d'étudier en régime transitoire comporte n cellules représentant chacune $1/n$ kilomètres de ligne. A ces n cellules il faut ajouter la cellule de tête qui représente la source.

Chaque cellule comporte (voir schéma) 10 branches (4 branches série, 6 branches dérivation) 4 noeuds (3 phases, 1 neutre).

La source comporte 9 branches et 4 noeuds, le réseau comprendra donc :

$$\begin{array}{r} 10 \quad n + 9 \text{ branches} \\ 4 \quad n + 4 \text{ noeuds} \end{array}$$

ce qui donnera

$$M = b - n + 1 = 10n + 10 - 4n + 4 = 6(n+1) \text{ mailles}$$

Nous aurons donc : $6(n+1)$ soit si $n = 16$

$6 \times 17 = 102$ équations différentielles du premier ordre à coefficients constants à résoudre.

Ces équations seront disposées comme suit :

- Equations des courants de série sur les trois phases : soient $3(n+1)$ équations.
- Equations des courants de dérivation entre phase et neutre : soient $3(n+1)$ équations.

A ces équations et dans un but de simplification ultérieure, nous joindrons un troisième groupe de $3(n+1)$ équations dépendantes des deux premiers groupes : ce seront les

- Equations de courants de dérivation entre phases.

Nous allons pour la représentation récurrente des équations, adopter les notations ci-après décrites :

Notations :

1) Soient R_0, L_0, C_0 respectivement les résistance, inductance et capacité de la source

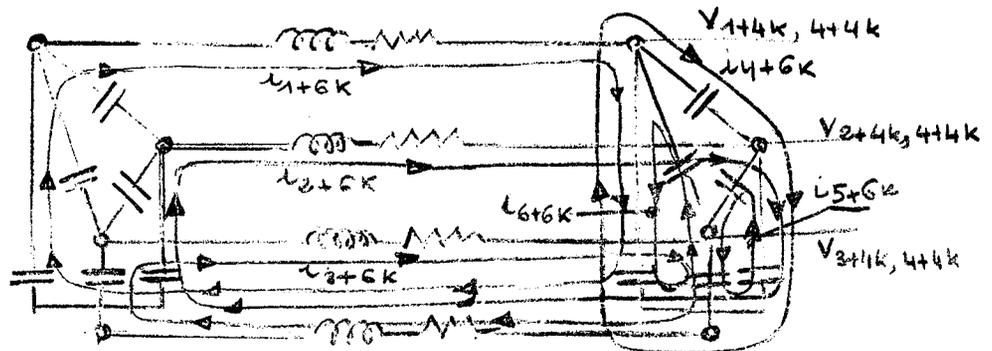
$R, L, C,$ les résistance, inductance et capacité par phase ou entre phases

R_1, L_1, C_1 les résistance, inductance du neutre et capacité entre phase et neutre. Les constantes capacitives de la première et dernière cellule sont une valeur moitié des autres car elles ne représentent que la capacité d'une longueur moitié de celle représentée par les autres cellules.

2) Soient $-i_1, i_2, i_3$ les courants de phases source

$-i_{1+6k}, i_{2+6k}, i_{3+6k}$, les courants de phases dans la cellule k

$-i_{4+6k}, i_{5+6k}, i_{6+6k}$, les courants en dérivation où l'extrémité de la $k^{\text{ième}}$ cellule.



3) Soient : $V_{1,4}, V_{2,4}, V_{3,4}$ les tensions au début de la première cellule.

$V_{5,8}, V_{6,8}, V_{7,8}$ à l'extrémité de la 1ère cellule

donc :

$$V_{1+4k, 4+4k}, V_{2+4k, 4+4k}, V_{3+4k, 4+4k}$$

les tensions à l'extrémité de la $k^{\text{ième}}$ cellule.

Avec ces notations les équations s'écrivent :

a) Equations de courants de série :

$$E_1 - R_0 i_1 - L_0 \frac{di_1}{dt} = V_{1,4}$$

$$E_2 - R_0 i_2 - L_0 \frac{di_2}{dt} = V_{2,4}$$

$$E_3 - R_0 i_3 - L_0 \frac{di_3}{dt} = V_{3,4}$$

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

$$V_{1+4(k-1)} - R_1 i_{1+6k} - L_1 \frac{d}{dt} i_{1+6k} = V_{1+4k,4+4k} + \\ R_1 (i_{1+6k} + i_{2+6k} + i_{3+6k}) + L_1 \frac{d}{dt} (i_{1+6k} + i_{2+6k} + i_{3+6k})$$

$$V_{2+4(k-1)} - R_1 i_{2+6k} - L_1 \frac{d}{dt} i_{2+6k} = V_{2+4k,4+4k} + \\ R_1 (i_{1+6k} + i_{2+6k} + i_{3+6k}) + L_1 \frac{d}{dt} (i_{1+6k} + i_{2+6k} + i_{3+6k})$$

$$V_{3+4(k-1)} - R_1 i_{3+6k} - L_1 \frac{d}{dt} i_{3+6k} = V_{3+4k,4+4k} + \\ R_1 (i_{1+6k} + i_{2+6k} + i_{3+6k}) + L_1 \frac{d}{dt} (i_{1+6k} + i_{2+6k} + i_{3+6k})$$

⋮
⋮
⋮

b) Equations de dérivation entre phase et neutre :

$$i_1 + i_3 - i_4 - i_7 = (C_0 + C_{1/2}) \frac{dV}{dt} \quad 1,4$$

$$i_2 + i_4 - i_5 - i_8 = (C_0 + C_{1/2}) \frac{dV}{dt} \quad 2,4$$

$$i_3 + i_5 - i_6 - i_9 = (C_0 + C_{1/2}) \frac{dV}{dt} \quad 3,4$$

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

$$i_{1+6k} + i_{6+6k} - i_{4+6k} - i_{1+6k}(k+1) = C_1 \frac{dV}{dt} 1 + 4k, 4 (k+1)$$

$$i_{2+6k} + i_{4+6k} - i_{5+6k} - i_{2+6k}(k+1) = C_1 \frac{dV}{dt} 2 + 4k, 4 (k+1)$$

$$i_{3+6k} + i_{5+6k} - i_{6+6k} - i_{3+6k}(k+1) = C_1 \frac{dV}{dt} 3 + 4k, 4 (k+1)$$

c) Equations de dérivation entre phases :

$$- \frac{C}{2} \frac{dV}{dt} 1, 4 + i_4 + \frac{C}{2} \frac{dV}{dt} 2, 4 = 0$$

$$- \frac{C}{2} \frac{dV}{dt} 2, 4 + i_5 + \frac{C}{2} \frac{dV}{dt} 3, 4 = 0$$

$$- \frac{C}{2} \frac{dV}{dt} 3, 4 + i_6 + \frac{C}{2} \frac{dV}{dt} 1, 4 = 0$$

⋮
⋮
⋮

$$- C \frac{d}{dt} V_{1+4, 4+4k} + i_{4+6k} + C \frac{d}{dt} V_{2+4k, 4+4k} = 0$$

$$- C \frac{d}{dt} V_{2+4, 4+4k} + i_{5+6k} + C \frac{d}{dt} V_{3+4k, 4+4k} = 0$$

$$- C \frac{d}{dt} V_{3+4, 4+4k} + i_{6+6k} + C \frac{d}{dt} V_{1+4k, 4+4k} = 0$$

Ecrivons ce système matriciellement en posant :

$$E = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} \quad V_r = \begin{vmatrix} V_{1+4k, 4+4k} \\ V_{2+4k, 4+4k} \\ V_{3+4k, 4+4k} \end{vmatrix} \quad I_k = \begin{vmatrix} I_{1+6k} \\ I_{2+6k} \\ I_{3+6k} \end{vmatrix} \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad U U^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et } A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il vient :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} E - R_0 I_0 - L_0 \frac{d}{dt} I_0 = V_0 \\ V_0 - (RI + R_1 UU^T) I_1 - (LI + L_1 UU^T) \frac{dI_1}{dt} = V_1 \\ V_{k-1} - (RI + R_1 UU^T) I_k - (LI + L_1 UU^T) \frac{dI_k}{dt} = V_k \\ V_{n-1} - (RI + R_1 UU^T) I_n - (LI + L_1 UU^T) \frac{dI_n}{dt} = V_n \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} I_0 - I_1 - (I - A) I_{0d} = (C_0 + C_1/2) \frac{dV_0}{dt} \\ I_1 - I_2 - (I - A) I_{1d} = C_1 \frac{dV_1}{dt} \\ I_k - I_{k+1} - (I - A) I_{kd} = C_1 \frac{dV_k}{dt} \\ I_n - (I - A) I_{nd} = C_1/2 \frac{dV_n}{dt} \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} I_{0d} = \frac{C}{2} (I - A^T) \frac{dV_0}{dt} \\ I_{1d} = C (I - A^T) \frac{dV_1}{dt} \\ I_{kd} = C (I - A^T) \frac{dV_k}{dt} \\ I_{nd} = \frac{C}{2} (I - A^T) \frac{dV_n}{dt} \end{array} \right.$$

Nous éliminons dans ces équations le système (c) en portant les valeurs de I_{kd} données par (c) dans (b)

$$\begin{aligned} I_0 - I_1 &= ((I-A) (I-A^T) C/2 + (C_0 + C_1/2) I) \frac{dV_0}{dt} \\ I_1 - I_2 &= ((I-A) (I-A^T) C - C_1 I) \frac{dV_1}{dt} \\ I_k - I_{k+1} &= ((I-A) (I-A^T) C - C_1 I) \frac{dV_k}{dt} \\ I_n &= \left(\frac{3C + C_1}{2} I - \frac{C}{2} UU^T \right) \frac{dV_n}{dt} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors un système différentiel dont les inconnues sont les fonctions.

$I_0, I_1 \dots \dots \dots I_n$ d'une part et

$V_0, V_1 \dots \dots \dots V_n$ d'autre part et le second membre la tension applique E sous la forme d'une colonne

$$\begin{matrix} E_0 \cos \omega t \\ E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ E_0 \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{matrix}$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{matrix} I_0(0), I_1(0) = \dots \dots \dots I_n(0) = 0 \\ V_0(0), V_1(0) \dots \dots \dots V_n(0) \end{matrix}$$

Nous allons aborder la résolution de ce système différentiel par l'utilisation de la transformation de Laplace. Dans ce but nous posons :

$$J_k = \mathcal{L}[I_k] = \begin{vmatrix} \int_0^{\infty} e^{-pt} i_1 + 6_k dt \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} i_2 + 6_k dt \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} i_3 + 6_k dt \end{vmatrix}$$

$$U_k = \mathcal{L}[V_k] = \begin{vmatrix} \int_0^{\infty} e^{-pt} v_1 + 4k, 4 + 4k dt \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} v_2 + 4k, 4 + 4k dt \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} v_3 + 4k, 4 + 4k dt \end{vmatrix}$$

$$F = \mathcal{L}\{E\} = \begin{vmatrix} \int_0^{\infty} e^{-pt} E_1 dt \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} E_2 dt \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} E_3 dt \end{vmatrix}$$

Cela nous donne :

$$\begin{aligned}
 & F - (R_0 + pL_0) J_0 + L_0 I_0 \quad () & = U_0 \\
 & U_0 - (RI / R_1 UU^T) + p (LI + L_1 UU^T) J_1 & = U_1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & U_{k-1} - (RI + R_1 UU^T) + p (LI + L_1 UU^T) J_k & = U_k \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & U_{n-1} - (RI + R_1 UU^T) + p (LI + L_1 UU^T) J_n & = U_n
 \end{aligned}$$

(a₁)

$$\begin{aligned}
 J_0 - J_1 &= \left[\left(\frac{3C+C_1}{2} + C_0 \right) I - C/2 UU^T \right] (p U_0 - V_0 (0)) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 J_k - J_{k+1} &= \left[(3C+C_1) I - C/2 UU^T \right] (p U_k - V_k (0)) \\
 &\vdots \\
 J_n &= \left[\left(\frac{3C+C_1}{2} \right) I - C/2 UU^T \right] (p U_n - V_n (0))
 \end{aligned}$$

(b₁)

Considérons le système a₁ et soustrayons membre à membre chacune des équations 2 à n à la suivante

Première équation à gauche par $RI + R_1 UU^T + p (LI + L_1 UU^T)$ et nous la soustrayons à la seconde multipliée

à gauche par $(R_0 + p L_0) I$; nous obtenons alors une suite de $n+1$ équations en fonction des colonnes $U_0 \dots U_k \dots U_n$ d'une part et $(J_0 - J_1) \dots J_r - J_{k+1} \dots J_n$ d'autre part. Nous remplaçons ces dernières quantités par leur expression en fonction respectivement de $U_0 \dots U_k \dots U_n$ pour obtenir un système avec comme variable uniquement les colonnes de tensions $U_0 \dots U_k \dots U_n$.

Posons pour plus de clarté :

$$Z = (R+pL) I + (R_1 + pL_1) UU^T$$

$$\Gamma = (3C + C1) I - C UU^T$$

$$Z_0 = (R_0 + p L_0) I$$

matrices (β, γ) , fonctions de p .

Nous effectuons alors les opérations que nous venons d'écrire et qui nous donnent :

$$\begin{aligned} & \left(Z_0 + Z + ZZ_0 \left(\frac{\Gamma}{2} + C_0 I \right) p \right) U_0 - Z_0 U_1 = \\ & \quad Z (R+L_0 I (0) + Z_0 (\Gamma/2 + C_0 I) V_0 (0)) \\ & -U_0 + (2I + Z\Gamma p) U_1 - U_2 = Z \Gamma V_1 (0) \\ & \quad \vdots \\ & - U_{k-1} + (2I + Z\Gamma p) U_k - U_{k+1} = Z \Gamma V_k (0) \\ & \quad \vdots \\ & - U_{n-1} + \left(I + \frac{Z\Gamma p}{2} \right) U_n = Z \Gamma/2 V_n (0) \end{aligned}$$

le système devient :

$$\begin{pmatrix}
 S \Psi S^{-1} - S_0 Z_0 & 0 & 0 \\
 -I & SXS^{-1} - I & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & -I \frac{SXS^{-1}}{2}
 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} SF_0 \\ \vdots \\ SF_k \\ \vdots \\ SF_n \end{pmatrix}$$

Si la matrice S peut être trouvée telle que les matrices $S \Psi S^{-1}$ et SXS^{-1} soient diagonales alors le problème se simplifie car le système devient "tridiagonal par blocs". Mais trouver S telle que SXS^{-1} soit diagonale revient à trouver les valeurs propres de X et les vecteurs propres correspondants.

Soit $X = 2Z \quad p = 2 + (R+pL) I + (R_1+pL_1)UU^T \quad (3C+C_1)I - CUU^T$

$$X = 2/(3C+C_1)I + (R_1+pL_1)(3C+C_1) - C(R+pL) \quad UU^T$$

car $U (U^T U) U^T = 3 UU^T$ puisque $U^T U = 3$

donc X étant de la forme $X = \alpha I + \beta UU^T$ sera une matrice à polynôme minimal du second degré. En effet :

$$\begin{aligned}
 X^2 &= \alpha^2 I + (2\alpha\beta + 3\beta^2) UU^T \\
 &= \alpha^2 I + \beta UU^T (\alpha + 3\beta) \\
 &= \alpha^2 I + (X - \alpha I)(2\alpha + 3\beta) \\
 &= (2\alpha + 3\beta)X - \alpha(\alpha + 3\beta)I = 0
 \end{aligned}$$

d'où $X^2 - (2\alpha + 3\beta) X + \alpha(\alpha + 3\beta)I = 0$

et le polynôme minimal est

$$\lambda^2 - (2\alpha + 3\beta)\lambda + \alpha(\alpha + 3\beta) = 0$$

$$F = \frac{Eop}{p^2 + \omega^2} \begin{vmatrix} 1 \\ e^{-j \frac{2\pi}{3}} \\ e^{-j \frac{4\pi}{3}} \end{vmatrix} \quad \text{soit telle}$$

$$\text{que SF} = \frac{Eop}{p^2 + \omega^2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{il suffit de choisir } b_1 = \sqrt[3]{3/2}$$

et le nombre $-\frac{1}{2} + j b_1 = e^{j \frac{2\pi}{3}}$ donc à sa deuxième racine cubique de l'unité et son conjugué est a^2 . S devient alors :

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \times \frac{1}{3} \quad \text{et}$$

l'on retrouve exactement la théorie des composantes symétriques.

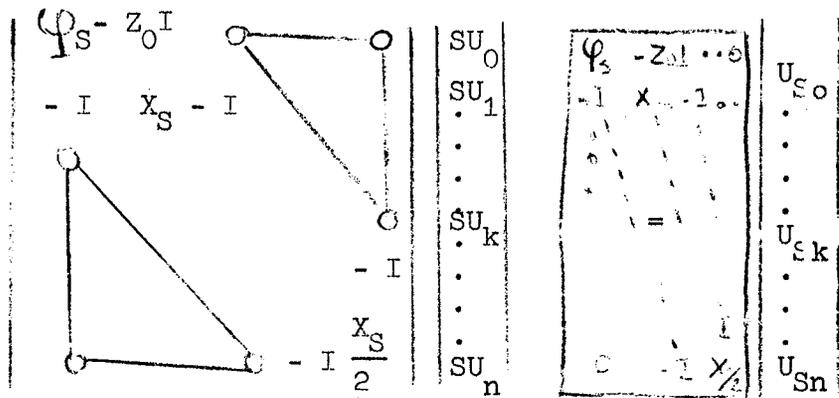
Il vient donc :

$$SX \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 + (R+3R_1)C + (L+3L_1)Cp^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+R(3C+C_1)p+(3C+C_1)p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+5(3C+C_1)p+L(3C+C_1)p^2 \end{vmatrix}$$

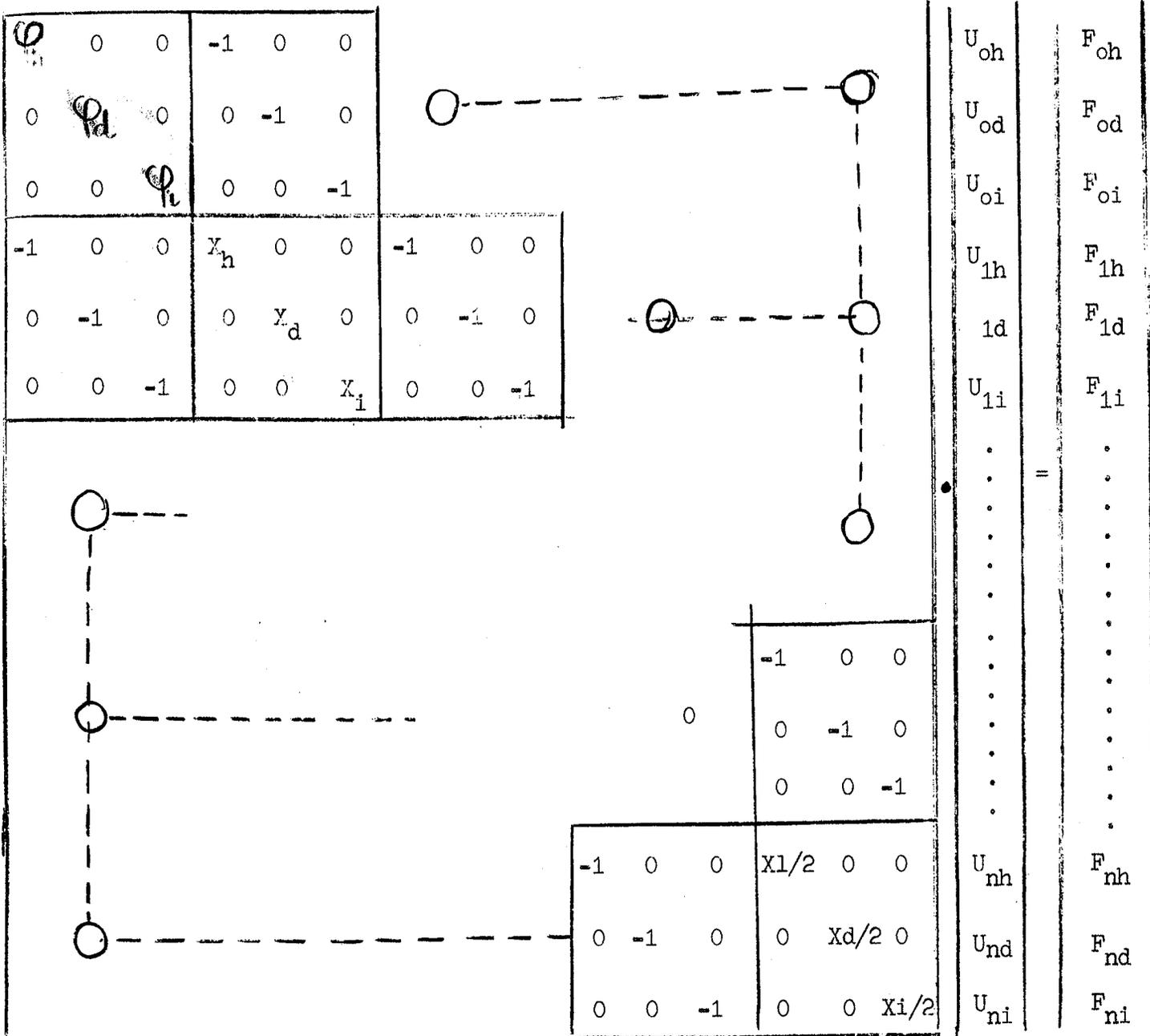
$SX = X_S \quad \times \quad S$

Il en est de même pour $\Psi(p)$ et $SU_k(p) = U_{\xi k}$

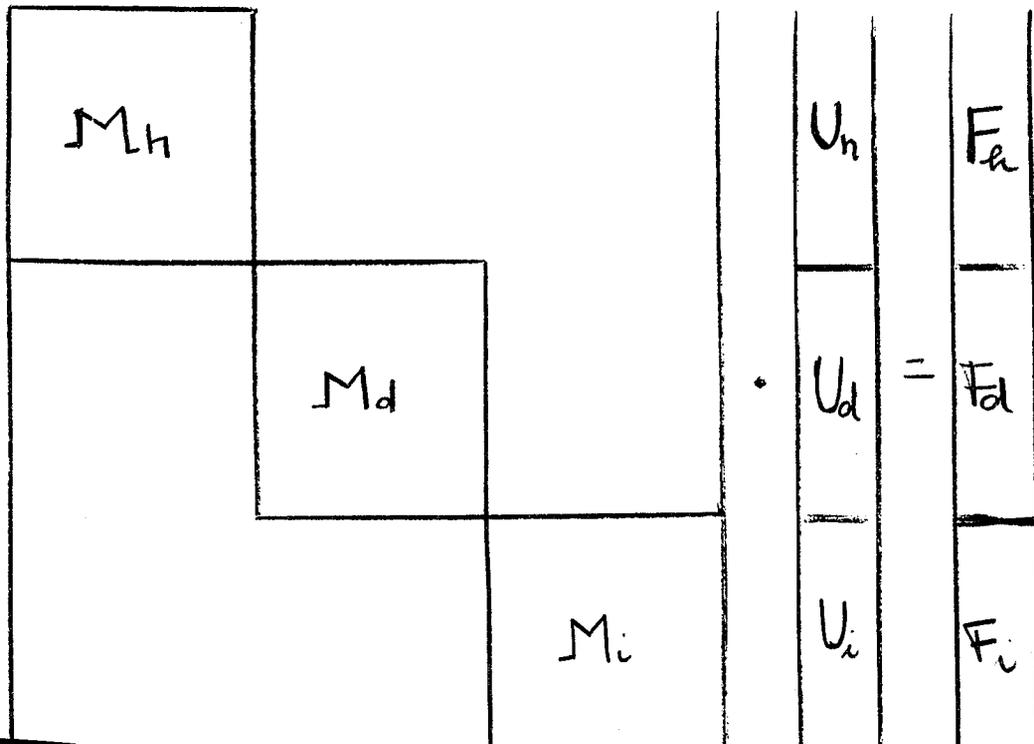
donc le système s'écrit :



Notre système se réduit alors à un système de la forme : $ZU = F$
où la matrice Z à la forme suivante :



Ce système peut donc se scinder de la manière suivante :



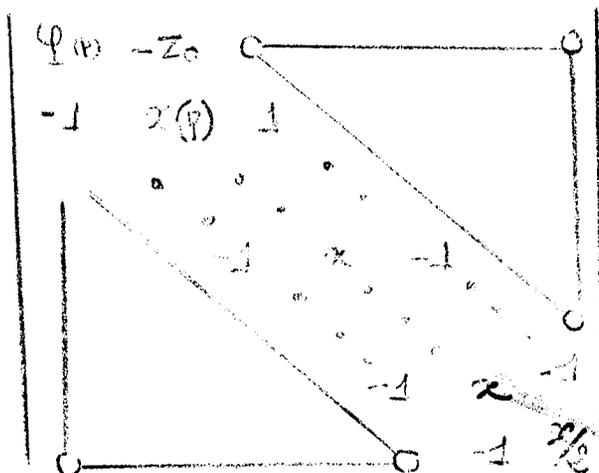
Pour cela il suffit d'effectuer un réarrangement des équations
comme suit :

l'équation n° $3k + 1$ vient en position K
 $k = 0 \dots n-1$

l'équation N° $3k + 2$ vient en position $n - 1 + k$

l'équation N° $3k + 3$ vient en position $2n + 2 + k$

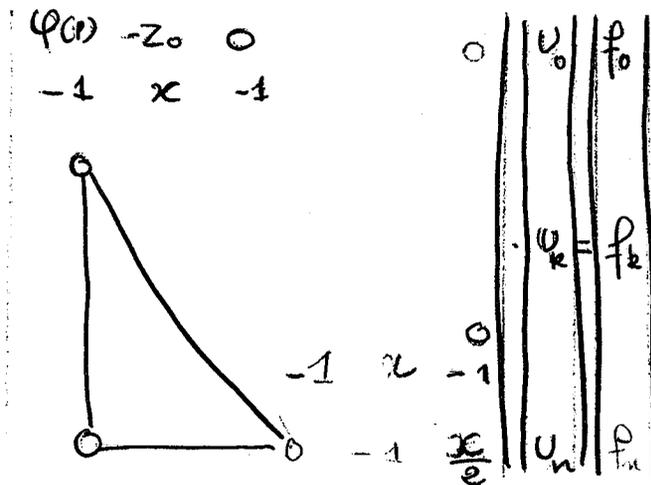
les matrices M_h, M_d, M_i sont alors de la forme



II - Résolution de ce système

A - Calcul formel. Chacun des trois systèmes indépendants que nous venons de voir peut s'exprimer avec γ, p, λ , ayant suivant le cas la valeur respectivement de C_1 ou $3C + C_1$, R ou $R + 3R_1$,

$L + 3L_1$ ou L avec $\varphi(P) = P + R_0 + P(\lambda + L_0) + (R_0 + pL_0)(P + p\lambda)(\frac{\gamma}{2} + C_0)$ et $\chi(P) = 2 + p\gamma P + \gamma\lambda P^2$



nous allons effectuer la résolution de ce système linéaire par rapport à $U_0 \dots \dots U_k \dots \dots U_n$ par la méthode de Cramer en écrivant que

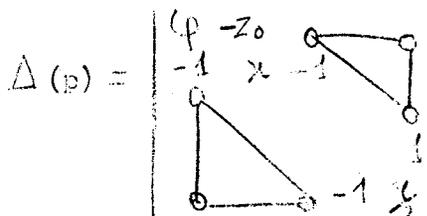
$$U_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

où Δ est le déterminant de la matrice et Δ_k ce même déterminant où la $k^{\text{ième}}$ colonne est remplacée par le vecteur colonne du second membre (si le déterminant n'est pas identiquement nul)

Il nous faut donc maintenant calcul les déterminants

Δ_k et Δ

a) calcul de



d'ordre (n+1)

développons Δ par rapport à la première colonne il vient

$$\Delta = \varphi(P) \Delta_n - (R_0 + pL_0) \Delta_{n-1}$$

en appelant Δ_J le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & -1 & & & 0 \\ -1 & x & -1 & & \\ & & -1 & x & -1 \\ & & & & -1 & x/2 \end{vmatrix}$$

d'ordre J

Calculons Δ_J

$$\Delta_J = x \Delta_{J-1} - \Delta_{J-2}$$

avec $\Delta_1 = x/2$ et nous poserons $\Delta_0 = 1$

Nous pouvons alors calculer les Δ_J par récurrence et même en donner une forme explicite en posant $x = 2\cos \xi$ avec $\lambda \gamma p^2 +$

$\gamma p + 2 > 2$ soit $0 < \xi < \pi/\lambda$ ce qui sera vérifié.

Cela donne

$$\Delta_1 = \frac{x}{2} = \cos \xi = \cos \xi$$

$$\Delta_2 = x(x/2) - 1 = 2\cos^2 \xi - 1 = \cos 2\xi$$

$$\Delta_3 = x \cos 2\xi - \cos \xi = 4\cos^3 \xi - 3\cos \xi = \cos 3\xi$$

⋮
⋮
⋮

Posons $\Delta_{J-2} = \cos (J-2)\xi$

$\Delta_{J-1} = \cos (J-1)\xi$

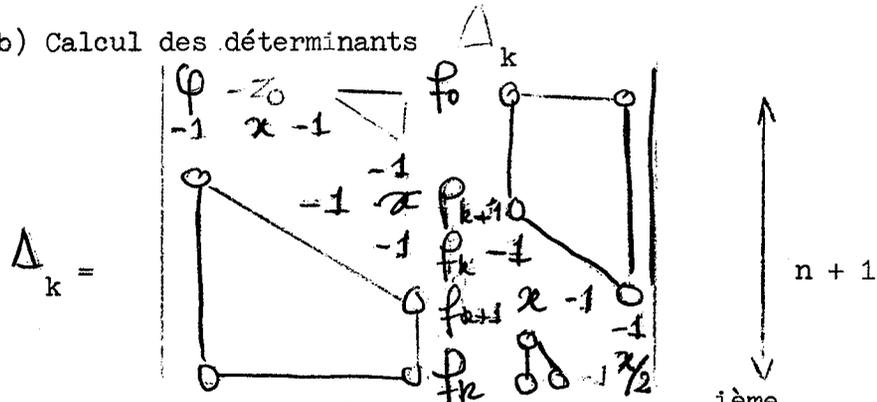
on a

$$\begin{aligned} \Delta_J &= x \cos (J-1)\xi - \cos (J-2)\xi = 2\cos \xi \cos (J-1)\xi - \cos (J-2)\xi \\ &= \cos J\xi + \cos (J-2)\xi - \cos (J-2)\xi \\ &= \cos J\xi \end{aligned}$$

d'où
$$= \Psi(P) \cos n \frac{\pi}{2} - (R_0 + pL_0) \cos(n-1) \frac{\pi}{2}$$

avec $\Psi(P)$ polynome du 3^{ième} degré et
 $\cos(n \text{ Arcos } (\sqrt{p^2 + p^2 + 2})/2) = \text{polynome de degré } 2n$
 donc $\Delta(P)$ sera un polynome de degré $2n+3$

b) Calcul des déterminants



Nous développons ce déterminant suivant la k^{ième} colonne. Pour cela nous supprimons cette k^{ième} colonne et nous obtenons en supprimant à la j^{ième} ligne le facteur de $(-1)^{k+j} f_j$ qui sera un déterminant (n, n)

Ce déterminant sera différent suivant que $J \leq k$ ou $J > k$ et nous obtiendrons le tableau suivant.

pour la même raison que précédemment δ_j , cette fois déterminant de matrice triangulaire inférieur par blocs, sera égal à

$$\delta_j = D_{k-1} (-1)^{k-j} \Delta_{n+1-j}$$

d'où

$$\Delta_k = (-1)^{k-1} \left((-1)^{J-1} \left(\sum_{j=1}^k D_{j-1} (-1)^{k-j} \right) \times \right. \\ \left. \Delta_{n+1-k} \times f(j) + (-1)^{J-1} \sum_{j=k+1}^{n+1} D_{k-1} (-1)^{J-K} \Delta_{n+1-j} \times f(0) \right)$$

soit en effectuant

$$U_k = \Delta_{n+1-k} \sum_{j=1}^k D_{j-1} f_j(0) + D_{k-1} \sum_{j=k+1}^{n+1} \Delta_{n+1-j} f_j(0)$$

Ceci en posant $D_j = \begin{vmatrix} \varphi - z_0 & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

soit le même déterminant que Δ mais qui diffère de celui-ci par le dernier terme.

$$D_j = (P) D_{j-1} - z_0 D_{j-2}$$

⋮

$$D_k = x D_{k-1} - D_{k-2}$$

$$D_1 = x$$

$$D_0 = 1$$

posons $x = 2 \cos(\varphi)$

$$D_1 = 2 \cos \varphi = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}$$

$$D_2 = 4 \cos^2 \varphi - 1 = 4(1 - \sin^2 \varphi) - 1$$

$$= \frac{2 \sin^4 \varphi - 4 \sin^3 \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}$$

·
·
·
·

posons

$$D_{k-2} = \frac{\sin (k-1)\varphi}{\sin \varphi}$$

$$D_{k-1} = \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi}$$

$$D_k = \frac{2 \cos \varphi \sin k\varphi - \sin(k-1)\varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin \varphi}$$

B - Recherche des racines de l'équation $\Delta(P) = 0$

Il nous faut maintenant résoudre l'équation $\Delta(P) = 0$ avec Δ : polynome de degré $2n + 3$

a) Calcul de $\Delta(P)$ - Pour la résolution de cette équation il nous faut d'abord envisager le calcul avec une précision suffisante de $\Delta(P)$; le calcul de ce polynome, dont les coefficients ne peuvent être utilisés à cause de leur taille (le terme de degré $2n+3$ est de l'ordre de $10^{-7} \times (2n+3)$ et le terme constant est égal à l'unité) pourra être effectué pour des valeurs complexes de la variable de deux manières différentes.

- 1°) Par la formule analytique établie plus haut :

$$\Delta(P) = \varphi(P) \cos(n \operatorname{Arcos}(x/2)) - (R_0 + pL_0) \cos((n-1) \operatorname{Arcos}(x/2))$$

$$(x = \lambda \gamma p^2 + \gamma p + 2)$$

pour cela nous devons trouver l'arc cosinus d'un nombre complexe :

$$x_1 + jx_2, \text{ tel que } (x_1 + jx_2) = a + jb = \rho e^{j\varphi} \quad (1)$$

$$\text{posons } e^{j(x_1 + jx_2)} = T$$

$$(1) \Leftrightarrow T^2 - 2\rho e^{j\varphi} T + 1 = 0$$

$$T = \rho e^{j\varphi} \pm \sqrt{\rho^2 e^{2j\varphi} - 1}$$

Posons $\pi = \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\varphi + 1}$

$$\theta = \text{Arctg} \left(\frac{\rho^2 \sin 2\varphi}{\rho^2 \cos 2\varphi - 1} \right)$$

$$T = \sqrt{\rho^2 + \pi} \pm 2\rho \sqrt{\pi} (\varphi - \theta/2) \times e^{j \text{Arctg} \frac{\rho \sin \varphi + \sqrt{\pi} \sin \theta/2}{\rho \cos \varphi + \sqrt{\pi} \cos \theta/2}}$$

$$x_1 = \text{Arctg} \frac{\rho \sin \varphi + \sqrt{\pi} \sin \theta/2}{\rho \cos \varphi + \sqrt{\pi} \cos \theta/2}$$

$$x_2 = - \text{Log} \sqrt{\rho^2 + \pi} \pm 2(\sqrt{\pi} \cos(\varphi - \theta/2))$$

d'où

et à ce moment :

$$\cos n(x_1 + jx_2) = \cos(nx_1) \text{ch}(nx_2) - j \sin(nx_1) \text{sh}(nx_2)$$

d'où ... (P)

- 2°) Le calcul peut être fait par récurrence.

A partir de Δ_0 et Δ_1 . On calcule :

Δ_n et Δ_{n-1} et par là $\Delta(P)$ par la formule

$$\Delta(P) = \varphi(P) \Delta_{n-1} - (R_0 + pL_0) \Delta_{n-1}$$

L'emploi de l'une ou l'autre de ces deux méthodes est conditionné par la valeur de n ; pour n = 16 les deux méthodes sont équivalentes. Pour la précision et le temps de calcul, pour n < 16, nous préférons le calcul par récurrence, et pour n > 16 la méthode analytique. Nous avons malgré tout effectué tous les calculs de

$\Delta(P)$ en double précision.

b) Recherche des racines de $\Delta(p)$

Cette partie constitue la difficulté la plus grande dans la résolution pratique du problème pour deux raisons :

- Le degré élevé du polynôme ($2n + 3$ donc si $n = 16$ de degré est égal à 35) et la nature (car $\text{se}x(p) = 4,72 \cdot 10^{-9} p^2 + 1,06 \cdot 10^{-7} p + 2$ et $\Delta(p)$ est de l'ordre de $x(p)^{16}$).

- Nous n'avons pas d'indications sur la position de ces racines.

Nous avons pu nous affranchir de ces deux difficultés résolu de la manière suivante :

En effectuant les calculs en double précision nous avons éliminé la première difficulté.

Nous avons ensuite effectué une première localisation des racines d'une part, en faisant appel à la théorie de propagation des ondes qui nous dit que les fréquences des harmoniques (donc les modules des parties imaginaires des racines de $\Delta(p)$) sont inférieures à $2/\sqrt{\lambda\gamma}$, d'autre part en remarquant qu'en faisant abstraction de la source les constantes de temps (donc les parties réelles des racines) sont $-\rho/2\lambda$ et la constante de temps de la source étant en général plus faible. Les racines sont donc localisées dans le rectangle $[0, -\rho/\lambda] \times [-2/\sqrt{\lambda\gamma}, +2/\sqrt{\lambda\gamma}]$.

De plus nous avons constaté que si nous décomposons

$\Delta(p)$ et p en parties réelles et imaginaires soit :

$$\Delta = P + jQ \quad p = p_r + j p_i$$

il advient que : $\frac{\partial Q}{\partial p_i} \neq 0$ soit les variations de Q sont très faibles quand p_r parcourt l'intervalle $[0, -\rho/\lambda]$.

De ce fait nous avons élaboré la méthode suivante :

Nous fixons p_r à la valeur $p_{r0} = -\rho/2\lambda$ et nous recherchons les racines de la fonction $Q(p_{r0} + j p_i)$ en divisant

d'abord l'intervalle $[0, 2/\sqrt{\lambda}]$, en parties suffisamment fines pour contenir au plus une racine et dans chacun des intervalles obtenus nous effectuons une dichotomie, s'il s'y trouve une racine nous la gardons en mémoire sinon nous passons à l'intervalle suivant, en nous arrêtant lorsque nous avons le nombre de racines cherchées. A ce moment et pour chaque racine k nous cherchons par dichotomie sur $[0 - p/\lambda]$ la racine de $P(p_r + j P_{ik})$, φ restant voisin de zéro. Nous avons donc ce travail terminé les racines de (p) à une précision . Nous reprenons ces racines et nous les calculons par la méthode de Newton, plan complexé avec la précision désirée.

Nous avons donc maintenant les tensions U_{kh}, U_{kd}, U_{ki} sous la forme $U = \frac{G(p)}{F(p)}$ avec $F(p) = (p^2 + \omega^2)$

$A = \begin{cases} \Delta h, \\ \Delta d \text{ ou} \\ \Delta i \end{cases}$. Nous allons décomposer $U(p)$ en éléments simples

$$U = \sum_{K=1}^{2n+5} \frac{G(p_k)}{p_k F'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}$$

mais $G(p)$ et $F'(p)$ sont des polynômes en P à coefficients réels

$$\text{donc } \begin{cases} G(\bar{p}) = \overline{G(p)} \\ F'(\bar{p}) = \overline{F'(p)} \end{cases}$$

$$\text{d'où } U = \frac{G(p_1)}{p_1 F'(p_1)} \times \frac{1}{p - p_1} + \sum_{k=1}^{2n+2}$$

$$\left(\frac{G(p_k)}{p_k F'(p_k)} \times \frac{1}{p - p_k} + \frac{\overline{G(p_k)}}{\overline{p_k F'(p_k)}} \times \frac{1}{p - \bar{p}_k} \right)$$

$$U = \frac{G(p_1)}{p_1 F'(p_1)} \frac{1}{p - p_1} + \sum_{k=1}^{n+2} \left(A_k \frac{1}{p - p_k} + \bar{A}_k \frac{1}{p - \bar{p}_k} \right)$$

en posant $A_k = \frac{G(p_k)}{p_k F'(p_k)}$, $p_1 =$ racine réelle unique d'où

en effectuant la transformation inverse :

$$V(t) = A_0 e^{p_1 t} + \sum_{k=1}^{n+2} (A_k e^{p_k t} + \bar{A}_k e^{\bar{p}_k t})$$

posons $A_k = Z_k + i W_k$ $p_k = x_k + jy$

$$\begin{aligned} V(t) &= A_0 e^{p_1 t} + \sum_{k=1}^{n+2} \left(Z_k (e^{p_k t} + e^{\bar{p}_k t}) + i W_k (e^{p_k t} - e^{\bar{p}_k t}) \right) \\ &= A_0 e^{p_1 t} + 2 \sum_{k=1}^{n+2} \left(Z_k e^{x_k t} \cos y_k t - W_k e^{x_k t} \sin y_k t \right) \end{aligned}$$

d'où

$$V_{ih}(t) = A_{oih} e^{p_{1h} t} + \sum_{k=1}^{n+2} e^{x_{kh} t} (Z_{ikh} \cos y_{kh} t - W_{ikh} \sin y_{kh} t)$$

$$V_{ih}(t) = A_{oid} e^{p_{1d} t} + \sum_{k=1}^{n+2} e^{x_{kd} t} (Z_{ikd} \cos y_{kd} t - W_{ikd} \sin y_{kd} t)$$

$$V_{ii}(t) = A_{oii} e^{p_{1i} t} + \sum_{k=1}^{n+2} e^{x_{ki} t} (Z_{iki} \cos y_{ki} t - W_{iki} \sin y_{ki} t)$$

$$\text{d'où } V_{1+4i,4+4i} = V_{ih}(t) + V_{id}(t) + V_{ii}(t)$$

$$V_{2+4i,8+4i} = V_{ih}(t) + a^2 V_{id}(t) + a V_{ii}(t)$$

$$V_{3+4i,12+4i} = V_{ih}(t) + a V_{id}(t) + a^2 V_{ii}(t)$$

$$\text{car } V_k = S^{-1} V_{Sk}(t) = S^{-1} \begin{vmatrix} V_{kh} \\ V_{kd} \\ V_{ki} \end{vmatrix}$$

III - Programme et résultats.

Nous avons écrit un programme comme aboutissement de cette méthode de calcul. Ce programme est écrit sous forme de procédure ALGOL mais doit être utilisé avec précaution.

En effet tous les calculs de polynômes étant effectués en double précision, et ce mode de calcul étant très lourd et surtout très long en ALGOL, le programme de calcul du polynôme a été écrit en FORTRAN, sous la forme d'un sous-programme. Ce sous-programme une fois assemblé a été perforé en cartes binaires et est appelé dans la procédure ALGOL par l'intermédiaire d'une procédure en code donc écrite en MAP. Ces deux programmes sont donc solidaires de la procédure ALGOL dont nous donnons l'entête.

Procédure CALCUL DE LIGNE (RO, LO, CO, R, L, C, R1, L1, C1, LONGUEUR,
NOMBRE DE CELLULES , V1, V2, V3, F1, F2, F3, TEMPS MAX) ;
Valeur RO, LO, CO, R, L, C, R1, L1, C1, LONGUEUR, NOMBRE DE
CELLULES, TEMPS MAX;

Réel tableau V1, V2, V3, F1, F2, F3;

réel RO, LO, CO, R1, L1, C1, R, L, C, LONGUEUR;

Entier NOMBRE DE CELLULES , TEMPS MAX;

Commentaire : cette procédure calcule dans les tableaux V1, V2, V3 [0 : N, 0 : TEMPS MAX] les tensions $V_{1k}(t)$, $V_{2k}(t)$, $V_{3k}(t)$ pour t variant de 0 à TEMPS MAX par intervalles de 1 milliseconde. RO, LO, CO sont les constantes de la source R, L, C, R1, L1, C1 celles de la ligne de longueur LONGUEUR discrétisée par NOMBRE DE CELLULES cellules, les conditions initiales de tensions sont stockées dans les tableaux F1, F2, F3, $I_0(0)$ étant calculé par la procédure ;

Cette procédure calcule pour $n = 16$ les 35 racines de (p) en double précision en 42 secondes et effectue les calculs des tensions jusqu'à 100 millisecondes en 2 minutes 14 secondes.

Nous avons fait divers essais pour la tension de sortie. Nous donnons dans un cas les résultats du calcul des racines, et les courbes représentant $V_n(t)$ avec dans les cas où cela a été possible les comparaisons avec les essais effectués au centre d'études de l'E.D.F. à Fontenay aux roses.

Exemple de résolution de $\Delta(p) = 0$ dans le cas où $L_0 = L = 20\text{mH}$

racines		polynôme	
prk	+ j P_{ik}	P	+ j Q
- 22, 5000	0	- $7,5 \times 10^{-10}$	$\pm j$ 0
- 11, 2500	+ j 1272,9	$9,9 \times 10^{-10}$	$\pm j$ $1,8 \times 10^{-7}$
- 11, 2500	+ j 3793,7	$9,8 \times 10^{-10}$	$\pm j$ $8,9 \times 10^{-7}$
- 11, 2500	+ j 6236,4	$7,3 \times 10^{-9}$	$\pm j$ $5,5 \times 10^{-6}$
- 11, 2500	+ j 8549,0	$2,4 \times 10^{-8}$	$\pm j$ $2,1 \times 10^{-5}$
- 11, 2500	+ j 10717,2	$2,2 \times 10^{-9}$	$\pm j$ $6,3 \times 10^{-6}$
- 11, 2500	+ j 12806,0	$1,1 \times 10^{-9}$	$\pm j$ $8,2 \times 10^{-6}$
- 11, 2500	+ j 14879,0	$3,8 \times 10^{-9}$	$\pm j$ $1,7 \times 10^{-5}$
- 11, 2500	+ j 16917,4	- $9,3 \times 10^{-9}$	$\pm j$ $3,6 \times 10^{-5}$
- 11, 2500	+ j 18866,5	$1,5 \times 10^{-7}$	$\pm j$ $2,9 \times 10^{-4}$
- 11, 2500	+ j 20679,6	$3,8 \times 10^{-8}$	$\pm j$ $1,3 \times 10^{-4}$
- 11, 2500	+ j 22322,8	$2,3 \times 10^{-7}$	$\pm j$ $5,6 \times 10^{-4}$
- 11, 2500	+ j 23770,9	- $8,3 \times 10^{-8}$	$\pm j$ $3,2 \times 10^{-4}$
- 11, 2500	+ j 25004,8	- $2,4 \times 10^{-8}$	$\pm j$ $1,6 \times 10^{-4}$
- 11, 2500	+ j 26009,1	- $5,1 \times 10^{-7}$	$\pm j$ $1,5 \times 10^{-3}$
- 11, 2500	+ j 26772,3	$3,1 \times 10^{-8}$	$\pm j$ $5,8 \times 10^{-4}$
- 11, 2500	+ j 27285,8	$3,6 \times 10^{-7}$	$\pm j$ $2,5 \times 10^{-5}$
- 11, 2500	+ j 27544,0	$1,4 \times 10^{-7}$	$\pm j$ $3,2 \times 10^{-3}$

Nous donnons ces résultats car nous connaissons dans ce cas la racine réelle de $\Delta(p) = 0$ $p_1 = -22,5$, la partie réelle des racines qui est $\text{Prk} = -11,25$

La courbe n° 1 représente un essai de calcul de la tension $V_{3n}(t)$ dans le cas où $n = 16$. La courbe en trait plein représente les valeurs de la fonction trouvées par le calcul et la courbe en trait mixte est le relevé d'un cliché effectué à l'oscilloscope.

Les courbes n° 2 sont les résultats du calcul des 3 tensions en bout de ligne avec, à échelle réelle, les clichés correspondants.

Courbe n° 3 -

Relevé de $V_n(t)$ $0 < t < 50$ ms pour des valeurs diverses de l'impédance de source L_0 prenant les valeurs 20, 70, 120, 170 mH pour les courbes respectives a, b, c, d, la courbe en trait mixte représentant $V_n(t)$ pour $300 < t < 350$ ms

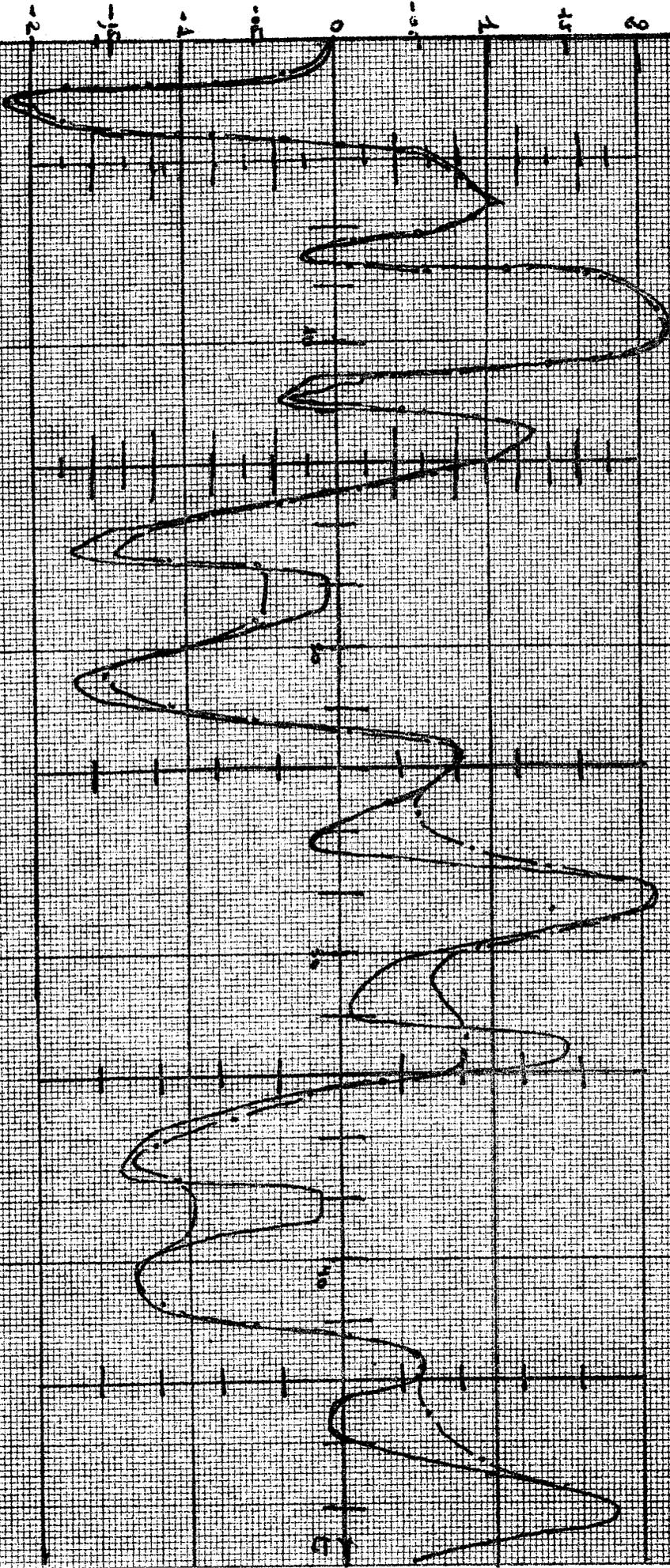
Ces trois courbes sont tracées pour $f = 50$ Hz.

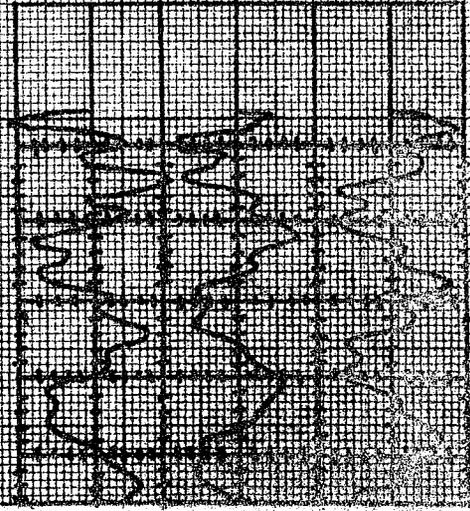
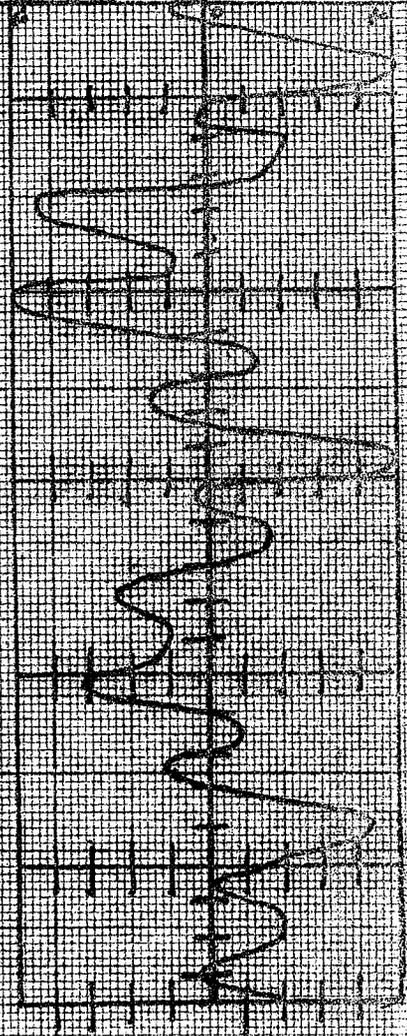
Courbe n° 4 - Représentation de $V_n(t)$ pour $f = 100$ Hz, d'où influence de la déformation avec la fréquence (harmonique 2 au lieu de 4)

COURSES 1

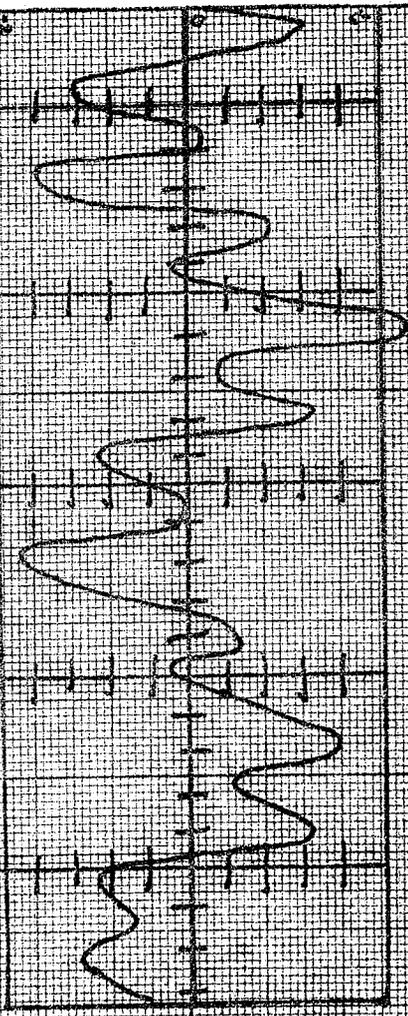
200 1 0.2

Course about 100 to 200
Course about 100 to 200

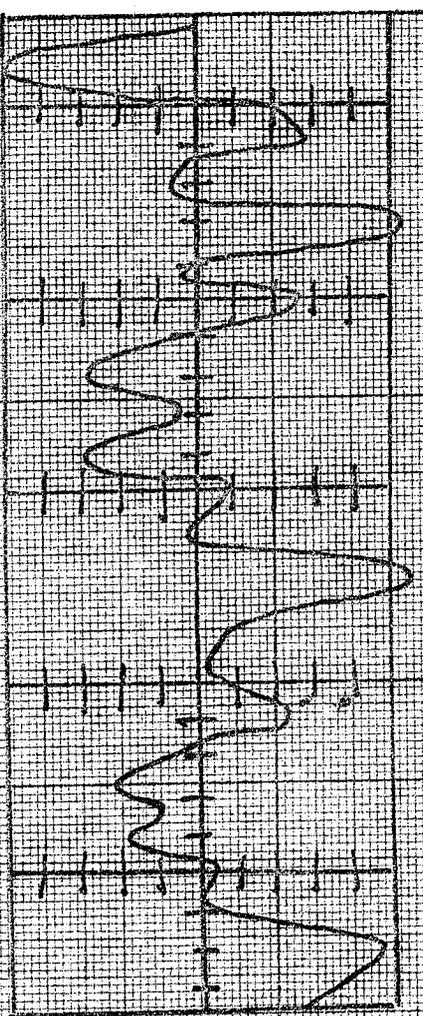




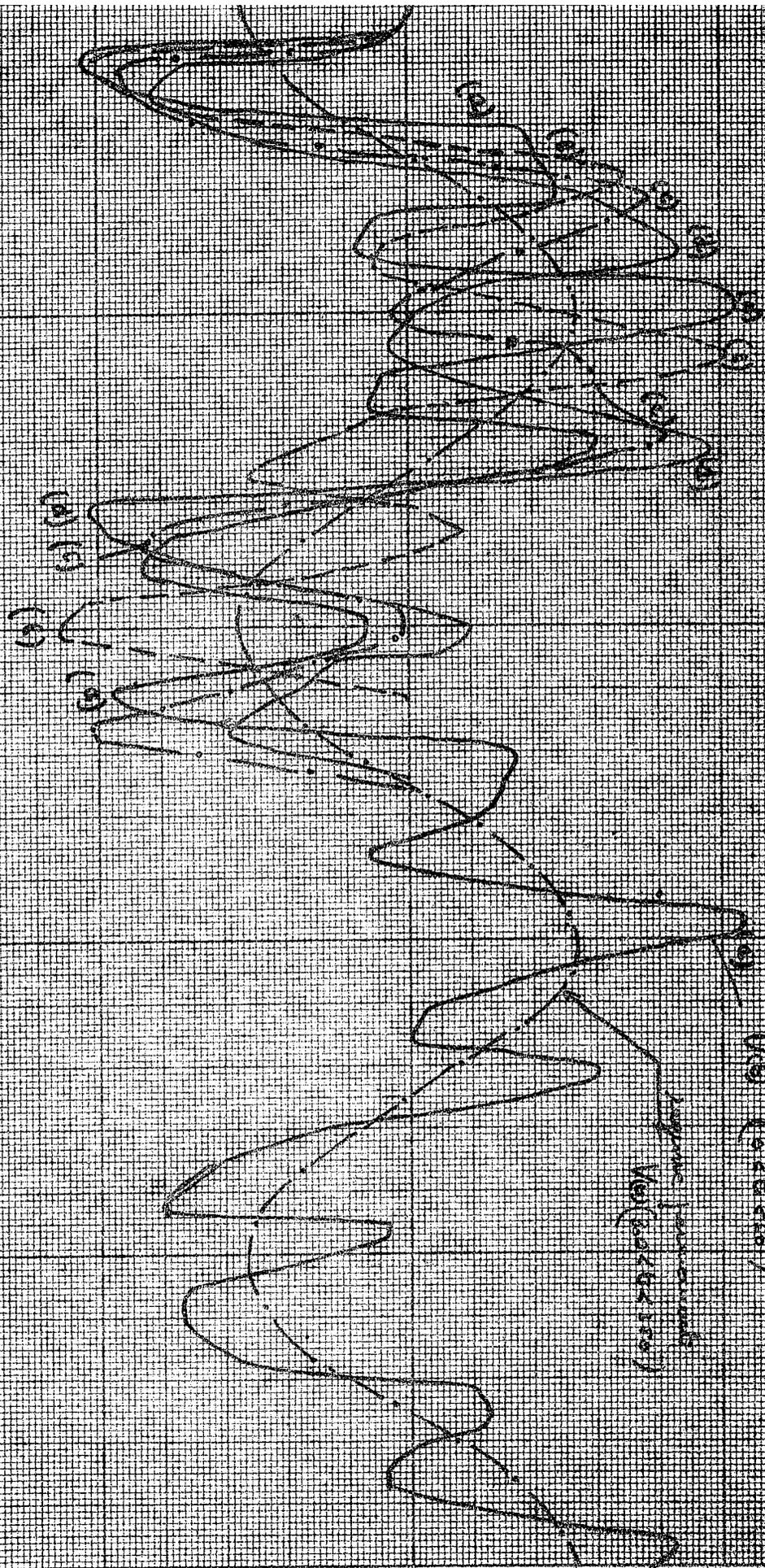
Cholelithiasis
 Pancreatic carcinoma



COURBES 9-2-2



COURBES données par le
 Coblenz



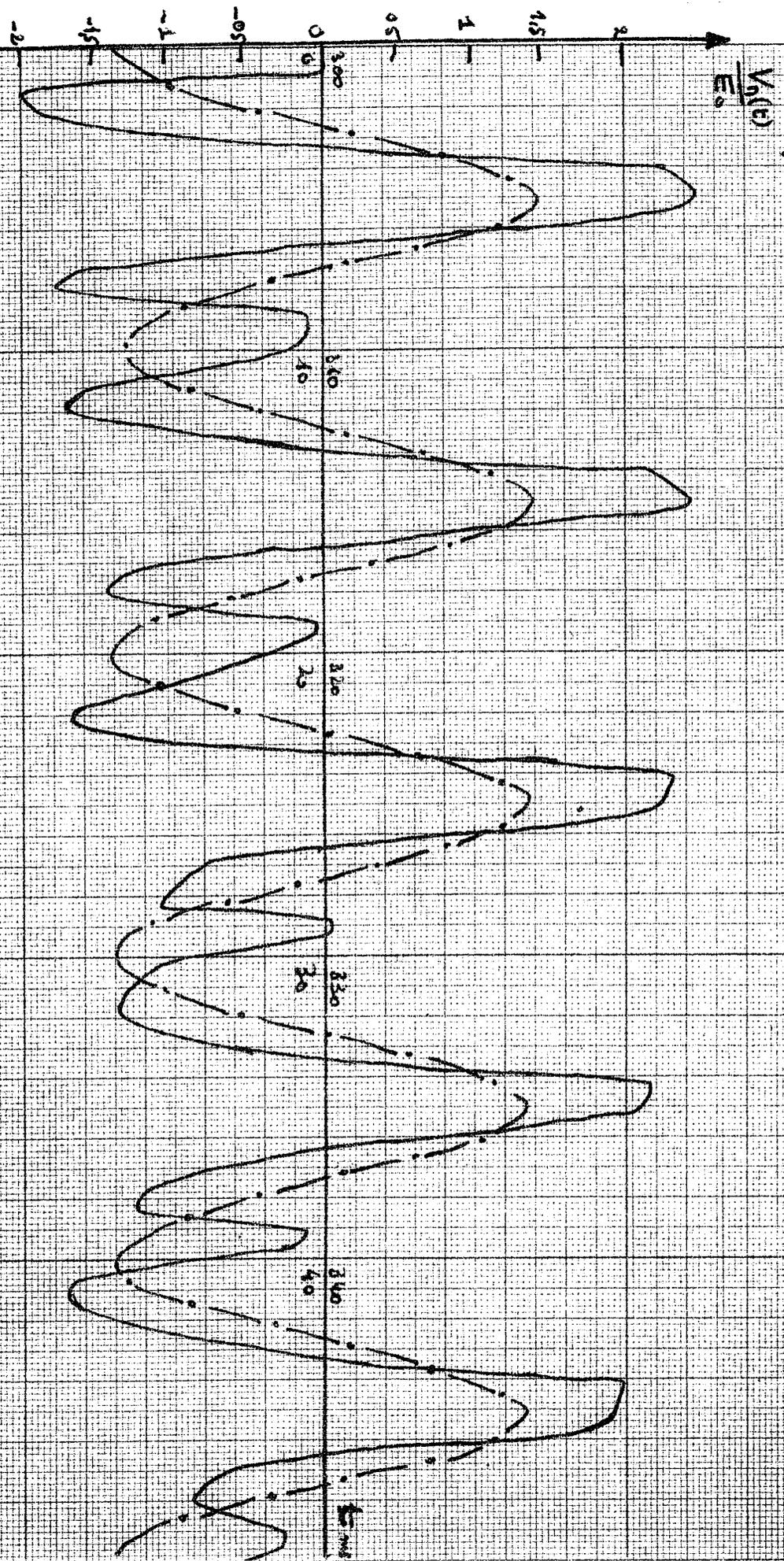
(1) M. - M. - M.
 (2) G. - G. - G.
 (3) M. (G. - G.)
 (4) M. (G. - G.)

Compass 21.5

M. (G. - G.)
 M. (G. - G.)

Courbes n° 4 $f = 100 \text{ Hz}$

$V_A(t)$ $0 < t < 40 \text{ ms}$
 $V_B(t)$ $300 < t < 340 \text{ ms}$



C O N C L U S I O N

Nous pouvons remarquer au vu des comparaisons avec les résultats donnés par l'analyseur transitoire que les courbes données par le calcul coïncident très bien pour de faibles valeurs de t , la coïncidence diminuant par la suite. On peut essayer de donner les raisons de ce phénomène :

- les Ingénieurs de l'E.D.F. ayant remarqué que les oscillations de la première cellule provoquaient un phénomène parasite, ont modifié cette première cellule pour éliminer ce phénomène, ce que nous n'avons pas fait.
- d'autre part, nous considérons une ligne théorique où les valeurs des résistance et inductance sont constantes. Ceci est une approximation car l'on ne tient pas compte de l'"Effet de Peau" qui fait prendre à R et L des valeurs différentes suivant la fréquence, donc des valeurs différentes aux constantes de temps, ces différences pouvant être assez grandes (de 10 ms à 50 Hz à 6 ms à 10kHz).

C'est à notre avis ce phénomène qui provoque la différence à partir d'un certain temps entre les courbes données par le calcul et les courbes réelles.

Nous pensons d'ailleurs que dans beaucoup de calculs de lignes où l'on considère l'équation des télégraphistes, c'est l'abstraction de ce phénomène qui amène au bout d'un certain temps une certaine discordance entre les calculs et les essais.

Nous considérons malgré tout que les résultats sont satisfaisants et que la facilité d'exploitation de ce type de programme en fait un bon moyen d'étude des régimes transitoires.

CONCLUSION

Nous avons essayé dans ce qui précède de montrer que l'application des calculatrices en électrotechnique est de nos jours très avancée. Cette utilisation des calculatrices permet la résolution rapide de problèmes fastidieux, voire impossibles; elle ouvre ainsi la porte à de nombreuses applications tant dans l'industrie, que dans la recherche. L'évolution apportée par les calculatrices, ira dans les prochaines années en s'accélégrant, et les Ingénieurs électriciens devront être adaptés aux méthodes nouvelles qu'elle génère.

Il serait donc souhaitable à notre avis que l'Université, et en particulier les Ecoles d'Ingénieurs, commencent à modifier leur programmes dans ce sens, par l'enseignement de méthodes susceptibles d'être utilisées sur machine. Cela permettrait la formation d'Ingénieurs et de Chercheurs, qui familiarisés avec l'utilisation des calculatrices en feraient une utilisation rationnelle.

L'utilisation optimale des machines permettraient alors de grands progrès dans l'avancement des recherches en Electrotechnique, ce qui est fondamental.

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble

E R R A T A

Chapitre II

p. 31	ligne 2	+ 9250 $\frac{2}{P}$
p. 32	ligne 18	$N\sigma$ et δ
	ligne 19	volume de Cuivre
p. 33	ligne 4	prises
	ligne 5	prise moyenne
	ligne 6	$W_{cu} = \frac{9008}{\psi_1 \alpha_1 \beta_1}$
p. 35	ligne 13	$\varphi(B, \delta) = W p_e$
	ligne 14	$\psi(B, \delta)$
	ligne 19	$\varphi(B, \delta)$
	ligne 20	$\psi(B, \delta)$
	ligne 22	$A \left \begin{matrix} B_i \\ \delta_i \end{matrix} \right.$
p. 36	ligne 3	B_i, δ_i
p. 41	ligne 14	A) Organisation
p. 50	ligne 3	$S = (9 + e \frac{100}{P}) \sqrt{P}$
p. 52	ligne 14	$\left \frac{BN_1 - BN}{BN_1} \right < \epsilon ?$
	ligne 15	$BN < 17 \text{ Kg} ?$
p. 62	ligne 6	$\frac{\pi}{1,02 \times 4}$

Chapitre III

p. 92-1	4e ligne avant la fin	: Si $R > 400$ alors <u>allera</u> DOV FF
p. 92-2	ligne 15	DOVF
	ligne 19	INSCF <u>allera</u> DIVFF
p. 110		$\lambda_1 = \alpha + 3\beta = 2 + (R + 3 R_1 + P(L + 3L_1)) C_P$